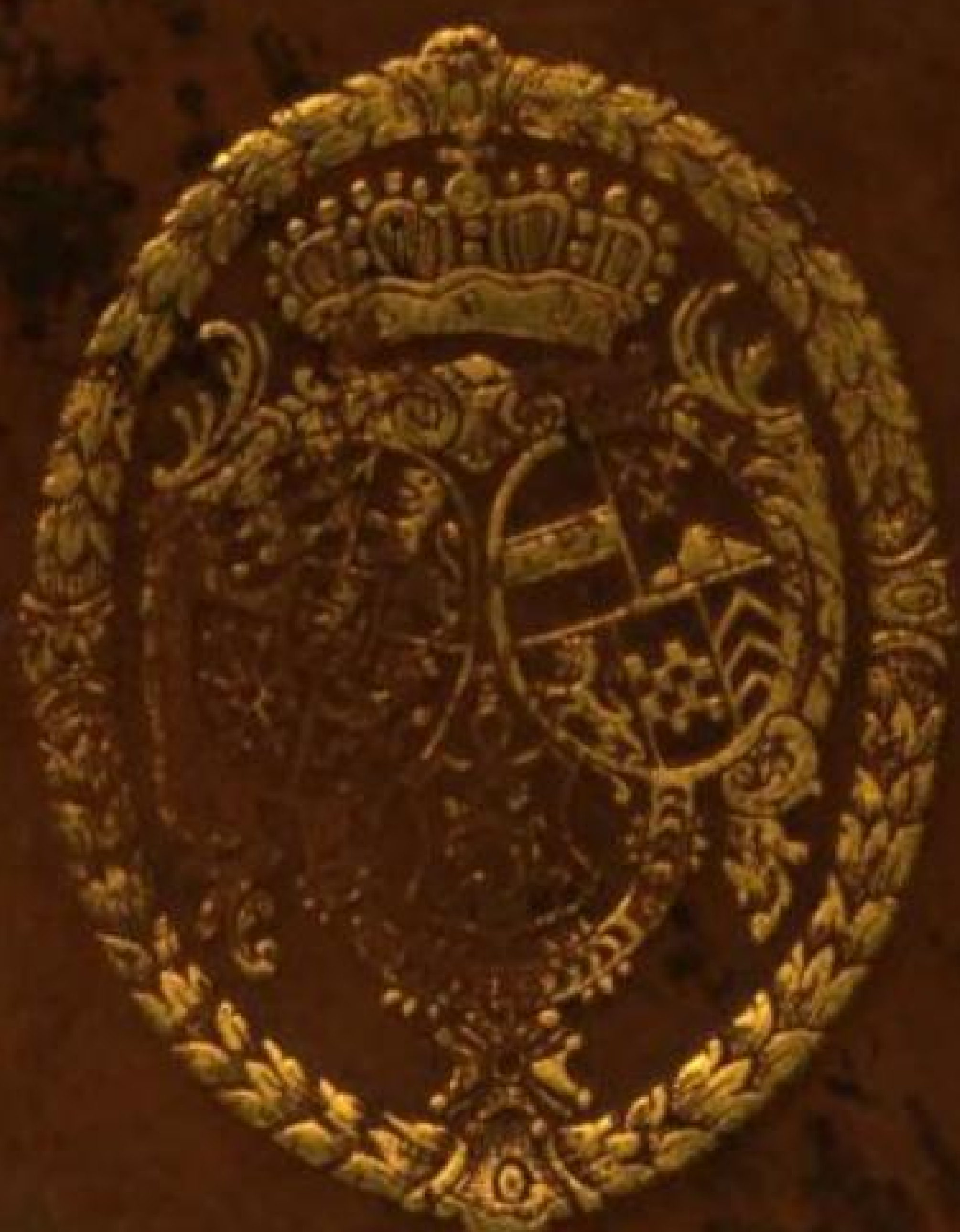
R



Grandi

Mathesis. Geometria specialis

289.

Die Figurentafeln
fehlen

SECTIONVM
CONICARVM
SYNOPSIS.

SECTIONVM
CONICARVM
SYNOPSIS
CLAR. VIRI
D. GVIDONIS GRANDI
CREMONENSIS
Abbatis Camaldulensis, Olim in Pisana Vniversitate Mathematicae Publici Professoris
ADDITAMENTIS, SCHOLIIS, COROLLARIIS, ET SCHEMATIBVS
AVCTA
A D. OCTAVIANO CAMETTI
VERCELLENSI
ORDINIS S. BENEDICTI
Congregationis Vallis-Vmbrosae, & in eadem Vniversitate Publico Matheseos Professore.

FLORENTIAE ANNO MDCCL. S. C.
Ex Typographio Ioannis Paulli Giovannelli.
SUPERIORUM PERMISSU.

EDITOR

AD LECTOREM.

CVM Sectionum Conicarum Synopsis commentariis meis adaucta, quae Romae primùm, Venetiis iterùm, tertióque impressa est, non in textu solùm, sed in additamentis etiam, figurisque menda plura contineat, quae Tyrones saepènumeró immorantur; non abs re futurum putavi, si alteram editionem pararem, in qua errores, qui Typographorum oscitantia irrepserant, delerem, & Schemata in quibus Chalcographus ab instituto deflexerat, accuratiùs formari conarer: quod utrumque pro mei ingenii viribus praestitisse me arbitror in

prae-

praesentiâ. Quoniam verò usu compertum, exploratumque mihi est, demonstrationes faciliùs percipi a Tyronibus, si in textu locati fuerint commentarii, quam si essent ab eodem seiuncti; illos idcircò diverso charactere impressos, & parenthesi intercaeptos textui sic adiunxi, ut ea, quae Auctor indemonstrata passim reliquit, stricto quidem, sed perspicuo ostenderim ratiocinio; quae verò breviùs, obscuriùsque demonstravit, suppletis quibusdam, & evidentiùs expositis nexibus illationum, faciliora reddiderim, Tyronumque captui accommodata. Cum autém in perlustrandâ hac Sectionum Conicarum Synopsi illud incommodi perferatur, quod nimirúm propositiones non raro occurrant, quae veritates aliquot praesupponunt, nec in Euclideis Elementis expressas, nec in Theorematis praecedentibus demonstratas; necessum fuit, nonnullis propositionibus

bus

bus Lemmata anteferre, aliquibus verò Scholia, & Consectaria subnectere, quae veluti sternant viam ad subsequentia demonstranda. Auctoris textus ut integer servaretur, curavi; duobus tamén, tribusvè locis exceptis, in quibus, Auctoris mente servatâ, unum, alterumque verbum oportuit immutari, ut indè clarior, planiorque fieret demonstratio. Nullas praetereo, ubi necessariae omninó sunt, citationes propositionum Euclidis, à Tacqueto sumptarum, quas minùs saepè innuere Clarissimus Auctor solet, licét illis magna ex parte innixa sit Theorematis demonstratio. Atque haec sunt, Amice Lector, commentaria, quibus maximè indigebat Sectionum Conicarum Synopsis, ut à Tyronibus posset proprio marte, & inoffenso pede percurri. Nè opus istud erroribus vitiaretur, summam curam impendi; siqua tamen oculorum aciem fugerint, aut inter excudendum

de

delapsa fuerint menda, ea ut Tu ipse tollas, enixè oro, obtestorque. Si, uti spero, hos conatus qualescumque benignè exceperis, Geometriam quoquè novâ methodo demonstratam propediem operâ meâ, iisdemque Typis in lucem prodituram, polliceor. Vale.

PRAEFATIO.

SEctionum Conicarum Doctrina, tum scitu valde jucunda, tum maximae utilitatis censenda est, cùm earum cognitio, non tantùm meris Geometris, sed & Philosophis, Astronomis, Opticis, Horographis, & Architectis necessaria sit, & physicis speculationibus, ac plurimis mechanicis usibus admodùm opportuna. Sanè terrestrium corporum transversim projectorum motus per curvas Parabolicas distenditur, ob proximas gravitatis directiones, pro parallelis sensibiliter habitas, utpote ad centrum maximè distans respicientes; consideratis autem iisdem directionibus, in rigore non aequidistantibus, sed revera invicem inclinatis, utpote ad terrae centrum convenientibus; curvarum Ellipticarum arcus à projectis describitur, cujus remotior Focus ad ipsum globi terrestris centrum pertinet, Focus autem proximior idem est, qui ad Parabolam *pertineret, si dictæ gravium directiones pro parallelis essent acceptae. Ita etiam Orbitae Planetarum circa Solem, & cujusvis Satellitis circa primarium ejus Planetam*, Ellipticae *describuntur, juxta Kepleri, & Neutoni hypothesim: Porro, in Reflexionibus, & Refractionibus quoque aptè disponendis, harum Sectionum Conicarum cognitio requiritur, quippe ex earum Focis pendet reflexio radiorum, qui aut in unum punctum concurrant, ubi ignem accendant, sive in illud dumtaxat colliment, ut obiecti proximiorem imaginem reddant, vel paralleli remittantur, ut eandem fermè intensionem ad maximam distantiam servent: quin & eorundem radiorum refractio lentes exigit, aut meniscos*, Ellipticis, *aut* Hyperbolicis, *seu* Parabolicis, *&* Circularibus *figuris superficiem rotatam habentes, ut ex earum Focis refractorum radiorum coniunctio, vel in proximius punctum collimatio quaesitos reddat effectus In horologiis etiam solaribus umbra styli gnomonici, in plano, cui insistit*, Hyperbolas *plerumque describit, in aliquo etiam situ* Parabolas, *in alio* Ellipses, *ad quas lineae horariae suos terminos habent. Quin & ab Architectis arcus* Elliptici *saepe in aedifi-*

ciis

ciis sunt describendi, & Fornices, terminis non horizontaliter positis insistentes, in Parabolicae, *aut* Hyperbolicae *figurae speciem disponendos tradidit Cl. F. Blondellus in sua Architectura; Veliformis autem Florentina Testudo, ex hemisphero per quatuor fenestras abscissa quadrabilis, Ichnographiam* Parabolicam *habet, ac perimetrum suarum cavitatum* Ellipticae *curvae aequalem, ut in geometrica demonstratione Problematum Cl. Vincentii Viviani, qui hujusce formae Testudinem proposuerat, ipse demonstravi* pag. 37. & 136. *dicti Operis: imò & Militaribus Architectis, cavitatem Cuniculorum, pyrio pulvere, in obsidionibus, complendam,* Parabolica *curvatura disponi debere tradit Cl. Bernardus Belidorus in suo novo cursu Mathematico* num. 609.

Cum verò adeò utilis ejusmodi Sectionum Conicarum scientia, nimis longa methodo, in Magni Geometræ Apollonii Pergæi libris exposita videatur, ubi quandoque binas, aliquando ternas foliorum facies implet unius Theorematis, aut Problematis demonstratio; ideò magis congruum reputavi, præcipuas harum curvarum proprietates, cum quibusdam aliis recentius inventis, hac breviori Synopsi, *compendiosiùs tradere, ut tempore non admodum prolixo studiosi Adolescentes illas discere faciliori methodo possint; id quod etiam Eruditi Lypsienses comprobarunt, dum similis illius mei compendii Sectionum Conicarum, italico idiomate dudùm expositi, & anno 1722 Florentiae impressi, Relationem exhibentes in supplementis suorum Actuum.* Tomo VIII. *anno* 1724. *edito* pag. 434. *ita sententiam suam exprimunt.* In tanto numero scriptorum, qui tradunt proprietates Sectionum Coni, etiamnum desiderabatur liber aliquis, mole parvus, materia plenus, in demonstrationibus brevis, & quod palmarium est, ad Veterum methodum conscriptus Rem igitur fecit gratissimam, & utilissimam Geometriae Studiosis celeberrimus Grandus, qui tam eleganter, tam copiosè, & tanta nihilominus brevitate persecutus est hanc partem Geometriae, quam in Scholis plerique vix hactenus attigerunt, spissitudine voluminum, vel analyticis characteribus deterriti, & idcircò ultra Elementa Euclidis rarò progressi.

Et quoniam ibidem pag. 435. *monent iidem Eruditi Lypsienses*, Cl. Christianum Aug. Hausen, *in ipsa Lypsiensi Accademia*,

mia, Matheseos Professorem, utilitate operis permotum, inter perlegendum, versionem hujus Opusculi latinam adornasse, in gratiam Auditorum, brevi cùm lectionibus ejus Geometricis prodituram, & ab originali suo non differentem &c. *de quo etiam testantur, quod alicubi* demonstrationes interdum breviores, & concinniores, suppletis quibusdam, & evidentiùs espositis illationum nexibus, faciliores effecerit, & Figuras, in quibus Chalcographus ab hypothesi aberraverat, accuratiûs construxerit. *Cùm tamen ejusmodi editionis nulla adhuc notitia pervenerit, ideò congruum fore duxi, ut haec mea Latina Synopsis Conicarum Sectionum, additis quibusdam aliis Theorematibus aucta, & quibusdam superfluis ommissis, & prioris Italicae impressionis erroribus, tam in textu, quam in Figurarum descriptione correctis, in publicum prodiret, cujus usus, non in Italia dumtaxat, sed in quavis alia Europae provincia, plurimum utilis esse poterit, juxtà eorundem Lypsiensium Litteratorum attestationem; non enim plurimi, sed paucissimi tantùm, ex Transalpinis Europae Studiosis hoc opusculum, hetrusca lingua expressum, intelligere potuissent; unde*

& Egregius Hispanicae Militiae Archite-ctus D. Joannes de Aguillar, meum illud Italicum Sectionum Conicarum Compendium in hispaniense idioma traducere maluit, ut suae nationis Discipulis, Mathematum studio incumbentibus, intelligibile fieret: qua tamen versione opportunior erit haec Latina Expositio, quàm ideò hic imprimendam permittere malui; utpote quae plerisque Europae Geometris magis percipi possit, quam Italica, vel Hispanica, seu cuiusvis alterius regionis idiomate peculiari rescripta.

SE-

SECTIONUM CONICARUM SYNOPSIS.

DEFINITIONES PRIMAE.

I. PEr fixum punctum A, extra planum circuli BED acceptum, transiens recta linea BAF, utrinque indefinitè producta, si per ejusdem circuli peripheriam circumducatur, illam perpetuò radens, usque dum in eundem situm redeat, à quo moveri coepit: utraque superficies, ex hoc lineae motu, hinc inde a fixo puncto A resultans, *Conica* nuncupatur. *Fig. 1. & 2.*

II. Et solida ex his superficiebus, ad circulum BED, vel huic oppositum bed terminatis, comprehensa, *Coni* appellantur.

III. Tam superficiei conicae, quam ipsius Coni *Vertex* dicitur fixum illud punctum A.

IV. Ejusdem autem Coni *Basis* est ipse circulus BED, ad quem terminatur.

V. Linea, quae verticem Coni A cum centro C suae basis circularis coniungit, *Axis* est Coni.

Fig. 1. VI. Qui axis, si perpendicularis fuerit ad planum basis, Conus ille *Rectus* vocabitur.

Fig. 2. VII. Si vero fuerit axis ad planum basis obliquè inclinatus, Conus ille *Scalenus* dicetur.

CONSECTARIA.

I. PAtet hinc, utramque illam Conicam superficiem, BAD, d AF, ad communem verticem A contrapositas, in infinitum extendi posse, producta utcumque linea illa genitrice harum superficierum.

II. Sumpto quolibet puncto H in Conica superficie, recta lineà illud coniungens cum vertice A, in eadem Conica superficie jacebit: congruet enim cum recta EA, quae superficiem illam, sua circumvolutione describens, per quodvis eius punctum transit, adeoque in idem punctum H impingit.

III. Vnde & quaelibet recta AH, iungens verticem Coni A cum aliquo puncto H eius superficiei Conicae, producta in peripheriam basis, ad aliquod eius punctum E pertinget.

IV. At si duo puncta H, I in eadem Conica superficie accepta fuerint, recta HI, si per verticem A non transierit, intra Conum cadet: Nam iunctis ad verticem A, rectis AH, AI, & (a) ad basis peripheriam productis, cui in-

a Per cor. 3.

incident ad puncta E, B, utique iuncta EB intra circulum cadet (a). Ergo planum trianguli ABE, intra Conum immergitur, quia secat eius basim; itaque recta HI in hoc plano existens, cum iungat duo puncta laterum [*AE* , *AB*] talis trianguli, intra Conum & ipsa manebit sua illa portione dictis punctis interiecta; quamquam si ultra hinc inde [*versus H, & I*] producatur, utique extra Conicam superficiem se extendet. a 2. *III. Elem.*

V. Si Conus quolibet plano per verticem A transeunte secetur, Sectio triangulum erit: Nam utraque ipsarum linearum AB, AE, aut AB, AD, quae sunt communes Sectiones superficiei Conicae, & planorum ABE, vel ABD ipsam secantium, semper congruit cum ipsa recta mobili AB, transeunte per eadem puncta B, E, D, dum Conicam generat superficiem; & comunis Sectio plani secantis cum plano basis, est pariter (b) recta EB, vel BD, ergo ABE, aut ABD sunt triangula rectilinea. b 3. *XI. Elem.*

SCHOLION.

I. SI de his quoque triangularibus Coni Sectionibus, non de curvis dumtaxat, agendum hic esset; consideranda forent triangula, sive plano per axem transeunte genita, ut ABD, AFE; quae semper invicem aequalia erunt in Cono recto, ob aequales eorum bases, nempe diametros BD, FE circularis basis, & aequalem altitudinem Axis AC, *Fig. 3.*

per-

a *def.* 3. perpendicularis plano, adeoque (a) & omni-
XI. Elem. bus rectis [*veluti FE, BD,*] per C transeuntibus: sive extra axem traiecto plano ad chordas BE, aut BL protensa ex vertice A [*consideranda forent*] triangula ABE, ABL; quae in eodem cono recto isoscelia semper
b *def.* 3. erunt, ob latera omnia AB, AE, AL, sem-
XI. Elem. per aequalia, quippe [*ob angulos rectos* (b)
c *pr.* 47. *ACL, ACE, ACB,*] eorum quadrata (c)
I. Elem. aequantur quadrato axis AC, & quadrato radii circularis CB, aut CE, vel CL; Sed inaequalis magnitudinis, ob inaequales bases BE, BL, quae cum aequalibus lateribus [*BA, AE, itemque BA, AL*] iunctae, angulos sibi ad verticem trianguli
d 25. *I.* oppositos BAE, BAL, inaequales efficiunt (d),
Elem. quorum sinus recti, [*seu ad AB perpendiculares*] EN, LO, pariter inaequales erunt; [*iuncta quippe OE, erunt latera LA, AO,*
e *ex de-* *aequalia lateribus EA, AO, & angulus LAB,*
monstra- *seu LAO, maior* (e) *angulo EAB, seu EAO;*
tis. *igitur LO* (f) *maior erit EO: Sed in trian-*
f 25. *I.* *gulo rectangulo NOE est EO* (g) *maior EN,*
Elem. *ergo LO multò maior erit EN;*] & ad comu-
g 19. *I.* nem basim AB relata triangula ABE, ABL,
Elem. erunt ut eorum altitudines inaequales (h) EN,
h *cor. I.* LO.
pr. I. VI. II. Itaque si angulus verticalis BAD tri-
Elem. anguli per axem transeuntis rectus fuerit, aut acutus; reliquorum triangulorum extra axem traiectorum anguli BAE, BAL subinde mino-
i *pr.* 25. res fient, pro ut minori chordae BE, BL in-
I. Elem. sistent (i): [*quia vero diameter circularis*

BD

BD est omnium chordarum (a) *maxima, angulus BAD, eiusque sinus, omnium angulorum, sinuumque maximus sit oportet* :] ideoque omnium triangulorum maximum erit per axem transiens, & reliqua subinde minora, pro ut magis ab axe recedent, minorem chordam pro basi habentia. Si vero Angulus verticalis [*BAD*] per axem traducti trianguli obtusus fuerit; non erit hoc triangulum omnium maximum, sed aliud ipso maius extra axem poterit determinari. Quadratum enim diametri BD, oppositi angulo obtuso BAD, maius erit quadratis laterum (b) AB, AD; ergo aliqua chorda BL minor diametro inveniri poterit, cuius quadratum aequale sit duobus quadratis laterum AB, & AL, ubi Angulus BAL rectus evadet (c); ideoque triangulum BAL extra axem maius erit altero per axem transeunte: accepto enim latere AB pro basi, erit trianguli BAL altitudo LA, quae aequatur AD, & [*ob angulum rectum M, maiorem acuto DAM,*] maior est perpendiculari DM (d), quae esset altitudo alterius trianguli BAD per axem, nempe sinus rectus anguli *DAM*, consequentis ad obtusum BAD: & hac ratione triangulum BAL, cuius angulus rectus sit ad verticem Coni, maius erit quolibet alio triangulo, sive per axem, sive extra ipsum transeunte, ob maximam omnium altitudinem. Quod si fiat extra axem triangulum BAE, cuius angulus in A fuerit acutus, aequalis DAM, consequenti ad illum obtusum trianguli per axem BAD, erit

ipsum

a *pr.* 15. *III.Elem.*

b 12. *II. Elem.*

c *pr.*48.*I. Elem.*

d 19. *I. Elem.*

ipsum triangulum BAE aequale BAD; quia [*sumpta AE, vel aequali AD, pro sinu toto*] perpendicularis EN (a) aequabitur alteri DM, cum sit sinus anguli aequalis, tam haec, quam illa; [*quod etiam hinc constat, quia triangula AEN, ADM, in quibus aequantur* (b) *anguli EAN, DAM, habent rectis, seu aequalibus angulis ENA, DMA opposita aequalia latera EA, DA, adeoque aequales* (c) *quoque habebunt perpendiculares EN, DM, quae sunt altitudines triangulorum BAE, BAD, habentium communem basim AB; igitur triangulum BAE aequabitur BAD.*]

a ex *Trigonometria.*
b *ex hypothesi.*
c. 26. I. *Elem.*

Fig. 4. & 5.

III. At si conus fuerit Scalenus, demissa ex vertice A in planum basis perpendiculari AQ, traductoque plano per axem AC, & per AQ perpendiculum, quod efficiet triangulum per axem ABD rectum (d) plano basis BED; patet, fore omnium Coni laterum maximum AB, remotissimum a perpendiculo AQ, et omnium minimum latus AD, eidem perpendiculari proximum: aliorum autem laterum intermediorum AF, AE, maius esse, quod est maximo propinquius, minus vero quod ab ipso remotius. Nam linearum ex puncto Q ad peripheriam circularem deductarum maxima est QB per centrum traiecta (e), minima vero eius portio QD: ipsae autem QI, QE maiores, ac minores sunt, pro ut maximae, aut minimae propiores: quare & ipsarum quadrata maxima, & minima, ac maiora, aut minora respective erunt: quemadmodum etiam duo quaelibet quadra-

d 18. XI. *Elem.*
e 7., & 8. III. *Elem.*

ta linearum QO, QE, [*attingentium terminos rectae EHO, ad diametrum BD ordinatae, seu perpendiculariter ductae, ideoque ob* (a) *aequales angulos OQH, EQH*] a maxima QB, hinc inde aequè remotarum, adeoque invicem (b) aequalium, aequalia erunt; Unde singulis addito quadrato perpendicularis AQ, resultabit quadratum AB omnium maximum, & AD omnium minimum; & AF, AE quadrata maiora, aut minora, prout illi maximo propiora fuerint, aut remotiora: itemque AO, AE quadrata, attingentia terminos rectae EHO ad diametrum BD ordinatae, erunt aequalia. Patet igitur, maius omnibus Coni lateribus esse AB, & minimum AD; ac reliqua maiora, aut minora resultare, prout magis accesserint, aut recesserint a maximo; aut aequalia esse si aeque distent ab ipso, ut AO, AE. Quibus, aliisque similiter ad terminos alterius ordinatae ductis, efficitur aequicrure triangulum AOE; caetera vero scalena semper resultabunt, nisi forte contingat alicui habere basim uni ex lateribus aequalem.

a 3. *III. Elem.*, & 4. *I. El.*
b 7. *III. Elem.*

IV. Si quis angulus verticalis Trianguli per axem in Cono scaleno rectus fuerit; omnes pariter anguli verticales recti erunt, adeoque invicem aequales. Nam semicirculus super diametro BD, in plano trianguli per axem descriptus, (c) per verticem A transiret, ob angulum rectum ibi a lateribus comprehensum, adeoque axis AC semper esset aequalis radio basis CB; unde in quolibet alio trian-

c *ex pr. 31. III. Elem.*

quarto constabit, omnia haec triangula aequalia esse non posse.]

[*Si vero triangula NAK, FAE per axem traiecta, habeant bases NK, FE ad diametrum BD aequaliter inclinatas, habebunt quoque aequales angulos ad verticem A constitutos; nam ob aequales angulos NCB, ECB* (a), *& KCD, FCD, aequari debent tùm arcus* (b) *NB, BE, tùm arcus KD, DF; ideoque AN, AE maximae AB, quemadmodum AK, AF minimae AD aequè propinquae erunt; aequabuntur igitur* (c) *AN, AE, atque etiam AK, AF, eruntque mutuo aequilatera triangula NAK, FAE, ideoque* (d) *habebunt aequales angulos ad verticem A constitutos.*]

a ex hypoth.
b 28. III. Elem.
c nu. III.
d 8. I. Elem.

V. Summae nihilominus quadratorum ex lateribus cuiusvis trianguli per axem, erunt semper aequales. Nam in quovis triangulo quadrata duorum laterum aequantur duplo quadrati rectae à vertice ad dimidium basis ductae, una cum duplo quadrati ipsius semibasis, ut in nostris geometricis institutionibus demonstravimus; [*Si enim recta BC, ducta a vertice B ad dimidium basis C, etiam perpendiculariter basim secet, erit quadratum AB aequale quadratis BC, CA* (e). *Eamdem ob causam quadratum BD, aequatur quadratis BC, CD; unde quadrata AB, BD, aequantur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD, vel CA: Si vero recta BC, à vertice B ad dimidium basis C ducta, basim AD ad angulos obliquos secet, ad basim AD demittatur ex vertice B perpendicularis*

Fig. 8.
e pr. 47. I. Elem.
Fig. 9.

laris BH. Quia BD quadratum aequatur quadratis laterum BC, CD minus duplo rectanguli DCH (a); *& quadratum AB aequatur quadratis laterum BC, CA plus duplo rectanguli ACH* (b), *erunt quadrata BD, BA, aequalia quadratis BC, CD, una cum quadratis BC, CA minus duplo rectanguli DCH plus duplo rectanguli ACH: est autem CA* (c) *aequalis CD, provindeque rectangulum ACH aequale est rectangulo DCH, ergo quadrata laterum BD, BA aequantur duplo quadratorum BC, CD, minus duplo rectanguli DCH, plus duplo rectanguli DCH, seu aequatur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD.*] Itaque [*cum in triangulo BAD axis AC bisecet basim BD in puncto C,*] duo quadrata AB, AD aequantur duplo quadrato axis AC, cum duplo quadrato radii CB; item [*eamdem ob causam*] duo quadrata AE, AF aequabuntur duplo quadrato eiusdem axis AC, & duplo quadrato radii CE, ipsi CB aequalis; ergo duo quadrata AB, AD aequantur duobus quadratis AE, AF: [*eodem ratiocinio quadrata AB, AD ostenduntur aequalia duobus quadratis AN, AK; igitur quadrata AN, AK aequantur quadratis AE, AF, atque ita porrò.*]

a 13. *II. Elem.*

b 12. *II. Elem.*

c *ex hypoth.*

Fig. 4. & 5.

VI. Horum autem triangulorum per axem, minimum erit BAD (d) rectum plano basis, [*utpote*] transiens per AQ perpendiculum; & maximum erit EAF, cuius basis EF sit alteri diametro BD perpendicularis: aliorum autem PAL magnitudo erit intermedia, ita ut maiora evadant, quae maximo

Fig. 10. & 11.

d 18. *XI. Elem.*

B pro-

propiora fiunt. Si enim ſuper recta CQ, inter axem, & perpendiculum, velut ſuper diametro, circulus CSQ, in plano baſis Coni, deſcribatur, hic erit locus omnium perpendicularium, ex vertice A ad baſes quorumlibet triangulorum per axem tranſeuntium, demiſſarum. Nam ECF perpendicularis diametro BD, tanget circulum QSC in C (a); & triangulum EAF aequalia latera habebit AE, AF (b); ideoque AC bifariam ſecans baſim trianguli aequicruris, erit ipſi perpendicularis (c): ubi vero alia diameter PL ſecat illum circulum in S, ducta ex vertice AS, erit ipſi PL pariter perpendicularis: quia iuncta QS, erit quadratum QC aequale quadratis CS, QS (d): quare quadratum AC, quod aequatur quadratis AQ, & QC (e), erit aequale quadratis AQ, QS, SC: at quadratis AQ, & QS eſt aequale (f) quadratum AS, ergo quadratum AC aequatur quadratis AS, & SC, ideoque angulus ASC rectus erit (g). Quia ergo rectarum ex A ad peripheriam circuli QSC ductarum (ut de lateribus (h) Coni dictum eſt) maxima erit AC, minima AQ, & intermedia AS mediocris magnitudinis; pro maiori acceſſu ad maximam AC creſcentis; ideo maximum erit triangulum AEF, cuius altitudo AC, minimum BAD, cuius altitudo AQ, intermediae vero magnitudinis PAL, cuius altitudo AS.

a *pr.* 16. *III. El.*
b *per nu. III.*
c *pr.* 8. *I. Elem.*
d 31. *III. Elem.* & 47. *I. Elem.*
e *Per* 47. *I. Elem.*
f *per eandem.*
g *pr.* 48. *I. Elem.*
h *nu. III.*

Fig. 12.

VII. Triangula vero extra axem, licet in Cono recto, cuius axis aequalis, aut maior ſit radio baſis, nempe in quo angulus verticalis trianguli per axem BAD rectus

ſit,

ſit, vel acutus, minora ſemper oſtenſa ſint quovis triangulo per axem tranſeunte (a): in Cono tamen ſcaleno, ſive obtuſus ſit, ſive rectus, aut acutus ille angulus verticalis trianguli per axem BAD, aut EAF, vel PAL, triangula tamen extra axem haberi poſſunt, tum quolibet illorum minora, tum quaedam etiam maximo FAE maiora, aut aequalia. Ipſi enim EF parallela GO duci poteſt, ordinata ad diametrum BD in H, & ſupra ipſam ducto per verticem A plano; ſi efficiatur triangulum GAO, quod aequicrure erit (b), eiuſque perpendicularis evadet recta AH, fieri poteſt, ut [*minor*,] vel aequalis, vel maior ſit ratio ipſius AH ad axem AC, comparata rationi EF ad GO, ſeu CE ad GH; ideoque poteſt eſſe triangulum GAO [*minus*, *vel*] aequale, vel maius ipſo AEF, quod erat maximum omnium per axem AC tranſeuntium. [*Tria nobis ſunt in praeſentia demonſtranda, primum nempe, in Cono Scaleno triangulum aequicrure GAO haberi poſſe extra axem, quod minus ſit triangulo EAF, maximo omnium per axem ſcilicet tranſeuntium: Secundum, triangulum etiam aequicrure extra axem haberi poſſe, quod maius ſit eodem triangulo EAF: Tertium, poſſe aequicrure triangulum extra axem haberi, quod aequet triangulum EAF.*]

a *numer. III.*

b *per numer. III.*

[*Vt a primo exordiar, obſervandum imprimis eſt, quod ſi in triangulo rectangulo BAG ex uno angulo G ad AB ducatur recta GD, haec ad DA maiorem rationem habebit, quam GB ad BA; ducatur enim recta DE* Fig. 13.

a 16. I. Elem. *ipsi BG parallela; & quia rectus est angulus DAE, angulus externus DEG* (a) *obtusus erit; maior ergo est DG, quam DE* (b), *& idcirco GD ad DA maiorem rationem habet, quam ED ad DA* (c), *hoc est quam GB ad BA* (d).]

b pr. 19. I. Elem.

c 8. V. Elem.

d cor. I. prop. 4. VI. El.

[*Deinde in triangulo rectangulo BAG, si producta hypothenusa BG ad punctum quodvis D, iungatur AD; erit BG ad GA in maiori ratione, quam BD ad DA; ducta enim GO parallela DA; in triangulo rectangulo GAO erit GO* (e) *maior GA; quare BG ad GA maiorem* (f) *habet rationem, quam BG ad GO: sed BG ad GO est, ut BD* (g) *ad DA; ergo GB ad GA habebit maiorem rationem, quam BD ad DA.*]

Fig. 14.

e 19. I. Elem.

f 8. V. Elem.

g cor. I. prop. 4. VI. El.

[*Tandem si recta A ad B maiorem rationem habeat, quam G ad DE; erit rectangulum sub extremis A, & DE factum, maius rectangulo mediarum B, & G. Quoniam A est ad B in maiori ratione, quam G ad DE, fiat, ut A ad B, ita G ad DZ, quae minor erit DE* (h); *rectangulum igitur* (i) *sub A, & DZ aequale erit rectangulo sub G, & B: rectangulum verò sub A, & DE maius est rectangulo sub A, & DZ; ergo rectangulum sub A, & DE maius est rectangulo sub G, & B.*]

Fig. 15.

h pr. 10. V. El.

i 16. VI. Elem.

[*Hisce praemissis ad institutum iam venio. Esto Conus scalenus, cuius axis AC declinat a radio CB, seu constituat cum illo obtusum angulum ACB. In plano trianguli BAD per axem, & perpendiculum transeuntis, ipsi BD erigatur perpendicularis CM. Quoniam*

Fig. 16.

BM

BM maior est radio BC (a), esto MZ aequalis BC, & ducantur ZH, HN parallelae rectis MC, ZM, adeo ut emergat parallelogrammum MZHN, cuius opposita latera HN, ZM (b) aequari debent. Demum in plano circuli agantur ECF, GHO ad diametrum BD normales, iunganturque CG, AO, AG, AE, AF; triangulum GAO minus erit triangulo EAF; nam quadratum HN aequatur quadratis (c) NC, CH, sicuti etiam CG quadratum aequale est quadratis GH, HC: estque HN quadratum (d) aequale quadrato CG; ergo quadratum HC, cum quadrato CN aequatur HC quadrato, cum quadrato HG, ideoque CN quadratum aequabitur quadrato HG, seu CN aequalis erit HG; igitur HN ad NC erit, ut CG ad GH, vel ut CE ad GH: sed ex praemissis est HN ad NC in maiori ratione, quam HK ad KC, & HK ad KC in ratione maiori, quam HA ad AC; ergo CE ad GH est in multò maiori ratione, quam HA ad AC, ideoque rectangulum ACE maius erit rectangulo AHG: est autem triangulum (e) isosceles EAF, cuius altitudo AC, aequale (f) rectangulo ACE, sicuti etiam triangulum isosceles (g) GAO aequatur rectangulo AHG; igitur triangulum EAF maius erit triangulo GAO.]

a 19. I. Elem.

b 34. I. Elem.

c 47. I. Elem.

d ex construct.

e numer. III.

f ex pr. 41. I. Elem.

g per eamdem.

[Quod etiam in Cono scaleno dari queat triangulum extra axem, quod triangulo maximo omnium, per axem transeuntium, sit maius, demonstrare iam pergo: id vero quamvis generatim ostendi possit, sive Coni axis sit minor, vel maior, aut aequalis radio baseos eiusdem Coni; brevitatis tamèn gratia ipsum triangulum BAE aequale BAD; quia [*sumpta AF, vel aequali AD, pro sinu toto*] perpendicularis EN (a) aequabitur alteri DM, cum sit sinus anguli aequalis, tam haec, quam illa; [*quod etiam hinc constat, quia triangula AEN, ADM, in quibus aequantur* (b) *anguli EAN, DAM, habent rectis, seu aequalibus angulis ENA, DMA opposita aequalia latera EA, DA, adeoque aequales* (c) *quoque habebunt perpendiculares EN, DM, quae sunt altitudines triangulorum BAE, BAD, habentium communem basim AB; igitur triangulum BAE aequabitur BAD.*]

a *ex Trigonometria.*
b *ex hypothesi.*
c. *26. I. Elem.*

III. At si conus fuerit Scalenus, demissa ex vertice A in planum basis perpendiculari AQ, traductoque plano per axem AC, & per AQ perpendiculum, quod efficiet triangulum per axem ABD rectum (d) plano basis BED; patet, fore omnium Coni laterum maximum AB, remotissimum a perpendiculo AQ, et omnium minimum latus AD, eidem perpendiculari proximum: aliorum autem laterum intermediorum AF, AE, maius esse, quod est maximo propinquius, minus vero quod ab ipso remotius. Nam linearum ex puncto Q ad peripheriam circularem deductarum maxima est QB per centrum traiecta (e), minima vero eius portio QD: ipsae autem QI, QE maiores, ac minores sunt, pro ut maximae, aut minimae propiores: quare & ipsarum quadrata maxima, & minima, ac maiora, aut minora respective erunt: quemadmodum etiam duo quaelibet quadrata

Fig. 4., & 5.
d 18. *XI. Elem.*
e 7., & 8. *III. Elem.*

ta linearum QO, QE, [*attingentium terminos rectae EHO, ad diametrum BD ordinatae, seu perpendiculariter ductae, ideoque ob* (a) *aequales angulos OQH, EQH*] a maxima QB, hinc inde aeque remotarum, adeoque invicem (b) aequalium, aequalia erunt; Unde singulis addito quadrato perpendicularis AQ, resultabit quadratum AB omnium maximum, & AD omnium minimum; & AF, AE quadrata maiora, aut minora, prout illi maximo propiora fuerint, aut remotiora: itemque AO, AE quadrata, attingentia terminos rectae EHO ad diametrum BD ordinatae, erunt aequalia. Patet igitur, maius omnibus Coni lateribus esse AB, & minimum AD; ac reliqua maiora, aut minora resultare, prout magis accesserint, aut recesserint a maximo; aut aequalia esse si aeque distent ab ipso, ut AO, AE. Quibus, aliisque similiter ad terminos alterius ordinatae ductis, efficitur aequicrure triangulum AOE; caetera vero scalena semper resultabunt, nisi forte contingat alicui habere basim uni ex lateribus aequalem.

a 3. III. *Elem.*, & 4. I. El.
b 7. III. *Elem.*

IV. Si quis angulus verticalis Trianguli per axem in Cono scaleno rectus fuerit; omnes pariter anguli verticales recti erunt, adeoque invicem aequales. Nam semicirculus super diametro BD, in plano trianguli per axem descriptus, (c) per verticem A transiret, ob angulum rectum ibi a lateribus comprehensum, adeoque axis AC semper esset aequalis radio basis CB; unde in quolibet alio trian-

c *ex pr.* 31. III. *Elem.*

quarto constabit, omnia haec triangula aequalia esse non posse.]

[*Si vero triangula NAK, FAE per axem traiecta, habeant bases NK, FE ad diametrum BD aequaliter inclinatas, habebunt quoque aequales angulos ad verticem A constitutos; nam ob aequales angulos NCB, ECB* (a), *& KCD, FCD, aequari debent tùm arcus* (b) *NB, BE, tùm arcus KD, DF; ideoque AN, AE maximae AB, quemadmodum AK, AF minimae AD aequè propinquae erunt; aequabuntur igitur* (c) *AN, AE, atque etiam AK, AF, eruntque mutuo aequilatera triangula NAK, FAE, ideoque* (d) *habebunt aequales angulos ad verticem A constitutos.*]

a ex hypoth.
b 28. III. Elem.
c nu. III.
d 8. I. Elem.

V. Summae nihilominus quadratorum ex lateribus cuiusvis trianguli per axem, erunt semper aequales. Nam in quovis triangulo quadrata duorum laterum aequantur duplo quadrati rectae à vertice ad dimidium basis ductae, una cum duplo quadrati ipsius semibasis, ut in nostris geometricis institutionibus demonstravimus; [*Si enim recta BC, ducta a vertice B ad dimidium basis C, etiam perpendiculariter basim secet, erit quadratum AB aequale quadratis BC, CA* (e). *Eamdem ob causam quadratum BD, aequatur quadratis BC, CD; unde quadrata AB, BD, aequantur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD, vel CA: Si vero recta BC, à vertice B ad dimidium basis C ducta, basim AD ad angulos obliquos secet, ad basim AD demittatur ex vertice B perpendicularis*

Fig. 8.
e pr. 47. I. Elem.
Fig. 9.

laris BH. Quia BD quadratum aequatur quadratis laterum BC, CD minus duplo rectanguli DCH (a); *& quadratum AB aequatur quadratis laterum BC, CA plus duplo rectanguli ACH* (b), *erunt quadrata BD, BA, aequalia quadratis BC, CD, una cum quadratis BC, CA minus duplo rectanguli DCH plus duplo rectanguli ACH: est autem CA* (c) *aequalis CD, proindeque rectangulum ACH aequale est rectangulo DCH, ergo quadrata laterum BD, BA aequantur duplo quadratorum BC, CD, minus duplo rectanguli DCH, plus duplo rectanguli DCH, seu aequatur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD.*] Itaque [*cum in triangulo BAD axis AC bisecet basim BD in puncto C*,] duo quadrata AB, AD aequantur duplo quadrato axis AC, cum duplo quadrato radii CB; item [*eamdem ob causam*] duo quadrata AE, AF aequabuntur duplo quadrato eiusdem axis AC, & duplo quadrato radii CE, ipsi CB aequalis; ergo duo quadrata AB, AD aequantur duobus quadratis AE, AF: [*eodem ratiocinio quadrata AB, AD ostenduntur aequalia duobus quadratis AN, AK; igitur quadrata AN, AK aequantur quadratis AE, AF, atque ita porrò.*]

a 13. *II. Elem.*

b 12. *II. Elem.*

c *ex hypoth.*

Fig. 4. & 5.

VI. Horum autem triangulorum per axem, minimum erit BAD (d) rectum plano basis, [*utpote*] transiens per AQ perpendiculum; & maximum erit EAF, cuius basis EF sit alteri diametro BD perpendicularis: aliorum autem PAL magnitudo erit intermedia, ita ut maiora evadant, quae maximo

Fig. 10. & 11.

d 18. *XI. Elem.*

propiora fiunt. Si enim super recta CQ, inter axem, & perpendiculum, velut super diametro, circulus CSQ, in plano basis Coni, describatur, hic erit locus omnium perpendicularium, ex vertice A ad bases quorumlibet triangulorum per axem transeuntium, demissarum. Nam ECF perpendicularis diametro BD, tanget circulum QSC in C (a); & triangulum EAF aequalia latera habebit AE, AF (b); ideoque AC bifariam secans basim trianguli aequicruris, erit ipsi perpendicularis (c): ubi vero alia diameter PL secat illum circulum in S, ducta ex vertice AS, erit ipsi PL pariter perpendicularis; quia iuncta QS, erit quadratum QC aequale quadratis CS, QS (d): quare quadratum AC, quod aequatur quadratis AQ, & QC (e), erit aequale quadratis AQ, QS, SC: at quadratis AQ, & QS est aequale (f) quadratum AS, ergo quadratum AC aequatur quadratis AS, & SC, ideoque angulus ASC rectus erit (g). Quia ergo rectarum ex A ad peripheriam circuli QSC ductarum (ut de lateribus (h) Coni dictum est) maxima erit AC, minima AQ, & intermedia AS mediocris magnitudinis; pro maiori accessu ad maximam AC crescentis; ideo maximum erit triangulum AEF, cuius altitudo AC, minimum BAD, cuius altitudo AQ, intermediae vero magnitudinis PAL, cuius altitudo AS.

a *pr.* 16. *III. El.*
b *per nu. III.*
c *pr.* 8. *I. Elem.*
d 31. *III. Elem.* & 47. *I. Elem.*
e *Per* 47. *I. Elem.*
f *per eandem.*
g *pr.* 48. *I. Elem.*
h *nu. III.*

Fig. 12.

VII. Triangula vero extra axem, licet in Cono recto, cuius axis aequalis, aut maior sit radio basis, nempe in quo angulus verticalis trianguli per axem BAD rectus sit,

ſit, vel acutus, minora ſemper oſtenſa ſint quovis triangulo per axem tranſeunte (a): in Cono tamen ſcaleno, ſive obtuſus ſit, ſive rectus, aut acutus ille angulus verticalis trianguli per axem BAD, aut EAF, vel PAL, triangula tamen extra axem haberi poſſunt, tum quolibet illorum minora, tum quaedam etiam maximo FAE maiora, aut aequalia. Ipſi enim EF parallela GO duci poteſt, ordinata ad diametrum BD in H, & ſupra ipſam ducto per verticem A plano; ſi efficiatur triangulum GAO, quod aequicrure erit (b), eiuſque perpendicularis evadet recta AH, fieri poteſt, ut [*minor*,] vel aequalis, vel maior ſit ratio ipſius AH ad axem AC, comparata rationi EF ad GO, ſeu CE ad GH; ideoque poteſt eſſe triangulum GAO [*minus*, *vel*] aequale, vel maius ipſo AEF, quod erat maximum omnium per axem AC tranſeuntium. [*Tria nobis ſunt in praeſentia demonſtranda, primum nempe, in Cono Scaleno triangulum aequicrure GAO haberi poſſe extra axem, quod minus ſit triangulo EAF, maximo omnium per axem ſcilicet tranſeuntium: Secundum, triangulum etiam aequicrure extra axem haberi poſſe, quod maius ſit eodem triangulo EAF: Tertium, poſſe aequicrure triangulum extra axem haberi, quod aequet triangulum EAF.*]

a *numer. III.*

b *per numer. III.*

[*Vt a primo exordiar, obſervandum imprimis eſt, quod ſi in triangulo rectangulo BAG ex uno angulo G ad AB ducatur recta GD, haec ad DA maiorem rationem habebit, quam GB ad BA; ducatur enim recta DE* Fig. 13.

a 16. I. Elem. *ipsi BG parallela; & quia rectus est angulus DAE, angulus externus DEG* (a) *obtusus erit; maior ergo est DG, quam DE* (b), b pr. 19. I. Elem. *& idcirco GD ad DA maiorem rationem habet, quam ED ad DA* (c), c 8. V. Elem. *hoc est quam GB ad BA* (d).]

d cor. I. prop. 4. VI. El. [*Deinde in triangulo rectangulo BAG, si producta hypothenusa BG ad punctum quodvis D, iungatur AD; erit BG ad GA in maiori ratione, quam BD ad DA; ducta e-* Fig. 14. *nim GO parallela DA; in triangulo rectangulo GAO erit GO* (e) *maior GA; quare* e 19. I. Elem. *BG ad GA maiorem* (f) *habet rationem, quam BG ad GO: sed BG ad GO est, ut* f 8. V. Elem. *BD* (g) *ad DA; ergo GB ad GA habebit maiorem rationem, quam BD ad DA.*] g cor. I. prop. 4. VI. El.

[*Tandem si recta A ad B maiorem rationem habeat, quam G ad DE; erit rectangulum sub extremis A, & DE factum, maius rectangulo mediarum B, & G.* Fig. 15. *Quoniam A est ad B in maiori ratione, quam G ad DE, fiat, ut A ad B, ita G ad DZ, quae minor erit DE* (h); h pr. 10. V. El. *rectangulum igitur* (i) *sub A, & DZ aequale erit rectangulo sub G, & B:* i 16. VI. Elem. *rectangulum verò sub A, & DE maius est rectangulo sub A, & DZ; ergo rectangulum sub A, & DE maius est rectangulo sub G, & B.*]

[*Hisce praemissis ad institutum iam venio. Esto Conus scalenus, cuius axis AC de-* Fig. 16. *clinat a radio CB, seu constituat cum illo obtusum angulum ACB. In plano trianguli BAD per axem, & perpendiculum transeuntis, ipsi BD erigatur perpendicularis CM. Quoniam BM*

BM maior est radio BC (a), esto MZ aequalis BC, & ducantur ZH, HN parallelae rectis MC, ZM, adeo ut emergat parallelogrammum MZHN, cuius opposita latera HN, ZM (b) aequari debent. Demum in plano circuli agantur ECF, GHO ad diametrum BD normales, iunganturque CG, AO, AG, AE, AF; triangulum GAO minus erit triangulo EAF; nam quadratum HN aequatur quadratis (c) NC, CH, sicuti etiam CG quadratum aequale est quadratis GH, HC: estque HN quadratum (d) aequale quadrato CG; ergo quadratum HC, cum quadrato CN aequatur HC quadrato, cum quadrato HG, ideoque CN quadratum aequabitur quadrato HG, seu CN aequalis erit HG; igitur HN ad NC erit, ut CG ad GH, vel ut CE ad GH: sed ex praemissis est HN ad NC in maiori ratione, quam HK ad KC, & HK ad KC in ratione maiori, quam HA ad AC; ergo CE ad GH est in multò maiori ratione, quam HA ad AC, ideoque rectangulum ACE maius erit rectangulo AHG: est autem triangulum (e) isosceles EAF, cuius altitudo AC, aequale (f) rectangulo ACE, sicuti etiam triangulum isosceles (g) GAO aequatur rectangulo AHG; igitur triangulum EAF maius erit triangulo GAO.]

a 19. I. Elem.

b 34. I. Elem.

c 47. I. Elem.

d ex construct.

e numer. III.

f ex pr. 41. I. Elem.

g per eamdem.

[Quod etiam in Cono scaleno dari queat triangulum extra axem, quod triangulo maximo omnium, per axem transeuntium, sit maius, demonstrare iam pergo: id vero quamvis generatim ostendi possit, sive Coni axis sit minor, vel maior, aut aequalis radio baseos eiusdem Coni; brevitatis tamèn gratia

ipſum triangulum BAE aequale BAD; quia [*ſumpta AF, vel aequali AD, pro ſinu toto*] perpendicularis EN (a) aequabitur alteri DM, cum ſit ſinus anguli aequalis, tam haec, quam illa; [*quod etiam hinc conſtat, quia triangula AEN, ADM, in quibus aequantur* (b) *anguli EAN, DAM, habent rectis, ſeu aequalibus angulis ENA, DMA oppoſita aequalia latera EA, DA, adeoque aequales* (c) *quoque habebunt perpendiculares EN, DM, quae ſunt altitudines triangulorum BAE, BAD, habentium communem baſim AB; igitur triangulum BAE aequabitur BAD.*]

a ex *Trigonometria.*

b *ex hypotheſi.*

c. 26. *I. Elem.*

III. At ſi conus fuerit Scalenus, demiſſa ex vertice A in planum baſis perpendiculari AQ, traductoque plano per axem AC, & per AQ perpendiculum, quod efficiet triangulum per axem ABD rectum (d) plano baſis BED; patet, fore omnium Coni laterum maximum AB, remotiſſimum a perpendiculo AQ, et omnium minimum latus AD, eidem perpendiculari proximum: aliorum autem laterum intermediorum AF, AE, maius eſſe, quod eſt maximo propinquius, minus vero quod ab ipſo remotius. Nam linearum ex puncto Q ad peripheriam circularem deductarum maxima eſt QB per centrum traiecta (e), minima vero eius portio QD: ipſae autem QF, QE maiores, ac minores ſunt, pro ut maximae, aut minimae propiores: quare & ipſarum quadrata maxima, & minima, ac maiora, aut minora reſpective erunt: quemadmodum etiam duo quaelibet quadrata

Fig. 4., & 5.

d 18. *XI. Elem.*

e 7., & 8. *III. Elem.*

ta linearum QO, QE, [*attingentium terminos rectae EHO, ad diametrum BD ordinatae, seu perpendiculariter ductae, ideoque ob* (a) *aequales angulos OQH, EQH*] a maxima QB, hinc inde aequè remotarum, adeoque invicem (b) aequalium, aequalia erunt; Unde singulis addito quadrato perpendicularis AQ, resultabit quadratum AB omnium maximum, & AD omnium minimum; & AF, AE quadrata maiora, aut minora, prout illi maximo propiora fuerint, aut remotiora: itemque AO, AE quadrata, attingentia terminos rectae EHO ad diametrum BD ordinatae, erunt aequalia. Patet igitur, maius omnibus Coni lateribus esse AB, & minimum AD; ac reliqua maiora, aut minora resultare, prout magis accesserint, aut recesserint a maximo; aut aequalia esse si aeque distent ab ipso, ut AO, AE. Quibus, aliisque similiter ad terminos alterius ordinatae ductis, efficitur aequicrure triangulum AOE; caetera vero scalena semper resultabunt, nisi forte contingat alicui habere basim uni ex lateribus aequalem.

a 3. III. *Elem.*, & 4. *I. El.*
b 7. *III. Elem.*

IV. Si quis angulus verticalis Trianguli per axem in Cono scaleno rectus fuerit; omnes pariter anguli verticales recti erunt, adeoque invicem aequales. Nam semicirculus super diametro BD, in plano trianguli per axem descriptus, (c) per verticem A transiret, ob angulum rectum ibi a lateribus comprehensum, adeoque axis AC semper esset aequalis radio basis CB; unde in quolibet alio tri-

c *ex pr.* 31. *III. Elem.*

an-

angulo EAF per axem transeunte, semicirculus super diametro EF, in eius trianguli plano descriptus, per A transiret, propter AC aequalem radiis CF, CE, ideoque re-
a pr. 31. III.Elem. ctum (a) angulum latera quoque EA, FA continerent. Verum si angulus BAD acutus sit, vel obtusus, reliqua per axem triangula inaequales angulos ad verticem A habebunt, nisi eorum bases hinc inde aequaliter ad diametrum BD fuerint inclinatae.

Fig. 6.& 7. [*Vt autem utrumque demonstretur, illud premitti debet, nempe si in duobus triangulis ABD, FNH, ad B, & N non rectangulis, nedum aequentur bases AD, FH iisque oppositi acuti, vel obtusi anguli B, N, sed etiam quadrata laterum AB, BD, aequalia fuerint reliquorum laterum FN, NH, quadratis; triangula aequalia erunt. Ha-*
Fig. 6. *beant primo triangula acutos angulos B, & N: ductis ad latera AB, FN perpendiculis DC, HE, erit AD quadratum, cum bis rectangulo ABC aequale quadratis* (b) *laterum*
b 13. II. Elem. *AB, BD; quemadmodum etiam quadratum FH, cum bis rectangulo FNE aequabitur* (c)
c per eandem. *quadratis laterum FN, NH: sed quadrata AB, BD* (d) *aequantur quadratis FN, NH:*
d ex hypothes. *igitur etiam quadratum AD, cum bis rectangulo ABC, aequatur quadrato FH, cum bis rectangulo FNE: sed aequantur quadrata AD, FH; igitur bis rectangulum ABC, aequabitur bis rectangulo FNE, & rectangulum ABC rectangulo FNE aequale erit; qua-*
e 16. VI. Elem. *re est AB ad FN, ut* (e) *NE ad BC, at*

ob

ob similia triangula CBD, ENH, est NE ad BC, ut (a) *NH ad BD; igitur ut AB ad FN, ita est reciproce NH ad BD, ideoque* (b) *aequabuntur triangula ABD, FNH*] a pr. 4. VI Elem. b 15. VI. Elem.

[*Sunto deinde triangulorum ABD, FNH obtusi anguli B, & N; ductis perpendiculis DC, HE, erit AD quadratum aequale quadratis AB, BD cum bis rectangulo ABC* (c); *sicuti etiam quadratum FH aequabitur* (d) *quadratis FN, NH, cum bis rectangulo FNE; quare cum* (e) *aequentur quadrata AD, FH, erunt quadrata AB, BD cum bis rectangulo ABC aequalia quadratis FN, NH cum bis rectangulo FNE; sed quadrata AB, BD* (f) *aequalia sunt quadratis FN, NH; igitur etiam bis rectangulum ABC, aquabitur bis rectangulo FNE; ideoque aequabuntur rectangula ABC, FNE, eritque* (g) *AB ad FN ut NE ad BC, vel ut NH* (h), *ad BD, ideoque* (i) *aequantur triangula ABD, FNH.*] Fig. 7. c 12. II. Elem. d per eandem. e per hypoth. f per hypoth. g 16. VI. Elem. h 4. VI. Elem. i 15. VI. Elem.

[*Hinc si angulus verticalis trianguli per axem BAD in Cono scaleno acutus sit, vel obtusus, reliqua per axem triangula, veluti NAK, FAE inaequales angulos ad verticem A habebunt; quippe in hisce triangulis ad* (k) *verticem A non rectangulis, non solum aequantur bases NK, FE: sed etiam quadrata laterum AN, AK equalia sunt* (l) *reliquorum laterum AF, AE quadratis; Igitur si aequales quoque forent anguli ad verticem A, utique ipsa triangula, sicuti & reliqua omnia per axem AC traiecta* (m) *aequarentur, quod est absurdum, inferius enim* (n) *independenter ab hoc numero* Fig. 4. & 5. k ex num. IV. l per seq. n. V. m ex praemissis. n per seq. n. VI.

quar-

quarto constabit, omnia haec triangula aequalia esse non posse.]

[*Si vero triangula NAK, FAE per axem traiecta, habeant bases NK, FE ad diametrum BD aequaliter inclinatas, habebunt quoque aequales angulos ad verticem A constitutos; nam ob aequales angulos NCB, ECB* (a), *& KCD, FCD, aequari debent tùm arcus* (b) *NB, BE, tùm arcus KD, DF; ideoque AN, AE maximae AB, quemadmodum AK, AF minimae AD aequè propinquae erunt; aequabuntur igitur* (c) *AN, AE, atque etiam AK, AF, eruntque mutuo aequilatera triangula NAK, FAE, ideoque* (d) *habebunt aequales angulos ad verticem A constitutos.*]

a ex hypoth. b 28. III. Elem. c nu. III. d 8. I. Elem.

V. Summae nihilominus quadratorum ex lateribus cuiusvis trianguli per axem, erunt semper aequales. Nam in quovis triangulo quadrata duorum laterum aequantur duplo quadrati rectae à vertice ad dimidium basis ductae, una cum duplo quadrati ipsius semibasis, ut in nostris geometricis institutionibus demonstravimus; [*Si enim recta BC, ducta a vertice B ad dimidium basis C, etiam perpendiculariter basim secet, erit quadratum AB aequale quadratis BC, CA* (e). *Eamdem ob causam quadratum BD, aequatur quadratis BC, CD; unde quadrata AB, BD, aequantur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD, vel CA: Si vero recta BC, à vertice B ad dimidium basis C ducta, basim AD ad angulos obliquos secet, ad basim AD demittatur ex vertice B perpendicularis*

Fig. 8. e pr. 47. I. Elem. Fig. 9.

laris BH. Quia BD quadratum aequatur quadratis laterum BC, CD minus duplo rectanguli DCH (a); *& quadratum AB aequatur quadratis laterum BC, CA plus duplo rectanguli ACH* (b), *erunt quadrata BD, BA, aequalia quadratis BC, CD, una cum quadratis BC, CA minus duplo rectanguli DCH plus duplo rectanguli ACH: est autem CA* (c) *aequalis CD, proindeque rectangulum ACH aequale est rectangulo DCH, ergo quadrata laterum BD, BA aequantur duplo quadratorum BC, CD, minus duplo rectanguli DCH, plus duplo rectanguli DCH, seu aequatur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD.*] Itaque [*cum in triangulo BAD axis AC bisecet basim BD in puncto C,*] duo quadrata AB, AD aequantur duplo quadrato axis AC, cum duplo quadrato radii CB; item [*eamdem ob causam*] duo quadrata AE, AF aequabuntur duplo quadrato eiusdem axis AC, & duplo quadrato radii CE, ipsi CB aequalis; ergo duo quadrata AB, AD aequantur duobus quadratis AE, AF: [*eodem ratiocinio quadrata AB, AD ostenduntur aequalia duobus quadratis AN, AK; igitur quadrata AN, AK aequantur quadratis AE, AF, atque ita porrò.*]

a 13. *II. Elem.*

b 12. *II. Elem.*

c *ex hypoth.*

Fig. 4. & 5.

VI. Horum autem triangulorum per axem, minimum erit BAD (d) rectum plano basis, [*utpote*] transiens per AQ perpendiculum; & maximum erit EAF, cuius basis EF sit alteri diametro BD perpendicularis: aliorum autem PAL magnitudo erit intermedia, ita ut maiora evadant, quae maximo

Fig. 10. & 11.

d 18. *XI. Elem.*

propiora fiunt. Si enim super recta CQ, inter axem, & perpendiculum, velut super diametro, circulus CSQ, in plano basis Coni, describatur, hic erit locus omnium perpendicularium, ex vertice A ad bases quorumlibet triangulorum per axem transeuntium, demissarum. Nam ECF perpendicularis diametro BD, tanget circulum QSC in C (a); & triangulum EAF aequalia latera habebit AE, AF (b); ideoque AC bifariam secans basim trianguli aequicruris, erit ipsi perpendicularis (c): ubi vero alia diameter PL secat illum circulum in S, ducta ex vertice AS, erit ipsi PL pariter perpendicularis: quia iuncta QS, erit quadratum QC aequale quadratis CS, QS (d): quare quadratum AC, quod aequatur quadratis AQ, & QC (e), erit aequale quadratis AQ, QS, SC: at quadratis AQ, & QS est aequale (f) quadratum AS, ergo quadratum AC aequatur quadratis AS, & SC, ideoque angulus ASC rectus erit (g). Quia ergo rectarum ex A ad peripheriam circuli QSC ductarum (ut de lateribus (h) Coni dictum est) maxima erit AC, minima AQ, & intermedia AS mediocris magnitudinis; pro maiori accessu ad maximam AC crescentis; ideo maximum erit triangulum AEF, cuius altitudo AC, minimum BAD, cuius altitudo AQ, intermediae vero magnitudinis PAL, cuius altitudo AS.

a *pr.* 16. *III. El.*
b *per nu. III.*
c *pr.* 8. *I. Elem.*
d 31. *III. Elem.* & 47. *I. Elem.*
e *Per* 47. *I. Elem.*
f *per eandem.*
g *pr.* 48. *I. Elem.*
h *nu. III.*

Fig. 12. VII. Triangula vero extra axem, licet in Cono recto, cuius axis aequalis, aut maior sit radio basis, nempe in quo angulus verticalis trianguli per axem BAD rectus sit,

ſit, vel acutus, minora ſemper oſtenſa ſint quovis triangulo per axem tranſeunte (a): in Cono tamen ſcaleno, ſive obtuſus ſit, ſive rectus, aut acutus ille angulus verticalis trianguli per axem BAD, aut EAF, vel PAL, triangula tamen extra axem haberi poſſunt, tum quolibet illorum minora, tum quaedam etiam maximo FAE maiora, aut aequalia. Ipſi enim EF parallela GO duci poteſt, ordinata ad diametrum BD in H, & ſupra ipſam ducto per verticem A plano; ſi efficiatur triangulum GAO, quod aequicrure erit (b), eiuſque perpendicularis evadet recta AH, fieri poteſt, ut [*minor*,] vel aequalis, vel maior ſit ratio ipſius AH ad axem AC, comparata rationi EF ad GO, ſeu CE ad GH; ideoque poteſt eſſe triangulum GAO [*minus*, *vel*] aequale, vel maius ipſo AEF, quod erat maximum omnium per axem AC tranſeuntium. [*Tria nobis ſunt in praeſentia demonſtranda, primum nempe, in Cono Scaleno triangulum aequicrure GAO haberi poſſe extra axem, quod minus ſit triangulo EAF, maximo omnium per axem ſcilicet tranſeuntium: Secundum, triangulum etiam aequicrure extra axem haberi poſſe, quod maius ſit eodem triangulo EAF: Tertium, poſſe aequicrure triangulum extra axem haberi, quod aequet triangulum EAF.*]

a *numer. III.*

b *per numer. III.*

[*Vt a primo exordiar, obſervandum imprimis eſt, quod ſi in triangulo rectangulo BAG ex uno angulo G ad AB ducatur recta GD, haec ad DA maiorem rationem habebit, quam GB ad BA; ducatur enim recta DE* Fig. 13.

a 16. I. Elem. *ipsi BG parallela; & quia rectus est angulus DAE, angulus externus DEG* (a) *obtusus erit; maior ergo est DG, quam DE* (b), *& idcirco GD ad DA maiorem rationem habet, quam ED ad DA* (c), *hoc est quam GB ad BA* (d).]

b pr. 19. I. Elem.
c 8. V. Elem.
d cor. I. prop. 4. VI. El.

[Deinde in triangulo rectangulo BAG, si producta hypothenusa BG ad punctum quodvis D, iungatur AD; erit BG ad GA in maiori ratione, quam BD ad DA; ducta enim GO parallela DA; in triangulo rectangulo GAO ert GO (e) *maior GA; quare BG ad GA maiorem* (f) *habet rationem, quam BG ad GO: sed BG ad GO est, ut BD* (g) *ad DA; ergo GB ad GA habebit maiorem rationem, quam BD ad DA.]*

Fig. 14.
e 19. I. Elem.
f 8. V. Elem.
g cor. I. prop. 4. VI. El.

[Tandem si recta A ad B maiorem rationem habeat, quam G ad DE; erit rectangulum sub extremis A, & DE factum, maius rectangulo mediarum B, & G. Quoniam A est ad B in maiori ratione, quam G ad DE, fiat, ut A ad B, ita G ad DZ, quae minor erit DE (h); *rectangulum igitur* (i) *sub A, & DZ aequale erit rectangulo sub G, & B: rectangulum verò sub A, & DE maius est rectangulo sub A, & DZ; ergo rectangulum sub A, & DE maius est rectangulo sub G, & B.]*

Fig. 15.
h pr. 10. V. El.
i 16. VI. Elem.

[Hisce praemissis ad institutum iam venio. Esto Conus scalenus, cuius axis AC declinat a radio CB, seu constituat cum illo obtusum angulum ACB. In plano trianguli BAD per axem, & perpendiculum transeuntis, ipsi BD erigatur perpendicularis BM. Quoniam

Fig. 16.

BM

BM maior est radio BC (a), esto MZ aequalis BC, & ducantur ZH, HN parallelae rectis MC, ZM, adeo ut emergat parallelogrammum MZHN, cuius opposita latera HN, ZM (b) aequari debent. Demum in plano circuli agantur ECF, GHO ad diametrum BD normales, iunganturque CG, AO, AG, AE, AF; triangulum GAO minus erit triangulo EAF; nam quadratum HN aequatur quadratis (c) NC, CH, sicuti etiam CG quadratum aequale est quadratis GH, HC: estque HN quadratum (d) aequale quadrato CG; ergo quadratum HC, cum quadrato CN aequatur HC quadrato, cum quadrato HG, ideoque CN quadratum aequabitur quadrato HG, seu CN aequalis erit HG; igitur HN ad NC erit, ut CG ad GH, vel ut CE ad GH: sed ex praemissis est HN ad NC in maiori ratione, quam HK ad KC, & HK ad KC in ratione maiori, quam HA ad AC; ergo CE ad GH est in multò maiori ratione, quam HA ad AC, ideoque rectangulum ACE maius erit rectangulo AHG: est autem triangulum (e) isosceles EAF, cuius altitudo AC, aequale (f) rectangulo ACE, sicuti etiam triangulum isosceles (g) GAO aequatur rectangulo AHG; igitur triangulum EAF maius erit triangulo GAO.]

a 19. I. Elem.
b 34. I. Elem.
c 47. I. Elem.
d ex construct.
e numer. III.
f ex pr. 41. I. Elem.
g per eamdem.

[Quod etiam in Cono scaleno dari queat triangulum extra axem, quod triangulo maximo omnium, per axem transeuntium, sit maius, demonstrare iam pergo: id vero quamvis generatim ostendi possit, sive Coni axis sit minor, vel maior, aut aequalis radio baseos eiusdem Coni; brevitatis tamèn gratia

praeſtat in primo tantùm caſu theorema oſtendere, dum alias reliquorum caſuum demonſtrationes apud Serenum Antiſenſem videre licet. Itaque eſto Conus Scalenus, cuius Axis AC ſemidiametro baſis minor, aptetur HA aequalis ſemidiametro BC, vel CD, perque puncta C, H traiiciantur in baſi circulari rectae EF, GO ad rectos angulos diametro BD inſiſtentes; triangulum aequicrure OAG maius erit triangulo FAE. Fiat angulo AHC aequalis HCK, & iungatur HK. Quia in triangulis CAH, CKH latera AH, HC aequantur lateribus CK, CH, & angulus AHC aequatur angulo HCK (a), *erit tùm AC* (b) *aequalis HK, tùm obtuſus angulus ACH aequalis angulo CHK, qui proinde obtuſus erit, maiorque recto CHG, ideoque* (c) *HG maior erit HK. Deinde cum AH, CE* (d), *itemque* (e) *AC, HK ſint aequales, erit AH ad AC, ut CE ad HK: ſed CE ad HK maiorem* (f) *habet rationem, quam CE ad HG; ergo etiam AH ad AC eſt in maiori ratione, quàm CE ad HG, ideoque* (g) *rectangulum AHG, ſeu triangulum OAG maius erit rectangulo ACE, ſeu triangulo FAE.*]

Fig. 12.

a ex conſtruct.
b 4. I. Elem.
c 7. III. Elem.
d ex conſtruct.
e ex demonſtr.
f 8. V. Elem.
g ex praemiſſis.

[*Cum igitur in Cono ſcaleno dari queant triangula extra axem, quae baſim habeant inter extremitates C, B radii CB, à quo axis AC declinat, quorum alterum ſit minus, alterum maius maximo FAE per axem AC tranſeuntium; liquet, aliud triangulum inter utrumque haberi poſſe, quod maximo FAE ſit aequale.*]

Se-

Verum haec de triangularibus Coni sectionibus indicasse sufficiat: Iam de curvis sectionibus Conicis est deinceps agendum.

PROPOSITIO I.

SI Conus ABD, aut illi ad verticem oppositus, secetur plano basi BED parallelo, sectio FHG, aut fhg circulus erit. Fig. 17.

Ducatur axis AC, occurrens plano secanti in puncto L, & per axem idem Conus secetur plano triangulari ABD, cuius & prioris plani secantis communis sectio FG parallela (a) erit diametro basis BD; ac sumpto quolibet puncto H in perimetro sectionis, iuncta ad verticem AH protrahatur ad peripheriam basis in E, ac iungantur EC, HL, [*quae* (b) *erunt invicem parallelae*]; nam sunt communes sectiones plani trianguli ACE cum illis parallelis planis BED, FHG, ideo similia erunt triangula ACE, ALH (c): itemque [*BC, FL cum sint communes sectiones plani trianguli ACB cum illis parallelis planis BED, FHG, erunt invicem* (d) *parallelae, adeoque etiam erunt*] similia [*triangula*] CBA, LFA (e); propterea erit CE ad LH, ut CA ad LA; & ut CA ad LA, ita (f) BC ad FL; quare (g) CE ad LH est, ut BC ad FL: sed radius CE aequatur radio BC, ergo & LH aequatur (h) ipsi FL. Et eodem modo ostendetur, quamlibet aliam rectam iungentem quodvis punctum perimetri huius sectionis cum puncto L, aequari eidem FL,

a 16. *XI. Elem.*
b 16. *XI. Elem.*
c *cor. I. prop. 4. VI. El.*
d 16. *XI. Elem.*
e *cor. I. prop. 4. VI. El.*
f *cor. I. prop. 4. VI. El.*
g 11. *V. Elem.*
h 14. *V. Elem.*

FL; ergo haec sectio circulus erit, cuius centrum L, quippe omnes rectae hinc ad perimetrum sectionis ductae, ostenduntur aequales. [*Eodem prorsus ratiocinio, si loco punctorum F, H, G, L, planique FHG substituantur in demonstratione puncta f, h, g, l, planumque fhg, demonstrabitur, sectionem fhg circulum esse.*] Q.E.D.

COROLLARIVM.

HInc axis Coni AC transit per centra quaelibet L, omnium circulorum, quibus aequidistanter basi Conus secatur; idque etiam in alio opposito Cono Agf contingit.

PROPOSITIO II.

SI Conus scalenus ABED secetur plano per axem transeunte, ad basim recto ABD; mox altero plano KHM ad illud planum
Fig. 18. ABD recto iterum secetur per rectam KM, quae triangulum KAM efficiat simile ipsi BAD, sed subcontrarie positum, ut nempe sit angulus AKM aequalis ADB, un-
a *cor.* 9. de & alius AMK erit (a) alteri ABD aequa-
pr. 32. lis, ob angulum A utrique triangulo commu-
I. Elem. nem: haec quoque sectio circulus erit.

Ducta ex quolibet puncto H perimetri huius sectionis recta HI, quae sit perpendicularis plano ABD, atque in communem plano-
b 38. *XI.* rum sectionem KM incidet (b), agatur per I
Elem. recta FIG parallela diametro basis BD; ac per ipsas

ipsas FG, HI ducatur planum FHO, quod erit parallelum (a) plano basis transeunti per BD, & per ER huic perpendicularem, quae erunt ipsis FG, HI parallelae; [*quippe cum planum basis BED sit* (b) *rectum plano trianguli BAD, etiam ER, quae perpendicularis est* (c) *ad communem sectionem BD, recta* (d) *erit plano trianguli BAD, cui cum sit recta quoque HI* (e), *aequidistabunt ER, HI* (f), *quemadmodum mutuo aequidistant* (g) *BD, FG:*] Quare Sectio (h) FGH erit circulus, cuius centrum L in axe, ubi secat eius diametrum FG: & bifariam pariter secta KM in O, iungantur HL, HO; erit quadratum HL aequale quadrato alterius radii GL, idest rectangulo FIG, cum quadrato LI (i): sed [*ob HI rectam plano* (k) *trianguli BAD, adeoque normalem* (l) *ad FIG;*] idem quadratum HL aequatur quadratis HI, & LI (m); ergo [*rectangulum FIG, cum quadrato LI aequale est quadratis HI, LI; unde*] quadratum HI aequatur rectangulo FIG. Sed ob angulum AKM aequalem ADB (n), adeoque etiam angulo externo parallelarum MOI (o), & angulos ad verticem I aequales KIF, GIM (p), similia sunt (q) triangula FIK, GIM; unde KI ad IF est, ut GI ad IM, adeoque rectangulum FIG aequatur rectangulo KIM (r); ergo quadratum HI, [*quod ostensum est aequale rectangulo FIG,*] aequatur etiam rectangulo KIM: & addito quadrato IO, erunt quadrata HI, & IO, aequalia rectangulo KIM, cum quadrato IO; idest [*ob rectum angulum* (s) *HIO,*] quadratum OH (t) aequa-

a 15. XI. *Elem.*
b *ex hypoth.*
c *ex construct.*
d *def.* 4. *XI. El.*
e *ex construct.*
f 6. *XI. Elem.*
g *ex construct.*
h *ex pr. I.*
i 5. *II. El.*
k *ex construct.*
l *def.* 3. *XI. El.*
m 47. *I. Elem.*
n *ex hypoth.*
o 27. *I. El.*
p 11. *I. El.*
q 4. *VI. Elem.*
r 16. *VI. Elem.*
s *def.* 3. *XI. El.*
t 47. *I. Elem.*

a 5. *II. Elem.* aequabitur quadrato OM (a); est igitur recta OH aequalis OM; & de qualibet recta ex alio puncto perimetri KHM ad idem punctum O ducta idem demonstrabitur; ergo haec quoque sectio est circulus cuius centrum O. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. HInc habetur, quod in circulo quadratum perpendicularis ductae ad diametrum ex quolibet puncto circumferentiae, aequatur rectangulo ex partibus diametri ab ipsa divisis, nempe HI quadratum aequatur rectangulo FIG in circulo GHF: & vicissim si in aliqua figura KHM, quadratum cuiusvis perpendicularis ex perimetro ad basim ductae HI aequatur rectangulo partium basis KIM; haec figura erit circulus, cuius diameter ipsa basis KM.

II. Si planum secans, neque sit parallelum basi, neque subcontrarie positum triangulum abscindat simile triangulo per axem ad basim recto, sectio non erit circulus; quia ob inaequalitatem angulorum, triangula FKI, MGI non erunt similia, nec erit KI ad IF, ut GI ad IM; unde rectangulum FIG, seu quadratum HI, non aequabitur rectangulo KIM; & addito quadrato IO, non evadet quadratum OH aequale OM, adeoque radii non erunt aequales.

III. Quoniam in hujusmodi subcontraria sectione triangula per axem AKM, BAD

b 4. *VI. Elem.* sunt (b) similia, ideoque DA ad AB est, ut

AK

AK ad AM: rectangula DAM, BAK sunt aequalia (a), & circulus per puncta B, K, M, D transire posset; [*si enim circulus, qui transit per puncta B, D, M* (b), *non transiret quoque per K, non esset rectangulum BAK aequale rectangulo* (c) *DAM.*] Ducta vero BN eidem KM parallela, circulus triangulo DNB circumscriptus, tangeretur a latere AB in B; Quia [*ob angulum ABN aequalem angulo AKM* (d) *seu ADB* (e), *& angulum BAN aequalem angulo BAD,*] triangulorum ADB, ABN similitudo (f) dat AD ad AB, ut AB ad AN; ideoque AB quadratum rectangulo DAN aequale redditur (g), unde AB fit tangens (h) circuli per B, N, D transeuntis.

a 16. *VI. Elem.*
b 5. *IV. Elem.*
c *cor. I. pr. 36. I. Elem.*
d 27. *I. Elem.*
e *per hypoth.*
f 4. *VI. Elem.*
g 17. *VI. Elem.*
h 37. *III. Elem.*

IV. Et quia omnes sectiones ipsi circulo KHM parallelis planis effectae, pariter circuli erunt, iuncta ex Coni vertice A ad centrum O recta AO, per centra omnium circulorum ipsi aequidistantium transibit; quippe omnes rectas KM parallelas bifariam (i) secabit, ut ipsa secatur in O, & BN in S; unde erit alius axis huius Coni recta AO, secans tamen inaequaliter diametrum basis in R. Ideo in Conis scalenis erunt bini axes AC, AR, per circulorum suorum centra deducti; quando Coni recti unicum habent eiusmodi axem.

i *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*

V. Secabitur autem ab hoc axe secundario diameter basis in R, ut sit BR ad RD, quemadmodum lateris AB quadratum ad quadratum DA, seu quadratum rectae AN ad quadratum lateris AB, [*ob AB ad AD, ut* (k) *AN ad AB*]: axis

k *ex coroll. III.*

axis vero primarius AC secabit diametrum circuli subcontrarie positi, velut BN in Q, ita ut sit BQ ad QN, ut quadratum AB ad AN quadratum, [*vel invertendo QN ad BQ, ut quadratum AN ad AB quadratum, vel* (a) *ut BR ad RD;*] ideoque BR ad RD erit (b) ut NQ ad BQ. Nam ducta NPT parallela BD, erunt (c) similia triangula BSR, NST, & [*BS ad SN erit, ut BR ad NT; unde*] ut BS aequatur SN, (d) ita BR aequabitur NT; ergo BR ad RD est, ut TN ad RD, scilicet ut (e) AN ad AD, quae (f) sunt, [*ut rectangulum DAN ad quadratum AD, vel*] ut quadratum AB (g) ad quadratum AD, quia ostensae sunt AN, AB, AD continue proportionales: similiter BQ ad QN erit, ut BC, ad NP (ob similia triangula BQC, PNQ,) sive ut DC, quae aequatur BC, ad NP, id est (h) DA ad AN, nempe [*ut quadratum DA ad* (i) *rectangulum DAN, vel ut quadratum DA ad* (k) *quadratum AB aut*] ut quadratum AB ad quadratum AN, [*quia ostensae sunt AN, AB, AD, continuè proportionales.*]

a *ex superius dictis.*
b *II. V. Elem.*
c *4. VI. Elem.*
d *ex Coroll. IV.*
e *cor. I. prop. 4. VI. El.*
f *ex pr. 1. VI. El.*
g *ex pr. 17. VI. Elem.*
h *cor. 1. prop. 4. VI. El.*
i *ex pr. 1. VI. El.*
k *17. VI. Elem.*

PROPOSITIO III.

Fig. 19.

SI Conus ABD triangulo per axem transeunte secetur, tum ex quovis puncto H superficiei Conicae agatur recta HIL parallela cuidam EF, quae diametro basis Coni BD sit perpendicularis: dico rectam illam HIL occurrere plano ipsius trianguli per axem, & inde ad alteram superficiei Conicae partem

in

in L ita protendi, ut in dicto occursu I cum plano trianguli bifariam secta remaneat, nempe ut HI aequetur IL.

Iuncta enim ex vertice Coni A recta AH producatur usque dum peripheriae basis occurrat in M, & ex M in plano basis ducta MKG parallela ipsi EF, diametrum perpendiculariter secante, & ab ipso bifariam divisa in K (a), iungatur quoque recta AG, quae iacens in superficie Conica conveniet cum ipsa HIL in L. Etenim HL, MG aequidistantes tertiae EF, sunt parallelae (b) inter se, adeoque in eodem plano trianguli AMG; [*hinc sicuti AG convenit cum MG in Conicae superficiei puncto G, ita eadem AG conveniet cum HIL in Conicae superficiei puncto L*;] & iuncta AK erit communis (c) sectio plani trianguli per axem BAD, & plani alterius trianguli AGM, unde per punctum I transibit, utrique plano (d) commune. Quia ergo erit MK ad HI, ut (e) KA ad AI, & ut GK ad IL; estque MK aequalis GK (f), erit quoque HI aequalis IL; ergo HL ab ipso plano per axem bifariam secatur. Q. E. D.

a 3. *III. Elem.*
b 9. *XI. Elem.*
c 3. *XI. Elem.*
d *ex hypoth.*
e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f *ex demonstr.*

COROLLARIA.

I. Hinc habetur, quod si Conus triangulo per axem sectus, alio plano per rectam MG diametro basis perpendiculariter transeunte, iterum secetur, cuius & alterius plani communis sectio sit recta NK; haec bifariam secabit omnes lineas, veluti HL, in eadem Fig. 20.

eadem ſectionè ductas ipſi MG parallelas; [*Singulae enim plano trianguli BAD, vel huius, & plani MNG communi ſectioni NK* a *ex hac prop.* *ita occurrent, ut ab ipſa* (a) *biſariam dividantur*.]

II. Et ſi eadem recta MG, per quam planum GNM deducitur, nedum ſit perpendicularis diametro BD, ſed etiam plano trianguli per axem (quod evenit, ubi triangu- b 18. XI. Elem. lum per axem eſt (b) rectum ad planum baſis,) tunc rectae illae MG, HL non ſolum biſariam, ſed etiam ad rectos angulos ſecabuntur ab illa communi ſectione KN: quippe non c *def.* 3. XI. *El.* tantum angulus MKD rectus erit, ſed etiam MKN (c), & illi aequalis HIN (d). Vbi d 27. I. *Elem.* vero recta MKG non fuerit perpendicularis plano trianguli per axem, ſeu niſi triangu- e 18. XI. *Elem.* lum per axem ſit (e) rectum plano baſis, transſeundo per rectam ex vertice Coni A ducf *ex hac prop.* ctam baſi perpendicularem; tunc NK biſariam (f) quidem ſecabit rectas illas paralle- g 27. I. *Elem.* las HI, GM, ſed ad angulos obliquos, non autem rectos, iuxta (g) inclinationem lineae MK ad ipſam KN.

Fig. 21. 22. 23. 24.

DEFINITIONES SECUNDAE.

I. IPſa linea KN, biſariam ſecans omnes rectas HL eidem MG parallelas, in qualibet ſectione GNM ductas, eius ſectionis *diameter* vocabitur.

II. Et diametri terminus N (vel etiam ſi terminus alius Q ipſi oppoſitus fuerit, etiam Q) *vertex* ſectionis dicetur.

III. Ipſae

III. Ipsae autem sectae HL, MG (vel etiam earum medietates HI, MK) *ordinatae* ad ipsam diametrum NK appellantur.

IV. Quod si nedum bifariam, sed etiam perpendiculariter secentur ordinatae a diametro, praeter generale *diametri* vocabulum, speciale nomen *axis* eidem diametro tribuetur.

[V. *Si recta AD ita dividatur in B, C, ut sit tota AD ad utramvis extremam partem CD, ut reliqua extrema AB ad mediam BC: recta AD* harmonice *divisa dicitur in punctis A, B, C, D, quae idcirco* harmonicalia *nuncupantur*.] Fig. 25.

Aliae definitiones in sequentibus aliquibus propositionibus, & earum Corollariis quibusdam designabuntur.

PROPOSITIO IV.

SI Conus ADMP plano per axem sectus, alio plano MNG secetur, per rectam MG diametro circuli basis perpendicularem, a qua bifariam secatur ipsa in K, & per rectam KN, uni ex lateribus AB trianguli per axem parallelam, deducto; erunt in huiusmodi sectione quadrata ordinatarum MK, HI proportionalia abscissis a vertice sectionis N portionibus diametri NK, NI. Vocetur autem huiusmodi sectio *Parabola*. Fig. 26.

Per quodlibet punctum I communis sectionis KN, cui est ordinata HIL, ducta PIV parallela diametro basis BD; si agatur per ipsas

ipsas VP, HL planum PHV, quod erit parallelum basi, per BD, MG illis aequidistantes transeunti (a), adeoque circulum efficiet (b), unde [*ob rectum angulum PIH, utpote aequalem recto BKM* (c),] resultabit quadratum HI aequale rectangulo PIV, ut quadratum MK aequatur (d) rectangulo BKD, ergo quadratum MK ad quadratum HI est, ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV, scilicet ut KD ad IV (e); nam BK (f) aequatur PI, cum sit BPIK parallelogrammum lineis oppositis aequidistantibus comprehensum: Est autem KD ad IV, ut KN ad IN, ob similia triangula (g) NKD, NIV; ergo quadrata ordinatarum MK, HI, sunt ut partes diametri a vertice abscissae NK, NI. Q. E. D.

a 15. *XI. Elem.*
b *ex pr. I.*
c 10. *XI. Elem.*
d *ex cor. I. pr.* 2.
e *I. VI. Elem.*
f 34. *I. Elem.*
g *Coroll. I. pr.* 4. *VI. El.*

Nomen autem huius sectionis, hanc proprietatem habentis, est *Parabola*.

COROLLARIA.

I. Hinc habetur, quod si fiat ut NK, ad KM, ita KM ad aliam NF, vertici N diametri NK perpendiculariter applicatam; ut quadratum MK erit aequale rectangulo KNF (h), ita cuiusvis alterius ordinatae HI quadratum erit aequale rectangulo INF: quia haec rectangula [*KNF, INF*] eamdem altitudinem NF habentia sunt, ut abscissae KN, IN (i), adeoque ut ordinatarum quadrata MK, HI illis (k) proportionalia; [*est autem rectangulum KNF quadrato MK aequale; ergo & rectangulum INF* (l) *aequabitur HI quadrato.*] Et haec constans linea

h 17. *VI. Elem.*
i 1. *VI. Elem.*
k *per hanc prop.*
l 14. *V. Elem.*

linea NF ab antiquis *Latus rectum*, a recentioribus *Parameter Parabolae* appellatur.

II. Ducta quoque NE diametro basis Coni parallela, lateribus trianguli per axem terminata, si fiat ut NK ad KD, vel [*ut* (a) *AB ad BD*, *aut*] ut AE (b) ad EN, ita EN ad NF; erit eadem NF latus rectum, seu parameter ipsius parabolae. Nam BK (c) aequalis EN (ob parallelogrammum BENK), erit ad NF, ut AE ad EN, sive (ob similia triangula AEN, NKD), ut NK ad KD; & ideo (d) rectangulum BKD, idest quadratum MK (e), aequabitur rectangulo KNF; [*ideoque erit* (f) *NF parameter*.]

III. Idem parameter NF reperitur, si fiat, ut rectangulum laterum trianguli per axem BAD ad quadratum basis BD, ita AN ad NF; Nam rectangulum BAD ad quadratum BD est [*in ratione* (g) *composita ex rationibus AB ad BD*, *& AD ad BD*, *seu* (h) *ex rationibus AE ad EN*, *& AN ad EN*, *seu*] ut rectangulum (i) EAN ad quadratum EN: sed (k) quadratum EN aequatur rectangulo EA in NF parametrum, (cum sint lineae (l) EA, EN, NF continue proportionales); ergo BAD rectangulum ad BD quadratum est, ut EAN rectangulum ad EA in NF, adeoque (m) ut AN ad NF, ob communem horum rectangulorum altitudinem EA.

a *cor. I. prop. 4. VI. El.*
b *per idem Coroll.*
c 34. *I. Elem.*
d 16. *VI. Elem.*
e *cor.* 1. *prop.* 2.
f *ex Coroll. I.*
g *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
h *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
i *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*
k 17. *VI. Elem.*
l *ex Coroll. praeced.*
m *I. VI. Elem.*

PROPOSITIO V.

Iisdem positis, ut in praecedenti propositionis titulo, sed communi Sectione trianguli per axem, & plani secantis per rectam

Fig. 27.

C MKG

MKG diametro basis perpendicularem traducti, non iam aequidistante uni laterum trianguli per axem, verum ita inclinata, ut cum uno latere AD infra verticem A Coni ad punctum N, & cum altero latere AB supra verticem A conveniat ad punctum Q; ordinatarum Sectionis MNG quadrata MK, HI erunt, ut rectangula QKN, QIN diametri partibus inter easdem ordinatas, & utrumque terminum N, Q diametri ipsius interiectis comprehensa. Eodemque plano ad alteram oppositam superficiem Conicam producto, similis sectio lQh inde resultabit, cuius ordinatarum quadrata, sive invicem, sive cum quadratis ordinatarum inferioris sectionis MNG comparata, erunt pariter, ut rectangula diametri partibus, inter ipsas, & utrumque verticem Q, N positis, comprehensa.

Vocentur autem ambae *sectiones oppositae*, & utraque ipsarum *Hyperbola*, ac diametri portio NQ, utrique vertici interiecta, *Latus transversum* nuncupetur.

Ducta per punctum I, ubi quaelibet ordinata HI ad diametrum NK Sectionis huius applicatur, recta PIV diametro basis BD parallela; utique planum per ipsas VP, HIL traductum, utpote basi DMB aequidistans, efficiet circulum HVP (a); adeoque quadratum MK ad quadratum HI erit, ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV; quorum (b) ratio componitur ex ratione BK ad PI, quae eadem est KQ (c) ad QI, & ex ratione DK ad

a *ex pr. I.*
b *cor. 2. pr. 23. VI. El.*
c *cor. 1. prop. 4. VI. El.*

ad VI, quae eadem (a) est KN ad NI; [*igitur est quadratum MK ad HI quadratum in ratione composita ex ratione KQ ad QI, & ex ratione KN ad NI*;] quemadmodum, & ratio rectanguli QKN ad rectangulum QIN ex iisdem (b) rationibus componitur: quare est quadratum MK ad quadratum HI, ut QKN ad QIN. Idemque probabitur de ordinatis superioris oppositae sectionis IQh, [*atque de ordinatis MK, hi ad sectiones oppositas MNG, hQI spectantibus; est quippe quadratum MK ad quadratum hi* (c), *ut rectangulum BKD ad rectangulum piu, seu in ratione* (d) *composita ex ratione BK ad pi, quae eadem est* (e) *KQ ad Qi, & ex ratione KD ad iu, quae eadem est* (f) *KN ad Ni; Igitur quadratum MK est ad quadratum hi in ratione composita ex ratione KQ ad Qi, & ex ratione KN ad Ni, seu ut rectangulum* (g) *QKN ad QiN*]; unde constat propositum. Vocatur autem quaelibet ex hisce oppositis Sectionibus *Hyperbola*, & diametri portio QN *Latus transversum* nuncupatur.

a *cor.* I. *prop.* 4. *VI. El.*

b *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*

c *cor.* I. *pr.* 2.

d *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*

e 4. *VI. Elem.*

f *per eamdem.*

g *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*

COROLLARIA.

I. SI fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, ad punctum K diametri NK perpendiculariter applicanda, & iuncta QZ, ad ipsam producantur rectae NF, IS parallelae KZ; ipsa NF ex vertice N ducta *Latus rectum*, sive *Parameter* hyperbolae erit: cui haec proprietas convenit, quod ut quadratum MK mediae

proportionalis inter NK, & KZ, aequatur rectangulo NKZ, quod parametro NF applicatur, sed cum excessu rectanguli FIZ similis
a 24. *VI. Elem.* QNF (a) rectangulo, ex latere transverso QN; & recto NF comprehenso: ac similiter quadratum cuiusvis alterius ordinatae HI aequabitur rectangulo NIS, eidem parametro NF applicato, sed (ducta FRY parallela NK, secante IS, KZ in R, Y) cum excessu rectanguli FRS, pariter
b *per eamdem prop.* (b) similis dicto rectangulo QNF. Nam quia KZ ad IS est, ut
c *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.* (c) KQ ad QI, ratione KN ad NI utrinque adiecta, [*erit ratio composita ex rationibus KZ ad IS, & KN ad NI eadem ac ratio, quae componitur ex rationibus KQ ad QI, & KN ad NI: sed ratio composita ex rationibus KZ ad IS, & KN ad NI est ratio, quam habet rectangulum ZKN*
d *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.* (d) *ad rectangulum NIS; & ratio composita ex rationibus KQ ad QI, & KN ad NI, est illa, quam habet*
e *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.* (e) *rectangulum QKN ad rectangulum QIN, igitur*] erit rectangulum ZKN ad rectangulum NIS, ut rectangulum QKN ad QIN, sive
f *per hanc prop.* (f) ut MK quadratum ad HI quadratum; unde, ut MK quadratum aequatur ZKN, ita HI quadratum aequatur NIS.

II. Item si fiat, ut NK ad KB, ita KD ad KZ, iuncta, ut supra, QZ, cui occurrat in F recta NF ipsi KZ parallela, erit NF
g 16 *VI. Elem.* eadem parameter; nam [*cum sit NK ad KB, ut KD ad KZ,*] ZKN rectangulum (g) aequabitur BKD, adeoque & KM
h *cor.* I. *pr.* 2. (h) quadrato, unde etiam NIS aequabitur
i *Coroll. preced.* (i) quadrato HI.

III. Si-

III. Similiter ducta NE parallela DB, si fiat ut NK ad KD, ita NE ad NF, erit haec parameter: nam iuncta QF, ac producta, ut secet rectas IS, KZ eidem NF parallelas in S, & Z, [*ob parallelas EN, BK, itemque NF, KZ,*] erit tam BK ad NE, quam KZ ad NF in eadem ratione (a) KQ ad QN, unde [*BK ad NE est, ut KZ ad NF* (b), *& permutando,*] BK ad KZ, ut NE ad NF, sive (c) ut NK ad KD; & ideo rectangulum BKD, quod idem est cum quadrato (d) MK, aequabitur (e) NKZ, ut supra, [*proindeque NF ipsi KZ parallela, est* (f) *parameter.*]

a cor. 1. prop. 4. VI. El.
b 11. VI. Elem.
c ex hypoth.
d cor. I. prop. 2.
e 16. VI. Elem.
f per. cor. 1. huius prop.

IV. Ducto vero ex vertice Coni A in plano trianguli per axem recta AO parallela NK; cum sit FN ad NE, ut KD ad NK (g), sive (h) ut DO ad OA, itemque NE ad NQ, ut BO ad OA; erit [*ex tribus rectis FN, NE, NQ, prima ad tertiam, seu*] FN ad NQ in ratione (i) composita ex [*FN ad NE, seu*] DO ad AO, & ex [*NE ad NQ, seu*] BO ad AO, videlicet ut rectangulum DOB ad quadratum AO (k): Vnde si fiat ut quadratum AO ad rectangulum DOB, ita latus transversum QN ad NF, erit haec latus rectum, seu parameter.

g Coroll. praeced.
h cor. 1. prop. 4. VI. El.
i ex num. 12. par. 3. V. El.
k cor. 2. pr. 23. VI. El.

V. Immo etiam ducta AT ex Coni vertice parallela diametro basis DB, & conveniente cum transverso latere NQ in T, erit rectangulum QTN ad quadratum AT, ut transversum latus NQ ad rectum NF: quippe [*ob triangula KND, TNA similia,*] cum sit (l) NT ad TA, ut NK ad KD, si-

l prop. 4. VI. El.

a *cor. I. prop. 4. VI. El.* ve (a) ut AO ad OD; nec non QT ad TA, ut AO ad OB, [*ratio composita ex rationibus NT ad TA, & QT ad TA, seu* (b) *ratio rectanguli QTN ad TA quadratum, aequabitur rationi compositae ex rationibus AO ad OD, & AO ad OB, seu rationi, quam* (c) *habet quadratum AO ad rectangulum BOD; quocirca*] erit rectangulum QTN ad quadratum TA, ut quadratum AO ad DOB rectangulum, adeoque ut QN ad NF (d).

b *cor. 2. pr. 23. VI. El.*

c *cor. 2. pr. 23. VI. El.*

d *Coroll. praeced.*

VI. Denique cuiuslibet ordinatae MK quadratum ad rectangulum QKN, vel quadratum HI ad QIN rectangulum erit, ut rectum latus NF ad transversum NQ: Nam etiam rectangulum ZKN, quod aequatur quadrato MK (e), ad QKN est, ut ZH (f) ad QK (ob eandem altitudinem NK), & SIN, quod aequatur quadrato HI (g), est ad QIN, ut IS ad QI (h): verum hae rationes ZK ad QK, aut SI ad IQ sunt eaedem, ac (i) ratio lateris recti NF ad NQ transversum; ergo quadrata ordinatarum [*MK*, *HI*] ad rectangula ex diametri partibus sibi correspondentibus [*QKN*, *QIN*] sunt, ut parameter, seu latus rectum [*NF*] ad latus transversum [NQ].

e *cor. 1. huius proposit.*

f *1. VI. Elem.*

g *Coroll. 1. huius prop.*

h *1. VI. Elem.*

i *cor. 1. prop. 4. VI. El.*

VII. [*Hinc si Hyperbola MNG habeat latus rectum NF aequale transversum QN; etiam ordinatarum MK, HI quadrata aequabuntur rectangulis QKN, QIN. Huiusmodi Hyperbola* aequilatera *nuncupatur.*]

PFO-

PROPOSITIO VI.

QVod si KN communis Sectio trianguli per axem, & plani secantis, per rectam MKG diametro basis BD, vel alterius aequidistantis circuli diametro ordinatam, transeuntis, conveniat cum utroque latere infra verticem A, ad puncta N, Q: erunt huius Sectionis QHN ordinatarum MK, HI quadrata, ut rectangula partium diametri, inter utrumque terminum Q, N ab ipsis ordinatis secti, nempe ut QKN ad QIN; Et eiusmodi Sectio (si nec sit basi parallela, nec ipsi subcontrarie posita, adeoque circulus non fuerit) speciali nomine *Ellipsis* nuncupabitur, cuius pariter latus transversum erit ipsa QN. Fig. 28.

Eadem demonstratione, qua superior propositio, haec quoque probatur: unde non interest hic illam iterare, sed huic figurae ipsa est a lectoribus applicanda.

COROLLARIA.

I. SI fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, diametro QN in puncto K perpendiculariter applicatam, & iuncta QZ secet in F rectam NF ipsi KZ parallelam, cui etiam aequidistans ducatur IS, cuilibet alteri ordinatae HI correspondens; erit NF *latus rectum*, seu *parameter* huius sectionis: & quarumlibet ordinatarum quadrata MK, HI erunt respective aeqalia rectangulis ZKN, SIN, quae sunt applicata parametro NF, sed cum defectu rectangulorum, (ducta FRY parallela NQ, secante ipsas KZ, IS in Y, R) ZYF, SRF similium rectangulo QNF sub transverso latere QN, & sub recto NF comprehenso. Idque probatur; ut in Cor. 1. prop. praeced. permutato in *defectum* illo *excessu* rectangulorum applicatorum parametro, aequalium quadratis ordinatarum hyperbolae, a dicto excessu sic nuncupatae, uti ab hoc defectu nomen Ellipsis deducitur.

II. Si pariter fiat ut NK ad KB, ita KD ad KZ, iuncta QZ secans NF in F determinabit parametrum. Vt in cor. 2. prop. praeced.

III. Item si fiat ut KN ad KD, ita NE, parallela BD, ad NF, erit haec latus rectum. Vt in cor. 3. prop. praeced.

IV. Ducta quoque AO parallela NQ, erit ut AO quadratum ad rectangulum DOB, ita latus transversum QN ad rectum NF. Vt in cor. 4. prop. praeced.

V. Et similiter ducta AT parallela BD, conveniente cum QN in T, erit rectangulum QTN ad AT quadratum, ut transversum latus QN ad rectum NF. Vt in cor. 5. prop. praeced.

VI. Quodlibet autem quadratum ordinatae ad rectangulum sub diametri partibus puta MK quadratum ad QKN, aut HI quadratum ad QIN est, ut latus rectum NF ad transversum NQ. Vt in cor. 6. prop. praeced.

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI ex eodem Cono ABD per plana invicem parallela MNG, SVR duae Parabolae, aut duae Hyperbolae, vel duae Ellipses (aut etiam quovis numero plures), secentur, earum parametri, seu latera recta NF, VT, erunt proportionalia distantiis NA, VA suorum verticum N, V, a Coni vertice A. Fig. 29. 30. 31.

Nam est KN ad KD, ut EN ad parametrum NF (a): ac similiter foret, ut VO ad OD, ita PV ad parametrum VT alterius Sectionis priori parallelae; Quare cum (b) sit eadem ratio NK ad KD, & VO ad OD ob rectas NK, VO parallelas, erit quoque ratio EN ad NF eadem, quae PV ad VT (c) ac permutando, erit NF ad VT, ut EN ad PV, sive (d) ut NA ad VA. Q. E. D.

a *cor.* 2. *pr.* 4. & *cor.* 3. *pr.* 5. & 6.
b *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
c 11. *V. Elem.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*

COROLLARIUM.

IN Hyperbolis, & Ellipsibus, quoniam pariter transversa latera QN, LV [*utpote invicem parallela*] sunt (e), ut distantiae a Coni vertice NA, VA, erunt etiam recta latera NF, VT (f) proportionalia transversis QN, VL: & ideo hae Sectiones parallelis planis ab eodem Cono deductae *similes* dicuntur. Parabolae autem quaelibet semper similes sunt quippe ob diametrum uni ex lateribus Coni equidistantem (g), semper planis parallelis ex eodem Cono deduci possunt.

e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f 11. *V. Elem.*
g *ex pr.* 4.

PRO-

PROPOSITIO. VIII.

IN omni Sectione Conica, si rectum latus NF positum perpendiculare diametro, bifariam secetur in R, ducta RT, quae in Parabola aequidistet diametro, in reliquis autem Sectionibus bifariam secet in C transversam diametrum QN: dico quadratum cuiuslibet ordinatae MK fore duplum quadrilateri NRTK sibi correspondentis, quod recta KT eidem NF parallela, cum dictis aliis lineis concludit.

Fig. 32. 33. 34.

Ducatur enim recta FB, in parabola quidem parallela diametro, in aliis vero Sectionibus, cum alio termino Q transversi lateris, terminum F lateris recti coniungens, unde in omnibus (a) evadet ipsi RT parallela, ob QN in C, ac NF in R ab ipsa bifariam, [*adeoque proportionaliter*] sectas, dum utraque FB, RT in parabola aequidistat diametro; ac iuncta NB ab eadem RT bifariam secabitur in S, ut NF ab ipsa bisecatur in R. Quare triangula NSR, SBT, cum habeant ad verticem S (b) aequales angulos, & alios (c) alternos [*SNR, TBS*] parallelarum [*NR, TB*] pariter aequales, cum aequalibus lateribus NS, SB, erunt invicem aequalia (d); & communi addito quadrilineo NSTK, erit triangulum NKB aequale quadrilatero NRTK: Sed ex genesi Sectionum patet, ordinatae MK quadratum (e) aequari rectangulo NKB, adeoque duplo trianguli NKB,

a 2. *VI. Elem.*
b 15. *I. Elem.*
c 27. *I. Elem.*
d 26. *I. Elem.*
e *cor.* 1. *pr.* 4. & *cor.* 1. *pr.* 5. & 6.

NKB ; ergo idem quadratum ordinatae duplum est quadrilateri NRTK. Q.E.D.

Punctum illud C, quod in hyperbolis, & Ellipsibus bifariam secat latus transversum QN, *Centrum* harum Sectionum vocabitur. Recta vero QF, sive FB *directrix* ; & CR, sive RT (etiam in Parabola) *Subdirectrix* poterit appellari.

COROLLARIUM.

[*Quemadmodum ordinatae MK quadratum duplum est quadrilateri NRTK, ita alterius ordinatae PV quadratum duplum erit quadrilateri NRXV*] : Excessus [*igitur*] quadrati cuiuslibet ordinatae PV supra quadratum alterius ordinatae MK aequabitur duplo excessui quadrilateri NRXV, supra NRTK, idest duplo quadrilinei KVXT: & ille quadratorum excessus (ducta MG diametro parallela) est rectangulum PGD (a) ; Quare hoc rectangulum aequatur duplo KVXT. a 5. II. Elem.

PROPOSITIO IX.

Datae cuilibet Coni Sectioni tangentem ducere ad punctum in eius perimetro datum.

Vel datum punctum est in Sectionis vertice N, & tunc ducta NE parallela ordinatis, erit tangens: si enim ex puncto N infra Sectionem caderet, ab una tantum parte diametri chordam efficeret, unde diame- Fig. 35. 36. 37.

ter

ſter bifariam non ſecaret omnes parallelas ordinatis intra Sectionem poſitas ; quod eſt contra primam ex ſecundis definitionibus ; tangit ergo haec recta in dato puncto Sectionem.

Vel datum punctum extra verticem in perimetro Sectionis eſt, puta in M; & tunc ducta ſubdirectrice RT, ordinetur MK ad diametrum Sectionis, & KT parallela ſemiparametro NR, uſque ad ſubdirectricem pertingens in T, atque ipſis KT, MK tertia proportionalis KG in diametro ponatur ſupra ordinatam; iuncta GM tanget Sectionem. Ducatur enim recta GT, & ordinetur ad diametrum alia quaevis HL, occurrens ipſi GM in P; nec non ducatur LV parallela KT, ſubdirectricem ſecans in V, & rectam GT in D. Quoniam igitur ſunt tres proportionales KT, KM, & KG, rectangulum GKT aequatur (a) quadrato MK, adeoque eſt duplum quadrilateri NRTK (b): ſed idem rectangulum eſt quoque duplum (c) trianguli GKT; ergo hoc triangulum dicto quadrilatero aequabitur. Et quia ut TK ad KG, ita (d) DL ad LG, atque ut GK ad KM, ita (e) GL ad LP, [*erit ex aequo TK ad KM, ut DL ad LP : ſed TK eſt ad KM,* (f) *ut KM ad KG, ut LP ad LG ; ergo etiam eſt DL ad LP, ut LP ad LG ; unde*] quemadmodum proportionales ſunt TK, KM, KG, ita etiam DL, LP, LG erunt continue proportionales; unde quadratum LP aequabitur (g) rectangulo GLD, ſeu duplum (h) erit trianguli GLD, uti

a 17. *VI. Elem.*
b *pr. praeced.*
c *ex. pr.* 34. *I. El.*
d *cor. I. prop.* 4. *VI. El.*
e *per idem cor.*
f *per conſtru.*
g 17. *VI. Elem.*
h 34. *I. Elem.*

uti quadratum ordinatae HL duplum est quadrilateri (a) NLVR. Sed triangulum GLD semper maius erit ipso quadrilatero NLVR; quia si LH est ordinata infra MK, triangulo GKT additur trapezium KLDT maius quadrilatero KLVT, quod adiungitur NKTR; si vero h l sit supra MK, triangulo GKT aufertur trapezium l K T d minus quadrilatero l K T u, quod aufertur ab ipso NKTR; unde semper maius resultat triangulum GLD quadrilineo NLVR, aut triangulum Gld quadrangulo NluR. Itaque quadratum PL maius est quadrato HL, & quadratum p l maius quadrato h l; unde quaelibet puncta P, aut p, praeter punctum M, rectae GM sunt extra Sectionem; & ideo GM est eius tangens. Q. E. D.

a *ex pr.* 8.

Illa diametri portio KG, quae inter ordinatam, & concursum tangentis intercipitur, *subtangens* vocatur.

COROLLARIA.

I. HInc patet, tangentem harum Sectionum in unico puncto cum earum curva convenire.

II. Producta KT ad directricem FB in B, quoniam ex natura harum Sectionum, rectangulum NKB aequatur quadrato ordinatae MK (b), & hoc quadratum (c) aequatur rectangulo GKT, erit NKB aequale GKT; & ideo (d) subtangens GK ad abscissam a vertice NK erit, ut KB ad KT, [*& invertendo KT ad KB, ut NK ad GK:*] unde tangens dati puncti M etiam determinabitur, si fiat

b *cor.* 1. *pr.* 4. 5. *&* 6.

c *ex demonst. huius pr.*

d 16. *VI. Elem.*

fiat, ut KT ad KB, ita KN ad KG, & ad M iuncta GM erit tangens.

a Coroll. praeced. b cor. 1. pr. 18. V. El. c 34. I. Elem. d ex hypoth. e cor. 3.

III. [*Quoniam KB est ad KT, ut* (a) *GK ad KN*] per conversionem rationis (b) erit ut KB ad BT, scilicet ad dimidium parametri (nam BT aequatur RF (c), sive (d) NR), ita subtangens KG ad GN, tangente, & vertice curvae interceptam.

IV. Item [*cum sit KB ad TB*, (e) *ut GK ad GN*,] dividendo, KT ad TB aequalem semiparametro, erit, ut KN ad NG.

f cor. 3. huius pr.

V. Item si iungatur BR, quae occurrat diametro in G, erit (f) KG subtangens, cum sit KB ad [*dimidium Parametri*] NR, ut KG ad GN.

Fig. 35. g pr. 34. I. El. h per eamdem. i cor. I. prop. 4. VI. El.

VI. Hinc in Parabola semper subtangens KG dupla est KN abscissae per ordinatam a vertice, uti etiam dupla reliquae NG, inter verticem, & tangentis occursum cum diametro, quia KB semper aequatur parametro (g) NF, cum sit directrix FB parallela diametro; adeoque semper KB est dupla semiparametri NR, aut (h) KT, unde [*cum sit KB ad NR, ut* (i) *GK ad GN*,] etiam GK est dupla GN, aut NK.

Fig. 36. 37. k cor. I. prop. 4. VI. El. l ex Coroll. 2.

VII. At in Hyperbola, & Ellipsi [*ob parallelas CT, QB*,] est QK ad CK, ut (k) BK ad KT, adeoque etiam, ut (l) GK ad KN, [*& invertendo, CK ad QK, ut KN ad GK*]. Vnde si fiat, ut distantia ordinatae a centro CK ad eius distantiam a remotiore termino transversi QK, ita distantia a

ver-

vertice proximiori KN ad aliam GK, erit haec ſubtangens quaeſita.

VIII. Vnde rectangulum QKN aequabitur rectangulo CKG (a), propter QK ad CK, ut (b) GK ad KN.

IX. Erit quoque per converſionem rationis (c), QK ad CQ, ſeu ad CN dimidium tranſverſi lateris, ut ſubtangens GK ad GN interceptam vertice, & tangente.

X. Et quia, ob parallelas QB, CR, eſt QG ad GC, ut (d) BG ad GR, quae ſunt ut (e) GK ad GN (ob parallelas KB, NR,) ideo erit QG ad GC, ut QK ad CQ, vel CN, cum iſtae (f) ſint in eadem ratione ipſius GK ad GN.

XI. Et dividendo erit QC ad CG, ut CK ad CQ, vel CN, [*& invertendo CG ad QC, ut QC ad CK* ;] unde erunt continue proportionales CK, CQ, CG, ſive, CK, CN, CG; & rectangulum KCG aequabitur (g) quadrato ſemitransverſi lateris CN, vel CQ: unde tangens invenietur, ſumpta ipſis CK, CN tertia proportionali CG, & iungendo ad punctum M rectam GM.

XII. Quoniam QK ad CQ eſt, ut GK ad GN (h), & CQ ad GQ, ut (i) KN ad GK, (cum utraque (k) harum rationum aequetur [*rationi*] RB ad BG,) ergo ex aequo perturbate QK ad GQ eſt, ut KN ad GN (l), & permutando, QK ad KN, ut GQ ad GN: unde eſt armonice ſecta diameter (m) hyperbolae, & Ellipſis per terminos tranſverſi lateris, concurſum ordinatae, & tangentis; adeoque tangens determinatur, faciendo huiu-

a 16 *IV. Elem.*
b *ex corol.* 7.
c *cor.* 1. *pr.* 18. *VI. El.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e *per idem Coroll.*
f *ex Coroll.* 9.
g 17. *VI. Elem.*
h *ex Coroll.* 9.
i 11. *V. Elem.*
k *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
l 23. *V. Elem.*
m *per* 5. *ex ſec. definit.*

iusmodi Sectionem harmonicam, nempe ut QK ad KN, ita punctum G statuendo, ut sit GQ ad GN in eadem ratione.

XIII. Hinc alia eruitur generalis constitutio pro tangente cuiusvis sectionis Conicae ad datum punctum M. Ducta enim ordinata MK, & ex vertice N huic parallela NI, quae erit tangens verticalis (a); si ex M ducatur in Parabola MI parallela diametro, in Ellipsi vero, & Hyperbola iungatur ad alium transversi lateris terminum Q recta MQ, secans verticalem illam tangentem in I, si ubique secetur bifariam NI in E, iuncta ME erit tangens. Nam si haec ad diametrum producatur in G, [*erit MK ad EN, ut* (b) *KG ad GN, adeoque*] patet fore in parabola GK duplam GN, ut MK (c) aequalis NI, est dupla EN, & ideo (d) GM est tangens. In hyperbola vero, & ellipsi ducta etiam QO parallela ipsi NE quae a recta GM producta secabitur in O, erit QO ad NE, ut (e) QG ad GN; sed in eadem ratione [*QO ad NE*] est etiam QO ad IE (utpote aequalem ipsi NE,) vel (f) QM ad MI, vel (g) QK ad KN; ergo QG ad GN est, ut QK ad KN: unde harmonice secta est diameter in G (h), atque in terminis transversi lateris, & occursu ordinatae; ergo MG est tangens (i).

XIV. Quaelibet Hyperbolae tangens MG semper infra centrum C, supra verticem N cum diametro concurrit: nam [*QG* (k) *est ad GN, ut QK ad KN: sed*] QK maior est KN, ergo & QG est maior GN.

a *per hanc pr.*
b *cor. I. prop. 4. IV. El.*
c *34. I. Elem.*
d *cor. 6. huius pr.*
e *pr. 4. VI. El.*
f *cor. I. prop. 4. VI. El.*
g *per idem Coroll.*
h *per 5. ex sec. def.*
i *cor. 12. huius pr.*
k *cor. 13. huius pr.*

est

XV. Ducta ex centro C ellipsis, & hyperbolae, recta CX parallela NE, conveniente cum MQ in X, patet [*esse CQ ad QN, ut* (a) *CX ad NI, proindeque*] fore CX medietatem NI, ut CQ medietas est QN, adeoque aequari NE, vel IE, ac iunctis CE, XE, fieri parallelogramma (b) CXEN, CXIE, QXEC; Quare ad ducendam tangentem ex dato puncto M, sufficiet iungere ad remotiorem diametri terminum Q rectam MQ, & ex centro ducta CX parallela ordinatis, factoque uno ex dictis parallelogrammis, iuncta ex M ad angulum E, (sive ducta XE dumtaxat, parallela, & aequali semidiametro CN, iunctaque ex M ad punctum E), ipsa recta ME tangens erit (c).

a *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
b 33. *I. Elem.*
c *ex Coroll.* 13.

XVI. Denique, si diameter NK in qualibet Sectione sit eius axis, posita in ipso KS aequali KT, ad partem subtangenti oppositam, iuncta SM erit perpendicularis curvae. Nam cum tangente GM rectum angulum efficiet SMG; nam cum sit TK, sive KS illi aequalis, ad KM, ut KM ad KG (d) quadratum MK aequatur (e) rectangulo SKG, [*& duplum quadrati MK aequatur duplo rectanguli SKG, additisque communiter quadratis SK, KG, erit duplum quadrati MK, cum quadratis SK, KG, aequale quadratis SK, KG, cum duplo rectanguli SKG, seu aequale* (f) *quadrato SG*,] & ideo cum sit MK perpendicularis axi GS, [*proindeque duplum quadrati MK cum quadratis SK, KG aequale sit quadratis SM, MG* (g); *quadra-*

Fig. 38. 39. 40.
d *ex demon. huius prop.*
e 17. *VI. Elem.*
f 4. *II. Elem.*
g 47. *I. Elem.*

ta SM , MG aequabuntur quadrato SG , adeoque] erit SMG triangulum rectangulum (a), cuius normalis MK est media [*proportionalis*] inter segmenta (b) basis SK, KG. Dicetur autem ipsa KS *Subnormalis* , quae in Parabola semper erit aequalis semiparametro NR, cui (c) aequatur KT; in hyperbola vero, & Ellipsi erit ad semiparametrum, ut distantia ordinatae a centro CK ad semiaxem transversum CN, ita (d) enim est & KT ad NR, sive eadem subnormalis KS aeqalis KT est ad distantiam ordinatae a centro CK, ut (e) rectum latus NF ad transversum QN, ob triangulorum TKC, FNQ similitudinem.

a 48. *I. Elem.*
b 8. *VI. Elem.*
c 34. *I. Elem.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e 4. *VI. Elem.*

PROPOSITIO X.

Fig. 41.

IN Parabola quaelibet recta MD, parallela eius diametro NK, est pariter & ipsa diameter, bifariam secans omnes illi ordinatas HF, NZ, parallelas tangenti MG; & quadrata pariter eius ordinatarum HD, NX sunt, ut abscissae MD, MX a vertice M talis diametri.

Ex vertice N diametri NK, unde genita est parabola, ducta tangente NE, quae occurrat ipsi MD in I, ducatur quoque NXZ parallela tangenti MG, quae ipsi MD occurret in X, & curvae in alio puncto Z: ducantur quoque ordinatae ad diametrum NK rectae MK, & ZT, secans MD in V. Erit quadratum MK ad quadratum ZT, ut NK ad TN, ex natura parabolae (f), sive ut pa-

f *ex pr.* 4.

parallelogrammum NKMI ad aliud aeque altum NTVI (a): at similia triangula GKM, NTZ sunt pariter, ut quadrata homologorum laterum MK, ZT (b); ergo haec triangula sunt ut dicta parallelogramma; sed triangulum GKM aequatur NKMI, ob eius basim GK duplam basis huius NK (c); & parem utriusque altitudinem; ergo etiam triangulum NTZ (d) aequabitur NTVI: & ablato communi NXVT erit triangulum XVZ aequale simili triangulo XIN; quare (e) & horum latera homologa XZ, XN erunt aequalia: igitur recta MD bifariam dividit in X ipsam NZ tangenti MG parallelam. Similiter ducta qualibet alia parallela HDF supra NZ, quae secet NK in P, & NI in Æ, & ordinatis ad priorem diametrum NK, HL, FB, secantibus ipsam MD in R, S; cum sit triangulum PLH ad GKM sibi simile, ut (f) LH quadratum ad quadratum KM, idest, ut (g) NL ad NK, sive (h) ut NLRI ad NKMI; quemadmodum GKM aequatur NKMI, etiam PLH erit (i) aequale NLRI; & aliud simile triangulum PFB aequabitur NBSI, cum sit ad GKM pariter, ut (k) quadratum FB ad quadratum MK, nempe, ut (l) BN ad NK, sive (m) ut NBSI ad NKMI: quare differentia triangulorum PFB, PLH, idest quadrilineum LHFB, aequabitur differentiae parallelogrammorum ipsis triangulis aequalium NBSI, & NLRI, idest parallelogrammo LBSR; & ablato communi spatio LBSDH, remanebunt triangula DSF, DHR aequalia; unde cum similia sint,

a 1. *VI. El.*, & *cor.* 1 *pr.* 20. *VI. Elem.*
b 19. *VI. Elem.*
c *cor.* 6. *pr p.* 9.
d 14. *VI. Elem.*
e *ex* 19. *VI. El.*
f 19. *VI. Elem.*
g *ex. pr.* 4.
h 1. *VI. Elem.*
i 14. *V. Elem.*
k 19. *VI. Elem.*
l *ex pr.* 4.
m 1. *VI. Elem.*

a ex pr. 19. VI. Elem. sint, erunt (a) homologa latera DF, DH pariter aequalia. Similiter, ducta infra NZ recta h f parallela tangenti MG, quae secet NK in p, NI in æ, atque ordinatis h L, f b ad diametrum NK, secantibus ipsam MD in R, ſ, [*aequabuntur similia triangula* b ex pr. 19. VI. Elem. *p L h, PLH, ob aequalitatem homologorum* (b) *laterum h L, HL; unde quemadmodum PLH ostensum est aequale parallelogrammo NLRI, etiam*] ostendetur triangulum p L h aequale NLRI, unde utrinque addito L b ſ R, erit h p b ſ R aequale ipsi N b ſ I parallelogrammo, quod erit aequale triangulo p b f ob eamdem rationem in similibus litteris supra adductam, [*qua nempe triangulum PBF ostensum fuit aequale NBSI*;] quare cum proveniat h p b ſ R aequale p b f, ablato communi p b ſ d, resultabit triangulum h d R simile, & aequale f d ſ; ideoque & homologa latera h d, d f (c) aequalia erunt. Igitur recta MD secat bifariam quaslibet parallelas tangenti GM; unde respectu harum ordinatarum est quoque MD diameter.

c ex pr. 19. VI. Elem.

d cor. 6. prop. 9. e 34. I. Elem. f ex pr. 19. VI. Elem. g ex demonſ. hujus pr.

Quia vero propter GN aequalem (d) NK, aequalem (e) IM, triangula similia GEN, IEM (f) aequantur, addito utrinque NEMX, parallelogrammum GNXM aequatur triangulo INX: pariterque iisdem triangulis GEN, IEM, addito NEMSB, quadrilineum GMSB aequatur parallelogrammo INBS, cui ostensum est aequale (g) triangulum PBF; ergo ex hoc triangulo, & ex GMSB, ablato trapezio PDSB, erit triangulum DSF aequale parallelogrammo GPDM, quare triangulum INX, sive

sive illi [*simile* , *&*] aequale XUZ (a), ad triangulum DSF eidem simile , adeoque (b) & quadratum XZ ad quadratum DF , sive quadratum NX ad quadratum HD erit , ut parallelogrammum GNXM ad GPDM, sive (c) ut XM ad DM. Q. E. D.

a 19. *VI. Elem.*
b *per eamdem.*
c 1. *VI. Elem.*

COROLLARIA.

I. Hinc quaecumque respectu diametri primigeniae KN , eiusque ordinatarum dicta (d) sunt, ad quamlibet aliam diametrum MD referri possunt circa tangentem, velut NI , cuius subtanges XI pariter dupla erit abscissae MX ; & circa parametrum , seu latus rectum huic alteri diametro MD determinandum, quod erit tertia proportionalis post quamlibet abscissam MD , & eius ordinatam DF , ut quadratum cuiuslibet ordinatae (e) aequetur rectangulo suae abscissae in idem latus rectum huic diametro pertinens.

d *cor.* 6. *prop.* 9. , *&* *cor.* 1. *pr.* 4.
e 17. *VI. Elem.*

II. Notetur autem , quaevis triangula super ordinatis suae diametro adiacentia, cum subtenso latere parallelo tangenti , velut PLH , PBF , NTZ , aequari (f) parallelogrammis sibi correspondentibus NLRI , NBSI , NTVI , &c. ; uti etiam IXN aequatur MXNG , RDH aequatur MDPG , [*et ob triangulum p b f aequale b N I f , seu bGMf , ablato communi trapezio b p d f , triangulum residuum*] d f f aequatur M d p G , & sic de aliis.

f *ex demon. huius prop.*

III. Item notetur , triangulum NEG osten-

oſtenſum aequale IEM : & ob triangulum
DHR aequale MDPG , ablato communi
MDHO , triangulum ORM aequatur OHPG;
unde idem triangulum ORM , cum ſimili
PLH aequatur triangulo GLO : pariterque
a ex demonſtr. ob hL aequalem HL , quia (a) triangulum
hpL aequatur PLH , erit ORM cum pLh
aequale GLO : [*ſed ob proportionem triangulorum ſimilium cum quadratis homologorum*
b ex 19. VI.El.& corol. 1. pr. 20. VI. El. *laterum* (b), *triangulum ORM cum ſimili*
PLH , vel triangulum ORM cum ſimili pLh
eſt ad triangulum GLO , ut ſumma quadratorum OR , LH , vel OR , hL ad quadratum OL ;] Vnde & quadrata OR , HL ,
aut OR , hL aequantur quadrato OL ; aut
ſumptis aliis lateribus homologis , quadra-
c 34. I. Elem. ta MR , ſeu (c) hL , & LP , aut Lp quadrato LG aequantur.

IV. Similiter ob triangulum XVZ aequale MXNG extenſa tangente GM , ut ſecet
ordinatas TZ in Y , atque BF in A , juncto
MXZY , evadit triangulum MVY aequale
ZNGY : Sicuti ob triangulum DFS aequale
MDPG , addito utrinque MDFA , fit trian-
d ex Coroll. 2. gulum MSA aequale FPGA : & ſimiliter
[*cum ſit triangulum* ſdf (d) *aequale MdpG,*
utrinque addito Mdfa] oſtendetur triangulum Mſa aequale fpGa.

V. Hinc triangulo MVY , & huic aequali trapezio ZNGY , addito triangulo ſimili NTZ , erunt triangula MVY , NTZ aequalia ſimili triangulo GTY ; adeoque [*quem-*
e cor. 3. *madmodum oſtendimus* (e) *quadrata OR , LH*
aequari quadrato LO ,] etiam quadrata VY ,

& TZ

& TZ aequantur quadrato TY : Sicuti addito PrB triangulo ad triangulum MSA, vel ad huic aequale trapezium IPGA; erunt duo similia triangula PrB, MSA aequalia simili triangulo GBA; unde & quadrata BF, SA aequantur quadrato BA: & similiter aliis homologis lateribus acceptis, erunt quadrata MV, seu KT, & NT aequalia quadrato GT; nec non quadrata PB, & MS, seu KB aequalia quadrato GB; & sic de aliis.

VI. Rursus, quoniam triangulum PLH aequatur NLRI, ablato communi NLHÆ, fit triangulum PNÆ aequale ÆHRI, additoque simili triangulo HRD, erunt triangula PNÆ, HRD aequalia ÆDI triangulo simili; unde quadrata homologorum laterum NÆ, & HR aequantur quadrato ÆI: item quadrata PÆ, HD aequalia erunt quadrato ÆD; quod cum aequale sit (a) rectangulo FÆH, cum quadrato HD, [*quadrata PÆ, HD aequalia erunt rectangulo FÆH cum quadrato HD, communiterque ablato HD quadrato*,] erit PÆ quadratum aequale FÆH rectangulo. Et similiter, ob triangulum hpL aequale NLRI, & addito utrinque NLhæ, triangulum pNæ aequale erit IRhæ; unde adiecto triangulo hRd, erunt duo triangula pNæ, hRd aequalia simili triangulo æId; adeoque quadrata homologorum laterum dh, pæ erunt aequalia quadrato æd, seu rectangulo fæh, cum quadrato dh (b); unde quadratum pæ erit rectangulo fæh aequale; & æp erit media (c) proportionalis inter fæ, & æh, sicut PÆ (d) media est proportionalis inter FÆ, & ÆH.

a *6. II. Elem.*

b *6. II. Elem.*

c *17. VI. Elem.*

d *ex demonst., & 17. VI. Elem.*

a ex Coroll. 3. b 6. II. Elem. VII. Eadem ratione, quoniam quadrata OR, LH aequantur quadrato LO (a), seu rectangulo hOH (b) cum quadrato LH, [*ablato communiter quadrato LH*,] est quadratum OR aequale rectangulo hOH, & ideo est OR media proportionalis inter hO, c 17. VI. Elem. & OH (c): similiterque, producta ordinata FB ad aliam curvae partem in Φ, cum sint d cor. 5. hujus pr. quadrata SA, & FB aequalia quadrato BA (d), e 6. II. Elem. hoc est rectangulo ΦAF cum BF quadrato (e), erit rectangulum ΦAF aequale quadrato SA, ipsaque SA media proportionalis inter AΦ, f 17. VI. Elem. & AF (f).

VIII. Quare si duae tangentes NE, ME conveniunt in E, & uni earum NE parallela ΦA secet aliam tangentem in A, erit rectangulum ex tota secante ΦA in partem externam AF, ad quadratum AM portionis interceptae ex tangente AM inter contactum, & secantem, ut quadratum parallelae tangentis NE ad quadratum reliquae tangentis EM: quippe [*ob similia triangula GNE, MSA, est NE ad EG, ut SA ad AM, seu NE quadratum est ad EG quadratum, ut qua-* g 22. VI. Elem. *dratum (g) SA ad quadratum AM; unde*] NE quadratum ad quadratum EM (quod aequatur EG quadrato) est, ut quadratum SA, h ex Coroll. 7. (seu rectangulum ΦAF illi (h) aequale) ad quadratum AM. Sic etiam secantis ÆHF parallelae tangenti ME rectangulum FÆH, est i ex Coroll. 6. ad quadratum ÆN, ut quadratum PÆ illi rectangulo aequale (i) ad quadratum ÆN, sive ut GE, vel ei aequalis EM quadratum, ad quadratum EN.

PRO-

PROPOSITIO XI.

IN Parabola AND, cuius basis AD, diameter NB latus rectum NF, quaelibet rectae diametro parallelae ME, HG sunt, ut rectangula partium basis AED, AGD; & etiam basi producta, si extra parabolam agantur parallelae diametro e m, g h, erunt hae quoque, ut rectangula A e D, A g D. Fig. 42.

Nam ut quadratum BD aequatur rectangulo BNF, ita quadratum alterius ordinatae HP, vel h p aequatur rectangulo parametri NF in abscissam NP, seu Np (a); ergo differentia quadratorum BD, & PH, seu (b) BG illi aequalis, quae est (c) rectangulum AGD, aequatur rectangulo eiusdem NF in differentiam abscissarum NB, NP, quae est PB, aequalis (d) HG: & similiter differentia quadratorum BD, p h, sive illi (e) aequalis Bg, quae est rectangulum AgD (f), aequabitur rectangulo eiusdem NF in Bp, seu (g) g h, quae est differentia BN ab Np: Similiter ostendetur, rectangulum AED aequari NF in ME; & rectangulum A e D aequari NF in m e; ergo hae lineae parallelae diametro, ME, HG, sunt (h) ut rectangula AED, AGD, quia illae lineae in eamdem parametrum NF ductae, illis rectangulis sunt aequales; ac similiter [*quia e m in NF est ad g h in NF, ut Aed ad AgD*,] e m, g h (i) erunt, ut rectangula ipsis correspondentia AeD, AgD. Q. E. D.

a *cor.* 1. *prop.* 4.
b 34. *I. Elem.*
c *pr.* 5. *II. El.*
d 34. *I. Elem.*
e 34. *I. Elem.*
f 6. *II. Elem.*
g 34. *I. Elem.*
h 1. *VI. Elem.*
i 1. *VI. Elem.*

CO-

COROLLARIVM.

PRoducta HP ad alteram diametri partem in L, quae secat ME in I, rectangulum quoque AED ad LIH erit, ut recta ME ad MI; quippe eodem modo, [*quo*] NF in ME dat rectangulum (a) aequale AED, & eadem NF in MI dabit rectangulum aequale LIH, [*quare rectangulum AED est ad rectangulum LIH, ut rectangulum ex ME in NF ad rectangulum ex MI in eamdem NF, seu ut* (b) *ME ad MI*]: Et similiter producta h p in l, secante e m in i, rectangulum AeD aequale NF in em, ad rectangulum lih, quod pariter aequabitur rectangulo NF in mi, erit ut (c) em ad mi.

a *ex hac prop.*

b 1. *VI. Elem.*

c 1. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XII.

Fig. 43. 44.

IN Ellipsi, & oppositis hyperbolicis Sectionibus, quaelibet recta MC per centrum C extensa, ad alteram partem occurrit Sectioni in S; atque in centro bifariam dividitur; & ex eius terminis M, S curvam tangentes MG, SP sunt parallelae, & aequales.

Ordinata MK ad priorem diametrum NQ, sumptaque CF aequali CK, ordinetur ad alteram eius diametri partem FS. Iuncta SC; quoniam differentia quadratorum NC, CK, idest (d) rectangulum NKQ aequabitur (e) differentiae aliorum quadratorum CQ, CF illis respective aequalium, idest rectangulo NFQ

d 5. & 6. *II. El.*

e *per construct.*

NFQ (a); ipsarumque ordinatarum MK, SF quadrata sunt dictis rectangulis proportionalia (b); ergo haec quadrata pariter aequalia erunt. Vnde quia MK aequatur FS, & CK aequatur CF, & anguli alterni parallelarum MKC, SFC sunt aequales (c), erit quoque CM basis trianguli CKM aequalis CS basi trianguli CFS (d), & angulus MCK erit aequalis SCF; unde sicut ille cum angulo MCF duos rectos complet (e), ita hic cum eodem idem efficit, adeoque CS est indirectum ipsi MC (f) ob angulos SCF, MCF binis rectis aequales. Igitur ipsa MC producta incidit alteri parti sectionis in S, & ipsa MCS bifariam divisa est in centro C. Quoniam vero ductis tangentibus MG, SP, rectangulum GCK aequatur quadrato semidiametri CN (g), & similiter rectangulum PCF aequatur quadrato CQ; sicut CN aequatur CQ, [*& quadratum CN aequale est quadrato CQ*,] ita rectangulum GCK aequabitur PCF: estque CK (h) aequalis CF; ergo etiam CG aequatur CP; & propter CM (i) aequalem CS, & angulos aequales (k) MCG, SCP, erunt (l) horum triangulorum bases MG, SP aequales, atque etiam (m) parallelae propter alternos angulos MGC, SPC [*lateribus aequalibus MC, CS oppositos*], pariter aequales. Q. E. D.

a 5. *& 6. II. El.*
b *prop. 5. & 6.*
c 27. *I. Elem.*
d 4. *I. Elem.*
e 13. *I. Elem.*
f 14. *I. Elem.*
g *cor. 11. prop. 9.*
h *ex construct.*
i *ex demonstr.*
k 15. *I. Elem.*
l 4. *I. Elem.*
m 28. *I. Elem.*

COROLLARIA.

I. PRoducta [*ordinata*] SF ad alteram sectionis partem in E, erit FE aequalis SF, adeoque (n) & aequalis KM sibi parallele-

n 34. *I. Elem.*

a 33. I. Elem. lelae; unde iuncta ME parallela (a) erit, & aequalis ipsi KF.

II. Et ducta per centrum C ordinatis MK, EF parallela CH, bifariam secabit ipsam EM in B, & sic omnes alias huic parallelas, iungentes terminos aequalium ordinatarum ad diametrum NQ. Nam [*ob parallelogramma CBMK, CBEF,*] evadet

b 34. I. Elem. BM (b) aequalis CK, & BE aequalis CF, cum sint latera opposita parallelogrammorum, & [*ideo cum*] posita iam fuerit CF aequalis CK, [*erit etiam BE aequalis BM*]. Unde ipsa quoque CH erit diameter, cui ME, TL ordinari possunt parallelae priori diametro, & bifariam in B, R ab ipsa HC dividentur.

Dicitur autem haec alia diameter *secundaria*, & priori *coniugata*. In Ellipsi quidem ab ipso eius perimetro determinata ad puncta H, I, existente CI aequali CH, cum & ipsa ordinetur diametro NQ, adeoque ab

c cor. 6. prop. 6. ipsa bifariam secetur in C. Et quia (c) quadratum ordinatae HC ad rectangulum partium diametri QCN, adeoque ad quadratum CN est, ut latus rectum NV ad transversum NQ, etiam quadruplicando [*primae rationis*] terminos, quadratum HI ad NQ quadratum e-

d 1. VI. Elem. rit, ut NV ad N Q [*sicut rectangulum* (d) *QNV ad idem quadratum NQ; quare* (e)

e 9. V. Elem. *HI quadratum aequale est rectangulo QNV,*] & ideo HI secundaria diameter coniugata,

f 17. VI. Elem. est media (f) proportionalis inter parametrum NV, & primariam diametrum transversam NQ. In Hyperbola vero determinannanda pariter eſt media quaedam proportionalis HI inter latus rectum NV, & tranſverſum NQ, atque ita diſponenda per centrum C aequidiſtans ordinatis diametri NQ, ut in ipſo puncto C biſariam partita maneat: & haec erit ſecundaria diameter priori NQ coniugata, [*atque idcirco duae Hyperbolae Ii, HAb diametro HI tamquam tranſverſa deſcriptae*, coniugatae *prioribus appellantur. Et viciſſim ſi QN ſit media proportionalis inter latus rectum HX, & tranſverſum HI Hyperbolarum Ii, HAb, atque ita per centrum C diſponatur, ut ibi biſariam partita ſit, & aequidiſtet ordinatis diametri HI, erit QN ſecundaria diameter priori HI coniugata, Hyperbolaeque NM, QS diametro tranſverſa QN deſcriptae, erunt prioribus coniugatae.*]

PROPOSITIO XIII.

IN Ellipsi etiam ordinatarum ad ſecundariam diametrum HI quadrata BM, RT ſunt ut rectangula partium eiusdem diametri HBI, HRI, ideſt ut differentia quadrati HC a quadrato BC (a), ad differentiam eiuſdem quadrati HC ab RC quadrato. At in hyperbola quadrata BM, RT ordinatarum ad ſecundariam diametrum HI ſunt, ut ſumma quadrati HC, & quadrati BC ad ſummam eiuſdem. quadrati HC, & quadrati RC.

Fig. 43. 44.

a 5. *II. Elem.*

Primum patet, quia ordinatis MK, TZ ad priorem diametrum NQ, cum ſit re-

rectangulum NCQ, seu quadratum CN, ad
a *prop.* 6. rectangulum QKN, ut (a) quadratum CH
b 34. *I.* ad quadratum KM, seu (b) CB; permu-
Elem. tando, totum quadratum CN ad totum quadratum CH est, ut rectangulum QKN, ex primo [*toto*] ablatum, ad quadratum CB, ex secundo ablatum; quare & reliquum qua-
c 5. *II.* dratum CK, seu BM, [*quod cum ablato* (c)
Elem. *rectangulo QKN efficit totum quadratum CN*] ad reliquum rectangulum HBI, [*quod cum*
d 5. *II.* *ablato CB quadrato aequat* (d) *totum qua-*
Elem. *dratum CH*,] est, ut totum quadratum
e 19. *V.* CN ad totum quadratum CH (e). Eo-
Elem. dem modo pariter ostendetur, esse quadratum RT ad rectangulum HRI in eadem ratione quadrati CN ad CH quadratum; ergo [*quadratum BM est ad rectangulum HBI, ut quadratum RT ad rectangulum HRI, & permutando*] quadrata ipsa BM, & RT sunt, ut rectangula partium secundariae diametri HBI, & HRI, quae sunt
f 5. *II.* differentiae (f) quadratorum BC, RC ab eo-
Elem. dem CH quadrato.

g *ex pr.* Secundum autem ostenditur, quia in hy-
5. perbola, cum sit (g) rectangulum QKN ad
h *I. VI.* quadratum MK, seu BC, ut transversum
Elem. latus QN ad rectum NV, sive [*ut qua-*
i 17. *VI.* *dratum QN ad rectangulum* (h) *QNV, vel*,]
Elem. ut quadratum QN ad quadratum (i) HI,
k *post co-* quae media (k) proportionalis est inter NQ,
rol.2.pr. & NV; seu sumptis subquadruplis, ut
12.&17. quadratum CN ad CH quadratum; etiam
VI. El. summa (l) antecedentium ad summam conse-
l 12. *V.* quentium; nempe QKN cum CN quadrato,
Elem. quod

quod est CK, seu BM quadratum (a), ad summam consequentium, idest ad quadratum BC cum CH quadrato, in eadem ratione erit unius antecedentis ad suum consequens, nempe ut CN quadratum ad CH quadratum: & quia eodem modo, RT quadratum ad summam quadratorum RC, & CH in eadem ratione quadrati CN ad quadratum CH esse, probabitur; igitur [*BM quadratum est ad quadratum BC cum CH quadrato, ut quadratum RT ad quadratum RC cum CH quadrato, & permutando,*] quadrata BM, RT sunt, ut summa quadratorum BC, CH, ad summam quadratorum RC, & CH. Q. E. D. a *6. II. Elem.*

COROLLARIA.

I. PAtet in Ellipsi, quadratum cuiuslibet ordinatae BM ad rectangulum partium suae diametri secundariae HBI esse, ut transversum [*latus*] QN ad rectum NV, cum sit, ut quadratum CN ad quadratum CH (b), vel QN quadratum ad HI quadratum, quae sunt, [*ut quadratum QN ad rectangulum QNV* (c) *vel*] in eadem ratione [*QN ad* (d) *NV*]. Fig. 43. b *ex hac prop.* c *post. co. 2. pr. 12.* d *ex 1. VI. El.*

II. Vnde posita HX quarta proportionali ad NV, HI, QN, erit ipsa HX latus rectum coniugatae diametri HI; nam [*quia HX ad QN est, ut* (e) *HI ad HV*], permutando, HX ad HI erit, ut QN ad NV, adeoque ordinatae BM quadratum ad rectangulum HBI, & quadratum alterius ordinatae TR ad rectangulum HRI est, ut (f) HX ad e *ex construct.* f *ex Coroll. 1.*

ad diametrum coniugatam HI: [*Iam vero in ellipsi quando est cuiusvis ordinatae BM quadratum ad rectangulum HBI sub diametri coniugatae segmentis, ut data recta ad diametrum eamdem HI, recta illa* parameter, *vel* latus rectum *illius diametri nuncupatur; quemadmodum simile quid de parametro, seu recto latere primariae diametri est alibi* (a) *demonstratum; ergo HX est parameter, seu latus rectum diametri coniugatae HI.*]

a *cor.* 6. *prop.* 5.

Fig. 44.

III. In Hyperbola vero MB quadratum ad summam quadratorum BC, CH est, ut NC quadratum ad (b) HC quadratum, sive ut [*QN quadratum ad quadratum HI, vel ut QN quadratum ad rectangulum QNV* (c), *aut ut*] QN ad NV (d), seu pariter sumpta HX quarta proportionali post NV, HI, QN, ut ipsa HX ad HI, adeoque ipsa HX erit latus rectum (e), seu parameter diametri illius secundariae HI: quae pertineret ad binas alias Hyperbolas, diametro transversa HI descriptas, velut Ii, HAh: quae duae Hyperbolae prioribus NM, QS *coniugatae* appellantur.

b *ex hac prop.* c *post cor.* 2. *pr.* 12. & 17. *Elem.* d *ex* 1. *VI. El.* e *Vid. Schol. seq.*

[*Scholium ad hoc Coroll.*]

[*Ex eo quod in Hyperbola sit MB quadratum ad summam quadratorum BC, CH, ut recta HX ad HI, non video, cur inferat noster* Grandus, *eamdem HX parametrum esse, seu latus rectum diametro coniugatae HI correspondens, seu, quod idem est, diametrum transversam QN* (f) *esse mediam proportionalem*

f *post coroll.* 2. *prop.* 2.

lem inter coniugatam HI, & rectam illam HX. Caeterum id abunde liquet ex dictis; est enim quadratum QN ad quadratum HI, ut (a) HX ad HI: sed ut HX ad HI, ita est (b) rectangulum IHX ad HI quadratum; ergo quadratum QN est ad quadratum HI, ut rectangulum IHX ad idem HI quadratum, quare (c) QN quadratum aequale est rectangulo IHX, ideoque QN media est proportionalis inter diametrum HI, & HX: est vero etiam media inter eamdem diametrum (d) HI, & eiusdem parametrum; igitur HX est parameter diametri coniugatae HI.]

a ex *Coroll.* 3.
b 1. *VI. Elem.*
c 9. *V. Elem.*
d *post corol.* 2. *prop.* 12.

IV. Et quia ordinata AR, intra unam ex his coniugatis Hyperbolis, ad diametrum HI, habet quadratum suum AR, ad rectangulum IRH, ut rectum (e) HX ad transversum HI; erit ergo quadratum TR, aut LR ad summam quadratorum RC, CH, ut quadratum AR ad rectangulum IRH, cum utraque ratio sit eadem, quae HX ad HI (f).

e *cor.* 6. *prop.* 5.
f ex *Coroll.* 3.

V. Et permutando LR quadratum ad quadratum AR, ut summa quadratorum RC, & CH ad rectangulum IRH, quod est ipsorum differentia (g): ac dividendo, LR quadratum, dempto AR quadrato, idest (h) rectangulum TAL, ad quadratum AR erit, ut quadratum HC cum quadrato CR, dempto IRH rectangulo [*ad rectangulum IRH*], idest [*ut quadratum HC*] cum eodem quadrato HC (i), adeoque ut duplum quadrati HC ad ipsum IRH rectangulum: atque iterum permutando TAL rectangulum ad duplum qua-

g 6. *II. Elem.*
h 5. *II. Elem.*
i 6. *II. Elem.*

drati HC [*erit*,] ut quadratum AR ad IRH, sive ut (a) HX ad HI, nempe, ut (b) CN quadratum ad CH quadratum, sive ut duplum quadrati CN ad duplum quadrati HC; ideoque illud rectangulum TAL aequatur (c) semper duplo quadrato CN; unde ubique est eiusdem quantitatis.

a *cor.* 6. *prop.* 5. b *ex Coroll.* 3. c *prop.* 9. *V. El.*

VI. [*Iam vero si ordinata TL motu sibi semper parallelo ferri concipiatur supra diametrum CR, puncto R abeunte in H, rectae TA, AL degenerant in rectas aequales OH, YH, & TAL rectangulum abit in quadratum HY*]. Hinc ex termino H diametri HI ducta ad ipsum ordinata HY secante unam ex prioribus hyperbolis, velut EQS in Y, erit quadratum ipsius HY duplum quadrati CN: ut etiam hinc constat, quia (d) esset ordinatae HY quadratum ad summam quadratorum HC, & CH, ut MB quadratum ad summam quadratorum BC, CH, idest [*quadratum ordinatae HY esset*] ad duplum quadrati CH, ut quadratum CN ad quadratum CH (e); adeoque ut duplum CN quadrati ad duplum [*quadrati*] CH, ideoque (f) HY quadratum aequatur duplo quadrati CN.

d *per hanc prop.* e *ex hac prop.* f 9. *V. Elem.*

Fig. 43. VII. [*Ex dictis liquet in Ellipsi, si ex eodem perimetri puncto M ordinentur MK, MB ad diametros coniugatas NQ, HI, fore rectangulum NKQ ad quadratum MK, ut quadratum MB ad rectangulum HBI; est quippe rectangulum NKQ ad quadratum MK, ut* (g) *QN ad NV: sed in eadem* (h) *ratione est etiam quadratum MB ad rectangulum HBI*

g *ex cor.* 6. *pr.* 5. h *ex cor.* 1.

HBI; Ergo rectangulum NKQ est ad quadratum MK, ut quadratum MB ad rectangulum HBI.]

VIII. [*Demum quemadmodum in Hyperbola* (a), *ita & in Ellipsi diameter transversa QN est media proportionalis inter coniugatam HI, eiusque latus rectum, seu parametrum HX. Nam NV ad QN est, ut* (b) *HI ad HX: sed ut NV ad QN, ita est* (c) *rectangulum QNV ad quadratum QN: & ut HI ad HX, ita est* (d) *quadratum HI ad rectangulum IHX; igitur rectangulum QNV est ad quadratum QN, ut quadratum HI ad rectangulum IHX: Sed rectangulum QNV aequatur* (e) *quadrato HI; igitur etiam quadratum QN aequabitur* (f) *rectangulo IHX, adeoque erit QN media* (g) *proportionalis inter HI, & HX.*]

a *post. co.* 2. *pr.* 12.
b *ex corol.* 2.
c 1. *VI. Elem.*
d *per eamdem.*
e *post co.* 2. *pr.* 12. & 17. *VI. Elem.*
f 14. *V. Elem.*
g 17. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XIV.

QUaecumque alia recta MC in Ellipsi, & oppositis hyperbolis, per centrum C ducta, est diameter, bifariam secans quaslibet NZ, HF ipsi applicatas parallelas tangenti GM.

Fig. 45. 46.

Per verticem N prioris datae diametri NQ agatur tangens NI, secans ipsam CM in I, & tangentem MG in E, illasque applicatas HF, hf in Æ, & æ, alteram supra NZ ductam ex vertice N, alteram infra ipsam. Ducantur quoque ad priorem diametrum ordinatae MK, TZ, HL, FB, Lh,

f b concurrentes cum CM ad puncta V, R, S, s, & cum tangente MG in punctis Y, O, A, a. Quoniam CK ad CN est, ut CN ad
a cor. 11. prop. 9. CG (a), erit quadratum CK ad quadratum CN, seu triangulum (b) CKM ad simi-
b 19. VI. Elem. le CNI, ut CK ad CG, quae sunt, ut CKM triangulum (c) ad CGM triangu-
c 1. VI. Elem. lum, quae sunt aeque alta; quare triangula (d) CNI, CGM sunt aequalia; & horum
d 9. V. Elem. alterutro sublato a triangulo CKM [*in hyperbola nempe ablatis CNI, CGM a triangulo CKM, & in Ellipsi ablato CKM a triangulis CNI, CGM*], erit trapezium NKMI aequale triangulo GKM: est autem hoc triangulum ad alia similia NTZ, PLH, PBF, pLh, pbf, ut quadratum KM ad quadrata homologorum laterum TZ, LH, BF, Lh,
e pr. 19. VI. El. bf (e), hoc est ex natura Ellipsis, & hyper-
f pr. 5. & 6. bolae (f), ut rectangulum QKN ad rectangula illis correspondentia QTN, QLN, QBN,
g 5. & 6. II. El. QLN, QbN, nempe (g) ut differentia quadrati CN a quadrato CK, ad differentiam
h 19. VI. Elem. eiusdem quadrati CN a quadratis CT, CL, CB, CL, Cb, sive ob analogiam (h) triangulorum similium, cum quadratis laterum homologorum, ut differentia trianguli CNI a triangulo CKM, ad differentias eiusdem CNI a triangulis CTV, CLR, CBS, CLR, Cbs; hoc est, ut trapezium NKMI ad trapezia NTVI, NLRI, NBSI, NLRI, NbsI; ut igitur triangulum GKM aequatur NKMI, ita NTZ aequabitur NTVI, & PLH erit aequale NLRI, ac PBF erit aequale NBSI, ac caetera triangula caeteris trapeziis aequabun-

ſbuntur. Itaque ex NTZ, & aequali ſpatio NTVI, ablato NTVX, remanebit XVZ aequale triangulo ſibi ſimili XIN, quorum latera (a) homologa XZ, & XN erunt aequalia. Similiter differentia triangulorum PBF, PLH, nempe trapezium LBFH, aequalis cum ſit differentiae trapeziorum illis aequalium NBSI, NLRI, ideſt trapezio LBSR, ſi ex his duobus trapeziis LBFH, & LBSR, auferatur commune ſpatium LBSDH, remanebunt aequalia ſimilia triangula SDF, RDH, quorum homologa latera DF, DH aequalia erunt. Item triangulo p h L [*quod ob aequalia homologa latera hL, LH, aequatur* (b) *ſibi ſimili triangulo PHL*] & illi aequali trapezio NLRI, addito L b s R, evadet ſpatium h p b s R aequale N bs I, ideſt triangulo p b f huic trapezio aequali, & ablato communi ſpatio p b s d, remanebit triangulum h R d aequale f s d ſibi ſimili, unde & eorum homologa latera h d, d f erunt aequalia. Igitur CM eſt diameter bifariam ſecans omnes ipſi applicatas NZ, HF, h f tangenti MG parallelas. Q. E. D.

a ex 19. VI. El.

b ex 19. VI. El.

Porro in Ellipſi fieri poteſt, ut ordinata fb ad priorem diametrum NQ cadat ultra centrum C verſus Q; & tunc, ducta alia verticali tangente Qi, conveniente cum MC in i, erit quoque triangulum p b f aequale trapezio Q b s i, (quod ad trapezium NKMI eſt, ut [*differentia ſimilium triangulorum CQi, C b s ad differentiam triangulorum ſimilium CNI, CKM, ſive ut* (c) *quadratum CQ, dempto C b quadrato, ad quadratum CN, dempto*

Fig. 47.

c 19. VI. Elem.

 qua-a 5. VI. Elem. b ex pr. 6. c 19. VI. Elem.

quadrato CK, sive (a) *ut*] rectangulum Q b N ad QKN, sive ut (b) quadratum f b ad quadratum MK, aut ut triangulum (c) p b f ad simile GKM, quod vidimus aequari NKMI); additoque utrinque s b C, erit spatium p C s f aequale triangulo QC i, seu CNI huic aequali; & ablato C d p, triangulum d s f aequabitur N p d I, quod aequatur d R h triangulo, propter p L h aequale NLRI, & commune spatium L p d R utrinque appositum; Ergo aequalium, & similium triangulorum d s f, & d R h homologa latera f d, & d h pariter sunt aequalia. Q. E. D.

COROLLARIA.

Fig. 45. 46. 47.

I. VTi ostensum est triangulum CGM aequale CNI; ablato communi quadrilineo CGEI in hyperbola, & CMEN in Ellipsi, remanet triangulum IEM aequale GEN, & utrique addito NEMX, fit triangulum IXN aequale trapezio MXNG.

II. Pariter iisdem triangulis IEM, GEN addito spatio NEMSB, resultat GMSB aequale NBSI, cui ostensum fuit aequale triangulum PBF; hoc igitur erit aequale GMSB; & utrinque ablato PDSB, resultat triangulum DSF, (vel huic aequale DHR) aequale trapezio MDPG. Similiterque iisdem triangulis IEM, GEN, addito N b s ME, resultat N b s I, quod vidimus aequari triangulo p b f, aequale G b s M, & ablato p b s d, remanet triangulum d s f aequale trapezio M d p G.

III. Hinc patet, ad quamlibet aliam dia-

me-

metrum MC ordinatarum quadrata XZ, DF, d f esse, ut rectangula partium diametri mXM, mDM, m d M: sunt enim illa quadrata, ut triangula similia XZV, (seu XNI,) DFS, d f s (a), quae vidimus aequari (b) trapeziis MXNG, MDPG, M d p G, atque adeo esse, ut differentias trianguli CMG a triangulis similibus CXN, CDP, C d p, quae sunt ut dicta rectangula, nempe ut differentiae quadrati CM a quadratis homologorum laterum CX, CD, Cd: quare XZ quadratum est ad quadrata DF, d f, seu quadratum NX ad quadrata HD, h d, ut rectangulum mXM, ad mDM, m d M.

a 19. *VI. Elem.*
b *cor.* 1. *&* 2.

IV. Hinc quaecumque ostensa sunt circa tangentes, & circa parametrum diametri primigeniae QN, ad quamlibet aliam diametrum per centrum C deductam, referri possunt ad eamdem essentialem proprietatem eius ordinatarum hic demonstratam; nempe ut tangens MD dividit diametrum QN, ut sint continue proportionales (c) CK, CN, CG, & GCK aequetur quadrato semidiametri CN (d), atque harmonica evadat ratio QK ad KN, ut QG ad GN (e); sic tangens NI secat diametrum mCM, ut CX, CM, CI sint continue proportionales, & rectangulum XCI aequetur quadrato semidiametri CM; nec non harmonice secta sit eadem diameter, nempe mX ad XM sit, ut mI ad IM.

c *cor.* 11. *pr.* 9.
d 17. *VI. Elem.*
e *cor.* 12. *prop.* 9.

V. Atque parameter huius diametri CM determinabitur, si fiat ut rectangulum partium ipsius mDM ad quadratum ordinatae DF, ita eadem transversa diameter mM ad aliam lineam; haec enim (a) parameter erit, seu latus rectum, quod se habet ad transversum (ubi quadrata ordinatarum sunt, ut rectangula partium diametri), ut quadratum ordinatae ad rectangulum ipsi correspondens ex diametri partibus.

a *cor.* 6. *prop.* 5. & 6.

VI. Quaecumque ostensa sunt in Parabola (b) de aequalitate triangulorum cum quadrilateris correspondentibus, etiam hisce Hyperbolis, & Ellipsibus, ob eandem rationem hic repetendam, conveniunt: Nimirum quod ORM aequatur OHPG, [*ob DHR aequale* (c) *MDPG*]; unde duo simul triangula PHL, ORM toti GLO aequantur; non tamen quod quadrata HL, OR sint aequalia quadrato LO, [*quemadmodum vidimus* (d) *in Parabola*], quia diametri NK, MD hic non sunt parallelae, ut in Parabola; & ideo triangula DHR, PLH non sunt similia. Idem dicendum, de triangulo MSA aequali trapezio FPGA, ac de triangulis PBF, MSA [*aequalibus triangulo PBF*, & *quadrilineo FPGA*, *seu*] aequalibus GAB, & sic de aliis.

b *cor.* 3. 4. 5. 6. *pr.* 10.

c *cor.* 2.

d *cor.* 3. *pr.* 10.

VII. Quod vero sit rectangulum secantis in partem externam, tangenti, & curvae interpositam, ad quadratum tangentis, puta ΦAF ad AM quadratum, ut tangentis parallelae secanti NE quadratum ad quadratum alterius contiguae tangentis EM (& sic etiam FÆH ad quadratum ÆN, aut fæ h ad æN quadratum, ut ME quadratum ad quadratum EN) etiam in hyperbola, et Ellipsi

obti-

obtinet, idque etiamsi ex duabus oppositis hyperbolis tangentes ductae forent, invicem convenientes, infra generatim (a) demonstrabitur. a *in pr.* 16.

PROPOSITIO XV.

Ex quolibet puncto H in perimetro Hyperbolae, aut Ellipsis, inter binas diametros CN, CM, sumpto (vel etiam extra ipsas in Ellipsi), si agantur HR, HP tangentibus NI, MG parallelae, usque ad ipsas diametros productae in R, P; quadrilaterum PHRC aequabitur triangulo CGM, aut CNI. Fig. 48. 49. 50. 55. 58.

Nam quia DHR aequatur trapezio DMGP (b) utrovis dempto in hyperbola ex triangulo CPD, vel hoc utrivis addito in Ellipsi, resultabit quadrilaterum PHRC aequale triangulo CGM: [*iam vero in primis tribus figuris triangulum CNI equatur triangulo CGM* (c): *igitur quadrilineum PHRC aequabitur etiam triangulo CNI. Ad reliquas autem figuras quod spectat, ducta ad extremitatem n diametri n CN verticali tangente n i, quae occurret diametro ML in puncto i, eritque parallela alteri tangenti verticali NI, cum utraque aequidistet ordinatis* (d) *ad diametrum n CN; aequalia erunt triangula CGM, C n i* (e): *est autem triangulum C n i aequale triangulo* (f) *sibi simili CNI ob C n aequalem CN; ergo aequantur etiam triangula CGM, CNI, ideoque quadrilaterum PHRC aequale erit etiam triangulo CNI.*] Q. E. D.

b *cor.* 2. *pr.* 14.
c *ex demons. pr.* 14.
d *ex pr.* 14.
e *ex demons. pr.* 14.
f *ex* 19. *VI. El.*

PRO-

COROLLARIA.

Fig. 48. 49. 50. I. HInc si ex alio puncto A perimetri Hyperbolici, aut Elliptici, agantur iisdem tangentibus parallelae AT, AL ad ipsas diametros productae in T, L, etiam quadrilaterum LATC aequabitur eidem triangulo [*CNI*, *vel*] CGM, adeoque ipsa quadrilatera PHRC, LATC erunt aequalia.

II. Convenientibus AT, PH in K, differentiae cuiusvis ex dictis quadrilateris aequalibus ab alio PKTC, nempe trapezia KHRT, PKAL, erunt aequalia.

III. Et convenientibus etiam AL, HR in Z, addito [*in hyperbola*], vel dempto [*in Ellipsi*] a dictis trapeziis AKHZ, fiet AZRT aequale HZLP.

[*Scholium.*]

Fig. 60. 61. 64. [*Quod in secundo huius propositionis corollario tam in Ellipsi, quam in Hyperbola demonstratur, etiam in Parabola, & oppositis Hyperbolis habet locum; nempe si tangentibus ND, MG agantur ex punctis H, K parallelae HS, KQ, HP, KO, quarum duae KQ, HP conveniant in puncto R, quadrilaterum HSQR aequabitur alteri KOPR. Esto imprimis punctum concursus R intra Parabolam NHKM. Quoniam triangulum hPN aequatur* (a) *quadrilatero hDSH, utrinque addito iOPh, erit triangulum iON aequale quadrilateris hDSH, iOPh,*

Fig. 60.

a cor. 6. pr. 10.

seu

seu quadrilateris g OPH, i DS g: sed idem triangulum i ON aequatur etiam (a) *quadrilatero i DQK, vel quadrilateris g SQK, i DS g; igitur etiam quadrilatera g OPH, i DS g aequabuntur quadrilateris g SQK, i DS g, ideoque quadrilaterum g OPH aequale erit g SQK, & utrinque addito g HRK, erit HSQR aequale quadrilatero KOPR.*]

a per idem Cor.

[*Sit deinde punctum concursus R extra parabolam NKHM. Quia triangulum NO i aequatur* (b) *quadrilatero i DQK, utrinque addito i OP b, erit triangulum NP b aequale quadrilateris i OP b, i DQK, seu quadrilateris KOPR, b DQR: sed triangulum NP b aequatur* (c) *etiam quadrilatero HSD b vel quadrilateris HSQR, b DQR; igitur etiam quadrilatera KOPR, bDQR aequantur quadrilateris HSQR, bDQR, ideoque quadrilaterum KOPR aequabitur alteri HSQR.*]

Fig. 61.

b cor. 6. pr. 19.

c per idem Cor.

[*In oppositis demum Hyperbolis est quadrilaterum KOCQ aequale* (d) *triangulo CND, & quadrilaterum HSCP aequale* (e) *est triangulo CGM: sed triangulum CND aequatur triangulo CGM* (f); *igitur quadrilaterum KOCQ aequabitur quadrilatero HSCP, unde utrivis addito CQRP, resultabit quadrilaterum KOPR aequale HSQR.*]

Fig. 64.

d per hanc prop.

e per eamdem.

f per eamdem.

PROPOSITIO XVI.

IN omni Sectione Conica si duae tangentes eiusdem Sectionis, vel hyperbolarum oppositarum ME, NE conveniant in E, & quaepiam recta FÆ, uni tangenti ME paral-

Fig. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58.

rallela, ſecet curvam in H, F, & aliam tangentem NE in Æ, erit rectangulum FÆH ad quadratum NÆ, ut quadratum ME ad EN quadratum.

Ducantur per puncta contactus M, N diametri MD, NK, ſecantes ipſam HF in D, & P, tangentem NE in I, & ME in G, atque parallelam ipſi NE per H ductam in R, K. Erit quadratum ÆD ad triangulum ÆDI, ut quadratum (a) HD ad triangulum HDR alteri ſimile; unde differentia antecedentium, nempe (b) rectangulum FÆH, (nam HF bifariam dividitur in D à diametro MD, cui eſt ordinata, utpote parallela tangenti ME) ad trapezium IÆHR, [*quod eſt differentia conſequentium*] erit, ut unum antecedens, [*nempe quadratum ÆD*] ad unum conſequens, [*ſeu triangulum ÆDI*], ſive ut quadratum ME ad triangulum EMI, quod pariter eſt, (c) ut ÆD quadratum ad ÆDI: eſtque IÆHR aequale triangulo ÆPN; (nam PHK aequatur (d) NKRI, in Parabola (e), & quibusdam aliis (f) figuris; unde ablato (g), vel addito (h) NÆHK, ſuperſunt aequales IÆHR, & ÆPN; In Ellipſi vero, & Hyperbolis (i), ob quadrilineum CRHP aequale (k) triangulo CNI, ablato (l), vel addito (m) CIÆP, aut CRHÆN (n) reſultat IÆHR aequale ÆPN); et triangulum EMI aequatur ENG (o); ergo [*cum oſtenſum ſit rectangulum FÆH eſſe ad trapezium IÆHR, ut quadratum ME ad triangulum EMI, etiam*] rectangulum FÆH ad trian-

a 19. *VI. Elem.*
b 6. *II. Elem.*
c 19. *VI. Elem.*
d *cor.* 2. *pr.* 10., & *cor.* 2. *pr.* 14.
e *Fig.* 51. 52.
f *Fig.* 54. 56. 57.
g *in fig.* 51. 56.
h *in fig.* 52. 54. 57.
i *in Fig.* 53. 55. 58.
k *ex pr.* 15.
l *in Fig.* 53.
m *in Fig.* 55.
n *in Fig.* 58.
o *pr.* 10. & *cor.* I. *pr.* 14.

triangulum ÆPN est, ut quadratum ME ad triangulum ENG; & permutando, rectangulum FÆH ad quadratum ME, ut triangulum ÆPN ad triangulum ENG, sive (a) ut quadratum ÆN ad EN quadratum; unde iterum permutando, rectangulum FÆH ad quadratum ÆN est, ut quadratum ME ad quadratum EN. Q. E. D.

a *pr.* 19. *VI. El.*

COROLLARIA.

I. DVcta MN iungente contactus, quae secet HF in V, erunt FÆ, VÆ, HÆ continue proportionales, idest rectangulum FÆH aequabitur ÆV quadrato, quod pariter ad quadratum ÆN est, ut EM quadratum (b) ad quadratum EN [*ob similia triangula VNÆ, MNE, vel*] sicut dictum rectangulum FÆH est (c) ad ÆN quadratum, [*ideoque ÆV quadratum* (d) *aequatur rectangulo FÆH.*]

b *ex* 4. & 22. *VI. Elem.*
c *ex hac prop.*
d *ex* 9. *V. El.*

II. In Parabola etiam quadratum ÆP aequabitur rectangulo FÆH: nam [*ob parallelas MG, VP, est ME ad EG, ut VÆ ad ÆP; unde*] ut ME aequatur EG ob proprietatem tangentis (e), ita VÆ aequalis erit ÆP; unde (f) utriusvis quadratum aequatur rectangulo FÆH.

Fig. 51. 52.
e *ex cor.* 13. *pr.* 9.
f *ex cor.* 1.

III. Si plures secantes invicem parallelae FH, fh cum aliqua tangente NE concurrant in Æ, æ, rectangula FÆH, fæh erunt, ut quadrata partium interceptarum tangentis NÆ, Næ: nam illis aequantur (g) quadrata ÆV, æu, quae [*ob similitudinem* *trian-*

Fig. 59.
g *ex cor.* 1.

a ex 4., & 22. VI. Elem. *triangulorum NÆV, Næu*], sunt ipsis quadratis NÆ, Næ (a) proportionalia.

Fig. praeced. b 6. II. Elem. c ex cor. 1. IV. Quoniam HF bifariam secta in D a suo diametro, exhibet rectangulum FÆH cum quadrato HD aequale (b) quadrato DÆ, substituto quadrato ÆV dicto rectangulo (c) aequali, erunt quadrata ÆV, & HD simul sumpta, aequalia ÆD quadrato.

Fig. 51. 52. d cor. 2. e 3. II. El. f cor. 1. g 3. II. El. h 16. VI. Elem. i 19. V. Elem. V. Quoniam in Parabola VÆ aequatur ÆP (d), rectangulum VHP cum quadrato ÆH aequatur quadrato ÆV (e), nempe rectangulo FÆH (f), idest rectangulo FHÆ, cum quadrato HÆ (g); quare utrinque dempto HÆ quadrato, rectangulum VHP aequatur rectangulo FHÆ: & ideo (h) FH ad HP, est ut [*ablata*] HV ad [*ablatum*] HÆ, sive (i) ut reliqua VF ad reliquam PÆ, seu [*permutando*] est FH ad HV, ut PH ad HÆ, sive ut PK ad KN.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. SI rectae HF, TK binis tangentibus MA, NA convenientibus in A, parallelae, secent quamlibet Conicam Sectionem, aut duas oppositas Hyperbolas in H, F, K, T, ipsae autem conveniant in R, sive intra, sive extra Sectionem, erit rectangulum HRF ad rectangulum KRT, ut quadratum tangentis MA ad quadratum tangentis AN.

Ductis per contactus diametris ME, NL, ad quas ordinantur ipsae FH, TK tangentibus parallelae, adeoque bifariam secantur

tur

tur in E, L, agatur KO parallela MA, & HS parallela AN, secantes diametros in O, S, quas etiam secant productae tangentes in G, D, & productae FH, TK in P, Q. Manifestum est utique, esse [*quadratum HE ad quadratum RE, ut triangulum HES ad sibi simile REQ, quare dividendo, est differentia quadratorum HE, RE ad quadratum RE, ut differentia similium triangulorum HES, REQ ad triangulum REQ, & permutando, differentia quadratorum HE, RE ad differentiam similium triangulorum HES, REQ, ut quadratum RE ad triangulum REQ, vel ut quadratum HE ad simile triangulum HES; igitur etiam erit*] rectangulum HRF, quod (a) est differentia quadratorum HE, RE, ad trapezium HSQR, quod est differentia similium triangulorum HES, REQ, ut quadratum HE ad triangulum HES, vel ut MA quadratum ad simile triangulum AMD, vel ad ANG (b) ipsi aequale: trapezium autem HSQR, quod aequatur alteri KOPR (c) erit ad rectangulum KRT pariter, ut triangulum KLO ad quadratum KL, sive ut triangulum ANG ad quadratum AN (d); ergo ex aequo, rectangulum HRF ad KRT est, ut quadratum MA ad AN quadratum. Q. E. D.

a 5. & 6. II. El.

b pr. 10. & cor. 1. pr. 14.

c cor. 2., & 3. pr. 15. & Schol. eius.

d pr. 19. VI. El.

COROLLARIA.

I. SI duae aequidistantes chordae HF, XZ secentur ab alia KT in R, V, erit rectangulum HRF ad ZVX, ut KRT ad KVT; quippe alternatim HRF ad KRT est, ut ZVX

ad

ad KVT, nempe ut quadratum tangentis MA, prioribus secantibus parallelae, ad quadratum AN parallelae alteri secanti KT (a).

a per hanc prop.

II. Si rectae HF, KT concurrentes in R sint parallelae binis aliis XZ, YH convenientibus in I, tam HRF ad KRT, quam XIZ ad YIH erunt in eadem ratione quadrati (b) MA tangentis, ad quadratum tangentis AN; Vnde [*ut HRF ad KRT, ita est XIZ ad YIH, &*] permutando, HRF ad XIZ erit, ut KRT ad YIH.

b per hanc prop.

Fig. 60. 61.

III. In parabola eadem rectangula HRF, KRT sunt etiam, ut parametri diametrorum ME, NL, ad quas illae rectae ordinantur: nam ex concursu R ducta RB diametris parallela, rectangulum HRF aequatur rectangulo parametri ad diametrum ME pertinentis, ducti in RB (c), & similiter rectangulum KRT aequatur rectangulo ex ductu parametri pertinentis ad aliam diametrum NL in eamdem RB (d); ergo talia rectangula sunt ut dictae parametri (e).

c pr. 11.

d *per eamdem*

e *prop.* 1. *VI.Elem.*

IV. Vnde [*cum huiusmodi rectangula HRF, KRT sint etiam, ut quadrata* (f) *tangentium MA, AN;*] colligitur (g), parametros variarum diametrorum parabolae esse, ut quadrata tangentium ipsarum vertices, & invicem concurrentium; nempe ut MA quadratum ad AN quadratum, ita latus rectum diametri ME ad latus rectum alterius diametri NL.

f *per hanc prop.*

g *ex coroll.* 3.

V. In Ellipsi vero, & Hyperbola tangentium quadrata sunt in ratione composita diametrorum ductarum ex contactibus, &

ipsa-

ipsarum parametrorum illis respondentium; adeoque sunt, ut [*rectangula ex illarum diametrorum ductu* (a) *in suas parametros, vel ut*] quadrata semidiametrorum (b) coniugatarum, quae ipsis tangentibus sunt parallelae; ideoque in hac ratione (c) pariter sunt rectangula ex partibus secantium has sectiones dictis tangentibus parallelarum; id quod in Ellipsi patet, quia per centrum ipsum [*C*] ductis [*FB*, *DT*] parallelis tangentibus [*NE*, *ME*], earum rectangula [*FCB*, *DCT*] erunt dictarum semidiametrorum coniugatarum [*FC*, *DC*] quadrata, ipsis tangentium parallelarum [*NE*, *ME*] quadratis (d) proportionalia. In Hyperbola aeque ac in Ellipsi hoc idem demonstrabitur in Coroll. 2. & 3. sequentis propositionis.

a *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
b *post corol.* 2. *prop.* 12.
c *ex hac prop.*
Fig. 67.
d *ex hac prop.*

PROPOSITIO XVIII.

SI ad terminos cuiusvis diametri Q, N, Sectionis Ellipticae, aut Hyperbolicae, agantur tangentes QR, NE, quae erunt parallelae, utpote ordinatis aequidistantes, & alia tangens MG illas secet in R, E, rectangulum ex QR in NE aequabitur quadrato secundariae semidiametri CB, priori QN coniugatae.

Fig. 67. 68.

Nam ex proprietate tangentis MG, ordinata ad diametrum MK, erit QG ad GN, ut QK ad KN (e); unde QG plus GN in Ellipsi, seu QG minus GN in Hyperbola, erit ad GN, ut QK plus KN in Ellipsi, seu mi-

e *ex cor.* 12. *pr.* 9.

minus KN in hyperbola, ad KN: [*Sed QG plus GN in Ellipsi, vel QG minus GN in Hiperbola, est dupla CG: item QK plus KN in Ellipsi, seu QK minus KN in Hyperbola, est dupla CQ; igitur dupla CG est ad GN, ut dupla CQ ad KN,*] & sumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GN,
a 12. *V.* ut CQ ad KN; unde summa (a) anteceden-
Elem. tium QG ad summam consequentium KG erit, ut primum antecedens CG ad primum consequens GN: est autem ob similia triangula [*QGR, KGM, CGL, NGE*], QG ad KG, ut QR ad KM, & CG ad GN, ut
b 16. *VI.* CL ad NE; ergo sunt in eadem ratione
Elem. QR, KM, & CL, NE; adeoque (b) rectan-
c 34. *I.* gulum ex QR in NE aequatur rectangulo
Elem. KM in CL; idest, ducta MH parallela CN,
d *post co.* quae ex semidiametro CB secabit CH aequa-
2. *pr.* 12. lem KM (c), erit QR in NE aequale LCH:
e *cor.* 6. sed rectangulo LCH aequatur semidiametri
pr. 5. & 6. CB quadratum; est enim primariae semi-
f *cor.* 8. diametri CN quadratum ad semidiametri co-
prop. 9. niugatae CB quadratum, ut transversa QN
g *cor.* 2. ad suam parametrum (d), scilicet [*ut* (e) *re-*
prop. 23. *ctangulum QKN ad quadratum KM, vel*]
VI. El. ut rectangulum CKG, quod aequatur QKN (f),
h *ex pro.* ad quadratum KM, seu in ratione (g) com-
34. *I. El.* posita ex CK ad KM, sive (h) ad CH, &
i *cor.* 2. GK ad KM, hoc est CG ad CL, ideoque (i)
prop. 23. ut CK in CG ad CL in CH; [*ergo CN*
VI. El. *quadratum est ad quadratum CB, ut rectangu-*
k *cor.* 11. *lum KCG ad rectangulum LCH*]: sed KCG
prop. 9. aequatur CN quadrato (k); ergo LCH est ae-
l 14. *V.* quale (l) quadrato GB; ideoque etiam QR
Elem. in

in NE, quod vidimus aequari LCH, aequatur quadrato coniugatae semidiametri CB. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. PEr contactum M ducta alia diametro MCS, ductaque tangente SA, quae parallela erit MG, conveniente in A cum alia tangente NE, quae diametro MS occurret in I, ductaque ex centro CD parallela ME, quae sit semidiameter secundaria coniugata semidiametro CM, erit pariter rectangulum SA in ME aequale quadrato semidiametri CD ob eamdem rationem, [*unde rectangulum QR in NE est ad rectangulum SA in ME, ut CB quadratum ad quadratum CD.*]

II. Ductis QS, NM, GI, quae (a) invicem parallelae erunt (ob aequalitatem triangulorum (b) NEG, MEI, adeoque etiam NGM, NMI, & ob aequales rectas NC, CQ, & MC, CS), erit [*QC ad CG, ut* (c) *SC ad CI, & componendo, QG ad GC, ut SI ad IC: sed GC est ad GN, ut* (d) *IC ad IM; igitur ex aequo est*] QG ad GN, ut SI ad IM; unde & QR (e) ad NE, ut SA ad ME, [*& permutando QR ad SA, ut NE ad ME*]; & ideo rectangulum QR in NE ad rectangulum SA in ME erit [*in ratione* (f) *composita ex aequalibus rationibus QR ad SA, & NE ad ME, seu*] in duplicata ratione NE ad ME: Vnde QR in NE ad SA in ME, idest quadratum CB ad qua-

a *prop. 4. 28. & 39. I. Elem.*
b *ex pr. 14.*
c *pr. 4. VI. El.*
d *ex pr. 2. VI. El.*
e *cor. 1. prop. 4. VI. El.*
f *cor. 2. prop. 23. VI. El.*

a *ex cor.* dratum (a) CD erit, ut quadratum NE ad qua-
1. dratum ME (b).

b *cor.* 1. III. Et ideo si duae chordae, tangen-
prop. 20. tibus NE, ME parallelae, invicem conve-
VI. El. niant, erunt ipsarum rectangula, ut qua-
c *ex pro.* drata semidiametrorum CB, CD ipsis aequi-
17. distantium, cum sint ut (c) quadrata dicta-
rum tangentium.

Fig. 85. IV. [*Quare si per centrum C Ellipsis,*
86. *aut Hyperbolae traiecta sit diameter TH, parallela cuivis chordae SR, quam secat in F chorda altera per centrum traducta QN; erit rectangulum QFN ad rectangulum SFR, ut quadratum QN ad quadratum TH; nam*
d *ex cor.* *rectangulum QFN est ad rectangulum SFR,*
praeced. *ut* (d) *quadratum semidiametri, aequidistantis chordae QN, ad quadratum semidiametri TC, aequidistantis alteri chordae SR: sed quadratum semidiametri, aequidistantis chordae QN, idem plane est cum quadrato QC, quippe diameter parallela chordae QN, coincidit cum eadem chorda QN per centrum traducta; ergo rectangulum QFN est ad rectangulum SFR, ut quadratum QC ad quadratum TC, vel ut quadratum QN ad quadratum TH.*]

V. [*Cum in huius propositionis demon-*
Fig. 67. *stratione quadratum CB ostensum sit aequa-*
68. *le rectangulo LCH, erunt in* (e) *continua pro-*
e 17. *VI.* *portione rectae CH, CB, CL; quare si ex El-*
Elem. *lipseos, aut Hyperbolae quolibet puncto M, ducta MH parallela primariae diametro NQ, seu ordinata ad semiconiugatam BC, agatur tangens ML; haec ita in L occurret semiconiugatae BC,*
ut

ut sint continue proportionales CH, CB, CL.]

PROPOSITIO XIX.

IN axe Parabolae NK ponatur NF infra verticem aequalis quartae parti suae parametri, atque ipsi NF ponatur supra verticem aequalis NP, & ducatur PV parallela ordinatis: ducta ex F ad quodlibet curvae punctum M recta FM, ductaque tangente OMG, ac diametro MX, axi NK parallela, erit angulus XMO aequalis FMG; et ipsa MF erit pariter aequalis quartae parti parametri ad diametrum MX pertinentis. Fig. 69.

Dicatur autem punctum F *focus* Parabolae; & punctum P eius *sublimitas*; & recta PV *Linea sublimitatis*.

Ordinata ad axem MK, erit quadratum MK aequale rectangulo KN in (a) quadruplam NF, quae est (b) parameter axis; ergo quadruplum rectanguli KNF cum quadrato FK aequatur quadratis MK, & KF, idest (c) quadrato FM: sed ob NP aequalem NF, quadratum PK est pariter aequale quadruplo rectanguli KNF cum quadrato FK (d); ergo quadratum FM aequatur PK quadrato; unde FM aequatur PK, sive aequatur FG: Nam ob NK aequalem NG (e), & NF aequalem NP, erit FK aequalis PG, adeoque [*utrinque adiecta PF*,] PK aequatur FG. Est igitur GFM triangulum aequicrure, adeoque angulus FMG aequatur MGK (f), sive externo

a *cor.* 1. *pr.* 4.
b *ex hyp.*
c 47. *I. Elem.*
d *pr.* 8. *II. El.*
e *cor.* 6. *pr.* 9.
f 5. *I. Elem.*

a 27. I. Elem. no parallelarum XMO (a). Quod erat primo demonstrandum. Et producta diametro MX ad lineam sublimitatis PV in V, erit MV aequalis PK (b), ideoque aequalis MF; Atque ordinata NX, tangenti MG parallela, & ex axis vertice ducta tangente ND, quae [*erit ordinatae KM parallela, ideoque sicuti subtangentem KG bisecat in N, ita etiam*] bifariam secabit MG in D, iuncta DF, erit DG quadratum aequale rectangulo FGN: cum sit enim MD aequalis DG, ut KN aequatur NG (c), sitque MF aequalis GF, & angulus FMD aequalis FGD, etiam reliqui anguli horum triangulorum aequales erunt (d), adeoque GDF est angulus rectus, quippe aequalis consequenti MDF, ergo [*cum DN perpendiculariter insistat rectae GF, erit FG ad GD (e), ut GD ad GN, adeoque*] GD quadratum aequatur [*rectangulo*] FGN (f), sive aequatur MF in MX, quia FG aequatur MF, & GN est aequalis MX (g), at GD quadratum est quarta pars quadrati MG, vel XN, quae ipsius GD sunt duplae; ergo ordinatae XN quadratum est quadruplum rectanguli FM in MX; Sed [*idem XN quadratum*] aequatur rectangulo suae parametri in abscissam MX (h): ergo FM erit quarta pars dictae parametri. Q. E. D.

b 34. I. Elem.

c *cor.* 6. *prop.* 9.

d 4. I. Elem.

e 8. VI. Elem.

f 17. VI. Elem.

g 34. I. Elem.

h *cor.* 1. *pr.* 10.

COROLLARIA.

Fig. 69. 70.

I. CVm ex Catoptrica ita reflectantur radii, ut angulus incidentiae XMO aequetur angulo reflexionis FMG; patet, om-

omnes radios axi parallelos, ex remotissimo luminoso corpore, velut e Sole, descendentes (qui velut paralleli habentur, multo magis, quam directiones gravium eiusdem loci in centrum Terrae, ipso Sole multo proximius), & in parabolicum speculum MN m incidentes, nempe XM, xm, x m &c., in punctum illud F reflecti debere, adeoque ibidem ex eorum concursu ignem excitari; & ideo punctum illud *focus* appellatur.

II. Vicissim, si lumen aliquod in hoc foco F speculi parabolici positum fuerit, emittet radios FM, F m, F m, qui reflexi in lineas MX, mx, mx axi parallelas extendentur; unde in magna aliqua distantia eamdem intensionem servabunt, quam habent prope ipsum lumen, veluti in MX: unde caracteres a lumine remotissimi legi poterunt, & distantium locorum superficies commode illustrari.

III. Linea FD, coniungens focum ad concursum tangentis verticalis axis cum alia laterali tangente, est huic ipsi tangenti perpendicularis: ostendimus enim angulum FDG rectum esse. Fig. 69.

IV. Etiam MV portio diametri MX a suo vertice M ad lineam sublimitatis PV, est quarta pars parametri sibi correspondentis: nam FM aequalis FG, aequatur PK, adeoque est aequalis MV: & ubilibet ducta F m aequatur axi parallelae m u ad dictam lineam sublimitatis extensae: unde quaelibet FM ad MV est ut FN ad NP.

Fig. 70. V. Quaelibet XM cum MF aequatur al-
a cor. 4. teri xm cum mF: aequatur enim XV (a),
b 34. I. sive TP (b), propter MV aequalem MF (c):
Elem. [*sed ob mu aequalem mF, est etiam xm cum*
c cor. 4. *mF aequalis xu, vel TP; igitur XM cum MF aequatur xm cum mF.*]

VI. Sumptis in perimetro parabolae, hinc inde ab axe, binis punctis M, B (aut ex eadem parte M, b), & iunctis ad focum F
Fig. 71. rectis MF, BF (seu bF), ductisque tangentibus MG, BH convenientibus in L (aut MG, bh, concurrentibus in l), erit angulus MFB duplus contenti a tangentibus GLB (sive MFb duplus Glb). Nam quia ostensum est aequicrure triangulum MFG, aut
d *per hanc prop.* BFH (vel bFh (d),) externus angulus KFB (e)
e *per* I. *part. pr.* 32. *I. El.* duplus est interni FHB (& KFb duplus Fhb), nec non MFK duplus MGF; unde KFB plus MFK, scilicet MFB, aequatur duplo FHB cum duplo MGF; sive HGL, quibus (f) ae-
f *per eamdem.* quatur duplum GLB (at KFb minus MFK, scilicet MFb, aequatur duplo Fhb, minus duplo MGF, sive hGl, quibus aequale est duplum Glb): quare angulus ex ramis ad focum ductis MFB, aut MFb, duplus est anguli a tangentibus contenti GLB, aut Glb.

VII. Quod si puncta M, B sint in ea-
Fig. 72. dem recta linea cum foco F, tangentes ML, BL in angulum rectum MLB convenient; eo
g 13. I. *Elem.* quod anguli BFK, & KFM sint duobus (g) rectis aequales, & eorum medietas sit angulus ille MLB a tangentibus comprehensus.

VIII. Hinc ipsa recta MB erit parameter diametri LSR bifariam secantis MB illi

or-

ordinatam. Circulus quippe triangulo MBL circumscriptus habebit centrum in R, quia rectus angulus L erit in semicirculo; quare MB erit dupla radii RL, & RL est dupla (a) RS, sive (ducta tangente SH parallela MB) est dupla FH (b), cui aequatur FS, uti ostensa fuit FM aequalis FG (c); ergo MB est quadrupla FS: Sed haec est quarta pars parametri ad diametrum SR pertinentis (d); ergo ipsa MB est eius parameter.

a cor. 6. prop. 9. b *34. I. Elem.* c *ex hac prop.* d *ex 2. part. huius prop.*

IX. Iuncta LF erit quoque perpendicularis MB: cum enim ostensae sint aequales LS, SR, FS (e), angulus LFR erit (f) rectus, quippe in semicirculo circa diametrum LR descripto; & ideo quadratum LF aequatur (g) rectangulo MFB.

e *cor. 8. huius pr.* f *31. VI. Elem.* g *8. & 17. VI. El.*

X. Ipse autem rectus angulus MLB a tangentibus comprehensus est in recta PV sublimitatis eiusdem parabolae, quia FS aequatur SL, ut FN aequatur NP; unde punctum L ad rectam PV pertinet, cuius est talis proprietas (h).

h *cor. 4. huius pr.*

PROPOSITIO XX.

Fig. 73. 74.

IN axe transverso Ellipsis, & Hyperbolarum oppositarum, determinatis rectangulis QFN, NVQ aequalibus quadrato semiaxis secundarii coniugati CB, seu quartae (i) parti rectanguli per transversum QN, & per latus rectum NS comprehensi, ad quodlibet punctum curvae M iunctis rectis FM, VM ex utroque puncto F, V, comprehendent cum tangente GME angulos aequales. Vocen-

i *post. co. 2. pr. 12.*

centur haec duo puncta F, *foci* dictarum Sectionum.

Verticales axis tangentes QE, MO conveniant cum alia tangente MG ad puncta E, O; ergo rectangulum ex QE in NO, quod aequatur (a) quadrato CB, aequabitur rectangulo QFN, aut NVQ; ideoque (b) erit EQ ad QF, ut FN ad NO; & EQ ad QV, ut VN ad NO: [*Recti vero, seu aequales sunt anguli EQV, ONV*;] unde iunctis EV, OV, & EF, FO erunt triangula EQV, OVN (c) similia; item EQF, ONF similia erunt; quare angulus EVQ aequabitur NOV: & quia NOV, cum NVO (d) complet unum rectum (existente recto angulo ONV in eodem triangulo), erit EVQ cum NVO recto aequalis; ideoque OVE rectus (e) angulus erit. Similiter ob angulum QFE aequalem NOF, qui cum NFO (f) rectum complet, etiam angulus EFO est rectus: unde semicirculus super diametro EO descriptus per puncta V, F transibit, rectos angulos EVO, EFO (g) comprehendens: & per punctum O ducta AO parallela VE, quam secet in I recta VM, erit angulus AOV rectus, utpote (h) alterno parallelarum EVO aequalis [*in Ellipsi: in Hyperbola vero utpote binos rectos* (i) *cum recto EVO complens*]: estque AO aequalis OI, quia ordinata MK, cum sit QG ad GN, ut QK (k) ad KN, erit etiam EG ad GO, ut EM ad MO: [*sed est EV ad OA, ut* (l) *EG ad GO, & EV ad IO, ut EM ad MO;*] quare est EV ad OA, ut EV ad IO; unde OA ae-

a pr. 18.
b 16. VI. Elem.
c 6. VI. Elem.
d cor. 6. pr. 32 I. Elem.
e ex 13. I. Elem.
f cor. 6. pr. 32. I. Elem.
g ex 31. III. El.
h 27. I. Elem.
i 27. I. Elem.
k cor. 13. prop. 9.
l cor. 1. prop. 4. VI. El.

aequatur IO: Angulus ergo OVI (a) aequabitur OVA in triangulis OVI, OVA aequalibus, & similibus [*ob aequalia latera circa angulos* (b) *rectos, ad punctum O constitutos*]: Sed OVA aequatur (c) angulo OEF, quippe eidem arcui OF insistunt in eodem circulo; quare, & angulus OVI aequabitur OEF; & ex puncto H ubi concurrunt VO, EF, iuncta ad M linea HM, erit tangenti EM perpendicularis, quia ob aequales angulos HVM, HEM, circulus (d) per puncta H, V, E, M describi posset, existente (e) angulo HME recto, quia oppositus est angulo recto HVE [*in Ellipsi: in Hyperbola vero in eodem segmento est cum HVE recto*]; unde & rectus erit HMO: qui cum opponatur alteri recto HFO, etiam (f) per puncta M, H, F, O transire poterit circulus; quare (g) angulus VME aequabitur VHE, & angulus FMO (h) aequabitur FHO, cum sint in eodem circulari segmento: sed VHE (i) est aequalis [*in ellipsi*], aut idem cum FHO [*in hyperbola*]; ergo anguli VME, FMO, quos rami, ex focis V, F ad idem Sectionis punctum M ducti cum tangente comprehendunt, sunt aequales. Q. E. D.

a 4. *I. El.*
b *ex demonstr.*
c 21. *III. Elem.*
d *ex* 21. *III. El.*
e *ex pr.* 22. *III. El. in Ellipsi, & ex pr.* 21. *III. El. in Hyper.*
f *ex pr.* 22. *III. Elem.*
g 21. *III. Elem.*
h *ex eadem pr.*
i 15. *I. Elem.*

COROLLARIA.

I. HInc radii ex puncto V in perimetrum Sectionis Ellipticae, aut Hyperbolicae NM incidentes, reflectuntur ad aliud punctum F in Ellipsi; aut in Hyperbola ita reflectentur in R, ut in ipsum punctum F sint

col-

collimantes, [*seu versus M producti, tendant ad focum F; nam*] ob angulum reflexionis RMY aequalem angulo incidentiae VME, adeoque (a) aequalem angulo OMF, ipsi ad verticem opposito, [*erunt anguli RMY, RMO aequales angulis OMF, RMO: sed illi duobus* (b) *rectis aequantur; ergo & isti, quare lineae RM, MF in directum* (c) *sunt positae, ideoque radii RM versus M producti, tendent ad focum F*]. Et vicissim ex puncto in sectionem MN incidentes radii, reflectentur in alterum focum V in Ellipsi: at in Hyperbola, ob angulum ZMY (d) aequalem verticaliter opposito VME, adeoque (e) & angulo incidentiae FMO, reflectetur FM in MZ, quae collimat in punctum V; Et ideo puncta haec foci appellantur, quippe luminis in uno ipsorum positi reflexi radii ab Elliptica curva in aliud reflexi colligentur; & in Hyperbolica reflexi radii luminis irradiantis ex uno foco imaginem referent in altero. Idem de obiectis per specula Elliptica, aut Hyperbolica videndis intelligi debet.

a *ex hac prop.*
b 13. *I. Elem.*
c 14. *I. Elem.*
d 15. *I. Elem.*
e *per hanc prop.*

II. Determinari poterunt foci Ellipsis, aut Hyperbolae, si super quamlibet tangentem OE, verticalibus tangentibus NO, QE interceptam, velut diametrum circulus describatur, axem secans in F, & V, quae puncta erunt foci quaesiti, propter angulos in semicirculo rectos OVE, OFE.

III. Item, si ex vertice B secundarii axis inclinentur hinc inde in Ellipsi super axem transversum rectae BF, & BV, singulae aequales semiaxi transverso CN, seu

CQ.

CQ, erunt puncta F, V ipsi foci: tunc enim rectangulum NFQ, aut QVN, cum quadrato CF, seu CV, adaequans (a) quadratum CN, vel BF (b), aut BV, idest quadratum BC cum (c) quadrato CF, aut CV, dabit ipsum rectangulum NFQ, aut QVN dicti semiaxis secundarii BC quadrato aequale, ut contingit in focorum determinatione.

IV. In Hyperbola si rectae BN, iungenti terminos utriusque axis, aequalis ponatur ex centro CF, aut CV in axe transverso, erunt puncta F, V foci quaesiti: Nam rectangulum QFN, quod cum (d) quadrato CN complet quadratum CF, aequabitur (e) quadrato CB, quod cum (f) eodem CN quadrato complet quadratum BN.

V. [*Hinc foci F, V a centro C aequidistant; nam in Hyperbola rectae CV, CF aequantur eidem* (g) *rectae BN; ergo etiam mutuo sunt aequales. In Ellipsi vero quia BV, BF aequantur* (h) *eidem rectae CN, utique ipsae, sicuti & ipsarum quadrata aequari debent: est autem quadratum BV aequale* (i) *quadratis BC, CV, & quadratum BF aequale* (k) *quadratis BC, CF; igitur quadrata BC, CV aequantur quadratis BC, CF, & utrinque ablato BC quadrato, erit quadratum CV aequale quadrato CF, ideoque aequabuntur CV, CF.*]

a 5. *II. Elem.*
b *ex construct.*
c 47. *I. Elem.*
d *6. II. Elem.*
e *ex construct.*
f 47. *I. Elem.*
g *ex cor.* 4.
h *ex cor.* 3.
i 47. *I. Elem.*
k *per eamdem.*

PROPOSITIO XXI.

SI cuilibet ramo FM, ex foco F ad aliquod punctum M Ellipseos, aut Hyperbolae ducto, agatur ex centro C parallela CI, Fig. 75. 76.

CI, cum tangente ME conveniens in I, erit CI aequalis semiaxi transverso CQ, aut CN.

Ducta ex alio foco V recta VD parallela iisdem FM, CI, & tangenti occurrente in D, & iuncta VM, quam secat CI in T, ductisque verticalibus tangentibus QE,
a *pr.* 20. NO; Quoniam angulus VME aequatur (a)
b 27. *I.* MO, sive (b) VDM ob parallelas huic ae-
Elem. quali, erunt (c) latera VM, VD aequalia,
c 6. *I. El.* utpote angulis aequalibus opposita: estque [*ob parallelas VD, CI, FM*,] MI ad ID,
d 2. *VI.* ut (d) MT ad TV, ut FC ad CV, quae
Elem. sunt (e) aequales; ergo [*aequantur etiam MI*,
e *cor.* 5. *ID, adeoque*] triangulorum MVI, DVI,
pr. 20. latus commune VI habentium, caetera latera MV, VD, nec non MI, ID aequalia
f 8. *I. El.* sunt; unde (f) & anguli MIV, DIV aequales erunt, adeoque recti: & quia pariter recti sunt VQE, VNO, circulus circa dia-
g 22. *III.* metrum VE descriptus, per puncta (g) Q, I
Elem. transibit; & circulus circa diametrum VO,
h *per e-* per puncta (h) N, I pariter se conferet.
amdem. Quare angulus QIV (i) aequabitur QEV,
i 21. *III.* quippe ad idem circuli segmentum pertine-
Elem. bunt: Sed QEV aequatur OVN, qui pari-
k 21. *III.* ter aequalis (k) erit NIO, cum in eodem cir-
Elem. culi segmento, per puncta N, I, V, O transeuntis, uterque consistat; ergo angulus QIV aequatur NIO: & si alteruter addatur angulo NIV in Ellipsi, vel ab ipso subtrahatur in Hyperbola, fiet angulus QIN aequalis recto VIO. Quare circulus super diame-

metro QN descriptus per punctum (a) I transibit, eritque radius CI aequalis semiaxi CQ, aut CN. Q. E. D.

a 31. III. Elem.

COROLLARIA.

I. Hinc habetur, quod in Ellipsi summa inclinatarum ex focis ad quodlibet punctum curvae, & earum differentia in Hyperbola, aequatur integro axi QN. Nam quia [*FV est ad VC, ut* (b) *FM ad CT, &*] FV est dupla (c) VC, erit FM dupla CT; & cum sit quoque [*DM ad MI, ut* (d) *VD ad TI, sitque*] DM (e) dupla MI, erit VD, sive (f) ipsi aequalis VM dupla TI: quare FM, & VM in Ellipsi est dupla CT, cum TI, hoc est dupla CI, vel CQ, adeoque aequalis QN. In Hyperbola vero differentia VM ab MF est [*differentia duplae TI a dupla TC, seu*] dupla differentiae TI a CT, hoc est dupla CI, seu CQ, & propterea aequalis axi transverso QN.

b *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
c *cor.* 5. *pr.* 20.
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e *ex demonstr. huius pr.*
f *ex demonstr. huius pr.*

II. Rursus si per centrum C agatur tangenti parallela CP, utrumque ramum secans in P, R, erunt MP, MR eidem semiaxi CN aequales. Nam in parallelogrammo CIMP (g) est utique MP aequalis CI: & ducta etiam CS parallela ramo VM, resultabit quoque CS (h) aequalis semiaxi; & in parallelogrammo RCSM erit (i) quoque CS aequalis MR; unde utraque MP, aut MR, aequatur semiaxi CN.

g 34. *I. Elem.*
h *ex hac prop.*
i 34. *I. Elem.*

III. Quoniam ostensa (k) est CI, aut CS, aequalis CN, & iuncta VI fit (l) perpendicu-

k *in hac prop.*
l *per eamdem.*

cularis tangenti, quemadmodum eidem fo-
a per e- ret (a) perpendicularis FS; colligitur, quod
amdem. si circa diametrum QN circulus describatur, ad quem terminabunt illae lineae CI, CS aequales CN, eiusque peripheria secetur a qualibet tangente MG in punctis I, S, iunctae CI, CS evadent parallelae ramis ad contactum ductis FM, VM, utpote aequales semiaxi (nec enim tales parallelae possunt occurrere tangenti extra peripheriam circuli, quia alias non forent aequales semiaxi), & factis angulis rectis GIV, GSF, illae perpendiculares IV, SF ad focos in axe determinandos se extendent: Vnde patet modus alius determinandi focos harum Sectionum.

IV. Ductae ex focis F, V in aliquam tangentem GM perpendiculares FS, VI continent rectangulum aequale quadrato semia-
b pr. 20. xis secundarii CB, nempe rectangulo (b) NFQ, aut NO in QE. Nam extensa SF ad circulum in X, iuncta XC erit in directum alteri radio CI; nam ob angulum rectum ISX,
c 31. III. Elem. est arcus XSI (c) semiperipheria aequalis semiperipheriae QIN; & ablato communi [*arcu*]
d 21. III. Elem. NI, est arcus XN aequalis QI, & (d) angulus XCN aequalis QCI, circa quos angulos,
e 4. I. El. cum latera XC, CF lateribus CI, CV sint
f 35. III. El. in Ellip., & cor. 1. pr. 36. III. Elem. in Hyperb. aequalia, etiam basis FX (e) aequatur basi VI, unde rectangulum FS in VI aequatur rectangulo SFX, adeoque etiam (f) rectangulo NFQ.

V. ducta ad tangentem perpendiculari MH, erit harmonice sectus axis ab utroque foco, a perpendiculari, & tangente; nempe pe erit (a) FH ad HV, ut FG ad GV. Nam concurrente FS cum MV in Z, ob angulos (b) rectos FSM, MSZ aequales, atque FMS, SMZ (qui aequatur (c) VME) pariter (d) aequales, lateri MS communi triangulorum MSF, MSZ adiacentes, erunt (e) & latera FS, SZ aequalia: unde FS ad VI est, ut SZ ad VI; sed prima ratio eadem est cum (f) ratione FG ad GV, secunda (g) cum altera SM ad MI, sive FH ad HV; ergo est FG ad GV, ut FH ad HV.

a *ex* 4. *def. sec.* b *per hanc prop.* c *ex* 15. *I. Elem.* d *ex pr.* 20. e 26. *I. Elem.* f *ex pr.* 4. *VI. El.* g *per eamdem.*

VI. Quadrata autem FS, VI, & IS erunt semper eidem quantitati aequalia, nempe quadratis NV, & VQ, sive NF, & FQ. Nam iuncta FI, erunt quadrata FS, SI aequalia (h) quadrato FI; ergo addito VI quadrato, sunt quadrata FS, VI, & IS quadratis VI, & IF aequalia: haec autem ex supradictis (i) sunt aequalia duplo quadrati IC bisecantis basim VF trianguli VIF, cum duplo [*quadrati*] semibasis CV; & duplum quadrati CI, sive CQ una cum duplo CV quadrati aequatur binis quadratis (k) inaequalium partium VQ, FQ, sive VQ, VN, aut ipsis NF, NV, sive NF, FQ quadratis; ergo quadrata FS, VI, & IS, hisce quadratis aequantur, ideoque sunt semper eiusdem quantitatis.

h 47. *I. Elem.* i *in Schol. gener. num. V.* k 10. *II. El. in Ellip.* & 9. *II. El. in Hyper.*

PROPOSITIO XXII.

IN Hyperbola summa angulorum MFB, MVB, quos rectae ex utroque foco ad bina curvae puncta inclinatae, continent; in

Fig. 77. 78.

G El-

Ellipsi vero eorum differentia dupla est anguli MLB a tangentibus eorumdem punctorum comprehensi.

a pr. 32. I. Elem. Angulus enim MFK externus aequatur (a) internis angulis MVF, FMV; ergo MFK cum MVF aequatur duplo MVF cum ipso FMV, qui pariter duplus (b) est auguli VMG; ergo MFK cum MVF duplus evadit anguli MGF, qui (c) aequatur ipsis MVF, VMG. Eodem modo probabitur angulus BFK, cum BVF duplus anguli BHF; quare totus angulus MFB, cum toto MVB aequabitur duplo anguli MGF; sive (d) HGL, cum duplo BHF, sive GHL, quibus aequatur duplus anguli externi (e) MLB, a tangentibus comprehensi. In Ellipsi vero quia angulus GMF, sive (f) VMI, aequatur (g) MGV cum MVF; ergo addito utrinque MGV, erunt anguli GMF, MGV, idest externus (h) MFV, aequales MVF cum duplo MGV: eodemque modo externus BFV aequabitur BVF cum duplo BHF, sive duplo (i) LHG: quare totus angulus MFB aequatur toti MVB cum duplo MLB, qui (k) ipsis MCV & LHG aequatur: Igitur excessus anguli MFB supra MVB est aequalis duplo anguli MLB a tangentibus comprehensi. Q. E. D.

b ex pr. 20.

b pr. 32 I. Elem.

d 15. I. Elem.

e ex pr. 32. I. El.

f per pr. 20.

g 1. part. pr. 32. I. Elem.

h per eamdem.

i 15. I. Elem.

k pr. 32. I. Elem.

COROLLARIUM.

Recta MFT per focum traducta, & ductis tangentibus ME, TE convenientibus in E, erit angulus MET in Hyperbola semper obtusus, in Ellipsi semper acutus; nam anguli li a ramis MF, TF ad focum F directe convenientibus, [*& a recta FK in Hyperbola, vel FV in Ellipsi*] contenti, sunt duobus (a) rectis aequales; unde medietas anguli MFT, [*seu potius angulorum MFK, KFT in Hyperbola, vel MFV, VMT in Ellipsi*] est rectus, quare eius summa cum medietate anguli MVT maior est recto, eiusque excessus supra medietatem MVT est minor recto: quare angulus MET aequalis summae ex dimidio MFT, & dimidio MVT erit in Hyperbola obtusus; & in Ellipsi, cum sit MET aequalis differentiae dictarum medietatum, erit acutus.

a *per* 13. *I. Elem.*

PROPOSITIO XXIII.

Distantia focorum FV est media proportionalis inter latus transversum QN, & QG summam transversi, & recti NH in Hyperbola, eorumve differentiam in Ellipsi.

Fig. 79. 80.

Quia enim rectangulum QFN aequatur (b) quadrato semiaxis coniugati CB, sive quartae parti rectanguli ex transverso, & recto QNH, seu QNG, posita NG aequali NH; utrovis addito in Hyperbola [*ad semiaxis transversi CN quadratum*], & subtracto in Ellipsi a semiaxis transversi CN quadrato, resultat (c) CF quadratum aequale aggregato quadrati CN, & quartae partis QNG in Hyperbola, eorumque differentiae in Ellipsi: & quadruplicando terminos, erit quadratum distantiae focorum FV aequale summae quadrati QN, & rectanguli QNG in Hyperbola, idest

b *ex pr.* 20.

c 6. *II. Elem. in Hyperb. &* 5. *II. El. in Ellipsi.*

a 3. *II.* *Elem.* b 2. *II.* *Elem.* c 17. *VI.* *Elem.*

idest (a) rectangulo NQG; in Ellipsi autem [*idem FV quadratum aequabitur*] eorumdem differentiae, quae pariter (b) est NQG rectangulum. Ergo VF distantia focorum est media (c) proportionalis inter axem transversum QN, & QG, quae summa est in Hyperbola, in Ellipsi vero differentia eiusdem transversi lateris QN a recto NH, seu NG. Q. E. D.

COROLLARIUM.

d *post co.* 2.*pr.* 12. e 1. *VI.* *Elem.*

QVoniam quadratum axis coniugati AB aequatur (d) rectangulo QNH, sive QNG, & quadratum distantiae focorum FV aequale ostensum est rectangulo NQG; erit quadratum AB ad quadratum VF, ut QNG ad NQG, idest ut (e) rectum latus NG ad QG summam transversi lateris, & recti in Hyperbola, & eorum differentiam in Ellipsi; eodemque modo, [*seu in eadem ratione*] erit quoque quadratum semiaxis coniugati CB ad quadratum distantiae foci a centro CF, aut CV.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 81. 82.

IN Hyperbola, & Ellipsi ex quolibet puncto R ducta tangente RG concurrente cum binis diametris coniugatis CN, CA in punctis G, M, erit rectangulum GRM aequale quartae parti rectanguli ex transversa diametro RCS, per contactum ducta, in eius parametrum, sive aequale quadrato semidiamemetri CH parallelae tangenti, quae est coniugata ad diametrum RCS.

Ducatur enim tangens HK eidem Ellipsi, vel ad coniugatam Hyperbolam, & ordinentur HF, RE ad diametrum AB, item HI, RO ad NQ, nec non AL ad CH, & AD ad CR. Cum sit CH ad CL, ut CK ad CA, sive ut (a) CA ad CF, erit (b) triangulum HCF aequale ACL; unde etiam (c) HCI aequabitur ADC. Similiter autem erit RC ad CD, ut MC ad CA, sive ut (d) CA ad CE, & triangulum ADC [*in Ellipsi*] aequabitur (e) RCE, vel (f) RCO: [*in Hyperbola vero, cum sit MC* (g) *ad CA, ut CA ad CE, erit MC ad CE, seu triangulum* (h) *MRC ad RCE, in* (i) *ratione duplicata MC ad CA, vel ut* (k) *idem triangulum MRC ad simile ADC; unde etiam triangulum ADC* (l) *aequabitur RCE, vel RCO*]: ergo triangula HCI, RCO aequantur; estque GOR ad RCO, ut (m) GO ad OC, hoc est ut (n) GR ad RM, sive ut CE (o) ad EM, Aut ut (p) triangulum REC ad RME; ergo GRO triangulum ad HCI, aequale RCO erit, ut idem CHI, quod aequatur RCE, sive ADC, ad RME: suntque GRO, HCI, RME triangula similia, quorum homologa latera GR, CH, RM erunt (q) proportionalia: ideoque rectangulum GRM aequatur (r) quadrato semidiametri CH, seu quartae parti rectanguli ex diametro transversa RS in suum latus rectum. Q. E. D.

a *cor.* 5. *prop.* 18.
b 15. *VI. Elem.*
c 34. *I. Elem.*
d *cor.* 5. *pr.* 18.
e 15. *VI. Elem.*
f 34. *I. Elem.*
g *ex cor.* 5. *pr.* 18.
h 1. *VI. Elem.*
i *def.* 10. *V. El.*
k 19. *VI. Elem.*
l 9. *V. Elem.*
m 1. *VI. Elem.*
n 2. *VI. Elem.*
o *per eamdem.*
p 1. *VI. Elem.*
q *ex* 19. *VI. El.*
r 17. *VI. Elem.*

COROLLARIA.

I. CIrculo circa triangulum CMG circumscripto, cuius circumferentiam secet CR in P, erit RP medietas lateris recti ad diametrum RCS pertinentis; Quia rectangulum GRM aequabitur (a) CRP rectangulo, unde CRP erit quarta (b) pars rectanguli ex RCS in suum latus rectum, adeoque ex semidiametro RC in medietatem recti lateris, quae erit PR.

a 35. *III. El. in Ellip., & in Hyperb. corol.* 1. *prop.* 36. *III. El.*

b *per hanc prop.*

II. Si circulus hic in figura hyperbolica non secaret, sed tangeret semidiametrum CR, coincidente puncto P cum C, unde PR aequalis esset CR; foret hyperbola (c) aequilatera, ob medietatem lateris recti aequalem medietati transversae diametri.

c *ex cor.* 7. *pr.* 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 83. 84.

INclinatae ex focis F, V ad quodvis punctum R curvae Ellipticae, aut Hyperbolicae, continent rectangulum VRF aequale quadrato semidiametri CH coniugatae diametro RCS per punctum R ductae, sive quartae parti rectanguli sub transverso RS, & eius recto latere contenti.

Ducta enim tangente RG concurrente cum axe NQ in G, & cum axe altero coniugato AB in M; ductaque ex centro CI parallela VR [*quae conveniat cum tangente GM*] in I, iuncta IF erit ipsi tangenti (d) perpen-

d *ex dem. prop.* 21.

pendicularis: [*est vero etiam axis coniugatus AB perpendicularis transverso axi NQ*:] quare ob angulos rectos MIF, MCF, transiret circulus per puncta M, I, F, C, super diametro (a) FM descriptus; adeoque (b) rectangula FGC, IGM erunt aequalia, unde FG ad GM erit, ut (c) IG ad GC, sive ut RG ad GV ob parallelas CI, VR; ergo FGV (d) aequabitur MGR; unde etiam per puncta V, R, M, F transire poterit (e) circulus, unde angulus FMR aequabitur GVR (essent enim in figura 84. in eodem segmento, & in figura 83. uterque cum FVR illi opposito, huic consequenti, duos rectos (f) compleret): sed & angulus FRM aequatur (g) VRG; ergo triangula FMR, GVR aequiangula sunt, & (h) similia, ideoque FR ad RM erit, ut (i) GR ad RV; & rectangulum VRF aequabitur (k) GRM: sed hoc (l) aequatur quadrato semidiametri coniugatae CH, quae tangenti aequidistat, seu quartae parti figurae ex transverso RS, & eius parametro contentae; ergo etiam illud rectangulum VRF ipsi aequatur. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. Hinc VR (m) est ad semidiametrum RC, ut medietas parametri ad hanc diametrum pertinentis, ad RF, quia rectangulum VRF aequatur RC in semiparametrum; id enim est quarta pars rectanguli totius diametri RS in totam parametrum.

II. Ex terminis diametri RS iunctae ad focum RF, SF pariter continebunt rectangu-

a *ex 21. III. El.*
b *ex cor. 1. 36. III. Elem.*
c *16. VI. Elem.*
d *16. VI. Elem.*
e *ex cor. 1. prop. 36. III. Elem. in Ellip., & ex 35. III. El. in Hyperb.*
f *22. III. El., & 13. I. El.*
g *pr. 20.*
h *4. VI. Elem.*
i *per eamd. pr.*
k *16. VI. Elem.*
l *propos. praec.*
m *16. VI. Elem.*

lum RFS aequale quadrato semidiametri coniugatae CH, seu quartae parti figurae rectanguli ex ipsa diametro RS in suam parametrum: quippe FS (a) aequatur VR, cum sint bases triangulorum FCS, RCV aequalia latera FC, CV, & SC, CR circa aequales angulos ad verticem C habentium; Vnde RFS aequatur VRF.

a pr. 4. I. Elem.

III. Quadrata RF, & RV cum duplo quadrato coniugatae semidiametri CH, aequantur quadrato QN in Ellipsi; in Hyperbola vero eadem quadrata RF, & RV dempto duplo quadrato semidiametri coniugatae CH, eidem quadrato axis QN aequantur. Nam QN aequatur aggregato (b) ipsarum RF, & RV in Ellipsi; in Hyperbola vero aequatur earumdem differentiae; ergo quadratum QN aequatur ipsarum quadratis, addito in Ellipsi, & dempto in Hyperbola, duplici rectangulo ipsarum, quod idem est, ac duplum quadratum CH; [*quippe in Ellipsi quadratum QN, vel quadratum summae rectarum FR, RV, est aequale* (c) *quadratis partium FR, RV plus duplo rectanguli ex iisdem partibus FRV, seu aequatur quadratis FR, RV plus* (d) *duplo CH quadrati: in Hyperbola vero sumpta RO aequali RV, ut* (e) *sit FO par transverso axi QN, quadrata FR, RO, vel FR, RV simul sumpta aequantur* (f) *quadrato FO, plus duplo rectanguli FRO; quare hoc duplo rectanguli FRO utrinque ablato, quadrata FR, RO, vel FR, RV simul sumpta, minus duplo rectanguli FRO, vel FRV aequabuntur quadrato FO, vel QN.*]

b cor. 1. pr. 21.

c 4. II. Elem.

d per hanc prop.

e cor. 1. pr. 21.

f 7. II. Elem.

IV. Rur-

IV. Rursus in Ellipsi summa ex rectangulo quolibet VRF, & ex quadrato suae semidiametri transversae CR, in Hyperbola vero eorum differentia, semper eiusdem est quantitatis, nempe aequatur duplo quadrato semiaxis transversi CN, ablato quadrato distantiae foci a centro CV, vel CF. Nam vidimus esse QN quadratum aequale quadrato summae in Ellipsi, vel differentiae in Hyperbola, rectarum VR, FR, idest quadratis VR, & FR plus, vel minus duplo rectangulo VRF; At quadrata VR, & FR dupla sunt quadrati CR, & quadrati CV (a); ergo duplum quadrati CR cum duplo quadrati CV, plus, aut minus duplo rectangulo VRF, aequatur quadrato QN; & omnia dimidiando, quadratum CR cum quadrato CV, addito, aut dempto rectangulo VRF, aequatur dimidio quadrati QN, quod est duplum quadrati semiaxis CQ: quare hinc inde ablato quadrato CV, erit [*quadratum CR cum rectangulo VRF in Ellipsi, aut minus rectangulo VRF in Hyperbola, aequale duplo quadrati CQ minus quadrato CV, seu erit*] summa, vel differentia quadrati CR, & rectanguli VRF, aequalis differentiae dupli quadrati CQ ab ipso CV, vel CF quadrato.

a *ex Sch. general. num. V.*

V. Et quia rectangulum VRF aequatur (b) quadrato coniugatae semidiametri CH, erit in Ellipsi summa quadratorum CR, & CH, in Hyperbola vero eorum differentia, aequalis summae, aut differentiae quadratorum ex utroque semiaxe CQ, & CB. Nam pariter summa, aut differentia quadratorum CR, CH

b *ex hac prop.*

a ex cor. praeced. b ex pr. 5. II. E- c pr. 20. d ex eadem pr. e ex pr. 6.II. El.

CH aequabitur duplo (a) CQ quadrati, dempto quadrato CV: sed quadratum CQ dempto quadrato CV in Ellipsi (b) aequatur rectangulo QVN, seu (c) quadrato semiaxis CB; & in Hyperbola CV quadratum, dempto QVN, seu (d) CB quadrato aequatur (e) quadrato CQ, [*hoc est CV quadratum aequale est quadratis CB, CQ*] ; ergo in Ellipsi [*duplum quadrati CQ, dempto CV quadrato, hoc est*] CR quadratum cum CH quadrato, aequabitur quadratis CQ, & CB; in Hyperbola vero [*duplum quadrati CQ, dempto CV quadrato, seu*] differentia quadratorum CR, & CH, aequabitur [*duplo quadrati CQ, demptis quadratis CB, CQ, seu aequabitur quadrato CQ, dempto CB quadrato, vel*] differentiae quadratorum CQ, & CB.

VI. Hinc quadruplicatis terminis, axium QN, & AB quadrata simul sumpta in Ellipsi aequantur quadratis quarumlibet coniugatarum diametrorum RS, & HT; & in Hyperbola quadratorum ex axibus differentia aequalis erit differentiae quorumvis quadratorum ex diametris coniugatis.

f cor. 7. prop. 5. g post cor. 2. pr. 12.

VII. Vnde Hyperbola aequilatera, cuius axis transversus (f) aequatur parametro, & habet axem coniugatum, consequenter sibi aequalem ob proportionalitatem (g) harum trium linearum, [*nempe transversi axis, coniugati, atque parametri*,] habebit quaslibet alias transversas diametros suis coniugatis aequales, cum parametris iisdem aequalibus: Nam ubi aequalis est differentia quadratorum ex axibus, & ex binis coniugatis

dia-

diametris, si in illis est nulla, pariter in his nulla esse potest.

PROPOSITIO XXVI.

IN Ellipsi, & Hyperbola quaelibet diameter HT est media proportionalis inter axem transversum NQ, & rectam ipsi HT parallelam RS per aliquem focum F traductam. Fig. 85. 86.

Ducta enim tangente RG, & ex alio foco V iisdem HT, RS parallela VD, [*quae producta secet in X diametrum KCM, cui ordinatur RS,*] iungatur RD, quae [*ob RE ad ED, ut FC ad CV,*] bifariam secabitur in E a diametro HT, cui est ordinata, sicut FV bifariam (a) divisa est in centro C ab eadem diametro ipsis FR, VD parallela: [*iam vero ob FO parallelam VX, est FO ad XV, ut* (b) *OC ad CX, ut FC ad CV; ergo sicuti aequantur FC, CV* (c), *etiam aequari debent FO, XV, itemque OC, CX; unde parallelae RO, DX in pari a centro distantia ordinantur diametro KCM, quae idcirco invicem* (d) *aequabuntur, adeoque aequales etiam, &* (e) *parallelae erunt illas iungentes XO, DR: harum autem rectarum medietates sunt XC, DE, itemque CO, ER; ergo hae quoque aequales erunt, & mutuo parallelae, quas cum iungant XD, CE, OR, sequitur, has quoque aequales* (f) *esse, & mutuo parallelas. Itaque FO, quae est differentia FR ab OR, est etiam differentia FR a CE; sicuti XV, quae differentia est XD*

a cor. 5. prop. 20.
b 4. *VI. Elem.*
c *cor.* 5. *prop.* 20.
d *pr.* 5. *&* 6.
e 33. *I. Elem.*
f *ex eadem pr.*

ab

ab VD, erit quoque differentia CE ab VD: sed FO ostensa est aequalis XV; ergo etiam differentia FR a CE aequabitur differentiae CE ab VD;] erit ergo CE media arithmetica inter ipsas FR, VD, sive inter FR, & FS, quae ipsi VD aequatur, nam in pari a centro distantia utraque ad curvam inclina-
a 15. *I. Elem.* tur aequali angulo NFS, aut (a) RFQ, & (b) QVD; quare dupla CE, quae est media,
b 27. *I. Elem.* aequatur summae extremarum RS: at CH est media geometrica inter CE, & CG (c),
c *cor.* 5. *pr.* 18. ipsaque CG parallela FR, aequatur semiaxi transverso CN (d); ergo sunt quoque proportio-
d *ex pr.* 21. nales RS dupla CE, HT dupla CH, & QN dupla CG; Vnde patet propositum.

COROLLARIA.

e 17. *VI. Elem.* I. QVadratum (e) igitur diametri HT aequatur rectangulo ex recta ipsi parallela RS per focum ducta, & ex axe transverso QN.

II. Vnde si plures lineae [*ZP*, *SR*] per focum traducantur, [*sintque ipsis aequidistantes diametri BL, TH; erit ZP in QN*
f 1. *VI. Elem.* *ad SR in QN, vel ZP* (f) *ad SR, ut* (g) *quadratum BL ad quadratum TH; unde*] erunt
g *ex cor.* 1. singulae, [*ZP*, *SR*] ut quadrata diametrorum [*BL*, *TH*,] ipsis aequidistantium.

III. Est SR ad MA latus rectum suae diametri MK, cui ordinatur, ut ipsa dia-
h *cor.* 8. *prop.* 13. meter MK ad axem transversum NQ: nam HT quadratum (h) aequatur AMK; sed & ae-
i *ex hac prop.* quatur (i) RS in QN, ergo AMK est aequale

le RS in QN, & ideo est RS ad AM, ut (a) MK ad QN. a 16. VI. Elem.

IV. Cum RS a diametro MK bifariam secta sit in O, erit OR quadratum [*ad rectangulum KOM, ut* (b) *parameter AM ad transversum latus MK, vel ut* (c) *rectangulum AMK ad quadratum MK : sed rectangulo AMK aequale est* (d) *quadratum diametri coniugatae HT ; igitur OR quadratum erit ad rectangulum KOM, ut quadratum HT ad quadratum MK, vel ut quadratum HC ad MC quadratum, adeoque permutando, erit OR quadratum*] ad quadratum HC, ut rectangulum KOM ad quadratum MC ; & cum sint RS, HT, NQ (e) proportionales, adeoque & earum dimidiae OR, CH, CN, erit OR quadratum ad quadratum CH, ut (f) CH quadratum ad quadratum CN, ideoque rectangulum KOM ad quadratum MC, ut quadratum HC, sive ut rectangulum VMF huic (g) aequale ad quadratum CN.

b ex cor. 6. prop. 5. & 6. c 1. VI. Elem. d cor. 8. pr. 13. e ex hac prop. f ex 22. VI. El. g ex pro. praeced.

V. Et permutando erunt rectangula KOM, VMF, ut quadrata semidiametri CM, & semiaxis CN, sive ut integrorum MK, NQ quadrata.

VI. Rectangula NFQ, SFR, cum sint, ut QN quadratum ad HT quadratum (h), [*seu ut QN quadratum ad* (i) *rectangulum QN in SR*] erunt, (k) ut QN, SR ; & semper rectangula [*ZFP, SFR*] ex portionibus linearum [*ZP, SR*] per focos traiectarum erunt, ut ipsaemet integrae lineae ; [*nam rectangulum ZFP est ad rectangulum SFR, ut CB quadratum ad* (l) *quadratum CT, vel* ut

h cor. 4. prop. 18. i cor. 1. k 1. VI. Elem. l cor. 3. prop. 18.

ut quadratum BL ad quadratum TH: sed etiam ZP est ad SR, ut quadratum BL ad
a ex cor. 2. *quadratum TH* (a)*; ergo rectangulum ZFP est ad rectangulum SFR, ut ZP ad SR.*]

VII. FM erit ad quartam partem parametri MA pertinentis ad diametrum MK, ut eadem diameter MK ad aliam MV ex al-
b ex pr. praeced. tero foco inclinatam; quippe VMF (b) ae-
quale CH quadrato, aequatur (c) MK in quar-
c post co. 2. pr. 12. tam partem sui parametri.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 87. 88. SUmma inclinatarum ex focis ad idem punctum Hyperbolae, earumque differentia in Ellipsi, nempe FR, plus, aut minus VR est ad CO distantiam ordinatae RO a centro, ut focorum distantia VF ad semiaxem transversum CN.

Nam tangenti TRG ductis ex foco F, & ex centro C parallelis FH, CM, concurrentibus cum VR in H, M, ductaque CI parallela VR, atque ordinata ad axem RO;
d pr. 20. ob angulos FRI, VRT (d) aequales, etiam
e 27. I. Elem. RFH, RHF aequales (e) erunt; quare
HR (f) aequatur RF: unde VH erit summa
f 6. I. Elem. in Hyperbola, & differentia in Ellipsi, dictarum inclinatarum FR, VR; estque VH ad VF, ut VR ad VG, sive ut CI aequa-
g pr. 21. lis (g) CN, ad CG, vel ut (h) CO ad CN
h cor. 11. (quia CO, CN, CG sunt proportionales);
prop. 9. ergo VH ad VF est, ut CO ad CN, & permutando, VH summa, vel differentia incli-

na-

natarum a focis, est ad CO distantiam ordinatae RO a centro, ut distantia focorum VF ad semiaxem CN. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. HInc summae, aut differentiae inclinatarum ex focis [*VR*, *RF*, & *VB*, *BF*] ad varia puncta [*R*, & *B*] curvae hyperbolicae, aut ellipticae, sunt ut distantiae ordinatarum a centro [*CO*, *CK*] cum sint illae [*inclinatarum summae*, *aut differentiae*] ad has distantias in eadem (a) constanti ratione VF ad CN. a *ex hac prop.*

II. Unde si inclinandae sint ex focis ad diversa curvae Hyperbolicae, aut Ellipticae puncta, lineae [*VR*, *FR*, & *VB*, *FB*], quarum summae, aut differentiae sint in aliqua data ratione, acceptis in tali ratione distantiis a centro [*CO*, *CK*], & ordinatis ad axem rectis [*OR*, *KB*], inclinatae ex focis ad harum ordinatarum terminos, satisfacient quaesito.

PROPOSITIO XXVIII.

IN omni Sectione Conica ordinata ex foco ad axem FM, ductisque tangentibus MG, NO, erit ipsa FM medietas lateris recti, & NO aequalis NF. Fig. 89. 90. 91.

Esto NX latus rectum, erit (b) in Parabola NF eius quadrans, [*seu NX quadrupla erit NF*]; estque FM media proportiona- b *pr.* 19.

nalis inter abſciſſam NF, & ipſum NX [*ſeu inter NF, & quadruplam NF*], MF quadratum (a) aequale FNX; ergo FM eſt [*dupla NF, ſeu*] medietas eiusdem parametri NX; nam inter 1. & 4. mediat 2. Quia vero etiam GF (b) dupla eſt FN, eſt utique GF aequalis FM, quae eiusdem FN eſt (c) dupla, [*cumque ſit GF ad FM, ut NG ad NO, eſt*] etiam NG aequalis NO: unde NF aequalis GN, aequatur NO.

a *cor.* 1. *prop.* 4. b *cor.* 6. *pr.* 9. c *ex demonſtr.* d *cor.* 6. *prop.* 5., *&* 6.

In aliis autem ſectionibus rectangulum QFN ad quadratum MF eſt, ut tranſverſum (d) latus QN ad rectum NX, ſive ut (e) QNX rectangulum ad NX quadratum; & permutando QFN ad QNX, ut quadratum MF ad NX quadratum; Sed primum (f) eſt quarta pars ſecundi; ergo & (g) tertium eſt quarta pars quarti; adeoque MF eſt medietas NX, ut illius quadratum ſit quarta pars huius. Quia vero QFN eſt pars (h) quarta QNX, aequabitur rectangulo ex medietate tranſverſi, nempe CN in parametri medietatem MF: quare cum ſit QFN aequale etiam rectangulo CFG (i); erit CN in MF aequale ipſi CFG; unde CF ad CN, ſive (k) CN ad CG erit, ut MF ad FG, ſcilicet ut ON ad NG; ſed etiam FN ad NG eſt in eadem ratione CF ad CN, aut CN ad CG, quia dividendo, etiam terminorum [*continue proportionalium CF, CN, CG*] differentiae [*FN, NG*] ſunt, ut ipſi termini proportionales, [*nempe ut CF ad CN, vel ut CN ad CG*]; ergo ON eſt aequalis (l) FN, cum ad NG utraque habeat eamdem rationem. Q. E. D.

e 1. *VI. Elem.* f *ex pr.* 20. g 14. *V. Elem.* h *ex pro.* 20. i *cor.* 9. *prop.* 9. k *cor.* 11. *pr.* 9. l *ex pr.* 9. *V. El.*

CO-

COROLLARIA.

I. IN Parabola GF aequatur (a) FM, in aliis autem Sectionibus inaequalis est, in ratione tamen GN ad NO, sive (b) ad NF huic aequalem; estque GN ad NF, ut GQ ad QF (c), quia secatur harmonice diameter ab ordinatae, & tangentis occursu cum suis terminis; ergo GF ad FM est etiam, ut GQ ad QF. *a ex demostrat. huius pr.* *b ex hac prop.* *c cor. 12. pr. 9.*

II. Et quia in Hyperbola GQ est minor QF, in Ellipsi vero illa maior ista, ideo GF semper minor est in Hyperbola ordinata FM, in Ellipsi vero maior.

III. Iuncta FO, erit angulus NFO semirectus (d), ob latus NF aequale ipsi NO, [*& rectum angulum FNO.*] d *cor.* 11. *pr.* 32. *I. El.*

IV. [*Hinc sicuti FN est aequalis NO, ita & FQ aequari debet QE; nam quadratum semiaxis, transverso NQ coniugati aequatur tam rectangulo* (e) *QE in NO, quam* (f) *rectangulo QFN; igitur rectangulum QE in NO aequabitur rectangulo QFN, eritque* (g) *proinde FQ ad QE, ut NO ad FN: sed NO aequatur FN; ergo etiam FQ aequari debet QE.*] Fig. 90. 91. e *ex pr.* 18. f *ex pr.* 20. g 16. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XXIX.

IIsdem positis: ordinata ad axem quavis alia TBH, secante tangentem GM in A, iuncta ex foco ad curvam recta FH erit aequalis BA. Fig. 89. 90. 91.

Rectangulum enim TAH ad quadratum tangentis AM est, ut quadratum NO ad quadratum OM; sed NO aequatur NF (a); ergo est etiam ut quadratum NF ad quadratum OM, vel ut quadratum FB ad quadratum AM, ita rectangulum TAH ad idem quadratum AM; quare (b) illud rectangulum aequatur FB quadrato; & utrinque addito quadrato BH, erit TAH rectangulum, cum quadrato BH aequale, utrique simul sumpto quadrato FB, & BH; idest quadratum BA (c) aequabitur quadrato (d) FH: ergo ramus ex foco FH aequatur ipsi BA ordinatae, ad tangentem GM extensae. Q. E. D.

a *ex prec. ced. pr.* b 9. *V. Elem.* c 6. *II. Elem.* d 47. *I. Elem.*

[*Scholium.*]

Fig. 91. [*Eodem ferme ratiocinio liquet, ramum etiam Fb, ductum ex foco F unius Hyperbolae TNH ad perimetrum alterius oppositae bQt, aequari ordinatae ba, ad tangentem aM extensae; nam ob parallelas FM, EQ, ab, est FG ad MG, ut* (e) *GQ ad GE, ut* (f) *Qb ad Ea, ideoque summa antecedentium Fb est ad consequentium summam aM, ut* (g) *unum antecedens FG ad suum consequens MG, vel ut alterum antecedens GQ ad suum consequens GE, vel denuo ut horum antecedentium* (h) *summa FQ ad summam suorum consequentium ME; itaque est Fb ad aM, ut FQ ad ME: sed FQ est aequalis QE* (i)*; ergo est quoque Fb ad aM, ut QE ad ME, & Fb quadratum ad quadratum aM, ut qua-*

e *ex 4. VI. El.* f *ex 2. VI. El.* g *ex 12. V. Elem.* h *per eamdem.* i *cor. 4. pr. praeced.*

quadratum QE ad quadratum ME: ſed etiam rectangulum t a h eſt ad quadratum tangentis a M, ut quadratum QE ad (a) *quadratum ME; ergo quadratum F b eſt ad quadratum a M, ut rectangulum t a h ad idem quadratum a M; quare F b quadratum aequatur rectangulo t a h; & utrinque addito quadrato b h, erit t a h rectangulum, cum quadrato b h aequale utrique ſimul ſumpto quadrato F b, & b h, ideſt quadratum b a* (b) *aequabitur F h quadrato* (c)*; ergo ramus ex foco F h aequatur ipſi b a.*]

a *ex pr.* 16.
b *6. II. Elem.*
c *47. I. Elem.*

COROLLARIA.

I. HInc conſtat, rectangulum TAH, ex ordinata axi, ad tangentem GM protenſa, in eius partem externam, aequari quadrato BF, diſtantiae foci ab ordinata.

II. Hinc quaelibet Sectio Conica deſcribi poterit, ſi in triangulo rectangulo BFM productis lateribus GF, GM, & ductis quibuſlibet ordinatis BA, b a ipſi MF parallelis, ex fixo puncto F ad ipſas inclinentur FH, Fh dictis ordinatis aequales, erunt enim puncta H, h ad parabolam, ſi latus GF ſit (d) aequale FM; ad Ellipſim autem ſi GF ſit (e) maius FM; ad Hyperbolam vero (& etiam ad eius (f) oppoſitam), ſi GF (g) minus FM.

III. Vbi tangens MG ex termino ordinatae ex foco FM ducta, concurrit cum axe, ſi agatur GPK parallela ordinatis, dicetur haec quoque in Ellipſi, & Hyperbola, (ut in Parabola (h) indicavimus) *Linea*

d *cor* 1. *pr. prec.*
e *cor.* 2. *pr. prec.*
f *ex Sch. huius pr.*
g *cor.* 2. *pr. prec.*
h *pr.* 19.

H 2 *ſubli-*

a *pr.* 28. b 34. *I. Elem.* c *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.* d *ex eodem cor.* e *ex hac prop.*, & 34. *I. El.*

sublimatis, ad quam ex quovis curvae puncto H ducta HK axi parallela, uti etiam MP, erit semper ramus FH ex foco ad quodlibet punctum H ductus, ad ipsam HK, ut FM ad MP, sive ut FN, aut NO ipsi (a) aequalis, ad NG: quippe in eadem ratione [*FM ad MP*, *vel FM* (b) *ad FG*, *vel NO* (c) *ad NG*,] est etiam (d) AB ad BG, adeoque & FH ad HK, cum sint illis aequales (e).

Fig. 92.

IV. Quin etiam, si ex foco ad lineam sublimitatis ducatur quaelibet inclinata linea FHS, ductoque alio ramo FL, agatur ipsi FS parallela LR ad eamdem sublimitatis lineam terminata, in qualibet Sectione, erit FH ad HS, ut FL ad LR, ductis enim axi parallelis HK, LP, cum sit FH ad HK, ut (f) FL ad LP; & ob similia triangula KHS, PLR, sit HK ad HS, ut (g) LP ad LR, erit ex aequo FH ad HS, ut FL ad LR.

f *ex cor. praeced.* d 4. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XXX.

Fig. 93. 94.

Si ex contactu Hyperbolae, aut Ellipsis, ducatur tangenti perpendicularis MP ad axem transversum terminata, & ex centro C in eamdem tangentem agatur perpendicularis CS, rectangulum ex PM in CS aequabitur quadrato semiaxis coniugati CA, seu quartae parti figurae rectanguli ex transverso latere in suum rectum.

Ordinentur ad utrumque axem MK, MR. Similia erunt triangula HCS, PMK: ob aequidistantia enim latera SC, MP, angulus MPK

MPK (a) aequatur SCP, adeoque & CHS; quia utervis [*angulorum SCP, CHS*] cum HCS (b) rectum complet, suntque anguli recti MKP, HSC pariter aequales: igitur est MP ad MK, ut (c) CH ad CS; quare PM in CS aequatur (d) CH in MK, sive in CR illi (e) aequalem: at HCR aequatur (f) CA quadrato; ergo pariter PM in CS eidem quadrato minoris semiaxis aequatur; seu quartae (g) parti rectanguli ex axe transverso in suam parametrum. Q. E. D.

a 27. *I. Elem.*
b *cor. 6. pr. 32. I. Elem.*
c 4. *VI. Elem.*
d 16. *VI. Elem.*
e 34. *I. Elem.*
f *cor. 5. prop. 18.*
g *post cor. 2. pr. 12.*

COROLLARIA.

I. QVoniam etiam rectangulum ex verticalibus tangentibus QE, NO, eidem quadrato minoris semiaxis (h) aequatur, etiam huic aequale erit rectangulum ex PM in CS; unde QE ad CS erit, ut (i) PM ad NO.

h *pr. 18.*
i 16. *VI. Elem.*

II. Et ob similitudinem (k) triangulorum [*rectangulorum*] EGQ, CGS, PGM, OGN, [*quibus communis est angulus G,*] cum sit QG ad QE, ut GS ad CS, ut GM ad MP, ut GN ad NO; sintque consequentes proportionales, [*nempe QE ad CS, ut* (l) *MP ad NO,*] etiam antecedentes proportionales erunt, nempe QG ad GS, ut GM ad GN: unde rectangula QGN, MGS erunt (m) aequalia.

k 4. *VI. Elem.*
l *ex cor. praeced.*
m 16. *VI. Elem.*

III. Similiter [*ob similia memorata triangula, est QG ad GE, ut* (n) *GS ad GC, ut GM ad GP, ut GN ad GO: Sed latera QG, GS, GM, GN, quae sunt antecedentes*

n 4. *VI. Elem.*

a coroll. praeced. *rationum termini, proportionalia* (a) *sunt; ergo*] & reliqua latera GE, GC, GP, GO [*quae sunt earumdem rationum termini consequentes*,] proportionalia erunt; adeoque re-
b 16. VI. Elem. ctangulum EGO (b) aequabitur CGP.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 95. 96. 97. SI ex quolibet puncto M cuiusvis Sectionis Conicae ducta ad tangentem ME perpendicularis MP, cum axe conveniat in P, & ex aliquo foco F ducto ramo FM, in ipsum ex P ducatur perpendicularis PD, erit portio MD aequalis semiparametro axis.

In Parabola id manifestum est, nam ducta diametro MR axi parallela, & ordinata ad axem MK, triangula MPD, PMK aequalia,
c ex hypothesi. & similia erunt, quia [*a rectis* (c), *seu aequalibus angulis PME, PMS, ablatis utrinque*
d ex pr. 19. *aequalibus* (d) *DME, RMS, superest*] angulus DMP aequalis PMR: [*huic vero ae-*
e ex 27. I. Elem. *qualis est alternus* (e) *MPK; ergo angulus DMP etiam*] aequabitur MPK, unde cum [*in triangulis MPD, MPK ad D, & K rectangulis*]
f ex 26. I. El. eadem sit hypothenusa MP, etiam latera (f) homologa DM, PK aequalia erunt: sed KP
g cor. 16. prop. 9. subnormalis aequatur medietati lateris recti (g); ergo eidem aequalis erit MD.

In Ellipsi autem, & Hyperbola, ducta ex centro ad tangentem recta CI parallela ramo FM, & CS perpendiculari, seu parallela MP, erit angulus ICS aequalis PMD; utervis enim cum CIS, aut FME huic aequali re-

rectum (a) complet: unde in triangulis (b) similibus ICS, PMD, est IC ad CS, ut MP ad MD, & rectangulum ex IC in MD aequatur (c) CS in MP; sed hoc (d) aequatur quartae parti rectanguli ex axe QN in suam parametrum, idest CN in semiparametrum; ergo & illud: quare cum sit IC aequalis semiaxi CN (e), MD aequatur semiparametro. Q. E. D.

a *cor.* 6. *pr.* 32. *I. El.*
b 4. *VI. Elem.*
c 16. *VI. Elem.*
d *per pr. praeced.*
e *pr.* 21.

COROLLARIUM.

Fig. 96. 97.

DVcto etiam ramo VM, & in ipsum ex P ducta perpendiculari PR, erit MR aequalis semiparametro; nam [*si a rectis* (f) *seu aequalibus angulis PMG, PMI in Ellipsi, aut PMG, PMY in Hyperbola, auferantur aequales* (g) *anguli DMG, RMI in Ellipsi, aut DMG, RMY in Hyperbola, etiam residui DMP, RMP aequales erunt: recti vero* (h) *sunt anguli D, & R; ergo etiam* (i) *aequantur reliqui DPM, RPM, ideoque*] triangulorum MPD, MPR latera omnia sunt (k) aequalia, nempe MD ipsi MR, & PD alteri PR, ob aequales angulos DMP, RMP, nec non DPM, & RPM, [*communi lateri PM adiacentes.*]

f *ex hypothesi.*
g *pr.* 20.
h *ex hypothesi.*
i *cor.* 9. *pr.* 32. *I. Elem.*
k 26. *I. Elem.*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 96. 97.

REctangulum ex distantiis centri Ellipsis, aut Hyperbolae a concursu tangentis MG cum axe, & concursu perpendicularis MP cum eodem, nempe GCP, aequatur quadrato distantiae cuiusvis foci a centro CF, aut CV.

a cor. 5. prop. 21. Est enim VG ad GF, ut (a) VP ad PF; ergo componendo in Ellipsi, & dividendo in Hyperbola, erit VG plus, aut minus GF ad GF, ut VP plus, aut minus PF ad PF: [*sed VG, plus GF in Ellipsi est aequalis VF, cum dupla FG, vel aequalis* (b) *duplae CF, cum dupla FG, vel aequalis duplae CG: item VG, minus GF in Hyperbola aequatur rectae VC, plus CG, minus GF, seu* (c) *rectae CF, plus CG, minus GF, seu aequatur duplae CG; igitur dupla CG est ad GF, ut VP plus, aut minus PF ad PF,*] idest dupla CG ad GF, ut dupla (d) CF ad PF; ac sumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GF, ut est CF ad PF; ac demum eadem antecedentia ad differentiam terminorum in Ellipsi, vel ad summam in Hyperbola, comparando, erit CG ad CG minus, aut plus GF, (quae erit CF), ut ipsa CF ad CF minus, aut plus PF, (quae est CP). Quare GCP (e) aequatur quadrato ipsius CF, aut VC, cum sint continue proportionales CG, CF, CP. Q. E. D.

b cor. 5. pr. 20.

c per idem cor.

d per idem. cor.

e 17. VI. Elem.

COROLLARIA.

I. Hinc quadratum semiaxis CN ad quadratum distantiae foci a centro CF est, ut CK ad CP; nempe ut distantia ordinatae ad axem MK a centro ad distantiam concursus perpendicularis MP cum axe ab eodem

dem centro; nam CN quadratum aequatur (a) GCK, & CF quadratum vidimus (b) aequari GCP, quae rectangula sunt, ut CK (c) ad CP; [*ergo in hac ratione est etiam quadratum CN ad CF quadratum*].

a *cor.* 11. *pr.* 9.
b *in hac prop.*
c 1. *VI. Elem.*

II. Vnde CK ad CP est semper in eadem constanti ratione CN quadrati ad CF quadratum, ubicumque sumptum fuerit punctum illud M.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 98. 99. 100.

IN omni Sectione Conica si tangentes BE, DE concurrant in E, recta ex E ducta, secans Sectionem in A, H, & rectam iungentem contactus BD in I, erit harmonice divisa in his punctis, nempe resultabit EH ad HI, ut (d) EA ad AI.

d *ex* 5. *secund. defin.*

Ducatur per punctum E diameter bisecans chordam BD in K, qui & bisecabit alias illi parallelas ex punctis A, & H ductas, AM, HS, in punctis L, R, quae concurrant cum una tangentium EB in O, & P. Erit ergo [*ut* (e) *RE ad EL, ita PR ad OL, & HR ad AL, adeoque etiam erit*] ut (f) quadratum RE ad quadratum EL, ita quadratum PR ad quadratum OL, & quadratum HR ad quadratum AL, & residuum rectangulum (g) HPS ad AOM; sed haec rectangula sunt, ut (h) quadrata tangentium PB, OB; ergo quadratum PB ad quadratum OB est pariter, ut quadratum RE ad quadratum EL, sive ut qua-

e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f *pr.* 22. *VI. El.*
g 6. *II. Elem.*, & 19. *V. El.*
h *cor.* 3. *pr.* 16.

quadratum PE ad EO quadratum. Est itaque tangens EBP harmonice (a) secta, cum sit PE ad EO, ut PB ad BO; quare etiam ab iisdem parallelis PR, BD, OM secta (b) erit EH harmonice: eritque HE ad EA, ut HI ad IA. Q. E. D.

a def. 5. secund. defin.

b ex pr. 10. VI. Elem.

COROLLARIA.

I. Vicissim si ex puncto E alicuius tangentis EB agatur EH secans Conicam Sectionem in A, & H; & fiat, ut HE ad EA, ita HI ad IA, & iuncta BI occurrat sectioni in D, iuncta ED erit pariter tangens: nam si tangens ex E ad illam partem ducta non occurreret sectioni in D, sed in alio puncto [*T*] ipsam tangeret, ex hoc alio contactu ducta recta [*TB*] ad contactum B, secaret AH in alio puncto [*V*] diverso ab I, cuius partes [*HV*, *VA*] forent pariter in ratione HE ad EA [*seu* (c) *HI ad IA*,] ob harmonicam ipsius divisionem. Est autem impossibile, quod HA secetur in eadem ratione HI ad IA in alio puncto [*V*] diverso ab I; ergo tangens ex E ducta ad partes D, non alibi curvam tangere potest, quam in ipso D.

c ex hypothesi.

II. Pariter si ex puncto E extra Sectionem Conicam ducta secans EAH, harmonice in illis punctis, & in I secta sit, ducta ex puncto E diametro, & ex I ad ipsam diametrum ordinata BID, iunctae EB, ED erunt tangentes; nam si alibi tangerent, iungens contactus ipsam EH harmonice secaret extra punctum I, quod est impossibile.

III. Si-

III. Similiter si binae secantes ex E ductae, EAH, EMS in punctis aliis I, X, & in praecedentibus fuerint harmonice sectae, ducta recta IX sectionem secante in B, D, iunctae EB, ED erunt tangentes, ob eamdem rationem.

PROPOSITIO XXXIV.

Ex concursu E tangentium ED, EB, ductis binis secantibus Sectionem Conicam EAH, EMS in punctis A, H, & M, S, iuncta MA, & SH, aut erunt parallelae iungenti contactus BD (ut in figuris propositionis praecedentis), aut in unum, idemque punctum T ipsius rectae BD concurrent, sive intra, sive extra Sectionem. Fig. 101. 102. 103.

Si enim AM sit parallela BD, erit EA ad AI, ut (a) EM ad MX; Atqui EA ad AI est, ut EH ad HI (quia harmonice secta est EH, estque EH ad EA, ut HI ad AI), & similiter, ut EM ad MX, ita ES ad SX; ergo [*EH est ad HI, ut* (b) *ES ad SX, & permutando, EH ad ES, ut HI ad SX, seu ut* (c) *reliqua EI ad reliquam EX, vel ut* (d) *EA ad EM; quare permutando,*] EH ad EA est, ut ES ad EM, [*& dividendo, HA ad AE, ut SM ad ME*]: unde etiam HS parallela (e) est AM, & BD. Si vero non sint parallelae, sed HS concurrat cum BD in T, ductis per A, & M rectis YAZ, FMG parallelis HT, convenientibus cum TI in Y, & F, ac cum iuncta ET in Z, & G, erit HT ad AZ, ut (f) HE ad EA, sive (g) HI ad IA, vel

a 17. VI. Elem.
b ex pr. 11. V. El.
c 19. V. Elem.
d cor. 1. prop. 4. VI. El.
e pr. 2. VI. El.
f cor. 1. prop. 4. VI. El.
g ex pr. praeced.

a ex pr. 4. VI. El. vel ut (a) eadem HT ad AY, ob similia triangula TIH, IAY; quare erit AZ (b) aequalis AY. Similiter erit MG aequalis MF; quia cum sit SE ad EM, ut (c) SX ad XM, erit quoque ST ad MG, ut eadem ST ad MF ob similia triangula TXS, MXF; ergo iuncta TM erit in directum ipsi (d) MA, quoniam in triangulo YTZ rectae YZ, FG parallelae in eadem aequalitatis ratione secantur: unde eadem linea debet esse TMA, alias iuncta linea AT, si non transiret per M; bifariam secaret FG in alio puncto diverso ab M; quod est absurdum. Itaque rectae HS, AM conveniunt in idem punctum T rectae BD. Q. E. D.

b prop. 9. V. Elem.

c ex pr. praeced.

d ex cor. 2. pr. 4. VI. El.

COROLLARIA.

Fig. 104. 105. I. SI rectae secantes EAH, EMS sint infinities proximae, rectae AM, HS, [*utpote arcuum infinite parvorum AM, HS chordae*] infinite parvae, convenient cum partibus infinitesimis suae curvae, adeoque productae ad punctum T rectae BD convenientes, erunt ipsius Conicae Sectionis tangentes. Quare si quaelibet linea EAH ex concursu duarum tangentium E, secans Sectionem in A, H, deducatur, atque ex punctis A, H aliae tangentes ducantur, convenient ad punctum T rectae BD iungentis priores contactus: seu ducta una tangente AT, concurrente cum ipsa BD in T, iuncta TH erit tangens.

e ex pr. praeced. II. Et recta TB erit harmonice (e) divisa in in punctis T, D, B, & in concursu I cum illa secante, nempe erit BT ad DT, ut BI ad ID.

PROPOSITIO XXXV.

Ex concursu E tangentium EB, ED ducta quavis secante EAIH, concurrente cum BD, iungente contactus, in I, si ipsi BD agatur parallela AM, iuncta HM bifariam secabit BD in K, & ipsi BD ductae ex E parallelae EV, occurrens in V erit harmonice secta ad puncta H, K, M, V, nempe erit HV ad VM, ut HK ad KM. Fig. 106. 107.

Quoniam aequidistantes sunt BD, AM, EV, in eadem utique ratione secantur ab ipsis EH, & VH; quare cum EH sit ab illis harmonice (a) secta, etiam VH ab iisdem harmonice secta erit; ideoque HV est ad VM, ut HK ad KM; sed ducta EK secante AM in L, & HG parallelam AM in G, erit ut HV ad VM, sive (b) ut HE ad EA, ita HG (c) ad AL, atque ita (d) HK ad KM, adeoque (e) & HG ad LM (ob simila triangula GKH, LKM): ergo est HG ad AL, ut eadem HG ad LM, ideoque (f) AL aequatur LM; unde erit AM ordinata ad diametrum, cui ordinatur etiam eius parallela BD, transeuntem per concursum tangentium E, qualis erit ipsa ELK; unde & BD secta est bifariam in K ab ipsa secante HMV. Q. E. D.

a *pr.* 33.
b *ex pr.* 2. *VI. El.*
c *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
d *ex demonstr.*
e *prop.* 4. *VI. El.*
f *prop.* 9. *V. El.*

CO-

COROLLARIA.

I. HInc si per medium punctum K rectae BD, iungentis duos contactus, traiiciatur quaelibet recta HK secans curvam in H, M, & EV ipsi BD parallelam, in V, erit in his punctis V, M, K, H, harmonice secta; [*ducta enim secante EAIH, iungatur AM, quae parallela erit rectis BD, EV,* a ex hac prop. *alioquin iuncta HM non transiret* (a) *per medium punctum K contra hypothesim; igitur sunt parallelae BD, AM, EV, ideoque* b ex hac prop. *HV harmonice* (b) *secta erit in punctis V, M, K, H.*

II. Si ex quolibet puncto V rectae EV parallelae BD ducatur sectionis tangens VA, & ex A per medium punctum K rectae BD agatur recta AK, occurrens sectioni in S, etiam iuncta VS erit tangens; cum enim VH [*transiens per medium punctum K*,] harmonice (c) secta sit in V, M, K, H, sitque VA c cor. I. huius pr. tangens, debet esse tangens etiam VS; si enim alibi tangeret supra, aut infra punctum S, recta iungens contactus secaret MH [*in puncto aliquo Z, nempe*] alibi quam in K, ubi secat ipsam recta AS; sed (d) recta iungens d ex pr. 33. contactus secat harmonice ipsam secantem, ex concursu tangentium ductam; ergo [*etiam in puncto Z, nempe*] alibi quam in K secaretur HM in ratione HV ad VM, quae eadem iam est, ac ratio HK ad KM, id quod est impossibile.

III. Hinc habetur, quod si per idem aliliquod punctum K innumerae lineae SA, HM ducantur, & ex eorum terminis tangentes ducantur, invicem convenient, (dummodo punctum K non sit centrum sectionis; tunc enim quaelibet paria tangentium, ex terminis diametrorum ductarum per centrum, [*cum parallela essent ordinatis ad easdem diametros* (a), *utique etiam mutuo*] parallela forent, neque invicem usquam convenirent) in eadem recta linea EP, ducta parallela illi rectae BD, (quae per illud punctum K bifariam secabitur,) ex puncto concursus E tangentium ab illius extremitatibus ductarum BE, DE; nempe tam SV, AV, quam MP, HP conveniunt ad eamdem lineam VEP; [*cum enim AS non sit* (b) *diameter, cui ordinatur BD, utique tangens AV non erit eidem BD* (c) *parallela, adeoque nec parallela erit alteri VEP, quae ponitur aequidistans rectae BD; quare tangens AV occurret* (d) *rectae VEP in aliquo puncto V: recta autem AS transit per medium* (e) *punctum K tangentis contactus BD; ergo etiam SV* (f) *sectionem tanget in S, ideoque tangentes, ductae ex terminis rectae SA, mutuo convenient in linea VEP. Eamdem ob causam in eadem linea VEP convenient quoque tangentes reliquae, ductae ex terminis rectae HM; unde liquet propositum.*]

a *ex pr.* 14.
b *ex hypothesi.*
c *ex pr.* 14.
d *ex Sch. prop.* 31. *I. Elem.*
e *ex hypothesi.*
f *ex cor.* 2.

IV. Vnde si per focum F quaevis linea traiiceretur RS, tangentes ab eius extremitatibus ductae RV, SV convenient in V ad lineam sublimitatis EV, quae per concursum tangentium ex terminis ordinatae per fo-

Fig. 108. 109.

focum ductarum, deducitur parallela ipsi ordinatae, de qua dictum est in prop. 19. de Parabola, & in cor. 3. pr. 29. de Ellipsi, & Hyperbola.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 108. 109. EX foco F cuiusvis Conicae Sectionis ductis ad curvam duobus ramis FA, FB, & ex ipsis punctis A, B ductis tangentibus BD, AD convenientibus in D, iuncta DF bifariam secabit angulum AFB ab ipsis ramis contentum.

Occurrat DF Sectioni in R, S, ac rectae BA, quae iungit contactus, in I; ductisque tangentibus RV, SV, hae convenient (a) cum ipsa BA in eodem puncto V, idemque punctum V erit ad lineam sublimitatis EV (b): quare ductis ad ipsam lineam sublimitatis perpendicularibus AH, BP, erit ut BP ad AH, ita (c) BV ad VA, sed quia BV harmonice (d) secta est in punctis B, I, A, V, est BV ad VA, ut BI ad IA; ergo [*BP ad AH est, ut BI ad IA, ideoque*] erit BI ad IA, ut BF ad FA, quae sunt pariter, ut BP ad AH, cum sit tam BF ad BP, quam FA ad AH in eadem ratione FN ad NE (e). Itaque Angulus AFB secatur bifariam a recta DF, cum basis AB secetur in I in ratione (f) laterum trianguli ABF. Q. E. D.

a *cor.* 1. *prop.* 34.
b *cor.* 4. *pr.* 35.
c *cor.* 2. *prop.* 34.
d *cor.* 2. *prop.* 34.
e *cor.* 3. *prop.* 29.
f 3. *VI. Elem.*

CO-

COROLLARIA.

I. HInc si rami ex foco sint in directum, ut resultat per quamlibet rectam SR per focum traductam, ductis ab eius extremis tangentibus SV, RV convenientibus cum linea sublimitatis in V, iuncta VF erit ipsi RS perpendicularis, quia anguli SFV, RFV duobus rectis aequantur, quorum medietas est quilibet angulus VFS, aut VFR rectus, uti de Parabola ostensum est supra (a). a *cor.* 9. *prop.* 19.

II. Per quodlibet punctum A curvae interceptae inter terminos R, S rectae per focum traductae, ducatur alia tangens AT, occurrens tangentibus RV, SV ad puncta G, T, iunctae ad focum rectae GF, TF angulum rectum GFT comprehendent, quia angulus GFA erit (b) medietas anguli RFA, & angulus AFT (c) medietas anguli AFS, adeoque GFT est medietas duorum rectorum, quibus (d) aequantur RFA, AFS, [*proindeque rectus erit angulus GFT*.]

Fig. 110. 111.

b *per hanc prop.* c *per eamdem.* d 13. *I. Elem.*

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. 112.

EX tangente Hyperbolae ANR ad verticem cuiusvis diametri NQ sumantur hinc inde partes NA, NR aequales semidiametro coniugato CG, sive quarum quadrata sint aequalia quartae parti rectanguli sub transverso latere QN, & sub recto NS, tum ex centro C iunctae CA, CR utcumque producantur, hae ad curvam hyperbolicam semper propius accedent, quam pro quolibet dato intervallo P, numquam tamen cum ipſa convenient. Dicantur autem hae rectae *Aſymptoti* ipſius Hyperbolae.

Ordinata enim ad eamdem diametrum recta MKV parallela tangenti, ſecante dictas rectas aſymptotos in D, Z, erit [*DK ad CK, ut AN* (a) *ad NC, ſeu*] quadratum DK ad quadratum CK, ut (b) quadratum AN, quod eſt quarta (c) pars rectanguli QNS, ad quadratum NC, quod eſt pariter quarta pars quadrati QN, adeoque ut rectangulum QNS ad quadratum QN, ſive ut (d) rectum latus NS ad tranſverſum QN, quae pariter eſt ratio quadrati ordinatae MK(e)ad rectangulumQKN: quare cum ſit totum quadratum DK ad totum quadratum CK, ut quadratum MK ex priori ablatum, ad rectangulum QKN ſumptum ex poſteriori, reſiduum (f) quoque illius ad reſiduum huius, nempe (g) rectangulum DMZ ad quadratum (h) CN erit in eadem ratione quadrati AN ad CN: Vnde patet, eſſe dictum rectangulum DMZ aequale (i) quadrato AN, ſive rectangulo ANR; ergo ut MZ ad NR, ita (k) AN ad DM, eſtque ſemper prima [*MZ maior KZ, adeoque*] multo maior ſecunda [*NR*]; ergo & tertia [*AN*] maior eſt quarta [*DM*]; ideoque cum producta in infinitum Hyperbola ſemper maior, ac maior fiat MZ ipſa NR, etiam AN ſemper multo maior evadet intervallo DM, quod continuo minuetur in infinitum, uti creſcit magis, ac magis in infinitum ipſa

a *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
b 22. *VI. Elem.*
c *ex hypotheſi.*
d 1. *VI. Elem.*
e *cor.* 6. *prop.* 5.
f 19. *V. Elem.*
g 5. *II. Elem.*
h 6. *II. Elem.*
i 9. *V. Elem.*
k 16. *VI. Elem.*

ipsa MZ; ita ut ratio illa AN ad DM maior fieri possit qualibet data ratione AN ad P, uti maior eadem ratione potest fieri ratio MZ ad NR; quia crescere potest in infinitum, tam ordinata MK Hyperbolae, quam ordinata ZK trianguli, & ipsarum quaelibet, ac multo magis utriusque summa MZ evadere potest maior qualibet data, in maiori recessu a vertice N ipsius Hyperbolae. Accedit ergo CA magis, ac magis ad curvam Hyperbolae NM, a qua minori semper intervallo DM distat, quod minus esse potest quolibet dato P, nec umquam cum ipsa penitus concurret, quia semper punctum M aliquo modo distabit a puncto D, ut esse possit rectangulum DMZ aequale quadrato AN, uti iam est demonstratum.

COROLLARIA.

I. EAedem rectae Asymptoti ultra angulum C continuatae abscindent pariter ex oppositi verticis tangente rectas QE, QX prioribus [*AN*, *NR*] aequales, ob similitudinem (a) triangulorum QEC, CAN, [*itemque QXC*, *CNR*], quorum aequalia sunt latera [*homologa*] QC, & CN: unde patet ipsasmet CE, CX evadere eodem modo Asymptotos oppositae Hyperbolae QI, cuius idem est latus transversum, & latus rectum. a 4. *VI. Elem.*

II. Quaelibet uni asymptoto parallela BH intra angulum ACR ducta, Hyperbolae occurret; quia intervallum parallelarum idem semper manet, dum intervallum Hyperbolae ab asymptoto semper minus evadit quolibet dato.

III. Multo magis quaelibet BC angulum ACR dividens, Hyperbolam secabit; quippe eius distantia ab asymptoto semper augebitur, dum Hyperbolae distantia subinde minuitur.

IV. Patet aequalia esse rectangula DMZ, dmz a portionibus quarumlibet parallelarum diametro ordinatarum, per Hyperbolae curvam, & per asymptotos sectis, contenta; quippe singula (etiam DVZ, & duz) quadrato AN sunt (a) aequalia.

V. Etiam partes hinc inde acceptae inter curvam, & asymptotos, nempe DM, & VZ aequales sunt; nam [*ob parallelas AR, DZ, quas secat diameter QCK, est AN ad NR, ut* (b) *DK ad KZ; unde*] ut AN (c) aequatur NR, ita DK aequatur KZ, & ordinata MK est aequalis KV, adeoque & reliqua DM est aequalis VZ.

VI. [*Si rectus sit angulus asymptoticus ACR, Hyperbola MNV aequilatera erit; circulus quippe radio NA, vel NR descriptus* (d) *transibit per punctum C, ideoque semidiameter transversa CN aequabitur NA, vel semidiametro coniugatae* (e) *CG, unde* (f) *aequilatera est Hyperbola MNV.*]

VII. [*Et vicissim, si aequilatera sit Hyperbola MNV, rectus erit angulus asymptoticus ACR; cum enim semidiameter transversa CN aequari debeat semiconiugatae CG* (g), *vel NA* (h), *aut NR; circulus radio NA, aut NR descriptus, transibit per punctum C, rectusque proinde* (i) *erit angulus ACR.*]

a *ex demonstra. huius pr.*

b *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*

c *per hanc prop.*

d *ex* 31. *III. El.*

e *ex hac prop.*

f *ex cor.* 7. *pr.* 25.

g *ex cor.* 7. *pr.* 25.

h *ex hac prop.*

i *ex* 31. *III. El.*

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI quaelibet recta TD Hyperbolam alibi contingat, velut in V, occurrens asymptotis in T, D, erit TV aequalis VD, & cuiuslibet quadratum aequale pariter quartae parti rectanguli sub diametro ICV, & eius latere recto VF contenti. Fig. 113.

Quando enim hoc non eveniret, sumptis hinc inde VG, VB, quarum quadrata aequarentur quartae parti dicti rectanguli, iunctae CG, CB essent (a) asymptoti; id quod est impossibile; nam si CG cadat ultra CT; ab ipsa magis, ac magis divertet in infinitum producta, adeoque non accedet curvae hiperbolicae, ut facit asymptotus (b) CT; & si cadat intra angulum asymptoticum TCD, ut recta CB, haec producta, secabit (c) ipsam Hyperbolam; adeoque non erunt CG, CB asymptoti: ergo ipsae portiones VT, VD, non vero ipsis maiores, aut minores, continebunt quadratum aequale quartae parti rectanguli sub latere transverso IV, & latere recto VF contenti; unde invicem sunt aequales. Q. E. D.

a *per pr. praeced.*

b *ex eadem pr.*

c *ex cor. 3. prop. praeced.*

COROLLARIA.

I. ORdinata pariter ad diametrum CV recta LKO parallela tangenti TD, occurrente asymptotis in P, S, erit rectangulum PLS, aut POS aequale pariter quadrato VT, quemadmodum simile quid demonstratum est propositione praecedenti.

II. Hinc pariter interceptae inter curvam, & asymptotos PL, OS sunt aequales; unde quaecumque recta PS secet Hyperbolam, & asymptotos, eius portiones curvae, & asymptotis interpositae aequales evadunt; nam bifariam secta OL in K, & iuncta ex centro diametro CK, occurrente Hyperbolae in V, ac per V ducta ipsi OL parallela TVD erit (a) tangens, in V bifariam (b) secta, [*quemadmodum etiam in K* (c) *bisecta erit tangenti parallela SP*]; & rectangula PLS, POS (d) quadrato TV, aut VD aequabuntur: Vnde [*si ab aequalibus KP, SK auferantur aequales semiordinatae KL, KO*], portiones PL, OS debent aequales esse.

III. Constat ex dictis in hac propositione unicas esse asymptotos CT, CD, nec posse alias asymptotos eidem Hyperbolae assignari.

a *ex pr.* 14.
b *ex hac prop.*
c *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*
d *cor.* 1. *huius pr.*

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 114. SI quaelibet QO Hyperbolas oppositas secet, occurrens asymptotis in E, Z, ducta per centrum diametro ICV eidem QO parallela, erit rectangulum EOZ aequale quadrato semidiametri CV.

Ducatur tangens TVD, & per O ipsi tangenti parallela ordinetur OL eidem diametro, quae asymptotos secet in P, S. Ratio rectanguli EOZ ad rectangulum SOP componetur rationibus (e) laterum EO ad OP, (idest

e *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*

(idest (a) CV ad VT), & ZO ad OS, (nempe (b) CV ad VD); sed & ratio quadrati CV ad rectangulum TVD, idest ad quadratum VT ex iisdem (c) rationibus componitur; ergo ut rectangulum EOZ ad aliud SOP, ita quadratum CV ad quadratum VT; [*& permutando, rectangulum EOZ est ad quadratum CV, ut rectangulum SOP ad quadratum VT*]; Sed (d) rectangulum SOP aequatur quadrato VT, ergo & rectangulum EOZ quadrato CV aequale erit. Q. E. D.

a 4. *VI. Elem.*
b *per eandem.*
c *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*
d *ex cor.* 1. *pr.* 38.

COROLLARIA.

I. Similiter ostendetur rectangulum ZQE quadrato CI aequari, quod CV quadrato aequale est: unde aequalia erunt rectangula EOZ, & ZQE, & rectae OZ, QE erunt pariter aequales; quia horum rectangulorum aequalitas dat rationem laterum EO ad EQ aequalem (e) rationi QZ ad ZO, unde componendo, OQ ad QE erit, ut OQ ad ZO; quare interceptae asymptotis, & utraque Hyperbola QE (f), & OZ aequantur, sicut etiam OE, & QZ aequabuntur, sicut & rectangula QEO, QZO aequalia erunt [*tum mutuo, tum etiam rectangulis EOZ, ZQE, vel quadrato CV*].

e 16. *VI. Elem.*
f 9. *V. Elem.*

II. Et quia ducta etiam qualibet alia oz e q eidem diametro VCI parallela, erit pariter (g) rectangulum e o z, aut z q e, seu q e o, aut q z o eidem quadrato CI aequale, erunt ergo invicem aequalia quaelibet rectangula EOZ, e o z, a portionibus rectarum

g *ex cor.* 1.

 aequi-

aequidistantium, interceptis Hyperbola utraque, & asymptotis, contenta, & partes oz, qe aequales resultabunt, nec non eo, & zq.

PROPOSITIO XL.

Fig. 115. 116. SI in eadem Hyperbola, vel in oppositis duo puncta O, V accepta fuerint, ex quibus rectae OS, VD invicem parallelae ductae fuerint, ad asymptotos terminatae, nec non duae aliae OP, VT pariter invicem parallelae ductae sint usque ad easdem asymptotos, erit rectangulum SOP aequale rectangulo DVT.

Iuncta enim recta OV, quae asymptotis occurrat in I, L erunt interceptae OI, VL (a) aequales, nec non OL, & VI aequabuntur; ergo OL ad VL est, ut VI ad OI; sed ob similia triangula [*OPL*, *VTL*, & *VDI*, *OSI*] est OP ad VT, quemadmodum (b) OL ad VL, atque VD ad OS, ut (c) VI ad OI; ergo OP ad VT est, ut VD ad OS; quare (d) rectangula SOP, DVT aequantur.

a *cor.* 2. *pr.* 38.
b 4. *VI. Elem.*
c 4. *VI. Elem.*
d 16. *VI. Elem.*

COROLLARIA.

Fig. 117. I. SI per quaelibet puncta Hyperbolae V, N ductae sint ad asymptotos parallelae VT, VD, & NR, NA, erit parallelogrammum RNA aequale parallelogrammo TVD; nam quia haec rectangula sunt (e) aequalia,

e *per hanc prop.*

[*erit*

[*erit RN ad TV, ut reciproce* (a) *VD ad NA: iam vero angulus TVD aequatur* (b) *angulo TCD, & angulus RNA* (c) *aequatur RCA; ergo cum angulus TCD idem sit cum RCA, etiam angulus TVD aequabitur RNA, adeoque*] etiam aequiangula parallelogramma [*TVD, RNA*] ob aequalem laterum reciproce comparatorum rationem, aequalia (d) erunt. a 16. *VI. Elem.* b 34. *I. Elem.* c *per eamdem.* d 14. *VI. Elem.*

II. Vnde & triangula CNR, CVT, eorum parallelogrammorum dimidia (e) aequari debent. e 34. *I. Elem.*

III. Hinc semper ratio ordinatarum ad asymptotum NR, VT alteri asymptoto aequidistantium, eadem est, ac ratio distantiarum, reciproce sumptarum CT, CR, ob aequalia illa (f) rectangula, aut (g) parallelogramma, vel triangula (h) supradicta, quae circa aequales angulos latera habere debent (i) reciproce proportionalia. f *per hanc prop.* g *ex co.* 1. h *ex co.* 2. i 14., & 15. *VI. Elem.*

IV. Ductis tangentibus PNM, HVG ad asymptotos terminatis, quae bifariam (k) sectae sunt in contactibus N, V, erunt quoque triangula CPM, CHG huic spatio asymptotico inscripta, invicem aequalia, quippe dupla parallelogrammorum aequalium (l) RNA, TVD, seu quadrupla triangulorum aequalium (m) CNR, CVT. [*Nam ob parallelas NA, PC, est PM ad MN, ut* (n) *CM ad MA: est vero PM* (o) *dupla MN; ergo etiam CM dupla erit MA, vel AC; quare triangulum CNM est* (p) *duplum trianguli CNA, seu aequale parallelogrammo RNA* (q): *sed triangulum PCM est* (r) *duplum trianguli CNM, ob PM duplam MN* (s); *ergo triangulum PCM duplum est parallelogrammi RNA,* k *ex pr.* 38. l *ex co.* 1. m *ex cor.* 2. n *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.* o *ex pr.* 38. p 1. *VI. Elem.* q 34. *I. Elem.* r 1. *VI. Elem.* s *ex demonstr.*

RNA, seu quadruplum trianguli CNR. Eodem modo triangulum GCH duplum ostendetur parallelogrammi TVD, vel quadruplum trianguli CVT.]

V. Quadrilatera mixta RNVT, & ANVD sunt invicem aequalia, nam ob aequalitatem (a) parallelogrammorum TVD, RNA, communi ablato CRXD, est TVXR aequale ANXD, & adiecto utrinque trilineo VXN, fit RNVT aequale ANVD.

a *ex cor.* 1.

VI. Item sector hyperbolicus CVN aequatur cuilibet ex dictis quadrilateris RNVT, aut ANVD; Nam ob triangulum RCN aequale (b) CTV, dempto utrinque triangulo CRZ, [*est quadrilineum VTRZ aequale triangulo ZCN,*] additoque trilineo VZN, resultat VCN sector aequalis ipsi RNVT, aut huic (c) aequali ANVD.

b *ex cor.* 2.

c *ex cor.* 5.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 118. SI Hyperbolae NV, GH sint inter asymptotos ACE, & CT, quae angulos ACT, TCE sibi consequentes binis rectis aequales comprehendunt, & illas curvas secent rectae NH, VG uni asymptotorum ACE parallelae, secabuntur ab alia asymptoto CT in punctis R, T in eadem ratione.

Nam ordinatae NR, VT sunt, ut reciprocae distantiae (d) TC, CR, in qua pariter ratione erunt (e) aliae ordinatae RH, TG; quare [*NR ad VT erit, ut RH ad TG.*] & permutando, erit NR ad RH, ut est VT ad TG. Q.E.D.

d *ex cor.* 3. *prop. praeced.* e *per idem cor.*

CO-

COROLLARIA.

I. HInc quadrilaterum RNVT ad quadrilaterum HRTG erit ſemper in eadem ratione NR ad RH, eo quod omnes rectae in utroque ordinatae, ipſis NR, & RH parallelae, [*ex quarum ſumma componi concipiuntur quadrilinea RNVT, HRTG,*] ſunt in data ratione [*NR ad RH.*]

II. Et iunctis ad centrum C rectis NC, VC, GC, CH erunt pariter ſectores CNV, CGH in eadem ratione; utpote dictis quadrilineis RNVT, & RHGT aequales (a). a *cor. 6. pr. præc.*

III. Si ex punctis N, H agantur tangentes Hyperbolarum ad aſymptotos productae, exiſtente NH aſymptoto ACE parallela, convenient tangentes ad idem punctum T alterius aſymptoti; Nam quia [*HR eſt parallela EC, erit HE ad HT, ut RC ad RT; quare ſicuti*] HE (b) aequatur HT, etiam CR aequabitur RT, & quia AN (c) aequatur NT, pariter CR eidem RT aequatur; quare utrinque reſpondet eadem RT aequalis CR: unde idem eſt punctum T, in quo duae illae tangentes conveniunt. b *ex pr. 38.* c *per eamdem.*

IV. Et ſi ex eodem puncto T unius aſymptoti agantur Hyperbolarum tangentes THE, TNA, iungens contactus HN alteri aſymptoto ACE parallela erit; Quoniam utraque illa tangens bifariam (d) ſecatur in contactibus H, N; ideoque latera TE, TA proportionaliter ſecta ſunt ab ipſa recta HN, quae propterea parallela (e) erit baſi EA. d *ex pr. 38.* e *2. VI. Elem.*

V. Ipſa-

V. Ipſaque triangula CAT, CTE illis
a 1. *VI. Elem.* aſymptoticis ſpatiis inſcripta, [*cum ſint, ut* (a) *baſes AC, CE,*] erunt ſemper in data ratione, quae eſt NR ad RH, quibus proportio-
b *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.* nantur (b) baſes AC, & CE; idque etiam in triangulis [*CTE, CFK*] ad idem punctum [*T*] minime concurrentibus eveniet, quia in quolibet aſymptotico ſpatio eiuſdem Hyperbolae inſcripta triangula [*CAT, CFK*] per
c *cor.* 4. *pr.* 40. ſuas tangentes aequalia (c) ſunt.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 119. SI ad ſecundam diametrum HI, priori diametro tranſverſae NQ coniugatam fiant duae oppoſitae Hyperbolae HK, IF, quarum viciſsim ſecunda diameter coniugata ſit eadem NQ, erunt harum quatuor ſectionum communes aſymptoti. Vocentur autem hae pariter *Sectiones coniugatae*.

Ductis tangentibus NT, IT convenien-
d *ex pr.* 14. tibus in T, quae erunt parallelae (d) ordinatis diametrorum NQ, HI, adeoque & coniugatis ſemidiametris CI, CN, iuncta CT, erit aſymptotus communis utrique Hyperbolae NV, IF quia cum ſit CNTI parallelo-
e *ex* 34. *I. El.* grammum, eſt NT quadratum aequale (e) quadrato CI, ſeu quartae parti (f) rectan-
f *poſt cor.* 2. *pr.* 12. guli ſub tranſverſo latere QN, & eius latere recto; & ſimiliter tangens IT aequalis
g *poſt coroll.* 2. *pr.* 12. ſemidiametro alteri Hyperbolae coniugato CN, continet quadratum aequale (g) quartae parti rectanguli ſub tranſverſo latere HI, & re-

& recto sibi correspondente comprehenso; ac similiter ducta alterius oppositae Hyperbolae HK tangente HA parallela ipsi IT, ac producta tangente TN, concurrente cum HA in A, erit HANC parallelogrammum, ipsaeque tangentes NA, HA aequales erunt coniugatis semidiametris sibi oppositis CH, CN; unde & iuncta AC, erit hisce Hyperbolis asymptotus (a) communis. Igitur ipsae TCX, ACE sunt communes asymptoti harum quatuor sectionum, quae invicem *coniugatae* dicentur. Q. E. D.

a *ex pr.* 37.

COROLLARIA.

I. IVngens contactus NI, cum evadat diameter parallelogrammi CNTI, bifariam secabitur ab asymptoto CT in R, quia CT est alia diameter eiusdem parallelogrammi.

II. Et quia NI aequidistabit (b) alteri asymptoto AE, etiam quaelibet alia VF iungens contactus aliarum tangentium PF, PV ex eodem aliquo puncto P communis asymptoti deductarum, ipsimet AE aequidistabit, & bifariam secabitur in Z, cum sint in eadem (c) ratione NR ad RI, ac VZ ad ZF, [*& NR* (d) *aequetur RI*].

III. Et quia [*ob PF ad FM, ut* (e) *PZ ad ZC*], etiam CP bifariam secta est in Z, ut tangens PFM est bifariam (f) secta in F, erunt [*latera CZ, ZV trianguli CZV aequalia lateribus PZ, ZF trianguli PZF: aequantur autem* (g) *anguli CZV, PZF; igitur etiam* (h) *aequales erunt anguli CVZ, PFZ,* *seu*

b *ex cor.* 4. *prop. praeced.*
c *ex pr. praeced.*
d *ex cor.* 1.
e *ex cor.* 2. *huius pr., & pr.* 2. *VI. El.*
f *ex pr.* 38.
g 15. I. *Elem.*
h *ex* 4. I. *El.*

a 28. I. Elem. *seu alterni CVF, PFV, adeoque* (a) *CV parallela erit tangenti PF. Eodem ratiocinio triangulis CZF, PZV applicato, ostendetur, etiam rectam CF esse tangenti PV parallelam; erunt igitur*] CF, CV ductae ex centro ad contactus, parallelae tangentibus PV, PF; adeoque erunt semidiametri coniugatae harum Hyperbolarum, quia PF aequatur CV sibi parallelae, & PV aequatur parallelae CF,

b *ex pr.* 14. unde CV aequidistat ordinatis (b) ad diametrum CF, & CF aequidistat ordinatis ad (c) diametrum CV.

c *ex eadem pr.*

IV. Haec parallelogramma CNTI, CVPF semper erunt aequalia, sicut aequantur tri-

d *cor.* 1. *prop.* 40. angula (d) CNR, CVZ, quae sunt quartae partes dictorum parallelogrammorum.

V. Et quodvis parallelogrammum RL-

Fig. 120. SM iisdem Hyperbolis coniugatis inscriptum, contentum ab ipsarum tangentibus per terminos diametrorum coniugatarum ductis erit aequale cuilibet alteri inscripto parallelogrammo ATEX ab aliis tangentibus, per terminos aliarum diametrorum coniugatarum ductis, comprehenso; Haec enim pa-

e *cor.* 4. *prop.* 40. rallelogramma erunt quadrupla aequalium (e) triangulorum CLR, CAT, sive aequalium (f)

f *ex cor.* 4. parallelogrammorum CVRF, CNTI.

VI. Iunctis quoque contactibus ad terminos coniugatarum diametrorum positis, fiet parallelogrammum KVFG aequale alteri HNIQ; sunt enim haec parallelogramma

g *ex cor.* 5. medietates aliorum RLSM, ATEX invicem, (g) aequalium; quippe & triangula CNI, CVF, quartae partes dictorum parallelogrammo-

rum

rum KVFG, HNIQ, medietates ſunt (a) paralle- a 34. *I. Elem.*
logrammorum CNTI, CVRF, quae ſunt alio-
rum RLSM, ATEX pariter quadrantes;
[*unde triangula CNI, CVF, quater ſum-
pta, ſeu parallelogramma HNIQ, KVFG,
medietates ſunt quater ſumptorum parallelo-
grammorum CNTI, CVRF, ſeu medietates
ſunt aequalium parallelogrammorum RLSM,
ATEX.*]

PROPOSITIO XLIII.

ETiam in Ellipſi, ut in Hyperbolis coniu- Fig. 121.
gatis, parallelogramma RLSM, ATEX,
ex tangentibus ad terminos duarum diame-
trorum coniugatarum GV, KF, aut NQ,
HI ductis, comprehenſa, ſemper aequalia e-
runt; ſicut etiam ſunt aequalia parallelo-
gramma eidem Ellipſi inſcripta KVFG,
HNIQ ex rectis iungentibus terminos binarum
diametrorum coniugatarum.

Iungantur duo puncta V, I, & ad dia-
metrum NQ ordinata per V recta VP, ſe-
cante tangentem IT in Z; tum per I ad
diametrum FK ordinata IB, quae tangenti
VR occurrat in O, erit utique parallelo-
grammum CVOB aequale alteri CPZI; quo-
niam utrumque duplum (b) eſt trianguli ipſis b 41. *I. Elem.*
inſcripti CVI: at concurrente ſemidiametro
CF cum tangente IE in D, & ſemidiame-
tro CN cum tangente VL in Y, atque utra-
que tangente ID, VL in Æ, erit paralle-
logrammum DCYÆ ad CFRV, ut hoc i-
pſum

psum (a) ad CVOB, cum sint aeque alta, & eorum bases CD, CF, CB continue (b) proportionales, & idem (c) DCYÆ ad CNTI est, ut hoc ipsum ad CPZI, ob proportionales (d) bases CY, CN, CP, & eamdem horum parallelogrammorum altitudinem; ergo inter DCYÆ, & CVOB, vel huic aequale CPZI tam est medium proportionale CFRV, quam CNTI; ergo haec duo sunt aequalia: sunt autem quartae partes parallelogrammorum RLSM, & ATEX; ergo haec pariter sunt aequalia; & horum dimidia sunt inscripta reliqua KVFG, & HNIQ, (ut triangulum CFV est (e) dimidium CFRV, & triangulum CNI dimidium est (f) CNTI, quae triangula sunt pariter quartae partes dictorum parallelogrammorum Ellipsi inscriptorum): ergo haec pariter parallelogramma inscripta sunt aequalia, uti etiam aequantur alia circumscripta. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. PAtet esse FC divisam in B proportionaliter, ac NC in P; quia DCYÆ ad CVOB est, ut idem illud ad CPZI huic aequale, adeoque [*cum sit DCYÆ ad CVOB, ut* (g) *DC ad CB, & DCYÆ ad CPZI, ut* (h) *YC ad CP*;] ratio DC ad CB est eadem, ac YC ad CP: sed illa est dupla (i) rationis FC ad CB, haec autem dupla (k) rationis NC ad CP; ergo hae quoque (l) rationes FC ad CB, & NC ad CP sunt aequales; Vnde quoties coniugatae sunt diame-

a 1. *VI. Elem.*
b *cor.* 11. *prop.* 9.
c 1. *VI. Elem.*
d *cor.* 5. *prop.* 18.
e 34. *I. Elem.*
f *per eamdem prop.*
g 1. *VI. Elem.*
h *per eamd. pr.*
i *ex cor.* 11. *pr.* 9. *& defin.* 10. *V. El.*
k *ex cor.* 5. *pr.* 18. *& defin.* 10. *V. El.*
l 35. *V. Elem.*

metri FK, VG, & pariter binae aliae coniugatae NQ, IH, ex termino V diametri VG ducta ordinata ad diametrum NQ, & ex termino I diametri IH, ordinata IB ad diametrum FK, secabuntur proportionaliter diametri NQ, & FK ab ipsis ordinatis; nam [*cum sit NC ad CP* (a), *ut FC ad CB, etiam*] NQ dupla NC erit ad CP, ut FK dupla FC ad CB, sive illa ad residuum PN, ut haec ad residuum BF (b).

II. Quin etiam si ex utriusque diametri coniugatae terminis N, I ordinentur super alias coniugatas diametros Nh, IB, erunt hae diametri VG, FK in punctis h, B proportionaliter sectae; erit enim VC ad C h, ut (c) YC ad CN (quia ordinata N h est parallela (d) tangenti YV), adeoque ut (e) CN ad CP, sive ut (f) CF ad CB, ideoque VC ad C h, ut FC ad CB, & VC ad reliquam V h, ut (g) ipsa CF ad residuam FB; ac duplicatis antecedentibus, VG ad V h, ut KF ad FB; uti etiam dividendo, G h ad h V erit, ut KB ad BF.

III. Erunt ergo rectangula G h V, & KBF [*similia* (h), *utpote quae latera habeant circa rectos, seu aequales angulos proportionalia, adeoque erunt in ratione duplicata* (i) *laterum hV, BF, vel* (k) *CV, CF, aut*] ut quadrata (l) CV, CF, seu GV, KF, [*vel ut quadratum lateris transversi GV ad* (m) *GV in suum latus rectum*,] aut ut latus transversum GV ad (n) suum latus rectum, sive ut rectangulum G h V ad (o) quadratum N h, [*aut ad quadratum I b,*] vel ut quadra-

a *ex demostrat.*
b 19. *V. Elem.*
c *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
d *ex pr.* 14.
e *cor.* 5. *prop.* 18.
f *ex cor. praeced.*
g 19. *V. Elem.*
h *def.* 1. *VI. El.*
i *pr.* 20. *VI. El.*
k *ex cor. praeced.*
l *cor.* 1. *pr.* 20. *VI. El.*
m *ex cor.* 8. *pr.* 13.
n *ex* 1. *VI. El.*
o *cor.* 2. *pr.* 13.

a cor. 7. prop. 13. tum IB ad (a) rectangulum KBF; [*igitur rectangulum GhV est ad rectangulum KBF, ut idem rectangulum GhV ad quadratum Nh; idem quoque rectangulum GhV est ad rectangulum KBF, ut quadratum IB ad idem rectangulum KBF,*] & ideo quadratum Nh erit aequale (b) KBF rectangulo, quadratum vero IB aequabitur rectangulo (c) GhV.

b *ex pr. 9. V. El.*
c *ex eadem pr.*

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 121.

QVadrata duarum quarumlibet diametrorum coniugatarum IH, NQ aequantur quadratis axium KF, GV.

Ducta enim ex I ordinata IB ad KF, & ex N ordinata Nh ad GV, erit quadratum CN aequale (d) quadratis Nh, Ch; quadratum autem CI aequale (e) quadratis CB, IB; sed Nh quadratum aequatur (f) rectangulo KBF, & IB quadratum aequale est (g) GhV; ergo duo quadrata CN, CI aequantur rectangulo KBF cum quadrato CB, & rectangulo GhV cum quadrato Ch, adeoque [*ob quadratum CF aequale* (h) *rectangulo KBF cum quadrato CB, & quadratum CV aequale rectangulo* (i) *GhV cum quadrato CV, eadem quadrata CN, CI*] sunt aequalia binis quadratis CF, & CV, & assumptis eorum quadruplis, quadrata NQ, & IH aequabuntur quadratis KF, & GV. Q. E. D.

d 47. *I. Elem.*
e *per eamdem.*
f *ex cor. 3. pr. praeced.*
g *ex eodem cor.*
h *ex 5. II. El.*
i *ex eadem pr.*

[*Scho-*

[*Scholium.*]

[*Theorematis huius veritas demonstrata etiam est in corollario 6. propositionis 25.*]

COROLLARIA.

I. HInc quadrata duarum diametrorum coniugatarum aequantur quadratis aliarum quarumlibet diametrorum pariter coniugatarum; nam quaelibet horum quadratorum paria aequantur quadratis utriusque axis.

II. Quadrata etiam CF, & FV erunt aequalia quadratis QI, & IN; nam illa aequantur (a) duplo quadrato CF, & CV; haec autem duplo (b) quadrato IC, & CN; sed quadrata CF, & CV aequantur (c) quadratis CI, & CN; ergo etiam GF, & FV quadrata sunt aequalia quadratis QI, & IN.

a *Schol. gener. num. V.*
b *Schol. gener. num. V.*
c *ex hac prop.*

PROPOSITIO XLV.

Fig. 122.

AT in Hyperbolis, quadrata diametrorum coniugatarum IH, NQ, (si fuerint inaequalia) eadem quantitate inter se differunt, ac bina quaelibet aliarum diametrorum coniugatarum KF, GV quadrata.

Ductis enim ex N, & V inter asymptotos tangentibus ANT, LVR, quae ipsis secundariis diametris IH, KF aequabuntur, nam NA aequabitur (d) semidiametro CH, d *cor.* 3. *pr.* 42.

& VL semidiametro CK, [*ideoque ANT, quae dupla* (a) *est NA, aequabitur IH ; & LVR, quae dupla est* (b) *VL, aequalis erit KF* ;] & actis in asymptoto CA perpendicularibus NM, TB, atque VE, RD, patet (c) fore AM aequalem MB, [*& DE aequalem EL*] ut AN aequatur NT, [*& RV aequatur VL*] : unde differentia quadratorum CN, AN, quae eadem est, ac differentia quadratorum CM, MA (quia CN quadratum (d) aequatur CM, & MN quadratis, & AN quadratum aequatur quadratis AM, MN; unde ablato communi quadrato MN, remanet illorum quadratorum differentia eadem, quae CM, & AM) erit eadem, ac differentia quadratorum CM, & MB, quae eadem est, ac rectangulum (e) ACB. Similiter differentia quadratorum CV, & VL eadem erit, ac differentia quadrati EC a quadrato EL, sive ab aequali ED, cuiusmodi erit (f) rectangulum LCD; sed rectangula ACB, LCD sunt (g) aequalia, quippe [*ob parallelas BT, DR,*] CB ad CD est, ut (h) CT ad CR, adeoque ut LC ad CA (ob aequalitatem (i) triangulorum CLR, CAT, quibus inesse debent, circa communem angulum C, latera (k) reciproce proportionalia); ergo eadem est differentia quadratorum NC, & NA, sive CH, & quadratorum CV, VL, sive CK: unde & eorum quadruplis assumptis, erit eadem differentia quadratorum QN, HI, ac quadratorum VG, KF. Q. E. D.

a *ex pr.* 38.
b *ex eadem pr.*
c *ex* 2. *VI. El.*
d 47. *I. Elem.*
e 6. *II. Elem.*
f 6. *II. Elem.*
g 16. *VI. Elem.*
h *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
i *cor.* 4. *prop.* 40.
k 15. *VI. Elem.*

[*Scho-*

[*Scholium*.]

Hoc Theorema etiam ex coroll. 6. prop. 25. abunde liquet; cum enim ibi ostensum sit, differentiam quadratorum ex quibuscumque diametris coniugatis aequalem esse differentiae quadratorum ex axibus, sequitur, quadrata duorum diametrorum coniugatarum eadem quantitate inter se differre, ac bina quaelibet aliarum diametrorum coniungatarum quadrata.]

PROPOSITIO XLVI.

SVmptis in Hyperbolae asymptoto distantiis a centro CL, CO, CA continue proportionalibus, & hinc ductis LP, OK, AI alteri asymptoto parallelis, Hyperbolam in ipsis punctis P, K, I secantibus; erunt spatia Hyperbolica ipsis intercepta LPKO, OKIA, invicem aequalia.

Fig. 123.

Completis parallelogrammis CLPR, COKS, CAIM, productisque AI, RP convenientibus in T, quae resultant parallelogramma CLEM, COKS, CATR, erunt similia; nam ut AC ad CO, ita (a) OK ad AI: Sed AC ad CO est, ut (b) CO ad CL, ergo CO ad CL est, ut OK ad AI, sive (c) ut CS ad CM, ergo CLEM, & COKS sunt (d) similia. Pariter est LP ad OK, sive (e) CR ad CS, ut (f) OC ad CL, hoc est ut (g) CA ad CO: ergo etiam CATR simile est eidem COKS, adeoque (h) & alteri CLEM; quare (i) diameter CT per reliquos angulos E, K transit; & iun-

a *cor.* 3. *prop.* 40.
b *ex hypothesi*.
c 34. *I. Elem.*
d *def.* 1. *VI. El.*
e 34. *I. Elem.*
f *cor* 3. *pr.* 40.
g *ex hypothesi*.
h 21. *VI. Elem.*
i 26. *VI. Elem.*

& iuncta PI erit quoque diameter parallelogrammi PEIT, ab ipsa CET bifariam secta in X: unde erit PI ordinata Hyperbolae ad diametrum CKX, transeuntem per verticem K segmenti Hyperbolici PKI. Ab aequalibus ergo triangulis CPX, CXI ablatis semi-hyperbolis aequalibus PKX, IKX, remanebunt aequales sectores CPK, CIK: sed ipsis aequantur (a) spatia Hyperbolica LPKO, OKIA; ergo haec quoque resultant aequalia. Q.E.D.

a *cor.* 6. *prop.* 40.

COROLLARIA.

Fig. 124.

I. SI pariter sumantur in asymptoto CA ad CO, ut quaevis alia CD ad CL, ductis inde parallelis alteri asymptoto AI, OK, & DQ, LP, resultabunt aequalia spatia Hyperbolica AIKO, & QDLP; sumpta enim CN media [*proportionali*] inter extremas CA, CL, [*quae quadratum habebit par* (b) *rectangulo LCA*, *seu huic* (c) *aequali DCO*], adeoque & [*media erit proportionalis*] inter (d) medias CO, CD; & ordinata NV, erit spatium IANV (e) aequale VNLP; nec non KONV (f) aequale VNDQ; ergo & reliquum AIKO aequabitur QDLP.

II. Et si sumptae fuerint quotlibet distantiae continue proportionales CA, CO, CN, CD, CL &c., ordinatis correspondentibus resultabunt (g) aequalia spatia Hyperbolica iis interposita IAOK, KONV, VNDQ, QDLP, &c.

III. Quoniam si duplicata sit ratio LC ad CN rationis DC ad CN [*seu si ratio*

b 17. *VI. Elem.*
c *ex hypoth.* & 16. *VI. Elem.*
d 17. *VI. Elem.*
e *per hanc prop.*
f *per eamdem prop.*
g *per hanc pr.*

LC

LC ad CN composita sit ex duabus aequalibus rationibus LC ad DC, & DC ad CN, sunt continue (a) *proportionales CN, CD, CL; aequabuntur spatia* (b) *VNDQ, QDLP, unde*] erit spatium VNLP duplum VNDQ; Et si esset triplicata prima ratio secundae, [*seu si ratio LC ad CN componeretur ex tribus aequalibus rationibus LC ad CF, CF ad CD, & CD ad CN, continue forent* (c) *proportionales CN, CD, CF, CL, adeoque aequari deberent spatia VNDQ, QDFG, GFLP; quare*] esset primum spatium [*VNLP*] triplum secundi [*VNDQ*], totidem enim aequalia spatia contineret, quot aequalibus rationibus eius ratio [*nempe ratio LC ad CN*] componeretur: Hinc [*spatium VNLP tam multiplex est spatii VNDQ, quam ratio LC ad CN multiplex est rationis DC ad CN, seu spatium VNLP est ad spatium VNDQ, ut ratio LC ad CN ad rationem DC ad CN; & generatim*] quodlibet spatium KOLP est ad aliud spatium QDLP, ut ratio LC ad CO, est ad rationem LC ad CD, iuxta quantitatem logarithmicam proportionum.

a *def.* 10. *V. El.*
b *per co.* 2.
c *ex def.* 10. *V. El.*

IV. Quae dicta sunt de his spatiis, valent etiam de sectoribus Hyperbolicis ICK, QCP, VCQ &c. quae correspondentibus spatiis asymptoto adiacentibus sunt semper (d) aequalia.

d *cor.* 6. *pr.* 40.

V. Patet autem, totum spatium inter curvam Hyperbolicam, & eius asymptotos interiectum, & in infinitum productum, esse infinitae magnitudinis, quia cum possint rationes CA, CO, CN &c. in infinitum continuari, infinita ſpatia primo IAOK aequalia correſpondebunt hiſce infinitis rationibus, in eodem aſymptotico ſpatio contenta.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 125. SI recto latere NR, aequali tranſverſo NQ Hyperbolae aequilaterae NM, ad eumdem axem Parabola NB deſcribatur, ducta quavis recta BD, axi parallela, conveniente cum axe ſecundario Hyperbolae CE in D, & cum Hyperbola in M, erit hyperbolicum ſpatium CNMD aequale rectangulo ex ſemiaxe tranſverſo CN in curvae parabolicae portionem NB vertici, & eidem rectae BD interpoſitam.

Ordinata enim MK ad Hyperbolam, & BA ab parabolam, quam tangat BG, eique perpendicularis ducatur BP, iuncta DN erit ipſi BP aequalis, & parallela; Nam ſubnormalis AP aequatur NC, cum debeat
a *cor.* 16. eſſe medietas (a) lateris recti, & AB eſt (b)
prop. 9. aequalis CD, unde & baſis BP trianguli re-
b 34. *I.* ctanguli BAP aequatur (c) baſi DN alterius
Elem. trianguli rectanguli DCN; ſed ipſa DN ae-
c *ex* 4. quatur DM; quippe rectangulum QKN eſt
I. Elem. aequale (d) quadrato KM, (ut diameter
d *cor.* 7. tranſverſa QN aequatur parametro NR)
pr. 5. ſeu CD, & iuncto quadrato CN, qua-
e *ex* 2. dratum (e) CK, ſeu DM, erit (f) aequale
II. El. DN quadrato; quare etiam BP aequabitur
f 47. *I.* DM. Ac ſumpto in tangente BG puncto I
Elem. in-

infinite proximo ipsi B, ductaque HIE parallela BD, [*vel AG, triangulum IBH simile* (a) *erit triangulo GBA: huic vero simile* (b) *est triangulum BAP; igitur etiam triangulum IBH simile* (c) *est triangulo BAP, unde*] quoniam ob triangulorum IHB, BAP similitudinem est IB ad BH, sive ad DE, ut (d) BP ad PA, sive ut DM ad CN, erit rectangulum EDM (e) aequale CN in ipsam IB, quae ob infinitam proximitatem eadem est, ac portio infinite parva curvae parabolicae, uti rectangulum EDMO, ob rectam OE infinite proximam DM, idem fere est, ac spatium EDMF Hyperbolicum, a quo differt spatio FOM infinities minori; Idque cum semper eveniat, patet fore rectangulum ex CN in totam curvam parabolicam NB aequale spatio Hyperbolico CDMN ipsi correspondenti. Q. E. D.

a 4. 6. *Elem.*
b 8. *VI. Elem.*
c 21. *IV. Elem.*
d 4. *VI. Elem.*
e 16. *VI. Elem.*

COROLLARIUM.

Ex quo DN ostensa est aequari DM, patet facilis modus describendi Hyperbolam aequilateram, inclinatis recto angulo NCD innumeris rectis NE, ND, mox ductis ipsi CN parallelis EF, DM, quae dictis inclinatis NE, ND sint aequales; nam puncta N, F, M erunt ad curvam Hyperbolicam aequilateram.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 126. 127. SI eodem axe transverso NQ, & alio latere recto NG describatur Hyperbola NABK, sumpta media proportionali NT inter hoc latus rectum, & transversum, sive rectum NR Hyperbolae aequilaterae NFM, erit spatium NBK ad NMK, ut NG ad NT.

Ordinetur quaevis alia AH, secans aequilateram Hyperbolam in F. Erit quadratum BK ad rectangulum QKN, sive ad quadratum MK Hyperbolae aequilaterae, quod illi (a) aequatur, ut (b) GN ad NQ, sive ad NR; ut autem GN ad NR, ita [*est quadratum GN (c) ad rectangulum GNR, vel*] quadratum GN ad quadratum NT (d) mediae proportionalis inter illas; ergo erit [*quadratum BK ad quadratum MK, ut GN quadratum ad quadratum NT, &*] BK ad MK, ut GN ad NT; similiter autem erit AH ad HF, ut GN ad NT: ergo omnes lineae spatii Hyperbolici NBK ad omnes alterius NMK, adeoque & spatium descriptae Hyperbolae ad illud Hyperbolae aequilaterae, est ut latus rectum GN primae ad NT mediam proportionalem inter ipsum GN, & transversum NQ, aut rectum alterius NR. Q. E. D.

a *cor.* 7. *pr.* 5.
b *cor.* 6. *prop.* 5.
c *ex* 1. *VI. El.*
d *ex* 17. *VI. El.*

[*LEMMA ad seq. prop.*]

Fig. 128. [*Si fuerit AB ad DE, ut HO ad RM; BN ad EF, ut OQ ad MS; & NC ad FG, ut*

ut QI ad ST, sintque aequales tam primi antecedentes AB, BN, NC, quam reliqui HO, OQ, QI; erit summa primorum antecedentium AC ad summam suorum consequentium DG, ut reliquorum antecedentium summa HI ad summam suorum consequentium RT.]

[*Quoniam* (a) *aequantur AB, BN, NC, itemque HO, OQ, QI, estque AB ad DE, ut* (b) *HO ad RM; erit etiam BN ad DE, ut OQ ad RM, & NC ad DE, ut QI ad RM; igitur est AC ad DE, ut* (c) *HI ad RM, & invertendo, DE ad AC, ut RM ad HI. Simili ratiocinio ostendetur, EF esse ad AC, ut MS ad HI, & FG ad AC, ut ST ad HI; ergo* (d) *DG erit ad AC, ut RT ad HI, & invertendo, AC ad DG erit, ut HI ad RT. Q. E. D.*]

a *ex hypothesi.*
b *ex hypothesi.*
c 24. *V. Elem.*
d 24. *V. Elem.*

PROPOSITIO IL.

Spatium Parabolae CAK aequatur duabus tertiis parallelogrammi ipsi circumscripti IPCK. Fig. 129.

Ordinetur DB ad diametrum AE, & per B ducta FBL diametro parallela, iungatur AC, secans BD in G, & LF in M. Ex revolutione parallelogrammi APCE, et trianguli ACP, circa AP, fiet cylindrus (e) triplus Coni; et cum sit circulus radii LF, sive PC (f) ad circulum radii ML, ut (g) quadratum illius ad quadratum huius, sive ut (h) quadratum AP ad quadratum AL, nempe ut quadratum EC ad DB quadratum, scilicet

e *ex* 10. *XII. El.*
f *ex* 34. *I. El.*
g *ex* 2. *XII. El.*
h *ex* 34. *I. Elem.*

a ex pr. 4. licet ut (a) recta EA ad abscissam AD, sive ut (b) FL ad LB; [*erit circulus radii LF in cylindro, ad circulum radii LM in Cono, ut recta FL in parallelogrammo APCE, ad rectam LB in trilineo ABCP. Eamdem ob causam, ducta ÆT parallela LF, erit circulus radii ÆT in Cylindro, ad circulum radii ÆR in Cono, ut ÆT in parallelogrammo, ad ÆS in trilineo; atque ita semper. Sunt autem aequales tum omnes circuli in cylindro, tum omnes lineae in parallelogrammo*;] ideo omnes (c) aequales circuli illius cylindri erunt ad omnes circulos inscripti Coni, ut omnes aequales lineae parallelogrammi ad omnes lineas trilinei parabolici ABCP; [*seu cylindrus genitus ex revolutione parallelogrammi APCE, erit ad Conum ex revolutione trianguli ACP, ut parallelogrammum APCE ad trilineum ABCP*;] quare ut cylindrus est triplus (d) Coni, ita parallelogrammum APCE triplum est trilinei ABCP; adeoque reliquum parabolicum spatium ABCE aequatur duabus tertiis partibus dicti parallelogrammi AECP, et duplicando utrumque spatium, parabola integra CAK est aequalis duabus tertiis parallelogrammi IPCK. Q. E. D.

b ex 34. I. Elem.

c ex Lemmat. prę.

d 10. XII. Elem.

COROLLARIA.

I. Hinc patet, esse parabolam sesquitertiam trianguli inscripti [*KAC, seu parabolam ad hoc triangulum esse, ut 4. ad 3.*]; cum enim sit parabola [*ad triangulum in-*

inscriptum in ratione composita parabolae ad parallelogrammum, & parallelogrammi ad (a) *triangulum, sitque parabola*] ad parallelogrammum ut (b) 2. ad 3., & parallelogrammum ad triangulum, ut (c) 2. ad 1.; erit parabola ad triangulum in ratione composita ex 2. ad 3., et ex 2. ad 1., adeoque ut [*rectangulum* (d) *ex 2. in 2. ad rectangulum ex 3. in 1., seu ut*] 4. ad 3.

a *numer.* 12. *par.* 3. *V. El.*
b *ex hac prop.*
c *ex* 41. *I. Elem.*
d *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*

II. Parabola ABCE ad partem ABD, sectam ordinata BD est, ut cubus EC ad cubum DB; nam quia etiam ABD aequatur duabus tertiis (e) parallelogrammi ADBL, est ABCE ad ABD, ut AECP ad ADBL, scilicet in ratione (f) composita basium EC, DB, et altitudinum EA, DA, quae (g) duplicata est illius, cum sit [*EA ad DA*,] ut quadratum (h) EC ad DB quadratum; quare erunt haec spatia in ratione triplicata ordinatarum EC, DB, adeoque (i) ut cubi eorumdem.

e *ex hac prop.*
f *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*
g *cor.* 1. *prop.* 20. *VI. El.*
h *ex pr.* 4.
i *ex* 33. *XI. El.*

[*LEMMA ad seq. prop.*]

[*Circulorum peripheriae eam inter se rationem habent, quam diametri.*]

[*Quoniam polygonorum similium circulis inscriptorum ambitus sunt, ut* (k) *circulorum, quibus inscribuntur, diametri; etiam similia polygona infinitorum infinite parvorum laterum habebunt ambitus diametris circulorum, quibus inscribuntur, proportionales. Iam vero haec polygona in circu-*

k *cor.* 1. *prop.* 1. *XII. El.*

cua ex Lemmat. ad prop. 2. XII. El.

culos (a) *desinunt, atque ita illorum ambitus in peripherias commigrant; ergo etiam circuli habent peripherias suis diametris proportionales.* Q. E. D.]

[COROLLARIUM.]

[*Circulorum igitur peripheriae sunt suis etiam radiis proportionales.*]

PROPOSITIO L.

Fig. 130.

Circulus diametri AP aequatur triangulo rectangulo CAB, cuius altitudo radius, basis autem AB sit aequalis circumferentiae PAK.

Nam per quodlibet punctum radii D ducta concentrica peripheria DFO, & in triangulo recta DE basi parallela, erit AB ad DE, ut peripheria PAK ad peripheriam FDO, cum (b) tam hae, quam (c) illae sint, ut AC ad CD; quare ut AB aequatur (d) peripheriae PAK, ita DE aequatur alteri peripheriae FDO, et hoc ubique accidet: omnes ergo lineae trianguli CAB aequantur omnibus peripheriis concentricis ipsius circuli; ergo est triangulum circulo aequale Q. E. D.

b *ex cor. Lemmat. praeced.*
c *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
d *ex hypothesi.*

COROLLARIA.

I. Hinc circulus idem aequabitur (e) rectangulo ex radio in dimidiam circumferentiam, vel ex tota circumferentia in dimi-

e *ex Sch. prop.* 41. *I. El.*

midium radii, seu quartam partem diametri: unde quia (a) ex calculo archimedeo est circumferentia ad diametrum, ut ferme 22. ad 7., [*seu diametro dati circuli exsistente 7., circumferentia est 22.; circulus aequalis erit facto ex 11. in 3. cum dimidio, seu ex 11. in 7. dimidia, nempe aequabitur dimidiis 77., seu 38. cum dimidio : iam vero quadratum diametri est 49.; igitur*] erit circulus ad quadratum diametri, ut 38. cum dimidio ad 49., sive [*ut 77. dimidia ad dimidia 98., vel utrumque rationis terminum duplicando,*] ut 77. ad 98., hoc est [*utroque rationis termino per 7. diviso*], ut 11. ad 14.

a *prop. 2. de circuli dimens.*

II. [*Etiam sector quilibet ACK aequatur triangulo rectangulo AMC, cuius altitudo radius CA, basis vero AM sit aequalis arcui AK. Nam circulus est ad sectorem ACK, ut* (b) *circumferentia ad arcum AK, seu ut AB ad AM* (c): *sed ut AB ad AM, ita est triangulum ABC ad triangulum AMC* (d); *ergo circulus est ad sectorem, ut triangulum ABC ad triangulum AMC : Sed circulus* (e) *aequatur triangulo ABC ; igitur sector aequalis est triangulo AMC.*]

b *ex 33. VI. El.*
c *ex hypothesi.*
d *1. VI. Elem.*
e *ex hac prop.*

III. [*Quare sector circularis ACK aequabitur* (f) *rectangulo ex radio AC in dimidium arcus AK, vel ex toto arcu AK in semiradium AC, aut in quartam partem diametri AP.*]

f *ex Sch. pr. 41. I. Elem.*

IV. [*Quemadmodum circulus PAK aequalis est triangulo ABC, ita circulus FDO aequabitur triangulo DEC, habenti basim DE aequalem* (g) *circumferentiae FDO ; unde huiu-*

g *ex demonstra. huius pr.*

iusmodi circulorum differentia, seu armilla utroque circulo intercepta, aequabitur trapezio ÆBED, quod est triangulorum ÆBC, DEC differentia.]

PROPOSITIO LI.

Ellipsis NEQ est ad circulum super axe minori NQ descriptum, ut minor axis ad maiorem.

Fig. 131. Ordinata per centrum CE, quae est semiaxis minor Ellipsis, et producta ad circulum in B, tum qualibet alia ordinata KM, pertingente ad circulum in D, ut rectangulum QKN ad QCN, ita erit (a) quadratum MK ad quadratum EC, & quadratum DK priori rectangulo (b) aequale, ad BC quadratum aequale alteri QCN. Ergo [*quadratum MK est ad quadratum EC, ut quadratum DK ad quadratum BC, & MK ad EC erit, ut DK ad BC, & permutando, MK ad DK, ut EC ad BC. Eamdem ob causam ducta alia ordinata ST, pertingente ad circulum in R, erit ST ad RT, ut eadem EC ad BC; atque ita porro. Igitur*] omnes lineae (c) Ellipsis ad omnes lineas circuli sunt, ut EC ad CB; adeoque spatium totius Ellipsis ad integrum circulum est, ut semiaxis minor EC ad radium CB, seu CQ semiaxem maiorem, adeoque ut axis minor ad maiorem. Q. E. D.

a *ex pr. 6.*

b *ex cor. 1. pr. 2.*

c *ex 12. V. Elem.*

CO-

COROLLARIA.

I. DVctis ex centro rectis CM , CD, erit pariter sector Ellipticus CMQ ad sectorem circularem CDQ in eadem ratione minoris axis ad maiorem ; nam segmentum MKQ ad (a) segmentum DKQ, & triangulum CMK ad (b) CDK, sunt, ut MK ad DK, ideoque (c) ut EC ad BC, seu CQ ; [*igitur MKQ est ad DKQ, ut* (d) *CMK ad CDK, & summa antecedentium CMQ est ad summam consequentium CDQ, ut* (e) *antecedens unum MKQ ad suum consequens DKQ, seu ut semiaxis minor EC ad* (f) *maiorem semiaxem CQ, adeoque ut axis minor ad maiorem.*]

II. [*Hinc sector Ellipticus MCQ aequatur rectangulo ex minori semiaxe CE in dimidium circularis arcus DQ ; quippe circularis sector DCQ ad sectorem Ellipticum MCQ est, ut* (g) *radius CB ad minorem semiaxem CE, seu ut rectangulum* (h) *ex CB in dimidium arcus DQ, ad rectangulum ex CE in dimidium eiusdem arcus DQ : at sector circularis DCQ aequatur* (i) *rectangulo ex radio CB in dimidium arcus DQ; igitur etiam* (k) *sector Ellipticus MCQ aequabitur rectangulo ex minori semiaxe CE in dimidium arcus DQ.*]

III. [*Quin & integrum Ellipseos spatium aequale est rectangulo ex minori semiaxe CE in dimidium circumferentiae, radio CB descriptae, seu in semiperipheriam QBN ; siquidem est circulus ad Ellipsim, ut CB* (l) *ad*

a *ex hac prop.*
b *ex* 1. *VI. El.*
c *ex hac prop.*
d *ex* 11. *V. El.*
e *per* 12. *V. El.*
f *ex demonstr.*
g *ex cor. praeced.*
h *ex* 1. *VI. El.*
i *ex cor. 3. prop. praeced.*
k *ex* 14. *V. El.*
l *ex hac prop.*

ad CE, seu ut rectangulum ex radio CB in semiperipheriam QBN ad rectangulum ex CE in semiperipheriam eamdem; sed circu-
a cor. 1. prop. 50. *lus aequatur* (a) *rectangulo ex radio CB in semiperipheriam QBN; ergo & Ellipsis integra*
b 14. VI. Elem. *aequabitur* (b) *rectangulo ex minori semiaxe CE in semiperipheriam QBN, radio CB descriptam.*]

[*LEMMA ad sequent. prop.*]

Fig. 130. [*SI in circulo PAK ordinetur quaevis DS, atque radio CD describatur circulus priori concentricus FDO; armilla, hisce duobus circulis intercepta, aequabit circulum radio DS descriptum.*]

[*Quoniam circulus PAK est ad circu-*
c 2. XII. Elem. *lum FDO, ut quadratum* (c) *CA ad quadratum CD; dividendo, erit excessus circuli PAK supra circulum FDO, seu armilla utroque circulo intercepta, ad circulum FDO, ut excessus quadrati CA supra quadratum CD,*
d 5. II. Elem. *seu* (d) *rectangulum PDA, ad quadratum CD: sed rectangulum PDA aequale* (e) *est*
e cor. 1. pr. 2. *quadrato DS; igitur armilla ad circulum FDO erit, ut DS quadratum ad quadratum CD, vel ut circulus* (f) *radii DS ad circu-*
f 2. XII. Elem. *lum FDO; quare armilla aequabit* (g) *circulum radio DS descriptum.* Q. E. D.]
g 9. V. Elem.

CO-

COROLLARIA.

I. [*QUia armilla* (a) *aequatur trapezio BEDA, huic trapezio aequabitur etiam circulus radio DS descriptus.* a cor. 4. prop. 50.

II. [*Quoniam DS quadratum, utpote* (b) *aequale rectangulo PDA, aequatur* (c) *differentiae quadratorum CA, CD; liquet, armillam duobus circulis radiorum CA, CD interceptam, circulo aequalem fore, cuius radii quadratum aequale est differentiae quadratorum CA, CD.*] b cor. 1. pr. 2. c ex 5. II. El.

PROPOSITIO LII.

SI quaelibet Sectio Conica AEB circa suum axem ED rotetur, cuius tangentes ex terminis basis ductae AF, BH, cum verticali tangente EF conveniant in F, H, iunctis ad medium basis D, rectis FD, HD, erit solidum conoidale ex rotatione DEB genitum aequale solido, ex trianguli DHB rotatione circa eumdem axem facta, prodeunti: solidum autem ex trilinei ENBH revolutione circa ipsum axem aequatur Cono, ex trianguli EDH revolutione genito. Fig. 132.

Ducta enim ubilibet basi, & tangenti verticali parallela LK, secante axem in I, tangentes in L, K, curvam in M, N, rectas FD, HD in O, P; erit rectangulum MKN ad quadratum KB, ut (d) quadratum d ex pr. 16.

EH ad HB quadratum, & permutando, rectangulum MKN ad quadratum EH, ut quadratum KB ad quadratum HB, sive (a) ut DI quadratum ad quadratum DE, vel, ut (b) quadratum IP ad quadratum EH; quare [*rectangulum MKN ad quadratum EH est, ut quadratum IP ad idem EH quadratum, ideoque*] IP quadratum aequatur (c) rectangulo MKN, scilicet differentiae quadratorum IK, IN: unde & circulus radio IP descriptus, erit aequalis differentiae (d) circulorum a radiis IK, IN descriptorum, sive armillae circulari, quae in revolutione trilinei ENBH circa axem ED gignitur a recta NK; & hoc semper eveniet; quare Conus a triangulo EDH circa ED revoluto descriptus, cuius Sectiones sunt circuli radiorum IP, aequabitur solido ex revolutione trilinei ENBH circa eumdem axem, cuius sectiones sunt armillae per rectas NK descriptae. Sed hoc solidum ex trilineo ENBH, cum solido conoidali ex revolutione Conicae Sectionis ENBD circa ED, aequatur solidis ex triangulo EDH, & ex triangulo DHB circa eumdem axem revolutis; ergo ut solidum ex trilineo ENBH aequatur Cono ex triangulo EDH, etiam reliquum solidum conoidale ex revolutione ENBD aequatur residuo solido genito ex trianguli DHB revolutione circa eumdem axem. Q. E. D.

a ex cor. 1. pr. 2. VI. El.

b ex cor. 1. pr. 4. VI. El.

c 9. V. Elem.

d cor. 2. Lemmat. praeced.

[*Scholium*]

[*Quod in solido conoidali est hactenus demonstratum, etiam in segmento sphaerico locum*

cum habet; si enim DENB sit circuli semisegmentum, ex cuius revolutione circa axem ED oriatur segmentum sphaericum ÆEB; erit tangentis BK quadratum aequale (a) *rectangulo MKN: aequantur vero* (b) *quadrata tangentium EH, BH; unde* (c) *rectangulum MKN ad quadratum EH erit, ut quadratum BK ad BH quadratum, vel ut* (d) *quadratum DI ad DE quadratum, vel ut* (e) *quadratum IP ad quadratum EH, igitur* (f) *rectangulum MKN aequabitur IP quadrato; atque ita superiorem demonstrationem segmento sphaerico applicando, ostendetur, segmentum sphaericum ex rotatione semisegmenti circularis DENB genitum aequari solido genito ex revolutione trianguli DHB.*]

a 36. *III. Elem.*
b *cor.* 2. *pr.* 36. *III. El.*
c *ex pr.* 7. *V. El.*
d *ex cor.* 1. *pr.* 2. *VI. El.*
e *cor.* 1. *pr.* 4. *VI. Elem.*
f 9. *V. El.*

COROLLARIA.

I. PRoductis tangentibus collateralibus AF, BH, quae cum axe conveniant in G, & in basi secta DS, cuius quadratum aequet differentiam quadrati AD ab FE quadrato, iuncta GS, erit conoides ex revolutione ENBD circa axem ED, aequalis Cono, ex rotatione trianguli SGD circa GD; nam Conus ex revolutione trianguli ADG est triens producti (g) ex circulo radii DA in DG, & conus ex triangulo FEG, cum Cono ex triangulo FED est triens producti ex circulo radii EF in (h) EG, plus ED, idest in eamdem DG; ergo excessus Coni ex AD supra Conos ex FEG, & FED, hoc est solidum ex revolutione trianguli AFD, seu DHB circa ED, nempe

g *ex pr.* 10. *XII. Elem.*
h *ex eadem pr.*

a ex hac prop. conois ex rotatione (a) ENBD aequabitur trienti producti, ab excessu circuli DA radio descripti supra circulum radii EF, in eamdem altitudinem DG; quare cum sit quadratum DS *b ex hypothesi.* differentia (b) quadratorum DA, EF, etiam circulus radii DS est excessus (c) circuli [*radii*] DA supra circulum [*radii*] EF; ideoque Conus a triangulo SGD genitus aequatur ipsi conoidi.

c ex cor. 2. Lemmat. ad prop. 52.

II. Si curva AENB sit parabola, erit conoides ab ipsa procedens aequalis triplo solidi ex revolutione trianguli GFD circa ipsam GD; quia enim subtangens DG est dupla (d) GE, est AD (e) dupla FE, & illius quadratum huius quadruplum; unde circulus radii DS, [*qui est circulorum radiis DA, EF descriptorum* (f) *differentia*,] erit triplus circuli radii EF, ideoque Conus ex triangulo SGD, nempe ipsa Conois, triplo maior erit solido ex rotatione GFD, qui aequatur Cono ex circulo radii EF in ipsam altitudinem GD.

d cor. 6. prop. 9.

e ex cor. 1. pr. 4. VI. El.

f ex cor. 1.

Fig 133. III. quaelibet conois est ad Conum inscriptum a triangulo DEB circa axem ED revoluto, genitum, ut summa basis DB, & verticalis tangentis EH, ad ipsam DB; nam radio DB circulo BVA descripto, & ducta HV axi parallela, secante basim in T, circulum in V, & iuncta DV perpendiculari TI, erit TV quadratum excessus (g) quadrati DV supra quadratum DT, seu differentia quadratorum DB, EH; quare cum sit conois aequalis (h) Cono, cuius basis circulus radii TV, & altitudo DG, erit [*eadem conois*] ad Conum

g ex 47. I. Elem.

h ex co. 1.

num

num inscriptum radii DB, & altitudinis DE in ratione (a) composita [*ex ratione basium, nempe*] quadrati TV ad (b) quadratum DB, seu DV, idest [*rectanguli DVI, quod TV quadrato* (c) *aequale est, ad quadratum DV, seu*] IV (d) ad VD, & [*ex ratione altitudinum, nempe*] GD ad DE, quae est eadem, ac (e) GB ad BH, seu (f) DB, aut DV ad TB; ergo conois ad inscriptum Conum est [*in ratione composita ex rationibus IV ad VD, & VD ad TB; seu*] ut IV (g) ad TB; sed in hac ratione est quoque (h) AT ad DV; nam rectangula IVD, ATB sunt aequalia, eo quod (i) quadrato TV aequantur; ergo ratio conoidis ad inscriptum Conum est eadem, quae AT ad DV, idest DB plus EH ad DB.

IV. [*Iam vero DB, plus EH est ad DB, ut DG, plus GE* (k) *ad GD*]. Vnde pariter conois ad inscriptum Conum erit, ut DG plus GE ad ipsam DG, idest producto axe ad R, ut sit GR aequalis GE, erit ratio conoidis ad Conum inscriptum, eadem quae DR ad DG.

V. Hinc conois parabolica erit sesquialtera Coni inscripti, quia DR erit tripla DE, cuius dupla (l) est DG, unde DR ad DG est, ut 3. ad 2. Et quia cylindrus conoidi circumscriptus esset (m) triplus inscripti Coni, foret is duplus conoidis Parabolicae sibi inscriptae, quippe cum sit cylindrus ad Conum, (n) ut [3. *ad* 1. *seu ut*] 6. ad 2., & Conus ad conoidem, ut 2. ad 3., erit [*ex aequo*] cylindrus ad conoidem, ut 6. ad 3., idest

a *ex Sch. pr.* 15. *XII. El.*
b 2. *XII. Elem.*
c *cor.* 1. *prop.* 8. *VI. El. &* 17. *VI. El.*
d *ex* 1. *VI. Elem.*
e *ex co.* 1. 4. *VI. El.*
f *ex co.* 1. 4. *VI. El.*
g *ex num.* 12. *par.* 3. *V. El.*
h 16. *VI. Elem.*
i *cor* 1. *pr.* 8. *VI. Elem. &* 17. *VI. Elem. & cor.* 1. *pr.* 2.
k 18. *V. Elem.*
l *cor.* 6. *pr.* 9.
m 10. *XII. El.*
n *per eamdem.*

idest [*cylindrus erit*] duplus [*conoidis.*]

Fig. 134. VI. Si curva AEB sit semicirculus, aut semiellipsis, quoniam laterales tangentes AF, BH, ex terminis alterius axis AB ductae, sunt parallelae axi ED, erit tangens EH aequalis DB; ergo DB plus EH est dupla DB, adeoque Hemispherium, sive Hemispherois Elliptica dupla erit inscripti Coni; cylindrus autem circumscriptus hemispherio, aut hemispheroidi erit eius sesquialter; nam cylindrus ad Conum est, ut (a) 3. ad 1., Conus vero ad hemispherium, aut hemispheroidem, ut (b) 1. ad 2.; ergo [*ex aequo*] cylindrus ad illud solidum hemispherium, vel hemispheroidem est, ut 3. ad 2. Idemque valet de cylindris integrae spherae, aut spheroidi circumscriptis.

a 10. *XII. El.*
b *ex demonstr.*

PROPOSITIO LIII.

Fig. 135. SI spatium Hyperbolae BH, & asymptoto CI interiectum revolvatur circa axem BE, solidum hinc genitum aequabitur cylindro aeque alto basim habenti circulum radii BC.

Quoniam rectangulum IHG, nempe differentia (c) quadratorum EI, HE, aequatur quadrato tangentis (d) BC, sive (e) rectae EK, etiam differentia circulorum a radiis EI, EH [*descriptorum*], idest armilla circularis genita a recta HI in rotatione spatii asymptotici BHIC circa axem BE, aequabitur (f) circulo radii EK in cylindro ex revolutione rectanguli BCKE descripto; idque semper evenit

c 5. *II. Elem.*
d *ex cor.* 1 *pr.* 38.
e 34. *I. Elem.*
f *cor.* 2. *Lemm. ad pr.* 52.

venit; ergo omnes armillae circulares illius ſolidi aequantur omnibus circulis huius cylindri, & ideo ſolidum illud huic cylindro aequatur.

COROLLARIA.

I. Hinc conois hyperbolica ex revolutione ſectionis BHE circa axem BE, aequatur annulo procedenti ex revolutione trianguli CKI circa eumdem axem; hic enim annulus cum cylindro orto ex rectangulo BCKE, adaequat ſummam ex conoide BHE, & ex ſolido genito ex aſymptotico ſpatio BHIC; unde cum hoc ſit aequale (a) dicto cylindro, etiam conois hyperbolica dicto annulo aequatur. *a ex hac pr.*

II. Similiter ſi aſymptoticum ſpatium ABCD circa ſecundum axem AF revolvatur, ſolidum hinc ortum aequabitur cylindro orto ex revolutione rectanguli ABEF circa eumdem axem; nam & rectangulum CDH, [*quod eſt differentia* (b) *quadratorum FC, FD,*] aequatur (c) quadrato AB, ſive (d) FE: unde differentia circulorum ex radiis FC, FD, ideſt (e) armilla circularis genita a recta DC in dicto ſolido, aequatur circulo radii FE in illo cylindro, & hoc ſemper evenit, unde totum ſolidum toti cylindro aeque longo aequale erit. *Fig. 136.* *b ex 5. II. Elem.* *c ex pr. 39.* *d 34. I. Elem.* *e ex Lemmat. pr. 52.*

III. Annulus autem ex Hyperbolico trilineo BEC, circa AF revoluto, aequabitur Cono ex revolutione trianguli ADF circa eumdem axem; nam ille annulus cum cylindro, & hic

& hic conus, cum solido ex asymptotici spatii revolutione, complet Hyperbolicam cylindroidem, ex revolutione spatii ABCF circa eumdem axem AF, genitam: [*sed solidum ex revolutione asymptotici spatii ABCD genitum, aequatur* (a) *cylindro ex revolutione rectanguli ABEF; igitur etiam Conus ex ADF aequari debet annulo ex revolutione trilinei BEC*].

a ex cor. 2.

[*LEMMA ad seq. prop.*]

Fig. 137.

[*CYlindri recti ABFE superficies aequatur rectangulo BFKR, cuius altitudo BF est eadem, ac cylindri, basis vero FK aequatur circumferentiae cylindricae baseos EFS.*]

[*Sumptis in altitudine BF punctis quotlibet C, N, perque illa traiectis planis, basi cylindricae parallelis, fiant sectiones DTC, MLN, quae circuli erunt, tum mutuo, tum basi EFS aequales, aganturque in rectangulo BFKR ipsi FK parallelae CQ, NO, quae invicem* (b), *rectaeque FK* (c) *aequabuntur. Quoniam circumferentia EFS aequatur rectae FK, etiam circumferentiae sectionum circularium DCT, MNL aequabuntur CQ, NO. Simili modo si ex singulis aliis punctis altitudinis BF circulares sectiones fiant, basi cylindricae parallelae, atque in rectangulo BFKR totidem rectae ex iisdem punctis ducantur, parallelae FK; singulis hisce rectis aequabuntur singulae huiusmodi sectionum circumferentiae; hae igitur simul sumptae circum-*

b ex 34. I. Elem.
c ex eadem pr.

cumferentiae illas simul sumptas rectas lineas adaequabunt : sed huiusmodi circumferentiae simul sumptae complent cylindricam superficiem, & rectae illae rectangulum BFKR; igitur cylindri recti ABFE superficies aequatur rectangulo BFKR. Q. E. D.]

[COROLLARIA.]

I. [*Quare rectorum cylindrorum superficies sunt, ut rectangula ex illorum altitudinibus in suarum basium circumferentias.*]

II. [*Quapropter si cylindri recti fuerint aeque alti, illorum superficies erunt peripheriis basium proportionales.*]

PROPOSITIO. LIV.

INscripto rectangulo DEAG inter Hyperbolam aequilateram DC, & eius asymptotos EA, AB, si totum asymptoticum spatium EDCKBA circa AB revolvatur infinities longum, efficietur solidum duplum cylindri a dicto rectangulo circa GA revoluto descripti. Fig. 138.

Agatur quaelibet CI asymptoto parallela, secans rectanguli latera in F, I, eiusque diametrum EG in H. Erit [*BA ad AG, ut DG* (a) *ad CB, seu*] CI (b) ad DE, ut EA ad AI, sive ut peripheria radio AE descripta, ad (c) peripheriam radio AI descriptam; Ergo rectangulum ex altitudine CI, & peripheria circulari radii AI, quod est (d) aequale superficiei cylindricae a recta

a *cor. 3. prop. 40.*
b *pr. 34. I. Elem.*
c *coroll. Lemmat. ad prop. 50.*
d *ex Lemmat. praeced.*

CI,

CI, circa AB revoluta, descriptae, aequatur rectangulo, ex altitudine DE, & basi peripheria radii AE, quae esset cylindrica super-
a ex eodem Lemmat. ficies (a) ex revoluta DE circa AB, genita: quare cylindrica superficies genita a linea CI, ad superficiem cylindricam genitam ab
b pr. 7. V. Elem. FI est, ut (b) cylindrica superficies genita a DE ad ipsam genitam ab FI, nempe (c) ut
c cor. 2. Lemmat. praeced. peripheria radii EA, ad peripheriam radii AI, nempe ut (d) EA ad AI, sive (e) ut DG ad GF, vel (f) ut DE, sive FI ad FH.
d cor. Lemmat. ad prop. 50. [*Eodem modo ostendetur, esse superficiem genitam a cL, ad superficiem genitam ab fL, ut fL ad fb;*] & hoc ubique eveniet: ergo singulae superficies cylindri-
e 34. I. Elem. cae, componentes solidum hyperbolicum, ex revolutione dicti spatii asymptotalis, ad
f cor. 1. prop. 4. VI. El. singulas cylindricas superficies constituentes cylindrum ex rectangulo DEAG genitum, sunt, ut singulae lineae eiusdem rectanguli,
g ex demonstr. ad lineas illis correspondentes in triangulo DEG; cum itaque sint aequales omnes illae
h Lemm. ad prop. 49. Cylindricae (g) superficies solidi hyperbolici, nec non aequales lineae ordinatae in parallelogrammo rectangulo, erit (h) ipsum
i ex pr. 34. I. El. solidum Hyperbolicum ad dictum cylindrum, ut rectangulum ad inscriptum triangulum, scilicet in ratione (i) dupla; unde patet propositum.

COROLLARIA.

I. HInc [*solidum ab asymptotico spatio EDCKBA genitum, est ad cylindrum genitum a rectangulo GDEA, ut 2. ad 1.; igitur*] dividendo do, solidum Hyperbolicum supra Cylindrum a rectangulo GDEA genitum existens, nempe à spatio DCKBG descriptum, erit aequale cylindro illi sibi supposito; & similiter alia portio dicti solidi ex revolutione solius cCKBb genita, aequabitur cylindro sibi supposito, per rectangulum cLAb descripto.

II. Et eiusmodi solida ex DCKBG, & ex cCKBb revolutis genita, erunt ut radii DG, cb suarum basium circularium, quippe in hac ratione sunt cylindri illis suppositi, quibus dicta solida aequantur, utpote in ratione (a) composita altitudinum ED, Lc (quae eadem est (b) reciproce LA ad AE, seu rectanguli (c) LAE ad AE quadratum), & [*ex ratione basium, nempe circuli radio AE descripti, ad circulum radii AL, nempe*] AE quadrati (d) ad quadratum AL, adeoque sunt, ut (e) LAE ad AL quadratum, scilicet ut (f) AE ad AL, seu (g) ut DG ad cb.

a *ex Sch. prop.* 15. *XII. El.*
b *cor.* 3. *prop.* 40.
c *ex pr.* 1. *VI. El.*
d *ex pr.* 2. *XII. Elem.*
e *ex num.* 12. *par.* 3. *V. El.*
f *ex pr.* 1. *VI. El.*
g *ex* 34. *I. Elem.*

III. Ideo si divisa fuerit AE in aliquot partes aequales AI, IL, LH, HE &c. ductis asymptoto parallelis IC, Lc, HM, ED, atque ordinatis ad asymptoton CB, cb, MN, DG, ex revolutione huius spatii asymptotici circa AB, erunt partes a portionibus DMNG, McbN, cCBb, & ultima infinite longa CKB descriptae, invicem aequales; cum enim sint illa integra solida, [*genita ex revolutione spatiorum DCKBG, MCKBN, cCKBb, CKB,*] ut (h) radii basium [*DG MN, cb, CB*], eorum differentiae [*nempe solida genita a portionibus DMNG,*

Fig. 139.

h *ex cor. praeced.*

NG, *McbN*, *cCBb*, *CKB*] ſunt, ut differentiae talium radiorum [*nempe EH*, *HL*, *LI*, *IA*], quae hic ſunt aequales.

IV. Quod ſi totum ſpatium ex integra Hyperbola, & utroque infinito aſymptoto contentum revolvatur circa unam aſymptoton, nempe AOQPDCK circa AB, erit hoc magnitudinis infinitae, quippe in ipſa infinita aſymptoto AOQ infinitae partes aequales ipſis AI, IL &c. deſignari poſſunt, quibus totidem correſpondebunt infinitae portiones huius ſolidi, invicem (a) aequales.

a ex cor. praeced.

FINIS.