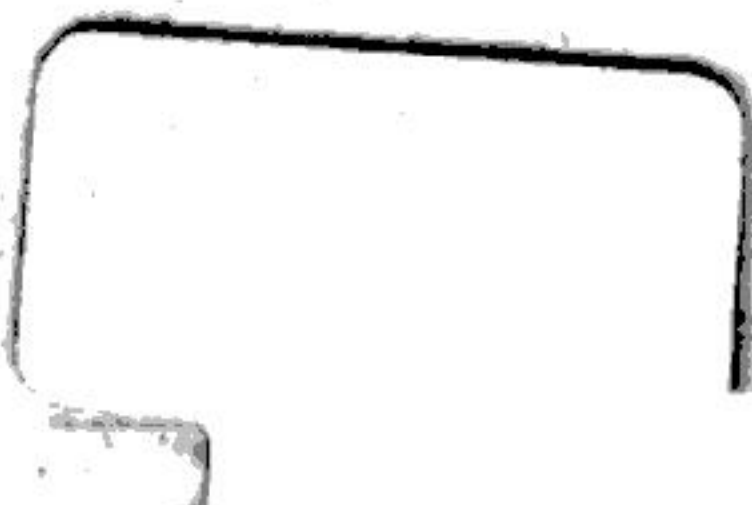


MA



QA.
35
.D71

DISSERTAZIONE

DI

PÀOLO-MATTIA^{eo}

DORIA

INTORNO ALLA NUOVA GEOMETRIA

DI

CARTESIO

Con una Raccolta di tutte le dimostrazioni, e considerazioni dell'Autore, pubblicate in varij tempi, ed in varie Lettere, a fine di dimostrare geometricamente, che la Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che da Geometri se l'assegnano.

Coll' aggiunta d' altre nuove considerazioni, e d' altre nuove obbiezioni, e risposte.



VENEZIA MDCCXXI.

Con licenza de' Superiori.

15th April 1922

11

PROFESSOR

100

100

11

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

100

AVVERTIMENTO AL LETTORE.



Vantunque sia avvenuto alla novella Inven-
 zione **DELLA DVPLICAZIONE DEL**
CVBO da me ritrovata quello, che avvenir
 suole a tutt'i nuovi grandi ritrovati cioè, che
 i signori moderni Geometri, ed in particolare
 i seguaci, e promotori della geometria Carte-
 siana, si siano dati a dividere un poco renitenti a ricever per
 vere le mie dimostrazioni. Io però non devo lasciar d'impiega-
 re tutto il mio studio, acciò le cose da me scritte, e pubblicate
 intorno alla da me accennata Invenzione della *Duplicazione*
 del Cubo, passino tutte intere alla notizia de' posteri; per-
 che sendo quelle in tutto vere, mostrerei di poco curar la fa-
 ma del mio nome, se le lasciassi andar trasandate; la qual co-
 sa, a mio credere, mi si dovrebbe imputare a difetto, essendo mio
 sentimento, che la passione verso la gloria del proprio nome,
 sia frà quelle virtù umane, che sono agli uomini, ed alla Re-
 pubblica utilissime, da riputarsi. In conseguenza dunque di que-
 sta massima hò risoluto di far ristampare tutte unite quelle cose,
 che in varj Trattati, ed in varie Lettere hò pubblicato intorno
 alla *Duplicazione del Cubo*. In tanto, perche l'Opera richiede
 qualche tempo per terminarsi, hò creduto util cosa essere lo
 pubblicare anticipatamente i due seguenti primi Trattati del-
 la mia Opera, come quelli, ne' quali fò manifestamente co-
 noscer l'abbaglio, che han preso i signori moderni Geometri,
 quando, cedendo ad alcune estrinseche, ed apparenti ragioni di
 Renato des-Cartes, si son lasciati indurre a ricevere per li-
 nee geometriche le curve d'Apollonio. A tal fine dunque nella
 seguente *Dissertazione* fò chiaro anco con argomenti dal retto
 senso solamente dedotti, la vanità delle ragioni da Renato ad-
 dotte per giustificare le curve d'Apollonio. Nella Raccolta
 poi geometricamente dimostro in più modi, che le curve d'
 Apollonio non hanno le proprietà, che da esso se le assegnano;
 ed a cagion d'esempio; avvalendomi del Metodo degl'indivi-
 sibili, dimostro sino alla pagina 13, che il luogo delle radici
 delle

delle ascisse dell' asse non è alla Parabola, come vuole Apollonio, ma alla linea retta CE della figura prima, seconda, e terza. Dalla pag. 13 poi sino alla pag. 34. espongo una quantità d' opposizioni, d' ogni una delle quali non solo ne dimostro l' insuffistenza, ma fò chiaramente conoscere, che ogn' una di quelle serve di nuova pruova alla mia proposizione, ed in particolare quella, che si legge alla pag. 16 verso il fine; perche rispondendo a quella mi avvalgo di un calcolo, per il quale fò sensibilmente conoscere, che il luogo delle radici delle ascisse dell' asse sono le linee rette CE, EG, GL della fig. IV. Dopo le da me accennate obbiezioni sembrami, che ogn' uno possa persuadersi, che non vi possa essere obbiezione valevole a distruggere proposizioni geometricamente dimostrate, come certamente son le mie. Con tutto ciò, se compariranno altre obbiezioni di persone degue nel seguito di questa Opera, non lascerò di pubblicarle. Dalla pag. 34 sino alla pag. 41 verso il fine, fò tre, o quattro altre dimostrazioni del mio assunto, tutte appoggiate ad Euclide, e ad Archimede. In somma dimostro il mio assunto in più di sette modi diversi; ne questo dee recar meraviglia a' signori Geometri, i quali reputano difetto la lunghezza nel dimostrare, e la molteplicità delle pruove; perche questa regola generale non vale nel mio caso particolare, a cagione, che avendo io a fare con una moltitudine di Geometri, tutta da lungo tempo prevenuta del contrario di quello, che io dimostro, devo a tutto potere affaticarmi di convincerli in varj modi, e di far sì, che formino un abito di mente intorno alla verità, che io dimostro.

Ma invero io non solo non mi son contentato in questa Raccolta di dimostrare in tanti modi, quanti son quelli, che hò detto, CHE LA PARABOLA APOLLONIANA NON HA LE PROPRIETÀ, CHE SE LE ASSEGNANO, ma hò dimostrato geometricamente, che non si puole descrivere, e che per ciò la descrizione meccanica non dà, a similitudine del cerchio, costantemente i punti del perimetro, come si sono vanamente lusingati i nostri signori moderni Geometri. Questo si legge dalla pag. 41 nel paragrafo che comincia, dopo questo sembra, sino alla pag. 48 verso il fine, ed in particolare alla proposizione
alla

alla pag.44 : Ed in vero posso certamente asserire , che chi leggerà questa proposizione solamente, potrà rendersi certo della vanità di quello, che Cartesio ave asserito intorno alle curve .

Dalla pag.poi 49 sino alla 53, fò a me stesso alcune obbiezioni attinenti alla Fisica, nelle quali dimostro , che la vera linea de' corpi projecti è quella , che si compone dalla sezione del perimetro di due miei Rettilinei, cioè, dalle linee AL, LR, della fig.XII. Alcorto sembrami , che se la dimostrazione può ritrovar luogo nella mente umana posta a confronto della prevenzione di mente , e delle passioni; i signori Geometri non possono a meno di confessare il vero delle mie dimostrazioni . Riman dunque , che vogliano degnarsi di leggere i due seguenti Trattati, e per mezzo di quelli disporre il loro animo a riconoscere per vera la Duplicazione del Cubo da me ritrovata , la quale nasce per conseguenza delle proposizioni , che in questa Raccolta si contengono .

Si sono poi notati quì appresso alcuni errori , occorsi nella stampa , i quali son quelli soli, che si son potuti notare nel breve tempo, che s'è avuto per pubblicare anticipatamente i due seguenti Trattati; quando poi si publicherà tutta l'Opera, si farà diligente correzione .

Errori

Correzione

NELLA DISSERTAZIONE

pag.11.vers.11. gl' nntichi ri- putorono	gl' antichi non riputorono
---	----------------------------

NELLA RACCOLTA:

pag.5. vers.18. punto estremo dell' asse .	punto estremo dell' ascissa dell' asse
pag.7.vers.24.che le radici in- finite	Che le parallele infinite
pag.7.vers.27. radici dell' asse	radici delle ascisse dell' asse

COLLEZIONE DI LETTERE

DELLA BIBLIOTECA

DISSERTAZIONE

I N T O R N O

ALLA NUOVA GEOMETRIA

D I

C A R T E S I O

Nella quale s' accennano i danni, ch' ella hà prodotto nello studio della Geometria; ed in conseguenza di ciò, ancora in quello della Filosofia, e della Morale .



DISSERTAZIONE

I N T O R N O

ALLA NUOVA GEOMETRIA DI CARTESIO.



Quando mi volgo con la mente a considerar la cagione, per la quale la mia novella Invenzione da me pubblicata la prima volta l'anno 1714., e tutta a geometrica dimostrazione appoggiata, non sia stata ancora per vera da verun geometra, fuorché dal celebre Sig. D. Antonio Monforte, confessata; non sò in vero, a che debba di sì fatta ripugnanza de' signori geometri attribuir la cagione: Imperciocché, se io voglio ricorrere alla generale cagione, cioè della poca fortuna, che, sempre incontrano, ed hanno incontrato le novelle Invenzioni; sembrami far troppo gran torto alla sapienza del nostro secolo; perchè l'evidenza, che nelle dimostrazioni geometriche si contiene, ha forza di condurre la mente a conoscere il vero, almeno in progresso di tempo; donde ne avviene, che il fumo delle passioni non sia bastante ad adombrare una mente, che sia sufficiente in Geometria, per modo che non conosca una verità dimostrata. E che ciò sia vero, si sa, che frà gli scienziati uomini sempre si è sì di tutte le materie disputato, ma non si legge, che sia ancor accaduta fra geometri una lunga disputa in materia di pura Geometria; perchè, se per avventura è avvenuto, che un geometra si sia all'altro opposto, in virtù della risposta, o l'oppositore si è dichiarato soddisfatto, o l'inventore convinto. Mi è dunque d'uopo, dico fra me stesso, ricorrere a qualch'altro principio diverso dal generale destino degl'Inventori, acciò possa indagar la cagione di quella universal ripugnanza, che i signori moderni matematici mostrano nell'approvare la mia novella Invenzione; e ciò dicendo, vedo, ch'egli è necessario, ch'io di qualch'altra colpa sia reo, la quale più, che le novelle invenzioni, offenda l'animo della gran parte de'

A

signo

signori moderni matematici ; e sù di ciò pensando conosco , che più , che la figura d' Inventore , nella quale son comparso nella letteraria Repubblica , offende il lor animo l' idea , con la quale mi mirano d' uno Innovatore , che intraprende di distruggere la loro novella Geometria : ed invero evvi molta differenza fra gl' Inventori di nove cose , e quell' Innovatori , che pretendono distruggere quei metodi già dall' universale consentimento di tutti per veri ricevuti ; perche i primi muovono bensì la passione dell' invidia , a cagion di quello , che nostra mente poteva ritrovare , e che conosce non essere stata sufficiente a ritrovare ; ma i secondi ci privano di quella sapienza , che stimavamo già nostra , e ci rimproverano i nostri errori . In conseguenza dunque di queste considerazioni , sembrami di aver discovered la cagione del silenzio , che i signori moderni geometri Cartesiani ostentano di fare , a riguardo della mia novella Invenzione : perche in vero io hò mosso guerra a quelle curve d' Apollonio , che poco men , che tutti i signori moderni geometri persuasi (e mi perdonino pur essi) da alcune poche apparenti , ed estrinseche ragioni da Renato des-Cartes addotte , han ricevute per linee geometriche al pari del cerchio ; e non solo le hanno per linee geometriche ricevute , ma sù di quelle han fabricato numero quasi infinito di novelle invenzioni , tutte al scoprimento di nuove curve indirizzate , per modo tale , che in tutti i loro libri han ragionato con termini , se non di positivo disprezzo , almeno di compassione verso gl' antichi geometri , i quali avendo avuto notizia delle curve d' Apollonio , non si sono avvisati di proseguire , e d' ampliare una , a lor dire , così ingegnosa , così ferace , e così utile dottrina , come è quella delle curve . Oltre a ciò , io mi sono fortemente opposto all' Algebra speciosa , che Renato hà sì fattamente vantato , e per la quale ave ottenuto di far sì , che la maggior parte de' signori moderni geometri , obbliando il metodo sintetico , si siano in tutto applicati a i calcoli analitici ; e mi sono altresì opposto a tutti i nuovi metodi da moderni inventati , ed a nuovi calcoli appoggiati : In somma opponendomi io alla dottrina delle curve , a i calcoli analitici , ed a i nuovi metodi da moderni inventati , hò intrapreso di far crollare le fondamenta , sù delle quali la più gran parte de' signori moder-

derni matematici han fabricato la mole della lor gloria ; e tutto ad un tempo mi son fatto incontro alla licenza , che hanno introdotto nella Geometria , corrompendo la purità della costruzione , e della dimostrazione geometrica .

Ora sù di queste considerazioni sembra , che 'l mio animo incominci ad acquietarsi al silenzio , che i signori geometri usano , a riguardo della mia novella Invenzione ; perche , alla perfine , per quel che s' attiene a' seguaci della nuova geometria di Renato , ed agl' Inventori di nuovi metodi di calcolare , e di nuove curve , sembra , che io abbia meritato il titolo d' Innovatore ; ma dall' altra parte , se considero quello , che hò fatto nella mia novella Invenzione , mi pare , che almeno quelli , i quali non sono autori , ne maestri nella nuova geometria de' moderni , non mi dovrebbero riguardare coll' odioso titolo d' Innovatore , ma anzi mirarmi come un Ristauratore del metodo geometrico degl' antichi : Imperciocche la mia Duplicazione del Cubo è tutta ad Euclide , e ad Archimede appoggiata , e benche m' avvaglia in qualche dimostrazione del metodo degl' Indivisibili di Bonaventura Cavalerio ; in quel metodo però non vi è licenza , che ad Euclide ripugni , ciò che non si esperimenta nella nuova geometria de' moderni : Oltracciò io sono il difensore del metodo di Euclide , da molti de' signori moderni insultato ; ed in pruova di ciò leggansi i miei Dialoghi stampati in Amsterdam l' anno 1718. e si vedrà , che io difendo con sode ragioni il metodo di Euclide da i moderni insultato ; mostro quanto sia conforme alla naturale ragione , e quanto valevole a formare una mente abile a distinguere nelle cose tutte il vero dal falso , ed a formarla esatta , ed industriosa tutta ad un tempo , ond' è , che io sono il difensore della Geometria degli antichi ; per la qual cosa egli è a gran torto , che mi si attribuisca il titolo d' Innovatore .

Da tutte queste considerazioni persuaso , sembrami , che a me avvenga quello , che è avvenuto a tutti coloro , i quali se son' fatti 'ncontro agl' abusi radicati ; e sembrami , che avvenga alla mia novella Invenzione , co i signori moderni seguaci della nuova geometria quello , che avvenne all' Imperadore Elio pertinace con i soldati romani , quando alla quasi perdita di
sci.

disciplina dell' Esercito si fece incontro; perche siccome quelli punirono ingiustamente colla morte la forte, ed onorata impresa di quello Imperadore; così i signori moderni matematici Cartesiani, la mia vera Invenzione all' obliuione condannando, pensano intutto estinguerla. Ma alcerto io mi fò rosso, e mi vergogno d' assimiagliare a' licenziosi soldati, i morigerati uomini di lettere. Imperciocche la disciplina di questi ultimi in altro non consistendo, che nella libertà dell' animo, e nella sincerità de' costumi; non si può senza grave colpa tacciarli del difetto di men che franchi, e sinceri; laonde io voglio in tutti i modi torre dalla mia mente una sì svantagiosa idea all' onore della letteraria Repubblica. Con tutto ciò però non può negarsi, che, a cagion della mia novella Invenzione, io non sia stato da signori moderni geometri più tosto come pernicioso Innovatore, che come giusto Ristauratore della buona disciplina, e come semplice Inventore estimato.

In pruova di ciò imaginiamo, che in questa mia Invenzione della Duplicazione del Cubo, siccome io hò avuto a far con moderni, avessi avuto a far cogl' antichi geometri, alcerto quei grandi uomini non avrebbero avuto a male esaminare le mie proposizioni, nè avrebbero scritto, come scrisse il Signor Leibnitz in una sua lettera: *Miror, quod de his quæstio instituta fuerit.* Alla perfine gl' antichi geometri, come quelli, che non s'erano, come i moderni, impegnati a sostenere, che le curve d' Apollonio meccanicamente construite avessero esatte, e costanti proprietà; mi avrebbero riguardato bensì come Inventore di nuova, ed importantissima cosa, ma non già come Innovatore, che li riprendeva d' errore; ond' è, che mirato io da quei antichi geometri con idea d' Inventore di nuova cosa, e da tutti desiderata, altra difficoltà non avrei avuto a superare con quelli, se non la naturale prevenzione, che genera nella mente degl' uomini, la grandezza, e la difficoltà del Problema, da me risoluto; ma questa difficoltà, si sarebbe agevolmente superata: Imperciocche quantunque gl' antichi geometri avessero sul bel principio creduto, di non dover, leggendo, ritrovare esattamente dimostrate le mie proposizioni, come elle sono, avrebbero

bero almeno creduto, che io avessi, per lo scoprimento di un tal Problema, ingegnosi mezzi adoprati; ed in conseguenza di ciò, sapendo essi, che, *In magnis voluisse sat est*, avrebbero voluto studiare la mia Invenzione, per vedere, siccome hò detto, se a qualche ingegnoso modo io mi fossi appligliato per condurre a fine la mia impresa: Così dunque quei grand' uomini non avrebbero mai creduto d' impiegare inutilmente il tempo, la mia Invenzione studiando.

Oltre a ciò gl' antichi geometri, i quali non credevano, che le curve avessero proprietà geometriche, non pensavano altresì, che 'l Problema della Duplicazione del Cubo non si potesse risolvere per altra via, che per quella dell' intersezione delle curve; e credendo di non poter limitare con la lor mente, gl' infiniti particolari, che per la soluzione di un problema particolare si possono da geometri pensare, non biasimavano alla cieca, come impossibile, ogn' invenzione, che per la Duplicazione del Cubo, o per la Quadratura del Cerchio si proponea; credevano poi esser utilissima cosa lo studiare le altrui Invenzioni fatte a fine di risolvere gl' accennati difficilissimi problemi; perche avendo essi formato la vera idea del modo, col quale si deve la Geometria studiare, e degl' utili, che può apportare lo studio di quella; molto bene sapevano, che la mente umana riceve, nello scoprimento di un sottile paralogismo, utile non meno eguale a quello, che s' hà dallo scoprire una nuova, e poco importante verità; e ciò a cagione, che la mente umana ritrae ugual profitto dall' imparare ad emendarci, che dal dedurre verità da verità: ed in questa guisa gl' antichi geometri non solo non avrebbero osato rappresentare a' loro discepoli, come vano, ed inutile lo studio delle mie proposizioni, ma gli avrebbero animati a studiarle per vedere se mai avvenisse, che le ritrovassero vere, e sussistenti; o almeno per far, che s' accostumassero a scoprire alcun sottile paralogismo, che forse in quelle si potesse contenere. Così dunque gl' antichi geometri pervenuti bensì della difficoltà di un tanto Problema, ma non già impegnati a sostenerlo per vano, ed inutile, avrebbero proposto a' loro discepoli di studiare le mie proposizioni, i quali studiandole, le avrebbero vere, e sussistenti conosciute.

Quel-

Quella, che hò narrata, è a mio credere, l'istoria di quello, che mi sarebbe con gl' antichi geometri avvenuto: ma io non voglio già essere un così affettato laudatore degl' antichi, che voglia, come quel sempre Laudator temporis acti, persuadere a me stesso, ed agl' altri, che lo scoprimento di un tanto desiderato Problema, quanto è la Duplicazione del Cubo, non avesse ancora, negl' animi di quei grand' uomini, quelli perniciosi effetti prodotto, che la livida invidia negl' animi di tutti gl' uomini suole, a danno degl' Inventori di nuove cose, produrre. Io sò troppo bene, che le passioni sono nate quasi che tutto ad un tempo coll' uomo, e che perciò sono dall' uomo inseparabili; ma sò altresì, che la diversa educazione, i diversi modi, che si usano nello studiar le scienze, e le diverse massime, e i diversi abiti, che dalla prima infanzia s'insiriscono ne' loro animi rendono gl' uomini più, o meno costumati, e con ciò più, o meno dannosi a gl' onorati, e virtuosi seguaci delle scienze, e delle virtù; ed in conseguenza di ciò è da credersi, che quegli antichi uomini non in tutto, dall' impero della livida invidia, esenti, ma nelle loro passioni medesime più castigati, e corretti, che i nostri moderni, avrebbero per avventura, dopò aver conosciuta la verità delle mie dimostrazioni, detto, ch' egli è per accidente, e non per opera d'un ingegno agl' altri superiore, ch' un tal Problema io abbia ritrovato; avrebbero rappresentata la mia Invenzione, come una cosa, ch' era avanti gl' occhi di tutti, e ch' essi si erano dimenticati a cagione, che avevano la lor mente in altre più sublimi specolazioni impiegata.

Io all' incontro avrei risposto, che tutte le cose sembrano facili, dopò che si sono conosciute, laddove eran difficilissime prima di conoscersi: avrei detto, che la natura opera per vie semplicissime, e che per ciò chiunque vuole i difficilissimi arcani della natura scoprire, bisogna che ritrovi quelle vie semplici, ch' ella usa nella formazione delle cose; ma che difficilissima cosa è scoprire la semplice meccanica, che la natura usa nella formazione delle cose tutte; e che lo stesso è, ch' esser ingrati agl' Inventori, il contendere a quelli la gloria, che loro si deve: avrebbero forse detto quelli antichi geometri molte altre cose contro di me, le quali, non m' è possibile tutte pen-

pensare , ma io a tutte quelle mi sarei ingegnato di rispon-
 dere . E' certissimo però , che non avrebbero voluto pregiudicare ,
 a loro stessi , con appalesarsi al Mondo poco intesi di Geometria ,
 mostrando di non intendere la verità delle mie dimostrazioni ;
 ed è certissimo ancora , che dopò aver conosciute vere le mie
 dimostrazioni , non avrebbero osato , come di alcuni è avvenu-
 to , di rappresentare a' loro discepoli la mia Invenzione , co-
 me opera di un' ostinato Visionario , che o non intende il suo
 errore , o non hà coraggio di confessarlo ; perche ciò facendo ,
 avrebbero temuto d' inciampar nella taccia di poco sinceri , e
 di screditare con ciò il lor nome nella mente de' posteri , e de loro
 seguaci medesimi . Ma già che siam giunti a questo passo d' esa-
 minare , s' egli si debba a me , ovvero ad alcuni signori moderni
 matematici questo gran difetto attribuire , cioè , di non aver
 coraggio di confessare il proprio errore : Fie bene , che conside-
 riamo un poco il valore di quelle ragioni , in virtù delle quali i
 signori moderni geometri si sono lasciati persuadere da Renata
 des-Cartes , a ricever le linee curve d' Apollonio per geometri-
 che , le quali gl' antichi geometri hã sèpre riputate linee meccani-
 che : perche in questa guisa conoscendosi il particolare interesse , ch'
 essi hanno di celare la verità delle mie proposizioni a tutti quelli
 moderni geometri , che si sono fortemente appigliati alla geome-
 tria di Renato ; li studiosi di Geometria , ma indifferenti , ed ama-
 tori del vero , non si lasceranno dalle vane , ed interessate asser-
 tive d' alcuni moderni geometri , distornare dallo studio delle
 mie vere proposizioni . Dimostriamo dunque l' errore , nel qua-
 le sono miseramente inciampati i signori geometri Cartesiani ;
 ma prima additiamo l' idea , che delle curve d' Apollonio , eb-
 bero gl' antichi geometri , per poi dimostrare i danni , che nello
 studio della Geometria , e delle altre scienze ancora , l' Alge-
 bra , ed i nuovi calcoli producono . Ragioniamo dunque delle
 curve .

Renato des-Cartes confessa , come si vedrà in appresso ,
 che gl' antichi geometri riputarono le curve d' Apollonio linee
 meccaniche ; ma poscia pretende , che , non ostante che si con-
 struiscono meccanicamente , abbiano le proprietà , che da Apol-
 lonio se le assegnano . Io non so , se Renato abbia pensato , che

B

gl'

gl' antichi abbino creduto, come esso, che le curve d' Apollonio abbiano le proprietà, che se le assegnano; perche egli nel principio del suo secondo libro taccia gl' antichi di soverchi rigorosi in Geometria, ma non si spiega a bastanza intorno a ciò; il certo però si è, ch'egli s' affatica di provare, che sona linee geometriche, con apparenti, e non geometriche ragioni, come meglio farò chiaro in appresso; la qual cosa, a mio credere, non avrebbe egli fatto, se non avesse stimato, come una proposizione quasi dimostrata, e ricevuta da tutti questa cioè: che le curve d' Apollonio hanno le proprietà, che da esso se le assegnano. Comunque la cosa si sia, farò qui appresso chiaramente conoscere, ch' gli antichi mai han creduto legitime dimostrazioni quelle d' Apollonio fatte in conseguenza d' una meccanica costruzione.

Per chiaramente provare, che gl' antichi geometri, come furono Archimede, Pappo Alessandrino, e tutti gl' altri, giamai credettero, che le curve d' Apollonio avessero le proprietà, che dal medesimo se le assegnano; repeteremo un'altra volta le medesime ragioni da noi addotte nella Lettera stampata in Roma l' anno 1721. da noi fatta, e diretta al dottissimo, e gentilissimo Sig. D. Agnello Spagnolo, a fine di appalesare al Mondo i manifesti errori dal Sig. Giacinto di Cristofaro giuriconsulto napolitano commessi in Geometria, nel suo libretto intitolato la dottrina de' triangoli stampato in Venezia l' anno 1720. Possiamo ora a provare il nostro assunto, cioè, che gl' antichi geometri come Archimede, Pappo, e gl' altri, non mai credettero, che le curve d' Apollonio avessero costantemente le proprietà, che se le assegnano.

E' certissimo, che Archimede costruisce il problema delle due mezze proporzionali fra due linee rette date coll' intersezione di due parabole, e che Pappo lo costruisce coll' intersezione del circhio, e della parabola: ma da tutto ciò non si può dedurre, che quegli antichi geometri abbino creduto le curve d' Apollonio avere costantemente, ed esattamente quelle proprietà, che da esso se le assegnano; perche quegli gran uomini avvezzi a rimirare le cose per la lor dritta idea, sapevano troppo bene, che la meccanica costruzione non può vera, ed esat-

esatta dimostrazione produrre; ond' è, che si servirono bensì delle curve, ma se ne servirono in difetto delle linee costruite col rigore d'Euclide, le quali desideravano, che si ritrovassero; e per ciò si servirono delle curve d'Apollonio, come di linee di approssimazione, ma sempre desiderorno di trovare un modo per costruire, e dimostrare col rigore d'Euclide il problema delle due mezze proporzionali. Veniamo ora alla pruova di questa proposizione.

Renato medesimo confessa, come meglio farò vedere in appresso, nel principio del secondo libro della sua geometria, che gl' antichi riputorono linee geometriche le curve d'Apollonio, e con ciò asserisce, che hanno le proprietà, che da Apollonio se le assegnano; e tutto ciò lo asserisce a cagion ch' egli credeva, che in Geometria la costruzione più, o meno esatta non sia necessaria per lo scoprimento delle proprietà geometriche; e che perciò una proposizione meccanicamente costruita potess' essere perfettamente dimostrata. Questa è quella proposizione così strana, e così assurda, che or ora farò conoscere, non aver mai pensato gl' antichi, e per prova del mio assunto, pongo il seguente assioma. Vero in quanto al modo dell'essere di una cosa è quello, che non può essere in altro modo, che in uno. Questo assioma è certissimo, perche tutto ciò, che può essere in più modi, non può esser certamente vero; ed a cagion d' esempio, in virtù di questo assioma son vere tutte le proposizioni di Euclide, nelle quali si dimostra, che una tale proprietà, non può essere in altro modo, che in uno, come per esempio, la quantità di tre angoli di un triangolo, non può essere altra, che uguale a due angoli retti, e lo stesso si dimostra di tutte le proposizioni d'Euclide. Esaminiamo ora, se gl' antichi geometri han mai potuto credere, che le curve d'Apollonio meccanicamente costruite abbiano le proprietà, che da esso se le assegnano. E' certissimo, che gl' antichi geometri mai crederono, che le curve d'Apollonio avessero le proprietà, che se le assegnano, perche se pensorono, che il perimetro della parabola si componeva di un aggregato di linee rette, delle quali non conosceano i punti, per dimostrare la loro vera lunghezza, e costruirle geometricamente; non poteano credere, che il luo-

go delle radici delle ascisse dell' asse potess' essere in altro luogo, che in uno, cioè alla curva; che sia così. Se un geometra avesse ritrovato quei punti, per li quali si possono descrivere, quelle linee rette, delle quali si compone il perimetro della parabola, certamente le radici avrebbero terminato non più alla curva, ma a quelle linee rette ritrovate: se dunque gl' antichi geometri, in virtù della costruzione meccanica, conobbero in generale, che 'l luogo delle radici delle ascisse dell' asse era una curva, cioè la parabola, e che il perimetro di quella si componeva di linee rette, delle quali non conoscevano i punti estremi; certamente non potevano credere, che la curva fusse il luogo dimostrato delle radici delle ascisse dell' asse. Che gl' antichi poi pensassero, che il perimetro della parabola si componesse d' infinite linee rette determinate da' punti da essi non conosciuti egli è certissimo, perche in tutte le lor operazioni, come tale la trattorno; e poi veggiamo, che Archimede fece la quadratura della parabola, supponendola un aggregato di linee rette, perche la credette in genere un aggregato di linee rette infinite; ma egli non è già, ch' Archimede pensasse per ciò d' aver esattamente quadrata la parabola; perche siccome non pensava, che le proprietà, che da Apollonio s' assegnano alla parabola fussero esattamente vere, così supponendole come vere per ipotesi, la quadrò per approssimazione. Ecco dunque chiaramente dimostrato, che gl' antichi geometri credettero, che le curve d' Apollonio, e la parabola in particolare, si componevano di linee rette, ma ciò credendo, mai osarono asserire, che avessero esattamente le proprietà, che da Apollonio se le assegnano, perche se ciò creduto avessero, non avrebbero più desiderato la Duplicazione del Cubo, come l' han sempre desiderata.

Ora quì è da considerarsi, che gl' antichi più moderati; che i moderni nelle loro pretenzioni, non abborrivano di risolvere i problemi meccanici, quando li conoscevano utili alle arti; ma non per ciò osavano dire, come dicono i moderni geometri Cartesiani, che i problemi meccanici sono geometrici; che sia così. Veggiamo, che Archimede si servì utilmente delle spirali nelle sue divine Invenzioni, e di tutte le altre linee,

mec-

meccaniche , e solvè utilissimi problemi nella Meccanica : Ma si lusingò forse per ciò Archimede di aver sciolti geometricamente i problemi meccanici ? certo che nò ; perchè , come hò detto , se avessero creduto geometricamente sciolti i problemi meccanici , non avrebbero più desiderato la *Duplicazione del Cubo*. In somma gl' antichi geometri ponevano tutte le idee nella lor vera classe , ed in conseguenza di ciò nelle cose geometriche facevano uso del perfetto raziocinio , ed accostumavano in quello la mente a conoscere il vero unico ; ne i problemi meccanici poi cercavano l' utile , e si contentavano dell' *approssimazione* .

Ma alle antecedenti ragioni da me addotte , per provare , che la *Parabola Apolloniana* considerata solamente in se stessa , e generalmente , non si dovea così di facile ricevere per linea geometrica , e che perciò gl' antichi geometri mai credettero dimostrazioni quelle d' Apollonio nate dalla costruzione meccanica ; i signori geometri Cartesiani risponderanno , con quei soliti lor argomenti , da Renato addotti nel principio del secondo libro della sua geometria , a' quali poco men che tutti i moderni geometri si sono arresi . Esaminiamo noi prima brevemente quello , che intorno la natura delle curve dice Renato , per poi esaminare in appresso il valore de' suoi argomenti .

Egli nel principio del secondo libro della sua geometria loda gl' antichi , a cagion che seppero distinguere i problemi nelle loro classi: *Veteres optimè considerarunt, quod Geometriæ problematum, alia sint plana, alia solida, alia denique linearia: hoc est, quod quædam eorum construi possint, du-cendo tantum rectas lineas, & circulos; cum alia construi nequeant, nisi ad minimum adhibeatur conica aliqua sectio; ac reliqua denique, quin ad constructionem eorum assumatur alia quædam linea magis composita.* Loda Renato in questo paragrafo gl' antichi a cagion ch' egli ancora nella sua geometria si vede costretto di distinguere i problemi solidi da i piani , e costruire i primi , avvalendosi , come gl' antichi , delle sezioni del cono ; ma non disse , che gli antichi geometri sempre han desiderato di ritrovare una via di costruire i problemi solidi col rigore de' postulati di Euclide , e con ciò liberarsi dall'

dall' obbligo di porre quella distinzione frà gli problemi piani, e solidi, alla quale si ridussero solamente dalla necessità costretti: ed ecco che in questa guisa, già Renato rappresenta, come impossibile, la soluzione de' problemi solidi per la via piana. Indi conoscendo egli, che la sua dottrina poco utile arrecava alla Geometria, se le curve d' Apollonio non si consideravano per linee, le quali avessero costantemente le proprietà, che da Apollonio se le assegnano; pensò d' incolpare gli antichi geometri di cecità, perche aveano dubitato intorno alle dimostrazioni d' Apollonio, e non s' erano affaticati d' ingrandire, ed ampliare quella dottrina delle curve, ch' egli già riputava in tutto legittima, ed utilissima: Verum satis mirari non possum, quod non ulterius lineas hæc magis compositas, in certos distinxerint gradus, nequè etiam planè capio, cur illas potius mechanicas, quam geometricas nominaverint. L' antecedente, ch' abbiamo narrata è l' idea generale della nuova dottrina, che Renato hà preteso di stabilire fra li geometri: ma perche abbiamo poc' anzi narrato le possenti ragioni, dalle quali gl' antichi geometri furono indotti a dubitare delle dimostrazioni d' Apollonio; uopo è ora esaminare il valore delle ragioni, colle quali Renato si è sforzato di stabilire la sua nuova dottrina. Egli asserisce, che in Geometria l' esattezza della costruzione niente importa per condurre all' esatta dimostrazione, in virtù della quale ragione egli pretende di stabilire la seguente ardita proposizione, cioè: che dalla costruzione non esatta, cioè non fatta per i postulati d' Euclide, si possa perfetta dimostrazione dedurre; ond' è, che tratta per strumenti meccanici egualmente il compasso, che lo strumento di Platone, e tutti quei meccanici strumenti, per mezzo de' quali si costruisce solamente per la via de' moti composti: Etenim si dicatur ideò id fuisse factum, quod instrumento quodam, ad illas in plano describendas, uti opus sit, circuli quoque, & rectæ lineæ ob eandem rationem reiiciendæ essent, cum absque circino, & regula, quæ non minus instrumenta dicenda sunt, in charta describi non possint; neque etiam ideò, quod instrumenta, quæ describendis illis inserviunt, utpotè magis composita,

quam

quam regula, & circinus, nequeant esse tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potius repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantum accurata operis convenientia, quæ a manu proficiscitur, desideratur, quam ex Geometria, ubi solum spectatur exacta ratiocinatio.

A questi sì fatti apparenti argomenti si dovrebbe solamente rispondere con estrinseche ragioni; perche alla perfine il dire, che in Geometria, nella quale si considera la quantità, la più, o meno esatta costruzione niente importa per quel che s'attiene allo scoprimento delle particolari proprietà geometriche, è un confondere gl' universali, con i particolari, ed è lo stesso, che dire, che quelle cose, le quali sono le medesime fra esse nel genere, siano anche le medesime nella specie; la qual proposizione è troppo assurda per quelle menti, che mirando da metafisici nella vera natura delle cose, san conoscere, quanto le cose particolari, che convengono fra esse nel genere, possan essere fra esse diverse considerate in particolare: Alla perfine avviene del compasso, e degli stromenti meccanici quello appunto, che diss'io nel libro da me pubblicato contro il libro della dottrina de' triangoli del Signor Giacinto di Cristofaro, cioè, che l' istessa cosa è paragonare al compasso gl' altri stromenti meccanici, a cagion che convengono fra essi nel genere di stromenti, che paragonare un rozzo, ed incolto uomo nato nella Laponia ad un Greco, ad uno Ateniese, ad un Platone, ad un Pitagora, solamente, perche convengono questi col Lapone nel genere di esser uomini. Con tutto ciò però noi vogliamo con intrinseche ragioni far conoscere, come, nel cerchio prodotto dalla descrizione del compasso, si veggono esattamente le proprietà; in vece che non si possono mai vedere nelle linee curve con meccanici stromenti costruite.

La riga, ed il compasso, quantunque siano stromenti, in virtù però dell' operazione, che con quelli si fa, producono le più semplici cose, che da un uomo, da un Angelo, o da qualunque più perspicace creatura si possono immaginare nella quantità; e queste sono la linea retta, e la periferia del cerchio. Ora questa semplicità fa sì, che 'l geometra sia sempre certo del vero luogo di quel punto, che la riga, ed il compasso hanno a lui addita.

ditato; imperciocchè nella riga vi stà designata tutta la linea retta, e nel compasso, che si gira in se stesso, vi stà designato tutto il cerchio; ond' è, che considerandosi anco in astratto un triangolo già formato dalla riga, ed un cerchio già formato dal compasso; il geometra puole dedurre le proprietà; in vece che, se si suppone descritto il perimetro della parabola, il quale addita i punti estremi, delle radici delle ascisse dell' asse per lo mezzo di diverse righe, le quali si girano in diversi modi; il geometra non può mai immaginare quei punti, ne' quali terminano le linee proporzionali, che formano gli triangoli simili, formati dallo stromento meccanico, e ne meno può per lo mezzo dello stromento meccanico esser sicuro del luogo, nel quale terminano le radici delle ascisse dell' asse. Ecco dunque, che la diversità, che vi è fra le linee costruite col compasso, e colla riga, e le linee costruite con gli stromenti meccanici, anco considerata in astratto, ci fa conoscere, che le linee costruite col compasso, e colla riga ci danno sicuramente le proprietà; in vece che le curve costruite con gli stromenti meccanici non dandoci sicuramente il luogo de' punti, a i quali terminano le radici, non ci possono mai dare sicuramente le proprietà, ma questo lo dimostreremo geometricamente in appresso. In tanto vogliamo qui far chiaramente conoscere con quanta diversa idea si debba mirare il cerchio da quella, colla quale si mirano le linee prodotte dagli stromenti meccanici; e per provar ciò, vogliamo far conoscere, che il cerchio è quella figura, la quale in virtù della sua semplicità non può essere in altro modo, che in quello, col quale da noi si descrive, ciò che non avviene delle curve descritte collo stromento meccanico.

La periferia del cerchio è prodotta da una linea retta, la quale si gira sempre uniformamente in se medesima, e girandosi uniformamente in se medesima descrive punti, che sono sempre ugualmente distanti dal centro; e così la periferia si compone da' punti estremi d' infinite linee rette, tutte uguali fra esse, le quali tutte partono da un medesimo punto. Ora questa è quella curva, la quale ha costantemente in ogni punto le proprietà, che se le affognano; e che sia così. Non possono li geometri, nel considerar questa curva, temere, che un'altra più semplice costruzione

zione , che quella del compasso , possa far mutare il cerchio di aspetto, e di figura, perchè non possono dire, che la periferia del cerchio costa d' infinite linee rette , o d' altre linee da noi non conosciute; ma possono sicuramente dire , che il cerchio non può essere in altro modo, che in quello , col quale per lo mezzo del compasso si descrive ; perchè nella semplicissima descrizione del cerchio la mente umana conosce tutta la proprietà del cerchio, la quale, come abbiain detto, è quella d' essere una figura, la di cui periferia costa di punti estremi d' infinite linee rette uguali fra esse , le quali tutte partano dal medesimo punto ; in vece che , come abbiamo dimostrato , sapendo noi , che le curve d' Apollonio costano d' infinite linee rette , possiamo sempre temere , ch' una descrizione più semplice ci possa far conoscere, che le proprietà , che alle curve noi assegniamo, in altra figura si ritrovino : così dunque , tutto ciò , che non è uno nel modo dell' essere , può esser in più modi , e se può essere in più modi , non ha proprietà certe , e costanti . Ecco dunque dimostrata chiaramente , che la costruzione in tutto esatta perfetta dimostrazione produce , in vece che la meccanica costruzione non può esatta dimostrazione produrre . Ma a queste nostre ragioni farà forse qualche mal'accorto geometra Cartesiano la seguente difficoltà , cioè , che Archimede considerò il cerchio come un poligono d' infiniti lati , e che perciò , quantunque il cerchio sia stato descritto dal compasso , potrebbe un qualche geometra ritrovare i lati del poligono , de' quali egli suppone che si componga la periferia del cerchio, in quella guisa, che noi abbiain detto potere avvenire del perimetro della parabola . Ma a questa lieve difficoltà si risponde , che Archimede non mai pensò , nè potè pensare , che la periferia del cerchio fusse un poligono d' infiniti lati ; ma solamente pensò , che il poligono d' infiniti lati , quantunque in tutto diverso dal cerchio, fusse la figura più propria per quadrare il cerchio per approssimazione : nella qual cosa non errò , perchè l' esperienza ci ha fatto conoscere , che i signori moderni colle loro serie infinite non si sono più approssimati alla proporzione della periferia al diametro del cerchio , che Archimede . Dimostriamo ora , che Archimede non mai pensò , che il cerchio fusse della natura

C

di

di un poligono d' infiniti lati .

Si supponga , come vuole l' Oppositore , che il cerchio sia un poligono d' infiniti lati , e si supponga , che si siano già ritrovati li punti , per li quali si possa descrivere questo poligono d' infiniti lati , e che ogni lato di esso sia una quantità minima , quanto si voglia , e che già sia descritto questo poligono ; non perciò questo poligono avrà le proprietà del cerchio ; perchè se ogni lato del poligono non è un punto , ma una linea , le linee rette , che si conducono dal centro a questi lati , non possono esser tutte uguali fra esse : Ma se noi non possiamo ritrovar nel poligono quelle medesime proprietà , che s' assegnano al cerchio , il poligono non sarà della natura del cerchio , ed il cerchio non sarà della natura del poligono . Oltre a ciò , siccome abbiain detto poc' anzi , se la mente umana , o un Angelo non può immaginare una linea più esatta , che quella della periferia del cerchio dal compasso prodotta ; nè meno possiamo noi temere , che si possa giammai mutare nella nostra mente l' idea , ch' abbiamo del cerchio , e delle sue proprietà in quella guisa , che possiamo temere , che la parabola , e le altre curve meccanicamente descritte si possano mutare di figura , in virtù d' una descrizione più esatta di quella , che si fa con lo stromento meccanico ; e che in conseguenza di ciò si trovino in un' altra figura quelle medesime proprietà , che noi assegniamo alle curve . Archimede dunque non suppose il cerchio essere della natura del poligono , ma considerò saggiamente , che il poligono era fra le figure de' lati determinati quella , ch' era la più propria a quadrare il cerchio per approssimazione , e di quella figura inscritta , e circonscritta con mirabil arte si servì per approssimarsi alla quadratura del cerchio : All' incontro suppose , che le curve d' Apollonio realmente si componevano di linee rette infinite , delle quali non si conoscevano li punti , per li quali si potevano descrivere , e perciò a gran ragione , ne Archimede , nè verun degl' antichi volle mai riceverle per linee geometriche . Ecco dunque dimostrato , che le curve meccanicamente costruite non possono mai avere proprietà dimostrate , e costanti ; ond' è , che a torto Renato si duole degl' antichi geometri , a cagion che sono stati renitenti a volere aggiungere a' postulati d' Euclide il seguente

postu-

postulato cioè: Datum conum, dato plano secare. Ed ecco come a torto si duole degl' antichi geometri, dopo aver detto, che appartiene a' meccanici, non a' geometri lo ricercar l' esatta costruzione; Quippè quæ procul dubbio, tam hæcce lineas, quam illas concernens æquè perfectæ esse potest: Neque tandem ea de causa, quod numerum postulatorum suorum augere noluerint; quodque contenti fuerint, modo liceret, data duo puncta recta conjungere linea, atque ex dato cono circulum describere transeuntem per datum punctum. Cum ulterius de conicis sectionibus tractarent. Supponere veriti non fuerint. Datum conum dato plano secare.

Le antecedenti son le ragioni, in virtù delle quali Renato conchiude, che, mal grado la costruzione meccanica, si doveano dagl' antichi geometri ricevere per linee geometriche le curve d' Apollonio: Ma quello, ch' è degno di considerazione si è, che dopo aver egli portato le sue estrinseche ragioni a fine, d' indurre noi a ricever le curve d' Apollonio per linee geometriche, si fa dalla parte degli antichi in ciò, che non han voluto ricever le altre linee più composte, come sono le spirali, e la quadratrice: Anzi dippiù attribuisce la cagione dell' ingiustizia, che gl' antichi han fatto alle curve d' Apollonio, nell' aver prima quelli considerato le accennate curve più composte, le quali egli confessa esser meccaniche, insieme colla Concoide, la Cissoide, ed altre simili Verum enim verò fieri potest, ut scrupulus, e quel che siegue.

Ora qui dimandarei a Renato, qual limite egli poneva alla costruzione per dichiararla legitima, ed abile a scoprirci nelle figure la proprietà: perchè s' egli voleva escludere dalla costruzione geometrica tuttociò, ch' è in diversi modi composto, e ricevere per legitimo solamente quello, ch' è perfettamente semplice, come han fatto gl' antichi, egli dovea solamente ricever la riga, ed il compasso; perchè, se in genere il composto di diversi moti non mostra le proprietà, niuno strumento composto le può mostrare: e s' egli voleva fra gli strumenti composti di diversi moti assegnar quelli, che a suo credere, mostrano le proprietà, dovea geometricamente dimostrare, che le

curve d' Apollonio descritte collo stromento meccanico mostrano esattamente le proprietà ; ma questo egli non solo non lo ha geometricamente dimostrato, ma non ha portato a favore del suo novello sentimento altro , che quelle estrinseche, ed apparenti ragioni da noi accennate, le quali al certo non sono sufficienti per diroccare una legge di Geometria stabilita , com' egli stesso confessa , da tutti gl' antichi geometri ; donde si vede , che bisogna rispettare l' autorità d' Euclide , di Archimede , di Pappo Alessandrino , e di tutti quelli , che fiorirono nella saggia antichità ; perchè , mal grado le estrinseche ragioni da Renato addotte a fine di avvalorar la costruzione meccanica , nella seguente Raccolta io dimostro geometricamente, che le radici, le quali si trovano nella parabola per lo mezzo degl' istromenti meceanici , non corrispondono nell' asse a i punti estremi de' loro quadrati; onde si conosce manifestamente vana quella proposizione de signori moderni geometri , cioè, che le curve d' Apollonio si possono supponere descritte , perchè danno costantemente in ogni punto , a similitudine del cerchio , le proprietà .

Ma il più bello si è , che Renato stesso non era affatto sicuro della proposizione da esso asserita , cioè : che le curve descritte collo stromento meccanico mostrino esattamente le proprietà ; perchè nel principio del suo terzo libro egli mostra un certo rimorso della proposizione ardita , che aveva asserito, la qual cosa non avrebbe fatto , se avesse creduto di veder tutto nelle curve d' Apollonio meccanicamente costruite ; ed ecco di ciò la pruova dedotta dalle sue stesse parole : Tametsi omnes lineæ curvæ , quæ motu aliquo ordinato describi possunt , in Geometriam sunt recipiendæ , non ideo tamen permittum est , uti indifferenter qualibet , quæ primum occurrat , ad Problematis cujusque constructionem , sed cura semper adhibenda est , ut simplicissimam , cujus ope id ipsum solvi queat , eligamus . Ubi quidem observandum est , per simplicissimas non solum intelligendas esse , quæ omnium facilissime describi possunt , neque quæ propositi Problematis constructionem , vel demonstrationem faciliorem reddunt : sed præsertim quæ simplicissimi sunt generis,

peris, quod ad quantitatem quesitam determinandam inferre vire queat.

Ecco dunque, come Renato mostra, che per massima generale si deve nel costruire seguir sempre il più semplice; e perciò egli non può riputare affatto sicura la costruzione meccanica, mentre non può asserire, che non se ne possa trovare un'altra più perfetta di quella, eh' egli usa per lo mezzo del suo strumento meccanico, mentre sapeva, che v'è fra' geometri la costruzione semplice del compasso; e che Renato non era ben sicuro della sua proposizione, cioè, che la costruzione meccanica fosse affatto legittima, e valevole a scoprir le proprietà geometriche, lo fa egli conoscere nelle seguenti parole. Quemadmodum exempli causa, ad inveniendas tot lineas proportionales, quot libuerit non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quam si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum supra explicatum describuntur &c. Ora quell'opinor fa chiaramente conoscere, eh' egli non era ben sicuro, che non si potessero ritrovare per la via semplice d'Euclide le due, ed infinite mezze proporzionali in quella guisa, che le bô io ritrovate; perche se egli fosse stato ben sicuro, che il suo strumento meccanico era il più semplice strumento, che si potesse adoperare, non avrebbe detto, ut opinor, ma avrebbe detto, che il luogo delle radici non può esser altro, che la curva, a cagion che un'altra più semplice costruzione non può fare, che si ritrovino in altro luogo dalla parabola diverso. Alla perfine avrebbe detto, come dico io, che non dubbito, che il luogo delle radici si possa ritrovare in altro luogo, cioè, al mia Rettilineo geometricamente costruito: Renato dunque dubitava esso stesso della troppo ardita proposizione, che avea asserita, per la qual cosa potrei a buona ragione sperare, eh' egli medesimo renderebbe alle mie dimostrazioni quella giustizia, che ricusano a quelle rendere i suoi seguaci.

Renato des Cartes poi, stabilita già colle deboli ragioni, che abbiain narrate, la massima cioè, che le curve d'Apollonio siano linee geometriche, s'appiglia, siccome egli hà detto, a quello, che dovean fare gl'antichi, cioè, ad ampliare la dottrina delle

cur-

curve, e per lo mezzo del calcolo analitico a ritrovar curve infinite, le quali tutte egli impiega alla soluzione de' problemi di tutt' i gradi, e s'affatica dimostrare l' utile, che produce il suo calcolo analitico coll' esempio di molti problemi, ed in particolare di quello soluto da Pappo per la via sintetica: Alla perfine persuade a' geometri ad appigliarsi intieramente a questo metodo di calcolare, abbandonando in tutto, nella soluzione de' problemi, la via sintetica; siccome si vede in una sua lettera, nella quale ragionando del problema della Rolletta, che si aggitava ne' suoi tempi, rimprovera a' geometri la lor cecità di voler seguire la via sintetica, quando appigliandosi al calcolo analitico, potevano agevolmente, e senza fatica solverlo: Ma quanto la licenza, che Renato hà nella Geometria introdotta, e l' uso del calcolo abbino alla purità, ed all' ingrandimento delle scienze nociuto, vogliamo ora brevemente dimostrarlo; ma prima vogliamo additar la cagione, per la quale tutt' i matematici moderni han ricevuto le curve per linee geometriche, e si sono appigliati all' Analitica, la Sintetica abbandonando.

Egli è certo, che il più gran danno, che l' anima umana pruova dall' esser al corpo congiunta è quello abborrimento, ch' ave a volgersi alla intera, e pura riflessione per meditare in astratto senza l' aiuto de' sensi; e ciò avviene, perchè quantunque vero sia, che l' anima, come da Dio discesa, risenga sempre quell' amore verso le conoscenze del vero, che Iddio ave a lei dato nell' atto, che l' hà creata: Con tutto ciò però i sensi tenendola sempre occupata nelle cose esteriori, han sì gran forza di tenerla lungi da quell' amore di conoscenze, alle quali sempre aspira per sua natura, che grandissimo fastidio ella sente nell' astrarsi dalle sensibili cose per ragionare in astratto. Questa verità ce la fanno chiara gl' uomini tutti, che si servono prima del senso dell' immaginativa, che della ragione; ed esempio ce ne danno per pruova i fanciulli, i quali con somma facilità si conducono ad esercitarsi in tutti quegli esercizi, che pratica s' addimanda; ed all' incontro somma fatica si sperimenta per indurgli a volger lo spirito allo studio delle scienze, per l' acquisto delle quali, attenzione di mente, e raziocinio si richiede.

Ora

Ora posto questo principio; è da sapersi, che gli calcoli pratici, di qualunque genere che siano, hanno la forza di allettare l'anima, a cagion che gli sembra, che quei pratici calcoli appaghino l'amore innato, che ella ha verso le conoscenze del vero, e nel medesimo tempo la dispensano dalla penosa obbligazione di riflettere, e di ragionare: che sia così, l'anima calcolando non ragiona, perchè il pratico calcolo da altri inventato li somministra quelle verità, ch'ella sarebbe obbligata d'andar cercando a forza di proprio raziocinio; e con tutto ciò s'appaga nel contemplare quelle verità, che senz'altra fatica, che con quella, che apporta la pratica, ha ritrovato. Questa è la cagione in generale, per la quale i signori moderni, geometri han ricevuto con tanto piacere l'uso del calcolo analitico: Narreremo ora le ragioni, per le quali questo calcolo analitico è cotanto pernicioso, quanto noi abbiamo dimostrato, che sia, ne nostri Dialoghi stampati in Amsterdam l'anno 1718. Accenniamo dunque, ma in brieve, i danni, che alla mente umana, ed all'ingrandimento della Geometria, il calcolo analitico produce.

Il danno maggiore, che fa l'uso del calcolo analitico, è quello di privar gl' uomini del più importante utile, che apporta lo studio della Matematica, ch'è quello di formare una mente, la quale sia capace di distinguere con sicurezza il vero dal falso in quelle cose, nelle quali nostra mente può con sicurezza il vero conoscere; così egli è certissima cosa, che l'umana mente è stata da Dio creata con una tale proprietà, che non può mai acquistar le facoltà, alle quali s'applica, se non forma sù di quelle un lungo abito; quindi è, che la semplice idea della dimostrazione, la quale addita alla mente umana l'idea del vero, non può produrre in quella la facoltà di distinguere con sicurezza il vero dal falso nella Geometria: e che non possa produrla è certissimo, perchè se la semplice idea della dimostrazione potesse fruttare alla mente umana il grande vantaggio di distinguere con sicurezza il vero dal falso, dopò studiate le otto proposizioni del primo libro d'Euclide, nelle quali egli ci dà l'idea del teorema, del problema, e di tutti modi, son i quali s'argomenta in Geometria, la mente umana formereb-

rebbe col solo ajuto di quelle proposizioni l'idea del vero, e del falso, e con ciò avrebbe già acquistata non solo la facoltà di conoscere il vero, ma il gran privilegio di ragionare nelle materie tutte, e senza inciampare in errore; e tutte le altre proposizioni di Euclide, che sieguono, si studierebbero solamente, a fine di erudire la mente nelle proprietà geometriche, e non per disciplinarla nell'esercizio del raziocinio; All'incontro noi veggiamo per esperienza, che in ciò, che appartiene al purgar la mente dall' errore, avviene quello appunto, che avviene all'uomo, il quale vuole nettare il suo corpo dalla lordezza: imperciocchè se questo lascia cader l' acqua, a cagion d' esempio solamente sopra le sue lorde mani, a fine di torre via l'immondizia senza fortemente stroppicciar l' una con l' altra, rimarrebbero sempre lorde, e sozze, quantunque per un secolo intero facesse cader acqua sopra di quelle. Lo stesso avviene alla mente umana, la quale si sepellisce sì fattamente nella materia nel primo momento, che viene ad abitar nell' uman corpo, che quasi non le rimane più vestigio di quell' amore, che ha verso le conoscenze del vero; per molto, ch' ella senta narrar dimostrazione, non acquisterà mai la facoltà di liberarsi dall' errore, se non formerà un lungo abito ad emendarsi de' suoi errori, ed a più, e più volte contemplar le cagioni de' suoi errori; che vale a dire, formare un lungo abito a solvere problemi geometrici per la via sintetica.

Quindi è, a mio credere, che non è al vero uniforme quella proposizione, colla quale i Signori Analitici dispensano i giovani studiosi dall' obbligo d' esercitarsi nella soluzione de' problemi per la via sintetica, cioè: Ch' egli è sufficiente studiar la Geometria ordinaria, che vale a dire, i primi Elementi d' Euclide; e che poscia l'esercizio della soluzione de' problemi, si deve far per lo mezzo del calcolo analitico, e non per la Geometria sintetica: perchè il semplice studio della Geometria, che chiamano ordinaria, fa nella mente umana quello stesso, che noi abbiain detto far l' acqua, che cade sopra le lorde mani di colui, che vuole nettarle, senza stroppicciar l' una con l' altra; ed all' incontro il calcolo analitico non disciplina la mente, perchè conducendola per una via pratica, non s' eser-

esercita in quello il raziocinio: Alla perfine a quelli, che pretendono disciplinar la mente per mezzo del calcolo analitico, avviene appunto quello, che avverrebbe ad un uomo, che pretendesse esercitar le gambe nel camminare facendosi sempre portare dal cocchio. Ma mal grado tutte le antecedenti ragioni da noi addotte, i signori analitici han preteso, e pretendono, che l'Analitica sia più valevole a disciplinar la mente, a fine di formar abito a conoscere il vero, che la Geometria sintetica, e le ragioni, che adducono, son le seguenti.

Per primo dicono essi, che il mezzo più possente per farci conoscere il vero è quello, di contemplar le cose più che si può in astratto, e con minore ajuto de sensi che sia possibile; e che perciò additando essi la quantità con semplici lettere, e non con linee, e figure, come s'usa nella Geometria sintetica, accostumano la mente a considerar la materia più in astratto, a cagion che le lettere sono segni meno sensibili, che le linee, e le superficie.

Per secondo, a fine d'avvalorar l'uso de loro calcoli, i signori analitici restringono la facoltà, che la mente umana ha, in più angusti confini di quelli, che la natura medesima gl'ha ristretti; perche per escludere l'uso della sintetica asseriscono, che la mente umana dovendo, nello scoprimento delle proprietà geometriche, haver sempre presente una lunga catena d'illazioni, mentre ne contempla una, l'antecedente li fugge, dalla memoria, e dall'imaginazione; e da ciò concludono, che non si possono grandi iscoperte fare in Geometria senza l'uso de calcoli, i quali somministrandoci i modi di signare in carta tutte le illazioni, che la mente fa quando risolve una quistione, o quando indaga una verità, hanno la forza di condurci ben lungi, e con sicurezza allo scoprimento di quelle verità, alla conoscenza delle quali la mente umana non potrebbe giugnere, per lo solo mezzo della Geometria sintetica.

Al primo argomento de signori analitici si risponde, che non solo signando con lettere le quantità, la mente non s'accostuma a ragionare in astratto, ma si fa più al senzo sogetta, e si distor-
na in tutto dal raziocinio; perche quantunque vero sia, che le lettere, con le quali gl'analitici additano la quantità, siano

D

segni

segni meno sensibili, che le linee, e le figure; contuttociò la mente, la di cui principal proprietà è il ragionare, non s' esercita per lo mezzo di quelle lettere nel raziocinio astratto, perchè dopo che ha supposto, che *A* sia una linea, *AB* un rettangolo, quando comincia a calcolare, non contempla più in astratto le proprietà, che quelle linee segnate con le lettere in varij modi combinate possono avere: Ma all'incontro facendosi la mente dolcemente condurre dal calcolo, si prende come proprie quelle verità, che il calcolo, e non il proprio raziocinio le ave additate; in vece che nella Geometria sintetica, qualunque s'additi la quantità con segni più sensibili, come sono le linee, le superficie, ed i corpi ancora, la mente, dopo che ha la quantità signata, è costretta ad incaminarsi col proprio raziocinio per iscoprire le verità, e con ciò s' esercita nel raziocinio. Questo si vede evidentemente nel modo, col quale per la via analitica si solue un problema geometrico, perchè, dopo che l' analitico ave inteso lo stato della quistione, e l' ave espresso nella dimostrazione, quando poi vuole ritrovar l' equazione, e la riduzione di quella, la mente si lascia in tutto condurre dal pratico calcolo, e con ciò si libera dalla fatica di ricorrere all' industria, a fine di ritrovare per lo mezzo della costruzione le verità a lei ignote, e dal penoso esercizio di ragionare: Alla perfine se non si vuol negare, che la necessità è la madre della virtù, ne men si può negare, che la Geometria sintetica esercita il raziocinio; in vece che il calcolo analitico rende pigra la mente nel ragionare, e la rende inetta all' industria. Ecco dunque, ch' è fallace quello argomento apparente, col quale i signori analitici ci vogliono far credere, che segnandosi con segni più astratti la quantità, la mente contempli meglio le verità, non ostante che poi ragioni più materialmente, perchè praticamente ritrova le verità.

Al secondo argomento poi si risponde, che la mente umana non è in così angusti confini ristretta, come i signori analitici ce la rappresentano, a fine di render necessarij a' geometri i loro calcoli; perchè se consideriamo le nobili scoperte, che nella Geometria han fatto Euclide, Archimede, Pappo, e gl' altri antichi geometri, conosceremo, che a forza di metodo sintetica han.

han ritrovato quelle verità, delle quali maggiori non ne han ritrovate i moderni, mentre, fuori delle invenzioni di nuove curve, delle quali noi abbiamo chiaramente provato l'insufficienza, non veggiamo, che alcuna utile invenzione ci abbino i loro calcoli somministrata; anzi di più veggiamo, che malgrado la perniciofa licenza di prendere un pezzo di curva per retta, ne' loro calcoli delle serie infinite non si sono i signori moderni approssimati più alla quadratura del cerchio di quello, che s'è approssimato Archimede; anzi di più puol dirsi, che ne meno son giunti all'esattezza di quello. Insomma, fuorchè alcuna picciola cosa attenente all'uso delle cose fisiche, nelle quali non si richiede l'esattezza, ma basta l'approssimazione, non veggiamo, che i matematici abbino ricavato gran utile, dalla geometria de' signori moderni.

Ma qualunque fusse l'utile, che i nuovi calcoli de' signori moderni arrecar potessero per l'uso delle cose fisiche, questo non sarebbe mai da porsi in paragone col danno, che arrecano al più importante nostro affare, ch'è quello di disciplinar la mente nel raziocinio; ed invero, quando nell'uso de' calcoli la mente contempla le proprietà, che per mezzo di quello ha ritrovate, non ricava da quelle alcun utile, a cagion che se vuole quelle verità con giusta idea rimirare, le rimirerà come cose, che a guisa di proprietà sono ritrovate da un'altro, e nelle quali ella, per la nobile qualità, che ha di raziocinante, non ha alcuna parte. In vece che quelle verità, che la mente ritrova per lo mezzo del proprio raziocinio sintetico, le mira, e le può mirare come proprie, perchè son figlie del proprio raziocinio; in quelle a gran ragione si compiace, e gode in se stessa dell'abito, che ha formato a ben ragionare; in quelle ella si compiace della propria industria nel procacciarsi dalle cose note le ignote, e della propria perspicacia nel dedurre verità da verità sino all'infinito; in quelle essa si conosce certamente nella nobile facoltà di ragionare superiore alle altre menti, le quali non hanno avuto forza di giungere allo scoprimento di quelle verità, ch'essa ha scoperte. In vece che, nell'uso de' calcoli analitici, una gran mente da Dio creata per ragionare in astratto, la quale isdegnerebbe forse di piegarsi all'uso delle cose pratiche, si vedrà age-

volmente uguagliata, e forse anche superata da una mente debbole, la quale per lo mezzo del calcolo ritroverà egualmente che quella, delle verità poco importanti sì, ma con tutto ciò dagl' analitici riputate al par di quelle, che le grandi menti ritrovano coll' uso del raziocinio sintetico. In somma siccome il cocchio conduce al termine, che hanno a loro stessi prefisso, egualmente i deboli, che i forti di gambe; così i calcoli conducono allo scoprimento d' inutili verità egualmente le grandi, che le deboli menti; ma poscia sempre avviene, che quelli, i quali sono negl' elementi d' Euclide semplicemente eruditi, e ne' calcoli esercitati, siano inventori in Geometria di picciole cose, senza esser geometri, perchè nel tempo stesso, che tal uni ostentano la figura d' inventori, non hanno la facoltà di distinguere il vero dal falso; onde poi ne avviene, che nell' esame di una difficile dimostrazione sintetica si perdono, e si confondono. Alla perfine l' invenzione de' calcoli è stata un bel rifugio per quelli, che bramano di comparire inventori senz' esser geometri, e perciò l' uso de' calcoli da Renato prima proposto, e poi dagl' altri, coll' invenzione di nuovi modi di calcolare, ingrandito, hà ritrovato sì gran numero di settatori, come or ora si vedrà.

Quella, ch' abbiamo in brieve narrata è l' idea del danno, che l' uso de' calcoli ave arrecato a quella sublime parte della Matematica, che disciplina delle menti s' appella: chi poi volesse leggere questa materia in altro modo trattata, legga i miei Dialoghi stampati in Amsterdam l' anno 1718. In tanto fie bene ora accennare brevemente quei difetti, che si esperimentano nell' Algebra in ciò che riguarda la facoltà di scoprir le proprietà geometriche.

Il gran difetto, che s' esperimenta nel Algebra in ciò che s' attiene allo scoprimento delle proprietà, egli è, che il calcolo analitico addita alcune generali proprietà, ma non addita le proprietà più particolari; e per ciò non facendo discender la mente nella contemplazione de' più minuti particolari, fa, ch' ella non possa formare l' importante abito di far le distinzioni fra le cose, ch' esamina, e le proprietà, che considera; onde poi ne avviene, che accostumata a mirar le cose solamente in generale, s' inganna in quelli particolari medesimi, i quali a lei sem-

sembra, che dipendono da quelli universali, che conosce; che sia così: Io esamino un problema per il calcolo analitico; in questo il calcolo m'addita, a cagion d'esempio, che il luogo del problema da me cercato è all'equazione quadrata; l'arte mi dà prontamente il modo di costruirlo per lo mezzo del cerchio, e della XXXVII. del primo d'Euclide: Questo metodo è ingegnosissimo, e sembra a prima veduta utilissimo, perche sendo un luogo generale, ed uguale per tutti, pare, che ci dispensi da quella importuna fatica d'andar quasi tentoni cercando nelle diverse proposizioni d'Euclide il luogo del problema; ma con tutto ciò questa soverchia facilità arreca moltissimo danno: imperciocchè, quando la mente cerca nelle diverse proposizioni d'Euclide il luogo del problema, è costretta a discender ne' particolari, ed a far quelle minute distinzioni fra le cose, le quali cagionano nella mente umana utilissimo abito di ben distinguere ne' particolari: Oltre a ciò questo difetto, ch'è nel calcolo analitico, cioè di non fare discender la mente ne' particolari, rende l'Algebra scarsa, e mancante nelle invenzioni; perche quanto più la mente discende ne' particolari, tanto più ritrova numero d'importantissime verità assai maggiore di quello, che ritrova quando si rimane solamente nella contemplazione degli universali; e per ultimo quando la mente s'accostuma nella sintetica ad esaminare i particolari con dimostrazione, diviene sicura delle proprietà particolari, che hà ritrovate; in vece che la proprietà generale additata dall'equazione si può ritrovar falsa ne' particolari: Alla perfine gl'analitici fanno tutti, come volgarmente si dice, il latino per una medesima regola, perche si rimangono nelle conoscenze generali, e negli particolari spesse volte si perdono.

Pruova evidente di questa verità ce l'appresta il gran problema delle due mezze proporzionali da me soluto; perche in tanto hò potuto solverlo, in quanto che sono disceso a considerar le curve d'Apollonio più in particolare, che non le hanno considerate tutt' i geometri: ed a cagion d'esempio, tutt' i geometri han considerato un asse infinito, ed a' punti di quello hanno immaginate infinite applicate: Io all'incontro insieme con Galileo hò considerato le parti, che s'esprimono

co.

co' numeri 1, 4, e 9, e le radici 1, 2, e 3, e da ciò ne hò dedotto, che 'l luogo delle radici è alla retta, come si vedrà chiaramente nella seguente Raccolta. Ora questa gran verità non si poteva certamente ritrovare, riguardando la quantità più astrattamente, come pretendono, che debba farsi, i signori analitici, ma bisognava discendere ne' particolari più minuti, come hò fatto io, considerando l' asse diviso in quelle parti particolari, che si possono esprimere co' i numeri; proseguendo poi a discendere ne' particolari, hò trovato i luoghi delli cubi, e delle radici essere ancora nelle linee rette, e ciò hò fatto pure discendendo alla considerazione de' particolari più minuti; e certamente il luogo de' cubi alla retta ne men si poteva ritrovare in virtù dell' equazione cubica ritrovata per il calcolo analitico, perche l' equazione cubica altrarosa non ci addita, se non che il luogo del problema essere al luogo di una potenza di terzo grado, e poscia l' Algebra ci lascia la cura di costruirlo. Ecco dunque, che l' Algebra non solo non insegna di discendere ne' particolari, ma fa, che i geometri errino ne' particolari, perche se vero è, come hò in molti luoghi dimostrato, che il luogo delle radici delle ascisse dell' asse è alla retta, e non alla curva; l' Algebra non somministrandoci altro, che il modo di liberarci in particolare da questi errori, a cagion che noi erriamo ne' particolari, sempre che vogliamo considerarli come conseguenze delle proprietà generali, ch' ella ci addita; alla perfine se non si negano le mie dimostrazioni, non si può altresì negare, che l' Algebra è cagione, che c' inganniamo ne' particolari: si vedrà poi nella seguente Raccolta quanto minutamente per la via sintetica si contemplino gli particolari; perche in quella, rispondendo ad alcune obbiezioni, farò vedere delle utilissime, ed ingegnosissime distinzioni, le quali per lo mezzo del calcolo analitico certamente non si fanno. I calcoli analitici dunque non insegnano a discender ne' particolari, e con ciò privano i geometri dello scoprimento di moltissime importanti verità, e son cagione, che nelle proprietà particolari spesso siate s' ingannino. Ed il peggio, si è, che questo difetto di non discender ne' particolari, e con ciò di non accostumar la mente a far le distinzioni frà i particolari, che l' uso dell' Algebra produce

duce nelle menti de' signori geometri, si propaga ancora nello studio della moderna Filosofia; perche in quella ancora si rimangono poco men che tutti nella conoscenza degli universali, e nell'ignoranza de' particolari a noi attenenti; che sia così. Renato des Cartes, al quale in vero si deve l'obligazione d'aver insinuato negl' uomini questo modo di procedere con geometrico-raziocinio nelle speculazioni metafisiche; dopò aver posto in più bell' ordine la medesima pruova dell' esistenza di Dio, che S. Agostino fa nel suo trattato de libero arbitrio; ne particolari poi a noi attenenti, come sono la reale distinzione di Dio dalla materia, che vale a dire la Creazione; nella dimostrazione della Divina Provvidenza; nell' indagare la natura, e l'essenza dell'anima umana; nel provare il libero arbitrio, e nell'indagare il premio, che Iddio prepara a' buoni, ed il castigo a' rei dopò la morte; ed in tutti gli altri particolari a noi più importanti, se ne passa con argomenti brevi, estrinseci, ed apparenti, come si può vedere nella sua IV, V, e VI meditazione. Alla perfine Renato fa, a mio credere, in Metafisica quello, che fa nella sua geometria; imperciocche in questa egli, siccome abbiamo dimostrato poc' anzi, dopò averci insegnato il suo ingegnossimo modo di calcolare, quando giunge alla gran difficoltà della costruzione, s' appiglia al partito di dimostrare con argomenti generali, ed estrinseci, che le curve d' Apollonio hanno le proprietà, che da quello se le assegnano: dello stesso modo fa in Metafisica; dopò ch' egli ha dimostrato l'esistenza di Dio, quando giunge alla gran difficoltà di costruir l' Universo, ed a spiegar la natura delle nostre particolari virtù, se la passa pure, come ha fatto delle curve di Apollonio, ed in questa guisa lascia le nostre menti colla semplice universal conoscenza dell' esistenza di Dio, intorno alla quale tutti gl' antichi filosofi son convenuti frà essi.

Ma il danno maggiore, che l' non discendere a i particolari cagiona, si è, che gl' uomini accostumati dall' uso dell' Algebra a rimanersi nella conoscenza degl' universali, non avendo poi essi metodo per drittamente ragionare intorno a i particolari; e dall' altra parte poi volendo definire la natura di quei particolari attenenti alla Metafisica, che abbiamo accennati poc' anzi.

zi, di quelli con grandissimo danno della Religione, e della Repubblica tortamente giudicano; e quindi è, che veggiamo tante varietà di sette regnar nell' Europa, tutte perniciose alla Santa Religione: mentre, chi coll'empio Benedetto Spinoza, facendo tutta una massa di Dio, e della materia, nel tempo stesso, che finge d'inalzar la sua mente sino alla conoscenza delle verità eterne, cade lordamente in un basso, e fangoso Epicureismo; chi disprezzando le scienze naturali, e le virtù umane de'gentili, tratta Platone da un poeta visionario, e tutte le virtù de' gentili da vizj manifesti contaminate, e con ciò fingendo di voler portar le nostre anime all'acquisto di una virtù più sublime, ch'è la nostra santa virtù cristiana, rende nell'istesso tempo gl' uomini inetti all'acquisto delle virtù civili, ed umane, le quali pur servono di scala all'acquisto delle virtù cristiane, ed in questa guisa corrompono l'ordine delle Repubbliche; perche gl' uomini, perdendo affatto di vista l'umana libertà, e con essa l'idea di quella giustizia, che per lo mezzo del lume naturale può nostra mente formare; gl' uomini rimangono servi miseri, e di niuna umana felicità capaci. Ma non è questo il luogo di dilungarci in questa materia; speriamo nella Divina Bontà di pubblicare un giorno una Metafisica, da noi già fatta, nella quale discendendo, come si deve, a tutt' i particolari a noi importanti, farem conoscere che le scienze de' gentili filosofi servono di pruova alle verità a noi Cristiani rivelate; e che le virtù de' gentili servono ancora, come abbiain detto, di scala all'acquisto delle virtù cristiane nel tempo stesso, che promuovono la virtù eroica negl' uomini, e sono alle Repubbliche cagione di godere l'umana felicità. Proseguiamo ora, dopò questa brieve digressione, ad accennare i danni, che la falsa geometria de' moderni cagiona alla filosofia, ed all'ingrandimento delle umane scienze.

Se riguardiamo a ciò che s' attiene all'ingrandimento delle scienze; veggiamo i moderni filosofi attribuirsi lo specioso titolo di spregiudicati, ed in conseguenza di quello stimare vane visioni tutte quelle sublimi conoscenze, che delle cose naturali le storie ci narrano aver avuto gl' antichi; e li veggiamo trattare d'inutili applicazioni lo affaticarsi alla soluzione di
quei

quei problemi , de' quali gli antichi han desiderato lo scoprimento , ed in questa guisa imprigionano , per così dire , le menti umane in un angusto carcere , rendendole della conoscenza de' soli universali paghe , e contente . Di questo ne fa manifesta pruova il P. Malebranch nel suo IV. libro della Ricerca della verità al cap. 111. : Egli in quel capitolo consiglia gl' uomini ad esser sì fattamente moderati nell' amor verso la gloria , che intiepidisce affatto negl' animi di quelli il disio di seguir quelle virtù eroiche alla Repubblica utilissime, del conseguimento delle quali solamente gl' uomini infiammati d' amor di gloria son capaci; e per provare il suo assunto, tratta di visionarij tutti quei, i quali si lusingano di poter ritrovare la soluzione d' alcuna di quei celebri problemi, che han sempre desiderato gl' antichi ; le seguenti sono le sue parole nella nostra italiana favella trasportate . Egli è senza dubbio , che non si ritroverebbero tante false invenzioni, e tante immaginarie scoperte , se gl' uomini non si lasciassero abbagliare, e propriamente, come esso dice , sbalordire dall' ardente desiderio di comparire inventori : Imperciocchè la ferma, ed ostinata credenza , nella quale sono molte persone , d' aver trovato , a cagion d' esempio , il moto perpetuo , la quadratura del cerchio, o la duplicazione del cubo per lo mezzo della Geometria ordinaria , non per altra cagione si è radicata nella lor mente , se non per quella del gran desiderio , che avevano di comparire al Mondo uomini , i quali avessero ritrovate quelle cose, che gl' altri aveano inutilmente tentate.

Le antecedenti son le maniere, colle quali egli rimprovera a matematici l'ardimento di voler tentare la soluzione di quei problemi , ch' altri non han finora possuto ritrovare ; e quantunque sembri , che colle antecedenti parole l' Autore della Ricerca delle verità se la prenda solamente con quelli , i quali si lusingano d' aver ritrovato la soluzione degl' accennati problemi ; con tutto ciò però , a mio credere, egli dipinge nella figura di visionarij tutti quelli , che di quei sì fatti problemi tentano la soluzione; perche se egli ragiona di quelli, che si lusingano d' aver sciolto un tal problema , che in verità non han sciolto , ragiona sopra un sogetto , ch' è indegno delle sue

E

con-

considerazioni; mentre l' amor verso la gloria ci può riempire bensì la mente di una vana speranza, per modo che ci induca a tentar gl' impossibili; ma non può tanto occecar quei geometri, i quali sono di mente sufficiente a distinguere il vero dal falso, che giungano a non intendere un errore, particolarmente in Geometria, quando gli viene da altri insegnato: così dunque non essendo questi sì sbalorditi uomini da considerarsi, dee crederesi, che questo Autore ragionasse di quelli, i quali tentano la soluzione di quei problemi, ch' egli stimava impossibile a solversi. Ed in vero è certissimo, che noi non sappiamo alcun uomo, che meriti il titolo d' uomo, il quale occecato dall' amor della gloria si sia fortemente impegnato a sostenere per geometricamente dimostrata, o la quadratura del cerchio, o la duplicazione del cubo: Sappiamo bensì all' incontro, che Giuseppe Scaligero mosso dall' amor della gloria tentò la quadratura del cerchio, e che si lusingò d' averla ritrovata; ma che poscia avvertito del suo errore dal Padre Cristofaro Clavio, qual saggio ed onorato uomo si ritrattò, rendendo a quello grazie, che l' aveva avvertito del suo errore. Il Padre Malebranch dunque, o ha ragionato di uomini, che meritano il titolo di uomini, ed ha supposto una cosa impossibile ad accadere, e con ciò s' è dato a diveder poco inteso della natura della mente umana; o egli ha ragionato di quei uomini stupidi, i quali non son capaci di conoscere il proprio errore, ed emendarsi anco avvertiti de' loro errori, e questi tali egli non poteva, a buona ragione, addurli per esempio de' danni, che produce l' amor della gloria; perchè l' amor della gloria non può guastare quegli uomini, che la natura ha già formati incapaci d' intender la verità; ond' è, che quantunque si togliesse dal cuore degl' uomini l' amor della gloria, com' esso vuole, non perciò si toglierebbero dal Mondo i stupidi: Dalla qual cosa se ne deduce, che se l' amor della gloria fosse utile alle Repubbliche per altre cagioni, come io tengo fermamente che sia; gli stupidi incapaci d' intendere una verità, che loro s' insegna in Geometria, non appresterebbono bastante motivo per sbandire dal Mondo l' utilissimo amor verso la gloria. Il Padre Malebranch dunque o ha ragionato di quelli, che sono nati stupidi, ed ha portato, a fine di condannare l' amor verso la gloria,

nn

un esempio vano, ed inutile; o ha inteso trattar da stupidi tutti quelli, che tentano i sopraccennati problemi, ed ha malamente ragionato; perche per dire, che de' problemi difficilissimi, come son quelli della quadratura del cerchio, e della duplicazione del cubo, non se ne deve tentar la soluzione, bisogna geometricamente provare, che sono insolubili, e questo è quello, che non ha fatto il P. Malebranch per quanto io sappia. Ma qui risponderebbe egli forse, che per quel che s' attiene alla Duplicazione del Cubo, potea a buona ragione credere, niuno poterla ritrovare per la via piana; perche sendo egli del sentimento di Renato des-Cartes, cioè, che le curve d' Apollonio abbino le proprietà, che se l' assegnano, non potea pensare, che si potessero descrivere per la via piana.

Ma a questo si risponde per primo, che il cader nell' errore di Renato è proprio, come abbiain detto, di quelle menti, che si rimangono nella superficie delle cose, e si lasciano persuadere dagl' argomenti apparenti: e per secondo si risponde, che quando anche si volesse concedere, che il cubo non si potesse duplicare più per la via piana, dopò che Renato ha dichiarato sciolto il problema per la via de solidi (ciò che non ha osata dire alcuno degl' antichi) come mai poteva egli dichiarare problema insolubile quello della quadratura del cerchio? mentre per quel che s'attiene a questo problema, Renato des-Cartes non ha trovato descrizione meccanica, la quale egli abbia preteso, che dia le proprietà, perche se si parla della quadratrice, egli ha dichiarato il contrario; dunque l' Autore della Ricerca della verità non poteva di propria autorità dichiarare insolubile il problema della quadratura del cerchio: ed in vero noi crediamo certamente d' avere delle ragioni dalla Metafisica dedotte, colle quali si possa provare, che la quadratura del cerchio sia impossibile a ritrovarsi, ma perche non possiamo geometricamente dimostrarlo, non abbiain ardimento di dichiararlo problema insolubile.

Da quel che abbiain detto chiaramente si conosce, che il P. Malebranch non s' oppone giustamente alla verità, quando asserisce questa proposizione generale cioè, che chiunque s' intesta d' aver duplicato il cubo è visionario. Ma dall' antecedente sua proposizione senza pruova asserita, si conferma sempre

pre più quello , che abbiain detto poc' anzi cioè , che la novella geometria da Renato introdotta, e da suoi seguaci seguitata , guasta , e corrompe le menti de' geometri , e grandissimo danno arreca allo studio della medesima Geometria ; perche se si considera il modo, col quale l' Autore della Ricerca della verità, senza esaminare i particolari, decide di quelli, appoggiandosi solamente sopra notizie false, e generali ; necessariamente bisogna conchiudere, che la geometria de' moderni non conduce allo scoprimento delle verità particolari ; donde poi ne avviene , che fatta pigra nel meditare la lor mente , conosciuto ch' essi hanno pochi universali nello studio della Filosofia , divengono scettici ne' particolari , ed abbracciano quelle perniciose sentenze , che più son proprie ad appagare le loro proprie passioni , ed i lor vani disij .

Da tutto quello , che abbiain detto fin ora intorno a' danni, che le moderne scienze producono, bisogna dedurre; importantissima cosa essere, il ben scegliere i metodi, co' i quali le scienze insegnar si debbano, perche' è certissimo, che, appunto come dicevano gli antichi geometri, difficilmente, senza un profondo studio di Geometria, si può divenire filosofo ; ed è certissimo altresì , che in quella guisa , che gli uomini s' accostumano a pensare nella Geometria, dell'istesso modo pensano nella Filosofia; e come pensano nella Filosofia , così pensano nella Morale , e nelle altre scienze tutte; e che da questa catena di scienze son prodotte le virtuose , o le viziose passioni ; ed in conseguenza di quelle , gli abiti virtuosi, o viziosi, per lo mezzo de' quali si formano le virtuose, o le virtuose Repubbliche : per la qual cosa si dovrebbero da' Magistrati attentamente riguardare i modi, con i quali da' maestri le scienze s' insegnano , per vedere l' utile , o il danno , che dall' insegnamento di quelle può ricavare lo Stato .

Ma io non vorrei già, che questa specie d' apologetico discorso, che hò fatto contro l' Autore della Ricerca della verità, alcun lo prendesse come diretto contro tutta la Repubblica letteraria de' nostri giorni, perche io contro altri ragionato non hò, che contro i settatori della geometria Cartesiana , i quali per avere a persuasione di Renato troppo inconsideratamente ricevuto per linee geometriche le curve d' Apollonio , ostinandosi a

non

non voler confessare il loro errore, e trattando da visionarij quasi geometri, i quali altro non sono, che ristauratori della vera, ed utile geometria degli antichi: Nel rimanente poi sò assai bene io, che vi sono a' tempi nostri dignissimi, e scienziati uomini; e che nella Francia medesima non mancano uomini, i quali sono, contro i Cartesiani, forti difensori delle scienze, e delle virtù degl' antichi: Il non mai a bastanza lodato Monsignor di Meos fa vedere nel ritratto che fa de' Romani, de' Greci, e degl' Egizij, nel suo libro intitolato Discorsi sopra la Storia, quanto egli riputasse le virtù degli antichi: Monsignor l' Arcivescovo di Cambray fa vedere nel suo dottissimo Telemaco, quanto bene nella sua mente siedesse l' idea dell' Eroe, la quale è sì guasta, e corrotta nelle menti de' nostri moderni, che moltissimi uomini adorano i vizij coperti sotto la maschera di virtù apparenti: Il Sig. la Fevure, ragionando delle virtù degl' antichi, dimostra ancor egli quanto riputasse la poesia di quei grand' uomini: Il Sig. d' Upin rimprovera a' suoi francesi i danni, che con le novità, le quali di giorno in giorno introducono ne' studij della Francia, cagionano all' idioma francese, ed anche alle altre scienze: moltissimi sono gl' altri francesi, che rampognano i moderni metodi di studiare; ond' è, che i perniciosi innovatori son anche in Francia da' Francesi medesimi combattuti.

Io poi certamente non da altro, che dall' amor della verità son mosso a far questa specie di apologetico discorso contro l' Autore della Ricerca della verità; perche per quel che a me s' attiene, sembrami di non poter in alcun modo essere annoverato, a cagion della Duplicazione del Cubo da me ritrovato, fra que' sbalorditi tentatori di cose impossibili, ch' egli accenna, perche la dimostro con pruove geometriche: ed ancorche le mie dimostrazioni non fossero concludenti, ne men merito la taccia d' ostinato, o di visionario; perche se si considera, che da quando comparve alla luce del Mondo l' anno 1714. la mia novella Invenzione, altri Oppositori non ave avuti, che alcuni pochi, le opposizioni de' quali non sono state da alcuno fin ora approvate; e che l' istessa celebre, e dottissima Università di Lipsia, la quale era fortemente impegnata ad approvarle, a cagione de' miei Dialoghi, non solo non le approvò, ma conside-

ran-

rando la forza delle mie dimostrazioni disse: *Quantum finem suum sit consequutus, alicubi commodius inquirendi occasio erit.* Dalla considerazione dunque di tutte queste cose si conclude certamente, che io non posso esser tacciato di ostinato, o di stupido a cagione delle opposizioni, che ha ricevuto la mia *Duplicazione del Cubo*, ne per altre opposizioni, che sianò state fatte alla mia *Invenzione*; perchè dopo le prime da me accennate, tutt' i sig. matematici hanno usato un profondo silenzio, a riguardo della mia *Invenzione*, con tutto che da me non si è mancato di procurare a me stesso l' avvertimento di tutti i più celebri uomini d' Italia, avendo scritte lettere particolari ad alcuno de' dottissimi signori Giornalisti di Venezia, ed a' dottissimi signori Accademici delle scienze di Bologna, richiedendoli del lor sentimento, ed ho impiegato autorevoli, ed efficacissimi mezzi per conseguire l' accennato favore; e quantunque mi fossi lusingato, che le accennate due celebri adunanze, come interessate nella gloria dell' Italia, dovessero approvare, o disapprovare la mia *Invenzione*; contuttociò i Signori Giornalisti di Venezia si son rimasti sinora con quelle gentilissime relazioni, che in molti de' loro tomi han fatta della mia *Invenzione*; e per qualche s' attiene a i Sig. Accademici delle scienze di Bologna non hò possuto dal lor silenzio ritrarli.

Ne vale il dire, che il lor silenzio è cagionato da una certa prudente riserva, che loro suggerisce la massima di non esporri meco a contesa, a cagione dell' indole di dispute impaziente, che a gran torto alcuni mi attribuiscono; perchè se si considerano bene le risentite risposte da me date ad alcuni, si vedrà che ciò non è per altra cagione avvenuto, se non che per i modi autorevoli, e magistrali dà alcuni d' essi meco tenuti. Se poi si volesse dire, che sdegnano di ragionare sì di tal materia, perchè troppo manifestamente falsa; a sì fatto motivo mi vergognerei di rispondere, perchè sendo io, la Dio mercè, bastantemente noto nella letteraria Repubblica anco per le altre mie opere matematiche, sembrami, che questo ingiusto dispregio ridonderebbe più a loro, che a proprio mio danno: per concludere dunque il nostro ragionamento dirò, che non mi poteva muovere a far questa specie d' *Apologia* contro l' Autore della *Ricerca della verità* il timore,
che

che io potessi avere d'esser annoverato frà quei ostinati, e sbalorditi tentatori di cose impossibili, sù de' quali egli ragiona.

Dopo questo ampio ragionamento fatto intorno alla moderna geometria spero, che i sig. geometri si degneranno di leggere, e studiare le seguenti proposizioni, nelle quali geometricamente io dimostro i veri luoghi, ne' quali son quelle proprietà, che sin ora han creduto, che si ritrovassero alle curve; e che da sinceri uomini, quali devon essere gl'uomini di lettere, e quali essi sono, appaleseranno al Mondo la verità delle mie dimostrazioni. Se poi il contrario di quel che penso avverrà, tolga il Cielo, che io vogli giammai accusare i Sig. moderni geometri di poco sinceri; dirò solamente, che la Repubblica de' sig. moderni matematici regola le sue risoluzioni con quella stessa prudenza, colla quale il Senato Romano si governava. Narra Plutarco nella vita di Numa Pompilio verso il fine, che a cagione d'una inondazione s' infranse l'arca di Numa, dopo che eran già scorsi quattrocento anni dalla morte di quello, e che essendosi in quella ritrovati dodici libri, che trattavano de Jure Pontificio, ed altri dodici in lingua greca de Disciplina sapientiæ: Petilio Pretore in quel tempo consigliò al Senato, che non li pubblicasse, anzi che li facesse abbruciare, acciò non si facessero noti alla moltitudine; e non per altra ragione s'indusse Petilio a dar al Senato questo consiglio, se non perchè vedendo egli, che i costumi de' popoli nel corso di sì lungo tempo eran tutti mutati, credeva esser lo stesso, che turbar la Repubblica, lo appalesare a' popoli quelle virtuose leggi di Religione, e di Sapienza, le quali, mercè la mutazione de' costumi, non eran più capaci di seguire; le seguenti sono le parole di Plutarco: Non videri sibi, neque fas, neque pium ut quæ in libris scripta sunt, audiantur a multitudine; proindeque delatos illos in comitium igni tradidisse. Dell'istesso modo dirò io, che l'accortissima Repubblica de' geometri de' nostri giorni seguace della prudenza di Petilio conoscendo, che la mia Invenzione mostra vane, ed insufficienti tutte le invenzioni, che intorno alle curve si son fatte, dopo che Renato des-Cartes incautamente, (perchè senza alcuna pruova) le dichiarò non esser linee meccaniche, ha creduto di
pru-

prudentemente operare, non approvando la mia *Duplicazione del Cubo*, a fine di non far' palesi alla moltitudine gl'errori, ne' quali è inciampata una gran parte de' signori matematici de' nostri giorni, i quali essendosi abituati a costruire meccanicamente, ed a dimostrare per lo mezzo de' pratici calcoli, sentirebbero troppo pena a ridursi un' altra volta a seguir quel rigore nel costruire, e nel dimostrare, ch' Euclide saggiamente prescrive, e ch'è stato dagl' antichi geometri seguitato, donde la pace della Repubblica letteraria ne potrebbe esser turbata. A saggio dunque, e profondo consiglio de' Sig. moderni matematici, e non mai a malitiosa arte di quelli, attribuirò il loro prudente silenzio; tanto più, che se mai avvenisse, che i sig. matematici Cartesiani si continuassero a governare, a riguardo della mia *Duplicazione del Cubo*, colla da me accennata prudenza del Senato Romano, io hò ben donde sperare, che i Posterì almeno vorranno prender contezza di questa mia novella Invenzione; perche non avendo i moderni geometri l'autorità d'abbruciar' i miei libri, in quella guisa, che 'l Senato Romano avea d'abbruciar quei di Numa, non possono far sì, che le mie Opere non giungano alla notizia de' Posterì. Onde io, il quale in virtù dell'educazione, che hò da' miei Genitori fortito, hò accostumato il mio animo a riputare più, che i presenti, e fugaci non meritati applausi, la giusta, e stabile gloria avvenire, mi consolerò agevolmente, della non curanza, che i signori moderni geometri facessero per avventura comparire delle mie opere: Ma senza portar' sì lungi le mie speranze, io hò ancora forti ragioni di credere, che frà i viventi geometri quelli, che han fior di senno, conosceranno, che 'l silenzio de' signori geometri Cartesiani da altra cagione non è prodotto, che dalla mancanza di ragioni, ch'è in essi, per opponere alle mie dimostrazioni; ed in conseguenza di ciò, i studiosi indifferenti non vorranno lasciare di prender' contezza di un tanto importante Problema, quanto è quello della *Duplicazione del Cubo*, in tutt'i tempi desiderato, e da veruno ritrovato, e dimostrato, fuori che da me.

Passiamo dunque con questa speranza a far vedere in più modi geometricamente dimostrato, che quelle proprietà, che i Signori geometri han creduto vanamente trovarsi alla parabola Apolloniana, si ritrovano nelle nostre linee rette. RAC-

RACCOLTA

DI TUTTE LE DIMOSTRAZIONI, E CON-
SIDERAZIONI DELL' AUTORE,

Pubblicate in varj tempi, e in varie Lettere; a fine
di dimostrare geometricamente, che la

PARABOLA APOLLONIANA

Non hà le proprietà, che da Geometri se
l' assegnano;

*Coll' aggiunta d' altre nuove Considerazioni, e d' altre
nuove Obbiezioni, e risposte.*



CONSIDERAZIONI

Sopra la Parabola Apolloniana.

PROPOSIZIONE, E TEOREMA.



E sia data la linea retta AF divisa, per esempio, in nove parti uguali; e dalla prima parte AB , che si prende per unità, sia tirata la BC perpendicolare, e uguale ad AB ; e dal punto D termine di AD uguale à 4. unità AB , sia tirata la DE uguale à 2. unità AB , e perpendicolare ad AF ; e dal punto F termine di AF , sia tirata la FG perpendicolare ad AF , ed uguale à 3. unità AB : e per i punti A , C , E , e G siano tirate le linee rette AC , CE , ed EG . Tutte le linee rette perpendicolari ad AF , le quali partono da i punti della linea retta AF , e terminano alla linea retta CE , come per esempio HI &c., sono mezze proporzionali frà l' unità AB , e la porzione della linea AF , dove cade la perpendicolare; per esempio, HI mezza proporzionale frà AB , ed AH . E dello stesso modo le perpendicolari intercette frà DE , ed FG , le quali partono da i punti della AF , e terminano alla linea retta EG , come per esempio, TV , &c., sono mezze proporzionali frà l' unità AB , ed AT .

Tav. I.
Fig. I.

COSTRUZIONE.

Intendasi la BF , porzione della linea retta AF , divisa in punti, o parti infinite; e da i punti della BD uguale à 3. unità AB intendansi tirate infinite linee perpendicolari ad AD , e parallele a DE , le quali terminino alla linea retta CE , linea, che congiunge per i punti estremi le perpendicolari BC , e DE , come per esempio, le perpendicolari PQ , SQ , MN , e tutte le altre. E dell'istesso modo da i punti

Parte I.

A 2

del-

della DF intendansi tirate infinite linee rette perpendicolari ad AF, e parallele ad FG, le quali terminino alla linea retta EG, linea, che congiunge per i punti estremi le perpendicolari DE₂, ed FG₃; e prolunghisi la retta EC fin che s' incontri con la DA allungata, come per esempio, nel punto K.

Dico, che tutte le infinite perpendicolari, che terminano alle linee rette CE, ed EG, sono mezze proporzionali frà l'unità AB, e la porzione della linea retta AF, nella quale cadono, come per esempio, HI mezza proporzionale frà AB, ed AH, o sia radice di AH, e lo stesso di tutte le altre.

D I M O S T R A Z I O N E.

Tav. I.
Fig. I.

P Erche abbiamo divisa la AF in nove parti uguali, di modo che AB è 1, AD è 4, ed AF è 9; ed abbiamo tirate le perpendicolari BC₁, DE₂, ed FG₃. La BC unità sarà mezza proporzionale frà AB, ed AB medesima, cioè sarà radice di AB. La DE₂ sarà mezza proporzionale frà AB unità, ed AD 4, cioè sarà radice di AD. E la FG₃ sarà mezza proporzionale frà AB unità, ed AF 9, cioè sarà radice di AF. Dimostreremo ora, che HI intercetta frà BC₁, ed DE₂, la quale termina alla linea retta CE, è radice di AH.

Perche abbiamo divisa la BF porzione di AF in punti, o parti infinite, tutte le parti della BF faranno in proporzione aritmetica frà esse; perchè se ad esse s' aggiunge comunemente AB, tutte le parti, AB, AP, AH, AS, &c. faranno in proporzione aritmetica frà esse.

Dell' istesso modo le infinite parallele intercette fra BC₁, ed DE₂ faranno in proporzione aritmetica frà esse; perchè avendo noi prolungato la EC, e la DA fino in K, abbiamo formato il Triangolo rettangolo KDE; ond' è, che se dal Triangolo KDE se ne toglie il Triangolo KBC, le infinite parallele intercette frà BC, e DE, le quali partono da i punti infiniti della BD, faranno in proporzione aritmetica frà esse.

Ma

Ma se le porzioni intercette frà AB_1 , ed AD_4 sono infinite, e sono in proporzione aritmetica; e le parallele intercette frà BC_1 , e DE_2 , sono infinite, e sono in proporzione aritmetica. Nelle infinite parallele intercette frà BC_1 , e DE_2 , le quali terminano alla linea retta CE , vi farà la somma delle radici di tutti i quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 ; Perchè le parallele infinite, le quali terminano alla retta CE , sendo tante in numero, quanti sono i punti della porzione dell' asse BD , e sendo in proporzione aritmetica: Nelle parallele intercette frà BC_1 , e DE_2 vi dev' esser la somma di tutte le differenze, che posson essere fra le infinite radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 ; mà se v' è la somma di tutte le differenze, che posson essere frà le radici degl' infiniti quadrati; le infinite parallele, le quali terminano alla linea retta CE , son le radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 .

Ogni radice poi cade al punto estremo dell' asse, del quale ella è quadrato, come per esempio, HI radice di AH ; perchè il quadrato maggiore avendo radice maggiore, che il quadrato minore; ed il quadrato minore radice minore, che il quadrato maggiore; e le radici intercette frà BC , e DE sendo infinite, ogni radice dourà esser maggiore dell' antecedente, e minore della susseguente, come per esempio, HI maggiore di P_1 , e minore di SQ , e perciò ogni radice caderà al punto estremo del suo quadrato; dunque le radici de' quadrati intercetti frà AB , ed AD terminano alla linea retta CE , ch' è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

Fingiamo ora per impossibile, che un' Avversario negasse, che le radici terminano alla retta CE , e come dicesse, che HI non è radice di AH : Se è così, dimostriam' ora in altro modo, e per la via negativa, che solamente HI è radice di AH . Suppongasì come prima la BD divisa in parti infinite, e tutte uguali frà esse.

DI.

DIMOSTRAZIONE II. DELL' ANTECEDENTE
PROPOSIZIONE.

Tav. I. **Fig. 1.** **S** E HI non è radice di AH, come vuole l' Avversario, la radice di AH farà una linea, che terminerà, o fuori, o dentro della linea retta CE. Termini prima fuori, e la radice di AH sia, per esempio, HO; se è così, calisi la perpendicolare OQ, la quale termini alla linea retta CE: In questo caso la SQ uguale ad HO, la quale termina alla linea retta CE, farà ancora radice di AH, e perciò la radice di AH farà in una linea fuori della CE, ed insieme nella retta CE. Dell' istesso modo S 15, ed MN faranno radici di AS, e lo stesso avverrà successivamente di tutte le infinite radici intercette fra BC₁, e DE₂.

Ma se è così, una delle infinite parallele intercette fra BC₁, e DE₂ farà maggiore di DE₂: perchè le parallele, o si suppone, che s' eccedono fra esse in proporzione aritmetica; ed allora, se la radice di AH termina fuori della retta CE, la radice di AD₄ caderà in un punto sopra il punto D: o si suppone, che non s' eccedono in proporzione aritmetica; e in questo caso le infinite perpendicolari tirate da i punti estremi delle linee, che terminano fuori della linea retta CE, come per esempio OQ, 15 N, e tutte le infinite altre, divideranno la retta CE in parti infinite, tutte sempre una minore dell' altra; ond' è, che le infinite parallele, le quali partono da i punti della BD, e terminano alla retta CE, non sono in proporzione aritmetica; e se non sono in proporzione aritmetica, l' asse BD non sarà diviso in punti, o parti infinite, siccome noi abbiamo supposto per costruzione, il che è assurdo, perchè è contro l'ipotesi.

Dell' istesso modo si dimostra, che le radici non possono terminare dentro della retta CE, come per esempio, che HR non può esser radice di AH; perchè se terminassero dentro della CE, una delle infinite radici intercette fra BC₁, e DE₂ sarebbe minore di BC unità, il ch' è assurdo. Non possono dunque le radici de' quadrati intercetti fra
AB,

AB, ed AD terminare nè fuori, nè dentro della linea retta CE, dunque terminano alla retta CE, ch'è ciò si dovea dimostrare.

Dell'istesso modo si dimostra, che la parallela TV intercetta frà DE₂, ed FG₃, la quale termina alla linea retta EG, è radice di AT; Perche se si prolunga la retta GE fin che s'incontri con la TA allungata, si dimostra, che le parallele infinite intercette frà DE₂, ed FG₃ sono in un Triangolo rettangolo, e perciò sono in proporzione aritmetica; e che TX, che termina fuori della EG, non può esser radice di AT; e che niun'altra, che termina dentro di EG può esser radice di AT; e perciò le parallele intercette frà BC₁, e DE₂, le quali terminano alla retta CE, son radici de' quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄; e le parallele intercette frà DE₂, ed FG₃, le quali terminano alla retta EG, son radici de' quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄, che è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE.

IN conseguenza delle antecedenti dimostrazioni riman provato, che la Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se l'assegnano; perche, se io hò dimostrato, che le radici infinite, le quali terminano alla mia linea retta, son radici delle ascisse dell'asse; le applicate, che terminano alla Parabola Apolloniana non posson essere radici dell'asse.

Le due antecedenti dimostrazioni in sostanza son le medesime, che si leggono nella proposizione prima del Ristretto, che del Mio Nuovo Metodo hò fatto ne miei Dialoghi: Ma perche mi avvedevo, che quanto più io dimostravo, tanto meno approvazione ritrovavo da alcuni Signori Matematici. Fatta seria riflessione alle mie antecedenti dimostrazioni, dubbitai, che quei Signori Matematici, i quali trovavo renitenti ad approvare la Mia Opera, pensassero forse, che non fusse necessario; *Che le radici delle ascisse dell'asse fossero in proporzione aritmetica frà esse*; ma che potesse -

ro eccederfi con altre differenze, dalla proporzione aritmetica diverse, e con tutto ciò effer radici dell' ascisse.

A questo io rispondevo, che da Signori miei Oppositori non può dirfi, che le radici posson terminare al perimetro della Parabola, senza che sia necessario, che le infinite siano in proporzione aritmetica; perche avevo io già dimostrato, che in qualunque proporzione, che si voglia, che siano le radici, non posson terminare nè fuori, nè dentro: Con tutto ciò, benchè lo riputassi superfluo, nella Lettera, che indirizzai al Sig. Giacinto di Cristofaro, li dimostrai, che necessariamente le radici infinite intercette frà BC_1 , e DE_2 non posson essere radici delle ascisse dell' asse, se non sono in proporzione aritmetica. Ora la dimostrazione da mè fatta in quella Lettera è la medesima, che pongo quì appresso in forma di proposizione, e con ciò si vede, avere io fatta la terza dimostrazione alla mia Proposizione.

P R O P O S I Z I O N E.

SE le applicate infinite all' asse della Parabola Apolloniana non s' eccedono in proporzione aritmetica, non posson essere radici delle ascisse dell' asse.

C O S T R U Z Z I O N E:

Tav. I.
Fig. II.

Suppongasi descritta la Parabola Apolloniana nel modo insegnato da Galileo; cioè, che AB sia 1, BC_1 , AD_4 , DE_2 , AF_9 , ed FG_3 .

E suppongansi, come prima, tirate per i punti A , C , E , e G le nostre linee rette AC , CE , ed EG ; e suppongasi la EC allungata, fin che s' incontri col' asse FA allungato, come per esempio, nel punto K .

Suppongasi poi per i punti A , C , E , e G descritta la Parabola Apolloniana, il di cui perimetro sia una linea curva; e suppongasi la BD divisa in punti, o parti infinite, tutte uguali frà esse; e da ogn' uno degl' infiniti punti della BD intendasi tirata un'applicata, la quale termini
alla

la curva ACE, come per esempio, HI, LM, NO, &c.

Dico, che se le applicate intercette frà BC_1 , e DE_2 , le quali terminano al perimetro ACIME &c. non sono in proporzione aritmetica, non posson essere radici dell'ascisse intercette frà AB_1 , ed AD_4 . E dello stesso modo, che se le applicate intercette frà DE_2 , ed FG_3 , le quali terminano al perimetro della Parabola, non sono in proporzione aritmetica, non posson essere radici delle ascisse dell'asse, nelle quali cadono.

D I M O S T R A Z I O N E .

Supponiamo per primo, che le applicate, le quali terminano al perimetro della Parabola ACIME &c., siano tutte una maggiore dell'altra, ma che s'eccedano frà esse con differenze, che siano sempre una minore dell'altra. In questo caso, non si potrà mai giungere nell'applicata DE; perchè, se dagl'infiniti punti dell'AD si vogliano tirare infinite linee parallele a DE, le quali siano tutte una maggiore dell'altra, ma che s'eccedano con differenze una minore dell'altra; la BD sarà divisa in parti, le differenze frà le quali saranno sempre una minore dell'altra, e perciò non si potrà mai giungere nel punto D, nè tirare la parallela DE_2 , ciò ch'è contro l'ipotesi.

Tav. I.
Fig. II.

Supponiamo per secondo, che le applicate infinite s'eccedano frà esse con eccessi maggiori della proporzione aritmetica; cioè, che la differenza frà LM, e HI sia maggiore della differenza frà HI, e BC: se è così, nelle applicate intercette frà BC_1 , e DE_2 , si troverà un'applicata, maggiore di DE_2 , la quale caderà sopra 'l punto D, come per esempio, nel punto X, ovvero T: Perchè le applicate infinite sendo tante in numero, quanti sono i punti della BD; gl'eccessi, co' quali le applicate si eccedono l'una l'altra sono ancora tanti in numero, quanti sono i punti della BD; e perciò se non s'eccedono con eccessi uguali, e s'eccedono con eccessi uno maggiore dell'altro; la somma di tutte le differenze, che v'è frà le applicate intercette frà BC_1 , e DE_2

Part. I.

B

si tro-

si troverà in una applicata sopra del punto D , come per esempio, nell'applicata XY , o TV : non possono dunque le radici eccederfi frà esse con eccessi uno sempre maggiore dell' altro. Mà se le radici non si possono eccedere fra esse con differenze maggiori, o minori della proporzione aritmetica; le applicate, che terminano al perimetro della Parabola Apolloniana, come $ACIME$ &c., non possono essere radici delle ascisse dell' asse, mentre non sono in proporzione aritmetica, ch' è ciò si dovea dimostrare.

CONSIDERAZIONE. I.

Quello, ch' abbiamo dimostrato poc' anzi, si puol vedere ancora in numeri, ed ecco come. Io posso alle infinite radici intercette fra BCr , e DEz , ed agl' infiniti quadrati intercetti fra ABr , ed ADd , assegnare qualunque numero in se finito, prendendolo per ipotesi come infinito; e così ritrovar sempre in quel numero finito, ch' io prendo come infinito, quelle medesime proprietà, ch' hò dimostrato, ritrovarsi nelle infinite radici, e negl' infiniti quadrati; ed eccone la pruova.

Quando io prendo tutti i punti intercetti fra AB , ed AD , prendo gl' infiniti punti; perchè lo stesso è dire tutti i punti, che dire gl' infiniti punti; e perciò se io dico per ipotesi, che gl' infiniti punti intercetti fra AB , ed AD , siano per esempio, 15; in questo caso il numero 15, benchè in se finito, rappresenta però l' infinito, perchè disegna gl' infiniti punti. Tutt' il contrario avviene, se nelle ascisse io prendo 3, 4, o 5 punti particolari; perchè in tal caso questi punti particolari non rappresentando tutti gl' infiniti punti, non si possono in questi punti particolari ritrovare le stesse proprietà, che si dimostra essere negl' infiniti: Così dunque prendendo noi per ipotesi numeri finiti, come infiniti, ed assegnandoli a gl' infiniti punti dell' asse, faremo vedere sensibilmente quello, ch' abbiamo dimostrato, cioè; che le radici infinite devono essere in proporzione aritmetica.

Suppo-

Supponiamo prima, che le radici si eccedano con eccessi sempre uno minore dell'altro; e che gl' infiniti quadrati intercetti frà AB, ed AD, e le infinite radici siano, per esempio, 15 in numero, e le radici BC, HI, LM, NO, &c. s'esprimano co' seguenti numeri, cioè

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \frac{1}{15} \\ & & & & & & \frac{1}{15} \quad \frac{1}{30} \\ & & & & & & \frac{1}{15} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \\ & & & & & & \frac{1}{15} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{120}, \text{ e co-} \end{array}$$

si fino all' infinito ; se è così , mai si giungerà nell' applicata DE2 .

Supponiamo poi, che le radici s' eccedano con eccessi maggiori di quelli , co' quali s' eccedono in proporzione aritmetica; e fingiamo come prima, che gl' infiniti quadrati, e le infinite parallele siano 15 in numero ; e che le radici s' esprimano co' medesimi seguenti numeri , cioè

$$\begin{array}{c} 1 \\ \frac{2}{15} \\ \frac{3}{15} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{5}{15} \\ \frac{6}{15} \end{array}$$

In questo caso si troverà il $\frac{15}{15}$, cioè l' applicata 2 nel punto 14 dell'asse AD, che vale à dire, nel punto X immediato sopra 'l punto D, ed eccone la pruova

$$BC \text{ è } \frac{1}{15}$$

$$HI \text{ è } \frac{2}{15}$$

$$LM \text{ è } \frac{4}{15}$$

$$NO \text{ è } \frac{5}{15}; \text{ Ed alla perfì-}$$

ne XY, che cade nel punto 14 della BD, sarà $\frac{15}{15}$, e perciò uguale a 2. E se si suppone, che le radici s' eccedono con differenze ancora maggiori; si troverà sempre la DE in un punto più vicino al punto B, come per esempio in T, in R, &c.

Lo stesso si ritroverà in qualunque numero di parti, che si voglia supponer diviso l' asse AD; e in qualunque numero, che si voglia assegnare alle radici uguali in numero alle parti dell' asse; e perciò si vede anche sensibilmente in numeri, che se le applicate all' asse non sono in proporzione aritmetica, non posson essere radici delle ascisse dell' asse.

C O N S I D E R A Z I O N E II.

D Alle trè antecedenti dimostrazioni si conchiude, che le infinite radici degl' infiniti quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄ non possono terminare in altra linea, che nella retta CE; Perchè dovendo le radici esser intercette frà BC₁, e DE₂, non possono terminare in altro luogo, che in una linea, la quale passi per i punti estremi di BC₁, e DE₂; e dovendo le radici infinite essere in proporzione aritmetica, non possono terminare in altra linea, che nella

ret-

retta CE, la quale è porzione dell'ipotenusa KE :

CONSIDERAZIONE III.

D Opò le tre antecedenti dimostrazioni, nelle quali hò io provato, che le infinite radici terminano nelle mie linee rette; sembra, che non sia permesso a' Sign. Geometri poter fare opposizioni, deducendo assurdi particolari dalle mie proposizioni generali, e dimostrate: Perchè se io hò dimostrato, che le infinite radici degl' infiniti quadrati intercetti frà 1, e 4 terminano nella linea retta CE; è certissimo, che niuna radice particolare può terminare in altro luogo, se non che nella linea retta CE; perchè le radici infinite comprendendo in esse tutte le particolari, niuna radice particolare può terminare in altro luogo, se non in quello, nel quale le infinite radici terminano. Con tutto ciò però, non sarà inutile il riferire qui per avvertimento di chi legge, alcuni di quei errori, che nell'opponere sogliono prender quei Signori Geometri, ch' amano più d'impugnare, che di studiare le altrui invenzioni; ed a cagion d' esempio,

Tav. I.
Fig. 11.

Volendo alcuno Oppositore provare, che le radici infinite non sono in proporzione aritmetica; in vece di studiare le mie dimostrazioni, ricorresse a qualche particolare, e con ciò pensasse, male a proposito, di ritrovare qualche assurdo, per distruggere la mia proposizione generale dimostrata; come per esempio, volendo provare, che i quadrati non sono in proporzione aritmetica, dicesse così: Le radici 1, 2, e 3, &c. sono in proporzione aritmetica, ma i quadrati 1, 4, e 9, non sono in proporzione aritmetica, dunque non è vero, che se le radici sono in proporzione aritmetica, i quadrati ancora debbon essere in proporzione aritmetica. Sarebbe questa opposizione malamente dedotta da un particolare, che niente s' oppone alla mia dimostrazione, come si vede nella seguente risposta.

Si risponde!, che quello, io hò dimostrato si è, che i quadrati infiniti, che sono in proporzione aritmetica,

ca,

ca , sono i quadrati infiniti delle infinite radici intercette frà BC_1 , e DE_2 ; cioè gl' intercetti frà AB_1 , ed AD_4 ; donde poscia hò dimostrato , che sono in proporzione aritmetica frà essi i quadrati infiniti delle infinite radici intercette frà DE_2 , e FG_3 ; cioè gl' intercetti frà AD_4 , ed AF_9 . Ma giammai hò preteso di aver dimostrato , che le infinite radici intercette frà 1 , e 3 siano nella medesima serie di proporzione aritmetica ; nè che i quadrati intercetti frà 1, e 9 siano in proporzione aritmetica. E' dunque manifesto , che in questa guisa opponendo , questo Oppositore , peccarebbe in Geometria , supponendo quello, che l'Autore non suppone ; e confondendo gl' infiniti co' particolari.

E qui deesi considerare , che la cagione, per la quale le radici intercette frà 2, e 3 non sono nella medesima serie di proporzione aritmetica , nella quale sono le radici intercette frà 1, e 2, è solamente, perche sono nelle ipotenuuse di diversi triangoli rettangoli: e di più deesi considerare ; che in tanto le due linee rette CE , ed EG fanno angolo in E , per modo tale che, come si vedrà in appresso, formano una curva composta di linee rette determinate da punti determinati ; in quanto , che CE , ed EG sono pezzi di due diverse ipotenuuse , come si puo vedere , se si prolunga la retta GE fin che s' incontri coll' asse FA allungato . Proseguiamo , ma brevemente , ad additare gl' errori di quei , che oppongono , senza studiare le dimostrazioni degl' Autori.

Viene in campo un Geometra inclinato più al calcolare , che al ragionare , e figurandosi di poter spiegare in numeri i particolari quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 ; e le particolari radici intercette frà BC_1 , e DE_2 , pensa trovare alcuna radice in numeri , che non corrisponda al suo quadrato , e con ciò conchiude esser falsa quella dimostrazione dell' Autore, ch' esso non hà studiato .

A questo tale Oppositore si risponde , ch' egli non intende la natura della quantità continua , e della quantità discreta ; perche se la intendesse , conoscerebbe la seguente pro-

proprietà della quantità continua, e della discreta, cioè :
Che tutto quello, ch' è vero in linee, si trova sempre vero in numeri, quando si puol esprimere in numeri; ma ch' all' incontro, tutto quello, che sembra vero in numeri, non si ritrova sempre vero in linee; per la qual cosa avrebbe conosciuto, che le parallele intercette fra BC_1 , e DE_2 prese in numeri, non possono spiegare in numeri il valore delle radici in linea, di quei quadrati in linea, i quali sono intercetti fra AB_1 , ed AD_4 ; come si dimostrerà chiaramente in appresso.

Ma in vero dall' esempio delle antecedenti opposizioni bisogna dedurne la seguente importantissima massima, cioè; che tutti quei Geometri, i quali non danno volentieri il loro consenso ad alcuna dimostrazione, se non la veggono espressa in numeri, son Geometri, i quali non intendono, che cosa sia forza di dimostrazione; perchè se la intendessero, conoscerebbono, che i numeri servono bensì a spiegare sensibilmente molte di quelle cose, che la mente intende per dimostrazione, ma che non possono spiegare tutte quelle cose, che si dimostrano; Per la qual cosa, chi ha precisa necessità de' numeri, o d' altri calcoli per intendere, è segno evidente, che non intende dimostrazione, e che perciò ricorre al pratico, e al sensibile.

Queste massime da me narrate, perchè sono a' Geometri importantissime, per ciò stimo far cosa utile narrar la seguente opposizione, che da uno Amico da me molto riputato, m' è stata riferita, narrandomi, che alcuni Signori Geometri, borbottando, han fatto alle mie proposizioni: E tanto più stimo a proposito narrarla, perchè in quella si vede la verità, che in tutte le massime da me narrate si contiene; ed alla perfine poi si vede, che la seguente opposizione, come tutte le altre, serve di nuova pruova alla mia proposizione.

OPFC

O P P O S I Z I O N E

SI intende di provare, che se le radici delle ascisse dell'asse, intercette frà AB_1 , e AD_4 , terminassero alla linea retta CE , come vuole l'Autore; due linee di quantità diverse farebbono mezze proporzionali frà BC_1 , e DE_2 . La difficoltà si dimostra nel seguente modo.

Tav. I.
Fig. III.

Suppongasi descritto il Rettilineo $ABCDE$, nel quale, come vuole l'Autore, AB sia 1, BC_1 , AD_4 , DE_2 , e tirinsi, come esso vuole, le due linee rette AC , e CE . Poi frà AB_1 , ed AD_4 prendasi una mezza proporzional, la quale sia per esempio, AF , e tirisi la parallela FH , la quale termini alla retta CE . Pofcia prolunghisi la EC di modo, che s' incontri con la DA allungata nel punto X .

Indi frà XB , ed XD prendasi una mezza proporzionale; questa caderà in un punto sotto il punto F , perche XB è maggiore di AB , ed XD è maggiore di AD , e perciò la mezza proporzionale averà da esser maggiore di AF . Cada dunque, per esempio, nel punto P , ed XP sia mezza proporzionale fra XB , ed XD , e tirisi la PQ , la quale termini alla retta CE .

Dico, che le due parallele dissuguali FH , e PQ sono ambedue mezze proporzionali frà BC_1 , e DE_2 , e che perciò devon' essere uguali frà esse, il che è assurdo.

D I M O S T R A Z I O N E.

P Erchè si è presa AF mezza proporzionale frà AB , ed AD , per l'ipotesi dell'Autore, FH sarà mezza proporzionale frà BC , e DE ; perche BC , FH , e DE sono in subduplicata ragione de' tre quadrati AB , AF , ed AD , i quali sono in continua proporzione trà essi.

Ma XP è ancora per costruzione mezza proporzionale frà XB , ed XD , dunque per Euclide la parallela PQ sarà mezza proporzionale frà BC , e DE ; perche è come XB a BC , così XP a PQ ; e come XP a PQ , così XD a DE , e perciò come BC a PQ , così PQ a DE ; onde PQ , ed FH sono

son ambedue mezze proporzionali frà BC , e DE , il che è assurdo; dunque FH , la quale termina alla retta CE, non è radice di AF .

R I S P O S T A .

SI risponde per primo, che niente ripugna ad Euclide il dire , che la mezza proporzionale presa frà le parti del lato del triangolo cada nel medesimo punto dell' asse , nel quale cade la mezza proporzionale presa frà l'unità, e l' ascissa dell' asse : E non ripugna , perchè le parallele , che terminano alle nostre linee rette , come per esempio , FH, TN, &c. sendo in subduplicata ragione delle ascisse; e nell' istesso tempo avendo frà esse la proporzione , che hanno i lati del triangolo , possono avere frà esse due diverse proporzioni , cioè la dupla , e la subduplicata : ed a cagion d' esempio , TN può essere a BC in subduplicata ragione di AB ad AT , e con tutto ciò avere a BC la proporzione di XB ad XT ; e tutto ciò avviene , perchè la subduplicata ragione , e la ragione dupla sendo diverse , le parallele , che sono tutte in un tempo nel triangolo , e nell' asse d' una Parabola, possono avere frà esse le due sudette diverse proporzioni , le quali ambedue facciano cadere in un medesimo punto dell' asse la mezza proporzionale frà le parti del lato del triangolo , e la radice dell' ascissa dell' asse; ecco dunque, ch' abbiamo ampiamente soddisfatto alla obbiezione . Vogliam ora far vedere , che ogni obbiezione è cagione di nuova dimostrazione al nostro assunto, e perciò dimostreremo la seguente proposizione cioè .

Che le mezze proporzionali prese in linea frà le parti dell' asse AB1, ed AD4; AD4, ed AF9; AF9, ed AH16: E le mezze proporzionali prese in linea frà SB, e SD; frà MD, e MF ; frà KP, e KH, che sono parti de' lati de' triangoli, cadono a' medesimi punti dell' asse ; ed in pruova di ciò ; Dimostreremo prima , che le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli, e le mezze proporzionali fra le unità, e le ascisse dell' asse cadono nelle medesime unità dell' asse:

Parte I.

C

asse:

asse: Poscia dimostreremo, che considerate come infinite, cadono le une, e le altre nell' istessi punti dell' asse; e per maggior chiarezza, ci avvaleremo, anche utilmente, del calcolo numerico.

Suppongasi descritto il nostro Rettilineo, nel quale AB sia 1, AD 4, AF 9, AH 16; e frà le radici, BC sia 1, DE 2, FG 3, HL 4. Suppongansi poi tirate le linee rette AC, CE, EG, e GL, e prolungata la EC in S, la GE in M, e la LG in K. In questo modo auremo trè triangoli, SDE, MFG, KHL, ed auremo le porzioni dell' asse, cioè AD 4, AF 9, ed AH 16.

Vogliamo ora prendere in numeri le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli, per vedere i punti dell' asse, ne' quali cadono: Ma per ciò fare in numeri, necessaria cosa è, che ritroviamo un modo per esprimere in numeri il valore de' lati SD, MF, e KH. Esaminiamo dunque qual metodo possiamo tenere per esprimere in numeri i suddetti lati.

E' certissimo, che ne' triangoli DSE, FMG, HKL, noi non abbiamo ne lati, ne porzioni de' lati espresse in numeri, per modo tale, che potessimo per Euclide ritrovare in numeri il valore de' restanti lati; per esempio, noi non abbiamo un numero, ch' esprima il valore di SD, ne un altro, ch' esprima il valore di SB, nè un altro, ch' esprima il valore di SC, ne un altro, ch' esprima il valore di SE, per modo, che potessimo dire, come SB a SD, così SC a SE, e lo stesso avviene degl' altri triangoli. Con tutto ciò però abbiain pensato un modo, col quale possiamo spiegare in numeri il vero valore de' lati DS, FM, ed HK; il modo è il seguente.

Nel triangolo EDS, DE è 2, BD porzione del lato SD è 3, dunque DS è doppia di SB; e perciò, la differenza frà SB, ed SD dev' esser 3: ma se BD dev' esser 3, non vi è frà tutti i numeri possibili, o fratti, o interi, altro numero, che 6, il quale possa esprimere il valore di SD; perchè solamente nel numero 6 si trova, che è come DE 2 a BC 1, così SD 6 ad SB 3, e il residuo resta 3; dunque il solo nu-

numero 6 è il valore del lato SD.

Noi poi vogliamo ridurre questo metodo ad una proprietà generale, con la quale possiamo ritrovare quei numeri, i quali soli esprimano il valore de' lati di questi triangoli, in quella guisa, ch'abbiamo trovato il numero 6, per valore del lato SD; e questa proprietà è espressa nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE.

Come l'unità è alla radice, che cade al punto estremo del quadrato di numero intero, e del lato del triangolo; così è la porzione dell'asse designata da' numeri impari, al lato del triangolo.

L'unità nel triangolo SDE è BC; ciò posto, la radice DE₂ cade al punto estremo dell'asse AD₄, e insieme al punto estremo del lato SD; e BD è la porzione dell'asse AD, la quale è designata dal numero impare BD, ch'è 3. Dico ora, che sarà come l'unità BC a DE₂, così DB 3 a DS₆; e che lo stesso avviene in ogni triangolo, ed eccone la dimostrazione.

Tav. I.
Fig. IV.

DIMOSTRAZIONE.

Nel triangolo SDE, la DE₂ è doppia di BC unità, giusto come la SD è doppia di SB. Supponiamo ora, che SD sia uguale a 6 unità, sarà come DE₂ a BC₁, così SD₆ ad SB₃, ed il residuo BD resta 3; dunque SD è necessariamente uguale a 6 unità AB.

Dall'antecedente dimostrazione si vede, che l'unico numero possibile, che compete a SD è 6; perchè BD, differenza frà SB, ed SD, sendo 3 per costruzione, se SD non è 6, ed SB non è 3, SD non può esser doppia di SB.

Dell'istesso modo nel triangolo MFG, MF è ad MD, come FG a DE; ma FG è 3 unità, DE è 2, e DF è 5; dunque la differenza frà MF, ed MD dev'esser 5: ma la differenza frà MF, ed MD non può esser 5, se MD non è 10,

Parte I.

C 2

ed

ed MF non è 15 ; dunque sarà come FG 3 a DE 2 , così MF 15 ad MD 10 , e lo stesso si ritrova in tutti gl'altri triangoli fino all' infinito. Dunque come l' unità è alla radice , che cade al punto estremo del quadrato di numero intero , e del lato del triangolo , così è la porzione dell' asse designata da' numeri impari al lato del triangolo , ch' è ciò si doveva dimostrare .

Profeguiamo ora à suppotare i lati degl' altri triangoli , per far conoscere , che la proprietà v' à all' infinito . Nel triangolo MFG , la radice di FG è 3 , la DF porzione dell' asse AF designata dal numero impare è 5 ; dunque sarà , per la proprietà da noi ritrovata , come l' unità ad FG 3 , così MD 10 , ad MF 15 ; e perciò 15 è il solo numero , ch' esprime il valore del lato MF .

Questo di nuovo si vede chiaramente per Euclide ; perchè è come FG 3 a DE 2 , così MF 15 ad MD 10 , e perciò DF resta 5 : donde chiaramente si vede , che il numero , che solo può esprimere il lato MF è 15 , perchè solamente nel numero 15 , il lato DF resta 5 . Dell'istesso modo nel triangolo KHL , la radice di HL è 4 , ed FH è 7 ; dunque sarà come l' unità ad HL 4 , così HF 7 a HK 28 : e per Euclide sarà , come HL 4 ad FG 3 , così KH 28 a KF 21 , onde il residuo FH resta 7 . Dunque solamente il numero 28 è quello , ch' esprime il valore del lato KH , e lo stesso si ritrova fino all' infinito .

Ritrovato già in numeri il valore de' lati de' triangoli , ed il valore delle parti di essi ; riman ora a ritrovare le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli , per vedere i punti dell' asse , ne' quali cadono .

Nel lato SD del triangolo SDE ; SB è 3 , ed SD è 6 , dunque il prodotto degl' estremi è 18 , dunque la mezza proporzionale frà SB , ed SD è radice 18 : ma se è radice 18 , la mezza proporzionale cade frà SN uguale a 4 unità , ed SO uguale a 5 unità , cioè frà il punto 2 , e 3 dell' asse AD .

Prendiam ora la mezza proporzionale frà MD , ed MF ; nel lato MF , MD è 10 , ed MF è 15 , dunque il prodotto degl' estremi è 150 , e la mezza proporzionale frà
MD,

MD, ed MF è radice 150, dunque cade frà il punto 12, e 13 di MF, perche la radice di 150 è fra 12, e 13: ma se cade frà 12, e 13 di MF, cade frà AP, ed AQ dell' asse; perche tolte da MF 15 tre unità, MP resta 12, ed MQ resta 13: ma se la mezza proporzionale cade frà MP ed MQ, cade frà il 6, e 7 punto dell' asse AF.

Prendiam ora la mezza proporzionale frà KF, e KH; KH è 28, e KF è 21, dunque il prodotto degl' estremi è 588, e la mezza proporzionale è radice 588, la qual' è frà 24, e 25: ma se è frà 24, e 25, cade frà KT, e KR, perche TH è 4; e se cade frà KT, e KR, cade frà il punto 12, e 13 dell' asse AH.

Abbiamo dunque dimostrato, che le mezze proporzionali frà le parti de' lati de' triangoli cadono frà i limiti di N, e O; e frà quei di P, e Q; e frà quei di T, ed R dell' asse, ciò che vale à dire, che cadono nelle unità NO, PQ, e TR, e così di tutte le altre: Dimostreremo ora, che le terze proporzionali prese frà AB, ed AD; frà AD, ed AF; frà AF, ed AH, cadono nelle medesime unità NO, PQ, e TR, ed eccone la pruova.

Perchè i quadrati intercetti frà AB², ed AD⁴; frà AD⁴, ed AF⁹ s' eccedono l' un l' altro nella medesima proporzione, nella quale s' eccedono i quadrati di numero intero AB², AD⁴, ed AF⁹; la mezza proporzionale frà AB², ed AD⁴, la quale in numeri sarebbe 2, in linea non si ritrova nel punto 2. dell' asse AD; perchè se si ritrovasse nel punto 2. dell' asse AD, i quadrati intercetti frà AB, ed AD; frà AD, ed AF, non si eccederebbero frà loro nella medesima proporzione de' numeri impari, nella quale s' eccedono i quadrati AB², AD⁴, ed AF⁹.

La mezza proporzionale poi frà AB². ed AD⁴ ne meno può esser l'ascissa AO tripla di AB; perchè se fosse AO, non solo i quadrati intercetti frà AB, ed AD non s' eccederebbero secondo l' ordine de' numeri impari; ma la radice DE² caderebbe in un punto sotto il punto D, come per esempio in Y; dunque la mezza proporzionale frà AB², ed AD⁴ cade in un punto intercetto frà AN, ed AO.

Que-

Questa verità si vede più sensibilmente, supponendo, come ha supposto Galileo, un grave, il quale cadendo per l'asse AF , s'acceleri in ogni punto dell'asse, ed ecco come.

Il grave in un momento di tempo precorre la BD tripla dell'unità AB , e s'accelera in ogni punto della BD : ma se AN doppia di AB fusse 2, e fusse mezza proporzionale fra AB , ed AD ; tanto in numero, quanto in linea, il numero 2 sarebbe mezza proporzionale fra 1, e 4, e fra AB , ed AD , e perciò AN in ragion di linea sarebbe 2.

Ma se fusse così, il grave andrebbe di moto equabile, e non di moto accelerato; perchè il grave, che in un momento di tempo descrive la BD tripla di AB , in un terzo poi di momento di tempo descriverebbe l'unità AN , in un altro terzo l'unità NO , e nell'altro terzo l'unità OD , e perciò andrebbe di moto equabile: Adunque AN non è 2, e se non è 2, non è mezza proporzionale in numero fra AB , ed AD , e perciò la mezza proporzionale fra AB , ed AD cade in un punto intercetto fra N , ed O . Dell'istesso modo si dimostra, che la mezza proporzionale fra AD , ed AF cade in un punto intercetto fra P , e Q ; e la mezza proporzionale fra AF , ed AH cade in un punto intercetto fra T , ed R .

Potrebbe però avvenire, che l'Avversario dicesse, che se AN non è mezza proporzionale numero fra AB , ed AD , è però mezza proporzionale linea fra AB , ed AD . A questo si risponde, che tutte le intercette fra AB , ed AD sono irrazionali, come dimostreremo in appresso, e che per ciò non si può sapere in qual punto della NO cada la mezza proporzionale fra AB , ed AD : ma con tutto ciò, ancorche si concedesse, che AN , doppia di AB , fusse mezza proporzionale linea fra AB , ed AD ; sempre la mezza proporzionale fra SB , ed SD ; e la mezza proporzionale fra AB , ed AD cadono nella medesima unità NO .

Noi dunque dimostreremo quì in appresso prima, che, se si suppone, che la mezza proporzionale fra AB , ed AD cada in un punto intercetto fra AN , ed AO , nell'infinito le mezze proporzionali fra AB , ed AD , e le mezze proporzionali fra SB , ed SD cadono a' medesimi punti dell'asse.

Po-

Poscia dimostreremo, che se si suppone, che AN sia mezza proporzionale in linea fra AB , ed AD , anco nell' infinito le mezze proporzionali fra SB , ed SD , e fra AB , ed AD cadono a' medesimi punti dell' asse, e per ciò dimostrare; Supponiamo, che la mezza proporzionale fra AB , ed AD cada in un punto intercetto fra AN , ed AO .

Suppongasi dunque per l' Avversario, che KM sia mezza proporzionale fra KB , KD ; e che AH sia mezza proporzionale fra AB , AD , ciò supposto; Dico, che nell' infinito le mezze proporzionali fra KB , e le porzioni intercette fra KB , e KD ; e le mezze proporzionali fra AB , e le ascisse di AD cadono a' medesimi punti dell' asse, ed eccone la pruova.

Perche, per supposizione dell' Avversario, KM è mezza proporzionale fra KB , e KD ; ed AH è mezza proporzionale fra AB , ed AD : prendasi fra KB , e KM una mezza proporzionale, e sia per esempio KP ; e poi fra AB , ed AH prendasi un'altra mezza proporzionale e sia AR ; indi prendasi una mezza proporzionale fra KB , e KP , e sia la linea segnata KQ ; e poi prendasi un'altra mezza proporzionale fra AB , ed AR , e sia, per esempio, la linea segnata $A7$; e lo stesso facciasi fino all' infinito. Si dimostra, che nell' infinito le mezze proporzionali prese fra KB , e le porzioni di KD ; e le mezze proporzionali fra AB , e le ascisse di AD cadono nelli medesimi punti dell' asse, ed eccone la pruova.

Noi abbiain preso fra KB , e KD la mezza proporzionale KM ; fra la medesima KB , e KM la mezza proporzionale KP ; e fra KB , e KP la mezza proporzionale KQ . E dall' altra parte abbiain preso fra AB , ed AD la mezza proporzionale AH ; fra la medesima AB , ed AH la mezza proporzionale AR ; e fra AB , ed AR la mezza proporzionale $A7$; ed abbiain supposto farsi questo progresso fino all' infinito: Dunque le mezze proporzionali KP , e KQ ; AR , ed $A7$, e tutte le altre fino all' infinito, sono mezze proporzionali di mezze proporzionali fra due quantità, che sono sempre le medesime, cioè KB , ed AB , e ter-

e terze proporzionali, che sono mezze proporzionali, le quali divengono terze proporzionali; come per esempio, KM mezza proporzionale fra KB, e KD, ed indi terza proporzionale di KB, e KP; ed AH mezza proporzionale fra AB, ed AD; e poi terza proporzionale di AB, e di AR, e lo stesso avviene di tutte le altre.

Ma se è così, le mezze proporzionali KM, KP, e K9; e le mezze proporzionali AH, AR, A7 caderanno sempre ne' punti dell' asse, che faranno l'uno all' altro più vicini, quanto più le mezze, e le terze proporzionali diverranno minori: cioè il punto R sarà più vicino al punto P, che 'l punto H al punto M; il punto P più vicino al punto R, che 'l punto 9 al punto 7; perchè se i primi termini delle progressioni, son sempre gli stessi, e le mezze proporzionali sono mezze proporzionali di mezze proporzionali: le terze, e le mezze proporzionali divengono sempre minori, e con ciò le differenze, nelle quali cadono le mezze proporzionali nell' asse, devon sempre diminuirsi.

Ma se è così, prendendosi sempre fino all' infinito le mezze delle mezze proporzionali, e ponendole in luogo di terze proporzionali, si giungerà a prender la terza proporzionale fra KB, ed una quantità maggiore di KB, per una quantità così minima, che si reputa indivisibile: e si giungerà a prendere la mezza proporzionale fra AB, ed una quantità maggiore di AB per una quantità così minima, che si reputa indivisibile, come per esempio, la mezza proporzionale fra KB, e KD è KM; e per l' Avversario la mezza proporzionale fra AB, ed AD è AH: poscia la mezza proporzionale fra KB, e KM è KP; e la mezza proporzionale fra AB, ed AH è AR: ed alla perfine, per che KB, ed AB son sempre le istesse, e le terze proporzionali sempre l'una minore dell' altra; la mezza proporzionale fra KB, e K9 sarà K7, e la mezza proporzionale fra AB, ed A7 sarà AX, la mezza proporzionale fra KB, e K7 sarà KX, e la mezza proporzionale fra AB, ed AX sarà AT, fino a tanto, che la mezza proporzionale fra KB, e KX, e la mezza proporzionale fra AB, ed AT cadranno
in

in un medesimo punto; perche la differenza frà i pūti, ne quali cadono le mezze proporzionali, è un punto così insensibile, e così minimo, che non si può concepire diverso dal punto T, e per ciò si reputa indivisibile. Abbiamo dunque dimostrato, che se si suppone, che le mezze proporzionali cadono in un punto intercetto della medesima unità, nell'infinito poi cadono in un medesimo punto.

Dimostreremo ora dell'istesso modo, che se si suppone, che la mezza proporzionale frà AB, ed AD cada in una ascissa doppia dell'unità AB, come è AN nella figura IV, pure nell'infinito le mezze proporzionali cadono ne medesimi punti dell'asse.

Suppongasi, che BR sia uguale all'unità AB, ed RM ancora uguale ad AB; e suppongasi come prima, che KP sia mezza proporzionale frà KB, e KD; e che AR doppia di AB sia mezza proporzionale frà AB, ed AD. Indi prendasi la mezza proporzionale frà KB, e KP, la quale sia per esempio K9; poi la mezza proporzionale frà KB, e K9, la quale sia KX, e lo stesso facciasi fino all'infinito. Poscia prendasi la mezza proporzionale frà AB, ed AR, e sia per esempio A7, e la mezza proporzionale frà AB, ed A7, e sia AT. La distanza frà il punto 9, ed il punto 7 è minore della distanza frà il punto P, ed il punto R; perche nelle serie delle continue proporzionali, i primi termini KB, ed AB sono l'istessi, e le terze proporzionali K9, ed AT sono minori delle terze proporzionali KP, ed AR, dunque le differenze frà le terze proporzionali si diminuiscono sempre fino all'infinito.

Ma se le differenze frà le terze proporzionali si diminuiscono sempre, nell'infinito svaniscono in tutto, e perciò, se di nuovo si prende la mezza proporzionale frà KB, e KX, e frà AB, ed AT, e lo stesso si faccia fino all'infinito, la mezza proporzionale frà KB, e KX, e la mezza proporzionale frà AB, ed AT cadranno in un punto dell'asse, che si reputa indivisibile: Dunque, se dall'Avversario si vuole, che AR sia mezza proporzionale frà AB, ed AD, e che KP sia mezza proporzionale frà KB, e KD, si ritrova, che nell'

Parte I.

D

inti-

Tav. I.
Fig. V.

infinito le mezze proporzionali prese frà AB, ed una minima ascissa dell'asse, e frà KB, ed una porzione di KD, cadono in un medesimo punto dell'asse.

Ma se una mezza proporzionale frà KB, ed una porzione di KD, intercetta frà KB, e KD; ed una mezza proporzionale frà AB, ed una ascissa di AD, cadono in un medesimo punto dell'asse; tutte le infinite mezze proporzionali frà KB, e le porzioni intercette frà KB, e KD, e le mezze proporzionali prese frà AB, e le ascisse di AD, cadono ne' medesimi punti dell'asse: perche è legge stabilita frà Geometri, che quando le differenze si diminuiscono sempre, nell'infinito svaniscono in tutto, e se svaniscono in tutto, le differenze, che si ritrovano nelle proprietà particolari, non possono ripugnare alle proprietà, che si ritrovano nell'infinito, a cagion che li particolari son nell'infinito compresi, ch'è ciò si dovea dimostrare.

Questa dimostrazione poi, deve anco piacere a' signori moderni Geometri settatori del calcolo differenziale; perche, mentre dico, che le differenze frà i punti, a' quali cadono le mezze proporzionali, si diminuiscono fino all'infinito, da ciò n'avviene ancora, che le differenze divengono minori di ogni data quantità, qual condizione è quella, ch'essi vogliono ne' loro calcoli, acciò sia ricevuta per vera una proprietà geometrica.

Abbiamo dunque dimostrato prima, che le mezze proporzionali prese frà KB, e KD, e le mezze proporzionali prese frà AB, ed AD, considerate come particolari, cadono ne' punti di una medesima unità dell'asse; poscia abbiamo dimostrato, che nell'infinito le mezze proporzionali cadono a' medesimi punti dell'asse, ch'è ciò si dovea dimostrare.

Dopò l'antecedente dimostrazione, di nuovo si vede, chiaramente, che le linee rette CE, ed EG, e tutte le altre, sono il vero luogo delle radici dell'ascisse dell'asse, ed eccone in breve la dimostrazione.

Perchè habbiamo dimostrato, che tutte le mezze proporzionali prese frà KB, e le porzioni intercette frà KB, e
KB,

KD, e le mezze proporzionali prese frà AB, e le ascisse di AD cadono a' medesimi punti dell' asse AD: le parallele tirate da' punti, dove cadono le mezze proporzionali, termineranno nella retta CE, come per esempio, se la mezza proporzionale frà KB, e KX, è KT; e la mezza proporzionale frà AB, ed AX, è AT; la parallela TV caderà nella retta CE, perchè è come KB a KC, così KT a TV; abbiamo poi dimostrato in tutte le antecedenti proposizioni, che la parallela TV è radice di AT, dunque la retta CE è il luogo delle radici delle ascisse dell' asse, e nel medesimo tempo è una parallela compresa nel triangolo KDE. Ecco dunque, che l' obbiezione dell' Avversario, ha servito, come tutte le altre, di nuova dimostrazione al nostro assunto, la quale dimostrazione è appunto la quarta.

CONSIDERAZIONE I.

Quello però, eh' è degno di considerazione si è, che questi oppositori, i quali susurravano co' i poco intesi di Geometria queste sì fatte opposizioni, non s' accorgevano, che insieme con la mia novella Invenzione, distruggevano anco la Parabola Apolloniana, e facevano un fascio di tutta la Geometria; perchè alcerto il medesimo assurdo, che essi opponevano al mio Rettilineo, si ritrova nella Parabola Apolloniana descritta come una curva, ed eccone in breve la pruova.

Suppongasì descritta la Parabola Apolloniana ABCDEI, Tav. I. il di cui parametro, o sia unità, sia AB, e tirisi l' applicata DE: poi frà AB, ed AD prendasi una mezza proporzionale, quale sia, per esempio, AH, e dal punto H tirisi l' applicata HI, la quale termini nella curva: Indi dal punto E al punto C tirisi la linea retta EC, e questa prolunghisi finchè s' incontri coll' asse DA allungato, come per esempio, nel punto G; poscia frà GB, e GD prendasi una mezza proporzionale, questa per l' Avversario caderà ancora sotto il punto H, come per esempio, nel punto M; perchè l' Avversario è quello, il quale nega, che la mezza pro-

Parte I.

D 2

por-

porzionale frà le parti del lato del triangolo, e la mezza proporzionale frà 'l parametro, e l' asse della Parabola, possono cadere nel medesimo punto del asse: è manifesto dunque, che dall' opposizione dell' Avversario ne risulterebbe, ch' anco nella Parabola Apolloniana, due diverse parallele, cioè MN, ed HI, farebbero mezze frà due medesime quantità, cioè BC, e DE; ond' è che affaticandosi di distruggere la mia Proposizione, distruggevano ancora la Parabola Apolloniana. Ma per togliere, per quanto si può, a quei oppositori, che non vogliono studiare le altrui dimostrazioni, il modo di cercar vani, ed inutili assurdi, faremo la seguente considerazione.

C O N S I D E R A Z I O N E II.

Tav. I.
Fig. IV.

E Gli è da considerarsi, che tutti i quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 , frà AD_4 , ed AF_9 &c. sono irrazionali; e che tutte le radici intercette frà BC_1 , e DE_2 , frà DE_2 , e FG_3 &c. sono irrazionali; ed eccone la pruova.

I quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 considerati in particolare s'eccedono l'un l'altro secondo l'ordine de' numeri impari, a cagione che, se si considera un grave, che cada a perpendicolo, questo s' accelera in ogni punto dell' asse, appunto come abbiám detto nell' antecedente dimostrazione; ma se si accelera in ogni punto dell' asse, noi non possiamo, alle varie porzioni intercette frà AB, ed AD assegnare un numero, il quale esprima in ogni punto dell' asse il grado d' eccelerazione, e con ciò il valore de' quadrati; come per esempio, un numero, che determini la lunghezza della linea, la quale esprima il quadrato 2, in quella guisa, che AD esprime il quadrato 4: per la qual cosa non potendosi avere in numeri il valore de' quadrati frà AB_1 , ed AD_4 , ne meno si puole avere in numeri il valore delle radici intercette frà BC_1 , e DE_2 ; e perciò, tanto i quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 , quanto le radici intercette frà BC_1 , e DE_2 sono irrazionali: Lo stesso si dimostra de' quadrati intercetti frà AD_4 , ed AF_9 , e delle radici intercette frà DE_2 , ed FG_3 &c.

Ora

Ora dopò questo è certissimo, ch' errarebbe ogni oppositore, il quale volesse esprimere in numeri il valore di un quadrato intercetto frà AB_1 , ed AD_4 , o il valore di una radice intercetta frà BC_1 , e DE_2 ; ma perchè non mancheranno di quelli, i quali vedendo, che noi abbiamo trovato in numeri il valore di SB , ed SD , porzioni del lato del triangolo SDE , si lusingheranno di poter essi ancora trovare in numeri il valore delle radici intercette frà BC_1 , e DE_2 , e de' quadrati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 : perciò vogliamo, col esempio della seguente opposizione, far conoscere, che le radici intercette frà BC_1 , e DE_2 , considerate come radici, non si possono esprimere in numeri, quantunque le parallele, ragguagliate all' unità, ed a' lati de' triangoli, si possano esprimere in numeri.

Fingiamo, che un Geometra, volendo ritrovare una linea, la quale esprimesse ancora in numeri la radice del quadrato AN , doppio dell' unità AB , dicesse per esempio, AN è 2, SB è 3, dunque BN è 1, ed SN è 4, ciò fatto, facesse la seguente analogia, cioè, come SB_3 a BC_1 , così SN_4 alla parallela segnata N_8 , cioè ad $1 \frac{1}{3}$, e dicesse, dunque, $1 \frac{1}{3}$ è radice in numeri di AN ; ma $1 \frac{1}{3}$ moltiplicato in se stesso fa $1 \frac{7}{9}$, dunque il quadrato AN è $1 \frac{7}{9}$.

A questo però si risponde per primo, che questa opposizione niente ripugnarebbe alla mia proposizione; perchè quantunque AN sia in linea doppia di AB unità, non perciò si può dire, ch'è 2 in numeri, mentre io hò dimostrato poc'anzi, che il quadrato di $\sqrt{2}$, se vi fosse, cadrebbe sotto il punto N , in un punto intercetto frà N , ed O ; dalla qual cosa se ne deduce, che la parallela segnata N_8 potrebbe esser radice di AN , ed all'ora la radice di 2 cadrebbe giustamente in un punto sotto il punto N , e terminerebbe nella retta CE ; perchè la radice del quadrato 2 sendo anco in numeri giustamente maggiore, per una minima quantità, del quadrato di $1 \frac{7}{9}$, se la radice del quadrato 2 termina giusto sotto il pun-

to

to N, termina per necessità nella linea retta CE; ed ecco, che l'oppositore con questa obbiezione verrebbe a fare un'altra dimostrazione alla mia Proposizione.

Ma con tutto ciò io voglio provare, che i numeri, che si ritrovano, per lo mezzo della soluzione de' triangoli, nelle parallele, le quali s'interpongono frà BC₁, e DE₂, quantunque esprimessero il valore della lunghezza delle parallele, secondo la proporzione, ch'hanno all'unità BC, a riguardo de' lati de' triangoli, non esprimono però il valore delle radici de' quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄; e che con tutto ciò, le parallele frà BC₁, e DE₂ sono in linea le vere radici de' quadrati delle ascisse dell'asse, in quella guisa, che noi abbiamo dimostrato.

Si dimostra dunque, che la parallela N8 considerata in numeri per $1\frac{1}{3}$ mostra bensì la proporzione, ch'essa have a BC₁ a riguardo de' lati SB₃, e SN₄; ma con tutto ciò, il numero $1\frac{1}{3}$ non esprime il valore della radice in linea del quadrato AN in linea; ed eccone la pruova.

Noi abbiamo dimostrato, che i quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄ s'eccedono l'un l'altro secondo l'ordine de' numeri impari, e che perciò non possiamo sapere qual numero esprima il valore del quadrato AN considerato in linea: Ma se è così, non perche SN è 4 ne avviene, che nel triangolo SDE, la linea AN doppia di AB sia uguale a quadrato 2 in numeri, ne a qualunque altro numero, che si voglia. Dimostreremo questo più ampiamente, e più distintamente per la via negativa.

Se poi l'oppositore vuole, che i numeri ritrovati per lo mezzo della soluzione de' triangoli diano il valore delle radici intercette frà BC₁, e DE₂, si potranno alcorto avere ancora tutte le radici de' quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄; perchè se si suppone la BD divisa in punti infiniti, si potranno risolvere tanti triangoli intercetti frà SBC, e SDE, quanti sono gl'infiniti punti del-

della BD. Se poi vuole, che le radici, e i quadrati si possano esprimere in numeri; ne' quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄ vi sarà un quadrato, che si potrà esprimere col numero 2, ed un quadrato, che si potrà esprimere col numero 3; perchè se i quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄ si possono esprimere in numeri, i quadrati intercetti frà AB₁, ed AD₄, sendo infiniti, frà essi vi saranno tutti gl' infiniti numeri, che s' interpongono frà 1, e 4, e perciò vi sarà il quadrato 2, e il quadrato 3; ma se v' è il quadrato 2, e il quadrato 3, frà le infinite radici intercette frà BC₁, e DE₂, vi sarà la radice del quadrato 2, e quella del quadrato 3.

Dunque se, per lo mezzo della risoluzione de' triangoli, si può avere in numeri il valore delle radici intercette frà BC₁, e DE₂, se avrà ancora in numeri il valore della radice del quadrato 2, e quella del quadrato 3.

Ma frà le infinite parallele intercette frà BC₁, e DE₂ non vi può essere alcuna frazione, la quale espressa in numeri, e moltiplicata in se medesima può produrre il numero 2, ed il numero 3; perchè se le parallele intercette frà BC₁, e DE₂ s' esprimono in numeri, son tutte unità mischiate di frazioni, a cagion che, son tutte maggiori di BC₁, e minori di DE₂; e se sono unità mischiate di frazioni, moltiplicate in lor medesime mai possono produrre un numero intero; dunque niuna delle infinite parallele intercette frà BC₁, e DE₂ può esprimere in numeri il valore del quadrato 2, nè il valore del quadrato 3.

Ma noi abbiamo dimostrato, che se i quadrati infiniti intercetti frà AB₁, ed AD₄ si possono esprimere in numeri, necessariamente frà essi v' è il quadrato 2, ed il quadrato 3; ed ora abbiamo dimostrato, che niuna delle infinite parallele intercette frà BC₁, e DE₂ può esprimere in numeri la radice del quadrato 2, nè quella del quadrato 3; Dunque i numeri, i quali, per lo mezzo della soluzione de' triangoli, si ritrova, che competono alle parallele intercette frà BC₁, e DE₂ considerate come lati de' triangoli, non esprimono in numeri il valore delle radici de' quadrati.

drati intercetti frà AB_1 , ed AD_4 ; e se non esprimono il valore de' quadrati, esprimono solamente la lunghezza delle parallele, a rispetto de' lati de' triangoli, ch' è ciò si dovea dimostrare.

E per dare un esempio della nostra antecedente dimostrazione; suppongasi per l' Avversario, che AN sia 2: se

Tav. I. è così, $1\frac{1}{3}$ non è radice di quadrato 2. Suppongasi poi,
Fig. IV. che il quadrato 2 sia AV , e suppongasi altresì, che AV sia qualunque numero intercetto frà 2, e 3: In questo caso se si risolve il triangolo SVX , la parallela VX farà una unità mischiata d' una frazione, e perciò non potrà mai dare il quadrato 2; e lo stesso si troverà in ogn' altro punto dell' asse AD , al quale si voglia, che termini il quadrato 2, per modo che, niuna parallela darà il quadrato 2: ma se niuna parallela darà il quadrato 2, frà le parallele intercette frà BC_1 , e DE_2 , non si ritroveranno in numeri le radici de' quadrati intercetti frà 1, e 4; e perciò i numeri, ch' esprimono la lunghezza delle parallele, non esprimono in numeri il valore delle radici infinite intercette frà BC_1 , e DE_2 ; ed ecco dimostrato anche coll' esempio il nostro assunto.

Ne quello, che abbiamo dimostrato dee recar meraviglia, se si considera, che la ragione dupla, tripla, ed altre semplici son diverse dalla duplicata, triplicata, o altre composte ragioni: dalla qual cosa n' avviene, che quel numero, che compete a una linea, considerata a rispetto di un' altra in proporzione semplice, non compete a quella medesima linea, considerata a rispetto di un' altra, in subduplicata ragione di due quadrati; e per esempio, $1\frac{1}{3}$ può esprimere bensì la proporzione, che la parallela N_8 ave a BC nella ragione de' lati NS , e BS , ma non esprime la subduplicata ragione di N_8 , e BC , a riguardo di NA , e BA quadrati.

Allo incontro però, le parallele BC_1 , DE_2 , e FG_3 moltiplicate in lor medesime, tanto in linee, quanto in numeri

meri danno i quadrati AB, AN, ed AF, e ciò avviene; perchè i numeri interi moltiplicati in lor medesimi danno i numeri interi, a' quali possono perfettamente corrispondere le linee, ciò che non avviene nelle radici mischiate di frazioni, come son le intercette frà BC₁, e DE₂.

Ecco dunque, che abbiain dimostrato, che le parallele intercette frà BC₁, e DE₂ son radici in linea, ma non son radici in numero, quantunque per lo mezzo de' triangoli si possa spiegare in numeri la proporzione, ch' hanno all' unità, a riguardo de' lati de' triangoli.

Io sò però, che a queste sì fatte dimostrazioni ripugnerà l' animo di quei Geometri, i quali, niente attendendo alle dimostrazioni, sono attaccati solamente al numero, ed al sensibile; imperocchè diranno frà lor medesimi, noi siam certi per il triangolo SN₈, che $1\frac{1}{3}$ è il valore della parallela N₈, e siam certi ancora, che la Parallela N₈ è radice di AN, dunque come può egli avvenire, che $1\frac{1}{3}$ non sia radice di AN in numero, e che la linea signata N₈ sia radice in linea di AN!

A' questi se li risponde, che la subduplicata ragione è diversa dalla semplice, e tutto il di più, che abbiain risposto poc' anzi; e di più se li dice, che i numeri esprimono la quantità delle linee secondo l'ipotesi della legitima proporzione, che si siegue, ma che non possono esprimere il valore di quei quadrati in numero, che sono quadrati solamente in linea, e non in numero.

Se poi qualche male accorto Geometra non fusse ancora, dopò le nostre dimostrazioni, di queste sì fatte verità capace, a noi nulla importa; perchè, sicome abbiain detto poc' anzi, se volesse questo tale dire, che $1\frac{1}{3}$ esprime il valore della radice N₈, ciò non solo non ripugna alla nostra dimostrazione, anzi la conferma: Si priega però questo oppositore, che pretende di spiegare in numeri il valore delle radici intercette frà 1, e 2, e di ritrovare in numeri

Parte I.

E

meri

meri il valore delli quadrati intercetti frà 1, e 4, che mi trovi esso nell' asse AD un punto, che sia termine del quadrato 2. in numeri, e che mi trovi la radice in numero del suddetto quadrato; perchè se non ritrova questo, non può per la via della soluzione de' triangoli ritrovare in numeri il valore delle radici intercette frà BC_1 , e DE_2 , e frà i quadrati AB_1 , ed AD_4 , quantunque ritrovi in numeri il valore delle parallele ragguagliate a' lati de' triangoli.

Da tutto quello dunque, che si è detto, è manifesto, che i quadrati intercetti frà AB, ed AD, frà AD, ed AF &c., e le radici intercette frà BC_1 , e DE_2 , frà DE_2 , ed FG_3 &c. sono irrazionali, e che solamente ne' numeri 4, 9, e 16, e in tutti gl' altri quadrati, ch' hanno radici di numero intero, si può avere espresso in numeri il valore de' quadrati, e il valore de' lati de' triangoli, come per esempio, di AD, e di SD; di AF, e di MF &c. Continuiamo ora a dimostrare in altri modi, come abbiain promesso, che la Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che se le assegnano.

PROPOSIZIONE.

LA Parabola Apolloniana non hà le proprietà, che da Apollonio se l' assegnano, ed il suo perimetro non è una curva continuata.

SUPPOSIZIONE, E COSTRUZIONE.

SUppògasi fatto come prima il nostro Rettilineo ABCDE, nel quale AB sia 1, BC 1, DE_2 , AD_4 , e tirate le nostre linee rette AC, e CE: Indi descrivasi la Parabola Apolloniana, la quale dovrà passare per i punti A, C, ed E, perchè BC unità è radice di AB unità, e perciò A è vertice, e DE_2 è radice di AD_4 ; ciò fatto. Dico, che la curva, o non passa per i punti C, ed E, o non è una curva continuata, da' punti della quale si possano tirare le ordinate all'asse, le quali siano radici delle ascisse del medesimo asse.

Di-

Tav. II.
Fig. VII.

D I M O S T R A Z I O N E .

Suppongansi tirate infinite ordinate da' punti dell' asse AD ; queste per Apollonio termineranno tutte fuori delle due linee rette AC , e CE , perchè la Parabola non può toccare le due linee rette AC , e CE in altri punti, che ne' punti A , C , ed E ; ma se terminano fuori, supponiamo, che siano in proporzione aritmetica, comè sono sopra l' unità BC le ordinate segnate F_1 , H_2 , L_5 , e sotto l' unità le ordinate segnate O_3 , Q_4 , S_7 ; ed allora la curva, che passa per i punti segnati co' numeri 1, 2, e 5, non può passare per il punto C , perchè se dal punto A si tira una linea per i punti estremi delle parallele F_1 , H_2 , L_5 , che sono in proporzione aritmetica, questa sarà la linea retta AN . Dell' istesso modo, se per i punti estremi delle rette BC , O_3 , Q_4 , ed S_7 , che sono in proporzione aritmetica, si tira una linea, questa sarà la retta CV ; dunque, se le applicate sono in proporzione aritmetica, non si può descrivere una curva, che passi per i punti G , ed E .

Suppongasi poi, che le applicate s' eccedano fra esse con qualunque altra differenza, diversa dalla proporzione aritmetica, come sono, per esempio, FG HI , LM , BC , OP , QR , ST &c. In questo caso la curva non farà una curva continuata, perchè farà angolo curvilineo nel punto C ; ed eccone la prova.

Tutte le parallele contenute nel triangolo rettangolo ABC sono in proporzione aritmetica fra esse; e tutte le parallele intercette fra BC , e DE sono in proporzione aritmetica fra esse, (ma secondo la serie delle parallele contenute nel triangolo KDE), dunque le linee AC , e CE fanno angolo nel punto C , perchè son lati de' diversi triangoli: Ma se è così, anche le porzioni della curva, cioè AGC , CPE faranno angolo nel punto C , perchè non potendo la curva toccare le due linee rette AC , e CE in altri punti, che ne' punti A , C , ed E , se le linee rette AC , CE fanno angolo nel punto C , le porzioni delle curve AGC , CPE , sendo sottese dalle due linee, che fanno angolo nel punto C , faranno anch' esse

Parte I.

E 2

esse

esse nel punto C l'angolo curvilineo AGCP; dunque la curva necessariamente deve far'angolo curvilineo nel punto C.

Oltracciò le parallele intercette fra FG, e BC giunte nel punto M dovranno diminuirsi, acciò la curva possa passare per il punto C; perchè se non s' eccedono l' un l' altra in proporzione aritmetica, s' eccederanno con differenze maggiori della proporzione aritmetica, e perciò, se fra LM, e BC non si diminuiscono tanto le lunghezze delle applicate, quanto si sono accresciute da A in M, la curva mai potrà andare nel punto C, dunque la curva farà angolo curvilineo nel punto C: dell' istesso modo, se si prolunga l' asse AD, fin che venga uguale a 9 unità AB, la curva farà angolo nel punto E, e perciò il perimetro della Parabola non è una curva continuata.

Che non si possano poi tirare, da' punti del perimetro della Parabola, applicate all' asse, le quali siano costantemente radici delle ascisse del medesimo asse, eccone la prova.

Per dimostrare ciò però, suppongasì per l'Avversario, che le applicate FG, HI, LM, BC, OP, QR, ed ST siano radici delle ascisse dell' asse; indi suppongasì per i punti intercetti frà 1, e G, frà 2, e I, frà 5, e M, ed il punto C; e poi per i punti intercetti frà 3, e P, frà 4, e R, fra 7, e T passare altre curve. In questo caso le radici delle ascisse dell' asse potranno terminare in ogn'una delle sudette curve intercette frà i sudetti punti, e ad ogn' una delle sudette curve si potranno assegnare le medesime proprietà; dunque da' punti G, I, M, P, R, e T non si possono tirare le applicate all' asse, le quali siano radici delle ascisse dell' asse, ch' è ciò si dovea dimostrare. Da tutto ciò si deduce, che la curva, che nasce dalla sezione del cono, non ha proprietà conosciute.

Dopò le antecedenti cinque evidentissime dimostrazioni, dovrei ormai dubitare d'annojar il Lettore, aggiungendone altre di più; ma perchè hò considerato, che nelle antecedenti dimostrazioni io suppongo, che il Lettore intenda il Metodo degl' indivisibili, hò stimato a proposito dimo-
strare

strare, e per Euclide, e per la via positiva, e per la negativa ancora la mia Proposizione, e perciò hò posto le seguenti due altre dimostrazioni.

L E M M A:

SE sia la linea retta AB divisa in cinque parti uguali; cioè, AC , CD , DE , EF , FB ; e sian descritti successivamente i cerchi co' diametri di AB_5 , CB_4 , DB_3 , EB_2 : Ed oltr' a ciò da' punti C , ed F , punti estremi delle unità AC , ed FB , siano alzate le perpendicolari CG , ed FO fino alle periferie de' cerchi AGB , EOB , e per i punti G , ed O sia tirata la linea retta GO . Dico, che se da' punti D , ed E , punti estremi delle unità CD , ed DE , s'alzano le perpendicolari DM , ed EN fino alla linea retta GO , i cerchi BYC , e BID segano la linea retta GO ne' punti M , e N , punti estremi delle perpendicolari DM , ed EN .

Tav. II:
Fig. VIII:

COSTRUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Prolunghinsi le GO , ed CB , fin che s'incontrino nel punto P . Perche abbiamo divisa la BA nelle cinque parti uguali, cioè AC , CD , DE , EF , ed FB , ed abbiamo presa la FP comune, le PF , PE , PD , PC sono in proporzione aritmetica frà esse.

Ma per la quarta del sesto d' Euclide, è come PF ad FO , così PE , ad EN ; e come PE ad EN , così PD a DM ; e come PD a DM , così PC a CG ; dunque le perpendicolari FO , EN , DM , e CG sono in proporzione aritmetica frà esse, e perciò le perpendicolari DM , ed EN sono mezze proporzionali aritmetiche frà CG^2 , e FO^2 . Oltr' a ciò le perpendicolari DM , ed EN segano i lati PG , e PC in parti, che sono mezze proporzionali aritmetiche frà PF , e PC ; e frà PO , e PG ; perche sendo per Euclide come PF a PE , così PO a PN ; e come PE a PD , così PN a PM ; e come PD a PC , così PM a PG ; le PE , e PD sono mezze proporzionali aritmetiche frà PF , e PC ; e le PN , e PM so-

no

no mezze proporzionali aritmetiche fra PO , e PG . Dimostrerò ora, che ancora i cerchi CYB , e DIB segano la retta GO ne' punti M , e N .

Alzinsi da i punti D , ed E due perpendicolari fino alle periferie de' cerchi CYB , e DIB ; perche i diametri de' cerchi successivi sono per costruzione $5, 4, 3$, e 2 , sono in proporzione aritmetica, dunque anco i cerchi AQB , CYB , DIB , ed EOB faranno in proporzione aritmetica fra essi; perche per Archimede i cerchi sono fra essi come i diametri: ma se sono in proporzione aritmetica, i cerchi BID , e BYC faranno mezze proporzionali aritmetici fra i cerchi BOE , BQA ; e dello stesso modo i semicerchi BID , e BYC faranno mezze proporzionali aritmetici fra i semicerchi BOE , e BQA .

Ma i cerchi BID , e BYC tagliano per costruzione la PA in parti, che sono mezze proporzionali aritmetiche fra PF , e PC , perche tagliano la BA ne' punti E , e D , cioè ne' punti estremi delle linee PE , e PD , mezze proporzionali aritmetiche fra PF , e PC ; e noi abbiamo provato, ch'è come PF , a PE , così PO a PN , e come PE a PD , così PN a PM , e come PD a PC , così PM a PG ; dunque se i semicerchi BID , e BYC , i quali sono mezze proporzionali aritmetici fra i semicerchi BOE , e BQA , tagliano la PC nelle parti PE , e PD , mezze proporzionali aritmetiche fra PF , e PC ; devono anche tagliare la PG in parti, che siano proporzionali alle parti PE , e PD del lato PC : perche se i cerchi, che sono fra essi nella medesima proporzione segano due latri, che sono proporzionali fra essi, li segano proporzionalmente; ma le parti proporzionali a PE , e PD sono PN , e PM , dunque i semicerchi BID , e BYC segano la OG ne' punti N , e M , e perciò le perpendicolari alzate da i punti E , e D terminano alla linea retta OG , ed alle periferie de' cerchi; ch'è ciò si dovea dimostrare. Dimostreremo ora lo stesso per la via negativa.

Prendasi la linea retta AG , e si divida nelle cinque

Tav. II. parti uguali AB , BD , DE , EF , ed FG , e s'alzi la perpendicolare BC , uguale a BA unità; e dal punto F , punto estremo

mo di AF_4 alzisi la FH , uguale a 2 unità AB , e col diametro di GA descrivasi il cerchio GOA , il quale passerà per il punto H , termine di FH_2 , perche è come AB_1 ad FH_2 , così FH_2 ad AF_4 : Poscia col diametro di AD , descrivasi il cerchio ACD , il quale passerà per il punto C , termine dell'unità BC , e tirisi la nostra linea retta CH ; Indi descrivansi co' diametri di AE_3 , e di AF_4 , i cerchi ARE , ed AQF . Dico, che questi segano la retta CH ne' punti L , ed I ; e che solamente EL , e DL sono le radici dell'ascisse AE , ed AD .

Se l'Avversario lo niega, allunghi egli le due DL , ed EI di modo, che terminino in qualunque punto fuori della linea retta CH , come per esempio, in M , e in N : Se i cerchi passano per i punti M , ed N , per i punti A, C, M, N , passerà ancora una Parabola; perche se il cerchio ARE passa per il punto M , farà come ED a DM , così DM a DA , ma ED è uguale ad AB unità; dunque farà ancora come AB a DM , così DM a AD , e perciò DM sarà radice di DA , dunque il punto M è punto di cerchio, e di parabola. Dell'istesso modo si dimostra, che se il cerchio passa per il punto N , come vuole l'Avversario, il punto N è punto di cerchio, e di parabola. Dimostrerò ora, che i cerchi non possono passare per i punti M , ed N .

Suppongasi pure per l'Avversario, che i cerchi passino per i punti M , ed N : se è così, la Parabola non passerà per il punto H , termine dell'applicata FH_2 , perche, o le applicate intercette fra EN , ed FH , le quali terminano per l'Avversario alla Parabola, son sempre una maggiore dell'altra, almeno per un punto, e in tal caso la Parabola segnerà il cerchio AOG , per esempio, nel punto P , e non nel punto H ; perche se le applicate son sempre una maggiore dell'altra, la Parabola si discosta sempre dalla retta CH , e perciò non giungerà mai al punto H : ovvero le porzioni delle linee intercette fra la retta CH , e la curva CMN , come sono LM , IN , &c. cominceranno a diminuirsi in lunghezza in un punto della Parabola, come per esempio, nel punto N ; e in questo caso la Parabola farà angolo nel punto N , e la curva sarà $ACMNH$, e la Parabola non
 farà

farà una curva continuata; e se la Parabola non è una curva continuata, ma fa angolo nel punto N , le applicate, che terminano ad essa, non possono essere radici; perchè se la Parabola fa angolo, non dà costantemente i punti, a quali terminano le radici delle ascisse dell'asse, a similitudine del cerchio, come vuole Renato. Adunque la perpendicolare DM non può esser mezza proporzionale fra AB , ed AD ; ne EN mezza proporzionale fra AB , ed AE , e perciò i cerchi non passano per i punti N , ed M , ma passano per i punti L , ed I .

Lo stesso si dimostra, se l'Avversario vuole, che la Parabola passi per i punti X , e Y , o per qualunque altro punto degl'intercetti fra L , ed M , fra I , e N ; ed alla perfine la Parabola non può mai segare il cerchio AOG nel punto H , se non fa angolo curvilineo in qualche punto del suo perimetro. Dimostrerò ora, che DL , ed EI sono radici delle ascisse AD , ed AE .

La perpendicolare EI è radice di AE ; perchè avendo noi dimostrato, che il cerchio AQF sega la retta CH nel punto I , per la decimaterza del sesto è come FE ad EI , così EI ad EA ; e come AB unità uguale ad FE è ad EI , così EI ad EA ; e dello stesso modo, come ED a DL , così DL a DA , e come AB a DL , così DL a DA ; ma FH^2 è radice di AF^4 , e BCI è radice di AB^4 per costruzione, dunque la retta CH è il luogo delle radici.

Per dimostrare poi, che le infinite radici terminano alla retta CH , prendasi qualunque porzione GT , e col diametro di TA descrivasi il cerchio, e dal punto Z , punto estremo di TZ uguale all'unità FG , alzisi la perpendicolare ZK ; questo cerchio segnerà la HC nel punto K , e lo stesso avverrà di tutte le altre.

CONSIDERAZIONE, E CONCLUSIONE

A Biamo dunque dimostrato, e per lo metodo degl'indivisibili, e degl'infiniti, e per gl'elementi di Euclide, e per le proposizioni d'Archimede il nostro assunto; sarà

farà con ciò chiaramente dimostrato, che la Parabola Apolloniana non dà, a similitudine del cerchio, costantemente i punti delle radici delle ascisse dell' asse, siccome Renato des-Cartes, e tutti i Sig. moderni Geometri han preteso, che dasse; ond' è che sarebbe annojare il Lettore, se dopò tante, e sì chiare dimostrazioni, quante son le antecedenti, io ne volessi addurre ancora delle altre: Rimane dunque chiaro, che la Parabola Apolloniana nata dalla sezione del cono, non hà le proprietà, che da Apollonio se l' assegnano; e che il vero perimetro della Parabola si compone delle nostre linee rette tirate da' punti estremi delle radici di numero intero, cioè 1, 2, 3, &c. fino all' infinito.

Stabilita già questa verità, noi nomaremo in appresso il nostro Rettilineo: *UN RETTILINEO PARABOLICO PIANO*, alle di cui parti assegneremo gl' istessi nomi, che da' Geometri s' assegnano alle parti della Parabola Apolloniana: e per esempio, AB, ovvero BC sarà unità, ovvero parametro, AH asse, AN, AD, AP, AF, e tutte le altre faranno applicate, ovvero radici; ed il composto di tutte le linee rette AC, CE, EG, e GL sarà il perimetro della Parabola, qual perimetro può anco nomarsi una curva composta di linee rette determinate da punti determinati, come abbiám detto; ciò ch' è appunto quello, che sempre han desiderato di ritrovare gl' antichi Geometri, i quali conoscevano bensì generalmente, che il perimetro della Parabola è un aggregato di linee rette, le quali tutte fanno angolo fra esse, ma non giunsero a determinare i veri punti, per i quali quelle si descrivono, e gl' angoli, che fra esse fanno; ciò ch' è avvenuto fortunatamente a me di ritrovare.

Dopò questo sembra, che io dolessi non più ragionare di questo Problema: ma perche è legge stabilita fra Geometri; che chi vuole impugnare una proposizione dimostrata, deve additar l' errore, che in quella proposizione si contiene. In un secolo, nel quale tutti i moderni Geometri obbiando, che la costruzione meccanica non può legitima dimostrazione produrre, han ricevuto le curve d' Apollonio per linee, che abbiano proprietà costanti, e dimostrate;

Parte I.

F

non

Tav. I.
Fig. IV.

non posso tralasciare di additar l' errore, che nelle pretese dimostrazioni d' Apollonio si contiene. Egli è ben vero però, che i signori Geometri non han praticato meco questa legge da me accennata; imperocchè niuno di essi ave additato alcuno errore nelle mie dimostrazioni, ma si son tutti contentati di oppondere per la via degli assurdi; la qual cosa fa conoscere, ch' amano d' impugnare, ma non di studiare le altrui dimostrazioni. Additiamo noi dunque, in che consista l'errore d' Apollonio.

L'errore, ch'è nella dimostrazione d' Apollonio, consiste in ciò, ch' egli, nel costruire la sua Parabola, non siegue il rigore de' postulati di Euclide, ma sega il cono per lo mezzo di un piano parallelo ad un de' lati del triangolo fatto dalla sezione del medesimo cono per l'asse; donde ne avviene, che immaginando egli dentro il cono un' asse indeterminato, e al vertice di esso un parametro, o sia unità, preso ad arbitrio; ed immaginando oltr' a ciò alcuni cerchi particolari, i quali passino per i punti estremi del perimetro della Parabola, per mezzo de' quali trova alcune applicate particolari, che sono mezze proporzionali fra il parametro, e le ascisse; conchiude, che'l luogo generale delle mezze proporzionali, frà il parametro, e le ascisse, sia il perimetro della sua Parabola, ciò che non è vero, perchè da una costruzione meccanica non si può generale conseguenza dedurre.

La verità di quello, che abbiám detto, si conosce meglio, esaminandosi il modo meccanico, col quale i Signori moderni Geometri descrivono nel piano la Parabola Apolloniana; perchè in quello si vede, che descrivendo essi la Parabola per lo mezzo d'uno strumento meccanico, e poi prendendo per lo mezzo del medesimo strumento una sola mezza proporzionale frà 'l parametro, e l' ascissa, concludono male a proposito, che la curva, che forma il perimetro della Parabola è il luogo generale delle radici delle ascisse; e che perciò la Parabola dà, a similitudine del cerchio, costantemente in tutti i punti del suo perimetro, le medesime proprietà. Ora in grazia di quelli, a' quali non fus-

se

se noto il modo , col quale i Sig. moderni Geometri descrivono la Parabola nel piano; vogliamo dare un breve saggio di quello, che insegnano essi fare per lo mezzo de' loro stromenti meccanici, i quali, appresso a poco, son simili a quello, che noi riferiamo qui, praticato da M. Ospital, e Rainou.

Prendono essi AB per asse d' una Parabola, ed AC per parametro di quella , e poi tirano la linea CG perpendicolare ad AC, e parallela all' asse AB, e la suppongono immobile; di poi suppongono la riga AD, la quale s'aggiri intorno al punto A , come centro, e un'altra riga , come EF , la quale camini perpendicolarmente sopra la AC , da C verso A, e da A verso S; ma che si mantenghi sempre equidistante dall' asse AB , di modo che tagli sopra la AC porzioni uguali a quelle , che la riga AD taglia sopra la linea CG, come se, per esempio, la riga mobile AD taglia la perpendicolare immobile CG nel punto D, la distanza AE dev'essere uguale a CD: ciò fatto, dimostrano nel seguente modo , che il quadrato di AE , ovvero di NM è uguale al rettangolo , che si fa da CA parametro, per AN: la loro dimostrazione è la seguente .

Tav. II.
Fig. X.

Perchè è come AE, ad EM, così AC a CD; il rettangolo fatto da EM per l'unità AC, è uguale al rettangolo fatto da AE per CD; ma CD è uguale ad AE, dunque il quadrato di AE è uguale al rettangolo fatto da EM per il parametro AC: Ma EM è uguale ad AN, ed AE è uguale ad NM, dunque il quadrato di NM è uguale al rettangolo fatto da NA per AC, e perciò NM è applicata di Parabola.

La antecedente è l'arte, con la quale, per lo mezzo dello stromento meccanico, i Signori moderni Geometri s'immaginano di trovare il luogo generale delle radici: perchè, dicono essi , noi facciamo nella descrizione della Parabola tutto quello , ch' Euclide fa nella descrizione del cerchio; che sia così. Egli ordina, che si descriva la periferia del cerchio, poscia, alzando da qualunque punto del diametro del cerchio una perpendicolare fino alla periferia , dimostra , che la perpendicolare è mezza proporzionale fra le parti del diametro.

Dell'istesso modo; noi facciamo camminare la perpendicolare mobile EF sempre equidistante dall' asse AB in modo, che tagli sopra l' AC porzioni uguali a quelle, che la riga AD taglia sopra la linea CG; in questo modo le due righe descrivono tutti i punti del perimetro della Parabola, giusto come il compasso descrive tutta la periferia del cerchio: ciò fatto, dimostriamo, che NM è radice di AN, giusto come Euclide dimostra, che una perpendicolare è mezza proporzionale frà le parti del diametro; e concludiamo, che il perimetro della Parabola Apolloniana è il luogo generale delle radici delle ascisse dell' asse, giusto come Euclide conchiude, che la periferia è il luogo generale delle sue mezze proporzionali.

Gl' antecedenti son gl' argomenti, co' quali Renato des Cartes hà preteso, e i suoi seguaci pretendono, che lo stromento meccanico dia egualmente, che 'l compasso le proprietà in tutti i punti del perimetro della Parabola; e che nulla rilievi allo scoprimento della verità la maggiore, o minore difficoltà, che s' incontra nel costruire: lo però farò vedere ora chiaramente, che la costruzione meccanica non può dare le proprietà, e ne additarò di ciò la cagione. S'intenda già per lo mezzo dello stromento meccanico descritta la curva, io provo, che questa curva non dà ne' punti del suo perimetro le mezze proporzionali frà 'l parametro e le ascisse, e lo provo con la seguente proposizione.

P R O P O S I Z I O N E.

I Punti del perimetro della Parabola, che si descrive per lo mezzo dello stromento meccanico, non corrispondono a i punti dell' asse, a' quali terminano i quadrati delle radici.

C O S T R U Z I O N E.

Tav. II. Fig. XI. **S**ia AT l' asse d' una Parabola, ed AD il suo parametro, o sia unità; DQ sia la perpendicolare immobile, ed AO la

la riga mobile, la quale si aggiri intorno al punto A , ed MN la riga perpendicolare mobile, la quale camini per la retta AV , sempre equidistante dall'asse AT in modo, che tagli sopra la AV parti uguali a quelle, che la riga AO taglia sopra la perpendicolare immobile DQ ; e suppongasi, che con questo moto le righe abbiano già descritta la curva $A, P, \&c.$ Dico, che in niun punto della curva descritta cade la radice dell'ascissa corrispondente al detto punto, e lo dimostro, facendo prima la seguente costruzione.

Prendasi sopra l'asse AT la porzione AB uguale al parametro AD , e formisi il quadrato $ABCD$; poi suppongasi la porzione BT , dell'asse AT , divisa in punti, o parti infinite, come per esempio $BR, RE, EH, \&c.$ le quali siano indivisibili; indi dal punto R tirisi la RS parallela a BC , e si prolunghi quanto si voglia, e sopra la AV prendasi la DG uguale a BR , la GK uguale ad RE ; e sopra la CQ tagli si la CY uguale a BR , ovvero DG ; la YZ , uguale ad RE , ovvero GK ; dipoi dalla perpendicolare immobile DQ , tagli si la DY uguale ad AG , ovvero ad AR , e prolunghisi la AY , fin che s'incontri colla GX prolungata, come per esempio, nel punto F ; e dello stesso modo poi tagli si, sopra la perpendicolare immobile DQ , la DZ uguale ad AK , ovvero ad AE , e tirisi la AZ , e prolunghinsi la $K8$, uguale ad AE , e la AZ fin che s'incontrino in un punto, come per esempio in L ; ciò fatto, Dico, che niun punto del perimetro della Parabola descritta corrisponde a' punti estremi delle ascisse dell'asse.

D I M O S T R A Z I O N E .

NOi abbiamo supposta descritta la Parabola infinita $A, P, \&c.$, dunque la riga mobile AO , la quale si è aggirata intorno ad A , avrà segnato tutti i punti della DC uguale al parametro AD ; e la riga MN tutti i punti della AD parametro, e perciò le due righe auran generato tutte le radici de' quadrati minori dell'unità, come per esempio, l'applicata segnata $P11$, e tutte le altre. Ma la riga AO , dopo

pò gionta che farà in C, continuando ad aggirarsi intorno il punto A, necessariamente passerà per il punto Y; perchè CY è per supposizione un punto indivisibile, e perciò il primo punto immediato dopò il punto C.

Ma se è così, quando la riga AO è gionta in Y, la riga perpendicolare MN farà gionta in G; perchè, per costruzione, AG è uguale a DY, ed AG, per legge dello stromento meccanico, dev'essere distante da AT per una linea uguale a DY, dunque necessariamente le due righe mobili faran gionte, una in Y, l'altra in G; ma se è così, il punto, nel quale si suppone, che la curva seghi la linea retta RS; non è punto di radice dell'ascissa AR; perchè, quando le righe sono gionte in G, ed in Y, prolungate, le due AY, e GX si sono incontrate nel punto F; e con ciò han generato i due triangoli simili ADY, ed AGF, i quali producono la EF radice di AE, e non di AR; perchè è come AD a DY, così AG a GF, e perciò il rettangolo di DY per AG è uguale al rettangolo di AD per GF, cioè il quadrato di EF uguale al rettangolo di EA per AD, dunque la prima radice, che può generare lo stromento meccanico è la radice dell'ascissa AE, e non quella di AR.

Ma AR è la prima ascissa per costruzione, perchè AB è uguale al parametro, e BR si è supposta essere una quantità indivisibile; ed ora abbiamo provato, che lo stromento meccanico non può dare la prima radice in altro punto, che nel punto F, che corrisponde alla seconda ascissa AE; dunque la curva, segando la linea RS in un punto, non dà in quel punto la radice dell'ascissa AR, e perciò i punti del perimetro della Parabola non corrispondono giustamente a i punti delle ascisse, ch'è ciò si dovea dimostrare.

Dello stesso modo, se si prende per prima ascissa la AE, la riga circolare AO farà gionta in Z, quando la perpendicolare MN farà gionta in K, e perciò AZ, e K8 prolungate s'uniranno nel punto L, e genereranno i triangoli ALZ, AKL, e perciò la prima ascissa farà AE, e la prima radice caderà nel punto L, e così successivamente fino all'infinito niuna radice nella Parabola corrisponderà all'ascissa dell'asse.

CON-

C O N S I D E R A Z I O N E.

D All'antecedente dimostrazione manifestamente si conosce dove consista l'errore, che nel modo meccanico, col quale la Parabola si descrive nel piano, si contiene: ma per maggior chiarezza vogliamo brevemente additarlo.

Quei Signori Geometri, che si sono acquietati alle asserive di Renato des-Cartes, han creduto, che la Parabola, ancorchè meccanicamente descritta, dasse, a similitudine del cerchio, costantemente in ogni punto del suo perimetro le proprietà. Ora dopò l'antecedente dimostrazione, facendo noi un paragone frà il cerchio, e la Parabola, vogliamo vedere, se si potea mai dire, che la Parabola dà in ogni punto del suo perimetro le proprietà.

Nel cerchio, se io prendo qualunque punto, ed addimando ad Euclide, che mi provi in qual punto cada la mezza proporzionale frà le parti del diametro, esso forma i suoi triangoli simili da quel punto da me dato, e mi dimostra, che la perpendicolare, che cade da quel punto, è mezza proporzionale frà le parti del diametro, siccome lo stesso ave dimostrato da un punto preso ad arbitrio, a fine di provare il suo assunto.

All'incontro, se dimando ad un geometra Cartesiano, che, dopò che hà descritto la sua Parabola, mi dimostri, che il punto del perimetro, che cade nella linea RS, è punto, al quale termina la radice di AR, egli mi dimostrerà, che il punto F è punto di Parabola: se poi le dimando, che mi dimostri, che il punto del perimetro, che cade nella linea retta EF allungata, mostra la radice dell'ascissa AE, egli mi dimostrerà, che il punto L è punto di Parabola, e così successivamente facendo, mi dimostrerà sempre per punti di Parabola i punti successivi alle ascisse, ciò che vale à dire, che i geometri Cartesiani prendono per costruzione quante mezze proporzionali vogliono frà il parametro, e le ascisse, ma la curva, che descrivono, non dà i punti corrispondenti alle ascisse dell'asse, siccome noi abbiamo dimostrato; dunque la Parabola meccanicamente descrit-

descritta non dà, a similitudine del cerchio, costantemente in ogni punto del suo perimetro le proprietà.

All' incontro i nostri Rettilinei parabolici piani son quelli, che danno in ogni punto delle nostre linee rette le proprietà da noi a quelli assegnate; perchè noi descriviamo prima geometricamente i nostri Rettilinei parabolici piani, poi dimostriamo, come nella Figura I, II, e III, della tavola prima, che se in un punto delle nostre linee rette non si ritrovasse la proprietà, che noi abbiamo asserito nella proposizione, nè verrebbe per assurdo, che 2 non fusse radice di 4; poi dimostriamo à priori, come nella VII. Figura, della tavola seconda, che in ogni punto delle nostre linee rette si deve ritrovare la stessa proprietà da noi assegnata alle linee rette; e che il perimetro della Parabola Apolloniana, deve far angolo in un punto, come nelle Figura VIII. e IX della seconda tavola, e tutto ciò geometricamente.

All' incontro i Signori Geometri Cartesiani descrivono meccanicamente la Parabola, e non solo non dimostrano, che in ogni punto del perimetro di quella cade la radice dell' ascissa corrispondente, anzi si dimostra il contrario, come s'è veduto dall' antecedente dimostrazione: dal che è manifesto, che le nostre proposizioni sono geometriche, e concludenti, e quelle de' Signori Geometri Cartesiani son, meccaniche; ond' è, che le loro curve non abbino le proprietà, che se le assegnano.

Ora dopò avere noi in tante guise dimostrato il nostro assunto; e dopò avere additato l' errore, che nella dimostrazione d' Apollonio si contiene, dovremmo rimanerci di più ragionare delle curve: ma perchè è pur troppo grande la prevenzione di mente, colla quale son ricevute da' signori moderni Geometri le curve; Vogliamo rispondere ancora ad alcune obbiezioni, ch' essi deducono da ragioni estrinseche, e in quelle farem vedere alcune utilissime considerazioni sù del moto de' corpi projecti, e sù dell' Ottica: le obbiezioni son le seguenti.

La prima, che nel nostro Rettilineo parabolico piano non si ritrovano quelle radici delle ascisse dell' asse, le quali sono minori dell' unità.

La

La seconda, che l'Ottica ne verrebbe defraudata, perchè, nel nostro Rettilineo parabolico piano, non si ritrova, come nella Parabola, il punto del foco, nel quale si uniscono tutti i raggi.

La terza, che Galileo avendo spiegato il moto de' corpi proiettati, considerando la Parabola come una curva continuata, bisognerà spiegare con nuove proprietà le leggi del moto; e nel far essi queste opposizioni, diranno ancora, che noi stessi nella Meccanica, e nella prima impressione del nostro Nuovo Metodo, abbiamo considerato la Parabola, come una curva continuata, perciò noi vogliamo, rispondere, ad una ad una, a tutte queste tre obbiezioni.

Alla prima obbiezione rispondiamo aver noi a bastanza dimostrato nelle nostre antecedenti proposizioni, che niuna applicata, che termina alla curva, è radice della sua ascissa corrispondente, e che perciò le applicate minori dell'unità ne meno sono radici delle ascisse minori dell'unità: ed oltr' a ciò rispondiamo, che nel nostro Rettilineo parabolico piano, le parallele minori dell'unità non sono radici, perchè son lati di triangoli isosceli, e che delle radici de' quadrati minori dell'unità noi non ne abbiam bisogno; perchè, per trovare due, tre, ed infinite mezzette proporzionali fra due linee rette date, non abbiam bisogno delle radici minori dell'unità, come si vedrà in appresso: Per la qual cosa ci basta aver dimostrato in tanti modi, quanti son quelli, che si sono veduti in questa Raccolta, che il luogo delle radici delle ascisse dell'asse si trova nelli nostri Rettilinei parabolici piani, non nelle curve d' Apollonio; e con ciò lasciamo la cura a quei signori geometri, che vogliono far uso di questi quadrati minori dell'unità, di cercare il luogo, dove risiedono, ed il modo di costruirli, e passiamo alla risposta della seconda obbiezione.

Alla seconda obbiezione rispondiamo generalmente, che da noi non si nega, che le linee meccaniche possono avere il lor utile uso nella Fisica; perchè, siccome nelle meccaniche si trova, per lo mezzo di quelle, una qualche

approssimazione al vero, così si possono spiegare utilmente le cagioni fisiche, nelle quali non si ricerca, come nelle geometriche, il vero esatto: In pruova di ciò gl' antichi si servirono utilissimamente delle spirali di Conone, della Cinoide, della Cissoide, e di tutte le altre linee meccaniche; ma non han preteso, che avessero proprietà geometriche, ne di aver ritrovato, per lo mezzo di quelle, il vero esatto, e lo stesso han fatto delle linee curve d' Apollonio.

Per quello poi, che s' attiene all' Ottica, riferisco qui brevemente quello, che mi diceva intorno a tal materia, il non mai per le sue virtù a bastanza lodato Padre Frà Domenico Basile Domenicano, che Iddio abbia in Cielo, il quale ci fu da troppo acerbo destino rapito. Egli era, come a tutti è noto, dottissimo nell' Ottica, e gran fabro di Telescopij, di Microscopij, e di tutte le machine all' Ottica appartenenti: questo grand' Uomo mi diceva, ch' egli conosceva, anco per esperienza, che le Parabole son linee immaginarie, e che non si possono descrivere; perche facendo egli le forme per fabbricare le sue lenti ritrovava, che sempre, che voleva formare una figura parabolica formava una figura sferica, mai però poteva eseguire la Parabola: dalla qual cosa n' avveniva, che i raggi giammai si potessero, per lo mezzo del foco della Parabola, unire in un punto, e che perciò quello, che Renato dice nel suo *Trattato de Methodo expoliendi vitra*, non solo sia impossibile in pratica, ma che ancora non sia vero in teorica; perchè quando si trovassero stromenti così esatti, per i quali si potesse fare la linea parabolica, questa non avendo le proprietà, che se l' assegnano, i raggi non s' unirebbero mai perfettamente nel punto del foco: Così dunque, per ciò che riguarda all' Ottica possono i Fisici considerare le curve d' Apollonio, ma non possono sperare di conseguire, anco nella Fisica, altro, che per approssimazione quello, che intorno alle curve d' Apollonio a loro stessi propongono.

Alla terza opposizione si risponde, che il corpo progetto descrive il perimetro del nostro Rettilineo parabolico piano, e che perciò descrive tante porzioni di linee rette,

le quali sono porzioni d'ipotenuse; ed eccone la pruova geometrica.

Fingiamo, che dal punto A si voglia gittare una bomba nel palaggio segnato X, e S; la bomba descriverà due porzioni di Rettilinei parabolici piani. La linea AC, ch'è ipotenusa del triangolo ABC, farà la linea d'elevazione, ed il primo moto della bomba, la quale gionta in C, anderà in E, punto estremo dell'applicata DE₂, indi in F, punto estremo dell'applicata FG₃, poi in H, punto estremo dell'applicata IH₄, e finalmente in Z, punto estremo dell'applicata ZI₂ uguale a 5. unità: Ma mancando, per esempio, in K l'impeto impresso dalla forza della polvere, la bomba comincerà a descrivere nel punto K un altro Rettilineo parabolico, ed anderà in N, poscia in P, punto estremo dell'applicata OP₂, indi in T, punto estremo dell'applicata QT₃, sino a tanto, che in S incontrerà il bersaglio proposto; ed ecco, che il corpo projecto descrive due de' nostri Rettilinei parabolici, quali s'intersecano in un punto del perimetro formato dalle nostre linee rette.

A questa proposizione sembra, che se l'opponga il senso; perche, guardandosi nell'aria il moto d'una bomba, o d'altro corpo projecto, sembra, che descriva manifestamente una linea, il di cui perimetro sia una curva perfetta: Ma egli è da considerarsi, che ciò avviene a cagione, che nostra mente non può distinguere per lo mezzo de' sensi le impercettibili linee rette, de' quali si compone il perimetro della Parabola; ed a cagion d'esempio, nel corpo projecto, il parametro AB sarà un punto indivisibile. la retta AD tre punti, e le due rette AC, e CE costeranno di punti impercettibili, e lo stesso avverrà delle rette EF, FH, e di tutte le altre: per la qual cosa gl'angoli ACE, CEF, EFH, e tutti gl'altri saranno al senso impercettibili; e quindi è, che non potendosi distinguere col senso gl'angoli, e la linea, che descrive la bomba, o altro corpo projecto, sembra una curva perfetta, quando non è, ch'uno aggregato di linee rette, siccome noi abbiamo dimostrato: E per dimostrare ancor meglio, quanto abbiain detto; osservisi, che l'

Parte I.

G 2

asse

Tav. II.
Fig. XII.

asse AZ, nel corso, che fa una bomba girata, la porzione, che abbiamo sopposto uguale a 25 unità AB, diviene uguale a un numero infinito di unità, se supponiamo l'asse AB essere un punto; per la qual cosa le sezioni AC, CE, EF, e tutte le altre faranno di numero infinito, e d'angoli infiniti, ed ogn' uno di essi impercettibile, e perciò sembra al nostro senso una curva perfetta quella, ch' è uno aggregato di linee rette.

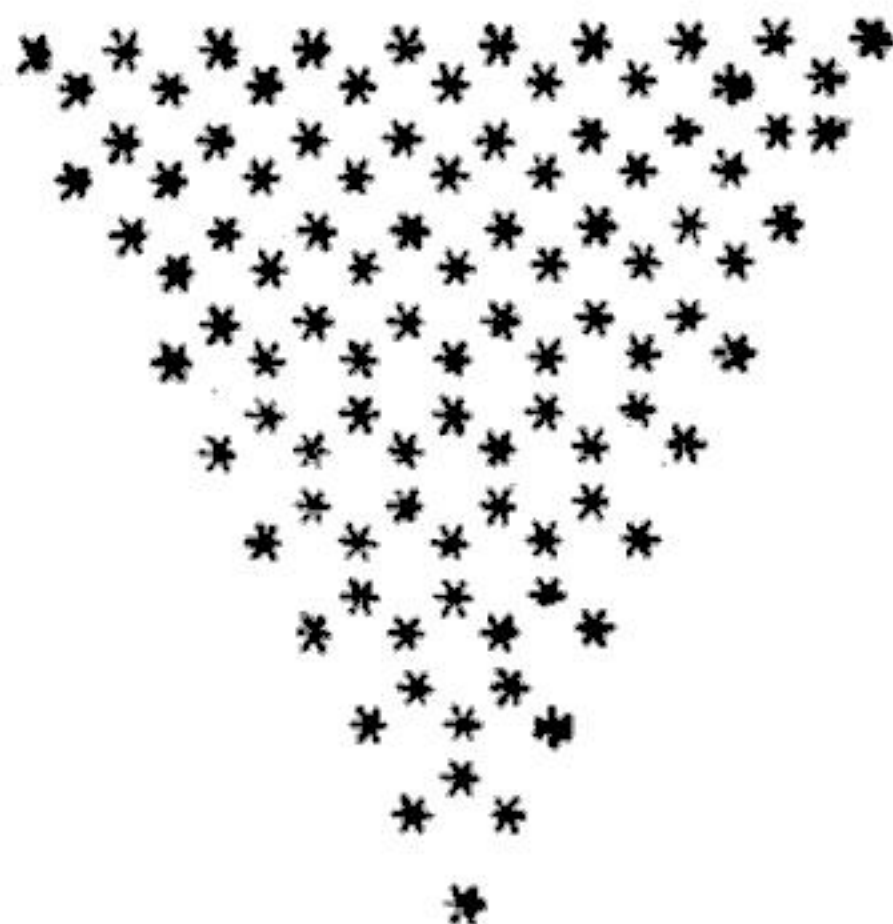
Si potrebbe poi per questa via determinare il vero angolo d' elevazione BAC, ed il vero luogo del punto K, per prendere le giuste misure vevoli a colpire al segno: ma perche nostra intenzione è, d'altro non fare, che additare generalmente le linee, che descrive il corpo progetto, lasceremo ad altri la cura di ritrovare gl' angoli, e i punti da noi accennati.

Sarebbe ancora desiderabile, che altri ritrovasse le linee rette, de' quali si compone il perimetro dell' iperbole, e dell' ellisse, come noi abbiamo ritrovato quelle, delle quali si compone il perimetro della Parabola, e che lo stesso facesse di tutte le altre curve meccaniche. Desiderabile ancora farebbe, che si trovasse altri Rettilinei con altre proprietà; ma per far ciò bisogna, che i signori moderni Geometri si contentino di distornarsi un poco da' loro calcoli analitici, differenziali, integrali, ed altri, per applicarsi all'esatta costruzione sintetica, la qual è quella sola, che somministra esattamente le proprietà particolari delle figure geometriche.

Intorno poi all' efferci noi serviti nella Meccanica da noi pubblicata l'anno 1711. in Augusta, e nella prima impressione del nuovo Metodo, della Parabola considerata come una curva continuata; Si risponde, che non avevamo ancora noi allora ritrovate le linee rette, delle quali si compone il perimetro della Parabola, ciò che non è meraviglia, perche *Nox nocti indicat scientiam*; tanto più, che Galileo medesimo dal modo di descriver la Parabola, dal quale abbiamo dedotta questa grande Invenzione, non ha conosciuto quello, che dalla sua descrizione si

ne si potea dedurre a favore della Geometria.

Quello dunque, che in questa Raccolta abbiain detto, è, a mio credere, sufficiente a far conoscere a' Signori Geometri la verità delle nostre proposizioni: per la qual cosa altro non resta, acciò che siano le nostre proposizioni ricevute da' signori Geometri, se non che vogliano alquanto distornarsi dall' abito di mente, ch' han fatto su le curve, per esaminare seriamente le nostre proposizioni. Passiamo ora a dimostrare la nostra Duplicazione del Cubo con le seguenti proposizioni.





DL ——— VE

Fig. IV

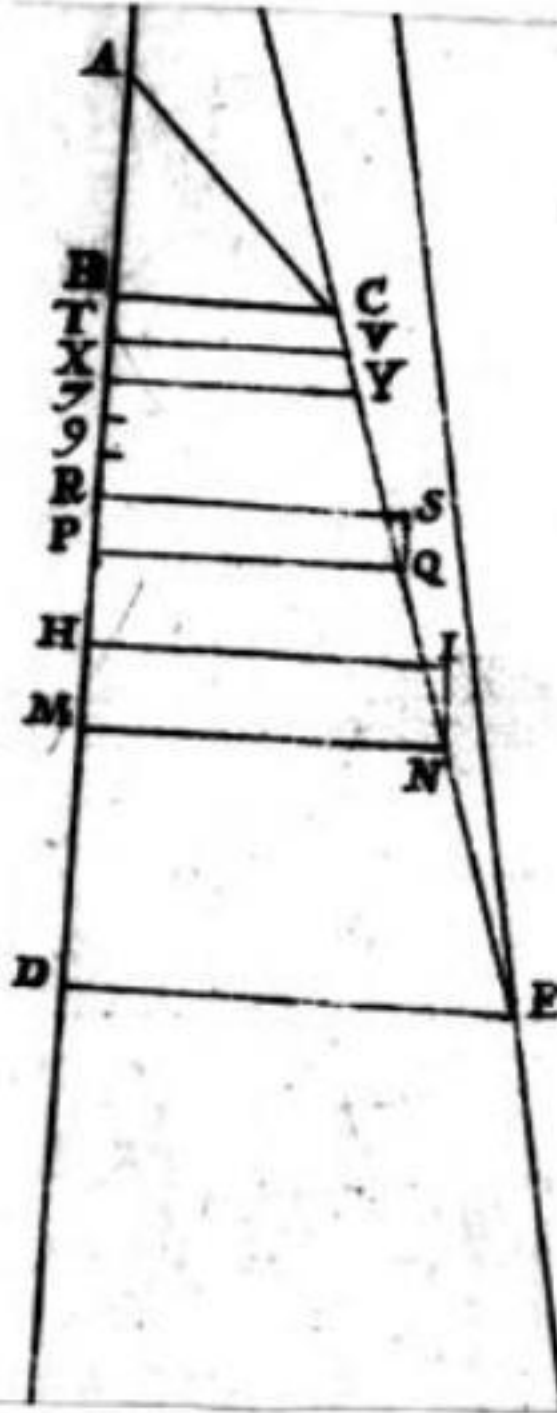


Fig. VI.



UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 06531 3234

A 543599

