

Math. P. 174 9

Gianattasio

ELEMENTI .

D E L L A

GEOMETRIA SUBLIME

P A R T E P R I M A

LE ISTITUZIONI

S U I C O N I C I

ILLUSTRATE DAL REV. SACERDOTE

D. FELICE GIANNATTASIO.

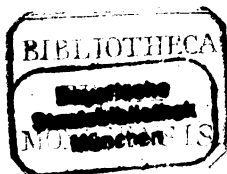


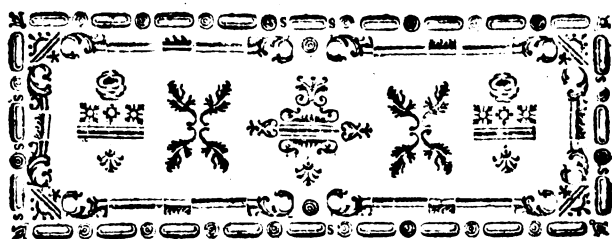
N A P O L I

M D C C X C I .

Presso Filippo Raimondi.

Con licenza de' Superiori





PRELEZIONI

SULLE CURVE CONICHE.

Defin. I. **S**E la retta MA , che non giace Fig. 1.
sul piano del circolo CBA , con
perfetta rivoluzione si aggiri in-
torno ad un suo punto N , sem-
pre rasente la circonferenza di
esso circolo; verrà con tal moto a generare
una superficie curva, che *superficie conica* si ad-
dimanda. Il solido rinchiuso in questa superfi-
cie e 'l sottoposto circolo dicesi *Cono*. Il cir-
colo CBA n'è la sua *base*, il punto N il
vertice, e la retta MA suol dirsi *linea gene-
ratrice*, e talora *retta rotante*.

Cor. La parte NM della retta rotante,
ch'è al di là del punto N , vien ancor essa a
generare l'altra superficie conica MNR ver-
tically opposta alla primiera CNA .

A

Defin.

Defin. II. L' *Asse* del Cono CNA è la retta ND condotta dal vertice di esso al centro della base,

Defin. III. Ed un Cono si dirà *Retto*, o *Scaleno*, secondochè il suo asse regga perpendicolarmente su della base, o pur vi s' inclini.

P R O P. I. T E O R.

Fig. 2. Se dal vertice del Cono CNA ad un qualunque punto F della superficie conica conducasi la retta NF; questa dovrà giacere sulla medesima superficie.

Dim. La retta rotante in passando per gl' infiniti punti della superficie conica dee necessariamente passare per lo punto F. Ella dunque dovrà in tal sito trovarsi adattata sulla congiungente NF. Ma la retta rotante sempre ne giace sulla superficie conica: dunque quivi resterà ancora la retta NF.C.B.D.

Cor. La congiungente NF, se protragga giù del vertice del cono, dovrà senza meno incontrare la periferia della di lui base in un punto E.

P R O P. II. T E O R.

Se i due punti F, e G della superficie conica CNA, (che però non giacciono a diritto col

3

vertice del cono), si uniscano per mezzo della retta FG ; questa dovrà immergersi entro del cono.

Dim. Si uniscano le rette NF , NG , e si protragga in giù, in fin che incontrino la periferia della base ne' punti E , ed A : e si congiunga la retta EA .

La retta EA , che unisce i due punti E , ed A della periferia della base, cade dentro il circolo CEA (1); dunque il triangolo ENA , che poggia sulla medesima EA , dovrà immergersi entro del cono $CNAE$. Ma la congiungente FG giace nel piano di esso triangolo: dunque ne resterà ancor essa entro del cono CNA . $C.B.D$,

Scal.

La genesi delle curve coniche, che si vuol premettere allo sviluppo delle loro affezioni, può concepirsi in più maniere. Un piano, che seghi un cono, vi forma entro di tal solido una di queste curve; ed ei vi può eziandio generare un circolo, ed un triangolo rettilineo, come vedrassi ne' seguenti teoremi. Con moti organici, con evoluzioni, e con proiezioni convenevolmente praticate si possono su di un piano segnare i loro perimetri: ed in fin colla riga, e col compasso arriviamo ad investigar

A 2 de'

(1) Prop. 2. El. III.

de' punti, po' quali passerebbero coteste curve. Ma poichè il primo modo di generarle è il più semplice insieme, e'l più geometrico; mi è paruto ragionevole quì trascegliarlo per la difamina delle loro proprietà, contentandomi d'indicar gli altri modi, quando il chiederà l'ordine di queste istituzioni.

P R O P. III. T E O R.

Se il cono CNAE sia segato col piano CPQA, che passi pel suo vertice; la sezione sarà un triangola rettilineo.

Dim. Il proposto piano incontri la circonferenza della base ne' punti A, e C: egli è chiaro che la retta rotante nel generar la superficie conica debba passare per lo punto A, ch'è in essa: onde dovrà in tal sito restar distesa su del piano CPQA. Ma ella è benanche nella superficie conica. Sarà dunque una linea retta la comune sezione del piano segante, e di quella parte della superficie conica, ch'è verso A.

Con un simile ragionamento proverassi, che sia una linea retta la comune sezione del piano segante, e dell'altra parte della superficie conica, ch'è verso C. Onde essendo altresì una retta l'intersezione del piano CPQA, e della base del cono, cioè la linea CA; sarà terminata dalle tre rette NA, NC, CA, la parte del piano rinchiusa nel cono, e quindi sarà un triangolo rettilineo tal sezione. C. B. D.

Def.

Defin. IV. Se il piano segante passi non meno per lo vertice del cono, che pel di lui asse, la sezione si dirà *triangolo per l'asse*.

PROP. IV. TEOR.

Se il cono CNAE si seghi col piano LGR parallelo alla sua base; la sezione sarà un circolo. Fig. 2.

Dim. Si prendano due punti G, ed R nel perimetro di sì fatta sezione, e si uniscano col vertice N per mezzo delle rette NG, ed NR, che protratte in giù incontreranno la periferia della base ne' punti E, ed A. Di poi congiunto l'asse ND si tirino dal punto F, ov'ei ne incontra il piano segante, ai punti R, e G, le rette FR, ed FG: e dall'altro punto D ai punti A, ed E, le rette DA, e DE.

Il triangolo DNA sega i piani paralleli CEA, LGR: farà dunque tra se parallele le comuni sezioni DA, ed FR (1). E quindi il triangolo DNA, perchè equiangolo all'altro FNR gli sarà simile. Per la medesima ragione farà il triangolo DNE simile all'altro FNG. Laonde essendo per la similitudine dei primi triangoli $DN:NF::DA:FR$, e per quella degli altri due $DN:NF::DE:FG$; farà $DA:FR::DE:FG$ (2). Ma la retta DA è uguale

A 2 a DE

(1) Prop. 16. El. XI.

(2) Prop. 11. Elem. V.

6

a DE, essendo esse raggi della base: dunque l'è benanche FR uguale ad FG. E dimostrandosi collo stesso ragionamento, che sia uguale ad FR ogni retta, che dal punto F va fino al perimetro LGR, la sezione LGRF sarà un cerchio, di cui F è il centro. C.B.D.

Cor. I. Tutte le sezioni parallele alla base di un qualunque cono sono altrettanti cerchi, i cui centri trovansi allogati nell'asse del medesimo cono.

Cor. II. Di più ogni retta, che in una di coteste sezioni si conduce parallela ad un diametro della base del cono, è ancor essa un diametro di tal sezione, o una corda.

Fig. 1. *Cor. III.* Che se un piano parallelo alla base del cono CNA non incontri la di lui superficie, ma bensì l'altra MNR, che l'è opposta verticalmente, con un simile raziocinio si proverebbe essere un circolo cotesta sezione, e quindi un cono (1) il solido MNRd.

Defin. V. I due coni CNA, MNR diconsi coni opposti.

P R O P. V. T E O R.

Fig. 4. Se per l'asse, e per l'altezza del cono scaleno CNAM conduca il triangolo CNA, e su di questa cada perpendicolarmente l'altro piano FER,

(1) Def. I. Prel.

incontrandolo nella retta FR, che formi il triangolo FNR simile al primiero CNA, ma succorariamente posto, (cioè che sieno gli angoli NFR, ed NRF uguali ad NAC, ed NCA); anche la sezione FER sarà un cerchio.

Dim. Si prendano nel perimetro di questa sezione, e nella periferia della base del cono i punti E, ed M, e da essi si calino EI, MD perpendicolari sul piano CNA, che saranno parallele fra loro (1), e caderanno (2) sulle FR e CA. Indi condotta per I la retta GIB parallela a CA base del triangolo per l'asse, si distenda per le due rette EI, e GIB il piano GEB, che sarà parallelo al piano CMA (3), e quindi un cerchio la sezione GEB (4), di cui GB n'è un diametro.

Ciò posto l'angolo esterno FGI delle parallele GI, e CD è uguale all'interno GCA, e ad esso opposto. Ma l'angolo GCA è per ipotesi uguale a BRI. E' dunque FGI uguale a BRI. Con che i due triangoli FGI, ed IBR, avendo ancor uguali gli angoli GIF, BIR opposti al vertice, saranno tra se simili, e sarà $GI : IF :: IR : IB$. Onde il rettangolo di GI in IB sarà uguale a quello di IF in IR. Ma il rettangolo di GI in IB pareggia il

A 4. qua-

(1) Prop. 6. El. XI.

(2) Prop. 38. El. XI.

(3) Prop. 5. El. XI.

(4) Prop. prec.

quadrato della retta EI calata nel femicerchio perpendicolare al suo diametro GB (1). L'è dunque ancora l'altro rettangolo di FI in IR uguale al medesimo quadrato di EI. Si bisechi FR in O, si unifca OE, ed OI^2 si aggiunga tanto ad FIR, che ad EI^2 , n'emergerà (2) RO^2 uguale ad OE^2 (3); e quindi RO uguale ad OE. Lo che sempre dimostrandosi, la sezione FER al par della precedente sarà un circolo. C.B.D.

Cor. Dalle cose quì dimostrate rilevasi, che nel cono scaleno vi sian due assi: uno che passa per lo centro della base, e per lo vertice, l'altro che attraversa i centri dei cerchi succorarij.

P R O P. VI. T E O R.

Se nella base CA del triangolo per l'asse CNA si prenda un punto P, e da esso conducafi la retta PQ, che incontri un lato di esso triangolo giù del vertice del cono, e l'altra PT, ch'essendo perpendicolare a CA ne giaccia sulla base del medesimo cono; il piano condotto per queste rette PQ, e PT formerà una sezione curvilinea. Ed ogni corda ES, che in essa conducefi parallela a PT, resterà bisecata da QP.

Dim.

(1) Prop. 35. El. III.

(2) Prop. 5. El. II.

(3) Prop. 47. El. I.

Dim. La I. parte di questo Teor. è chiara dalla Prop. 2.

Part. II. Per lo punto R, ove la retta SE incontra il piano CNA, si tiri GRB parallela a CA, e si distenda per SE, e GB il piano GEBS, che farà parallelo alla base del cono, e quindi un cerchio la sezione GEB (1), di cui n'è GB un suo diametro, e la sua circonferenza, come l'è di per se chiaro, passerà pe' punti S, ed E.

Ciò posto le due rette TP, e PA sono rispettivamente parallele ad RE, ed RB. Dunque l'angolo TPA sarà uguale ad ERB (2). E quindi essendo il primo per supposizione retto, il sarà eziandio l'altro ERB. Dunque il diametro GB tagliando ad angoli retti la corda SE del circolo GEB la dovrà bisecare in R (3): e con ciò resterà la retta SE, che anche è corda della curva DQT, ugualmente divisa nel punto, ove incontra il triangolo per l'asse, o la retta QP, ch'è in esso. C. B. D.

Cor. I. Il quadrato della metà di qualunque corda SR della curva DQT è uguale al rettangolo delle parti GR, RB della retta GB tirata nel cono parallela a CA.

Cor. II. Se l'angolo NQR (quando il
CORO

(1) Prop. IV. Prelez.

(2) Prop. 10. El. XI.

(3) Prop. 3. El. III.

cono sia scaleno) adegui l'altro NCA , la sezione TQD può essere un cerchio, come sopra si è avvisato (1). Ma tranne questo caso la sezione formata dal piano DQT è sempre d'indole diversa dal cerchio, come quaggiù vedrassi.

Defin. VI. La curva DQT suol dirsi *sezione conica*.

Defin. VII. In ogni sezione conica la retta PQ , che per metà divide tutte le corde SE parallele a DT , si appella *diametro di essa*. Ed ella specialmente addimandasi *asse*, se le divida eziandio ad angoli retti.

Cor. Qui si potrebbe astrattamente definire il diametro di una curva conica, essere la comune sezione del di lei piano, e di quello di un triangolo condotto per l'asse nel modo quassù esposto.

Defin. VIII. Ogni corda SE dicasi *ordinata*, e ciascuna sua metà appellasi *semiordinata*.

Defin. IX. Il punto Q , ove il lato NA del triangolo per l'asse tocca la curva TQD , si dice *vertice della sezione*. Qualunque porzione del diametro compresa fra il vertice della sezione, ed un'ordinata, si nomina *ascissa*. E l'ascissa, e la sua semiordinata insieme prese si chiamano *coordinate*. Così le rette QR , Qr si dicono ascisse corrispondenti alle ordinate SE , Se . E QR , ed SR sono coordinate.

Fig. 5.

Defin. X. Se il diametro PQ della sezione

ne

(1) Prop. V. Prelez.

ne sia parallelo al lato opposto CN del triangolo per l'asse CNA , la sezione si dirà *Parabola*.

Defin. XI. Se il diametro della sezione incontri il lato opposto del triangolo per l'asse sotto del vertice del cono, ella si dirà *Ellisse*, come è appunto la sezione $QSLE$. Fig. 6.

Defin. XII. E si dirà *Iperbole* una sezione, Fig. 7. se il suo diametro incontri il lato opposto del triangolo per l'asse in su del vertice del cono. Tal sezione è rappresentata da TQD . E se il piano segante protraggasi in su, sicchè tagli ancora il cono opposto LNF , formerà quivi un'altra sezione che *Iperbole* ancor si addimanda, e le due sezioni TQD , LNF diconsi *Iperboli opposte*.

Cor. Adunque sì nell' *Ellisse*, che nelle *Iperboli* vi sono due vertici, cioè i punti Q , ed L . Questi si riguardano colle loro concavità nell' *Ellisse*, e colle convessità nelle *Iperboli*.

Defin. XIII. La retta QL , che unisce i due vertici delle *Iperboli*, o quei dell' *Ellisse*, si appella *lato trasverso*.

Defin. XIV. Se in una sezione conica prendasi l'ascissa QR uguale a QO , che dal di lei vertice conducefi parallela a CA base del triangolo per l'asse; la retta RB , che dal termine della medesima ascissa si tira parallela alla stessa CA , si dirà *Parametro*, o come diceano gli antichi *Lato Retto* del diametro QP . E se QP sia l'asse della sezione, cotesto lato Retto suol dirsi *Parametro principale*. Fig. 5.

Il

Il parametro suol applicarsi al vertice della sezione perpendicolarmente al di lei diametro: come sarebbe QH.

Cor. I. Ed essendo QO, e QH rispettivamente uguali a QR, ed RB; siccome queste sono proporzionali a QP, e PA; così ancora quelle saranno come le rette QP, e PA.

Cor. II. Che se per un punto B del lato NA distendasi un' altro piano parallelo a DQT, e di questa sezione sia BK il parametro, sarà $BK : BG :: AM : MB$, e $QH : QO :: AP : PQ$. Ma sono tra se uguali le posteriori ragioni di queste due analogie: dunque anche saranno uguali le anteriori, cioè starà $BK : BG :: QH : QO$, e permutando $BK : QH :: BG : QO :: BN : QN$.

Cor. III. Cioè i parametri di due sezioni tra loro parallele sono, come le distanze de' loro vertici dal vertice del cono.

LIB:

L I B. I. Della Parabola.

C A P. I.

De' Diametri della Parabola.

P R O P. I. T E O R.

Nella parabola TQD il quadrato di una qualunque semiordinata RE pareggia il rettangolo del Parametro QH nell'ascissa QR, che le corrisponde. Fig. 3.

Dim. Si meni per lo punto R la retta GB parallela a CA: farà (1) il quadrato di RE uguale al rettangolo GRB. E poichè (2) sta QH a QO, o ad RG, (che l'è uguale per lo parallelogrammo RGOQ), come RB ad RQ; farà pure il rettangolo di RQ in QH uguale allo stesso rettangolo GRB (3). Dunque il quadrato della semiordinata RE dovrà pareggiare il rettangolo del parametro QH nell'ascissa QR, che le corrisponde. C . B . D.

Cor. I. E poichè i quadrati di RE, e di **PT**

(1) Cor. 2. Prop. VI. Prelez.

(2) Def. 14. Prelez.

(3) Prop. 16. El. VI

74

PT sono rispettivamente uguali ai rettangoli di QR in QH, e di QP in QH; siccome questi sono nella ragione delle loro basi QR, e QP (1): così i quadrati delle semiordinate RE, e PT, o delle ordinate intere SE, e DT saran pure come QR, e QP. Cioè nella parabola i quadrati delle ordinate sono fra loro, come le corrispondenti ascisse.

Cor. II. Nella parabola al crescer delle ascisse crescono ancora le corrispondenti ordinate. Dunque questa curva non torna in se stessa, come avverasi delle ovali; ma i di lei rami, intendendosi continuati, dovranno divergere fra loro, e dal diametro, ch'è in mezzo ad essi.

PROP. II. TEQR.

Fig. 8. Se dal vertice C della parabola CTA conduca la retta CM non parallela alle ordinate del diametro CB: ella dovrà in un'altro punto incontrare il perimetro parabolico.

E continuandosi sotto di un tale incontro tanto la retta CA, che il perimetro parabolico, dovranno queste linee divergere fra loro.

Dim. Part. I. Per un punto qualunque L della retta CL tirisi la semiordinata TQ, e dal vertice C le si conduca la parallela CN uguale alla

(1) Prop. I. El. VI.

alla terza proporzionale, dopo LQ, e TQ. Si
 meni NA parallela a CB, che dovrà incon-
 trare il perimetro parabolico in un qualche
 punto A: imperocchè serbando le due rette
 NA, CB la medesima distanza tra loro, e
 discostandosi la curva CA dal suo diametro
 CB, l'è mestiere che la retta NA incontri
 essa curva. Si compia il parallelogrammo NABC,
 ed in fine si unisca la retta AC.

E poichè le tre rette AB, TQ, ed LQ
 sono continuamente proporzionali, sarà (1)
 $AB : LQ :: AB^2 : TQ^2$. Ma sta eziandio $CB :$
 $CQ :: AB^2 : TQ^2$ (2): dunque sarà $AB : LQ ::$
 $CB : CQ$. Con che avendo i due triangoli
 ABC, LQC proporzionali i lati, che stanno
 intorno agli uguali angoli ABC, LQC, do-
 vranno avere anche uguali gli angoli BCA,
 QCL (3). Dunque la retta CA, che unisce i
 punti A, e C, convien che cada sulla propo-
 sta CLM: e quindi sarà chiaro, che CL pro-
 lungata debba incontrare il perimetro parabolico
 in A.

Part. II. FH sta ad AB, come CH a
 CB, o sia per la natura della parabola, come
 il quadrato della semiordinata GH, al quadrato
 dell'altra AB (4). Sono dunque le tre rette FH,
 GH, AB continuamente proporzionali (5).

Fig. 9.

On-

(1) Defin. 10. El. V.

(5) Def. 10. El. V.

(2) Prop. I.

(3) Prop. 6. Elem. VI.

(4) Prop. prec.

Onde sarà dividendo $FG : GH :: GR : AB$ (tirandosi dal punto A la retta AR parallela a BH): e quindi il rettangolo di FG in AB uguale all'altro di GH in GR (1). Ma il rettangolo di GH in GR si fa tanto maggiore, quanto il punto G si discosta dall'altro A: dunque crescerà nella stessa guisa il rettangolo di AB in FG. Ma AB altezza di esso è di una costante magnitudine: dunque dovrà crescere la sua base FG quanto più discostasi il punto G dall'altro A. E perciò la retta AF, e la curva AG divergon sempre fra di loro. C.B.D.

Cor. I. Ogni retta, che fuori la parabola si conduce parallela al di lei diametro, dovrà incontrare la curva, purchè si distenda convenevolmente tanto questa, che quella.

Cor. II. La retta CN, che per lo vertice di questa sezione si tira parallela alle di lei ordinate TQ, AB, non incontrerà la curva, che nel solo punto C, e ne giacerà tutt'al di fuori di essa; dunque sarà tangente della sezione in C.

P R O P. III. T E O R.

Se da un punto B del perimetro parabolica
 Fig. 10. *SQC si tiri entro la parabola la retta BQ, che non sia parallela al di lei diametro CM: tal retta dovrà in un'altro punto incontrare l'istesso perimetro.* *Dim.*

(1) Prop. 16. El. VI.

Dim. Caf. I. Se la retta BQ sia parallela alle ordinate di CM, l'è chiaro, ch'ella debba incontrare il perimetro in un'altro punto.

Caf. II. Che se BQ non sia parallela alle ordinate di CM, si tiri dal vertice della parabola la retta CS parallela a BQ, ed ella cada I. nella stessa parte della parabola, ove n'è alloggiato il punto B. Dovrà la retta CS incontrare il perimetro parabolico in un'altro punto S sotto del vertice (1). Ma la retta BQ, che l'è parallela, sta dentro del segmento parabolico SQC. Dunque anche BQ dovrà incontrare il detto perimetro in un'altro punto. II. Cada la retta CS dall'altra parte CFM della parabola diversa da quella, ove ne sta il punto B. E poi- Fig. 11. chè la distanza tra l'arco SF, e la retta SO può divenir maggiore di qualunque grandezza data (2), ella potrà farsi uguale a BL parallela alle ordinate del diametro CM. Sia dunque Q quel punto della curva, ove QO parallela a BL l'adequi. Si unifca QB, farà tal retta (3) parallela a CO, e quindi coincidente con BN, cui da principio le si è condotta CS parallela. Dunque siccome la congiunta QB taglia la parabola ne' punti B, e Q; così BN dovrà segarla non solo in B, ma anche in Q. C. B. D. (a).

B

PRO.

(1) Prop. prec. part. 1. (2) Prop. prec. part. 2.

(3) Prop. 33. El. I.

(a) Queste due proposizioni seconda, e terza, che vogliono desiderarsi negli altri elementi di sezioni coniche, ser-

PROP. IV. PROBL.

Dato un punto nel perimetro della Parabola, condurle una tangente,

Fig. 12. *Cas. I.* Se il punto dato sia il vertice A della sezione, avrassi la richiesta tangente, sol che si conduca per esso una parallela alle di lei ordinate. Poichè se tal retta cadesse dentro la curva, come la QA; le ordinate ME, *me* &c. condotte da' punti dell'arco AM, ch'è su di essa, dovrebbero incontrarla. Or ciò non potendo essere, ella sarà tangente in A, come lo indicai nel Cor. 2. Prop. II.

Cas. II. Ma se il punto M, ove vuol tirarsi la tangente, ne sia giù del vertice, si meni prima per M sul diametro AB l'ordinata MN: e quindi distesa su del vertice la sua corrispondente ascissa AN, in fin che la parte protratta DA pareggi la medesima ascissa, si unisca DM: *sarà tal retta la tangente addimandata.*

Imperocchè se la congiunta DM non cada fuori la curva, dovrà cader dentro, ed incontrarla in un qualche punto C (1). Si ordini su di AB la retta CB: sarà (2) $MN^2 = CB^2$;

servono a dimostrare, che ogni retta condotta entro una Parabola parallela ad una sua tangente debba in due punti incontrare il perimetro: laddove in un sol punto lo incontri quell'altra, che sia parallela al diametro di essa.

(1) Prop. III.

(2) Prop. I.

CB^2 , come AN ad AB , o come il rettangolo di DA in AN all'altro di DA in AB (1). Ma per la similitudine de' triangoli DNM , DBC sta poi $MN^2 : CB^2 :: DN^2 : DB^2$. Dunque sarà ancora $DN^2 : DB^2 :: DAN : DAB$. E quindi siccome DN^2 è (2) quadruplo di DAN , così il sarebbe ancora DB^2 quadruplo di DAB . Locchè ripugna alla prop. 8. *El. II.* Dunque la retta DM , che incontrando la curva in M , tutta n'è fuori di essa, è la tangente cercata. **C. B. F.**

Defin. I. Se l'ascissa, che corrisponde all'ordinata per lo contatto, si prolunghi fino alla tangente, ella si dirà *sottangente*.

Cor. Nella Parabola la sottangente è doppia dell'ascissa, che corrisponde all'ordinata pel contatto.

Defin. II. Se da un qualunque punto Q Fig. 13. del perimetro parabolico si tiri QT parallela al diametro AB , che incontri la tangente verticale AP in P , e gli si ordini qualunque retta CB ; la figura quadrilatera $TPAB$ si dirà il *quadrilineo corrispondente* al punto C .

PROP. V. TEOR.

Se da un qualunque punto C del perimetro parabolico AQC si tirino le rette CB , CN rispettivamente parallele alla tangente verticale AP , ed

B 2

al-

(1) Prop. 1. *El. VI.*

(2) Prop. 4. *El. II.*

alla laterale QS , e si protraggano finchè incontrino il diametro AB ne' punti B ed N ; il triangolo CBN formato da queste rette adeguerà il quadrilineo $PTBA$ corrispondente al punto G .

Dim. Si ordini dal punto Q del con tatto la retta QM . E poichè i due triangoli SMQ , NBC hanno due de' loro lati coincidenti, e gli altri tra se paralleli, saranno equiangoli, e con ciò simili: ond' essi saranno nella ragion de' quadrati de' loro lati omologhi MQ , BC . Ma i quadrati di tali rette sono come le corrispondenti ascisse MA , BA (1), o come i parallelogrammi $MAPQ$, $BAPT$ (2). Sarà dunque il triangolo MSQ all' altro BNC , come il parallelogrammo $MAPQ$ all' altro $BAPT$. Ma il triangolo MSQ adequa il parallelogrammo $MAPQ$ per essere entrambi fra le medesime parallele MS , PQ , e 'l triangolo costituito sulla base MS doppia di MA , su cui poggia il parallelogrammo (3): sarà dunque il triangolo CNB benanche uguale al corrispondente quadrilineo $BAPT$. $C.B.D.$

P R O P. VI. T E O R.

La retta QD , che da un qualunque punto Q del perimetro parabolico si tira parallela al dia-

- (1) Prop. I.
- (2) Prop. I. El. VI.
- (3) Cor. Prop. IV.

di diametro AB , divide per metà le corde AC , FH parallele alla tangente del punto Q .

Dim. Caf. I. Incontrì la corda AC il diametro AB nel vertice A . Si ordini ad AB la retta CB . È poichè il triangolo CAB (1) adègua il quadrilineo $DPAB$: tolto da essi il comun trapezio $DLAB$, resterà il triangolo CLD uguale all'altro PLA . Ma siffatti triangoli sono eziandio tra se simili. Dunque i loro lati omologhi CL , ed LA dovranno pareggiarsi, e con ciò la retta QD bisecherà in L la corda CA .

Caf. II. Incontrì la retta HF il diametro AB sotto del vertice in O . Si ordinino da' suoi estremi le rette HK , FE al diametro AB , e si protragga FE fino alla retta PM . Il triangolo FEO (2) è uguale al quadrilineo $AEGP$: dunque aggiungendo ad essi di comune il parallelogrammo $GMKE$, ne risulterà lo spazio $FGMKO$ uguale al quadrilineo $PMKA$, cioè al triangolo HOK , che ad esso quadrilineo si è mostrato (3) uguale. E' dunque il triangolo HOK uguale allo spazio $FGMKO$; onde togliendosi da queste grandezze il comun trapezio $MNOK$, rimarrà il triangolo HNM uguale al suo simile GNF : il perchè HN sarà uguale ad NF .

B 3

Caf:

(1) Prop. prec.

(2) Prop. prec.

(3) Prop. prec.

Caf. III. La corda CE incontri il diametro AB sopra del di lui vertice in N ; ordinate le rette CB , ED al medesimo AB , farà
 Fig. 13. il triangolo END uguale al quadrilineo $DAPR$, siccome il triangolo CNB adegua il suo corrispondente (1) quadrilineo $BAPT$. Dunque prendendo la differenza di questi triangoli, e la differenza de' loro corrispondenti quadrilinei, farà il trapezio $CEDB$ uguale al parallelogrammo $BDRT$. E di nuovo da siffatte grandezze togliendo lo spazio comune $BDELT$, rimarrà il triangolo CLT uguale al suo simile ELR , e perciò CL uguale ad LE . *C. B. D.*

Defin. III. La retta QM parallela al diametro AB , diceli ancora essa *diametro* della
 Fig. 14. parabola: il suo *vertice* è il punto Q : e le sue *ordinate* sono le rette CA , HF parallele alla tangente del suo vertice.

Defin. IV. Il diametro AB , ch' emerge dalla genesi della parabola (2), potrà dirsi *diametro primitivo*: e ciò per distinguerlo dagli altri, che da esso traggono la loro posizione.

Cor. I. Dunque nella parabola vi sono infiniti diametri. Questi son tutti fra lor paralleli, e paralleli al primitivo. Tra questi vi è anche l'asse, che, come fu avvertito nella defin. VII. Prel., in ciò solo distinguefi dagli altri, che dee segare ad angoli retti le sue ordinate.

Cor. II. Per due punti non può condurvisi,

(1) Prop. prec.

(2) Defin. VII. Prel.

fi, che una sola retta. Dunque 1. Se nella parabola la corda CA sia parallela alla tangente QS; la retta QL, che passa pel contatto di questa, e per lo punto medio di quella, sarà il diametro della corda CA.

2. E se le due corde CA, HF della parabola sieno tra se parallele; la retta LN, che unisce i loro punti medj, sarà il diametro, cui esse saranno ordinate.

3. Di più l'è agevol cosa rinvenire la posizione di un diametro della parabola, sol che si tirino entro di essa due corde tra se parallele, e per le loro metà facciasi passare una retta, che sarà un diametro di questa sezione.

4. Ed in fine conducendosi due corde perpendicolari a questo diametro, sarà l'asse della parabola quella retta, che passa pe' loro punti medj.

P R O P. VII. T E O R.

Poste le medesime cose della propos. preced. i quadrati delle semiordinate CL, ed HN sono fra loro, come le corrispondenti ascisse QL, e QN del diametro QM cui appartengono.

Dim. La retta QP a cagion del parallelogrammo QPAX adegua AX: ma AX l'è pure uguale ad AS (1): dunque PQ farà uguale ed AS,

B 4

c i

(1) Cor. Prop. IV.

e i due triangoli QZP, AZS (1) tra se uguali. Sicchè aggiungendo a questi triangoli il pentagono sottoposto DQZAB, ne risulterà il parallelogrammo DPAB uguale al trapezio SQDB. Ma tal parallelogrammo pareggia il triangolo ACB (2); farà dunque il trapezio SQDB uguale al triangolo ACB. Quindi togliendosi da essi lo spazio comune DLAB, ne rimarrà il triangolo LCD uguale al parallelogrammo LQSA.

Collo stesso discorso proverassi che il triangolo HNM sia uguale al parallelogrammo corrispondente NQSO. Saran dunque i triangoli CLD, HNM come i parallelogrammi LQSA, NQSO. Ma i primi, perciocchè simili tra essi, sono come i quadrati de' loro lati omologhi CL, HN; ed i parallelogrammi per avere la medesima altezza, sono fra di loro come le basi QL, QN. Saran quindi i quadrati delle semiordinate CL, HN come le corrispondenti ascisse, QL, QN. C. B. D.

Defin. V. Se in ordine a QL, ed LC si ritrovi la terza proporzionale QR, si dirà questa *parametro* del diametro QM.

P R O P. VIII. T E O R.

Il quadrato di qualunque altra semiordinata
HN

(1) Prop. 26. El. I.

(2) Prop. prec.

25

HN è anche uguale al rettangolo della sua ascissa
NQ nello stesso parametro QR.

Dim. Sta HN^2 a CL^2 , come NQ ad LQ (1), ovvero come NQR ad LQR (2). Ma CL^2 è uguale al rettangolo di LQ in QR (essendosi fatto QL ad LG (3) come LC a QR): farà dunque anche il quadrato di HN uguale al rettangolo di NQ in QR. C. B. D.

Cor. I. Nel diametro QM, siccome nel primitivo AK (4), i quadrati delle ordinate sono come le corrispondenti ascisse, e' il quadrato di ciascuna semiordinata pareggia il rettangolo dell'ascissa corrispondente nel parametro.

Cor. II. Ed intendendosi disteso quello stesso filo di ragionamento, ond'io mostrai, che nel diametro primitivo la sotttangente sia dupla dell'ascissa corrispondente all'ordinata per lo contatto; si potrà anche quì raccorre, che la sotttangente LP sia dupla dell'ascissa QL, che corrisponde all'ordinata per lo contatto.

Cor. III. Essendosi dimostrati tra se perfettamente uguali i triangoli AZS, PZQ, saranno i loro lati omologhi AZ, PZ, e gli altri SZ, QZ tra se uguali. Dunque se da' vertici di due diametri sien condotte due tangenti che viteranno evolutamente gl'incontro; saranno tra se uguali
quei

(1) Prop. prec.

(2) Prop. 1. El. VI.

(3) Def. prec.

(4) Prop. 1. Cor. 1.

quei triangoli, che dall'incontro di tali rette nascono: ed esse tangenti resteranno divise per metà.

Cor. IV. Ogni parametro sia del diametro primitivo, sia di qualunque altro può definirsi, che sia una terza proporzionale in ordine ad un' ascissa, ed alla dilei semiordinata.

Defn. VI. Se dal contatto di una retta colla parabola si meni l'ordinata MN all'asse
Fig. 15. AQ, ed MQ perpendicolare ad essa tangente; la parte NQ dell'asse, che resta fra l'ordinata, e detta perpendicolare, si dirà *funnormale*. E questo vuol intenderfi ancora per le altre sezioni.

P R O P. IX. T E O R.

Nella parabola AM la *funnormale* NQ è sempre di una costante grandezza, cioè metà di AP parametro principale.

Dim. Il quadrato di MN a cagion dell'angolo retto QMD, adegua il rettangolo di QN in ND. Ma lo stesso quadrato di MN è (1) uguale al rettangolo di NA in AP. Saran dunque i rettangoli di QN in ND e di NA in AP tra se uguali. Onde reciprocandosi i di loro lati, sarà $NA : ND :: QN : AP$. Ma l'ascissa NA è metà della sotttangente ND (2). Dunque l'è ancora la *funnormale* QN metà del parametro AP. C. B. D.

CAP.

(1) Prop. VIII. Cor. I.

(2) Cor. 2. Prop. prec.

C A P. II.

*Delle Tangenti, e Secanti della
Parabola.*

P R O P. X. T E O R.

*Dato il punto P fuori della parabola Fig. 14.
condurle per esso una tangente.*

Si tiri per lo punto P la retta PM parallela al diametro primitivo AB, che dovrà incontrare la parabola in un punto Q (1). Da essa si tagli QL uguale a PQ. Di poi per Q distendasi (2) la tangente QS alla parabola, cui dal punto L conducasì la parallela LA, che incontri la curva in A. Si unisca PA: farà questa la cercata tangente.

Dim. Imperciocchè essendo PL doppia di LQ, la retta PA esser dee tangente della curva in A. Altrimenti dal punto A potrebbe tirare una retta diversa da AP, che fosse tangente in A, e che incontrerebbe PL in un' altro punto T. E quindi sarebbe (3) LT doppia di LQ, e con ciò uguale ad LP. Locchè è assurdo. C. B. D.

Cor.

(1) Cor. I. Prop. II.

(2) Prop. V.

(3) Cor. 2. Prop. VIII.

Fig. 15. *Cor. I. Se l'ordinata MN tirata per lo contatto M distendasi fin dove incontri l'altro ramo parabolico in O; condotta DO, questa dovrà esser tangente della parabola in O.*

Cor. II. E vicendevolmente se il punto D concorso delle due tangenti DM, DO si unisca col punto medio della retta MO fra contatti; la congiungente DN farà il diametro di MO. Imperocchè, se altro fusse il diametro di MO, questo passando per N, affinchè la bisechi, dovrebbe tagliare le tangenti in due diversi punti. Dunque della medesima ascissa corrispondente all'ordinata per lo contatto sarebber duple due disuguali sottotangenti. Lo che non può essere.

P R O P. XI. T E O R.

Fig. 16. *Se le due corde AD, BN della parabola ADN s'interseghino dentro la curva o fuori di essa; i rettangoli de' loro segmenti ACD, BCN saranno proporzionali a' parametri GQ, IP dei diametri GM, IL, di cui esse son ordinate.*

Dim. Cas. I. Si tiri dal punto C delle loro intersezioni la retta CF parallela a GM, e per F l'altra FH parallela ad AD. E poichè il quadrato di AM pareggia il rettangolo di MG in GQ, ed il quadrato di FH è pure uguale al rettangolo di HG in GQ (1); la differenza di que'

(1) Prop. VIII.

que' quadrati, cioè il rettangolo ACD (essendo FH^2 uguale a CM^2 , ed AM^2 meno CM^2 uguale (1) ad ACD) sarà uguale alla differenza dei rettangoli MGQ , HGQ , cioè al rettangolo di MH , ovvero di CF in GQ (2). Con simil raziocinio proverassi, che il rettangolo della stessa CF in IP uguagli BCN . Laonde sarà il rettangolo $A'D$ all'altro BCN , come il rettangolo di FC in GQ al rettangolo della stessa FC in IP , cioè come GQ ad IP .

Fig. 17.

Caf. II. Si tiri CF parallela al diametro GM : dovrà questa retta incontrare la parabola in un punto F (3). Dunque ordinandosi FT sul diametro IL , faranno i quadrati di FT , e di BL rispettivamente uguali ai rettangoli di TI in IP , e di LI in IP . E quindi la differenza de' quadrati di FT , e di BL , cioè la differenza de' quadrati di CL , e di BL , cioè (4) il rettangolo NCB pareggerà il rettangolo di LT in IP . Similmente dimostrasi il rettangolo DCA uguale all'altro di GQ in LT . Dunque siccome i rettangoli di LT in IP , e di LT in GQ sono nella ragione di IP a GQ , così gli altri rettangoli NCB , DCA faranno nella ragione de' parametri IP , e GQ . C. B. D.

Cor. I. Siccome il rettangolo di FC in GQ si è mostrato uguale al rettangolo DCA ,
così

(1) Prop. 5. El. II.

(2) Prop. 1. El. II.

(3) Cor. 1. Prop. II.

(4) Prop. 6. El. II.

così (tirandosi per un'altro punto f del perimetro parabolico fc parallela a GM) si mostrerebbe il rettangolo di fc in GQ uguale al rettangolo AcD . Dunque la ragion de' rettangoli di FC in GQ , e di fc in GQ , cioè la ragion delle rette FC ed fc (1) condotte dal perimetro parabolico parallele all'ascissa GM sarà uguale a quella de' rettangoli DCA , DcA de' segmenti della sottoposta ordinata AD .

Cor. II. Se una di queste corde, per esempio la DA , si avvicini con moto a se parallelo al vertice G del diametro GM ; ella si farà tangente, quando i due punti delle sezioni in un si raccolgono nel vertice G . Dunque farà in tal caso il quadrato della tangente GH al rettangolo NHB , come il parametro GQ all'altro IP .

Cor. III. E divenendo tangenti tutte e due le corde, faranno i loro quadrati, come i parametri de' diametri, che passano pe' loro contatti.

Cor. IV. Che se le due corde FP , fp tra se parallele intersechino un'altra qualunque CA ; i rettangoli delle parti di quelle FMP , fmp saran come i rettangoli delle parti di questa AMC , amc . Imperocchè tanto il rettangolo FMP al rettangolo AMC , quanto il rettangolo fmp all'altro AmC sta come il parametro di PF a quello di CA .

PRO.

(1) Prop. 1. El. VI.

Se il trapezio ABDC , qualunque si sia , si trovi iscritto in una parabola , e per un qualsivoglia punto P del di lei perimetro si tirino sotto dati angoli le rette PM , PN ; PR , PQ ai lati di esso ; il rettangolo di PR in PQ serberà al rettangolo di PM in PN una data ragione , Fig. 18.

Cas. I. Suppongasi che il lato CD del trapezio sia parallelo al suo opposto AB , e che delle quattro rette tirate su de' lati di esso le due PN , e PM sieno tra se coincidenti , e parallele a CD , e che le altre PR , e PQ giacciano a dritto , e sieno parallele a CA . Si bisechino in L , ed E le due corde CD , AB , si unisca LE , cui si tirino le parallele CS , DT . Egli è chiaro (1) , che la retta LE debba essere un diametro della parabola , cui saranno ordinate le CD , FP , AB . E poichè per triangoli simili ACS , MCG sta $AS : MG :: SC : CG$, e per gli altri BDT , NDH pur anche simili tra loro sta $BT : NH :: TD : DH$; le due prime ragioni di AS ad MG e di BT ad NH saranno tra se uguali al par delle altre (2) due . Per lo che essendo SA uguale a TB , dovrà essere ancora MG uguale ad NH , e con ciò l' avanzo MF uguale all' altro NP . Dunque il rettangolo FMP sarà lo stesso che l' altro MPN ,

- (1) Prop. VI. Cor. 2. n. 2.
(2) Prop. II. El. V.

55
 e' il rettangolo AMC farà identico a QPR , essendo tra se uguali i loro lati. E quindi siccome i rettangoli FMP , AMC (1) sono tra loro nella costante ragione de' parametri dei diametri, cui appartengono le ordinate FP , AC ; così questa stessa ragione serberan pure i rettangoli MPN , RPQ .

Fig. 19. *Caf. II.* Supponghiamo, che le rette PM , e PN , che cadono su i lati opposti CA , BD del divisato trapezio, sieno a diritto, e che coincidano le altre PQ , e PR come nel *Caf. I.* ma solo non sia CD parallela ad AB . Si tiri Bd parallela ad AC , che incontri in d il perimetro della parabola, ed in n la retta MN : e congiunta Cd si meni ancora DT parallela ad AC . Ciò posto i rettangoli di Bn in Qq , e di MP in Nn sono tra loro in ragion composta di Bn ad Nn , e di Qq ad MP . Ma la prima di queste componenti è uguale a quella di DT a TB , essendo tra se simili i triangoli BNn , BDT : ed essendo simili gli altri triangoli QCq , e DCS farà Qq a DS , come Cq a CS , o come AR , o la sua uguale MP ad AT (2): cioè farà $Qq : DS :: MP : AT$, e permutando $Qq : MP :: DS : AT$. Dunque sostituendo le ragioni di DT a TB , e di DS ad AT in luogo delle divise componenti, farà il rettangolo di Bn in Qq all' altro di MP in Nn in ragion composta di DT a TB ,
 e di

(1) Prop. XI.

(2) Prop. 34. El. I.

e di DS ad AT, cioè (componendole effettivamente) come il rettangolo di DT in DS all'altro di TB in AT. Ma i rettangoli di DT in DS, e di TB in AT sono fra loro, come gli altri di PR o di Bn in Pq, e di AR in RB (1), o sia di MP in Pn. Dunque sarà Bn.Qq:MP.Nn::PR.Pq:MP.Pn, e quindi avrassi (2) PR.PQ:MP.PN::PR.Pq:MP.Pn. Laonde, siccome l'è (3) costante la seconda di queste ragioni, così il sarà ancora la prima.

Caf. III. Supponghiamo che PM, e PN Fig.20.
non istiano a dirittura, che non coincidano PQ, e PR, e che il trapezio ABDC sia comunque formato. Per P si distenda mPn parallela ad AB, e Pqr parallela ad AC. Ed essendo il triangolo PR dato di specie (a) sarà data la ragione di PR a Pr, che si esprima per quella delle grandezze R ed r, e facciasi come r ad un'altra Q, così PQ a Pq: sarà (4) il rettangolo RPQ all'altro rPq, come R a Q. Intanto la ragione del rettangolo rPq all'altro mPn, che (5)

C si è

(1) Cor. 4. Prop. XI.

(2) Prop. 19. El. V.

(3) Caf. prec.

(4) Prop. 23. El. VI.

(a) Una figura dicesi data di specie, qualora le si può costituire un'altra simile. Or poichè, come lo ha mostrato Euclide Prop. 4. El. VI., due triangoli solamente equiangoli sono simili fra loro; dunque una figura trilatera sarà data di specie, sol che abbia dati di grandezza i suoi angoli. Ed in tal caso faranno eziandio date le ragioni de' lati, che la cingono.

(5) Caf. prec.

Si è mostrata di una quantità costante, si ponga uguale a quella di Q ad un'altra n . E poichè il triangolo NPn è ancor esso dato di specie, sarà data la ragione di Pn a PN , che si esponga per quella di n ad N , e facciasi come Pn a PM così N ad M , sarà $mPn : MPN :: n : M$ (1). Dunque i quattro rettangoli RPQ , rPq , mPn , ed MPN sono in ordinata ragione con altrettante grandezze R , Q , n , ed M . Onde sarà ordinando $RPQ : MPN :: R : M$: cioè i rettangoli RPQ , MPN in una costante ragione, $G.B.D.$

Scol.

Questa proprietà della Parabola, che in appresso osserverete appartenersi ancora all'Ellisse, al Cerchio, ed all'Iperbole, è quel principio, onde deesi comporre il *Problema delle quattro rette*, la cui soluzione fu incominciata da Euclide, ed alquanto continuata dal grande Apollonio, senza però che questi Geometri, o altri dell'antichità potessero guidare a fine. L'acutissimo Renato delle Carte fu il primo tra moderni, cui riuscì di risolverlo analiticamente all'innestare ch'ei fece dell'Algebra alla Geometria. E l'Immortal Newton al Cor. 2. del Lemm. 19. de' suoi Principj Matematici ne compì poi quell'elegante geometrica composizione, che tanto agognavasi dagli antichi.

PRO.

(1) Prop. 23. EL. VI.

Cadano da un qualunque punto A sulla parabola GNE le due tangenti AB, AC, e condotta la retta BC fra' contatti le si tiri dal medesimo punto la parallela AV; io dico in primo luogo, che ogni retta tirata da un qualsivoglia punto E del perimetro parabolico al punto A debba restar divisa armonicamente dalla curva, e dalla retta fra' contatti, cioè che sia $EO:OD::EA:AD$. Fig. 21.

E che, se dal punto E al punto medio della BC si meni l'altra retta ES, fin che incontri la AV; anche la retta EV debba restar divisa armonicamente in S ed L: cioè che sia $ES:SL::EV:VL$.

Dim. Part. I. Si unisca il punto A concorso delle tangenti col punto medio della BC per mezzo della retta AS: sarà (1) tal retta il diametro, cui appartenenti l'ordinata BC. A questo diametro si ordinino ancora da' punti D, ed E le rette DL, EG, e si protraggano in fino alla tangente AF. E per C si tiri CM parallela ad AK.

E poichè il rettangolo GFE sta ad FC^2 , come il parametro del diametro NK a quello dell'altro CM: ed in questa stessa ragione l'è pure il rettangolo LHD al quadrato di C ₂ CH

(1) Cor. 2. Prop. X.

CH (1); sarà $GFE : LHD :: FC^2 : CH^2$. Ma per la similitudine de' triangoli KAF, PAH sta $KF^2 : PH^2 :: KA^2 : AP^2$; e per la simiglianza degli altri due KAE, PAD l'è ancora $KE^2 : PD^2 :: KA^2 : AP^2$. Dunque sarà $KF^2 : PH^2 :: KE^2 : PD^2$. E (2) quindi $GFE : LHD :: KF^2 : PH^2 :: FA^2 : AH^2$. Per la qual cosa essendosi mostrate alla stessa ragione del rettangolo GFE all'altro LHD uguali le ragioni di FC^2 a CH^2 , e di FA^2 ad HA^2 , sarà $FC^2 : CH^2 :: FA^2 : HA^2$, ed $FC : CH :: FA : HA$. E con ciò (3) $EO : OD :: EA : AD$.

Part. II. Si unisca la retta EA, e dal punto D, ov'ella incontra il perimetro parabolico, si ordini DP al diametro NK, e la si distenda, finchè ne pervenga alla retta EV. Ciò posto in forza della parte dianzi dimostrata sta $EO : OD :: EA : AD$. Ma la prima di queste ragioni è uguale a quella di ES ad SL (4), e di EK ad LP: imperocchè sono equiangoli, e quindi simili fra loro i triangoli EKS, LPS: e l'altra di EA ad AD per essere simili i triangoli EAK, DAP adegua la ragione di EK a DP. Dunque sarà $EK : LP :: EK : DP$, e quindi (5) LP uguale a DP, e 'l punto L verrà a stare nel perimetro parabolico. Il perchè essendo

(1) Cor. 2. Prop. XI.

(2) Prop. 19. El. V. e 6. El. II.

(3) Prop. 2. El. VI.

(4) Prop. 2. El. VI.

(5) Prop. 9. El. V.

le due seganti EV, EA similmente tagliate dalle parallele VA, LD, SO; siccome la EA è armonicamente divisa in O, e D, così la retta EV è pure armonicamente segata in S, ed in L. C. B. D.

Cor. I. Quì sopra ho mostrato, che sia $EO : OD :: AE : AD$, cioè $AE - AO : AO - AD :: AE : AD$. Dunque le tre rette AE, AO, AD sono tali, che la differenza della prima, e della seconda sta alla differenza della seconda, e della terza, come la prima alla terza. Or poichè questa condizione dee verificarsi affinchè tre grandezze sieno armonicamente proporzionali, o in proporzione musica (a); le tre rette AE, AO, AD, convien che sieno armonicamente proporzionali.

Cor. II. E quindi tanto vale il dire le tre rette AE, AO, AD sono armonicamente proporzionali, quanto che tutta la retta AE (divisa in tre parti) stia ad un suo segmento estremo AD, come l'altro estremo EO al medio OD. Intanto il gran Geómetra dell'antichità Apollonio Pergeó di questa seconda frase si è solamente servito nell'enunciar le prop. 37, 38, 39, 40 del Lib. III. de' suoi Conici.

Cor. III. Che se dal punto A cadano sulla parabola

C 3

(a) Ne' tre numeri 6, 4, 3 contiene la proporzione armonica, così chiamata perchè le corde lunghe nelle ragioni di 6 : 3, 6 : 4, 4 : 3 formano le tre principali consonanze musicali, ottava, quinta, e quarta.

30
 parabola la tangente AC, e la secante AE, e questa dividasi armonicamente in O, cioè che sia $EO : OD :: EA : AD$; la retta CO, che unisce il punto O col contatto C, dovrà passare per lo contatto della tangente AB, che dal medesimo punto A tirasi sull'altro ramo NBG della curva. Imperocchè se la retta fra' contatti non si combaci colla CO, necessariamente dovrà tagliare la AE in un punto ϵ diverso da O. Dunque (1) sarà $E\epsilon : \epsilon D :: EA : AD$. Ma dalla supposizione sia $EO : OD :: EA : AD$. Dunque farebbe $E\epsilon : \epsilon D :: EO : OD$, e componendo $ED : \epsilon D :: ED : DO$, cioè ϵD uguale a DO. Lo che ripugna.

Cor. IV. Se dal punto A cadano alla parabola le due secanti AE, AG, ed entrambe si dividano armonicamente in O, e Q; la retta QO dovrà passare pe' contatti delle tangenti tirate dal medesimo punto A. Imperocchè se la retta fra' contatti non cada sulla QO, ella o dovrà tagliare tutte e due le secanti in due punti diversi da Q, ed O, o almeno una di esse per esempio la AE in un punto ϵ diverso da O; e tanto in quello caso, che in questo se ne tratterebbe lo stesso assurdo, che si è indicato alla fine del Coroll. prec.

Scol.

La divisione di una retta in tre parti;
 talchè

(1). Prop. pref.

talchè ne sia la media ad un' estrema, come l'altra estrema all'intera retta, suol esprimersi da' moderni con varie frasi. Il nostro acutissimo Geometra Gio. Alfonso Borelli la disse *Analogia conterminale*: il de la Hire dopo del Sig. Pascale ha voluto convenevolmente appellarla *Proporzione armonica*, e Gregorio da S. Vincenzo l'ha chiamata *Sezion proporzionale secondo l'estrema e media ragione*. Ma tanto il Borelli, che dopo di lui il de la Hire si son prevaluti di questa analogia, come di un principio fondamentale, per congegnar tante egregie dimostrazioni sulle curve coniche.

P R O P. XIV. T E O R.

Se ad un qualsivoglia diametro FG della parabola SBD si tiri ovunque la semiordinata DK, e per l'estremo E della sua sottangente le si conduca la parallela VE; io dico che in questa retta debbasi allogare il concorso di due tangenti tirate agli estremi di qualunque corda AS, che passi per K. Fig. 224

Dim. Si tiri SV tangente della parabola in S, e dal punto K al punto V, ov'ella incontra la retta EV, si meni la retta VK, che dovrà segare il perimetro parabolico in H (1), ed esser divisa armonicamente in K, ed M (2). Si unisca l'altra retta VA; questa convien che

C 4 tocchi

(1) Prop. II.

(2) Prop. prec. part. 2.

tocchi la parabola in A. Imperocchè se la VA non sia quella tangente che dal punto V si conduce sul ramo parabolico MAH, Va sia costessa tangente. Dunque la retta, che unisce i contatti S, ed a delle divise tangenti VS, Va, dovrà tagliare la HV in un punto r diverso da K. Con che la retta HV non solo è divisa armonicamente in K, ed M, ma anche in r , ed M (1). Ciochè ripugna (2). Dunque AV è tangente della parabola al par dell' altra SV, e l' dilorso concorso V n'è allogato nella retta EV. C. B. D.

P R O P. XV. T E O R.

Fig. 23.

Se dal punto R esistente fuori la parabola BAT cadano in essa curva le due tangenti RF, RG, e le due seganti RB, RT, di cui niuna sia diametro; tirata la retta FG pe' contatti, e le altre due AV, BT per le sezioni, dovranno tutte e tre queste rette, o essere tra se parallele, o convergere ad uno stesso punto.

Fig. 21.

Dim. Cas. I. Suppongasi LD parallela a GE, sarà $GA : AL :: EA : AD$ (3). Ma di queste ragioni la prima è uguale a quella di GQ a QL, e la seconda all'altra di EO ad

(1) Prop. prec.

(2) Cor. 1. Prop. Prec.

(3) Prop. 4. El. VI.

ad OD (1). Dunque sarà $GQ:QL::EO:OD$;
e quindi QO parallela ad LD .

Cas. II. La retta FG pe' contatti incon-
tri la retta BT delle sezioni inferiori nel pun-
to S ; io dico che in questo stesso punto la retta Fig. 23.
 AV distesa per le sezioni superiori le debba in-
contrare. Se l'è possibile FG incontri AV in O .
Si unifca SR , e per A ed V si menino le ret-
te NAM , PVQ parallele a BS : sarà (2) BC :
 $CA::BR:RA$. Ma la prima di queste ra-
gioni è l'istessa di quella di BS ad NA : es-
sendo simili fra loro i triangoli BCS , NCA .
E la seconda a cagion de' triangoli simili BRS ,
 ARM è pure uguale a quella di BS ad AM .
Dunque avrassi $BS:NA::BS:MA$, e quin-
di (3) NA uguale ad MA .

Similmente (4) sta $TD:DV::TR:RV$,
e pe' triangoli simili TDS , PDV , è pure
 $TD:DV::ST:PV$: e per gli altri TRS ,
 VRQ anche simili tra loro, sta $TR:RV::$
 $TS:VQ$. Dunque sarà $ST:PV::ST:VQ$;
e con ciò PV uguale ad VQ .

Or essendosi dimostrate le rette NA , e PV
rispettivamente uguali ad AM , ed VQ , sarà
 NM doppia di NA , e PQ di PV , e quindi
 $NA:PV::NM:PQ$. Ma sta $NA:PV::$
 $NO:PO$ pei triangoli simili NAO , PVO . Ed
è NM :

(1) Prop. XIII.

(2) Prop. XIII.

(3) Prop. 9. El. V.

(4) Prop. XIII.

è $NM : PQ :: NS : PS$ per la similitudine degli altri NMS , PQS . Dunque sarà $NS : PS :: NO : OP$. E dividendo $NP : PS :: NP : PO$, cioè PS uguale ad OP . Locchè ripugna. C.B.D.

Cor. I. Se tanto i punti V , e T , che gli altri A , e B si ritrovino dalla stessa parte del diametro, che passa per R , e la secante RB circolarmente muovendosi intorno ad R si accosti sempre ad RT ; egli è chiaro, che cadendo la corda AB sull'altra VT , i punti A , ed V debbanfi raccorre insieme, siccome anche addiviene agli altri B , e T . Dunque in tal caso diverrà tangente non meno la retta AVS , che l'altra BTS .

Cor. II. E quindi farà anche vero il seguente Teorema : cioè se dal punto R cada-
no su della parabola FAG le due tangenti RF , RG , e la sola secante RT , (che però non sia diametro); la retta FG tra' contatti dovrà passare per lo concorso delle tangenti menate dai punti delle sezioni T , ed V .

CAP.

Del Fuoco della Parabola.

Defn. VII. Fuoco di una sezione conica è quel punto del di lei asse, ove l'ordinata, che gli si distende, è quanto il parametro principale di essa sezione.

Cor. I. Sia F il fuoco della parabola RAL, Fig. 24. ed AX il parametro principale; sarà $AF : FL :: FL : AX$: onde siccome FL è metà di AX, così sarà pur anche AF metà di FL, e con ciò quarta parte di AX.

Cor. II. Dunque il fuoco nella parabola è un punto dell' asse distante dal vertice di esso per la quarta parte del parametro principale.

Defn. VIII. In ogni sezione conica se agli estremi dell' ordinata Lv condotta per lo fuoco F si tirino due tangenti, il punto del loro concorso si dirà *punto di sublimità*: e la retta, che quivi conducasi parallela alla medesima ordinata, si dirà *linea di sublimità*, che da alcuni suol dirsi *direttrice*.

Cor. I. Nella parabola il punto di sublimità dista dal vertice dell' asse per la quarta parte del parametro principale (1).

Cor. II. E' il concorso di due tangenti, che tiransi agli estremi di una qualunque corda diste-

(1) Cor. 2. Prop. VIII.

sa per lo fuoco, starà nella linea della sublimità (1).

Defin. IX. Ogni retta, che dal fuoco F di una sezione conica conducefi ad un punto qualunque R del di lei perimetro, dicesi *ramo*.

P R O P. XVI. T E O R.

Fig. 24. *Se dal punto A vertice principale della parabola conducafi la tangente AN, che concorra con una tangente laterale RN; la retta FN, che passa pel fuoco F, e pel concorso N delle tangenti, sarà perpendicolare alla tangente laterale.*

Dim. Si ordini RQ all'asse, e si distenda la tangente laterale RN finchè lo incontri in M. Sarà pe' triangoli simili RMQ, NMA $RQ:NA::QM:MA$: onde RQ sarà doppia di NA, come l'è QM (2) di MA, e'l quadrato di RQ quadruplo di quello di NA. Ma il rettangolo dell'ascissa QA nel parametro AX, o il quadrato di RQ, che gli è uguale, è altresì quadruplo del rettangolo di QA in AF quarta parte di AX, cioè del rettangolo di MA in AF: Dunque sarà anche NA^2 uguale ad MAF. E quindi (3) $MA:AN::AN:AF$, e l'angolo (4) MNA uguale ad NFA. Sicchè

ag-

(1) Prop. XIV.

(2) Corol. 2. Prop. VIH.

(3) Prop. 17. part. 2. Elem. VI.

(4) Prop. 6. El. VI.

aggiungendo lor di comune l'angolo ANF n' emergerà tutto l'angolo MNF uguale ai due NFA, ANF, o all'angolo NAF, cui questi sono uguali a cagion del triangolo rettangolo NAF. Onde l'angolo MNF sarà retto al par di NAF. C. B. D.

P R O P. XVII. T E O R.

L'angolo FRM, formato dal ramo FR, e dalla tangente RM tirata pel suo estremo, pareggia l'angolo GRC, che vien costituito dalla medesima tangente, e dal diametro RC condotto per lo contatto.

Dim. essendo MA uguale ad AQ, (1) sarà MN uguale ad NR. Per la qual cosa avendo i due triangoli MNF, RNF i due lati MN, ed NF rispettivamente uguali ai lati RN, ed NF, e l'angolo MNF uguale ad FNR, perchè retti (2), avranno eziandio uguali gli angoli FMN, FRN. Ma l'angolo FMN poichè interno delle parallele MF, RS adegua l'esterno GRG. Dunque sarà l'angolo FRN uguale a GRG. C. B. D.

Cor. I. Effendosi mostrati uguali i due angoli FDI, FID del triangolo DFI, il suo angolo esterno DFN, che dee pareggiarli, sarà Fig. 25.
duplo

(1) Cor. 2. Prop. VIII.

(2) Prop. prec.

duplo del solo FID. E condotto l'altro ramo EC, e la tangente CO, si arguirebbe in simil guisa esser l'angolo NFC dopoio di CKF, o di IKO. Onde l'è forza che tutto l'angolo DFC sia duplo de' due FID, IKO presi insieme, cioè del solo DOC (1).

Cor. II. Cioè nella parabola l'angolo compreso da due rami è duplo di quello, che ne costituiscono le tangenti condotte pe' di loro estremi.

Cor. III. E giacendo a dirittura i due rami RF, FG, l'angolo delle tangenti RHC sarà retto: poichè dev'essere metà de' due KFN, NFC, che fan due retti.

P R O P. XVIII. T E O R.

Nella parabola il ramo FR è quarta parte di RY parametro del diametro RS.

Fig. 24. E l'ordinata BD dello stesso diametro, che passa per lo fuoco F, è uguale al di lui parametro.

Dim. Part. I. si meni per lo vertice dell'asse la retta AS parallela alla tangente laterale RM, che farà semiordinata del diametro RC, ed uguale ad RM a cagion del parallelogrammo SM. Ma RM è doppia di MN: dunque AS sarà eziandio dupla di MN, e 'l quadrato di AS quadruplo del quadrato di MN, o del

(1) Prop. 32. El. I.

dell'uguale rettangolo FMA (1). Ma il medesimo rettangolo FMA è lo stesso che l'altro di FR in RS (essendosi dimostrata la retta FM uguale ad FR , ed MA uguale ad RS): ed è parimenti il quadrato della semiordinata AS uguale al rettangolo di RS in RY parametro del diametro RC . Sarà dunque il rettangolo di RS in RY quadruplo del rettangolo di RS in RF ; e quindi RY quadruplo del ramo FR .

Part. II. Essendo FM uguale ad FR , e ad FM uguale RC per lo parallelogrammo $FMRC$; sarà RC uguale ad RF . Onde BC^2 , che si è mostrato uguale al rettangolo di CR in $4FR$, uguaglierà $4FR^2$: e quindi BC sarà uguale a $2RF$, e tutta la BD uguale a $4FR$, cioè (2) al parametro di RC . $C.B.D.$

Cor. I. Il ramo FR si è mostrato uguale ad FM . Dunque siccome FM pareggia MA , o QA con AF ; così il medesimo ramo FR sarà uguale all'ascissa QA , che gli corrisponde, insieme con AF quarta parte del parametro dell'asse.

Cor. II. E quindi il quadruplo di RF , cioè RY parametro di RS , sarà uguale al quadruplo dell'ascissa AQ con AX parametro dell'asse.

Cor. III. Dunque il parametro di qualunque diametro supera il parametro dell'asse per lo quadruplo

(1) Cor. Prop. 9: El. VI.

(2) Part. I.

druplo dell'ascissa del medesimo asse corrispondente al vertice di esso diametro.

Cor. IV. Di più il ramo FR sarà uguale ad RC ascissa nel diametro RC , che corrisponde all'ordinata BD tiratagli per lo fuoco. E la sottangente dell'ordinata BD , ch'è dupla di RC (1), sarà uguale a BC .

P R O P. XIX. T E O R.

Fig. 25. Il ramo FD è uguale alla perpendicolare DL calata dal suo estremo sulla linea di sublimità.

Dim. Essendo BA uguale ad AF (2): aggiunta di comune l'ascissa NA , farà NB uguale ad AF con AN . Ma quì sopra si è mostrato, che il ramo FD sia uguale all'ascissa AN insieme colla quarta parte del parametro dell'asse. Sarà dunque FD uguale ad NB , ovvero a DL , che sono uguali a cagion del parallelogrammo $NBLD$. $C.B.D.$

Cor. Se a' punti R , e D del perimetro parabolico, o che sieno nella medesima parte, o in diverse, conducansi i rami FR , FD , e da' medesimi punti si calino le perpendicolari RP , DE sulla QG ordinata all'asse; il ramo colla sua corrispondente perpendicolare sarà di una costante grandezza. Imperocchè pro-

(1) Cor. 2. Prop. VII.

(2) Cor. 1. Defin. VIII.

lungate le anzidette perpendicolari finchè tocchino la linea della sublimità ne' punti M, ed L, saranno MP, LE di una costante grandezza, cioè uguali a GB, o sia alla retta GA insieme con AF. Ma tanto è dire PM, che RP insieme con RF: ed è parimenti EL uguale ad ED con DF. Sarà dunque FR con RP uguale ad FD con DE.

P R O P. XX. T E O R.

*Se in giù distendasi la tangente DM, che Fig. 26
passi per D punto di sublimità; ogni ramo FR
sarà uguale a PN semiordinata all'asse condotta pel
suo estremo infino alla tangente.*

Dim. Si tiri la tangente verticale AB, sarà DF:DA::FM:AB, e quindi siccome l'è DF dupla di DA (1), così farà puranche FM doppia di AB. Ma FM si è mostrata (2) doppia di AF: dunque sarà AB uguale ad AF.

E poichè sta (3) NM^2 ad LNR così BM^2 ad AB^2 , o ad AF^2 : ed è poi BM^2 : AF^2 :: MN^2 : FP^2 (4). Dunque sarà MN^2 : LNR :: MN^2 : FP^2 , e quindi LNR uguale ad FP^2 . Laonde aggiungendovi di comune PR^2 , risulterà (5) PN^2 uguale ad FR^2 , e PN uguale ad FR. C. B. D. D. PROP.

(1) Cor. 2. Prop. VIII.

(2) Cor. 2. Defin. VH.

(3) Cor. 3. Prop. XI.

(4) Prop. 2. El. VI.

(5) Prop. 6. El. II. e 47. El. I.

Fig. 27.

Se dall'estremo R del ramo FR conducafi la normale RQ, e dal punto Q, ov'ella incontra l'asse, si meni QP perpendicolare sul medesimo ramo; quel segmento RP del ramo, ch'è verso il contatto, pareggerà il semiparametro principale.

Dim. I due angoli QRM, QRN come retti sono tra se uguali. Ma PRN è uguale a DRM (1); farà dunque PRQ uguale a QRD, ovvero al suo alterno RQB. Il perchè i due triangoli RPQ, RBQ avendo uguali non meno gli angoli PRQ, BQR, che que' che sono in P, e B, e poggiando sulla medesima ipotenusa QR, dovranno aver uguali i lati PR, BQ (2). Ma la funnormale BQ è uguale al semiparametro dell'asse (3); dunque farà al medesimo semiparametro eziandio uguale la retta PR. C.B.D.

Cor. I. L'angolo QRF è uguale a QRD, ovvero (per le parallele RD, BQ) al di lui alterno RQF. Dunque (4) farà FQ uguale ad FR. Ed essendosi mostrata la RP uguale a QB, le rimanenti di loro parti FP, FB dovranno pure esser tra se uguali.

Cor. II. Intanto la NQ è doppia di FN, impe:

(1) Prop. XVII.

(2) Prop. 26. El. I.

(3) Prop. IX.

(4) Prop. 6. El. I.

51

imperocchè NB, e BQ parti di quella sono rispettivamente duple (1) di NA, ed AF parti di questa; e'l parametro AX è ancor duplo di BQ (2). Dunque dovrà essere $NQ : FN :: AX : BQ$, e con ciò il rettangolo di FN in AX uguale a quello di NQ in BQ, cioè ad RQ^2 , cui esso rettangolo è uguale (3).

Cor. III. Dunque la normale è media proporzionale tra il parametro dell'asse, e'l ramo.

P R O P: XXII. T E O R.

Se agli estremi R ed S de' rami FR, FS Fig. 28. conducanfi le tangenti RT, ST; la retta FT, che unisce il fuoco F col concorso T di queste tangenti, biseccherà l'angolo RFS compreso da' rami.

Dim. Si unifca la retta SR fra contatti, e tirate le tangenti PN, QN agli estremi della retta PQ, dovranno tutte e tre queste rette convenire in un'istesso punto (4): onde siccome le due tangenti PN, QN hanno il dilorio concorso (5) nella linea di sublimità ABN; così tutte e tre si raccoglieranno nella medesima linea. Si calino dagli estremi de' rami le rette SA, RB perpendicolari su di AN. Saranno tali (6) ret-

D 2 10

(1) Cor. 2. Prop. III. e Cor. 2. Prop. VII.

(2) Prop. IX.

(3) Cor. Prop. 8. El. VI:

(4) Prop. XV. Cor. 2.

(5) Cor. 2. Def. VII.

(6) Prop. XIX.

te uguali a' rami [qual cosa avverasi nella sola parabola, poichè nelle altre sezioni esse non sono, che proporzionali ai rami]. Ciò posto per essere la retta SN armonicamente divisa in O, ed R (1), starà $SO:OR::SN:NR$. Ma la seconda di queste ragioni pe' triangoli simili SNA, RNB è uguale a quella di SA ad RB, o a quell'altra de' medesimi rami SF, FR. Dunque sarà $SO:OR::SF:FR$, e quindi (2) sarà bisecato da TF l'angolo RFS. C. B. D.

Cor. I. Che se i rami FP, FQ giacciono a dirittura, ed a' loro estremi P, e Q si tirino le tangenti PN, QN, che si uniscono in N; la retta NF dovrà inclinarsi ugualmente sulla PQ, e quindi esserle perpendicolare.

Cor. II. Dunque se agli estremi di una corda condotta per lo fuoco si menino due tangenti, dovrà seguirne I. che il di loro concorso si ritrovi sempre nella linea di sublimità (3). II. Che l'angolo compreso da esse tangenti sia retto. III. E che in fine regga perpendicolarmente sulla mentovata corda quella retta, che unisce il fuoco della parabola col concorso delle medesime tangenti.

CAP.

- † (1) Prop. XIII.
 (2) Prop. 3. El. VI.
 (3) Cor. 2. Defin. VIII.

C A P. IV.

Delle dimensioni della Parabola .

L E M M A I.

Sia AaPF una qualunque curva rapportata all' asse AF, ed in essa s' iscrivano de' rettangoli Ba, Cb, De &c., ed altrettanti le si circoscrivano, cioè questi altri Bf, Cg, Db, &c.; io dico, che l'aja AaPF termini tanto nella somma de' rettangoli iscritti, quanto in quella de' circoscritti. Fig. 29.

Si prolunghino i lati aM, bN, cO &c. de' rettangoli iscritti, finchè ne incontrino i lati opposti dell' ultimo rettangolo FQ ne' punti S, T, X, Y, Z, V, &c., e sieno le altezze de' rettangoli sì circoscritti, che iscritti, vale a dire le rette AB, BG, CD &c. EF uguali tra loro. E poichè l' eccello del primo rettangolo circoscritto Bf sul primo iscritto Ba è uguale al rettangolo Mf, ed i lati di questo aM, Mb sono rispettivamente uguali ad ST, ed SX lati del sottoposto rettangolo TX; farà l' eccello di Bf su di Ba puranche uguale al rettangolo TX. Con simil ragionamento proverassi, che YZ, VR, &c. rappresentino gli eccelli de' rettangoli circoscritti Cg, Db, &c. su degl' iscritti Cb, Dc, &c. Onde la totale differenza di tutti i rettangoli iscritti da tutti

D 3 li

li circoscritti sarà uguale al rettangolo TQ . Or facendosi le altezze AB , BC , CD , &c. EF minori di qualunque grandezza assegnabile, il rettangolo TQ diviene ancor esso di una quantità minore di qualunque data. Dunque la somma de' rettangoli iscritti pareggerà a un di presso quella de' circoscritti: e l'aja della curva, ch'è limite tanto di que' rettangoli, che di questi, terminerà nelle loro somme. $C.B.D.$

Cor. I. Che se la curva co' rettangoli in essa iscritti, e circoscritti si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo asse; il solido, che in tal guisa viene a generarsi, terminerà nelle somme de' cilindretti generati da questi, e da quelli.

Cor. II. Se i parallelogrammi sì iscritti alla curva, che circoscritti, (i quali quì si sono supposti rettangoli), fussero obliquangoli ed equiangoli fra loro; con un simile tessuto di ragioni si proverebbe ch'ancor essi vadano a terminare nella stessa curva.

Scol.

Il Cavalier Newton nel I. Lemma de' Princip. Matem. della Filos. Naturale stabilì per principio dimostrativo, che „ se due quantità si accostino sempre all'uguaglianza, sic-
„ chè alla fine di un qualche tempo finito si
„ ri-

„ ritrovino differir meno di qualunque grandezza data; debban esse divenire uguali alla fine dello stesso tempo (a). Da ciò il Valentuomo si fe a conegnare un'elegante dimostrazione al nostro Lemma, che ho voluto qui recarvela alquanto illustrata, perchè intendiate l'eccellenza di questa maniera di geometrizzare, e la dilei identità al famoso metodo di Esautione, o de' limiti, di cui prevaleansi i Matematici antichi nella Geometria trascendente. In fatti, come il sapete, Archimede il Principe de' Geometri antichi colla face di questo metodo rinvenne la dimensione del circolo, della sfera, delle sferoidi, de' con, de' cilindri, delle spirali: ed elevatosi alla considerazione delle verità della Meccanica, gli riuscì di dimostrare il *principio della Leva*, quando le di lei braccia fossero tra loro incommensurabili (b).

L E M M A II.

Se nelle quattro serie di grandezze uguali
D 4 di

(a) Ecco le parole del Newton. *Quantitates, ut & quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales.*

(b) I principj del metodo di Esautione non sono, che i due seguenti. I. Due grandezze, che hanno uno stesso limite, sono tra se uguali. II. Se due grandezze, che terminano in due altre, abbiano fra loro una data ragione, questa stessa dovranno serbare i loro limiti.

di numero $A, A^I, A^{II}, \&c. B, B^I, B^{II}, \&c. C, C^I, C^{II}, \&c. D, D^I, D^{II}, \&c.$ sia sempre $A:B::C:D, A^I:B^I::C^I:D^I, \&c.$; sarà la prima serie alla seconda, come la terza alla quarta; se mai le grandezze della prima serie siano rispettivamente proporzionali a quelle della terza, o le grandezze della seconda proporzionali a quelle della quarta.

Dim. Sieno in primo luogo le grandezze contenute nella prima serie proporzionali a quelle della terza, dico esser necessariamente le grandezze della seconda serie proporzionali a quelle della quarta. Imperocchè, essendo $A^I:A::C^I:C$, e per la prima condizione $A:B::C:D$, farà per uguaglianza ordinata $A^I:B::C^I:D$, ed invertendo $B:A^I::D:C^I$. Ma dalla prima condizione sta puranche $A^I:B^I::C^I:D^I$. Dunque di nuovo per uguaglianza ordinata sarà $B:B^I::D:D^I$. E ciò sempre dimostrandosi, faranno le grandezze della seconda serie proporzionali a quelle della quarta.

Premesse tali cose, poichè dalla supposizione sta $A:A^I::C:C^I$, farà componendo $A+A^I:A^I::C+C^I:C^I$. Ma è puranche $A^I:A^{II}::C^I:C^{II}$; dunque per uguaglianza ordinata starà $A+A^I:A^{II}::C+C^I:C^{II}$, e componendo $A+A^I+A^{II}:A^{II}::C+C^I+C^{II}:C^{II}$. Per la qual cosa, se A^V , e C^V dinotino le ultime grandezze della prima serie, e della terza, sarà $A+A^I+A^{II} \&c.:A^V::C+C^I+C^{II} \&c.:C^V$.
Ncl.

Nello stesso modo, se B^v , e D^v dinotino le ultime grandezze della seconda serie, e della quarta, si dimostrerà, che debba stare $B+B^1+B^{11} \&c. : B^v :: D+D^1+D^{11} \&c. : D^v$. Dunque si è dimostrato essere $A+A^1+A^{11} \&c. : A^v :: C+C^1+C^{11} \&c. : C^v$; è poi dalla prima condizione $A^v : B^v :: C^v : D^v$; ed è finalmente $B^v : B+B^1+B^{11} \&c. : D^v :: D+D^1+D^{11} \&c.$ Per la qual cosa sarà (1) $A+A^1+A^{11} \&c. : B+B^1+B^{11} \&c. : D+D^1+D^{11} \&c.$

Cor. I. Nella stessa guisa, se le grandezze della seconda serie si pongano proporzionali a quelle della quarta, si conchiuderà essere le grandezze della prima serie proporzionali alle altre della terza.

Cor. II. Sicchè per essere coteste serie proporzionali, non basta, che sia $A : B :: C : D$, ed $A^1 : B^1 :: C^1 : D^1 \&c.$, ma vi si richiede ancora, che le grandezze della prima serie sian rispettivamente proporzionali a quelle della terza, o che le grandezze della seconda facesser proporzione con quelle della quarta.

Cor. III. Dunque se mai si ritrovi $A : B :: C : D$, ed $a : b :: c : d$, sarà sempre $A . a : B . b :: C . c : D . d$: perciocchè, essendo la prima di queste ragioni uguale alla seconda, e la terza alla quarta, dovrà la composta della prima, e della terza uguagliar la composta della seconda, e della quarta. Ma non sarà mai $A+a : B+b :$

(1) Prop. 22. El. V.

$B+b::C+c:D+d$, se non sia puranche $A:a::C:c$.

Scol.

Ho voluto, cari Giovanetti, esporvi quest' altro Lemma, non solo per farv' intendere distintamente su qual principio regga quel metodo, di cui sovente avvalgonfi i Matematici nel dimostrar tante verità meccaniche e geometriche; che per garentirvi di un' errore, ove non di rado s' incorre anche da Valentuomini. Infatti il Sig. de la Hire, credendo che la prima condizione inserita nel Lemma sol ne bastasse per essere quattro serie tra loro proporzionali, conchiuse fuor di ragione, che il tempo impiegatovi da un grave a discendere per una Semicicloide fusse duplo di quello, che vi s' impiegherebbe a calar verticalmente pel di lei asse. E quantunque il sommo Geometra Giovanni Bernulli (a) in leggendo la dimostrazione del Signor de la Hire tosto ne comprendesse l' errore; pur non di meno si contentò di solamente indicarlo alla Repubblica degli Eruditi, senza mostrarci qual altra condizione doveessero avere le quattro

(a) Ecco le parole di Giovanni Bernulli Att. Erud. di Lips. 1698, *Concludit*, cioè de la Hire, *positis quocunque, & quibuscunque analogiis* $a:b::c:d$, $m:n::p:q$, $r:s::t:v$, fore aggregatum omnium primarum atq; ad aggregatum omnium secundarum bñts, ut aggregatum omnium tertiarum ctpñt ad aggregatum omnium quarinarum dtqñt: quod num verum sit judicant alii.

tro mentovate serie, per essere fra loro proporzionali.

PROP. XXIII. TEOR.

Lo spazio parabolico AFM racchiuso dalle due coordinate AF, ed FM, e dall'arco AM è due terzi del parallelogrammo AFMP delle medesime coordinate. Fig. 30.

Dim. La retta PA intendasi divisa nelle particelle uguali PR, Rr, &c. e dal punto P elevata la perpendicolare PQ di quella lunghezza, che ne aggrada. Si compia il parallelogrammo PQTA: si tiri la sua diagonale AQ: pe' punti R, r, &c. si menino le rette RE, re, &c. RS, rs, &c. rispettivamente parallele a PM, e PQ: e poi alla medesima AP si conducan parallele le rette GN, gn, &c., CD, ed, &c. E finalmente il rettangolo PQTA con perfetta rivoluzione si aggiri intorno ad AP.

Ciò premesso il parallelogrammo MPRE sta all'altro NPRG (1) come MP a PN, o ad RG. Ma le rette MP ed RG avvegnachè uguali alle ascisse della parabola AF, AB sono in duplicata ragione delle semiordinate MF, GB, o delle loro uguali PA, RA: ed i cilindri che colla indicata rivoluzione vengonfi a generare da' rettangoli PQSR, PDCR, per essere nella ragion delle loro basi, sono ancor essi

(1) Prop. 1. El. VI.

effi in duplicata ragione di PQ , ed RC raggi delle medesime basi, o di PA ed RA , cui son proporzionali PQ , ed RC . Dunque (1) sarà il parallelogrammo $MPRE$ all'altro $NPRG$ come il cilindro di $PQSR$ al cilindro di $PDCR$. E ciò sempre dimostrandosi saranno (2) tutti i parallelogrammi $MPRE$, $ERre$, &c., che compiono l'intero parallelogrammo $MPAF$, a tutti i parallelogrammi $PNGR$, $Rngr$, &c., che sono iscritti nello spazio parabolico esterno MPA , come tutti i cilindri di $PQSR$, di $RSsr$, &c. che costituiscono il cilindro del rettangolo $PQTA$ rivolto intorno a PA , a tutti i cilindri di $PDCR$, di $Rdcr$, &c. iscritti nel cono generato dalla rivoluzione del triangolo PQA intorno a PA . Ma i parallelogrammi $PNGR$, $Rngr$ &c. terminano nel trilineo parabolico MPA , siccome nel cono di PQA van pure a terminarvi i cilindri de' rettangoli $PDCR$, $Rdcr$, &c. Dunque (3) sarà il parallelogrammo $MPAF$ al trilineo parabolico MPA , come il cilindro del rettangolo $PQTA$ al cono del triangolo PQA , cioè (4) come 3 ad 1. Per la qual cosa il trilineo MPA è un terzo del parallelogrammo $MPAF$, e quindi lo spazio parabolico interno MFA convien che sia due terzi dello stesso parallelogrammo delle coordinate $MPAF$. C.B.D.

Cor.

(1) Prop. II. El. V.

(2) Lemm. II.

(3) Lemm. I. Cor. 2.

(4) Per quel che ha mostrato Archimede.

Cor. I. Gli spazj parabolici AMF, AGB essendo parti simili de' parallelogrammi delle coordinate AFMP, ABGR, saranno al par di questi (1) in ragion composta delle ascisse AF, AB, e delle semiordinate MF, GB.

Cor. II. Ed essendo la prima di queste ragioni componenti duplicata dell'altra (2); la ragion che n' emerge dalla loro composizione sarà triplicata della sola seconda, o sesquuplicata della sola prima (a); cioè gli spazj parabolici AMF, AGB, racchiusi dalle coordinate AF, FM, ed AB, BG, e dai rispettivi archi AM, AG, sono infra di loro in triplicata ragione delle semiordinate MF, GB, o in sesquuplicata delle ascisse AF, AB.

Scol.

Il Principe de' Geometri Archimede Siracusano fu il primo tra gli antichi cui riuscì d'uguagliar due spazj curvilinei a due rettilinei. Egli dimostrò, che *un cerchio sia quanto quel triangolo rettilineo, che abbia per base la sua circonferenza, e per altezza il raggio*; e che *lo spazio parabolico, (quello però, che si è definito in questo teorema): pareggi due terze parti del parallelogrammo circoscritto*. Or la quadratura della parabola, cioè

(1) Prop. 23. El. VI.

(2) Prop. VII.

(a) Una ragione, che viene a comporsi da due altre, di cui la prima sia duplicata della seconda, dice si sesquuplicata della sola prima.

cioè la dimensione del di lei spazio potrebbesi in molte altre guise ottenere. Basta dire, che fin da' tempi suoi il Signor Torricelli ne propose più che venti in un' opericciuola pubblicata a questo fine. Ma poichè gli angusti limiti del mio istituto non mi permettono, che su questo argomento io più vi ragioni; mi restringo solamente ad indicarvi l'orditura de' due celebri metodi *degl' Infinitesimi*, e *degl' Indivisibili*, onde può lo stesso intento agevolmente conseguirsi. Ecco la dimostrazione del presente teorema per gl' infinitamente piccoli. „ Si prenda l' archetto MG infinitesimo, ed ordinate al diametro AF le rette GB, MF, si meni al punto M la tangente MH. E poichè il parallelogrammo PMER sta all' altro MNBF, che gli è equiangolo, (1) in ragion composta di PM ad MF, e di ME ad MN, o ad EG, che l' è uguale: e la ragione di ME ad EG pe' triangoli simili MEG, MFH è uguale a quella di MF ad FH; sarà il parallelogrammo MPRE all' altro MNBF in ragion composta di PM ad MF, e di MF ad FH, cioè (2) come PM prima o la sua uguale FA ad FH terza, cioè (3) come 1 a 2. E dimostrandosi sempre che ciascun parallelogrammo circoscritto nella parte esterna della parabola sia metà del corrispondente circoscritto nel-

„ lo

(1) Prop. 23. El. VI.

(2) Lem. prop. 23. El. VI.

(3) Cor. 2. prop. VII.

„ lo spazio interno, sarà lo spazio interno
 „ della parabola AMF duplo dell' esterno AMP,
 „ onde convien che quello sia due terzi del pa-
 „ rallelogrammo delle coordinate PAFM, quest'
 „ altro un terzo... Intanto ho voluto, anzi
 che usar questo metodo, avvalermi di quel-
 lo de' limiti: temendo che una tal dimostrarzio-
 ne non farebbesi compiutamente intesa da que'
 giovanetti, in mente a cui non sono ancor di-
 stinte le idee delle grandezze infinitesime, e
 de' loro diversi ordini, qual si converrebbe a
 tal uopo. In fatti le grandezze ME, EG, GM,
 e'l parallelogrammo MNBF sono *infinitesime*
di primo ordine, cioè infinitesime rispetto al-
 le grandezze finite MF, FA, MA, e all' aja
 MAF: laddove la retticciuola sG, e la piccio-
 la aja MEG sono *infinitesime di secondo ordi-
 ne*, cioè infinitesimi rispetto a GM, ed all'
 aja MNBF (b).

Col metodo degl' Indivisibili, di cui ne
 fu autore Bonaventura Cavalieri, potrebbe
 ancor semplificare la dimostrazione del presente
 teorema. Infatti dopo ch'è quivi ho conchiuso,
 che il circolo di RS stia a quello di RC, co-
 me la retta RE all'altra RG; parrebbe natu-
 ral

(b) Facciasi sT a sO come il parametro di AB al
 parametro del diametro, che passa per M: sarà (Cor. 2.
 prop. XI.) T sG ad M s2 come sT a sO, o come T sG
 ad O sG. Dunque sarà M s2 uguale ad O sG, e quindi
 (Prop. 17, El. VI.) O s : sM :: sM : sG. Ma sM è infi-
 nitesima rispetto a sO: dunque sG sarà anche infinitesi-
 ma rispetto a sM.

„ral conseguenza il dire „ dunque tutti i circa.
 „ li di RS, di rs &c. cioè tutto il cilindro
 „ di APQT dovrà stare a tutti i circoli di
 „ RC, di rc , &c. cioè al cono di APQ, co-
 „ me tutte le rette RE, re , &c. del parallelo-
 „ grammo MPAF a tutte le rette GR, gr ,
 „ &c. del trilineo parabolico MPA: cioè que-
 „ sto parallelogrammo dovrà esser triplo del
 „ trilineo MPA, come il mentovato cilindro
 „ lo è del cono, che ha seco la medesima ba-
 „ se, ed altezza. „ Ma spiace ad alcuni Geo-
 „ metri il tessuto di questo metodo; poichè i so-
 „ lidi verrebbero a prendere per tanti composti
 „ di superficie, e le superficie per aggregati di
 „ linee. Nè quindi le parti, onde si fa risul-
 „ tare il tutto, farebbero continue fra loro, nè
 „ omogenee ad esso, come il si conviene.

P R O P. XXIV. T E O R.

Se lo spazio parabolico ACK racchiuso dalle
 Fig. 31. *coordinate rettangole AC, CK, e dall' arco AK si*
aggiri insieme col rettangolo delle stesse coordinate
intorno all' asse AC; la conoide parabolica, che
viene a generarsi dal mentovato spazio ACK, è
metà del cilindro generato dal rettangolo ACKD.

Dim. L' ascissa AC della parabola ACK
intendasi divisa nelle particelle uguali CF, FB,
&c. e pe' punti C, F, B, &c. delle divisioni
condotte nel rettangolo le rette FI, BV, &c.
paralele

parallele all'ordinata CK. Unita AK si tirino anche QT, GE parallele ad AC.

I cilindri, che nella proposta rivoluzione vengonfi a generare da' rettangoli IVBF, EGBF, sono tra loro come i cerchi de' raggi VB, GB, che son le basi, ov' essi poggiano, e con ciò in duplicata ragione di VB, o sia di KC a GB, (1) cioè come CA ad AB. Ma i rettangoli IVBF, TQBF sono ancor essi com'è la VB, o la sua uguale KC a QB, cioè pe' triangoli simili KAC, QAB, come CA ad AB. Dunque (2) i mentovati cilindri saran fra loro come i rettangoli IVBF, TQBF.

Questo stesso filó di ragionamento intendasi ancor disteso per le altre particelle della CA: sarà il cilindro di KDAC, ch'è l'aggregato de' cilindri di KIFC, di IVBF, &c. alla somma de' cilindri di OMFC, di EGBF, &c., iscritti nella conoide, come il rettangolo KDAC somma de' rettangoli KIFC, IVBF, &c. alla somma de' rettangoli LSFC, TQBF, &c. iscritti nel triangolo KAC (3). Or se si concepisca accresciuto all'infinito il numero delle particelle uguali CF, FB, &c.; ed all'infinito minorata la grandezza di ciascheduna; ei sarà chiaro, che tutti i cilindretti de' rettangoli EGBF, OMFC, &c. vadano a terminare nella conoide generata dalla parabola KAC, siccome
E nel

(1) Cor. 2. Prop. I. Lib. I.

(2) Prop. 11. El. V.

(3) Lemm. 11.

nel triangolo KAC terminano i piccioni rettangoli $TQBF$, $LSFG$, &c. (1). Dunque sarà il cilindro di $KDAC$ alla conoide generata dalla parabola KAC , come il rettangolo $KDAC$ al triangolo KAC , cioè come 2 ad 1 (2): val quanto dire la rammentata conoide è una metà del cilindro, che le si circoscrive. C.B.D.

Scol.

In questa proposizione si è dimostrato, che la conoide parabolica sia metà del cilindro, che le si circoscrive; mentre dianzi ch'è si (3) conchiuso, che il trilineo AKG generatore della conoide pareggi due terze parti del rettangolo $ACKD$, onde si genera il cilindro. Ciò non vi paja contraddittorio, imperocchè le figure non sono proporzionali alle grandezze di loro generatrici, come taluno sel potrebbe immaginare; ma secondo la regola del Signor Guldino *le figure generate son come le grandezze generatrici, e come le vie, che i centri di gravità di queste descrivono in generandole*. Una retta che si aggiri intorno ad un suo estremo immobile sempre giacentesi su d'un piano, non fa che un cerchio. Ma se per avventura ella s'inclini al piano, e si volga intorno a quell'istesso estremo serbando al piano la medesima inclinazione

(1) Lem. I.

(2) Prop. 34. Elem. I.

(3) Prop. prec.

ne, verrà quindi a generare una superficie conica maggiore, o minore, secondochè il punto medio di essa retta (ove ne giace il centro di magnitudine) descriva una maggiore, o minore circonferenza.

P R O P. XXV. P R O B L.

Poste le medesime cose della prop. prec. ritrovare la superficie della mentovata conoide parabolica. Fig. 32.

Sia DAC la parabola generatrice della conoide, F il suo fuoco, AT il parametro principale. Si distenda sotto del vertice l'ascissa AC, finchè CG uguagli AF, e si conducano da F, e G le semiordinate all'asse FL, GH; dico essere la richiesta superficie quarta proporzionale in ordine al raggio di un circolo, alla sua periferia, ed all'aja parabolica HLFG..

Dim. Intendasi la semiparabola CAR dal luogo, ov'ella si giace, trasferita nell'altro CBK; talchè il suo vertice salga nel punto di sublimità B, e'l fuoco si alloghi in A, ove prima ne stava il suo vertice. Sarà agevole il comprenderfi, che tanto sia lo spazio HLFG, quanto quest'altro CAzK. Si divida l'ascissa CA nelle parti uguali CO, Oo, &c. e pe' punti delle divisioni s'intendano distese non solo le

ordinate DCK , MOJ , &c. le quali incontrino le parabole AD , BK , che le DS , &c., normali alla sola curva AD . Or essendo il ramo condotto al punto D (1) uguale a CB , farà il rettangolo di esso ramo nel parametro AT uguale al rettangolo di CB in AT , cioè DS^2 , ch'è uguale al primo rettangolo (2), farà uguale a CK^2 , che ne adegua il (3) secondo: e quindi DS uguale a CK .

Si tiri la tangente DM , che incontri in M la prossima semiordinata dO , e'l trapezio $DMOC$ si concepisca rivolto insieme colla parabola generatrice della conoide. La retta DM mercè cotesta rivoluzione verrà a generare una superficie di cono troncato (c), che dalle cose dimostrate da Archimede sulla sfera, e'l cilindro, farà quanto il prodotto di DM nella semi-somma delle circonferenze, che han per raggi MO , DC , cioè quanto la DM nella circonferenza di PQ , che dal punto medio della CO conducefi parallela a DC . Imperocchè tirata Mr paral-

(1) Prop. XIX.

(2) Cor. 3 Prop. XXI.

(3) Prop. VIII.

(c) Ogni elemento di una curva, che si volge intorno al proprio asse, non genera una superficie di cilindro retto, ma quella di un cono troncato, che ancor si valuta da esso elemento nella circonferenza che descrive un suo estremo: poichè un tal elemento non è perpendicolare al circolo della sottoposta ordinata, come si converrebbe per generare una superficie cilindrica; ma vi s'inclina sotto un angolo acuto uguale a quello, che fa la normale coll'asse.

parallela ad OC, tanto la Qr è metà di Dr , quanto la rP delle due MO , rC : onde conviene che tutta la QP sia metà delle due MO , DC , e che la circonferenza di QP dinoti la femisomma delle circonferenze di MO , e di DC .

Si tiri QV parallela a DS ; faranno uguali gli angoli QPV , MrQ come retti, e 'l faranno ancora gli altri due PVQ , MQr ; poichè ciascuno di essi unito allo stesso angolo PQV compie un retto. Sicchè il triangolo PVQ sarà simile ad MQr , o ad MDr . E quindi essendo MD ad Mr , come QV a QP , o come la circonferenza del circolo, che ha QV per raggio a quella che ha per raggio QP ; il prodotto (1) di Mr nella circonferenza di QV uguaglierà il prodotto di MD nella periferia di QP , cioè (da quello che si è mostrato) la superficie conica di DM .

Ma il rettangolo di Mr in QV sta al prodotto di Mr nella circonferenza del raggio QV , come il raggio di un circolo alla sua circonferenza: dunque in questa medesima ragione starà il rettangolo di Mr , o di CO in QV alla superficie conica generata da MD , nel modo dianzi esposto. Per la qual cosa se lo stesso raziocinio si applichi alle altre parti dell'ascissa CA , faranno (2) tutti i rettangoli di CO , di Oo &c. nelle rispettive perpendicolari ele-

E 3 vate

(1) Prop. 16. El. VI.

(2) Prop. 12. El. V.

vate da' punti medj delle tangenti DM , dm &c. a tutte le superficie coniche generate dalle medesime DM , dm , &c. come il raggio di un circolo alla sua circonferenza.

Or se le parti CO , Oo , &c. si concepiscano diminuite all'infinito; sicchè ciascuna diventi minore di qualunque retta assegnabile; i punti M , e Q dovranno raccorsi in D , la perpendicolare QV dovrà uguagliare la normale DS , o la di lei uguale CK , la superficie conica di DM confonderli con quella dell'elemento parabolico Dd : e così degl' altri elementi. Dunque sarà il raggio alla circonferenza, come tutti i rettangoli di CO in CK , di Oo in Of &c., cioè come l'aja ACK , (1) alla superficie della conoide generata da DAC (b). $C . B . D$.

Cor.

(1) Lemm. I.

(b) La dignità de' Metodi, che il nostro Autore ha voluto qui indicare, m' impegna a dir qualche altra cosa sulla di loro orditura.

Gli antichi Geometri nel misurar le figure curvilinee, o altre quantità trascendenti, soleano iscrivervi un numero finito di figure determinate, e circoscrivervi altrettante. Ne accrescevan poi all'infinito cotesto numero, e ad un tempo stesso ne diminuivano all'infinito la magnitudine di ciascheduna, fintantochè la somma delle iscritte differisse da quelle delle circoscritte per una grandezza minore di qualunque data. Ed in questo consista il processo del metodo preclaro di Esauzione.

Il Signor Cavalieri, e l' Torricelli nella nostra Italia, nell' Inghilterra il Wallis, e l' Barrowio, ed in breve tutti i fautori de' metodi *summatorj* considera-

vano

Cor. I. La parabola BGK è uguale a $\frac{2}{3}$ BC in CK (1), cioè a dire a $\frac{2}{3}$ SF, ch'è uguale a CB, nella normale DS, che si è mostrata pareggiar (2) la CK. Di più essendo il rettangolo di BA in Aφ metà del quadrato della stessa Aφ, (conciossiachè BA è $\frac{2}{3}$ Aφ); farà lo spazio parabolico BAφ, ch'è $\frac{2}{3}$ BA in Aφ, uguale ad $\frac{1}{3}$ Aφ², o ad $\frac{1}{3}$ SC² (3).

Cor. II. Dunque lo spazio parabolico CA₂K,
E 4 ch'è

vano le grandezze, di cui volean prenderne le dimensioni, come un composto di parti di già diminuite all'infinito, ed in tal guisa guidavano essi i diloro ragionamenti.

Ma il Cavalier Newton stimando poco convenevole alla genesi delle grandezze continue il supporre nate per addizion di parti, e di parti infinitesime di una determinata magnitudine, le volle concepir generate per mezzo di moti continui. Sicchè le linee deggionsi intendere generate dal flusso de' punti, dal flusso delle linee ne nascono le superficie, dal fluir di queste ne vengon su i solidi, e dalla rotazion delle rette si formano gli angoli. Ed ei volle chiamar *flussioni* i momentanei incrementi di siffatte grandezze, nè si servì ne' suoi ragionamenti geometrici delle flussioni, come parti infinitesime di una determinata magnitudine, ma delle prime, ed ultime di loro ragioni. Su di che merita esser letta la sua prima sezione de' Princip. Mat. de *methodo primarum, & ultimarum rationum*, e la sua introduzione alla quad. del. curv. o pure il *Metod. Invenem.* di Brook Taylor, il *Traité des Fluxions* di Mac-laurin, o l'opera del Signor Simpson, la cui epigrafe she *doctrine and application of fluxions*.

(1) Prop. XXXII.

(2) Dim. Prop. pres.

(3) Prop. IX.

ch'è differenza de' due CBK, AB, sarà differenza de' seguenti rettangoli $\frac{2}{3}$ FS in SD, ed $\frac{2}{3}$ CS².

Cor. III. Sicchè se facciasi come il raggio alla periferia di un circolo, così la differenza di un terzo del quadrato della sunnormale, e di due terzi del rettangolo della normale nel ramo ad un quarto proporzionale: questo darà la superficie della conoide generata dalla parabola AD.

Scol.

Avrei dovuto soggiungere la rettificazione della parabola per compir questa Teoria. Ma l'ordine della scienza vuol che vi si rechi dietro la quadratura della iperbole: conciossiachè da questa quella ne dipende (a).

LIB.

(a) Nè poi la ragion dell'arco DA alla semiordinata DC può investigarsi colla Geometria elementare, come fu di ciò si sono talora abbaccinati certi Giovani del nostro Studio per altro acuti, ed ingegnosi. „ Il „ triangolo Ddn, (han soluto dire) nel caso, che sia „ infinitesimo l'archetto Dd, è simile all' altro DSC. „ Dunque sarà Dd a Dn, come DS, o CK a CS. „ Si prenda Cy uguale alle sunnormale CS, e si meni „ per y la y^a parallela ad AC; dovrà essere Dd a Dn „ come CK a Cy, o come OC. CK ad OC. Cy. Dun- „ que sarà componendo l'arco DA alla semiordinata „ DC, come l'aja ACK_o al rettangolo ACy_o: e quin- „ di sarà geometricamente definibile questa seconda ra- „ gione al par della prima. Ma questo sofisma, come „ ve ne accorgete, è nato dal non aver essi avvertito il „ II. Lemma, ove contengosi i caratteri della proporziona- „ lità di 4. serie. Ed ho voluto rapportar queste cose, per- „ chè il pro de' falli altrui è il saperli di poi condurre „ saggiamente.

L I B. II.

DELL' ELLISSE.

C A P. I.

De' Diametri dell' Ellisse.

P R O P. I. T E O R.

*Nell' Ellisse il quadrato di qualunque semior-
dinata PT sta al rettangolo QPL delle asisse da Fig. 6.
entrambi i vertici Q ed L, come il lato retto
QH al trasverso QL.*

Dim. Intendasi qui replicato ciocchè si es-
pose nelle definizioni XI., e XIV. delle pre-
lezioni sulla genesi dell' Ellisse. E poichè sta
QH a QL in ragion composta di QH a QO,
e di QO a QL (1): ed è poi QH a QO, co-
me PA a PQ a cagion del parametro (2): e
pe' triangoli simili QLO, PLC la ragione di
QO a QL è uguale a quella di PC a PL.
Sarà QH a QL in ragion composta di PA a
PQ, e di PC a PL, cioè come il rettangolo di
PA in PC, o come il quadrato di PT (3), che
gli

(1) Lem. Prop. 23. El. VI.

(2) Cor. I. Defin. XIV. Prelez.

(3) Cor. I. Prop. VI. Prelez.

gli è uguale, al rettangolo di QP in PL. Val quanto dire il quadrato della femiordinata PT sta al rettangolo delle sue corrispondenti ascisse QP, PL, come il lato retto QH al trasverso QL (a). C.B.D.

Cor. I. E dimostrandosi in simil modo, che ordinata al diametro un'altra retta SE, debba stare RE^2 a QRL come QH a QL; farà (1) $PT^2 : QPL :: RE^2 : QRL$, e permutando $PT^2 : RE^2 :: QPL : QRL$.

Cor. II. Son dunque nell' Ellisse i quadrati delle femiordinate, come i rettangoli delle loro rispettive ascisse prese da entrambi i vertici.

Defin. I. Se il lato retto AB si applichi perpendicolarmente al trasverso AD, e si tirino le due rette BD, FC, quella però che passi per

si per.

(a) La definizione XIV. delle Prelezioni non solo agevola l'indagine de' parametri delle curve coniche; ma rende altresì nitide, e brevi le dimostrazioni sulla loro natura. Il Sig. Giovanni Bernulli negli Atti degli Erud. di Lips. ann. 1689. rinvenne ancor egli una maniera semplicissima, ed universale, onde potersi determinare le lunghezze de' lati retti nelle curve coniche dalla loro genesi per sezione: ed è la seguente. Dal vertice del cono N (vedi Fig. 7) si cali Na perpendicolare sul diametro QP della sezione. Nell' altezza del cono si prenda Nb uguale a questa perpendicolare, e pel punto b distendasi cbl parallela alla base del triangolo per l'asse; sarà sul linea il lato retto della sezione. Ma non mi è riuscito da questa idea del parametro compiere le dimostrazioni sì brevi, come con quella del nostro Autore.

(1) Prop. 11. El. V.

75

si pe' loro punti estremi B, e D, quest' altra pe' punti medj; la prima BD si dirà *Regolatrice*, e l' altra FC *Surregolatrice*.

Defin. II. E' il punto medio C del lato trasverso dirassi *centro*.

Scol.

Quest' istesso vuol intendersi nelle iperboli. Ma nella parabola la regolatrice, e la surregolatrice sono parallele al diametro: nè poi vi è centro in questa curva.

P R O P. II. T E O R.

Il quadrato di qualunque semiordinata NM è uguale al rettangolo fatto dall' ascissa AM nella retta MQ, che dal diti estremo M erigesi perpendicolare ad AM, e va fino alla regolatrice BD.

E lo stesso quadrato di NM è duplo del trapezio AMPF, che si arresta tra la medesima ascissa, e la surregolatrice FC.

Dim. Part. I. Il rettangolo di AM in MQ sta all' altro di AM in MD, come MQ ad MD (1), o come AB ad AD pe' triangoli simili MDQ, ADB. Ma l' è poi AB ad AD (2) come NM^2 ad AMD. Dunque farà $AMQ : AMD :: NM^2 : AMD$, e quindi NM^2 uguale ad AMQ (3).

Part.

(1) Prop. 1. El. VI.

(2) Prop. 1. Lib. II.

(3) Prop. 9. El. V.

Par. II. Si compia il rettangolo MABH, e si tirino QG, FR parallele ad AM, sarà esso rettangolo MABH duplo dell'altro MAFR, come di AF n'è dupla la AB (1). E poichè il triangolo QBH è uguale al triangolo PFR (2), sarà il rettangolo QGBH, ch'è duplo del primo triangolo, anche duplo dell'altro FPR. Dunque essendo tutto il rettangolo MABH duplo di tutto il rettangolo MAFR, come QGBH parte del primo è dupla di PFR parte del secondo, sarà (3) anche il primo avanzo MAGQ, cioè il quadrato di MN, che lo pareggia, duplo del secondo avanzo, cioè del trapezio AMPF. C . B . D.

Cor. I. Siccome MQ è minore di AB, così il rettangolo di MA in MQ, cioè il quadrato di NM (4) l'è altresì minore del rettangolo di MA in AB.

Cor. II. Dunque nell' Ellisse il quadrato di una qualunque semiordinata è minore del rettangolo della di lei ascissa nel parametro.

Cor. III. Ed i trapezj AMPF, AmpF sono in duplicata ragione delle corrispondenti semiordinate NM, nm.

Scel.

- (1) Defn. i. Lib. II.
- (2) Prop. 26. El. I.
- (3) Prop. 19. El. V.
- (4) Prop. prec.

Gli antichi Geometri in veggendo che in questa sezione i quadrati delle semiordinate son sempre minori de' rettangoli delle loro ascisse nel parametro, chiamaronla convenevolmente *Ellisse*, quasi curva *deficiente*. E fu detta *Parabola* (cioè curva *congruente*) la sezione dianzi illustrata, perchè i quadrati delle di lei semiordinate pareggian sempre i rettangoli delle corrispondenti ascisse nel parametro. Finalmente poichè l'altra sezione, di cui tratterassi nel seguente libro, ha i quadrati delle semiordinate maggiori de' rettangoli delle ascisse nel parametro, ella fu ragionevolmente chiamata *Iperbole*, quasi curva *eccedente*. In fatti le voci $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\epsilon\iota\nu$, $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$, $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$, donde son tratti i nomi di queste curve, non suonano in idioma latino, che *deficere*, *congruere*, *excedere*.

P R O P. III. P R O B L.

Per un dato punto del perimetro di un'Ellisse condurle una tangente.

Cas. I. Se il punto dato sia il vertice Q della sezione, basterà condurre per esso la retta QH parallela alle ordinate del diametro QL; ed ella sarà la tangente addimandata. Concioffiachè essendo QO, e QH rispettivamente

Fig. 6.

mente parallele a CP , e PT , il piano steso per quelle (1) sarà parallelo alla base del cono, ove ne giaccion queste. Il perchè sarà un cerchio (2) la sezione formata dal piano OQH . Sicchè l'angolo OQH dovrà esser retto, come lo è l'altro EPT (3), e la retta QH essendo tangente in Q del divisato cerchio, caderà fuori di esso, e dell'intero cono, onde convien, che sia la richiesta tangente (4).

Fig. 34. **Cas. II.** Or se il punto N , ove vuol tirarsi la tangente, non istia nel vertice della sezione, ordinata al diametro AD la retta NM , si elevi dal punto M , ov' ella lo incontra, la MS perpendicolare allo stesso diametro, e si distenda infino alla surregolatrice CF . Di poi si prolunghi l'ascissa MA fu del vertice, tantochè la MP sia terza proportionale in ordine ad MS ed MN ; la retta PN , che unisce i punti P ed N , farà la tangente addimandata.

Dim. Si unisca PS , farà il triangolo PMS metà del rettangolo di PM in MS , o del quadrato di NM : imperocchè essendo continuamente proporzionali le rette MS , MN , MP ,

(1) Prop. 15. El. XI.

(2) Prop. IV. Prelez.

(3) Prop. 10. El. XI.

(4) Questa dimostrazione del I. Caso è più rigorosa ed esatta di quella, che il Cel. P. Grandi addusse alla Prop. IX. delle sue ist. di sez. Con., e mi piace più di quell'altra, che fu esibita dal nostro Autore al I. Cas. Prop. IV. Lib. I.

il rettangolo dell'estreme SM, ed MP agguaglia il quadrato della media MN. Laonde essendosi dimostrato il trapezio AMSF anche metà del quadrato di NM (1), dovrà essere il triangolo PMS uguale al trapezio AMSF.

Ciò premesso, perchè la retta PN sia tangente della sezione, il solo punto N di essa conviene che si ritrovi nella curva, ed ogni altro ne stia al di fuori. Dunque, se l'è possibile, un' altro punto B della PN si ritrovi ancor dentro: egli è chiaro, che distesa per B la semiordinata QBR, esser debba QR maggiore di BR, e quindi la ragione di QR ad NM altresì maggiore della ragione di BR alla stessa NM (2), o dell'altra di RP ad MP, che a ragione de' triangoli simili BRP, NMP, l'è uguale. Or i due trapezi RAFV, MAFS sono in duplicata ragione delle semiordinate RQ, MN (3): e i due triangoli RPT, MPS son pure in duplicata ragione di RP a PM (4). Sicchè essendosi mostrata la ragione di RQ ad MN maggiore di quella di RP a PM, sarà benanche il trapezio RAFV all'altro MAFS in maggior ragione del triangolo RPT al triangolo MPS mostrato uguale al trapezio MAFS. Dunque (5) sarà il trapezio RAFV maggiore del

(1) Prop. prec. part. II.

(2) Prop. 8. El. V.

(3) Cor. 3. Prop. II. Lib. II.

(4) Prop. 22. El. VI.

(5) Prop. 10. El. V.

del triangolo RPT : e la differenza de' trapezi $RAFV$, $MAFS$, cioè il trapezio $RMSV$, sarà maggiore del trapezio $RMST$ differenza de' triangoli RPT , MPS . Lo che è assurdo. C.B.D.

Cor. I. Si tiri la regolatrice DO , farà il quadrato di NM uguale al rettangolo AMG (1). Ma lo stesso quadrato si è qui sopra mostrato uguale al rettangolo PMS : farà dunque il rettangolo PMS uguale all'altro AMG ; e quindi $PM:MA::MG:MS$. Ovvero pe' triangoli simili MCS , MDG , $PM:MA::MD:MC$.

Cor. II. Dunque nell'ellisse la sottangente è all'ascissa, che corrisponde all'ordinata per la contatto, come l'ascissa dal vertice remoto all'ascissa dal centro.

Cor. III. Onde farà il rettangolo PMC uguale all'altro AMD .

Cor. IV. Se la semiordinata MN per lo fig. 45. contatto M si prolunghi, fintantochè incontri in m il perimetro ellittico, e si unisca Rm ; questa retta sarà l'altra tangente, che dal punto R può cadervi sul medesimo perimetro. La dimostrazione è la stessa del presente Problema.

Cor. V. E vice versa se al diametro AD si tiri una qualunque ordinata Mm , ed agli estremi di questa si menino le tangenti MR , mR ; il punto del loro incontro dovrà stare in esso diametro prolungato.

PRO.

(1) Prop. II. Lib. II.

P R O P. IV. T E O R.

81

Nell' Ellisse AND il semidiametro CA è medio proporzionale tra CM ascissa dal centro corrispondente all' ordinata per lo contatto, e tra CP aggregato della medesima ascissa, e della sottangente. Fig. 34.

Dim. Essendosi mostrato (1) il rettangolo AMD uguale all' altro PMC; aggiuntovi di comune il quadrato di MC, farà il quadrato di AC (2) uguale al rettangolo PCM (3). Dunque farà $CM : CA :: CA : CP$. C. B. D.

Cor. Dunque il quadrato del semidiametro CA è uguale al rettangolo di CM in CP.

P R O P. V. T E O R.

La corda AB, che nell' Ellisse EBQ distendeasi pel di lei centro C, è quivi per metà divisa. E le tangenti AS, BT condotte pe' suoi estremi sono fra loro parallele. Fig. 35.

Dim. Part. I. Si ordinino AR, e BP al diametro EQ; faranno (4) i quadrati di esse rette come i rettangoli ERQ, EPQ. Ma a cagion de' trian-

(1) Cor. 3. Prop. prec.

(2) Prop. 5. El. II.

(3) Prop. 3. El. II.

(4) Cor. 2. Prop. I. Lib. II.

triangoli simili ACR, BCP sta $AR:BP::CR:CP$, e quindi $AR^2:BP^2::CR^2:CP^2$. Dunque (1) farà $GR^2:CP^2::ERQ:EPQ$. Ed in forza della prop. 12. El. V. per l'Ellisse, e della prop. 19. El. V. nell'Iperbole avrassi $CR^2:CP^2::CE^2:CQ^2$, e $CR:GP::CE:CQ$. Ma CE è uguale a CQ : dunque ancora CR farà uguale a CP . E quindi i triangoli ACR, BCP , che hanno le condizioni della 26. El. I., dovranno avere tra se uguali i corrispondenti lati CA, CB .

Part. II. I quadrati di CE , e di CQ sono rispettivamente uguali (2) ai rettangoli SGR, TGP : dunque son questi al par di quelli tra se uguali. Ma dianzi si sono mostrate uguali le loro basi CR , e CP : dunque le loro altezze SG, TG faranno anche tra se uguali. Il perchè avverandosi ne' triangoli ACS, BCT , che i due lati AC, GS sieno rispettivamente uguali a BC , e GT , e che l'angolo ACS adegui BCT , dovrà essere anche l'angolo CAS uguale all'altro CBT , e quindi (3) AS parallela a BT , $C.B.D.$

Defin. III. Se per lo centro G dell'Ellisse AQa , (o dell'Iperbole) conduca la retta GQ , che incontri le tangenti verticali AP, ap ; ogni trapezio, $PTBA$ che ne ascinde una
quar

- (1) Prop. 11. El. V.
(2) Cor. Prop. IV. Eib. H.
(3) Prop. 27. El. I.

qualunque semiordinata CB , si dirà *quadrilineo corrispondente* al punto C .

PROP. VI. TEOR.

Se da un qualunque punto C del perimetro ellittico ACA conducansi le due rette CN , CB rispettivamente parallele alla tangente laterale QS , ed alla verticale AP ; il triangolo NCB , che esso comprendevano col diametro della sezione, sarà uguale al corrispondente quadrilineo $TBAP$.

Dim. Ordinata QM al diametro Aa , dovrà stare (1) $GM:GA::GA:GS$. Ma pe' triangoli simili GMQ , GAP , è pure $GM:GA::GQ:GP$. Dunque (2) sarà $GA:GS::GQ:GP$. E quindi i due triangoli GAP , QGS reciprocando i lati che contengono il comune angolo AGP , dovranno essere di uguali aje: e faran pure tra se uguali le loro differenze dal triangolo QGM , cioè a dire il trapezio $PQMA$, e 'l triangolo QMS .

Or essendo i triangoli simili PGA , QGM come i quadrati de' loro lati omologhi GA , GM , sarà convertendo ed invertendo il trapezio $PQMA$ al triangolo PGA , come il rettangolo AMa [differenza de' quadrati di GA , e di GM] al quadrato di GA . E dimostrandosi in simil guisa, che il triangolo PGA stia all'altro trapezio $PTBA$,

E 2

come

(1) Prop. IV. Lib. II.

(2) Prop. II. El. V.

come il quadrato di GA al rettangolo ABa ; il trapezio $PQMA$, il triangolo PGA , e l'altra trapezio $PTBA$ staranno in ordinata ragione col rettangolo AMa , col quadrato di AG , e col rettangolo ABa . Dunque per uguaglianza ordinata i trapezi $PQMA$, $PTBA$ dovranno esser fra loro come i rettangoli AMa , ABa , o come i quadrati di QM , e di CB , cui son proporzionali (1) siffatti rettangoli. Ma i quadrati di QM , e di CB son come i triangoli QSM , CNB simili tra loro. Dunque dovrà stare il trapezio $PQMA$ all'altro $PTBA$, come il triangolo QSM all'altro CNB ; e quindi sarà il trapezio $PTBA$ uguale al triangolo CNB , come si è mostrato $PQMA$ uguale a QSM . $C.B.D.$

Cor. I. Se la retta cb , che si conduce parallela alla tangente verticale AP , o ad ap (2), cada sotto del centro G ; il triangolo cub sarà poi uguale al trapezio $ptba$ troncato dalla medesima cb sotto del centro. Qual cosa potrà mostrarsi come qui sopra.

Cor. II. Di qui potrebbe inferire la seguente verità geometrica, cioè se alla base PA del triangolo GPA si tirino le parallele QM , TB , ed AG si distenda in a , finchè Ga l'adequi; i trapezi $AMQP$, $ABTP$ si han tra loro, come i rettangoli AMa , ABa ,

PROQ.

(1) Cor. 2. Prop. I. Lib. II.

(2) Prop. V. Lib. II.

PROP. VII. TEOR.

La retta LN , che passa per lo centro dell' *Ellisse* $LAQR$, biseca tutte le corde DA , RX , ch' *entro di tal curva conduconsi parallele alle tan-* Fig. 37.
genti menate pe' suoi estremi L ed N.

Dim. Siccome nella parabola, così in questa altra sezione si possono verificar tre casi, cioè che una corda parallela alla tangente LS , o incontri il diametro nel vertice, o sopra, o sotto di esso. Ed a tutti e tre questi casi potrà adattarsi la medesima dimostrazione della Prop. 10. Lib. I., quando però le ordinate, che dagli estremi della medesima corda conduconsi al diametro, restino entrambe dalla stessa parte del centro. Infatti ordinate dagli estremi della corda AD le rette AK , DE al diametro GQ , sarebbe il triangolo AMK uguale al quadrilineo corrispondente $GKLH$ (1): onde aggiuntovi il sottoposto quadrilineo $KEfL$ ne verrà lo spazio $ALfEM$ uguale al quadrilineo $EGHf$, ovvero al triangolo MED (2). Sicchè togliendo dallo spazio $ALfEM$, e dal triangolo EMD lo spazio $fEMB$, resterà il triangolo BAL uguale al suo simile fBD , e quindi AB uguale a BD . Ma omettendo coteste dimostrazioni, perchè identiche a quelle della

2 para-

(1) Prop. prec.

(2) Prop. prec.

Cor. I. Una sola retta può condursi per due punti. Dunque I. la CN che passa per lo centro dell' Ellisse QRG, e per lo contatto di una qualunque tangente LS, dovrà passar ben anche pe' punti medj delle infinite corde, che quivi le si distendon parallele.

II. E quell' altra retta, che dal centro si meni al punto medio di una qualunque corda RX, dovrà girne al contatto della tangente, ch' è parallela alla medesima corda, dividendo per metà le infinite altre, che vi giaccion parallele fra loro, ed alla mentovata corda.

III. Di più quella retta, che unisce i punti medj di due corde tra se parallele, qualor si protragga d' ambe le parti, dovrà scendere al centro della sezione, ed attraversare i contatti di quelle tangenti, che loro son parallele.

Cor. II. Dunque gl' infiniti diametri dell' Ellisse convergono al di lei centro, e quivi si bisecano scambievolmente,

Cor. III. Laonde se dentro di un' Ellisse si tirino due corde tra se parallele, ed un' altra pe' loro punti medj; il centro starà nella metà di questa corda.

Cor. IV. Che se col centro C, e coll' intervallo CL (che sia un qualunque semidiametro dell' Ellisse) si descriva l' arco circolare LT, e poi si bisechi in q; la retta Cq che passa per lo centro, e pe' il punto medio di quest' arco, sarà un' asse dell' Ellisse. E ciò sarà vero, tanto se l' arco circolare cada sotto dell' arco ellittico:

Fig. 40.

co:

co: che se pe'l contrario quello cada sopra di questo. Imperocchè la retta Cq divide in due parti uguali, e ad angoli retti la corda LT dell' arco circolare (1) LqT : dunque dovrà anche bisecare ad angoli retti tutte le corde distese nell' Ellisse parallele ad LT (2). Onde sarà un' asse di questa sezione.

Cor. V. Finalmente la tangente verticale GH , e la laterale LS , incontrandosi fra loro, e coi semidiametri prodotti CH , CS , formeranno i due triangoli GZS , LZH di uguali aje.

PROP. VIII. TEOR.

I quadrati delle semior ordinate BD , FR sono fra loro, come i rettangoli LBN , LFN delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici del diametro LN .

Dim. Il triangolo GZS è uguale all' altro HZL (3): dunque aggiungendovi di comune il sottoposto pentangono $EGZLf$ ne risulterà il trapezio $SEfL$ uguale al quadrilineo $GEfH$, cioè al triangolo EMD (4). Sicchè tolto' da questi spazj il trapezio $EMBf$, che v' è di comune, resterà il trapezio $SMBL$ uguale al triangolo fBD .

Che

- (1) Prop. 30. El. III.
- (2) Prop. prec. Cor. 1. 2. 2.
- (3) Cor. 5. Prop. prec.
- (4) Prop. VI. Lib. II.

Che se l'ordinata RI cada sotto del centro dell' Ellisse, il triangolo TRI sarebbe uguale al quadrilineo $QIOP$ (1); onde aggiundovi di comune il triangolo OCI ; n'emergerà il trapezio $TRIOC$ uguale al triangolo CPQ , o all'altro CGH , o ad SCL . Sicchè se tolgasi dal triangolo CSL , e dal trapezio $TROC$ lo spazio TCG , che vi si ravvisa di comune, resterà il trapezio $STFL$ uguale al triangolo OFR .

Or essendosi mostrati i due triangoli fBD , OFR rispettivamente uguali ai quadrilinei $SMBL$ $STFL$, la ragion di quelli dovrà pareggiare la ragion di questi, cioè i quadrati di BD , e di FR si avranno fra loro (2) come i rettangoli LBN , LFN . $C.B.D.$

Defin. V. Il diametro PQ , ch'è parallelo Fig. 39. alle ordinate del diametro HE , dicesi *secondario* di HE , ed HE *primario* rispetto a PQ .

Defin. VI. La terza proporzionale, che in ordine al diametro primario, ed al secondario si ritrova, dicesi *parametro* dello stesso primario.

Cor. I. Dunque il diametro secondario è medio proporzionale tra il primario, e 'l parametro di esso. II. Di più il diametro primario starà al suo parametro (3) come il quadrato dello stesso primario al quadrato del secondario,

(1) Prop. VI. Lib. II.

(2) Cor. 2. Prop. VII. Lib. II.

(3) Defin. 10. El. V.

dario, o come il quadrato del semidiametro primario al quadrato del semidiametro secondario. III. E finalmente il quadrato del diametro secondario farà uguale al rettangolo del primario nel parametro.

Defin. VII. Il rettangolo del diametro EH nel di lui parametro EK appellavasi dagli antichi *figura* del diametro EH.

P R O P. IX. T E O R.

Il quadrato di qualunque semiordinata MD sta al rettangolo EDH delle parti del diametro EH, come il parametro EK al diametro EH:

Dim. MD^2 sta (1) a PC^2 , come il rettangolo di ED in DH all'altro di EC in CH, o sia a GE^2 . Dunque permutando avrassi $MD^2 : ED \cdot DH :: PC^2 : GE^2$. Ma i quadrati di PC, e di CE sono come EK ad EH (2). Dunque farà $MD^2 : ED \cdot DH :: EK : EH$. C. B. D.

Cor. I. Al diametro EH si applichi perpendicolarmente il suo parametro EK, si congiunga HK, e dal punto D si elevi DB perpendicolare ad EH; farà il quadrato della semiordinata MD uguale al rettangolo della sua ascissa ED nella perpendicolare DB. Qualcosa potrà dimostrarsi come la part. II. della Prop. II. di questo lib.

Cor.

(1) Prop. prec.

(2) Cor. Dehn. VI. Lib. II.

Cor. II. È tirandosi ad un punto qualunque M dell'ellisse la retta ML , sicchè incontrando il semidiametro CE in L , sieno continuamente proporzionali le rette CD , CE , CL ; cioè il semidiametro CE medio proporzionale tra l'ascissa dal centro, che corrisponde all'ordinata pel punto M , e la medesima ascissa accresciuta della DL ; la retta ML sarà tangente. Qual cosa potrà dimostrarsi come la prop. IV. di questo libro.

Defin. VIII. Quel diametro dell'Ellisse, che vien determinato dalla dilei genesi per sezione, potrà dirsi *Primitivo*.

Cor. Le proprietà essenziali del diametro primitivo, come si è fatto vedere nelle tre precedenti proposizioni, competono ad ogni altro diametro, che può condurvisi nell'Ellisse. Dunque a questo diametro dovranno pure attribuirsi quelle altre proprietà, che derivando le dall'essenziali mostrai appartenersi al primitivo.

Scol.

Le tangenti, di cui si è discorso nelle anteriori proposizioni, si deggion intender tirate coll'artificio della Prop. III., come co' principj di essa ne ho guidate le dimostrazioni. Restami per rigor di metodo a farvi vedere, che ad un punto dell'Ellisse non vi si possa condurre, che una sola tangente; e questo intendendo quaggiù eseguire, prima di favellar de' diametri conjugati.

PRO.

*Nell'Ellisse AQD la sunnormale MH sta Fig. 34.
ad MC ascissa dal centro, come AO parametro
dell'asse maggiore AD è allo stesso asse.*

Dim. A cagion del triangolo rettangolo PNH il quadrato di NM adegua il rettangolo PMH (1); e per la sottangente PM il rettangolo AMD è uguale all'altro PMC (2). Dunque avrassi $NM^2 : AMD :: PMH : PMC$. Ma di queste due ragioni la prima è uguale a quella di AO ad AD (3), e la seconda è quanto quell'altra di MH ad MC (4), Dunque sarà $MH : MC :: AO : AD$. C. B. D.

Cor. I. Se all'asse maggiore AD pongasi in A perpendicolarmente il suo parametro AO, e la retta CF passi per la metà dell'asse, e del parametro; tal linea sarà il luogo delle inflesse sunnormali dell'Ellisse; cioè ogni sunnormale MH sarà uguale ad MS parte della corrispondente ordinata, che framezza l'asse, e la CF. Imperocchè da questa prop. sta MH ad MC come AO ad AD, o come AF ad AC, o come MS ad MC: dunque sarà $MH : MC :: MS : MC$, ed MH uguale ad MS.

Cor.

- (1) Cor. Prop. 8. El. VI.
- (2) Cor. 3. Prop. III. Lib. II.
- (3) Prop. IX. Lib. II.
- (4) Prop. 1. El. VI.

Cor. R. Dunque per tirarsi la normale al punto N dell'Ellisse non si vuol far altro, che applicare all'asse la semiordinata NM, e tirarla infino alla CF. Di poi presa MH uguale ad MS, se si unisca la retta NH, questa sarà la cercata normale.

P R O P. XI. T E O R.

Fig. 41. L'angolo mistilineo LAG fatto dalla tangente LA, e dall'arco ellittico AGD non può esser diviso da una retta.

Dim. S'è possibile, cada la retta AM tra la curva, e la dilei tangente. Si tiri per lo contatto A il diametro AB, gli si applichi in A perpendicolarmente il suo parametro AE, e si unisca EB. Di poi una qualunque CD semiordinata al diametro AB si prolunghi, finchè incontri la AM. E dal punto C si tiri CK parallela ad AE, e terza proporzionale in ordine ad AC, e CM. Ed essendo CM^2 maggiore di CD^2 , farà il rettangolo ACK, ch'è uguale al primo quadrato (1), maggiore di ACO, ch'è uguale al secondo (2): e quindi CK maggiore di CO. Dunque congiunta la AK, dovrà questa segar la retta EO in un punto H. Si menì per H la retta HF parallela ad AE, e per F l'altra FN parallela a CM.

C'è

(1) Prop. 17. El. VI.

(2) Cor. 1. Prop. IX.

Ciò posto, i triangoli simili ACK , AFH sono fra loro, come i quadrati de' lati omologhi AC , AF ; ma i rettangoli di AC in CK , e di AF in FH sono come i medesimi triangoli, di cui ne sono dupli: ed i quadrati di AC , e di AF sono come i quadrati di CM , e di FN , perciocchè queste rette a cagion de' triangoli simili CAM , FAN son come quelle. Dunque sarà il quadrato di CM al quadrato di FN , come il rettangolo ACK all'altro AFH , o al quadrato di FG , che gli è uguale (1). E quindi siccome dalla costruzione il rettangolo ACK è uguale al quadrato di CM , così dovrebbe essere il quadrato di FN uguale al quadrato di FG ; lo che è assurdo. C. B. D.

Cor. I. Dunque il contatto di una retta, e di un' Ellisse è in un sol punto, come si vede nella Prop. III. di questo lib; e l'angolo del contatto ellittico è minore di qualunque angolo acuto rettilineo.

Cor. II. E quindi se la retta AL tocchi l'Ellisse nel punto A , niun'altra retta può esser tangente della medesima curva nello stesso punto A .

Cor. III. Lo stesso vuol intendersi della parabola, e si potrà poi applicare all'Iperbole.

(PRO.

(1) Cor. 1. Prop. IX.

P R O P. XII. T E O R.

Fig. 45. Se la retta mR , che tocchi l'Ellisse in m , incontri un qualunque semidiametro CA ; ordinatavi dal contatto la retta Mm , dovranno essere continuamente proporzionali l'ascissa dal centro CN , il semidiametro CA , e CR , ch'è il semidiametro protratto fino alla tangente. E viceversa.

Dim. Part. I. S'è possibile non sieno CN , CA , CR continuamente proporzionali: dunque si ritrovi Cr terza proporzionale in ordine a CN , e CA . Unita la retta rm , dovrebbe questa retta toccar l'ellisse in m (1). Ma dalla supposizione l'altra retta mR è la di lei tangente in m : dunque vi farebbero nel punto m dell'Ellisse due tangenti, lo che ripugna (2).
G . B . D .

La II. Parte di questa Prop. è chiara della Prop. IV.

P R O P. XIII. T E O R.

Fig. 40. Le ordinate del diametro secondario BE sono parallele al primario AD .

Dim. Da un qualunque punto F del perimetro ellittico conducasì al centro C la retta FCL ;

(1) Prop. III. Lib. II.

(2) Cor. 2. Prop. prec.

27

FCL, che tocchi in L la parte opposta del medesimo perimetro. Dai punti F ed L si tirino al diametro AD la semiordinata FG, e l'ordinata LT, e si unisca FT.

E poichè FC è uguale a CL (1), i due triangoli equiangoli FCG, LKC avran (2) uguali i lati FG, LK. Ma l'è poi LK uguale a KT: dunque le due FG, KT, che per essere ordinate al diametro AD sono tra se parallele, faranno altresì uguali fra loro. E quindi FT' farà (3) uguale e parallela a GK. Or pe' due parallelogrammi GH, CT le due rette GC, CK sono rispettivamente uguali ad FH, ed HT. Dunque siccome le prime sono tra se uguali per la perfetta uguaglianza de' medesimi triangoli FCG, LKC; così le altre due FH, HT faran pure tra se uguali. Il perchè BE, che passa pel punto medio della corda FT, e pe' l centro, (4) farà diametro di FT, ed FT ordinata di BE. Dunque la FT ordinata di BE, ch' è diametro secondario di AD, farà parallela ad AD diametro primario. C.B.D.

Defin. IX. Due diametri si dicono *conjugati fra loro*, se uno sia parallelo alle ordinate dell' altro.

Cor. I. Dunque ogni diametro primario,
G
e' l

(1) Prop. V. Lib. II.

(2) Prop. 26. El. I.

(3) Prop. 43. El. I.

(4) Cor. I. n. 2. Prop. VII. Lib. II.

e 'l suo secondario sone conjugati fra loro ,

Cor. II. E vi son pure due assi tra lor conjugati .

P R O P. XIV. T E O R.

I due assi conjugati dell' Ellisse son disuguali fra loro . E 'l maggiore di essi è il massimo diametro , il minore il minimo ,

Fig. 46.

Dim. Part. I. S' è possibile sieno uguali fra loro gli assi conjugati AB , MN dell' Ellisse AMN . Tirata ovunque ad uno di essi la semiordinata RX , il quadrato di essa sarebbe uguale al rettangolo di AR in RB : imperciocchè quello sta a questo, come il quadrato di MN al quadrato di AB (1). Ma il punto X tocca la circonferenza del cerchio, che ha per diametro AB (2). Dunque cotesto circolo si confonderebbe colla proposta Ellisse, Locchè è assurdo,

Part. II. Si descrivano su i diametri AB , ed MN i semicircoli ADB , NFM . Egli è chiaro, che le circonferenze di questi semicerchi non debbano tagliar l' Ellisse. Poichè se uno di essi, per esempio ADB tagliasse l' Ellisse in X , ordinata XR sul diametro AB del semicerchio ADB dovrebb' essere il quadrato di RX (3) uguale al rettangolo ARB , e quindi NM^2 uguale ad AB^2 ;

(1) Cor. Prop. VIII.

(2) Prop. 35. El. III.

(3) L' istessa.

AB^2 , locchè ripugna alla prima parte.

Ciò premesso, dal centro C dell'Ellisse si tirino ovunque il semidiametro CFD ; sarà sempre CE minore di CD , e maggiore di CF : cioè ogni semidiametro dell'Ellisse sarà minore del semiasse maggiore CB , e maggiore del semiasse minore CM . E quindi il massimo diametro è l'asse maggiore, e 'l minimo n'è il minore, C , B , D .

P R O P. XV. T E O R.

Nell'Ellisse $ABCD$ congiunti gli estremi di due diametri coniugati QF , EG n'emergerà un Fig. 42
parallelogrammo uguale alla metà del rettangolo degli assi coniugati AC , BD ,

Dim. Essendo i semidiametri QH , ed HE rispettivamente uguali ad HF , ed HG , e l'angolo QHE uguale ad FHG , sarà (1) QE uguale ad FG , e l'angolo GFQ uguale ad FQE : dunque le due QE , e GF saranno eziandio tra se parallele (2), e la figura $QEFG$ sarà un parallelogrammo.

Dagli estremi A , e B del semiasse maggiore HA e del minore HB , e dagli altri Q ed E de' semidiametri coniugati HQ , HE si tirino le tangenti AL , BL , QM , EM , che si uniscan fra loro, come ne appare nella

G 2

figu-

(1) Prop. 4. El. I.

(2) Prop. 28. El. I.

figura 43, e per Q e B si distendano le rette XQY, ZBV parallele a BH, e QH, ed in fine si congiunga BQ.

Il parallelogrammo BXYH è duplo del triangolo QBH; perciocchè tali figure sono insieme sulla stessa base BH, e fra le medesime parallele BH, XY: e dello stesso triangolo QBH n'è ancor duplo l'altro parallelogrammo QZVH, che ha seco la medesima base HQ, e sono entrambi rinchiusi nelle stesse parallele QH, ZV. Dunque saranno tra se uguali i parallelogrammi BXYH, QZVH, e con ciò dovran serbare ugual ragione allo stesso parallelogrammo IASH. Or i parallelogrammi BXYH ed IASH sono tra loro come (1) le basi HY ed HS, su cui poggiano, vale a dire in duplicata ragione di HY ad HA (2). Ed è ancora il parallelogrammo QZVH al medesimo parallelogrammo IASH (3), come HV base del primo ad HI base del secondo, cioè in duplicata (4) ragione di HV ad HE. Dunque sarà ancora (5) $HY : HA :: HV : HE$, o sia (6) il parallelogrammo BXYH all'altro BLAH, come il parallelogrammo QZVH al parallelogrammo QMEH, essendo rispettivamente equali fra loro e quelli, e questi. Sicchè essen-

doli

- (1) Prop. 1. El. VI.
- (2) Prop. XII. Lib. II.
- (3) Prop. 1. El. VI.
- (4) Prop. XII. Lib. II.
- (5) Prop. 11. El. V.
- (6) Prop. 1. El. VI.

dosi mostrati uguali i parallelogrammi BXYH, QZVH, anche gli altri due BLAH, QMEH dovranno essere tra se uguali, e l' faranno ancora i triangoli BAH, QHE metà di essi. Sicchè prendendo i quadrupli di questi triangoli n'emergerà il parallelogrammo ABCD uguale all'altro QEFG. Ma il primo parallelogrammo è metà del rettangolo degli assi LKRS: dunque lo farà benanche l'altro QEFG. C.B.D.

Fig. 42.

Cor. I. Se si compia da' diametri conjugati QF, EG il parallelogrammo MNOP, è facile a comprendersi, che i parallelogrammi LKRS, MNOP sieno quadrupli rispettivamente de' parallelogrammi BLAH, QMEH: e quindi dovranno quelli pareggiarsi fra loro, come di questi si è quassù mostrato.

Cor. II. Dunque tutti i parallelogrammi iscritti in un' Ellisse sono uguali fra loro: e' l' sono ben anche uguali quegli altri, che vi si circoscrivono.

Cor. III. Si ordini ET sul semiasse minore HB, starà HT ad HB come HE ad HI, o come HV ad HE (1): ma nel progresso della presente dimostrazione si è veduto starne $HY : HA :: HV : HE$. Dunque sarà ancora $HY : HA :: HT : HB$.

Fig. 43.

Cor. IV. Cioè se dagli estremi di due semidiametri conjugati si tirino due semior ordinate ai semiaassi; questi ne saran divisi proporzionalmente.

G 3

PRO.

(1) Prop. XII. Lib. II.

P R O P. XVI. T E O R.

Nell' Ellisse ARDQ la somma de' quadrati degli assi AD, RQ adegua la somma de' quadrati di due qualunque diametri conjugati GL, MP.

Dim. Si tirino da G ed M estremi de' semidiametri conjugati GC, MC le ordinate GB, MN agli assi AD, RQ; farà (1) $CA : CQ :: CB : CN$, e $CA^2 : CQ^2 :: CB^2 : CN^2$, e quindi (2) $CA^2 : CQ^2 :: AB \cdot BD : RN \cdot NQ$. Ma l'è poi $CA^2 : CQ^2 :: AB \cdot BD : GB^2$ (3). Dunque farà $ABD : GB^2 :: ABD : RNQ$, e con ciò GB^2 uguale ad RNQ .

Per simil modo dimostresi MN^2 uguale al rettangolo ABD.

E poichè CG^2 è uguale a BC^2 con BG^2 (4); e per la stessa ragione CM^2 è anche uguale a CN^2 con NM^2 . Dunque la somma de' quadrati di CG, e di CM farà uguale alla somma di questi quattro quadrati, BC^2 , BG^2 , CN^2 , NM^2 : cioè (sostituendo a BG^2 , ed NM^2 i rettangoli RNQ , ABD) a BC^2 , RNQ , CN^2 , ed ABD, o finalmente (5) ad AC^2 e CQ^2 (intendendosi unite insieme la prima grandezza colla quarta, e la seconda colla terza). Or essendo

(1) Cor. IV. prop. prec.

(2) Prop. 19. El. V. e 5. El. II.

(3) Cor. 2. Prop. I. Lib. II.

(4) Prop. 47. El. I.

(5) Prop. 5. El. II.

il quadrato di CG col quadrato di CM uguale al quadrato di AC col quadrato di CQ ; prendendo i quadrupli, faranno i due quadrati de' diametri coniugati GL , PM insieme uguali ai quadrati degli assi AD , RQ . C. B. D.

Cor. I. Se il semiasse maggiore dell' Ellisse CB si protragga oltre il vertice, tantochè la AD adegui CB ; e poi descritto su di AD il semicerchio ARD vi si applichi dal punto A una corda AR nè maggiore di AC , nè minore di AB ; essa corda potrà dinotare un semidiametro dell' Ellisse. E s' ella si prolunghi finchè arrivi alla DS tangente del semicercolo in D , e si unifca l'altra corda DR ; quest' altra sarà il suo semidiametro conjugato, ed RS il semiparametro. Imperocchè i due quadrati di AR e di RD sono uguali al quadrato di AD (1), o di CB , o pure a' quadrati di AC , e di AB . E quindi in vigore di questa proposizione essendo AR un semidiametro dell' Ellisse, il suo conjugato dovrà esser l'altro DR . Ed essendo tra se simili i triangoli ARD , DRS , dovrà essere $AR:RD::RD:RS$ (2), e quindi RS sarà il semiparametro di AR (3).

Cor. II. E se da' punti A , e D s'intendessero applicate due corde nel semicercolo rispettivamente uguali al semiasse minore, i cui

G 4

estre-

(1) Prop. 31. El. III., e 47. El. I.

(2) Cor. Prop. 8 El. VI.

(3) Cor. Prop. VIII. Lib. II.

estremi cadano in N , ed M ; l'arco NM farà il luogo de' diversi semidiametri, di che n'è suscettibile l'Ellisse.

Cor. III. Intanto se l'arco NM si bisechi in O , le corde AO , ed OD saranno tra se uguali. Dunque AO disegna la lunghezza di quel semidiametro, che adegua il suo conjugato; e con ciò ancora il suo semiparametro. E quindi i quadrati delle sue semiordinate dovranno pareggiare i rettangoli delle corrispondenti ascisse dell'intero diametro (1).

Cor. IV. Dunque in ogni Ellisse vi è sempre un diametro, di cui ciascuna semiordinata è media proporzionale tra le di lui parti, ch'essa ne ascinde. Intanto la lunghezza, e la posizione di questo diametro potrà determinarsi dal Coroll. prec.

Cor. V. Finalmente la retta MT è la minima di quelle rette, che arrestandosi tra l'arco MN , e la tangente DS passa per A ; siccome la massima sarebbe quell'altra, che per N si conduce. Dunque il parametro dell'asse maggiore è il minimo, e quello del minore è il massimo.

CAP.

(1) Prop. IX. Lib. II.

Delle Tangenti, e Secanti dell' Ellisse.

P R O P. XVII. P R O B L.

Dato il punto R fuori l' Ellisse AMD tirare una tangente.

Cost. Si unisca il centro C della figura Fig. 45^a col punto R, e si ritrovi CN terza proporzionale dopo CR, e CA. Per N distendasi la retta Mm parallela alla tangente dell' Ellisse in A: e si uniscano le rette RM, Rm; queste saranno le tangenti condotte dal punto dato sulla fattoposta Ellisse.

La dimostrazione è chiara dalla Prop. XII.

Cor. La retta CR, che unisce il centro dell' Ellisse col concorso di due tangenti, dovrà bisecare la corda distesa pe' contatti.

P R O P. XVIII. T E O R.

Se le due corde QA, FH dell' Ellisse QHF s' incontrino dentro della curva, o fuori di essa; Fig. 48. i rettangoli FKH, QKA si avran fra loro come ^{e 49^a} i quadrati delle due tangenti ME, NE parallele ad esse corde.

Dimo.

Dim. S'intendano le tangenti, e le corde prodotte insin che incontrino in G, Z, P, e T i semidiametri CN, CM tirati pe' contatti. E poi per H ed A, ove le seganti tagliano la curva, si distendano SHR, AL parallele alle tangenti NE, ME. Sarà (1) il triangolo PSH uguale al corrispondente quadrilineo NSRZ; ficchè unendovisi di comune il sottoposto triangolo SCR, dovrà risultarne il trapezio PHRC uguale al triangolo NCZ. E dimostrandosi in simil modo, che l'altro trapezio LATC agguagli lo stesso triangolo NCZ, dovranno i due trapezj PHRC, LATC essere uguali fra loro. Laonde prendendo la differenza di questi trapezj dal comun trapezio PKTC, dovrà restarne il trapezio HKTR uguale all'altro PKAL.

Ciò premesso i triangoli simili DHR, DKT sono in fra di loro come i quadrati de' loro lati omologhi DH, DK: dunque sarà la differenza de' triangoli, cioè il trapezio HKTR al triangolo DKT, come la differenza de' quadrati di DH, e di DK, val quanto dire (2) il rettangolo FKH al quadrato di DK. Ma per la simiglianza de' triangoli DKT, MEZ sta $DKT:MEZ::DK^2:ME^2$. Dunque le tre grandezze HKTR, DKT, MEZ sono in ordinata ragione colle altre FKH, DK^2 , ME^2 : onde farà *ex aequo* $HKTR:MEZ::FKH:ME^2$.

In simil guisa dimostrasi che il trapezio
PKAL

(1) Prop. VI. Lib. II.

(2) Prop. 5., o 6. El. II.

PKAL serbi al triangolo GNE la medesima ragione del rettangolo QKA al quadrato di NE. Per la qual cosa, essendo le due ragioni di HKTR ad MEZ, e di PKAL a GNE uguali fra loro, perciocchè il trapezio è uguale al trapezio, e'l triangolo al triangolo; dovrà eziandio il rettangolo FKH serbare al quadrato di ME la stessa ragione, che il rettangolo QKA tiene al quadrato di NE. Onde farà permutando $FKH : QKA :: ME^2 : NE^2$. C. B. D.

Cor. I. Se le corde, che s'intersecano entro l'Ellisse, passino amendue pel di lei centro; esse saranno due diametri della medesima figura, ed i rettangoli de' loro segmenti diverranno i quadrati delle metà de' medesimi diametri. Dunque anche in questo caso debb'esser vero, che i quadrati di due semidiametri di un'Ellisse debbano aver fra loro la medesima ragione de' quadrati delle due tangenti parallele ad essi.

Cor. II. E quindi le tangenti, che all'Ellisse conduconsi da uno stesso punto, non sono uguali fra loro, come avverasi nel cerchio, ma nella ragion de' semidiametri paralleli ad esse.

Cor. III. Or se delle due corde, che si segano fuori l'Ellisse, una diventi tangente, sarà in tal caso il quadrato di questa tangente al rettangolo della secante intera nella parte, ch'è fuori la curva, come il quadrato del semidiametro parallelo alla tangente al quadrato del semidiametro parallelo alla secante.

Cor.

Cor. IV. E se la corda CA sia segata dalle altre due FP, fp, che sono tra se parallele; **Fig. 18.** i rettangoli FMP, fmp si avranno fra loro come gli altri due di AM in MC, e di Am in mC.

PROP. XIX. TEOR.

Se il trapezio ABDC, qualunque ne sia la sua specie, si trovi iscritto in un'Ellisse, e da un qualunque punto P del perimetro di questa figura si tirino ai lati di quello altrettante rette PM, PN, PR, PQ sotto dati angoli; i rettangoli delle rette PR e PQ, PM e PN, che cadono su i lati opposti del trapezio, avran sempre fra loro una data ragione.

La dimostrazione di questo Teorema è identica a quella della Prop. XII. del I. Lib.; onde di là può attignersi senza confusione.

PROP. XX. TEOR.

*Cadano da un punto A sull'Ellisse GNE **Fig. 21.** le due tangenti AB, AC, e distendasi per A la retta AV parallela alla corda BC pe'contatti; ogni segante AE menata all'Ellisse dal punto A dovrà restar divisa armonicamente dalla curva, e dalla corda fra'contatti, cioè dovrà essere $EO : OD :: EA : AD$.*

E conducendosi per S (punto medio della corda fra'

fra' contatti) una qualunque segante ESV; ancor quest'altra dovrà esser divisa armonicamente dalla curva, e dalle due VA, e BC, cioè dovrà essere ES:SL::EV:VL.

Le dimostrazioni di questo Teor., e degli altri due seg. son anche le istesse di quelle della Prop. XIII. Lib. I. e delle XV. e XV.

Cor. I. Dunque se dal punto A si menino all' Ellisse GNE la tangente AC, e la segante AE, che armonicamente in O si divida; la retta CO, che passa per questo punto e pe' contatto C, dovrà passare per lo contatto dell'altra tangente AB.

Cor. II. E se dal punto A cadano su dell' Ellisse le due seganti AE, AG, ed amendue si dividano in O, e Q armonicamente; la retta QO dovrà passare pe' contatti delle tangenti menate all' Ellisse dallo stesso punto A.

PROP. XXI. TEOR.

Sia FG un qualunque diametro dell' Ellisse SBD, e DK una sua semiordinata, e per l' estremo E della sottangente KE le si conduca la parallela VE; Fig. 22a io dico, che in questa retta debbasi ritrovar sempre il concorso di due tangenti tirate agli estremi di qualunque corda AS, che passi per K.

PRO.

P R O P. XXII. T E O R.

Fig. 23. Se dal punto R cadano sulla sottoposta Ellisse, se BAT le due tangenti RF, RG, e le due secanti RB, RT; tirata la retta FG pe' contatti, e le altre due AV, BT per le sezioni; dovranno queste tre rette o giacersi tra lor parallele, o convergere insieme ad un'istesso punto.

Cor. E se dallo stesso punto R vi cadano le due tangenti RF, RG, e la sola secante RT; la retta FG tra' contatti o dovrà esser parallela alle tangenti menate per T, ed V, o incontrarle in un'istesso punto.

P R O P. XXIII. T E O R.

Fig. 45. Nell' Ellisse se agli estremi A, e D di un qualunque diametro AD si tirino le tangenti AQ, DS, che ovunque ne incontrino un'altra tangente laterale SQ; il rettangolo delle tangenti verticali DS, AQ sarà sempre uguale al quadrato di CR semidiametro conjugato ad AD.

Dim. Dal contatto M si tirino a' semidiametri conjugati CA, CB le ordinate MN, ML, e si distenda la tangente laterale SQ, finchè incontri in R il diametro DA; faranno le tre rette (1) CN, CA, CR continuamente proporzionali; onde il quadrato della media CA dovrà

(1) Prop. XII, Lib. II.

vrà pareggiare il rettangolo dell'estreme CN, CR. Dunque la differenza del quadrato di CA dal quadrato di CR dovrà uguagliare la differenza del rettangolo RCN dallo stesso quadrato di CR; cioè (1) il rettangolo DRA dovrà essere uguale all'altro CRN (2). E quindi le rette RD, RC, RN, RA (3) dovranno essere proporzionali. Ma le rette DS, CT, NM, AQ a cagion de' triangoli simili DRS, CRT, NRM, ARQ sono proporzionali alle RD, RC, RN, RA. Dunque sarà ancora $DS : CT :: NM : AQ$, e quindi il rettangolo di DS in AQ farà uguale a quello (4) di CT in NM. Or il rettangolo di CT in NM, o di CT in CL è uguale al quadrato di CB, essendo continuamente proporzionali (5) le tre rette CL, CB, CT. Dunque anche il rettangolo di DS in AQ farà uguale al quadrato di CB semidiametro conjugato ad AD. C, B, D,

P R O P. XXIV, T E O R.

Poste le medesime cose della prop prec. il rettangolo SMQ delle parti della tangente laterale, che restano fra il contatto, e le tangenti verticali, adegua il quadrato del semidiametro CG parallelo ad essa tangente laterale,

Ed

- (1) Prop. 6. El. II.
- (2) Prop. 2. El. II.
- (3) Prop. 16. El. VI.
- (4) L' istessa.
- (5) Prop. XII. Lib. II.

Ed all'istesso quadrato di CG l'è pure uguale il rettangolo TMR delle parti della tangente laterale, che sono tra il contatto, e gl'incontri de' due semidiametri conjugati CR, CT.

Dim. Part. I. Le due ragioni di DS ad SM, e di AQ a QM sono uguali fra loro, perchè uguali a quella di CB a CG (1). Dunque la ragion, ch' emerge dalla loro composizione, sarà duplicata di una di esse, o duplicata di quella di CB a CG, cioè a dire starà DS.AQ: SM.MQ:: CB²: CG². Ma si è qui sopra mostrato il rettangolo di DS in AQ uguale al quadrato di CB: dunque all' altro quadrato di CG sarà pure uguale il rettangolo di SM in MQ.

Part. II. Il rettangolo RMT sta all' altro QMS in ragion composta di RM ad MQ, e di MT ad MS: ma di queste due componenti la prima è uguale a quella di RN ad NA, e la seconda agguaglia quest' altra di NC ad ND (2). Dunque il rettangolo RMT starà all' altro QMS in ragion composta di RN ad NA, e di NC ad ND, vale a dire (3) come il rettangolo di RN in NC all' altro di NA in ND. Or questi sono uguali fra loro (4): dunque sarà il rettangolo RMT uguale a QMS, o a CG². C . B . D.

CAP.

(1) Cor. 2. Prop. XVIII. Lib. II.

(2) Prop. 2. El. VI.

(3) Prop. 23. El. VI.

(4) Cor. 3. Prop. XI. Lib. II.

De' Fuochi dell' Ellisse.

QUì non occorre replicar le definizioni de' fuochi, del punto di sublimità, e della linea di sublimità; potendosi adottar quelle, che furono generalmente recate nel Cap. III. della Parab. defin. VII. ed VIII. Converrà aggiungervi solamente, che in ogni Ellisse il parametro principale, cioè quello dell' asse maggiore, n' è sempre più picciolo dell' asse minore: imperocchè essendo l' asse maggiore, il minore, ed esso parametro continuamente proporzionali (1); siccome il secondo termine di quest' analogia è sempre minore del primo, così del secondo ne farà anche minore il terzo. Dunque si potranno all' asse maggiore di un' Ellisse applicare di quà, e di là dal di lei centro due ordinate rispettivamente uguali al parametro principale: e queste dovranno essere equidistanti dallo stesso centro (2). Val quanto dire i fuochi dell' Ellisse serbano ugual distanza dal suo centro.

Defin. X. L' *Eccentricità* dell' Ellisse è la distanza del di lei centro da ciascun de' fuochi.

Così dell' Ellisse APB, i di cui fuochi ^{Fig. 50.} sieno F ed V, e l' centro C, si dirà CF, o CV l' *Eccentricità*.

H

I fue.

(1) Defin. VI. Lib. II.

(2) Dim. Prop. V. Lib. II.

I fuochi soglionfi dire *Umbilichi*, e dagli antichi Geometri si chiamavano *puncta comparationis*.

PROP. XXV. TEOR.

La retta PF, che unisce un fuoco dell' Ellisse con un' estremo dell' asse minore, è uguale al semiasse maggiore.

E l' Eccentricità è media proporzionale tra il semiasse maggiore, e la differenza di esso dal semiparametro principale.

Dim. Part. I. Essendo le tre rette AB, PQ, AL continuamente proporzionali (1), il faran ben anche le loro metà CA, CP, FM, e quindi starà $CA^2 : CP^2 :: CP^2 : FM^2$. Ma la prima di queste ragioni è uguale a quella di AFB ad FM^2 (2): dunque sarà ancora $AFB : FM^2 :: CP^2 : FM^2$, e perciò AFB uguale a CP^2 . Per la qual cosa, se a queste grandezze aggiungasi di comune il quadrato di CF, ne verrà (3) CA^2 uguale ad FP^2 (4): e quindi CA uguale ad FP.

Part. II. Si prenda PE uguale al semiparametro principale o ad FM, e si unisca CE; sarà (5) $PF : PC :: PC : PE$. Dunque i triangoli

(1) Defn. VI. Lib. II.

(2) Cor. 1. n. 2. Prop. VIII. Lib. II.

(3) Prop. 5. El. II.

(4) Prop. 47. El. I.

(5) Per quel che si è detto I. Part.

li FCP , CPE , che han proporzionali i lati intorno al comune angolo CPF , (1) dovranno avere uguali gli altri angoli PCF , CEP : onde convien che CEP sia retto al par di PCF . Il perchè sarà CE perpendicolare su di PF , e (2) l' eccentricità CF media proporzionale tra il semiasse PF , e tra FE differenza di esso dal semiparametro principale. C. B. D.

Cor. I. Il rettangolo AFB è uguale al quadrato di CP semiasse minore.

Cor. II. Di più se prendasi per centro un' estremo dell' asse minore e per intervallo un semiasse maggiore dell' Ellisse; il cerchio, che quindi si descrive, segnerà nell' asse i di lei fuochi. E questo è un metodo agevolissimo a ritrovarli.

Cor. III. Essendo il quadrato del cateto CF differenza de' quadrati dell' ipotenusa PF , e dell' altro cateto CP ; sarà il quadrato dell' eccentricità differenza de' quadrati del semiasse maggiore, e del minore.

P R O P. XXVI. T E O R.

Poste le medesime cose della prop. prec. se ad un qualunque punto M del perimetro ellittico Fig. 51. MRS conduca la tangente MP , la normale MO , e la semiordinata all' asse MN ; io dico che l' ec-

H 2

cen.

(1) Prop. 6. El. VI.

(2) Prop. 9. El. VI.

centricità CF sia media proporzionale tra CP, e CO, cioè tra l'ascissa dal centro accresciuta della sottangente, e tra la medesima ascissa diminuita della sunnormale.

Dim. CN sta ad NO, come SR ad RQ (1), o come CR^2 a CT^2 (2). Dunque sarà convertendo $CN:CO::CR^2:CR^2-CT^2$. Or CR^2-CT^2 è uguale a CF^2 (3), ed è poi la ragione di CN a CO l'istessa di quella di PCN a PCO (4). Dunque sarà $PCN:PCO::CR^2:CF^2$: e quindi come PCN è uguale a CR^2 (5), così dovrà essere PCO uguale a CF^2 , e CF media proporzionale tra PC, e CO. C.B.D.

P R O P. XXVII. T E O R.

Poste le medesime cose della prop. prec. se da' fuochi F, ed V si tirino al punto M del contatto i due rami FM, VM; gli angoli VME, FMP, ch'essi formano colla tangente PE, saranno tra se uguali.

Dim. Sulla medesima tangente si calino da' fuochi F, ed V le perpendicolari FL, VG, e si tiri la normale MO; sarà (per lo parallelismo

- (1) Prop. X. Lib. II.
- (2) Cor. 1. n. 2. Prop. VIII. Lib. II.
- (3) Cor. 3. Prop. prec.
- (4) Prop. 1. El. VI.
- (5) Cor. Prop. IV. Lib. II.

lismo delle rette FL, OM, VG) come VO ad FO, così MG ad ML.

E poichè (1) sta $CO : CF :: CF : CP$; prendendo la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come la differenza di quelli (a) alla differenza di questi, avrassi $VO : VP :: OF : FP$, e permutando $VO : OF :: VP : FP$. Ma la prima di queste ragioni si è dimostrato uguagliar quella di MG ad LM: e la seconda pe' triangoli simili VPG, FPL è uguale alla ragione di VG ad FL. Dunque sarà $MG : LM :: VG : FL$. Il perchè i due triangoli VMG, FML avendo le condizioni della VII. El. VI. dovranno avere uguali gli angoli VMG, FML. C.B.D.

Cor. I. Si meni VE parallela al ramo FM; farà l'angolo VEM interno di coteste parallele uguale all'esterno FMP, ovvero ad VME, cui si è mostrato uguale esso FMP. Laonde essendo i due angoli VEM, VME tra se uguali, il triangolo MVE sarà isoscele (2), e la perpendicolare VG dovrà bisecar la base ME (3).

Cor. II. Si unifca la retta CG, faranno tra se uguali non meno le rette EG, e GM, che le altre VC, e CF. Dunque la retta CG dovrà esser parallela alle due FM, ed VE.

H 3

Cor.

(1) Prop. prec.

(a) Questa maniera compendiosa di argomentare in proporzione nasce dall'unire insieme la 12., e la 19. del V. degli El.

(2) Prop. 6. El. I.

(3) Prop. 16. El. I.

Cor. III. Cioè se da un fuoco dell' Ellisse si meni la perpendicolare su di una di lei tangente, e si unisca il centro della figura col punto d'incidenza; coteſta retta dovrà eſſer parallela al ramo tirato al contatto dall'altro fuoco.

Cor. IV. E viceverſa ſe dal centro C conducaſi CG parallela al ramo FM che paſſa pe' l' contatto M, e poi ſi unisca l' altro fuoco V col punto G concoſo della parallela, e della tangente; la congiunta VG dovrà inſiſtere perpendicolarmente ſulla tangente ME.

P R O P. XXVIII. T E O R.

Fig. 52. Il rettangolo de' rami VM ed MF, che ſi conducono da' fuochi allo ſteſſo punto M del perimetro ellittico, è uguale al quadrato del ſemidiametro CB conjugato a quello, che paſſa per M.

Dim. Si tirino i ſemiaſſi conjugati CS, CT, e ſi protraggaſi inſino alla tangente QM. Si meni CL parallela al ramo VM, e ſi uniſca FL: farà (1) FL perpendicolare ad ML.

I due triangoli rettangoli FLG, QCG avendo l'angolo acuto G di comune ſono equiangoli, e ſimili fra loro: ſicchè ſarà GF a GQ, come GL a GC. Ma GL ſta a GC come GM a GV (per eſſere ſimili i triangoli CGL, VGM). Dunque ſarà $GF : GQ :: GM;$

(1) Cor. 4. Prop. prec.

GM:GV. Il perchè avendo questi altri triangoli GMV, GQF le condizioni della 6. El. VI., avranno uguali gli angoli GVM, GQF. Ma si son mostrati uguali (1) gli angoli GMV, QMF: dunque i due triangoli GVM, FQM saranno altresì equiangoli, e simili fra loro. Per la qual cosa dovendo stare GM: MV :: MF: MQ, il rettangolo delle medie MV, ed MF dovrà pareggiar quello dell'estreme GM ed MQ, cioè a dire il quadrato di CB (2). C.B.D.

P R O P. XXIX. T E O R.

Poste le medesime cose della prop. prec. la somma de' rami FM, ed VM è uguale all'asse maggiore AS.

Dim. Si tali MR perpendicolare su di FV, farà (3) FM^2 uguale ad FR^2 con RM^2 , ed MV^2 uguale ad VR^2 con RM^2 . Dunque la somma de' quadrati di FM, e di MV sarà uguale ad VR^2 , ad FR^2 , ed a $2RM^2$. Or la somma de' quadrati di VR, e di RF è uguale (4) a $2CF^2$ con $2CR^2$. Dunque i quadrati di FM, e di VM saranno uguali a $2CF^2$ con $2CR^2$ e $2RM^2$, o sia a $2CF^2$ con $2CM^2$ (5). E quindi se ad FM^2 , ed

H 4

VM²

(1) Prop. XXVII. Lib. II.

(2) Prop. XXIV. Lib. II.

(3) Prop. 47. El. I.

(4) Prop. 9. El. II.

(5) Prop. 47. El. I.

VM^2 aggiungasi $2FMV$, ed alla somma di $2CF^2$ e di $2CM^2$ si ponga $2CB^2$, ch'è uguale a $2FMV$ (1); ne verranno i due quadrati di FM , e di VM col doppio rettangolo di FM in MU , cioè il quadrato delle due FM ed MV come una sola retta (2), uguali a $2CF^2$, a $2CM^2$, ed a $2CB^2$. Or i doppi quadrati de' semidiametri conjugati CM , e CB sono uguali a' doppi quadrati de' semiaffi conjugati CA , CT (3). Sicchè il quadrato di $FM+MV$ farà uguale a $2CA^2$ con $2CT^2$, e con $2CF^2$, cioè a dire a $2CA^2$ con $2CA^2$: imperciocchè $2CT^2$ e $2CF^2$ sono (4) uguali a $2CA^2$. E quindi il quadrato di $FM+MV$ farà uguale a $4CA^2$, ed $FM+MV$ adeguerà $2CA$, cioè l'asse maggiore SA . $C.B.D.$

Cor. I. Dunque in ogni triangolo rettilineo VMF i quadrati de' lati VM , ed MF sono dupli de' quadrati della semibase VC , e della CM , che unisce il punto medio della base coll'angolo verticale M .

Cor. II. Conducansi dal centro C , e dal Fig. 51. fuoco U le rette CG , VE parallele al ramo FM ; farà VE ad oG , come VM ad Mo , o come UF ad FC ; cioè a dire la retta VE , o la sua uguale (5) VM farà dupla di oG . E perchè a cagion de' triangoli simili FVM , CVo

(1) Prop. XXVIII. Lib. II.

(2) Prop. 4. El. II.

(3) Prop. XVI. Lib. II.

(4) Prop. XXV. Lib. II.

(5) Cor. 1. Prop. XXVII. Lib. II.

La FM a Co come UF ad UC, cioè come 2 ad 1; farà benanche FM doppia di Co: e quindi li due rami VM, ed MF faranno dupli delle due rette Go, e Co, o dell'intera CG.

Cor. III. Dunque se dal centro dell'Ellisse si meni la parallela ad un ramo, e si prolunghi finchè incontri la tangente condotta per l'estremo di esso; tal retta dovrà essere quanto il semiasse maggiore.

Cor. IV. Dal fuoco V si cali VG perpendicolare alla medesima tangente ME, e si unisca CG; questa retta sarà parallela al ramo (1) FM, e quindi (2) uguale al semiasse maggiore.

Cor. V. Dunque se all'estremo di un ramo dell'Ellisse conduca la tangente, e dall'altro fuoco vi si cali la perpendicolare; la parallela tirata ad esso ramo dal centro insino alla tangente sarà uguale al semiasse maggiore, e passerà per quel punto, ove la perpendicolare incontra la tangente. II. La retta tirata dal centro a questo punto sarà parallela al ramo, ed uguale al semiasse maggiore. III. E finalmente tirandosi dal centro sulla tangente una retta uguale al semiasse maggiore, ella dovrà esser parallela ad un de' rami condotti al punto del contatto, e passerà per l'incidenza della perpendicolare calata sulla tangente dell'altro fuoco.

Cor. VI. Si meni per lo centro C dell'Ellisse la retta rCt parallela alla tangente LG, faran-

(1) Cor. III. Prop. XXVII. Lib. II.

(2) Cor. prec.

faranno i due angoli Mrt , Mtr rispettivamente uguali ai loro alterni $\angle MG$, $\angle ML$: e quindi siccome questi si mostrarono tra se uguali (1); così il dovranno essere anche gli altri Mrt , Mtr , e con ciò Mt uguale ad Mr . Ma a cagion del parallelogrammo $MtCG$ la retta Mt è uguale a CG : dunque ancora CG farà uguale ad Mr .

Cor. VII. Dunque se per lo centro dell' Ellisse si tiri la parallela ad una qualunque tangente di questa curva, e si distenda finchè ne incontri i rami menati al contatto; le parti de' rami, ch'ella ne ascinde verso il contatto, saranno rispettivamente uguali al semiasse maggiore.

P R O P. XXX. T E O R.

Fig. 53. Se ad un qualunque punto M dell' Ellisse BMR conducasi il ramo FM, la tangente MA, e la normale MN, e dal punto N, ove la normale incontra l'asse, si cali NE perpendicolare sul medesimo ramo; la parte ME di esso ramo, ch'è verso il contatto, sarà sempre uguale al semiparametro principale.

Dim. Si ordini all'asse la retta ML , e dal centro C dell' Ellisse si tirino le rette CG , CP , CS rispettivamente parallele ad MN , ML , MF .

E poichè nel triangolo rettangolo NEM i due

(1) Prop. XXVII. Lib. II.

i due angoli acuti MNE, NME fanno un retto, essi dovranno adeguar l'angolo NMA, che si è supposto retto, e con ciò le di lui parti NME, EMA: onde tolto il comune angolo NMF, dovrà rimanervi l'angolo ENM uguale ad EMA, o a CSA, che gli è uguale (1). Sicchè i due triangoli rettangoli NEM, CGS saranno equiangoli, e simili fra loro.

Similmente i due angoli acuti GCP, GPC del triangolo rettangolo CGP sono uguali ad un retto, e con ciò all'angolo NMA, ch'è retto, o alle sue parti NML, LMA. E quindi tolti gli angoli CPG, LMA, che sono uguali (2), dovrà rimanervi l'angolo GCP uguale ad NML, e 'l triangolo rettangolo CGP farà simile all'altro NLM.

Or dalla simiglianza de' primi triangoli NEM, CGS ne vien che sia $ME : MN :: CG : CS$: e per la similitudine degli altri due NLM, CGP dee stare $MN : ML :: CP : CG$: dunque per uguaglianza perturbata dovrà essere $ME : ML :: CP : CS$, e quindi il rettangolo di ME in CS sarà uguale al rettangolo di ML o della sua uguale C_s in CP. Ma questo rettangolo è uguale al quadrato del semiasse conjugato CR (3), o al rettangolo del semiasse maggiore CB nel semiparametro principale (4). Dunque anche il rettangolo

(1) Prop. 29. El. I.

(2) Per l'istessa.

(3) Prop. XII. Lib. II.

(4) Cor. 1. Prop. VIII. Lib. II.

124

golo di CS in ME sarà uguale al rettangolo di CB nel semiparametro principale. E quindi essendo (1) CS uguale a CB semiasse maggiore, anche ME dovrà uguagliare il semiparametro principale. C. B. D.

Cor. I. Essendosi dimostrato essere $ME : MN :: CG : CS$, sarà il rettangolo di MN in CG uguale all'altro di ME in CS, o (come si è qui sopra conchiuso) al quadrato del semiasse minore CR.

Cor. II. Dunque il rettangolo fatto dalla normale MN nella retta CG, che dal centro dell'Ellisse conduce perpendicolare sulla tangente MS, sarà di una costante grandezza, cioè sempre uguale al quadrato del semiasse minore.

P R O P. XXXI. T E O R.

Nell'Ellisse MBR, se da' fuochi F ed V si
 Fig. 54. *abbassino FL ed VD perpendicolari su di una qualunque tangente DP, e si tirino al punto del contatto i rami FM, MV; il rettangolo delle perpendicolari sarà sempre uguale al quadrato del semiasse minore CR.*

E'l rettangolo de' rami FM, ed MV scriverà al quadrato della normale MN la costante ragione dell'asse maggiore al di lui parametro.

Dim. Part. I. Si uniscano le rette CL, e CD,
 e la

(1) Cor. III. Prop. prec.

e la CL si protragga finchè incontri DV in T : faranno le rette CL, e CD rispettivamente uguali a CB, e CA (1). Di più avendo i due triangoli equiangoli FCL, ed VCT uguali i lati CF, CV (2), dovranno avere (3) gli altri lati CL ed FL rispettivamente uguali a CT e TV. Dunque un cerchio, che si descrive col centro C intervallo CB, dovrà passare pe' punti L, D, A, T.

Ciò supposto il rettangolo di FL in VD è lo stesso, che l'altro di TV in VD. Dunque siccome questo rettangolo è uguale a quello di BV in VA (4), cioè a dire al quadrato di CR (5); così il rettangolo delle perpendicolari FL, ed VD dovrà essere uguale al quadrato del semiasse minore CR.

Part. II. Si cali NE perpendicolare sul ramo FM, sarà (come si è veduto nel principio della dimostrazione antecedente) l'angolo FML uguale ad ENM, e quindi il triangolo rettangolo FLM simile all' altro NEM. Ma (6) al triangolo FLM è anche simile VMD. Dunque il triangolo VDM sarà simile allo stesso NEM. Il perchè dalla similitudine de' primi dovrà seguirne, che stia $FM : FL :: NM : ME$, e per la similitudine de' secondi dee stare $VM : VD :: NM : ME$. Sicchè (7) il rettangolo di

FM

(1) Cor. 3. Prop. XXXIX. Lib. II.

(2) Princip. Cap. III.

(3) Prop. 26. El. I.

(4) Prop. 35. El. III.

(5) Cor. 1. Prop. XXV. Lib. II.

(6) Dim. Prop. XXVII. Lib. II. (7) Cor. 3. Lemm. I.

226

FM in VM dovrà stare al rettangolo di FL in VD, o al quadrato di CR, che gli è uguale (1), come il quadrato di NM al quadrato di ME. Onde sarà permutando FM. MV: NM² :: CR² : ME². Ma sta CR² ad ME² come (2) l'asse maggiore al suo parametro: dunque sarà eziandio il rettangolo de' rami FM ed MV al quadrato della normale MN, come l'asse maggiore al suo parametro, C. B. D.

Cor. I. E sarà benanche FM. MV ad MN² come BC² a CR².

Cor. II. Se all' Ellisse BMA si circoscriva il cerchio BLDA, e la sua circonferenza incontri in L, e D. una qualunque tangente dell' Ellisse; le perpendicolari LF, DV elevate da' medesimi punti sulla tangente segneranno nell'asse maggiore i fuochi della sezione.

P R O P. XXXII. T E O R.

Fig. 55. Sia FM una semiordinata all'asse AQ, che passi per un de' fuochi dell' Ellisse, ed al suo estremo M si meni la tangente MD; ogni rama FR sarà uguale alla semiordinata NP, che conducesi all'asse pel suo estremo, e si estende fino alla tangente.

Dim. La tangente BN incontri in S, e B le

(1) Part. I.

(2) Cor. I. Prop. VIII, Lib. II.

B le tangenti QS, AB tirate ai vertici dell'asse maggiore; sarà la ragione di QD a DA uguale a quella di QS a BA pe' triangoli simili QDS, ADB; e la stessa ragione di QD a DA sarà ben anche uguale a quella di QF ad FA (1). Dunque sarà (2) $QS:AB::QF:FA$, e quindi $QS.AB:AB^2::QF.FA:FA^2$ (3). Ma i rettangoli di QS in AB, e di QF in FA sono uguali fra loro, perchè tanto quello (4), che questo (5) è uguale al quadrato del semiasse minore CK. Dunque sarà pur anche AB^2 uguale ad FA^2 , ed AB uguale ad FA.

Or poichè il rettangolo di LN in RN sta al quadrato di NM (6), come il quadrato di AB, o della sua uguale AF a quello di BM; e sta poi AF^2 a BM^2 , come FP^2 ad NM^2 , perchè le rette AF, e BM sono proporzionali ad FP ed NM (7). Sarà $LNR:N M^2::FP^2:N M^2$ (8); e quindi LNR uguale ad FP^2 . Dunque aggiungendosi di comune PR^2 , sarà PN^2 (9) uguale ad FR^2 (10), e PN uguale ad FR. C . B . D.

Cor. I. E distendendosi in sino alla tangente il semiasse minore CK, sarà CT uguale ad FK,

(1) Prop. XV. Lib. II.

(2) Prop. II. El. V.

(3) Prop. I. El. VI.

(4) Prop. XXIV. Lib. II.

(5) Cor. I. Prop. XXV. Lib. II.

(6) Cor. III. Prop. XVIII. Lib. II.

(7) Prop. 2. El. VI.

(8) Prop. II. El. V.

(9) Prop. 6. El. II.

(10) Prop. 47. El. I.

FK, cioè al semiasse maggiore **AC** (1).

Cor. II. Ovunque si tiri la tangente laterale **BS**, sempre il rettangolo di **QS** in **AB** sarà uguale al quadrato del semiasse minore **CK** (2), cioè a dire al rettangolo **AFQ** (3). Sicchè per l'uguaglianza di questi rettangoli dovrà stare $QS:QF::AF:AB$.

Cor. III. Di più i triangoli rettangoli **FQS**, **FAB** saranno simili fra loro (4): onde l'angolo **QFS** sarà uguale ad **FBA**, e con ciò i due **QFS**, **AFB** uguali ad **ABF**, ed **AFB**, cioè ad un retto. Sicchè l'angolo **BFS** convien che sia retto.

Cor. IV. Cioè se da un fuoco dell'Ellisse si tirino due rette ai concorsi di una tangente laterale colle tangenti menate a' vertici dell'asse; l'angolo, che quelle comprendono, sempre sarà retto.

P R O P. XXXIII. T E O R.

Ogni ramo FR sta alla perpendicolare RG; Fig. 55. che dal suo estremo si cala sulla DG linea della sublimità, come l'eccentricità al semiasse.

Dim. Si supponga consegnata la figura 55. come nella prop. prec. Le rette **FR** ed **RG** sono rispettivamente uguali a **PN** e **PD** (5): dunque

(1) Prop. XXV. Lib. II.

(2) Prop. XXIV. Lib. II.

(3) Cor. 1. Prop. XXV. Lib. II.

(4) Prop. 6. El. VI.

(5) Prop. prec.

129

dunque sarà $FR : RG :: PN : PD$. Ma pe' triangoli simili PDN, CDI sta PN a PD, come CI, o la sua uguale CA (1) a CD: e CA sta a CD, come CF a CA (2). Dunque starà ben anche $FR : RG :: CF : CA$, C. B. D.

Cor. I. Essendo pe' triangoli simili DAB, DCI la retta DA ad AB, come DC a CI; sarà pure $DA : AB :: CA : CF$.

Cor. II. Ed è poi, come può trarsi dalla defin. VIII. del I. Lib. e dalla Prop. XII, del II., $CD : CA :: CA : CF$.

P R O P. XXXIV. T E O R.

*Se agli estremi de' rami FR, FS conducan- Fig. 23.
si le tangenti RT, ST; la retta FT, che unisce il fuoco F col concorso T di queste tangenti, biseccherà l'angolo RFS compreso da' medesimi rami.*

La dimostrazione di questo Teorema è quell'istessa, che fu recata alla Prop. XXII. Lib. I.

Cor. I. Che se i rami FP, FQ giacciono a dirittura, ed agli estremi di essi si tirino le tangenti PN, QN, che si uniscano in N;

I

- (1) Cor. III. Prop. XXIX. Lib. II.
(2) Prop. XII. Lib. II.

Fig. 56.

la retta NF dovrà inclinarsi ugualmente sulla corda PQ , e quindi esserle perpendicolare.

Cor. II. Dunque se agli estremi di una corda, che attraversi un fuoco dell'Ellisse, si menino due tangenti; il concorso di queste dovrà trovarsi nella linea di sublimità. E poi dovrà essere perpendicolarmente sulla medesima corda quella retta, che unisce il concorso di esse tangenti coll'istesso fuoco.

C A P. IV.

Delle Dimensioni dell'Ellisse,

P R O P. XXXV. T E O R.

Fig. 56. Il circolo $AEBG$, che si descrive sull'asse maggiore dell'Ellisse $ADBF$, sta alla medesima Ellisse, come il di lei asse maggiore AB al minore DF .

E volgendosi con perfetta rivoluzione tanto il semicirchio AQB , che la semiellisse AKB intorno allo stesso asse AB ; la sfera e lo Sferoide, che ne son generati, saran fra loro come il quadrato dell'asse maggiore al quadrato del minore.

Dim. Part. I. L'asse maggiore della proposta Ellisse si divida nelle parti uguali CH , HI ,

HI, &c. qualunque ne sia la grandezza di ciascheduna, e pei punti delle divisioni si tirino le semiordinate al circolo HQ, IO, &c. sarà il quadrato di ogni semiordinata QH dello stesso circolo uguale al rettangolo AHB (1): e quindi siccome questo rettangolo sta a KH^2 , come l'asse maggiore al suo parametro, o come BA^2 a DF^2 (2); dovrà essere eziandio $QH^2 : KH^2 :: AB^2 : DF^2$, e con ciò $QH : KH :: AB : DF$. Or se da' punti Q, e K si abbassino QR, e KL perpendicolari su di EC; i due rettangoli RQHC, LKHC, che sono iscritti nel semicircolo, e nella semiellisse, saran fra loro come QH a KH (3). Dunque essi dovranno essere ancora nella ragione dell'asse maggiore al minore. E continuando a questo modo un tal discorso per gli altri rettangoli; potrà conchiudersi, che tutti i rettangoli iscritti nel semicircolo stiano a tutti i corrispondenti rettangoli iscritti nella semiellisse, come dell'Ellisse l'asse maggiore n'è al minore [4]. Per la qual cosa se tanto quelli, che questi si facciano rispettivamente terminare nel semicircolo, e nella semiellisse; sarà pur vero, che stia il semicerchio AQB alla semiellisse AKB, e con ciò l'intero cerchio AEBG all'Ellisse AKBF, come l'asse maggiore al minore (5).

I 2

Part.

- (1) Prop. 35. El. III.
- (2) Prop. IX. Lib. II.
- (3) Prop. 1. El. VI.
- (4) Prop. 12. El. V.
- (5) Lemm. II.

Part. II. I cilindri poi, che si vengono a generare da' rettangoli $RQHC$, $LKHC$, nel volgersi che fanno il semicerchio e la semiellisse intorno all'asse AB , sono fra loro come i cerchi de' raggi QH , KH , o come i quadrati di queste rette QH , e KH ; imperciocchè son essi della medesima altezza CH . Dunque i medesimi cilindri saranno eziandio come i quadrati di AB , e di DF . E ciò sempre dimostrandosi, sarà pe' Lemmi I., e II. tutta la sfera all'intero Sferoide, cui la si circoscrive, come il quadrato di AB al quadrato di DF , $G . B . D$.

Cor. I. Essendo DF ad AB come DF , AB ad AB^2 (1); sarà l'Ellisse al circolo, che le si circoscrive, come $DF . AB$ ad AB^2 ; e permutando la medesima Ellisse starà al rettangolo de' suoi assi DF ed AB , come il circolo $AEBG$ ad AB^2 .

Cor. II. Ed essendo costante la seconda di queste due ragioni, il sarà ben anche la prima. Dunque *l'Ellissi sono come i rettangoli de' loro assi conjugati*.

Cor. III. Di più se l'asse maggiore di un' Ellisse si chiami R , e'l minore r , e sia la ragione del circolo al quadrato circoscritto uguale a quella di 100000 a 127324, come li è ritrovato per approssimazione; *l'aja della men-*
sura.

(1) Prop. 1. El. VI.

svuata Ellisse sarà $\frac{25000}{5} \frac{31831}{6} R X r$; cioè meno,
che $\frac{1}{6}$ del rettangolo degli assi.

Cor. IV. Ogni Ellisse, da ciò che si è detto, sta al cerchio circoscritto, cioè che ha l'asse maggiore per diametro, come il rettangolo degli assi conjugati al quadrato dell'asse maggiore. Or cotesto cerchio sta a quell'altro, che s'iscriverebbe nell'Ellisse, o che avrebbe l'asse minore per diametro, come il quadrato dell'asse maggiore al quadrato del minore. Dunque per uguaglianza ordinata starà l'Ellisse al cerchio, che le s'iscrive, come il rettangolo degli assi conjugati al quadrato dell'asse minore, o come l'asse maggiore al minore (1).

Cor. V. E volgendosi intorno all'asse minore tanto l'Ellisse, che il circolo in essa iscritto; l'*Ellittotide* generato dall'Ellisse starà alla sfera, che vi genera il cerchio, come il quadrato dell'asse maggiore al quadrato del minore. Qual cosa può dimostrarsi come la seconda parte del presente Teorema.

Cor. VI. Da ciò si vede chiaramente che la quadratura dell'Ellisse dipenda dalla quadratura del circolo; e che dalla cubatura della sfera quella dello Sferoide e dell'Ellittotide si derivi.

Cor. VII. Di più il segmento sferico di QAH starà al corrispondente segmento sferoidale gene-

I 3

rato

(1) L'istessa.

rato da KAH , come il quadrato dell'asse maggiore al quadrato del minore, o come l'asse maggiore al suo parametro.

P R O P. XXVI. T E O R.

Posto le medesime cose della prop. prec. se l'asse maggiore AB distendasi, tantochè BT adegui un semiasse; il segmento dello Sferoide generato da ACP sarà al cono, che ha per altezza TP e per base il circolo del raggio PA , come il parametro all'asse.

Dim. Nel circolo $ANBL$ circoscritto all'Ellisse si tirino i raggi OL , ON , e si congiungano le corde AL , LB : e poi si concepisca il semicerchio ALB con perfetta rivoluzione aggirarsi intorno ad AB .

E poichè il rettangolo BAO è uguale ai due quadrati di BO e di OA , e 'l rettangolo BPO adegua il quadrato di PO insieme col rettangolo BOP (1) ovvero AOP ; sarà la differenza de' due rettangoli BAO , BPO uguale alla differenza de' quadrati di BO e di OP , ed alla differenza del quadrato di AO e del rettangolo di AO in OP . Or la prima differenza è uguale al rettangolo BPA (2), e la seconda al rettangolo di OA in AP , o di BT in AP (3). Dunque la differenza de' mentovati rettangoli BAO , BPO sarà uguale-

(1) Prop. 3. Fl. II.

(2) Prop. 5. Fl. II.

(3) Prop. 2. El. II.

uguale ai due rettangoli di BP in PA, e di TB in PA, cioè (1) al rettangolo di TP in PA.

Ciò posto, il settore sferico LANO, avvegnachè uguale a quel cono, che ha per altezza il raggio OA e per base il circolo di AL, sta al sottoposto cono LON in ragion composta di OA ad OP, e del circolo di LA al circolo di LP. Ma pe' triangoli simili ABL, APL, sta $AB:BL::AL:LP$: onde siccome la ragione di AB a BP è duplicata di quella di BA a BL (essendo continuamente proporzionali le rette AB, BL, BP), così sarà benanche duplicata dell'altra di AL ad LP, e quindi sarà uguale alla ragione del circolo di LA al circolo di LP. Dunque il settore sferico LANO starà al cono LON in ragion composta di OA ad OP, e di BA a BP, cioè come il rettangolo BAO all'altro BPO (2). E sarà poi dividendo il segmento sferico LAN al sottoposto cono LON, come la differenza de' rettangoli BAO, BPO, cioè come il rettangolo TPA (3) al rettangolo BPO. Ma il cono, che ha PT per altezza, e per base il circolo del raggio PA, sta al medesimo cono LON, come TP a PO, e come PA^2 a PL^2 . E questa ragione di PA^2 a PL^2 è uguale a quella di AP a PB, per essere le tre rette AP, PL, e PB continuamente proporzionali (4). Dunque sostituendo questa

(1) Prop. 1. El. M.

(3) Come si è dimostrato.

(4) Prop. 13. El. VI. e defin. 10. El. V.

(2) Prop. 23. El. VI.

ragione in luogo dell'altra di PA^2 a PL^2 ; avrassi il cono, che ha PT per altezza e per base il circolo di PA al cono LON , come TP a PO , e come AP a PB , cioè come il rettangolo TPA all'altro BPO (1). Sicchè il segmento sferico LAN serbando al sottoposto cono LON quella medesima ragione che gli serba quell'altro cono che ha per altezza TP e per base il circolo di PA , farà questo cono uguale a quel segmento sferico. Laonde siccome il segmento sferoidale generato da PAC sta al corrispondente segmento sferico generato da APN , come il parametro dell'asse maggiore allo stesso asse (2); così il medesimo segmento sferoidale starà al cono, che ha PT per altezza e per base il circolo del raggio PA , come il parametro dell'asse maggiore al medesimo asse. $C . B . D .$

P R O P. XXXVII. P R O B L.

Rivolgasi la semiellisse ABa con perfetta rivoluzione intorno al suo asse maggiore Aa ; si vuol determinare la superficie di questo Sferoide.

I. L'asse Aa della data Ellisse si distenda d' ambe le parti, sicchè tanto OG , che OH sia terza proporzionale in ordine alla di lei eccentricità OF , ed al semiasse maggiore OA .
II. S' intenda descritta l'altra semiellisse GNH ,
che

(1) Prop. 23. El. VI. (2) Cor. ult. Prop. prec.

che abbia per asse maggiore la retta GH , e per semiasse minore OE uguale ad OB semiasse conjugato della proposta Ellisse AMa . III. Finalmente dai punti A , ed a si elevino le perpendicolari AI , aK su di Aa : dico essere l'addimandata superficie quarta proporzionale in ordine al raggio di un circolo, alla sua periferia, ed allo spazio ellittico $AiKa$.

Dim. Ad un qualunque punto M del perimetro della data Ellisse AMa si tirino i due rami FM ed fM , la normale MS , e la semiorinata MP , che si distenda in fino ad N . Saranno, come appare dalla costruzione, G ed H i punti di sublimità della medesima Ellisse AMa (1): e le perpendicolari Gg , Hh elevate da' punti G , ed H sulla GH disegneranno le linee di sublimità della stessa curva.

Ciò premesso, tanto Mg ad MF , che Mh ad Mf è nella costante ragione di OA ad OF (2), o di OG ad OA (3): dunque il rettangolo gMb , o il suo uguale GPH starà al rettangolo di FM in fM , come OG^2 ad OA^2 (4). Or il medesimo rettangolo FMf sta ad MS^2 come OA^2 ad OE^2 (5). Dunque per uguaglianza ordinata sarà GPH ad Ms^2 , come GO^2 ad OE^2 , o come GPH a PN^2 (6): e quindi essendo

- (1) Cor. II. Prop. XXXIII. Lib. II.
- (2) Prop. XXXIII. Lib. II.
- (3) Prop. XII. Lib. II.
- (4) Cor. 3. Lemm. II.
- (5) Cor. I. Prop. XXXI. Lib. II.
- (6) Prop. IX. Lib. II.

do $GPH : MS^2 :: GPH : PN^2$, farà MS^2 uguale a PN^2 , ed MS uguale a PN .

Or se intendasi condotta la corda MA , e che intorno ad M , e verso g si aggiri; ei farà chiaro che nell'ultimo sito di questa retta, prima di distendersi sulla tangente del punto M , la sua parte interiore debba combaciare coll'elemento Mm dell'Ellisse. E quindi tirata per m la retta mr perpendicolare su di MP , il triangoletto Mmr sarà simile al triangolo MSP (1). Dunque starà Mm ad mr come MS , o la sua uguale PN a PM , o come la circonferenza del raggio PN alla circonferenza del raggio PM . E sarà poi il prodotto di mr nella circonferenza di PN uguale (2) all'elemento Mm dell'Ellisse moltiplicato per la circonferenza di PM , cioè a dire alla superficie conica generata dal medesimo elemento, allorchè tutta l'Ellisse gira circa il proprio asse (3).

Ma , distendendosi per m la retta mn parallela ad MN , il rettangolo di Pp in PN sta al rettangolo di mr nella periferia di PN , come il raggio alla periferia: dunque in questa stessa ragione starà puranche il rettangoletto NPp alla superficie conica generata dall'elemento Mm . Per la qual cosa continuandosi in siffatta guisa il ragionamento per gli altri punti dell'Ellisse, si potrà concludere (4) che l'aja ellittica

(1) §. 3. Dim. Prop. XXV.

(2) Prop. 16. El. VI.

(3) Nota (c) Prop. XXV. Lib. I.

(4) Lem. I. e II.

tica AK sia alla superficie dello Sferoide generato dall'Ellisse AM , come il raggio alla periferia. C. B. D.

Sol.

Avrei potuto raccorciar questa dimostrazione rimettendovi ai quattro ultimi paragrafi di quella, che nella Proposizione vigesimaquinta della Parabola esibii. Ma la dignità di questo Problema, e l'eccellenza del *metodo delle prime*, ed *ultime ragioni*, che le ho applicato, mi han indotto recarvela diftesamente.

LIB.

L I B. III.

DELL' IPERBOLE.

C A P. I.

De' Diametri delle Iperboli opposte.

N.B. Qualor si ritrovi un' asterisco dietro l' enuciazione di qualche verità, vuol intendersi, che questa oltre all' Iperbole si appartenga eziandio all' Ellisse. E se ve ne sian due, una tal verità dovrassi riferire a tutte e tre le curve coniche.

P R O P. I. T E O R.

*Nell' Iperbole TQD il quadrato di una qualunque semiordinata PT sta al rettangolo LPQ delle ascisse da entrambi i vertici Q ed L, come il lato retto QH al trasverso QL. **

Dim. Leggasi la dimostrazione della I. Prop. dell' Ellisse, e si riscontri la figura 7. (a).

Cor.

(a) In questo Teorema racchiudesi la proprietà principale dell' Iperbole, donde non si durerà fatica a trarne la di lei equazione caratteristica. A tal effetto si ponga una qualunque ascissa QP uguale ad x , e la sua corrispondente semiordinata TP sia y : si chiami $2a$ il lato trasverso QL, p il retto, farà LP uguale a $2a+x$, e 'l rettangolo LPQ farà $2ax+xx$. Dunque essendo in virtù di questo Teorema il quadrato di TP ad LPQ, come QH a QL; farà ne' simboli analitici

$$y^2 : 2ax + x^2 :: p : 2a$$

E quia-

Cor. I. E dimostrandosi che il quadrato di una qualunque altra semiordinata SR (o ch' ella si ritrovi nella stessa iperbole TQD, ovvero nell' opposta rLm) stia al rettangolo delle ascisse LRQ, come il lato retto al trasverso; potrà concludersi, che i quadrati di PT, e di RS sien proporzionali a' rettangoli LPQ, LRQ.

Cor. II. Cioè in un' istessa iperbole, o nelle due opposte, i quadrati delle semiordinate sono come i rettangoli delle ascisse d' ambedue i vertici.

Cor. III. Se da un qualunque punto T dell' Iperbole TQD ad un' altro S della stessa curva intendasi tirata una linea retta, questa dovrà cadere dentro del cono ANC senza che altro-

E quindi

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a}$$

Similmente dalla I. Proposizione dell' Ellisse, ove fu recata la principale proprietà di questa curva, sene caverà la di lei equazione

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a}$$

E se un' ascissa della Parabola si dica x , y la semiordinata corrispondente, e p il parametro, avrassi in forza della Prop. I. Lib. I., ove s' indicò la principale proprietà di questa curva, la seguente equazione alla Parabola

$$y^2 = px.$$

Finalmente se un' altro punto del diametro si prenda per principio delle indeterminate x , e se ne congeguino l' equazioni a tutte e tre le curve coniche, come si è qui sopra praticato, avrassi la forma generale dell' equazioni alle linee del secondo ordine rapportate ai loro assi,

$$y^2 = A + Bx + Cx^2$$

ove A, B, C possono dinotare qualunque grandezze.

altrove ne incontri la di lui superficie o quella del cono opposto LNF. E perchè i perimetri delle Iperboli son segnate sulle superficie de' mentovati coni TQD, rLm ; ei debb' esser vero, che niuna corda dell' Iperbole TQD possa in altro punto incontrar la medesima sezione, o la dilei opposta rLm .

Cor. IV. E generalmente niuna retta può giammai segare una sezione conica in più, che in due punti. **

P R O P. II. T E O R.

Il quadrato di una qualunque semiordinata NM è uguale al rettangolo dell'ascissa AM nella retta MQ, che dal dilei estremo le si erge perpendicolare, e si estende in fino alla regolatrice.

Fig. 59. E lo stesso quadrato di NM è duplo del quadrilineo AMPF, che si arresta tra la medesima ascissa, e la surregolatrice FC. **

Che vogliano dire regolatrice, e surregolatrice di una curva conica, e qual ne sia la loro posizione, potrà vedersi nelle definizioni, che sieguono la Prop. I. del II. Libro: siccome in leggendosi la dimostrazione della Prop. II. dell' Ellisse colla fig. 59. si avrà quella della prima e seconda parte del presente Teorema. Solo vi ha questo divario, che la chiusura della dimostrazione della seconda parte qui vuol farsi colla 12. El. V. laddove colla 19. del

143

del V. ivi si è compita quella dell' Ellisse.

Cor. I. Essendo MQ maggiore di AB, farà il rettangolo AMQ, o il quadrato di NM maggiore del rettangolo MAB, Cioè a dire nell' Iperbole il quadrato di una qualunque semiorinata NM è maggiore del rettangolo dell' ascissa nel parametro.

Cor. II. E crescendo, il rettangolo AMQ a misura che il punto M più si discosta dal vertice A della sezione; l' Iperbole avrà i suoi rami sempre dal diametro divergenti: siccome della Parabola si è ben anche dimostrato nel I. Libro.

Cor. III. E descrivendosi intorno allo stesso diametro AM, e collo stesso angolo delle coordinate AMN la parabola AE, che però abbia eziandio A per vertice, ed AB per parametro; questa curva dovrà contenersi entro l' Iperbole, ed esser meno divergente dell' Iperbole dal comun diametro AM.

PROP. III. PROBL.

Dato un punto nel perimetro di un' Iperbole Fig. 6a. condurle una tangente.

Si legga la dimostrazione della Prop. III. dell' Ellisse, e si riscontrino le figure 7, e 69 pe' l primo, e pe' l secondo caso.

Cor. I. E quindi potrà rilevarsi, che nell' Iper-

Iperbole ANQ la sottangente PM sia all'ascissa MA,, che corrisponde all'ordinata per lo contatto, come DM ascissa dal vertice remoto a CM ascissa dal centro. Sa di che vedi il Cor. 7. Prop. III. Lib. II.

Cor. II. E quindi il rettangolo DMA sarà uguale all'altro CMP.

Defin. I. Il centro dell'Iperbole è il punto medio del di lei lato trasverso.

P R O P. IV. T E O R.

Tutte le tangenti dell'Iperbole concorrono col diametro sotto del dilei centro.

Fig. 60. E' l semidiametro CA è media proporzionale tra CM ascissa dal centro corrispondente all'ordinata per lo contatto, e tra CP differenza della medesima ascissa, e della sottangente.

Dim. Part. I. Il rettangolo DMA si è mostrato (1) uguale all'altro CMP: dunque siccome quello è minore del quadrato di CM (2), così dell'istesso quadrato sarà ben anche minore il rettangolo CMP: onde convien che sia PM minore di CM, e che cada sotto del centro il punto P concorso della tangente, e del diametro.

Part. II. Essendo poi i medesimi rettangoli DMA, CMP uguali fra loro; se rispetti-

72-

(1) Cor. II. Prop. prec.

(2) Prop. 6. El. II.

vamente si tolgan essi dal quadrato di CM, dovrà rimanervi il quadrato di CA (1) uguale al rettangolo MCP (2). E quindi starà CM:CA::CA:CP. C. B. D.

Cor. Essendo CM:CA::CA:CP, farà (3) CM:CP::CA²:CP², e convertendo CM:PM::CA²:CA² - CP². Ma l'è poi CM a PM come CMP a PM² (4), o come DMA (5) a PM². Dunque farà il rettangolo delle ascisse DMA al quadrato della sottangente PM, come CA² a CA² - CP².

PROP. V. TEOR.

Se dal centro C dell' Iperbole ANQ conducafi Fig. 61. ad un punto N del di lei perimetro la retta CN; questa dee cader dentro la sezione senzachè la sega altrove.

Dim. Che la retta CN non sia tangente della sezione, onde vi debba cader dentro, è chiaro dalla I. Parte della Prop. prec. Dunque ci resta a dimostrare, che la medesima retta in niun altro punto incontri il perimetro iperbolico: e ciò si ottiene nel seguente modo. Se la retta CN potesse incontrar la curva in un'altro
K pun.

- (1) L' istessa Prop. 6.
- (2) Prop. 3. El. II.
- (3) Defin. 10. El. V.
- (4) Prop. 1. El. VI.
- (5) Cor. II. Prop. prec.

punto Q; ordinate le rette NM, QR al diametro AR, farebbe, per la similitudine de' triangoli NMC, QRC, $NM^2 : QR^2 :: CM^2 : CR^2$, e per la natura dell' Iperbole (1) $NM^2 : QR^2 :: DMA : DRA$. Dunque farebbe ancora (2) $CM^2 : CR^2 :: DMA : DRA$, e $CM^2 : CR^2 :: CA^2 : CA^2$ (3): cioè a dire CM^2 adeguerebbe CR^2 : lo che non puol essere. C.B.D.

Cor. I. Si tagli Cm uguale a CM , ed ordinata la retta mn si congiunga Cn . Sarà la differenza de' quadrati di CM , e di CA , cioè il rettangolo DMA (4) uguale all' altro AmD , ch'è differenza de' quadrati di CD , e di Cm : e quindi i due quadrati di NM , e di nm , che sono nella ragion de' rettangoli DMA, DmA (5), faran pure tra se uguali. Dunque sarà NM uguale ad nm , ed avendo i due triangoli NCM, nCm le condizioni della 4. El. I. dovranno avere tra se uguali gli angoli MCN, mCn , e quindi per diritto i lati NC, nC .

Cor. II. Dunque ogni secante che conducefi ad un' Iperbole dal di lei centro, dovrà tagliar ben anche l' opposta sezione.

PRO-

(1) Cor. II. Prop. I. Lib. III.

(2) Prop. 11. El. V.

(3) Prop. 6. El. II. e 19. El. V.

(4) L' istessa Prop. 6.

(5) Cor. II. Prop. I. Lib. III.

Ogni retta, che si ritrovi entro un' Iperbole parallela ad una delle tangente, dee incontrarne in due punti il perimetro iperbolico. Fig. 65.

Dim. La tangente BI dell' Iperbole ABH, e la sua parallela EO incontrino il lato trasverso ne' punti I, ed O. Si descriva il semicerchio Afc su di CA metà del lato trasverso AD: e quivi applicata la retta Cf uguale a CI, si unisca la corda Af. Dipoi si elevi dal punto O la retta OF perpendicolare a CA, ed uguale ad Af, e si congiunga la CF.

E poichè CO^2 è maggiore di CI^2 , ed OF^2 è uguale ad Af^2 (1), sarà CO^2 con OF^2 , cioè CF^2 maggiore di Cf^2 e di Af^2 , cioè di CA^2 (2), e quindi CF maggiore di CA. Or se dal punto A si cali AP perpendicolare sulla medesima CF; pe' triangoli rettangoli simili COF, CPA, che ne risultano, dovrà stare FO ad AP, come CF a CA. Per la qual cosa siccome di CA si è mostrata maggiore la CF; così la FO dovrà esser maggiore di AP: e quindi un cerchio descritto col centro A intervallo FO segnerà la retta CF in due punti K, ed L.

Dal punto F conducansi le due rette FR, ed FM rispettivamente parallele ad AK, ed AL: e da' punti R, ed M, ov'esse incontrano

K 2

il

(1) Per costruzione.

(2) Prop. 47. El. I. e 31. El. III.

il diametro della sezione, si tirino le semiordinate RH , ME . E finalmente costituito il semicerchio DQA sul lato trasverso DA , gli si meni da R la tangente RQ .

Ciò premesso i due triangoli CRF , CAK sono simili fra loro (1): dunque dovrà stare CR ad RF , come CA ad AK , o come CQ ad OF (essendo queste rette a quelle rispettivamente uguali). Sicchè i triangoli rettangoli CRQ , FRO , avendo i lati CR e CQ proporzionali agli altri RF ed OF , saranno (2) anche tra se simili: il perchè dovrà stare $RQ:RO::CQ:FO$, ed $RQ^2:RO^2::CQ^2:FO^2$. Or CQ^2 sta ad OF^2 o Af^2 , ch'è la differenza de' quadrati di CA , e di CI , come DGA a GI^2 (3). Dunque sarà RQ^2 , cioè (4) il rettangolo DRA ad RO^2 , come DGA a GI^2 . E permutando DRA a DGA , cioè (5) RH^2 a GB^2 , come RO^2 a GI^2 , ed $RH:GB::RO:GI$. E quindi se si tiri la retta OH , i due triangoli ORH , IGB riuscendo simili fra loro (6), dovranno avere uguali gli angoli ROH , GIB , e con ciò paralleli i di loro lati omologhi OH , IB (7).

In simil guisa dimostrandosi, che la retta OE , la quale unisce il punto E dell'Iperbole col punto O del dilei diametro, sia parallela a BI ;
l'è

- (1) Prop. 4. El. VI.
- (2) Prop. 7. El. VI.
- (3) Cor. Prop. IV. Lib. III.
- (4) Prop. 36. El. III.
- (5) Cor. II. Prop. I. Lib. III.
- (6) Prop. 5. El. VI.
- (7) Prop. 29. El. I.

l'è forza, che le due rette OH , OE coincidano l'una sull'altra, e che amendue si confondano con quella, che si è supposta parallela a BI . Laonde cotesta parallela incontrerà la sezione ne' due punti H , ed E . C. B. D.

Cor. I. Se il punto O , dove la parallela alla tangente si unisce col diametro dell'Iperbole, cadesse o nel vertice A , o sotto di esso; in simil modo potrà compiersi la dimostrazione di questo Teorema.

Cor. II. Da ciò che si è detto in questa proposizione e nell'antecedente si deggion due cose inferire. I. Ogni retta, che da un qualunque punto dell'Iperbole conduce parallelamente ad una delle tangente, in due soli punti dee segar questa curva, senza che mai ne cada sull'opposta sezione. II. E vicendevolmente se da un punto del perimetro iperbolico si meni una parallela ad una qualunque tangente dell'Iperbole, che passa pel di lei centro, ella non potrà in niun altro punto incontrare cotesta curva, ma si bene l'opposta, qualora protraggasi al disopra.

Scol.

Ad ogni corda HE dell'Iperbole le si può condurre una tangente parallela. Per convincersi di ciò basta osservar solamente, che la HE , se con moto a se parallelo verso B ne progredi-

K 3

sca,

sca, divien tangente al raccorsi, che fanno in un sol punto le due sezioni H ed E. Ma doveasi dimostrar dalla natura di questa curva la conversa proposizione, cioè che debba esser una corda dell'Iperbole quella retta, ch'entro di essa n'è parallela ad una di lei tangente (a).

PROP. VII. TEOR.

Fig. 62. *La retta AB, che conducefi per lo centro C dell'Iperbole, e si avvesta fra le opposte sezioni AE, BQ, è bisecata in esso centro.*

*E le tangenti AS, BT tirate agli estremi A, e B della medesima retta sono tra se parallele. **

Dim. Può leggerfi la dimostr. della Prop. V. dell'Ellisse riscontrando la fig. cit.

PROP. VIII. TEOR.

Fig. 63. *Se da un qualunque punto C del perimetro iperbolico AQC conducansi le due rette CN, CB rispettivamente parallele alla tangente laterale QS, ed alla verticale AP; il triangolo NCB, ch'esse comprenderanno col diametro della sezione, sarà uguale al corrispondente quadrilineo TBAP. ***

Veggasi la figura cit. mentre si legga la dim. della Prop. VI. dell'Ell.

PRO.

(a) Questo Teorema, che si è mostrato dalla natura dell'Iperbole, e non già dal cono, come ha fatto Apollonio, può supplirsi nella maggior parte di questi Trattati, ov'ei ne manca.

*La secante GL, che passa per lo centro G dell' Iperbole AQC, biseca tutte le corde, ch' entro di essa ne giaccion parallele alla tangente QS. ** Fig. 63

Dim. Qui si verificano que' medesimi casi, che furono indicati nella Prop. VI. della Parabola, e vi si possono adattare le loro dimostrazioni: riscontrando la figura 64 per lo primo, e secondo caso, e la figura 63 per lo terzo. Questo dovrà solamente avvertirsi, che i quadrilinei MGEK, TRDB, i quali nella Parabola son parallelogrammi, qui non sono, che trapezj.

Defin. II. La retta LI dicesi *Diametro* dell' Iperbole: i suoi *vertici* son que' punti, ov' ella incontra le opposte sezioni: e le infinite corde, che si conducono tanto nell' Iperbole AGD, che nell' opposta parallele alle tangenti pe' vertici, si chiamano *sue ordinate*. Fig. 67.

Cor. I. Il centro dell' Iperbole, i vertici di un diametro, ed i punti medj delle di lui ordinate, che si ritrovano in ambedue le sezioni, sono tutti per diritto. Dunque una retta, che passa per due di questi infiniti punti, dovrà passare anche per gli altri. Su di che può inferirsi tutto ciò che si espone ne' Coroll. della Prop. VII. dell' Ell.

Cor. II. Ed i triangoli GZS , LZH son pure tra se uguali.

Scol.

Tra gl'infiniti diametri delle riferite Iperboli due deggionfi distinguere dagli altri: il *Primitivo* che si trae dalla genesi della sezione, e l'*Asse*, il quale taglia perpendicolarmente le sue ordinate. E questo può ritrovarsi coll'artifizio del *Cor. IV. Prop. VII. Lib. II.*

P R O P. X. T E O R.

Fig. 67. *Poste le medesime cose della prop. prec. i quadrati delle semiordinate DB, RF sono come i rettangoli IBL, IFL delle ascisse d'ambi i vertici I, ed L. **

Dim. Il triangolo GZS è uguale all'altro LZH (1): dunque ponendovisi di comune il sottoposto pentagono $GZLSE$, dovrà formarsi il trapezio $SLSE$ uguale all'altro $GHSE$, cioè a dire al triangolo MDE (2). Per la qual cosa se dal trapezio $SLSE$, e dal triangolo MDE si tolga lo spazio comune $SBME$, anche le parti rimanenti $BLSM$, DBE faranno tra se uguali.

Nello stesso modo concludendosi, che il trapezio $FLSN$ sia uguale al triangolo RFO ;
la

(1) *Cor. II. Prop. prec.*

(2) *Prop. VIII. Lib. III.*

la ragion de' triangoli D/B , ROF dovrà pareggiar quella de' trapezj $BLSM$, $FLSN$. Or siffatti trapezj, essendo differenze de' triangoli simili CLS , CBM , e degli altri CLS , CFN , sono come le differenze de' quadrati de' lati omologhi GB , CL , e CF , CL , cioè (1) come i rettangoli $/BL$, $/FL$: ed i triangoli simili D/B , ROF sono fra loro come i quadrati di DB , e di RF . Dunque i quadrati delle semiordinate DB , RF , saranno come i rettangoli delle ascisse d'amendue i vertici $/BL$, $/FL$. $C . B . D$.

Defin. III. Ad un qualunque punto D del diametro DH si elevi la perpendicolare DB terza Fig. 66a proporzionale dopo l'ascissa ED , e la semiordinata DM ; si congiunga BH , e dal vertice E si meni EK parallela a BD ; la retta EK si dirà *Parametro* del diametro EH . E 'l rettangolo del diametro nel parametro dirassi *Figura di esso diametro*.

P R O P. XI. T E O R.

*Il quadrato di una qualunque semiordinata NF sta al rettangolo delle corrispondenti ascisse HFE , come il parametro EK al diametro EH . **

Dim. Si tiri FI parallela a BD , sarà pe' triangoli simili FHI , DHB come FI a DB , così FH a DH . Or i quadrati di FN , e di DM

(1) Prop. 6. El. II,

DM sono come i rettangoli HFE, HDE (1), e con ciò al par di questi in ragion composta di FH a DH, e di FE a DE (2): dunque i medesimi quadrati dovranno essere nella ragion composta di FI a DB, e di FE a DE, cioè come i rettangoli EFI, EDB. Per la qual cosa essendo FN^2 a DM^2 come EFI ad EDB, e per la definiz. prec. DM^2 uguale ad EDB; sarà benanche FN^2 uguale ad EFI. Or il rettangolo EFI sta all'altro HFE come FI ad FH (3), o come EK ad EH. per la similitudine de' triangoli HEK, HFI. Dunque sarà ancora $FN^2 : HFE :: EK : EH$. C.B.D.

Cor. I. E quindi il quadrato di una qualunque semiordinata FN del diametro HE sarà eziandio uguale al rettangolo della corrispondente ascissa EF nella FI, che perpendicolarmente le insiste, e va fino ad HI:

Cor. II. Quelle proprietà, che quì sopra ho mostrato appartenersi al diametro primitivo dell'iperbole, si potranno adattare ad ogni altro diametro della stessa curva; purchè legittimamente si raccolgano dalla verità del presente Teorema, comè dalla prima Proposizione quelle ne ho derivate.

PRO.

- (1) Cor. II. Prop. I. Lib. III.
- (2) Prop. 23. El. VI.
- (3) Prop. 1. El. VI.

PROP. XII. TEOR.

359

*L'angolo mistilineo, che si fa da una tan- Fig. 54.
gente dell'Iperbole, e dall'arco adjacente, è mino-
re di qualunque angolo acuto rettilineo. ***

La dimostrazione di questo Teorema è la stessa, che quella dell'Ellisse Prop. XI. Lib. II.

Cor. I. E quindi una sola retta puol esser tangente dell'Iperbole in un dato punto del dilei perimetro.

PROP. XIII. TEOR.

*La tangente mR dell'Iperbole incontri in R Fig. 59.
un qualunque dilei diametro DA: io dico, che il
semidiametro CA sia medio proporzionale tra CN
ascissa dal centro corrispondente all'ordinata per lo
contatto, e tra CR parte del diametro, che sta
tra il centro, e la tangente. E viceversa. **

Leggasi la dim. della Prop. XII. Lib. II.
e si veggia la fig. cit.

PROP. XIV. TEOR.

*Nell'Iperbole la sunuormale MH sta ad MC Fig. 60.
ascissa dal centro, come AQ parametro dell'asse
al medesimo asse. **

Si

Si legga la dimostrazione della Prop. XI. Lib. II. e si riscontri la fig. cit.

Cor. I. Dunque se al medesimo asse si ponga in A perpendicolarmente il suo parametro AO: la retta CF, che passa per la metà dell'asse, e del parametro, sarà il luogo delle sunnormali della Iperbole. Su di che vedi il Cor. I. e II. Prop. X. Lib. II.

Cor. II. Ed in generale le Surregolatrici prese negli assi delle curve coniche sono i luoghi delle loro sunnormali. **

Fig. 68.

Defin. IV. La retta EB media proporzionale tra il lato retto DN, e l' trasverso AD dicesi *Diametro secondario* di AD; ed AD *Primario* riguardo ad EB.

Questo diametro Secondario si situa tra le Iperboli opposte, in modo che il suo punto medio stia nel centro, ed ei ne giaccia parallelo alle ordinate del primario.

Defin. V. E generalmente ogni media proporzionale tra qualunque diametro, e l' di lui parametro si dirà *Diametro secondario* di esso; siccome quel diametro rispetto a questo dirassi *Primario*.

Ed ogni secondario dee porsi parallelo alle ordinate del primario, e l' suo punto medio dee cader nel centro.

Cor. I. Dunque ogni diametro primario sta al suo parametro, come il quadrato del semidiametro primario a quello del semidiametro secondario.

Cor.

Cor. II. E' il quadrato di una femiordinata del diametro primario starà al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici di esso, come il quadrato del semidiametro secondario al quadrato del semidiametro primario.

Defin. VI. Se si ritrovi EO, che stia al lato trasverso AD, come esso lato trasverso al suo secondario BE; e poi s'intendano descritte le due iperboli opposte BS, EQ, che abbiano BE per lato trasverso, ed OE per lato retto, e che le ordinate di HB sien parallele a DA; queste curve si diranno *Iperboli conjugate*.

Fig. 68.

C A P. II.

Degli Asintoti delle Iperboli.

Benchè le tangenti di un' Iperbole tanto più si elevino sul di lei vertice, quanto sotto di esso ne giaccion più depressi i diloro contatti: pure, come vel dimostrai nella Proposizione quarta di questo libro, niuna di esse, ancorchè proceda da un punto infinitamente al vertice lottoposto, potrà giammai salirne al centro, non che smontarlo. E se al vertice A del diametro *AA* si tiri la tangente AD uguale al suo semidia-
metro secondario; vi sarà quaggiù dimostrato che niun diametro, il qual si conduca nel ramo iperbolico AK, nè retta alcuna, che il tocchi, potrà mai passare pel punto D, o girne
al

Fig. 70.

al di là del medesimo. Sicchè cotesta retta CD sarà qual limite entro cui si racchiudono le infinite tangenti, e gl' infiniti diametri, che si possono condurre nel ramo AK infinitamente lungo, e dal diametro divergente all' infinito. Queste rette CD, che sentirete dirsi Asintoti dell' Iperbole, formano l' oggetto del presente Capitolo, e son di luce alla Teoria delle Iperboli conjugate, di che intendo ragionar nel seguente.

PROP. XV. TEOR.

Se in una qualunque tangente DB dell' Iperbole si prendano di quà, e di là dal contatto le parti AD, AB rispettivamente uguali al semidiametro secondario di quello, che passa per lo contatto; le rette CD, CB, che si conducono dal centro dell' Iperbole agli estremi D, e B di esse parti, per quanto si prolungano, non potranno giammai concorrere col perimetro della sezione, sebben gli si accostino sempre per un' intervallo minore di qualunque dato.

Dico. Per un punto qualunque K del perimetro iperbolico conducati l' ordinata KG, e la si distenda insino alle rette CB, CD; sarà $HF:CF::BA:AC$ per la somiglianza de' triangoli HCF, BCA: e quindi $HF^2:CF^2::BA^2:CA^2$. Ma BA^2 per essere uguale a CE^2 (1) sta a CA^2

(1) Per Ipot,

a CA^2 come GF^2 ad aFA (1): dunque sarà pure $HF^2 : CF^2 :: GF^2 : aFA$, e perciò (2) HGL ad AC^2 , come HF^2 a CF^2 , o come BA^2 a CA^2 . Laonde allo stesso quadrato di CA servando ugual ragione tanto il rettangolo HGL , che il quadrato di BA , dovrà il rettangolo HGL uguagliare il quadrato di BA : e quindi starà $LG:AB::AB:GH$. Or di queste tre rette continuamente proporzionali la prima LG , ch'è l'aggregato delle due GF , ed FL , può accrescersi all'infinito, perciocchè non meno CL che il ramo iperbolico AG (3) va divergendo dal diametro QF : e la media AB è di una costante magnitudine. Dunque la terza GH convien, che decresca a misura che il punto G più si depressa sotto del vertice A : vale a dire l'intervallo HG della retta GH dall' Iperbole può minorarsi all'infinito, senza poter mai il punto G cadere in H ; cioè senzachè la medesima retta incontri la curva. C.B.D.

Defin. VII. Una retta dicesi *Asintoto* di una curva, se continuamente le si avvicini senza poterla giammai toccare.

Cor. I. Dunque la continua convergenza di una retta, e di una curva, e l'impossibilità di unirsi, sono i due caratteri, onde la prima può dirsi asintoto dell'altra: o piuttosto son esse le nozioni che si racchiudono nella voce asintoto.

Cor.

(1) Cor. 2. Defin. V. Lib. III,

(2) Prop. 19. Fl. V.

(3) Cor. II. Prop. II. Lib. III,

Cor. II. Lo stesso può dirsi di due curve asintotiche.

Cor. III. Dunque le rette CD, CB sono asintoti dell' Iperbole AG,

Scol. I.

Il grande Apollonio ha dimostrato nella I. Prop. del II. Lib. de' suoi conici, che gli asintoti non possano convenir mai coll' Iperbole: e nella XIV. che le si debbano avvicinar sempre per un intervallo minore di qualunque dato. Queste due cose ho insieme raccolte nel presente Teorema, e vi ho mostrato appartenersi cotesti caratteri alle due rette CB, CD, prima di chiamarle asintoti. Imperocchè sebbene il natto significato della voce *ασυμπτωτος* *asymptotus* non racchiuda che il secondo carattere espresso nel Cor. I. della definizione precedente, cioè l' impossibilità di convenir la retta colla curva; pure in cotesta definizione nominale ritrovandosi tutti e due, conveniva verificarne ben anche il primo.

Scol. II.

Dall' enunciazione del presente Teorema non si dee trarre per conseguenza, che un ramo iperbolico debba aver tanti asintoti, quanti punti son concettibili in esso: giacchè a ciascun punto di un tal ramo può tirarsi una tangente quanto
il

il semidiametro secondario di quello, che passa per lo contatto, e quindi per l'estremo di essa, e per lo centro un'asintoto. Tutti gli estremi di coteste tangenti, come quaggiù il vedrete, si ritrovano in un'istesso asintoto: nè le Iperboli opposte, e le conjugate sono suscettibili, che di due soli asintoti.

P R O P. XVI. T E O R.

*Il ramo iperbolico AG non può avere altro Fig. 71.
asintoto, che la retta CBH.*

Dim. Se vogliasi, che un'altra retta sia pure asintoto dello stesso ramo AG; ella o dovrà esser parallela all'asintoto CH, o gli si dovrà inclinare sotto un qualche angolo. Suppongasì primieramente che MR parallela all'asintoto CB sia un'altro asintoto del ramo iperbolico AG, e che cada tra il mentovato ramo e l di lui asintoto CB. Sia di più G un punto della curva, che disti da CH, quant'è l'intervallo delle due parallele MR, CB. Egli è di per se chiaro, che in questo punto debba necessariamente la retta MR incontrar l'Iperbole, e che in giù prodotta abbia poi a segarla. Dunque cotesta retta non è un'asintoto (1), come l'era si supposto.

Che se tal parallela stiane fuori l'angolo asintotico, com'è appunto la IN; ella dovrà

L

fer-

(1) Cor. 1. Defn. VII.

serbar sempre dal ramo iperbolico AG una distanza maggiore di quanto è l'intervallo delle due parallele IN , CB ; imperocchè, come si è detto nella prop. prec., la curva è mai sempre al di sotto dell'asintoto CB . Dunque nè tampoco IN potrà esser asintoto dello stesso ramo iperbolico.

In secondo luogo, se la retta, che vuol si asintoto del ramo iperbolico AG , convenga con CB in qualche punto; intenderassi agevolmente, ch'ella cadendo fuori l'angolo asintotico BCD , com'è la retta OS , debba continuamente divergere da CB , e con ciò ancora dal divisato ramo AG . E che per l'opposto, se si ritrovi in mezzo all'angolo asintotico, come la retta of , col divergere da CB debba con esso ramo convenire: nè quindi queste rette OS , ed of potranno essere asintoti (1) del ramo AG . Dunque niuna retta fuorchè la CB sarà asintoto del ramo iperbolico AG . $C.B.D.$

P R O P. XVII. T E O R.

Fig. 70. *Poste le medesime cose della prop. XV. le rette CB , CD sono asintoti ancora dell'Iperbole opposta gak , e delle due conjugate Ee , Pp .*

Dim. Part. A Sia aA il lato trasverso delle Iperboli GAK , gak , ed EP il suo secondario, cui si rapportino le Iperboli conjugate Ee , Pp (2).

Sì

(1) Defn. VII.

(2) Defn. VI.

Si distendano gli asintoti BC , DC infino alla tangente dab menata pe'l vertice dell'opposta sezione, e si compiano i due parallelogrammi $ACED$, $a'Eb$.

Ciò posto pe' triangoli CAB , CAD simili ed uguali agli altri Cab , Cad rispettivamente, le due rette ba , e da sono uguali a BA , e DA (1). Dunque Cb , e Cd sono asintoti dell'Iperbole opposta gak (2).

Part. II. Di più, essendo CE parallela alle ordinate del diametro aA , e quindi alla tangente del di lui vertice A ; AD dovrà esser tangente della sezione in A . Similmente ED sarà tangente in E dell'Iperbole conjugata Ee . Dunque congiungendo la retta CD , questa (3) sarà asintoto tanto del ramo AK , che dell'altro Ee . E quindi ancora dell'altra Iperbole Pp [4]. $C. B. D.$

Cor. I. Dunque i due rami contigui AK , Ee delle due Iperboli conjugate GAK , eEq sono asintotici.

Cor. II. Le tangenti AD , DE menate a' vertici A , ed E delle Iperboli conjugate GAK , Ee comprendono un parallelogrammo col semidiametro CA , e col di lui secondario CE , e si uniscono in un' istesso punto dell'asintoto CD .

L 2

PRO.

- (1) Prop. 26. El. I.
- (2) Prop. XV. Lib. III.
- (3) Prop. XV. Lib. III.
- (4) Part. I.

Fig. 72. *Se ad un qualunque punto A dell' Iperbole SAR si meni la tangente BAO, che si arresti fra gli asintoti CM, CO; il quadrato di ciascuna sua parte sarà uguale al quadrato del semidiametro secondario di quello che passa pe' l' contatto A.*

E se poi per un punto S dell' Iperbole distendasi la secante QS, il rettangolo delle sue parti QS, SM, che restano fra la curva e gli asintoti, sarà uguale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa secante.

Dim. Part. I. Se AB non sia uguale al semidiametro secondario di CA, si tagli Ab uguale ad esso semidiametro secondario, e si unisca Cb; dovrà esser questa retta asintoto del ramo iperbolico AS (1). Dunque il ramo AS avrà per asintoti le rette CB, Cb. Lo che ripugna (2). Nella stessa guisa dimostrasi, che AO altra parte della medesima tangente sia uguale allo stesso semidiametro. Dunque tanto AB^2 , che AO^2 sarà uguale al quadrato del semidiametro secondario di AC.

Part. II. Se la secante incontri i rami di una sola Iperbole, la dimostrazione del nostro assunto racchiudesi in quella della Prop. XV. Ci riman dunque a dimostrarlo nel caso, che la secante QS tagli le opposte sezioni. Ed eccone

(1) Prop. XV. Lib. III.

(2) Prop. XVI. Lib. III.

come il tessuto. Per lo parallelismo delle rette MS ed AC, e delle altre LS e BO il triangolo LMS è simile a BCA: onde dovrà stare $LS:SM::BA:AC$. Ma per le stesse ragioni il triangolo NSQ è simile all'altro AOC: dunque sarà SN ad SQ, come AO, o la sua uguale BA a CA. E quindi (1) il rettangolo LSN sarà al rettangolo QSM come BA^2 ad AC^2 . Ma il primo rettangolo è uguale a BA^2 (2): dunque sarà eziandio QSM uguale ad AC^2 . C . B . D.

Cor. I. Dunque le tangenti AB, AO sono rispettivamente uguali al semidiametro secondario di CA, e con ciò uguali fra loro.

Cor. II. Nella stessa guisa dimostrasi il rettangolo MPQ uguale al quadrato di CA, e con ciò al rettangolo QSM. Dunque [bisecando la QM in F] sarà $FP^2 - FQ^2$ uguale ad $FS^2 - FM^2$ [3]. E quindi FP uguale ad SF, e QP uguale ad MS.

Cor. III. Dunque se per un punto qualunque del perimetro Iperbolico conduca una secante, che incontri in due punti la stessa Iperbole, o le opposte sezioni, e si distenda in sino agli asintoti; le sue parti che restano fra la curva, e gli asintoti sono sempre tra se uguali.

L 3

PRO;

- (1) Cor. 3. Lemm. II.
- (2) Dim. Prop. XV. Lib. III.
- (3) Prop. 6. El. II.

Fig. 70. *L'angolo asintotico BCD è retto, ottuso, o acuto, secondochè l'asse aA dell'Iperbole sia uguale, minore, o maggiore del suo secondario PE.*

Dim. Suppongasi il semiasse principale CA uguale al semiasse secondario CE, o alla tangente verticale AB (1); farà isoscele il triangolo rettangolo BAC: dunque l'angolo ACB farà semiretto. E dimostrandosi, che sia benanche semiretto l'altro ACD; l'è forza che sia retto l'intero angolo BCD compreso dagli asintoti CB, CD.

Che se CA sia minore di CE, o di AB, l'angolo CBA farà minore dell'altro ACB (2). Ma tutti e due deggion fare un retto, perciocchè il triangolo CAB è rettangolo in A. Dunque l'angolo ACB farà più che un mezzo retto; e quindi il suo doppio BCD farà maggiore di un retto, cioè ottuso.

Finalmente, qualor si ponga CA maggiore di CE o di AB, con un simile ragionamento si dedurrà esser l'angolo ACB men che un semiretto, e che quindi BCD suo duplo debba esser minore di un retto, e con ciò acuto. C. B. D.

Cor. La retta, che unisce un de' vertici prin-

(1) Prop. XVIII. Lib. III.

(2) Prop. 18. EL I.

principali delle Iperboli col di loro centro, biseca l'angolo asintotico.

Defin. VIII. L'Iperbole il di cui asse principale adegua il suo secondario, dicesi *Equilatera*, o *Parilatera*; ed ella dicesi *Scalena*, se i medesimi assi sien disuguali fra loro.

Defin. IX. Gli asintoti diconsi *Ortogonal*i, o *Rettangoli*, se comprendan fra loro un'angolo retto.

Cor. Dunque nell'Iperbole Parilatera gli asintoti sono ortogonali, e viceversa.

Defin. X. Se dal vertice principale di un'Iperbole conduca la parallela ad un'asintoto, Fig-73 e si distenda finchè ne incontri l'altro, il quadrato di tal retta si dirà *Potenza* dell'Iperbole. Così il quadrato della retta AE condotta dal vertice principale A parallela all'asintoto CD è la potenza dell'Iperbole AF, ed AE il suo lato.

Cor. I. Essendo l'angolo ACE uguale ad ACH (1), se per A si tiri AH parallela a CE, la figura AECH, che ne risulta, sarà un rombo.

Cor. II. E tanto farà il quadrato di AE, che il rettangolo di AE in EC.

Defin. XI. Se da un qualunque punto F dell'Iperbole AF si meni FB parallela all'asintoto CD, che tagli in B l'altro asintoto, essa retta si dirà *Ordinata* dell'Iperbole tra gli asintoti, e CB sua corrispondente *ascissa*.

L 4

PRO.

(1) Cor. Prop. XIX.

Fig. 73. *Il rettangolo formato da un' ordinata dell' Iperbole tra gli asintoti nella corrispondente ascissa è sempre uguale alla potenza dell' istessa Iperbole.*

Dim. Sia FB una qualunque ordinata all' Iperbole tra gli asintoti, A il vertice principale della medesima curva, e per F ed A si distenda una retta insino agli asintoti; sarà il rettangolo DAG uguale all' altro DFG (1); e quindi $DA:DF::FG:AG$ (2). Or per lo parallelismo delle tre rette DC, AE, FB sta $DA:DF::CE:CB$, e per la similitudine de' triangoli FBG, AEG l'è pure $FG:AG::FB:AE$. Dunque sarà $CE:CB::FB:AE$ (3); e quindi il rettangolo di FB in BC sarà uguale al rettangolo di AE in EC, cioè a dire (4) alla potenza dell' Iperbole. C. B. D.

Cor. I. E tirandosi l' altra ordinata fb , si mostrerà in simil guisa essere il rettangolo fbC uguale alla stessa potenza dell' Iperbole. Dunque i due rettangoli di FB in BC, e di fb in bc saranno tra se uguali: e starà $FB:fb::bC:BC$.

Cor. II. Cioè le ordinate nell' Iperbole tra gli asintoti sono inversamente come le loro ascisse.

Cor. III. E saran pure uguali i parallelo-

(1) Cor. III. Prop. XVIII. Lib. III.

(2) Prop. 16. El. VI.

(3) Prop. 11. El. V.

(4) Defin. X. Lib. III.

logrammi $FBCI$, $fbCi$, come quelli che reciprocamente i lati intorno agli angoli uguali FBC , fbC : e con ciò i triangoli FBC , fbC metà di essi saranno ancora tra se uguali.

PROP. XXI. TEOR.

Se da un punto qualunque M dell' asintoto HM si menino le tangenti MQ, ME alle Iper. Fig. 74. boli conjugate AQ, BE; la retta QE fra' contatti sarà bisecata dal medesimo asintoto, e giacerà parallela all' altro CH.

Dim. Si distendiamo le tangenti MQ, ME, finchè tocchino in q , ed e l' asintoto HC; farà tanto MQ uguale a Qq , che ME ad Ee (1). Dunque essendo $MQ:Qq::ME:Ee$, la retta QE convien che sia parallela ad HC (2).

Sia inoltre Aa il lato trasverso dell' Iperbole AQ, e Bb quello della sua conjugata BE; la retta AB sarà bisecata in T dall' asintoto AN, essendo AHBL un parallelogrammo (3): ed attraversando i contatti delle tangenti LA, LB, che concorrono allo stesso punto L dell' asintoto AM, ella dovrà esser anche parallela ad HC (4). E perchè i rettangoli di QF in FH, e di EF in FH sono rispettivamente (5) uguali a' rettan-

80-

- (1) Cor. I. Prop. XVIII. Lib. III.
- (2) Prop. 2. El. VI.
- (3) Cor. II. Prop. XVII. Lib. III.
- (4) Da ciò, che si è mostrato.
- (5) Cor. I. Prop. prec.

goli di AT in TH , e di BT in TH ; siccome questi si adeguano fra loro per essere AT uguale a TB ; così quelli faran pure tra loro uguali: onde convien che sia QF uguale ad FE . $C.B.D.$

Cor. I. Se da un' estremo del lato trasverso dell' Iperbole si tirino due rette agli estremi del suo secondario, e dal centro si menino rispettivamente due parallele ad esse rette, coteste parallele saranno gli asintoti della curva. Ed in quest' altra guisa si potrebbero ancor essi definire.

Cor. II. Essendo il rettangolo di AT in TH uguale alla potenza dell' Iperbole AQ , e l' altro rettangolo di HT in TB uguale alla potenza della conjugata BE ; saranno queste potenze uguali fra loro, come il sono i rettangoli AT in TH , e di HT in TB .

Cor. III. Dunque le due Iperboli opposte, e le due conjugate hanno uguali potenze.

Cor. IV. Di più ogni retta QE , che conduca parallela all' asintoto HC , e si arresti fra i contigui rami curvilinei delle Iperboli AQ , BE tra loro conjugate, dovrà esser bisecata dall' asintoto HF , che passa in mezzo a' medesimi rami.

PROP. XXII. TEOR.

Fig. 75. Se si prendano le ascisse CA , CB , CD dell' Iperbole tra gli asintoti continuamente proporzionali,

li, e si tirino le ordinate AE , BF , DG ; i quadrilinei iperbolici $EABF$, $FBDG$, che queste ne ascindono, faranno tra se uguali.

Dim. Si prendano Aa , e Bb due aliquote simili di AB , e BD , e si compiano i parallelogrammi $AEea$, $BFfb$; questi dovranno essere tra se uguali. Imperocchè essendo dalla supposizione $CD:CB::CB:CA$, sarà (1) $CB:CA::BD:BA$. Or di queste ragioni la prima è uguale a quella di AE a BF (2), e la seconda è quanto quella di Bb ad Aa : dunque farà eziandio $AE:BF::Bb:Aa$, e'l parallelogrammo $AEea$ sarà uguale al suo equiangolo $BFfb$ (3).

E poichè si è dimostrato esser le due CB , e CA proporzionali alle altre BD , e BA , o alle loro aliquote simili Bb , Aa , sarà componendo $Cb:Ca::Bb:Aa$. E tagliandosi am , e br uguali ad Aa , e Bb , e compiti i parallelogrammi $camn$, $dbrt$; farà pure br ad am , come Cb a Ca , o come (4) ac a bd . Laonde essendo $ac:bd::br:am$, il parallelogrammo $camn$ sarà uguale all'altro $dbrt$.

Nella stessa maniera può dimostrarsi, che gli altri parallelogrammi circoscritti nell'aja iperbolica $EABF$ sieno uguali a' rimanenti, che si circoscriverebbero nell'altra $FBDG$. Dunque facendosi nelle medesime aje $EABF$, $FBDG$

ter

(1) Prop. 19. El. V.

(2) Cor. II. Prop. XX. Lib. III.

(3) Prop. 14. El. VI.

(4) Cor. II. Prop. XX. Lib. III.

terminare i rettangoli ad esse circoscritti, faranno cotesti quadrilinei iperbolici EABF, FBIDG tra se uguali (1). C. B. D.

Cor. I. Il triangolo CEA è uguale all'altro CFB (2). Dunque togliendo da essi il comun triangolo CA θ , dovrà rimanervi il triangolo CE θ uguale al trapezio A θ FB. E quindi se a questi spazj si aggiunga il triangolo mistilineo E θ F ne risulterà il settore iperbolico ECF uguale al quadrilineo adjacente EABF. E così può mostrarsi degli altri.

Cor. II. Se le rette CA, CB, CD, CE, CF &c. sieno continuamente proporzionali, i quadrilinei iperbolici GABH, HBDI, IDEK, KEFL &c. ovvero i settori GCG, HCI, ICK, KCL &c. saranno uguali fra loro. E quindi questi altri quadrilinei GABH, GADI, GA EK, GAFL &c. ovvero i settori GCH, GCI, GCK, GCL &c. saranno nella progressione naturale: cioè se il settore GCH si riguardi come l'unità, gli altri GCI, GCK, GCL &c. faranno 2, 3, 4 &c.

Cor. III. Dunque gli spazj iperbolici GABH, GADI, GA EK &c. sono logarithmi delle rette CB, CD, CE &c. o delle quantità delle ragioni di CB a CA, di CD a CA, di CE a CA &c. (a), Imperocchè le quantità di siffatte ragioni

(1) Item. I.

(2) Cor. III. Prop. XX. Lib. III.

(a) Se prendasi una serie di grandezze geometricamente

ragioni per l'identità del conseguente **CA** son valutate da' rispettivi antecedenti.

Cor. IV. Potendosi continuare all'infinito la serie delle ascisse **CA**, **CB**, **GD**, **CE**, **CF**, &c. continuamente proporzionali; infiniti uguali trapezj **GABH**, **HBDI**, **IDEK**, **KEFL** &c. dovranno contenersi nello spazio asintotico **AFXLG**. Dunque lo spazio asintotico **AFXLG** che si mostrerà

d'una serie proporzionali, e di rincontro comunque le si ponga un'altra serie di grandezze aritmeticamente proporzionali; ogni termine di questa darassi logaritmo del suo corrispondente termine di quella. Così nelle due serie **A**, e **B** registrate come si vede

A 1, 10, 100, 1000, 10000 &c.

B 0, 1, 2, 3, 4 &c.

si dirà o log-mo dell'1, 1 log-mo di 10, 2 log-mo di 100 &c. Ma eccone un'altra idea più sublime de' log-mi, che l'Analisi ne somministra. „ Prendasi una grandezza *a* maggiore „ dell'unità, e le si affigga un'esponente variabile *x*; ei sarà „ chiaro di per se stesso, che il valore della grandezza esponenziale a^x debba esser benanche variabile, che si dica *y*, „ e s'intenderà poi a priori, che l'esponente *x* debba pareggiare „ una parte, un'espressione, o una funzione della variabile *y*. Ciò premesso ecco la definizione generale de' log-mi. „ *Quella parte, o quella funzione del valore di una grandezza esponenziale, che pareggia il di lei esponente, dicesi „ logaritmo della medesima esponenziale, cioè $x = \log. y$.*

Da questa definizione raccogliasi primieramente, che se mai gli esponenti della divitata grandezza esponenziale si prendano in proporzione aritmetica, i di lei valori debbono essere geometricamente proporzionali. Secondo cangiandosi la grandezza *a*, che si chiama *Base logaritmica*, si dovranno cangiare in parità di altre circostanze i logaritmi. Onde sarà chiaro che i sistemi log-mici sien tanti, quante diverse basi son concettabili. Ma a due sistemi hanno i Geometri ristrette le loro speculazioni, cioè al *Volgare*, la cui base è 10; ed all'*Iperbolico*, che tien per base 2, 71828183. Imperciocchè co' log mi volgari si agevolano grandemente i calcoli aritmetici; e gl'Iperbolici son di gran uso nel calcolo Integrale. Intanto i log-mi volgari, che son registrati nelle Tavole, si cangeranno in iperbolici, sol che si moltiplichino per 2, 3258509.

d'un' infinita lunghezza (1), l'è ancora di un' aja infinita.

Scol.

Questa insigne proprietà dell' Iperbole igno-
ravasi dagli antichi Geometri, e l' primo ad
iscovririla è stato l' acutissimo P.^e Gregorio da
S. Vincenzo meditando sulla quadratura del cer-
chio, e dell' Iperbole. Nè fia maraviglia, ch'
ella sì lungo tempo siane stata al bujo: poichè,
prima del Baron di Neper, il quale visse tra
il decimo sesto e l' decimo settimo secolo dell'
Era volgare, non sapeasi in verun modo, che si
fussero i logaritmi, i diversi loro sistemi, e l' di
loro uso. Onde se per avventura cadde in mente
a qualche antico Geometra la verità di questo
Teorema, io m' immagino che abbiassi dovuta da
esso rigettare quale sterile, e vana speculazione.

P R O P. XXIII. T E O R.

Se da un punto B dell' Iperbole Parilatera AB,
Fig. 77. si ordini la retta BP all' asintoto CP, e l' altra
BH all' asse secondario CL; il rettangolo BHC delle
coordinate a questo asse sarà sudduplo della diffe-
renza de' quadrati di CP, e PB coordinate all'
Iperbole tra gli asintoti.

Dim. Essendo semiretto l' angolo ACV, che
fora

(1) Prop. XV. Lib. III.

forma l'asse AC coll' asintoto CP (1), sarà anche semiretto il suo complemento PCH. E quindi tanto la figura CHV, che la sua simile BVP dovrà essere un triangolo isoscele rettangolo, cioè sarà CH uguale ad HV, e PB a PV. Or per la similitudine di questi medesimi triangoli sta $CV : HV :: BV : PV$; dunque il rettangolo BVH sarà (2) uguale all' altro PVC, e $2BVH$ uguale a $2PVC$. Ed aggiungendo al doppio del rettangolo BVH il doppio quadrato di HV, ed al doppio del rettangolo PVC il quadrato di CV, ch' è duplo del quadrato di HV, dovrà risulturne il doppio rettangolo BHV (3) uguale al doppio rettangolo PVC col quadrato di CV, cioè (4) alla differenza de' quadrati di CP e di PV, o sia di CP e di PB. Val quanto dire il rettangolo BHV, o il suo uguale BHC fatto dalle coordinate all' asse secondario CH sarà la metà della differenza de' quadrati di CP, e di PB coordinate all' Iperbole tra gli asintoti. C.B.D.

CAP.

- (1) Prop. XIX. Lib. III,
- (2) Prop. 16. El. VI,
- (3) Prop. 3. El. II.
- (4) Prop. 4. El. II.

De' Diametri Conjugati delle Iperboli.

P R O P. XXIV. T E O R.

Fig. 70. *Sieno GAK, gāk due Iperboli opposte; io dico, che gli estremi de' loro diametri secondarj abbiano ad allogarsi nelle Iperboli conjugate Ee, Pp.*

Dim. Da un qualunque punto D di CD comune asintoto delle Iperboli AK, Ee, si tirino alle stesse curve le tangenti DAB, dEb, e si protraggano infino all'altro asintoto Bb. Si conduca la retta AE fra' contatti, e le altre CA, e CE. La retta EA è parallela all'asintoto CB (1): dunque siccome DA è uguale (2) ad AB, così DI dovrà pareggiare IC, Ma AI è anche uguale ad IE (3): dunque i triangoli AID, CIE avendo i lati AI, ed ID rispettivamente uguali ad EI, ed IC, e l'angolo AID uguale a CIE, dovranno benanche avere AD, e CE uguali, non men che gli angoli ADI, ECI (4). E quindi la retta CE, che si è mostrata uguale alla tangente AD, e l'è ancor parallela a cagion degli angoli uguali

(1) Prop. XXI. Lib. III.

(2) Cor. 1. Prop. XVIII. Lib. III.

(3) Prop. XXI. Lib. III.

(4) Prop. 4. El. I.

li ADC, DCE (1), dovrà essere il semidiametro secondario di CA (2). E poichè il suo estremo E tocca l'Iperbole coniugata Ee, sarà vero quel che si è proposto. C. B. D.

Cor. La retta, che unisce gli estremi di un semidiametro, e del di lui secondario, è parallela all'asintoto, che le si oppone.

P R O P. XXV. T E O R.

*Sia AD un qualunque diametro delle Iperbole opposte DT, FA, cui si tiri ovunque la parallela TF, che le incontri in T, ed F; io dico, che il suo diametro secondario BE debba bisecarla. ** Fig. 68.

E se questa parallela seghi una delle Iperbole conjugate QEP, la parte QP, ch'è dentro di tal curva, sarà puranche bisecata dallo stesso diametro secondaria.

Dim. Part. I. Si tiri al diametro AD non meno l'ordinata TK, che l'altra FG: queste faran parallele fra loro, e la figura GKTF un parallelogrammo, avente con ciò (3) uguali i lati opposti TK, FG. Ed essendo i rettangoli AKD., DGA come i quadrati di TK, e di FG (4); siccome questi sono tra se uguali, così il dovranno essere anche quelli. Laonde ag-
M. giun-

(1) Prop. 27. El. I.

(2) Prop. XVIII. Lib. III.

(3) Prop. 34. El. I.

(4) Prop. X. Lib. III.

giungendo a' medesimi rettangoli AKD , DGA gli uguali quadrati di CD , e di CA , ne risulterà (1) il quadrato di CK uguale all'altro di CG , e CK uguale a CG . Or a queste rette CK , e CG sono rispettivamente uguali HT , ed HF , come lati opposti de' due parallelogrammi $CKTH$, $CGFH$: dunque HT sarà uguale ad HF .

Part. II. Sieno impertanto Cq , e Cp gli asintoti delle Iperboli opposte DT , AF , che saranno eziandio (2) asintoti della conjugata PEQ . Dunque sarà tanto Tq uguale ad Fp , quanto (3) Qq a Pp : e quindi anche TQ dovrà pareggiare la FP . Laonde se queste rette si tolgano rispettivamente dai tutti HT , HF di già mostrati uguali, ne avanzerà HQ uguale ad HP . C.B.D.

Cor. I. Da ciò, che si è dimostrato, intendesi agevolmente che le ordinate del diametro secondario, o che si arrestino tra le convessità delle Iperboli opposte, o che sien rinchiusse nella parte concava di un'Iperbole conjugata, sono sempre al diametro primario parallele; come ogni ordinata di questo dal secondario equidista.

Defin. XII. Due diametri si dicono *conjugati fra loro*, se uno sia parallelo alle ordinate dell'altro.

Cor. II. Ogni diametro primario dell'Iperbole,

(1) Prop. 6. El. II.

(2) Prop. XVII. Lib. III.

(3) Cor. III. Prop. XVIII. Lib. III.

bole, e 'l suo secondario sono conjugati fra loro.

Cor. III. Dunque gli estremi de' diametri conjugati a quelli, che nelle Iperboli opposte si conducono, debbono toccare le Iperboli conjugate.

Cor. IV. E quindi DN parametro del diametro DA potrà definirsi, che sia una terza proporzionale in ordine ad esso diametro, ed al di lui conjugato.

P R O P. XXVI. T E O R.

Poste le medesime cose della I. parte della prop. prec, il quadrato di TH semiorinata al diametro Fig. 68. secondario BE sta alla somma de' quadrati di CH ascissa dal centro, e di CE semidiametro secondario, come il quadrato del primario a quello del secondario,

Dim. Il rettangolo AKD sta a KT^2 , come CD^2 a CE^2 (1). Dunque (2) sarà la somma del rettangolo AKD, e del quadrato di CD, cioè (3) CK^2 alla somma de' quadrati di KT e di CE, come CD^2 a CE^2 , o come AD^2 a BE^2 . Vale a dire l'è $TH^2 : CH^2 + CE^2 :: AD^2 : BE^2$.
C . B . D,

Cor. I. E conducendosi un'altra retta *th* parallela al medesimo diametro AD, si mostrerà

M 2

nello

(1) Cor. II. Defn. V. Prop. XIV. Lib. III.

(2) Prop. 12. El. V.

(3) Prop. 6. El. II.

nello stesso modo, che tb^2 sia a $Cb^2 + CE^2$, come AD^2 a BE^2 . Onde potrà concludersi, che i quadrati delle semiordinate TH , e tb al diametro secondario BE dell' Iperbole sieno fra loro come $CH^2 + CE^2$, e $Cb^2 + CE^2$, cioè come le somme del quadrato del semidiametro secondario, e delle ascisse dal centro.

Cor. II. E quindi sarà $TH^2 : DC^2 :: CH^2 + CE^2 : CE^2$.

P R O P. XXVII. T E O R.

*Il parallelogrammo HQME, che si compie Fig. 74. dai due semidiametri conjugati HQ, HE, è uguale al rettangolo de' semiasse conjugati HALB. **

Dim. Essendo QM uguale, e parallela ad HE semidiametro conjugato di QH, il punto M dovrà trovarsi in HM asintoto comune delle Iperboli AQ, BE (1). Similmente starà l'altro punto L nel medesimo asintoto. E poichè le rette QE, AB, che uniscono gli estremi de' semidiametri conjugati, e de' semiasse, (2) sono parallele all' altro asintoto HC, il triangolo HQF sarà uguale all' altro HAT (3). E prendendo i quadrupli, ne risulterà il parallelogrammo HQME de' semidiametri conjugati HQ, HE uguale al rettangolo HALB de' semiasse conjugati. C. B. D.

Cor.

- (1) Prop. XVIII. Lib. III.
- (2) Cor. Prop. XXI. Lib. III.
- (3) Cor. III. Prop. XX. Lib. III.

Cor. I. E da ciò può inferirsi che ogni parallelogrammo iscritto in tutti e quattro i rami iperbolici sia di una costante grandezza, cioè uguale al rettangolo degli assi conjugati. *

Cor. II. Se pe' punti Q, e B si distendano YX, BZ rispettivamente parallele ad AL, ed EM, e si congiunga QB, sarà il parallelogrammo HYXB uguale all'altro HQZV: imperocchè il primo è duplo del triangolo HQB con cui poggia sulla stessa base HB, ed è tra le medesime parallele HB, YX. E' il secondo dello stesso triangolo è anche duplo per esserne entrambi sulla medesima base HQ, e fra le medesime parallele HQ, BZ.

Cor. III. Dunque sarà il parallelogrammo HYXB all'altro HALB, come il parallelogrammo HQZV all'altro HQME. Cioè $HY:HA::HV:HE$ (1). Ma sta $HV:HE::HB:HR$, o come HS ad HB (2). Dunque sarà $HY:HA::HS:HB$.

PROP. XXVIII. T E O R.

I quadrati di due diametri conjugati GF, Fig. 78. PM tanto differiscono fra loro, quanto i quadrati degli assi DA, RQ.

Dim. Si tirino da G, ed M le semiordinate GB, MN agli assi DA, RQ; dovrà sta-

M 3

re

(1) Prop. I. El. VI.

(2) Prop. XIII. Lib. III.

re (1) $CA : CQ :: CB : CN$, e $CA^2 : CQ^2 :: CB^2 : CN^2$. Dunque sarà $CA^2 : CQ^2 :: DBA : RNQ$ (2). Ma l'è poi (3) $CA^2 : CQ^2 :: DBA : BG^2$. Sicchè sarà $DBA : RNQ :: DBA : BG^2$, ed RNQ uguale a BG^2 . Similmente dimostrasi DBA uguale ad MN^2 . Per la qual cosa essendo dalla 6. El. II. il quadrato di CB uguale al quadrato di CA ed al rettangolo DBA , ei dovrà essere uguale al quadrato di CA , ed a quello di MN . E finalmente il quadrato dell' Ipotenusa CG , che pareggia i quadrati de' cateti CB, BG , sarà uguale ai tre quadrati di CA , di MN , e di BG .

In simil guisa dimostrasi, che il quadrato di CM adegui i tre quadrati di CQ , di GB , e di MN . Dunque la differenza de' quadrati di CG , e di CM sarà quanto i tre quadrati di CA , di MN , e di BG differiscono dai tre quadrati di CQ , di GB , e di MN , cioè a dire quanto il solo quadrato di CA differisce da quello di CQ : imperciocchè, come vedesi di per se stesso, MN^2 e BG^2 sono insieme uguali a BG^2 ed MN^2 . E quindi quadruplicando i termini, sarà la differenza de' quadrati de' diametri conjugati uguale alla differenza de' quadrati degli assi. $C. B. D.$

Cor. I. Dunque se un' Iperbole abbia due diametri conjugati tra se uguali, dovrà avere tutti

(1) Cor. III. Prop. prec.

(2) Prop. 19. El. V.

(3) Cor. II. Defin. V. Prop. XIV. Lib. III.

tutti gli altri diametri rispettivamente uguali a' loro conjugati.

Cor. II. E quindi tutti i diametri dell' Iperbole Parilatera sono rispettivamente uguali ai di loro conjugati. E saran pure i medesimi diametri rispettivamente uguali a' loro parametri. E 'l quadrato di ciascuna semiordinata ad uno di questi diametri sarà uguale al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici.

Cor. III. Il quadrato di ciascuna semiordinata ad un diametro secondario di questa Iperbole sarà uguale alla somma de' quadrati del semidiametro secondario, e dell' ascissa del centro (1).

Scol.

Il quadrato di CA dinotà la differenza de' quadrati di due diametri conjugati: si descriva col centro C intervallo CA il cerchio QAL, e si prenda CD uguale ad un qualunque diametro dell' Iperbole; io dico che, tirandosi la tangente DA, e l' ordinata AB, debba essere DA il diametro conjugato di DC, e DB il di lui parametro. Imperocchè i due quadrati di CD, di DA differiscono fra loro per lo quadrato di CA (2). Ed è poi $CD:DA::DA:DB$ [3]. Dunque (4) DA è il conjugato di DC, DB il di lui parametro. Ma tutto ciò è vero qualora il lato trasverso di

Fig. 86.

M 4

un?

(1) Prop. XXVI. Lib. III.

(2) Prop. 47. El. I.

(3) Prop. 8. El. VI.

(4) Cor. IV. Prop. XXV. Lib. III.

un' Iperbole sia maggiore del retto; poichè se quello sia minor di questo, converrà usare la seguente costruzione. Si tiri ovunque la tangente circolare AD, ma che sia uguale a quel diametro principale, di cui si vuol ritrovare il conjugato, e'l parametro. Si unisca DC, e si elevi CP perpendicolare a DC, che vada sino alla tangente; sarà DC il conjugato di DA, e DP il parametro dello stesso DA.

C A P. IV.

Delle Tangenti, e delle Secanti dell' Iperbole.

P R O P. XXIX. T E O R.

Fig. 79. *Nell' Iperbole se le tangenti DS, AQ menate a' vertici di un qualunque diametro DA comunque incontrino una tangente laterale MS; il rettangolo delle tangenti verticali DS, AQ adeguerà il quadrato del semidiametro CB conjugato a DA. **

Dim. Dal contatto della tangente laterale si tirino su de' semidiametri CA, CB le ordinate MN, MO, e CB si distenda fino alla tangente laterale. Ed essendo (1) CA^2 a CB^2 come il rettangolo DNA, o il suo uguale CNR (2)

ad

(1) Cor. 2. Defin. V. Prop. XIV. Lib. III.

(2) Cor. 11. Prop. III. Lib. III.

ad NM^2 : e CNR ad NM^2 in ragion composta di CN ad NM , e di NR ad NM , o sia di RC a CT pe' triangoli simili RNM , RCT ; sarà CA^2 a CB^2 in ragion composta di CN ad NM , e di RC a CT , cioè come il rettangolo NCR all'altro di NM in CT (1).

Ciò premesso poichè CA^2 adegua NCR (2), togliendo da queste grandezze il quadrato di CR , vi rimarrà il rettangolo (3) DRA uguale all'altro CRN (4), e quindi sarà $RD:RC::RN:RA$. Ma sta $RD:RC::DS:CT$ pe' triangoli simili RDS , RCT . Ed è poi $RN:RA::NM:AQ$ per la similitudine de' triangoli RNM , RAQ . Dunque sarà $DS:CT::NM:AQ$, e'l rettangolo di DS in AQ uguale al rettangolo di NM in CT . Per la qual cosa sostituendosi nell'ultima analogia del § prec. il rettangolo di DS in AQ in luogo dell'altro di NM in CT , avrassi $CA^2:CB^2::NCR:DS.AQ$: e quindi siccome CA^2 è uguale ad NCR (5); così dovrà essere CB^2 uguale al rettangolo di DS in AQ . C.B.D.

Cor. 1. Se la tangente MT incontri in R , e T il semidiametro CA e'l suo conjugato CB ; il rettangolo della semiordinata MN in CT sarà uguale al quadrato di CB semidiametro conjugato a CA .

Cor.

- (1) Prop. 23. El. VI.
- (2) Prop. XIII. Lib. III.
- (3) Prop. 5. El. II.
- (4) Prop. 3. El. II.
- (5) Prop. XIII. Lib. III.

Cor. II. Le rette AQ, NM, CT son proporzionali ad RA, RN, RC.

Cor. III. Essendo $CN:CA::CA:CR$, farà la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come la differenza di quelli alla differenza di questi, cioè $DN:DR::AN:AR$. Val quanto dire la retta DN è armonicamente divisa in R ed A. *

P R O P. XXX. T E O R.

Fig. 86. Se da un punto preso fuori l'Iperbole cadano sulla medesima curva; o sulle opposte sezioni due tangenti; queste saranno nella ragion de' semidiametri conjugati a quelli, che passano pe' loro contatti. "

Dim. Cas. I. Dal punto Q cadano sull'Iperbole AM le due tangenti QA, QM, cui sian paralleli i semidiametri CB, e CG, e si taglino questi, e quelle ne' punti T ed L vicendevolmente. E poichè per lo parallelismo delle rette RM, ed AF, sta $CR:CA::CM:CF$: ed è poi la prima di queste ragioni uguale a quella di CA a CN, e la seconda è quanto l'altra di CO a CM (1); le due rette CN, e CF saranno similmente divise in R ed A, in O ed M. Dunque anche le parti CR, RN, RA della prima retta saran proporzionali a CO, OF, OM parti corrispondenti della seconda: e
quira

(1) Prop. XIII. Lib. III.

quindi faran pure CT, NM, AQ proporzionali a CL, FA, MQ (1).

Or essendo $CT:MN::CL:FA$, e permutando $CT:CL::NM:FA$; la ragion che si compone da queste due sarà duplicata di una di esse, cioè il rettangolo di CT in NM al rettangolo di CL in FA sarà come CT^2 a CL^2 , o come AQ^2 ad MQ^2 . Ma que' rettangoli sono rispettivamente uguali a CB^2 e CG^2 (2). Dunque sarà $QA^2:QM^2::CB^2:CG^2$, e $QA:QM::CB:CG$.

Caf. 11. Sieno SM, SD le tangenti condotte da S nelle Iperboli opposte AM, Dd ; ei sarà chiaro, da ciò che si è detto nella I. Parte, che le due $SM, e DN$ sieno similmente divise ne' punti $T, R, e Q$, ed in questi altri $G, R, ed A$. Dunque sarà $SM:MQ::DN::NA$. Ma si è mostrato (3), che stia DN ad NA come DR ad RA , o come DS ad AQ . Dunque sarà $SM:MQ::DS:AQ$, e permutando SM ad SD come MQ ad AQ , o come CG a CB (4). $C. B. D.$

P R O P. XXXI. T E O R.

*Poste le medesime cose della Prop. prec. il rettangolo SMQ delle parti della tangente laterale, che restano tra il contatto, e le tangenti verticali, è uguale al quadrato del semidiametro CG parallelo ad essa tangente. ** Ed

(1) Cor. II. Prop. XXIX. Lib. III.

(2) Cor. I. Prop. prec.

(3) Cor. III. Prop. XXIX. Lib. III.

(4) Caf. I.

*Ed all'istesso quadrato di CG s'è pure uguale il rettangolo RMT delle parti della tangente laterale, che sono tra il contatto, e gl'incontri de' due semidiametri conjugati CA, CB . **

Leggasi la dimostrazione della Prop. XXIV. dell'Ellisse:

P R O P. XXXII. T E O R.

*Se le due corde QA, FH dell'Iperbole QHF s'incotrino dentro la curva, o fuori di essa; i rettangoli FKH, QKA , delle loro parti, che framezzano la curva, e 'l punto del concorso, saranno come i quadrati delle tangenti ME, NE parallele ad esse corde. ***

Dim. Leggasi la dimostrazione della Prop. XVIII. dell'Ellisse, e si vegga la fig. citata, con questo solo divario, che qui dal triangolo CSR debbonsi togliere il triangolo PSH , e 'l trapezio $NSRZ$ tra se uguali.

Fig. 18. Cor. Se la corda CA venga divisa dalle corde parallele FP, fp ; i rettangoli FMP, fmp si avran fra loro, come gli altri due AMC, Amc .

P R O P. XXXIII. T E O R.

Fig. 18. Il trapezio $ABDC$, di qualunque specie si ha

ne sia, si ritrovi inscritta nell'Iperbole ACDB, e da un qualunque punto P del dicit perimetro, si tirino ai lati del trapezio le rette PM, PN, PR, PQ sotto dati angoli; io dico che i rettangoli delle rette PM e PN, PR e PQ, che cadono su i lati opposti del trapezio, sion sempre fra loro in una data ragione. **

Le dimostrazioni di questo Teorema, e dei tre seguenti possono attignersi dalle Prop. XII, XIII, XIV, XV del I. Lib.

P R O P. XXXIV. T E O R.

Cadano da un qualunque punto A sull'Iperbole GNE le due tangenti AB, AC, e si distenda per lo stesso punto la retta AV parallela alla corda fra' contatti; io dico che resti divisa armonicamente dalla curva; e da cotesta corda ogni secante AE, che passi per A, cioè che sia EO: OD::EA:AD. Fig. 21.

E conducendosi per S (punto medio della corda fra' contatti) una qualunque secante ESV; ancor quest'altra sarà armonicamente divisa dalle due VA, BC, e dalla curva, vale a dire dovrà stare ES: SL::EV:VL. **

Cor. I. Se dal punto A si menino la tangente AC all'Iperbole GNE, e la secante AE, e questa armonicamente si divida nel punto O; la retta CO, che passa per O, e per lo contatto C, dovrà

dovrà passare per lo contatto dell'altra tangente AB, che dal punto A si cala sul ramo iperbolico. **

Cor. II. E se le due seganti AE, AG, che passano per lo stesso punto A, si dividano armonicamente in O, e Q; la retta QO, che conduce per questi punti dovrà attraversare i contatti delle tangenti, che dallo stesso punto A si calano sulla sottoposta Iperbole GNE. **

P R O P. XXXV. T E O R.

Fig. 22. Se da un qualunque punto B dell'Iperbole BFD si ordini DB ad un di lei diametro KF, e per lo stesso punto si meni la tangente, che lo incontri in E; io dico, che tirandosi per lo punto medio dell'ordinata DB una qualunque corda AS, ed a' suoi estremi le tangenti AV, SV, il concorso di queste rette debbasi allogar nella retta EV, che dal punto E si conduce parallela all'ordinata DB. **

P R O P. XXXVI. T E O R.

Fig. 23. Se dal punto R cadano sulla sottoposta Iperbole BAT le due tangenti RF, RG, e le due seganti RB, RT; tirata la retta FG pe' contatti, e le altre due AV, BT per le sezioni; dovranno queste rette o giacersi tra loro parallele, o convergere insieme ad un'istesso punto. **

Cor

*Cor. E se dallo stesso punto R si conducano le due tangenti BF, RG, e la sola secante RT; la retta FG pe' contatti o dovrà esser parallela alle tangenti menate per T ed V, o le dovrà incontrare in un'istesso punto. ***

P R O P. XXXVII. P R O B L.

Per un dato punto fuori dell'Iperbole AM condurre una tangente.

Per potersi risolvere questo Problema si esige, che il punto dato non istia entro dell'angolo DHL opposto all'angolo asintotico CHP. E ciò intendesi agevolmente da quello, che si espone nel principio del Cap. III. di questo Lib, ed in altri luoghi, Fig. 83a

Cas. I. Primieramente il punto R stia entro l'angolo asintotico CHP, ecco la costruzione che ci guida a fine. I. Si unisca esso punto col centro H, e la retta HR seghi l'Iperbole in A (1). II. Si tiri nel punto A la tangente AQ. III. Si prenda HN terza proporzionale in ordine ad HR, ed HA, e si distenda per N la corda Mm parallela ad AQ. IV. Finalmente si congiungano le rette RM, Rm: dico *esser queste le tangenti addimandate.*

La dimostrazione intendesi dalla sola enunciazione della Prop. XIII. di questo Lib.

Cas.

(1) Dim. Prop. XVI. Lib. III.

Caf. II. Inoltre sia alligato nell' asintoto HC Fig.84. il punto q , donde vuol menarsi una tangente all' Iperbole AQ . Per ottenerfi ciò, I. si bisechi Hq in F , e si meni fQ parallela all' altro asintoto HP . II. Si unisca la retta Qq : questa sarà la tangente che si cerca.

Dim. Imperocchè essendo per lo parallelismo delle rette MH , Qf come fQ ad fH così qQ a QM ; queste due rette dovranno essere uguali fra loro, come il sono quelle per costruzione. Or che questa retta qQM sia tangente si rileva nel seguente modo. S'è possibile sia pQP la tangente dell' Iperbole in Q . Dunque sarà pQ uguale a QP (1); e quindi i due lati Qq , Qp del triangolo Qqp pareggiando rispettivamente i lati QM , QP del triangolo QPM , ed essendo uguali gli angoli, che questi e quelli comprendono fra loro, sarà l'angolo Qqp uguale a QMP (2); e con ciò la retta pq parallela a PM (3). Lo che ripugna.

Fig.85. Caf. III. Finalmente il punto T , da cui si vuol condurre la tangente all' Iperbole, si ritrovi fuor dell' angolo asintotico HCK , e del suo verticale bCk . Per riuscir nell' intento, I. si tiri da T al centro C dell' Iperbole la retta TC , cui si distenda entro la curva una qualunque corda Mm parallela. II. Si unisca il punto medio di questa corda col centro C , e si meni per

(1) Cor. 1. Prop. XVIII. Lib. III.

(2) Prop. 4. El. I.

(3) Prop. 27. El. I.

per A la tangente Aq infino all'asintoto CH.
 III. Finalmente si tagli CO terza proporzionale in ordine a TC, e ad Aq , e si meni OM parallela a CA. Io dico, che la retta TM sia la tangente, che si cerca.

Dim. La retta Aq è uguale al semidiametro secondario di CA (1). Dunque il rettangolo di TC in CO, che si è fatto uguale al quadrato di Aq , dovrà pareggiare il quadrato di esso semidiametro secondario. E quindi dovrà essere TM la tangente addimandata. Conciossiachè, se un'altra retta M' diversa da MT fusse la tangente dell'Iperbole in M, il rettangolo di ϵC in CO, ch'è uguale (2) al quadrato del semidiametro conjugato di CA, sarebbe uguale al rettangolo di TC in CO: e quindi TC uguale a ϵC , lo che non puol essere. C.B.D.

N

CAP.

(1) Cor. I. Prop. XVIII. Lib. III.

(2) Cor. I. Prop. XXIX. Lib. III.

De' Fuochi delle Iperboli.

NE' due trattati de' fuochi della Parabola, e dell'Ellisse si prendano le definizioni de' termini particolari di questo argomento.

P R O P. XXXVIII. T E O R.

La retta PA, che nell'Iperbole congiunge gli
 Fig. 87. *estremi de' semiaffi conjugati CA, CP, è uguale*
alla CF eccentricità di essa curva.

Ed è poi cotesta eccentricità media proporzionale tra il semiasse principale, e tra l'aggregato di esso, e del di lui semiparametro.

Dim. Part. I. Sia CF l'eccentricità dell'Iperbole AM, AB l'asse principale, PQ il suo conjugato, ed AT il parametro principale; sarà la semiordinata FM metà di esso parametro (1). Ed essendo FM^2 a BFA, come AT ad AB (2), o come FM^2 a PC^2 (3); sarà $FM^2 : BFA :: FM^2 : PC^2$, e quindi BFA uguale a PC^2 . Il perchè se vi si aggiunga di comune CA^2 , dovrà risaltarne (4) CF^2 uguale a PA^2 , e con ciò CF uguale a PA.

Part.

- (1) Defin. VII. Lib. I.
- (2) Prop. XI. Lib. III.
- (3) Cor. II. Defin. V. Lib. III.
- (4) Prop. 6. El. II.

Part. II. Si tagli CO uguale al semiparametro principale, e si unisca PO: sarà (1) $AC:CP::CP:CO$, e quindi retto l'angolo APO (2). Dunque dovrà essere (3) PA media proporzionale tra CA, ed AO, cioè l'eccentricità CF media proporzionale tra il semiasse principale, e tra la somma dello stesso semiasse, e del semiparametro principale. C.B.D.

Cor. I. Il rettangolo BFA delle ascisse, che corrispondono ad un fuoco dell'Iperbole, adegua il quadrato del semiasse conjugato. *

Cor. II. Dunque per ritrovare i fuochi delle Iperboli opposte, non si vuol far altro, che troncar dal centro su dell'asse principale le due parti CF, CV rispettivamente uguali alla PA, che unisce gli estremi de' semiasse conjugati.

Cor. III. Che se ad un qualunque punto M del perimetro iperbolico si tiri la normale MO, e la tangente MP; sarà NO ad NC come il parametro principale RQ all'asse RS (4), o come CT^2 a CR^2 ; e componendo sarà OC a CN, Fig. 89. come TR^2 , o (5) CF^2 a CR^2 . Ed essendo (6) OC a CN come OCP ad NCP, sarà pure $OCP:NCP::CF^2:CR^2$. Il perchè OCP è uguale a CF^2 , come si dimostrò (7) NCP uguale a CR^2 .

N 2

Cor.

- (1) Come si è dimostrato.
- (2) Prop. 6. El. VI.
- (3) Cor. Prop. 8. El. VI.
- (4) Prop. XIV. Lib. III.
- (5) Prop. pres.
- (6) Prop. 1. El. VI.

(7) Prop. XIII. Lib. III.

Cor. IV. Cioè a dire l'Eccentricità dell'Iperbole è media proporzionale tra l'ascissa dal centro diminuita della sua sottangente, e tra la medesima ascissa accresciuta della sua sottangente.

P R O P. XXXIX. T E O R.

Se da' fuochi F ed V delle Iperboli ad un Fig. 89. qualunque punto M del perimetro di una di esse si tirino i rami FM, ed MV; la tangente MP, che si conduce per lo stesso punto M, dovrà bisecare l'angolo FMV de' rami. *

La dimostrazione della Prop. XXVII. del Lib. II. può applicarsi a questo Teorema: onde, chi brami intenderla, potrà legger quella, ch'è a piè della stessa proposizione, in un riscontrando la figura quassù citata.

Scol.

Se talun di voi non intenda distintamente, perchè mai nell'Iperbole stia OV ad OF, come GM ad ML (qual analogia è un principio dell'indicata dimostrazione); prolunghi la perpendicolare FL fino al ramo VM; e si avviserà immediatamente, che per lo parallelismo delle rette GV, Lf debba essere $GM:ML::VM:Mf$, e che per le parallele Ff, OM debba stare $OV:OF::VM:Mf$. Onde conchiuderà volentieri.

tieri, che sia $VO:OF::GM:ML$ (1).

Cor. Si tirino per lo centro G dell' Iperbole, e per lo fuoco V le rette GCo , VE parallele al ramo FM . Essendo Co parallela alla base MF del triangolo VFM , sarà $VC:CF::Vo:Mo$. E perchè ella è parallela ad VE base del triangolo MVE , sta pure $Vo:Mo::EG:GM$ (2), e sarà EG uguale a GM . Ma l'angolo PMF è tanto uguale ad VME (3), che ad VEP (4): dunque i due angoli VME , VEP faranno tra se uguali. Laonde, se si unisca la retta GV , si vedran verificate ne' due triangoli VGM , VGE le condizioni della 26. El. I.: onde dovrà essere l'angolo VGM uguale ad VGE , e quindi retto ciascun di essi.

P R O P. XL. T E O R.

Il rettangolo de' rami VM , MF , che da' fuochi delle Iperboli opposte conduconsi ad un'istesso punto del perimetro iperbolico, è uguale al quadrato di CB semidiametro conjugato a quello, che passa per lo stesso punto M . Fig. 28.

Leggete la dimostr. della Prop. XXVIII. Lib. II.

N 3

PRO.

(1) Prop. 11. El. V.

(2) L'istessa.

(3) Prop. pres.

(4) Prop. 29. El. I.

Fig. 88. *Posto le medesime cose della prop. prec. la differenza de' rami VM, ed FM è uguale all' asse principale AS.*

Dim. Si tagli la retta Mm uguale ad MF: e l'altra Vr tale, che Vr^2 sia una metà di Vm^2 (a).

Ciò posto, i due quadrati di VM e di Mm sono uguali al doppio del rettangolo VMm col quadrato di mV (1). Ma i quadrati di VM e di Mm son gl'istessi, che i quadrati di VM e di MF, e questi pareggiano (2) $2CF^2$ con $2CM^2$: ed è ancora il doppio del rettangolo VMm, o VMF uguale a $2CB^2$ [3]. Dunque sarà $2CF^2$ con $2CM^2$ uguale a $2CB^2$ con mV^2 : e CF^2 con CM^2 uguale a CB^2 con rV^2 : cioè, per essere CF^2 uguale a CS^2 con CT^2 [4], i quadrati de' semiaffi CS e CT, e del semidiametro CM saranno uguali al quadrato del semidiametro CB, che gli è conjugato ed a quello della retta Vr. Dunque tolto d' ambe le parti il quadrato di CB resterà il quadrato della sola Vr uguale alla somma de' quadrati de' semiaffi CS e CT, ed alla differenza de' quadrati de' semidiametri conjugati CM e CB: vale a dire, [perchè

que-
(a) Ciò si effettua descrivendo un semicerchio su di Vm, e troncando Vr uguale alla corda del quadrante:

(1) Prop. 7. El. II.

(2) Cor. 1. Prop. XXIX. Lib. II.

(3) Prop. prec.

(4) Prop. XXXVIII. Lib. III.

questa differenza è uguale [1] alla differenza de' quadrati de' semiaffi], il quadrato di Vr sarà uguale alla somma de' quadrati de' semiaffi conjugati, ed alla differenza de' quadrati de' medesimi semiaffi, cioè al doppio quadrato del semiaffe CS . Dunque prendendo i dupli dovrà essere Vm^2 uguale a $4CS^2$, ed VM uguale a $2CS$, cioè ad AS , ch'è l'asse principale dell'Iperbole. G.B.D.

Cor. I. E dimostrandosi come nel Cor. II. della Prop. XXIX. dell'Ellisse, che le due inclinate VM , ed MF sieno rispettivamente duple Fig. 39. di Go , e di Co (distesa per lo centro dell'Iperbole la retta GCo parallela al ramo FM); sarà la differenza de' rami VM ed MF , cioè l'asse RS duplo di CG differenza di Go , e Co .

Cor. II. Dunque in tal rincontro si potranno dedurre i seguenti Corollarj:

I. Se una retta tocchi ovunque l'Iperbole, e poi dal contatto al fuoco vicino si tira un ramo, e dall'altro fuoco le si meni la perpendicolare; la parallela tirata ad esso ramo dal centro infino alla tangente sarà uguale al semiaffe principale (2), e passerà per l'incidenza della perpendicolare sulla tangente. *

II. La retta tirata dal centro a questo punto d'incidenza adeguerà il semiaffe principale, e sarà parallela al mentovato ramo. *

III. E finalmente se dal centro si adatti sulla tangente MG una retta uguale al semiaffe prin-

N 4

ci-

(1) Prop. XXVIII. Lib. II.

(2) Cor. Prop. XXXIX. Lib. III.

principale, che però ne stia distesa come la CG dalla parte avversa del contatto M; essa retta dovrà esser parallela al ramo FM, e la congiunta VG starà ad angoli retti sulla medesima tangente. *

Cor. III. E tirandosi per lo centro dell'Iperbole la retta Crz parallela alla tangente ME, che incontri in r, e s i rami VM, ed FM; sarà per le parallele Ct, GM tanto l'angolo Mrt uguale al suo alterno rMP, che l'interno rM uguale all'esterno PMF. Dunque essendo uguali gli angoli rMP, FMP (1), anche quest'altri Mrt, Mr saranno tra se uguali; e quindi Mr uguale ad Mr. Ma a cagion del parallelogrammo MGCt la Mt è quanto la CG, che si è mostrata uguale al semiasse principale. Dunque anche Mr adeguerà lo stesso semiasse.

Cor. IV. Ogni retta, che per lo centro dell'Iperbole distendesi parallela ad una di lei tangente, tronca da' rami menati al contatto due rette rispettivamente uguali al semiasse principale. *

P R O P. XLII. T E O R.

Fig. 91. Se da un qualunque punto M dell'Iperbole BM si conducano il ramo FM, la tangente MA, e la normale MN, e dal punto N, ove la normale incontra l'asse, si cali NE perpendicolare sul medesimo ramo; la parte ME di esso ramo, che giacesi tra la perpendicolare e'l contatto, è sempre uguale al semiparametro principale. **

Vedi

(1) Prop. XXXIX. Lib. III.

Vedi la dim. della Prop. XXX. dell' Ellisse riscontrando la fig. cit.

*Cor. Il rettangolo fatto dalla normale MN nella CG, che dal centro dell' Iperbole si cala perpendicolare sulla tangente MS, è di una costante grandezza, cioè uguale al quadrato del semiasse conjugato. **

P R O P. XLIII. T E O R.

*Se da' fuochi F, ed V delle Iperboli opposte Fig. 90. si calino FL, ed VD perpendicolari sulla tangente DP, ed al contatto si tirino i rami FM, ed VM; il rettangolo delle perpendicolari sarà di una costante grandezza, cioè sempre uguale al quadrato del semiasse conjugato CR. **

*E' l rettangolo de' rami FM, ed MV scriverà al quadrato della normale MN la costante ragione dell' asse principale al di lui parametro. **

Le dimostrazioni di ambe le parti di questo Teorema possono leggerfi nella Prop. XXXI. del II. Lib. Ma quella della I. Parte potrebbe si agevolare sì nell' Ellisse, che nell' Iperbole nel seguente modo. CN, CF, e CP (1) sono continuamente proporzionali: dunque sarà CF^2 uguale ad NCP, e le differenze di questi spazj da CP^2 , cioè i rettangoli VPF, ed NPC saran pure tra se uguali. Il perchè starà $PV:PC::PN:PF$, o pure $VD:CQ::NM:FL$: essendo le prime ratio-

(1) Cor. IV. Prop. XXXVIII. Lib. III.

ragioni di queste due analogie uguali fra loro pe' triangoli equiangoli PVD, PCQ, e le altre due ancora uguali pe' triangoli simili PNM, PFL. Dunque il rettangolo di VD in FL sarà uguale all'altro di CQ in NM, o al quadrato di CR (1). C. B. D.

Cor. Descritto col centro C intervallo CB il circolo DTLB, che segghi ne' punti D, e L una qualunque tangente dell' Iperbole; le perpendicolari DV, FL elevate sulla medesima tangente da effi punti segneranno nell'asse i fuochi delle opposte sezioni.

P R O P. XLIV. T E O R.

Fig. 92. Sia FM una semiordinata all'asse, che passi pe' fuoco F dell' Iperbole LAN, e al suo estremo si meni la tangente indefinita NMS; ogni ramo FR di questa curva sarà uguale alla semiordinata PN, che conducefi pel suo estremo R, e va fino alla tangente. **

La dimostrazione di questo Teorema è identica a quella dell'Ellisse Prop. XXXII. Lib. II., ove, se ne aggrada, potrà vederli.

Cor. I. La retta CI, che dal centro dell' Iperbole si tira parallela al ramo FM, è uguale al semiasse principale CA.

Cor. II. Congiunta la retta SF, si mostrerà

(1) *Cor. Prop. XLII. Lib. III.*

rà co' principj de' Corollarii II, e III, della Prop. XXXII. dell' Ellisse, che l'angolo SFB sia retto: cioè *se da un fuoco dell' Iperbole si tirino due rette ai concorsi di una qualunque tangente laterale colle tangenti distese pe' vertici dell' asse; l'angolo, che quelle comprendono, sarà retto.* *

P R O P. XLV. T E O R.

Ogni ramo FR sta alla perpendicolare RG, che dal suo estremo si cala sulla DG linea della *Fig. 92.* *sublimità, come l' eccentricità CF al semiasse CA.* *

Si legga la dimostrazione della Prop. XXXIII. dell' Ellisse.

Cor. E starà ancora $DA:AB::CA:CF$.

P R O P. XLVI. T E O R.

Se agli estremi de' rami FR, FS, conducansi *Fig. 28.* *le tangenti RT, ST; la retta FT, che unisce il fuoco F col concorso T delle tangenti, biseccherà l'angolo compreso da' rami.* **

Vedi la dimostrazione della Prop. XXII. Lib. I.

Cor. E potrà benanche rilevarsi, come si è praticato nella Parabola, e nell' Ellisse. I. *Che le tangenti condotte agli estremi di una corda menata per lo fuoco dell' Iperbole abbianfi sempre*
ad

*ad unire sulla linea della sublimità . II. E che giaccia perpendicolarmente sulla medesima corda la retta , che unisce il fuoco , e 'l concorso delle tangenti . ***

P R O P. XLVII. T E O R.

*Poste le medesime cose della prec. Prop. se la Fig. 93. corda SR condotta per gli estremi de' rami FR, FS vada ad incontrare in E l' ordinata FC distesa per lo fuoco della sezione , e da questo punto E si cali EG perpendicolare sulla retta FP , che biseca l' angolo de' rami; le parti FH, FI, che tal perpendicolare da' medesimi rami verso del fuoco ne ascinde , sono rispettivamente uguali al semiparametro principale. ***

Dim. Osservisi attentamente quanto si è praticato, e dimostrato nella Prop. XXII. della Parabola: ed oltre a ciò si tirino dal punto C le rette CK, e CD parallele ad SN, ed SA, che giungano sino ad AK linea della sublimità.

La retta NF è perpendicolare a PQ (1), cui per ipotesi è anche la EG perpendicolare: dunque NF base del triangolo SFN è ad EG parallela; e quindi dee stare $NS:SF::EN:FI$. Ma per la similitudine de' triangoli NSA, KCD sta NS a CK, come SA a CD, o come SF a CF (essendo in ogni sezione conica i rami come le perpendicolari calate da' loro estremi sulla li-

nea

(1) Cor. Prop. prec. n. II.

nea di sublimità). Dunque sarà permutando
 $NS : SF :: CK : CF$, e quindi ancora (1) $CK : CF ::$
 $EN : FI$. Ma, a cagion del parallelogrammo
 CENK, CK è uguale ad EN : dunque ancora
 FI sarà uguale ad FC, o al semiparametro prin-
 cipale (2). E finalmente nei due triangoli GFH,
 GFI essendovi le condizioni della 26. El. I., do-
 vrà FH essere uguale ad FI, cioè al semipara-
 metro principale. C.B.D.

Scol.

Questo Teorema, che a tutte e tre le curve
 coniche si pertiene, fu proposto ne' nuovi Com-
 mentarj dell' Accademia di Lipsia verso l' anno
 1779. in occasion di una Cometa, che apparve
 in Cielo. La miglior dimostrazione, che gli
 si può recare, è questa, che ho qui esibita: im-
 perciocchè sembra che dalle proprietà de' fuochi
 rammassata, fluisca di per se stessa.

CAP.

- (1) Prop. 11. El. V.
 (2) Defin. VII. Lib. I.

Delle Dimenfioni dell' Iperbole .

IL Tetragonifmo (a) dell' Iperbole, l'è ormai divenuto un Problema affai facile ad ifnodarfi, fol che fi fappiano le principali regole d' integrar le grandezze. Prima di pubblicarfi quefto calcolo sì vantaggiofo alla Geometria de' Curvilinei, ed a' Movimenti variabili, Milord Brouncker, e Nicola Mercatore colla face dell' Aritmetica degl' Infiniti del Signor Wallis ci esibirono delle ferie per la quadratura dell' Iperbole. E l'acutiffimo Ugenio, e l' Abate Grandi negli Ugeniani fi fon poi ferviti della Logiftica per ottenere la mentovata quadratura. Ma perchè tra noftri Geometri non vi è mancato chi per mezzo delle *Serie Affunizie* abbia facilmente e con chiarezza ottenuto l'ifteffo intento; ho ftimato convenevol cofa ufar quefto metodo nella fequente Propofizione, perchè nitidamente comprendiate un' argomento di sì grande importanza, e che le forze della rigorofa finteſi par che traſcenda .

P R O P. XLVIII. T E O R.

Fig. 94. *Nell' Iperbole Parilatera NAF, di cui CE lato della Potenza ſia 1, ſe prendafi l' aſciſſa CO*

(a) Cioè la quadratura di tal curva .

CO uguale ad un qualunque numero n ; il quadrilineo iperbolico AEOP sarà espresso dalla serie convergente

$$2 \left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^7 + \&c. \right]$$

Dim. Prendasi nell'asintoto CO la parte EB, che sia minore di CE lato della potenza dell'Iperbole, ed ella si chiami x , ed un'altra Eb dicasi u ; sarà $CB = x + 1$, e $Cb = u + 1$. Sia di vantaggio l'aja

$AEBF = Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$ M
ove i coefficienti $A, B, C, D \&c.$ sieno grandezze costanti da determinarsi dalle proprietà della medesima Iperbole (a); sarà chiaro, che deb-

(a) Il metodo delle serie Assuntizie, di che si è servito il nostro Autore per la quadratura dell'Iperbole, esige in I. luogo, che si supponga una serie infinita, i di cui termini sieno convenevolmente disposti, ed affetti di coefficienti costanti, da determinarsi nel progresso dell'operazione. II. Dalla natura della grandezza, che vuol ridursi in serie, deesi procurare un'altra serie, che pareggi la prima o un dlei moltiplice, o un sottomultiplice. III. Finalmente con adeguare rispettivamente i termini analoghi della I., e della II. serie si dovranno determinare i coefficienti arbitrariamente assunti nella prima. Questo metodo allai preclaro, ed utile in altre congiunture vedesi ben maneggiato, ed esposto con chiarezza nella presente Proposizione: sebbene in certi casi, quando non conoscasi la forma regnante de' termini, ei suol dare ambigui risultati, come l'ha osservato Brook Taylor nello Scol. della Prop. IX. Meth. Increm., e l'istesso Nevvton, Stirling, ed altri.

debba essere l'altra aja

$AEBf = Au + Buu + Cu^3 + Du^4 + \&c.$ N
Si fissi Cb , (ch' erasi presa di un' arbitraria
lunghezza) terza proporzionale in ordine a CE ,
e CB ; sarà in tal caso il quadrilineo iperbolico
 $AEBf$ duplo del primiero $AEBF$ (1). Ed essen-
do il prodotto dell' estreme grandezze CE , e Cb
uguale al quadrato della media CB ; sarà $u+1 =$
 $xx+2x+1$: e quindi $u = xx+2x$. Dunque se nella
serie N si sostituisca $xx+2x$ in luogo di u ,
e l'espression che n' emerge, si ponga ugua-
le al doppio della serie M , avraffi

$$A(xx+2x) + B(xx+2x)^2 + C(xx+2x)^3 + \&c =$$

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + \&c.$$

E quindi formando le potenze del binomio
 $xx+2x$, quali ne indicano gli esponenti de' vin-
coli, ov'ei si racchiude: ed ordinato il primo
membro dell' Equazione secondo le potestà del-
la variabile x ; si otterranno le due serie tra se
uguali, cioè

$$2Ax + Axx + 4Bx^3 + \&c. = 2Ax + 2Bxx +$$

$$+ 4Bxx + 8Cx^3 + 2Dx^4 + \&c. O$$

Or l'uguaglianza di queste due serie non può
sussistere, se non sieno vicendevolmente tra
se uguali que' loro termini, ove la variabile x
ascende alla medesima potenza, e con ciò anco-
ra i loro coefficienti (6). Imperocchè, tolti d'
ambe

(1) Prop. XXII. Lib. III.

(6) Quando l'equazione interceda tra due espressioni di
grandezze variabili, i loro termini analoghi dovranno pure pa-
regg-

ambe le parti dell'Equazione i termini identici $2Ax$, e $2Ax$, e diviso il resto per xx , dovrà emergerne

$$\begin{aligned} A + 4Bx & \&c. = 2B + 2Cx + 2Dxx \&c. \\ 4B + 8Cx & \end{aligned}$$

E quindi se non vogliasi accordare, che sia $A + 4B = 2B$, $4B + 8C = 2C$, &c. dovrà seguirne che sia $A + 4B - 2B = 2Cx - 8Cx - 4Bx + 2Dxx \&c.$, cioè fatte le dovute riduzioni,

$$A + 2B = 2Dxx - 6Cx - 4Bx \&c.$$

e con ciò la grandezza costante $A + 2B$ uguale ad un'espressione variabile, lo che ripugna. Dunque dev'essere

$$1^{\circ} \quad 2A = 2A$$

$$A = A$$

e risolvendo

$$2^{\circ} \quad 4B + A = 2B \quad \text{queste Equazioni sarà}$$

$$B = -\frac{A}{2}$$

$$3^{\circ} \quad 8C + 4B = 2C$$

$$C = -\frac{A}{3}$$

&c.

Sicchè ponendo nella serie M i valori di già ritrovati de' coefficienti A , B , C &c. sarà il quadrilineo $AEBF =$

P

A

reggiarsi fra loro. Qual cosa non è solo una proprietà, onde tali equazioni distinguonsi dalle altre trattate nell'Algebra comune; ma l'è ben anche un principio per regular non poche evoluzioni delle medesime grandezze variabili. Il Signor Eulero ha dimostrato questo pareggiamento de' termini analoghi dal supporre $x = 0$: e prima di lui Brook Taylor nella cit. prop. avealo rilevato da questa ragione, *ne in hac aequatione x fiat quantitas determinata*. Ma la dimostrazione rinchiusa nel presente Teorema sembra più chiara, e più universale di quelle de' lodati Analisti.

$$A \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \&c. \right) \quad P$$

Vale a dire questo quadrilineo è sempre uguale ad una serie di grandezze variabili moltiplicata per la grandezza costante A . E quindi se in un sol caso ci riesca di determinare il valore di A , l'è fuor di dubbio, ch'ei debba esser quel coefficiente, che in ogni altro caso convien prefiggere alla mentovata serie. Fingasi a tal uopo, che x cioè la Ee diventi grandezza minore di qualunque data; il quadrilineo iperbolico $AEea$ diverrà un picciol rettangolo, di cui la base è la medesima x , e l'altezza $EA = 1$: cioè a dire di questa picciolissima aja iperbolica $AEea$ il fattore variabile sarà x , e l'costante 1. Dunque il vero, ed universal coefficiente della serie P sarà 1. E quindi sarà il quadrilineo iperbolico

$$AEBF = \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \&c. \quad Q$$

Similmente se si prenda EM uguale ad EB , e collo stesso artificio vadasi poi determinando il quadrilineo iperbolico $AEMN$, si troverà esser l' aja

$$AEMN = \frac{x}{1} + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} \&c. \quad R$$

Dunque l' gregato delle aja $AEBF$, $AEMN$ sarà uguale alla somma delle serie Q ed R , cioè $NMBF$

$$\text{NMBF} = 2 \left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&c. \right) S$$

E poichè la retta CE può sempre dividersi in un punto M, talchè stia CE + EM a CM in una data ragione, si supponga esser questa uguale a quella di n ad 1, e chiamando x tanto EB, che EM, avraffi $1+x : 1-x :: n : 1$; e quin-

$$\text{di } 1+x = n-nx, \text{ e finalmente } x = \frac{n-1}{n+1}.$$

Dunque sostituendo questo valore della grandezza x nella serie S, farà l'aja NMBF =

$$2 \left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^5 + \&c. \right]$$

Ma per essere CM:CB::CE:CO, l'aja iperbolica NMBF è uguale all'altra AEOP, (c).

Dunque farà ancora il quadrilineo iperbolico AEOP =

$$2 \left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^5 + \&c. \right] T$$

C. B. D.

Cor. I. Sia $n = 10$, farà $n-1 = 9$, ed $n+1 = 11$. Dunque il log-mo iperbolico di 10

O 2

ad

(c) Per dimostrar questo principio si supponga essere (Fig. 76.) CB:CA::CF:CE; farà dividendo BA:CA::FE:CE. E continuandò la dimostrazione come quella del Teorema XXII. Lib. III. conchiuderassi essere il quadrilineo GABH uguale all'altro KEFL.

ad 1, cui è proporzionale l'aja AEOP, o semplicemente il log-mo di 10 sarà

$$2 \left[\frac{9}{11} + \frac{1}{3} \left(\frac{9}{11} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{9}{11} \right)^5 + \&c. \right]$$

E poichè questa serie è *rapidamente convergenze*, o *discendente*, basterà sommar pochi termini de' primi per averne il dilei valore. Dunque effettuandosi questa somma per mezzo de' decimali avraffi $\log. 10 = 2, 30258509$.

Cor. II. In simil modo potrebbesi rinvenire il log-mo di qualunque altro numero, per esempio di 2, di 3, &c.

Cor. III. Il log-mo volgare di 10 è 1, e l'iperbolico, come si è ritrovato nel Cor. I., è 2, 30258509. Dunque di ogni altro numero il log-mo volgare starà all'iperbolico, come 1 a 2, 30258509 (d). E quindi se vogliasi il log-mo iperbolico di qualche numero, basterà prender nelle Tavole il log-mo volgare di esso, e poi moltiplicarlo per 2, 30258509.

Cor. IV. Sieno le due Iperboli NF, e QR rapportate a' medesimi asintoti ortogonali HG, CB,

(d) Per dimostrar ciocchè leggermente si è toccato in questo Corollario, suppongansi essere A, e B le basi di due sistemi log-mici, e sian di più tra se uguali le seguenti grandezze esponenziali

$$A^x, \text{ e } B^v; \text{ sarà } A = B^{\frac{v}{x}}$$

dunque sarà costante il secondo membro di questa Equazione al par del primo A: e quindi dovrà essere x ad v in una costante ragione: cioè x , ed v , che sono log-mi di due grandezze esponenziali tra se uguali, sono sempre in una stessa ragione.

CB, ed in esse si tirino, ovunque ne piaccia, le due ordinate QE, pB, e si compiano i due rettangoli $rEeq$, $rEea$ su di Ee aliquota di EB. Egli è chiaro che questi rettangoli debbano essere (1) nella ragione di QE ad AE, o de' rettangoli QEC, AEC (2), e con ciò nella ragione delle potenze delle Iperboli QR, NF (3). E ciò sempre dimostrandosi sarà pel Lemm. I. e per la 12. El. V. l'aja QEBp all'altra AEBF, come la potenza dell'Iperbole QR alla potenza dell'altra NF.

Cor. V. Or la potenza dell'Iperbole NF è 1, e l'aja AEBF è il log-mo della ragione di CB a CE: dunque se la potenza dell'altra Iperbole QR si chiami P^2 , sarà il quadrilineo iperbolico QEBp al log-mo della ragione di CB a CE, come P^2 ad 1. E quindi il quadrilineo QEBp uguaglia P^2 moltiplicato pe' log-mo della ragione di CB a CE, o di EQ a Bp.

Cor. VI. Dunque ogni quadrilineo iperbolico è uguale alla potenza dell'Iperbole moltiplicata pe' log-mo della ragione delle ordinate, che il chiudono.

Scol.

Se talun di voi mi addimandi, perchè mai nella serie M, onde si è definito il quadrilineo AEBF, non siasi posto niun termine costante, per esempio uguale ad a : io gli rispondo, che ciò

P^3

non

(1) Prop. 1. El. VI.

(2) L'istessa.

(3) Prop. XX. Lib. III.

non può giammai addivenire. Imperciocchè suppongaſi, ſe l'è poſſibile, che ſia l'aja

$$AEBF = a + Ax + Bx^2 + Cx^3 \&c.$$

ſarà di per ſe chiaro, che la grandezza a abbia mai ſempre a ritenere uno ſteſſo valore, qualunque ſia quello, che vogliaſi ad x attribuire. Or ſi ſupponga, che diventi zero la grandezza x , cioè la EB ; dovrà in tal caſo ſvanir nel primo membro dell'Equazione l'aja $AEBF$, e nel ſecondo ſvaniranno ancora tutti que' termini, che ſono moltiplicati per x , o per una ſua potenza, imperciocchè x in queſto caſo è zero. Dunque vi rimarrebbe $a = 0$. Lo che ripugna.

P R O P. XLIX. T E O R.

Fig. 95. Sia BDR un' Iperbole Parilatera, e DR una qualunque ſemiordinata all' aſſe; io dico che il triangolo iperbolico BDR ſia uguale ad una metà del rettangolo delle coordinate AR ed RD , meno la potenza dell' Iperbole moltiplicata pel logaritmo della ragione della ſomma di eſſe coordinate al ſemiaſſe.

Dim. Sieno di queſta Iperbole Parilatera QS e Pg gli aſintoti, ed AB ed AL i ſemiaſſi conjugati: da' punti B , e D ſi tirino le ordinate BS , DF all'aſintoto AF , e ſi unisca AD . Saranno le figure DGF , AGE , ABS , AEg altrettanti triangoli iſoſceli rettangoli, e con ciò ſimili fra loro (1).

Ciò

(1) *Dim. Prop. XXIII. Lib. III.*

Ciò posto il rettangolo gDG (1) è uguale ad AB^2 : dunque sarà (2) gD ad AB come AB a GD , o come BS a DF : essendo simili fra loro i triangoli ABS , GDF . Ma gD è uguale a DE con Eg , o colla di lei uguale AE , cioè a dire alla somma di AR e di RD . Dunque la ragione di BS a DF sarà uguale alla ragione della somma delle coordinate AR ed RD al semiasse AB . E quindi il quadrilineo $BSFD$, o il settore iperbolico ADB (3), ch'è uguale alla potenza dell'Iperbole moltiplicata pe' l log-mo della ragione di BS a DF (4), sarà uguale alla medesima potenza moltiplicata pe' l log-mo della ragione di $AR+RD$ ad AB .

Or il trilineo iperbolico BDR è la differenza del triangolo ADR , e del settore iperbolico ABD . Dunque il medesimo trilineo sarà uguale ad una metà del rettangolo delle coordinate AR ed RD meno la potenza dell'Iperbole moltiplicata pel log-mo iperbolico della ragione che al semiasse vi serba la somma di esse coordinate. $C.B.D.$

Cor. I. E' l trapezio iperbolico $BAED$, essendo uguale al triangolo ADE , ed al settore ADB , sarà uguale alla metà del rettangolo delle coordinate AE , ed ED più la potenza dell'Iperbole moltiplicata pel logaritmo della ragione, che serba al semiasse la somma delle coordinate.

O 4

(Cor.

- (1) Prop. XVIII. Lib. III. (2) Prop. 17. El. VI.
 (3) Cor. I. Prop. XXII. Lib. III.
 (4) Cor. VI. Prop. XLVIII. Lib. III.

Cor. II. E quindi il doppio del trapezio BAED sarà uguale al rettangolo delle medesime coordinate più il quadrato del semiasse (ch'è duplo della potenza) moltiplicato pe' log-mo della ragione, che serba al semiasse la somma delle coordinate.

P R O P. L. T E O R.

Fig. 96. Sia CB un semiasse dell'Iperbole Parilatera BDR, e CA la surregolatrice, ed in essa curva ovunque si tiri la semiordinata DR estendendosi infino alla CA; io dico che, se si rivolga lo spazio BDRAP intorno all'asse CBR, la conoide iperbolica generata da BDR debba uguagliare la differenza del cono troncato e del cilindro, che vi generano il trapezio BRAP, e'l rettangolo BRQP.

Dim. Il quadrato di DR adegua la differenza de' quadrati di CR, e di CB (1); cioè a dire la differenza de' quadrati di RA, e di RQ: essendo a cagion dell'Iperbole parilatera CB uguale a BP, o ad RQ, e quindi ancora CR uguale ad RA. Dunque anche il circolo di DR pareggerà la differenza de' circoli di RA, e di RQ.

Intanto l'ascissa RB dell'Iperbole BDR si divida nelle parti uguali Rr, rr &c., e compiti i rettangoli RrdD, RAar s'intendan questi rivolgersi intorno a BR insiem coll'Iperbole proposta; faranno i cilindri de' rettangoli RrdD, RAar, RQqr come

(1) Cor. II. Prop. XXVIII. Lib. III.

come i circoli de' raggi DR , RA , RQ . Dunque il cilindro di $RrdD$ sarà uguale alla differenza de' cilindri di $RAar$, e di $RQq*$, come il circolo di RD si è quì sopra mostrato pareggiar la differenza de' circoli di RA , e di RQ . E dimostrandosi l'istesso assunto nelle altre parti dell'ascissa RB , sarà pel Lemma I., la conoide iperbolica generata dall'Iperbole BDR uguale alla differenza del frusticono generato da $BRAP$, e del cilindro del rettangolo $BRQP$.
C . B . D.

Cor. I. Si prenda BV terza parte del semiasse BC , e condotta VN parallela ad RQ la si prolunghi infin che incontri QP in N , e poi si faccia rivolgere il rettangolo $BVNP$ intorno ad VR . Ne verrà un cilindro uguale al cono di CBP (1): e quindi aggiungendo a questi solidi il cilindro generato dal sottoposto rettangolo $BRQP$, sarà quel cilindro, che vi genera l'intero rettangolo $VRQN$ uguale al solido, che forma il trapezio $CRQP$ rivolto intorno a CR .

Cor. II. Dunque la conoide iperbolica di BRD , ch'è uguale alla differenza del frusticono, e del cilindro generati dal trapezio $BRAP$, e dal rettangolo $BRQP$ entrambi rivolti intorno a BR , sarà pure uguale alla differenza del cono, ed del cilindro, che il triangolo CRA , e'l rettangolo $VRQN$ rivolgendosi intorno alla CR ascissa dal centro vengono a generare.

Cor.

(1) Prop. 10. El. XII.

Cor. III. E quindi la mentovata conoide è uguale alla differenza de' seguenti solidi, cioè di un cono retto generato da quel triangolo rettangolo isoscele, di cui ciascun cateto è quanto la di lei ascissa dal centro, le di un cilindro, che ha per altezza la medesima ascissa diminuita di due terzi del semiasse, e per base il circolo del semiasse.

P R O P. LI. T E O R.

Fig. 97. Se intorno allo stesso asse QR sieno descritte le due Iperboli RD, RB, che abbiano per assi congiugati le rette MN, ed FO; i due trilinei iperbolici RDA, RBA, ciascun de' quali è contenuto dalla stessa ascissa RA, dalla dilei semiordinata, e dall' arco, saran fra loro come i medesimi assi conjugati.

E in duplicata ragione degli assi conjugati saranno le conoide, che i medesimi trilinei descrivono rivolgendosi intorno alla comune ascissa RA.

Dim. Part. I. Immaginatevi, che sia divisa nelle parti uguali AG, Gg, &c. l'ascissa RA, e che pe' punti delle divisioni G, g, &c. vi passino altrettante semiordinate ad amendue le Iperboli. Ben tosto vi avvisterete, che per la natura dell' Iperbole RD essendo $AD^2 : QAR :: MN^2 : QR^2$ (1), e per l'altra RB essendo altresì $QAR : AB^2 :: QR^2 : FO^2$, debba essere ordinando $AD^2 : AB^2 :: MN^2 : FO^2$, e quindi $AD : AB :: MN : FO$. Or compiti i paralle-

lo.

(1) *Cor. II, Defin. V. Lib. III.*

logrammi AGKD, AGIB, le loro aje, che sono come AD ed AB (1), debbono esser ben anche come MN ed FO. Per la qual cosa se la dimostrazione si guidi a fine co' principj del Lemma I., come in simili congiunture si è praticato, rileverassi agevolmente, che il trilineo iperbolico RDA stia all'altro RBA come MN ad FO, che sono gli assi conjugati delle stesse Iperboli.

Part. II. E poichè i cilindri generati da' rettangoli AGKD, AGIB per avere la comune altezza AG sono in duplicata ragione di AD, ed AB raggi delle loro basi, essi saran pure in duplicata ragione di MN, ed FO assi conjugati delle proposte Iperboli. E continuando questo ragionamento colla guida del metodo de' Limiti, che si è più volte adoperato, dovrà concludersi, che le conoidi generate da' trilinei iperbolici RDA, RBA nel volgersi, ch'essi fanno intorno ad RA, sieno in duplicata ragione degli assi conjugati MN, ed FO. C.B.D.

Cor. I. La quadratura di ogn' Iperbole dipende dalla quadratura dell' Iperbole Equilatera: come la quadratura dell' Ellisse derivasi da quella del circolo (2), che l'è un' Ellisse equilatera, cioè di uguali assi.

Cor. II. Sicchè la quadratura di una qualunque Iperbole dipende da' log-mi iperbolici.

Cor.

(1) Prop. 1. El. VI.

(2) Cor. VI. Prop. XXXV. Lib. II.

Cor. III. E la cubatura di una qualunque conoide iperbolica dipende dalla cubatura di quella, che vi genera l'Iperbole Parilatera.

P R O P. LII. T E O R.

*Nell'Iperbole Parilatera NSX, se ovunque si
Fig. 98. tirì l'ordinata NB tra gli asintoti, e poi lo spazio asintotico BXN con perfetta rivoluzione intorno all'asintoto CB si aggiri; io dico, che il solido generato dallo spazio BXN infinitamente lungo pareggi il cilindro, che dal rettangolo delle sottoposte coordinate NB, BC viene a generarsi colla stessa rivoluzione.*

Dim. Si conducano sull'asintoto CD le due ordinate RS, *rs*: e poi si compiano i rettangoli CDNB, RStr, RPpr.

Ciò posto gli anelli cilindrici generati da rettangoli RStr, RPpr colla mentovata rivoluzione sono fra di se, come le loro altezze SR, PR: imperciocchè poggian essi sulla comune armilla circolare di Rr. Ma SR sta a PR, o ad ND, come CD a CR (1), ovvero pe' triangoli simili CDN, CRQ, come ND a QR. Ed è poi ND, o la sua uguale PR ad RQ, come il rettangolo RPpr all'altro RQur (2). Dunque faranno i riferiti anelli cilindrici di RStr, e di RPpr, come i rettangoli RPpr, RQur

(1) Cor. II. Prop. XX. Lib. III.

(2) Prop. 1. El. VI.

RQ₄₇. E quindi pe' Lemmi I. e II. il solido asintotico CXND starà al cilindro generato dal rettangolo BCDN colla rivoluzione intorno a BC, come il rettangolo BCDN al triangolo NCD, cioè come 2 ad 1. Dunque il solido acuto infinitamente lungo, che vien generato dallo spazio asintotico BXN rivolto intorno a BA, sarà al sottoposto cilindro, che vi genera il rettangolo delle coordinate BCDN, come 1 ad 1, cioè in ragion di uguaglianza. C. B. D.

Scol.

Lo spazio asintotico BXN, che nel Corollario ultimo della Proposizione vigesima seconda di questo Libro si è dimostrato essere infinito, non genera che un solido finito, qualor si rivolga con perfetta rivoluzione intorno al suo asintoto AB. Quest' insigne paradosso di Geometria, che ho voluto dimostrarvelo col metodo de' limiti in preferenza di quello degli Indivisibili, fu rilevato da Evangelista Torricelli illustre Geometra del secolo decimosettimo, ed uno de' più famosi Discepoli del Gran Galilei.

P R O P. LIII. P R O B L.

L' Iperbole ABQ si rivolga con perfetta rivoluzione intorno al suo asse Aa, si vuol determinare la superficie della conoide, che n'è generata.

I. Di.

I. Dividasi l'asse Aa dell'Iperbole ne' punti G , ed H , sicchè tanto OG , che OH sia terza proporzionale in ordine alla dilei eccentricità OF , ed al semiasse principale AO . II. Di poi s'intenda descritta l'altra Iperbole GIK , che abbia per asse principale la retta GH , e per asse conjugato quell'istesso, che alla data Iperbole si appartiene. III. Finalmente dal punto A si elevi su di Aa la perpendicolare AI : dico essere *la ricercata superficie quarta proporzionale in ordine al raggio di un cerchio, alla sua periferia, ed allo spazio iperbolico $AIKQ$.*

La dimostrazione di questo Problema è l'istessa di quella dell'Ellisse Prop. XXXVII.

P R O P. LIV. P R O B L.

Ritrovare la superficie dell'Ellissoide generata dalla rivoluzione dell'Ellisse $ABCD$ intorno all'asse minore BD .

I. Dal fuoco f ad uno degli estremi B dell'asse minore si meni il ramo fD , cui si elevi la perpendicolare DZ , che incontri l'asse maggiore in Z . II. Si tagli Eb uguale ad EZ , e coi semiaffi conjugati EA , Eb s'intendano descritte le Iperboli opposte AG , CF . III. Si tiri per B la GF parallela ad AC , e si compia il rettangolo $GLRF$: dico esser *la richiesta superficie quarta proporzionale in ordine al raggio di un cir-*

circolo, alla sua periferia, ed allo spazio iperbolico GACF.

Dim. Il quadrato di BG sta al quadrato di EA, come è al quadrato di EZ (1) la somma de' quadrati di BE e di Eb, o di DE e di EZ, cioè il quadrato di DZ. Ma pe' triangoli simili (2) DEZ, DEF sta DZ^2 ad EZ^2 , come Df^2 , o il suo uguale EA^2 (3) ad ED^2 . Dunque sarà pure $BG^2 : EA^2 :: EA^2 : ED^2$, e $BG : EA :: EA : ED$, val quanto dire BG o BF dovrà essere il semiparametro dell'asse minore. E quindi la retta EF (4) sarà il luogo delle funnormali nel medesimo asse: cioè tirandosi ad un qualunque punto M dell'Ellisse la normale MN, e distendendosi per esso la retta OM parallela ad AC, la funnormale QN sarà uguale a QT.

Di più essendo per la 6. El. II. En^2 uguale ad EA^2 con CnA , ed EA^2 per la 5. uguale ad EI^2 con CIA , sarà lo stesso nE^2 uguale ad EI^2 coi rettangoli CIA , CnA . E togliendo d' ambe le parti EI^2 , sarà la differenza de' quadrati di nE , e di EI , cioè (5) il rettangolo gIo (intendendosi compito il parallelogrammo $nOig$) uguale alla somma de' rettangoli CIA , CnA .

Ciò premesso, i due quadrati di GL, e di On a cagion dell'Iperbole AG sono fra loro, come

- (1) Cor. II. Prop. XXVI. Lib. III.
- (2) Prop. 8. El. VI.
- (3) Prop. XXV. Lib. II.
- (4) Cor. I. Prop. X. Lib. II.
- (5) Prop. 5. El. II.

come i rettangoli CLA , CnA (1): ed i medesimi quadrati avvegnachè uguali agli altri di BE , e di MI , sono per la natura dell' Ellisse (2), come i rettangoli CEA , CIA . Dunque (3) farà la somma de' rettangoli CLA , e CEA , cioè EL^2 (4), alla somma de' rettangoli CnA , CIA , cioè al rettangolo gIn , o MO , come EB^2 ad MI^2 . Ma l'è poi BE^2 ad MI^2 , o ad EQ^2 , come BF^2 a QT^2 , essendo simili i triangoli BEF , QET : Dunque sarà $EL^2 : MO :: BF^2 : QT^2$, cioè MO sarà uguale a QT^2 o a QN^2 , come EL^2 è uguale a BF^2 . Per la qual cosa se a MO , e QN^2 aggiungasi QM^2 , ne verrà (5) OQ^2 uguale ad MN^2 , ed OQ uguale ad MN .

Or s'intenda esser l'archetto Mm l'ultimo di quei, che ne ascinde la corda MB circolarmente aggiratafi intorno ad M e verso G : e poi si cali mr perpendicolare su di MT ; sarà il triangoletto Mmr simile al triangolo MQN : onde convien che sia Mm ad mr , come MN , o la sua uguale OQ ad MQ , o come la circonferenza di OQ a quella di MQ . E quindi il rettangolo di Mm nella circonferenza di MQ , cioè la superficie descritta dall'archetto ellittico Mm , sarà uguale al prodotto della circonferenza di OQ in mr : e quindi quello al par di questo dovrà stare al rettangoletto $OQqo$ come la cir-

(1) Prop. X. Lib. III.

(2) Prop. VIII. Lib. II.

(3) Prop. 12. El. V.

(4) Prop. 6. El. II.

(5) Prop. 5. El. II.

conferenza al raggio. Dunque farà la mezza superficie del dato Ellitticoide all'aja AGBE, come la circonferenza di un circolo al raggio: ed in questa medesima ragione starà l'intera superficie dell'Ellitticoide all'aja iperbolica GACF.
C . B . D.

Scol.

Il luogo delle Sunnormali in tutte e tre le curve coniche vedeste altrove esserne una linea retta (1). Il luogo delle normali della Parabola vi fu mostrato nella Prop. XXV. Lib. I., che sia un'altra Parabola. E dalle Prop. XXXVII., e LIII. del II., e del III. Libro può conchiuderfi (a), che quello delle normali di un'Ellisse, o di un'Iperbole, qualor si rapportino agli assi primarj di queste curve, abbia ad essere un'altra Ellisse, o un'altra Iperbole. Ciò non per tanto il luogo delle normali, che si riferiscono all'asse minore di un'Ellisse, non è un'altra Ellisse, ma sì bene un'Iperbole, come si è fatto vedere in questo Problema.

P

PRO.

(1) Cor. I. Prop. X. Lib. II.

(a) Se ogui semiordinata PM della curva AMA, qualunque ella si sia (fig. 58.), si protragga, finchè PN adegui la corrispondente normale MS; la linea, che si segna da tutt' i punti N, dirassi *luogo delle normali*. E lo stesso può dirsi di ogni altra variabile, cui si faccia uguale la PN. L'insigne Geometra Italiano il Signor Vincenzo Viviani nella sua II. Divinazione geometrica, ch'è su i Luoghi Solidi di Aristeo Seniore, chiama *limitem ordinationum normalium* la serie di cotesti punti. Ed ecco l'enunciazioni de' Teoremi 38, 39, 40, 41, la di cui eleganza m' induce a rapportarveli.

Prop.

Fig. 101. Se collo stesso parametro AB, ed intorno allo stesso asse FA sieno descritte la Parabola AN, e l'Iperbole Parilatera AE, che abbian pure lo stesso vertice A; io dico, che tirandosi da un qualunque punto N della Parabola l'ordinata NG all'asse conjugato dell'Iperbole, debba essere il quadrilineo iperbolico ACGE uguale al rettangolo dell'arco parabolico AN nella sunnormale della medesima Parabola.

Dim. Dal punto N si tiri nella Parabola la normale NR, e la semiordinata NM all'asse; farà la sunnormale MR di questa curva(1) uguale alla metà di AB parametro comune a tutte e due le sezioni, e con ciò uguale al semiasse AG, che per l'Iperbole Parilatera pareggia il suo semiparametro.

Prop. In Parabola limes ordinationum normalium super sectionem ductarum est ad locum concavum alterius Parabole sibi congruentis, ac simul adscriptæ, & cujus focus sit in vertice ipsius data.

Prop. In Ellipsi Oblonga, (vel in Hyperbola) limes ordinationum normalium super sectionem ductarum est ad locum concavum alterius Ellipsis (vel Hyperbola) data concentrica, & simul adscriptæ, cujus axis conjugatus idem sit, ac secundus axis data sectionis; limitis vero axis major sit tertia proportionalis post distantiam inter focos data sectionis, & ejusdem axem principalem.

Prop. In Ellipsi prolata limes ordinationum normalium super sectionem ductarum sunt ad locos convexos oppositarum sectionum sibi concentricarum, & simul adscriptarum, quarum axis transversus idem sit ac major axis Ellipsis data, quique ad rectum latus oppositarum est ut differentia inter quadratum recti lateris minoris axis, & quadratum majoris ad quadratum axis minoris.

(1) Prop. LX. Lib. I.

metro. Dunque farà pure il quadrato di MR uguale a quello di AC. Or per la natura della

P 2

me-

Fra le invenzioni, ch'espone il Signor delle Carte ne' Fig. 109, suoi elementi di Geometria sublime, niuna gli tornò tanto a genio, quanto il metodo generale delle tangenti o piuttosto delle normali, la di cui orditura qui giova esporre in brieve, per quindi alle curve coniche applicarlo.

Si descriva (ecco i principj del diviso metodo) il cerchio Mm , che abbia il suo centro nell'asse AC della curva AMm , qualunque ella si sia, e che la segna ovunque: e poi si finga che rimanendo fisso il suo centro C, continuamente si raccorci il raggio CM. Egli è chiaro che i raggi CM, Cm al par de' punti delle sezioni M, ed m , si abbiano ad appressar fra loro: e che l'uno combaci coll'altro, quando il circolo divien tangente della curva. Or in tal caso il raggio CM diventa la normale della medesima curva, e le ascisse AN, ed An , ch'eran prima disuguali fra loro, si faranno uguali. Ciò posto si ponga $AN = x$, $NM = y$, $CA = v$, e $CM = z$; farà $CN = CA - AN = v - x$. Ed essendo $MN^2 = CM^2 - CN^2$, farà benanche

$$yy = zz - vv + 2vx - xx$$

Or supponendo essere AMm una curva conica, la sua generale equazione sarà

$$yy = A + Bx + Cxx$$

Onde togliendo da questa equazione l'antecedente, avrassi

$$A + Bx + Cxx = 0$$

Ed ordinandola secondo le dimensioni della variabile x , dovrà emergerne

$$D \quad xx + \left(\frac{B-2v}{C+1} \right) x + \frac{A+vv-2v}{C+1} = 0$$

Or nel caso che CM sia la normale della curva AMm , i due valori di AN, e di An , come si è mostrato, si fanno tra se uguali. Dunque se ciascuno di essi si chiami e , farà $x - e = 0$, e perciò moltiplicando quest'equazione semplice per l'altra $x - e = 0$, che l'è uguale, dovrà nascerne $xx - 2ex + ee = 0$: equazione quadratica di due radici uguali. E pareggiando i termini di questa equazione e dell'altra D, ove x ascende alla stessa potenza (vedi la nota (b) Prop. XLVIII. Lib. III.) avra-

medesima Iperbole (1) l'è ancora il rettangolo FDA uguale a DE^2 , o ad MN^2 . Sicchè la somma del rettangolo FDA e del quadrato di AC sarà uguale alla somma de' quadrati di MN e di MR, cioè a dire (2) CD^2 uguale ad RN^2 (3): e quindi CD, o la sua uguale GE dovrà uguagliare la normale RN.

Ciò premesso, se intendasi condotta la corda NA, che poi intorno ad N, e verso E si aggriri circolarmente; ei sarà chiaro, che nell'ultimo sito di questa retta, prima che la si distenda sulla tangente del punto N, la di lei parte interiore debba confonderli coll'archetto Nn , che ne ascinde. Dunque in tal caso il triangoletto Nno sarà simile all'altro NMR ; e quindi per la somiglianza di essi triangoli essendo $Nn:No::NR:RM$; il rettangolo di RM in Nn dovrà uguagliare l'altro di No in NR, cioè di Er in EG: essendosi mostrate queste rette a quelle rispettivamente uguali. Con che dimostrandosi nella stessa guisa, che ogni altro rettangolo fatto dalla sunnormale della

Pa-
avraffi $B - 2x = -2e(C+1)$: omettendo il confronto del primo termine, e del terzo d'entrambe l'equazioni, che non si confanno al nostro proposito. E quindi

$$x = (C+1)e + \frac{1}{2}B.$$

Ma è $CN = x - e$.

Dunque sarà $CN = e(C+1) + \frac{1}{2}B - e$

cioè ponendo x in luogo di e , e praticando le dovute riduzioni, sarà $CN = Cx + \frac{1}{2}B$. Lo che è vero generalmente.

(1) Cor. II. Prop. XXVIII. Lib. III.

(2) Prop. 6. El. II.

(3) Prop. 47. El. I.

Parabola in ogni altro archetto di questa curva sempre pareggi il corrispondente rettangolo circoscritto nel quadrilineo iperbolico; sarà forza che il rettangolo della sunnormale MR nell'intero arco parabolico AN adegui il quadrilineo iperbolico ACGE, ove terminano que' rettangoletti. C. B. D.

Cor. I. Essendo il parametro AB della Parabola duplo della di lei sunnormale MR, il rettangolo di AB nell'arco parabolico AN farà duplo del corrispondente quadrilineo iperbolico ACGE.

Cor. II. Ed essendo il doppio del quadrilineo ACGE (1) uguale alla somma del rettangolo delle coordinate EG, GC, e del quadrato del semiasse moltiplicato pe'l log-mo della ragione di EG+GC ad AC; sarà a questa somma puranche uguale il rettangolo dell'arco parabolico AN nel di lui parametro AB.

Cor. III. E perchè, come si rileva dalla dimostrazione di questo Teorema, le tre rette EG, GC, CA sono nella Parabola rispettivamente uguali alla normale NR, alla semiordinata NM, ed alla sunnormale MR; sostituendo queste grandezze in luogo di quelle, che ho espresse nel Corollario precedente, formerassi un' elegante Teorema, ed acconcio a procurarne la rettificazione della medesima Parabola, cioè.

P 3

Teor.

(1) Cor. II. Prop. XLIX. Lib. III.

Teor.

Se dal vertice principale di una Parabola ascindasi un qualunque arco, e dal suo estremo si meni la normale, e la semiordinata all'asse; il rettangolo di esso arco nel parametro principale di tal curva pareggerà il rettangolo della normale nella semiordinata, più il quadrato della sunnormale moltiplicato pe' l log-mo iperbolico della ragione, che serba alla sunnormale l'aggregato della normale, e della semiordinata.

Scol. I.

Da questo Teorema rilevasi agevolmente, che l'espressione di ogni arco parabolico racchiuda una parte algebrica, ed un'altra logaritmica; e che per ciò abbia ad esser trascendente il Problema di assegnar due archi parabolici, che abbian fra loro una data ragione. Pur non di meno è riuscito ai sommi Geometri il Signor Giovanni Bernulli, e'l Marchese dell'Hospital (a) ridurlo ad un Problema Piano di Geometria: ed io volentieri ve ne arrecherei una sintetica elegante soluzione, che non ha guari un nostro Geometra ha congegnata, se la brevità di queste Istituzioni non me'l vietasse.

Scol.

(a) Vedi l'Opuscolo di Gio. Bernulli inferito negli Atti di Lipsia del 1698., e'l Marchese dell'Hospital nel Tratt. Analit. delle Sez. Conic. Lib. X. Esemp. V.

La rettificazione dell' Ellisse, e dell' Iperbole forma un nuovo genere di grandezze e di operazioni *trascendenti* superiori alla rettificazione del circolo, ed all' esibizione de' log-mi. E quindi tutto l' impegno degli Analisti si è concentrato a rinvenir delle serie più eleganti, e più convergenti per esprimere gli archi ellittici, ed iperbolici: ed a ridurre vicendevolmente alla rettificazione di questi archi gl' integrali di certe formole, che non si possano algebricamente esibire, nè tampoco co' log-mi, e cogli archi di cerchio (b).

P 4

LIB.

(b) La riduzione di certi differenziali alla rettificazione dell' Ellisse, e dell' Iperbole è stato mai sempre l' oggetto de' Sommi Analisti. Dopo del Conte Fagnani si sono in ciò distinti il Signor de Maclaurin, il Signor d' Alambert negli Atti dell' Accad. di Berlino 1746, 1748, Gio. Leonardo Eulero negli Atti nuovi della Real Accad. di Pietroburgo vol. VIII, e X, e l' ultimo Signor Lexel nel volume della med. Accad. ann. 1778. Ma il lodato Signor Eulero si è pure occupato a paragonare insieme degli archi ellittici, e ad esprimerli con formole più concinne, come l' ha eseguito nel Vol. VII. degli Atti Nuovi Petropolitani, nel Vol. II. de' suoi Opuscoli, ed altrove.

L I B. IV.

LE DESCRIZIONI Delle Curve Coniche.

P R O P. I. P R O B L.

, *Esibire un modo facile ed universale, onde*
 Fig. 102. *poter descrivere coll' assegnazion de' punti una cur-*
 103, 104 *va conica, di cui sieno dati il diametro AC, il*
parametro AB, e l' angolo X delle coordinate.

Prima, ch'io vi rapporti un modo pratico, ed universale da risolvere questo Problema, vuolsi avvertire, che nella Parabola basti esser dato di sola *posizione* il suo diametro: laddove nelle altre sezioni convien ch'ei sia pur anche dato di *magnitudine*. Ciò posto

I. Conducafi la Regolatrice BC (1), ed all'estremo A del parametro AB formisi l'angolo semiretto BAO: e la retta AO, che in appresso chiamerò *Inclinata*, protragga si d' ambe le parti del punto A.

II. Si unisca il punto medio del parametro AB con quel punto, ove l'Inclinata incontra la Regolatrice: e questa retta OD, che dirò *linea centrale*, perciocchè in essa ritrovansi i centri de' circoli, con cui si assegnano i punti addimandati, si distenda giù del parametro.

III. Si

(1) Scol. Prop. I. Lib. II.

III. Si prenda la doppia squadra PNRNQ, e la si adatti, sicchè la di lei riga RN combaci col diametro della curva da descriversi: mentre l'altra riga PQ incontri in G, ed F l'inclinata, e la linea centrale.

IV. Col centro F intervallo FG si descriva il cerchio GRH, che seghi la riga NR in R: e fatto l'angolo RNM uguale ad X si tronchi NM uguale ad NR: *io dico appartenersi il punto M alla curva che si chiede: e che in simil modo si possano assegnare gli altri punti del di lei perimetro.*

Dim. La retta OD, che unisce il vertice dell'angolo AOB col punto medio del parametro AB che lo sortende, dee benanche bisecare ogni altra retta GH, che si ritrovi entro lo stesso angolo parallela al parametro. Imperocchè pe' triangoli GFO, ed HFO rispettivamente simili ad ADO, BDO, sta $GF:AD::OF:OD$, ed $OF:OD::FH:DB$; dunque sarà $GF:AD::FH:DB$, e quindi GF uguale ad FH. Sicchè il circolo descritto col centro F intervallo FG dovrà passare per H, e 'l rettangolo GNH, che pareggia (1) il quadrato di RN, dovrà eziandio uguagliare quello della sua uguale NM. Or essendo dalla costruzione la figura ANG un triangolo rettangolo isoscele, i cateti GN, ed AN dovranno uguagliarsi, e quindi ancora i rettangoli GNH, ANH. Dunque anche il quadrato di NM sarà uguale al rettangolo ANH, e 'l punto

(1) Prop. 35. El. III.

to M dovrà appartenersi alla curva, che si vuol descrivere (2). C. B. D.

Cor. I. Che se l'angolo delle coordinate sia retto, basterà prendere nella riga PN la parte NP uguale ad NR, e'l punto P, come ogni altro determinato in simil modo, apparterrà alla curva che si propone a descrivere.

Cor. II. Se mai si cercasse di descrivere coll'assegnazion de' punti un'Ellisse, o un'Iperbole, di cui sieno dati di grandezza, e di sito due diametri conjugati; si dovrà trovare in ordine al primario di questi diametri, ed al suo secondario la terza proporzionale, che sarà il parametro di esso primario: e quindi si continuerà la costruzione, come nel Probl. pres.

Scol.

Trà le maniere pratiche, ed universali, onde si possono assegnare i punti del perimetro di una curva conica, di cui sieno dati il diametro, il parametro, e l'angolo delle coordinate, ho stimato presceglie questa: sì perchè essa derivasi dalle prime proprietà di queste curve, cioè dalla I. Proposizione della Parabola, dalla II. dell'Ellisse, e dalla II. dell'Iperbole: sì perchè non esige, che un facilissimo moto del compasso.

PRO.

(2) Prop. II. Lib. II. e Prop. II. Lib. III.

*Descrivere coll'assegnazione de' punti un'El-
lipse, o un' Iperbole, che abbia per eccentricità la
retta CF, e l'altra CA per semiasse principale.* Fig. 105.
n. 1. e 2.

I. Dall'estremo A del semiasse AC si elevi la perpendicolare AB uguale ad AF differenza tra il medesimo semiasse, e l'eccentricità CF.

H. Si ritrovi CT terza proporzionale in ordine all'eccentricità, ed al semiasse, e pei punti T, e B si distenda la retta indefinita TBN.

III. Ciò premesso sul semiasse AC adattisi, ovunque ne piaccia, la riga PF della squadra FPN, mentre l'altra PN incontri in un qualunque punto N la retta TBN.

IV. Finalmente col centro F intervallo PN si descriva l'arco circolare RO, che segghi PN in R: io dico, che il punto R, come ogni altro determinato in simil modo, abbiassi ad appartenere al perimetro della curva, che si addimanda.

La verità dell'operato riluce dalle Prop. XXXII., e XXXIII. del Lib. II. e dalle Prop. XLIV. e XLV. del Lib. III.

Cor. Ma per descriversi una Parabola, che abbia F per fuoco, ed A per vertice principale, basterà prendere AT, ed AB uguali ad AF, ed indi continuare la costruzione secondo si è prescritto nel numero III, e IV di questo Problema.

PRO-

Fig. 106. Descrivere con moto organico un' Ellisse, o un' Iperbole, che abbia per fuochi i punti F, ed f, e per asse la retta Aa.

PER L' ELLISSE.

I. Prendasi un filo flessibile FMf, la cui lunghezza pareggi il dato asse Aa, ed i suoi estremi si fermino ne' dati fuochi F, ed f.

II. Con uno stiletto M applicato ad un punto di cotesto filo tengansi mai sempre tesi i di lui tratti MF, ed Mf: mentr'ei si aggiri verso A, ed a tanto a destra, che a sinistra del mentovato asse; verrà con tal moto a segnarsi su del piano AMA il perimetro dell' addismandata Ellisse.

Dim. S'è possibile la curva AMA segnata dallo stiletto M sia diversa dall' Ellisse Ama descritta intorno all' asse Aa co' fuochi F, ed f. Si applichi fm uguale ad fM, e si unisca Fm; sarà fm+Fm uguale ad Aa (1), e con ciò ben anche uguale (2) ad fM+FM. Dunque tolte le uguali fm, ed fM, rimarrà Fm uguale ad FM. Vale a dire le due rette fm, ed Fm, che si uniscono in m sono rispettivamente uguali ad fM, ed FM, che si raccolgono in M: lo che ripugna alla Prop. 7. El. I.

PER

- (1) Prop. XXIX. Lib. II.
(2) Per costruzione.

PER L'IPERBOLE.

I. La riga fMO , la cui lunghezza sia maggiore di Ff distanza de' dati fuochi, si fermi in f : ma che uno di cotesti fuochi per esempio in f : ma che intorno ad esso possa circolarmente aggirarsi nel piano fMF . Fig. 107.

II. Di poi si prenda un filo flessibile OMF , la di cui lunghezza sia minore della riga fO , di quant'è l'asse Aa dell' Iperbole, che si vuol descrivere: ed un'estremo di questo filo si attacchi all'estremo O della riga, e l'altro al fuoco F .

III. Mentre la riga fO circolarmente intorno ad f si aggiri, con uno stiletto M si procuri di mantener sempre teli i due tratti MO , ed MF del diviso filo: ma che il primo resti sempre su della riga adattato; *si verrà con tal moto continuo a generare dallo stiletto M l'addimandata Iperbole $XMAZ$.*

Dim. La differenza delle lunghezze della riga fO , e del filo FMO è quanto l'inclinata FM differisce dall'altra fM : imperciocchè, come comprendesi di per se stesso, tant'è la differenza di $FM+MO$ da $fM+MO$, quant'è quella di FM da fM . Ma la prima differenza l'è per costruzione uguale ad Aa : dunque sarà benanche la differenza delle inclinate FM , ed Mf uguale ad Aa : e quindi la curva $XMAZ$ esser dee un'Iperbole, i di cui fuochi sono F , ed f , ed Aa l'asse trasverso (1). Altrimenti se

(1) Prop. XLI. Lib. III,

se ne trarrebbe quell'istesso assurdo, che si è rilevato nella dimostrazione anteriore.

Fig. 108

PER LA PARABOLA.

Qualor si voglia descrivere con moto organico una Parabola, che abbia per fuoco il punto F, e per vertice principale l'altro A, dovrà adoperarsi il seguente artificio.

I. Si unisca la retta AF, e si prolunghi verso I, sicchè AB sia uguale ad AF: e nel punto B si fermi la riga BL, che stia perpendicolarmente sulla FB.

II. Prendasi la squadra MLE, il di cui lato LE sia più lungo dell'altro LM, e si adatti il medesimo lato LM sulla riga LB, sicchè il vertice L dell'angolo MLE sia presso il punto B.

III. Inoltre il filo flessibile FDE lungo quanto LE si attacchi con un suo estremo in E, e coll'altro in F.

IV. Finalmente nell'atto, che la squadra MLE con moto a se parallelo si dimeni d'ambé le parti del punto A, or accostandosi ad esso, or discostandosi, con uno stiletto D si tendano i due tratti DE, DF del filo FDE, in modo che il primo DE resti adattato sul lato LE della squadra; *si verrà con tal moto a descrivere dallo stiletto D la curva parabolica addimandata.*

La

La dimostrazione può trarsi dal Cor. della Prop. XIX. Lib. I. (a).

Cor. I. L'Eccentricità di un' Ellisse, e i di lei semiaffi conjugati formano un triangolo rettangolo (1): dunque dati i semiaffi conjugati di tal sezione, si potrà rinvenirne l'eccentricità di essa, e quindi la distanza d'entrambi i fuochi. Sicchè anche *dati gli affi conjugati di un' Ellisse, coll'artifizio teste rapportato si potrà ella descrivere con moto organico.*

Cor. II. E lo stesso vale per l' Iperbole.

PROP. IV. PROBL.

Dati di grandezza, e di posizione i due semidiametri conjugati AB, e BC di un' Ellisse, o di un' Iperbole ritrovar la grandezza de' semiaffi conjugati,

PER L' ELLISSE.

All' estremo B del semidiametro AB si elevi la perpendicolare BF uguale al di lui conjugato BC, e dall' estremo C di questo semidiametro

(a) Claudio Midorgio compose un trattato sulla descrizione delle curve coniche per assegnazion di punti, e Francesco Schooten ne fece un' altro sulla di loro organica descrizione. Nè vi sono mancati altri opuscoli sul secondo modo di descriverle: su di che possono consultarsi Barrow *Lezion. Geom.* III, Cavalieri *Esercit. Geom.*, Cartesio *Lib. II. Geom.*, MacLaurin. *nella Geometria Organica*, Newton *nella descrizione organica delle curve*, Georgio Krafft *ne' Commenti. dell' Accad. di Pietroburgo* 1728. ed altri.

(1) Vedi la Dim. Prop. XXV. Lib. II.

diametro si cali sul primo la perpendicolare CR. II. Si unisca la retta FA, su di cui come diametro si formi il cêrchio FBA. III. Si tagli AN uguale a CR, ed abbassata NM perpendicolare sul diametro AF, la si distenda in fin che MT pareggi AM. IV. Finalmente distesa per T la retta TS parallela al diametro FA, che incontri in S, ed *f* la periferia del cerchio, si uniscano le due corde SA, SF; dico *esser queste i semiaffi conjugati*.

Si compiano i due parallelogrammi ASFG, ABCL. E poichè pe' triangoli simili ABF, AMN sta $AF:AB::AN:AM$, farà il rettangolo di AB in AN uguale all' altro di AF in AM, cioè (sostituendo CR, ed MT in luogo di AN, e di AM) il rettangolo di AB in CR, o sia il parallelogrammo ABCL farà uguale al rettangolo di AF in TM, o in SQ, cioè al doppio del triangolo ASF, val quanto dire al rettangolo ASFG. Ma per la natura del cerchio (1) i due quadrati di AB, e di FB, o di BC sono uguali al quadrato di AF; ed a questo stesso quadrato l'è altresì uguale la somma de' quadrati di AS, e di SF. Dunque le due rette AS, ed SF essendo tali, che il loro rettangolo sia uguale al parallelogrammo de' semidiametri conjugati ABCL, e che la somma de' quadrati di quelle adegui la somma de' quadrati di questi, esse convien che sieno i semiaffi addimandati, C, B, D.

AL

(1) Prop. 47. El. I., e 31. El. III.

A L T R I M E N T I.

I. Dall'estremo C di un semidiametro CB, ^{Fig. 116.} che non sia maggiore dell'altro BA, si cali la perpendicolare CP sullo stesso BA, e si protragga finchè CR adegui BA. II. Si unisca la retta BR, e prendendo questa per diametro si descriva il cerchio BPR. III. Si tiri per lo centro del circolo, e pel punto C la secante CM; saranno CM, e CN i richiesti semiaffi.

Imperocchè il rettangolo di MC in CN è uguale (1) all'altro di RC o di BA in CP, cioè a dire al parallelogrammo, che si compirebbe da' semidiametri conjugati CB, e BA. E poi se a' doppi de' medesimi rettangoli MCN, RCP si aggiungano gli uguali MN^2 , ed RB^2 ; dovrà emergerne $2MCN$ con MN^2 uguale ad $2RCP$ con RB^2 : cioè (2) MC^2 con CN^2 uguale a CR^2 con CB^2 (3), o a BA^2 con CB^2 . Dunque, come si è conchiuso nella dimostrazione anteriore, CM e CN sono i semiaffi conjugati dell'Ellisse.

PER L'IPERBOLE

La differenza de' quadrati de' semidiametri ^{Fig. 111.} conjugati AB, AC sia uguale al quadrato di PS: e l'aja del parallelogrammo BCAL compreso da' medesimi semidiametri adegui il rettangolo

Q di

- (1) Prop. 36. El. III.
- (2) Prop. 7. El. II.
- (3) Prop. 13. El. II.

di PS in'SR: ecco come rinvengonsi i semiasse conjugati dell' Iperbole.

I. Si bisechi PS in D, e poi col centro D intervallo DS si descriva il cerchio GSO.

II. Si congiunga la retta RD, la quale si prolunghi fuori del divisato circolo, finchè la parte esterna OQ sia uguale a PS.

III. Si formi su di RQ il semicerchio QVR, ed ordinatavi la retta OV, si descriva su di OV l'altro semicerchio OFV: io dico, che, se si applichi in questo semicircolo la corda OF uguale ad OG, e si unisca FV, debbano essere OV, ed VF i semiasse addimandati.

Dim. Il rettangolo ROG è uguale all'altro ROQ, e quindi al quadrato di OV (1): dunque togliendo da essi gli uguali quadrati di OG, e di OF; dovrà la differenza del rettangolo ROG e del quadrato di OG, cioè il rettangolo RGO (2) pareggiare il quadrato di FV, ch'è la differenza de' quadrati di OV, e di OF.

Intanto si concepisca la retta T esser media proporzionale tra RS, ed OG, sarà T^2 uguale al rettangolo di RS in OG. E poi essendo OR: RS :: RS: RG (3), dovrà benanche essere (4) OR: GO: RS. OG :: RS. OG: RG. OG, cioè prendendo i quadrati rispettivamente uguali a questi rettangoli, ne verrà $OV^2: T^2 :: T^2: FV^2$, ed $OV: T :: T: FV$, e finalmente T^2 , cioè RS in

(1) Prop. 35. El. III.

(2) Prop. 3. El. II.

(3) Prop. 36. El. III. e 16. El. VI.

(4) Prop. 1. El. VI.

RS in PS uguale ad OV in FV. Dunque OV ed FV faranno i semiaffi addimandati (5). C.B.D.

A L T R I M E N T I.

Sieno AQ ed AD i semidiametri dati. Fig. 112.

I. Dall'estremo Q di uno di essi si tiri la retta QT parallela all'altra AD, sicchè le sue parti QT, QS adeguino lo stesso AD. II. Si congiungano le rette AT, AS, e si bisechi per la retta AF l'angolo TAS. III. Condotta per Q la retta QR parallela ad AC, si ritrovi AG media proporzionale tra AR ed RQ. IV. Finalmente si distenda per G la retta GF parallela ad AC, che incontri AF in F, e da F si alzi FC perpendicolare ad AF; saranno AF, ed FC i semiaffi conjugati dell'Iperbole.

La dimostrazione è chiara dalle Prop. XVIII. e XX, e dal Cor. della Prop. XIX. Lib. III.

Cor. I. Se per avventura i semidiametri conjugati AB, AC sieno tra se uguali, ciaschun de' semiaffi conjugati dell'Iperbole, che in tal caso verrebbe ad esser Parilatera, sarà uguale a T radice del parallelogrammo ABCL de' dati semidiametri. Fig. 111

Cor. II. Dunque essendo dati di posizione, e di magnitudine due semidiametri conjugati di un' Ellisse, o di un' Iperbole, si troveranno i loro semiaffi conjugati (6), e poi si potrà descri-

Q 2

(5) Prop. XXVII., e XXVIII. Lib. III.

(6) Per questa Proposizione.

scrivere con moto organico ciascuna di queste curve (1).

PROP. V. PROBL.

Fig. 112. *Dato l'angolo BAC, ed in mezzo ad esso il punto Q descrivere un' Iperbole, che passi per Q, ed abbia per asintoti i lati del medesimo angolo.*

Costr. I. Dal punto Q si meni QR parallela al lato AC del dato angolo, e quindi si ritrovi AG media proporzionale tra AR, ed RQ. II. Di poi condotta GF parallela ad AC, ed uguale ad AG si unisca la retta AF. III. Finalmente ad AF dal punto F si elevi la perpendicolare FC, e dal punto A conduca AE uguale, e parallela ad FC: dico esser le due rette AF, ed AE i semiasse conjugati della richiesta Iperbole.

Dim. Compito il rombo AGFL, la retta FA come sua diagonale dovrà bisecare l'angolo BAC. Dunque se la FC si distenda infino ad AB, n' emergeranno i due triangoli AFC, AFB tra se uguali (2), e quindi FC uguale ad FB. Ma la retta BFC, come perpendicolare al semiasse principale AF nel di lui estremo F, è la tangente della descritta Iperbole in un de' dillei vertici principali: ed è poi ciascun segmento FC, ed FB di cotesta tangente uguale al

(1) Prop. III. Lib. IV.

(2) Prop. 26. El. I.

femiasse conjugato di AF. Sicchè AB, ed AC saranno gli asintoti della medesima curva (1). Or dalla costruzione il rettangolo di AR in RQ è uguale al rettangolo di AG in GF: dunque il punto Q dovrà appartenersi all' istessa Iperbole (2). C. B. D.

Cor. Che se vogliasi descrivere un' Iperbole, cui sieno asintoti le rette AB, AC, e che abbia una data potenza; basterà prendere AG uguale al lato della medesima potenza, e continuarne la costruzione, come si è prescritta nel n. II, e III.

P R O P. VI. P R O B L.

Descrivere una sezione conica, che abbia per parametro principale la retta data Z, che un de' suoi fuochi cada nel punto dato F, e che tocchi la retta AM data di posizione nel dato punto M.

I. Si unisca la retta FM, e si faccia l' ^{Fig. 113}angolo PMV uguale al dato FMA, e l'angolo AFM uguale ad FMV.

II. Si tronchi dalla congiunta FM la parte ME uguale alla metà del parametro Z, e da' punti E, ed M si elevino le due rette EN, MN rispettivamente perpendicolari alle altre due ME, MP, che deggion concorrere in un qualche punto N.

Q 3 III. Si

(1) Prop. XV. Lib. III.
(2) Prop. XX. Lib. III.

III. Si congiunga la retta FN , e s'ella combaci con FC , la sezione sarà una Parabola: onde presa in FA la parte Fr uguale ad un quarto di Z , converrà descriverla col fuoco F , e col vertice principale r (1).

IV. Ma se il punto N non cada nella AC , ma ne stia dentro l'angolo CAP , com'è nella fig. cit; la retta FN concorrerà colla MD in V . Sicchè in tal caso la sezione sarà un'Ellisse, i di cui fuochi sono i punti F , ed V , e l'asse maggiore è quanto la somma de' rami FM , ed MV . Dunque si potrà coll'artificio delle Proposizioni II., e III. descriverla coll'assegnazione de' punti, o con moto organico.

Fig. 114. V. E finalmente cadendo il punto N fuori l'angolo CAP , e propriamente a sinistra della FC , egli è chiaro che la medesima FN dovrà divergere dalla MD , e seco concorrere nel punto V sopra di F . In tal caso coi fuochi F , ed V , e coll'asse principale, che sia quanto la differenza de' rami FM , MV , si dovrà descrivere l'Iperbole coll'assegnazione de' punti, o con moto continuo (per le medesime Proposizioni). *Si sarà risoluto il Problema.*

Fig. 113. *Dim.* Imperocchè l'Ellisse, che si descrive coi fuochi F , ed V , e coll'asse maggiore uguale ad $FM + MV$, dee necessariamente passare per M : altrimenti se ne trarrebbe quell'istesso assurdo, che fu indicato nella dimostrazione della Prop. III. Ma che questa sezione tocchi in M la

(1) Prop. III. Lib. IV.

M la data retta AP, rilevasi nel seguente modo. Dalla costruzione sono uguali non meno gli angoli FMA, DMP, che i retti NMA, NMP: dunque i rimanenti angoli NMF, NMV saranno tra se uguali, e la normale NM biseca l'angolo de' rami FMV. Or se una retta diversa da AP, come per esempio la *ap*, fusse la tangente della sezione in M, i due angoli FMa, VMp sarebbero tra se uguali (1): e quindi elevata su di essa la perpendicolare Mn, si rileverebbe come quì sopra, che la Mn bisecchi puranche lo stesso angolo FMV. Lo che non puol essere. C. B. D.

Ometto le dimostrazioni per la Parabola, e per l'Iperbole, perchè sul modello di questa potrà ciascuno agevolmente compirle.

Scol.

Questa Proposizione serve a risolvere il Problema Inverso delle forze centrali nella vera Ipotesi della Gravità (2), ed a questo uopo l'ho destinata.

PROP. VII. PROBL.

Date le due rette CP, CK, ritrovarne un'Fig. 115.
aleva CA, talchè stia $CA^2 - CP^2$ a $CA^2 - CK^2$
nella data ragione di *m* ad *n*.

Q 4

I. Le

(1) Prop. XXVII. Lib. II.

(2) Cioè, ch'ella decrezca come il quadrato della distanza.

I. Le due rette CP, e CK stieno a diritto, e col centro C intervallo CK, ch'è la maggiore di esse, si descriva il semicerchio KER, il quale segghi in E la retta PX eretta in P perpendicolare a CP. II. Si prolunghi CP in N, sicchè PN sia uguale a PE, e ne' lati dell'angolo EPC si prendano le parti PV, PO, che sieno fra loro come m ad $m - n$. III. Si unifca la retta OV, cui si meni dal punto E la parallela EM: e su di NM si descriva il semicerchio NAM, che incontri in A la medesima PX. IV. Finalmente si congiunga la retta CA: dico esser questa retta, quella, che si addimanda.

Dim. Per la similitudine de' triangoli POV, PEM sta PV a PO, come PM a PE, o alla sua uguale PN (1). Ma per la natura del circolo NAM sta PM a PN, come PA^2 a PN^2 , o a PE^2 (2): dunque sarà ancora $PV : PO :: PA^2 : PE^2$, cioè $m : m - n :: PA^2 : PE^2$, e convertendo $m : n :: PA^2 : PA^2 - PE^2$. Or PA^2 è uguale alla differenza de' quadrati di CA e di CP: ed è poi la differenza de' quadrati di PA e di PE l'istessa che quella, onde differiscono fra loro i quadrati di CA e di CE, o di CA e di CK. Imperocchè CA^2 è uguale a $CP^2 + PA^2$, e CE^2 è uguale a $CP^2 + PE^2$. Dunque sarà $m : n :: CA^2 - CP^2 : CA^2 - CK^2$. C. B. D.

Cor.

(1) Per costruzione.

(2) Prop. 35. El. III. e 16. El. VI.

Cor. La differenza di due tutti, che hanno una parte di comune, è uguale alla differenza delle parti rimanenti.

P R O P. VIII. P R O B L.

Dati i cinque punti A, C, B, D, K, tre de' quali comunque si prendano, non giaccion mai per diritto, descrivere una sezione conica, che passi per essi. Fig. 117.

I. Si congiungano i punti A, B, C, e D colle rette AB, CD, che si tagliano in F: dall' altro punto K si menino KG, e KE parallele ad AB, e CD: e sulle medesime AB, CD si descrivano i due semicerchi AHB, DMG.

II. Dai punti E ed F si alzino EH, ed FI perpendicolari su di AB: e dagli altri punti F, e G si elevino ancora FL, e GM perpendicolari sulla CD.

III. Facciafi come FI ad FL, così HE ad una quarta m . E dopo le tre rette FL, FI, e GM si ritrovi la quarta proporzionale n .

IV. Di poi si prolunghi KE in N, talchè la parte aggiunta NE sia terza proporzionale in ordine a KE ed m : e si protragga similmente l'altra KG in O, fintantochè GO sia terza proporzionale dopo KG ed n .

V. Pe' punti medj delle rette NK, CD si tiri la retta rS , e pe' punti medj dell'altre AB, KO
fi

si conduca PQ. E per V si diffenda VY parallela ad AB.

VI. Finalmente (1) si prenda TV di tal lunghezza, che sia $TV^2 - VP^2 : TV^2 = VQ^2 : AP^2 : KQ^2$. E detta ϕ^2 la differenza de' quadrati di TV e di VP, facciasi come ϕ a PA, così TV ad VY: io dico che TV, ed VY sieno in lunghezza, e di sito due semidiametri conjugati della sezione addimandata, la quale nel caso che il punto V cada in mezzo alle parallele AB, KO, sarà un' Ellisse, che descrivendosi cogli artifizj dianzi esposti (2) passerà per cinque punti A, C, B, D, K.

Dim. Essendo per costruzione $\phi : PA :: TV : VY$, e con ciò $\phi^2 : PA^2 :: TV^2 : VY^2$, sarà benanche $TV^2 - VP^2 : PA^2 :: TV^2 : VY^2$. Dunque la sezione descritta co' semidiametri conjugati TV, VY dovrà passare per A (3), e quindi ancora per B, perciocchè PA è uguale a PB.

Similmente l'è per costruzione $TV^2 - VP^2 : TV^2 = VQ^2 : AP^2 : KQ^2$: dunque il perimetro di questa sezione dovrà passare per K (4).

Or dalle condizioni di questo Problema trarsi per necessaria illazione, che TV, ed VY abbiano ad essere i Semidiametri conjugati della richiesta Ellisse (5): e con questi Semidiametri non può descriversi che una sola Ellisse

(1) Probl. prec.

(2) Prop. II., e III. Lib. IV.

(3) Cor. I. Prop. VIII. e Prop. IX. Lib. II.

(4) Prop. VIII. Lib. II.

(5) Cor. IV. Prop. XVIII. Lib. II.

se (1). Dunque quella, che si è dimostrata passare pe' punti A, B, K dovrà anche passare per C, e D. C. B. D.

Cor. I. Se il punto V non cada in mezzo alle due parallele AB, KO, la sezione sarà un' Iperbole, che gioverà descriverla coll'artificio della Prop. II. Lib. IV.

Cor. II. E se le rette TQ, VS, che bisecano le parallele AB, KO, e le altre NK, CD riefcano tra se parallele, la sezione sarà una Parabola. E prolungando QP in T, sicchè stia $AP^2 : KQ^2 :: TP : TQ$; il punto T sarà il di lei vertice, TQ il diametro, TPA l'angolo delle coordinate, e'l parametro la terza proporzionale dopo TP, e PA.

Cor. III. Due sezioni coniche non possono avere cinque punti di comune: dunque tai curve non si possono segare al più che in quattro punti. Gioè a dire il massimo numero de' punti, in che si tagliano due curve coniche (tranne due circoli) cioè due linee di secondo ordine, è quattro, prodotto de' numeri 2, e 2, che n'esprimono le di loro dimensioni.

P R O P. IX. P R O B L.

Date di posizione le quattro rette AB, CD, AC, BD ritrovare gl' infiniti punti P, &c., sicchè da ciascun di essi, tirandosi le rette PQ, PR, PS

(1) Cor. Prop. VII. Lib. IV.

PS, PT inclinate alle prime sotto dati angoli, sia sempre il rettangolo di PQ in PR all' altro di PS in PT in una data ragione.

Le date rette AB, CD, AC, BD si prolunghino, fintantochè vengano a formare il trapezio ABDC, qualunque ne sia. Si bisechi l'angolo BAC con della retta AP (1), che incontrerà sotto dati angoli le rette DC, BF: per esser coteste rette date di posizione. E supposto che sia P uno de' punti addimandati, s'intendano tirate le rette PQ, PR, PS, PT, che cadano sotto dati angoli su i lati del trapezio: e la ragion data de'

Fig. 118. rettangoli espongasi per quella della retta PQ all'altra m . Ciò premesso ecco l'analisi geometrica, che ci guida a fine, e da cui con lieve riflessione potrebbesi ordire la composizione geometrica, e la convenevole dimostrazione ad un Problema sì famoso.

I due triangoli PAQ, PAS sono dati di specie, perciocchè sono dati i loro angoli: dunque sarà data tanto la ragione di PQ a PA, che l'altra di PA a PS, e quindi quella di PQ a PS, che dalle medesime si compone (2).

Di più essendo PQ ad m come il rettangolo di PQ in PR all' altro di PS in PT, cioè in ragion composta di PQ a PS, e di PR a PT: ed essendo altresì PQ ad m in ragion composta di PQ a PS, e di PS ad m ;

sarà

(1) Si potrebbe la retta AP condurre con qualunque altro sito.

(2) Lemm. Prop. 23. El. VI.

farà la ragione, che si compone dalle due di PQ a PS, e di PR a PT uguale a quella, ch' emerge dalla composizione delle altre due di PQ a PS, e di PS ad m . Dunque l'è forza, che la ragione di PR a PT uguagli quest' altra di PS ad m , e ch' ella sia data al par di questa.

Or essendo dati di specie i due triangoli PER, PTF sarà data la ragione di PE a PR, e l'altra di PT a PF: dunque una ragion, che si comporrebbe da queste ragioni date di PE a PR, di PR a PT, di PT a PF, sarebbe ancor data. Ma tale è per appunto la ragione di PE a PF, in mezzo a cui si frappongono PR, e PT. Dunque è data la ragione di PE a PF, e quindi di posizione il punto P.

Per la qual cosa se pe' cinque punti A, B, D, P, C si descriva una sezione conica (1), questa sarà il luogo addimandato. Imperocchè il rettangolo delle rette, che da un' altro punto f della sezione si calerebbero su di AB, e CD sotto gli angoli uguali a PQA, PRE, farebbe al rettangolo di due altre rette calate da f su di AC, e di BD sotto gli angoli PSA, PTD, come il rettangolo di PQ in PR all' altro di PS in PT, cioè nella data ragione di PS ad m .

Ma poi niun' altra curva, fuorchè la sezione conica PC descritta col divisato artificio sarà soddis-

(1) Probl. prec.

disfacente al proposto Problema . Imperocchè se coll'altra curva pC potesse l'istesso intento ottenersi, condotta per A la retta AF , che segghi coteste curve in P , e p , e calate dall'uno, e dall'altro punto le rette PS , PQ , PR , PT , e le altre ps , pq , pr , pt sotto dati angoli su de' lati del trapezio $ABDC$, sarebbe $PQ.PR:PS.PT::pq.pr:ps.pt$, e permutando $PQ.PR:pq.pr::PS.PT:ps.pt$. Ma sta $PQ:pq::PS:ps$, essendo queste ragioni uguali alla medesima ragione di AP ad Ap . Dunque sarà ancora $PR:pr::PT:pt$. Ma l'è poi $PR:pr::PE:pE$ pe' triangoli simili EPR , epr: e similmente a cagion de' triangoli simili PFT , pFt sta $PT:pt::PF:pF$. Dunque sarà $PE:pE::PF:pF$, cioè PE sarà maggiore di pF , come l'è PE dell'altra pE , lo che ripugna.

Cor. Dunque se dal punto P preso fuori del trapezio $ABDC$ si conducano ai lati di esso le rette PQ , PR , PS , PT sotto dati angoli; esso punto giacerà in una sezione conica, sol che sia $PQ.PR$ a $PS.PT$ in una data ragione.

Scol.

In questo artificio contienfi l'analisi geometrica, qual si addimandava dagli antichi Geometri sul vetustissimo Problema delle quattro rette, cominciato da Euclide, continuato da Apollonio, risoluto analiticamente dal Signor delle Carte, e sciolto dall'Immortal Newton col rigore dell'antica sintesi.

F I N E .

INDICE

DE' CAPITOLI.

Istoria delle Sezioni Coniche.

Prelezioni sulle Curve Coniche. pag. 2

LIBRO I. Della Parabola.

CAP. I. De' Diametri della Parabola. 13

CAP. II. Delle Tangenti, e delle Secanti della Parabola. 17

CAP. III. Del fuoco della Parabola. 23

CAP. IV. Delle dimensioni della Parabola. 53

LIBRO II. Dell' Ellisse.

CAP. I. De' Diametri dell' Ellisse. 73

CAP. II. Delle Tangenti, e delle Secanti dell' Ellisse. 105

CAP. III. De' Fuochi dell' Ellisse. 113

CAP. VI. Delle Dimensioni dell' Ellisse. 130

LIBRO III. Dell' Iperbole.

CAP. I. De' Diametri delle Iperboli opposte. 140

CAP. II. Degli Asintoti delle Iperboli. 157

CAP. III. De' Diametri Conjugati delle Iperboli. 176

CAP. IV. Delle Tangenti, e delle Secanti dell' Iperbole. 184

CAP. V. De' Fuochi delle Iperboli. 195

CAP. VI. Delle Dimensioni dell' Iperbole. 206

LIBRO IV. Delle descrizioni delle Curve Coniche.

<i>Pag.</i>	<i>Err.</i>	<i>Corr.</i>
17. vers. 1.	parellela	Paralella
51. cit. (1)	Pr.3. e Pr.7.	Pr. 4. e Def. 7.
64. vers. 12.	tissuto	teffuto
79. cit. (4)	22.	19.
97. cit. (3)	43.	33.
99. cit. (2)	28.	27.
112. cit. (4)	XI.	III.
115. cit. (2)	9	8.
127. cit. (1)	XV	XX
174 vers. 24.	Oridni	Ordini
176. vers. 15.	dEb	DEb

Fig. 3.

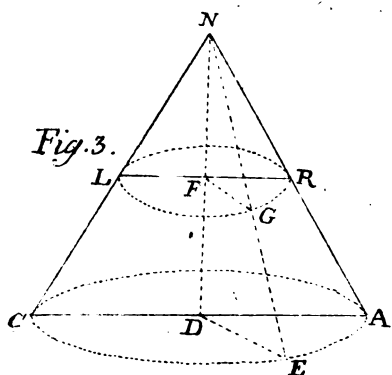


Fig. 4.

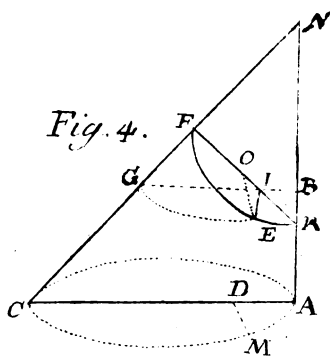


Fig. 7.

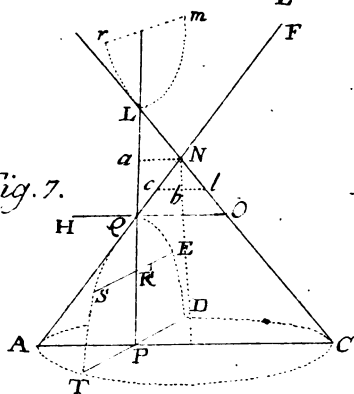


Fig. 8.

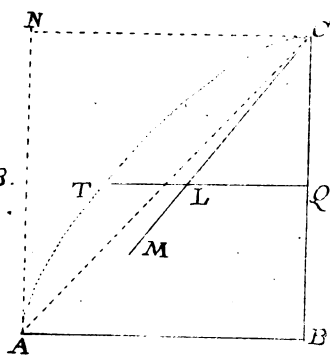


Fig. 11.

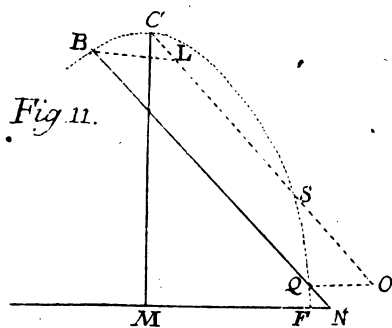
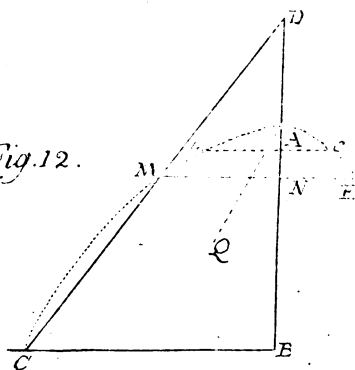


Fig. 12.



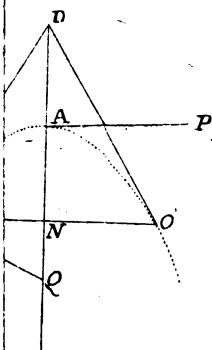


Fig. 16.

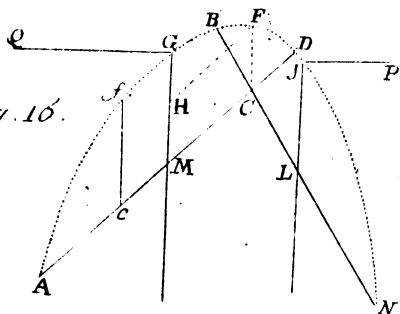


Fig. 19.

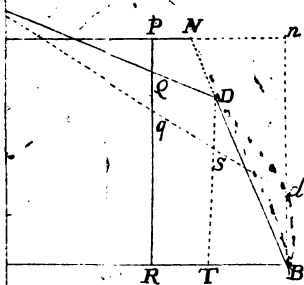


Fig. 20.

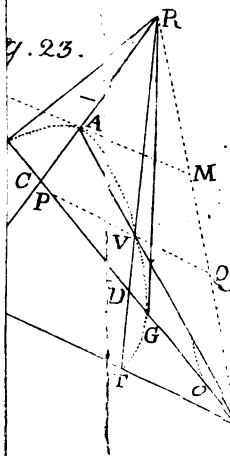
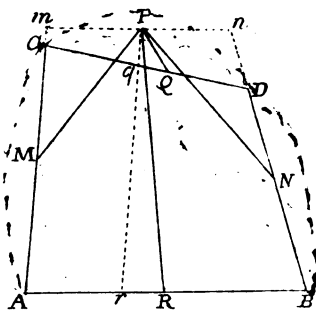


Fig. 23.

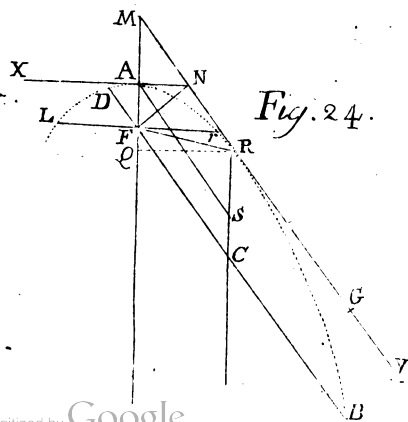


Fig. 24.



Fig. 27.

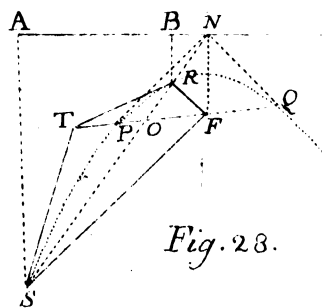


Fig. 28.

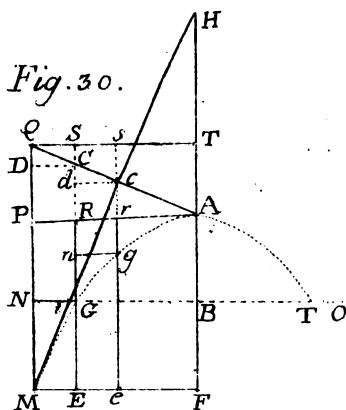
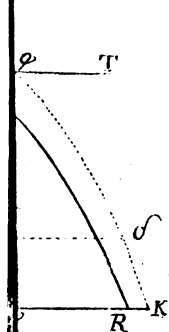


Fig. 30.

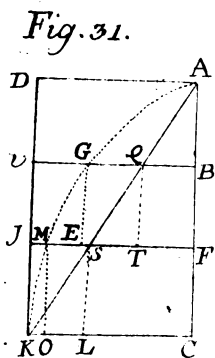


Fig. 31.

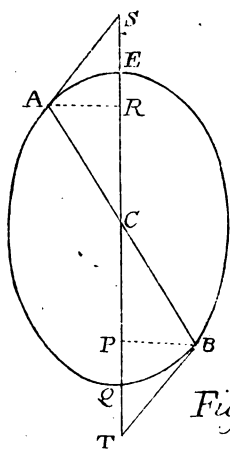


Fig. 35.

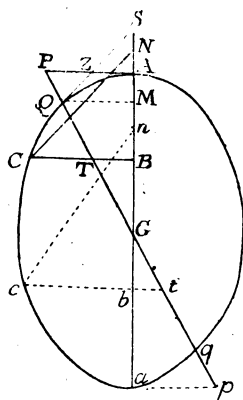


Fig. 36:

Fig. 39.

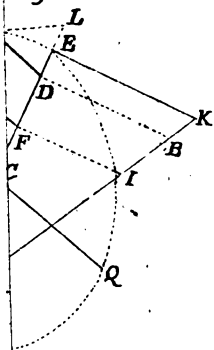


Fig. 40.

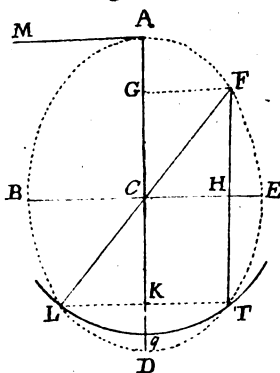


Fig. 44.

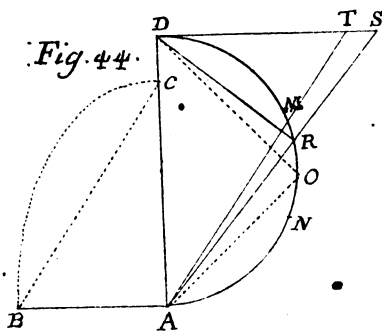


Fig. 47.

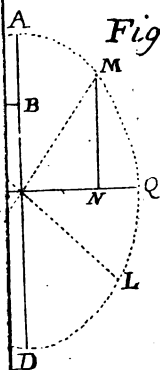


Fig. 48.

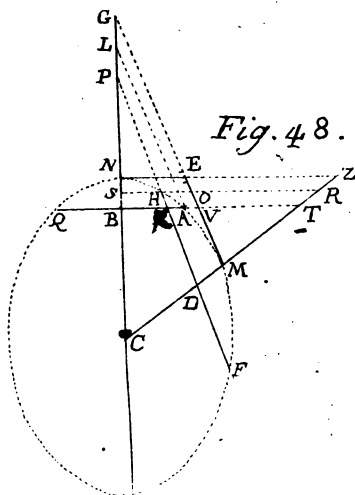


Fig. 63.

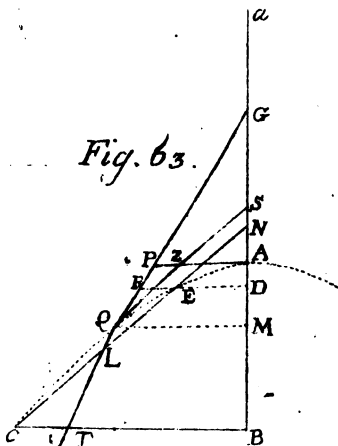


Fig. 64.

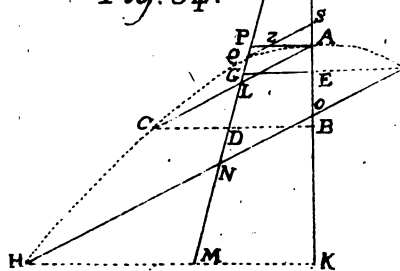


Fig. 67.

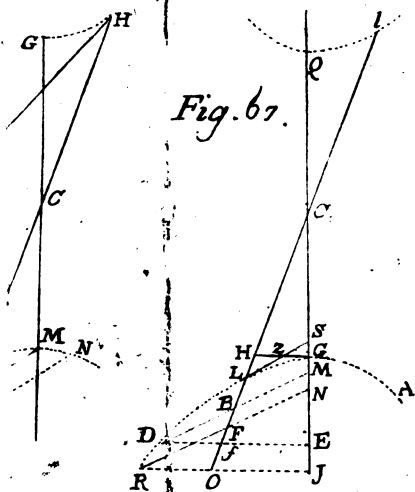


Fig.

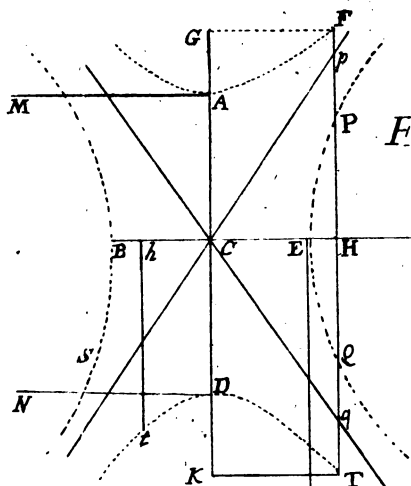


Fig. 71.

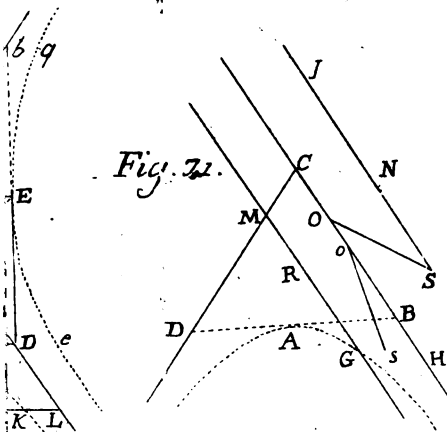
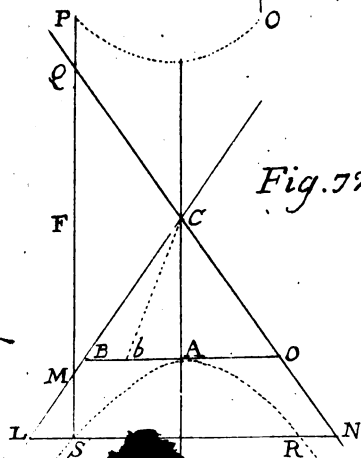


Fig. 72.



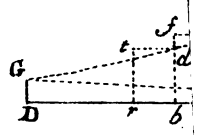
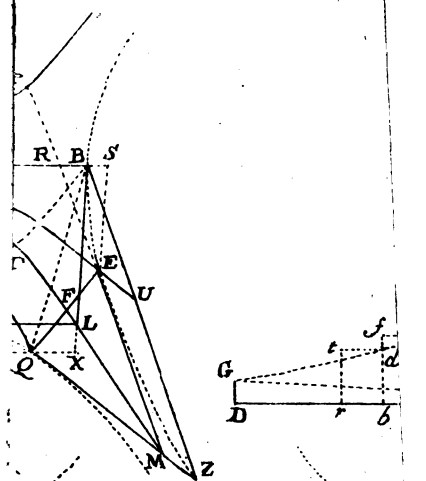


Fig. 79.

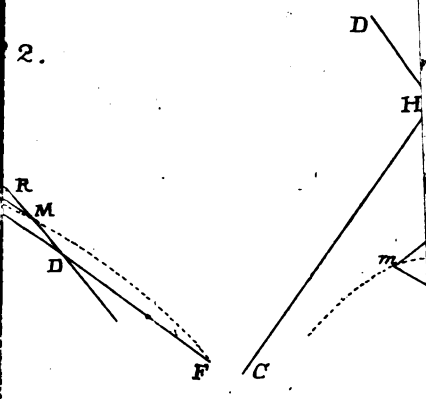
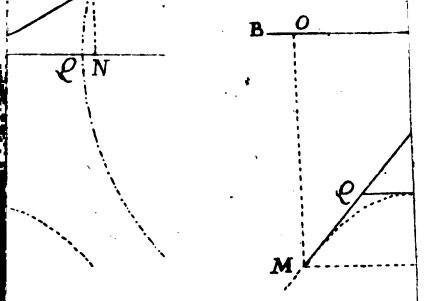


Fig. 86

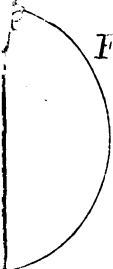


Fig. 90.

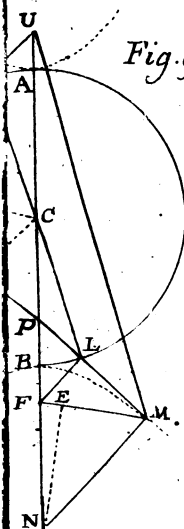


Fig.

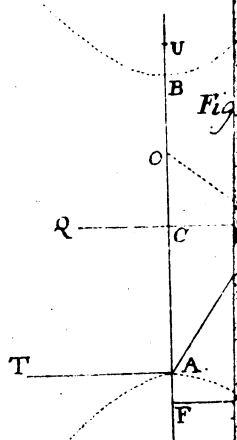


Fig.

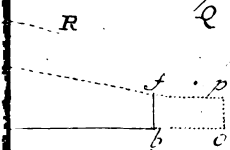
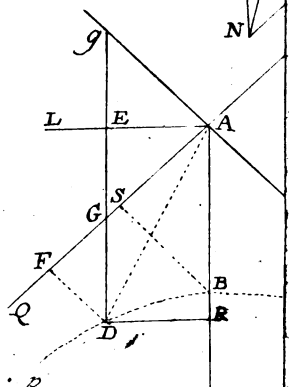
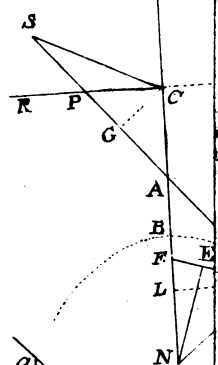
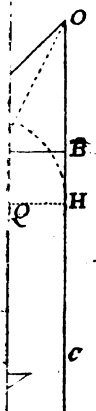
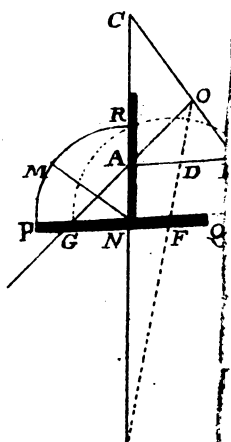
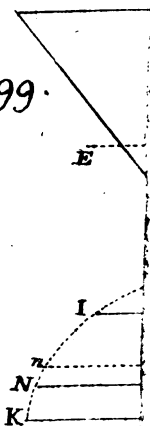


Fig. 99.



66.

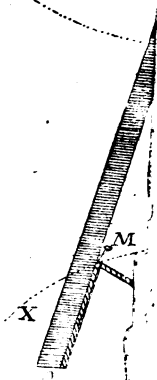
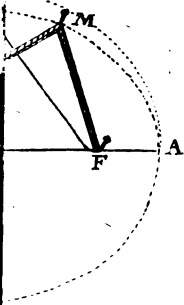


Fig. 110.

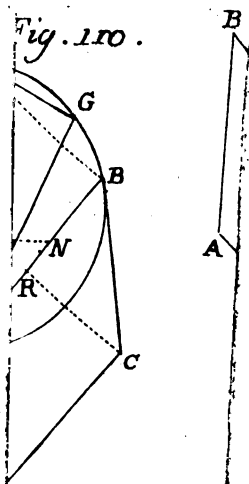


Fig. 114.

