BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXV
B
74
NAPOLI

Digitizzato da Google

XXXV 13. 24

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA PIANA.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

DEGLI ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA PIANA'
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE,
E nuovamente illuſtrati.
LIBRI VI.
DEDICATI
All' Illuſtriſſimo Signor Conte
D. GIOVANNI
FILANGIERI
De' Principi di S. Flavia, Capitano di Galea, e Comandante delle Guardie ſtendarde.

NAPOLI

In NAPOLI, Nella Stamperia di Felice Moſca 1736.
Con Licenza de' Superiori.

A ſpeſe di GAETANO ELIA.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

ILLUSTRISS. SIGNORE, SIGNORE PADRONE COLENDISSIMO.

SE io ardisco di presentare questa Operetta a V.S. Illustriss., intendo, che ella non guardi all' Opera istessa, la quale è troppo picciola, e leggiera cosa, nè ponga mente alla mano,

Digitalizzato da Google

che gliela presenta, la quale la rende per avventura vie più leggiera; ma desidero piuttosto, che si metta avanti gli occhi i chiarissimi nomi di coloro, che la compiloro-no: che così facendo non dubito, che ella sia per iscusarmi, e forse per compiacersi ancora di questa mia qualunque offerta Quantunque a dir vero sia superfluo l'andar giustificando il mio ardimento, il quale rimane bastantemente scusato dalla necessità. Imperciocche dovendo io pubblicare in volgar favella gli Elementi della Geometria piana di Euclide per uso, e servigio delle guardie stendarde, po-

te-

Digitalizzato da Google

teva io (salva la mia one-
stà) dirizzarli ad altro perso-
naggio , che a V.S. Illustriss.,
che è degnissimo Comandan-
te di questo Corpo ? Così se
questa Operetta porta il no-
me di V. S. Illustriss. , non è
tanto mia elezione , quanto
forza di obbligo , e di neces-
tà . Forse che posta ogni ob-
bligazione da parte , avrei io
pure fatta l'istessa scelta, aven-
do riguardo alle tante , e sì
rare prerogative , che concor-
rono nella di lei illustrissima
persona . Non entro quì a
ridire la nobiltà del suo san-
gue , non l'antichità della sua
prosapia , non le gloriose ge-
sta de' suoi maggiori : poiche
la

Digitalizzato da Google

la ſua famiglia è così cono-
ſciuta , che è ſoverchio il
parlarne; ed oltre a ciò la mo-
deſtia di V. S. Illuſtriſs. vera-
mente ſingolare m'avvertiſce
a tacere . Mi rimane dunque
ſolamente di pregarla a com-
piacerſi di ricevere ſotto la
ſua protezione non ſolamen-
te queſta Operetta , ma me
ſteſſo ancora , e nel mentre
con tutto il maggior riſpetto
m'inchino al ſuo chiariſſimo
merito mi do l'onore dirmi
Di V.S. Illuſtriſs.

Napoli 25. Aprile 1736.

Umiliſs. ed Obbligatiſs. Servitoor vero
Stefano Elia.

Digitalizzato da Google

STEFANO ELIA

A chi legge.

I sei Libri degli Elementi della Geometria piana *di* Euclide, *sono comparsi al mondo in tante, e sì varie forme, che dubito non abbiano i Letterati da nausearsi nel vederlo di repente comparire sotto quest'altra forma, che io gli ho proccurata. Tutt-*

tavolta perchè in questa mia edizione non si vede fatta mutazione alcuna nell' ordine, e nel numero delle proposizioni, e sono esse esposte con tutta la maggior chiarezza, ed eleganza, e di più veggonsi sparse in quà, ed in là delle riflessioni non superflue, ma utili a meglio intendere la

sem-

Digitalizzato da Google

ſempliciſſima, e ſchietta dottrina di Euclide, *ed oltre a queſto nel fine di ogni libro ritrovaſi ricapitolata, e meſſa in buoniſſimo ordine tutta la dottrina eſpoſta nel libro iſteſſo, entro in iſperanza, che queſta nuova edizione poſſa incontrare l'approvazione almeno de' Letterati ragionevoli. Se poi m'accorgerò, che eſſa ſia ſtata tanto, o quanto ben ricevuta dal Pubblico, paſſerò con maggior coraggio prima a dar fuori in un' altro Volume l'undecimo, e duodecimo libro, ne' quali è trattata la dottrina de' Solidi, ſpiegati ſull' iſteſſo andare, accoppiando a' ſuddetti due libri gli Elementi della Trigonometria, e poi in tre altri piccioli Volumi l'Aritmetica, e Geometria pratica, un Trattato compiuto di ſfera ſecondo l'uno, e l'altro ſiſte-*

ma,

Digitalizzato da Google

ma, ed un'altro di Nautica, dove rimarrà spiegato così l'uso della bussola, come l'arte di costruire i Vascelli, con accennare i miglioramenti, che essa potria ricevere. Terminata che sia tutta cotesta stampa, crederò d'aver soddisfatto al dovere, che mi stringe co' Signori Ufficiali di Marina, a' quali mi trovo obbligato di far loro fra breve tempo avere un corso, che comprenda tutto ciò, che un Piloto è tenuto di sapere. Vivi lieto.

In

Digitalizzato da Google

In ſummo apud Græcos honore Geometria fuit; itaque nihil Mathematicis illuſtrius.

Cicerone nel Libro 1. delle Tuſculane.

La Filoſofia è ſcritta in queſto grandiſſimo libro, che continuamente ci ſta aperto immanzi agli occhi (io dico l'univerſo); ma e' non ſi può intendere ſe prima non s'impara ad intendere la lingua, nella quale egli è ſcritto. Egli è ſcritto in lingua mattematica, ed i caratteri ſono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, ſenza i quali mezzi è impoſſibile intenderne umanamente parola; ſenza queſti è un' aggirarſi vanamente per un' oſcuro labirinto.

Il Galileo nel Saggiatore.

Digitalizzato da Google

LIBRO PRIMO
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE.

PRIMA SORTA DI PRINCIPJ.

DEFINIZIONI.

I.

IL Punto è quello, il quale non ha nè grandezza, nè parti.

II.

La linea è una cosa lunga, senza essere larga.

III.

I termini della linea sono due punti.

IV.

La linea retta è quella, la quale si distende egualmente fra li suoi termini.

V.

La superficie è quella, che ha lunghezza, e larghezza solamente, e non ha profondità, ovvero craſſezza.

VI.

I termini della superficie sono le linee.

Digitalizzato da Google

VII.

La ſuperficie piana è quella, che ſi diſtende egualmente fra li ſuoi termini.

SPIEGAZIONE.

IL corpo, il quale è l'oggetto della Geometria può eſſere miſurato per tre verſi ſoli, e non più. Quindi ſi aſſegnano comunemente al corpo tre dimenſioni, lunghezza, larghezza, *e* profondità, *ovvero* craſſezza. *Coteſte tre dimenſioni ſempre ſi ſono ritrovate, e ſi ritroveranno congiunte inſieme in tutti i corpi, non eſſendoſi giamai vedute nella natura coſe lunghe ſolamente, o lunghe, e larghe ſenza profondità. Pur tutta volta i Geometri non anno dubitato di ſeparle, e disgiungerle coſtituendone delle idee tutte nuove, ed ignote al volgo. In primo luogo adunque eſſendo ſtata da eſſi conſiderata la lunghezza a parte ne nacque l'idea della* linea. *Dopo eſſendo ſtata conſiderata da' medeſimi la lunghezza, e la larghezza ſenza la profondità, ne nacque l'idea della ſuperficie. Quindi la ſuperficie ha biſogno d'una ſola dimenſione, vale a dire della craſſezza per degenerare in corpo; ma la linea ne ha biſogno di due, le quali ſono la larghezza, e la craſſezza. Siccome poi la linea non è altro, che lunga, così ſi comprende di leggieri, che li ſuoi termini chiamati* punti *non anno ne grandezza, ne parti.*

Chi dunque s'immaginerà nel corpo un ſegno indiviſibile, e privo di parti, gli potrà dare con Euclide *il nome di* Punto. *Se poi s'ideerà coteſto ſegno muoverſi ſecondo qualſivoglia direzione, e gir laſciando una traccia, o ſtriſcia di se medeſimo, egli vedrà naſcere la linea, la quale ſarà* diritta *ſe il punto non ſia giamai uſcito dalla ſua prima direzione, ma ſarà* curva *ſe il punto ſia ito ſerpeggiando, e cangiando direzione da tempo in*

tem-

Digitalizzato da Google

tempo. Finalmente se immaginerà la linea muoversi per traverso, egli vedrà nascere la Superficie, *la quale sarà* piana *se la linea non sia giamai uscita dalla sua prima direzione, ma sara* curva *se la linea sia ita cangiando direzione da tempo in tempo. Intanto è qui da avvertirsi, che* Archimede Siracusano, *ha definita la linea diritta così:* E la più breve di tutte quelle che si distendono da un punto ad un'altro punto: *E che* Erone *ha definita la superficie piana, dicendo* essere quella sopra di cui si può per tutti i versi adattare una linea retta.

XII.

Angolo piano è l'inclinazione di due linee giacenti sopra una superficie piana, le quali si uniscono in un punto, e non sono poste a dirittura.

IX.

Se coteste due linee, che formano l'angolo sono diritte, dicasi l'angolo rettilineo.

SPIEGAZIONE.

Tre condizioni si richiedono per la formazione dell' angolo. I. Due linee giacenti in una superficie piana. II. Che queste due linee s'incontrino in un punto. III. Che incontrandosi non giacciano a dirittura. Quando queste tre condizioni si verifichino, si darà luogo all' angolo, il quale non è altro, che l'inclinazione scambievole delle due suddette linee. Siccome poi le duelinee, che formano l'angolo possono essere entrambe rette, entrambe curve, e l'una retta, e l'altra curva così l'angolo a non considerare altro, che le linee, dalle quali vien formato è o rettilineo, *o* curvilineo, *o* mistilineo.

X.

Quando una linea diritta cade sopra un'altra li-

Digitalizzato da Google

linea diritta, e forma li due angoli di quà, e di là eguali fra di loro, la ſuddetta linea diceſi perpendicolare a quella, ſopra la quale ella cade, e ciaſcuno de' ſuoi angoli chiamaſi retto.

XI.

Ogni angolo maggiore del retto dicaſi ottuſo.

XII.

Ogni angolo minore del retto dicaſi acuto.

SPIEGAZIONE.

UNa *linea diritta può cadere ſopra un' altra linea diritta in due maniere, e non più; ciò è* perpendicolarmente, *ed* obbliquamente. *Quindi due cadute ſono conſiderate da' Geometri, ciò è la* perpendicolare, *e l'*obbliqua. *Per diſtinguere l'una dall' altra fa duopo tenere queſta regola. In qualunque modo che una linea cada ſopra un' altra linea ſempre fa con eſſa due angoli, uno di quà, un' altro di là. Ove queſti due angoli ſiano eguali, la linea diceſi* perpendicolare; *ove ſiano diſeguali, diceſi* obbliqua. *Di più quando li due angoli ſono eguali, ciaſcuno di eſſi diceſi* retto; *laddove eſſendo diſeguali, il maggiore ſi chiama* ottuſo, *il minore ſi dice* acuto. *Quindi l' angolo rettilineo per ragione della* quantità, *ovvero* inclinazione *ſi diſtingue in* retto, ottuſo, *ed* acuto. *Non ſi vuol dunque confondere l'angolo retto col rettilineo; perciocchè ogni angolo retto è rettilineo inſieme; ma viceverſa ogni angolo rettilineo, non è ſempre retto; potendo eſſere ottuſo, ed acuto.*

Avvertaſi qui, che ſiccome il carattere della perpendicolare è di fare li due angoli di quà, e di là eguali fra di loro, così eſſa non può eſſere altro, che una; di fatto un pocolino, che ella ſi ſcoſti dalle ſua ſituazione, non reſta più perpendicolare, ma degenera in obbliqua. Quindi l'angolo retto parimente è uno, nè è capace di più, o di meno; laddo-

Digitalizzato da Google

dove gli angoli ottusi, ed acuti sono infiniti, quali più ottusi, quali meno, quali più acuti, quali meno.

XIII.

Il termine è il fine di qualche cosa.

XIV.

La figura è uno spazio chiuso da un termine, ovvero da molti termini.

SPIEGAZIONE.

Il punto dunque dirassi termine *della linea, e la linea* termine *della superficie. Se vi sia uno spazio chiuso intorno intorno da molte linee, o da una linea sola, dicasi cotesto spazio* Figura. *Quindi l'angolo non merita il nome di figura, perchè non è chiuso intorno intorno. Del rimanente la figura sarà* curvilinea, *se le linee terminanti lo spazio siano curve, sarà* rettilinea, *se siano rette, e sarà* mistilinea, *se alcune siano rette, altre curve.*

XV.

Il circolo è una figura piana curvilinea terminata da una sola linea, detta circonferenza, che tiene un punto in mezzo, d'onde tutte le linee cadenti intorno intorno alla circonferenza sono eguali.

XVI.

Cotesto punto vien detto centro, e le linee eguali sono chiamate raggi.

XVII.

Il diametro del circolo è una linea retta passante per lo centro, la quale giugne a toccare la circonferenza dall'una parte, e dall'altra.

XVIII.

Il semicircolo è una figura piana mistilinea terminata da mezza circonferenza, e dal diametro, che serve a lei di base.

Digitalizzato da Google

XIX.

La porzione di circolo è una figura piana mistilinea contenuta da una porzione qualsivoglia di cirtonferenza, e da una linea retta, che le serve di base. Dicasi questa linea corda, ovvero sottesa.

ADDIZIONE.

La circonferenza d'ogni circolo sia grande, sia picciolo, s'intende da Geometri compartita in 360. parti eguali, le quali si chiamano gradi: *ciascun grado s'intende compartito in* 60. minuti primi; *ciascun minuto primo in* 60. secondi; *ciascun secondo in* 60. terzi, *e così all'infinito: si distinguono cotcste varie sorte di minuti per via di virgole così* 40. 30. 45. 32. *vale a dire* 40 *gradi*. 30 *minuti primi*. 45 *secondi, e* 32 *terzi.*

g ' " "'

XX.

Figure rettilinee trilatere sono quelle, le quali sono terminate da tre linee rette. Queste figure si chiamano ancora Triangoli.

XXI.

Figure rettilinee quadrilatere sono quelle, le quali sono terminate da quattro linee rette.

XXII.

Figure rettilinee moltilatere sono quelle, le quali sono terminate da più di quattro linee rette.

XXIII.

Quando tutte le tre linee terminanti il triangolo sono eguali; dicasi il triangolo equilatero.

XXIV.

Quando due sole sono eguali, e la terza è maggiore, o minore; dicasi il triangolo isoscele.

XXV.

Quando tutte tre sono diseguali; il triangolo dicasi scaleno.

XXVI.

Digitalizzato da Google

XXVI.

Quando uno di tre angoli d'un triangolo sia retto; dicasi il triangolo rettangolo, ovvero ortogonio.

XXVII.

Ma quando un' angolo sia ottuso; dicasi ottusangolo, ovvero ambligonio.

XXVIII.

Finalmente quando tutti tre gli angoli sono acuti; il triangolo dicasi acutangolo, ovvero ossigonio.

SPIEGAZIONE.

Siccome ne' triangoli vi sono tre linee, e tre angoli, così vi sono sei forme diverse di triangoli, tre delle quali nascono dalla considerazione delle linee, e tre altre dalla considerazione degli angoli. Imperciocchè o tutte le tre linee sono eguali, o due sole sono eguali, o tutte tre sono diseguali; e quindi tre forme di triangoli equilatero, isoscele, e scaleno. *Inoltre o uno de' tre angoli è retto, o uno è ottuso, o tutti tre sono acuti; e quindi tre altre forme di triangoli* rettangolo, ottusangolo, e acutangolo. *Notisi qui, che per chiamarsi un triangolo rettangolo, ovvero ottusangolo, basta che un angolo sia retto, ovvero ottuso; ma per dirsi acutangulo, sia duopo, che tutti tre gli angoli siano acuti: di modo che un triangolo, il quale tiene due angoli acuti, ed uno retto, ovvero ottuso, prende il nome dall'ottuso, o dal retto, e non già da due acuti.*

XXIX.

Il Quadrato è una figura quadrilatera, che tiene tutti gli angoli retti, e tutte le linee eguali.

XXX.

Il Bislungo è una figura quadrilatera, che tiene tutti gli angoli retti, ma non ha tutte le linee eguali.

Digitalizzato da Google

XXXI.

Il Rombo è una figura quadrilatera, che tiene tutte le quattro linee eguali, ma non già gli angoli retti.

XXXII.

Il Romboide, è una figura quadrilatera, che nè tiene le quattro linee eguali, nè gli angoli retti; ma ha ſolamente i lati, e gli angoli oppoſti eguali.

XXXIII.

Ogni altra figura quadrilatera diverſa dal quadrato, dal bislungo, dal rombo, e dal romboide, dicaſi Trapezio.

SPIEGAZIONE.

TUtte le forme delle figure quadrilatere ſi riducono a cinque. Perche ſupponendo primieramente, che tutti gli angoli ſiano retti: o tutti i lati ſono eguali, e la figura quadrilatera ſarà un quadrato, *o ſono diſeguali, e ſarà un* bislungo. *Supponendo poi, che gli angoli non ſiano retti; ſe i quattro lati ſono eguali, la figura quadrilatera ſarà un* rombo; *ſe i lati oppoſti ſolamente ſono eguali, ſarà un* romboide. *Ogni altra figura quadrilatera diverſa dalle quattro ſuddette, ſarà* Trapezio.

XXXIV.

Linee rette parallele ſono due linee giacenti in una ſuperficie piana, le quali diſteſe da ambe le parti all'infinito non s'incontrano giamai. *Ovvero* ſono due linee giacenti in una ſuperficie piana, le quali portate innanzi quanto ci piaccia, ſempre mantengono l'iſteſſa diſtanza, *Per queſta ragione ſogliono ancora chiamarſi* egualmente diſtanti.

Digitalizzato da Google

SPIEGAZIONE.

DUe condizioni *si richieggono, perche due linee si chiamino* parallele . I. *Che stiano a giacere sopra una superficie piana: quindi due linee situate in diversi piani non saranno giamai parallele* . II. *Che distese da ambe le parti all' infinito non s'incontrino giamai: dico da ambe le parti; perche due linee non parallele da una sola parte s'uniscono; dall' altra parte tanto è lontano, che si uniscono, che piuttosto si vanno più allargando.*

XXXV.

Il Parallelogrammo è una figura quadrilatera, che tiene i lati opposti paralleli. *Quindi tutte le figure quadrilatere dal trapezio in fuori sono parallelogrammi.*

SECONDA SORTA DI PRINCIPJ.

DIMANDE.

I.

SI dimanda, che due punti si possano unire con una linea retta.

II.

Si dimanda inoltre, che una linea retta terminata possa portarsi tanto innanzi quanto bisogna.

III.

Si dimanda finalmente, che da un dato punto come centro, e con un dato raggio possa descriversi una circonferenza di circolo.

TER-

Digitalizzato da Google

TERZA SORTA DI PRINCIPJ.

ASSIOMI.

I.

Due cose se sono eguali ad una medesima cosa, sono eguali fra di loro. Ed una medesima cosa se è maggiore, o minore dell' una di due cose eguali sarà eziandio maggiore, o minore dell'altra.

II.

Aggiungendo cose eguali a cose eguali, ovvero aggiugnendo l'istessa cosa a cose eguali, le somme riescono eguali.

III.

Viceversa da cose eguali togliendo cose eguali, ovvero l'istessa cosa gli avanzi riescono eguali.

IV.

A cose ineguali aggiungendo cose eguali, ovvero l'istessa cosa, le somme rimangono ineguali.

V.

Viceversa da cose ineguali togliendo cose eguali, ovvero l'istessa cosa, gli avanzi riescono ineguali.

VI.

Le cose duple, triple, quadruple, dell' istessa cosa sono eguali.

VII.

Le cose sudduple, suttriple, suqquatruple dell'istessa cosa sono parimente eguali.

VIII.

Le cose, le quali soprapposte l'una all' altra combaciano a puntino senza superarsi sono eguali.

IX.

Il tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti; e tutte le parti riunite insieme restituiscono il tutto.

X.

Digitalizzato da Google

X.

Due linee rette, si tagliano in un solo punto senza più.

XI.

Due linee rette non possono chiudere spazio. *Quindi non anno luogo tra le figure rettilinee le bilatere; ma le prime a doversi considerare sono le trilatere.*

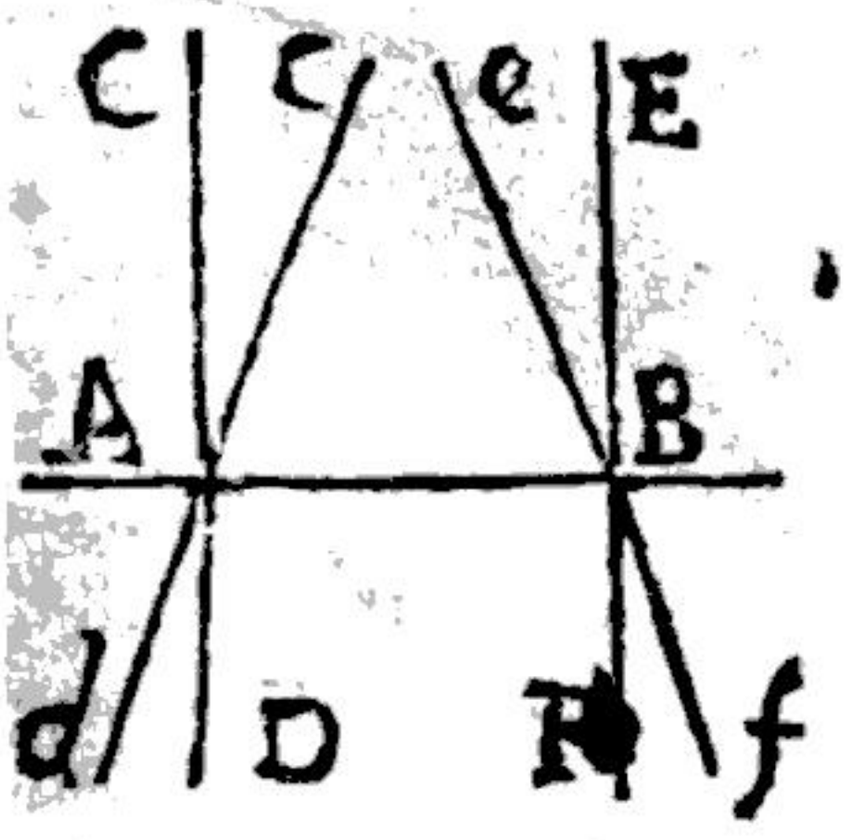
XII.

Tutti gli angoli retti sono eguali.

XIII.

Se due linee rette giacenti in una superficie piana sono segate da una terza linea retta, e siano li due angoli interiori dalla medesima parte minori di due angoli retti; le due linee non saranno parallele, ma portate innanzi verso quella parte, dove gli angoli interiori sono minori di due angoli retti, si verranno finalmente ad incontrare.

ILLUSTRAZIONE DELL' ULTIMO ASSIOMA.



Sia la linea diritta AB, sopra la quale insistano perpendicolarmente le due linee CD, EF: non è da mettersi in dubbio, che queste due linee siano parallele, e che li due angoli interiori della medesima parte siano eguali a due retti. Inclininsi ora le due CD, EF, sicche passino nelle situazioni cAd, eBf egli è chiaro altresì, che queste due linee non sono parallele, e che gli angoli interiori da quella parte, verso dove le due linee vanno ad unirsi, non sono eguali a due retti, ma minori di due retti;

Digitalizzato da Google

ti; di modo che rimane vero l'assioma ultimo quì sopra descritto.

DE' PROBLEMI, E DE' TEOREMI.

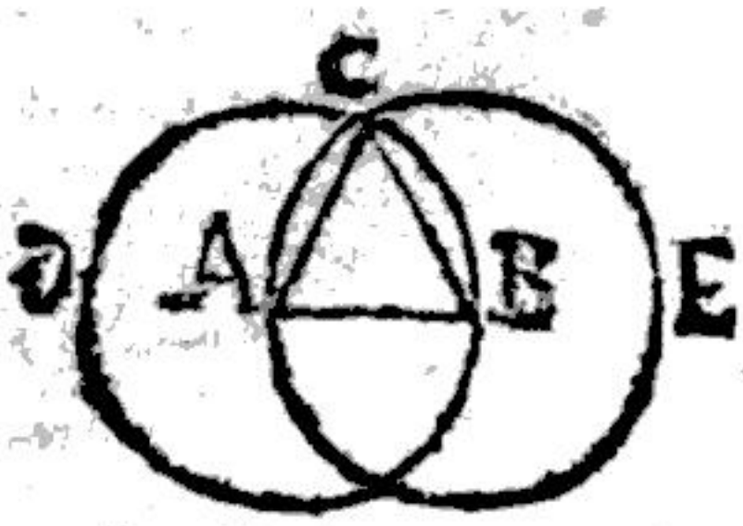
EUclide *ha esposti gli elementi della Geometria per via di* Proposizioni, *alcune delle quali portano il titolo di* Problemi, *altre di* Teoremi. *Problema è* una proposizione in cui si vuol fare qualche cosa. *Teorema è* una proposizione in cui si vuol dimostrare qualche verità ignota.

Così il Problema, come il Teorema ha tre parti con questa differenza però, che tutte tre sono essenziali al Problema; laddove una di esse può mancare al Teorema. Queste parti sono I. Proposizione II. Costruzione III. Dimostrazione, *delle quali la seconda talvolta è necessaria al teorema, e talvolta nò.*

PROP. I. PROBLEMA.

Sopra una data linea retta terminata descrivere un triangolo equilatero.

I.



Sia data la linea retta AB terminata ne' punti A, e B; fa duopo descriverci sopra un triangolo equilatero.

II.

* *dim.* 3. I. Col centro A, e col raggio AB (*) descrivasi il circolo BCD. II. Col centro B, e col raggio BA descrivasi (*) l'altro circolo ACE. III. Dal punto C, dove le circonferenze de' due circoli già descritti si segano, si congiungano (*) le linee rette CA, CB. Io dico, che il triangolo ACB descritto sopra la data AB sia equilatero.

† *dim.* 3.

‡ *dim.* 1.

III.

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione il punto A e il centro del circolo BCD, così le due linee AB, AC saranno (*) eguali. Similmente siccome dalla costruzione B è il centro del circolo ACE, così le linee BA, BC saranno (*) eguali. Laonde essendo così AC, come BC eguale alla medesima AB, saranno (*) le due AC, BC eguali fra di loro. Il perche il triangolo ACB sarà equilatero. Ciocche doveva farsi.

* *def.* 15.

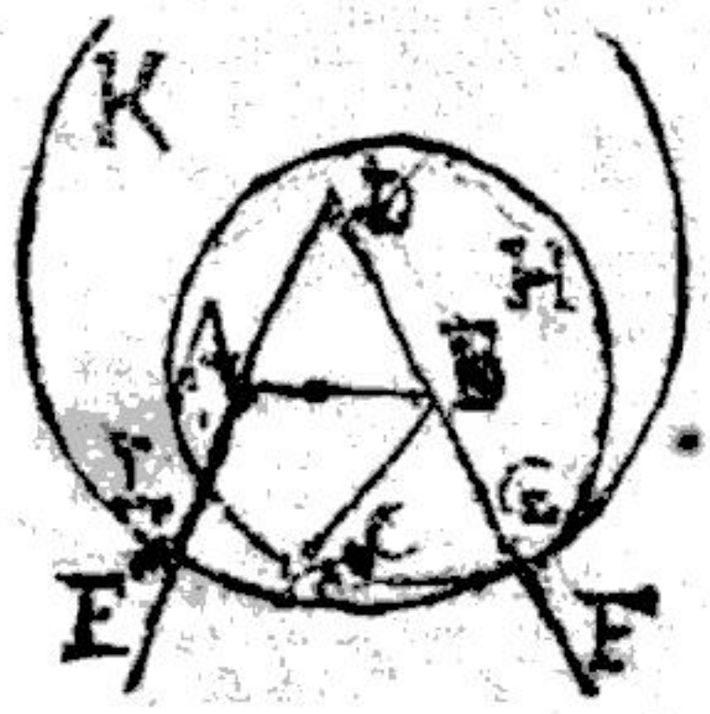
* *def.* 15.

* *ass.* 1.

PROP. II. PROBLEMA.

Adattare ad un punto dato una linea diritta eguale ad un'altra linea data.

I.



Sia dato il punto A, e sia data inoltre la linea diritta BC, fa duopo adattare al punto A una linea retta eguale alla data BC.

II.

I. Si uniscano (*) i due punti A, e B colla retta AB. II. Sopra la quale si formi (*) il triangolo equilatero ADB, (*) il circolo CGH. V. Dal centro D, col raggio DG descrivasi (*) il circolo GLK. Io dico, che la linea retta AL adattata al punto A sia eguale alla data BC.

* *dim.* 1.

* *propo.* 1.

. III. I lati DA, DB si portino (*) innanzi verso E, e verso F. IV. Dal centro B col raggio BC descrivasi

* *dim.* 2.

* *dim.* 3.

* *dim.* 3.

III.

Siccome dalla costruzione D è il centro del circolo GLK, così le due linee DG, DL sono (*) eguali fra di loro. Ma per cagione del triangolo equilatero ADB le due linee DB, DA sono ancora eguali; dunque dalle due eguali DG, DL

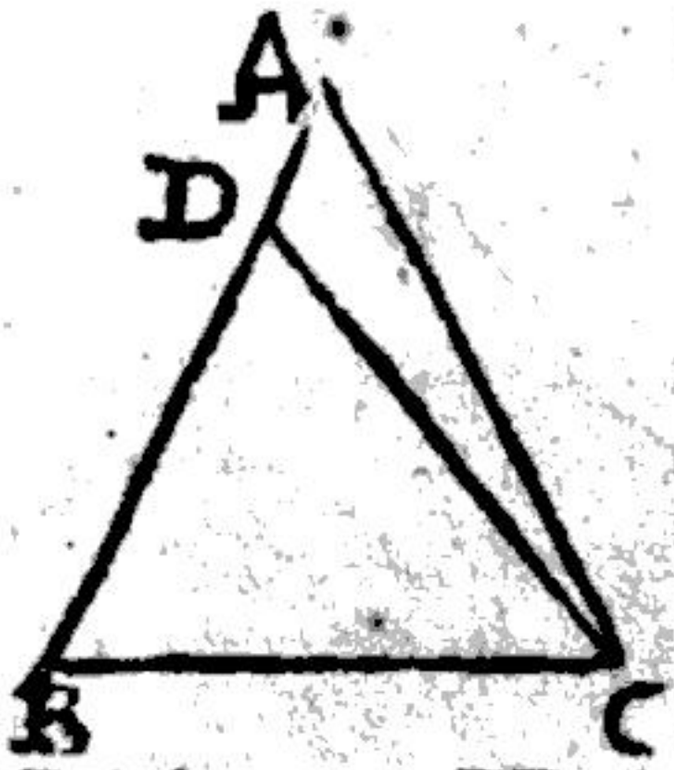
* *def.* 15.

to-

Digitalizzato da Google

PROP. VI. TEOREMA.

Se due angoli d'un triangolo siano eguali fra di loro; ancora i lati sottoposti a detti angoli saranno eguali.



I.

Siano i due angoli ABC, ACB del triangolo ABC eguali fra di loro; io dico che i lati AB, AC sottoposti a' detti angoli siano parimente eguali.

II.

Se è possibile, sia il lato AB maggiore del lato AC: si tagli dunque I. dal maggiore BA la parte BD (*) eguale al minore AC. II. si unisca (*) la DC.

* *pro.* 3.
* *dim.* 1.

III.

E perche dalla costruzione BD è eguale a CA, e BC è comune; saranno i due lati DB, BC del triangolo DBC, eguali a' due lati AC, CB del triangolo ACB ciascuno a ciascuno: quindi essendo dalla supposizione l'angolo DBC eguale all'angolo ACB sarà (*) il triangolo minore DBC eguale al triangolo maggiore ACB, il che è contrario all'assioma IX. Sicche rimane vero il Teorema in questione.

* *pro.* 4.

AVVERTIMENTO.

Due cose sono qui da avvertirsi, I. *che questa propositione è conversa della quinta, vale a dire, che la supposizione della quinta è conseguenza nella sesta; e la conseguenza nella quinta è supposizione della sesta*. II. *che la dimostrazione della suddetta proposizione sia negativa: di fatto non si sono già dimostrati positivamente li due lati AB, AC eguali fra di loro: ma si è fatto vedere, che*

Digitalizzato da Google

ove potessero essere diseguali, saria la parte eguale al tutto.

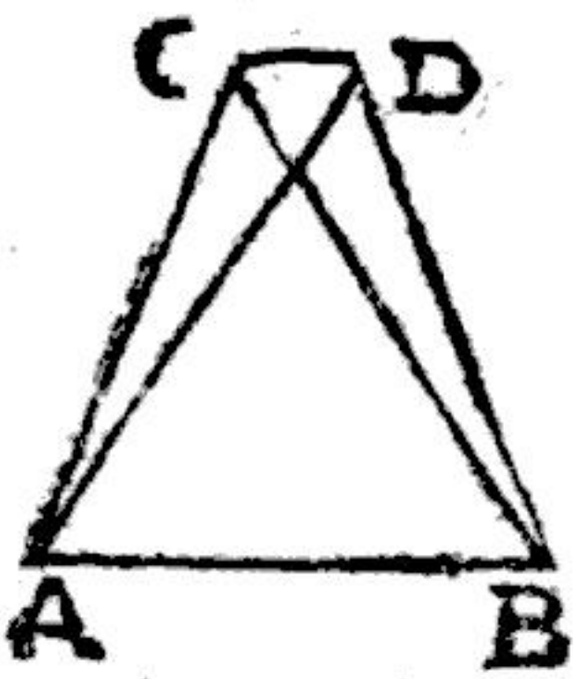
COROLLARIO.

SE un triangolo ha tutti li tre angoli eguali, egli sarà equilatero.

PROP. VII. TEOREMA.

Se da' termini d'una linea retta siano tirate due linee rette, le quali si vadino ad unire in un punto: è impossibile che dagl'istessi termini, e dall' istessa parte si possano tirare due altre linee rette eguali alle due prime; ciascuna a ciascuna, le quali si vadino ad unire in un punto diverso dal punto suddetto.

I.



Da' termiui A, e B della linea retta AB s'intendano tirate due linee AC, BC, le quali si unischano nel punto C. Io dico che dagl'istessi termini, e dall'istessa parte non si possano tirare due altre linee eguali alle due già tirate AC, BC ciascuna a ciascuna, le quali si abbiano da unire in un punto diverso dal punto C.

II.

Se mai sia possibile; se ne possano tirare due altre, le quali siano AD, BD, in modo che AC, sia eguale ad AD, e BC sia eguale a BD. Si congiunga CD (*).

* *dim.* 1.

III.

Poiche si vuole, che AC, sia eguale ad AD, il triangolo ACD sarà isoscele; il perche (*) l'angolo ACD sarà eguale all'angolo ADC; laonde essendo l'angolo BDC maggiore (*) dell' angolo ADC; sarà l'istesso angolo BDC maggiore dell'

* *pro.*

* *ass.* 9.

Digitalizzato da Google

dell'angolo ACD (*); e per conseguente molto maggiore dell' angolo BCD: ma l'angolo EDC è eguale (*) all'angolo BCD; perche si vuole, che BD sia eguale a BC: dunque i due angoli BDC, BCD, una volta sono diseguali, e un'altra volta eguali; ciocche non potendo sossistere rimane vero il Teorema in questione.

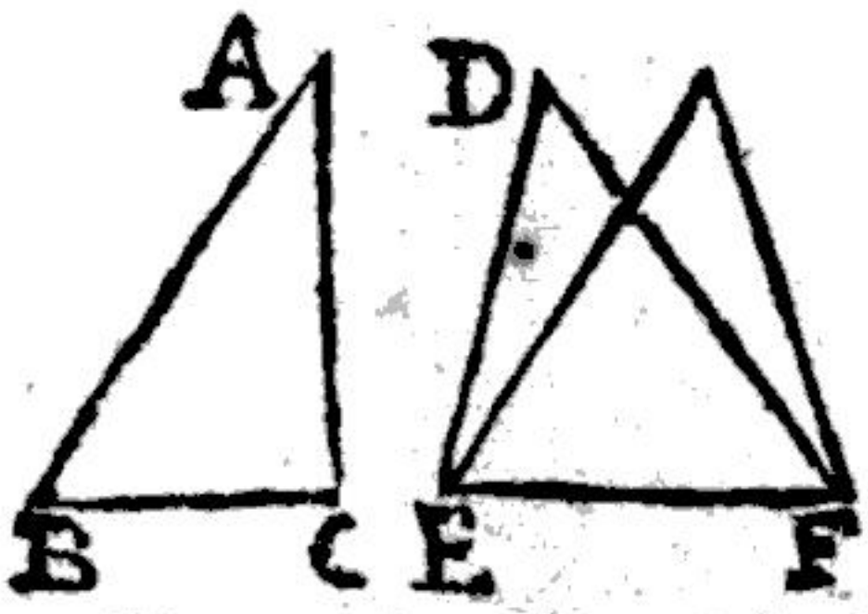
(*) *assio.* 1.

(*) *pro.* 5.

COROLLARIO.

Da quì siegue, che se due triangoli sono costituiti I. *sopra una medesima base, e* II. *anno i due lati eguali a' due lati, ciascuno a ciascuno: li detti triangoli debbano cadere giustamente l'uno sull'altro.*

PROP. VIII. TEOREMA



Se due triangoli anno I. *i due lati eguali a' due lati, ciascuno a ciascuno,* II. *la base eguale alla base: sarà l'angolo contenuto sotto i lati dell' uno eguale all'angolo contenuto sotto i lati dell'altro.*

I.

Abbiano i due triangoli BAC, DEF i due lati AB, AC eguali a' due lati DE, DF ciascuno a ciascuno, e la base BC eguale alla base EF; io dico che l'angolo BAC sia eguale all'angolo EDF.

II.

S'accavalli il triangolo ABC su 'l triangolo DEF, in modo che la base BC resti distesa sulla base EF, e li punti B, e C s'uniscano co' punti E, & F; e poiche dalla suppositione i due lati BA, AC, sono eguali a due lati ED, DF ciascuno a

Digitalizzato da Google

ciaſcuno; il punto A ſi anderà ad unire col punto D per lo Corollario della propoſizione antecedente. Laonde l'angolo BAC combacerà coll'angolo EDF; e quindi gli ſarà eguale (*): ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *aſſio.* 8.

ANNOTAZIONE.

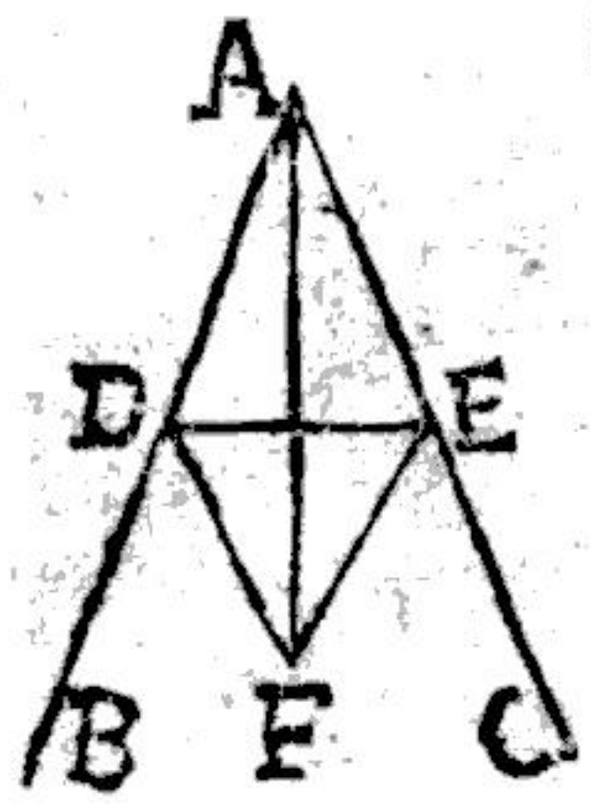
La propoſizione IV. ed VIII. s'accordono in queſto, che ſi ſuppone in entrambe i due lati eſſere eguali a' due lati ciaſcuno a ciaſcuno: diſcordano in ciò, che nella IV. dall' eguaglianza degli angoli contenuti ſotto i lati eguali ſi deduce l'eguaglianza delle baſi; e nell'VIII. viceverſa dall'eguaglianza delle baſi ſi deduce l'eguaglianza de' due angoli ſuddetti.

PROP. IX. PROBLEMA.

Dividere un'angolo rettiiineo dato in due parti eguali.

I.

Sia dato l'angolo rettilineo BAC; fa duopo dividerlo in due parti eguali.



II.

I. Prendaſi nella AB qualſivoglia punto D. II. Dalla maggiore AC tagliſi (*) la AE eguale ad AD. III. ſi congiunga la (*) DE. IV. ſopra la quale ſi formi (*) il triangolo equilatero DFE. V. ſi uniſca (*) AF. Io dico che l'angolo BAC rimane diviſo in due parti eguali da queſta linea retta AF.

* *pro.* 3.
* *dim.* 1.
* *pro.* 1.
* *dim.* 1.

III.

Imperciocche ſiccome dalla coſtruzione la AD è eguale alla AE, e la AF, è comune; così i due

Digitalizzato da Google

i due lati DA, AF del triangolo DAF saranno eguali a' due lati EA, AF del triangolo EAF ciascuno a ciascuno. Quindi essendo la base DF del primo triangolo eguale alla base FE dell' altro triangolo; poiche esse sono lati del triangolo DFE, il quale dalla costruzione è equilatero: sarà (*) l'angolo DAF contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all' angolo EAF contenuto sotto i lati dell'altro triangolo; ciocche doveva farsi.

* *pro. ante.*

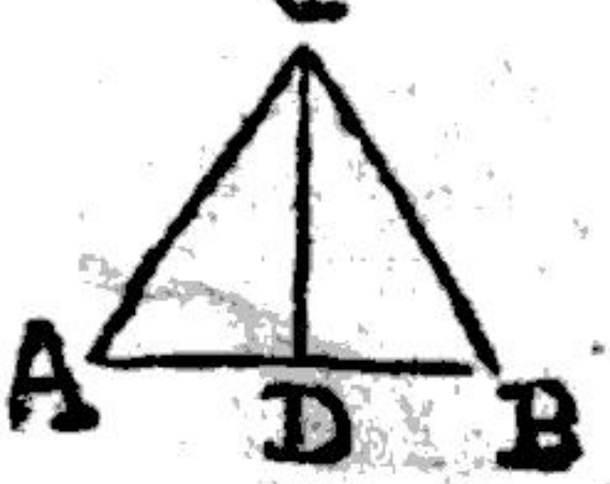
PROP. X. PROBLEMA.

Di una linea retta terminata data farne due parti eguali.

I.

Sia data la linea retta AB terminata ne' punti A, e B; fa duopo tagliarla in due parti eguali.

II.



I. Descrivasi (*) sopra la data AB il triangolo equilatero ACB. II. l'angolo ACB si tagli (*) in due parti eguali colla retta CD. Io dico che questa linea retta CD divide la data AB in due parti eguali.

* *pro.* 1.

* *pro. ante.*

III.

Perche dalla costruzione i lati CA, CB del triangolo equilatero ACB sono eguali, e CD è lato comune; saranno i due lati AC, CD del triangolo ACD eguali a' due lati BC, CD del triangolo BCD ciascuno a ciascuno. Quindi essendo dalla costruzione l'angolo ACD contenuto sotto i lati del primo eguale all'angolo BCD contenuto sotto i lati dell'altro triangolo, sarà (*) la base AD eguale alla base DB: ciocche doveva farsi.

* *pro.* 4.

Digitalizzato da Google

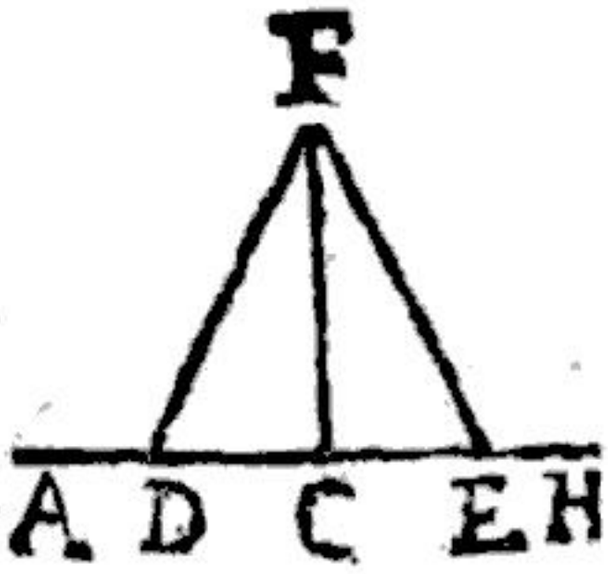
AVVERTIMENTO COMUNE ALLE DUE ULTIME PROPOSIZIONI.

LE costruzioni, delle quali Euclide *si è avvalso per dividere un' angolo, ed una linea diritta in due parti eguali sono utili altresì a dividere l'uno, e l'altro in quattro parti eguali, e poi in otto, indi in sedici, e così all' infinito sempre nella proporzione doppia. Imperciocchè diviso, che si è l'angolo, o la linea in due parti eguali, si dividerà ciascuna di esse in due altre parti eguali, e se ne avranno quattro: di più ciascuna delle quattro si dividerà in due parti eguali, e se ne averanno otto: e così all'infinito.*

PROP. XI. TEOREMA.

Da un punto dato in mezzo ad una linea retta innalzarvi sopra una linea perpendicolare.

I.



Sia data la linea retta AH, e in mezzo ad essa sia dato il punto C; fa duopo innalzare dal dato punto C una linea perpendicolare alla data AH.

II.

I. Prendasi nella AC un punto ad arbitrio come D. II. dalla maggiore CH tagliasi (*) la parte CE eguale alla minore CD. III. sopra la DE descrivasi (*) il triangolo equilatero DFE. IV. si uniscano (*) i punti F, C colla linea retta FC. Io dico che questa sia perpendicolare sopra la data AH.

* *pro. 3.*
* *pro. 1.*
‖ *dim. 1,*

III.

Imperciocchè essendo dalla costruzione la DC eguale alla CE, e la CF comune, saranno i due lati CF, CD del triangolo CFD eguali a' due lati CF, CE del triangolo CFE. Quindi essendo a-

ca-

Digitalizzato da Google

cagione del triangolo equilatero DFE la baſe DF del primo triangolo eguale alla baſe EF dell' altro triangolo; ſarà (*) l'angolo FCD eguale all'angolo FCE. Facendo dunque la linea retta FC gli angoli di quà, e di là eguali fra di loro per la definizione x. ſarà perpendicolare alla data AH. Ciocche doveva farſi. * pro. 8.

PROP. XII. PROBLEMA.

Da un punto dato fuori d'una linea farvi cadere ſopra una perpendicolare.

I.

Sia dato il punto C fuori della linea AB; fa duopo dal punto dato C far cadere ſopra la ſuddetta AB una linea perpendicolare.

III.



I. Prendaſi dall'altra parte della linea AB per riguardo al dato punto C un punto qualſivoglia G. II. Dal centro C, col raggio CG deſcrivaſi (*) il circolo EGF. III. la linea EF, la quale rimane racchiuſa dentro del circolo tagliſi (*) in due parti eguali nel punto H. IV. Dal punto C al punto H ſi congiunga (*) la linea retta CH. Io dico che queſta ſia perpendicolare alla data AB. * dim. 3. * pro. 10. * dim. 1.

III.

Imperocchè dalla coſtruzione la HE è eguale alla HF, e la HC è comune; così ſaranno i due lati EH, HC del triangolo EHC eguali a' due lati HF, HC del triangolo FHC ciaſcuno a ciaſcuno. Quindi eſſendo la baſe EC del primo triangolo eguale alla baſe FC dell'altro triangolo, perche ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza, ſarà (*) l'angolo CHE eguale all' angolo CHF. Sicche la linea CH ſarà (*) perpendi- * pro. 8. * def. 10.

di-

Digitalizzato da Google

dicolare alla data AB. Ciocche doveva farsi.

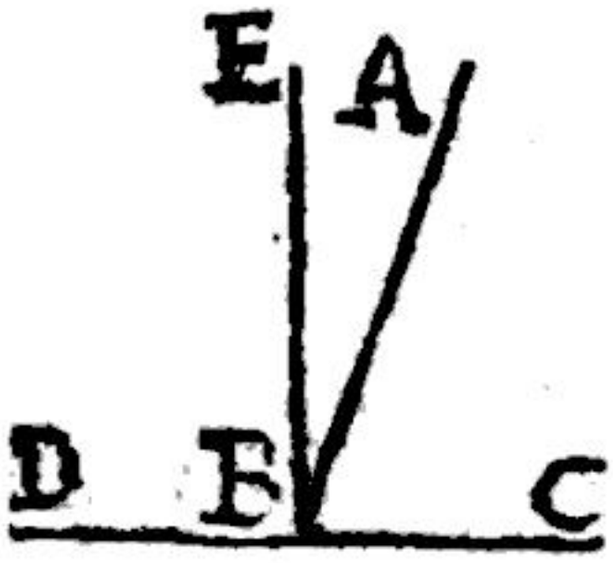
AVVERTIMENTO.

Ove il punto C dato fuori dalla linea AB sia situato in modo, che riesca impossibile il far cadere da esso una perpendicolare sopra la suddetta AB, bisognerà per la seconda dimanda portare tanto innanzi la linea AB, quanto basti per poterci far cadere la perpendicolare.

PROP. XIII. ASSIOMA.

Una linea retta, la quale insiste sopra un'altra linea retta, forma li due angoli di quà, e di là, o retti, ovvero eguali a due retti.

SPIEGAZIONE.



Questa proposizione mi sembra tanto chiara, che io non dubito di metterla nel numero degli assiomi, comeche essa nel testo di Euclide *porti il titolo di* Teorema. *E' noto, che una linea retta può cadere sopra un' altra linea retta in due maniere* perpendicolarmente, *ed* obbliquamente. *Cadendoci perpendicolarmente li due angoli di quà, e di là saranno retti entrambi; cadendoci obbliquamente egli è il vero, che essi sia ottuso, e l'altro acuto: tutta volta per quanto l'ottuso sopravanza il retto, d'altrettanto gli manca l'acuto, compensandosi l'eccesso dell' uno col difetto dell'altro, rimane ne' due angoli il valore di due retti. Così cadendo la EB perpendicolarmente sopra la DC, li due angoli EBD, EBC sono retti entrambi; ma cadendo la AB obbliquamente so-*

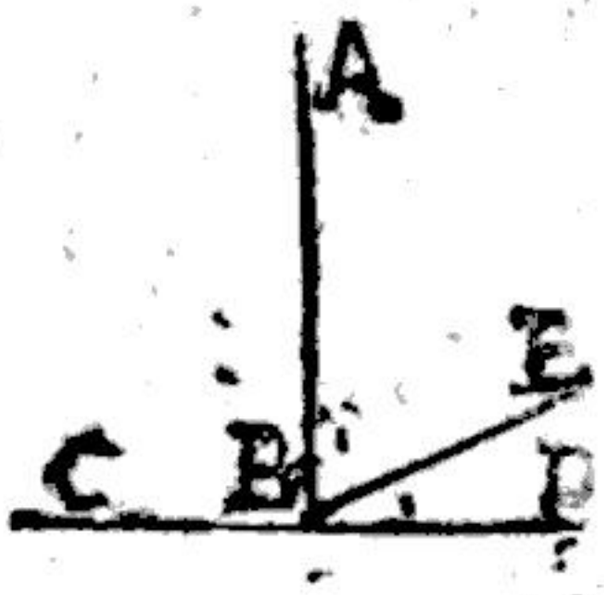
Digitalizzato da Google

ſopra la DC, li due angoli ABD, ABC ſono eguali a due retti. E quindi è facile a dedurne, che ſe due linee rette ſi ſegano, i quattro angoli fatti intorno al punto del ſegamento, ſiano o retti, ovvero eguali a quattro angoli retti.

PROP. XIV. TEOREMA.

Se dal termine d'una linea retta data ſi tirino alle parti oppoſte due linee rette, le quali formino colla data li due angoli di quà, e di là, o retti, ovvero eguali a due retti; le due ſuddette linee giaceranno a dirittura nè formeranno angolo.

I.



Dal termine B dalla linea retta AB ſiano tiratè alle parti oppoſte due linee BC, BD, ma con tale legge, che li due angoli di quà, e di là ABC, ABD ſiano o retti, ovvero eguali a due retti; Io dico che le ſuddette linee BC, BD giaceranno a dirittura: vale a dire che CBD ſia una ſola linea retta.

II.

Se è poſſibile, non ſia CBD una retta linea, ma CB portata innanzi vada a continuarſi nella BE. Perche la retta AB cade ſopra la retta CBE ſaranno (*) li due angoli ABC, ABE eguali a due retti: ma dalla ſuppoſizione ancora li due angoli ABC, ABD ſono eguali a due retti; dunque li due angoli ABC, ABE ſaranno (*) eguali a due angoli ABC, ABD. Se ne levi via l'angolo commune ABC: rimarrà (*) l'avanzo ABE eguale all'avanzo ABD; vale a dire la parte eguale al tutto; ciocche non potendo ſoſſiſtere, ne ſiegue la verità del Teorema in queſtione.

(*) *pro. ante.*

(*) *aſſio.* 1.

(*) *aſſio.* 3.

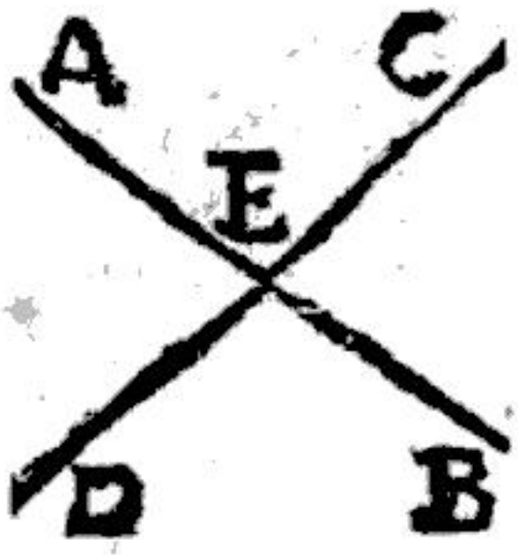
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XV. TEOREMA.

Se due linee rette si segano scambievolmente; gli angoli opposti al vertice saranno eguali fra di loro.

I.



Seghinsi le due linee rette AB, CD scambievolmente nel punto E; io dico che tanto gli angoli AEC, BED, quanto gli angoli AED, BEC opposti al vertice E siano eguali fra di loro.

II.

Siccome la retta AE cade sulla retta CD, così gli angoli di quà, e di là AED, AEC saranno
* *pro.* 13. (*) eguali a due retti. Parimente siccome la retta DE cade sopra la retta AB, così gli angoli
* *pro.* 13. di quà, e di là DEB, DEA saranno (*) eguali a due retti. Quindi li due primi angoli AED, AEC
* *assio.* 1. saranno (*) eguali a due secondi DEB, DEA. Se ne levi via l'angolo comune AED; e rimarrà
2 *assio.* 3. (*) l'avanzo AEC eguale all'avanzo BED. Nell' istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo AED sia eguale all' angolo BEC; di modo che rimane vero il Teorema in questione.

PREPARAZIONE ALLA PROPOSIZIONE SEGUENTE.

SE il lato BC del triangolo ABC si distende verso D; si vedrà nascere fuori del triangolo l'angolo ACD, il quale dicesi esteriore, *a differenza de' tre angoli CAB, ABC, BCA, li quali si chiamano* interiori. *Ora di questi tre angoli interiori l'angolo ACB, che giace accanto all'esteriore dicesi* interiore adjacente, *il quale, se è retto, sarà eguale all'esteriore, se è ottuso, sarà maggiore dell'esteriore, se acuto,*

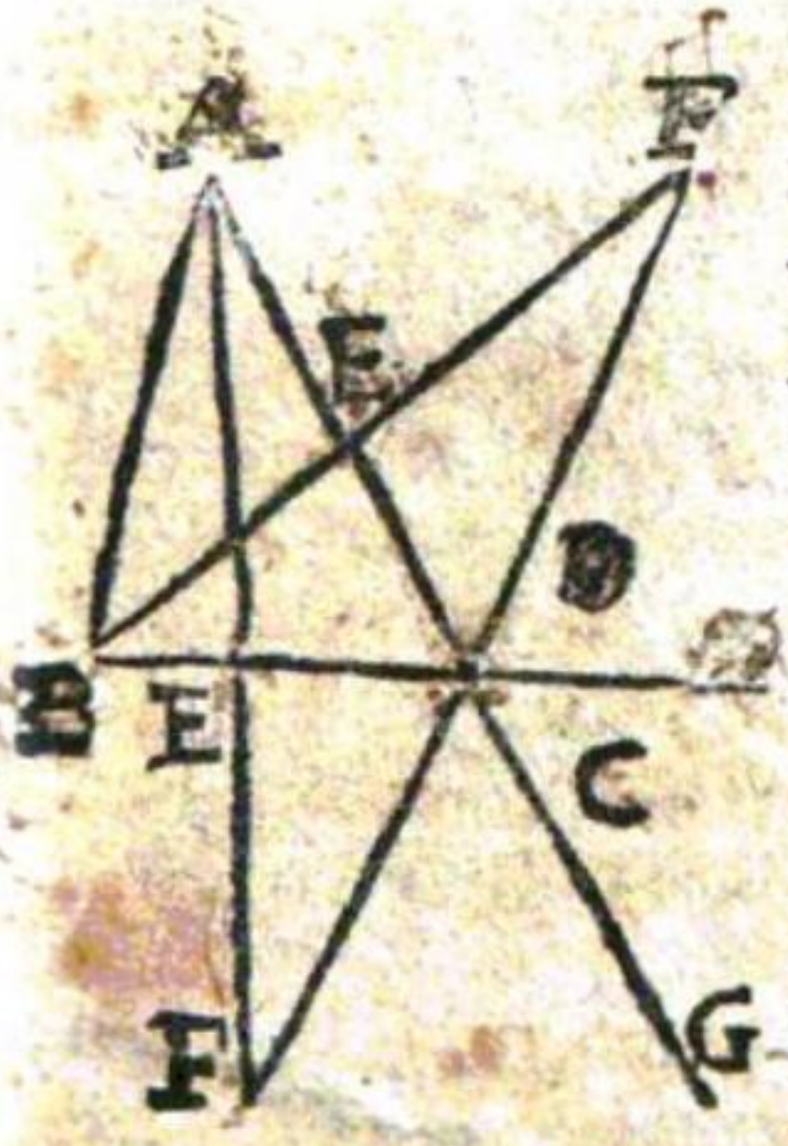
sa-

Digitalizzato da Google

ſarà minore dell'eſteriore; di modo che può accadere, che l'eſteriore ſia o eguale, o minore, o maggiore dell'interiore adjacente. Gli altri due angoli interiori, ſi chiamano interiori oppoſti.

PROP. XVI. TEOREMA.

In ogni triangolo, ſe ſi diſtende un lato qualſivoglia; l'angolo eſteriore ſarà ſempre maggiore dell'uno e dell'altro angolo interiore oppoſto.



I.

Sia il triangolo ABC, il di cui lato BC ſi diſtenda verſo verſo D. Io dico che l'angolo eſteriore ACD è maggiore così dell' angolo CAB, come dell' angolo ABC, che ſono li due interiori oppoſti.

II.

I. Tagliſi AC (*) in parti eguali nel punto E. II. ſi uniſca (*) BE. III. ſi diſtenda (*) BE verſo F, ſi tagli EF (*) eguale a BE. V. ſi uniſca (*) CF.

* *pro.* 10.
* *dim.* 1.
* *dim.* 2.
* *pro.* 3.
* *dim.* 1.

III.

Dalla coſtruzione AE è eguale ad EC, e BE è eguale ad EF; dunque i due lati AE, EB del triangolo AEB ſono eguali a due lati CE, FE del triangolo CEF ciaſcuno a ciaſcuno: quindi eſſendo l'angolo AEB contenuto ſotto i lati del primo triangolo eguale (*) all'angolo CEF contenuto ſotto i lati del ſecondo triangolo; ſarà (*) l'angolo EAB eguale all'angolo ECF, i quali due angoli ſono ſottopoſti a' lati eguali. Ma l'angolo eſteriore ACD è maggiore (*) dell'angolo ECF; dunque l'iſteſſo angolo eſteriore ACD ſarà (*) maggiore dell'

* *pro.* ante.
* *pro.* 4.
* *aſſio.* 9.
* *aſſio.* 5.

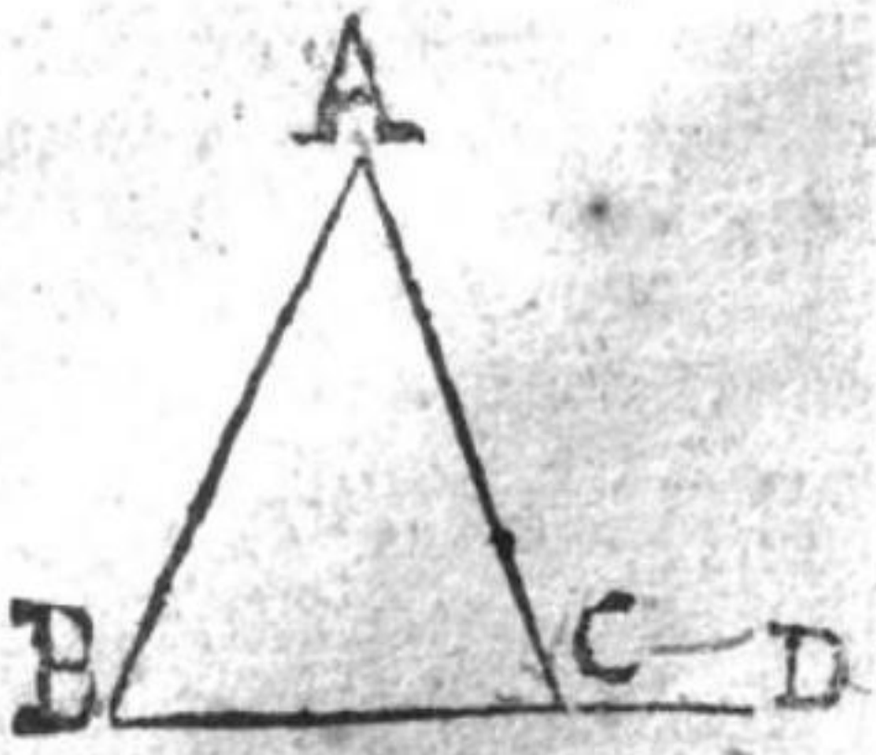
dell'angolo EAB, ovvero CAB. Nell'istessa maniera distendendo il lato AC verso G si farà vedere per mezzo di due triangoli AEB, FEC, che l'angolo esteriore BCG sia maggiore dell'interiore opposto ABC; laonde siccome l'angolo ACD è eguale (*) all'angolo BCG, così sarà il medesimo angolo ACD maggiore (*) dell'angolo ABC; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. ante.*
(*) *assio.* 1.

PROP. XVII. TEOREMA.

Gli angoli di qualsivoglia triangolo presi a due a due sono sempre minori di due retti.

I.



Sia il triangolo ABC; io dico che li suoi tre angoli comparati a due a due, vale a dire ABC, e BCA; BCA, e CAB; CAB, ed ABC, sono minori di due angoli retti.

II.

Si distenda (*) il lato BC verso D.

(*) *dim.* 2.

III.

Siccome l'angolo esteriore ACD è maggiore dell'angolo interiore opposto (*) ABC, così aggiugnendo ad essi l'istesso angolo ACB, riuscirà (*) la somma de' due angoli ACD, ACB maggiore della somma de'due angoli ABC, ACB. Quindi essendo li due angoli ACD, ACB eguali a due retti (*); saranno per necessità gli altri due angoli ABC, ACB minori di due retti. Nell istesso modo si mostrerà, che gli angoli BCA, CAB sono minori di due retti. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. ante.*
(*) *assio.* 4.
(*) *pro.* 13.

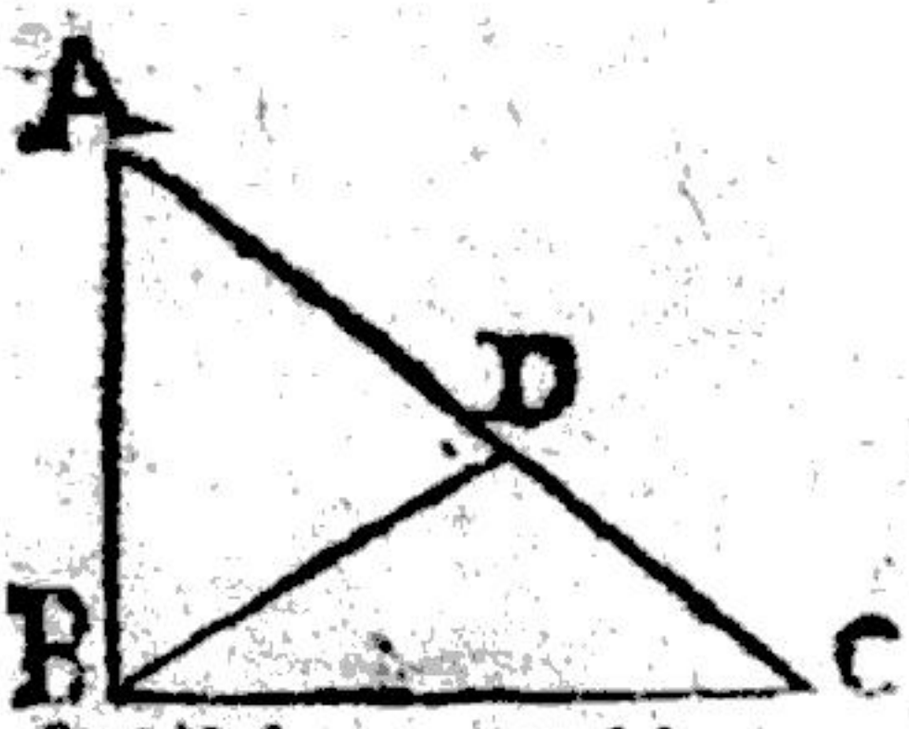
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se li due lati d'un triangolo ſiano diſeguali; gli angoli ſopra la baſe ſaranno parimente diſeguali, e quell'angolo ſarà maggiore, il quale ſta dirimpetto al lato maggiore.

I.



Nel triangolo ABC, ſia il lato AC maggiore del lato AB; io dico che gli angoli ABC, ACB ſopra la baſe BC non ſono eguali; ma che ſia maggiore l'angolo ABC, il quale ſta dirimpetto al lato maggiore AC.

II.

I. Tagliſi (*) dal lato maggiore AC la parte AD eguale al minore AB II. ſi unisca (*) BD

(*) *pro.* 3.
(*) *d.m.* 1.

III.

Siccome il lato CD del triangolo BCD è diſteſo verſo A, così ſarà (*) l'angolo eſteriore BDA maggiore dell' interiore oppoſto DCB: ma eſſendo dalla coſtruzione AD eguale ad AB l'angolo ADB è eguale (*) all'angolo ABD; dunque ſarà l'angolo ABD maggiore (*) parimente dell'angolo DCB; e perciò l'angolo ABC ſarà molto maggiore dell' angolo DCB, ovvero ACB. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

(*) *pro.* 16.
(*) *pro.* 5.
(*) *aſſio.* 1.

COROLLARIO.

Quindi ne' triangoli ſcaleni tutti li tre angoli ſono diſeguali, e quell' angolo il quale ſta dirimpetto al lato maggiore, ſarà il più grande di tutti gli altri.

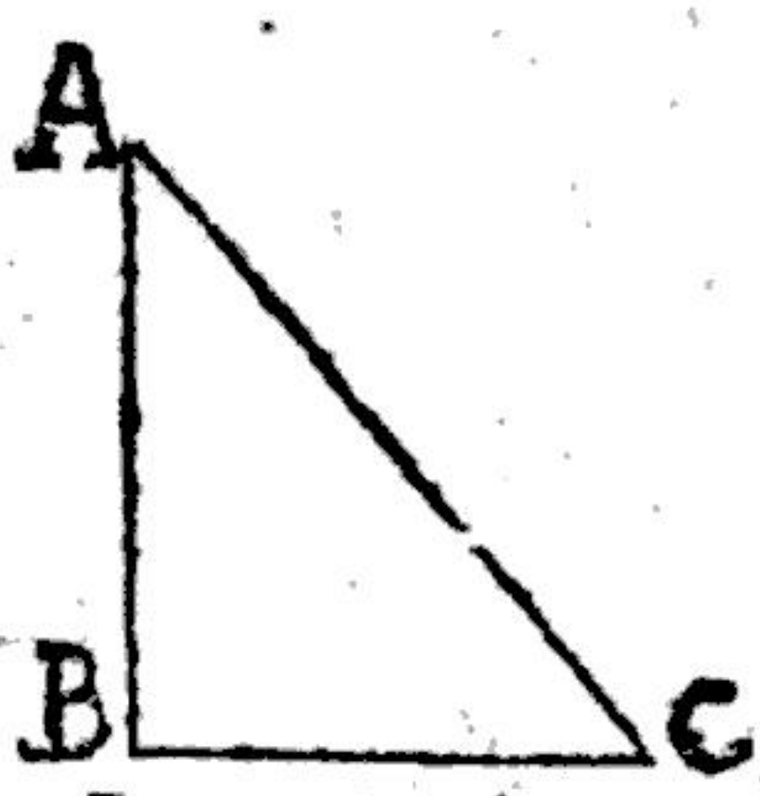
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XIX. TEOREMA.

Se gli angoli sopra la base di qualsivoglia triangolo siano diseguali; i lati sottoposti a questi angoli non saranno già eguali, ma quello lato sarà maggiore, il quale sta dirimpetto all'angolo maggiore.

I.



Nel triangolo ABC, che ha BC per base sia l'angolo ABC maggiore dell'angolo ACB; io dico che il lato AC, il quale sta dirimpetto all'angolo maggiore ABC è maggiore dell'altro lato AB.

II.

Imperciocche non può essere il lato AB eguale al lato AC, poiche sarebbe (*) l'angolo ACB eguale all'angolo ABC contro la suppozizione. Nemmeno può essere il lato AB maggiore del lato AC, poiche (*) saria l'angolo ACB maggiore dell'angolo ABC, parimente contro la suppozizione; di modo che rimane, che il lato AC sia maggiore del lato AB.

*1pro. 5.

*pro. ante.

COROLLARIO.

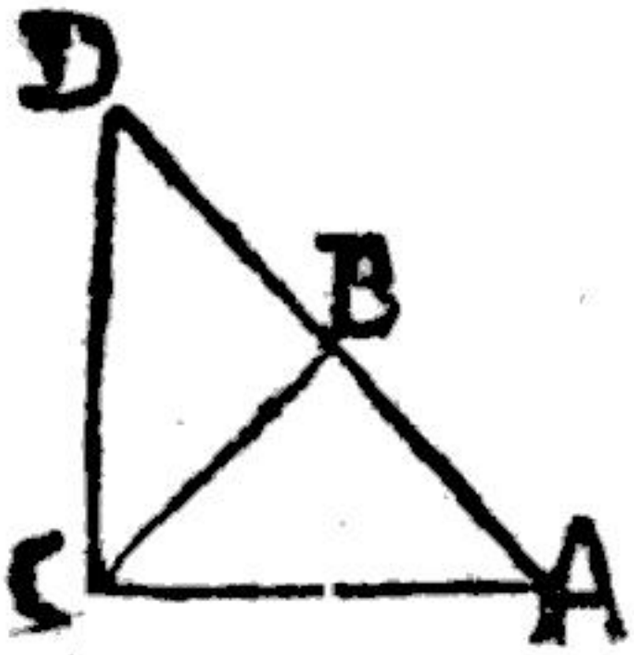
Quindi se un triangolo ha tutti tre gli angoli diseguali, egli sarà scaleno, e quello lato sarà il maggiore, il quale sta dirimpetto all'angolo maggiore. Questa Proposizione è conversa dall'antecedente.

PROP. XX. TEOREMA.

I lati di qualsivoglia triangolo presi a due a due sono sempre maggiori del lato rimanente.

Sia

Digitalizzato da Google



I.

Sia il triangolo CBA. Io dico che i due lati BC, BA ſono maggiori del lato rimanente CA; e che i due lati BC, CA ſono maggiori di BA; e che finalmente i due lati CA, AB ſono maggiori di CB.

II.

I. Diſtendaſi (*) AB verſo D. II. ſi tagli BD eguale (*) a BC. III. ſi unisca DC (*).

* *dim.* 2.
* *pro.* 3.
* *dim.* 1.

III.

Siccome dalla coſtruzione la BD è eguale alla BC; così ſarà (*) l'angolo DCB eguale all' angolo CDB: ma l'angolo DCA è maggiore (*) dell'angolo DCB: dunque l'iſteſſo angolo DCA ſarà ancora (*) maggiore dell' angolo CDB, ovvero CDA. Quindi eſſendo gli angoli ſopra la baſe CD del triangolo ADC diſeguali, ſaranno(*)i lati ad eſſi ſottopoſti ancora diſeguali,e propriamente ſarà AD maggiore di AC. Ma AD è eguale a due lati AB, BC; perche dalla coſtruzione BD è eguale a BC: dunque i due lati AB, BC ſaranno parimente maggiori (*) del lato rimanente CA: ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.* 5.
* *aſſio.* 9.
* *aſſio.* 1.
* *pro.* 19.
* *aſſio.* 1.

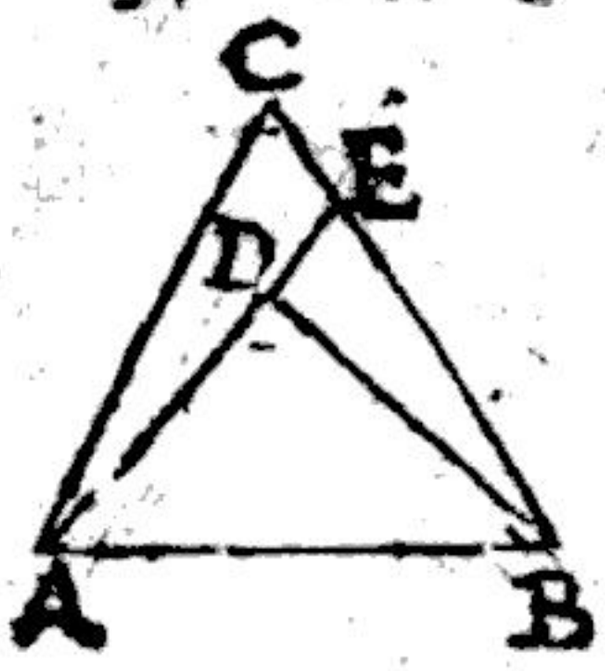
PROP. XXI. TEOREMA.

Se da' termini della baſe di un triangolo ſi tirino due linee rette, le quali ſi vadano ad unire dentro il ſuddetto triangolo. I. ſaranno le due linee inſieme minori de' due lati del triangolo uniti inſieme. II. Ma l'angolo contenuto ſotto le medeſime linee ſarà maggiore dell'angolo contenuto ſotto li due lati del triangolo.

I.

Da' termini A, e B della baſe AB del triangolo ACB eſcano due linee AD, BD, le quali ſi vadano ad unire nel punto D, che ſia dentro al triangolo ACB. Io dico che le due linee AD,

Digitalizzato da Google



DB insieme sono minori de' due lati AC, CB del triangolo ACB; ma che l'angolo ADB sia maggiore dell'angolo ACB.

II.

Si distenda AD (*) fino al punto E.

* *dim.* 2.

III.

I. Nel triangolo ACE i due lati AC, CE sono maggiori (*) del rimanente AE: il perche aggiugnendo comunemente il lato EB; saranno i due lati AC, CB maggiori (*) de' due AE, EB. Inoltre i due lati DE, EB del triangolo DEB sono maggiori (*) del rimanente DB: dunque aggiugnendo comunemente il lato AD; saranno i due lati AE, EB (*) maggiori de' due AD, BD. Laonde essendosi dimostrati i due AC, CB maggiori de' due AE, EB; ne siegue che li detti lati AC, CB sono molto maggiori di AD, BD.

* *pro.* 20.
* *assio.* 4.
* *pro.* 20.
* *assio.* 4.

II. Nel triangolo ACE il lato CE è disteso verso B; quindi l'angolo esteriore (*) AEB è maggiore dell' interiore opposto ACE. Inoltre nel triangolo BED il lato ED è disteso verso A; quindi l'angolo esteriore (*) BDA è maggiore dell'angolo BED: ma si è già dimostrato l'angolo BED maggiore dell'angolo ECA, ovvero BCA; dunque l'angolo BDA sarà molto maggiore dell'angolo BCA; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro.* 16.
* *pro.* 16.

PROP. XXII. PROBLEMA.

Di tre linee rette date, formarne un triangolo.

I.

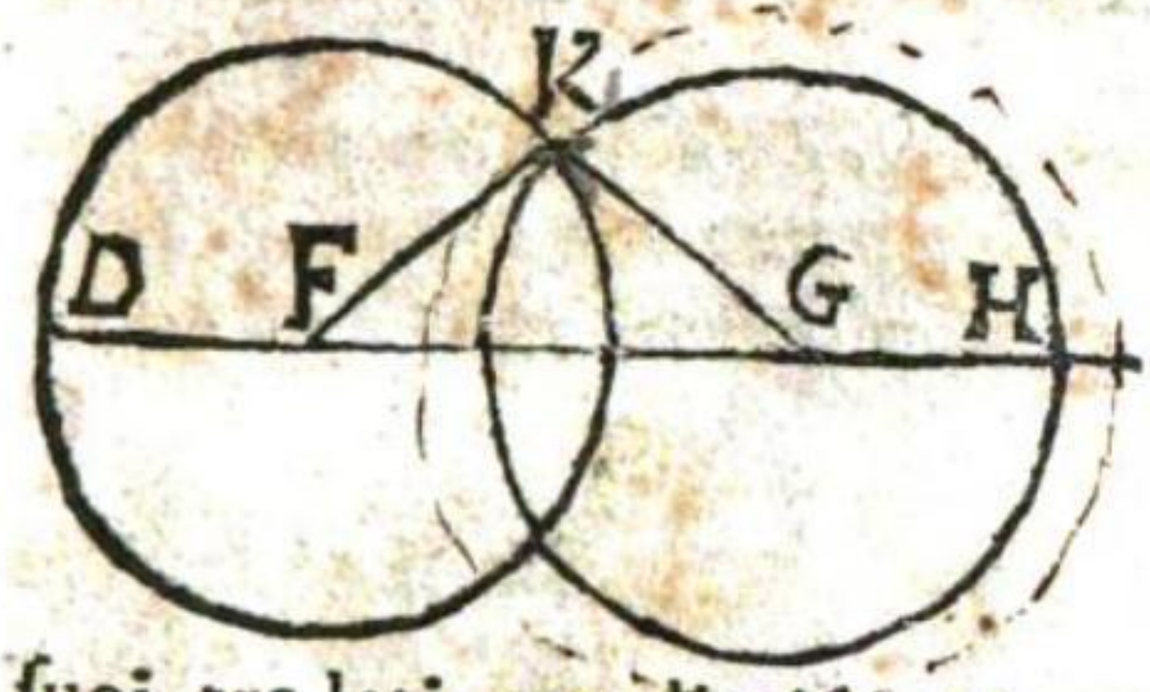
Siano date tre linee rette A, B, e C; fa duopo formarne un triangolo.

II.

I. Tirisi la linea diritta indefinita DH. II. Si taglino (*) le parti DF, FG, GH, eguali rispettivamente alle date A, B, e C. III. Da' cen-

* *pro.* 3.

tri



tri F, e G co' raggi FD, GH si descrivano(*) li due circoli KD, KH. IV. si congiungano(*) le due linee KF, KG. Io dico che il triangolo KFG abbia li suoi tre lati eguali rispettivamente alle linee diritte date A, B, e C.

(*) dim. 3.

(*) dim. 1.

III.

Siccome dalla costruzione F è il centro del circolo DK così sarà (*) DF eguale ad FK: ma dall'istessa costruzione DF è eguale ad A; dunque (*) sarà FK eguale ad A. Similmente siccome dalla costruzione G è il centro del circolo HK, così sarà GH (*) eguale a GK; ma dall' istessa costruzione GH è eguale a C; dunque sarà (*) GK eguale a C; ma dalla costruzione la FG è eguale a B: dunque li tre lati KF, FG, GK del triangolo KFG sono eguali rispettivamente alle tre linee A, B, C: ciocche doveva farsi.

(*) def. 15.

(*) assio. 1.

(*) def. 15.

(*) assio. 1.

ANNOTAZIONE.

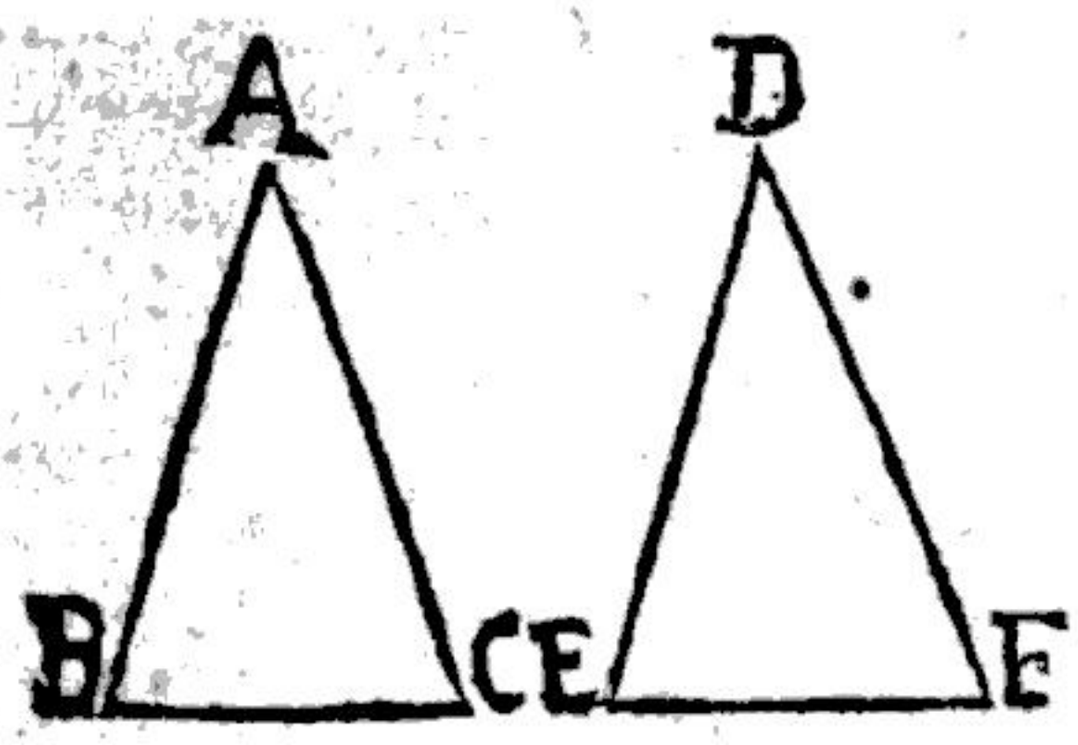
Siccome in ogni triangolo i lati presi a due a due sono maggiori del rimanente, così acciò da tre linee rette date se ne possa comporre un triangolo, è duopo che esse siano tali, che accoppiate a due a due siano maggiori della terza, altrimente il Problema riuscirebbe impossibile. Se le tre linee date sono eguali, il triangolo riuscirebbe equilatero, e la costruzione non saria diversa dalla costruzione della proposizione I.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIII. PROBLEMA.

Data una linea retta, ed in essa un punto; fa duopo adattare a questo punto una linea, la quale comprenda colla data un' angolo eguale ad un angolo dato.

I.



Sia data la linea retta AB, ed in essa sia dato il punto A: fa duopo adattare al punto A una linea, la quale comprenda colla data AB un' angolo eguale all' angolo dato EDF.

II.

I. Si prendano nelle due linee DE, DF due punti ad arbitrio E, & F. II. si unisca EF (*). III. dalle tre linee DE, EF, FD, due delle quali sono maggiori (*) della rimanente, se ne formi (*) il triangolo ABC in modo che AB sia eguale a DE, AC sia eguale a DF, e BC sia eguale ad EF. Io dico che l'angolo BAC sia eguale all'angolo EDF.

(*) *dim.* 1.

(*) *pro.* 20.

(*) *pro. ante.*

III.

Imperciocche dalla costruzione i due lati BA, AC del triangolo BAC sono eguali a' due lati ED, DF del triangolo EDF ciascuno a ciascuno, e la base BC è eguale alla base EF: il perche sarà (*) l'angolo BAC eguale all'angolo EDF. Ciocche doveva farsi.

(*) *pro.* 8.

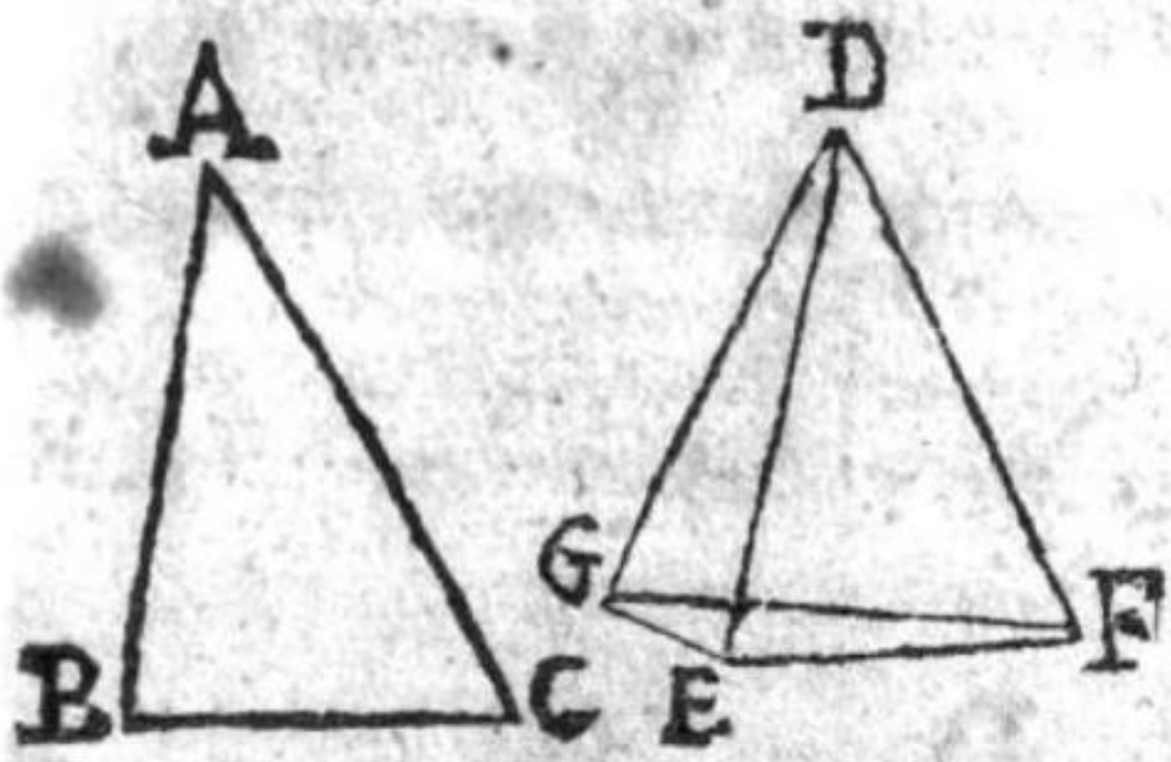
PROP. XXIV. TEOREMA.

Se due triangoli anno I. *i due lati eguali a' due lati ciascuno a ciascuno.* II. *l'angolo contenuto sotto*

Digitalizzato da Google

to i lati d'uno di essi maggiore dell'angolo contenuto sotto i lati dell'altro: avranno la base maggiore della base.

I.



Abbiano i due triangoli ABC, DEF i due lati AB, AC eguali a' due lati DE, DF ciascuno a ciascuno; vale a dire AB eguale a DE, ed AC eguale a DF; ma sia l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF: Io dico che la base BC sia maggiore della base EF.

II.

I. Si faccia l'angolo FDG (*) eguale all'angolo CAB. II. taglisi DG (*) eguale ad AB, ovvero a DE. III. si congiungano (*) GE, GF.

(*) pro. 23.
(*) pro. 3.
(*) d m. 1.

III.

Siccome dalla costruzione DG è eguale a DE, così sarà(*)l'āgolo DGE eguale all'angolo DEG: onde siccome l'angolo FEG è maggiore dell'angolo (*) DEG; così sarà l'istesso angolo FEG (*) maggiore dell'angolo DGE; e per conseguente sarà molto maggiore dell'angolo FGE. Quindi nel triangolo FGE essendo gli angoli FEG, FGE sopra la base GE diseguali, saranno i lati sottoposti a' detti angoli (*) diseguali, e propriamente sarà FG maggiore di FE. Ora siccome dalla costruzione DG è eguale ad AB, e dalla suppositione DF è eguale ad AC; così saranno i due lati DG, DF del triangolo GDF eguali a'due lati AB, AC del triangolo BAC ciascuno a ciascuno; sicche essendo l'angolo GDF dalla costruzione eguale all'angolo BAC, sarà (*) la base GF eguale alla base BC. Ma si è di-

(*) pro. 5.
(*) assio. 9.
(*) assio. 1.
(*) pro. 19.
(*) pro. 4.

Digitalizzato da Google

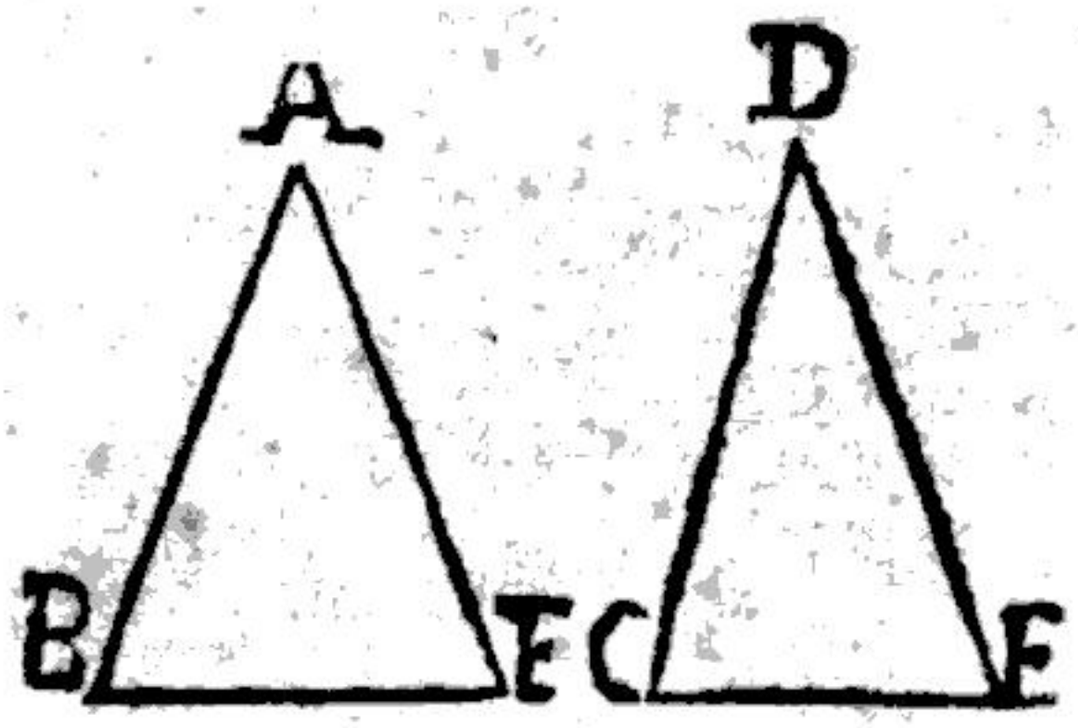
moſtrata GF maggiore di EF; dunque ancora BC ſarà (*) maggiore di EF. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *aſſio.* 1.

PROP. XXV. TEOREMA.

Se due triangoli anno I. *i due lati eguali a' due lati ciaſcuno ciaſcuno.* II. *la baſe maggiore della baſe; ſarà l'angolo contenuto ſotto i lati del primo triangolo maggiore dell'angolo contenuto ſotto i lati dell'altro.*

I.



Abbiano i due triangoli BAF, CDE i due lati AB, AF eguali a' due lati DC, DE ciaſcuno a ciaſcuno; ed abbiano inoltre la baſe BF maggiore della baſe CE; io dico che l'angolo BAF ſia maggiore dell'angolo CDE.

II.

Se ſia poſſibile ſia primieramente l'angolo BAF eguale all'angolo CDE. Quindi i due triangoli BAF, CDE avendo i due lati eguali a due lati ciaſcuno a ciaſcuno, e l'angolo contenuto ſotto i lati del primo eguale all' angolo contenuto ſotto i lati dell'altro; avranno (*) la baſe eguale alla baſe contro la ſuppoſizione. Sia in ſecondo luogo l'angolo BAF minore dell' angolo CDE; Quindi i due triangoli avendo i due lati eguali a due lati ciaſcuno a ciaſcuno, e l'angolo contenuto ſotto i lati del primo minore dell'angolo contenuto ſotto i lati dell'altro ſarà la baſe BF minore (*) della baſe CE; il che parimente è contro la ſuppoſizione. Non potendo dunque eſſere la ba-

* *pro.* 4.

* *pro. ante.*

Digitalizzato da Google

baſe BF nè eguale, nè minore della baſe CE, rimane che ſia maggiore: ciocche doveva dimoſtrarſi.

ANNOTAZIONE.

Queſta propoſizione conviene colla paſſata in queſto, che ſi ſuppone in entrambe eſſere i due lati eguali a due lati ciaſcuno a ciaſcuno; diſcordano però in queſto, che nella paſſata dall'eſſere l'angolo contenuto ſotto i due lati maggiore dell'angolo contenuto ſotto gli altri due lati ſi è dedotto, che la baſe ſia maggiore della baſe, e quì viceverſa dall'eſſere la baſe maggiore della baſe, ſi è dedotto, che l'angolo ſuddetto ſia maggiore dell'angolo.

PROP. XXVI. TEOREMA.

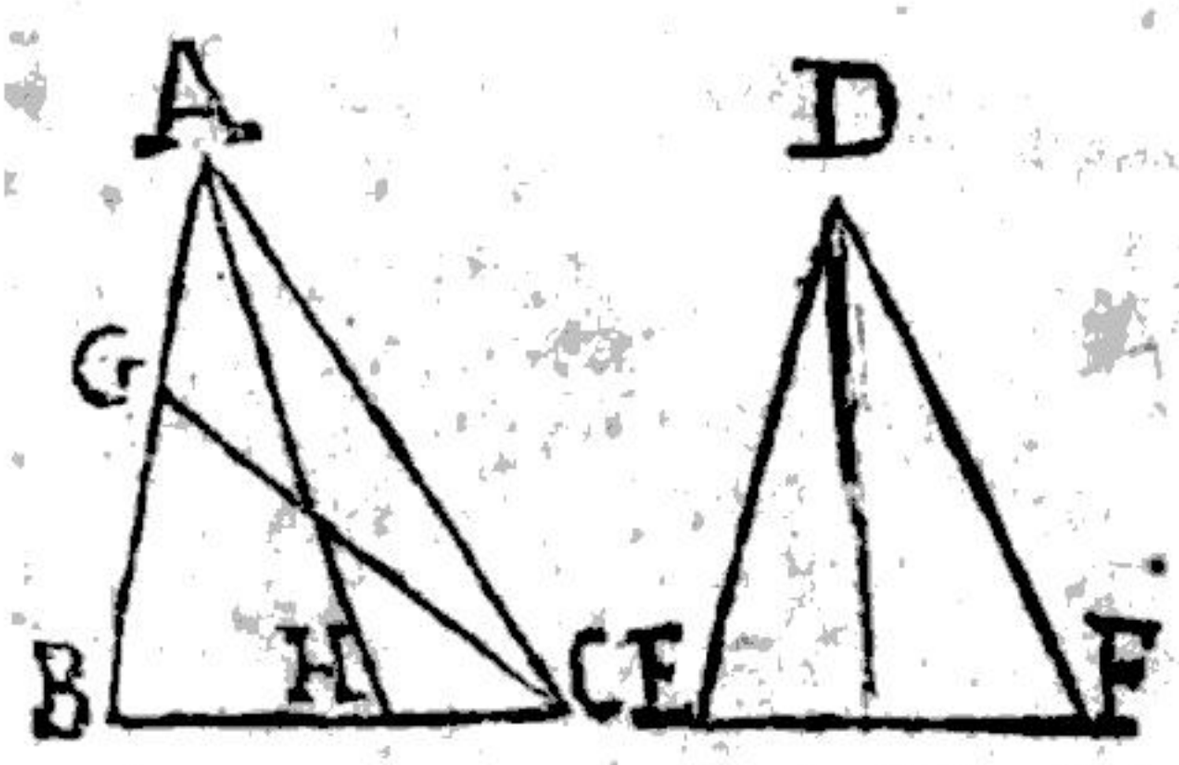
Se due triangoli anno I. due angoli eguali a due angoli ciaſcuno a ciaſcuno. II. ed un lato egaale ad un lato: o che queſti lati eguali ſiano accanto agli angoli eguali, o che ſiano dirimpetto a due di eſſi: avranno le altre coſe eguali alle altre coſe.

I.

Abbiano i due triangoli ABC, DEF li due angoli ABC, ACB eguali a' due angoli DEF, DFE ciaſcuuo a ciaſcuno, vale a dire l' angolo ABC eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB eguale all' angolo DFE; ed abbiamo inoltre o il lato BC adjacente a due angoli ABC, ACB eguale al lato EF ancora adjacente agli altri due angoli DEF, DFE; ovvero il lato AB, che ſta dirimpetto ad uno di eſſi ACB eguale al lato DE, che ſta dirimpetto all'angolo corriſpondente DFE; io dico che il rimanente angolo BAC ſia eguale all'angolo rimanente EDF; che gli altri due lati ſiano eguali agli altri due lati ciaſcuno a ciaſcuno; e

Digitalizzato da Google

che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEF.



II.

I. Mettendo in primo luogo, che il lato BC adjacente a' due angoli eguali sia eguale al lato EF adjacente agli altri due angoli, se il lato BA non è eguale al lato ED, si faccia(*)BG eguale ad ED, e si unisca GC(*). Quindi siccome dalla costruzione BG è eguale ad ED, e dalla suppozizione BC è eguale ad EF, cosi saranno i due lati BG, BC del triangolo GBC eguali a' due lati ED, EF del triangolo DEF ciascuno a ciascuno; il perche essendo dalla suppozizione l'angolo GBC eguale all'angolo DEF; sarà (*) l'angolo GCB eguale all'angolo DFE: ma per la suppozizione ancora l'angolo ACB è eguale all' angolo DFE; dunque sarà l'angolo GCB minore eguale all'angolo ACB maggiore; ciocche non potendo sossistere ne siegue, che BA deve essere eguale ad ED. Il perche i due triangoli BAC, EDF avendo i due lati BA, BC eguali a' dne lati ED, EF ciascuno a ciascuno, e l'angolo ABC eguale all'angolo DEF avranno (*) tutte le altre cose eguali fra di loro.

(*) *pro.* 3. (*) *dim.* 1. (*) *pro.* 4. (*) *pro.* 4.

II. Mettendo poi, che il lato AB, che sta dirimpetto all'angolo ACB sia eguale al lato DE, che sta dirimpetto all'angolo corrispondente DFE, se il lato BC non è eguale al lato EF, si faccia (*) BH eguale ad EF, e si unisca (*) AH. Quindi essendo dalla suppozizione AB eguale a DE, e dalla costruzione BH eguale ad EF saranno i due lati AB, BH del triangolo ABH eguali a' due

(*) *pro.* 3. (*) *dim.* 1.

Digitalizzato da Google

a' due lati DE, EF del triangolo DEF ciaſcuno a ciaſcuno; il perche eſſendo dalla ſuppoſizione, ancora l'angolo ABH eguale all'angolo DEF; ſarà (*) l'angolo AHB eguale all' angolo AFE; ma dalla ſuppoſizione l'angolo ACB è ſimilmente eguale all'angolo DFE; dunque ſarà (*) l'angolo AHB eſteriore eguale all'interiore oppoſto ACB; ciocche non potendo ſoſſiſtere(*), ne ſiegue, che BC ſia eguale ad EF. Quindi i due triangoli ABC, DEF avendo i due lati AB, BC eguali a' due lati DE, EF, e l'angolo ABC eguale all' angolo DEF avranno (*) tutte le altre coſe eguali a tutte le altre coſe. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.* 4.

* *aſſ:o.* 1.

* *pro.* 16.

* *pro.* 4.

ANNOTAZIONE.

Queſta propoſizione ha due parti, le quali io ſoſcrivo quì ſeparatamente per togliere ogni confuſione. I. Se due triangoli anno due angoli eguali a due angoli ciaſcuno a ciaſcuno, ed il lato adjacente a' due primi angoli eguale al lato adjacente a' due ſecondi; avranno tutte le altre coſe eguali alle altre coſe; *di modo che paragonata queſta propoſizione colla IV. ſi ſcorge, che l'una è perfettamente converſa dell' altra.* II. Se due triangoli anno due angoli eguali a due angoli ciaſcuno a ciaſcuno, ed il lato, che ſta dirimpetto all' uno de' due angoli eguale al lato, che ſta dirimpetto all' angolo corriſpondente; avranno tutte le altre coſe eguali.

PREPARAZIONE ALLE PROPOSIZIONI SEGUENTI.

SE due linee (*) AB, CD ſono ſegate dalla terza EFG ſi vedranno naſcere otto angoli, quattro de' quali ſono interiori, e quattro altri ſono eſterio-

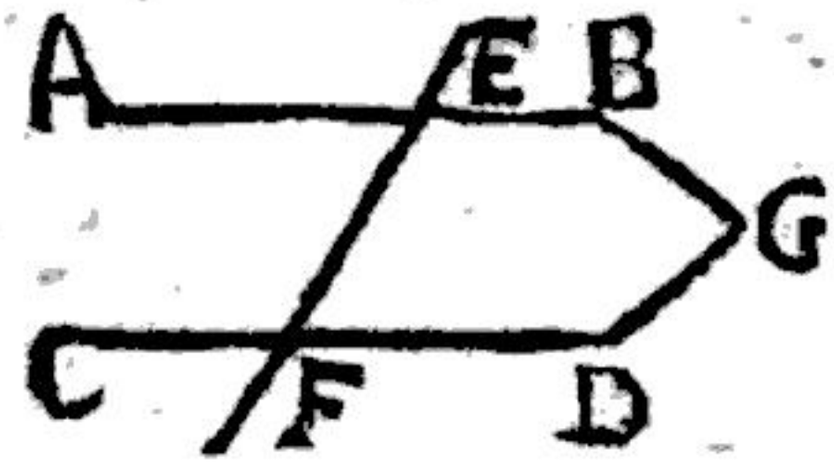
* *veggaſi la figura della pro.* 28.

Digitalizzato da Google

riori. Ora è da ſaperſi I. *che due interiori* AFG, FGD, *ovvero* BFG, FGC *poſti uno di quà, e l'altro di là della linea ſegante ſi chiamano* alterni. II. *che li due interiori* AFG, FGC, *ovvero* BFG, FGD *ſi chiamano* interiori dalla medeſima parte. III. *che li due angoli* EFA, FGC, *ovvero* EFB, FGD *ſi chiamano* eſteriore, ed interiore dalla medeſima parte.

PROP. XXVII. TEOREMA.

Se due linee giacenti in una ſuperficie piana ſiano ſegate da una terza linea, e ſiano gli angoli alterni eguali fra di loro; le ſuddette linee ſaranno parallele.



I.

Le due linee rette AB, CD ſiano ſegate dalla terza linea EF, e ſiano gli angoli alterni AEF, EFD eguali fra di loro; io dico che le due ſuddette linee AB, CD ſiano parallele.

II.

Se ſia poſſibile; non ſiano le linee AB, CD parallele, ma ſi vadano ad unire nel punto G, e coſtituiſcano il triangolo EBGDF, il qual triangolo, come ſi vede, è forzato. Perche il lato GBE di queſto triangolo è diſteſo verſo A, ſarà (*) l'angolo eſteriore AEF maggiore dell'interiore oppoſto EFD: il che non potendo ſoſſiſtere, eſſendo contrario alla ſuppoſizione, la quale vuole, che l'angolo AEF ſia eguale all' angolo EFD, ne ſiegue, che il Teorema in queſtione ſia vero.

(*) *pro.* 16.

PROP. XXVIII. TEOREMA.

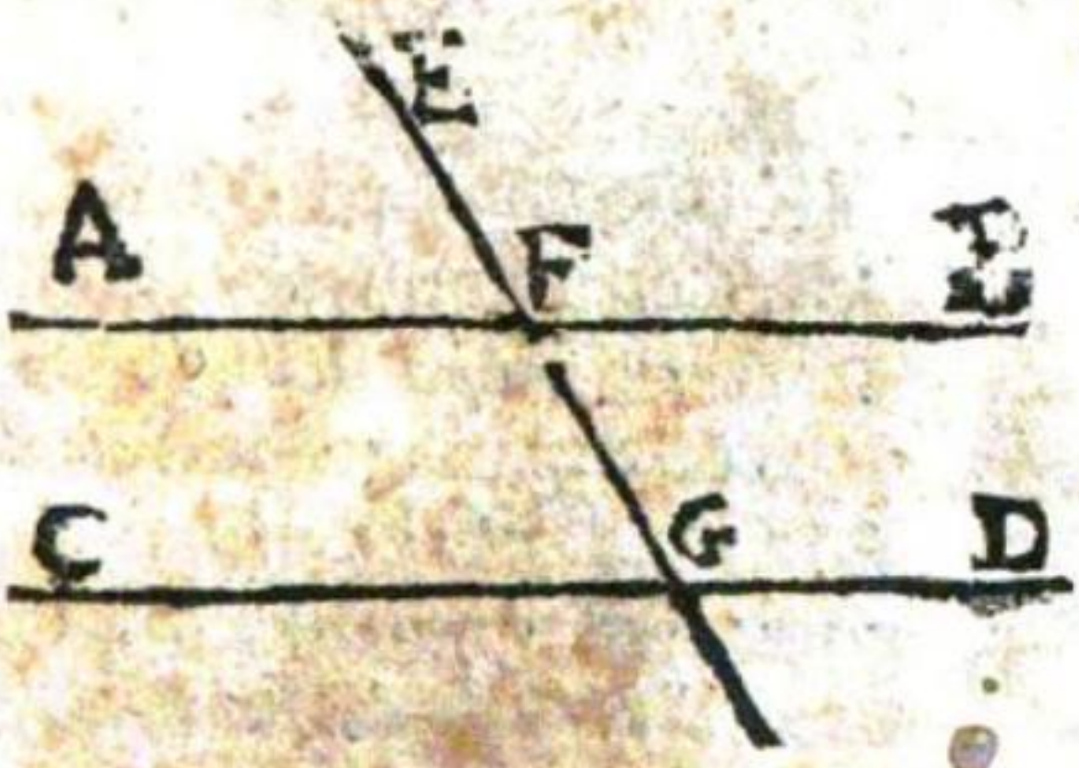
Se due linee rette giacenti ſopra una ſuperficie piana ſono ſegate da una terza linea, e ſia I. *l'an-*

go-

Digitalizzato da Google

golo esteriore èguale all' angolo interiore, ed opposto dalla medesima parte, le suddette linee saranno parallele. II. se gl' interiori dalla medesima parte sono eguali a due retti le medesime linee saranno ancora parallele.

I.



Le due linee rette AB, CD siano segate dalla terza FFG; io dico che esse sono parallele, o che l' angolo esteriore EFB sia eguale all' interiore, ed opposto FGD dalla medesima parte; o che li due interiori dalla medesima parte BFG, FGD siano eguali a due retti.

II.

I. Perche dalla suppositione l'angolo EFB è eguale all'angolo FGD, ed il medesimo angolo EFB è eguale all' angolo AFG (*); saranno li due angoli AFG, FGD egnali fra di loro (*). ma sono alterni: dunque le linee AB, CD saranno (*) parallele.

(*) *pro. 15.*
(*) *assio. 1.*
(*) *pro. ante.*

II. Inoltre, perche dalla suppositione li due angoli BFG, FGD sono eguali a due retti; e sono ancora eguali a due retti gli angoli BFG, AFG (*); saranno li due angoli BFG, FGD eguali a' due angoli BFG, AFG. Il perche togliendone via il medesimo angolo BFG, rimarrà (*) l'angolo FGD eguale all'angolo AFG; ficche essendo essi alterni, le linee AB, CD saranno (*) parallele. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 13.*
(*) *assio. 3.*
(*) *pro. ante.*

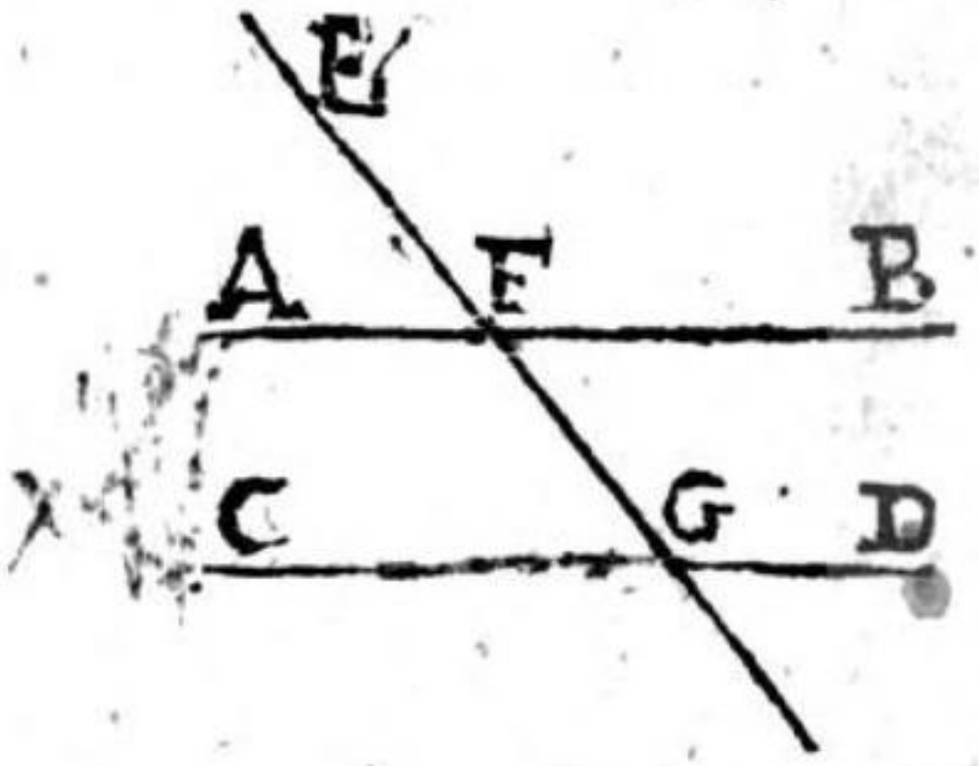
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIX. TEOREMA.

Se due linee parallele ſono ſegate da una terza linea; ſaranno I. *gli angoli alterni eguali fra di loro.* II. *ſarà l'angolo eſteriore eguale all'anteriore, ed oppoſto dalla medeſima parte.* III. *ſaranno li due interiori dalla medeſima parte eguali a due retti.*

I.



Le due linee parallele AB, CD ſiano ſegate dalla terza linea EFG. Io dico che gli angoli alterni AFG, FGD ſono eguali fra di loro: di più che l'angolo eſteriore EFB è eguale all'interiore, ed oppoſto dalla medeſima parte FGD; e finalmente che li due interiori BFG, FGD dalla medeſima parte ſono eguali a due retti.

II.

I. Se fia poſſibile, non ſiano gli angoli alterni AFG, FGD eguali fra di loro, ma ſia il primo maggiore del ſecondo. Aggiugnendo dunque ad eſſi il medeſimo angolo BFG, ſaranno (*) li due angoli AFG, BFG maggiori degli angoli DGF, BFG; ma gli angoli AFG, BFG ſono (*) eguali a due retti: dunque gli angoli DGF, BFG ſono minori di due retti; laonde le due linee AB CD portate innanzi ſi uniranno (*) ad unire, contro la ſuppoſizione.

* *aſſi.* 4.

* *pro.* 13.

* *aſſio.* 13.

II. Eſſendo dunque l'angolo AFG eguale all'angolo FGD, e di più eſſendo l'angolo EFB eguale (*) all'angolo AFG, ſarà l'angolo eſteriore EFB eguale all'interiore, ed oppoſto dalla medeſima parte FGD.

* *pro.* 15.

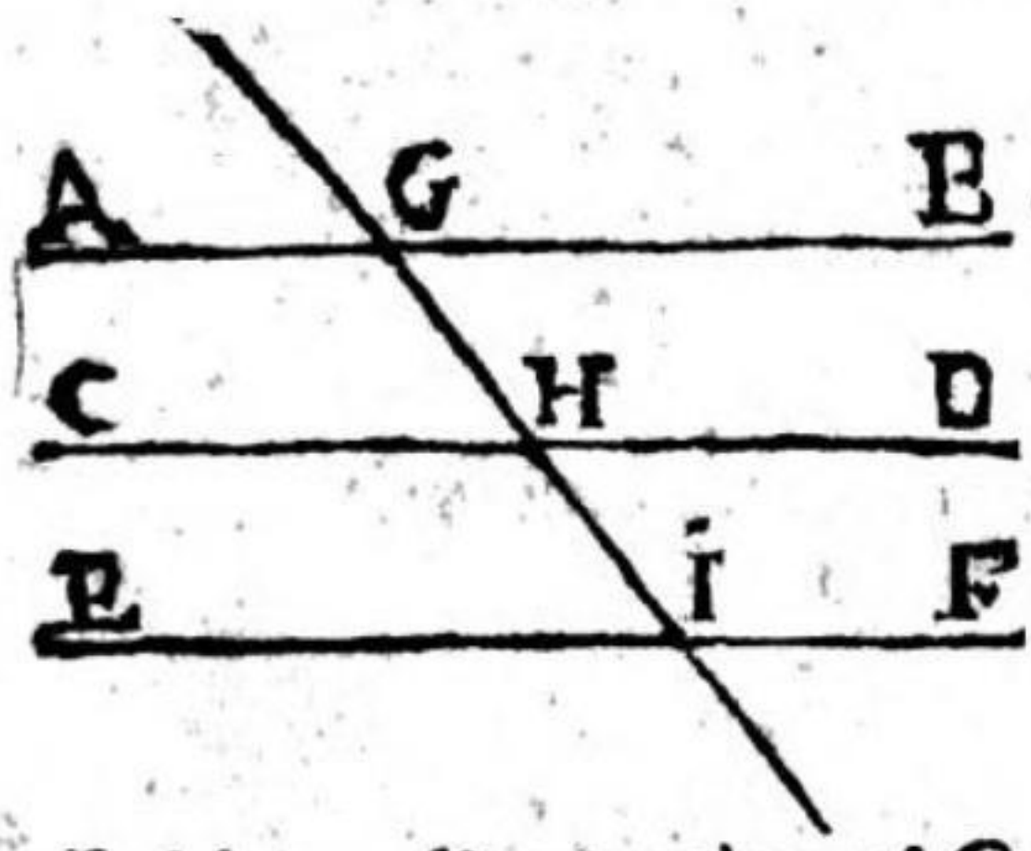
III. Finalmente eſſendo l'angolo EFB eguale

Digitalizzato da Google

le all' angolo FGD ; aggiunto ad entrambi il medesimo angolo BFG saranno li due angoli EFB, BFG eguali a' due angoli FGD, BFG; ma li due primi angoli EFB, BFG sono eguali a due retti (*) ; dunque saranno eguali a due retti ancora gli angoli FGD, BFG : ciocche doveva dimostrarsi. * pro. 13.

PROP. XXX. TEOREMA.

Se due linee sono parallele ad una terza, saranno parallele fra di loro.



I.

Siano le due linee AB, CD parallele alla terza EF, io dico, che esse saranno parallele fra di loro.

II.

Si tiri la linea GHI, la quale seghi tutti tre le suddette linee ne' punti G, H, & I.

III.

Perche dalla suppositione la AB è parallela alla EF, saranno (*) gli angoli alterni AGH HIF eguali fra di loro. Inoltre perche la retta CD è parallela ad EF sarà (*) l'angolo esteriore, GHD eguale all' interiore, ed opposto dalla medesima parte HIF. Quindi essendo cosi l'angolo AGH, come l'angolo GHD eguale al medesimo angolo HIF, saranno i suddetti angoli (*) AGH, GHD eguali fra di loro. Ma sono alterni: dunque le linee AB, CD sono (*) parallele. Ciocche si doveva dimostrare. * pro. 29. * pro. 29. * assio. 1. * pro. 27.

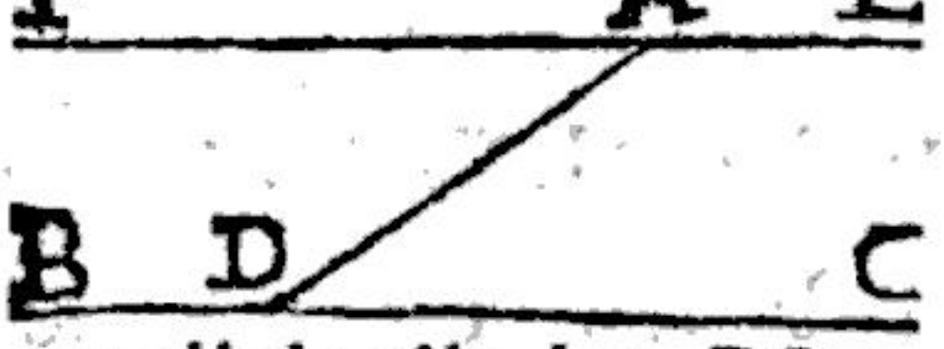
Vina l'Autore di questo libro ec.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXI. PROBLEMA.

Per un punto dato tirare una linea retta parallela ad un'altra linea retta data.



I.

Sia dato il punto A, e sia data parimente la linea BC, fa duopo per lo punto dato A tirare una linea retta parallela alla data BC.

II.

I. Si prenda nella BC il punto D ad arbitrio. II. si unisca la AD (*). III. si costituisca l'angolo DAF eguale (*) all' angolo ADC. IV. si distenda FA (*) verso E. Io dico che la retta FE sia parallela alla BC.

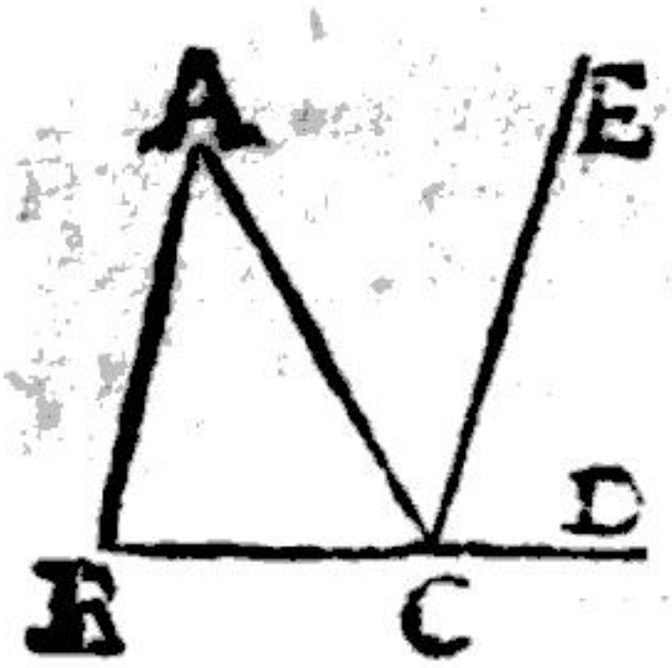
* *dim.* 1.
* *pro.* 23.
* *dim.* 2.

III.

Imperciocche siccome dalla costruzione li due angoli alterni FAD, ADC sono eguali fra di loro, così le linee FE, BC saranno (*) parallele.

* *pro.* 27.

PROP. XXXII. TEOREMA.



Se uno de' lati d'un triangolo sia disteso oltre; sarà I. *l'angolo esteriore eguale a' due angoli interiori opposti.* II. *Tutti li tre angoli del triangolo saranno eguali a due retti.*

I.

Il lato BC del triangolo ABC sia disteso verso D; io dico che l'angolo esteriore ACD sia eguale a' due interiori opposti CBA, BAC; e che i tre angoli ABC, BCA, CAB del triangolo ABC sono eguali a due retti.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Tirifi (*) per lo punto C la retta CE paralle- * *pro. ante.*
la alla retta BA.

III.

I. Perche le due linee parallele CE, BA ſono ſegate dalla terza CA; ſaranno gli angoli alterni (*) ACE, CAB eguali fra di loro. Inoltre * *pro. 29.*
perche le due linee parallele BA, CE, ſono ſegate dalla terza BD ſarà l'angolo eſteriore ECD (*) eguale all'interiore oppoſto dalla medeſima * *pro. 29.*
parte ABC: quindi aggiugnendo coſe eguali a coſe eguali, *riuſcirà* tutto l'angolo eſteriore ACD eguale a'due interiori oppoſti CBA, BAC.

II. Eſſendo l'angolo ACD eguale a'due angoli CBA, BAC ſarà aggiugnendo il medeſimo angolo ACB, la ſomma de' due angoli ACD, ACB eguale a tre angoli CBA, BAC, ACB; ma li due angoli ACD, ACB ſono eguali(*)a due retti; dun- * *pro. 13.*
que li tre angoli CBA, BAC, ACB ſono parimente eguali a due retti; ciocche doveva dimoſtrarſi.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Se due lati oppoſti d'un quadrilatero ſono I. eguali II. ſono paralleli; gli altri due lati ſaranno ancora eguali, e paralleli.

I.

Siano i due lati oppoſti AB, DC del quadrilatero ABDC eguali, e paralleli; io dico che gli altri due AD, BC ſono parimente eguali, e paralleli.

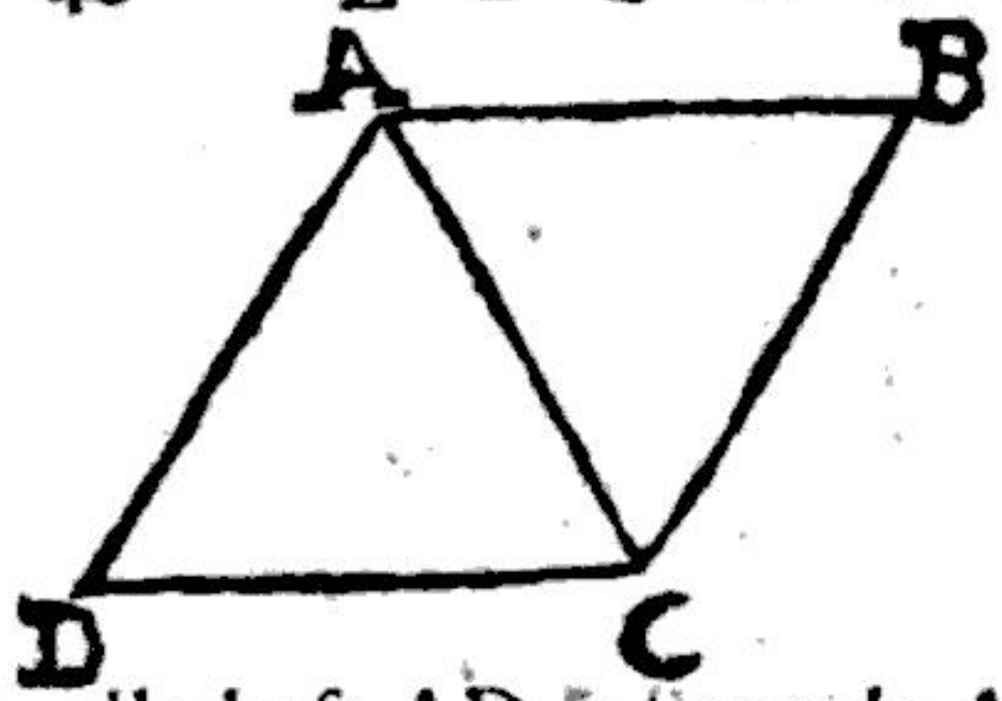
II.

Si unifca (*) la linea AC. * *dim. 1.*

III.

Siccome dalla ſuppoſizione la AB è eguale alla DC, e la AC è eguale alla CA; così ſaranno i due lati BA, AC del triangolo ABC eguali a' due lati DC, CA del triangolo DCA ciaſcuno a cia-

Digitalizzato da Google



ciascuno: Il perche essendo ancora l' angolo BAC eguale all'angolo ACD; perche sono alterni delle parallele AB, DC; sarà (*) la base *BC* eguale alla base AD, e l'angolo ACB sarà eguale all' angolo CAD; ma questi angoli sono alterni delle linee BC, AD; dunque dette linee sono ancora parallele (*). Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro.* 4.

(*) *pro.* 27.

COROLLARIO.

Quindi, acciò una figura quadrilatera sia parallelogramma, basta che due lati opposti siano eguali, e paralleli.

PROP. XXXIV. TEOREMA.

In ogni figura parallelogramma I. *i lati opposti sono eguali fra di loro.* II. *gli angoli opposti sono parimente eguali.* III. *la diagonale divide il parallelogrammo in due triangoli eguali.*

I.

Nel parallelogrammo ABCD, io dico, che i lati opposti AB, e DC, AD, e BC sono eguali fra di loro: di più che gli angoli opposti DAB, e DCB, ADC, ed ABC sono eguali fra di loro. Finalmente che la diagonale AC divide il parallelogrammo ABDC in due triangoli ADC, ABC eguali fra di loro.

II.

Siccome la AB è parallela alla DC, così gli angoli alterni *BAC*, ACD (*) sono eguali fra di loro. Inoltre siccome la *BC* è parallela alla AD, così gli angoli alterni *BCA*, *DAC* sono (*) ancora

(*) *pro.* 29.

(*) *pro.* 29.

ra

Digitalizzato da Google

ra eguali; quindi li due angoli BAC, BCA del triangolo BAC saranno eguali a' due angoli ACD, DAC del triangolo DCA ciascuno a ciascuno: il perche essendo di più il lato AC adjacente a' due primi angoli eguale al lato CA adjacente agli altri due angoli; saranno (*) le altre cose eguali alle altre cose: vale a dire il lato AB eguale al lato DC, il lato BC eguale al lato AD, l'angolo ABC eguale all' angolo ADC, e finalmente il triangolo ABC eguale al triangolo CDA: ora essendosi già dimostrato l'angolo BAC eguale all' angolo ACD; e l'angolo DAC eguale all'angolo ACB, aggiugnendo cose eguali a cose eguali, riuscirà (*) l'angolo DAB eguale all' angolo DCB; ciocche doveva dimostrarsi.

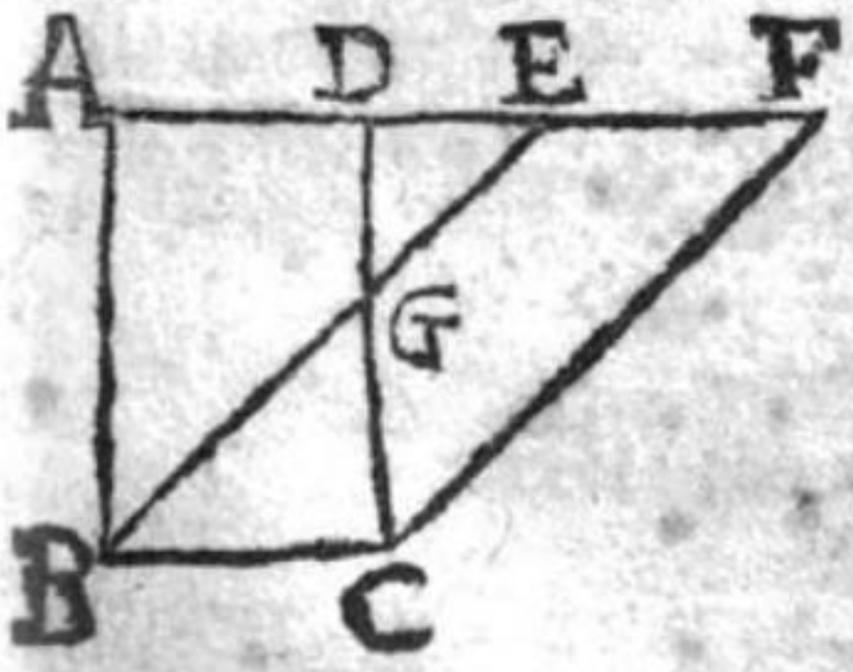
* pro. 26.

* assio. 2.

PROP. XXXV. TEOREMA.

Li parallelogrammi costituiti I. nella medesima base, e II. fralle medesime parallele, sono eguali fra di loro.

I.



Siano li due parallelogrammi ABCD, EBCF costituiti nella medesima base BC, e fralle medesime parallele AF, BC; io dico che cotesti due parallelogrammi sono eguali fra di loro.

II.

Siccome la AD è eguale (*) alla BC, e la BC è eguale (*) alla EF; così saranno le due AD, EF eguali fra di loro. Aggiugnendo dunque ad esse la medesima DE, sarà la AE eguale alla DF; ma la AB è eguale (*) alla DC; dunque li due lati AE, AB del triangolo BAE saranno eguali a' due lati DF, DC del triangolo DFC

* pro. ante.

* pro. ante.

* pro. ante.

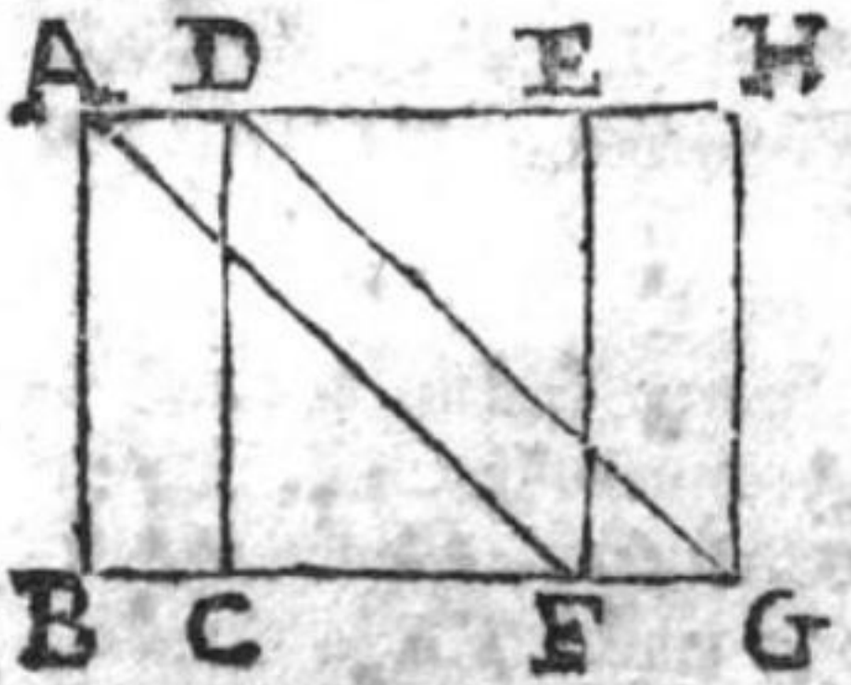
Digitalizzato da Google

ciaſcuno a ciaſcuno; quindi eſſendo per cagione delle linee parallele AB, DC l'angolo interiore BAE (*) eguale all' eſteriore oppoſto dalla medeſima parte CDF; ſarà (*) il triangolo ABE eguale al triangolo DCF. Togliendone dunque il medeſimo triangolo DGE; ſarà (*) l'avanzo ABGD eguale all'avanzo EGCF: finalmente aggiugnendo il medeſimo triangolo BGC(*); riuſcirà tutto il parallelogrammo ABCD eguale al parallelogrammo EBCF. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.* 29.
* *pro.* 4.
* *aſſ.* 3.
* *aſſ.* 2.

PROP. XXXVI. TEOREMA.

Li parallelogrammi coſtituiti I. *ſopra baſi eguali, e* II. *fralle medeſime parallele ſono eguali fra di loro.*



I.

Li due parallelogrammi ABCD, EFGH ſiano coſtituiti ſopra le due baſi eguali BC, FG, e fralle medeſime parallele BG, AH; io dico che eſſi ſono eguali fra di loro.

II.

* *dim.* 11. Si uniſcono (*) le due AF, DG.

III.

* *pro.* 34. Perche dalla ſuppoſizione la BC è eguale alla FG, e per cagione del parallelogrammo ABCD la AD è eguale (*) ancora a BC, ſaranno le due AD, FG eguali fra di loro: quindi nel quadrilatero AFGD eſſendo i due lati oppoſti AD, FG

* *Corol. della pro.* 33. eguali, e paralleli, eſſo ſarà (*) parallelogrammo. Poiche dunque li due parallelogrammi BADC, FADG ſono coſtituiti ſopra la medeſima baſe AD, e fralle medeſime parallele BG, AD ſa-

Digitalizzato da Google

saranno i detti due parallelogrammi (*) eguali fra di loro. Similmente perche li due parallelogrammi AFGD, EFGH sono costituiti sopra la medesima base FG, e fralle medesime parallele FG, AH, essi saranno (*) eguali fra di loro. Quindi li due parallelogrammi ABCD, EFGH saranno (*) ancora eguali; ciocche doveva dimostrarsi.

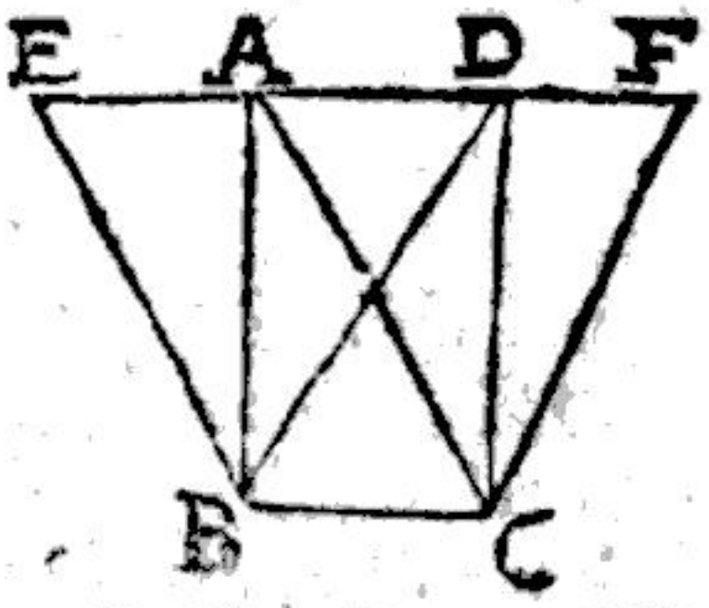
* *pro. ante.*

* *pro. ante.*

* *assio.* 1.

PROP. XXXVII. TEOREMA.

Li triangoli costituiti I. *sopra la medesima base, e* II. *fra le medesime parallele sono eguali fra di loro.*



I.

Li due triangoli ABC, DCB siano costituiti sopra la medesima base BC, e fralle medesime parallele AD, BC; io dico che essi sono eguali fra di loro.

II.

I. Per li punti B, e C si tirino (*) le linee rette BE, CF parallele rispettivamente alle due AC, BD. II. si distenda (*) la AD dall' una parte, e dall'altra, finche s'incontri colle parallele suddette ne' punti E, ed F.

* *pro.* 31.

* *dim.* 2.

III.

Perche li due parallelogrammi EBCA, DBCF sono costituiti sopra la medesima base BC, e fralle medesime parallele BC, EF saranno (*) essi eguali fra di loro: ma li triangoli ABC, DCB sono rispettivamente la metta (*) de' parallelogrammi EBCA, DBCF; dunque saranno parimente eguali (*) i triangoli ABC, DCB; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro.* 35.

* *pro.* 34.

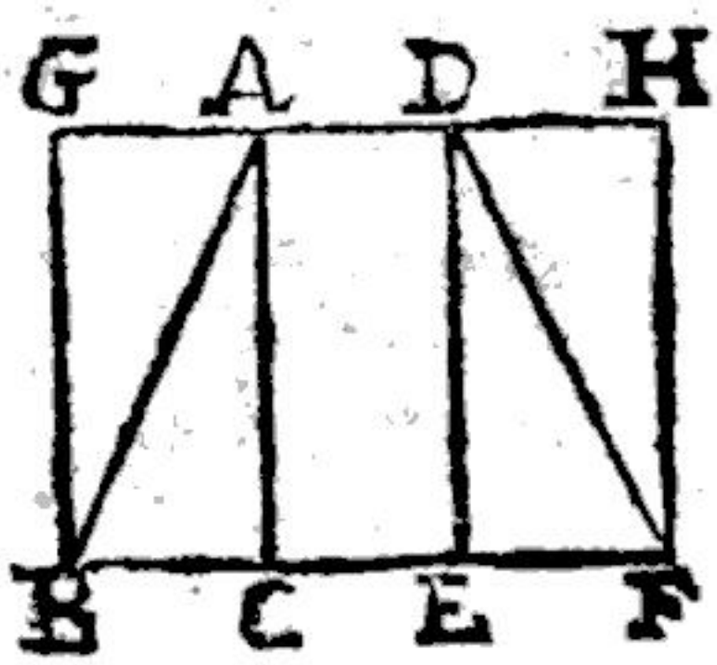
* *assio.* 7.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXVIII. TEOREMA.

Li triangoli costituiti I. *sopra eguali basi, e* II. *fralle medesime parallele, sono eguali fra di loro.*

I.



Li due triangoli ABC, DEF siano costituiti sopra le basi eguali BC, FF, e fralle medesime parallele BF, GH; io dico che essi sono eguali fra di loro.

II.

Si tirino (*) per li punti B, & F le linee rette BG, FH parallele rispettivamente alle due CA, ED.

(*) *pro.* 31.

III.

Perche li due parallelogrammi GBCA, DEFH sono costituiti sopra le basi eguali BC, EF, e fralle medesime parallele BF, GH, essi saranno (*) eguali fra di loro: ma li triangoli ABC, DEF sono la mettà (*) rispettivamente de' parallelogrammi GBCA, DEFH; dunque ancora li triangoli ABC, DEF (*) sono eguali: ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro.* 36.
(*) *pro* 34.
(*) *assio.* 7.

PROP. XXXIX. TEOREMA.

Li triangoli eguali costituiti I. *sopra la medesima base.* e II. *dalla medesima parte, sono fralle medesime parallele.*

I.

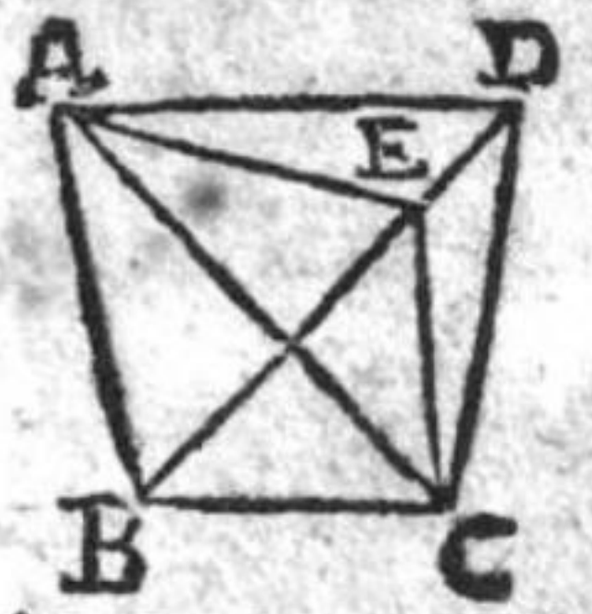
Li triangoli eguali ABC, DCB siano costituiti sopra l'istessa base BC, e dalla medesima parte; io dico che la linea retta AD è parallela alla BC.

II.

Se mai è possibile, non sia la AD parallela alla BC.

Digitalizzato da Google

BC. Per lo punto A dunque tirisi I. (*) la AE parallela alla BC. II. si congiunga (*) la EC. * pro. 31. * dim. 1.



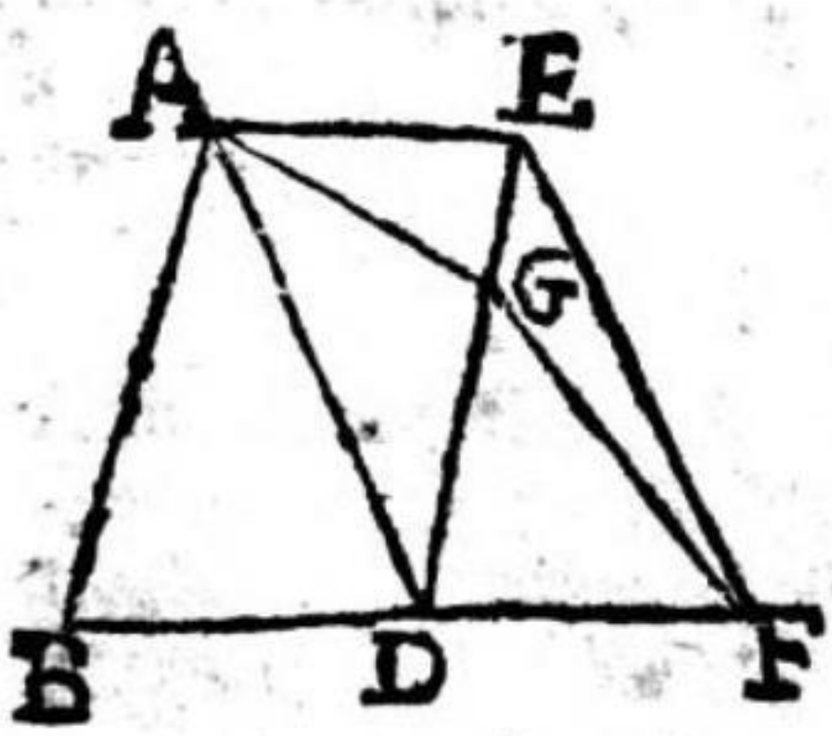
III.

Perche li due triangoli ABC, ECB sono costituiti sopra la medesima base BC, e fralle medesime parallele; essi saranno (*) eguali; ma dalla suppposizione il triangolo DCB è parimente eguale al triangolo ABC; dunque il triangolo minore ECB sarà eguale(*)al maggiore DCB; ciocche non potendo sossistere, ne siegue la verità del Teorema in questione. * pro. 37. * assio. 8.

PROP. XL. TEOREMA.

Li triangoli eguali costituiti I. sopra eguali basi, le quali giacciano a dirittura, e II. dalla medesima parte sono fra le medesime parallele.

I.



Li triangoli ABD, EDF eguali siano costituiti sopra le basi eguali BD, DF poste a dirittura, e dalla medesima parte; io dico che la linea AE sia parallela alla BF.

II.

Se mai è possibile non sia la AE parallela alla BF. Tirisi (*) dunque I. per lo punto A la AG parallela alla BF. II. si congiunga la GF (*). * pro. 31. * dim. 1.

III.

Perche li due triangoli ABD, GDF sono costituiti sopra le basi eguali BD, DF, e fralle medesime parallele AG, BF essi saranno (*) eguali fra di loro. Ma dalla suppposizione il triangolo * pro. 38.

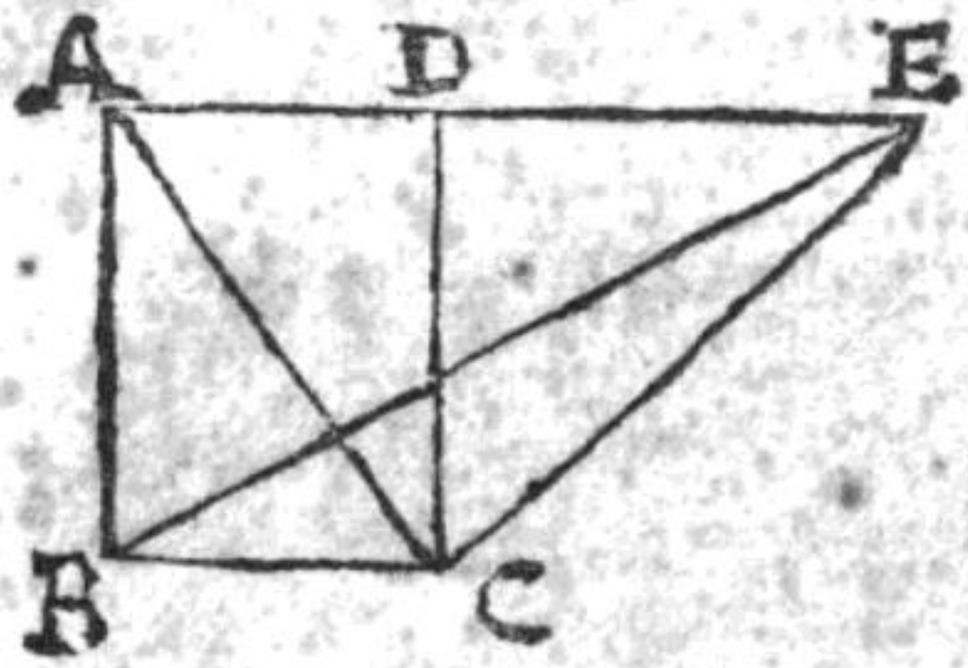
Digitalizzato da Google

EDF è parimente eguale al triangolo ABD; dunque il triangolo minore GDF sarà eguale al maggiore EDF (*); ciocche non potendo sossistere ne segue la verità del Teorema in questione.

(*) assio. 1.

PROP. XLI. TEOREMA.

Se un parallelogrammo, ed un triangolo sono costituiti I. sopra la medesima base, e II. fralle medesime parallele, il parallelogrammo sarà doppio del triangolo.



I.

Il parallelogrammo ABCD, ed il triangolo EBC siano costituiti sopra la medesima base BC, e fralle medesime parallele AE, BC; io dico che il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo EBC.

II.

(*) dim. 1. Si unisca (*) la retta AC.

III.

Perche li due triangoli ABC, EBC sono costituiti sopra la medesima base BC, e fralle medesime parallele AE, BC, essi saranno (*) eguali fra di loro. Ma il parallelogrammo ABCD è (*) doppio del triangolo ABC; dunque il medesimo parallelogrammo ABCD sarà doppio (*) del triangolo EBC. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) pro. 37.
(*) pro. 34.
(*) assio. 1.

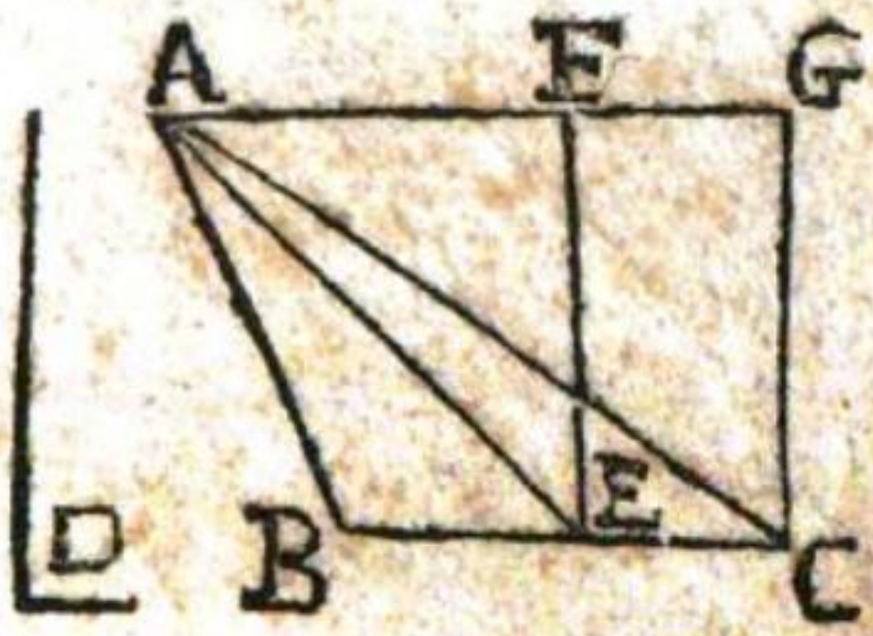
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XLII. PROBLEMA.

Costituire un parallelogrmmmo, il quale I. *sia eguale ad un triangolo dato.* II. *abbia un' angolo eguale ad un' angolo dato.*

I.



Sia dato il triangolo ABC, e sia dato l'angolo D; fa duopo costituire un parallelogrammo, che sia eguale al triangolo ABC, ed abbia un'angolo eguale all'angolo dato D.

II.

I. Tagliſi (*) la BC in parti eguali nel punto E. II. ſi costituiſca (*) al punto E l'angolo CEF eguale all'angolo dato D. III. Per li punti C ed A ſi tirino (*) le linee rette CG, AG parallele riſpettivamente alle linee EF, BC. Io dico che il parallelogrammo FECG ſia eguale al triangolo dato ABC, e tenga un'angolo eguale all'angolo dato D. Congiungaſi (*) AE.

* *pro.* 10.
* *pro.* 23.
* *pro.* 31.
* *dim.* 1.

III.

Poiche dalla costruzione le baſi BE, EC ſono eguali, ſaranno (*) eguali li due triangoli ABE, AEC costituiti ſopra baſi eguali, e fralle medeſime parallele; e per conſeguente il triangolo ABC ſarà doppio del triangolo AEC: Ma il parallelogrammo FECG anche è doppio del triangolo AEC (*): dunque ſarà il parallelogrammo FECG eguale al triangolo ABC (*). Sicche eſſendo dalla costruzione l'angolo CEF eguale all'angolo dato D, ſi è ſoddisfatto ad ambedue le condizioni del Problema: ciocche dovea farſi.

* *pro.* 38.
* *pro. ante.*
* *aſſio.* 6.

Digitalizzato da Google

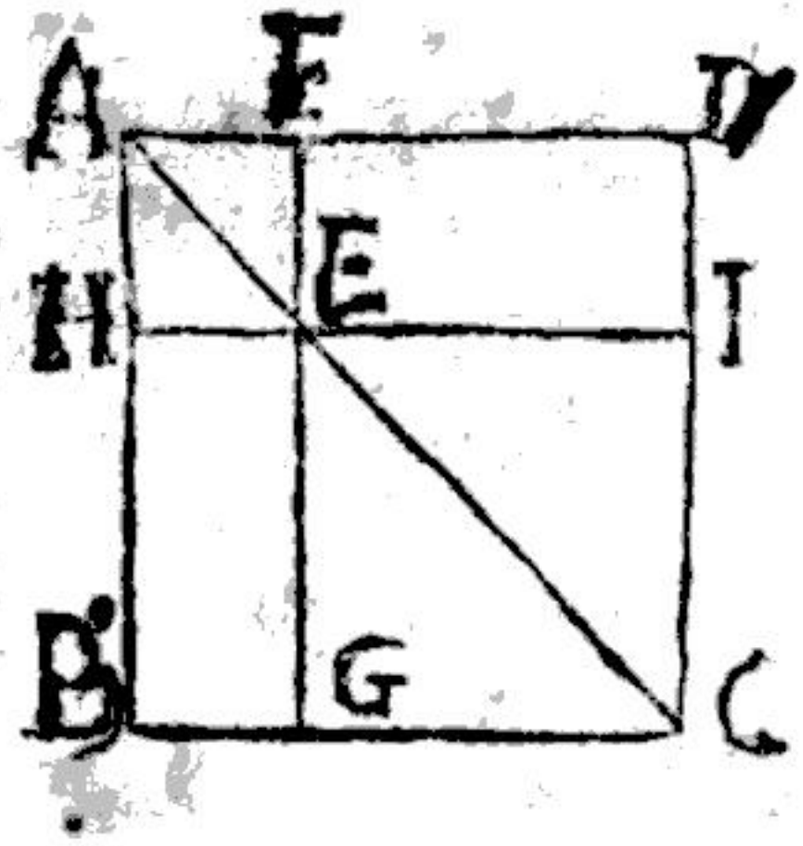
PREPARAZIONE ALLA PROPOSIZIONE SEGUENTE.

(*) veggasi la figura seguente.

SE nella diagonale (*) *AC del parallelogrammo ABCD si prende un punto E ad arbitrio, e si fanno per esso passare le linee* HI, FG *parallele rispettivamente a' lati AD, AB del parallelogrammo ABCD si vedranno nascere quattro parallelogrammi AHEF, EGCI, HBGE, ed* FEID. *Li due primi perche sono situati intorno alla diagonale, o sia diametro AC si chiamano* Parallelogrammi intorno al diametro. *Gli altri due si chiamano* supplementi, ovvero compimenti de' parallelogrammi, i quali sono intorno al diametro.

PROP. XLIII. TEOREMA.

In ogni parallelogrammo compartito in quattro parallelogrammi per mezzo del diametro, e delle due suddette parallele li supplementi de' parallelogrammi, i quali sono intorno al diametro sono eguali fra di loro.



I.

Sia il parallelogrammo ABCD compartito in quattro altri parallelogrammi per mezzo del diametro AC, e delle due linee parallele HI, FG. Io dico che il supplemento HBEG sia eguale al supplemento FEDI.

II.

(*) Prop. 34. Imperciocche il triangolo AHE è eguale (*) al triangolo AFE, siccome ancora il triangolo EGC è eguale al triangolo EIC: quindi la somma de'

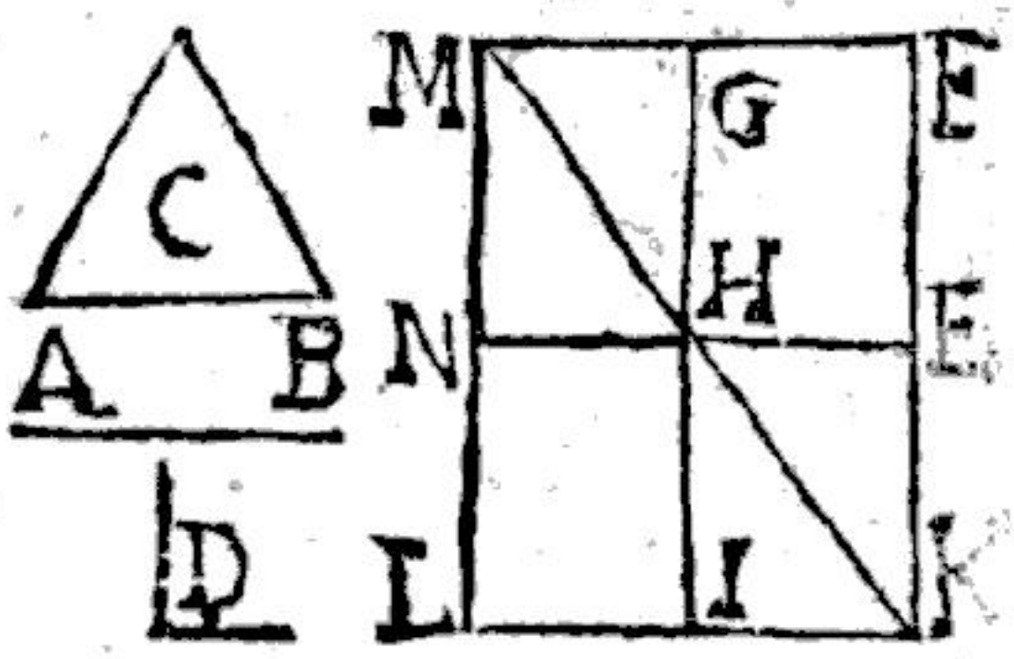
Digitalizzato da Google

de' due triangoli AHE, EGC sarà (*) eguale alla somma de' due triangoli AFE, EIC. Ma tutto il triangolo ABC è eguale (*) al triangolo ADC; dunque il parallelogrammo, che avanza HBGE sarà eguale (*) al parallelogrammo, che avanza FEID. Ciocche doveva dimostrarsi. * assio. 2. * pro. 34. * assi. 3.

PROP. XLIV. PROBLEMA.

Costituire sopra una linea retta data un parallelogrammo, il quale sia I. eguale ad un triangolo dato, e II. abbia un' angolo eguale ad un' angolo dato.

I.



Sia dato il triangolo C, la linea retta AB, e l'angolo D fa duopo costituire sopra una linea retta eguale alla data AB un parallelogrammo eguale al triangolo C, che tenga un' angolo eguale all'angolo dato D.

II.

Si costituisca (*) il parallelogrammo GHEF eguale al triangolo C, che tenga l'angolo GHE eguale all' angolo dato D. II. Si distenda la GH fin'al punto I, in modo che la parte HI sia eguale alla data AB(*). III. Per lo punto I si tiri la linea LIK parallela ad HE(*), la quale vadasi ad unire colla FE, portata innanzi, nel punto K. IV. si unisca la KH, la quale si distenda fin tanto, che vadasi ad unire colla GF, portata innanzi, nel punto M. V. per lo punto M si tiri la (*) MNL parallela a GI, ovvero ad FK, la quale s'incontri colle due HE, IK distese oltre, quanto bisogna, ne' punti N, & L: io dico che il parallelogrammo NLHI * pro. 42. * pro. 3. * pro. 31. * pro. 31.

Digitalizzato da Google

NLHI sia quello il quale si domanda ; vale a dire sia costituito sopra una linea eguale alla data AB ; sia eguale al triangolo C: e tenga un'angolo eguale all'angolo dato D.

III.

Imperciocche primieramente la linea retta HI, sopra la quale è costituito il parallelogrammo, dalla costruzione è eguale alla data AB. In secondo luogo il parallelogrammo NLHI è eguale (*) al parallelogrammo GHEF; quindi essendo il parallelogrammo GHEF eguale dalla costruzione al triangolo C, sarà parimente il parallelogrammo NLIH eguale al triangolo C. Finalmente l'angolo NHI è eguale (*) all' angolo GHE: ma l'angolo GHE dalla costruzione è eguale all'angolo D; dunque sarà ancora l'angolo NHI eguale all'angolo dato D : Ciocche doveva farsi.

* *pro. ante.*

* *pro. 15.*

PROP. XLV. PROBLEMA.

Costituire un parallelogrammo, il quale sia I. eguale ad una figura rettilinea data. II. tenga un' angolo eguale ad un'angolo dato.

I.

Sia data la figura rettilinea ABCD, e l'angolo rettilineo E; fa duopo costituire un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data, e che tenga un'angolo eguale all' angolo dato E.

II.

Risolvasi la figura rettilinea data in tanti triangoli, in quanti è capace di potere essere risoluta, come quì ne' due triangoli ABD, EDC. II. si costituisca il parallelogrammo (*) GFHI eguale al triangolo ABD, il quale tenga l'angolo GFI eguale all'angolo dato E. III. si costituisca (*) sopra la linea retta HI il parallelogrammo HIKL eguale all' altro triangolo BDC, e che

* *pro. 42.*

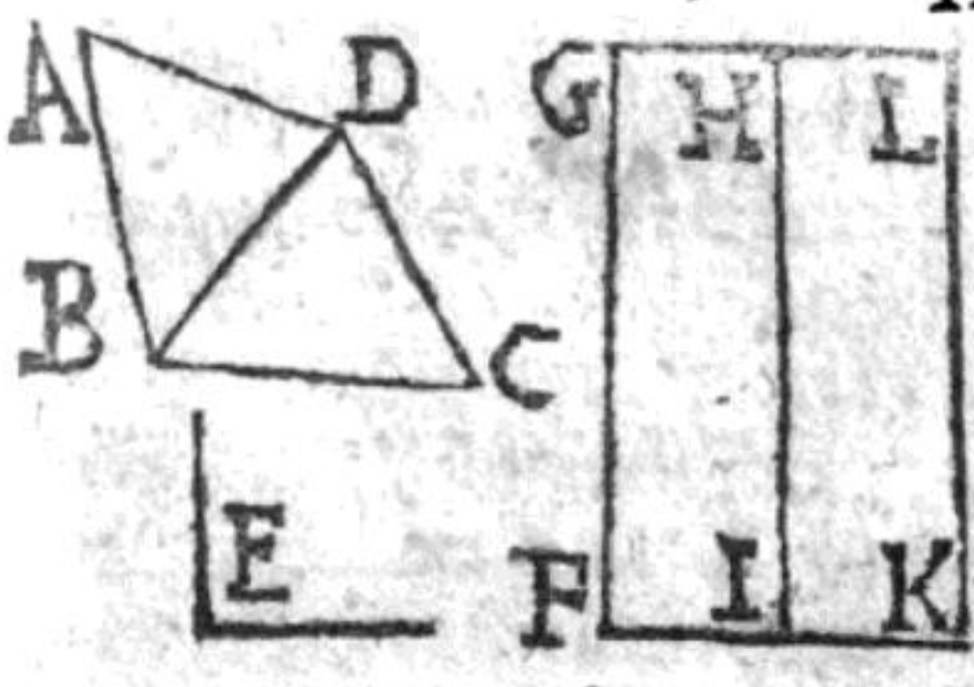
* *pro. ante.*

ten-

Digitalizzato da Google

tenga l'angolo HIK eguale all'istesso angolo dato E. Io dico che la figura GFKL sia il parallelogrammo in questione.

III.



Perche così l'angolo GFI, come l'angolo HIK sono eguali al medesimo angolo E; saranno essi eguali fra di loro; quindi aggiuntovi il medesimo angolo FIH; saranno li due angoli GFI, FIH eguali a' due angoli FIH, HIK; ma li due primi angoli come interiori della medesima parte delle due linee parallele FG, HI sono (*) eguali a due retti; dunque anche gli angoli FIH, HIK sono eguali a due retti; e perciò le due linee FI, IK giacciono (*) a dirittura. Quindi siccome FI è parallela a GH; così sarà tutta la FK parallela alla medesima GH; di modo che gli angoli alterni GHI, HIK riusciranno (*) eguali. Aggiuntovi il medesimo angolo IHL: saranno i due angoli GHI, IHL eguali a' due angoli HIK, IHL: ma questi due angoli come interiori dalla medesima parte delle due parallele HL, IK sono eguali (*) a due retti; dunque ancora gli angoli GHI, IHL sono eguali a due retti; di modo che le due linee GH, HL è necessario che giacciano a dirittura (*). Quindi siccome la GH è parallela ad FK, così sarà tutta la GL parallela ad FK; ma ancora la GF è parallela (*) ad LK; perche ciascuna di esse è parallela alla medesima HI; dunque la figura GFKL è un parallelogrammo, il quale come costa dalla costruzione è eguale alla figura rettilinea data ABCD, e tiene l'angolo GFK eguale all'angolo rettilineo dato E. Cioc. che doveva farsi.

* pro. 29.

* pro. 14.

* pro. 29.

* pro. 29.

* pro. 14.

* pro. 30.

PROP.

Digitalizzato da Google

do tutti i Problemi di ciascuna classe a parte, e tutti i Teoremi a parte.

Prima classe, che comprende le Propofizioni concernenti le linee.

Teoremi.

I. (*) Ogni linea retta, che cade fopra un' altra linea retta forma li due angoli di quà, e di là, o retti, ovvero eguali a due retti. *Dal qual Teorema fi deduce* 1. che fe due linee rette fi fegano, li quattro angoli fatti intorno la fezione comune fiano o retti, ovvero eguali a quattro retti. 2. che fe più linee, anzi infinite linee fi fegano in un punto, tutti gl'infiniti angoli formati intorno la fezione comune, fiano eguali a quattro angoli retti, e non più. II. (*) Se dal termine d'una linea retta fi tirino alle parti oppofte due linee rette, le quali coftituifcano colla medefima li due angoli di quà, e di là, o retti, o eguali a due retti, le fuddette due linee giaceranno a dirittura; *vale a dire* non formeranno angolo alcuno. *Queſta propoſizione è converſa dall' antecedente.* III. (*) Se due linee rette fi feghino, gli angoli oppofti al vertice fono eguali fra di loro. *E quì ha luogo la converſa omeſſa da* Euclide, *la quale fi deve concepire così.* IV. Se da un punto prefo in una linea retta fi tirino alle parti oppofte due linee rette, le quali coftituifcano colla medefima gli angoli oppofti al vertice eguali fra di loro, queſte due linee giaceranno a dirittura; *vale a dire* non formeranno angolo.

* *pro.* 13.

* *pro.* 14.

* *pro.* 15.

Per conofcere fe due linee giacenti fopra una fuperficie piana fiano parallele, o nò, potremo avvalerci di uno de' quattro feguenti contraffegni. Il 1. (*) *farà a vedere* Se le due linee, *fopra le quali è nato il dubbio fe fiano parallele, o nò* fegate da una

* *pro.* 27.

Digitalizzato da Google

za linea facciano gli angoli alterni eguali fra di
* *pro.* 28. loro. II. II. (*) Se l'angolo esteriore sia eguale all'interiore opposto dalla medesima parte. II
* *pro.* 28. III. (*) Se li due angoli interiori dalla medesima parte sono eguali a due retti. E finalmente il
* *pro.* 30. IV. (*) Se le due suddette linee sono parallele entrambe ad una terza linea retta. *Ove una delle quattro divisate cose s'avveri, si verificheranno necessariamente le altre tre, e le linee saranno parallele.* *Quindi* non essendo I. gli angoli alterni eguali, le linee non sarano parallele. II. Non essendo l'angolo esteriore eguale all'interiore opposto dalla medesima parte, nemmeno le due linee saranno parallele: *ciocche si accorda assai bene colla propo.* XVI., *nella quale si dimostra, che* in ogni triangolo l'angolo esteriore è maggiore dell'uno, e dell'altro interiore opposto. III. Se li due angoli interiori dalla medesima parte sono minori di due retti, le linee non saranno parallele; *ciocche si accorda coll'assioma* XIII., *e colla propo.* XVII. *dove si dimostra,* che due angoli d'un triangolo sono sempre minori di due retti. IV. Se due linee non sono parallele ad una medesima linea non sono parallele fra di loro. *Viceversa*
* *pro.* 29. (*) Se due linee parallele sono segate da una terza linea, saranno 1. gli angoli alterni eguali fra di loro. 2. sarà l'angolo esteriore eguale all'interiore opposto della medesima parte. 3. li due interiori della medesima parte saranno eguali a due retti. *Questa proposizione si vuol riguardare come conversa delle propo.* XXVII., e XXVIII.

Problemi.

* *pro.* 2. I. (*) Adattare ad un punto dato una linea
* *pro.* 3. retta eguale ad un'altra linea retta data. II. (*) Date due linee rette diseguali tagliare dalla mag-

Digitalizzato da Google

maggiore una parte eguale alla minore. III. (*) Di una linea retta data farne due parti eguali. * *pro.* 10.

IV. (*) Da un punto dato in mezzo ad una linea retta, innalzarci sopra una linea perpendicolare. V. (*) Da un punto dato fuori d'una linea retta, farci cadere sopra una linea perpendicolare. VI. (*) Per un punto dato far passare una linea parallela ad un'altra linea data. * *pro.* 11. * *pro.* 12. * *pro.* 31.

Seconda classe, che comprende le Proposizioni concernenti gli angoli.

Problemi.

I. (*) Dividere un'angolo rettilineo dato in due parti eguali. II. (*) Costituire ad un punto, dato dentro una linea retta, un'angolo eguale ad un'angolo dato. * *pro.* 9. * *pro.* 23.

Terza classe, che comprende le Proposizioni concernenti le figure.

Teoremi.

Proprietà di certi triangoli.

I. (*) Gli angoli sotto la base de' triangoli isosceli sono eguali fra di loro, non meno che gli angoli sopra la base de' medesimi: *dalla quale proposizione s'inferisce*; che ogni triangolo equilatero è parimente equiangolo. II. (*) Se li due angoli sopra la base d'un triangolo siano eguali fra di loro, i lati sottoposti a questi angoli saranno ancora eguali; *dal che s'inferisce*; che ogni triangolo equiangolo è parimente equilatero. *Queste proposizioni sono converse l'una dall'altra*. III. (*) Se li due lati d'un triangolo sono diseguali gli angoli sopra la base, saranno parimente diseguali, e quell'angolo sarà maggiore, che sta dirimpetto al lato maggiore. *Dal che s'inferisce* 1. che ne' triangoli scaleni tutti gli ango- * *pro.* 5. * *pro.* 6. * *pro.* 18.

Digitalizzato da Google

li ſono diſeguali; e 2. che in ogni triangolo al lato maggiore gli ſta dirimpetto l'angolo maggiore. IV. (*) Se un triangolo ha gli angoli ſopra la baſe diſeguali, li lati ſottopoſti a queſti angoli ſaranno parimente diſeguali, e quello lato ſarà maggiore, il quale ſta dirimpetto all'angolo maggiore; *Dal che s'inferiſce* 1. che ſe tutti gli angoli d'un triangolo ſono diſeguali egli ſarà ſcaleno, e 2. che in ogni triangolo all'angolo maggiore gli ſta dirimpetto il lato maggiore. *Queſte due Propoſizioni ſono converſe l'una dall'altra.* V. (*) In ogni triangolo rettangolo il quadrato coſtituito ſopra l'ipotenuſa è eguale a' quadrati coſtituiti ſopra gli altri due lati, li quali comprendono l'angolo retto. VI. (*) Se in un triangolo il quadrato coſtituito ſopra un lato ſia eguale a' quadrati coſtituiti ſopra gli altri due lati, l'angolo contenuto da eſſi ſarà retto. *Queſte due Propoſizioni ſono converſe l'una dall'altra.*

* *pro.* 19.
* *pro.* 47.
* *pro.* 48.

Proprietà di tutti i triangoli.

I. (*) In ogni triangolo l'angolo eſteriore è maggiore dell'uno, e dell'altro interiore oppoſto; ma ſeparatamente. II. (*) In ogni triangolo l'angolo eſteriore è eguale all'uno, ed all'altro interiore oppoſto uniti inſieme. III. (*) In ogni triangolo due angoli, quali ſi vogliano, ſono ſempre minori di due retti. IV. (*) In ogni triangolo tutti li tre angoli uniti inſieme ſono eguali a due retti. *Dal che ne ſiegue* 1. che ogni triangolo non può avere più d'un'angolo retto, ed a maggior ragione non può avere più d'un'angolo ottuſo. 2. che ſe un'angolo è retto, gli altri due ſono eguali ad un'altro retto, e ſe il triangolo è iſoſcele ciaſcuno ſarà eguale alla metà d'un retto. 3. che ſe un'angolo d'un triangolo ſia eguale agli altri due inſieme; il ſuddet-

* *pro.* 16.
* *pro.* 32.
* *pro.* 17.
* *pro.* 32.

Digitalizzato da Google

to angolo sarà retto . 4. che se due angoli d'un triangolo sono eguali a due angoli d'un'altro triangolo, li rimanenti due angoli siano eguali fra di loro . 5. che li quattro angoli d'una figura quadrilatera sono eguali a quattro retti; *e la ragione è che ogni figura quadrilatera si può risolvere in due triangoli* . V. (*) In ogni triangolo due qualsivogliano lati sono sempre maggiori del lato rimanente . VI. (*) Se da' termini della base d'un triangolo si tirino due linee, le quali si vadano ad unire dentro del triangolo; saranno esse minori de'due lati del triangolo ; ma l'angolo contenuto da esse, sarà maggiore dell' angolo contenuto da'lati del triangolo.

* pro. 20.

* pro. 21.

Comparazioni de' triangoli.

Si dice un triangolo comparar si con un' altro triangolo, quando i lati si comparano co' lati, gli angoli cogli angoli, e lo spazio triangolare collo spazio triangolare. Le *comparazioni istituite da* Euclide *in questo primo libro sono le* seguenti. I.(*) Se due triangoli anno 1. i due lati eguali a'due lati ciascuno a ciascuno 2. l'angolo contenuto sotto i lati dell'uno eguale all' angolo contenuto sotto i lati dell' altro : avranno 1. la base eguale alla base . 2. sara il triangolo eguale al triangolo. 3. saranno gli altri angoli eguali agli altri angoli, e propriamente quelli, i quali sono sottoposti a' lati eguali . II. (*) se due triangoli anno 1. due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno. 2. un lato eguale ad un lato, o che sia adjacente agli angoli eguali, o che stia dirimpetto ad uno degli angoli eguali : nell'uno caso, e nell'altro verrà a conchiudere, che le altre cose sono eguali corrispondentemente alle altre cose. *Questa proposizione si fa conversa dell' antecedente, quando i due lati eguali sono adjacenti agli angoli eguali* . III. (*) Se due triangoli sono 1. costi-

* pro. 4.

* pro. 26.

* pro. 5.

Digitalizzato da Google

tuiti ſopra la medeſima baſe. 2. anno i due lati eguali a' due lati ciaſcuno a ciaſcuno, e quelli propriamente, che anno gl'iſteſſi termini. 3. ſono coſtituiti dalla medeſima parte; eſſi neceſſariamente caderanno l'uno ſull'altro. IV. (*) Se due triangoli anno 1. i due lati eguali a' due lati ciaſcuno a ciaſcuno. 2. la baſe eguale alla baſe: avranno 1. l'angolo che ſta dirimpetto alla baſe eguale all'angolo, che ſta dirimpetto all'altra baſe. 2. le altre coſe ſaranno eguali alle altre coſe:

* pro. 8.

* pro. 24. *queſta propoſizione in parte s'accorda colla quarta, in parte la converte.* V. (*) ſe due triangoli anno 1. i due lati eguali a' due lati ciaſcuno a ciaſcuno; 2. l'angolo contenuto ſotto i lati dell'uno maggiore, o minore dell' angolo contenuto ſotto i lati dell'altro; avranno la baſe maggiore, o minore della baſe. VI. (*) Se due triangoli anno 1. i due lati eguali a' due lati ciaſcuno a ciaſcuno, e 2. la baſe maggiore, o minore della baſe; ſarà l'angolo che ſta dirimpetto alla baſe maggiore o minore dell'angolo, che ſta dirimpetto all' altra baſe. *Queſte due ultime propoſizioni s'accordano in parte, ed in parte ſono converſe l'una dall'altra. Quì deve aver luogo un' altra comparazione omeſſa da* Euclide, *la quale ſi enuncia così.* VII. Se due triangoli anno 1. un' angolo eguale ad un' angolo; 2. intorno a due altri angoli anno i due lati eguali a' due lati ciaſcuno a ciaſcuno; 3. gli angoli rimanenti della medeſima ſpecie; vale a dire tutti due retti, tutti due acuti, o tutti due ottuſi; li ſuddetti triangoli ſaranno eguali, ed avranno le altre coſe eguali alle altre coſe. *La dimoſtrazione di queſto Teorema ſi metterà quì ſotto.* VIII. (*) Se due triangoli ſono coſtituiti 1. ſopra la medeſima baſe, ovvero ſopra baſi eguali; 2. fralle medeſime parallele; eſſi ſaranno eguali fra di loro. IX. (*) Se due triangoli ſono coſtituiti 1. ſopra la medeſima baſe, o ſopra baſi eguali

* pro. 25.

* pro. 37. e 38.

* pro. 39. e 40.

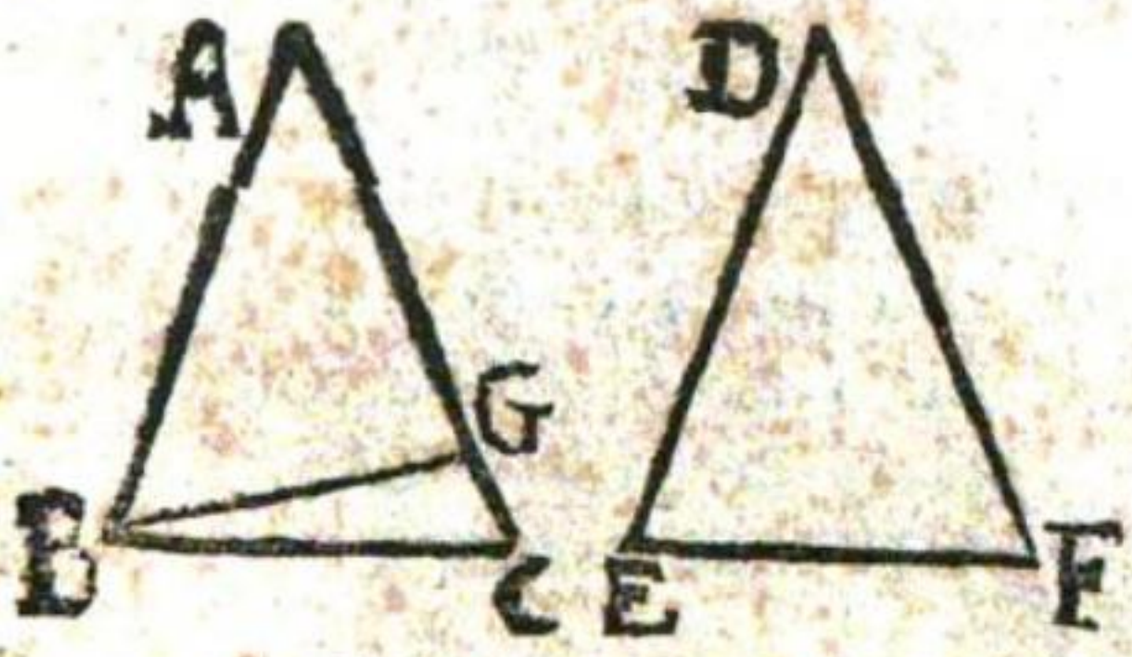
gia-

giacenti a dirittura. 2. dalla medesima parte; essi saranno fralle medesime parallele. *Queste due ultime proposizioni sono converse l'una dall'altra*

Proposizione aggiunta.

Teorema.

I.



Se due triangoli ABC, DEF anno I. l'angolo BAC eguale all'āgolo EDF. II. intorno gli angoli ABC, DEF anno i due lati AB, BC eguali a' due lati DE, EF ciascuno a ciascuno; cioè il lato AB eguale al lato DE, ed il lato BC eguale al lato EF. III. anno di più i rimanenti angoli ACB, DFE della medesima specie; cioè tutti due o acuti, o retti, o ottusi; io dico che tutte le altre cose saranno corrispondentemente eguali alle altre cose. Per istabilire questo Teorema basta dimostrare, che il lato AC sia eguale al lato DF; Imperciocche dimostrata, che si è tale eguaglianza, i due triangoli ABC, DEF avranno i due lati AB, AC eguali a' due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, e l'angolo BAC eguale all'angolo EDF: laonde per la propo. IV. di questo libro saranno eguali fra di loro.

II.

Se mai sia possibile, non sia il lato AC eguale al lato DF, ma sia maggiore; tagliasi (*) dunque I. la parte AG eguale a DF. II. si unisca (*) la BG.

(*) *pro. 3.*

(*) *dim. 1.*

III.

Perche i due lati AB, AG sono eguali a' due la-

lati DE, DF ciascuno a ciascuno, e l'angolo BAG è eguale all'angolo EDF; sarà (*) la base BG eguale alla base EF, e l'angolo AGB sarà eguale all'angolo DFE. Quindi essendo dalla suppo-sizione BC eguale ad EF: sarà parimente (†) la BG eguale alla BC; e perciò il triangolo BGC sarà isoscele, e l'angolo BGC sara (*) eguale all'angolo BCG; laonde di quella specie, che è l'angolo BCG, della medesima specie sarà l'angolo BGC.

* *pro.* 4.

† *ass.* 1.

‡ *pro.* 5.

Ciò premesso, se l'angolo BCG è retto, ovvero ottuso il triangolo BCG verrebbe ad avere due angoli retti, ovvero due angoli ottusi; il che non può sossistere. Ma se l'angolo BCG si mette acuto, essendo ancora acuto l'angolo BGC, sarà ottuso l'angolo AGB; perche li due angoli BGC, AGB sono eguali a' due retti (*); e per conseguente sarà parimente ottuso l'angolo DFE, che si è dimostrato eguale all' angolo AGB: ma fingendosi acuto l'angolo ACB, l'angolo DFE, il quale è dell'istessa specie, è parimente acuto; dunque l'angolo DFE è nell' istesso tempo ottuso, ed acuto; ciocche non potendo sossistere rimane vero il Teorema in questione.

* *pro.* 14.

Proprietà de' parallelogrammi.

I. (*) Una figura quadrilatera sarà parallelogramma se 1. due lati opposti sono eguali fra di loro. 2. sono parimente paralleli: *a questa proposizione fa duopo aggiugnere quest'altra.* II. Una figura quadrilatera sarà parallelogramma. 1. se due lati opposti siano eguali. 2. se gli altri due lati siano parimente eguali. *Ma se due lati opposti d'una figura quadrilatera sono eguali, e gli altri due sono paralleli; non è necessario, che essa sia parallelogramma*: imperciocche se *in un triangolo isoscele si tira una linea parallela alla ba-*

* *pro.* 33.

Digitalizzato da Google

baſe, ſi vedrà naſcere un trapezio, nel quale due lati oppoſti ſono eguali, e due altri ſono paralleli.

III. (*) Ogni parallelogrammo tiene 1. i lati oppoſti eguali. 2. gli angoli oppoſti eguali. 3. rimane diviſo in due triangoli eguali della diagonale. * *pro.* 34.

IV. (*) In ogni parallelogrammo compartito in quattro parallelogrammi per mezzo d'una diagonale, e di due linee parallele, che s'incorciano in un punto della diagonale, li ſupplementi ſono eguali fra di loro. V. (*) Finalmente in ogni parallelogrammo ſe un'angolo è retto, tutti gl'altri angoli ſono retti. * *pro.* 43. * *Cor.* 1. *della pro.* 46.

Comparazioni de' parallelogrammi.

I. (*) Due parallelogrammi coſtituiti 1. ſopra la medeſima baſe, ovvero ſopra baſi eguali; 2. fralle medeſime parallele, ſono eguali fra di loro. *E qui deve aver luogo la converſa omeſſa da* Euclide. II. Due parallelogrammi eguali coſtituiti 1. ſopra la medeſima baſe, ovvero ſopra baſi eguali giacenti a dirittura; 2. coſtituiti dalla medeſima parte, ſono fralle medeſime parallele. * *pro.* 35. e 36.

Comparazione d'un parallelogrammo con un triangolo.

I. (*) Se un parallelogrammo, ed un triangolo ſiano 1. coſtituiti ſopra la medeſima baſe; 2. reſtino racchiuſi fralle medeſime parallele; il parallelogrammo ſarà doppio del triangolo. * *pro.* 41.

Problemi concernenti i triangoli.

I. (*) Sopra una linea retta data deſcrivere un triangolo equilatero. II. (*) Deſcrivere un * *pro.* 1. * *pro.* 22. trian-

Digitalizzato da Google

triangolo, che abbia li ſuoi tre lati eguali a tre linee rette date. Fa dnopo però, che le tre linee rette date ſiano tali, che due di eſſe qualiſivogliano unite inſieme ſiano maggiori della terza.

Problemi concernenti i parallelogrammi.

[a] *pro. 46.* [b] *pro. 42.* I. (*) Sopra una linea retta data deſcrivere un quadrato. II. (*) Deſcrivere un parallelogrammo eguale 1. ad un triangolo dato; 2. che abbia un'angolo eguale ad un'angolo dato. III.

[c] *pro. 44.* (*) Deſcrivere ſopra una linea retta data un parallelogrammo eguale 1. ad un triangolo dato: 2. che abbia un'angolo eguale ad un'angolo

[d] *pro. 45.* dato. IV. (*) Deſcrivere un parallelogrammo, il quale ſia 1. eguale ad una figura rettilinea data. 2. abbia un' angolo eguale ad un'angolo dato.

Digitalizzato da Google

LIBRO SECONDO
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE.

DEFINIZIONI.

I.



Gni parallelogrammo rettangolo ſi deve intendere formato da'due lati, i quali comprendono l'angolo dato: de' quali lati uno diceſi lunghezza, e l'altro diceſi larghezza.

SPIEGAZIONE.

SE due parallelogrammi rettangoli ſono dell' iſteſſa lunghezza, ma uno ſia più largo dell' altro, non è da metterſi in dubbio, che il più largo contenga maggior ſuperficie del meno largo; di modo che per ſapere le grandezze riſpettive di due parallelogrammi egualmente lunghi, fa duopo aver riguardo alle loro larghezze. Viceverſa ſe due perallelogrammi rettangoli ſono egualmente lar-

Digitalizzato da Google

larghi, ma uno sia più lungo dell' altro, il più lungo conterrà più superficie del più corto, e tanto maggior superficie conterrà, quanto egli è più lungo; di modo che per sapere le grandezze rispettive di due parallelogrammi rettangoli egualmente larghi, fa duopo aver riguardo alle loro larghezze. Quindi essendo diseguali così le lunghezze, come le larghezze di due parallelogrammi rettangoli, le loro grandezze rispettive dipenderanno congiuntamente, e dalle lunghezze, e dalle larghezze; di modo che incomincia a capirsi ciocchè ha voluto intendere Euclide *con questa definizione.* Ogni parallelogrammo rettangolo si deve intendere formato da' due lati, li quali comprendono l'angolo retto. *Ma perchè meglio s'intenda il senso di questa definizione, dalla quale dipende l'intelligenza di tutto il libro* II. *fingiamo che io dovessi far capire ad altrui la vera grandezza d'un parallelogrammo rettangolo, per esempio del piano d'una galleria. Se io gli dico; il piano della galleria, di cui vi ragiono è lungo* 30. *palmi senza aggiugner altro; ciò non basta, perchè egli ne arrivi ad immaginare la vera grandezza: perchè gli è ignota la larghezza del piano della galleria. L'istesso sarìa, se io gli dicessi la larghezza solamente del suddetto piano, e gli tacessi la lunghezza: ma dicendogli, che il piano della galleria ha* 30. *palmi di lunghezza, e* 20. *di larghezza, allora egli ne potrà formare giustissima idea, e potrà descriverlo ancora sopra una carta, non essendogli ignoti gli elementi, da' quali dipende la misura del piano: imperciocchè non avrà da fare altro, che tirare sopra la carta due linee, le quali comprendono un'angolo retto, l'una delle quali sia di* 30. *palmi, e l'altra di* 20., *e far passare per li termini di coteste linee due parallele; mentre il parallelogrammo rettangolo, che quindi risulta rappresentaria il piano della galleria.*

Quan-

Digitalizzato da Google

Quando dunque noi diremo per innanzi, che un parallelogrammo rettangolo, ovvero semplicemente un rettangolo (*colla qual voce si vuole intendere un parallelogrammo rettangolo*) *sia formato da tali due linee, non vorremo dire altro, se non che una di queste due linee ne rappresenti la lunghezza, e l'altra la larghezza: ma trattandosi de' quadrati non è neeessario il dire, che essi siano formati da due linee: ma basterà, che si nomini una linea sola: perche ne' quadrati la lunghezza è eguale alla larghezza; onde chi ne sa la lunghezza, egli nell'istesso tempo non può ignorarne la larghezza. Di fatto Euclide ha insegnato nel primo libro* (*) *il modo di descrivere un quadrato sopra una linea data. Sicche trattandosi di quadrati noi diremo, che essi siano formati da una linea sola, la quale fa le veci così di lunghezza, come di larghezza.*

* pro. 46.

Si vuol quì avvertire, che le lunghezze si misurano per via di palmi lineari, e le superficie per via di palmi quadrati: quindi dicendosi, che una torre sia alta 100. palmi, si vuol ciò intendere di palmi lineari: ma dicendosi, che il piano d'una stanza sia di 900. palmi, si vorrà questo intendere di palmi quadrati: vale a dire, che il piano della suddetta stanza possa rimanere compartito in 900. palmi quadrati.

Se un rettangolo sia lungo 6 palmi, e largo 3, risolvendo così la lunghezza, come la larghezza del rettangolo ne' suoi palmi componenti, e tirando tante linee parallele, egli è chiaro che il rettangolo viene a contenere 18. palmi quadrati: quindi si avrà il numero di palmi quadrati contenuti nel suddetto rettangolo col moltiplicare il numero de' palmi lineari contenuti nella di lui lunghezza per lo numero di palmi contenuti nella sua larghezza, vale a dire moltiplicando il 6. per lo 3. Similmente se un rettangolo sia lungo 10 palmi, e

lar-

Digitalizzato da Google

largo 8, egli conterrà 80. palmi quadrati, perche moltiplicando il 10 per 8 ne nasce il numero 80. Quindi siccome nel quadrato la lunghezza è eguale alla larghezza, così per avere i palmi quadrati della sua superficie, basterà moltiplicare in se medesimo il numero di palmi lineari, che si comprendono nella sua lunghezza: come se un quadrato sia 6 palmi lungo, egli comprenderà 36 palmi quadrati; e se sia lungo 8 palmi, egli comprenderà 64 palmi quadrati.

A C B

Se la linea AB è divisa nel punto C il rettangolo, che ha la AB per lunghezza, e la BC per larghezza si suol segnare o AB. BC, ovvero ABC. Similmente il rettangolo, che ha AB per lunghezza, ed AC per larghezza si segna o AB. AC, ovvero più elegantemente BAC; ma dovendosi segnare il quadrato di AB, si farà così AB²; e parimente AC² disegnerà il quadrato formato sopra la AC.

II.

Se a' due supplementi d' un parallelogrammo s'aggiunge uno di quei, che sono intorno il diametro; la figura che quindi risulta dicesi gnomone.

COROLLARIO.

QUindi aggiugnendo al gnomone l'altro parallelogrammo, che stà intorno il diametro, si viene a comporre l'intiero parallelogrammo. Viceversa togliendo da tutto il parallelogrammo uno di quei, che sono intorno il diametro, sopravanza il gnomone.

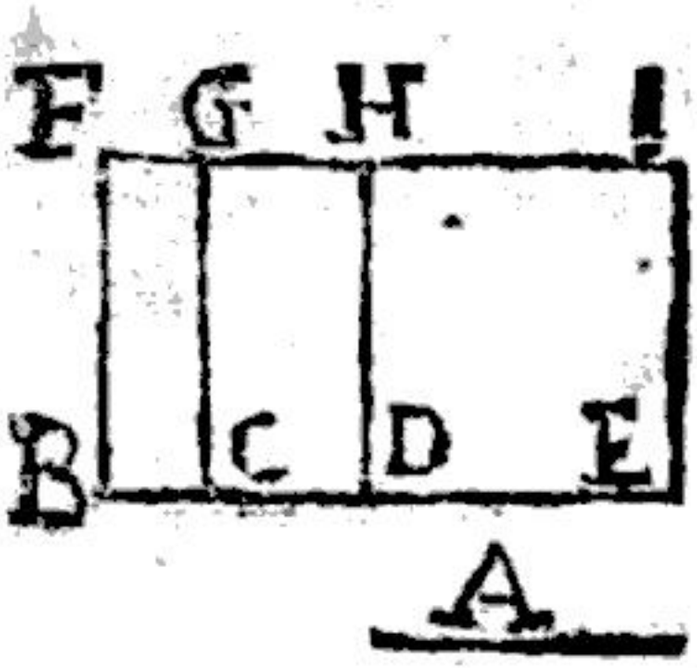
PROP. I. TEOREMA.

Se vi sono due linee diritte l'una delle quali sia divisa in molte parti, e l'altra sia indivisa; sarà il

Digitalizzato da Google

il rettangolo formato dalle due ſuddette linee eguale a tutti i rettangoli formati dalle parti della linea diviſa, e dalla linea indiviſa.

I.



Siano le due linee rette A, e BE, delle quali la ſeconda BE ſia diviſa in tre parti BC, CD, DE. Io dico che il rettangolo formato dalle due linee A, e BE ſia eguale a tre rettangoli, il primo formato da A, e BC; il ſecondo da A, e CD; ed il terzo da A, e DE.

II.

I. S'innalzi (*) dal punto B ſopra la BE la perpendicolare BF, la quale ſi faccia eguale (*) alla data A. II. Per lo punto F ſi tiri (*) la FI parallela alla BE; e per li punti C, D, E ſi tirino le linee rette CG, DH, EI, parallele alla BF.

* *pro.* 11. *I.*
* *pro.* 3. *I.*
* *pro.* 31. *I.*

III.

Perche dalla coſtruzione le tre figure FBCG, GCDH, HDEI ſono altrettanti parallelogrammi rettangoli; ſaranno le tre linee rette BF, CG, DH eguali fra di loro (*). Quindi eſſendo dalla coſtruzione la BF eguale alla A, ſaranno ancora le altre due CG, DH eguali (*) ad A: il perche il primo rettangolo FBCG, il quale è formato (*) da' lati BF, BC, ſarà ancora formato da' lati A, e BC; e ſimilmente il ſecondo rettangolo GCDH ſarà formato da' lati A, e CD; ed il terzo rettangolo HDEI, ſarà formato da' lati A, e DE. E finalmente tutto il rettangolo FBEI ſarà formato da' lati A, e BE. Quindi eſſendo il rettangolo FBEI eguale (*) a' tre ſuddetti rettangoli ſarà il rettangolo formato da A, e BE eguale a tre rettangoli formati da A, e BC, da A, e CD; e da A, e DE. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.* 34. *I.*
* *aſſio.* 1.
* *def.* 1. *di queſto.*
* *aſſio.* 9.

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

Le prime diece proposizioni di questo libro si possono dimostrare per via di numeri: il che noi non trascureremo di fare, soggiugnendo dopo la dimostrazione di Euclide in ciascuna proposizione la dimostrazione co' numeri.

Sia A —— 10
BE —— 20
BC —— 4
CD —— 6
DE —— 10

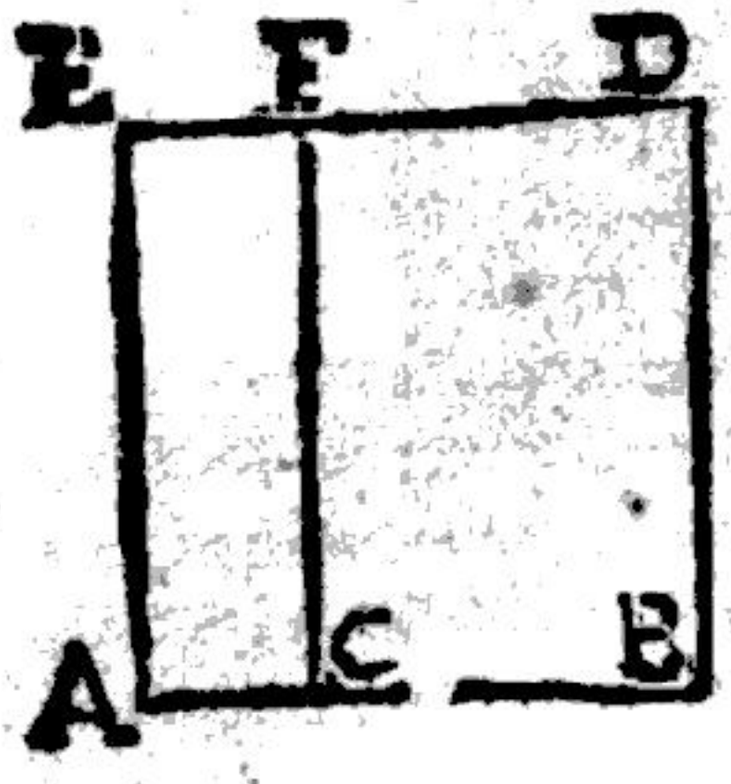
A. BE —— 200

A. BC —— 40
A. CD —— 60
A. DE —— 100
200

PROP. II. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; il quadrato formato da tutta la linea sarà eguale a due rettangoli formati da tutta la medesima linea, e dalle parti di essa.

I.



Sia la linea AB divisa ad arbitrio nel punto C: io dico che il quadrato formato da tutta la linea AB è eguale a due rettangoli, il primo de' quali è formato dall' istessa AB, e dalla parte AC: l'altro è formato parimente da AB, e dall'altra parte BC.

II.

* pro. 46. I. * pro. 31. I.

I. Si formi (*) sopra la retta AB il quadrato ABDE. II. Per lo punto C si tiri (*) la retta CF parallela alle due AE, BD: in tal modo il quadrato ABDE rimane compartito ne' due rettangoli ACFE, CBDF.

III.

Digitalizzato da Google

III.

Perche il rettangolo EACF è formato (*) da' lati AE, AC: essendo dalla costruzione AE eguale ad AB; il detto rettangolo sarà parimente formato dalle due AB, AC. Similmente perche l'altro rettangolo FCBD è formato (*) da' due lati FC, CB: essendo FC a cagione del parallelogrammo EACF eguale (*) ad EA, ovvero ad AB; sarà il detto rettangolo FCBD formato dalle due AB, BC. Quindi perche li due rettangoli EACF, FCBD uniti insieme compongono tutto il quadrato ABDE, il quale è formato da tutta la linea AB: sarà il quadrato della suddetta linea AB eguale a due rettangoli, il primo formato da AB, e da AC; l'altro formato dall' istessa AB, e da BC; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *def.* 1. *di questo.*

(*) *def.* 1. *di questo.*

(*) *pro.* 34. I.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB —— 10 AB^2 ---- 100 $AB.AC$ —— 30

AC —— 3 $AB.BC$ —— 70

CB —— 7 ——

100

PROP. III. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il rettangolo formato da tutta la linea divisa, e da una delle sue parti eguale al quadrato della medesima parte, insieme col rettangolo formato dalle due suddette parti.

I.

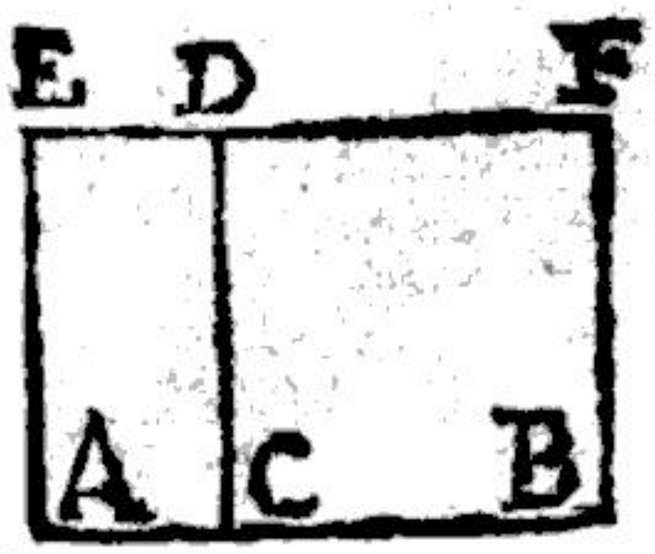
Sia la linea retta AB tagliata in qualunque modo nel punto C; io dico che il rettangolo formato da tutta la linea AB, e dalla parte BC sia eguale al quadrato della medesima parte BC insieme col rettangolo formato dalle parti AC, CB.

Digitalizzato da Google

II.

*Pro.46.I. I. Si costituisca (*) sopra la CB il quadrato CBFD. II. Si tiri per lo punto A la retta (*) AE
* pro.31.I. parallela alle due CD, BF. III. si distenda (*)
* dim. 2. FD fino al punto E.

III.



Perche il rettangolo ACDE è formato (*) da' due lati AC, CD, che comprendono l'angolo retto ACD; essendo per ragione del quadrato DCBF il lato DC eguale al lato CB; sarà il detto rettangolo ACDE formato da AC, e CB. In oltre essendo il rettangolo ABFE formato (*) da' due lati AB, BF, che sono intorno l'angolo retto ABF; siccome il lato BF per ragione del quadrato DCBF è eguale al lato BC; così sarà il detto rettangolo ABFE formato da AB, e BC. Quindi essendo il rettangolo ABFE eguale al quadrato DCBF, il quale è formato da CB, ed al rettangolo EACD: sarà il rettangolo formato da AB, e da BC eguale al quadrato formato da BC insieme col rettangolo formato dalle due AC, CB: ciocche doveva dimostrarsi.

* def. 1. di questo.

* def. 1. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

Sia	*AB* —— 10	*AB.BC* —— 60	CB^2 —— 36
	AC —— 4		*AC.CB* —— 24
	CB —— 6		——
			60

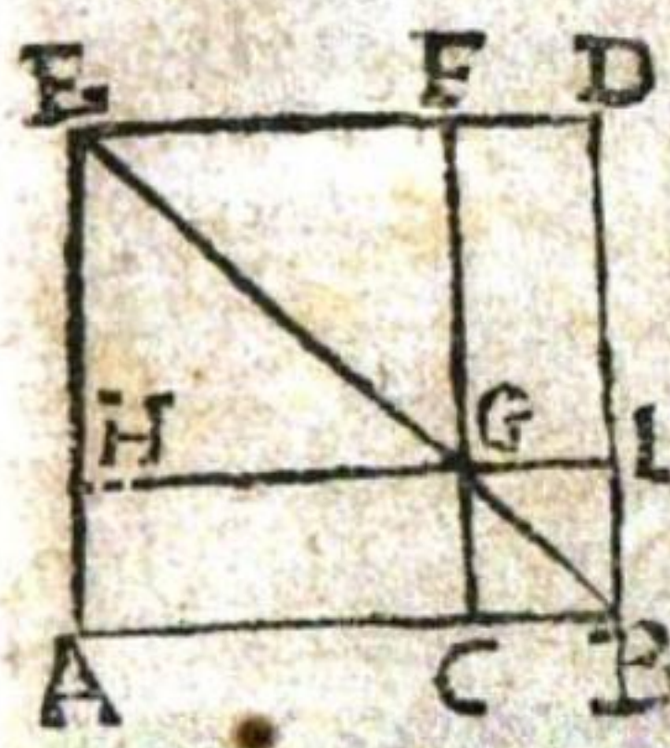
PROP. IV. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il quadrato formato da tutta la linea eguale a' due quadrati formati dalle parti della me-

Digitalizzato da Google

medesima linea, insieme con altrettanti rettangoli formati dalle medesime due parti.

I.



Sia la linea retta AB segata ad arbitrio nel púto C; io dico che il quadrato di tutta la linea AB fia eguale a' due quadrati formati dalle parti AC, e CB, insieme co' due rettangoli, entrambi formati dalle medesime parti AC, e CB.

II.

I. Formisi (*) sopra la AB il quadrato ABDE. * *pro.46.I.*
II. Congiungasi (*) la diagonale BE. III. Si tiri * *dim. 1.*
per lo punto C (*) la retta CGF parallela alle * *pro.31.I.*
due AE, BD. IV. Finalmente per lo punto G si
faccia passare (*) la retta HGI parallela agli * *pro.31.I.*
altri due lati AB, ED del quadrato ABDE: in tal modo, tutto il quadrato rimane compartito in due supplementi, ed in due parallelogrammi intorno il diametro.

III.

Perche le due linee AB, AE sono lati del quadrato ABDE, saranno esse eguali fra di loro: quindi il triangolo ABE sarà isoscele, e l'angolo ABE dovrà essere eguale (*) all'angolo AEB. * *pro. 5.I.*
Ma a cagione delle due linee parallele AB, HI segate dalla terza EGB l'angolo esteriore HGE è eguale (*) all' angolo interiore opposto ABE; * *pro.29.I.*
dunque sarà parimente il medesimo angolo HGE eguale (*) all'angolo HEG: il perche li due * *assio. 1.*
lati HE, HG sottoposti a questi due angoli eguali saranno (*) parimente eguali: ma a cagione * *pro. 6.I.*
del parallelogrammo HGFE i due lati HE, HG sono (*) rispettivamente eguali a'due lati opposti * *pro.34.I.*
FG, FE; dunque tutt'i quattro lati EH, HG, FG, FE del parallelogrammo suddetto sono eguali;

Digitalizzato da Google

ma tutti li quattro angoli ſono retti (*), perche uno di eſſi HEF è retto; dunque il detto parallelogrammo HGFE ſarà un quadrato, il quale è formato del lato HG, ovvero dal lato AC, che è eguale ad HG (*).

(*) Cor. 1. della pro. 46.

(*) pro. 34. I.

Similmento a cagione delle due parallele CF, AE ſegate dalla terza BGE l'angolo eſteriore CGB è eguale (*) all' angolo interiore oppoſto AEB; quindi eſſendoſi dimoſtrato l'angolo AEF eguale all'angolo ABE: ſaranno gli angoli CGB, CBG eguali fra di loro, e perciò i due lati CB, CG ſottopoſti a queſti angoli (*) ſaranno eguali: Dimodoche eſſendo a cagione del parallelogrammo CBIG i due lati CB, CG eguali riſpettivamente a' due lati oppoſti (*) IB, IG: ſaranno tutti quattro i lati CG, CB, IG, IB del ſuddetto parallelogrammo eguali fra di loro; ma tutti quattro i ſuoi angoli (*) ſono retti: perche l'angolo CBI è retto; dunque il medeſimo parallelogrammo CBIG ſarà un quadrato, il quale è formato da CB: quindi ſiccome il rettangolo ACGH è formato (*) da' due lati AC, CG, i quali ſono intorno all' angolo retto ACG, così il detto rettangolo ACGH ſarà formato parimente da' due lati AC, CB, eſſendo CG eguale a CB: di modo che eſſendo il rettangolo GIDF eguale (*) al rettangolo CAGH ſaranno tutti due inſieme eguali a due rettangoli formati entrambi da AC, e CB. Sicche poiche tutto il quadrato ABDE è eguale a' due quadrati HGFE, CBIG, ed a' due rettangoli ACGH, GIDF: ſarà il quadrato formato da tutta la linea AB eguale a' due quadrati formati dalle parti di eſſa AC, CB inſieme co i due rettangoli formati dalle medeſime parti AC, CB: ciocche doveva dimoſtrarſi.

(*) pro. 29. I.

(*) pro. 6. I.

(*) pro. 34. I.

(*) pro. 42.

(*) def. 1. di queſto.

(*) pro. 43. I.

Di-

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB —— 10 AB^2 —— 100 AC^2 —— 36
AC —— 6 CB^2 —— 16
CB —— 4 $2AC.CB$ —— 48
100

COROLLARJ.

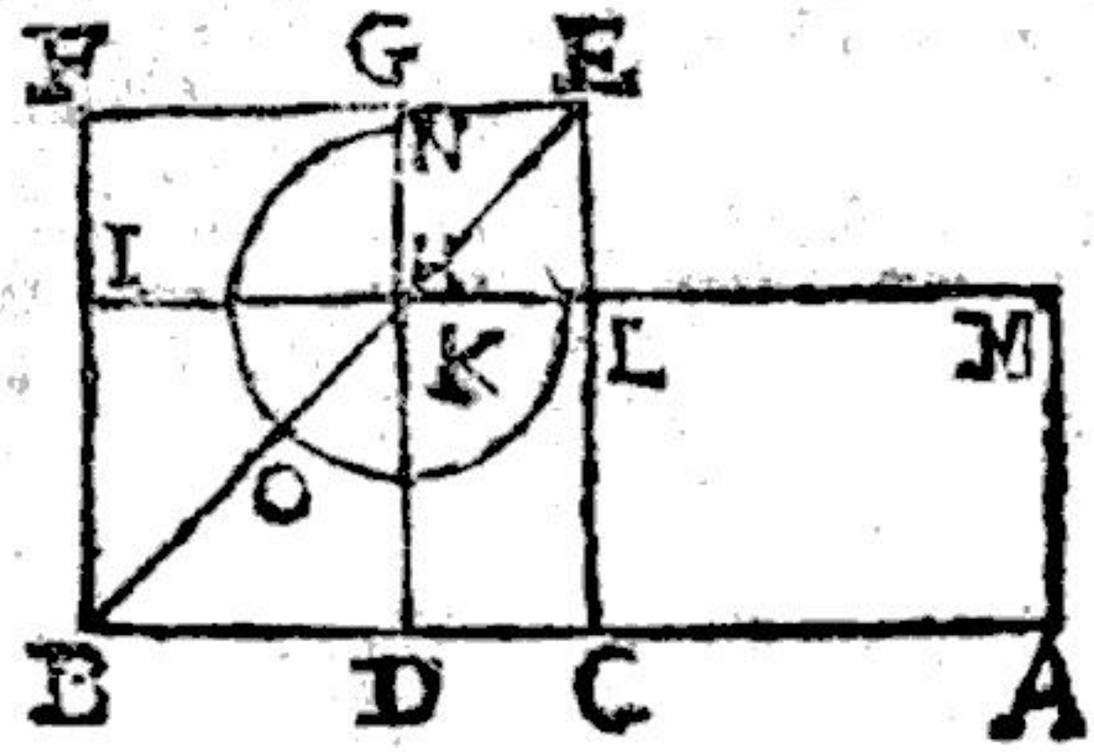
Quindi ne siegue I. *Che i parallelogrammi, i quali sono posti intorno la diagonale del quadrato, sono essi ancora quadrati.* II. *Che se una linea è segata in due parti eguali, il quadrato di tutta la linea sia quadruplo del quadrato della mettà di essa. Imperciocchè immaginando, che AB sia divisa in parti eguali nel punto C, tanto li due parallelogrammi EHGF, GCBI, che sono posti intorno la diagonale del quadrato, quanto li due supplementi ACGH, GIDF sono quadrati, e tutti riescono eguali fra di loro; di modo che tutti quattro insieme, li quali ricompongono il quadrato formato dalla AB sono quadrupli di ci asuno di essi. Cosi in numeri il quadrato di 8, che è 64 è quadruplo di 16, che è il quadrato di 4 mettà del numero 8.*

PROP. V. TEOREMA.

Se una linea è divisa. I. *in due parti eguali.* II. *in due parti diseguali ad arbitrio: il rettangolo formato dalle parti disegali della linea insieme col quadrato di quella parte della medesima, che rimane interposta fra' due segamenti sarà eguale al quadrato della mettà della suddetta linea.*

Digitalizzato da Google

I.



Sia la linea retta AB tagliata una volta in parti eguali nel pũto C, ed un'altra volta in parti diſeguali nel pũto D; io dico che il rettangolo formato dalle parti diſeguali AD, DB inſieme col quadrato della linea DC interpoſta fra i due ſegamenti C, e D ſia eguale al quadrato formato dalla mettà CB.

II.

* *pro.46.I.* I. Si coſtituiſca (*) ſopra la BC il quadrato
* *dim.* 1. BCEF. II. Si uniſca la diagonale BE. (*) III. Si tiri
* *pro.31.I.* per lo punto D (*) la retta DHG parallela a' due lati BF, CE del quadrato BCEF. IV. Final-
* *pro.31.I.* mente per li punti H, & A ſi tirino (*) le linee IHM, AM parallele riſpettivamente a' due lati BC, CE del quadrato; di modo che ſi venga a formare la figura tale, quale ſi vede quì delineata.

III.

Siccome dalla coſtruzione la figura BCEF è un
* *Cor.1.della pro. 4.* quadrato, così ſaranno li due parallelogrammi
* *def. 1. di queſto.* BDHI, HLEG (*) altrettanti quadrati. Quindi ſiccome il rettangolo ADHM è formato (*) dalle due linee AD, DH, così ſarà parimente formato dalle due AD, BD. Ora ſi conſideri che eſſendo
* *pro.43.I.* il ſupplemento IHGF eguale (*) al ſupplemento DCLH, ſarà, aggiugnendo ad entrambi l'iſteſſo quadrato BDHI, il parallelogrammo BDGF eguale al parallelogrammo BCLI; ma queſto parallelogrammo BCLI è eguale al parallelogram-
* *pro.36.I.* mo (*) CAML, perche ſono coſtituiti ſopra le baſi eguali BC, CA, e fralle medeſime parallele.

IM,

Digitalizzato da Google

IM, BA; dunque sarà ancora il parallelogrammo CAML eguale al parallelogrammo BDGF; aggiugnendo di nuovo ad entrambi il medesimo parallelogrammo DCLH: sarà il rettangolo ADHM, ovvero il rettangolo formato da AD, e da DB eguale al gnomone NOK. Finalmente aggiugnendo così al rettangolo, come al gnomone il quadrato HLEG, il quale è formato da HL, ovvero da DC, che è eguale (*) ad HL; sarà il rettangolo formato da AD, e DB insieme col quadrato di DC eguale al gnomone NOK insieme col quadrato GHLE: vale a dire al quadrato BCEF, il quale è formato da BC; ciocche doveva dimostrarsi. (*) pro. 34. I.

Dimostrazione co' numeri.

Sia	*AB* —— 10			
AC ovvero	*CB* —— 5	CB^2 --- 25	*AD.DB* ——	21
	BD —— 3		DC^2 ——	4
	DC —— 2			
	DA —— 7			25

PROP. VI. TEOREMA.

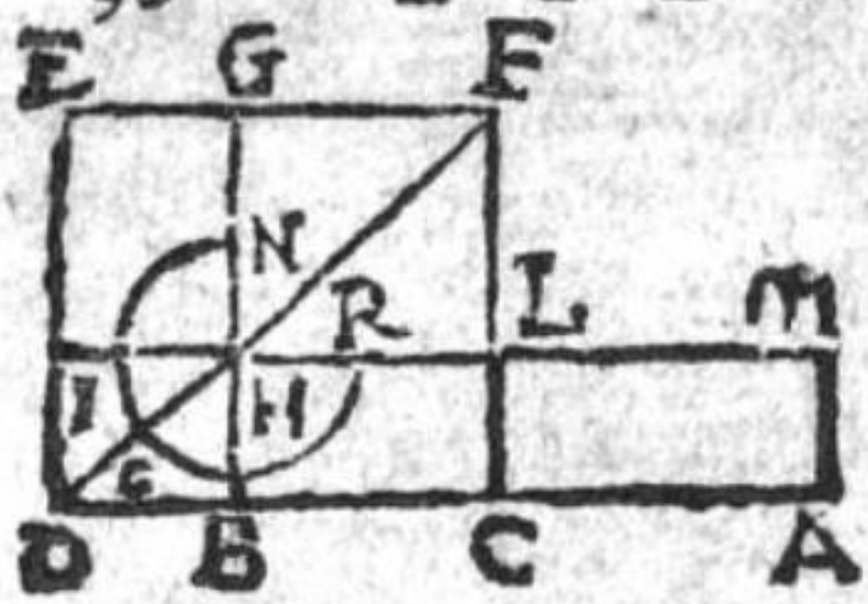
Se una linea retta è divisa I. in due parti eguali. II. le si aggiunga per diritto un'altra linea retta ad arbitrio; sarà il rettangolo formato dalla composta di tutta la linea, e dell'aggiunta, e dall'istessa aggiunta, insieme col quadrato della mettà eguale al quadrato formato dalla composta della mettà, e dell'aggiunta.

I.

Sia la linea retta AB segata in parti eguali nel punto C; e sia ad essa aggiunta per diritto la BD; io dico che il rettangolo formato dalla AD com-

pq-

Digitalizzato da Google



posta da tutta AB, e dall' aggiunta BD, e dall' istessa aggiunta DB insieme col quadrato della mettà BC sia eguale al quadrato della DC composta dalla mettà CB, e dall'aggiunta BD.

II.

I. Si costituisca (*) sopra la DC il quadrato DCFE. II. Si unisca (*) la diagonale DF. III. Si tiri per lo punto B (*) la retta BHG parallela a' due lati DE, CF del quadrato DCFE. IV. Per li punti H, ed A si tirino (*) le rette IHM, AM parallele rispettivamente a' due lati DC, CF del quadrato DCFE.

* *pro.46.I.*
* *dim. 1.*
* *pro.31.I.*
* *pro.31.I.*

III.

Perche dalla costruzione la figura DCFE, è un quadrato, saranno li due parallelogrammi DBHI, HLFG costituiti intorno alla diagonale del quadrato altrettanti quadrati (*): quindi siccome il rettangolo ADIM è formato (*) da' due latî AD, DI, così sarà parimente formato da' due latî AD, DB. Ora si consideri, che essendo i due parallelogrammi BCLH, CAMI eguali (*) fra di loro, perche sono costituiti sopra le basi eguali BC, CA, e fralle medesime parallele BA, HM; ed essendo di più il parallelogrammo BCLH eguale (*) al parallelogrammo IHGE; sarà il parallelogrammo CAML eguale al parallelogrammo IHGE: quindi aggiugnendo ad entrambi il medesimo parallelogrammo DCLI; sarà il rettangolo ADIM, vale a dire il rettangolo formato da AD, e da DB eguale al gnomone NOR: ed aggiugnendo in fine così al rettangolo, come al gnomone il medesimo quadrato HLFG, il quale è formato da HL, ovvero da BC, sarà il rettangolo formato da AD, e DB in-

* *Cor.1.della pro. 4.*
* *def. 1. di questo.*
* *pro.36.I.*
* *pro.43.I.*

Digitalizzato da Google

insieme col quadrato di BC eguale al gnomone NOR insieme col quadrato HLFC: vale a dire a tutto il quadrato DCFE, il quale è formato da DC; ciocche doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia *AB* —— 10
CB —— 5
BD —— 2
AD —— 12
CD —— 7

DC^2 —— 49

AD. DB —— 24
BC^2 —— 25
49

PROP. VII. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio: sarà il quadrato di tutta la linea insieme col quadrato di una delle sue parti eguale a' due rettangoli, formati entrambi da tutta la linea, e dall'istessa parte, insieme col quadrato dell' altra parte.

I.

Sia la linea retta AB segata ad arbitrio nel punto C; io dico che il quadrato di tutta la AB insieme col quadrato della parte BC è eguale a' due rettangoli entrambi formati da tutta AB, e dalla parte BC insieme col quadrato dell' altra parte AC.

II.

I. Si costituisca (*) sopra la AB il quadrato ABDE. II. Si unisca (*) il diametro BE. III. Si tiri per lo punto C (*) la retta CGF parallela a' due lati AE, BD del quadrato ABDE. IV. per lo punto G si tiri (*) la retta IGH parallela agli altri due lati AB, ED del quadrato ABDE.

* *pro.46.I.*
* *dim.* 1.
* *pro.31.I.*
* *pro.31.I.*

III.

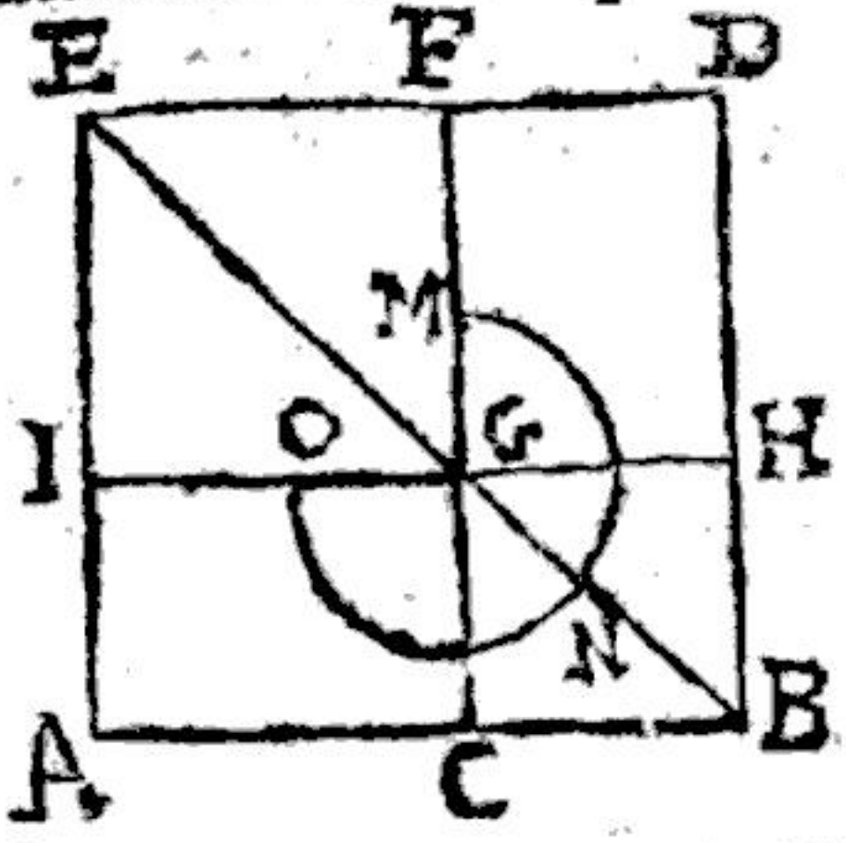
Siccome li due supplementi ACGI, FGHD

Digitalizzato da Google

*pro.43.I. sono (*) eguali fra di loro, così aggiugnendo ad essi il medesimo parallelogrammo CBHG, sarà il rettangolo ABHI eguale al rettangolo CBDF; e tutti due insieme saranno doppj del rettangolo ABHI: ma tutti due insieme sono eguali al gnomone MNO insieme col parallelográmo CBHG, il quale è un quadrato, (*) perche sta intorno al diametro BE del quadrato ABDE; dunque il gnomone MNO insieme col quadrato CBHG sarà doppio del rettangolo ABHI; il perche essendo questo rettangolo ABHI formato (*) da due lati AB, BH, ovvero da'due lati, AB, BC, perche BC, e BH sono eguali fra di loro; sarà il suddetto gnomone MNO insieme col quadrato CBHG eguale a due rettangoli entrambi formati da AB, e BC. Aggiungasi ad essi il medesimo quadrato IGFE, il quale è formato da IG, ovvero da AC: e sarà il gnomone MNO insieme co' due quadrati CBHG, IGFE, vale a dire saranno i due quadrati ABDE, CBHG, i quali sono formati rispettivamente da AB, e da BC eguali a due rettangoli formati da AB, e BC insieme col quadrato di AC; ciocche doveva dimostrarsi.

*Cor.1.della pro.4.

*def. 1. di questo.



Dimostrazione co' numeri.

Sia	*AB* —— 10	AB^2 ——	100	$2AB.CB$ ——	80
	AC —— 6	CB^2 ——	16	AC^2 ——	36
	CB —— 4		——		——
			116		116

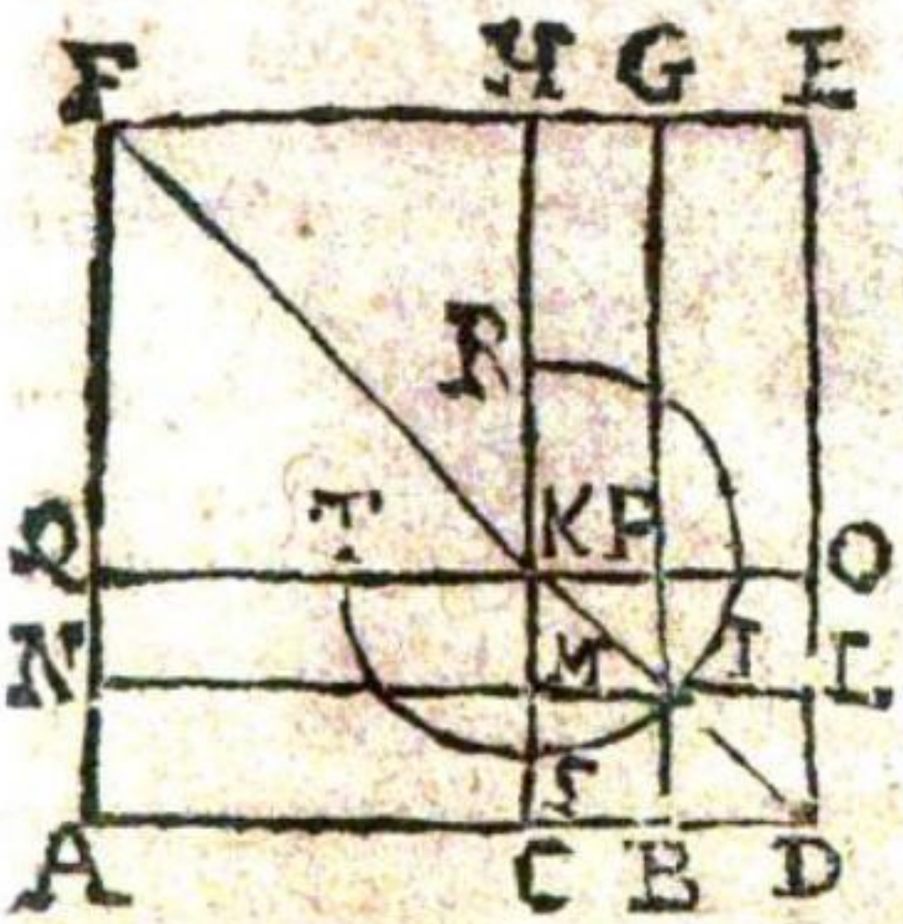
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. VIII. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il quadrato formato dalla composta di tutta la retta, e di una delle sue parti, come se fosse una linea sola eguale a quattro rettangoli formati da tutta la linea, e dalla medesima parte insieme col quadrato dell'altra parte.

I.



Sia la retta AB divisa ad arbitrio nel punto C; la quale s'intenda distesa fin'al punto D, in modo che BD sia eguale a BC; io dico che il quadrato formato dalla AD composta da tutta la AB, dalla BC è eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC insieme col quadrato dell'altra parte AC.

II.

I. Si costituisca (*) sopra la AD il quadrato ADEF. II. Si unisca (*) la diagonale FD. III. Per li punti B, e C si titino (*) le parallele BIG, GKH alle due DE, AF. IV. Per li punti I, e K si facciano passare le parallele NIL, QKO all'altre due AD, FE.

* *pro.* 46. I.
* *dim.* 31.
* *pro.* 31. I.

III.

Siccome dalla costruzione la figura ADEF è un quadrato, così (*) li parallelogrammi CDOK, QKHF situati intorno alla di lui diagonale saranno due quadrati. Di più siccome la figura CDOK è un quadrato, ed il suo lato CD dalla costruzione è tagliato in parti eguali nel punto B; così saranno le quattro parti di esso (*) CBIM, BDLI,

* *Cor.* 1. *della pro.* 4.
* *Cor.* 2. *della pro.* 4.

Digitalizzato da Google

BDLI, MIPK, ILOP quattro quadrati tutti eguali fra di loro, e tutto il quadrato CDOK sarà quadruplo del quadrato CBIM. Ora essendo CB eguale a BD, sarà ancora (*) a cagione de' due parallelogrammi CBPK, BDOP, KP eguale a PO; e quindi li due parallelogrammi KPGH, POEG costituiti sopra le basi KP, PO eguali, e fralle medesime parallele HE, KO saranno (*) eguali fra di loro. Di più essendo eguali li due quadrati CBIM, MIPK, sarà il lato CM (*) eguale al lato MK; e perciò li due parallelogrammi CMNA, MKQN costituiti sopra le basi eguali CM, MK, e fralle medesime parallele AQ, CK saranno eguali (*): quindi essendo eguali li due parallelogrammi KPGH, MKQN, perche (*) sono supplementi del parallelogrammo NIGF: saranno tutti quattro POEG, KPGH, MKQN, CMNA eguali fra di loro, e tutti insieme saranno quadrupli del parallelogrammo CMNA; ma si è dimostrato, che il quadrato CDOK sia quadruplo del quadrato CBIM; dunque li quattro suddetti parallelogrammi insieme col quadrato CDOK, vale a dire il gnomone TIR sarà quadruplo del rettangolo ABIN, il qual rettangolo essendo formato (*) da AB, e BI, ovvero da AB, e BC, ne siegue che il gnomone TIR sia eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC: aggiugnendo dunque ad entrambi il medesimo quadrato QKHF, il quale è formato da QK, ovvero da AC; sarà il gnomone TIR insieme col quadrato QKHF, ovvero tutto il quadrato ADEF, il quale è formato da AD, vale a dire dalla composta di AB, e BC eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC insieme col quadrato di AC; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro.* 34 I.

* *pro.* 36. I.

* *Cor.* 3. *della pro.* 46. I.

* *pro.* 36. I.

* *pro.* 43. I.

* *def.* 1. *di questo.*

Di-

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

Sia	AB —— 8	AD^2 ---100	$4AE.EC$ ——	64
	AC —— 6		AC^2 ——	36
CB o	BD —— 2			
	AD —— 10			100

PROP. IX. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa I. in parti eguali, e II. in parti diseguali; saranno i due quadrati formati dalle parti diseguali doppj de' due quadrati formati l'uno dalla metà, e l'altro da quella parte della linea, che rimane interposta fra' due segamenti.

I.

Sia la linea retta AB, segata in due parti eguali nel punto C, ed in due parti diseguali nel punto D: io dico che li due quadrati formati dalle parti diseguali AD, DB sono doppj di due quadrati, l'uno formato dalla metà AC, l'altro dalla parte CD, che rimane interposta fra' due segamenti.

II.

I. S'innalzi (*) dal punto C sopra la AB la perpendicolare CE, e facciasi (*) eguale ad AC, e per conseguente a CB. II. Si uniscano (*) le due EA, EB III. Dal punto D s'innalzi (*) la perpendicolare DF sopra la medesima AB. IV. Dal punto F si faccia cadere (*) sopra la EC la perpendicolare FG. V. Si unisca (*) la FA.

* *pro.* 11. I.
* *pro.* 3. I.
* *dim.* 1.
* *pro.* 11. I.
* *pro.* 12. I.
* *d. m.* 1.

III.

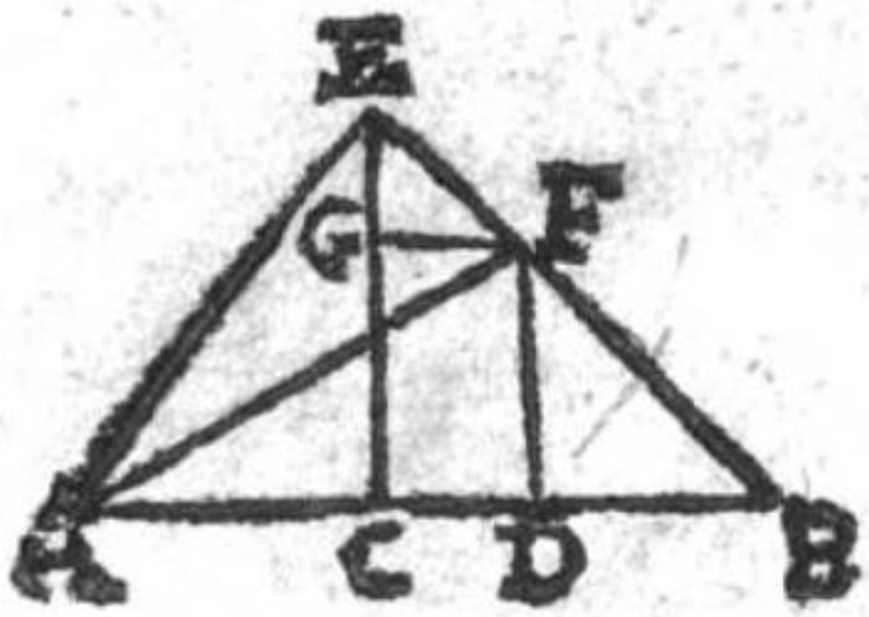
Siccome dalla costruzione la EC è eguale così alla AC, come alla CB, così saranno isosceli li due triangoli CEA, CEB, e gli angoli sopra le basi AE, EB saranno (*) eguali fra di loro. Quin-

* *pro.* 5. I.

di

Digitalizzato da Google

di avendo ogni triangolo i suoi tre angoli eguali
* pro.32.I. (*) a due retti, e di più essendo dalla costruzione ciascuno de' due suddetti triangoli rettangolo, saranno li quattro angoli CAE, CEA, CBE, CEB eguali alla mettà d'un retto: laonde tutto l'angolo AEB sarà retto, ed il triangolo AEF sarà rettangolo in E.



Inoltre nel triangolo EGF essendosi dimostrato l' angolo GEF eguale alla mettà d'un retto, e l'angolo EGF essendo dalla costruzione retto; sarà l'angolo rimanente (*) GFE eguale parimente alla mettà d'un retto: e perciò siccome gli angoli GEF, GFE sono eguali fra di loro, così saranno (*) parimente eguali i due lati GE, GF. Similmente nel triangolo FDB essendo stato l'angoloDBF mostrato eguale alla mettà d'un retto, e l'angolo FDB dalla costruzione essendo retto; sarà il rimanente angolo DFB eguale (*) alla mettà d'un retto; quindi l'egualità degli angoli DBF, DFB richiede che i lati (*) DF, DB siano eguali fra di loro: di modo che fin' ad ora rimangono dimostrate tre cose. I. Che il triangolo AEF sia rettangolo nel punto E. II. Che EG sia eguale a GF. III. Che DF sia eguale a DB.

* pro.32.I.
* pro.6.I.
* pro.32.I.
* pro.6.I.

Tali cose così premesse: perche dalla costruzione CE è eguale a CA: (*) sarà il quadrato di CE eguale al quadrato di CA, e tutti due insieme, i quali a cagione dell'angolo retto in C sono eguali (*) al quadrato dell'ipotenusa AE saranno doppj del quadrato di AC. Similmente poiche EG è eguale a GF, sarà il quadrato di EG eguale al quadrato di GF, e tutti due insieme li quali sono eguali (*) al solo quadrato di EF saranno doppj del quadrato di GF, ovvero del quadrato

* Cor.2.della pro.46.
* pro.47.I.
* pro.47.I.

di

di CD; quindi i due quadrati di AE, e di EF insieme saranno doppj de' due quadrati di AC, e di CD; ma per ragione dell' angolo retto AEF il quadrato dell'ipotenusa AF (*) è eguale a' quadrati di AE, e di EF: dunque sarà parimente il quadrato di AF doppio de' quadrati di AC, e di CD: il perche essendo, a cagione dell'angolo retto ADF, il quadrato dell' ipotenusa AF eguale (*) a' due quadrati di AD, e di DF, ovvero di AD, e DB: perche DB è eguale a DF; saranno i quadrati di AD, e di BD doppj de' quadrati di AC, e di CD; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro.47.I.*

(*) *pro.47.I.*

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB — 10			
AC — 5	AD^2 — 49	AC^2 — 25	
CD — 2	DB — 9	CD — 4	
AD — 7			
DB — 3	58	29	
		29	
		58	

PROP. X. TEOREMA.

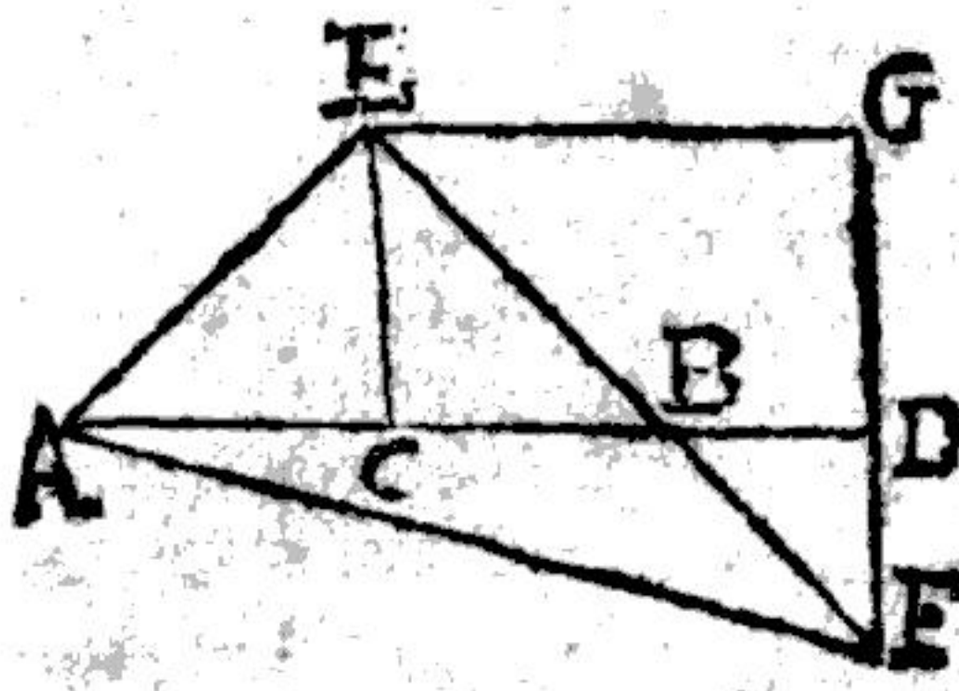
Se una linea retta è divisa I. in due parti eguali. II. le sia aggiunta per diritto un' altra linea retta ad arbitrio; il quadrato formato dalla composta di tutta la linea, e dell' aggiunta, insieme col quadrato dell' aggiunta saranno doppj de' quadrati formati dalla mettà, e dalla composta della mettà, e dell' aggiunta.

I.

Sia la retta AB segata in parti eguali nel punto C, e sia ad essa aggiunta per diritto la BD; io dico che il quadrato formato da AD composta da tutta la AB, e dall' aggiunta BD insieme col quadrato dell'aggiunta DB sono doppj del qua-

Digitalizzato da Google

drato della mettà AC, e del quadrato di CD, composta dalla mettà CB, e dall'aggiunta BD.



II.

* *pro.* 11. I. I. S'innalzi(*)la perpendicolare CE sopra la AB, e si faccia

* *pro.* 3. I. eguale (*) a CA, e per conseguente a CB. II. Si uniscano

* *dim.* 1. (*)le due EA, EB. III. Dal punto D s'in-

* *pro.* 11. I. nalzi (*) sopra AD la perpendicolare DG, la quale distesa vadasi ad unire nel punto F colla EB distesa parimente verso F. IV. Dal punto E si

* *pro.* 12. I. faccia cadere sopra la GF la perpendicolare (*)

* *dim.* 1. EG. V. Si unisca la AF (*).

III.

Siccome dalla costruzione la EC è eguale così alla AC, come alla BC, così i due triangoli CAE, CBE saranno isosceli, e gli angoli sopra le basi AE, EB saranno (*) eguali. Quindi

* *pro.* 5. I. avendo ogni triangolo i suoi tre angoli eguali a due retti (*), e di più essendo dalla costruzione

* *pro.* 32. I. ciascuno de' due suddetti triangoli rettangolo, saranno i quattro angoli CAE, CEA, CEB, CBE eguali alla mettà d'un'angolo retto; laonde tutto l'angolo AEB sarà retto, ed il triangolo AEF sarà rettangolo in E. Inoltre nel triangolo BDF essendo dalla costruzione retto l'angolo BDF, e mezzo retto l'angolo DBF, per essere eguale (*)

* *pro.* 15. I. all'angolo CBE opposto al vertice, sarà l'angolo rimanente (*) DFB eguale alla mettà d'un

* *pro.* 32. I. retto; quindi l'eguaglianza degli angoli DBF, DFB richiede che li due lati (*) DE, DF siano

* *pro.* 6. I. eguali. Similmente nel triangolo EGF essendo stato dimostrato che l'angolo GFE sia eguale alla mettà d'un retto, ed essendo dalla costruzione l'angolo FGE retto sarà il rimanente angolo

GEF

Digitalizzato da Google

GEF eguale alla mettà d'un retto ; quindi l'egualità degli angoli GFE, GEF richiede che li due lati GF, GE ſiano (*) eguali fra di loro. * *pro.6.I.*

Tali coſe così premeſſe, poiche dalla coſtruzione CE è eguale a CA, ſarà il quadtato di CE eguale al quadrato di CA, e tutti due inſieme ſaranno doppj del quadrato CA; ma tutti due inſieme ſono eguali (*) al quadrato dell' ipotenuſa AE; dunque il quadrato di AE ſarà doppio del quadrato di AC: e perche nell'iſteſſa maniera ſi farà vedere che il quadrato di EF ſia doppio del quadrato di EG, vale a dire del quadrato di CD (*), ne ſiegue, che li due quadrati di AE, e di EF inſieme ſono doppj de' due quadrati di AC, e di CD inſieme: ma a cagione dell' angolo retto in E il quadrato dell'ipotenuſa (*) AF è eguale a'due quadrati di AE, e di EF; dunque ſarà parimente il quadrato di AF doppio de' quadrati di AC, e di CD. Quindi eſſendo a cagione dell' angolo retto ADF il quadrato di AF eguale a' quadrati (*) di AD, e DF, ovvero di AD, e DB: perche è ſtata dimoſtrata DB eguale a DF: ſaranno i quadrati di AD, e di DB doppj de'quadrati di AC, e di CD: ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.47.I.*

* *pro.34.I.*

* *pro.47.I.*

* *pro.47.I.*

Dimoſtrazione co' numeri.

Sia AC o	*CB* —— 4	AD^2 --- 100	AC^2 —— 16
	BD —— 2	DB^2 --- 4	CD^2 —— 36
	AD —— 0		
	CD —— 6	104	52
			52
			104

Fin quì le dimoſtrazioni co' numeri anno potuto aver luogo: tutte le altre propoſizioni, che ſieguon o non ſi poſſono dimoſtrare per la ſtrada de' numeri.

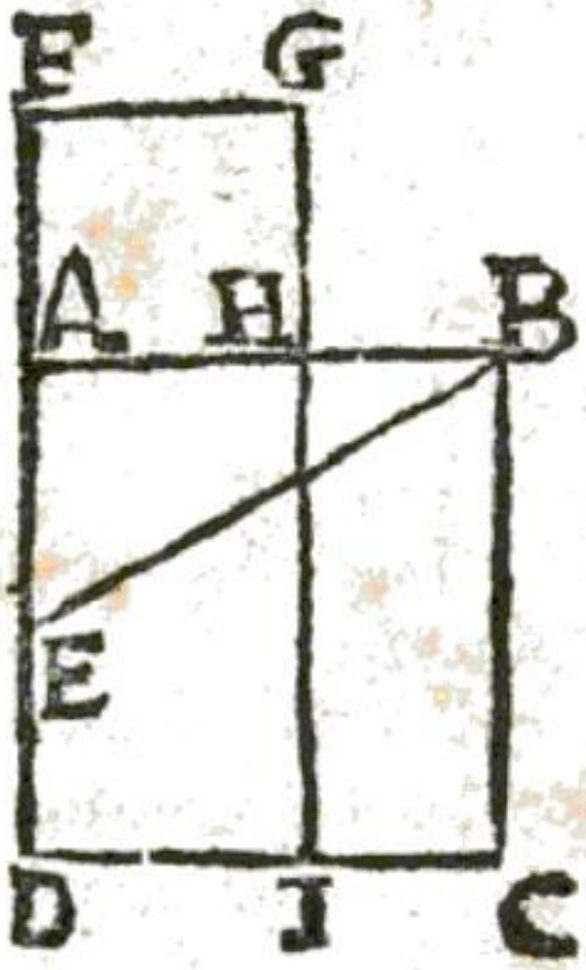
Digitalizzato da Google

PROP. XI. TEOREMA.

Dividere una linea retta data in modo, che il rettangolo formato da tutta la linea, e dalla parte minore di essa sia eguale al quadrato della parte maggiore.

I.

Sia data la linea retta AB: fa duopo dividerla con tal legge nel punto H, che il rettangolo formato da tutta AB, e dalla parte minore BH sia eguale al quadrato dell'altra parte AH.



II.

I. Descrivasi (*) sopra la AB il quadrato ABCD. II. Si tagli (*) il lato AD in parti eguali nel punto E. III. Si unisca (*) EB. IV. Si distenda EA sino ad F, in modo che EF sia eguale (*) ad EB. V. Descrivasi (*) sopra AF il quadrato AHGF, e si distenda (*) GH fino ad I: io dico che il rettangolo formato da AB, e BH sia eguale al quadrato di AH.

* *pro.* 46. I.
* *pro.* 10. I.
* *dim.* 1.
* *pro.* 3. I.
* *pro.* 46. I.
* *dim.* 2.

III.

Siccome dalla costruzione la retta AD è divisa in parti eguali nel punto E, ed è stata ad essa aggiunta per diritto la parte AF, così sarà (*) il rettangolo DFA insieme col quadrato di AE eguale al quadrato di EF, ovvero di EB, che dalla costruzione è eguale ad EF: ma a cagione dell'angolo retto EAB il quadrato dell'ipotenusa EB è eguale (*) a' due quadrati di AE, AB; dunque sarà parimente il rettangolo DFA insieme col quadrato di AE eguale al quadrato di AE ed al quadrato di AB: togliendone dunque il medesimo quadrato di AE, rimarrà (*) il ret-

* *pro.* 6. *di questo.*
* *pro.* 47. I.
* *assio.* 3.

Digitalizzato da Google

rettangolo DFA eguale al quadrato di AB: ma a cagione del quadrato AHGF il rettangolo DFA è eguale al rettangolo DFGI, ed il quadrato di AB dalla costruzione è il quadrato ABCD; dunque il rettangolo DFGI sarà eguale al quadrato ABCD: togliendone il medesimo rettangolo DIHA, il quale è comune; rimarrà (*) il quadrato AHGF eguale al rettangolo ICBH: ma il quadrato AHGF è formato da AH, ed il rettangolo ICBH è formato (*) da BH, e BC, ovvero da BH, ed AB; dunque il quadrato formato dalla parte maggiore AH è eguale al rettangolo formato dalla minore BH, e da tutta la AB; ciocche doveva farsi.

(*) il quadrato AHGF eguale al rettangolo * *assio.* 3.

* *def.* 1. *di questo.*

PROP. XII. TEOREMA.

Ne' triangoli ottusangoli il quadrato formato dal lato, che sta dirimpetto all'angolo ottuso tanto è maggiore de' quadrati degli altri due lati, i quali contengono l'angolo ottuso, quanto sono due rettangoli formati da uno de' lati, che sta intorno all'angolo ottuso, e da quella porzione del medesimo (portato innanzi quanto bisogna), ***che rimane interposta fra l'angolo ottuso, e la perpendicolare, che si fa cadere dall'angolo opposto.***

I.

Sia il triangolo ottusangalo CBA, il di cui lato BA, che sta intorno all'angolo ottuso in B si porti tanto innanzi, finche posto sopra di esso cadere la perpendicolare CD dell' angolo opposto C. Io dico che il quadrato del lato CA che sta dirimpetto all'angolo ottuso CBA tant' è maggiore de' quadrati degli altri due lati CB, BA, che contengono l'angolo ottuso, quanto è il valore di due rettangoli formati dal lato AB, che sta intorno all' angolo ottuso, e dalla parte di esso BD, che rimane interposta fra l'angolo ottuso

Digitalizzato da Google

RICAPITOLAZIONE
DEL
LIBRO II.
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,

Dove si veggono tutti i Teoremi del ſuddetto libro dimoſtrati per una ſtrada più corta.

Darà per avventura ad alcuni, che Euclide *abbia voluto rendere troppo miſterioſi i Teoremi di queſto ſecondo libro, come quelli, che ſi potevano dimoſtrare più ſemplicemente, e forſe con maggiore eleganza, ſenza nemmeno l'obbligo di ſegnare alcuna figura, ciocche egli non ha potuto ſchivare nelle ſue dimoſtrazioni. Ma ſiccome* Euclide *volle accommodarſi alla capacità, ed intendimento di coloro, che incominciano lo ſtudio della Geometria, a' quali non potevano farſi capir meglio i ſuddetti Teoremi, ſe non colle coſtruzioni, che egli ne ha date, così non merita alcuna taccia in queſta occaſione. Imperciocchè quantunque la ſtrada, che io ſarò per tenere in queſta ricapitolazione per iſtabilire la verità de' medeſimi Teoremi ſia più netta, ed aſſai più propria per far capire tutto il ſegreto di*

Digitalizzato da Google

di essi, nulladimanco poco si confà coll'intendimento de' principianti, al commodo de' quali Euclide *ebbe solamente riguardo.*

Teoremi
Delle proprietà d'una linea segata in due parti ad arbitrio.

Il fondamento di tutti i Teoremi registrati da Euclide in questo secondo libro è il primo di essi; cioè che il rettangolo formato da una linea indivisa, e da un'altra divisa in molte parti sia eguale a tutti i rettangoli formati dalla suddetta indivisa, e dalle parti della linea divisa: *di modo che posto questo Teorema per vero, il quale alla fine è un'assioma, e dipende da ciò che* tutte le parti unite insieme restituiscono il tutto, *tutti gli altri ne discendono chiarissimamente. Per mostrarlo sia la retta AB divisa ad arbitrio nel punto* C: *io dico* I. *che* (*) il quadrato di AB è eguale al rettangolo BAC insieme col rettangolo ABC. *Imperciocchè considerando la linea retta AB una volta come divisa nel punto* C, *ed un' altra volta come indivisa; sarà, per lo Teorema, che si è supposto vero, il rettangolo formato dall'indivisa AB, e dalla divisa AB, vale a dire il quadrato di AB eguale a due rettangoli il primo de' quali è formato dall'indivisa AB, e dalla parte AC della divisa; l'altro è formato dall' indivisa AB, e dall'altra parte* CB *dell' istessa divisa. Io dico* II. *che* (*) il rettangolo formato da tutta la AB, e dalla parte BC sia eguale al rettangolo formato dalle due parti AC, CB insieme col quadrato dell'istessa parte CB. *Imperciocchè considerando la retta AB come divisa in due parti* AC, *e* CB, *e la retta* CB *come indivisa, sarà, per lo suddetto Teorema, il rettangolo formato da tutta la divisa AB, e dall'in-*

(*) *pro. 2. di questo.*

A C B

(*) *pro. 3.' di questo.*

Digitalizzato da Google

divisa CB *eguale a due rettangoli, il primo de' quali è formato dalla parte* AC *della divisa, e dall' indivisa* CB, *l'altro è formato dall' altra parte* CB *dell'istessa divisa, e dall' indivisa* CB, *il qual rettangolo è eguale al quadrato di* CB. *Io dico* III. *che* (*) il quadrato di AB sia eguale a' quadrati delle parti AC, e CB insieme co' due rettangoli formati dall' istesse parti AC, CB. *Imperciocche, a cagione del primo Teorema, il quadrato di* AB *è eguale a' due rettangoli* ABC, BAC: *ma per il secondo Teorema il rettangolo* ABC *è eguale al rettangolo* ACE *insieme col quadrato di* CB: *ed il rettangolo* BAC *è eguale al rettangolo* BCA *insieme col quadrato di* AC: *dunque sarà il quadrato di* AB *eguale a' quadrati delle due parti* AC, CB *insieme co' due rettangoli formati dalle medesime parti* AC, CB. *Io dico* IV. *che* (*) i quadrati di tutta la AB, e della parte BC sono eguali a due rettangoli formati da tutta la AB, e dall' istessa parte BC, insieme col quadrato dell' altra parte AC. *Imperciocche per lo Teorema antecedente il quadrato di* AB, *è eguale a' quadrati di* AC, *e* CB *insieme co' due rettangoli formati similmente da* AC, *e* CB; *aggiugnendo dunque il medesimo quadrato di* BC, *saranno i quadrati di* AB, *e di* BC *eguali al quadrato di* AC, *a due volte il quadrato di* BC, *ed a' due rettangoli formati da* AC, *e* CB: *ma per il Teorema secondo due quadrati di* BC *insieme con due rettangoli formati da* AC, *e* CB *sono eguali a due rettangoli formati da* AB, *e* BC, *dunque i quadrati di* AB, *e* BC *saranno eguali al quadrato di* AC *insieme co' due rettangoli formati da* AB, *e da* BC. *Io dico finalmente che* (*) quattro rettangoli formati da AB, e da BC insieme col quadrato di AC sono eguali al quadrato della composta di AB, e di BC, come se fosse una linea sola. *Imperciocche per lo Teorema antecedente due rettangoli formati da* AB, *e da* BC *insieme col quadrato di* AC

so.

* *pro.* 4. *di questo.*

* *pro.* 7. *di questo.*

* *pro.* 8. *di questo.*

Digitalizzato da Google

ſono eguali a due quadrati di AB, e di BC; aggiugnendo ad eſſi due altri rettangoli formati da AB, e da BC: ſaranno quattro rettangoli formati da AB, e da BC inſieme col quadrato di AC eguali a' quadrati di AB, e BC inſieme con due rettangoli formati da AB, e da BC: ma per lo Teorema terzo i due quadrati di AB, e di BC inſieme con due rettangoli formati da AB, e da BC ſono eguali al quadrato formato dalla compoſta di AB, e BC; dunque quattro rettangoli formati da AB, e BC inſieme col quadrato di BC ſono eguali al quadrato formato dalla compoſta di AB, e di BC.

Della proprietà d'una linea ſegata in parti eguali, e diſeguali.

A C D B

Sia preſentemente la retta AB diviſa in parti eguali nel punto C, ed in parti diſeguali nel punto D. Io dico I. che (*) il rettangolo formato dalle parti diſeguali AD, DB inſieme col quadrato formato dalla linea CD, che rimane interpoſta fra' due ſegamenti ſia eguale al quadrato della mettà CB. *Imperciocchè conſiderando la retta AD come diviſa nel punto C, e la retta DB come indiviſa, ſarà, per lo Teorema generale, il rettangolo formato da AD, e DB eguale al rettangolo formato da AC, ovvero CB, e DB inſieme col rettangolo formato da CD, e DB: aggiugnendovi dunque il medeſimo quadrato di CD: ſarà il rettangolo ADB inſieme col quadrato di CD eguale al rettangolo CBD, al rettangolo CDB, ed al quadrato di di CD: ma il rettangolo CDB inſieme col quadrato di CD ſono eguali per la terza di queſto al rettangolo BCD: dunque il rettangolo ADB inſieme col quadrato di CD ſono eguali a due rettangoli CBD, BCD,*

(*) *pro. 5. di queſto.*

Digitalizzato da Google

BCD; i quali per la seconda di questo sono eguali al quadrato di CB. Io dico II. che (*) i quadrati delle parti diseguali AD, DB sono doppj de' quadrati di AC, e di CD. *Imperciocchè essendo la retta BC divisa nel punto D saranno per la proposizione ottava di questo quattro rettangoli formati da BC, e CD insieme col quadrato di DB eguali al quadrato della composta da BC, e CD, vale a dire al quadrato di AD: aggiugnendovi dunque il medesimo quadrato di DB saranno quattro rettangoli formati da BC, e CD insieme con due quadrati formati da DB eguali a due quadrati formati da AD, e DB: ma, per la settima di questo, due rettangoli formati da BC, e CD insieme col quadrato di DB sono eguali a due quadrati formati da BC, e CD, e per conseguente quattro rettangoli formati da BC, e CD insieme con due quadrati di DB sono eguali a due quadrati di BC, ovvero AC, & a due di CD; dunque i due quadrati di AD, e di BD sono eguali a due quadrati formati da AC, e due altri formati da CD, e perciò sono doppj de' quadrati formati da AC, e CD.*

* *pro. 9. di questo.*

Delle proprietà d'una linea segata in parti eguali, a cui sia stata aggiunta per diritto un'altra linea.

Sia finalmente la retta AB segata egualmente nel punto C, e sia ad essa aggiunta per diritto la retta BD; io dico I. (*) *che* il rettangolo formato da AD, *composta dalla tutta, e dall' aggiunta,* e dall' aggiunta BD insieme col quadrato di BC sia eguale al quadrato di CD *composta dalla metà, e dall' aggiunta. Imperciocchè considerando la retta AD come divisa nel punto C, e la retta BD come indivisa, sarà, per lo Teorema generale, il rettangolo ADB eguale al rettangolo formato dal-*

* *pro. 6. di questo.*

A C B D

Digitalizzato da Google

dalla parte AC, ovvero CB, e dall' indivisa BD insieme col rettangolo formato dall' altra parte CD, e dall' istessa indivisa BD: aggiugnendovi dunque il medesimo quadrato di CB, sarà il rettangolo ADB insieme col quadrato di CB eguale al rettangolo CBD al rettangolo CDB, ed al quadrato di CB: ma per la terza di questo il rettangolo CBD insieme col quadrato di CB sono eguali al rettangolo DCB: dunque sarà il rettangolo ADB insieme col quadrato di BC eguale a due rettangoli CDB, DCB, li quali sono eguali per la seconda di questo al quadrato di CD. Io dico II. che (*) i quadrati di AD, e di DB sono doppj de' quadrati formati da AC, e da CD. *Imperciocchè essendo la retta CD divisa nel punto B, saranno, per la proposizione ottava di questo, quattro rettangoli formati da DC, e CB insieme col quadrato di BD eguali al quadrato formato da CD, e CB come se fosse una sola linea, vale a dire al quadrato formato da AD: aggiugnendovi dunque il medesimo quadrato di BD, saranno quattro rettangoli formati da DC, e CB, insieme con due quadrati di BD eguali a' due quadrati formati da AD, e DB: ma i quattro rettangoli formati da DC, e CB insieme con due quadrati di BD sono, per la settima di questo, eguali a due quadrati di CD, e due altri di CB, ovvero di AC; dunque i quadrati di AD, e di DB saranno eguali a due quadrati di AC, & a due altri di CD, e perciò saranno doppj de' semplici quadrati di AC, e di CD.*

(*) *pro. 10. di questo.*

Proprietà de' Triangoli.

Nella proposiz. XLVII. del libro I. si è dimostrato, che il quadrato formato dal lato, che sta dirimpetto all' angolo retto d'un triangolo rettangolo sia eguale a' quadrati formati da' due lati, che comprendono il medesimo angolo retto. Ma se si paragona il quadrato del lato, che sta dirimpetto all' angolo ot-

Digitalizzato da Google

ottuso, o ad un' angolo acuto d' un triangolo co' quadrati degli altri due lati, si troverà, che nel primo caso egli sarà maggiore, nell' altro sarà minore di essi. Imperciocchè si è dimostrato, che (*) il quadrato formato dal lato, che sta dirimpetto all' angolo ottuso tanto è maggiore de' quadrati degli altri due lati, i quali contengono l'angolo ottuso, quanto sono due retangoli formati da uno de' lati, che stanno intorno all' angolo ottuso, e da quella porzione del medesimo, *portato innanzi quanto bisogna*, che rimane interposta fra l'angolo ottuso, e la perpendicolare, che si fa cadere sopra di lui dall'angolo opposto; *e si è dimostrato di più, che* (*) il quadrato formato dal lato, che sta dirimpetto all'angolo acuto tanto è minore de' quadrati degli altri due lati, i quali comprendono l'angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da uno de' lati, i quali sono intorno l'angolo acuto, e da quella parte del medesimo lato, *portato innanzi quanto bisogna*, che rimane interposta fra l'angolo acuto, e la perpendicolare, che si fa cadere sopra di esso dall'angolo opposto.

* *pro. 12. di questo.*

* *pro. 13. di questo.*

Problemi.

In tutto questo secondo libro ci sono due Problemi soli: il primo e questo (*). Data una linea retta segarla in modo, che il rettangolo formato da tutta la linea, e dalla parte minore sia eguale al quadrato della parte maggiore: *l'altro Problema è questo* (*). Data una figura rettilinea, ritrovare un quadrato, che le sia eguale.

* *pro. 11. di questo.*

* *pro. 14. di questo.*

Digitalizzato da Google

i EB, EF del triangolo BEF eguali a' due lati
C, EF del triangolo CEF ciascuno a cia-
cuno: quindi essendo l'angolo BEF maggiore
dell'angolo CEF sarà la base BF maggiore della
base CF (*).

* pro. 24. I.

IV. Finalmente dimostreremo, che dal punto F due linee eguali solamente si possono tirare una di quà, ed un'altra di là della minima FD. Facciasi l'angolo DEG (*) eguale all'angolo DEC, e si unisca (*) FG; io dico che le due FC, FG sono eguali fra di loro. Imperciocche essendo il raggio EC eguale al raggio EG, e la EF essendo comune; saranno i due lati CE, EF del triangolo CEF eguali a' due lati GE, EF del triangolo GEF ciascuno a ciascuno: quindi essendo di più dalla costruzione l'angolo CEF eguale all'angolo GEF; sarà la base FC eguale alla base FG: da che si vede, che dal punto F si possono far cadere alla circonferenza del cerchio due linee eguali: ma io dico che è impossibile di tirarne un' altra eguale a ciascuna delle due FC, FG: imperciocchè quest'altra, o s'avvicina più ad FA, e sarà maggiore così di FC, come di FG; o se ne allontana più, e sarà minore di esse, per quello, che si è dimostrato: di modo che rimangono stabilite tutte le parti del Teorema in questione.

* pro. 23. I.

* dim. 1.

COROLLARIO.

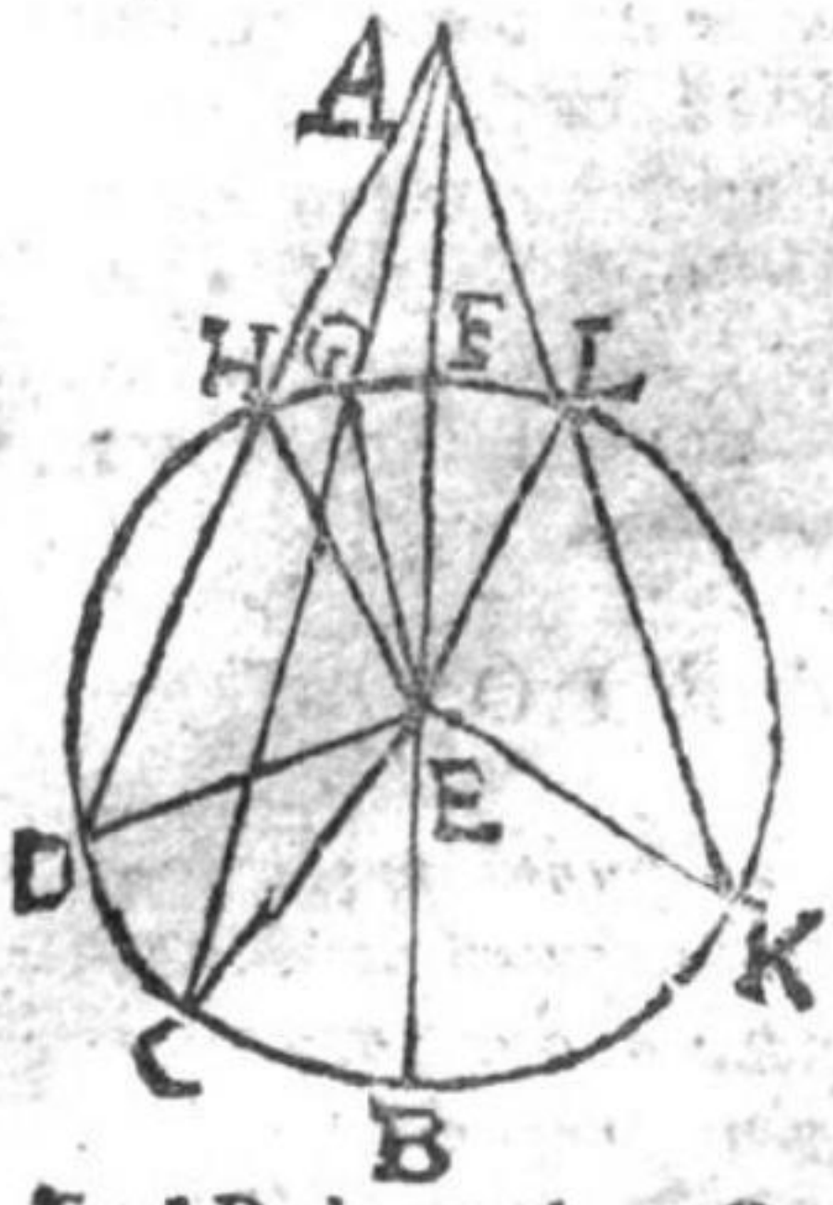
Essendosi dimostrato che da un punto preso dentro d'un cerchio diverso dal di lui centro non si possono tirare alla circonferenza più di due linee eguali, ne siegue, che ove da un punto preso dentro d'un cerchio potessero cadere alla di lui circonferenza più di due linee eguali, quel punto debba essere il centro del cerchio.

Digitalizzato da Google

PROP. VIII. TEOREMA.

Se fuori d'un cerchio si prende un punto, dal quale si facciano cadere tanto alla parte concava, quanto alla parte conveſſa della ſua circonferenza più linee rette: di tutte quelle, che vanno a terminare alla parte concava I. *la maſſima è quella la quale paſſa per lo centro.* II. *quella che s'avvicina più alla maſſima è maggiore delle più lontane.* III. *dal detto punto due ſole linee eguali ſi poſſono tirare una di quà, ed un' altra di là della maſſima. Di tutte quelle poi, che s'arreſtano alla parte conveſſa.* I. *la minima è quella, che portata innanzi paſſa per lo centro.* II. *quella che più s'avvicina alla minima è minore della più lontana.* III. *Finalmente dal ſuddetto punto due linee eguali ſi poſſono tirare una di quà, ed un'altra di là della minima.*

I.



Sia il cerchio FDBK fuori del quale ſi prenda il punto A, donde ſi facciano cadere così alla parte concava, come alla parte converſa della ſua circouferènza più linee rette AHD, AGC, AFB, ALK, una delle quali paſſi per lo centro E. Io dico dunque, che fra tutte quelle, le quali vanno a terminarſi alla parte concava, la maſſima ſia AB, la quale paſſa per lo centro E. Di più, che AC, la quale più s'avvicina alla maſſima è maggiore di AD, che più ſe ne allontana, e finalmente, che dal punto A due rette linee eguali ſi poſſano far cadere alla parte concava una di quà,

ed

Digitalizzato da Google

ed un'altra di là della maſſima. Di quelle poi, che s'arreſtano alla parte conveſſa; io dico che la minima ſia AF, la quale diſteſa oltre, paſſa per lo centro E: di più che AG, la quale poi s'avvicina alla minima è minore di AH, che più ſe ne allontana: e finalmente, che dal punto A ſolamente due linee rette eguali ſi poſſono far cadere alla detta parte conveſſa, una di quà, ed un'altra di là della minima.

I. Per dimoſtrare tutte queſte coſe ordinatamente faremo vedere in primo luogo, che AB ſia maggiore di AC. Congiungaſi (*) EC. Perche li due raggi EC, EB ſono eguali fra loro; aggiugnendo ad entrambi la medeſima linea retta AE, ſarà (*) la ſomma delle due AE, EC eguale a tutta la AB: ma la ſomma delle due AE, EC è maggiore (*) di AC; dunque ſarà parimente la AB maggiore di AC.

* dim. 1.
* aſſio. 2.
* pro. 20. I.

II. Paſſeremo poi a dimoſtrare, che AC ſia maggiore di AD. Si congiunga (*) ED. Siccome i due raggi EC, ED ſono eguali fra di loro, e la AE è comune; così ſaranno i lati AE, EC del triangolo AEC eguali a' lati AE, ED del triangolo AED ciaſcuno a ciaſcuno; quindi eſſendo l'angolo AEC maggiore dell'angolo AED; ſarà la baſe (*) AC maggiore della baſe AD.

* dim. 1.
* pro. 24. I.

III. Dimoſtreremo finalmente, che dal punto A due linee rette ſole eguali ſi poſſono far cadere alla parte concava. Facciaſi (*) l'angolo AEK eguale all' angolo AED. E poi ſi unisca EK (*). Perche i due raggi ED, EK ſono eguali fra di loro, e la AE è comune: ſaranno i due lati AE, ED del triangolo AED eguali a' due lati AE, EK, del triangolo AEK ciaſcuno a ciaſcuno: quindi eſſendo dalla coſtruzione l'angolo AED eguale all'angolo AEK ſarà la baſe AD eguale (*) alla baſe AK. Ora non ſi può immaginare un'altra linea retta eguale a queſte due;

* pro. 23. I.
* dim. 1.
* pro. 4. I.

Digitalizzato da Google

poiche essa, se più s'avvicina alla massima, sarà maggiore, se più se ne allontana sarà minore delle medesime.

I. Passando ora alle linee rette, che s'arrestano alla parte convessa della circonferenza, dimostreremo primieramente, che la AF sia la minima. Si uniscano le due GE, HE. Perche nel triangolo AGE i due lati AG, GE sono maggiori (*) del lato rimanente AE, togliendone via GE, ed FE, che sono eguali fra loro, per essere raggi del cerchio, sarà l'avanzo AG (*) maggiore dell'avanzo AF.

*pro.20.I.

*assio. 5.

II. Dimostreremo inoltre, che AG sia minore di AH. Perche i due raggi EG, EH sono egnali fra loro, ed EA è comune: saranno i due lati GE, EA del triangolo GEA eguali a' due lati HE, EA del triangolo HEA ciascuno a ciascuno; quindi essendo l'angolo GEA minore dell' angolo HEA, sarà la base (*) AG minore della base AH.

*pro.24.I.

III. Finalmente dimostreremo, che dal punto A due linee sole eguali si possono tirare alla parte convessa della circonferenza una di quà, ed un'altra di là della minima. Facciasi (*) l'angolo AEL eguale all'angolo AEH: ciò fatto si unisca la retta AL (*): siccome i due raggi EH, EL sono eguali fra loro, e la EA è comune; così saranno i due lati HE, EA del triangolo HEA eguali a' due lati LE, EA del triangolo LEA ciascuno a ciascuno; quindi essendo dalla costruzione l'angolo HEA eguale all'angolo LEA; sarà la base AH eguale alla base AL. Ora non si può immaginare una terza linea retta eguale a coteste due; imperciocche se essa è più vicina alla minima AF sarà minore, se è più lontana dalla minima sarà maggiore delle due suddette linee; ciocche doveva dimostrarsi.

*pro.23.I.

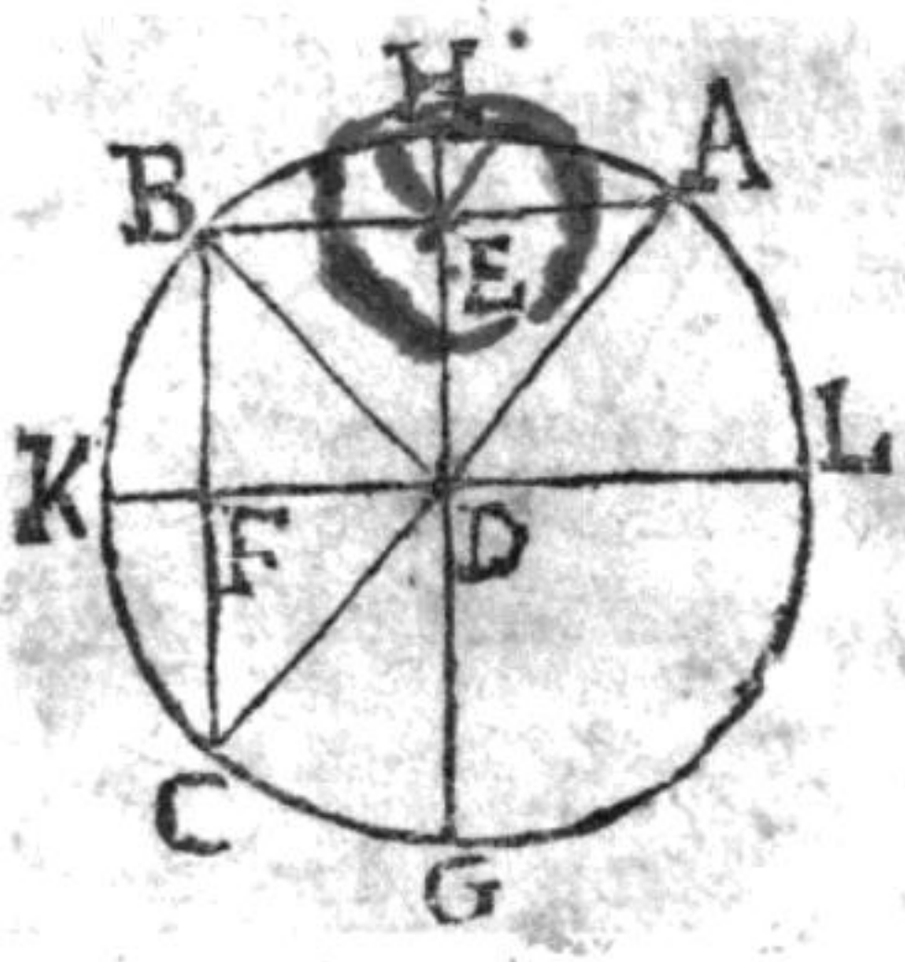
*dim. 1.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. IX. TEOREMA.

Se da un punto preso dentro la circonferenza d'un cerchio cadano alla detta circonferenza più di due linee rette eguali, il detto punto sarà centro del cerchio.



I.

Dentro al cerchio ABCG sia preso il punto D, dal quale cadono alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali, cioè DA, DB, DC: io dico che il punto D è centro del cerchio ABCG.

II.

I. Si congiungano (*) le rette AB, BC. II. Ciascuna delle quali si seghi per mezzo (*) ne' punti E, ed F. III. Si uniscano (*) le rette DE, DF. IV. Si distendano (*) in H, e G, in K, ed L.

* *dim.* 1.
* *pro.* 10. *I.*
* *dim.* 1.
* *dim.* 2.

III.

Siccome dalla costruzione la AE è eguale alla BE, e la ED è comune; così saranno i due lati AE, ED del triangolo AED eguali a' due lati BE, ED del triangolo BED ciascuno a ciascuno: quindi essendo dalla supposizione la base AD eguale alla base BD; sarà (*) l'angolo AED eguale all'angolo BED: e perciò la retta HEG sarà perpendicolare (*) sopra la BA. Segando dunque la retta HEG la sottesa BA per mezzo, & ad angoli retti essa deve contenere (*) il centro del cerchio. Similmente essendo dalla costruzione la BF eguale alla CF, e la DF essendo comune; saranno i due lati BF, FD del triangolo BFD eguali a' due lati CF, FD del triangolo

* *pro.* 8. *I.*
* *def.* 10. *I.*
* *Cor.* 1. *della pro.* 1.

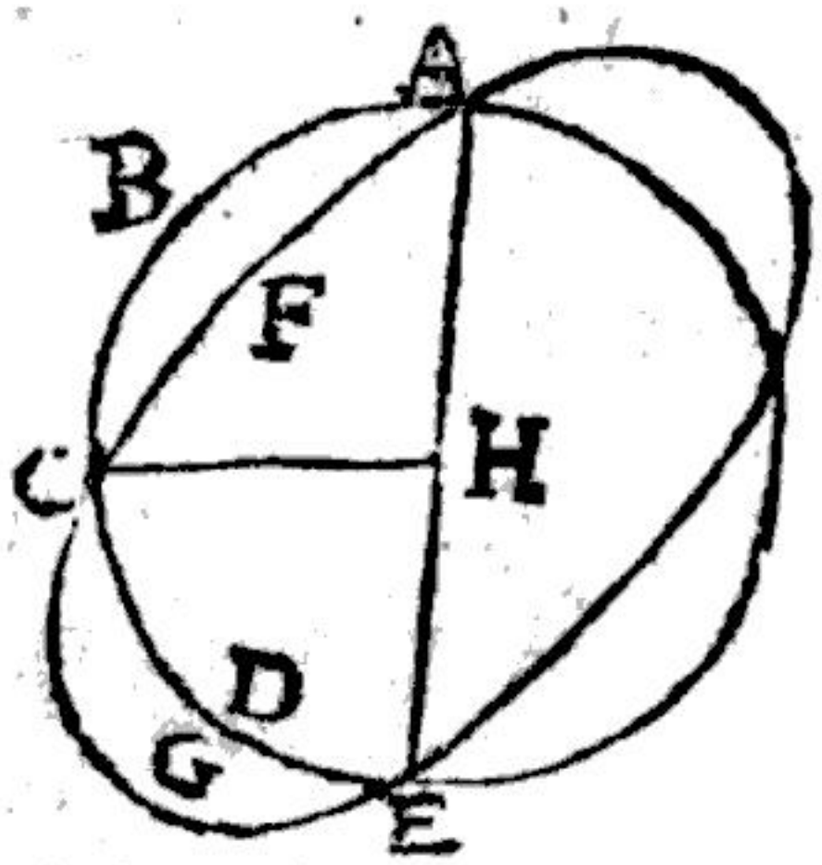
Digitalizzato da Google

CFD ciaſcuno a ciaſcuno: quindi eſſendo dalla ſuppoſizione la baſe BD eguale alla baſe CD ſarà l'angolo BFD eguale(*)all'angolo CFD: e perciò la retta KFL ſarà perpendicolare(*)ſopra la BC. Segando dunque la retta KFL la ſotteſa BC per mezzo,& ad angoli retti, eſſa deve contenere (*) il centro del cerchio. Laonde dovendoſi il centro ritrovare così nella retta HG, come nella retta KL, è forza che ſia il punto D, il quale ſolamente è comune all'una, e all'altra; ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *por.* 8. *I.*
* *def.* 10.
* *Cor.* 1. *della pro.* 1.

PROP. X. TEOREMA.

Un cerchio non ſega un'altro cerchio in più di due punti.



I.

Siano i due cerchi ABCDE, AFCGE; io dico che eſſi non ſi poſſono ſegare in più di due punti.

II.

Se mai è poſſibile, ſi ſeghino in tre punti, i quali ſiano A, C, E. Si ritrovi. I. il centro del cerchio ABCDE (*), il quale ſia H. II. Si uniſcano (*) HA, HC, HE.

* *pro.* 1. *di queſto.*
* *dim.* 1.

III.

Siccome dalla coſtruzione H è il centro del cerchio ABCDE; così le linee HA, HC, HE cadenti dal centro alla circonferenza ſaranno eguali fra loro (*). Quindi eſſendoſi dentro al cerchio AFCGE preſo il punto H, dal quale cadono alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali: eſſo ſarà il centro(*)dell'iſteſſo cerchio AFCGE: ma dalla coſtruzione è centro parimen-

* *def.* 15. *I.*
* *prossime.*

to

te del cerchio ABCDE: dunque due cerchi, che si segano anno il medesimo centro; ciocche non potendo sossistere (*), ne siegue la verità del Teorema in questione.

* *pro. 5. di questo.*

PROP. XI. TEOREMA.

La linea retta, che unisce i centri di due cerchi, che si toccono al di dentro, prolungata varrà a cadere nel punto del toccamento.

I.



Tocchinsi i due cerchi AED, ACB al di dentro nel punto A; io dico che la linea, la quale congiugne i centri de' cerchi suddetti prolungata varrà a cadere nel punto del toccamento A.

II.

I. Si ritrovino (*) i centri de' due cerchi, e sia per esempio F il centro del cerchio esteriore, e G il centro del cerchio interiore. II. Si unisca (*) la FG, la quale, se mai è possibile, distesa dall'una parte, e dall'altra non vadi nel punto del toccamento A, ma piuttosto ne' punti D, ed E. III. Si uniscano (*) le due AF, AG.

* *pro. 1. di questo.*
* *dim. 1.*
* *dim. 1.*

III.

Nel triangolo AGF i due lati AG, GF (*) sono maggiori del rimanente AF: ma AF è eguale ad FD (*): perche sono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque saranno similmente le due AG, GF maggiori (*) di FD: il perche togliendone via la FG, la quale è comune, rimarrà l'avanzo AG maggiore (*) dell'avanzo GD: ma essendo dalla costruzione G centro del circolo interiore la GA è eguale alla GB (*);

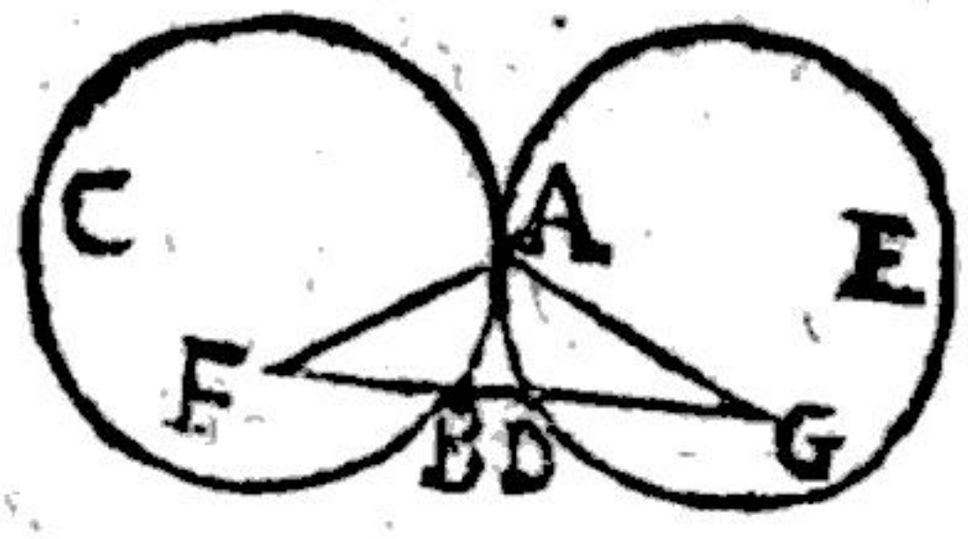
* *pro. 20. I.*
* *def. 15. I.*
* *assio. 1.*
* *assio. 5.*
* *def. 15. I.*

Digitalizzato da Google

* *assio.* 1. dunque sarà similmente la GB maggiore (*) della GD; vale a dire la parte maggiore del suo tutto; ciocche non potendo sossistere, ne siegue la verita del Teorema in questione.

PROP. XII. TEOREMA.

La linea diritta, la quale unisce i centri di due cerchi, che si toccano al di fuori, passa per lo punto del toccamento.



I.

Tocchinsi i due cerchi ABC, ADE al di fuori nel punto A; io dico che la linea retta, la quale unisce i loro centri deve passare per lo punto del toccamento A.

II.

* *pro.* 1. *di queslo.* I. Si ritrovino (*) i centri de' due cerchi ABC, ADE, i quali siano F, e G. II. Si unisca
* *dim.* 1. (*) la FG, la quale, se mai è possibile, non passi per lo punto del toccamento A. III. Si uniscano (*) le due AF, AG.
* *dim.* 1.

III.

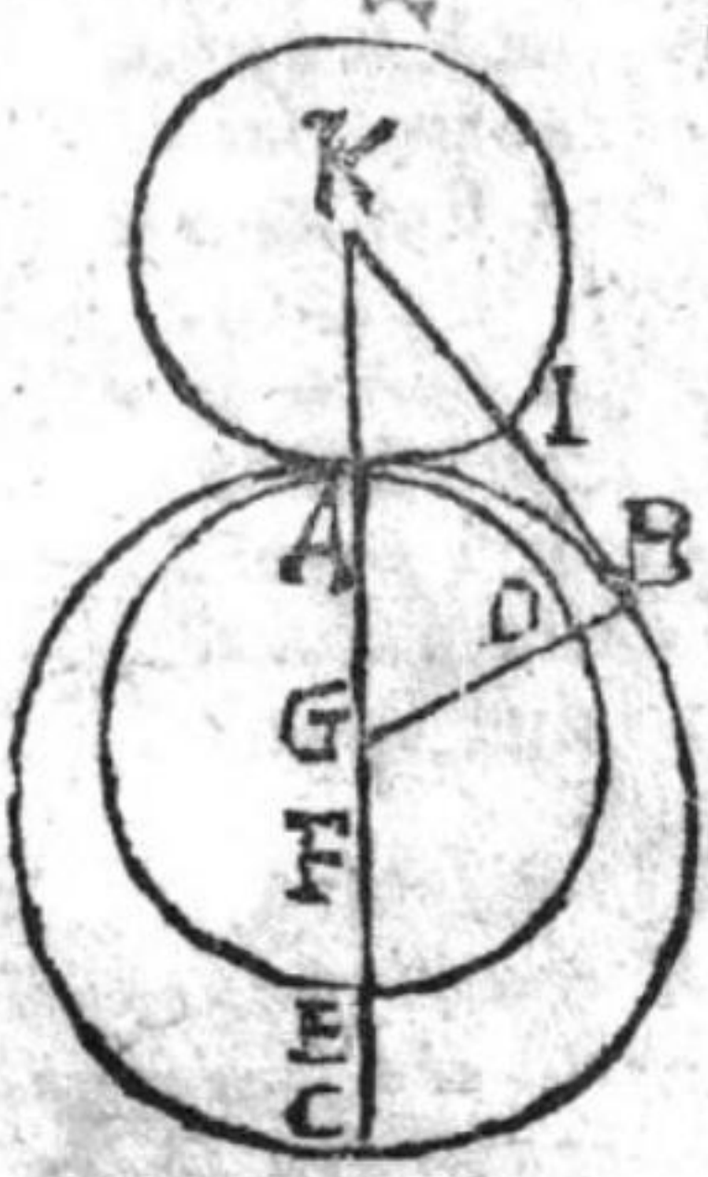
Siccome i punti F, e G sono rispettivamente centri de' cerchi ABC, ADE; così sarà il raggio FA eguale al raggio FB, ed il raggio GA eguale al raggio GD: e perciò le due FA, AG unite insieme saranno eguali alle due FB, GD unite insieme: ma tutta FG è maggiore delle due FB, GD unite insieme (*); dunque sarà ancora la
* *assio.* 9.
* *assio.* 1. FG maggiore (*) delle due AF, AG: vale a dire nel triangolo AFG sarà il lato FG maggiore degli altri due FA, AG; ciocche non potendo
* *pro.* 20. I. sossistere (*); ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XIII. TEOREMA.

Un cerchio, o che tocchi al di dentro, o che tocchi al di fuori un'altro cerchio, lo toccherà in un punto solo.



I.

Tocchinsi i due cerchi ABC, ADE al di dentro, & i due cerchi ABC, AI al di fuori nel punto A; io dico che essi si toccheranno in un punto solo, il quale è A.

II.

Supponendo primieramente, che i cerchi ABC, ADE si tocchino al di dentro. I. Si ritrovino (*) i loro centri, i quali siano G, ed F. II. Si unisca (*) la GF, la quale prolungata varrà a cadere nel punto del toccamento A. (*) III. Si si tiri la retta GDB ad arbitrio. Supponendo poi, che i cerchi ABC, AI si tocchino al di fuori si trovino (*) ancora. I. i loro centri K, ed F. II. Si unisca (*) KF, la quale passerà per lo punto (*) del toccamento A. III. Si tiri ad arbitrio la retta KIB.

* *pro.* 1. *di questo.*
* *dim.* 1.
* *pro.* 11. *di questo.*
* *pro.* 1. *di questo.*
* *dim.* 1.
* *pro. ante.*

III.

I. Siccome nel diametro AC del cerchio ABC si è preso il punto G diverso dal centro F; così sarà (*) GC la massima, e GA sarà la minima; e perciò sarà GA minore di GB. Ma GA è eguale a GD (*); perche G dalla costruzione è centro del circolo ADE; dunque sarà eziandio (*) GD minore di GB. E perciò il punto D della circonferenza ADE è diverso dal punto B della circonferenza ABC: ora la medesima dimostrazione avendo luogo ancora negli altri punti delle due circonferenze, poiche si è tirata ad ar-

* *pro.* 7. *di questo.*
* *def.* 15. I.
* *assio.* 1.

Digitalizzato da Google

bitrio la retta GDB, ne ſiegue che li due cerchi ABC, ADE ſi toccano nel ſolo punto A.

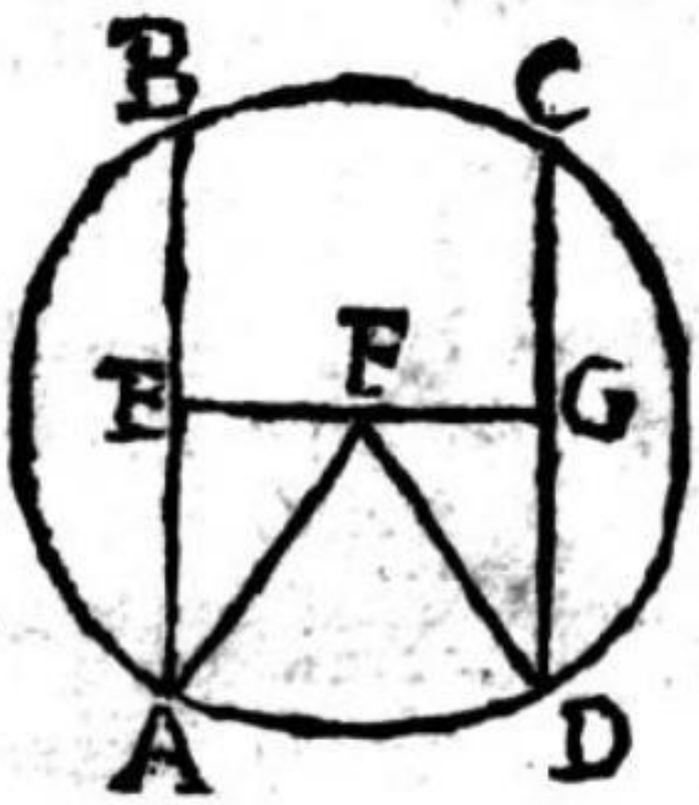
II. Inoltre perche fuori del cerchio ABC ſi è preſo il punto K, dal quale ſi è tirata la linea KA, paſſante per lo centro, ſarà (*) KA la minima vale a ſarà KA minore di KB: ma KA è eguale a KI (*), perche ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque ſarà ſimilmente KI minore di KB (*), e perciò il punto I della circonferenza AI è diverſo dal punto B della circonferenza ABC; quindi l'iſteſſa dimoſtrazione avendo ancora luogo negli altri punti delle due circonfereuze, poiche ſi è tirata ad arbitrio la retta AIB; ne ſiegue, che i due cerchi ABC, AI ſi toccono nel ſolo punto A.

(*) *pro.* 8. *di queſto.*
(*) *def.* 15. *I.*
(*) *aſſio.* 1.

PROP. XIV. TEOREMA.

Nel cerchio. I le linee rette eguali ſono egualmente lontane dal centro. II. Quelle che ſono egualmente lontane dal centro ſono eguali fra di loro.

I.



Nel cerchio ABCD, che ha per centro il punto F, ci ſiano due linee AB, DC. Io dico che ſe queſte due linee ſono eguali, eſſe ſarauno egualmente lontane dal centro; e viceverſa ſe ſono egualmente lontane dal centro, eſſe ſaranno eguali.

II.

I. Dal centro F ſi facciano cadere le perpendicolari FE, FG (*) ſopra le rette AB, DC. II. Si uniſcano (*) le rette FA, FD.

(*) *pro.* 12. *I.*
(*) *dim.* 1.

III.

Perche la retta FE paſſante per lo centro divide la retta AB, che non paſſa per lo centro ad augoli retti nel punto E, la dividerà (*) per mezzo nell'iſteſſo punto E, e perciò ſarà AE eguale a BE.

(*) *pro.* 3. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

a BE, e per conſeguente AB doppia di AE. Similmente perche la retta FG paſſante per lo centro divide la retta CD, che non paſſa per lo centro ad angoli retti nel punto G, la dividerà per mezzo nell' iſteſſo punto G: e perciò ſarà DG eguale a GC, e per conſeguente DC doppia di DG.

Ciò premeſſo, ſupponeudo I. che AB ſia eguale a DC, ſarà (*) la mettà AE eguale alla mettà DG, ed il quadrato di AE ſarà eguale al quadrato di DG; ficcome ancora ſarà il quadrato del raggio AF eguale al quadrato del raggio DF. Ma a cagione dell'angolo retto AEF il quadrato dell' ipotenuſa (*) AF è eguale a' quadrati de' lati AE, EF: e per la medeſima ragione il quadrato dell' ipotenuſa DF è eguale a' quadrati de' lati DG, GF: dunque ſaranno ſimilmente i quadrati de' lati AE, EF eguali a' quadrati de' lati DG, GF: quindi eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato di AE ſia eguale al quadrato di DG, ſarà ſimilmente il quadrato di EF eguale al quadrato di GF: e per conſeguente ſarà la EF eguale alla GF. Dal che ne ſiegue, che le linee rette AB, DC ſono egualmente lontane dal centro (*).

* aſſio. 1.

* pro. 47. 1.

* def. 4. di queſto.

Supponendo II. che le due rette AB, CD ſiano egualmente lontane dal centro F, vale a dire, ſupponendo che EF ſia eguale a GF, ſarà il quadrato di EF eguale al quadrato di GF; ficcome il quadrato del raggio FA ſarà eguale al quadrato del raggio FD. Ma il quadrato del raggio FA è eguale a' quadrati di EF, ed EA (*); ed il quadrato del raggio FD è eguale a' quadrati di FG, GD: dunque ſaranno i due quadrati di FE, e di EA inſieme eguali a' due quadrati di FG, e di GD inſieme: quindi eſſendo il quadrato di EF eguale al quadrato di FG, ſarà il quadrato di EA eguale al quadrato di GD, e per conſeguente la EA ſarà eguale alla GD: ma la BA è doppia della EA, e la CD è doppia della GD; dunque

* pro. 47. 1.

Digitalizzato da Google

assio.6. sarà (*) la BA eguale alla CD: ciocche dovea dimostrarsi.

PROP. XV. TEOREMA.

Di tutte le linee tirate in un cerchio. I. *la massima è il diametro.* II. *quella che sta più vicina al centro è maggiore di quella, che ne sta più lontana.*

I.



Nel cerchio CDFE vi siano tre linee rette CD, AB, EF, delle quali la AB sia diametro, e la CD sia più vicina al centro G della EF; io dico primieramente, che AB è la massima, vale a dire è maggiore di CD, e di EF, e di qualsivoglia altra linea tirata nel cerchio. Dico di più, che la CD è maggiore della EF.

II.

** pro.12.I.* I. Dal punto C si facciano (*) cadere le perpendicolari GH, GK sopra le rette CD, EF. Quindi poiche la linea retta EF si suppone più lontana **def.5.di qu.* dal centro G della linea retta CD, sarà (*) la ** pro.3.I.* GK maggiore della GH. Tagliasi dunque (*) II. La GL eguale alla GH. III. Dal puato L s'in- **pro.11.I.* nalzi (*) la perpendicolare LM sopra la GK, la ** dim.2.* quale si distenda (*) fino al punto N. IV. Si uni- ** dim. 1.* scano (*) le rette GC, GD, GM, GN, GE, GF.

III.

I. Siccome la GA è eguale alla GC, e la GB è eguale alla GD, perche sono linee cadenti dal centro alla circonferenza, così sarà tutta la AB eguale alle due GC, GD unite insieme. Ma le due ** pro.20.I.* G[illegible] GD unite insieme sono maggiori (*) di CD; ** assio.1.* du[illegible]ne ancora AB sarà maggiore (*) di CD.

Siccome dalla costruzione le perpendicolari

GL

Digitalizzato da Google

GL, GH cadenti dal centro G ſopra, le rette CD MN ſono eguali fra di loro ; così le medeſime rette CD, MN ſaranno (*) parimente eguali; ma MN è maggiore della EF (*), a cauſa che ſono eſſe baſi de' triangoli MGN, EGF, i quali anno i lati MG, GN eguali a' lati EG, GF, e l'angolo MGN contenuto ſotto i primi lati maggiore dell'angolo EGF contenuto ſotto gli altri due lati ; dunque ſarà parimente la CD maggiore (*) della EF.

* *pro. ante.*

* *pro.24.I.*

* *aſſio.*

PROP. XVI. TEOREMA.

I. *La linea retta, che inſiſte perpendicolarmente all' eſtremità del diametro d'un cerchio, cade tutta fuori di eſſo, vale a dire è tangente.* II. *Nel luogo, che è fra la detta linea, e la circonferenza del cerchio non ci può cadere alcun'altra linea retta.* III. *L'angolo del mezzo cerchio è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo.* IV. *L'angolo formato dalla circonferenza del cerchio, e dalla tangente, il quale ſuole chiamarſi* angolo del contatto *è minore di qualſivoglia angolo acuto rettilineo.*

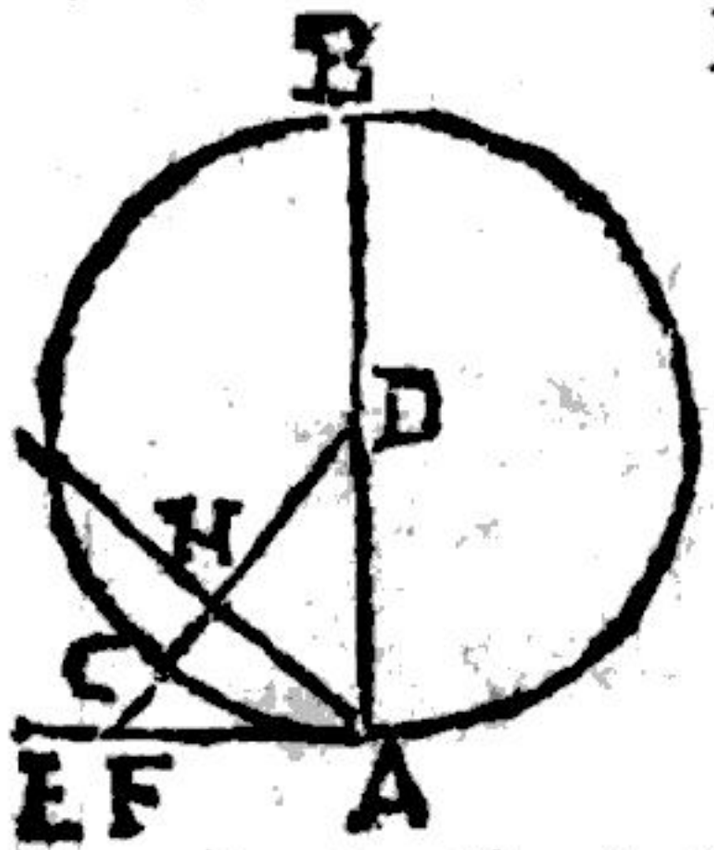
I.

Sia il cerchio ABC intorno al centro C, ed al diametro AB; io dico primieramente, che la linea retta AE tirata dal punto A ad angoli retti ſopra la AB cade tutta fuori del cerchio, e per conſeguente è tangente. Inoltre che nel luogo, che è fra la perpendicolare AE, e la circonferenza AC del cerchio non può cadervi altra linea retta. Di più che l'angolo del mezzo cerchio CAB è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo. E finalmente, che l'angolo miſtilineo CAE formato dalla circonferenza del cerchio, e dalla perpendicolare, il quale angolo ſuole chiamarſi angolo *del contatto* ſia minore d'ogni angolo acuto rettilineo.

II.

Digitalizzato da Google

II.



I. Che la linea retta AE, cada tutta fuori del cerchio, si dimostra così. Prendasi nella AE qualsivoglia punto F; e si unisca (*) la DF. Per vicino che sia il punto F al punto A, sempre in tal modo si verrà a costituire il triangolo DAF, il quale è rettangolo in A dalla suppozione: laonde essendo l'angolo DAF retto, sarà l'angolo DFA minore del retto (*); e per conseguente il lato DF sarà maggiore (*) del lato DA: ma il lato DA è eguale a DC; perche sono linee cadenti dal centro alla circonferenza: dunque sarà parimente DF maggiore di (*) DC: e perciò il punto F sarà più in là della circonferenza del circolo. Ora poiche l'istessa dimostrazione và per tutti gli altri punti, poiche il punto F è stato preso ad arbitrio, ne siegue che la perpendicolare AE cade tutta fuori del cerchio.

(*) dim. 1.

(*) pro. 17. I.

(*) pro. 19. I.

(*) assio. 1.

II. Che poi nel luogo fra la tangente AE, e la circonferenza del cerchio non possa cadervi altra linea retta, si dimostra così. Nell'angolo DAE si tiri qualsivoglia retta AH: per vicina che ella sia alla tangente AE, vale a dire per acuto, che sia l'angolo HAE, sempre l'angolo rimanente DAH sarà minore del retto: e perciò dal punto D si potrà (*) far cadere sopra la retta AH la perpendicolare DH. Poiche dunque nel triangolo DHA, l'angolo DHA è retto, e l'angolo DAH è acuto, sarà il lato DA (*) maggiore del lato DH: ma DA è eguale a DC, perche sono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque sarà DC maggiore di DH. Quindi il punto H della retta AH starà dentro la circonferenza del cerchio; e per conseguenza la retta AH deve

(*) pro. 12. I.

(*) pro. 19. I.

Digitalizzato da Google

deve essere entrata dentro.

III. Quindi l'angolo del mezzo cerchio CAB dovrà essere maggiore di ogni angolo acuto rettilineo: perciocche se vi fusse qualche angolo acuto rettilineo maggiore dell'angolo CAD, ne seguirebbe, che adattato uno de'lati di cotesto angolo sopra il diametro AB a cominciare dal punto A, l'altro lato dovria cadere fra la circonferenza AC, e la tangente AE: ciocche si è dimostrato impossibile.

IV. E finalmente l'angolo del contatto CAE deve essere minore d'ogni angolo acuto rettilineo. Percioeche se vi potesse essere un'angolo acuto rettilineo minore dell'angolo EAC, ne seguirebbe, che disteso uno de' lati di cotesto angolo sopra la tangente AE, a cominciare dal punto A, l'altro lato dovria cadere fra la tangente AE, e la circonferenza AC; ciocche si è dimostrato essere impossibile.

COROLLARJ.

DI qui è manifesto. I. che una linea retta sola può toccare il cerchio in un punto dato, e che ogni altra linea retta deve entrare dentro al cerchio. II. che per tirare la tangente al punto A, fa duopo 1. tirare il diametro ADB, e 2. dal punto A innalzare (*) la perpendicolare AE sopra il detto diametro AB.

(*) pro. 11. I.

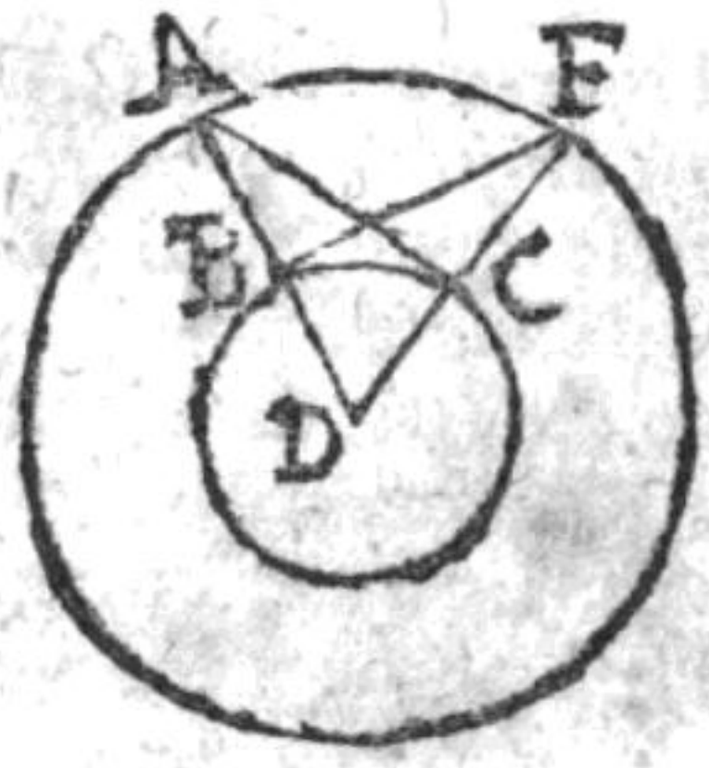
PROP. XVII. PROBLEMA.

Da un punto dato fuori d'un cerchio tirare una linea, che tocchi il medesimo cerchio.

I.

Sia dato il punto A fuori del cerchio BC: fa duopo tirare dal punto A una linea, che tocchi il detto cerchio BC.

Digitalizzato da Google



II.

I. Si ritrovi il centro D (*) del cerchio BC. II. Si unisca (*) la AD. III. Dal centro D, col raggio DA descrivasi (*) il cerchio AF. IV. Dal punto B s'innalzi (*) la BF perpendicolare sopra la AD. V. Si unisca (*) la DF. VI. Si unisca la AC: io dico che questa tocca il cerchio nel punto C.

(*) pro. 1. di qu.
(*) dim. 1.

III.

Siccome D è centro de' cerchi BC, AF; così le linee rette DC, DB, e DA, DF cadenti dal centro alle circonferenze saranno eguali fra di loro. Quindi i due lati DC, DA del triangolo CDA saranno eguali a' due lati BD, DF del triangolo BDF ciascuno a ciascuno: sicche essendo in oltre l'angolo CDA contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all'angolo BDF contenuto sotte i lati dell'altro triangolo: sarà (*) l'angolo DCA eguale all'angolo DBF: ma quest' angolo DBF dalla costruzione è retto: dunque l'angolo DCA sarà parimente retto; quindi insistendo la retta CA perpendicolarmente all' estremità del raggio CA, essa toccherà (*) il cerchio BC nel punto C; ciocche doveva farsi.

(*) dim. 3.
(*) pro. 11. I.
(*) dim. 1.
(*) pro. 4. I.
(*) pro. ante.

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal centro al punto del toccamento si tira una linea retta, questa sarà perpendicolare alla tangente.

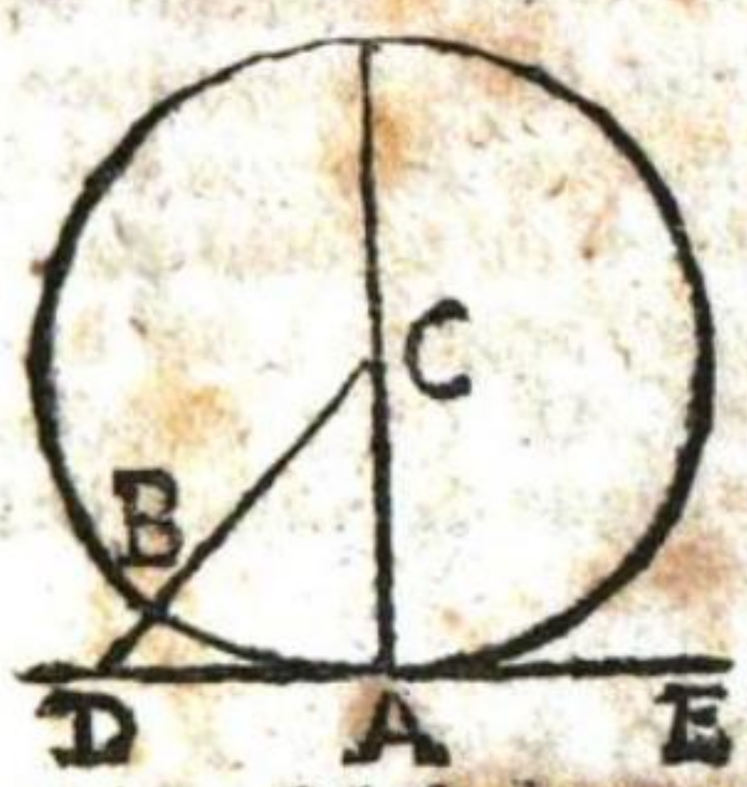
I.

La linea retta DE tocchi il cerchio AFB nel punto A, e dal centro C al punto A del toccamento s'intenda tirata la linea retta CA; io dico che es-

Digitalizzato da Google

essa è perpendicolare alla tangente DE.

II.

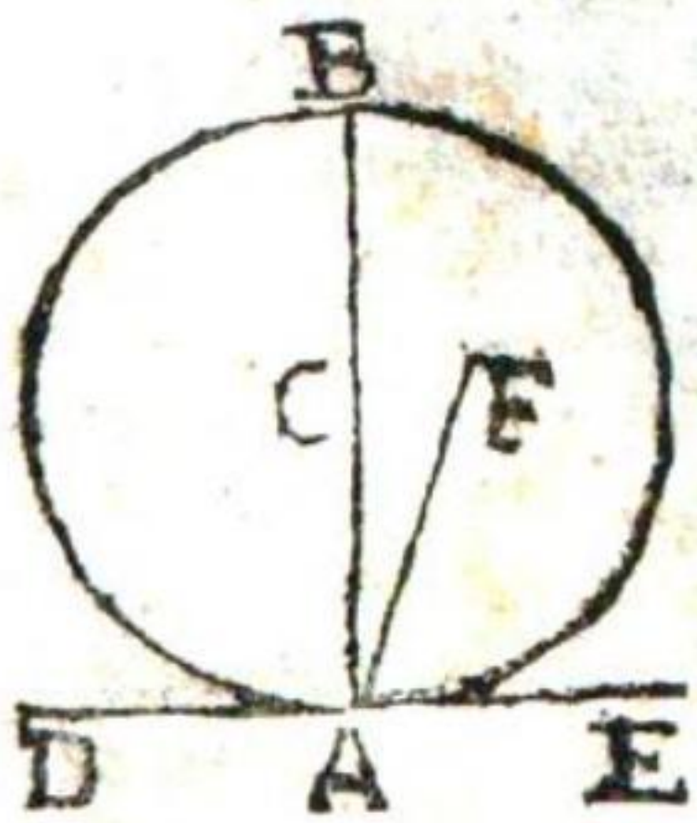


Se mai è possibile non sia la CA perpendicolare alla DE; ma sia piuttosto la CBD. Perche nel triangolo CDA l'angolo CDA si vuole retto sarà l'angolo CAD acuto; e perciò l'angolo CDA sarà maggiore dell'angolo CAD; il perche il lato CA sarà maggiore (*) del lato CD; ma CA è eguale a CB, perche sono linee cadenti dal centro alla circonferenza: dunque sarà parimente CB maggiore (*) di CD: vale a dire sarà la parte maggiore del tutto; ciocche non potendo sossistere ne siegue la verità del Teorema in questione. * *pro.19.I.* * *assio.1.*

PROP. XIX. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal punto del toccamento s'innalza una perpendicolare alla tangente, nella perpendicolare si troverà il centro del cerchio.

I.



La linea retta DE tocchi il cerchio AB nel punto A, e dal punto del toccamento A s'intenda innalzata la perpendicolare AB alla tangente DE; io dico che in questa perpendicolare si ritrova il centro del cerchio.

II.

Se mai è possibile trovisi il centro del cerchio fuori della perpendicolare AB, come per esempio in F. Si unisca (*) la FA. * *dim. 1.*

III.

Digitalizzato da Google

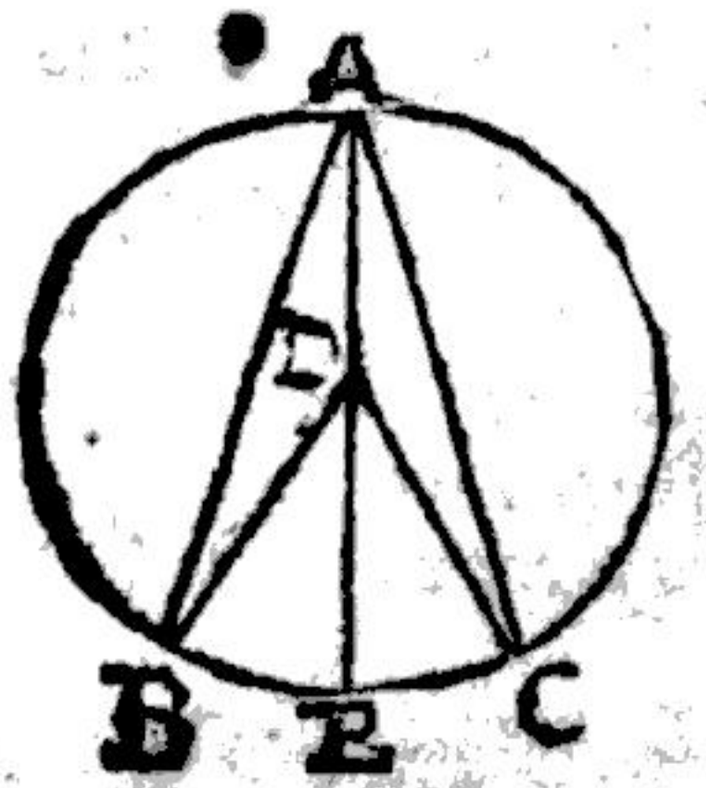
III.

Perche la FA unisce il centro del cerchio col punto del toccamento A, essa sarà perpendico-
* *pro.ante.* lare alla tangente DE (*): quindi l'angolo FAE sarà retto: ma dalla suppoſizione è retto parimente l'angolo BAE; dunque l'angolo FAE mi-
* *ass.12.* nore sarà eguale al maggiore CAE (*): ciocche non potendo sossistere, ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XX. TEOREMA.

Nel cerchio l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, purche però l'uno, e l'altro abbiano l'istessa circonferenza per base.

I.

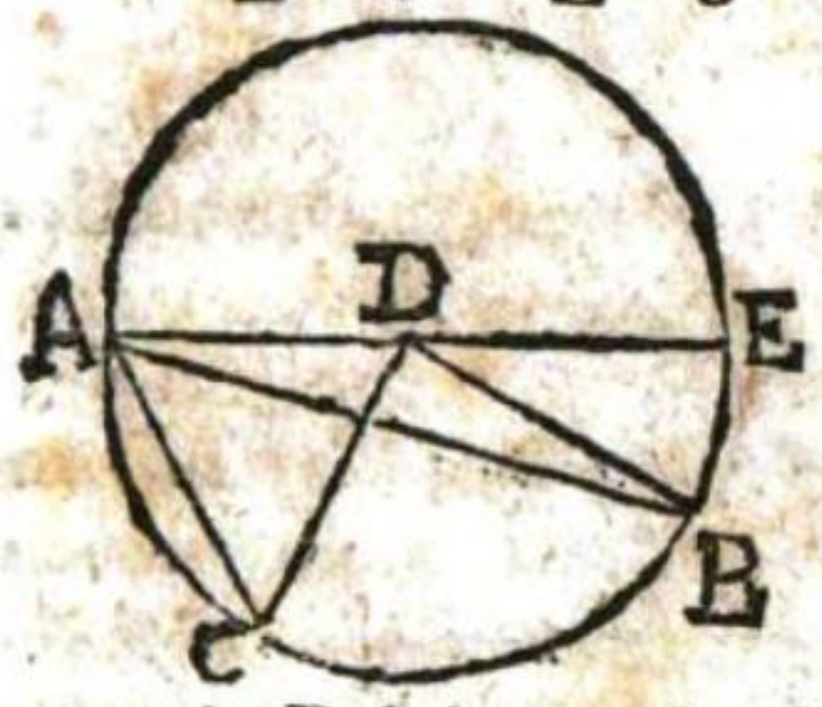


Nel cerchio ABC ci sia l'angolo al centro BDC, e l'angolo alla circonferenza BAC, l'uno, e l'altro de' quali abbia per base la circonferenza BC; io dico che l'angolo BDC è doppio dell' angolo BAC.

II.

* *dim.* 1. Si unica la retta AD (*), la quale si distenda
* *dim.* 2. sin'al punto E (*); e sia in primo luogo il punto E, fra' punti B, e C. Perche D è centro del cerchio ABC, sarà il raggio DA eguale al
* *pro.5.I.* raggio DB; quindi l'angolo DAB sarà (*) eguale all' angolo DBA; e per conseguente tutti due insieme saranno doppj dell'angolo DAB: ma tutti due insieme sono eguali all'angolo esteriore
* *pro.32.I.* BDE (*); dunque l'angolo esteriore BDE sarà doppio dell'angolo DAB. Nell' istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo EDC sia doppio dell'angolo DAC: quindi tutto l'angolo al centro BDC sarà doppio dell' angolo alla circonferenza BAC. Ca-

Digitalizzato da Google



Cada in secondo luogo il punto E più in là del punto B in riguardo al punto C: io dico parimente, che l'angolo al centro CDB fia doppio dell'angolo alla circonferenza CAB. Perche il raggio DA è eguale al raggio DC, farà l'angolo DAC eguale (*) all'angolo DCA; e tutti due insieme saranno doppj dell' angolo DAC; il perche essendo tutti due insieme eguali all' angolo esteriore CDE (*); farà l'angolo esteriore CDE doppio dell' angolo DAC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo BDE fia doppio dell'angolo BAD; dal che si raccoglie, che l'angolo rimanente CDB fia doppio dell'angolo rimanente CAB; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) pro. 5. I.

(*) pro. 32. I.

ANNOTAZIONE.

Essendo l'angolo al centro BDC doppio dell' angolo alla circonferenza BAC, ne segue, che se l'angolo al centro sia per esempio di 80 ovvero di 100 gradi, l'angolo alla circonferenza debba essere di 40 gradi, ovvero di 50 gradi; quindi, poiche di quanti gradi è l'angolo al centro BDC, d'altrettanti è la sua base BC, siccome tutta la base BC misura l'angolo al centro BDC, così la metà dell' istessa base BC misurerà l'angolo alla circonferenza BAC.

PROP. XXI. TEOREMA.

Gli angoli costituiti nella medesima porzione del cerchio sono eguali fra di loro.

I.

Sia il cerchio ABCDE, e nella medesima porzione AEDC ci siano gli angoli AEC, ADC: io di-

dico, che essi sono eguali fra di loro.

II.

* *pro.* I. *di questo.* I. Ritrovisi(*)il centro F del cerchio ABCDE.

* *dim.* I. II. Si unisca no le due FA, FC (*).

III.



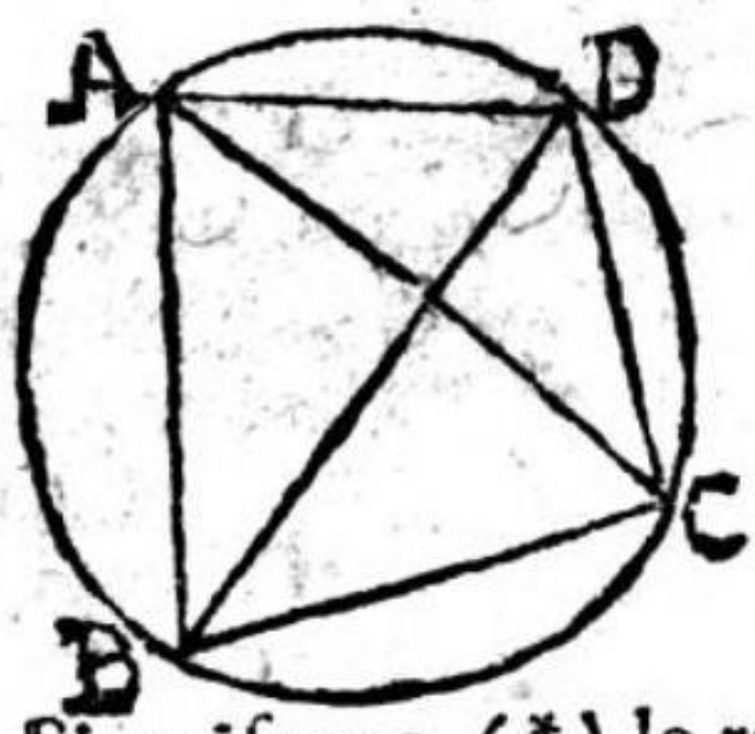
* *pro. ante.* Perche l'angolo al centro AFC, e li due angoli alla circonferenza AEC, ADC anno la medesima circonferenza ABC per base; sarà (*) l'angolo AFC doppio così dell'angolo AEC, come dell' angolo ADC: quindi gli angoli AEC, ADC saranno (*) eguali fra di loro; ciocche doveva dimostrarsi.

* *assio.* 7.

PROP. XXII. TEOREMA.

Gli angoli opposti de' quadrilateri descritti ne' cerchi sono eguali a due retti.

I.



Sia il cerchio ABCD, ed in esso il quadrilatero ABCD; io dico che gli angoli opposti BAD, BCD; siccome ancora gli angoli ABC, ADC sono eguali a due retti.

II.

* *dim.* I. Si unischino (*) le rette AC, BD.

III.

Perche gli angoli BAC, BDC sono nella medesima porzione BADC, saranno (*) eguali fra di loro. Similmente perche gli angoli CAD, CBD sono nella medesima porzione CBAD, saranno (*) ancora eguali fra di loro; quindi aggiugnendo cose eguali a cose eguali riuscirà (*)

* *pro. ante.*

* *pro. ante.*

* *ass.* 2.

tut-

Digitalizzato da Google

tutto l'angolo BAD eguale a' due angoli BDC, CBD: aggiugnendo dunque di più commemente così agli angoli BDC, CBD, come all'angolo BAD il medesimo angolo BCD : saranno due angoli BAD, BCD eguali a' tre angoli BDC, CBD, BCD: ma questi tre angoli BDC, CBD, BCD sono eguali a due retti (*); dunque ancora li due angoli BAD, BCD saranno eguali a' due retti (*). Nell' istesso modo si dimostrerà, che gli angoli ABC, ADC siano eguali a' due retti; ciocche doveva dimostrarsi.

* pro. 32. I.
* assio. 1.

ALTRIMENTE.

Questa medesima verità si può dimostrare altrimente così: l'angolo ADC, che sta alla circonferenza è misurato dalla metà dell'arco AEC, che gli serve di base. Similmente l'angolo AEC è misurato dalla mettà dell'arco ADC, che gli serve di base; quindi tutti due gli angoli ADC, AEC saranno misurati dalla mettà di tutta la circonferenza ABCD: e per conseguente i detti due angoli conterranno 180 *gradi, che fanno il valore di due angoli retti.*

DELLA SOMIGLIANZA DELLE PORZIONI.

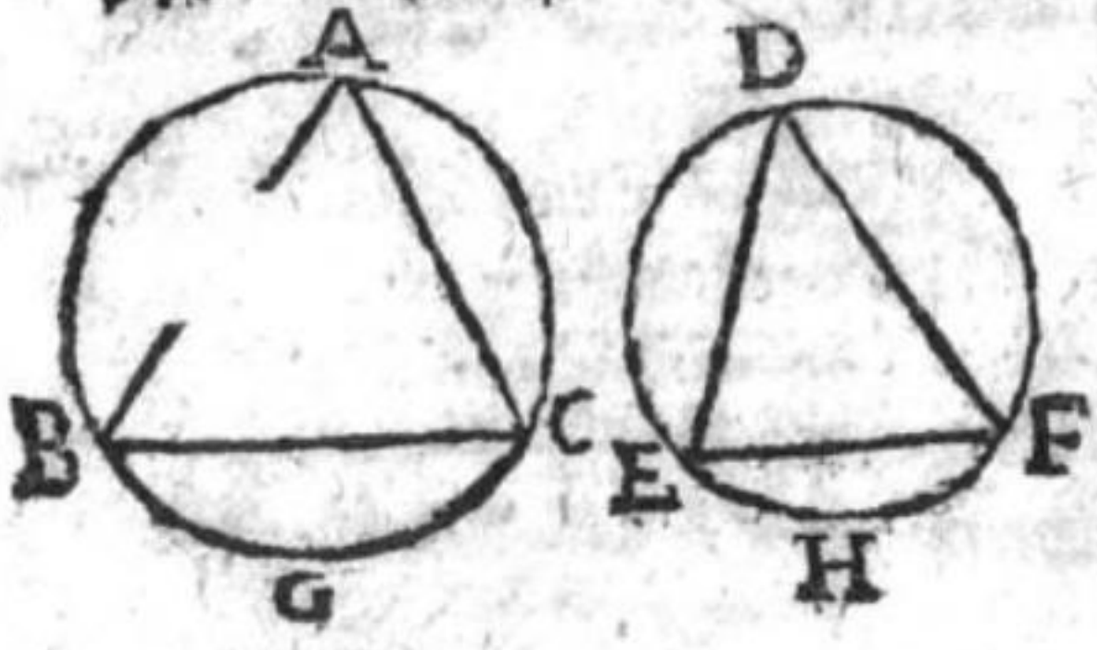
DEFINIZIONE XI.

Due porzioni si chiamano simili, quando gli angoli nelle suddette due porzioni sono eguali fra di loro.

SPIEGAZIONE.

Quindi per assicurarsi se le porzioni BAC, EDF siano simili, fa duopo tener questa regola. Bisogna formare nelle porzioni BAC, EDF gli angoli BAC, EDF. Ove questi due angoli si ritrovino eguali le due porzioni saranno simili; ove

Digitalizzato da Google



si ritrovono diseguali esse saranno dissimili. Nè quì opponga alcuno potersi in una medesima porzione formare infiniti angoli: poichè tutti questi infiniti angoli devono per necessità essere eguali (*) fra di loro.

(*) *pro. 21. di questo.*

Avvertasi quì, che essendo la porzione BAC simile alla porzione EDF: quanti gradi, e parti di gradi sono nella circonferenza BAC, altrettanti se ne conterranno nella circonferenza EDF: imperciocchè supponendosi simili le porzioni BAC, EDF, sarà l'angolo BAC eguale all'angolo EDF: quindi poichè la mettà dell' arco BGC misura l'angolo BAC, siccome la mettà dell' arco EHF misura l'angolo EDF; quanti gradi, e parti di gradi contiene l'arco BGC, altrettanti ne conterrà l'arco EHF; sicchè fingendosi ogni circonferenza compartita in 360 gradi, ne siegue, che le circonferenze BAC, EDF conterranno un' egual numero de' gradi: di modo che le porzioni simili si possono definire altrimente così. Sono quelle, le di cui circonferenze contengono un egual numero di gradi. *Donde poi facilmente si raccoglie* I. che due porzioni simili del medesimo cerchio, ovvero di cerchi eguali, sono eguali fra di loro. *e* II. che due porzioni simili di cerchi diseguali sono ancora diseguali, e che quella porzione è maggiore, la quale si riferisce al cerchio maggiore.

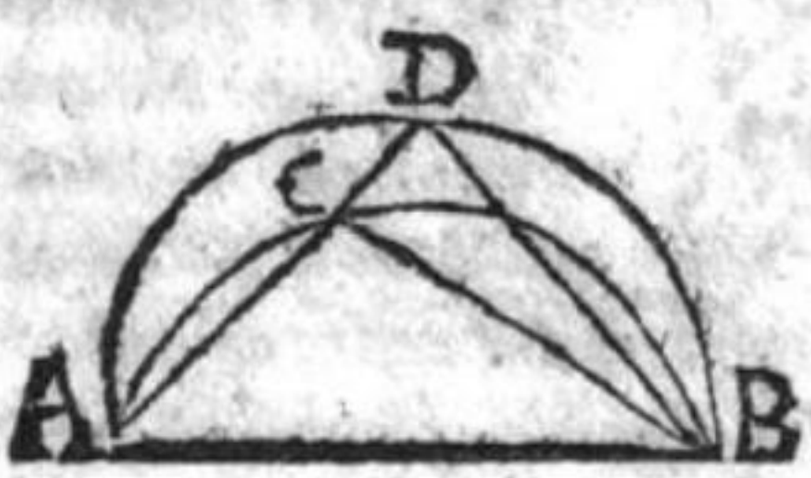
PROP. XXIII. TEOREMA.

Sopra una medesima linea retta non si possono dalla medesima parte costituire due porzioni di cerchi simili, e diseguali.

I.

Sia la linea retta AB; io dico che non si possono

no ſopra di eſſa coſtituire dalla medeſima parte due porzioni di cerchi ſimili, e diſeguali.



II.

Se mai è poſſibile ſi coſtituiſcano ſopra la linea retta AB le due porzioni di cerchi ACB, ADB, le quali ſiano ſimili, e diſeguali. I. Prendaſi nella porzione maggiore il punto D ad arbitrio. II. Si uniſcano (*) le rette DCA, DB. III. Si uniſca (*) la CB.

* *dim.* 1.
* *dim.* 1.

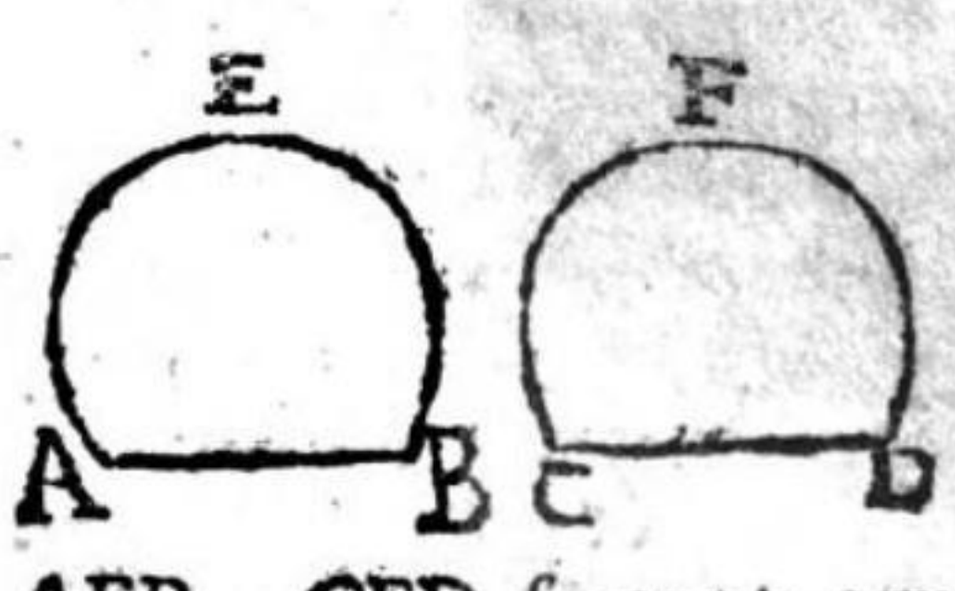
III.

Perche ſi vuole, che la porzione ACB ſia ſimile alla porzione ADB, ſarà l'angolo ACB eguale (*) all' angolo ADB; ma l'angolo ACB come angolo eſteriore del triangolo BDC è maggiore del ſuddetto angolo ADB; dunque li due angoli ACB, ADB ſono nell'iſteſſo tempo eguali, e diſeguali; ciocche non potendo ſoſſiſtere, ne ſiegue la verità del Teorema in queſtione.

* *def.* ante.

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se le baſi di due porzioni di cerchi ſimili ſono eguali, le porzioni medeſime ſaranno parimente eguali.



I.

Siano le baſi AB, CD delle due porzioni di cerchi ſimili AEB, CFD eguali fra di loro. Io dico che le medeſime porzioni AEB, CFD ſaranno eguali.

II.

S'accavalli la porzione AEB ſulla porzione CFD: in modo che la baſe AB rimanga diſteſa

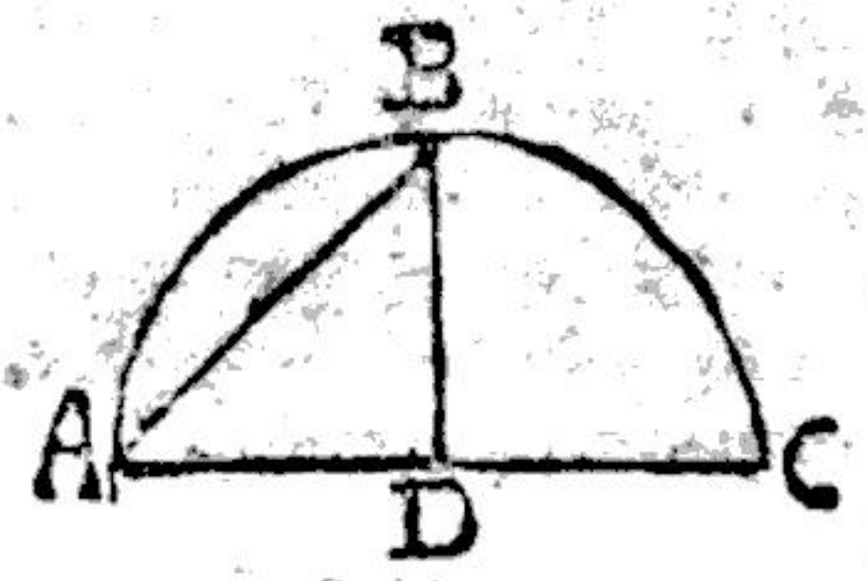
Digitalizzato da Google

sulla base CD, e li punti A, e B si uniscono co' punti C, e D. Ciò fatto, o la porzione AEB s'unirà a puntino colla porzione EFD, ed in questo caso esse saranno eguali (*). O la porzione AEC caderà al di dentro, ovvero al di fuori dalla porzione CFD; ed allora sopra la medesima linea retta CD si saranno costituite due porzioni di cerchi simili, e diseguali: ciocche ripugna alla proposizione antecedente.

(*) ass. 8.

PROP. XXV. PROBLEMA.

Data una porzione di cerchio ritrovarne il centro, e poi terminarlo.



(*) pro. 10. I.

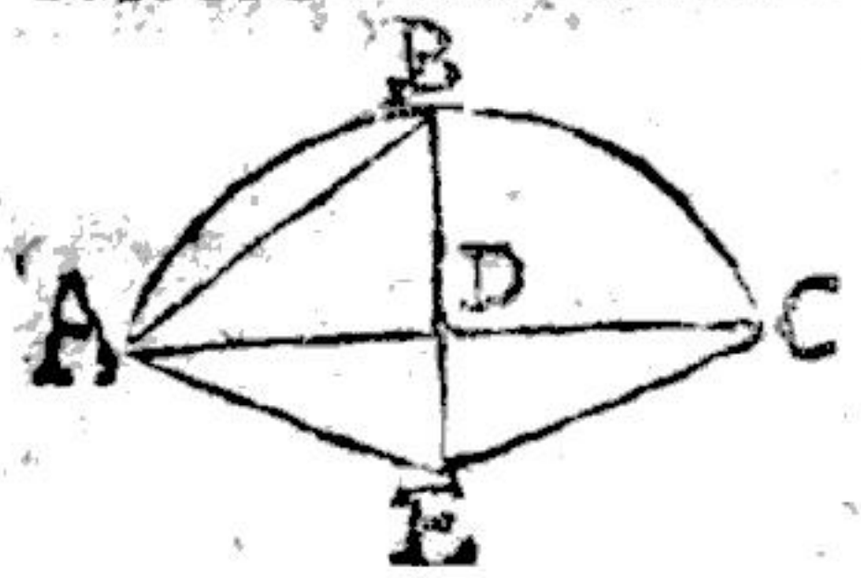
I.

Sia data la porzione del cerchio ABC: fa duopo ritrovarne prima il centro, e poi compirlo.

II.

I. Seghisi (*) la base AC della porzione data per mezzo nel punto D. II. S'innalzi dal punto D (*) la retta DB perpendicolare alla base AC. III. Si unisca (*) la AB. IV. Si costituisca l'angolo BAE eguale (*) all' angolo ABD. V. Si distenda BD fino al punto E (*). Io dico che il punto E è centro della porzione ABC, e che per conseguence per terminare il cerchio non si debba fare altro se non dal centro A col raggio AE descrivere il di più della circonferenza, che manca.

(*) pro. 11. I.
(*) dim. 1.
(*) pro. 23 I.
(*) dim. 2.

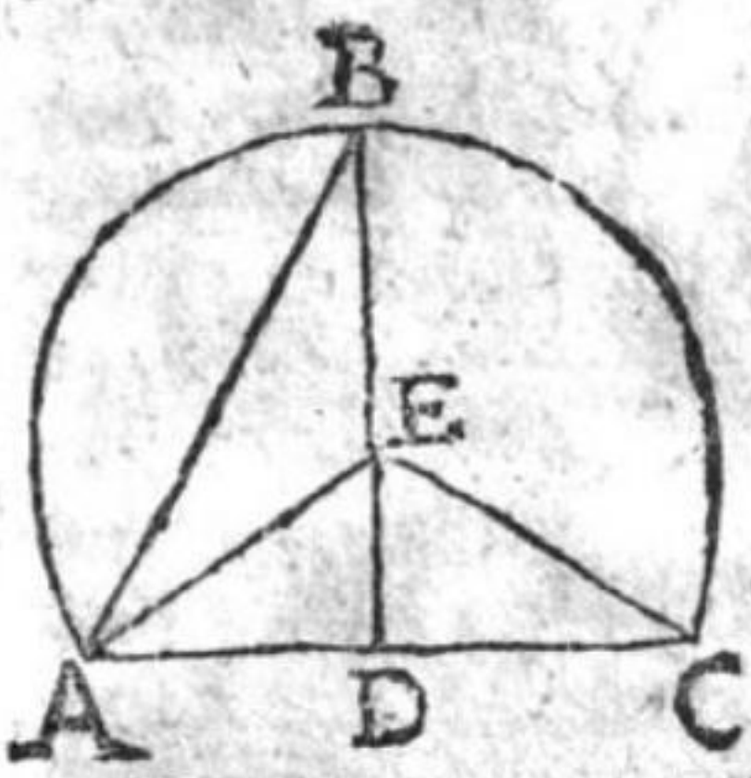


III.

Siccome dalla costruzione la AD è eguale alla CD, e la DE è comune; così saranno li due lati AD,

Digitalizzato da Google

AD, DE del triangolo ADE eguali a' due lati CD, DE del triangolo CDE ciaſcuno a ciaſcuno: quindi eſſendo l'angolo ADE eguale all' angolo CDE; perche ciaſcuno di eſſi è retto; ſarà (*) la baſe AE eguale alla baſe CE: in oltre perche nel triangolo EBA gli angoli EAB, EBA ſopra la baſe AB ſono eguali dalla coſtruzione, ſarà (*) AE eguale ad EB; il perche eſſendoſi dimoſtrata AE eguale ad EC; ſaranno (*) le tre linee rette EA, EB, EC eguali fra di loro. Per lo che il punto E dal quale cadono alla circonferenza della porzione più di due linee rette eguali ſarà centro (*) della ſuddetta porzione: ciocche doveva farſi.



(*) pro. 4. h.

(*) pro. 6. I.

(*) aſſio. 1.

(*) pro. 9. di queſto.

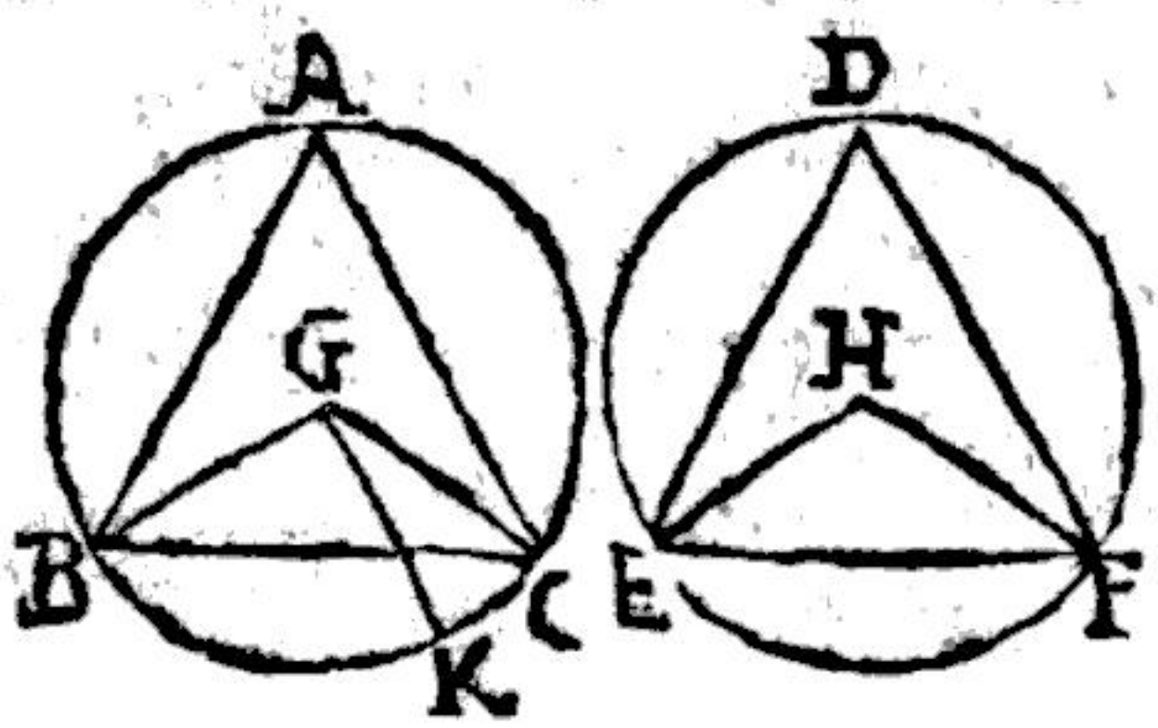
AVVERTIMENTO.

SE facendo l'angolo BAE eguale all'angolo ABE la retta AE ſi confonde colla baſe della porzione; ciocche avviene allora quando l'altezza BD della porzione è eguale alla metà AD della ſua baſe, la porzione allora ſarà un mezzo cerchio, ed il punto D ne ſarà il centro. Ma ſe la retta AE cade al di ſotto della baſe AC; allora la porzione è minore d'un mezzo cerchio, ed il ſuo centro è fuori. Finalmente ſe la retta AE cade al di ſopra della baſe AC, in tal caſo la porzione è maggiore d'un mezzo cerchio, ed il centro cade dentro alla ſuddetta porzione.

PROP. XXVI. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali le baſi degli angoli eguali, così a' centri, come alle circonferenze ſono eguali fra di loro.

Digitalizzato da Google



I.

Siano i due cerchi eguali ABC, DEF, a' centri de' quali ci fiano due angoli eguali BGC, EHF, ed alle loro circonferenze due altri angoli parimente eguali BAC, EDF; dico che le basi BC, EF, così degli angoli a' centri, come degli angoli alle circonferenze (nel supposto che essi sono eguali) siano eguali fra di loro.

II.

* *dim.* 1. Congiungansi (*) le rette BC, EF.

III.

Perche i cerchi BAC, EDF sono eguali, saranno * *def.* 1. *di questo.* parimente i loro semidiametri eguali (*). Adunque i due lati BG, GC del triangolo BGC saranno eguali a' due lati EH, HF, del triangolo EHF ciascuno a ciascuno. Quindi supponendosi l'angolo BGC eguale all'angolo EHF: sarà la * *pro.* 4. *I.* base (*) BC eguale alla base EF. Oltre a ciò perche l'angolo BAC è eguale all' angolo EDF, * *def.* 11. *di questo.* sarà la porzione BAC simile (*) alla porzione EDF; il perche essendosi dimostrate eguali le basi delle suddette porzioni, saranno esse eguali * *pro.* 24. *di questo.* fra di loro (*); e per conseguente la circonferenza BAC sarà eguale alla circonferenza EDF; ma tutta la circonferenza è eguale a tutta la circonferenza dunque l'arco rimanente BC sarà eguale al rimanente arco EF; ciocche doveva dimostrarsi.

AVVERTIMENTO.

Questa proposizione è parimente vera nel supposto che gli angoli eguali sono nel centro, ovvero nella circonferenza d'un medesimo cer-

Digitalizzato da Google

cerchio, in vece di ritrovarsi ne' centri, o nelle circonferenze di due cerchi eguali: di fatto la medesima dimostrazione ha luogo in quest' altro caso: quindi intendendo tutti i quattro angoli retti, che sono intorno il centro del cerchio compartiti in 100, 200, 300, 1000, 2000, &c. angoletti eguali, la circonferenza del detto cerchio rimarrà ancora compartita in 100, 200, 300, 1000, 2000, &c. archetti eguali.

PROP. XXVII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali se le basi degli angoli a' centri, ovvero degli angoli alle circonferenze sono eguali, gl'istessi angoli saranno ancora eguali.

I.

Ne' cerchi eguali BAC, EDF (*) siano le basi BC, EF degli angoli a' centri BGC, EHF, ovvero degli angoli alle circonferenze BAC, EDF, eguali fra di loro; io dico che li suddetti angoli BGC, EHF, e BAC, EDF sono eguali fra di loro.

* *veggasi la figura della propos.*

II.

Se mai è possibile non sia l'angolo BGC eguale all'angolo EHF; ma sia piuttosto maggiore di esso. Facciasi dunque l'angolo BGK (*) eguale all' angolo EHF.

* *propos. 23.*

III.

Perche dalla costruzione l'angolo al centro BGK è eguale all' angolo al centro EHF; sarà la base BK eguale (*) alla base EF: ma la base BC si suppone eguale alla base EF, dunque sarà l'arco minore BK eguale al maggiore BC; ciocche non potendo sossistere ne siegue, che l'angolo BGC sia eguale all'angolo EHF: quindi essendo l'angolo BGC doppio (*) dell' angolo BAC, e l'angolo EHG doppio dell' angolo EDF: sarà parimente l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; ciocche doveva dimostrarsi.

* *propos. antec.*

* *pro. 20. di questo.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXVIII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali le linee rette eguali segano le circonferenze in due parti tali, che la maggiore riesce eguale alla maggiore, e la minore riesce eguale alla minore.

I.

* *veggasi la figura della pro.2t.*

Ne' cerchi eguali ABC,DEF(*)vi siano due linee rette eguali BC, EF, le quali seghino le circonferenze nelle parti BAC, BC, ed EDF, EF; io dico che la parte maggiore BAC riesce eguale alla parte maggiore EDF; e che la parte minore BC riesce eguale alla parte minore EF.

* *pro. 1. di questo.*

II.

* *dim.1.*

I. Si ritrovino i centri de' due cerchi (*), i quali siano G;ed H.II. Si uniscano (*) le rette GB, GC, HE, HF.

III.

Perche i cerchi ABC, DEF si suppongono eguali, saranno i semidiametri loro eguali; e perciò li due lati GB, GC del triangolo GBC saranno eguali a' due lati, HE, HF del triangolo HEF ciascuno a ciascuno. Quindi essendo dalla supposizione la base BC eguale alla EF; sarà (*) l'angolo BGC al centro eguale all'angolo al centro EHF. Dal che ne siegue, che l'arco BC sia eguale (*) all'arco EF: ma tutta la circonferenza ABC è eguale dalla supposizione a tutta la circonferenza DEF;dunque la rimanente BAC sarà eguale alla rimanente EDF; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro.8.I.*

* *pro. 26. di questo.*

PROP. XXIX. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali sotto le eguali circonferenze sono poste linee rette eguali.

Sia-

Digitalizzato da Google

I.

Siano i due cerchi eguali ABC,DEF(*),e si pi- * *veggasi la figura del-*
glino in essi le circonferenze BAC, BC eguali ri- *la pro. 26.*
spettivamente alle circonferenze EDF, EF; io di-
co che la linea retta BC è eguale alla linea retta
EF.

II. * *pro.26. di*

I. Si ritrovino (*) i centri G, ed H de' cer- *questo.*
chi ABC, DEF . II. Si uniscano (*) le rette * *dim. 1.*
GB, GC, HE, HF.

III.

Perche i cerchi ABC, DEF sono eguali dalla suppositione;saranno i due lati GB,GC del trian-
golo GBC eguali a' due lati HE, HF del trian-
golo HEF ciascuno a ciascuno: quindi essendo
l'angolo al centro BGC eguale all'angolo al cen-
tro EHF (*) ; poiche le loro basi BC, EF si sup- * *pro. 27. di*
pongono eguali, sarà la base BC eguale alla ba- *questo.*
se EF (*) ; ciocche dovèva dimostrarsi. * *pro.4.*

PROP. XXX. PROBLEMA.

Di un'arco dato farne due parti eguali.

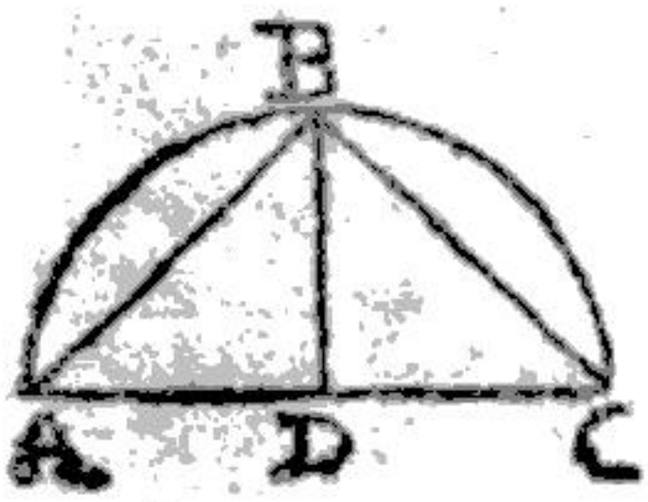
I.

Sia dato l'arco ABC; fa duopo dividerlo per
mezzo.

II.

I. Si unisca (*) la retta AC. II. Si seghi per * *dim.1.*
mezzo (*) nel punto D. III. Dal punto D so- * *pro.10.1.*
pra la AC s'innalzi la perpendicolare DB (*). * *pro.11.1.*
Io dico, che l'arco dato ABC resta diviso per
mezzo nel punto B.

III.



Imperciocche siccome dalla costruzione la AD è eguale alla CD, e la DB è comune: così faranno i due lati AD,DB del triangolo ADB eguali a' due lati CD, DB del triango-

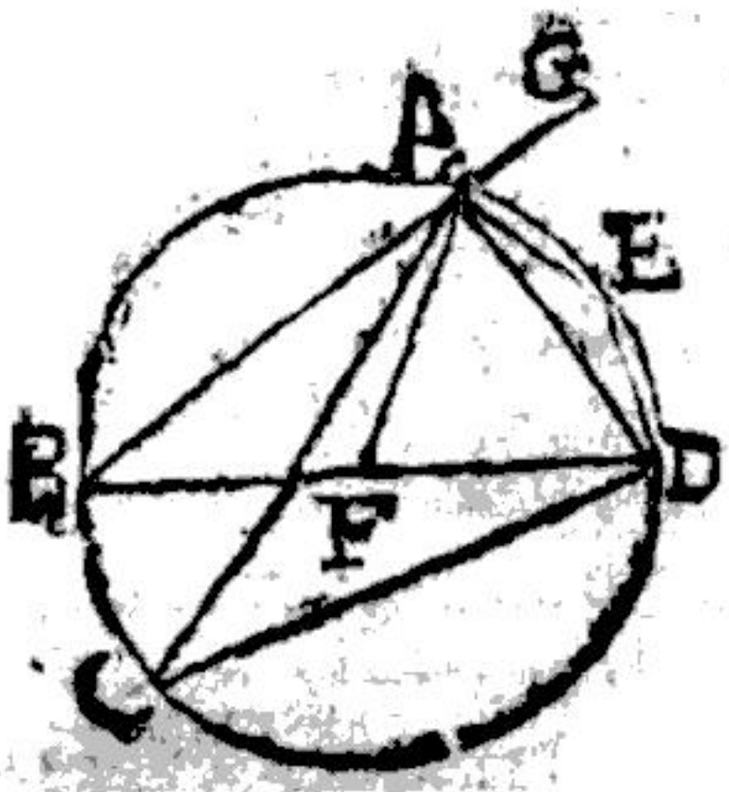
lo

lo CDB ciascuno a ciascuno. Quindi essendo di più l'angolo ADB eguale angolo CDB; perche
* *pro.4.I.* ciascuno di essi è retto dalla costruzione; sarà (*) la base AB eguale alla base BC; ma le linee rette eguali ne' cerchi eguali, e per conseguente nel
* *pro. 28.di questo.* medesimo cerchio legano le (*) circonferenze in parti eguali, la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore, dunque sarà l'arco AB eguale all'arco BC; cioecche doveva far si.

PROP. XXXI. TEOREMA.

Nel cerchio. I. l'angolo, che è nel mezzo cerchio è retto. II. quello che è nella maggior porzione è minore del retto, vale a dire è acuto. III. quello che è nella minor porzione è maggiore del retto, vale a dire è ottuso. IV. l'angolo della porzione maggiore è ottuso. V. l'angolo della porzione minore è acuto.

I.



Sia il cerchio ABCD, il di cui diametro sia BD, ed il centro F, nel quale s'intendano tirate le linee rette BA, AD, AE, ED, AC, CD. Io dico, che l'angolo BAD, il quale è nel mezzo cerchio BAD è retto; che l'angolo ACD, il quale è nella porzione maggiore ABCD è acuto; e che l'angolo AED, il quale è nella porzione minore AED è ottuso. Oltre a questo io dico, che l'angolo della porzione maggiore DAB fatto dalla sottesa AD, e dalla circonferenza AB è maggiore del retto: e che l'angolo della porzione minore DAE fatto similmente dalla sottesa DA, e dalla circonferenza AE è minore del retto.

II.

* *dim.* 1. I. Congiungasi (*) la AF. II. Si distenda
* *dim.* 2. la BA verso G (*).

III.

Digitalizzato da Google

III.

I. Perche F è cèntro del cerchio ABD, faranno le linee FB, FA, FD cadenti dal centro alla circonferenza eguali fra di loro. Quindi saranno ísosceli i due triangoli BFA, AFD; e perciò sarà l'angolo FBA eguale (*) all'angolo FAB; e l'angolo FDA eguale all'angolo FAD; e per conseguente aggiugnendo cose eguali a cose eguali, saranno i due angoli FBA, FDA eguali (*) all' angolo BAD. Ma l'angolo esteriore DAG è eguale (*) a' suddetti due angoli interiori opposti FBA, FDA; dunque sarà parimente l'angolo BAD eguale (*) all'angolo DAG. Cadendo dunque la retta DA sopra la retta BG in modo che gli angoli di quà, e di là BAD, DAG riescono eguali, sarà la DA perpendicolare (*) alla BG, e perciò l'angolo BAD sarà retto.

* pro. 5. I.
* assio. 2.
* pro. 32. I.
* assio. 1.
* def. 10. I.

II. Nel triangolo BAD essendo retto l'angolo BAD; sarà l'angolo ABD minore del retto, (*) vale a dire sarà acuto: ma l'angolo ACD è eguale all'angolo ABD (*), perche sono nella medesima porzione ABCD; dunque l'angolo ACD sarà parimente acuto.

* pro. 17. I.
* pro. 21. di questo.

III. Nel quadrilatero ACDE gli angoli opposti ACD, AED sono eguali (*) a due retti; ma l'angolo ACD è acuto: dunque l'angolo AED sarà ottuso.

* pro. 22. di questo.

IV. Essendosi dimostrato l'angolo rettilineo DAB retto, sarà l'angolo misti lineo DAB, il quale abbraccia dentro di se il rettilineo ottuso (*).

* assio. 9.

V. Finalmente essendosi dimostrato retto l'angolo esteriore DAG, sarà l'angolo mistilineo DAE, il quale si contiene nell' angolo DAG minore del retto: ciocche doveva dimostrarsi.

AV-

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

SI può la verità di questo Teorema dedurre ancora da ciò che l'angolo alla circonferenza è misurato dalla mettà della sua base. Imperciocchè. I. quando l'angolo è nel mezzo cerchio egli ha per base mezza circonferenza; il perche la sua misura sarà una quarta parte di circonferenza, e per conseguente egli sarà retto. II. quando l'angolo è nella porzione maggiore, egli ha per base meno di mezza circonferenza; il perche la sua misura sarà minore d'una quarta parte di circonferenza, e per conseguente egli sarà acuto. III. quando l'angolo è nella porzione minore, egli ha per base più di mezza circonferenza; il perche la sua misura sarà più di una quarta parte di circonferenza, e per conseguente egli sarà ottuso.

PROP. XXXII. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal punto del toccamento sia tirata nel cerchio una linea retta segante; gli angoli, che ella fa colla tangente al suddetto punto del toccamento saranno eguali agli angoli costituiti nelle porzioni alterne del cerchio.

I.

La linea retta GF tocchi il cerchio ABCD nel puuto A, dal quale tirisi nel suddetto cerchio la segante AD, che comprenda colla tangente GF li due angoli GAD, FAD; io dico che questi due angoli sono eguali agli angoli costituiti nelle porzioni alterne del cerchio; vale a dire tirate le linee AE, ED, AB, BD; io dico che l'angolo GAD sia eguale all'angolo AED; e che l'angolo FAD sia eguale all'angolo ABD.

II.

Digitalizzato da Google

II.

I. S'innalzi dal punto A ſopra la GF (*) la perpendicolare AC, la quale (*) paſſerà per lo centro del cerchio. II. Si unisca (*) la CD.

* pro.11.I.
* pro.19. di queſto.
* dim.1.

III.



I. Siccome la retta AC paſſante per lo centro del cerchio è diametro, così la porzione CDA ſarà mezzo cerchio; e perciò l'angolo CDA nel mezzo cerchio ſarà retto (*). Quindi perche tutti li tre angoli CDA, DAC, ACD del triangolo CDA ſono eguali a due retti (*), ſaranno li ſoli due angoli DAC, ACD eguali ad un'angolo retto; vale a dire ſaranno eguali all'angolo CAF, il quale dalla coſtruzione è retto: ſe ne tolga via l'angolo DAC, il quale è comune; e rimarrà l'angolo ACD eguale all'angolo DAF: ma l'angolo ACD è eguale all'angolo ABD (*), perche ſono nella medeſima porzione di cerchio ABCD; dunque ſarà parimente l'angolo DAF eguale (*) all'angolo ABD.

* pro. azte.
* pro.32.I.
* pro. 21. di queſto.
* aſſio. 1.

II. Nel quadrilatero BAED deſcritto nel cerchio li due angoli oppoſti ABD, AED ſono eguali a due retti (*): ma gli angoli GAD, FAD ancora ſono eguali a due retti (*); dunque ſaranno li due angoli ABD, AED eguali a' due angoli GAD, FAD. Se ne tolgano via gli angoli ABD, FAD, che ſi ſono dimoſtrati eguali; e rimarrà (*) l'angolo GAD eguale all'angolo AED: ciocche doveva dimoſtrarſi.

* pro.22. di queſto.
* pro.13.I.
* aſſio. 3.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

QUindi perche l'angolo AED è misurato dalla mettà dell' arco AD, sarà ancora l'angolo DAF formato dalla tangente, e dalla segante misurato dalla mettà dell'arco AD interposto fra la segante, e la tangente: e così similmente l'angolo DAG sarà misurato dalla mettà dell'arco DBA interposto fra la segante, e la tangente.

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

Sopra una linea retta data costituire una porzione di cerchio, che contenga un'angolo eguale ad un'angolo dato.

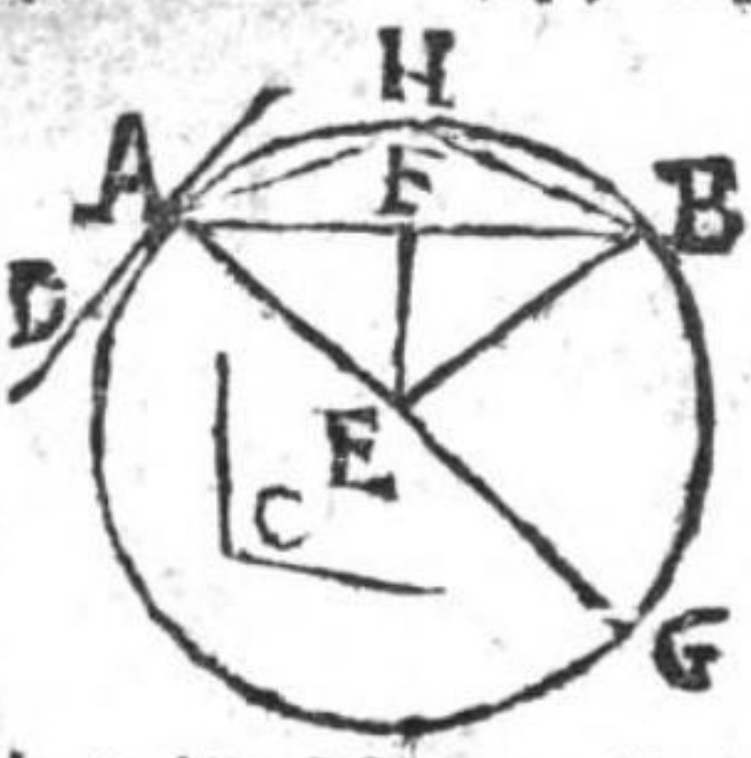
I.

Sia data la linea retta AB, e sia dato di più l'angolo rettilineo C; fa duopo descrivere sopra la retta data AB una porzione di cerchio, che contenga un' angolo eguale all'angolo dato C.



II.

I. Si faccia (*) l'angolo BAD eguale all'angolo dato C. II, Dal punto A s'innalzi (*) la perpendicolare AH sopra la AD. III. Si tagli la AB per mezzo nel punto F. (*) IV. Dal punto F s'innalzi la perpendicolare FE sopra la data AB (*). V. Si congiunga (*) la BE, la quale sarà eguale alla AE; perche li due triangoli AFE, BFE avendo li due lati AF, FE eguali a' due lati BF, FE ciascuno a



* pro. 23. I.

* pro. 11. I.

* pro. 10. I.

* pro. 11. I.

* dim. 1.

cia-

Digitalizzato da Google

ciascuno, e l'angolo AFE eguale all'angolo BFE, saranno per la proposizione IV. del primo libro le basi EA, EB eguali fra di loro. Per lo che se dal centro E col raggio EA si descrive un cerchio, egli dovrà passare per lo punto B: io dico dunque, che la porzione AHB descritta sopra la retta data AB comprende un' angolo eguale all'angolo dato C.

III.

Facciasi nella suddetta porzione l'angolo AHB. Perche dalla costruzione la AD è tirata ad angoli retti dall' estremità del semidiametro AE sopra l'istesso semidiametro, sarà la AD tangente (*); quindi essendo la AD tangente, e la AB segante, sarà l'angolo DAB formato dalla tangente, e dalla segante eguale (*) all'angolo AHB, che è nella porzione alterna del cerchio; ma dalla costruzione l'angolo BAD è eguale all' angolo dato C; dunque sarà ancora (*) l'angolo AHB contenuto nella porzione descritta sopra la retta data AB eguale all' angolo dato C. Cioche doveva farsi.

* *pro.* 16. *di questo.*

* *pro.* 32. *di questo.*

* *asso.* 1.

AVVERTIMENTO.

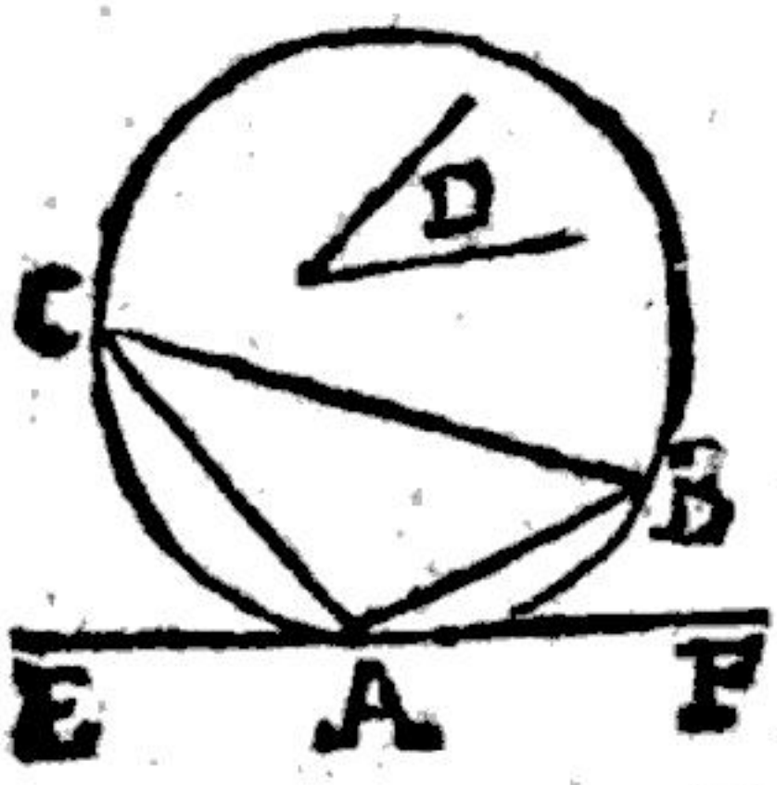
QUì possono accadere tre casi secondo che l'angolo dato è acuto, retto, ovvero ottuso. I. quando l'angolo è acuto, la linea data AB rimane compresa fra la tangente AD, e la perpendicolare AE; quindi la porzione descritta sopra la AB sarà maggiore del mezzo cerchio. II. quando l'angolo dato è retto la perpendicolare AE si confonde colla data AB; e perciò la porzione descritta sopra la AB diventa mezzo cerchio. III. quando l'angolo dato è ottuso la perpendicolare AE cade in mezzo alla tangente AD, e la data AB; di modo che allora la porzione, che si descrive sopra la AB è minore del mezzo cerchio. Tutto qua-

Digitalizzato da Google

ſto s'accorda aſſai bene colla propoſizione XXXI. *nèlla guale ſi è dimoſtrato*. I. che l'angolo nel mezzo cerchio è retto *II.* che l'angolo nella porzione maggiore è acuto. *e III.* che l'angolo nella porzione minore è ottuſo.

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Tagliare da un cerchio dato una porzione, la quale comprenda un'angolo eguale ad un' angolo dato.



I.

Sia dato il cerchio ABC, e ſia dato di più l'angolo rettilineo D: fa duopo tagliare dal cerchio dato una porzione, la quale comprenda un' angolo eguale all'angolo dato D.

II.

I. Prendaſi nella circonferenza del cerchio dato il punto A ad arbitrio. II. Si tiri (*) la retta EAF, che tocchi il cerchio dato nel punto A. III. Si faccia l'angolo EAC eguale all'angolo dato D (*). Io dico che la porzione ABC tagliata dalla retta AC ſia quella, che ſi cerca; vale a dire, fatto l'angolo ABC nella ſuddetta porzione: io dico che eſſo ſia eguale all'angolo dato D.

* *Cor. 2. della pro. 16. di queſto.*

* *pro. 23. I.*

III.

Imperciocche eſſendo EAF dalla coſtruzione tangente del cerchio, ed AC ſegante; ſarà l'angolo EAC formato dalla tangente, e dalla ſegante eguale all'angolo ABC formato nella porzione alterna del cerchio: (*) ma l'angolo EAC è eguale dalla coſtruzione all' angolo dato D; dunque ſarà parimente l'angolo ABC eguale all' angolo dato D; ciocche doveva farſi.

* *pro. 32. di queſto.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXV. TEOREMA.

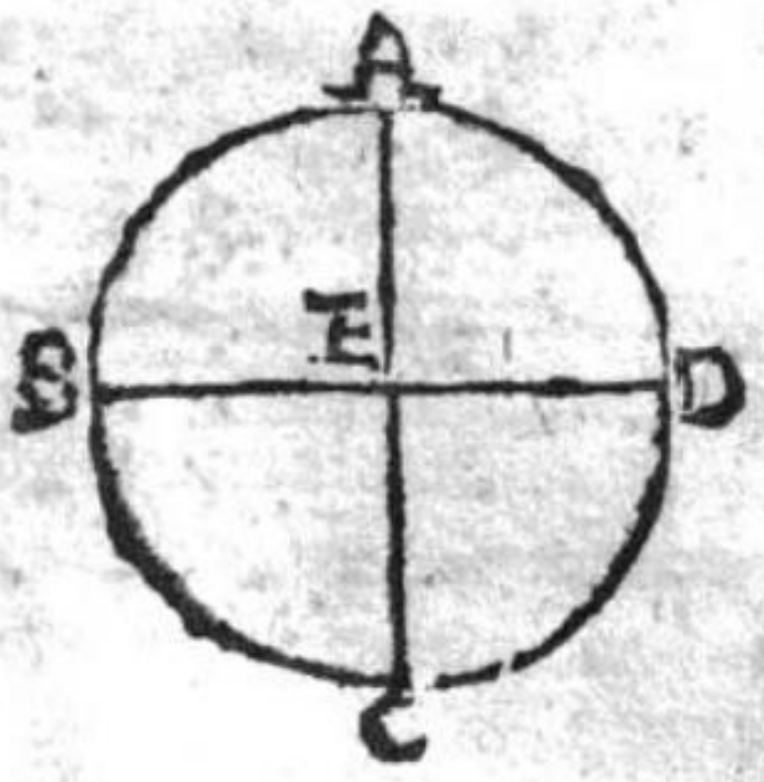
Se due linee rette si segano dentro ad un cerchio, sarà il rettangolo formato dalle parti dell' una eguale al rettangolo formato dalle parti dell'altra.

I.

Seghinsi le due linee diritte AC, BD tirate nel cerchio ABCD nel punto E; io dico che il rettangolo AEC formato dalle parti AE, EC della retta AC sia eguale al rettangolo BED formato dalle parti BE, ED della retta BD.

II.

Siccome può accadere. I. che le due linee AC BD passino entrambe per lo centro. II. che una passi per lo centro, e l'altra no. III. che nè l'una nè l'altra passi per lo centro; così io distinguo per maggior chiarezza la proposizione in tre casi.



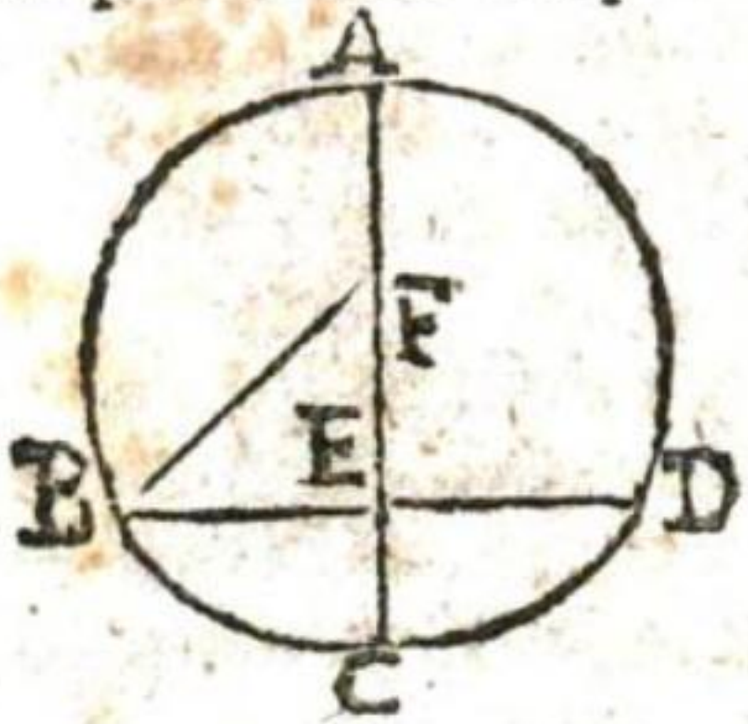
I. Supponendo, che ciascuna delle due linee AC, BD passi per lo centro E, che è il punto della loro intersezione, rimarrà ciascuna di esse segata per mezzo dal medesimo centro E: quindi il rettangolo AEC sarà eguale al quadrato di AE, siccome il rettangolo BED degenererà nel quadrato di BE. Ma il quadrato di AE è eguale al quadrato di BE, perche le linee EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali fra di loro: dunque sarà parimente il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED.

II. Supponendo poi, che la linea AC passi per lo centro E, e la linea BD non passi per lo centro, si unisca la FB (*); e mettiamo primieramente, che la retta BD resti divisa per mezzo, e per

(*) *dim.* 1.

Digitalizzato da Google

* pro. 3. di questo. conseguente ad angoli retti (*) dalla AC passante per lo centro. Siccome la retta AC è divisa per mezzo nel punto F, ed è divisa inegualmente nel punto E, così sarà (*) il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE eguale al quadrato di FC, ovvero al quadrato di FB: ma essendo il triangolo FEB rettangolo in E il quadrato dell' ipotenusa FB (*) è eguale a' quadrati de' lati FE, EB; dunque sarà parimente il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE eguale a' due quadrati di FE, e di EB: se ne tolga via il quadrato di FE, il quale è comune, e rimarrà (*) il rettangolo AEC eguale al quadrato di BE. Quindi essendo il quadrato di BE eguale al rettangolo BED, perche la BD si suppone divisa per mezzo nel punto E; sarà ancora il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED.



* pro. 1. 2. I.

* pro. 47. I.

* ass. 3.

Mettiamo in secondo luogo, che la BD non resti divisa per mezzo, e per conseguente nemmeno ad angoli retti dalla AC. Dal punto F si lasci cadere sopra la BD la perpendicolare FG (*): la quale passando per lo centro F, e dividendo la retta BD, che non passa per lo centro ad angoli retti, la dividerà per mezzo (*). Siccome la retta AC è divisa per mezzo nel punto F, ed è divisa in parti diseguali nel punto E; così sarà (*) il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE eguale al quadrato di FC, ovvero di FB; quindi essendo a cagione dell' angolo retto G il quadrato di FE eguale a' quadrati di FG, GE

* pro. 12. I.

* pro. 3. di questo.

* pro. 5. II.

Digitalizzato da Google

GE (*), ed il quadrato di FB eguale a' qua- * pro. 47. I.
drati di FG, GB; sarà il rettangolo AEC insie-
me co' quadrati di FG, GE eguale a' quadrati di
di FG, GB: se ne tolga via il qnadrato di FG, il
quale è comune, e rimarrà (*) il rettangolo * assio. 3.
AEC insieme col quadrato di GE eguale al qua-
drato di GB. In oltre perche la retta BD è di-
visa per mezzo nel punto G, e disegualmente nel
punto E, sarà (*) il rettangolo BED insieme col * pro. 5. II.
quadrato di EG eguale al quadrato di GB: ma il
rettangolo AEC insieme col quadrato di GE è e-
guale al medesimo quadrato di GB; dunque sarà * assi. 1.
(*) il rettangolo AEC insieme col quadrato di EG
guale al retrangolo BED insieme col medesimo
quadrato di EG: di modo che togliendone il
quadrato di GE, il quale è comune, rimarrà il ret-
tangolo AEC eguale al rettangolo BED.

III. Supponendo in fine, che le due rette AC, BD si segliino fuori del centro F; si unisca la retta EF (*), la quale si distenda dall'una parte, e dall' altra fino a' punti G, ed H (*). Quindi poiche la retta GH passante per lo centro divide nel punto E le rette AC, BD, che non passano per lo centro, sarà per lo caso ora dimostrato, il rettangolo GEH eguale così al rettangolo AEC, come al rettangolo BED: il perche i due rettangoli AEC, BED saranno eguali fra di loro; ciocche doveva dimostrarsi.



* dim. 1.

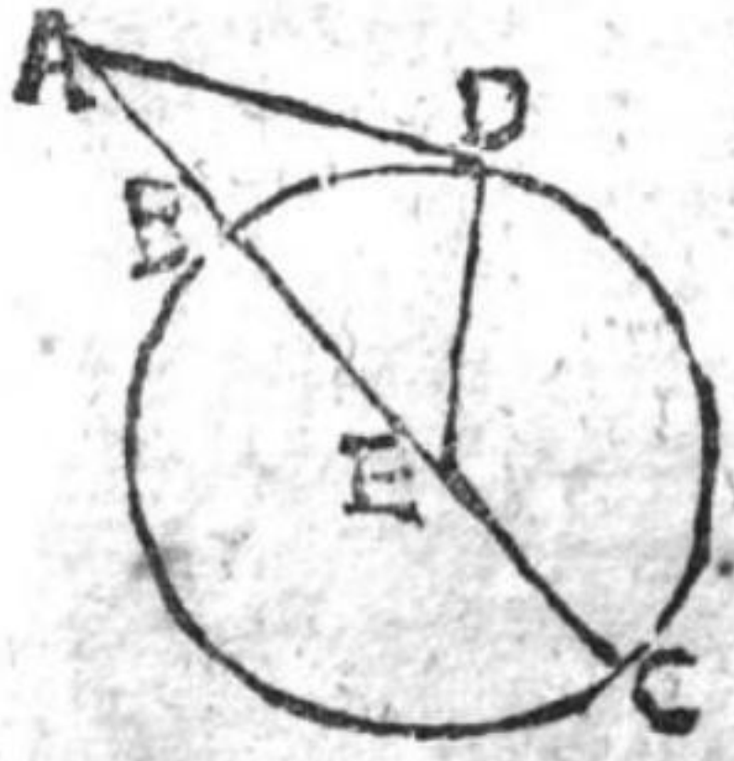
* dim. 2.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXVI. TEOREMA.

Se da un punto preſo fuori d'un cerchio cadano nel cerchio due linee rette una delle quali lo tocchi, e l'altra lo ſeghi; il rettangolo formato da tutta la linea ſegante, e da quella parte di eſſa, che reſta compreſa fra il punto, e la circonferenza conveſſa ſarà eguale al quadrato della tangente.

I.



Dal punto A preſo fuori del cerchio BCD cadano nel detto cerchio due linee ABC, AD, la prima delle quali lo ſeghi ne' punti B, e C, e l'altra lo tocchi nel punto D: io dico, che il rettangolo CAB formato da tutta la ſegante CA, e dalla parte AB di eſſa, che reſta compreſa fra il punto A, e la circonferenza conveſſa ſia eguale al quadrato della tangente AD.

II.

Siccome può accadere. I. Che la ſegante ABC paſſi per lo centro E. II. Che la detta ſegante non paſſi per lo centro; così per maggior diſtinzione, e chiarezza io divido il Teorema in due caſi, i quali ſono queſti.

I. Paſſi la ſegante ABC primieramente per lo centro E. Si uniſca (*) la ED: ſiccome la BC è ſegata per mezzo nel punto E, e ad eſſa è ſtata aggiunta per diritto la BA; così ſarà (*) il rettangolo CAB inſieme col quadrato di BE eguale al quadrato di AE: ma il quadrato di AE (*) è eguale a' quadrati di AD, e di DE; perchè l'angolo ADE è retto, come quello che è formato dalla tangente DA, e del ſemidiametro DE (*); dunque ſarà parimente il rettango-

* *dim.* 1.

* *pro.* 6. II.

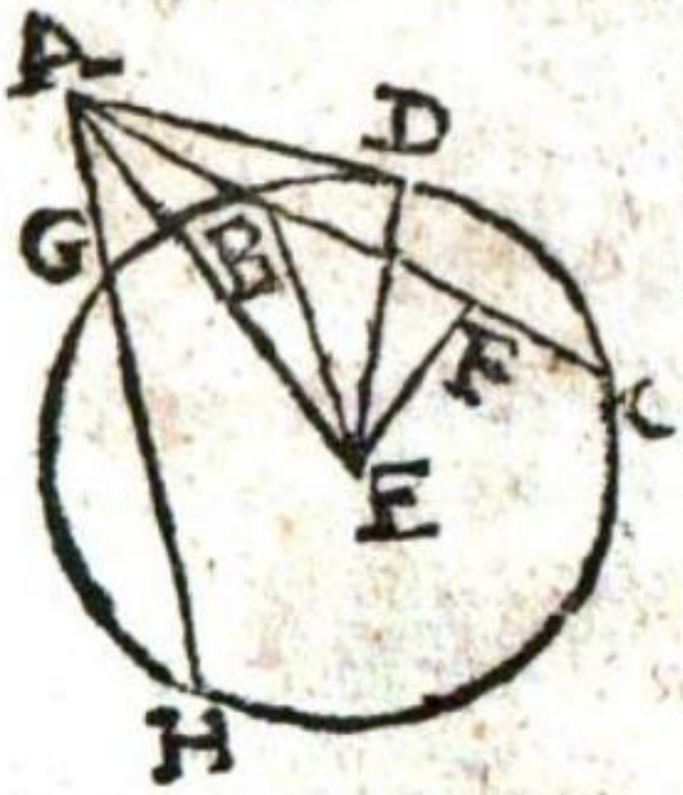
* *pro.* 47. I.

* *pro.* 8. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

golo CAB insieme col quadrato di BE eguale a' quadrati di AD, e di DE: se ne tolgono li quadrati di BE, e di DE, che sono eguali fra di loro, perche le linee BE, DE, cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali: e rimarrà (*) il rettangolo CAB eguale al quadrato di AD.

* assio. 3.



II. Passi in secondo luogo la segante ABC di là del centro E. Si faccia sopra essa cadere la perpendicolare EF (*); di poi si uniscano le rette EB, EA, ED (*). E perche la retta FF passante per lo centro E divide la retta BC, che non passa per lo centro ad angoli retti nel punto F, la dividerà (*) per mezzo; e per conseguente sarà (*) il rettangolo CAB insieme col quadrato di BF eguale al quadrato di AF: aggiugnendo dunque comunemente il quadrato di FE; sarà il rettangolo CAB insieme co' due quadrati di BF, e di FE eguale a' due quadrati di AF, e di FE: quindi essendo a cagione dell'angolo retto in F il quadrato di BE eguale (*) a' quadrati di BF, e di FE, ed il quadrato di AE eguale a' quadrati di AF, e di FE, sarà il rettangolo CAB insieme col quadrato di BE eguale al quadrato di AE; ma il quadrato dell' ipotenusa AE è eguale (*) a' quadrati di AD, e di DE, perche l'angolo ADE formato dalla tangente AD, e dal semidiametro DE è retto (*): dunque sarà ancora il rettangolo CAB insieme col quadrato di BE eguale a' quadrati di AD, e di DE; se ne tolgano i quadrati de' raggi BE, DE, che sono eguali fra di loro: e rimarrà il rettangolo CAB eguale al quadrato di AD; cioche dovea dimostrarsi.

* pro. 12. I.
* dim. 1.
* pro. 3. di questo.
* pro. 6. II.
* pro. 47. I.
* pro. 47. I.
* pro. 18. di questo.

Digitalizzato da Google

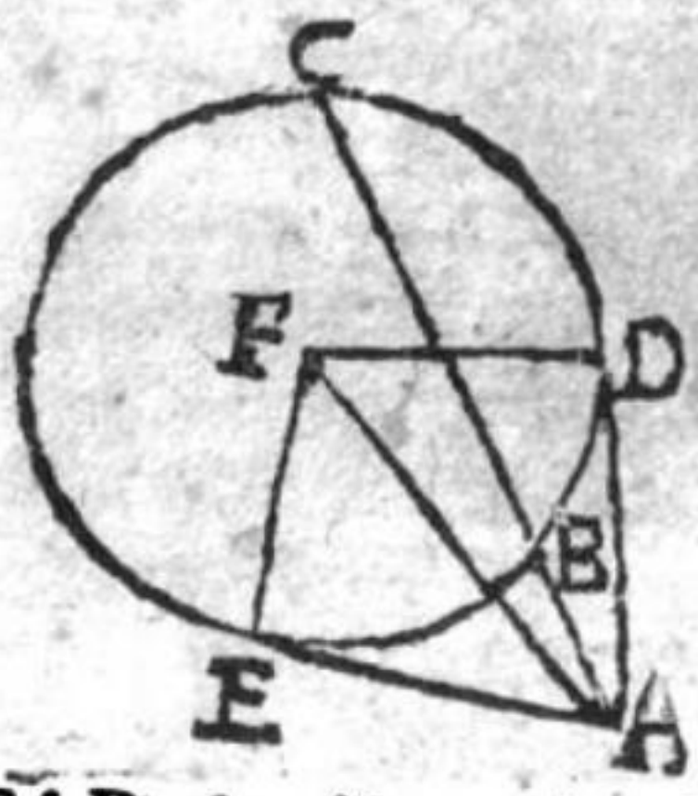
COROLLARIO.

SE dal punto A s'intende tirata un'altra segante AGH, sarà similmente il rettangolo HAG eguale al quadrato della tangente AD; quindi i rettangoli CAB, HAG saranno eguali fra di loro; ciocche dà luogo al Teorema seguente. Se due linee HG, CB si segano fuori del cerchio nel punto A; il rettangolo fatto dalle parti HA, AG dell' una è eguale al rettangolo fatto dalle parti CA, AB, dell'altra.

PROP. XXXVII. TEOREMA.

Se da un punto preso fuori d'un cerchio cadano al detto cerchio due linee, una delle quali lo seghi, e l'altra gli stia accanto, e sia il rettangolo formato da tutta la segante, e da quella parte di essa, che è fuori del cerchio eguale al quadrato di quella, che gli sta accanto; essa sarà tangente.

I.



Dal punto A preso fuori del cerchio ABD s'intendano tirate due linee ABC, AD, la prima delle quali, lo seghi ne' punti B, e C, e l'altra gli stia accanto senza saperfi se lo seghi, o se lo tocchi; e sia il quadrato di AD eguale al rettangolo CAB; io dico che la AD è tangente.

II.

a *pro. 17. di questo.* I. Si ritrovi il centro F del cerchio EBD. II. Si tiri dal punto A la tangente AE. (*) III. Si uniscano le rette FD, FA, FE (*),

b *dim. 1.*

III.

Siccome la AE è tangente dalla costruzione, e la

Digitalizzato da Google

la AC è segante, così sarà (*) il rettangolo CAB eguale al quadrato di AE: ma il quadrato di AD è eguale all'istesso rettangolo CAB; dunque sarà il quadrato di AE eguale (*) al quadrato di AD; e per conseguente le rette AE,AD saranno eguali fra di loro. Quindi i due triangoli AEF, ADF avendo i due lati AE,EF eguali a'due lati AD, DF,e la base AF comune; avranno (*) l'angolo AEF eguale all' angolo ADF; ma l'angolo AEF formato dalla tangente AE, e dal raggio EF è retto (*): dunque l'angolo ADF sarà parimente retto, e perciò la DA insistendo ad angoli retti all'estremità D del raggio DF sarà tangente (*); ciocche dovea dimostrarsi.

* *pro.ante.*

* *assio. 1.*

* *pro.8.L*

* *pro.18. di questo.*

* *pro. 16. di questo.*



RI-

Digitalizzato da Google

RICAPITOLAZIONE
DEL
LIBRO III.
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,

Teoremi.

De' cerchi, che si segano, e che si toccano.

Secondo il metodo intrapreso metteremo in buon' ordine tutti i Problemi, e tutti i Toremi, che si contengono in questo terzo libro, incominciando dalle proprietà de' cerchi, che si segano, e che si toccano.

I. (*) Se due cerchi si segano, la linea che unisce i loro centri seghera à per mezzo, e ad angoli retti la sotteſa comune a' due suddetti cerchi. II. (*) Se due cerchi si segano non possono essere concentrici. III. (*) Se due cerchi si segano si seghеranno in due punti solamente, e non più. IV. (*) Se due cerchi si toccano, la linea che unisce i loro centri distesa, se bisogna, passerà per lo punto del toccamento, sia che essi si tocchino al di dentro, sia che essi si tocchino al di fuori. V. (*) Se due cerchi si toccano al di dentro non possono essere concentrici. VI. (*) Se due cerchi si toccano, si toccheranno in un puuto solo, senza più,

* Cor. 2. della pro. 1.

* pro. 5.

* pro. 10.

* pro. 11. e 12.

* pro. 6.

* pro. 13.

sia

ſia che eſſi ſi tocchino al di dentro, ſia che ſi toc-
chino al di fuori.

Indizj del centro.

Per aſſicurarſi ſe un punto preſo dentro ad un cerchio ſia centro di eſſo, o no, potremo avvalerci di uno de' due ſeguenti cantraſſegni. Il I. ſarà a vedere (*) ſe una linea retta nel cerchio ſeghi un'altra linea retta per mezzo, e ad angoli retti: in tal caſo eſſa conterrà neceſſariamente il centro. * *Cor. della pro.* 1.

Il II. ſarà a vedere (*) ſe dal ſuddetto punto preſo dentro al cerchio cadano alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali: ove ciò ſiegua il detto punto ſarà neceſſariamente centro del cerchio. * *pro.* 2.

Delle maſſime, e delle minime.

I. (*) Se nel diametro d'un cerchio ſi prende un punto, che non ſia il centro, dal quale cadano alla di lui circonferenza intorno intorno più linee rette. 1. la maſſima di tutte ſarà quella parte del diametro, la quale contiene il centro. 2. la rimanente porzione del diametro ſarà la minima. 3. di tutte le altre, quelle, che ſono più vicine alla maſſima ſono maggiori di quelle, che ne ſono più lontane. 4. finalmente dal detto punto due linee rette eguali ſolamente ſi poſſono tirare alla circonferenza una di quà, ed un'altra di là della minima. * *pro.* 7.

II. (*) Se fuori d'un cerchio ſi prende un punto, dal quale ſi tirino alla circonferenza così concava, come conveſſa più linee rette: di tutte quelle, che cadono alla circonferenza concava. 1. la maſſima è quella, che paſſa per lo centro. 2. quelle, che ſono più vicine alla maſſima ſono maggiori delle più lontane. 3. dal detto punto due linee rette eguali ſi poſſono tirare alla circonferenza concava una di quà, ed un'altra di là della maſſima. Di tutte quelle poi, che s'arreſtano alla circonferenza conveſſa. 1. la minima è quella, che diſteſa paſſa per lo centro. 2. le più vicine al- * *pro.* 8.

Digitalizzato da Google

alla minima sono minori delle più lontane. 3. similmente due linee rette eguali si possono far cadere alla circonferenza convessa una di quà, ed un'altra di là della minima. *Intendendo poi dal suddetto punto tirata una tangente*, essa *considerata come tangente*, sarà la massima di tutte quelle, che s'arrestano alla circonferenza concava; ma *considerata come prima segante* sarà la minima di tutte quelle, che giungono alla circonferenza concava. III. (*) La massima di tutte le linee rette tirate nel cerchio è il diametro, e quelle che sono più vicine al diametro sono maggiori di quelle, che ne sono più lontane. IV. (*) Tutte le linee nel cerchio, che sono egualmente lontane dal diametro ovvero dal centro sono eguali; siccome viceversa se sono eguali, saranno egualmente lontane dal diametro, ovvero dal centro.

(*) pro. 15.

(*) pro. 14.

Delle linee, che si segano dentro, o fuori del cerchio.

Se nel cerchio si segano due linee rette, fa duopo distinguere tre casi. Il primo caso è, se l'una sega l'altra per mezzo, e ad angoli retti; *in tal caso la segante sarà* diametro (*): *il secondo caso è*, se l'una è diametro, e sega l'altra, che non è diametro per mezzo; *in tal cal caso* la segherà ancora ad angoli retti (*): *il terzo caso è* se l'una è diametro, e sega l'altra ad angoli retti; *in tal caso* la segherà parimente per mezzo (*). Ma se due linee rette non passanti per lo centro si segano nel cerchio, è impossibile, che possano segarsi per mezzo (*); *cioè potrà bene accadere, che una di esse rimanga divisa per mezzo, ma è impossibile, che l'altra ancora sia divisa per mezzo. Finalmente* se due linee nel cerchio si segano o dentro, o fuori di esso; il rettangolo fatto dalle parti dell'una sarà eguale al rettangolo fatto dalle parti dell'altra (*).

(*) Cor. 1. della pro. 1.

(*) pro. 3.

(*) pro. 3.

(*) pro. 4.

(*) pro. 35. e Cor. della 36.

Della

Digitalizzato da Google

Delle tangenti, e delle ſeganti.

I.(*)La linea retta,che uniſce due punti preſi ad arbitrio nella circonferenza d'un cerchio entra dentro di eſſo, e per conſeguente è ſegante. II. *Se da un punto preſo ad arbitrio nella circonferenza del cerchio ſi tiri una ſegante, ed una linea fuori del cerchio, fa duopo diſtinguere tre caſi. Il primo caſo è*, ſe la ſegante è diametro, e l'altra è perpendicolare al diametro; *in tal caſo la ſuddetta perpendicolare ſarà* tangente (*): *il ſecondo caſo è*, ſe la ſegante è diametro, e l'altra è tangente; *ed in tal caſo* l'una ſarà perpendicolare all'altra (*): *il terzo caſo è*, ſe la linea retta tirata fuori del cerchio è tangente, e la ſegante è perpendicolare alla tangente: *ed in queſto terzo caſo* la ſegante ſarà diametro (*). III. Se da un punto preſo fuori d'un cerchio ſi tira una tangente, ed una ſegante; ſarà il quadrato della tangente eguale al rettangolo formato da tutta la ſegante, e da quella parte di eſſa, che rimane fuori del cerchio (*). IV. Viceverſa, ſe da un punto preſo fuori del cerchio ſi tiri una ſegante, ed una linea retta, che ſtia accanto al cerchio, ed il quadrato di queſta ſia eguale al rettangolo formato da tutta la ſegante, e da quella parte di eſſa, che rimane fuori del cerchio; la ſuddetta linea, che ſta accanto al cerchio ſarà tangente (*).

* *pro.* 2.
* *pro.* 16.
* *pro.* 18.
* *pro.* 19.
* *pro.* 36.
* *pro.* 37.

Degli angoli fatti ne' centri, e nelle loro porzioni.

I. (*) L'angolo al centro è doppio dell' angolo alla circonferenza, ove tutti due abbiano la medeſima circonferenza per baſe. II. (*) Gli angoli coſtituiti nella medeſima porzione di cerchio ſono eguali fra di loro. III. (*) Se un cerchio

* *pro.* 20.
* *pro.* 21.
* *pro.* 22.

Digitalizzato da Google

chio è diviso in due porzioni ad arbitrio: gli angoli fatti in queste due porzioni uniti insieme
* *pro.* 27. sono eguali a due retti. IV. (*) Ne' cerchi eguali, se le basi di due angoli, a' centri, ovvero alle circonferenze, sono eguali, gli angoli saranno parimente eguali. V. (*) Viceversa, ne' cerchi eguali, se gli angoli a' centri, ovvero alle circonferenze sono eguali, le basi saranno parimente eguali. VI. (*) L'angolo fatto nel mezzo cerchio è retto; quello fatto nella porzione maggiore è acuto: e quello fatto nella porzione minore è ottuso. In oltre l'angolo della porzione maggiore è ottuso, e l'angolo della porzione minore è acuto: l'angolo poi del mezzo cerchio si può stimare come retto; giacche egli è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo (*); di fatto l'angolo del contatto, il quale è l'eccesso con cui l'angolo retto avanza l'angolo del mezzo cerchio è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo per picciolo, che egli sia. VII. (*) Gli angoli formati da una tangente, e da una segante sono eguali agli angoli formati nelle porzioni alterne del cerchio.

* *pro.* 26.

* *pro.* 31.

* *pro.* 16.

* *pro.* 32.

Delle corde, e degli archi.

I. (*) Ne' cerchi eguali, linee rette eguali tagliano eguali circonferenze la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore. II. (*) Viceversa ne' cerchi eguali ad eguali circonferenze sono sottoposte linee rette eguali.

* *pro.* 28.

* *pro.* 29

Delle porzioni simili.

I. (*) Sopra una medesima linea retta non si possono dall'istessa parte costituire due porzioni simili, e diseguali. II. (*) Se le basi di due porzioni simili sono eguali, le porzioni ancora saranno eguali.

* *pro.* 23.

* *pro.* 24.

Pro-

Digitalizzato da Google

Problemi.

I. (*) Dato un cerchio ritrovarne il centro. * *pro.* 1.
II. (*) Data una porzione di cerchio ritrovarne il centro, e di poi terminarlo. III. (*) Data una circonferenza tagliarla per mezzo. IV. (*) Da un punto dato fuori d'un cerchio tirare una linea diritta, che lo tocchi. V. (*) Data una linea diritta, ed un' angolo costituire sopra di essa una porzione di cerchio, che comprenda un' angolo eguale all' angolo dato. VI. (*). Dato un cerchio, tagliare da esso una porzione, che comprenda un' angolo eguale ad un'angolo dato.
* *pro.* 25.
* *pro.* 30.
* *pro.* 17.
* *pro.* 33.
* *pro.* 34.

Digitalizzato da Google

LIBRO QUARTO
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE.

DEFINIZIONI.

I.

UNa figura rettilinea si dice essere descritta in un'altra figura rettilinea, quando ciascun'angolo della figura descritta tocca ciascun lato di quella figura, nella quale essa è stata descritta.

II.

Viceversa una figura rettilinea si dice esser descritta intorno ad un'altra figura rettilinea, quando ciascun lato della figura descritta tocca ciascun'angolo di quella intorno la quale essa è descritta.

III.

Una figura rettilinea si dice essere descritta in un cerchio, quando ciascun'angolo della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio.

IV.

Viceversa una figura rettilinea si dice esser descritta intorno ad un cerchio, quando ciascun lato

Digitalizzato da Google

to della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio,

V.

Un cerchio si dice esser descritto in una figura rettilinea, quando la di lui circonferenza tocca ciascun lato della figura, nella quale egli è descritto.

VI.

Viceversa, un cerchio si dice esser descritto intorno ad una figura rettilinea, quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun'angolo della figura, intorno alla quale egli è descritto.

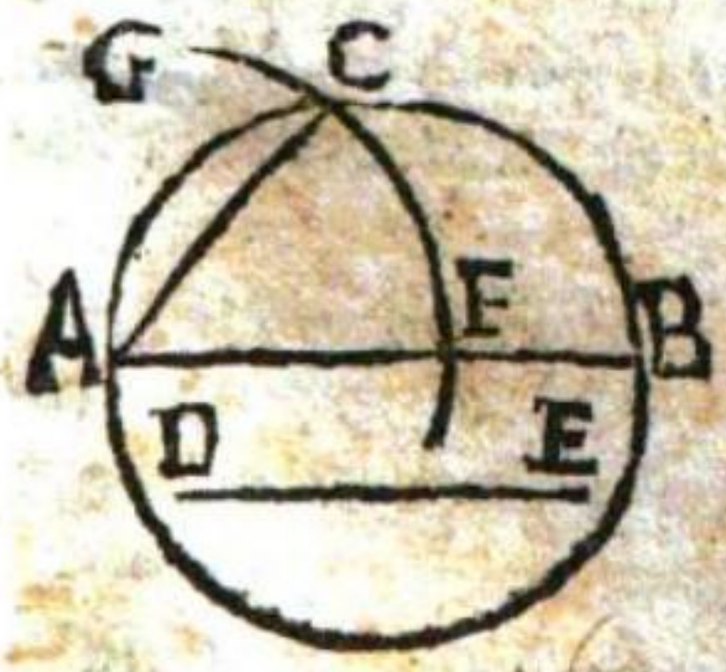
VII.

Una linea retta si dice adattata in un cerchio, quando le di lei estremità arrivano fino alla circonferenza del cerchio.

PROP. I. PROBLEMA.

In un cerchio dato adattare una linea retta eguale ad un'altra linea retta data.

I.



Sia dato il cerchio ACB, e sia dato in oltre la linea retta DE; fa duopo nel cerchio dato adattare una linea retta eguale alla data DE,

II.

I. Si tiri (*) il diametro AB. II. Si tagli AF eguale alla data DE (*). III. Dal centro A col raggio AF descrivasi il circolo FCG (*). IV. Si unisca la AC (*); io dico che questa linea retta AC adattata nel cerchio dato sia eguale alla data DE.

(*) *pro. 1. III.*
(*) *pro. 3. I.*
(*) *dim. 3.*
(*) *dim. 1.*

III.

Siccome A dalla costruzione è centro del cerchio FCG, così le linee AF, AC cadenti dal cen-

Digitalizzato da Google

tro alla circonferenza saranno eguali fra di loro: ma dalla costruzione la AF è eguale alla DE; dunque sarà parimente la AC eguale (*) alla DE. Ciocche doveva farsi.

* *ass.* 1.

AVVERTIMENTO.

Siccome di tutte le linee rette tirate nel cerhio il diametro è la massima (*); *così acciò possa risolversi questo Problema si richiede, che la linea retta data* DE *non sia maggiore del diametro* AB; *imperciocche se fosse maggiore del suddetto diametro, saria impossibile adattarla nel dato cerchio.*

Se poi la data DE *eguagliasse il diametro del cerchio, il medesimo diametro soddisfarebbe alla questione.*

* *pro.* 15. III.

PROP. II. PROBLEMA.

In un cerchio dato descrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.



I.

Sia dato il cerchio ACB, e sia dato in oltre il triangolo DFE: fa duopo descrivere nel cerchio dato un triangolo equiangolo al triangolo dato DFE: vale a dire tale, che ciascuno de' suoi tre angoli sia eguale a ciascuno de' tre angoli del triangolo DFE.

II.

I. Prendasi nella circonferenza del cerchio dato il punto A ad arbitrio. II. Si tiri la tangente GAH (*) III. Si costituiscano al punto A gli angoli GAC, HAB eguali rispettivamente agli angoli DEF, DFE (*) IV. Si congiunga la CB (*): io dico che il triangolo ACB descritto nel cer-

* *Cor.* 1. *della pro.* 16. *III.*
* *pro.* 23. *I.*
* *dim.* 1.

Digitalizzato da Google

cerchio dato sia equiangolo al triangolo dato DFE.

III.

Siccome dalla costruzione la retta GAH tocca il cerchio nel punto A, ed AC lo sega nell' istesso punto A, così sarà l'angolo GAC formato dalla tangente, e dalla segante eguale all'angolo ABC costituito nella porzione alterna del cerchio (*); ma dalla costruzione l'angolo GAC è eguale all'angolo DEF; dunque sarà parimente l'angolo ABC eguale all'angolo DEF (*). Similmente l'angolo HAB formato dalla tangente, e dalla segante sarà eguale (*) all'angolo ACB costituito nella porzione alterna del cerchio; quindi essendo dalla costruzione l'angolo HAB eguale all'angolo DFE: sarà parimente l'angolo ACB eguale(*)all'angolo DFE. Finalmente perche tanto li tre angoli del triangolo ACB, quanto li tre angoli del triangolo DFE sono eguali a due retti (*): saranno li tre angoli del triangolo ACB eguali a' tre del triangolo DFE: quindi essendosi già dimostrati i due angoli in C, ed in B eguali a' due in F, ed in E, sarà il terzo in A eguale al terzo in D: ciocche doveva farsi.

* *pro.32.III.*
* *assio.1.*
* *pro.32. III.*
* *assio. 1.*
* *pro.32 I.*

PROP. III. PROBLEMA.

Intorno ad un dato cerchio descrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

I.

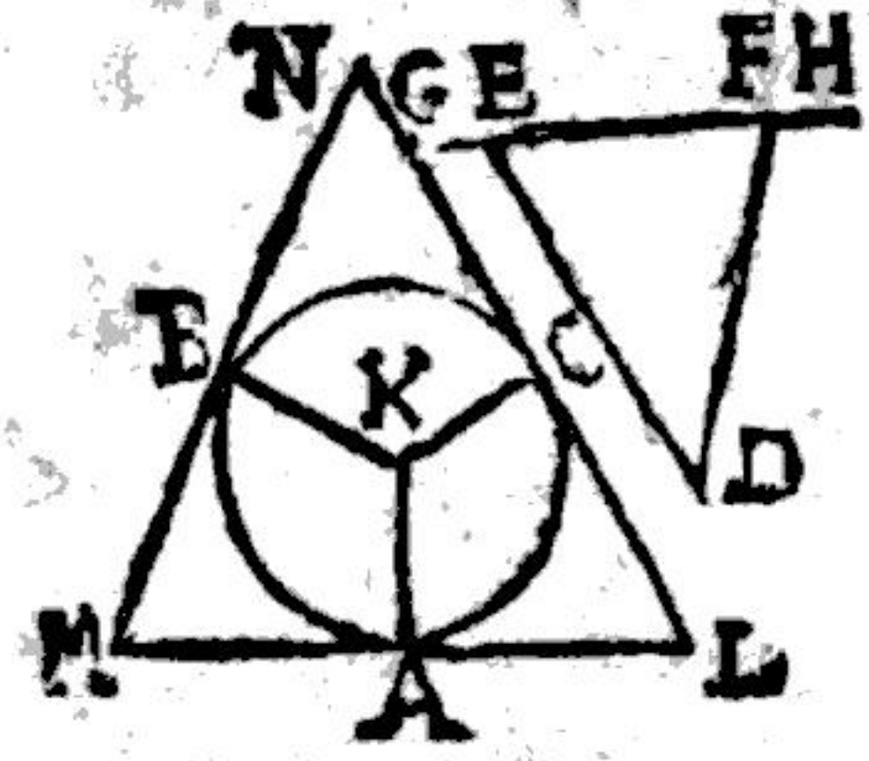
Sia dato il cerchio ABC, e sia dato in oltre il triangolo DEF; fa duopo descrivere intorno al cerchio dato ABC un triangolo equiangolo al triangolo dato DEF.

II.

I. Si distenda (*) il lato EF del triangolo DEF verso G, e verso H. II. Si tiri il raggio (*) KA ad arbitrio. III. Si costituiscono gli angoli

* *dim.2.*
* *pro.1. III.*

Digitalizzato da Google



AKC, AKB eguali rispettivamente agli angoli esteriori DEG, DFH (*). IV. Da' punti A, C, e B s'innalzino sopra i raggi AK, CK, BK le perpendicolari (*) MAL, LCN, NBM, le quali costituiscano il triangolo NML; io dico che questo triangolo sia quello, che si dimanda.

(*) pro. 23. I.

(*) pro. 11. I.

III.

Imperciocche primieramente il triangolo NML è descritto intorno al cerchio dato ABC: perche li suoi lati NM, ML, LN toccano il detto cerchio, per essere essi perpendicolari a' semidiametri BK, AK, KC (*): che poi il medesimo triangolo NML sia equiangolo al triangolo DEF, si dimostra così. Li quattro angoli della figura quadrilatera ALCK sono eguali a quattro retti: poiche intendendo tirato il diametro KL rimane essa compartita in due triangoli, ciascuno de' quali ha li suoi tre angoli eguali a due retti (*): ma dalla costruzione gli angoli KAL, KCL sono retti entrambi; dunque gli altri due angoli AKC, ALC sono eguali a due retti; il perche essendo parimente gli angoli DEF, DEG eguali a due retti (*), saranno li due angoli DEF, DEG eguali a' due angoli AKC, ALC; ma dalla costruzione l'angolo AKC è eguale all' angolo DEG; dunque l'angolo rimanente ALC sarà eguale all' angolo rimanente DEF. Nell'istessa maniera comparando li due angoli AKB, AMB co' due angoli DFH, DFE, si dimostrerà, che l'angolo AMB sia eguale all'angolo DFE; quindi essendo tutti li tre angoli del triangolo NML eguali a tutti tre gli angoli del triangolo DEF, ed essendosi di più dimostrati gli angoli in M, ed L eguali

(*) 16. III.

(*) 32. I.

(*) 13. I.

Digitalizzato da Google

guali agli angoli in F, ed E, sarà l'angolo rimanente in N eguale all' angolo rimanente in D. Ciocche doveva farsi.

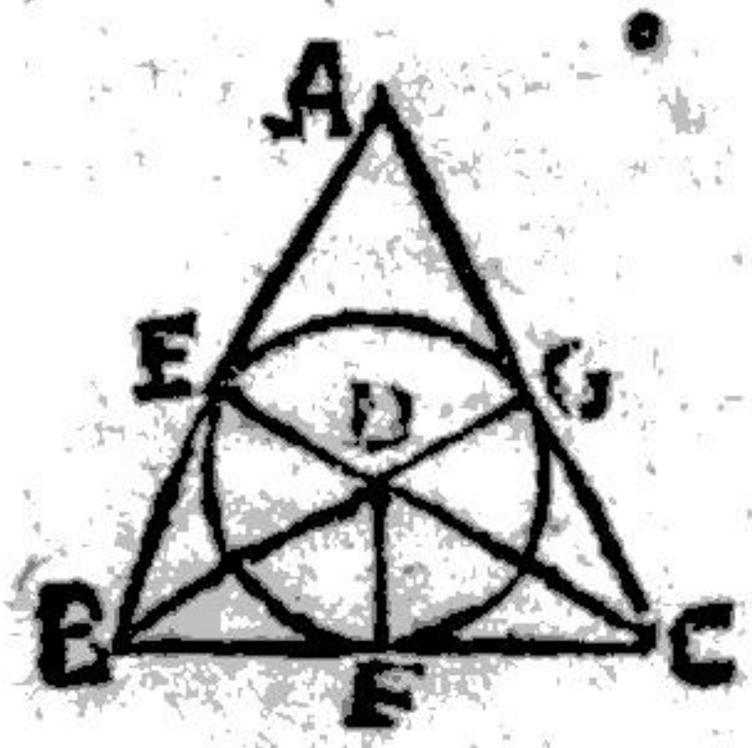
PROP. IV. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un triangolo dato.

I.

Sia dato il triangolo ABC; fa duopo descrivere dentro di esso un cerchio.

II.



I. Seghinsi gli angoli ABC, BCA per mezzo (*) colle linee rette BD, CD, le quali concorrano insieme nel punto D. II. Dal punto D si facciano cadere (*) le perpendicolari DE, DF, DG sopra li tre lati AB, BC, CA del triangolo dato.

* *pro.9.I.*

* *pro.12.I.*

III.

Perche dalla costruzione l'angolo FBE è segato per mezzo colla retta BD, e di più dalla medesima costruzione le rette DF, DE sono perpendicolari sopra i lati BC, BA del triangolo dato ABC, i due triangoli DBF, DBE avranno i due angoli DBF, DFB eguali a' due angoli DBE, DEB ciascuno a ciascuno; quindi i medesimi triangoli avendo in oltre il lato DB comune; avranno (*) il lato DF eguale al lato DE: nell' istessa maniera paragonando il triangolo DFC col triangolo DGC si dimostrerà, che DF sia eguale a DG; quindi le tre linee rette DE, DF, DG saranno eguali fra di loro, e perciò il cerchio descritto dal centro D, e col raggio DE passerà per li punti F, e G; ma io dico di più che egli sarà toccato da' lati AB, BC, CA ne' punti E, F, e G: imperciocche le linee DE, DF, DG sono

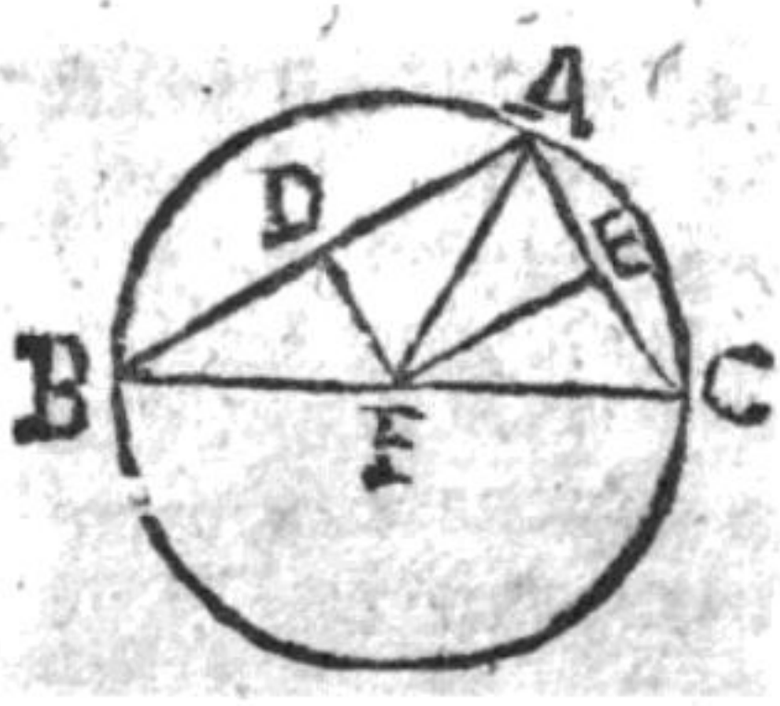
* *pro.26.I.*

Digitalizzato da Google

ſemidiametri del cerchio, e le rette AB, BC, CA ſono perpendicolari a' ſuddetti ſemidiametri; e perciò dovranno per la prop. XVI. del terzo libro toccare il cerchio ne' punti E, F, e G; ciocchè doveva farſi.

PROP. V. PROBLEMA.

Deſcrivere un cerchio intorno ad un triangolo dato.



I.

Sia dato il triangolo ABC; fa duopo intorno ad eſſo deſcrivere un cerchio.

II.

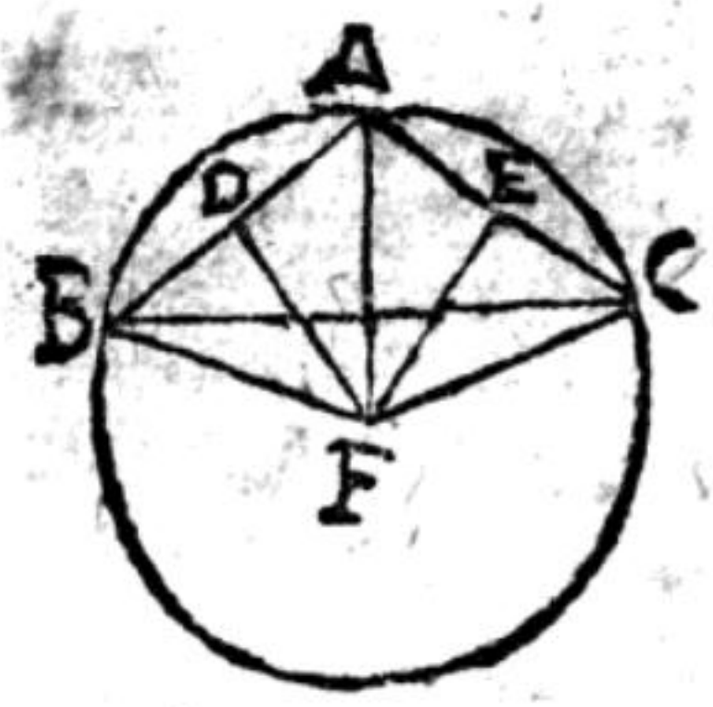
I. Seghinſi i lati AB, AB, AC per mezzo (*) ne' punti D, & E. II. S'innalzino da' punti D, & E le perpendicolari (*) DF, EF ſopra li ſuddetti lati AB, AC, le quali concorrano nel punto F. III. Si congiungano (*) le rette AF, BF, CF.

(*) *pro.* 10. I.

(*) *pro.* 11. I.

(*) *dim.* 1.

III.



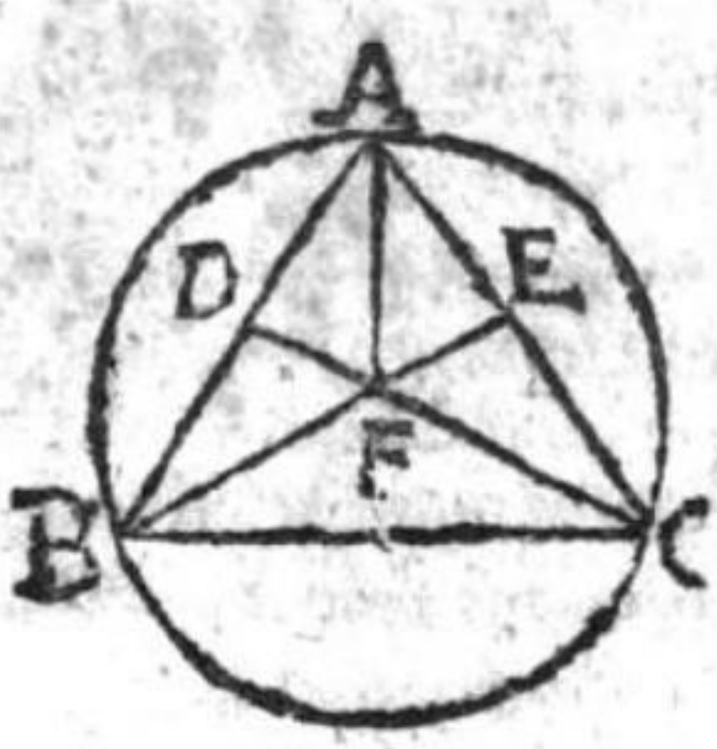
Siccome dalla coſtruzione la AD è eguale alla BD, e la DF è comune: così ſaranno i due lati AD, DF del triangolo ADF eguali a due lati BD, DF del triangolo BDF ciaſcuno a ciaſcuno; ficche eſſendo ancora l'angolo ADF eguale all'angolo BDF, perche l'uno, e l'altro dalla coſtruzione è retto; ſarà (*) la baſe AF eguale alla baſe BF. Nell'iſteſſa maniera comparando li due triangoli AFE, CFE inſieme, ſi dimoſtrerà, che AF ſia eguale a CF; quindi le tre rette AF, BF, CF ſaranno eguali fra di loro; e perciò il cerchio de-

(*) *pro.* 4. I.

Digitalizzato da Google

descritto dal centro F, e col raggio FA passerà per li punti B, e C, e per conseguente sarà descritto intorno al triangolo dato ABC.

AVVERTIMENTO.



Avvertasi quì, che se l'angolo BAC è acuto, il centro F cade dentro al triangolo dato ABC. Se è retto cade sulla base BC dell'istesso triangolo; ma se è ottuso cade sotto la base BC, e per conseguente fuori del triangolo ABC. Avvertasi in oltre, che col mezzo della costruzione di questa proposizione si può sempre descrivere un cerchio, che passi per tre punti dati A, B, C, purche però i tre punti dati non si ritrovino in una linea retta: vale a dire, purche congiugnendo i suddetti tre punti con tre linee rette, si venga a formare un triangolo.

PROP. VI. PROBLEMA.

Descrivere un quadrato in un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descrivere dentro di esso un quadrato.

II.

I. Si tirino i due diametri AC, BD, li quali si seghino ad angoli retti nel centro E. II Si congiungono (*) le rette AB, BC, CD, DA.

(*) *dim.* 1°

III.

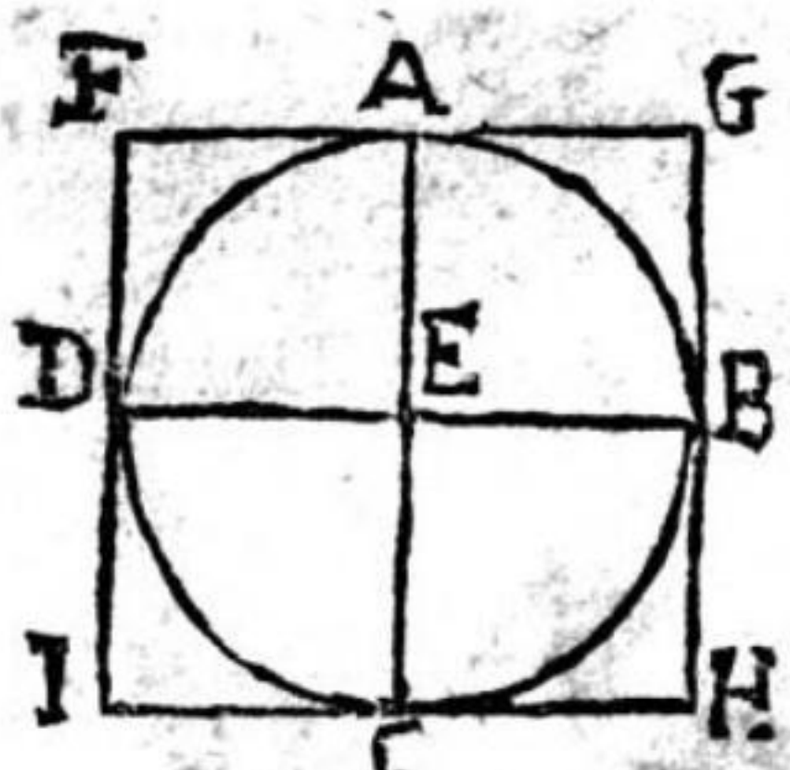
Perche i due lati BE, EA del triangolo BEA sono eguali a' due lati DE, EA del triangolo

Digitalizzato da Google

DEA ciaſcuno a ciaſcuno, e l'angolo BEA è eguale all'angolo DEA, ſarà la baſe BA eguale
* *pro.4.I.* (*) alla baſe DA. Nell'iſteſſa maniera per mezzo de' triangoli DEA, DEC ſi dimoſtra, che la DA ſia eguale alla DC, e poi per mezzo de' triangoli DEC, CEB, che la CD ſia eguale alla CB: quindi li quattro lati AB, BC, CD, DA della figura quadrilatera ABCD ſaranno eguali fra di loro. In oltre perche BD è diametro, ſarà BAD un ſemicerchio, e BCD un'altro ſemicerchio; e per conſeguente gli angoli BAD, BCD ne' ſemi-
† *pro.31.III.* cerchi ſaranno retti (*). Similmente eſſendo AC diametro, ſarà ABC un ſemicerchio, & ADC ſarà un'altro ſemicerchio; di modo che gli angoli ABC, ADC ne' ſemicerchi ſaranno retti; quindi tutti li quattro angoli della ſuddetta figura quadrilatera ABCD ſaranno retti; e perciò eſſa ſarà un quadrato; ciocche doveva dimoſtrarſi.

PROP. VII. PROBLEMA.

Deſcrivere un quadrato intorno ad un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo deſcrivere intorno ad eſſo un quadrato.

II.

I. Si tirino i due diametri AC, BD, li quali ſi ſeghino ad angoli retti nel centro E. II. Per li punti A, B, C, D, ſi tirino le tangenti FG, GH, HI,
‡ *pro.16.III.* IF (*). Io dico che la figura quadrilatera FGIH ſia il quadrato, che ſi cerca.

III.

Digitalizzato da Google

III.

Perche dalla coſtruzione la FG tocca il cerchio ABCD nel punto A, e dal centro E al punto A del toccamento ſi è tirata la retta EA; gli angoli, che ſono al detto punto A ſaranno retti (*). Nell'iſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che gli angoli, che ſono ne' punti B, C, e D ſiano tutti retti. Quindi perche dalla coſtruzione l'angolo AED è retto, ed è retto ſimilmente l'angolo FDE, ſaranno li due angoli interiori AED, FDE eguali a due retti, e per conſeguente le linee rette FI, AC ſaranno parallele: per la medeſima ragione ſarà la AC parallela alla GH, e la DB parallela così alla FG come alla IH: e perciò le cinque figure FIHG, FDBG, DHIB, FICA, ACHG ſaranno tutte parallelogrammi: di modo che ſarà la AC eguale a ciaſcuna delle due FI, GH, e la DB eguale a ciaſcuna delle due FG, IH: ma AC, e DB ſono eguali fra di loro, perche ſono diametri del cerchio ABCD; dunque le quattro linee FG, GH, HI, IF ſaranno tutte eguali: e perciò il parallelogrammo FGIH deſcritto intorno al cerchio dato è equilatero. Che poi ſia rettangolo ancora, ſi dimoſtra così. Perche FDBG è parallelogrammo, e l'angolo GBD è retto, l'angolo oppoſto GFD ſarà parimente retto (*): qnindi tutti gli altri tre angoli del parallelogrammo FGHI ſaranno ancora retti (*); e perciò il parallelogrammo FHIG ſarà un quadrato. Ciocchè doveva farſi.

(*) *pro.* 18, *III.*

(*) *pro.* 34. *I.*

(*) *Cor.* 1. *della pro.* 46. *I.*

PROP. VII. PROBLEMA.

Deſcrivere un cerchio in un quadrato dato.

I.

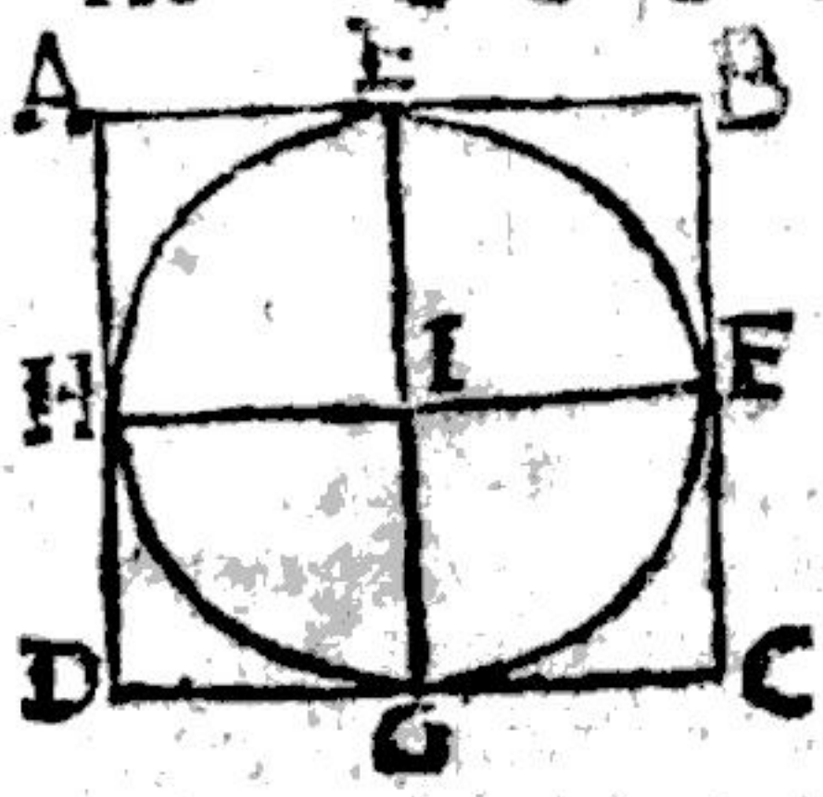
Sia dato il quadrato ABCD; fa duopo deſcrivere dentro di eſſo un cerchio.

II.

I. Seghinſi (*) i lati AB, AD per mezzo ne' punti

(*) *pro.* 10. *I.*

Digitalizzato da Google



* pro.31.I.

* pro.31.I.

punti E, ed H. II. Per lo punto E si tiri (*) la EG parallela a ciascuna delle due AD, BC. III. Similmente per lo punto H si tiri (*) la HF parallela a ciascuna delle due AB, DC.

III.

Siccome dalla costruzione la retta HF è parallela alle due AB, DC, e la EG è parallela alle due AD, BC, così il quadrato ADBC rimane compartito dalle due linee HF, EG in quattro parallelogrammi. quindi sarà (*) la AE eguale alla HI, e la AH sarà eguale alla EI: ma la AE è eguale alla AH (*), perche le rette AB, AD, le quali sono doppie della AE, AH sono eguali fra di loro; dunque sarà ancora EI eguale alla IH; così similmente si dimostra, che la EI sia eguale alla FI; e che la FI sia eguale alla GI; di modo che le quattro rette HI, EI, FI, GI saranno eguali fra di loro. Per lo che il cerchio descritto dal centro I, col raggio IH dovrà passare per li punti E, F, e G, e toccherà le linee AD, AB, BC, CD (*); perche gli angoli in H, in E, in F, e G sono retti dalla costruzione; essendosi tirate le rette HF, EG parallele rispettivamente a' lati AB, BC del quadrato dato. Ciocche doveva farsi.

* pro.34.I.

* assio. 7.

* pro.16.III.

PROP. IX. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un quadrato dato.

I.

Sia dato (*) il quadrato ABCD; fa duopo intorno ad esso descrivere un cerchio.

* veggasi la figura della pro.6.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Congiungasi (*) le diagonali AC, BD. * *dim.*1.

III.

Siccome la AB è eguale alla AD, e la AC è comune; così saranno i due lati BA, AC del triangolo BAC eguali a' due lati DA, AC del triangolo DAC ciascuno a ciascuno: quindi essendo la base BC eguale alla base DC; sarà (*) l'angolo BAC eguale all'angolo DAC, e per conseguente l'angolo retto BAD sarà segato per mezzo del diametro AC. Similmente si mostrerà che ciascuno de' tre angoli retti ABC, BCD, CDA resti diviso per mezzo dal diametro BD, e dal diametro CA; il perche gli otto angoli, due in A, due in B, due in C, e due in D saranno tutti eguali fra di loro. Ora i quattro triangoli EAB, EBC, ECD, EDA avendo gli angoli sopra le basi AB, BC, CD, DA eguali fra di loro, saranno isosceli (*); e perciò le quattro rette EA, EB, EC, ED saranno eguali; di modo che il cerchio descritto dal centro E, e col raggio EA passerà necessariamente per li punti B, C, e D, e sarà descritto intorno il quadrato dato ABCD; ciocche doveva farsi. * *pro.*8.I. * *pro.*6.I.

PROP. X. PROBLEMA.

Descrivere un triangolo isoscele, che abbia amendue gli angoli, che sono alla base doppj del rimanente angolo, il quale è nel vertice.

I.

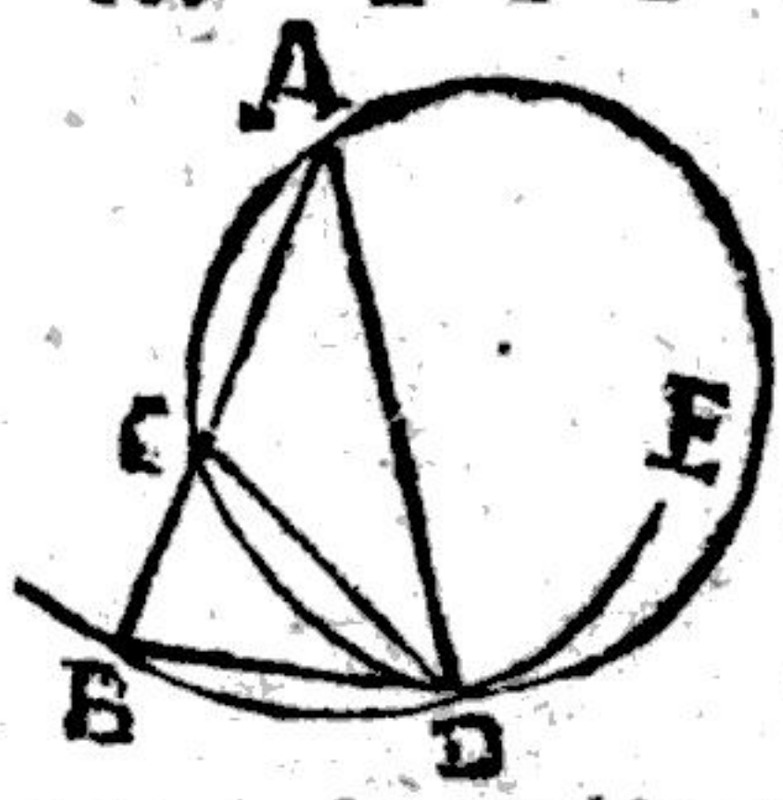
Quì non si dà cosa alcuna; si cerca solamente di descrivere un triangolo isoscele ABD tale, che ciascuno degli angoli ABD, ABC, che sono alla base sia doppio dell'angolo BAD, il quale è nel vertice.

II.

I. Si prenda la retta AB ad arbitrio. II. Se-

ghi-

Digitalizzato da Google



ghisi in tal modo nel punto C (*), che il rettangolo formato da tutta la AB, e dalla parte minore BC sia eguale al quadrato della maggiore AC. III. Dal centro A col raggio AB (*) descrivasi il cerchio BDE. IV. S'adatti in questo cerchio così descritto la retta BD eguale (*) alla AC. V. Si congiunga la retta AD (*): Io dico che il triangolo isoscele ABD sia quello che si cerca.

(*) pro. 11. II.
(*) dim. 3.
(*) pro. 1. di questo.
(*) dim. 1.

III.

Per dimostrarlo s'intenda intorno il triangolo ACD descritto il cerchio ACD (*), Perche dalla costruzione la BD è eguale alla AC: siccome dall'istessa costruzione il quadrato della AC è eguale al rettangolo ABC, così sarà parimente il quadrato della BD egnale al rettangolo ABC: quindi la BA segando il cerchio ne' punti C, ed A, e la BD stando accanto all'istesso cerchio, ed essendosi dimostrato, che il quadrato della BD sia eguale al rettangolo ABC, la BD toccherà il cerchio nel punto D (*). Ora essendo DB tangente, e DC segante, sarà l'angolo BDC formato dalla tangente, e dalla segante eguale (*) all'angolo CAD costituito nella porzione alterna del cerchio; e perciò, aggiunto comunemente l'angolo CDA, sarà (*) tutto l'angolo ADB eguale a' due angoli CAD, CDA: ma questi due angoli CAD CDA sono eguali all'angolo esteriore DCB (*); dunque l'angolo esteriore DCB sara eguale ancora all'angolo ADB, ovvero all'angolo ABD, il quale è eguale all'angolo ADB (*), perche il triangolo ABD è isoscele. Quindi essendo gli angoli DCB, DBC sopra la base BC del triangolo DCB eguali fra di loro, saranno i lati DC, DB

(*) pro. 37. III.
(*) pro. 32. III.
(*) assio. 2.
(*) pro. 32. I.
(*) pro. 5. I.

ad

ad essi sottoposti parimente eguali (*); ma dal- * *pro.*6.I.
la costruzione la AC è eguale a BD; dunque sarà
(*) la AC eguale parimente a CD; e per conse- * *assio.*1.
guente il triangolo ACD sarà isocele, e l'angolo
CAD sarà eguale all'angolo CDA sarà eguale
all'angolo CDA (*): ma si è dimostrato l'an- * *pro.*5.I.
golo CDB parimente eguale all' angolo CAD;
dunque tutto l'angolo ADB sarà doppio dell'an-
golo CAD, ovvero dell' angolo BAD; e perciò
ancora l'angolo ABD sarà doppio dell' angolo
BAD; ciocche doveva farsi.

ADDIZIONE.

PEr sapere il valore di ciascuno de' tre angoli ABD, ADB, BAD si potrà far così: ciascuno degli angoli ABD, ADB è doppio dell' angolo BAD: dunque tutti due insieme sono quadrupli dell'angolo BAD, e tutti due insieme giuntovi l'angolo BAD, vale a dire li tre angoli del triangolo ABD saranno quintupli dell' istesso angolo BAD; ma tutti tre gli angoli del triangolo ABD sono eguali a due retti, ovvero a 180 gradi: dunque il solo angolo BAD sarà eguale alla quinta parte di 180 gradi: il perche essendo 36 la quinta parte di 180, ne siegue che l'angolo BAD sia di 36 gradi: gli altri due ABD, ADB, saranno ciascuno di 72 gradi, e rimane la somma di tutti tre 36, 72, e 72 eguale a 180 gradi.

Per mezzo di questo Problema Euclide *nella proposizione, che siegue descrive in un cerchio dato un pentagono equilatero, ed equiangolo, vale a dire una figura di cinque lati equilatera, ed equiangola: la regola è questa. Siccome tutta la circonferenza contiene 360 gradi, così ogni quinta parte di essa ne conterrà 72: quanti appunto ne contiene ciascuno degli angoli alla base del triangolo isoscele ABD. Costituiscasi dunque al centro del cer-*

Digitalizzato da Google

cerchio dato un'angolo di 72 gradi, vale a dire un' angoloeguale ali' angolo ABD; poiche la baſe di eſſo ſarà la quinta parte della circonferenza, e per conſeguente la ſotteſa di queſta baſe ſarà uno de' lati del pentagono, che ſi dimanda.

PROP. XI. PROBLEMA.

Deſcrivere in un cerchio dato un pentagono equilatero, ed equiangolo.



I.

Sia dato il cerchio ABCDE, fa duopo deſcrivere dentro di eſſo un pentagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Si deſcriva in diſparte il triangolo iſoſcele FGH, tale che ciaſcuno de'due angoli FGH, FHG ſopra la baſe ſia doppio dell' angolo al vertice, GFH. (*) II. Nel cerchio dato ſi deſcriva il triangolo ACD equiangolo al triangolo FGH (*). III. ciaſcuno de' due angoli ACD, ADC ſi ſeghi per mezzo colle rette CE, DB (*). IV. Si congiungano le rette AB, BC, AE, ED (*): Io dico che il pentagono ABCDE deſcritto nel cerchio dato ſia equilatero, ed equiangolo.

* *pro. ante.*
* *pro. 2. di queſto.*
* *pro. 9. I.*
* *dim. 1.*

III.

Perche dalla coſtruzione il triangolo ACD è equiangolo al triangolo FGH, ſiccome gli angoli FGH, FHG ſono doppj dell' angolo GFH, così gli angoli ACD, ADC ſaranno doppj dell' angolo CAD: il perche eſſendo dalla coſtruzione l'angolo ACD ſegato per mezzo dalla retta CE, e l'angolo ADC ſimilmente eſſendo ſegato per mezzo dalla retta DB, ſaranno i cinque angoli alla

Digitalizzato da Google

alla circonferenza CAD, CDB,BDA,ACE,ECD eguali fra di loro: ma le basi degli angoli eguali, che stanno alla circonferenza sono eguali fra di loro (*); dunque saranno i cinque archi DC,CB, BA, AE, ED egnali fra di loro; e per conseguente le loro corde (*) ovvero sottese DC, CB, BA, AE, ED saranno parimente eguali: laonde il pentagono descritto sarà equilatero:che sia poi equiangolo,si dimostra così:l'arco BC è eguale all'arco AE;aggiugnendo dunque comunemente l'arco CDE, sarà la circonferenza BCDE eguale alla circonferenza CDEA:ma la circonferenza BCDE è base dell'angolo BAE,e la circonferenza CDEA è base dell' angolo CBA;dunque, poiche essendo le basi eguali, ancora gli angoli alla circonferenza devono essere eguali (*): sarà l'angolo BAE eguale all'angolo CBA; Nell' istessa maniera si mostrerà, che l'angolo CBA sia eguale all' angolo DCB, e che questo sia eguale all' angolo EDC; è questo eguale all' angolo AED; il perche tutti i cinque angoli del pentagono ABCDE descritto nel cerchio dato saranno eguali; sicche essendosi già dimostrato, che i cinque lati del medesimo sono ancora eguali, ne siegue, che egli sarà equilatero, ed equiangolo; ciocche doveva farsi.

(*) *pro.*26. III.

(*) *pro.*29. III.

(*) *pro.*27. III.

PROP. XII. PROBLEMA.

Descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo intorno ad un cerchio dato.

I.

Sia dato il cerchio ABCDE; fa duopo descrivere intorno ad esso un pentagono equilatero, ed equiangolo.

II.

I. Descrivasi dentro al cerchio dato (*) un pentagono equilatero, ed equiangolo, e siano A, B, C, D, E i punti ne' quali gli angoli del pentagono no toccano la circonferenza del cerchio. II.

(*) *pro. ante.*

Per

Digitalizzato da Google

Per li punti A,B,C,D,E così determinati s'intendano passare le tangenti HG,GL, LK, KI, IH: io dico che il pentagono HIKLG contenuto dalle suddette tangenti, e descritto intorno al cerchio dato sia equilatero, ed equiangolo.

III.



Sia F il centro del cerchio dato, dal quale s' intendano congiunte le linee rette FH, FI, FK, FL, FG; siccome ancora i raggi FA, FB, FC, FD, FE, li quali saranno perpendicolari (*) rispettivamente alle tangenti HG, HI, IK, KL, LG.

(*) pro. 18. III.

Quindi i triangoli FBH, FAH saranno rettangoli, e perciò il quadrato dell'ipotenusa FH sarà eguale (*) così a' quadrati di FB, e BH, come a' quadrati di FA, e di AH. Laonde i quadrati di FB, e di BH saranno eguali a' quadrati di FA, e di AH; e per conseguente, essendo il quadrato del raggio FB eguale al quadrato del raggio FA, sarà l' altro quadrato di BH eguale all' altro quadrato di HA, e la linea retta BH sarà eguale alla linea retta HA (*): nell' istessa maniera si dimostrerà, che la linea retta AG sia eguale alla sua vicina GE, e la EL alla sua vicina LD, e così si dirà di tutte le altre.

(*) pro. 47. I.

(*) Cor. 3. della pro. 47. I.

In oltre essendo la BH eguale alla HA, e la BF eguale alla AF saranno i due lati HB, BF del triangolo HBF eguali a' due lati HA, AF del triangolo HAF ciascuno a ciascuno: laonde essendo di più la base HF comune all'uno triangolo, e all' altro, saranno tutti gli angoli (*) eguali a tutti gli angoli ciascuno a ciascuno; vale a dire l'angolo BFH sarà eguale all' angolo AFH, e l'angolo BHF sarà eguale all' angolo AHF:

(*) pro. 8. I.

Digitalizzato da Google

AHF: e perciò così l'angolo BFA, come l'angolo BHA rimane diviso per mezzo dalla retta FH: nell'istessa maniera si dimostrerà, che gli angoli AFE, AGE sono divisi per mezzo dalla retta FG; e che gli angoli EFD, ELD sono ancora divisi per mezzo dalla retta FL, e così deve intendersi di tutti gli altri angoli conseguenti.

Di più cadendo dalla costruzione gli angoli del pentagono equilatero, ed equiangolo descritto nel cerchio ne' punti A, B, C, D, E, saranno i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA eguali fra di loro; e per conseguente i cinque angoli al centro (*) AFB, BFC, CFD, DFE, EFA saranno parimente eguali; il perche essendo stato dimostrato, che essi sono divisi per mezzo delle rette FH, FI, FK, FL, FG, saranno i diece angoli AFH, HFB, BFI, IFC, CFK, KFD, DFL, LFE, EFG, GFA tutti eguali fra di loro.

Finalmente essendo li due angoli HAF, GAF eguali fra di loro, per essere entrambi retti; siccome ancora essendo eguali gli, angoli AFH, AFG, saranno i due angoli HAF, AFH del triangolo HAF eguali a' due angoli GAF, AFG del triangolo GAF ciascuno a ciascuno: quindi essendo in oltre il lato AF comune ad entrambi i triangoli HAF, GAF, saranno (*) tutte le altre cose eguali a tutte le altre cose: vale a dire sarà l'angolo FHA eguale all'angolo FGA, e la retta AH sarà eguale alla retta AG; il perche tutta la HG rimane divisa per mezzo nel punto A. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo FGE sia eguale all'angolo FLE, e che la retta GL sia divisa per mezzo nel punto E; siccome ancora che l'angolo FLD sia eguale all'angolo FKD, e che la retta LK sia divisa per mezzo nel punto D; e così deve intendersi ancora degli altri angoli, e rette conseguenti.

* pro. 26. I.

D'onde poi facilmente si conchiuderà, che

Digitalizzato da Google

il pentagono HGLKI sia equilatero, ed equiangolo: imperciocche I. essendosi dimostrato, che le rette HG, HI sono divise per mezzo ne' punti A, e B, e di più essendosi dimostrato, che le mettà HA, HB sono eguali fra loro, saranno ancora tutte le rette HG, HI eguali fra loro: nell'istessa maniera si mostrerà, che HI sia eguale adIK, e questa a KL, e questa ad LG, e questa ad HG: di modo che il pentagono HGLKI sarà equilatero. II. Essendosi dimostrato, che l'angolo AHB è diviso per mezzo dalla retta HF, siccome ancora che l'angolo BIC e diviso per mezzo dalla retta IF; ed essendosi di più dimostrato, che gli angoli FHB, FIB sono eguali fra di loro: ne siegue, che l'angolo AHB sia eguale all'angolo BIC; quindi essendo tutto questo discorso applicabile agli altri angoli, ne siegue, che il pentagono HGLKI sia parimente equiangolo: ciocche bisognava fare.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un pentagono equilatero, ed equiangolo dato.

I.

Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo; fa duopo descriverci dentro un cerchio.

II.

*pro. 9. I. I. Si seghino per mezzo li due angoli (*) EAB, ABC per le rette AF, BF, le quali si vadino a congiugnere nel punto F. II. Si unischino le * dim. 1. rette (*) FC, FD, FE. III. Dal punto F si *pro. 12. I. facciano (*) sopra li lati AB, BC, CD, DE, EA del pentagono cadere le perpendicolari FL, FG, FH, FI, FK.

III.

Perche dalla suppositione la AB è eguale alla AE, e la AF è comune; saranno li due lati BA, AF

Digitalizzato da Google

AF del triangolo ABF eguali a' due lati EA, AF del triangolo AEF ciaſcuno a ciaſcuno: quindi eſſendo ancora dalla coſtruzione l'angolo BAF eguale all'angolo EAF, ſarà (*) l'angolo ABF eguale all'angolo AEF: ma dalla coſtruzione l'angolo ABC è doppio dell'angolo ABF; dunque l'iſteſſo angolo ABC ſarà doppio dell' angolo AEF: il perche eſſendo dalla ſuppoſizione l'angolo AED eguale all' angolo ABC, ne ſiegue che l'angolo AED ſia parimente doppio dell' angolo AEF: e perciò che l'angolo AED è diviſo per mezzo della retta FE. Nell'iſteſſa maniera paragonando il triangolo AEF col triangolo DEF, ſi dimoſtrerà, che l'angolo EDC ſia diviſo per mezzo dalla retta FD, e finalmente che l'angolo DCB ſia diviſo per mezzo dalla retta CF.



* pro.4.I.

In oltre perche l'angolo retto FLA è eguale all'angolo retto FKA, e l'angolo FAL è eguale all' angolo FAK, ſaranno li due angoli FLA, FAL del triangolo FAL eguali a' due angoli FKA, FAK del triangolo FAK; quindi eſſendo il lato FA, comune ad entrambi i triangoli; ſarà (*) la retta FL eguale alla retta FK: nell'iſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che la FK ſia eguale alla FI, e la FI, alla FH, e queſta alla FG, e queſta alla FL: di modo che le cinque rette FL, FK, FI, FH, FG ſaranno tutte eguali fra loro: laonde dal centro F col raggio FL deſcrivendo un cerchio egli paſſerà neceſſariamente per li punti K, I, H, e G, e toccherà i lati AB, AE, ED, DC, CB del pentagono ne' ſuddetti punti (*), perche dalla coſtruzione le rette FL, FK, FI, FH,

*pro.26.I.

* pro.16.III.

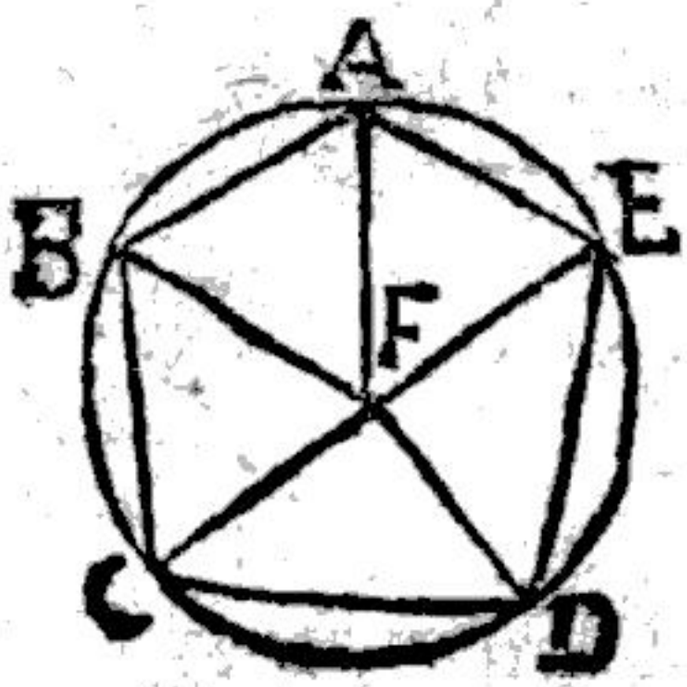
Digitalizzato da Google

FG ſono perpendicolari a' ſuddetti lati del pentagono; ciocche biſognava fare.

PROP. XIV. PROBLEMA.

Deſcrivere un cerchio intorno ad un pentagono equilatero, ed equiangolo dato.

I.



Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo; fa duopo deſcrivere intorno ad eſſo un cerchio.

II.

* *pro.9.I.* I. Si ſeghino (*) per mezzo li due angoli EAB, ABC per le rette AF, BF. II.

* *dim.* 1. Si congiungano (*) le rette FE, FD, FC.

III.

Siccome dalla ſuppoſizione la AB è eguale alla AE, e la AF è comune, così ſaranno i due lati BA, AF del triangolo BAF eguali a' due lati EA, AF del triangolo EAF ciaſcuno a ciaſcuno; quindi eſſendo di più dalla coſtruzione l'angolo BAF eguale all'angolo EAF, ſarà (*) la

* *pro.4.I.* baſe BF eguale alla baſe EF, e l'angolo ABF eguale all'angolo AEF: ma dalla coſtruzione l'angolo ABC è doppio dell'angolo ABF; dunque l'iſteſſo angolo ABC ſarà parimente doppio dell'angolo AEF: laonde eſſendo dalla ſuppoſizione l'angolo ABC eguale all'angolo AED; ſarà l'angolo AED doppio dell'angolo AEF: e per conſeguente l'angolo AED rimane diviſo per mezzo dalla retta EF. Nell' iſteſſa maniera paragonando il triangolo AEF col triangolo DEF ſi moſtrerà, che la baſe AF ſia eguale alla baſe FD, e che l'angolo EDC reſti diviſo per mezzo dalla retta DF; e poi paragonando il triangolo

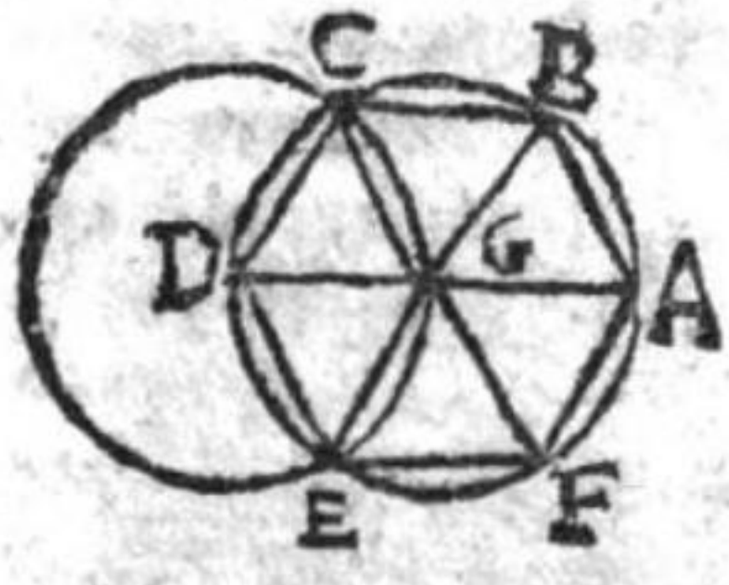
EDF

Digitalizzato da Google

EDF col triangolo CDF si mostrerà, che la base FE sia eguale alla base FC, e che l'angolo DCB rimanga diviso per mezzo dalla retta CF: di modo che le cinque rette FA, FE, FD, FC, FB saranno eguali fra loro: il perche dal centro F col raggio FA descrivendo un cerchio egli passerà per tutti li cinque angoli A, E, D, C, B del pentagono dato. Ciocche doveva farsi.

PROP. XV. PROBLEMA.

Descrivere un'essagono equilatero, ed equiangolo in un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ABCDEF avente il centro in G; fa duopo descrivere in esso un'essagono equilatero, ed equiangolo.

II.

I. Tirisi il diametro AGD. II. Dal centro D col raggio DG si descriva (*) il cerchio CGE III. Si congiungano (*) le rette CG, EG. IV. Si distendano (*) la CG in F, e la EG in B (*). V. Si congiungano le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA (*). Io dico che la figura ABCDEF descritta nel cerchio dato sia un'essagono equilatero, ed equiangolo.

* *dim.* 3.
* *dim.* 1.
* *dim.* 2.
* *dim.* 1.

III.

Siccome dalla costruzione il punto D è centro del cerchio CGE, così le tre rette DC, DG, DE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro. Similmente siccome dalla supposizione G è il centro del cerchio ABCDEF, così le tre rette GC, GD, GE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra loro: d'onde è facile a dedurne, che li due triangoli DCG, EDG sono equilateri, e per conseguente equian-

Digitalizzato da Google

goli (*) : Quindi essendo i tre angoli d'ogni triangolo eguali a due angoli retti (*), sarà così l'angolo DGE, come l'angolo DGC eguale alla terza parte di due angoli retti: laonde essendo i tre angoli DGE, DGC, CGB eguali a' due angoli retti (*), sarà l'angolo rimanente CGB eguale ancora alla terza parte di due retti; il perche li tre angoli DGE, DGC, CGB saran- eguali fra di loro: ma li detti tre angoli DGE, DGC,CGB sono eguali a'tre angoli BGA, AGF, FGE, perche sono questi opposti al vertice di quelli (*) : dunque li sei angoli DGE, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE saranno eguali fra di loro: e per conseguente gli archi DE, DC,CB,BA, AF, FE, a' quali insistono i suddetti sei angoli saranno parimente eguali (*) : d'onde poi siegue, che le corde,le quali sono sottoposte agli archi accennati, cioè le corde DE, CD, CB, BA, AF, FE sono eguali fra di loro (*) : di modo che l'essagono ABCDEF sarà equilatero. Che poi sia equiangolo si dimostra cosi: l'arco AB è eguale all'arco DC; aggiugnendo dunque comunemente l'arco AFED, sarà l'arco BAFED eguale all'arco AFEDC: quindi poiche gli angoli alle circonferenze insistenti ad archi eguali sono eguali fra di loro (*); sarà l'angolo BCD eguale all'angolo CBA: nell' istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo CBA sia eguale all' angolo BAF, e che questo sia eguale all' angolo AFE, e cosi degli altri: dacche poi siegue, che l'essagono ABCDEF sia parimente equiangolo: ciocche doveva farsi.

* *Cor. della pro.5.I.*

* *pro. 32.I.*

* *pro.13.I.*

* *pro.15.I.*

* *Avvert. della pro. 26.III.*

* *pro. 29.III.*

* *pro.27. III.*

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

DA quì è manifesto, che il lato AB dell' essagono sia eguale al raggio del cerchio, nel quale l'essagono è descritto; e per conseguente tutti i sei lati dell'essagono sono eguali al raggio del cerchio replicato sei volte, ovvero al diametro dell' istesso cerchio replicato tre volte; ma la circonferenza del cerchio è maggiore de' sei lati dell' essagono dunque la circonferenza del cerchio è maggiore del diametro del cerchio replicato tre volte: vale a dire, se il diametro del cerchio è di sette palmi, la di lui circonferenza sarà più di 21 palmi. Di fatto Archimede ha dimostrato, che la circonferenza al diametro sia a un di presso, come 22 a 7.

AVVERTIMENTO.

SE descritto l'essagono ABCDEF nel cerchio dato si tirino per li punti A, B, C, D, E, F le tangenti al cerchio, si vedrà nascere intorno al detto cerchio un'essagono equilatero, ed equiangolo, siccome si è detto nel pentagono: similmente si potrà descrivere un cerchio dentro, ed intorno ad un'essagono equilatero, ed equiangolo dato.

PROP. XVI. PROBLEMA.

Descrivere un quindecagono equilatero, ed equiangolo in un cerchio dato.

I.

Sia dato il cerchio ADE; fa duopo descriverci dentro un quindecagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Descrivasi nel cerchio dato (*) un triangolo equiangolo ad un triangolo equilatero quod-lum-

* *pro. 2. di questo.*

Digitalizzato da Google

que, il qual triangolo dopo che sarà descritto, si ritroverà egli ancora equilatero, e sia AD uno de' lati del triangolo equilatero. II. Descrivasi nel detto cerchio a cominciare dal punto A (*) un pentagono equilatero, ed equiangolo, e sia AB uno de' lati del detto pentagono. III. Seghisi l'arco BD per mezzo(*)nel punto C. Io dico, che così l'arco BC, come l'arco CD sono la decimaquinta parte della circonferenza del cerchio dato; di modo che congiugnendo le corde BC, CD, ed adattando nel cerchio continuamente tante altre linee rette eguali a ciascuna delle due BC, CD, si vedrà uscir fuori un quindecagono equilatero, ed equiangolo.

(*) *pro.* 11. *di questo.*

(*) *pro.* 30. *III.*



III.

Imperciocche siccome la corda AD è uno de' lati del triangolo equilatero descritto nel cerchio, così sarà l'arco AD la terza parte della sua circonferenza; quindi intendendo compartita la detta circonferenza in quindici parti tutte eguali, l'arco AD ne conterrà cinque delle suddette quindici parti. Similmente perche la corda AB è uno de' lati del pentagono descritto nel cerchio ABE, sarà l'arco AB la quinta parte della di lui circonferenza; e per conseguente l'istesso arco AB conterrà tre delle quindici parti eguali, nelle quali s'intende compartita la di lui circonferenza: ma si è dimostrato l'arco AD contenerne cinque; dunque l'arco BD ne conterrà due; e perciò cosi l'archetto BC, come l'altro archetto CD saranno la decimaquinta parte della circonferenza del cerchio. Ciocche bisognava fare.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

IN un modo consimile a tutto ciò, che si è detto nel pentagono nelle proposiz. XII. XIII., e XIV., se per le divisioni del cerchio tireremo linee rette, che lo tocchino, si descriverà intorno ad esso un quindecagono equilatero, ed equiangolo: poi si descriverà un cerchio dentro, e dintorno un quindecagono equilatero, ed equiangolo dato.



RI-

Digitalizzato da Google

RICAPITOLAZIONE DEL LIBRO IV. DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA PIANA.

TUtte le proposizioni di questo quarto libro sono Problemi, ne' quali non si tratta d' altro, che di descrivere certe figure dentro, o dintorno a' cerchi dati, e viceversa di descrivere cerchi dentro, o dintorno a certe figure date. Incomincia Euclide da' triangoli, ed insegna il metodo che si deve tenere per (*) descrivere dentro, e dintorno ad un cerchio dato un triangolo equiangolo ad un triangolo dato. Di poi passa a mostrare come viceversa possa (*) descriversi un cerchio dentro, e dintorno ad un triangolo dato. Siccome poi questi quattro Problemi sono generali, e si possono intendere di ogni sorta di triangoli, così si contengono sotto di essi i quattro seguenti Problemi, che sono particolari: cioè dentro, e dintorno ad un cerchio dato descrivere un triangolo equilatero. E dentro, e dintorno ad un triangolo equilatero dato descrivere un cerchio.

*pro. 2. e 3.

*pro. 4. e 5.

Da' triangoli Euclide fa passaggio alle figure quadrilatere: ma siccome non tutte le figure quadrilatere si possono descrivere in un cerchio dato: poiche quelle, le quali anno gli angoli opposti maggio-

giori, o minori di due angoli retti non ſono capaci di eſſere deſcritte nel cerchio (*); *così Euclide tralaſcia il Problema generale di deſcrivere dentro, o dintorno ad un cerchio dato una figura quadrilatera equiangola ad un'altra figura quadrilatera data; ma ſi mette a conſiderare ſolamente i quadrati. Inſegna dunque primieramente il metodo, che ſi deve tenere per* (*) deſcrivere dentro, o dintorno un cerchio dato un quadrato; *e poi quel che ſi ha da fare per* (*) deſcrivere un cerchio dentro, o dintorno ad un quadrato dato.

* *pro.* 22. III.

* *pro.* 6. *e* 7.

* *pro.* 8. *e* 9.

Sieguono quattro Problemi intorno li pentagoni equilateri, ed equiangoli, a' quali però Euclide premette queſt'altro Problema, il quale era neceſſario per alcuni di quelli: cioè (*). Deſcrivere un triangolo iſoſcele tale, che ciaſcuno de' due angoli ſopra la baſe ſia doppio dell'angolo verticale, *il qual Problema egli riſolve per mezzo della propoſizione* XI. *del libro* II. *e per mezzo d'un altro Problema, che aveva riſoluto nel principio di queſto libro, il quale è queſto* (*). Adattare in un cerchio dato una linea diritta eguale ad un'altra linea diritta data. *I problemi appartenenti a' pentagoni ſono queſti* (*). Dentro, e dintorno ad un cerchio dato deſcrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo (*). E dentro, e dintorno ad un pentagono equilatero, ed equiangolo dato, deſcrivere un cerchio.

* *pro.* 10.

* *pro.* 1.

* *pro.* 11. *e* 12.

* *pro.* 13. *e* 14.

Paſſa agli eſſagoni equilateri, ed equiangoli: ma qui ſi contenta di moſtrare il metodo, che ſi deve tenere per (*) deſcrivere in un cerchio dato un'eſſagono equilatero, ed equiangolo: *poiche la regola per* deſcrivere un'eſſagono equilatero, ed equiangolo intorno ad un cerchio dato *non è diverſa da quella del pentagono. Siccome parimente la regola, che ha luogo ne' pentagoni è applicabile ancora agli eſſagoni equilateri, ed equiangoli per* deſcriverci dentro, e dintorno un cerchio.

* *pro.* 15.

Fin

Digitalizzato da Google

Finalmente Euclide prescrive il metodo, che si
deve tenere per (*) descrivere in un cerchio dato
un quindecagono equilatero, ed equiangolo: *e*
quì parimente si devono supplire tre Problemi, che
Euclide ha tralasciati per brevità, i quali sono:
dintorno ad un cerchio dato descrivere un quin-
decagono equilatero, ed equiangolo. E dentro,
e dintorno ad un quindecagono equilatero, ed
equiangolo dato descrivere un cerchio.

* pro. 16.



Digitalizzato da Google

LIBRO QUINTO
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE.

DEFINIZIONI.



I.

Gni grandezza minore, che misura esattamente un'altra grandezza maggiore, dicesi parte.

II.

Viceversa ogni grandezza maggiore, che è misurata esattamente da un' altra grandezza minore, dicesi multiplice.

SPIEGAZIONE.

I *Nomi di* parte, *e di* multiplice *sono correlativi. Se vi sono due grandezze una minore l'altra maggiore tali, che la minore misuri esattamente la maggiore; la minore dicesi* parte *in rispetto della maggiore, e la maggiore dicesi* multiplice *in rispetto della minore; la voce dunque di* parte *qui è un poco ristretta, nè si prende, come comunemente*

men-

Digitalizzato da Google

mente ſuol prenderſi, per una porzione qualunque d'una grandezza, ma piuttoſto per una porzione tale, che miſuri eſattamente il ſuo tutto. Quindi altri per maggior diſtinzione anno diſtinte due ſorte di parti, l'una aliquota, *l'altra* aliquanta. *Chiamano parte* aliquanta *quella, che non miſura eſattamente il ſuo tutto; chiamano parte* aliquota *quella, che miſura il ſuo tutto eſattamente: così per eſſempio dicono, che il 5 ſia parte aliquanta del 12, e che il 3 ſia parte aliquota del 15.*

Se vi ſono due grandezze minori, le quali ſi contengano un'egual numero di volte in due altre grandezze maggiori; le minori ſi chiameranno parti ſimili *in riguardo delle maggiori; e viceverſa le maggiori ſi chiameranno* multiplici ſimili, *ovvero* egualmente multiplici *in riguardo delle minori; così per eſempio perche le due grandezze minori 2, e 5 ſi contengano riſpettivamente cinque volte nelle maggiori 10, e 25; le minori 2, e 5 le chiameremo* parti ſimili *in riguardo di 10, e 25, ma le maggiori 10, e 25 le chiameremo* multiplici ſimili, *ovvero più elegantemente* egualmente multiplici *di 2, e 5.*

III.

La ragione non è altra coſa, ſe non il rapporto di due grandezze omogenee paragonate l'una coll'altra ſecondo la quantità.

IV.

Due grandezze allora ſono omogenee, quando la minore di eſſa replicata più volte può ſopravvanzare la maggiore.

SPIEGAZIONE.

PEr darſi luogo alla ragione ſi richieggono tre coſe. I. Due grandezze. II. Che ſiano omogenee. III. Che ſi paragonino inſieme ſecondo la quantità, non già ſecondo gli altri loro attributi: quando que-

Digitalizzato da Google

queſte tre coſe ſi verificano, ſi darà luogo alla ragione, la quale altro non è, ſe non la comparazione ſcambievole delle due ſuddette grandezze: Per conoſcere poi ſe due grandezze ſono omogenee, o no dovrà tenerſi queſta regola: biſognerà vedere, ſe la minore di eſſe replicata più volte è capace di ſopravvanzare la maggiore: Ove ciò ſieguale due grandezze dovranno ſtimarſi omogenee: ove no, le due grandezze dovranno ſtimarſi eterogenee. Così due linee, due ſuperficie, due corpi, due durate, &c. dovranno ſtimarſi omogenee; imperciocche la linea minore, la ſuperficie minore, il corpo minore, la durata minore, &c. preſe molte volte poſſono ſuperare la linea, la ſuperficie, il corpo, e la durata maggiore. Ma una linea non è omogenea con una ſuperficie; imperciocche la linea moltiplicata quante volte ſi vuole, giammai può degenerare in ſuperficie.

La definizione della ragione addotta da Euclide *è generale, e comprende ſotto di ſe due ſorte di ragioni, l'una delle quali diceſi* geometrica, *l'altra* aritmetica, *come che egli tratti poi ſolamente della ragione geometrica. Ma avanti, che io entri a ragionare de' caratteri dell'una, e dell'altra, dirò, che ſiccome in ogni ragione fa duopo, che vi ſiano due grandezze omogenee; così la prima di eſſe diceſi* antecedente *dalla ragione, e l'altra diceſi* conſeguente *dell'iſteſſa ragione. Quindi ogni ragione tiene un'antecedente, ed un conſeguente, li quali devono eſſere omogenei, altrimente la ragione non vi ſarebbe più, ſecondo quello, che ſi è detto. Ora è da ſaperſi, che qualora ſi compara l'antecedente col conſeguente, e ſi va conſiderando l'eccesſo dell'uno ſopra l'altro, ovvero il difetto dell'uno dall'altro, in tal caſo la ragione ſi chiama* aritmetica. *Ma quando ſi compara l'antecedente col ſuo conſeguente, e ſi va conſiderando quante volte l'uno contenga l'altro, ovvero quante volte l'uno ſi con-*

Digitalizzato da Google

contenga nell'altro, allora la ragione si chiama geometrica. *Così per esempio, se paragonando il lato del quadrato colla sua diagonale si va esaminando quanto il lato sia minore della diagonale, la ragione dirassi aritmetica; ma se paragonando l'uno coll'altro si cerca sapere quante volte il lato si contiene nella diagonale, la ragione si chiamerà geometrica. Del rimanente è qui da avvertirsi, che siccome può l'antecedente essere maggiore, eguale, e minore del conseguente, così la ragione geometrica, non meno che l'aritmetica può essere di* maggiore a minore; *di* eguale ad eguale; *e di* minore a maggiore.

V.

La proporzione altro non è, se non la comparazione di due ragioni eguali.

VI.

Due ragioni allora sono eguali, quando gli egualmente multiplici degli antecedenti pigliati secondo qualsivoglia moltiplicazione sono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente multiplici de' conseguenti pigliati eziandio secondo qualsivoglia moltiplicazione.

VII.

Ma se pigliati gli egualmente multiplici degli antecedenti secondo qualche moltiplicazione, e presi eziandio gli egualmente multiplici de' conseguenti parimente secondo qualche moltiplicazione si troverà, che il multiplice del primo antecedente avanza il multiplice del suo conseguente, ma l'egualmente multiplice dell'altro antecedente non è maggiore dell' egualmente multiplice del suo conseguente, si dirà che il primo antecedente al suo conseguente abbia maggior ragione dell'altro antecedente al suo conseguente.

SPIE-

Digitalizzato da Google

SPIEGAZIONE.

SE vi sono due ragioni eguali, e si paragonano insieme, il paragone di queste due ragioni dicesi proporzione, *la quale sarà* aritmetica, *se le due ragioni eguali siano aritmetiche, e sarà* geometrica *se le due ragioni eguali siano geometriche. Ora è da saperssi, siccome la proporzione è il paragone di due ragioni eguali, così ogni proporzione che contenga due antecedenti, e due conseguenti; imperciocchè ogni ragione contiene un' antecedente, ed un conseguente.*

Due ragioni aritmetiche allora sono eguali, quando gli eccessi, ovvero i difetti de' due antecedenti da' loro conseguenti sono eguali. Così per esempio le due ragioni aritmetiche di 8 a 5, e di 4 a 1 sono eguali fra di loro, perchè gli eccessi degli antecedenti 8, e 4 sopra i loro conseguenti 5, e 1 sono eguali fra di loro: e così similmente le ragioni aritmetiche di 4 a 6, e di 8 a 10 sono eguali; perchè i difetti degli antecedenti 4, e 8 da' loro conseguenti 6, e 10 sono parimente eguali; quindi dicendosi come sta 8 a 5, così sta 4 ad 1, ovvero come sta 4 a 6, così 8 a 10 si darà luogo alla proporzione aritmetica.

Due ragioni geometriche allora si dicono eguali, quando gli antecedenti contengono, ovvero sono contenuti da' conseguenti nell' istessa maniera, di modo che quello, che deve fare un' antecedente per rendersi eguale al suo conseguente, quell' istesso debba fare l'altro antecedente per eguagliare il suo conseguente. Quindi le ragioni geometriche di 2 a 6, e di 4 a 12 sono eguali fra di loro; perciocchè ciascuno antecedente si contiene nel suo conseguente tre volte; parimente la ragione di 8 a 4 è eguale a quella di 2 ad 1: perciocchè ciascuno antecedente contiene due volte il suo conseguente. Sic-

Digitalizzato da Google

che dicendosi come 2 a 6, così 4 a 12, ovvero come 8 a 4 così 2 ad 1, si darà luogo alla proporzione geometrica.

Euclide, *che ha voluto bandire affatto le idee del contenere, e dell'essere contenuto dalle ragioni geometriche, come quelle, che vedeva non aver luogo nelle quantità* irrazionali, *o* incommensurabili, *delle quali egli tratta ampiamente nel libro x., ci ha additato un'altro criterio per discernere se due ragioni geometriche sono eguali, o no, del qual criterio non sembra, che i moderni siano rimasi gran fatto soddisfatti, forse perche non anno scoperti i veri fonti, da' quali egli lo ha tratto. Il criterio suggeritoci da Euclide è questo: Quando nasce il dubbio se due ragioni geometriche siano eguali, o no, fa duopo pigliare gli egualmente multiplici degli autecedenti secondo qualsivoglia multiplicazione, siccome ancora pigliare gli egualmente multiplici di conseguenti, parimente secondo qualsivoglia multiplicazione; ciò fatto, fa duopo paragonare gli uni, cogli altri, a vedere se i primi siano tutti due, o maggiori, o eguali, o minori de' secondi; ove ciò riegua in tutte le multiplicazioni possibili, si potrà dire sicuramente, che le due ragioni siano eguali; ma se paragonati gli uni cogli altri si trovi un caso, in cui il multiplice del primo antecedente è maggiore del multiplice del suo conseguente; ma il multipliee del secondo non è maggiore del multiplice del suo conseguente, in tal caso si dirà, che il primo antecedente al suo conseguente ha maggior ragione dell'altro antecedente al suo conseguente. Questo è il tanto celebre criterio suggeritoci da Euclide, dal quale egli ha dedotte tutte le proprietà delle proporzioni. Come Euclide lo avesse scoperto non è questo il luogo di riferirlo. Rimarrà questo segreto disvelato nella ricapitolazione di questo presente libro. Per ora basterà di mettersi bene a mente le quattro seguenti pro-*

Digitalizzato da Google

proposizioni . *I.* Se gli egualmente multiplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio sono entrambi eguali, maggiori, o minori degli egualmente multiplici de' conseguenti pigliati parimente ad arbitrio, le quattro quantità saranno proporzionali . *II. Viceversa*, se quattro quantità sono proporzionali, gli egualmente multiplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio saranno entrambi eguali, maggiori, o minori degli egualmente multiplici de' conseguenti pigliati parimente ad arbitrio . *III.* Che se pigliati gli egualmente multiplici così degli antecedenti, come de' conseguenti, si ritrovi, che il multiplice del primo antecedente sia maggiore del multiplice del suo conseguente, ma il multiplice dell'altro antecedente non sia maggiore del multiplice del suo conseguente; in tal caso la prima alla seconda avrà maggior ragione della terza alla quarta . *IV. Viceversa*, se la prima alla seconda ha maggior ragione della terza alla quarta, si potranno pigliare tali egualmente multiplici degli antecedenti, e tali egualmente multiplici de' conseguenti, che quello del primo antecedente sia maggiore di quello del suo conseguente, ma quello dell'altro antecedente non sia maggiore di quello del suo conseguente.

Alle due sorte di proporzioni fin' ora spiegate si vuole aggiugnere la terza, che si dice proporzione armonica, la quale ha luogo in tre grandezze omogenee . Queste tre grandezze devono essere tali, che paragonando la massima colla minima, e la differenza della massima, e mezza colla differenza della mezza, e della minima, le ragioni, che quindi risultano siano eguali: così per esempio li tre numeri 6, 4, *e* 3 *sono in proporzione armonica, poiche la ragione di* 6 *a* 3, *vale a dire del massimo al minimo, è eguale alla ragione di* 2 *a* 1, *vale a dire della differenza del massimo*

Digitalizzato da Google

e mezzo alla differenza del mezzo, e dal minimo.

Dati due numeri 6, e 4 per ritrovare il terzo armonicamente proporzionale si terrà questa regola: moltiplichinsi i numeri dati 6, e 4 l'uno per l'altro, ed il prodotto 24 si divida per ciocche rimane, sottraendo il minore 4 da due volte il maggiore, vale a dire da 12, il qual residuo è 8; il quoziente 3 sarà il terzo armonicamente proporzionale: così parimente in ordine a' due numeri 30, e 10 il terzo armonicamente proporzionale a 6; imperciocche dividendo 300, che nasce multiplicando 30 per 10, per 50; vale a dire per ciocche avanza, sottraendo 10 da due volte 30, il quoziente è 6: di fatto come sta il massimo 30 al minimo 6, così la differenza 20 del massimo, e dal mezzo alla differenza 4 del mezzo, e del minimo. Questa proporzione ha luogo nella musica.

VIII.

Le grandezze, che anno la medesima ragione si chiamano proporzionali.

IX.

In ogni proporzione gli antecedenti si chiamano omologi fra di loro, siccome ancora li conseguenti.

X.

La proporzione almeno ha bisogno di tre termini.

SPIEGAZIONE.

Siccome la proporzione è il paragone di due ragioni eguali, così la proporzione deve contenere quattro termini, vale a dire due antecedenti, e due conseguenti. Nulla di manco potria la proporzione aver luogo in tre termini, ma non già in meno di tre termini. Ciò avviene allora quando il conseguente della prima ragione è parimente antecedente dell'altra ragione: in tal caso la proporzione

Digitalizzato da Google

ne avrà i ſuoi due antecedenti, e i ſuoi due conſeguenti; quantunque non abbia più di tre termini; e queſto a cauſa che quello di mezzo ſa le vedi d'antecedente nella ſeconda ragione, e di conſeguente nella prima: come ſi ſcorge in queſta proporzione 8 ſta a 4, come l'iſteſſo 4 a 2: Ora è da ſaperſi, che quando la proporzione ha luogo in tre termini ſi dice continua; *ma quando ha luogo in quattro termini ſi chiama* interrotta.

XI.

Ragione permutata ſi chiama, quando in una proporzione ſi paragona l'antecedente coll'altro antecedente, ed il conſeguente coll'altro conſeguente.

XII.

Ragione inverſa ſi chiama, quando in una proporzione l'antecedente ſi fa conſeguente, ed il conſeguente ſi fa antecedente.

XIII.

Ragione compoſta ſi dice, quando in una proporzione la ſomma dell'antecedente, e del conſeguente ſi compara coll'iſteſſo conſeguente.

XIV.

Ragione diviſa ſi dice, quando viceverſa in una proporzione l'eccesſo dell'antecedente ſopra il ſuo conſeguente ſi compara coll'iſteſſo conſeguente.

XV.

Ragione converſa ſi dice, quando in una proporzione ſi compara l'antecedente coll'eccesſo dell'antecedente ſopra il ſuo conſeguente.

SPIEGAZIONE.

PRendaſi una proporzione qualſivoglia come queſta: 8 a 2, così 4 ad 1: ſe ſi fa come 8 a 4, così 2 ad 1: queſta ſi dirà ragione permutata; *ma dicendoſi come 2 ad 8, così 1 a 4 queſta ſi chiame-*

Digitalizzato da Google

rà ragione inverſa : *in oltre dicendoſi come* 10 *a* 2, *così* 5 *ad* 1 *queſta ſi dirà ragione* compoſta ; *che ſe poi ſi faccia* 6 *a* 2, *così* 3 *ad* 1, *queſta ſi chiamerà ragione* diviſa; *finalmente dicendoſi come* 8 *a* 6, *così* 4 *a* 3, *queſta ſi chiamerà ragione* converſa. *Avvertaſi quì, che* Euclide *in queſto luogo ha inteſo ſolamente ſpiegare i nomi di ragione* permutata, inverſa, compoſta, diviſa, *e* converſa, *e non altro : che poi una proporzione poſſa permutarſi, inverterſi, comporſi, dividerſi, e convertirſi, e ciò non oſtante rimanga ancora proporzione, queſta è una coſa, che ha biſogno di eſſere dimoſtrata ; come di fatto egli la dimoſtra in varj luoghi di queſto quinto libro.*

XVI.

Se vi ſono più di due grandezze da una parte, che compongono una ſerie, ed altrettante da un' altra, che compongono un'altra ſerie, e ſia come la prima alla ſeconda nella prima ſerie, così la prima alla ſeconda nell'altra ſerie ; e come la ſeconda alla terza nella prima ſerie, così la ſeconda alla terza nell'altra ſerie, e come la terza alla quarta nella prima ſerie, così la terza alla quarta nell'altra ſerie, e così ordinatamente in tutte le altre, che ſieguono : diraſſi coteſta ragione ordinata.

XVII.

Ma ſe come ſta la prima alla ſeconda nella prima ſerie, così ſta la penultima all' ultima nell' altra ſerie ; e come la ſeconda alla terza nella prima ſerie, così l'antepenultima alla penultima nell'altra ſerie ; e come la terza alla quarta nella prima ſerie, così quella che ſta avanti all' antepenultima all'iſteſſa antepenultima, e con queſt' ordine ſi vada avanzando ſempre la ragione : diraſſi coteſta ragione non ordinata, ma perturbata.

XVIII.

Se poi nell'uno caſo, e nell'altro ſi dice come la

Digitalizzato da Google

la prima all'ultima nella prima serie, così la prima all'ultima nell'altra serie, questa chiamerassi ragione eguale, la quale sarà ordinata, se la ragione sia ordinata, e sarà perturbata se la ragione sia perturbata.

SPIEGAZIONE.

Se vi sono due serie di quantità eguali di numero, e comparate sempre due quantità d'una serie con due altre dell'altra serie, esca fuori una proporzione: tal sorte di ragione si chiamerà ora ordinata, *ora* perturbata, *secondo la maniera, nella quale si prendono le grandezze proporzionali: mettiamo che le due serie siano queste quì scritte, nelle quali come sta 2 a 4, così 1 a 2; come 4 a 12, così 2 a 6, e come 12 a 60, così 6 a 30, dirassi questa ragione* ordinata: *mettiamo in oltre, che le due serie siano queste due altre quì notate, nelle quali come sta 2 a 4, così 15 a 30, e come 4 a 12, così 5 a 15, e come 12 a 60, così 1 a 5; dirassi quest' altra ragione* perturbata: *nell'una poi, e nell' altra serie se si dice come 2 a 60, così 1 a 30, dirassi questa, ragione* eguale, *la quale sarà* ordinata *nelle due prime serie, e* perturbata *nelle altre due.*

2	4	12	60
1	2	6	30

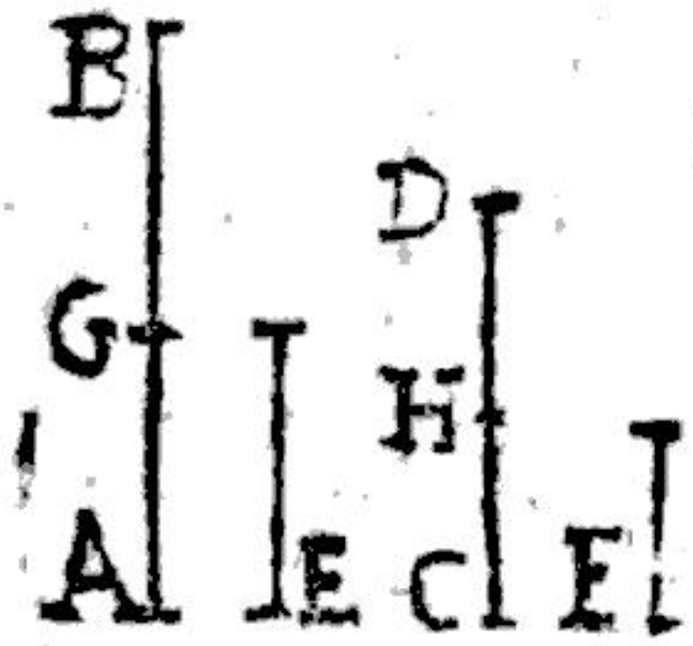
2	4	12	60
1	5	15	30

PROP. I. TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano siano egualmente moltiplici di altrettante grandezze, quanto ciascuna grandezza è moltiplice della sua corrispondente, altrettanto saranno moltiplici ancora tutte di tutte.

Digitalizzato da Google

I.



Siano quante grandezze si vogliano AB, CD egualmente moltiplici d'altrettante grandezze E, ed F ciascuna di ciascuna; vale a dire AB di E, e CD di F: io dico che quanto AB è moltiplice della sua corrispondente E, tanto la AB, e CD insieme saranno moltiplici delle E, ed F insieme.

II.

Perche dalla suppofizione la AB è tanto moltiplice di E, quanto la CD è moltiplice di F, quante grandezze sono nella AB eguali alla E, altrettante ne saranno nella CD eguali alla F. Risolvendo dunque la AB in parti eguali alla E, che siano AG, GB, e risolvendo in oltre la CD in parti eguali alla F, che siano CH, HD, sarà la moltitudine delle parti AG, GH eguale alla moltitudine delle parti CH, HD. Quindi perche la AG è eguale alla E, e la CH è eguale alla F, saranno le due AG, CH insieme eguali alle due
Aſſio. 1. E, ed F insieme (*); e similmente le due GB, HD insieme saranno eguali alle due E, ed F insieme; dal che si conchiude, che quante parti sono in AB, e CD insieme eguali alle due E, ed F insieme, altrettante ne sono nella sola AB eguali alla E: e per conseguente, che la AB sia tanto moltiplice della sua corrispondente E, quanto tutte due insieme AB, e CD sono moltiplici di tutte due iusieme E, ed F. Ciocche doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Tutte le proposizioni di questo quinto libro si possono dimostrare per via di numeri; ciocche noi non trascureremo di fare per dare maggior luce a

que

queſta dottrina, che è anzi oſcuretta, che no. Sia dunque 8 tanto moltiplice di 4, quanto 6 è moliplice di 3, e quanto 10 è moltice di 5: è manifeſto, che come 8 è moltiplice di 4, così 24 ſomma di 8, 6, e 10 è moltiplice di 12 ſomma di 4, 3, e 5.

8.	4
6.	3
10.	5
24.	12

PROP. II. TEOREMA.

Se la prima è tanto moltiplice della ſeconda, quanto la terza della quarta; e ſia in oltre la quinta tanto moltiplice dell'iſteſſa ſeconda, quanto la ſeſta è moltiplice della quarta; ſarà la compoſta dalla prima, e dalla quinta tanto moltiplice della ſeconda, quanto la compoſta della terza, e della ſeſta è moltiplice della quarta.

L.



Sia la prima AB tanto moltiplice della ſeconda C, quanto la terza DE è moltiplice della quarta F: Sia di più la quinta BG tanto multiplice dell'iſteſſa ſeconda C, quanto la ſeſta EH è moltiplice della quarta F; io dico che la AG compoſta dalla prima, e dalla quinta ſia tanto moltiplice della ſeconda C, quanto la DH compoſta dalla terza, e dalla ſeſta è moltiplice della quarta F.

II.

Perche dalla ſuppoſizione la AB è tanto moltiplice della C, quanto la DE della F; quante grandezze ſono in AB eguali a C, tante ne ſaranno in DE eguali ad F: e ſimilmente quante grandezze ſono in BG eguali a C, tante ne ſaranno in

EH

EH eguali ad F; e per conſeguente quante ne ſono in tutta la AG eguali a C, tante ne ſaranno in tutta DH eguali alla F; vale a dire la AG ſarà tanto moltiplice della C, quanto la DH è moltiplice della F. Quindi eſſendo la AG compoſta dalla prima, e dalla quinta, e la DH eſſendo compoſta dalla terza, e dalla ſeſta, ne ſiegue, che il Teorema in queſtione ſia vero.

Dimoſtrazione co' numeri.

8		4	
	2		1
10		5	
18	2	9	1

Il primo 8 *ſia tanto moltiplice del ſecondo* 2, *quanto il terzo* 4 *del quarto* 1 2 *il quinto* 10 *ſia tanto moltiplice dell' iſteſſo ſecondo* 2, *quanto il ſeſto* 5 *è moltiplice del quarto* 1: *egli è manifeſto, che* 18 *compoſto dal primo, e dal quinto è tanto moltiplice del ſecondo* 2; *quanto* 9 *compoſto dal terzo, e dal ſeſto è moltiplice del quarto* 1.

PROP. III. TEOREMA.

Se la prima ſia tanto moltiplice della ſeconda, quanto la terza è moltiplice della quarta: gli egualmente moltiplici della prima, e della terza pigliati ad arbitrio riuſciranno parimente egualmente moltiplici della ſeconda, e della quarta.

I.

Se la prima A tanto è moltiplice della ſeconda B, quanto la terza C è moltiplice della quarta D, e ſi prendono ad arbitrio della prima A, e della terza C gli egualmente moltiplici EF, GH; io dico che eſſi ſaranno egualmente moltiplici ancora della ſeconda B, e della quarta D: vale a dire che come EF è moltiplice della B, così la GH è moltiplice della D.

II.

Digitalizzato da Google



II.

Perche dalla ſuppoſizione le due grandezze EF, e GH ſono egualmente moltiplici delle due A, e C, quante grandezze ſono in in EF eguali ad A altrettante ſe ne conterranno in GH eguali a C: riſolvendo dunque la EF in parti eguali alla A, le quali ſiano EK, KF, e riſolvendo ancora la GH in parti eguali alla C, le quali ſiano GL, LH, ſarà la moltitudine delle parti EK, KF eguale alla moltitudine delle parti GL, LH. Quindi poiche dalla ſuppoſizione la A è tanto moltiplice dalla B, quanto la C è moltiplice della D, eſſendo la EK eguale alla A, e la GL eguale alla C, ſarà la prima EK tanto moltiplice della ſeconda B, quanto la terza GL è moltiplice della quarta D. Per l'iſteſſa ragione la quinta KF ſarà tanto moltiplice della ſeconda B, quanto la ſeſta LH è moltiplice della quarta D: laonde la compoſta (*) EF dalla prima, e della quinta ſarà tanto moltiplice della ſeconda B, quanto la compoſta GH dalla terza, e dalla ſeſta è moltiplice della quarta D; cioeche doveva dimoſtrarſi. * *pro. ante.*

Dimoſtrazione co' numeri.

10 . 2 . 30 . 6 30 . 90	*Sia* 10 *tanto moltiplice di* 2, *quanto* 30 *è moltiplice di* 6: *di poi di* 10, *e di* 30 *ſe ne prendono ad arbitrio gli egualmente moltiplici* 30, *e* 90: *è manifeſto, che queſti due numeri* 30, *e* 90 *ſono parimente egualmente moltiplici di* 2, *e di* 6.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. IV. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, le egualmente moltiplici della prima, e della terza pigliate ad arbitrio paragonate colle egualmente moltiplici della seconda, e della quarta ancora pigliate ad arbitrio si ritroveranno parimente avere l'istessa ragione.



I.

Abbia la prima A alla seconda B l'istessa ragione, che la terza C alla quarta D, e piglinsi ad arbitrio le due E, ed F egualmente moltiplici di A, e di C; siccome ancora le altre due G, ed H egualmente moltiplici di B, e di D; io dico che la E sia alla G, come sta la F alla H.

II.

Per dimostrarlo si prendano ad arbitrio K, ed L egualmente moltiplici di E, e di F, ed M, ed N egualmente moltiplici di G, e di H. Perche dunque la E è tanto moltiplice della A, quanto la F della C, e si sono pigliate le due K, ed L egualmente moltiplici di E, e di F; saranno (*) le due K, ed L parimente egualmente moltiplici di A, e di C: per la medesima ragione saranno le due M, ed N egualmente moltiplici di B, e di D. Quindi supponendosi, che A abbia la medesima

(*) pro. ante.

Digitalizzato da Google

sima ragione a B, che C a D dovranno le egualmente moltiplici K, ed L degli antecedenti essere (*) o tutte due maggiori, o tutte due eguali, o tutte due minori delle egualmente moltiplici M, ed N de' conseguenti: ma K, ed L sono parimente egualmente moltiplici di E, ed F, siccome ancora M, ed N sono egualmente moltiplici di G, ed H: sicche verificandosi nelle egualmente moltiplici degli antecedenti E, ed F, e de' conseguenti G, ed H la legge esposta nella definizione VI. di questo libro, ne siegue, che E abbia la medesima ragione a G, che F ad H.

(*) def. 6. di questo.

COROLLARIO.

Di qui è manifesto, che se quattro grandezze, E, G, F, ed H sono proporzionali, ancorche s'invertano rimarranno proporzionali: vale a dire sarà ancora come G ad E, così H ad F: imperciocche essendosi dimostrato, che le due K, ed L sono entrambe, o maggiori, o eguali, o minori delle due M, ed N, ne segue che ancora le due M, ed N saranno entrambe, o maggiori, o minori, o eguali alle due K, ed L, e quindi sarà come G ad E, così H ad F (*).

(*) def. 6. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

16	4 . 2	4
24	6 . 3	6

Sia come 4 a 2, così 6 a 3, e siano 16, e 24 egualmente moltiplici degli antecedenti: e 4, e 6 siano egudlmente moltiplici de' conseguenti egli è manifesto, che 16 sta a 4, come 24 a 6; e viceversa che 4 sta a 16 come 6 a 24.

PROP.

Digitalizzato da Google

guale alla F: sarà la AB tanto moltiplice della E (*), quanto la KH è moltiplice della F: ma dalla suppositzone la AB è tanto moltiplice della E, quanto la CD è moltiplice della F; dunque le due KH, CD saranno egualmente moltiplici dell'istessa F; e per conseguente saranno eguali fra di loro: si toglia via la comune CH; rimarrà la CK eguale alla HD; ma la CK dalla costruzione è eguale alla F: dunque la HD è ancora eguale alla F; ciocchè doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 2. di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

20 . 4 . 5 . 1	
12 . 3	
8 . 4 . 2 . 1	

Sia 20 tanto moltiplice di 4, quanto 5 è moltiplice di 1, e sta in oltre 12 tanto moltiplice dell'istesso 4, quanto 3 è moltiplice di 1: è manifesto, che l'avanzo 8 è tanto moltiplice del medesimo 4, quanto l'avanzo 2 è moltiplice di 1. Sia di più 30

30 . 6 . 10 . 2	
24 . 8	
6 . 6 . 2 . 2	

tanto moltiplice di 6, quanto 10 è moltiplice di 2; e 24 sia tanto moltiplice dell'istesso 6, quanto 8 è moltiplice di 2: è manifesto, che siccome l'avanzo 6 è eguale a 6, così l'avanzo 2 è eguale a 2.

PROP. VII. TEOREMA.

I. Due grandezze eguali anno la medesima ragione ad una terza grandezza: II. viceversa una terza grandezza ha la medesima ragione a due grandezze eguali.

I.

Siano due grandezze eguali A, e B, e sia la terza grandezza C; io dico primieramente che A stia a C; come sta B a C. Dico in secondo luo-

Digitalizzato da Google

go, che C ſtia ad A, come ſta C a B.

II.



I. Piglinſi le grandezze D, ed E ad arbitrio egualmente moltiplici delle due A, e B: e pigliſi in oltre la grandezza F moltiplice della terza C. Siccome le due A, e B dalla ſuppoſizione ſono eguali fra loro; così gli egualmente moltiplici di eſſe D, ed E ſaranno fra di loro eguali (*). Quindi le due D, ed E ſaranno entrambe, o maggiori, o eguali, o minori della terza F (*): il perche avendo due ragioni di A a C, e di B a C, ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici D, ed E degli antecedenti A, e B ſiano entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici F, ed F de' conſeguenti C, e C; ne ſiegue (*), che le ſuddette due ragioni ſiano eguali: vale a dire, che la A ſia alla C, come ſta la B alla medeſima C.

(*) aſſio. 6.

(*) aſſio. 1.

(*) def. 6. di queſto.

II. Suppoſte le medeſime coſe dimoſtreremo ſimilmente, che la F, o è maggiore, o è eguale, o minore di ciaſcuna delle due D, ed E. Quindi avendo due ragioni di C, ad A, e di C a B, ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici F, ed F degli antecedenti C, e C ſono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici D, ed E de' conſeguenti A, e B, ne ſiegue (*), che le ſuddette due ragioni ſiano eguali; vale a dire, che la C ſtia alla A, come ſta la C alla B.

(*) def. 6. di queſto.

Di-

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.



Siano due numeri 8, e 8 eguali fra di loro, ed il terzo numero 4. egli è manifesto, che come sta 8 a 4 così sta 8 a 4; viceversa come sta 4 ad 8, così sta 4 all'istesso 8.

PROP. VIII. TEOREMA.

I. Se due grandezze sono diseguali, esse non anno la medesima ragione ad una terza grandezza; ma quella ha maggior ragione alla terza, la quale è più grande. II. viceversa una terza grandezza ha maggiore ragione alla più picciola di due grandezze diseguali, che alla più grande.

I.



Siano due grandezze diseguali AB, e C, ed una terza grandezza D, e sia AB maggiore di C; io dico che la AB ha maggior ragione alla D, che la C all' istessa D; e viceversa che la D ha maggior ragione alla C, che alla B.

II.

Siccome dalla suppositione la AB è maggiore della C, così si può da essa tagliare una parte eguale (*) alla minore C. Tagliasi dunque I. la BE eguale alla C. II. Si prendano le tre grandezze FG, GH, ed M egualmente moltiplici rispettivamente delle tre grandezze AE, EB, e C, ma con questa legge, che la FG, la quale è moltiplice della AE sia maggiore della D. III. Si preuda della D il moltiplice N, ma con questa legge, che egli superi HG moltiplice di BE d'una parte non maggiore di D.

(*) *pro. 3. I.*

Digitalizzato da Google

III.

I. Perche dalla costruzione le due BE, e C sono eguali fra di loro, li loro egualmente moltiplici GH, ed M saranno (*) parimente eguali; onde siccome la N dalla costruzione è maggiore della GH, così sarà parimente la N maggiore della M (*). Di più perche dalla costruzione la N supera la HG d'una parte non maggiore di D, e dall'istessa costruzione la FG è maggiore di D; sarà la FH maggiore di N: quindi delle due grandezze FH, ed M la prima FH è maggiore di N, e l'altra M non è maggiore di N. In oltre perche dalla costruzione le due FG, e GH sono egualmente moltiplici delle due AE, EB, sarà (*) la FH tanto moltiplice della AB, quanto la GH è moltiplice della EB, ovvero quanto la M è moltiplice della C: il perche avendo due ragioni di AB a D, e di C a D, ed essendosi dimostrato, che FH moltiplice della prima AB supera N moltiplice della seconda D, ma M moltiplice della terza C è minore di N moltiplice della quarta D, ne siegue (*) che AB ha maggior ragione a D, che C a D.

* *assio.* 1.

* *assio.* 1.

* *pro.* 1. *di questo.*

* *def.* 7. *di questo.*

II. Viceversa avendo due ragioni di D a C, e di D ad AB, ed essendosi dimostrato, che N moltiplice della prima D supera M moltiplice della seconda C; ma che N moltiplice della terza D non supera HF moltiplice della quarta AC, ne siegue, che D a C abbia maggiore ragione di D ad AB: ciocche doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

	6	3			
18	12	6	9 . 2		14
12	12	6	6 . 2		14

Siano i due numeri diseguali 9. e 6, ed il terzo 2; io dico che 9 a 2 ha maggior ragione di 6 a 2: e viceversa che 2 a 6 ha maggior ragione di

di 2 a 9. Quantunque ciò sia manifesto da se medesimo, tuttavolta si dimostra così: si levi dal numero maggiore 9 la parte 3, di modo che l'avanzo 6 sia eguale al numero minore 6; dopo de' numeri 3, 6, e 6 se ne prendano gli egualmente moltiplici 6, 12, e 12 con questa legge, che 6 moltiplice di 3 sia maggiore di 2: ciò fatto facendo una summa degli egualmente moltiplici di 3, e 6 saranno i numeri 18, e 12 egualmente moltiplici di 9, e 6: finalmente de' numeri 2, e 2 se ne prendano gli egualmente moltiplici 14, e 14 con questa legge, che il detto 14 sia maggiore di 12, moltiplice di 6, d'una parte non maggiore di 2: ora 18 moltiplice 9 essendo maggiore di 14 moltiplice di 2, ma 12 egualmente moltiplice di 6 non essendo maggiore di 14 egualmente moltiplice di 2, ne siegue (*) che 9 ha maggior ragione a 2, che 6 a 2. Viceversa 14 moltiplice di 2 superando 12 moltiplice di 6; ma 14 egualmente moltiplice di 2 non essendo maggiore di 18 egualmente moltiplice di 9, ne siegue che 2 a 6 ha maggior ragione di 2 a 9 (*).

* def. 7. di questo.

* def. 7. di questo.

PROP. IX. TEOREMA.

I. Se due grandezze anno la medesima ragione ad una terza grandezza, esse sono eguali fra di loro. II. E se una terza grandezza ha la medesima ragione a due grandezze; queste due grandezze sono eguali.

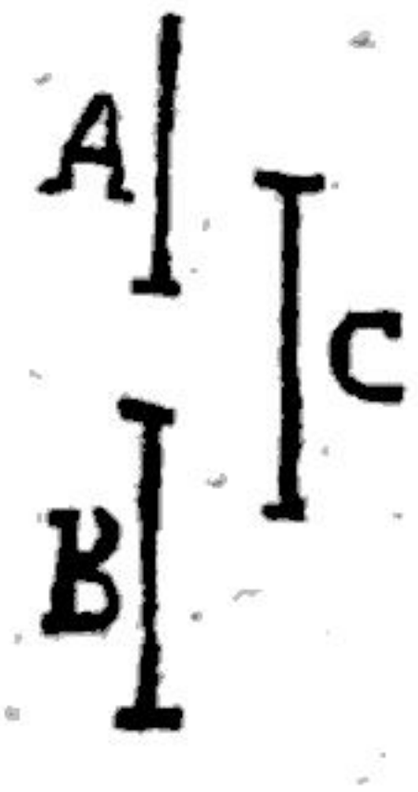
I.

Siano le due grandezze A, e B, e sia la terza C: io dico che se A sta a C come sta B a C la A sarà eguale alla B: dico di più che se C sta ad A, come sta C a B, sarà similmente la A eguale alla B,

II.

Imperciocchè. I. Se A non fosse eguale a B, ma fosse per esempio A maggiore di B, avria

Digitalizzato da Google



* *pro. ante.* A maggior ragione a C (*), che B a C; il che è contrario alla suppofizione, la quale vuole, che A ſtia a C, come ſta B a C. II. Se A foſſe

* *pro. ante.* maggiore di B, avria C a B maggior ragione (*), che C ad A; il che è parimente contrario alla ſuppoſizione, la quale vuole, che C ſtia ad A, come ſta C a B: ciocche doveva dimoſtrarſi.

PROP. X. TEOREMA.

I. Di due grandezze, che anno ragione ad una terza grandezza, quella che ha ad eſſa maggior ragione è maggiore. II. E quella alla quale la terza grandezza ha maggiore ragione è minore.

I.

* *veggaſi la figura ante.* Siano le due grandezze (*) A, e B, e ſia la terza grandezza C; io dico che A ſarà maggiore di B; ove A abbia maggior ragione a C, che B a C; dico di più, che B ſarà minore di A, ove C abbia maggior ragione a B, che l'iſteſſa C ad A.

II.

Imperciocche. I. Se A non è maggiore di B, ſarà A o eguale a B; ovvero A minore di B: non può eſſere A eguale a B: perche

* *pro. 7. di queſto.* ſaria (*) A a C, così B a C, contro la ſuppoſizione, la quale vuole, che A abbia maggior ragione a C, che B a C: non può eſſere A mi-

* *pro. 8. di queſto.* nore di B: poiche A avria a C minor ragione (*), che B a C; ciocche parimente è contro la ſuppoſizione, la quale vuole, che A abbia maggior ragione a C, che B a C. II. Se A foſſe eguale a

* *pro. 7. di queſto.* B avria C ad A la medeſima ragione (*), che C a B; ciocche è contrario alla ſuppoſizione, la qua-

Digitalizzato da Google

quale vuole, che C abbia maggior ragione a B, che C ad A: se poi fosse A minore di B; C avria ad A maggior ragione (*) di C a B; ciocchè è parimente contrario alla supposizione, la quale vuole, che C abbia maggior ragione a B, che C ad A. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 8. di questo.*

La dimostrazione co' numeri è manifesta.

PROP. XI. TEOREMA.

Due ragioni eguali ad una medesima ragione sono eguali fra di loro.

I.

Siano le tre ragioni di A a D, di B ad E, e di C ad F, ed A stia a D, come sta B ad E, e B stia ad E come sta C ad F; io dico che come sta A a D, così starà C ad F.

II.



S'intendano le grandezze G, H, ed I egualmente moltiplici rispettivamente degli antecedenti A, B, e, C: e parimente le grandezze K, L, ed M egualmente moltiplici de' conseguenti D, E, ed F: Poiche dunque come sta A a D, così sta B ad E, ne siegue (*), che gli egualmente moltiplici G, ed H degli antecedenti A, e B siano entrambi o maggiori, o minori, od eguali agli egualmente moltiplici K, ed L de' conseguenti D, ed E: Parimente poiche B sta ad E, come sta C ad F, ne siegue (*), che gli egualmente moltiplici H, ed I degli antecedenti B, e C siano entrambi o maggiori, o minori, od eguali agli egualmente moltiplici, L, ed M de' conseguenti,

(*) *def. 6. di questo.*

(*) *def. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

E, ed F ; quindi se G avanza K, ancora I avanzerà M, e se gli è eguale gli sarà parimente eguale, e se è minore sarà ancora minore ; il perche A,D, di C, F (*) , alle quali si riferiscono i suddetti egualmente moltiplici saranno proporzionali ; e per conseguente sarà come A a D , così C ad F : Il che doveva dimostrarsi.

(*) def. 6. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

2 . 6	*Sia 2 a 6 , così 1 a 3: e come 1 sta a 3 , così sia 4 a 12 : Egli è manifesto che come sta 2 a 6 , così sta 4 a 12.*
1 . 3	
4 . 12	

PROP. XII. TEOREMA.

Se vi siano più ragioni eguali; come sta uno degli antecedenti al suo conseguente , così saranno tutti gli antecedenti insieme a tutti i conseguenti insieme.

I.

(*) veggasi la figura della pro.ante. Siano le ragioni (*) di A a D , di B ad E, e di C ad F eguali fra di loro ; vale a dire come A sta a D , così sia B ad E , e così C ad F: io dico, che come sta l'antecedente A al suo conseguente D , così saranno tutti gli antecedenti A, B , e C a tutti li conseguenti D , E, ed F.

II.

S'intendano le grandezze G,H,ed I egualmente moltiplici degli antecedenti A , B , e C; e similmente le grandezze K , L , ed M egualmente moltiplici de' conseguenti D , E , ed F. Perche dunque le grandezze A, B, e C anno l'istessa ragione alle grandezze D , E , ed F (*) ne siegue, che gli egualmente moltiplici G, H, ed I saranno tutti tre o maggiori , o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K , L , ed M de' conseguenti

(*) def. 6. di questa.

Digitalizzato da Google

ti. Quindi se G è maggiore di K, saranno tutti tre insieme G, H, ed I ancora maggiori di tutti tre insieme K, L, ed M; e se G sia eguale a K, saranno ancora tutti tre insieme G, H, ed I eguali a tutti tre insieme K, L, ed M: e finalmente se G è minore di K, saranno tutti tre insieme G, H, ed I minori di tutti tre insieme D, E, ed F.

In oltre perche le tre grandezze G, H, ed I sono egualmente moltiplici delle tre grandezze A, B, e C, come la G è moltiplice della A, così saranno (*) tutte tre unite insieme G H, ed I moltiplici di A, B, e C unite insieme: e similmente come la K è moltiplice della D, così saranno tutte tre unite insieme K, L, ed M moltiplici di D, E, ed F unite insieme: il perche avendo due ragioni di A a D, e della somma di A, B, e C alla somma di D, E, ed F, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, che sono G, e la somma di G, H, ed I sono entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti, che sono K, e K, L, ed M, ne siegue che le suddette ragioni siano eguali (*); e per conseguente, che A sia a D come sta la somma di A, B, e C alla somma di D, E, ed F: ciocche doveva dimostrarsi.

(*) pro. 1. di questo.

(*) def. 6. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

4 . 1	
8 . 2	
20 . 5	
32 . 8	

Sia come 4 ad 1, così 8 a 2, e così 20 a 5: egli è manifesto, che come sta l'antecedente 4 al conseguente 1, così sarà la somma 32 di tutti gli antecedenti alla somma 8 di tutti li conseguenti.

PROP. XIII. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragio-

Digitalizzato da Google

gione, che la terza alla quarta, ma la terza alla quarta abbia maggior ragione, che la quinta alla sesta; ancora la prima alla seconda avrà maggior ragione, che la quinta alla sesta.

I.



La prima A abbia alla seconda B la medesima ragione, che la terza C alla quarta D; ma la terza C alla quarta D abbia maggior ragione, che la quinta E alla sesta F: io dico che la prima A ha maggior ragione alla seconda B, che la quinta E alla sesta F.

II.

Perche dalla suppositione C ha maggior ragione a D, che E ad F, si possono trovare tali egualmente moltiplici degli antecedenti C, ed E, e tali egualmente moltiplici de' consequenti D, ed F, che (*) quello di C superi quello di D, ma quello di E non superi quello di F: siano cotesti egualmente moltiplici G, H, K, ed L: vale a dire G, ed H di C, ed E: K, ed L di D, ed F: sarà dunque G maggiore di K, ed H non sarà maggiore di L. Intendasi ora la grandezza M tanto moltiplice di A, quanto la G è moltiplice di C, e per consequente quanto la H è moltiplice di E. Intendasi di più la grandezza N tanto moltiplice di B, quanto la K è moltiplice di D, e per consequente quanto la L è moltiplice di F: quindi supponendosi, che A sia a B come sta C a D: gli egualmente moltiplici M, e G degli antecedenti (*) seguiranno l'istessa legge paragonati cogli egualmente moltiplici N, e K de' consequenti; il perche G superando per quello, che si è supposto K, sarà parimente M maggiore di N: avendo dunque due ragioni di A a B; e di E ad F, ed essendosi dimo-

* *def. 7. di questo.*

* *def. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

ſi dimoſtrato, che il moltiplice M della prima A è maggiore del moltiplice N della ſeconda B; ma l'egualmente moltiplice H della terza E non è maggiore dell' egualmente moltiplice L della quarta F, ne ſiegue, che le ſuddette due ragioni non ſiano eguali: e per conſeguente, che A a B abbia maggior ragione di E ad F.

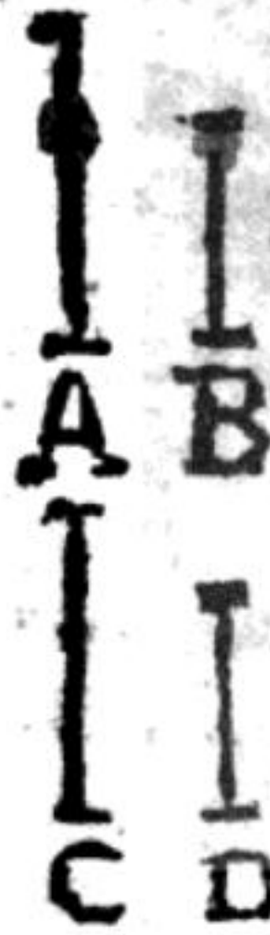
Dimoſtrazione co' numeri.

10 . 2	*Sia come* 10 *a* 2, *così* 5 *ad* 1: *ma* 5 *ad* 1 *abbia maggior ragione di* 4 *a* 3; *egli è manifeſto, che* 10 *a* 2 *ha maggior ragione di* 4 *a* 3.
5 . 1	
4 . 3	

PROP. XIV. TEOREMA.

Se quattro grandezze ſono proporzionali: ſecondo che la prima è maggiore eguale, o minore della terza, ſarà la ſeconda maggiore eguale, o minore della quarta.

I.



Sia come A a B, così C a D; io dico che ſecondo che la prima A è maggiore eguale, o minore della terza C, ſarà ancora la ſeconda B maggiore eguale, o minore della quarta D.

II.

Imperciocche ſupponendo I. che A ſia maggiore di C, avrà A maggior ragione a B (*), che C a B; ma A ſta a B dalla ſuppoſizione, come C a D; dunque C avrà parimente maggior ragione a D, che C a B (*): e per conſeguente ſarà la D minore della B (*), ovvero la B maggiore della D.

Supponendo II. che A ſia eguale a C, ſarà come A a B, così C a B (*): ma dalla ſuppoſizione

* *pro. 8. di queſto.*

* *pro. ante.*

* *pro. 10. di queſto.*

* *pro. 7. di queſto.*

Digitalizzato da Google

(*) *pro.* 11. *di questo.* ne la A sta alla B, come la C alla D; dunque sarà ancora come la C alla D, così (*) la C alla B; (*) *pro.* 9. *di questo.* e per conseguente la D sarà eguale alla B (*), ovvero la B alla D.

Supponendo III., che A sia minore di C avrà (*) *pro.* 8. *di questo.* A a B minor ragione di C a B (*): ma dalla supposizione la A sta alla B, come la C alla D; dunque la C alla D avrà parimente minor ragione della C alla B (*): quindi sarà la D maggiore della B, ovvero la B minore della D (*): ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. ante.*

(*) *pro.* 10. *di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

4 . 8 :: 3 . 6
4 . 8 :: 4 . 8
4 . 8 :: 6 . 12

Sia I. *come* 4 *ad* 8, *così* 3 *a* 6; *egli è manifesto, che siccome* 4 *è maggiore di* 3, *così* 8 *è maggiore di* 6. *Sia* II. *come* 4 *ad* 8, *così* 4 *ad* 8; *egli è chiaro, che siccome* 4 *è eguale a* 4, *così* 8 *è eguale a* 8. *Sia* III. *come* 4 *a* 8, *così* 6 *a* 12: *è manifesto, che siccome* 4 *è minore di* 6, *così* 8 *è minore di* 12.

PROP. XV. TEOREMA.

Le parti paragonate co' loro egualmente moltiplici si ritrovano avere la medesima ragione.

I.

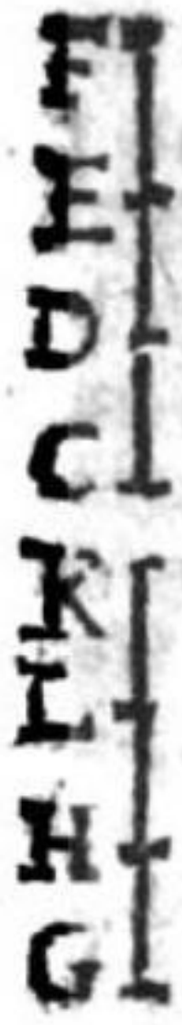
Siano A, e B due grandezze arbitrarie, e CF, GK due altre grandezze tali, che le prime A, e B siano parti simili di esse, ovvero (il che ritorna all'istesso) che esse siano egualmente moltiplici delle suddette grandezze A, e B: io dico che paragonando le une col' altre, si troverà essere A a B, come CF sta a GK.

II.

Siccome le grandezze GF, GK sono dalla sup-

po-

Digitalizzato da Google



posizione egualmente moltiplici delle grandezze A, e B, quante parti si contengono nella CF eguali alla A, tante se ne conterranno nella GK eguali alla B. Siano dunque le parti CD, DE, EF eguali alla A; e le parti GH, HL, LK eguali alla B. Ora perche le grandezze CD, DE, EF sono eguali fra di loro, e sono eguali parimente le grandezze GH, HL, LK, sarà come CD a GH, così DE ad HL, e così EF ad LK; quindi uno degli antecedenti CD sarà al suo conseguente GH come tutti gli antecedenti CF a tutti li conseguenti GK (*): ma CD è eguale alla A, e GH è eguale alla B: dunque sarà parimente come la A alla B, così CF a GK: ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 12. di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

12	2
36	6

Siano le due parti 2, e 6, e gli egualmente moltiplici di queste parti siano 12, e 36: egli è manifesto, che come sta 2 a 6, così sta 12 a 36.

PROP. XVI. TEOREMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali, ancorche si permutino rimarranno proporzionali.

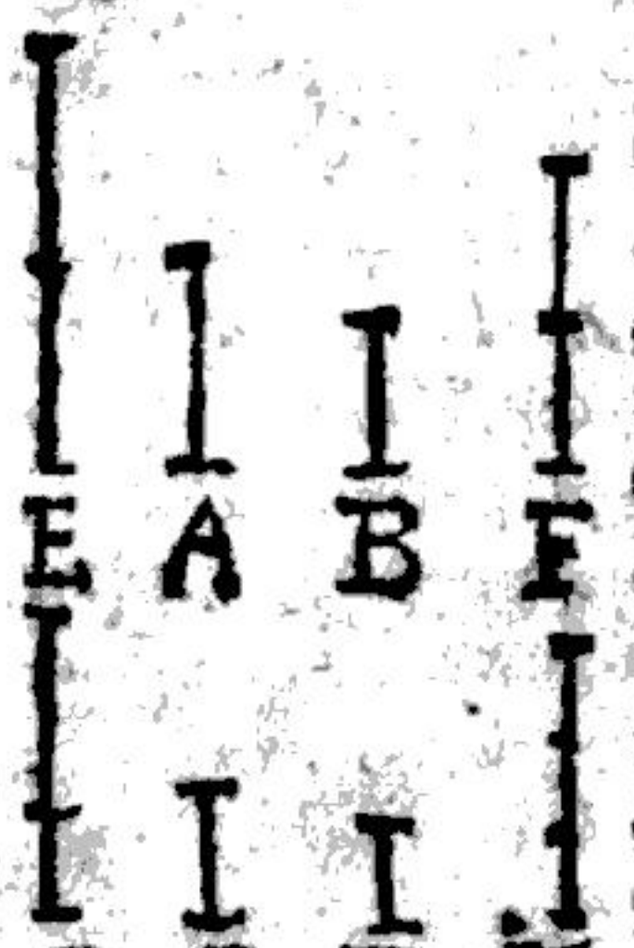
I.

Siano quattro grandezze proporzionali A, B, C, e D: vale a dire sia come A a B, così C a D; io dico che permutandole rimaranno ancora proporzionali; cioè che come sta A a C, così sarà B a D.

II.

Digitalizzato da Google

II.



S'intendano le grandezze E, ed F egualmente moltiplici di A, e di B, ficcome ancora le grandezze G, ed H egualmente moltiplici delle grandezze C, e D: poiche dunque le grandezze E, ed F ſono egualmente moltiplici di A, e B; ſarà come (*) E ad F, cosi A a B; quindi eſſendo dalla ſuppoſizione come A a B, così C a D; ſarà parimente come E ad F (*) cosi C a D. In oltre perche le grandezze G, ed H ſono egualmente moltiplici delle grandezze C, e D, ſarà (*) come G ad H, così C a D; ma ſi è dimoſtrato, che E ſia ad F come ſta C a D; dunque ſarà E ad F (*), cosi G ad H; il perche ſe E ſupera è eguale, o minore di G, ancora F avanzerà (*) ſarà eguale o minore di D. Quindi avendo due ragioni di A a C, e di B a D; ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici E, ed F degli antecedenti A, e B ſiano tutti due o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltipliplici G, ed H de' conſeguenti C, e D, ne ſiegue (*), che le ſuddette due ragioni ſiano eguali: e per conſeguente, che A ſia a C, come ſta B a D; ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro. ante.*
* *pro. 11. di queſto.*
* *pro. ante.*
* *pro. 11. di queſto.*
* *pro. 14. di queſto.*
* *def. 6. di queſto.*

Dimoſtrazione co' numeri.

2 . 4 : : 6 . 12
2 . 6 : : 4 . 12

Sia come 2 a 4, così 6 a 12: è manifeſto, che permutati queſti quattro numeri, ſarà ancora 2 a 6, cosi 4 a 12.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XVII. TEOREMA.

Se quattro grandezze composte sono proporzionali, ancorche si dividano rimarranno proporzionali.



I.

Siano due grandezze omogenee, e composte insieme AB, BC, e due altre pure omogenee, e composte insieme DE, EF, , e siano tra loro proporzionali: vale a dire come sta AB a BC, così sia DE ad EF, io dico che dividendole rimarranno proporzionali; cioè che AC sarà a CB, come sta DF ad FE.

II.

Prendansi delle AC, CB, DF, FE gli egualmente moltiplici, li quali siano GH, HI, LM, MN secondo un medesimo qualunque numero, vale a dire quanto la prima GH è moltiplice della sua corrispondente AC, altrettanto le altre HI, LM, MN siano moltiplici rispettivamente delle CB, DE, FE: Si prendono di più delle due grandezze CB, FE due altri egualmente moltiplici ad arbitrio, i quali siano IO, NP. Perche dunque GH è tanto moltiplice di AC, quanto HI è moltiplice di CB, sarà (*) la GI tanto moltiplice della AB, quanto la GH è moltiplice della sua corrispondente AC. Per la medesima ragione la LN sarà tanto moltiplice della DE, quanto la LM è moltiplice di DF; quindi essendo dalla suppositione la GH tanto moltiplice della AC, quanto la LM è moltiplice della DF, ne siegue che la GI sia tanto moltiplice della AB, quanto la LN è moltiplice della DE. In oltre es-

(*) *pro. 1. di questo.*

Digitalizzato da Google

sendo la prima HI tanto moltiplice della seconda CB, quanto la terza MN è moltiplice della quarta FE; e la quinta IO essendo tanto moltiplice dell'istessa seconda CB, quanto la sesta NP è moltiplice della quarta FE; sarà la HO composta dalla prima, e dalla quinta (*) tanto moltiplice della seconda CB; quanto la MP composta dalla terza, e dalla sesta è moltiplice della quarta FE. Il perche essendo dalla suppositione AB a BC, come DE ad EF, ne siegue che gli egualmente moltiplici (*) GI, ed LN degli antecedenti AB, e DE siano entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici HO, MP de' conseguenti CB, FE: quindi togliendone le parti comuni HI, MN (*), rimarranno le due GH, LM entrambe o maggiori, o eguali, o minori delle due IO, NP: sicche avendo due ragioni di AC a CB, e di DF ad FE, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici GH, LM degli antecedenti AC, DF sono entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici IO, NP de' conseguenti CB, FE; ne siegue che le suddette due ragioni siano eguali; e per conseguente, che AC sia a CB come sta DF ad FE. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 2. di questo.*

(*) *def. 6. di questo.*

(*) *assio. 2. 4.*

Dimostrazione co' numeri.

8 . 2 : : 4 . 1
6 . 2 : : 3 . 1

Sia come 8 a 2, così 4 a 1: egli è chiaro, che dividendo cotesti numeri, e facendo come 6 a 2, così 3 a 1, essi rimangono proporzionali.

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se quattro grandezze divise sono proporzionali, ancorche si compongono rimarranno proporzionali.

Sia-

Digitalizzato da Google

I.



Siano le quattro grandezze divise AB, BC, DG, GF proporzionali: vale a dire come sta AB a BC, così sia DG a GF; io dico che componendole rimarranno proporzionali: di modo che come sta AC a CB, così starà DF ad FG.

II.

Se questo non è vero, si metta, che AC sia a CB come sta DF ad FE; quindi essendo le quattro grandezze composte AC, CB, DF, FE proporzionali, dividendole rimarranno (*) proporzionali: e per conseguente sarà AB a BC, così DE ad EF: ma dalla suppositione come sta AB a BC, così sta DG a GF; dunque sarà parimente (*) come DG a GF, così DE ad EF: il perche essendo la prima DG maggiore della terza DE, sarà parimente (*) la seconda GF maggiore della quarta EF, vale a dire la parte sarà maggiore del tutto; ciocche non potendo sussistere, ne siegue la verità del Teorema in questione.

(*) *pro. ante.*

(*) *pro. 11. di questo.*

(*) *pro. 14. di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

6 . 2 :: 12 . 4
8 . 2 :: 16 . 4

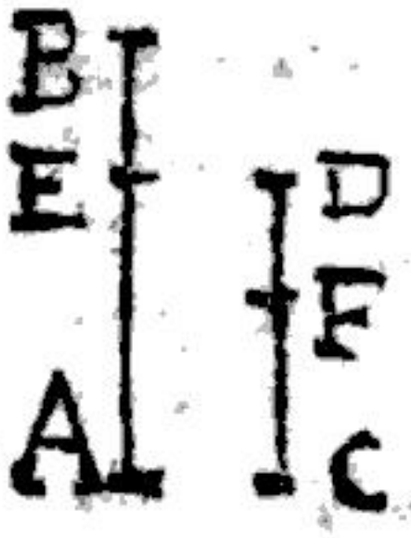
Sia come 6 a 2, così 12 a 4: è manifesto, che componendo cotesti numeri, e facendo come 8 a 2, così 16 a 4, essi rimangono parimente proporzionali.

PROP. XIX. TEOREMA.

Se tutta una grandezza sta a tutta un'altra grandezza, come una certa parte di quella ad una certa parte dell' altra; sarà ancora la rimanente parte dell'una alla rimanente parte dell'altra, come sta tutta la prima grandezza a tutta l'altra grandezza.

Digitalizzato da Google

I.



Sia come tutta la AB a tutta la CD, cosi la parte AE alla parte CF; io dico, che l'avanzo BE sta all'avanzo DF, come sta tutta la AB a tutta la CD.

II.

Perche dalla suppoſizione la AB sta alla CD come la AE alla CF, sarà per la ragion permutata (*) come AB ad AE, cosi CD a CF; quindi essendo le quattro grandezze composte AB, AE, CD, CF proporzionali, dividendole rimarranno (*) ancora proporzionali, e per conseguente sarà BE ad EA come DF ad FC; e di nuovo per la ragione permutata sarà come BE a DF, cosi EA ad FC: ma dalla suppoſizione AE sta a CF come tutta la AB a tutta la CD; dunque (*) sarà ancora l'avanzo BE all'avanzo DF, cosi tutta la AB a tutta la CD: ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.* 16. *di queſto.*

* *pro.* 17. *di queſto.*

* *pro.* 11. *di queſto.*

COROLLARIO.

Da qui è manifeſto, che ſe quattro grandezze compoſte ſono proporzionali ancorche ſi convertano rimarranno proporzionali. Siano le quattro grandezze compoſte AB, AE, CD, CF proporzionali, vale a dire ſia come AB ad AE, cosi CD a CF: io dico che convertendole rimarranno proporzionali, e per conſeguente ſarà come AB a BE, cosi CD a DF. Imperciocche eſſendo dalla ſuppoſizione come AB ad AE, cosi CD a CF ſarà per la ragion permutata (*) come la tutta AB alla tutta CD, cosi la parte tratta AE alla alla parte tratta CF; quindi per la propoſizione ora dimoſtrata ſarà la tutta AB alla tutta CD cosi l'avanzo BE all' avanzo DF; e di nuovo per la ragione permutata (*) ſara come AB a BE, cosi CD a DF.

* *pro.* 16. *di queſto.*

* *pro.* 14. *di queſto.*

Di-

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

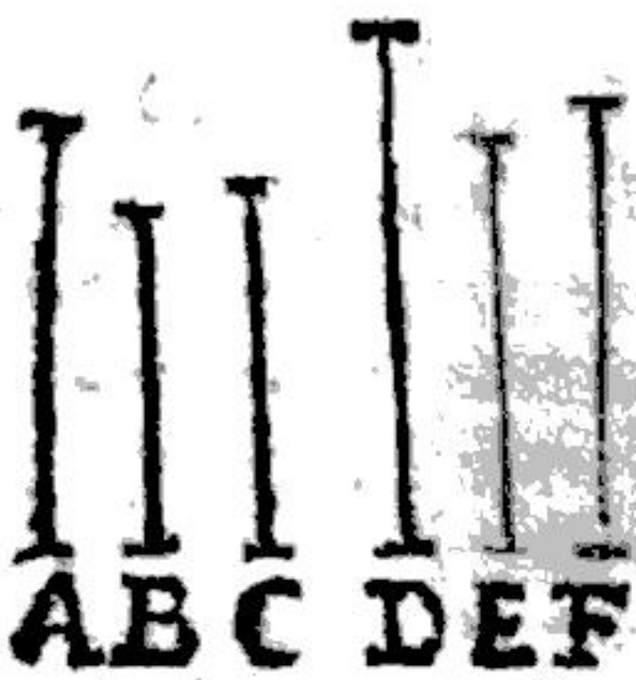
30 .	10
18 .	6
12	4

Sia come 30 a 10, così 18 a 6: è manifesto che l'avanzo 12 sta all'avanzo 4, come sta 30 a 10. In oltre sia come 30 a 10, così 18 a 6; è chiaro che ancorchè cotesti numeri si convertano, rimangono proporzionali; di fatto come sta 30 a 20, così sta 18 a 12.

PROP. XX. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragione ordinata; e sia la prima maggiore, eguale, o minore della terza, sarà parimente la quarta maggiore, eguale, o minore della sesta.

I.



Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre grandezze D, E, F, e le tre prime paragonate coll' altre tre siano in ragione ordinata, vale a dire A sia a B, come D ad E; e B sia a C, come sta E ad F; io dico che se la prima A è maggiore è eguale, o è minore della terza C, ancora la quarta D è maggiore, eguale, o minore della sesta F.

II.

Mettasi I. che la A sia maggiore della C: quindi avrà A a B maggior ragione (*) di C a B: ma dalla supposizione A sta a B come D ad E, e per la ragione inversa (*) C sta a B come F ad E; dunque avrà ancora D ad E maggior ragione di F ad E (*); il perche la grandezza D sarà maggiore della grandezza F (*).

(*) *pro. 8. di questo.*

(*) *Cor. della pro. 4.*

(*) *pr. 13. diqu.*

(*) *pro. 10. di questo.*

Digitalizzato da Google

Mettasi II. che A sia eguale a C: quindi avrà A a B la medesima ragione di C a B: ma A sta a B dalla suppositione come D ad E e per la ragione inversa (*) C sta a B come F ad E: dunque come sta D ad E (*), così starà F ad E: il perche le due grandezze D, ed F saranno eguali fra di loro (*).

* Cor. della pro. 4. di que.
* pro. 11. di questo.
* pro. 9. di questo.

Mettasi III. che A sia minore di C; quindi A avrà minor ragione a B di C a B; ma dalla suppositione A sta a B come D ad E, e per la ragione inversa (*) C sta a B come F ad E; dunque avrà D ad E minor ragione (*) di F ad E; e per conseguente sarà D minore di F; (*); cioche doveva dimostrarsi.

* Cor. della pro. 4. di que.
* pro. 13. di questo.
* pro. 10. di questo.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1	24 . 12 . 3
8 . 4 . 8	24 . 12 . 24
8 . 4 . 16	24 . 12 . 48

Siano primieramente li tre numeri 8 . 4 . 1 *in ragione ordinata co' numeri* 24 . 12 . 3, *è manifesto che siccome* 8 *è maggiore di* 1, *così* 24 *è maggiore di* 3. *Siano di più li tre numeri* 8. 4. 8 *in ragione ordinata co' tre numeri* 24. 12. 24 *è chiaro, che siccome* 8 *è eguale a* 8, *così* 24 *è eguale a* 24. *Finalmente siano i tre numeri* 8 . 4 . 16 *in ragione ordinata co' tre numeri* 24 . 12 . 48: *è manifesto, che siccome* 8 *è minore di* 16, *così* 24 *è minore di* 48.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragione perturbata, e sia la prima maggiore, eguale, o minore della terza, sarà la quarta maggiore, eguale, o minore della sesta.

Sia-

Digitalizzato da Google

I.

Siano tre grandezze(*)A,B,C, e tre altre grandezze D, E, F, e le tre prime paragonate colle tre ſeconde coſtituiſcano una ragione perturbata, vale a dire come ſta A a B, così E ad F, o come B a C così ſia D, ad E; io dico che ſe A è maggiore, eguale, o minore di C, ancora D è maggiore, eguale, o minore di F.

(*) *veggaſi la figura ante.*

II.

Mettaſi I. che A ſia maggiore di C; quindi avrà A a B maggior ragione (*) di C a B; ma dalla ſuppoſizione come ſta A a B, così ſta E ad F; e per la ragione inverſa (*) C ſta a B come ſta E a D; dunque la E alla F avrà parimente (*) maggior ragione di E alla D; e per conſeguente ſarà D maggiore di F (*).

Mettaſi II. che A ſia eguale a C; quindi avrà A a B l'iſteſſa ragione (*) di C a B: ma dalla ſuppoſizione la A ſta alla B, come la E alla F; e per la ragione inverſa la C ſta alla B come la E alla D; dunque ſarà parimente (*) E ad F, così E a D: il perche le due D, ed F ſaranno eguali fra di loro (*).

Mettàſi III. che A ſia minore di C: quindi avrà A a B minor ragione di C a B: ma dalla ſuppoſizione A ſta a B come ſta E ad F; e C ſta a B per la ragione inverſa come ſta E a D; dunque avrà parimente E ad F minor ragione di E a D (*); al perche la grandezza D ſarà minore della grandezza F (*). Ciocche doveva dimoſtrarſi.

(*) *pro. 8. di queſto.*

(*) *Cor. della pro. 4. di queſto.*

(*) *pro. 13. di queſto.*

(*) *pro. 10. di queſto.*

(*) *pro. 7. di queſto.*

(*) *pro. 11. di queſto.*

(*) *pro. 9. di queſto.*

(*) *pro. 13. di queſto.*

(*) *pro. 10. di queſto.*

Dimoſtrazione co' numeri.

8.4.1	16. 4.2
8.4.8	16. 32.16
8.4.16	16. 64.32

Siano primieramente li tre numeri 8, 4, 1 in ragion perturbata co'tre

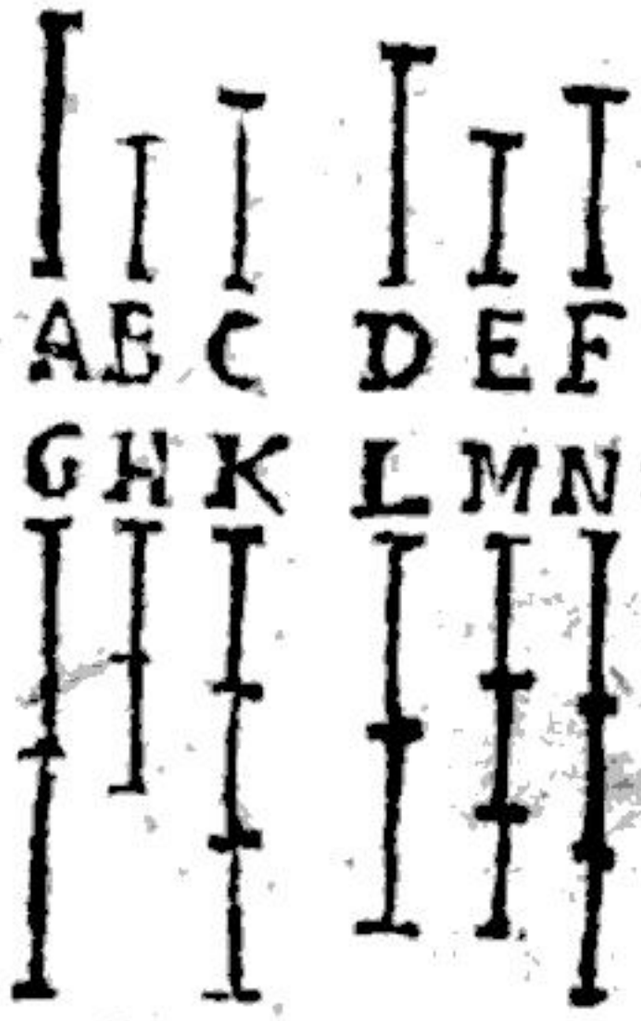
Digitalizzato da Google

numeri 16. 4. 2: *è manifesto che ſiccome* 8 *è maggiore di* 1, *così* 16 *è maggiore di* 2. *Siano di più i tre numeri* 8. 4. 8 *in ragione perturbata co' tre numeri* 16. 32. 16 *è chiaro, che ſiccome il numero* 8 *è eguale a* 8, *così* 16 *è eguale al* 16. *Finalmente ſiano i tre numeri* 8. 4. 16 *in ragion perturbata co' tre numeri* 16. 64 32: *è chiaro, che ſiccome* 8 *è minore di* 16, *così* 16 *è minore di* 32.

PROP. XXII. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze ſi ritrovano eſſere in ragione ordinata: ſarà per l'egual ragione ordinata come la prima alla terza, così la quarta alla ſeſta.

I.



Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre grandezze D, E, F, e le tre prime paragonate colle tre ſeconde coſtituiſcano una ragione ordinata: vale dire come ſta A a B, così ſia D ad E: e come ſta B a C, così ſia E ad F; io dico che per l'egual ragione ordinata la prima A ſarà alla terza C, come la quarta D alla ſeſta F.

II.

Si prendano della prima A, e della quarta D, della ſeconda B, e della quinta E, della terza C, e della ſeſta F gli egualmente moltiplici, li quali ſiano G, ed L, H, ed M, K, ed N: e perche dalla ſuppoſizione A ſta a B come ſta D ad E; e degli antecedenti A, e D ſono ſtati pigliati gli egualmente moltiplici G, ed L, e de' conſeguenti B, ed E gli egualmente moltiplici H, ed M, ſarà (*) G ad H, così L ad M. In oltre perche dalla ſuppoſizione B ſta a C come ſta E ad F, e

(*) *pro. 4. di queſto.*

degli

degli antecedenti B, ed E ſono ſtati pigliati gli egualmente moltiplici H, ed M, e de' conſeguenti C, ed F gli egualmente moltiplici K, ed N, ſarà (*) H a K, così M ad N: quindi le tre grandezze G, H, e K, paragonate colle altre tre L, M, ed N, coſtituiſcono una ragione ordinata, eſſendoſi dimoſtrato, che G ad H ſia come L ad M, e che H ſia a K come M ad N: laonde ſe G ſia maggiore, eguale, o minore di K ſarà ancora (*) L maggiore eguale, o minore di N; il perche avendo due ragioni di A a C, e di D ad F, ed eſſendoſi dimoſtrato che gli egualmente moltiplici G, ed L degli antecedenti A, e D pigliati ad arbitrio ſono entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K, ed N pigliati ancora ad arbitrio, ne ſiegue, chele ſuddette due ragioni ſiano eguali (*); e per conſeguente, che A ſtia C come ſta D a F. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

* *pro.* 4. *di queſto.*

* *pro.* 20. *di queſto.*

* *def.* 6. *di queſto.*

ALTRA DIMOSTRAZIONE.

Si potrebbe la verità di queſto Teorema ſtabilire in un'altra maniera così. Perche dalla ſuppoſizione A ſta a B come D ad E, ſarà per la ragione permutata (*) A a D, così B ad E. Similmente eſſendo dalla ſuppoſizione B a C, così E ad F ſarà per la ragion permutata come B ad E, così C ad F: quindi eſſendo così la ragione di A a D, come la ragione di C ad F eguale a quella di B ad E; ſaranno le dette due ragioni eguali fra loro, e per conſeguente come ſta A a D, così C ad F: e per la ragion permutata come A a C così D ad F; ciocche doveva dimoſtrarſi.

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1	*Siano i tre numeri* 8 . 4 . 1 *in ragione ordinata cogli altri tre numeri* 16 . 8 . 2 ; *vale a dire sia come* 8 , 4 , *così* 16 *a* 8 , *e come* 4 *a* 1 , *così* 8 *a* 2 : *è manifesto, che per l'egual ragione ordinata sarà come* 8 *a* 1 , *così* 16 *a* 2.
16 . 8 . 2	

PROP. XXIII. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragione perturbata; sarà per l'egual ragione perturbata come la prima alla terza, così la quarta alla sesta.

I.

** veggasi la figura ante.*

Siano tre grandezze(*) A, B, C, e tre altre D, E, F, le quali paragonate con quelle costituiscono una ragione perturbata, vale a dire sia come A a B così E ad F, e come B a C così D ad E; io dico, che per l'egual ragione perturbata sarà come A a C, così D ad F.

II.

Si prendano della prima A, della seconda B, e della quarta D gli egualmente moltiplici G, H, ed L secondo qualsivoglia numero. Si prendano inoltre della terza C, della quinta E, e della sesta F gli egualmente moltiplici K, M, ed N parimente secondo qualsivoglia numero. Quindi essendo G, ed H egualmente moltiplici delle parti A, e B,

** pro. 15. di questo.*

sarà come A a B (*) così G ad H; e per la medesima ragione sarà E ad F, così M ad N; ma dalla supposizione come sta A a B, così sta E ad

** pro. 11. di questo.*

F: dunque sarà parimente (*) come G ad H, così M ad N. Inoltre perche dalla supposizione B sta a C come D ad E, gli egualmente moltipli-

ci

Digitalizzato da Google

ci H, ed L degli antecedenti B, e D paragonati cogli egualmente moltiplici K, ed M de' conseguenti C, ed E, si ritroveranno avere l'istessa proporzione (*): vale a dire come sta H a K, così sta L ad M: il perche le tre grandezze G, H, e K paragonate colle altre tre L, M, ed N costituiranno una ragione perturbata, essendosi dimostrato, che G sia ad H come M ad N, e che H sia a K come L ad M: laonde se (*) G sarà maggiore, eguale, o minore di K, ancora L sarà maggiore, eguale, o minore di N: avendo dunque due ragioni di A a C, e di D ad F, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici G, ed L degli antecedenti A, e D sono entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K, ed N de' consegenti C, ed F, ne siegue che le suddette due ragioni siano eguali (*), e per conseguente, che A sia a C, come sta D ad F: ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 4. di questo.*

(*) *pro. 21. di questo.*

(*) *def. 6. di questo.*

Dimostrazione co' numeri.

8	. 4 .	1
64	. 16 .	8

Siano i tre numeri 8. 4. 1 in ragion perturbata co' tre numeri 64. 16. 8: vale a dire sia come 8 a 4, così 16 a 8, e come 4 ad 1, così 64 a 16; è manifesto, che per l'egual ragione perturbata sarà come 8 ad 1, così 64 ad 8.

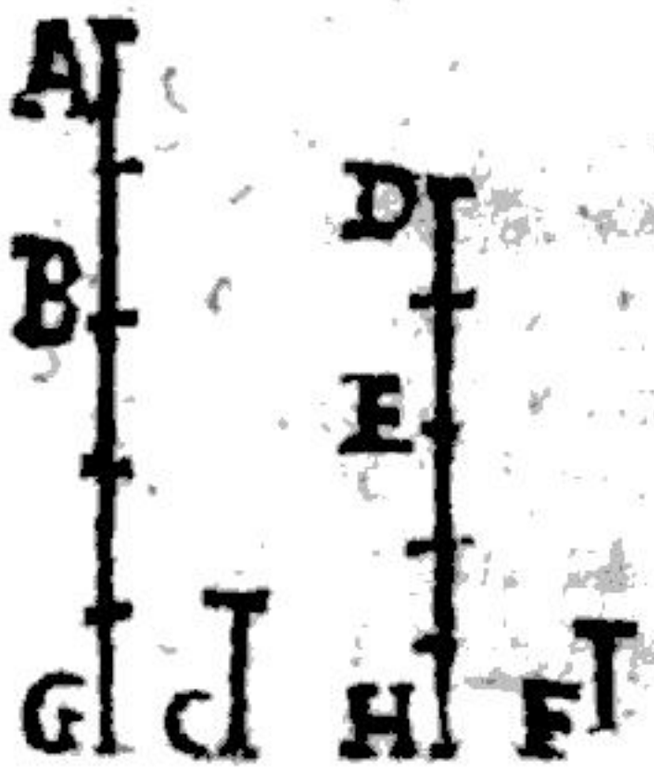
PROP. XXIV. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, e la quinta alla seconda abbia parimente la medesima ragione, che la sesta alla quarta: avrà ancora la composta dalla prima, e dalla quinta alla seconda la medesima ragione, che la composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta.

Ab-

Digitalizzato da Google

I.



Abbia la prima AB alla seconda C la medesima ragione, che la terza DE alla quarta F; ed abbia in oltre la quinta BG all' istessa seconda C la medesima ragione, che la sesta EH alla quarta F; io dico che AG composta dalla prima, e dalla quinta abbia la medesima ragione a C, che la DH composta dalla terza, e sesta ave alla quarta F.

II.

Perche dalla suppositione BG sta a C come EH ad F, sarà per la ragione inversa (*) C a BG, così F ad EH: quindi le tre grandezze AB, C, e BG paragonate colle tre grandezze DE, F, ed EH costituiscono una ragione ordinata; imperciocche si suppone, che AB sia a C come DE ad F, e si è dimostrato, che C sia a BG come F ad EH; il perche per l'egual ragione ordinata (*) sarà come AB a BG, così DE ad EH; e per la ragione composta come (*) AG a GB così DH ad HE: dunque le tre grandezze AG, GB, e C paragonate colle tre grandezze DH, HE, ed F ancora costituiscono una ragione ordinata: imperciocche si è dimostrato, che AG sia a GB come DH ad HE, e si è supposto, che GB sia a C come EH ad F: dunque di nuovo per l'egual ragione ordinata (*) sarà come AG a C, così DH ad F; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *Cor. della pro. 4. di questo.*

(*) *pro. 22. di questo.*

(*) *pro. 17. di questo.*

(*) *pro. 22. di questo.*

Pit

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

10 . 2 . 5 . 1 4 2	*Sia come* 10 *a* 2, *così* 5 *a* 1: *e sia in oltre come* 4 *all'istesso* 2, *così* 2 *all'istesso* 1: *è manifesto, che* 14 *sta a* 2, *come sta* 7 *a* 1.
14 . 2 :: 7 . 1	

PROP. XXV. TEOREMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali la massima di esse, e la minima unite insieme saranno maggiori delle altre due unite insieme.

I.



Siano quattro grandezze AB, CD, E, ed F proporzionali, vale a dire sia come AB a CD, così E ad F; io dico che la massima AB, e la minima F sono maggiori delle altre due CD, ed E.

II.

Si taglino le parti AG, CH (*) eguali rispettivamente alle due E, ed F; e perche dalla suppo- * *pro.3.I.*
sizione AB sta a CD; come E ad F sarà parimente come AB a CD, così AG a CH: quindi essendo la tutta AB alla tutta CD, così la parte tratta AG alla parte tratta CH, sarà (*) l'avanzo * *pro.19. di questo.*
GB all'avanzo HD, così la tutta AB alla tutta CD; ovvero come AB a CD, così GB ad HD; e per la ragione permutata (*) come AB a BG, * *pro. 16. di questo.*
così CD a DH: ma dalla suppofizione la prima AB è maggiore della terza CD; dunque sarà parimente (*) la seconda GB maggiore della * *pro.14. di questo.*
quarta HD. Ora essendo AG eguale ad E, e CH eguale ad F, saranno le due AG, ed F unite in-

insieme eguali alle due CH, ed E unite insieme:
per assio. 2. (*) il perche aggiugnendo alle due prime la GB maggiore, ed alle due seconde la HD minore,
per assio. 4. riuscirà (*) la somma delle due AB, ed F maggiore della somma delle due CD, ed E; cioc-
che doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

| 8 . 4 . 6 . 3 |

Sia come 8 à 4, così 6 a 3: è manifesto, che la somma di 8, e 3 vale a dire del massimo numero, e del minimo è maggiore della somma degli altri due 4, e 6.

Digitalizzato da Google

RICAPITOLAZIONE DEL LIBRO V. DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA PIANA.

EUclide *in tutto questo quinto libro non ha fatto altro, che spiegare la dottrina delle proporzioni, dimostrandone le sue proprietà, ed accidenti principali; ciocche egli ha fatto in una maniera generalissima senza entrare ne' particolari; imperciocche dell' applicazione della suddetta dottrina generale à' casi particolari si riserbò di scriverne un libro a parte, il quale è il libro seguente. Dovendo ora secondo il nostro proponimento ordinare tutta la dottrina fin'ora dimostrata, io dirò quì prima in succinto, come* Euclide *fosse arrivato a discoprire quel tanto famoso* Criterio, *del quale egli si è avvalso in tutto il presente libro, per conoscere se quattro grandezze sono proporzionali, o no: lusingandomi di far cosa grata non meno a' principianti, che a' provetti nelle mattematiche, a' quali sono per avventura note le contese, che sono state fra' geometri per cagione del suddetto criterio.*

Digitalizzato da Google

Del Criterio delle proporzioni ſtabilito da Euclide.

Secondo Euclide *allora quattro grandezze ſono proporzionali, quando gli egualmente moltiplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio eccedono entrambi, o ſono entrambi minori, o entrambi eguagliano gli egualmente moltiplici de' conſeguenti pigliati ancora ad arbitrio: laddove la prima avrà maggior ragione alla ſeconda, che la terza alla quarta, ſe pigliati ſecondo qualche moltiplicazione gli egualmente moltiplici degli antecedenti, e pigliati ancora ſecondo qualche moltiplicazione gli egualmente moltiplici de' conſeguenti ſi trova, che il moltiplice della prima avanza quello della ſeconda, ma quello della terza non avanza quello della quarta. Per ritrovare queſto* Criterio *dovette* Euclide *ſenza dubbio badare a queſte due verità:* I. *Che ſe quattro grandezze ſono proporzionali gli egualmente moltiplici degli antecedenti comparati cogli egualmente moltiplici de' conſeguenti ſi ritrovano ad eſſi proporzionali; vale a dire come ſta il moltiplice della prima a quello della ſeconda, così il moltiplice della terza a quello della quarta; qual verità egli poi la ſtabilì nella propoſiz.* IV. *per mezzo del criterio in queſtione.* II. *Se quattro quantità ſono proporzionali, e ſia la prima maggiore, minore, o eguale alla ſeconda, ſarà la terza maggiore ſimilmente, minore, o eguale alla quarta; ciocche ſi ritrova dimoſtrato nella propo.* XIV.: *nella quale quantunque ſi compari la prima non già colla ſeconda, ma colla terza, e la ſeconda ſi paragoni colla quarta, nulla di manco poiche le proporzioni ſoſſiſtono, ancorche ſi permutino i loro termini, è facile a comprendere eſſere vera la coſa, ancorche ſi paragoni il primo col ſecondo, ed il terzo col quarto termine. Da queſte due verità*

com-

Digitalizzato da Google

combinate insieme potè di leggieri Euclide *dedurne la prima parte del suo criterio; la quale vuole che allora quattro quantità siano proporzionali, quando gli egualmente moltiplici degli antecedenti sono entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti; ed ecco come. Se quattro quantità sono proporzionali I. gli egualmente moltiplici degli antecedenti sono proporzionali cogli egualmente moltiplici de' conseguenti. Ma essendo gli egualmente moltiplici degli antecedenti proporzionali agli egualmente moltiplici de' conseguenti devono II. i primi essere entrambi o maggiori, o eguali, o minori de' secondi; dunque viceversa se gli egualmente moltiplici degli antecedenti, &c. La seconda parte del criterio fu una conseguenza necessaria della prima parte, siccome è manifesto da se medesimo.*

Proprietà delle grandezze egualmente moltiplici.

I. (*) Se più grandezze sono egualmente moltiplici di altrettante grandezze ciascuna di ciascuna, quante volte una di esse è moltiplice della sua corrispondente, altrettanto tutte unite insieme saranno moltiplici di tutte unite insieme. * *pro.* 1.

II. (*) Se la prima è tanto moltiplice della seconda, quanto la terza della quarta; e la quinta è tanto moltiplice dell'istessa seconda, quanto la sesta è moltiplice della quarta: sarà la composta dalla prima, e dalla quinta tanto moltiplice della seconda, quanto la composta dalla terza, e dalla sesta è moltiplice della quarta. * *pro.* 2.

Queste due proposizioni si vogliono riguardare come due assiomi; di fatto le dimostrazioni, che se ne adducono non sono dimostrazioni, ma piuttosto spiegazioni.

III. (*) Se la prima è tanto moltiplice della seconda, quanto la terza della quarta: gli egualmente moltiplici della prima, e della ter- * *pro.* 3.

Digitalizzato da Google

terza pigliati ad arbitrio ſono ancora egualmente moltiplici della ſeconda, e della quarta: *queſta verità è una conſeguenza della propoſiz.* 11.

E pro. 5. IV. (*) Se tutta una grandezza ſia tanto moltiplice di tutt'un'altra grandezza, quanto una parte della prima è moltiplice d'una parte della ſeconda: ſarà la rimanente tanto moltiplice della rimanente, quanto la tutta è moltiplice della tutta: *queſta propoſizione ſi vuol riguardare come converſa della propoſiz.* I. V. (*) Se due grandezze ſono egualmente moltiplici di due altre grandezze, e due parti delle prime ſono parimente egualmente moltiplici delle ſeconde grandezze: ſaranno gli avanzi, o egualmente moltiplici delle medeſime grandezze, e per lo meno ſaranno eguali ad eſſe: *ma a queſta propoſizione biſognava premettere queſt'altra, che* Euclide *ha tralaſciata*. VI. Se una grandezza è moltiplice d'un'altra grandezza, e una parte della prima grandezza è parimente moltiplice della ſeconda grandezza, l'avanzo o ſarà moltiplice della medeſima, o per lo meno le ſarà eguale. VII.

F pro. 6.

F pro. 15. (*) Le parti paragonate co' loro egualmente moltiplici pigliati ad arbitrio ſono ad eſſi proporzionali: *vale a dire* come ſono le parti fra loro, così ſono gli egualmente moltiplici. VIII.

F pro. 4. (*) Se quattro quantità ſono proporzionali, gli egualmente moltiplici degli antecedenti paragonati cogli egualmente moltiplici de' conſeguenti, gli uni, e gli altri pigliati ad arbitrio, ſi ritroveranno proporzionali: *vale a dire*, come ſta il moltiplice della prima a quello della ſeconda, così ſtarà il moltiplice della terza a quello della quarta.

Del-

Digitalizzato da Google

Delle ragioni, che nascono dal paragonare due grandezze con una terza grandezza.

I. (*) Se due grandezze sono eguali, esse anno 1. la medesima ragione ad una terza grandezza: *viceversa* 2. una terza grandezza ha la medesima ragione alle due suddette grandezze eguali. * *pro.* 7.

(*) Se due grandezze anno la medesima ragione ad una terza grandezza, esse sono 1. eguali. *Viceversa* 2. Se una terza grandezza ha la medesima ragione a due grandezze, queste sono parimente eguali. * *pro.* 9.

Questa proposizione si vuol riguardare come conversa dell' antecedente. III. (*) Se due grandezze sono diseguali, esse non anno 1. la medesima ragione ad una terza grandezza, ma quella ha maggior ragione alla terza, la quale è più grande. *Viceversa* 2. una terza grandezza ha maggior ragione alla più piccola delle due grandezze suddette, che alla più grande. * *pro.* 8.

IV. (*) Delle grandezze, che anno ragione ad una terza grandezza, quella 1. è maggiore, la quale ha maggior ragione alla suddetta terza. *Viceversa* 2. quella alla quale una terza grandezza ha maggior ragione è minore. * *pro.* 10.

Queste due proposizioni si vogliono riguardare converse l'una dell' altra.

Proprietà delle proporzioni.

I. (*) Se quattro grandezze sono proporzionali, se la prima è maggiore, minore, o eguale alla terza, sarà parimente la seconda maggiore, minore, o eguale alla quarta. * *pro.* 14.

II (*) Se quattro grandezze sono proporzionali, la massima, e la minima congiunte insieme sono maggiori delle altre due congiunte insieme. * *pro.* 25.

III. (*) Se tutta una grandezza sta a tutta un' altra grandezza * *pro.* 19.

Digitalizzato da Google

come una parte della prima ad una parte della seconda: l'avanzo sarà all'avanzo come sta tutta la grandezza a tutta la grandezza: *questa propo-*
* pro.24. *sizione è molto più generale della V.* IV.(*) Se la prima alla seconda ha la medesima ragione, che la terza alla quarta; e la quinta all'istessa seconda ha la medesima ragione, che la sesta alla quarta, la composta dalla prima, e dalla quinta alla seconda avrà la medesima ragione, che la composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta.
* pro.12. *Questa proposizione è più generale della* II.V.(*) Se più grandezze sono proporzionali con altrettante grandezze: *vale a dire* se vi sono più ragioni eguali, come sta uno degli antecedenti ad uno de' conseguenti, così tutti gli antecedenti uniti insieme saranno a tutti i conseguenti uniti insieme, *Questa proposizione è più generale della* I.
* pro.11. VI. (*) Se due ragioni sono eguali ad una terza ragione saranno esse eguali fra di loro. VII.
* pro.13. (*) Se due ragioni sono eguali: se una di esse è maggiore, o minore d'una terza ragione sarà parimente l'altra maggiore, o minore della me-
* pro.20, e 21. desima ragione. VIII. (*) Se tre grandezze sono in ragione ordinata, ovvero perturbata con tre altre grandezze, se la prima è maggiore, eguale, o minore della terza, sarà parimente la quarta maggiore, eguale, o minore della sesta.

Delle mutazioni, che si possono usare nelle proporzioni.

Nelle proporzioni si possono nelle occorrenze usare alcune mutazioni, o cangiamenti, senza che per questo le proporzioni si turbino. Cotali cangiamenti si chiamano ordinariamente modi di argomentare, i quali si riducono a' seguenti. I.
* Cor. della pro.4. (*) Se quattro grandezze sono proporzionali, esse, ancorche s'invertano, *vale a dire* ancorche l'an-

Digitalizzato da Google

l'antecedente passi in luogo di conseguente, ed il conseguente in luogo d'antecedente, rimarranno proporzionali . II. (*) Se quattro grandezze sono proporzionali, esse ancorche si permutino, *vale a dire* ancorche si paragoni l'antecedente coll' antecedente, ed il conseguente con il conseguente, rimarranno proporzionali. III. (*) Se quattro grandezze composte sono proporzionali, ancorche si dividano, *vale a dire* ancorche si compari l'eccesso dell'antecedente sopra il conseguente col conseguente istesso rimarranno proporzionali . *Questo modo di argomentare ha luogo nelle proporzioni, nelle quali gli antecedenti sono maggiori de' conseguenti* . IV. (*) Se quattro grandezze sono proporzionali, ancorche si compongano, *vale a dire* ancorche si compari la somma dell' antecedente, e del conseguente col conseguente istesso, rimarranno proporzionali . V. (*) Se quattro grandezze sono proporzionali ancorche si convertono, *vale a dire* ancorche si paragoni l'antecedente coll' eccesso dell' antecedente sopra il suo conseguente, rimarranno proporzionali . *Questo modo di argomentare ha parimente luogo nelle proporzioni, nelle quali gli antecedenti sono maggiori de' conseguenti* . VI. (*) Se tre grandezze sono in ragione ordinata con tre altre grandezze, per l'egual ragione ordinata sarà la prima alla terza, come la prima alla terza . VII. (*) Se tre grandezze sono in ragione perturbata con tre altre grandezze; per l'egual ragione perturbata sarà la prima alla terza, cosi la prima alla terza.

* *pro. 16.*

* *pro. 17.*

* *pro. 18*

* *Corol. della pro. 19.*

* *pro. 22.*

* *pro. 23.*

Digitalizzato da Google

LIBRO SESTO
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA,
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE.

DEFINIZIONI.

I.

LE figure ſimili ſono quelle, che anno gli angoli eguali agli angoli ciaſcuno a ciaſcuno, ed intorno agli angoli eguali anno parimente i lati proporzionali ciaſcuno a ciaſcuno.

SPIEGAZIONE.

Acciocche due figure poſſano chiamarſi ſimili ſi ricercano le tre condizioni ſeguenti. I. che ſiano pariangole, vale a dire che quanti angoli, o lati contiene una figura, altrettanti ne contenga l'altra figura. Quindi un triangolo potrà eſſer ſimile ad un' altro triangolo, ma non già ad una figura quadrilatera, o multilatera. E ſimilmente una figura quadrilatera potrà eſſer ſimile ad un' altra figura quadrilatera; ma non già ad una figura di più di quattro lati. II. che

cia-

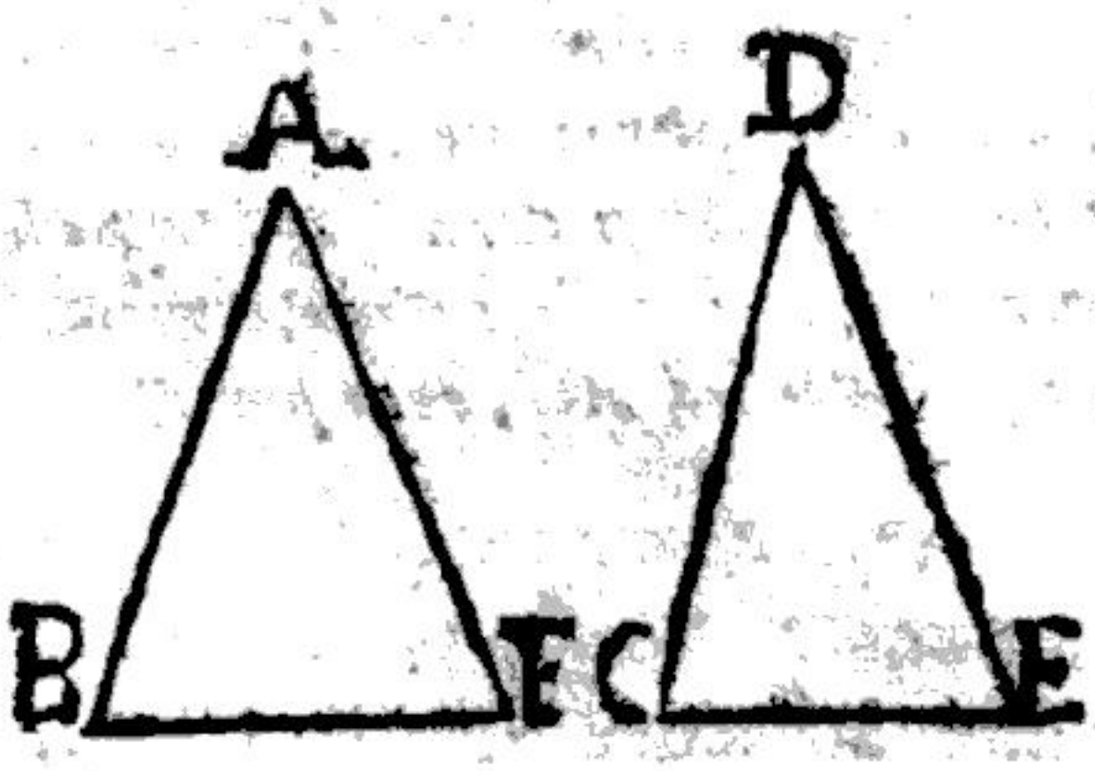
Digitalizzato da Google

ciascuno angolo sia eguale a ciascuno angolo. III. che intorno gli angoli eguali abbiano i lati proporzionali: ove queste tre condizioni si rincontrino, le figure si diranno simili; ove una sola di esse non abbia luogo le figure si diranno dissimili. Da quì è manifesto, che tutti i triangoli equilateri sono simili fra di loro, siccome parimente tutti i quadrati; poiche negli uni, e negli altri si verificano tutte tre le condizioni. Perche I. sono pariangoli II. anno gli angoli eguali agli angoli ciascuno a ciascuno. III. anno i lati intorno gli angoli eguali proporzionali; perche sono tutti eguali fra di loro.

II.

Le figure reciproche sono quelle, fra i lati de' quali ha luogo tale proporzione, che gli estremi di essa s'incontrano in una figura, e li mezzi nell' altra figura.

SPIEGAZIONE.



Per dirsi reciproci i due triangoli ABF, DCE; fa duopo I. che due lati dell'uno siano proporzionali a' due lati dell'altro. II. che la proporzione sia tale, che gli estremi di essa si ritrovino in un triangolo, e li mezzi nell'altro triangolo: vale a dire, che sia AB a DC, così CE, BF; imperciocche in tal modo gli estremi AB, BF della proporzione si ritrovano nel triangolo ABF, e li mezzi DC, CE si ritrovano nel triongolo DCE.

Digitalizzato da Google

III.

L'altezza d'una figura è la perpendicolare, che si fa cadere dal vertice sopra la base.

COROLLARJ.

QUindi ne siegue I. che due triangoli costituiti in modo che le basi di essi giacciano a dirittura, e li vertici siano riuniti in un medesimo punto, abbiano la medesima altezza; imperciocche la perpendicolare, che cade dal vertice sopra la base è comune all'uno, ed all'altro triangolo. II. che due figure situate fra due parallele anno ancora la medesima altezza, la quale è la distanza delle due parallele, di maniera che è l'istesso il dire due figure anno l'istessa altezza, e due figure sono costituite, o per lo meno possono essere costituite fra due parallele.

IV.

Una linea retta dicesi segata secondo l'estrema e mezza ragione, quando tutta la linea retta è alla di lei maggior porzione, come l'istessa maggior porzione sta alla minor porzione: *vale a dire la retta AB si dirà segata nel*

A C B *punto C secondo l'estrema, e mezza ragione, se come sta AB ad AC, così sia AC a CB.*

V.

La quantità di ragione è il quoziente, che nasce dividendo il suo antecedente per lo suo conseguente: dicasi detto quoziente ancora, denominatore della ragione, ovvero esponente della ragione.

Digitalizzato da Google

SPIEGAZIONE.

LA ragione secondo quello, che si disse nel principio del libro V. è il rapporto di due grandezze omogenee paragonate secondo la quantità. Ora chi vuol sapere il valore d'una ragione, il qual valore si chiama da' geometri quantità, *o* esponente, *o* denominatore, *egli deve far così: deve vedere quante volte l'antecedente contiene il conseguente, o che ritorna all'istesso, quante volte il conseguente si contiene nell'antecedente; imperciocche il numero, che indica cotesta continenza sarà il valore della ragione, e si chiamerà* quantità *della medesima. Quindi la quantità della ragione di 8 a 4 sarà 2: imperciocche dividendo il numero 8 per lo 4 ne nasce il numero 2: la quantità della ragione di 13 a 2 è 6 1/2; imperciocche il 2 nel 13 entra 6 1/2: e finalmente la quantità della ragione di 2 a 3 è 2/3 imperciocche 2/3 è il quoziente della divisione dell'antecedente 2 per lo conseguente 3.*

Questa definizione ci suggerisce un' altro contrassegno per conoscere se due ragioni sono eguali o no, il quale è questo: Se le quantità delle due ragioni, *sopra le quali nasce il dubbio se siano eguali o no,* sono eguali, le ragioni saranno parimente eguali: ma se le suddette quantità sono diseguali le ragioni ancora saranno diseguali, e quella ragione sarà maggiore, la quantità della quale è maggiore. *Per mezzo di questo contrassegno conosciamo, che 12 sta a 2 come 18 a 3; imperciocche la quantità dell' una, e dell'altra ragione è il numero 6. Conosceremo di più, che 2 sta a 6, come sta 4 a 12; imperciocche la quantità dell'una, e dell'*

Digitalizzato da Google

altra ragione è $\frac{1}{3}$. *E finalmente conosceremo, che* 12 *ha maggior ragione a* 3 *, che* 6 *a* 2 *; imperciocchè la prima ragione ha* 4 *per denominatore, ovvero esponente , e la seconda ha* 3.

VI.

Una ragione dicesi composta da più altre ragioni, quando la quantità di essa nasce dal moltiplicare insieme tutte le quantità delle ragioni componenti.

VII.

Se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta dicesi duplicata: se sono tre, e sono eguali dicesi triplicata; se sono quattro, e sono eguali quadruplicata, e così all' infinito.

SPIEGAZIONE.

Si è detto nella definizione antecedente, che due ragioni allora sono eguali , quando le loro quantità sono eguali fra di loro : ma se la quantità d'una ragione fosse eguale alle quantità di più altre ragioni moltiplicate insieme , in tal caso la suddetta ragione si direbbe composta da tutte queste ragioni. Per esempio la ragione di 6 *a* 1 *è composta dalle ragioni di* 12 *a* 4 *, e di* 6 *a* 3 *; imperciocchè le quantità delle due ultime ragioni sono rispettivamente* 3 *, e* 2*, le quali moltiplicate insieme producono il numero* 6 *, che è la quantità della ragione di* 6 *a* 1 *. Similmente la ragione di* 12 *a* 1 *è composta da queste tre ragioni di* 6 *a* 2 *di* 8 *a* 4*, e di* 10 *a* 5*; imperciocchè le quantità delle tre ultime ragioni sono rispettivamente* 3*,* 2*, e* 2*, le quali moltiplicate insieme producono il numero* 12 *, che è la quantità della ragione di* 12 *a* 1.

Quindi date più ragioni semplici sarà facile a ritrovare la ragione, che da esse è composta ; imper-

Digitalizzato da Google

perciocche non si dee far altro, che ritrovare primieramente le quantità di tutte le ragioni semplici date, e poi moltiplicarle insieme; che poi la ragione, che ha il prodotto per esponente, ovvero per denominatore saria la ragione composta desiderata. Vogliasi per esempio ritrovare la ragione tomposta da queste due ragioni di 18 a 3, e di 4 a 1: perche la quantità di queste due ragioni sono rispettivamente 6, e 4, le quali moltiplicate insieme producono il numero 24, ne siegue che la ragione di 24 a 1, ovvero di 48 a 2, ovvero di 72 a 3, &c. è composta dalle due ragioni semplici date; imperciocche la quantità di ciascuna di queste tre ragioni è l'istesso numero 24. Si potria ancora ritrovare la ragione composta da più ragioni semplici date moltiplicando insieme tutti gli antecedenti della ragione, e poi tutti i conseguenti delle medesime, e da' prodotti costituirne un' altra ragione, la quale sarà la composta desiderata. Così senza appartarci dall'esempio ora proposto perche gli antecedenti delle due ragioni sono 28, e 4 il prodotto delle quali è 72, e li conseguenti sono 3, ed 1, il prodotto de' quali è 3, ne siegue, che la ragione di 72 a 3 è composta dalle due ragioni di 18 a 3, e di 4 a 2, siccome già era stato ritrovato per l'altra maniera di comporre le ragioni.

Ora è da saperfi, che se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta si chiami duplicata in riguardo a ciascuna delle due componenti; e se sono tre, e sono eguali, si chiami triplicata, e se quattro, e sono eguali quadruplicata, e così all' infinito. Per esempio le ragioni di 6 e 2, e 12 a 4 sono eguali; sicche la ragione di 9 a 1 composta da esse si dirà duplicata, cosi di 6 a 2, come parimente di 12 a 4. Similmente le ragioni di 4 a 2, di 8 a 4, e di 12 a 6 sono eguali; il perche la ragione di 8 a 1 composta da tutte tre si dirà triplicata di ciascuna di esse. In fine le ragioni di 3 a 1, di 6

Digitalizzato da Google

a 2, di 9 a 3, e di 12 a 4 sono tutte eguali; quindi la ragione di 81 a 1 composta da tutte quattro si dirà quadruplicata di ciascuna di esse. Del rimanente siccome per darsi luogo alla ragione duplicata si richiedono due ragioni eguali, per darsi luogo alla triplicata si richiedono tre ragioni eguali, e così all'infinito; così basterà una ragione sola per ritrovarne la duplicata, la triplicata, &c.: imperciocchè non avrà da farsi altro, che moltiplicare una volta per se medesima la quantità della ragione data per ritrovare la sua duplicata, moltiplicarla due volte per avere la triplicata, tre volte per avere la quadruplicata, e così all' infinito.

Intorno le ragioni composte è degno, che qui si riferisca il seguente Teorema. Se fra due qualsivogliano quantità omogenee si mettano altre qualsivogliano quantità omogenee, e quante si vogliano; la ragione che la prima ha all' ultima sarà composta da tutte le ragioni intermezze: *vale a dire se fra le quantità 20, e 1 si frapongono le quantità 10, e 5, le quali si prendano ad arbitrio, la ragione di 20 a 1 sarà composta dalle ragioni intermezze di 20 a 10, di 10 a 5, e di 5 a 1: di fatto componendo insieme queste tre ragioni semplici si vedrà uscir fuori la composta di 20 a 1. Similmente se fra le quantità 2, e 3 si frapongono ad arbitrio le quantità 5, 8, 30, e 4 la ragione di 2 a 3 sarà composta da tutte le ragioni intermezze di 2 a 5, di 5 a 8, di 8 a 30, di 30 a 4, e di 4 a 5: di fatto componendo insieme tutte queste ragioni si vedrà uscir fuori la composta di 2 a 3: ma avverta si qui, che per fare questa composizione sia duopo sapere la teoria de' numeri retti.*

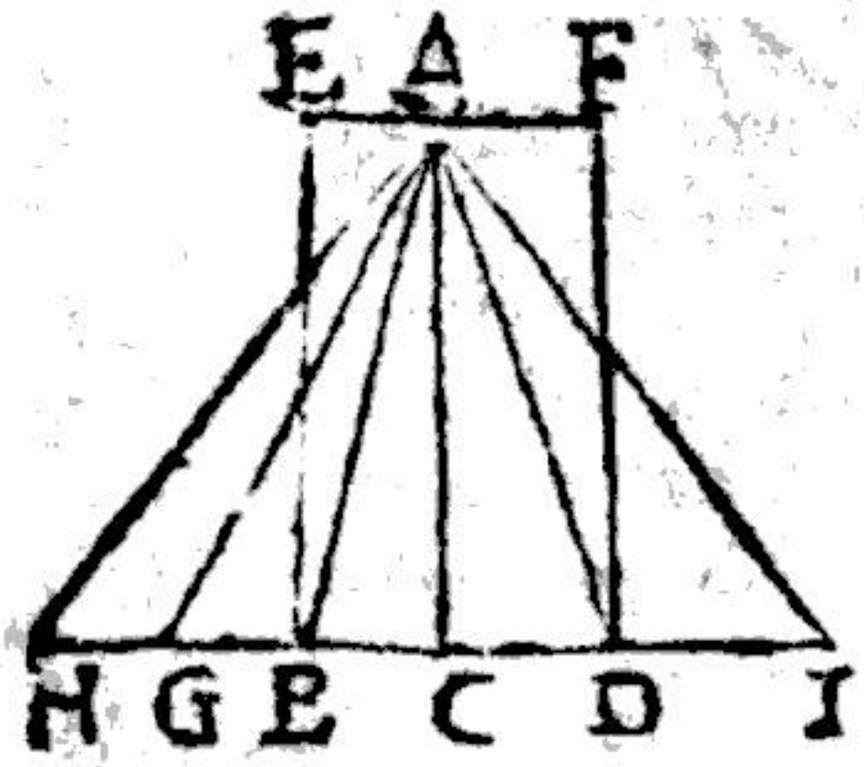
Da quì è manifesto I. *che se tre quantità A, B, C sono continuamente proporzionali la ragione della prima A alla terza C è duplicata della prima A alla seconda B: imperciocchè fra A, e C ritrovan-*

Digitalizzato da Google

dosi interposta la B, sarà la ragione di A a C composta dalle ragioni di A a B, e di B a C; ma queste due ragioni sono supposte eguali fra loro: dunque la ragione di A a C sarà duplicata di A a B, e per conseguente di B a C. II. Che se quattro quantità A, B, C, D sono continuamente proporzionali, la ragione della prima A alla quarta D sia triplicata della ragione della prima A alla seconda B: imperciocchè fra le due grandezze A, e D ritrovandosi interposte le due grandezze B, e C sarà la ragione di A a D composta dalle tre ragiomi intermezze di A a B, di B a C, e di C a D; quindi supponendosi eguali queste tre ragioni, sara la ragione di A a D triplicati così della ragione di A a B, come delle ragioni di B a C, e di C a D: nell'istessa maniera si mostrerà, che se cinque quantità sono continuamente proporzionali la ragione della prima alla quinta sia quatruplicata della ragione della prima alla seconda.

PROP. I. TEOREMA.

I. Li triangoli, che anno l'istessa altezza sono fra loro come le basi. II. Similmente li parallelogrammi, che anno l'istessa altezza sono fra loro come le basi.



I.

Li due triangoli ABC, ADC, siccome ancora li due parallelogrammi ACBE, ACDF abbiano la medesima altezza: io dico che il triangolo ABC stia al triangolo ADC come sta la base BC alla base DC: io dico di più che il parallelogrammo ACBE stia al parallelogrammo ACDF come sta l'istessa base BC alla base DC.

II.

Digitalizzato da Google

II.

* *dim.* 2. I. Si diſtendano (*) le baſi BC, DC verſo
* *pro.* 3. I. H, ed I. II. Si prendano (*) le parti BG, GH ciaſcuna eguale alla BC, il numero delle quali patti ſia arbitrario; ficcome ancora ſi prenda
* *dim.* 1. la parte DI eguale a CD. III. ſi congiungano (*) le linee rette AG, AH, AI.

III.

I. Perche dalla coſtruzione le baſi HG, GB,
* *pro.* 37. I. BC ſono eguali fra di loro, ſaranno (*) i triangoli AHG, AGB, ABC eguali fra di loro: il perche quanto la baſe CH è moltiplice della baſe CB, tanto ſarà il triangolo AHC moltiplice del triangolo ABC. Similmente perche dalla coſtruzione le baſi ID, DC ſono eguali fra di
* *pro.* 37. I. loro, ſaranno li triangoli (*) AID, ADC parimente eguali: e per conſeguente quanto la baſe IC è moltiplice della baſe DC, altrettanto il triangolo AIC ſarà moltiplice del triangolo ADC. Ora ſe la baſe HC è eguale alla baſe CI,
* *pro.* 37. I. è manifeſto (*) che il triangolo AHC ſarà eguale al triangolo AIC: ma è manifeſto ancora, che ſe la baſe HC è maggiore, o minore della baſe IC, ancora il triangolo AHC ſarà maggioee, o minore del triangolo AIC. Quindi avendo due ragioni di BC a CD, e del triangolo ABC al triangolo ADC; ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti BC, e del triangolo ABC, i quali egualmente moltiplici ſono HC, ed il triangolo AHC ſono entrambi o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici CI, e del triangolo AIC de' conſeguenti DC, e del triangolo ADC, ne
* *def.* 6. ſiegue (*) che le ſuddette due ragioni ſiano eguali; e per conſeguente, che BC ſtia a CD come ſta il triangolo ABC al triangolo ADC.
* *pro.* 34. I. II. Perche il parallelogrammo (*) ACBE è doppio del triangolo ACB, ficcome parimente

il

Digitalizzato da Google

il parallelogrammo ACDF è doppio del triangolo ACD; saranno i due parallelogrammi ACBE, ACDF egualmente moltiplici de' triangoli ACB, ACD; quindi come sta il triangolo ABC al triangolo ADC (*), così starà il parallelogrammo ACBE al parallelogrammo ACDF; ma si è dimostrato, che la base BC sia alla base DC, come il triangolo ABC sta al triangolo ADC; dunque sarà parimente (*) la base BC alla base DC, così il parallelogrammo ACBE al parallelogrammo ACDF. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro.* 15. *V.*

(*) *pro.* 11. *V.*

PROP. II. TEOREMA.

I. Se in un triangolo s'intende tirata una linea retta qualunque parallela alla base; essa segherà i lati proporzionalmente. II. viceversa se i lati d'un triangolo siano segati proporzionalmente la linea retta, che congiugne i segamenti sarà parallela alla base.

I.



Nel triangolo ABC intendasi tirata la linea DE parallela alla sua base BC: io dico in primo luogo, che i lati AB, AC rimangono segati proporzionalmente; di modo che come sta BD a DA, così starà CE ad EA: io dico in oltre, che se BD sta a DA come CE ad EA, la linea DE, la quale congiugne i punti D, ed E, sarà parallela alla base BC del triangolo ABC.

II.

Congiungansi (*) le due linee rette DC, BE.

(*) *dim.* 1.

III.

I. Perche dalla supposizione le rette DE, BC so-

Digitalizzato da Google

*pro.37.I. sono parallele, saranno (*) li triangoli BDE, CED eguali fra di loro: quindi come sta il trian-
*pro.7.V. golo (*) BDE al triangolo ADE, così starà il triangolo CED all' istesso triangolo ADE: ma
*pro.ante. il triangolo BDE sta al triangolo ADE (*) come la base BD alla base DA: e similmente il trian-
*pro.ante. golo CED sta al triangolo ADE (*) come la base CE alla base EA; dunque sarà parimente
*pro.11.V. BD a DA (*) così la CE alla EA.

II. Perche dalla suppositione BD sta a DA come CE ad EA, ed oltre a ciò l'istessa BD sta a DA
*pro.ante. (*) come il triangolo BDE sta al triangolo ADE, e CE sta ad EA come il triangolo CED sta al
*pro.11.V. triangolo ADE, sarà (*) il triangolo BDE al al triangolo ADE come il triangolo CED sta al triangolo ADE: quindi i due triangoli BDE, CED avendo la medesima ragione all' istesso
*pro. 9. V. triangolo ADE saranno eguali fra di loro (*): ma sono costituiti sopra la medesima base DE;
*pro. 39.I. dunque saranno fralle medesime parallele (*): e per conseguente sarà la BC parallela alla DE. Ciocche doveva dimostrarsi.

COROLLARJ.

Da qui è manifesto I. che AD sia a DB, come AE sta ad EC: imperciocche essendosi dimo-
Corol.della pro.4. strato, che BD sia a DA, come sta CE ad EA, sarà per la ragione inversa (*) come AD a DB, così AE ad EC. II. che BA sia ad AD, come sta CA ad AE; imperciocche essendosi dimostrato, che BD sia
pro.18.V. a DA, come CE ad EA sarà per la composizione della ragione (*) come BA ad AD, così CA ad AE. III. che AB sia a BD, come AC sta a CE: imperciocche essendosi dimostrato, che AD sia a DB, come
pro.18.V. sta AE ad EC sarà per la composizione della ragione (*) come AB a BD, così AC a CE.

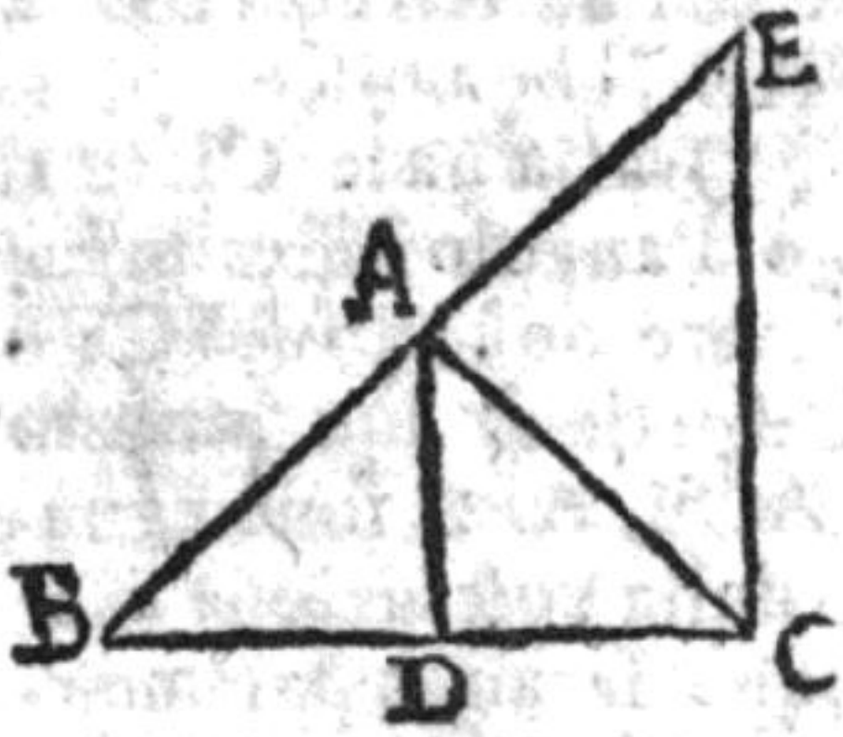
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. III. TEOREMA.

I. Se l'angolo contenuto da' lati d'un triangolo s'intenda diviso per mezzo, la linea che lo divide segherà la base nell' istessa proporzione de' lati. II. viceversa se la base sia segata nell' istessa proporzione de' lati la linea, che unisce il vertice del triangolo col punto della sezione segherà il suddetto angolo per mezzo.

I.



Nel triangolo ABC intendasi l'angolo BAC diviso per mezzo dalla retta AD; io dico primieramente, che questa retta segherà la base BC nel punto D in modo, che le parti di essa sono proporzionali a' lati BA AC; vale a dire, come sta BA ad AC, così starà BD a DC. Io dico inoltre, che se BD sta a DC come BA ad AC, la linea AD, la quale congiunge il vertice A del triangolo col punto della sezione D, divida l'angolo BAC per mezzo.

II.

I. Distendasi (*) la retta BA verso E. II. Si tagli la parte AE eguale (*) alla AC. III. Si congiunga la CE (*).

* *dim.* 2.
* *pro.* 3. I.
* *dim.* 1.

III.

I. Perche dalla costruzione la AE è eguale alla AC, sarà il triangolo AEC isoscele; il perche l'angolo (*) AEC sarà eguale all'angolo ACE; laonde essendo l'angolo esteriore BAC eguale (*) a' due angoli interiori opposti AEC, ACE; sarà l'angolo BAC doppio dell' angolo ACE: quindi essendo dalla supposizione l'angolo BAC pa-

* *pro.* 5. I.
* *pro.* 32. I.

Digitalizzato da Google

parimente doppio dell'angolo DAC ; saranno (*) li due angoli DAC, ACE eguali fra di loro ; ma sono alterni delle linee AD, CE; dunque queste due linee saranno parallele (*). Ciò posto perche nel triangolo BCE si è tirata la retta DA parallela alla base CE, sarà (*) BA ad AE, così BD a DC; quindi essendo dalla costruzione la AC eguale alla AE; sarà ancora come BA ad AC, così BD a DC.

* *assio.7.*

* *pro.27.I.*

* *Cor.1.della pro.ante.*

II. Essendo dalla suppositione BA ad AC, così BD a DC; e dalla costruzione essendo la AE eguale alla AC, sarà come BA ad AE così BD a DC: quindi la linea retta AD, che unisce i punti A, e D, sarà parallela (*) alla base CE : il perche sarà in primo luogo l'angolo esteriore BAD (*) eguale all' interiore opposto AEC: e sarà ancora l'angolo DAC eguale al suo alterno ACE (*) ; ma gli angoli ACE, AEC sono eguali fra di loro, perche (*) dalla costruzione la AE è eguale alla AC; dunque saranno parimente eguali gli angoli BAD, DAC (*) ; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro. ante.*

* *pro.29.I.*

* *pro. 29.I.*

* *pro.5.I.*

* *assio. 1.*

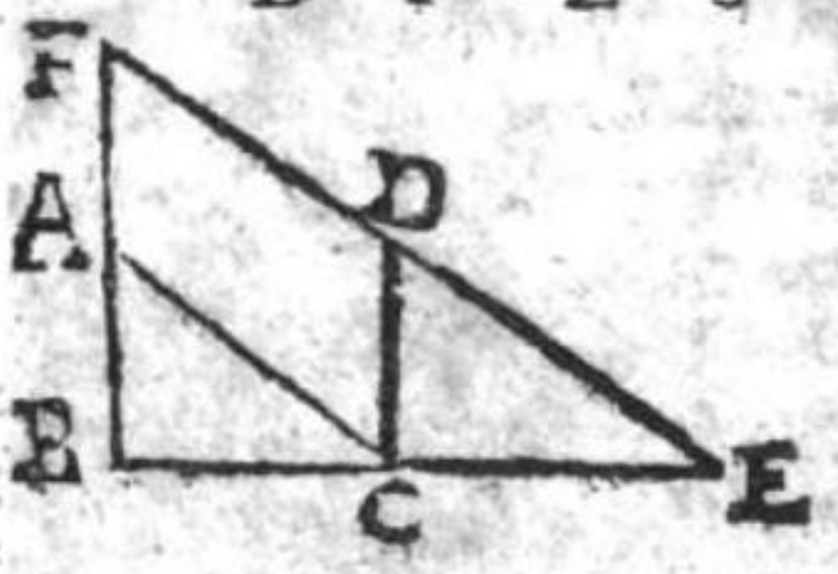
PROP. IV. TEOREMA.

Se due triangoli sono equiangoli, i lati intorno gli angoli eguali saranno proporzionali ; e que' lati saranno omologi, i quali stanno dirimpetto agli angoli eguali.

I.

Li due triangoli ABC, DCE siano equiangoli, vale a dire siano gli angoli BAC, ABC, BCA del primo triangolo eguali rispettivamente agli angoli CDE, DCE, CED dell'altro triangolo ciascuno a ciascuno ; io dico che li lati intorno li suddetti angoli eguali sono proporzionali, prendendo però per lati omologi quelli, che stanno dirimpetto agli angoli eguali, cioè AB, e CD; BC,

Digitalizzato da Google



BC, e CE; AC, e DE; di modo che sarà AB a BC, come DC a CE; e come BC a CA, così CE ad ED; e finalmente come BA ad AC, così CD a DE.

II.

I. Si mettano i due lati omologi BC, e CE a dirittura. II. Si distendano i due lati BA, ED (*) finche vadano a congiungersi nel punto F. * *dim.* 2.

III.

Poiche dalla suppoſizione l'angolo esteriore ACB è eguale all' interiore oppoſto dall'istessa parte FEB: le due linee rette AC, FE saranno parallele (*). Similmente perche dalla suppoſizione l'angolo esteriore DCE è eguale all' angolo interiore oppoſto FBC, le due linee DC, FB saranno (*) parallele; quindi la figura quadrilatera FACD avendo i lati oppoſti paralleli sarà un parallelogrammo (*); e per conseguente i lati oppoſti AC, FD, ed AF, CD saranno eguali fra di loro (*). Ora perche nel triangolo FBE la linea AC è parallela alla baſe FE, sarà BA ad AF, così BC a CE (*); e per conseguente sarà ancora BA a CD, come BC a CE, e per la ragione permutata (*) come BA a BC, così CD a CE. Similmente perche nel triangolo EBF la linea CD è parallela alla baſe BF, sarà (*) BC a CE, così FD a DE, e per conseguente BC a CE, come AC a DE, e per la ragione permutata (*) come BC a CA, così CE ad ED. Ora essendosi dimoſtrato, che AB sia a BC, come DC a CE, e che BC sia a CA, come CE ad ED, saranno le tre linee AB, BC, CA in ragione ordinata colle tre linee DC, CE, ED; e per conseguente per l'egual ragione ordinata sarà (*) come BA ad AC, così CD a DE; ciocche doveva dimoſtrarsi.

* *pro.* 28. I.
* *pro.* 28. I.
* *def. ult.* I.
* *pro.* 34. I.
* *pro.* 2. di questo.
* *pro.* 16. V.
* *pro.* 2. di questo.
* *pro.* 16. V.
* *pro.* 22. V.

SCO-

Digitalizzato da Google

COROLLARJ.

DA qui è manifesto I. che se due triangoli sono equiangoli essi sono parimente simili: imperciocche, acciocche siano simili, si richiede che gli angoli siano eguali agli angoli ciascuno a ciascuno, e li lati intorno gli angoli eguali siano proporzionali: ora la prima di queste due condizioni si suppone, e l'altra è una conseguenza necessaria della prima. II. che se nel triangolo FBE si tira la retta AC parallela alla base FE il triangolo ABC sia simile al triangolo FBE: imperciocche a cagione delle due parallele AC, FE l'angolo BAC è eguale all'angolo (*) BFE, e l'angolo BCA è eguale all'angolo BEF; quindi essendo di più l'angolo ABC comune all'uno, ed all'altro triangolo; saranno essi equiangoli, e per conseguente saranno simili.

* pro. 29. I.

PROP. V. TEOREMA.

Se due triangoli anno i lati proporzionali, saranno equiangoli, e quegli angoli saranno eguali, i quali stanno dirimpetto a' lati omologi.

I.

Li due triangoli ABC, DEF abbiano i lati proporzionali; vale a dire come sta AB a BC, così sia DE ad EF; come BC a CA, così EF ad FD, e come BA ad AC, così ED a DF: io dico che gli angoli del triangolo ABC sono eguali agli angoli del triangolo DEF ciascuno a ciascuno, e quelli propriamente, li quali stanno dirimpetto a' lati omologi, vale a dire l'angolo ABC all'angolo DEF, l'angolo BCA all'angolo EFD, e l'angolo BAC all'angolo EDF.

II.

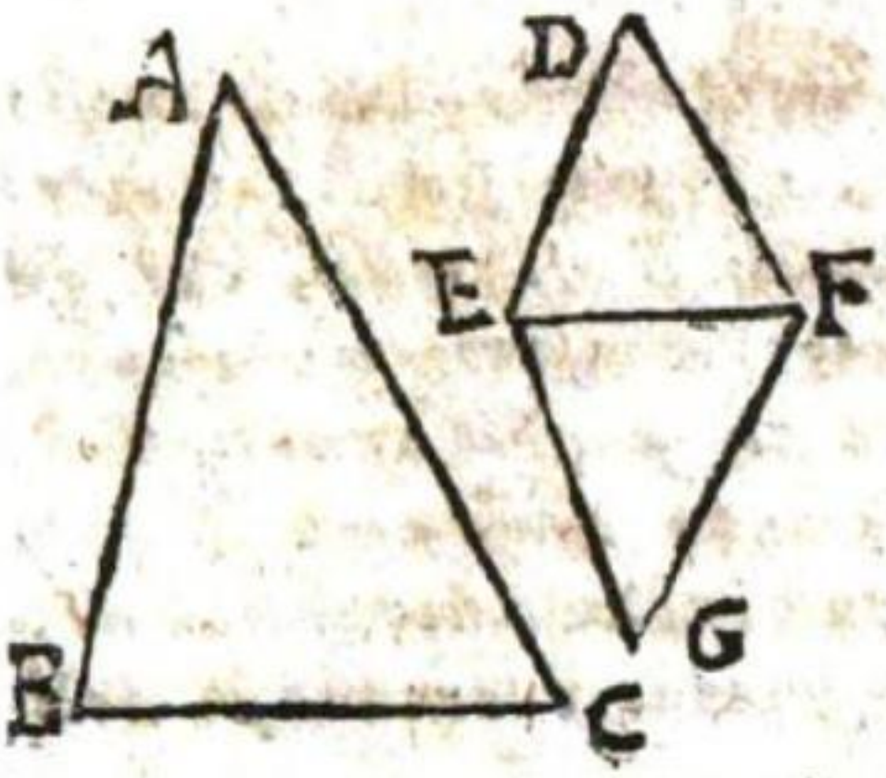
I. Costituiscansi (*) gli angoli GEF, GFE eguali rispettivamente agli angoli ABC, ACB.

* pro. 23. I.

II.

Digitalizzato da Google

II. Si distendano le due linee rette EG, FG finche vadano ad unirsi nel punto G (*). * *dim.* 2.



III.

Perche dalla costruzione li due angoli ABC, ACB sono eguali rispettivamente agli angoli GEF, GFE sarà il rimanente angolo BAC eguale al rimanete angolo EGF; perche in ogni triangolo li tre angoli (*) sono eguali a' due retti. Quindi li triangoli ABC, GEF essendo equiangoli (*) avranno i lati proporzionali, e per conseguente sarà AB a BC, così GE ad EF; ed AC a CB, così GF ad FE: ma dalla suppositione AB sta a BC come DE ad EF, e per la ragione inversa (*) come AC a CB, così DF ad FE; dunque sarà ancora GE ad EF come DE ad EF, e GF ad FE, così DF ad FE (*): laonde così le due linee rette GE, ED, come le due GF, FD saranno eguali fra di loro, a cagione che anno la medesima ragione alla terza EF (*): quindi i due triangoli DEF, GEF avendo i due lati DE, DF eguali a' due lati GE, GF ciascuno a ciascuno, ed avendo di più la base EF comune, avranno (*) gli angoli eguali agli angoli: vale a dire sarà l'angolo EDF eguale all' angolo EGF, l'angolo DEF eguale all' angolo GEF, e l'angolo DFE eguale all' angolo GFE: ma li tre angoli EGF, GEF, GFE sono dalla costruzione eguali a' tre angoli BAC, ABC, ACB: dunque saranno ancora gli angoli del triangolo DEF eguali (*) agli angoli del triangolo ABC: ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro.* 32. I.
* *pro. ante.*
* *Cor. della pro.* 4. *del V.*
* *pro.* 11. *V.*
* *pro.* 9 *V.*
* *pro.* 8. I.
* *assio.* 1.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

Da qui è manifesto, che se due triangoli anno i lati proporzionali, essi sono simili; imperciocche acciocche siano simili si richiede, che gli angoli siano eguali agli angoli ciascuno a ciascuno, e di più che i lati intorno gli angoli eguali siano proporzionali. Ora la seconda condizione si suppone, e la prima è una conseguenza necessaria della seconda. Questa proposizione è conversa dell' antecedente,

PROP. VI. TEOREMA.

Se due triangoli anno I. un' angolo eguale ad un' angolo. II. i lati intorno questi angoli proporzionali; essi saranno equiangoli, e quegli angoli propriamente saranno eguali, i quali stanno dirimpetto a' lati omologi.

I.

** veggasi la figura della pro. ante.*

Abbiano i due triangoli (*) ABC,DEF l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, ed abbiano di più i lati intorno questi angoli eguali proporzionali; vale a dire sia come AB a BC, così DE ad EF; io dico che gli altri due angoli del primo triangolo sono eguali agli altri due angoli del secondo triangolo, e quelli propriamente che stanno dirimpetto a' lati omologi, cioè l'angolo BAC è eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB è eguale all'angolo DFE.

II.

** pro. 23. I.* I. Costituiscansi (*) gli angoli GEF, GFE eguali rispettivamente agli angoli ABC,ACB. II.

** dim. 2.* Si distendano (*) le linee rette EG, FG, finche si vadino ad unire nel punto G.

III.

Perche dalla costruzione li due angoli ABC, ACB

Digitalizzato da Google

ACB ſono eguali a' due angoli GEF, GFE ſarà il rimanente angolo BAC eguale al rimanente angolo EGF: poiche in ogni triangolo tutti li tre angoli ſono eguali a due retti (*): il perche li due triangoli ABC, GEF eſſendo equiangoli avranno (*) i lati proporzionali, e per conſeguente ſarà AB a BC, così GE ad EF; ma dalla ſuppoſizione AB ſta a BC come DE ad EF: dunque ſarà ancora (*) GE ad EF, così DE alle medeſima EF; laonde le due rette GE, DE ſaranno eguali fra di loro (*): quindi i due triangoli DEF, GEF avendo i due lati DE, EF eguali a' due lati GE, EF ciaſcuno a ciaſcuno, ed avendo di più l'angolo DEF eguale all'angolo GEF, perche ciaſcuno di eſſi è eguale al medeſimo angolo ABC, ſarà (*) l'angolo EDF eguale all'angolo EGF, e l'angolo EFD eguale all'angolo EFG: ma dalla coſtruzione gli angoli EGF, EFG ſono eguali riſpettivamente agli angoli BAC, BCA; dunque ancora gli angoli EDF, EFD ſaranno riſpettivamente eguali agli angoli BAC, BCA; ciocche doveva dimoſtrarſi.

* pro. 32. I.

* pro. 4. di queſto.

* pro. 11. V.

* pro. 9. V.

* pro. 4. I.

COROLLARIO.

DA quì è manifeſto, che ſe due triangoli anno un'angolo eguale ad un'angolo, e i lati intorno queſti angoli proporzionali, eſſi ſono ſimili; imperciocche ſi è dimoſtrato, che i medeſimi triangoli ſono equiangoli, e per conſeguente (*) ſono ſimili.

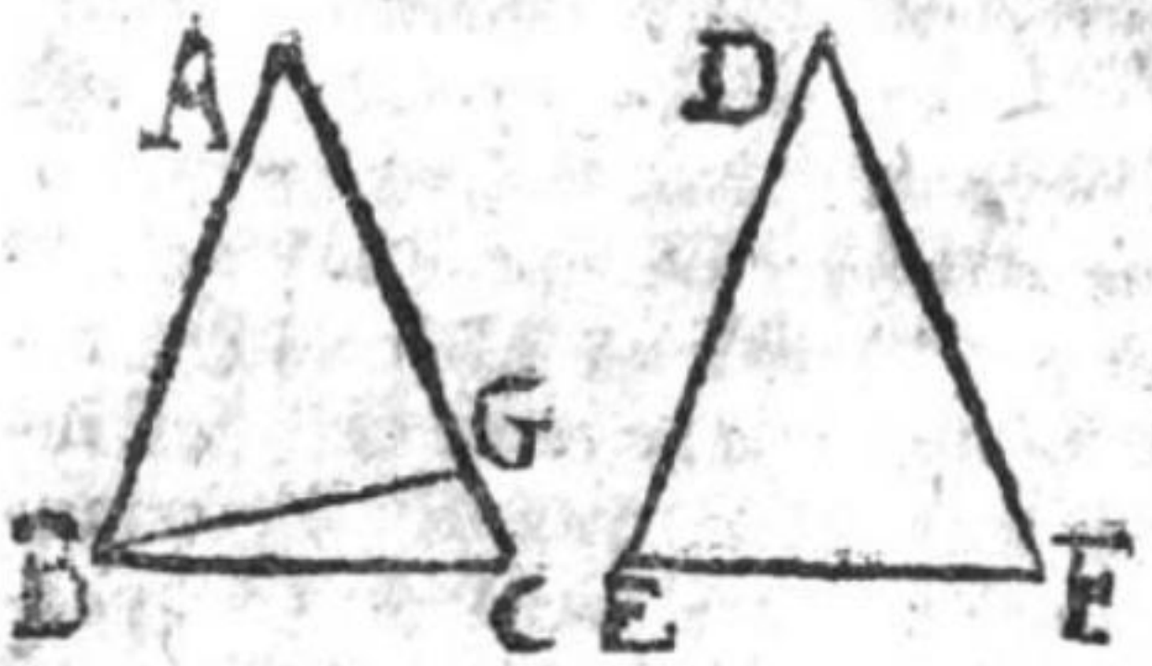
* Cor. 1. della pro. 4. di queſto.

PROP. VII. TEOREMA.

Se due triangoli anno I. *un'angolo eguale ad un'angolo* II. *intorno due altri angoli anno i lati proporzionali* III. *anno i rimanenti angoli della medeſima ſpecie, vale a dire tutti due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottuſi, i triangoli ſa-*

Digitalizzato da Google

ranno equiangoli, e propriamente saranno eguali i due angoli, intorno i quali i lati sono proporzionali.



I.

Abbiano li due triangoli ABC, DEF primieramente li due angoli BAC, EDF eguali; in secondo luogo intorno gli angoli ABC, DEF abbiano i lati proporzionali, vale a dire sia come AB a BC, così DE ad EF: finalmente siano gli angoli ACB, DFE della medesima specie, vale a dire tutti due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottusi; io dico che li suddetti triangoli ABC, DEF saranno equiangoli, e sarà l'angolo ABC eguale all' angolo DEF, e l'angolo ACB eguale all'angolo DFE.

II.

Se mai è possibile non sia l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, ma sia maggiore. Costituiscasi
* *pro. 3. I.* dunque(*) l'angolo ABG eguale all'angolo DEF.

III.

Perchè dalla supposizione l'angolo BAG è eguale all'angolo EDF, e dalla costruzione l'angolo ABG è eguale all'angolo DEF, sarà l'angolo rimanente AGB eguale all'angolo rimanente DFE: quindi li triangoli ABG, DEF essendo
* *pro. 4. di questo.* equiangoli, avranno (*) li lati intorno gli angoli eguali proporzionali; e per conseguente sarà AB a BG, così DE ad EF: ma dalla supposizione AB sta a BC, come DE ad EF; dunque
* *pro. 11. V.* sarà parimente (*) AB a BG, così la medesima AB a BC: e perciò le due rette BG, BC, alle quali la AB ha l'istessa ragione saranno eguali;
* *pro. 9. V.* (*) quindi il triangolo BGC sarà isoscele, e

per

per conſeguente gli angoli BCG, BGC ſaranno (*) eguali. * pro. 5. I.

Ciò premeſſo, ſe l'angolo BCG è retto, ovvero ottuſo il triangolo BCG verrebbe ad avere due angoli retti, ovvero due angoli ottuſi, il che non può ſoſſiſtere. Ma ſe l'angolo BCG ſi mette acuto, eſſendo ancora acuto l'angolo BGC, ſarà ottuſo l'angolo AGB, perche li due angoli BGC, AGB ſono eguali a due retti (*): e per conſeguente ſarà ancora ottuſo l'angolo DFE, il quale è eguale all' angolo AGB: ma nel ſuppoſto che l'angolo ACB ſia acuto, ancora l'angolo DFE, il quale è dell'iſteſſa ſpecie è acuto: dunque l'angolo DFE è nell' iſteſſo tempo ottuſo, ed acuto; ciocche non potendo ſoſſiſtere rimane vero il Teorema in queſtione. * pro. 13. I.

COROLLARIO.

DA qui è manifeſto, che ſe due triangoli anno due angoli eguali; anno di più intorno due altri angoli li lati proporzionali; ed anno finalmente li rimanenti angoli dell' iſteſſa ſpecie, li ſuddetti triangoli ſaranno ſimili.

PROP. VIII. TEOREMA.

Se in un triangolo rettangolo ſi fa dell' angolo retto cadere una perpendicolare ſopra la baſe, eſſa dividerà il triangolo in due triangoli I. ſimili fra loro. II. ſimili a tutto il triangolo rettangolo.

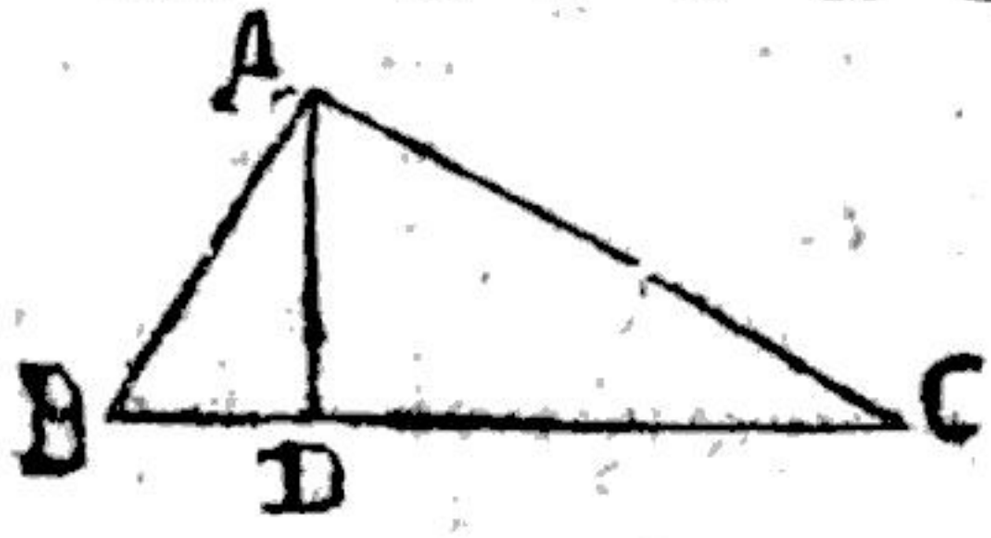
I.

Nel triangolo rettangolo ABC ſi faccia dall' angolo retto A cadere la perpendicolare AD ſopra la baſe BC; io dico che eſſa divide il triangolo in due triangoli ADB, ADC, li quali ſono ſimili fra loro, e ſono dippiù ſimili a tutto il triangolo ABC.

II.

I. Il triangolo ABD è equiangolo al triangolo 'ABC; imperciocche l'angolo in B è comune all'

Digitalizzato da Google



uno, ed all' altro triangolo, l'angolo ADB è eguale all' angolo BAC, perche entrambi sono retti, e l'angolo rimanente BAD è eguale all'angolo rimanente BCA: quindi i suddetti due triangoli saranno simili (*).

Cor. 1. della pro. 4. di questo.

II. Il triangolo ADC è equiangolo al triangolo ACB: imperciocche l'angolo in C è comune all' uno, ed all'altro triangolo; l'angolo ADC è eguale all'angolo CAB, perche entrambi sono retti, e l'angolo rimanente CAD è eguale all' angolo rimanente CBA: quindi li suddetti due triangoli saranno simili (*).

Cor. della pro. 4. di que.

III. Finalmente il triangolo ADB è equiangolo al triangolo ADC; perche gli angoli ADB, ADC sono eguali, essendo entrambi retti: gli angoli BAD, ACD si sono dimostrati eguali, e si sono ancora dimostrati eguali li rimanenti angoli ABD, CAD: quindi i suddetti due triangoli saranno simili (*)

Cor. della pro. 4 di que.

COROLLARJ.

QUindi perche li triangoli simili anno intorno gli angoli eguali i lati proporzionali, e que' lati sono omologi, li quali stanno dirimpetto agli angoli eguali sarà I. *per ragione de' triangoli ABC, ABD, li quali si sono dimostrati simili come* CB *a* BA, *così* BA *a* BD; *vale a dire il lato* BA *sarà mezzo proporzionale fra l'ipotenusa* BC, *e la parte adjacente* BD. II. *per ragione de' triangoli* BCA, ACD, *li quali si sono dimostrati parimente simili sarà come* BC *a* CA, *così* CA *a* CD; *vale a dire l'altro lato* CA *sarà mezzo proporzionale fra l'ipotenusa* BC, *e la parte adjacente* CD. III. *per ragione de' triangoli* BDA, ADC, *li quali si sono dimostrati simili, sarà come* BD *a* DA, *così*

DA

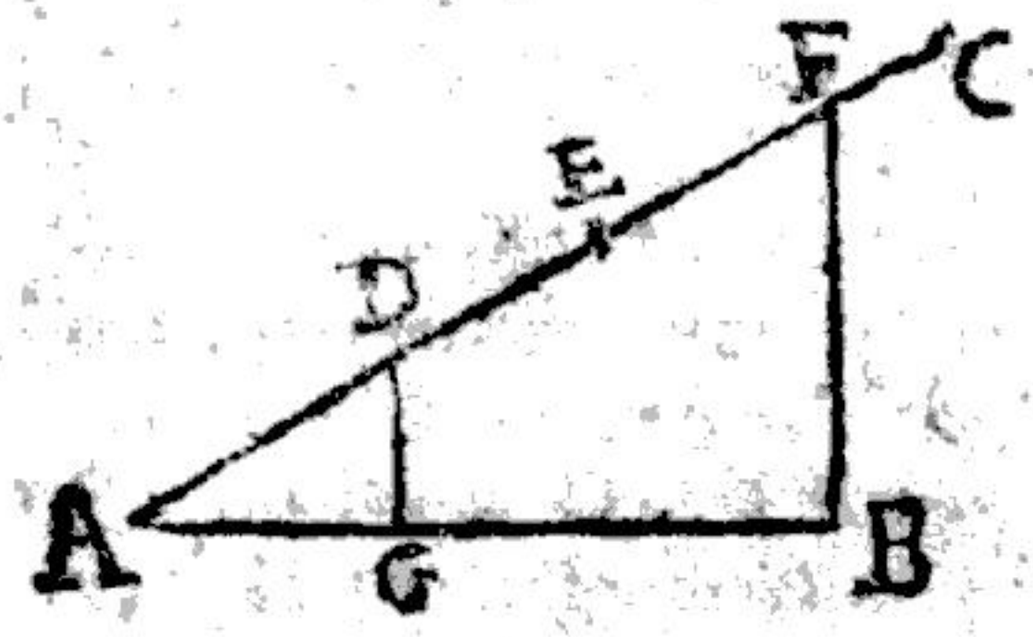
Digitalizzato da Google

DA a DC; vale a dire la perpendicolare DA sarà mezza proporzionale fra le parti BD, DC dell'ipotenusa BC.

PROP. IX. PROBLEMA.

Da una linea retta data tagliarne una parte ordinata.

I.



Sia data la linea retta AB; fa duopo tagliarne una parte ordinata, come per esempio la terza parte.

II.

I. Dal punto A si tiri ad arbitrio la retta indefinita AC, la quale comprenda colla data AB l'angolo CAB. II. Prendasi nella AC il punto D ad arbitrio. III. Si taglino (*) le parti DE, EF eguali ciascuna ad AD. IV. Si congiunga (*) la FB. V. Per lo punto D si tiri (*) la retta DG parallela alla FB: Io dico che AG sia la terza parte della data AB.

* *pro. 3. I.*

* *dim. 1.*

* *pro. 31. I.*

III.

Siccome dalla costruzione la DG è parallela alla FB, così sarà (*) FA ad AD, come BA ad AG: ma dalla costruzione la FA è tripla della AD, dunque sarà parimente la BA tripla della AG, e per conseguente sarà la AG la terza parte della AB. Ciocchè doveva farsi.

* *Cor. 2. della pro. 2. di questo.*

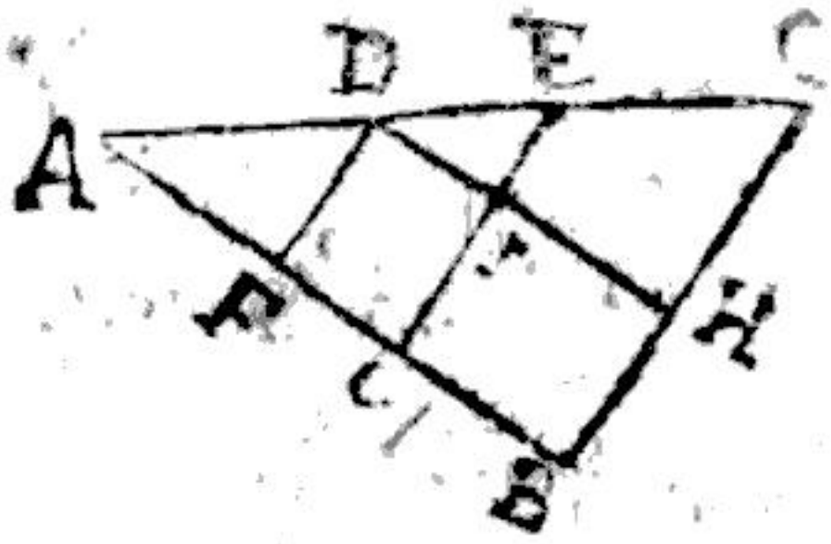
PROP. X. PROBLEMA.

Date due linee rette, l'una divisa in molte parti ad arbitrio, l'altra indivisa, segare l'indivisa nell'istesso modo, che si ritrova segata la linea retta divisa.

Sia

Digitalizzato da Google

I.



Sia data la linea retta AB divisa nelle parti AF, FG, GB, e sia data di più la linea retta AC indivisa: fa duopo segare cotesta retta indivisa in altrettante parti, le quali siano proporzionali alle parti AF, FG, GB dalla retta divisa AB.

II.

I. Si congiungano le due rette date AB, AC, in modo che vengano a formare un'angolo ad arbitrio, come BAC. II. Si congiunga (*) la retta BC. III. Per li punti F, e G si tirino (*) le linee rette FD, GE parallele a BC. Io dico che la retta AC rimane divisa ne'punti D, ed E nell'istesso modo, che la data AB è segata ne' punti F, e G: vale a dire come sta AF ad FG, così sta AD a DE; e come FG a GB, così DE ad EC, e come AG a GB, così AE ad EC, e come AF ad FB, così AD a DC.

*dim. 1.

*pro. 31. I.

III.

Per lo punto D tirisi la DH (*) parallela alla AB: ciò fatto le due figure quadrilatere DFGI, IGBH saranno parallelogramme; il perche sarà così la DI eguale alla FG (*) come la IH eguale alla GB. Nel triangolo AGE essendosi tirata la FD parallela alla base GE, sarà (*) AF ad FG, così AD a DE. In oltre nel triangolo DHC essendosi tirata la EI parallela alla base CH, sarà DI ad IH, ovvero FG a GB, così DE ad EG. Di più nel triangolo ABC essendosi tirata la GE parallela alla base BC, sarà la AG alla GB, così la AE alla EC. Finalmente nell' istesso triangolo ABC essendosi tirata la FD parallela alla base BC, sarà la AF alla FB, così la AD alla CD; ciocche bisognava fare.

*pro. 34. I.

*Cor. 1. della pro. 2. di questo.

PROP.

Digitalizzato da Google

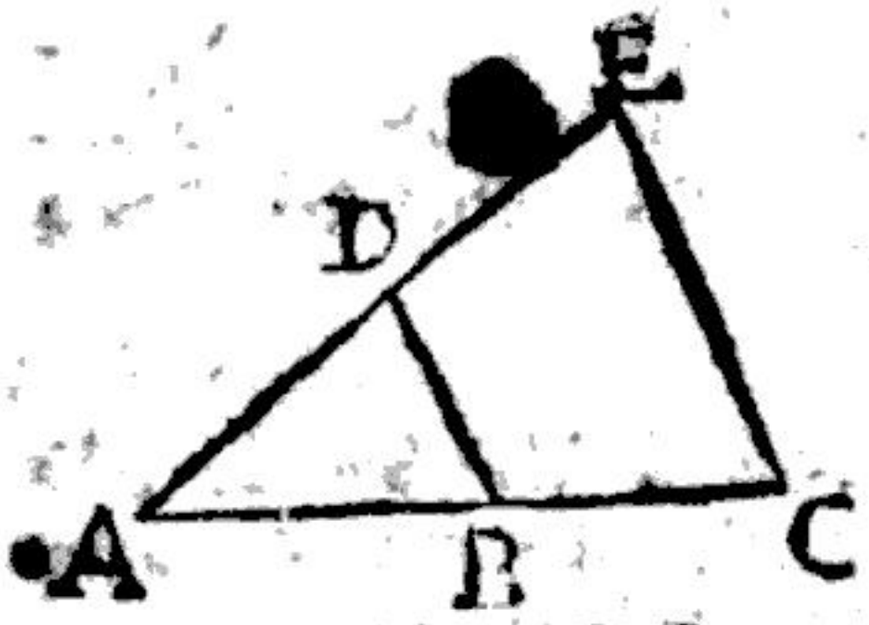
PROP. XI. PROBLEMA.

Date due linee rette ritrovare in ordine ad esse la terza proporzionale.

I.

Siano date due linee rette AB, ed AD, fa- duopo ritrovare in ordine ad esse la terza proporzionale.

II.



I. Si congiungano in maniera le due suddette linee date, che formino l'angolo DAB. II. Si congiunga (*) la BD. III. La AB si porti innanzi fin' al punto C in modo che la BC sia eguale alla AD (*). IV. per lo punto C si tiri la retta CE parallela alla BD, la quale s'incontri colla AD portata tanto innanzi, quanto bisogna, nel punto E. Io dico che la DE sia la terza proporzionale richiesta; vale a dire, che AB sia ad AD, come l'istessa AD alla terza proporzionale DE.

* *dim.* 1.

* *pro.* 3. I.

III.

Siccome nel triangolo ACE si è tirata la BD parallela alla base CE, così sarà(*) AB a BC, come la AD alla DE; ma dalla costruzione la BC è eguale alla AD; dunque sarà parimente come AB ad AD, così l'istessa AD alla DE; ciocche bisognava fare.

* *Cor.* 1. *della pro.* 2. *di questo.*

PROP. XII. PROBLEMA.

Date tre linee rette ritrovare in ordine ad esse la quarta proporzionale.

I.

Siano date tre linee rette AB, BC, AD; fa- duo-

Digitalizzato da Google

duopo ritrovare in ordine ad esse la quarta proporzionale.

II.

I. Le due prime (*) AB, BC si mettano a giacere a dirittura, sicche formino la sola linea diritta ABC. II. L'altra AD si unisca colla AC in modo, che formi l'angolo DAC. III. Si congiunga (*) la DB. IV. Per lo punto C si tiri la CE parallela alla BD, la quale s'incontri colla AD portata innanzi quanto bisogna nel punto E. Io dico che la DE sia la quarta proporzionale richiesta in ordine alle tre linee rette date AB, BC, AD: vale a dire, che come sta AB a BC; così sarà AD a DE.

* *veggasi la figura ante.*

* *dim.* 1.

III.

Siccome nel triangolo ACE si è tirata la BD parallela alla base BE, così sarà (*) la AB alla BC, come la AD alla DE: ciocche bisognava fare.

*Cor. 1. della pro. 2. di questo.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Date due linee rette ritrovare la mezza proporzionale.

I.

Siano date due linee rette AB, BC; fa duopo ritrovare in ordine ad esse la mezza proporzionale.



* *pro.* 10. I.

II.

I. Si mettano le due linee rette date AB, BC a giacere a dirittura, sicche costituiscano la sola linea retta AC. II. Si seghi la AC per mezzo (*) nel punto D. III. Dal centro D, col raggio DA, ovvero DC si descriva (*) il semicerchio AEC. IV. S' innalzi dal punto B sopra la AC la perpendicolare BE (*).

* *dim.* 3.

* *pro.* 11. I.

Io

Io dico che questa perpendicolare sia la mezza proporzionale richiesta; vale a dire, che come sta la AB alla BE, così sta l'istessa BE alla BC.

II.

Si congiungano (*) le due rette AE, CE: siccome l'angolo AEC è nel semicerchio, così egli sarà retto (*): quindi il triangolo AEC sarà rettangolo; nel quale essendosi tirata la perpendicolare EB dal vertice E sopra la base AC, sarà (*) come AB a BE, così l'istessa BE alla BC; ciocche doveva farsi.

(*) dim. 1.

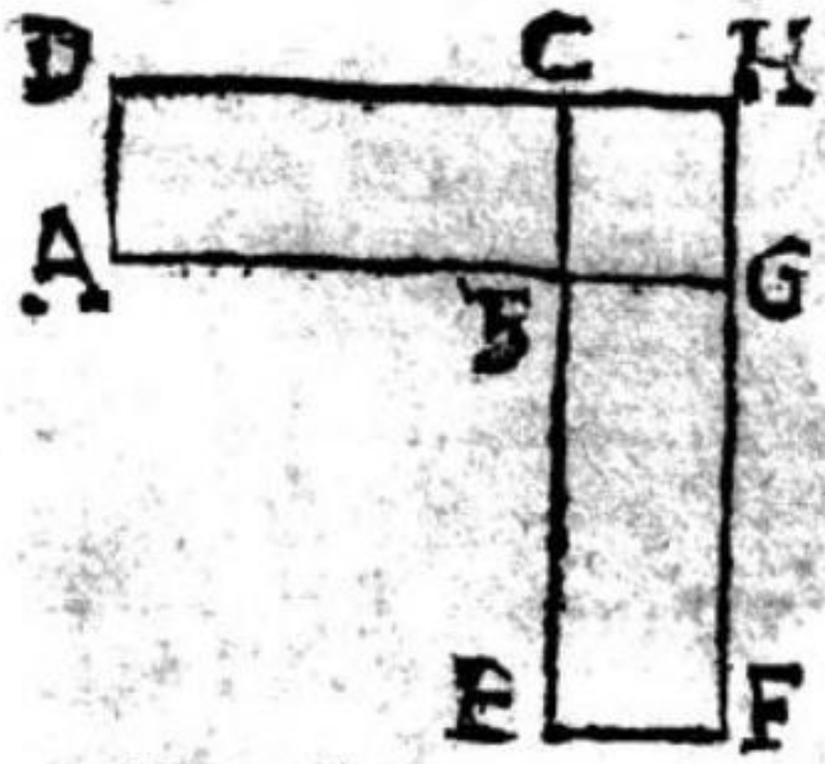
(*) pro. 31. III.

(*) Cor. 3. della pro. 8. di questo.

PROP. XIV. TEOREMA.

Se due parallelogrammi anno I. *un' angolo eguale ad un' angolo* . II. *sono eguali fra loro; avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. Viceversa se due parallelogrammi anno* I. *un' angolo eguale ad un' angolo, e* II. *anno i lati intorno coteſti angoli reciprocamente proporzionali; saranno essi eguali fra loro.*

I.



Li due parallelogrammi ABCD, BEFG abbiano in primo luogo gli angoli ABC, EBG eguali fra loro, ed in oltre siano essi eguali fra di loro; io dico che li lati intorno gli angoli eguali saranno reciprocamente proporzionali; vale a dire come sta AB a BG, così sarà BE a BC. Viceversa se l'angolo ABC sia eguale all'angolo EBG, e siano in oltre i lati intorno gli accennati angoli eguali, reciprocamente proporzionali, i due parallelogrammi saranno eguali fra loro.

II.

Digitalizzato da Google

II.

I. Costituiscasi il lato AB del parallelogrammo ABCD in diritto al lato BG del parallelogrammo BGFE: non è da mettersi in dubbio, che l'altro lato CB del primo parallelogrammo resti a giacere per diritto coll'altro lato BE del secondo parallelogrammo; perche in tal modo si verifica, che gli angoli ABC, EBG siano eguali fra loro. II. Si distendano i lati DC, FG (*) finche vadano ad unirsi nel punto H.

* *dim.* 2.

III.

I. Poiche dalla suppoſizione il parallelogrammo ABCD è eguale al parallelogrammo EBGF, il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo CBGH avrà l'istessa ragione (*), che il parallelogrammo EBGF al parallelogrammo CBGH; ma il parallelogrammo ABCD sta al parallelogrammo CBGH, come la base (*) AB alla base BG, perche anno l'istessa altezza; e per la medesima ragione il parallelogrammo EBGF al parallelogrammo CBGH sta come la base BE alla base BC: dunque sarà (*) AB a BG, così BE a BC.

* *pro.* 7. *V.*

* *pro.* 1. *di questo.*

* *pro.* 11. *V.*

II. Perche dalla suppoſizione AB sta a BG come BE a BC, ed AB a BG sta come il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo BGHC, perche questi due parallelogrammi (*) anno l'istessa altezza; e BE a BC sta come il parallelogrammo BGFE al parallelogrammo BGHC; sarà (*) come il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo BGHC, così il parallelogrammo BGFE all' istesso parallelogrammo BGHC: quindi i due parallelogrammi ABCD, BGFE avendo l'istessa ragione al terzo parallelogrammo BGHC saranno (*) eguali fra loro; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro.* 1. *di questo.*

* *pro.* 11. *V.*

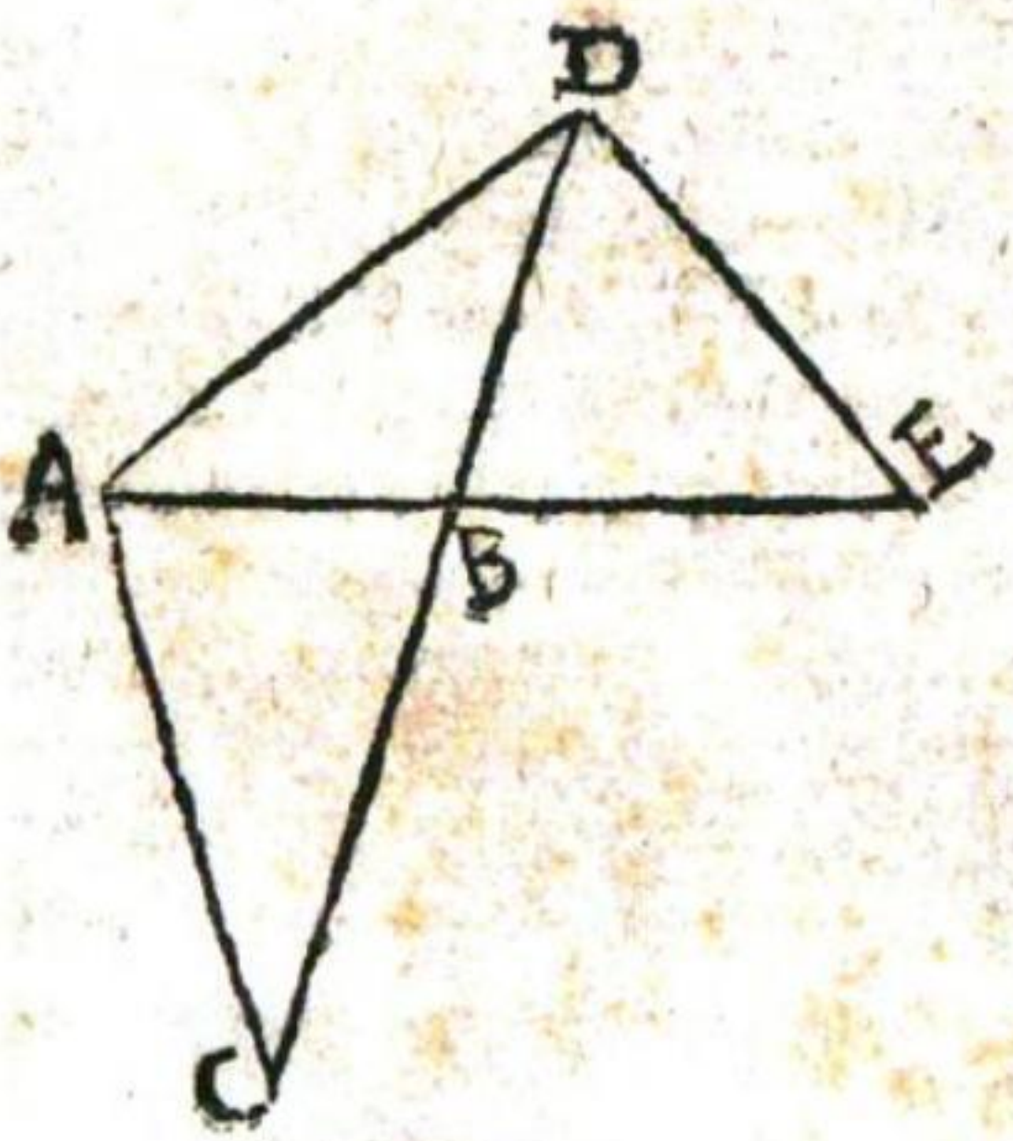
* *pro.* 9. *V.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XV. TEOREMA.

Se due triangoli anno I. uu' angolo eguale ad un' angolo . II. ſono eguali fra loro , avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali . Viceverſa ſe due triangoli anno I. un' angolo eguale ad un' angolo , e II. anno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali , ſaranno eguali fra loro.



I.

Li due triangoli ABC, DBE abbiano in primo luogo l' angolo ABC eguale all' angolo DBE, e ſiano inoltre eguali fra loro; io dico che i lati intorno gli due angoli eguali ſaranno reciprocamente proporzionali ; valle a dire che AB ſarà a BE, come BD a BC. Viceverſa ſe l'angolo ABC ſia eguale all' angolo DBE, e ſiano di più i lati intorno gli angoli eguali, reciprocameute proporzionali ; li due accennati triangoli ſaranno eguali fra loro.

II.

I. Coſtituiſcaſi il lato BA del triangolo ABC in diritto col lato BE dell'altro triangolo DBE: non è da metterſi in dubbio, che l'altro lato BC del primo triangolo reſti a giacere per diritto all'altro lato BD del ſecondo triangolo, perche in tal modo ſi verifica, che gli angoli (*) ABC, DBE ſiano eguali fra loro . II. Si congiunga la retta AD (*).

**pro.15.I.*

** dim. 1.*

III.

Digitalizzato da Google

III.

I. Perche dalla ſuppoſizione il triangolo ABC è eguale al triangolo DBE; il triangolo ABC avrà al terzo triangolo ABD l'iſteſſa ragione (*) che ha il triangolo DBE al medeſimo triangolo ABD: ma perche li triangoli ABC, ABD anno l'iſteſſa altezza il primo al ſecondo ſta (*) come la baſe CB alla baſe BD: e per l'iſteſſa ragione il triangolo DBE ſta al triangolo DBA come la baſe BE alla baſe BA, ſarà come CB a BD (*) così EB a BA.

* *pro.7.V.*

* *pro. 1. di queſto.*

* *pro.11.V.*

II. Perche dalla ſuppoſizione i due triangoli ABC, DBE anno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali, ſarà AB a BE, così BD a BC: ma AB ſta a BE, come il triangolo ABD al triangolo DBE, perche queſti due triangoli anno l'iſteſſa altezza; e per l'iſteſſa ragione DB a BC ſta come il medeſimo triangolo ABD al triangolo ABC; ſarà come il triangolo ABD al triangolo DBE, così (*) l'iſteſſo triangolo ABD al triangolo ABC: il perche avendo il triangolo ABD l'iſteſſa ragione a' due triangoli DBE, ABC, ſaranno queſti eguali fra loro; cioc- che doveva dimoſtrarſi.

* *pro. 11. V.*

PROP. XVI. TEOREMA.

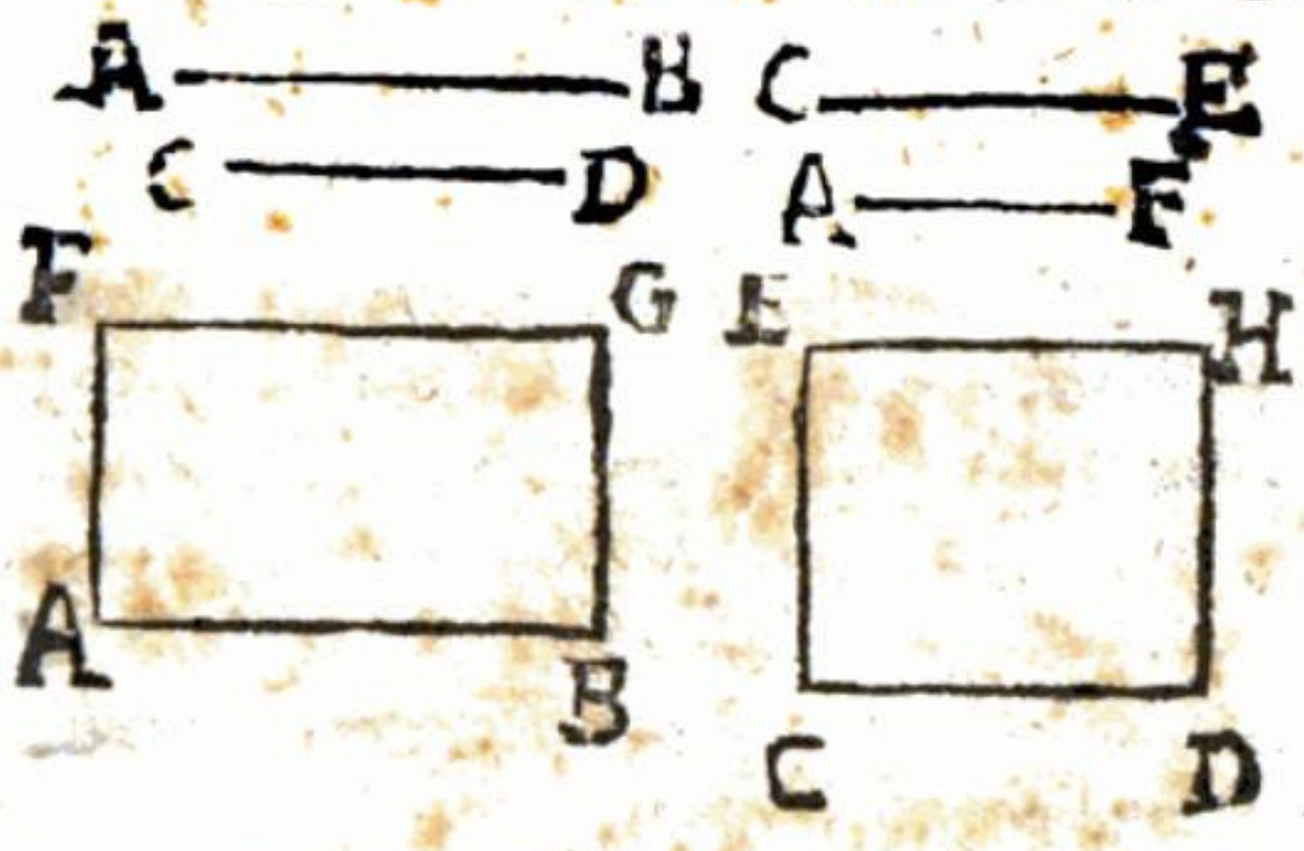
I. Se quattro linee rette ſono proporzionali il rettangolo formato dalle due linee eſtreme ſarà eguale al rettangolo formato delle due mezze. II. Viceverſa ſe quattro linee rette ſono tanto lunghe, che il rettangolo formato dalle due eſtreme ſia eguale al rettangolo formato dalle due mezze, le ſuddette quattro linee rette ſaranno proporzionali.

I.

Siano quattro linee rette proporzionali AB, CD, CE, AF, vale a dire ſia AB a CD, come CE

ad

Digitalizzato da Google



ad AF; io dico, che il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE; viceversa se il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE, le suddette quattro linee rette saranno proporzionali.

II.

I. Dalle due estreme AB, AF, se ne formi il rettangolo FABG. II. Dalle due mezze CD, CE se ne formi similmente il rettangolo ECDH.

III.

E I. perche si suppone, che le quattro linee rette AB, CD, CE, AF siano proporzionali, i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH avranno intorno gli angoli retti, e per conseguente eguali FAB, ECD i lati reciprocamente proporzionali, essendo dalla suppositione AB a CD, così CE ad AF: il perche li suddetti due parallelogrammi rettangoli saranno (*) eguali fra loro. II. supponendosi, che il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE, sarà il rettangolo FABG eguale al rettangolo ECDH: quindi questi due rettangoli essendo eguali fra loro, ed avendo l'angolo retto FAB eguale all'angolo retto ECD, dovranno avere i lati reciprocamente proporzionali (*): il perche come sta AB a CD, così starà CE ad AF; ciocche doveva dimostrarsi.

* *pro. 14. di questo.*

* *pro. 14. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XVII. TEOREMA.

I. Se tre linee rette ſono proporzionali il rettangolo formato dalle due linee eſtreme ſarà eguale al quadrato formato ſopra la mezza. II. Viceverſa ſe tre linee rette ſono tanto lunghe, che il rettangolo formato dalle due eſtreme ſia eguale al quadrato formato ſopra la mezza, le ſuddette tre linee rette ſaranno proporzionali.

I.

Siano tre linee proporzionali (*) AB, CD, AF: vale a dire ſia AB a CD, come CD ad AF: dico che il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF ſia eguale al quadrato formato ſopra la mezza CD. Viceverſa ſe il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF ſia eguale al quadrato formato ſopra la mezza CD, le ſuddette tre linee rette ſaranno proporzionali.

(*) *veggaſi la figura ante.*

II.

I. Si prenda un'altra linea retta CE eguale alla CD. II. Dalle due eſtreme AB, AF ſe ne formi il rettangolo FABG. III. Della mezza CD, e della ſua eguale CE ſe ne formi il rettangolo ECDH, il quale riuſcirà quadrato, perche la lunghezza è eguale alla larghezza.

III.

E primieramente ſupponendoſi, che AB ſia a CD, come CD ad F, ſarà come AB a CD, così CE ad AF; perche dalla coſtruzione la CE è eguale alla CD: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH avendo l'angolo retto FAB eguale all'angolo retto ECD; e di più avendo intorno a queſti angoli i lati reciproca-

(*) *prc. 14. di queſto.*

proporzionali, ſaranno eſſi (*) eguali fra loro; ma il rettangolo ECDH è eguale al quadrato della mezza CD; dunque il rettangolo formato dalle due eſtreme ſarà eguale al quadrato della mezza.

Digitalizzato da Google

za . Viceversa supponendosi il rettangolo formato dalle due estreme AB, ed AF eguale al quadrato della mezza CD, sarà il rettangolo FABG eguale al quadrato, ovvero al rettangolo ECDB: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH essendo eguali fra loro, ed avendo di più l'angolo retto FAB; eguale all' angolo retto ECD, avranno (*) i lati reciprocamente proporzionali, e per conseguente sarà AB a CD, cosi CE, ovvero CD ad AF. Ciocche doveva dimostrarsi.

(*) pro. 14. di questo.

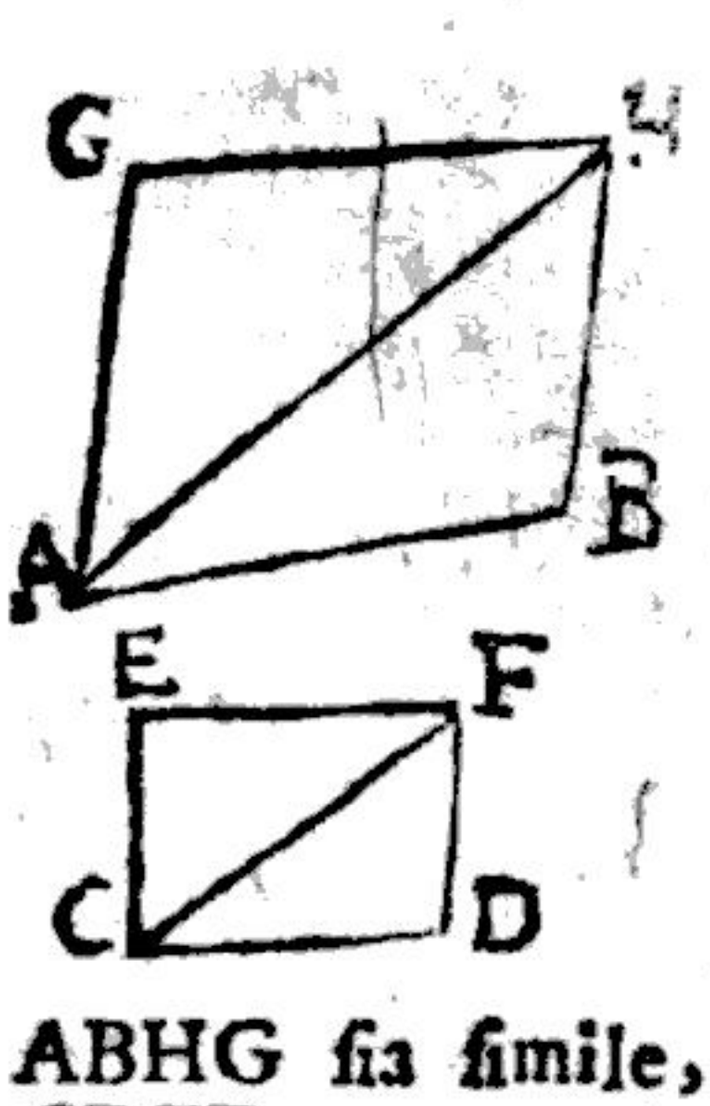
PROP. XVIII. PROBLEMA.

Descrivere sopra una linea retta data una figura rettilinea simile, e similmente posta ad un' altra figura rettilinea data.

I.

Sia data la linea diritta AB, e sia data la figura rettilinea CDFE: fa duopo sopra la linea diritta data AB descrivere una figura rettilinea simile, e similmente posta alla data CDFE.

II.



I. Si risolva la figura rettilinea data in tanti triangoli, come qui in due CDF, CFE. II. Si facciano (*) gli anli BAH, ABH eguali rispettivamente agli angoli DCF, CDF. III. Si facciano gli angoli (*) HAG, AHG eguali rispettivamente agli angoli FCE, CFE: io dico che la figura rettilinea ABHG sia simile, e similmente posta alla data CDFE.

(*) pro. 23. I.

(*) pro. 23. I.

III.

Imperciocche essendo dalla costruzione li due

Digitalizzato da Google

angoli BAH, ABH eguali agli angoli DCF, CDF ciascuno a ciascuno, sarà il rimanente angolo AHB eguale all' angolo rimanente CFD: imperciocchè in ogni triangolo tutti li tre angoli sono eguali a due retti (*): ma dall' istessa costruzione l' angolo AHG è eguale all' angolo CFE; dunque tutto l'angolo BHG sarà eguale a tutto l'angolo DFE. In oltre essendo li due angoli HAG, AHG eguali rispettivamente a' due angoli FCE, CFE, sarà l'angolo rimanente AGH eguale all'angolo rimanente CEF, e tutto l'angolo GAB sarà eguale a tutto l'angolo ECD; quindi i quattro angoli GAB, ABH, BHG, HGA della figura rettilinea descritta saranno eguali rispettivamrnte a' quattro angoli ECD, CDF, DFE, FEC della figura rettilinea data. Inoltre essendo il triangolo ABH equiangolo al triangolo CDF, saranno i lati (*) intorno gli angoli eguali proporzionali, e per conseguente sarà AB a BH, così CD a DF; e BH ad HA, così DF ad FC: ma a cagione degli altri due triangoli equiangoli AHG, CFE, AH sta ad HG, come CF ad FE; dunque per l'egual ragione ordinata sarà (*) BH ad HG, così DF ad FE: e per causa de' medesimi triangoli equiangoli AHG, CFE, sarà HG a GA, così FE ad EC; e GA ad AH, così EC a CF; ma a cagione de' due altri triangoli equiangoli AHB, CFD; AH ad AB sta come CF a CD: dunque per l'egual ragione ordinata sarà AG ad AB, così CE a CD: quindi i quattro lati AB, BH, HG, GA della figura rettilinea descritta sopra la data AB sono proporzionali a' quattro lati CD, DF, FE, EC della figura rettilinea data; il perche essendosi dimostrato, che gli angoli sono eguali agli angoli ciascuno a ciascuno, ne siegue che le suddette due figure rettilinee siano simili, e similmente poste; ciocchè bisognava fare.

* *pro. 32. I.*

* *pro. 4. di questo.*

* *pro. 22. V.*

PROP.

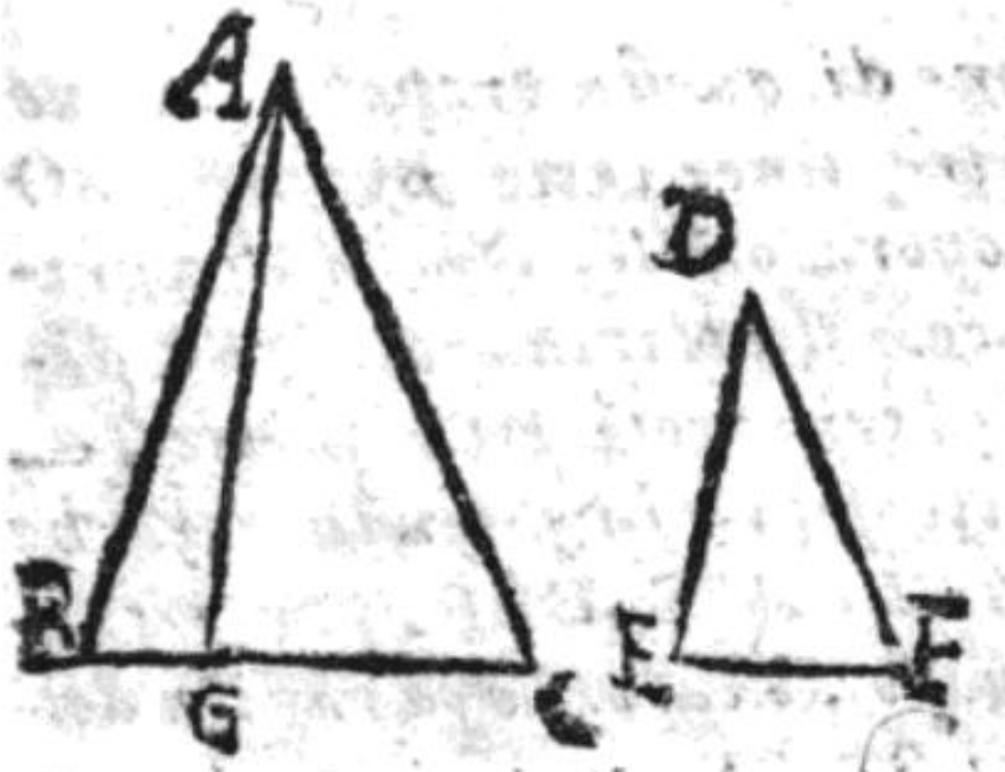
Digitalizzato da Google

PROP. XIX. TEOREMA.

I triangoli simili sono fra loro in ragione duplicata de' lati omologi.

I.

Siano i due triangoli simili ABC, DEF, e sia il lato BC omologo al lato EF; io dico che il triangolo ABC al triangolo DEF ha ragione duplicata del lato BC al lato omologo EF.



II.

I. Ritrovisi (*) in ordine alle due linee rette BC, EF la terza proporzionale BG. II. Si unisca la retta AG.

* *pro.* 11. *di questo.*

III.

Siccome il triangolo ABC dalla supposizione è simile al triangolo DEF, così sarà il lato AB al lato BC, come il lato DE al lato EF, e per la ragion permutata (*) come il lato AB al lato DE, così il lato BC al lato EF: ma dalla costruzione il lato BC sta al lato EF, come l'istesso lato EF a BG; dunque sarà ancora (*) AB a DE, così EF a BG: il perche i due triangoli ABG, DEF avendo l'angolo ABC eguale all'angolo DEF; perche i detti triangoli si suppongono simili; e di più avendo i lati reciprocamente proporzionali intorno gli angoli eguali, saranno (*) essi eguali fra loro: laonde il triangolo ABC avrà al triangolo DEF l'istessa ragione, che il triangolo ABC ha al triangolo ABG (*): ma il triangolo ABC sta al triangolo ABG, come sta la base BC alla base BG (*); dunque sarà parimente il triangolo ABC al triangolo DEF (*), così

* *pro.* 16. *V.*
* *pro.* 11. *V.*
* *pro.* 15. *di questo.*
* *pro.* 7. *V.*
* *pro.* 1. *di questo.*
* *pro.* 11. *V.*

Digitalizzato da Google

la baſe BC alla baſe BG. Si conſideri ora, che eſſendo le tre linee BC, EF, BG continuamente proporzionali, la prima BC alla terza BG (*) ha ragion duplicata della prima BC alla ſeconda EF; quindi eſſendoſi già dimoſtrato, che il triangolo ABC al triangolo DEF ſia come BC a BG; avrà ancora il triangolo ABC al triangolo DEF ragion duplicata di BC ad EF. Ciocche doveva dimoſtrarſi.

(*) *Veggaſi la Spiegazione delle def. 6. e 7.*

COROLLARJ.

Dalla dimoſtrazione di queſta propoſizione ne ſiegue I. *che ſe tre linee rette* BC, EF, BG *ſono continuamente proporzionali, come ſta la prima* BC *alla terza* BG, *così ſta il triangolo* ABC *deſcritto ſopra la prima al triangolo* DEF *ſimile, e ſimilmente poſto deſcritto ſopra la ſeconda.* II. *che avendo due triangoli ſimili* ABC, DEF, *per ritrovarne la ragione fa duopo, o cercare la ragion duplicata de' lati omologi* BC, EF, *vale a dire la ragione compoſta di due ragioni, ciaſcuna delle quali ſia eguale a quella, che ha* BC *ad* EF: *ovvero ritrovare in ordine a' due lati omologi* BC, EF *la terza proporzionale* BG; *che poi come ſta* BC *a* BG, *così ſtarà il triangolo* ABC *al triangolo* DEF.

PROP. XX. TEOREMA.

I poligoni ſimili ſi riſolvono I. *in un'egual numero di triangoli.* II. *Queſti triangoli ſono ſimili fra loro.* III. *Sono i ſuddetti triangoli proporzionali a tutti i poligoni.* IV. *I poligoni ſono in ragion duplicata de' lati omologi.*

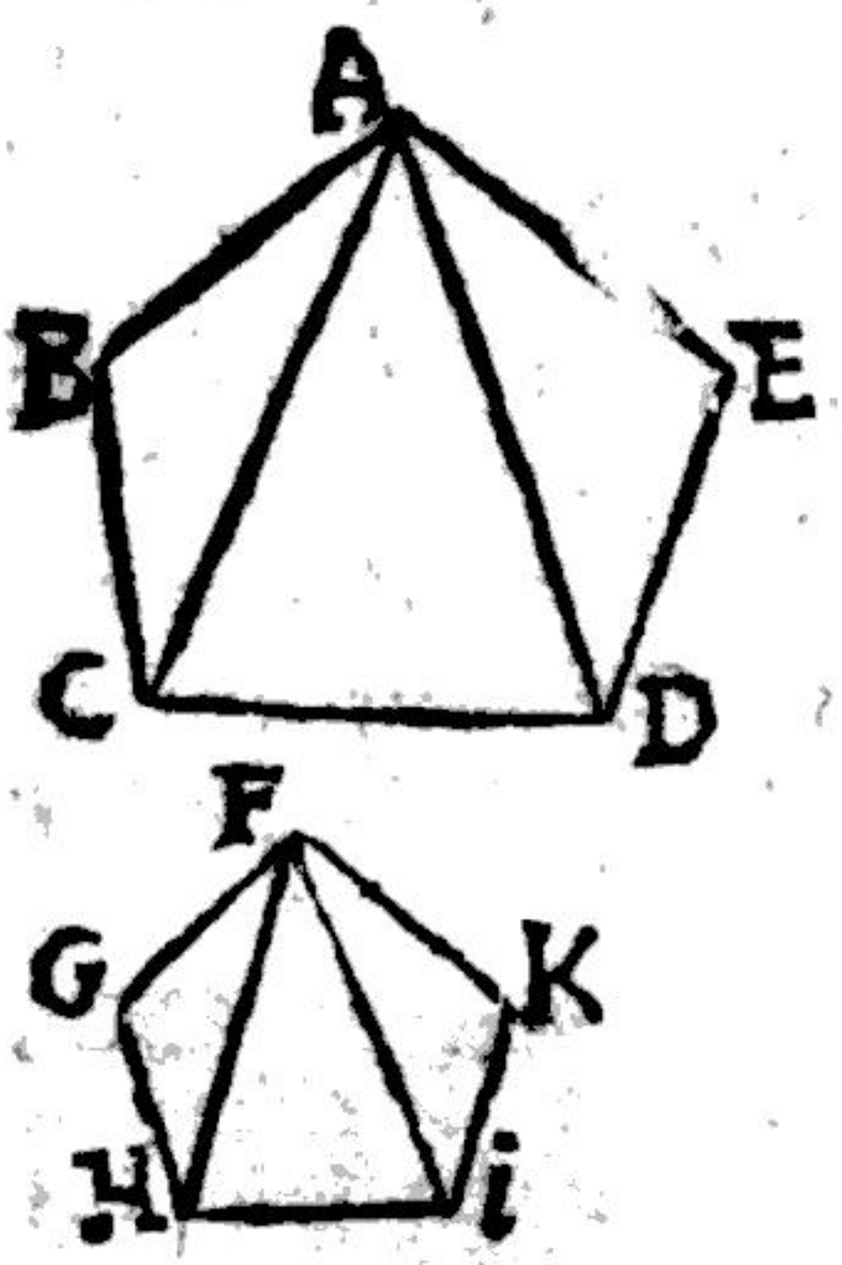
I.

Siano i due poligoni ſimili ABCDE, FGHIK di modo che gli angoli in A, in B, in C, in D, ed in E ſiano riſpettivamente eguali agli angoli in F, in

Digitalizzato da Google

F, in G, in H, in I, ed in K, ed i lati intorno gli accennati angoli eguali siano proporzionali: io dico in primo luogo, che in quanti triangoli si risolve il poligono ABCDE, in altrettanti triangoli si risolve parimente il poligono FGHIK.

Dico di più, che li triangoli del primo poligono sono simili a' triangoli corrispondenti del secondo poligono: dico in oltre, che i detti triangoli sono fra loro come sono i poligoni. E finalmente io dico, che il poligono al poligono ha ragione duplicata del lato AB al lato omologo FG.



II.

Da' vertici A, ed F degli angoli eguali BAE, GFK si tirino le linee rette AC, AD, FH, FI (*).

(*) *dim.* 1.

III.

I. Supponendosi il poligono ABCDE simile al poligono FGHIK sarà il numero degli angoli del primo poligono eguale al numero degli angoli dell' altro poligono: quindi quante linee rette si tirano nel poligono ABCDE altrettante se ne tireranno nell' altro poligono FGHIK: dacche poi siegue, che il numero de' triangoli fatti nel primo poligono sia eguale al numero de' triangoli fatti nell' altro poligono.

II. Essendo dalla supposizione l'angolo ABC eguale all' angolo FGH, e di più il lato AB al lato BC, come il lato FG al lato GH, i due triangoli ABC, FGH avendo un' angolo eguale ad un'angolo, ed intorno gli angoli eguali i lati proporzionali, saranno (*) equiangoli, e simili; e perciò l'angolo BAC sarà eguale all'angolo

(*) *pro. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

golo GFH, e l'angolo BCA sarà eguale all'angolo GHF: ma dalla suppoſizione l'angolo BAE è eguale all'angolo GFK, e l'angolo BCD è eguale all'angolo GHI, dunque sarà l'angolo CAE eguale all'angolo HFK, e l'angolo ACD eguale all'angolo FHI. In oltre essendo l'angolo AED eguale all'angolo FKI, ed il lato AE ad ED, come FK a KI, i triangoli AED, FKI, perche anno un'angolo eguale ad un' angolo, ed intorno agli angoli eguali i lati proporzionali saranno equiangoli (*), e simili, e per conseguente sarà l'angolo EAD eguale all' angolo KFI, e l'angolo EDA eguale all' angolo KIF, e l'angolo EDA eguale all' angolo KIF: quindi essendosi dimostrato, che l'angolo CAE sia eguale all' angolo HFK, ed essendo dalla suppoſizione l'angolo EDC eguale all'angolo KIH, sarà l'angolo CAD eguale all'angolo HFI, e l'angolo ADC eguale all'angolo FIH: di modo che i due triangoli ACD, FHI essendo equiangoli, saranno (*) ancora simili; il perche i tre triangoli ABC, ACD, ADE sono rispettivamente simili a' tre triangoli FGH, FHI, FIK.

(*) *pro. 6. di questo.*

(*) *pro. 7. di questo.*

III. Essendosi dimostrati i triangoli ABC, FGH simili fra loro, avrà (*) il triangolo ABC al triangolo FGH ragion' duplicata del lato AC al lato omologo FH: e per l'istessa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI avrà parimente ragione duplicata del lato AC al lato omologo FH: quindi come sta il triangolo ABC al triangolo FGH, così sarà il triangolo ACD al triangolo FHI; poiche la ragione de' due primi triangoli, e la ragione de' due secondi triangoli, è la ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: nell'istessa maniera si dimostrerà, che il triangolo ACD al triangolo FHI sia come il triangolo ADE al triangolo FIK, perche la ragione de' due primi, e de' due secondi triangoli, è la

(*) *pro. ante.*

Digitalizzato da Google

è la ragion' duplicata del lato AD al lato omologo FI : quindi i tre triangoli ABC, ACD, ADE saranno rispettivamente proporzionali a' tre triangoli FGH, FHI, FIK ciascuno a ciascune, e per conseguente come sta il triangolo ABC al triangolo FGH, così saranno (*) tutti tre i triangoli a tutti gli altri tre triangoli : ma tutti tre i primi triangoli formano il poligono ABCDE, e tutti tre i secondi triangoli formano l'altro poligono FGHIK : dunque sarà il poligono ABCDE al poligono FGHIK, così il triangolo ABC al triangolo FGH, e per conseguente così il triangolo ACD al triangolo FHI, e così il triangolo ADE al triangolo FIK. * *pro.* 12. *V.*

IV. Finalmente essendosi dimostrato, che il poligono ABCDE sia al poligono FGHIK come il triangolo ABC al triangolo FGH, siccome il triangolo ABC al triangolo FGH ha ragion duplicata del lato AB al lato omologo FG; così similmente il poligono ABCDE avrà al poligono FGHIK ragion duplicata del lato AB al lato omologo FG : ciocche doveva dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. *Quindi se tre linee rette* AB, FG, *ed* X *sono continuamente proporzionali, come sta la prima* AB *alla terza* X, *così starà il poligono* ABCDE *descritto sopra la prima al poligono* FGHIK *simile, e similmente posto descritto sopra la seconda : imperciocchè così la ragione di* AB *ad* X, *come quella del primo poligono al secondo è duplicata della ragione, che ha la* AB *alla* FG. II. *che avendo due poligoni* ABCDE, FGHIK *simili, per ritrovarne la ragione, fa duopo, o cercare la ragion duplicata de' lati omologi* AB, *ed* FG, *vale a dire la ragione composta da due ragioni ciascuna delle quali sia eguale a quella, che ha*

AB

'AB ad FG; ovvero ritrovare in ordine a' due lati omologi AB, ed FG la terza proporzionale X, che poi come ſta AB ad X, cosi ſtarà il poligono al poligono.

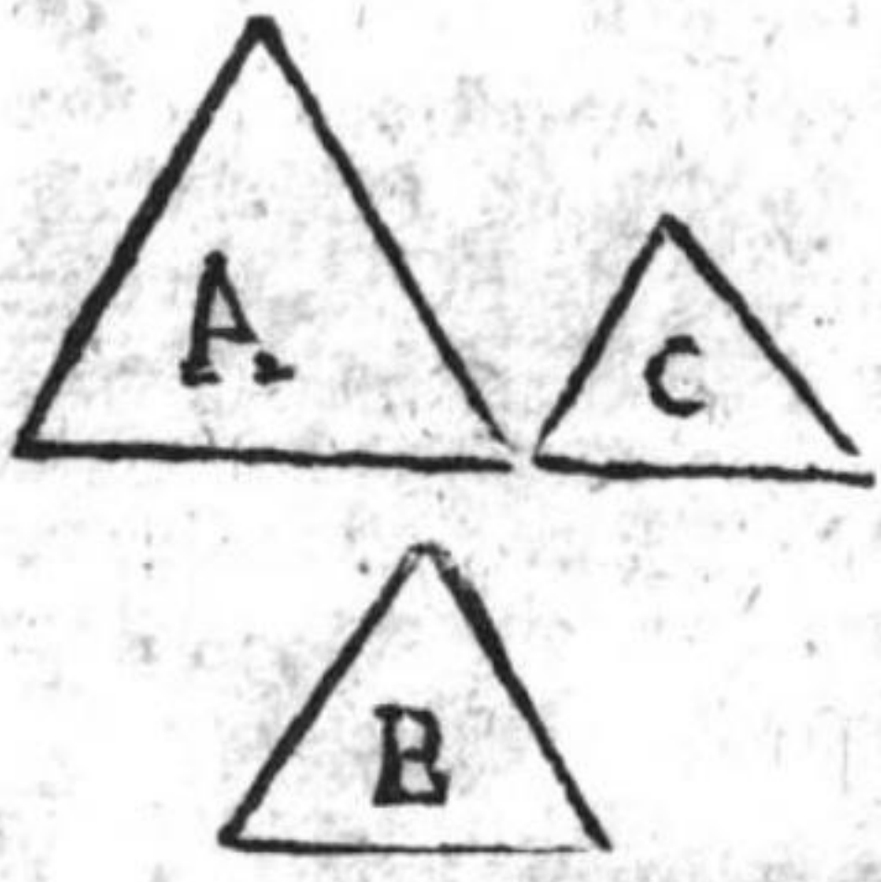
PROP. XXI. TEOREMA.

Se due figure rettilinee ſono ſimili ad una medeſima figura rettilinea, ſaranno ſimili fra loro.

I.

Siano le due figure rettilinee A, e C ſimili alla terza B; io dico eſſere eſſe ſimili fra loro.

II.



Perche dalla ſuppoſizione la figura A è ſimile alla figura B, non ſolamente il numero degli angoli della figura A ſarà eguale al numero degli angoli della figura B, ma ancora ſarà ciaſcuno angolo della figura A eguale a ciaſcun'angolo della figura B. Similmente perche la figura C dalla ſuppoſizione è ſimile alla figura B, non ſolamente il numero degli angoli della figura C ſarà eguale al numero degli angoli della figura B, ma ſarà ciaſcuno angolo della figura C eguale a ciaſcun' angolo dell' iſteſſa figura B: quindi gli angoli della figura A ſaranno eguali così di numero, come di quantità agli angoli della figura C. In oltre eſſendo dalla ſuppoſizione la figura A ſimile alla figura B ſaranno i lati intorno gli angoli eguali delle ſuddette figure proporzionali fra loro; il che ſupponendoſi parimente delle figure C, e B ne ſiegue, che i lati intorno gli angoli della figura A ſiano proporzionali a' lati intorno gli angoli eguali della figu-

Digitalizzato da Google

gura C; e per conſeguente le figure A, e C ſono ſimili; ciocche doveva dimoſtrarſi.

PROP. XXII. TEOREMA.

I. Se quattro linee rette ſono proporzionali, e ſopra la prima, e la ſeconda s'intendano deſcritte due figure rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, ſiccome ancora ſopra la terza, e la quarta due altre figure rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, ſarà la prima figura alla ſeconda, come la terza alla quarta. II. viceverſa ſe quattro linee rette ſono tali, che deſcritte ſopra la prima, e la ſeconda due figure rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, e deſcritte in oltre ſopra la terza, e la quarta due altre figure ſimili, e ſimilmente poſte, ſiano le ſuddette figure proporzionali, le quattro linee rette ſaranno parimente proporzionali.

I.

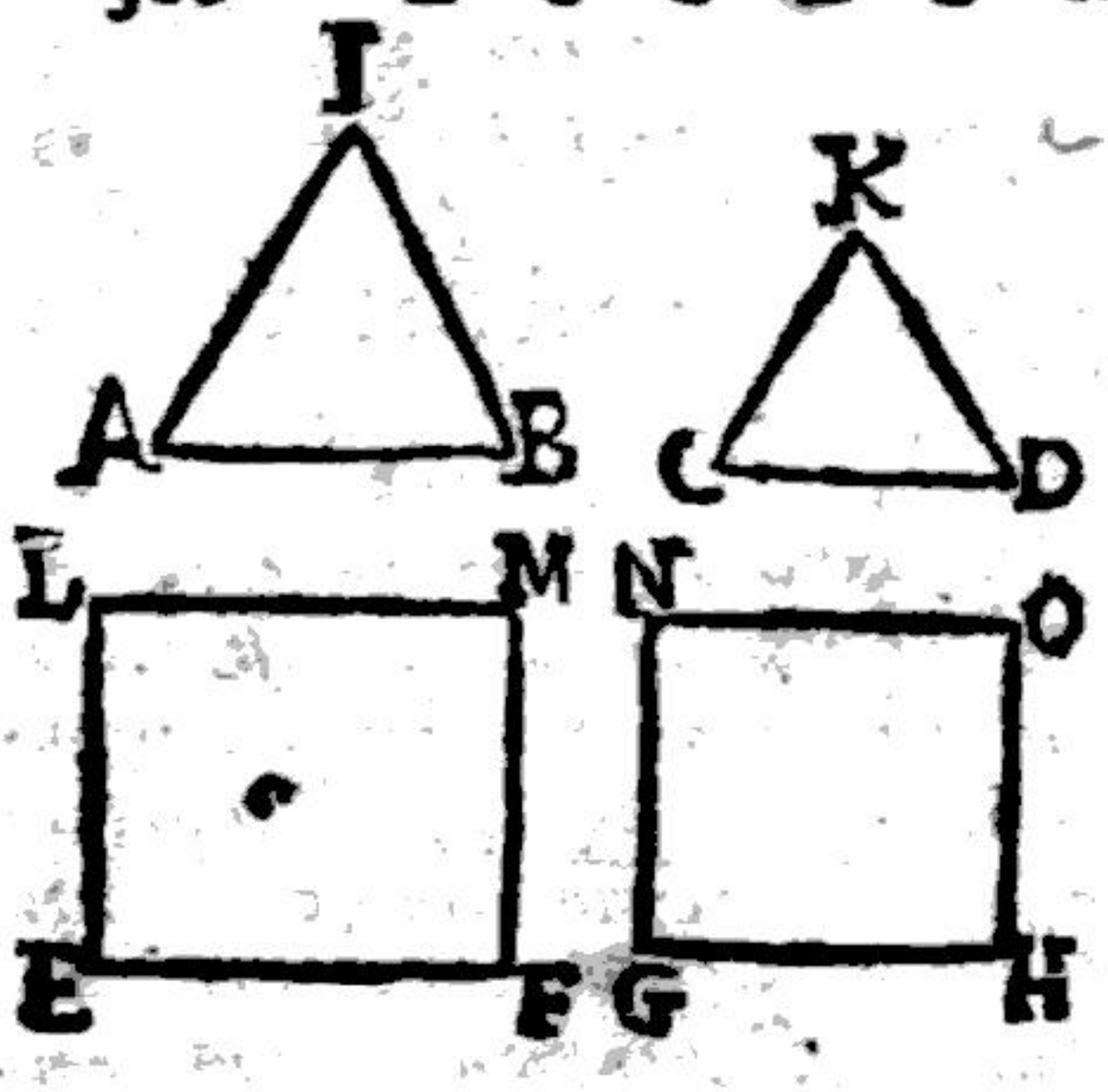
Siano quattro linee rette AB, CD, EF, GH proporzionali, vale a dire ſia come AB a CD, così EF a GH: io dico che deſcritte ſopra la prima, e la ſeconda le due figure rettilinee ABI, CDK ſimili, e ſimilmente poſte, e deſcritte di più ſopra la terza, e la quarta due altre figure rettilinee EFML, GHON ſimili, e ſimilmente poſte, ſarà la figura ABI alla figura CDK, così la figura EFML alla figura GHON. Viceverſa ſe eſſendo ſimili, e ſimilmente poſte le figure ABI, CDK, ed eſſendo parimente ſimili, e ſimilmente poſte le figure EFML, GHON ſia come la figura ABI alla figura CDK, così la figura EFML alla figura GHON, ſarà AB a CD, così EF a GH.

II.

I. Perche dalla ſuppoſizione la figura rettilinea ABI è ſimile alla figura rettilinea CDK, avrà (*) la figura ABI alla figura CDK ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD: ma

(*) *pro.* 20. *di queſto.*

Digitalizzato da Google



V. pro. 11. V.

AB a CD dall'istessa suppoſizione ſta come EF a GH, dunque la figura ABI alla figura CDK (*) avrà parimente ragion duplicata di EF a GH. Quindi perche anche la figura EFML alla figura GHON ha ragion duplicata del lato FF al lato omologo GH, perche le dette figure EFML, GHON ſono ſuppoſte ſimili, ne ſiegue che la figura ABI ſia alla figura CDK, come ſta la figura EFML alla figura GHON.

II. Perche dalla ſuppoſizione la figura ABI è ſimile alla figura CDK avrà la figura ABI alla figura CDK ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD; ma dall'iſteſſa ſuppoſizione la figura ABI alla figura CDK ſta come la figura EFML alla figura GHON; dunque anche la figura EFMN alla figura GHON, avrà ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD: quindi poiche la figura EFML alla figura GHON ha ancora ragion duplicata di EF a GH, perche le dette figure ſono ſottopoſte ſimili, ne ſiegue che la ragion duplicata di AB a CD ſia eguale alla ragion duplicata di EF a GH; e per conſeguente, che AB ſia a CD, come EF a GH: cioche doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

DA queſta propoſizione ſiegue, che ſe quattro linee diritte ſono proporzionali, anche i qua-

dra-

Digitalizzato da Google

drati formati ſopra di eſſe ſiano proporzionali; imperciocchè i quadrati deſcritti ſopra la prima, e la ſeconda ſono due figure ſimili, e ſimilmente poſte, ſiccome ancora i quadrati deſcritti ſopra la terza, e la quarta ſono due figure ſimili, e ſimilmente poſte. Si può provare queſta verità per mezzo de' nomeri. Sia 2 a 4, così 5 a 10: è manifeſto, che 4 quadrato di 2 ſta a 16 quadrato di 4, come 25 quadrato di 5 ſta 100 quadrato di 10.

PROP. XXIII. TEOREMA.

Li parallelogrammi equiangoli anno fra loro quella ragione, che naſce componendo inſieme le ragioni de' lati, che ſono intorno gli angoli eguali.

I.

Siano li due parallelogrammi equiangoli ABCD, BEGF, e ſia l'angolo ABC eguale all' angolo FBE: io dico che il parallelogrammo ABCD abbia al parallelorammo BEGF quella iſteſſa ragione, la quale naſce componendo inſieme le ragioni di AB a BE, e di CB a BF, vale a dire de' lati, che ſono intorno gli angoli eguali.

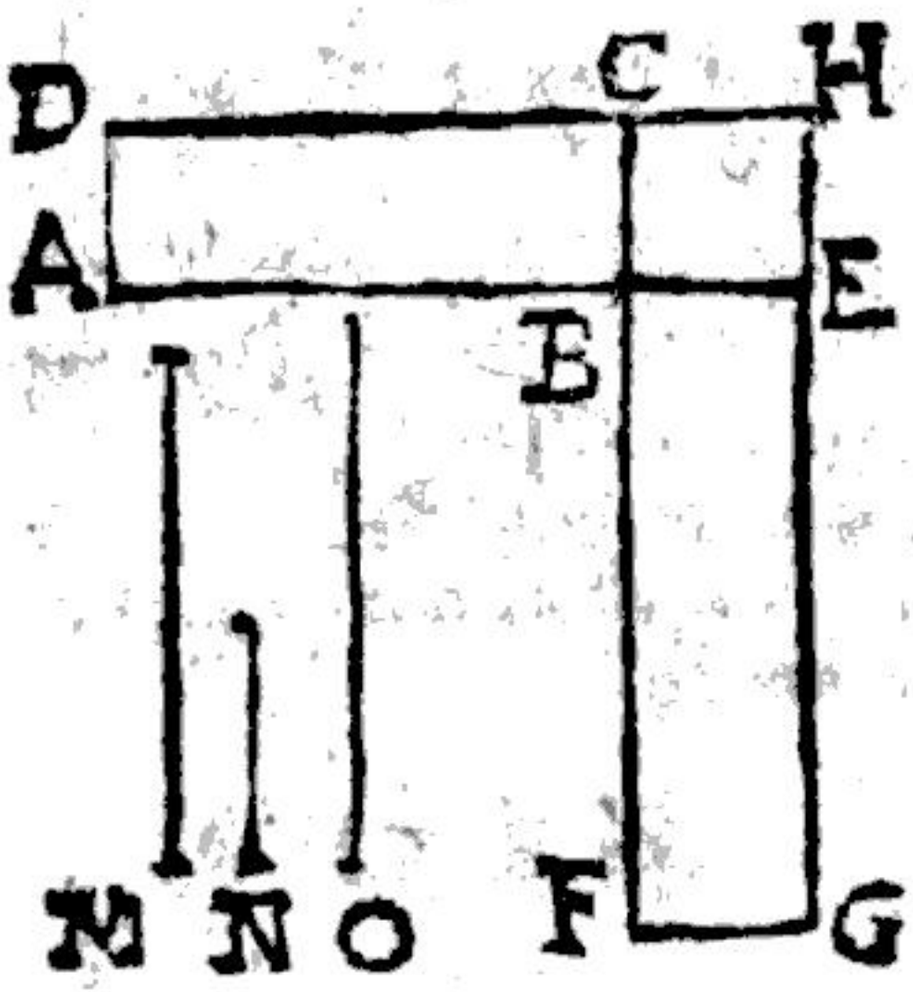
II.

I. Si diſpongono queſti due parallelogrammi in modo, che la retta AB giaccia a dirittura colla retta BE: non è da metterſi in dubbio, che la retta CB verrà a giacere ancora per diritto alla retta BF: imperocchè in tal modo ſi verifica, che gli angoli ABC, FBE ſiano eguali fra loro. II. Si diſtendano le rette DC, GE, finchè vadano ad unirſi nel punto H. III. Si prenda ad arbitrio la linea retta M, ed in ordine alle tre linee rette AB, BE, ed M ſi ritrovi (*) la quarta proporzionale N. IV. In ordine alle tre linee rette CB, BF, ed N ſi ritrovi la quarta proporzionale O.

(*) *pro. 12. di queſto.*

III.

Digitalizzato da Google



III.

Perche li due parallelogrammi ABCD, BEHC anno l'istella altezza, sarà il primo parallelogrammo al secondo (*) come la base AB alla base BE: ma AB a BE della costruzione sta come M ad N; dunque sarà parimente il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo BECH, cosi M ad N. Similmente perche li parallelogrammi CBEH, BFGE anno l'istessa altezza, sarà il primo parallelogrammo al secondo, come la base BC alla base BF: ma dalla costruzione la base BC alla base BF sta come N ad O; dunque sarà parimente il parallelogrammo BEHC al parallelogrammo BEFG, così N ad O. Quindi i tre parallelogrammi ABCD, BEHC, BEGF paragonati colle tre linee rette M, N, ed O costituiscono una ragione ordinata; essendo come il primo parallelogrammo al secondo così la prima linea alla seconda; e come il secondo parallelogrammo al terzo, così la seconda linea alla terza: laonde sarà il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo BEGF, così la prima M alla terza O. Ma la prima M alla terza O (*) ha ragione composta da M ad N, e da N ad O: dunque anche il parallelogrammo ABCDE al parallelogrammo BEFG avrà ragion composta dalle ragioni di M ad N, e di N ad O; di modo che essendo come M ad N, così AB a BE, e come N ad O, cosi CB a BF, ne siegue, che il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo BEFG abbia parimente ragione composta dalle ragioni di AB a BE, e di CB a BF; cioche doveva dimostrarsi

(*) *pro. 1. di questo.*

(*) *Veggasi la Spiegazione delle def. 5., e 6. di questo.*

IL-

Digitalizzato da Google

ILLUSTRAZIONE.

SE due parallelogrammi equiangoli anno l'istessa lunghezza, ma diverse larghezze, è certo che quel parallelogrammo è più grande, il quale è più largo, e tanto riesce più grande, quanto egli è più largo; di modo che nel supposto delle lunghezze eguali li parallelogrammi equiangoli seguono la ragione delle larghezze. Viceversa se due parallelogrammi equiangoli anno l'istessa larghezza, ma ineguali lunghezze, è certo ancora, che quel parallelogrammo è più grande, il quale è più lungo, e tanto riesce più grande, quanto è più lungo; di modo che nel supposto delle larghezze eguali li parallelogrammi equiangoli seguono la ragione delle lunghezze. Quindi essendo ineguali così le lunghezze, come le larghezze, li parallelogrammi equiangoli seguiranno la ragione composta dalle lunghezze, e dalle larghezze, vale a dire composta da' lati, che sono intorno gli angoli eguali.

PROP. XXIV. TEOREMA.

I parallelogrammi, che stanno intorno la diagonale d'un parallelogrammo sono I. simili a tutto il parallelogrammo. II. sono simili fra loro.

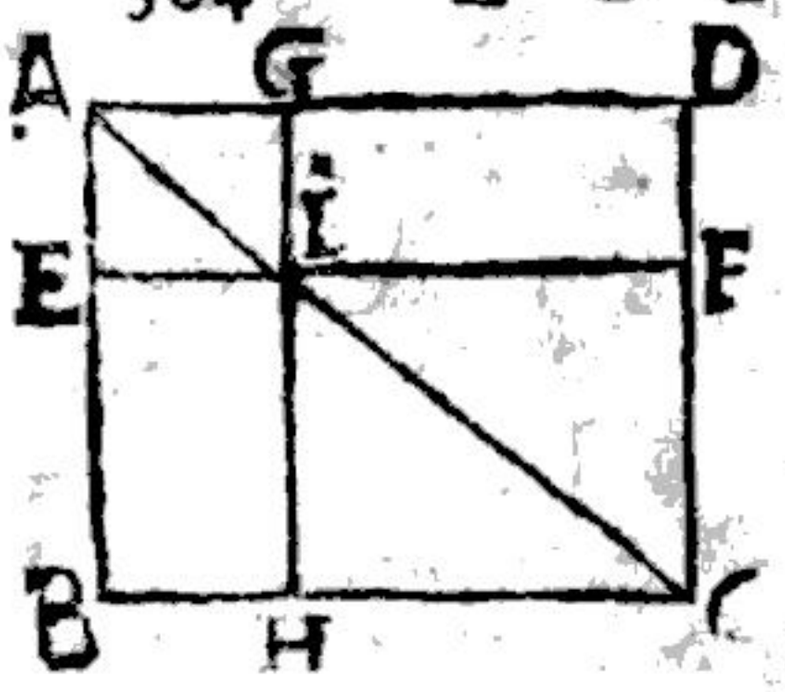
I.

Sia il parallelogrammo ABCD compartito dalla diagonole AC, e dalle due parallele EF, GH, le quali s'incrociano nel punto I della suddetta diagonale in quattro parallelogrammi; io dico che li due parallelogrammi AEIG, IHCF, che stanno intorno al diametro AC sono simili, così a tutto il parallelogrammo ABCD, come fra loro.

II.

Imperciocche I. li due parallelogrammi AEIG,

Digitalizzato da Google



AEIG, ABCD anno l'angolo in A comune. II. a cauſa delle parallele EF, BC ſegate dalla terza AB l'angolo eſteriore AEI è eguale (*) all'angolo interiore oppoſto ABC. III. L'angolo EIG è eguale all'

*pro. 29. I.

angolo BCD perche entrambi ſono eguali (*) all'iſteſſo angolo oppoſto EAG: e finalmente l'angolo eſteriore AGI è eguale all'angolo interiore oppoſto ADC a cauſa delle parallele GH, DC ſegate dalla terza AD: quindi li due parallelogrammi AEIG, ABCD ſaranno equiangoli. Rimane ora a dimoſtrare che abbiano i lati intorno agli angoli eguali proporzionali; ciocche noi faremo coſi. Il triangolo AEI è equiangolo al triangolo ABC; poiche l'angolo in A è comune, e l'angolo AEI ſi è dimoſtrato eguale all'angolo ABC: dunque i lati intorno gli angoli e-

*pro. 34. I.

guali ſaranno proporzionali (*), e per conſeguente come ſta EA ad AI, coſì ſtarà BA ad AC: Similmente li due triangoli AGI, ADC ſono equiangoli, perche l'angolo in A è comune ad entrambi, e l'angolo AGI è eguale all'angolo ADC; dunque i lati intorno gli angoli eguali ſaranno proporzionali; e per conſeguente ſarà IA ad AG come CA ad AD; ma è ſtato dimoſtrato, che EA ad AI ſta come BA ad AC; dunque per l'egual ragione ordinata ſarà EA ad AG, coſì BA ad AD. In oltre per ragione degl' iſteſſi triangoli AGI, ADC equiangoli, ſarà AG, GI, come AD a DC, e come GI ad IA, coſì DC a CA; ma per cauſa de' triangoli equiangoli AIE, ACB, IA ad IE ſta come CA a CB; dunque di nuovo per l'egual ragione ordinata ſarà GI ad IE, coſì CD a CB; e finalmente come IE ad EA, coſì CB a BA: di modo che i paral-

*pro. 4. di queſto.

le-

Digitalizzato da Google

lelogrammi AEIG, ABCD, oltre l'avere gli angoli eguali, ciascuno a ciascuno, anco di più i lati proporzionali intorno gli angoli eguali, e per conseguente sono simili: nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'altro parallelogrammo IHCF sia simile all'istesso parallelogrammo ABCD; di modo che li due parallelogrammi AEIG, IHCF ritrovandosi simili al terzo parallelogrammo ABCD, saranno simili fra loro (*); ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro.21. di questo.*

AVVERTIMENTO.

NEl Corollario della proposizione IV. *del libro* II. *si disse, che i parallelogrammi, i quali sono posti intorno la diagonale del quadrato sono quadrati:* Euclide *ha resa più generale l'istessa verità in questa proposizione, coll'aver dimostrato, che i parallelogrammi situati intorno la diagonale di un parallelogrammo sono simili all' istesso parallelogrammo: imperciocche da questa proposizione è facile a dedurre, che se il parallelogrammo principale è quadrato, anche i due parallelogrammi descritti intorno la di lui diagonale abbiano da essere quadrati: giacche un quadrato non può esser simile ad altre figure, se non che alle quadrate.*

PROP. XXV. PROBLEMA.

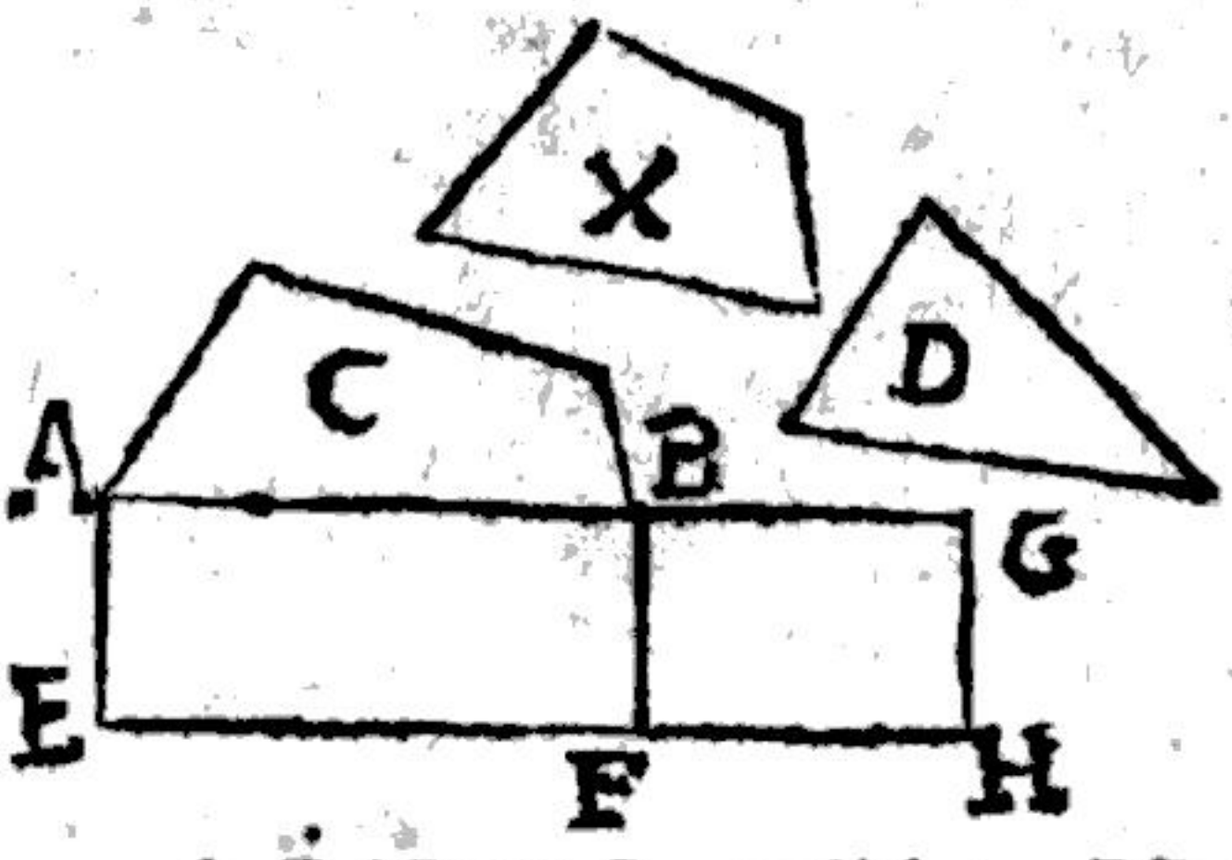
Date due figure rettilinee, fa duopo descriverne una terza, la quale sia simile, e similmente posta ad una delle due suddette figure date, e sia eguale all'altra.

I.

Siano date due figure rettilinee C, e D: fa duopo descriverne una terza, la quale sia simile, e similmente poste alla figura C, e sia eguale all' altra figura D.

Digitalizzato da Google

II.



I. Sopra il lato AB della figura C si descriva il parallelogrammo ABFE (*) eguale all'istesso rettilineo C adoperando qualsivoglia angolo BAE. II. Sopra il lato BF si adatti il parallelogrammo BGHF eguale all'altro rettilineo D, che abbia l'angolo GBF eguale all' angolo BAE; in tal modo le due linee rette AB, BG giacerenno a dirittura, e li due parallelogrammi ABFE, BGHF avranno l'istessa altezza. III. Fra le rette AB, BG si ritrovi la mezza proporzionale X (*). IV. Si descriva sopra questa linea retta X una figura rettilinea (*) simile, e similmente posta alla figura C: io dico che essa riuscirà eguale all'altra figura data D.

* *pro.* 45. I.

* *pro.* 13. *di questo.*

* *pro.* 18. *di questo.*

III.

Imperciocche essendo dalla costruzione AB ad X, così X a BG, sarà la figura rettilinea C descritta sopra la prima AB alla figura rettilinea simile, e similmente posta, descritta sopra la seconda X, cosi la prima AB (*) alla terza BG: ma AB sta a BG, come il parallelogrammo ABFE al parallelogrammo BGHF, perche questi due parallelogrammi anno l'istessa altezza: dunque sarà ancora la figura rettilinea C alla figura rettilinea descritta sopra la linea retta X, così il parallelogrammo ABFE al parallelogrammo BGHF; quindi essendo la figura rettilinea C eguale, dalla costruzione, al parallelogrammo AbFE; sarà (*) la figura rettilinea descritta sopra la linea retta X eguale al parallelogrammo BGHF:

*Corol. 1. della pro. 20. di questo.

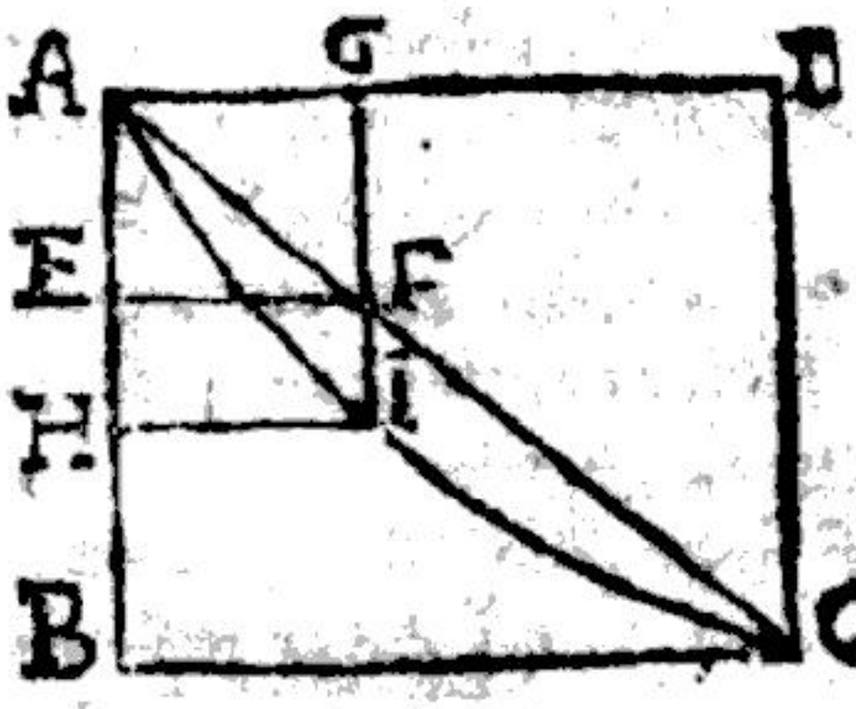
* *pro.* 14. *V.*

Digitalizzato da Google

BGHF: ma questo parallelogrammo della costruzione è eguale al rettilineo D: dunque sarà la figura rettilinea descritta sopra la linea retta X eguale alla data D. Sicche essendo dalla costruzione simile all' altra figura rettilinea C, si è soddisfatto al Problema in questione.

PROP. XXVI. TEOREMA.

Se da un parallelogrammo sia tolto un' altro parallelogrammo, il quale sia simile, e similmente posto all' istesso parallelogrammo, ed abbiano di più cotesti due parallelogrammi un' angolo comune, essi staranno a giacere intorno la medesima diagonale.



I.

Dal parallelogrammo ABCD sia tolto il parallelogrammo AEFG simile, e similmente posto all' istesso parallelogrammo ABCD, e sia l'angolo in A comune all' uno, ed all' altro parallelogrammo; io dico che essi staranno a giacere intorno la medesima diagonale AC; vale a dire che la diagonale AC deve passare per lo punto F.

II.

Se mai è possibile sia la diagonale del parallelogrammo ABCD la retta AIC, la quale non passa per l'angolo F del parallelogrammo AEFG I. Si distenda la GF finche seghi la suddetta diagonale nel punto I. II. Si tiri per lo punto I la retta IH parallela alla retta AG.

III.

Perche li due parallelogrammi ABCD, AHIG stanno a giacere intorno l'istessa diagonale AIC,

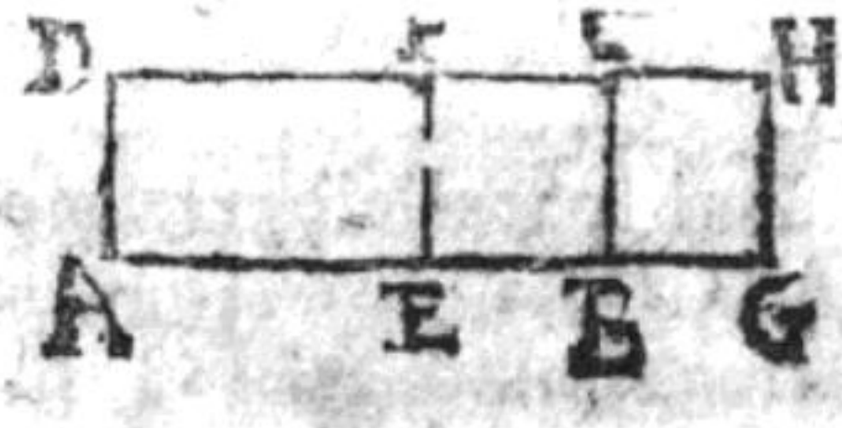
Digitalizzato da Google

* *pro. 24. di questo.* saranno essi simili fra loro (*) : quindi come sta AD ad AB, così starà AG ad AH : ma supponendosi il parallelogrammo ABCD simile, e similmente posto al parallelogrammo AEFG, come sta AD ad AB, così sta AG ad AE : dunque (*) come sta AG ad AH, così starà l'istessa AG alla AE : quindi la retta AH maggiore, sarà (*) eguale alla retta AE minore ; ciocchè non potendo sossistere ne siegue la verità del Teorema in questione.

* *pro. 11. V.*

* *pro. 9. V.*

PREPARAZIONE ALLE QUATTRO PROPOSIZIONI SEGUENTI.



Sia la linea retta AB, sopra la quale si formi ad arbitrio il parallelogrammo ABCD, e siano similmente sopra l'istessa linea AB formati due altri parallelogrammi AEFD, AGHD, che abbiano l'istessa altezza col primo ABCD, ma che uno sia minore, l'altro maggiore del medesimo parallelogrammo ABCD : noi diremo per innanzi, che tutti tre cotesti parallelogrammi siano adattati sopra la linea retta AB con questo divario però, che il secondo si dirà mancante, ed il terzo eccedente in riguardo al primo ABCD, il quale nè manca, nè eccede, ma si ritrova adattato giustamente sopra l'istessa linea retta AB. Diremo di più, che il difetto, o mancanza del secondo sia il parallelogrammo EBCF ; e l'eccesso del terzo sia il parallelogrammo BGHC.

PROP. XXVII. TEOREMA.

Fratutti i parallelogrammi adattati sopra una linea retta data, che mancano di altrettanti parallelogrammi tutti simili, così fra loro, come ad

un

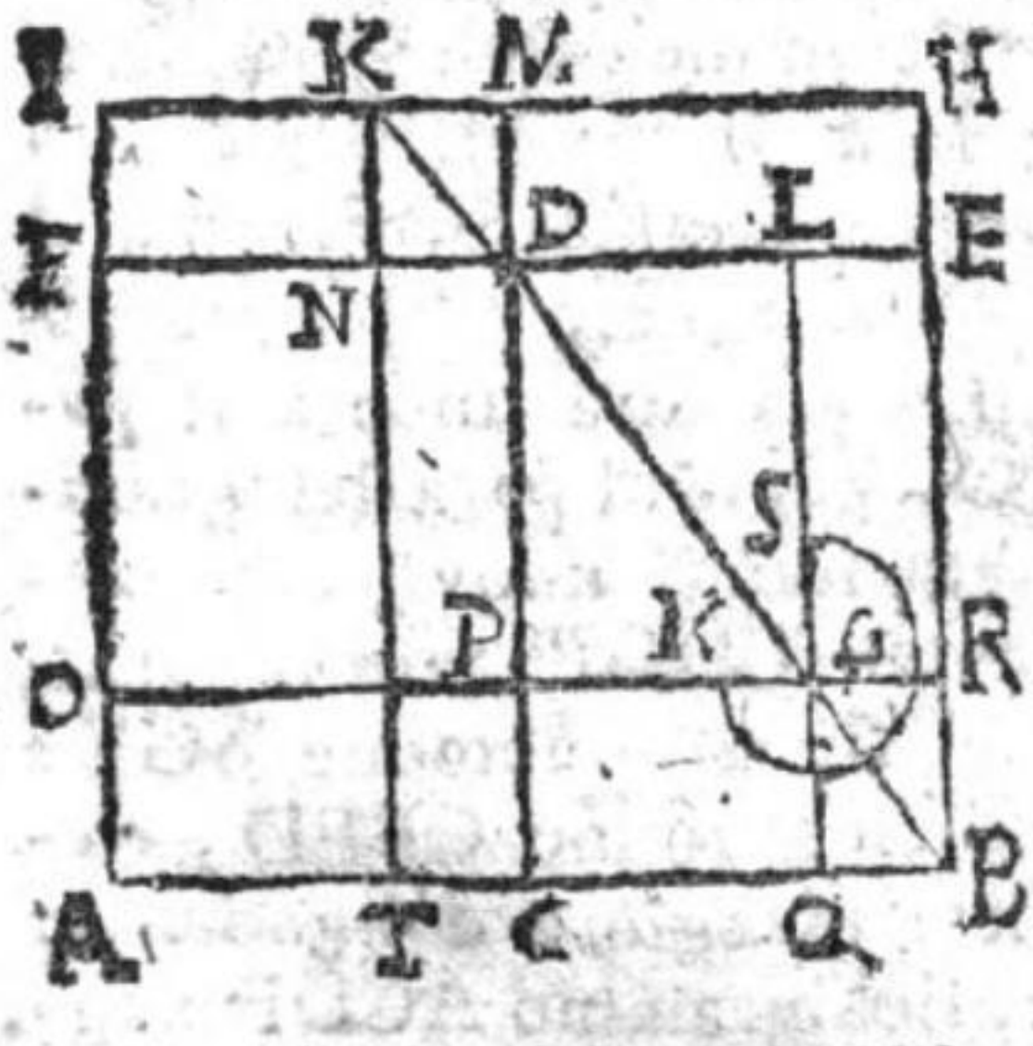
Digitalizzato da Google

un parallelogrammo adattato ad arbitrio ſopra la mettà, il più grande è quello, che ſi adatta ſopra la mettà, e che è ſimile, ed eguale al ſuo difetto.

I.

Sia la linea retta AB ſegata per mezzo nel punto C, e ſopra la retta CB ſia deſcritto ad arbitrio il parallelogrammo CBED: io dico che fra tutti i parallelogrammi, che ſi poſſono adattare ſopra la retta AB, e che mancano di altrettanti parallelogrammi tutti ſimili al parallelogrammo CBED deſcritto ſopra la mettà CB il più grande è il parallelogrammo AÇDF, il quale è deſcritto ſopra l'altra mettà AC, ed è eguale, e ſimile al ſuo difetto CBED.

II.



I. Si congiunga la diagonale BD, nella quale ſi prendano ad arbitrio due punti G, e K, il primo nell' iſteſſa diagonale BD, l'altro nel ſuo prolungamento DK. II. Per li punti G, e K ſi tirino le linee LGQ, KNT, parallele (*) alle due BE, AF. III. Per li medeſimi punti G, e K, ſi tirino di più le parallele OGR, IKH alle due AB, FE. IV. Finalmente ſi coſtituiſca la figura tale quale ſi vede quì delineata. Ora non è da mettersi in dubbio, che il parallelogrammo AQGO è adattato ſopra la retta AB, e manca del parallelogrammo QBRG, il quale è ſimile al parallelogrammo CBED deſcritto ſopra la mettà CB: imperciocchè i parallelogrammi, che ſtanno (*) intorno la diagonale d'un parallelogrammo ſono ſimili all' iſteſſo paralle-

* *pro. 31. I.*

* *pro. 24. di queſto.*

Digitalizzato da Google

logrammo: ficcome ancora non è da dubitare, che il parallelogrammo ATKI fia adattato fopra la linea retta AB, e manchi del parallelogrammo TBHK, il quale è parimente fimile al parallelogrammo CBED defcritto fopra la mettà CB: io dico dunque, che il parallelogrammo ACDF adattato fopra la mettà AC è maggiore, così de' parallelogrammi AQGO, ATKI, come d' ogni altro parallelogrammo, nel quale concorrono le fuddette condizioni.

III.

Dimoftreremo primieramente, che il parallelogrammo ACDF fia maggiore del parallelogrammo AQGO. Il parallelogrammo PCQG è eguale (*) al parallelogrammo GREL: aggiugnendo dunque ad effi comunemente il parallelogrammo QBRG; farà il parallelogrammo CBRP eguale al parallelogrammo QBEL: ma il parallelogrammo ACPO è eguale (*) al parallelogrammo CBRP: dunque farà ancora il parallelogrammo ACPO eguale al parallelogrammo QBEL; ed aggiugnendo di nuovo comunemente il parallelogrammo CQGP, farà il parallelogrammo AQGO eguale al gnomone SGK: quindi effendo il parallelogrammo CBED, ovvero il fuo eguale ACDF maggiore del gnomone SGK, farà l'iftefso parallelogrammo ACDF maggiore del parallelogrammo AQGO.

* *pro.43.I.*

* *pro.36.I.*

Dimoftreremo in oltre, che l'iftefso parallelogrammo ACDF fia maggiore del parallelogrammo ATKI. Il parallelogrammo TCDN è eguale al parallelogrammo (*) DEHM: ma il parallelogrammo DEHM è eguale al parallelogrammo (*) FDMI: dunque il parallelogrammo TCDN farà ancora eguale al parallelogrammo FDMI: quindi l'iftefso parallelogrammo TCDN farà maggiore del parallelogrammo FNKI: il perche aggiugnendo comunemente il pa-

* *pro.43.I.*

* *pro.36.I.*

Digitalizzato da Google

parallelogrammo ATNF, sarà il parallelogrammo ACDF maggiore del parallelogrammo ATKI; ciocchè doveva dimostrarsi.

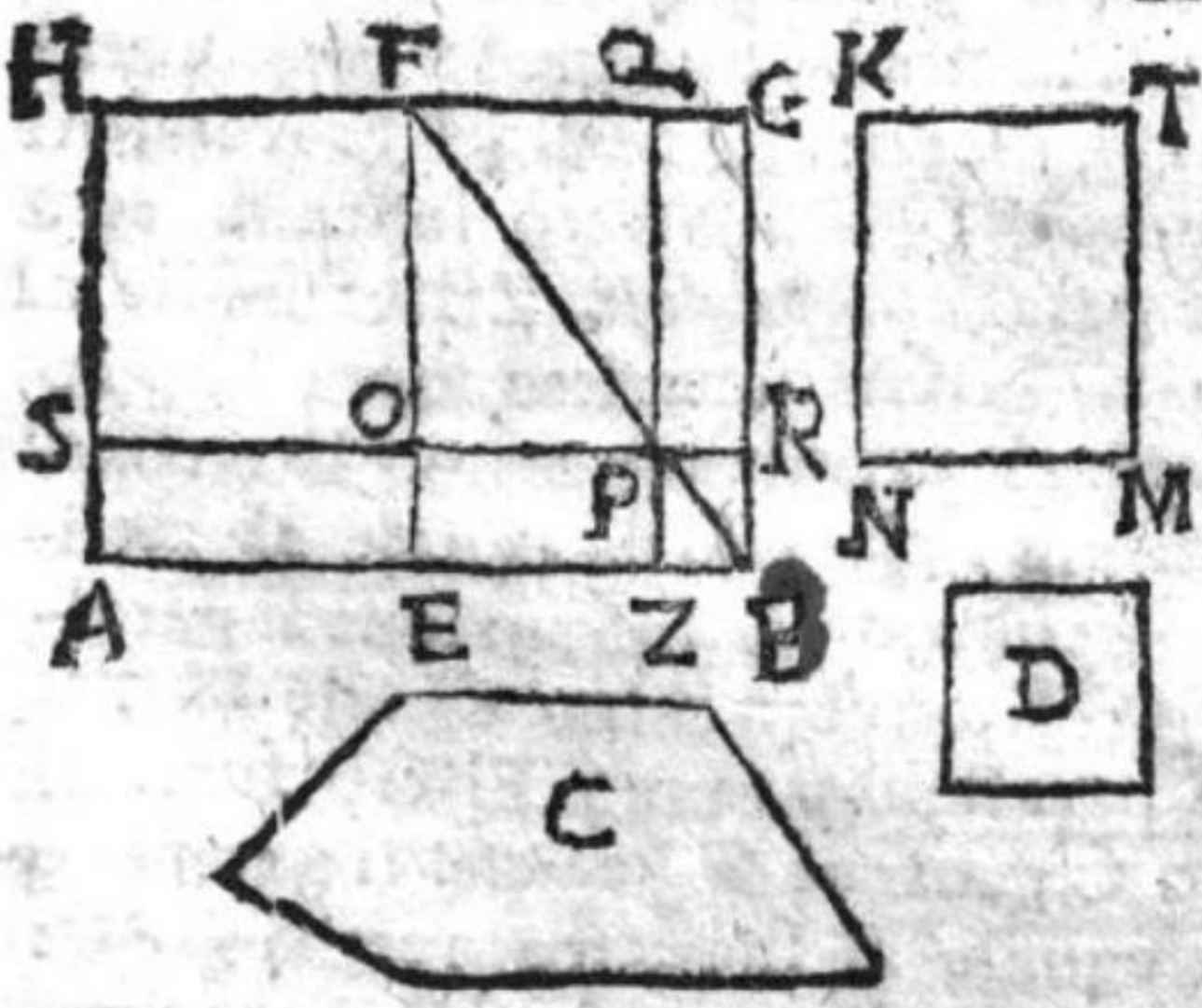
PROP. XXVIII. PROBLEMA.

Sopra una linea retta data adattare un parallelogrammo eguale I. ad una figura rettilinea data; II. che manchi d'un parallelogrammo simile ad un'altro parallelogrammo dato.

I.

Sia data la linea retta AB, e sia data in oltre, così la figura rettilinea C, come il parallelogrammo D; fa duopo adattare sopra la linea retta data AB un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data C, e che manchi d'un parallelogrammo simile al dato parallelogrammo D.

II.



I. Seghisi la AB per mezzo nel punto E. II. Sopra la mettà EB si descriva (*) il parallelogrammo EBGF simile al parallelogrammo dato D. III. Si ritrovi l'eccesso del parallelogrammo EBGF sopra il rettilineo C, il quale eccesso si determina per mezzo della proposizione XLV. del primo, siccome ora si dimostrerà. IV. si formi il parallelogrammo NMTK eguale (*) al suddetto eccesso, e simile al parallelogrammo dato D, ovvero al parallelogrammo EBGF descritto sopra la mettà EB.

* *pro. 18. di questo.*

* *pro. 25. di questo.*

Digitalizzato da Google

V. Si seghino da' lati FG, FE le porzioni FQ, FO eguali rispettivamente a' lati omologi KT, KN. VI. Per li punti Q, ed O si facciano passare le rette QPZ, SOR parallele a' lati del parallelogrammo EBGF: io dico che il parallelogrammo AZPS sia quello che si dimanda.

III.

Siccome dalla costruzione le due linee FQ, FO sono eguali alle due KT, KN, e di più comprendono l'angolo QFO eguale all'angolo TKN; imperciocche dall' istessa costruzione il parallelogrammo NMTK è simile al parallelogrammo EBGF, così sarà il parallelogrammo OPQF eguale, e simile al parallelogrammo NMTK: quindi essendo il parallelogrammo NMTK dalla costruzione simile al parallelogrammo EBGF, sarà similmente il parallelogrammo OPQF simile al parallelogrammo (*) EBGF: ma essi anno di più l'angolo in E comune, dunque saranno situati intorno l'istessa diagonale FPB (*): laonde il parallelogrammo AZPS adattato sopra la retta AB manca del parallelogrammo ZBRP simile al parallelogrammo EBGF descritto sopra la metà, ovvero simile al parallelogrammo D: rimane ora a dimostrare, che esso sia eguale al rettilineo dato C. Siccome dalla costruzione il parallelogrammo NMFK, ovvero il suo eguale FOPQ è l'eccesso del parallelogrammo EBGF sopra il rettilineo dato C; così ne siegue che il gnomone QPOEBG sia eguale al suddetto rettilineo C: ma il gnomone è eguale al parallelogrammo AZPS, siccome è facile a dimostrare; dunque il parallelogrammo AZPS, sarà eguale alla figura rettilinea C; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro.21. di questo.*

(*) *pro.26. di questo.*

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

SI vuol quì avvertire, che acciò cotesto Problema possa essere risoluto si richiede, che il parallelogrammo EBGF descritto sopra la metà della linea retta data simile al parallelogrammo dato D non sia minore della figura rettilinea C, ma o sia maggiore di essa, e per lo meno le sia eguale: imperciocchè si è dimostrato nella proposizione antecedente, che fra tutti i parallelogrammi adattati sopra una linea retta data, che sono mancanti di altrettanti parallelogrammi tutti simili, così fra loro, come ad un certo parallelogrammo descritto sopra la metà, il più grande sia il parallelogrammo istesso descritto sopra la metà. Che se descritto il parallelogrammo EBGF sopra la metà EB simile, e similmente posto al parallelogrammo D riesca esso eguale alla figura rettilinea data C, non accaderà tirare più avanti la costruzione: poichè il supplemento AEFH del detto parallelogrammo soddisfarà al Problema, come quello, che è eguale ancora alla figura rettilinea C, e mancante d'un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

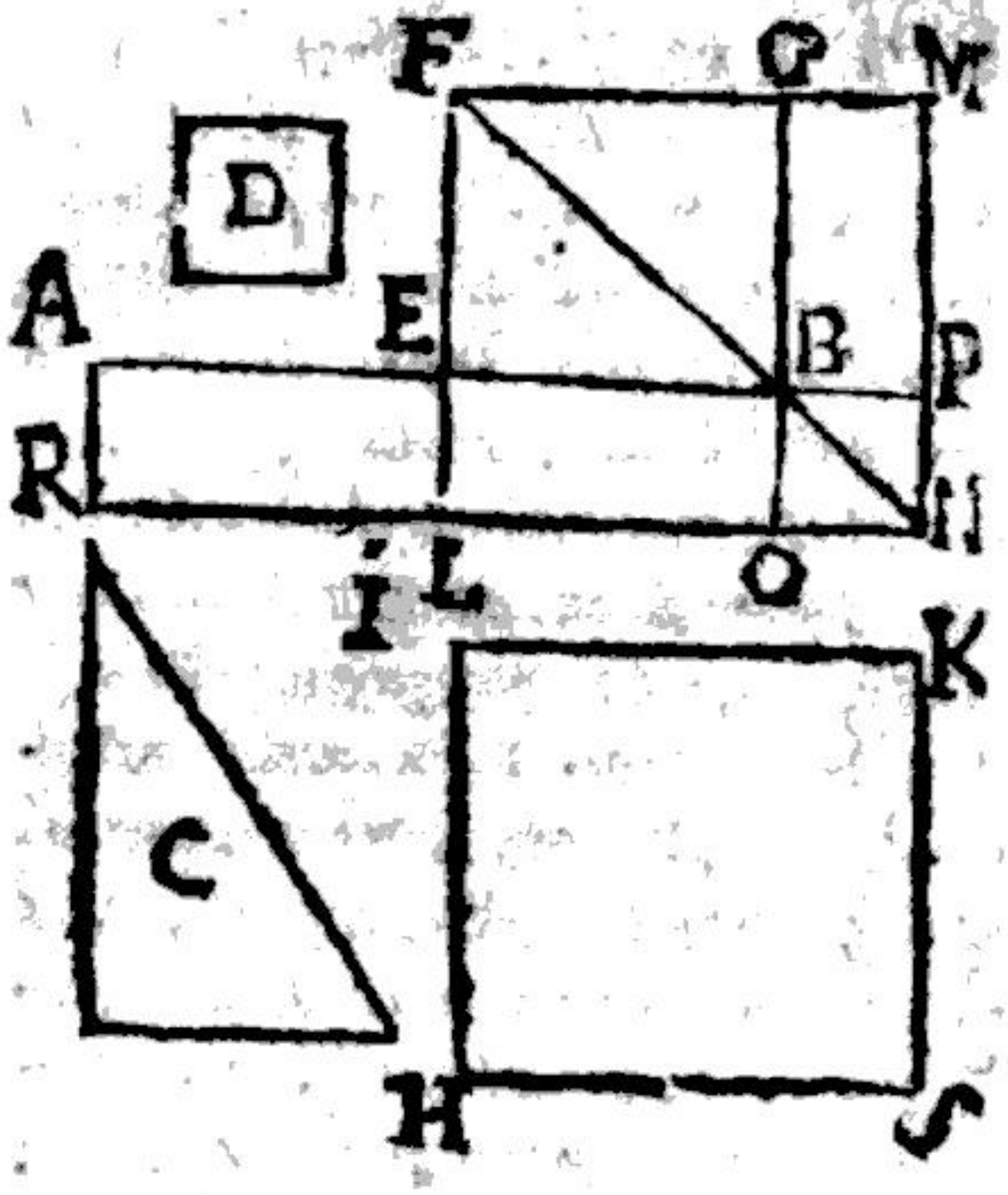
Adattare sopra una linea retta data un parallelogrammo I. eguale ad una figura rettilinea data. II. che ecceda d'un parallelogrammo simile ad un'altro parallelogrammo dato.

I.

Sia data la linea retta AB: fa duopo sopra di essa adattare un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data C, e che ecceda d'un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D.

II.

Digitalizzato da Google



II. I. Seghisi la retta data AB per mezzo nel punto E. II. Si descriva sopra la metà EB il parallelogrammo EBGF simile (*) al parallelogrammo dato D. III. Ritrovisi un parallelogrammo, il quale sia eguale al parallelogrammo EBGF, ed al rettilineo C uniti

(*) *pro.* 18. *di questo.*

insieme; ciocche si può fare mediante la proposizione XLV. del libro primo, siccome ora si dimostrerà. IV. Si descriva il parallelogrammo HSKI eguale al suddetto parallelogrammo, ovvero eguale al parallelogrammo EBGF, ed alla figura rettilinea C uniti insieme, e simile al parallelogrammo dato D, e per conseguente simile al parallelogrammo EBGF (*). V. Sopra i lati FG, FE distesi quanto bisogna si prendano le parti FM, FL eguali rispettivamente a' lati omologi IK, IH. VI. Per li punti M, ed L si facciano passare le parallele MPN, RLN a' lati BG, BE del parallelogrammo EBGF, e di più s'intenda compiuta la figura, tale quale si vede quì descritta; io dico che il parallelogrammo ARNP sia quello che si dimanda.

(*) *pro.* 21. *di questo.*

III.

Siccome dalla costruzione le due linee rette FM, FL sono rispettivamente eguali alle due IK, IH, e di più l'angolo LFM è eguale all'angolo HIK, così sarà il parallelogrammo LFMN eguale, e simile al parallelogrammo IHSK, ove-

Digitalizzato da Google

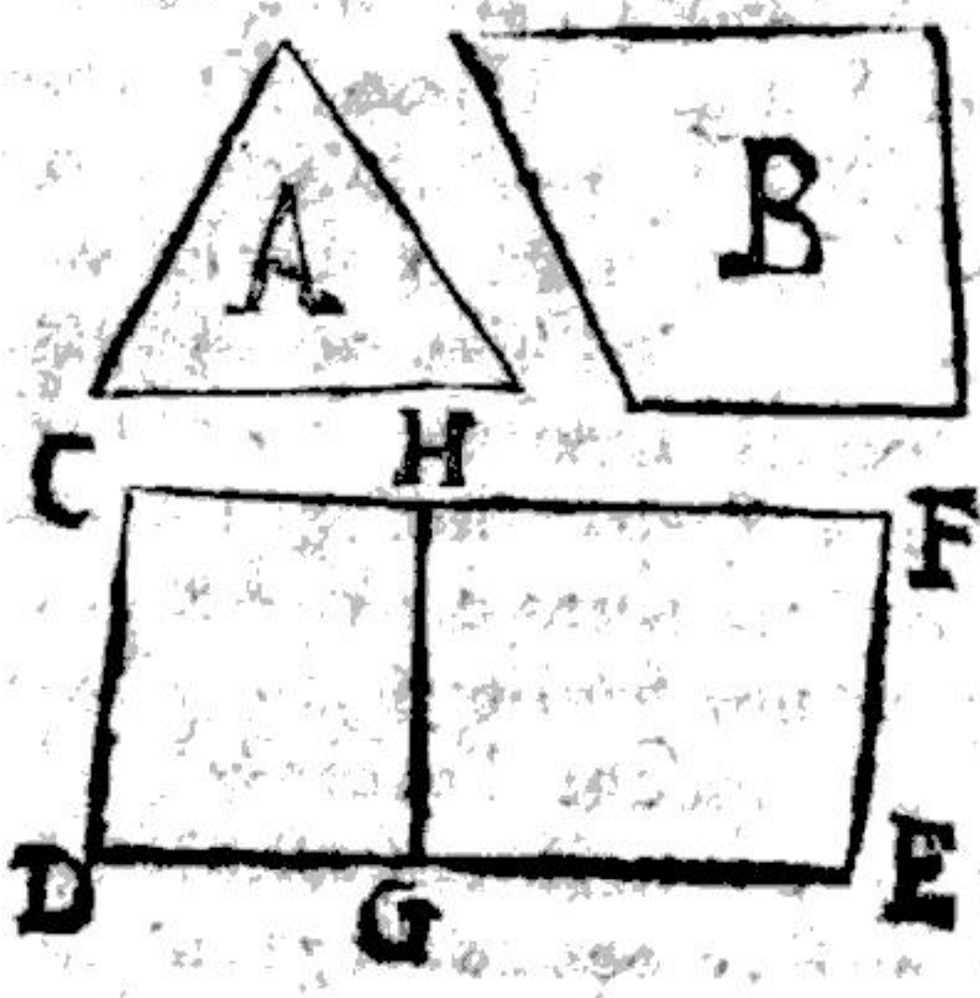
vero al parallelogrammo FEBG, al quale è simile il suddetto parallelogrammo IHSK, essendo entrambi simili al medesimo parallelogrammo D. Quindi i due parallelogrammi FLNM, FEBG avendo l'angolo in F comune, ed essendo di più simili fra loro saranno situati intorno l'istessa diagonale FBN: laonde il parallelogrammo ARNP adattato sopra la linea retta data AB eccederà d'un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D: imperciocche l'eccesso è il parallelogrammo BONP, il quale è simile (*) al parallelogrammo EBGF, e per conseguente è simile al parallelogrammo D. Rimane a dimostrare, che il suddetto parallelogrammo sia eguale alla figura rettilinea data C: ciocche si farà nella maniera seguente. Dalla costruzione il parallelogrammo IHSK, ovvero FLNM è eguale al parallelogrammo FEBG, ed alla figura rettilinea C uniti insieme: togliendo dunque da essi comunemente il parallelogrammo FEBG, rimarrà il gnomone GBELNMG eguale alla figura rettilinea C: ma il suddetto gnomone è eguale al parallelogrammo ARNP, siccome è facile a dimostrare: dunque il parallelogrammo ARNP è eguale alla figura rettilinea C; ciocche doveva dimostrarsi.

(*) *pro. 24. di questo.*

AVVERTIMENTO COMUNE ALLE DUE ANTECEDENTI PROPOSIZIONI.

Si è assunto nella proposizione XXVIII., *che possa descriversi un parallelogrammo eguale alla differenza di due figure rettilinee date, e nell'antecedente si è assunto, che possa descriversi un parallelogrammo eguale alla somma di due figure rettilinee date, e si è detto, che l'uno, e l'altro possa ottenersi mediante la proposizione* XLV. *del libro primo. Il metodo è questo. Siano date le due figu-*

Digitalizzato da Google



* pro. 45. I.

figure rettilinee A, e B, fa duopo primieramente ritrovare un parallelogrammo eguale alla differenza delle due suddette figure. Si descriva il parallelogrammo CDGH *eguale alla figura rettilinea A* (*) *avvalendosi di qualsivoglia angolo* CDG. *Poi sopra la linea retta* CD *adoperando l'istesso angolo* CDG *si descriva il parallelogrammo* CDEF *eguale all'altra figura rettilinea B : Ciò fatto sarà il parallelogrammo* HGEF *eguale alla differenza delle due figure rettilinee date. Se poi si volesse un parallelogrammo eguale a tutte due le figure rettilinee si dovria far così : bisognerebbe primieramente descrivere per la suddetta proposizione* XLV. *il parallelogrammo* CDGH *eguale alla figura rettilinea A adoprando qualsivoglia angolo* CDG : *dopo sopra la retta* HG *bisogneria di più descrivere il parallelogrammo* HGEF *eguale all' altra figura rettilinea B adoverando l'angolo* HGE *eguale all' angolo* CDG : *che così si verrebbe ad ottenere il parallelogrammo* CDEF *eguale ad entrambe le figure rettilinee A, e B.*

PROP. XXX. PROBLEMA.

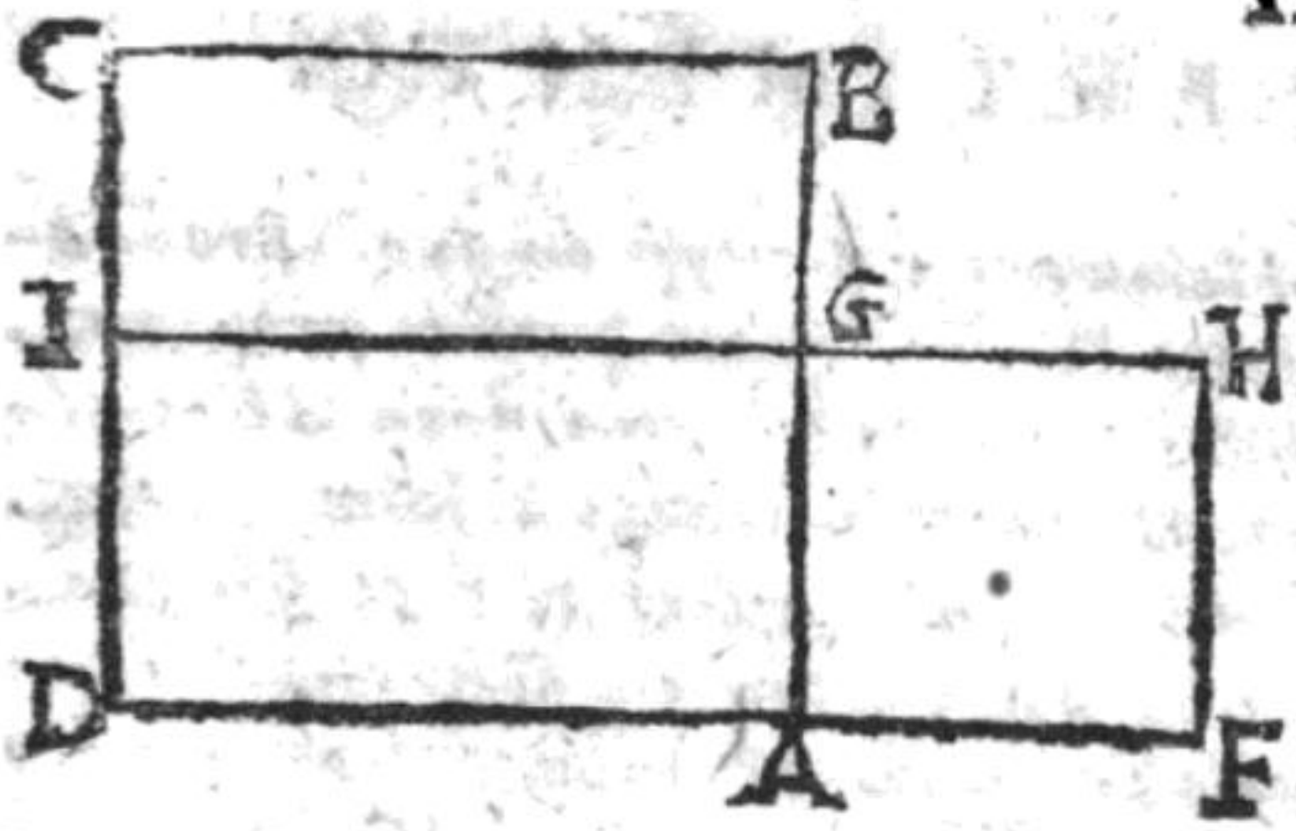
Segare una linea retta data secondo l'estrema, e mezza ragione.

I.

Sia data la linea retta AB : fa duopo segarla secondo l'estrema, e mezza ragione, vale a dire talmente, che tutta la linea sia alla parte maggiore di essa, come l'istessa parte maggiore sta alla parte minore.

Digitalizzato da Google

II.



I. Sopra la linea retta data AB descrivasi il quadrato ABCD. II. Sopra la retta AD si adatti il parallelogrammo rettangolo (*)DFHI eguale al quadrato ABCD, e che ecceda d'un'altro parallelogrammo rettangolo, il quale è AFHG, che sia simile al medesimo quadrato ABCD: quindi perche ad un quadrato non gli può essere simile altra figura se non la quadrata, ne siegue, che il parallelogrammo rettangolo AGHF sia un quadrato: ora io dico, che il punto G divide la linea retta data AB secondo l'estrema, e mezza ragione; vale a dire, che AB sia ad AG, come sta AG a GB.

* *pro. ante.*

III.

Siccome dalla costruzione il rettangolo DFHI è eguale al quadrato ABCD, così togliendone comunemente il rettangolo DAGI rimarrà il quadrato AGHF eguale al rettangolo IGBC: quindi i due parallelogrammi rettangoli IGBC, AGHF avendo un'angolo eguale ad un'angolo, e di più essendo eguali, avranno intorno gli angoli eguali i lati reciprocamente proporzionali (*), e per conseguente sarà IG a GH, così GA a GB: ma IG è eguale a DA, e per conseguente ad AB, e GH è eguale a GA; dunque sarà ancora BA ad AG, così AG a GB; ciocche doveva farsi.

* *pro. 4. di questo.*

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

Questo Problema non è diverso da quel Problema del libro II., nel quale Euclide propone a dividere una linea retta data AB talmente nel punto G, che il rettangolo formato da tutta la retta AB, e dalla parte minore BG sia eguale al quadrato della maggiore GA: imperciocchè segata che sia la retta AB talmente nel punto G, che il rettangolo formato da AB, e BG sia eguale al quadrato di AG, sarà AB ad AG (*), così AG a GB: viceversa segata la retta AB secondo l'estrema, e mezza ragione nel punto G sarà il rettangolo formato da AB, e BG eguale al quadrato di AG (*).

* *pro.17. di questo.*

* *pro. 17. di questo.*

PROP. XXXI. TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli la figura rettilinea descritta ad arbitrio sopra l'ipotenusa è eguale alle due figure rettilinee descritte sopra i lati, che contengono l'angolo retto simili, e similmente poste a quella, che è stata descritta sopra l'ipotenusa.

I.

Sia il triangolo rettangolo ABC, sopra l'ipotenusa BC del quale sia descritta ad arbitrio la figura rettilinea BEFC, e sopra li due lati AB, AC siano descritte le figure ABHG, ACLI simili, e similmente poste alla suddetta figura BEFC: io dico che questa figura sola è eguale a tutte due le figure ABHG, ACLI insieme.

II.

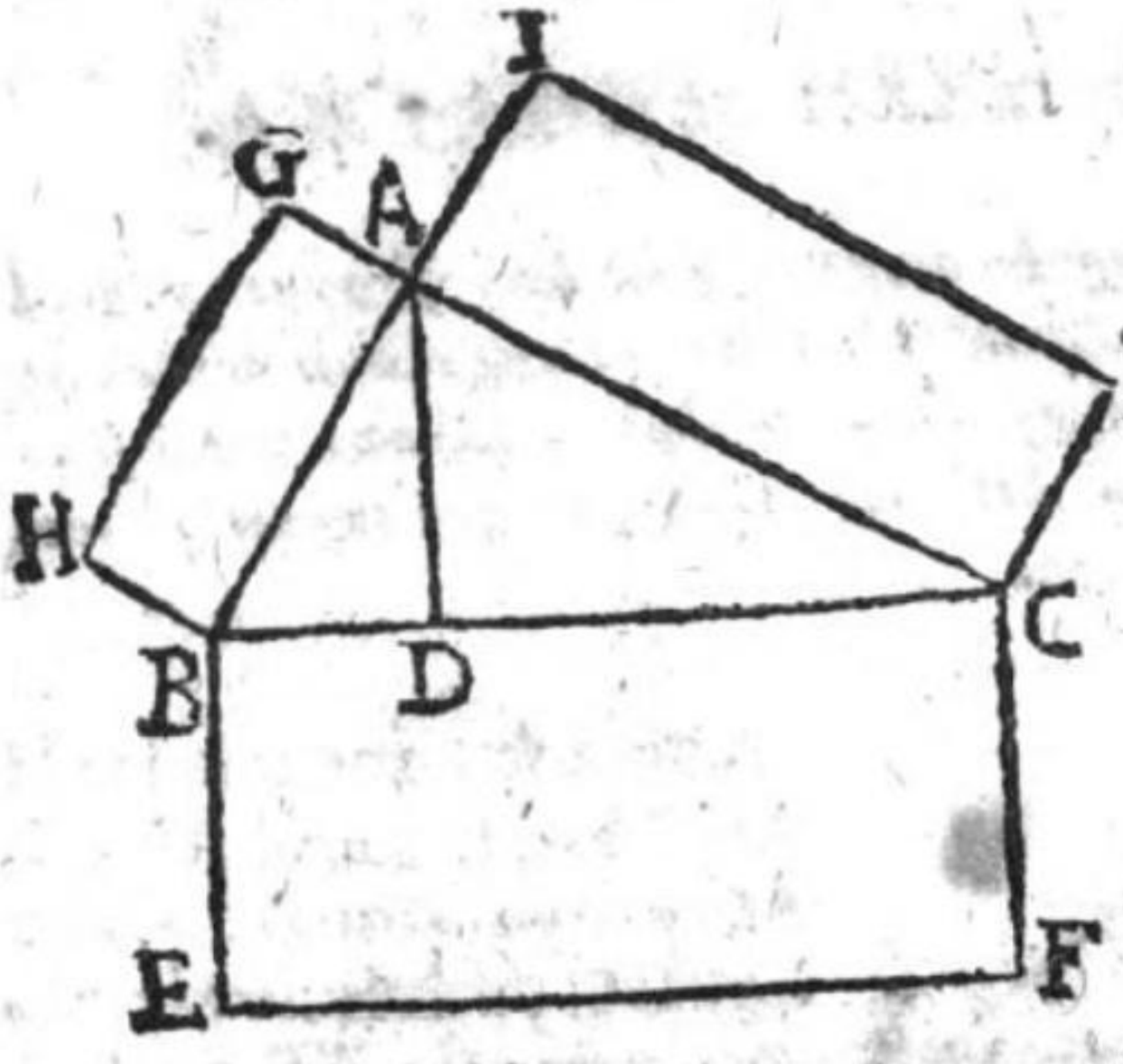
Dal punto A s'intenda abbassata la perpendicolare AD (*).

* *pro.11.I.*

III.

Poiche nel triangolo rettangolo ABC dall'angolo retto A si è tirata la perpendicolore AD sopra

Digitalizzato da Google



pra la base BC, sarà così BA(*) mezza proporzionale fra CB, e BD; come CA mezza proporzionale fra CB, e CD. Quindi essendo CB a BA, così BA a BD, sarà la prima CB alla terza BD (*) come la figura rettilinea BCFE descritta sopra la prima alla figura rettilinea BAGH simile, e similmente posta descritta sopra la seconda: e per la ragione permutata sarà BD a BC, così la figura ABHG alla figura BEFC: si dimostrerà parimente, che DC sia all'istessa BC, come la figura rettilinea ACLI all'istessa figura rettilinea BEFC: quindi essendo la prima BD alla seconda BC, come la figura rettilinea ABHG terza alla figura rettilinea BEFC quarta, ed essendo di più la quinta DC all'istessa seconda BC, come la figura rettilinea ACLI sesta alla medesima figura rettilinea BEFC quarta, sarà la composta BC dalla prima, e dalla quinta (*) alla seconda BC, come la somma delle due figure rettilinee ABHG, ACLI, che sono la terza, e la sesta alla sola figura rettilinea BEFC; dacche poi siegue, che la sola figura rettilinea BEFC sia eguale ad entrambe le figure rettilinee ABHC, ACLI; ciocche doveva dimostrarsi.

* *Corol. della pro. 8. di questo.*

* *Cor. della pro. 20. di questo.*

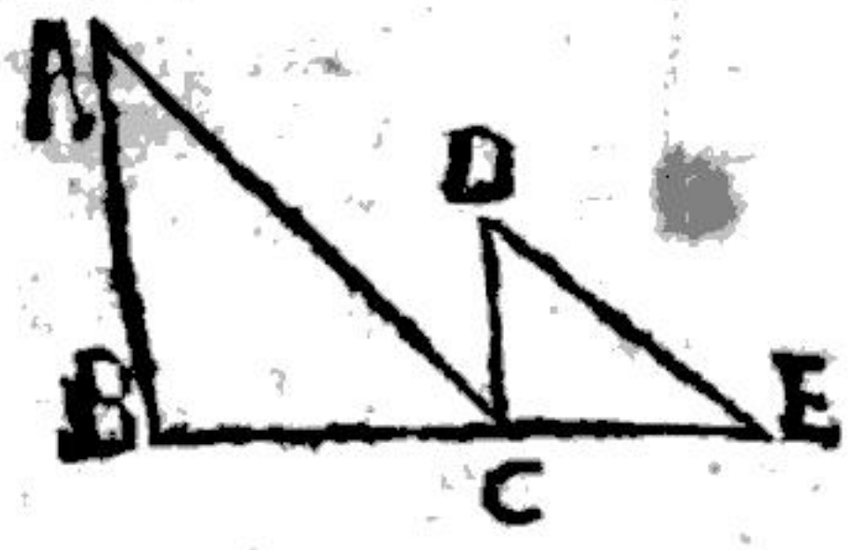
* *pro. 2. V.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXII. TEOREMA.

Se due triangoli aventi due lati proporzionali a due lati siano congiunti in un angolo in modo che i lati omologi riescano paralleli ciascuno a ciascuno; gli altri due lati de' suddetti triangoli giaceranno a dirittura.



I.

Abbiano i due triangoli ABC, DCE i due lati AB, AC proporzionali a' due lati DC, e DE, vale a dire come sta AB ad AC, così sia DC a DE; ed oltre a ciò i detti triangoli siano tali, che congiugnendosi nell'angolo C resti il lato AB parallelo al lato DE, ed AC parallelo a DE; io dico che gli altri due lati BC, CE giaceranno a dirittura.

II.

Siccome dalla suppoſizione la retta AB è parallela alla retta DC, così sarà l'angolo BAC eguale (*) all'angolo ACD: similmente siccome dalla suppoſizione la retta AC è parallela alla retta DE, così sarà l'angolo ACD eguale all'angolo CDE; quindi i due angoli BAC, CDE saranno eguali fra loro. Il perche i due triangoli ABC, DCE avendo l'angolo A eguale all'angolo D, ed avendo di più intorno a cotesti angoli i lati proporzionali, saranno (*) equiangoli; e per conseguente sarà l'angolo DCE eguale all'angolo ABC; ma si è dimostrato l'angolo ACD eguale all'angolo BAC; dunque tutto l'angolo ACE sarà eguale a' due angoli BAC, ABC congiunti insieme: aggiugnendo commemente l'angolo ACB; saranno i due angoli ACE, ACB eguali a' tre angoli BAC, ABC, BCA del triangolo ABC; ma questi tre angoli sono eguali a' due ret-

*pro. 29. I.

* *pro. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

retti (*); dunque ancora i due angoli ACE, * *pro.32.I.*
ACB sono eguali a due angoli retti; dacchè
poi siegue, che le due rette BC, CE giacciono (*) * *pro.14.I.*
a dirittura.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali gli angoli così a' centri, come alle circonferenze sieguono la ragione degli archi, a' quali insistono. Di più i settori siegnono la ragione de' loro archi.

I.

Ne' cerchi eguali ABC, EFG vi siano a'centri D, ed H due angoli BDC, FHG, e siano due altri angoli alle circonferenze BAC, FEG: io dico primieramente, che l'angolo BDC sta all' angolo FHG, come l'arco BC all' arco FG: io dico di più, che l'angolo BAC sta all'angolo FEG, come l'istesso arco BC all' arco FG: dico finalmente, che il settore BDC sta al settore FHG come il medesimo arco BC all'arco FG.

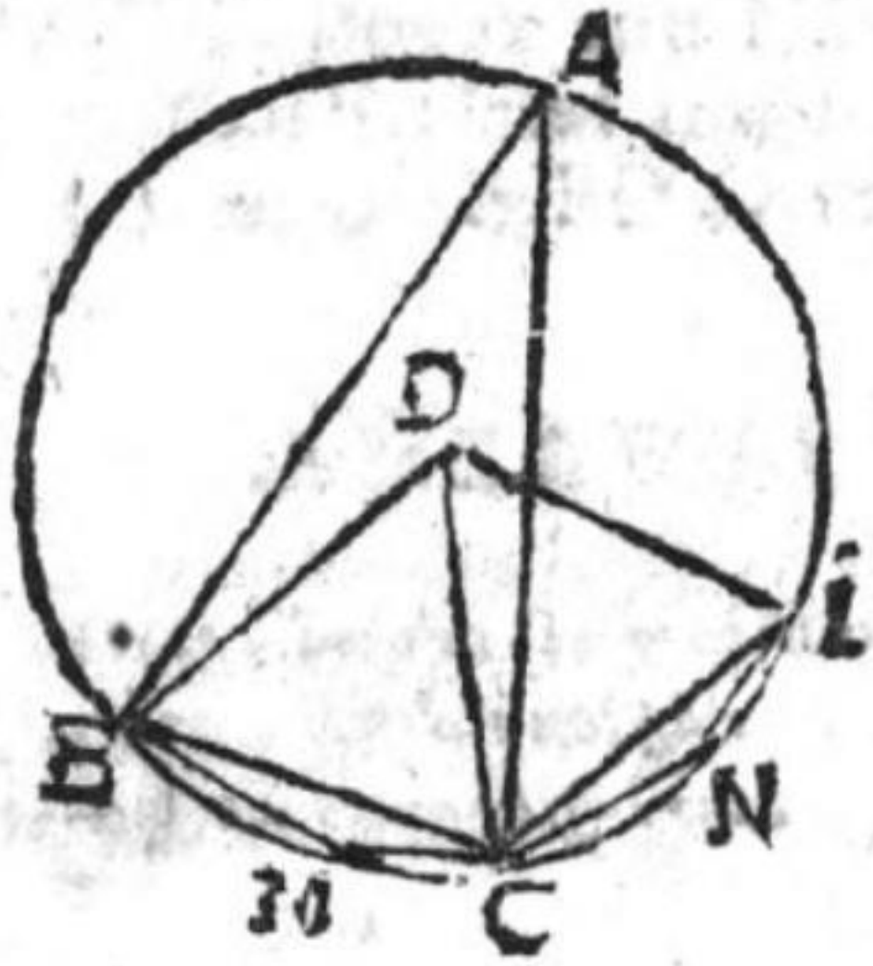
II.

I. Si congiungano le linee rette BC, FG. II. Si adatti la retta CI eguale (*) alla linea retta * *pro.1.IV.*
BC; siccome ancora si adattino le rette GL, LP eguali ad FG. III. Si congiungano le linee rette DI, HL, HP. IV. Presi ad arbitrio negli archi BC, CI i punti M, ed N si uniscano le linee rette MB, MC, NC, NI.

III.

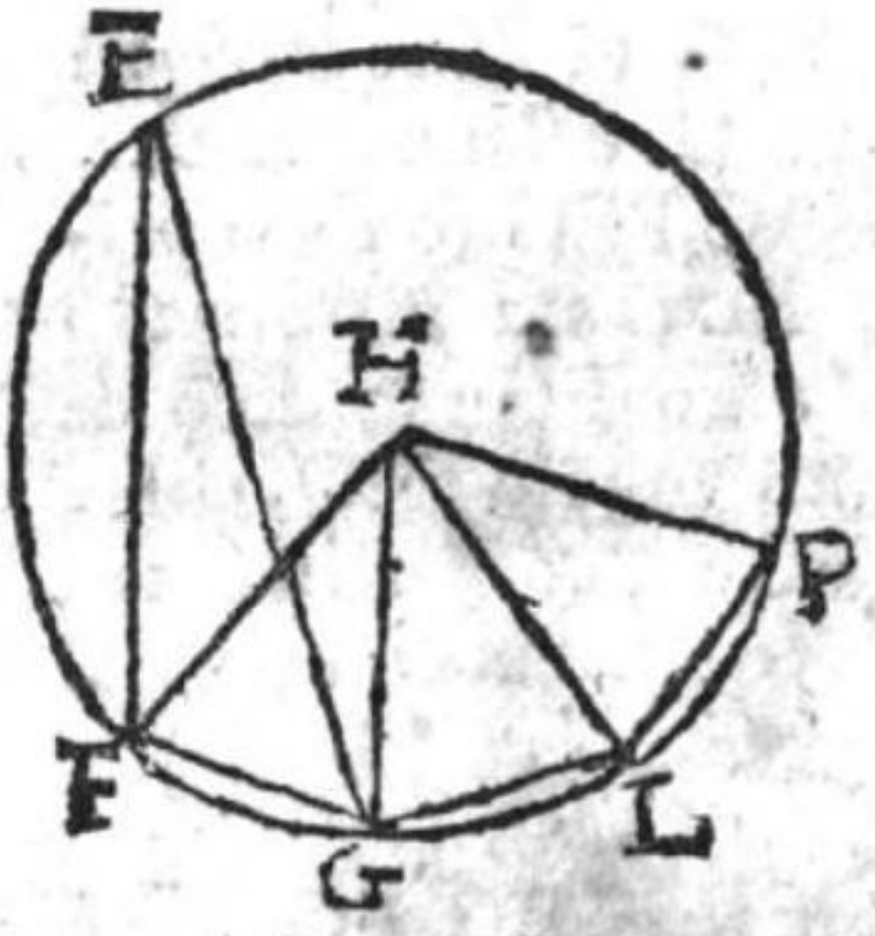
I. Perchè i due raggi BD, ID sono eguali fra loro, ed il raggio DC è comune, saranno i due lati BD, DC del triangolo BDC eguali a' due lati ID, DC del triangolo IDC ciascuno a ciascuno; quindi essendo di più la base BC eguale alla base CI, sarà l'angolo BDC eguale all'angolo IDC; laonde l'angolo BDI sarà doppio dell' angolo BDC: di più essendo della costruzione

Digitalizzato da Google



*pro.28. III.

la corda BC eguale alla corda CI, sarà l'arco BC eguale (*) all' arco CI; il perche l'arco BCI sarà doppio dell' arco BC; e per conseguente l'angolo BDI, e l'arco BI sono egualmente moltiplici dell' angolo BDC, e dell'arco BC. Nell' istessa maniera si dimostrerà, che l' angolo FHP, e l'arco FLP siano egualmente moltiplici dell' angolo FHG, e dell' arco FG. Ora se l'angolo BDI è eguale all' angolo FHP, sarà l'arco BCI eguale all'arco (*) FLP; e se l'angolo BDI è maggiore, o minore dell'angolo FHP, sarà



* pro.27. III.

ancora l'arco BCI maggiore, o minore dell' arco FLP; quindi avendo due ragioni, la prima delle quali è fra l'angolo BDC, e l'angolo FHG, e l'altra è fra l'arco BC, e l'arco FG, ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, i quali sono l'angolo BDI, e l'arco BCI sono entrambi o eguali, o maggiori, o minori degli egualmente moltiplici de' conseguenti, che sono l'angolo FHP, e l'arco FLP, ne siegue che le

* def.6. V. suddette due ragioni siano eguali fra loro (*); e per conseguente, che l'angolo BDC sia all'angolo FHG, come sta l'arco BC all'arco FG.

II. L'angolo BDC è doppio dell'angolo BAC,

* pro.20. III. e l'angolo FHG è doppio dell' angolo FEG (*): quindi come sta l'angolo BDC all'angolo FHG,

co-

Digitalizzato da Google

così ſtarà l'angolo BAC all' angolo FEG (*): ma ſi è dimoſtrato, che l'angolo BDC ſia all' angolo FHG, come ſta l'arco BC all' arco FG: dunque ſarà ancora (*) l'angolo BAC all' angolo FEG, così l'arco BC all'arco FG. * pro. 15. V. * pro. 11. V.

III. Eſſendo l'arco BC dalla coſtruzione eguale all'arco CI, ſarà la circonferenza rimanente BAC eguale alla circonferenza rimanente CBAI, e per conſeguente l'angolo BMC, che inſiſte alla prima circonferenza ſarà eguale (*) all'angolo CNI, il quale inſiſte alla ſeconda circonferenza; quindi le due porzioni di cerchio BMC, CNI ſaranno ſimili fra loro; ma le baſi BC, CI delle ſuddette porzioni ſono eguali, dunque eſſe porzioni ſaranno ancora eguali (*); ſicche eſſendo ancora eguali i triangoli DBC, DCI per la propoſizione 1 v. del libro I. ſaranno eguali i ſettori DBMC, DCNI, e per conſeguente il ſettore DBCI ſarà doppio del ſettore DBMC; il perche il ſettore DBCI, e l'arco BCI ſaranno egualmence moltiplici del ſettore DBMC, e dell' arco BC. Similmente ſi dimoſtrerà, che il ſettore HFGLP, e l'arco FGLP ſiano egualmeute moltiplici del ſettore HFG, e dell' arco FG; ora ſe l'arco BCI è maggiore, minore, ovvero eguale all' arco FGLP, ancora il ſettore DBCI ſarà maggiore, minore, ovvero eguale al ſettore HFGLP: quindi avendo due ragioni, la prima delle quali è fra l'arco BC, e l'arco FG, l'altra è fra il ſettore DBC, ed il ſettore HFG, ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, i quali ſono l'arco BCI, ed il ſettore DBCI ſono entrambi maggiori, minori, ovvero eguali agli egualmente moltiplici de' conſeguenti, che ſono l'arco FGLP, ed il ſettore HFGLP, ne ſiegue, che le ſuddette due ragioni ſiano eguali, e che per conſeguente l' arco BC ſia all' arco FG come ſta il ſettore * pro. 27. III. * pro. 24. III.

Digitalizzato da Google

DBC al settore HFG; ciocche doveva dimostrarsi.

COROLLARJ.

Quindi ne siegue I. che il settore DBC sia al settore HFG come sta l'angolo BDC all' angolo FHG, ovvero come sta l'angolo BAC all' angolo FEG: imperciocche l'angolo BDC sta all' angolo FHG, come l'arco BC all' arco FG, e nell' istessa ragione è l'angolo BAC all'angolo FEG. II. che l'angolo al centro BDC sia a quattro angoli retti, come l'arco BC a tutta la circonferenza del cerchio: imperciocche l'angolo al centro BDC sta ad un'angolo retto, come l'arco BC alla quarta parte della circonferenza del cerchio; dacche poi facilmente si deduce, che l'angolo al centro BDC sia a quattro angoli retti, come l'arco BC a tutta la circonferenza del cerchio.

RI-

Digitalizzato da Google

RICAPITOLAZIONE
DEL
LIBRO VI.
DEGLI ELEMENTI
DELLA GEOMETRIA PIANA.

Il ſoggetto di queſto ſeſto libro è l'applicazione della dottrina delle proporzioni dimoſtrata generalmente nel libro antecedente a' caſi particolari, vale a dire alle linee, agli angoli, ed alle figure; e noi dovendo ricapitolarlo ſeguiteremo queſto iſteſſo ordine: cioè metteremo in primo luogo le propoſizioni che concernono le linee; poi quelle, che concernono gli angoli; e finalmente quelle che riguardano le figure.

Teoremi concernenti le linee.

I. (*) Se quattro linee rette ſono proporzionali il rettangolo formato dalle due eſtreme ſarà eguale al rettangolo formato dalle due mezze. *Viceverſa* ſe vi ſono quattro linee rette, e ſia il rettangolo formato dalle due eſtreme eguale al rettangolo formato dalle due mezze, le quattro ſuddette linee ſaranno proporzionali. II. (*) Se tre linee rette ſono proporzionali, il rettangolo formato dalle due eſtreme ſarà eguale al quadrato formato ſopra la mezza. *Viceverſa* ſe

* *pro.* 16.

* *pro.* 17.

Digitalizzato da Google

ſono tre linee, e ſia il rettangolo formato dalle due eſtreme eguale al quadrato formato ſopra la mezza le tre ſuddette linee ſaranno proporzionali: *Queſte due propoſizioni ſono vere, ancorche dalle linee rette eſtreme, e mezze ſe formino non già rettangoli, ma due qualiſivogliano parallelogrammi equiangoli: di fatto le dimoſtrazioni, che anno luogo ne' rettangoli anno ancora luogo in tutti i parallelogrammi equiangoli.*

Problemi appartenenti alle linee.

** pro. 9.* I. (*) Da una linea retta data tagliarne una parte ordinata; *vale a dire tagliarne una parte, la quale ſia a tutta la linea in ragione dell' unità*
** pro. 10.* *a qualſivoglia numero intiero*. II. (*) Date due linee rette una delle quali ſia diviſa in molte parti, e l'altra ſia indiviſa, ſegare l'indiviſa nell' iſteſſa maniera, che è ſegata la linea retta diviſa.
** pro. 11.* III. (*) Date due linee rette ritrovare in or-
** pro. 12.* dine ad eſſe la terza proporzionale. IV. (*) Date tre linee rette ritrovare in ordine ad eſſe la
** pro. 13.* quarta proporzionale. V. (*) Date due linee rette ritrovare in ordine ad eſſe la mezza propor-
** pro. 30.* zionale. VI. (*) Data una linea retta ſegarla ſecondo l'eſtrema, e mezza ragione. *Queſto Problema ricade nella propoſizione* XI. *del libro* II. *nella quale ſi propone a* ſegare una linea retta data, in modo che il quadrato della parte maggiore ſia eguale al rettangolo formato da tutta la linea retta data, e dalla parte minore: *imperciocche ſegare una linea retta ſecondo l'eſtrema, e mezza ragione non vuol dire altro, ſe non che ſegarla in modo, che tutta la linea ſia alla maggior porzione, come l'iſteſſa maggior porzione alla minore: che è l'iſteſſo a dire, che il quadrato della porzione maggiore ſia eguale al rettangolo formato da tutta la linea, e dalla porzione minore.*

Teo-

Digitalizzato da Google

Teoremi appartenenti agli angoli, agli archi, ed a' settori de' cerchi.

I. (*) Ne' cerchi eguali gli angoli, così a' centri, come alle circonferenze sono fra loro come gli archi a' quali insistono. Similmente i settori de' cerchi eguali sono fra loro come gli archi, come gli angoli a' centri, e come gli angoli alle circonferenze insistenti agli archi istessi de' settori. II. (*) Ogni angolo al centro sta a quattro angoli retti, come sta l'arco al quale insiste l'angolo al centro a tutta la circonferenza. *Siccome poi l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, così ne segue, che* ogni angolo alla circonferenza sia a quattro angoli retti, come la metà dell'arco al quale egli insiste a tutta la circonferenza, ovvero come tutto il suddetto arco a due volte la circonferenza.

* *pro.* 33.

* *Cor. della pro.* 33.

Teoremi concernenti certi triangoli.

I. (*) Se in un triangolo rettangolo si faccia dall'angolo retto cadere una perpendicolare sopra la base, questa perpendicolare dividerà il triangolo in due triangoli, che sono simili fra loro, e sono di più simili a tutto il triangolo rettangolo. *Dal qual Teorema ne siegue in primo luogo,* che ciascuno de' due lati del triangolo rettangolo sia mezzo proporzionale fra l'ipotenusa, e la porzione dell'istessa ipotenusa adjacente al lato. Secondo che la perpendicolare sia mezza proporzionale fra i segamenti della base. II. (*) Se sopra l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo s'intende descritta qualsivoglia figura rettilinea, e sopra li due lati dell' istesso triangolo rettangolo s'intendano descritte due altre figure rettilinee simili, e similmente poste alla figura de-

* *pro.* 8.

* *pro.* 31.

Digitalizzato da Google

descritta sopra l'ipotenusa: sarà questa sola eguale alle due suddette figure unite insieme: *questa proposizione è molto più generale della proposizione* XLVII. *del libro* I. *nella quale si paragona il quadrato dell' ipotenusa, co' quadrati descritti sopra i lati, che comprendono l'angolo retto.*

Teoremi concernenti tutti i triangoli.

*pro.2. I. (*) Se in un triangolo qualsivoglia s'intende tirata una linea parallela alla base, essa segherà i due lati proporzionalmente. *Viceversa* se i due lati d'un triangolo siano segati proporzionalmente, la linea retta, che uuisce i due segamenti sarà parallela alla base. *pro.3. II. (*) Se l'angolo contenuto da' due lati d'un triangolo qualsivoglia sia segato per mezzo da una linea retta, questa segherà la base nell'istessa proporzione de' lati. *Viceversa* se una linea tirata dal vertice d'un triangolo seghi la base nell' istessa proporzione de' lati, essa segherà l'angolo verticale del triangolo per mezzo.

Comparazione de' triangoli.

*pro.1. I. (*) I triangoli che anno l'istessa altezza sono fra loro in ragione delle basi; *questa proposizione è molto più generale delle proposizioni*, XXXVII., *e* XXXVIII. *del libro* I. *nelle quali si dimostra*, che i triangoli costituiti sopra l'istessa base, ovvero sopra basi eguali, e fra l'istesse parallele sono eguali fra loro. *E qui ha luogo la conversa tralasciata da Euclide, la quale si deve concepire così.* Li triangoli, che sieguono la ragione delle loro basi anno, o per lo meno possono avere l' istessa altezza. *pro.15. II. (*) Se due triangoli sono eguali fra loro, ed anno di più un' angolo eguale ad un'angolo, avranno i lati intorno

gli

Digitalizzato da Google

gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. *Viceversa* se due triangoli anno un'angolo eguale ad un'angolo, ed anno di più i lati intorno cotesti angoli reciprocamente proporzionali, essi saranno eguali. III. (*) I triangoli simili sono in ragione duplicata de' lati omologi. *Dacche poi siegue che* se tre linee rette sono continuamente proporzionali il triangolo descritto sopra la prima sia al triangolo simile, e similmente posto descritto sopra la seconda, come la prima alla terza: *imperciocche ancora la prima alla terza è in ragione duplicata della prima alla seconda.* IV. (*) Se due triangoli anno due lati proporzionali a due lati, ed oltre a questo congiunti in un'angolo anno i lati omologi paralleli fra loro, le basi de' suddetti triangoli giaceranno a dirittura. * *pro.19.* * *pro.32.*

Della similiarza de' triangoli.

Secondo la definizione I. di questo libro due triangoli allora sono simili, quando anno gli angoli eguali agli angoli ciascuno a ciascuno, ed oltre a ciò i lati intorno gli angoli eguali sono proporzionali. Ora Euclide *ci ha suggerito quattro contrassegni, per conoscere se due triangoli sono simili. Il* I. *è* (*) Se essi sono equiangoli; imperciocche essendo tali i lati intorno gli angoli eguali saranno ancora proporzionali. *Il* II. *è* (*) Se essi anno i lati proporzionali; imperciocche avendo i lati proporzionali, saranno parimente equiangoli. *Il* III. *è* (*) Se due triangoli anno un'angolo eguale ad un'angolo, ed intorno a cotesti angoli anno i lati proporzionali; imperciocche in tal supposto gli altri due angoli saranno rispettivamente eguali agli altri due angoli, ed i lati intorno gl' istessi angoli saranno proporzionali. *Il* IV. *finalmente è* (*) Se due triangoli anno un' angolo eguale ad un' angolo, anno di * *pro.4.* * *pro.5.* * *pro.6.* * *pro.7.*

Digitalizzato da Google

più intorno due altri angoli i lati proporzionali, e finalmente anno gli angoli rimanenti dell'istessa specie: vale a dire tutti due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottusi; imperciocche verificandosi queste tre condizioni, essi saranno equiangoli, e per conseguente simili.

Gli accennati quattro Teoremi sono generalissimi, e contengono sotto di loro altrettanti Teoremi meno generali, li quali si ritrovano dimostrati nel libro I. *Per fare il confronto degli uni cogli altri, fa duopo ricordarsi, che se due triangoli anno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, essi saranno equiangoli; imperciocche li rimanenti angoli devono per necessità essere eguali: quindi il primo de' quattro Teoremi generali intorno la similianza de' triangoli si potrà enunciare così.* Se due triangoli anno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, essi avranno li lati proporzionali, e per conseguente saranno simili. *Ora se due lati omologi de' suddetti triangoli siano eguali fra loro, gli altri saranno parimente eguali, siccome ancora saranno eguali fra loro i triangoli; di modo che allora si ricade nella proposizione* XXVI. *del libro* I., *nella quale si dimostra*, che se due triangoli anno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, ed anno oltre a questo un lato eguale ad un lato, o che cotesti lati eguali siano adjacenti agli angoli eguali, o che stiano dirimpetto ad uno di essi, tutte le altre cose saranno eguali fra loro. *Il secondo Teorema vuole, che* se due triangoli abbiano i lati proporzionali siano equiangoli: *Ora supponendo, che la ragione de' lati d'un triangolo a' lati dell' altro sia ragione di egualità si ricade nella proposizione* VIII. *del libro* I., *nella quale si dimostra*, che se due triangoli anno due lati eguali a' due lati ciascuno a ciascuno, e la base eguale alla base, essi debbano avere tutti gli angoli eguali a tutti gli an-

Digitalizzato da Google

angoli ciascuno a ciascuno. *Il terzo Teorema vuole*, che se due triangoli anno un'angolo eguale ad un'angolo, ed intorno a cotesti angoli anno i lati proporzionali, essi saranno equiangoli, e simili: *nel quale Teorema se si suppone, che la ragione de' due lati d'un triangolo a due lati dell' altro sia di egualità si ricaderà nella propositione* IV. *del libro* I., *nella quale si dimostra*, che se due triangoli anno i due lati eguali a' due lati ciascuno a ciascuno, e l'angolo contenuto sotto i lati del primo eguale all'angolo contenuto sotto i lati dell'altro, essi avranno tutte le altre cose eguali a tutte le altre cose. *Finalmente il quarto Teorema vuole*, che se due triangoli anno un'angolo eguale ad un' angolo, intorno a due altri angoli i lati proporzionali, e li rimanenti angoli dell' istessa specie, cioè tutti due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottusi, essi saranno equiangoli, e per conseguente simili: *nel qual Teorema supponendo, che la ragione de' due lati del primo triangolo a' due lati dell' altro sia ragione di egualità, si ricade nel Teorema aggiunto, registrato nella ricapitolazione del libro* I.

Comparazione de' parallelogrammi.

I. (*) Se due parallelogrammi anno l'istessa altezza essi seguono la ragione delle loro basi. *Questa propositione è molto più generale delle propositioni* XXXV., *e* XXXVI. *del libro* I., *nelle quali si dimostra, che* i parallelogrammi costituiti sopra l'istessa base, ovvero sopra basi eguali, e fra le medesime parallele sono eguali fra loro. *E quì ha luogo la converſa tralasciata da Euclide, la quale si deve enunciare così*. Se due parallelogrammi seguono la ragione delle basi, essi anno l'istessa altezza. II. (*) Se due parallelogrammi sono eguali fra loro, ed anno di più un'angolo

* *pro.* 1.

* *pro.* 14.

lo

lo eguale ad un' angolo, essi avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. *Viceversa* se due parallelogrammi anno un'angolo eguale ad un'angolo, ed anno di più i lati intorno cotesti angoli reciprocamente pro-

* *pro.* 23. porzionali, essi saranno eguali fra loro, III. (*) Li parallelogrammi equiangoli anno quell'istessa ragione, che nasce componendo insieme le ragioni de' lati, che sono intorno gli angoli eguali.

* *pro.* 24. IV. (*) Li parallelogrammi costituiti intorno la diagonale d'un'altro parallelogrammo sono simili fra loro, e sono di più simili a tutto il pa-

* *pro.* 26. rallelogrammo. V. (*) Viceversa se da un parallelogrammo se ne tragga un'altro parallelogrammo simile, e similmente posto al suddetto parallelogrammo, ed abbia di più un'angolo comune coll'istesso parallelogrammo, essi si ritroveranno costituiti intorno l'istessa diagonale. VI.

* *pro.* 27. (*) Fra tutti i parallelogrammi adattati sopra una linea retta data, li quali mancano di altrettanti parallelogrammi simili, così fra loro, come ad un parallelogrammo descritto ad arbitrio sopra la mettà della linea retta data, il più grande è il parallelogrammo descritto sopra la mettà, il quale manca d'un'altro parallelogrammo simile, ed eguale a se medesimo.

Comparazione di tutte le figure rettilinee.

* *pro.* 20. I. (*) Le figure rettilinee simili si dividono in tanti triangoli, eguali di numero, simili fra loro ciascuno a ciascuno, e proporzionali a tutte le figure rettilinee. Oltre a questo le figure rettilinee simili sono in ragion duplicata de' lati omologi. *Dacche poi siegue*, che se vi sono tre linee rette proporzionali, la prima sta alla terza, come la figura descritta sopra la prima alla figura simile, e similmente posta descritta sopra la

Digitalizzato da Google

la seconda . II. (*) Se due figure rettilinee so- * *pro.*21.
no simili ad una terza figura rettilinea, esse sa-
ranno simili fra loro . III. (*) Se quattro li- * *pro.*22.
nee rette sono proporzionali, e sopra la prima,
e la seconda s'intendano descritte due figure ret-
tilinee simili, e similmente poste, siccome anco-
ra sopra la terza, e la quarta s'intendano descrit-
te due altre figure rettilinee simili, e similmente
poste, saranno coteste quattro figure così de-
scritte proporzionali. *Viceversa* se vi sono quat-
tro linee rette tali, che le figure rettilinee simili,
e similmente poste descritte sopra la prima, e se-
conda siano proporzionali alle figure rettilinee
simili, e similmente poste descritte sopra la ter-
za, e la quarta, le suddette quattro linee rette
saranno proporzionali.

Problemi concernenti le figure.

I. (*) Descrivere sopra una linea retta data * *pro.*18.
una figura rettilinea simile, e similmente posta
ad un'altra figura rettilinea data. II. (*) De- * *pro.*25.
scrivere una figura rettilinea, la quale sia simile
ad un'altra figura rettilinea data, e sia eguale
ad una terza figura rettilinea . III. (*) Sopra * *pro.*28.
una linea diritta data adattare un parallelo-
grammo, il quale sia eguale ad una figura retti-
linea data, e manchi d'un' altro parallelogram-
mo, il quale sia simile ad un parallelogrammo da-
to: *fa duopo però, che il parallelogrammo de-
scritto sopra la metà simile, e similmente posto al
parallelogrammo dato non sia maggiore della fi-
gura rettilinea data, altrimente il Problema riu-
scirebbe impossibile* . IV. (*) Sopra una linea * *pro.*29.
retta data descrivere un parallelogrammo, il
quale sia eguale ad una figura rettilinea data, ed
ecceda d'un parallelogrammo, il quale sia simile
ad un parallelogrammo dato.

Digitalizzato da Google

CONCHIUSIONE.

AVrei dovuto quì soggiugnere la ricapitolazione universale di tutti li sei libri di Euclide, mettendo insieme prima tutte le proposizioni concernenti le linee, poi tutte le proposizioni concernenti gli angoli, e finalmente tutte le proposizioni concernenti le figure. Ma siccome cotesta ricapitolazione facilmente si ricava dalle ricapitolazioni particolari de' suddetti sei libri, così tralascio di metterla quì; piuttosto noterò le proposizioni, che sono di maggior uso, e che per conseguente fa duopo mettersi bene in memoria. Le proposizioni più necessarie concernenti le linee sono le seguenti I. *Se una linea retta insiste sopra un'altra linea retta gli angoli, che sono di quà, e di là o sono retti, ovvero sono eguali a due retti*. II. *Se due linee si segano gli angoli al vertice sono eguali fra loro*. III. *Se due linee rette parallele sono traversate da una terza linea retta*. 1. *gli angoli alterni sono eguali*. 2. *l'angolo esteriore è eguale all'interiore opposto dall' istessa parte*. 3. *gli angoli interiori dall' istessa parte sono eguali a due retti*. IV. *Se una linea retta è segata ad arbitrio in due parti, il quadrato di tutta la linea è eguale a' quadrati delle due parti, insieme con due rettangoli contenuti sotto le due suddette parti*. V. *Se quattro linee rette sono proporzionali, il rettangolo formato dalle due linee estreme sarà eguale al rettangolo formato dalle due mezze*. VI. *Se tre linee rette sono proporzionali, il rettangolo formato dalle due estreme sarà eguale al quadrato formato da quella, che sta in mezzo*. Le proposizioni più necessarie concernenti gli angoli sono queste. I. *L'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza, purche entrambi abbiano l'istesso arco per base*. II.

Gli

Digitalizzato da Google

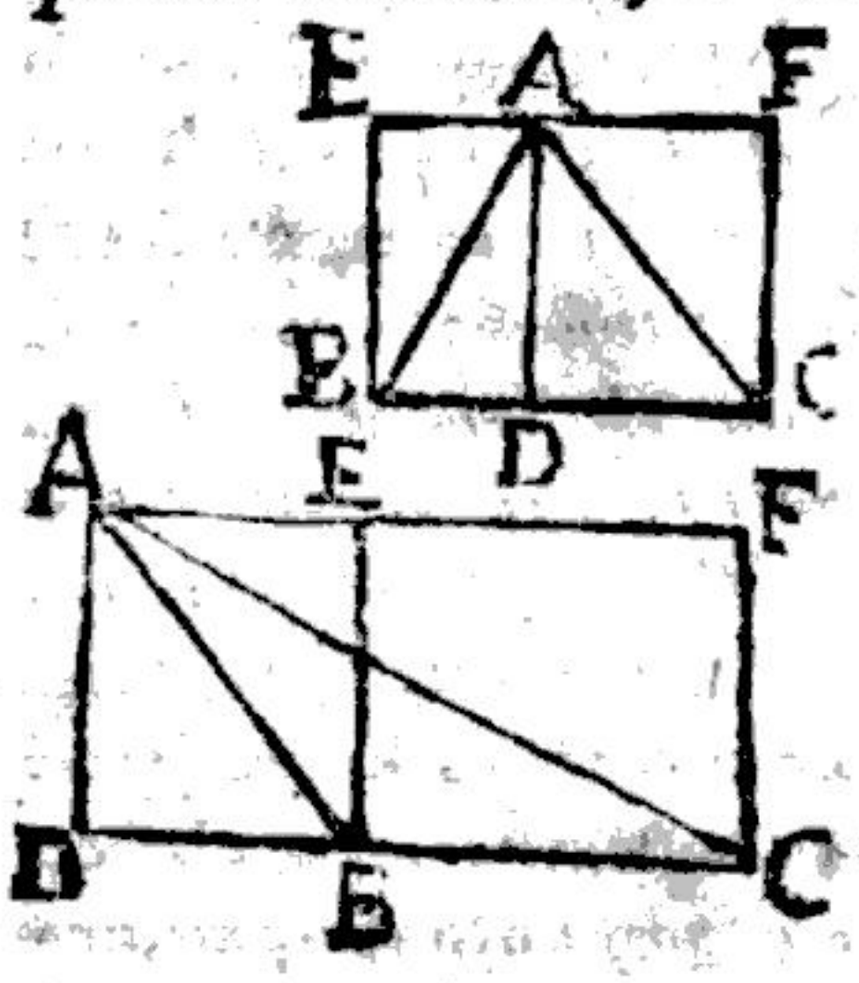
Gli angoli, che ſono nell iſteſſa porzione del cerchio ſono eguali fra loro. III. *L'angolo nel ſemicerchio è retto.* IV. *Ogni angolo al centro ſta a quattro retti, come l'arco a cui egli inſiſte a tutta la circonferenza del cerchio.* Finalmente le propoſizioni più neceſſarie concernenti le figure ſono le ſeguenti. I. *ne' triangoli iſoſceli gli angoli ſopra la baſe ſono eguali fra loro.* II. *In ogni triangolo l'angolo eſteriore è maggiore dell' uno, e dell' altro angolo interiore oppoſto preſi ſeparatamente: ma è aguale a tutti due uniti inſieme.* III. *In ogni triangolo tutti tre gli angoli ſono eguali a due retti.* IV. *Ne' triangoli rettangoli la figura fatta ſopra l'ipotenuſa è eguale alle figure ſimili, e ſimilmente poſte, deſcritte ſopra i due lati, che comprendono l' angolo retto.* V. *In ogni triangolo rettangolo, la perpendicolare, che cade dall'angolo retto ſopra l'ipotenuſa lo compartiſce in due triangoli ſimili fra loro, e ſimili a tutto il triangolo rettangolo.* VI. *Se due triangoli anno i lati proporzionali ſono ſimili.* VII. *I triangoli ſimili ſono in ragione duplicata de' lati omologi.* VIII. *In ogni parallelogrammo i lati, e gli angoli oppoſti ſono eguali fra loro, e la diagonale compartiſce il parallelogrammo in due triangoli eguali.* IX. *I triangoli, e li parallelogrammi, che anno l'iſteſſa altezza ſono fra loro in ragione dello baſi.* X. *Li parallelogrammi equiangoli anno quell' iſteſſa ragione, la quale naſce componendo le ragioni de' lati, che ſono intorno gli angoli eguali.* XI. *Le figure ſimili ſono in ragione duplicata de' lati omologi.*

Ad

Digitalizzato da Google

Addizione concernente la misura de' Triangoli, e de' Quadrilateri.

I. *Volendosi misurare il triangolo ABC, fa duopo dal vertice A far cadere la perpendicolare AD*

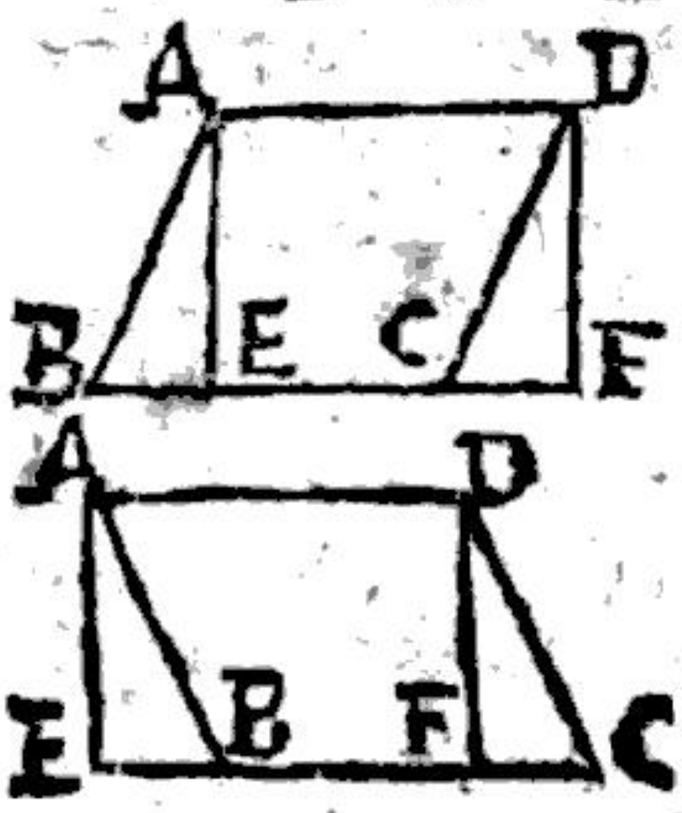


sopra la base BC portata innanzi (se bisogna): che poi moltiplicando insieme l'altezza AD, e la base BC, la metà del prodotto sarà il valore del triangolo ABC; come per esempio se la perpendicolare AD sia di 10. *piedi, e la base BC di* 12. *piedi, il prodotto dell' una per l'altra sarà* 120., *e per conseguente la superficie del triangolo in questione sarà* 60. *piedi quadrati. La dimostrazione della regola è facile. Per lo punto A s'intenda tirata la retta EAF parallela alla base BC, e per li punti B, e C s'intendano tirate le rette BE, CF parallele alla perpendicolare AD. Ciò fatto il parallelogrammo rettangolo EBCF, ed il triangolo ABC saranno costituiti sopra l'istessa base BC, e fralle medesime parallele EF, BC: quindi il triangolo sarà la metà del rettangolo: ma il rettangolo EBCF nasce moltiplicando la base BC del triangolo per la retta BE, ovvero per l'altezza AD del triangolo; dunque il triangolo ABC sarà eguale alla metà del suddetto prodotto, che nasce multiplicando la base BC per l'altezza AD.*

II. *Volendosi poi misurare una figura quadrilatera ABCD; fa duopo primieramente vedere, se*

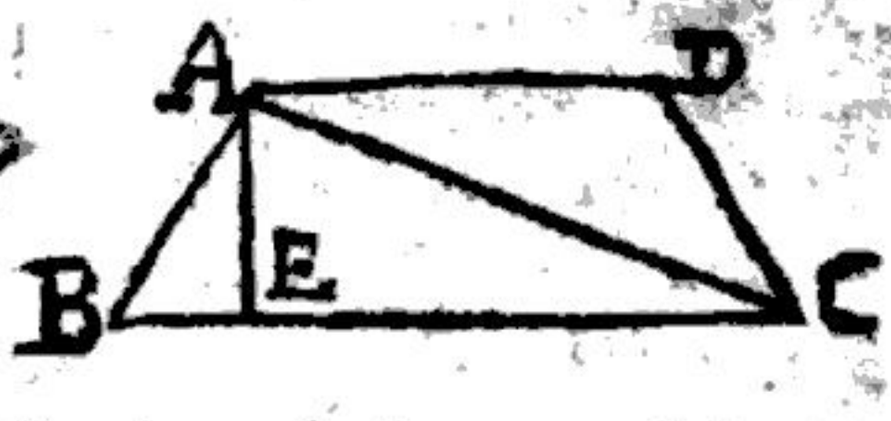
el-

Digitalizzato da Google



ella sia parallelogramma, o no. Se è parallelogramma si misurerà così: si faccia dall' angolo A cadere la perpendicolare AE sopra il lato BC portato innanzi (se bisogna); che poi moltiplicando insieme l'altezza AE, e la base BC, il prodotto sarà il valore del parallelogrammo ABCD: come per esempio, se la perpendicolare sia di 8. piedi, e la base BC sia di 9. piedi, il parallelogrammo ABCD sarà di 72. piedi quadrati: Per dimostrare cotesta regola s'intenda dal punto D cadere la perpendicolare DF sopra l'istessa BC; la comparazione de' due triangoli AEB, DFC fa vedere, che BE sia eguale a CF, e per conseguente aggiugnendo commenente BF, sarà EF eguale a BC; quindi i due parallelogrammi AEFD, ABCD costituiti sopra eguali basi, e fralle medesime parallele saranno eguali fra loro: ma il rettangolo AEFD nasce moltiplicando AE per EF, ovvero per la sua eguale BC; dunque anco il parallelogrammo ABCD nascerà moltiplicando l'altezza AE per la base BC.

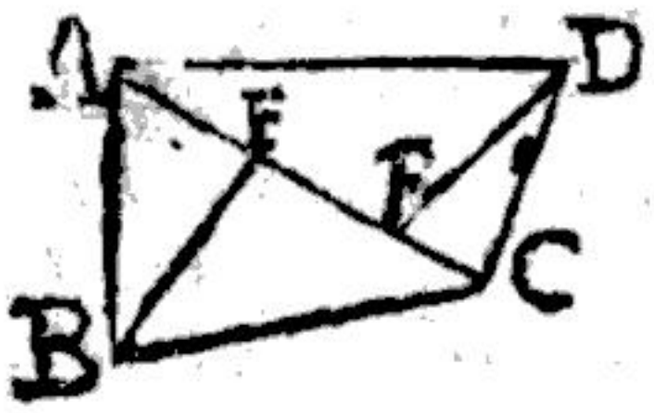
III. Ma la figura quadrilatera ABCD non essendo parallelogramma possono accadere due casi. Il primo caso è quando due lati opposti AD, BC sono paralleli; allora per aver la misura del trapezio ABCD basterà far cadere dal punto A la perpendicolare AE; che poi moltiplicando la somma de' due lati paralleli AD, BC per la perpendicolare AE, la metà del prodotto sarà il valore del trapezio in questione. Come per esempio se AD sia di 6. piedi, BC sia di 8. piedi, e l'altezza AE sia di 4. piedi, il trapezio ABCD riuscirà di 28. piedi quadrati. Per dimostrare co-



te-

Digitalizzato da Google

testa regola bisogna congiungere la retta AC, che così il trapezio rimarrà compartito in due triangoli ABC, ADC, ciascuno de' quali avrà AE per altezza: quindi siccome il triangolo ABC è eguale alla mettà del prodotto di BC per AE, ed il triangolo CDA è eguale alla mettà del prodotto di AD per AE, così il trapezio ABCD sarà eguale alla mettà del prodotto di BC, ed AD insieme per l'altezza AE. L'altro caso è quando il trapezio non ha due lati opposti paralleli: in tal caso per misurare il trapezio fa duopo congiugnere la diagonale AC, e fare sopra di essa cadere da' punti B, e D le perpendicolari BE, DF: che poi moltiplicando insieme la somma delle due suddette perpendicolari per la diagonale AC, la mettà del prodotto sarà il valore del trapezio in questione: come per esempio se la diagonale AC sia di 20. piedi, la perpendicolare BE sia di 8. piedi; e la perpendicolare DF sia 6. piedi; multiplicando insieme la diagonale AC per la somma delle perpendicolari BE, DF il prodotto sarà 280.; di modo che la superficie del trapezio riuscirà di 140. piedi quadrati. La dimostrazione della regola è facile: imperciocchè per misurare il trangolo AEC; fa duopo moltiplicare la base AC per l'altezza BE, e prendere la mettà del prodotto; siccome ancora per misurare il triangolo ADC, fa duopo moltiplicare l'istessa base AC per l'altezza DF, e prendere la metta del prodotto: quindi per misurare il trapezio ABCD, bisognerà multiplicare la diagonale AC per la somma delle due perpendicolari BE, DF, e dal prodotto prenderne la mettà.



FINE.

AOI 1462665

Digitalizzato da Google

Marca Julia pag 61 a 66

Digitalizzato da Google