= 12 =

ANDREÆ TACQUET

SOCIETATIS JESU

ELEMENTA EUCLIDEA

GEOMETRIÆ

PLANÆ, AC SOLIDÆ;

ET SELECTA

EX ARCHIMEDE

THEOREMATA:

EJUSDEMQUE

TRIGONOMETRIA PLANA.

Plurimis Corollariis, Notis, ac Schematibus
quadraginta illuſtrata

A GUILIELMO WHISTON.

Quibus nunc primum accedunt

Trigonometria Sphærica ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH S.J.
& Sectiones Conicæ GUIDONIS GRANDI, Annotationibus
ſatis amplis OCTAVIANI CAMETI explicatæ.

TOMUS PRIMUS.

ROMÆ, MDCCXLV.

Sumtibus VENANTII MONALDINI Bibliopolæ in Via Curſus.

Typis HIERONYMI MAINARDI in Platea Agonali.

Superiorum facultate.

JO: BAPTISTÆ
RESTA
VIRO CLARISSIMO.

VENANTIUS MONALDINI

FELICITATEM.

SIMUL atque animum ad hoc opus recudendum institui, illius Patronus, ac Auspex ut esses, tot inter, qui litterarum gloria pollent maxime, ſpectavi continuo te, ac minime fluctuans deſignavi. Singularis enim ille tuus in litteras amor, qui & Te ad inſignem illam Bibliothecam magnis ſumptibus, ac tanto delectu conficiendam incendit, & facit, ut præſtantioribus diſciplinis perfectus comparatam ſcientiam in commune conferas, pomeridianiſque quotidie horis univerſis conſulentibus commodes, Eximium te adeo Litterariam rem procurantibus fecit, ut cujuſcumque generis opera certatim Tibi ſtudeant nuncupare, & debitum quaſi vectigal reſtituto Mecænati pendere. Aureum ſane illud ſæculum, quo ille florebat, egregio hoc tuo ingenio Nobis revolvis, efficiſque, ut redivivum ſpectemus illum in Te, admiremurque. Tu enim exquiſitioribus cujuſcumque generis doctrinis auctus ita es, ut novis ardeas augeri magis, & irrequietus sitias perpetuo majores. Et cum sitim explere desperes jam, quæris undequaque solicitus, qui similitudine votorum, aut ardoris multiplicitate eam vel lenire, vel fallere saltem queant. Quis propterea aliqua scientia eruditus, qui non Te comi, gratiosoque utatur, quis aliqua liberali arte præstans evulgo assurgit, quem non recipias, foveas, spe, favore ad majora audenda non incites, quis demum exemplis tuis actus studiorum semitam ingreditur, qui Te adjutorem, ductorem, monstratorem non experiatur. Habes sane illud omnino, quod ille habebat, ut cuicumque litterato viro, Consilio, re, doctrina juveris, prosisque. Cur igitur tuo devota nomini hæc Euclidea elementa non inſcribam, cum iſta communibus cum aliis operibus, hoc potius nomen obtineant, quod per ea ad illam ſcientiam ſit aditus, quæ te plurimum delectat, & in quam proſpere ita progreſſus es, ut ad ſecretiores, quo pauciſſimis iter pervium eſt, Matheſeos receſſus penetraveris? Pace tua hic dicam, nec modeſtiæ tuæ conatibus, quos mihi opponis, concedam: Te ita hac ſcientia eminere, ut præ hac, in alias, quibus tamen præſtas, excurrere ſolummodo videare. Hac uteris plurimum, hanc in deliciis habes, huic induſtria, re, cura aſſeclas conficis, quos omni officiorum genere devincis. Cum ad ſelectiores cujuſque ſcientiæ libros comparandos nullis ſumtibus parcas, in iis, qui Matheſim

ſpe-

ſpectant, effuſus es. Hos, & verſas manu diurna, atque nocturna, & aliis verſandos tanto juvandi ſtudio tribuis, ut reconditiora loca illis revelare, & in partem ſuorum ſtudiorum venire ſoleas perſæpe. Ingenio hujuſcemodi conformes mores intueor. Credo equidem proclivem jam voluntatem induxeris ad hos facilius tuam, quod, cum Matheſis perpetua veritate objecta intellectum undequaque premat, urgeatque, veſtigium in veritate facere primum illexerit, & mox ad illam ſolum ſpectandam (a quo puncto virtutes omnes ducuntur) Te facilem adduxerit. Hinc illi ſuaviſſimi mores, hinc ille æquus in utraque fortuna ſemper animus, pronuſque, faciliſque in omnium ſolatium, hinc denique ille virtutum concentus, quo carus civibus tuis æque, ac alienis vel remotioribus effectus es, ac evasisti. Sed quid ego ingredior, ac me in altum, unde redire haud facile queam, projicio? Revoco jam ipse me, ac Te Vir clarissime obtestor, ut donum hoc qualecumque ea, qua soles, suavitate, ac gratia, suscipias. Quod si, ut eo utaris, locus jam nullus illi est in tua Bibliotheca, erit sane, quo locos identidem recognoscas, unde incredibilem illam vim scientiæ hausisti, & quos in tot mirabiles, & aliis hactenus inaccessos usus flexisti. Gaudet & rude donatus arenam percurrere, ac sæpe premere otiosus, quæ uberrimus illi palmarum campus fuit.

VENANTIUS MONALDINI

LECTORI.

Jampridem intelleximus desiderari a Tyronibus Matheseos studiosis Geometrica Tacqueti Elementa, simulque collectas Guidonis Grandi sectiones conicas. Utriusque libri ea fuit apud Geometras existimatio, ut inter varia Geometriæ & Sectionum conicarum elementa, hæc Tyronibus vel maxime laudaverint; & hinc factum est, ut repetitis licet eorum editionibus, cito tamen horumce librorum penuria laboratum fuerit. Quid in præcedentibus editionibus factum sit, ex præfationibus annexis intelliget LECTOR, *quid novi in hac editione præstiterimus paucis declarabimus. Quod Geometriæ elementa & Archimedis Theoremata spectat, levissima dumtaxat additamenta reperientur. At cum audiverimus mancam esse & mutilam, quæ Tacqueti elementis adjuncta est, trigonometriam sphæricam,*

nec

nec demonſtrationum robore firmatam, hanc partem omiſimus; Nihil enim Tyronibus offerri debet, quod ſevere demonſtratum non ſit. Ut autem difficili & quæ Tyronum ingenia torquere ſolet, doctrina non careat Lector, *accurata alia Trigonometriæ Elementa ſubſtituimus; idque eo libentius fecimus, quod a Viris in Matheſi verſatis accepimus hanc trigonometriam ſphæricam nihil fere plus difficultatis habere quam ipſa habet Trigonometria plana. Ea autem Authorem habet doctiſſimum Virum Rogerium J. Boſchovich S. J. in Collegio Romano Matheſeos profeſſorem, qui ſuæ in rebus Mathematicis doctrinæ publica ſæpe dedit teſtimonia. Audivimus quoque ſectiones conicas P. Grandi licet geometrico rigore munitas, aliquando tamen ſubobſcuras eſſe. Hinc annotationes ſatis amplas huic operi adjunximus, & ut Tyronibus nihil difficultatis & negotii ſupereſſet, ipſas Euclidis propoſitiones ab Autore fere ſemper omiſſas citavimus, & eo quidem ordine quo leguntur in Elementis Tacqueti, itaut eas alibi quærere neceſſe non ſit. Ad Tyronum utilitatem adornatæ fuerunt annotationes illæ a D. P. Cameti*

meti ex Valombrosianorum familia, ut appellant, viro in hisce rebus probe versato, & Florentiæ Physico Matheseos professore. In hac autem nova editione exequenda suam nobis benigne commodarunt operam PP. Franciscus Jacquier & Thomas Leseur ex Minimorum Familia, quorum nomina celebribus tot doctrinæ publicis monumentis ita sunt posteritati universæ commendata, ut ex hac posita nobis gratiosissima opera plurimum nostræ editioni decoris, ac luminis, nullum illorum famæ sit accessurum incrementum. Quod vero nostrum erat nulli labori pepercimus, ut editio illa a mendis repurgata, & venustis typis, papyro, ac accuratissimis tabulis ornata prodiret.

PRÆ-

PRÆFATIO.

CUM apud nos decretum esset Elementa Geometriæ Euclidea juxta V. Cl. Andreæ Tacquet editionem recudere, dedi operam ut quam emendatissime, nec sine auctariis e novo nostro Typographeo prodirent. Atque equidem Editio hæcce Tacquetiana, quam haud immerito elegantissimam *vocat nostræ professionis Pater Cl. Barrovius, præ aliis mihi semper visa est, & explicandi facilitate, & demonstrandi perspicuitate reliquis palmam præripuisse. Neque aliam fuisse Doctiorum de eadem sententiam, publicus Geometrarum usus suadere videtur. Vix aliam enim Elementorum Euclideorum formam sæpius impressam, aut manibus frequentius tritam videre licet. Quin & illa quoque ad accurandam hanc præ reliquis editionem, quam integram hic damus, animos addiderunt, quod & præcipua Archimedis, Geometræ plane summi, de Sphæra, Cono, atque Cylindro Theoremata, auro quovis cariora ad calcem exhiberet; & in reliquis Editoris nostri operibus Mathematicis, eruditissimis sane, & ad usum Tyronum scientias hasce proprio Marte aggredientium optime accommodatis, passim citata extaret. Defuerunt quidem, aut mihi saltem defuisse visa sunt etiam in optimis hisce elementis nonnulla, quæ si haberentur, discentibus essent haud parum emolumenti allatura. Nempe* *pe in secundo libro methodum demonstrandi incipientibus paulo difficiliorem: In quinto proportionum doctrinam in se facillimam per ambages nimias expositam; Atque etiam ob corollariorum practicorum defectum, Elementa nimis abstracta, gracilia, & tædii plena causabar. Quocirca omnia ad incudem revocare, & quæ desiderari posse videbantur supplere, in animum induxi. Secundi itaque libri demonstrationes plerasque tum rectangulorum constructione, tum exemplis numericis illustravi; Doctrinam de proportione, quam quintus liber complectitur, summatim, & brevissime exposui: Et quod in nostro opere, & in universo hoc studiorum genere palmarium reor, varios propositionum* Usus *sive theoreticos, sive practicos, (faciliores nimirum, & quales discentium captui essent accommodi) condimenti instar, atque incitamenti haud raro apposui. Quæ cum ita sint, fas sit sperare Elementa Geometrica jam tandem, etiam ordine Euclideo non mutato, & facilitate, & usu ita fore comparata, ut Elementi aliis novo ordine atque methodo demonstrandis non sit opus futurum. Minime enim placet eorum ratio; quia prima Geometriæ elementa alibi quam apud Euclidem, quem solum tamquam unicum Elementorum Conditorem citant ubique Mathematicorum libri, & bis mille annorum usus satis commendat, quæsitum eunt. Hisce quidem perlectis, atque in succum & sanguinem versis, pergant ulterius Tyrones quoquo patet Matheseos Campus, quaqua ducit Neotericorum solertia, in plerisque*

sane

ſane longe feliciſſima: ſed Duce, atque Auſpice Euclide pergant. Juvat antiquos exquirere fontes: & *ingens erit moræ, operæque pretium calculo analytico, indiviſibilium methodo, Infinitorum Arithmeticæ, & noviſſimæ fluxionum doctrinæ Conſtructionem Veterum Geometrarum Syntheticam, tamquam Scientiarum Mathematicarum baſim inconcuſſam, præſtaviſſe & prælibaſſe*.

Sciat autem Lector, me Corollaria iſta, quibus uſus propoſitionum continentur, e celeberrimis Elementorum ſcriptoribus, De Chales, Barrovio, Pardies, Sturmio, ex ipſo etiam Tacqueto alibi, atque e Geometrarum Principe Iſaaco Nevvton, quem honoris etiam cauſa nomino, potiſſimum mutuo accepiſſe; perpauca enim quæ de penu proprio profero, digna non ſunt quæ ſeorſim memorentur. Quæ vero de Elementis a Cl. Domino de Chales editis depromſi, cum haud pauca ſint, ſine lineolis ſeparatricibus cernuntur; reliqua vero hujuſmodi vinculis [ ] *includuntur; ita tamen univerſa, ut quæ Tacqueto noſtro aliunde accedunt, characteris diverſitate ubique dignoſci poſſint*.

Cuiquam autem auctor eſſe nollem, ut librum integrum ſimul & ſemel ſibi perlegendum imponat: In ſecundo enim libro, probationibus & illuſtrationibus noſtris contentus eſſe poteſt, prima ſaltem vice: & in libro quinto, e Monito noſtro ad Tyrones, *generalium de proportionalibus ratiocinandi modorum probe memor, ad Librum ſextum illico accedat; quem ſane ſi tum nequeat intelligere, cauſam non dicam quin*

pro-

propositiones libri 5. particulares prius omissas repetat. Quæ etiam circa Paradoxorum de contactus Angulo solutionem post prop. 16. lib. 3. afferuntur, cum ad Elementa non pertineant, neque ita solida videantur, tuto omitti poterunt. Reliqua autem omnia (nisi forte nonnullas axiomatum sua luce clarissimorum demonstrationes minus necessarias exceperis) digna sunt omnino quæ non tantum legantur, & firmiter memoriæ atque animis infixa habeant; tamquam Scientiæ inter humanas longe præstantissimæ & certissimæ principia vere Aurea, & numquam satis laudanda; quibus quidem ducibus non tantum Geometria, sed & Physica etiam, & Astronomia extra Syderum Solisque vias in immensum creverunt, & etiamnum crescunt; dum scientiæ hujus Parentes Exæquat Victoria Cælo.

Scribebam Cantabrigiæ III. Calendarum Martii A. D. 1703.

P. V. MUSSCHENBROEK

SUIS

AUDITORIBUS

S. D.

INter eos, qui Elementa Euclidis Mathematica suis demonstrationibus illustrarunt, haud mediocrem meruit deportavitque laudem Cel: ANDREAS TACQUETUS; suffragia approbantia adeo unanimia fuerunt, ut aliquoties in diversis Europæ locis ejus commentarii typis mandati sint; nec miror eos quam plurimum placuisse, eminet enim in omnibus demonstrationibus, tam directis, quam quæ ad absurdum ducunt, magna perspicuitas & amabilis brevitas, ut fere nihil melius exspectari posse videatur: utramque probandi methodum directam & indirectam, Auctor sapienter retinuit, ut tyrones assuescerent methodis veterum Geometrarum omnibus; tum ut hæc Elementa inservirent loco Logicæ ad docendum varios ratiocinii & demonstrationis modos. Quæcumque in Euclideis minus utilia, aut nimis prolixa sunt, omisit; ubi utiliora addi posse judicavit, Corollaria & Scholia egregia adjunxit: hinc si palmam omnibus non eripuisse, saltem cum optimis de ea certasse censeri potest. Quamobrem dignam hæc Elementa censuit GUIL. VVHISTONUS, quæ ornaret suis lucubrationibus & eruditis commenmentariis; hi, ut & ipſum opus, quamplurimum placuerunt Orbi Mathematico, ut intra anguſtum temporis ſpatium typis excuſi ſint tribus vicibus in Britannia, hoc tempore diſciplinas Mathematicas ferventiſſime colente, & merito de ſummis in hiſce Viris gloriante. Deerant in noſtra regione exemplaria, ſæpiuſque dolui VOS hoc præſtanti opere deſtitui, idcirco conſului P. Coupio, Bibliopolæ diligenti, ut juxta ultimo editum Brittanicum exemplar hoc opus Tacquetianum typis iterum mandaret; nec defuit, curans ut nitidiſſime prodiret, correctum ſatis accurate a ſphalmatibus, & ornatum figuris æri inciſis melioribus, quam in omnibus antecedentibus impreſſionibus. Veſtros in uſus A. A. elegi hunc Auctorem potiſſimum; qui, præterquam quod Doctiſſimi VVHISTONI opera fulget, non tantum hæret in ſex prioribus Libris Euclidis, quemadmodum Commentatores plurimi; ſed ea, quæ fundamenta Planorum & Solidorum ſpectant, addidit; quæque ab aliis nonniſi longis exhibita demonſtrationibus, ſolita ſua brevitate ac facilitate explicuit, ut abſque tædio legi, abſque difficultate res ſubtiles intelligi poſſint. Poſteriora æque Vobis ſcitu neceſſaria quam priora: omnia enim cum didiceritis, apti demum eſtis ad Philoſophiam Mathematicam cum fructu intelligendam; qua alioquin ignaro Matheſeos nihil obſcurior, perito nihil clarius dici poteſt. Nolui huic Libro aliquid adjicere ex meo penu deſumptum, ne in opus Clavianum excreſcat, tum quia me viva voce explicantem variis hæc Elementa modis, & plurima inſerentem audire ſoletis. Addita fuit huic editioni TRIGONOMETRIA PLANA noſtri Auctoris, brevis quidem, ſed clara, ſufficiens ad omnia intelligenda, quæ in Geo-

DE EDITIONE TERTIA CANTABRIGIENSI

MONITUM.

EDitionem hanc Euclidis Elementorum juxta Cl. Tacquetum, quo Tyronum usibus accommodatior atque instructior prodiret, quantum fieri posset perspicuam, & explicatam dare serio adlaboratum est. Theoremata bene multa novis demonstrationibus muniuntur: alia, quibus eæ penitus deerant, iisdem suppeditantur. Corollariis ac scholiis sparsim insertis, fulciuntur demonstrationes inde subsecutæ, ut iis sua firmitas & evidentiæ vis fortius ac melius constet. Propositionum complurium, quas usui quasi vix futuras omiserat Tacquetus, non paucæ revocatæ sunt; atque eorum Auctori postliminio restitutæ. Additamenta quibus Vir Cl. Guilelmus Vvhistonus Editionem primam adornaverat, persæpe ulterius transponuntur, ne propositione aliqua viderentur niti, quæ demonstrata non fuisset. Theorematum demonstrationes, ubique nimium breves visæ sint, aut adamussim non constructæ, supplementis inditis pleniores, Tyronibusque (ut spero) faciliores redduntur. Nonnulla afferuntur, quæ maxima ex parte, ab inclytis Geometris, magni nominis Viris decerpta sunt, ut inde instructior evadat hisce studiis prosequendis, quicumque ad veram Philosophiam tendit iter.

Hortandus est Matheseos studiosus; ut Elementis Geometriæ Analyticam adjungat praxin. Hinc ei in disciplina tam sublimi felicius progredi, & cum illa familiarius versari licebit; imo & in ejusdem recessus abditos intimaque penetralia ei tandem introire fas erit.

Dabam XIII. Kal. April. Anno Dom. 1722.

Ο' ΘΕΟΣ Γεωμετρεῖ.

TU autem, DOMINE, quantus es Geometra? Quum enim hæc ſcientia nullos terminos habeat; cum in ſempiternum novorum theorematum inventioni locus relinquatur, etiam penes humanum ingenium, TU uno hæc omnia intuitu perſpecta habes, abſque catena conſequentiarum, abſque tædio demonſtrationum. Ad cetera pene nihil facere poteſt intellectus noſter; & tamquam brutorum phantaſia videtur non niſi incerta quædam ſomniare, unde in iis quot ſunt homines, tot exiſtunt fere ſententiæ: in his conſpiratur ab omnibus, in his humanum ingenium ſe poſſe, aliquid imo ingens aliquid & mirificum viſum eſt, ut nihil magis mirum; quod enim in ceteris pene ineptum, in hoc efficax, ſedulum, proſperum, &c. Te igitur vel ex hac re amare gaudeo; TE ſuſpicere, atque illum diem deſiderare ſuſpiriis fortibus, in quo purgata mente & claro oculo non hæc ſolum omnia abſque hac ſucceſſiva & laborioſa imaginandi cura, verum multo plura & majora, ex Tua bonitate, & immenſiſſima ſanctiſſimaque Benignitate conſpicere & ſcire concedetur, &c.

Cl. Barrovii verba Apollonio ſuo præfixa.

SI-

SIGNORUM

Quorum frequens usus est in additionibus

EXPLICATIO.

$=$ *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ denotat quantitates a & b æquales esse.

$+$ *Signum additionis*. Sic $a + b$ denotat summam quantitatum a & b.

$-$ *Signum subductionis*. Sic $a - b$ denotat excessum quantitatis a supra b.

o *Signum nihili*. Sic $a - b = 0$ denotat a *minus* b (sive excessum ipsius a supra b) æquari nihilo; & proinde quantitates a, b esse inter se æquales.

$\times$ *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ denotat productum ex quantitatibus a, b in se invicem multiplicatis.

Quandoque etiam quantitates productum efficientes, absque signo interposito conjunguntur. Sic AqB denotat productum ex multiplicatione quautitatis Aq per quantitatem B. (Et sic quoque apud ipsum Tacquetum (*schol. p.36. l. 11.*) ABC denotat solidum ex rectarum A, B, C *multiplicatione* continua productum. Aliquando tamen, Tacquetus quantitates *addendas* absque signo interposito conjungit. Sic in demonstr. p.24. l.5. AI denotat summam quantitatum A & I)

Sit quantitas A dividenda per B: Quotiens sic $\left(\frac{A}{B}\right)$ notatur.

Et similiter, $\frac{7}{4}$ est quotiens numeri 7 per 4 divisi, sive $1\frac{3}{4}$. Et cujuslibet fractionis (ut $\frac{1}{3}$) numerator (1) pro dividendo, denominator (3) pro divisore habendus est, & ipsa fractio ($\frac{1}{3}$) pro quoto.

$::$ *Signum rationum æqualium*. Sic $A : B :: \alpha : \beta$, (vel $A : B :: \alpha : \beta$) denotat eamdem esse rationem inter A & B, ac inter α & β.

$\div\!\div$ *Signum proportionis continuæ*, Sic $A, B, C \div\!\div$ denotat A esse ad B, ut B est ad C.

q *Signum quadrati*. Sic CBq denotat quadratum lateris CB.

c *Signum cubi*. Sic *Ac* est cubus lateris *A*.

$\sqrt{}$ *Signum radicis quadraticæ*. Sic $\sqrt{5}$ est radix quadratica numeri 5; & $\sqrt{A+B}$ est radix quadratica summæ quantitatum *A* & *B*. Hoc est, si area quadrati sit 5, vel $A + B$; ejusdem latus quodlibet per $\sqrt{5}$, vel $\sqrt{A+B}$ denotabitur.

$\sqrt{}$ c *Signum radicis cubicæ*: Sic $\sqrt{}$ c5 est radix cubica numeri 5: Et $\sqrt{}$ c*AqE* est radix cubica quantitatis *AqE*; hoc est, si supponatur cubus solido *AqE* æqualis, erit $\sqrt{}$ c*AqE* linea recta, lateri ejusdem cubi æqualis; quæ nempe in sui ipsius quadratum ducta, ipsum cubum generat.

AMI-

AMICE LECTOR.

CUM multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ in hisce locis penuria laboratum esset, visum denique est ad usum studiosæ juventutis, cujus gratia hunc laborem qualemcumque suscepi, novam editionem adornare; in qua quid præstitum sit, paucis accipe.

1. In primis Geometriæ planæ ac solidæ elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) semper in planis tyrones hæreant; sed ab his transeant ad solida; quorum summe necessaria cognitio est.

2. Propositionum hypothesibus & assertionibus litteras, parenthesi inclusas, quibus ad figuram referri possint, apposui: quod eo consilio feci, ne ante demonstrationem, iterum explicanda assertio, adeoque idem bis repetendum esset: & tamen litteris a reliquo sensu parenthesi separatis, sua assertioni universalitas constaret. Assertionem igitur conveniet legere primum litteris prætermissis; tum si non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.

3. Propositiones aliquas prætermisi, quarum fere vel nullus usus est, aut certe non alius, quam ut per eas demonstrentur aliæ, quas sine illis faciliori via poteram demonstrare. Eosdem tamen propositionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque servo, quem bis mille annorum usus probavit.

4. Demonstrationes vel novas affero, vel anti-

quas breviores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodest. Ea siquidem tardiores & hebetiores non juvat, subtilibus autem & ingeniosis molesta est.

5. Quamvis autem brevis esse studuero, existimavi tamen, me a proposito non recedere, si ea adderem, quæ Geometriam discere volentibus futura usui videbantur. Itaque corollaria & scholia adjunxi non pauca, quæ usu longo didici in elementis desiderari. Geometriæ practicæ fontes indico suis locis. Tum si quid illustre ad rem occurreret, non omisi. Varia deinde in quibus laboratum huc usque fuit, vel explicare, vel demonstrare conatus sum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonstratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, sed theorema est, & quidem non nisi difficulter ac longo circuitu demonstrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones solent; disposui ad eum fere modum, quo jam analistæ scribunt æquationes suas. Quem si exacte tenere voluissem, fuisset quidem res brevior; sed minus, ut arbitror tyronibus accommodata.

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torsere omnes, solvuntur.

9. In quinto libro, proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, satis spinosam, efficere planiorem conatus sum. Itaque primum proportionum elementa faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus libri sextam definitionem, qua proportionum æqualitas per multiplices explicatur, ostendi non definitionem esse, sed theorema, & quidem

quidem difficile & perobſcurum; cujus etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus a nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclideas quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis forte illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſigno ac demonſtro indicium univerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſem, ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremo de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo; ac in primis demonſtro axioma illud percelebre ſeu potius theorema, proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometria fuit deſideratum.

10. Librum duodecimum, cujus difficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, alia via pluſquam decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide ejuſque commentatoribus contulerit, deprehendet.

11. In libris quarto, ſexto, undecimo præſtantur ea quæ univerſim ſupra indicavimus.

12. Denique ſelecta ex Archimede theoremata, alia ſimiliter ac breviori via demonſtrata, adjunxi; eximiamque illius de cylindro ac ſphæra doctrinam poſtremis tredecim propoſitionibus adjectis, ampliavi, quibus inter cetera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quam in ſuperficie continuari. Euclidi, porro Archimedea illa ſubnexui; non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque uſu eximia ſunt; tum deinde, ut Geometriæ can-

didatus intelligat, cum maximi Geometræ inventa admiranda assequi sese viderit, nihil in Mathesi futurum tam subtile vel arduum, quod his instructus elementis percipere non possit.

Tu hæc habe; & si placuerint, lege, ac disce; inventurus in his principia nobilissimæ, & forte omnium antiquissimæ scientiæ; quod ostendit tibi, quam subnecto.

HI-

HISTORICA
NARRATIO
De Ortu & Progressu Matheseos.

MATHEMATUM elementa tradituro, visum est de illorum origine ac præstantia præfari quædam ut intelligant Matheseos candidati, cujusmodi ea scientia sit, cui se consecraturi sunt; & planum fiat adversus eos, qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis sint hæ disciplinæ, quas omnium ætatum sapientissimi viri incredibili studio sibi putaverint comparandas. Usui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda, Petri Rami diligentia, qui scholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Historiam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliisque accurate copioseque conscripsit.

Prima hominum scientia Mathesis fuit, si Josepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. scripsit Sethi nepotes Cœlorum ordinem ac Siderum cursus observasse. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus universalem mundi interitum fore prædixisset, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique sua inventa inscripserunt, ut si lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea superstes hominibus discendi copiam faceret, & quæ inscripta continebat, spectanda exhiberet. Aiunt autem lapideam illam ab ipsis dedicatam, quæ & nostris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides esto.

Post

Post diluvium primos mortalium Assyrios & Caldæos Mathemata coluisse tradunt idem Josephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Assyria ad Ægyptios translatæ sunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo jubente ex patrio solo in Palæstinam, ac deinde in Ægyptum profectus esset, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi studio, atque indole ad dicendum egregia esse, ut apud eumdem Josephum est lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Astronomiamque, quam præcedere Geometriam necesse fuit, communicavit. Quibus deinde studiis adeo Ægyptii floruere, ut Aristoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto a sacerdotibus publica vacatione fretis inventas esse.

Exinde Mathesis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philosophos pervenit: Thales enim Milesius, qui ante Christum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum venisset, Geometriam inde in Græciam transtulit. Is sane præter alia, primi libri propositiones 5. 15. 26. invenit. Eidem debentur 2. 3. 4. 5. l. 4. cujus inventi lætitia elatus bovem immolasse dicitur. Idem Æquinoctia & Solstitia observare cœpit, Laertio teste; & Solis eclipsim, ut scribunt Hippias, & Aristoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipsim Lunæ Regi Cyro prænunciasse. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ scientiæ parens atque Auctor fuit.

Post hunc Pythagoras Samius ille Philosophorum antiquissimus, Mathematicas disciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit; ut omnis prope illi ratio philosophandi ex numeris duceretur. Geometriam vero,

ut

ut refert Laertius, a materia abstraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32. 44. 47. 48. lib. 1. Sed in primis ob inventas 32. & 47. lib. 1. celebratur, & hujus quidem inventionis lætitia tanta affectus est, ut teste Apollodoro apud Laertium, Hecatombem immolarit. Idem incommensurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Astrologiam, & Musicam impense & docuit & exercuit. Neque solum acute & subtiliter multa invenit, sed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honestas tamque nobiles artes addisceret.

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius secuti sunt, quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adolescentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum descriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quamdam scriptam indicat Aristoteles; & ex Laertio accepimus ostensum ab eo Solem Peloponneso majorem (nota Astronomiæ incunabula.) eumdemque de habitationibus in Luna nonnulla disputasse. Oenopidi adscribit Proclus 12. & 23. lib. 1. Hos excepere Briso, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Aristotele reprehensi pariter & celebrati; Sed hos inter longe clarissimus Hippocrates fuit, ille e mercatore Philosophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales, quam viam ut singularem & unicam omnis posteritas amplexa est. Illius etiam illa propria & magna laus est, quod Proclo teste, elementa primus scripserit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philosophia solum, sed etiam in Mathesi admirabilis fuit. Ejus tum Physica, tum

tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt invidia (ut quidam ferunt) Aristotelis, sua unius scripta cupientis legi. Democriti Philosophiam Petrus Gassendus eruditissimo opere nuper edito instauravit. Theodorus Cyrenæus, licet ejus inventa Mathematica non extant, vel eo nomine magnus est, quod Platonis Magister fuisse memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius splendorem majorem attulit Mathematicis disciplinis. Ille Geometriam maximis accessionibus ampliavit, studio incredibili in eam collocato. Et in primis reperta est ab eo Analysis, certissima inveniendi & ratiocinandi via. Philosophiæ suæ libros, Mathematicis rationibus distinxit, ac quicquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philosophia esset, excitavit. Academiæ foribus inscriptum legebatur; οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω: *nullus Geometriæ expers accedito*: illustri sane argumento quam non aliena sed propria, quamque non inutilis, vel indecora, sed honesta & commoda Mathesis, sanæ certæque Philosophiæ sit. Quantus certe Plato Matheseos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget; qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares a Proclo commemorantur, quorum studiis Mathematica sit absoluta. Hinc Leodamas Thasius, Archytas Tarentinus, Theætetus Atheniensis; a quibus Mathemata egregie sunt amplificata. Leodamas Analysim a Platone acceptam exercuit, ejusque ope invenisse multa a Laertio dicitur. Theætetum tum inventa sua, inter quæ Elementa ab eo scripta & regularium corporum inscriptio celebrantur, illustrem faciunt,

tum

tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos uſus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti * Dædalus aliique artifices, fabulis Poetarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis, copiis civium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quam inventis ſuis. Leon ſane Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit, & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudoxus Cnidius ſuperiorum æqualis, in Arithmeticis magnus, & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei quintum librum debemus; Elementa item conſcripſit; & generaliora effecit; & ſectiones a Platone inchoatas auxit; inſuper Aſtronomicarum hypotheſium primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſupra Archytas, ad organicam, ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracleotes & Menæchmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Medmæus, omnes Platonici Geometriam multo perfectiorem reddiderunt. Et Menæchmus quidem ſectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt univerſaliora & auctiora. Atqui hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt

Error: multis enim ſæculis poſt Dædalum floruit Archytas.

duxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Aristotelis magister, ipseque Aristoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cum auditor quidam esse vellet Geometriæ imperitus, Abi, inquit, ansas enim Philosophiæ non habes.

De Aristotele vero quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis sunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Aristotelis schola duo præcipue celebrantur, Eudemus, & Theophrastus. Hic scripsit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum: Ille historiam Mathematicam condidit: ex quo Proclus aliique sua mutuati sunt; Aristæo, Isidoro, Hypsicli, Geometris subtilissimis, solidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonstravitque accuratius, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus instituitur. Obiit anno ante Christum 284. Euclidem secuti sunt centum fere post annis Eratosthenes & Archimedes. Eratosthenis clarum in primis nomen fuit: sed ejus scripta periere (*quamplurima, sed non omnia*) Archimedis habemus multa, multa amisimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quemdam humanæ subtilitatis, totiusque Mathematicæ disciplinæ absolutionem animo concipio. Ejus inventa admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique: Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Astronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno sequitur Apollonius Pergæus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor (*imo septem*)

Co-

Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14.& 15.ab Hypſicle contracti. Hipparcus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo, hic 6. ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili & neceſſario non parva utrique laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ utiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum (*Iſidorum, atque Hypſiclem*) excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolemæus, Aſtronomorum princeps, vir plane mirabilis, ſupraque (inquit * Plinius) naturam mortalium. Is vero non Aſtronomiæ tantum, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6. Hipparchi vero 12. ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem (*& Appollonium*) commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tamquam eccellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tam in Mechanicis quam in Geometricis excellens ingenium fuit, Cubi certe duplicatio ab eo tradita, a Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera a Vitruvio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmeti-

* *Error: Plinius enim Ptolemæo ætate prior erat.*

metica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Appollonius, Euclides: vere totius numericæ subtilitatis magister; a quo reperta sit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hisce temporibus a Francisco Vieta, & Renato Cartesio multo perfectior & universalior effecta est. Reliqui inter veteres celebrantur Nichomachus Arithmeticis, Geometricis, Musicis clarus monimentis; Serenus binis de cylindri (*& coni*) sectione libris, Geometris notissimus; Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus, ex doctissimis ejus in Euclidem commentariis, aliisque scriptis manifestum est. Atque hic, opinor, ille est, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, sub annum Christi 514. Vitaliani classem Constantinopolim obsidentis, optico speculorum artificio combussit.* Theonis laudes vere magnas mirabiliter exagerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adscripsere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus; neque ullo solido nixus fundamento, hic audiendus non erit. ut finis aliquando sit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres (*fere*) postremus, ut qui vixerit circa annum 400. sed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypsiclem, Ctesibium, & Diophantum protulerat secunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Matheseos dedit. Scripsit collectionum Mathematicarum

* *Duos ejusdem nominis male confundit Tacquetus: Proclus enim Lycius, quamplurimis in Philosophia ac Mathesi scriptis clarus, anno Christi 485. e vita decessit, ac proinde diversus est ab illo Proclo, qui Anastasio imperante Vitaliani classem incendit.*

carum libros septem † a quibus duo primi perierunt *, Reliqui quinque § tam multis abundant, tamque variis, ex omni prope genere Mathematum nobilissimis inventis, ut inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus censeantur.

Habetis originis ac progressionis Mathematicæ historiam brevem. Ex qua Matheseos antiquitas, præstantia, ac dignitas apparet. Sane Reip. litterariæ Principes iidem qui Philosophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas sorores partu velut uno, quas qui distrahere ab invicem violenter velit, næ ille in nativam illarum concordiam, cum insigni injuria crudelis sit; quando quod fieri in gemellis solet, uno vel loco vel morte sublato, languere, quin & contabescere alterum necesse sit.

† *Octo saltem*. * *Aut in Bibliothecis delitescunt*. § *Sex*.

RE-

REIMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Sacri Palatii Apostolici Magistro

F. M. De Rubeis Archiep. Tarsi Vicesger.

REIMPRIMATUR,

Fr. Aloysius Nicolaus Ridolfi Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apostolici Magister.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMUS.

Scientiæ proprium munus est, ex notionibus quibusdam simplicissimis, rationali naturæ a conditore DEO impressis, elicere aliquid, quod prius ignorabatur, atque inde rursum aliud ex alio; ut prior cognitio semper ad ulteriorem sit gradus. Quæ ratio si accurate teneatur, ex minimis & per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque scientiæ, præ omnibus amplexæ sunt eæ disciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione versantur, quo fructu id factum sit, sciunt omnes, qui hisce studiis imbuti sunt. Et sane Geometria (ut de aliis Matheseos partibus jam nihil dicam) mirum est, quam brevi ex apertissimis ad obscurissima trahat, & ex humillimis ad altissima statim assurgat. Statuuntur prima simplicissima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus dissentire possit. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex iis infallibili ratiocinio non sit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano sensu & cognitione remota, incredibili certitudine ac evidentia innotescunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis derivatur, sunt tria; *Definitiones, Postulata, Axiomata.*

Voluit autem Euclides in primo *hoc elementorum suorum libro prima* Geometriæ *principia exponere. Quod ut ordine fieret,* Definitiones, *sive vocum usitatissimarum explicationem præmittit: hisce vero* Postulata *superaddit nonnulla, ab omnibus sanæ mentis facile concedenda. Postea* Axiomatis *illis clarissimis quibus, natura atque ratione ducibus, non possumus non assentiri omnes, propositis,* Demonstrationes *sive argumenta infallibilia ubique adhibet, ut veritatum Mathematicarum fidem vel a pervicacissimo Adversario, maximeque invito extorqueat. In primis autem de* Lineis, *variisque quos illæ concurrendo formant* Angulis *tractat: & propositionibus primis 8. de* Triangulis *planis agit: simulque* Angulorum *planorum naturam explicat, Post propositiones istas,* Angulos Li-

A nea-

neasque *bisecandi*, & Perpendicula *sive excitandi, sive demittendi methodum ostendit. Deinde vero alias* Triangulorum, *quin &* linearum *æquidistantium sive* Parallelarum *affectiones aperit. Hisce vero peractis, Quadrilaterorum, & speciatim* Parallelogrammorum *proprietates considerat; ostenditque qua ratione* Polygona, *sive figuræ multangulæ & irregulares ad rectangula, aut parallelogramma, aut etiam triangula, figuras nimirum magis notas atque regulares, reduci queant. Postremo autem agmen claudit celeberrimum illud Theorema Pytagoricum, ejusque conversum*: In omni Triangulo Rectangulo Quadratum Lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse duobus simul reliquorum laterum quadratis. Et, si quadratum unius lateris æquetur duobus simul reliquorum laterum quadratis, angulum illi lateri oppositum rectum esse.

DEFINITIONES.

1. PUnctum est signum in magnitudine individuum.

Hoc est, quod dividi ne cogitatione quidem possit.

Punctum omnis magnitudinis quasi principium est, sicut unitas numeri.

2. Linea est magnitudo tantum longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini sunt puncta.

Fig. 1. Tabula 1. 4. Recta linea est, quæ ex æquo suis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea est minima linearum eosdem terminos habentium; sive est omnium brevissima, quæ inter duo puncta duci possunt.

Vel ut Plato: Recta linea est, cujus extrema obumbrant omnia media. (*Oculo nimirum in ipsa linea producta posito.*) Unus omnium sensus est.

Instrumentum, quo rectæ lineæ describuntur, regula est: quæ utrum recta sit, hoc examine licebit cognoscere.

Juxta regulam describatur linea; tum regulam inversam, sic ut extremitas prius dextra jam sit sinistra, rursum applica lineæ prius descriptæ: si plane cum illa congruat, recta est regula; si non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies est magnitudo tantum longa & lata.

Duas ergo habet dimensiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema sunt lineæ.

7. Planum, sive superficies plana est, quæ ex æquo inter suas extremas lineas jacet.

Vel

Vel ut Hero: Superficies plana est, cujus omnibus partibus recta linea accommodari potest.

Generatur enim superficies plana ex fluxu lineæ rectæ. (*Nimirum ex fluxu directo lineæ rectæ: alias enim fieri potest ut linea recta describat etiam superficiem curvam.*)

Vel, Plana superficies est, cujus extrema obumbrant omnia media. (*Oculo nimirum in ipsa superficie producta posito.*)

Vel, Plana superficies est minima omnium eosdem terminos habentium. Idem sensus est omnium.

Non definivit hic corpus, sive solidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem desideret; Corpus est magnitudo longa, lata & profunda. Tres igitur dimensiones habet corpus, superficies duas, lineam unam, punctum nullum.

8. Angulus planus est duarum linearum, in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A se mutuo tangentes in A, sic ut non existant sibi mutuo in directum; hoc est, non efficiant unam lineam. Fig. 2., 4.

9. Latera seu crura anguli, sunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli est punctum (A) in quo crura sibi mutuo occurrunt. Fig. 2., 4.

Cum angulus est unicus, una littera ad verticem posita designatur: Cum plures ad unum punctum existunt, designatur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam subinde unica lateribus prope verticem interposita. Sic in figura 5. angulus, qui fit a lineis B A, C A, designatur vel litteris tribus BAC, vel unica O. Fig. 5.

11. Anguli æquales, (vel potius similes) dicuntur; si, cum sibi invicem vertices imponuntur, latera unius congruant lateribus alterius. Ad hoc non requiritur, ut latera sint æque longa. Fig. 2., 3.

12. Inæquales, (seu dissimiles) dicuntur anguli, cum vertice & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. Sic angulus BAE major est angulo BAC, (*Hanc autem & præcedentem def. de angulis rectilineis intellige. Vide def. 13.*) Fig. 5.

Angulus non minuitur vel augetur, licet crura minuas vel augeas.

Porro, quia anguli natura in linearum inclinatione consistit, inclinatio autem linearum quantitas non est, neque angulus ullus quantitas erit. Et sane eodem jure curvitas esset quantitas, quo angulus, cum ab invicem non magis

magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliisque Geometris angulos æquales esse dicemus, nihil aliud, quam inclinationum similitudo, hoc est, laterum congruentia indicabitur. Vide, quæ de hac re plenius dicturi sumus post propositionem 16. l.3. (*Iacquetus hoc loco minus accurate de angulo disserere videtur. Angulus quidem non est* quantitas, *sed tamen* quantus *est, hoc est,* augeri *potest, vel* minui. *Duæ enim lineæ rectæ in puncto concurrentes,* plures *vel* pauciores *gradus divaricationis a se invicem habere possunt, adeoque & angulum* majorem *vel* minorem *constituere. Unde in definitionib.15. & 16. angulus ille* obtusus *appellatur, qui recto* major *est; atque* acutus, *qui recto* minor. *Angulus igitur quantitatis capax est, & alteri cuivis angulo proprie æqualis, aut inæqualis esse dicetur. Eodem jure etiam curvitas est quantitatis capax, cum una quævis linea (vel superficies) a linea recta (vel superficie plana) magis aut minus recedere, hoc est, magis aut minus curva possit esse quam altera.*)

V.p.77.

Fig.2., 4. 13. Angulus rectilineus est, quem rectæ lineæ efficiunt; curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta & curva. (*Sed vide quæ ad coroll. post prop.16. lib.3. adjecimus.*)

Fig.6. 14. Cum recta (CA) super rectam (BF) consistens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (CAB & CAF,) rectus est uterque æqualium angulorum: Recta autem (CA) alteri insistens dicitur perpendicularis, seu perpendiculum.

Angulus rectus sic etiam definiri potest.

Fig.6. Rectus angulus is est (BAC,) cui a parte altera æqualis oritur (CAF,) si unum latus (BA) produxeris.

Duæ regulæ sic compactæ, ut angulum rectum contineant, instrumentum efficiunt, quod Norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius c.2. l.9 affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis est in rebus omnibus construendis, dimetiendis, formandis & firmandis, ut nihil fere effici sine illo possit. Normæ Examen sic instituitur: In quavis recta BF, sumpto puncto A, Normæ latus AE applica rectæ lineæ AF, & juxta latus alterum describatur recta CA; conversa deinde Norma versus B, si utroque latere congruat rectis CA, AB, scito esse legitimam & exactam. Ratio patet ex ipsa def.14.

Fig.7. 15. Obtusus angulus est (BAC,) qui recto (FAC) major est.

Fig.8. 16. Acutus angulus est (LAI) qui recto (EAI) minor est.

17. Fi-

17. Figura plana, est superficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.

18. Circulus est plana superficies, unius lineæ circuitu comprehensa, quæ circumferentia dicitur, a qua, ad aliquod punctum intra contentum (A,) omnes quæ duci possunt rectæ lineæ, sunt æquales. Fig. 9. Fig. 9.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

20. Diameter circuli est recta per centrum ducta (B C,) ad circumferentiam utrimque terminata, & circulum bifariam dividens; [*ut ex omnimoda semicirculorum sibi invicem superimpositorum congruentia abunde liquet.*]

21. Semidiameter, sive radius, est recta (A F,) ex centro ad circumferentiam ducta. Fig. 9.

22. Semicirculus est figura (BLC) comprehensa a diametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.) Fig. 9.

Circulus ita generatur: Si recta linea (A B) uno extremo suo (A) manente fixo, in orbem circumagatur; recta ipsa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Fig. 9.

Porro mira circuli indoles vel in ipso exortu suo apparet. Ad ejus namque genesim contraria concurrunt, motus & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quiescit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos absolvant, diversa celeritate moventur. Tertio peripheria circulum ambiens constat quodammodo ex contrariis, & extremis sine medio; ex concavo nimirum & convexo, inter quæ rectum ita medium est, ut æquale inter majus & minus; idque eo mirabilius est, quod ea contraria insint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Aristoteli visa sunt admiranda, ex quo illa deprompsimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in dissertatione Phisico-Mathematica, quam una cum Cylindricis & Annularibus in lucem emisimus anno 1652. Isthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri solent in 360. æquales partes (quas gradus vocant ob multas illius numeri commoditates: semicircumferentiam in 180 quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, est superficies plana, rectis lineis undique terminata.

24. Triangulum, sive trilaterum, est plana superficies tribus rectis comprehensa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac simplicissima est, in quam ceteræ omnes resolvuntur.

25. Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet æqualia. Fig 10.

26. Triangulum Isosceles, seu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia. Fig. 11. 12

Fig. 13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig. 13. 28. Rectangulum triangulum est, quod unum angulum habet rectum.

Fig. 12. 29. Obtusangulum triangulum est, quod unum angulum habet obtusum.

Fig. 10. 11 30. Acutangulum triangulum est, quod tres habet acutos angulos.

Fig. 14. 15 31. Inter figuras quadrilateras, rectangulum est, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales, sive latera æqualia sint, sive non.

Fig. 15. 32. Quadratum est, quod æquilaterum, & rectangulum est, ac proinde æquiangulum.

Omne quadratum est rectangulum, sed non contra.

Fig. 16. 33. Rhombus est, qui æquilaterus, sed non æquiangulus est.

Fig. 17. 34. Rhomboides, quæ adversa latera & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula est.

Fig. 14. 15 16., 17. 35. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera (A B, F C, & B F, A C) sunt parallela. Quid vero sint parallelæ, dicetur seq. defin.

Omne rectangulum & quadratum est parallelogrammum ut suo loco demonstrabitur; sed non contra.

Fig. 18. 36. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes sunt, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum protractæ, æqualibus semper intervallis inter se distant.

Æqualia intervalla desumuntur penes perpendiculares. Quare si omnes ad unam ex duabus parallelam A B perpendiculares Q L, æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, si recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B semper perpendiculariter moveatur: tunc enim ejus extremum L describit parallelam C F.

Euclides definit parallelas esse rectas lineas, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ, quæ simul in infinitum productæ, licet ad se mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non sint parallelæ, numquam tamen concurrant, (cujusmodi sunt Hyperbola & recta linea, conchois, & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eumdem axem descriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per se notum esse, duas rectas, licet numquam concurrant, fore semper æquali intervallo dissitas, hoc est æquidistantes: posset enim quispiam objicere, fieri fortassis posse, ut etiam ipsæ, licet ad se mutuo semper appropinquarent, tamen numquam concurrerent.

Quare

Quare Euclideà definitio parallelismi naturàm non satis explicat. (*At non necesse est, ut definitio Mathematica naturam rei definitæ explicet: est enim definitio nominis, non rei. Cum igitur Euclides eas rectas lineas nominaverit parallelas, quæ in eodem plano existentes, utrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt; & cum semper postea in hoc sensu parallelas usurpaverit; cum denique eas definiverit per proprietatem ejusmodi, quæ nullis rectis nisi vere parallelis seu æquidistantibus convenit, non video quo jure culpari possit.*)

37. Parallelogrammi & cujusvis quadrilateri diameter, (*sive diagonalis*,) est recta (AF) per angulos oppositos ducta. Fig. 17.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus quam quatuor comprehensæ, multilateræ, seu multangulæ, seu Græca voce, polygonæ vocantur.

39. Rectilineæ figuræ externus angulus est, qui latere producto extra figuram oritur. Tales sunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura quælibet habet externos angulos, quot latera, & angulos internos. Fig. 19.

(40. *Quando linea vel angulus vel figura quævis* bisecari *vel* bifariam secari *dicitur; intellige illorum quodvis in duas æquales partes esse divisum: Item* trisecari, *vel* trifariam secari *dicitur id, quod in tres partes æquales dividitur; atque ita porro.*)

Postulata.

Postulatum est, quod facile fieri posse per se sit manifestum. Postuletur ergo ut concedatur.

1. A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam, in directum & continuum protendere.

3. Quovis centro ad quodvis intervallum circulum describere.

Axiomata.

Axioma est sententia per se manifesta.

1. Quæ eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Et, quod uno quovis æqualium majus aut minus est, majus quoque aut minus est altero æqualium.

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejusdem (*vel æqualium*) dimidia sunt, inter se sunt æqualia: & quæ ejusdem (*vel æqualium* (sunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter se æqualia sunt. (*Item, inæqualium dimidia; vel dupla, tripla, &c. inæqualia erunt.*]

7 Quæ mutuo sibi congruunt æqualia sunt.

Non recte Clavius hoc Axioma convertit. Falsum est enim, eà quæ universim inter se æqualia sunt, sibi mutuo congruere: Dissimiles enim magnitudines possunt esse æquales, neque tamen congruunt. Quod si similes & æquales fuerint, valebit conversa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, sibi mutuo congruent; & anguli (*rectilinei*) si æquales fuerint, sibi mutuo congruent. (*Et si circuli æquales fuerint: sibi mutuo congruent; & si ejusdem circuli, vel æqualium circulorum arcus fuerint æquales, sibi mutuo congruent arcus isti: Aut si quadrata, vel aliæ quæcumque figuræ similes æquales fuerint, sibi mutuo congruent.*)

9. Totum sua parte majus est: (*æquale autem est omnibus partibus suis simul sumptis.*)

10. Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

Fig.20. Euclidis axioma undecimum est: Si in duas rectas (A B, CF) incidens recta (GI) angulos ad eamdem partem interiores (BLQ. FQL) fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ si protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam spectant anguli duobus rectis minores. Hoc vero non est clarius illo, quod Prop. demum 29. Euclides ipse demonstrat: videlicet, si anguli (B L Q, F Q L) fuerint duobus rectis æquales, rectæ (A B, C F) numquam concurrent. Quare axioma illud e principiorum numero cum Gemino & Proclo, aliisque Geometris rejecimus; est enim non axioma, sed theorema, idque demonstrabimus post

Ex defin. 36. Propositionem 31. hujus libri. Ejus loco alia duo sequentia substituo, quorum veritas ex definitione parallelismi statim apparet. Esto igitur axioma.

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur. Hoc est, recta, quæ ad parallelarum unam est perpendicularis, est quoque perpendicularis ad alteram.

Fig.21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales utrimque intercipiunt partes (LI, OQ.)

(*Euclidis axioma undecimum (proprietatibus parallelismi demonstrandis inserviens,) cuilibet perpendenti satis manifestum videtur. Quia vero Tacqueto libuit Euclideam Parallelarum*

larum Definitionem loco movere, eique novam subrogare, æquum erat ut in Axiomatis hujus Euclide locum, nova etiam axiomata duo, definitioni suæ Parallelarum magis accommoda substitueret.)

13. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

Ad hoc siquidem opus est ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere segmentum commune: & omnes rectæ punctualiter se intersecant.

Rectæ AX occurrat recta ZD. ea si producatur non perget per DA, sed in E, sic ut rectam XA non nisi punctualiter intersecet. Axioma ex notione ipsa rectæ lineæ evidentissimum est (*Imo vero ex ipsa definitione lineæ, quæ magnitudo tantum longa est, absque latitudine, satis patet omnes omnium linearum, sive rectarum, sive curvarum, sive denique rectæ & curvæ intersectiones, puncta esse.*) Fig. 22.

Tamen quia nonnulli tam subtiliter philosophantur, ut credant rectas lineas, aliqua sui parte commisceri posse, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AX, AZ partem communem AD. Centro A describatur circulus, secans rectas in B & C. tum accipiatur arcus BF æqualis arcui BC, & intelligatur ducta esse recta FA.

Rectæ igitur CA & FA eumdem prorsus situm habent respectu rectæ BA. Sed recta CA cum recta BA habere dicitur commune segmentum DA: ergo etiam recta FA habet cum BA commune segmentum DA.

Tres jam igitur rectæ CA, BA, FA commune DA segmentum habent.

Sumatur rursum arcus FG æqualis prioribus BF, & CB, & intelligatur ducta esse recta GA. Rursum liquet rectas BA, GA, eumdem habere situm respectu rectæ FA. Sed jam ostensum est rectam BA habere cum recta FA commune segmentum DA. Ergo etiam recta GA cum FA commune habet segmentum DA.

Jam ergo rectæ quatuor CA, BA, GA, FA commune DA segmentum habent. Eodem prorsus modo ostendam, si per totam circuli circumferentiam sumantur arcus prioribus æquales, omnes simul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune segmentum DA. Hoc tam immane absurdum sequitur ex eo, quod ponerentur binæ rectæ CA, BA habere segmentum commune. Impossibile est igitur ut duæ rectæ segmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in scholis argumenti, quo demonstratur magnitudinem ex punctis omni-

omnino indivisibilibus numero finitis componi non posse: & est ejusmodi. Constent, si fieri potest, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum descriptæ intelligantur quotcumque circumferentiæ circulares, & ponatur extima seu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus singulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum est, rectas illas nusquam commisceri, nisi in centro solo. Quare dum omnes medias peripherias pertranseunt, in iis æque multa designant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis constant, ac proinde omnes inter se æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta descripta, æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonstrationibus hic error obruitur. Sed unam illam hoc loco attuli præ ceteris, quod passim sit decantata, & ex præsenti axiomate immediate pendeat.

(15. *Æqualium circulorum diametri erunt æquales; ut & eorum semidiametri sive radii æquales erunt. Et, si duorum circulorum radii (aut diametri) æquales fuerint, circuli erunt æquales. Idem puta de æqualium quadratorum lateribus & diametris; aut de quarumcumque figurarum similium & æqualium lateribus & diametris*(a)*homologis: & conversim, ex æqualitate homologorum laterum aut diametrorum, concludes figurarum similium æqualitatem.*

[a] Vide def 11. l. 5 & def. 1. l. 6.

16. *Porro etiam, majoris circuli diameter major est, minoris minor: & vicissim. Idem puta de quadratorum inæqualium lateribus aut diametris; necnon de figurarum quarumcumque similium, & inæqualium lateribus & diametris homologis: & vicissim.*)

Propositionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in sola contemplatione sistunt, quæ idcirco Theoremata inscribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requisitæ reperiuntur ad marginem. Cum citantur propositiones, primus numerus designat propositionem, littera (*l*) cum numero sequenti librum denotat: ut si occurrat (*per 5. l. 3.*) ita leges; (per propositionem quintam libri tertii.) Figura quærenda semper est inter figuras ejus libri, in quo tum versamur: citationes reliquæ facile intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulorum & parallelogrammorum. Propositiones illustriores sunt 32, 35, 37, 41, 44, 45, 47.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Super data recta (AB) triangulum æquilaterum constituere. Fig. 23.

Centro A, intervallo AB (*a*) describatur circulus FCB; & centro B, intervallo eodem BA describatur circulus ACL, priorem secans in puncto C, ex quo ducantur rectæ CA, CB. (a) Per postul. 3.

Dico triangulum ACB factum esse æquilaterum. Nam recta AC est (*b*) æqualis rectæ AB, cum sint ejusdem circuli FCB semidiametri; & recta BC etiam æqualis est eidem rectæ BA, cum ambæ sint semidiametri circuli LCA. Ergo AC, BC (*c*) sunt æquales inter se: ac proinde omnia latera trianguli sunt æqualia. Ergo triangulum ACB & (*d*) æquilaterum est, & super data recta AB constitutum, quod erat faciendum. (b) Per def. 18. (c) Per axio 1. (d) Per def. 25.

PROPOSITIO II.

Ad datum punctum (A) datæ rectæ (EF) æqualem ponere. Fig. 24.

Accipe circino (*e*) intervallum EF, & transfer ex A in D erit recta AD par datæ EF. (e) Postul. 3.

PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis inæqualibus, de majore (GH) minori (EF) parem auferre (GI.) Fig. 24.

Accipe circino (*f*) intervallum minoris datæ EF, & transfer in majorem ex G in I. (f) Postul. 3

PROPOSITIO IV.

Si duorum triangulorum (X, Z) latus unum (BA) uni (FL) & alterum (CA) alteri (IL) sit æquale, angulique (A & L) ab illis lateribus facti, etiam sint æquales, æquabuntur etiam & bases (BC, FI,) & tota triangula (X, Z,) & reliqui ad basim anguli (B, F & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur. Fig. 25.

Nam

Nam si intelligamus triangulum Z triangulo X superpo-
(a) Per axio. 8. ni, latera LF, LI perfecte congruent (a) sibi æqualibus lateribus AB, AC, sic ut puncta tria L, F, I, cadant supra tria puncta A, B, C. Ergo tum etiam basis FI tota cadet supra totam basim BC. Sed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula sibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Fig. 25. Simili fere ratiocinio, theorema sequens, cujus mox erit usus, licebit demonstrare.

Si duorum triangulorum X, Z, latera BC, FI æqualia fuerint & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B & C ipsis F & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa, æqualia erunt.

(b) Per axio. 8. Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F & I, si latus FI imponas lateri sibi æquali BC, illi (b) congruet. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C, et-
(c) Per axio. 8. iam (c) FL cadet supra BA, & IL supra CA. Ergo etiam punctum L incidet in punctum A; (si enim caderet extra A, latera FL, IL non inciderent in latera BA, CA.) Ergo omnia sunt per axioma 7. æqualia.

PROPOSITIO V.

Fig. 26. *Trianguli Isoscelis seu æquicruris ad basim anguli (A, C) æquales sunt.*

Intelligatur triangulum ABC bis positum; sed situ converso *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *cba*, ex hypothesi æquale est latus AB, lateri *cb*, & latus CB lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam (*d*) ad basim angu-
(d) Per 4. l. 1. lus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonstrandum. Iidem enim sunt anguli C & *c*.

Corollarium.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI in triangulo (ABC) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiam latera (AB, BC) iis opposita, æqualia erunt. Fig. 26.

Intelligatur triangulum ABC bis positum, sed situ converso *cba*. Quoniam igitur in duobus triangulis ABC, *cba* æquatur latus unum AC uni lateri *ca*, & angulus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia (*a*) erunt æqualia, ac proinde latus AB æquabitur lateri *cb*; quod erat demonstrandum. Eædem enim sunt lineæ CB & *cb*.

(a) Per Schol. prop. 4.

Corollarium.

ÆQuiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum est.

PROPOSITIO VII.

EST propter 8. quæ sine illa seorsim proposita demonstrabitur.

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula (X, Z) (vel Y, Y) habuerint omnia latera sibi mutuo æqualia (AC ipsi EF; CB ipsi FI, AB ipsi EI;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos habebunt æquales (C ipsi F; A ipsi E; B ipsi I.) Fig. 27.

Ponatur enim latus AB supra sibi æquale EI, (*ita ut punctum A coincidat cum E, ac B cum I, & reliqua latera cadant ad eamdem partem rectæ AB, vel EI.*) Tum vero punctum C, vel incidet in punctum F vel non. Si incidat (*b*) æquales erunt. *Cadet vero punctum C in punctum F. Nam*

(b) Per axio. 7.

Centro E, semidiametro EF, describatur circulus; & centro I, semidiametro IF, describatur circulus, punctum C ob latera

tera æqualia erit in circuli utriusque circumferentia, atque adeo in utriusque circumferentiæ communi interfectione F. Q. E. D.

Fig. 28. Si C cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypothesim latera EF, AC æquantur, erit (*a*) angulus EFC par angulo ECF. Ergo IFC major erit quam ECF. Ergo IFC multo major erit quam ICF. Rursum, quia per hypothesim IF, BC æquantur, erit ICF (*b*) par IFC. Ergo IFC, & multo major est quam ICF, & æqualis, quod est impossibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo, &c.

(a) Per 5. l. 1.

(b) Per 5. l. 1.

Plures casus, quos hoc theorema admittit, consulto prætermisi, ne tyrones fatigarem. Neque vero difficulter eorum demonstratio ex demonstratione jam posita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29. D*Atum angulum rectilineum* (*IAL*) *bifariam secare*.

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B ac C describe duos æquales circulos se secantes in F, ducaturque recta FA. Hæc angulum bisecabit.

Ducantur enim BF, CF; triangula FAB, FAC sunt sibi mutuo æquilatera; nam latera AB, AC ex constitutione æqualia sunt, & latera BF, CF, quia (*c*) æqualium circulorum semidiametri, etiam æquantur: & AF utrique triangulo commune est. Ergo anguli BAF, CAF (*d*) æquales sunt. Bisectus (*e*) est ergo datus angulus IAL, quod erat faciendum.

(*c*) Per axio. 15.

(d) Per 8. l. 1.

(e) Per def. 40.

Corollarium.

HInc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos 4, 8, 16. &c. singulas nimirum partes iterum bisecando.

Scholium.

MEthodum secandi angulos in æquales quotcumque, circino, & regula hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen, & Archimede habemus curvas quasdam lineas, quadratricem videlicet, & spiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli trisectio perficitur a Pappo l. 4. prop. 31. præsidio hyperboles, quod etiam obtineri potest ope parabolæ, vel conchoidis.

Mecha-

Mechanice datum angulum in quotcumque secabis æquales angulos, si ex anguli vertice A tamquam centro intra anguli crura arcum describas, eumque dividas in quot placuerit æquales partes; rectæ enim ex A per divisionum puncta emissæ, angulum secabunt in partes totidem æquales. Fig. 30.

PROPOSITIO X.

D*Atam rectam finitam (A B) secare bifariam.* Fig. 31.

Super data AB fac triangulum æquilaterum (a) AGB, (*vel etiam isosceles æqualium crurum AG, BG*) Angulum ejus G (b) biseca per rectam G C. Eadem bisecabit rectam AB datam. [a] Per 1. l. 1. (b) Per præced.

Nam in triangulis X, Z, latus CG est commune, & per constructionem GB, GA æqualia, angulique iis contenti AGC, BGC æquales. Ergo bases AC, BC (c) æquantur. Bisecta (d] est ergo data AB. Quod erat faciendum. (c) Per 4. l. 1. (d) Per def. 40.

Pro praxi satis erit centris A & B duos æquales circulos describere, se secantes in G & L, ac ducere rectam GL.

PROPOSITIO XI.

E*X dato puncto (A) in data recta (L I) perpendicularem excitare.* Fig. 32.

Circino cape æquales AC, A F. Centris C & F describe duos æquales circulos se secantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim CB, FB. Triangula X & Z sibi mutuo æquilatera sunt (*propter latus AB commune, latera AC, A F æqualia per constructionem, & latera BC, BF æqualia per axio. 15.*) Ergo anguli CAB, FAB (e) æquales sunt, Ergo BA (f) perpendicularis est. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum. (e) Per 8. l. 1. (f) Per defin. 14.

Praxis tum hujus, quam sequentis expeditur facillime præsidio normæ.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Fig. 33. *EX dato extra rectam infinitam (LQ) puncto (A) perpendicularem ducere.*

Centro A describe circulum, qui secet datam LQ in C & I. Rectam CI biseca (a) recta AB. Ea erit perpendicularis.

Ducantur enim AC, AI, Quoniam per constructionem triangula X & Z sunt sibi mutuo æquilatera; erunt anguli (b) CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis (c) est. Ex dato igitur puncto, &c. Quod erat faciendum.

(a) Per 10. 1.1.
(b) Per 8. 1.1.
(c) Per def. 14.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 34. *REcta (BA) super rectam (CF) consistens, aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.*

Nam si BA insistat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC, BAF utrimque recti. Si vero BA insistat oblique, excitetur (d) perpendicularis AL. Quia tum anguli inæquales CAB, FAB eumdem locum occupant, quem duo recti CAL, LAF, ac proinde iis congruunt, erunt (e) hi illi æquales. Quod erat demonstrandum.

(d) Per 11. 1.1.
(e) Per axio. 7.

Corollaria.

1. EOdem modo demonstrabitur, si plures rectæ quam una, eidem rectæ ad idem punctum insistant, angulos effici duobus rectis æquales.

2. Duæ rectæ se invicem secantes BAC, FAL efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propos. (Fig. 38.)

3. Omnes anguli circa unum punctum constituti, conficiunt, quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. sunt enim quatuor recti in plures partes secti. (Fig. 35.)

PROPOSITIO XIV.

Fig. 36. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem utrimque punctum rectæ QR faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus*

duobus rectis æquales; (XR, ZR) unam rectam efficient.

Si negas, faciant XR, BR, unam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB (*a*) conficient duos rectos, quod (*b*) est absurdum, cum ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant.

(a) Per 13 l.1.

(b) Contra axio. 9.

Coroll. *Hinc in Catoptrica colligimus lucis radium, inter reflectendum, per angulum reflexionis angulo incidentiæ æqualem tendentem, per viam omnium brevissimam ferri. Ubi nempe anguli BED, AEF æquantur, lineæ AE & EB simul sumptæ, lineis quibuscumque, puta AF & FB simul sumptis sunt breviores. A puncto enim B* (c) *demittatur linea perpendicularis BC: & fiant BD & CD æquales: ducantur etiam EC & FC. In triangulis BED & CED, cum latus DE sit utrique commune, & latus BD lateri DC ex constructione æquale, Angulus etiam BDE angulo CDE* (d) *æqualis;* (e) *æquabuntur reliqua omnia; eritque BE æqualis CE, angulusque BED angulo DEC æqualis. Et, si æqualibus BE, CE addatur EA, erit summa linearum BE & EA æqualis summæ linearum CE & EA. Et cum ex hypothesi æquentur anguli BED, AEF; & angulus BED antea ostensus sit æqualis angulo DEC; ergo & angulus AEF æquatur* (f) *angulo DEC; & addito communi angulo DEA, summa angulorum DEA, DEC æquabitur summæ angulorum DEA, AEF. Sed anguli DEA, AEF, conficiunt* (g) *duos rectos. Ergo & anguli DEA, DEC sunt duobus rectis æquales, & proinde (per hanc prop.) lineæ AE, EC unam rectam CA efficiunt, quæ ex ante demonstratis, æquatur summæ rectarum AE & EB.*

Fig. 37.

[c] Per 12 l.1.

(d) Per def. 14.

[e] Per 4. l.1.

(f) Per axio. 1.

[g] Per 13 l.1.

Eodem modo in triangulis BDF, CDF, demonstrabitur æqualitas linearum BF & CF; itemque addito communi AF, ostendetur summam linearum AF & FB, summæ linearum AF & FC æqualem esse. Sed CA, (hoc est, summa linearum AE & EB) minor est, quam summa linearum AF & FC, (hoc est, quam summa linearum AF & FB) per definitionem rectæ lineæ, quæ minima est omnium, quæ inter puncta A & C duci possunt. Ergo lineæ AE & EB simul sumptæ, lineis AF & FB simul sumptis sunt breviores. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

S*I duæ rectæ (BC, FL) se secuerint (in A,) erunt anguli ad verticem (A) oppositi, æquales.*

Fig. 38.

 Nimi-

Nimirum LAB ipsi CAF, & BAF ipsi LAC. Nam quia
[a] Per 13 l. 1. BA insistit rectæ LF, erunt LAB, FAB (*a*) pares duobus
[b] Per eamd. rectis. Et quia FA insistit rectæ BC, erunt (*b*) quoque
FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo (*c*) duo simul LAB,
[c] Per axio. 1. FAB æquantur duobus simul CAF, FAB. Ablato igitur
communi FAB, remanent (*d*) æquales LAB, CAF. Eodem
[d] Per axio. 3 modo ostendam æquales esse BAF, LAC.

Fig. 39. Coroll. *Hinc illi qui sphærulis eburneis & proinde elasticis ludunt, pilam adversariam repercutiendo amovere discant. Sit sphærularum altera impellenda B, altera quæ impellenda est A; Latus vero rectilineare C D: Esto linea B E lineæ C D* (e) *perpendicularis, & sit D E æqualis B D,*
[e] Per 12 l. 1. *& ducatur recta AE secans C D in F, & jungatur B F. Si pila secundum rectam A F E impellatur, ad punctum F ita reflectetur, ut post reflexionem ad B tendat. In triangulis enim B F D, E F D, Latus F D, est utrique commune, & Latus D B lateri D E æquale, & anguli ad D æquales sive recti. Tota itaque triangula* (f) *æquantur: & proin-*
[f] Per 4. l. 1. *de angulus B F D angulo D F E, sive ad verticem opposito*
[g] Per 15 l. 1. (g) *A F C æqualis est. Angulus autem A F C est angulus incidentiæ, & angulus B F D angulus reflectionis: qui cum in omnibus corporum perfecte elasticorum reflectionibus sibi invicem æquentur, liquet pilam A elasticam versus E tendentem, ad pilam B post reflectionem pergere, eamque impellere debere. Q. E. D.*

PROPOSITIO XVI., & XVII.

C*ontinentur in prop.* 32. (Et in ejusdem prop. corollariis demonstrantur.) *Neque ante illam adhibentur.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 40. I*N omni triangulo, angulus (A) major est, qui majori lateri (B O) opponitur: (B) minor, qui minori (AO.)*

Nequit A esse par B, alias (*h*) latera BO, AO æquaren-
[h] Per 6. l. 1. tur, contra hypothesim. Neque etiam A minor esse quam B. Nam si A minor est, B major, poterit intra angulum B, per rectam BF, fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6. æquales erunt B F, A F, & si addas utrique O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor est quam

quam B O. Ergo etiam B F, F O minores ſunt quàm B O, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major; quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIX.

IN omni triangulo, latus (BO) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo: (AO) minus, quod minori (B.) Fig.40.

Eſt converſa prioris. BO non eſt minus quàm AO, alias per 18. angulus A eſſet minor angulo B, contra hyp. Neque etiam B O æquale eſt A O, alias per 5. anguli A, B æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo B O majus eſt quam A O. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo qualibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedi inſtar axiomatis; immediate ſiquidem patet ex definitione Archimedea lineæ rectæ, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

SI a terminis unius lateris (A B) intra triangulum duæ rectæ jungantur (A O. B O,) hæ lateribus trianguli (A C, B C) minores ſunt, majorem vero angulum (A O B) comprehendunt. Fig.41.

1. Pars. Produc A O in F. A C, C F ſunt (*a*) majores quam A F. Addita ergo communi F B, erunt A C, B C majores quam A F, F B. Rurſum O F, B F ſunt (*b*) majores quam O B. Addita ergo communi A O, erunt A F, F B majores quam A O, O B. Ergo A C, C B ſunt multo majores, quam A O, O B.

(a) Per 20 l.1.

(b) Per eamd.

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop.32. Ea interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 42. *EX datis tribus rectis (BO , LB , LO) quarum duæ quælibet reliqua sint majores , triangulum constituere .*

Assumatur datarum una BL , atque una ejus extremitate B accepta pro centro , intervallo alterius datæ B O describatur arcus .

Deinde accepta pro centro extremitate altera L , intervallo tertiæ LO describatur arcus priorem secans in O : ducanturque rectæ BO , LO . Dico factum .

Demonstratio patet ex constructione .

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 42. *AD datum in recta punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A) .*

Ducatur utcumque CF secans latera dati anguli A . In data recta ex B accipe BL parem AF . Centro B intervallo AC describe circulum : item alium centro L intervallo FC qui priorem secet in O . Ex O ad B & L duc rectas .

Erit angulus LBO par dato A .

Nam per constr. triangula sibi mutuo sunt æquilatera . Ergo per 8. anguli B & A sunt æquales .

Fig. 43. Cor. 1. *Hinc lineam inaccessam AB metiri licet . A puncto enim quocumque C observetur angulus ACB , & mensurentur lineæ AC , BC : & in plano quocumque accessibili , ad punctum F , super recta infinita EF , fac angulum angulo C æqualem , & mensurentur lineæ FD , FE , lineis AC & BC respective æquales , & jungatur DE : Erit hæc æqualis lineæ inaccessæ AB . Nam in triangulis ACB , DFE , propter latera AC , CB lateribus DF , FE respective æqualia , & angulum C angulo F æqualem , erit* (a) *basis AB basi DE æqualis .*

(a) Per 4. l. 1.

Fig. 44. Cor. 2. *Hinc etiam alia ratione , Thaletem secuti , lineam inaccessam metiri discimus . Sit linea inaccessa AD , cui ad extremum ejus punctum A* (b) *erigatur perpendicularis AC , & capiatur angulus ACD , eique ex altera parte lineæ AC ,* (c) *æqualis constituatur angulus ACB , &* (d) *producantur DA ,*

(b) Per 11. l. 1.

(c) Per hanc pr.

(d) Per postul. 2.

DA, CB donec concurrant in B. Linea AB accessibilis, erit lineæ inaccessæ AD æqualis. Nam in triangulis ABC, ADC ob CA ipsi BAD perpendicularem, anguli ad A sunt recti, & proinde æquales; & anguli ad C sunt æquales per constr. & latus AC commune. Ergo (a) omnia reliqua erunt æqualia, & latus AB lateri AD æquale erit. (a) Per Schol post p.4.l.1.

Scholium.

IN gratiam tyronum visum est hic nonnulla ad praxim angulorum necessaria proponere.

Anguli mensura est circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tamquam centro describitur, ut patebit ex prop. ultima lib. 6. Fig.45.

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur esse angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus esse graduum 90. Similiter quia duos rectos mensurat dimidia circumferentia in 180. gradus secta, & quatuor rectos circumferentia tota secta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis, praxes angulorum sunt.

1. Ad datum in recta BL punctum B, angulum statuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice, tamquam centro, inter latera, arcum describe CF. Centro B puncto dato, describe eodem intervallo arcum LZ, ex quo aufer LO parem CF. Per B & O duc rectam: erit LBO par dato A. Fig.46.

2. Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facillime per semicirculum corneum transparentem, in 180. gradus divisum. Centrum semicirculi pone supra P verticem anguli, & semicirculi radium PL supra anguli latus PQ. Arcus LO, inter anguli crura interceptus, ostendet quot graduum sit datus angulus. Fig.47.

3. Angulum construere datos continentem gradus 42. duc rectam XQ in qua signa punctum P. Super P pone semicirculi centrum, ejusque semidiametrum PL supra PQ. Ab L numera gradus 42. usque in O. Per O ex P ducta recta dabit angulum OPL graduum 42. Fig.47.

Horum omnium demonstratio pendet ex ultima prop. lib.6.

(Coroll. *Cognito angulo BAF, cognoscitur una ejusdem complementum ad duos rectos CAF. Sit e. gr. angulus BAF graduum 70. erit angulus CAF graduum 110. Numeri* Fig.38.

enim isti simul additi, gradus 180. angulorum rectorum duorum mensuram conficiunt.)

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig.48. *SI duo triangula (B A C, B A F) duo latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) majorem habeat altero (B A C,) habebit quoque basim B F majorem basi (B C)*

Et si basim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

[*Si latera B A, A F (seu B A, A C) sint inæqualia; applicentur ad se invicem latera minora B A. Tum)*

Centro A describe per C circulum; is transibit per F, quia A C, A F ponuntur æquales. Ergo BF cadit (*intra*

(a) Per def.4. (a) *circulum*) supra C; (*hoc est, inter punctum A & punctum C.*) Junge C F. Angulus B C F est major angulo A C F, hoc est, per 5. angulo A F C, hoc est, multo

(b) Per 19 l.1. major angulo B F C. Ergo (*In triangulo B C F,*) (*b*) B F opposita majori angulo B C F, major est quam BC opposita minori B F C.

2. Pars patet ex prima parte & ex propr.4,

(*Angulus enim BAF non est minor angulo BAC; nam*

(c) Per prim.partem hujus. *si ita, basis BF basi BC minor* (c) *esset, contra hypothesim: Sed nec æqualis est angulus BAF angulo BAC; quia si esset, basis BF basi BC* (d) *aquaretur, iterum contra*

(d) Per 4. l.1. *hypotesim. Cum vero angulus B A F angulo B A C nec minor sit, nec æqualis; necesse est ut sit major. Q. E. D.)*

PROPOSITIO XXVI.

Fig.25. *SI duo triangula (X, Z) duos angulos duobus æquales habuerint, alterum alteri, (B ipsi F, & C ipsi I,) & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos existit, (ut B C, F I,) vel quod uni æqualium angulorum opponitur, (ut A C L I:) reliqua omnia erunt æqualia.*

Penan-

Ponantur primo æqualia esse latera BC, FI, inter æquales angulos posita: tum vero reliqua etiam omnia æqualia esse demonstratum est in scholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI, æqualibus angulis B & F opposita, esse æqualia, Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. propr. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua sunt æqualia.

(Scholium. *Quædam hoc loco de perpendiculari in triangulo isoscelio, quæ basim & angulum verticalem bisecat, inserere visum est. Sit ABC triangulum isosceles, cuius vertex A, basis BC, crura æqualia AB, AC. Dico,* Fig. 49.

1. *Si ab angulo verticali A ducatur* (a) *recta AD basi perpendicularis; bisecabit ea tum basim, tum angulum verticalem. In triangulis enim ABD, ACD, propter latera AB, AC invicem* (b) *æqualia, & AD utrique commune, & angulos lateribus æqualibus oppositos etiam æquales, nempe* (c) *B = C, & ADB =* (d) *ADC; omnia reliqua erunt* (e) *æqualia, nempe latus BD lateri DC, & angulus BAD angulo DAC. Quare perpendicularis AD bisecat* (f) *tum basim BC tum angulum verticalem BAC.*

2. *Si recta AD ab angulo verticali ducta bisecet basim, bisecabit etiam angulum verticalem, & basi perpendicularis erit. Cum enim basis BC bisecta sit in D, triangula ABD, ACD erunt sibi mutuo æquilatera, ac* (g) *proinde sibi mutuo æquiangula. Anguli igitur BAD, CAD æquales sunt, atque adeo,* (h) *bisecatur angulus BAC: anguli etiam ad D æquales sunt, ac proinde* (i) *AD est basi perpendicularis.*

3. *Si recta AD angulum verticalem bisecet, illa basim etiam bifariam & perpendiculariter secabit. In triangulis enim BAD, CAD, propter latera BA, AD lateribus CA, AD respective æqualia, & angulos BAD, CAD illis lateribus contentos, etiam æquales;* (k) *erit basis BD basi CD æqualis, & anguli ad D etiam æquales; ergo recta AD basim* (l) *bifariam* & (m) *perpendiculariter secat.*

4. *Si in triangulo isoscelio ABC ducatur recta DE, quæ basim BC bifariam & perpendiculariter secet in D; ea per trianguli verticem A transibit, si enim super DE tamquam axe moveatur pars sinistra EDB trianguli ABC donec parti dextræ EDC superimponatur; sibi mutuo* (n) *congruent æquales anguli recti ad D æqualia latera DB, DC, & æquales anguli B, C. Coincident itaque latera BA, CA, itemque tota triangula BAD, CAD, ac proinde latus DA lateribus BA, CA in uno eodemque puncto A occurrit, hoc est, per verticem A trianguli ABC transit.*

(a) Per 12. l. 1.
(b) Per hypoth.
(c) Per 5. l. 1.
(d) Per def. 14.
(e) Per 26 l. 1.
(f) Per def. 40.
(g) Per 8. l. 1.
(h) Per def. 40.
(i) Per def. 14.
(k) Per 4. l. 1.
(l) Per def. 40.
(m) Per def. 14.
(n) Per axio. 8.

5. Si recta AD a trianguli ABC vertice A in basim BC cadens. eam secet bifariam & perpendiculariter; triangulum ABC erit isosceles, hoc est, crura, AB, AC erunt (a) *æqualia. in triangulis enim ADB, ADC, propter latera AD, DB lateribus AD, DC respective æqualia, angulosque ad D illis lateribus contentos rectos, ac proinde* (b) *æquales, erit etiam latus AB lateri AC* (c) *æquale.*

(a) Per def. 26.
(b) Per def. 14.
(c) Per 4. l. 1.

6. Si recta AD trianguli ABC angulum A bisecans, sit lateri opposito BC perpendicularis; triangulum ABC est isosceles, cujus æqualia latera sunt AB, AC. Nam in triangulis ADB, ADC, propter angulos DAB, DAC æquales, angulos ad D rectos & proinde æquales, ac latus DC inter æquales angulos, utrique commune; erit (d) *latus AB lateri AC æquale.)*

(d) Per 26 l. 1., vel per Schol. p. 4 l. 1.

Fig. 50.

PROPOSITIO XXVII.

SI duas rectas (AB, CF) parallelas secuerit recta (GO:) erunt 1. æquales alterni anguli (RLO, QOL, item BLO, COL.) 2. Externus (GLB) æqualis interno ad eamdem partem (LOF,) (item GLR ipsi LOC.) 3 Duo ad eamdem partem interni simul (ALO, COL) æquales duobus rectis. (item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.)

Fig. 51.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares OR, LQ. Erunt (*e*) hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter se æquales. Æquales quoque (*f*) ex parallelis auferunt partes RL, QO. Ergo triangula X, Z sibi mutuo æquilatera sunt. Ergo (*g*) anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppositi, sunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos BLO, COL æquales esse. Nam quia tam BLO, ALO quam COL, FOL æquantur (*h*) duobus rectis; erunt BLO, ALO æquales ipsis COL, FOL. Ablatis ergo æqualibus RLO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

(e) Per axio. 11.
(f) Per axio. 2.
(g) Per 8. l. 1.
(h) Per 13. l. 1.

2. Pars. GLB æquatur ad verticem (*i*) opposito RLO. Sed RLO æquatur per 1. partem LOF. Ergo GLB externus æquatur interno LOF; quod erat alterum. (*Eodem modo probatur angulum externum GLR angulo interno ad eamdem partem LOC æqualem esse.*

(i) Per 15. l. 1.

3. Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL. Atqui FOL cum COL (k) facit duos rectos. ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos; quod erat tertium. (*Et pari modo, duos angulos BLO, FOL duobus rectis æquales esse patebit.)*

(k) Per 13 l. 1.

Coroll.

Coroll. Hinc, *Eratosthenem imitati, Telluris ambitum metiri discimus. Ille enim observavit Solem Syene, urbi Ægyptiacæ, ipso solstitii æstivi die perpendiculariter impendere: & eodem die gnomonis ope invenit Solem ab Alexandriæ, urbis etiam Ægyptiacæ, sub eodem fere meridiano sitæ, vertice gradus fere septem cum quinta gradus parte distare: atque urbes istas stadia 5000. circiter distare novit: Unde vi præsentis propositionis ambitum terræ hoc modo definivit. Sit A Syene; B Alexandria, ubi gnomon BC erigitur horizonti perpendicularis; Sint DA & CG radii Solares sibi invicem quoad sensum paralleli; DA radius horizonti Syenensi perpendicularis, per F centrum terræ transiens; CG vero radius horizonti Alexandrino obliquus, per gnomonis apicem transiens, & cum gnomone angulum GCF graduum* $7\frac{1}{5}$; *continens. Cum vero angulus GCF æqualis sit angulo alterno AFB, cujus mensura est arcus AB graduum* $7\frac{1}{5}$; *Telluris ambitum hac analogia adinvenit: Ut se habent gradus* $7\frac{1}{5}$ *ad stadia 5000. Ita integer circulus graduum 360 se habebit ad 250000, ambitum telluris iisdem stadiis definiendum. Q.E.I.* Fig. 52.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas (AB, CF) secans recta (GO) alternos angulos (ALO, FOL; æquales fecerit, erunt (AB, CF) parallelæ. Fig. 53.

Si negas, sit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo (*a*) angulus XLO par est alterno FOL; quod fieri non potest, cum per hyp. ALO par sit eidem FOL. [a] Per præc.

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas (AB, CF) secans recta (GO) fecerit externum angulum (GLB) æqualem opposito interno (LOF,) vel duos ad easdem partes internos ALO, COL, pares duobus rectis erunt (AB, CF) parallelæ. Fig. 50. 51

Per 15. GLB æquatur ALO opposito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur sibi alterno LOF. Ergo (*b*) AB, CF sunt parallelæ. (b) Per præced.

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales sunt. Ergo rursum AB, CF (*c*) sunt parallelæ. (c) Per *Corol.* præced.

Corollarium.

Ex secunda parte patet omne rectangulum esse parallelogrammum.

[Scholium. *Tacquetus trium propositionum immediate præcedentium (vid. 27. 28. 29.) ordinem Euclideum immutavit. Quæ enim Euclidi est propr. 29 Tacqueto est 27. quia nempe prima istius propositionis pars (a qua partes duæ reliquæ dependent, e nova sua parallelarum definitione, novisque duobus axiomatis, undecimo & duodecimo statim sequitur, quinetiam prop. 28. Tacquetiana, Euclidi est 27. quia ex Euclidea parallelarum definitione, ejusque axiomate undecimo (quæ ambo rejicit Tacquetus) propositio illa demonstratur. Et proinde, prop. 29. Tacqueti, est Euclidis 28. Hæc monenda duxi, ne forte, perlectis Tacqueti elementis Euclideis, Tyrones aliorum libris mathematicis operam dantes, errorem aliquem causentur, quod Elementi primi propositiones 27., 28., 29. pro Tacquetianis 28., 29., 27. respective, laudare viderint.*)

PROPOSITIO XXX.

Fig. 50. *Si duæ rectæ (AB, CF) sunt parallelæ ad eamdem rectam (DN,) erunt inter se parallelæ.*

Patet per se, & ex præcedentibus. Nam si omnes secentur a recta GO, erit (*a*) angulus externus GLB par interno LDN: est vero LDN externus respectu DOF, ac proinde (*b*) æqualis. Ergo etiam GLB par est LOF. Ergo AB, CF sunt (*c*) parallelæ.

(a) Per 27 l. 1.
(b) Per 27 l. 1.
(c) Per præc.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 54. *Per datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (CF.)*

Ex A ducatur utcumque AL, secans datam FC. Ad punctum A fiat (*d*) angulus LAS par angulo ALF. Erit AS parallela ad CF, ut patet ex 28. cum alterni anguli SAL, FLA sint æquales.

(d) Per 23 l. 1.

Praxis: ducta AL, centro L describe arcum IQ, & centro A eodem intervallo arcum OX; ex quo aufer OB parem IQ. Per A & B ducta recta erit parallela.

De-

Demonstratio pendet ex 29. l.3.

Aliter. Centro quopiam P describe circulum, qui transeat per datum punctum A, & secet datam CF in Q & O. Arcui QA accipe æqualem ON. Recta AN erit parallela. Fig.55.

Demonstratio pendet ex 29. lib. 1. & ex 28. hujus, (*& habetur infra, in Lem. ad prop. 16. Theorematum select ex Archimede.*)

Scholium.

Demonstrata jam igitur est parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides ejusque interpretes assumunt minus recte, cum non sit axioma, sed theorema, cujus veritas non magis per se appareat, quam ipsius 29. propositionis. Quia tamen deinceps sæpius adhibetur, id hoc loco jam facile ex præmissis demonstrabimus.

Theorema.

Si recta (MA) incidens in rectas (BC, AD) faciat angulos internos ad easdem partes (BAD, ABC) duobus rectis minores, rectæ (BC, AD) concurrent versus eam partem, quam spectant anguli duobus rectis minores. Fig.56.

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis sunt minores; fiant CBA, XAB duobus rectis æquales, (*nempe faciendo angulum XAB* (a) *æqualem angulo MBC*;) Eruntque BC, AX (*b*) parallelæ, *& angulus XAB* (c) *major angulo DAB, excessu XAD.*) Assumo tamquam axioma per se notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci posse aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major sit quam AB. Accipiatur ipsi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX sunt parallelæ, erunt (*d*) alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per constr. Ergo etiam (*e*) anguli RZA, XAZ æquales sunt. Ergo RZ est (*f*) parallela ad AX. Sed etiam BC est parallela ad AX. Ergo RZ & BC sunt (*g*) parallelæ. Est igitur BC & parallela ad RZ, & inclusa triangulo ARZ. Ergo cum produci in infinitum possit, necessario occurret aliquando rectæ AZ. Nam neque evadere potest per sibi parallelam RZ, neque pertingere in A, alias duæ rectæ (*vel spatium comprehenderent, vel*) haberent commune segmentum, (*contra axiomata* 13. *&* 14.) Liquet ergo propositum.

(a) Per 23 l.1.
(b) Per 27 l.1.
(c) Per def.12.
(d) Per 27 l.1.
(e) Per 4. l.1
(f) Per 28. l.1.
(g) Per 30 l.1.

Demonstratio Clavii est a parallelis independens, sed prolixissima & multum operosa: Procli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam secans, etiam alteram sectura sit, si producatur. Verum hoc per se notum non est, ob rationem datam def.36.

Corol-

Corollaria.

Fig.56. 1. HInc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def.36. Sint rectæ non parallelæ BC, AD, (*quas recta BA secet in B & A; & ad illam partem ipsius BA, ubi rectæ non parallelæ BC, AD convergunt ad se invicem, per punctum A,*) duc (*a*) AX parallelam ad BC. Erunt anguli XAB, CBA duobus rectis (*b*) æquales. Ergo DAB, CBA sunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonstratum, BC, AD concurrent.

(a) Per 31 l.1.
(b) Per 27 l.1.

(2. *Recta infinita AZ secans rectam AX, secabit quasvis infinitas BC, RZ ipsi AX parallelas. Cum enim ponantur AX, BC parallelæ, seu* (c) *æqualibus intervallis ubique distantes, secetque recta AZ, ipsam AX; ergo AZ, BC inæqualibus intervallis distabunt, & proinde non erunt parallelæ. Quare* (d) *AZ, BC concurrent. Et eodem modo demonstrabitur rectam AZ concurrere cum alia quavis RZ quæ ipsi AX parallela ducitur.*)

(c) Per def.36.
(d) Per part.1.

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig.57. O*Mnis trianguli externus quivis angulus* (*FBC*) *duobus internis oppositis* (*A & C*) *æqualis est.*

Per B duc (*e*) BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC secat FA, erit externus angulus FBL interno A (*f*) æqualis. Et quia easdem parallelas BL, AC secat etiam recta BC, erit LBC sibi alterno C (*g*) æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique simul A & C. Quod erat demonstr.

(e) Per 31. l.1.
(f) Per 27. l.1.
(g) Per eamd.

Corollaria.

Fig.57. 1. EXternus angulus (FBC) quolibet internorum oppositorum A vel C, major est. (*Est prop.16. Euclidis.*)

2. Angulorum (C & AOB) eamdem basim (AB) habentium, major est (AOB) qui intra cadit. (*Est pars secunda prop.21. cujus demonstrationem Tacquetus ad hunc locum rejecerat.*)

Fig.41.

Producatur enim AO in F. AOB per hanc major est quam OFB; & OFB per hanc eamdem major est quam C: Ergo AOB multo major est quam C.

Fig.58. 3. Si ab uno puncto (A) in unam rectam (BC) incidant duæ rectæ, altera (AO) oblique, perpendiculariter vero altera (AF;) hæc cadet versus partes acuti anguli AOB. Cadat enim, si fieri potest, ad partes obtusi anguli AOC,

puta

puta in Q. Igitur acutus AOB erit externus respectu recti (*a*) AQB, ac proinde illo major per coroll. 1. quod est absurdum. (a) Per hypoth.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

O*Mnis trianguli tres simul anguli, duobus rectis sunt æquales.* Fig. 59.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppositis A & C æqualis (*b*) est. Atqui (*c*) FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonstrandum. (b) Per 1. partem hujus - (c) Per 13 l. 1.

Aliter. [*Per angulum Q*] ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quam N, C æquales (*d*) sunt. Sed O, Q, N conficiunt (*e*) duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt: quod erat demonstrandum. Fig. 60. (d) Per 27 l. 1. (e) Per Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. TRes simul anguli cujusvis trianguli (*rectilinei*) æquales sunt tribus simul cujuscumque alterius.

5. Si in triangulo unus rectus (*aut recto major*) est, reliqui sunt acuti. (*& angulus qui lateri non maximo opponitur, semper* (f) *est acutus.*) (f) Per hos cor. & pr. 18 prim.

6. Si in triangulo unus est rectus, reliqui duo simul etiam unum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus est.

8. Cum scitur quot graduum sit unus angulus, scitur etiam quot gradus faciant duo reliqui simul. Et cum scitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum summa, scitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul, æquales sunt duobus angulis aut singulis aut simul in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit. [*Ex hoc corollario, quod a prop. 26. non dependet; demonstratur ejusdem propositionis 26. pars secunda, ut ibi notat Tacquetus. Huc igitur ista propositio referenda est.*)

10. Cum duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum summæ æquantur.

11. Cum

11. Cum in Isoscele angulus æquis cruribus contentus, est
(a) Per cor.6. hujus & p.5. l.1. rectus, reliqui ad basim sunt (*a*) semirecti. Et Isoscelis ad basim anguli semper sunt acuti. (*Et ab Isoscelis vertice, perpendicularis in basim,* (b) *cadit intra triangulum*)

(b) Per Cor.3.hujus. 12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti. Facit enim tertiam partem (*c*) duorum rectorum. Ergo duas tertias unius. (*Cum enim duo recti faciant gradus*
(c) Per hanc, & cor. p. 1. l.1. 180. *erit tertia pars duorum rectorum, sive trianguli æquilateri angulus graduum 60., & proinde continebit duas tertias anguli recti, sive graduum 90.*)

Fig.61. 13. Hinc anguli recti (BAC) facillima trisectio; si super AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum FAC sint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig.58. 14. Perpendicularis (AF) est brevissima omnium, quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci possunt. Quoniam enim angulus F rectus est, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo
(d) Per 29 l.1. (*d*) AF minor quam AO quælibet.

15. Ex uno puncto ad unam rectam tantum una perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Fig.62. 16. *Hinc etiam ex prima parte hujus propositionis astrorum* parallaxin *sive loci* veri *atque* visi *differentiam definire discimus. Sit A Telluris centrum; B Locus Observatoris in ejusdem superficie. Sit DBC angulus astri C a vertice per observationem notus, sive distantia angularis astri a vertice* visa: *Est vero Angulus DAC distantia angularis* vera. *Trianguli autem ABC angulus externus observatione datus DBC, angulis duobus internis oppositis* (e) *BAC & BCA*
(e) Per hanc pr. *æqualis est; Atque adeo angulus BCA est angulorum DBC & DAC differentia. Si itaque angulus A, computatione notus, ex angulo DBC, observatione noto subducatur, differentia angulorum istorum BCA, quam* Parallaxin *dicimus, pariter innotescet. Q. E. I.*

(17. *Liquet etiam e secunda parte hujus prop. Trianguli cujuscumque duos quosvis angulos duobus rectis minores esse; quæ est prop.17. Euclidis a Tacqueto omissa.*

Fig.13. 18. *In triangulo rectangulo scaleno, ille ex angulis acutis, qui laterum angulum rectum comprehendentium majori opponitur, est semirecto major, & qui opponitur minori est semirecto minor. Acuti enim anguli simul sumpti, per cor.6. hujus, angulum rectum conficiunt: Ergo ille qui majori lateri opponitur est* (f) *semirecto major; qui minori, semirecto minor.*

(f) Per 18 l.1. 19. *Hinc turris aut puncti cujusvis elevati altitudinem,*
Fig.63. *umbra solaris ope, metiri licet. Ubi enim Sol gradus 45. supra horizontem elevatur, erunt turrium umbræ in horizontem projectæ, earum altitudini exacte æquales. Ob angulum* enim

enim ABC rectum, & ACB (a) *semirectum; erit angulus BAC semirectus, per cor. 6. hujus. Et cum anguli ad basim AC sint æquales, latera AB, BC æqualia* (b) *erunt. Data itaque mensurando recta BC, datur etiam AB turris altitudo supra horizontem.*

(a) Per Schol. post p. 23. l. 1.
(b) Per 6. l. 1.

20. *Hinc lineam inaccessam AB metiri licet. Triangulum enim æquilaterum quodcumque BDE, puncto suo B ac latere BD, ad lineæ inaccessæ BA punctum B secundum eamdem BA supponatur adjectum: & a puncto B per latus BE, tamquam dioptram, puncta quæcumque in recta BC posita observentur. Removeatur demum triangulum BDE secundum rectam BC hac illac, donec collimando per latus trianguli ED sive CF, punctum A inaccessum, in eadem linea CF producta, positum cernatur; & linea accessibilis BC, lineæ inaccessæ AB æqualis erit. In triangulis enim ABC, DEB, propter angulum B communem, & angulos C, E æquales, (c) erunt etiam anguli A, D æquales. Sed triangulum BDE ex hypothesi est æquilaterum, & proinde (d) æquiangulum: Ergo etiam triangulum BAC est æquiangulum, & proinde (e) æquilaterum. Si itaque lineam accessibilem BC metiamur, lineæ etiam inacessæ BA mensuram habemus.* Fig. 64.

(c) Per cor. 9. hujus.
(d) Per cor. p. 5. l. 1.
[e] Per cor. p. 6. l. 1.

Scholium.

Hujus pulcherrimi, fecundissimique theorematis, cujus per Mathesim universam usus prope immensus, inventor est Pythagoras teste Eudemo veteri Geometra. Frequentissime ejusdem meminit Aristoteles, qui illud etiam exemplum statuit perfectissimæ demonstrationis. Sed quemadmodum ex hac propositione jam didicimus, quot rectis angulis, figuræ trilateræ anguli æquivaleant, ita ejusdem beneficio cujuslibet figuræ rectilineæ sive interni, sive externi anguli, quot rectos conficiant, præclare innotescet tribus sequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Omnis quadranguli quatuor simul anguli efficiunt quatuor rectos. Fig. 65.

Nam si per oppositos angulos ducas rectam BF, hæc quadrangulum in duo triangula secabit, quorum anguli simul conficiunt (*f*) rectos quatuor.

(f) Per 32. l. 1.

Theorema 2.

Omnes simul anguli cujuscumque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot sunt latera figuræ. Fig. 66.

Ex quovis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ secabunt figuram in tot triangula quot habet latera. Quare cum singula triangula (a) conficiant duos rectos, omnia simul conficient bis tot rectos, quot sunt latera. Sed anguli circa punctum A, (b) conficiunt quatuor rectos. Ergo si ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot sunt latera figuræ.

(a) Per 32. l. 1.
(b) Coroll. 3. p. 13. l. 1.

Hinc patet omnes ejusdem speciei rectilineas figuras æquales habere angulorum summas; Quod admiratione dignum est.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: a producto aufer. 4. restabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 67. OMnes simul externi cujuscumque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos.

Nam singuli figuræ interni anguli, cum singulis externis, conficiunt duos (c) rectos. Ergo interni simul omnes cum omnibus simul externis conficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Sed (ut in præced. ostendimus) interni simul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.

(c) Per 13. l. 1.

Mira sane hæc figurarum rectilinearum proprietas est; ex qua illud etiam consequitur, omnes cujuscumque speciei rectilineas figuras, æquales habere externorum angulorum summas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales sunt mille externis angulis figuræ millelateræ: Quæ prorsus admiratione sunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 68. *SI duas rectas æquales & parallelas (AB, CF) jungant duæ aliæ (AC, BF;) erunt etiam illæ æquales & parallelæ.*

Parallelas AB, CF secet AF. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli BAF, CFA (d) æquales. Ponitur autem latus AB æquale lateri CF, & AF utrique triangulo est commune. Ergo (e) bases BF, AC æquantur; (quod erat primum.) Et anguli ad basim AFB, FAC sunt æquales: ac pro-

(d) Per 27. l. 1.
(e) Per 4. l. 1.

proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC æquales. Ergo (*a*) AC, BF sunt etiam parallelæ, Quod erat alterum. (a) Per 28. l. 1.

(Scholium. *Si duas rectas parallelas & inæquales (AB, OC) jungant duæ aliæ (AO, BC;) concurrent tandem istæ jungentes, si ultra parallelarum minorem (OC) satis producantur. Si enim a parallelarum majori BA, capiatur* (b) *BR minori æqualis, & jungatur RO; erunt RO BC* (c) *parallelæ, & anguli ad eamdem partem interni, B, ORB simul sumpti, duobus rectis* (d) *æquales. Sed trianguli ORA externus angulus ORB, uno internorum oppositorum OAR* (e) *major est, & proinde anguli B, OAB simul sumpti, sunt duobus rectis minores, adeoque rectæ AO, BC ultra OC productæ, tandem* (f) *concurrent. Q. E. D.*) Fig. 79. (b) Per 3. l. 1. (c) Per 33. l. 1. (d) Per 27. l. 1. (e) Per cor. 1. pr. 32. l. 1. (f) Per Schol. post pr. 31. l. 1.

PROPOSITIO XXXIV.

P*Arallelogrammi opposita latera & anguli æquantur, ipsumque a diametro bisecatur.* Fig. 68.

Quoniam AB, CF sunt (*g*) parallelæ, in easque incidit AF, erunt alterni BAF, CFA (*h*) æquales. Item quia AC, BF sunt (*i*) parallelæ, in easque incidit AF, erunt (*k*) alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis est. Eodem modo ostendam B & C æquales esse. Quod erat primum. (g) Per def. 35. (h) Per 27. l. 1. (i) Per def. 35. (k) Per 27. l. 1.

Quia vero jam ostendi triangula Q, R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipsi CFA, & CAF ipsi BFA, erunt (*l*) etiam latera AB ipsi FC, & BF ipsi CA, æqualia, itemque ipsa triangula. (l) Per 26. l. 1.

(Cor. 1. *Omne parallelogrammum, ut ACEF, quod unum angulum A rectum habet, erit rectangulum, hoc est, habebit omnes angulos rectos. Nam quia rectas parallelas AF, CE secat recta CA, efficiet angulos A, C, internos ad eamdem partem, duobus rectis* (m) *æquales: Cum vero A sit angulus rectus, etiam C rectus erit: Unde per hanc prop. anguli E, F, angulis A, C respective oppositi erunt quoque recti. Eodem modo constabit parallelogramma, quæ unum angulum uni æqualem habent, esse æquiangula.*) Fig. 71. (m) Per 27. l. 1.

Cor. 2. *Hinc Montium tam altitudines supra horizontem, quam lineas horizontales metiri discimus. Sit ABC latus montis, cui applica ingentem normam, aut quod normæ instar est, ADB, ea ratione, ut latus AD sit horizonti parallelum, & latus DB horizonti perpendiculare; &* (n) *completo parallelogrammo DH, erit (per hanc prop.) latus AD* Fig. 69. (n) Per 31. l. 1.

C *æqua-*

(a) Per 30. l. 1. *æquale rectæ HB, ipsi AD & horizonti* (a) *parallelæ; & DE æquale rectæ AH, eidem DB, ut & horizonti perpendiculari. Applica deinde inferius a puncto B ad punctum C; & completis parallelogrammis EF, BG, erit itidem recta EB æqualis CF, & EC æqualis BF sive HG, prout & BH sive DA æquatur ipsi FG; atque ita porro, Latera horizonti parallela AD, BE, &c. simul addita, dabunt lineam horizontalem GC: & latera perpendicularia BD, EC, &c. simul addita dabunt altitudinem AG.*

Fig. 63. Cor. 3. *Hinc etiam ope quadrantis Astronomici, Turris altitudinem AB invenire licet. Ubi enim elevationis angulus in quadrante est semirectus observatori ad E, fiat DE* (b) Per 31. l. 1. *horizonti perpendicularis, & æqualis oculi observatoris altitudini, & ab oculo D* (b) *ducatur DF ipsi EB parallela,* (c) Per def. 35. & cor. 1. hujus. *eritque BD parallelogrammum* (c) *rectangulum, & latus FB lateri DE, sive altitudini observatoris oculi* (d) *æquale, latus autem DF æquale lateri EB, sive distantiæ observatoris* (d) Per hanc prop. *a turre. Sed in triangulo AFD, propter angulum AFD* (e) (e) Per 27. l. 1. *rectum, & angulum elevationis ADF,* (f) *semirectum, erit* (f) Per hypoth. *& angulus A* (g) *semirectus, & linea DF, seu distantia observatoris a turre,* (h) *æqualis lineæ FA, seu altitudini turris supra observatoris oculum; cui si adjiciatur FB altitudo* (g) Per cor. 6. pr. 32. l. 1. *oculi, habebitur integra turris altitudo AB.*

(h) Per 6. l. 1. Cor. 4. *Hinc denique Geodætæ agri parallelogrammi aream facilius dividunt. Sit enim ABDC ager parallelogrammus;* Fig. 70. *AD ejusdem diameter, sive linea diagonalis, cujus punctum medium signet* (i) *F. Quæcumque linea recta, ut EG, per* (i) Per 10. l. 1. *punctum F transit, agrum in partes æquales EACG, EBDG dividit. Triangulum enim ABD per hanc prop. æquale est triangulo ACD; & Triangulum AEF æquale* (k) *Triangulo* (k) Per 26. l. 1. *GFD (propter æquales* (l) *angulos alternos FAE, FDG,* (l) Per 27. l. 1. *itemque æquales angulos ad verticem* (m) *oppositos AFE, DFG, & latera FA, FD, quæ inter æquales angulos existunt, etiam æqualia.)* (m) Per 15. l. 1. *Si itaque trapezio EBDF, loco trianguli AEF, triangulum eidem æquale GFD addas, areæ quantitatem non mutabis: sed erit trapezium EBDG æquale triangulo ABD, sive dimidio parallelogrammo, & proinde trapezio AEGC æquale. Q. E. D.*

Scholium.

Fig. 71. Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittenda, facile elicitur dimensio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit, ex. gr. AF pe-

dum

dum 8. AC, 4. Duc 8. in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli.

Quadrati vero area habetur ex uno latere FI per ſe ipſum multiplicato: ut ſi latus FI ſit 5. pedum; duc 5. in ſe, proveniunt 25. pedes quadrati pro area quadrati. Fig. 72.

Demonſtratio ex hac prop. patet, ductis per laterum diviſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma ſuper baſi eadem (AB) vel æquali, & inter eaſdem parallelas (CQ, AX) conſtituta, ſunt æqualia. Fig. 73.

Quia AL, BQ (a) ſunt parallelæ, eaſque ſecat CQ; erit (b) externus CLA par interno FQB. Deinde quia tam CF quam LQ æquantur (c) eidem AB, erunt CF, LQ æquales. Adde utriſque FL; erunt totæ CL, FQ æquales. Inſuper & AL, BQ (d) æquales ſunt. Triangula igitur CLA, FQB æqualia (e) ſunt. Ergo ablato communi FOL, plana FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per def. 35.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per 34. l. 1.
(d) Per eamd.
(e) Per 4. l. 1.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. lib. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas, in infinitam longitudinem extendantur ex eadem baſi AB, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam datæ.

(Coroll. *Unde ſequitur duas urbes parallelogrammas magnitudine æquales, in circuitu tantum diſcrepare poſſe, ut unius ambitus centies vel millies alterius ambitum exuperet. Si nimirum altera ſit quadrata vel rectangula; altera vero ſuper eadem cum priore baſi, & intra eaſdem cum priore parallelas, parallelogramma quidem, ſed admodum obliquangula, & proinde in longum protenſa. Sequitur porro iſoperimetras figuras, areas immane quantum diverſas continere poſſe.*)

Scholium.

Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcumque. Illius igitur area producitur ex altitudine QX ſeu CA ducta in baſim AB. Fig. 73.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis (f) ſit (g) ex AC ducta in AB. Ergo, &c.

[f] Per præc.
[g] Per Schol. p. 34. l. 1.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig.74. *TRiangula (ACB, AFB) super basi eadem (AB) vel æquali, & inter easdem parallelas (CI, AZ) constituta, sunt æqualia.*

(a) Per præced. (b) Per 34. l. 1. (c) Per axio. 6.

Lateribus AC, AF duc parallelas BL, BI. Parallelogramma ACLB, AFIB sunt (*a*) æqualia. Sed horum, triangula data (*b*) sunt dimidia. Ergo triangula data (*c*) sunt æqualia.

Hæc propositio fiet universalis p. 1. lib. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare jussimus prop. præced. de parallelogrammis.

Fig.75. [d] Per 10. l. 1.

Coroll. *Hinc etiam Geodætæ agri triangularis aream facillime dividunt. Sit e. g. ABC ager triangularis, & sit basis BC bisecta* (d) *in D; recta DA agrum bifariam dividet. Triangula enim ABD, ACD quæ bases habent æquales BD, CD, & communem verticem A, ac proinde inter easdem parallelas constituuntur, erunt æqualia per hanc prop.*

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Fig.76. *TRiangula æqualia (ACB, & AFB) super eadem basi (AB) vel æquali, ad easdem partes constituta, sunt inter easdem parallelas (AB, CF.)*

[e] Per præc.

Si negas, sit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur (*e*) ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipsi ACB æquale est. Ergo ALB & AFB æqualia sunt, pars & totum. Quod fieri non potest. Igitur, &c.

PROPOSITIO XLI.

Fig.77. *SI triangulum (AFB) sit in iisdem parallelis cum parallelogrammo (AL,) & basim eamdem habeat (AB), vel æqualem, ipsius dimidium erit.*

[f] Per. 37. & 38. l. 1. (g) Per 34. l. 1.

Duc CB. Triangula AFB, & ACB (*f*) æquantur. Sed (*g*) ACB est dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB est dimidium AL. Quod erat demonstrandum.

Scho-

Scholium.

EX hac & scholio prop. 35. discimus, aream trianguli (AFB) cujuscumque produci ex dimidia altitudine FI ducta in basim (AB) vel ex dimidia basi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, sive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo opposito ducitur, habetur trianguli dimensio; ut si basis AB sit pedum 100. altitudo FI, 85. multiplica basis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro area trianguli AFB. Porro altitudo sive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari potest, mechanice innotescit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenitur Geometrice altitudo per 12. & 13. l. 2. ut in scholio ibidem docebimus. Fig. 77.

In triangulo rectangulo, altitudo est eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo semissis ducta in latus alterum recto adjacens, dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII

Dato triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere, habens angulum parem dato. (O.) Fig. 78.

Basim AB biseca in F. Per C duc (*a*) CX parallelam AB. Fac (*b*) angulum BAL parem dato O. Duc (*c*) FI parallelam AL. Erit ALIF quod quæritur.

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O; & est æquale triangulo dato ACB, cum tam (*d*) triangulum ACB, quam (*e*) parallelogrammum AI, dupla sint ejusdem trianguli ABF.

[a] Per 31. l. 1. (b) Per 23. l. 1. [c] Per 31. l. 1. (d) Per 38. l. 1. (e) Per præc.

Corollarium.

DAto triangulo ACB habetur æquale rectangulum, si per C ducatur parallela lateri AB, & bisecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum sub FB & QB par triangulo ACB. Fig. 78.

PROPOSITIO XLIII.

IN parallelogrammo (BL,) complementa (BO, OL) eorum quæ circa diametrum existunt (RF & CS) sunt æqualia. Fig. 79.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ; secatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum sunt RF, CS, duo reliqua BO, OL, sunt horum complementa.

Ea esse æqualia sic ostenditur. Triangula ABQ, ALQ (a) Per 34. l. 1. (a) æquantur: similiter ARO, OCQ (b) æquantur AFO, OSQ. Ergo si ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, (b) Per eamd. hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ, æqualia remanent BO & OL. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 80. *AD datam rectam (OS) parallelogrammum constituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

(c) Per 41. l. 1. Fac (*c*) parallelogrammum RC dato V æquale, habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in dire- (d) Per 31. l. 1. ctum datæ OS. Per S duc SQ (*d*) parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc AL parallelam ad OS, cui occurrant CO & QS productæ in F & L. Parallelogrammum OL est, quod petitur.

(e) Per præced. Nam OL (*e*) æquatur RC, hoc est per constructionem dato triangulo V; & est ad datam OS; habetque angulum (*f*) (f) Per 15. l. 1. FOS parem angulo ROC, hoc est per const. parem dato X.

(Coroll. *Hinc liquet, quomodo ad datam rectam OS, parallelogrammo BO æquale & æquiangulum parallelogrammum OL constituere oportet.*)

Fig. 81. Scholium. *Continet hæc propositio cum corollario annexo, Geometricam quamdam divisionem. Sicut enim numerus multiplicatione productus, tamquam rectangulum quoddam jure considerari potest, cujus factores sint duo quævis rectanguli latera contigua, prout in Scholio post prop. 34. declaratum est; Sic etiam eodem jure, numeri dividendi locum, rectangulum occupare censebitur, cujus latera circa angulum quemvis, divisorem & quotum repræsentabunt. Et sicut unus idemque numerus dividendus varios admittit divisores, quibus singulis suus exoritur numerus quotus; sic una eademque area rectangula quantitate data, rectæ cuivis tamquam lateri applicari potest, cui ad rectos angulos aptabitur quædam alia recta, pro altero rectanguli latere. In fig. 81. sit rectangulum AB, duodecim pedes quadratos com-*

complexum, cujus latera sint AC trium, & AE quatuor pedum, & proponatur idem quantitate rectangulum lateri bipedali tamquam divisori ita applicare. ut inde exsurgat latus aliud, quod quotientis instar sit habendum. In recta AE producta, capiatur linea bipedalis EH, ad quam, per coroll. praeced. constituatur rectangulum EG ipsi AB aequale, & prodibit alterum rectanguli latus EI sex pedes longum, pro quoto quaesito. Cum vero, (propter parallelogramma BH, AI) recta BD, AF, rectis EH, EI respective sint (a) *aequales, pro praxi satis erit, si in CB producta accipiatur BD pedum duorum, & per puncta D, E ducatur recta DE, quae producta occurrat* (b) *rectae CA productae in F. Recta enim AF ea erit quam quaerimus. Haec quidem divisionis species* Applicatio *dicitur; quoniam spatium rectangulum AB (hoc est, ei aequale EG) lineae BD sive EH* applicatur. *Et inde fit quod Divisio haud raro* Applicatio *nominatur: scilicet pro antiquorum* Geometrarum *consuetudine; qui* constructionis Geometricae, *quae regula & circino solis utitur, quam* computi Arithmetici *per numeros solos perficiendi potiorem rationem semper habuerunt.*

(a) Per 34. l. 1.

[b] Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 82.

D*Ato rectilineo (CBA,) aequale parallelogrammum construere ad datam rectam (IQ) & in dato angulo (H.)*

Rectilineum resolve in triangula A, B, C, ducendo rectas FL, FI.

Ad datam IQ in angulo dato H, fac (c) parallelogrammum IV aequale triangulo A. Tum producatur IR infinite versus P, & ad rectam RV, in angulo VRP fac (d) parallelogrammum RZ aequale trigono B. Rursum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG aequale trigono C. IG est parallelogrammum quaesitum.

(c) Per 44. l. 1.

(d) Per eamd.

Nam (e) angulus ZVR par est sibi alterno IRV. Sed (f) QVR & IRV sunt aequales duobus rectis. Ergo etiam QVR & ZVR duobus rectis aequantur. Ergo (g) QV & ZV sunt in directum. Pari modo ostendam QZ & GZ esse in directum. Ergo tota QVZG est una recta, & quidem parallela ad IX, cum per const. QV. sit ad IP parallela.

(e) Per 27. l. 1.

(f) Per eamd.

(g) Per 14. l. 1.

Est vero etiam (h) XG parallela ad IQ, cum XG sit parallela ad SZ, & SZ ipsi RV, & RV ipsi IQ. Ergo (i) IG est parallelogrammum: esse autem quale petitur, patet ex constructione.

(h) Per 30. l. 1.

(i) Per def. 35.

(Scholium. *Porro, ex hac ipsa propositione haud obscurum est, quomodo parallelogrammum in angulo dato construere oportet duorum pluriumve rectilineorum summæ æquale.*

Corollarium. *Hinc facile invenitur excessus, quo rectilineum aliquod majus superat rectilineum minus: Nimirum si ad eamdem rectam IQ in eodem angulo QIP applicentur ad eamdem partem parallelogramma duo, rectilineis datis respective æqualia. Parallelogrammum enim quo majus excedit minus, dabit rectilineorum differentiam. Q. E I.*)

Scholium.

ADjungo problema utile futurum ad praxim propositionis 14 lib. 2.

Fig. 83. Dato quadrangulo BF, rectangulum æquale describere.

Resolve in triangula per rectam AC. Ex oppositis angulis demitte perpendiculares BO, FI. Biseca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum sub LS & SA æquatur dato BF. Demonstratio patet ex prop. 41. ejusque Scholio; (*& in Coroll. post prop. 1. l. 2. latius deducetur.*)

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 84. *A Data recta (AB) quadratum describere.*

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

Cum enim anguli A & B duo sint (*a*) recti, erunt (*b*) AC, BE parallelæ: sunt vero etiam (*c*) æquales. Ergo (*d*) CE, AB sunt parallelæ & æquales. Ergo figura est parallelogramma, & æquilatera; anguli quoque omnes sunt recti: (cum enim A & B sint recti, etiam recti erunt (*e*) oppositi, E & C) Ergo figura AE, est quadratum.

(a) Per constr.
(b) Per 29. l. 1.
(c) Per constr.
(d) Per 33. l. 1.
(e) Per 34. l. 1.

Fig. 73. (Scholium *Eodem fere modo facile describes rectangulum ACQX quod sub datis duabus rectis BF, AX contineatur; si nempe ad puncta A, X super data recta AX erigantur perpendiculares AC, XQ datæ BF æquales, & ducatur CQ.*)

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (ABC) rectangulo, quadratum lateris (AC) quod recto angulo opponitur, æquale est duobus simul reliquorum laterum (AB, CB) quadratis. Fig. 85.

Ducantur IC, BF & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt vero in triangulis IAC, FAB, etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter se (*a*) æqualia, nempe, IA, CA, ipsis BA, FA, alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB (*b*) æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI & ZAFE consistunt in iisdem Basibus IA, FA, & in iisdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB sunt (*c*) eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium dupla, erunt æqualia inter se. Eodem discursu ductis rectis AX, BR ostendam parallelogramma, EC, BX æqualia esse. Totum igitur AR utrisque IB & BX æquale erit. Quod erat demonstrandum.

[a] Per defin. quadrati. [b] Per 4. l. 1. [c] Per 41. l. 1.

Assumptum fuit LBC esse parallelam IA, Adeoque LB, BC esse unam rectam. Id vero patet ex 14. cum anguli LBA & CBA ambo recti sint per hypothesim.

(Cor. 1. *Si triangulum rectangulum ABC habeat latera circa angulum rectum B æqualia; erit quadratum lateris AC angulo recto oppositi, duplum quadrati lateris AB vel BC angulo recto adjacentis. Æquale est enim quadratum lateris AC quadratis* (d) *æqualibus ABq, BCq simul* (e) *sumptis, ac proinde erit unius duplum.* Fig. 86.

[d] Per axio. 15. (e) Per hanc prop.

Cor. 2. *Si a trianguli cujuscumque ABC angulo A demittatur in basim (si opus productam) perpendicularis AD; erit differentia quadratorum lateris unius AB & segmenti contermini BD, æqualis differentiæ quadratorum lateris alterius AC & segmenti illi lateri contermini DC. Nam propter angulos ad D* (f) *rectos, erit in triangulo ABD, ABq* $=$ (g) *ADq* $+$ *BDq, & sublato utrimque BDq, erit ABq* $-$ *BDq* $=$(h) *ADq: & eodem modo in triangulo ADC ostendi potest, quod ACq* $-$ *DCq* $=$ *ADq. Ergo per axio. 1. erit ABq* $-$ *BDq* $=$ *ACq* $-$ *DCq. Q. E. D.* Fig. 87.

(f) Per def. 14. (g) Per hanc prop. [h] Per axio. 3.

Cor. 3. *In triangulo ABC, demissa eadem perpendiculari AD, id erit baseos BC segmentum majus, quod lateri majori AC adjacet, atque illud minus, quod minori AB. Nam propter latus AC majus* (i) *quam AB, erit ACq majus* (k) *quam ABq.* Fig. 87.

[i] Ex hyp. [k] Per axio. 16.

Sed

(a) Per hancprop. *Sed* ACq (a) $= ADq + DCq$, & $ABq = ADq + DBq$; *Ergo summa quadratorum* ADq, DCq *major est quam summa quadratorum* ADq. DBq. *Quare ablato communi* ADq,

[b] Per axio. 5. (b) *erit* DCq *majus quam* DBq, *atque adeo segmentum* DC *segmento* BD *majus* (c) *erit*.

[c] Per axio. 16.

Fig. 48.

(d) Per 11. l. 1.

Cor. 4. *Si in triangulo ABE, quadratum lateris BE majus fuerit quadratis laterum AB, AE simul sumptis, angulus BAE lateri BE oppositus erit recto major. Erigatur* (d) *enim, super recta AB, ad punctum A, perpendicularis AF æqualis lateri AE & ducatur BF. Ob angulum BAF rectum, erit* (e) *quadratum lateris BF æquale quadratis laterum BA, FA simul sumptis, hoc est, propter æquales FA. AE, quadratum BF* (f) *æquabitur quadratis BA, AE simul sumptis. Sed ex hypothesi, quadratum BE majus est quadratis BA, AE simul sumptis: Ergo quadratum BE majus est quadrato BF, & Recta BE* (g) *est recta BF major; & proinde angulus BAE* (h) *est angulo recto BAF major. Q. E. D.*

(e) Per hancprop.

[f] Per axio. 15.

[g] Per axio. 16.

[h] Per 25. l. 1.

Cor. 5. *Eodem modo, si in triangulo ABC, quadratum lateris BC angulo BAC oppositi sit minus quadratis laterum BA, AC simul sumptis, demonstrabitur angulum BAC esse angulo recto minorem. Erecta enim ad latus AB perpendiculari AF ipsi AC æquali, & ducta BF, erit* $BFq =$ (i) $ABq + AFq$. *Sed* $AFq =$ (k) ACq. *Ergo* $BFq = ABq + ACq$. *Sed per hypothesim,* BCq *minus est quam* $ABq + ACq$ *Ergo* BCq *minus est quam* BFq, & *proinde BC minor* (l) *quam BF; unde etiam angulus BAC angulo recto BAF minor* (m) *erit*.

(i) Per hancprop.

[k] Per contr. & axio. 15.

(l) Per axio. 16.

[m] Per 25. l. 1.

Scholium.

HOC theorema (quod propr. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras similes extendit) Pitagoricum appellatur passim ab inventore Pitagora; qui, ut testantur Proclus, Vitruvius, alique, Musis victimas immolavit, quod se in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet scientiarum Dominum, verum & unicum omnis sapientiæ auctorem Deum; aut certe si cognovit, non sicut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis & eximius per Mathematicam totam usus est; ac viam in primis ad incommensurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ Philosophiæ, cognoscendas aperit.

Quadrati latus esse diametro incommensurabile, theorema celebratissimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem præsertim & Platonem, adeo ut qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret. Notitia porro hujus

hujus mysterii dixisse videtur originem ex hac prop. 47. Nam cum in quadrato angulus A rectus sit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde (*a*) duplum unius. Quare cum quadratum diametri CB sit 2. & quadratum lateris AB sit unitas, erit diameter CB radix quadratica numeri binarii, & latus AB radix quadratica unitatis, sive ipsa unitas, quarum proportio (ut suo loco demonstrabitur) numeris explicari nequit, ac proinde incommensurabiles sunt. (*hæc propositio de immensurabilitate lateris & diametri in Quadrato, est ultima libri decimi apud Euclidem: demonstratur autem a Tacqueto in Elementis suis Arithmet. in Scholio post prop. 11. lib. 2.*) Fig. 84. [a] Per cor. 1. hujus prop.

Atque hoc vel unico argumento, tametsi cætera omnia deficerent, evidentissime conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse: alias enim nullæ essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

His subjungo tria problemata ex eadem propositione deducta, quorum usus frequentior.

Problema 1.

Datis quotcumque quadratis, unum omnibus æquale construere. Fig. 88.

Dentur quadrata tria, quorum latera sint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA & BC, & junge AC. Erit AC quadratum æquale (*b*) quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X; & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale (*c*) quadratis ex EB (seu EC) & ex BX; hoc est, æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE. [b] Per 47. l. 1. [c] Per eamd.

Problema 2.

Datis duabus rectis inæqualibus (AB, BC,) exhibere quadratum, quo quadratum majoris (AB) excedit quadratum minoris (BC.) Fig. 89.

Centro B, intervallo BA describe circulum, (*& in diametro AF, a centro B versus F, pone BC.*) Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peripheriæ in E. Quadratum ex CE est excessus quæsitus.

Ducatur enim BE. Quadratum BE, hoc est AB, æquatur (*d*) quadrato BC & quadrato CE. Ergo &c. (d) Per 47. l. 1.

Problema 3.

Fig. 90. NOtis duobus quibuſcumque lateribus trigoni rectanguli, reliquum invenire.

Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire quot pedum ſit CB, angulo recto oppoſitum. Duc 6. & 8. in ſe ipſa, orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum ſumma eſt 100. Radix quadratica 100. nempe 10. dat pedes lateris BC quæſiti. Demonſtr. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum BA & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere BC.

Nota ſint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC. Reſiduum 64. erit quadratum lateris AC. Radix ergo 64. (nempe 8.) dat pedes lateris AC.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 91. *SI quadratum ab uno trianguli latere (AB) deſcriptum, ſit æquale duobus reliquorum laterum (AC, BC) quadratis; angulus (ACB) quem reliqua latera continent, rectus erit.*

Si negas, erit angulus ACB recto major aut minor. Ergo (ut demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc FC perpendicularem ad AC, & æqualem CB, & junge AF. quadratum AF æquale eſt (*a*) quadratis FC, CA; hoc eſt (*b*) quadratis BC, CA; hoc eſt per hyp. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales (*c*) ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuo æquilatera, anguli ad C (*d*) ſunt æquales. Ergo (*e*) recti Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 47. l. 1.
[b] Per conſtruct.
(c) Per axio. 15.
(d) Per 8. l. 1.
(e) Per def. 14.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER SECUNDUS

HIC liber mole parvus, at præstantia ac utilitate theorematum plane magnus. Tyrones, scio quod dico, nondum capient; sed esse verissimum ulterius provecti, usu ipso certissime intelligent.

T*Ractat autem hic Liber* secundus *de Rectarum linearum* potentiis; *hoc est* quadratis. *Comparatque Rectangula varia, e rectarum aut bifariam aut utcumque divisarum partibus oriunda cum totarum linearum rectangulis & quadratis. Pars hæc sane elementorum longe utilissima est speciatim autem Operationum Algebraicarum præcipuarum vere fundamentum. Propositiones tres priores demonstrandæ Multiplicationi, Quarta radicum quadraticarum extractioni inservit. Quæ sequuntur quinta, sexta, septima, octava operationibus* Algebraicis; *Reliqua vero* Trigonometricis *conferunt plurimum. Prima quidem fronte Tyronibus hic liber videtur difficillimus; eo quod misterii quiddam in se continere sibi imaginentur. Attamen Demonstrationes in eodem adhibitæ pleræque omnes facillimo huic axiomati nituntur,* Totum, *nempe,* omnibus suis partibus simul sumptis æquari. *Ne vero animum despondeant Tyrones, si prima vice perfecte nequeant comprehendere. Inter relegendum enim se tam clara non intellexisse olim mirabuntur.*

DEFINITIO.

PArallelogrammum rectangulum (AF) quod rectangulum simpliciter sine ullo addito appellari solet) contineri dicitur sub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. Fig. 72. I. 2.

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde si intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam AC, AC, producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, seu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig.2.l.2. Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum sub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis causa, rectangulum ACB, designatur rectangulum, quod continetur sub AC & CB (*vel sub rectis, quæ ipsis AC, CB respective sunt æquales*) ad rectum angulum constitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum sub AB, CB, vel rectangulum ABC, designatur rectangulum contentum sub rectis AB & BC (*vel sub rectis quæ ipsis æquales sunt*) rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud est oblongum, aliud quadratum. Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum est, quod sub duabus æqualibus continetur.

NOTA. *Signum æqualitatis in hoc libro est* ✠. (nempe in demonstr. Tacquetianis. Alia signa, hic & alibi in additis adhibita, explicantur in initio, ante Tacqueti præf. ad lectorem.)

PROPOSITIO PRIMA.

Fig.1.l.2. *Si fuerint duæ rectæ (AB, AC) quorum altera secta sit in quotcumque partes (AE, EF, FC:) erit rectangulum sub illis duabus (AB, AC) comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub insecta (AB) & singulis sectæ partibus (AE, EF, FC) continentur.*

Statue AB perpendicularem ad AC. Per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. (*a*) Erit BC rectangulum sub AB, & AC: & est æquale rectangulis BE, IF, LC: hoc est quia tam IE, quam LF sunt (*b*) æquales AB,) rectangulis (*c*) sub AB, AE, sub AB, EF, sub AB, FC.

(a) Per def. l.2.
(b) Per 29. & 34. l.1.
(c) Per def. l.2.

(Coroll. *Hinc ampliori demonstratione firmari potest problematis, quod in Scholio post prop.45. lib.1. legitur, solutio ibidem tradita. Si nempe quadrilaterum BF per rectam AC in triangula ABC, AFC resolvatur; bisecta AC in S, ex oppositis angulis B, F, in basim communem AC ductis perpendicularibus BO, FI, ex S erigatur SL earum summæ æqualis: ostendendum est rectangulum sub CS & SL æquari quadrilatero BF. Cum enim triangulo ABC, AFC* (*d*) *æquantur rectan-*

Fig.83.l.1.
(d) Per 41. l.1.

ctangulis sub CS & BO, & sub CS & FI respective; cumque recta LS æquatur ipsis BO & FI simul sumptis, & dividatur in partes, SD, DL, ipsis BO, FI respective æquales; Ergo triangula ista, seu quadrilaterum BF, rectangulis CD, LE, sub insecta CS, & singulis sectæ LS partibus, hoc est, vi hujus prop. rectangulo LC sub duabus CS & LS æquari necesse est.)

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera sunt in numeris, si, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per seipsum.

(Sit numerus insectus 9, & sectus 12, qui in partes tres nimirum 3, 4 & 5 dividatur. Erit rectangulum ex 9 in 12 ducto = 108 æquale rectangulis tribus 27 & 36 & 45, ex 9 in 3 & 9 in 4 & 9 in 5 respective ducto compositis.

Vel sit numerus 432 tamquam multiplicandus *sectus in* 400 & 30 & 2, *atque numerus* 8 *tamquam* multiplicans *insectus; erit* $8 \times 432 = 3456$ *æqualis* $8 \times 400 = 3200$, $+ 8 \times 30 = 240$, $+ 8 \times 2 = 16$. *Unde etiam Multiplicationis demonstratio peti debet.)*

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) secta sit utcumque (in C,) duo rectangula sub tota (AB) & partibus (AC, CB) comprehensa quadrato totius æqualia sunt. Fig. 2.

Accipiatur F æqualis AB.

Rect. FAB Æ. (a) rect. FAC } rect. FCB: (a) Per 1. l. 2.

hoc est, quia F & AB sunt æquales inter se;

Quad. ex AB Æ. rect. BAC } rect. ABC.

(Aliter *Fiat* (b) *ARDB quadratum rectæ AB, & ad punctum C erigatur* (c) *recta CH ipsi AB perpendicularis. Anguli itaque ad C recti, angulis A & B æquales sunt; & rectæ AR, CH, BD sibi invicem sunt* (d) *parallelæ, & AH, BH* (e) *parallelogramma rectangula. Erit præterea CH recta* (f) *AR sive* (g) *AB æqualis: & proinde AH, BH sunt* (h) *rectangula sub tota AB & partibus AC, CB comprehensa; & simul sumpta æquantur quadrato ipsius AB.* Fig. 3. (b) Per 46. l. 1. (c) Per 11. l. 1. (d) Per 29. l. 1. (e) Per def. 35. & cor. 1. p. 34 l. 1.

Sit

(f) Per 34. l. 1. (g) Per construct. (h) Per def. l. 2.

Sit numerus 8 in 5 & 3 sectus: quadratum totius $8 \times 8 = 64$ *æquale est rectangulis* $8 \times 3 = 24$ & $8 \times 5 = 40$.)

PROPOSITIO III.

Fig.4. *Sit recta (AB) utcumque secta (in C.) Erit rectangulum sub tota (AB) & partium alterutra (BC) comprehensum, æquale rectangulo sub partibus (AC, CB) una cum quadrato prædictæ partis (BC.)*

Assume F æqualem CB.

(a) Per 1. l.2. Rect. ABF Æ. (*a*) rect. ACF)
rect. CBF:)
hoc est, quia æquales sunt CB & F;
Rect. ABC Æ. rect. ACB)
quad. CB.)

Fig.5. (Aliter. *Fiat* (b) *rectangulum AD sub tota AB & parte CB, &* (c) *erigatur perpendicularis CE: ob rectam CE, recte* (d) *BD sive* (e) *BC æqualem, rectangulum AD sub tota AB & parte BC comprehensum, æquabitur rectangulo AE sub partibus AC, CB, una cum quadrato EB prædictæ partis BC.*

(b) Per Schol. post 46. l.1.
(c) Per 11. l.1.
(d) Per 29. & 34. l.1.
(e) Per constr.

Sit numerus 7 in partes 3 & 4 sectus: Rectangulum $7 \times 3 = 21$ *æquale est rectangulo* $3 \times 4 = 12$ & *quadrato* $3 \times 3 = 9$. *Pariter Rectangulum* $7 \times 4 = 28$ *æquale est rectangulo* $3 \times 4 = 12$ & *quadrato* $4 \times 4 = 16$.)

PROPOSITIO IV.

Fig.6. *Sit recta (FL) utcumque secta (in O:) erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL,) & bis rectangulo sub partibus (FO, OL) contento.*

(f) Per 2. l.2. Quad. FL Æ. (*f*) rect. FLO cum
rect. LFO.
(g) Per 3. l.2. Atqui rect. FLO Æ. (*g*) rect. FOL.)
quad. OL;)
(h) Per eamd. & rect. LFO Æ. (*h*) rect. LOF)
quad. FO.)
Ergo quad. FL Æ. rect. FOL)
quad. OL)
rect. LOF)
quad. FO:)

Id

Id est. quad. FL Æ. rect. FOL bis
quad. OL
quad. FO

(Aliter. *Fiat FGDL quadratum rectæ FL, & ducta diametro GL, in triangulo FGL, ob æqualia latera FG, FL & angulum F rectum, erunt anguli FGL, FLG semirecti* (a) & *æquales. Per punctum O ducatur ipsi FG vel LD parallela OK, quæ secet diametrum GL in C; & per punctum C ipsi FL vel GD parallela agatur HI. Propter omnes angulos quadrati FD rectos, erunt etiam omnia parallelogramma FC, OI HK, CD rectangula* (b); & *ob parallelas OK, FG, erit* (c) *externus ang. LCO æqualis interno & opp. FGL, hoc est, FLG semirecto. Ergo in triangulo LOC, latera OC, OL sunt*(d) *æqualia: æquantur* (e) *etiam rectanguli OI opposita latera OL, CI; OC, LI;* & *proinde OI est* (f) *quadratum rectæ OL: Et eodem modo demonstrabitur HK quadratum esse rectæ HC, vel* (g) *FO. Et cum CO, OL æquentur, erit FC rectangulum sub partibus FO, OL datæ rectæ FL. Sed rectangula FD, CD sunt* (h) *æqualia, & proinde FC, CD simul sumpta, æquantur bis rectangulo sub partibus FO, OL. Quare FD quadratum totius rectæ FL, æquatur ipsis HK, OI, partium FO, OL quadratis, una cum FC, CD bis rectangulo sub partibus. Q. E. D.*

Fig. 7.

(a) Per cor 11 pr. 32. l. 1.
(b) Per cor. 1. pr. 34. l. 1.
(c) Per 27. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 34. l. 1.
(f) Per def. 32 l. 1.
(g) Per 34. l. 1. & axio. 15.
(h) Per 43. l. 1.

Sit numerus 10 in partes 7 & 3 *sectus. Quadratum* 10 $\times$ 10 = 100 *æquale est quadratis partium* 7 $\times$ 7 = 49 & 3 $\times$ 3 = 9, & *duobus rectangulis* 7 $\times$ 3 = 21 & 7 $\times$ 3 = 21. *Vel sit numerus* 12 *in partes* 10 & 2 *divisus. Quadratum totius* 12 $\times$ 12 = 144 *æquale est quadratis partium* 10 $\times$ 10 = 100 & 2 $\times$ 2 = 4, *una cum bis rectangulo* 10 $\times$ 2, *sive* 2 $\times$ 10 $\times$ 2 = 40. *Et hinc pendet radicis quadraticæ extractio.*

Corollarium 1. *Hinc liquet parallelogramma OI, HK circa diametrum quadrati, esse quadrata.* Fig. 7.

2. *Item diametrum cujusvis quadrati ejus angulos bisecare. Est enim FLD ang. rectus.* & *FLG semirectus.*

3. *Quadratum lineæ dimidiæ est quadrati lineæ integræ pars quarta. Promotis enim rectis OK, HI, motu parallelo, usque ad media puncta A & B, M & N laterum quadrati FD; rectangula FC, CD & quadrata OI, HK in quatuor æqualia quadrata desinent. Et eodem modo constabit rectangulum (sive etiam parallelogrammum quodlibet) sub duabus rectis quibusvis, rectanguli (seu parallelogrammi parallelogrammo dato æquianguli) sub earum dimidiis esse quadruplum.*

4. *Quadratum quodvis FD æquale est bis rectangulo sub quadrati latere FL seu GD,* & *lateris dimidio LN seu ND. Æquatur enim rectangulis FN, MD simul sumptis. Item, parallelogrammum quodvis, æquale est bis parallelogrammo æquiangulo sub uno quovis latere & alterius dimidio.*)

PROPOSITIO V.

Fig. 8. S*I recta (QX) secta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S,) erit rectangulum sub inæqualibus partibus (QS . SX) contentum, una cum quadrato partis intermediæ (RS) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

(a) Per 1. l.2. Rect. QSX (a) Æ. rect. QR. SX
rect. RSX.

Rect. QR, SX Æ. rect. RXS;
id est,

(b) Per 3. l.2. Æ. (b) rect. RSX
quad. SX.

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX
quad. SX
rect. RSX

Addatur utrisque quad. RS: habebitur,

rect. QSX Æ rect. RSX id est,
(c) Per 4. l.2. quad. RS quad. SX (c) quad. RX
rect. RSX seu QR.
quad. RS;

Fig. 9. (Aliter. *Super recta QX parte dimidia RX fiat quadratum RF, & ducta diametro XE, per S ducatur SG ipsi RE vel XF parallela, quæ secet diametrum in H; & per H, ipsi QX vel EF parallela agatur KI, secans RE in L, & per Q ipsi RL parallela agatur QK. Propter* (d) *quadratum SI, circa diametrum quadrati RF, erit SX* (e) = *SH; & ob parallelogrammum SL, erit etiam RS* (f) = *LH, & RL = SH = SX. Est autem QR* (g) = *RX* (h) = *XF. Unde QL* (i) = *SF. Commune adjiciatur RG, & QX + LG = RF. Sed QH est rectangulum sub rectæ QH partibus inæqualibus QS, SX; & LG est* (k) *quadratum partis intermediæ RS; & RF est* (l) *quadratum dimidiæ RX. Ergo, si recta QX, fuerit secta æqualiter in R, & inæqualiter in S, erit, &c. Q. E. D.*

(d) Per cor 1. præced. (e) Per def. 32. l. 1. (f) Per 34. l. 1. (g) Per hypoth. (h) Per def. 32. l 1. (i) Per def l. 2. (k) Per cor. 1. præc. & prop. 34. l. 1. (l) Per constr.

Atque hinc & ex prop. sequenti, pendet æquationum quadraticarum adfectarum constructio Geometrica, uti ad prop. 28. & 29. lib. 6. plenius explicabitur.

Sit numerus 8 sectus æqualiter in 4 & 4, atque inæqualiter in 5 & 3. Erit rectangulum $5 \times 3 = 15$ *una cum quadrato* $1 \times 1 = 1$ *æquale quadrato* $4 \times 4 = 16$.

Coroll. 1. *Hinc rectangulum QSX, partium inæqualium, minus est quadrato QR (sive dimidiæ QX.) Nam per hanc prop.*

prop. Rectangulum QSX, una cum quadrato RS, æquatur quadrato QR.

Coroll. 2. *Quo propius accedit punctum S ad medium punctum R, eo majus erit rectangulum QSX, & quo longius a medio puncto recedit, eo minus erit idem rectangulum. Punctum enim S accedendo minuit, & recedendo auget partem intermediam RS; unde* (a) *etiam RS quad. minuetur & augebitur respective. Et cum per hanc prop. sit RS quad + QSX rect. = QR. quad. Ergo quo minus fuerit RS quad. eo majus erit rectang. QSX & vice versa.*

(a) Per axio. 6.

Coroll. 3. *Quo propius accedit punctum S ad medium punctum R, eo minor erit summa quadratorum partium inæqualium QS, SX; & quo longius S a medio puncto recedit, eo major erit illa summa. Nam QXq =* (b) *QSq + SXq + 2 QSX. Sed punctum S propius accedendo ad R, rectangulum QSX auget* (c), *& recedendo minuit. Ergo idem punctum S ad medium R propius accedendo minuit QSq + SXq & recedendo auget.*

(b) Per 4. l. 2.
(c) Per cor. præced.

Coroll. 4. *In fig. 7. rectangulum FOL partium inæqualium rectæ FL quater sumptum; quadrato ipsius FL minus est. Nam quadratum dimidiæ FL quater sumptum* (d) *æquatur quadrato FL: Sed rectang. FOL* (e) *minus est quadrato dimidiæ FL; & proinde rectan. FOL quater sumptum, minus est quadrato dimidiæ FL quater sumpto: sive minus est quadrato ipsius FL. Q. E. D.*

Fig. 7.
(d) Per cor. 3. pr. 4. l. 2.
(e) Per cor. 1. hujus.

Coroll. 5. *Si duæ rectæ æquales AB, CD, ita dividantur in E, F, ut rectangulum AEB sub partibus unius, æquale sit rectangulo CFD sub partibus alterius, erunt unius partes partibus alterius respective æquales, major majori, & minor minori, si partes fuerint inæquales. Si enim puncta E, F, bisecant rectas æquales AB, CD, liquet AE esse = CF, & EB = FD; sin aliter, bisecentur AB, CD in M & N; atque earum semisses MB, ND æquales* (f) *erunt, & proinde MBq* (g) *= NDq. Sed hanc per prop. MBq = AEB rect. + MEq, & NDq = CFD rect. + NFq. Ergo* (h) *AEB rect. + MEq = CFD rect. + NFq. Et ablatis rectangulis ex hypotesi æqualibus,* (i) *erit MEq = NFq, & ME = NF; quæ si æqualibus AM, CN addantur, & ab æqualibus MB: ND subtrahantur,* (k) *habebitur AE = CF, & EB = FD. Q. E. D.*

Fig. 10.
(f) Per axio. 6.
(g) Per axio. 15.
(h) Per axio. 1.
(i) Per axio. 3.
(k) Per axio. 2. & 3.

Coroll. 6. *Rectangulum sub summa & differentia duarum rectarum* (QR, RS,) *æquatur differentiæ quadratorum ab illis rectis factorum. Nam per hanc prop. rect. QSX + quad. RS, = quad. QR. Aufer utrimque quad. RS, & erit rect. QSX = quad. QR. — quad. RS. Cum igitur QS sit rectarum QR, RS summa, & (propter QR = RX) SX sit earum differentia, liquet propositum.)*

Fig. 8. 9.

PROPOSITIO VI.

Fig. 11. *Si recta (AB) sit bifariam secta (in C) eique recta quædam adjiciatur (BF;) erit rectangulum sub tota composita (AF] & adiecta (BF) contentum, una cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compositæ ex dimidia & adiecta.*

Adde in directum LA, æqualem adiectæ BF. Cum æqualibus AC, BC, æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde LF secta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B

(a) Per præced.

Ergo (rect. LBF cum quad. CB Æ. (a) quad. CF.

Sed ob æqualitatem rectarum LB & AF, rect. LBF Æ. rect: AFB.

(Ergo rect. AFB quad. CB. Æ. quad. CF.

Fig 12. (Aliter. *Constructa enim figura* 12. *super data recta ACBF, eodem prorsus modo quo in prop. præced. super recta QRSX figuram 9. construximus, erit AN rectangulum sub tota composita AF & adiecta BF; & KG quadratum ipsius CB, sive dimidiæ AB; CE vero quadratum ipsius CF, nempe compositæ ex dimidia & adjecta. Et ob rectangulum HE rectangulo AK æquale, (nam AK* (b) = *KB* (c) = *H.*) *& reliquum spatium utrinque commune, liquet propositum.*

(b) Per 30. l. 1

(c) Per 43. l. 2.

Sit numerus 6 sectus æqualiter in 3 & 3: eique addatur numerus 2. Erunt rectangulum 8 X 2 = 16 *& quadratum* 3 X 3 = 9 *æqualia quadrato* 5 X 5 = 25.

Fig. 11. Coroll. 1. *Hinc si tres rectæ, AF, CF, BF fuerint arithmetice proportionales, (hoc est, si differentia AC inter primam & secundam, differentiæ CB inter secundam & tertiam fuerit æqualis;) erit Rectangulum sub extremis AF, BF, una cum quadrato differentiæ AC vel CB, æquale quadrato mediæ CF.*

Fig. 12. Coroll. 2. *Hinc rectangulum AN. minus est quadrato CE, defectu quadrati KG, quod data recta AB, semper idem manet, utcumque augeatur recta BF. Ex augmento vero ipsius BF. Rectangulum AN ad quadratum CE magis magisque accedit, tam proportione, quam figura; ita ut differentia ista KG, respectu magnitudinis figurarum AN & CE, tandem videatur contemnenda.*)

PRO-

PROPOSITIO VII.

S *I recta (AB) fuerit utcumque secta (in C,) erunt quadrata totius (AB) & segmenti alterutrius (AC) aequalia bis rectangulo contento sub tota (AB) & segmento dicto (AC,) una cum quadrato segmenti alterius (CB.)* Fig.13.

Quad. AB (*a*) Æ. rect. BCA bis (a) Per 4.l.2.
quad. AC
quad. BC.

Adde utrisque quad. AC: erunt

Quad. AB Æ. rect. BCA bis
quad. AC quad. AC bis
quad. BC.

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis, aequatur (*b*) rectangulo BAC bis. Quare si pro BCA bis & quad. AC bis substituamus BAC bis; erit (b) Per 3. l.2.

Quad. AB Æ. rect. BAC bis
quad. AC quad. BC.

(Aliter. *Constructa figura* 14. *ita ut AD sit quadratum totius AB, & AL quadratum partis AC, ductaque quadrati AD diametro EB, & producta LC in F, quae secet diametrum in G, & per G ducta HI parallela ipsi AB vel ED, erunt recta HK, HI toti AB & sibi invicem aequales; (nempe HK = HA + AK, & AK* (c) = *AC, AH* (d) = *CG* (e) = *CB, unde HK = AC + CB = AB* (f) = *HI;) & HE, HG parti AC & sibi invicem aequales. Unde ob duo aequalia rectangula sub tota AB & parte AC, nempe HD, HL; & CI quadratum partis alterius, idem spatium cum quadratis AD, AL continentia, liquet propositum.* Fig.14. (c) Per constr. & def.32.l.1. (d) Per 34. l 1. (e) Per cor.1. pr. 4 l. 2 & def.32.l.1. (f) Per 34. l.1.

Sit numerus 13 *utcumque sectus in* 9 & 4. *Erunt quadrata* 13 X 13. = 169 & 9 X 9 = 81 *aequalia* 13 X 9 = 117 & 13 X 9 = 117 & *quadrato* 4 X 4 = 16.

Propositio quarta nobis exhibet radicis binomiae quadratum: ex hac autem septima elicietur quadratum radicis residuae, per sequens.

Corollarium. *Si a recta BA auferatur pars AC; quadratum residui BC, a quadratis totius BA & ablatae AC simul sumptis exceditur, bis rectangulo BA, quod sub tota & ablata continetur. Nam per hanc prop. BAq + ACq = 2 rect. BAC + BCq; & utrinque subducendo 2 rect. BAC, erit BAq − 2 rect. BAC + ACq = BCq. Q. E. D.* Fig.13.

Fig. 14. *Sic sane, in fig. 14. CI = AD + AL − HD − HL; hoc est, BCq = BAq + ACq − rect. BAC bis.*)

PROPOSITIO VIII.

Fig. 15. *SI recta (LF) fuerit secta bifariam (in I) eique quadam recta adjiciatur (FO,) erit rectangulum (LIO) quod sub (LI) dimidia, & (IO) composita ex dimidia, & adjecta continetur, quater sumptum, una cum quadrato adjectæ (FO,) æquale quadrato totius compositæ (LO.)*

(a) Per præc.

Quad. IO (a) Æ. rect. OIF bis
quad. IF quad. FO.

hoc est, quia ex hyp. FI, LI sunt æquales, ac proinde quad. FI est quad. LI, & rect. OIF est rect. OIL, seu LIO,

quad. IO Æ. rect. LIO bis
quad. LI quad. FO

Quare si utrisque æqualibus addas rect. LIO bis; Erit

quad. IO
quad. LI.
rect. LIO bis;
id est,

(b) Per 4. l.2.

(b) quad. LO Æ. rect. LIO bis
quad. FO
rect. LIO bis;
Id est,
Æ. rect. LIO quater
& quad. FO

Fig. 16. (Aliter. *Fiat OD quadratum totius compositæ LO, & ducta ejus diametro LA, per I, F puncta, ipsi LD vel OA parallelæ agantur IB, FE, secantes diametrum in R & S; & per R, S puncta, ipsi LO vel DA parallelæ agantur TN, MH. Propter LF bisectam in I,* (c) *erit lineæ dimidiæ LI quadratum TI, pars quarta quadrati MF lineæ integræ LF, & quatuor rectangula TI, RF, MR, PQ* (d) *erunt quadrata sibi mutuo æqualia. Deinde, propter FQ, QS æqualium quadratorum latera, & proinde æqualia,* (e) *æquabuntur rectangula FN, QH: Sed FH* (f) *= DS, & QH,* (g) *= BS; ergo & FN* (h) *= BM, & quatuor rectangula FN, QH, BM, BS erunt sibi mutuo æqualia. Porro propter æquales LI, IR, erit RO, (hoc est, quadratum RF una cum rectangulo FN) rectangulum sub dimidia LI, & IO composita ex dimidia & adjecta: Ergo*

(c) Per cor. 3. pr. 4. l.1.
(d) Per cor idem.
(e) Per 36. l.1.
(f) Per 43. l.1.
(g) Per eamdem.
(h) Per axio 3.

Ergo quatuor quadrata, TI, RF, MR, PQ, una cum quatuor rectangulis FN, QH, BM, BS æquabuntur rectangulo sub dimidia LI, & composita IO quater sumpto: Est autem EH quadratum adjectæ FO. Ergo, si recta LF fuerit secta bifariam in I, eique quædam recta FO adjiciatur; erit &c. Q. E. D.

Sit numerus 12 *sectus æqualiter in* 6 & 6; *eique addatur numerus* 4. *Erunt quatuor rectangula* 10×6 240 & *quadratum* $4 \times 4 = 16$ *æqualia quadrato* $16 \times 16 = 256$.

Euclides hanc propositionem hoc modo effert.

Si recta IO fuerit utcumque secta in F; erit rectangulum OIF quod sub tota IO, & una parte IF continetur, quater sumptum, una cum quadrato reliquæ partis FO, æquale quadrato quod ex tota & dicta parte OI + IF (*seu sumpta in OI producta, recta IL = IF, æquale quadrato quod ex OI & IL, nempe LO* (tamquam una linea describitur. Fig. 16.

Sit numerus 10 *divisus in* 6 & 4; *erit factum ex* 6×10 *quater sumptum* = 240, & $4 \times 4 = 16$; *Et* $240 + 16 =$

$256 = \overline{10 + 6} \times \overline{10 + 6}$.)

PROPOSITIO IX.

Si recta (AC) sit divisa bifariam (in B) & non bifariam (in F;) erunt quadrata partium inæqualium (AF, FC) dupla quadratorum dimidiæ (AB) & partis intermediæ (BF.(Fig. 17.

Quad. AF Æ. (*a*) rect. ABF bis
quad. AB
quad. BF. (a) Per 4. l. 2.

Addito igitur utrisque quad. FC,

(quad. AF Æ. rect. ABF bis
quad. FC) quad, AB
quad. BF
quad. FC

Sed rect. ABF est rect. CBF, quia AB, BC sunt æquales ex hyp.

Ergo (quad. AF Æ. rect. CBF bis
quad. FC) quad. AB
quad. BF
quad. FC

Atqui (*b*) CBF bis cum quad. FC æquantur quadratis BC, BF, seu AB, BF: quare si hæc illis substituas, erunt (b) Per 7. l. 2.

 quad.

$$\left(\begin{array}{l}\text{quad. AF}\\ \text{quad. FC}\end{array}\right.\quad Æ.\ \left.\begin{array}{l}\text{quad. AB}\\ \text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\\ \text{quad. BF};\end{array}\right)$$

Id est,

$$\left.\begin{array}{l}\text{quad. AB}\\ \text{quad. BF}\end{array}\right)\text{bis}$$

Fig. 18. (Aliter. *Ad punctum B erigatur BE æqualis & perpendicularis ipsi BA vel BC: & ductis AE, EC, per F agatur ipsi BE parallela FQ, & per Q ducatur QG parallela rectæ AC, & ducatur AQ. Propter ang. ABE rectum & lineas AB, BE æquales,* (a) *erunt BAE, BEA semirecti; & ob eamdem rationem erunt BCE, BEC semirecti; Unde AEQ est rectus. Et propter* (b) *QFC rectum, & C semirectum, erit & FQC* (c) *semirectus, & rectæ FQ, FC erunt* (d) *æquales. Et quoniam rectas parallelas GQ, AC secat recta EB, erit* (e) *externus ang. EGQ æqualis interno & op. EBC, & proinde rectus; angulus vero GEQ est semirectus, ergo & GQE* (f) *semirectus erit, & rectæ GE, GQ erunt* (g) *æquales; & propter BQ rectangulum,* (h) *æquatur GQ ipsi BF. Unde in triangulo rectangulo ABE, propter æquales rectas AB, BE erit AE quadratum* (i) *duplum quadrati AB partis dimidiæ; & in triangulo rectangulo EGQ, propter æquales EG, GQ, erit EQ* (k) *quadratum duplum quadrati GQ vel BF partis intermediæ. Quadrata vero AE & EQ æqualia sunt* (l) *quadrato AQ; hoc est, quadratis* (m) *AF & FQ sive AF & FC partium inæqualium. Ergo quadrata partium inæqualium AF, FC, dupla sunt quadratorum partis dimidiæ AB, & partis intermediæ BF. Q. E. D.*

Sit numerus 32 divisus æqualiter in 16 & 16; & inæqualiter in 20 & 12. Erunt quadrato $20\times20=400$ & $12\times12=144$ *dupla quadratorum* $16\times16=256$ & $4\times4=16$.)

(a) Per cor. 11. pr. 32. l. 1.
(b) Per 27. l. 1.
(c) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(d) Per 6. l. 1.
(e) Per 27. l. 1.
(f) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(g) Per 6. l. 1.
(h) Per 34. l. 1.
(i) Per cor. 1. pr. 47. l. 1.
(k) Per idem.
(l) Per 47. l. 1.
(m) Per eamd.

PROPOSITIO X.

Fig. 19. *Si recta (FI) sit bisecta (in L) eique quadam recta adjiciatur (IO;) erunt quadrata totius compositæ (FO) & adjectæ (IO) dupla quadratorum quæ describuntur super dimidia (FL) & super (LO.) composita ex dimidia & adjecta.*

Adjiciatur in directum QF, æqualis IO. Quia ergo etiam

FL,

FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO bisecta est in L, & aliter in I. Ergo

$$\left(\begin{array}{lll} \text{quad. QI} & \text{Æ (a)} & \text{quad. QL} \\ \text{quad. IO} & & \text{quad. LI} \end{array}\right) \text{bis.}$$

(a) Per præc.

Sed quad. QI est quad. FO, & quad. QL est quad. LO, & quad. LI est quad. FL.

$$\text{Ergo}\left(\begin{array}{lll} \text{quad. FO} & \text{Æ. quad. FL} \\ \text{quad. IO} & \text{quad. LO} \end{array}\right) \text{bis.}$$

(Aliter. *Ad L punctum, rectæ FL vel LI æqualis & perpendicularis agatur LE, & ducantur FE, EI; & per E ducatur EQ paralella ipsi FO; & per O ducatur OQ parallela ipsi LE: & ob rectas parallelas EL, QO, rectæ EI, QO non parallelæ, si producantur,* (b) *concurrent alicubi. Producantur donec concurrant in G, & ducatur FG. Propter angulum FLE rectum, & FL, LE æquales,* (c) *erunt LFE, LEF semirecti; & pari ratione LIE, LEI* (d) *erunt semirecti, & proinde FEI rectus. Porro angulus OIG, oppositus ad verticem semirecto LIE,* (e) *est etiam semirectus: & propter parallelas EL, QG, a recta FO sectas in L & O, & angulum ELO rectum, erit etiam ang.* (f) *alternus GOL rectus: quare in triangulo GOI, propter angulum ad O rectum & ad I semirectum, erit & ang. OGI* (g) *semirectus, & proinde latera OG, OI* (h) *erunt æqualia. Et cum in parallelogrammo LQ, angulus L rectus sit, etiam oppositus Q rectus* (i) *erit. Quare in triangulo EQG, propter Q rectum, & QGE semirectum, erit & QEG* (k) *semirectus, & latera QE, QG* (l) *æqualia: sed in rectang. IQ, est EQ* (m) *= LO: quare LO = EQ = QG. Jam vero, in triangulo rectangulo FLE, propter latera FL, LE æqualia, FE quadratum duplum* (n) *est quadrati FL partis dimidiæ; & in triangulo rectang. EQG, propter latera QE, QG æqualia, erit EG quadratum,* (o) *duplum quadrati EQ vel LO compositæ ex dimidia & adjecta. Quadrata vero FE & EG æqualia sunt* (p) *quadrato FG; hoc est,* (q) *quadratis FO totius compositæ, & OG vel OI partis adjectæ. Ergo* (r) *quadrata totius compositæ FO, & adjectæ OI, dupla sunt quadratorum dimidiæ FL, & LO compositæ ex dimidia & adjecta. Q. E. D.*

Fig. 20.

(b) Per cor. 1. Sch. p. 31. l. 1.
(c) Per cor. 11. pr. 32. l. 1.
(d) Per idem.
(e) Per 15. l. 1.
(f) Per 27. l. 1.
(g) Per cor. 6. p. 32. l. 1.
(h) Per 6. l. 1.
(i) Per 34. l. 1.
(K) Per cor. 6. pr. 32. l. 1.
(l) Per 6. l. 1.
(m) Per 34. l. 1.
(n) Per cor. 1. pr. 47. l. 1.
(o) Per idem.
(p) Per 47. l. 1.
(q) Per eamd.
(r) Per axio. 1.

Sit numerus 40 *sectus æqualiter in* 20 *&* 20, *eique addatur numerus* 14. *Erunt Quadrata* $54 \times 54 = 2916$ *&* $14 \times 14 = 196$ *dupla quadratorum* $20 \times 20 = 400$, *&* $34 \times 34 = 1156$.)

PRO-

PROPOSITIO XI.

Fig. 21. *Datam rectam (AB) ita secare (in C,) ut rectangulum (ABC) sub tota & una parte contentum, æquale sit quadrato partis reliquæ (AC.)*

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biseca in X. Duc rectam XB; cui ex FA producta æqualem abscinde XI. Tum abscinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ducta per C perpendiculari, perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA bisecta est in X, eique adjecta est AI; erit

(a) Per 6. l. 2. (rect. FIA Æ. (*a*) quad. XI;
quad. XA

id est,

(b) Per constr. & axio. 15. Æ. (*b*) quad. XB;

id est,

(c) Per 47. l. 1. Æ. (*c*) quad. BA
quad. XA.)

Auferatur utrimque quad. XA; Erit
rect. FIA seu FL Æ. quad. BA; id est AS.
Quare ablato rursum communi AO;
Erit AL Æ. CS.

Atqui AL est quadratum AC, cum AI, AC ex constr. sint æquales: & CS est rect. ABC, cum BS sit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam secuimus, ut petebatur,

Scholium.

Propositiones 10. primæ hujus libri veræ sunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non potest. Neque enim ullus numerus ita secari potest, ut productum ex toto in partem unam, æquale sit quadrato partis reliquæ. (*Et hoc quidem demonstravit Tacquetus noster in Schol. post prop. 29. libri tertii elementorum Arithmet. In numeris surdis autem exhiberi possunt quantitates segmenti. AC, CB respondentes. Sit AB* $=$ *2. hoc est, proponatur numerus binarius ita dividendus in partes duas, ut quadratum partis majoris æquetur facto sub toto binario in sui partem minorem ducto. Erit AC, sive pars major* $= \sqrt{5} - 1$; *& CB, sive pars minor* $= 3 - \sqrt{5}$. *Sic enim, non solum istarum partium summa toti binario æqualis erit; verum etiam, tum quadratum partis majoris, tum*

tum & factum ex binario & parte minori, æquabitur uni eidemque quantitati, nempe $6 - 2\sqrt{5}$.) Porro mira vis est hujus sectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

IN trigono obtusangulo (ACB,) quadratum lateris (AB) obtuso angulo (C) oppositi, quadrata laterum reliquorum (AC, BC) excedit rectangulo (BCF) bis, quod comprehenditur sub (BC) latere alterutro obtusum angulum (ACB) continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis (AF;) & sub (FC) intercepto exterius latere inter perpendicularem & obtusum angulum. Fig. 22.

Quad. AB Æ. (*a*) quad. AF, quad. BF. (a) Per 47. l. 1.

Sed quad. BF est (*b*) æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo si hæc substituas pro quad. BF; erit (b) Per 4. l. 2.

Quad. AB Æ. quad. AF, quad. FC, quad. CB, rect. BCF bis.

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato (*c*) AC. Quare hoc pro illis substituto, erit (c) Per 47. l. 1.

Quad. AB Æ. quad. AC, quad. CB, rect. BCF bis.

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocumque (ACB,) quadratum lateris (AB) acuto angulo (C) oppositi, a quadratis laterum reliquorum (AC, BC) exceditur rectangulo (BCF) bis, quod continetur sub (BC) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (AF) ab angulo opposito (A;) & sub (CF) intercepta inter perpendicularem (AF) & acutum angulum (C.) Fig. 23. 24.

Quad.

(a) Per 4. l.2.

Quad. BC. Æ. (*a*) rect. BFC bis
quad. BF
quad FC

Et Quad. AC (*b*) Æ. quad. FC
quad. AF.

(b) Per 47. l.1.

Quare duo simul (quad. BC. Æ. rect. BFC bis
quad. AC. quad. BF
quad. FC bis
quad. AF)

(c) Per 3. l.2.

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur (*c*) rectangulo BCF bis. Ergo hoc pro illis substituto,

(Quad. BC Æ. rect. BCF bis
quad. AC quad. BF
quad. AF.)

(d) Per 47. l.1.

Atqui quadrata AF, BF sunt (*d*) quad. AB. Ergo hoc pro illis substituto,

(Quad. BC Æ. rect. BCF bis
quad. AC quad. AB.)

Hoc est, BC, AC quadrata excedunt quad. AB. rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 25. (e) Per cor. 3. p. 32. l.1.

Vera est propositio licet perpendicularis (*AF, propter angulum ABC (e) obtusum,*) cadat extra triangulum. (*In latus CB productum.*) Demonstratio fere eadem est. (*Vel sic:*

(f) Per 12. l.2.

Quad. AC Æ. (f) *rect. CBF bis*
quad. CB
quad. AB.

Addito igitur utrisque quadrato CB,

(*quad. AC. Æ. rect. CBF bis*
quad. CB quad. CB bis
quad. AB.)

Atqui rectang. CBF bis, una cum quadrato CB bis, æquatur (g) *rectangulo BCF bis:*

[g] Per 3. l.2.

Ergo (*quad. AC Æ. rect. BCF bis*
quad. BC quad. AB.)

Fig. 23. 24. 25

Aliter *& universalius demonstrabitur prop. 13. sive cadat perpendicularis intra triangulum, sive extra.*

(h) Per 7. l.2. (i) Per 47. l.1. (K) Per eamd.

BCq + CFq = (h) *2. rect. BCF + BFq. Adde utrinque AFq; BCq + CFq + AFq = 2 rect. BCF + BFq + AFq. Sed CFq + AFq =* (i) *ACq, & BFq + AFq =* (k) *ABq. Ergo BCq + ACq = 2 rect. BCF + ABq. Q. E. D.*)

Scholium (1)

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimensio cujuscumque trianguli cujus tria latera sint nota, licet aream habeat impervium. Horum quippe theorematum beneficio innotescit perpendicularis, etiamsi eam impedimenta loci non sinant designari. Perpendicularis autem multiplicata per semissem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex scholio propos. 41. l. 1.

Esto trigonum quodcumque ACB nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppositum BC demissam. Fig.25. vel 24.

Quadratum lateris AB acuto C oppositi, aufer ex summa quadratorum AC, CB. Per 13. residuum erit rectangulum BCF bis. Residui semissem (hoc est, rectangulum BCF) divide per notum latus BC. Proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato AC. Residuum dabit quadratum AF, cujus radix quadratica dabit perpendicularem AF.

[*Ex. gr. sit* $AB = 13$, & $BC = 14$, & $AC = 15$. *Erit* $ABq = 169$, & $BCq + ACq = 196 + 225 = 421$. *Unde* $2\ BCF (= BCq + ACq - ABq = 421 - 169) = 252$, & *propterea* $BCF = 126$, & $CF = 9$. *Ergo* $AFq (= ACq - CFq = 225 - 81) = 144$, & $AF = 12$. *Et trianguli area erit* $12 \times 7 = 6 \times 14 = 84$. Fig.24.

Obtinere id ipsum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. sufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppositum, intra triangulum cadat. Fig.23.24

(*Ne autem Tyronibus desit exemplum, quo etiam ex prop. 12. aream trianguli obtusanguli, (ubi perpendicularis cadit extra triangulum,) datis lateribus, obtinere possint; In triangulo obtusangulo ABC, (fig. 22.) sit* $AB = 20$, $AC = 13$, $BC = 11$. *Erit* $ABq = 400$, $ACq + BCq = 169 + 121 = 290$. *Unde* $ABq - ACq - BCq = 400 - 290 = 110 = 2\ BCF$, $BCF = 55$, $CF = 5$, $CFq = 25$, $ACq - CFq = 169 - 25 = 144 = AFq$. *Unde* $AF = 12$, & $\frac{1}{2}\ AF \times BC = 6 \times 11 = 66$ *est area trianguli ABC.*) Fig.21.

Scholium (2.) *Si a trianguli cujusvis (ACB) vertice (A) in basim (CB) si opus productam, demittatur perpendiculum (AF;) erit differentia quadratorum e lateribus (AC, AB,) æqualis duplo rectangulo sub basi (CB,) &* $CF - \frac{1}{2} CB$ *distantia perpendiculi a medio basis.* Vide Arithmet. Univers. pag. 103. edit. primæ. Fig.24.25

Nam

Nam per hanc prop. $ACq + BCq = ABq + 2\ BCF$.

Et subductis utrimque $ABq + BCq$, *erit* $AC = ABq = 2$
$BCF - BCq$.

(a) Per cor.4.p.4. l.2. *Sed* $BCq =$ (a) $2\ BC \times \frac{1}{2}\ BC$. *Ergo* $ACq - ABQ = 2\ BC \times$
$CF - \frac{1}{2}\ BC$. Q. E. D.

Fig.26. (b) Per n.1.Schol. p.26. l.1. *Si latera AB, AC sint æqualia, perpendiculum cadet in medium* (b) *basis; adeoque tum differentia quadratorum e lateribus, tum distantia perpendiculi a medio basis simul evanescunt.*

(c) Per pr. ob.2. post 47.l.1. (d) Per cor.4.pr.4 l.2. *Si alteruter angulorum ad basim sit rectus, ut B; perpendiculum AF cum latere AB coincidet; & differentia quadratorum e lateribus* (c) *æquabitur quadrato basis CF. Distantia autem perpendiculi a medio basis æquabitur basis dimidio, & proinde duplum rectang. sub basi & ista distantia, hoc est, sub basi & basis dimidio,* (d) *æquabitur etiam quadrato basis. Quare differentia quadratorum e lateribus æqualis erit duplo rectangulo sub basi & distantia perpendiculi a medio basis.*

Fig.28. Schol. 3. *Si a trianguli cujusvis ABP vertice A ducatur recta AC basem BP bisecans in C, erunt quadrata laterum AB, AP simul sumpta, dupla quadratorum dimidiæ basis BC, & rectæ AC bisecantis basem, simul sumptorum. A vertice A*
(e) Per cor.3. pr. 32. l.1. *demittatur AF perpendicularis basi, & cadat inter C & P* (e) *Erit itaque angulus ACB obtusus, & ACP acutus. Unde per prop.* 12, *erit* $ABq = ACq + CBq + 2\ BCF$ *& per prop.* 13, *erit* $APq = ACq + CPq - 2\ PCF$. *Sed propter* $BC = PC$, *erit* $CBq =$ (f) CPq, & $2\ BCF =$ (g) $2\ PCF$. *Unde* $CBq + CPq =$ (h) $2\ CBq$, & $2\ BCF - 2\ PCF$ (i) $= 0$. *Ergo æqualibus addendo quantitates æquales, provenient æqualia aggregata,* $ABq + APq = 2\ ACq + 2\ CBq$. Q. E. D.

(f) Per axio.15. (g) Per 36.l.1. (h) Per axio.9. (i) Per axio.3.

Coroll. *Iisdem manentibus base BP, & recta AC bisecante basem, utcumque ad basem varie inclinata, ut aC, idem manebit aggregatum quadratorum crurum; scil.* $ABq + APq = aBq + aPq$. *Et sic ubique.*

Hæc autem propositio ad Curvarum tangentes, diametros & ordinatas applicari potest. Tangant v. gr. rectæ AB, AP, conicam quamlibet sectionem vel sectiones oppositas in B & P; & juncta BP bisecetur recta AC: erit BC vel PC ordinata ad diametrum AC. Unde quadrata tangentium AB. AP dupla erunt quadratorum ordinatæ BC vel PC, & diametri inter ordinatam ac tangentium concursum interceptæ AC. Hac etiam propositione utitur Serenus Antissensis in sectione coni a plano per verticem ducto. Verum hæc extra oleas.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

D*Ato rectilineo (QXZ,) æquale quadratum construere.* Fig. 29.

(*Sume rectam quamvis IA, super qua*) rectilineo QXZ fac æquale (*a*) parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA, si æqualia fuerint, ipsum erit quadratum quod petitur: si inæqualia sint, latus majus IA produc in L, donec AL sit par AC. IL biseca in Z; quo centro per I & L describe circulum, & producatur CA donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale est dato QXZ.

(a) Per 45. l. 1.

Ducatur enim recta ZB, Quoniam IL secta est bifariam in Z, & aliter in A; erit

(rect. IAL Æ. (*b*) quad. ZB; hoc est,
quad. ZA
Æ. (*c*) quad. ZB; hoc est,
Æ. (*d*) quad. ZA
quad. BA)

Ablato igitur utrimque quadrato ZA communi, remanet
rect. IAL Æ. quad. BA:
hoc est, quia AC, AL sunt æquales, erit
rect. CI,
Id est, (*e*) rectil. QXZ Æ. quad. AB.

(b) Per 5. l. 2.

(c) Per constr. & def. circuli.

(d) Per 47. l. 1.

(e) Per constr.

Scholium.

COnstructio Euclidea requirit, ut per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum satis operosa sit, fortasse expeditius problema absolvetur hunc in modum.

Rectilineum datum resolvatur in tot quadrangula (Z, X) quot potest. Tum singulis quadrangulis fac (*f*) rectangula æqualia. Si tunc supersit (ut hic contigit) unum triangulum (Q.) illi quoque fac (*g*) æquale rectangulum. Singulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale (*h*) fiat. Erit hoc æquale dato QXZ.

(f) Per sch. 2. Pr. 45. l. 1.

(g) Per cor. p. 42. l. 1.

(h) Per prob. 1. sch. p. 47. l. 1.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS.

Perfectissimæ inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonstrantur. Libri utilitas vel hoc solo innotescit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Mathesim universam fonte uberrimo. Theoremata illustriora sunt 16, 20, 21, 22, 31, 32, 35, 36.

Continet autem liber hic tertius *circuli proprietates: lineasque plurimas & intra ejusdem peripheriam & extra ad eamdem ductas inter se comparat. Circulorum etiam se mutuo intersecantium, & se mutuo, aut lineas rectas tangentium affectiones explicat. Angulos etiam sive ad centrum sive ad circumferentiam positos inter se componit. Breviter, Prima* Geometriæ Practicæ *elementa, circulorum adminiculo potissimum innixa, exponit.*

DEFINITIONES.

1. Circuli æquales sunt, quorum diametri seu semidiametri sunt æquales.

Fig. 21, l. 3. 2. Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo sic occurrit (in B) ut tamen producta circulum non secet.

Fig. 14. & 15. 3. Circuli tangere se dicuntur, cum sibi sic occurrunt, ut tamen non secent.

Fig. 19. 4. In circulo æqualiter a centro (A) distare dicuntur rectæ (BC, FL) cum perpendiculares (AI, AO) quæ ex centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. (*Et si perpendiculares in rectas(XZ, BI) demissæ, sint inæquales, magis a centro distare*

Fig. 20. *dicitur ea recta(XZ) in quam cadit major perpendicularis.*)

Fig. 38. 5. Segmenta, seu portiones circuli sunt partes (CQE, CSE) in quas circulum dividit recta (CE) circulum secans, (*quæ segmenti utriusque basis est.*)

Fig. 34. 35. 6. Angulus in segmento est (BQC) qui continetur sub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ punctum (Q) ex segmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 34. 7. Angulus (CQB) insistere dicitur peripheriæ (BOC) quæ illi opponitur.

Fig. 12. 8. Sector est pars circuli a duabus semidiametris (AB, AF) & arcu

& arcu (BF vel BCF) quem semidiametri intercipiunt, comprehensa.

(9. *Angulus (BAO) segmenti (AB QO) est, qui basi segmenti (BA) & arcu (QOA) comprehenditur.* Fig. 21.

10. *Recta BC circulo inscripta, vocatur arcuum BAC, BI, vel anguli ad centrum BDC* chorda *sive* subtensa. *Et, si ab arcus AB extremo A ducatur diameter AI, & in eam ab altero arcus extremo B cadat perpendicularis BG; appellatur hæc arcuum BA, BI, sive angulorum ad centrum BDA, BDI* sinus rectus, *vel simpliciter* sinus: *eritque GA, arcus AB vel anguli ADB (& GI arcus IB vel anguli IDB)* sinus versus. *Porro, si producatur radius DB donec rectæ EH (circulum tangenti in A) occurrat in E, recta AE nominatur arcuum AB, BI, vel angulorum ADB, BDI* tangens, *& recta DE eorumdem arcuum vel angulorum* secans. *Præterea, anguli ad centrum recti ADK sinus rectus DK (qui in hoc casu, circuli radius erit,) peculiari nomine* sinus totus *appellatur. Denique sinus rectus BL anguli BDK (quod complementum est anguli ADB ad rectum) vocatur* cosinus *anguli ADB: item HK tangens, & HD secans ejusdem anguli BDK, est anguli ADB* cotangens & cosecans *respective.)* Fig. 40.

PROPOSITIO I.

D*Ati circuli centrum invenire.*

Ducatur in circulo recta BC utcumque, quam biseca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biseca in A. Erit A centrum. Fig. 1. l. 3.

Si negas; centrum esto O extra rectam FL, (nam in FL esse non poterit, cum ubilibet extra A dividatur inæqualiter;) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum esse, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ sibi mutuo æquilatera sunt, cum etiam ex constr. BQ, & QC sint pares, & QO communis. Ergo (*a*) angulus OQC æquatur angulo OQB. Ergo OQC (*b*) rectus est, ac proinde angulo LQC per constr. recto æquatur, pars toti. Quod est absurdum.

(a) Per 8. l. 1.

(b) Per def. 14. l. 1.

Corollarium.

EX demonstratis patet, si in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam & perpendiculariter secat, in secante esse centrum. Fig. 2.

Facillime per normam invenitur centrum; vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungens puncta

E D &

D & E, quibus normæ latera peripheriam secant, bisecetur in A, erit A centrum. Demonstratio pendet ex 31. hujus.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

SI in circuli ambitu duo puncta sumantur (B, C,) recta quæ per illa ducitur, intra circulum cadit.

Accipiatur in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam (a) anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AO. (b) major est interno B, major erit quoque quam C. In triangulo igitur OAC, latus AC subtendens majorem angulum AOC, majus est (c) latere AO subtendente minorem C. Cum igitur AC tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum.

(a) Per 5. l 1.
(b) Per cor 1 p. 32 l 1.
(c) Per 19 l. 1.

Cor. *Hinc sequitur rectam quamvis lineam circulum tangentem, in unico puncto eumdem tangere. Si enim circumferentiæ puncta duo tangeret, esset* recta linea per duo circuli puncta ducta, *atque adeo* (d) *intra circulum caderet, contra tangentis definitionem. Et simili ratiocinio (a planis ad solida transeundo) probari posset planum quodvis sphæram in unico puncto tangere.*

(d) Per hanc pr.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SI in circulo recta per centrum ducta (BL) aliam (CF) non per centrum ductam secet bifariam (in O,) secabit quoque perpendiculariter. Et si secet perpendiculariter, secabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducatur AC, AF. Triangula X, Z sibi mutuo æquilatera sunt: Nam CO, FO ex hypothesi, & AC, AF quia ex centro, æquales sunt: AO vero communis est. Ergo (e) anguli AOC, AOF æquales. Ergo (f) recti. Quod erat primum.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF sunt recti, erit quad. AC. (g) æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia (h) sint, etiam duo simul AO, CO duobus simul, AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrinque communi quadrato AO, remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO sunt æquales. Quod erat alterum.

(e) Per 8. l. 1
(f) Per def. 14 l. 1.
(g) Per 47 l. 1
(h) Per axio. 15.

(Cor.

(Cor. 1. *Dimidium chordæ angulum quemvis ad centrum subtendentis, est semissis anguli istius sinus rectus. Chordæ CF anguli ad centrum CAF, perpendicularis a centro ducatur AO. In triangulis X, Z, erunt CO, FO* (a) *æquales, AO communis, & anguli ad O recti. Ergo anguli CAO, FAO æquales* (b) *erunt. Quare angulus CAO semissis erit anguli CAF, & recta CO dimidium chordæ CF. Sed CO est sinus* (c) *rectus anguli CAO. Ergo dimidium chordæ, angulum quemvis ad centrum subtendentis, est semissis anguli istius sinus rectus.*

(a) Per hanc pr.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Per def. 10. l. 1

Cor. 2. *Si trianguli cujusvis æquilateri, aut etiam tantum Isoscelis ACF sumatur vertex A pro circuli centro, & alterum æqualium crurum AC pro radio, circulus transibit* (d) *etiam per F: atque inde, vi hujus prop. si recta AO a vertice trianguli isoscelis bisecet basim, ei quoque perpendicularis erit, & si basi fuerit perpendicularis, eam bisecabit. Et inde etiam deduci possent ceteræ proprietates, quæ in Schol. p. 26. l. 1. aliunde derivantur.*

(d) Per def. 18. 19. & 26. l. 1.

Scholium. *Si a vertice trianguli Isoscelis ABC ad quodvis punctum basis recta linea ducatur; erit quadratum ductæ rectæ una cum rectangulo sub segmentis basis, æquale quadrato lateris AB vel AC. Nam recta a vertice A ducta, vel erit basi BC perpendicularis, vel non. Sit primo ducta recta AD perpendicularis basi; erit BD* = (e) *DC, & proinde rectang. BDC = BDq, vel DCq. Sed ADq + BDq =* (f) *ABq; hoc est ADq + rect. BDC = ABq. Q. E. D.*

Fig. 4.

Sed recta ducta sit AE, non perpendicularis basi, & ducatur perpendicularis AD, quæ basim in D (g) *bisecabit. Cum igitur recta BC sit bifariam secta in D & non bifariam in E,* (h) *erit rectang. BEC + EDq = BDq. Adde utrinque DAq, & rect. BEC + EDq + DAq = BDq + DAq. Sed EDq + DAq =* (i) *AEq, & BDq + DAq =* (k) *ABq. Ergo rect. BEC + AEq = ABq. Q. E. D.*

(e) Per Cor. 2. hujus.
(f) Per 47 l. 1.
(g) Per cor. 2. hujus.
(h) Per 5. l. 2.
[i] Per 47 l. 1.
(*k*) Per eamd.

PROPOSITIO IV.

SI *in circulo duæ rectæ (BC, FL) non ambæ per centrum ductæ, se secent, non secabunt se mutuo bifariam.*

Fig. 5. & 6

Nam si una LF transeat per centrum, patet hanc non bisecari ab altera BC, quæ ex hyp. per centrum A non transit.

Fig. 6.

Si neutra per centrum transit, ex A centro duc AO. Si jam ambæ BC, FL forent bisectæ in O, anguli quoque AOC AOL essent (*l*) recti, ac proinde æquales, totum & pars: Quod fieri non potest.

Fig. 5.

(l) Per præc.

PROPOSITIO V. & VI.

Fig. 7. & 8. *Circuli se mutuo secantes, aut interius tangentes, non habent idem centrum.*

Alias enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, essent AC, AF, (pars & totum) æquales, quia ambæ sunt æquales eidem AB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 9. *Si in circulo, quodvis aliud a centro (A) accipiatur punctum (C,) ex quo rectæ plures (CB, CL, CO, CF) in circumferentiam cadant;*

1. *Maxima erit (CB) quæ per centrum transit.*
2. *Reliqua diametri pars (CF) minima.*
3. *Aliarum vero major est ea, quæ maximæ (CB) propior.*
4. *Neque plures quam duæ ex dicto puncto (C,) quod a centro diversum est, ad circumferentiam duci possunt æquales.*

Pars 1. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales sunt, addita communi AC, erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC sunt majores (*a*) quam LC. Ergo etiam BC major est quam LC. Eodem modo BC ostendetur major quavis alia.

(a) Per 20 l. 1.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO, (hoc est, AF) est minor (*b*) quam AC, CO. Ablata igitur communi AC, remanet FC minor quam CO. Eodem modo erit CF minor quavis alia.

[b] Per eamd.

Pars 3. In triangulis COA, CLA, latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC; angulus vero LAC major est angulo OAC. Ergo (*c*) basis LC major basi OC.

(c) Per 24 l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam si tres duci possent æquales, CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eamdem partem inter se æquales. Quod repugnat parti 3.

Coroll. *Simili plane ratiocinio cum Theodosio colligimus, Arcuum circulorum maximorum, a puncto quovis a circuli dati polo diverso, in superficie sphere ad circulum istum ductorum, maximum esse eum, qui per circuli polum transit; minimum qui ad* *ad punctum oppositum dati circuli ducitur; reliquorum vero eum esse majorem, qui maximo est propior; duos vero solum inter se æquales ab eodem puncto ad circulum duci posse. Neque aliter de plerisque hujus libri propositionibus Lector per se ratiocinabitur. A planis enim ad solida in hisce rebus transire est sane facillimum.*

PROPOSITIO VIII.

SIa puncto extra circulum accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (AB, AC; AF, AO, AQ, AR,) Fig. 10. & 11.

1. *Earum, quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima est (AB) transiens per centrum (Z.)*

2. *Aliarum major est ea, quæ maximæ (AB) propior.*

3. *Extra circulum minima est (AO) quæ producta per centrum transit.*

4. *Quæ minimæ propior, minor est remotiore.*

5. *Non plures quam duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci possunt æquales; sive intra circulum, sive extra.*

Pars 1. Ex centro Z duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; addita communi AZ, erunt AZ, ZC ipsi AB æquales. Sed AZ. ZC majores sunt (*a*) quam AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis alia. Fig 10. (a) Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA. Angulus vero CZA major est angulo FZA. Ergo (*b*) basis CA major basi FA. (b) Per 24. l. 1.

Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores (*c*) sunt quam AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO, remanet AO minor quam AQ. Eodem modo AO minor erit quavis alia. Fig 11. (c) Per 20. l. 1.

Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ & QZ minores sunt (*d*) quam AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR, remanet AQ minor quam AR. (d) Per 21. l. 1.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto (A) plures quam duæ æquales ad ambitum duci possint; Id punctum centrum erit. Fig 12.

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Circuli in duobus tantum punctis se mutuo secant.*

Secent enim, si fieri potest, in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli LQ ducantur ad B, C, F, rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ sunt tres æquales ad ejus peripheriam. AB, AC, AF, erit (*a*) centrum quoque circuli OS. Ergo circuli LQ & OS se secantes habent idem centrum, quod repugnat propositioni 5.

[a] Per præc.

PROPOSITIO XI.

Fig. 14. *Si duo circuli se intus tangant; recta per eorum centra (A & I) ducta transibit per contactum (B.)*

Si negas, habeant, si fieri potest, centra eum situm, ut recta per illa transiens, cadat extra contactum B, secans circulos in O & L, sintque centra ipsa A & C; ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur; addita communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed (*b*) AC, CB sunt majores quam AB: Hoc est (*c*) quam AL. Ergo etiam AO major est quam AL, pars toto. Quod est absurdum.

(b) Per 20 l. 1

(c) Per def. circuli.

PROPOSITIO XII.

Fig. 15. *Si circuli se tangant exterius: recta conjungens centra, per contactum transibit.*

Si negas, sint, si fieri potest, centra ita posita, puta in A & B, ut recta per ipsa transiens, per contactum S non incedat, sed circulos secet in O & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur (*d*) AS, SB majores quam AB. Sed AS (*e*) est par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ sunt majores quam tota AB, pars toto. Quod fieri non potest.

(d) Per 20. l. 1.

(e) Per def. circuli.

(Coroll. ad duas præced. *Si duo circuli se tangant vel interius vel exterius; recta a centro unius per contactum ducta, transi-*

transibit per centrum alterius. Ejusmodi enim recta non differet a recta per eorum centra ducta, qua per hasce propp. 11. & 12. transibit per contactum.)

PROPOSITIO XIII.

Circuli & sese mutuo, & lineam rectam punctualiter tangunt. Fig. 16. & 17.

Tangant enim se intra (si fieri potest) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A & B ducta recta (*a*) transibit per contactum, puta in C. Ducantur insuper AL, BL. Quoniam igitur (*b*) BL, BC æquantur, sunt enim ex centro B ad peripheriam OLC,) addita communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC est par AL, (sunt enim ex centro A ad peripheriam QLC. Ergo etiam AB, BL sunt æquales AL, contra 20. l. 1. Fig. 16. (a) Per 11. l. 3. (b) Quia ex centro.

Tangant se deinde exterius duo circuli, si fieri potest, in arcu OL. Recta AP centra A & P jungens (*c*) transibit per contactum, puta in O. Ducantur insuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipsis, AO, PO, seu toti AP. Contra 20. l. 1. Fig. 17. (c) Per 12. l. 3.

Denique recta BF & circulus se tangant, si fieri potest, in parte aliqua CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE est Isosceles. Quare (*d*) anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF, ducta ex A centro, cadet inter (*e*) C & E, puta in D. Erunt igitur tam AC, quam AE æquales perpendiculari AD, quod est absurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. Fig. 17. (d) Per cor. 11 p. 32. l. 1. e Per cor. 3 p. 32. lib. 1.

Corollarium.

Circuli qui habent centra in una recta, eamque secant in eodem puncto B, se mutuo in puncto illo B contingunt. Fig. 18.

Ceterum hæc propositio liquet etiam ex notione ipsa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diversæ curvaturæ, aut duæ convexæ, secundum ullam sui partem possunt congruere. Congruerent autem, si se invicem in tota parte aliqua tangerent.

PROPOSITIO XIV.

Fig 19. *IN circulo æquales rectæ (BC)., IF) æqualiter a centro distant : & quæ distant a centro æqualiter , sunt æquales .*

Ex centro A ducantur AC , AF ; item AO , AI ad
(a) Per angulos rectos ipsis BC, FL . Erunt (*a*) BC, FL bise-
3. l. 3. ctæ in O & I,
(b) Per Cum ergo totæ BC, FL ponantur æquales etiam dimi-
axio 15. diæ OC , IF , adeoque & (*b*) quadrata ipsarum æquantur.
(c) Per 47. Jam vero quad. AC (*c*) æquale est quadratis OC , OA : &
l. 1 quadratum AF æquatur quadratis IF , IA . Cum igitur qua-
(d) Per drata AC , AF (*d*) æqualia sint , etiam duo quadrata OC,
def. circu- OA , duobus IF , IA æqualia erunt . Ablatis igitur quadra-
li & axio tis OC , IF (quæ ante ostensa sunt æqualia ,) quæ rema-
15. nent , quad OA , IA , æqualia erunt . Ergo etiam perpen-
(e) Per diculares OA , IA sunt (*e*) æquales . Ergo BC , FL æqua-
axio. 15. les a centro distant (*f*) æqualiter . Quod erat primum .
(f) Per def. 4. l. 3.

E converso, si distantiæ OA , IA ponantur æquales , tunc ablatis quadrati rectarum æqualium OA , IA , eodem discursu ostendetur quadrata reliqua OC , IF fore æqualia ,
(g) Per ac proinde & rectas OC , IF æquales esse : quæ cum sint (*g*)
3. l. 3. semisses rectarum BC , FL , etiam illæ æquales erunt . Quod erat alterum .

PROPOSITIO XV.

Fig. 20. *REctarum circulo inscriptarum maxima est diameter . Ceterarum ea major , quæ centro propior .*

Sit quævis RS alia a diametro FL . Ex centro duc AR , AS . Duæ AR , AS æquantur diametro FL , &
(h) Per sunt (*h*) majores quam RS . Ergo , &c
20. l. 1. Sit deinde BI propior centro quam XZ . Ex centro ad
(i) Per illas duc perpendiculares AC ,AQ . Erit AQ (*i*) major
def 4 l. 3 quam AC . Accipe ergo AO parem AC ; & per O duc RS
(k) Per perpendicularem ad AO , quæ (*K*) par erit BI ; junganturpraced. que AR , AS , AX , AZ . Quia igitur A centrum est , erunt latera AR , AS æqualia lateribus AX , AZ . Angulus autem RAS , major est angulo XAZ . Ergo basis RS , hoc est BI
(l) Per major (*l*) est basi XZ . Quod erat demonstrandum .
24. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Recta (IF) quæ per (B) extremitatem diametri (CB) perpendicularis est, tota cadit extra circulum, eumque tangit (in B:) Neque inter ipsam & circulum, alia recta ad contactum (B) duci potest, quin circulum secet. Fig. 21.

Pars 1. Accipiatur in recta IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quoniam angulus ABL rectus est per hyp. erit ALB (*a*) acutus. Ergo AL opposita majori angulo ABL, major est (*b*) quam AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantum pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum est. (*Idem ostendetur de quovis alio puncto rectæ IF, a B diverso. Quare, cum recta IF ita circulo occurrat in unico puncto B, ut eum non secet,*) Tota igitur IF extra circulum cadit (*eumque tangit* (c) *in B.*) Quod erat primum. (a) Per cor. 5 p. 32. l. 1. (b) Per 19 l. 1.

Pars 2. Infra BF (si fieri potest) cadat RB tota extra circulum. Quoniam FBA rectus est per hyp. erit RBA acutus, ac proinde AB non est perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR, perpendicularis AO, quæ cadet (*d*) versus R, & secabit circulum in Q. Igitur AB opposita majori angulo, nempe AOB recto, major est quam AO quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par est AQ: Ergo etiam AQ major est quam AO, pars toto. (c) Per def. 2. l. 3. [d] Per cor. 3. p. 32 l. 1.

(*Euclides hanc propositionem sic effert:*

1. Recta IF, diametro circuli CB ad rectos angulos ab extremitate ducta, cadit extra circulum: 2. & in locum qui inter rectam lineam BF & circumferentiam QB interjicitur, altera recta linea RB non cadet: 3. & semicirculi angulus ABQ major est quovis angulo rectilineo acuto; reliquus autem QBF minor.

Partem primam & secundam jam demonstravit Tacquetus; reliquas duas pro paradoxis male fundatis rejecit, haud recte quidem, ut mihi videtur. Si enim dari posset angulus quivis rectilineus acutus ABR, (angulo scil. recto ABF minor,) qui tamen major esset angulo semicircul. ABQ; vel si quivis angulus rectilineus FBR dari posset, inter tangentem FB & circulum QB, ad punctum B constitutus: sequeretur rectam inter tangentem & circulum duci posse, quæ tamen circulum non secet, contra partem secundam.)

Corol-

Corollaria.

Fig. 21. HInc rursum patet contactum rectæ lineæ & circularis esse punctualem.

Fig. 18. 2. Si centris in eadem linea recta in infinitum protracta acceptis, describantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quacumque data majorem excrescentes, propius semper ac propius in infinitum tangenti appropinquant, numquam tamen ei præterquam in unico contactus puncto conjunguntur: quod quamvis evidentissimum sit, est tamen revera admirabile.

Fig. 18. 4. Ex his manifestum est, lineam quamcumque in infinitum esse divisibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in recta BA sine termino producta, rectam IF per coroll. 2. hic, & se mutuo per coroll. p. 13. tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nusquam vel inter se, vel cum recta IF conjunguntur præterquam in B. Ergo necesse est, ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc est, in non tot quin plures.

Fig. 21. 5. Angulum contingentiæ seu contactus LBQ (eum nempe qui tangente & peripheria continetur) nulla recta linea potest dividere.

Fig. 18. 6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes secari potest ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum mysterium asymptoticum, hoc est, lineæ rectæ ad Hyperbolam una secum in infinitum productam, accedentis ad intervallum quocumque dato minus, numquam tamen concurrentis: quod præclare observavit & demonstravit Marius Bertinus noster in Apiariis, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyse Narbonensi, cujus demonstrationem refert Cardanus de subtilitate, lib. 16.

Fig. 18. [*Angulus contactus (uti vulgo appellatur,) per circumferentias in eodem puncto tangentes non minuitur, utpote qui nullus est, vel non quantus, seu non angulus. (Vide Wallis. de angulo contactus.) Angulus enim (per def. 8. l. 1.) est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram* inclinatio: *recta autem QI circumferentiam unam vel plures in unico puncto B contingens, in ipso contactus puncto, (ibi enim, si quis sit, existit angulus,)* non inclinatur *ad illas circumferentias, sed cum iis prorsus*

coin-

coincidit. Hoc igitur corollarium sextum, quatenus verum est, non differt a tertio. Hinc autem sequitur.

7. Angulum semicirculi ABQ esse angulo recto rectilineo ABF æqualem. Si enim locus iste QBF qui inter circulum & tangentem interjicitur, ad punctum B non sit angulus, sive non quantus; eo igitur ab ABF ablato, angulus rectus non minuitur; ac proinde angulus semicirculi ABQ adhuc manet rectus. Fig. 21.

Ceterum quæstionem in Scholio subsequente agitatam, longe accuratius tract. Celeberr. Wallisius, Operum Mathematicorum volum. 2. (in sua de angulo contactus & semicirculi *disquisitione Geometrica, pag. 605.—630, ejusque defensione, pag. 631—664) quo itaque lector qui hisce oblectatur est remittendus. Tyrones interim, omisso hoc Scholio, ad prop. 17. & seqq. cum aliquo temporis operæque compendio transibunt.*]

Scholium.

Demonstratur & solvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci solent.

Atque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta, & mira & certa sunt. Quæ vero deduci ex eadem solent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare suspicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio subtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet. Et plane, quod suspicatus sum, ita se habere; mihi tandem videor deprehendisse. Paradoxa quæ ex 16. inferri solent; ex aliis multis, hæc fere præcipua sunt.

1. Angulus contingentiæ (OAC) omni acuto minor est. Acutus esto PAC. Ab hoc auferri potest dimidius, & a residuo iterum dimidius, & sic deinceps sine termino. Quo pacto acutus fiet quocumque dato minor. Quantumvis enim in infinitum minuatur, semper tamen residui anguli, exempli gr. anguli QAC latus unum QA (a) intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus OAC intra acutum continebitur, ejusque pars erit, ideoque illo minor. Fig. 22.

(a) Per 16 l. 3.

2. Angulus semicirculi (BAO) licet recto minor sit, est omni acuto major. Quia ob eamdem causam, acutus quantumvis magnus BAQ, intra semicirculi angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipso textu propositionis inferuntur. Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea sint, an ab aliquo adjecta. Apollonius certe magnus Geometra, cum eamdem affectionem

nem in ellipsi, hyperbola & parabola demonstrat, has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus CAB (imo acutus quicumque CAQ) continet infinitos æquales angulos contactus; ac proinde infinities illo est major. Nam angulus CAB dividi potest in acutos infinitos minores semper & minores, quorum nihilominus singuli sunt majores (*a*) angulo contactus OAC.

(a) Per paradox.1

4. Angulus contactus CAO est vera pars anguli recti CAB, eumdem quippe una cum semicirculi angulo OAB constituit: neq; it tamen ulla sui multiplicatione suum totum adæquare: ac proinde hic infinita æqualia sibi addita non efficiunt infinitum.

5. Transitur a minori ad majus & per omnia media, neque tamen per æquale: sive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam si recta AB, fixo manente puncto A, moveatur, donec congruat cum tangente, describet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios possibiles, qui quamvis semper augeantur, semper tamen erunt minores (*b*) semicirculi angulo BAO, quamprimum vero AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo semicirculi.

(b) Per paradox.2

Hæc & plura alia ex hac 16. propositione deduci solent: quæ profecto, si ita, ut proponuntur, sese habeant; merito incomprehensibilia videri possent. Peletarius, ut his paradoxis se expediat, negat angulum contactus esse quantum. Rem confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cum inde infert omnes semicirculi angulos esse æquales, quod plane non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo asseverat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio nostro in sua illa adversus Peletarium apologetica disputatione assentior. Mea quidem sententia uterque fallitur; hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem; ille dum omnes præter angulum contingentiæ. Alii se existimant hac una responsione omnes difficultates solvere, si dicant, curvilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati vero, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactus quantumcumque multiplicatus, numquam potest æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirum fieri possit, ut angulus contactus anguli recti pars sit, & tamen quotiescumque multiplicatus eumdem superare nequeat. Respondent angulum contactus non esse partem recti, quia eum non potest adæquare. At paradoxorum assertores replicant, hinc solum sequi non esse partem recti aliquotam: veram tamen esse partem,

partem, eo quod cum semicirculi angulo rectum componat. Unde qui hac via difficultates propositas volebant dissolvere, debuerant ostendere angulum contactus nullo sensu partem esse rectilinei anguli, neque addito sibi semicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidea definitione anguli pendere. Hæc enim, si penitius expendatur, manifeste docet nullum angulum esse quantum, quo uno errore sublato, paradoxa omnia evanescunt. Sentio igitur: Def. 8. l. 1.

1. Nullus angulus est quantitas, sed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus est duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non est quantitas, sed modus quantitatis. Cum enim curvitas non sit quantitas; cur inclinatio sit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio & fractio? Deinde; Si angulus esset quantus, foret vel linea, vel superficies, vel corpus. Non esse lineam aut corpus patet. Sed neque superficies est: ea enim, ablatione partium C, B, minuitur; non angulus. Neque potest dici angulum esse superficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus sit. Fig. 23.

2. Quoniam anguli non sunt quantitas, sed modus quantitatis, eorum inter se comparatorum relatio, non est æqualitas & inæqualitas, sed similitudo & dissimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter se comparati æquales dicantur aut inæquales, non aliud intelligi potest, quam eos similes esse inter se aut dissimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere, ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.

4. Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera superimposita congruunt; dissimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil est aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo similes anguli sunt inclinationes linearum similes. Non sunt autem inclinationes linearum similes, nisi ambæ sibi mutuo impositæ congruant. Ergo similes anguli sunt, quorum congruunt latera; dissimiles, quorum non congruunt.

5. Itaque manifestum est, nullum angulum curvilineum, æqualem dari posse ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud est quam similitudo, per conclus. 2. & 3. Similitudo angulorum est sola laterum congruentia, per conclusion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum descriptis æqualibus semicirculis, ita ratioci-

Fig.24. tiocinatur: æqualium semicirculorum anguli EAD, CAB æquales sunt. Ergo si his addatur communis angulus CAD erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallitne ergo axioma, si æqualibus addas vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas solum pertinet: anguli porro quanti non sunt. Axioma ut in angulis valeat, ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, si opponantur similibus angulis, similiterque positis, qui tum orientur, erunt similes. At Proclus comparat angulos similes quidem: sed communis, qui utrisque additur, cum ab una parte habeat latus rectum, ab altera curvum, dissimiliter utrisque additur.

6. Quare cum tota essentia anguli sit linearum se tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius; una siquidem inclinatio pars alterius inclinationis non est: neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio siquidem una auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non sunt, sed superficiebus inter latera constitutis conveniunt.

7. Postremo ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ passim, atque ipse in primis Euclides, utuntur, cum angulos secari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque similia asserunt. Hæc sane existimabimus eos non proprie, sed analogice tantum angulis tribuere; itaque eos loqui voluisse, quod id commodius, & expeditius esset, neque tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneatur.

Fig.25. Angulum itaque dividi recta DA, non aliud erit, quam inter latera EA, CA aliam interponi lineam, quæ novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc est duos novos angulos efficiat. Angulum vero EAC esse duplum anguli EAD, nihil rursum aliud erit, quam inter lineas rectas EA, CA, aliam interponi, quæ ad utramque similiter inclinetur; unde fiat ut rectæ EA, DA rectis CA, DA, inclinationibus non mutatis, impositæ congruant. Quod si ita ratiocinentur: (An-

Fig.25. & 26. gulus EAD est æqualis angulo ILQ, & DAC est æqualis QLR; ergo totus EAC toti ILR æqualis est:) Idem erit, ac si dicatur; Inclinatio rectarum EAD similis, seu eadem, est inclinationi rectarum ILQ; & inclinatio rectarum DAC similis est inclinationi rectarum QLR: Ergo etiam inclinatio rectarum EAC similis erit inclinationi rectarum ILR. Vel certe (quod recidet in idem, ex assertione 4. supra) collectionem illam sic intellige: latera EAD congruunt lateribus ILQ; & latera DAC congruunt lateribus QLR: Ergo latera quoque EAC congruunt lateribus ILR. Quæ quidem consecutio

æque

æque clarà est, atque si æqualibus addas æqualia, tota æqualia esse. Ad eum modum locutiones ceteras, quæ, cum sint quantis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique salva, interpretabimur.

His ita constitutis, facile paradoxa angularia dissolvemus; quæ sane non aliunde enata sunt, quam quod angulos eodem, quo ceteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur simul omnia expediam; Dico paradoxa illa, si in proprio verborum sensu accipiantur, ad unum omnia esse falsa. Sic enim accepta non convenient nisi quanto: anguli autem quanti non sunt, ut jam ostendimus.

Itaque angulus contactus neque minor est quovis acuto, neque pars est anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imo ne semel quidem; nihil enim horum, linearum inclinationi potest competere, quæ tota anguli essentia est. Si vero non proprie, sed analogice accipiantur, jam nihil continent, quod a communi sensu ac ratione alienum sit. Sic enim, angulum contactus OAC esse minorem quovis acuto, & semicirculi angulum OAB acuto omni majorem, non Fig 22. aliud significabit, quam infra tangentem CA, nullam posse duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas est omnino digna, quam homines admirentur, est tamen ejusmodi quam possimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti & quinti sensus erit. Atque ita unius Euclideæ definitionis ductu, rite perspecta natura anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evanescunt.

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectam ducere, quæ datum circulum (OQ) tangat. Fig. 27.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB, secans peripheriam in O. Centro A describe per B alium circulum, BC, & ex O duc OC perpendicularem ad AB, quæ occurrat circulo BC in C. Duc CA, occurrentem circulo OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, angulusque A communis est in trigonis IAB, OAC, etiam (*a*) anguli AOC, AIB æquales sunt. Sed (*b*) AOC rectus est. Ergo etiam rectus est AIB. Ergo BI (*c*) tangit in I.

[a] Per 4. I.
(b) Per constr.
(c) Per 16 l. 3.

Sche-

Scholium.

Fig.28. EX 31. seq. pulchre ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (BQ.)

Centrum A & datum punctum O jungens recta bisecetur in P. Tum centro P, per A & O describe circulum occurrentem dato in B. Recta OB tanget.

Nam juncta AB, angulus ABO in semicirculo rectus est, per 31. ergo per 16. OB tangit circulum BQ.

PROPOSITIO XVIII.

Fig.29. *SI circulum tangat recta linea (CL,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis est.*

Si negas, sit ex A centro perpendicularis, alia quædam recta AF: (a) secabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit (b) ABF acutus. Ergo AB, (hoc est AO) major (c) quam AF, pars toto.

(a) Per 1. part. p. 16. l. 1

(b) Per cor. 5. p. 32. lib. 1.

(c) Per 19. l. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig.30. *SI recta (BC) circulum tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (AI,) erit in ea centrum.*

Si negas, sit centrum extra AI in Z, & ab eo ad contactum ducatur ZA. Erit (d) angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC, per hypoth. recto; hoc est, pars toti.

(d) Per præc.

PROPOSITIO XX.

Fig.31.32 33. *ANgulus ad centrum (BAC) duplus est anguli (BCF) ad peripheriam, cum idem arcus (BC) est basis angulorum.*

Fig.31. Triplex est casus. In primo, latera BA, BF coincidunt. Tum vero quia AF, AC ex centro ductæ æquantur, ducta FC, erunt in triangulo Z anguli F & C (e) æquales. Sed

(e) Per 5. lib. 1.

Sed BAC (*a*) æqualis est duobus F & C. Ergo BAC duplus est unius F. (a) Per 32. l. 1.

In casu secundo BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum vero ducta FAX, per casum primum XAB est duplus XFB, & XAC duplus XFC. (*b*) Ergo totus BAC duplus est totius BFC. Fig. 32. (b) Per 12. l. 5. quæ ab hac non dependet.

(*Sit XAB angulus graduum 6:* (c) *erit angulus XFB graduum 3. Sit porro ang. XAC. gr. 4:* (d) *erit XFC gr. 2. Ergo XAB + XAC erit gr. 6. + 4 = gr. 10 = BAC; & XFB + XFC gr. 3. + 2 = gr. 5. = BFC. Denarius autem graduum numerus est quinarii duplus: ergo & angulus BAC duplus est anguli BFC.*) [c] Per cas. 1. [d] Per eumd.

In tertio casu BF secat AC, & anguli BAC, BFC sunt extra invicem. Ducatur FAL. Per casum 1. totus LAC duplus est totius LFC, & ablatus LAB duplus est ablati LFB. Ergo (*e*) & reliquus BAC duplus est reliqui BFC. Quod erat demonstrandum. Fig. 33. (e) Per 19. l. 5. quę ab hac non dependet.

(*Sit LAC gr. 12, LAB gr. 2.* (f) *Erunt LFC gr. 6. LFB gr. 1. Ergo LAC — LAB = gr. 12. — 2 = gr. 10. = BAC; & LFC — LFB = gr. 6. — 1 = gr. 5. = BFC. Ergo angulus BAC duplus est anguli BFC.*) (f) Per cas. 1.

PROPOSITIO XXI.

Anguli (BQC, BFC,) qui in circulo insistunt eidem arcui (BOC,) sive qui in eodem segmento (BQSC) existunt, inter se omnes sunt æquales. Fig 34.

Sit primo segmentum BQSC majus semicirculo. Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum, duplus est singulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC sunt (*g*) æquales. Quod erat demonstrandum. Fig. 34. (g) Per axio. 6.

Sit deinde segmentum BQC æquale aut minus semicirculo. In triangulis BQI & CFI, quia anguli ad verticem I oppositi, (*h*) æquales sunt, etiam summa reliquorum Q & R summæ reliquorum F & O (*i*) æqualis erit. Quare si ab his æqualibus summis auferantur anguli R & O, qui per primam partem æquales sunt, utpote eidem arcui QF insistentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonstrandum. Fig. 35. (h) Per 15 l. 1. (i) Per cor. 10. p. 32. l. 1.

Coroll. *Hinc colligunt Optici lineam quamvis BC oculo ubivis in circuli, cujus chorda est, circumferentia posito ejusdem* Fig. 34. vel. 35.

magnitudinis apparere ; quia scilicet sub angulo æquali BQC ubique apparet.

Fig. 34. (Scholium. *Si super arcu BOC insistant duo æquales anguli, quorum alter BFC ad peripheriam arcui BOC oppositam existat: Erit uterque angulus ad eamdem peripheriam ipsi BOC oppositam; hoc est, angulus ipsi BFC æqualis, neque citra, neque ultra peripheriam cadet. Cadat enim, si fieri potest, citra peripheriam ad punctum I intra circulum, angulus BIC æqualis angulo BFC ad peripheriam existenti; & producatur IC donec occurrat peripheriæ in Q, & ducatur BQ. Anguli BQC, BFC in eodem segmento existentes, per hanc prop. erunt æquales: Sed & BIC, BFC æquales esse supponuntur; Ergo BIC (externus angulus trianguli BIQ) æqualis est uni internorum oppositorum. nempe angulo BQI, contra cor. 1. pr. 32. l. 1. Non igitur cadit intra circulum vel citra peripheriam angulus angulo BFC æqualis. Sed neque extra circulum, vel ultra peripheriam: si enim extra, ut in E cadere supponatur; a puncto Q ubi recta CE peripheriam secat, ducatur recta QB: erit ut prius, angulus BQC* (a) *angulo BFC, ac proinde* (b) *angulo BEC æqualis, rursum contra idem corollarium, cum BQC sit angulus externus, & BEQ unus internorum oppositorum trianguli BQE. Cum igitur angulus ipsi BFC ad peripheriam existenti æqualis, neque cadat ultra peripheriam, neque citra, erit angulus ad peripheriam. Q. E. D.*

(a) Per hanc prop.
[b] Per hypoth.

Fig. 35. *Eodem modo, si segmentum BQFC sit semicirculo æquale, vel minus, ostendetur angulum angulo BFC æqualem, neque citra, neque ultra peripheriam BQFC cadere.*)

PROPOSITIO XXII.

Fig. 36. Q*Uadrilateri circulo inscripti (ABCF) oppositi anguli duos rectos conficiunt.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC, cum duobus O & X facit (*c*) duos rectos. Sed O est (*d*) æqualis I, quia insistunt eidem arcui BC; & X (*e*) est æqualis Z, quia insistunt eidem arcui AB. Ergo ABC, cum duobus etiam, I, Z, hoc est, cum toto opposito angulo AFC, facit duos rectos. Quod erat demonstrandum. (*Et pari modo ostendetur angulos oppositos BAF, BCF duobus rectis æquales esse.*)

(c) Per 32. l. 1.
(d) Per 21. l. 3.
[e] Per eamd.

Coroll. (1.) *Hinc si unum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus æqualis angulo quadrilateri opposito: internus enim utrivis additus duos rectos angulos* (f) *conficit.*

[f] Per hanc & 13 l. 1.

(2.) *Item*

(2.) Item circa Rhombum aut Rhomboidem circulus describi nequit; quia adversi ejus anguli vel cedunt duobus rectis, vel eos excedunt. * *Et generatim patet circulum per quatuor puncta non transire, nisi quadrilaterum ad illa puncta factum prædictam conditionem habeat, ac proinde datis tribus angulis quadrilateri dabitur & quartus.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

N*On sunt necessaria: & agitur de segmentis similibus, quæ non possunt sine proportionibus recte definiri.* (Si quis tamen has propositiones desideret, inter corollaria ad prop. ult. lib. 6. eas inveniet.

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum (ABC) perficere.* Fig. 37.

Subtendantur utcumque duæ rectæ AB, CB, quas biseca in I & L. Ex I & L duc perpendiculares sibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio est arcus ABC.

Nam (*a*) centrum est in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipsis puncto O. (a) Per cor. pr. 1. l. 3.

Praxis. Centro B sumpto in arcu, describe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, describe duos alios circulos quorum singuli priorem bis secent. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuo occurrentes in O (*b*) dabunt centrum. Fig. 37. (b) Per prax. pr. 10. l. 1. & cor. pr. 1. l. 3.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

I*N circulis æqualibus,* (vel in uno eodemque circulo,) *rectæ æquales (CE, FI) subtendunt arcus æquales; & si arcus sunt æquales, etiam subtensæ æquales erunt.* Fig. 38.

Pars 1. Ad centra A & B ducantur CA, EA, FB, IB. *Rectæ illæ erunt sibi mutuo* (c) *æquales, utpote quæ sint ejusdem circuli, vel æqualium circulorum radii.*) Quia triangula CAE, FBI sibi mutuo æquilatera sunt, etiam erunt sibi mutuo (*d*) æquiangula. Ergo cum circuli sibi mutuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, ac (c) Per axio. 15. (d) Per 8. l. 1.

 proin-

proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cum igitur circuli sint æquales, etiam arcus FLI necessario congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui CSE, ac proinde æquales (*a*) erunt etiam ipsi.

(a) Per axio.7.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, sibi mutuo impositi (*b*) congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & subtensa FI congruet subtensæ CE. Ergo FI, CE (*c*) æquales sunt.

(b) Per axio.8.
(c) Per axio.7.

(Coroll. *In circulis æqualibus, vel in eodem, rectæ inæquales subtendunt arcus inæquales, major majorem, minor minorem; & si arcus fuerint inæquales, etiam subtensæ inæquales erunt.*)

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig.39.

S*I in circulis æqualibus*, (vel in eodem,) *anguli sive ad centra* (*BAC, FLI*) *sive ad ambitum* (*BOC, FSI*) *sint æquales; etiam acutus* (*BXC, FZI*) *quibus insistunt, sunt æquales: & si arcus sunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

Pars 1. Quoniam latera AB, AC (*d*) æquantur LF, LI, (sunt enim æqualium circulorum semidiametri,) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt bases (*e*) BC, FI æquales. Ergo arcus BXC, FZI etiam (*f*) æquales sunt.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales. Quia igitur (*g*) horum dupli sunt BAC, FLI; etiam illi æquales erunt; ac proinde, ut jam ostensum, etiam arcus BXC, FZI sunt æquales.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27. æqualitas subtensarum BC, FI. Ergo quia etiam BA, AC [*h*) æquantur ipsis FL, LI, erunt (*i*) anguli A & L ad centrum æquales: & quia (k) anguli O & S horum dimidii sunt, erunt etiam ipsi æquales.

(d) Per axio.15.
(e) Per 4. l.1.
(f) Per 26 l.3.
(g) Per 20. l.3.
(h) Per axio.15.
(i) Per 8. l.1.
(k) Per 20. l.3.

(Coroll. *Linea recta EF, quæ in A medio puncto peripheriæ alicujus BC circulum tangit, parallela est rectæ lineæ BC quæ peripheriam illam subtendit. Duc enim e centro D ad contactum A rectam DA, & connecte DB, DC. In triangulis BDG, CDG, latus DG commune est, & DB æquale DC, atque angulus BDA æqualis angulo GDA (ob arcus BA, CA æquales.) Ergo anguli* (l) *DGB, DGC æquales, & proinde recti sunt. Sed interni anguli* (m) *GAE, GAF etiam recti sunt. Ergo* (n) *BC, EF sunt parallelæ, Q. E. D.*)

Fig.40.

(l) Per 4. l.1.
(m) Per 18 l.3.
(n) Per 29 l.1.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum (ABC) bisecare.*

Duc AC, quam biseca in O. Ex O perpendicularem duc OB, occurrentem arcui in B. Dico factum. Fig.41.

Jungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per constr. æquantur lateribus CO, OB; & anguli ad O sunt æquales, quia recti. Ergo bases AB, CB (*a*) æquales. Ergo etiam (*b*) æquantur arcus AB, CB. (a) Per 4. l.1.

Praxis. Centris A & C describe pari intervallo arcus se secantes in punctis F & I, per quæ, ducta recta arcum ABC (*c*) bisecabit. (b) Per 26 l.3. Fig.41. (c) Per hanc & prax. in pr. 10. l.1.

(Cor. *Hinc sequitur, dimidium chordæ arcum quemvis subtendentis, esse semissis arcus istius sinum rectum; & vice versa, sinum rectum duplicatum, chordam esse dupli arcus. Huic omnino simile est cor.1.p.3. prius, de chorda angulum ad centrum subtendente.*)

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus (BCF) in semicirculo, rectus est: in segmento majore minor recto; in segmento minore recto major.* (Item angulus mixtilineus segmenti majoris est major recto, & angulus mixtilineus segmenti minoris est minor recto.) Fig.42.43

Pars 1. Ex centro A duc AC. Quia æquales sunt AB, AC, anguli O, B (*d*) æquales erunt. Ob eamdem causam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B & F æqualis est. Cum igitur (*e*) tres simul conficiant duos rectos; semissis trium, angulus BCF, unus rectus est. Fig.42. (d) Per 5. l.1. (e) Per 31. l.1.

Pars 2. Sit segmentum LOBF semicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor est angulo BOL, qui per 1. partem rectus est. Ergo &c. Fig.43.

Pars 3. Esto segmentum LOX semicirculo LOB minus, in eoque angulus XOL. Erit hic major quam BOL, qui rectus est. Ergo &c. Fig.43.

Fig. 42. *Pars 4. Sit recta BC communis segmentorum inæqualium basis: Erit angulus mixtilineus segmenti majoris BCF, recta BC & arcu CF comprehensus, angulo recto major. Ducatur enim diameter BF, & juncta FC, erit angulus rectilineus BCF rectus per primam partem, & proinde angulus mixtilineus BCF, recta BC & arcu CF comprehensus, erit recto major. Producatur FC ad E, & angulus BCE rectus erit (a), ac proinde angulus mixtilineus BCD segmenti minoris erit recto minor. Q. E. D.*

(a) Per def. 14. l. 1.

Quartam hanc propositionis 31. partem, ejusque demonstrationem a Tacqueto omissas, ex Euclide restituendas duximus.

Fig 2. Corollarium (1.) *Hinc Examen Normæ, num exacte rectangula sit, instituitur. In circulo enim quocumque, posito ad circumferentiæ punctum quodcumque Q Normæ vertice, si latera per diametri extrema D & E transeunt, angulus est rectus; Sin minus, haudquaquam.*

Fig. 2. (2.) [*Si normæ latera ad puncta D & E continuo adjuncta teneantur, interea dum angulus utrinque circumagatur, Vertex anguli Q describet circumferentiam circuli, cujus diameter est linea DE.*)

Fig. 42. (3.) *Hinc ab extrema linea perpendicularem excitare discimus. Sit BC linea a cujus puncto C perpendicularem oporteat excitare. A puncto quovis A tamquam centro describatur circulus, per punctum C transiens, & lineam BC intersecans in puncto B. Ducta diametro BF, & recta CF liquet lineam CF esse lineæ BC normalem. Q. E. F.*

((4.) *In Triangulo rectangulo BCF, si hypotenusa BF bisecetur in A, recta AC secabit triangulum in duo triangula æquicrura ACB, ACF: Et circulus centro A per B descriptus transibit per C, anguli recti verticem.*

(5.) *Cum angulus mixtilineus segmenti majoris, sit angulo recto rectilineo (b) major, angulus autem mixtilineus segmenti minoris, sit angulo recto rectilineo minor; ergo angulus mixtilineus semicirculi erit angulo recto rectilineo æqualis: id quod etiam antea (c) ex alio principio demonstravimus.*)

(b) Per par. 4. hujus.

(c) Vide cor. 7. pr. 16. l. 3.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 44. & 45. SI *recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eumdem secet, erit angulus a tangente & secante factus, par angulo, qui fit in segmento alterno.*

Nimi-

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in segmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in segmento AOB. Fig. 45.

Transeat primo secans AB per centrum. Per 18. CAB rectus est. Et per 31. rectus est L. Ergo CAB & L æquales sunt. Fig. 44.

Transeat deinde secans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in semicirculo rectus est, faciet BQA cum BAQ (*a*) rectum unum. Sed etiam CAQ rectus (*b*) est. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc (*c*) est L) æqualis CAB. Quod erat primum.

Deinde (*d*) FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL, anguli (*e*) oppositi L & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus simul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos jam ostendi æquales, erunt æquales reliqui FAB & O. Quod erat alterum.

(a) Per cor. 6. pr. 32 l. 1.
(b) Per 18. l. 3.
(c) Per 21. l. 3.
(d) Per 13. l. 1.
(e) Per 22. l. 3.

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta (BC) segmentum circuli construere, capiens angulum dato parem. Fig. 46.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem (*f*) BCI, cujus latus secabit BL in I. Centro I per B describe circulum; hic transibit per C, (quia ob æqualitatem angulorum ad C & B, etiam latera CI, BI (*g*) æqualia sunt,) capietque segmentum BQC angulum parem dato ABF.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis est, AB tanget (*h*) circulum, quem secat BC. Ergo (*i*) angulus in segmento BQC æquatur angulo ABF.

Quod si detur angulus obtusus RBC, eadem construe, eritque segmentum COB quæsitum.

(Scholium. *Eadem omnino constructione, circuli circumferentiam ducere licebit, qui datam rectam AR in dato puncto B tangat, & per aliud punctum C, extra rectam AR sumptum transeat. Nempe ducta BC, & ad datam AR erecta perpendiculari BL, si fiat angulus BCI, angulo BCL æqualis; rectarum BL, CI intersectio I erit centrum, & IB vel IC radius circuli describendi.*) Fig. 46.

(f) Per 23. l. 1.
(g) Per 6. l. 1.
(h) Per 16 l. 3.
(i) Per præc.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 47. *A Dato circulo segmentum auferre capiens angulum dato parem.*

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, (*a*) quæ faciat angulum BAC parem dato.
(a) Per 23. 1.1. Hæc auferet segmentum AQC capiens angulum parem dato; uti patet ex 32.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 48. 49. 50. *SI in circulo duæ rectæ (CL, BF) se secuerint; rectangulum (COL) sub segmentis unius, æquale est rectangulo (BOF) sub segmentis alterius comprehenso.*

Si se intersecant in centro A, res patet.

Si una CL transit per centrum A, & reliquam BF secat bi-
Fig. 48. (b) Per 3. l. 3. fariam; secabit quoque (*b*) perpendiculariter, ac propter bisectionem quad. FO est rectangulum FOB. Ducatur AF Quoniam CL bisecta est in A, & aliter in O, erit

(c) Per 5. l 2. (d) Per 47. l.1.

rectang. COL Æ. (*c*) quad. AL; hoc est, quad. AF; hoc est, (*d*) quad. AO quad. FO
quad. AO

Dempto igitur communi quadrato AO, erit
rect. COL Æ. quad. FO, hoc est, rect. FOB.

Fig 49. Si una CL per centrum transit, & reliquam BF secat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta secet ipsam BF in I bi-
(e) Per 3. l.3. fariam. Igitur angulus AIB (*e*) rectus erit. Jam quia CL bisecta est in A & aliter in O, erit

(f) Per 5. l.2.

rectang. COL Æ. (*f*) quad. AL, hoc est,
cum
quad. AO.

(g) Per 47. l.1.

quad. AB; hoc est, (*g*)
quad. AI
quad. BI.

Sed

Sed quadratum AO æquatur (*a*) quadratis OI, AI. Ergo (a) Per 47. l. 1.

(rectang. COL Æ. quad. AI)
(quad. OI quad. BI.)
(quad. AI

Dempto igitur communi quadrato AI, remanent

(rect. COL Æ. quad. BI.
(quad. OI

Atqui etiam quadratum BI æquatur rectangulo (*b*) FOB cum quadrato OI, quia FB secta est bifariam in I & aliter in O, Ergo. (b) Per 5. l. 2.

(rectang. COL Æ. rect. FOB)
(quad. OI quad. OI)

Dempto igitur communi quadrato OI, erit

rect. COL Æ. rect. FOB.

Quod si neutra rectarum CL, FB per centrum transeat; per communem earum sectionem O & per centrum A, ducatur recta XZ. Per modo demonstrata tam rectang. COL quam rectang. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia sunt inter se. Fig. 50.

(*Vel sic facilius & universalius. Connecte CF & BL. Atque ob angulos* (c) *COF, BOL ad verticem oppositos, ipsosque* (d) *C & B (super eodem arcu FL) pares, trigona COF, BOL* (e) *æquiangula sunt. Ergo per prop. 4. lib. 6. qua ab hac non dependet, CO : OF :: BO : OL; & proinde, per prop. 16. lib. 6. quæ itidem ab hac minime dependet, rect. CO X OL = rect. BO X OF. Q. E. D.* Fig. 51. (c) Per 15. l. 1. (d) Per 21. l. 3. (e) Per cor. 9. p. 1. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXXVI.

Si a puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF,) altera secans (BC;) erit rectangulum (CBO) sub tota secante (CB) & parte (BO) inter punctum & circulum interjecta comprehensum, æquale quadrato tangentis (BF.) Fig. 52. 53. 54

Si secans BC transit per centrum A, junge AF: faciet hæc (*f*) cum FB angulum rectum. Quoniam CO bisecta est in A, eique adjecta OB, erit Fig. 52. (f) Per 18. l. 3.

(rect. CBO (*g*) Æ. quad. AB; hoc est, (*h*) (g) Per 6. l. 2.
(quad. AO (h) Per 47. l. 1.

quad. BF)
quad. AF)

Ablatis

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet
rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 53. 54. Quod si CB non transit per centrum A, ducantur AB, AF AO; & AL ex centro ducta bisecet OC in L. Ergo angulus ALO (a) rectus erit. Item AFB (b) erit rectus. Quoniam vero CO bisecta est in L, eique adjecta est OB, erit

(a) Per 3. l. 3.
(b) Per 18. l. 3.
(c) Per 6. l. 2.

$\left(\begin{array}{l}\text{rect. CBO}\\ \text{quad. LO}\end{array}\right)$ Æ. (c) quad, LB.

Addatur utrimque quadratum AL, erit

$\left(\begin{array}{l}\text{rect. CBO}\\ \text{quad. LO}\\ \text{quad. AL}\end{array}\right.$ Æ. $\left.\begin{array}{r}\text{quad. LB}\\ \text{quad. AL}\end{array}\right)$

(d) Per 47. l. 1. Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato (d) AO seu AF; & quadrata LB, AL (e) æquantur quadrato AB. Ergo

(e) Per eamd.
(f) Per eamd.

$\left(\begin{array}{l}\text{rect. CBO}\\ \text{quad. AF}\end{array}\right.$ Æ. quad. AB; hoc est. (f) $\left.\begin{array}{l}\text{quad. BF}\\ \text{quad. AF.}\end{array}\right)$

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet
rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 55. *(Vel sic facilius & universalius. Duc CF & FO: ac ob angulos BFO &* (g) *C pares, & B communem, triangula CBF, FBO* (h) *æquiangula sunt. Ergo per 4. l. 6. quæ ab hac non dependet, CB : BF :: FB : BO. Quare per 17. l. 6. quæ ab hac non dependet, rectangulum CB × BO æquale est quadrato BF. Q. E. D.*

(g) Per 32. l. 3.
(h) Per cor. 6. p. 92. l. 1.

Corollaria.

Fig. 56. 1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur secantes BC, omnia rectangula CBO inter se æqualia sunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, BF, BQ æquales sunt. Earum quippe quadrata æquantur singula eidem rectangulo CBO.

[3. *Perspicuum quoque est ab eodem puncto B extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas BF, BQ, quæ circulum tangant. Nam si tertia tangere dicatur, erit illa ipsis BF & BQ* (i) *æqualis, & proinde ab una istarum non diversa.*

(i) Per cor. 2.

Fig. 57. 4. *Hinc cum Maurolyco ex nota montis altitudine AD, & linea horizontali AB terram tangente in B, ubi montis vertex, ab illo recedentibus apparere desinit, Telluris diametrum DE (in AD producta sumptam) metiri discimus. Erit enim, per hanc prop. rectang. AE × AD = ABq. Dividatur ergo no-*

tum

tum quadratum AB per notam montis altitudinem AD, & quotiens dabit rectam AE: ex qua subtrahe notam montis altitudinem AD; reliqua erit DE Telluris diameter. Res exemplo patebit melius. Sit spectator in A, vertice nimirum montis omnium altissimi insularum canariarum dicti Pico de Teneriff, cujus altitudo aliunde nota, AD. Sit quatuor mille passuum anglicanorum, sive pedum anglicorum 21120; Sit etiam distantia, AB, pedum anglicorum $940935\frac{1}{2}$, hujus numeri quadratum est (885359481600). huic numero quadrato aequalis est numerus rectangulus ex EA & AD compositus, cujus quidem latus unum AD datur, unde diviso priore numero quadrato per AD, quotiens ipsam, AE, demonstrabit, nempe 41920430., a quo numero subtrahendus restat, AD, nimirum 21120, residuus est, DE, diameter terrae, pedum nempe 41899310.*

5. *Hinc quoque lunarium montium altitudinem metiuntur Geometrae. Sit pars lunae illuminata, BDC. Sit, A, vertex montis, ubi primo illuminari coeperit. Observetur telescopio vel alio instrumento quot partes diametri lunaris, DE, continet recta, BA, & quia, BA, tangit lunae globum, erit* $ABq = AE \times AD = (AD + DE) \times AD$, *adeoque datis AB, AD, dabitur, DE. Dicit Ricciolius se observasse quarto die post novilunium montem qui S. Catharinae ab astronomis dicitur, illuminari coepisse, ejusque distantiam, AB, a limite illuminationis fuisse diametri lunaris partem decimam sextam, ac proinde cum diameter lunae sit milliarium circiter 2364, erit AB, 147 milliar. circiter, cujus quadratum* $21609 = (AD + 2364) \times AD = ADq + 2364 \times AD$, *& addendo utrinque 1397124 erit* $21609 + 1397124$, *seu* $1418733 = ADq + 2364 \times AD + 1397124$, *& extracta radice quadrata, erit* $AD + 1182 = 1190$, *circiter, adeoque* $AD = 1190 - 1182 = 8$. *altitudo igitur hujus montis octo milliaria adaequat, estque altissimis nostris montibus triplo fere altior.*

6. *In omni triangulo rectangulo BFA, rectangulum ex hypotenusa & lateris unius summa, ac differentia, aequatur quadrato lateris alterius.* Si enim centro A, & intervallo AF describatur circulus, secans hypotenusam AB in O, & producatur BA usque dum circulo rursus occurrat in C, Hypotenusae BA & lateris AF summa erit BC, a puncto B circulum secans; eorumque differentia erit BO ea secantis pars, quae inter punctum & circulum interjicitur; & trianguli latus alterum est BF circulum (a) tangens. Sed per hanc prop. rectangulum CBO aequatur quadrato BF: Ergo, in triangulo rectangulo BFA, &c. Q. E. D. Fig. 52.

(a) Per. 16 l. 3.

7. Si

Fig. 58. 59. *7. Si ab angulo A trianguli ABC, cujus latera AB, AC sunt inæqualia, demittatur in basim (si opus productam) perpendiculum AL, erit rectangulum sub summa & differentia laterum AB, AC, æquale rectangulo sub summa & differentia rectarum LB, LC, inter perpendiculum AL & angulos basis B, C interceptarum. Centro enim A, radio latere minore AC describatur circulus secans latus majus AB in D, & basim (si opus productam) in O; & producatur BA donec circulo iterum occurrat in E. Propter æquales AC, AD, AE, erit EB laterum summa; & BD illorum differentia: & propter æquales* (a) *LC, LO, erunt BC & BO (vel in Fig. 59. BO & BC) summa & differentia interceptarum LB, LC. Sed* (b) *rect. EBD = rect. CBO. Ergo, &c.*

(a) Per 3. l. 3.

(b) Per cor. 1. hujus.

In casu fig. 58. Theorema sic potest efferri.

Fig. 58. *Si ab angulo A trianguli ABC demittatur perpendicularis in basim BC, eam dividens in duo segmenta BL, LC; erit rectangulum sub summa & differentia laterum AB, AC, æquale rectangulo sub basi BC, & differentia segmentorum basis BO. Atque hujus theorematis usus est eximius in trigonometria plana.)*

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. 56. *SI rectangulum sub CB & OB sit æquale quadrato BF, hæc circulum tanget in F.*

(Hoc est, si a puncto B extra circulum dato, in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera BC circulum secet, altera vero BF incidat, si autem rectangulum sub tota secante CB & parte BO inter punctum & circulum interjecta comprehensum, æquale ei, quod ab incidente BF fit, quadrato, Incidens linea BF circulum tanget in F.)

Ex B ducatur tangens BQ, & ex E centro ductis ad Q & F rectis EQ, EF, jungatur BE. Quoniam rectangulo CBO æquantur quadratum BF per hyp. & quadratum BQ per 36. hæc inter se æqualia sunt; adeoque & (c) rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB sibi mutuo sunt æquilatera. Ergo (*d*) anguli Q, F æquales erunt. Sed Q (*e*) rectus est. Ergo etiam F rectus est. Ergo BF (*f*) tangit.

(c) Per axio. 15.

[d] Per 8. l. 1.

[e] Per 18. l. 3.

(f) Per 16. l. 3.

(Coroll. 1. *Hinc angulus* (g) *EBF æqualis est angulo EBQ.*

2. Si duæ rectæ æquales BF, BQ ex puncto quopiam B in convexam peripheriam incidant, & earum una BF circulum tangat, altera quoque BQ eumdem circulum tanget. Nam cum BF, BQ sint æquales, earum quadrata erunt (h) *æqualia. Sed BFq =* (i) *CBO. Ergo BQq =* (k) *CBO. Ergo etiam BQ per hanc prop. tangit circulum.)*

(g) Per 8. l. 1.

[h] Per axio. 15.

[i] Per præced.

(k) Per axio. 1.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER QUARTUS

HIC liber totus problematicus est: docet, quo artificio figuræ præsertim ordinatæ circulo inscribantur & circumscribantur. Amplissimus est illius usus in munitionibus extruendis: & ex illo quasi fonte eximiæ illæ sinuum, tangentium, & secantium tabulæ ingenti bono Matheseos fluxere.

Est vero Quartus *hic Elementorum liber* Trigonometriæ *utilissimus. Circulo enim polygona inscribendo, tabulas Chordarum, Tangentium, & Secantium fabricare discimus: quarum ope, figurarum & corporum magnitudines metimur: Neque absque eo stellarum* Aspectus *quos vocant, Quartilem nempe, Sextilem, &c. rite distinguimus: utpote a polygonorum in circulo inscriptione omnino pendentes. Neque sane Circuli aream sive* quadraturam *quamdam aliunde quam ex polygonorum innumerorum circulo inscriptorum & circumscriptorum areis sive* quadraturis *colligere possumus. Et haud aliter circulorum ad se invicem rationem duplicatam, e duplicata polygonorum iisdem inscriptorum aut circumscriptorum ratione colligimus. Architectura vero militaris polygonis circulo inscriptis toties utitur, ut præ aliis omnibus scientiis, huic libro insolidum fere deberi videatur.*

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea circulo inscripta est, vel circulus figuræ circumscriptus, cum singulorum angulorum vertices in circumferentia existunt.

2. Figura rectilinea circulo circumscripta est, vel circulus figuræ inscriptus est, cum singula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata seu regularis est, quæ æquilatera & æquiangula est.

PRO-

PROPOSITIO I.

Fig. 1. l. 4.

C *Irculo (BD) rectam datam (A) diametro non majorem, inscribere.*

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B, intervallo datæ A, describe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam BC. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2.

C *Irculo triangulum inscribere dato (X) æquiangulum.*

(a) Per 23. l. 1.
(b) Per 33. l. 5.
(c) Per constr.
(d) Per cor. 9. p. 32 l. 1.

Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par (*a*) angulo C, & FDH par B: jungaturque GH. Dico factum. Nam angulus H æquatur (*b*) angulo EDG, hoc est, (*c*) angulo C; & G æquatur FDH, hoc est, ipsi B. Ergo etiam GDH (*d*) æquatur A. Factum est igitur quod petebatur.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

C *Irculo circumscribere triangulum æquiangulum dato ILK.*

Latus IK utrimque producatur, ut fiant externi anguli O & N. Fac in centro A (per 23. l. 1.) angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F, circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE est circulo circumscriptum, & æquiangulum dato ILK.

(e) Per 18. l. 3.
(f) Per theor. 1. Schol. post 32. l. 1.
(g) Per cor. 9 p. 32 l. 1.
(h) Per 13. l. 1.

In quadrilatero CGAB, anguli G & B sunt duo (*e*) recti. Ergo reliqui GAB & C conficiunt simul etiam duos (*f*) rectos, ac proinde æquantur duobus simul O, I. Ablatis igitur GAB & O æqualibus per constr. remanent æquales, C & I. Eodem modo ostenditur E æqualis esse K. Ergo D & L (*g*) etiam æquales erunt. Factum est igitur quod petebatur.

Quod autem tangentes concurrant, sic ostenditur. Anguli O, I, K, & N sunt æquales quatuor (*h*) rectis; & I, K,

sunt

ſunt minores duobus (*a*) rectis. Ergo O, N, (hoc eſt per conſtruct. GAB & BAF) ſunt majores duobus rectis. Ergo GAF eſt minor duobus (*b*) rectis, Ergo (*arcus GBF eſt* (c) *ſemiperipheria major, & arcus oppoſitus GF, ſemiperipheria minor. Unde*) recta GF cadit (*ſupra centrum A, hoc eſt,*) inter A & D. Ergo cum AGD, AFD ſint recti, erunt DGF, DFG duobus rectis minores. Ergo (*d*) CGD, EFD concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

(a) Per cor. 17. p. 32. l. 1.
(b) Per cor. 3. p. 13. l. 1.
(c) Per Schol. p. 23. l. 1.
(d) Per ſchol. p. 23. l. 1.
Fig. 3.

(Aliter. *Ad centrum A circuli dati, ſuper radio BA ex utraque parte, fiant ut prius, anguli BAC, BAF, angulis O, N externis trianguli dati ILK reſpective æquales, & in punctis B, G, F circulum tangant tres rectæ, quæ proinde angulos efficient rectos ABC, AGC; & ABE, AFE. Ducantur rectæ BG, BF, quæ ex utraque parte radii BA, formabunt triangula BAG, BAF. Si itaque a duobus angulis rectis ABC, AGC, trianguli BAG anguli ad B & G reſpective ſubducantur, reſtabunt anguli GBC, BGC duobus rectis minores: ergo tangentes BC, GC, ſi protrahantur ex parte angulorum duobus rectis minorum, tandem* (e) *concurrent. Eodem modo tangentes BE, FE, ſi producantur, concurrent. Producantur & concurrant BC, GC in C; & BE, FE in E. Cum igitur in quadrilatero ABCG anguli ad B & G ſunt recti, erunt anguli BAG, BCG duobus rectis* (f) *æquales. Sed anguli O, I ſunt duobus rectis* (g) *æquales, quorum O* (h) *æquatur angulo BAG; Ergo angulus BCG æquatur angulo I. Eodem modo oſtendetur angulum BEF angulo K æqualem eſſe. Sed anguli I & K ſimul ſumpti ſunt duobus rectis* (i) *minores: ergo anguli GCE, CEF ſunt duobus rectis minores, & proinde rectæ CG, EF* (k) *concurrent ſi protrahantur. Concurrant in D. Cum igitur anguli C & E trianguli CDE, angulis I & K trianguli ILK reſpective æquales ſint: angulus D angulo L* (l) *æqualis erit: & ſingula trianguli CDE latera* (m) *tangunt circulum datum. Circulo igitur BGF circumſcribitur triangulum CDE, æquiangulum dato ILK. Q. E. F.*

(e) Per ſchol. p. 31 l. 1.
(f) Per Theor. 1. poſt 32. l. 1
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per contr.
(i) Per cor. 17. p. 32. l. 1.
[k] Per ſchol. poſt 31. l. 1.
(l) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
[m] Per conſtr.

PROPOSITIO IV.

T*Riangulo circulum inſcribere.*

Fig. 3.

Duos angulos C & E biſeca rectis CA, EA coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, AF. Circulus centro A per B deſcriptus, tranſibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In

In triangulis enim CAG & CAB, quia anguli AGC, ABC itemque GCA, BCA per constr. æquantur, & latus quoque AC est commune, etiam AG, AB (*a*) æqualia erunt. Pari modo ostendam paria esse AB, AF. Circulus ergo descriptus centro A per B, transit per G, F; & quia anguli ad B, G, F sunt recti, tangit (*b*) omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

(a) Per 26. l. 1.

[b] Per 16. l. 3.

Fig. 3. Cor. 1. *Hinc cognitis lateribus trianguli, invenientur eorum segmenta quæ fiunt a contactibus circuli inscripti. Sit* $DC = 12$, $DE = 16$, $CE = 18$. *Erit* $CD + DE = 28$, *a quo subduc* $CE (= 18) = CG + EF$, *& restabunt* $GD + DF = 10$. *Ergo* (c) $GD = 5 = DF$; $GC = 7 = CB$; $BE = 11 = EF$.

(c) Per cor. 2. p. 36 l. 3.

Cor. 2. *Datis trianguli lateribus, & radio circuli inscripti, habetur area trianguli. Nam ducta AD, inscripti circuli radius est altitudo communis trium triangulorum ACD, ADE, AEC in quæ dividitur triangulum CDE, & eorum bases sunt trianguli CDE latera: ergo radius in laterum semisummam, dabit* (d) *aream trianguli CDE. Sit radius* $AB = 5$, *& latera* 12, 16, 18; *quorum semisumma est* 23: *Est itaque* $5 \times 23 = 115 =$ *area trianguli.*)

(d) Per Sch. p. 41. l. 1. & p. 1. l. 2.

PROPOSITIO V.

Fig. 4. **T**Riangulo *circulum circumscribere, sive per tria data puncta* (*B, C, D*) *non ad unam rectam posita, circulum describere.*

Puncta data B, C, D binis rectis BC, CD connecte, quas biseca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D transeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB. Per constr. latera DO, AO æquantur lateribus CO, OA, & anguli ad O sunt recti. Ergo AD (*e*) æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB (*f*) æquales. Ergo circulus centro A descriptus per B, transibit etiam per C & D. Quod petebatur.

(e) Per 4. l. 1.

(f) Per axio. 1.

Ad praxim tantum opus centris B, C, D describere tres æquales circulos se mutuo intersecantes, & per intersectiones ducere rectas: hæ sibi occurrentes dabunt centrum quæsitum.

(Coroll. *Hinc liquet, circulum etiam Quadrilatero ABCF, cujus anguli oppositi ABC, AFC duobus rectis æquales sint, circumscribi posse. Nam ducta recta AC, circulus per hanc prop.*

Tab. 2. Fig. 16. lib. 3.

prop. circa triangulum ABC describi potest. Describatur; & in arcu opposito AFC, capiatur punctum quodvis D, & DA, DC ducantur. Ergo est ABCD quadrilaterum circulo inscriptum, ac proinde anguli oppositi ABC, ADC (a) *æquales sunt duobus rectis, Sed in quadrilatero ABCF, anguli ABC, AFC æquales duobus rectis esse ponuntur. Ablato igitur communi ABC, æquales erunt anguli ADC, AFC, eidem arcui ABC insistentes, quorum alter ADC est angulus ad peripheriam ipsi ABC oppositam. Ergo* (b) *uterque angulorum æqualium ad eamdem peripheriam existit, & proinde circulus per A, B, C, tres angulos quadrilateri ABCE descriptus, transibit etiam per angulum quartum F. Q. E. D.* (a) Per 22.1.31. (b) Per Schol post Pr.21.l.3.

Scholium. *Si triangulo circulus circumscribatur, pro varia trianguli circumscripti specie, centrum circuli varie cadet. Si fuerit acutangulum, centrum cadet intra triangulum. Nam propter angulum acutum BCD* (c) *in segmento majore, centrum A cadet in illo segmento majore cujus basis est BD; atque eodem modo ostendetur centrum esse in illis segmentis majoribus quorum bases sunt BC, CD respective, adeoque cadet intra triangulum BCD. In triangulo vero rectangulo, propter angulum in semicirculo* (d) *rectum, centrum cadet in latus angulo recto oppositum. In obtusangulo autem triangulo, propter angulum obtusum in* (e) *segmento minore, centrum erit in segmento opposito, ac proinde extra triangulum cadet: Hinc sequitur,* Fig. 5. l 4. (c) Per 31. & Schol. p. 21. l. 3. Fig 6. [d] Per ead Fig. 7. [e] Per ead.

1. *Si a centro A ad singulos angulos B, C, D; trianguli acutanguli ducantur rectæ AB, AC, AD, illa triangulum in tria æquicrura triangula ABC, ABD, ACD (propter æquales AB, AC, AD) divident. Et ob eamdem causam, si recta AC a centro circuli triangulo rectangulo circumscripti, ad angulum rectum ducatur, illud in duo triangula isoscelia, ABC, ACD dividet, quod & prius* (f) *observatum. Si vero ad singulos trianguli obtusanguli angulos, a centro circuli circumscripti, ducantur rectæ AB, AC, AD; formabuntur inde tria æquicrura triangula, quorum illud cujus basis est latus BD angulo obtuso BCD oppositum, nempe triangulum BAD, erit extra triangulum obtusangulum, & simul cum eo quadrilaterum ABCD formabit, duobus reliquis triangulis isosceliis ABC, ACD æquale.* Fig. 5. Fig. 6. (f) Vide Cor. 4. P 31 l. 3. Fig. 7.

2. *Si a centro A in singula latera perpendiculares ducantur radii AEF, AIH, AOG; (vel si in circulo qui triangulo rectangulo circumscribitur, ductis ut prius AEF, AOG, a centro A erigatur lateri BD perpendicularis AH, quoniam puncta A & I in illo casu coincidunt;) isti radii tum ipsa latera in E, I & O, tum arcus qui a lateribus subtenduntur in F, H & G,* Fig. 5. 6. 7.

(a) Per 1. sch p 26 l.1 & p.30 l.3. *tum triangulorum isoscelium angulos verticales ad A, (a) bifariam secabunt. & in circulo circa obtusangulum triangulum, completa diametro HAK, arcus BKD bisecabitur* (b) *in K.*

(b) Per 30. l.3.

Fig. 5 (c) Per cor. 1. p. 3 l. 3. Fig. 6, 7. Fig. 6. Fig. 7. (d) Per def. 10 l 3

3. *Unde in triangulo acutangulo, BE BI; CO, &c. semisses laterum BC, BD, CD, erunt* (c) *angulorum BAF, BAH, CAG, &c. sinus recti; & similiter in triang. rectang. vel obtusang. ipsas BE, CO angulorum BAF, CAG sinus rectos esse constat: in triangulo autem rectangulo radium circuli BI anguli recti BAH sinum rectum esse patet ex def. 10. l. 3. Et cum idem* (d) *sit anguli cujusvis, & complementi ejus ad duos rectos, sinus rectus; Ergo in casu trianguli obliquanguli, recta BI tam anguli BAH quam etiam anguli BAK sinus rectus erit.*

Fig. 5, 6, 7. (e) Per cor. 2 hujus sch (f) Per 20. l. 3 (g) Per axio. 6. Fig 5, 6. Fig 7.

4. *Angulus ad centrum BAF super arcu dimidio BF, æqualis est angulo ad peripheriam BDC super arcu integro BC. Cum enim angulus BAC tum anguli BAF* (e) *ad centrum, tum anguli BDC ad* (f) *circumferentiam duplus sit; anguli igitur BAF, BDC* (g) *æquales erunt. Et pari modo ostendetur æquales esse angulos CAG, CBD; item æquales esse in triangulo acutangulo angulos BAH, BCD, quos in triangulo rectangulo rectos & proinde æquales esse patet: In circulo autem circa triangulum obtusangulum descripto, angulum BAK ad centrum super arcu dimidio BK, angulo obtuso BCD ad peripheriam super arcu integro BKD æqualem esse sic probatur. Ductis BK, DK, angulum ad centrum BAH super arcu dimidio, æqualem esse angulo ad peripheriam BKD super arcu integro, patet ut supra: sed in quadrilatero BCDK circulo inscripto, anguli oppositi BCD, BKD* (h) *duobus rectis, hoc est, angulis BAH, BAK simul sumptis* (i) *æquantur. Ablatis igitur æqualibus BKD, BAH. remanebunt æquales BCD, BAK.*

(h) Per 22. l. 3. (i) Per 13. l. 1.

Fig. 5, 6, 7 (k) Per cor. 3. hujus sch (l) Per cor. 3 hujus sch

5. *Cujuscumque trianguli BCD latera BC, BD, CD sunt inter se, ut sinus angulorum BDC, BCD, CBD lateribus respective oppositorum. Nam latera BC, BD, CD sunt inter se invicem ut eorum semisses BE, BI, CO, hoc est, ut* (k) *sinus angulorum BAF, BAH (vel BAK,) CAG. Sed anguli isti angulis* (l) *BDC, BCD, CBD respective sunt æquales. Ergo latera BC, BD, CD sunt inter se, ut sinus angulorum lateribus illis respective oppositorum. Atque ab hoc unico corollario, magna pars trigonometriæ planæ deducitur: quod diligenter est notandum.*

Fig. 62. l. 1.

6. *Hinc Lunæ distantiam metiri discimus. Dato enim per observationes Astronomicas Parallaxeos diurnæ angulo BCA, & angulo DBC, & proinde ejus complemento ad duos rectos CBA, una cum Telluris semidiametro AB, Lunæ distantiam*

sequenti

sequenti analogia investigamus. Ut sinus anguli ACB, ad sinum anguli (a) *CBA: ita BA Telluris semidiameter, ad AC distantiam Lunæ. Q. E. I.* (a) Per cor 5. hujus schol.

7. *Hinc Solis etiam distantiam metiri discimus. Datis enim per observationes Astronomicas paralaxeos menstruæ angulo, ubi scilicet Luna præcise bisecta apparet ZEO, & Lunæ distantia ZO; per analogiam sequentem, distantiam Solis colligimus. Ut Sinus anguli ZEO, ad sinum anguli recti EOZ sive* (b) *radium;* (c) *ita ZO distantia Lunæ, ad ZE distantiam Solis. Q. E. I.)* Fig. 8. l. 4. [b] Per def. 10 l. 3 (c) Per cor 5 hujus Schol.

6 PROPOSITIO. VI. & VII.

C *Irculo quadratum inscribere, & circumscribere.* Fig. 9.

Ducantur diametri BD, CE se mutuo secantes perpendiculariter. Rectæ, quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inscribunt.

Demonstratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. (*Nam in triangulis CAD, DAE; ob angulos æquales ad A, nempe rectos; & latera circa illos respective æqualia, bases CD, DE* (d) *æquales erunt; & eodem modo omnia latera EB, BC, CD, DE figuræ inscriptæ sibi invicem æquari patebit. Et quia CE circuli diameter est, angulus CDE in semicirculo* (e) *rectus erit; & ob eamdem rationem anguli DEB, EBC, BCD recti sunt. Quadrilaterum ergo inscriptum est æquilaterum & rectangulum, &* (f) *proinde quadratum est.* (d) Per 4. l. 1. (e) Per 31. l. 3. (f) Per def. 31. l. 1.

Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H: Figura IFGH quadratum est circulo circumscriptum.

Demonstratio patet ex 18. l. 3. & ex 28. 30. & 34. l. 1. (*Quia enim rectæ HI, IF, FG, GH circulum tangunt in extremitatibus diametrorum BD, CE: cum diametris istis* (g) *efficient angulos rectos ad B, C, D, E. Et propter angulos etiam rectos ad centrum A, æquales erunt alterni anguli CAB, ABH, & rectæ CE, IH* (h) *erunt parallelæ: eodem modo constabit rectas CE, FG parallelas esse. Ergo & FG, IH parallelæ* (i) *sunt. Et pari modo probabitur rectas FI, GH tum rectæ DB, tum sibi invicem parallelas esse, Parallelogrammum igitur est IFGH, & latera opposita* (k) *æqualia sunt; nempe FI = GH, & FG = IH. Sed ob parallelogramma CFGE, & DGHB, latera FG, GH parallelogrammi FGHI,* (l) *æqualia sunt circuli diametris CE, DB; & proinde omnia latera IF, FG, GH; HI sibi invicem æqualia sunt. Porro, in parallelogrammo FDAC, angulus ad A rectus est: ergo etiam angulus ad F rectus* (m) *erit; & pari modo, anguli ad G, H, I recti erunt* (g) Per 18. l. 3. (h) Per 28. l. 1. (i) Per 30. l. 1. (k) Per 34. l. 1. (l) Per eamd. (m) Per eamd.

erunt. Ergo IFGH est parallelogrammum æquilaterum & rectangulum, sive quadratum: cujus omnia latera circulum datum tangunt. Est igitur quadratum circulo circumscriptum.)

Scholium.

Fig. 9. [a Per 31. l. 3. [b] Per 47. l. 1. [c] Per cor. 1. p. 47. l. 1.

Quadratum circumscriptum circulo, duplum est inscripti: Nam quia angulus BCD in semicirculo rectus (*a*) est, erit quadratum ex DB (hoc est quadratum FI) æquale (*b*) quadratis DC, BC, ac proinde (*c*) duplum quadrati DC; hoc est quadrati CDEB. (*Item quadratum inscriptum duplum est radii quadrati.*)

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 10.

Quadrato (BEFC) circulum inscribere; & circumscribere.

Ducantur diametri in quadrato se secantes in A. Centro A per B descriptus circulus transibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per B descriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

(d) Per 5. l. 1. (e) Per cor. 11. p. 32. l. 1. (f) Per. 6. l. 1.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera sunt æqualia, erunt anguli BCE, BEC (*d*) æquales. Angulus autem CBE rectus est per hyp. Ergo BCE, BEC (*e*) sunt semirecti. Eodem modo ostendam CBF & reliquos esse semirectos, adeoque æquales inter se. Ergo in triangulo BAC, cum duo sint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB & AC (*f*) æquales. Eadem ratione AB, AE, AF æquales erunt. Circulus igitur centro A per B descriptus, transibit etiam per E, F, C.

(g) Per 26. l. 1. (h) Per 16. l. 3.

Pars 2. Ex A sint perpendiculares insuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA & DBA anguli ad D & G, itemque ad B inter se æquales sunt, latusque AB commune, latera (*g*) AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia sunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D transiens, transibit etiam per G, H, I, tangetque latera (*h*) omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I sunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

Fig. 9.

Coroll. 1. *Hinc, cum angulus CDF a tangente & secante factus sit semirectus, sive gr. 45.; & angulus CDG sesquirectus sive gr. 135; ergo latus quadrati circulo inscriptibilis (sive*

(sive recta abscindens quadrantem totius peripheriæ) ut DC, circulum dividet in duo segmenta.(a) *quorum majus continet angulum semirectum, & minus angulum sesquirectum. Angulus igitur in segmento quadrantali æqualis est angulo recto & semirecto simul sumptis, atque angulus super arcu quadrantali, sive in segmento opposito, æqualis est semirecto.* (a) Per 32. l. 3.

Coroll. 2. *Hinc etiam, si super DC latere quadrati circulo inscripti pro diametro, describatur alius circulus minor; ipsius circumferentia per A centrum circuli majoris transibit. Nam circa quadratum A FD, cujus angulus A est in centro majoris circuli, circumscribetur* (b) *iste circulus minor.*) (b) Per 9. l. 4.

PROPOSITIO X.

T*Riangulum Isosceles construere (BAC) in quo angulus ad basim (ABC vel ACB) sit duplus anguli ad verticem (A.)* Fig. 11.

Sumatur quævis recta AB, quam ita seca (*c*) in D, ut rectangulum ABD sit æquale quadrato DA. Tum centro A per B describe circulum, cui inscribe BC (*d*) æqualem DA, & junge AC. Erit triangulum BAC quæsitum. (c) Per 11. l. 2. [d] Per 1. l. 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A describe (*e*) circulum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato AD, hoc est BC, liquet BC tangere (*f*) circulum DO quem secat CD, Ergo angulus BCD æquatur (*g*) angulo A in segmento alterno: additoque communi DCA, erit BCA æqualis duobus A & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur, ABC æqualis (*h*) est BCA. Ergo etiam ABC æquatur duobus internis A & DCA., Sed etiam externus BDC (*i*) æquatur duobus internis A & DCA. Ergo ABC & BDC æquales sunt. Recta igitur DC æquatur (k) BC, hoc est per constr. DA. Ergo anguli A & DCA (*l*) æquantur. Quare angulus ABC, qui duobus ostensus est æqualis, duplus erit unius A. Factum igitur est quod petebatur. (e) Per 5. l. 4. (f) Per 37. l. 3. (g) Per 32. l. 3. (h) Per 5. l. 1. (i) Per 32. l. 1. (k) Per 6. l. 1. (l) Per 5. l. 1.

(Scholium. *Ex hujus propositionis constructione liquet quomodo ex dato AB uno crurum æqualium, conficiatur triangulum quæsitum. Si vero super data basi CB, triangulum Isosceles ABC sit ita construendum, ut utervis angulorum ad basim duplus sit anguli ad verticem; primo, super CB tamquam uno crurum æqualium, construatur ejusmodi triangulum CBD, cujus vertex sit C, basis BD: deinde super BC ad punctum C fiat* (m) *angulus BCA æqualis angulo CBD, & producatur BD donec occurrat ipsi CA in A. Erit ABC triangulum quæsitum super data basi BC constructum.*) (m) Per 23. l. 1.

Corollaria.

1. ANguli ad basim singuli B & C in triangulo Isoscelio jam constructo, sunt duæ quintæ duorum rectorum, seu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A est una quinta duorum rectorum seu duæ quintæ unius. Patet ex propositione hac & ex 32. lib. 1.

Fig 11.

Sch. ad cor. 1. *Cum duo anguli recti per semicirculum, sive per gradus 180 mensurentur, erit quinta pars duorum rectorum, nempe angulus A, gr 36; & duæ quintæ duorum rectorum, nempe B, gr. 36. bis, sive gr. 72. Et cum unus ang. rectus sit gr. 90, ejus quinta pars erit gr. 18. Ergo angulus A (gr. 36) continet duas quintas unius recti, & ang. B (gr. 72.) quatuor quintas unius recti, & proinde duæ quintæ duorum rectorum sunt quatuor quintæ unius recti; & una quinta duorum efficit duas quintas unius. Et universaliter, in angulo æstimando per rectorum quorumcumque partes, dimidiatus rectorum numerus inferet partium numerum duplicatum; & viceversa. Sic, si quivis angulus faciat sex quintas unius recti, ergo tres quintas duorum rectorum efficiet.*

Fig. 11. Coroll. 2. *Cum angulus BAC sit duorum rectorum pars quinta, sive duæ partes decimæ, hoc est gr. 36. erit etiam una decima quatuor rectorum, sive integri circuli, gr. 360; & proinde recta BC est latus decagoni ordinati, circulo inscribendi, cujus radius sit AB vel AC.*

Cor. 3. *Si radius circuli AB ita secetur in D, ut rectangulum ABD sub toto radio & segmento minore, æquale sit quadrato DA segmenti majoris; erit segmentum illud majus AD latus decagoni, circulo cujus radius sit AB inscribendi. Constat enim ex prop. hujus demonstratione, segmentum AD ipsi BC æquale esse.*

Cor. 4. *Si centro C, radio CB vel CD describatur circulus, cum sit BCD triangulum isosceles triangulo BAC æquiangulum, (a) erit basis BD latus decagoni ordinati (b) eidem circulo inscribendi. Et cum circuli radius CB = (c) AD) sit latus hexagoni (d) eidem circulo inscribendi: Ergo, si recta quævis AB ita secetur in D, ut rectangulum ABD sub tota AB & segmento minore BD æquetur quadrato segmenti majoris AD, erit segmentum majus AD latus hexagoni, & minus DB decagoni eidem circulo inscriptibilium. Atque hæc est prop. 9. lib. 13. Euclidis.*

(a) Liquet ex hujus prop. 10. demonstr.
(b) Per cor. 2 hujus.
(c) Per constr. hujus p. 10
(d) Per cor. 1. p. 15 l. 4.
(e) Per 30. l. 3.

Cor. 5. *Hinc discimus arcum circuli quadrantalem in quinque partes æquales (ac proinde, continua (e) bisectione, in partes æqua-*

æquales 10, 20, 40, &c.) secare; nempe arcum BC bisecando. Cum enim recta BC sit latus (a) *decagoni ordinati circuli, cujus centrum sit A, radius AB, inscripti; erit arcus BC pars decima totius circumferentiæ, sive pars quinta semicircumferentiæ; atque adeo dimidium ipsius BC erit pars decima semicircumferentiæ, sive pars quinta arcus quadrantalis.)* (a) Per cor. 2. hujus.

PROPOSITIO XI.

C*Irculo pentagonum ordinatum inscribere.* Fig. 11 & 12.

Describitur (*b*) triangulum BAC habens angulum ad basim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD (*c*) inscribe circulo. Angulos ad basim ACD, & ADC seca bifariam rectis CE, DB occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa, dabunt pentagonum ordinatum circulo inscriptum. (b) Per præc. (c) Per 2. l. 4.

Nam ex constructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales esse. Quare etiam arcus iis subtensi, AE, ED, DC, CB, BA (*d*) sunt æquales. Itaque rectæ subtensæ arcubus etiam æquales (*e*) erunt. Pentagonum igitur æquilaterum est. Est vero etiam æquiangulum, (*f*) quia ejus anguli BAE, AED, &c. insistunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum est igitur quod petebatur. (d) Per 28. l. 3. (e) Per 27. l. 3. (f) Per 29. l. 3.

Corollaria.

1. ANgulus Pentagoni ordinati facit sex quintas unius recti, seu (*g*) tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cum sint æquales, utpote æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistentes, & medius per coroll. 1. præced sit duæ quintæ unius recti, tres simul, hoc est, ipse pentagoni angulus, conficient sex quintas unius recti. Fig. 12. (g) Vide schol. ad cor 1. præc.

(Schol. ad cor. 1. *Cum anguli recti pars quinta sit gr. 18, erit angulus Pentagoni ordinati gr. 18 sexies, sive gr. 108. Cum vero partes sexquintas unius recti enumerat auctor, idem est ac si angulum rectum quinta sui parte auctum diceret.*

Cor. 2. *Ex hujus propositionis constructione liquet, quomodo super data recta CD pentagonum ordinatum construere oportet. Fiat* (h) *enim super illa tamquam basi, triangulum Isosceles ACD, in quo angulus ad basim duplus sit anguli ad verticem; circa quod* (i) *circumscribatur circulus: & bisecentur anguli ad basim rectis CE, DB, circulo occurrentibus in E, B. Ducta recta AB, BC, DE, EA perficient ordinatum pentagonum* Fig. 12. (h) Per schol. post p. 10. l. 4. (i) Per 5. l. 4.

super data recta CD descriptum, uti ex propositionis demonstratione apparet. Aliam porro methodum idem construendi, docebit problema mox secuturum.

Scholium 1. *Universaliter, figuræ imparium laterum inscribuntur circulo beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basim* multiplices *sunt eorum qui ad verticem sunt angulorum. Parium vero laterum figuræ in circulo inscribuntur ope Isoscelium triangulorum quorum anguli ad basim* multiplices sesquialteræ *sunt eorum, qui ad verticem* Fig 12. *sunt angulorum. Ut in triangulo Isoscele ACD, si angulus C aut D æqualis sit tribus angulis A, latus CD erit latus Heptagoni; si quatuor, erit latus Enneagoni, &c. Sin vero C vel D æqualis sit $1\frac{1}{2}$ anguli A, erit CD latus quadrati: & si C vel D æqualis sit $2\frac{1}{2}$ anguli A, subtendet CD sextam partem circumferentiæ. Pariterque si C vel D æqualis sit $3\frac{1}{2}$ anguli A erit CD latus octogoni, &c. Nam qua ratione in Isoscele hujus prop. Angulorum ad basim bisectorum partes, una cum angulo verticali, insistunt arcubus quinque, æqualibus peripheriæ totius partibus; & proinde si ejusmodi triangulum circulo inscribatur, ipsius basis erit latus pentagoni ordinati, eidem circulo inscribendi: eadem ratione, si Isoscelis angulus alteruter ad basim triplus fuerit anguli ad verticem; angulorũ ad basim trisectorũ partes, una cum angulo verticali, insistent arcubus septem, æqualibus itidem totius peripheriæ partibus, ac proinde, si ejusmodi triangulum circulo inscribatur, ipsius basis erit latus heptagoni ordinati, eidem circulo inscribendi. Et pari modo constabit de reliquis. Sit n numerus laterum figuræ ordinatæ circulo inscribendæ: Erit Isoscelis, inscriptioni inservientis, Angulus ad basim, ad angulũ verticalẽ, Ut* $\frac{n-1}{2}$, *ad* 1. *Unde posita unitate pro angulo verticali, anguli ad basim Isoscelis, una cum angulo isto verticali, hisce numeris pro quavis figura ordinata inscribenda, erunt exponendi; nempe pro triangulo æquilatero,* $1+1+1=3$; *pro quadrato,* $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+1=4$; *pro pentagono* $2+2+1=5$ *pro hexagono* $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+1=6$; *pro heptagono* $3+3+1=7$ *Et eodem modo pro aliis ordinatis inscribendis, procedendum est.)*

Scholium. 2.

INgeniosa est Euclidea pentagoni inscriptio, sed multo expeditior illa Ptolemæi, quam tradit lib. 1. Almagesti, & est ejusmodi.

Ducantur

Ducantur diametri ED, BF se mutuo perpendiculariter intersecantes in A. Radium AD biseca in C. Centro C per B describe arcum diametro ED occurrentem in G. Recta GB est latus pentagoni, & AG decagoni. Fig. 13.

Demonstratio hic dari nequit, pendet enim a prop. 10 lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in scholio post prop. 10. l. 13.

(*In illa prop. 10. libri sui 13. demonstrat Euclides, pentagoni ordinati circulo inscripti quadratum, aequari quadratis hexagoni, & decagoni ordinatorum, eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. Iam vero latus hexagoni ordinati circulo inscripti ejusdem circuli radio aequale esse constabit ex cor. 1. p. 15. l. 4. Et latus decagoni ordinati, eidem circulo inscripti, partem esse maiorem radii secundum prop. 11. l. 2. secti, constat ex cor. 3. p. 10. l. 4. Atque in fig. 13. trianguli ABG rectanguli ad A; latus AB est circuli EBDF radius & latus AG est segmentum majus radii AE secundum prop. 11. l. 2. secti, ut propositionis illius constructionem cum Scholii hujus constructione conferenti patebit. Ergo per 10 l. 13. & 47. l. 1. BG erit latus pentagoni eidem circulo inscripti. Propositionis autem illius decimae lib. 13. demonstrationem, ad calcem libri sexti apponemus.*

Problema.

Super data recta (AB) pentagonum ordinatum ità construes. Seca (*a*) AB, sic ut rectangulum ABC sit aequale quadrato AC. Ex AB utrimque producta aufer AD, BE aequales majori segmento AC. Centris A & D, intervallo AB describe arcus duos se secantes in F: Item centris B & E, eodem intervallo se secantes in G. Rursum centris F & G intervallo itidem AB, alios se secantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc est, aequilaterum & aequiangulum) super data AB. Fig. 13. (a) Per 11. l. 2.

Æquilaterum esse patet ex constructione: aequiangulum esse sic demonstrabitur. Ducatur DF. Patet ex constructione triangulum AFD esse Isosceles. Et basis AD est majus segmentum lateris DF, extrema & media ratione (*b*) secti; (est enim DF aequalis AB, & AD aequalis AC.) Ergo angulus (*c*) DAF est duae quintae duorum rectorum. Ergo reliquus FAB est (*d*) tres quintae duorum rectorum, sive sex quintae unius recti; ac proinde est (*e*) angulus pentagoni ordinati. Eodem modo ostenditur angulum GBA esse sex quintas unius recti, ac proinde parem FAB. Unde necesse jam est

(b) Confer p. 30. l. 6. cum p. 11. l. 2. (c) Per cor. 1. p. 10. l. 4. (d) Per 13. l. 1. (e) Per cor. 1. p. 11. l. 4.

est reliquos F, G, I his æquales esse, ut patet ex 8. l. 1. si concipiatur subtendi recta FG.

Fig. 14. (*Ducantur enim rectæ FG, FB: propter triangula ADF, EBG super basibus æqualibus AD, EB æqualia, erunt rectæ FG,*

(a) Per 40. l. 1. *DE* (a) *parallelæ, & proinde alterni anguli DAF, AFG, EBG,*

(b) Per 27. l. 1 *BGF* (b) *æquales; & eorum quilibet erit duæ quintæ duorum rectorum. Porro cum in triangulo Isoscele AFB angulus A ad*

(c) Per 32. l. 1. *verticem sit tres quintæ duorum rectorum,* (c) *erit alteruter ad basim, una quinta, & proinde BF bisecat angulum AFG, & angulus FBG (ABG – ABF, una nempe quinta ex tribus quintis subducta) continebit duas quintas, FGB duas, BFG unam. Igitur in triangulo BFG, latus FB lateri FG* (d)

(d) Per 6. l. 1. *æquale est. Ergo triangula BAF, FIG sunt sibi mutuo æqui-*

(e) Per 8. l. 1. *latera, & proinde* (e) *æquiangula, & angulus FIG continebit etiam tres quintas duorum rectorum, IFG, unam, IGF unam. Ergo anguli IFG, GFA simul additi, efficiunt etiam tres quintas, & eodem modo angulus IGB continebit etiam tres quintas. Ergo pentagonum est æquiangulum. Construitur ergo super data recta AB pentagonum ordinatum. Q. E. F.*

Alio modo super data recta AB construetur pentagonum ordinatum, si super AB tamquam basi ex parte contraria, fiat triangulum Isosceles ABX, cujus angulus ad basim BAX vel ABX duplus sit anguli X ad verticem; & productis XA, XB ad F, G, ut sint AF BG, ipsi AB respective æquales, centris F & G, radiis AF, BG, describantur circuli se secantes in duobus punctis, quorum ab AB remotius sit I, & ducantur FI, GI: Dico factum. Demonstratio fere eadem erit cum priore: Ducta enim AG, rectarum AB, FG parallelismus triangulo-

(f) Per 4. l. 1 *rum ABF, ABG* (f) *æqualitate etiamnum* (g) *constabit.*]

[g] Per 49. l. 1.

PROPOSITIO XII.

CIrculo pentagonum ordinatum circumscribere.

Fig. 15.

Inscribatur pentagonum ordinatum per præced. GHIKM, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F. Dico factum.

Ex centro duc rectas AG, AB, AH, AC, AI. Quoniam BG, BH ex uno puncto B, tangunt circulum, æquales (*h*) erunt.

(h) Per cor 2. p 36. l 3. Trigona igitur GAB, HAB, sibi mutuo æquilatera sunt.

Æquantur ergo (*i*) anguli O, P, item Q, S: ac proinde to-

[i] Per 8 l. 1. tus B duplus est ipsius P, & totus GAH duplus est S. Eadem de causa anguli C & HAI dupli sunt ipsorum T, & N. Sed

(*k*) Per 26 & 29. l 3 GAH & HAI æquales (k) sunt, quia insistunt arcubus æqualibus GH, HI, per constr. Ergo etiam eorum dimidii S, N

æquales

æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH, duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H (a) recti, latusque AH est commune, etiam (b) BH, CH, itemque anguli P, T, æquales erunt. Eodem modo ostendam rectas BG, FG, esse æquales. Igitur CB, FB duplæ sunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo ostendam reliqua latera pentagoni circumscripti esse æqualia. Illud igitur æquilaterum erit. Est vero & æquiangulum, quia cum jam ostensum sit angulos B & C duplos esse æqualium P & T; etiam ipsi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumscripsimus. Quod erat faciendum.

(a) Per 18. l. 3.
(b) Per 26 l. 1.

Scholium. Eodem artificio circulo circumscribitur ordinata figura quæcumque, si prius illi similis circulo inscribatur: (*nempe ductis tangentibus ad illa circumferentiæ puncta, G, H, I, K, &c. ubi figuræ inscriptæ anguli cumferentiam tangunt.*)

PROPOSITIO XIII. & XIV.

P*entagono ordinato circulum inscribere, & circumscribere.* Fig. 16.

Duos pentagon. angulos B, C biseca rectis BA, CA concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L descriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero descriptus centro A per B, transibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. (*Ab angulis D, E, F ad punctum A, ducantur etiam DA, EA, FA.*) In trigonis DCA, BCA, qui latera DC, AC, (c) lateribus BC, CA, itemque (d) anguli P & O æquantur. etiam G & I æquales (e) erunt. Sunt vero (f) etiam toti B & D æquales. Quare cum (g) angulus G sit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipsius D. Igitur D quoque bisectus est recta DA. Ob eamdem causam, reliqui pentagoni anguli E, F sunt bisecti: ac proinde omnes dimidii anguli inter se æquales erunt. Ducantur insuper perpendiculares AM, AS, AN, AR, Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA, anguli G, BLA æquantur angulis Q, BMA, latusque BA commune est, etiam (h) AL, AM æquales erunt. Pari modo ostendam reliquas AM, AS, AN, AR inter se æquari. Circulus ergo centro A transiens per L, transibit etiam per M, S, N, R: & quia anguli ad L, M, S, N, R recti sunt per constr. tanget (i) quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

(c) Per hyp
(d) Per constr.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per hyp
(g) Per constr.
(h) Per 26. l. 1.
(i) Per 16. l. 3.

Pars

Pars 2. in trigono CAB, quia anguli O & G jam ostensi sunt æquales, erunt latera AC, AB (a) æqualia; eademque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD, ac proinde circulus centro A transiens per B, transibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inscripsimus, & circumscripsimus. Quod erat faciendum.

(a) Per 26. l.1.

Fig.16. (Scholium. *Eadem methodo in qualibet figura æquilatera & æquiangula, & circa quamlibet figuram æquilateram & æquiangulam circulus describetur, si bisecentur duo quivis anguli proximi DCB, CBF, rectis CA, BA, & a puncto concursus A, lateri cuivis BC demittatur perpendicularis AL: Circuli enim centro A radiis AL, AB descripti, erunt figuræ datæ alter inscriptus, alter circumscriptus.*

Cor. 1. *Hinc si duo anguli proximi B, C figuræ ordinatæ bisecentur rectis BA, CA, concurrentibus in A, & a puncto concursus ducantur rectæ AD, AE, AF ad reliquos figuræ angulos; omnes anguli figuræ erunt bisecti. Unde* (b) *figura illa ordinata dividetur in tot triangula isoscelia æqualia, quot sunt latera figuræ. Et ab A demissis AL, AM, &c. ad figuræ latera perpendicularibus; hæ latera* (c) *bisecabunt, & cum radii sint inscripti circuli, sibi invicem æquales erunt.*

(b) Per def. 3. l. 4. & p. 6. & 26. l. 1.
(c) Per n. 1. schol. p. 26. l. 1.

Cor. 2. *Dato itaque figuræ ordinatæ latere, & radio circuli inscripti, habetur figuræ illius area, si radio in lateris semissem* (d) *ducto, numerus inde proveniens multiplicetur per denominatorem figuræ. Sic area pentagoni BCDEF est AL* X *LB* X *5.*)

(d) Per sch. p. 41. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Fig.17. *IN dato circulo Hexagonum ordinatum describere.*

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A describe circulum, qui datum secet in C & D. Item centro F per A describe circulum, qui secet datum in E & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa, dabunt quæsitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG, AD. Patet triangula H, I, M, L (e) esse æquilatera. Deinde quia anguli CAB, EAF (f) singuli efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde simul duas tertias, patet (g) EAC etiam esse unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales sunt. Sunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo (h) basis EC basi CB, hoc est (ut jam ostensum,) radio AC æqualis est. Quare etiam N æquilaterum est. Eodem modo ostenditur æquilaterum esse K. Quoniam igitur

(e) Ex 1. l. 1.
(f) Per cor. 12. p. 23. l. 1.
(g) Per 13. l. 1.
(h) Per 4. l. 1.

tur triangula omnia H, I, K, L, M, N, æquilatera sunt, patet latera singula CB, BD, DG, GF, FE, EC, æquari radio circuli AC, seu AB, ac proinde inter se. Hexagonum igitur æquilaterum est. Est vero & æquiangulum, cum singuli ejus anguli E, C, B, D, G, F constent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inscripsimus, est ordinatum.

Corollaria.

1. Latus Hexagoni circulo inscripti (*sive chorda graduum* 60.) æquale est radio. (*Ergo sinus* 30. *graduum æquatur radii* (a) *dimidio.*) (a) Per cor. 1. p. 3. l. 3. & cor. p. 30. l. 3.

2. Angulus hexagoni ordinati est quatuor tertiæ unius recti; constat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum singuli conficiunt (*b*) duas tertias unius recti. (*Continet igitur angulum rectum cum tertia parte recti, hoc est; gr.* 90. + 30. = *gr.* 120.) (b) Per cor. 32. p. 1

3. Si ducatur insuper diameter PS, perpendicularis alteri FB, & intervallo radii PA, centris P & S, sectiones fiant in O & Q, in R & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa, dabunt duodecangulum ordinatum una circini apertura circulo inscriptum. Id quod magno est usui in Gnomonica. (*Atque hinc etiam discimus arcum quadrantalem PF in tres partes æquales PE, EO, OF* (*& proinde continua* (c) *bisectione in partes æquales* 6, 12, 24, 48, *&c.*) *partiri.*) Fig. 18. (c) Per 30. l. 3.

4. Ex demonstratis elicitur etiam descriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro FB, centro B per A centrum describe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæsitum. Fig. 18.

5. Æquilateri trianguli latus (CXD) a diametro (BF) ad ipsum perpendiculari, quartam partem (BX) abscindit. Nam anguli ACX, BCX, æqualibus arcubus GD, DB insistentes, æquales (*d*) sunt: & latera AC, CX æquantur lateribus BC, CX. Ergo AX, BX (e) æquales sunt. Ergo BX est quarta pars diametri BF. (d) Per 29. l. 3. (e) Per 4. l. 1.

(Aliter. *Propter ACX, BCX ut prius æquales, & angulos ad X* (f) *rectos, & proinde æquales, & latus CX commune, erit* (g) *AX = BX.*) (f) Per hyp. (g) Per 26. l. 1.

Scholium.

Problema.

Hexagonum ordinatum super data recta (BC) ita construes. Fac (*h*) triangulum CAB æquilaterum supra datam CB. Centro A per B & C describe circulum. Is capiet hexa- Fig. 17. (h) Per 1. l. 1.

hexagonum super data recta CB. Patet ex propositione, & corol. 1.

Theorema.

Fig. 18. Quadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum est quadrati ex semidiametro circuli cui inscriptum est, adeoque ad quadratum diametri est ut 3. ad 4. (*Est p. 12. l. 13. Euclidis.*)

Ducatur semidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis (*a*) FA, DA, & rectangulo FAX bis. sed rectang. FAX bis est par quadrato semidiametri FA, seu DA: (Nam quia AX, XB æquales (*b*) sunt rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis, nempe sub FA, AX, & sub FA, XB, hoc est rectangulo (*c*) FAB, hoc est quadrato FA. (Ergo quadratum FD triplum est quadrati ex semidiametro.

(a) per 12. l. 2.
(b) Per cor. 5. præc.
(c) Per 1. l. 2.

Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum (*d*) est quadrati FA: patet quadratum FD esse ad quadratum diametri, ut 3. ad 4.

(d) Per cor. 3. p. 4. l. 2.

Corol. Hinc sequitur latus æquilateri trianguli esse ad diametrum, ut radix quadratica ternarii est ad 2. radicem nempe quadraticam quaternarii, ac proinde esse lineas incommensurabiles.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 19. *In circulo quindecangulum ordinatum describere.*

Circulo inscribe (*e*) latus pentagoni AC, & trianguli (*f*) æquilateri latus AD, Arcum CD biseca in E. Ducta recta CE est latus quindecanguli.

Nam si tota peripheria statuatur esse 15. erit arcus AC, 3. & arcus AD, 5. ac proinde arcus CD, 2. ideoque CE unum.

(e) Per 11. l. 4.
(f) Per Cor. 4. p. 15. l. 4.

Corollaria.

Fig. 19. 1. Hac methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inscribentur. Nam si duarum ordinatarum latera AC, AD circulo sint inscripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, si denominatores priorum inter se multiplicentur.

Ut si AD sit latus quadrati, & AC decagoni. Denominatorum

torum differentia est 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero est 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter se multiplicati faciunt 40.

(Cor. 2. *Hinc discimus arcum quadrantalem in 15 partes æquales dividere, (& proinde, continua* (a) *bisectione, in 30, 60, 120, &c. partes;) Si nempe arcus CD, pars decima quinta totius circumferentiæ, bisectione repetita dividatur in partes quatuor æquales. Et universaliter, si detur cujuscumq; figuræ ordinatæ circulo inscriptæ latus BX; arcum circuli quadrantalem, repetita arcus BX bisectione, in tot partes æquales, quot sunt latera figuræ, dividere licebit: & continua porro bisectione, secabitur arcus quadrantalis in bis, quater, octies, &c. tot partes æquales, quot sunt latera figuræ.*

(a) Per 30 l. 3.

Cor. 3. *Cum arcus circuli quadrantalis gradus 90. contineat, & unusquisque gradus scrupula prima 60; circumferentiæ quadrans igitur scrupula prima* (90×60, *sive*) 5400. *continebit. Si itaque per cor. præced. quadrans in partes 120 dividatur, earum singulæ scrupula prima 45* $\left(= \frac{5400}{120}\right)$, *nempe tres quartas unius gradus continebunt. Arcus autem adeo minutus, absque errore sensibili, in partes quotvis æquales ac si esset* (b) *linea recta, dividi potest. Dividatur itaque in tres partes æquales, quarum singulæ 15 scrupula prima, sive gradus quadrantem exhibebunt; unde etiam gradus semissem* ($= 5 + 15$) *& gradum integrum* ($= 15 + 45$) *obtinebimus. Præterea, trisectione arcus 15, habemus arcum 5, & quinisectione hujus, arcum unius scrupuli primi; unde obscurum esse nequit, quomodo (si circulus datus satis amplus fuerit) divisio in scrupula secunda effici poterit, atque ita porro. Quod si arcus 45 curvior videatur quam ut secaretur ad libitum ac si linea recta esset; continua tamen bisectione, ad arcum lineæ rectæ satis propinquum tandem perveniemus. Sic* $22\frac{1}{2}$ *continent tres octantes,* $11\frac{1}{4}$ *tres partes decimas sextas unius gradus; & sic porro. Liquet igitur, quomodo circulus in gradus suos, graduumque semisses, quadrantes, octantes, &c. vel, si ita lubeat, in scrupula prima, secunda, tertia, &c. mechanice saltem dividi potest.*

(b) Per sch. p. 10. l. 7.

Scholium 1. *Circuli autem peripheria dividi potest Geometrice in partes*

4, 8, 16, &c. *per p.* 6. *l.* 4. & *p.* 9. *l.* 1.
3, 6, 12, &c. *per p.* 15. *l.* 4. *cum cor.* 4. & 3.
5, 10, 20, &c. *per p.* 11. *cum cor.* 2. & 5. *p.* 10. *l.* 4.
15, 30, 60, &c. *per p.* 16. *l.* 4. *cum cor.* 2.)

Scholium.

Scholium.

NOndum reperta ars est, qua solo circino & regula inscribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 14, 17, &c. cum illa inscriptio figurarum dependeat a divisione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum desideratur. Licebit tamen, circuli circumferentia in 360. partes divisa, mechanice figuras quascumque ordinatas circulo inscribere hunc in modum.

Problema 1.

Fig. 19. GRadus 360. (hoc est, totam circumferentiam) divide per denominatorem polygoni inscribendi, exem. gr. nonanguli.) Quot unitatibus constat quotiens (40.) tot graduum fac in centro angulum AGK. Ducta recta AK erit latus figuræ quæsitæ (nonangulæ) circulo inscribendæ.

Problema 2.

Fig. 19. AT super data recta quamvis figuram ordinatam describes præsidio tabellæ sequentis:

Angulus rectus est ad angulum figuræ,

				differ.
In Petangono	ut 5.	ad	6	...1
Hexagono	ut 3.	ad	4	...1
Heptagono	ut 7.	ad	10	...3
Octogono	ut 2.	ad	3	...1
Enneagono	ut 9.	ad	14	...5
Decagono	ut 5.	ad	8	...3
Hendecagono	ut 11.	ad	18	...7
Dodecagono	ut 3.	ad	5	...2

Fig. 19. Oporteat igitur super data recta XB heptagonum ordinatum describere. Centro X, radio XB describe circulum, a quo abscinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ sit proportio recti anguli ad angulum heptagoni: reperies, ut 7. ad 10. & differentia est 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipsi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta B, X, N

[a] Per 5. L. 4. describe (a) circulum: hic capiet heptagonum super data recta XB.

Tabella confecta est ope theorematis 2. in schol. post 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt

efficiunt anguli cujuscumque figuræ rectilineæ, qui numerus divisus per denominatorem figuræ, exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus sunt proposita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, spatium replere possunt: Hoc est unam continuam superficiem constituere. Quod sic demonstratur. Ut aliqua figura ordinata sæpius repetita possit replere spatium, requiritur ut anguli plurium ejus speciei figurarum circa unum punctum compositi, possint constitui, ut patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. ut triangula æquilatera possint replere spatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum N, M, L, K, I, H, Fig. 17. circa punctum A compositi, efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt 6. anguli trianguli æquilateri; nam unus facit duas tertias (*a*) unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est 4. rectos;) item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni; (unus enim facit 4. tertias (*b*) unius recti, ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc est rursum 4. rectos.) Ergo, &c.

(a) Per cor. 12. p. 32. l. 1.

[b] Per cor. 2. p. 15 l. 4.

Quod autem id nulla alia figura possit, liquido constabit, si angulum ejus repertum, ut supra, quocumque numero multiplices: semper enim aut deficient a 4. rectis, aut excedent.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER QUINTUS.

Quintus *hic Elementorum liber demonstrandis libri sexti propositionibus omnino est necessarius. Doctrinam, quam continet, frequentissime usurpamus. Argumentandi vero ratio e proportione Geometrica petita, est plane subtilissima, solidissima, brevissima. Cujusmodi ratiocinandi methodo, tamquam Logica quadam*, Mathematica, Geometria, Arithmetica, Musica, Astronomia, Statica, *& reliquæ omnes Matheseos partes maxime utuntur; utpote quæ proportionibus quibusdam inter se connexis fere totæ nituntur; modosque de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc quinto mutuari solent.* Geometria *quidem* practica, *quæ linearum, figurarum, atque corporum mensuras complectitur, e proportionum doctrina plerumque derivatur. Regulæ* Arithmeticæ *ad unam omnes ex hujusce quinti libri propositionibus, sine septimo, octavo, nono de numeris ex professo tractantibus, demonstrari possunt. Antiquorum* Musicam *proportiones Geometricas sonorum modulamini applicatas rite dixeris: quod idem fere de* Statica, *corporum ponderibus applicata, possis asserere. Ut rem totam paucis complectar, si proportionis doctrinam e Mathesi abstuleris, nihil fere præclarum aut egregium relinques.*

Quanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & sexto libro. Sed quamvis illi, ceterisque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: ubi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, sive duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocumque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocumque numero æqualiter multi-

multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul majora, vel simul minora (*a*). Atque ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demonstrationes mediate vel immediate deducit. Hæc est doctrinæ Euclideæ summa: quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam in primis certum est ea definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tamquam signum infallibile rationum æqualium, ut quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusvis rationibus, inferre certo liceat æquales eas esse: vel is illius sensus est, ut per magnitudines eamdem rationem habentes, nihil aliud intelligi velit, quam earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus & solis rationibus æqualibus inesse. ut ex ea, rationum æqualitas certo posset inferri. Id vero minime vulgare theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem ullus demonstravit. Si secundum; securi quidem erimus de veritate theorematum in sensu definitionis acceptorum, minime tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absoluta rationum æqualitate. Exemplum esto prima sexti. Certi erimus ex Euclidea demonstratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem esse rationi basium AC, & DF, per rationum æqualitatem solum intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, basium rationibus vere & absolute æquales esse, cum demonstratum non sit affectionem illam multiplicium cum absoluta & vera rationum æqualitate necessario esse connexam. Quomodocumque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate semper esse connexam. Denique ut sibi constarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisque semper displicuit; & tyronibus plurimum semper facessivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & universæ Matheseos est, ab ea labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

(a) Hæc definitio declaratur infra post defin. 6.

Fig. 2. l. 6.

Primo ostendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur, eo fere loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus & perobscuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundo demonstrabimus, quandocumque antecedentium quælibet æque multiplices, consequentium quibuslibet æque multiplicibus vel pariter majores sunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes esse vere æquales, seu similes. Quo stabilito, omnes Euclideæ demonstrationes, totaque illius de proportionibus doctrina subsistet; ut qui nostris probationibus contentus non sit, ad Euclideas quamvis prolixas, jam tamen securas ac solidas se possit convertere. Assignabimus item (ac demonstrabimus) proportionum æqualium aliud indicium clarissimum ac primum, ex quo omnes Quinti libri propositiones deducere poterit qui voluerit.

Tertio, de proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione, tractatum subjungam, penitioris Geometriæ studiosis plane necessarium, ubi etiam demonstrabimus axioma illud, seu potius theorema hactenus indemonstratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus satis erit definitiones & primam partem perlegere.

(Monitum ad Tyrones.

QUanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, *ut recte notat Tacquetus*, qui ignoret. *Est enim ipsa quodammodo scientiarum Mathematicarum medulla; & varii de proportionalibus ratiocinandi modi, utilissimi simul sunt & certissimi; neque absque iis pedem vel hilum promovere licet. Verum hanc doctrinam animis humanis cum communi ratione quasi congenitam existimo; variosque de proportionalibus ratiocinandi modos, quos integro hoc libro, per ambages quamplurimas, tradit Euclides, non tam* demonstratione *proprie dicta, quam* illustratione *nonnulla, & exemplis indigere censeo. Eos autem qui longo propositionum circuitu doctrinam hanc facillimam tradendam volunt, non per se clarissimam nube quadam involvere, & longe difficiliorem reddere omnino puto. Rei summam paucis aperiam. Notum est quatuor quantitates tum* proportionales, *sive analogias, tum* similes *aut* æquales *esse, cum Quantitas prima toties continet secundam, quoties tertia continet quartam: vel cum prima toties continetur in secunda, quoties tertia continetur in quarta. Sic* 16 : 8 :: 4 : 2, *atque etiam* 3 : 9 :: 4 : 12. *sunt* similes *rationes: quoniam in exemplo priore, consequentia* 8 & 2 *bis in antecedentibus suis* 16 & 4 *respective continentur: adeoque ratio*

ratio dupla in utrisque observatur. Et in exemplo posteriore rationes sunt etiam similes, quoniam consequentia 9 & 12 ter antecedentia sua respective continet; adeoque ratio subtripla in utrisque observatur. (Neque ulla est quantitatum commensurabilium ratio quæ non possit per numeros certos; neque sane incommensurabilium ulla quæ non possit per numeros ad veram rationem in infinitum approximantes certissime exprimi.) Ratio autem duarum quantitatum, antecedentis ad consequentem, recte per quotum ex antecedente per consequentem diviso ortum exprimitur. Sic ratio 16. ad 8 æquivalet $\frac{16}{8}$ vel $\frac{2}{1}$, sive 2; ea nempe ratio dupla est. Et ratio 3 ad 9 est $\frac{3}{9}$, sive $\frac{1}{3}$, nempe subtripla. Et ratio 8 ad 3 est $\frac{8}{3}$ sive $2\frac{2}{3}$, hoc est, ratio dupla bipartiens tertias. Ejusmodi vero quotus, Rationis Exponens appellatur. Porro, ex ante dictis liquet similes rationes quascumque non tantum per numeros diversos, sed etiam per eosdem rectissime exprimi. Sic sane ratio dupla, sive 2 ad 1 rationem tam 16 ad 8, quam 4 ad 2 plenissime designat: Ratio subtripla, sive 1 ad 3 non minus exprimit rationem 4 ad 12, quam rationem 3 ad 9, uti oppido est manifestum. Si itaque quatuor quantitates sint proportionales, $A : B :: \alpha : \beta$; quæritur in hoc quinto libro quot similibus modis hæ similes rationes mutari, atque inter se commisceri possint, ita ut rationes emergentes sint etiamnum utrinque similes? Responderi vero debet, modis omnino omnibus, quos quisquam imaginari queat. Cum enim tam ratio A ad B, quam ratio α ad β inter se similes sint, per eosdem numeros exprimi utræque poterunt hoc modo, $A : B :: 9 : 3 ::$ & $\alpha : \beta :: 9 : 3$. Atque proinde omnes omnino rationes utrinque aut Alternando, aut Invertendo, aut Componendo, aut Dividendo, aut Convertendo, aut Miscendo emergentes, per eosdem plane numeros exprimentur; & eamdem proinde rationem utrinque servabunt. Sic e.g. $A + B : B :: \alpha + \beta : \beta$; quia utramque proportionem exprimit $9 + 3 : 3$; quæ est rationis compositio. Neque aliter de reliquis est censendum. Hæc itaque tantum observent Tyrones, ut rationes quas tractant ubique similes, modo plane simili mutentur & ordinentur. Neque exinde locus erit dubitationi, quin ex hujusmodi ordinatione aut mutatione consimili, rationes ubique consimiles sint oriundæ. Mirari autem subit eorum neminem qui elementa Geometrica hactenus condiderunt, facillimum hoc æqualium rationum indicium illustrando huic libro quinto, & proportionum doctrinæ facilius explicandæ adhibuisse. En vero modos primarios de similibus rationibus argumentandi, quos adhibet Geometria, in brevem Tabellam conjectos:

Sit $A : B :: \alpha : \beta :: 9 : 3$.

Erit ergo Alternãdo sive permutãdo, $A : \alpha :: B : \beta :: 9 : 9 :: 3 : 3$.

Invertẽdo $B : A :: \beta : \alpha :: 3 : 9$.

Componẽdo $A + B : B :: \alpha + \beta : \beta :: 9 + 3\ (12) : 3$.

Dividẽdo, $A - B : B :: \alpha - \beta : \beta :: 9 - 3\ (6) : 3$.

Convertendo, $A : A + B :: \alpha : \alpha + \beta :: 9 : 9 + 3\ (12.)$

vel $A : A - B :: \alpha : \alpha - \beta :: 9 : 9 - 3\ (6)$

Mixtim, $A + B : A - B :: \alpha + \beta : \alpha - \beta :: 9 + 3\ (12.) : 9 - 3\ (6.)$

Ex quo fit $A : B :: \alpha : \beta$. & $B : C :: \beta : \gamma$. *Erit* $A : C :: \alpha : \gamma$. $9 : 3 :: 9 : 9 :$ & $3 : 1 :: 3 : 1$. *Erit* $9 : 1 :: 9 : 1$. *Ubi ratio A ad C (seu 9 ad 1)* componi *dicitur ex rationibus A ad B, & B ad C, (vel ex 9 ad 3, & 3 ad 1.)*

Ex æquo perturbate fit $A : B :: \alpha : \beta$. $8 . 3 :: 16 . 6$.

Et $B : C :: \delta : \alpha$. $3 . 2 :: 24 . 16$.

Erit $A : C :: \delta : \beta$. $8 . 2 :: 24, 6$.

Ubi, sicut ratio A ad C (sive 8 ad 2) componitur ex rationibus A ad B, & B ad C (vel ex 8 ad 3, & 3 ad 2) directe positis; sic ratio δ ad β (sive 24 ad 6) componitur ex rationibus δ ad α, & α ad β (sive ex 24 ad 16, & 16 ad 6) sed transpositis.

Cæterum de compositione rationum vide plura in def. 5. libri 6.

Denique si fuerit $A : B :: C : D :: 9 . 8$.

Et $\alpha : \beta :: \gamma : \delta :: 3 . 4$.

Erit $A \times \alpha . B \times \beta :: C \times \gamma : D \times \delta :: 27 . 32$.

Et $\dfrac{A}{\alpha} : \dfrac{B}{\beta} :: \dfrac{C}{\gamma} : \dfrac{D}{\delta} :: 3 . 2$.

Qui itaque hosce de proportionalibus ratiocinandi modos probe callet, eosque pro re nata in usum proferre novit, propositionibus libri quinti particularibus (nisi forte illis quæ mere sunt axiomata sua luce clarissima,) perraro indigebit. Unde sane, si mihi esset integrum, rationum doctrinam sine methodo Euclidea a primordiis tradidissem: sed cum Tacquetum nostrum, ordinis Euclidei ubique observantissimum, eumque integrum Lectori propinare certum sit, pluribus supersedebo.

Hæc monuit Vir ille Clariss. mihique amicissimus qui editionem primam Cantabrigiensem recensuit. Atqui velim potius ut ipsum Tacquetum hoc loco audiant Tyrones, ac definitionibus, primæque parti hujus libri incumbant: quorum notitia, cum modico tempore & nullo fere negotio acquiri potest, haud temere omitti debet; maxime, cum ipsæ propositiones Euclideæ passim in aliis libris mathematicis laudentur, quin

quin & earum nonnullæ, haud paucis quæ in hisce elementis postea traduntur, facilius intelligendis, perutiles videantur, si non necessariæ. Nolim tamen ut ea quæ in hoc monito continentur, negligant Tyrones: sed potius ut, antequam librum sextum aggrediantur, præcipuos ex analogia ratiocinandi modos, perlecto hoc compendio, memoriæ infigant. Porro, reliquas hujus l 5. partes duas, 2. & 3. monente etiam Tacqueto, tyronibus omittere licebit. Et quidem, ea quæ continent, vera atque accurata esse omnia, polliceri non ausim.)

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. Pars aliquota magnitudinis est, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, sive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis est pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, est pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter excedit. (*Et hujusmodi quidem pars aliquanta est toti commensurabilis: si vero e quadrati cujusvis diametro sumatur recta lateri illius quadrati æqualis, ejusmodi recta erit pars aliquanta quidem diametri, sed toti incommensurabilis. Vide Schol. p.47. l.1.*)

2. Magnitudo magnitudinis multiplex est, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota est; sive cum major minorem aliquoties continet præcise.

3. Ratio sive proportio, est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primo nominatur, sive is qui nominandi casu primo effertur: Alter Consequens.

Cum antecedens & consequens sunt æquales, proportio æqualitatis dicitur; cum inæquales, dicitur esse proportio inæqualitatis: (*& quidem majoris inæqualitatis, si terminus antecedens sit consequente major; minoris, si minor.*)

4. Ratio seu proportio rationalis est, quæ existit inter magnitudines commensurabiles, & numeris exprimi potest

Proportio irrationalis est, quæ existit inter magnitudines incommensurabiles, & nullis numeris explicari potest. (*Sic proportio 2 ad 1 rationalis est: Sed* √ *2 ad 1 est proportio irrationalis; nam* √ *2 nullis numeris explicari potest.*)

Porro commensurabiles quantitates sunt, quas aliqua communis mensura metitur; incommensurabiles, quas nulla metitur mensura communis.

Fig. 1. l. 5. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) sunt similes, æquales, eædem; cum unius antecedens (A) æque seu eodem modo (hoc est nec magis, nec minus) continet suum consequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet suum consequens. (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in suo consequente (B,) quo (C) antecedens alterius in suo (D.) (*Quantitates autem eamdem habentes rationem, proportionales vocantur.*)

Fig. 3. 6. Duæ rationes sunt dissimiles, sive una ratio est major altera, quando unius antecedens (I) magis continet suum consequens (L,) quam alterius antecedens (O) contineat suum consequens (Q;) vel quando antecedens unius, minus continetur in suo consequente, quam antecedens alterius contineatur in consequente suo.
Fig. 4.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

Quid porro sit unum antecedens æque, vel magis continere suum consequens, quam antecedens alterum contineat suum, si proportiones sint rationales, definiri & explicari ulterius potest per numeros: ut si A sit triplum B, & C triplum F; perspicuum erit, quid sit, A æque seu eodem modo continere B, quo C continet F: vel si I sit triplum L, O vero duplum Q; constabit rursum, quid sit, I magis continere L, quam O contineat Q. At si proportiones fuerint irrationales, ea res explicari ulterius nec potest, nec debet. Dentur magnitudines incommensurabiles, A, B: perspicuum est A non solum majus esse B, sed etiam certo quodam modo esse majus; (A quippe aliter continet B, quam alia quælibet major minorve quam A:) neque tamen ulterius quæri, aut explicari debet, qui sit certus ille modus, quo A continet B, quia per nullos numeros explicabilis est. Itaque quemadmodum datis binis incommensurabilibus quantitatibus, non debet ulterius quæri, quid sit unam certo modo continere alteram; ita neque cum dantur quatuor proportionales incommensurabiles, quæri debet ulterius, quid sit, C eodemmodo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus quo A

Fig. 1. Fig. 3. Fig. 5. Fig. 5.

cor-continet B, ulterius est inexplicabilis; ita plane etiam identitas modi quo A continet B, cum modo quo C continet D, ulterius inexplicabilis est. (*Identitas autem illorum modorum, ex definitione Euclidea rationum æqualium, de qua infra, vel ex altero illo, quod sequitur, rationum æqualium indicio Tacquetiano, satis pro rei natura, videtur explicari.*)

Quod vero cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles sint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diversis terminis constantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcumque quantitas C. Et auferatur B ex A incommensurabili secum quantitate, quoties potest, puta ter: & supersit EF. Sit deinde O tertia pars ipsius C. Sit insuper quæpiam X ipsi C incommensurabilis, quæ major sit quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter; C vero continet X minus quam ter, (nam C continet præcise ter O minorem quam X;) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q, quarta pars C, & quæpiam esto Z, ipsi C incommensurabilis, quæ minor sit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus quam quater; C vero continet Z plus quam quater, (cum C præcise quater contineat Q, majorem quam Z;) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B. Fig. 9.

Jam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quam A ad B; & rursum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet quam A ad B; manifestum est etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eamdem habere rationem quam A ad B. Quod quidem perinde clarum est lumine naturali, atque istud: dabile est majus quam P, & dabile est minus quam P; ergo dabile est æquale aliquod ipsi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidea desideretur.

Quod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales esse dicit, cum antecedentium quæcumque æque multiplices I, Q, consequentium quibuscumque æque multiplicibus L, R, vel simul majores sunt, vel simul minores, vel simul æquales: hoc est, cum I superante L, etiam Q semper superat R; & cum I superatur ab L, etiam Q semper superatur ab R; & cum I est æqualis L, etiam Q semper est æqualis R. Ubi bene notandum est, Euclidem non assumere æque multiplicium excessus defectusque Fig. 11.

pro-

proportionales, seu similes, sic enim inepte idem per idem explicasset; sed excessus & defectus simpliciter. Nihilominus hic aliquid in summo Geometra desiderari jam supra declaravimus. Nam vel cupit hisce verbis rationes æquales definire, & sic rei definitæ proprietatem pro definitione affert; evidens quippe est, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere: Vel adducit tamquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & sic demonstrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita semper esse connexam, ut ex illa certo possit inferri; quæ quidem connexio & perobscura & demonstratu difficilis est: Vel denique per rationum æqualitatem nihil aliud intelligit, quam simultaneum illum excessum defectumve multiplicium; Et sic toto 5. ac 6. libro, cum quatuor magnitudines proportionales esse demonstrat, nihil sciemus aliud, quam dictum excessum & defectum illis competere, incerti plane, utrum magnitudines, de quibus agitur, sint vere proportionales.

(*Cum in definitione rationum æqualium Euclides nihil aliud, quam quo sensu voces illas acceperit, pro more Mathematicorum ostendere voluerit; non video cur eapropter tantopere culpandus sit: maxime, cum definitio Euclidea omnibus omnino rationibus æqualibus vere conveniat, sive rationales fuerint, sive irrationales, ut in parte 2. hujus lib. 5. Tacquetus ipse demonstrat, quod etiam cuilibet ipsam definitionem accuratius perpendenti, satis manifestum erit. Vide quæ ad def. 36. l. 1. notavimus: ad eumdem enim lapidem utrobique offendit noster. Cum tamen Tacqueti methodum necesse est ut sequamur; videamus tandem, quodnam aliud rationum æqualium indicium universale nobis exhibet.*)

Proportionum æqualium aliud indicium primum & infallibile assignatur.

Quod si rationum æqualium desideretur indicium infallibile, & facile, & primum; nos tale assignabimus, demonstrabimusque theor. 5. & 6 partis 2. (*At vero demonstratione operosa non videtur indigere hoc rationum æqualium indicium; ex definitionibus enim quinta & sexta immediate fluit; vel potius, tamquam definitionum istarum illustratio quædam existimari debet.*) Estque ejusmodi.

Fig. 16. Rationes (majoris inæqualitatis) æquales sunt, (AB ad CF: GM ad NQ;) quando & consequentes ipsæ, & consequentium similes partes aliquotæ quæcumque, in antecedentibus æquali semper numero continentur.

Ut

Ut si una decima ipsius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM; & si una centesima CF contineatur millies in AB, etiam una centesima NQ contineatur millies in GM, & sic deinceps in infinitum; erit AB ad CF, ut GM ad NQ. (*ita enim fiet* (*ut secundum def. quintam*) *prioris rationis antecedens AB æque seu eodem modo* (*hoc est, nec magis nec minus*) *contineat suum consequens CF; quo posterioris antecedens GM continet suum consequens NQ.*

Vel si minoris inæqualitatis rationes, CF ad AB; NQ ad GM ponantur æquales; tum antecedentes ipsæ, & antecedentium similes partes aliquotæ quæcumque, in consequentibus suis æquali semper numero continebuntur. Hoc enim rursum postulat def. quinta, ut scil. antecedens CF eodem modo contineatur in suo consequente AB, quo antecedens NQ in suo GM.)

Inæquales autem rationes sunt, quando aut consequentes ipsæ, aut consequentium aliquæ similes aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur. Et illa ratio major est, cujus vel consequens, vel consequentis aliquota, sæpius continetur in antecedente.

Ut si una centimillesima CF sæpius contineatur in AB, quam una centimillesima NQ in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliæ consequentium CF, NQ similes aliquotæ in antecedentibus AB, GM æquali numero continerentur. (*Sequitur ex def. 6.*) Fig. 26.

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties possunt, æquali numero sunt ablatæ.

Ex hoc indicio, rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuo elucescit, cum sint antecedentes consequentibus incommensurabiles, per ablata consequentibus commensurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes sunt, quæ in suis totis æque, seu eodem modo continentur, ut qualis pars sui totius est una, talis pars sui totius sit altera. Quod sane nihil aliud est, quam partes ad sua tota (*vel etiam tota ad partes suas*) eamdem habere rationem (*sive partes illæ totis suis commensurabiles fuerint, seu incommensurabiles.*)

Similes vero partes aliquotæ sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur; ut si utraque sit sui totius una tertia, una decima, &c.

8. Magnitudines (A, B, C, D) continue proportionales dicuntur, cum medii termini (B, C,) bis sumuntur; hoc est, cum sunt consequens respectu præcedentis, & antecedens respectu sequentis. Fig. 6.

Continuas

Continuas rationes sic efferimus: A est ad B, ut B ad C; & B est ad C, ut C ad D, & sic deinceps:

9. Magnitudines discretim proportionales sunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1. Discretas rationes sic efferimus: A est ad B, ut C ad F.

Cum plures fuerint proportionales magnitudines, quam tres, si proportionales dicantur, semper intelliguntur discretim.

Fig. 6. 10. Cum magnitudines (A, B, C, D (fuerint continue proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad secundam (B;) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad secundam (B:) & sic deinceps.

(Item, prima (A) ad secundam (B) subduplicatam (sive dimidiatam) rationem habere dicitur ejus rationis quam habet eadem prima (A) ad tertiam (C,) & subtriplicatam ejus rationis quam habet prima (A) ad quartam (D:) & sic deinceps.

Si vero ratio aliqua triplicata, sit alteri rationi duplicata æqualis; erit ratio simplex posterior, rationis simplicis prioris sesquiplicata sive sesquialtera. *Sint A, B, C, D ∷; & α, β, γ ∷ & sit A prima ad D quartam in priore analogia, ut α prima ad γ tertiam in secunda analogia, dico quod α est ad β in ratione sesquialtera rationis A ad B. Sit enim F inter B, & C, sive quod perinde est, inter A & D media proportionalis: ob æquales rationes A ad D & α ad γ, & medias proportionales utrinque F, & β, Erit A: F: α: β: sed ratio A ad F componitur ex ratione integra A ad B & ex dimidiata quoque ejusdem ratione B ad F atque adeo ratio α ad β rationi A ad F æqualis, continet rationem A ad B integram, & etiam rationem ejusdem dimidiatam, nempe rationem B ad F. Ratio vero integra & dimidiata dicitur ratio sesquiplicata sive* sesquialtera, *Est ergo α ad β in ratione sesquiplicata, sive* sesquialtera *A ad B. sic sane in Astronomicis, cum cubi distantiarum planetarum a Sole, eam inter se rationem habeant quam temporum periodicorum quadrata, ita ut* triplicata *distantiarum ratio eadem sit cum ratione temporum periodicorum* duplicata; *(Cubi enim sunt in* (a) *triplicata, & quadrata sunt* (b) *in duplicata ratione laterum suorum, sive radicum, respective;) dici solet, tempora ipsa periodica esse inter se in ratione sesquiplicata sive* sesquialtera *distantiarum a Sole.)*

(a) Per 33. l. 11.
(b) Per 20. l. 6.

11.

11. Homologæ, seu similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, consequentes consequentibus. Ut si A est ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C; & B, F. Fig. 1.

Reliquæ definitiones commodius ex ipsis propositionibus intelligentur.

Quintus liber propositiones complectitur 25. Ex his 10. non alium usum habent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonstrentur, illis igitur prætermissis, 15. reliquas proponemus solas, Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non solis lineis, sed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis repræsentant.

Axioma.

Datis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis est quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B,

PROPOSITIO I, II, III, IV, V, VI.

In nostra methodo sunt superflua. (Inter has insignior & usus frequentioris est prop. 4: cujus demonstratio habetur infra. Est enim Lem. 1. par. 2. hujus libri 5.)

PROPOSITIO VII.

Si quantitates A & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B est ad Z. Et Z erit ad A, ut eadem Z est ad B. Fig. 7.

Hæc propositio, uti & sequentes quatuor, sunt merissima axiomata, ac proinde nullo modo demonstrari debent.

(Scholium. *Eodem modo, æquales ad æquales eamdem habent rationem; hoc est, si detur etiam alia quantitas X, ipsi Z æqualis; erit A ad X, ut B est ad Z; & vice versa. Sic etiam propositionum 3. sequentium patebit adhuc veritas, si loco unicæ quantitatis Z, ubique ponantur duæ æquales, X & Z.*)

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates (C & F) fuerint inæquales ; major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eamdem Z* (item minor F minorem habet rationem ad Z, quam habet major C ad Z.)

Et Z ad majorem C, minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F, quæ minor est quam C. (Et Z ad minorem F, majorem habebit rationem quam habet eadem Z ad C quæ major est.)

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eamdem habeant rationem, æquales sunt A & B.*

Et si eadem Z Ad A & B eamdem rationem habeat, rursum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8. *SI C ad Z majorem rationem habeat, quam F ad Z; erit C major quam F.* (Et proinde si F minorem habeat rationem ad Z, quam habet C ad Z; F minor erit quam C.

Et si Z ad F majorem rationem habeat quam eadem Z ad C; erit F minor quam C.) Et si Z ad C minorem rationem habeat, quam habet eadem Z ad F; erit C major quam F.)

PROPOSITIO XI.

Fig 9. *RAtiones, quæ eidem rationi sunt æquales, eædem, similes (idem omnia significant,) sunt æquales, eædem, similes inter se.*

Ut si tam ratio A ad B, quam ratio C ad F) sint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F ad F æquales inter se. Sive si A sit ad B, ut X ad Z; & C sit ad F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

(*Scholium.*) Eodem modo rationes, quæ æqualibus sunt æquales: inter se sunt æquales. (*Et rationes quæ una æqualium rationum majores vel minores sunt, etiam altera æqualium majores vel minores erunt: aut si æqualium rationum una quævis, ratione tertia major fuerit vel minor, etiam altera æqualium eadem tertia major vel minor erit respective.*

Ex. gr. *Si A sit ad B ut C ad F; & sit ratio C ad F major ratione X ad A; Erit quoque ratio A ad B major ratione X ad Z; quæ ipsa est prop 13. a Tacqueto omissa. Eodem modo si fuerit A ad B ut X ad Z; & fuerit ratio X ad Z minor quam ratio C ad F; erit etiam ratio A ad B minor ratione C ad F.*)

PROPOSITIO XII.

SI *singulam magnitudines quotcumque (A, B, C,) eædem habuerint poroportionem ad singulas totidem (F, I, L:) quam proportionem habent singulæ ad singula, sive una (A) ad unam (F;) eamdem habebunt omnes (A, B, C) simul sumptæ, ad omnes (F, I, L) simul sumptas.* Fig. 10.

Rem per se manifestam exemplo tantum aliquo rationali declaro; ut si singulæ A, B, C, singularum F, I, L, sint tripla, (hoc est, si singulæ ad singulas eamdem habeant rationem quam 3. ad 1.) etiam A, B, C simul sumptæ, simul sumptarum F, I, L triplæ erunt, (hoc est etiam A, B, C simul sumptę ad F, I, L simul sumptas rationem habent eamdem, quam 3. ad 1.) In proportione irrationali res æque clara est.

(*Propositionem* 13. *in Scholio post pr.* 11. *supra collocavimus; demonstratione enim vix eget. Sequens autem propositio* 14. *etsi Tacqueto superflua, usum suum habet, atque adeo illam in locum suum reduxi cum demonstratione sua.*)

PROPOSITIO XIV.

SI prima (A) sit ad secundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F,) & sit prima (A) major quam tertia (C,) erit secunda (B) major quam quarta (F:) Si vero prima sit æqualis tertiæ, erit secunda quartæ æqualis: & si minor, minor. Fig. 11.

Si

Si data fuerit proportio æqualitatis, ubi antecedenti æq. consequentibus suis æqualia sunt, propositio per se patet.
(a) Per def. 5. l. 5. *Et (a) cum, in proportione majoris inæqualitatis, unius antecedens æque seu eodem modo contineat suum consequens quo alterius antecedens continet suum consequens; atque*
(b) Per 8. l. 5. *in proportione inæqualitatis minoris, antecedens unius eodem modo contineatur in suo consequente quo antecedens*
(c) Per hyp. *alterius in suo continetur; etiam in proportione inæqualitatis majoris vel minoris, propositio satis patebit attendenti.*
(d) Per schol. post p. 11 l. 5. *Si quis tamen ampliorem demonstrationem velit, legat ea quæ sequuntur.*
(e) Per 10. l. 5. *1. Sit A major quam C, eritque ratio A ad B (b) major*
(f) Per 7. l. 5. *ratione C ad B. Sed est (c) A ad B ut C ad F: ergo ratio C ad F major (d) est ratione C ad B: (e) unde F minor est quam*
(g) Per 11. l. 5. *B, & proinde B major quam F.*
(h) Per 9. l. 5. *2. Sit A æqualis ipsi C; erit ratio A ad B (f) æqualis rationi C ad B: Sed est A ad B ut C ad F: erit (g) igitur C ad*
(i) Per 8. l. 5. *B ut C ad F, ac proinde B & F (h) æquales erunt.*
(k) Per schol. Post P. 11 l. 5. *3. Sit A minor quam C; & habebit A ad B minorem (i) rationem quam habet C ad B. Est autem A ad B ut C ad F: ergo C (k) minorem habet rationem ad F quam habet eadem C ad*
(l) Per 10. l. 5. *B; & proinde F (l) major est quam B, seu B minor quam F.)*

PROPOSITIO XV.

Fig. 10. *ALiquotæ similes (F, I) eamdem inter se rationem habent quam tota (A, B.)*

Fig. 11. *Et universim partes similes (C, F) sunt inter se ut tota (A, B)* (sive partes illæ totis suis fuerint commensurabiles, sive non fuerint.)

Vere instar axiomatis haberi potest, si recte intelligatur quid sint partes similes. Vide defin. 7.

Fig. 12. Schol. *Partes similes CB, LI, si a totis suis AB, FI auferantur, relinquunt partes similes AC, FL; quod per se satis manifestum est.)*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 1. *SI prima (A) sit ad Secundam (B,) ut tertia (C) ad quartam (F;) etiam* permutando *erit prima (A) ad tertiam (C,) ut secunda (B) ad quartam (F.)*

Ponan-

Ponantur B & F esse minores quam A &C; (nam si æquales sint, res patet;) *Tunc enim, æquales A & B ad æquales C & F eamdem rationem*(a)*habebunt, ut sit A : C :: B : F.)* Quoniam A ponitur esse ad B, ut C ad F, erunt per defin.7. B & F, totorum A & C partes similes, ac proinde per præc. quam proportionem inter se habent tota A, C, eam quoque habent partes similes B, F, hoc est, A est ad C, ut B ad F. (*Eodem modo si antecedentes A & C minores fuerint consequentibus B & F respective; cum sit A : B :: C : F*, (b) *erunt A & C partes similes totorum B & F, &* (c) *proinde : A: C :: B : F.*) (a) Per schol. post. p.7.l.5. [b] Per def.7.l.5. (c) Per 15. l.5.

Scholium.

SI A est ad B, ut C ad F; etiam *invertendo* erit ut B ad A, sic F ad C. Per se patet.

Apud Euclidem hoc est corollarium prop. 4. quæ cum in nostra methodo tamquam superflua sit omissa, visum est corollarium illud hoc loco ponere:

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum (AB) sit ad consequens (CB,) ut antecedens alterum (FI)ad consequens alterum (LI;) etiam dividendo *erit (AC) excessus antecedentis primi supra suum consequens, ad idem consequens (CB,) ut (FL) excessus antecedentis secundi supra consequens secundum, ad secundum consequens (LI.)* Fig.12.

Axiomatis instar assumi potest: si tota AB, FI eamdem rationem habeant ad X & Z; etiam similibus partibus mulctata, eamdem ad X & Z pergent habere rationem: hoc est, adhuc AB sic mulctata erit ad X, ut FI sic mulctata ad Z. Id vero est quod asserit propositio. Nam quia ponitur AB esse ad CB, ut FI ad LI, erunt (*d*) CB, LI similes partes totorum AB, FI: & AC, FL erunt tota similibus partibus mulctata. Cum ergo tota habuerint ad CB, LI eamdem rationem; etiam AC FL, (hoc est tota similibus partibus mulctata) pergent ad CB LI eamdem inter se habere rationem; hoc est, adhuc erit AC ad CB, ut FL ad FI. (d) Per def.7. l.5.

(Aliter. *cum sit AB:CB :: FI:LI;*(e)*ergo CB,LI sunt similes* (e) Per def.7.l.5.

 partes

partes totorum AB, FI, & proinde si a totis suis auferantur, (a) relinquunt similes partes AC, FL totorum AB, FI. Unde (b) AB : FI : : AC ; FL : & ob eamdem causam AB : FI : : CB ; LI. Ergo (c) AC : FL : : CB : LI. Et permutando AC : CB : : FL ; LI. Q. E. D.

(a) Per Schol. p. 15 l. 5
(b) Per 15. l. 5
(c) Per 11. l. 5.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AC) sit ad consequens unum (CB,) ut antecedens alterum (FL) ad consequens alterum (LI,) etiam componendo *erit (AC cum BC) primum antecedens cum suo consequente, ad idem consequens (CB,] ut (FL cum LI) secundum antecedens cum suo consequente, ad consequens LI)*

Rursum enim instar axiomatis assumi poterit ; si duæ quantitates, AC, FL, eamdem ad X & Z habeant rationem ; etiam AC, FL similiter, seu proportionaliter auctæ, pergent ad X & Z eamdem habere rationem ; hoc est, adhuc erit AC sic aucta ad X, ut FL sic aucta ad Z : id vero est quod propositio asserit. Nam ponitur AC esse ad CB, ut FL ad LI. Quare si ipsis AC, FL addantur CB, LI ; erunt AC, FL proportionaliter, seu similiter auctæ. Cum igitur AC, FL eodem modo se habeant ad CB, LI ; etiam cum similiter fuerint auctæ, (hoc est ipsæ jam AB, FI) pergent ad easdem CB, LI eodem modo se habere ; hoc est, adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

(Aliter. *Cum sit AC : CB : ; FL : LI ; ergo* (d) *permutando erit AC : FL : : CB : LI ; Ergo* (e) *AC + CB : FL + LI ; hoc est, AB : FI : : CB ; LI ;) & iterum* (f) *permutando, AB ; CB : : FI : LI : Q. E. D.*

(d) Per 16. l. 5.
(e) Per 12. l. 5.
(f) Per 16. l. 5.

Corollarium 1.

Fig. 12.

SI antecedens unum (AB) fuerit ad consequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad consequens alterum (LI,) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) excessum suum supra consequens, ut antecedens alterum (FI) est ad (FL) excessum suum supra consequens alterum (LI.)

Cum enim AB sit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo (g) AC ad CB, ut FL ad LI : & invertendo (*h*) BC ad CA, ut IL ad LF ; & componendo (*i*) BA ad CA, ut IF ad LF. Hæc

[g] Per 17. l. 5
(h) Per sch. p. 16. l. 5.
(i) Per 18. l. 5.

Hæc argumentatio vocatur *conversio* rationis.

(*Et præterea, si fuerit unum antecedens* (*AC*) *ad consequens suum* (*CB*,) *ut alterum antecedens* (*FL*) *sit ad suum consequens* (*LI*;) *erit etiam ex alia* convertendi *specie, antecedens primum* (*AC*) *ad primum antecedens cum suo consequente* (*AB*) *ut antecedens alterum* (*FL*) *ad alterum antecedens cum suo consequente* (*FI*.)

Cum enim sit AC : CB : : FL : LI; erit (a) *invertendo, BC: CA : : IL : LF;* & (b) *componendo, BA: AC : : IF; FL;* & *rursum invertendo, AC : AB : : FL : FI.*) (a) Per sch. p. 16. l. 5. (b) Per 18. l. 5.

Corollarium 2.

(SI AC est ad AB, ut FL ad FI; erit quoque AC ad CB, ut FL ad LI; & AB ad CB, ut FI ad LI. Fig. 12.

cum enim sit ut AC ad AF, sic FL ad FI, erit invertendo, BA ad CA, ut IF ad LF: & divid. (*c*) BC ad CA, ut IL ad LF: & rursum invertendo, AC ad CB, ut FL ad LI: & compon. (*d*) AB ad CB, ut FI ad LI. (c) Per 17. l. 5. (d) Per 18. l. 5.

(Aliter *Cum sit CA : AB : : LF : FI, erit invertendo, BA: AC : : IF : FL,* & (e) *convertendo, AB : BC : : FI: IL, quod erat unum:* & (f) *dividendo, AC : CB : ; FL ; LI, quod erat alterum.*) (e) Per cor. 1. hujus (f) Per 17 l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum (*AB*) *est ad totum* (*FI*,) *ita ablatum* (*CB*) *sit ad ablatum* (*LI*,) *etiam ut totum est ad totum, ita reliquum* (*AC*) *erit ad reliquum* (*FL*.) Fig. 12.

Omnino clarum est per se. Potest tamen ex præcedentibus sic ostendi. Quoniam AB est ad FI, ut CB ad LI; erit permutando (*g*) AB ad CB, ut FI ad LI. Ergo per conversionem rationis AB est ad AC, ut (*h*) FI ad FL. Ergo permutando, ut AB ad FI, ita AC ad FL. (g) Per 16. l. 5. (h) Per cor 1. præc.

(Aliter. *Cum sit AB : FI : : CB : LI, (sive permutando,* (i) *AB : CB : : FI; LI;* (k) *erunt CB, LI partes similes totorum AB, FI,* & *proinde si a totis suis auferantur,* (l) *relinquunt partes similes AC, FL.* (m) *Ergo AB : FI : : AC; FL.*) (i) Per 16. l. 5. (k) Per def. 7. l. 5. (l) Per schol. p. 15. l. 5. (m) Per 15. l. 5.

PROPOSITIONES XX. & XXI.

IN nostra methodo sunt superfluæ (Habentur tamen in coroll. prop. 22. & 23. quæ sequuntur .)

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. *SI fuerit A ad B, ut O ad Q; & B ad C, ut Q ad R, & sic deinceps: erit* ex æquo *ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R esse minores quam B, Q: eadem foret
(a) Per hyp. ostensio, si majores ponerentur. Quoniam (*a*) B est ad C, ut
(b) Per def. Q ad R; erunt C R totorum B, Q (*b*) partes similes. Cum
9. l. 5 igitur A & O ad B & Q eamdem habeant rationem; habebunt quoque ad C & R, quæ sunt ipsorum B & Q partes similes, eamdem rationem. Instar enim axiomatis est, si duæ quantitates ad alias duas eamdem inter se habuerint rationem, etiam ad partes earum similes, eamdem inter se habere rationem.

Si plures fuerint utrimque quantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

(c) Per 16. l. 5. (Aliter. *Cum sit A : B : : O : Q; erit* (c) *permutando, A : O : : B : Q. Et cum sit B : C : : Q ; R ; erit permutando, B : Q : . C ; R. Ergo* (d) *A : O : : C : R; & iterum permut. A : C : : O ; R.*
(d) Per 11. l. 5.

Cor. 1. *Hinc prop. 20. a Tacqueto omissa deduci potest. Sint enim tres quantitates A, B, C, tribus O, Q, R proportionales, bina binis; hoc est, sit A : B : : O : Q, & B : C : ; Q : R; Si A fuerit major quam C, erit ex æquo O major quam R; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Nam per hanc prop. erit A : C : : O : R; & permutando, A : O : : C : R. Ergo per 14 hujus libri liquet propositum.*

(e) Per 18. l. 5. Cor. 2. *Cum sit A : B : O : Q; erit* (e) *componendo, A + B : B : O + Q : Q. Est autem B : C : . Q : R. Ergo per hanc prop. erit A + B : C : : O + Q : R. Et pari modo, si*
(f) Per 17. l. 5. (f) *divisionem pro compositione adhibeas, erit A − B : C : : O − Q : R.*]

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit ut A prima ad B secundam, ita O prima ad Q secundam; & ut B secunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R. ad primam O; erit ex æquo (perturbate) *ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q secundam.*

Ut B est ad C, ita (*a*) potest Q esse ad aliquam quampiam S. Jam quia ut B ad C, sic (*b*) R est ad O, & ut B ad C, sic Q est ad S; (*c*) erit R ad O, (*d*) ut Q ad S. Igitur permutando (*e*) R est ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O est ad Q, ut (*f*) A ad B, & Q est ad S, (*g*) ut B ad C: ex æquo erit O ad S, ut (*h*) A est ad C, sed jam ostendi R esse ad Q, ut O est ad S. Ergo etiam (*i*) R est ad Q, ut A ad C. Fig. 14. (a) Per axio. ante 1. 5. (b) per hyp. (c) Per constr. (e) Per 11. 1. 5. (d) Per 16. 1. 5. (f) Per hyp. (g) Per constr. (h) Per præc. (i) Per 11. 1. 5.

Vocatura Geometris hæc ratio *perturbata*.

Coroll. *Sint tres quantitates A, B, C, tribus R, O, Q proportionales, binæ binis, sed perturbate; hoc est, sit A : B :: O : Q; & B : C :: R : O; si A fuerit major quam C, erit ex æquo R major quam Q; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Nam per hanc prop. erit A : C :: R : Q; & permutando, A: R :: C : Q. Ergo per 14 hujus libri liquet propositum. Hæc vero est prop. 21. prius omissa*]

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F; & ut I ad B, ita L ad F. erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. est ad B, ut L ad F: erit quoque (*k*) invertendo B ad I, ut F ad L. cum igitur A sit ad B, (*l*) ut C ad F, & B ad I, ut F ad L; ex æquo erit (*m*) ut A ad I, sic C ad L. Igitur (*n*) componendo, ut A I est ad I, sic CL est ad L. I vero est ad B, (*o*) ut L ad F. Rursum igitur (*p*) ex æquo AI est ad B, ut CL ad F. (k) Per schol. p. 16. l. 5. (l) Per hyp. (m) Per 22. l. 5. (n) Per 18. l. 5. (o) per hyp. (p) Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16. *SI quatuor magnitudines (AB, CF, I, L) fuerint proportionales; maxima (AB) & minima (L) duabus reliquis (CF, I) majores erunt.*

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maxima AB sumatur AQ æqualis I. & ex CF sumatur CR par minimæ L. erit igitur AB tota ad totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo re-
(a) Per liqua QB est ad reliquam (*a*) RF ut tota AB ad totam CF. Sed
19. l. 5. AB major (*b*) est quam CF. Ergo & QB major quam RF.
(b) per hyp. Jam vero quia AQ ipsi I, & CR ipsi L æquales sunt; etiam AQ cum L, ipsi I cum CR æquales erunt: Quare si ad AQ cum L addatur majus QB, & ad I cum CR addatur minus RF erit totum AQB cum L majus toto I cum CRF. Quod erat demonstrandum;

Fig. 6. (Coroll. *Si tres magnitudines, A, B, C, fuerint proportionales, extremarum semisumma media major erit. Cum*
(c) Per *enim* (c) *sit A ad B ut B ad C. Erit (per hanc pr.) summa*
def 8. l. 5. *extremarum A & C major quam B bis sumpta, &* (d) *proin-*
(d) Per axio. 6. l. 1. *de semisumma extremarum major erit quam B semel sumpta.*)

Quæ sequuntur non sunt propositiones Euclidis, sed ex Pappo Alexandrino, aliisque desumptæ, ob frequentem earum usum Euclideis subjungi solent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17. *SI prima (A) ad secundam (B) majorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit* invertendo *(B) secunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam,*

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam
(e) Per C ad F. Igitur A ad (*e*) aliquam BX (quæ (*f*) major erit quam
axio. ante B) eamdem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igi-
1. l. 5. tur erit BX ad A, ut F ad C; *Sed B est ad A in minori* (g) *ra-*
[f] Per 10 l. 5. *tione quam BX ad A:*) ac proinde (*h*) B ad A in minori ratio-
[g] Per ne erit, quam F ad C.
8. l. 5. (Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione*
(h). Per *minori; hoc est, si B ad A minorem habeat rationem quam F*
schol. p. *ad C; habebit invertendo, A ad B majorem rationem quam*
11. l. 5. *C ad F.*)

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

SI *A habet ad B majorem rationem quam C ad F ; etiam* permutando *A ad C majorem rationem habebit , quam B ad F.* Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratione C ad F ; erit (*a*) ratio A ad aliam BX (quæ necessario major est quam (*b*) B) æqualis rationi C ad F. Jam igitur (*c*) permutando A erit ad C, ut BX ad F. Sed BX ad F est in majori ratione (*d*) quam B ad F. Ergo (*e*) etiam A est ad C in majori, quam B ad F.

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

(a) Per axio. ante 1 5.
(b) Per 10. l 5.
(c) Per 16. l 5.
(d) Per 8. l 5.
(e) Per sch. p. 11. l. 5.

PROPOSITIO XXVIII.

SI *AB ad BC majorem rationem habet , quam FI ad IL ; etiam* componendo *AC ad BC majorem rationem habet , quam FL ad IL.* Fig. 18.

Quoniam ponitur AB ad BC esse in majori ratione, quam FI ad IL : Ergo (*f*) alia OB (quæ necessario erit minor (*g*) quam AB) est ad BC, ut FI ad IL. Ergo (*h*) componendo OC est ad BC : ut FL ad IL. Ergo AC est ad BC in (*i*) majori, quam FL ad IL.

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

(f) Per axio. ante 1 l. 5.
[g] Patet ex 10 l 5.
(h) Per. 18. l 5
[i] Per 8. l 5. & sch. 11. l. 5.

PROPOSITIO XXIX.

SI *AC ad BC majorem rationem habet , quam FL ad IL ; etiam* dividendo *AB ad BC majorem habet rationem , quam FI ad IL.* Fig 18.

Quia ponitur AC ad BC majorem habere rationem, quam FL ad IL ; Ergo (k) alia OC (quæ necessario minor erit (*l*) quam AC) erit ad BC, ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo (*m*) OB ad BC, ut FI ad IL. Ergo AB est ad BC in (*n*) majori, quam FI ad IL.

(k) Per axio. ante 1 l 5.
(l) Per 10. l 5.
(m) Per 17 l. 5.
(n) Per 8. l. 5 & sch. p. 11. l. 5.

Scholium. Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18. S*I AC ad BC majorem rationem habet, quam FL; ad IL;* convertendo *habebit AC ad AB minorem, quam FL ad FI.*

(a) Per 29. l. 5. (b) Per 26. l. 5. (c) Patet ex 28. l. 5.

Quoniam AC est ad BC in majori, quam FL ad IL; erit dividendo (*a*) AB ad BC in majori, quam FI ad IL. Ergo invertendo (*b*) CB ad BA, est in minori, quam LI ad IF. Ergo componendo (*c*) CA est ad BA in minori, quam LF ad IF.

(Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione minori: hoc est, si AC ad AB minorem rationem habeat quam FL ad FI; habebit convertendo, AC ad BC majorem rationem quam FL ad IL.*)

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19. S*I AB ad C majorem rationem habet, quam F ad I; & C ad LQ majorem rationem habeat, quam I ad S, & sic deinceps; etiam* (ex æquo) *prima AB ad ultimam LQ majorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.*

(d) Per axio. ante 1. l. 5. (e) Per 10. l. 5. (f) Per 22. l. 5. (g) Per 8. l. 5. (h) Per eamd.

Quoniam AB est ad C in majori, quam F ad I; Ergo alia (*d*) quæpiam OB (quæ necessario minor (*e*) erit quam AB) est ad C, ut F ad I. Et quia C est ad LQ in majori quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit necessario major quam LQ) est ut I ad S. Igitur ex æquo (*f*) OB est ad LR ut F ad S. Ergo OB est ad LQ in majori quam (*g*) F ad S. Ergo AB est ad LQ (*h*) in multo majori, quam F ad S.

(Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de proportione minori.*

Coroll. *Ex hujus prop. demonstratione liquet, quod si AB ad C majorem rationem habeat quam F ad I; & C ad LR eamdem habeat rationem quam I ad S; etiam prima AB ad ultimam LR majorem rationem habebit quam prima F ad ultimam S. Idemque similiter verum est de proportione minori.*)

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

SI AB ad C majorem rationem habet, quam I ad S; & C ad LQ majorem quam F ad I; etiam ex æquo (perturbate) *habebit majorem rationem AB ad LQ, quam F ad S.* Fig. 19.

Demonstratio eadem quæ præcedentis, sed pro 22. citetur 23.

(Scholium. *Idem similiter demonstrabitur de portione minori. Et ab hac propositione, corollario illi quod a prop. præcedente deducitur, simile corollarium deducetur.*)

PROPOSITIO XXXIII.

SI tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quam ablata (CB) ad ablatam (LI,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (AC) ad reliquam (FL.) Fig. 12.

Quia AB est ad FI in majori, quam CB ad LI; erit (*a*) permutando etiam AB ad CB in majori, quam FI ad LI. Ergo convertendo (*b*) AB est ad AC in minori: quam FI ad FL. Ergo etiam permutando (*c*) AB est ad FI, in minori, quam AC ad FL.

(a) Per 27. l. 5. (b) Per 30. l. 5. (c) Patet ex 27. l. 5

(Scholium. *Eodem modo, si tota ad totam minorem rationem habuerit quam ablata ad ablatam; tota ad totam majorem rationem habebit quam reliqua ad reliquam.*)

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) sunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ aut triplicatæ & sic deinceps; æquales sunt etiam ipsæ, Fig. 20

Quia ratio A ad C duplicata est rationis A ad B; erit (*d*) ut A ad B, sic B ad C. Ob eamdem causam erit ut E ad F, sic F ad O. Cum ergo sit ut A ad B, sic per hyp. E ad F; & ut B ad C, sic F ad O, (nam ut B ad C, sic A ad B, hoc est E ad F, hoc est F ad O,) igitur (*e*) ex æquo erit, ut A ad C, sic E ad O.

(d) Per def. 10. l. 1. (e) Per 22. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 20. *Rationes æquales A ad C & E ad O, sint duplicatæ; aut triplicatæ, & sic deinceps, rationum A ad B, & E ad F: etiam hæ æquales erunt.*

Si negas, sit ut A ad B, sic E ad aliam Z inæqualem ipsi F, & fiat ut E ad Z, sic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ (*a*) sunt rationes A ad C, & E ad X; etiam ratio E ad X æqualis erit (*b*) rationi A ad C, hoc est per hyp: rationi E ad O. Ergo (*c*) æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales esse. Ergo A est ad B, ut E ad F seu Z. Quod erat demonstrandum.

(a) Per def. 10. l. 5. (b) Per præc. (c) Per 9. l. 5.

Ex contradictorio assertionis, directe illata est assertio.

PARS SECUNDA:

Euclidea per multiplices definitio æqualium rationum demonstratur: exhibeturque ac demonstratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis, methodo (nisi fallor) commodiori explicatis, reliquum est, ut quod secundo loco supra promiseram, præstare aggrediar: Hoc igitur loco (quod a nullo hactenus factum est) demonstrabimus, nihil assumendo, nisi quod per se lumine naturali sit manifestum, duas rationes inter se æquales esse, quando antecedentium quælibet æque multiplices, consequentium æque multiplicibus, semper sunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cum satis ardua, atque prolixa sit demonstratio, ut jam reipsa cognoscemus, facile apparebit præpostere egisse Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium sumi voluit ex hoc multiplicium indemonstrata hactenus proprietate, cujus tam remota & obscura sit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma

Lemma 1.

SIT A ad B, ut C ad F; & sint antecedentium A, C, quælibet æque multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & sic deinceps. Sint item consequentium B, F quælibet æque multiplices L, R. Fig. 21.

Erit quoque ut I ad L, sic Q ad R. (*Est prop. 4. hujus libri, quæ in parte prima omittitur:*

Quoniam enim A est ad B, ut C ad F; etiam I dupla ipsius A erit ad B, ut Q dupla ipsius C est ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F, & sic in infinitum. Quod quidem æque est per se clarum ad quodlibet axioma. Quoniam igitur I est ad B, ut Q ad F; erit quoque I ad L duplam ipsius B, ut Q ad R duplam ipsius F; & ut I ad L triplam ipsius B. ita Q ad R triplam F: Et sic in infinitum, quod rursus tam clarum est, quam axioma quodcumque. Liquet ergo propositum.

(Aliter, *ex prop. 16. 15. & 11. l. 5.*

Cum sit A: B :: C; F; permutando erit A: C :: B: F. Sed per 15. est A: C :: I: Q; & B: F :: L: R. Ergo per 11. est I: Q :: L: R; & permutando, I: L :: Q: R.)

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem mensuram C; erit A toties sumpta, quoties est C in B, æqualis quantitati B toties sumptæ, quoties C est in A. Fig. 22.

Ponatur C contineri in B quater, & in A sexies, ac proinde B esse 4. C, & A esse 6. C. Igitur 6. C. (hoc est A) ducta in 4, (hoc est, toties sumpta quoties C est in B.) efficiunt 24, C. Similiter 4, C (hoc est B) ducta in 6, (hoc est, toties sumpta quoties C est in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties sumpta quoties C in B æquatur B toties sumptæ quoties C in A.

Theorema 1.

S*I ratio AB ad FI major sit ratione L ad R; tales sumi possunt antecedentium (AB & L) æque multiplices, tales item æque multiplices consequentium (FI & R,) ut multipla antecedentis (AB) rationis majoris, excedente* Fig. 23.

multiplam

multiplam consequentis (FI ;) multiplex antecedentis (L) rationis minoris, non excedat multiplicem sui consequentis (R.)

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & sint AB & L, majores rationum termini. Quoniam igitur AB ad FI majorem habet rationem quam L ad R, alia quædam quantitas Z (a) habebit ad FI eamdem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad FI æqualis est rationi L ad R, poniturque ratio AB ad FI major ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad FI major ratione Z ad FI, ac proinde AB major est quam Z: quæ omnia per se sunt manifesta. Igitur ex AB sumi poterit AC per Z; eritque etiam AC ad FI, ut L ad R. Auferatur residuum BC ex AC quoties potest, puta ter; tum seca AC in tot æquales partes, exempl. gr. in 6. donec earum una possit auferri sæpius ex FI, quam BC ex AC, puta quater, & residuum esto OI, quod erit minus una particula. Hoc quoque fieri posse per se est manifestum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ a proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas esto Q.

(a) Per axio. ante 1. l. 5.

Quoniam igitur Q est mensura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties sumpta, quoties Q est in FO, nempe quater, æquatur FO toties sumptæ, quoties Q est in AC, nempe sexies. Deinde quia residuum OI est minus una particula, hoc est quam Q, erit OI toties accepta, quoties Q est in AC, nempe sexies, adhuc minor quam AC. Ulterius, quia BC minus sæpe auferri potest ex AC, quam Q ex FI, (positum quippe fuit BC ex AC auferri tantum posse ter, Q vero quater ex FI;) manifestum est BC toties sumptum, quoties Q in FI, nempe quater, majus fore quam AC, ac proinde multo majus esse quam OI sumptum sexies, quod ostendi supra esse minus quam AC. Atqui ostensum est AC sumptum quater, & FO sumptum sexies esse æqualia. Quare si AC sumpto quater addatur BC quater, & ad FO sexies sumptum addatur OI sexies, erunt 4. AC & 4. BC, hoc est 4. AB majora, quam 6. FO & 6. OI, hoc est quam 6. FI. Quia vero 4. AC æqualia erant 6. FO, erunt 4. AC minora quam 6. FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur supra L esse ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora sunt quam 6. R. Acceptæ sunt igitur antecedentium AB & L æque multiplices, nempe quadruplæ, item æque multiplices consequentium FI & R, nempe sextuplæ, & tamen ostensum est multiplam antecedentis AB (nempe 4. AB,) superare multiplicem con-

sequentis

ſequentis FI (nempe 6. FI:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L,) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

SI antecedentium (A,C) qualibet æque multiplices, quibuslibet conſequentium (B, F) æque multiplicibus, ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit. Fig. 21.

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æque multiplices, item tales conſequentium B, F æque multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F; quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus eæ ſolum propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æque ſunt manifeſtæ, atque ipſa axiomata.

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O,R) tales æque multiplices, itemque tales æque multiplices conſequentium (Q, S,) ut multipla antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S,) erit ratio (O ad Q,) cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione altera (R ad S.) Fig 24.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales; quæcumque antecedentium æque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuſcumque æque multiplicibus conſequentium, vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, vel ſimul æquales; quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim.

Quod

Quod autem ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis, multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theor. 1. tales accipi poſſunt antecedentium R & O æque multiplices, taleſque item æque multiplices conſequentium S ad Q, ut multipla antecedentis R rationis majoris excedente multiplam conſequentis S, multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facile ex 1. lem. oſtenditur,) ut multipla O excedente multiplam Q, multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum evertat hypoteſim.

Theorema 4.

Fig. 25. *CUM proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumptæ, ac proinde eamdem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales; ſimultaneo exceſſui & defectui æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infallibile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediate, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, prius rite intellecta.

Verum quia indicium per multiplices, quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hic aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema 5.

SI consequentes (CF, NQ,) & consequentium qualibet aliquotæ similes, (puta & decimæ, & centesimæ, & millesimæ, & ita deinceps sine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali semper numero contineantur, rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) æquales erunt. Fig. 26.

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cum, si auferantur quoties possunt, æqualis est utrimque numerus ablatarum.

Demonst. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF, major ratione GM ad NQ. Quoniam igitur AB ponitur ad CF majorem habere rationem quam GM ad NQ, manifestum est aliquam (puta AD) minorem quam AB, æqualem habere rationem ad CF, quam GM ad NQ. Manifestum similiter est, aliquam ipsius CF aliquotam (ex. gr. unam trigesimam) esse minorem differentia DB. Sit CE una trigesima ipsius CF, & auferatur ex AB quoties potest exemp. gr. millies, totumque ablatum sit AO. Quoniam igitur AO est 1000 CE, & CF est 30. CE, erit AO ad CF ut 1000. ad 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP, similis alteri CE, nempe etiam una trigesima. Quia ex hyp. CE, NP æquali numero in AB, GM continentur, & CE ablata ex AB quoties potuit, ablata fuit millies, etiam NP ex GM auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum GK est 1000. NP, & NQ est 30. NP, erit GK ad NQ ut 1000. ad 30. hoc est, ut AO ad CF. Quia vero CE ablata ex AB quoties potuit, reliquit OB, erit OB minus quam CE. Sed CE, nempe una trigesima CF, est minor posita quam DB. Ergo OB est multo minor quam DB. Ergo AO est major quam AD. Ergo AO ad CF, majorem rationem habet quam AD ad CF. Sed ponebatur esse AD ad CF, ut GM ad NQ. Ergo AO ad CF majorem rationem habet, quam GM ad NQ: hoc est, multo majorem quam GK ad NQ. Quod est absurdum, quia ostendi supra AO esse ad CF ut GK ad NQ. Non possunt igitur rationes datæ AB ad CF & GM ad NQ esse inæquales. Æquales igitur sunt. Quod erat demonstrandum.

Theore-

Theorema 6.

Fig. 26. *SI aut consequentes (CF, NQ,) aut consequentium aliquæ similes aliquotæ (ex. gr. decimæ,) inæquali numero in antecedentibus (AB, GM) contineantur; rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) inæquales erunt, & erit illa major, cujus consequentis aliquota sæpius continetur.*

Contineatur CE decima una ipsius CF, in AB millies, & sit AO, 1000. CE; tum vero residuum OB erit minus quam una CE. Deinde NP una decima NQ, contineatur in GM, tantum nongenties nonagies septies, & sit GK 997 NP; patet residuum KM fore minus una NP, ac proinde 1000. NP fore majores quam GM. Sit ergo GR, 1000. NP. Quoniam igitur AO est 1000. CE, & GR, 1000. NP; CF vero, 10. CE, & NQ, 10, NP, erit AO ad CF, ut GR ad NQ. Ergo AB est ad CF in majori ratione, quam GR ad NQ: ac proinde in multo majori, quam GM ad NQ. Quod erat demonstrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales inæqualesque certo liceat discernere. Et possemus ex illo, omnes, quæ quidem axiomata non sint, l.5. propositiones, quas per multiplices Euclides demonstrat, multo expeditius demonstrare, nisi magis ex usu discentium putaremus, illas ea methodo, qua in prima parte usi jam sumus, proponere.

TER-

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compositione.

I.

Proportionis divisio.

PRima divisio est in rationalem & irrationalem, ut dictum def. 4. Rationalis dividitur in rationem æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus consequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus consequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque species, quæ sunt; multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens.

Ratio multiplex est, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio superparticularis est, quando major minorem continet simul, & unam ejus partem aliquotam; ut ratio 3. ad 2. vel 6. ad 4. quæ dicitur sesquialtera, quia major minorem continet semel & ejus dimidium: ratio 4. ad 3. sive 16. ad 12. quæ dicitur sesquitertia, quia major minorem continet semel, & tertiam ejus partem, & sic deinceps.

Ratio superpartiens est, cum major minorem continet semel & plures ejus aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis est ratio 8. ad 5. vel 14 ad 10. quia 8. continet 5. semel, & insuper 3. hoc est tres quintas ejusdem numeri 5. quæ tamen simul sumptæ non conficiunt unam aliquotam ipsius 5. Similiter 14. continet 10. semel, & bis 2. hoc est, duas quintas numeri 10. quæ tamen simul sumptæ (nempe 4.) non conficiunt unam aliquotam ipsius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, quia alias esset ratio superparticularis.

Ratio multiplex superparticularis est, cum major minorem aliquoties continet, & insuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5. ad 2. 10. ad 4. &c.

Ratio multiplex superpartiens est, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8. ad 3. 16. ad 6. &c.

I I.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis est, qui distincte & clare exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; sive qui ita se habet ad unitatem, ut major ad minorem; ac proinde ostendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27. ad 9. denominator est 3. quia 3. ita est ad unitatem, ut 27. ad 9. ac proinde ostendit quoties consequens in antecedente contineatur, nempe ter.

Cujuscumque rationis denominator invenitur, si major terminus dividatur per minorem, nam quotiens divisionis erit denominator. Ratio est, quia quotiens ita est ad unitatem, ut dividendus ad divisorem, hoc est ut major ad minorem.

Exempl. Detur ratio 60. ad 6. Divide 60 per 6: quotiens 10. est denominator. Detur rursum ratio 60. ad 16. divisio 60. per 16. fit quotiens $3\frac{3}{4}$ hic est denominator.

I I I.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CUM rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune consequens habentes; communis consequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune consequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, si sola sit, exhiberi potest denominator. At si duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam sensu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum ostendant, quomodo una ratio ad alteram se habeat. Id quoque egregie observavit P. Gregorius a S. Vincentio, operis sui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclarissimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit; tum inprimis libro 8. ejusdem operis

Fig. 27 de proportionalitatibus ita scripsit, ut novam de proportionalitatibus scientiam condidisse censeri merito debeat. Datæ sint

sint rationes irrationales A ad B, & C ad D, quæ revocentur ad rationes FH, GH, habentes commune consequens H, sic ut ratio F ad H sit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune consequens H munus explebit unitatis & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H & G ad H (hoc est rationum A ad B, & C ad D,) quia ostendunt quomodo una ratio sese habeat ad alteram. Sicut enim F est ad G, ita ratio FH est ad rationem GH, hoc est ratio AB ad rationem CD.

IV.

Axiomata.

AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes consequens (H,) eam inter se proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) Est prop. 2. P. Gregorii a S. Vinc. l. 8. quadr. Fig. 28.

Hoc est ratio G ad H, tanto major est ratione F ad H, quanto G major est quam F.

Ax. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens, reciprocam inter se habent consequentium proportionem. Est propos. 7. P. Gregorii a S. Vincentio lib. 8. quadr. Fig. 29.

Hoc est ratio I ad L est ad rationem I ad M, ut reciproce est M consequens, ad consequens L: sive ratio I ad L tanto major est ratione ejusdem I ad M, quanto L fuerit minor, quam M, ac proinde quanto M fuerit major quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter se rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12 ad 3. & ratio 15. ad 6. quarum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$ Ex defin. (a) denom. ratio 12. ad 3. est eadem cum ratione 4. ad 1. & ratio 15. ad 6. est eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1. Sed ratio 4 ad 1. est ad rationem $2\frac{1}{2}$ ad 1. ut (b) 4. est ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12. ad 3. est ad rationem 15. ad 6. ut denominator 4. est ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

[a] Num. 2

(b) Per axio. 1. hic

V.

Rationum rationalium Additio, & Subtractio.

ADditio perficitur, si rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum summa ad unitatem, est rationum datarum summa quæsita.

Dentur ratio 12. ad 3. & 15. ad 6. earum denominatores 4. & $2\frac{1}{2}$ additi sibi mutuo faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$ ad 1. est par rationi 12. ad 3. & rationi 15. ad 6. Patet ex Axiom. 1. & 3.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a majore; nam ratio residui ad unitatem est ratio quæ remanet post minorem rationem a majori detractam. Patet ex axiom 1. & 3.

Dentur rationes 12. ad 3. & 15. ad 6. Harum denominatores sunt 4. & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorem $2\frac{1}{2}$ a majori 4. remanet $\frac{3}{2}$. Ratio $\frac{3}{2}$ ad 1. est ea quæ remanet, ubi rationem 15. ad 6. seu $2\frac{1}{2}$ ad 1. detraxeris ex ratione 12. ad 3. seu 4. ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio, & subtractio.

Fig. 30. RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H (habentes commune consequens (H) Antecedentia F & G sibi addita sunt FG. Ratio FG ad H est summa rationum F ad H, & G ad H, hoc est rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, si rationes datæ ad commune consequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a majori F: ratio enim residui ad H est ea quæ remanet postquam rationem G ad H, seu C ad D subtraxeris a ratione F ad H, seu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium Multiplicatio, & Divisio.

DEnominatores rationum per invicem multiplicati, dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.

Hoc

Hoc est, ratio quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, est ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex Ax. 1, & 3.. Nam multiplicatio rationum est unius ad alteram additio sæpius repetita. Hanc autem perfici repetita sæpius antecedentium additione, (hoc est multiplicatione,) patet ex jam citatis axio. 1. & 3.

Sint datæ rationes 9. ad 3. & 20. ad 4. denominatores 3. & 5. multiplicati faciunt 15. Ratio 15. ad 1. est ea, quæ ex multiplicatione rationum 9. ad 3. (seu 3. ad 1.) & 20. ad 4. (seu 5. ad 1.) producitur.

Divisio rationum perficitur, si denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, est ea quæ habetur ex divisione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. & 3 axiomate; cum rationis per rationem divisio, sit subtractio unius ab altera sæpius repetita.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ sint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat, ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 3. 1

Hæc operatio est Gregorii a S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipse, nec alius quisquam demonstrat.

Hunc igitur in modum demonstrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonstratione numeri 12. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per const. sunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E est ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonstrandum.

IX.

Divisio rationum irrationalium.

Data sit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, sic C ad D. Ratio D ad E est quotiens. Fig. 31.

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12. ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De compoſitione rationum: ejus Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcumque quarum denominatores ſint 2. 3. $1\frac{1}{4}$ Multiplica denominatorem 2. per 3 denom. fit 6. denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6. ad 1. eſt compoſita ex rationibus 6. ad 3. & 12. ad 4. Quod ſi denominatorem 6. multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$ fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2. 3. $1\frac{1}{4}$.

X I.

Compoſitio rationum non aliud eſt quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur ex quarum multiplicatione producitur.

Nam ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſequens commune. Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clarius percipiatur, obſervandum eſt, multiplicari ac dividi magnitudines per nvicem, cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus fit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per magnitudinem dicitur multiplicari, cum ut quæpiam recta pro unitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus ad alterum, ita unitas fit ad alium, qui quotiens nominatur: ita quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi; quando aſſumpta quantitate aliqua pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam, quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcumque & quotcumque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt a Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius a S Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, qua inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

DAtæ ſint magnitudines quæcumque & quotcumque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig.32.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X: & conſequens commune B (*a*) munus explet unitatis, quæ eſt commune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

(a) Per n. 3

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per invicem multiplicare, oportebit (*b*) facere ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A, plane ac ſi cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S. ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.

[b] Per Schol. præc.

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio (*c*) hujus producti Z ad B unitatem, ſeu commune conſequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7. oſtendimus evenire, in qua ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt quæ fit ex rationum multiplicatione.

(c) Per def. n. 10.

Atqui per conſt. ratio X ad B eſt ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Quia vero per conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut X ad B, hoc, eſt per conſt. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed jam oſtenſum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demon-

Demonstratur in numeris.

8	2	$\frac{8}{3}$
4	1	$\frac{4}{3}$
3	$\frac{3}{4}$	1

EAmdem prorsus demonstrationem valere in numeris jam ostendam, unde etiam veritas illius, ac soliditas magis stabilietur. Dati sunt tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4. ad 8. ita 1. ad 2. (a) Per 22.l.5. & ut 4. ad 3. sic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter se æquales; eritque ex æquo (*a*) etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$.

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$ eruntque rationes 2 ad 1. & 1 ad $\frac{3}{4}$ (hoc est, rationes 8 ad 4 & 4 ad 3,) reductæ ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune consequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt (*b*) rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. denominatores. Multiplicentur (b) Patet ex num 2 jam per invicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$ hoc est, fiat, ut 1 ad $\frac{4}{3}$ ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt 1 $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter se multiplicatis. Ergo ratio hujus producti $\frac{8}{3}$. ad 1. est ea, (*c*) quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Jam (c) Patet ex num 7. vero quia per const. ut 1. est ad $\frac{4}{3}$ ita 2. est ad $\frac{8}{3}$. erit etiam inversim $\frac{8}{3}$ ad 2. ut $\frac{4}{3}$ ad 1. Sed rursum per const. $\frac{4}{3}$. sunt ad 1. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo $\frac{8}{3}$. sunt ad 2. ut 1. ad $\frac{3}{4}$. Ergo permutando $\frac{8}{3}$ sunt ad 1. ut 2 ad $\frac{3}{4}$. Sed jam ostendi rationem $\frac{8}{3}$. ad 1. esse eamquæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Ergo etiam ratio 2. ad $\frac{3}{4}$. est ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Sed ostensum est supra rationem 2. ad $\frac{3}{4}$. parem esse rationi 8. ad 3. Ergo etiam ratio 8. ad 3. producitur ex multiplicatione rationum 8. ad 4. & 4. ad 3. Igitur per num. XI. ratio 8 ad 3. ex rationibus 8. ad 4. & 4. ad 3. composita est. Quod erat demonstrandum.

8
4
3
25
73

Eodem modo demonstrabitur si plures dentur numeri quam tres, rationem 8 ad 25 componi ex rationibus 8 ad tria, (hoc jam est, ex rationibus 8. ad 4, & 4. ad 3) & ex ratione 3 ad 25: & rationem 8 ad 73 componi ex rationibus 8 ad 25 (hoc jam est ex rationibus 8 ad 4; 4 ad 3; 3 ad 25) & ratione 25 ad 73, & sic in infinitum.

XIII.

XIII.

Si dentur quotcumque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus composita.

Fig. 33. SI fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H; & ut C ad D, ita H ad I; & ut E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit composita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut num. præced. demonstravimus, hoc est per constr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non est æqualis rationibus ex quibus componitur.

Fig. 33. INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, sive illæ sint continue proportionales sive non; ratio primæ G ad ultimam K non est æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis sit composita. Nam ex iis componi idem est, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut ostensum est num. XI. Cum igitur ratio G ad K sit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter se multiplicatis, ut ex demonstratione num. 12 patet, non possunt rationes G ad H, H ad I, I ad K simul sumptæ æquales esse rationi G ad K, nisi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eamdem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ sibi mutuo addendæ, ut traditur num. 5. & 6. ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis; quæ fere semper, ut dixi, erit diversa ab illa, quæ ex earumdem rationum compositione, hoc est, multiplicatione exsurget.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER SEXTUS

PRoportionum doctrina libro quinto universim exposita, in sexto figuris planis applicatur. Et sunt quæ hoc libro traduntur adeo scitu necessaria, ut sine illis arcana Geometriæ penetrare, fructusque suaves Matheseos percipere nemo possit. Ad propositiones prope singulas oporteret encomium texere: tanta omnium utilitas est.

INcipit autem Liber hic Sextus *egregiam illam de proportione Geometrica doctrinam nuperrime expositam, usibus variis planeque præstantissimis applicare: & a triangulis, figurarum simplicissimis exorsus, eorum latera & areas, prout ad se invicem proportione quadam respondent, investigat. Deinde lineas proportionales & figurarum augmenta aut decrementa proportionalia definit; & quo easdem modo in ratione data augeamus aut minuamus, ostendit. Regulam etiam Auream sive proportionalem, totius arithmeticæ palmariam aperit, & in rectangulo triangulo non tantum quadratum sed pentagonum, hexagonum. & universim polygonum quodcumque ab hypotenusa descriptum, æquari quadratis, pentagonis, hexagonis vel quibuscumque polygonis similibus a duobus lateribus descriptis, demonstrat. Postremo facillima certissimaque tum lineas tum superficies tum corpora mensurandi principia, in omnibus Mathematicarum scientiarum partibus utilissima proponit.*

DEFINITIONES

1. SImiles figuræ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos existunt, vel quæ sunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Fig. 8. l. 6. Ut triangula X, Z dicentur similia, si angulus A sit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L, atque insuper si AB sit ad FI, ut BC ad LI; & BC ad LI, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI; (*vel si, (a) permutando, AB sit ad BC, ut FI ad IL; & BC ad CA, ut IL ad LF; & CA ad AB, ut LF ad FI;*) Comparando semper latera æqualibus angulis opposita (*vel quæ inter æquales angulos, vel quæ circa æquales angulos existunt.*) Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium similitudo explicabitur.

(a) Per 16. l 5.

Fig. 39. 2. Reciprocæ figuræ sunt, cum in utraque antecedentes & consequentes rationum termini (*reciproce*) fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
si AC sit ad CB,
ut FC ad CL.

Antecedentia sunt AC & FC, quorum in utraque figura unum est; (*hoc est, AC in X, FC in Z:*) & consequentia sunt CB & CL, quorum similiter in quaque figura unum est, (*sed inverso ordine; nempe CB in Z, CL in X:*) parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

(*Porro, quatuor quantitates, A, B; C, B, sunt reciproce proportionales, si fuerit prima ad tertiam ut quarta est ad secundam; vel si prima fuerit ad quartam ut tertia est ad secundam; nempe, si A:C::D:B, vel si A: D: C: B, erunt A, B, C, D. reciproce proportionales.*)

Fig. 1. 3. Altitudo figuræ est perpendicularis AQ, a vertice ad basim deducta. Est Euclidi 4.

Ut trianguli ABC altitudo est perpendicularis AQ, a vertice cadens in basim BC, vel intra triangulum, vel extra in basim protractam, Basis autem & vertex assumuntur ad libitum.

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eamdem habent ad totas suas circumferentias rationem.

Ut si ambo sint suæ circumferentiæ pars tertia vel quarta, &c.

(*Et segmenta circulorum similia sunt, quæ arcus similes habent. Idem intellige de sectoribus similibus.*

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum harum exponentes in se invicem multiplicati, illius exponentem producunt. (Rationis autem exponens invenitur dividendo antecedentem per consequentem.)

Sic

Sic ex rationibus A ad B, & R ad C componitur ratio $A \times R$ *ad* $B \times S$. *Nam* $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} = \frac{A \times R}{B \times S}$ *Vel si fiat, ut R ad S ita B ad C; ex rationibus A ad B, R ad S componitur ratio A ad C. Tunc enim* $\frac{A}{B} \times \frac{R}{S} =$ (a) $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{B \times C}$ (a) Per 36.l.1.

$=$ (b) $\frac{A}{C}$ (b) Per 15.l.5.

Sic duplum tripli est sextuplum: sic etiam ratio 4. ad 3. componitur ex rationibus 4, ad numerum quemvis, (v. gr. 7.) & istius numeri (7) ad 3. Nam $\frac{4}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{4}{3}$.

Eodem modo liquet, rationem quamvis ex pluribus rationibus componi posse. Sic ratio A ad E componi potest ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D, & D ad E,)

PROPOSITIO PRIMA.

Triangula *(ABC, DEF) & parallelogramma) AOPC, DQRF) quæ eamdem habent altitudinem, sive inter easdem existunt parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases (AC, DF.)* Fig. 2.

Ab hoc theoremate dependet totus sextus liber, imo quidquid uspiam de figuris sive planis, sive solidis per proportionem demonstratum est. Demonstrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo statim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonstrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis secundæ lib. 5. (*vel ex altero illo proportionum æqualium indicio primo & infallibili, quod definitionibus lib. 5. interposuit Tacquetus, ante def. 7.*) hunc in modum.

Sumatur baseos DF quævis pars aliquota, ex gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. lib. 1. Quare recta DG & triangulum DGE sunt consequentium (c) similes aliquotæ. Auferatur deinde DG ex basi AC quoties potest, puta sexies (*& relinquetur AN ipsa DG minor,*) ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI, &c. æquales sunt singulæ ipsi DG, etiam sex triangula CBH, HBI, &c. triangulo DEG æqualia (*d*) erunt singula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties triangu-

(c) Per def. 7.l.5.

(d) Per 38.l.1.

angulum DEG continentur in antecedente ABC. Eodem discursu ostendam quascumque consequentium (Baseos DF & trianguli DEF (similes aliquotas in antecedentibus, (basi AC & triangulo ABC,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis secundæ lib 5. (*hoc est, per alterum illud proportionum æqualium indicium*) ut basis AC ad basim DF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 14. l. 1. Quoniam vero parallelogramma AP, DR sunt dupla (*a*) triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter se ut bases.

Corollaria.

Fig. 3. 1. TRiangula (ABC, FIL) & parallelogramma æquales bases (AC, FL) vel eamdem habentia, eam inter se rationem habent quam altitudines BO, IQ.)

Fiat enim QS, OR æquales æqualibus basibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter se æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR, QIS accipiantur BO, IQ tamquam bases, erunt OR, QS eorum altitudines, quæ cum sint æquales, erunt OBR, QIS inter se, ut (*b*) bases BO, IQ. Sed Quia ex constr. OR par est AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur (*c*) triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABC, FIL sunt inter se ut BO ad QI.

[b] Per 1. l. 6.
(c) Per 38. l. 1.

Fig. 2. *(2. Triangula (ABC, DEF,) & parallelogramma (AP, DR,) quæ sunt ut bases (AC, DF,) eamdem habebunt altitudinem, sive inter easdem parallelas statui possunt. Est conversa propositionis primæ.*

Si enim inter easdem parallelas non constituentur triangula ABC, DEF; BE non erit ipsi AF parallela. Per punctum igitur E ducatur SE ipsi AF parallela, quæ secet CB in S, & jungatur AS. Triangula itaque ASC, DEF, quæ sunt inter easdem parallelas, inter se (d)*erunt ut bases, AC, DF. Sed per hypoth triangula ABC, DEF sunt etiam ut AC, DF. Ergo* (e) *triangulum ASC æquatur triangulo ABC, pars toti; quod est absurdum. Non igitur per punctum E, ad rectam AF parallela, a recta BF diversa duci potest, ac proinde triangula ABC, DEF, quæ sunt ut bases, inter easdem parallelas constituentur.*

(d) Per hanc prop.
(e) Per 11. & 9. l. 5

Et cum parallelogramma AP, DR, quæ triangulum ABC, DEF (f)*dupla sunt supra easdem cum triangulis bases, & inter easdem parallelas constituantur; liquet parallelogramma quæ* (g) *sunt ut bases, inter easdem parallelas existere.*

(f) Per 41. l. 1
(g) Per 15. l. 5.

3. *Trian-*

3. *Triangula (ABC, FIL,) & parallelogramma, quæ inter se sunt ut altitudines (BO, IQ,) bases (AC, FL) ha-* Fig.3.
bent æquales. Est convers. coroll. 1.

Constructis enim triangulis OBR, QIS, ut in corollario primo, demonstrabitur ut supra, tri. ABC = tri. OBR, & tri. FIL = tri. QIS. Sed per hypoth est ABC : FIL : : BO : IQ; ergo OBR : QIS : : BO : IQ. Si itaque accipiantur BO, IQ pro triangulorum OBR, QIS basibus, erunt OR, QS eorum altitudines; & cum ista sint ut bases, altitudines
OR, QS (a) *erunt æquales. Sed per constr. OR = AC, &* (a) Per cor. 2. hujus.
QS = FL. Ergo AC, FL erunt æquales.)

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus (BC) ducta fuerit (FL) paral- Fig.4.
lela, hæc secabit proportionaliter latera, (hoc est, AF erit ad FB, ut AL ad CL.)

Et si recta (FL) secuerit latera (BA, CA) proportionaliter, erit ad reliquum latus (BC) parallela.

Pars 1. ducatur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF, eamdem basim FL ha-
bentia inter (*b*) se æqualia. Ergo triangulum X, ad utrumque (b) Per 37. l. 1.
eamdem (*c*) habet rationem, hoc est, triangulum X est ad tri- (c) Per 7. l. 5.
angulum FBL, ut triang. idem X est ad triang. LCF. Sed
triang. X est ad triang. FBL; ut (*d*) AF ad FB: & triang. X est (d) Per præc.
ad triang. LCF, ut (*e*) AL ad LC. Ergo (*f*) etiam AF est (e) Per eamd.
ad FB ut AL ad LC. Quod erat demonstrandum.

Pars 2. Ut AF est ad FB, ita triangulum X (*g*) est ad tri- (f) Per 11. l. 5.
angulum FBL; & ut AL est ad LC, ita triang. X est ad tri-
ang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL est ad LC. Er- (g) Per præc.
go triang. X est (*h*) ad triang. FBL ut idem X ad LCF. Ergo (h) Per 11. l. 5.
(*i*) triangula FBL; LCF, eamdem habentia basim, æquan-
tur. Ergo FL, BC (*k*) sunt parallelæ. Quod erat demon- (i) Per 9. l. 5.
strandum. [k] Per 39. l. 1.

Corollaria.

1. SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures pa- Fig. 5.
rallelæ (IO, FL,) erunt omnia laterum segmenta, proportionalia.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur (*l*) (l) Per 34. l. 1.
IO, OC. Sed BI est ad IF, ut (*m*) QS ad SF, Ergo etiam (m) Per 2. l. 6.
BI est ad IF, ut CO ad OL.

(Cor. 2.

Fig 6. (Cor. 2. *Si duo circuli se intus tangant, & a tactus puncto ducatur AB majoris circuli diameter secans circulum minorem in C, & AD quævis alia recta, secans minorem in E;* (a) Per cor. post 12 l. 3. (a) *erit AC diameter minoris: Et erunt diametri subtensis proportionales, & sic erit etiam differentia diametrorum ad differentiam subtensarum; hoc est AB : AD :: AC : AE :: B* (b) Per 31 l. 3. *C : DE; vel permutando, AC : CB :: AE : ED, & AB :* (c) Per 29. l. 1. *BC : BC :: AD : DE; & BA : AC :: DA : AE; Ductis enim* [d] Per 18. l. 5. *rectis BD, CE propter angulos ADB, AEC* (b) *rectos, & proinde æquales BD, CE parallelæ* (c) *erunt. Ergo per hanc* (e) Per cor. 1. p. 18. l. 5. *prop. AC : CB :: AE : ED, quod erat unum; & componendo* (d) *AB : BC :: AD : DE, quod erat alterum; & convertendo,* (e) *BA : AC :: DA : AE, quod erat tertium:*]

PROPOSITIO III.

Fig.. SI *recta (BF) angulum trianguli bifariam secans, etiam secet basim (AC,) habebunt basis segmenta (AF, FC) eamdem proportionem quam reliqua latera (AB, CB.)*

Et si baseos partes (AF, FC eamdem rationem habuerint quam reliqua latera (AB, CB;) recta BF) basim secans, angulum oppositum (ABC) bisecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL sit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z, latera LB, AB æquantur; anguli (f) Per 5. l. 1. (*f*) quoque L & O æquales erunt. Quia igitur externus A BC duobus (*g*) internis L, O æqualis est; angulus I, qui per (g) Per 32. l. 1 hyp. ipsius ABC dimidius est, æquabitur angulo L. Ergo AL FB sunt (*h*) parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF est ad FC, (h) Per 29. l. 1. (*i*) ut LB (hoc est AB) ad BC. Quod erat demonstrandum.

(i) Per 2. l. 6. Pars 2. Produc iterum CB donec LB sit par AB. Quoniam ponitur ut AF est ad FC, ita AB (hoc est LB) esse ad BC; (K) Per 2. l. 6. erunt AL, FB (*k*) parallelæ. Ergo externus I, est par (*l*) interno L, & alternus Q æqualis alterno O. Sed quia LB, [l] Per 27. l. 1. AB æquales sunt, anguli (*m*) L & O sunt æquales. Ergo [m] Per 5. l. 1. etiam I & Q æquales sunt. Bisectus ergo est ABC. Quod erat demonstrandum.

Coroll. *Si recta quæ angulum trianguli bifariam secat, bisecat etiam basim, triangulum per hanc prop. erit Isosceles, & bisecans recta erit* (n) *perpendicularis basi,* (n) Per n. 3. schol. post 26 l. 1

PRO-

PROPOSITIO IV.

TRiangula *sibi mutuo æquiangula, sunt similia, hoc est*, (a) *etiam latera æqualibus angulis opposita, habent proportionalia*. (a) Def. 1. l.6.

IN triangulis X, Z, angulus A sit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I; Dico AB esse ad FI, ut AC ad FL; & AC esse ad FL, ut CB ad LI; & CB esse ad LI, ut BA ad FI. (*Item AB: AC:: FI: FL; & AC: CB:: FL: LI; & CB: BA: LI: FI.*) Fig. 8.

Dem. Si angulus F ponatur supra sibi æqualem A, latera FI, FL, cadent supra latera AB, AC. Et quia (b) angulus externus AIL per hypoth. par est interno B, erunt (*c*) IL, BC parallelæ. Ergo (*d*) BI est ad IA, ut CL ad LA. Ergo (*e*) componendo BA est ad IF ut CA ad LF. Quod si angulus L imponatur angulo C, eodem modo ostendam AC esse ad FL, ut BC ad IL: & si angulus I, imponatur angulo B, ostendetur pari modo, BC esse ad IL, ut AB ad FI. (*& cum antecedentes BA, AC, CB ad consequentes IF, FL, LI eamdem rationem habeant*; *erit* (f) *permutando, BA: AC:: IF: FL; & AC: CB:: FL: LI; & CB: BA:: LI: IF*. Liquet ergo propositum. Fig. 8. & 9. (b) Fig 9. sola. (c) Per 29. l.1. (d) Per 2. l. 6. [e] Per 18. l. 5. (f) Per 16. l. 5.

Corollaria.

1. **S**I in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI) erit triangulum LFI simile toti CFB; ac proinde CF est ad LF, ut BC ad LI; (*Et permutando FC est ad CB, ut FL ad LI. Item FB ad FC, ut FI ad FL.*) Fig. 9.

Nam quia LI, BC parallelæ sunt, erunt (*g*) externi FIL, FLI, pares internis B & C: F vero utrique triangulo est communis. Ergo sunt æquiangula. Ergo latera CF, LF opposita æqualibus angulis B & FIL, sunt (*h*) proportionalia lateribus BC, LI, quæ opponuntur communi angulo F. (*Item; latera circa communem* (i) *angulum proportionalia erunt, hoc est, FB: FC:: FI: FL.*) (g) Per 27. l.1. (h) Per hanc. (i) Per def 1. l. 6. Fig. 10.

2. Si in triangulo parallelas AC, LO secet recta BF, ab angulo opposito B ducta, secabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. AF est ad LI, ut FB ad IB; & FC quoque est ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF est ad LI ut (k) FC ad IO. Igitur permutando AF est ad FC (*l*) ut LI ad IO. (k) Per 11 l. 5. (l) Per 16. l. 5.

Fig. 11. *3. Si inter parallelas AB, CD, duæ rectæ EF, GH se invicem decussent in I; earum segmenta EI, IF; GI, IH erunt proportionalia. Triangula enim EIG, FIH; propter æquales angulos* (a) *oppositos ad I; atque* (b) *alternos ad E, F; & ad G, H, erunt æquiangula, & proinde similia. Ergo EI : IF :: GI : IH.*

(a) Per 15. l. 1.

(b) Per 27. l. 1.

Fig. 12. *4. E Corollario primo Turris aut puncti cujusvis elevati altitudinem per solam baculi umbram definire discimus. Baculum FL solo perpendiculariter defige eo loco ubi radius solis XBA umbram Turris BZ definiens, etiam transeat per L. Erit in triangulo AZB linea FL altitudini turris ZB parallela. Unde ut AF distantia baculi ab umbræ mucrone, ad FL baculi longitudinem; ita AZ distantia turris ab umbræ mucrone, ad ZB altitudinem Turris. Et quia tria prima mensurando facile habeantur, habebitur & quartum, Altitudo quæsita. Q.E.I.*

Fig. 13. *5. Hinc Tabularum quæ sinus, Tangentes, atque Secantes continent, originem repetimus. Sit enim e.g. Circuli semidiameter AC partium* 100000 *: & Angulus BAD graduum* 30. *Quoniam Chorda sive subtensa graduum* 60. (c) *æqualis est AC semidiametro; DB sinus graduum* 30 *semissi semidiametri sive* $\frac{1}{2}$ *AC* (d) *æqualis erit: & proinde partes* 50000 *continebit. In rectangulo vero triangulo ADB, quadratum AB* (e) *æquale est quadratis AD & BD. Quadretur itaque semidiameter AB* (100000 *in* 100000 *ducendo*) *& ab isto quadrato quadratum BD subtrahe: Reliquum erit Quadratum ipsius AD, aut cosinus eidem* (f) *æqualis BF: e quo extracta radice dabitur linea BF, seu AD, quæ a radio AC* (= 100000) *subducta, relinquit sinum versum DC. Deinde per analogiam sequentem* (g) *AD : BD :: AC : CE, habebitur Tangens CE. Et quoniam est* (h) *AD : AB : AC :: AE; habebitur etiam secans AE. Eadem methodo ex BF sinu recto anguli BAG graduum* 60, *habebitur ejusdem anguli sinus versus, tangens & secans, Porro, quia* (*Fig.* 9. *l.* 4.) *quadratum circulo inscriptum est* (i) *duplum quadrati radii; si radius sit* 100000, *erit latus quadrati circulo inscripti* (*hoc est, chorda graduum* 90) *æqualis radici quadraticæ numeri* 10000 × 100000 × 2. *Unde innotescit dimidium latus, seu* (k) *sinus rectus gr.* 45., *ac proinde sinus versus, tangens & secans. Et universaliter, data chordæ arcus cujusvis ad radium proportione, invenientur arcus dimidii sinus rectus, sinus versus, tangens, secans; item cosinus, cotangens & cosecans. Qui plura volet, adeat Clariss. Wallisii Tractatum* de sectionibus Angularibus, *Operum Vol.* 2. *pag.* 533 = 601.

(c) Per cor. 1. p. 15 l. 4.

(d) Per cor. 1. p. 3. l. 3.

(e) Per 47. l. 1.

[f] Per 34. l. 1.

(g) Per cor. 1. p. 4. l. 6.

(h) Per id.

(i) Per sch. post prop. 6. & 7. l. 4.

(k) Per cor 1. pr 3 lib. 3.

Fig. 14. l. 6. *6. Hinc etiam si ab angulo quovis A trianguli ABC circulo inscripti, demittatur ad basim perpendicularis AE, & ducatur circuli diameter AD; erit ista perpendicularis AE ad ejus-*

dem

dem anguli latus unum AC, ut latus alterum AB est ad circuli diametrum AD. Nam ducta BD, triangula AEC, ABD sunt æquiangula; anguli C & D æquales, (a) quia eidem arcui BOA insistunt; anguli (b) ABD, (c) AEC recti, & proinde æquales; Ergo etiam BAD, EAC, æquales (d) erunt. Ergo triangula per hanc prop. similia sunt, & AE : AC :: AB : AD. Q. E. D.

(a) Per 21. l. 3. (b) Per 31. l. 3. (c) Per hyp. (d) Per cor 9. p. 32. l. 1.

7. Circuli diametrum AB (si opus productam) perpendiculariter secet infinita recta EF in C, & in EF sumpto quovis puncto E extra circulum, jungatur AE circulum secans in D: erit subtensa AD ad circuli diametrum AB, ut AC ad AE. Nam ducta recta DB, triangula ADB, ACE sunt æquiangula: angulus enim A est utrique communis, & anguli ad (e) C, D, (f) sunt recti; unde tertius (g) tertio æqualis est, Ergo per hanc prop. triangula sunt similia, & AD : AB:: AC : AE.

Fig. 15.

Si puncta B, C coincidunt, erit circuli diameter media proportionalis inter AD & AE. Erit enim AD : AB :: = AC : AE.)

(e) Per hyp. (f) Per 31. l. 3. (g) Per cor. 9. p. 32 l. 1.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera sibi mutuo proportionalia, etiam sibi mutuo æquiangula erunt. Fig. 16.

Hoc est, si AB sit ad RF, ut AC ad RQ: & ut AC ad RQ, sic CB ad QF; & ut CB ad QF, sic AB ad RF: dico angulos antecedentibus oppositos æquari angulis qui opponuntur consequentibus; nimirum C ipsi I; B ipsi F: A ipsi O.

Ang.	Antec.	Conseq.	Ang.
C	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A & C fac æquales X & Z: & latera coeant in N. Etiam igitur (h) B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T sunt æquiangula, erit (i) AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam est AB ad RF, sicut AC ad RQ. Ergo AB est ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF (k) æquantur. Pari modo ostendam æquari QN & QF. Triangula igitur T, S, sibi mutuo sunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquantur (l) angulis Z, N, X, hoc est per constr. angulis C, B, A, Quod erat demonstrandum.

(h) Per cor. 9. p. 32. l. 1. (i) Per præc. (k) Per 9. l. 5. (l) Per 8. l. 1.

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. *SI duo triangula (P, S) habeant unum angulum (A) æqualem uni (O.) & latera AB, AC; RF; RQ) quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt similia.*

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coeant in N. Igitur anguli quoque (*a*) B & N æquales erunt. Ostendam, ut in præcedenti, æquales esse RF RN. Est vero RQ utrisque triangulis S, T communis. Anguli quoque O & X æquales sunt, quia æquantur ambo eidem A, X per const. O per hyp. Ergo etiam I & F (*b*) æquantur ipsis Z & N. Triangulum igitur S æquiangulum est triangulo T; hoc est, per const. triangulo P. Ergo S, P. (*c*) similia sunt. Quod erat demonstrandum.

(a) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(b) Per 4. l. 1.
(c) Per 4. l. 6.

PROPOSITIO VII.

Fig. 8. SI duo triangula (ABC, FIL) unum angulum (B uni (I) æqualem habeant; & circa alios angulos (A, F) latera habeant proportionalia, (ut sit BA : AC : : IF : FL) & reliquos angulos (C, L) vel simul rectos, vel simul acutos, vel simul obtusos: triangula erunt similia.

Si anguli C, L fuerint recti; ob angulos B, I æquales, triangula erunt (d) *æqui angula, & proinde* (e) *similia.*

Si anguli C, L fuerint obliqui, sed homogenei, (hoc est, vel simul acuti, vel simul obtusi, & anguli A, F æquales fuerint; ob angulos B, I æquales, triangula adhuc erunt (f) *æquiangula &* (g) *similia. Ponantur autem A, F inæquales, & sit A major, & super recta BA ad punctum A, angulo F æqualis fiat BAD, & propter angulos B & I æquales,* (h) *erunt anguli reliqui ADB & L æquales, & triangula ABD, FIL erunt* (i) *similia, & IF : FL : : BA : AD. Sed IF : FL ::* (k) *BA : AC. Ergo AC = * (l) *AD, & in Isoscele ACD, anguli ad Basim C & ADC* (m) *sunt acuti. Ergo ADB est* (n) *obtusus, & proinde L est obtusus, Sed L est angulo*

(d) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(e) Per 4. l. 6.
(f) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(g) Per 4. l. 6.
(h) per cor. 9. p. 32. l. 1.
[i] Per 4. l. 6.
k) Per hyp
[l] Per 9. & 11 l. 5.
(m) Per cor 11. p. 32 l. 1.
(n) Per 13. l. 1.

gulo C homogeneus (a), *& proinde acutus: quod fieri non* (a) Per
potest: nam eumdem angulum L obtusum esse, ostensum est hyp.
prius. Non igitur angulus BAC angulo F inæqualis est. Ergo est ei æqualis; & triangula ABC, FIL sunt æquiangula, & proinde similia. Q. E. D.

Hanc propositionem (a Tacqueto male omissam) propter usus multiplices omnino restituendam censui.

Corol. 1. *Iisdem positis, erit ang. A = ang. F, & ang. C = ang. L.*

Corol. 2. *Si duo triangula S, T, unum angulum F uni* Fig. 16.
N æqualem habeant; & circa alios angulos O, X, latera respective æqualia; & reliquos angulos I, Z vel simul rectos, vel simul acutos, vel simul obtusos; triangula erunt æqualia. Sunt enim similia per hanc, & schol. p. 7. l. 5. Ergo angulus X angulo O (b) *æqualis est: & proinde ipsa etiam* (b) Per
triangula (c) *æquantur.* def. 1. l. 6.

(c) Per 4. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo (ABF,) perpendicularis (BC) ab Fig. 17.
angulo recto in basim ducta, secat triangulum in partes toti, & inter se similes.

In triangulis ABF & L, angulus F communis est, anguli vero ABF, & X per hypothesim sunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A & O etiam (*d*) æquales erunt. Ergo (d) Per
(*e*) triangula ABF & L similia sunt. Eodem modo similia cor. 9. p.
ostendam esse triangula ABF & R, angulumque I parem an- 32. l. 1.
gulo F. Ex quo jam patet etiam R & L similia esse, cum (e) Per 4.
æquales sint anguli I & F; A & O; V & X. Quod erat de- l. 6.
monstrandum.

Corollaria.

PRimo, BC est media proportionalis inter AC, CF. Fig. 17.

Cum enim sint in triangulis R & L,

æqu. ang. F. | æqu. ang. A. O.
lat. opp. AC. CB | lat. opp. CB CF:

Patet (*f*) AC esse ad CB, ut CB est ad CF.

2. BF est media proportionalis inter AF & CF. Item AB (f) Per
est media inter FA & CA. 4. l. 6.

Nam in triangulis ABF & L, sunt

æqu. ang. ABF. X. | æqu. ang. A. O.
lat. opp. AF. BF. | lat. opp. BF. CF;

(a) Per 4. l.6. Ergo AF est (*a*) ad BF, ut BF ad CF.

Similiter, quia in triangulis ABF & R, sunt

æqu. ang. ABF. V.	I	æqu. ang. F. I.
lat. opp. AF. AB.	I	lat. opp. AB. AC.

Erit rursum AF ad AB, ut AB ad AC.

Fig. 17. (b) Per 4. l.6. (3. *In tribus his triangulis ABF, R & L, rectæ æqualibus angulis oppositæ proportionales* (b) *erunt. Unde, si primæ rationis termini e triangulo ABF, illi secundæ rationis e triangulo R, iique tertiæ rationis ex L sumantur; erit AB : BF :: AC : CB :: BC : CF. Et rursum, BA : AF :: CA : AB :: CB : BF. Denique AF : FB :: AB : BC :: BF : FC. Nam hoc modo ratiocinando, termini homologi æqualibus angulis ubique opponentur.*)

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. *Datam rectam (AB) dividere secundum datam proportionem (FI ad IL.)*

Ducantur infinita AZ; ex quà sume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC parallelam. Dico factum.

Patet ex p.2. l.6.

[Cor. 1. *Hinc datam rectam AB ita secabis, ut tota sit ad partem abscissam BC in data ratione majoris inæqualitatis; nempe ut FL ad LI, si in recta infinita AZ, capiatur AR = FL, & in recta RA capiatur RQ = LI, & jungatur RB, eique parallela ducatur QC.*

Cor. 2. *Hinc etiam, datam rectam AC sic producere licebit ad B, ut tota producta AB sit ad partem adjectam BC, in ratione data majoris inæqualitatis, nempe ut FL ad LI, sumendo in recta infinita AZ, AR = FL, & in recta RA, RQ = LI, ac jungendo QC, eique parallelam ducendo RB, quæ in recta AC producta, punctum B determinabit.*

Cor. 3. *Hinc denique, datam rectam AC sic producere licebit, ut ipsa AC sit ad totam productam in ratione data minoris inæqualitatis, nempe ut FI ad FL; sumendo in recta infinita AZ, rectas AQ, AR, rectis FI, FL respective æquales, & jungendo QC, eique ducendo parallelam RB, quæ in recta AC producta punctum B determinabit.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Datam rectam (AB) similiter secare ut altera data (AI) fuerit secta (in F, C.) Fig. 19.

Extremitates sectæ & insectæ jungat recta IB. Huic ex punctis F, C duc parallelas, rectæ secandæ AB occurrentes in L & Q. Dico factum.

Patet ex Coroll. 1. p. 2. l. 6.

(Aut etiam, si linea secta IA sit major secanda BQ, sint tres circuli se mutuo tangentes diametris IF, IC, IA descripti; & aptetur subtensa BQ a puncto I ad circumferentiam circuli maximi: circuli duo minores in punctis L, P lineam BQ secabunt in (a) *ratione sectionum diametri IA. Si linea IA secta sit in partes quatuor, circuli quatuor adhibendi sunt; si in quinque, circuli etiam quinque; & ita in infinitum.)* Fig 20. (a) Per cor. 2. p. 2. l. 6.

Scholium.

EX hac propositione discemus rectam datam in quotvis æquales partes secare. Cum recta secanda AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot secare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum. Fig. 19.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum. Sit AB trisecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam, supra vel infra. Ex IX, si est infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ simul majores sint quam AB, minores vero si IX est supra. Per I & A, Item per S & B duc rectas; quæ *(b)* concurrent in C. Ex C ad Q & R ductæ rectæ datam AB trisecabunt. Demonstratio patet ex coroll. 2. prop. 4. Fig. 21. (b) Per Sch. P. 3 3 l. 1.

Rursum tum Maurolyco aliter id ipsum ita obtinebimus. Sit quatrisecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ, & BV, VS, SR, in singulis nempe una pauciora, quam desiderentur in AB: tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatrisecabunt datam AB. Fig. 22.

Nam quia per const. LO, RS parallelas & æquales, jungunt LR & OS, etiam hæ erunt *(c)* parallelæ. Pari modo OS, QV sunt parallelæ. Ergo cum AQ sit secta in tres æquales partes, etiam erit AI secta *(d)* in tres æquales. Similiter (c) Per 33. l. 1. (d) Per cor. 1. p. 2. l. 6.

 militer

militer erit BC secta in tres æquales. Tota igitur AB secta est in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes sunt faciliores Euclidea, quia pauciores ducendæ sunt parallelæ.

Fig. 23. Coroll. *Hinc Trapezium ABCD, cujus latera AD & BC sunt parallela, in partes quotcumque æquales, partiri discimus. Producantur enim BC ad E: ut fiat CE æqualis AD.*

(a) Per 27. l. 1. *Ob angulos alternos DAF, FEC & ADF, ECF* (a) *æquales, & bases AD, CE per constructionem æquales triangula ADF*

(b) Per 26. l 1. *& FCE* (b) *æqualia sunt; & proinde triangulum ABE*

(c) Per hoc sch. *Trapezio ABCD æquale. Divisa* (c) *itaque basi BE in æquales quotcumque partes, puta tres BG, GR, RE, ductisque AG, AR, erit triangulum ABG, vel AGR, vel ARE, trapezii pars tertia. Q. E. I.*

PROPOSITIO XI.

Fig. 24. D*Atis duabus rectis* (*AB, BC,*) *tertiam proportionalem invenire.*

Duc rectam AC: Ex BA producta accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB esse ad BC ut BC ad CL.

(d) Per 2. l. 6. Nam AB est ad AF, (*d*) ut BC ad CL. Sed AF est (*e*)

(e) Per constr. par BC. Ergo AB est ad BC; ut BC ad CL: adeoque CL est tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Fig. 25. STatuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc infinitam CX perpendicularem ad AC, cui in L occurrat AB producta. Dico AB esse ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

POterit vero proportio data non solum per tres terminos, sed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum summa exhiberi. Pulcherrime hanc rem, totumque adeo Geometricæ progressionis negotium Gregorius a S. Vincentio prosecutus est toto libro 2. sui operis. Nos in gratiam studiosorum, succinctam rei propositæ constructionem ac demonstrationem hic exhibebimus.

Lemma

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR semper continuetur, venietur ad quantitatem quavis data majorem. Fig. 26. secunda.

Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur (*a*) invertendo, ut QL ad RL, sic RL ad OL. Ergo divid. (*b*) QR ad RL, ut RO ad OL: & permut. (*c*) QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL est major quam OL. Ergo etiam QR major quam RO. Pari modo ostendam IQ esse majorem quam QR, & sic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam LO semper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuo crescentes, patet veniri ad quantitatem quavis data majorem. Quod erat demonstrandum.

(a) Per schol. p. 16. l. 5.
(b) Per 17. l. 5.
(c) Per 16. l. 5.

Lemma 2.

SI ratio quæcumque majoris inæqualitatis AB ad CB semper continuetur, ad quantitatem venietur quavis data minorem. Fig 26. utraque.

Data sit LO quantumvis parva. Fiat (*d*) ut BC ad BA, sic LO ad LR. Poterit (*e*) ratio LO ad LR toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, puta LI major quam AB. Quoties vero continuata jam est ratio LO ad LR per totidem terminos CB, EB FB continuetur ratio AB ad CB. Erit FB minor, quam OL.

Nam ex constr. patet IL, QL, RL, OL, esse proportionales ipsis AB, CB, EB, FB. Igitur ex æquo ut (*f*) IL ad OL, sic AB ad FB, & permutando (*g*) ut IL ad AB, sic OL ad FB. Sed IL est major (*h*) quam AB. Ergo etiam data OL est major quam FB. quod erat demonstrandum.

(d) Per cor. 3. p. 9. l. 6.
(e) Per lem. 1.
(f) Per 22. l. 5.
(g) Per 16. l. 5.
(h) Per const.

Problema.

DAta sit ratio majoris inæqualitatis AB ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium summam exhibere. Fig. 27.

Erigantur perpendiculares AL, BO, æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens (*i*) cum ABC producta, in Z, Dico 1. Si ex C erigas perpendicularem CQ; erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige

(i) Per schol. p. 33 l. 1.

erige ER; erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS; erit hæc quinta: atque ita ratio AB ad BC, hoc est AL ad BO, per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. sive AB, BC, CE, EF, FI, &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (ut FS) poterit auferri ex residuo FZ; cum enim LA (hoc est AB) sit minor quam AZ, etiam FS erit (*a*) minor quam FZ.

(a) Patet ex cor. p 4 l. 6 & p. 14 l. 5.

Dico 2. AZ est æqualis toti summæ infinitarum proportionalium.

1. Pars AZ est ad BZ, ut (*b*) AL ad BO; hoc est ut AB ad BC: Igitur permutando & invertendo, (*c*) AB est ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ est ad BZ, (*d*) ut BZ ad CZ, Sed ut AZ est ad BZ, (*e*) sic LA est ad OB; & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo etiam LA est ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo ostendam OB esse ad QC, ut QC ad RE, & sic deinceps in infinitum.

(b) Per idem cor. (c) Per 16. l. 5. cum schol. (d) Per cor. 2. p 18 l. 5. (e) Per cor. 1. p. 4. l. 6.

2. Pars. Tota summa infinitorum terminorum, neque minor est quam AZ, neque major: Ergo æqualis. Non est major, quia cum jam ostenderim supra, QC esse minorem quam CZ, & RE quam EZ, & SF quam FZ, & sic deinceps sine termino; poterunt omnes termini QC, RE, SF &c. sine fine constitui juxta invicem in recta AZ, sic ut numquam punctum Z [*quolibet finito terminorum numero*) attingatur; (*neque terminorum serie in infinitum continuata, excedi posse rectam AZ, exinde patet, quod tota illa series infinita in AZ poterit transferri; ac proinde series illa non erit major quam AZ.*) Non erit etiam minor quam AZ; quia jam ostendi supra AZ, BZ, CZ esse continue proportionales, & eodem modo ostenditur de reliquis EZ, FZ, IZ, &c. Cum igitur transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, &c. residua EZ, FZ, IZ, &c. semper sint continue proportionalia, ut jam ostendimus; venietur tandem ad residuum (*f*) dato minus, ac proinde summa proportionalium superabit quantitatem omnem quæ minor sit quam AZ; unde ipsa non potest esse minor quam AZ. Quoniam igitur nec major est, nec minor quam AZ, eidem æqualis erit, Quod erat demonstrandum.

(f) Per lem. 2. 1

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium summa, sunt continue proportionales.

Fig. 18. In superiori figura ducatur OX parallela AZ. Igitur LX erit differentia primi termini AL seu AB, & secundi BO, seu

seu BC, Quoniam XO est parallela ad AZ; erit LX ad XO, ut (*a*) LA ad AZ. Sed XO est AB, & LA etiam est AB. Ergo LX differentia, est ad AB primum terminum, ut AB primus terminus ad AZ totam summam. Quod erat demonstrandum. (a)Per cor 1.p.4.l.6.

Idem universaliter & brevissime demonstrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continue proportionales quæcumque, (etiam numeri,) AZ, BZ, CZ, &c. quæ transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentiæ, quæ una cum postrema quantitate IZ, æquantur primæ AZ. Quia vero, si proportionales in infinitum continuentur, postrema quantitas per lem. 2. evanescit, patet infinitarum proportionalium differentias æquari primæ AZ. Deinde, quia est AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & sic deinceps; erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & (*b*) convertendo, ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC secunda differentia ad BZ quantitatem secundam, & sic deinceps; Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, (*c*) ita omnes differentiæ (hoc est, ut jam ostendi, prima quantitas AZ;) ad omnes quantitates, hoc est, ad totam summam infinitarum quantitatum. Quod erat demonstrandum. Fig. 18. (b) Per cor.1.p.18 l.5. (c)Per 12. l.5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (AB, BC, AF,) quartam proportionalem invenire. Fig. 29.

Disponantur datæ rectæ, ut figura monstrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita: ipsi CZ occurrat AF producta in L.

Dico AB esse ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex p. 2. hujus. Ergo FL est quarta proportionalis quæsita.

Scholium.

Pulchre Bettinus noster in suo Ærario Mathematicæ Philosophia, ex 35. l. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum. Fig. 30.

Si tres dentur rectæ; secunda CB & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B sub quovis angulo. Per

Per puncta C, A, D, describe (*a*) circulum, cui AB prima occurrat in Z. BZ est quarta proportionalis.

(a) Per 5. l. 3.

Cum enim rectangula ABZ, CBD (*b*) æqualia sint, erit AB ad BC, ut BD ad BZ per 14 hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.

(b) Per 35. l. 3.

Fig. 31. Si dentur duæ rectæ AB, BC; secundæ BC apponatur in directum BD æqualis BC. Dein ipsam CD in B tangat prima AB sub quovis angulo. Tum reliqua ut supra. Erit BZ tertia proportionalis quæsita.

Demonstratio similis est; cum enim rectangula ABZ, CBD sint æqualia, erit AB ad BC, ut BD, hoc est, ut BC ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 32. **D***Atis duabus rectis* (*AC*, *CB*,) *mediam proportionalem invenire.*

Tota composita AB bisecetur in O, & centro O describatur circulus per A & B; ex C erige perpendicularem CF, occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC esse ad CF, ut CF ad CB.

Ducantur enim AF, BF. Triangulum (*c*) AFB rectangulum est, & a recto angulo ducta est perpendicularis FC in basim. Ergo AC est ad CF; ut (*d*) CF, ad CB.

(c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor 1. p. 8. l. 6.

Corollaria.

1. **H**Inc patet, si ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta sit ad diametrum perpendicularis (FC,) eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta (AC, CB.)

(Cor. 2. *Hinc quoque media proportionalis CE dimidiam extremarum summam AO superare nequit; & si extremæ fuerint inæquales, media CF erit illarum dimidio minor. Quod etiam ex pr. 25. supra deductum erat.*

Scholium ad cor. 2. Problema. *Data e tribus proportionalibus, extremarum summa AB, & media DE, invenire ipsas extremas. Oportet autem mediam proportionalem DE assignari, dimidia AB non majorem, per cor. 2.*

Super diametro AB circulus describatur, quam ad B (utrumlibet diametri extremum.) tangat GB data DE æqualis, & per G ducatur GF ipsi AB parallela, quæ, quia DE sive GB radio circuli non est major, circulo occurret in F. A puncto F ad diametrum AB demissa perpendicu-

dicularis FC, ipsam AB dividit in extremas quæsitas AC, CB. Nam FC (per cor. 1. hujus) est media proportionalis inter extremas AC, CB: est autem (per prop. 34. l. 1.) FC = GB, hoc est, per constr. = DE. Factum est igitur quod petebatur. Arithmetice autem invenientur AC, CB ex iisdem datis, si, ducta OF, ex ejus quadrato = $\frac{1}{4}$ ABq = Quadr. $\frac{1}{2}$ AB, subducatur FCq = DEq, & relinquetur OCq, cujus radix quadratica OC addita dimidiæ AB, & ab eadem dimidia subducta, dabit AC, CB quantitates quæsitas.

Cor. 3. *Hinc etiam tres, vel septem, quindecim &c. mediæ proportionales, facili negotio inveniuntur, talis scil. quivis mediarum numerus, qui ex continua proportionalium 1. 2. 4. 8. 16: &c. additione oritur; nempe vel unica = 1, vel tres = 1 + 2, vel septem = 1 + 2 + 4, & sic deinceps.*

Sint quantitates datæ A & E; inter quas media sit M, per hanc pr. inventa: deinde inter A & M fac mediam L, atque inter M & E mediam N. erunt L, M, N, tres mediæ inter A & E. Et si porro mediæ proportionales constituantur inter A & L, L & M, M & N, N & E habebis septem medias inter A & E. Mediæ vero inter harum singulas, una cum ipsis septem intermediis prioribus, constituent medias quindecim inter A & E. Atque ita porro.)

Scholium.

HIC locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid. In hujus problematis solutionem, Platonis hortatu, omnes Græciæ Geometræ summo studio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in (a) Archim. varii recensentur subtilissimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menæchmi, Eratosthenis, Philonis Byzantii, Heronis, Apollonii Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi; quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P. Gregorius a S. Vincentio, Renatus Cartesius. Ex omnibus visum est tres adferre reliquis faciliores.

(a) Comment in theor 1 l. 2. de Sphera & Cylindro.

Modus Platonis.

OPorteat inter datas AB, BC, duas medias invenire. Ponantur AB, BC ad rectum angulum, & producantur infinite versus Z & X. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noster; Plato enim unica norma utitur, sed (b) cujus lateri DE inserta sit regula mobilis per DE, (*ipsi perpendicularis*)) & unius normæ angulus D applicetur

Fig. 33.

(b) Vide Fig. 34.

plicetur rectæ BX, ea lege ut & latus unum transeat per A; & ad punctum E, in quo latus alterum secabit rectam BZ, applicata norma secunda, transeat per C. Dico BD, BE duas esse medias inter datas AB, BC; hoc est, ut AB est ad BD; sic esse BD ad BE, & BE ad BC.

Demonstratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam ADE rectangulum triangulum est. & ab angulo recto in basim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, sic BD ad BE: Et ob eamdem causam, ut BD ad BE, sic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC repertæ sunt duæ mediæ BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus est.

Modus Philonis Byzantii.

Duæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum: tum perficiatur rectangulum ABCD, & producatur DA, DC infinite, ducanturque (*rectanguli ABCD*) diametri BD, AC, se secantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod ABCD rectangulum sit, transibit (*a*) per A, D & C. *Cum enim circulus rectangulo* (b) *circumscribi poterit; puncta A, B, C, D erunt in circuli circumscripti circumferentia: & propter angulos rectos ABC, BCD, rectæ AC, BD erunt* (c) *ejusdem circuli diametri, quarum intersectio E, circuli centrum erit. Circulus igitur, eodem centro E & radio BE descriptus, transibit per A, D & C.*) Tum regula sic applicetur ad punctum B, ut interceptæ BG, OF sint æquales. Dico AF, GC esse duas medias inter datas AB, BC hoc est ut AB est ad AF, sic AF esse ad GC, & GC, ad CB.

Fig. 35.

(a) Patet ex 31. l. 3.
(b) Per cor. p. 5. l. 4.
(c) Per 31. l. 3.

Demonstr. Quia GB. OF (*d*) æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia sunt rectangula OGB, BFO, hoc est rectangula (*e*) DGC, DFA. Ergo est ut GD ad DF, (*f*) sic reciproce AF ad GC. Sed (*in triangulo FGD, propter. BA parallelam basi GD,*) GD est ad DF, (*g*) ut BA ad AF. Ergo (*h*) ut BA est ad AF, sic AF est ad GC. Rursum quia jam ostendi AF esse ad GC, ut BA est ad AF: est vero BA ad AF, ut GD ad DF, hoc est (*propter CB parallelam basi DF, in triangulo GDF,*) ut GC ad CB; erit (*i*) quoque AF ad GC, ut GC est ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB, sunt continue proportionales; ac proinde inter datas AB, BC inventæ sunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

(d) Per constr.
(e) Per cor. 1. p. 36. l. 3.
(f) Per 14. quæ ab hac non pendet.
(g) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(h) Per 11. l. 5.
(i) Per eamd.

Hi duo modi quamvis sint ingeniosi & faciles; tamen quia debita normæ & regulæ applicatio non nisi tentando fit, Geometrici non sunt.

Modus

Modus Cartesii.

PAretur Instrumentum hujusmodi. Duæ regulæ aperiri possint & claudi circa Y. His insertæ sint plures normæ inter se connexæ in B, C, D, E, F, G, ea lege ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regula YZ, & norma CD impellat normam DE in regula YZ, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & sic deinceps. Dum vero regulæ YX & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemque punctum A. Hoc instrumento inter duas datas non solum duæ, sed etiam quatuor & sex, imo quotvis mediæ reperiuntur. Quod neque per sectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus supradictis inventos obtineri potest. Fig. 36.

Pro duabus mediis opus est normis tribus, pro mediis 4. normis 5. & sic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & sit YB, major in regulam alteram YZ, & sit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus transeat per E. Dico YC, YD esse duas medias inter datas YB, YE; hoc est, YB esse ad YC ut YC, est ad YD, & YD ad YE.

Demonstratio manifesta est ex cor. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura instrumenti, in trigono YCD angulus ad C rectus est, ab eoque cadit CB perpendicularis in basim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB est ad YC, sic YC ad YD. Rursum, quia in trigono YDE angulus ad D rectus est, ab eoque cadit perpendicularis DC in basim YE. erit ut YC ad YD, sic YD ad YE. sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continue proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ sunt duæ mediæ YC, YD. quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG, petantur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus FG transeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonstratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum sit Platonico illo operosius, plane eximius est, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imo quotcumque medias se extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio. & corpora quæcumque in data proportione (*a*) augentur vel minuuntur, quemadmodum id ipsum in figuris planis efficitur (*b*) per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut singularem & unicam, omnis Geometrarum posteritas amplexa est.

(a) Vide schpost 18. l. 2.
(b) Vide cor. 4. p. 70. l. 6.

(Coroll.

Fig. 37. (Coroll. *Hinc habetur methodus rationem quamvis minoris inæqualitatis quousque libuerit continuandi. Detur ratio minoris inæqualitatis AO ad AC, quam per plures terminos continuare oportet. Super diametro AC describe semicirculum, cui a puncto A, inscribe AB = AO, & indefinite producantur AB, AC versus P & Q. Junge BC, & erige perpendiculares CD, DE, EF, FG, &c. Propter angulos rectos* (a) *ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, &c. erunt* (b) *AB, AC, AD, AE, AF, AG, &c. continue proportionales.*

(a) Per 31. l. 3. & def. 14. l. 1.
(b) per cor. 2. p. 8. l. 6.

Fig. 38. *Idem etiam obtinebitur, quamvis angulus ABC non sit rectus. Occurrant sibi invicem in quovis angulo BAC, rectæ AB, AC; & producantur ut supra, versus P, Q; jungaturque BC. Tum angulo ABC fiant æquales anguli ACD, ADE, AEF, &c. Et triangula ABC, ACD, ADE, &c. propter illos angulos, & angulum A communem, erunt æquiangula* (c) *& similia* (d)*. Ergo AB : AC :: AC : AD :: AD : AE :: AE : AF. &c.*

(c) Per cor. 9. p. 32 l1.
(d) Per 4. l. 9.

PROPOSITIO XIV.

Fig 39, 40. **P***Arallelogramma æqualia (X, Z) quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est; AC est ad CB, ut FO ad OL.)*

Et si latera sic habent reciproca, parallelogramma sunt æqualia.

(Ponantur latera AC, OB ita in directum, ut æquales anguli C, O, jaceant ad partes contrarias rectæ AB: & propter angulos C, & LCB duobus rectis (e) *æquales erunt LCB & O duobus rectis æquales, & proinde FO, CL* (f) *sunt in directum.)*

1. Pars. IL & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X est ad parall. R, ut AC (*g*) ad CB: & Z est ad (*h*) R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X & Z æqualia sunt, X est (*i*) ad R, ut *Z* est ad R. Ergo etiam AC est ad CB, ut (k) FO ad OL. Quod erat demonstrandum.

Dem. 2. par. Ut AC ad CB, sic (*l*) X est ad R: & ut FO ad OL, sic (*m*) Z ad R. Sed iam per hyp. AC est ad CB, ut FO ad OL. Ergo X est ad R; (*n*) ut Z est ad R. Ergo X & Z æqualia (*o*) sunt.

(Corollar. *Hinc pendet regula proportionum inversæ, sive reciprocæ demonstratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum*

(e) Per 13. l. 1.
(f) Per 14. l. 1.
(g) Per 1. l. 6.
(h) Per eamd.
[i] Per 7 l. 5.
(k) Per 11 l. 5.
[l] Per 1. l. 6.
(m) Per eamd.
(n) Per 11. l. 5.
[o] Per 9. l. 5.

tum invenit multiplicando in se invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, ut inde habeatur terminus quartus. Sicut enim in regula directa spectatur æqualitas rationum, ut si fuerit A: B :: C: D, erit $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *(ubi quotus termini primi per secundum divisi, quoto tertii per quartum divisi æquatur,) ita in regula inversa spectatur æqualitas triangulorum, sive factorum, ita ut rectangulum sub primo & secundo, æquale sit rectangulo sub tertio & quarto. Ex. gr. Si fuerint A, B; C, D reciproce proportionales (hoc (a) est, si A: C:: D: B,) erit (per hanc prop.)* $A \times B = C \times D$; *& proinde si facta ista æqualia per terminum tertium C dividantur, exorietur quotus* $\frac{A \times B}{C} = D$ *per terminum quartum.* (a) Per def.2.l.6.

Sint quantitates AB, BC; LI, IF reciproce proportionales: Fig.44.

Erit $IF = \frac{AB \times BC}{LI}$. *Ex gr. sit AB linea perticarum* 40. *BC pertic.* 4. *Erit* $AB \times BC$, *sive rectang. X pertic.* 160, *sive jugerum Anglicum. Proponatur jam jugerum aliud Z, perticas* 16 *longum, ut LI, & quæratur ejus latitudo IF. Ob æqualitatem rectangulorum X & Z, cum rectang. X majorem habeat longitudinem quam sibi æquale Z, minorem latitudinem habebit; ac proinde* minor *longitudo LI jugeri Z* majorem *latitudinem IF, pro regulæ inversæ natura, postulat. Et æqualibus rectangulis,* $AB \times BC$, $LI \times IF$, *per LI divisis, orietur quotus*

$$\frac{AB \times BC}{LI} \left(= \frac{40 \times 4}{16} = \frac{160}{16} \right) = IF = 10.$$

Ergo jugerum Z latum est 10. *perticas. Q. E. I.*

PROPOSITIO XV.

ÆQualia triangula (AGL, FCB) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc est, AC est ad CB, ut FO ad OL. Fig 41.42

Et si latera sic habent reciproca, triangula sunt æqualia.

(Ponantur AC, OB in directum, prout in prop. præced. Erunt etiam LC, OF in directum; &) ducatur recta LB: reliqua demonstratio eadem est quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases & altitudines, sunt æqualia: Et e converso.

Patet ex duabus præcedentibus (*rectangula parallelogramma* (*Fig.39.*) *vel triangula rectangula* (*Fig.42.*) *quæ reciprocant bases AC, CB & altitudines OL, OF; æqualia esse. Et cum parallelogramma vel triangula obliquangula quæcumque,*(a) *æqualia respective sint parallelogrammis vel triangulis rectangulis super eadem basi vel æquali, & ejusdem altitudinis; æquabuntur etiam parallelogramma vel triangula quæcumque quæ reciprocant bases & altitudines.*

(a) Per 35, 36, 37, 38, l.1., & def.3.l.6.

Et e conversa, cum rectangula parallelogram. æqualia; & rectangula triang., æqualia, (*Fig.39.42.*) *reciprocent* (b) *bases & altitudines: Et cum parallelogramma & triangula quæcumque, æqualia* (c) *sint parallelogrammis & triangulis rectangulis super eadem basi vel æquali, & ejusdem altitudinis; Liquet æqualia quæcumque parallelogramma, & æqualia quæcumque triangula, bases habere altitudinibus suis respective reciprocas.*

(b) Per præced & hanc.

(c) Per 35, 36, 37, 38, l.1 & def. 3.l.6.

Fig.43. Scholium. *Sint duo triangula ABC, DBE quorum anguli ad B simul sumpti æquales sint duobus rectis; sintque latera circa angulos ABC, DBE reciproca; Erunt triangula ista æqualia: Si vero triangula fuerint æqualia; latera circa angulos ABC DBE erunt reciproca. Compleantur enim parallelogramma BF, BG; & propter angulos ad B duobus rectis æquales; rectæ CB, BE in directum* (d) *jacent; & propter parallelas CBE, DF, anguli* (e) *alterni ABC, ADF sunt æquales: Et quoniam* (f) *est AB ad BD, ut EB ad BC; est autem EB ipsi DF* (g) *æqualis; erit etiam AB : BD :: DF : BC; hoc est, latera circa æquales angulos ABC, BDF* (h) *sunt reciproca: ergo parallelogramma* (i) *BG, EF sunt æqualia, & proinde* (k) *eorum dimidia ABC, DBE æqualia erunt.*

Eodem modo, si triangula ABC, DBE, æqualia sint, & habeant angulos ABC, DBE duobus rectis æquales; erit AB, BD :: EB : BC. Compleantur enim parallelogramma BF, BG, quæ erunt triangulorum (l) *æqualium dupla, & proinde æqualia; & propter parallelas* (m) *CB, DF, etiam* (n) *æquiangula ergo latera circa æquales angulos* (o) *sunt reciproca; hoc est, AB : BD : DF sive BE: BC: Q. E. D.*

(d) Per 14. l.1.

(e) Per 27. l.1.

(f) Per hyp.

(g) Per 34. l.1.

(h) Per def 2. l.6.

(i) Per 14. l.6.

(k) Per 34. l 1.

(l) Per eamd.

(m) Per 14 l 1.

(n) Per 27. l.1.

(o) Per 14. l.6.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor rectæ (AB, FI, IL, BC) fuerint proportionales; (hoc est, si AB sit ad FI, ut IL ad BC;) Rectangulum (X) sub extremis (AB, BC) æquale est rectangulo (Z) sub mediis, FI, IL.) Fig. 44.

Et si rectang. sub extremis æquetur rectangulo sub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. est AB ad FI, ut reciproce IL ad BC. Ergo (a) X & Z æqualia sunt. Quod erat demonstrandum. (a) Per 14. l. 5.

2. Pars. Quoniam X & Z jam ponuntur æqualia; Ergo circa æquales angulos B & I, est AB ad FI, (b) ut reciproce IL ad BC. Quod erat demonstrandum. (b) Per eamd.

(Coroll. 1. *Hinc ad datam rectam lineam AB facile est datum rectangulum Z applicare: faciendo* (c) *nimirum AB: FI:: IL: BC, & rectangulum X sub AB, BC* (d) *construendo. Est enim X dato Z* (e) *æquale rectangulum ad datam rectam AB applicatum. Idem aliter efficies per cor. & schol. p. 44. l. 1.* (c) Per 12. l. 6. (d) Per sch. p. 46. l. 1

Cor. 2. *Hinc pendet regulæ proportionum directæ demonstratio, quæ ex datis tribus terminis, quartum proportionalem invenit, multiplicando secundum & tertium in se invicem, & factum dividendo per terminum primum. Nam per hanc prop. si AB: FI:: IL: BC, erit $AB \times BC = FI \times IL$, & dividendo æqualia facta per AB, erit* $BC = \frac{FI \times IL}{AB}$. *Sic si proponatur numeri 5, 3, 10. quartum proportionalem invenire, jubet regula proportionum directa, numeros 3 ac 10. in se invicem ducere, ac productum 30 dividere per 5, ut inde oriatur numerus quæsitus 6.* (e) Per hanc pr.

Coroll. 3. *Hinc etiam, demonstratur regula practica, qua fenestrarii, aliique ejusmodi artifices quibus opus est areas rectangulas minores dimetiri, rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimensione, absque ulla operatione Arithmetica colligere solent. Si quæratur v. gr. quot pedes quadratos contineat rectangulum ABCD, ab angulo B, lateri BC applicetur mensura pedis unius BE, & ab angulo A, altero lateris AB termino, per mensuræ pedalis extremum punctum E tendatur filum, quod occurrat lateri DC producto si opus) in F. Quot pedes longitudine, vel partes pedis quasvis contineat recta DF, tot pedes* Fig. 45. & 46.

quadratos, vel pedis quadrati similes partes continebit rectangulum ABCD. Nam propter angulos B & D rectos, & angulos BAE, DFA alternos inter parallelas AB, DF, itemque angulos BEA, DAF alternos inter parallelas BE, AD, triangula EBA, ADF (a) *erunt similia, & proinde EB: BA:: AD: DF. Quare, per hanc prop. erit rectang. BA×AD = rectang. EB×DF. Sed BA×AD est rectangulum cujus mensura proponebatur investiganda. Cui æquale rectangulum EB×DF, pro altitudine habens rectam EB mensuræ pedali æqualem, tot pedes quadratos, vel pedis quadrati partes quasvis continebit, quot pedes longitudine, vel pedis partes similes continet* (b) *basis DF. Quot igitur pedes contineat recta DF longitudine, tot pedes quadratos continebit rectangulum ABCD. Q. E. D.*

(a) Per 4 l. 6.

(b) Sequitur ex 1. l. 6.

Si BE fuerit mensura bipedalis, vel tripedalis, &c. area rectanguli in pedibus quadratis habebitur, multiplicando DF per 4. vel 9. &c. respective, hoc est, per quadratum istius numeri pedum ex quo mensura constat.

Fig. 44. Cor. 4. *Si quatuor rectæ AB, FI, IL, BC fuerint proportionales: erit triangulum ABC sub prima pro basi, & sub quarta pro altitudine, æquale triangulo FIL sub secunda pro basi & sub tertia pro altitudine. Sunt enim rectangulorum X, Z, per hanc pr. æqualium,* (c) *dimidia.*

(c) Per 34. l 1.

Fig. 41. 42 Cor. 5. *Si duo triangula ACL, FOB, angulos C & O æquales habeant; & sit rectangulum AC×CL sub lateribus anguli C, æquale rectangulo FO×OB sub lateribus anguli O, triangula ACL, FOB erunt æqualia: & e converso, si triangula ACL, FOB, quæ angulos ad C & O æquales habeant fuerint æqualia, rectangula AC×CL, FO×OB erunt æqualia. Idem etiam æquiangulis parallelogrammis accidit. Nam propter æqualia rectang. AC×CL, FO×OB, erit per hanc prop. AC: FO:: OB: CL; & proinde, cum in triangulis ACL, FOB æquiangulis ad C & O, latera circa æquales angulos sint reciproca; triangula ACL, FOB erunt* (d) *æqualia: quod erat primum.*

(d) Per 15. l 6.

Deinde habeant triangula æqualia ACL, FOB angulos C & O æquales; (e) *erunt igitur latera circum æquales illos angulos reciproce proportionalia hoc est, AC: FO:: OB: CL; & proinde per hanc prop. erit rect. AC×CL = rect. FO×OB; quod erat alterum.*

(e) Per eamd.

Denique eadem eodem modo de parallelogrammis æquiangulis similiter se habentibus demonstrabuntur, si loco prop. 15. citetur prop. 14.

Fig. 39. 40. Cor. 6. *Si A fuerit ad B in majori ratione quam C est ad D; erit rectangulum sub extremis majus rectangulo sub mediis. Et si in minori; minus.* 1. *Quia*

1. *Quia enim A majorem habet rationem ad B quam C ad D; erit alia quadam quantitas E (quæ minor est quam A) ad B, ut C ad D; ac proinde per hanc prop.* $E\times D = B\times C$. *Sed E minor est quam A: ergo* $A\times D$ *majus est quam* $B\times C$.

2. *Si vero A fuerit ad B in minori ratione quam C est ad D; erit alia quadam F (quæ ipsa A major est) ad B, ut C ad D. Ergo* $F\times D = B\times C$; *ac proinde* $A\times D$ *minus est quam* $B\times C$.

Cor. 7. *Hinc, si rectangulorum inæqualium latera ita disponantur, ut rectanguli majoris latera in partibus extremis, & minoris latera in mediis constituantur, habebit primus terminus ad secundum majorem rationem quam tertius ad quartum. Si vero rectanguli minoris latera statuantur in partibus extremis, & majoris latera in mediis; erit primus terminus minor respectu secundi, quam tertius est respectu quarti,*

Scholium. *Cum celebre illud Ptolemai theorema, scilicet,* In omni quadrilatero circulo inscripto, Rectangulum ex diagoniis AC in BD, æquale esse duobus rectangulis ex lateribus oppositis, AB in CD, & AD in BC, *tum ex hac, tum ex propositionibus passim ante demonstratis dependeat, illud jam demonstrandum proponamus. Fiat enim angulus BAE æqualis angulo CAD. Ob angulos BAE, CAD æquales per constructionem, & angulos ABE, ACD eidem arcui AD insistentes* (a) *æquales;* (b) *Erunt triangula ABE, ACD similia, & AB: BE :: AC : CD; & proinde* (c) *rectangulum extremorum* $AB\times CD$ *æquabitur rectangulo mediorum* $AC\times BE$. *Pariter, ob angulum BAE angulo CAD æqualem per constructionem, addito communi CAE, erit angulus BAC angulo EAD æqualis, & ob angulos ADE, ACB, eidem arcui AB insistentes,* (d) *æquales;* (e) *erunt triangula ADE, ACB similia, & AD : DE : : AC : CB, & proinde* (f) *rectangulum extremorum* $AD\times CB$, *æquale erit rectangulo mediorum* $AC\times DE$. *Sed rectangula* $AC\times BE$ *&* $AC\times DE$ (g) *æquantur rectangulo* $AC\times BD$. *Ergo rectangulum* $AC\times BD$ *sub diagoniis æquatur rectangulis* $AB\times CD$ *&* $AD\times BC$ *sub lateribus oppositis. Q. E. D.*

Fig 47.

(a) Per 21. l.3.
(b) Per cor 9. p. 32. l. 1. & p 4. l 6.
(c) Per hanc pr.
(d) Per 21. l.3.
(e) Per cor. 9. p. 32. l 1. & p 4. l.6.
(f) Per hanc pr.
[g] Per 1. l.2.

PROPOSITIO XVII.

Fig.48. *SI tres rectæ (AB , FL , BC) fuerint proportionales , rectangulum sub extremis (AB ; BC) æquale erit quadrato mediæ (FL .)*

Et si rectangulum sub extremis æquetur quadrato mediæ , erunt tres illæ rectæ proportionales .

1. Pars . Mediæ FL accipiatur par O . Quoniam igitur per hyp. AB est ad FL , ut FL ad BC ; estque O par FL ; Erit quoque AB ad FL , ut O ad BC . Ergo *(a)* rectang. sub extremis AB, BC æquatur rectangulo sub mediis FL , & O , hoc est quadrato FL .

(a) Per præc.

2. Pars Demonstratur similiter ex secunda parte præcedentis .

Corollaria .

Fig 32. 1. EX hac & ex 13. patet , si in circulo sit FC perpendicularis diametro , rectangulum ACB æquale esse quadrato FC .

Fig.48. (Cor.2. *Hinc ad datam rectam AB , datæ rectæ FL quadratum FO facile est applicare, inveniendo rectis, AB,FL* (b) *tertiam proportionalem BC, & rectang. ABC* (c) *construendo . Est enim dato quadrato FO* (d) *æquale rectangulum ABC ad rectam AB applicatum .*

(b)Per 11. l 6.

(c) Per sch. p 46. l. 1.

(d) Per hanc pr.

Cor.3. *Hic etiam liquet methodus rationem quamvis AB ad FL continuandi , sive duabus datis AB , FL tertiam proportionalem inveniendi; si nempe , consequentis FL quadratum ad antecedentem AB applicetur , habebitur tertia proportionalis BC. Si vero in numeris detur ratio quævis , invenietur tertius proportionalis , multiplicando consequentem per seipsum , & productum dividendo per antecedentem : quotus enim* (e) *erit tertius proportionalis quæsitus .*

(e) Patet ex 17. l.6. cum cor. 2. p. 16. l.6.

Cor.4. *Hinc lineam inaccessam , cujus terminus alter est accessibilis , metiri discimus. Sit linea inaccessa CF, & producatur FC indefinite versus A . Erigatur a puncto C linea perpendicularis CB: & ad quodvis istius perpendicularis punctum B applicetur Norma, aut angulus quivis rectus ABF , ita ut per latus BF respiciendo, punctum F, per latus BA punctum A in recta ACF observentur . Mensuretur linea AC accessibilis , & ex analogia sequenti innotescet* (f) *innaccessa CF:AC:CB:: CB: CF . Quadratum itaque lineæ CB dividatur per lineam AC, & Quotiens* (g) *dabit lineam quæsitam CF. Q.E. I.*

Fig.17.

(f) Per cor.1 p.8. l.6.

(g) Per cor.3. hujus .

Cor.

Cor. 5, *Hinc si detur rectangulum sub AC, CB segmentis rectæ datæ AB, æquale scil. quadrato datæ rectæ CF, dimidio ipsius AB non majoris, in proclivi erit invenire rectanguli latera AC, CB; sive, datam rectam AB ita dividere liceat in C, ut rectangulum sub ipsius segmentis AC, CB æquetur quadrato rectæ datæ CF, quæ dimidium ipsius AB non superat. Cum enim data CF sit per hanc prop. media proportionalis inter AC & CB segmenta rectæ datæ AB, idem erit hoc problema cum illo, cujus solutio in Schol. ad cor. 2. pr. 13. hujus libri jam supra traditur.* Fig. 32.

Scholium 1. Si (a) trianguli cuiuscumque ABC angulus verticalis BAC bisecetur recta DA, quæ basim BC dividat in duo segmenta BD, DC; Erit differentia rectangulorum a lateribus AB, AC; & a segmentis basis BD, DC, æqualis quadrato rectæ AD bisecantis angulum BAC. (*Hoc est* rect BAC − rect. BDC = ADq.) *Triangulo enim ABC circumscribatur circulus, & producatur AD donec iterum occurrat circulo in E, & connexa EC, in triangulo AEC per punctum D ducatur basi EC parallela DF; eruntque triangula ADF, AEC* (b) *similia: sed & propter angulos BAD, EAC* (c) *æquales, & angulos ABD, AEC in eodem segmento ABEC, & proinde* (d) *æquales, triangula ABD, AEC similia* (e) *erunt: triangula igitur ABD, ADF similia sunt; & AB: AD:: AD: AF; unde per hanc prop. rectangulum* BAF *æquatur ADq. Sed AD: AF::* (f) *DE: FC. Ergo AB: AD :: DE: FC; & rect.* BA × FC (g) = *rect. ADE* = (h) *rect.* BDC. *Et utrumque rectang.* BAF, *&* BA × FC, *hoc est*, (i) BAC *æquabitur ADq* × *rect.* BDC, *& utrimque auferendo rectang.* BDC, *erit* BAC *rect.* − BDC *rect* = *ADq. Q. E. D.* Fig. 49.

(a) Vide Arithmet. Univers. p. 103. edit. primæ.
(b) Per cor. 1 p. 4. l. 6.
(c) Ex hyp.
(d) Per p. 21. l. 3.
(e) Per cor 9. pr. 32. l. 1. & pr 4. l 6.
(f) Per 2. l 6
(g) Per 16. l. 6.
(h) Per 35. l. 3.
(i) Per 1. l. 2.

Cor. ad Schol. 1. *Si trianguli ABC circulo inscripti angulus verticalis A bisecetur recta AE eidem circulo inscripta, quæ secet basim in D; erit* BA: *AD:: EA: AC. Triangula enim* BAD, *EAC similia sunt, uti e scholio præcedente constat.* Fig. 49.

Scholium 2. *Sequentis etiam problematis, quod usui erit in Sphæricis, ex ante demonstratis, jam tradi potest inveniendi ratio.* Per duo puncta B, C in circulo dato FDM, circumferentiam circuli ducere, quæ dati circuli circumferentiam dividat bifariam. *Per centrum A & unum e punctis datis* B, *ducatur recta* BA ME *infinita; ad quam e centro erigatur perpendicularis AD, & ducatur* BD; *& in triangulo ABD, propter angulum* BAD *rectum, erit* (k) *ABD acutus. Ad* BD *fiat normalis DE, quæ propter angulos ABD, BDE duobus rectis minores,* (l) *intersecabit lineam infinitam* BAME, *ut in puncto E. Denique circulus* BRE *ducatur per* (m) *tria puncta* B, C, E. *Dico factum, ducatur enim circuli jam descripti* BRE *chorda,* Fig 50.

(k) Per cor. 5. p. 32. l. 1.
(l) Per sch. p 31. l 1.
(m) Per p. 5, l 4.

chorda, per circuli dati centrum A, & alterutram periphe-riarum intersectionem G, nimirum GA⚬. Ducatur etiam circuli dati FDM, diameter GAF; per eamdem periphe-riarum intersectionem G.

Quoniam ab angulo recto trianguli BDE, demittitur DA
(a) Per cor. 1. p. 8. l. 6. *perpendicularis basi BE, (a) erunt AB, AD, AE ∺, & proinde per hanc prop. rectang. BAE = ADq; id est, ob circuli*
(b) Per p. 35. l. 3. *dati FDM æquales radios AD, AG, AF, erit rect. BAE = rect. GAF. Cum vero in circulo BRE, rectæ BE, G⚬ se mu-*
(c) Per 1. l. 6. *tuo secent in A, (b) erit rect. BAE = rect. GA⚬. Unde GAF rect. = GA⚬ rect. Ergo (c) AE = A⚬: & puncta F, ⚬ coinci-*
(d) Per def. 20. l. 1. *dent: atque arcus FDG = (d) arcui FMG, Q. E. I.*

Fig. 51. Schol, 3. *In circulo quovis cujus diameter est AB, & arcuum AC, AD sinus recti sunt CE, DF; sinus versi AE, AF; subtensæ AC, AD: Erit AE : AF :: ACq : ADq; hoc est, sinus versi erunt ut quadrata subtensarum. Ductis enim BC, BD,*
(e) Per cor. 2. p. 8. l. 6. *(e) erunt BA, AC, AE ∺; (f) itemque BA, AD, AF ∺,*
(f) Per Idem. *(g) Ergo BA×AE = ACq, & BA×AF = ADq. Sed*
(g) Per hanc Pr. *AE : AF :: (h) BA×AE : BA×AF. Ergo AE : AF :: ACq : ADq.)*
(h) Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 52. *Super data recta (RS) dato polygono (BQ) simile similiterque positum describere.*

Polygonum datum BQ resolve in triangula. Super data recta RS fac (i) angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt
(i) Per 23. l. 1. (k) latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum.
(k) Per cor. 17. p. 32. l. 1. & sch. p. 31. l. 1. Nam quia anguli R, O æquantur angulis, B, A, etiam E, R (l) æquales erunt: & quia etiam (m) V æquatur T, totus EV toti KT æqualis erit. Similiter quia singuli Θ, I æquantur singulis A & C, toti OI, AC æquales erunt. Et
(l) Per cor. 9. p. 32. l. 1. quia V & I æquantur T & C, etiam Z & Q æquales (n) sunt. Polygona igitur RZ, BQ sibi mutuo æquiangula sunt.
(m) Per constr. Reliquum est ut ostendatur etiam latera esse proportionalia. RS est ad SX, (o) ut BF ad FL: & rursum SX est ad SZ,
(n) Per cor. 9. p. 32. l. 2. (p) ut FL ad FQ. Ergo ex æquo (q) RS est ad SZ, ut BF ad FQ, &c.
(o) Per 4. l. 6

Corollarium. *Hinc Mappas sive Chartas Geographicas, Chorographicas, vel Geodæticas; aut agrorum, ædificiorum,*
(p) Per eamd. *regionumque delineationes Ichnographicas construendi methodus derivatur. Nihil enim aliud sibi volunt hujusmodi*
(q) Per 22. l. 5. *delineatores, quam figurarum ingentium ad similes figuras exiguas reductionem, quam præsens propositio exhibet.*

PRO-

PROPOSITIO XIX.

TRiangulorum (X, Z) similium proportio est duplicata proportionis laterum (AC, FI) æqualibus angulis subtensorum. Fig. 33. 34.

Hoc est si (a) fiat ut AC ad FI, sic FI ad tertiam AQ; triang. X est ad trian. Z. ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin. 10. l. 5. (a) Per 11. l. 6.

Quoniam triangula X, Z sunt similia, erit BA ad LI, (b) ut AC ad IF. Sed per constr. ut AC ad IF, sic IF ad AQ. Ergo etiam BA est ad LI, (c) ut IF ad AQ. Ergo (*junctâ BQ*,) in triangulis QBA & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum similium æquales existunt, sunt reciproca. Æquantur igitur (d) QAB & Z. Atqui triangulum X ad QBA est ut (e) basis AC ad basim AQ. Ergo etiam X est ad Z, ut AC ad AQ. Quod erat demonstrandum. [b] Per 4. l. 6. (c) Per 11. l. 5. (d) Per 15. l. 6. [e] Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XX.

SImilia polygona (ABCDE, FGHIK) dividuntur (1,) in similia triangula (P, S, & Q, T, & R, V.) numero æqualia; (2) & totis proportionalia: (3) & polygonorum proportio duplicata est proportionis laterum (AB, FG) inter æquales angulos (B, G & BAE, GFK) existentium. Fig. 55.

1. Pars. Quoniam polygona sunt similia, erunt (f) sibi mutuo æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, GFK, & B, G, & BCD, GHI, & CDE, HIK, & E, K. Quia igitur AB est ad BC, (g) ut FG ad GH, angulique B & G æquales sunt, similia (h) sunt triangula P, S. Similiter demonstrabitur similia esse R & V. Deinde quia anguli toti BCD, GHI, & ablati BCA, GHF æquales sunt, etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo ostendam æquari angulos ADC, FIH. Ergo (i) tertius CAD tertio HFI æqualis est. Quare (k) etiam Q & T triangula similia sunt. Liquet ergo 1. pars. (f) Per def. 1. l. 6. (g) Per eamd. (h) Per 6. l. 6. (i) Per cor. 9 p. 32 l. 1. [k) Per 4. l. 6.

2. Pars. Quoniam similia sunt P & S, ratio P ad S duplicata est (l) rationis CA ad HF. Sed ob eamdem causam etiam ratio Q ad T duplicata est rationis CA ad HF. Ergo P est ad S ut (m) Q ad T. Eodem modo ostendam ut Q est ad T, ita R esse ad V. Ergo ut (n) unum antecedens P est ad unum consequens S. Ita omnia antecedentia P, Q, R, simul sumpta, ad omnia consequentia S, T, V simul sumpta, hoc est, ita polygonum ad polygonum. Quod erat alterum. (l) Per præc. (m) Per 34. l. 5. (n) Per 12. l. 5.

3. Pars. Ratio P ad S est (o) duplicata rationis AB ad FG. (o) Per præc.

Sed

Sed ratio Polygoni ad polygonum est eadem cum ratione P ad S, ut jam ostendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum est duplicata rationis AB ad GF. Quod erat tertium.

Corollaria.

1. OMnes figuræ ordinatæ seu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata, pentagona, &c. sunt inter se in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ sunt similes inter se, ut patet ex def. 1. l. 6.

(Si tres rectæ fuerint proportionales; erit prima ad tertiam, ut figura quævis plana (sive sit triangulum, sive quadrilaterum, seu polygonum quodcumque) super prima, ad figuram similem, similiterque descriptam super secunda, vel erit rectarum proportionalium prima ad tertiam, ut figura quævis plana super secunda, ad figuram similem, similiterque descriptam super tertia. Nam per def. 10. l. 5. trium proportionalium prima est ad tertiam in duplicata ratione primæ ad secundam, vel secundæ ad tertiam. Unde per prop. 19. vel hanc 20. liquet propositum.)

Fig. 55. 3. Si figurarum quarumvis similium latera AB, FG inter æquales angulos posita, sint nota, etiam proportio figurarum innotescet. Sit, ex gr. AB 2. ped. & FG 6. pedum. Fiat ut 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum, nempe 18. Figura minor est ad (a) majorem, ut 2. ad 18. seu ut 1. ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, si (b) secundus datorum multiplicetur per seipsum, & productus per primum dividatur.

(a) Per cor. 2 huius.
(b) Per cor. 3 p. 17. l. 6

Fig. 56. 4. Ex eadem propositione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi vel minuendi in ratione data. Ut si velis pentagoni, cujus latus est AB, aliud facere quintuplum (*quod sit dato simile* :) Inter terminos rationis datæ AB, BC inveni (c) mediam proportionalem BX. Super hac construe (d) pentagonum simile dato. Hoc erit quintuplum dati.

(c) Per 13. l. 6.
(d) Per 18. l. 6.

Nam per cor. 2. huius, pentagonum super AB est ad sibi simile super BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro, cum etiam circulorum proportio sit duplicata proportionis diametrorum, ut ostendetur p. 2. l. 12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit. * *Non ad circulos tantum, sed ad similes figuras quaslibet curvilineas pertinet hæc proportio. Nam in duobus polygonis similibus,* ABCDE, FGHIK, *numerus laterum* AB, BC; GF, GH *&c. augeatur, & eorum longitudo minuatur in infinitum, figuræ* ABCDE, FGHIK, *fiunt curvilineæ. Figurarum igitur similium latera omnia quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia,*

tam

tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicata ratione laterum.

(Cor. 5. *Si figurarum quarumvis similium proportio sit nota; innotescit etiam proportio laterum inter æquales angulos existentium, utpote quæ subduplicata sit proportionis figurarum. Sit, ex. gr. figura PQR ad figuram STV, ut 4. ad 9. Inter 4. & 9. inveniatur medius proportionalis 6. (nempe* (a) *extractione radicis quadraticæ numeri 36 = 4. X 9,) & cum sint 4. 6, 9 ∺ sintque figuræ PQR, STV ad se invicem ut 4. ad 9, erunt illarum latera homologa ut* (b) *4 ad 6, sive ut 2 ad 3.* Fig. 55. (a) Patet ex 17. l. 6. (b) Per cor. 2. hujus.

Cor. 6. *Hinc corrigendus est eorum error, qui figurarum similium eandem atque laterum rationem esse opinantur. Si enim duorum, non tantum triangulorum similium, sed & quadratorum, pentagonorum, hexagonorum &c. (aut etiam circulorum) latera (sive diametri) sint inter se ut 2 ad 1.; Ipsæ figuræ sive areæ erunt 4 ad 1.: si latera sint inter se ut 3. ad 1., erunt figuræ ipsæ sive areæ ut 9. ad 1.; in duplicata scilicet laterum (vel diametrorum) ratione. Sunt enim 4, 2, 1 ∺; Item 9, 3, 1 ∺.*

Schol. *Cum quadratorum E, K proportio duplicata sit proportionis laterum OR, SV; inde ratio duplicata laterum OR, SV per rationem ORq ad SVq sæpissime designari solet: v. g. si super lateribus OR, SV fiant aliæ quævis figuræ similes & similiter positæ; cum sint eæ in ratione duplicata laterum OR, SV, erunt ad se invicem ut quadratum E ad quadratum K, sive ut ORq ad SVq.)* Fig. 57.

PROPOSITIO XXI.

F*iguræ rectilineæ (A, B) quæ eidem (C) similes sunt, etiam sibi mutuo similes sunt.*

Patet ex defin. 1. l. 6., axiom. 1. l. 1., & propos. 11. l. 5. Fig. 57.
(*Quia enim tam figura A quam B, figuræ C similis est; erit illarum utraque ipsi C æquiangula, & circa æquales angulos latera ipsius C lateribus habebit proportionalia. Ergo A ipsi B æquiangula erit, & latera circa ipsarum A & B æquales angulos erunt proportionalia; & proinde figuræ A & B similes erunt.*

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig 57. *SI quatuor aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint; figuræ rectilineæ similes, similiterque ab iis descriptæ (A, B, & E, K) proportionales erunt.*

Et e converso, (Si proportionales fuerint figuræ rectilineæ A, B, & E, K:) similiter descriptæ super rectis (FI, LQ, & OR, SV) erunt etiam ipsæ lineæ proportionales.

Demonstratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim rationes A ad B, & E ad K sunt (a) duplicatæ rationum FI ad LQ, & OR ad SV, ex hypothesi æqualium; etiam ipsæ æquales erunt.

a] Per 19. & 20. l. 6.

Pars 2. patet ex 35. l. 5. (*Quia enim rationes æquales A ad B, & E ad K*, (b) *duplicatæ sunt rationum FI ad LQ, & OR ad SV; etiam hæ æquales erunt.*

(b) Per easd.

Cor. 1. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices quadraticas. Si enim multiplicentur inter se quantitates signis radicalibus affixæ, & producto præfigatur ejusdem radicis signum; habebitur radicum datarum productum Ex. gr. sit $\sqrt{}$ 5. multiplicanda in $\sqrt{}$ 3: dico provenire $\sqrt{}$ 15. Nam ex multiplicationis definitione debet esse unitas ad multiplicantem (sive $\sqrt{}$ 3) ut multiplicandus (seu $\sqrt{}$ 5.) est ad productum. Ergo per hanc prop. erit quadratum unitatis ad quadratum multiplicantis, ut quadratum multiplicandi ad quadratum producti; hoc est, si pro numero producto ponatur P, erit 1. 3 : : 5. Pq. Sed 1. 3 : : 5. 15. Ergo Pq = 15, & P = $\sqrt{}$ 15.*

Rursum, si proponatur $\sqrt{}$ 15 dividenda per $\sqrt{}$ 5, quotiens erit $\sqrt{}$ 3. Nimirum dividendo 15. per 5. & quoto 3, signum radicale præfigendo. Cum enim, ex definitione divisionis, sit numerus dividens ad dividendum, ut unitas ad quotum; ergo per hanc prop. erit quadratum dividentis ad quadratum dividendi, ut quadratum unitatis ad quadratum quoti; hoc est, si pro quoto ponatur Q. erit 5. 15. : : 1. Qq. Sed 5. 15 : : 1. 3: Ergo Qq = 3, & Q = $\sqrt{}$ 3.

Fig. 32. Cor. 2. *Si recta linea AB secta sit utcumque in C; rectangulum sub partibus AC, CB contentum; est medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum contentum sub tota AB & una parte AC vel CB; est medium proportionale inter quadratum totius AB, & quadratum dictæ partis AC vel CB. Nam super diametro AB descripto semicirculo AFB; & erecta ad diametrum perpendiculari CF; Si com-*

si compleatur triangulum rectangulum AFB liquet esse (a) *AC:CF :: CF:CB, Ergo per hanc prop. erit ACq : CFq :: CFq: CBq; hoc est,* (b) *ACq : ACB rectang :: ACB rectang : CBq.* (a) Per cor. 1. p. 8. l. 6.

Porro (c) *BA : AF :: AF : AC, Ergo BAq : AFq :: AFq : ACq. Hoc est,* (d) *BAq : BAC rectang :: BAC: rectang : ACq. Eodem modo ABq : ABC :: ABC: BCq.*] (b) Per cor. 1. p. 17. l. 6. (c) Per cor. 2. p. 8. l. 6. (d) Per 17. l. 6.

PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogramma (X, Z) inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum (AC ad CB, & LC ad CF. Fig. 58. (quam quære ante Fig 47.

Hoc est, si fiat CB ad O, ut LC ad CF; X est ad Z, (*e*) ut AC ad O. Vide quæ demonstravimus l. 5. parte 3. num. 13. (*vel respice ad instantias, quibus definitionem quintam hujus libri (quam ex Euclide restituimus) jam supra illustravimus.* (e) Per def. 5. l. 6.

Ponantur AC, CB ita in directum, ut anguli æquales ACL, BCF sint ad partes contrarias rectæ AB; (f) *eruntque LC, CF in directum.*) [f] Per 13. & 14 l. 1.

Concurrant IL, SB, in Q. Parallelogrammum X est (*g*) ad parallelogrammum R, ut AC ad CB: & R est ad Z, (*h*) ut LC ad CF, hoc est, ut CB ad O:) Ergo (*i*) ex æquo X est ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonstrandum. (g) Per 1. l. 6. (h) Per eamd. [i] Per 22. l. 5.

Corollaria.

HInc & ex 34. li 1. patet primo, triangula, quæ unum angulum (ad C] æqualem habent, rationem habere compositam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium. Fig. 58.

Patet 2. Rectangula, ac proinde (*k*) & parallelogramma quæcumque rationem inter se habere compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem; neque aliter de triangulis (*rectangulis, & inde* (l) *de triangulis quibuscumque*) ratiocinaberis. (k) Per 35. 36 l 1. & def. 3 l. 6 (l) Per def 3 l 6 & pr. 37. 38. l. 1.

Patet 3. Quomodo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi possit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorum bases AC, CB, altitudines CL, CF. Fiat (*m*) ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita basium altera CB ad O. Parallelogrammum X est ad parallelogrammum Z, ut AC est ad O. Fig. 58. (m) Per 12. l. 6.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 59. *IN omni parallelogrammo (SF,) quæ circa (AB) diametrum sunt parallelogramma (CL, OI,) & toti & inter se similia sunt*, (& similiter posita; hoc est, latera homologa vel in eadem recta jacent, vel sunt sibi invicem parallela.)

Per 27.1. æquales sunt anguli BCE, BSA, & BLE, BFA. Per eamdem CEL est par CIF, hoc est per eamdem ipsi SAF; B vero & toti SF, & parti CL communis est. Igitur totum SF & pars CL æquiangula sunt. Reliquum est, ut etiam latera æqualibus angulis opposita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA, est CE parallela ad SA, erit (*a*) BC ad CE, ut BS ad SA. & CE est ad EB, ut (*b*) SA ad AB. Quia vero in triangulis quoque ELB, AFB, EL est parallela ad AF, erit EB ad EL, ut (*c*) AB ad AF. Ergo ex æquo (*d*) CE est ad EL, ut SA ad AF. Igitur (*e*) CL & totum SF similia sunt. Eodem modo ostendam OI esse simile toti SF, Ergo (*f*) CL & OI sunt etiam similia inter se, (*Quoniam vero latera homologa vel in eadem recta jacent, ut BC & BS; BL & BF; vel sunt sibi invicem parallela, ut CE & SA; EL & AF; liquet parallelogramma CL & SF esse similiter posita: & eodem modo constabit parallelogramma OI & SF, (ac proinde CL & OI) esse similiter posita*) Quæ erant demonstranda.

[a] Per cor.1.p.4. l.6.
[b] Per idem cor.
[c] Per idem cor.
(d) Per 22. l.5.
(e) Per def. 1.l.6.
(f) Per 21. l.6.

(Scholium *Huic propositioni problemata duo, quæ in conicis usui sunt futura, liceat adjungere. Prius ad ellipsim spectat, posterius ad hyperbolam.*

Fig 60. 1. *Datis tribus rectis A, B, C, quarum tertia C minor sit quam prima A, & constituto rectangulo DEFK sub prima A vel DE, & secunda B vel EF; ad secundum aliud rectangulum applicare, latitudinem habens tertiæ C æqualem, & deficiens rectangulo simili & similiter posito, ei quod sub prima & secunda constituitur.*

Ducta rectanguli EK diametro DF, e latere DE primæ A æquali, abscindatur EG tertiæ C æqualis; & per G ducatur GH lateri EF parallela, diametro occurrens in H; & per H ducatur HI lateri DE parallela, ipsi EF occurrens in I. Dico factum: rectangulum enim GEIH est id quod petebatur. Productis enim GH, IH, perficiantur rectangula IL, GM. Et

cum

cum rectangula EK, IL circa eamdem diametrum sint, (a) erunt similia & similiter posita. Constructo itaque rectangulo EK sub datarum prima A & secunda B, sive sub DE & EF, ad secundam EF aliud rectangulum, nempe GI, applicatur, latitudinem habens GE tertiæ C æqualem & deficiens rectangulo IL simili & similiter posito ipsi EK quod sub prima & secunda constituitur. Q.E.F. (a) Per hanc prop.

2. Datis tribus rectis A, B, C, & constituto rectangulo DEFK sub prima A vel DE, & secunda B vel EF; ad secundam aliud rectangulum applicare latitudinem habens tertiæ C æqualem, & excedens rectangulo simili & similiter posito ei quod sub prima & secunda constituitur. Fig. 61.

Ducta rectanguli EK diametro DF, producatur DE ad G, ut sit adjecta EG tertiæ datæ C æqualis, & per G ducatur GH lateri EF parallela, & occurrens diametro DF productæ in H; compleaturque rectangulum EGHI. Dico factum: Productis enim HI, DK, KF, perficiantur rectangula GM, LI. Et cum rectangula EK, LI circa eamdem diametrum sint, erunt (b) similia & similiter posita. Constructio itaque rectangulo EK sub datarum prima & secunda, DE, EF, ad secundam EF aliud rectangulum GI applicatur, latitudinem habens EG tertiæ C æqualem, & excedens rectangulo LI simili, & similiter posito ipsi EK quod sub prima & secunda constituitur. Q.E.F. (b) Per eamdem.

PROPOSITIO XXV.

Polygonum datum A in aliud dato B simile transmutare. Fig. 62.

Sive polygonum constituere æquale dato A, & simile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui simile petitur, fac rectangulum Q (*c*) æquale B. Deinde super FS fac (*d*) rectangulum R æquale A. Manifestum (*e*) est CF & FI esse in directum. Inter CF, FI inveni (*f*) mediam proportionalem FL. Super hac fac (*g*) polygonum simile dato B: erit hoc etiam æquale dato A.

Nam cum per constr. sint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B est ad simile sibi polygonum super FL factum, (*h*) ut CF ad FI; hoc est (*i*) ut Q ad R. Igitur permutando, ut polygonum B est ad Q, ita polygonum super FL ad R. Sed per constr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum super FL, simile ipsi B, æquatur R, hoc est, per constr. dato A. Factum est igitur quod petebatur.

(c) Per 45. l. 1.
(d) Per eamd.
(e) Per 14. l. 1.
(f) Per 13. l. 6.
(g) Per 18. l. 6.
(h) Per cor. 2. p. 20. l. 6.
(i) Per 1. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 63. *PArallelogramma similia & similiter posita* (BD, *FN*,) *habentia angulum communem* (*A*,) *circa eamdem diametrum existunt.*

Duc rectas AE, CE. Si negas AEC esse diametrum communem parallelogrammorum BD & FN; ipsius BD diameter esto recta alia AGC secans FE in G, & duc rectæ AF parallelam GH. Parallelogramma igitur FH, BD existent circa communem diametrum AGC, ac proinde (*a*) erunt similia (*& similiter posita.*) Ergo ut BA ad AD, (*b*) sic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD, sic AF ad AN, cum BD, FN similia sint per hyp. Ergo FA est ad AH, ut FA ad AN Quod est absurdum.

(a) Per 24. l. 6.
(b) Per def. 1. l. 6.

Fig. 59. Cor: 1. *Hinc motuum compositionem æstimare discimus. Impellatur eodem temporis momento, Corpus ad A positum, vi AF secundum directionem rectæ AF, & vi AS secundum directionem rectæ AS, (ita nempe, ut corpus sola vi AF rectam AF, & sola vi AS rectam AS in dato tempore describeret;) & compleatur parallelogrammum ASBF: ex conjunctione virium, corpus A diagonalem AB eodem dato tempore describet. Idem enim erit motus corporis A, ac si, dum illud feratur in motu uniformi ab A ad S in recta AS, ipsa recta AS motu itidem uniformi, & situ sibi ipsi semper parallelo, puncto suo A rectam AF eodem tempore describeret; nam eo pacto conservabuntur utraque motuum directiones versus plagas SB atque FB respective. Unde fiet, ut dum corpus A aliqua quavis temporis dati parte, (v. gr. tertia) perveniens ad O, eamdem (tertiam) partem rectæ AS describat, ipsa AS in situm IC transferetur, & ipsius punctum A eamdem itidem (tertiam) partem rectæ AF eadem (tertia) dati temporis parte describet; ita ut sit SA ad AF,* (c) *ut OA ad AD ac proinde ducta OL ipsi AF parallela, quæ secet rectam IC in E, parallelogramma SF, OI erunt* (d) *similia, & similiter posita, & corpus A ex utroque motu, in fine ejusdem (tertiæ) dati temporis partis) invenietur in puncto E. Et cum parallelogramma ista habeant etiam angulum communem A, per hanc pr. circa eamdem diametrum AB existunt, & corpus ad E erit in ipsa diametro, seu diagonali AB. Et eodem modo, corpus in quovis alio dati temporis momento reperietur alicubi in recta AB, & in fine temporis dati, in puncto B. Ergo describet ipsam diagonalem AB viribus conjunctis, eodem tempore quo vi AS rectam AS, vel vi AF rectam AF separatim describeret.*

[c] Per 15. l. 5.
(d) Per def. 1. l. 6.

Cor. 2.

Cor. 2. *Describat igitur corpus quodvis in dato quovis tempore rectam DA vi insita ut DA: Idem corpus æquali tempore rectam AO rectæ DA æqualem, & secundum eamdem directionem describeret, si nulla vi alia impediretur. Si itaque corpus ad A, a motu secundum AO deflectens, in eodem tempore rectam AE describat; tum ducta OE, compleatur parallelogrammum OI, & manifestum* (a) *est, corpus secundum rectam AE ferri, vi composita ex vi priori insita DA, vel AO, & ex nova vi AI ad punctum A corpori compressa secundum directionem rectæ AI.* [a) Per cor. 1. hujus

Cor. 3. *Hinc e converso, si corpus vi AB describat rectam AB, idem erit motus, ac si rectam eamdem AB eodem tempore describeret vi composita ex viribus, quæ lateribus AF, AS parallelogrammi cujuscumque SF, cujus diameter sit recta AB, proportionales fuerint, & quæ etiam secundum latera ista AF, AS dirigantur.*

Cor. 4. *Hinc insuper cum illustr. Nevvtono colligimus areas quas corpora quæcumque in gyros acta circa immobile centrum virium describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales. Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam lineam AB. Idem corpus secunda temporis parte, si nihil impediret, recta ad κ pergeret; describens lineam $B\kappa$ æqualem ipsi AB, ita ut radiis ad centrum ductis confectæ forent* (b) *æquales areæ ASB, $BS\kappa$. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatque corpus a recta $B\kappa$ deflectere, & in recta BC pergere: hoc est, si vis centripeta in eo loco sit ad vim insitam, ut $B\gamma$ ad $B\kappa$, & perficiatur parallelogrammum $B\gamma C\kappa$: Corpus lineam* (c) *diagonalem BC describet, & completa secunda temporis parte reperietur in C, in eodem plano cum triangulo primo SAB. Junge SC. Area radio ad centrum ducto descripta, hoc est triangulum SBC* (d) *æquale erit triangulo $SB\kappa$; atque adeo* (e) *triangulo primo SAB. Simili argumento tertia temporis parte corpus a C ad δ vi insita pertingeret, ita ut linea $C\delta$ æqualis esset lineæ CB: sed si vis centripeta, sive major priore sive minor, iterum agat ad punctum C, in fine tertii temporis reperietur corpus alicubi in linea $D\delta$, lineæ SC parallela: ideoque ut prius, diagonalem CD describet: & radio DS ad centrum ducto, erit triangulum SDC in eodem plano cum quadrilatero SABC; & triangulo* (f) *$S\delta C$, atque adeo reliquis SCB, SAB inter se æqualibus, erit æquale. Pari modo si vis centripeta successive agat in D, E, F, faciens ut corpus singulis temporis partibus diagonales DE, EF, &c. describat; Erunt hæ in eodem plano, & triangula triangulis prioribus*

Fig. 64.

(b) Per 38. l. 1.

(c) Per cor. 1. huj. pro.

(d) Per 37. l. 1.

(e) Per axio 1. l. 1.

(f) Per 37. l. 1.

oribus æqualia describentur. Æqualibus itaque temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur; atque adeo arearum summæ quævis SADS, SAFS sunt inter se ut descriptionum tempora. Augeatur jam numerus, & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ABCDEF, &c. erit linea curva, & areæ hoc in casu in plano immobili descriptæ, erunt etiamnum temporibus proportionales Q. E. D.

Cor. 5. *Hinc etiam, cum CL. Nevvtono, colligimus corpora omnia quæ in curva aliqua moventur, & areas circa centrum aliquod S temporibus proportionales describunt, a vi centripeta ad centrum illud tendente perpetuo urgeri. Cum corpus vi insita æquales rectas AB, Bx æqualibus temporibus describeret, ductis SA, SB, Sx* (a) *æquabuntur triangula BSA, SBx. Cum vero corpus ex hypothesi æquales areas SAB, SCB æqualibus temporibus describat, æquabuntur etiam triangula SBA, SBC. Quare & triangula SBx, SBC æqualia erunt. Et quoniam super eadem basi SB consistunt, puncta C & x* (b) *erunt in linea Cx basi parallela: atque adeo ducta Cy rectæ x B parallela, erunt Bx, By parallelogrammi xy latera, & BC diagonalis. Corpus itaque a recta ABx deflectens ad punctum B; & diagonalem BC describens eodem tempore quo latus Bx absque nova vi ad B impressa describeret,* (c) *urgetur etiam in puncto B, vi By tendente ad S centrum virium: Atque ita in punctis omnibus C, D, E, F, &c. Q. E. D.*

Fig. 64.

(a) Per 38. l. 1.

(b) Per 39. l. 1.

(c) Per cor. 2. hujus prop.

Cor. 6. *Cum itaque in Planetarum primariorum Systemate, Areæ radiis ad Solem ductis sint semper temporibus proportionales, uti Astronomis est notissimum; Urgentur Planetæ vi perpetua ad Solem tendente. Neque aliter de secundariis circa primarios suos est ratiocinandum.*

Fig. 59. Cor. 7. *Sit parallelogrammi BCEL diameter BE, & productis CE, LE fiat parallelogrammum AO EI parallelogrammo BL EC simile, similiterque positum, diametrum habens AE: dico quod parallelogrammorum CL, OI diametri BE, AE in directum jacent. Nam productis BC, AO, & BL, AI, perficiatur parallelogrammum SF; & propter CE : EI ::* (d) *LE : EO, erit CI: IL ::* (e) *LO : OE; &* (f) *alternatim, CI : LO :: IE : OE, hoc* (g) *est, SA : AF :: OA : AI. Parallelogramma igitur SF, OI* (h) *similia, similiter posita, & communem angulum ad A habentia, per hanc prop. circa eamdem diametrum existunt. Atque eodem modo demonstrabitur parallelogramma SF, CL circa eamdem diametrum existere. Liquet igitur diametros AE, EB partes esse diametri AB, & proinde in directum jacere.*

(d) Per hyp.
(e) Per 18 l. 5.
(f) Per 16. l. 5.
(g) Per 34 l. 1.
(h) Per def. 1. l. 6.

Cor. 8. *Si duo triangula AOE, ECB, quæ latera duo AO, OE duobus EC, CB proportionalia habent, (ut sit AO : OE :: EC:*

EC : CB;) secundum unum angulum OEC ita componantur, ut latera homologa sint parallela, nempe AO ipsi EC, & OE ipsi CB; erunt reliqua latera AE, EB in directum. Productis enim OE, CE, ductisque ad illas parallelis AI, BL, perficiantur parallelogramma OI, CL; quae propter parallelas OA; CI, BL, & AI, OL, CB, erunt (a) *aequiangula, & similiter posita; & propter AO : OE :: EC : CB, erunt etiam similia* (b) *ac proinde per cor. praecedens, eorum diagonales AE, EB in directum jacent. Q. E. D.* (a) Per. 27. l. 1. (b) Per def. 1. l. 6.

Hoc autem corollarium propositionem 22. hujus l. 6. nobis exhibet; quam quoniam omiserat Tacquetus, ex hac prop. 26. mediante corollario septimo deducendam censuimus.

PROPOSITIO XXVII.

OMnium parallelogrammorum (AD, AF) secundum eamdem rectam (AB) applicatorum, & deficientium parallelogrammis (CE, IH) similibus & similiter positis, ei parallelogrammo (AD) quod super dimidia AB describitur; maximum est illud (AD) quod ad dimidiam applicatum est, simile existens defectui (CE.) Fig. 65, 66.

Applicentur ad rectam AB bisectam in C, parallelogrammum ACDL, & quodvis aliud AIFG, deficientia parallelogrammis CBED, & IBHF, similibus & similiter positis ipsi AD parallelogrammo quod a dimidia recta AB describitur: Dico parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus esse.

Hujus autem propositionis casus sunt duo: vel enim parallelogrammi AF basis AI est ipsa AC major, vel minor.

1. *Sit primo major, ut in Fig. 65. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia, similia & similiter posita sunt* (c); *circa diametrum eamdem DFB* (d) *erunt: & producta IF ad K, erit CF ipsi FE* (e) *aequale. Commune apponatur IH, eritque CH = IE. Sed propter AB bisectam in C,* (f) *erit GC = CH; Ergo & GC = IE. Commune adjiciatur CF, & erit AF = CF + IE. Sed CE, hoc est; (g) AD, propter aequales bases AC CB) majus est quam CF + IE: AD igitur est ipso AF majus.* Fig 65. (c) Per hyp. (d) Per praec. (e) Per 43. l. 1. (f) Per 36 l 1. (g) Per eamd.

2. *Deinde sit AI minor quam AC, ut in Fig. 66. Et quoniam parallelogramma CE, IH communem angulum CBE vel IBH habentia; similia sunt & similiter posita* (h); *circa eamdem* Fig. 66. (h) Per. hyp.

 dia-

(a) Per præc. (b) Per 34 l. 1. (c) Per 36 l. 1. (d) Per 43 l. 1.

diametrum (a) BDF erunt. Ducatur diameter, & describatur figura. Et propter æquales AC, CB: (b) æquabuntur LD, DE: unde & parallelogramma GD, DH æqualia (c) erunt. Parallelogrammum igitur DH est parallelogrammo GK majus. Sed DH (d) = DI: ergo DI majus est quam GK. Commune apponatur AK, & parallelogrammum AD parallelogrammo AF majus erit.

Omnium itaque parallelogrammorum secundum eamdem rectam applicatorum, & deficientium parallelogrammis similibus & similiter positis ei quod a dimidia describitur, maximum illud est quod ad dimidiam applicatur. Q. E. D.

Fig 67. (e) Per 34 l. 1. (f) Per 2 l. 6. (g) Per 36 l. 1. (h) Per 43 l. 1. (i) Per 36 l. 1.

Cor 1. *Si ad eamdem rectam AB applicentur parallelogramma AF, AO deficientia parallelogrammis IH, in similibus & similiter positis ipsis AD (vel CE) parallelogrammo quod a recta AB dimidia describitur, ita tamen ut sit summa rectarum IB + B = AB, hoc est, A = IB, & CI = C;) Parallelogramma AF, AO erunt æqualia, Nam propter æquales AC, CB, & C, CI, (e) æquantur etiam GN, NH, & ON, NF: & in triangulo FGO; propter rectas ND, D lateribus O, OF respective parallelas, erit (f) etiam FD = DO, & O = O. Unde propter bases æquales, (g) erit NL = NE, & N = NK. ergo OL (= FE = (h) FC) = (i) OC; & 2OL sive O = 2OC sive OI. Commune apponatur AO, eritque AO = AF. Q. E. D.*

(K) Per hyp. (l) Per 43 l. 1. (m) Per 1. l. 6. (n) Per 34. l. 1.

Cor. 2. *Si ad rectam AB applicentur parallelogramma æqualia AF, AO, deficientia parallelogrammis IH; in similibus & similiter positis parallelogrammo AD (vel CE) quod super dimidia ipsius AB describitur, punctis I & in recta AB jacentibus; Erit IB + B = AB, hoc est; A = IB. Nam producta recta IK ad M, propter (k) AO = AF, ablato communi AO, erit GO = F = (l) HM. Ergo & GO (m) = FH, ac proinde (n) A = IB.*

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 68. (o) Per præc.

AD datam rectam (AB,) dato rectilineo (C.) æquale parallelogrammum (AI) applicare, deficiens parallelogrammo (ON) quod simile sit alteri dato (D.) Oportet autem datum rectilineum (C) cui æquale applicandum est. non (o) majus esse parallelogrammo (AG) quod ad dimidiam datæ (AB) applicatur; similibus existentibus, & eo (AG) quod ad dimidiam applicatur, & (EF) defectu eius illi

illi parallelogrammo (D) cui simile (ON) deficere debet.

Bisecetur AB in E; & super recta AE, (a) describatur, parallelogrammo dato D, simile parallelogrammum AG, & compleatur parallelogrammum AF. Erit quoque EF ipsi AG, ac proinde dato D simile. Erit etiam EF ipsi AG similiter positum, & aequale. Et cum per determinationem, AG non sit minus rectilineo C, erit vel ei aequale, vel eo majus. Si sit AG = C, factum est quod petebatur: Ad datam enim rectam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum AG applicatur; deficiens parallelogrammo EF, dato D simili. (a) Per 18.l.6.

Si vero parallelogrammum AG sit rectilineo C majus; (b) inveniatur excessus ipsius AG vel EF, supra rectilineum C; & illi excessui aequale, ipsi vero EF simile & similiter positum fiat (c) parallelogrammum KL, cum ipso EF communem angulum habens G. Parallelogramma igitur EK, KL, circa eamdem diametrum GIB (d) existunt. Producatur KI ad M, N, & LI ad O; & erunt parallelogramma ON, EF, circa eamdem diametrum GB, & (e) proinde similia. Ergo (f) etiam ON simile est dato D. Et quoniam KL est excessus parallelogrammi EF supra datum rectilineum C; si itaque e parallelogrammo EF auferatur KL, quod reliquum est, aequale erit ipsi C; adeoque erit rectilineum C aequale parallelogrammis EN, IF simul sumptis, hoc est, (propter EN (g) = AK, & (h) IF = EI) aequale parallelogrammo AI, Ergo ad datam rectam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum AI applicatur, deficiens parallelogrammo ON, quod simile est dato D. Q. E. F. (b) Per cor. p. 46. l. 1. (c) Per 25. l. 6. (d) Per 26. l. 6. (e) Per 24. l. 6. (f) Per 21. l. 6. (g) Per 36. l. 1. (h) Per 43. l. 1.

Scholium *Ex casu 2. & cor. 1. prop. praeced. emergit alia methodus hoc problema construendi, si nempe, super data AB constitutis ut prius AG, EF dato D similibus: producantur ipsius EF latus EG & diameter BG, & circa hanc, in angulo ipsi EGF ad verticem opposito, fiat (i) parallelogrammum SGTQ, aequale excessui ipsius AG vel EF supra rectilineum C, ipsique EGFB simile, similiterque positum. Unde ST erit simile, similiter positum; & (k) aequale ipsi KL in constructione priori. Productis AH: BF, QS, QT, compleantur parallelogramma AQ, PR: Erit (l) PR simile ipsi EF, ac proinde dato D. Et propter ST, KL similia, similiter posita & aequalia, erit SG = GL, hoc est, (m) PE = EO, Unde (n) AP = OB, & (o) AQ = AI = C. Ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum AQ applicatur, deficiens parallelogrammo PR, quod simile est dato D.* Fig. 69. (i) Per 25. l. 6. (k) Per axio. l. 1. (l) Per 24. l. 6. (m) Per 34. l. 6. (n) Per axio 3. l. 1. (o) Per cor. 1. praec.

Fig. 70. Cor. 1. *Si parallelogrammum datum D, quadratum sit; problema sic efferretur:* Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato. *Et datæ rectæ applicabitur rectangulum AI deficiens quadrato ON, vel rectangulum AQ deficiens quadrato PR. Unde, cum per hujus prop. (vel scholii) constructionem, rectangulum AI una cum quadrato KL, (vel rectangulum AQ una cum quadrato ST) æquale sit quadrato AG vel EF; patet prop. 5. lib. 2. ex hac prop. 28. l. 6. immediate deduci. Sic enim exprimitur prop. illa 5. l. 2.* Si recta AB secta fuerit in partes æquales, AE, EB, & in partes inæquales AO, OB (vel AP, PB;) Erit rectangulum AI (vel AQ) sub partibus inæqualibus, una cum KL (vel ST) quadrato partis intermediæ EO (vel EP,) æquale quadrato dimidiæ AE vel EB. *Quæ nihil aliud est; quam prop. hujus 28. casus ille particularis, qui in hoc corollario describitur.*

Fig. 70. Cor. 2. *Data recta AB & rectilineo C, per hanc pr. 28. ejusque scholium, habebitur OB vel PB, latus quadrati quo deficit rectangulum AI vel AQ, rectilineo C æquale, & ad datam rectam AB applicatum. Pro quantitate incognita OB ponatur* Y; *unde* $AN = AB \times Y$, & $ON = Yq$; *ergo* $AI = AN - ON = AB \times Y - Yq = C$. *Atque idem omnino colligitur si ponatur* $Y = PB$: *erit enim* $AQ = AR - PR = AB \times Y - Yq = C$. *Atque hæc est prima* (a) *æquationum affectarum quadraticarum species sive forma, quam ex hac prop. 28 solverunt Geometræ veteres, inveniendo quantitatem incognitam OB vel PB, per applicationem rectanguli dato C æqualis, ad datam rectam AB & deficientis quadrato.* Manifestum autem est, *primum hanc formam, duplicem solutionem admittere: Y enim vel per OB vel per PB explicari potest; quarum illa (OB) per propositionis, hæc (PB) per scholii constructionem invenietur. Patet etiam ex cor. 2. pr. 27. duas illas quantitates simul sumptas* $(OP + PB)$ *datæ rectæ AB æquales esse; unde ut utraque inveniatur, duplici constructione opus non est: inventa enim una quavis OB, altera AO vel PB simul innotescit.*

(a) Vide Oughtredi Clav. Mathematicæ, cap. 16. n. 9.

Fig. 70. Cor. 3. *Ipsa etiam regula qua ad hujus formæ æquationes solvendum utuntur recentiores, ex hujus prop. 28. constructione deducitur. Cum enim Y sit vel* $(PB =)\ AO$, *vel* OB, *sitque* $AO = \frac{1}{2} AB + EO$, & $OB = \frac{1}{4} AB - EO$: *Et cum sit* $EO = KI$; & *per constr. pr. 28.* $KIq = EBq - C =$ (b) $\frac{1}{4} ABq - C$, *erit* KI *vel* $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Ergo Y erit*

(b) Per cor. 3. p. 4. l. 2.

vel $AO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$,

vel $OB = \frac{1}{2} AC - \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$.

Atqui

Atqui pro æquatione $AB \times Y - Yq = C$, *regula est* $\frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C} = Y$. *Vide Oughtredum loco supra citato.*

Cor. 4. *Hinc in æquatione* $AB \times Y - Yq = C$, *data recta AB & rectilineo C, expeditius invenietur Y, si rectilineo C æquale* (a) *quadratum construatur, cujus latus ex illa constructione inventum sit V, cui ex E medio puncto datæ rectæ AB, perpendiculum æquale EX erigatur: tum centro X, radio XO* $= \frac{1}{2} AB$ *arcum circuli describe, secantem AB in O: rectæ AO, OB erunt valores ipsius Y: Nam* $Y =$ (b) $\frac{1}{2} AB \pm \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$. *Sed per constr. est* $XOq = \frac{1}{4} ABq$, & $XEq = C$. *Ergo EOq sive* (c) $XOq - XEq = \frac{1}{4} ABq - C$. *Ergo* $EO = \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, & $AO = \frac{1}{2} AB + EO = \frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq - C}$, *sicut &* $OB = \frac{1}{2} AB - EO = \frac{1}{2} AB - \sqrt{\frac{1}{4} ABQ - C}$.

Fig. 71.

(a) Per 14. l. 2.

(b) Per cor 3 huj.

(c) Per 47. l. 1.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AI) applicare, excedens parallelogrammo (ML) quod simile sit alteri dato (D.)

Fig. 72.

Bisecetur AB in E, & super recta EB (d) *describatur parallelogrammo dato D simile parallelogrammum BEFG; atque ipsis C, EG simul sumptis æquale, ipsi vero FEBG simile similiterque positum fiat* (e) *parallelogrammum FKIH communem cum illo habens angulum ad F. Erunt* (f) *igitur parallelogramma EG, HK circa eamdem diametrum FBI. Producantur AB, GB, ad L, M; Et cum simile sit EG ipsi D per constructionem, atque* (g) *ipsi ML quia circa eamdem diametrum sunt EG, ML; inde colligitur* (h) *ML ipsi D simile esse. Producta MK, compleatur parallelogrammum AM; eritque* $AK =$ (i) $KB =$ (k) BH. *Quare si æqualibus AK, BH commune adjiciatur KL; erit AI parallelogrammum æquale parallelogrammis KL, BH simul sumptis. Parallelogrammum autem KH (hoc est* $EG + KL + BH$) *æquale est ipsis* $EG + C$ *per constructionem: adeoque sublato communi EG, erit* $C = KL + BH = AI$. *ad datam igitur rectam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum AI applicatur, excedens parallelogrammo ML, quod dato D simile est. Q.E.F.*

(d) Per 18. l. 6.

(e) Per 25. l. 6

(f) Per 26. l. 6.

(g) Per 24. l. 6.

(h) Per 21. l. 6.

(i) Per 36. l. 1.

(k) Per 43. l. 1.

Cor. 1. *Si parallelogrammum D sit quadratum, problema* Fig. 73.

 posita.

postulat ut Ad datam rectam AB, dato rectilineo C æquale rectangulum applicetur, excedens quadrato. *Et cum per constructionem, rectangulum AI una cum quadrato EG æquale sit quadrato KH; patet prop. 6. lib. 2. ex hac pr. 29. l. 6. immediate deduci posse: nempe,* Si recta AB bisecta fuerit in E, eique recta quædam BL adjiciatur; Erit (AI) rectangulum sub tota composita AL & adjecta BL sive LI, una cum (EG) quadrato dimidiæ, æquale quadrato (KH) rectæ KI vel EL compositæ ex dimidia & adjecta. *Nihil enim aliud est hæc prop. 6. l. 2. quam propositionis 29. l. 6. casus ille particularis, qui in hoc corollario describitur.*

Fig. 73. Cor. 2. *data recta AB & rectilineo C; per hanc prop. invenerunt veteres Geometræ latera AL, LI rectanguli AI rectilineo C æqualis, quod ad datam AB ita applicari debet, ut excedat quadrato: quæ latera apud recentiores Analystas* (a) *per æquationum quadraticarum affectarum secundæ ac tertiæ speciei resolutionem inveniuntur. Etenim si pro latere LI ponatur E, erit* $ML = Eq$ *&* $AM = E \times AB$*: ergo AI sive* $C = Eq + E \times AB$*: quæ est tertia æquationum quadraticarum species, in qua per hanc prop. invenitur E sive BL vel LI per applicationem rectanguli dato C æqualis ad datam rectam AB, & excedentis quadrato. Invento autem latere LI sive E, simul habetur latus alterum* $AL = AB + E$*, quod inveniunt recentiores, per resolutionem æquationis quadraticæ secundæ speciei.*

(a) Vide Outhtredi Clav. Cap 16. n. 9.

Fig. 73. Cor. 3. *Hæc etiam secunda æquationum affectarum quadraticarum species, inventis per corollarium præcedens rectanguli AI rectilineo C æqualis, ad datam rectam AB applicati, & excedentis quadrato) lateribus AL, LI, sic construi potest. Describatur* (b) *rectæ AL sive IP quadratum IPQR, cujus pars sit rectangulum AI. Et quoniam* $AL = IR$, *&* $BL = LI$, *erit* (c) $LR = AB$. *Jam si pro AL ponatur A, erit* $PR = Aq$, *&* $AR = A \times AB$*; unde AI sive* $C = (PR - AR =)\ Aq - A \times AB$*; quæ est æquationum quadraticarum secunda species, per hoc corollarium construenda.*

(b) Per 46. l. 1.
(c) Per axio. 3. l. 1.

Cor. 4. *Recentiorum* (d) *etiam regulæ, (sc.* $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB = A$, *&* $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$, *(quarum ope, ex æquatione* $Aq - A \times AB = C$, *invenitur A, & ex æquatione* $Eq + E \times AB = C$, *invenitur E) Ex hujus prop. constructione deduci possunt. Cum enim sit* $EB = \frac{1}{2} AB$, *erit* $EG =$ (e) $\frac{1}{4} ABq$. *Et per constr. hujus,* $KH = EG + C = \frac{1}{4} ABq + C$, *cujus itaque latus KI sive* $EL = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, *cui si AE vel* $\frac{1}{2} AB$ *adjiciatur, erit AL sive* $A =$

(d) Vide Outhtredi loc. citato
(e) Per cor. 3. p. 4. l. 2.

$A = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} + \frac{1}{2} AB$. *Porro, si ab* $EI = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$ *auferatur EB, sive* $\frac{1}{2} AB$, *relinquetur BL sive* $E = \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB$.

Cor. 5. *Ex his autem regulis, in utralibet æquatione, sive* $Aq - A \times AB = C$, *seu* $Eq + E \times AB = C$, *data recta AB, & rectilineo C, expeditius invenientur A & E, si rectilineo C æquale quadratum* (a) *construatur, cujus latus inde inventum sit N, cui ex medio puncto rectæ datæ AB, æquale perpendiculum EO erigatur, & jungatur OB, cui æqualis in EB producta, capiatur EL, eritque* $AL = A$, & $BL = E$. *Cum enim sit* $EOq =$ (b) C, *erit* $EBq + EOq = \frac{1}{4} ABq + C$ $=$ (c) $OBq = BLq$. *Ergo EL* (d) $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C}$, & AL $=$ (e) $\frac{1}{2} AB + \sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} = A$; *atque* $BL =$ (f) $\sqrt{\frac{1}{4} ABq + C} - \frac{1}{2} AB = E$.)

Fig. 74. (a) Per 14. l. 2. (b) Per constr. (c) Per 47. l. 1. (d) Per axio. 15. (e) Per axio. 2. [f] Per axio 3.

PROPOSITIO XXX.

D*Atam rectam (AB) ita secare, ut tota (AB) sit ad unum segmentum (AC) sicut idem segmentum est ad reliquum (CB.)* Fig. 75.

Hoc est, (ut loquuntur Geometræ, lineam extrema ac media ratione secare.

(*Super data recta AB fiat quadratum AFSB, & ad rectam FA, quadrato FB æquale* (g) *applicetur rectangulum FOLI, excedens figura AL ipsi FB simili. AL itaque quadratum est. Et quoniam FL æquale est ipsi FB; ablato communi FC, erit* $AL = OB$. *Et propter angulos rectos, ac proinde æquales, OCB, ACL,* (h) *erit OC : CL :: AC : CB. Sed OC =* (i) *AF = AB, & CL = AC : Ergo AB : AC :: AC : CB. Factum est igitur quod petebatur.*

Fig. 21. l. 2. [g] Per 29. l. 6. (h) Per 14. l. 6. (i) Per 34. l. 1. Fig. 75. l. 6.

Aliter.] Per 11. 2. ita seca AB in C, ut rectangulum sub AB, CB sit æquale quadrato AC. Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, sic AC ad CB.

Hujus sectionis vis admirabilis est in corporum regularium inscriptione & comparatione.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Fig 76. *SI a lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ similes quæcumque, describantur, erit (F) ea quæ opponitur recto angulo, duabus simul reliquis (R, L) æqualis.*

Propositio igitur 47. l.1. hic redditur universalis.

Ab angulo recto C dimittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO sunt (*a*) tres proportionales, erit F ad sibi similem R, (*b*) ut AB prima ad BO tertiam. Rursum quoniam (*c*) BA, AC, AO sunt proportionales, erit F ad sibi similem L, ut (*d*) BA prima ad AO tertiam. Quia igitur est F ad R, ut AB ad BO, & F ad L, ut AB ad AO, erit quoque F ad R & L simul sumptas, ut (*e*) AB ad BO, AO simul sumptas. Sed AB duabus BO, AO æqualis est. Ergo etiam F duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per cor.2. p. 8. l.6.
(b) Per cor. 2. p. 20. l.6
(d) Per cor. 2. p. 20. l.6.
(e) Per 24. l.5.

Corollarium.

EX hac propositione facile dabitur quotcumque figuris similibus rectilineis quibuscumque una omnibus æqualis & similis, eadem prorsus methodo, qua probl. 1. scholii post 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonstratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6. (*Et pari ratione, per prob. 2. scholii ejusdem, dabitur figurarum similium differentia similis: hoc est, non tantum addi possunt, verum etiam subtrahi figuræ quævis similes, minor a majore, eadem methodo qua quadrata adduntur vel subtrahuntur in scholio citato.*)

PROPOSITIO XXXII.

V*IX habet usum, nec quidquam habet notabile.* (Est autem cor.8. p.26. prius, ne quis eam desideret.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

In æqualibus circulis vel eodem, anguli sive ad centra (ut ABC, FOD) sive ad peripheriam (ut ARC, FSD) eam inter se rationem habent, quam arcus (AKC, FGD) quibus insistunt. Idem intellige de sectoribus. Fig. 77.

Quod attinet ad angulos centri & sectores, demonstrabitur eodem prorsus modo, quo propositione 1. hujus libri demonstratum est triangula æque alta esse ut bases. Tantum ubi isthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29. lib. 3. (*Item pro E isthic, vertice trianguli DEF, hic ponitur O vertex anguli & sectoris DOF; pro triangulis vero isthic, substitue hic angulos ad centra B, O itemque sectores: & pro basibus arcus.*

Quoties enim pars quævis aliquota ex. gr. pars tertia DG, arcus DF, continetur in arcu AC; toties eadem pars aliquota DOG, anguli DOF, continebitur in angulo ABC. Et manifestum est quamlibet aliam partem aliquotam arcus DF & anguli DOF, in arcu AC & angulo ABC, æquali semper numero respective contineri. Ergo, per rationem æqualium indicium illud Tacquetianum, pag. 122. 123. erit angulus ABC ad angulum DOF, ut arcus AC ad arcum DF: Et eodem prorsus modo probabitur sectorem ABC esse sectorem DOF, ut arcus AC est ad arcum DF:)

Quoniam vero ad peripheriam anguli R & S dimidii (*a*) sunt angulorum ad centrum ABC, FOD, quod de his ostensum est, liquebit etiam de illis. (a) Per 20. l. 3.

Corollaria.

1. Angulus centri (BAC est ad quatuor rectos, ut arcus BC cui insistit, ad totam circumferentiam. Fig. 78.

Nam (*cum quatuor rectos, hoc est,* (b) *omnes angulos circa centrum A constitutos, metiatur tota circuli circumferentia, unum igitur angulum rectum BAF metietur totius circumferentiæ quadrans BF. Sed*) ut (*angulus*) BAC est ad rectum BAF, ita per hanc 33. arcus BC est ad quadrantem BF. Ergo (*c*) angulus BAC est ad 4. rectos, ut arcus BC est ad 4. quadrantes, hoc est ad totam peripheriam. (b) Per cor. 3. pr. 13. l. 1. cum sch. p. 23. l. 1. (c) Per 24. l. 5.

2. Inæqualium circulorum arcus IL, BC, qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra ut IAL, & BAC, sive ad peripheriam, sunt similes. *Et conversim.*)

Nam

Nam (*primo, ponentur anguli æquales ad centra*; *&*)

(a) Per cor. 1. arcus IL est ad suam peripheriam, ut (*a*) angulus IAL, hoc est ut BAC, ad 4. rectos; & arcus BC est ad suam pe-

[b] Per idem cor. ripheriam (*b*) ut idem angulus BAC ad 4. rectos. Ergo IL

(c) Per 11. l. 5. (*c*) est ad suam peripheriam, ut BC ad suam. Ergo (*d*) sunt similes arcus IL & BC.

(d) Per def. 4. l. 6. (*Si vero anguli æquales O, K fuerint ad circumferentias: fiant super iisdem arcubus anguli ad centra IAL,*

(e) Per 20 l. 3 & axio. 6. l. 1. *BAC*, (e) *eruntque hi etiam æquales: unde per primam partem arcus IL, BC similes erunt.*

Et e converso, inæqualium circulorum similes arcus BC, IL subtendunt angulos æquales, sive anguli isti sint ad centrum seu ad circumferentiam, uti ex ipsa figura & prop. 20. l. 3. satis patet,).

3. Duæ semidiametri (AB, AC) a concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL, BC. Patet ex coroll. 2.

4. *Ductis rectis BC, IL,*) Segmenta (BKC, IOL) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) similia sunt. (*Et conversim.*)

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam

(f) Per def. 4. l. 6 arcus BKC, IOL similes sunt. *Ergo* (f) *& segmenta BKC, IOL similia sunt.*

Item segmenta opposita similia sunt, propter arcus BC, IL similes.

Et e converso, segmenta similia BKC, IOL capiunt an-

(g) Per def. 4. l. 6. *gulos æquales K, O. Nam* (g) *propter similes arcus BKC, IOL, arcus oppositi BC, IL similes erunt, & anguli, K,*

[h] Per cor. 2 hujus. *O, super ipsis* (h) *æquales.*

Item, anguli in segmentis BC, IL sunt æqualium angulorum K, O (i) *complementa ad duos rectos, atque in-*

(i) Per 22 l. 3. *de æquales erunt.*

5. *Similia segmenta super eadem recta, vel æquali, sunt æqualia. Patet ex cor. præced. Schol. p. 21. l. 3. & axio. 7. l. 1. Continet autem hoc Corollarium propositiones 23. & 24. l. 3. a Tacqueto omissas. Prop. enim 23. ita effertur*: Super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia & inæqualia, ex eadem parte non constituentur. *Et prop. 24. ita*: Super æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

6. *Ex hac etiam prop. ejusque Corollariis deducitur angulorum conficiendorum & mensurandorum praxis facillima, prout in scholio post prop. 23. lib. 1. latius explicatur.*

Scholium,

Scholium. *Postulat hic locus, ut fidem libro quarto præstitam jam liberem, Elementi* 13. *propositionem* 10. *demonstrando, quæ ita se habet:* Quadratum lateris AB pentagoni ordinati ABCDE circulo inscripti, æquatur quadratis e latere hexagoni & e latere decagoni eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. *Ducta enim diametro AG, & ratio FB; a centro F lateri AB perpendicularis demittatur FH, quæ producta circulo occurrat in K: Illa arcum AKB, (hoc est* (a) *quintam partem totius circumferentiæ) bifariam dividet* (b) *in K. Junge BK, KA; & cum sit arcus AK pars decima totius circumferentiæ, erit AK recta,* (c) *latus decagoni ordinati huic circulo inscripti. A centro F, ipsi AK perpendicularis demittatur FN, quæ producta circulo occurrat in M; hæc arcum AMK bifariam dividet in M, & latus pentagoni BA secabit in L. Junge KL. Ob semiperipherias ABG, AEG æquales, & arcus ABC, AED æquales; erit arcus CG ipsius CGD, vel AKB dimidius; unde arc. CG = arc. AK = 2 arc. KM. Item, arc. CB = arc. AB = 2 arc. BK. Ergo arc. CG + arc. CB = 2 arc. MK + 2 arc. KB, hoc est, arc. BCG = 2. arc. BKM, & ang. BFG =* (d) *2. ang. BFM. Sed in triangulo ABF, ang. externus BFG =* (e) *ABF + BAF, hoc est (ob æquales AF, BF)* (f) *= 2 ang. ABF = 2 ang. BAF = (prius) 2 ang. BFM vel LFB. In triangulis igitur LFB, FAB, ob angulos BFL, BAF æquales, & angulum ad B communem,* (g) *etiam ang. BLF = ang. BFA, &* (h) *AB : BF : : FB : BL. Unde* (i) *rect. ABL = BFq. Porro, in triangulis ALN, KLN, ob angulos ad N rectos, & latera AN, NK* (k) *æqualia, & LN commune,* (l) *erit AL = LK, & ang. LAK = ang AKL. Sed & ang. KBA =* (m) *ang. KAB vel LAK sive AKL: Ergo in triangulis BAK, KAL, propter angulum ad A communem, & angulos ABK, AKL æquales, erit ang. AKB =* (n) *ang. ALK, & triangula BAK, KAL erunt similia: unde BA : AK : : KA : AL, & rect. BAL = AKq. Sed rect. ABL + rect. BAL =* (o) *ABq. Ergo ABq = BFq + AKq. Sed BF est circuli radius, & proinde* (p) *latus hexagoni ordinati circuli inscripti; & AK est latus decagoni ordinati eidem circulo inscripti. Ergo quadratum ex latere pentagoni ordinati æquatur quadratis e latere hexagoni ordinati & e latere decagoni ordinati, eidem circulo inscriptorum, simul sumptis. Q. E. D.*)

Fig. 79.

(a) Per 26 l. 3.
(b) Per 30. l. 3.
(c) Per 27. l. 3.
(d) Per 33. l. 6.
(e) Per 32.
(f) Per 5. l. 1.
(g) Per cor. 9. p. 32 l. 1.
(h) Per 4. l. 6.
(i) Per 17. l. 6.
(k) Per 3. l. 3.
(l) Per 4. l. 1.
(m) Per 29. l. 3.
(n) Per cor. 9. p. 32. l. 1.
(o) Per 2, l. 2.
(p) Per cor 1. p. 15. l. 4.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ LIBER UNDECIMUS.

NOBIS SEPTIMUS.

SEX libris primis subjungit Euclides elementa numerorum tribus sequentibus septimo, octavo & nono comprehensa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommensurabilibus adjungit. Nos a planis immediate transimus ad solida, de numeris seorsim tractaturi. Id opinor, discentibus commodius erit si elementa Geometriæ nulla alia tractatione interrupta, simul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propositiones hujus & sequentis libri, eos non septimum & octavum, sed undecimum & duodecimum appellabimus, ne, si ab ordine Euclideo ubique recepto discedamus, propositionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus solidorum, hoc est, corporum doctrina universa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

P*rima solidorum Principia* Undecimus *hicce Elementorum Liber proponit. Neque sane Corporum proprietates sine eo cognosci queunt: & si Mathematum partes plerasque omnes sine solidorum scientia aggrediamur, frustra erimus. Doctrina enim Theodosii Sphærica, Trigonometria etiam Sphærica, pars magna Geometriæ Practicæ, Staticæ, atque Geographiæ eidem innituntur; & quæ occurrent paulo difficiliora in Gnomonica, Sectionibus Conicis, Astronomia, Perspectiva, atque Optica universa, intellectis rite solidorum principiis, faciliora redduntur. Adeo ut qui Geometriæ Elementa, omissis fere & posthabitis hoc & sequenti libro, tradiderunt, eadem manca admodum, atque plane imperfecta tradidisse sint censendi.*

DEFI-

DEFINITIONES.

1. Solidum sive corpus est, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum est superficies.

3. Linea recta (AB) est ad planum (CC) recta sive perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (CA) in plano (CC) ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.) Fig. 1. l. 11.

4. Planum ad planum rectum sive perpendiculare est, cum omnes rectæ lineæ (LQ,) quæ communi planorum sectioni (XR) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ sunt alteri plano (ABCO.) Fig 2.

5. Si recta linea (OL) plano insistat non ad rectos angulos & a sublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP, jungaturque PO; angulus LOP dicitur inclinatio lineæ OL ad planum. Fig. 3.

6. Si planum RE) plano (OQ) non insistat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio est acutus angulus (ABC) qui continetur a rectis lineis (AB & BC) quæ in utroque plano ad communem sectionem (OE) ducuntur perpendiculares. Fig 4.

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli sunt æquales.

(*Et eodem modo, recta linea ad planum similiter inclinatur, ac alia recta ad idem vel aliud planum, si inclinationum anguli def. quinta descripti, fuerint æquales.*)

8. Parallela plana sunt, quæ in omnem partem producta, æqualibus semper intervallis distant.

9. Similes figuræ solidæ rectilineæ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Angulus solidus rectilineus est, qui pluribus quam duobus planis angulis BAC, CAO, OAB) non in eodem existentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur. Fig. 5.

11. Æquales solidi anguli sunt, qui intra invicem positi congruunt.

Quemadmodum angulus planus est inclinatio linearum, ita solidus angulus est inclinatio superficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Consule scholium post prop. 16. l. 3.

12. Prisma est figura solida, planis comprehensa, quorum adversa duo (OFE, ACB, sunt parallela, æqualia & similia. Fig 6. 8.

13. Pa-

Fig.8. 13. Parallelepipedum est solidum ex quadrilateris ex adverso parallelis comprehensum.

14. Si sex plana ex adverso parallela sint quadrata solidum iis comprehensum cubus erit.

(*15. Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus continentur.*

Hanc definitionem (Euclidi decimam) perperam omittit noster; atque inde propositionum 25. & 28. demonstrationes Iacquetianæ videntur esse minus accuratæ.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig.9. *REcta lineæ pars una (AC) nequit esse in subjecto plano (OE,) altera (CB) extra planum.*

Per se clarum est ex definitione plani & lineæ rectæ. Vide defin.7. & 4. l.1.

PROPOSITIO II.

Fig.10. *OMne triangulum in uno est plano. Et duæ rectæ se mutuo secantes in eodem plano sunt.*

Prima pars per se clara est, cum triangulum nihil sit aliud quam plana superficies tribus rectis comprehensa. Ex quo etiam (*& ex prop. præced.*) patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Fig.12. *SI duo plana (AB, CD) se mutuo secant; (EF) communis eorum sectio est recta linea.*

Patet ex definitiono plani. Licebit tamen sic demonstrare. Si EF sectio communis non est recta linea; ducatur in plano CD recta EOF, & in plano AB recta EQF. Duæ igitur rectæ EOF, EQF claudent spatium. Quod est absurdum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI recta (BA) duabus rectis (CAX, FAS) se mutuo secantibus perpendicularis existat; etiam plano per ipsas ducto perpendicularis erit. Fig. 12.

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF sit perpendicularis. Junge AQ, & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hæc producta, necessario secabit aliquam rectarum CAX, FAS, vel utramque, ubicumque tandem fuerit punctum Q. (*Si enim recta QO, rectarum alterutri FAS parallela sit; QO secabit* (a) *alteram CAX: si vero neutri illarum sit parallela, secabit* (b) *utramque.*) Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus est;

erit quad. BO Æ. (*c*) quad. BA
quad. AO.

Sed quia BQ ponitur recta plano FAC, ac proinde (*d*) rectum facit cum AQ angulum BQA; est

quad. BA (*e*) Æ. quad. BQ
quad. AQ.

Et quia angulus AQO per const. rectus est;

quad AO Æ. (*f*) quad. OQ
quad. AQ

Ergo quad. BO Æ. quad. BQ
quad. OQ
quad. AQ bis.

Ergo quad. BO majus est (*quadratis*) BQ & OQ; ac proinde (*g*) angulus BQO rectus non est. Ergo BQ non est recta (*h*) plano CAF. Liquet ergo quæsitum.

(a) Per cor. 2. sch. post. p. 31. l. 1.
(b) Per cor. 1. sch. post. p. 31. l. 1.
(c) Per 47 l. 1.
(d) Per def. 3. l. 11.
(e) Per 4.
(f) Per 7. eamd. l. 1.
(g) Per cor. 4 p. 47 l. 1.
(h) Patet ex def. 3. l. 11.

Scholium.

EX eo quod ponebatur BQ esse recta plano FAC; directe est demonstratum BQ non esse rectam plano FAC: ac proinde ex eo quod negaretur assertio theorematis, eadem assertio directe probata est. Hæc demonstratio quoad substantiam est Joannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

Fig. 13. *Si tres rectæ* (BA, CA, FA) *eidem rectæ* (AR) *ad idem punctum* (A) *sint perpendiculares; tres illæ erunt in uno plano.*

Sit enim, si fieri potest, earum una BA in alio plano RO, quod secet LQ planum duarum reliquarum CA, FA, recta AO. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter insistit duabus CA, FA, plano LQ recta (*a*) erit. Ergo cum AO rectum facit (*b*) angulum RAO. Sed etiam ex hyp. angulus RAB rectus est. Ergo anguli RAB & RAO æquales sunt. Quod est absurdum.

(a) Per præced.
(b) Per def. 1. l. 11

PROPOSITIO VI.

Fig. 14. *Lineæ rectæ* (AB, CD) *quæ eidem plano* (EF) *sunt perpendiculares, inter se sunt parallelæ.*

Postulari poterat ut per se notum; licebit tamen sic demonstrare.

Juncta BD, fac in plano FE, lineam DG normalem ad BD & parem BA, junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG æquantur BD, (*c*) BA; & anguli BDG, (*d*) DBA sunt recti. Ergo AD, BG (*e*) sunt æquales. Igitur triangula ABG, GDA sibi mutuo æquilatera sunt, ac proinde anguli ABG, ADG (*f*) æquales. Sed ABG (*g*) rectus est. Quare & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex constr. & CDG per definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD, recta est. Ergo CD cum AD, BD est in uno (*h*) plano. Sed etiam AB cum AD, BD (*i*) in uno plano est. Ergo AB, CD sunt in uno plano, Ergo cum anguli ABD, CDB sint (*k*) recti, erunt AB, CD (*l*) parallelæ. Quod erat demonstrandum.

(c) Per constr.
(d) Per def. 3. l. 11.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per 8. l. 1.
(g) Per def. 3. l. 11.
(h) Per præc.
(i) Per 2. l. 11.
(k) Per def. 3. l. 11.
(l) Per 29. l. 1. & def. 36. l 1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15. *Recta* (EF) *secans rectas* (AB, CD) *positas in eodem plano, in uno est cum ipsis plano.*

Postulari poterat. Qui volet sic demonstret.

(Si

(*Si recta EF non est in plano rectarum AB, CD; per puncta E, F in illo plano* (a) *ducatur recta EGF. Duæ igitur rectæ EF, EGF spatium includunt; quod est* (b) *absurdum.* (a) Per post. 1 (b) Per axiom. 13.

Aliter.) Planum rectarum AB, CD secet aliud planum per puncta E, F, Si jam EF non est in plano AB, CD, non erit EF communis sectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF (c) est linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt spatium. Quod est absurdum. (c) Per 3. l. 11.

Corollarium.

HInc sequitur, si EF secat parallelas AB, CD, in eodem esse cum ipsis plano; omnes enim parallelæ, (*hoc est, duæ quævis*) (*d*) sunt in uno plano. (d) Per def. 36 l. 1.

PROPOSITIO VIII.

S*I parallelarum (AB, CD) una (AB) plano (EF) sit recta; etiam altera (CD) eidem plano erit recta.* Fig. 14.

Poterat postulari. Si demonstratio quæritur, fere similis ea est demonstrationi propositionis 6.

(*Ductis BD, AD, in plano EF, fac GD normalem ad BD; & parem ipsi BA; junctisque GA, GB, ostendetur ut in demonstr. prop. 6. rectam GD etiam ad AD normalem esse. Ergo GD* (e) *recta erit plano ABD, hoc* (f) *est, plano CDBA. Quare angulus CDG* (g) *rectus est. Sed angulus CDB est etiam rectus, (utpote cum angulo ABD recto, duos rectos* (h) *conficiens.) Ergo CD* (i) *perpendicularis est plano GDB, seu EF. Quod erat demonstrandum.*) (e) Per 4. l. 11 (f) Per cor. præc. (g) Per def 3. l. 11. (h) Per 27. l. 1. (i) Per 4. l. 11.

PROPOSITIO IX.

R*Ectæ (AB, EF,) quæ sunt eidem rectæ (CD) parallelæ; licet non in eodem cum illa plano etiam sunt inter se parallelæ.* Fig. 16.

Quamvis postulari posset, licebit tamen sic demonstrare.

In plano parallelarum AB, CD, duc GK normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD, duc HK normalem ad CD, (*& junge GH.*) Ergo (*k*) CK recta est plano (k) Per 4. l. 11.

 GKH.

(a) Per 8. l.11. (b) Per 6. l.11. GKH. Ergo cum AG, EH sint parallelæ ad CK, erunt AG, EH (*a*) rectæ plano GKH. Ergo AG, EH, (*b*) sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO X.

Fig. 17. *SI duæ rectæ (AC, BC) sint parallelæ duabus rectis DF, EF, licet non sint in eodem plano, æquales angulos (C & F, comprehendunt,*

(c) Per 33. l.1. (d) Per præc. (e) Per axio. 1. (f) Per 33. l.1. (g) per 8. l.1. Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cum AC, FD sint parallelæ & æquales, etiam AD, CF (*c*) parallelæ sunt & æquales. Similiter ostendam BE, CF esse parallelas & æquales. Ergo etiam AD, BE sunt (*d*) parallelæ & (*e*) æquales. Æquantur (*f*) Ergo AB, DE. Cum igitur triangula BAC, EDF sibi mutuo sint æquilatera, anguli C & F (*g*) æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18. *AD planum* (infinitum) *datum* (*AB, a dato extra illud puncto* (*C*) *perpendicularem ducere.*

(h) Per 12. l.1. (i) per 11. l.1. (K). Per 12. l.1. Constr. In plano AB duc (*infinitam*) quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem (*h*) describe CE. Ad eamdem per E, in plano AB, perpendicularem (*i*) duc AEM. Tum ad AM ex C perpendicularem (*k*) demitte CG. Dico CG plano AB rectam esse.

Per G ponatur HG parallela ad DF.

(l) Per 4. l.11. (m) Per 8 l.11. (n) Per def. 3. l.11. (o) Per. 4. l.11. (P) Per def 3. l.11. (q) Per cor. 5 p. 32 l.1. (r) Per 29 l.1. Per constr. DE recta est ad CE & EM. Ergo DE recta (*l*) est plano CEM: adeoque & (*m*) HG. Ergo (*n*) CG recta est ad HG. Sed & CG ex constr. recta est ad EM. Ergo CG (*o*) recta est plano AB. Quod erat propositum.

(Corollarium. *Perpendicularis CG a puncto C ad planum AB ducta, brevissima est omnium rectarum quæ ab illo puncto ad planum duci possunt. Ducatur enim ab eodem puncto ad planum quævis alia recta CE, & jungatur EG: in triangulo CEG angulus EGC* (p) *rectus est; ergo angulus CEG est* (q) *acutus, ac proinde latus CE latere CG* (r) *majus est: & eodem modo demonstrabitur aliam quamvis rectam a puncto C ad planum ductam perpendiculari CG majorem esse. Ergo CG est omnium brevissima.*

PRO-

PROPOSITIO XII.

E*X dato plani* (*EF*) *puncto* (*A*,) *rectam ad datum planum erigere*. Fig. 19.

A quovis extra planum EF puncto D, fac DB ad planum (*a*) EF rectam. Junctaque BA, duc AC parallelam DB. Dico factum. Demonstratio patet ex 8. (a) Per praec.

Scholium.

PRactice per datum punctum (*K in plano dato EF*) perpendicularis ducitur dato plano, si norma OKN (*angulo suo recto K*) ad datum punctum, (*& latere OK ad datum planum ita*) applicetur (*ut super plano dato, latus OK circa latus alterum immobile KN, circumrotari queat: recta enim secundum KN ducta*, (b) *erit ad planum datum, ex dato puncto K, erecta perpendicularis*.) (b) Per 4. l. 11.

PROPOSITIO XIII.

L*Ineae rectae ex eodem puncto* (*C*) *ductae* (*DC, EC*,) *nequeunt ambae ad idem planum* (*AB*) *esse rectae*. Fig 20.

Alias enim per 6. forent parallelae. Quod fieri non potest. Fig. 2.
(Scholium. *Ex hac prop. demonstrari potest prop. 38. hujus l. 11. a Tacqueto omissa, quae ita se habet*: Si planum FR ad planum BO rectum fuerit, & ab aliquo puncto L in planorum alterutro FR ad alterum planum BO perpendicularis ducatur; ea in communem planorum sectionem XR cadet. *Ducatur enim a puncto L, communi sectioni XR perpendicularis LQ*; (c) *erit ea plano BO recta*. *Sed per hanc pr. ex eodem puncto L duae lineae rectae nequeunt ad idem planum OB esse rectae; adeoque linea recta LQ, quae sola a puncto L ad planum OB perpendicularis duci potest, cadet* (d) *in sectionem communem XR*.) (c) Per def 4. l. 6. (d) Per constr.

PROPOSITIO XIV.

S*I eadem recta* (*AB*) *ad duo plana* (*FG, LQ*) *perpendicularis est; plana erunt parallela*. Fig. 21.

(a) Per 8. l.11. (b) Per def. 3. l.11. (c) Per 29. l.1. (d) Per 34. l.1. (e) Per def. 8. l.11.

Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum C, ex quo ducatur CE parallela ad AB, occurrens plano LQ in E. Erit CE etiam (*a*) recta plano utrique FG, LQ. Quare si jungantur rectæ AC, BE, erunt anguli A, B (*b*) recti. Ergo AC, BE sunt (*c*) parallelæ. Ergo ACEB parallelogrammum est, ac proinde CE, quam jam ostendi utrique plano esse perpendicularem, æquatur (*d*) AB. Eodem modo ostendam omnes utrique plano perpendiculares esse æquales: Ergo plana (*e*) sunt parallela. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XV.

Fig.22.

SIrectæ duæ se mutuo tangentes (BA, CA) ad duas alias se mutuo tangentes (ED, FD) sint parallelæ; etiam plana per ipsas ducta erunt parallela.

(f) Per 9. l.11. (g) Per def. 3. l.11. (h) Per 27. l.1. (i) Per 4. l.11. (k) Per Præc.

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque GH, GI, parallelæ ad DE, DF. Erunt hæ (*f*) parallelæ etiam ad AB, AC. Cum igitur anguli IGA, HGA, sint (*g*) recti, erunt etiam (*h*) CAG, BAG recti. Ergo GA, quæ ad planum EF est recta, etiam recta (*i*) est plano BC. Ergo plana (*k*) BC, EF sunt parallela. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XVI.

Fig 23.

PLanum (EHFG) secans parallela plana (AB, CD,] in iis facit sectiones (EH, GF) parallelas.

(l) Per cor. 1 post. 31. l.1. (m) Per 1. l.11.

Si non, cum sint in eodem plano secante, convenient (*l*) alicubi in I. Quare cum totæ HEI, FGI sint (*m*) in planis AB, CD productis, etiam hæc convenient in I. Quod est absurdum, contra definitionem 8. hujus.

Fig.17. (n) Per hanc prop. (o) Per 10. l.1. (p) Per 34. l.1. (q) Per 26. l.1.

(Schol. *Si duorum planorum AF, BF cum plano tertio AE intersectiones AD, BE sint parallelæ; erit etiam mutua ipsorum AF, BF intersectio CF, ipsis AD, BE parallela. Secentur enim hæc tria plana planis parallelis ABC, DEF; eruntque* (n) *AB, BC, CA, ipsis DE, EF, FD respective parallelæ. Ergo* (o) *ang. ABC = DEF, & ang. BAC = ang. EDF. Sed & (propter parallelogrammum AE) erunt* (p) *AB, DE æquales. Ergo* (q) *& BC = EF, & CA = FD. Parallelas autem esse BC ipsi EF, & CA ipsi*

ipsi FD, ostensum prius. Ergo (a) *CF ipsis AD,* BE, *parallela est.)* (a) Per 33.

PROPOSITIO XVII.

P*Arallela plana rectas lineas* (BD & GH *proportionaliter secant.* Fig.24.

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, GD: (*ducatur*) item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD secans parallela plana, facit sectiones CF, DG (*b*) parallelas. Ergo est BC ad CD, ut (*c*) BF ad FG. Rursum triangulum BHG secans parallela plana, facit sectiones (*d*) BH, FI parallelas. Ergo est HI ad IG, ut (*e*) BF ad FG; hoc est, (quod jam ostendi,) ut BC ad CD. Quod erat demonstrandum. (b) Per pr. (c) Per 2. l.6. (d) Per præc. (e) Per 2. l.6.

PROPOSITIO XVIII.

S*I recta linea* (*FE*) *sit ad planum* (AB) *recta, omnia, quæ per ipsam ducuntur plana, sunt eidem plano* (AB) *recta.* Fig.25.

Ductum sit per FE planum aliquod GC faciens cum AB sectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD sectionem communem. Cum igitur etiam (*f*) FE recta sit ad CD; erunt KH (*g*) parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & HK rectæ (*h*) sunt plano AB. Ergo GC planum (*i*) plano AB rectum est. [f] Per hyp & def.3.l.11. (g) Per 29. l.1. (h) Per 8.l.11. (i) Per def.4.l.11.

PROPOSITIO XIX.

S*I duo plana* (*MF*, *GD*) *se secantia, sint ambo recta eidem plano* (AB;) *erit etiam communis illorum sectio* (KL) *recta plano* (AB.) Fig.26.

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB; ex def. 4. patet ex puncto L posse in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe quæ ex L esset in plano MF perpendicularis ad communem sectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD posse duci ex puncto L per-

 pen-

(a) Per 13. l. 11. pendicularem plano. Sed ex puncto L tantum (*a*) una potest duci perpendicularis plano AB. Ergo necesse est ut recta quæ ex L perpendicularis est plano AB, existat in utroque plano MF & GD, ac proinde sit ipsa planorum MF & GD communis sectio LK. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. *SI angulus solidus* (A) *tribus planis angulis* BAC, CAD, DAB) *continetur, horum duo quilibet reliquo sunt majores.*

Si tres plani sunt æquales; patet assertio: Si inæquales, maximus esto BAD. Hic nihilominus minor est duobus reliquis. Ex maximo enim BAD abscinde BAE parem BAC, fiantque æquales AC, AE. Per E ducatur recta occurrens ipsis AB, AD in B & D; junganturque BC, DC. Quoniam anguli (*b*) BAE, BAC æquales sunt, & latera BA, AE æqualia lateribus BA, AC, etiam bases BE, BC æquales (*c*) erunt. Quoniam vero BC, CD (*d*) majores sunt quam BD, ablatis æqualibus BE, BC, remanet CD major quam ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus (*e*) CA, AD. Ergo angulus (*f*) CAD major est quam EAD. Cum igitur BAC, par sit ostensus BAE. Erunt duo simul BAC, CAD majores toto BAD. Quod erat demonstrandum.

(b) Per constr.
(c) Per 4. l. 1.
(d) Per 20. l. 1.
(e) Per constr.
(f) Per 25. l. 1.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28. *PLani anguli, solidum angulum quemcumque componentes, quatuor rectis sunt minores.*

Esto solidus angulus A. Planis angulis illum componentibus subtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano existentes. Quo facto constituitur (*g*) pyramis, cujus basis est polygonum BCDEF, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt solidum A. Jam vero quia duo anguli ABF, ABC (*h*) majores sunt uno FBC, & duo ACB, ACD majores uno BCD, & sic deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L circa basim anguli simul sumpti, omnibus simul angulis baseos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baseos una cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos (*i*) quot sunt latera, sive quot triangula.

(g) Vide def. 1. l. 12.
(h) Per præc.
(i) Per theor. 2 sch. post 32. l. 1.

gula. Ergo omnes triangulorum circa basim anguli, una cum quatuor rectis, conficiunt amplius quam bis tot rectos quot sunt triangula. Sed iidem anguli circa basim, una cum angulis qui componunt solidum, conficiunt bis (*a*) tot rectos quot sunt triangula. Liquet ergo angulos solidum angulum A componentes, quatuor rectis esse minores. Quod erat demonstrandum. (a) Patet ex 32. l. I.

Corollarium.

EX hac & præcedenti satis colligitur, ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo sint majores, solidum angulum constitui posse.

Scholium.

EX hac eadem propositione demonstratur celebre theorema, tres tantum figuras planas ordinatas, & æquales, corpus ordinatum continere posse, nimirum æquilatera triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. Pentagona 12. Ac proinde quinque tantum sunt ordinata, seu regularia corpora. Pyramis, quæ 4. Octaedrum quod 8. Icosaedrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaedrum quod 12 æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicitur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonstr. Ex duobus æquilateris triangulis non potest constitui angulus solidus: ad hoc enim saltem (*b*) requiruntur tres. [b] Per def. 10. l. 11.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus, potest constitui angulus solidus pyramidis; ex quatuor, angulus solidus octaedri; ex quinque, angulus solidus Icosaedri; cum æquilateri trianguli anguli tum 3 tum 4 tum 5. sint 4. rectis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam vero tres anguli pentagonici (*c*) sunt 4. rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia constituere solidum angulum, nempe Dodecaedri. (c) Colligitur ex cor. 1 p 11 l. 4.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici solidum angulum cubi, per se patet. Atque ita quinque exsurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla esse alia sic ostenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos. Unus

enim

(a) Per cor. 12. p. 32. l. 1. enim facit duas (*a*) tertias recti, ac proinde sex tales efficient 12. tertias recti, hoc est rectos 4. Ergo, a sex æquilateris triangulis non poterit effici solidus angulus, multo minus a pluribus.

A quatuor quadratis, non posse constitui solidum angulum, ac multo minus a pluribus, per se patet.

Anguli pentagonici 4. sunt 4. rectis majores: Singuli enim efficiunt 6. quintas (*b*) recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus solidus, multo minus a pluribus.

(b) Per cor. 1. p. 11. l. 4.

Nec sane ex aliis figuris quibuslibet, ordinatis constitui poterit solidus angulus, Tres anguli hexagonici sunt 4. rectis æquales. Unus enim (*c*) facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciunt 12. tertias recti, hoc est 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit constitui solidus angulus, multo minus a pluribus.

(c) Per cor. 2. p. 15. l. 4.

Cum vero tres anguli hexagonici sint 4. rectis æquales; tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut heptagoni, octogoni, &c. 4. rectis majores erunt. Quare manifestum est reliquas figuras ordinatas omnes, esse ineptas ut solidum angulum constituant; adeoque præter jam dicta 5. nulla ordinata corpora dari posse.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 29.

SI fuerint tres anguli (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo sint majores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales (AD = AE = BF = BG = CH = CI;) fieri potest ut ex rectis DE, FG, HI) æquales illas jungentibus, triangulum constituatur.

Si rectæ jungentes fuerint æquales, patet ex iis triangulum constitui posse. Sint autem inæquales, & maxima sit DE: *si tamen* DE *minor fuerit duabus reliquis* FG + HI; *triangulum ex illis construi* (d) *potest. Est autem minor. Nam super recta* CH *fiat angulus* HCK *ipsi* B *æqualis, sitque* CK = CH, *& jungantur* KH, KI. *Et propter rectas* KC, CH *rectis* FB, BG *respective æquales, & ang.* KCH = *ang.* B, *erit* (e) KH = FG. *Et cum ang.* B + *ang.* HCI, *hoc est*, (f) *ang.* KCI *major* (g) *sit angulo* A, *latera autem* KC, CI *lateribus* DA, AE *æquantur respective; ergo basis* KI *basi* DE *major* (h) *est. Sed summa laterum* KH + HI (*hoc est* FG + HI) *major est* (i) *quam* KI; *& proinde multo major quam* DE. *Ergo &c.*

(d) Per 22. l. 1.
(e) Per 4. l. 1.
(f) Per constr.
(g) Per hyp.
(h) Per 24. l. 1.
(i) Per 20 l. 1.

Scho-

Scholium. *Sint tria triangula isoscelia ADE, BFG, CHI, quorum crura AD, AE, BF, BG, CH, CI sint inter se æqualia, & anguli verticales A, B, C simul sumpti sint quatuor rectis minores, ita tamen ut duo quilibet reliquo sint majores: a basibus autem DE, FG, HI constituatur* (a) *triangulum LMN, ita ut sit LM = DE, MN = FG, NL = HI; super quibus concipiantur triangulorum isoscelium latera bina quævis contigua in unam rectam coalescere, nempe CI & AD in PL, AE & BF in PM, BG & CH in PN; & ab angulis planis A, B, C, formabitur angulus solidus P; & æquabuntur rectæ PL, PM, PN. His præmissis, si triangulo LMN* (b) *circumscribatur circulus; perpendicularis PO ab angulo solido ad planum circuli demissa, in centrum cadet.* Fig 29, 30. (a) Per hanc pr. & 22. l. 1. (b) Per 5. l. 1.

Ductis enim OL, OM, ON; in triangulis rectangulis OPL, OPM, OPN, erit (c) *PLq = POq + OLq, PMq = POq + OMq, PNq = POq + ONq. Si igitur a quadratorum* (d) *æqualium singulis PLq, PMq, PNq, auferatur POq, restabunt æqualia OLq, OMq, ONq; atque inde æquales erunt OL, OM, ON. Ergo circulus transiens per L, M, N, centrum* (e) *habet in O.* (c) Per 47. l. 1. (d) Per ax. 15. l. 1. (e) Per 9. l. 3.

Porro, manifesta est propositionis veritas, sive triangulum LMN fuerit acutangulum, seu rectangulum, seu denique obtusangulum. Vide schol. p. 5. l. 4. & confer. fig. 5, 6, 7. ejusdem libri cum fig. 30. hujus.

Corol. ad Schol. præced. *Positis hujusmodi triangulis isosceliis ADE, BFG, CHI; si ex eorum basibus constituatur triangulum LMN; erit crurum æqualium quodvis AD (vel AE, vel BF, &c.) majus radio circuli circa triangulum LMN conscripti, Nam AD =* (f) *PL: & in triangulo rectangulo OPL, latus PL, angulo recto oppositum, majus* (g) *est quam OL quod opponitur* (h) *acuto.* (f) Per constr. (g) Per 19 l. 1. (h) Per cor 5. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXIII.

EX tribus angulis planis (A, B, C,) quorum duo quilibet reliquo sunt (*i*) majores, angulum solidum (P) constituere. Oportet autem (*k*) tres illos angulos quatuor rectis minores esse. Fig. 29. 30. [i] Ex p. 20. l. 11. (k) Per 21 l. 11.

Fac omnia angulorum latera (nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI) æqualia inter se. Junctis DE, FG, HI, constitue (l) *triangulum LMN (cujus latera LM, MN, NL, ipsis DE, FG, HI æquentur respective,) circa quod circulum* (m) *describe, cujus radius sit OL. Et cum angulorum A, B, C latera singula radio OL* (n) *sint majora; erit etiam ADq majus quam* [l] Per 22 l. 11. & 22. l. 1. (m) Per 5. l. 4. n Per cor ad schol. præced.

(a) Per Prob. 2. schol. p.4. l 1. quam OLq. *Inveniatur* (a) *OP latus quadrati quo ADq excedit OLq, & a centro O erigatur* (b) *OP circuli plano recta, junganturque PL, PM, PN. Dico factum. Cum enim angulus O in triangulo OPL rectus sit; erit* $PLq = $ (c) $POq + OLq = $ (d) ADq. *&* $PL = AD$. *Eodem modo demonstrabitur rectam PM ipsi AE æqualem esse: Et cum sit* $LM = DE$, *erit* (e) *ang.* $LPM =$ *ang.A. Et similiter ostendetur esse ang.* $MPN =$ *ang.B, & ang.* $NPL =$ *ang. C. Factum est igitur quod petebatur.*)

(b) Per 12. l. 11.
(c) Per 47. l.1.
(d) Per constr.
(e) Per 8. l.1.

PROPOSITIO XXIV.

Fig 31. *PLana parallelepipedum continentia* (1.) *sunt parallelogramma,* (2.) *quæ exadverso sunt similia, &* (3.) *æqualia.*

1. Pars. Planum AF secans plana BD, FH ex defin. 13. parallela, facit (*f*) sectiones BA, FE parallelas. Rursum planum AF secans plana AH, BG per def. 13. parallela, facit (*g*) sectiones AE, BF parallelas. Ergo BAEF parallelogrammum est. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana sunt parallelogramma.

(f) Per 16. l 11.
(g) Per eamd.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet AB, BC parallelas esse EF, FG, erunt (*h*) anguli ABC, EFG pares. (*Ergo parallelogramma BD, FH sunt* (i) *æquiangula*. Quare cum & latera alternis sunt (*k*) paria, (*hoc est*, $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$, & $DA = HE$;) similia (*l*) sunt parallelogramma adversa BD, FH. Eodem modo probatur de ceteris oppositis.

(h) Per 10. l.11.
(i) Per 27. & 34. l 1.
(k) Per 34. l 1.
(l) Per schol p.7. l.5. & def. 1. l.6.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

Junge AC, EG; & cum in triangulis ABC, EFG, latera AB, BC lateribus EF, FG respective (m) *æqualia sint, & angulus ABC sit angulo EFG* (n) *æqualis;* (o) *erit basis AC basi EG æqualis, & triangulum ABC triangulo EFG æquale. Cum vero parallelogramma opposita BD, FH* (p) *sint triangulorum illorum æqualium dupla, erunt etiam ista æqualia. Et eodem modo probabitur duo quævis alia opposita parallelogramma æqualia esse.*)

(m) Per 34. l 1.
(n) Per 10. l. 11.
(o) Per 4. l.1.
(p) Per 34. l 1.

Fig 32. Cor. (1. *Parallelepipedum (AB,) aut quodvis*) prisma sectum plano (CD) adversis planis (AS, RB) parallelo, sectionem habet similem & æqualem planis adversis. *Demonstrabitur eodem modo quo pars secunda ac tertia hujus prop.*

Cor. 2. *Eadem sectione parallelogramma lateralia (AF, SF, &c.) dividentur in partes* (q) *parallelogrammas (AN & CF, SN & DE, &c.)* (r) *similes partibus (SD, DB) in quas recta quævis lateralis (SB) eadem sectione dividitur.*

(q) Patet ex parte 1. hujus prop.
(r) Per 1 l.6. & def. 7. l.5.

Cor.

(Cor. 3. *Et præterea; si solidum plano adversis planis parallelo sectum, fuerit parallelepipedum; partes parallelogrammæ sibi invicem oppositæ, in quas dividuntur adversa plana lateralia, erunt* (a) *similes & æquales*.) (a) Patet ex par. 2. & 3. hujus prop.

PROPOSITIO XXV.

SI *parallelepipedum* (*AB*,) *aut quodvis prisma, plano* (*CD*) *secetur adversis planis parallelo; erit ut basis* (*ED*) *ad basim* (*DF*,) *ita solidum* (*AD*) *ad solidum* (*CB*.) Fig. 32.

Demonstrabitur eodem modo quo 1. 6.

(*Dividatur recta DB in æquales quotcumque partes, v. g. quatuor, DG, GH, HI, IB; & in basi DF, per divisionum puncta G, H, I, ducantur rectæ GK, HL, IM, baseos DF lateribus oppositis DN, BF parallelæ, & basis in quatuor* (b) *similia &* (c) *æqualia parallelogramma dividetur, nempe DK, GL, HM, IF; per quorum latera GK, HL, IM, transeant plana GO, HP, IQ, solidi CB, adversis planis CD, RB parallela, & dividetur illud in quatuor solida DO, GP, HQ, IR, singula* (d) *similibus & æqualibus numero & magnitudine planis comprehensa, ac proinde* (e) *æqualia. Quare planum DK & solidum DO sunt consequentium DF & CB similes* (f) *partes aliquotæ. Auferatur jam recta DG ex DS quoties poterit, puta bis, & relinquetur ST, ipsa DG minor; & a divisionum punctis V, T ducantur rectæ, baseos ED lateribus oppositis ES, ND parallelæ, & per illas ducantur plana, adversis solidi AD planis AS, CD parallela. Quoniam singulæ DV, VT ipsi DG æquales sunt; erunt* (g) *etiam parallelogramma singula NV, VX parallelogrammo DK similia & æqualia, & singula solida CV, VI solido DO (utpote quæ* (h) *similibus & æqualibus multitudine, & magnitudine planis cum illo continentur) etiam* (i) *æqualia. Sed propter rectam ST ipsa DG minorem, erit basis ET basi DK minor* (k) *& solidum AT solido DO minus; si enim utraque illorum solidorum super æqualibus planis AS, CD, intra invicem collocari supponantur, propter ST minorem quam DG, solidum AT parti solummodo solidi DO exæquabitur.*) *Quoties igitur planum DK continetur in antecedente DE, toties etiam solidum DO in antecedente DA continebitur. Et eodem modo ostendi potest, quascumque consequentium (baseos DF, & solidi CB) similes partes aliquotas, in antecedentibus (basi ED, & solido AD) æquali numero contineri.* (l) *Ergo basis ED erit ad basim DF ut solidum AD est ad solidum CB. Q. E. D.*

(b) Per 27. l. 1. & sch. p. 7. l. 5. cum def. 1. l 6.
(c) Per 36. l. 1.
(d) Per 24. l. 11. cum corollariis
(e) Per def 15. l. 11.
(f) Per def. 7 l. 5.
(g) Vide notas b, c, supra.
(h) Per præc. cum corollariis
(i) Per def. 15. l. 11.
(K) Per 1. l. 6.
[l] Per rationum æqualium judicium apud deff. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 33. AD datam rectam lineam (AB) & ad datum in ipso punctum (A,) constituere angulum solidum (AHIL ,) æqualem solido angulo dato CDEF .)

Nota, literarum quæ designant angulum solidum, primam esse ad punctum in quo est angulus. Si angulus solidus AHIL est ad punctum A, & CDEF ad punctum C.

(a) Per 11. l. 11. *A puncto quovis F in recta CF, demitte* (a) *FC plano DCE rectam, ducanturque rectæ DF, FE, FG, GD, GC. Fac AH = CD, & ang. HAI = ang. DCE, & AI = CE; atque in plano HAI, fac ang. HAK = ang. DCG, & AK = CG. Tum*
(b) Per 12. l. 11. *erige* (b) *KL rectam plano HAI, & sit KL = GF, ducaturque AL. Erit angulus solidus AHIL par dato CDEF. Nam*
(c) Per 4. l. 1. *junctis HK, IK, HL, IL, propter HA, AK ipsis DC, CG*
(d) Per axio. 3 & p. 4. l. 1. *respective æquales, & ang. HAK = ang DCG, erit* (c) *HK = DG. Et eodem modo, conferendo triangula IAK, ECG, ostendetur* (d) *KI = GE; & in triang. HKL, DGF,* (e) *HL*
(e) Per def. 3. l. 11 & p. 4 l. 1. *= DF; & in triang. IKL, EGF, IL = EF; & in triang. AKL, CGF, AL = CF. Triangula igitur AHL, CDF sunt*
(f) Per 8. l. 1. *sibi mutuo æquilatera, & proinde* (f) *æquiangula. Unde ang. HAL = ang. DCF. Et ob eamdem causam in triangulis sibi mutuo æquilateris AIL, CEF, est ang. LAI = ang. FCE. Sed & ang. HAI = ang. DCE per constr. Factum est igitur quod petebatur.*

PROPOSITIO XXVII.

Fig 34. A Data recta linea (AB ,) dato solido parallelepipedo (CD) simile & similiter positum parallelepipedum , (AK) describere.

Ex angulis planis BAH, HAI, BAI, qui æquales sint ipsis
(g) Per præc. *FCE, ECG, FCG, fac* (g) *angulum solidum A angulo solido C parem. Item, fit* (h) *FC : CE :: BA : AH, & CE : CG :: AH :*
(h) Per 12. l. 6. *AI, (& erit ex æquo* (i) *FC : CG :: BA : AI;) & perficiatur*
(i) Per 22. l. 5. *parallelepipedum AK. Erit hoc simile dato.*
Nam per constr. parallelogramma BH, FE; & HI, EG, &
(K) Per 24. l. 11. *BI, FG similia sunt; & horum ideo opposita* (k) *illorum oppositis. Ergo sex plana solidi AK similia sunt sex planis solidi CD;*
(l) Per def. 9. l. 11 *ac proinde* (l) *AK, CD sunt solida similia.)*

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Planum per adversorum planorum diametros (AC, EG) transiens, parallelepipedum secat in duo æqualia prismata . Fig. 31.

Quoniam (*a*) BG, BE sunt parallelogramma; CG, AE æquidistant (*hoc est parallelæ sunt*) eidem BF. Ergo & (*b*) inter se sunt parallelæ, ac proinde in uno sunt plano. Ergo rectæ AC, EG (*c*) in uno sunt plano. Jam vero planum per illas ductum secare parallelepipedum in duo prismata æqualia sic ostendo. (a) Per 4. l. 11. (b) Per 9. l. 11. (c) Per 7. l. 11.

Intelligatur prisma AEGCDH supra planum suum EACG ita constitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifestum est tum adhuc fore inter parallela plana BADC, FEHG. Tum vero necesse est ut D cadat in B, H in F. Cadat enim D extra B si fieri potest, in N. Angulus BAC æquatur (*d*) angulo DCA. Sed DCA æquatur NAC, (est enim unus idemque angulus.) Ergo BAC & NAC æquales sunt: quod est absurdum. Ergo D incidit in B; & pari de causa H in F. Ergo prisma AEGCDH congruit prismati ACGEFB, ac proinde (*e*) æqualia sunt. (d) Per 47. l. 1. (e) Per axio. 7.

(Tacqueti demonstratio parallelepipedis quidem rectis convenit, quorum scil. plana lateralia sunt basibus recta; & forte etiam ad unius aut alterius speciei obliqua accommodari potest. Cum vero in propp. seqq. hujus & proximi libri, supponatur hæc demonstratio parallelepipeda quomodocumque obliqua extendere; ad accuratius Euclidis ipsius ratiocinium hic necessario recurrendum est, quo ostenditur omnia omnino parallelepipeda quæ secantur a plano AG, per adversorum planorum diametros parallelas AC, EG transeunte, in duo æqualia (addo, & similia) prismata secari.

Est enim triangulum ABC *triangulo* ADC (f) *æquale*, & (*ob angulos æquales* B (g) & D, BAC (h) & DCA; BCA & DAC) *etiam* (i) *simile*; & *ob eamdem causam triangula* EFG, EHG *sunt æqualia & similia*. *Æqualia etiam & similia sunt* (k) *parallelogramma sibi invicem opposita* AF & CH, *itemque* BG & AH; *atque est* AG *utrique prismati commune*. *Prismata igitur* ABCGEF, ADCGEH, *continentur a similibus & æqualibus multitudine*, & *magnitudine planis*, & *proinde sunt* (l) *similia & æqualia*. *Q. E. D.* (f) Per 34. l. 1. (g) Per eamd. (h) Per 27. l. 1. (i) Per 4. l. 6. (k) Per 24. l. 11. (l) Per def. 15. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Fig 35 & 36. *Parallelepipeda (FEAGKIMC & FEBHLOMI) quæ eamdem habent basim (EFIM) & altitudinem eamdem, ac proinde existunt inter parallela plana (EFIM, GAOL,) æqualia sunt.*

Vel enim existunt inter lateralia parallela plana EAOM, & FGLI, vel non. Esto primum. Ex. 24. huius, & 8.
Fig.35. l. 1. patet triangula AEB, CMO, item GFH, KIL sibi mutuo æquilatera, & æquiangula esse. Quare ut in præcedenti, ostendam prismata CMOLIK, AEBHFG sibi mu-
(a) Per axio.7. tuo imposita congruere, ac proinde (a) æqualia esse. Quare addito communi solido FEBHKCMI, tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

(Aliter. *In parallelogrammis AEMC, BEMO, latera op-*
(b) Per 34 l.1. *posita sunt* (b) *æqualia, hoc est, AE = CM, BE = OM, AC = EM = BO; & ablata communi recta BC, AB = CO. Ergo triangula ABE, COM sunt sibi mutuo æquilatera, &*
(c) Per 8. l.1. *proinde* (c) *æqualia, & eodem modo ostendetur triangula FGH, IKL æqualia esse: opposita autem parallelepipedorum*
(d) Per 24. l.11. *plana sunt* (d) *æqualia, nempe AF = CI, & BF = OI; & AK = EI = BL; unde ablato communi BK, erit AH = CL. Quare prismata AE HFG, CMOLIK a similibus planis numero*
(e) Per def. 15 l.11. *& magnitudine æqualibus continentur, & proinde* (e) *æqualia sunt. Commune apponatur solidum cujus basis est FM & planum o positum BK, & tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBH OMI æqualia erunt. Q. E. D.*)

Fig 36. Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR non inter eadem lateralia plana parallela existens cum parallelepipedo FEAGKCMI. Quoniam ex hypothesi GK, AC, RP, QX sunt in uno plano ad basim EFIM parallelo; RP, QX secent GK in L & H, AC vero in O & B; junganturque EB, MO, FH, IL. Facile ostensu est plana solidum FEBHLOMI continentia, parallelogramma esse ex adverso æquidistantia. (*Nam adversa plana quadrilatera solidi istius sunt in iisdem planis cum oppositis parallelepipedorum*
(f) Per 24.l.11. *AFIC, QFIR planis, & proinde* (f) *parallela sunt. Solidi enim BFIO quadrilatera opposita BEMO, HFIL sunt respective in iisdem planis cum oppositis ACME, GKIF planis parallelepipedi AFIC; & ejusdem solidi BFIO quadrilatera opposita BEFH, MOLI sunt in iisdem planis respective cum*

oppo-

oppositis planis QEFX, MIPR parallelepipedi QFIR est vero parallelogrammum EI, solido cum parallelepipedis commune, & quadrilaterum BOLH est in plano ipsi EI parallelo per hypothesim. Patet igitur solidum BFIO comprehendi a planis quadrilateris ex adverso parallelis,) adeoque solidum illud (*a*) esse parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI, sunt æqualia. Ergo etiam sunt æqualia inter se. Quod erat dem.

(a) Per def. 13. l. 11.

Scholium.

HÆc propositio similis est propositioni 35. libri 1. affirmat enim de solidis, quod illa de planis. Quare similis etiam erit reliquorum casuum demonstratio.

PROPOSITIO XXXI.

P*Arallelepipeda super æqualibus basibus (AO & EG) & in eadem altitudine (S) sunt æqualia.* Fig. 37.

Habeant parallelepipeda primo latera ad bases normalia. Ad latus FG productum, fiat parallelogrammum GMKH æquale ac simile parallelogrammo AO: perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipsi KH in Q & L. Jam vero intelligantur super GK, GQ, GP constitui parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta, altitudo autem omnium communis sit S. Solidum EGS est ad solidum GPS, ut EG (*b*) ad GP; hoc est, (quia EG, AO per hyp. æquantur,) ut AO ad GP; hoc est, per constr. ut GK ad GP; hoc est, ut (*c*) GQ ad GP; hoc est (*d*) ut solidum GQS est ad idem solidum GPS. Quoniam igitur solida EGS, & GQS eamdem habent rationem ad solidum GPS, erit solidum EGS (*e*) æquale GQS; hoc est solido (*f*) GKS, hoc est, (quia bases GK, AO sunt (*g*) æquales & similes,) solido (*h*) AOS. Quod erat propositum. Per totum discursum solida accipiuntur recta.

(b) Per 25. l. 11.
(c) Per 35. l. 1.
(d) Per 25. l. 11.
(e) Per 9 l. 5.
(f) Per 29. l. 11.
(g) Per constr.
(h) Per def. 15. l. 11.

Habeant deinde parallelepipeda data EGS, AOS latera ad bases EG & AO obliqua. Fiant super EG, AO parallelepipeda, quorum latera sint ad bases recta in altitudine S. Hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem sint paria inter se, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 38. **P** *Arallelepipeda quævis æque alta, sunt inter se ut bases.*

Bases sint GO & A, (*& altitudo communis sit* K.) Super
(a) Per 44 l. 1. CO fac (*a*) parallelogrammum OE par ipsi A, (*in angulo O E æquali dato G.*)

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK,
(b) Per 25. l. 1. Ergo (*b*) parallelepipedum OEK est ad parallelepipedum BCK, ut basis OE ad basim BC; hoc (*c*) est, ut basis A ad basim
(c) Per contr. BC. Sed quia bases OE & A sunt æquales, parallelepipeda
(d) Per præc. OEK & AK (*d*) æqualia sunt. Ergo etiam parallelepipedum AK est ad parallelepipedum BCK, ut basis A ad basim BC. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

QUod hic de parallelepipedis ostensum est, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuslibet prismatibus in corollario 1. post prop. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig 39. **S** *Imilia parallelepipeda (HA & CM) sunt in triplicata ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sunt parallelepipeda AH, CM similia. Ergo omnia
(e) Per def. 9. l. 11. ipsorum plana similia (*e*) sunt; adeoque AB ad BC (*f*) est ut EB ad BO; & ut FB ad BG, sic EB ad BO.
(f) Per def. 1. l. 6. Insuper & anguli (*g*) planorum æquales sunt. Collocen-
[g] Per eamd. tur sic igitur solida AH, CM, ut æquales anguli CBO ABE sint oppositi (*in eodem plano*) & latera AB,
(h) Patet ex 13. & 14. l. 1. CB in directum; tum vero etiam (*h*) EB, OB (*itemque FB, BG*) in directum erunt. Cogitentur iam super
(i) Per 25. l 11. planis EC & CO facta solida, sic ut solida KB, HA sint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum
(K) Per 1. l. 6. similiter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA est ad solidum
(l) Per eamd. KB (*i*) ut AE ad EC; hoc est, ut (*k*) AB ad BC; hoc est, (ut per hyp. ostendi supra,) ut EB ad BO; hoc (*l*) est, ut

EC

EC ad CO; hoc est, ut solidum (*a*) idem KB ad solidum PO. Continuant ergo eamdem rationem tria solida HA, KB, PO. Jam vero solidum KB est ad solidum PO, ut basis EC ad basim CO; hoc est, ut EB ad BO; hoc est, ut (*b*) FB ad BG; hoc est, ut planum FC ad planum CG: hoc est, ut idem rursus solidum PO ad CM solidum. Quatuor ergo solida HA, KB, PO, CM, sunt continue proportionalia. Ergo ratio primi HA ad quartum CM est (*c*) triplicata rationis primi HA ad KB secundum; hoc est, rationis (*d*) AE ad EC; hoc est (*e*) rationis homologorum laterum AB ad BC. Quod erat demonstrandum.

(a) per 15.l.11.
[b) Ostendi supra ex hyp.
(c) Per def. 10.l.5
(d) Per 25.l.11
(e) Per 1.l.6.
Fig. 39. & 40.

(Aliter. *Similium parallelepipedorum HA, QS, sint latera homologa AB & RS, EB & TS, FB, & VS. Dico solidum HA esse ad solidum QS in triplicata ratione AB ad RS.*

Producantur AB, EB, FB ad C, O, G, ut sint BC, BO, BG rectis RS, TS, VS respective aquales; & compleatur parallelogrammum CO & parallelepipedum CM. Et propter ang: OBC = (f) *ang. ABE* = (g) *ang. RST, & latera BC, OB lateribus RS, TS respective* (h) *aqualia, parallelogramma OC, RT erunt similia &* (i) *aqualia. Eodem modo similia & aqualia erunt parallelogramma CG, RV; atque etiam OG TV: unde & bis opposita parallelogramma, (nempe bina quaelibet, planis similibus & aequalibus opposita in utroque solido)* (k) *similia & aqualia erunt. Sunt* (l) *igitur solida QS, CM similia & aqualia; ac proinde* (m) *solida HA, CM similia erunt, & AB : BC :: EB : BO :: FB : BG. Super basibus EC, CO perficiantur parallelepipeda BK, PO ejusdem altitudinis cum AH. Erit itaque AB : BC vel* (n) *RS :: EB : BO vel ST :: FB : BG vel SV; hoc est,* (o) *AE : EC : E.. : CO :: FC : CG: hoc est,* (p) *AH : BK : : BK : PO :: PO : CM vel QS. Ergo* (q) *AH est ad QS in triplicata ratione AH ad BK. Sed AH : BK : :* (r) *AE : EC ::* (s) *AB : BC vel RS. Ergo* (t) *solidum AH est ad simile solidum QS in triplicata ratione lateris AB ad sibi homologum latus RS. Q.E.D.*

Cor. 1. *Hinc si fuerint quatuor lineae rectae continue proportionales; ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super prima descriptum, ad parallelepipedum simile similiterque descriptum super secunda; & proinde datis parallelepipedorum similium HA, CM, lateribus homologis AB, BC, invenietur illorum ad invicem proportio, faciendo AB, BC, X, Y, ∺. Erit enim HA : CM : : AB : Y. Quare etiam, datis solidis HA, CM, & ipsius HA latere quovis AB; alterius solidi latus homologum BC erit duorum mediorum* (u) *proportionalium prius inter AB & Y.*)

(f) Per 15.l.1.
(g) Per hyp & def. 1.l.6.
(h) Per constr.
(i) Per axio 7.
(k) Per 24.l.11.
(l) Per def. 15.l.11
(m) Per hyp & def. 9.l.11.
(n) Per const.
(o) Per 1.l.6.
(p) Per 25 l.11.
(q) Per def. 10.l.5.
(r) Per 25.l.11.
(s) Per 1.l.6.
(t) Per 11.l.5.
(u) Vide p.13 l.6.

Cor. 2. *Hinc corrigendus est eorum error, qui solidorum*

rum similium eamdem ac laterum esse rationem opinantur. Lineæ enim duplæ cubus non est tantum duplus, sed octuplus cubi alterius. Et lineæ triplæ cubus non est tantum triplus, sed vigecuplus septuplus cubi alterius. Nam 1, 2, 4, 8 ∺ & 1, 3, 9, 27 ∺. Et ita de corporibus quibuscumque similibus est censendum; ut deinceps patebit.

Cor.3. *Hinc quoque pendet celeberrimum illud de cubo duplicando Problema: de quo infra; ad calcem lib. 12. Ubi etiam ostendetur, quo methodo cubi, vel corpora quævis similia, in data ratione augeri vel diminui possunt.*

Scholium. 1. *Cum cubi sint similia solida parallelepipeda, & proinde sint in triplicata ratione laterum suorum; inde fit ut ratio triplicata quantitatum quarumvis, per rationem cuborum earumdem quantitatum sæpissime designari solet. Sic ex. gr. ratio triplicata rationis A ad B, sæpe denominatur ratio A*cub. *ad* Bcub. *vel Ac ad Bc.)*

Scholium 2.

Quod hic de parallelepipedis ostensum est, in libro 12. demonstrabitur de pyramidibus propos.8. de quibuslibet prismatibus coroll.2. post p.9. de conis, & cylindris p.12. de sphæris p.18.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig.40. *Si parallelepipeda (QS, CK) æqualia sunt; reciprocant bases & altitudines, (hoc est, basis RT est ad basim FK, ut reciproce altitudo FC ad altitudinem SV.)*

Et si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.

1. Pars. Sint primo latera ad bases recta. Si jam solidorum QS, CK altitudines sint pares res patet. *(Nam propter æquales altitudines,* (a) *erunt parallelepipeda ut bases: atqui ista* (b) *sunt æqualia; ergo & bases erunt æquales, & proinde eadem est ratio æqualitatis inter altitudinem parallelepipedi prioris, & altitudinem posterioris, ac inter basim posterioris & basim prioris.*

(a) Per 32. l. 11. b) Per hyp.

Si altitudines sint inæquales, a maiori FC, abscinde FE parem SV: & per E duc planum EL ad FK parallelum. Basis RT est ad basim FK ut solidum (c) QS ad solidum EK; hoc est, quod ex hyp. paria sint solida QS, CK,) ut solidum CK ad EK solidum, hoc est, ut (d) CG ad EG; hoc est, ut (e) CF ad EF; hoc est, ex constr. ut CF reciproce ad VS. Quod erat demonstr.

(c) Per 32. l. 11. [d] Per 25. l. 11. (e) Per 1. l. 6.

Sint

Sint deinde latera ad bases obliqua. Erigantur super iisdem basibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua (a) parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent bases & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonstrandum. (a) Per 30. l. 11.

2. Pars (*Sint latera ad bases recta, & altitudines æquales. Cum igitur bases & altitudines jam ponantur reciprocæ; ob harum æqualitatem, æquabuntur & illæ; ac* (b) *proinde ipsa etiam parallelepipeda.* (b) Per 31. l. 11.

Deinde,) sint altitudines inæquales, lateràque ad bases recta; & ex majori CF, ipsi VS sume parem EF. Solidum QS est ad solidum EK, ut (c) RT ad FK; hoc est, ex hyp. ut CF ad VS; hoc est, ex constr. ut CF ad EF; hoc est, ut (d) CG ad EG; hoc est, ut solidum (e) GK ad solidum idem EK. Ergo solida QS & CK eamdem habent rationem ad EK. Ergo sunt paria. Quod erat demonstrandum. (c) Per 32. l. 11. [d] Per 1. l. 6. [e] Per 25. l. 11.

Et cum parallelepipeda obliqua sint rectis æque altis & super iisdem basibus (f) *æqualia; illa etiam, si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.*) [f] Per 30. l. 11.

Corollaria.

QUÆ de parallelepipedis demonstrata sunt Prop. 29. 30. 31. 32. 33. 34. etiam conveniunt prismatis triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur, Fig. 41.

1. Prismata triangularia æque alta sunt ut bases A, B. (*Et proinde, si eamdem vel æquales habeant bases, & eamdem altitudinem, æqualia sunt.*)

2. Si similia fuerint, eorum proportio triplicata est proportionis laterum æqualibus angulis oppositorum (*Et proinde corollaria prop. 33. ad illa applicari possunt.*)

3. Si æqualia sunt, reciprocant bases & altitudines: & si reciprocant bases & altitudines, æqualia sunt.

Scholium.

QUod hic propos. 34. ostensum est de parallelepipedis, demonstrabitur in libro 12. de pyramidibus p. 9 de prismatis quibuscumque coroll. 3. post p. 9. de conis & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

V*Alde prolixa, servit sequenti, quam sine illa demonstrabimus.*

PROPOSITIO XXXVI.

Fig 42. *Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A , B , C) factum æquatur parallelepipedo (IN) facto a media (B) & æquiangulo priori .*

Parallelepipedi DH basis FD habeat latus EF æquale A , & latus alterum ED æquale C : latus vero EG basi insistens, æquale mediæ B . Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A , B , C . Parallelepipedi deinde IN tria latera LX , IX , XM (ac proinde omnia reliqua) sint æqualia mediæ B ; & angulus solidus X sit æqualis angulo solido E . Erit parallelepipedum IN factum ex media B , & priori æquiangulum . Dico etiam esse æquale .

Cum enim per hyp. & constr. sit ut FE ad LX : ita reciproce IX ad DE, erunt (*a*) bases DF , IL æquales . Jam quia anguli solidi ad E & X sunt æquales ; si ponantur intra invicem , (*b*) congruent ; & ob æqualitatem rectarum EG , XM , puncta M , G coincident . Quare una erit utriusque solidi altitudo perpendicularis , nempe a punctis M , G jam congruentibus, in planum baseos demissa . Solida (*c*) igitur DH , IN æqualia sunt . Quod erat demonstrandum .

(a) Per 14. l. 6.
[b] Per def 11. l. 11.
[c] Per 31. l. 11.

Scholium .

HIC porro observabimus , id quod magnum habet usum , ex tribus lineis quomodocumque inter se (*d*) ductis ejusdem magnitudinis solidum (*parallelepipedum rectum, seu planis rectangulis comprehensum* gigni .

(d) Vide sch. 1 p. 40 l. 11.

ABC. CAB. BCA.
1 2 3

In schemate hic apposito , duæ primæ litteræ designant basim ; tertia altitudinem . Comparemus primum cum secundo .

Basis AB est ad basim CA per 1. 6. ut B latus ad C latus : hoc est , reciproce ut B altitudo ad C altitudinem . Ergo per p. 34.

ABC. Æ. CAB.

Eodem modo ostendes primum tertio , & tertium secundo esse æqualia .

PROPOSITIO XXXVII.

Parallelepipeda similia, similiterque a lineis proportionalibus descripta , etiam ipsa sunt proportionalia : & e converso.

Patet

Patet ex 34. l. 5. Rationes enim parallelepipedorum, per 33. hujus, erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Conversa patet ex 35. l. 5. (*Rationes enim parallelepipedorum ex hypothesi æquales, (a) triplicatæ sunt rationum homologorum laterum, a quibus parallelepipeda similia similiter describuntur: & proinde horum laterum rationes (b) erunt æquales.*) (a) Per 33 l. 11. [b] Per 35. l. 5.

Propositio vera est de quibuscumque similibus corporibus, quæ patebit l. 12. triplicatam habere laterum rationem.

(Corol. *Hinc deducitur ratio multiplicandi & dividendi radices cubicas. Si nempe multiplicentur inter se quantitates quæ sub radicis cubicæ signis sunt, & producto præfigatur ejusdem radicis cubicæ signum; habebitur datarum radicum cubicarum productum. Exempli gr, sit* $\sqrt{}$ c5 *multiplicanda in* $\sqrt{}$ c4: *producetur* c20. *Nam ex multiplicationis definitione, debet esse unitas ad multiplicantem (sive* $\sqrt{}$ c4) *ut est multiplicandus (seu* $\sqrt{}$ c5) *ad productum. Ergo per hanc prop erit cubus unitatis ad cubum multiplicantis, ut cubus muliplicandi est ad cubum producti: hoc est, pro numero producti ponatur P, erit* 1.4 :: 5. *Pc. Sed* 1.4 :: 5. 20. *Ergo Pc* = 20, *&* P = $\sqrt{}$ c20.

E similiter, ex divisionis definitione ostendetur, quod $\sqrt{}$ c20 *divisa* $\sqrt{}$ c5 *exhibebit quotum* = $\sqrt{}$ c4. *Vide cor.* 1. *p.* 22. *l.* 6.

E universaliter, quantitatum radicalium ejusdem cujusvis ordinis sive speciei, facta (vel quoti) habentur, multipliando (vel dividendo) quantitates quæ sub signis radicalibus sunt, & producto (vel quoto) idem signum radicale præfigendo.

Propositionem 38. *jam supra demonstravimus, in schol. p.* 13. *hujus l.* 11. *Sequitur.*

PROPOSITIO XXXIX.

SI solidi parallelepipedi (AB,) eorum quæ ex adverso planorum (AC, DB) latera, nempe AE, FC, AF, EC: & DH, GB DG, HB) bifariam secta sint: per sectiones autem plana (ILQO, PKMR) sint extensa; planorum communis sectio (ST,) & solidi parallelepipedi diameter (AB,) bifariam se mutuo secabunt. Fig. 43.

Ducatur rectæ SA, SC, TD, TB. Et propter bisectas DG, HB, DI, GB, ac rectam RP ipsis DG, HB, rectamque OQ

 ipsis

(a) Per 33. l. 1. *ipsi DH, GB* (a) *parallelam. dividetur parallelogrammum GH in quatuor æqualia parallelogramma, toti & sibi invicem* (b) *similia & similiter posita. Quare OR, PQ sibi mutuo imposita congruent, & DT = (c) TB. Parallelogramma etiam OR, PQ, angulos ODR, PBQ cum simili sibi ipsis parallelogrammo GH communes habentia, circa eandem diametrum* (d) *existunt, & proinde DTB est* (e) *linea recta. Eodem modo ASC recta linea est, & AS = SC. Porro AD parallela & æqualis est* (f) *ipsi FG, atque FG parallela & æqualis est ipsi CB: ergo* (g) *AD, CB sunt parallelæ & æquales; unde & AC, DB, quæ eas jungunt, sunt* (h) *parallelæ & æquales, ac proinde earum dimidiæ AS, BT æquales erunt; & præterea AB, ST sunt in* (i) *eodem plano ABD. In triangulis itaque ASV, BTV, propter angulos AVS, BVT ad verticem oppositos, & proinde* (k) *æquales, & angulo alternos ASV, BTV; & proinde* (l) *æquales, & latera AS, BT æqualia; omnia reliqua erunt* (m) *æqualia, & SV = VT, & AV = VB. Ergo communis sectio ST & diameter AB se mutuo bifariam secant. Q.E.D.*

Corol. *Hinc in omni parallelepipedo, diametri omnes se mutuo bifariam secabunt in uno eodemque puncto V.*)

(b) Per 27. & 34. l. 1. eum def. 1. l. 6.
(c) Per axiom. 7. l. 1.
(d) Per 26. l. 6.
(e) Per def. 17. l. 1.
(f) Per 24. l. 11 & 34 l. 1.
(g) Per 9. l. 11 & axiom. 1
(h) Per 33. l. 1.
(i) Per cor. p. 7. l. 11.
(k) Per 15. l. 1.
(l) Per 27. l. 1.
(m) Per 46. l. 1.

PROPOSITIO XL.

Fig. 44. & 25.

SI fuerint duo prismata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC & IKLPXQ,) quorum unum basim habeat parallelogrammam (OB) duplam baseos alterius (IKL) quæ triangula sit; prismata erunt æqualia.

Nam si perficiantur parallelepipeda KR & CH, erunt hæc (n) æqualia ob basium CA, MK, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam prismata ipsorum (o) dimidia æqualia erunt. Quod erat demonstrandum.

(n) Per 31. l. 11.
(o) Per 28. l. 11.

(*Sunt nempe hæc duo prismata triangularia, æqualium parallelepipedorum per diagonales sectorum dimidia. Hoc tantum interest, quod in posteriore sectio fit per baseo diagonalem, in priore non item.*)

Scholium 1.

EX hactenus demonstratis habetur dimensio prismatum triangularium, & (*ejusmodi*) quadrangularium (*quorum adversa plana quadriangularia quæcumque sunt parallela,*) seu parallelepipedorum, si nimirum altitudo ducatur in basim [. Ut si altitudo sit 10. pedum, basis vero pedum qua-

quadratorum 100. (mensurabitur autem basis per schol. p. 36. vel 41. l. 1) multiplica 10. per 100. proveniunt 1000. pedes cubici pro soliditate prismatis dati.

Demonstratio facilis est: Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in basim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in basim ducta, cum per 31. æquale sit parallelepipedo recto super eadem basi ad eamdem altitudinem constituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producitur ex altitudine in totam basim; semissis parallelepipedi, (hoc est, prisma triangulare, per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam basim, triangulum nempe ILK. Fig. 47.

(Scholium 2. *Cum prismata polygona in triangularia resolvi possint, vel etiam ad triangularia æqualis baseos & altitudinis* (a) *reduci; quæ igitur de prismatis triangularibus traduntur in corollariis p. 34. & in schol. 1. pr. hujus 40 de quibuscumque prismatis polygonis vera sunt. At cum Tacquero visum fuerit illa omnia ex iis, quæ in lib. 12. de pyramidibus demonstrantur, derivare; non opus est ut eadem hic aliunde deducendo, tyronibus moram injiceremus.*)

(a) Per 25. l. 6.

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ
LIBER DUODECIMUS.
NOBIS OCTAVUS.

QUOD in libris præcedentibus hactenus præstare conati sumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem ac breviorem methodum revocaremus; id in primis præstandum erit in hoc libro duodecimo, cujus doctrina cum maxime sit necessaria, demonstrationes adeo sunt prolixæ, ut tyrones in desperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propositum nobis est; ut tamen a rigore Geometricæ demonstrationis non recedamus. Quod utrum simus assecuti, lector intelliget, si hæc nostra cum Euclidea prolixitate contulerit.

POstquam vero Euclides libro priore solidorum elementa exposuisset, & corporum facillimorum, utpote superficiebus planis terminatorum, mensuras definivisset; in Duodecimo *hoc libro corpora superficiebus curvis terminata, Cylindros nimirum, Conos atque Sphæras considerat: ea inter se comparat: & eorum mensuras definit. Utilissimus sane est hic liber; eo quod principia illa contineat quibus tot celeberrimas demonstrationes de Cylindro, Cono atque Sphera Geometrarum Principes, præsertim vero Archimedes, inædificarunt.*

DEFINITIONES.

Fig. 12. 1. PYramis est solidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehensum, ab uno plano (Z) ad unum punctum (L) constitutis.

Planum Z basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura (*rectilinea*;) ex cujus lateribus singulis triangula surgunt, in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntia.

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ità pyramis (*triangularis, quæ pro basi triangulum habet,*) inter solidas prima, & simplicissima est.

2. Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A,) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C; quæ puncto (A) manente fixo, circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (ACF) redeat, unde moveri cœperat; superficies, a recta linea (ACF) descripta, dicitur conica superficies: corpus vero quod hac superficie & circulo (CL) continetur, conus vocatur. Fig.2 & 3

Vertex coni est A.

Basis coni est circulus CL.

Axis coni est recta (AB) ex vertice ad baseos centrum ducta.

Latus coni est recta (AC) a vertice ad baseos circumferentiam ducta, quam esse totam in coni superficie, ex ejus genesi est manifestum.

Conus rectus est, cum axis (AB) est basi rectus. Fig 2.

Conus scalenus, seu obliquus est, cum axis (AB) non est ad basim rectus. Fig.3.

Fit etiam conus rectus à triangulo rectangulo (GBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. Fig.2.

3. Si circa duos circulos æquales, & parallelos (CL, OQ,) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, sic ut mota sibi ipsi (*& rectæ BA circulorum centra jungenti*) semper parallela maneat; superficies a recta (COF) descripta, dicitur cylindrica superficies; corpus vero quod hac superficie, & binis circulis continetur, cylindrus vocatur. Fig.4 & 5.

Bases cylindri sunt circuli (CI, OQ.

Axis cylindri est recta (AB) basium centra connectens.

Latus cylindri est recta (OC) in cylindri superficie utramque basim tangens.

Rectus cylindrus est, cum axis ad bases rectus est. Fig.4.

Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad bases non est rectus. Fig.5.

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto. Fig.4.

4. Similes coni & cylindri sunt, quorum axes (AK, ZO) & basium diametri (BF, QR) sunt proportionales; (*& quorum axes vel sunt basibus rectis, vel iisdem similiter inclinati.*) Fig.24 & 25.

5. Sphæra est solidum comprehensum una superficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipsam posito ductæ, sunt æquales.

Punctum

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter est recta per centrum ducta ad superficiem utrimque pertingens.

Fig.6. Generatur sphæra, si semicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6. Magnitudines figuræ alicui inscriptæ, aut circumscriptæ, sive figura minores vel majores, in figuram desinere dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt, quantitate minori quacumque data, seu quantumvis parva.

Itaque si ea, quæ figuræ alicui inscribuntur, ab ea tandem deficiant defectu minori quocumque dato; inscripta dicentur in figuram desinere. Et si ea quæ alicui figuræ circumscribuntur, excedant eam tandem excessu minori quocumque dato; dicentur rursum circumscripta desinere in figuram.

Fig.9. *(Si fiat triangulum BAC in semicirculo BDLC, & super lateribus BA, AC pro diametris, ducantur semicirculi minores BNA, AMC; figuræ curvilineæ BDAN, ALCM, semiperipheria circuli minoris exterius, & arcu circuli majoris interius, singulæ terminatæ, ab earum inventore,* Lunulæ conjugatæ Hippocratis Chii *appellantur.*

Fig.10. *Si arcus BDA, ALC sint æquales, ac proinde quadrantes sint peripheriæ majoris circuli, denominentur ejusmodi lunulæ* quadrantales.

Fig.11. *Si recta ED arcus lunulæ quadrantalis proportionaliter secet in E, D, ut sit arcus BE ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA, vocentur areæ AED, BED* proportiones lunulæ quadrantalis.

8. *Lunula, vel ejusdem portio* quadrati *dicitur, si ei æqualis figura rectilineæ construi possit.)*

PROPOSITIO PRIMA.

Fig.6.&7. P*Olygonorum similium circulis inscriptorum proportio est duplicata proportionis diametrorum (AF, IC;* atque adeo etiam semidiametrorum (AZ, IX.)

(a) Per def.2. l.6.
(b) Per 6. l.6.
(c) Per 21. l.3.

Ducantur AO, FB; IR, LC. Quia polygona ponuntur similia, æquales erunt (*a*) anguli OBA, RLI, & latera OB, BA, proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL, (*b*) anguli O & R æquantur. Ergo etiam BFA & LCI, qui iisdem arcubus BA, LI insistunt, sunt (*c*) æquales. Anguli vero FBA, CLI in semicirculis sunt recti, (*a*) recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC (*b*) æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL sibi mutuo æquiangula sunt, erunt (*c*) similia; eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam quia per hyp. polygona sunt similia, erit proportio eorum duplicata (*d*) proportionis laterum BA, LI; hoc est, ut jam ostendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC, (*ac proinde* (e) *etiam semidiametrorum AZ, IX.* Quod erat demonstrandum.

(a) Per 31 l 3

(b) Per cor. 9. p. 32. l 1.

(c) Per 4. 16.

(d) Per 20. l. 6.

(e) Per 15. l. 5.

Corollaria.

1. **P**Olygonorum similium circulis inscriptorum ambitus sunt inter se ut diametri. Fig. 9. & 7.

Cum ostensum jam sit AB esse ad LI, ut AF ad IC, etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC; & sic de ceteris lateribus. Ergo per 12 5. omnia simul latera ad simul omnia, (hoc est ambitus ad ambitum) sunt ut AF ad IC.

(2. *Figurarum rectilinearum similium circulis inscriptarum, latera homologa sunt inter se ut circulorum diametri.*)

Lemma.

POlygona circulo inscripta in circulum desinunt.

Inscribe quadratum ACBD. Cum hoc dimidium sit quadrati (*f*) circulo conscripti, erit majus dimidio circuli. Quare si hoc auferatur e circulo, auferetur plus quam dimidium. Deinde singulis arcubus bisectis in E, K, I, H, inscribe octogonum: & in E tangat FG, cui B., DA occurrant in G & F: erit CF (*g*) parallelogrammum, cujus cum dimidium sit triangulum (*h*) CEA, erit hoc plus quam dimidium segmenti CEA. Eodem modo singula triangula AKD, DIB, &c. singulorum segmentorum plus sunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium segmentorum plus quam dimidia sunt. Hæc ergo (*triangula*) si ex illis (*segmentis*) hoc est, ex residuo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento si inscribantur circulo polygona duplo semper plurium laterum, ostendam e residuo circuli semper auferri plus quam dimidium. Ergo residuum erit tandem (*i*) minus quocumque dato, ac proinde polygona inscripta tandem a circulo deficient quantitate minori data quacumque; hoc est, in circulum (*k*) desinent. Q. e. d.

Fig. 8.

(f) Per sch post 6 & 7. l 4

(g) Per cor. p. 28. & 29 l 3.

(h) Per 41. l. 1.

(i) Patet ex lem. 2. sch. post 11. l. 6.

(K) Per def. 6. l. 12

(*Haud absimili methodo demonstrari posset, polygona circulo circumscripta in circulum desinere. Verum cum hoc inter alia necnon & ipsum Lemma præcedens, in prop. 3. Theorematum ex Archimede selectorum contineantur, superfluum esset hic loci plura subjungere.*

PRO-

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. *Circulorum proportio est duplicata proportionis diametrorum.*

Polygonorum similium circulis sine fine inscriptorum proportio semper duplicata (*a*) est proportionis diametrorum. Atqui polygona circulis in infinitum inscripta, in circulos (*b*) desinunt. Ergo per porisma universale sequens, etiam circulorum proportio duplicata est proportionis diametrorum. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 1. l. 12.
(b) Per lem.

Porisma universale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inscribuntur, in ipsas desinant; quam proportionem inter se semper habent inscripta, eamdem habent & figuræ.

R
ABXZ.
CF

Sit ratio X ad Z, ea quam inscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarum A, B eamdem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea, quæ figuris inscribuntur; sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inscripta per hyp. desinunt in figuras A & B erunt aliqua figuris A & B inscripta, quæ ab ipsis deficiant (*c*) minori quantitate, quam R deficiat a figura A. Sint ea, C & F. Ergo C erit majus quam R. Ergo C est ad B in (*d*) majori, quam R ad B; hoc est, (ut ponebatur,) quam X ad Z; hoc est per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C est ad B in majori proportione, quam ad F, erit B figura minor (*e*) sibi inscripto F, totum sua parte. Eodem modo ostendetur rationem B ad A non posse esse majorem ratione Z ad X: (*hoc* (f) *est, rationem A ad B non esse minorem ratione X ad Z.*] Ergo ratio A ad B æqualis est rationi X ad Z. Quod erat demonstrandum.

(c) Per def. 6. l. 12
(d) Per 8. l. 5.
(e) Per 10. l. 1
(f) Per 26. l. 5.

[*Eadem methodo demonstrabitur; duas figuras eamdem inter se proportionem habere, quam semper habent circumscripta in illas desinentia; hoc modo:*

CF.
ABXZ
R

Sit ratio X ad Z ea quam circumscripta semper habent inter se. Si ergo negas rationem figurarum A, B eamdem esse cum ratione X ad Z, quam semper habent ea quæ figuris circumscribuntur; sit ratio A ad B primo major ratione X ad Z.

Ergo

Ergo erit A ad aliam quamdam quantitatem R, ipsa majorem, ut X ad Z. Et quoniam circumscripta per hypothesin desinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B circumscripta, quæ ipsas excedant quantitate (a) *minori quam R excedat figuram B. Sint ea C & F. Ergo F minus erit quam R. Ergo* (b) *ratio A ad F major est ratione A ad R; hoc est, ratione X ad Z, sive C ad F. Quoniam igitur ratio A ad F major est ratione C ad F, figura A major* (c) *erit sibi circumscripto C, pars toto, quod est absurdum. Non igitur est ratio A ad B major ratione X ad Z. eodem modo ostendetur rationem B ad A non esse ratione Z ad X majorem, &* (d) *proinde rationem A ad B non minorem esse ratione X ad Z. Si itaque ratio A ad B neque major neque minor est ratione X ad Z; erit ei æqualis. Q. E. D.*

(a) Per def. 6. l. 12.
(b) Per 8. l. 5.
(c) Per 10. l. 5.
(d) Per 26. l. 5.

Corollaria ad Prop. II.

Cor. 1. *Hinc, ut circulus est ad circulum, ita polygonum in illo descriptum erit ad simile polygonum in hoc descriptum. Utraque enim sunt in duplicata ratione diametrorum quæ sunt in circulis.* Fig. 6. & 7.

Cor. 2. *Hinc etiam liquet circulos esse ad se invicem, in ratione radiorum suorum* (e) *duplicata; hoc est, ut* (f) *quadrata radiorum.*

Cor. 3. *Hinc etiam, circulorum quorum diametri vel semidiametri sunt notæ, proportio innotescit;* (g) *inveniendo nimirum diametris datis tertiam proportionalem, ad quam circuli primi diameter eamdem* (h) *habebit rationem, quam habet circulus iste primus ad secundum. Sit circuli primi diameter pedum quatuor, secundi pedum sex; cum sint 4, 6, 9. continue* (i) *proportionales, erit circulus primus ad secundum ut 4. ad 9.*

(e) Per 15. & 34. l. 5.
(f) Per scho. post 20. l. 6
(g) Per 11. l. 6.
(h) Per hanc pr. & def. 10. l. 5
(i) Per cor. 3. p. 17. l. 6

Cor. 4. *Hinc etiam, circulum quemvis in data ratione augere vel minuere licet, uti supra* (k) *notatum est. Proponatur circulum describere qui sit alterius dati quintuplus; sitque dati circuli radius AB; inter quem, & rectam BC, ipsius AB quintuplam inveniatur media proportionalis BX. Circulus radio BX descriptus erit circuli dati quintuplus.*

(k) Vide cor. 4. pr. 20. l. 6.

Cor. 5. *Si quatuor rectæ fuerint proportionales; figuræ similes rectilineæ, similiterque descriptæ super duabus rectis prioribus proportionales erunt circulis quorum diametri vel semidiametri fuerint duæ posteriores. Nam cum rectæ datæ sint proportionales, & cum tam figuræ rectilineæ, quam circuli* (l) *sint in earumdem rectarum ratione duplicata; erunt etiam figuræ circulis* (m) *proportionales.*

(l) Per 20. l. 6. & 2. l. 12.
(m) Per 34. l. 7.

Cor. 6.

Cor. 6. *E converso, si duæ figuræ similes rectilineæ duobus circulis ptoportionales fuerint; erunt homologa rectilinearum latera, circulorum diametris proportionalia. Cum enim rationes figurarum & circulorum æquales, duplicatæ* (a) *sint rationum homologorum laterum & diametrorum respective,* (b) *erunt etiam hæ rationes æquales.*

(a) Per 20. l.6. & 2. l.12.

(b) Per 15. l.5.

Cor. 7. *Hinc si detur circulo dato A æquale quadratum Q; invenietur aliud quadratum X quod alteri cuivis circulo C æquale sit. Nam ex hypothesi sit A ad Q, ut C ad X, erit permutando, A ad C ut Q ad X: & proinde (per cor. 5.) radius circuli A ad radium circuli C, ut latus quadrati Q ad latus quadrati X. Cum igitur dentur circulorum radii, & latus quadrati Q,* (c) *invenietur latus quadrati X, & proinde* (d) *ipsum X quadratum. Et quod in hoc corollario de quadratis dictum est, idem de figuris rectilineis similibus quibuscumque* (e) *dictum puta.*

(c) Per 12 l.6.

(d) Per 46. l.1.

(e) Per 12. & 18. l.6.

Fig. 76. l.6.

Cor. 8. *Circulus super hypotenusa AB trianguli rectanguli ABC, æqualis est duobus circulis qui describuntur super AC, BC lateribus angulum rectum continentibus. Si enim ab angulo recto C demittatur hypotenusa perpendicularis CO, erunt AB, AC, AO* (f) ∺ ; *& itidem AB, CB, OB* (g) ∺ *Est itaque circulus super AB, ad circulos super AC, CB, respective, ut est* (h) *AB ad AO, OB respective: & proinde* (i) *circulus super AB ad circulos reliquos simul sumptos est, ut AB ad AO + OB. Et cum sit AB = AO + OB, erit etiam circulus super AB duobus reliquis simul sumptis æqualis.*

(f) Per cor. 2. p. 8. l.6.

(g) Per Idem.

(h) Per hanc pr. & def. 10. l.5.

(i) Per 24. l.5.

Cor. 9. *Hinc datis circulorum quorumcumque diametris, facile est illorum summam vel differentiam exhibere, hoc est, circulum invenire quotcumque & quibuscumque circulis datis æqualem; vel circulum describere; cujus area circulorum quorumvis inæqualium differentiæ æquetur: eadem scilicet methodo, qua quadratorum summa vel differentia exhibetur in schol. p. 47. l.1. quod vide. In demonstratione tantum pro p. 47. l. 1. citetur cor. 8. p. 2. l. 12.*

Fig. 9. & 10. l.12.

Cor. 10. *Hinc etiam Lunularum conjugatarum quadraturam, quam primus docuit Hippocrates Chius, possumus derivare. Sit enim ABC triangulum rectangulum, & BAC semicirculus diametro BC, BNA semicirculus diametro AB, AMC semicirculus diametro AC descriptus. Est itaque semicirculus BAC semicirculis BNA & AMC* (k) *æqualis. Si igitur spatium utrimque commune auferas, nimirum segmenta BA, AC, relinquentur duæ lunulæ BNA, AMC, utrimque lineis circularibus terminatæ, triangulo rectilineari BAC æquales. Quod si recta BA æqualis sit recta AC; hoc est; si lunulæ fuerint quadrantales, demissa perpendiculari*

(k) Per cor. 8. hujus.

Fig 10.

AO

AO ad hypotenusam BC, erit triangulum BAO æquale lunulæ BNA, & triangulum COA æquale lunulæ CMA. Q. E. I.

Scholium 1.

Similia circulorum segmenta ABO, ILR sunt in duplicata ratione diametrorum AF, IC, vel etiam in duplicata ratione rectarum AO, IR, quæ segmentorum arcubus subtenduntur, Bisectis enim arcubus ABO, ILR in B & L, ductisque rectis AB, BO, IL, LR; propter arcus bisectos, subtensæ (a) *æquales erunt, nempe AB = BO, & IL = LR: Sed & ang. ABO =* (b) *ang. ILR. Similia igitur* (c) *sunt triangula ABO, ILR; atque adeo sunt in duplicata* (d) *ratione laterum AB, IL, sive* (e) *diametrorum AF, IC, quæ sunt in circulis, vel etiam subtensarum AO, IR. Et continua arcuum AB, BO, & IL, LR bisectione, figuræ polygonæ similes perpetuo inscribentur iisdem segmentis, & super iisdem basibus AO, IR, in ipsa segmenta tandem desinentes; atque igitur* (f) *ipsa segmenta ABO, ILR erunt in duplicata ratione diametrorum AF, IC; vel in duplicata ratione subtensarum AO, IR. Q. E. D.* Fig. 6. & 7

(a) Per 27. l. 3.
(b) Per cor. 2. pr. 32. l. 6.
(c) Per 6. l. 6.
(d) Per 19. l. 6.
(e) Per cor 3. pr. 11. l 12.
(f) Per porisma univ.

Scholium 2.

Cum quadratura lunularum conjugatarum quarumcumque conjunctim, quadrantalium vero seorsim, in coroll. 10. ostensa sit; liceat jam alia quadam de lunula quadrantali, de quadratura portionis ejusdem, deque methodo eam in data ratione secandi subjungere.

1. *Compleatur Lunulæ quadrantalis circulus minor, &* (g) *transibit ejus circumferentia per circuli majoris centrum O.* Si *jam* in arcu lunulæ exteriori BNA sumatur quodvis punctum E, juncta OE secabit arcus lunulæ proportionaliter in E & D, & proinde lunulam secabit in portiones (h) AED, BED. *Cum enim angulus BOE sit ad centrum circuli majoris & ad circumferentiam circuli minoris, arcus BE* (i) *erit duplo plurium graduum quam arcus BD: & proinde semiperipheria BEA est ad quadratum BDA, ut arcus BE ad arcum BD, sive,* (k) *ut arcus EA, ad arcum DA. Et permutando, arcus BE est ad arcum EA, ut arcus BD ad arcum DA.* Fig. 11.

(g) Per cor. 2 p 9. l. 4.
(h) Per def. 7. l 12
(i) Sequitur ex cor 4. sch lii p. 5 l. 4.
(K) Per 16 & 7 l. 5.

2. *Si arcus EB, EA fuerint æquales, hoc est, si punctum E coincidat cum N, medio puncto semicirculi BNA; ductæ rectæ NB, NA perficient quadratum NAOB circulo minori inscriptum, & circulum majorem tangent in B & A. Cum enim BNA semiperipheria circuli minoris bisecta sit in N, erunt* Fig. 11. & 12.

(a) Per 6. l. 4. rectæ NB, NA arcus quadrantalis chordæ, sive latera (a) quadrati circulo minori inscriptibilis. Et propter æquales majoris circuli radios BO, AO, erunt hi etiam in semicirculo BOA, reliqua duo quadrati, circulo minori inscriptibilis, (b) Per def 32. l. 1. latera. Quare, cum omne quadratum sit (b) rectangulum anguli NBO, NAO erunt recti, & propterea rectæ NB, NA (c) Per 16. l. 1. circulum majorem tangent (c) in B & A.

Fig. 11. 3. Si vero arcus EB, EA fuerint inæquales, etiam subtensæ (d) Per cor. EB, EA (d) inæquales erunt; & si EA major sit quam EB, propter angulum BEA in semicirculo rectum, (e) angulus EBA (e) Per cor. 18. p. 32. l. 1. erit semirecto major, & angulus EAB semirecto minor; ac proinde ang. EAO (sive EAB, semirecto BAO auctus) erit angulo recto minor. Recta igitur EA arcum circuli majoris quadrantalem BDA (f) secabit alicubi ut in G.

(f) Per 16. l. 3. 4. Ducta recta BG, hæc trianguli rectanguli BEG basis, & arcus BDG subtensa erit; ut satis patet: atque anguli EGB, EBG erunt æquales, nempe semirecti. Nam propter (g) Per 13. l. 1. angulos AGB, EGB duobus (g) rectis æquales, atque angulum AGB in segmento quadrantali (h) sesquirectum, erit (h) Per cor. 1. p. 8. & 9. l. 4. angulus EGB semirectus, & propter angulum GEB rectum, erit (i) etiam angulus EBG semirectus.

(i) Per cor. 6. p. 32. l. 1. 5. Basis BG trianguli rectanguli æquicruris EBG, a recta EO bifariam & perpendiculariter secatur. Angulus enim BEO super arcu quadrantali BO circuli minoris, (k) est se- (k) Per cor. 1. p. 8. & 9. l. 4. mirectus, & proinde angulus rectus BEG a recta EO bisecatur. Sed angulus BEG est trianguli isoscelis angulus verti- (l) Per n. 3. sch. p. 26. l. 1. calis: unde recta illum bisecans, (l) bisecabit etiam basim BG in F, eique perpendicularis erit.

6. Triangula itaque BFE, GFE sunt sibi ipsis, & toti BEG, atque etiam triangulo BOA similia. Singula enim sunt triangula rectangula isoscelia, seu quadratorum dimidia.

7. Cum BF sit ipsi DO (circuli majoris radio) perpendi- (m) Per def 10 l. 3. cularis, (m) erit illa sinus rectus arcus BD; & proinde (n) dupla BF, sive BG, subtensa erit dupli arcus BD sive (n) Per cor. p. 30. l. 3. BDG. Supra autem (n. 1.) ostensum est, arcum BE, in circulo minore, duplo plurium graduum esse quam est arcus BD in circulo majore. Ergo arcus BDG (nempe ipsius BD (o) Per def 4 l. 6. duplus) similis (o) erit arcui BE, & segmentum BG simile segmento BE.

8. Portio lunulæ BED æqualis est triangulo rectilineo (p) Per sch. 1. hujus. BEF. Segmenta enim similia BE, EG sunt (p) in duplicata ratione diametrorum BA, BC, hoc est, (q) ut 1 ad 2; ac (q) Per sch. p. 20. l. 6. & cor. 1. p. 47. l. 1. proinde semisegmentum BDF est segmento BE æquale. Si itaque portione BED subtrahatur segmentum BE, & ei æquale semisegmentum BDF addatur, habebitur triangulum rectilineum

neum BEF portioni BED æquale, ac (a) *proinde quadratur portio BED lunulæ quadrantalis.* (a) Per def. 8. l. 12

9. Lunulam quadrantalem ADBN secundum rationem datam scil. PQ ad QR) dividere in portiones AED, BED, & utriusque portionis quadraturam exhibere. *Diametrum AB semicirculi minoris AEB divide* (b) *secundum rationem datam in I, & in eodem semicirculo, a puncto I, erigatur diametro BA perpendicularis IE; atque a puncto E ad O centrum circuli majoris, ducta recta EO lunulam in data ratione dividet. Similia* (c) *enim triangula BAO, BEF, sunt in duplicata* (d) *ratione laterum homologorum AB, BE: hoc est, propter AB, BE, BI* ∺ (e),) *ut* (f) *AB ad BI; atque ducta IO, in eadem ratione* (g) *est triangulum BAO ad triangulum BIO, propter eamdem altitudinem ad O. Cum igitur triangulum BAO ad triangula BEF, BIO eamdem* (h) *rationem habeat, erit triang. BIO* = (i) *triang. BEF* = (k) *portioni BED. Sed lunula tota trianguloBAO* (l) *æquatur; atque adeo portio EAD triangulo AIO* (m) *æquabitur. Est autem triangulum AIO ad triangulum BIO,* (n) *ut AI ad BI, sive ut PQ ad QR; & proinde portio lunulæ AED erit ad portionem BED ut PQ ad QR. Lunula itaque quadrantalis in data ratione dividitur, & alio modo quadratura portionis BED exhibetur; unde tum eamdem portionem triangulo BIO, tum portionem alteram AED triangulo AIO æqualem esse constat. Datur itaque portionis utriusque quadratura.* (b) Per 9. l. 6. (c) Per n. 6. hujus (d) Per 19. l. 6. (e) Per cor. 2. p. 8. l. 6 (f) Per def 10. l. 5 (g) Per 1. l. 6. [h] Per 11. l. 5 (i) Per 9. l. 5. (K) Per n. 8. hujus. (l) Per cor. 10. hujus. (m) Per axio. 3. l. 1. (n) Per 1. l. 6.

10. *Completo utroque circulo ABC, AOBN, ducatur diametro minoris BA parallela majoris diameter EF; eique ad rectos angulos circuli majoris diameter CD, quæ producta, tum lunulam ANB in duas æquales portiones, AND, BND, tum triangulum AOB in duo æqualia triangula AHO, BHO, toti & sibi invicem similia dividet. Dico quod spatii luniformis AGOIBECFA cornua AGOF, BIOE; triangulis AHO, BHO, &* (o) *proinde lunulæ quadrantalis portionibus AND, BND) respective æqualia sunt. Nam propter ABq* = (p) *AOq + BOq* = *2 AOq, erit* (q) *segmentum ADB segmenti AGO duplum, atque semisegmentum ADH segmento AGO æquale; quæ si a circuli majoris octantibus æqualibus AOD, AOF auferantur, remanebunt æqualia AHO, AGOF. Et simili modo ostendetur BHO* = *BIOE. Quadrantur itaque dicti spatii luniformis cornua AGOF, BIOE.* Fig 12. [o] Per n. 9. hujus. [p] Per 47. l. 1. (q) Per sch. 1. huj. & schol. p. 20. l. 6.

11. *Iisdem positis, in circulo minore compleatur quadratum BNAO, & centro N, radio NB vel NA* (= (r) *OB vel OA) describatur arcus quadrantalis BLA, eritque BLAO lunula quadrantalis, lunulæ BNAD similis, & æqualis, ac proinde triangulo BNA vel BOA* (s) *æquabitur. Sed cornua* (r) Per 32. l. 1. (s) Per cor. 10. hujus prop.

(a) Per n.10. *BIOE, AGOF simul sumpta eidem triangulo* (a) *æquantur. Ergo spatium mixtilineum BLAFE duplici triangulo BOA, sive quadrato BNAO æquale est.*)

PROPOSITIO III. & IV.

Sunt prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent usum; quam ut per eas demonstraretur quinta, quam nos sine illis multo facilius demonstrabimus.

Lemmata ad P.5.

I.

Fig.13. Si duæ pyramides triangulares secentur planis (OSE. RXZ) ad bases (ABC, IQV) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E & Z:) erunt (OSE RXZ (inter se ut bases (ACB, IQV.)

Quoniam parallela plana OSE, ABC secantur a planis BFC, AFB, AFC; erunt sectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC (*a*) parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB, bini & bini, æquales (*b*) sunt. Quare sectiones OSE, ABC (*c*) sunt similes. Eodem modo similes esse ostendam sectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio sectionis ABC ad OSE est duplicata (*d*) rationis laterum BC, SE; & ratio sectionis IVQ ad RXZ duplicata est rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ sunt eædem: (est enim BC ad SE, ut (*e*) CF ad EF, hoc est per hyp. ut QL ad ZL; hoc (*f*) est, ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC ad OSE eadem est (*g*) cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propositum.

(a) Per 16. l.11.
(b) Per 10 l.11.
(c) Per 4. l.6
(d) Per 19. l.6.
(e) Per cor.1. p.4. l.6.
(f) Per idem cor.
(g) Per 34. l.5.

II.

Fig.14. Pyramidi (ZCAF) triangulam habenti basim, prismata in infinitum inscripta, desinunt in ipsam pyramidem.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF; & per B, G, factis sectionibus BEP & GDN basi ZAC parallelis, inscripta intelligantur pyramidi prismata triangularia BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi esse circumscripta

scripta prismata CIBA, PXGB, NHFG. Excessus circumscriptorum supra inscripta, sunt solida IM, XK, HG, quæ simul sumpta æquantur prismati CIBA. Nam HG est (*a*) æquale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB, hoc est (*b*) MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui si AF in plures sine fine partes æquales dividatur, ac proinde prismatum numerus in infinitum multiplicetur; AB fiet (*c*) quavis data minor. Ergo etiam (*d*) prisma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo prismatum circumscriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars est prismatum sibi circumscriptorum) excessus supra inscripta prismata, fiet quovis dato minor. Ergo inscripta prismata in pyramidem (*e*) tandem desinunt. Quod erat demonstrandum.

[a] Per 25. l. 11.
(b) Per eamd.
(c) Collig. ex lem 2. sch post 11. l. 6.
(d) Patet ex 25. l. 11.
(e) Per def 6 l. 12

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares æque altæ, eam inter se proportionem habent quam bases (AQR, ESX.)

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP, EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, sed æque multas, utrimque divisis, factisque per divisionum puncta sectionibus ad bases parallelis, intelligantur utrique pyramidi inscripta esse prismata trigona æque multa & æque alta. Jam vero quia prismata LA, IE sunt æque alta, erit prisma LA ad prisma IE, ut (*f*) basis LOB ad basim INK; hoc est (*g*) ut basis QRA ad basim SXE. Eodem modo ostendam singula prismata pyramidi QPAR inscripta, esse ad singula inscripta pyramidi SZEX, ut basis QAR ad basim SEX. Ergo etiam (*h*) simul omnia sunt ad omnia, ut basis ad basim. Quare cum ea tandem desinant (*i*) in ipsas pyramides, etiam ipsæ erunt (*k*) ut bases. Quod erat demonstrandum.

Fig. 1.
(f) Per cor. 1. p. 34 l. 11.
(g) Per lem. 1.
(h) Per 12. l. 5.
(i) Per lem.
(k) Per porism. univ. post p. 2. l. 12.

(*Demonstratio supponit latera AP EZ pyramidum æquales earum altitudines exhibere, & proinde esse ad bases QAR, SEX recta. Sed vim suam retinebit demonstratio, quamvis latera illa sint ad bases quovis modo obliqua, si concipiantur a verticibus P, Z perpendiculares ad bases demitti, & in æquales quotcumque partes, & æque multas utrimque dividi, & per divisionum puncta transire supponantur plana basibus parallela, quæ itaque rectas PA, ZE divident (l) in partes similes, & numero æquales iis in quas dividuntur perpendicu*-

(l) Per 17. l. 11.

lares, eademque plana bases erunt prismatum æque multorum & æque altorum, utrique pyramidi inscriptorum, & proinde eodem modo procedet demonstratio, ac si rectæ PA, ZE fuissent ipsæ basibus QAR, SEX perpendiculares.)

PROPOSITIO VI.

Fig. 16. & 17. *Pyramides quæcumque æque altæ, eam inter se rationem habent quam bases (AB, CFO.)*

Resolvantur bases in triangula A, B, C, F, O; pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX est ad pyramidem OZ, ut (a) A ad O; & pyramis (b) BX est ad pyramidem OZ ut B ad O. Ergo pyramides simul AX, BX (hoc est tota ABX) sunt ad pyramidem OZ, ut A, B (c) simul ad O. Eodem discursu pyramis ABX est ad pyramidem FZ, ut (d) A, B est ad F: Et ABX est ad CZ, ut (e) A, B est ad C. Ergo ABX (f) est ad tres simul OZ, FZ, CZ, hoc est, ad totam pyramidem OFCZ, ut A, B ad O, F, C. Quod erat demonstrandum.

(a) Per præc.
(b) Per eamd.
(c) Per 24. l. 5.
(d) Per præc. & 24 l. 5.
(e) Per eamd.
(f) Per 34 l 5.

(Corol. *Hinc sequitur, pyramides quascumque æqualium basium & altitudinum, æquales esse.*]

PROPOSITIO VII.

Omnis pyramis tertia pars est prismatis habentis eamdem basim & altitudinem.

Fig. 18. Sit primo pyramidis trigona BGAC, in eadem basi & altitudine cum Prismate BACFEO. Ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO sunt (g) paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA (h) æqualis est. Ob eamdem causam pyramis OEAF par est pyramidi OBAF, hoc est pyramidi BOFA, sunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales sunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, sive BOFA sunt pares. Ergo tres simul unius BFCA triplæ sunt. Atqui tres illæ constituunt prisma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc est (i) BGAC, triplum est. Quod erat demonstrandum.

(g) Per 34. l. 1.
(h) Per cor. præc.
(i) Per 22. præc.

Fig. 19. Sit deinde pyramis quævis eamdem habens basim & altitudinem cum prismate AEFH. Ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, resolve prisma in triangularia prismata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet

patet demonstratio ex prima parte. Nam singulæ partes prismatis (*polygoni*,) triplæ erunt singularum partium pyramidis (*polygonæ*; *hoc est*, *singula prismata triangularia singularum pyramidum triangularium tripla erunt*.) Ac proinde totum prisma (*polygonum*) totius pyramidis (*polygonæ*) triplum est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (*OACB*, *KHIN*) *proportio est triplicata ejus, quam habent homologa latera* (*AB*, *HN*.) Fig. 20.

Sint primo trigonæ. Perfectis parallelogrammis AM & HQ, super his constitue parallelepipeda AG, HL, in altitudine pyramidum; quæ cum pyramides sint similes, etiam patet similia (*a*) esse: Ducantur jam EF, RP, & per EF, CB, item per RP, IN secabuntur (*b*) parallelepipeda in duo prismata æqualia. Singula horum (*c*) tripla sunt pyramidum OACB, KHIN. Utraque ergo simul, hoc est, tota parallelepipeda AG, HL, sextupla sunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales sunt. Sed horum ratio (*d*) triplicata est rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonstrandum.

(a) Ex def. 9. l. 11. (b) Per 8. l. 11. (c) Per Præc. (d) Per 33. l. 11.

Quod si pyramides similes fuerint polygonæ, resolvantur in triangulares AR, BR, CR, & OK, EK, FK. Facile (*e*) ostendes etiam AR ipsi OK, & BR ipsi EK, & CR ipsi FK esse similes. (*Ob similia enim triangula* (f) *A*, *O*; & (g) *MIR*, *ZPK*, (h) *erit DM* : *MI* : : *ZV* : *ZP*; & *MI*: *MR* : : *ZP* : *ZK*. *Ergo* (i) *DM*: *MR* : : *ZV*: *ZK*, & *invertendo* (k) *MR* : *MD* : : *ZK*: *ZV*. *Eodem modo ostendetur esse MD* : *RD* : *ZV*: *VK*: *Ergo* (l) *MR* : *RD* ; : *ZK*: *VK*. *Similia* (m) *sunt igitur triangula MRD*, *ZKV*, & *proinde etiam pyramides AR*, *OK*, *quæ similibus triangulis multitudine æqualibus continentur*, *similes* (n) *sunt*. *Eodem modo, ob similia triangula B*, *E*; *vel C*, *F*, *demonstrabitur triangula DXR*, *VSK similia esse*, *atque adeo pyramidem BR ipsi EK*, & *CR ipsi FK similem esse*. Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK est triplicata rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum BR, EK triplicata est rationis MX ad SZ; hoc est denuo per hyp. rationis IM ad PZ: & ratio pyramidum CR, FK est triplicata rationis XQ ad ST, hoc est rursum IM ad PZ. Cum ergo ratio singularum ad singulas sit triplicata rationis IM ad PZ, etiam ratio (*o*) omnium ad omnes, (hoc est, ratio

Fig. 21. (e) Ex 20 & 5. l. 6 & ex def. 9. l. 11. (f) Per 20. l. 6. (g) Per def. 9. l. 11. (h) Per def. 1. l. 6. (i) Per 22. l. 5. (k) Per sch. post 16. l. 5. (l) Per 22. l. 5. (m) Per 5. l. 6. (n) Per def. 9. l. 11. (o) Per 12. l. 5.

ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicatâ erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonstrandum.

(Cor. *Hinc, si fuerint quatuor rectæ continue proportionales; erit prima ad quartam, ut est pyramis super prima, ad pyramidem similem similiter descriptam super secunda; & proinde. datis pyramidum similium ABCR, OEFK lateribus homologis MX, ZS; si fiant MX, ZS, G, H, continue proportionales, erit pyramis ABCR ad pyramidem OEFK, ut MX est ad H.*)

Fig. 21.

PROPOSITIO IX.

Fig. 22. & 23.

Æquales pyramides reciprocant bases & altitudines & quæ reciprocant, sunt æquales.

1. Pars. Sint primo (*æquales*) pyramides trigonæ BACO, HKNL. Perfectis parallelogrammis BE, HR super his sint parallelepipeda BF, HP. Erunt (ut ostendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium sextupla, ac proinde æqualia inter se. Sunt vero horum parallelepipedorum altitudines HK, BA eædem quæ pyramidum: bases vero BE, HR duplæ (*a*) sunt basium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur, ob parallelepipedorum æqualitatem, sit ut BE ad HR, ita (*b*) reciproce HK ad BA; etiam erit ut basis BCO ad basim HNL, ita reciproce altitudo HK ad altitudinem BA. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 34. l.11.

(b) Per 34. l.11.

Quod si (*æquales*) pyramides habeant bases polygonas, retentis iisdem altitudinibus (*c*) reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per (*cor. p. 6.*) Sed pyramides sic reductæ, per jam demonstrata, reciprocant bases & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant bases & altitudines. Quod erat demonstrandum.

(c) Per 25. l.6.

2. Pars. (*Si bases sint trigonæ*) quoniam jam ponitur esse BCO ad HNL, ut HK ad BA; erit quoque BE ad HR. ut HK ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP (*d*) sunt æqualia. Ergo sextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HKNL. Quod erat demonstrandum.

(d) Per 34. l.11.

(*Quod si pyramides habeant bases polygonas altitudinibus reciprocas; reducantur illæ ad* (e) *bases trigonas BCO, HNL, polygonis æquales. Erit igitur BCO ad HNL, ut HK ad BA, atque adeo pyramides hæ trigonæ æquales erunt per jam demonstrata: ergo etiam pyramides polygonæ, quæ trigonis sunt* (f) *æquales, erunt ipsæ æquales.*

(e) Per 25. l.6.

[f] Per cor. p.6. l.12.

Cor-

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonstrata sunt p. 6. 8, 9. etiam conveniunt quibuscumque prismatis; cum hæc tripla (a) sint pyramidum eamdem basim & altitudinem habentium. Igitur (a) Per 7. l.12.

1. Prismatum æque altorum eadem est proportio quæ basium. Id enim ostensum est de pyramidibus p. 6.

2. Similium prismatum proportio est triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim ostensum est de pyramid. p. 8. (*& proinde si dentur similium prismatum latera homologa, invenietur prismatum ipsorum ad se invicem ratio, eodem modo quo ex iisdem datis, pyramidum ratio inventa est, in cor. p. 8.*

3. Æqualia prismata reciprocant bases & altitudines: & quæ reciprocant, sunt æqualia. Id enim de pyramidibus ostenditur p. 9.

Mirum est hæc ab Euclide prætermissa, cum præcipua sint, quæ de solidis rectilineis tradi possunt.

Scholium 1.

EX hactenus demonstratis elicietur dimensio quorumcumque prismatum, ac pyramidum.

Prismatis soliditas producitur ex altitudine in basim ducta; pyramidis vero ex tertia altitudinis parte ducta in basim,

Ut si prismatis altitudo sit 5. pedum, basis vero 25. pedum quadratorum; multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro soliditate prismatis.

Esto enim prisma polygonum AH. Ejus basi AE intelligatur æquale esse triangulum BAC, superque eo prisma BE æque altum ad AH. Erunt (*b*) BE, AH æqualia prismata. Sed BE prisma (*c*) producitur ex altitudine sua in basim BAC, hoc est (*d*) AE. Ergo etiam prisma AH fit ex altitudine sua, quæ altitudini prismatis BE æqualis ponitur, in basim AE. Fig. 19. & 18. (b) Per cor. 1. hujus. (c) Per sch. 1. p. 40. l. 11. (d) Per const.

Hinc vero & ex 7. patet demonstratio partis secundæ.

(*Scholium 2.*

Dimensio pyramidis truncatæ ABCESO, ex datis altitudine CE, basibus parallelis ABC, OSE, earumque lateribus homologis BC, SE. Fig. 13.

Ut

Ut inveniatur EF altitudo partis deficientis ESOF; propter sim. tr. BCF, SEF, erit BC : SE : : CF : EF. Et divid. BC—SE : SE : : CE : EF. Datis itaque BC, SE & CE, invenietur EF: Atque hæc quidem demonstratio supponit altitudinem perpendicularem cum latere pyramidis coincidere; sed utcumque cadat perpendicularis illa, planum OSE (si opus, continuatum) altitudinem pyramidis & latus ejus FC similiter secabit; & proinde semper erit BC—SE ad SE, ut altitudo pyramidis truncatæ, ad altitudinem partis deficientis. Cujus altitudinis sic inventa pars tertia in basem minorem OSE ducta, dabit partis deficientis ESOF soliditatem. Inventæ autem altitudini partis deficientis, addatur altitudo datæ pyramidis truncatæ, & habetur altitudo pyramidis integræ: cujus altitudinis pars tertia in basim majorem ducta pyramidis integræ soliditatem dabit: e qua, deducta pars, deficiens, pyramidem truncatam relinquet.

Lemma ad P. 10.

PYramides & prismata, quæ conis & cylindris in infinitum inscribuntur, in conos & cylindros desinunt.

Demonstratur ut lemma propositionis 2. adminiculo propositionis 6. & corollarii 1. post. p. 9. si ut istic plana circulo inscripta, ita hic pyramides & prismata, quæ super planis illis tamquam basibus consistunt, a cono & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Fig. 24. *OMnis conus tertia pars est cylindri eamdem basim & altitudinem habentis.*

Basi CL intelligatur inscribi polygonum regulare quotcumque laterum, & super illo tamquam basi, cono quidem pyramis, cylindro autem prisma inscribi. Erit pyramis (a) tertia pars prismatis. Et si rursum inscribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, superque eo inscribatur cono pyramis, & cylindro prisma; iterum erit pyramis tertia pars prismatis. Atque hoc semper eveniet. Quare cum pyramides in conum, (b) prismata in cylindrum desinant; etiam (c) conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 7. l. 12.
(b) Per hanc pr.
(c) Per porif. univ posta. l. 12

(Scholium. *Notandum vero est, hanc propositionem & sequentes duas, non solum ad rectos conos & cylindros, verum etiam*

etiam ad quoscumque obliquos pertinere; quamvis figuræ rectos tantum exhibeant. Deducuntur enim a similibus pyramidum & prismatum quorumcumque, *non a* rectorum *solorum proprietatibus.*)

PROPOSITIO XI.

Conorum æque altorum [BAF, QXR) proportio eadem est quæ basium (CL, SE.) idem accidit cylindris æque altis. Fig. 24. & 25.

Pyramides conis æque altis inscriptæ, sunt (*a*) ut bases. Atqui (*b*) pyramides tandem in conos desinunt. Ergo etiam (*c*) coni sunt ut bases. Cum vero cylindri conorum eamdem cum ipsis basim & altitudinem habentium sint tripli; etiam ipsi erunt ut bases. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 6. l. 12.
(b) Per lem. ante 10.
(c) Per porif. univ

Corollarium.

Eodem modo demonstrabitur etiam prismata & cylindros æquæ alta esse inter se ut bases, imo quælibet corpora cylindriformia æque alta, hoc est, quæ producuntur ex quibuscumque planis in eamdem altitudinem ductis, esse inter se ut bases. Eodem modo de pyramidibus & conis æque altis, & conicis quibuscumque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Conorum similium (BAF & QZR) proportio est triplicata proportionis diametrorum (BF & QR) quæ sunt in basibus. Idem cylindris similibus accidit. Fig. 24. & 25.

Similium conorum basibus inscribe polygona ordinata (*ejusdem denominationis*, quæ proinde similia erunt. *Si vero similes coni fuerint scaleni: ita eorum basibus inscribantur polygona, ut axium inclinatio eumdem habeat situm respectu laterum vel angulorum utriusque polygoni.*) Pyramides super his polygonis inscriptæ conis, etiam similes sunt; quod facile ostenditur. Ergo earum proportio est triplicata (*d*) proportionis laterum BL, QE; hoc est, (*e*) proportionis diametrorum BF, QR. Quare cum pyramides (*f*) in conos desinant, etiam conorum proportio (*g*) est triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonstrandum.

(d) Per 8 l. 12.
(e) Per cor. 2. p. 1. l. 12.
(f) Per lem ante. 10. l. 12.
(g) Per porif. univ

De

De cylindris patet theorema, cum sint tripli conorum.

(Corol. *Si continuetur ratio diametrorum BF, QR quæ sunt in basibus conorum (vel cylindrorum) similium, per terminos G, H; ut sint BF, QR, G, H* ∺, *Erit* (a) *ut BF ad H; ita conus BAF ad conum QZR, & ita cylindrus BM ad cylindrum RI.*)

(a) Per def. 10. l. 5

PROPOSITIO XIII.

Fig. 26.

SI *cylindrus (BI) secetur plano (RL) basibus (BQ, CI) parallelo; erit pars (BL) ad partem (RI,) ut axis segmentum (AO) ad segmentum axis (OF.)*

Demonstratur ut prima sexti.

Theorema eodem modo verum est de superficie.

(*Dividatur enim axis OF in quotcumque partes æquales, & per singula divisionum puncta ducantur plana basibus RL CI parallela, & dividetur cylindrus (atque etiam superficies cylindrica) RI in partes numero æquales iis in quas dividitur axis OF; quarum singulæ, æquales ipsius OF partes pro axibus habentes, erunt cylindri ejusdem altitudinis; & proinde cylindri in quos dividitur cylindrus RI erunt* (b) *ut bases, hoc est æquales: (quod autem cylindricæ superficies istæ in quas dividitur superficies cylindrica RI, sint etiam æquales, constabit ex eo quod una quævis intra alteram quamvis posita illi adamussim congruet: & eodem modo parvulorum cylindrorum æqualitas iterum constabit.) Ergo cylindrus (& cylindrica superficies) RI dividitur in partes aliquotas similes iis in quas dividitur axis OF. Si itaque ex axe OA accipiatur una pars aliquota axis OF quoties poterit, per puncta partes illas ipsius AO connectentia, ducantur plana oppositis planis BQ, RL parallela; manifestum est, toties in antecedente AO axe contineri partem aliquotam consequentis axis OF, quoties in antecedente BL cylindro (vel superficie cylindrica) continetur pars similis aliquota consequentis cylindri (vel superficiei cylindricæ) RI. Ergo* (c) *axis AO est ad axem OF, ut cylindrus BL ad cylindrum RI; (vel etiam ut superficies cylindrica BL ad superficiem cylindricam RI.) Q. E D.*

(b) Per 11. l. 12.

(c) Per rationum æqualium judicium.

Schol. *Hæc propositio non minus valet in obliquo cylindro, quam in recto: in eo enim casu, partes aliquotæ axis OF, ad bases suas similiter inclinantur in parvulis istis cylindris, in quas dividi supponitur cylindrus RI a planis ad bases parallelis;*

lelis; unde duo quivis intra invicem positi congruent, & proinde tam cylindruli quam eorum superficies, partes erunt aliquotæ cylindri & superficiei RI, partibus aliquotis axis OF numero æquales; & proinde ex cylindro vel superficie cylindrica BL toties sumi possunt, quoties partes axis OF ex axe OA. Unde demonstratio omnino eadem erit in cylindro obliquo ac in recto.

Corol. *Hinc, si cylindrus secetur plano basibus parallelo; erunt etiam partes BL, Ri ut earum altitudines. Si enim cylindrus sit rectus, res patet; altitudines enim ab axis segmentis AO, OF non sunt diversæ. si vero fuerit obliquus, ducatur recta linea basibus perpendicularis, ac manifestum est illam atque axem plano basibus parallelo similiter* (a) *secari; & proinde, cum partes BL, RI sint* (b) *ut axis segmenta, erunt etiam ut segmenta perpendicularis, hoc est, ut sui ipsarum altitudines Q. E. D.* (a) Per 17 l. 11. (b) Per sch. hujus pr.

PROPOSITIO XIV.

Cylindri (CI & AR) super basibus (GH, MQ) æquabilibus, sunt inter se ut altitudines (SF, LZ.) Idem conis accidit. Fig. 27. & 28.

Abscinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO, altitudinis LE ejusdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI (c) æquales sunt. Cum igitur cylindrus AO sit ad cylindrum AR, ut (d) LE ad LZ; etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ; hoc est, (quia LE & SF (e) æquantur,) ut SF ad LZ. Quod erat demonstrandum.

(c) Per 11. l. 12. cum schol 10. l. 12. (d) Per cor præc. (e) Per constr.

(*Porro, cum sit cylindrus CI ad cylindrum AR, ut SF ad LZ; erit etiam pars tertia cylindri CI ad partem tertiam cylindri AR, hoc est,* (f) *conus CFI ad conum AZB, ut SF ad LZ.* (f) Per 10 l. 12. ejusque schol. 1.

Observent tyrones, hujus propositionis demonstrationem æque valere in cylindris & conis obliquis ac in rectis.

Corollarium.

Theorema etiam verum est de prismatis; itemque de pyramidibus; & demonstratio plane similis. Sed de prismatis ex coroll. 1. p. 9. l. 12. & p. 25. cum cor. 1. p. 24. l. 11. De pyramidibus ex hoc & ex 7. l. 12.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Fig. 28. & 29. *ÆQuales cylindri (AR, DF) reciprocant bases, & altitudines; & si reciprocant, æquales sunt. Idem conis accidit.*

Demonstratur ut P. 34. l. 11. sed pro 32. & 24. isthic citatis, hic adhibebitur prop. 11. & 13. (*vel* 14.] lib. 12.

(a) Per 11. l. 12. *(1. Pars. Sint primo cylindri recti: si fuerint æque alti, bases (propter cylindros ex hypothesi æquales) erunt* (a) *æquales; unde in eo casu res patet.*

(b) Per eamd. (c) Per 14. l. 12. *Si vero altitudines fuerint inæquales, a majori LZ abscinde LE minori QC æqualem & per E duc planum XO ad MQ parallelum. Basis MQ est ad basim VT* (b) *ut cylindrus AO ad cylindrum FD; hoc est, quia cylindri AR, FD æquales esse supponuntur,) ut cylindrus AO ad cylindrum AR. hoc est,* (c) *ut altitudo LE ad altitudinem LZ; hoc est, (propter LE, QC æquales) reciproce ut altitudo QC ad altitudinem LZ. Q. E. D.*

(d) Per 11. l. 12. & schol post p. 10. l. 12. *Sint autem cylindri quovis modo obliqui, & erigantur super iisdem basibus & in eadem altitudine cylindri recti; eruntque his æquales* (d) *obliqui. Quare cum æquales cylindri recti reciprocent bases & altitudines; etiam æquales obliqui reciprocabunt. Q. E. D.*

(e) Per 10. l. 12. *Cum vero æquales coni sint* (e) *æqualium cylindrorum æque altorum & super iisdem basibus partes tertiæ; hi etiam bases & altitudines reciprocabunt.*

(f) Per 10. l. 12. (g) Per constr. (h) Per 14. l. 12. (i) Per 9. l. 5. (k) Per 11. l. 12. & schol. post. 10. l. 12. (l) Per 10. l. 12. *2. Pars. Sint cylindrorum rectorum altitudines inæquales, & de majori LZ sume minori QC æqualem LE, & per E ducatur planum XO basi parallelum. Cylindrus AO est ad cylindrum FD* (f) *ut MQ ad VT; hoc est per hypoth. ut QC* (g) *sive LE ad LZ; hoc* (h) *est, ut AO ad AR. Ergo* (i) *cylindri AR, FD sunt æquales. Et cum cylindri obliqui sint rectis æque altis & super iisdem basibus* (k) *æquales; hi etiam, si reciprocant bases & altitudines, æquales erunt. Q. E. D.*

Coni autem, cum sint (l) *tertiæ partes cylindrorum æque altorum super iisdem basibus, si reciprocant bases & altitudines, erunt & ipsi æquales. Q. E. D.*

Scholium.

CUM nihil attulerit Euclides de ratione composita in corporibus, eam breviter hoc loco demonstrabimus.

1. Cy-

1. Cylindrus ad cylindrum, & prisma ad prisma, rationem habent compositam ex rationibus basium & altitudinum.

Sunto cylindri FD & AR: ab altiori AR (nam in æque altis res per se patet (a); abscinde AO æque altum ac FD. Sit etiam ut basis VT ad basim MQ, ita FN ad X; & ut altitudo ND seu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur ostendere cylindrum FD esse ad cylindrum AR, ut FN est ad Z. Cylindrus FD est ad cylindrum AO, ut (b) basis VT ad basim MQ; hoc est (c) ut FN ad X: cylindrus autem AO est ad cylindrum AR, ut (d) BO ad BR; hoc est, ut (e) X ad Z. Igitur ex (f) æquo, cylindrus FD est ad cylindrum AR, ut FN ad Z. Fig. 29. & 28. (a) Per 11. l. 12. (b) Per 11. l. 12. (c) Per constr. (d) Per 14. l. 12.

De prismatis res eodem modo demonstrabitur, sed ex corollario 1. p. 9. & coroll. p. 14. (e) Per constr.

2. Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem. (f) Per 22. l. 5.

Sunt enim (g) cylindrorum ac prismatum partes tertiæ. (g) Per 10. & 7. 8. 12.

Hæc vero omnia in corporibus obliquis æque obtinent ac in rectis, uti ex antedictis satis patet.

PROPOSITIO XVI, XVII.

HÆ propositiones omnium prolixissimæ, non alium usum habent, quam ut demonstretur P. 18. quam nos alia faciliori via demonstrabimus.

Lemma ad P. 18.

CYlindri hemisphærio inscripti, in hemisphærium desinunt. Fig. 30.

Sit PZY maximus hemisphærii semicirculus: sitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductisque per divisionum puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inscribantur semicirculo rectangula OBRK, EDHS, quibus deinde extra circulum continuatis, semicirculo circumscripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE; eruntque omnia æque alta. Excessus autem circumscriptorum supra inscripta sunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ simul sumpta conficiunt rectangulum FTYP. Nam quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE simul, æqualia rectangulo LB, hoc est OR. Quare si adjicias utrimque plana FK, TR, erunt simul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur semicirculus cum rectangulis circa radium immotum AZ circum-

circumagi, inscripta rectangula EH, OR producent cylindros hemisphærio inscriptos; & rectangula circumscripta producent cylindros hemisphærio circumscriptos, sibi mutuo insistentes: & sicut rectangulorum circumscriptorum excessus supra inscripta rectangula erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumscriptorum excessus supra inscriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis data minor; adeoque etiam ipse quovis dato (*a*) evadet minor, si radio in plures sine fine partes diviso, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus sine fine multiplicetur: Ergo cylindrorum circumscriptorum; multoque magis ipsius hemisphærii, quod cylindrorum circumscriptorum pars est, excessus supra inscriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemisphærio in infinitum inscripti, tandem desinunt (*b*) in hemisphærium. Quod erat demonstrandum.

(a) Patet ex 14. l. 12.

(b) Per def. 6. l. 12

Corollarium.

EOdem modo demonstrabitur cylindros cono, conoidi, sphæroidi, &c. inscriptos, in ipsa desinere.

PROPOSITIO XVIII

Fig. 31.

SPhærarum proportio est triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)

Radiis AB, YR in quot placuerit æquales partes, sed æque multas, divisis, ductisque per divisionum puncta perpendicularibus, &c. Intelligantur maximis sphærarum semicirculis inscripta esse rectangula æque multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta, inscribant utrique hemisphærio cylindros æque multos, sibi invicem insistentes. Quia KC (*c*) est ad CF, ut CF ad CB. Erit ratio KC ad CB duplicata (*d*) rationis KC ad CF, hoc est rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per constructionem est KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam (*e*) FC est ad BC, ut XE ad ER. Sed BC est ad CO per constr. ut RE ad ES. Igitur ex æquo (*f*) FC est ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur (*g*) FL, XQ similes sunt, ac proinde eorum proportio est triplicata (*h*) proportionis diametrorum FI, XV, seu semidiametrorum FC, XE, quæ sunt in basibus. Sed proportio FC ad XE eadem est cum proportione quæ est inter diametros sphæra-

(c) Per cor. 1. p. 13. l. 6.

(d) Per def. 10. l. 5.

(e) Per 35. l. 5.

(f) Per 22. l. 5.

(g) Per def. 4. l. 12.

(h) Per 12. l. 12.

ſphærarum BK, RZ; (nam ut jam oſtendi, FC eſt ad XE, ut CO ad ES; hoc eſt, ut (*a*) BK ad RZ, ipſarum CO, ES per conſtr. æque multiplices.) Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonſtravimus ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos, ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio ſimul omnium ad omnes ſimul, (*b*) triplicata eſt rationis diametrorum BK, RZ. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria (*c*) deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit (*d*) rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

(a) per 15.l.5.
(b) Per 12. l.5.
(c) Per lem. præc.
(d) Per poriſm. univerſ.

Corollarium.

NOta igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſcit. Ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. Ut eſt 1. ad 1000., quartum terminum, ita ſphæra minor erit ad majorem.

Conorum, Cylindrorum & Sphæræ dimenſio dabitur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

QUemadmodum ſimiles (*e*) planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas, in proportione data augentur vel diminuuntur.

Data ſit ſphæra vel cubus, vel aliud quodcumque, cujus radius ſive latus ſit A. Data item ſit proportio quæcumque A ad B, ut dupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & ſimile. Fig. 32.

Inter terminos rationis datæ A & B, inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in ſcholio poſt 13. l.6. Sphæra cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile, factum ſuper latere X, erit duplum dati.

Nam corpora ſimilia quorum radii ſeu latera ſunt A & X, rationem inter ſe habent triplicatam (*f*) rationis A ad X, hoc eſt, eamdem (*g*) quam A habet ad B.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum a Deliaco Apolline dictum eſt, quod is, lue ſæviſſima Athenas populante, conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam

(e) Per cor. 4. p. 20. l.6.
(f) Per 8 & cor.2 p.9 & per 12. ac 18 l. 12
(g) Per def. 10. l. 5

si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. ita Valerius Maximus l. 8. (*cap.* 12.

At qui Valerius non ista, sed hoc solum dicit (Plato) conductores sacræ arcis, (*lege* aræ,) de modo & forma ejus secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire jussit. *Ubi tamen pro* Euclide, Eudoxum *reponendum esse monet Menagius ad Diog. Laertii lib.* 2. *segm.* 106. *Ceterum accuratiora si velis de hujus problematis, occasione, deque methodis idem solvendi, ac præcipue de variis modis duas medias proportionales inveniendi, quos excogitarunt antiqui Geometræ, consule* (*ut alios mittam*) Eratosthenem de cubi duplicatione, (*inter opera ejus ad calcem Arati Oxon.* 1672. *edita.*) Vitruvium de Architect. *lib.* 9. *cap.* 3. Plutarchum de genio Socratis, (*operum Moral. edit. Francofurt. pag.* 579.) Pappum Collect. Mathemat. *lib.* 3. *prop.* 5. & Eutocium (*a Tacqueto laudatum supra, in schol. post* 13. *l.* 6.) Comment. in Archimed. de sphæra & Cylindro, *ad Theor.* 1. *lib.* 2.

Porro, inter duos numeros datos invenientur duo medii proportionales hoc modo. Quadratum prioris extremi in posteriorem ducatur, & producti radix cubica extrahatur. Erit ea duorum mediorum prior. Deinde quadratum posterioris extremi per extremum priorem multiplicetur & hujus producti radix cubica exhibebis duorum mediorum posteriorem. Ex. gr. proponatur invenire duos medios proportionales inter 8. & 27. *Multiplica* ($8 \times 8 = $) 64, *per* 27, & *orietur* 1728, *cujus radix cubica* 12, *est duorum mediorum proportionalium prior. Deinde multiplica* ($27 \times 27 = $) 729, *per* 8, & *producetur* 5832, *cujus radix cubica est* 18, *nempe duorum mediorum posterior. Nam* 8, 12, 18, 27 $\div\!\div$. *Et universaliter, si inter A & E quærantur duæ mediæ proportionales M & N; erit* $M = \sqrt{c\,AqE}$, & $N \sqrt{c\,EqA}$.

(a) Per col. 2. p. 12 l. 6. *Cum enim rectangulum sub A & E sit* (a) *medium proportionale inter illarum quadrata; erunt Aq, AE, Eq* $\div\!\div$. *Ducantur hæc tria plana in eamdem altitudinem A; & orientur* (b) *solida continue proportionalia Ac,* (c) *AqE, EqA; ducantur etiam eadem plana in altitudinem communem E, & fient solida AqE, EqA, Ec* $\div\!\div$. *Quatuor ergo solida, Ac, AqE, EqA, Ec sunt continue proportionalia; ac proinde eorum radices cubicæ, A,* $\sqrt{c\,AqE}$, $\sqrt{c\,EqA}$, *E continue proportionales* (d) *erunt. Ergo, cum ex hypoth. sint A, M, N, E* $\div\!\div$, *erit* $M = \sqrt{c\,AqE}$, & $N = \sqrt{c\,EqA}$.

(b) Per 32 l. 11.

(c) Vide sch p. 36. l 11.

(d) Per. sch. 1. p. 33. l 11. & p. 35. l. 5.

Si vero primus terminus fuerit 1, *extracta radice cubica posterioris extremi, habebitur duorum mediorum prior, cujus medii quadratum erit duorum mediorum posterior. Si enim*

fuerit

fuerit $A = 1$, *erit* $Aq = 1$. *Vnde* $AqE = 1 \times E = E$, & $\sqrt{c AqE}$ (*sive* M) $= \sqrt{cE}$. *Et eodem modo* $\sqrt{cEqA}$ (*sive* N) $= \sqrt{cEq} =$ (a) $\sqrt{cE} \times \sqrt{cE}$. *Ex. gr. inter* 1. & 125. *medii sunt* 5. & 25. *Est nempe* $\sqrt{c125} = 5$, & $5 \times 5 = 25$. *Sunt autem* 1, 5, 25, 125 $\div\!\!:$ *Ac proinde, si pro cubi dati latere ponatur unitas, habebitur latus cubi dato dupli, radicem cubicam numeri binarii extrahendo. Quod (cum per se manifestum sit, tum etiam) ex eo deducitur, quod* $\sqrt{c2}$ *sit duorum mediorum proportionalium prior inter* 1. & 2.)

(a) Per cor p.37. l.11.

ANDREÆ
TACQUET
E SOCIETATE JESU

SELECTA EX

ARCHIMEDE
THEOREMATA

Via faciliori ac breviori demonstrata, & novis inventis aucta.

ROMÆ, MDCCXLV.

TYPIS HIERONYMI MAINARDI.
Superiorum licentia.

LECTORI.

Quamvis in Mathematicis disciplinis complures summi, & admirabiles viri extiterunt: prima tamen gloria, communi quodam consensu, Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quam legant; admirantur plures, quam intelligant. Causæ, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas; sermonis ex Greco translatis obscuritas nonnulla; demonstrationes prolixæ & arduæ. Putavi igitur ex studiosæ juventutis usu futurum, si elementis jam illustratis, hæc a me selecta ex Archimede theoremata, & via multo faciliori ac breviori demonstrata subnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonstrando eam tenui, ut sperem eum qui elementa perceperit, hæc summi Geometræ præclarissima inventa negotio haud magno assecuturum. Sub finem adjectis tredecim propositionibus, Archimedis de cylindro & sphæra doctrinam ampliorem facio, atque inter cetera demonstro sesquialteram proportionem in tribus corporibus, *sphæra, cylindro, & æquilatero cono, utroque sphæræ circumscripto, continuari. Varia insuper sparsim, inter quæ propositio 12. & corollaria prop. 14. præcipua sunt, & scholia omnia adjeci. Fruere istis, quisquis Geometriæ candidatus es; & quantum ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehique sursum persenseris, mentem ab infimis hisce rebus feliciter jam avulsam attolle etiam altius, atque dirige ad veritatem primam, æternam, immensam, quæ Deus est, cujus ineffabili visione nos futuros aliquando æternum beatos confido. Vale.*

THE-

THEOREMATA SELECTA
EX ARCHIMEDE
DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos secet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His positis. Fig. 26. tab ex Archimede.

1. Sector sphæræ est, qui sectore circulari AECG, seu AEBG, circa diametrum BC in orbem acto producitur.

2. Segmentum seu portio sphæræ est, quæ a circulari segmento ECG, seu EBG, circa eamdem diametrum BC in orbem acto, describitur.

3. Portionis sphæricæ (EBG) vertex est diametri immobilis extremitas B: Basis est circulus a recta EG descriptus; Axis est diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4. Cum sphæricæ portionis, aut corporis ei inscripti, aut com superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & cum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus; nisi adjungatur (*tota*;) tunc enim accipiuntur & bases.

Rursum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos, quæ enim ad cylindros & conos obliquos pertinent, geometriam elementarem superant.

Axiomata.

1. POlygoni circulo inscripti ambitus, minor est circuli peripheria. Fig. 1. & 19.

2. Polygoni circuli circumscripti ambitus, circuli peripheria major est. Fig. 1.

3. Quod si polygonum circulo inscriptum, circa diametrum (AE una cum circulo circumagatur: erit corporis a polygono geniti superficie, minor sphæræ superficie. Et, si polygonum circulo circumscriptum, circa diametrum Fig. 19.

una

una cum circulo circumagatur; erit corporis à polygono geniti major superficies, superficie sphæræ.

Fig. 17. 4. Similiter, ambitus polygoni inscripti segmento circulari (DAF,) minor est peripheria segmenti (DAF.) Et si polygonum segmento inscriptum una cum segmento, circa segmenti axem (AO) circumagatur; erit corporis a polygono geniti superficies, minor superficie portionis sphæricæ (CAF.)

Fig 6 & 8. 5. Superficies prismatis cylindro inscripti, minor est cylindri superficie, circumscripti vero major.

Fig. 7 & 10 6. Et superficies pyramidis cono inscriptæ, minor est coni superficie; circumscriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

Datæ sint figuræ quæcumque seu planæ seu solidæ, A, B. Sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B semper minus ac minus excedendo, in ipsas (a) desinant, & tamen semper inter se æquales sint.

(a) Vide def. 6. l. 12

Dico etiam figuras A & B æquales esse.

E. F.
A. B. X.

Si non, alterutra major erit. Sit ergo A major quam B excessu X. Per hypothesim dantur magnitudines E, F inter se æquales, quæ excedant figuras A, B excessu minori quam X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quam A. Sed F per hypothesim est æqualis E. Ergo etiam E minor est quam A, quod est absurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse majorem quam A. Ergo cum neutra sit major altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Datæ sint figuræ A & B; sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ a figuris datis semper minus ac minus deficiendo, in ipsas (b) desinant, & semper inter se æquales sint.

(b) Vide def. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z.

A. B. Z.
O. P.

Si non, alterutra minor erit. Esto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypothesim dari possunt magnitudines O, P inter se æquales, quæ deficiant a figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere a B, Ergo P major est quam A. Sed P per hypothesim est æqualis O. Ergo etiam O major est quam A, quod repugnat hypothesi, qua statuitur O minor quam A. Eodem modo ostendam B non esse minorem quam A. Quare cum neutra sit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

(Hæ vero propositiones duæ, ex porismate universali (post pr.2. lib.12.) absque ulteriori demonstratione, immediate deduci possent.)

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumscriptorum & inscriptorum, desinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinunt.

Si nimirum arcubus sine fine bisectis, plura semper ac plura latera circulo circumscribantur & inscribantur. Fig. 1. tab 6. ex Archim.

1. Pars. Intelligantur circulo inscripta, & circumscripta, polygona ordinata (*similia*;) sive ut traditur p. 12. l. 4. sive ut in hac figura, perinde erit. Manifestum est (*a*) FI esse ad CE, (hoc est, (*b*) totum ambitum circumscriptum esse ad totum ambitum inscriptum,) ut IA est ad CA. Atqui IC excessus rectæ IA supra CA, fit tandem quacumque data minor, si plura semper ac plura in infinitum latera circumscribi & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum, tandem fiet quovis dato minor. Ergo multo (*c*) magis excessus ambitus circumscripti supra peripheriam fiet quocumque dato minor. Similiter, quia jam ostendi defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multo (*d*) magis defectus inscripti ambitus a peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inscripti quam circumscripti, in peripheriam (*e*) desinunt. Quod erat primum. Hæc ulterius demonstrare operæ pretium non est, cum satis sint manifesta.

(a) Per cor. 1. p 4. l.6.
(b) Per 12. l.5.
(c) Patet ex axio.1
(d) Patet ex axio.2.
(e) Per def 6.l.12.

2. Pars

2. Pars. Quia jam ostensum est excessum lateris FI supra latus EC fieri tandem quovis dato minorem; (est enim FI ad EC, ut IA ad CA;) etiam excessus quadrati FI supra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita (*a*) polygonum circumscriptum ad polygonum inscriptum. Ergo etiam excessus polygoni circumscripti supra inscriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis excessus polygoni circumscripti supra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inscripti defectus a circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inscripta, quam circumscripta, in circulum (*b*) desinunt. Quod erat alterum

(a) Per 20. l. 6. & sch. ei annexum.

(b) Per def. l. 12

PROPOSITIO IV.

Fig. 1. [c] Vide def. 3. l. 4.

Polygonum (c) ordinatum circulo conscriptum (FINTR) æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo vero circuli radius.

Et polygonum ordinatum circulo inscriptum æquatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus, (*d*) est perpendicularis ad tangentem IF. Quare si, ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum resolvatur in triangula; erit radius AB communis omnium altitudo; adeoque triangula ipsa liquet esse æqualia. Ergo triangulum basim habens parem summæ laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem vero AB, æquabitur illis (*e*) omnibus, hoc est, toti polygono circumscripto.

(d) Per 18. l. 3.

(e) Patet ex 1. l. 6.

2. Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.

(*Nam propter æqualia inscripti latera, perpendiculares omnes a centro A æquales (f) erunt, & proinde omnia triangula in quæ resolvitur inscriptum polygonum, (g) æqualia sunt. Unde eodem prorsus modo procedet demonstratio ac in parte priori.*

(f) Per 14. l. 3.

(g) Per 38. l. 1.

Cor. 1. *Hinc area polygoni ordinati circulo inscripti vel circumscripti invenitur, (h) multiplicando perpendiculum a centro ad latus quodvis ductum, in dimidium polygoni circumferentiam.*

(h) Per hanc & schol. p. 41. l. 1.

Cor.

Cor. 2. *Et cum polygona circulo inscripta ac circumscripta, in circulum, & polygonorum ambitus in circuli ambitum tandem* (a) *desinant; etiam area circuli invenietur, multiplicando radium in dimidiam ejusdem peripheriam.* (a) Per præced.

Cor. 3. *Circulus ergo æqualis erit triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter. Exurgit* (b) *enim area trianguli ex dimidia basi in altitudinem ducta. Et eodem modo constabit, sectorem circuli æqualem esse triangulo, cujus altitudo est circuli radius, & cujus basis est recta quæ arcui sectoris æqualis sit: Hoc autem corol. ex iisdem principiis latius demonstratur in prop. seq.* (b) Per schol. p. 41 l. 1.

Cor. 4. *Figurarum isoperimetrarum capacissima est circulus. Esto perimeter polygoni cujuscumque (e gr. quadrati) EGHI æqualis circumferentiæ circuli cujus radius sit AF, & cujus centrum F coincidat cum centro circuli qui quadrato EGHI inscribi, vel circumscribi possit. Dico quod circuli area major est quam area polygoni. Area enim circuli æqualis* (c) *est triangulo cujus basis est circumferentia, altitudo vero semidiameter FA: & Area polygoni æqualis* (d) *triangulo cujus basis est perimeter polygoni, circumferentiæ circuli ex hypothesi æqualis, & altitudo perpendicularis FO a centro in latus polygoni demissa: quæ quidem cum radio circuli semper sit minor, liquet aream polygoni area circuli esse minorem. Q. E. D.* Fig. 2. (c) Per cor. 3. (d) Per hanc pr.

Et similiter inter figuras solidas æqualibus superficiebus contentas, Sphæra omnium capacissima demonstrabitur.

PROPOSITIO V.

Circulus est æqualis triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter. Fig. 3.

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem vero radium circuli, semper sunt (*e*) æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum, circumscripta, in circulum (*f*) desinunt: similiterque triangula (ut mox ostendam) quæ pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine vero radium AB. tandem desinunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. Ergo (*g*) circulus, & triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB, æqualia sunt. (e) Per præced. (f) Per 3. hujus. (g) Per 1. hujus.

Quod autem triangula sub ambitu polygoni & radio, desinunt in triangulum sub peripheria & radio, sic ostendo. Triangula sub ambitu circumscripti polygoni & radio AB sunt

(a) Per 1. l.6. sunt ad triangulum sub peripheria & radio AB, ut (*a*) basis ad basin, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam; cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in (b) Per 3. hujus. peripheriam (*b*) desinit. Ergo & triangula desinent in triangulum.

Corollaria.

1. EX hac & 41. l.1. (*vel potius, ex hac & cor. p.42. l. 1.*) patet rectangulum sub radio & dimidia circumferentia; (*sive sub diametro & circumferentiæ quadrante; seu denique, sub quarta parte diametri & circumferentia*) esse æquale circulo: sub radio & tota circumferentia, (*sive sub diametro & dimidia circumferentia*) esse (*circuli*) duplum: sub tota diametro & tota circumferentia esse quadruplum circuli.

Fig.9. 4. 2. Circulus est ad quadratum sibi inscriptum, ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum vero circumscriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum, (*sive ut circumferentia dimidia ad diametri duplum; & ad radii quadratum, ut circumferentia ad diametrum.*)

Nam rectangulum sub (*dimidia circumferentia*) CDE & (c) Per 1. cor. radio CA seu CF, (hoc (*c*) est, ipse circulus,) est ad rectangulum GFCE, nimirum sub FG & CF, (hoc (*d*) est, ad (d Per schol. post pr 6. & 7. l.4.) quadratum inscriptum BCDE,) ut (*e*) CDE dimidia circumferentia est ad FG seu CE diametrum, quod erat primum. Ac proinde circulus est ad duplum rectanguli GFCE, (e) Per 1. l.6. (hoc est, ad FH quadratum circumscriptum,) ut (*circumferentia dimidia*) CDE ad duplam diametrum CE; (*quod erat secundum. Adeoque circulus est ad quartam partem quadrati circumscripti, hoc est, ad radii quadratum, ut dimidia circumferentia ad semidiametrum, sive ut circumferentia ad diametrum; quod erat tertium.*)

3. *Ex corollario primo, quadrantis ope; mechanice habebitur rectangulum vel quadratum æquale circulo ejusdem cum quadrante radii; atque inde, circuli cujusvis quadratura* (f) Per cor. 1 *mechanice obtinebitur. Rectangulum enim* (f) *sub quadrantis arcu & duplo radio; adeoque & quadratum* (g) *me-* [g] Per 13. & 17. l.6. *diæ proportionalis inter arcum & duplum radium, circulo ejusdem cum quadrante radii exæquabitur. Atque inde, dato cuivis alteri circulo æquale rectangulum vel quadratum invenietur per cor.7. p.2. l.12.*

Mechanice vero habebitur linea recta, dati quadrantis arcui æqualis, filum vel chartam ad arcum illum applicando; vel etiam arcum super plano, secundum regulæ vel lineæ rectæ directionem volvendo.)

PRO-

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minus quam ter & unam septimam (seu $\frac{10}{70}$), plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus theorematis demonstrationem, assumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumscriptum, inscriptum alterum, utrumque 96 laterum. Deinde ostendit 96. latera circulo circumscripta continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$ ac proinde circumferentiam quæ ipsis minor est, etiam continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96. circumferentiæ inscripta, (ac proinde & circumferentiam, quæ ipsis major est,) amplius continere diametrum quam ter & $\frac{10}{71}$. Porro longior est hujus rei demonstratio quam ut hoc loco adferri debeat.

(At tanti momenti theorema, cui demonstrando Archimedes ipse librum integrum impendit, ut indemonstratum prorsus tyronibus obtruditur, a meipso impetrare nequeo. En igitur ejusce demonstrationem Archimedeam, quam Magni Barrovii vestigiis præcipue insistendo, hic descripsi:

Pars prima. Circuli cujuscumque perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate minori quam $\frac{1}{7}$ parte ejusdem diametri. Fig 4.

Est C centrum circuli, & AD (radio AC æqualis,) (a) latus hexagoni circulo inscriptibilis, & juncta CD, erit (b) angulus ACD sexta pars rectorum quatuor. Angulus ACD bisecetur recta CE, quæ etiam (c) bisecabit AD in S eique perpendicularis erit. Producatur CE donec occurrat rectæ EA tangenti circulum in A; & continua angulorum ad C bisectione, ducantur ad tangentem rectæ CF, CG, CH, CK, ut sit ang. ACD = 2 ang. ACE = 4 ang. ACF = 8 ang. ACG = 16 ang. ACH = 32 ang. ACK. Erit itaque ang. ACH, (sive 2 ang. ACK $\frac{1}{96}$ (pars nonagesima sexta) rectorum quatuor. Et si in tangente producta capiatur AL = AK, & jungatur CL, erit (d) angulus ACL angulo ACK æqualis; & proinde, angulus LCK anguli ACK duplus erit, sive æqualis angulo ACH, seu $\frac{1}{96}$ rectorum quatuor; & LK erit latus figuræ ordinatæ 96 laterum circulo circum-

(a) Per cor. 1. p. 15. l. 4.
(b) Per 26 l. 3. & cor. 1. p 33. l. 6
(c) Per n. 3. sch. p. 26. l. 1.
(d) Per 4. l. 1.

cum-

cumscriptibilis, cujus proinde ambitus erit 96 LK, circuli circumferentia (a) *major. Si itaque ostendatur 96 LK minorem esse quam* $3\frac{1}{7}$ *diametri AB; Ergo etiam circuli perimeter minor erit quam* $3\frac{1}{7}$ *ejusdem diametri.*

(a) Per axiom. 2. hujus.

Ob triangula similia (b) *CEA, CAS, erit CE : EA :: CA : AS : Sed CA* = (c) 2 *AS; ergo CE* = 2 *EA. Et ob angulum ACE bisectum recta CF,* (d) *erit EC: CA :: EF : FA; & compon. EC + CA : CA :: EA : FA; & permut. EC + CA : EA : CA : FA. Et eodem modo ostendetur esse FC + CA : FA :: CA : GA : & GC + CA : GA :: CA : HA; & denique HC + CA : HA :: CA : KA.*

(b) Per 8. 1 6.
(c) Prius.
(d) Per 3. l. 6.

Ponatur EC = 306 : *erit ECq* = 93636, *& EA* (e) *erit* = 153, *unde EAq* = 23409, *& CAq* (= *ECq* (f) − *EAq* = 93636 − 23409) = 70227. *Sed* √ 70225 = 265. *Ergo CA major est quam* 265, *& EC + CA major quam* (306 + 265 =) 571. *Et cum sit EC + CA, EA :: CA : FA, sitque ratio EC + CA ad EA* (g) *major ratione* 571 *ad* 153, *erit* (h) *etiam ratio CA ad FA major ratione* 571 *ad* 153, *hoc est,* (*utrumque numerum multiplicando per* 8) *ratione* 4568 *ad* 1224. *Si itaque ponatur FA* = 1224, *erit* (i) *CA major quam* 4568.

(e) Prius.
(f) Per prob. 2 post 47. l. 1.
(g) Per 8. l. 5.
(h) Per sch. p. 11. l. 5.

Ponatur igitur FA = 1224, *eritque FAq* = 1498176 : *Et cum CA major sit quam* 4568, *erit CAq majus quam* 20866624, *adeoque CFq* (= (k) *FAq + ACq*) *majus erit quam* 1498176 + 20866624, *hoc est, quam* 22364800. *Sed* √ 22363441 = 4729. *Ergo FC major est quam* 4729, *& FC + CA major quam* 4729 + 4568, *hoc est, quam* 9297. *Et cum sit FC + CA : FA : CA : GA, sitque ratio FC + CA ad FA, major ratione* 9297 *ad* 1224, *erit etiam ratio CA ad GA major ratione* 9297 *ad* 1224. *Si itaque ponatur GA* = 1224, *erit CA major quam* 9297.

(i) Per 10 l. 5. cum schol. p. 7. l. 5.
(k) Per 47. l. 1.

Ponatur igitur GA = 1224, *eritque GAq* = 1498176 : *Et cum CA major sit quam* 9297, *erit CAq majus quam* 86434209, *adeoque CGq* = *GAq + ACq*) *majus erit quam* 1498176 + 86434209, *hoc est, majus quam* 87932385. *Sed* √ 87928129 = 9377. *Ergo CG major est quam* 9377, *& GC + CA major est quam* 9377 + 9297, *sive major quam* 18674. *Et cum sit GC + CA : GA :: CA : HA, sitque ratio GC + CA ad GA major ratione* 18674 *ad* 1224, *sive* (*utrumque dimidiando*) *ratione* 9337 *ad* 612; *erit etiam ratio CA ad HA major ratione* 9337 *ad* 612. *Si ita ponatur HA* = 612, *erit CA major quam* 9337.

Ponatur igitur HA = 612, *eritque HAq* = 374544 *Et cum CA major sit quam* 9337, *erit CAq majus quam* 87179569,

adeo

adeoque CHq (= *HAq* + *ACq*) *majus quam* 374544 + 87179569, *hoc est, majus quam* 87554113. *Sed* √ 87553449 = 9357. *Ergo CH major est quam* 9357, & *HC* + *CA major erit quam* 9357 + 9337, *hoc est, major quam* 18694. *Et cum sit HC* + *CA* : *HA* :: *CA* : *KA*; *sitque ratio HC* + *CA ad HA major ratione* 18694 *ad* 612; *sive* (*utrumque dimidiando*) *ratione* 9347 *ad* 306; *erit etiam ratio CA ad KA major ratione* 9347 *ad* 306. *Si itaque ponatur* 2 *AK sive LK* = 306, *erit* 2 *AC sive AB major quam* 9347, & *ratio AB ad* 9347 *major erit ratione LK ad* 306; & *proinde ratio* $3\frac{1}{7}$ *AB ad* ($3\frac{1}{7}$ × 9347 =) $29376\frac{2}{7}$, *major erit* (a) *ratione* 96 *LK ad* (96 × 306 =) 29376. *Hæc autem ultima est ratio æqualitatis, cum sit* 96 *LK* = 29376. *Ergo* $3\frac{1}{7}$ *AB major est quam* $29376\frac{2}{7}$; & *proinde adhuc major quam* 29376, *sive quam* 96 *LK*. *Ambitus ergo polygoni ordinati* 96 *laterum circulo circumscripti*, & *multo magis perimeter circuli cui circumscribitur polygonum illud, minor est quam* $3\frac{1}{7}$ *diametri ejusdem circuli.* Q. E. D.

(a) Per 15.1.5.

Pars secunda. Circuli perimeter, diametri AB triplum excedit, quantitate majori quam $\frac{10}{71}$ partibus ejusdem diametri. Fig. 5.

Esto arcus AD sexta pars totius circumferentiæ circularis, & *continua bisectione fiat arc. AD* = 2. *arc. AE* = 4. *arc. AF* = 8. *arc. AG* = 16. *arc. AH*; & *erit arcus AH* $\frac{1}{96}$ *totius circumferentiæ. Ducantur rectæ BD, BE, BF, BG, BH*; & *AD, AE, AF, AG, AH*; *erit AH latus figuræ ordinatæ* 96 *laterum circulo inscriptibilis, cujus proinde ambitus,* 96 *AH. erit circuli circumferentia* (b) *minor. Secent rectæ AD, BE se invicem in K*, & *propter angulos EBA, EAD æqualibus arcubus insistentes*, & *proinde* (c) *æquales*, & *angulum ad E communem, triangula ABE, KAE* (d) *erunt similia*, & *proinde AB* : *AK* :: *BE* : *EA*. *Et in triangulo ABD, ob angulum B* (e) *bisectum recta BK, erit* (f) *DB* : *BA* :: *DK* : *KA*; & *compon. DB* + *BA* : *BA* :: *DA* : *KA* : & *permut. DB* + *BA* : *DA* :: *BA* : *AK* :: (*prius*) *BE* : *EA*. *Et pari ratiocinio ostendetur esse EB* + *BA* : *EA* :: *BF* : *FA*; & *FB* + *BA* : *FA* :: *BG* : *GA*; & *GB* + *BA* : *GA* :: *BH* : *HA*.

(b) Per axiom. 1. hujus. (c) Per 29.1.3. (d) Per cor 9 p. 32 1.1. & p. 4. l. 6. (e) Per 29 l.3. (f) Per 3. l 6.

Ponatur jam BA = 1560, *eritque BAq* = 2433600, & *DA* (= *radio* (g) *AC*) = 780; *unde DAq* = 508400, & *DBq* (= *BAq* — *DAq*) = 1825200. *Sed* √ 1825201 = 1351. *Ergo DB minor est quam* 1351, & *DB* + *BA minor quam*

(g) Per cor. 1. p. 15.l.4.

(1351 + 1560 =) 2911. *Quare ratio* 2911 *ad* 780, *hoc est*, (*utrumque numerum per* 100 *multiplicando*,) *ratio* 291100 *ad* 78000, *major est ratione* $DE + BA$ *ad* DA, *sive* BE *ad* EA. *Si itaque ponatur* $EA = 78000$, *erit* BE *minor quam* 291100.

Ponatur igitur $EA = 78000$, *eritque* $EAq = 6084000000$ *Et cum sit* BE *minor quam* 291100, *erit* BEq *minus quam* 84739210000, & BAq ($= BEq + BAq$) *minus quam* 90823210000. *Sed* $\sqrt{90826890625} = 301375$ *Ergo* BA *minor est quam* 301375, & $EB + BA$ *minor quam* (291100 + 301375 =) 592475. *Quare ratio* 592475 *ad* 78000, *hoc est*, (*utrumque numerum dividendo per* 325, & *quotos inde ortos per* 11 *multiplicando*,) *ratio* 20053 *ad* 2640; *ratione* $EB + BA$ *ad* EA, *sive* BF *ad* FA *major erit*. *Si itaque ponatur* $FA = 2640$, *erit* BF *minor quam* 20053.

Ponatur igitur $FA = 2640$, *eritque* $FAq = 6969600$. *Et cum* BF *minor sit quam* 20053, *erit* BFq *minus quam* 402122809. & BAq($= BFq + FAq$)*minus quam* 409092409 *Sed* $\sqrt{409131529} = 20227$. *Ergo* BA *minor est quam* 20227, & $FB + BA$ *minor quam* 40280. *Quare ratio* 40280 *ad* 2640, *hoc est*, (*utrumque dividendo per* 40, & *quotos inde ortos multiplicando per* 6,)*ratio* 6042 *ad* 396 *major est ratione* $FB + BA$ *ad* FA, *sive* BG *ad* GA. *Si itaque ponatur* $GA = 396$, *erit* BG *minor quam* 6042.

Ponatur igitur $GA = 396$, *eritque* $GAq = 156816$. *Et cum* BG *sit minor quam* 6042, *erit* BGq *minus quam* 36505764, & BAq ($= BGq + GAq$) *minus quam* 36662580. *Sed* $\sqrt{36663025} = 6055$. *Ergo* BA *minor est quam* 6055, & $GB + BA$ *minor quam* 12097. *Quare ratio* 12097 *ad* 396, *hoc est utrumque duplicando*,) *ratio* 24194 *ad* 792 *major est ratione* $GB + BA$ *ad* GA, *sive ratione* BH *ad* HA. *Si itaque ponatur* $HA = 792$, *erit* BH *minor quam* 24194.

Ponatur igitur $HA = 792$, *eritque* $HAq = 627264$. *Et cum* BH *minor sit quam* 24194, *erit* BHq *minus quam* 585349636, & BAq ($= BHq + HAq$) *minus quam* 585976900. *Sed* $\sqrt{585978849} = 24207$. *Ergo* BA *minor est quam* 24207, & *ratio* AH *ad* AB *major erit ratione* 792 *ad* 24207, *sive* (*utrumque dividendo per* 3,) *major ratione* 264 *ad* 8069; & *proinde ratio* 96 AH *ad* AB *major erit ratione* ($96 \times 264 =$) 25344 *ad* 8069. *Et quoniam* (25344, *sive*) 25344×1 *superat* ($25343\frac{3}{7}\frac{4}{1}$, *sive*) 8069

$8069 \times 3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$; *erit* (a) *ratio* 25344 *ad* 8069 *major ratione* $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ *ad* 1, *ac* (b) *proinde ratio* 96 *AH ad AB major est ratione* $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ *ad* 1. *Ergo* (c) *factum extremorum majus erit, facto mediorum, hoc est,* 96 *AH sive ambitus polygoni circulo inscripti, & proinde circuli circumferentia cui inscribitur, major erit quam* $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ *diametri* AB. *Q.E.D.*

(a) Per cor. 7. p. 16. l. 6.
(b) Per sch p. 11. l. 5.
(c) Per cor. 6 p. 16 l. 6.

Quod si ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam statutos arctare poterimus magis magisque sine termino, atque ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Præstitum est hoc a Ludolpho a Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliisque.

(*Cum autem tangens graduum* 36 *in* 10 *ducta, det pentagoni* circumscripti; *& sinus graduum* 36 *in* 10 *ductus, det pentagoni* inscripti *perimetrum. Cum etiam consimiliter, tangens gradus dimidii in* 720 *ducta, polygoni laterum* 360 circumscripti, *& sinus gradus dimidii in* 720 *ductus polygoni laterum* 360 inscripti *perimetrum exhibeat; atque ita porro in infinitum: Obscurum esse nequit quo pacto e datis jam sinuum atque tangentium tabulis, numeri sequentes inveniri poterunt.*) Vide Fig. 1.

Proportiones præcipuas hactenus inventas hic subjicio,
Prima est Archimedis, hujusmodi:

Diameter 7.
Circumf. 22. major vera.
Diameter 71.
Circumf. 223. minor vera.

(*Nam* $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$, & $\frac{223}{71} = 3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$)

Rationes 22. ad 7, & 223 ad 71, si ad commune consequens reducantur, quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem;) rationes orientur 1562 ad 497. & 1561. ad 497.

Posita igitur diametro partium 497,
erit circumferentia major vera 1562.
& circumferentia minor vera 1561.

Utraque igitur a vera differt quantitate minori, quam sit $\frac{1}{497}$ pars diametri,

Quod si rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune consequens; provenient rationes 1561 ad 4906. & 1562 ad 4906.

Posita igitur circumferentia partium 4906.

erit diameter minor vera 1561

diameter major vera 1562.

Utraque igitur a vera diametro differt quantitate minori, quam sit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita a Metio est Archimedea multo accuratior. Juxta hanc est

Diameter 113.

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris constantes, nulla veræ propinquior: ex hac enim, posita diametro 10, 000, 000, provenit circumferentia 31, 415, 929, quæ a vera solum penes notam primam 9 differt excessu paulo majore, quam sint duæ particulæ decimillionesimæ diametri.

Sed utraque multo exactior est gemina illa Ludolphi a Ceulen: prioris termini constant notis 21, posterioris vero notis 36.

Diameter

100, 000000, 000000, 000000.

Circumf. major *vera*.

314, 1592265, 358979, 323847.

Circumf. minor vera

314, 159265, 358979, 323846

Differentia utriusque circumferentiæ est particula una diametri, denominata a numero, qui constat unitate & 20 cifris; ac proinde tam hæc quam illa a vera circumferentia differt minori quantitate quam sit diametri particula dicta, videlicet centies millionesies millionesies millionesima.

Diameter

100000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000.

Circumf. major vera

314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950289

Circumf. minor vera.

314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288,

Differentia utriusque circumferentiæ, inter quam vera existit, est diametri particula una denominata a numero, qui constat unitate & 35. cifris, quæ particula ad diametrum, minorem habet proportionem, quam arenula una ad orbem terræ, Non enim constat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales diametro.

Frustra igitur sit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

(Posita

(Posita vero Circumferentia partium

1, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000,

Diameter erit quam proxime, partium

0, 318309, 886183, 790671, 537767, 926745, 028724.

Corol. 1. *Cum in numeris minus accuratis, sit circuli circumferentia ad diametrum ut 22 ad 7; erit circulus in ejusmodi numeris ad quadratum inscriptum, ut 11 ad 7; ad quadratum circumscriptum ut, 11 ad 14; & ad radii quadr. ut 22 ad 7. Sequuntur hæc ex cor, 2. prop. præced.*

Cor. 2. *Cum vero, in numeris accuratioribus, circuli circumferentia sit ad diametrum, ut 355 ad 113; erit in iisdem numeris, circulus ad quadratum inscriptum ut 355 ad 226; ad quadratum circumscriptum ut 355 ad 452; & ad radii quadratum, ut 355 ad 113.*

Cor. 3. *Si autem pro circumferentia ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inscriptum ut* 100000. *ad* 63662; *ad quadratum circumscriptum ut* 100000 *ad* 127324; *& ad radii quadratum ut* 100000 *ad* 31831 *circiter.*

Cor. 4. *Si denique pro diametro ponatur unitas cum quinque cifris annexis; erit circulus ad quadratum inscriptum ut* 157080 *ad* 100000; *ad quadratum circumscriptum ut* 78540 *ad* 100000; *& ad radii quadratum ut* 314159 *ad* 100000 *fere.*

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii, sunt hi qui sequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentia.

MAjorem terminum unius e proportionibus jam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæsita diameter.

Ut si detur circumferentia maximi circuli terræ, milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter; sic stabunt termini:

355 : 113 : 8640 :

multiplica jam secundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica $2750\frac{1}{7}$.1. pro diametro orbis terræ.

(*Errare videtur noster, circumferentiæ terrestri milliaria Belgica 8640 tribuendo. Ex dimensione Snellii, ambitus* *terræ milliaria Belgica 6840 continet, uti apud Varenium videre est; pro quibus Tacquetus 8640 milliaria posuit, numerum centenarium & millenarium ex incuria transponendo. Ex vero igitur numero Snelliano, tyronibus exercitationis ergo, computum de novo instituendi præbetur occasio.)*

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius e proportionibus supra traditis statuatur primo loco, major secundo, diameter nota tertio: His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæsitam circumferentiam.

Ut si detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{1}{7}\frac{4}{1}$. & quæratur ambitus; termini ita stabunt,

$$113 : 355 :: 2750\frac{1}{7}\frac{4}{1} :$$

Tunc secundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. pro ambitu orbis terræ.

Quam modice hæc circumferentia veram excedat, dictum est supra, excessu videlicet paulo majore, quam sint diametri terrestris duæ particulæ decimillionesimæ, hoc est, 9 circiter aut 10. pedibus Rhynlandicis. quorum 18000. constituunt milliare horarium. Quod si utamur proportione Ludolphina etiam priori, cujus termini constant 21 notis; invenietur circumferentia insensibiliter a vera differens, non solum diametro data milliariorum Belgicorum 2750. qualis est terræ; verum etiam, licet diameter ponatur centum millionum eorumdem milliariorum, qualis fortasse est diameter firmamenti. Hac enim posita, proveniet circumferentia minori quantitate a vera differens, quam una centimillionesima particula pedis Rhynlandici. Quod si, ad investigandam circumferentiam orbis terræ, utamur proportione Archimedis; intervallum circumferentiarum vera majoris ac minoris excedet 5. milliaria Belgica. Non est igitur adhibenda Archimedea proportio, nisi in quantitate parva: imo semper expediet Metiana uti, quæ & modicis constat terminis, & plusquam millies exactior est.

Circuli dimensio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex corol. 1. p. 5. hujus.

Ut

Ut si semidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione, continet milliaria Belgica 1375. multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5, 940000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventæ circularis areæ a vera habetur si differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ a dimidia vera, ducatur in semidiametrum datam; aut si differentia semidiametri inventæ a vera, ducatur in datam semicircumferentiam.

(Dimensio sectoris circularis AEBG (vel AECG,) ex datis radio circuli AE, & arcu sectoris EBG (vel ECG.) Fig.26.

Fiat, ut 113 ad 355; ita (a) *semidiameter data ad semicircumferentiam circuli: deinde ut gradus 360 ad gradus arcus dati, ita* (b) *semicircumferentia jam inventa, ad arcus sectoris dimidium EB, (vel EC;) quo in radium datum ducto* (c) *exorietur area sectoris quæsiti.* (a) Per 5. l.5. (b) Per eamd. (c) Per cor. 3. p 4 huj. & schol. p.45. l.1.

Et, si area trianguli rectilinei AEG, sectori majori AEBG addatur, vel a minore AECG subducatur;) habebitur circuli segmentum majus EDGB, vel minus EDGC.) Area vero istius trianguli (d) *est rectang. AD* X *DE. Est autem ED* (e) *sinus, & AD cosinus arcus EB (vel EC.) Ex datis itaque segmenti arcu EBG (vel ECG) & basi EG; vel ex datis radio EA & basi EG; vel denique ex radio EA & arcu EBG (vel ECG;) invenientur ED & DA, atque adeo area trianguli EAG. Verum hæc potius e trigonometria petenda sunt.)* (d) Per def. p. 41. l. 1. (e) Per def 10. l. 1 & cor. 1 p 3. l. 3.

Dimensio Cylindrorum & Conorum,

EAM hic appono, quod a circuli dimensione pendeat. Cylindrus igitur & prisma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per basim: Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in basim ducta; sunt enim partes tertiæ cylindrorum ac prismatum, eamdem cum ipsis basim & altitudinem habentium, per 10. & 7. l. 12.

Sit basis Cylindri aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100. in 50, proveniunt 5000. pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50, proveniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate coni.

Fig. 14. (Dimensio Coni truncati NQRO; ex datis basibus parallelis ZZ, SS, & altitudine VD.

AD hoc problema solvendum, lemma sequens præmittatur: Ut est differentia radiorum qui sunt in basibus. (NV—QD,) ad radium minorem (QD; ita est altitudo coni truncati (VD,) ad altitudinem partis deficientis (DP.) *Ducta enim in triangulo NVP, recta DI ad PN parallela, erit* (a) *VI : IN :: VD : DP. Sed propter parallelogrammum NIDQ,* (b) *est IN=QD, & proinde VI=NV—QD. Ergo liquet propositum.*

(a) Per 2. l 6.
(b) Per 34. l. 1.

Datis itaque tribus prioribus, invenietur quarta DP, altitudo nempe partis deficientis QPR, cujus altitudinis pars tertia in basim SS ducta, dabit partem illam deficientem QPR. Deinde pars tertia rectarum PD + DV, sive altitudinis coni completi, ducta in basim ZZ, dabit conum completum NPO: a quo si subducatur pars deficiens QPR, relinquetur conus truncatus NQRO.

Porro notandum est, hanc demonstrationem non minus in coni truncati scaleni, quam in recti dimensione valituram, uti ex iis quæ de pyramidis truncatæ dimensione in libro elementorum duodecimo scripsimus, satis patet.)

PROPOSITIO VII.

Fig. 6. & 7. l 12.

CIrculorum peripheriæ eam inter se proportionem habent, quam diametri, (sive radii.)

Nam polygonorum similium circulo sine fine inscriptibilium ambitus sunt inter se semper ut (*c*) diametri AF & IC. Sed hi (*d*) ambitus in peripherias desinunt. Ergo etiam peripheriæ sunt inter se ut diametri. Quod erat demonstrandum.

(c. Per cor. 2. p 1 l. 12.
(d) Per 3. hujus.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 6 Archimed

SUperficies prismatis cylindro tam circumscripti quam inscripti, æquatur rectangulo, cujus altitudo est latus cylindri, basis vero æqualis perimetro basis prismaticæ.

1. Pars

1. Pars. Prismatis conscripti superficies tangit cylindrum secundum lineas EA, NF, &c. quæ sunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus sit rectus) ad planum baseos recta (*a*) sunt, ac proinde etiam (*b*) recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt vero & æqualia inter se. Igitur unum cylindri latus communis est omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo. Conscripti igitur prismatis superficies æquatur (*c*) rectangulo sub ambitu basis prismaticæ, prismatis seu cylindri latere contento. (a) Per def. 3. l. 12. & p. 8. l. 11 (b) Per def. 3. l. 11. (c) Patet ex 1. l. 6.

Eadem est ratio secundæ partis. Nam latus cylindri (*BD, vel IK, vel QP, &c.*) communis rursum est altitudo rectangulorum BDIK, KIQP, &c. quæ constituunt superficiem prismatis inscripti.

PROPOSITIO IX.

Pyramidis ordinatæ cono recto circumscriptæ superficies, æqualis est triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis cirumferentia (FHLD,) altitudo autem latus coni (BG.) Fig 7.

Et pyramidis ordinatæ cono recto inscriptæ superficies æquatur triangulo; cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (BO) a vertice in latus baseos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ BG, BK, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA (*d*) rectus est basis plano FKD, etiam planum (*e*) GBA plano FKD rectum erit. Atqui HG perpendicularis (*f*) est ad AG communem sectionem planorum FKD & GBA. Ergo HG etiam (*g*) recta est plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque est ad (*h*) ipsam BG. Ergo GB latus coni erit altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentia FHLD, & latere coni comprehensum (*i*) æquatur superficiei pyramidis circumscriptæ absque basi Quod erat primum. [d] Per hyp. [e] Per 18. l. 11. [f] Per 18. l. 3. (g) Collig. ex def. 4. l. 11. (h) Per def. 3. l. 11. (i) Patet ex 1. l. 6.

2 Partis similis fere demonstratio est.

(Ponatur latera baseos inscriptæ pyramidis ordinatæ, lateribus circumscriptæ parallela; & secet latus CI planum GBA in O, & jungatur OB, eritque CI ad planum AOB (k) *recta, & proinde rectis AO, BO, a centro baseos, & a vertice coni ductis* (l) *perpendicularis. Sed omnes ejusmodi rectæ* (k) Per 8. l. 11. (l) Per def. 3. l. 11

AO

AO a centro ad quodvis baseos polygonæ ordinatæ latus per-
(a) Per 14. l. 3. *pendiculares,* (a) *sunt æquales, & proinde in omnibus trian-*
(b) Per 4. l. 1. *gulis BAO, propter axem BA communem, & ad planum baseos rectum, & omnia latere AO sibi invicem æqualia,* (b) *erunt etiam omnes rectæ BO æquales. Omnia igitur triangula quæ pyramidis inscriptæ superficiem constituunt, æqualem habent altitudinem, nempe perpendicularem BO, a cujusvis trianguli vertice B ad basim demissa; & simul sumpta*
(c) Patet ex 1. l. 6. (c) *æquabuntur (hoc est, superficies pyramidis cono recto inscriptæ æquabitur) triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis inscriptæ circumferentia, & cujus altitudo est perpendicularis BO. Quod erat alterum.*

Aliter. *Cum triangula quæ pyramidis inscriptæ superficiem componunt, pro basibus habeant æqualia polygoni ordinati, quod basi coni inscribitur, latera, & pro cruribus æqualia coni recti latera; triangula ista erunt sibi mutuo æquilatera,*
(d) Per 8. l. 1. (d) *æquiangula, & (cum sibi mutuo imposita* (e) *congruant,)*
(e) Per ax. 8. l. 1. *altitudinis æqualis. Unde ut prius, triangulum quod continetur sub altitudine communi, & sub basi quæ omnibus triangulorum basibus, sive quæ perimetro polygoni inscripti æquetur, triangulis istis, sive pyramidis inscriptæ superficiei*
(f) Patet ex 1. l. 6. (f) *æquale erit.)*

PROPOSITIO X.

(g) Vide def. 6. l. 12. *Superficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti desinit* (g) *in cylindri superficiem: & pyramidis ordinatæ cono recto circumscriptæ superficies in coni superficiem desinit.*

Fig. 6. 1. Pars. Prismatum ordinatorum cylindro sine fine conscriptorum & inscriptorum superficies, habebunt tandem inter se differentiam data minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis superficies circumscripti prismatis a superficie cylindri, inter inscriptam & circumscriptam media, differet differentia minori quacumque data,
(h) Per def. 6. l. 12. hoc est (h) desinit in cylindricam superficiem, minus semper ac minus excedendo.

Fig. 7. 2. Pars. Eodem modo ostenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantum exhibentur cylindri & coni semisses, ne multitudo linearum confusionem pareret. Ceterum cogitandi sunt cylindrus & conus integri, quos prismata & pyramides circumscriptæ ambiunt. Sic enim clarius apparet planas superficies circumscriptas esse majores ex 2. axiomate.

(Scho-

Scholium 1. *Cum propositiones 4. sequentes, & quædam e corollariis inde deductis, ratiocinio aliquantum prolixiori demonstrentur, & eo ordine disponantur, ut necessario per ambages procedendum sit; opus tyronibus haud ingratum me facturum spero, si propositiones illas; una cum omnibus earum corollariis, methodo naturali & expedita, ex hac prop.10 deduxerim.*

Corollaria ex prima parte prop.10.

Fig.8.

1. H*Inc sequitur, cylindri recti superficiem CD, æquari rectangulo sub CB latere cylindri, & BN baseos peripheria. Superficies enim prismatum cylindro sine fine circumscriptorum, æquales semper* (a) *sunt rectangulis sub latere cylindri & basium prismaticarum perimetris. Sed ejusmodi superficies prismaticæ in* (b) *superficiem cylindricam, & perimetri basium prismaticarum in* (c) *peripheriam baseos cylindri tandem desinunt. Ergo* (d) *superficies cylindri æquatur rectangulo sub latere cylindri, & sub baseos peripheria.*

(a) Per 9. hujus. (b) Per hanc prop (c) Per 3. hujus. (d) Per 1. hujus.

Aliter. *Applicetur ad superficiem cylindricam charta rectangula, altitudinis cylindri altitudini æqualis, & baseos quæ peripheriæ baseos cylindricæ æquetur; & inter se congruent charta atque superficies cylindrica: ideoque* (e) *æquales sunt. (Est cor.1 pr. seq.*

(e) Per axio 7.l.1.

2. *Hinc rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis conveniunt, si pro rectangulorum altitudinibus ponantur latera cylindrorum; & pro basibus, cylindricarum basium peripheriæ, vel etiam quandoque diametri, quæ eamdem cum peripheriis proportionem* (f) *habent. Adeoque 1. Cylindricæ superficies æque alta* (g) *sunt inter se ut basium diametri. (Est cor.2.pr.seq) 2. Quæ bases habent æquales, sunt* (h) *inter se ut cylindrorum latera [Est cor.3.pr.seq.) 3. Quæ similes sunt,* (i) *erunt in duplicata ratione diametrorum quæ in basibus sunt.(Est cor.4.p.seq.) 4 Et qualibet,* (k) *sunt inter se in ratione composita ex rationibus laterum, & diametrorum. (Est cor.5.p.11.) 5. Si æquales sint,* (l) *reciprocant latera & basium diametros; & si reciprocent æquales sunt. (Est cor.6.p.11.) 6. Si latus in baseos peripheriam ducatur* (m) *habebitur superficiei cylindricæ area. (Est cor.7. prop. seq.*

(f) Per 7. hujus. (g) Per 1. 6. & 7. hujus. (h) Per cor.1. p.1. 1 6. (i) Per 20. l.6 & 7. hujus. (k) Per 23. l.6. (l) Per 14. l 6. (m) Per sch. p.34. l.1.

3. *Cylindri recti superficies CD, est ad basim BN, ut cylindri latus BC est ad BO, quartam partem diametri baseos. Est enim superficies cylindrica* (n) *æqualis rectangulo sub latere BC & peripheria baseos. Sed basis cylindri* (o) *æquatur rectangulo sub BO quarta parte diametri baseos & eadem peripheria: Quare*

(n) Per cor. 1. huius. (o) Per cor 1.p.5. hujus.

(a) Per 1. l. 6. Quare (a) superficies cylindrica erit ad basim, ut (BC ad BO. (Est p. 12. infra.

Fig. 27. 4. Hinc superficies cylindri GK, sphæræ circumscripti, cujus nempe altitudo NK æquatur diametro baseos NG, erit baseos quadrupla, sive basium ambarum dupla; nam propter NK = NG, erit superficies cylindrica ad basim, ut NK ad $\frac{1}{4}$ NK sive ut 4 ad 1, sive quadrupla baseos; ac proinde ad utrasque bases ut 4 ad 2, sive basium dupla. Et superficies cylindri EK, hemisphærio circumscripti, erit baseos dupla, sive duabus basibus æqualis. Si vero latus cylindri fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. (Est cor. p. 12.)

Fig. 9. & 8. 5. Sit GH media proportionalis inter AB baseos radium, & 2BC, duplum lateris cylindri; eritque circulus radio GH æqualis superficiei cylindricæ CD. Nam propter AB, GH, 2BC ∺, erit basis BN ad circulum GPH, (b) ut AB ad 2 BC. sive ut $\frac{1}{2}$ AB ad BC, hoc est, ut (c) basis BN ad superficiem cylindricam CD. Ergo (d) circulus GPH superficiei cylindricæ æqualis erit. (Est p. seq.

(b) Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(c) Per comp. prius
(d) Per 9. l. 5.

Corollaria ex secunda parte prop. 10.

Fig. 10. 6. Coni recti superficies CBD æquatur triangulo sub BG latere coni pro altitudine, & sub peripheria baseos coni CG pro basi. Etenim pyramidum cono sine fine circumscriptarum superficies, semper (e) sunt æquales triangulis, sub latere coni BG pro altitudine, & sub basium pyramidalium perimetris EF pro basibus. Atqui ejusmodi superficies pyramidales in (f) superficiem conicam, & basium pyramidalium perimetri in baseos coni (g) peripheriam tandem desinunt. Adeoque (h) superficies coni æquatur triangulo sub coni latere pro altitudine, & sub peripheria baseos pro basi.

(e) Per 9 hujus.
(f) Per hanc pr.
(g) Per 3. hujus
(h) Per 1. hujus.

Aliter. Aptetur ad superficiem conicam charta, quæ illi ex amussim congruat; & habebit charta illa, in planum extensa formam sectoris circuli, cujus radius coni lateri, & cujus arcus peripheriæ baseos coni (i) æqualis erit. Sed ejusmodi sector (k) æquatur triangulo sub dicto sectoris radio pro altitudine, & sub recta quæ arcui æquetur pro basi; hoc est, sub latere coni pro altitudine, & sub peripheria baseos coni pro basi. Quare (l) & superficies coni eidem triangulo æquabitur, (Est cor. 1, pr 13.)

(i) Patet ex def coni recti, & sectoris circ.
(K) Per cor. 3 p. 4. hujus.
(l) Per axio. 7. & 1 l. 1.

7. Hinc triangulorum proprietates superficiebus conicis rectis conveniunt, si pro triangulorum altitudinibus ponantur conorum latera, & pro basibus basium peripheriæ (m) vel diametri. Ergo 1. Superficies conicæ æqualia latera habentes (n) sunt

(m) Per 7. hujus.
(n) Per 1. l. 6.

sunt ut basium diametri. 2. Quæ bases habent æquales, sunt (a) *ut latera. 3. Quæ similes sunt, duplicatam* (b) *habent rationem diametrorum quæ sunt in basibus. 4. Et quælibet rationem* (c) *habent compositam ex rationibus laterum & diametrorum quæ sunt in basibus. Et quæ æquales sunt,* (d) *reciprocant latera & basium diametros; & quæ reciprocant, æquales sunt. 6. Habetur* (e) *denique superficies conica, multiplicando latus coni in dimidiam baseos peripheriam. (Hæc sunt corollaria 2, 3, 4, 5, 6, & 7. pr.13. infra.*

8. *Coni recti superficies CBD est ad basim, ut coni latus BC ad baseos radium AC. Est enim superficies coni* (f) *æqualis rectangulo sub latere BC & dimidia peripheria baseos. Sed coni basis* (g) *æquatur rectangulo sub radio AC & eadem peripheria dimidia. Ergo* (h) *superficies coni erit ad basim, ut BC ad AC. (Est pr.14. infra.)*

9. *Hinc primo, (fig.30.) superficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem AK circumacto geniti, baseos QT dupla est. Est enim BK latus coni, semidiametri baseos AB duplum. 2. (fig.27.) superficies coni a triangulo rectangulo æquicruri BD circa perpendicularem AB circumacto producti, est ad basim, ut in quadrato diameter BD ad latus DA. 3. (fig.27.) superficies cylindri recti GK; est ad superficiem coni recti GBN, eiusdem baseos & altitudinis, ut cylindri latus NK ad $\frac{1}{2}$ BN dimidium latus coni. Est enim superf. GBN ad basim MI* (i) *ut BN ad NQ sive $\frac{1}{2}$ NG; hoc est, ut $\frac{1}{2}$ BN ad $\frac{1}{4}$ NG. Sed basis MI est ad superf. GK,* (k) *ut $\frac{1}{4}$ NG ad NK. Ergo* (l) *superf. GBN est ad superf. GK ut $\frac{1}{2}$ BN ad NK: &* (m) *invertendo, superficies cylindri GK erit ad superficiem coni GBN , ut latus cylindri NK ad dimidium latus coni, $\frac{1}{2}$BN. (Hæc sunt corollaria 1, 2, & 3 pr: 14.)*

10. *Sint AC, OL, CB ∺ Erit circulus radio OL æqualis superficiei conicæ CBD. Est* (n) *enim basis coni CG ad superficiem conicam CBD, ut AC ad CB, hoc* (o) *est, ut eadem basis coni ad circulum OPL. Itaque* (p) *circulus OPL superficiei conicæ æqualis erit. (Est pr.13. infra.*

(a) Per cor.1. p.1. l.6.
(b) Per 19. l. 6.
(c) Per cor.2 p.23. l.6.
(d) Per 15. 16.
(e) Per sch. p.41. l.1.
(f) Per cor.6. prius, & cor. p.42. l.1.
(g) Per cor.1. p.5 hujus
(h) Per 1. l.6.
(i) Per cor.8. prius.
(k) Per cor. 3. prius.
(l) Per 22. l.5
(m) Per sch. p.16. l.5.
Fig. 10. & 11.
(n) Per cor.8. prius.
(o) Per cor. 2. p.2 l.12
(p) Per 9. l.5.

Scholium 2.

Hisce adjicimus duas propositiones e Galilæo desumptas.

1. Cylindri quorum superficies æquantur, sunt inter se ut basium diametri directe, vel ut altitudines cylindrorum reciproce. *Cylindri enim sunt* (q) *ut bases & altitudines; hoc* (r) *est, in duplicata ratione diametrorum in basibus, & simplici ratione altitudinum. Sed superficies cylindricæ sunt* (s) *ut dia-*

(q) Per n.1 in sch. p. 15. l.12.
(r) Per 2. l.12
(s) Per n.4 cor 2 p.10 hujus.

diametri basium & altitudines cylindrorum. Cylindri igitur erunt ut diametri basium & superficies; nam si ratio diametrorum componatur cum ratione ex diametris & altitudinibus composita, exorietur ratio composita ex duplicata ratione diametrorum & simplici altitudinum.) Cum itaque superficies ponantur æquales, cylindri (a) *erunt ut diametri basium directe; vel ut* (b) *altitudines reciproce.*

Aliter, *Sint altitudines* A, α; *basium diametri* B, β; *erunt superficies ut* (c) AB, & $\alpha\beta$; & *bases ut* (d) BB, & $\beta\beta$, *ac cylindri ut* (e) ABB, & $\alpha\beta\beta$: *Sed per hypoth. cylindricæ superficies æquantur, hoc est,* $AB = \alpha\beta$. *Ergo* (f) $A : \alpha :: \beta : B$. *Et ducendo antecedentes in* BB, & *consequentes in* $\beta\beta$, *erit* (g) $ABB : \alpha\beta\beta :: BB\beta : B\beta\beta ::$ (h) $B : \beta ::$ (i) $\alpha : A$.

2. (*Fig. 29. & 28. l. 12.*) Æqualium cylindrorum (FD, AR) superficies sunt inter se, in subduplicata ratione altitudinum. *Hoc est, si inter altitudines ND, BR, ponatur media proportionalis P; erit* (k) *ND ad P* (*sive P ad BR*) *ut superficies: cylindri FD ad superficiem cylindri AR.*

Nam propter BR, P, ND $\div$, *erit* $Pq : NDq ::$ (l) $DR : ND ::$ (m) $VT : MQ :: FNq : ABq$; & $P : ND ::$ (n) $FN : AB ::$ (o) *superf. FD: superf. AO. Sed ND* (*sive BO*) $: BR ::$ (p) *superf. AO: superf. AR. Ergo ex* (q) *æquo,* $P : BR ::$ (*sive* $ND : P ::$) *superf. FD. superf. AR.*

Aliter. *Si inter altitudines* A, α *sit M media proportionalis, sintque* B, β *basium diametri, ut supra; erunt bases ut* BB, $\beta\beta$; *superficies ut* AB, $\alpha\beta$; & *cylindri ut* ABB, $\alpha\beta\beta$. *Et cum cylindri sint æquales, hoc est,* $ABB = \alpha\beta\beta$, *erit* $AB : \alpha\beta :: \beta : B$. *Et cum per 15. l. 11. sit* $\beta\beta : BB :: A : \alpha$; (r) *erit* $\beta : B :: A : M$. *Ergo* $AB : \alpha\beta :: A : M$. *Q. E. D.*

Corol. *Hinc ingentem illam particularum corpora naturalia componentium subtilitatem aliquo modo percipere datum est. Sit cylindrus argenteus superficiem habens deauratam, sive bracteis aureis obductam; quem opifices in auri filum immanis longitudinis producunt. Est nempe altitudo cylindri FD ad fili longitudinem, ut* 1 *ad* 115600; *inter quas, media proportionalis, sive* $\sqrt{115600}$, *est* 340. *Itaque bractea aurea qua tegitur superficies fili,* 340 *vicibus tenuior erit quam illa qua superficies cylindri FD obducitur.* Vide Rohault Phys. par. 1. cap. 9. sect. 11.

Lemma ad sequent.

Fig. 12. SInt AB, CD, EF proportionales, sitque KB dimidia AB, & EG dupla EF, etiam KB, CD, EG proportionales erunt.

Recta

(a) Per def 3. l. 5. & def. 5. l. 6.
(b) Per n. 5 cor. 2 p. 10. hujus.
(c) Per n. 4. cor. 2. p 10. hujus
[d] Per 2. l. 12.
(e) Per n. 1 in sch. p 15. l. 11.
(f) Per 16. l. 6
(g) Per 4. l. 5. (sive per lem. 1 par. 2 l. 5)
(h) Per 15 l. 5.
(i) Prius.
(K) Per def. 10. l. 5.
(l) Per sch. p. 20. l. 6.
(m) Per 15. l. 12.
(n) Per 35. l. 5.
(o) Per n. 1. cor. 2 p. 10. hujus.
[p] Per n. 2. cor 2. p. 10. hujus.
(q) Per 22. l. 5.
(r) Per def. 10 l. 5 cum sch. p 20. l. 6.

Recta KB est ad AB, ut (*a*) EF ad EG. Rectangulum ergo KB, EG æquatur (per 16. l 6.) rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. l.6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par est quadrato CD. Ergo per 17. l 6. KB, CD, EG sunt proportionales, (a) Per 15. l.5. (b) Per 15 l.5. (c) Ex hyp.

(*Aliter*. *KB* : *AB* :: (b) *EF*: *EG*. *Sed AB* : *CD* :: (c) *CD EF*. *Ergo* (d) *ex æquo perturbate KB* : *CD* : *CD* : *EG*.) [d] Per 23. l.5.

PROPOSITIO XI.

Circulus, cujus radius (GH) est medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC) & baseos diametrum (BD,) æqualis est superficiei cylindricæ. Fig. 9. & 8

Intelligantur circulis ABN, GPH, circumscripta esse (*ejusdem speciei*) ordinata polygona, adeoque similia, NM, RS, & super NM polygono erectum esse prisma, cylindro circumscriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. sunt proportionales, etiam AD (seu AN) GH & dupla BC (*c*) proportionales erunt. Jam triangulum sub AN & ambitu polygoni MN contentum, (*f*) æquatur polygono conscripto NM: rectangulum vero sub BC seu EF: & eodem ambitu NM, hoc est, (*g*) triangulum sub ambitu NM & dupla CB, (æquale est (*h*) superficiei prismatis cylindro conscripti. Atqui triangulum sub ambitu NM & AN, est ad triangulum sub ambitu NM & dupla BC, (*i*) ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM est ad superficiem prismatis cylindro conscripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam ostendi AN, GH, duplam BC, esse proportionales: ratio AN ad duplam BC est duplicata (*k*) rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad superficiem prismatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad simile sibi polygonum GRQS, rationem habet duplicatam rationis AN ad GH ut facile colligitur ex 1. lib. 12. (*Nam ducta GQ, triangula ANK, GHQ*) *propter angulos ANK, GHQ rectos, & AKN, GQH polygonorum similium ordinatorum* (l) *semiangulos* (*sunt* (m) *æquiangula & similia*. *Ergo AK* : *GQ* :: *AN* : *GH*. *Sed per* 1. *l*.12. *polygona sunt in duplicata ratione radiorum AK, GQ, circulorum quibus ipsa polygona sunt inscriptibilia* : *ac proinde erunt* (n) *in duplicata ratione radiorum AN, GH, circulorum quibus eadem polygona circumscribuntur.* Ergo (polygonum NM ad super

(e) Per lem. [f] Per 4. hujus. (g) Patet ex cor. p. 41. l.1. (h) Per 8. hujus. (i) Per 1. l.6. [K] Per def. 10. l 5 (l) Per 12. l. 4. cum sch. (m) Per cor. 9. p. 32. l.1. (n) Per 11. l.5.

superficiem prismatis, & ad polygonum GRQS eamdem habet rationem; quæ proinde æqualia (a) sunt. Eodem modo ostendam, prismaticas superficies cylindro in infinitum circumscriptibiles, semper æquales esse polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumscribi possent. Quare cum & superficies prismaticæ (b) in cylindri superficiem, & polygona (c) in circulum GPH desinant, etiam cylindri superficies circulo GPH æqualis (d) erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 9. l. 5. (b) Per 10. huj. (c) Per 3. hujus. (d) Per 1. hujus.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis superficiei cylindricæ.

Corollaria.

Fig. 8. & 9. *Superficies cylindri recti æqualis est rectangulo sub latere (BC) & baseos peripheria contento.*

Dupla BC (ut ostensum supra) est ad GH, ut GH ad BA, seu AN; Hoc est, ut (e) peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum sub prima, nempe dupla BC, & quarta, nempe peripheria BN, æquatur (f) triangulo sub secunda GH, & tertia, peripheria scilicet P. Sed triangulum sub GH & peripheria P, æquale (g) est circulo GPH, hoc est, (h) superficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum sub dupla BC & peripheria BN, [hoc est, (i) rectangulum sub BC & peripheria BN,] cylindricæ superficiei æquale erit. Quod erat demonstrandum.

(e) Per 7. hujus. (f) Per cor. 4. p. 16. l. 6. (g) Per 5. hujus. (h) Per hanc. (i) Per cor. p. 42. l. 1.

Ex hoc corollario manifestum est rectangulorum proprietates superficiebus cylindricis rectis esse communes. Esto igitur corollarium.

Fig. 24. & 25. l. 12. 2. Cylindricæ superficies (BM, QN) æque altæ, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.)

Nam rectangula sub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehensa, quibus cylindricæ superficies (k) sunt æquales, sunt inter se (l) ut bases; peripheriæ videlicet CL, SE: hoc est, (m) ut diametri BF, QR.

(K) Per cor. 1. (l) Per 1. l. 6. (m) Per 7.

Fig. 27 & 28. l. 12. 3. Cylindricæ superficies (CI, AR) quæ bases habent æquales, sunt inter se ut altitudines (TI, BR.)

Rectangula enim sub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus superficies (n) cylindricæ sunt æquales, sunt inter (o) se ut TI, BR.

[n] Per cor. 1. (o) Per 1. l. 6.

Fig. 24. & 25. l. 12. 4. Similes cylindricæ superficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent basium diametri (BF, QR.)

Cum

Cum cylindri ponantur similes, erit MF ad IQ, (*a*) ut BF ad QR, hoc est, (*b*) ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula sub peripheriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta, similia (*c*) erunt; ac proinde rationem inter se habebunt (*d*) duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ; hoc est, BF ad QR. Ergo & cylindricæ superficies, &c.

(a) Per def 4. l. 12
(b) Per 9. hujus.
(c) Per def. 1. l. 6.
(d) Per 20. l. 6.

5. Cylindricæ superficies (BM, RI) rationem inter se habent (*e*) compositam ex rationibus laterum (FM, IQ) & diametrorum (BF, QR) quæ sunt in basibus.

Fig. 24. & 25 l. 12
(e) Per 23 l. 6. & 7. hujus.

6. Si æquales sunt cylindricæ superficies (AR, FD;) erit ut diameter AB ad diametrum FN, ita (*f*) reciproce altitudo FH ad altitudinem RB: & e converso.

Fig. 28. & 29. l. 12.
(f) Ex 14. l. 6.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ superficiei dimensio; si nimirum altitudo ducatur in baseos peripheriam. Ut si altitudo sit pedum 20. peripheria basis pedum 6. multiplica 20 per 6. proveniunt 120. pedes quadrati pro cylindrica superficie.

PROPOSITIO XII.

C*ilindri recti superficies est ad basim* (*ABN*,) *ut cylindri latus* (CB) *ad* (*BO*) *quartam partem diametri baseos.*

Fig 8. & 9. Archim.

Sit GH media proportionalis inter BC & BD diametrum basis, ac proinde etiam media (*g*) proportionalis inter BA seu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH, æquatur curvæ superficiei (*h*) cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad cylindri basim ABN, rationem habet duplicatam (*i*) rationis GH ad AN: hoc est, (*k*) eamdem quam dupla BC ad BA radium; hoc est, eamdem quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam superficies cylindrica est ad basim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonstrandum.

(g) Per lem. ante p. 11. huj.
(h) Per 11. hujus.
(i) Per cor. 2 p 2. l. 12.
(k) Per hyp & defin. 10. l. 5

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro basis æquale baseos quadrupla est. Si vero latus fuerit quarta pars diametri baseos, superficies cylindri basi æqualis erit. Utrumque ex propositione manifestum est.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 11. & 10. CIrculus, *cujus radius (OL) est medius proportionalis inter coni recti latus (BC) & basis radium (AC,) aequalis est superficiei conicae.*

Intelligantur circulis ACG, OPL circumscripta esse polygona ordinata (*similia*) EF, IN, & super polygono EF erectam esse pyramidem cono circumscriptam.

Quoniam per hyp. AC, seu AG est ad OL ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata (*a*) rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum sub AG & ambitu EF est ad triangulum sub BC & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli sub AG & ambitu EF ad triangulum sub BC & eodem ambitu, est etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum sub AG & ambitu EF aequale est (*b*) polygono EF: & triangulum sub BC & eodem ambitu EF aequale (*c*) est superficiei pyramidis circumscriptae, Ergo ratio polygoni EF ad superficiem pyramidis etiam est duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum sibi per constr. simile IN, est duplicata (*d*) rationis AG ad OL, *uti constat ex iis, quae demonstrationi prop. 11. inseruntur.*) Ergo polygonum EF, ad superficiem pyramidis & ad polygonum IN eamdem habet rationem, quae proinde aequalia (*e*) erunt. Eodem modo ostendam superficies pyramidum, quae cono in infinitum magis, magisque polygonae circumscribi possunt, semper aequales esse polygonis quae circulo OPL possunt circumscribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum (*f*) superficies in coni superficiem, & polygona in circulum (*g*) OPL tandem desinant, etiam coni (*h*) superficies & circulus OPL erunt aequalia. Quod erat demonstr.

Ex hoc praeclaro theoremate exhibetur circulus superficiei conicae aequalis.

(a) Per def. 10. l. 5.
(b) Per 4 huj
(c) Per 9. huj
(d) Colligitur ex p. 1. l. 12.
(e) Per 9. l. 5.
(f) Per 10. hujus.
(g) Per 3. hujus.
(h) Per 1. hujus.

Corollaria.

Fig. 10. & 11. REcti coni superficies aequalis est triangulo, *sub coni latere (BC) & baseos peripheria (CG) comprehenso.*

Sit

Sit OL radius media proportionalis inter AC & BC. Quia peripheria CG est ad peripheriam P, ut (a) radius AG ad radium OL; hoc est per hyp. ut OL ad BC: erit triangulum sub prima, nempe peripheria CG, & sub quarta BC, (b) æquale triangulo sub secunda, nempe peripheria P, & tertia OL; hoc est, (c) circulo OPL, hoc est, (d) superficiei conicæ BCD. Quod erat demonstrandum. (a) Per 7. hujus. (b) Per cor. 4 p. 16 l. 6. (c) Per 5 hujus. (d) Per hanc 13.

Ex hoc corollario liquet superficies conicas triangulorum subire leges. Itaque

2. Superficies conicæ (BAF, QXR) æqualia latera (BA, QX) habentes, sunt inter se ut basium diametri (BF, QR.) Fig. 24 & 25. l. 12.

3. Et (CFT, AZB) quæ bases habent æquales, sunt inter se ut latera (CF, AZ.) Fig 27. & 28. l. 12.

4. Et quæ similes sunt (BAF, QRZ,) duplicatam habent rationem ejus, quæ est inter basium diametros. Fig. 24. & 25. l. 12.

5. Et quælibet, rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (BA, QZ) & diametrorum BF, QR) quæ sunt in basibus. Fig. ead.

6. Et quæ æquales sunt, reciprocant latera & basium diametros: & quæ reciprocant sunt æquales.

Quæ omnia demonstrantur ex coroll. 1. ut supra corollaria de cylindrica superficie deduximus ex corollario isthic primo.

7. Metiemur denique conicam superficiem, si latus FC per baseos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut si latus sit pedum 5. peripheria baseos pedum 20. duc 5. per 10. proveniunt 50 pedes quadrati pro conica superficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll. Fig. 29. l. 12.

PROPOSITIO XVI.

Coni recti superficies est ad basim, ut latus (BC) ad basis radium (AC.) Fig. 10. & 11. Arch.

Inter latus BC & basis radium AC, sit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC est duplicata (e) rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL (f) est æqualis superficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni basim ACG est duplicata (g) rationis OL ad AC; ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio superficiei conicæ CBD est ad basim ACG; ut BC ad AC. Quod erat demonstrandum. (e) Per def 10. l. 5 (f) Per 13. hujus. (g) Per 2. l. 12.

Corollaria.

Fig. 30. *SUperficies coni a triangulo æquilatero circa perpendicularem (Ka) circumacto geniti, baseos (QT) dupla est.*

Est enim KB latus æquale BD, adeoque duplum semissis AB, quæ baseos radius est.

Fig. 27. 2. *Superficies coni a rectangulo triangulo æquicruri (EBD) producta, est ad basim, ut in quadrato diameter ad latus.*

Ducta enim perpendiculari BA, (a) angulus rectus B bisecatur, adeoque ABD semirectus est. Est autem & ADB (b) semirectus. Ergo AD, BA (c) æquales sunt; ac proinde BD est diameter quadrati AK, latus vero AD. Est vero eadem AD semidiameter baseos PT, cum perpendicularis AB secet (d) bifariam ED. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

(a) Per n. 1. schol. p. 26. l. 11.
(b) Per cor. 11 p. 32. l. 1.
(c) Per 6. l. 1.
(d) Per n. 1. schol. p. 26. l. 1

Fig. 27. 3. *Superficies cylindri recti (GK) est ad superficiem coni recti (GBN), ut cylindri latus ad dimidium latus coni.*

Nam superficies coni GBN est ad basim MI, ut latus BN ad (e) semidiametrum basis QN; hoc est, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Est autem basis MI ad superficiem cylindri GK, ut (f) quarta pars diametri ad NK cylindri latus. Ex æquo igitur superficies conica GBN est ad superficiem cylindricam GK, ut dimidium latus coni ad cylindri latus NK. Quod erat demonstrandum.

(e) Per 14 hujus.
(f) Per 12. hujus.

Lemma ad sequen.

Fig. 13. IN triangulo NPV ducta sit QD parallela ad NV. Dico rectangulum sub PN & NV, æquari rectangulo sub PQ, QD, una cum rectangulo sub NQ & duabus simul sumptis NV, QD.

Duc

Duc lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA secet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN est par NV, (*& quoniam* (a) *AN : QB (:: NP : QP) :: NV : QD,*) patet etiam (*b*) QB esse partem QD. Igitur rectangulum ON est rectang. PNV & FQ est PQD. Restat ut probemus rectangula OB, EC, BN æquari rectangulo sub NQ & duabus NA, QB; hoc est, sub NQ & duabus NV, QD. Id vero est manifestum: rectangulum enim sub NQ & NA, QB, æquatur (*c*) his tribus rectangulis; sub NQ & CA, (hoc est, spatio EC,) sub NQ & NC, (hoc est, spatio BN,) sub NQ & QB, hoc est rursum, spatio BN, ac proinde spatio OB, quod ipsi BN (*d*) æquale est. Liquet ergo propositum.

(a) Per cor. 1. p. 4. l. 6.
(b) Per 11 & 9. cum sch. p. 7 l. 5.
(c) Per 1. l. 2.
(d) Per 43. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Si conus rectus sectus sit plano QSR basi NZO parallelo; Dico circulum GHM, cujus radius GH est medius proportionalis inter partem lateris NQ, & circulorum QSR, NZO radius QD, NP simul sumptos, æqualem esse superficiei conicæ inter parallelos circulos QSR, NZO interceptæ. Fig. 14. & 15.

Inter PN & NV media sit GF. Item inter PQ & QD sit media GK; describanturque circuli GFL, GKT. Erit hic (*e*) æqualis superficiei conicæ QPR, ille superficiei NPO. Rectangulum PNV æquatur (*f*) rectangulo PQD, una cum rectangulo sub NQ, & NV, QD simul sumptis. Sed quia (*g*) CF media est proportionalis inter PN, NV, rectang PNV est æquale (*h*) quadrato GF: Et quia GK est (*i*) media inter PQ, QD, rectang. (*k*) PDQ æquatur quadrato GK: Et quia GH media (*l*) est inter QN, & QD, NV simul sumptas rectangulum sub QN, & QD, NV simul sumptis, æquale est (*m*) quadrato GH. Ergo quad. GF par quoque est quadratis GH, GK. Ergo, cum circuli sint inter se ut (*n*) quadrata radiorum, erit quoque circulus GLF æqualis duobus circulis, GKT & GHM. Atqui circulus GLF est æqualis (*o*) superficiei conicæ NPO. Ergo etiam superficies conica NPO æquatur duobus circulis GKT & GHM. Atqui superficiei NPO pars una QPR (*p*) æqualis est circulo GKT. Ergo reliqua, inter parallelos circulos

(e) Per 13. hujus.
(f) Per lem.
(g) Per constr.
(h) Per 17 l. 6.
(i) Per constr.
(k) Per 17. l. 6.
(l) Per hyp.
(m) Per 17 l. 6.
(n) Per cor. 2 p. 2. l. 12.
(o) Per 13. hujus.
(p) Per eamd.

ZZ, SS comprehensa, æquatur circulo GHM. Quod erat demonstrandum.

Corol.1. *Hinc ex datis circulorum parallelorum radiis NV, QD, & superficiei conicæ inter circulos interceptæ latere NQ, habetur superficiei illius dimensio, si radiorum summa NV + QD per latus NQ multiplicetur, & facti radix quadratica extrahatur. Erit enim ut 113 ad 355, ita radix ista ad terminum quartum. Quo termino in radicem illam ducto exoritur superficies conica quæsita. Patet ex 17. l.6. & schol. p.6. hujus, cum p.15. l.15.)*

Lemma ad sequen.

Fig.16. REctæ (BH, CG) quæ in circulo æquales arcus (BC, HG) intercipiunt, sunt parallelæ.

Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. sunt æquales, etiam (*d*) anguli BHC, GCH alterni æquales erunt. Ergo (*b*) BH & CG sunt parallelæ. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 29. l.3. (b) Per 28. l.1.

(Scholium. *Hinc oritur methodus facillima ducendi per punctum datum* B, *recta data* CG *parallelam* BH, *uti supra ad prop.31. l.1. notatum est.*)

PROPOSITIO XVI.

Fig.16. I*Nscribatur circulo figura regularis, parilatera & æquilatera*, (cujus latera quaternarius metiatur); *ducaturque* EB *ab extremitate diametri ad* B *terminum lateris diametro proximi; angulos vero æqualiter distantes ab A jungant rectæ BH, CG, DF.*

Dico rectangulum quod diametro AE, & subtensa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inscriptæ (AB, vel BC, &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis.

(c) Per 26. l.3.
(d) Per lem.præc.
[e] Per 27. & 15. cum cor.9 p.32 l.1.
(f) Per 4. l.6.

Duc CH, DG. Quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus (*c*) æquales, BC, HG; CD, GE; erunt (*d*) parallelæ. Pari argumento parallelæ sunt BA, CH, DG, EF. Omnia igitur triangula (*e*) BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula sunt. Ergo (*f*) ut BK ad KA, sive HK ad KL;

& ut

& ut HK ad KL, sic CM ad ML; & ut CM ad ML, sic GM ad MN; & ut GM ad MN, sic DO ad ON; & ut DO ad ON, sic FO ad OE. Ergo (*a*) ut una antecedentium BK ad unam consequentium KA; sic omnes antecedentes BK, KH CM, MG, DO, OF, (hoc est, omnes jungentes BH, CG DF) sunt ad omnes consequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE, hoc est, ad diametrum AE. Sed ut BK ad (*b*) KA, sic EB est ad BA. Ergo ut omnes simul BH, CG, DF ad AE, sic EB est ad BA. Ergo (*c*) rectangulum sub omnibus jungentibus BH, CG, DF & sub BA, æquatur rectangulo sub AE & EB, Quod erat demonstrandum. (a) Per 12. l. 5. (b) Per cor. 3. p. 8. l. 6. (c) Per 16. l. 6.

(Cor. 1. *Omnes jungentes BH, CG, DF, a diametro AE bifariam, & perpendiculariter secantur. Nam in triangulis BAK, HAK, propter latera BA, AK lateribus KA, AK æqualia & angulos ad A* (d) *æquales, erit* (e) *BK = KH: & angulos ad K æquales, & proinde* (f) *recti. Et eodem modo adjungentem quamvis aliam CG, ductis AC, AG, ostendetur esse CM = MG, & angulos ad M rectos.* (d) Per 29. l. 3. (e) Per 4. l. 1. (f) Per def. 14. l. 1.

Cor. 2. *Si jungens CG sit diameter circuli; angulus CGH a jungente & latere proximo comprehensus, acutus erit. Ducta enim CH, angulus CHG in semicirculo rectus* (g) *est, & proinde angulus HGC* (h) *acutus.* (g) Per 31 l. 3. (h) Per cor 4. p. 32 l. 1.

Si vero recta jungens sit diametro minor, ut BH; angulus ABH ad partem segmenti minoris, a latere figuræ inscriptæ AB, & jungente BH comprehensus etiam (i) *acutus erit. Est enim angulus super arcu AH in segmento majore ABEH.* [i] Per 31. l. 3.

Cor. 3. *Sit CAG aut semicirculus, aut segmentum semicirculo minus, a jungente CG terminatum; latera CB, CH; jungenti proxima, ad partem segmenti CAG, si ultra B, H, satis producantur, concurrent; & concursu formabunt triangulum isosceles super basi CG, cujus vertex erit in aliquo diametri EA, ultra A productæ, puncto.*

Nam propter angulos BCG, CGH duobus rectis (k) *minores; recta CB, GH ultra B & H productæ,* (l) *concurrent. Et propter arcus BAHG, CBAH æquales; iidem anguli BCG, CGH erunt* (m) *æquales; & proinde latera CB, GH concursu suo formabunt* (n) *triangulum isosceles super basi CG. Et quoniam basis a recta AM bifariam & perpendiculariter* (o) *secatur; ipsa MA producta, per trianguli verticem* (p) *transibit.*] (k) Per cor 2. (l) Per sch p. 31. l. 1. (m) Per 29 l. 3. (n) Per 6. l. 1. (o) Per cor. 1. (p) Per n 4 schol. p. 26. l. 1.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 17. *Segmento circuli DAF, cujus basis DF perpendicularis sit diametro AOE, inscribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturque ut in præcedenti recta EB:*

Dico rectangulum sub EB & parte diametri AO, quæ segmenti axis est, comprehensum, æquari rectangulo sub latere uno figuræ inscriptæ, & omnibus jungentibus BH, CG, una cum DO dimidio basis DF simul sumptis comprehenso.

Demonstratio eadem quæ præcedentis.

(*Est enim* $AB : BE :: AK : KB :: LK : KH :: LM : MC :: NM : MG :: NO : OD$. *Ergo* $AB : BE :: AK + KL + LM + MN + NO : BK + KH + CM + MG + DO$; *hoc est*, $AB : BE :: AO : BH + CG + DO$. *Ergo* $EB \times AO = AB \times \overline{BH + CG + DO}$.

Fig. 20. Scholium. *Si segmento DAF ejusmodi figuram æquilateram & parilateram DHAGF inscribi contigerit, ut latera duo opposita DH, FG sint axi AO & sibi invicem parallela; manifestum est illa circa eumdem axem AO (secundum lemmata subsequentia) circumacta superficiem cylindricam (non conicam) generatura. Et quamvis eo etiam in casu valeret hac propositio, & (ex p. 11. hujus cum p. 15. collata) ad prop. 19. demonstrandam æque accommodari posset; ut tamen eadem ubique conservetur demonstrandi ratio ac forma, & quod in prop. 18, 20, & 22. de superficiebus conicis asseritur, idem de solis conicis (& non de conicis cum cylindrica) affirmari possit in prop. 19, 21, & 23; præstiterit forte, quandocumque latera opposita DH, FG axi AO parallela sunt, arcus omnes DH, HA, &c. bisecando, figuram duplo plurium laterum (ut DCHBA &c.,) eidem segmento inscribere, quo latera omnia figuræ, segmento DAF inscriptæ, (cum ad axem AO inclinentur,) ex circumvolutione segmenti ac figuræ inscriptæ circa eumdem axem, superficies conicas generare valeant.*

Lemma 1. ad sequen.

Fig 16. Inscripta sit sphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem AE consistens: Quo manente, circulus cum figura circumagatur.

Dico

Dico sphæræ inscriptum iri corpus conicis rectis superficiebus contentum.

Quod BA, HA, item DE, FE describant integras conorum rectorum superficies, manifestum (*a*) est. Deinde quia lineæ CB, GH, & GF, CD concurrunt (*b*) productæ in eodem utrimque puncto diametri AE similiter protractæ, quæ jungentes secat normaliter (*& bifariam*): etiam liquet has describere partes superficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quorum peripherias in sphærica superficie describunt vertices angulorum B, C, D.

(a) Vide def 2. l. 12

(b) Per cor. 3 p. 16 hujus.

Lemma 2.

Segmenti sphæræ, cujus axis AO, sectio maxima esto DAF. Huic inscripta sit figura æquilatera (*& parilatera*) dempta basi, (*ita tamen*, (c) *ut nullum figuræ inscriptæ latus sit axi AO parallelum*;) quæ (*cum segmento*) circa axem AO in orbem convertatur: Fig. 17.

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiebus contentum.

Probatur ut lemma præced.

(c) Vide sch. post p. 17. huj.

PROPOSITIO XVIII.

Ponantur eadem quæ in primo lemmate; & ducatur recta EB, ab extremitate diametri ad terminum lateris diametro proximi: Fig. 18.

Dico omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius (I) potest rectangulum AEB, comprehensum videlicet, sub diametro AE, & subtensa EB, nimirum ut sit $Iq = AE + EB$.)

Hoc est, cujus radius (I) est medius proportionalis inter AE & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis (*d*) BK, CM, DO bis sumptis, erit (*e*) rectangulum sub latere uno figuræ inscriptæ maximo circulo, (videlicet sub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & sub omnibus simul jungentibus BH, CG, DF, æquale rectangulo sub AB & BK, sub BC & composita ex BK & CM, sub CD & composita ex CM & LO sub DE & DO; sic enim rectæ BK, CM, DO singulæ fuerunt

(d) Per cor. 1. p. 16 hujus.

(e) Per 1. l. 2.

(a) Per 16. huj. (b) Per hyp. runt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub AB & omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis æquatur (*a*) rectangulo AEB, hoc est (*b*) quadrato I. Ergo quadratum I æquale est rectangulis sub AB & BK, sub BC & composita ex BK, CM, sub CD & composita ex CM, DO, sub DE & DO. Sint jam inter AB & BK, media proportionalis P; inter BC & compositam ex BK, CM, media Q; inter CD & compositam ex CM, DO, media R; inter DE & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia (*c*) rectangulis supradictis. Quare cum quadratum I jam ostenderim iisdem æquari rectangulis; etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli sint inter se (*d*) ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I descriptus, omnibus simul circulis quorum radii P, Q, R, S, æqualis (*e*) erit. Atqui circuli radiorum P & S, æquantur (*f*) superficiebus conicis quas produxerunt latera AB, ED, siquidem P est media proportionalis inter AB coni latus, & BK radium baseos; Si vero media est inter ED & DO: & circulus radii Q est æqualis segmento (*g*) superficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, Quia Q media est inter BC, & compositam ex BK, CM: & ob eamdem causam circulus radii R æquatur segmento superficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus, æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphæræ inscriptis. Quod erat demonstrandum.

(c) Per 17. l. 6.

(d) Per cor. 2 p. 2. l. 12.

(e) Patet ex cor 2. p. 2 l. 12 & p. 24. l. 5.

(f) Per 13 hujus

(g) Per 15. hujus.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 17. *Ponantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur recta EB ab extremitate diametri AE ad terminum lateris AB diametro proximi:*

Dico omnibus superficiebus conicis segmento sphærico DAF inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius est medius proportionalis inter EB & segmenti axem AO.

Demonstratio plane eadem quæ præcedentis: sed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Superficies conicæ sphæræ inscriptæ, in sphæræ superficiem desinunt.

Data sit superficies quantumvis parva X. Manifestum est intra sphæricam superficiem ACEG dari aliam posse concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quam sit X. Ambarum plano sectarum per centrum, maximi circuli sint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE bisecetur in C, & residuum bisecetur rursus, (*sed in fig.* 18. *arcus quadrantalis AC trisecatur, quod etiam fieri posse patet ex cor.* 3. *p.* 15. *l.* 4.) & sic deinceps, relinquetur (*a*) tandem arcus AB minor arcu AN. Huic si subtendatur recta AB, manifestum est eam non pertingere ad peripheriam PDML, esseque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo CAGE inscriptæ, (*cujus latera quaternarius metiatur, &*) cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare si circa diametrum AE in orbem agantur omnia, patet superficiei sphæricæ exteriori inscribendas esse conicas superficies, quæ includant superficiem sphæricam alteri concentricam, ac proinde illa sint (*b*) majores. Quoniam igitur sphærica superficies DPLM, deficit a superficie sphærica ACEG quantitate minori quam sit data X; multo magis superficies conicæ ab eadem sphærica ACEG, deficient quantitate minori quam sit data X, ac proinde (*c*) in ACEG superficiem desinent. Quod erat demonstrandum.

Fig. 18.

(a) patet ex lem. 2. schol. post 11. l. 6.

(b) Per axio. 3. hujus.

(c) Per def. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXI.

Conicæ superficies segmento sphærico DAF inscriptæ, in ipsam segmenti sphæricam superficiem desinunt. Fig. 20.

Demonstrabitur eodem fere ratiocinio quo præcedens.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 19. *Demonstratum est propos. 18. circulum cujus radius est medius proportionalis inter diametrum AE, & rectam EB, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis.*

(a) Vide def. 6. l. 12 *Dico hunc circulum desinere* (a) *tandem in circulum, cujus radius est AE sphæræ diameter.*

Nam si plura semper ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producant superficies,) patet latus AB fieri tandem quavis data recta minus, ac proinde subtensam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minus; unde fit, ut differentia ipsarum AE, BE etiam fiat quavis data minor. Ergo multo magis media proportionalis inter AE & BE, quæ semper major est quam BE, differet ab AE tandem defectu minori quocumque dato. Ergo etiam circulus cujus semidiameter est media inter AE & BE, a circulo cujus radius est AE, tandem differet defectu minori quocumque dato: hoc est, in (b) ipsum desinet. Quod erat demonstrandum.

[b] Per def. 6. l. 12

Hæc per se satis clara, non est necesse operosius demonstrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 29. *Demonstratum est propos. 19. circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO segmenti axem æqualem esse omnibus superficiebus conicis portioni sphæricæ DAF inscriptis.*

Dico hunc circulum desinere in circulum, cujus radius est recta AD, a segmenti vertice ducta ad peripheriam circuli DQFN, qui basis est segmenti.

Nam quia jam ex præced. demonstr. liquet EB desinere tandem in AE, patebit quoque mediam proportionalem in-

ter

ter EB & AO, desinere tandem in mediam proportionalem inter AE & AO; hoc (*a*) est, in ipsam AD. Manifestum est igitur & circulum cujus radius est medius proportionalis inter EB & AO etiam desinere in circulum radii AD. Quod erat demonstrandum. (a) Per cor. 2. p. 8. l. 6.

Lemma ad sequen.

SI diameter diametri dupla est, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propos. 2. l. 12. & defin. 10. lib. 5. (*vel ex cor. 3. p. 2. l. 12.*

PROPOSITIO XXIV.

CUjuscumque Sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli ejusdem sphæræ. Fig. 19.

Hoc nobilissimum Archimedis theorema ex jam præmissis expedite demonstrabimus hunc in modum.

Circulo sphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inscripta esse figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur; quæ circa AE in orbem ducta, producat conicas superficies superficiei sphæricæ inscriptas, ducaturque EB. Demonstratum jam supra (*b*) est, omnes conicas superficies sphæræ inscriptas æquales esse circulo, cujus radius potest rectangulum AEB, hoc est, cujus radius est medius proportionalis inter AE & EB. Atque hoc semper eveniet, inscriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inscriptæ conicæ superficies (*c*) tandem desinant in sphæricam superficiem, cujus radius est medius inter AE & EB, desinat (*d*) in circulum cujus radius est AE; ipsa quoque sphærica superficies (*e*) æqualis erit circulo radii AE, hoc est, (*f*) quadruplo maximi circuli ACEG. Quod erat demonstrandum. (b) Per 18. hujus. (c) Per 20 hujus. (d) Per 22 hujus. (e) Per 2. hujus. (f) Per lem. præc.

Viam, qua in theoremate nobilissimo demonstrando hactenus usi sumus, Archimedea multo breviorem & clariorem esse sciet, qui Archimedem legit.

Corollaria.

1. EX hoc præclaro atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphæricæ, is nimirum cujus semidiameter est sphæræ diameter, sive cujus diameter dupla est diametri sphæræ.

(Cor.

(*Cor. 2. Hinc etiam, & e p. 2. l. 12. cum p. 15. l. 5. sphærarum superficies sunt inter se in ratione duplicata radiorum qui in sphæris sunt.*)

Scholium.

Expedita jam erit dimensio superficiei sphæricæ, principis inter omnes curvas. Duplex est modus.

1. Mensuretur circulus sphæræ maximus, ut traditur in scholio post P. 6 hujus, & multiplicetur per 4. Ut si maximus orbis terræ circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horæ sive Belgica 5. 940000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23. 760000. quæ in superficie orbis terræ continentur.

2. Diameter sphæræ multiplicatæ per circumferentiam maximi circuli, exhibet sphæræ superficiem. Ut si terræ diametro dentur milliaria unius horæ $2750\frac{1}{7}\frac{4}{1}$, atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri, omissa fractione, multiplicati per invicem dabunt rursum quadrata milliaria unius horæ, 23,76000. totam orbis terræ superficiem constituentia.

Demonstratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus: rectangulum enim sub diametro sphæræ, & maximi circuli circumferentia, per dictum coroll. est quadruplum maximi circuli.

(*De numeris in hoc scholio memoratis vide quæ monuimus in schol. post p. 6. hujus.*

PROPOSITIO XXV.

Fig. 10. *Cujuscumque portionis sphæricæ (DAF) superficies æqualis est circulo, cujus radius est recta (AD) a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DOFN) qui portionis est basis.*

(*1. Pars.* Portionis maximæ sectioni inscripta cogitetur circa axem AO, figura æquilatera & parilatera basi dempta, (*cujus nullum latus sit axi* (a) *parallelum;*) quæ circa AO in orbem acta, portioni inscribet conicas superficies. Ducatur quoque recta EB, ut (*b*) supra. Omnes conicæ superficies segmento sphærico jam inscriptæ æquantur (*c*) circulo, cujus radius est medius proportionalis inter EB & segmenti axem AO. Atque hoc, multiplicatis in infinitum inscriptionibus, semper continget. Quare, cum & conicæ superficies segmento inscriptæ, desinant (*d*) in sphæricam segmenti superficiem, &

(a) Vide sch. p. 17. hujus. (b) In 18. & 19 huj. (c) Per 19 hujus. (d) Per 22. hujus.

& circulus cujus radius inter EB & AO medius est, desinat (*a*) in circulum radii AD; etiam (*b*) sphæricæ portionis superficies DAF; circulo radii AD æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 23 hujus.
(b) Per 2. hujus.

(2. Pars. Sit ED recta a vertice E portionis sphæricæ minoris DEF ad circumferentiam baseos ducta, & jungatur AD. Propter (c) *angulum ADE rectum,* (d) *erit circulus radio AE æqualis summæ circulorum radiis AD, ED respective descriptorum. Sed circulus radio AE* (e) *æquatur toti superficiei sphæricæ, & circulus radio AD* (f) *æquatur portionis majoris DAF superficiei. Ergo circulus radio ED, portionis minoris DEF superficiei æquabitur.]*

(c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor. 8. p. 2. l. 12.
(e) Patet eodem p. 24 hujus.
(f) Per 1. partem hujus pro.

Hoc alterum est ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, via multo, quam ipse, breviori ac clariori jam demonstravimus.

Cor. *Hinc datis sphæræ diametro AE, & portionis sphæricæ DAF axe AO, (vel datis axe AO, & OD basis radio,) habetur AD radius circuli, qui portionis sphæricæ superficiei æquatur, atque inde dabitur superficiei portionis sphæricæ dimensio. Cum enim sint* (g) $\overline{AE,\ AD\ AO} \div$, *erit* (h) $AD = \sqrt{\overline{AE \times AO}}$; *(vel propter triangulum rectangulum AOD, erit* (i) *etiam* $AD = \sqrt{\overline{AOq + DOq}}$. *) Si igitur fiat* 113 *ad* 355, *ut AD ad terminum quartum; hic terminus per AD multiplicatus dabit aream, portionis sphæricæ superficiei æqualem. Patet ex hac, & schol. p. 6. hujus, cum p. 15 l. 5.]*

(g) Per cor. 2 p. 8. l. 6
(h) Patet ex 17. l. 6.
(i) Patet ex 47. l. 1.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti sphæræ circumscripti (HPSV) superficies, æqualis est superficiei sphæræ. Fig. 21.

Et si cylindrus ac sphæra secentur planis ad axem (BG) rectis, erunt singula superficiei cylindricæ segmenta, segmentis singulis superficiei sphæricæ æqualia.

Pars 1. Quoniam cylindri latus HP æquale est (*k*) PS diametro basis; erit cylindrica superficies HS, Quadrupla (*l*) baseos, hoc est maximi circuli sphæræ cylindro inscriptæ; cujus cum etiam (*m*) quadrupla sit sphæræ superficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonstrandum.

(k) Per hyp.
(l) Per cor. p. 12 huj.
(m) Per 24 hujus.

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG (*n*) rectus est in semicirculo; ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit (*o*) BO media proportionalis inter GB

(n) Per 31. l. 3.
(o) Per cor. 2. p. 8. l. 6.

GB & BC, hoc est, inter IΓ & HI. Ergo circulus radii BO
(a) Per 11. hujus. (a) æqualis est superficiei cylindricæ HT. Sed idem circulus
(b) Per præc. æqualis (b) est etiam segmento superficiei sphæricæ OBK. Æquales igitur sunt superficies, cylindrica HT, & sphærica OBK.

Deinde, quia eodem modo ostenditur cylindrica HX æquari sphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX, reliquæ sphæricæ QOKR, inter duos parallelos circulos interceptæ æqualis erit.

Ex his patet de segmentis omnibus.

(Coroll. *Hinc superficies cylindri sphæræ circumscripti, est dupla basium.*)

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 21. *SEgmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis divisæ, eam inter se proportionem habent, quam segmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos rectæ.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphæricæ superficiei segmenta OBK, QOKR, MQBN, &c. (c) æqualia cylindricis, HΓ, IX, LN, &c. Atqui hæc eamdem inter se rationem habent, (d) quam axeos segmenta BC, CD, DA. &c. Ergo & illa. Quod erat demonstrandum.

(c) Per præc.
(d) Per 13. l. 12.

Scholium.

EX hac innotescit proportio zonarum & climatum inter se. Sunt enim ad invicem ut segmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula sinuum.

Ex eadem habetur dimensio segmentorum superficiei sphæricæ. Nam quia & tota sphæræ superficies nota est ex scholio prop. 24. & segmentorum proportio, utpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet segmenta singula innotescere.

Ceterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ sequuntur, omnia singularia atque admiranda sunt, planeque digna, ad quæ intelligenda, Geometriæ studiosi ardenti studio incumbant,

Lemma ad sequent.

Fig. 22. SI Sphæram tangat planum (QN in O,) recta (AO) ex centro ad contactum ducta, est plano tangenti perpendicularis.

Secen-

Secentur planum tangens QN & sphæra, per (*centrum A & *) tactum O duobus planis (*quorum sectio communis erit AO, &*) quæ in sphæra quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingant (*a*) in O; Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis est ad utrumque IO, CO, ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN. Quod erat demonstrandum. (a) Per def. 2. l. 3

(Coroll. *Hinc colligimus globum perfecte politum, in plano horizontali perfecte polito QN Tellurem in O tangente positum quiescere non posse, nisi in puncto contactus O collocetur. Ex. gr. Globus ad I positus, ob gravitatem suam & plani declivitatem descendet versus O. Nam ducta AI, in triangulo rectangulo AOI, latus AI angulo recto oppositum, majus est* (b) *quam AO, adeoque globus ad I magis distat a centro quam ad O, & proinde globus ad I quiescere nequit, sed versus O descendet: neque aliter fluidorum descensum, atque in superficiem sphæricam conformationem probamus.* (b) Per 19. & cor. 5. p. 32. l. 1.

Lemma ad consect. 3. in schol. seq. *Sint O, P, Q trium circulorum peripheriæ, & R, S, T eorum radii respective; sitque R—S = T: Erit O—P = Q.*

Nam O : P :: (c) R : S; & P : Q :: S : T. (d) *Ergo O — P : Q :: R—S : T; Sed R—S* (e) *= T. Ergo O—P* (f) *= Q:* (c) Per 7. hujus. (d) Per cor. 2. p. 22. l. 5. (e) Per hyp. (f) Per def 5. l. 5.

Scholium. *Cum plana per centrum terræ transeuntia, in quibus omnia ad horizontem recta consistunt. circulos magnos & æquales in terræ superficie generent, lauta nonnulla consectaria ex auctore nostro in Astronomia sua* (g) *opponemus, quæ ex circulorum natura facillime possunt intelligi.* (g) Lib. 1. cap. 2. num. 6. Fig 37. l. 3.

1. *Si qua sui parte superficies terræ esset perfecte plana, non magis possent homines in ea recti consistere quam in clivo montis: excepto nimirum contactus puncto.*

2. *Caput viatoris plus itineris conficit quam pedes; item qui eques eamdem viam proficiscitur, plus quam qui pedes: Item in navi, pars suprema mali plus via percurrit quam inferior.*

3. *Si quis totum orbis circumductum peragrasset, iter ejus a capite confectum superaret iter confectum a pedibus peripheriarum differentia, quæ æqualis est circumductui circuli cujus radius est ipsa hominis statura.* (h) Per lem ad hoc cons. 3.

4. *Vas aqua plenum si ad perpendiculum efferatur in altum continuo aliquid ex eo effluet, & tamen manebit plenum: quia scilicet superficies aquæ in partem majoris sphæræ continuo comprimetur. Imo si vas in altum* sine termino *ef-*

feratur, superficies aquæ in eo contenta descendet sine termino *versus planum per margines ductum; neque tamen umquam ad planum istud perveniet.*

5. *Si vas aqua plenum recta deorsum feratur, quamvis nihil effluat, tamen desinet esse plenum; quia scilicet aquæ superficies in partem minoris sphæræ continuo tumescet. Ex quo sequitur,*

9. *Unum idemque vas plus aquæ continere in pede montis quam vertice; plus etiam in cella subterranea quam in cubiculo. Quibus adde,*

Fig.27. l.3. 7. *Duos funiculos, de quibus duo globuli ferrei in perpendiculo penduli sint, (& proinde ædificiorum muros juxta perpendicula erectos) non esse inter se parallelos: sed partes radiorum terræ, in centro coeuntium.)*

PROPOSITIO XXVIII.

Fig.23. 25. & 24. *Omnis sphæra æqualis est cono (ZO) cujus altitudo (KO) par est radio sphæræ, basis vero (Z) superficiei sphæræ æqualis.*

Intelligatur sphæræ circumscriptum esse corpus aliquod polyedrum, cujus solidi anguli novis planis sphæram tangentibus abscindantur. Quo facto, orietur aliud corpus polyedrum sphæram continens, minus priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangentibus compositam. Si polyedri hujus solidi anguli novis planis tangentibus iterum abscindantur, & tertii polyedri inde nati similiter; atque ita in infinitum: fiet tandem ut & polyedrum excedat sphæram solido minori quocumque dato, & superficies ejus ex planis tangentibus quæ, ut dixi sine termino & minora, & plura erunt) composita, sphæricam superficiem excedat quoque, plano minori, dato quocumque. Quod utrumque, licet demonstrari posset, tamen quia per se satis clarum, postuletur studio brevitatis. His ita constitutis, quæsitum ita concludemus.

Polyedrum jam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphæræ, bases vero sunt plana tangentia, quæ polyedri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ, ad plana (a) singula perpendiculares sunt; erunt omnium pyramidum, quibus constat polyedrum, æqualis altitudo, ipse nimirum AB radius sphæræ. Si jam igitur planum X ponatur æquale superficiei ipsius polyedri, superque eo recta

(a) Per lem.præc.

cta sit pyramis ad altitudinem MN etiam æqualem sphæræ radio AB, manifestum est (*a*) omnes pyramides supra dictas, hoc est, totum polyedrum, æquari pyramidi XN. Ad eumdem modum reliqua omnia polyedra sphæram includentia, quæ ex truncatione perpetua solidorum angulorum, alia atque alia nascentur in infinitum, semper æqualia erunt pyramidibus (per XN repræsentatis) quarum altitudines (MN) sunt radius sphæræ, bases vero (X) æquales superficiebus polyedrorum, sphæram ambientibus. Quare cum tandem, & polyedra (ut dixi supra) in sphæram; & pyramides XN (ut mox ostendam) in conum ZO desinant: etiam (*b*) sphæra cono æqualis erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Patet ex dem. p. 6. l. 12.

(b) Per 1. hujus.

Quod autem pyramides XN (*c*) desinant in conum, sic ostendo. Polyedrorum superficies desinunt in sphæræ superficiem, ut postulatum supra. Atqui bases X pyramidum XN, semper æquales ponuntur superficiebus polyedrorum; & Z basis coni ZO per hyp. æqualis est superficiei sphæræ: ergo etiam bases X desinent in basim Z; ac proinde, cum pyramides XN sint ad conum ex hyp. æque altum, ut (*d*) basis X ad basim Z, etiam pyramides in conum desinent.

(c) Vide def. 6. l. 12.

(d) Per cor. p. 11. l. 12.

Demonstratio jam allata hujus propositionis & sequentis, penitus diversa est ab ea, qua usus est Archimedes; quæ quidem valde subtilis & ingeniosa est, sed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifesta, & propositiones undecim, præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipsum vero theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphæræ, altitudinem vero radium.

(Coroll. *Hinc hemisphærium duplum est coni basim habentis æqualem maximo sphæræ circulo, altitudinem vero ejusdem sphæræ radio æqualem.*

Tacquetus hoc corollarium in prop. 30. exhibet, sed in ejus demonstratione assumit ~~id quod~~ ipsa propositione vix clarius esse videtur, nempe, hemisphærium æquale esse cono, habenti pro altitudine radium, & pro basi circulum superficiei hemisphærii æqualem. *Quod quidem ex hac prop. 28, facile deducitur: verum tamen & ipsa prop, 30. ex eadem hac p. 28. pari facilitate deduci poterat. Aut igitur oportet prop. 30. huc transferri, & in corollarium prædictum mutari, aut saltem, si propositio memorata locum suum teneat, paulo aliter demonstrari debet.*)

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate, figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimensio. Nam si diametri sexta pars, sive tertia semidiametri, muliplicetur per sphæræ superficiem jam notam per scholium prop. 24. proveniet sphæræ soliditas.

Inventa sit sphæræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliaria 23, 760000 & semidiameter esto milliarium horariorum 1375. cujus tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplica 458 omissa fractione, per 23, 760000 provenient 10882, 080000 cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ. (*De hisce vero numeris, vide notata ad schol. p, 6. hujus.*)

(a) Per hanc 28. (b) Per def. p. 6. hujus.

Cum enim sphæra sit æqualis (*a*) cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis vero superficies sphæræ; coni autem soliditas (*b*) producatur ex parte tertia altitudinis, hoc est, radii sphæræ) ducta in basim, (hoc est, in sphæræ superficiem;) etiam sphæræ soliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in superficiem.

(*Datis autem diametro & circumferentia, habebitur sphæræ soliditas, si pars sexta circumferentiæ ducatur in diametri quadratum: vel aliter, si divisio diametri quadrato per 6, quotiens per circumferentiam multiplicetur. Idem enim his modis orietur factum, ac si diametri sexta pars in sphæræ superficiem duceretur.*)

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 26.

OMnis sector sphæræ, æqualis est cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis vero sectoris sphærica superficies.

Esto primum sector (AECG) hemisphærio minor. intelligatur sectori circumscriptum esse polyedrum corpus rectilineum. Si cetera ratiocinatio omnis ad eumdem modum instituatur ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæsitum. Id solum oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem polyedri ex planis sphæricam superficiem ECG undequaque tangentibus compositam, esse majorem superficie ECG. Quod ita fiet. Cogitetur superficiei ECG apponi alia æqualis & similis, planis tangentibus eodem prorsus

ſus modo cincta quo prior. Erit jam tota (*a*) ſuperficies ex planis compoſita, major tota ſphærica. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita, dimidia ſphærica ECG major erit (a) Patet ex ax. 3. hujus.

Eſto deinde ſector (AEBG) major hemiſphærio. Uterque ſector ſimul ſumptus, æqualis (*b*) eſt cono cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies; hoc eſt, (*c*) duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes vero pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis ECG, EBG. Atqui ſectorum unus AECG hemiſphærio minor, per 1. partem æquatur cono cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies reliqua EBG. Quod erat demonſtrandum. (b) Per præc (c) Patet ex 11. l. 12 & 14. l 5.

Corollarium.

CUM ſuperficies ECG ſit æqualis (*d*) circulo radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG; erunt ſectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes vero circuli radiorum CG & BG. (d) Per 25. hujus.

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum & ſegmentorum ſphæræ; ſectorum quidem, ſi multiplicetur (*e*) tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27. (*vel ex cor. p. 25*) ſive per circulum radii CG, vel BG: ſegmentorum vero, ſi menſuretur conus EAG, & a ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur: ſi major, eidem adjiciatur. Fig. 26. (e) Patet ex ſch. p 9 hujus.

Segmentum (MQRN) quod inter duos circulos ſive parallelos ſive non parallelos interjicitur, menſurabis, ſi ſegmenta QBR & MBN jam nota auferantur ab invicem. Fig. 2 n

PROPOSITIO XXX.

H*Emiſphærium (EOBD) coni (EBD) eamdem ſecum baſim & altitudinem habentis, duplum eſt.* Fig 27.

Conus cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica EOBD, altitudo autem radius AB, eſt ad conum EBD, (*f*) ut baſis ad baſim (f) Per 11. l. 10.

basim, hoc est, ut superficies hemisphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cum superficies hemisphærica EOBD dupla (*a*) sit maximi circuli, etiam conus pro basi habens superficiem EOBD, pro altitudine radium AB, duplus est coni EBD. Atqui hemisphærium æquatur (*b*) cono habenti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium coni EBD duplum est. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 24. hujus.
(b) sequitur ex 28. hujus.

(Aliter. *Cum coni æque alti inter se* (c) *sint ut bases, erit conus, cujus altitudo est radius sphæræ, & basis æqualis est superficiei sphæræ, ad conum ejusdem altitudinis, super circulo sphæræ maximo pro basi, ut* (d) *4. ad 1. Et cum conus prior sit sphæræ* (e) *æqualis; erit ergo sphæra ad conum posteriorem, ut 4 ad 1; ac proinde est hemisphærium ad conum posteriorem, ut 2 ad 1. Sed conus posterior eamdem habet altitudinem & basim cum dicto hemisphærio.*

Hemisphærium igitur duplum est coni eamdem secum basim & altitudinem habentis.

(c) Per 11.l.12.
(d) Per 24. hujus.
(e) Per 28. hujus.

Corol. *Conus EBD, hemisphærium EOBD ac cylindrus EK, eamdem basim & altitudinem habentia, sunt inter se ut 1. 2. 3. Nam per hanc prop. conus est ad hemisphærium ut 1. ad 2. Et per 10. l. 12. est idem conus ad cylindrum ut 1. ad 3.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 28.

S*Phæra sit divisa in duo segmenta ILBG, ISKH, plano IQGT, per centrum A non transeunte: diameter autem plano secanti recta, sit BOK.*

Ut altitudo OB segmenti ILBG est ad radium sphæræ AB, ita OK altitudo segmenti ISKG fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo segmenti ISKF est ad radium AK, seu AB, ita altitudo OB segmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines sunt ON, OD, basis vero communis IQGT, segmentis sphæricis sunt æquales.

2. Segmentorum eadem est proportio, quæ rectarum DO, NO.

3. Segmentum ISKG est ad maximum sibi inscriptum conum

num IKG, ut NO ad KO; & segmentum ILBG est ad sibi inscriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO,

Pars 1. Sphæra & coni secentur plano per diametrum BK. Producentur in sphæra circulus maximus BLKG, in conis vero triangula BIG, IKG. & quia BOK diameter (*a*) recta est circulo QT, erit angulus IOB (*b*) rectus. Angulus quoque BIK (*c*) in semicirculo rectus est, quoniam igitur in triangulo BIK ab angulo recto ducta est IO perpendicularis in basim BK, erit BI ad IO, ut (*d*) BK ad KI. Ergo ratio duplicata BI ad IO æqualis est rationi duplicatæ BK ad KI; hoc est, (quia BK, KI, KO (*e*) sunt tres proportionales,) æqualis rationi BK ad KO.

Deinde quia est ut OK ad radium AB, ita (*f*) OB ad BD; erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad OK: & permut. DB ad BA, ut BO ad OK: & compon. DA ad BA, ut BK ad OK. Quoniam igitur jam ostendi rationem BK ad OK duplicatam esse rationis BI ad IO, ac proinde æqualem (*g*) rationi circulorum radiis BI, IO descriptorum; erit quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. Igitur conus sub altitudine DA, & basi circulo radii IO, hoc est, circulo QT, æqualis est (*h*) cono sub altitudine BA, & basi circulo radii BI, hoc est (*i*) sectori sphærico AIBG. Quare si tam sectori AIBG, quam cono sub DA & circulo QT, addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videlicet segmentum sphæricum ILBG æquabitur duobus conis, quorum unus est, qui fit sub basi QT & altitudine DA, alter IAG, sub eadem basi QT, & altitudine OA. Sed hi duo coni (*k*) conficiunt conum IDG. Ergo segmentum ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonstrandum.

Eodem discursu erit segmentum ISKG æquale cono ING eo solum mutato, ut conus IAG qui prius addebatur, jam auferatur.

(*Quia enim est* (l) *KI : IO :: KB : BI*; (m) *erit KIq. IOq :: KBq. BIq* (n) *:: KB : BO. Sed per hyp. est NK : AB = KA :: KO : OB. Et comp. NA : AK :: KB : BO ::* (o) *KIq : IOq ::* (p) *cir. rad. KI : circ. rad. IO = circ. QT. Ergo conus sub altitud. NA & basi QT,* [q] *æquatur cono sub altit. AK & circ. rad. KI, hoc est,* (r) *sectori sphær. AIKG. Sed conus sub alt. NA & basi QT,* (s) *æqualis est duobus conis simul sumptis, uni quidem sub altit. NO & basi QT, & alteri sub alt. OA & eadem basi QT, hoc est, conis ING, IAG; Et sector sph. AIKG æqualis est segm. sphær. ISKG & cono IAG*

(a) Per hyp.
(b) Per def. 3. l. 11.
(c) Per 31. l. 3.
(d) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(e) Per cor. 2. p. 8 l. 6.
(f) Per hyp.
[g] Per cor. 2. p. 2. l. 12.
(h) Per 15. l. 12.
(i) Per cor. 9. 29. hujus.
(k) Patet ex 14. l. 12. & 24. l 5.
(l) Per cor. 3. p. 8. l. 6.
(m) Per 34. l 5. & sch. p. 20. l. 6.
(n) Per cor. 2 p. 8. l. 6. & def. 10. l 5.
(o) Prius.
(p) Per cor. 2. p 2. l. 12.
(q) Per 15. l. 12.
(r) Per cor. p 29 huj.
(s) Patet ex 24. l. 12. & 24. l. 5.

simul sumptis. Auferatur utrinque conus IAG, & relinquetur con. ING = segm. sphær. ISKG. Q. E. D.)

Pars 2. Patet ex prima. Nam coni IDG & ING sunt inter se (a) ut DO & NO. Ergo & segmenta ILBG, ISKG conis illis æqualia, sunt inter se, ut rectæ DO, NO.

(a) Per 4. l. 12.

Pars 3. Patet similiter ex prima. Nam conus IDG est ad conum IBG, (b) ut DO ad BO. Ergo & segmentum ILBG, cono IDG æquale, est ad conum IBG, ut DO ad BO. (*Eodem modo ostendetur esse segmentum ISKG ad conum IKG, ut NO ad KO.*)

(b) Per eamd.

Scholium.

Ex prima parte hujus theorematis, habetur alia, eaque facillima segmentorum sphæricorum dimensio si nimirum coni IDG, ING mensurentur; quod fiet, si (c) tertiæ partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.

(c) Vide schol. post. 6. hujus.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 27.

Cylindrus rectus (GK) *sphæræ, cui circumscribitur, & soliditate & superficie tota sesquialter est.*

Communis sphæræ ac cylindri axis esto BQ, conus vero maximus hemisphærio EOBD inscriptus sit EBD. Quia cylindrus EK, (semissis totius GK) triplus (d) est coni EBD: hemisphærium vero (e) ejusdem coni duplum, patet cylindrum EK esse ad hemisphærium, ut 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus GK est ad totam sphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

(d) Per 10. l. 12.
(e) Per 30. hujus.

Deinde quia cylindri latus KN est æquale basis diametro GN, erit ejus superficies absque basibus (f) quadrupla baseos MI, ac proinde cum basibus, hoc est tota cylindri superficies erit sextupla baseos MI, quæ par est maximo sphæræ circulo. Atqui sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli. Ergo tota cylindri GK superficies est ad sphæræ superficiem, ut 6. ad 4. sive ut 3. ad 2 Quod erat alterum.

(f) Per cor. p. 12. hujus.

Igitur cylindrus sphæræ sibi inscriptæ & soliditate & tota superficie sesquialter est. Quod erat demonstrandum.

(Cor. 1. *Cylindrus rectus sphæræ circumscriptus, ipsa sphæra, & conus ejusdem cum cylindro basis & altitudinis, sunt inter se ut 3. 2. 1. Nam per hanc prop. cylindrus est ad sphæram ut 3. ad 2; & per 10. l. 12. est cylindrus ad conum ut 3. ad 1. Ergo, &c. Atque in eadem ratione sunt, superficies cylindri hemisphærio conscripti cum basi hemisphærium tangente; superficies hemisphærii, & basis utrique communis. Cum enim tam cylindrica superficies quam hemisphæ-*

misphærica, sit (a) *dupla baseos; erit cylindrica cum basi ad basim alteram, ut* 3. *ad* 1. *Unde liquet propositum.* (a) Per 26. hujus cum cor.

Cor. 2. *Hinc cylindrus GK dempta sphæra, (sive solidum cylindricum sphæro-cavum, superficie tota cylindri externe, & superficie sphærica concava interne terminatum,) æquatur cono inscripto GBN. Cum enim cylindrus sit ad inscriptam sphæram ut* 3. *ad* 2., *erit ad solidum cylindricum sphæro-cavum ut* 3. *ad* 1., *hoc* (b) *est, ut idem cylindrus ad conum GBN: ac proinde solidum illud cono GBN æquale erit.* (b) Per 10 l. 12.

Cor. 3. *Solidum cylindricum hemisphæro-cavum, (hoc est, cylindrus EK dempto hemisphærio inscripto EOBD) æquale est cono inscripto EBD. Etenim tam solidum, quam conus pars est* (c) *tertia cylindri EK.* (c) Patet eod. modo quo cor. 2.

Cor. 4. *si conus HAV, cylindro NH inscriptus, verticem habeat in centro A hemisphærii MOBN, cylindro etiam inscripti, & basim HV hemisphærii basi parallelam, & hemisphærium in ipsius vertice B tangentem; e cylindro autem eximatur hemisphærium; relinquetur solidum cylindricum hemisphæro-cavum, cono HAV super eadem cum cylindro basi HV æquale. Patet ex cor.* 3. Fig. 21.

Cor. 5. *Si ejusmodi conus & solidum secentur plano quovis LX basi HV parallelo; fient in cono circulus αι, in solido planum annulare QLXR, sibi invicem ubique æqualia. Nam ducto sphæra radio AR, erit ARq* (d) $=$ *ADq* $+$ *DRq. Sed propter AB, BV æquales,* (e) *erunt AD, Dι æquales:* (f) *æquantur etiam AR, AN, DX inter se. Ergo DXq* $=$ *Dιq* $+$ *DRq. & circulus radio DX* (g) *æquatur circulis qui radiis DR, Dι respective describuntur, simul sumptis. Aufer utrinque circulum radio DR descriptum, & restabit planum annulare QLXR æquale circulo habenti radium Dι.* (d) Per 47. l. 1. (e) Per cor. 1. p. 4. l. 6. (f) Per def. 5. l. 12 & p. 34. l. 1. (g) Per cor. 2. p. 2. l. 12. & p. 24. l. 5.

Cor. 6. *Segmenta quævis coni HAV & solidi cylindrici hemisphæro-cavi, planis basi parallelis intercepta, sunt æqualia. Nam conus solido æqualis est; & sectio circularis αι coni, plano annulari QLXR solidi semper æquatur. Si igitur planum LX feratur sursum vel deorsum, motu basi parallelo, generabit ubique coni & solidi cylindrici æqualia segmenta.*

Cor. 7. *Ex mensura* (h) *igitur coni HAV habetur dimensio solidi hemisphæro-cavi; & ex mensura* (i) *coni truncati OαιK, habetur dimensio segmenti annularis QLIORXTK iisdem planis IT, LX, intercepti. Atque hinc etiam alia methodus exoritur segmenta quævis sphærica dimetiendi.* (h) Per sch. p. 6. hujus (i) Per eamd.

Sic si quæratur mensura segmenti QOKR parallelis planis QR, OK intercepti; e cylindro LT deducatur conus truncatus OαιK: & si quæratur segmentum MQRN a parallelis planis MN, QR terminatum; e cylindro MX subducatur conus αAι.

 Scholium.

Scholium.

QUanti hoc theorema fecerit Archimedes, argumento est, quod tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortasse, inter alia tam multa & præclara inventa sua, hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & superficierum corpora ipsa continentium eadem esset atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque superficies demonstravimus lib. 4. Cylindricorum & annularium, prop. 13. 14. 15. sed & ipsa in sphæra aliud mihi hujus rei exemplum illustre sese obtulit. Deprehendi siquidem, quemadmodum sphæra ad cylindrum rectum se ambientem, (qui necessario æquilaterus erit, est tam soliditate quam superficie, ut 2. ad 3. ita sphæram ad æquilaterum conum ambientem & soliditate similiter & superficie eam habere proportionem, quam 4. ad 9. Ex quo deinde illud consequitur, sesquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & sphæra repertam, in tribus solidis, sphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriusque demonstrationem, pluraque alia theoremata nostra, quibus sphæræ natura mirabilis amplius innotescet, tredecim sequentibus propositionibus comprehensa, subjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 29. *SUperficies sphæræ dupla est superficiei cylindri quadrati sphæræ inscripti.*

Quadratum maximo sphæræ circulo inscriptum, à quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, Est AKLD, ducaturque AL, diameter quadrato & sphæræ communis. Quoniam quadratum AL par (*a*) est quadratis æqualibus AK, KL, erit duplum unius AK. Ergo etiam circulus diametri AL, duplus (*b*) est circuli, cujus diameter AK, circuli nempe CN. Atqui superficies sphæræ quadrupla (*c*) est circuli, cujus diameter AL: is enim est maximus sphæræ circulus, cum AL sit sphæræ diameter. Ergo sphæræ superficies octupla est circuli CN. Sed quia LK, KA (*d*) æquales sunt, cylindrica superficies ACL quadrupla (*e*) est circuli CN. Ergo cum sphæræ superficies ejusdem circuli octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat demonstrandum.

(a) Per 47. l. 1.
(b) Patet ex cor. 5. p. 2. l. 12.
(c) Per 24. hujus.
(d) Per hyp.
(e) Per cor. p. 12. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 29. *SPhæræ superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 4. ad 3.*

Ponan-

Ponantur eadem, quæ demonst. præced. Quoniam cylindri latus LK & basis diameter AK (*a*) æquales sunt, erit superficies cylindrica CL (*b*) quadrupla basis CN, ac proinde tota cylindri superficies ad utramque basim CN & SL est ut 6. ad 2. Atqui sphæræ superficies est ad utramque simul basim CN, SL ut 8. ad 2. cum in præced. ostensa sit esse ad unam basim; ut 8. ad 1. Ergo sphæræ superficies est ad totam cylindri CL superficiem ut 8. ad 6. sive ut 4. ad 3. Quod erat demonstrandum. (a) Per hyp. (d) Per cor. p. 12. hujus.

Corollaria.

1. TOta cylindri recti sphæræ circumscripti superficies est ad totam superficiem cylindri æquilateri inscripti, ut 2. ad 1. Nam circumscripta est ad sphæricam ut 6. ad 4. per 32. hujus. Sphærica autem est ad inscriptam, ut 4. ad 3. per hanc. Ergo ex æquo circumscripta est ad inscriptam, ut 6. ad 3. sive ut 2. ad 1.

(*Pari modo, sphæræ cylindro quadrato conscriptæ superficies dupla est superficiei sphæræ eidem inscriptæ; sicut & hæc dupla est circuli maximi sphæræ conscriptæ. Sunt enim* (c) *sphærica circumscripta tota cylindrica, & sphærica inscripta, ad maximum sphæræ circumscriptæ circulum; ut 4, 3 & 2 ad 1.* (c) Per hanc & 32 cum 24. hujus.

2. *Superficies tota cylindri recti sphæræ circumscripti, superficies sphæræ, & superficies tota cylindri æquilateri sphæræ inscripti, sunt inter se in proportione musica, hoc est, ut* (d) *6. 4. 3.* (d) Per 32. & hanc.

Tres autem quantitates sunt in proportione musica, si fuerit prima ad tertiam, ut est differentia primæ ac secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Sic quia 6.3::6—4. 4—3 (::2.1;) *erunt* 6, 4, 3. *in proportione musica.*

Scholium. *Cylindrus sphæræ circumscriptus est ad cylindrum similem [nempe æquilaterum) eidem sphæræ inscriptum, ut in quadrato diameter ad lateris semissem; sive quod perinde est) ut circuli diameter ad sinum graduum 45. Atque in eadem ratione est sphæra cylindro æquilatero circumscripta ad sphæram eidem inscriptam.* Fig. 29.

1. *Nam propter triangulum rectangulum æquicrure AKL, demissis perpendicularibus KQ, QR, triangula AQK, ARQ erunt* (e) *etiam rectangula & æquicrura. Unde* (f) *AL, AK, AQ, AR* $\div\!\!\div$, & (g) *AR* $=\frac{1}{2}$ *AK. Sed AL est diameter baseos cylindri circumscripti, & AK diameter baseos inscripti. Ergo, propter cylindrorum similitudinem, erit* (h) *circumscriptus ad inscriptum in triplicata ratione AL ad AK, hoc* (i) *est, ut AL ad (AR* $=\frac{1}{2}$ *AK. Sed AL est quadrati DK & circuli* (e) Per 8. l. 6. (f) Per cor. 2 p. 8. l. 6 (g) Per n. 1. sch p. 26. l. 1 (h) Per 12. l. 12. (i) Per def. 10. l.

AGBK diameter, & AK est ejusdem quadrati eidem circulo inscripti latus, sive in circulo GK chorda gr. 90; ac proinde
(a) Per cor. 1. p. 3. l. 3. (a) $\frac{1}{2}$ *AK est sinus gr. 45. Ergo cylindrus circumscriptus est ad inscriptum, ut in quadrato diameter ad lateris semissem sive ut circuli diameter ad sinum graduum 45.*

2. *Et in eadem ratione est sphæra cylindro æquilatero circumscripta ad sphæram eidem cylindro inscriptam. Nam sphæra GK cylindro æquilatero ADLK circumscripta diameter est AL, & sphæra inscripta diameter æqualis est diametro baseos cylindri, nempe ipsi AK. Sphæra igitur circumscripta erit* (b) *ad inscriptam, in triplicata ratione AL ad AK, hoc*
(b) Per 18. l. 12. *est, ut AL ad AR sive* $\frac{1}{2}$ *AK. Q. E. D.*

Cor. ad schol. præced. *Sphæra est ad cylindrum æquilaterum sibi inscriptum, ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus; sive, ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati circulo inscripti.*

Nam per schol. præced. est sphæra cylindro æquilatero circumscripta ad sphæram eidem inscriptam, ut in quadrato dupla diameter ad latus, sive ut quadrupla diameter ad duplum latus. Sed sphæra inscripta eidem cylindro est ad cylin-
(c) Per 32. hujus. *drum,* (c) *ut 2 ad 3, sive ut duplum latus quadrati ad tri-*
(d) Per 32. l. 5. *plum ejusdem quadrati latus. Ergo* (d) *sphæra circumscripta cylindro æquilatero est ad eumdem cylindrum, (hoc est, sphæra est ad cylindrum æquilaterum sibi inscriptum,) ut in quadrato quadrupla diameter ad triplum latus, sive (quod perinde est) ut quadrupla circuli diameter ad triplum latus quadrati eidem circulo inscripti.)*

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 29. vel 28.

Cujuscumque portionis sphæricæ superficies (ILBG) ad superficiem coni maximi inscripti (IBG,) eam rationem habet, quam coni latus (IBG) ad basis radium (GO)

(e) Per 25 hujus. Quoniam portionis ILBG superficies (*e*) æqualis est circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT, basim nem-
(f) Per cor. 2. p. 2. l. 12. pe suam & coni, duplicata (*f*) rationis BG ad GO; hoc est,
(g) Per 14 hujus. (*g*) rationis superficiei conicæ IBG ad basim eamdem QT. Ergo liquet (*h*) superficiem ILBG esse ad superficiem conicam,
(h) Per def. 13 l. 5. IBG, ut eadem conica IBG est ad basim QT. Quare cum conica IBG sit ab basim QT, (*i*) ut BG ad GO, etiam por-
(i) Per 14. hujus. tionis superficies erit ad conicam IBG sibi inscriptam ut BG ad GO. Quod erat demonstrandum.

(Cor.

(Cor. *Ex hujus prop. demonstratione liquet, superficiem coni maximi segmento sphæræ inscripti, esse mediam proportionalem inter superficiem segmenti, & basim utrique communem.*)

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 27.

Hemisphærii superficies (EOBD) ad coni maximi sive recti inscripti superficiem (EBD eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem vero coni similis circumscripti, ut latus in quadrato ad diametrum.

1. Partis demonstratio ex præcedenti est manifesta. Est enim portionis cujuscumque, ac proinde & hemisphærii superficies EOBD ad conicam inscriptam, ut BD ad DA. Est autem BADK quadratum, cujus diameter est BD, latus DA. Fig. 10. l. 4.

2. Pars. Semissis quadrati circulo (cujus centrum A) circumscripti, esto EBC: qua circa axem AB circumacta, gignatur conus hemisphærio conscriptus. Quoniam quadratum EC duplum (*a*) est quadrati EB, seu GI, etiam circulus diametri EC duplus (*b*) est circuli cujus diameter GI; hoc est circuli HGDI. Atqui (*c*) superficies hemisphærii cono EBC inclusi, ejusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri EC eidem superficiei hemisphæricæ æqualis est. Quare cum superficies conica EBC sit ad (*d*) circulum diametri EC, basim nempe suam, ut latus BE ad basis radium EA; erit quoque ad superficiem hemisphæricam sibi inscriptam, ut BE ad EA, hoc est, ut diameter in quadrato ad suum latus; (*ac proinde, superficies hemisphærica erit ad circumscriptam conicam, ut latus in quadrato ad diametrum.*) Quod erat demonstrandum. (a) Per cor. 1. p. 47 l. 1. (b) Per cor. 5. p. 2. l. 12. (c) Per 24. hujus. (d) Per 14. hujus.

Corol. *Si hemisphærium cono rectangulo EBC circumscribatur & inscribatur; erit superficies coni media proportionalis inter superficiem hemisphærii circumscripti, & superficiem inscripti. Est enim, tam superficies circumscripta ad conicam, quam conica ad inscriptam, ut in quadrato diameter ad latus.*) Fig. 10. l. 4.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. ead. cum Fig. 13. l. 5.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum sibi circumscriptum, & soliditate & superficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrum.

Maxi-

Maximo sphæræ circulo HGDI circumscriptum esto quadratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem acto, rhombus conicus gignatur sphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inspice Fig. 10. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R, (inspice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio
(a) Per def. 10. l. 5. S ad O triplicata (*a*) rationis S ad R, hoc est, EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, sive R ad S, hoc
(b) Per sch. p. 20. l 6. est EC ad EB; ac proinde (*b*) O est ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB: unde (*c*) O est dupla ipsius R. His ita con-
(c) Ex sch. p. 6. & 7. l. 4. stitutis, intelligatur rhombo conico sphæra circumscribi EBCF Erit igitur sphæra HGDI ad sphæram EBCF in (*d*) ratione tri-
(d) Per 18. l. 12. plicata diametri GI (sive EB) ad diametrum EC; hoc est, (Quod jam ostendi,) erit ut S ad O. Sphæra autem EBCF
(e) Per 30. hujus. est ad rhombum conicum sibi inscriptum (*e*) ut 2 ad 1, hoc est, (quod ostendi supra,) ut O ad R. Igitur ex æquo, sphæra HGDI est ad eumdem rhombum, qui ei est circumscriptus, ut S est ad R, hoc est, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum.

(*Idem etiam ex unicæ fig. 10. lib. 4. inspectione demonstrabitur. Nam propter triangula rectangula EGA, EAB*
(f) Per cor. post sch. p. 13. l. 6. *EBC, communem angulum E habentia, erunt* (f) *EG, EA, EB, EC* $\div$, *& ratio EG ad EC triplicata* (g) *erit rationis EB ad EC. Sed sphæra rhombo conico inscripta, est ad sphæ-*
(g) Per def. 19. l. 5. *ram eidem circumscriptam, in triplicata* (h) *ratione diametrorum EB, EC, hoc est, ut EG ad EC. Et sphæra cir-*
(h) Per 18. l. 12. *cumscripta, est* (i) *ad rhombum cui circumscribitur, ut 2 ad 1, sive ut EC ad EA. Ergo ex æquo,* (k) *sphæra inscripta est*
(i) Per 30. hujus. *ad rhombum cui inscribitur, seu, (quod idem est,) sphæra*
(k) Per 22. l. 5. *est ad rhombum sibi circumscriptum, ut EG ad EA, hoc est ut in quadrato HG, latus ad diametrum.*)

Deinde ex secunda parte præcedentis patet hemisphærii superficiem esse ad superficiem coni (*circumscripti*) EBC, ac proinde & totius sphæræ (HGDI) superficiem esse ad superficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergo sphæra tam soliditate quam superficie est ad rhombum quadratum (*conicum sibi circumscriptum*) EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonstrandum.

(Cor. 1. *Superficies sphæræ rhombo conico quadrato circumscriptæ, superficies rhombi, & superficies sphæræ rhombo inscriptæ, eamdem rationem continuant, eam nempe quam in quadrato habet diameter ad latus. Patet ex præcedenti & hac.*

Cor.

Cor. 2. *Superficies sphæræ rhombo conico quadrato circumscriptæ, dupla est superficies sphæræ eidem rhombo inscriptæ. Ac similiter, superficies rhombi conici quadrati sphæræ circumscripti, dupla est superficiei rhombi similis eidem sphæræ inscripti. Cum enim per cor.* 1. *sint superficies sphæræ rhombo circumscriptæ, superficies rhombi, & sphærica inscripta, ut EC, EB, EA; & cum similiter sint superficies rhombi sphæræ circumscripti, superficies sphæræ, & ea rhombi inscripti, ut EC, EB, EA; Liquet in utroque casu, superficiem corpori circumscriptam esse ad eidem inscriptam; ut EC ad EA, sive ut* 2. *ad* 1. Fig 10. 14.

Cor. 3. *Rhombus conicus quadratus, est duorum mediorum proportionalium prior, inter sphæram inscriptam & circumscriptam, ut in demonstratione primæ partis hujus prop. ostensum est. Nam inscripta, rhombus, & circumscripta, sunt inter se, ut S, R, & O, in fig.* 13. *l.* 5. *vel ut EG, EA, & EC, in fig.* 10. *l.* 4.

Cor. 4. *Patet quoque ex eadem demonstratione, (vel etiam ex p.* 30. *hujus.) sphæram rhombi conici quadrati sibi inscripti duplam esse.* Fig 10. 14.

Cor. 5. *Sphæram EBCF rhombo conico quadrato circumscripta, est ad sphæram HGDI eidem rhombo inscriptam, ut in quadrato diameter EC ad lateris EB semissem EG, uti ex demonstratione memorata liquet. Atque in eadem ratione est rhombus conicus quadratus sphæræ circumscriptus ad similem rhombum conicum eidem sphæræ inscriptum. Nam per hanc* 37. *est rhombus quadratus conicus sphæræ circumscriptus ad ipsam sphæram, ut EC ad EB: & per cor.* 4. *est sphæra ad ejusmodi rhombum sibi inscriptum, ut* 2. *ad* 1., *sive ut EB ad EG. Ergo erit ex æquo* (a) *rhombus circumscriptus ad inscriptum, ut EC ad EG.*

(a) Per 22. l. 5.

Cor. 6. *Eadem itaque proportio est inter rhombum conicum quadratum sphæræ circumscriptum & rhombum similem eidem sphæræ inscriptum, ac inter cylindrum æquilaterum eidem cuivis alteri sphæræ circumscriptum & inscriptum; vel inter sphæram eidem cylindro æquilatero seu eidem rhombo conico quadrato circumscriptam & inscriptam. Ea nempe ratio, quæ in quadrato est inter diametrum & lateris semissem. Patet ex cor. præced. hujus prop. & ex schol. post p.* 34. *hujus.)*

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 30. S*Uperficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla est superficiei ejusdem coni.*

Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis BGKD
(a) Per 35. hujus. est ad inscriptam conicam, ut (a) BK ad BA. Sed quia conus BKD æquilaterus ponitur, KB est æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam superficies BGKD dupla est inscriptæ conicæ BKD. Quod erat demonstrandum.

Cor. 1. *Eadem ratio dupla continuatur; inter superficiem portionis sphæricæ conum æquilaterum capientis, superficiem coni, & basim coni. Patet ex hac, & ex cor. p. 35. hujus.*

Cor. 2. *Superficies portionis sphæricæ conum æquilaterum capientis, est ad superficiem totam ejusdem coni, ut 4 ad 3.*

Nam per cor. 1. superficies portionis sphæricæ, superficies coni, & basis coni sunt inter se, ut 4. 2. 1. Unde liquet hoc cor.

Cor. 3. *Sphæræ superficies est ad totam cylindri æquilateri sibi inscripti superficiem, ut superficies portionis sphæricæ conum æquilaterum capientis est ad superficiem totam ejusdem coni. Nempe ut 4 ad 3. Patet ex p. 34. & ex cor. 2. hujus p. 38.*

Atque in eadem ratione est superficies tota cylindri recti hemisphærio circumscripti, ad superficiem totam hemisphærii. Cum enim (b) *cylindrica superficies, quam* (c) *hemisphærica, sit dupla baseos; erit tota cylindrica, baseos quadrupla; & hemisphærica cum basi, ejusdem baseos tripla. Quare tota cylindri superficies erit ad totam hemisphærii, ut 4. ad 3.)*

(b) Patet ex cor. p. 26. hujus.
(c) Patet ex 24. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 30. S*Phæræ superficies ad totam coni æquilateri sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.*

Esto Z sphæræ centrum, & conus æquilaterus sphæræ inscriptus BKD, axis sphæræ ac cono communis KZAO. Per hunc si secetur sphæra ac conus, producetur in sphæra circulus maximus OBKD, in cono autem triangulum æquilaterum BKD, cujus unum latus BAD erit diameter baseos conicæ QT. Et quia axis coni KA rectus est basi QT, erit angulus BAK (d) rectus. Igitur quadratum BA æquale est (e) rectangulo KAO. Jam quia latus æquilateri trianguli abscindit (f) quartam axis partem AO, erit rectangulum KAO,

[d] Per def. 3. l. 11.
(e) Per cor. 2. p. 17. l. 6.
(f) Per cor. 5. p. 15. l. 4.

KAO, hoc eſt, quadratum BA, triplum quadrati (*a*) AO. Quare cum quadratum radii ZO (*b*) quadtuplum ſit quadrati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, ut 4. ad 3. Ergo etiam (*c*) circulus OBKD eſt ad circulum QT ut 4. ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli OBKD, hoc eſt (*d*) tota ſphæræ DG ſuperficies, ad circulum QT, ut 16. ad 3. Atqui (*e*) ſuperficies coni æquilateri BKD eſt ad circulum QT, baſim nempe ſuam ut 2 ad 1. ac proinde coni BKD tota ſuperficies, una cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempe circulum QT, ut 3. ad 1. ſive ut 9. ad 3. Ergo cum oſtenderim ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eumdem circulum ut 16. ad 3. erit ſphæræ DG ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

(a) Per 1. l.6.
(b) Per cor.3. p.4 .2.
(c) Per cor.2. p.2. l.12.
(d) Per 24 hujus.
(e) Per cor.1.p.18 hujus.

(Cor. *Ex hujus demonſtratione liquet, coni æquilateri ſphæræ inſcripti baſem QT eſſe ad maximum ſphæræ circulum DG, ut 3. ad 4.*)

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus BD, abſcindit (*f*) quartam axis partem AO; erit quoque ſphærica ſuperficies BOD (*g*) quarta pars, ac proinde ſuperficies BGKD tres quartæ ſuperficiei totius ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16; BGKD ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies BGKD (*h*) eſt dupla ſuperficiei conicæ BKD, ac proinde ad eam eſt ut 12 ad 6. Ergo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam BKD ut 16. ad 6. Deinde quia ſuperficies coni BKD, (utpote æquilateri,) dupla (*i*) eſt baſeos QT, liquet ſuperficiem conicam BKD (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2. ad 3, hoc eſt, ut 6. ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni inſcripti ſuperficiem, ut 16. ad 9. Quod erat demonſtrandum.

(f) Per cor. 5. p. 15. l.4.
(g) Per 27. hujus.
(h) Per præc.
(i) Per cor.1 p.38 hujus.

PROPOSITIO XL.

SPhæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem, eam proportionem habet, quam 4. ad 9. Fig. 31.

Circulo ſphæræ maximo BPM circumſcriptum ſit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto, productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumſcriptus etiam

(a) Per sch. p 13 & 14. l.4. etiam sit circulus, NDLOF, quem (*a*) patet esse concentricum priori; & axis OAB producatur in N. Quoniam BN est (*b*) quarta pars axis ON, patet ON esse duplam KB. Quare cum circulorum ratio sit (*c*) duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF ut 1, ad 4. Atqui ostensum jam est in demonstratione prima præcedenti, circulum NDLOF esse ad circulum QT, basim coni æquilateri sphæræ FL inscripti, ut 4. ad 3. Ex (*d*) æquo igitur circulus BPM est ad circulum QT ut 1. ad 3. Atqui tota coni DOF superficies, circuli QT (*e*) tripla est. Ergo tota coni superficies circuli BPM noncupla est. Quare cum sphæræ TP superficies ejusdem circuli BPM (*f*) quadrupla sit, erit tota coni æquilateri DOF superficies ad superficiem sphæræ cui circumscripta est, ut 9. ad 4. Quod erat demonstrandum.

(b) Per cor. 5. p. 15 l.4.
(c) Per 2. l.12.
(d) Per 22. l.5.
(e) Per cor 1. p 14 hujus.
[f] Per 24. hujus.

Coroll. 1. *Ex hac demonstratione patet, coni æquilateri sphæræ conscripti axem BO sesquialterum esse diametri sphæræ BK, seu ut 3. ad 2.*

2. *Ex eadem demonstratione liquet, coni æquilateri sphæræ circumscripti DOF basim QT esse etiam sesquialteram basium cylindri eidem sphæræ circumscripti. Nam QT est ad BPM, ut 3. ad 1. Ergo QT est ad BPM bis, ut 3. ad 2.*

3. *Superficies coni æquilateri DOF est superficiei cylindri eidem sphæræ circumscripti sesquialtera. Illa enim* (g) *dupla est QT, hæc* (h) *quadrupla BPM. Ergo superficies conica erit ad cylindricam, ut bis 3. ad quater 1; hoc est, ut 6. ad 4. seu ut 3. ad 2.*

[g] Per cor. 1 p 14. hujus.
(h) Per 26. & 24. hujus.

4. *Circulus maximus BPM sphæræ cono æquilatero DOF inscriptæ, superficies ejusdem sphæræ, superficies tota coni DOF, & superficies sphæræ NDLOF cono circumscripta, sunt* (i) *inter se, ut 1. 4. 9. 16; hoc est, ut numerorum 1. 2. 3. 4. quadrata.*

(i) Patet ex p. 24. hæc 40. & 39 hujus.

5. *Hinc dato sphæræ inscriptæ radio AB, facili negotio describentur circuli dictis superficiebus æquales. Nam* (k) *ejusmodi circulorum radii erunt 2AB, 4AB. Unde & superficierum illarum mensuræ statim innotescunt.*

(K) Per cor. 2. p. 2. l.12.

6 *Cum diameter ON sphæræ cono æquilatero circumscriptæ, dupla sit diameter KB sphæræ inscriptæ; erit sphæra circumscripta inscriptæ octupla; nempe in triplicata* (l) *ratione diametrorum sive ut* (m) *cubus numeri binarii ad cubum unitatis.*)

(l) Per 18. l.12.
(m) Per sch. p. 33. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni sphæræ circumscripti tota superficies, quadrupla est superficiei totius coni inscripti eidem sphæræ. Fig. 31.

Æquilateri coni DOF circumscripti tota superficies est ad sphæræ superficiem, ut (*a*) 9. ad 4. & sphæræ superficies est ad coni inscripti æquilateri SKT superficiem totam, ut (*b*) 16. ad 9. Ergo ex (*c*) æqualitate perturbata, circumscripti æquilateri coni tota superficies est ad totam superficiem æquilateri inscripti, ut 16. ad 4. sive ut 4. ad 1. Quod erat demonstrandum.

(a) Per præc. (b) Per 39. hujus. (c) Per 23. l. 5.

(*Atque eodem modo, sphæræ cono æquilatero circumscriptæ superficies, quadrupla est superficiei sphæræ eidem cono inscriptæ. Patet ex cor. 4. præced.*

PROPOSITIO XLII.

Sphæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum (BKC) *eam rationem habet quam 32 ad 9.* Fig. 32.

Sphæra & conus BKC secentur plano per axem communem KO, faciente in sphæra circulum maximum OFKI, in cono autem triangulum æquilaterum BKC. Ducto deinde plano per centrum A ad OK recto, abscindatur hemisphærium FGKI, cui inscriptus intelligatur conus maximus FKI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abscindit OP (*d*) quartam partem axis OK, erit PK ad AK ut 3. ad 2. hoc est ut 9. ad 6. Basis vero QT est ad circulum OFKI, hoc est, ad basim ND, ut 3. ad 4. hoc est, ut 6. ad 8. uti patet ex demonstratis prop. 39. Quare cum ratio coni BKC ad conum FKI componatur (*e*) ex ratione altitudinis PK ad altitudinem AK (hoc est ex ratione 9. ad 6. & ex ratione basis QT ad basim ND (hoc est ex ratione 6. ad 8.) erit conus BKC ad conum FKI ut 9. ad 8. Quare cum sphæra CG quadrupla (*f*) sit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad sphæram CG; ut 9. ad 32. Quod erat demonstrandum.

(d) Per cor. 5. p. 15. l. 4. (e) Per n. 2. in sch. p. 15. l. 12. (f) Per 30. hujus.

(Aliter. *PK est ad AK ut 3 ad 2, sive ut 9. ad 6. Et cum sit* (g) *QT ad CG ut 3 ad 4, sive ut 6 ad 8; erit QP ad 4CG ut 6 ad 32. Ergo conus altitudinis PK & baseos QT; (hoc est, conus BKC) erit ad conum altitudinis AK & baseos 4CG, (hoc* (h) *est, ad sphæram CG) in ratione* (i) *composita ex 9 ad 6, & 6 ad 32, sive* (k) *ut 9 ad 32.*

(g) Per cor. p. 39. huj. (h) Per 28. hujus. (i) Per n. 2. in sch. p. 15. l. 12. (K) Per def. 5. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 31.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, coni æquilateri eidem sphæræ inscripti octuplus est.

Coni æquilateri sphæræ inscripti & circumscripti sint SKT & DOF, & axis communis esto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque quam sphæra; eruntque sectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur descriptus esse circulus NDOF, & axis OKB producatur in N. Quoniam vero æquilateri trianguli latus DF abscindit axis ON quartam (*a*) partem NB, patet NO esse duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus ST abscindit axis BK (*b*) quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, sic BO ad CK. Sed NO dupla est BK. Ergo etiam BO dupla est CK. Igitur ob similitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam (*c*) DF & ST, diametri videlicet basium conicarum, sunt inter se in proportione dupla. Quare cum coni DOF, SKT sint (*d*) similes ac proinde eorum proportio (*e*) triplicata sit proportionis diametrorum DF, & ST, quæ est 2 ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8 ad 1. Quod erat demonstrandum.

(Aliter. *Ductis rectis DN, SB; ob angulos DOF, SKT* (f) *æquales, æquantur eorum dimidii, DON, SKB; & anguli ODN,* KSB *sunt* (g) *recti, & proinde* (h) *triangula DON, SKB similia sunt: unde DO : SK : ON :* KB : : (i) 2:1. *Ergo & DF (= DO) : ST (= SK) : : 2 : 1. Et cum coni æquilateri DOF, SKT similes sint, erunt* (k) *ut* 8 *ad* 1. *Sunt enim* 8, 4, 2, 1 ∺.

Corol. *Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, est ad conum æquilaterum eidem sphæræ inscriptum, ut sphæra cono æquilatero circumscripta ad sphæram eidem cono inscriptam; nempe ut* 8. *ad* 1. *Patet ex hac, & cor.*6. *p.*40.

Et universaliter; cum corpora quæcumque similia sphæris circumscriptibilia & inscriptibilia, diametros vel latera habeant, sphærarum circumscriptarum diametris proportionalia; sintque corpora similia ad se invicem in triplicata (eorumque superficies in duplicata) ratione diametrorum vel laterum homologorum: quam (l) *igitur rationem habet sphæra corpori cuicumque circumscripta ad sphæram eidem corpori inscriptam eamdem rationem habebit corpus illud sphæræ circumscriptum ad corpus*

simile

[a] Per cor. 5. p. 15. l. 4.
(b) Per idem cor.
(c) Per 4. l. 6.
(d) Per def. 4. l. 12
(e) Per 12. l. 12
(f) Per cor. p. 5. l. 1.
(g) Per 31. l. 3.
(h) Per cor. 9. p. 32. l. 1. & p. 4. l. 6.
(i) Patet ex dem. pr. 40. hujus.
(k) Per 12. l. 12.
(l) Per 34. & 16. l. 5.

simile eidem sphæræ inscriptum; quam rationem habet superficies sphærica circumscripta corpori cuilibet ad superficiem sphæricam eidem inscriptam, eamdem habebit corporis illius sphæræ circumscripti superficies ad similis corporis eidem sphæræ inscripti superficiem.)

PROPOSITIO XLIV.

Sphæra ad circumscriptum sibi conum æquilaterum (DOF) & soliditate & superficie tota, eam proportionem habet quam 4. ad 9. Fig. 31.

Sphæra TP est ad inscriptum (*a*) sibi conum æquilaterum SKT, ut 32 ad 9. Inscriptus autem SKT conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF ut (*b*) 1. ad 8. hoc est: ut 9 ad 72. Igitur ex æquo sphæra TP est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF, ut 32. ad 72. hoc est, (*utrumque numerum dividendo per* 8.) ut 4. ad 9.

(a) Per 42. hujus.

(b) Per præc.

(Aliter. *Sphæra est ad inscriptum conum æquilaterum* (c) *ut* 32 *ad* 9. *Inscriptus vero est ad circumscriptum* (d) *ut* (1. *ad* 8, *hoc est, ut*) 4. *ad* 32. *Ergo ex æquo* (e) *perturbate, sphæra est ad circumscriptum conum æquilaterum ut* 4. *ad* 9.

(c) Per 42. hujus.

(d) Per 43. hujus.

(e) Per 23. 5.

Propositione autem 40. demonstravimus etiam sphæræ superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem ut 4. ad 9. Ergo sphæra & soliditate & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum ut 4. ad 9. Quod erat demonstrandum.

Quod igitur in sphæra & cylindro sphæram ambiente miratus est Archimedes, id ipsum in sphæra & æquilatero cono ambiente sphæram jam demonstravimus, ut videlicet, & soliditatum inter se eadem proportio rationalis, quæ superficierum existat. Quemadmodum enim ille reperit sphæram ad cylindrum esse tam soliditate quam superficie, ut 2. ad 3. ita nos docuimus sphæram & soliditate & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, ut 4. ad 9.

Hinc vero illam ipsam proportionem, nempe sesquialteram, quam existere sphæram inter ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumscripto & soliditate etiam ac superficie continuari nullo negotio jam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

PRO-

PROPOSITIO XLV.

Vide Fig quæ huic Tractatui præfixa est.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, & cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, & ipsa sphæra, eamdem proportionem continuant, nimirum sesquialteram, tam quoad soliditatem, quam quoad superficiem totam.

Nam per 32. hujus, cylindrus rectus GK sphæram ambiens, tam soliditate quam tota superficie est ad sphæram ut 3 ad 2. sive ut 6. ad 4. Per præcedentem vero circumscriptus sphæræ conus æquilaterus BAD, tam soliditate, quam superficie est ad sphæram ut 9. ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate quam superficie, ut 9. ad 6. Quare hæc tria corpora, conus, cylindrus, sphæra sunt inter se ut hi numeri 9. 6. 4. ac proinde continuant proportionem sesquialteram. Quod erat demonstrandum.

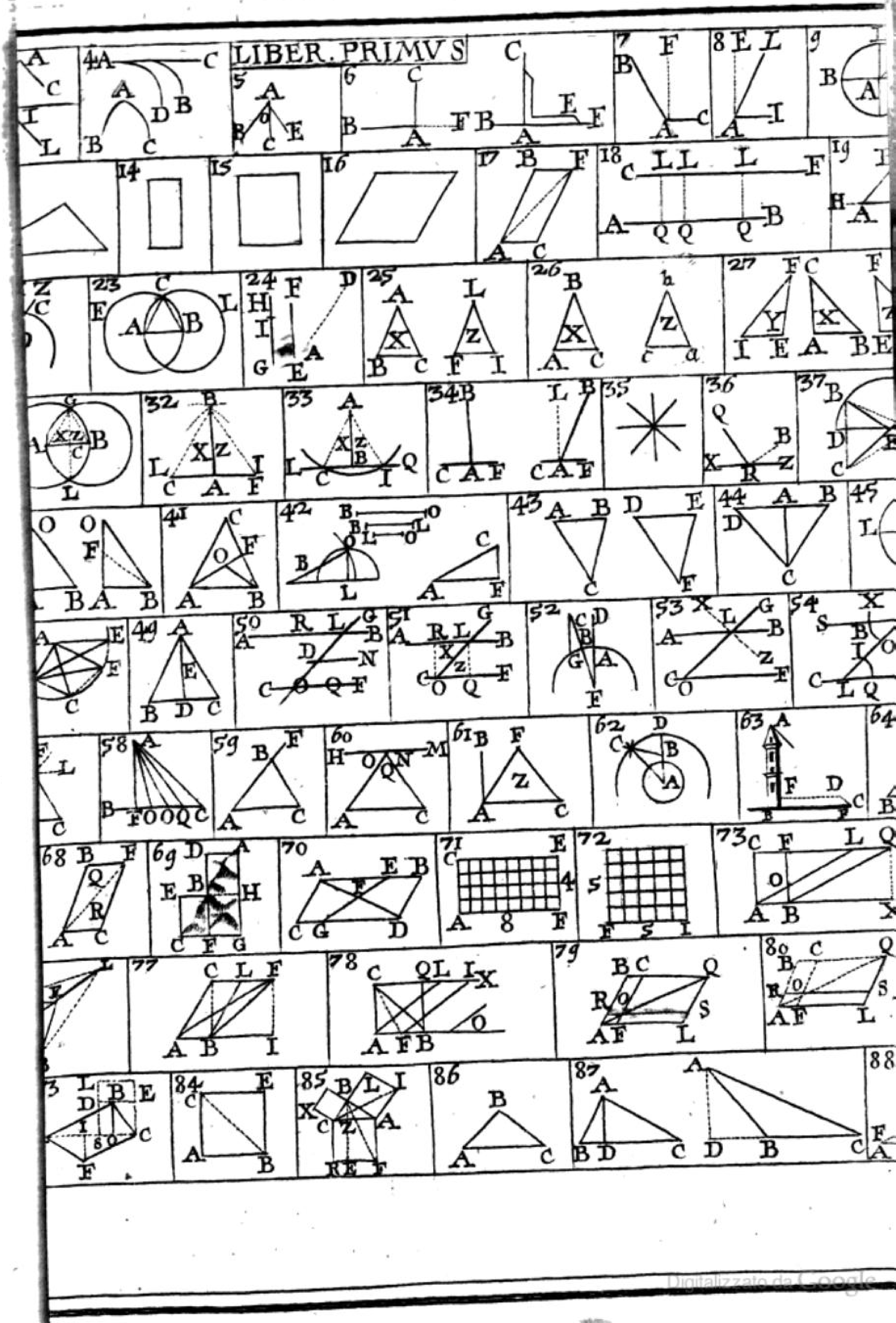
(*PROPOSITIO XLVI.*

Vide Fig. eamdem.

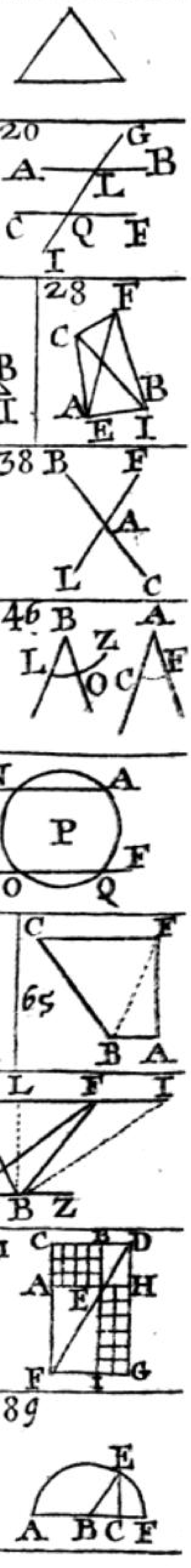
INter conum æquilaterum & cylindrum eidem sphæræ circumscriptos, eadem obtinet ratio sesquialtera, quoad superficies totas, superficies simplices, soliditates, altitudines & bases.

Hæc propositio patet, quoad superficies totas & soliditates, ex præcedenti; quoad superficies simplices, ex coroll. 3. prop. 40. hujus; quoad altitudines & bases, ex coroll. 1. & 2. ejusdem prop. 40.)

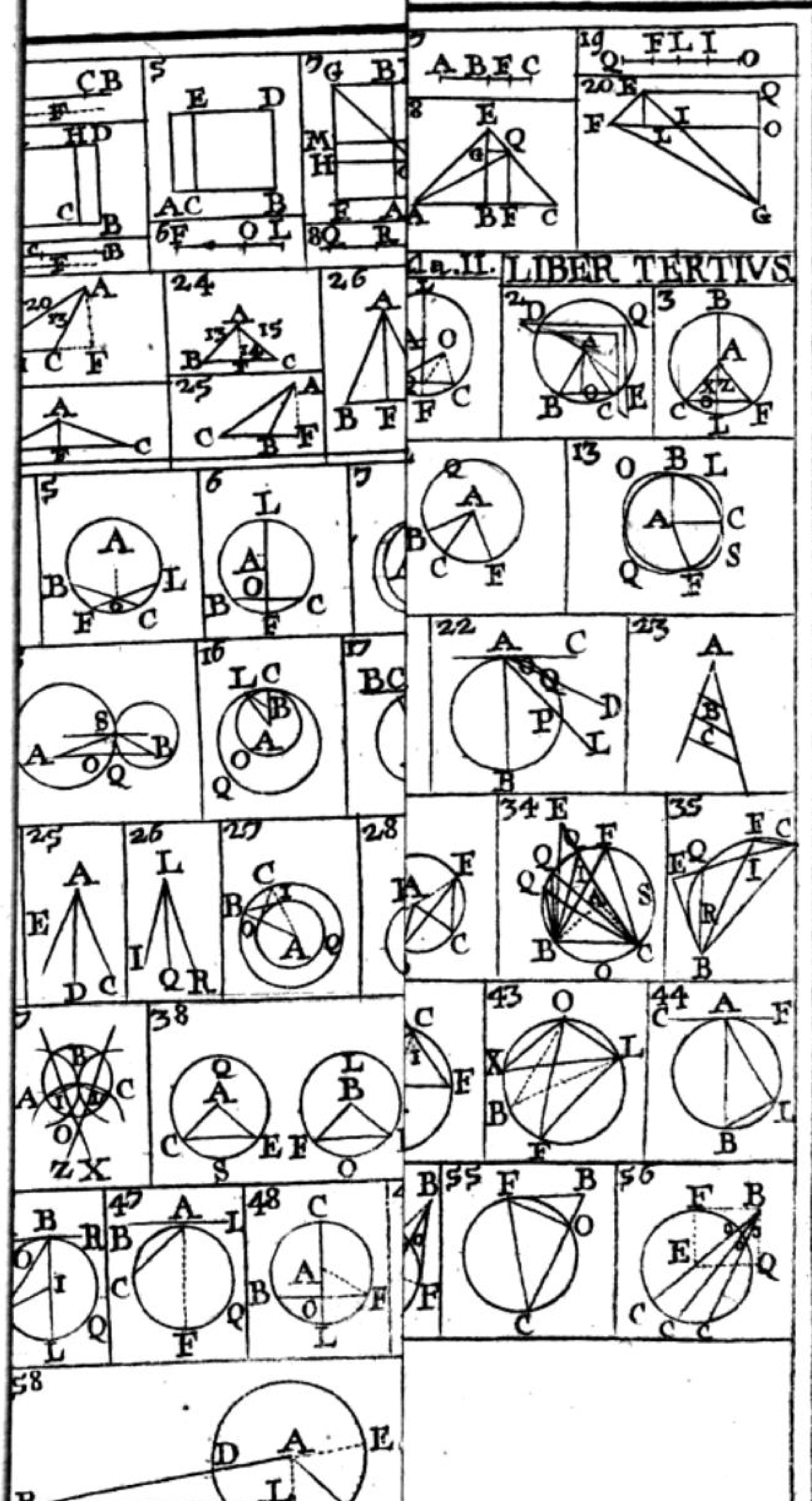
AD MAJOREM DEI GLORIAM.


LIBER. PRIMVS

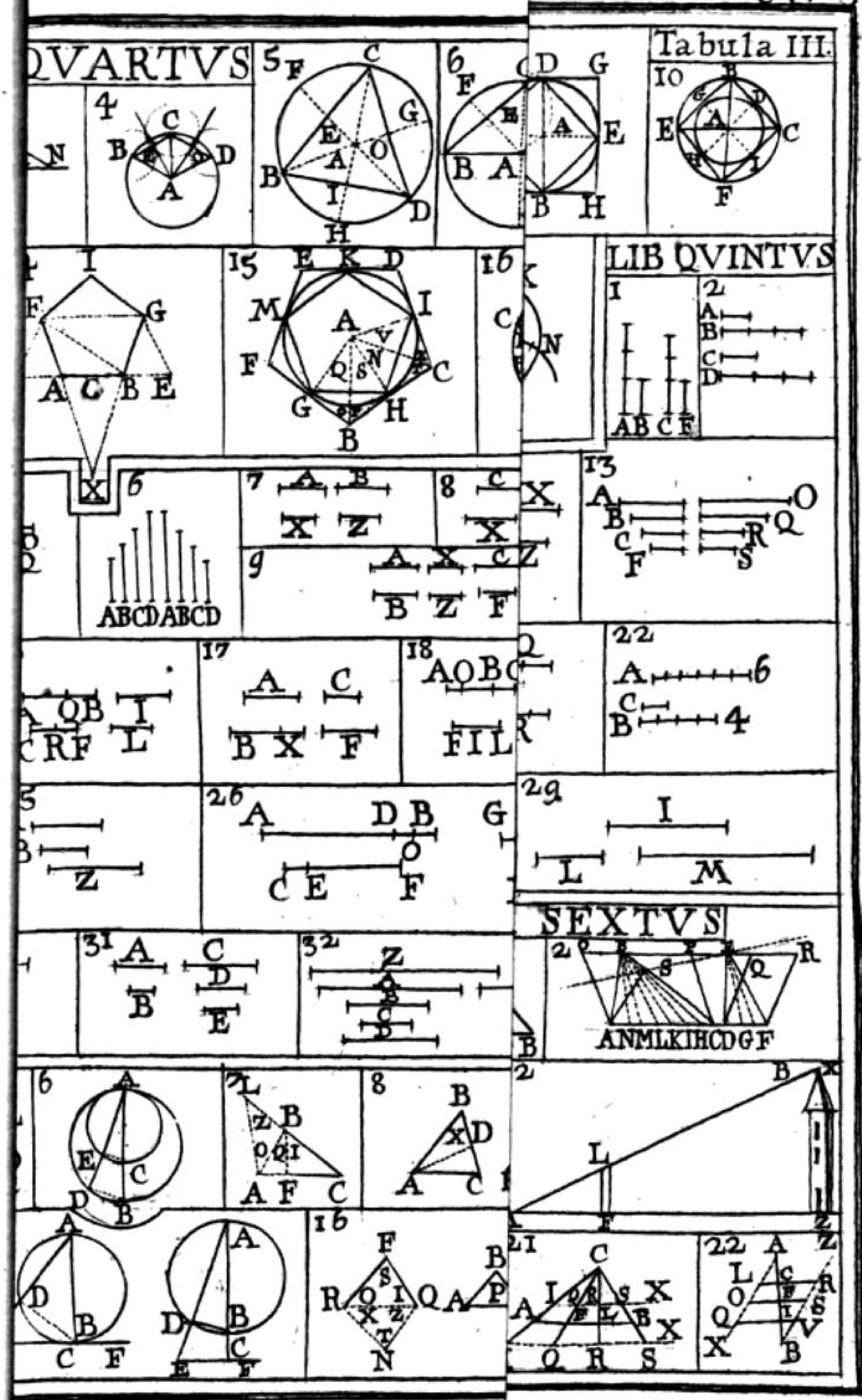
Tabula. I.


20
G
A
B
L
C
Q
F
I
28
F
C
B
A
E
I
38
B
F
A
L
C
46
B
A
Z
L
O
C
F
A
P
F
O
Q
C
F
65
B
A
L
F
I
B
Z
C
B
D
A
E
H
F
I
G
89
E
A
B
C
F

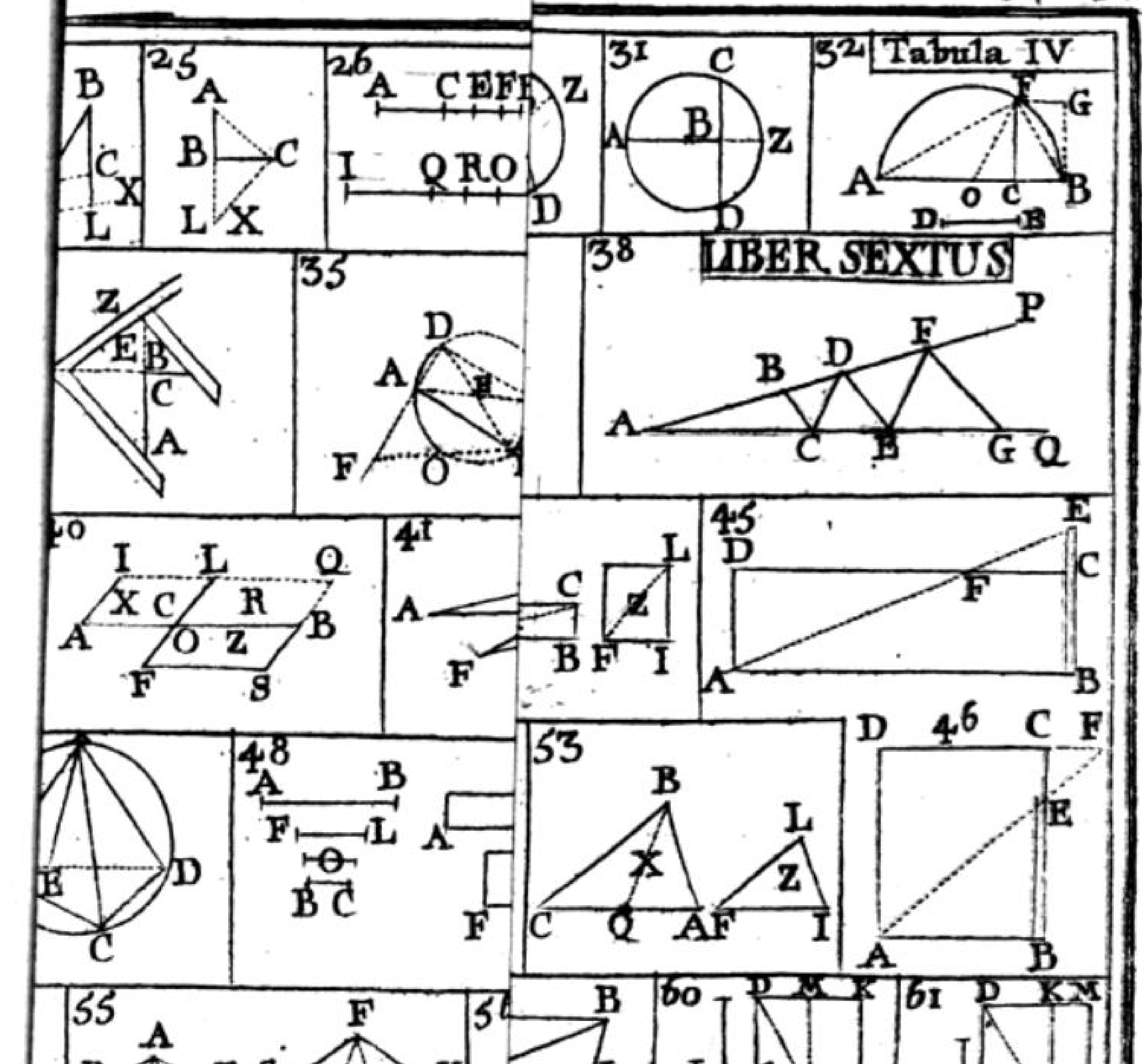
N.° 2



N.° 3



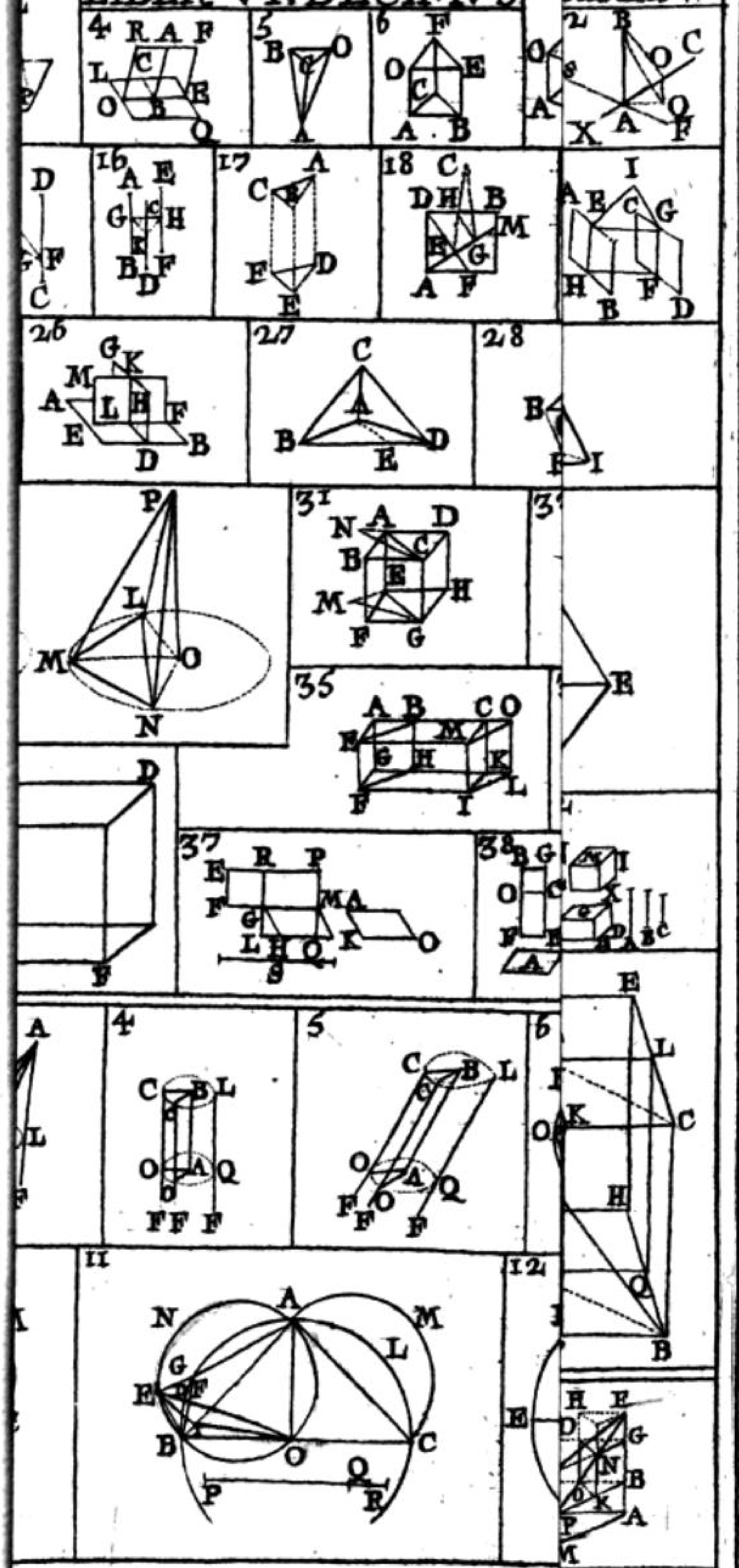
N° 4



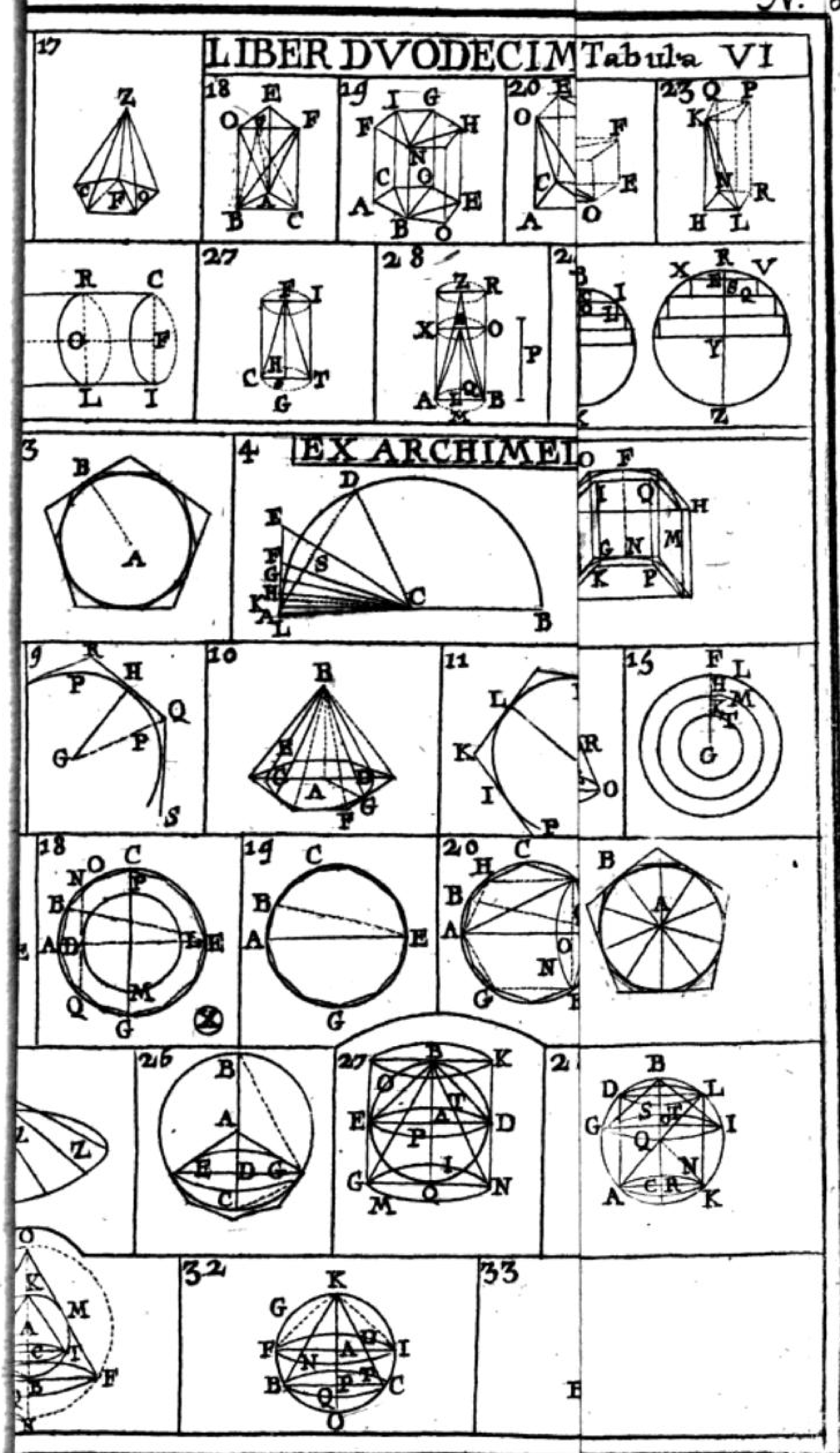
N° 5

LIBER VNDECIMVS

Tabula V.



N: 96



(F