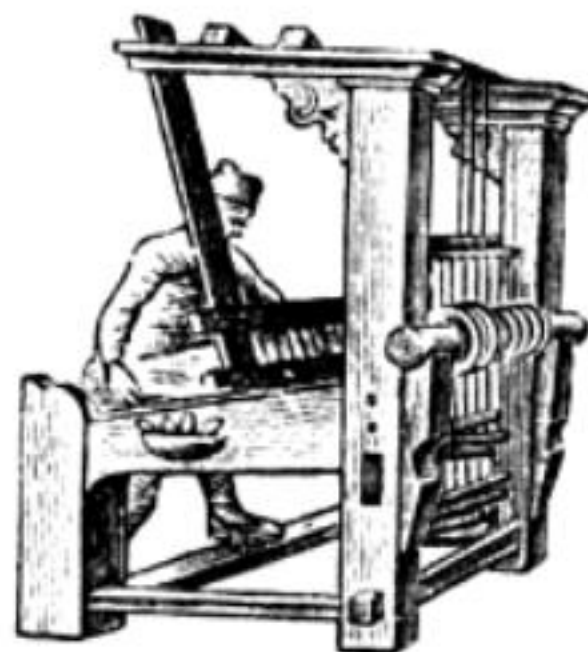


LIBRERIA	
G. DANIELE	
N.o	78
Scaff.	
Prezzo	450



Ex libris
 LUIGI FIRPO

6. 3. 24.

FIRPO
1033
BIBLIOTECA NAZIONALE TORINO

NUOVO METODO GEOMETRICO

Per trovare fra due Linee rette
date infinite medie continue
Proporzionali.

DI
PAOLO MATTIA
DORIA:

*In questa Nuova Impressione àccresciuto
di molte nuove Proprietà, e
Considerazioni.*



IN ANVERSA MDCCXV.

Per Cristofaro Plantini.

ITALIA



VITTORIO & S. A. V. N. A. 771

ROMA 1910



^{MO}
ALL' ECCELL. SIGNORE

WIRICO DI DAUN

Maresciallo, e Conte di S. R. Imperio,
Cavaliere del Tefon di Oro, Vicerè,
e Capitan Generale nel Regno
di Napoli, &c.



R A tutte le scienze, le quali sono l'oggetto della umana mente, ci sembra (ECCELLENTISSIMO SIGNORE), che le Mattematiche più di tutte le altre siano state da' Gran Principi, e da' valorosi Capitani tenute in pregio: imperocchè veggiamo che ne' primi tempi si annoverano molti e moltissimi Principi, e Capitani, i quali in questa scienza, non meno che nell'armi, riputarono lor gloria rendersi illustri. Numa Pompilio si fu eccellente Astronomo, e fu il primo, che pensasse, il Sole essere nel centro del Mondo. Giulio Cesare di se stesso appresso Lucano vantò, in mezzo all'armi di contemplare le stelle

..... media inter prælia semper
Stellarum. Cœlique plagis superisque vocavi;
Nec meus Eudoxi vincetur fastibus annus

Archimede ancora, da Regia Stirpe nato, e strettamente a Gerone Siracusano congiunto, alzò il pregio delle Matematiche a quel segno, che nè meno è ignoto agl'ignoranti di tale arte. Pericle, Gran-Capitano degli Ateniesi, si rende utile alla sua Repubblica per la cognizione, che avea degli Eclissi: e tanti, e tanti, che lungo fora il narrare. Nè sono mancati ne' tempi appresso eziandio Principi, e Capitani, i quali hanno riputato lor gloria acquistare in questa sublime scienza il titolo di Autori, colle proprie fatiche illustrandola. L'Imperador Carlo Magno la professò ancor egli insieme con le armi. Ermanno Contratto Conte di Viringia fu Mattematico, il quale scrisse della più difficile parte di questa scienza, ch'è la Quadratura del Cerchio. Alfonso XII. Re di Castiglia tenne a singolar suo pregio essere Autore delle Tavole Astronomiche, dette dal suo nome Alfonsine. Veggiamo Maurizio di Nassau comparire nel Mondo letterario colto scioglimento di una intrigatissima difficoltà nelle materie dell'Algebra. Il famoso Tichone Brabe, di chiarissimo sangue, fu, come ogni un sa, illustre non meno per gli dominj che possedeva, che per le scienze Astronomiche. Ed à tempi nostri ancora abbiám veduto che la Francia, pubblicando al Mondo alcune nobili considerazioni, che sopra la Geometria avea fatte il Duca di Borgogna, ha creduto accrescere con ciò non poco splendore alla fama di quel giovine Principe, pochi anni sono da immatura morte rapito.

Or' essendo io andato meco stesso considerando i motivi, per gli quali i Principi abbiano questa scienza a tutte le altre anteposta; emmi paruto alla prima che di ciò sia stato cagione lo essere ella madre di tutte quelle Matematiche arti, dalle quali dipende non solamente la coltura esteriore delle Città; ma principalmente il nobilissimo e glorioso esercizio della guerra: esercizio, più che a niun'altra persona, a' Principi proprio. Ma da poi che
mi

mi son volto a contemplare il quasi divino artificio, col quale ella scorge l'umana mente allo scoprimento di quelle verità eterne, ed indefinite, ed al comun senso ignote, dalle quali poi, come da rivi, discendono le virtù umane, la politica, e le leggi, le quali all'umana felicità ci conducono; io rimirai come cose di niun momento gli utili, ancorchè grandi, che per le arti ci arreca questa scienza.

All'ora vidi la cagione, per la quale Platone sgrida Archita Tarantino, perchè, così gran Mattematico com'egli era, si fusse impiegato, qual vile artefice, alla struttura di una colomba volante, e d'inanimata materia formata, e vidi che a gran ragione prendeva egli a vile i grandissimi vantaggi, che per le arti ci somministra questa scienza. Imperciocchè egli considera che i beni, ch'ella arreca all'umana mente, sono da riputarsi tanto maggiori de' comodi, che le arti producono, quanto l'animo è più da riputarsi che il corpo, e quanto l'interna coltura della mente è, più che l'ordine esterno delle cose apparenti, da tenersi in pregio ed onore.

E in vero, quali e quanti siano gli utili, ch'ella arreca al Mondo, portando a vera norma, ed ordinata legge le umane menti, troppo lungo sarebbe a narrare. Basta dire ch'ella forma quegli uomini, infaticabili amatori del vero, ed implacabili odiatori del falso: ch'ella è insorabile nemica di quella specie di uomini, alla Repubblica perniciosissimi, i quali perchè amano di sottrarsi dalle leggi del vero, e del giusto, tentano di distruggere il vero stesso rapportandolo alla lor mente, ed al volgo, come una idea senza soggetto, o come una cosa ideale, impossibile a conoscersi: per la qual cosa poi formano a lor medesimi un mostruoso numero di falsi principj, tutti atti ad ampliare il loro reo arbitrio, ed a lusingare le ingiuste lor voglie. Alla perfine basta dire, ch'ella è la vera madre di quella filosofia, propagatrice di quel vero unico, nel quale

quale reside l'essenza della giustizia, e della quale devono essere seguaci tutti gli amatori del giusto, e del onesto.

Così dunque, ECCELLENTISS. SIGNORE, dopo considerati questi ultimi, e veri beni, che a noi somministra questa scienza, mi sono interamente persuaso che questi siano stati i veri motivi, i quali hanno i cuori de' Principi acceso di ardente amore verso di lei: e tanto più quando considero che il mantenimento della giustizia è il lor obbligo indispensabile, e la lor gloria più vera, quantunque ella sia meno strepitosa che la militare; la quale da' saggi Principi non si deve con altra idea rimirare, che con quella di un violento, ma necessario rimedio da opporsi incontro alla rapacità degli Stranieri, ed alcune volte alla violenza de' Popoli ribellanti alle leggi; ed alla perfine non con altra idea, che con quella di un forte sostegno degli ordini civili, e delle leggi.

Ma egli non è già che la luce di tante conoscenze, che spande agli umani intelletti questa scienza, utile cosa non sia che gli uomini tutti si volgano a contemplarla: per la qual cosa io ancora ho preso diletto, ECCELLENTISSIMO SIGNORE, d'illuminar la mia mente, per quanto mi sia stato possibile, nello studio di sì alta scienza esercitandola: e sì, sopra quella meditando, mi è venuto fatto di trovarvi alcuna cosa, la quale non mi è paruta indegna di essere pubblica alla luce del Mondo; come quella, che da molto tempo è stata da' Mattematici tutti ricercata.

Rimaneva solamente il trovar Personaggio, in cui non solo fusse l'altezza dell'origine, e l'emineuza del grado, ma si unissero eziandio sublime cognizione di questa scienza, e tutte quelle virtù, delle quali poco anzi ho detto, lei esser Madre; acciocchè a quello io potessi, com'è giusto, consagrar questa mia Opera. Ed in vero, considerando io tutti i gran pregi che vi adornano; in niun' altro ho veduto congiunti all'altezza de' liberi dominj, e del lignag-

guaggio tutti i gran benefici, che ho detto a noi arrecare le Matematiche.

In Voi van di pari le civili, e le militari virtù: in guisa tale che quei Popoli, i quali prima vi esperimentano feroce Capitano nel sottometterli colle armi, vi ammirano poi in un momento mansuetissimo Moderatore, e Mantentore delle lor leggi, poi che al vostro valore si sono arrenduti. Sallo questo Regno di Napoli, il quale nello spazio di pochissimi giorni vi vide prima Condottiere di Eserciti, e quindi, posto al maneggio delle redini del Governo Civile, vi ammirò Giudice indifferente fra il cittadino, e il militare. Vi vide prima forte guerriero, e poscia tutto mente, e tutto consiglio sedere tra Magistrati, qual giusto difensore della loro felicità.

Quella idea di giustizia poi, la quale ho detto essere frutto di questa scienza, in niuno più che in Voi si è ammirata da tutti gli Ordini di questo Regno; in guisa tale che quelli medesimi odiatori del giusto, che ho poc' anzi a V. Ecc. narrati, sono stati costretti di confessare le Vostre lodi in così importante virtù, ed hanno lodato quella giustizia, che non amano; arrossendosi di non ammirarla in Voi, che in tutte le vostre opere la fate sì chiaramente risplendere. Ed ob piacesse al Cielo che, come Voi, i Principi tutti ostentassero a' Popoli orrore verso i vizi, ed amore verso le virtù; perchè gli sforzerebbero a vestire, almeno per imitazione, l'abito delle virtù; e per questo solo mezzo del buon esempio vedremmo ben presto le Città, e i Regni a vera virtù ridotti.

Quanto poi in Voi siano a dovizia quei gran beni, che per arti militari somministra al Mondo questa scienza, sarei io troppo ardito se imprendessi di narrarne distesamente tutta la grande ampiezza. Parlano tuttavia, e per sempre parleranno a' Popoli le vostre gloriose imprese, non solo in tutte le parti di Europa, ma nella nostra
Italia

Italia operate; la quale in ciascheduna delle vostre operazioni ha sempre ammirato una finissima arte di guerra, con ammirabile coraggio congiunta. In fine, ECCELLENTISSIMO SIGNORE, i secoli a venire non potranno a Voi negare quella gloria, che i passati hanno dato a coloro, i quali nelle virtù civili, e nell'armi egualmente, mantenitori di Regni, e celebri Capitani si sono al Mondo dimostrati.

Ma quella gran mole di virtù, che in Voi il Mondo ammira, è quella stessa, ECCELLENTISSIMO SIGNORE, che dovrebbe dall'indrizzarvi questa mia Opera in qualche parte trattenermi: imperocchè sarebbe di uopo che fusse ella sicura da quell'oblio, che suole sepellire le Opere degli Autori, affinchè potessi io adempire il mio desiderio, che è di rendere per mezzo delle Matematiche eterno al Mondo il Vostro nome; siccome gl'Istorici, i quali scrivono le cose accadute in Europa in questi nostri tempi, dalle vostre magnanime geste sono costretti di fare. Ma perchè egli è impossibile agli uomini il moderar tanto il proprio animo, che l'amor proprio, e la lusinga non abbia sopra di loro alcuna forza; perciò non ho potuto io fare a meno di non lusingarmi che questa mia Opera, la quale ho al vostro gran nome risoluto di consagrar, debba far sì che io conseguisca sì fatto intento: il quale amor proprio è rinforzato dal desiderio parimente, che ho di appalesarmi grato alle gentili, ed obbliganti maniere, colle quali l'Eccellenza Vostra si è compiaciuta nelle occasioni distinguere così la mia persona, che i miei piccioli talenti: di modo tale che quanto i medesimi talenti ponno mai produrre, egli è ben giusto che si appresenti a V. Ecc. istessa, alla quale in fine fo divotissima riverenza. Nap. 25. Settembre 1715.

Di V. Ecc.

Divotiss., ed Obbligatiss. Servit.

Paolo-Mattia Doria.

AL

A V V I S O

A CHI LEGGE.

Egli fu sempre mai antichissimo costume, e dalla speranza a' dì nostri ben confermato, che tutti coloro, i quali nelle scienze, con novi ritrovati si son fatti vedere, abbiano a dolersi della strepitosa, e tumultuante calca di Oppositori, i quali con alterezza censoria, quasi per necessario impulso della loro invidia umana mente, ergonsi incontro a coloro, che tentano dalla volgare schiera appartarsi.

Ed in vero la mente umana mostra, più che in altra cosa, la sua divina origine in ciò che sembra, che ella sdegni di mendicare la sua felicità d' altra cosa, che da se stessa; perchè veggiamo, che quando si lascia strascinare dalle passioni, a cercare il suo diletto nell' ambizioso desio di gloria, il quale non da se stessa, ma dall' altrui arbitrio dipende, ne vien subito punita dall' altrui invidia, che al conseguimento della da loro bramata gloria s' oppone.

E che sia così, Galileo Galilei, che amarezze non provò egli, a cagion de' suoi divini ritrovati? Renato delle Carte non giunse egli fino a stancarsi di più rispondere a' suoi Oppositori, per modo che egli elesse la solitudine per sua abitazione, a solo fine di sottrarsi dalle insidie de' suoi Emoli? E Copernico non assaggiò egli la petolanza d'un vil Pedante, il quale giunse fino a porlo in ridicolo su delle scene?

Ed alla per fine tutti gl' Inventori anno sperimentato a loro gran costo quello, che dice il Signor Pasquale ne' suoi pensieri, e propriamente nel numero dodicesimo del capitolo trentunesimo, ove così ragiona.

Quelli che sono capaci d' inventare sono rari. Quelli che non inventano sono in più gran numero, e per conseguenza i più forti; E si vede, per lo più spesso, che questi ricusano di dare a
b
quelli

quelli la gloria, che ricercano in premio delle loro invenzioni: se quelli s'ostinano a volerla, ed a trattar con disprezzo coloro, che non inventano: tutto quello, che quadagnano in questo si è d'esser nominati con nomi ridicoli, e riputati Visionali. Egli bisogna dunque ben evitare di molto gloriarsi dello grand'vantaggio, che porta il titolo d'Inventore, quantunque grande egli sia, e bisogna contentarsi d'esser riputato dallo scarso numero di coloro che ne conoscono il valore..

Così dunque il destino degli Inventori è stato sempre come si vede di dolerli d'una folla d'Oppositori, la quale per legge della nostra natura corrotta s'alza contro gl'Inventori di nuove cose..

Io però non solo mi dolgo che contro di me si siano alzati tanti Oppositori, quanti son quelli, che si vedranno annoverati alla fine di questo libro, ma a gloria, da me non meritata, lo attribuisco; imperocchè farebbe di troppo bassa lega la mia invenzione, se non avesse avuta la forza d'ingombrare le menti di coloro, i quali i loro raziocinj solamente san formare sopra quelle cose, alle quali sono abituati, e nelle nuove si perdono, e si confondono: il qual genere d'uomini è certamente quello, che compone il maggior numero, siccome bene avvisa il Pasquale; per laqualcosa voglio far io stesso la loro difesa, e mostrare l'intrinseche cagioni, dalla quale traggono l'origine i loro errori; e con questa occasione voglio additare a coloro i quali veramente anno sincera voglia di conoscer il vero di questo mio nuovo metodo, il modo con il quale possano evitare quei scogli, ne' quali i suoi torti raziocinj seguendo, inciampa la comune schiera de' falsi Scienziati..

Il primo, e più possente ostacolo, che l'umana mente sperimenta nel conseguire quel vero, al quale ella sempre aspira per sua natura, sono gl'impeti della fantasia, dalla preoccupazione dell'animo, e dalle ree passioni mossi, ed agitati, sopra de' quali poi cominciando a tesser la serie de' suoi mal ordinati discorsi, è forza, che nell'errore miseramente inciampi; e quindi è poi che le menti della più gran parte degli uomini, veggiamo sì tenacemente abbracciare quelle false Idee, le quali sono tanto più perniciose, quanto più loro sembra d'averle con perfetto raziocinio formate..

E senza fallo la bella luce dell'umana mente, è per sua natura a guisa di quella.

di quella de' rai del Sole, la quale ogni leggiero fummo di terreno vapore l'adombra. Unico però, e vero rimedio per far sì che gli uomini in sì fatti perigliosi scogli non inciampino, sarebbe lo studio della Matematica, ma in tal modo fatto, che vera filosofia nell'animo umano producesse; frutto dello studio della Geometria aurebbe da esser quello di render la mente capace di distinguere con sicurezza il vero dal falso, e render l'animo morigerato in guisa, che sapendo reprimere quegli impeti della fantasia, da noi nominati poc' anzi, amassero unicamente quella verità, la quale è sola vatevole a riempire l'animo di vero diletto.

Ed in vero e' sembra, che la nostra anima sia da Iddio stata creata unicamente per la contemplazione del vero, perchè si vede, che ella negli ben ordinati sensi si diletta, ma nel vero si pasce in quella guisa, che l'uman corpo da altri corpi riceve il suo sostentamento; di questo ne fan chiara fede i trasporti di giubilo, che anno mostrato sentire i discopritori di nuove cose, perchè leggiamo, che Archimede, quando le sue divine verità scopriva, tanto diletto sentiva nell'animo, che si lasciava trasportare fino a gridare, *inveni, inveni*; e pur egli è vero, che nell'oggetto della Geometria non vi è cosa, che a' sensi arrechi piacere, dalla verità pura in fuori, e da niuna estrinseca vaghezza vestita. Adunque unico oggetto degli appetiti dell'anima è la verità pura; ed ella ben lo dà a divedere ancora in ciò, che se avviene ch'ella voglia del guasto, e corrotto alimento, che a lei apprestano le disordinate passioni nudirsi; ella prova in sè tutte quelle malattie, che si formano nel corpo quando avviene, che di velenoso alimento si pasca; e che sia così, se l'ambizione, l'ambizioso tormenta, assai più il Livore, e l'Invidia, e tutte le altre vili, e basse passioni cruciano certamente l'animo dell'invidioso, che di colui, che è invidiato; Ond'è che se i miseri servi delle passioni ben facessero l'esame al dilorò animo, avrebbero più a desiderare di dirigere la loro mente verso la dritta via della verità, e della virtù, che per lo torto sentiero delle fregolate passioni, le quali non vanno mai dall'ignoranza discompagnate.

Ma dei tanti, e sì fatti vantaggi, che la Matematica (vera disciplina della umana mente) sarebbe capace all'animo umano di arrecare, a noi ne viene impedito l'acquisto per opera de'

mal Metodi , con i quali, dalla più gran parte degl' uomini, ella si studia ; e come che questi siano il vero fonte dal quale surge quella ignoranza , la quale si cuopre sotto l' ammantò della sapienza, e la quale è della umana miseria la sola cagione, non posso, per timore d' esser troppo lungo in questa Prefazione, lasciar d' additarli.

Alcuni allettati dal desio, che loro ispira l' amor proprio , cioè di conseguir la scienza della Geometria , poco la di loro mente affaticando nello studio di quella , interpretano con eccesso una sentenza di Renato delle Carte, ed in vece di radicare nella lor mente la Geometria , la fan rimanere nella memoria ; essendo pur vero , che Renato delle Carte dopo essersi per lo mezzo di tutti que' sublimi ritrovati, che ogn' un sa, esercitato nella Geometria , pensò a gran ragione, che la soluzion de' Problemi Geometrici non doveva esser l' unico fine delle sue meditazioni ; ma che la filosofia, e la morale dovessero essere il solo degno frutto d' una gran mente, e perciò concluse , che il vero frutto della Geometria era la Matesi , cioè la disciplina della mente, non la vana pompa di scioglier problemi , o di ritrovar nuove cose.

I Moderni Geometri prendono con eccesso questa sì fatta proposizione , e confondendo i mezzi con i fini , si liberano affatto dall' esercizio, sopra la risoluzione de' Problemi, per formare la mente atta a distinguere il vero dal falzo , ed in questa guisa fanno come chi vanamente pretendesse d' imparare a leggere , solamente apprendendo a conoscere l'abbici; o come se un legista pretendesse divenir gran giurista , senza mai applicare ai casi particolari le leggi, che si ha mandate a memoria .

Così dunque costoro vanamente tentando d' accordar l' utile con il facile, non mai applicano gli Elementi, che anno a memoria , allo scioglimento de' Problemi , o alla ricerca d' alcuno nuovo ritrovato; dalla qual cosa ne avviene, che non possano mai formare buona mente , come quella, che non essendo mai stata al cimento della ben ordinata meditazione, non ha fatto l' importante abito a corregger se stessa nelle occasioni delle frequenti cadute , le quali necessariamente accaggonò a chi il scoprimento di nuove cose intraprende, e poscia sopra quelle meditando impara a divenire umile nelle sue pretese, e per quanto si puole sicuro ne' suoi discorsi.

Quindi

Quindi è poi che questo si fatto genere di falsi Geometri, quando vuole intraprendere quello, che non ha mai esercitato, cioè o di scioglier problemi, o d' esaminare le altrui invenzioni, si vede subito cader nel difetto d' applicare Proposizioni Generali a casi particolari, ai quali non convengono; e tutto ciò accade per lo difetto d' aver trafandato quell' esercizio della Geometria, il quale è indispensabilmente necessario per formare ~~una~~ mente atta a distinguere il vero dal falso.

Dopo questi, vengono quelli i quali troppo amando la pratica nelle speculazioni Geometriche, si abusano della divina Analitica; questa d' alcuni (benchè ingiustamente a mio credere) è stata chiamata arte, non scienza, a sola cagione che con il pratico calcolo, si possono risolvere i Problemi, senza molto raziocinio *a priori* sopra le verità Geometriche.

Io non voglio entrare ad esaminare questa quistione, perchè so che tutto ciò, che in pratica s' esercita in questa scienza, geometricamente si dimostra; ma so altresì che è proprietà della mente umana d' applicarsi sempre al più facile, quando è in paragone col più difficile, benchè più utile: dalla qual cosa ne segue, che gl' uomini sempre amino il pratico, ed il puro speculativo abborriscano; per la qual cosa poi, l' Analitica insegnando quel calcolo pratico, quantunque fondato sulla dimostrazione Geometrica, gl' uomini schifi della fatica, intieramente a quello s' apigliano, e dal raziocinio puro, che nel Metodo Sintetico solamente s' esercita, facilissimamente s' allontanano; Onde poi pratici Calcolatori, a guisa degli Aritmetici, ne divengono.

Ed in vero l' Analitica, la quale i Francesi chiamano *Le soulagement de la Mémoire*, i falsi Analitici la fanno divenire, *le soulagement de l' esprit*. Quindi poi ne avviene quella gran confusione, che oggi s' esperimenta ne' raziocinj de' moderni Geometri, perchè li veggiamo nell' esame delle altrui invenzioni, correre precipitosamente al calcolo, senza considerare le ipotesi sopra delle quali lo formano; onde poi ne deducono delle verità, le quali non fanno ai casi proposti, o degl' errori manifesti contro gl' elementi d' Euclide, cose tutte, le quali si vedranno con esperienza nelle Opposizioni che ho ricevute a questa mia Opera.

Laonde la Veneranda Antichità, sempre saggia in tutte le sue ordinazioni, non proibiva, che si risolvessero per lo mezzo del calcolo

calcolo Analitico le questioni Geometriche, siccome s' offerva in Archimede, il quale certamente è da crederfi, che nelle sue divine invenzioni si sia dell' Algebra servito; ma non ammettevano altra dimostrazione, che la sintetica; e non è già a mio credere, che ciò facessero, come altri pensa, per una mente invida, la quale volesse nascondere ad altri, sotto un profondo mistero, la scienza dell' Analitica, ma per un saggio avvedimento, diretto solo a non lasciar introdurre il fatto abuso, il quale le menti degl' uomini dal raziocinio puro, e dalla pura speculazione allontana.

Più che l' Algebra, poi s' oppongono alla purità del Geometrico discorso, i tanti metodi di nuovo al mondo introdotti, i quali, quantunque ingegnosissimi siano, non solo fanno, come l' Algebra che la mente nella pratica s' oddormenti, ma sono cagione, che dalla rigorosa dimostrazione s' allontanano, della semplice approssimazione contentandosi.

Egli non è però già che fra questi si debba il metodo degl' indivisibili annoverare, il quale com' ogn' un sa, non solo non è a pratico calcolo appoggiato, ma contempla in tutto con astratta meditazione la quantità, e della approssimazione non si appaga; ed è a purissima, ed intiera dimostrazione appoggiato.

Quelli, che di sopra ho narrati sono gl' infelici fonti, dai quali si numerosa schiera d' Oppositori agl' inventori di nuove scienze scaturiscono; imperocchè gl' impeti della fantasia, siccome ho detto, la prevenzione di mente cagionano ed il torbido fummo delle passioni genera invidia; le quali cose tutte sono cagione, che i mali accorti Geometri, indirizzino precipitosamente i loro discorsi a trovar l' errore, che certamente credono esser nell' altrui Opere, e che per contentar l' amor proprio, di leggiero si lusinghino d' averlo ritrovato.

Il male ordinato studio, dalle cagioni che abbiamo detto, originato, suol generar l' ignoranza, la quale fa sì, che i falsi Geometri non siano capaci di distinguer il vero dal falso. E d' uopo dunque, per esser perfetto Geometra, ed esser capace d' esaminare le altrui opere, che la mente sia sufficiente, e indifferente, le quali cose prima le dà la natura, formando l' uomo di mente capace a ben intendere, e d' un indole inclinata ad amar il vero, e l' onesto.

Poſcia la ſufficienza ſ' acquiſta, per lo mezzo d' un lungo, e ben ordi-

ordinato studio , da buona pratica nella risoluzione de' problemi confermato, e la indifferenza si consegue, per lo mezzo d'una virtuosa educazione, congiunta con conoscenze di buone cose, le quali rendono l'animo libero, e non servo delle vili passioni , ed in particolare della bassa invidia ..

Io per quello che a me s'attiene, son sicuro, che fra tanti nemici delle nuove cose, vincerò coloro, i quali solamente sono dalla prevenzione di mente offuscati, se vorranno ascoltar quello, che quì appresso dirò, intorno allo spirito della mia invenzione; gli altri poi, i quali sono, o nell'ignoranza sepolti, o dall'invidia offesi, non curerò che m'intendano, e stimerei, che l'applauso del volgo mi fusse di pregiudizio, secondo la sentenza di Cicerone. *Iudicium turba pessimum* .. Narriamo dunque qual sia stato il mio intento in questa mia nuova invenzione, ed in questa occasione facciamo conoscere la cagione per la quale incontra tanta prevenzione di mente, contro la verità, che in se contiene questo nuovo metodo..

La cagione per la quale questo mio nuovo ritrovato ha incontrato nella mente di molti tanta prevenzione si è, ch'egli è stato fin ora desiderato, e ricercato in vano da tutti gli antichi, e moderni Matematici; per la qual cosa non possono darsi a credere, che uno non Professore in si fatta scienza lo abbia ritrovato, ed in questa guisa prevenuti di mente contro l'Autore, non solo non cercano di esser disingannati, ma il disinganno come contrario all'amore che anno verso di lor medesimi, sommamente aborriscono ..

Ora questa prevenzione di mente, non è in veruno conto ragionevole, perchè per primo non vi è veruna dimostrazione, che questo Problema sia insolubile, e quindi è che tutti i Matematici si sono affaticati a cercarlo, ma finalmente si sono quietati al modo di Archimede di farlo per lo mezzo dell'intersezione delle linee curve..

Il secondo poi, che è quello di non esser io professore, la lettera che io indirizzo all'Eccellentissimo Signor Vecere di Napoli, fa bastantemente vedere nell'esempio di tanti uomini non Professori, che le grandi scoperte nelle Matematiche son sempre state figlie delle menti libere, e non dalle menti de' Professori, per lo più spesso meschine, e legate ad una vana pompa d'erudizione Matematica, indirizzata solamente ad abbellar

r. il

re il Volgo, con la farragine de' termini, e di proprietà a quello ignote.

Ed in vero non fanno questi prevenuti di mente, che nelle scienze, più importante, che l'erudizione egli è il fare una idea piena de' limiti, e della potenza delle scienze, per modo, che la mente ben comprenda tutta la forza della scienza, appunto come se egli stesso l'avesse inventata, in maniera, che ei possa da quelli universali dedurre quelli medesimi particolari, che i Professori vanno a ricercare ne' libri degl' Autori per caricarne la loro memoria.

Questo è il più nobile, ed il più alto fine, al quale devono aspirare i Matematici, e questo è quello solo, che fa gli uomini inventori; ma egli è altresì quello, che in altro modo non s'acquista, se non se studiando la Metafisica da Geometra, e poi la Geometria da Metafisico, ciò non già come uno la imparasse, ma come uno la creasse; Allora questo tale Matematico, quantunque non Professore, potrà nella sua scarla erudizione, ma nella sua ampia idea delle cose, e ne' suoi giusti universali dedurre tanti particolari, quanti i Professori non son capaci d'intendere; e farà come chi possiede un picciol campo, ma da lui tutto pienamente conosciuto; per laqualcosa egli sa trarre da quello tutto ciò, che a lui fa di mestieri, in vece che gl'Euruditi son come coloro, che vastissimi campi possedendo, non li conoscono, ne fanno cavarne alcun frutto.

Questo Possessore di picciol campo, ma sagacissimo Agricoltore di quello, puol dirsi che son io, il quale meditando da Metafisico sopra il modo con il quale Galileo c' insegna descrivere la Parabola, e sopra il metodo degl' indivisibili, ho conosciuto, che da questi se ne poteva dedurre questo gran Problema, e che la cagione per la quale gl' Antichi non poterono giungervi fu, perchè non ci era stato ancora al Mondo Galileo, e Buonaventura Cavaliero, due gran lumi di questa scienza Italiana, perduti di vista però dagl' animi servili, ed invidi degl' Italiani medesimi, per andare come perduti appresso i metodi d'altre nazioni. Ed ecco in breve quello, che io ho meditato sopra il modo di descriver la parabola da Galileo insegnatoci, il quale essendo stato visto da tutti, non è stato considerato da veruno.

Io considerai, che il modo con il quale Galileo c' insegna descrivere

vere la parabola fosse senza alcun dubbio più de gl' altri vantaggiolo, perchè in quella si possano considerare le radici, ed i quadrati intercetti fra i quadrati di radice razionale; ed oltreacciò considerai, quanto egli mirabilmente si serviva dell' unità, facendo, che nella descrizione di questa parabola ella faccia l' ufficio di parametro, d' intercetta, d' applicata, e di quadrato; per le quali cose considerai, che riempiendo questa Parabola, per lo metodo degl' indivisibili, d' infinite applicate, lo aveva sopra l' asse infinite terze proporzionali delle applicate, e dell' unità, sempre intercette fra quelle de' numeri interi; onde poi mi riusciva agevole, tirando dal punto estremo dell' asse una linea ad angoli retti, ed uguale all' istesso asse, formare un triangolo rettangolo, il quale per lo metodo degl' indivisibili fusse ripieno d' infinite terze proporzionali delle applicate, e dell' unità; ed in questo modo ho già una media fra due linee rette date: e questo è il primo cardine della mia invenzione, come si vede nella proposizione prima, seconda, terza, e nelle considerazioni sopra di quelle.

Poſcia portando all' infinito la descrizione della Parabola insegnataci da Galileo, la descrivo in modo, che le parti dell' asse rappresentino la potenza de' cubi, de' biquadrati, e d' ogni potestà, fino all' infinito, come si vede nella mia quarta Proposizione, ed in essa avverto, che senza supposizione di moto, ma con la semplice divisione in parti pari, ed in parti impari di due linee rette ad angoli retti, fra di loro si descrive questa parabola, ciò che rende la descrizione di essa pura Geometrica, come si vede nella considerazione seconda della Proposizione IV.; ed ecco il secondo artificio da me usato, per mezzo del quale ho una progressione d' infinite terze, e quarte proporzionali fino all' infinito, come per la considerazione prima all' istessa IV. Proposizione.

Poſcia perchè questa quarta proposizione mi dava bensì linee in progressione Geometrica fino all' infinito, ma non era sufficiente a darmi le due medie fra due linee rette date, com' era il mio fine, ricorsi al terzo artificio, che è quello di porre fra i limiti di due linee, le quali esprimono i cubi di radice razionale, come fra 1. 8., e fra 8. 27. tutti i cubi delle altre applicate intercette fra le razionali, e dividendo l' asse in punti infiniti, faccio, che li quadrati, e i cubi siano nell' istessa linea, che le applicate

plicate, e siano tanti, quanti sono i punti dell'asse, come si vede nella mia V. Proposizione; ed ecco, che in virtù di questo artificio da me usato, lo ho già due medie fra due linee rette date, alzando solamente una perpendicolare dalla base fino alla linea, che congiunge per gli estremi i cubi fatti per costruzione, e portando questo all'infinito, ho infinite medie, come si vede nella tredicesima, e quattordicesima Proposizione; ed in questo modo resta già compita la risoluzione del gran problema, sempre come si vede in virtù del modo insegnatoci da Galileo di descrivere la parabola, e del metodo degl'indivisibili. Tutto questo si contiene ancora nella prima impressione del mio libro, fatta nell'anno 1714. appresso Daniello Hopper, in Augusta, benchè più raccorciata in ciò che riguarda i termini, ed i modi di spiegar le cose, niente in ciò che riguarda la dimostrazione, e la verità.

Quello che di più ho aggiunto in questa seconda impressione si è l'arte di conoscere, che la proporzione Aritmetica, e la Geometrica si riducano ad una istessa cosa, perchè nelle mie Proposizioni II. VIII. IX. X. XI. mostro che le applicate sono in proporzione Aritmetica, e i quadrati, ed i cubi nell'istessa proporzione, e nell'XI. discopro la natura della parabola, che è quella di costare d'infiniti pezzi d'Ipotenuse, dalla qual cosa ne nascono utilissime considerazioni. Oltracciò nella XII. Proposizione dimostro, per la via de limiti, lo stesso, che ho dimostrato nella V.

Da tutto questo ne viene il grand'avvantaggio di duplicare, triplicare, e far cubi in ogni proporzione ad ogni dato cubo, siccome si vede nella Proposizione XV., e tutto ciò per aver saputo io ben servirmi della parabola Galilaica, e del metodo degl'indivisibili, cioè a dire dell'unità, e dell'infinito, mezzi potentissimi a giungere allo scuoprimento degl'arcani più reconditi della Geometria.

Terminato il libro in questa guisa, indirizzo una lettera al Sig. D. Antonio Monforte, Uomo degnissimo per le sue morali virtù, e rinomato per le opere da lui pubblicate, ed in quella a lui svelo una proprietà de' numeri assai curiosa, ed importante, questa si è, che le differenze in numeri fra le radici, le differenze fra li numeri quadrati, e le differenze fra cubici, crescano secondo l'ordine delle potestà, cioè che fra i quadrati è doppia

doppia di quella delle radici, fra' cubi è tripla di quella fra' quadrati, e così sempre, siccome meglio in detta lettera si potrà osservare.

Poſcia perchè nella prima impreſſione del mio libro furono fatte alcune Oppoſizioni alla propoſizione prima della mia nuova aggiunta, che è quella iſteſſa, che in queſto libro fa ufficio di quinta, prego l'iſteſſo Sign. D. Antonio d'elaminarle, inſieme con le mie riſpoſte, ed avviſarmene il ſuo ſaviſſimo ſentimento.

Ma perchè le Oppoſizioni furono fatte alla impreſſione prima di queſto libro, dalla qual coſa ne potrebbe avvenire, che i Signori Oppoſitori ſ'impegnaffero di far credere a gl'Ignoranti, che per la forza delle loro oppoſizioni, lo foſſi ſtato coſtretto a riſtampare il libro, voglio ora brevemente narrare quello, che di diverſo ſi è fatto in queſta ſeconda impreſſione, e come la Propoſizione prima della nuova giunta, alla dimoſtrazion della quale ſola ſi ſono oppoſti, non ſiaſi niente mutata da quel di prima, ma ſolamente ſiaſi variata in alcuni modi di parlare.

Tutto queſto ſi vedrà con legger le loro Oppoſizioni, le quali io narro alla fine della ſudetta Lettera al Sign. D. Antonio Monforte diretta, giuntamente con le mie riſpoſte, ed inſieme con legger la nuova giunta alla prima impreſſione del mio libro, nella quale ſi troveran le diverſità non eſſer altre, che quelle che quì brevemente accenno, e tutte niente diverſe da queſte intorno alla ſoſtanza, ed alla Dimoſtrazione.

Nella mia prima Propoſizione non m' diedi molta briga di ſpiegare eſattamente queſto modo da Galileo penſato di deſcrivere la Parabola, perchè credeva che i Matematici ne comprendeſſero in tutto la natura, e quindi è che forſe in quella non mi ſono per eſſi baſtantemente eſplicito, ma poſcia avendo conoſciuto che la cagione per la quale ſono inciampati in tanti errori i miei Avverſarii, ſia ſtata gran parte il non aver loro inteſo la natura della Parabola da Galileo deſcritta, ne ho in queſta nuova impreſſione ampiamente inſegnate tutte le proprietà: per eſempio.

Io dico, che come è CA ad AO , così NA ad AL : alcuni potrebbero credere, che ciò dicendo, io aveſſi inteſo che foſſe come quadrato a quadrato, così radice a radice, ciò che non è ve.

è vero , perche Io ho inteso dire, che come AC è quadrato di AO , così AL è quadrato di AN , ciò che è manifesto, perche si vede , che nella fine della Costruzione Io dico, come AC è terza proporzionale all'unità AB , ed alla applicata CD , così AI è terza proporzionale all'unità AB , ed all'applicata IG , onde chiaramente si vede , che parlando Io de' quadrati i quali nascono dal supposto moto di due mobili , mi son servito di questo termine, il quale non è contrario alla sostanza della dottrina .

La seconda proposizione è la istessa che quella in questa nuova impressione .

La terza olla rifezata , mutandola in quella di prender una media fra due linee rette date .

La quarta è la istessa di quella , che nella nuova impressione è la Sesta, e tutte le altre che erano nella prima impressione dalla Terza fino all'Ottava olle ridotte a due, rifezando le altre , che mi pareano superflue .

La quarta nella nuova impressione è l'istessa che la nona alla prima , ed è diversa solo ne' modi d'esprimer la Proposizione .

La quinta poi nella nuova impressione, la quale sola è stata combattuta da' miei Avversarii, per esser quella nella quale si determina il luogo de' cubi , e si conclude la risoluzione del gran Problema, è la istessa che la prima alla nuova aggiunta nella prima impressione, ne altro si è mutato che i termini con i quali si spiega la Proposizione , niente variando però la sostanza , per la qual cosa ogn' uno , che vorrà vedere le Opposizioni , che a quella sono state fatte , vedrà che sono false ugualmente , considerando questa proprietà nella mia nuova giunta nella prima Proposizione della mia prima impressione, e nella Quinta Proposizione alla Seconda ; e la cagione di ciò è, che quella, che impugnano è la Dimostrazione la quale è la stessa nella nuova giunta alla prima Proposizione della prima impressione , e nella quinta della seconda .

Gli altri Problemi poi, cioè di prender due, ed infinite medie sono l'istessi nella nuova giunta alla prima Impressione, che nella seconda il Problema XIII, e XIII : per le quali cose chiaramente si vede che i Signori Oppositori non possono ad altri dar ad intendere , che loro siano stati la cagione , che Io abbia ristampato questo libro , perchè nella nuova impressione , per quan-

quanto riguarda la risoluzione del Problema dell' invenzione delle due medie continue proporzionali , non vi è cosa di nuovo , ed è ugualmente risoluto in quello , che in questo. La cagione dunque per la quale lo ho ristampato quest'omio libro è stata puramente, per più schiarire quei termini, ne' quali essi trovavano oscurità, e poscia è stato per arricchirlo di tante, e sì belle proprietà, quante sono quelle , che si vedranno nella seguente opera.

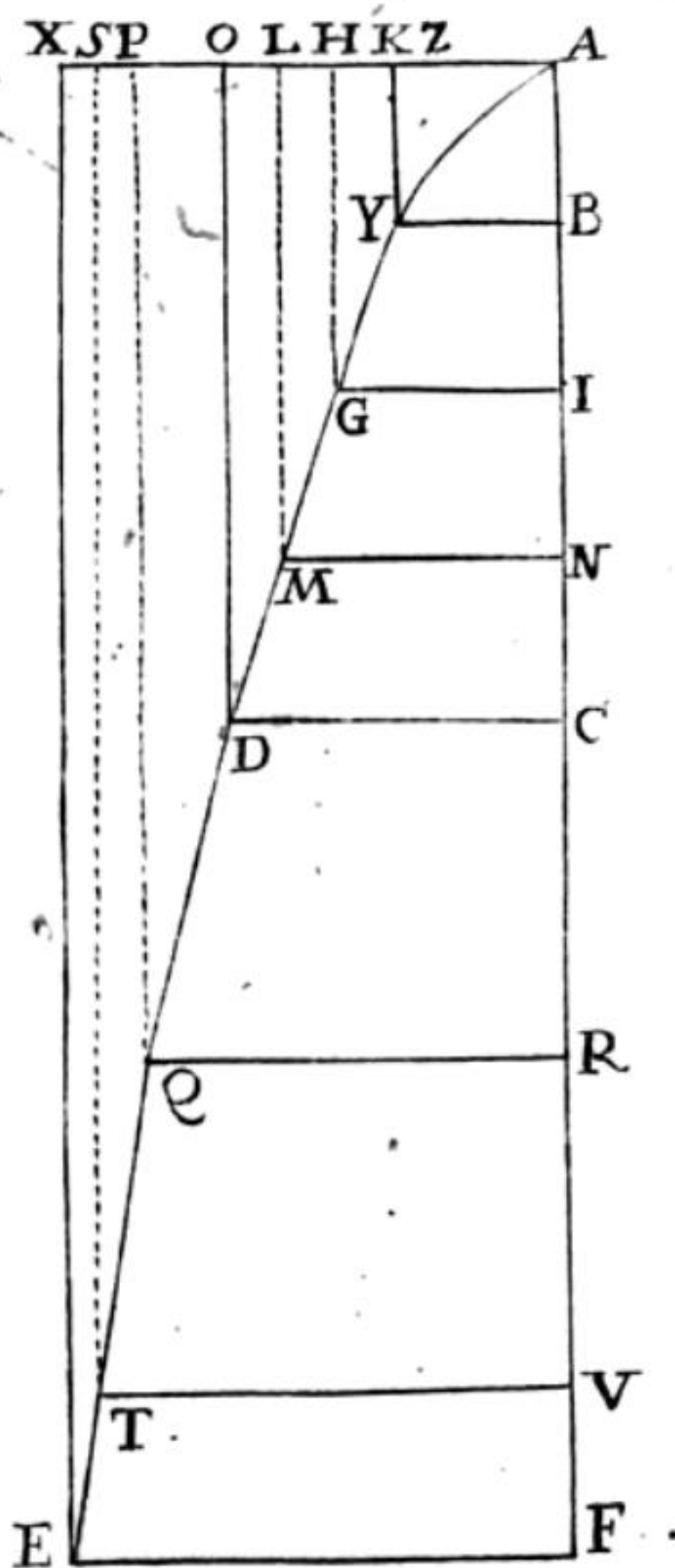
Questa è la Idea la quale in questa seconda Impressione ho avuta, e se non vado errato giudico di esservi fortunatamente riuscito; perchè oltre di averla arricchita di moltissime scoperte a mio credere alla geometria importanti , olla sì chiaramente spiegata, che ogn'uno, che tolta dalla sua mente ogni prevenzione, ed ogni passione, studierà con animo indifferente , e con mente sufficiente le mie Proposizioni , le ritroverà tanto vere dopo letta la dimostrazione, quanto loro erano sembrate strane a prima veduta; la qual cosa è stata cagione, che la maggior parte di coloro i quali si son posti ad esaminare questa mia Opera , con falso raziocinio si siano indirizzati , perchè in vece di esaminare , con animo indifferente la verità , o la falsità delle mie dimostrazioni , con animo prevenuto , o invidioso , an solamente atteso a ritrovare quello errore , il quale certamente credevano , o volevano , che nella mia Opera si contenesse.

PRO:



21

Fig^a I



PROPOSIZIONE I

PROBLEMA.

Date le linee AF , ed AX congiunte ad angoli retti, e la linea AF sia divisa in parti, che rappresentino quadrati, le radici delli quali siano nella linea AX , descrivere una parabola.

COSTRUZIONE.

Suppongasi la linea AF divisa, per esempio, in nove parti uguali, ogn'una ad AB ; e suppongasi la linea AX divisa in tre parti uguali, e siano AK , KO , ed OX , ogn'una uguale ad AB .

Poi suppongasi un mobile, il quale in momenti di tempi uguali sopra la AX trascorra spazj uguali; ed un' altro, il quale discenda per la AF , e s' acceleri secondo l'ordine de' numeri impari, cioè $1, 3, 5, 7$. ec. Questo mobile, il quale discende per AF in momenti di tempi uguali, correrà spazj, i quali rappresenteranno i quadrati de' momenti di tempo uguali.

Prendasi AB uguale ad AK per parametro, o sia unità, e suppongasi il mobile nel primo momento di tempo aver corso AB di moto accelerato, AK di moto equabile.

Suppongasi ancora, che nel secondo momento di tempo abbia trascorso sopra la AX la KO di moto equabile, il grave cadente nel secondo momento di tempo avrà scorso la BC triplo di KO . E perciò ne' due momenti di tempo rappresentati dalle linee AK , KO avrà scorso lo spazio AC uguale a quattro unità AB ; e perciò quadrato di AO 2. Poi nel terzo momento di tempo il mobile avrà scorso tutta la AX di moto equabile, e sopra l'asse si farà accelerato di cinque, cioè per lo spazio CF uguale a cinque unità AB : Onde in tre momenti di tempo avrà passato lo spazio AF uguale a nove unità AB , il quale è quadrato di AX 3. Ond'è, che AYE sarà parabola, perchè è come AB unità ad AO , o vero CD 2., così CD 2. ad AC 4, onde CD sarà applicata, ed AC terza propor-

A

ziona.

zionale di AB , e di CD : e dell'istesso modo AF 9. averà duplicata ragione ad AB unità, che FE 3. alla medesima unità; onde il quadrato di FE sarà uguale al rettangolo di FA nell'unità AB , e perciò AYE sarà parabola.

Lo stesso avverrà, se la parabola si produca all'infinito.

CONSIDERAZIONE I.

AVendo noi dimostrato, che $AYDE$ sia parabola, sarà certo per Apollonio, che tutte le parallele a DF , le quali partono dai punti di BF porzione dell'asse AB , e terminano alla parabola, saranno medie fra le porzioni dell'asse, ed il parametro AB , e perciò applicate.

Con tutto ciò, acciò si veda come anche per lo modo, con il quale si descrive questa parabola nascano le applicate intercette fra quelle di numeri interi, faremo nel seguente modo.

Se si vogliono nella parabola ADE infinite applicate, tutte secondo l'ordine de' numeri impari, bisognerà l'unità designata per lo parametro AB immaginarla divisa in parti indivisibili, perchè a rispetto del parametro AB , e dell'asse AF uguale a 9. unità AB , solamente CD 2. e DF 3. cadono ai punti dell'asse corrispondenti ai numeri impari BC 3., e CF 5. ne ve ne possono cader altre; non v'essendo fra AB 1. ed AF 9. altri numeri impari.

Ond'è che se si vuole la parabola ADE ripiena d'infinite applicate, tutte designate da' numeri pari, e da' numeri impari, bisogna fare nel seguente modo, cioè:

Siccome si è divisa l' AX in tre parti, ogn'una uguale ad AB , e si sono avute tre applicate, cioè AK , o vero BY 1., AO , o vero CD 2. ed AX , o vero FE 3. bisogna divider l' AX in 9. parti uguali, e l' AF in 81. parte, cioè nel quadrato di 9. ed allora avremo nove applicate alla parabola.

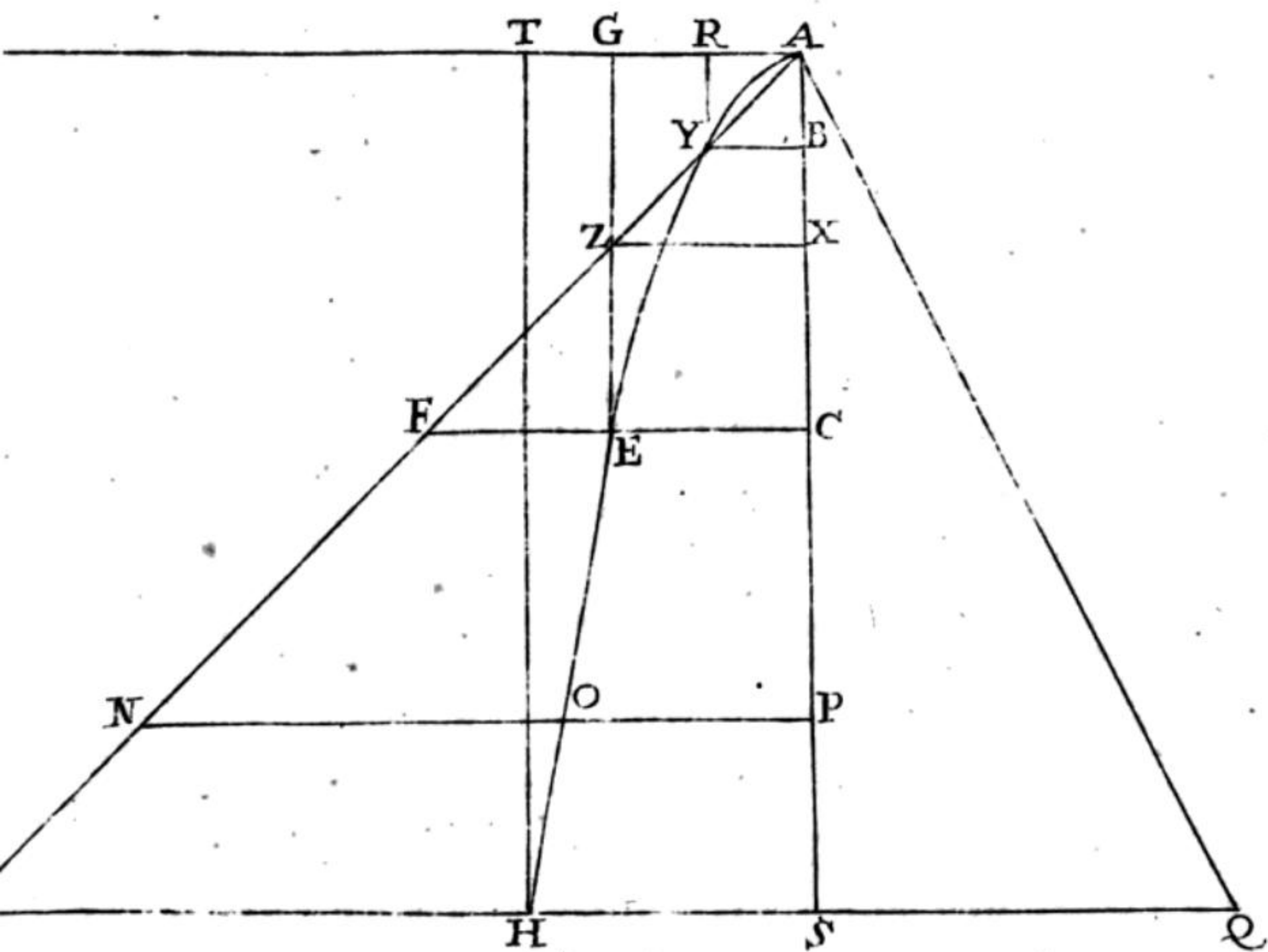
Poichè divideremo l' AX in 81. parte, e l' AF in 6561. quadrato di 81. ed avremo 81. applicata, e continuandosi questa divisione delle radici, e de' quadrati; alla fine l' AX resterà divisa in parti infinite; e perchè da ogni parte d' AX si possono intender tirate infinite perpendicolari, come HG , LM , e tutte le altre; si averanno infinite applicate alla parabola, tutte secondo l'ordine de' numeri impari. Se

Se poi si vogliono applicate infinite, tutte corrispondenti al
 istesso parametro AB , o vero AK , prendasi nell' AX suppe-
 sta divisa in parti infinite, e tutte uguali fra loro, la linea AK
 uguale ad AB , nona parte d' AF , per parametro, la KX re-
 sterà pur divisa in parti uguali, come sono per esempio KH ; HL ,
 e tutte le altre. Poscia facciasi come AK , o vero AB ad AH ,
 o vero GI , così AH ad un'altra, che sia AI ; GI sarà
 applicata. Poscia, come AK ad AL , così AL ad AN per
 esempio, NM sarà applicata, e lo stesso di tutte le altre.
 E perchè non vi è punto nella KX , dal quale non si possa tirare
 una perpendicolare alla istessa KX , e che termini alla parabola,
 la parabola si potrà intender ripiena d' infinite applicate in-
 tercette fra YB unità, ed EF . 3. le quali sono tutte, secondo
 l'ordine de' numeri impari se s' intende il parametro, e l' asse
 diviso in parti infinite, e sono medie proporzionali in linea fra
 il parametro AB , e le parti dell' asse AF , e perciò sono appli-
 cate tutte corrispondenti al parametro AB , o vero AK .

CONSIDERAZIONE II.

DEve considerarsi il grandissimo vantaggio, che sommini-
 stra la forma, con la quale si descrive questa parabola; per-
 chè in questa parabola l' asse, e l' ascisse nell' asse, sono tutte ad
 un tempo terze proporzionali delle unità, e delle applicate, ed
 insieme fanno ufficio di rettangoli fatti dalla linea, e dall' uni-
 tà; e ciò è solamente a cagione, che l' unità, o sia parametro AB ,
 fa l' ufficio d' unità, e d' intercetta, e d' applicata insieme,
 perchè AB è unità, ed è insieme intercetta: dal che avviene,
 che il rettangolo di FA in AB faccia insieme ufficio di rettan-
 golo, e di linea retta; e che YB uguale all' unità sia applicata,
 ed insieme quadrato dell' istessa unità: le quali cose giunte a
 molti altri privilegi, che apporta la descrizione di questa pa-
 rabola, si vedrà nel corso di tutto questo nuovo metodo, quan-
 to utile possa recare alla Geometria; per la qual cosa si vede,
 che le linee rette esprimono la potenza delli rettangoli, e delli
 quadrati di qualunque potestà, come si vedrà in appresso.

Figura II.



PROPOSIZIONE II.⁵

Sia l'asse della parabola $A S$ diviso, per esempio, in nove parti uguali, ciascheduna ad $A B$, e sopra di esso sia descritta la parabola $A E H$, nel modo insegnato nell' antecedente proposizione, nella quale $C E$ sarà uguale ad $A G$, o vero a due unità $A B$; ed $S H$ uguale a 3. e $B Y$ uguale ad $A R$, o vero all' unità $A B$. Se dal vertice A si descriva il triangolo $A S I$ rettangolo in S , ed isoscele; e dalli punti P , e C si tirino le due linee $P N$, e $C F$ parallele ad $S I$; $S I$, $P N$, e $C F$ faranno terze proporzionali dell' unità, e delle applicate, le quali chiameremo quadrati, avvalendoci de' termini dell' aritmetica nella Geometria.

SUPPOSIZIONE, ED ESPOSIZIONE.

Suppongasi la parabola $A E H$ descritta sopra l'asse $A S$, diviso in nove parti, ciascheduna uguale ad $A B$, come abbiamo detto; e suppongasi dentro di essa descritta l' applicata $B Y$ uguale ad $A R$, o vero ad $A B$ unità; e suppongasi $C E$ uguale ad $A G$, o vero a unità $A R$, ed $S H$ uguale ad $A T$, o sia a tre unità $A B$. Poi dal vertice descrivasi il triangolo $A S I$ rettangolo in S , ed isoscele, e tirinsi le parallele $P N$, $C F$ ec.

Dico che $S I$, $P N$ sono quadrati di $S H$, e $P O$, o vero terze proporzionali di $A B$, unità dell' applicate $S H$, e $P O$.

DIMOSTRAZIONE.

Per l' antecedente Proposizione $S H$, e $P O$ sono applicate corrispondenti all' unità $A B$. Dunque per la proprietà della parabola sarà come $S A$, ad $A B$, così il quadrato di $S H$ a $B Y$ unità, e perciò quadrato. E come $P A$ ad $A B$, così il quadrato di $P O$ all' istessa $B Y$.

Ma per la seconda del testo è ancora come $S A$ ad $A B$, così $S I$ a $B Y$. E come $P A$ ad $A B$, così $P N$ a $B Y$. Ma $Y B$ è uguale ad $A B$ unità, dunque il quadrato di $P O$, ed il quadrato di $S H$ avranno all' unità $A B$, o sia $B Y$, l' istessa proporzione, che $S I$, e $P N$

$P N$ all' istessa unità $A B$; dunque i quadrati delle applicate $S H$, e $P O$ saranno uguali alle linee $S I$, e $P N$.

Ma $I S$ è il quadrato di $H S$, per costruzione, perchè si è fatto uguale a nove unità $A B$, dunque ancora $P N$ farà il quadrato di $P O$, e perciò $I S$, e $P N$ saranno i quadrati delle applicate $S H$ e $P O$, che si dovea dimostrare.

C O R O L L A R I O I.

Tutte le infinite parallele, che sono nel triangolo descritto fuori della parabola, come $S I$, $P N$, $C F$ ec. sono terze proporzionali dell' unità, e delle applicate, o siano quadrati delle applicate, e l' istesso in tutte.

E se s' intende il triangolo $A S I$ ripieno d' infinite parallele terminanti all' ipotenusa, tutte le infinite parallele, le quali sono da $B Y$ fino ad $S I$, faranno quadrati delle applicate corrispondenti all' unità $A B$.

C O R O L L A R I O II.

I Triangoli $A S I$, $A P N$, $A C F$, e tutti gl' infiniti altri, che s' intendono dentro il triangolo $A S I$, sono triangoli isosceli, perchè sono simili al triangolo $A S I$.

C O R O L L A R I O III.

SE nell' asse $A S$ si concepiscono infiniti punti, e da essi tirate infinite parallele, fino all' ipotenusa, queste faranno in proporzione Aritmetica, e Geometrica insieme. Perchè essendo tutti triangoli isoceli, e simili, tutte le parallele anno fra di loro la proporzione delle parti dell' asse; ed essendo le parallele in un triangolo rettangolo, sono in proporzione aritmetica fra di loro.

PRO



PROPOSIZIONE III.⁹

PROBLEMA II.

*Tra due linee rette date, ritrovare una media
proporzionale.*

COSTRUZIONE.

SIANO LE DUE LINEE RETTE DATE X , E Z .

Prendasi AX uguale alla minore data X per unità, o sia Parametro; e questa prolunglisi fino in B , di modo che AB affe, sia maggiore della maggiore data Z , cioè fra una lunghezza, la quale abbia per radice un numero, come 1. 4. 9. 16., ec. come per esempio AB uguale a 25. unità AX ; e poi, come nell' antecedente Proposizione, descrivasi la parabola AYV , e descrivasi il triangolo isoscele ABC . Poi sopra la base BC tagli si la BO uguale alla maggiore data Z , ed alzisi la perpendicolare OD fino all' ipotenusa; e tirisi la DE parallela a BC . L' applicata DE farà la media ricercata: perchè per l' antecedente Proposizione DE è media fra l' unità AX uguale alla data X , e DO uguale alla maggiore data Z .

CONSIDERAZIONE I.

Quantunque sia noto, che questo Problema si faccia per Euclide facilissimamente, a noi è stato necessario porlo in questo modo, così addimandando l' ordine delle cose, che siamo per dimostrare in appresso, le quali andando all' infinito, ci obbligano ad incominciare dal primo grado.

CONSIDERAZIONE II.

Qui è da notarsi, come in una istessa Ipotenusa d' un triangolo rettangolo, le differenze le quali sono fra le linee intercette, fra i quadrati di numero intero, terminino in diversi luoghi dell' istessa

B

istesso triangolo, per modo tale, che un istesso triangolo rettangolo, si puole considerare come uno, e come diviso in diversi triangoli, come per esempio tutte le differenze, le quali sono fra le parallele fraposte tra XY unità, ed EG 4. terminano in EG 4. e tutte quelle, che sono fra EG 4., ed HL 9. terminano in HL , e lo stesso fino all' infinito, e pure tanto i quadrati di numero intero, quanto le intercette fra essi, quali sono da XY sino a BC , e sono tutt' in proporzione Aritmetica fra loro, perchè terminano all' Ipotenusa d' un triangolo rettangolo: dalla qual cosa sene deduce, che si possano considerare le parallele, come infinite divise, e separate; cioè se si vuol considerare tutta la XB porzione dell' asse AB , divisa in punti infiniti, si considereranno infinite parallele, fra XY , e BC . Se si vuol considerare la XE , o la XH divisa in punti infiniti, si considereranno infinite parallele fra XY , ed HL , e così di tutte le altre, e se si considera diviso in punti infiniti tutto l' asse AB , le parallele, che sono da XY sino a BC faranno tante, quanti sono i punti della BC .

Nelle seguenti Proposizioni dimostreremo, come a cagione degl' infiniti punti, nelli quali per questo nostro metodo, si suppone diviso l' asse AB , o vero la porzione di esso XB , non mai si possono designare in numeri, sopra l' asse i quadrati intercetti fra li quadrati di radice razionale, perchè sono di radice sorda, e faremo vedere altresì, come in virtù del modo, con il quale Galileo ci ha insegnato descrivere la parabola, ed in virtù del metodo degl' indivisibili, noi abbiamo fatto, che le linee rette esprimano egualmente la potenza de' solidi, che quella de' piani.

PRO.



PROPOSIZIONE IV.¹³

PROBLEMA III.

Data la parabola AFI, descrivere un' altra parabola, & asse della quale rappresenti il cubo di HI applicata ultima alla parabola AFI.

COSTRUZIONE.

Sia AH l' asse della Parabola AFI diviso, per esempio in nove parti uguali, la di cui unità, o sia parametro, è AQ: la parte dell' asse AX uguale a 4. unità AQ, ed XF applicata, uguale a 2., ed HI applicata ultima, uguale a 3. unità AQ.

Prolunghisi l' asse HA fino in M, di modo che HM sia tripla di HA; dalla HM taglisi la MN tripla di AQ parametro della parabola AFI, e tirisi la MT tripla di MN, la quale si divida in tre parti uguali, cioè MV, VO, OT. Poscia suppongasi, come nella prima proposizione, che un mobile cadente per l' asse MH s' acceleri secondo l' ordine de' numeri impari, e che l' altro vada di moto equabile per la MT, la quale rappresenta i momenti di tempo uguali. Il mobile che cade per l' asse MH, nel primo momento di tempo scorrerà la MN unità di moto accelerato, ed MV di moto equabile; e nel secondo momento di tempo averà scorso la MO doppia di MV di moto equabile, e la MR quadrupla di MN di moto accelerato; e nel terzo momento di tempo averà scorso la MT di moto equabile, e la MH di accelerato.

Onde se dal punto N si tirerà la parallela NS uguale all' unità MV, o vero MN, e dal punto R la parallela RP uguale ad MO doppia di MV, e dal punto H la HL uguale ad MT tripla di MV, e per li punti MSPL si descriva la parabola: questa sarà parabola, il di cui asse MH rappresenterà la potenza del cubo dell' applicata HI, applicata ultima alla parabola AFI.

Prolunghisi la HL fino in Z, di modo che HZ sia uguale ad MH, e tirisi l' ipotenuza MZ.

DI.

D I M O S T R A Z I O N E,

M ~~N~~ ~~MP~~, o vero $M \cdot V$ unità, o sia parametro della parabola $M P L$, è triplo di $A Q$ parametro della parabola $A F I$. Ma $Q X$ è triplo di $A Q$, ed $N R$ è triplo di $M N$, per costruzione, dunque sarà come $A Q$ ad $A X$, così $M N$ ad $M R$. E dell'istesso modo $X H$ è quintuplo d' $A Q$, come $R H$ è quintuplo di $M N$; Dunque sarà come $A X$ ad $A H$, così $M R$ ad $M H$. Ma l'unità $M N$ è tripla dell'unità $A Q$, dunque $M R$ sarà tripla di $A X$, ed $M H$ tripla di $A H$; e dell'istesso modo $H Z$ uguale ad $H M$, sarà cubo d' $H I$, e perciò $H I$ 3., ed $H L$ 9. faranno medie fra l'unità $A Q$, ed $H Z$ 27. cubo di 3., ch'è ciò si dovea dimostrare.

C O R O L L A R I O.

Sempre che, descrivendosi la parabola in questo modo, si ponerà l'applicata ultima della parabola prima per parametro, o sia unità della parabola seconda, l'asse della parabola seconda presenterà la potenza del cubo dell'applicata ultima, e la parabola seconda terminerà nel punto estremo del quadrato dell'applicata ultima alla parabola prima: come per esempio, siccome nella parabola $A F I$, il parametro della seconda, cioè $M N$ è uguale all'applicata $H I$, e la parabola seconda termina nel punto estremo della linea $H L$ quadrato di $H I$: se l'asse $A H$ sarà uguale a 4. unità $A Q$, e l'applicata ultima uguale a 2. ponendosi $H I$ 2. per parametro della parabola seconda, l'asse della parabola seconda sarà uguale ad 8. cubo di 2., e la parabola seconda terminerebbe in L estremo della linea $H L$, la quale farebbe 4. quadrato della radice 2., ciò che si vedrà nella costruzione delle seguenti parabole.

C O N S I D E R A Z I O N E I.

E Da notarsi, che questo metodo va all'infinito, perchè se si suppone $H I$ esser 3. unità, volendo il biquadrato d' $H I$ 3. si ponerà per parametro della parabola terza $H L$ 9. quadrato di $H I$, e l'asse di questa parabola terza sarà 81., perchè come $A Q$ 1. ad $A X$ 4., così $H L$ 9. a 36. uguale alla prima sezione dell'

15

dell' asse della parabola terza; è come $A X^4$, ad $A H^9$, così 36. prima sezione dell' asse ad 81. asse della parabola terza, la quale terminerà nel punto Z cubo di $H I$: e dello stesso modo l' asse della parabola quarta averà per parametro $A Z$, cubo di $H I$, e terminerà nel biquadrato, e rapresenterà la potenza del cubo, e così sempre fino all' Infinito.

C O N S I D E R A Z I O N E II.

E Da notarsi ancora che queste parabole seconde, e terze, ed altre anno la forma di parabole superiori, perchè danno progressioni infinite; e perciò 2. 3., e 4. medie fino all' infinito: ma sono piane, perchè nella descrizione di esse non si suppone mai altro, che una istessa linea retta, più lunga, o più breve, la quale si prende per parametro, e dalla quale poi ne vengono le diverse lunghezze degli assi, siccome apparisce dalla costruzione di esse parabole.

Nella descrizione, che faremo di queste parabole, non rappresenteremo più il moto d' un mobile, ma lo daremo per supposto. Considerando ancora, che questa parabola, la quale nasce dal misto del moto equabile, ed accelerato, si puole anche descrivere senza supposizione di moto; Ma solamente dividendo l' asse $M H$, secondo l' ordine de' numeri impari, e la $M T$ perpendicolare all' asse in parti uguali, corrispondenti alle radici de' numeri quadrati, che rappresenta l' asse, come 4. 9. 16. ec. prendendo una parte di quelle nelle quali è stato diviso l' asse per parametro, o sia unità.



PRO-

PROPOSIZIONE V.¹⁷

PROBLEMA.

Data la parabola $ACMO$, dentro della quale si concepiscano descritte le infinite applicate all'unità AB corrispondenti; trovare il luogo, nel quale terminano i cubi delle infinite applicate alla parabola $ACMO$, di modo che i cubi delle suddette applicate, siano l'istesse applicate prodotte fino al luogo cercato.

COSTRUZIONE.

Sia dunque la linea data AB , presa per unità, e la parabola $ACMO$ descritta sopra l'asse AN , diviso in 9. parti uguali, per esempio; una delle quali è l'unità AB parametro, di modo che s'intenda costrutta la parabola $ACMO$ nel modo insegnato nelle antecedenti proposizioni, la di cui applicata ultima NO sarà uguale a tre unità AB , e DM uguale a due unità AB , e la suddetta parabola $ACMO$ si concepisca ripiena d'infinite applicate, tutte all'unità AB corrispondenti, siccome abbiamo insegnato nella prima Proposizione. Prolungasi la NO fino al punto P , di modo che NP sia tripla di NO ; e perciò uguale a 9. unità AB , quale è quadrato di NO , e tirisi l'ipotenusa AP . Prendasi la DM , la quale è uguale a 2. unità AB , e prolungasi fino al punto F dell'ipotenusa AP ; DF sarà uguale a 4. unità AB , e sarà quadrato di DM , come ancora tutte le linee intercette fra l'unità BC , ed NP 9. saranno terze proporzionali dell'unità, e delle applicate, o siano quadrati delle applicate, come abbiamo insegnato nella seconda Proposizione. Di più prolungasi la DF fino in E , di modo che DE sia doppia di DF : DE sarà uguale ad 8. unità AB , e perciò sarà cubo di DM , che è uguale a 2. unità. Poi prolungasi la NP fino in Q , di modo che NQ sia tripla di NP , cioè che sia uguale a 27. unità AB , e perciò cubo di NO . E dal punto B tirisi la BC perpendicolare ad AB , ed uguale all'unità AB , e formisi il quadrato $ABCB$. Ed in oltre dal punto

C
C,

C, punto estremo della unità BC , uguale ad AB , tirisi la linea CE al punto E , punto estremo della linea cubica DE , fatta uguale ad 8. unità AB . Poi dal punto E tirisi la EQ al punto Q , punto estremo della linea cubica NQ , fatta uguale a 27. unità AB . E s' intendano prolungate tutte le infinite applicate, finche terminino nelle linee CE , ed EQ , cioè quelle, che sono intercette fra DM , ed NO nella linea EQ ; e quelle, che sono intercette fra BC , e DE , terminino nella linea CE . Queste saranno infinite parallele alla linea NQ , ed alla linea DE . Dico, che tutte le applicate prodotte, o siano le parallele, le quali terminano nella linea CE , sono cubi delle applicate, che sono intercette fra BC , e DM ; e che tutte le applicate prodotte, o siano le linee parallele, le quali terminano nella linea EQ sono cubi delle applicate, che sono da DM fino ad NO , e sono tutti cubi all' istessa unità AB , o sia BC corrispondenti, cioè sono terze proporzionali delle applicate, e delli quadrati.

D I M O S T R A Z I O N E.

L A linea DE , è, per costruzione, uguale ad 8. unità AB , e perciò cubo di DM , uguale a 2. e dell' istesso modo la linea NQ è uguale a 27. unità AB , e perciò cubo di NO , uguale a 3. pure per costruzione. Ma tutte le applicate, che sono da DM , fino ad NO , sono sempre una maggiore dell' altra, quanto più s' avvicinano ad NO : dunque i cubi delle applicate intercette fra DM , ed NO saranno sempre uno maggiore dell' altro, quanto più s' avvicinano ad NO . Ed oltracciò le applicate, ed i cubi saranno tanti in numero, quanti sono i punti delli quali è composta la linea DN , compresa nella BN , considerata come divisa in punti infiniti dalle infinite applicate, le quali, per la proposizione prima, si concepiscono tirate dai punti della suddetta porzione dell' asse BN . Dico, che questi cubi tutti maggiori di DE , e minori di NQ terminano alla linea EQ , perchè se non è così, termineranno dentro, o fuori della linea EQ . Suppongasì prima il cubo dell' applicata 7. H , immediata a DM , non terminare nel punto K , ma nel punto G , fuori della linea EQ , per modo che 7. G sia fuori della linea EQ per la linea KG , o per qualunque altra minima quantità.

Se è

Se è così, il cubo dell' applicata 6. X, che è la linea segnata co' numeri 6. 8. terminerà in L, perchè deve esser maggiore del cubo 7. H G, essendo cubo di applicata maggiore; e per l' istessa ragione l' altro terminerà in M, l' altro in N, gli altri in Z, Z, Z; ed alla fine continuandosi il numero de' cubi all' infinito, finche si giunga al cubo, che parte dal punto N, punto estremo dell' asse, un cubo delle applicate intercette fra D M, ed N O farà molto maggiore di N Q, uguale a 27. unità; Ma il cubo N Q è uguale a 27. unità A B, per costruzione, e niun cubo delle applicate intercette fra D M, ed N O puol esser maggiore, ne uguale ad N Q, sendo tutte le applicate intercette fra D M, ed N O maggiori di D M, e minori di N O. Dunque niuno de' cubi, che sono da D E, sino ad N Q potrà terminare fuori della linea E Q.

Non potranno i cubi ne meno terminar dentro della linea E Q, perchè se qualunque di essi cubi termina dentro: fingasi che R S T V, cubo dell' applicata R S, termini dentro la linea E Q per qualunque minima quantità, e sia, per esempio, la linea R 4. minore di R V per la quantità V 4.

In questo modo, perchè i cubi, li quali sono da N Q, sino a D E devono sempre essere l' uno minore dell' altro, quanto più s' avvicinano a D E, come cubi di applicata sempre minore, il cubo immediato verso D E, che è il cubo segnato co' numeri 17. 18., e 10. dovrà esser minore di R 4., e perciò sarà 17. e 4. l' altro immediato pure minore di questo, e così successivamente; e perciò termineranno tutti, per esempio, nelle porzioni delle linee che sono segnate con il numero 4. di modo che il cubo 7. Y 4. immediato a D E, e cubo dell' applicata 7. H maggiore di D M, farà minore di D E uguale ad 8. unità A B, per esempio, il che repugna; dovendo sempre esser maggiori i cubi l' uno dell' altro, quanto più sono lontani i cubi da D E, e più vicini ad N Q: l' istesso avverrà di tutte le linee cubiche, che sono intercette fra B C unità, e D E 8. cubi per costruzione.

Non possono adunque le parallele, o siano le linee cubiche delle applicate alla parabola, terminar fuori, ne dentro le linee C E, ed E Q. Dunque tutte le linee parallele, che sono dall' unità B C, sino a D E, e da D E sino ad N Q, faranno cubi delle infinite applicate alla parabola A M O.

QUì è da notarfi, che il luogo de' cubi, il quale noi abbiamo ritrovato effer alle due linee CE , ed EQ , si è ritrovato in virtù dell'artificio da noi usato di supporre nella parabola infinite applicate, le quali partono dagl' infiniti punti della parabola, e vanno all' asse, per modo, che fra applicata, ed applicata non vi si puol intender veruno spazio : e per secondo per aver posto dentro i limiti de' cubi di radice razionale, come fra $B-C$ unità, e DE &, e fra DE & ed NQ 27. , tutt' i cubi delle applicate intercette ; per la qual cosa ogni cubo diviene corrispondente alla sua applicata, mentre è l' istessa applicata prodotta ; e ciò perchè fra cubo, e cubo non vi si puol intendere veruno spazio, per modo, che intanto le mie due linee CE , ed EQ sono il vero luogo de' cubi delle applicate, in quanto che solamente in questi due spazj $BDEC$, e $DNQE$ è dove sono i cubi corrispondenti alle loro applicate, e alle loro medie, perchè sono nell' istessa linea con quelle : ciò che non accade in qualunque altro luogo, che si ritrovino le medesime lunghezze de' cubi. Ma perchè il fondamento di questa nuova invenzione consiste tutto nel modo particolare, con il quale si descrive la parabola, il quale modo è sopra tutti gli altri modi vantaggioso a mio credere, mentre questa si descrive con due sole linee rette, una delle quali è divisa in parti uguali, l' altra in parti che corrispondono ai numeri impari, perciò prima di passare alle proposizioni, le quali immediatamente seguono all' antecedente proposizione, stimo a proposito di far vedere alcune altre proprietà importanti di questa parabola descritta secondo l' ordine de' numeri pari, e de numeri impari.

PRO.

PROPOSIZIONE VI.²³

Se siano due parabole, le quali abbiano lo stesso asse, ma diversa unità, o sia Parametro, tutte le applicate alle sudette parabole faranno proporzionali fra di loro.

COSTRUZIONE ED ESPOSIZIONE.

Sia l'asse delle parabole AD , diviso, per esempio in nove parti uguali, ogn'una ad AB , e prendasi BN uguale ad AB per parametro della parabola APR , e BM prendasi per parametro della parabola AQO , e suppongasi per esempio doppio di NB . Poscia dal punto C termine della linea AC uguale a 4. unità AB , tirisi la CP doppia di BN unità, e la CO doppia di BM ; e dal punto D , termine della linea AD , tirisi la DR tripla di NB , e la DQ tripla di BM , e per i punti APR descrivasi la parabola; e dal punto A tirisi la linea al punto M , dal punto M al punto O , e dal punto O al punto Q , la curva $AMOQ$ sarà pure parabola come lo è $ANPR$, perchè DQ sendo uguale a 3. unità BM , il suo quadrato è 9. unità BM ; Ond'è come l'asse DA 9. all'intercetta AB 1., così il quadrato di DQ 9. che è 9. al quadrato di BM , che è l'istessa unità BM , e perciò $AMOQ$ sarà parabola, e lo stesso si dimostra della parabola APR . Ora proveremo, che le applicate a queste due parabole sono proporzionali fra di loro.

DIMOSTRAZIONE.

B M unità della parabola AMQ è doppia di NB unità della parabola APR . CO applicata è doppia di BM unità, e PC applicata è doppia di NB unità; dunque sarà come BM ad NB , così CO a PC ; e dell'istesso modo DQ è tripla di BM , come RD è tripla di NB , dunque sarà come BM a DQ , così NB ad RD , e perciò come CO a DQ , così PC ad RD , e lo stesso di tutte le altre.

PRO.

PRUOVA IN NUMERI:

B M è 2. unità NB, dunque CO è 4. unità NB, e PC è 2. unità NB; dunque farà come NB 1. a PL 2., così BM 2. ad CO 4. unità NB, e come PC 2. ad RD 3. così CO 4. a DQ 6. unità NB, cioè come 2. a 3. così 4. a 6.



PRO.

PROPOSIZIONE VII.²⁵

SE la perpendicolare la quale cade dall' angolo del triangolo alla base, si prenda per asse comune di due diverse parabole, li parametri delle quali terminano ai lati di detto triangolo, le parallele tirate dall' asse ai lati del triangolo faranno proporzionali fra loro.

COSTRUZIONE.

Sia il triangolo AXV , dentro del quale dal punto A sia tirata la linea AD perpendicolare ad XV , e la quale sia asse delle due parabole ADR , ad $A OQ$, descritte nel modo della proposizione antecedente, e i parametri, o siano unità delle quali, sono NB , e BM , dico che le parallele ad XV , le quali terminano ai due lati AX ed AV , faranno proporzionali fra loro, cioè sarà come CT a CK , così DX a DV , e lo stesso di tutte le altre.

DIMOSTRAZIONE.

Per la nostra seconda proposizione CT è quadrato di CP , e CK è quadrato di CO , DX è quadrato di DR , e DV è quadrato di DQ . Ma per l' antecedente proposizione come è CP a CO , così DR a DQ ; dunque sarà ancora il quadrato CT al quadrato CK , come DX a DV .

PROPOSIZIONE VIII.

Le applicate infinite nelle Parabole sono in proporzione Aritmetica.

COSTRUZIONE.

Suppongasi descritta la parabola $A OQ$, l' unità della quale è BM uguale ad AE , e suppongasi la AG divisa in parti infinite, tutte uguali fra loro.

D

DI-



D I M O S T R A Z I O N E.

PErchè per la costruzione di questa parabola, la linea AG uguale a DQ , è divisa in parti infinite uguali fra loro, da ogn'una delle quali s'intendano calare infinite perpendicolari ad AG , fino alla parabola $A O Q$, le applicate saranno tutte uguali a dette parti; e perchè le parti di AG sono in proporzione Aritmetica, ancora le applicate saranno in proporzione Aritmetica.

C O N S I D E R A Z I O N E.

IN qualunque parte della AG , che si vorrà prendere la linea uguale al parametro della parabola, sempre resteranno le rimanenti in proporzione Aritmetica, come per esempio se si prende BM uguale ad AE per parametro, le parti di EG rimarranno in proporzione Aritmetica, e se a quelle s'aggiunge la comune AE , saranno in proporzione Aritmetica le seguenti, cioè AE , $A 2$, $A 4$, e tutte le altre: ondè le applicate che sono da BM fino a DQ , resteranno in proporzione Aritmetica.

P R O P O S I Z I O N E IX.

Tutte le parallele, che sono da BM fino a DV nel triangolo ADV sono proporzione Aritmetica.

D I M O S T R A Z I O N E.

PEr il metodo degl'indivisibili, le parallele infinite che si concepiscono ne' triangoli rettangoli, sono in proporzione Aritmetica; dunque se si suppone l'asse AD diviso in punti infiniti, tutte le parallele, le quali sono nel triangolo ADV faranno in proporzione Aritmetica; e se da quelle se ne tolgono le parallele, che sono nel triangolo rettangolo ABM , quelle che sono da BM fino a DV , resteranno in proporzione Aritmetica.

E dell'istesso modo si dimostra, che le parallele, le quali sono nel trian-

triangolo A D X sono in proporzione Aritmetica .

C O R O L L A R I O .

Tutte le linee intercette fra le porzioni M O Q della parabola A O Q , e la porzione M V del lato A V , come per esempio O K , la linea 17. e 18. , e tutte le altre fino a Q V sono in proporzione Aritmetica ; perchè se abbiamo dimostrato che tutte le parallele, che sono dentro il triangolo A D V sono in proporzione Aritmetica , e che tutte le applicate alla parabola A O Q sono nell' istessa proporzione , se dalle parallele nel triangolo si toglieranno l' applicate, quelle che rimangono, come O K, 17. e 18. e tutte le altre faranno in proporzione Aritmetica .
Come per esempio se dalla serie de' numeri.

	1., 4., 7., 10., 13., 16.	Si sottragga la
Serie	1., 3., 5., 7., 9., 11.,	
Rest:	0., 1., 2., 3., 4., 5.	tutte in proporzione Aritmetica .

C O N S I D E R A Z I O N E .

Si vede chiaramente , che tanto l' applicate , quanto le parallele nel triangolo sono per lor natura in proporzione Aritmetica, perchè se senza dimostrare, che sono in proporzione Aritmetica, per lo metodo degl' indivisibili si considera la linea E Y divisa in parti uguali, e infinite, si dimostrerà lo stesso; perchè se da tutte le parti della E Y s' intendano calate perpendicolari, come la 25. K , per esempio, fino alla M V porzione del lato A V , tutte le parallele, che sono da B M fino a D V , sendo uguali , e parallele alle parti di A Y , come per esempio A 25. a C K , e tutte le altre ; ancora le parallele faranno in proporzione Aritmetica.
In appresso dimostreremo in altro modo , che le applicate alla parabola sono in proporzione Aritmetica , e ciò lo faremo per scoprire la vera natura della parabola, che è di costare d' infinite linee rette , tutte pezzi di ipotenuse , come si vedrà in appresso.

PROPOSIZIONE X. ²⁹

Tutte le linee parallele, le quali sono dentro li spazj $B C F B$, e $C V Z F$, cioè tutte le linee parallele ad $V Z$, intercette fra $B B$ unità, ed $V Z$, e che partono dai punti della $B V$, e terminano alle due linee $B F$, ed $F Z$, sono in proporzione Aritmetica.

C O S T R U Z I O N E.

Intendasi fatta la figura insegnata nelle antecedenti Proposizioni, cioè la figura $A B V Y Z F B$, nella quale vi è la parabola $A B X$, l'Ipotenusa $A Y$, le due linee $Z F$, ed $F B$, nelle quali terminano i cubi tirati dalli punti dell'asse della parabola.

Prolunghisi poi la $Z F$ fin dove s'incontra con l'asse $A V$, e sia nel punto I , e prolunghisi similmente la linea $F B$ fino al punto segnato con il numero 7. Poscia s'intenda la parabola $A D X$ ripiena d'infinite applicate, dico che tutte le parallele ad $V Z$, che terminano a $B F$, ed $F Z$ saranno in proporzione Aritmetica.

D I M O S T R A Z I O N E.

Considerisi il triangolo $C F 7$. rettangolo in C ripieno d'infinite parallele alla base, queste perchè terminano nell'Ipotenusa d'un triangolo, saranno tutte in proporzione Aritmetica per lo metodo degl'indivisibili.

Per l'istessa ragione tutte quelle, che terminano nel triangolo $7. B B$ saranno in proporzione Aritmetica; Dunque se dalle parallele, le quali sono nel triangolo $7. C F$ s'ene tolgono quelle, che sono nel triangolo $7. B B$, quelle che sono da $B B$ fino a $C F$, resteranno in proporzione Aritmetica: perchè se da linee, che sono in proporzione Aritmetica, s'ene tolgono linee, le quali sono nella stessa proporzione, quelle che rimangono saranno in proporzione Aritmetica.

Dell'istesso modo se si considera il triangolo $Z I V$ rettangolo in V , tutte le infinite parallele, le quali terminano all'Ipotenusa $Z I$, saranno in proporzione Aritmetica: e se dalle parallele, le quali

quali sono nel triangolo ZIV si tolgono quelle, che sono nel triangolo FCI , resteranno quelle, le quali sono da CF fino ad VZ in proporzione Aritmetica.

Ma abbiamo dimostrato, che sono in proporzione Aritmetica le parallele, le quali sono da BB fino a CF , e sono ancora in proporzione Aritmetica quelle che sono da CF , fino ad VZ ; dunque tutte le parallele, le quali sono da BB fino ad VZ sono in proporzione Aritmetica, che è ciò si dovea dimostrare.

C O R O L L A R I O.

Perchè le parallele che sono da BB unità, fino ad VZ 27. sono in proporzione Aritmetica, ed in esse le differenze che sono fra le parallele fraposte fra i cubi di numero intero terminano ne i cubi di numero intero, come per esempio le differenze fraposte fra BB , e CF 8. terminano in CF , e le differenze fraposte fra CF 8. ed VZ 27. terminano in VZ , si potrà intender divisa in punti infiniti la porzione dell'asse BV , la porzione dell'asse BC , e la porzione dell'asse CV , perchè le differenze che sono fraposte fra BB , ed VZ , terminando in VZ , si considerano i punti infiniti della BV : e se si vogliono considerare quelle che terminano in CF , e quelle che terminano in VZ separatamente, si possono considerare i punti infiniti della BC , e della CV ; perchè quando si considerano separate, la CF nella quale è il termine delle differenze fraposte fra BB , e CF , si puol considerare per unità, cioè per termine delle differenze che sono da 1. fino ad 8., e per principio di quelle che sono da 8. fino a 27. Per la qual cosa le porzioni dell'asse BV , BC , e CV , si possono considerare divise in punti infiniti, unite, e separate: e lo stesso di tutte le altre infinite, che sono da cubo di numero intero a cubo di numero intero, cioè da 27. a 64. e così sempre.

PRO.



PROPOSIZIONE XI. ³³

*Le applicate infinite alla parabola A F H,
sono in proporzione Aritmetica
infra di loro.*

SUPPOSIZIONE, E COSTRUZIONE.

Suppongasi costrutta la parabola A F H nel modo insegnato di sopra, il di cui asse A G sia uguale a 9. unità, o sia parametro A B, e formisi il quadrato A B C D: poscia dal punto F, al punto C, punti i quali sono nella parabola, s'intenda tirata la linea retta F C, la quale si prolunghi finchè s'incontri con l'asse G A prodotto, ciò che sarà nel punto L.

E dell'istesso modo si prolunghi la H F finchè s'incontri con il medesimo asse prolungato in I, dico che le applicate infinite, che sono nella parabola A F H, sono in proporzione Aritmetica fra di loro.

DIMOSTRAZIONE.

LA F C prodotta fino in L, forma il triangolo L F C rettangolo in E, nel quale si contiene l'altro triangolo L B C rettangolo in B; ma tutte le parallele, che sono nel triangolo L E F sono in proporzione Aritmetica infra di loro, dunque quelle che sono nel triangolo I. R C sono ancora in proporzione Aritmetica; ma se da quelle, che sono nel triangolo L E F, si leveranno quelle, che sono nel triangolo L B C, resteranno tutte le parallele, le quali sono da B B fino ad E F in proporzione Aritmetica.

E dell'istessa guisa, perchè si è prodotta la H F fino in I, tutte le parallele, le quali sono nel triangolo rettangolo I G H saranno in proporzione aritmetica: e se da quelle si tolgono quelle, che sono nel triangolo I E F, resteranno quelle, che sono da E F fino ad G H in proporzione Aritmetica.

Ed abbiamo dimostrato, che quelle, che sono da B C fino ad E F, sono in proporzione Aritmetica, e che quelle, che sono
E da

da EF fino ad GH anche sono in proporzione Aritmetica: dunque le parallele, le quali sono da BC fino a GH faranno in proporzione Aritmetica.

Ma le parallele, che sono da BC fino a GH , sono applicate agl' infiniti punti, che sono nella parabola $A FH$; dunque le applicate alla parabola sono in proporzione Aritmetica, che è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

R Echerà grandissima maraviglia il vedere, che le linee CF , ed FH si prendano per linee rette; per la qual cosa dirà alcuno, dunque la parabola non è più una linea curva? Ma a ciò si risponde brevissimamente, dicendo la parabola essere, una linea curva, la quale si compone d' indefinito numero di linee rette, le quali sono pezzi d' ipotenuse d' indefinito numero de triangoli tronchi, dello stesso modo che volle Platone, che fusse il cerchio un poligono d' infiniti lati, e che perciò si possono sempre intender prodotte fino alla IG queste linee rette; giusto come prendendosi per unità la AB linea sensibile, si produce la FC ; e che sia così. Suppongasì presa per unità una porzione, quanto si voglia minima, e sia $A 2$: per lo modo con il quale si descrive questa parabola AR sarà quadrupla di $A 2$, ed RK applicata dupla di $A 2$. giusto come AE è quadrupla di AB , ed EF è dupla di BC , o sia AB ; Dunque se dal punto estremo dell' unità $A 2$. si suppone tirata l' applicata uguale alla unità $A 2$. si potrà intendere una linea, la quale partendosi dal punto K , passi per lo punto estremo dell' unità, e prodotta termini nel punto Q , giusto come la FC prodotta, termina nel punto L .

E dell' istesso modo AX sarà uguale a 9. unità $A 2$. ed XZ sarà uguale a tre unità $A 2$.; per la qual cosa se dal punto Z s' intenderà tirata la linea $Z 7$. la quale passi per lo punto estremo della $RK 2$, sarà giusto come la HF prodotta, la quale termina nel punto I : adunque il triangolo $A EF$ è l' istesso, che il triangolo QRK , ed il triangolo LBC è l' istesso che il triangolo fatto da $Q 2$. e dalla applicata uguale all' unità, cioè il triangolo $A 2$. e 3.; dunque se dal triangolo QRK sene sottrae il triangolo $Q 2$. e 3. sarà simile alla sottrazione che abbiamo fatta del triangolo LBC dal triangolo LEF . Ma se

Ma se dal triangolo $Q X Z$ se ne sottrae il triangolo $Q R K$ sarà simile a quello, che abbiamo fatto, sottraendo dal triangolo $I G H$ il triangolo $I E F$, per la qual cosa supponendosi l'unità presa minima, le linee $C F$, ed $F H$ vengono divise in numero infinito di porzioni d'ipotenuse, e le parallele intercette fra esse saranno sempre tutte in proporzione Aritmetica, siccome nella parabola $A F H$ descritta sopra il parametro, o sia unità $A B$, quelle che sono fra $B C$ ed $E F$, e che sono fra $E F$, e $G H$ sono in proporzione Aritmetica in virtù della sottrazione de' triangoli: dalla qual cosa ne avviene, che se nell'asse $A G$ si prende una unità, o sia parametro insensibile, siccome preso $A B$ per unità, $A G$ è 9., presa l'unità insensibile $A G$ costerà d'un numero infinito di parti tutte nella proporzione de' numeri impari; e la parabola $A C F H$ costerà d'un numero infinito di pezzi d'ipotenuse, le quali generano la curva; e se nella descrizione di questa parabola si vuol prendere ad arbitrio l'unità, o sia il parametro, come per esempio $A B$, ciò che non vuol dubitarsi; allora $C F$ sarà una retta, ed $F H$ un'altra; perchè quanto più è sensibile il parametro, tanto più divengono sensibili le rette tirate dai punti estremi delle applicate di numero intero, come la $B C$ unità a $D F$ 2. e lo stesso di tutte le altre: e divisa poi la $B G$ in punti infiniti, si averanno infinite applicate intercette fra le applicate di numero intero in proporzione Aritmetica.

Si compone dunque la parabola d'indefiniti pezzi d'ipotenuse, e le applicate sono in proporzione Aritmetica fra di loro, e questa è la cagione, per la quale la parabola si quadra.



E

PRO.

37

PROPOSIZIONE XII.

Sia descritta la parabola $A D H$, il di cui asse sia $A G$, e si descriva nel modo da noi insegnato nella prima proposizione, e siano fatti i cubi $C F$, e $G L$, cioè $C F 8$. e $G L 27$. cubi delle applicate $C D 2$. e $G H 3$. tutte le applicate prodotte fino alle due linee $B F$, ed $F L$ faranno cubi delle loro applicate corrispondenti, e faranno in proporzione Aritmetica.

C O S T R U Z I O N E.

Suppongasi, come nelle antecedenti proposizioni, fatta la figura, dentro la quale è la parabola $A D H$, l'asse della quale è $A G$ uguale a 9. unità $A B$, o vero $B B$ uguale ad $A B$; e suppongasi similmente tirata l'ipotenusa $A I$ del triangolo $A G I$ isoscele, e rettangolo in G , alla quale ipotenuza terminano tutti i quadrati delle applicate, per la seconda proposizione, e suppongasi tirata la $C F$ uguale ad 8. unità $A B$, e la $G L$ uguale a 27. cubo di $G H 3$. e le due linee $B F$, ed $F L$ le quali congiungono per li estremi i cubi fatti per costruzione.

Poscia si prolunghi l'asse $G A$ fino in M , di modo che $G M$ sia tripla di $G A$, cioè uguale a $G L$ fatta uguale a 27. unità $A B$, e chiudasi il triangolo $M G L$ rettangolo in G , dal punto M taglisi sopra la $M G$ la $M N$ uguale all'unità $A B$, e la $M O$ uguale a $C F$, o sia ad 8. unità $A B$, e dal punto N tirisi la $N N$ uguale ad $M N$, e parallela a $C F$, e dal punto O tirisi la $O P$ parallela a $C F$, o vero a $G L$, e uguale ad $M O$, e la $N G$ porzione dell'asse $M G$ si concepisca divisa in punti infiniti. E s'intendano nel triangolo $M G L$ tirate infinite parallele a $G L$ dagli infiniti punti della $N G$, le quali terminano all'ipotenusa $M L$, come sono le parallele disegnate co' numeri 11., e 12. 16., e 18., e tutte le altre. Dai punti della $B G$ porzione dell'asse $A G$, s'intendano tirate tante parallele alla $G L$, le quali terminino alle due linee $B F$, ed $F L$, quanti sono i punti della $B G$, e siano per esempio le parallele disegnate 6. e 47., X e K , e tutte le altre. Indi dai punti estremi di esse parallele s'alzino tante perpendicolari ad esse, le quali terminino nella $M L$, come per

per esempio la perpendicolare disegnata 47. e 12., e la perpendicolare K, e 9. in questo modo avremo nelli due spazj B C F B, C G L F tante parallele, quanti sono i punti della B G, le quali corrispondono ad una porzione delle parallele infinite intercette fra N N, e G L nel triangolo M G L; dico che tutte le parallele, le quali partono dai punti della B C, e terminano alla B F, sono cubi delle applicate intercette fra C D, e B B, ogn' uno alla sua applicata corrispondente, come X K cubo di X Y, e che sono in proporzione Aritmetica.

D I M O S T R A Z I O N E.

G M 27. è terza proportionale di G H 3. e di G A 9.; ed M O 8. è terza proportionale di C D 2., e di C E 4. dunque dentro i limiti di M N unità, e di M O 8. vi faranno tutti i cubi delle applicate intercette fra B B, e C D, e dentro i limiti di M O 8. e di M G 27. vi faranno tutti i cubi delle applicate intercette fra C D, e G H; e perchè le applicate sono successivamente una maggiore dell' altra, i cubi ancora intercetti fra M N, ed M O faranno successivamente cubi delle applicate intercette fra B B, e C D, onde le parti dell' asse intercette fra M N, ed M O, come per esempio M 11., ed M 16. faranno successivamente cubi delle applicate intercette fra B B, e C D; e dell' istesso modo tutte le parti dell' asse intercette fra M O, ed M G faranno successivamente cubi delle applicate intercette fra C D, e G H; adunque ogni porzione dell' asse M G intercetta fra l' unita M N, ed M G farà cubo.

Ma le parallele intercette fra N N, ed O P sono uguali alle parti dell' asse, cioè la parallela 11. e 12. uguale ad M 11. e tutte le altre, perchè M N essendo uguale ad N N, ed M O uguale ad O P, tutti li triangoli intercetti fra i triangoli M N N, M O P, sono ancora isosceli; adunque tutte le infinite parallele, le quali terminano alla N P, faranno successivamente cubi delle applicate intercette fra C D, e B B; or se da qualunque punto della B C, s' intenda tirata una parallela fino a B F, se quella farà uguale al cubo corrispondente contenuto nelle parallele, le quali terminano alla N L, quella che termina alla N F farà ancora cubo.

Ma

E noi dai punti estremi delle parallele, le quali terminano alla BF , abbiamo alzate tante perpendicolari, quanti sono i punti della BC , le quali tagliano la NL , e la BF , per modo, che ogni parallela la quale termina alla BF , è uguale ad una parallela, o sia cubo di quelle, le quali terminano alla NL , ed alla parte dell'asse, cioè la parallela NN unità uguale a BB unità: OP 8. uguale a CF 8. la parallela disegnata 6., e 47. uguale ad 11. e 12. o vero ad M 11. la parallela XK a 7. e 9. o vero ad M 7. dunque anche le parallele, le quali terminano alla BF saranno successivamente cubi delle applicate intercette fra CD , e BB . Ma le parallele, le quali terminano alla BF sono tante, quanti sono i punti della BC , per modo che fra detti punti non vis'intenda veruno spazio, e sono in proporzione Aritmetica, per la proposizione sesta; dunque ogni cubo sarà maggiore dell' antecedente, e minore della conseguente. Onde se ogn'uno è maggiore dell' antecedente, e minore del conseguente, ogni cubo sarà corrispondente alla sua applicata, cioè XK sarà cubo di XY : 6. e 47. dell'applicata 6. e 2. e così di tutte le altre, e lo stesso avverrà di quelle, che terminano alla FL , che è ciò si dovea dimostrare.

C O R O L L A R I O I.

E manifesto, che se da qualunque punto della NL porzione dell'ipotenusa ML si farà cadere una linea perpendicolare, come per esempio 9. K , la quale termini alle due linee BF , ed FL le perpendicolari ad esse tirate dai punti della BF , ed FL sono cubi corrispondenti alle applicate; d'onde è che ogni parallela considerata dentro li spazi $BCFB$, e $CGLF$, è cubo; per la qual cosa se senza considerare la NG porzione dell'asse MG , divisa in punti infiniti, si concepirà divisa in punti infiniti la linea BG porzione dell'asse AB , si averanno nelli due spazi $BCFB$, e $CGLF$ infiniti cubi, secondo la porzione dell'asse BG considerato diviso in punti infiniti, ed ogn'uno corrispondente alla sua applicata; e se si concepisce divisa la NG in punti infiniti, i cubi corrispondenti alle applicate, e compresi nelli due spazi $BCFB$, e $CGLF$, faranno tanti, quanti sono i punti della BG ; e se la BG si concepisce divisa
in

in punti infiniti, i cubi compresi nelli sudetti spazj faranno infiniti, secondo la BG considerata divisa in punti infiniti, e nelle parallele intercette fra NN , e GL del triangolo MGL ; e nelle ascisse dell'asse MG vi faranno tutte le infinite lunghezze, che si possono concepire fra 1. e 27. ogn' una delle quali è adattabile alli due spazj $BCFB$, $CGLF$; per la qual cosa nelli due spazj $BCFB$, e $CGLF$, sono i cubi corrispondenti alle applicate, ed infiniti, secondo la BG considerata divisa in punti infiniti; e nelle parallele comprese fra NN , ed MG , vi sono tutte le quantità possibili intercette fra 1. e 27. secondo la lunghezza di NG , e lo stesso nelle ascisse dell'asse.

Vogliamo ancora far vedere per la via delle medie proporzionali, quello che abbiamo detto poco anzi, ed in quella guisa confermare un'altra volta la nostra proposizione, cioè che il luogo dei cubi corrispondenti alle applicate sono le due linee rette BF , ed FL .

COROLLARIO II.

Prendasi fra CE 4. quadrato di CD 2. e GI 9. quadrato di GH 3. una media, la quale sia per esempio QS . Saranno in continua proporzione fra loro i quadrati CE , QS , GI , e le applicate, o siano le loro radici CD , QR , e GH .

Ora se si prenderà fra CF 8., cubo di CD , e GL cubo di GH , una media proporzionale, questa sarà certamente cubo di QR , media fra CD , e GH per Euclide; E questa media, o sia il cubo di QR , dico che sarà la linea M 3 presa sopra l'asse MG , la quale M 3 è uguale alla parallela segnata con i numeri 3. e 8. la quale è uguale a QT , e che perciò QT sarà cubo di QR .

DIMOSTRAZIONE II.

SEQT non è il cubo di QR , lo farà la linea 37. e 39. sopra la QT , o la 24. e 40. sotto la QT , tutte e due supposte immediate a QT , perchè fra il punto 37., ed il punto Q , e fra il punto Q ed il punto 24. non vi s'intende spazio.

Fingasi per primo, che sia la linea 37., e 39. se è così il cubo dell'applicata 37. e 15. farà una linea, che partirà da un punto sopra il punto 37. dunque perchè applicata minore produce cubo minore,

nore, che la maggiore, il cubo dell' applicata 37. e 15. partirà da un punto sopra il punto 37., e così sempre fino a tanto, che il cubo di CD 2. partirà da un punto sopra il punto C , e non farà CF 8., cubo fatto per costruzione; il che repugna.

Per secondo se si vuole, che il cubo di QR sia la linea 24., e 40., allora il cubo dell' applicata 24. e 45. farà una parallela, la quale parte da un punto immediatamente sotto il punto 24. verso G , e così successivamente, fino a tanto che il cubo dell' applicata GH 3. non farà più GL 27., ma farà una parallela, la quale partirà da un punto sotto il punto G ; il che repugna, sendo GL cubo di GH per costruzione; per la qual cosa è manifesto, che solamente la parallela QT , che è la stessa, che l' applicata QR prodotta fino alla FL farà la media fra CP , e GL .

E lo stesso avverrà se fra QT , e CF si prenda un'altra media, e accaderà fino a tanto, che fra CF , e GL si troveranno tanti cubi, ogn' uno corrispondente alla sua applicata, quanti sono i punti della CG .

Dello stesso modo si troveranno fra BB , e CF tanti cubi corrispondenti alle loro applicate, quanti sono i punti della BC , come per esempio: se si troverà nell' asse MG la linea M 7. media fra BB e CF , la quale M 7. sia uguale a 7. e 9., allora la linea XK uguale a 7. e 9. farà cubo di XY , e così di tutte le altre.

Per la qual cosa è manifesto, che nel triangolo MGL si possono concepire intercetti fra NN , e GL tanti cubi delle applicate alla parabola ADH , quanti sono i punti della BG , i quali tutti corrispondono, e sono uguali a' cubi contenuti nelli due spazi $BCFB$, e $CGLF$.

Da quello, che abbiamo in tanti modi dimostrato, si puol ben conoscere, che l' arte con la quale abbiamo posti i cubi di radice irrazionale fra i limiti de' cubi di radice razionale, da noi fatti per costruzione, è quella che ci ha dato campo di ritrovare questa tanto importante proprietà, quanto è ridurre alla facilità de' semplici un problema per sua natura solido, e finora non per altre vie risoluto, che per vie, le quali sono sempre dentro i limiti de' solidi, e perciò dagli Antichi non credute Geometriche, siccome farò conoscere in appresso.

C O N S I D E R A Z I O N E I.

DAlla dimostrazione dell' antecedente proposizione si deduce chiaramente, che la proporzione Geometrica, e l' Aritmetica, cioè la continua, e la discreta, non differiscano nella loro natura, quando si considerano nell' infinito, il quale è quello, che ha per proprietà di far isvanire le differenze, che da noi nelle cose si considerano: come per esempio, essendo le radici nella proporzione Geometrica, i loro quadrati ancora faranno in proporzione Geometrica, e così ancora i loro cubi, ancorchè quelli in duplicata, e questi in triplicata.

Ma noi abbiamo dimostrato che le radici, o siano le applicate alla parabola, sono in proporzione Aritmetica; E che li quadrati, o siano le terze proporzionali delle unità, e delle applicate siano nella stessa proporzione. Ed abbiamo dimostrato ancora, che le parallele, le quali terminano alle due linee BF , ed FL siano cubi, e che siano in proporzione Aritmetica: dunque è chiaro, che questa istessa proprietà, la quale si credeva, che convenisse solamente alla proporzione Geometrica, conviene ancora alla proporzione Aritmetica; ond' è che la quantità discreta, e la continua, convengono fra di loro in moltissime proprietà.

C O N S I D E R A Z I O N E II.

DEve considerarsi, che i cubi delle applicate alla parabola ADH sono le istesse applicate prodotte, fino alle due linee BF , ed FL , e sono dentro i limiti de' cubi di numero intero, fatti per costruzione; e perciò sono tanti, quanti sono i punti delle porzioni dell' asse BG , siccome abbiamo in tanti modi dimostrato; per esempio i cubi sono nelle ascisse dell' asse MG , perchè abbiamo dimostrato, che sono dentro i limiti di MN , ed MO ; e di MO , ed MG , i cubi sono ancora nelle parallele, le quali terminano all' ipotenusa ML , perchè sono uguali alle porzioni dell' asse.

E se dal punto L si tirerà qualunque linea obliqua, fino alla perpendi-

pendicolare $M G$ nelle parallele, le quali terminano a questa , vi faranno tutte le lunghezze, che sono da 1. fino a 27., e perciò tutte le lunghezze dei cubi : ma non per questo saranno corrispondenti alla parabola $A D H$, perchè solamente quelli, che terminano alle due linee $B F$, ed $F L$ sono quelli, che sono tanti, quanti sono i punti della $B G$; e tanti, quante sono le applicate, e sono le istesse applicate prodotte. In pruova di ciò deve osservarsi, che nella proposizione dodicesima fra le parallele intercette fra $N N$, ed $O P$ ne abbiamo prese solamente tante, quanti sono i punti della $B C$, per uguagliarle a quelle, le quali terminano alla $B F$.

Ne se altri pretendesse ritrovare l' istesse lunghezze de' cubi in altro luogo, per questo farebbe, che corrispondessero alle loro applicate nella parabola da me descritta.



PROPOSIZIONE XIII.⁴⁵

PROBLEMA.

*Fra due linee rette date, ritrovare due medie
continue proporzionali.*

COSTRUZIONE.

Siano le due linee rette date QR ed ST , bisogna fra quelle ritrovare due medie continue proporzionali.

Prendasi AB uguale alla minore data QR , e pongasi per unità, o sia parametro, e descrivasi la parabola AHD , il cui asse AC sia uguale, per ora, a nove unità AB , o vero QR , e facciasi CI uguale ad AC , poi tirisi l'ipotenusa AI , e compiscasi tutta la figura $ACFLB$ nel modo insegnato nelle antecedenti proposizioni, nella quale le due linee BL , ed LF sono il luogo, nel quale terminano tutti i cubi delle applicate intercette fra BB , e CD .

Poscia sopra la CF prendasi la CV uguale alla linea maggiore data ST , e dal punto V alzisi la perpendicolare VE fino al punto E della linea LF , poscia dal punto E tirisi la linea EM parallela a CF , e uguale a CV , dico che le linee MN , ed MP , sono le medie ricercate fra QR , ed ST .

DIMOSTRAZIONE.

A B unità è uguale alla minore data QR per costruzione, ME è cubo, e le due MN , ed MP sono medie fra AB , ed ME , per quello che abbiamo dimostrato nella proposizione quinta, e nella dodicesima, e nel corollario di essa; ma ME è uguale ad ST ; dunque le due medie MN , ed MP sono medie fra QR , ed ST .
Se la maggiore data fosse la linea segnata a . minore di GL 8. si prenderà sopra la GL la linea GX uguale alla linea data a , e s'alzerà, come prima, la perpendicolare XY , fino alla BL , e dal punto Y si tiri la linea ZY parallela, ed eguale a GX , o vero alla linea segnata a .; le due medie fra QR , e la linea a . faranno ZK , e ZO , che è ciò si dovea fare. CON.



PROPOSIZIONE XIV.

COROLLARIO.

Fra due linee rette date, ritrovare tre medie continue proporzionali.

COSTRUZIONE.

Siano le due linee rette date X , Z , bisogna tra quelle ritrovare tre medie continue proporzionali.

Pongasi, come nell' antecedente proposizione, AB uguale alla minore data X per unità, o sia parametro; e facciasi l' asse AD , per esempio, uguale a quattro unità AB , la di cui radice è DE , applicata ultima, uguale a 2. unità AB . Poi suppongasi, nel modo insegnato nella considerazione alla figura quarta, fatto il quadrato, il cubo, ed il biquadrato di DE 2., e sia DF uguale a 4. unità AB , e perciò quadrato di DE , e DG uguale ad 8. unità AB , e perciò cubo di DE , e DH uguale a 16., e perciò biquadrato di DE , e tirinsi dal punto C , punto estremo dell' unità BC , le linee CF , CG , e CH , le quali terminino ai punti del quadrato, del cubo, e del biquadrato. Indi sopra la DH prendasi la DY uguale alla maggiore data Z , ed alzisi la perpendicolare YV fino alla CH , e tirisi la parallela QV , la quale è uguale a DY . Dico, che le tre linee, cioè QK , QR , QS sono le tre medie fra le due linee date X , e Z .

La dimostrazione è manifesta per quello, che abbiamo insegnato nella considerazione alla quarta proposizione, perchè QV essendo biquadrato, le tre QK , QR , e QS , sono medie fra l' unità AB , e QV biquadrato: ma AB è uguale ad X , e QV è uguale a Z ; dunque le tre linee QK , QR , QS sono le tre medie fra X , e Z .

Dell' istesso modo, che nell' antecedente proposizione, se la maggiore data farà maggiore di DH , si prolungherà la parabola fino in 9., e si farà il biquadrato dell' applicata ultima 3. che farà 81. unità AB , e si congiungeranno i biquadrati, cioè tirando la li-

G

nea

nea CH fra 1., e 16., e l'altra da H, fino al punto estremo della linea 81. biquadrato dell'applicata ultima 3., e così fino all'infinito.

CONSIDERAZIONE I.

Si vede chiaramente, che questo metodo va all'infinito, perchè se si vogliono quattro medie, si farà il cubocubo sempre congiungendo con linee oblique tirate dai punti estremi de' cubi cubi delle loro radici: se si vorranno cinque, o sei, fino all'infinito, si farà lo stesso, esprimendo in linea tutte le potestà superiori, nel modo da noi insegnato.

CONSIDERAZIONE II.

In questo nostro metodo, il quale va all'infinito, come si vede, è da notarsi, che non vi è veruna differenza fra il terzo grado, il quarto, il quinto, e tutti gli altri, siccome si esperimenta nel metodo praticato dagli antichi, nel quale si vede che tre medie son l'istesso che una, e perciò è piano; e due medie costituiscono il problema solido; per la qual cosa altri sono piani, altri sono solidi: quì all'incontro sendo sempre tutti nella linea retta, e perciò sempre dell'istessa natura, il terzo grado non differisce dal secondo, il quarto non differisce dal terzo, se non che nell'essere una linea retta più lunga, o più breve, e lo stesso di tutti gli altri: per esempio il cubo di 2. è una linea retta uguale ad 8. unità AB, il biquadrato una linea retta uguale a 16. unità AB, e così sempre fino all'infinito si ritrovano tutte le potestà nei limiti delle linee rette, e perciò nella natura del piano; la qual cosa fa evidentemente conoscere il grand'avvantaggio, che apporta questo nostro metodo, come quello, nel quale si vedono ridotti all'istessa natura del piano tutti i problemi solidi; dal che chiaramente si vede, che se alcuno troppo attaccato al metodo antico, precipitosamente dicesse quello di tre medie è di natura piana, perchè si fa con il biquadrato: si risponde che quì il biquadrato non è se non una linea retta, e questo è il pregio della mia invenzione.

CON-

IN questo metodo da me espresso, nel quale per lo mezzo delle sole linee rette si ritrovano tutte le medie, non può dubitarsi essere tutto quel rigore Geometrico, che in questo si fatto problema addimandavano gl' Antichi, e che sia così.

Gli Antichi non ammettevano per Geometrico se non quello, che s' intendeva potersi fare *Circino*, & *Regula*, e tutto il rimanente lo reputavano Meccanico. Ora questo mio è certissimo, che non pure puol farsi *Circino*, & *Regula*, ma si fa *simplici regula*, perchè l' istessa parabola, che è una linea curva, descritta nel modo, che ce l' ha insegnata descrivere Galileo, si descrive *simplici Regula*, perchè non mai si fa altro che tirar da punto a punto linee rette, che è quello, che ha dato a me aggio di conoscere, che la parabola in questo modo descritta si compone d' infiniti pezzi d' ipotenuse, e che le sue applicate siano in proporzione Aritmetica fra di loro, come si vede nella proposizione undecima.

I quadrati ancora terminano ad una ipotenusa, e i cubi ancora nelle ipotenuse fra di loro intersecate, come si scorge nella proposizione decima; per la qual cosa terminando tutti a linee rette, il problema si descrive tutto *simplici regula*, secondo il gusto rigoroso delli Antichi.

Io non voglio entrare ad esaminare, se basti, come vogliono i Moderni, per ammetter le linee curve, che sene intendano le proprietà, e che abbiano proprietà costanti, e che poi poco importi, che s' intenda potersi descrivere *Circino*, e *Regula*, o con instrumento Meccanico, siccome fa Platone, e Renato; ma posso ben dire, che quando non s' avessero d' ammettere le curve, la parabola descritta nel modo, che c' insegnò Galileo, per mezzo del moto, e che noi habbiamo reso geometrico, insegnandola a descrivere per la divisione delle linee, si deve ammettere, e l' averebbero ancora amMESSA gl' Antichi, mentre nella descrizione di quella, non si intendono tirate altro che linee rette da punto a punto: e che sia vero, che questa forma di descrivere la parabola insegnataci da Galileo, abbia grandissimo privilegio sopra le altre forme di descriverla, osservisi, che se si vuole costruire un problema di terzo grado, il quale come ogn' un sa, Cartesio insegna costruirlo con l' intersezione del

cerchio, e della parabola, offervifi dico, che se la parabola si descrive nel modo insegnatoci da Galileo, questa non s'interseca con il cerchio in modo, che dia le due medie, e risolva il problema; ciò che fa vedere, che questa sola è la vera parabola piana, e quella sola, che certamente nel descriversi non ha bisogno di modo meccanico.

Adunque possiamo lusingarci d'aver ridotto a piano questo tanto importante problema, della qual cosa ne siamo tenuti all'incomparabile Galileo, il quale c' insegnò questo modo di descrivere la parabola, ed altresì a Bonaventura Cavaliero il quale ci diede il suo metodo degl' indivisibili.

Ma acciò si veda quanto i ritrovati di questi due grand' uomini, ed in particolare di Galileo, siano stati fecondi ed ingegnosissimi; Io farò vedere, che quello, che Galileo c' insegna, cioè che la differenza fra li numeri impari, i quali compongono i numeri quadrati, è sempre 2; e che portata alle potenze superiori va all' infinito, perchè fra i numeri cubici è 6, fra i biquadrati è 24. e così sempre: la qual cosa è cagione, che nel infinito tanto le radici, i quadrati, i cubi, i biquadrati, ed ogn' altra potestà terminino nelle ipotenuse, e perciò nelle linee rette, siccome abbiamo dimostrato noi nella nostra Opera, e che si vedrà altrove; ma prima vogliamo con la seguente proposizione far vedere, come in virtù di questo nostro metodo si faccia facilissimamente la famosa duplicazione del cubo, e si costruiscano solidi d' ogni genere, i quali siano fra loro in qualsivoglia data proporzione.



PRO.



PROPOSIZIONE XV.⁵⁷

PROBLEMA.

Data la linea retta X, sopra della quale sia fatto un cubo, fare un cubo doppio di quello.

COSTRUZIONE.

Facciasi la linea Y doppia della linea X, poscia prendasi A B uguale alla data X, e pongasi per unità, e prolunghisi fino in D, di modo che A D sia uguale a quattro unità A B, e prendasi per asse della parabola A C E, poscia facciasi il quadrato D F, uguale a quattro unità A B, e tirisi l'ipotenusa A F, e facciasi il cubo dell'applicata ultima D E 2., e sia D G uguale ad 8 unità A B, per la proposizione quinta; indi dal punto C al termine del cubo D G tirisi la C G; e sopra la D G prendasi una linea uguale alla linea Y, questa sarà D E, doppia di A B, o vero X; e dal punto E alzisi una perpendicolare a D G, fino al punto dove s'incontra con la C G, e sia E M, e dal punto M tirisi la M H parallela a D G, dico che il cubo fatto sopra l'applicata H I è doppio del cubo fatto sopra l'unità A B.

DIMOSTRAZIONE.

Per quello, che abbiamo dimostrato nella quinta, e nella dodicesima proposizione, tutte le parallele, le quali terminano alla C G sono cubi delle applicate, adunque H M doppia di A B uguale ad Y, è cubo dell'applicata H I. Ma se H M è cubo dell'applicata H I, sarà ancora quarta proporzionale dell'unità, e dell'applicata, e del quadrato, cioè farà come A B ad H I, così H I ad H L, e come H I ad H L, così H L ad H M. Ed abbiamo per Euclide che il cubo fatto sopra la prima, al cubo fatto sopra la seconda sia come la prima alla quarta; dunque il cubo fatto sopra l'unità A B, al cubo fatto sopra l'applicata H I.

H I sarà come **A B** ad **H M**, e perciò il cubo fatto sopra **H I** al cubo fatto sopra **A B**, sarà come **H M** ad **A B**. Ma **H M** si è fatta doppia di **A B**, dunque ancora il cubo fatto sopra **H I** sarà doppio del cubo fatto sopra **A B**, che è ciò si dovea dimostrare.

C O N S I D E R A Z I O N E.

SE si vuole un cubo, il quale sia al cubo fatto sopra **A B** in qualunque data proporzione, si farà sempre dell'istesso modo, cioè se si vuole il cubo triplo, si farà la linea **Z** tripla di **X**, e si ponerà, come prima, la minore data **X** per unità, e si prenderà la parallela **N Q** uguale a **Z**, ed il cubo fatto sopra l'applicata **N O** sarà triplo del cubo fatto sopra **A B**: e se si vuole il cubo quadruplo si prenderà la **R V** uguale alla linea **K** quadrupla di **A B**; e così in ogni proporzione, fino a tanto, che se si vuole il cubo ottuplo del cubo fatto sopra **A B**, questo sarà il cubo fatto sopra l'applicata **D E 2.**, perchè come **A B 1.** a **D G 8.**, così il cubo fatto sopra **A B 1.** al cubo fatto sopra **D E 2.** Se poi si vogliono cubi i quali siano al cubo fatto sopra **A B** in altre proporzioni sopra la ottupla, si prolungherà l'asse **A D**, e tutta la figura, siccome si è insegnato nella tredicesima proposizione, per prendere le due medie, e si porrà sempre la radice del cubo dato per unità, o sia il lato del quadrato, e si farà la linea nonupla, decupla ec. dell'unità; prendendo sempre l'uguale a quella nella figura, come si è fatto nell'antecedente Proposizione.

Del istesso modo si puol intendere, prendendosi in qualsivoglia proporzione i biquadrati, i cubicubi, e fino all'infinito, perchè per intendersi un biquadrato doppio di un'altro, basta prendere le tre medie, come nella proposizione quattordicesima, facendo la linea doppia di **A B**, e trasportandola nella figura biquadrata, allora la linea doppia di **A B**, farà quinta proporzionale dell'unità, dell'applicata, del quadrato, e del cubo, e perciò sarà come la prima alla quinta, così il biquadrato, il quale s'intende fatto sopra l'unità, al biquadrato fatto sopra l'applicata, e lo stesso fino all'infinito.

I L F I N E.

AL SIGNOR
D. ANTONIO
MONFORTE.

PAOLO-MATTIA DORIA:



NONO certamente non poche le cose, che da Voi ho apprese, Gentilissimo Sig. D. Antonio; e non solamente degne da reputarsi per li vivi lumi di profondissima scienza, che in esse si contengono: ma per le morali virtù, che dall'esempio delle vostre virtuosissime gesta tutti apprendono. Ed in vero in queste ugualmente, che nelle moltissime scienze, delle quali siete tanto ornato, come ogn' un sà, ho avuta occasione d' invidiarvi; perchè in voi ho ammirato quell' animo libero, e indipendente, e di se stesso pago, per modo, che ne le lodi, ne l' altrui invidia, anno avuto mai forza di disturbarlo, o distoglier la vostra mente da quella virtuosa pace, la quale per premio della vostra virtù possedete.

E certamente ho veduto con istupore il vostr' animo incomparabile non mai levarsi in alterezza per la meritata stima, che da Virtuosi nomi- ni dell' Europa tutta han meritato le degnissime Opere, le quali con

tanto utile della letteraria Repubblica avete pubblicate, ne disturbarsi per le vane ciancie di pochi invidiosi, i quali tentavano abbassar quella gloria, che avete meritamente acquistata.

Voi avete con superiorità d' animo ascoltati coloro, i quali arditamente tentavano di togliere la gloria a voi dovuta, per lo scioglimento di quelli intrigatissimi problemi da Olanda inviati in Italia; dicendo che prima erano stati sciolti dal Viviano; nel mentre che voi tenavate le lettere di Viviano stesso, il quale sinceramente confessava, che se prima avesse veduto il vostro modo di scioglierli, si sarebbe incamminato per altra via dalla sua diversa, nella risoluzione di quelli; e tante, e tante altre ciancie sopra li vostri degnissimi libri, che potrei rammentare, se il timore d' offendervi non mi arretrasse.

Questa dunque impareggiabile sofferenza, che costantemente usate nelle cose tutte, è ciò, che più di ogni altra cosa in voi ammiro; Imperciocchè avendo ancor lo preteso al titolo d' inventore nelle scienze Matematiche, ed essendomi visto assalito da una folla d' Oppositori in modo, che senza il vostro soccorso sarebbe a me accaduto l' stesso appunto che dicono intervenisse a Dante Alighieri allora quando in quel rozzo secolo, che visse, s' espose a recitare un suo panegirico in Venezia, ove non fu inteso da veruno; Non ho saputo in vero con tanta costanza d' animo, come voi fate, tollerarlo; ma in vece di camminar dritto per l' incominciato cammino, mi sono lasciato arrestare a dar conto loro della mia opera.

Mi perdoni dunque per questa sol volta la vostra pur troppo rigorosa virtù, perchè sono in vera di compassione ben degno, se traviato mi scorgete dal vostro sentiero in appalesarvi la mia giusta indegnazione; nulla sappiendo esservi in Napoli un Senato d' Efori, i quali forse perchè impotenti a nuove cose produrre, non pur contenti di agguagliarsi a que' della Repubblica di Sparta, che a morte d' annavano tutti quei figliuoli, che vedeanfi dalla natura mostruosamente procreati, questi tentano a viva forza di distruggere tutto ciò, che di bello, e di laude degno vedesi dalla medesima ingenerato; ma ciò nulla rilieva, mentre ci siete voi, il quale quelli innocenti fangiulli sapete sottrarre dalle insidie dei Ministri di questo Invidio Senato, come bene allo sperimentato questo mio nuovo parto, sottratto in un punto, in virtù delle vostre autorevoli assertive, dal disregio del Volgo, al quale lo aveano condannato, proclamandolo con enfatiche assertive all' ignorante Turba per difettoso, e guasto. Egli

Egli non è già, *Amatissimo Mio Signor D. Antonio*, che Io mi sia mai lusingato, che un'invenzione tanto nuova, e tanto desiderata, quanto la mia si è, dovesse essere ammessa da' *Matematici* senza contrasto; Ma credeva bensì che le obbiezioni non mi dovessero esser fatte contro le *Proposizioni Geometricamente dimostrate*, credeva bene che dovessero impugnarmi quei termini non ad essi familiari, con i quali ho spiegato, in moltissime parti del mio libro, le mie *Proposizioni*, ed i quali voi, da gran *Geometra* qual siete, avete così saggiamente conosciuti, che me lo avete per mezzo d' un vostro *stimatissimo biglietto* avvertito; Ed Io per non dilungarmi punto da' vostri insegnamenti, ho risoluto di ristampar la mia *Opera*, siccome avete veduto, e ristampandola mi è fortunatamente avvenuto d' arricchirla di molte nuove dimostrazioni, e di molti nuovi ritrovati.

Credeva oltracciò, che altri affaticandosi di diminuire il pregio dell' *Opera*, avesse potuto fare, per esempio, il seguente motivo, al quale come vedrete mi era bene apparecchiato a rispondere, ed avesse avuto a dire, che quantunque io per lo mio metodo non usi l' intersezione delle linee curve; con tutto ciò racchiudo i cubi dentro i limiti di due parabole, quali ancorchè siano descritte senza considerazione de' solidi, fanno sempre l' ufficio di solide; per la qual cosa dubitai che avessero avuto a dire, che questo non fusse in tutto secondo il rigoroso genio degl' antichi, i quali l' invenzione delle due medie, per la via pura de' piani addimandavano.

A questi mi era io già posto in assetto a rispondere, dicendo loro, che gl' *Antichi* intendevano essere rigorosamente fatto per la via de' piani, tutto ciò che si faceva, ordinando solo la descrizione de' cerchi, e linee rette: Onde se la descrizione della parabola, che c' insegna, l' incomparabile *Galileo* a fare per lo moto, si puol fare ancora per la semplice descrizione di linee rette, siccome ho insegnato Io nella considerazione seconda della *Proposizione IV.*, questa non poteva esser rifiutata dagli *Antichi*; ed oltracciò, se le altre parabole da me descritte, le quali fanno l' ufficio di solide, si descrivono dell' istesso modo, che queste, siccome si vede nella mia quarta *Proposizione*, e nelle seguenti, per niun conto potevano esser rigettate dagl' *Antichi*; In somma avrei detto, che la cagione per la quale gl' *Antichi* esclusero le linee curve, dal cerchio in fuori, dalle linee *Geometriche*, fu solamente, perchè nella descrizione di esse si aveva da usare un modo meccanico; non già perchè non avessero proprietà ferme, e costanti; la qual cosa non s' incontra nella descrizione della parabola *Galilaica*,

laica, la quale si descrive con le semplici linee rette, siccome ho detto: dalla qual cosa poi ne avviene, che per prender le medie fra qualunque due linee rette date, io alzando una perpendicolare alla base, sino a quella linea che è limite di tutti i cubi, risolvo il problema, siccome si vede nella proposizione XIII. XIV., e in tutte le altre; in vece di che per la via delle intersezioni, vi è necessariamente mestieri d' Operazione, che non soddisfa al genio degli Antichi.

E per confermar con pruove Geometriche, quest' evidente verità, voi ben vedete, che nel mio libro Io ho dimostrato, che le applicate infinite, i quadrati infiniti, e i cubi infiniti terminano alla linea retta, perchè terminano all' Ipotenuse de' triangoli rettangoli, siccome potrete vedere nelle Proposizioni I. XI.; e XII.; per la qual cosa non puol dubitarsi, che il luogo di questo problema delle infinite medie, non sia nella linea retta, e perciò in tutto secondo il gusto de' Antichi. Ma acciò la vostra gran mente veda ancora confermata con i numeri questa verità, voglio a voi appalesare una non poco curiosa proprietà di quelli da me scoperta, con la quale si vede manifestamente che le radici, le differenze fra le differenze de' quadrati, le differenze fra le differenze de' cubi, e le differenze fra le differenze delle potenze superiori, si avanzino con l' istesso ordine delle potenze, cioè che nella seconda potestà, o sia nelli quadrati, la differenza fra le differenze è 2., la differenza fra le differenze de' cubi è 6., e così successivamente sino all' infinito; le quali differenze poi svaniscono intieramente, quando i quadrati, i cubi, e tutte le potestà si considerano infinite, e come terminanti alle Ipotenuse: per la qual cosa si vede chiaramente, che ancora i numeri (de' quali sembra, che l' idea sia stata posta da Iddio nell' umana mente, per isvelarci gl' arcani più segreti della natura) ci appalesino ancor essi, che le radici, i quadrati, i cubi, e tutte le potestà sino all' infinito, sieno dell' istessa natura. Degnatevi, vi priego, di contemplare questa non lieve proprietà de' numeri, la quale spero, che ritroverete degna dell' alto vostro genio, e la quale avendo io tale riputata, ho ardito a voi d' indirizzarla, come a colui, che per tante pruove ho conosciuto gradire le mie deboli meditazioni: la proprietà è la seguente.

Se si prenderanno quattro radici in proporzione Aritmetica, cioè 1., 2., 3., 4. la loro differenza sarà l' unità, cioè 1.

Se si prendono poi i loro quadrati, cioè 1., 4., 9., 16., le loro differenze faranno i numeri impari 3., 5., 7., e la differenza fra le
diffe.

differenze farà 2. doppia della differenza fra le radici .

E se si prendono i cubi, cioè 1., 8., 27., e 64. la loro prima differenza farà 7. 19., e 37. la seconda fra le dette differenze farà 12., e 18., e la terza, ed ultima differenza farà 6. tripla di 2. differenza fra i quadrati .

Onde è da notarsi, che il numero delle differenze, le quali si devono sottrarre per giungere alla differenza ultima, è uguale alla potenza de' numeri, perchè fra le radici, la differenza è fra radice, e radice, come 1. 2. 3. ec., e perciò nelle radici è 1. Fra i quadrati si sottrae la differenza dalla differenza, e si ritrova la differenza ultima, che è 2., cioè si sottrae 5. da 7., e si ritrova 2. con che nella prima potenza, il numero delle sottrazioni è doppio di quello, che si fa nelle radici .

Nelli cubi si sottrae tre volte, cioè differenza prima, differenza di differenza, e differenza ultima, cioè prima 7. da 19., 19. da 37., poscia 12. da 18., e resta 6. laonde nella seconda potenza il numero delle sottrazioni, che si fanno, è triplo di quello delle radici; onde è che i numeri delle sottrazioni, che si fanno per giungere all'ultima differenza, sono l'esponenti delle potenze de' numeri, cioè nelle radici 1., che è il primo grado, ne' quadrati, che si sottrae due volte è 2., e nel cubo, che è il terzo grado, e si sottrae tre volte, è 3.

Oltracciò è da notarsi, che le differenze ultime delle radici, si ritrovano fra due numeri; e le differenze ultime delli quadrati, fra tre numeri; e le differenze de' cubi fra 4. numeri; questo si osserva con più facilità nella seguente tavola, nella quale si potrà sensibilmente vedere tutto quello, che in questa osservazione si è detto.

Radici Quadrati Differenze Differenze fra le differen.

1	1	1	1
2	4	3	2
3	9	5	2
4	16	7	2
5	25	9	2

Radici

Radici Cubi Differenze Differ. fra diff. Differ. ult.

1	1	7		
2	8	19	12	
3	27	37	18	6
4	64			

ESEMPIO.

Radici Cubi Differenze Differ. fra differ. Diff. ult.

5	125	91	36	
6	216	127	42	6
7	343	169		
8	512			

NELLI BIQUADRATI.

Rad. Biquadr. Differ. 1. Differ. 2 Diff. 3 Diff. ult.

1	1	15		
2	16	50	60	
3	81	65	110	24
4	256	135	84	
5	625	369	294	

Rad: Biq: Diff. 1. Diff. 2. Diff. 3. ult.

5	625	671	434	156	
6	1296	1105	590	180	24
7	2401	1695	770		
8	4096	2465			
9	6561				

Dal

Dal che si vede, che la differenza ultima, la quale è 24. è quadrupla di 6., differenza fra' cubi, siccome 6. è triplo di 2., differenza fra i quadrati, e due duplo di uno, differenza fra le radici; ond' è che le differenze ultime fra le potenze, sono sempre maggiori della potenza del grado antecedente, quanto è l' esponente delle loro potestà, cioè nel biquadrato, quadrupla della differenza fra i cubi; nel cubo, tripla della differenza fra i quadrati, e così sempre.

Lo stesso si ritrova certamente, facendosi la sottrazione fra altri biquadrati di radici in proporzione Aritmetica; e con l' istessa proporzione, cresceranno ancora le differenze fra' cubi cubi, e sino all' infinito; ciò che vedrà, a mio credere, chiunque vorrà prendersi la briga di proseguire più oltre questo calcolo.

Ora da questa proprietà de' numeri da noi spiegata, si vede chiaramente, che prendendosi i cubi, e li quadrati in linea, e considerandoli successivamente nei lati de' triangoli rettangoli divisi in parti infinite, e terminanti all' Ipotenusa, devono essere in proporzione Aritmetica, siccome lo sono i quadrati, e le radici: per esempio.

In numeri abbiamo ritrovato, che la differenza fra due radici è 1. e nella proposizione XI. abbiamo dimostrato, che le applicate alla parabola, le quali sono le radici de' quadrati, terminano all' Ipotenuse de' triangoli rettangoli, e sono in proporzione Aritmetica.

Ed in numeri abbiamo ritrovato ancora, che le differenze fra i quadrati, sono li numeri impari, cioè 3. 5. 7. ec.; e la differenza fra le differenze è 2., e nella seconda proposizione abbiamo dimostrato, che in linea i quadrati delle applicate sono in proporzione Aritmetica.

E per la stessa via abbiamo ritrovato, che la differenza ultima fra 4. cubi è 6., tripla della differenza fra le differenze de' quadrati: e in linea abbiamo dimostrato nella Proposizione X., che tutte le parallele, le quali sono da B B, sino ad V Z, cioè che sono nelli due pezzi d' Ipotenusa Z F, ed F B sono in proporzione Aritmetica. E nella Proposizione V., e nella XII. abbiamo anche dimostrato, che le sudette parallele, le quali terminano alli due pezzi d' Ipotenusa Z F, ed F B sono i cubi delle applicate alla parabola A D X.

Epro-

E proseguendosi all'infinito, si ritrova che le differenze in numeri, sono sempre li esponenti delle potestà, e pure considerate come infinite, e in linea divengono in proporzione Aritmetica, ciò che fa vedere, che quelle differenze, le quali fanno, che in numeri, i quadrati, e' cubi delle radici non siano in proporzione Aritmetica, nell' infinito svaniscono, perchè considerate negl' infiniti punti dei lati de' triangoli rettangoli, e terminanti alle Ipotenuse di essi divengono in proporzione Aritmetica.

Ed è da considerarsi ancora in questo, che la proporzione Aritmetica è la naturale, perchè non considera, che una sola differenza, e sempre uguale; in vece che la Geometrica considera i rispetti, i quali non sono altro, che un artificio, per poter considerare composto quello, che nella proporzione Aritmetica si considera a parte; ma poi voi ben vedete, che sciogliendosi le differenze per mezzo della sottrazione, le differenze fra le potenze vengono ordinate per modo, che nell' infinito, e in linea si distruggono.

E che sia vero, che la proporzione Aritmetica sia l' istessa, che la Geometrica, sovvenghi quello, che ho detto nella considerazione alla mia XII. Proposizione, cioè che siccome nella proporzione Geometrica, se le radici sono in proporzione Geometrica, i quadrati, e i cubi sono nell' istessa proporzione; e nell' Aritmetica, se le radici sono in proporzione Aritmetica, anche i quadrati, e i cubi sono in proporzione Aritmetica, e lo stesso in tutte le altre potestà.

Ora da tutte queste considerazioni, la vostra alta mente ben vede, stimatissimo mio Sig. D. Antonio, il fonte donde discende questa mia invenzione, perchè la proprietà de' numeri, la quale vi hò additata, mostra bene, che nelle linee infinite, nelle quali si distruggono le differenze, deve avvenire lo stesso.

Per la qual cosa, dopo aver io con artificio da non dispreggiarsi, a mio credere, posto dentro i limiti de' cubi di radice razionale, da me fatti per costruzione, i cubi intercetti, i quali sono in proporzione Aritmetica con quelli, non potevano lasciar di terminare nella stessa linea, nella quale terminano i cubi da me fatti per costruzione, e non già che potesse mai accadere, che quelli miseri cubi intercetti tra i cubi di radice razionale, dovessero terminare in linee diverse, siccome ho chiaramente dimostrato.

Quelli

Quelli, che di sopra ho narrati, Gentilissimo Signor D. Antonio, sono arcani di natura, additatici dal nostro Galileo, e da me proseguiti, sino al segno, che vedete, ed i quali solamente si possono svelare a voi, il quale a profondissima scienza, unite virtuosissimo costume, per modo tale, che non solo non invidiate (come gli altri miseri) i divini lumi di scienza, che anno sparso i dotti uonaini della nostra Italia, ma con ammirazione, e con diletto li riguardate; per la qual cosa sperando, che dobbiate gradire ancor questi; vi priego d' esaminare un poco le seguenti Obbiezioni, insieme con le mie risposte, e faccendovi divota reverenza, resto.



CP70

2

La
n
t
r
a
F. del
e
P.
a
r
a
d.



OBIEZIONE I.⁷⁸

DE' SIGNORI

AGOSTINO ARIANO, E

D. NICCOLO' GALIZIA

*Il primo Pubblico Lettore ne' Regj Studj di Napoli,
e l' altro Pubblico Professore di Matematica
nella medesima Città.*



POICHE' l' Autore, cotanto mio riverito Signore, per sì efficaci maniere m' obbliga, che Io, contro ogni dovere, per iscritto dichiarar la difficoltà; per suo preciso, ed assoluto comando, da me fatta contro al di lui argomento, per mezzo del quale nella proposizione prima della giunta al suo nuovo metodo, suppone di dimostrare, che l' infinite parallele alle linee cubiche $D'E$, NQ , terminate dalle CE , EQ , siano eziandio cubi delle corrispondenti applicate della parabola piena $AC O$; essendo da così potente comando fortemente costretto a dover obbedire, dico, che la serie delle infinite linee cubiche fra la BC , $D'E$, NQ , (che si suppongono oltre passare, o pure non arrivare alle CE , EQ) quantunque successivamente l' una debba esser maggiore dell' altra (secondo le loro radici, o per meglio dire le corrispondenti applicate all' Asse della Parabola, l' una sarà maggiore dell' altra) non perciò nel primo caso (nel quale si suppongono oltre passare le CE , EQ) s' inferisca, che la più prossima alla NQ , o alla $D'E$, dalla parte di sopra verso A , divenghi maggiore della NQ , o della $D'E$, e nel secondo caso (nel quale si suppongono non arrivare alle CE , EQ) non per tanto si deduca, che la più vicina alla $D'E$, o alla BC , dalla parte di sotto resti minore

**Offervisi la presente figura fatta cōme le antecedenti, e dimostre-
rò a' miei Signori Oppositori, che le parallele intercette fra D
E, ed F I se terminano a qualunque altra linea fuori della E I,
non possono esser cubi delle applicate alla Parabola A C G; ed
eccone la pruova.**

**Non negano i miei Signori Oppositori che D E 8 sia cubo di D
O 2. per costruzione, ed F I 27 cubo di F G 3.**

**Non negano parimente, che nella mia seconda Proposizione ab-
bia dimostrato, che tutte le parallele, le quali terminano all'
Ipotenusa A H del triangolo A F H siano quadrati delle ap-
plicate, adunque fra D P quadrato di D O 2 ed F H quadrato
di F G per costruzione, prendasi una media proporzionale, in
proporzione Geometrica, e sia per esempio M Y. Sarà come D
P ad M Y, così M Y ad F H; e perchè le radici sono fra di loro
in subduplicata ragione de' quadrati, sarà come D O ad M Z,
così M Z ad F G. Adunque per Euclide sarà ancora il cubo di
D O, che è D E, al cubo di M Z così il cubo di M Z ad F I,
cubo di F G.**

**Prolunghino dunque i miei Signori Oppositori la M Y fino al
punto 18 della perpendicolare I 10. e non potranno certamen-
te negare, che nella lunghezza della M 18. vi sia la lunghezza
del cubo di M Z, luogo da me ricercato; dunque determini-
no loro in qual punto della Y 18. vogliono che termini il cubo
di M Z, e sia per esempio nel punto N fuori della E I, con-
giungano la I N, e la prolunghino fino al punto L, dove si
congiunge con l'asse F A prodotto: dunque se M N è cubo di
M Z sarà come D E ad M N, così M N ad F I; ma se e così, fac-
ciasì come I L ad L N, così L N ad un'altra, e sia per esempio L
R, e tirisi la parallela Q R: dunque sarà per Euclide come Q R
ad M N, così M N ad F I, ma era come D E ad I N, cubo per
gl' Oppositori, così M N ad F I, dunque D E, e Q R avendo
l' istessa proporzione ad M N, ed F I, saranno uguali fra di lo-
ro, il che repugna: e lo stesso avverrà in qualunque punto del-
la M 18. che si voglia che termini il cubo di M Z fuori che nel-
la E I, nel quale prolungandosi I E fino al punto 3. dell' Asse,
i tre cubi saranno nello stesso triangolo 3. F I, e non in trian-
gol i diversi, e termineranno all' Ipotenusa.**

**Non so che altro possano dire a questo i miei troppo scrupolosi
Si.**

Signori Oppositori, se non che potrebbe avvenire, che la terza proporzionale di $L I$, e di $L N$ fosse $L T$, dalla qual cosa ne averebbe, che la parallela $T 12$. fosse uguale a $D E 8$, e per ciò fosse come $F I$ ad $M N$, così $M N$ a $T 12$. o vero $D E$: onde i cubi fossero nell' istessa proporzione fra di loro, cioè come $D E$ ad $M N$, così $M N$ ad $F I$: prolunghino la $I E$ fino al punto 3. dell' Asse, e farò veder loro che se questo fosse, l' angolo $L I F$ sarebbe uguale all' angolo 3 $I F$, cioè il maggiore al minore.

D I M O S T R A Z I O N E.

Il triangolo $L 12 T$ è simile al triangolo $L F I$, dunque sarà come $L 12$ a $12 T$ così $L F$ ad $F I$, e similmente il triangolo 3 $D E$ è simile al triangolo 3 $F I$; dunque sarà come 3 D ad $D E$, così 3 F ad $F I$; Ma la parallela $12 T$ è uguale a $D E 8$, ed $F I 27$. è commune. Dunque sarà come $L 12$. , e 3 D a $D E$, o vero $12 T$ così $L F$, e 3 F ad $F I$.

Dunque $L 12$. , e 3 D avranno l' istessa proporzione a $D E$, e perciò faranno uguali fra loro, e similmente $L F$, e 3 F avranno l' istessa proporzione ad $F I$, e per ciò faranno uguali fra loro il tutto alla parte, il che repugna.

Ed oltre a ciò se $L F$ è uguale a 3 F e l' angolo F è commune, e il lato $F I$ pure è commune. Il triangolo $L F I$ sarà uguale al triangolo 3 $F I$ e l' angolo $L I F$ uguale all' angolo 3 $I F$ tutti assurdi, adunque se la terza proporzionale è $L T$, la $12 T$ che è la sola che può esser uguale a $D E$ nel triangolo $L I F$, pure produce assurdo.

Adunque in qualunque punto della $I L$ che cada la terza proporzionale della linea $I L$, e della linea $I N$, sempre la parallela che parte dall' Asse, e termina alla $L I$, se si vuol prender per cubo, sarà uguale a $D E 8$, o vero se la terza proporzionale è $L T$ cioè che fa la parallela $12 T$ uguale a $D E 8$, la linea $L F$ diviene uguale a 3 F , e l' angolo $L I F$ diviene uguale all' angolo 3 $I F$; $I F$ è dunque manifesto, che ancorche infinite linee rette possano terminare all' ipotenusa $L I$ del triangolo rettangolo $I L E$, ed ogn' una essere maggiore dell' altra, senza che mai veruna delle parallele sia uguale ad $F I$, non perciò le sudette parallele, le quali cadono in linea diversa da quella la quale congiunge per gli estremi i cubi da me fatti per costruzione, cioè $D E$, ed $F I$, possono esser cubi delle applicate intercette fra $D O$ ed $F G$.

Dell' istesso modo si dimostra non poter il cubo di $M Z$ terminar den-

dentro della $E I$, come per esempio nel punto 4., perchè $D E$ verrebbe uguale a $Q 5$. terza proporzionale supposta di $F I$, ed $M 4$., o l'angolo 3. $I F$ uguale all'angolo 19. $I F$.

Non puole dunque il cubo di $M Z$ terminare in veruno punto della linea $M 18$. fuori che nel punto S , punto della linea $E I$, ma nella linea $M 18$. vi è lunghezza del cubo di $M Z$, dunque solamente $M S$ è il cubo di $M Z$, e lo stesso avverrà, prendendosi sempre medie come fra $D E$, ed $M S$, fra $M S$ ed $F I$, e lo stesso avverrà facendosi il medesimo fra $C C$ unità, e $D E$; e lo stesso se supponendosi prodotta la parabola all' infinito si prenderà la media fra il cubo $F I 27$., e il cubo 64., e così sempre fino all' infinito. Dunque si vede chiaramente, che i miei Oppositori non hanno intesa la mia Ipotesi, perchè mentre lo prendo per Ipotesi due cubi di radice razionale per costruzione, tutti l'intercetti avevano da essere nei limiti di quelli, e tutti in un medesimo triangolo, e non li estremi in un triangolo, e la mezza proporzionale in un altro triangolo, siccome volevano essi.

Dopo questa Dimostrazione io non dovrei più rispondere alle seguenti Obbiezioni, come quelle, le quali non hanno altro per oggetto, che di dimostrare, che dalla mia quinta proposizione ne nasce assurdo, ciò che è una libertà di ratiocinare nuovamente introdotta da que' Signori Oppositori, i quali si sono alzati contro di me, e la quale a me sembra che sia contro le leggi della geometria, perchè si può ben dimostrare per la via dell' assurdo una proposizione non ancora dimostrata; siccome ha fatto Archimede, ed Euclide, ma non si può dedurre assurdo da una proposizione, che si suppone dimostrata; per la qual cosa in Geometria, a chi pensa d' opporre, è sempre necessario che additi l' errore, che egli pretende che sia alla proposizione, alla quale si oppone, e se l' Autore a quella soddisfa compitamente, egli non è più obbligato a rispondere a' pretesi assurdi, i quali son sempre fallaci, non potendo nascer assurdi da proposizione dimostrata; Onde le risposte alle seguenti obbiezioni ad altro non possono servire, che ad additare li errori nelli quali inciampano, affaticandosi di trovare assurdo, il quale nasca dalla mia proposizione dimostrata, i quali errori tutti nascono dalla vana pretenzione d' opporre senza ben considerare l' altrui Ipotesi.

Eccone la pruova nelle seguenti Obbiezioni.

K

OBBIE.

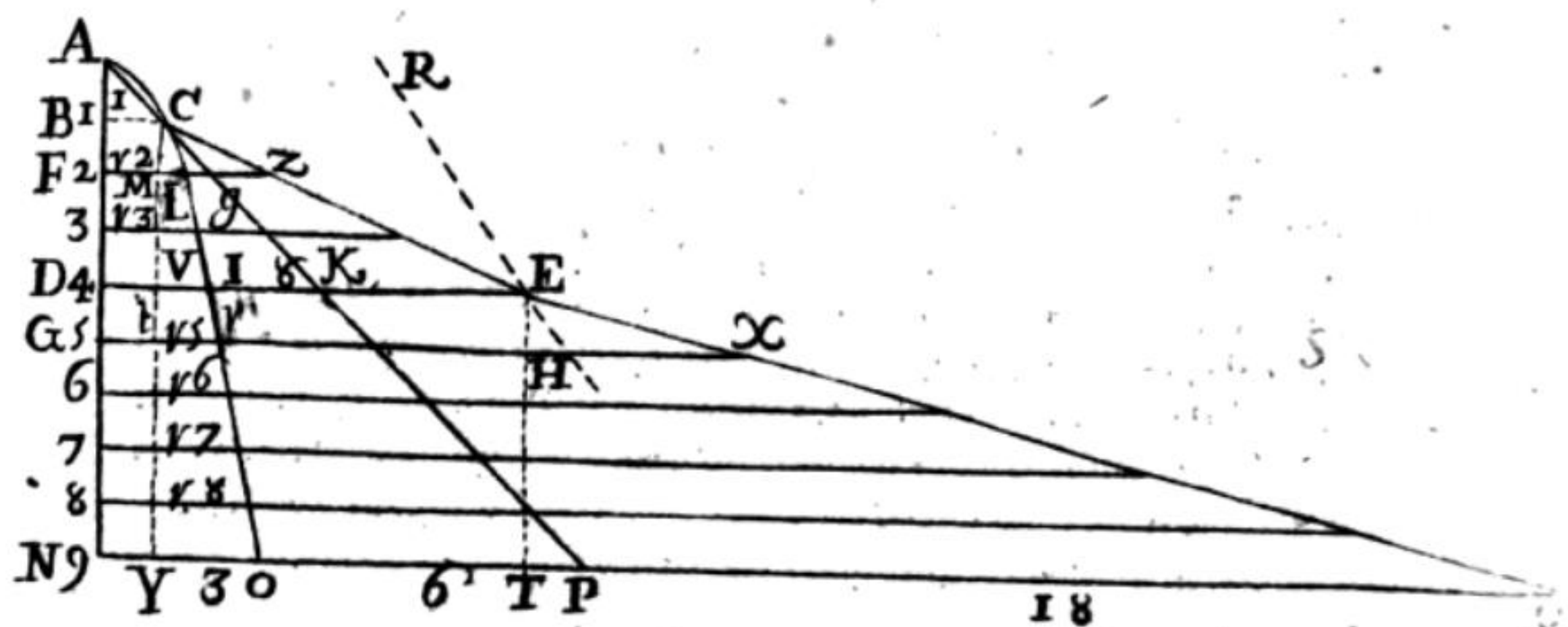
OBIEZIONE II.

DE' SOPRADETTI

SIGNORI

AGOSTINO ARIANO, E

D. NICOLÒ GALIZIA.



MA per dimostrare con argomento generale geometrico, che qualunque le mentovate $DE=8.$, ed $NQ=27.$ per costruzione, rappresentino le quantità cubiche delle loro corrispondenti radici $D I=2.$ $NO=3.$ ordinate all' asse della parabola; non perciò l' altre a quelle parallele terminate dalle CE , EQ , i cubi rappresenteranno delle loro corrispondenti ordinate. S' intenda perciò dal punto C , termine dell' unità BC , la CV parallela all' asse AN , la quale tagli dalle ordinate FL , DI , G &c., le unità $2M$, $4V$, $5t$, &c. uguali all' unità BC ; e si consideri in primo luogo fra la BC , e DE qualsivoglia parallela, come a cagione d' esempio la FZ tirata dal punto F termine della seconda unità dell' asse AN , la cui corrispondente ordinata, o sia supposta radice cubica FL sarà $=\sqrt[3]{2}$. ed il suo quadrato $Fg=2.$, ed il suo supposto cubo $FZ=\sqrt[3]{8}$. Onde sarà $MZ=\sqrt[3]{8}-1$. ed essendo $DE=8.$ sarà $VE=7.$, e così dell' altre parallele: Quindi per la similitudine de' triangoli CMZ , CVE , sarà $CM, CV::MZ, VE$: cioè $1, 3::\sqrt[3]{8}-1, 7.$, e per ciò il prodotto degl' estremi uguale à quello degl' intermezzi, cioè $\sqrt[3]{72}-3=7.$ lo che manifestamente è falso.

I.° istesso inconveniente si caverà in considerandosi in secondo luogo qualsivoglia delle parallele cubiche fra la DE , ed NQ , come a cagione d' esempio la parallela $G X$ tirata dal punto G termine della quinta unità; Onde sarà $G X=\sqrt[3]{125}$. essendo la sua corrispondente ordinata, o sia sua supposta radice $Gr=\sqrt[3]{5}$; imperciocchè considerandosi dal punto E la ET parallela allo stesso asse AN , taglierà questa della $G X$ la parte $GH=DE=8.$, e dalla $NQ=27.$ la parte $NT=8.$, e perciò sarà $H X=\sqrt[3]{125}-8.$, e $TQ=27-8=19.$ onde per la similitudine de' triangoli EHX , ETQ essendo $EH, ET::HX, TQ$, sarà $1, 5::\sqrt[3]{125}-8., 19.$, ed i prodotti $5.\sqrt[3]{125}-40.=19.$, o vero $\sqrt[3]{3125}-40=19.$, cioè una quantità minore di $16=19.$ il che non è vero.

Il medesimo assurdo s' incontrerà discorrendosi della stessa maniera in tutti i triangoli posti fra CV , e CE , e fra ET , ed EQ , o pure (nel caso però, che dall' Autore si supponessero le due CE , EQ come una sola linea) fra CT , e CQ in qualunque modo i predetti triangoli simili fra loro paragonando; Dunque niuna delle parallele &c. fra BC , DE , ed NQ determinerà la quantità cubica delle corrispondenti ordinate, &c.

Ne medesimi triangoli simili si puole per altro argomento positivo dimostrare-

*mostrare, le parallele predette non rappresentar le grandezze de
mentovati cubi, imperciocchè essendo $CV, CM :: EV, MZ$; cioè
 $3. 1 :: 7. \frac{7}{3}$ sarà $MZ = \frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$ e perciò $FZ = 3 \frac{1}{3}$ maggiore di $\sqrt[3]{8}$.
cubo di $FL = \sqrt[3]{2}$. e così troverai $GX = 11 \frac{4}{5}$ maggiore di $\sqrt[3]{125}$. e
tutte le altre parallele non esser le mentovate grandezze cubiche, ec.
Si nota il poter si fare altre simili dimostrazioni, senza veruno bisogno
della parallela CV , ed ET , considerandosi i triangoli simili fra la
 CK , e CE , o pure (nel caso però, che dall' Autore si supponessero le
 CE , ed FQ come una sola linea) fra la CP , e CQ com' è mani-
festo.*

R I S P O S T A.

Questi sudetti Oppositori a lor dire pretendono con argomen-
to generale Geometrico dimostrare, che FZ non puol esser
cubo dell' applicata FL ; e per ciò fare, prima chiamano AF
uguale a quadrato 2. e $FL = \sqrt[3]{2}$. ed $FZ = \sqrt[3]{8}$.

Poſcia tirando la CY pretendono vanamente costituire due trian-
goli simili CMZ , e CVE , ne quali CV ſia 3. CM ſia 1. VE
ſia 7., ed MZ ſia $\sqrt[3]{8} - 1$. e facendo poi ſù queſta Ipoteſi de' trin-
goli ſimili il calcolo, cioè prendendo il prodotto degl' estremi, e
quello degl' intermezzi, trovano $MZ = \sqrt[3]{72} - 3$.

Queſt' argomento generale Geometrico de' ſudetti Oppositori, è
pieno di falſe Ipoteſi dalla prima coſa, che aſſumono ſino al ul-
tima.

Per primo AF non è uguale a quadrato 2. per la ſuppoſizione de
modo, col quale ſi deſcrive queſta parabola, perchè AF in nu-
mero, non è commenſurabile, nè all' unità AB , nè all' applica-
ta FL , perchè conſiderato in numero ha un' altra unità, ſiccome
abbiamo dimoſtrato nella conſiderazione prima alla prima Pro-
poſizione.

Per ſecondo i triangoli CMZ , CVE , i quali per la loro Ipoteſi
propongono per ſimili, come da quel che dicono, (quindi per la
ſimilitudine de' triangoli) non ſono ſimili quando chiamano MZ
 $= \sqrt[3]{8} - 1$, perchè ſe $MZ = \sqrt[3]{8} - 1$. moltiplicandoſi MZ per
 CV , ſiccome fanno loro, il prodotto di MZ pe. CV deve ver
uguale al prodotto di CM per VE , cioè a. 7. per la ſedice-
ceſima

cesima del sesto, ma la $\sqrt{72-3}$, la quale, come dicono loro, nasce dal prodotto della moltiplicazione dei mezzi, per gli estremi, non puol esser uguale a 7., perchè se si prende per 69. è più di 8. e se da 72, se ne leva 9. viene fra 7. e 8.; ma non puol mai essere giustamente 7., perchè 7. è solamente radice di 49. quadrato, e del cubo 343., per la qual cosa mai $\sqrt{72-3}$. è uguale a 7. dunque questi triangoli da loro supposti simili, non sono simili, e la cagione per la quale non sono simili, nasce dalla falsa Ipotesi, che pongono nominando $MZ = \sqrt{8-1}$ perchè se seguendo Euclide avessero fatto come $VE 3$, a $CM 1$., così $VE 7$. ad MZ , avrebbero trovato MZ essere $2\frac{1}{3}$ ed $FZ 3\frac{1}{3}$ però considerata semplicemente come linea, non mai come cubo in numero dell'applicata FL , perchè per la mia ipotesi l'applicata FL non è radice 2. in numero, ma è radice di FG quadrato, e radice di FZ cubo in linea, è dunque tutta ripiena di false supposizioni la lor mal pensata Ipotesi, e perchè tutto quel, che siegue è fondato sopra l'istessa Ipotesi, è tanto manifestamente falso, che sarebbe voler annojare il Lettore, a ragionarne piu lungamente.

OBBIEZIONE III.

A V V E R T I M E N T O.

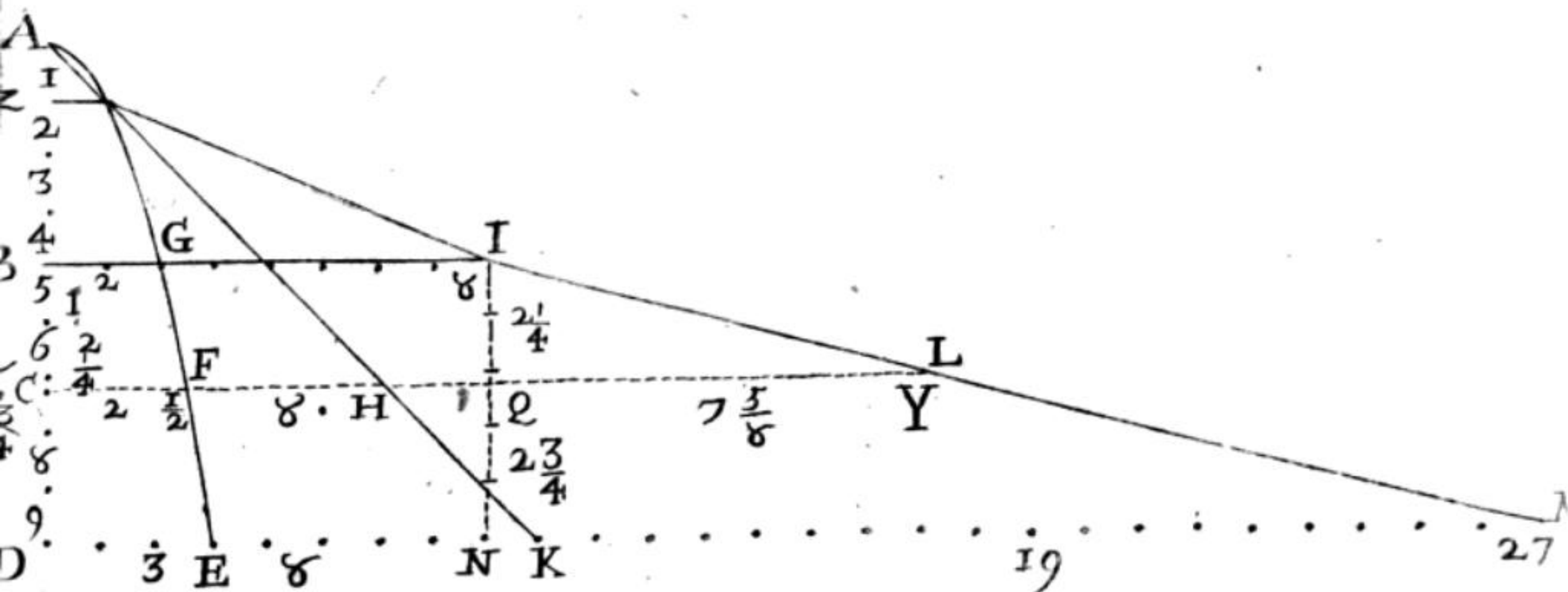
D' un Mio stimatissimo Amico

A N O N I M O

Espressomi nel seguente biglietto da lui inviatomi.

Si priega il Signor D. Paolo a far riflessione, che le prolungate dell'applicate nella Parabola $AGFE$ fra l'applicata $BG 2$., e l'applicata $DE 3$. le radici fra BD , GF e prolungandosi per quanto contengono i loro cubi, non possono cadere nella linea retta ILM tirata dalla I termine del cubo 8. alla M termine del cubo 27.; che pervengono dalle loro radici 2. e 3. respective. Per dichiarare il proposto dall' I termine dell' 8., tirisi IN parallela ad AD , sarà
IN

1 *Nuguale alla B D 5. lato opposto nel parallelogramo, di poi pigli-
si il quadrato di $2\frac{1}{2}$ che è $6\frac{1}{4}$ e caderà nel punto C, da C inalzisi C F
 $2\frac{1}{2}$ parallela all' applicata in F, secherà la parabola, per la proprie-
tà della parabola, il quadrato, ec.*



Di nuovo il $C F 2\frac{1}{2}$ si cubi, e produrrà $15\frac{5}{8}$ prolungasi la predetta applicata fino a detto $15\frac{5}{8}$ in T , questa non cade in $M L I$, e se cadesse, il triangolo $I N M$, saria simile al triangolo $I Q T L$. Dunque come $I N 5$. alla $N M 19$. (residuo di 27. toltone 8. $B I$, seu $D N$). Così $I Q 2\frac{1}{4}$ (residuo di $A C$, $6\frac{1}{4}$ quadrato di $2\frac{1}{2}$ seu dell' applicata $C F$, è lato opposto à $B C$) all' altro lato $Q T L$ che sarà $8\frac{1}{2}$. Dunque per la regola delle proporzioni $I N 5$. $N M 19 :: I Q 2 - Q T L$, $8\frac{1}{2}$ de' quali proporzionali il rettangolo dell' estremi 5. per $8\frac{1}{2}$. fa $42\frac{3}{4}$ quanto il prodotto di 19. per $2\frac{1}{4}$. Ma il cubo di $2\frac{1}{2}$ non produce altro, che $15\frac{5}{8}$ come di sopra $C T$, da quali dedottone $C Q 8$. parallelo a $B I$, resta $Q T 7\frac{5}{8}$ meno di $8\frac{1}{2}$. $Q T L$ in $\frac{3}{4}$. $T L$ che è di sotto la linea, che s'era proposto; e così da mano in mano tutte l' altre applicate alla parabola, de quali i loro cubi

cubi sono di sotto la predetta linea I L M per la proporzione triplicata ec. Si tralasciano molte altre cose, che si potrebbero dire, perchè il Signor D. Paolo è Maestro, e l'applicazione de' negozj de' Poveri ci obbliga a non potere più a lungo distenderci.

R I S P O S T A.

Questo degnissimo Oppositore s' affatica a tutto suo potere di evitare il meccanico, e cade come i primi nelli irrazionali, mentre disegna con numeri, cioè con $2\frac{1}{2}$ l' applicata CF, onde egli si allontana siccome gli altri dalla mia ipotesi, però con modo affai più ingegnoso e sottile, perchè l' equivoco che egli prende, non è come quello de' sopradetti Oppositori; i quali a drittura, ed a fronte scoperta inciampano in manifesti errori contro l' elementi. Narriamo dunque in breve la sua ipotesi.

Questo Oppositore dunque, per evitare di cader nel meccanico fa astrattamente in numero il quadrato di $2\frac{1}{2}$, e lo ritraeva $6\frac{1}{4}$

Poſcia fa il cubo pure in numeri, e lo ritrova $15\frac{3}{8}$

Poi dice prendasi in qualunque luogo dell' A D, cioè fra A B, e B

D il $6\frac{1}{4}$ e cada per esempio in A C, A C farà $6\frac{1}{4}$

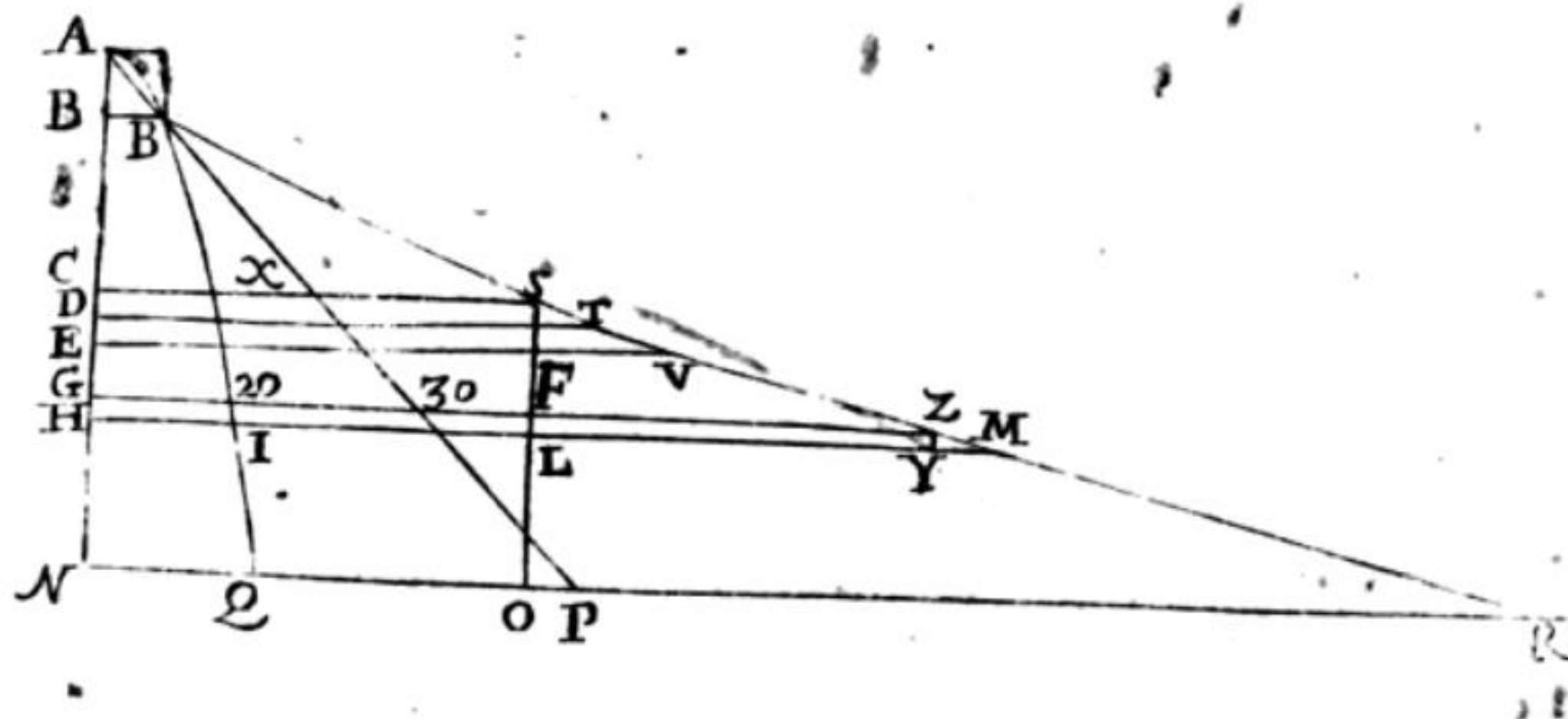
Indi gli trova, che I Q ſia $2\frac{1}{4}$ I N 5. N M 19., e prendendo ne' triangoli ſimili I Q L, I N M, il prodotto de' mezzi, e de' estremi, trova che Q L ſia $8\frac{1}{8}$ maggiore di $15\frac{3}{8}$ che è il cubo di $2\frac{1}{2}$ in $\frac{9}{8}$, e perciò dice, che il cubo di CF termini in Y non in L.

L' equivoco, che prende questo Dottissimo Oppositore conſiſte in ciò, che egli non puol ſecondo la mia Ipoteſi eſprimere in numero l' applicata CF, ne il quadrato A C, perchè CF, ed A C ſono incommenſurabili con l' unità A Z, non avendo in numero per parametro A Z, ſiccome ho dimoſtrato nella conſiderazione prima alla prima propoſizione, ond' è che CF non è $2\frac{1}{2}$ e per ciò C L, ne C Y in queſta figura è cubo di $2\frac{1}{2}$ ſiccome ſuppone l' Oppositore.

Ma acciò l' Oppositore veda ancora più in particolare, che la differenza di $\frac{1}{8}$ ch' egli trova, naſce dalla falſa ipotefi ch' egli prende; non dall' errore dell' Autore, conſideri egli la ſeguente figura, e vedrà tutti gl' equivochi, ch' egli prende nella Ipoteſi che aſſume; e per primo.

Egli

Egli varia la mia ipotesi anche in ciò, che io prendo i cubi infiniti, ed egli li prende in particolare, io li prendo nascenti dai punti infiniti dell'asse della parabola, egli li prende per triangoli simili, e poi li appropria alla mia figura, ciò che è cagione che in numeri non mai possa venire espresso il cubo in linea; e che sia così



Supponga Egli fatta la figura nelle mie antecedenti proposizioni insegnata, e sia $A N R S B$, il di cui asse $A N$ s' intenda diviso in punti infiniti, e dai punti infiniti della $B N$ porzione dell' asse $A N$, suppongansi tirati infiniti cubi, come sono $C S, D T, E V$,
poi

poi dal punto *S* termine del cubo *CS* uguale ad 8. tirisi la *S*
O perpendicolare ad *NR*, dico, che se i cubi si considerano
 infiniti, niun cubo potrà rimaner dentro lo spazio *OSR*, ma
 ogn' uno terminerà alla linea *SR*, linea nella quale terminano
 i cubi *CS* 8., ed *NR* 27. cubi fatti per costruzione.

D I M O S T R A Z I O N E.

Perchè la *BN* s' intēde divisa in punti infiniti, fra punto, e pun-
 to non vi farà spazio di mezzo; e perchè tutte le parallele in-
 tercette fra *CS*, ed *NR* partono dai punti della *BN*, fra paral-
 lela, e parallela non vi si potrà intendere spazio di mezzo, come
 per esempio fra le linee *CS*, *DT*, ed *EV* non si potrà intendere
 spazio di mezzo, e lo stesso di tutte le altre.

Ma le parallele si suppongono essere i cubi delle applicate, e l' ap-
 plicata che parte dal punto *D* produce cubo maggiore, che
 quella che parte dal punto *C*: dunque il cubo, che parte
 dal punto *D* non potrà rimaner dentro la *SR* fra la perpendi-
 colare *SO*, e la linea *SR*, perchè fra la perpendicolare *SO*, e
 la linea *SR* non vi è spazio veruno, non v' essendo spazio fra
CS, e *DT*, altrimenti sarebbe falso il metodo degl' indivisibili:
 non puol rimanere nella perpendicolare *SO*, perchè sarebbe u-
 guale a *CS* 8., dunque terminerà nella linea *SR*, e lo stesso
 avverrà di tutti gli altri susseguenti: dunque se le parallele so-
 no cubi, ed infinite, non possono rimaner dentro la linea *SR*;
 Ma per la nostra proposizione *X.* le parallele intercette fra *CS*,
 ed *NR* sono in proporzione Aritmetica, dunque fra *CS*, ed
NR vi sono tutte le lunghezze intercette fra 8. e 27., e perciò
 queste faranno i cubi delle applicate intercette fra 2., e 3. Ri-
 mane dunque un'altra volta dimostrato per la via positiva, che
 i cubi non possano rimaner dentro della linea *SR*.

Ma acciò il mio degnissimo Oppositore veda più in particolare l'
 equivoco, che egli ha preso, volendo, siccome ho detto, desi-
 gnare con numeri le mie applicate intercette fra quelle di nu-
 mero intero, e i quadrati intercetti fra 4. e 9., e poscia volendo
 prender i quadrati indeterminatamente in ogni parte dell' asse,
 consideri egli i seguenti assurdi, che da questo ne nascerebbero.

Egli prende il $6\frac{1}{4}$ in numero; poi applicandolo all'asse, dice, cada in
 L qua-

qualunque parte dell' $A N$ il $6 \frac{1}{4}$ e sia per esempio $A H$.
 Per primo nella $A N$ non vi è il $6 \frac{1}{4}$ perchè $A N$ s' intende divisa in punti infiniti, da' quali partono le parallele, e i punti non anno parti.

Per secondo prendendo egli il $6 \frac{1}{4}$ in qualunque parte dell' asse $A N$, tutte le parallele intercette fra $C S$, ed $N R$ divengono uguali, perchè in ogni punto, che egli supponga, che termini il $6 \frac{1}{4}$ come nel punto G , allora $S F$ farà $2 \frac{1}{4}$, giusto come lo era $S L$, prendendosi $A H$ per $6 \frac{1}{4}$; onde è che calcolando i triangoli simili $S F Z$, ed $S O R$, $F Z$ farà $8 \frac{1}{8}$ come $L M$, è $8 \frac{1}{8}$; quando si prende $A H$ per $6 \frac{1}{4}$: dunque in niuna delle parallele vi farà la $15 \frac{5}{8}$ ma $H Y$ è $15 \frac{5}{8}$ per l' Oppositore, ed io alzando la perpendicolare $Y Z$, fino ad $S R$, la $G Z$ diviene uguale ad $H Y$: dunque $G Z$ è $15 \frac{5}{8}$ e per il suo calcolo ella è $16 \frac{1}{2}$: dunque è equivoco il suo calcolo indeterminato.

Oltracciò se egli vuole, che $A H$ sia $6 \frac{1}{4}$, e l' applicata $H I$ $2 \frac{1}{2}$ ed $H Y$ $15 \frac{5}{8}$, $G Z$ sarà cubo dell' applicata $H I$, ma perchè applicata minore produce cubo minore che la maggiore, il cubo dell' applicata $G Z$ partirà da un punto sopra il punto G , e così susseguentemente fino a tanto, che il cubo dell' applicata immediata sotto al punto C , la quale è maggiore di 2., farà $C S$ 8. il che repugna.

A dunque quand' egli prende il $6 \frac{1}{4}$ in numero, e lo applica all' asse, non troverà mai il cubo dell' applicata, che perciò il mio riverito Oppositore vede, che prendendo in numero i quadrati dove non cadono, egli per forza non trova li numeri corrispondenti alle linee; ed è certissimo, che prende tre abbagli, ed il primo, che egli prende un cubo in particolare, quando io li prendo infiniti, ciò che è cagione che egli creda, che i cubi possano rimaner dentro lo spazio $S O R$, quando prendendosi infiniti, tutti uno maggiore dell' altro, non possono rimaner dentro, siccome ho dimostrato.

I secondo che egli prende sopra l' asse in numeri i quadrati intercetti fra i quadrati 4. e 9. ciò che non può essere, essendo tutti gl' intercetti irrazionali.

E il terzo, che egli prende in ogni parte dell' asse l' istesso quadrato, ciò che non può essere, perchè bisogna che egli lo prenda in linea,

linea, e dove cade; ma acciò egli veda, che anche con l' equivoco da lui preso si scorge la verità della mia Dimostrazione, osservi egli, che anche continuandosi il calcolo fatto sopra la sua ipotesi, le differenze fra le linee, e i numeri, mancano sempre, quanto più si fa il cubo di radice maggiore, e poscia nel cubo di $NQ3$. si riducono al niente, perchè il numero viene uguale alla linea, cioè uguale a 27., la qual cosa per lo metodo degl' indivisibili, fa che la mia Proposizione sia dimostrata. Sieguasi dunque la sua ipotesi, cioè che il quadrato della radice, o sia dell' applicata, si possa prender in numeri, e in ogni parte dell' asse, la qual cosa come ho dimostrato non si può fare

Facciasi il cubo di $2\frac{2}{3}$ siccome lui lo ha fatto di $2\frac{1}{2}2\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$ fa $7\frac{1}{3}$ e detto moltiplicato per $2\frac{2}{3}$ fa $18\frac{2}{3}$ e prendasi AH per $7\frac{1}{3}$

Poi facciansi come lui dice i due triangoli simili SLM , SOR , ne quali SL farà $3\frac{1}{9}$ e poi facciasi come $SO5$. ad $SL3\frac{1}{9}$ così $OR19$. ad un'altra, ne viene LM uguale ad $11\frac{3}{4}$ a questo aggiungasi $HL8$. fa $19\frac{3}{4}$ per la lunghezza di LM , da questo sottratto $18\frac{2}{3}$ resta $\frac{1}{3}$

Questo $\frac{1}{3}$ sottratto da $\frac{1}{4}$ resta $\frac{1}{12}$. Ond'è che quando SL si prende per $2\frac{2}{3}$ la differenza del cubo di $2\frac{2}{3}$ in numero ad HM cubo in linea è molto minore di $\frac{1}{4}$ differenza fra il cubo in linea, ed il cubo in numero dell' applicata $2\frac{1}{2}$

Facciasi ora il cubo d'una applicata più prossima ad $NQ3$, e sia $2\frac{7}{9}$ Moltiplicato $2\frac{7}{9}$ per $2\frac{7}{9}$ fa $7\frac{49}{81}$ questo moltiplicato per $2\frac{7}{9}$ il cubo viene $21\frac{343}{27}$

Poscia da $7\frac{49}{81}$ quadrato di $2\frac{7}{9}$ se ne sottragga 4. restano $3\frac{17}{81}$ per SL lato del triangolo SLM .

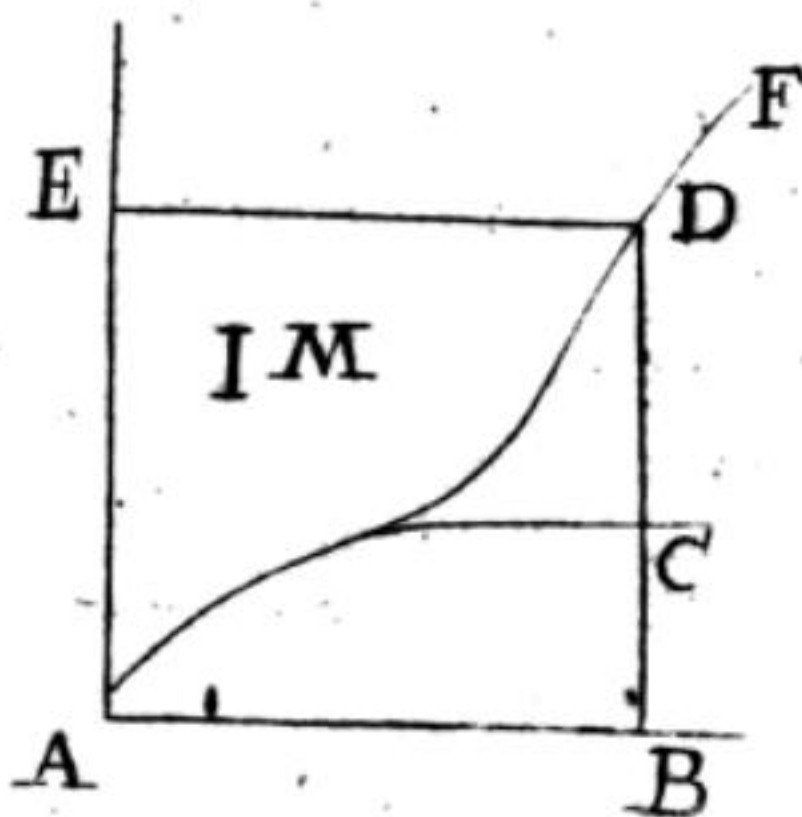
Poscia facciasi come $SO5$. ad $SL3\frac{17}{81}$ così $OR19$. ad un'altra $LM14\frac{17}{9}$ giuntovi 8. farà il cubo $22\frac{343}{27}$

E se da detto cubo $22\frac{343}{27}$ se ne deduce $2\frac{343}{27}$ resta $\frac{1}{3}$ quale dedotto da $\frac{1}{4}$ resta $\frac{1}{12}$ differenza che per esse numero primo non può più schiarsi; onde la differenza fra il cubo in numero, ed il cubo in linea è molto minore di quella del cubo di $2\frac{1}{2}$ e perciò sono sempre minori, quanto più si fa il cubo delle radici prossime ad NQ , e svanisce in tutto nel cubo di $NQ3$.

E dunque manifesto, che anche in una Ipotesi equivoca, i numeri

asse AB , e vanno a terminare nel luogo ADF , siano il cubo corrispondente alla BC applicata alla parabola AF , secondo il senso di V.S. Illustrissima.

Dal punto A , alzisi la perpendicolare AE , e fatta asse questa linea AE , vertice A , parametro M , o unità, si descriva la parabola cubica ADF , di modo che il cubo dell' applicate all' asse sia uguale al solido che si produce dal quadrato dell' intercetta nel parametro M , dico, che questo sarà il luogo cercato. Sia $M = a$ ad $AB = XB$ $D = T$ per la proprietà della parabola Apolloniana AC , il cubo fatto da BC , sarà uguale a questa quantità $\sqrt[3]{a \cdot x \cdot x}$ o vero $\sqrt[3]{x \cdot x \cdot x}$ ma per la proprietà della parabola AD sarà $x \cdot x = yy$ o vero $\sqrt[3]{x \cdot x \cdot x}$ yy dunque la retta BD , sarà uguale al cubo di BC , la qual cosa dovea dimostrare.



Resterebbe da dimostrarsi il neo, che suppongo essere nella dimostrazione di V.S. Illustrissima, ma come che ho veduto esser ciò stato fatto da altri, per ciò non istardò ad incomodarla maggiormente: questo è quanto ho potuto fare, non per altro, che per ubbidire a suoi sempre da me venerati comandamenti, e devotamente le bacio le mani.

RIS.

R I S P O S T A:

Questo degnissimo Oppositore prende come tutti gli altri una ipotesi diversa dalla mia, mentre s' affatica di far vedere, che i cubi delle applicate alla parabola Apolloniana terminano tutti ad una parabola cubica, ciò che non prova veruna cosa contro quello, che faccio io; e che sia così, nella mia V. Proposizione domando, che mi si ritrovi la lunghezza delle terze proporzionali, o siano de' cubi delle applicate intercette fra le applicate di numero intero DM , ed NO , cioè fra 2., e 3. e domando espressamente che mi si ritrovino nelle istesse applicate prodotte in infinito, dicendo nella Proposizione V. *Dimo- do che i cubi delle sudette applicate siano le istesse applicate pro- dotte fino al luogo ricercato.*

Ora dopo questo non può certamente negarsi, che nella lunghez- za dell' applicata prodotta non vi sia la lunghezza del cubo dell' applicata sudetta, siccome ho detto nella risposta all' Obbie- zione prima de' Signori Galizia, ed Ariano.

Po scia dimostro, che il luogo de' sudetti cubi, sia nelle due linee C E , ed $E Q$, ed il mio stimatissimo Oppositore, lasciando la cura agli altri Oppositori suoi collegati di ritrovare il Neo, che nella mia dimostrazione egli credeva si contenesse, mi risponde i cu- bi sono nella parabola cubica.

Spero che con la sua gran mente egli conoscerà, quanto sia con- trario al discorso Geometrico questo suo modo di ragionare, e che dalla risposta da me fatta all' Obbiezione prima de' sudet- ti Signori Galizia, ed Ariano, la quale è quella sola, che aveva per oggetto di dimostrare errore nella mia dimostrazione, il mio stimatissimo Oppositore averà potuto vedere, che in Geo- metria non bisogna rapportarsi all' altrui giudizio, ne credere ad altri, che alla sola dimostrazione; Ed averà potuto vedere, che il correre precipitosamente a ricercare l' assurdo, senza esa- minare le altrui dimostrazioni, non è da Geometra, ma da chi vuole opporre senza leggere, spinto da un certo desiderio di ri- trovar falso ciò che non si vorrebbe, che fosse vero.

In fine il dire i cubi sono nella parabola cubica, niente prova con- tro quello, che faccio io, perchè quando anche ciò fosse vero
quello

quello che ho dimostrato nella confid. azione alla mia XII. Proposizione, cioè che l'istesse lunghezze de' cubi si possano ritrovare in diversi luoghi, ma che corrispondenti alle applicate, solamente si ritrovino nel luogo da me assegnato, è sufficiente risposta alla sua Obbiezione, perchè per corrispondenti alle applicate, intendo nella linea, che nasce dall'istess' applicata prodotta, come ho detto nella mia V. Proposizione: e quando i cubi sono in queste sì fatte linee, nulla rilieva, che le istesse lunghezze si ritrovino in altri luoghi, ma non corrispondenti all'applicate, come io le domando.

Per queste sì fatte ragioni dunque, non ho stimato a proposito d'eliminar il calcolo fatto dal mio Oppositore, tanto più che nella mia XII. Proposizione ho dimostrato, che i cubi infiniti terminano all'ipotenusa del triangolo rettangolo, non ad una curva; per la qual cosa a me basta aver ritrovato quelli che sono corrispondenti alle mie applicate, cioè quelli che terminano alla linea, che congiunge i cubi di radice razionale, ed infiniti, come ho fatto nella V. proposizione, la quale è la stessa, che la prima alla nuova aggiunta della prima impressione di questo libro.

In fine tutte le sudette Obbiezioni, sono fatte sopra ipotesi in tutto dalla mia diversa, perchè io parlo de' cubi, o siano terze proporzionali, e loro mi rispondono con proprietà, che competono alle linee rette semplici, come nella prima opposizione.

Io descrivo la parabola di Galileo, nella quale le applicate intercette fra quelle di numero intero, non si possono esprimere in numero, e tutti i miei Signori Oppositori le vogliono designare con numeri, come nella seconda, e terza Opposizione.

Io domando cubi corrispondenti alle applicate, cioè che siano nell'istessa applicata prodotta, e loro mi rispondono, i cubi sono nella parabola cubica. Ne possono a buona ragione i miei Signori Oppositori dire che in questa nuova impressione io abbia dimostrato le proposizioni, che nella prima non erano dimostrate, perchè le ho bensì ischiarite, ma non supplite, o mutate; imperocchè nella mia prima impressione, con il supplemento della nuova giunta, il problema delle due medie era ugualmente risoluto, che in questa seconda impressione; mentre il luogo de' cubi da me ritrovato nella nuova giunta alla prima impressione, è lo stesso di quello che ho esposto nella V. proposizione di questa
secon-

seconda: e tutte le altre proposizioni, le quali riguardano questo problema, sono le medesime, in quella guisa, che ho ampiamente narrato nella Prefazione di questo libro.

Dopo questo si puole chiaramente vedere, che gli errori de' miei Signori Oppositori, riguardano ugualmente il modo con il quale mi sono spiegato nella prima impressione, che quello con il quale mi sono spiegato in questa seconda; perchè nella mia prima proposizione alla nuova giunta, parlo di linee cubiche, come in questa, onde ben potevano sapere, che le proprietà che convengono alle linee rette semplici, non convengono alle cubiche; nella mia prima proposizione alla prima impressione propongo brevemente bensì la parabola descritta nel modo insegnatoci da Galileo, ma i miei Sig. Oppositori, i quali son tutti grandi uomini, e degnissimi Professori della Città di Napoli, ben potevano, avendo letto Galileo, sapere che le applicate intercette fra quelle di numero intero, non si potevano esprimere in numero, e possedendo Euclide, potevano sapere, che ne' triangoli simili, è forza che il prodotto dalla multiplicatione degl' intermezzi sia uguale a quello degli estremi, e che le parabole cubiche, non avevan niente a fare con il mio problema; per le quali cose è assai manifesto, che i miei Signori Oppositori anno ugualmente peccato in Geometria, se si riguarda la prima impressione del mio libro, che se si rimira questa seconda; laonde mi compatiranno in appresso gli altri Oppositori, se io non risponderò più ad assurdi immaginati da chi vuole opporre senza intendere, ma solamente a coloro, i quali pretenderanno, che nelle mie proposizioni si contenga errore.

Le sopradette sono le opposizioni, le quali ho potuto raccogliere da' Signori Professori Matematici, i quali si sono alzati contro la mia Opera, e le quali tutte ben credo, che ogn' uno il quale è mediocrementemente versato nella Geometria potrà agevolmente conoscere che anno avuto origine dall' avere i sudetti Oppositori opposto senza intender la mia ipotesi; per la qual cosa spero che in appresso sarà agevolmente ricevuto da tutti questo mio nuovo metodo, purchè vogliano ben riflettere alla mia ipotesi, e non giudicare, come i sudetti miei Signori Oppositori, con loro pace, troppo precipitosamente.

questo

Rimangono solamente le opposizioni del Signor Giacinto di Cristofaro, le quali non ho potuto da lui medesimo ricavare, essendosi contenuto in certi modi di parlare, con i quali intendeva senza far la figura di scoperto Oppositore, mostrarsi di sapprovatore della mia opera; lo però ho saputo, che le di lui Obbiezioni nascano come quelle di tutti gli altri, dal non aver voluto attentamente osservare la mia Ipotesi, e le mie dimostrazioni; con tutto ciò se egli avesse qualch' altra difficoltà alla mia Opera, egli potrà appalesarmela, perchè supponendo io che le mie Proposizioni siano geometricamente dimostrate, spero che non averò molta difficoltà a sodisfarlo.

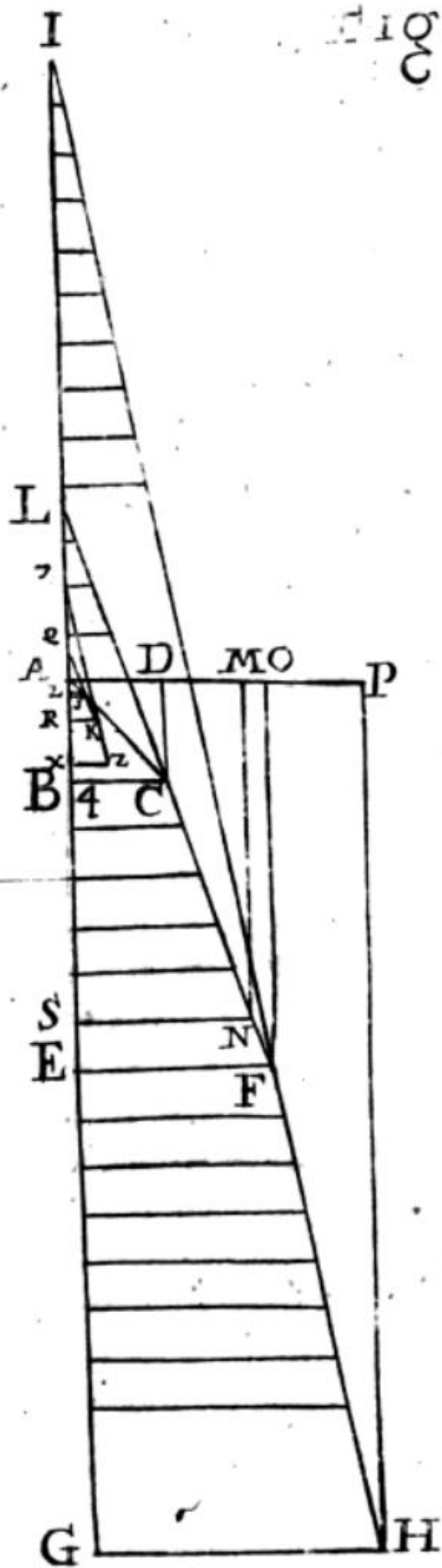
E abenchè sia mio proposito di non più rispondere ad assurdi; con tutto ciò avendo inteso aver egli detto, che se il mio problema fosse vero, ne verrebbe, che il curvo avesse proporzione con il retto. Voglio facendo a me stesso questa Opposizione dimostrarli, che dalle mie proposizioni ne avviene tutt' il contrario, l' Opposizione è la seguente.



M

OP.

Fig: VIII



OPPOSIZIONE⁹³

LA parabola è una linea curva, la quale l'autore dice nella considerazione prima alla sua XI. Proposizione, che costa d'infiniti pezzi d'ipotenuse, giusto come il cerchio è un poligono d'infiniti lati: ma l'Autore dividendo l'asse AG in parti finite, e terminate, cioè in nove parti uguali ad AB , le tre linee AC , CF , ed FH vengono ad esser rette, dunque il retto, e curvo è una medesima cosa, mentre la parabola $ACFH$ vien costituita dalle tre linee AC , CF , ed FH , dunque bisogna dire, che l'Autore abbia ritrovato la proporzione fra il curvo, ed il retto, o che $ACFH$ sia una figura rettilinea irregolare, e perciò non sia parabola, mentre non è linea curva.

A questo brevemente si risponde, che questo modo di poterli considerare la parabola composta d'infiniti pezzi d'ipotenuse, e insieme da linee rette finite, e terminate in numero, è un grand'vantaggio, che ci arreca la forma, con la quale Galileo ci ha insegnato descrivere la parabola, determinando con i numeri le linee, le quali cadono agli estremi delle radici di numero intero, cioè le parti dell'asse da i numeri impari, e le applicate da i pari; perchè da questo ne viene, che considerandosi l'asse della parabola diviso in parti infinite, la parabola costa di infiniti pezzi di ipotenuse, e che considerandosi poi l'asse diviso in parti finite, e terminate da i numeri impari, la parabola costa di determinato numero di linee rette, e che appunto questa proprietà, che ha la parabola, cioè di poterli considerare come composta da determinato numero di pezzi di ipotenuse, e da infinito numero di esse, è la cagione per la quale la parabola si quadra; e faremo altresì vedere, che non solo da questa proprietà della parabola non si deduca la proporzione fra il curvo, ed il retto, ma che da questa proprietà si deduca la cagione per la quale non vi puol essere proporzione fra curvo, e retto, e si dimostra che il cerchio non si puol quadrare, e che sia un problema per sua natura impossibile; ed eccone la pruova nella quale si vedrà quanto giovi considerare da Metafisico le proprietà Geometriche.

Dico

Dico dunque non poterfi dubitare, che descrivendosi la parabola nel modo insegnato da Galileo, e dividendosi l' asse in parti finite, e terminate, la parabola non si componga di numero determinato di pezzi d' ipotenufe, senza lasciare d' esser parabola; perchè se è vero, che le linee si considerano per le proprietà ferme, e costanti che anno, quando la figura $ACFH$, la quale si compone dalle tre linee rette AC , CF , ed FH , ha l' istesse proprietà, che nella parabola si considerano, ella potrà nomarsi parabola.

Ora che abbia l' istesse proprietà, le quali nella parabola si considerano, è evidente, perchè proprietà della parabola è, che il quadrato dell' applicata sia uguale al rettangolo fatto dalla parte dell' asse, e dall' intercetta; cioè che l' applicata sia media proporzionale fra la parte dell' asse, e l' intercetta; ed io alla Proposizione prima di questo libro ho dato l' asse della parabola diviso in parti finite, e terminate, e alla considerazione prima della medesima Proposizione ho dimostrato, che tutte le parallele intercette fra BC , e GH siano medie proporzionali fra l' unità AB , e le parti dell' asse; dunque sono applicate, e perciò $ACFH$ è parabola, quantunque costi di determinato numero di linee rette, cioè di pezzi d' Ipotenufe.

Ed è da avvertirsi, che le applicate intercette fra BC , e GH sono certamente infinite, e tutte corrispondenti all' unità AB , perchè non solamente dividendosi la DP in parti infinite, siccome ho fatto nella prima proposizione, ma prendendosi sempre medie proporzionali, come fra AB , ed $A4$. le quali si segnano sopra la linea AP , che chiamo linea delle radici, come per esempio AM media fra l' unità AB , ed AS , le parallele verranno infinite, e perciò saranno applicate.

E se all' incontro si prende per parametro la quantità $A2$. che suppongo indivisibile, l' asse AG viene diviso in parti infinite, e la parabola $ACFH$ costa d' infiniti pezzi d' ipotenufe, e quindi è che la parabola ha giustamente la proprietà della linea retta, perchè la linea retta si puol considerare divisa in parti finite, ed in parti infinite, e nella parabola se si considera l' asse diviso in parti finite, la parabola si compone di numero determinato di linee rette, ed è una figura composta di rette linee; e se l' asse si considera diviso in parti infinite, ella si compone di numero

mero infinito di linee rette, cioè di pezzi di ipotennuse, ed è una curva : e questa gran proprietà è quella , che ci ha dato aggio d'iscoprire il modo con il quale Galileo c' ha insegnato di descrivere la parabola, determinando con i numeri impari le porzioni dell' asse, nelle quali cadono le applicate, che nascono da' numeri pari, ciò che non s' ottiene con gli altri modi di descrivere la parabola, perchè in quelli si considerano solo in astratto le proprietà indifferentemente in ogni punto della parabola , e questa è stata la cagione , per la quale io ho eletta per base , e fondamento della mia invenzione questa parabola, che chiamo Galilaica .

Farò veder ora, siccome ho detto, che non solo si deduce dalla mia invenzione la proporzione fra il curvo , ed il retto , ma si dimostra , che questa proporzione sia impossibile a trovarsi , e che perciò la quadratura del cerchio sia un problema insolubile, e per pruova dirò prima la cagione , per la quale la parabola si quadra, la quale è giustamente quella per la quale si conosce, che il cerchio non si puol quadrare , e che sia così .

La parabola si quadra, perchè ha la proprietà simile a quella della linea retta , cioè se il suo asse si considera diviso in parti infinite , ella si compone d' infiniti pezzi d' ipotennuse , ed è simile al cerchio, il quale secondo Archimede è un poligono d' infiniti lati, e se il suo asse si divide in parti finite , e terminate, ella ha la proprietà della linea retta , cioè che si considera divisa in parti finite ed infinite ; ond' è che avendo la natura del finito, e dell' infinito , o del curvo , e del retto, prendendosi come finita, ella si quadra.

Il cerchio all' incontro è una figura , la quale è solamente infinita, ne mai si puol considerare come finita , perchè se il poligono si considera di lati determinati in numero , egli non è più cerchio , perchè i lati del poligono , facendo fra loro angolo quanto si voglia ottuso , tutte le parti del poligono non sono più ugualmente distanti dal centro , e perciò non è più cerchio; dalla qual cosa si deduce, che solamente sia circolare perfetta quella figura, la quale è solamente infinita in se stessa, ne mai si puol considerare come finita .

Da questo poi ne avviene, che come infinito, non avendo veruna delle sue parti relazione con alcuna cosa finita, la mente umana la

na la quale per lo mezzo delle relazioni solamente misura le cose finite , non possa paragonare il cerchio a veruna cosa finita , e terminata ; e che perciò non possa esser misurato da altro , che da se stesso ; e quindi è che solamente dalla nostra immaginazione si divide in gradi, ma non si puole in esso assegnare principio , ne mezzo, ne fine: e questa è la cagione per la quale il cerchio non si puol quadrare .

Possono i miei stimatissimi Oppositori considerare in questo modo di osservar la natura delle cose Geometriche da me praticato, che sia vero quello , che io ho detto nella Prefazione , cioè che la Metafisica devesi studiare con ordine Geometrico , e la Geometria devesi considerare da Metafisico , e non già andar ritrovando la proprietà delle curve per lo mezzo del pratico calcolo, senza considerarne con la mente l' intima, e vera natura.

Evvì anco una seconda Obbiezione del Signor Giacinto di Cristofaro , la quale egli hà a tutti appalesato ; questa si è , che i cubi delle applicate si ritrovano nella parabola cubica ; ma perchè quella è l' istessa obbiezione che hà fatto il Signor D. Bartolomeo Intiero, sendosi questi due grand' ingegni incontrati, non sono tenuto di dare a lui altra risposta , che quella istessa che ho data al medesimo Signor D. Bartolomeo a carte 88., la quale si restringe a pregare il mio Oppositore a stare sopra la mia Ipotesi , la quale è di ritrovare i cubi delle mie applicate nell' istessa applicata prodotta.

I L F I N E .

AL SIGNOR

D. PAOLO-MATTIA
DORIA

ANTONIO MONFORTE.



ON ammirazione, e profitto hò lette, e considerate le Dottissime, e sottilissime Vostre invenzioni mio stimatissimo Sig. D. Paolo, ed ho in quelle ammirato quanto felicemente avete ritrovato, e dimostrato quello che tanti grandi Homini, i quali nelle dotte antichità fiorirono, han cercato, senza poterlo ritrovare.

E spero, che con altri molti ritrovati, de' quali la sua gran mente è capace, non cesserà d'arrichire la Repubblica letteraria. Per le opposizioni, le quali mi dice le siano state fatte, forse perchè essendo cose nuove, e lontane da quelle, alle quali semo assuefatti, la preoccupazione opera in noi, ch' l'estimiamo stravaganti. Onde poi nasce la credenza, che non siano vere, e la voglia di volerle oppugnare; se stimo si ricorderà benissimo, che quando mi disse, che tutte le applicate nella Parabola erano in propor-

N

zione

niti punti d'una linea determinar quelli, che vengono a proposito al proposto problema, e tralasciar gli altri, come inutili: Vedo, che V. S. non ha stimato necessario dover esplicar più minutamente queste cose, supponendo, che bastasse il dire, che si serviva della parabola descritta ad imitazione di Galileo, perchè quando s'avesse voluto servire indifferentemente di tutte le applicate, così de' numeri pari, come degl' impari, non avrebbe poste queste differenze, avendo tutte le parabole generalmente le medesime proprietà, come sa ogn' uno versato nella Geometria.

E' similmente ingegnosa, e dotta la risposta, che V. S. ha fatta all' altra opposizione, con la quale si pretendeva provare, che li cubi non potessero terminare nelle rette stabilite per loro limiti, e perciò a loro arbitrio alzavano alcune linee, che facessero angoli acuti con le applicate alla parabola, prodotte sino alle linee termini de' cubi; perchè quando queste linee formano quegli angoli, che gli avversari a loro arbitrio vogliono, potrà un' altro dire, che in vece d'angoli acuti li vuole retti, e quando questa linea poi avesse da esser il termine de' cubi, ne seguirebbe, che cubi di radici diverse, dovessero essere tra loro uguali, lo che è impossibile; Dunque bisogna, che quelle rette non si pigliano a caso, ma debbano passare per li punti stabiliti per i termini de' cubi.

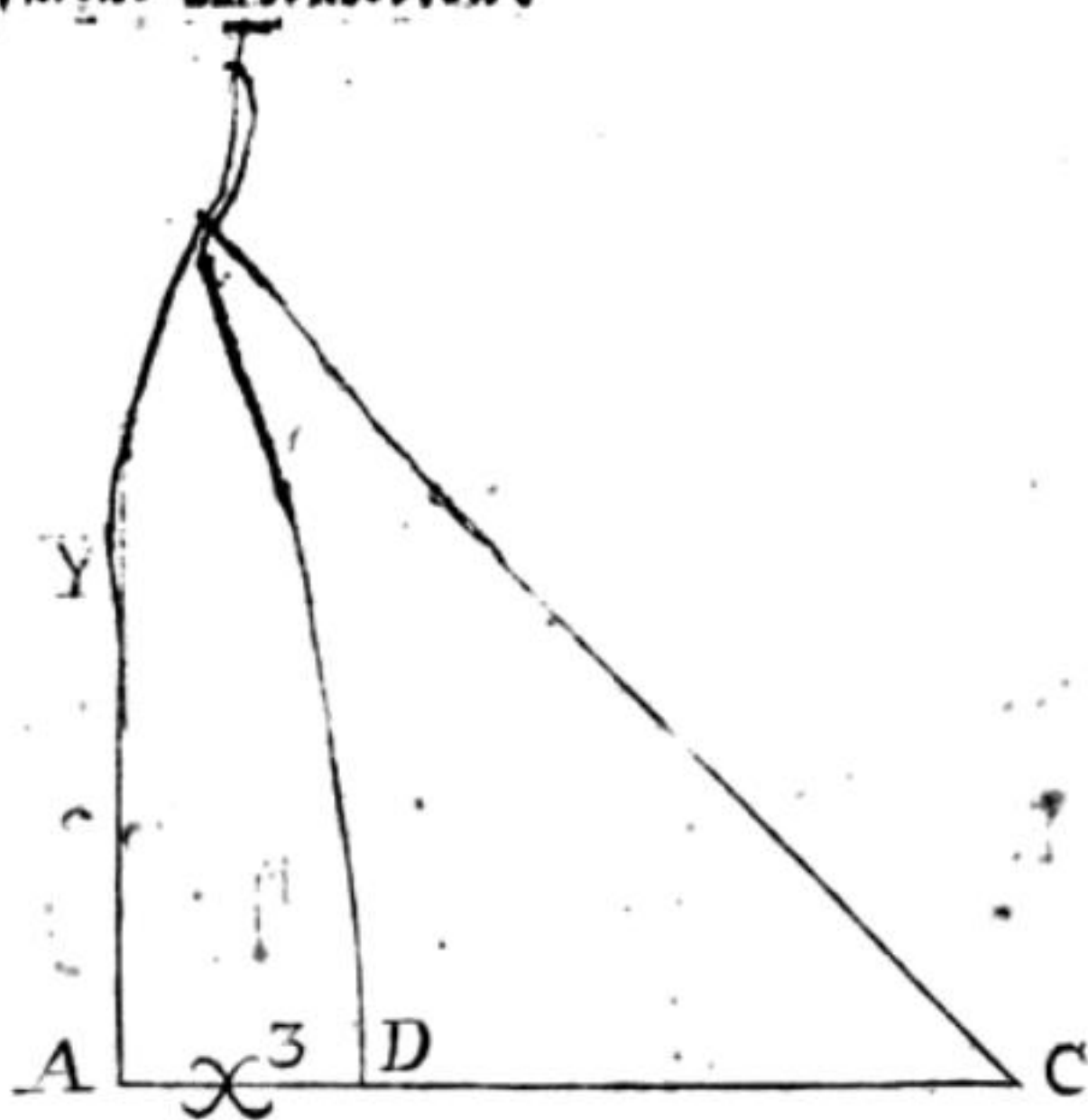
Per quel che altri dicono, che le linee sono linee, le superficie sono superficie, e li corpi corpi, e che V. S. chiamandole tutte linee non faccia bene: mi meraviglio, come quel che a Platone, e a Renato viene attribuito per ritrovato divino, in V. S. sia notato per errore, e sarebbe facile ad ogn' uno, che sa la differenza delle quantità continue, e discrete, attribuendo a quelle l' unità, far che convengano assieme, e così per quadrato non s' intenda altro, che una linea, la quale nella proporzione geometrica cade nel terzo luogo dall' unità, per lo cubo nel quarto, e così degli altri sopra solidi usati nell' Algebra, avanzando sempre un' luogo secondo le potestà loro crescono.

Con gl' istessi principi ha dottissimamente sciolte tutte le altre opposizioni, che nascono dall' aver quelli fatte le applicate a loro modo, e non secondo la descrizione fatta ad imitazione di Galileo, ma da V. S. ridotta a Geometrica, considerando l' asse della parabola diviso secondo l' ordine de' numeri impari dalla unità, e la parallela all' applicate, divisa in parti uguali, lasciando da parte ogni
con-

considerazione de' corpi , e de' loro moti .

Ha piaciuto estremamente agli amici più intendenti la dimostrazione che V. S. ha fatta , che le linee cubiche terminano tutte nell' Ipotenusa del triangolo rettangolo , il quale ha la base al perpendicolo uguale , appunto come dimostra delle linee quadrate , che non solo terminano all' ipotenusa di un simile triangolo , ma che siano in proporzione *Aritmetica* ; Perchè siccome nella parabola piana il quadrato dell' applicata è uguale al rettangolo fatto dalla porzione dell' asse nel parametro, che V. S. pone esser l' unità , e però la porzione dell' asse , la quale è il perpendicolo del triangolo posto uguale alla base, la quale diviene uguale al quadrato dell' applicata , e ciò cammina in tutte le parallele alla base, sino alla cima del triangolo: Onde tutte sono quadrati, & in *Aritmetica* proporzione,

Lo stesso è de' cubi , considerando in luogo della parabola piana la cubica , la di cui proprietà è , che il cubo dell' applicata sia uguale al solido fatto dalla porzione dell' asse nel quadrato del parametro similmente preso per unità , e così essendo la porzione dell' asse cubo, anche la base del triangolo a quella uguale sarà cubo, e tutte le parallele alla base terminate dall' ipotenusa saranno cubi, & in *proporzione Aritmetica* .



Lo che

Lo che con molta facilità ancora per la via analitica si dimostra, perchè essendo il cubo dell' applicata AD , che chiama x , uguale al solido della porzione dell'asse BA chiamata y nel quadrato del parametro. a preso per unità, auremo la equazione $x^3 = a a y$, o vero $x^3 = y$, e perchè la porzione dell'asse, o vero perpendicolo del triangolo è stato fatto uguale alla base AC , sarà anche x uguale alla base AC , e perchè il punto A si può pigliare in ogni luogo dell' AB , tutte le parallele alla base sino alla cima del triangolo saranno cubi, et in Aritmetica proporzione.

Questa dimostrazione si è fatta per soddisfare anche con il calcolo a quelli, che stimavano impossibile, che i cubi potessero terminare nell'ipotenusa del triangolo rettangolo, benchè nel suo dottissimo trattato ciò l'abbia spiegato in altro modo.

L'ingegnossima riflessione, che ha V. S. fatta su quello, che quando le radici sono in proporzione Aritmetica, nella medesima sono le altre potestà, se non che nelle radici, ciò si vede nella prima differenza, ne' quadrati nella seconda, ne' cubi nella terza, e così nelle altre, secondo l'ordine de' loro esponenti, che mi ha fatto l'onore inviarmi, ed è a mio credere degna, che se ne facesse un trattato a parte, contenendo principj feracissimi d'altre conseguenze ammirabili.

Si potrebbero fare altre curiose considerazioni, ma bisognerebbe uscire dai termini d'una lettera, e formarne un libro intiero, per la qual cosa facendo a V. S. riverenza, la priego continuarmi l'onore de suoi comandi. Nap. 5. Settembre 1715.

Errori più notabili, che si sono possuti avvertire nella presente Edizione.

ERRORI.

Pag. 1. lin. 8.
parallele a D F
Linea 19.
è D F
Fol. 2. num. 14. lin. 1.
M N asse, o vero
Fol. 3. num. 18. lin. 8.
fra B C, e D E
Num. 24. lin. 2.
N B 1., a P L 2.
Fol. 4. num. 25. lin. 13.
parabole A D R ad
Num. 26. lin. 19.
sono proporzione
Fol. 5. num. 33. lin. 25.
da B B fino
Num. 34. lin. 31.
punto estremo della R
K 2.
Num. 38. lin. 6., & 35.
della B C
alla N F
Num. 39. lin. 14.
Proposizione VI.
Num. 40. lin. 5.
fra e 27.
Fol. 7. num. 53. lin. 28.
reso Geometrico
Num. 53. lin. 35.
se si vuole
Fol. 8. num. 63. lin. 22.

CORREZZIONI.

parallele a D C
& E F
M N, o vero
fra B C, e D M
N B 1., a P C 2.
parabole A P R, &
sono in proporzione
da B C fino
punto estremo K della R K
uguale ad R. 2.
della B G
alla B F
Proposizione XI.
fra 1. e 27.
resa Geometrica.
se si vuole

sottrae

sottrae tre volte è 3.
 Fol. 9. num. 73. lin. 30.
 ma era come D E ad I N
 Fol. 11. num. 84. l. in. 10.
 F Z farà $8 \frac{1}{2}$
 Num. 85. lin. 31.
 esta
 Num. 87. lin. 2.
 alla parabola A F
 Num. 87. lin. 8.
 sia $M=a$. ad $A B=X$ $B D=Y$
 Num. 87. lin. 11.
 farà $X^2 = yy$ o vero $\sqrt{X}$.
 $^2 = yy$ dunque
 Fol. 12. num. 9. chiamata
 questo
 Num. 94. lin. 2.
 dividendosi l'esse

sottrae tre volte è 6.
 ma era come D E ad M N
 F Z farà $8 \frac{1}{2}$
 resta
 alla parabola A C
 sia $M=a$. $A B=X$. , $B D=Y$
 farà $X^2 = a yy$, o vero $X^2 = yy$,
 o vero $\sqrt{X}^2 = y$, dunque
 rimangono.
 dividendosi l'Assc.



784030



