

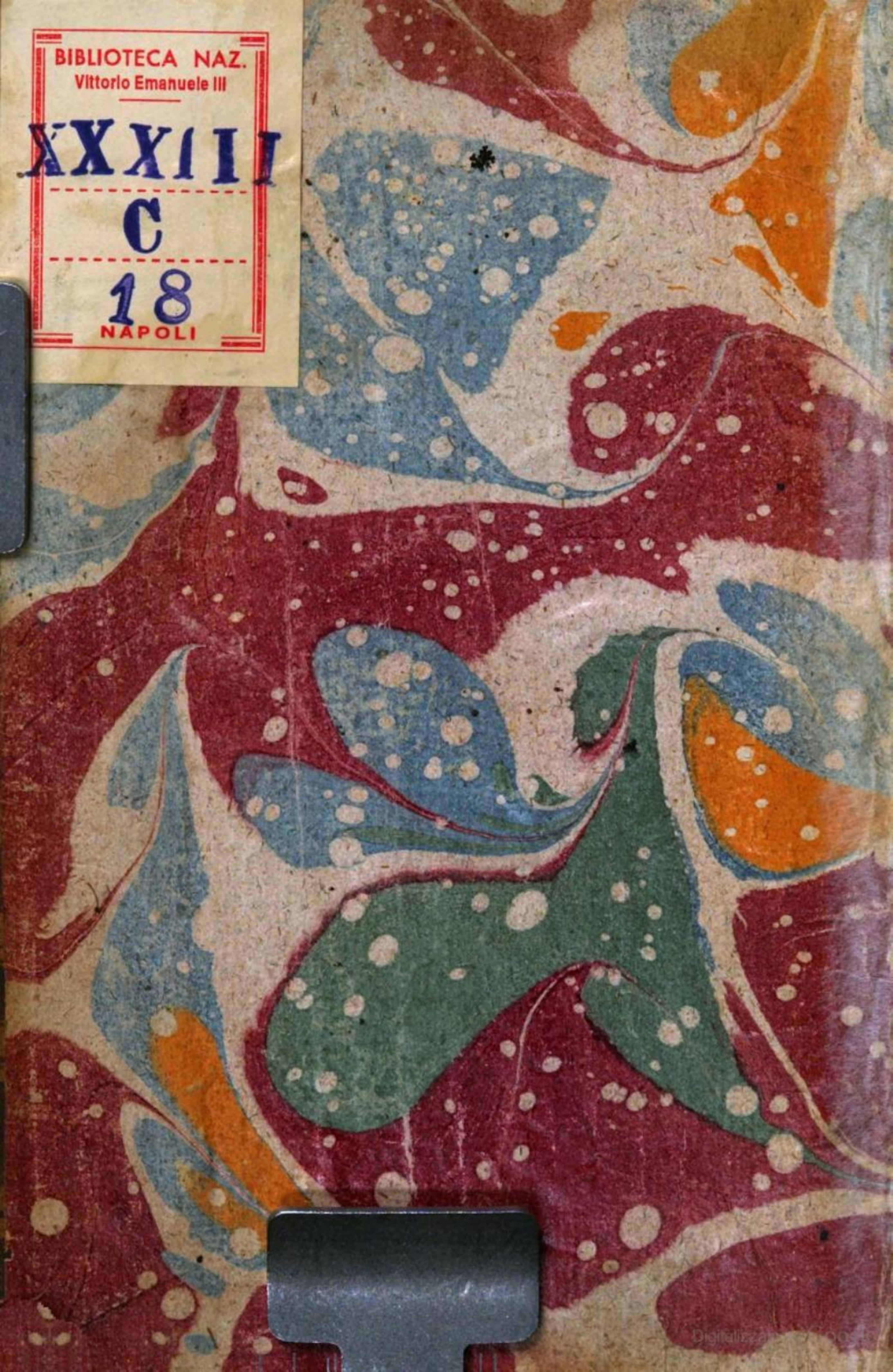
BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III

XXIII

C

18

NAPOLI





MAPA

54

XXVII

C
28

NUOVI ELEMENTI
D E L L A
GEOMETRIA PIANA

NUOVI ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA PIANA

Composti per uso della
REAL' ACCADEMIA MILITARE

Dal Primario Professore
della medesima

NICCOLÒ DE MARTINO.



IN NAPOLI
Presso PIETRO PALOMBO
M. DCC. XLVI.



Con permissione Reale.

ALL' INVITTISSIMO ED AUGUSTISSIMO

P R I N C I P E

C A R L O
D I B O R B O N E

*Re delle due Sicilie, e di Gerusalemme,
Infante di Spagna, &c.*

SIGNORE

LA Real' Accademia, che ad
esempio de' Chiari Vostri
Maggiori con saggio e matu-
ro consiglio avete eretta in questa Ca-
pitale per gli Officiali e Cadetti della
Vo-

Vostra truppa , siccome hà il gran vantaggio di esser sotto il Vostro immediato Real Patrocinio , così a ragione promette di se l'esito il più felice; perciocche non ad altri , che alla MAESTA' VOSTRA dee renderfi conto , e di ciò che in essa s'insegna , e del frutto che dalla stessa ricavasi . Io , che per mera Vostra Real Munificenza ho l'onore di esserne Professore Primario , sono ancora nell'obbligo di pubblicare per mezzo delle stampe i Trattati , che l'alto Vostro elevato Intendimento ha stimato più proprij per uso di quella . Il perche avendo condotto a fine il Primo di essi, che contiene gli Elementi della Geometria Piana , lo presento alla MAESTA' VOSTRA , non perche meritevole egli sia di portare in fronte il Vostro glorioso augustissimo Nome , ma affincbe veggiate , come Io mi sia guidato nella struttura di quello , e sù qual piede abbia in pensiero di distendere gli altri , che seguir lo debbono . Se la sorte mi sia così propizia , che incontri egli la Vostra Real' approvazione , dovrò compiacermi di aver adempiuto


piuto il mio dovere , e farò sicuro altresì , che il Vostro giudizio servirà di regola ad ogn' altro discreto e giusto Censore . Ma poicche molto lungi si estende il Vostro fino Real discernimento , non ardisco di avanzare tantoltre i miei voti , ma debbo essere contento, se gradirete almeno lo studio , che ho posto in eseguire con ogni sollecitudine i venerati Vostri Comandamenti . Del rimanente siccome niente è più a cuore alla MAESTA' VOSTRA , quanto la felicità de' Popoli , che anno la sorte di essere sotto il Vostro giusto e pio Dominio ; così essendovi pur troppo noto, che buona parte di quella ricavasi dalla Cultura dell' Animo , Io non dubito di vedere un dì presso di Noi inalzate le Scienze a segno tale , ove mai per l'addietro vedute si sono . Ma tanto più ho motivo di dover ciò sperare a riguardo delle Matematiche , per la ferma persuasione in cui siete , che da quelle dipendono , e gli eventi più felici nell' Operazioni della Guerra , e le Arti più necessarie all' uso della Vita Civile . Onde prostrato al Vostro Real Soglio , con
pre-

pregarvi dal Cielo ogni prospero avvenimento, mi dico con il più umile e profondo rispetto

Di V. M.

Il più fedele, ed ossequioso Suddito
Niccolò di Martino.

AL DISCRETO
LETTORE.

ual fine mi abbia spinto a dare alla luce per mezzo delle stampe questi nuovi Elementi della Geometria piana, bastantemente ò discreto Lettore potrai comprenderlo dall' uso, che debbo farne. Ma tuttocche essi siano stati da me composti per agevolare lo studio di questa scienza a Giovani Militari, non perciò dei darti a credere, che l' argomento non siasi trattato a fondo, e che non si sia osservato quel rigore, che la scienza stessa richiede. Non v' ha dubbio, che il costume d' insegnare la Geometria a coloro, che professano il nobil mestiere dell' Armi, si è di non distendersi molto nelle teorie, e di non essere nelle dimostrazioni così rigido, e scrupuloso. Ma poicche praticasi con essi loro tal metodo per la brevità del tempo, che vogliono impiegare a questo studio; ho creduto potergli compiacere, non già con dimezzare la scienza, e snervarla di quella forza, che ad essa è naturale, ma soltanto con dare altro aspetto alle cose medesime. Ed in vero non per altra ragione riesce alla Gioventù lungo e penoso lo studio de' primi sei libri di Euclide, che contengono gli Elementi della Geometria piana, se non se per la varietà delle materie, che si veggono in essi mescolate insieme, e per non comprenderfi così chiaramente l' attacco, che anno le proposizioni

zioni tra loro . Quindi ho stimato poterne facilitare l'intelligenza a chicchessia , con formare de' medesimi un sistema compiuto , e con ridurre la scienza ad alcuni capi generali , sotto cui andassero comprese le proposizioni attinenti allo stesso argomento : le quali perciò ho voluto più tosto ligare insieme con discorso continuato, che disgiungerle e dismembrarle colla vulgati titoli de' problemi , teoremi , lemmi , e corollarj . Ma ne pure dei darti a credere , che per venire a capo di un tal disegno , mi sia convenuto discostarmi molto dal metodo di Euclide ; anzi posso assicurarvi , che ritroverai in questi Elementi un Commentario perpetuo de' suoi medesimi libri . In effetto Io incomincio dalle teorie più semplici della Geometria piana , e siccome per esse intendo quelle stesse , che si contengono ne' primi quattro libri di Euclide ; così in primo luogo tratto della teoria delle linee , in secondo luogo della teoria de' triangoli e parallelogrammi , in terzo luogo della teoria de' quadrati e rettangoli , in quarto luogo della teoria del cerchio , ed in quinto luogo della teoria delle figure regolari . Passo di poi alle teorie più composte della medesima scienza , le quali sono l'argomento del quinto , e sesto libro di Euclide ; e dopo aver spiegata in generale la dottrina delle proporzioni , fo l'applicazione di essa primieramente alle linee rette , indi alle figure rettilinee , e finalmente al cerchio medesimo . Egli è vero , che la serie delle proposizioni vedesi tal volta cambiata ; ma siccome mi è convenuto far ciò , per unire insieme le proposizioni , che collimano ad un'istesso scopo, così ho posto tutto lo studio di ritenerne le dimo-
stra-

strazioni per quanto fosse possibile ; onde si è ,
che almeno per questo verso ravviserai Euclide in
questi nuovi Elementi . Specialmente per quanto
tocca alle proposizioni del primo suo libro , non
solo si è dato ad esse altro ordine , ma molte del-
le medesime si sono enunciate ancora diversamente ;
e ciò perche la teoria delle linee andasse dis-
giunta da quella de' triangoli , e parallelogram-
mi , con cui da Euclide era stata accoppiata ;
e per questo stesso motivo eziandio in alcuna del-
le loro dimostrazioni si è fatta qualche mutazio-
ne , e si è ricavata dalla nozione stessa della li-
nea retta la vulgata proprietà del triangolo , che
due lati uniti insieme siano sempre maggiori del
terzo . Il più notevole cambiamento però vedesi
nella dottrina delle proporzioni , perciocche ho
voluto più tosto dedurla dalle vere nozioni della
ragione , e della proporzione , che ricorrere al-
la proprietà degli egualmente moltiplici , di cui
Euclide si avvale ; e quantunque questo medesi-
mo sia stato tentato ancora da altri , nientedime-
no il metodo , che io ho tenuto nello stabilimento
di una tal dottrina , è affatto singolare . Delri-
manente in questi nuovi Elementi non solo non si
è tralasciata alcuna delle proposizioni di Euclide,
ma se ne incontrano molte altre egualmente uti-
li , e necessarie ; onde si è , che la teoria delle
figure regolari , e la dottrina delle proporzioni
applicata alle figure rettilinee , ed al cerchio me-
desimo , veggonsi notabilmente aumentate . Ma
ciò , che io stimo dover rendere grata al pubblico
questa mia fatica , si è l'ultimo capitolo , in cui
io spiego il metodo , che dee tenersi per risolve-
re i problemi attinenti alla Geometria piana ;
poic-

poicche poco , o niente dee crederfi taluno avanzato in questa scienza , quando non sia egli capace di risolvere da per se stesso un problema geometrico , che venga ad esso proposto . Fd̄ ivi adunque vedere , che i problemi piani debbono essere divisi in due generi ; e per quanto ai primi , dimostro , che essi si risolvono , o con ritrovarsi una retta , che sia in data ragione con un' altra data , o pure con ritrovarsene due , che siano tra loro in data ragione , e delle quali ne sia data o la somma , o la differenza . Per quanto poi alli secondi , riduco la loro risoluzione , ò alla ricerca di una retta , che sia mezza proporzionale tra due rette date , o pure alla ricerca di due rette , che uguagliando colla loro somma , o colla loro differenza una data retta siano reciproche con due altre date . Ma non contento di ciò , ho voluto ancora ispiegare a fondo l'artificio , che impiegano i Geometri nella risoluzione de' loro problemi ; e perciò doppo aver data un' idea de' luoghi geometrici , minutamente e con varj esempi ho posto in chiaro , come si risolvono i problemi per mezzo di essi . Eccoti in breve esposto , o benigno Lettore , il metodo da me tenuto nella composizione di questi nuovi Elementi della Geometria piana , e nel mentre che Io mi accingo a darti altri consimili della Geometria solida , procura dal canto tuo raccogliere tutto il frutto , che Io ti desidero , dalla lettura di essi , e vivi felice .

ELE-

ELEMENTI DELLA GEOMETRIA PIANA

INTRODUZIONE.



1. Come le scienze, le quali hanno per oggetto le varie specie della quantità, tutte generalmente si appellano Matematiche; così quella fra loro, che contempla l'estensione del corpo, ovvero la quantità estesa in lunghezza, larghezza, e profondità, specialmente si chiama Geometria: qual denominazione è derivata dal primo uso, che fecero di essa gli Egizzi in misurare l'estensione de' loro campi, i cui limiti erano rimossi da loro siti colla inondazione del fiume Nilo.

2. Le tre dimensioni della quantità estesa di lor natura vanno sempre congiunte insieme, nè mai è possibile di rinvenirle discompagnate, l'una dall'altre. Ma niente proibisce di considerarle ancora separatamente, e distinguere tre specie di quella tal quantità: cioè la linea, che abbia una sola dimensione; la superficie, che ne abbia due; ed il corpo ovvero solido, che tutte tre unitamente le racchiuda.

3. La dimensione della linea si appella sempre lunghezza; e delle due della superficie una dicesi lunghezza, e l'altra larghezza. Quindi il nome di profondità è impiegato solamente a designare una delle tre dimensioni del corpo; e perciò la nozione della linea vien riposta comunemente.

A

te.

2 ELEMENTI DELLA

te in avere sola lunghezza ; quella della superficie in aver lunghezza , e larghezza ; ed in fine quella del corpo in aver lunghezza , larghezza , e profondità .

4. Conforme con considerare separatamente le dimensioni della quantità estesa , oltre al corpo abbiamo la linea , e la superficie ; così con togliere dalla linea le parti di mezzo , e contemplarne i soli termini , avremo finalmente i punti : li quali perciò sono riguardati come segni della quantità estesa privi di ogni dimensione , e capaci semplicemente di sito , ovvero posizione .

5. Ma siccome i punti sono i termini della linea , così non dee porsi in dubbio , che le linee siano i termini della superficie , e le superficie i termini del corpo . Quindi la nozione generale del termine geometrico si è di avere una dimensione meno della quantità terminata ; e perciò il corpo non potrà mai fare le veci di termine , per non poterli concepire quantità estesa , che abbia più di tre dimensioni .

6. Essendo il punto privo di ogni dimensione , egli è chiaro , che col di lui moto debba nascere la linea . Ma chiara cosa ancora si è , che col moto laterale della linea debba prodursi la superficie , e col moto laterale della superficie debba generarsi il corpo . Onde si potrà riguardare il punto come principio , ed origine di tutte tre le spezie della quantità estesa .

7. Intanto nè i punti debbono averli come parti della linea , nè le linee come parti della superficie , nè le superficie come parti del corpo . Imperocchè è proprio della parte di essere della stessa indole col tutto , a cui si rapporta ; e perciò parti della linea saranno altre linee più picciole , parti della superficie saranno altre superficie di minor ampiezza , e parti finalmente del corpo saranno altri corpi di mole minore .

8. Per le tre spezie della quantità estesa sembra doverli dividere la Geometria in tre parti ; ed in una ragionare delle linee , nell'altra delle
super-

GEOMETRIA PIANA.

superficie, e nella terza de'corpi. Ma egli è difficile di osservare con esattezza un tal ordine per la ragione, che di molte superficie non puo trattarsi agiatamente, senza l'anticipata conoscenza de'corpi, a' quali come termini si rapportano.

9. Quindi il metodo più confacente per insegnare questa scienza si è di dividerla in piana, e solida: intendendo per piana quella parte di essa, in cui si tratta di tutto ciò, che puo concepirsi, senz'aver presente solido alcuno; ed al contrario per solida l'altra parte della medesima, in cui si ragiona così de'solidi, come di ogn'altra cosa, che presuppone la loro esistenza.

10. Tratteremo adunque in primo luogo della Geometria piana, come quella, che non solo è più semplice, ma dee ancora servirci di guida per la solida, che è più composta. E poicche così l'una, come l'altra si appoggia ad alcuni principj ovvero assiomi, i quali comuni sono a tutte le specie della quantità; non sarà mal fatto di enumerarli qui brevemente, per averli presenti, quante volte bisogna di quelli far uso.

11. Il primo dunque si è, che le quantità eguali ad una terza, debbano esser eguali ancora tra loro. E da questo si deduce, che eguali parimente esser debbano, così le quantità, che sono duple, triplé, o quadruple di una terza; come le altre, che sono la metà, la terza parte, o la quarta parte di una stessa quantità.

12. Il secondo si è, che se di due quantità eguali una sia maggiore o minore di una terza, l'altra debba esser di quella stessa ancora maggiore o minore. E quindi si deducono due cose. I, che se di due quantità disuguali la minore sia maggiore di una terza, l'altra tanto più ne debba essere maggiore. E II, che se di due quantità disuguali la maggiore sia minore di una terza, l'altra tanto più ne debba essere minore.

13. Il terzo si è, che le quantità eguali coll'aggiunta, o detrazione di altre similmente eguali conservino la loro uguaglianza. Dal che con ogni

4 ELEMENTI DELLA

chiarezza può dedursi, che le quantità disuguali con aumentarsi, o minorarsi di altre eguali, debbano rimanere disuguali come prima: cioè maggiore quella, che era maggiore; e minore quella, che era minore.

14. Il quarto, ed ultimo si è, che ogni quantità divisa in due, o più parti debba essere eguale a tutte quelle parti unite insieme. E da ciò con evidenza si deduce, che la stessa quantità debba essere maggiore di ciascuna delle sue parti. E poicché quella tale quantità per rapporto alle sue parti chiamasi tutto, perciò si stabilisce comunemente come cosa indubitata, che il tutto sia maggiore della parte.

15. A questi quattro assiomi aggiungeremo il quinto, il quale però è comune alle sole tre spezie della quantità estesa; e si è, che quelle quantità, le quali possono talmente adattarsi tra loro, che l'una si combaci coll'altra, sieno tra esse eguali. Ma non perciò sarà sempre vero il converso, cioè che le quantità eguali debbano combaciarsi tra loro, quantevolte insieme si adattano.

L I B R O I.

Delle Teorie più semplici della Geometria piana.

16. **P**ER bene intendere qual sia propriamente l'oggetto della Geometria piana, conviene prima sapere, che la linea può essere di due spezie, cioè retta, e curva. Si appella linea retta quella, che giace egualmente tra i suoi punti. Per lo contrario dicesi linea curva quella, che piegando verso un qualche lato non serba egual posizione tra i punti, che la terminano.

17. Una simil divisione dee farsi ancora della superficie. Imperocché, o ella è tale, che giacendo egualmente tra i suoi termini concede per tutta la sua ampiezza posizione alla linea retta, e
chia-

GEOMETRIA PIANA. §

chiamasi superficie piana; o per lo contrario piegando verso un qualche lato non permette di potervisi da per tutto adattare la linea retta, e si appella superficie curva.

18. Or le superficie piane, quantevolte da per tutto si ritrovano terminate da linee, figure piane specialmente si appellano. Ed intorno a queste tali figure si aggira propriamente la Geometria piana, considerando quelle tra esse, che più spesso vengono in uso, e ponendo a calcolo così le linee, che le terminano, come ogn'altra cosa, che alle medesime si appartiene.

CAPITOLO I.

Della Teoria delle linee.

19. **P**ER agevolarci il cammino alla considerazione delle figure piane, premetteremo la teoria delle linee, che sono i termini di tali figure. E poicché tra le infinite spezie, che possono darsi della linea curva, noi dobbiamo limitarci in questi Elementi a quella sola, per cui si termina il cerchio; perciò prima di ogn'altra cosa è necessario dare una nozione ben chiara, così della linea retta, come della linea circolare.

§. I.

Della nozione della linea retta.

20. **L**A linea retta, secondo la definizione data di sopra (16), è quella, che giace egualmente tra i punti, che la terminano. Quindi non si dura fatica in comprendere, che ella debba essere la più corta di tutte le linee, che anno i medesimi termini; ed in conseguenza che da un punto ad un'altro non possa tirarsi, se non se una sola linea retta.

21. Dipende adunque la posizione della retta da due soli punti; e perciò quantevolte questi so-

no dati, dee stimarsi data ancora la retta, che gli unisce insieme. Il problema intanto di tirare la retta da un punto ad un'altro, dee concedersi come cosa facile ad eseguirsi; siccome nè pure dee negarsi l'altro di prolungare ad arbitrio una retta data.

22. Dipendendo la posizione della retta da due soli punti, egli è chiaro, che due rette, le quali anno due punti comuni, debbano formare una retta continuata. E quindi avviene, che nè l'interseguimento di due rette possa farsi in più di un punto, nè una superficie piana possa terminarsi da due sole rette.

23. Additando poscia la retta il più corto cammino, che possa farsi da un punto ad un'altro, chiara cosa ancora si è, che la distanza di due punti debba misurarsi per la retta, che gli unisce insieme. Onde il problema di definire la distanza di due dati punti non ad altro si riduce, se non se a determinare la lunghezza della retta, che congiunge l'uno coll'altro.

Fig. 1. 24. Ma dall'esser la retta la più corta di tutte le linee, che anno i medesimi termini, si raccoglie altresì, che se da un'istesso punto, come A, partono due rette AB, AC, che non sieno a dirittura, queste insieme debbano essere maggiori della terza BC, che unisce gli altri loro termini. Imperocchè siccome la BC è una retta tirata dal punto B al punto C, così la BAC composta dalle due AB, AC dee averfi come un'altra linea menata tra i medesimi punti. Onde dovendo esser la prima più corta della seconda, per necessità le due AB, AC insieme faranno maggiori della sola BC.

Fig. 2. 25. E quindi ora con facilità possono dimostrarsi due teoremi. Il primo si è, che se preso tra le rette AB, AC un'altro punto D, congiungansi l'altre due BD, CD, ancora di queste insieme debbano essere maggiori le due AB, AC. Imperocchè, prolungata la BD per sino al punto E, faranno le due AB, AE maggiori della sola BE

GEOMETRIA PIANA. 7

BE (24). Onde, apposta la comune CE, faranno le due AB, AC maggiori ancora delle due BE, CE (13). Ma della stessa maniera si dimostra, che le due BE, CE sieno maggiori delle due BD, CD. Dunque le prime due AB, AC faranno molto più maggiori dell'altre due BD, CD (12).

26. Il secondo si è, che se da due punti, come A, e B, tirate le due rette AC, BC, che convengano tra loro nel punto C, se ne vogliano tirare verso la stessa parte due altre eguali alle prime, ciascuna a ciascuna, queste debbano convenire insieme nel medesimo punto C. Se è possibile, tirisi la AD eguale alla AC, e la BD eguale alla BC, e convengano tra loro nel punto D. E poicchè le due AE, CE insieme sono maggiori della sola AC, o pure della sua eguale AD (24); tolta la comune AE, sarà la CE maggiore ancora della DE (13); ed apposta l'altra comune BE, sarà la BC, o pure la sua eguale BD maggiore similmente delle due BE, DE. Ma questo è falso, per essere le due BE, DE maggiori della sola BD (24). Dunque l'incontro delle rette AD, BD dee farsi nel medesimo punto C.

Fig. 3.

§. II.

Della nozione della linea circolare.

27. **C**onforme la nozione della linea retta si è di avere tutti i punti egualmente situati tra i suoi termini; così quella della linea circolare consiste in avere tutti i punti egualmente distanti da un punto dato, che si appella suo centro. Onde perche la distanza di due punti dee misurarsi per la retta, che gli unisce insieme (23); sarà proprio della linea circolare di esser eguali tutte le rette, che dal centro ad essa si tirano.

28. Si genera la linea circolare colla rivoluzione di una retta, fatta intorno ad uno de' suoi termini fisso, ed immobile fino a che ritorni al suo primo luogo. Imperocche la curva

8 ELEMENTI DELLA

segnata sul piano coll'altro termine mobile avrà tutti i suoi punti egualmente distanti da quello, che rimane stabile; ed in conseguenza farà la linea circolare (27). Intanto la descrizione di questa linea dee accordarsi come cosa facile ad eseguirsi; e perciò, quando il bisogno lo richiede, la descriveremo liberamente con qualsivoglia centro, e qualsivoglia intervallo.

Fig. 4.

29. E quindi ora in primo luogo, dati due punti, come A, e B, potremo ritrovarne un terzo tanto distante da ciascuno di quelli, quanto i medesimi distano tra loro. Descrivansi due linee circolari, una col centro A e l'intervallo AB, l'altra col centro B e l'intervallo BA; ed il loro interseguimento ne darà il terzo punto C, che si dimanda. Imperocchè, congiunte le rette AB, AC, BC, farà per la nozione della linea circolare ciascuna delle due AC, BC eguale alla AB (27); e perciò il punto C farà tanto distante da ciascuno delli due A, e B, quanto questi distano tra loro.

Fig. 5.

30. In secondo luogo ad un dato punto, come A, potremo adattare una retta, che sia eguale all'altra data BC. Ritrovifi il punto D tanto distante dalli due A, e B, quanto questi distano tra loro (29). Indi col centro B, e l'intervallo BC descrivasi la linea circolare CE, che s'interseghi colla retta DB prolungata nel punto E. Finalmente col centro D, e l'intervallo DE descrivasi l'altra linea circolare EF, che s'interseghi coll'altra retta DA similmente prolungata nel punto F; e farà AF la retta, che si dimanda. Imperocchè, essendo eguali tra loro, così le due DF, DE, come le altre due DA, DB; farà ancora la rimanente AF eguale alla rimanente BE (13). Ma la BE è eguale alla BC. Dunque similmente le due AF, BC faranno tra loro eguali (11).

Fig. 6.

31. In terzo luogo, date due rette disuguali AB, CD, potremo dalla maggiore di esse AB tagliare una porzione eguale all'altra minore CD.

Adat-

GEOMETRIA PIANA.

Adattisi al punto A la retta AE eguale alla CD (30); e descritta col centro A , e l'intervallo AE la linea circolare EF , che s'intersegherà colla AB nel punto F , sarà AF la porzione, che si dimanda. Imperocchè per la nozione della linea circolare (27) le due AF , AE sono eguali tra loro. Ma per la costruzione la retta AE è eguale alla retta CD . Dunque ancora le due AF , CD faranno tra loro eguali (11).

32. Finalmente, dati due punti, come A , e B , potremo ritrovarne un terzo distante da quelli per dati intervalli. Dalla retta AB prolungata tagliasi, così la porzione AC eguale all'intervallo dal punto A , come la porzione BD eguale all'intervallo dal punto B (31). Descrivansi poscia due linee circolari, una col centro A e l'intervallo AC , l'altra col centro B e l'intervallo BD ; ed il loro interseguimento ne darà il terzo punto E , che si dimanda. Imperocchè, congiunte le rette AE , BE , faranno per la nozione della linea circolare eguali tra loro, così le due AC , AE , come le due BD , BE (27). Ma per la costruzione le due AC , BD sono eguali agli intervalli dati. Dunque alli medesimi intervalli faranno eguali ancora l'altre due AE , BE (11). Fig. 7.

33. Quantevolte il terzo punto E non dee stare a dirittura cogli altri due A , e B , egli è chiaro (24), che per essere il problema solubile, debbano le tre rette AB , AC , BD esser di tal lunghezza, che due di esse unite insieme sieno sempre maggiori della terza. Ma chiara cosa ancora si è, che il medesimo problema sia molto più generale del primo, e che lo racchiuda sotto di se, come caso speciale; conforme in effetto dalla di lui soluzione si raccoglie la soluzione di quello, supponendo, che ciascuna delle due AC , BD sia eguale alla retta AB , che unisce insieme i punti dati A , e B .

§. III.

§. III.

Degli angoli formati colle rette, che s'incontrano :

34. **D**ue rette, che sopra un piano s'incontrano, senza che l'una sia a dirittura coll'altra, per necessità debbono essere tra loro inclinate. Questa scambievole loro inclinazione chiamasi angolo: il quale perciò dee stimarsi maggiore, o minore, non già per la maggiore, o minore lunghezza delle rette, che lo contengono; ma bensì per la loro apertura maggiore, o minore.

35. Egli è vero, che può formarsi l'angolo, non solo da due rette, ma da due curve ancora, e talvolta da due linee, delle quali una sia retta, e l'altra curva; come in effetto dividesi l'angolo in rettilineo, curvilineo, e mistilineo. Ma dovendo noi in questi Elementi trattare del solo rettilineo, impiegheremo la voce di angolo a disegnare semplicemente quello, che è formato da linee rette.

36. Lati di un'angolo si appellano le rette stesse, che lo contengono; e siccome dicesi vertice il punto, in cui i lati s'incontrano, così sarà dato il nome di base a quell'altra retta, che unisce gli altri termini di detti lati. Così, per rapporto all'angolo BAC, si chiameranno lati le due rette AB, AC, che comprendono dett'angolo, vertice il punto A, e base la retta BC, che congiunge insieme gli altri termini de'due lati.

37. Quantevolte i lati di un'angolo sono eguali alli lati di un'altro, ciascuno a ciascuno, si potrà così per mezzo delle basi giudicare dell'uguaglianza degli angoli, come al contrario per mezzo degli angoli giudicare dell'uguaglianza delle basi. Per dimostrarlo, sieno i due angoli BAC, EDF, i quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, ed il lato AC eguale al lato DF.

38. Pongasi primieramente, che l'angolo BAC
sia

GEOMETRIA PIANA. 11

sia eguale all'angolo EDF. Io dico, che ancora la base BC sarà eguale alla base EF. Imperocche, adattando col pensiero l'angolo BAC talmente sopra l'altro EDF, che il punto A cada sul punto D, ed il lato AB sul lato DE; per l'uguaglianza degli angoli caderà ancora il lato AC sul lato DF. Onde, essendo i lati AB, AC eguali alli lati DE, DF, ciascuno a ciascuno; caderanno altresì i due punti B, e C sopra i due punti E, ed F; e pertanto, combaciandosi le due basi BC, EF, saranno le medesime tra loro eguali (15).

39. Pongasi in secondo luogo, che la base BC sia eguale alla base EF. Io dico, che ancora l'angolo BAC sarà eguale all'angolo EDF. Imperocche, adattando col pensiero l'angolo BAC talmente sopra l'altro EDF, che il punto B cada sul punto E, e la base BC sulla base EF; per l'uguaglianza di dette basi caderà ancora il punto C sul punto F. Onde, essendo i lati AB, AC eguali alli lati DE, DF, ciascuno a ciascuno; caderà altresì il punto A sul punto D (26); e pertanto, combaciandosi i due angoli BAC, EDF, i medesimi saranno tra loro eguali (15).

40. E quindi, dato l'angolo BAC, e data la retta DE col punto in essa D, potremo a questo punto colla data retta formare un'altro angolo, che sia eguale al dato BAC. Tirisi nell'angolo BAC la base BC; e tagliata la porzione DE eguale al lato AB (31), ritrovisi il punto F distante dalli due D, ed E per intervalli eguali alle rette AC, BC (32). Congiungansi finalmente le due DF, EF; e sarà EDF l'angolo, che si dimanda. Imperocche, essendo non solo i due lati AB, AC eguali alli due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base BC eguale alla base EF; per necessità i due angoli BAC, EDF saranno tra loro eguali (39).

41. Potremo ancora, dato un'angolo, come BAC, dividerlo in due parti eguali. Prendasi nel lato AB un punto ad arbitrio B; e tagliata dall'altro lato la porzione AC eguale alla AB (31),
 Fig. 10.

ritro-

ritrovifi il punto D così distante dalli due B , e C , come questi distano tra loro (29). Congiungafi finalmente la retta AD , e questa dividerà l'angolo dato in due parti eguali. Imperocchè, tirate l'altre due BD , CD , faranno non solo i due lati AB , AD eguali alli due lati AC , AD , ciascuno a ciascuno, ma ancora la base BD eguale alla base CD . Onde per necessità i due angoli BAD , CAD faranno tra loro eguali (39).

Fig. 11. 42. Potremo finalmente, data una retta, come AB , dividerla in due parti eguali. Ritrovifi il punto C così distante dalli due A , e B , come questi distano tra loro (29); e congiungansi le rette CA , CB . Dividasi poscia l'angolo ACB in due parti eguali per la retta CD (41); e questa retta dividerà ancora la data AB egualmente nel punto D . Imperocchè, siccome i due angoli ACD , BCD sono tra loro eguali, così anno i due lati CA , CD eguali alli due lati CB , CD , ciascuno a ciascuno. Onde, dovendo ancora avere la base AD eguale alla base BD (38), farà la retta AB divisa in due parti eguali nel punto D .

Fig. 12. 43. Ma essendo i due lati di un'angolo eguali alli due lati dell'altro, ciascuno a ciascuno, si potrà parimente così per mezzo delle basi giudicare della disuguaglianza degli angoli, come per mezzo degli angoli giudicare della disuguaglianza delle basi. Per dimostrarlo, sieno di nuovo i due angoli BAC , EDF , li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE , ed il lato AC eguale al lato DF .

44. Pongafi primieramente, che l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF . Io dico, che ancora la base BC farà maggiore della base EF . Formisi l'angolo EDG eguale all'angolo BAC (40); e tagliata la porzione DG eguale alla DF , ovvero AC (31), congiungafi la retta EG , che s'incontri colla DF nel punto H . E poicche le due DH , HG sono maggiori della sola DG , o pure della sua eguale DF (24); tolta la comune DH , ed apposta in vece di essa l'altra EH , farà la EG mag-

GEOMETRIA PIANA. 17

maggiore ancora delle due EH, HF (13), ed in conseguenza molto più maggiore della sola EF (12). Ma per l'uguaglianza degli angoli EDG, BAC la EG è eguale alla BC (38). Dunque ancora la BC farà maggiore della EF (12).

45. Pongasi in secondo luogo, che la base BC sia maggiore della base EF. Io dico, che ancora l'angolo BAC farà maggiore dell'angolo EDF. Imperocchè, se fosse altramente, dovrebbe l'angolo BAC essere, o eguale all'angolo EDF, o minore di quello. Ma nè l'uno, nè l'altro può aver luogo; poicché nel primo caso sarebbe la base BC eguale alla base EF (38); e nel secondo sarebbe la base BC minore della base EF (44), quali cose sono contro l'ipotesi. Dunque, supposta la base BC maggiore della base EF, per necessità l'angolo BAC dee essere ancora maggiore dell'angolo EDF.

§. IV.

Della perpendicolare, e dell'obliqua; e degli angoli, che formano.

46. **L'**Incontro di due rette può farsi in due maniere, cioè perpendicolarmente, ed obliquamente. Dicesi una retta incontrarsi perpendicolarmente con un'altra retta, quando forma con quella angoli dall'una, e l'altra parte eguali. Per lo contrario si dice incontrarsi obliquamente, quando i medesimi angoli formati da ambedue le parti sono tra loro disuguali.

47. Ciascuno degli angoli eguali formati dalla perpendicolare chiamasi retto; all'incontro delli due disuguali formati dall'obliqua il maggiore si appella ottuso, ed il minore acuto. Onde retto farà quello, che ne ha un'altro eguale dall'altra parte; ottuso quello, che ne ha un'altro minore; ed acuto finalmente quello, che ne ha un'altro maggiore.

48. Essendo la posizione della perpendicolare
fem-

sempre la stessa, egli è chiaro, che tutti gli angoli retti debbano essere tra loro eguali; ma non è così degli ottusi, e degli acuti per la ragione che la posizione dell' obliqua può variare all' infinito. Intanto ogni ottuso sarà sempre maggiore del retto; e per lo contrario ogni acuto sarà sempre minore del retto.

Fig. 13. 49. Sia ora la retta AB , e debbasi dal punto C assegnato in essa alzare sulla medesima una perpendicolare. Fatte eguali le due CA , CB (31), ritrovisi il punto D così distante dalli due A , e B , come questi distano tra loro (29). Congiungasi la retta CD ; ed io dico, che questa sia la perpendicolare, che si dimanda. La ragione è chiara. Poicche, essendo non solo i due lati CA , CD eguali alli due lati CB , CD , ciascuno a ciascuno, ma ancora la base AD eguale alla base BD ; per necessità i due angoli ACD , BCD , formati per la CD dall'una, e l'altra parte dovranno essere tra loro eguali (39); e pertanto la retta CD farà perpendicolare sull'altra AB (46).

Fig. 14. 50. Che se poi sulla retta AB debbasi abbassare la perpendicolare dal punto C dato fuori di essa; prendasi dall'altra parte della retta AB un punto D ad arbitrio; e descritta col centro C , e l'intervallo CD la linea circolare DAB , che seghi la stessa AB nelli punti A , e B , dividasi la porzione AB egualmente nel punto E (42); congiungasi finalmente la retta CE , ed io dico, che questa sia la perpendicolare, che si dimanda. Poicche i due angoli AEC , BEC debbono essere similmente eguali tra loro, per avere non solo i due lati AE , CE eguali alli due lati BE , CE , ciascuno a ciascuno, ma eguali ancora le basi CA , CB , come rette tirate dal centro alla linea circolare.

51. Del rimanente, siccome una retta, quando s'incontra perpendicolarmente con un'altra retta, forma con quella dall'una, e l'altra parte angoli retti; così, incontrandola obliquamente, dee formarli tali, che uniti insieme sieno eguali a due retti. Per dimostrarlo, sia AB la retta, che in-

con-

contra obliquamente nel punto B l'altra CD; ed alzata su questa la perpendicolare BE (49), egli è chiaro, che di quanto l'ottuso ABC eccede il retto EBC, per altrettanto l'acuto ABD manca dal retto EBD. Onde i due angoli ABC, ABD formati dall'obliqua saranno insieme eguali alli due retti EBC, EBD.

52. E quindi si deduce in primo luogo, che se dal punto B termine della retta AB si tirino a parti contrarie l'altre due BC, BD, che facciano colla prima gli angoli ABC, ABD eguali a due retti; quest'altre due debbano formare una retta continuata. Imperocche, se mai la BC giacesse a dirittura con un'altra, come BE, dovrebbero essere eguali a due retti i due angoli ABC, ABE (51), con che sarebbero i due ABC, ABD eguali agli altri due ABC, ABE; e tolto il comune ABC, rimarrebbe l'angolo ABD eguale all'angolo ABE, cioè il tutto eguale alla parte, il che non può essere (14). Fig. 16.

53. Si deduce in secondo luogo, che se le due rette AB, CD s'interseghino tra loro nel punto E, debbano essere eguali, così i due angoli verticali AEC, BED, come gli altri due AED, BEC. Imperocche, essendo eguali a due retti, tanto i due angoli AEC, AED, quanto i due BED, AED (51); saranno i primi due AEC, AED eguali agli altri due BED, AED (11); e pertanto tolto il comune AED, rimarrà l'angolo AEC eguale all'angolo BED. E così ancora, essendo eguali a due retti, tanto i due AED, AEC, quanto i due BEC, AEC; saranno quelli eguali a questi; ed in conseguenza, tolto il comune AEC, rimarrà l'angolo AED eguale all'angolo BEC. Fig. 17.

54. Si deduce finalmente, che se da un punto E della retta AB tirinsi a parti contrarie l'altre due EC, ED, le quali formino colla prima gli angoli verticali AEC, BED eguali tra loro; quest'altre due debbano essere una retta continuata. Imperocche, essendo l'angolo AEC eguale all'angolo Fig. 17.
lo

lo BED , coll'aggiunta del comune BEC saranno ancora i due AEC , BEC eguali agli altri due BED , BEC (13). Ma i primi due AEC , BEC sono eguali a due retti (51). Dunque saranno eguali parimente a due retti gli altri due BED , BEC ; e pertanto le due EC , ED staranno tra loro a dirittura (52).

§. V.

Delle rette parallele, ovvero equidistanti.

55. **A**lle rette, che s'incontrano, e formano angoli, si oppongono quelle, che chiamansi parallele, ovvero equidistanti, per essere talmente situate sopra un medesimo piano, che prolungate all'infinito dall'una, e l'altra parte non mai tra loro s'incontrano. E si è dato a quest'altre rette il nome di parallele, ovvero equidistanti; poicche, secondo sarà dimostrato da qui a poco, serbano tra loro sempre la medesima distanza.

Fig. 18. 56. La teoria delle rette parallele dipende da questo teorema, cioè, che se di un'angolo qualsivoglia, come BAC , si prolunghi la base BC a dirittura verso D , si formerà l'angolo esteriore ACD maggiore dell'angolo BAC . Per dimostrarlo, dividasi il lato AC in due parti eguali nel punto E (42); indi prolungata la retta BE verso F , e tagliata la porzione EF eguale alla BE (31), si congiunga la retta CF . E poicche l'angolo AEB è eguale all'angolo CEF (53), ed i medesimi anno i due lati AE , BE eguali alli due lati CE , EF , ciascuno a ciascuno; sarà la base AB eguale ancora alla base CF (38). Quindi saranno eguali parimente i due angoli ECF , BAE (39); e pertanto l'angolo ACD , come maggiore dell'angolo ECF , sarà maggiore ancora dell'angolo BAE (12).

Fig. 19. 57. Premesso questo teorema, non sarà ora cosa difficile, il dimostrare la teoria delle parallele. Ed in primo luogo due rette, come AB , CD , saranno parallele tra loro, se tirata su di esse la

ter-

terza EF sieno eguali gli angoli alterni AEF, EFD. Se è possibile, vadasi la retta CD prolungata ad incontrare coll'altra AB nel punto G. E poicche dell'angolo EFG la base GE sta prolungata verso A; sarà l'angolo AEF maggiore dell'angolo EFG (56). Ma questi due angoli per ipotesi sono tra loro eguali. Dunque non è egli vero, che le due rette AB, CD prolungate s'incontrano; e perciò saranno parallele (55).

58. In secondo luogo le stesse rette AB, CD faranno tra loro parallele, se tirata su di esse la terza EFG sia l'angolo esteriore CFG eguale all'interiore, ed opposto AEF. Imperocchè, intersegandosi tra loro nel punto F le due rette CD, EG, dee essere l'angolo CFG eguale all'angolo EFD (53). Ma per ipotesi l'angolo CFG è eguale all'angolo AEF. Dunque ancora i due angoli AEF, EFD faranno tra loro eguali (11); i quali, essendo alterni, faranno, che le rette AB, CD sieno parallele (57). Fig. 20.

59. Finalmente le medesime rette AB, CD faranno tra loro parallele, se tirata su di esse la terza EF sieno insieme eguali a due retti i due angoli interiori BEF, EFD situati alla medesima parte. Imperocchè per la retta EF, che s'incontra coll'altra AB, i due angoli BEF, AEF debbono essere insieme eguali a due retti (51). Ma per ipotesi sono eguali ancora a due retti i due angoli BEF, EFD. Dunque i primi due BEF, AEF faranno eguali agli altri due BEF, EFD (11); e pertanto, tolto il comune BEF, rimarrà l'angolo AEF eguale all'angolo EFD (13); i quali come alterni faranno, che le rette AB, CD sieno tra loro parallele (57). Fig. 20.

60. Or se si riflette, che la retta, la quale passa per un dato punto, in una sola posizione può essere parallela ad un'altra retta data; volentieri ci si accorderà, che sempre quando i due angoli interiori BEF, EFD insieme sono minori di due retti, le rette AB, CD debbano incontrarsi prolungate verso quella parte, in cui detti angoli si ritrovano.

B

trovano.

trovano. Ed ammesso questo principio, potremo facilmente dimostrare le converse delle tre proposizioni precedenti. Perciò sieno le due rette AB , CD parallele tra loro, e tirisi sopra di esse la terza EFG .

Fig. 20.

61. Io dico primieramente, che gli angoli alterni AEF , EFD debbano essere eguali. Se è possibile, sieno disuguali, e sia l'angolo AEF maggiore dell'angolo EFD . Dunque, apposto il comune BEF , saranno ancora i due AEF , BEF maggiori delli due BEF , EFD (13). Ma i primi due AEF , BEF sono eguali a due retti (51). Dunque gli altri due BEF , EFD saranno minori di due retti; e perciò le due rette AB , CD non saranno parallele tra loro (60), secondo è stato supposto.

62. Io dico in secondo luogo, che l'angolo esteriore CFG debba essere eguale all'interiore, ed opposto AEF . Imperocchè, intersegandosi tra loro nel punto F le due rette CD , EG , dee essere l'angolo CFG eguale all'angolo EFD (53). Ma l'angolo AEF è stato dimostrato eguale al medesimo angolo EFD (61). Dunque ancora l'angolo CFG sarà eguale all'angolo AEF (11).

63. Io dico finalmente, che i due angoli interiori BEF , EFD situati alla medesima parte debbano essere insieme eguali a due retti. Imperocchè, essendosi dimostrato l'angolo AEF eguale all'angolo EFD (61); coll'aggiunta del comune BEF saranno i due AEF , BEF eguali agli altri due BEF , EFD (13). Ma i primi due AEF , BEF sono eguali a due retti (51). Dunque eguali ancora a due retti saranno gli altri due BEF , EFD .

Fig. 21. 64. E quindi ora possiamo dimostrare un'altra proprietà delle rette parallele; e si è, che se le due AB , CD sono parallele alla terza EF , le medesime debbano essere parallele ancora tra loro. Tirisi sopra di esse l'altra retta GHI , che le seghi tutte tre nelli punti G , H , I . E poicché le due AB , EF sono parallele, sarà l'angolo AGH eguale all'angolo HIF (61). E similmente, essendo paral-

GEOMETRIA PIANA. 19

parallele le due CD , EF , farà l'angolo GHD eguale all'angolo HIF (62). Quindi eguali ancora faranno i due angoli AGH , GHD (11); i quali come alterni faranno, che le rette AB , CD sieno tra loro parallele (57).

65. Che se poi per un dato punto, come A , debbasi tirare una retta, che sia parallela all'altra data BC ; prendasi in questa BC un punto D ad arbitrio, e congiunta la retta AD facciasi l'angolo DAE eguale all'angolo ADC (40); prolunghisi poscia la retta EA verso F , e farà EF la parallela, che si dimanda: qual cosa è chiara; poicché siccome per la costruzione i due angoli DAE , ADC sono eguali, così per esser questi alterni le due rette EF , BC necessariamente debbono essere tra loro parallele (57). Fig. 22.

66. Del rimanente, che le rette parallele serbano tra loro sempre la medesima distanza, deducesi da questo teorema, cioè, che se AB , CD sono porzioni eguali di due rette parallele, le rette AC , BD , che le congiungono verso le medesime parti, debbano essere tra loro eguali. Per dimostrarlo, congiungasi la retta BC . E poicché le due AB , CD sono parallele, faranno i due angoli ABC , BCD tra loro eguali (61). Ed avendo questi angoli i due lati AB , BC eguali alli due lati CD , BC , ciascuno a ciascuno; avranno similmente la base AC eguale alla base BD (38). Fig. 23.

67. Ma egli è facile il dimostrare, che le medesime rette AC , BD , le quali congiungono le porzioni eguali AB , CD delle due parallele, debbano essere parallele ancora tra loro. Imperocchè, considerando i due angoli ACB , DBC , ritroveremo in questi non solo i due lati AC , BC eguali alli due lati BD , BC , ciascuno a ciascuno, ma altresì la base AB eguale alla base CD . Dunque farà l'angolo ACB eguale all'angolo DBC (39); i quali come alterni faranno, che le rette AC , BD sieno tra loro parallele (57).

B 2

CA-

Della Teoria de' triangoli, e de' parallelogrammi.

68. **P**Remessa la teoria delle linee, passeremo ora a quella delle figure piane, che sono il principale oggetto della Geometria piana. E siccome queste tali figure per ragion de' loro termini, che possono essere, o linee rette, o linee curve, o rette e curve mischiate insieme, si dividono generalmente in rettilinee, curvilinee, e mistilinee; così le rettilinee, riconoscendo per loro lati le rette, che le terminano, si distinguono specialmente in trilatero, quadrilatero, e multilatero. Incominceremo adunque dalle trilatero, chiamate ancora triangoli, sì per essere le più semplici, come altresì perche in esse si risolvono tutte l'altre figure rettilinee.

§. I.

Delle principali proprietà del triangolo.

69. **E**ssendo il triangolo una figura piana terminata da tre rette, che si appellano suoi lati; egli è chiaro, che se ABC sia una tale figura, due delli tre lati uniti insieme, come a cagion di esempio li due AB, AC, debbano essere sempre maggiori del rimanente BC (24). E se dalli termini B, e C di questo lato BC si tirino due altre rette BD, CD, che si vadano ad incontrare tra loro nel punto D, esistente dentro del triangolo; chiara cosa ancora si è, che gli stessi due lati AB, AC debbano essere maggiori similmente dell'altre due rette BD, CD (25).

Fig. 23.

70. Ma, tralasciate queste affezioni, che alla teoria delle rette propriamente si appartengono, stabiliremo per prima proprietà del triangolo, che l'angolo esteriore, formato col prolungamento di uno de' suoi lati, sia eguale alli due interiori, ed opposti

GEOMETRIA PIANA. 21

posti uniti insieme. Perciò sia il triangolo ABC , e prolungato il lato BC verso D , tirisi per il punto C la retta CE parallela all'altro lato BA (65). E poicche le due BA , CE sono parallele, farà così l'angolo ACE eguale all'angolo BAC (61), come l'angolo ECD eguale all'angolo ABC (62); e pertanto tutto l'angolo esteriore ACD farà eguale alli due interiori, ed opposti BAC , ABC uniti insieme (13). Ed essendo così, l'istesso angolo esteriore farà maggiore di ciascuno delli due interiori, ed opposti.

Fig.24.

71. La seconda proprietà del triangolo si è, che tutti tre i suoi angoli uniti insieme sieno sempre eguali a due retti. Per dimostrarla, sia il triangolo ABC , e si distenda uno de' suoi lati BC a dirittura verso D . Sarà dunque l'angolo esteriore ACD eguale alli due interiori, ed opposti BAC , ABC uniti insieme (70); con che, apposto il comune ACB , faranno i due ACB , ACD eguali alli tre insieme ACB , BAC , ABC (13). Ma i due ACB , ACD sono eguali a due retti (51). Dunque eguali ancora a due retti faranno i tre angoli ACB , BAC , ABC . Ed essendo così, due angoli del triangolo insieme faranno sempre minori di due retti.

Fig.24.

72. La terza proprietà del triangolo si è, che a' lati eguali debbano essere opposti angoli similmente eguali. Perciò sia il triangolo ABC , in cui li lati AB , AC sieno tra loro eguali. Dividasi il terzo lato BC in due parti eguali nel punto D (42), e si congiunga la retta AD . I due angoli adunque ACD , ABD avranno li due lati AC , CD eguali alli due lati AB , BD , ciascuno a ciascuno. Ma anno ancora la base AD comune. Dunque farà l'angolo ACD eguale all'angolo ABD (39); e pertanto siccome sono eguali i lati AB , AC , così faranno eguali parimente gli angoli, che ad essi stanno opposti.

Fig.25.

73. La quarta proprietà del triangolo si è, che per lo contrario agli angoli eguali debbano essere opposti lati similmente eguali. Per intenderne la ragione,

B 3

gione,

Fig. 26.

gione, sia il triangolo ABC , in cui pongansi eguali tra loro i due angoli ACB , ABC . E se i lati opposti ad essi AB , AC non sono eguali, bisognerà, che uno di loro sia maggiore dell'altro. Sia adunque AB il lato maggiore, da cui tagliasi la porzione AD eguale all'altro minore AC (31), e congiungasi la retta CD . E poicche nel triangolo ADC i due lati AD , AC sono eguali; sarà l'angolo ACD eguale all'angolo ADC (72); con che l'angolo ACB , come maggiore dell'angolo ACD , sarà maggiore ancora dell'angolo ADC (12). Ma per lo triangolo BCD , il cui lato BD sta prolungato in A , l'angolo ADC è maggiore dell'angolo ABC (70). Dunque sarà l'angolo ACB molto più maggiore dell'angolo ABC (12); qual cosa essendo contro l'ipotesi, dobbiam conchiudere, che i due lati AB , AC sieno tra loro eguali.

Fig. 27.

74. La quinta proprietà del triangolo si è, che al lato maggiore dee esser opposto ancora l'angolo maggiore. Così nel triangolo ABC supposto, che il lato AB sia maggiore del lato AC , dovrà essere l'angolo ACB maggiore altresì dell'angolo ABC . Si ricava ciò dalla dimostrazione della proprietà precedente renduta positiva. Imperocchè, tagliata dal lato maggiore AB la porzione AD eguale all'altro minore AC (31), e congiunta la retta CD ; si avrà il triangolo ADC fornito di due lati eguali AD , AC . Dunque sarà l'angolo ACD eguale all'angolo ADC (72); ed in conseguenza l'angolo ACB , come maggiore dell'angolo ACD , sarà maggiore ancora dell'angolo ADC (12). Ma per lo triangolo BCD , il cui lato BD sta prolungato in A , l'angolo ADC è maggiore dell'angolo ABC (70). Dunque sarà l'angolo ACB molto più maggiore dell'angolo ABC (12).

Fig. 27.

75. La sesta, ed ultima proprietà del triangolo si è, che per lo contrario all'angolo maggiore dee esser opposto ancora il lato maggiore. Come nel triangolo ABC supposto, che l'angolo ACB sia maggiore dall'angolo ABC , dovrà essere il lato AB maggiore altresì del lato AC . Imperocchè se fosse

fosse altramente, dovrebbe il lato AB essere, o eguale al lato AC , o minore di quello. Ma nè l'uno, nè l'altro può aver luogo; poicche nel primo caso farebbe l'angolo ACB eguale all'angolo ABC (72), e nel secondo farebbe l'angolo ACB minore dell'angolo ABC (74), quali cose sono contro l'ipotesi. Dunque nella supposizione, che l'angolo ACB sia maggiore dell'angolo ABC , per necessità il lato AB dee essere ancora maggiore del lato AC .

76. A queste proprietà ne aggiungeremo un'altra, non così principale, come ciascuna di esse; e si è, che siccome i lati AB , AC sono maggiori delle rette BD , CD tirate dalli loro termini dentro del triangolo, così l'angolo BDC compreso da queste rette sia maggiore dell'angolo BAC contenuto da quelli lati. Per dimostrarlo, prolunghisi la retta BD per fino a che s'incontri col lato AC nel punto E . E poicche nel triangolo CDE il lato ED sta prolungato verso B , farà l'angolo BDC maggiore dell'angolo BEC (70). Ma per l'altro triangolo ABE , il cui lato AE sta prolungato verso C , l'angolo BEC è maggiore dell'angolo BAC . Dunque farà l'angolo BDC molto più maggiore dell'angolo BAC (12). Fig. 2

§. II.

Delle varie spezie del triangolo.

77. **I**L triangolo per rapporto alli lati si divide in equilatero, isoscele, e scaleno. Chiamasi triangolo equilatero quello, che ha tutti tre i lati eguali. Chiamasi triangolo isoscele quello, che ne ha due solamente eguali. E finalmente chiamasi triangolo scaleno quello, in cui tutti tre i lati sono disuguali. Ma per quanto all'isoscele, siccome si appella sua base il terzo lato disuguale, così può egli essere ancora di due spezie: cioè, o di forma tale, che abbia la base minore di ciascuno delli due lati eguali; o configurato

rato talmente, che per lo contrario abbia la base maggiore.

78. Or essendosi dimostrato, che a' lati eguali debbano essere opposti angoli ancora eguali (72), e che al lato maggiore debba opporsi angolo parimente maggiore (74); egli è facile ad intendersi, quali sieno le proprietà delli riferiti triangoli. In primo luogo l'equilatero, siccome ha tutti tre i lati eguali, così dee avere ancora tutti tre gli angoli eguali. In secondo luogo l'isoscele, conforme ha due lati solamente eguali, così dee avere i soli angoli sopra la base altresì eguali. E finalmente nel scaleno, per la disuguaglianza di tutti tre i lati, non solo debbono essere tutti tre gli angoli parimente disuguali, ma ancora al lato massimo dee essere opposto l'angolo massimo, al lato mezzano l'angolo mezzano, ed al lato minimo l'angolo minimo.

79. Le converse di queste proprietà similmente hanno luogo, per la ragione, che ad angoli eguali debbono essere opposti lati ancora eguali (73), e che ad angolo maggiore dee essere opposto lato eziandio maggiore (75). Sicche il triangolo, che ha tutti tre gli angoli eguali, dee essere equilatero; quello poi, che ha due angoli solamente eguali, dee essere isoscele, che avrà per base quel lato, sopra cui detti angoli si ritrovano; e quello finalmente, che ha tutti tre gli angoli disuguali, dee essere scaleno, in cui all'angolo massimo farà opposto il lato massimo, all'angolo mezzano il lato mezzano, e all'angolo minimo il lato minimo.

80. Se sopra una data retta, come AB, si voglia formare un triangolo equilatero; egli è chiaro, che riducesi il problema a determinare un terzo punto C, così distante dalli due A, e B, come questi distano tra loro. Onde, essendo stato dimostrato di sopra (29), come possa determinarsi tal punto, non dovrà esservi difficoltà in descrivere detto triangolo. Ma nè pure ve ne dee essere, se sopra la stessa retta AB debba formarsi un triangolo, di cui gli altri due lati sieno di qua-

Fig. 28.

Fig. 29.

30. 31.

qualunque altra data lunghezza, ed in conseguenza o isoscele, o scaleno; poicche riducesi quest'altro problema a determinare un terzo punto C distante dalli due A, e B per intervalli eguali alle rette, le quali dinotano le lunghezze degli altri due lati; il che similmente è stato dimostrato di sopra (32) come debba eseguirsi.

81. Il triangolo si divide ancora per rapporto agli angoli in rettangolo, ottusangolo, ed acutangolo. Si chiama triangolo rettangolo quello, che ha un'angolo retto. Si chiama triangolo ottusangolo quello, che ha un'angolo ottuso. E finalmente si chiama triangolo acutangolo quello, in cui tutti tre gli angoli sono acuti. Nè dee sembrarci strano, che la dinominazione di questo ultimo debba ricavarfi dall'essere tutti tre gli angoli acuti. Imperocche, essendo stato dimostrato, che tutti tre gli angoli d'ogni triangolo sieno insieme eguali a due retti (71); egli è chiaro, che così nel rettangolo, come nell'ottusangolo gli altri due angoli debbano essere acuti. Onde per l'acutangolo non rimane altro caso, se non se quando tutti tre gli angoli sono acuti.

82. Ma da questo stesso egli è facile ad intendersi, che nè il rettangolo, nè l'ottusangolo può essere mai equilatero, per la ragione, che in ciascuno de' detti triangoli siccome non mai possono essere tutti tre gli angoli eguali, così non mai può darsi uguaglianza tra tutti tre i lati. Sicche tanto il rettangolo, quanto l'ottusangolo sarà sempre o isoscele, o scaleno; e solamente l'acutangolo potrà essere ancora equilatero. Del rimanente, se sopra una data retta debbasi formare un triangolo, di cui tutti tre gli angoli sieno dati: siccome il problema per esser solubile richiede, che i tre angoli dati insieme sieno eguali a due retti (71): così niuna cosa sarà più facile, quanto la di lui soluzione, per essersi fatto vedere di sopra (40), come ad un punto di una retta data possa formarsi colla medesima un'angolo, che sia eguale ad un'altro angolo dato.

§. III.

§. III.

Della perfetta uguaglianza de' triangoli .

83. **I**L triangolo considerato come figura piana dee stimarsi eguale ad un'altro triangolo, quantevolte le loro superficie sono tra di esse eguali . Ma ciò non basta , per dirsi tra loro perfettamente eguali ; poicche per la perfetta uguaglianza di due triangoli si richiede ancora , che i lati dell'uno sieno eguali alli lati dell'altro, ciascuno a ciascuno, ed inoltre che a' lati eguali sieno opposti angoli parimente eguali . Or perche la conoscenza di questi tali triangoli puo essere di qualche uso per le cose, che dovremo dimostrare in appresso ; non sarà mal fatto , far vedere in questo luogo quali sono i principali mezzi per poterla conseguire .

84. Ed in primo luogo due triangoli saranno perfettamente tra loro eguali , quantevolte i lati dell'uno sono eguali alli lati dell'altro, ciascuno a ciascuno . Per dimostrarlo , sieno i due triangoli ABC , DEF , i quali abbiano il lato AB eguale al lato DE , il lato AC eguale al lato DF , ed il lato BC eguale al lato EF . Adattisi col pensiero l'uno sopra l'altro talmente, che il punto B cada sul punto E , ed il lato BC sul lato EF . Per l'uguaglianza adunque di questi lati caderà ancora il punto C sul punto F ; ed essendo gli altri due lati dell'uno AB , AC eguali agli altri due lati dell'altro DE , DF , ciascuno a ciascuno, caderà altresì il punto A sul punto D (26) . Quindi si combacieranno tra loro , così le superficie di essi triangoli, come gli angoli opposti a'lati eguali ; e perciò i due triangoli ABC , DEF saranno perfettamente tra loro eguali (15).

85. In secondo luogo vi sarà perfetta uguaglianza tra due triangoli , quantevolte gli angoli dell'uno sono eguali agli angoli dell'altro, ciascuno a ciascuno , e di più un lato è eguale ad un lato, che

GEOMETRIA PIANA. 27

che debbono esser opposti ad angoli eguali. Perciò sieno i due triangoli ABC , DEF , li quali abbiano l'angolo BAC eguale all'angolo EDF , l'angolo ABC eguale all'angolo DEF , e l'angolo ACB eguale all'angolo DFE ; ed abbiano ancora il lato BC eguale al lato EF , li quali lati sono opposti ad angoli eguali. Adattisi col pensiero l'uno sopra l'altro talmente, che il punto B cada sul punto E , ed il lato BC sul lato EF . Per l'uguaglianza adunque di questi lati caderà ancora il punto C sul punto F ; ed essendo i due angoli ABC , ACB eguali agli altri due DEF , DFE , ciascuno a ciascuno, caderà similmente così il lato AB sul lato DE , come il lato AC sul lato DF . Quindi, cadendo ancora il punto A sul punto D , si combacieranno tra loro, tanto le superficie de'detti triangoli, quanto gli altri loro lati; e pertanto i due triangoli ABC , DEF saranno perfettamente eguali tra loro (15).

Fig. 32.

86. Non essendosi fatto uso nella dimostrazione di questo teorema dell'uguaglianza delli due angoli BAC , EDF ; egli è chiaro, che non sia ella necessaria per giudicare della perfetta uguaglianza delli due triangoli, anzi più tosto che si debba raccogliere dalla dimostrazione medesima. Ma quantunque a ben considerare si potrebbe da quella prescindere; tuttavolta si è aggiunta all'altre condizioni del teorema, poicche essendo stato dimostrato, che tutti tre gli angoli d'ogni triangolo uniti insieme debbano essere eguali a due retti (72), non potranno due triangoli avere due angoli eguali a due angoli, senza essere eguali ancora i rimanenti. Oltreche si è stimato convenevole di supporre eguali tutti gli angoli, per fare del teorema un solo caso, e non partirlo in due, secondoche i lati, che si suppongono eguali, sono o opposti, o adjacenti ad angoli eguali.

87. In terzo luogo due triangoli saranno perfettamente tra loro eguali, quantevolte due lati dell'uno sono eguali a due lati dell'altro, ciascuno a ciascuno, e sono eguali ancora gli angoli contenuti

Fig. 32.

tenuti da' detti lati . Per dimostrarlo, sieno i due triangoli ABC , DEF , li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE , il lato AC eguale al lato DF , e l'angolo BAC eguale all'angolo EDF . Adattisi col pensiero l'uno sopra l'altro talmente, che il punto A cada sul punto D , ed il lato AB sul lato DE . Per l'uguaglianza adunque degli angoli BAC , EDF caderà ancora il lato AC sul lato DF ; ed essendo i due lati AB , AC eguali alli due lati DE , DF ciascuno a ciascuno, caderà altresì tanto il punto B sul punto E , quanto il punto C sul punto F . Quindi si combacieranno tra loro, così le superficie de' detti triangoli, come i rimanenti lati, e li rimanenti angoli; e perciò i due triangoli ABC , DEF saranno perfettamente eguali tra loro (15).

Fig. 33.

88. Finalmente vi farà perfetta uguaglianza tra due triangoli, quantevolte due lati dell'uno sono eguali a due lati dell'altro, ciascuno a ciascuno; e degli angoli opposti a' detti lati due sono eguali tra loro, e due altri della stessa spezie, cioè o acuti, o ottusi. Perciò sieno i due triangoli ABC , DEF , li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE , il lato AC eguale al lato DF , l'angolo ABC eguale all'angolo DEF , e l'angolo ACB dell'istessa spezie coll'angolo DFE . E se possiamo dimostrare, che gli angoli BAC , EDF contenuti dalli lati eguali sieno eguali tra loro; ricaderemo nel teorema precedente, ed in conseguenza i due triangoli ABC , DEF saranno perfettamente eguali. Or l'uguaglianza delli due angoli BAC , EDF può raccogliersi con dimostrazione negativa nella maniera, che segue.

89. Se è possibile, i due angoli BAC , EDF sieno tra loro disuguali, e sia l'angolo BAC maggiore dell'altro EDF . Si faccia l'angolo BAG eguale all'angolo EDF (40); ed essendo per ipotesi l'angolo ABG eguale all'angolo DEF , farà il terzo AGB similmente eguale al terzo DFE (72). Quindi per l'uguaglianza delli lati AB , DE saranno i due triangoli ABG , DEF perfettamente
tra

GEOMETRIA PIANA. 29

tra loro eguali (85); e perciò il lato AG sarà eguale al lato DF , o pure al suo eguale AC ; onde l'angolo ACG sarà similmente eguale all'angolo AGC (72). Ma per supposizione l'angolo ACG è della stessa spezie coll'angolo DFE , o pure col suo eguale AGB . Dunque i due angoli AGC , AGB faranno ancora della stessa spezie; e pertanto eguali insieme, o a due acuti, o a due ottusi, qual cosa non può essere (51).

§. IV.

Delle proprietà, così assolute, come relative del parallelogrammo.

90. **D**Opo i triangoli seguono le figure quadrilatera, chiamate ancora quadrangole, delle quali due ne sono le spezie principali, cioè il parallelogrammo, ed il trapezio. Chiamasi parallelogrammo quella figura quadrilatera, che ha i lati opposti paralleli. Per lo contrario si appella trapezio quell'altra, in cui una tal affezione o affatto non si ritrova, o pure ha luogo in due soli lati opposti. Or quantunque così le quadrilatera, come le rimanenti figure rettilinee, che sono infinite, si possono porre a calcolo, con risolverle in triangoli; pure de' parallelogrammi giova averne nota la teoria, sì perchè essi spesso vengono in uso, come ancora perchè i medesimi conducono non poco a farci conoscere altre proprietà di quelli stessi triangoli, ne' quali debbonsi risolvere l'altre figure rettilinee.

91. Nel parallelogrammo adunque sono eguali tra loro così i lati, come gli angoli opposti; e se in esso tirisi la diagonale, cioè una retta da un'angolo all'altro opposto, i triangoli, ne' quali resta egli diviso, sono ancora tra loro eguali. Per dimostrarlo, sia il parallelogrammo $ABCD$, in cui tirisi la diagonale AC . E poicché sono parallele, così le due AB , DC , come le due AD , BC (90); sarà tanto l'angolo BAC eguale all'angolo ACD ,
quan-

Fig. 34

quanto l'angolo DAC eguale all'angolo ACB (61); conche tutto l'angolo BAD farà eguale a tutto l'angolo BCD (13); e dell'istessa maniera si dimostrerà, che ancora l'angolo ABC sia eguale all'angolo ADC. Quindi i due triangoli ABC, CDA, avendo gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e il lato AC comune, che sta opposto a' angoli eguali, saranno perfettamente eguali tra loro (85); e avranno in conseguenza non solo eguali le superficie, ma ancora il lato AB eguale al lato DC, e l'altro BC eguale all'altro AD.

Fig. 34.

92. Oltre a queste proprietà ne ha egli il parallelogrammo un'altra, la quale per bene intendersi, sia di nuovo il parallelogrammo ABCD, e per il punto E preso ad arbitrio nella sua diagonale AC tirinsi le rette FG, HI parallele alli lati opposti (65). Egli è chiaro, che con queste rette rimane diviso il parallelogrammo in altri quattro; de' quali siccome i due AFEH, CGEI sono situati intorno alla sua diagonale, così gli altri due BGEH, DFEI debbono averli come supplementi di quelli. Or consiste l'altra proprietà in esser eguali tra loro questi supplementi. E la ragione è chiara; poicche, dividendosi il parallelogrammo dalla sua diagonale in triangoli eguali (91), saranno i tre triangoli ABC, AHE, CGE eguali agli altri tre ADC, AFE, CIE, ciascuno a ciascuno; e pertanto togliendo così dal triangolo ABC gli altri due AHE, CGE, come dal triangolo ADC gli altri due AFE, CIE, rimarrà il supplemento BGEH eguale al supplemento DFEI (13).

Fig. 35.

93. Or dall'uguaglianza, che dee esservi tra i lati opposti del parallelogrammo, egli è facile a dedurne, che i parallelogrammi situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele debbano essere tra loro eguali. Perciò sieno ABCD, EBCF questi tali parallelogrammi. E poicche alla BC è eguale ciascuna delle due AD, EF; saranno queste due AD, EF eguali tra loro (11); e pertanto coll'aggiunta della comune DE saranno eguali ancora le due

due AE , DF . Ma sono eguali similmente tanto le due AB , DC , quanto le due BE , CF . Dunque i due triangoli ABE , DCF saranno perfettamente eguali tra loro (84); e pertanto siccome tolto il comune DGE rimane il trapezio $ABGD$ eguale al trapezio $EGCF$, così apposto l'altro comune BGC farà il parallelogrammo $ABCD$ eguale al parallelogrammo $EBCF$ (13).

94. Ma essendo così, saranno eguali ancora tra loro i parallelogrammi situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele. Per dimostrarlo, sieno i due parallelogrammi $ABCD$, $EFGH$, li quali abbiano la base BC eguale alla base FG , e sieno situati tra le stesse parallele AH , BG . Congiungansi le due AF , DG . E poicche alla stessa BC è eguale tanto la AD , quanto la FG ; saranno le due AD , FG tra loro eguali (11). Ma le medesime AD , FG sono porzioni di rette parallele. Dunque parallele altresì faranno le due AF , DG (67); e perciò la figura quadrilatera $AFGD$ farà similmente parallelogrammo (90). Or a questo parallelogrammo dee essere eguale, così il parallelogrammo $ABCD$, come il parallelogrammo $EFGH$ (93). Dunque i due parallelogrammi $ABCD$, $EFGH$ saranno similmente tra loro eguali (11). Fig. 36.

95. Dividendosi poscia il parallelogrammo dalla sua diagonale in due triangoli eguali, si potranno queste stesse proprietà dimostrare ancora per rapporto alli triangoli. Quindi, se due triangoli sono situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, i medesimi debbono essere tra loro eguali. Imperocchè sieno ABC , DBC questi tali triangoli, e tirinsi le rette BE , CF parallele alle due CA , BD (65), le quali s'incontrino colla AD prolungata dall'una, e l'altra parte ne' punti E , ed F . Saranno dunque eguali i due parallelogrammi $ACBE$, $DBCF$ (93). Ma i triangoli ABC , DBC sono le metà di questi parallelogrammi. Dunque ancora i due triangoli ABC , DBC faranno tra loro eguali (11). Fig. 37.

96. Similmente eguali tra loro esser debbono i trian-

Fig.38. triangoli situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele. Per dimostrarlo sieno i due triangoli ABC , DEF , li quali abbiano la base BC eguale alla base EF , e sieno situati tra le stesse parallele AD , BF . Tirinsi le rette BG , FH parallele alle due CA , ED , (65) che s'incontrino colla AD prolungata dall'una, e l'altra parte nelli punti G , e H . E per ciò, che è stato dimostrato (94), sarà il parallelogrammo $ACBG$ eguale al parallelogrammo $DEFH$. Ma i triangoli ABC , DEF sono le metà di questi parallelogrammi. Dunque ancora i due triangoli ABC , DEF saranno tra loro eguali.

97. Ma eziandio le converse di queste proprietà anno luogo così ne' parallelogrammi, come ne' triangoli; poicche tanto l'une, quanto l'altre figure, qualora sono tra loro eguali, e stanno situate verso la medesima parte, o sopra una stessa base, o sopra basi eguali, debbono essere tra le stesse parallele. E per quanto tocca alla dimostrazione, ella è così facile, che basterà darne un saggio in un sol caso, per poterla estendere a tutti gli altri. Sieno adunque i due triangoli eguali ABC , DBC , li quali sieno situati verso la medesima parte sopra la stessa base BC . E se le due AD , BC non sono parallele, sia un'altra come AE parallela alla BC (65); con che congiunta la CE , sarà il triangolo EBC eguale al triangolo ABC (95). Ma per ipotesi il triangolo ABC è eguale al triangolo DBC . Dunque i due triangoli DBC , EBC saranno ancora tra loro eguali (11), il che non può essere (14).

Fig.40. 98. Del rimanente se un triangolo, ed un parallelogrammo sieno situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, dovrà essere il parallelogrammo doppio del triangolo. Per comprenderne la ragione, sia $ABCD$ il parallelogrammo, ed EBC il triangolo, li quali abbiano la stessa base BC , e sieno situati tra le stesse parallele AE , BC . Tirisi nel parallelogrammo la diagonale AC . E poicche questa lo divide in due triangoli eguali (91), sarà il parallelogrammo $ABCD$ doppio del triangolo

golo ABC. Ma il triangolo ABC è eguale al triangolo EBC (95). Dunque l'istesso parallelogrammo ABCD sarà doppio ancora del triangolo EBC.

§. V.

Della formazione de' parallelogrammi eguali a figure rettilinee date.

99. **N**iente è più facile, quanto il formare parallelogrammi, di cui così li lati, come gli angoli sieno dati; ma talvolta si ha bisogno de' parallelogrammi, che forniti di un dato lato, e di un dato angolo sieno eguali ad altre figure rettilinee date; onde giova il far vedere, come possono formarsi questi tali parallelogrammi. E per andare con ordine, primieramente supporremo, che la figura rettilinea data sia un triangolo; indi ci studieremo di estendere il problema ad ogni altra figura, che sia terminata da un numero maggiore de' lati.

100. Sia dato adunque il triangolo ABC, e deb- Fig. 41.
 basi in primo luogo formare un parallelogrammo, che dotato di un dato angolo sia eguale al triangolo dato. Taglisi la BC in due egualmente nel punto D (42); e facciasi l'angolo CDE eguale all'angolo dato (40). Tirinsi di poi per i punti A, e C le rette AF, CF parallele alle due BC, DE (65); e sarà CDEF il parallelogrammo, che si dimanda. Per dimostrarlo, congiungasi la retta AD. E poicche i due triangoli ABD, ADC sono situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele; saranno i medesimi eguali tra loro (96); e perciò tutto il triangolo ABC sarà doppio del solo ADC. Ma ancora il parallelogrammo CDEF è doppio del triangolo ADC (98). Dunque il parallelogrammo CDEF, ed il triangolo ABC saranno tra loro eguali (11).

101. Debbasi in secondo luogo formare un parallelogrammo, che sia eguale al triangolo ABC, Fig. 42.
C ed

ed abbia così un lato, come un'angolo dato. Formisi il parallelogrammo DEFG, che sia eguale al triangolo ABC, ed abbia l'angolo EFG eguale al dato (100); e tagliata dalla GF prolungata la porzione FH eguale al dato lato (31), tirisi per il punto H la retta IL parallela alla EF, ovvero DG (65), che si vada ad incontrare colla DE nel punto I. Congiungasi poscia la retta IF, che s'incontri colla DG nel punto M; e tirata per questo punto la retta MNL parallela alla DI, che convenga colle due EF, IH ne' punti N, ed L, farà HFNL il parallelogrammo, che si dimanda. Imperocchè, siccome il di lui lato FH uguaglia il dato, così il di lui angolo HFN, come eguale all'angolo EFG (53), farà similmente eguale al dato; e per essere egli eguale all'altro parallelogrammo DEFG (92), farà eguale ancora al triangolo dato ABC (11).

Fig. 43. 102. In vece del triangolo sia data ora qualunque altra figura rettilinea, come la quadrilatera ABCD; e debbasi primieramente formare un parallelogrammo, che fornito di un dato angolo sia eguale alla figura data. Colla retta AC dividasi la figura in due triangoli, e formisi il parallelogrammo EFGH, che sia eguale al triangolo ABC, ed abbia l'angolo EFG eguale al dato (100). Facciasi di poi l'altro parallelogrammo HGIL, che avendo la HG per uno de' suoi lati sia eguale all'altro triangolo ACD, ed abbia l'angolo HGI similmente eguale al dato (101). E qualora si potesse dimostrare, che la figura EFIL, nata dalli due parallelogrammi formati, sia ancora parallelogrammo; chiara cosa sarebbe, questo essere il parallelogrammo, che si dimanda.

103. Or egli è evidente, che la dimostrazione di ciò dipende dal far vedere, che così le due FG, GI, come le altre due EH, HL formino rette continuate: qual cosa è facile a pruovarsi. Imperocchè, essendo ciascuno delli due angoli EFG, HGI eguale all'angolo dato; farà l'angolo EFG eguale all'angolo HGI (11); ed apposto il comune

ne

GEOMETRIA PIANA. 35

ne HGF, saranno ancora i due EFG, HGF eguali agli altri due HGI, HGF (13). Ma per le parallele EF, HG i primi due EFG, HGF sono eguali a due retti (63). Dunque similmente eguali a due retti saranno gli altri due HGI, HGF; e pertanto le due FG, GI staranno a dirittura (52). E poicche gli angoli EHG, HLI, come eguali agli angoli EFG, HGI (91), sono tra loro eguali; si pruoverà dell'istessa maniera, essere ancora a dirittura le due EH, HL.

104. Che se poi debbasi formare un parallelogrammo, il quale sia eguale alla figura ABCD, ed abbia così un lato, come un'angolo dato; si risolverà il problema nello stesso modo, che è stato egli risoluto poc'anzi per rapporto al triangolo (101). Formisi il parallelogrammo EFGH, che sia eguale alla figura ABCD, ed abbia l'angolo FGH eguale al dato (102); e tagliata dalla HG prolungata la porzione GI eguale al dato lato (31), tirisi per il punto I la retta LM parallela alla FG, ovvero EH (65), che si vada ad incontrare colla EF nel punto L. Congiungasi poscia la retta LG, che s'incontri colla EH nel punto N; e tirata per questo punto la retta NOM parallela alla EL, che convenga colle due FG, LI ne' punti O, ed M, farà IGOM il parallelogrammo, che si dimanda. Ed egli è chiaro, la dimostrazione essere la medesima.

105. Del rimanente se la figura rettilinea data non fosse quadrilatera, ma contenesse un maggior numero de' lati; pure con dividerla in triangoli potrebbe formarsi un parallelogrammo, che fosse a quella eguale, ed avesse un'angolo eguale ad un dato; bastando alli due di già formati aggiungerne colla stessa legge del secondo tanti altri, quanti triangoli di più vi sono nella figura data. È formato questo tale parallelogrammo, si potrebbe altresì col di lui mezzo formarne poscia un'altro, che non solo fosse eguale alla data figura, ma avesse così un lato, come un'angolo eguale ad un dato. E quindi di già incomincia a vedersi la ve-

rita di quel tanto fu di sopra avvertito (90), cioè che le altre figure rettilinee possono mettersi a calcolo con risolverle in tanti triangoli.

Fig. 45.

106. Or con trasformare in parallelogrammi le figure rettilinee, non solo più agevolmente cadono elle sotto gli occhi; ma, date due delle medesime, sarà egli facile il determinarne così la somma, come la differenza. Perciò sieno A, e B le due figure rettilinee date. Formisi primieramente il parallelogrammo CDEF, che sia eguale ad una di quelle A, ed abbia in D un'angolo qualsivoglia (102). Indi sopra la retta EF formisi l'altro parallelogrammo EFGH, che sia eguale all'altra B, ed abbia in E un'angolo tale, che i tre punti D, E, H si ritrovino sopra una medesima retta (104). E secondoche questi due parallelogrammi sono situati, o l'uno dopo l'altro, o l'uno sopra l'altro; egli è chiaro, che il terzo parallelogrammo CDHG debba essere, o la somma, o la differenza delle due figure date A, e B. E con una tal costruzione potrà darsi a questo terzo parallelogrammo, ed un lato, ed un'angolo qualsivoglia.

CAPITOLO III.

Della teoria de' rettangoli, e de' quadrati.

107. **L**I parallelogrammi tutti possono essere di due spezie; poicche o i loro angoli sono retti, o per lo contrario due di essi sono ottusi, ed altri due acuti. Ma così gli uni, come gli altri, potendo avere o tutti quattro i lati eguali, o solamente eguali i lati opposti, si dividono ancora in due altre spezie; e siccome rombo, e romboide si appellano le due delli secondi, così quadrato, e rettangolo chiamansi le due delli primi. Or conforme tra le figure quadrate meritano particolar considerazione i parallelogrammi; così tra questi debbono essere più da presso contemplati coloro, che hanno gli angoli retti; e perciò argomento del presente capi-

Capitolo farà la teoria di sì fatti parallelogrammi.

§. I.

Della nozione così del rettangolo, come del quadrato.

108. **S**empre quando in un parallelogrammo vi è un'angolo retto, per necessità tutti gli altri debbono essere retti; poicche, siccome gli opposti sono eguali tra loro (91), così li due adjacenti ad un'istesso lato sono insieme eguali a due retti (63). Ma per la medesima ragione nel parallelogrammo, che non ha angoli retti, due degli opposti debbono essere ottusi, e due altri acuti. Onde non dee porsi in dubbio, che due sieno le classi di tutti i parallelogrammi: cioè una di quelli, che hanno gli angoli retti; e l'altra di coloro, che ne hanno due ottusi, e due acuti. E poicche niente è più facile, quanto il formare parallelogrammi, de'quali tutti quattro i lati sieno eguali; perciò nè pure dee mettersi in forse, che i parallelogrammi di ciascuna classe possono avere e soltanto i lati opposti eguali, ed eguali ancora tutti quattro i lati.

109. Or il parallelogrammo, che cogli angoli retti ha soltanto i lati opposti eguali, secondo si è avvertito poc' anzi (107), specialmente chiamasi rettangolo; e restando egli determinato colla sola lunghezza delli due lati, che sono intorno ad uno degli angoli retti, lo diremo fatto, o contenuto dalli due riferiti lati. Il che non può dirsi del romboide, ovvero del parallelogrammo obliquangolo, che ha ancora eguali solamente i lati opposti; poicche la determinazione di esso dipende non solo dalla lunghezza delli due lati, che sono intorno ad uno delli suoi angoli, ma altresì dalla quantità stessa dell'angolo, che per essere ottuso, o acuto può variare all'infinito; come in effetto con due lati dati possono formarsi non uno, ma infiniti romboidi.

C 3

110. Se

Fig. 46. 110. Se dunque sieno date due rette, come AB , CD ; il rettangolo, che puo farsi con queste rette come lati, per essere sempre lo stesso, sarà ancora dato. E si formerà egli effettivamente con alzare sopra una di esse AB la perpendicolare AE dal punto A (49), che dovrà farsi eguale all'altra CD (31); e con tirare per i punti E , e B le rette EF , BF parallele alle due AB , AE (65), che s'incontrino tra loro nel punto F . Ma poicche col formare tutti i rettangoli, de'quali puo averfi bisogno nel trattare di questo argomento, verrebbero tal volta le figure ad essere molto composte, ed intrigate; perciò giova l'assuefarsi ad averli presenti, con indicare semplicemente le rette, che come lati debbono contenerli.

111. Il parallelogrammo poi, che cogli angoli retti ha tutti quattro i lati eguali, giusta l'avvertimento fatto di sopra (107) specialmente appellasi quadrato; e restando egli determinato colla sola lunghezza di uno delli lati, lo diremo formato, o descritto da detto lato. Il che non puo dirsi del rombo, ovvero del parallelogrammo obliquo, che ha similmente tutti quattro i lati eguali; poicche la sua determinazione dipende non solo dalla lunghezza di uno delli quattro lati, ma ancora dalla quantità di uno degli angoli, che per essere ottuso, o acuto puo variare all'infinito; come in effetto con un medesimo lato si possono formare non uno, ma infiniti rombi.

Fig. 47. 112. Se dunque sia data una retta, come AB , il quadrato, che puo farsi con questa retta come lato, per essere sempre lo stesso, sarà ancora dato. E si descriverà egli effettivamente, con alzare dal punto A sopra la data AB la perpendicolare AC (49), che dovrà farsi eguale alla stessa AB (31); e con tirare per i punti C , e B le rette CD , BD parallele alle due AB , AC (65) che s'incontrino tra loro nel punto D . Ma per non rendere le figure molto composte, ed intrigate colla descrizione di tutti i quadrati, che possono bisognare; ancora per essi è necessario di assuefarsi

Fig. 49.

quadrato, quando i loro lati sono divisi in parti. Onde per renderle note, sia il rettangolo $ABCD$, contenuto dalli due lati AB , BC . Dividasi il lato BC in due parti ad arbitrio nel punto E , per cui tirisi la retta EF parallela all'altro lato AB (65). Ed egli è chiaro, che da questa parallela resterà diviso il rettangolo proposto $ABCD$ in due altri rettangoli $ABEF$, $DCEF$. Or di questi siccome il primo è contenuto dalle due AB , BE ; così per essere la AB eguale alla EF (90) sarà il secondo contenuto dalle due AB , CE . E perciò potrà stabilirsi come teorema generale, che se vi sono due rette, una divisa in parti, e l'altra indivisa, il rettangolo contenuto da tali rette debba essere eguale alli rettangoli, che si fanno dalla retta indivisa nelle parti dell'altra divisa.

116. Egli è vero, che per stabilire la verità di questo teorema si è supposto il lato BC diviso in due sole parti; ma ben si vede, che la medesima dimostrazione ha luogo eziandio, quando è maggiore il numero delle parti, nelle quali si voglia suppor diviso detto lato. Oltreche se mai la parte CE sia di nuovo divisa in G , con risolvere il rettangolo fatto dalle due AB , CE giusta il caso di già esaminato, si dimostrerà, che il rettangolo fatto dall'indivisa AB nell'altra divisa BC sia eguale alli tre rettangoli fatti dalla stessa AB nelle parti della divisa BE , EG , GC . Ed in questa maniera potrà dimostrarsi altresì, che se vi sono due rette divise in parti, il rettangolo contenuto da tali rette debba essere eguale alli rettangoli, che si fanno da tutte le parti dell'una in tutte le parti dell'altra.

Fig. 50.

117. Ma considerando il teorema stabilito secondo il suo caso più semplice, potremo da quello stesso dedurne due altri. Fingasi in primo luogo, che il lato indiviso AB del proposto rettangolo sia eguale alla CE , che è una delle parti del lato diviso BC . Ed in tal caso egli è chiaro, che siccome il rettangolo $ABCD$ è contenuto dalla tutta BC , e dalla parte CE ; così degli altri due

ABEF,

GEOMETRIA PIANA: 41

ABEF, DCEF il primo è fatto dalle parti BE, CE, ed il secondo non differisce dal quadrato descritto dalla parte CE. Onde avremo quest'altro teorema, cioè, che se una retta sia divisa in due parti, il rettangolo fatto dalla tutta, e da una parte debba essere eguale al rettangolo di ambedue le parti, ed al quadrato della parte predetta.

118. Fingasi in secondo luogo, che il lato indiviso AB del proposto rettangolo sia eguale all'altro lato diviso BC. Ed in quest'altro caso siccome con ogni chiarezza si vede, che il rettangolo ABCD non differisce dal quadrato descritto dalla tutta BC; così chiara cosa ancora si è, che degli altri due rettangoli ABEF, DCEF il primo è fatto dalla tutta BC nella parte BE, ed il secondo è contenuto dalla stessa tutta BC nell'altra parte CE. Onde alli due teoremi precedenti potremo aggiungere ancora quest'altro, cioè, che se una retta sia divisa in due parti, il quadrato fatto dalla tutta debba essere eguale alli due rettangoli contenuti dalla stessa tutta, e dalle sue parti. Fig. 51.

119. E quindi potremo dimostrare inoltre, che se una retta sia divisa in due parti, il quadrato fatto dalla tutta debba essere eguale alli quadrati delle parti, e a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime parti. Imperocchè il quadrato della tutta BC dee essere eguale a due rettangoli, uno de'quali sia fatto dalla tutta BC nella parte BE, l'altro dalla tutta BC nella parte CE (118). Ma di questi due rettangoli il primo è eguale al rettangolo delle parti BE, CE insieme col quadrato della parte BE; ed il secondo è eguale al rettangolo delle stesse parti BE, CE insieme col quadrato della parte CE (117). Dunque il quadrato della tutta BC sarà eguale alli quadrati delle parti BE, CE, e a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime parti. Fig. 52.

120. Potremo ancora dimostrare, che se una retta sia divisa in due parti, i quadrati della tutta, e di una delle parti debbano essere eguali a due volte

ELEMENTI DELLA

42

Fig. 51.

volte il rettangolo fatto dalla tutta nella detta parte insieme col quadrato dell'altra parte. Imperocchè, essendo il quadrato della tutta BC eguale alli quadrati delle parti BE , CE , e a due volte il rettangolo delle medesime parti (119); coll'aggiunta del comune quadrato della parte BE , faranno i due quadrati della tutta BC , e della parte BE eguali a due volte il quadrato della parte BE , a due volte il rettangolo delle parti BE , CE , ed al quadrato della parte CE (113). Ma due volte il quadrato della parte BE , e due volte il rettangolo delle parti BE , CE fanno due volte il rettangolo della tutta BC nella parte BE (117). Dunque i due quadrati della tutta BC , e della parte BE saranno eguali a due volte il rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte, ed al quadrato dell'altra parte CE .

Fig. 51.

121. Potremo finalmente dimostrare, che se una retta sia divisa in due parti il quadrato della tutta, e di una parte unite insieme debba essere eguale a quattro volte il rettangolo della stessa tutta nella stessa parte insieme col quadrato dell'altra parte. Imperocchè se CE sia la retta divisa nelle parti CG , EG , ed alla medesima si aggiunga a dirittura l'altra BE eguale alla parte EG ; farà il quadrato della BC eguale alli quadrati delle due CE , EG , ed a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime (119). Ma i quadrati delle due CE , EG sono eguali a due volte il rettangolo fatto dalle stesse, ed al quadrato dell'altra parte CG , (120). Dunque il quadrato della BC , cioè della tutta CE , e della parte EG unite insieme farà eguale a quattro volte il rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte, ed al quadrato dell'altra parte CG .

§. III.

§. III.

Di altre composizioni più implicate del rettangolo, e del quadrato.

122. **O**ltre alle precedenti vi sono altre composizioni più implicate del rettangolo, e del quadrato, le quali per essere ancora rilevanti non debbono passarli sotto silenzio. Ed in primo luogo, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C, ed in due parti disuguali nel punto D; sarà il rettangolo delle parti disuguali AD, DB insieme col quadrato della porzione di mezzo CD eguale al quadrato della metà BC. Imperocchè, essendo il rettangolo delle due AD, DB eguale alli rettangoli della AC ovvero BC nella DB, e della CD nella DB (115); sarà il rettangolo delle medesime AD, DB insieme col quadrato della CD eguale alli rettangoli della BC nella DB, e della CD nella DB insieme coll'istesso quadrato della CD (13). Ma il rettangolo della CD nella DB insieme col quadrato della CD è eguale al rettangolo della BC nella CD (117), il quale aggiunto all'altro rettangolo della BC nella DB forma il quadrato della BC (118). Dunque il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CD sarà eguale al quadrato della BC.

Fig. 52.

123. Poiche dunque il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CD è eguale al quadrato della BC; egli è chiaro, che togliendo il comune quadrato della CD, dovrà essere il solo rettangolo delle medesime AD, DB eguale alla differenza delli quadrati, che si fanno dalle due BC, CD (13). Or siccome la DB è eguale alla differenza di queste due BC, CD; così essendo la AC eguale alla BC, coll'aggiunta della comune CD sarà la AD eguale alla somma delle stesse BC, CD (13). Onde potrà stabilirsi generalmente, che la differenza di due qualsivieno qua-
dra-

drati debba essere eguale al rettangolo, che si fa dalla somma de' loro lati nella differenza de' medesimi lati.

Fig. 53. 124. In secondo luogo, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C , ed alla medesima sia aggiunta a dirittura un'altra BD , farà il rettangolo delle due AD , DB insieme col quadrato della metà BC eguale al quadrato della retta CD , cioè della metà, e dell'aggiunta unite insieme. Imperocchè, essendo il rettangolo delle due AD , DB eguale alli rettangoli della AC ovvero BC nella DB , e della CD nella DB (115); farà il rettangolo delle medesime AD , DB insieme col quadrato della BC eguale alli rettangoli della BC nella DB , e della CD nella DB insieme coll'istesso quadrato della BC (113). Ma il rettangolo della BC nella DB insieme col quadrato della BC è eguale al rettangolo della CD nella BC (117), il quale aggiunto all'altro rettangolo della CD nella DB forma il quadrato della CD (118). Dunque farà il rettangolo delle due AD , DB insieme col quadrato della BC eguale al quadrato della CD .

125. Poicche dunque il rettangolo delle due AD , DB insieme col quadrato della BC è eguale al quadrato della CD ; egli è chiaro, che togliendo il comune quadrato della BC , dovrà essere il solo rettangolo delle medesime AD , DB eguale alla differenza delli quadrati, che si fanno dalle due CD , BC (113). Or qui ancora siccome la DB è eguale alla differenza di queste due CD , BC ; così essendo la AC eguale alla BC , coll'aggiunta della comune CD farà la AD eguale alla somma delle stesse CD , BC (113). Onde di nuovo vedesi la verità di quel tanto è stato avvertito poc' anzi (123), cioè, che la differenza di due qualsivieno quadrati debba essere eguale al rettangolo, che si fa dalla somma de' loro lati nella differenza de' medesimi lati.

Fig. 52. 126. In terzo luogo, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C , e in due par-

GEOMETRIA PIANA. 45

parti disuguali nel punto D , faranno i quadrati delle parti disuguali AD , DB eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalla metà BC , e dalla porzione di mezzo CD . Imperocchè, essendo questi due quadrati eguali a due volte il rettangolo della BC nella CD , ed al quadrato della DB (120); sarà il loro doppio eguale a quattro volte il rettangolo della BC nella CD , e a due volte il quadrato della DB . Ma quattro volte il rettangolo della BC nella CD insieme con un solo quadrato della DB è eguale al quadrato delle due insieme BC , CD , o pure della sola AD (121). Dunque i quadrati delle due AD , DB faranno eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalle altre due BC , CD .

127. Finalmente, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C , ed alla medesima sia aggiunta a dirittura un'altra BD , Fig. 53. faranno li quadrati delle due AD , DB eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalla metà BC , e dalla metà insieme coll'aggiunta, cioè dalla CD . Imperocchè, essendo questi due quadrati eguali a due volte il rettangolo della BC nella CD , ed al quadrato della DB (120); sarà il loro doppio eguale a quattro volte il rettangolo della BC nella CD , e a due volte il quadrato della DB . Ma quattro volte il rettangolo della BC nella CD insieme con un solo quadrato della DB è eguale al quadrato delle due insieme BC , CD , o pure della sola AD (121). Dunque i quadrati delle due AD , DB faranno eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalle altre due BC , CD .

128. Con ciascuno di questi teoremi egli è facile ad intendersi, che la somma de' quadrati descritti da due rette debba essere eguale al doppio di due altri quadrati, de' quali uno sia fatto dalla metà della somma di quelle rette, e l'altro dalla metà della loro differenza. Imperocchè, siccome in vigore delli detti teoremi li quadrati delle due AD , DB sono eguali al doppio delli quadrati delle altre due BC , CD ; così chiara cosa ancora si è,

si è, che ovunque sia situato il punto D nella retta AB , sempre delle due BC , CD una debba essere eguale alla metà della somma delle prime AD , DB , e l'altra eguale alla metà della loro differenza.

§. IV.

Delli quadrati descritti dalli lati di un triangolo.

129. **I**Ntorno alli quadrati, che si descrivono dalli lati di un triangolo, abbiamo ancora teoremi di sommo rilievo per la ricerca delle verità geometriche. Sicche, se il triangolo sia rettangolo, il quadrato descritto dal lato opposto all'angolo retto, chiamato ipotenufa, dovrà essere eguale alli quadrati degli altri due lati. Per dimostrarlo, sia il triangolo ABC rettangolo in A .
 Fig. 54. Descrivansi sopra i suoi lati li tre quadrati $BCDE$, $ABFG$, $ACHI$ (112); e tirata la retta AL parallela alla BE (65), congiungansi le due AE , CF . Poicche, dunque, per li due angoli BAC , BAG eguali a due retti, le due AC , AG stanno a dirittura (52); farà il quadrato $ABFG$ così doppio del triangolo BCF , come è il rettangolo $BELM$ doppio del triangolo BEA (98). Ma per gli angoli retti FBA , CBE , e per lo comune ABC essendo eguali i due angoli FBC , ABE , li due triangoli BCF , BEA debbono essere tra loro eguali (87), poiche anno ancora intorno a quelli angoli li due lati BC , BF eguali alli due lati BE , BA , ciascuno a ciascuno. Dunque ancora il quadrato $ABFG$ farà eguale al rettangolo $BELM$ (11). E dimostrandosi dell'istessa maniera l'altro quadrato $ACHI$ eguale all'altro rettangolo $CDLM$; faranno i due quadrati $ABFG$, $ACHI$ insieme eguali al solo quadrato $BCDE$ (13).

130. Che se poi il triangolo ABC sia ottusangolo in A , prolungato uno de' lati, che sono intorno all'angolo ottuso, come il lato BA , a dir-

GEOMETRIA PIANA. 47

rittura verso D , ed abbassata su di esso la perpendicolare CD dall'angolo opposto (50); sarà il quadrato del lato BC , che si oppone all'angolo ottuso, maggiore delli quadrati degli altri due lati BA , AC in due volte il rettangolo fatto dalle due BA , AD . Imperocchè, essendo il quadrato della tutta BD eguale alli quadrati delle parti BA , AD , e a due volte il rettangolo delle medesime parti (129); coll'aggiunta del comune quadrato della CD , saranno i quadrati delle due BD , CD eguali alli quadrati delle tre BA , AD , CD , e a due volte il rettangolo delle due BA , AD (13). Ma per l'angolo retto, che sta in D , li quadrati delle due BD , CD sono eguali al quadrato della BC (129); e per la stessa ragione li quadrati delle due AD , CD sono eguali al quadrato della AC . Dunque sarà il quadrato del lato BC opposto all'angolo ottuso eguale alli quadrati degli altri due lati BA , AC , e a due volte il rettangolo delle due BA , AD .

131. Finalmente se il triangolo ABC abbia in A un'angolo acuto, abbassata sopra uno de' lati, che lo contengono, come sul lato BA , la perpendicolare CD dall'angolo opposto; sarà il quadrato del lato BC , che si oppone all'angolo acuto, minore delli quadrati degli altri due lati BA , AC in due volte il rettangolo fatto dalle due BA , AD . Imperocchè, essendo li quadrati della tutta BA , e della parte AD eguali a due volte il rettangolo delle medesime, ed al quadrato dell'altra parte BD (120); coll'aggiunta del comune quadrato della CD saranno i quadrati delle tre BA , AD , CD eguali a due volte il rettangolo delle due BA , AD , ed alli quadrati dell'altre due BD , CD . Ma per gli angoli retti, che stanno in D , i quadrati delle due AD , CD sono eguali al quadrato della AC ; e li quadrati dell'altre due BD , CD sono eguali al quadrato della BC (129). Dunque li quadrati delli due lati BA , AC , che contengono l'angolo acuto, saranno eguali a due volte il rettangolo delle due BA , AD , ed al quadrato del lato

Fig. 16

lato BC opposto all'angolo acuto.

Fig. 57. 132. E quindi ora con facilità si possono dimostrare i converfi di tutte tre questi teoremi, cioè, che l'angolo in A del triangolo ABC debba essere retto quante volte il quadrato del lato opposto BC è eguale alli quadrati degli altri due lati BA, AC, debba essere ottuso quando è maggiore, e debba finalmente essere acuto quando è minore. Imperocchè se mai nel caso dell'uguaglianza l'angolo in A non fosse retto, dovrebbe egli essere o ottuso, o acuto. Ma nè l'uno, nè l'altro può essere; poicche con porsi ottuso farebbe il quadrato del lato BC maggiore delli quadrati degli altri due lati BA, AC (130); e con porsi acuto farebbe minore (131), quali cose sono contro l'ipotesi. Adunque nel caso dell'uguaglianza per necessità l'angolo in A dee essere retto. Ed egli è chiaro, che della stessa maniera si possono eziandio dimostrare gli altri due casi.

Fig. 57. 133. Ma quantevolte il quadrato del lato BC è eguale alli quadrati degli altri due lati, può dimostrarsi con facilità ancora positivamente, che l'angolo in A debba essere retto. Inalzisi per questo effetto sul lato AC la perpendicolare AD (49); e fatta la medesima eguale all'altro lato BA (31), congiungasi la CD. Poicche dunque sono eguali le due BA, AD; faranno eguali altresì i loro quadrati (112); onde coll'aggiunta del comune quadrato della AC, faranno i quadrati delle due BA, AC eguali ancora alli quadrati delle altre due AD, AC. Ma per l'ipotesi li primi due quadrati sono eguali al quadrato della BC, e per lo triangolo CAD rettangolo in A gli altri due quadrati sono eguali al quadrato della CD (129). Dunque il quadrato della BC sarà similmente eguale al quadrato della CD (11); e pertanto essendo eguali le due BC, CD (113), faranno i triangoli ABC, ADC perfettamente eguali tra loro (84); con che l'angolo BAC dovendo essere eguale all'angolo CAD, per necessità sarà egli retto.

134. Del rimanente dalle cose dimostrate egli è fa-

è facile a dedurne, che in ogni parallelogrammo, come ABCD, li quadrati delle due diagonali AC, BD debbano insieme essere eguali alli quadrati delli quattro lati AB, BC, CD, AD. Imperocchè, abbassate le perpendicolari AE, BF sopra i lati opposti BC, AD (50), si avrà l'altro parallelogrammo AEBF; e pertanto, essendo eguali così le due AD, BC, come le due BE, AF (91), farà il rettangolo della BC nella BE eguale al rettangolo della AD nella AF (113). Ma il quadrato della diagonale AC è minore delli quadrati de'lati AB, BC nel doppio del primo rettangolo (131); ed il quadrato della diagonale BD è maggiore delli quadrati de'lati AB, AD, ovvero CD, AD nel doppio del secondo (130). Dunque per esser tra loro eguali l'eccesso, ed il difetto saranno i quadrati delle due diagonali AC, BD insieme eguali alli quadrati delli quattro lati AB, BC, CD, AD.

Fig. 58.

§. V.

Della soluzione di alcuni problemi attinenti all'istesso argomento.

135. **P**ER mezzo di alcuni teoremi, che sono stati dimostrati in questo capitolo, possono ora risolversi molti problemi, attinenti all'argomento, di cui si tratta. E per incominciare dalli più facili, si puo in primo luogo, dati due quadrati, ritrovarne un terzo, che sia eguale alla somma delli due dati. Perciò sieno AB, BC li lati delli due dati quadrati. Inalzisi dal punto A sul lato AB la perpendicolare AD (49), la quale facciasi eguale all'altro lato BC (31). Congiungasi poscia la retta BD, e farà il quadrato di questa retta eguale alla somma delli due quadrati dati. Imperocchè, essendo eguali le due AD, BC, saranno i loro quadrati similmente eguali (113); onde coll'aggiunta del comune quadrato della AB, saranno li quadrati delle due AB, D AD

Fig. 59.

AD eguali ancora alli quadrati delle altre due AB , BC (13). Ma il quadrato della BD è eguale alli quadrati delle due AB , AD (129). Dunque il medesimo quadrato della BD farà eguale ancora alli quadrati delle due rette date AB , BC (11).

Fig.60.

136. In secondo luogo, dati due quadrati disuguali, puo ritrovarfene un terzo eguale alla differenza delli due dati. Perciò sieno di nuovo AB , BC li lati delli due quadrati dati, e sia AB il lato del quadrato minore, e BC il lato del quadrato maggiore. Si alzi dal punto A sul lato AB la perpendicolare AD (49); e descrivasi col centro B , e coll'intervallo BC la linea circolare CD , che s'incontri colla AD nel punto D . Ed io dico, che il quadrato della AD farà quello, che si dimanda. Per dimostrarlo, congiungasi la BD . E poiche le due BC , BD sono eguali, faranno eguali altresì i loro quadrati (113). Ma il quadrato della BD è eguale alli quadrati delle due AB , AD (129). Dunque alli medesimi quadrati delle due AB , AD farà eguale ancora il quadrato della BC (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della AB , farà la differenza delli quadrati descritti dalle due AB , BC eguale al solo quadrato della AD (13).

Fig.61.

137. In terzo luogo una retta data, come AB , puo prolungarsi talmente, che il rettangolo fatto dalla medesima così prolungata nella porzione aggiunta sia eguale al quadrato della sola retta data. Dividasi la AB in due parti eguali nel punto C (42), e ritrovisi un quadrato, che sia eguale alla somma di quelli fatti dalle due AB , BC (135). Prolunghisi la AB talmente per fino al punto D , che la porzione CD sia eguale al lato del quadrato ritrovato (31); e farà il rettangolo delle due AD , BD eguale al quadrato della retta data AB . Imperocchè, essendo la AB divisa in due parti eguali nel punto C , farà il rettangolo delle due AD , BD insieme col quadrato della BC eguale al quadrato della CD (124). Ma per la costruzione il quadrato della CD è eguale alli quadrati del-

delle due AB, BC . Dunque sarà il rettangolo delle due AD, BD insieme col quadrato della BC eguale alli quadrati delle due AB, BC (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della BC , rimarrà il rettangolo delle due AD, BD eguale al quadrato della retta AB (13).

138. In quarto luogo una data retta, come AB , Fig. 61. può dividersi talmente, che il rettangolo della tutta, e di una delle sue parti sia eguale al quadrato dell'altra parte. Si prolunghi la retta data AB per fino al punto D in modo, che il rettangolo delle due AD, BD sia eguale al quadrato della AB (137). Taglisi di poi dalla medesima AB la porzione BE eguale alla BD (31); e sarà il rettangolo della tutta AB nella parte AE eguale al quadrato dell'altra parte BE . Imperocchè, siccome il quadrato della AB è eguale alli rettangoli della stessa AB nelle parti AE, BE (118), così il rettangolo delle due AD, BD è eguale al rettangolo della AB nella BD ovvero BE , ed al quadrato della BD o sia BE (117). Ma per costruzione il quadrato della AB , ed il rettangolo delle due AD, BD sono eguali tra loro. Dunque li rettangoli della AB nelle parti AE, BE ancora saranno eguali al rettangolo della AB nella BE , ed al quadrato della BE (11); e pertanto, tolto il comune rettangolo della AB nella BE , rimarrà il rettangolo della tutta AB nella parte AE eguale al quadrato dell'altra parte BE .

139. Finalmente può ritrovarsi un quadrato, Fig. 62, che sia eguale ad un dato rettangolo. Perciò sieno AE, EB li lati del rettangolo dato, li quali pongansi tra loro a dirittura, e dividasi la tutta AB in due parti eguali nel punto C (42). Ritrovinsi di poi un quadrato, che sia eguale alla differenza delli due fatti dalle rette BC, CE (136); e se EF sia il lato di questo quadrato, sarà il rettangolo delle due AE, EB eguale al quadrato della EF . Imperocchè, essendo la retta AB divisa in due parti eguali nel punto C , sarà il rettangolo delle due AE, EB eguale alla differenza del-

$D \quad 2 \quad II$

li quadrati fatti dalle altre due BC , CE (122). Ma per costruzione a questa stessa differenza de' quadrati è eguale ancora il quadrato della EF . Dunque il rettangolo delle due AE , EB , ed il quadrato della EF saranno eguali tra loro (111).

140. Or essendosi fatto vedere di sopra (102), che data qualunque figura rettilinea, possa formarsi un parallelogrammo, che sia eguale alla data figura, ed abbia un'angolo eguale ad un'angolo dato; egli è chiaro, poterli sempre formare un rettangolo, che sia eguale a qualsivoglia figura rettilinea data. Quindi il problema della quadratura delle figure rettilinee, cioè di ritrovare quadrati, che sieno ad esse eguali, non dee farci difficoltà alcuna; poicche basterà formare un rettangolo eguale alla figura rettilinea data, ed indi per mezzo del problema precedente (139) ritrovare un quadrato, che sia eguale al rettangolo di già formato. E con farsi uso delli due primi problemi (135.136) si vede ancora, poterli collo stesso artificio ritrovare un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due figure rettilinee date.

CAPITOLO IV.

Della teoria del cerchio.

141. **Q**uantunque la teoria delle figure rettilinee non siasi ancora condotta a fine, pure tuttavolta ci conviene far passaggio alla teoria del cerchio; poicche ciò, che rimane a dirsi intorno a quella, riguarda soltanto le figure regolari, le quali siccome debbono essere specialmente considerate per la proprietà, che elle hanno, non meno di poterli situare nel cerchio per via d'iscrizione, e circonscrizione, che di dar sito al cerchio medesimo per le stesse strade, così non possono essere poste a calcolo senza l'anticipata conoscenza delle varie affezioni del cerchio. Argomento adunque del presente capitolo sarà la

teo-

GEOMETRIA PIANA. 53

teoria della figura circolare, la quale senza dubbio dee averfi come la più perfetta tra tutte le figure piane, che si possono immaginare.

§. I.

Della nozione del cerchio, e della determinazione del di lui centro.

142. **S**iccome si chiama cerchio la figura piana terminata dalla linea circolare, così questa linea considerata come termine del cerchio si appella ancora sua circonferenza. E poichè il distintivo di ciascuna figura piana dee dedursi dall'indole del suo termine; perciò quello del cerchio sarà di essere eguali tutte le rette, che dal centro cadono sulla circonferenza (27). Queste rette si appellano raggi del cerchio; e se ciascuna di esse si prolunghi di là dal centro per fino a che s'incontri di nuovo colla circonferenza nella parte opposta, la medesima tutta intera sarà chiamata diametro del cerchio.

143. Quindi diametro del cerchio sarà ogni retta, che passando per lo centro si termina dall'una, e l'altra parte della circonferenza. Ed egli è chiaro, che le due parti, nelle quali il cerchio si divide dal diametro, debbano essere tra di esse eguali, per la ragione, che piegandosi l'una sull'altra debbono combaciarsi tra loro, attesa l'uguaglianza delle rette, che cadono dal centro sulla circonferenza; e perciò ciascuna di dette parti, per essere la metà della figura intera, comunemente si appella semicerchio. Che se poi tirisi dentro del cerchio un'altra retta, la quale non passando per lo centro si termini ancora dall'una, e l'altra parte della circonferenza; siccome da essa rimane diviso il cerchio in due parti disuguali, così ciascuna di queste parti chiamasi generalmente porzione del cerchio.

144. Nè dee porsi in dubbio, che ogni altra retta, la quale unisce insieme due punti della cir-

D 3

con-

54 ELEMENTI DELLA

Fig. 63.

conferenza, cada dentro del cerchio, e lo divide sempre in due parti disuguali. Imperocchè, se B, e C sono i punti presi nella circonferenza, e BC la retta, che li congiunge; tirati dal centro A li raggi AB, AC, per l'uguaglianza di questi sarà l'angolo ACB eguale all'angolo ABC (72). Ma, preso nella BC un'altro punto D, e tirata la AD, per lo triangolo BAD, il cui lato BD sta prolungato in C, esser dee l'angolo ADC maggiore dell'angolo ABC (70). Adunque l'istesso angolo ADC sarà maggiore ancora dell'altro ACB (12); e perciò la AC sarà maggiore altresì della AD (75). Quindi, non potendo giungere la AD per fino alla circonferenza, caderà il punto D dentro del cerchio; e per la medesima ragione l'istesso avverrà a tutti gli altri punti della retta BC.

Fig. 64.

145. Or se dato un cerchio, come ABC, vogliasi di esso ritrovare il centro, prendansi nella sua circonferenza due punti ad arbitrio A, e B; e divisa la retta AB, che li congiunge, in due parti eguali nel punto D (42), inalzisi da questo punto sulla stessa AB la perpendicolare DC (49), la quale s'incontri colla circonferenza ne' punti C, ed E; dividasi finalmente la CE in due parti eguali in F, e questo punto F sarà il centro, che si dimanda. Se è possibile, sia il centro del cerchio fuori della CE, e sia il punto G. Congiunte adunque le rette AG, DG, BG, li due angoli ADG, BDG avranno non solo li lati AD, DG eguali alli lati BD, DG, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base AG eguale alla base BG; con che li medesimi faranno tra loro eguali (39), ed in conseguenza retti (47). Ma retti sono ancora gli angoli ADC, BDC, come fatti dalla perpendicolare DC. Dunque ciascuno delli due ADG, BDG sarà eguale a ciascuno degli altri due ADC, BDC (48); il che non può essere (14). Quindi il centro del cerchio dee essere nella CE; e perciò sarà il punto F, che la divide egualmente.

146. Ma siccome la retta CE, segando l'altra AB in due parti eguali, e ad angoli retti nel punto

to D, dee passare per lo centro del cerchio F; così per lo contrario posto, che ella sola passi per lo centro, possono intorno ad essa dimostrarsi due cose; I, che dividendo l'altra AB ad angoli retti, debba dividerla ancora in due parti eguali; e II, che dividendola in due parti eguali, debba dividerla eziandio ad angoli retti. Pongasi primieramente, che la AB sia divisa dalla CE ad angoli retti; e conforme per l'uguaglianza de' raggi AF, BF sono eguali gli angoli DBF, DAF (72), così per essere retti li due FDB, FDA ancora questi sono eguali tra loro (48). Quindi saranno eguali altresì gli altri due BFD, AFD (71), li quali avendo li lati BF, FD eguali alli lati AF, FD, ciascuno a ciascuno, avranno ancora la base BD eguale alla base AD (38). Pongasi in secondo luogo, che la AB sia divisa dall'altra CE in due parti eguali; ed avendo li due angoli ADF, BDF non solo li lati AD, DF eguali alli lati BD, DF, ciascuno a ciascuno, ma eziandio la base AF eguale alla base BF, dovranno i medesimi essere eguali (39), ed in conseguenza retti (47).

Fig. 65.

147. Ed essendo così, potremo inoltre dimostrare, che se dentro del cerchio s'interseghino due rette, come AB, CD, nel punto E, che non sia il centro del cerchio, non possa ciascuna di esse essere divisa in due parti eguali. Se è possibile, così l'una, come l'altra sia divisa egualmente nel punto E. Ritrovansi il centro del cerchio F (145), e congiungasi la retta FE. Poicche dunque la FE passa per lo centro, e sega l'altra AB, che non vi passa, in due parti eguali nel punto E; la segnerà ancora ad angoli retti (146); e perciò l'angolo FEA farà retto. Ma per la stessa ragione dee essere retto ancora l'angolo FEC. Dunque li due angoli FEA, FEC saranno tra loro eguali (48); qual cosa non potendo essere (14), non sarà egli vero, che ciascuna delle due AB, CD sia divisa egualmente nel punto E.

Fig. 66.

148. Potremo eziandio dimostrare, che se da un punto preso dentro del cerchio, come A, cadono

Fig. 67.

D 4

sulla

sulla sua circonferenza tre rette eguali AB , AC , AD , forzosamente quel punto debba essere il centro del cerchio. Congiungansi le due BC , CD ; e divise le medesime in due parti eguali ne' punti E , ed F (42), congiungansi le altre due AE , AF . Poicche dunque li due angoli AEB , AEC anno non solo li lati AE , EB eguali alli lati AE , EC , ciascuno a ciascuno, ma ancora la base AB eguale alla base AC ; saranno li medesimi eguali tra loro (39), ed in conseguenza retti (47); onde la AE , tagliando l'altra BC in due parti eguali, e ad angoli retti nel punto E , dovrà passare per lo centro del cerchio (146). Ma per la stessa ragione eziandio la AF dee passare per lo stesso centro. Dunque il centro del cerchio sarà situato in ciascuna delle due AE , AF ; e perciò dovrà essere il punto A , che è il solo, in cui quelle rette s'incontrano.

149. E quindi non solo del cerchio intero, ma di qualunque sua porzione potrà determinarsi il centro. Sia ABC la porzione del cerchio data. Congiungasi la AC , la quale dividasi in due parti eguali nel punto D (42). Alzisi da questo punto sulla stessa AC la perpendicolare DB (49), e congiungasi l'altra AB . Se dunque li due angoli ABD , BAD sono eguali tra loro, sarà D il centro, che si dimanda; poicche, siccome per la costruzione sono eguali le due AD , CD , così per l'uguaglianza di quelli angoli saranno eguali ancora le altre due AD , BD (73); onde essendo eguali le tre AD , BD , CD , per necessità sarà D il centro della porzione (148). Che se poi li due angoli ABD , BAD non sono eguali, facciasi l'angolo BAE eguale all'angolo ABD (40), ed in questo caso il centro, che si dimanda, sarà il punto E , in cui la AE s'incontra colla BD ; poicche, siccome per l'uguaglianza degli angoli BAE , ABD sono eguali le due BE , AE (73), così per l'uguaglianza degli angoli ADE , CDE sono eguali altresì le altre due AE , CE (38); con che essendo le tre AE , BE , CE eguali tra loro, dovrà esse-

Fig. 68.
69. 70.

essere E il centro della porzione (148).

§. II.

Dell'ordine, che serbano le rette tirate alla circonferenza del cerchio.

150. **S**iccome per la nozione del cerchio debbono essere eguali tutte le rette, che dal centro cadono sulla circonferenza; così giova il dimostrare, quale ordine serbino tra loro le rette, che da ogni altro punto, che non sia il centro, si tirano alla stessa circonferenza. Ma intorno a questo argomento debbono distinguere due casi; de' quali il primo si è, quando il punto, da cui partono le rette, si prende dentro del cerchio; e l'altro, quando l'istesso punto si prende fuori. Sia perciò il cerchio ABCD, che abbia per suo centro il punto E; e preso primieramente dentro di esso un'altro qualsivoglia punto F, tirinsi da questo punto alla circonferenza le rette FA, FB, FC, FD.

Fig. 71.

151. Io dico in primo luogo, che la massima di tutte debba essere la FA, che passa per lo centro E; e la minima l'altra FD, che giace con quella a dirittura. Imperocchè, congiunte le rette EB, EC, saranno le due FE, EB insieme maggiori della FB (24). Ma, essendo la EA eguale alla EB, coll'aggiunta della comune FE sarà la FA eguale alle due FE, EB (13). Dunque ancora la FA sarà maggiore della FB (12); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FA sia maggiore di ogni altra retta, sarà la medesima FA la massima di tutte. In oltre la ED, come eguale alla EC, è minore delle due EF, FC. Dunque, tolta la comune EF, sarà la FD minore ancora della FC (13); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FD sia minore di ogni altra retta, sarà la medesima FD la minima di tutte.

152. Io dico in secondo luogo, che dell'altre rette FB, FC la FB più vicina alla massima debba

ba essere maggiore della FC, che ne sta più lontana; e di più che ciascuna di esse debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Imperocchè, essendo l'angolo FEB maggiore dell'angolo FEC, ed avendo questi stessi angoli li lati FE, EB eguali alli lati FE, EC, ciascuno a ciascuno; farà la base FB maggiore ancora della base FC (44). Ed inoltre, perche fatto l'angolo FEG eguale all'angolo FEB (40), questi medesimi angoli si ritrovano avere li lati FE, EG eguali alli lati FE, EB, ciascuno a ciascuno; farà altresì la base FG eguale alla base FB (38); e dell'istessa maniera con farsi l'angolo FEH eguale all'angolo FEC si dimostrerà essere la FH eguale all'altra FC.

Fig.72. 153. Prendasi poscia il punto F fuori del cerchio; e se le rette FA, FB, FC cadono sulla circonferenza concava, io dico I, che la massima di tutte sia la FA, che passa per lo centro E; II, che dell'altre FB, FC la FB più vicina alla massima debba essere maggiore della FC, che ne sta più lontana; e III, che ciascuna di queste debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Imperocchè, congiunte le rette EB, EC, faranno le due FE, EB maggiori della FB (24). Ma, essendo la EA eguale alla EB, coll'aggiunta della comune FE farà la FA eguale alle due FE, EB (13). Dunque ancora la FA farà maggiore della FB (12); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FA sia maggiore di ogni altra retta, farà la medesima FA la massima di tutte. Essendo poscia l'angolo FEB maggiore dell'angolo FEC, ed avendo questi stessi angoli li lati FE, EB eguali alli lati FE, EC, ciascuno a ciascuno; farà la base FB maggiore ancora della base FC (44). E finalmente, fatti gli angoli FEG, FEH eguali agli altri due FEB, FEC, ciascuno a ciascuno (40), farà tanto la FG eguale alla FB, quanto la FH eguale alla FC (38).

Fig.73. 154. Che se poi le rette FB, FC, FD, le quali partono dal punto F, cadono sulla circonferenza convessa, io dico I, che la minima di tutte sia la
FD,

GEOMETRIA PIANA. 59

FD, che prolungata passa per lo centro E; II, che dell'altre FC, FB la FC più vicina alla minima debba essere minore della FB, che ne sta più lontana; e III, che ciascuna di queste debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Imperocchè, tirate dal centro E le rette EB, EC, sarà la FE minore delle due FB, EB insieme (24); con che, tolte le eguali ED, EB, sarà la FD minore ancora della FB (13); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FD sia minore di ogni altra retta, sarà la medesima FD la minima di tutte. Essendo poscia l'angolo FEC minore dell'angolo FEB, ed avendo questi stessi angoli li lati FE, EC eguali alli lati FE, EB, ciascuno a ciascuno, sarà la base FC minore ancora della base FB (44). E finalmente, fatti gli angoli FEG, FEH eguali agli altri due FEB, FEC, ciascuno a ciascuno (40), sarà tanto la FG eguale alla FB, quanto la FH eguale alla FC (38).

155. Del rimanente possono tirarsi rette alla circonferenza del cerchio, senza che partano da un medesimo punto; e qualora queste rette si terminano dall'una, e l'altra parte della circonferenza, ancora esse serbano tra loro un certo ordine; il quale però per bene intendersi, giova prima l'avvertire, che siccome la distanza tra due punti si misura per la retta, che li congiunge insieme (23), così la distanza tra un punto, ed una retta debba misurarsi per la perpendicolare abbassata sulla retta dal punto medesimo. E la ragion si è, perche siccome la retta è la più corta di tutte le linee, che anno gli stessi termini; così la perpendicolare abbassata da un dato punto sopra una retta data è la più corta di tutte le rette, che dall'istesso punto cadono sulla stessa retta: qual cosa si ricava facilmente dal teorema di sopra dimostrato (75), cioè, che in ogni triangolo ad angolo maggiore debba essere opposto lato parimente maggiore.

156. Ciò avvertito, dimostreremo in primo
luo.

luogo, che se due rette adattate dentro del cerchio sono egualmente distanti dal suo centro, debbano le medesime essere tra loro eguali.

Fig. 74. Perciò sia il cerchio ABC, che abbia per centro il punto E, e dentro di esso adattinsi le due rette AB, CD, le quali sieno egualmente distanti dal centro E. Abbassate adunque su di esse le perpendicolari EF, EG (50), saranno queste eguali trà loro (155), ed in conseguenza eguali altresì saranno li quadrati fatti dalle medesime (113). E poicche, congiunte le due AE, CE, ancora queste sono eguali; sarà il quadrato della AE similmente eguale al quadrato della CE. Ma il quadrato della AE è eguale alli quadrati delle due AF, EF; ed il quadrato della CE è eguale alli quadrati delle due CG, EG (129). Dunque ancora li quadrati delle due AE, EF saranno eguali alli quadrati delle altre due CG, EG (11); e per tanto, tolti li quadrati fatti dalla EF, e dalla EG, che sono eguali, rimarrà il quadrato della AF eziandio eguale al quadrato della CG (13); con che le due AF, CG saranno tra loro eguali. Ma queste sono le metà delle rette AB, CD, che sono divise egualmente dalle perpendicolari EF, EG (146). Dunque ancora le rette AB, CD saranno tra loro eguali (11).

Fig. 74. 157. Dimostreremo in secondo luogo, che se due rette adattate dentro del cerchio sono eguali tra loro, debbano le medesime essere egualmente distanti dal centro. Perciò sia di nuovo il cerchio ABC, che abbia per centro il punto E, ed adattinsi dentro di esso le due rette eguali AB, CD. E poicche queste rette sono divise egualmente dalle perpendicolari EF, EG abbassate su di esse (146); saranno le loro metà AF, CG ancora eguali (11), ed in conseguenza il quadrato della AF farà similmente eguale al quadrato della CG (113). Ma li quadrati delle due AF, EF sono eguali alli quadrati delle due CG, EG; per essere li primi eguali al quadrato della AE, e li

se-

GEOMETRIA PIANA. 61

secondi eguali al quadrato della CE (129). Dunque, tolti li quadrati fatti dalla AF , e dalla CG , che sono eguali, rimarrà il quadrato della EF eguale al quadrato della EG (13); con che le due EF , EG saranno tra loro eguali. Ma queste misurano le distanze delle rette AB , CD dal centro E (155). Dunque le rette AB , CD saranno egualmente distanti dal centro.

138. Dimostreremo finalmente, che adattandosi nel cerchio molte rette, la massima di tutte debba essere il diametro, ovvero quella, che passa per lo centro; e che dell'altre la più vicina al centro debba essere maggiore della più lontana. Perciò sia il cerchio ABC , che abbia per centro il punto G , ed adattinsi dentro di esso le tre rette AB , CD , EF , delle quali siccome la AB passa per lo centro, così la CD sia più vicina al centro dell'altra EF . Congiunte adunque le rette CG , DG , saranno queste due insieme maggiori della CD (24). Ma, essendo eguali così le due AG , CG , come le due BG , DG . dee essere la AB eguale alle due CG , DG (13). Dunque ancora la AB farà maggiore della CD (12); e dimostrandosi della stessa maniera, che la AB sia maggiore di ogni altra retta, farà la medesima AB la massima di tutte. Abbassandosi poscia sull'altre due CD , EF le perpendicolari GH , GI (50), in vigor della ipotesi dee essere la GH minore della GI ; con che tagliandosi da questa la porzione GL eguale alla GH (31), e tirandosi per lo punto L la retta MN parallela alla EF (65), saranno le due CD , MN eguali tra loro (156). Ma per l'angolo MGN maggiore dell'angolo EGF la MN è maggiore della EF (44). Dunque ancora la CD farà maggiore della EF (12).

Fig. 75.

S. III.

§. III.

*Dell'incontro eost di due cerchi, come del
cerchio, e della retta.*

159. **D**UE cerchi possono incontrarsi tra loro in due maniere, cioè o segandosi, o pure toccandosi. Si dicono due cerchi segarsi, quando s'incontrano talmente, che una porzione dell'uno cada dentro di una porzione dell'altro. Per lo contrario si dicono toccarsi, quando il loro incontro si fa con legge tale, che uno di essi cada interamente o dentro, o fuori dell'altro. Quindi i cerchi, che si toccano, possono ancora toccarsi in due modi diversi, cioè o al di dentro, o al di fuori. Imperocchè, siccome quando uno cade interamente dentro dell'altro, si dicono toccarsi al di dentro; così al contrario quando uno cade interamente fuori dell'altro, si dicono al di fuori toccarsi tra loro.

160. Or siccome i cerchi, che si toccano al di fuori, non possono avere l'istesso centro; così egli è facile a dimostrare, che nè pure debbano averlo tanto quelli, che si toccano al di dentro, quanto coloro, che s'intersecano. Perciò sieno primieramente li due cerchi ABC, ADE, li quali si tocchino al di dentro nel punto A; e se è possibile, abbiano l'istesso centro, che sia F. Congiunta adunque la FA, e tirata l'altra FBD, che s'incontri colle circonferenze ne' punti B, e D; farà alla stessa FA eguale tanto la FB, quanto la FD; con che le due FB, FD saranno tra loro eguali (11), il che non può essere (14). E dell'istessa maniera si dimostrerà, che intersemandosi li due cerchi ABC, ADE, nè pure essi possono avere un medesimo centro.

161. E quindi per gli cerchi, che s'intersecano, agevol cosa è il dimostrare, che il loro interseco debba farsi in due soli punti. Sieno li due cerchi ACDE, BCDE, li quali, se sia possibile,

GEOMETRIA PIANA. 63

bile, s'interseghino tra loro ne'tre punti C, D, E . Ritrovifi il centro del cerchio $ACDE$ (145), e sia il punto F . Congiunte adunque le rette FC, FD, FE , bisognerà, che queste come tirate dal centro alla circonferenza sieno tra loro eguali. Onde, perche dentro dell'altro cerchio $BCDE$ si è preso il punto F , da cui cadono sulla sua circonferenza tre rette eguali FC, FD, FE ; sarà l'istesso punto F centro ancora dell'altro cerchio $BCDE$ (148). Ma li cerchi, che s'interseghano, non possono avere un medesimo centro (160). Dunque non è egli vero, che l'intersegamento de' due cerchi $ACDE, BCDE$ possa farsi in tre punti, e pertanto si farà in due punti solamente.

162. Per gli cerchi poi, che si toccano, si conoscerà, come debba farsi il loro contratto, dopo essersi dimostrato intorno ad essi questo teorema, cioè, che la retta, la quale unisce i loro centri, debba passare per lo luogo del contratto. Perciò Fig. 79. sieno li due cerchi AB, AC , li quali si tocchino primieramente al di dentro in un qualche luogo, come A ; e posto, che D sia il centro del primo, ed E il centro del secondo, congiungansi questi centri per la retta DE , la quale, se è possibile, non passi per lo luogo del contatto, ma seghi le circonferenze nelli due punti B, C . Tirate adunque le rette AD, AE , saranno le due AD, DE insieme maggiori della AE , o pure della sua eguale CE (24). Ma, essendo la AD eguale alla BD , coll'aggiunta della comune DE le due AD, DE insieme sono eguali alla BE (13). Dunque ancora la BE sarà maggiore della CE (12), il che non può essere (14).

163. Non molto diversa sarà la dimostrazione, se Fig. 80. li due cerchi AB, AC si tocchino al di fuori nel luogo A . Imperocchè ancora negativamente si farà vedere, che la retta, per cui si congiungono i loro centri, debba passare per lo luogo del contatto. In effetto posto di nuovo, che D sia il centro del primo, ed E il centro del secondo, congiungansi questi centri per la retta DE , la quale, se

se è possibile, non passi per lo luogo del contatto, ma seghi le circonferenze nelli due punti B, e C. Tirate adunque le rette AD, AE, faranno queste insieme maggiori della DE (24). Onde, tolte le eguali AD, BD, rimarrà la AE maggiore ancora della BE (13). Ma la AE è eguale alla CE. Dunque similmente la CE sarà maggiore della BE (12), il che non può essere (14).

Fig. 81. 164. Dimostrato questo teorema, egli è facile ora a far vedere, che il contatto de' due cerchi debba farsi in un sol punto, sia che quelli si tocchino al di dentro, sia che si tocchino al di fuori. Perciò sieno AB, AC questi tali cerchi, li quali si tocchino primieramente al di dentro nel punto A. Posto adunque, che D sia il centro del primo, ed E il centro del secondo, dovrà la retta DE passare per il punto A (162), e sarà la DA minore di ogni altra retta, che può tirarsi dal punto D alla circonferenza AC (151). Ma le altre rette, che dall'istesso punto D cadono sulla circonferenza AB, sono eguali alla DA. Dunque niuna di queste altre rette potrà giungere per fino alla circonferenza AC; e pertanto li due cerchi AB, AC si toccheranno semplicemente nel punto A.

Fig. 82. 165. In una maniera non dissimile si dimostrerà ancora, che se li due cerchi AB, AC si tocchino al di fuori nel punto A, non possano i medesimi toccarsi altrove. Imperocchè, posto di nuovo, che D sia il centro del primo cerchio, ed E il centro del secondo, dovrà la retta DE passare per lo punto A (163), e sarà la DA minore di ogni altra retta, che può tirarsi dal punto D alla circonferenza AC (154). Ma le altre rette, che dall'istesso punto D cadono sulla circonferenza AB, sono eguali alla DA. Dunque niuna di queste altre rette potrà giungere per fino alla circonferenza AC; ed in conseguenza li due cerchi AB, AC si toccheranno semplicemente nel punto A.

166. Similmente una retta può incontrarsi col cerchio in due maniere, cioè o segandolo, o pure toccandolo. Si dice una retta essere secante del
del

del cerchio, quando s'incontra con quello talmente, che prolungata cada dentro del medesimo, e ne tagli qualche porzione. Ed egli è facile ad intendersi, che l'intersegamento di una retta col cerchio debba farsi in due soli punti; poicche volendosi sopra una data retta da un punto preso fuori di essa tirare rette eguali, non possono tirarsene se non se due, per la ragione, che se mai se ne potessero tirare tre, quella di mezzo farebbe colla data retta angoli tali dall'una, e l'altra parte, che uniti insieme farebbero minori di due retti, il che non puo essere (51).

167. Per lo contrario poi si dice una retta essere tangente del cerchio, quando lo incontra con legge tale, che prolungata cada tutta fuori di quello. Ed egli è facile il dimostrare, che tale debba essere la perpendicolare alzata sul diametro del cerchio dalla sua estremità. Imperocchè, Fig. 83. posto, che ABC sia il cerchio, e che AE sia la retta alzata perpendicolarmente sul diametro AC dal suo termine A; se dal centro D ad un'altro punto F di questa perpendicolare tirisi la retta DF, faranno li due angoli DAF, DFA insieme minori di due retti (71); e perciò l'angolo DAF come retto sarà maggiore dell'altro DFA. Quindi ancora la DF sarà maggiore della DA (75), ed in conseguenza il punto F starà fuori del cerchio. Ma la stessa dimostrazione puo applicarsi ad ogni altro punto della retta AE. Dunque la AE caderà tutta fuori del cerchio, e pertanto sarà sua tangente.

168. Ma agevol cosa è ancora il dimostrare, che essendo una retta tangente del cerchio, quella, che unisce il centro col punto del contatto, debba essere perpendicolare sulla tangente. Perciò Fig. 83. sia la retta AE tangente del cerchio ABC, e dal centro D al punto del contatto A tirisi l'altra DA. E se mai questa non è perpendicolare sulla tangente AE, sia tale l'altra DF. Essendo adunque li due angoli DAF, DFA insieme minori di due retti (71), sarà l'angolo DFA come retto

E mag-

maggiore dell'altro DAF . Quindi ancora la DA farà maggiore della DF (75); e per tanto non potendo la DF giungere per fino alla circonferenza, starà il punto F dentro del cerchio; con che la AE non farà tangente, ma secante (166). Ed essendo ciò contro l'ipotesi, dobbiam conchiudere, che la DA sia perpendicolare sulla tangente AE .

Fig. 83 169. E quindi si potrà eziandio dimostrare, che essendo una retta tangente del cerchio, la perpendicolare alzata su di essa dal punto del contatto debba passare per lo centro del cerchio. Perciò sia di nuovo la retta AE tangente del cerchio ABC , su di cui inalzisi dal punto del contatto A la perpendicolare AC . E se mai questa non passa per lo centro del cerchio, sia detto centro il punto G situato fuori della AC . Congiunta adunque la retta GA , farà quest'altra ancora perpendicolare sulla tangente AE (168); e per tanto li due angoli CAE , GAE come retti saranno tra loro eguali (48). Ma questo non può essere (14). Dunque non è egli vero, che il centro del cerchio ritrovasi fuori della retta AC ; e perciò la AC passerà per detto centro.

Fig. 84 170. Si potrà finalmente dimostrare, che ad un medesimo punto del cerchio non possa tirarsi, se non che una sola tangente. Imperocchè, se mai al punto A del cerchio ABC si potessero tirare due tangenti, come AE , AF ; congiunto il centro D col punto del contatto A per la retta DA , dovrebbe essere retto così l'angolo DAE , come l'angolo DAF (168); e pertanto li due angoli DAE , DAF farebbero eguali tra loro (48), il che non può essere (14). Posto adunque, che la retta AE sia tangente del cerchio, ogni altra retta tirata dal punto del contatto A bisognerà, che sia secante. Come in effetto se AF sia quest'altra retta, su di cui si abbassi la perpendicolare DG (50); farà l'angolo DGA maggiore dell'angolo DAG ; e per tanto, dovendo essere la DA maggiore ancora della DG (75), caderà il punto G dentro del cerchio, ed in conseguenza la DF farà secante (166).

171. Del

GEOMETRIA PIANA. 67

171. Del rimanente, siccome dovendosi ad un dato punto del cerchio tirare la tangente, basterà alzare la perpendicolare sul diametro tirato a quel punto (167); così per tirare la tangente ad un dato cerchio da un punto dato fuori di esso, potrà farsi uso della seguente costruzione. Sia AB il dato cerchio, e C il punto dato fuori. Ritrovifi il centro del cerchio, che sia D (145); e congiungasi la CD , che seghi il cerchio nel punto A . S'inalzi di poi sopra la stessa CD la perpendicolare AE (49), che s'incontri coll'altro cerchio descritto col centro D , e coll'intervallo DC nel punto E . E tirata la DE , che seghi il cerchio AB nel punto B , farà CB la tangente, che si dimanda. Imperocchè, avendo li due triangoli ADE , BDC intorno al comune angolo D li due lati DA , DE eguali alli due lati DB , DC , ciascuno a ciascuno; saranno li medesimi perfettamente eguali tra loro (87), ed in conseguenza farà l'angolo DAE eguale all'angolo DBC . Ma per la costruzione l'angolo DAE è retto. Dunque farà retto ancora l'angolo DBC ; e per tanto la CB farà tangente del cerchio AB (167).

Fig. 85.

§. IV.

Degli angoli situati così nel centro, come nella circonferenza del cerchio.

172. **U**N'angolo dicesi situato nel centro del cerchio; quando egli ha per suo vertice il centro medesimo; ma se vertice dell'angolo sia un punto della circonferenza, in tal caso l'angolo si dirà situato nella circonferenza del cerchio. Così l'uno, come l'altro angolo colli suoi lati dee sempre appoggiarsi sopra una qualche porzione della circonferenza, che chiamasi arco. E qualora l'angolo sta situato nella circonferenza medesima, si dirà egli essere propriamente in quella porzione del cerchio, che ha per suo termine il rimanente di quell'arco, su di cui l'angolo si

E 2 ap-

Fig. 86. appoggia. Così nel cerchio ABC, il cui centro è il punto D, l'angolo BDC si dirà essere nel centro, e l'angolo BAC nella circonferenza; e conforme amendue si appoggiano sull'arco BC, così il secondo di essi propriamente dicesi essere nella porzione del cerchio terminata dal rimanente arco BAC.

173. Or intorno a questi angoli il primo teorema, che bisogna dimostrare, si è, che appoggiandosi ambedue su di un medesimo arco, debba l'angolo al centro essere doppio dell'angolo alla circonferenza. Per dimostrarlo, congiungasi la retta AD, e prolunghisi a dirittura verso E. Essendo dunque eguali le due AD, BD; faranno eguali ancora gli angoli opposti DBA, DAB (72); e per tanto amendue insieme faranno doppii del solo DAB. Ma per lo triangolo ADB, il cui lato AD sta prolungato in E, l'angolo BDE è eguale alli due angoli DBA, DAB uniti insieme (76). Dunque ancora l'angolo BDE farà doppio dell'angolo DAB. E dimostrandosi dell'istessa maniera, che l'angolo CDE sia parimente doppio dell'angolo DAC; farà tutto l'angolo BDC situato nel centro doppio di tutto l'angolo BAC situato nella circonferenza.

Fig. 87. 174. Egli è vero, che l'angolo BAC può essere situato così obliquamente per rapporto all'altro BDC, che prolungandosi la AD verso E cada questa fuori dell'angolo BDC. Ma ancora in questo caso la dimostrazione è quasi la medesima. Imperocchè, siccome ciascuno delli due angoli BDE, CDE dee essere doppio di ciascuno degli altri due DAB, DAC; così con togliersi tanto l'angolo CDE dall'angolo BDE, quanto l'angolo DAC dall'angolo DAB, rimarrà di nuovo l'angolo BDC situato nel centro doppio dell'angolo BAC situato nella circonferenza. Onde, qualunque sia la posizione delli due angoli, purché amendue si appoggino su di un medesimo arco, farà sempre l'angolo al centro doppio dell'angolo alla circonferenza.

175. E quindi si vede in primo luogo, che gli

a n-

GEOMETRIA PIANA. 69

angoli situati in una medesima porzione del cerchio debbano tutti essere tra loro eguali. Sia perciò il cerchio ABC , che abbia per centro il punto D , e nella medesima sua porzione $BAEC$ sieno situati li due angoli BAC , BEC . Congiungansi le rette DB , DC ; ed essendo l'angolo BDC doppio così dell'angolo BAC , come dell'angolo BEC (173), per necessità li due angoli BAC , BEC faranno tra loro eguali (11). Egli è vero, che le due DB , DC possono tal volta, o stare a dirittura, o formare angolo verso la porzione medesima; ma tirandosi ad arbitrio la terza DF , puo farsi uso delli due angoli BDF , CDF , li quali siccome insieme debbono essere doppii di ciascuno delli due BAC , BEC , così faranno, che questi altri sieno sempre tra loro eguali (11).

Fig. 88.

176. Si vede in secondo luogo, che in un quadrilatero iscritto nel cerchio gli angoli opposti insieme debbano essere eguali a due retti. Imperocchè, se ABC sia il cerchio, ed $ABCD$ il quadrilatero iscritto nel medesimo; tirate le diagonali AC , BD , farà tanto l'angolo BAC eguale all'angolo BDC , quanto l'angolo DAC eguale all'angolo DBC (175); con che farà tutto l'angolo BAD eguale alli due BDC , DBC ; ed apposto il comune BCD faranno li due BAD , BCD eguali alli tre BDC , DBC , BCD (13). Ma questi tre insieme, come attinenti ad un'istesso triangolo, sono eguali a due retti (71). Dunque eguali ancora a due retti faranno li due BAD , BCD ; e dell'istessa maniera si dimostrerà essere similmente eguali a due retti gli altri due ABC , ADC .

Fig. 89.

177. Conforme poi l'angolo situato in una data porzione del cerchio dee essere da per tutto sempre lo stesso (175), così farà egli retto quando la porzione è semicerchio, farà acuto quando la porzione è maggiore del semicerchio, e farà finalmente ottuso quando per lo contrario la porzione è minore del semicerchio. Perciò sia il cerchio ABC diviso in due semicerchi dal diametro BC . E siccome l'angolo BAC sta situato nel semicerchio,

Fig. 90.

E 3 così

così l'angolo ABC ritrovasi in una porzione maggiore del semicerchio, e l'angolo AEC in una porzione minore. Dal centro D tirisi una retta ad arbitrio, che sia DF ; e li due angoli BDF , CDF insieme faranno doppi dell'angolo BAC (173). Onde siccome quelli insieme sono eguali a due retti (51), così l'angolo BAC dovrà essere retto. Ma li due BAC , ABC insieme sono minori di due retti (71). Dunque l'altro ABC farà minore del retto, ed in conseguenza acuto. Ed in fine, poichè li due ABC , AEC insieme sono eguali a due retti (176); farà il terzo AEC maggiore del retto, e per tanto ottuso.

Fig. 91.

178. Essendo così, potrà in oltre dimostrarsi, che se una retta tocchi il cerchio, e dal punto del contatto se ne tiri un'altra, che seghi l'istesso cerchio in due porzioni; gli angoli fatti dalla secante colla tangente debbano essere eguali a quelli, che alternatamente gli corrispondono nelle dette porzioni. Perciò sia il cerchio ABC , che abbia per sua tangente nel punto A la retta EF . Tirisi da quel punto un'altra retta, che seghi il cerchio; e sia primieramente la AC , che passa per lo centro D . E dovendo questa retta essere perpendicolare sulla EF (168), faranno retti li due angoli CAE , CAF . Ma retti sono ancora gl'angoli situati nelle due porzioni formate per la AC , per essere semicerchio ciascuna delle dette porzioni (177). Dunque in questo caso non dee porsi in dubbio, che gli angoli CAE , CAF fatti dalla secante AC colla tangente EF sieno eguali a quelli, che alternatamente gli corrispondono nelle due porzioni del cerchio.

179. Che se poi la secante del cerchio tirata dal punto del contatto A sia un'altra qualsivoglia retta AB , si dimostreranno li due angoli BAE , BAF fatti dalla secante AB colla tangente EF eguali a quelli, che gli corrispondono alternatamente nelle due porzioni ACB , AGB nella seguente maniera. Congiungasi la BC . E poichè l'angolo ABC come esistente nel semicerchio è retto (177); faranno li due BAC , BCA insieme ancora eguali

GEOMETRIA PIANA. 71

li ad un retto (71). Quindi, essendo retto l'angolo CAE, sarà questo solo eguale alli due BAC, BCA; e per tanto, tolto il comune BAC, rimarrà l'angolo BAE eguale all'angolo BCA (12). Inoltre, poicche sono eguali a due retti, così li due BAE, BAF (51), come li due BCA, BGA (176); faranno li due BAE, BAF eguali alli due BCA, BGA (11). Ma l'angolo BAE di già è stato dimostrato eguale all'angolo BCA. Dunque ancora l'altro BAF sarà eguale all'altro BGA.

180. È quindi, siccome con dimostrazione negativa egli è facile a pruovarsi, che essendo gli angoli BAE, BAF eguali agli altri due BCA, BGA, ciascuno a ciascuno, debba essere la EF tangente del cerchio; così si potrà facilmente da un dato cerchio tagliare una porzione, che sia capace di un'angolo eguale ad un'altro angolo dato. Imperocche, se ABC sia il cerchio dato, e ad un punto di esso A tirisi la tangente AD (171), facendosi l'angolo DAB eguale all'angolo dato (40), sarà BCA la porzione, che si dimanda. Per dimostrarlo, pongasi in detta porzione un'angolo, che sia ACB. E poicche la retta AD è tangente del cerchio, e dal punto del contatto A si è tirata l'altra AB, che sega il cerchio in due porzioni; farà l'angolo DAB fatto dalla tangente, e dalla secante eguale all'angolo ACB, che sta nella porzione opposta del cerchio (178). Ma per la costruzione l'angolo DAB è eguale all'angolo dato. Dunque all'istesso angolo dato sarà eguale ancora l'angolo ACB (11). Fig. 92.

181. Si potrà parimente sopra di una data retta, come AB, descrivere una porzione di cerchio, che sia capace di un'angolo eguale ad un'altro angolo dato. Dividasi la AB in due parti eguali nel punto C (42); ed essendo retto l'angolo dato, egli è chiaro, che il semicerchio descritto col centro C, e l'intervallo CA, ovvero CB debba essere la porzione, che si dimanda, per la ragione, che l'angolo situato nel semicerchio dee essere retto (177). Che se poi l'angolo dato Fig. 93.
94-95.

E 4

non

non sia retto, facciasi l'angolo BAD eguale all'angolo dato (40), ed alzate sopra le due AB, AD le perpendicolari CE, AE (49), che s'incontrino tra loro nel punto E , farà questo il centro della porzione, che si dimanda. Imperocche, essendo eguali li due angoli ACE, BCE , ed avendo i medesimi angoli li lati AC, CE eguali alli lati BC, CE , ciascuno a ciascuno; faranno eguali ancora le loro basi AE, BE (38); e per tanto il cerchio, che descrivesi col centro E , e l'intervallo EA , passerà ancora per lo punto B . Ma la AD come perpendicolare sul diametro AG è tangente di questo cerchio (167). Dunque l'angolo situato nella porzione AFB farà eguale all'angolo BAD , (178), ed in conseguenza eguale ancora all'angolo dato (11).

182. Per estendere più oltre la teoria degli angoli situati così ne' centri, come nelle circonferenze de' cerchi, notifi, che sicome due porzioni de' cerchi, che sono capaci di angoli eguali, si diranno da qui innanzi simili tra loro, così le porzioni simili situate su di una medesima retta debbono essere ancora eguali. Per dimostrarlo, sieno ACB, ADB le due porzioni simili situate sopra l'istessa retta AB ; e se è possibile, cada l'una dentro dell'altra. Tirisi dal punto A una retta qualsivoglia ACD , che s'incontri cogli archi, che terminano dette porzioni, ne' punti $C, e D$; e congiungansi le altre due BC, BD . Adunque per essere simili le due porzioni ACB, ADB , farà l'angolo ACB situato nella prima eguale all'angolo ADB situato nella seconda. Ma questo è falso, poiche nel triangolo BDC stando il lato DC prolungato in A dee essere l'angolo ACB maggiore dell'angolo ADB (70). Dunque non è egli vero, che delle due porzioni ACB, ADB una cada dentro dell'altra; e per tanto dovendosi quelle porzioni combaciare, faranno le medesime tra loro eguali (15).

183. Ma eguali altresì debbono essere le porzioni simili situate sopra rette eguali. Perciò sieno le due

due

GEOMETRIA PIANA. 73

due rette eguali AB, CD , sopra le quali sieno situate le due porzioni simili AEB, CFD . Adattisi col pensiero l'una sopra l'altra in modo tale, che il punto A cada sul punto C , e la retta AB sulla retta CD . Essendo adunque eguali le due AB, CD , caderà ancora il punto B sul punto D ; ed in conseguenza le due porzioni si ritroveranno situate sopra una medesima retta. Ma di già è stato dimostrato, che le porzioni simili situate sopra una stessa retta debbano combaciarsi, ed essere eguali ancora tra loro (182). Dunque la porzione AEB si combacierà colla porzione CFD , e per tanto faranno tra loro eguali. Del rimanente la ragione, per cui si chiamano simili quelle porzioni de' cerchi, che sono capaci di angoli eguali, dipende da quel tanto, che intorno a dette porzioni farà altrove dimostrato.

184. Notisi ancora, che siccome l'ampiezza di un cerchio dipende dalla lunghezza del raggio, con cui egli si descrive; così dato il raggio del cerchio dee essere dato altresì il cerchio medesimo. Quindi i cerchi descritti con eguali raggi debbono essere ancora eguali tra loro; siccome per lo contrario li cerchi eguali debbono essere descritti con raggi parimente eguali. Ma egli è chiaro, che essendo i cerchi eguali, debbano essere eguali altresì le loro circonferenze; poicché l'uguaglianza de' cerchi andando accompagnata coll'uguaglianza de' raggi, per necessità le circonferenze de' due cerchi eguali debbono combaciarsi tra loro, quante volte si adattano insieme in modo tale, che il centro dell'una cada sul centro dell'altra. E quantunque sia vero ancora, che le circonferenze eguali debbano appartenere a' cerchi eziandio eguali tra loro; tutta volta una tal verità non è così facile a ricavarsi dalla sola nozione del cerchio; e per non esservi ora di essa bisogno, la medesima farà altrove da noi dimostrata.

185. Avvertite tali cose, dimostreremo ora, che angoli eguali situati nelli centri, o nelle circonferenze de' cerchi eguali, debbano appoggiarsi su

ar-

Fig. 98.

archi parimente eguali . Perciò sieno li due cerchi eguali ABC , DEF , li quali abbiano per loro centri li punti G , ed H . Pongansi in questi centri li due angoli eguali BGC , EHF ; e per essere gli altri BAC , EDF situati nelle circonferenze le loro metà (173), saranno essi ancora tra loro eguali (11); con che le due porzioni BAC , EDF saranno simili (182). Congiungansi poscia le rette BC , EF . E poicche li due angoli BGC , EHF non solo sono eguali, ma per l'ugualianza de' cerchi anno ancora li lati GB , GC eguali alli lati HE , HF , ciascuno a ciascuno; saranno le loro basi BC , EF similmente eguali (38). Quindi eguali altresì saranno le porzioni simili BAC , EDF situate su di esse (183); ed in conseguenza essendo eguali così le circonferenze intere, come gli archi, che terminano quelle porzioni, farà il rimanente arco BC eguale ancora al rimanente arco EF (13).

Fig. 98.

186. Ma essendo così, potrà dimostrarsi eziandio il converso di un tal teorema, cioè, che quante volte due angoli situati nelli centri, o nelle circonferenze de' due cerchi eguali si appoggiano su archi eguali, debbano i medesimi essere parimente tra loro eguali. Perciò sieno di nuovo li due cerchi eguali ABC , DEF , li quali abbiano per loro centri li punti G , ed H ; e per lo contrario sieno presentemente eguali tra loro li due archi BC , EF , sopra li quali si appoggiano così gli angoli BGC , EHF situati ne' centri, come gli angoli BAC , EDF situati nelle circonferenze. Se è possibile, sieno disuguali li due angoli BGC , EHF , e sia l'angolo BGC maggiore dell'angolo EHF . Fatto adunque l'angolo BGI eguale all'angolo EHF (40), farà l'arco BI eguale all'arco EF (185). Ma per ipotesi ancora l'arco BC è eguale all'arco EF . Dunque li due archi BC , BI saranno tra loro eguali (11); qual cosa non potendo essere (14), non farà egli vero, che l'angolo BGC sia maggiore dell'angolo EHF ; e per tanto questi due angoli saranno tra loro eguali;

li; e come loro metà faranno eguali altresì gli altri due BAC , EDF (111).

187. Con questi due teoremi se ne possono ancora dimostrare due altri; de' quali il primo si è, che essendo eguali le rette adattate dentro de' cerchi eguali, debbano essere eguali altresì gli archi tagliati da dette rette; ed il secondo si è, che per lo contrario essendo eguali gli archi presi nelle circonferenze de' cerchi eguali, debbano essere eguali eziandio le rette, che tagliano detti archi. Sieno adunque li due cerchi eguali ABC , DEF , dentro de' quali si adattino primieramente le due rette eguali BC , EF ; e tirate dalli loro centri G , ed H le rette GB , GC , HE , HF , avranno li due angoli BGC , EHF non solo li lati GB , GC eguali alli lati HE , HF , ciascuno a ciascuno, ma ancora la base BC eguale alla base EF ; onde, dovendo l'angolo BGC essere eguale all'angolo EHF (39), sarà l'arco BC eguale similmente all'arco EF (185). Pongansi di poi eguali tra loro questi due archi BC , EF ; ed in questo caso dovranno essere eguali altresì li due angoli BGC , EHF (186), li quali avendo li lati GB , GC eguali alli lati HE , HF , ciascuno a ciascuno, avranno ancora la base BC eguale alla base EF (38).

Fig. 98.

188. E quindi non sarà egli difficile, dato un' arco qualsivoglia, dividerlo in due parti eguali. Sia perciò ABC l'arco dato. Congiungansi li suoi termini A , e C per la retta AC , la quale dividasi in due parti eguali nel punto D (42). Alzisi di poi da questo punto sulla stessa AC la perpendicolare DB (49), la quale s'incontri coll'arco dato nel punto B ; ed io dico, che li due archi BA , BC sieno tra loro eguali. Per dimostrarlo, tirinsi le rette AB , CB . E poicche li due angoli ADB , CDB non solo sono eguali, ma anno ancora li lati AD , DB eguali alli lati CD , DB , ciascuno a ciascuno; faranno le loro basi AB , CB eziandio tra loro eguali (38). Ma ne' cerchi eguali, e tanto maggiormente in un medesimo cerchio le rette egua-

Fig. 99.

eguali, che vi si adattano dentro, debbono tagliare archi parimente eguali (187). Dunque gli archi BA, BC tagliati per le rette eguali AB, CB faranno tra loro eguali; e pertanto l'arco ABC sarà diviso per metà nel punto B.

§. V.

Della proprietà la più rilevante del cerchio.

189. **C**OMPIREMO la teoria del cerchio con dimostrare di esso la proprietà la più rilevante, e si è, che abbassata da un punto della circonferenza la perpendicolare sul diametro, debba il quadrato di questa perpendicolare essere eguale al rettangolo fatto dalle porzioni del diametro. Perciò sia il cerchio ABC, di cui centro ne sia il punto D, e diametro la retta BC; e si abbassi su questo diametro da un punto A della circonferenza la perpendicolare AE. Congiunta adunque la DA, faranno eguali le due DB, DA; ed in conseguenza i loro quadrati faranno similmente tra loro eguali (113). Ma per lo triangolo AED rettangolo in E, il quadrato della DA è eguale alli quadrati delle due AE, DE (129); e per essere la BC divisa egualmente nel punto D, il quadrato della DB è eguale al rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DE (122). Dunque ancora li quadrati delle due AE, DE faranno eguali al rettangolo della BE nella CE, ed al quadrato della DE (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della DE, rimarrà il quadrato della perpendicolare AE eguale al rettangolo fatto dalle porzioni del diametro BE, CE (13).

Fig. 100.

190. Or questa proprietà compete talmente al cerchio, che per lo contrario, se il quadrato della perpendicolare AE sia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni BE, CE, il punto A dovrà essere situato nella circonferenza del cerchio, che ha per suo diametro la retta BC. Per dimostrarlo, dividasi la BC in due parti eguali nel punto D, e

GEOMETRIA PIANA. 77

D, e congiungasi la DA. Essendo adunque il quadrato della AE eguale al rettangolo delle due BE, CE; coll'aggiunta del quadrato fatto dalla DE, faranno li quadrati delle due AE, DE eguali al rettangolo della BE nella CE, ed al quadrato della DE (123). Ma per lo triangolo AED rettangolo in E, li quadrati delle due AE, DE sono eguali al quadrato della DA (129); e per essere la BC divisa egualmente nel punto D, il rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DE è eguale al quadrato della DB (122). Dunque il quadrato della DA, ed il quadrato della DB faranno tra loro eguali (11); e pertanto, dovendo essere eguali ancora le due DA, DB (113), il cerchio, che descrivesi col centro D, e l'intervallo DB, passerà per il punto A.

191. Notisi intanto, che se la perpendicolare AE, abbassata sul diametro del cerchio BC, si prolunghi più oltre per sino a che s'incontri di nuovo colla circonferenza nel punto F, sarà la tutta AF divisa egualmente nel punto E (146). Quindi il quadrato della AE non sarà diverso dal rettangolo fatto dalle due AE, FE; e pertanto la medesima proprietà potrà enunciarsi ancora in quest'altra maniera, cioè, che se una retta adattata dentro del cerchio sia divisa da un diametro ad angoli retti, il rettangolo contenuto dalle porzioni della retta debba essere eguale al rettangolo fatto dalle porzioni del diametro. Ma considerata per questo verso la riferita proprietà del cerchio, si potrà la medesima estendere più oltre; come in effetto ella ha luogo, e quando la retta adattata dentro del cerchio divide si da un diametro ad angoli obliqui, e quando la divisione di essa si fa da altra retta, che non sia diametro.

192. Per dimostrarlo, sia primieramente la AF Fig. 101. divisa dal diametro BC ad angoli obliqui nel punto E; ed abbassata dal centro D sulla stessa AF la perpendicolare DG (50), congiungasi la DA. Poichè dunque la AF dee essere divisa egualmente nel punto G (146); sarà il rettangolo delle due
AE,

AE, FE insieme col quadrato della GE eguale al quadrato della AG (122); ed in conseguenza coll'aggiunta del comune quadrato della DG, farà il rettangolo delle medesime AE, FE insieme colli quadrati fatti dalle due EG, DG eguale alli quadrati delle altre due AG, DG (13). Ma per l'angolo retto DGA li quadrati delle due EG, DG sono eguali al quadrato della DE; e li quadrati delle altre due AG, DG sono eguali al quadrato della DA, ovvero DB (129), il quale quadrato della DB è eguale ancora al rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DE (122). Dunque il rettangolo delle due AE, FE insieme col quadrato della DE farà eguale al rettangolo delle altre due AE, CE insieme coll'istesso quadrato della DE (11); e pertanto, tolto questo comune quadrato, farà il solo rettangolo delle due AE, FE eguale al solo rettangolo delle altre due BE, CE (13).

Fig. 102. 193. Sia in secondo luogo la AF divisa dall'altra BC, che non passi per lo centro D, ed in conseguenza che non sia diametro. Congiungasi la DE; la quale si prolunghi per fino a che s'incontri colla circonferenza ne' punti G, ed H. E poichè la AF è divisa dal diametro GH nel punto E, farà il rettangolo delle due AE, FE eguale al rettangolo delle altre due GE, HE (19). Ma per essere l'altra BC divisa dall'istesso diametro GH nel medesimo punto E, ancora il rettangolo delle due BE, CE dee essere eguale al rettangolo delle altre due GE, HE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle porzioni AE, FE della retta AF, e l'altro contenuto dalle porzioni BE, CE della retta BC, saranno tra loro eguali (11). Ed essendo così, la proprietà del cerchio, di cui si tratta, dovrà enunciarsi generalmente in questa maniera, cioè, che se due rette s'interseghino dentro del cerchio, il rettangolo fatto dalle porzioni dell'una farà eguale al rettangolo fatto dalle porzioni dell'altra.

194. Ma l'istesso ha luogo eziandio quando le
ret-

GEOMETRIA PIANA. 79

rette s'intersecano tra loro fuori del cerchio. Perciò sieno le due rette AF , BC , le quali s'incontrino fuori del cerchio nel punto E ; e pongasi primieramente, che una di esse BC sia diametro del cerchio. Si abbassi dal centro D sull'altra AF la perpendicolare DG (50); e congiungasi la DF . Poicche dunque la AF dee essere divisa egualmente nel punto G (146), farà il rettangolo delle due AE , FE insieme col quadrato della FG eguale al quadrato della EG (124); ed in conseguenza coll'aggiunta del comune quadrato della DG , farà il rettangolo delle medesime AE , FE insieme colli quadrati fatti dalle due FG , DG eguale alli quadrati delle altre due EG , DG (13). Ma per l'angolo retto DGE li quadrati delle due FG , DG sono eguali al quadrato della DF , ovvero DC ; e li quadrati delle altre due EG , DG sono eguali al quadrato della DE (129), il quale quadrato della DE è eguale al rettangolo delle due BE , CE insieme col quadrato della DC (124). Dunque il rettangolo delle due AE , FE insieme col quadrato della DC farà eguale al rettangolo delle due BE , CE insieme coll'istesso quadrato della DC (11); e pertanto, tolto questo comune quadrato, farà il solo rettangolo delle due AE , FE eguale al solo rettangolo delle due BE , CE (13).

Fig. 103.

195. Pongasi dipoi, che niuna delle due AF , BC passi per lo centro del cerchio D ; e congiunta la DE , vadasi questa ad incontrare colla circonferenza nelli punti G ed H . Poicche dunque la AF s'incontra col diametro GH fuori del cerchio nel punto E ; farà il rettangolo delle due AE , FE eguale al rettangolo delle altre due GE , HE (194). Ma per incontrarsi l'altra BC coll'istesso diametro GH nel medesimo punto E , ancora il rettangolo delle due BE , CE dee essere eguale al rettangolo delle altre due GE , HE . Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle due AE , FE , e l'altro fatto dalle due BE , CE , faranno tra loro eguali (11); ed in conseguenza non solo quando le rette s'intersecano dentro del cerchio, ma ancora quando

Fig. 104.

80 ELEMENTI DELLA

do s'incontrano fuori di esso, il rettangolo fatto dalle porzioni dell'una dovrà essere eguale al rettangolo fatto dalle porzioni dell'altra.

Fig. 105.

196. Qualora intanto le rette s'incontrano fuori del cerchio; potrebbe avvenire, che una di esse fosse tangente, e l'altra secante del cerchio; ed in tal caso il rettangolo fatto dalle porzioni della secante dovrà essere eguale al quadrato della tangente. Per dimostrarlo, sia AE tangente del cerchio, e BC secante, le quali s'incontrino tra loro nel punto E ; e pongasi primieramente, che la BC passi per lo centro D . Congiunta adunque la DA , farà retto l'angolo DAE (168); ed in conseguenza il quadrato della DE farà eguale alli quadrati delle due DA , AE (129). Ma per essere la BC divisa egualmente nel punto D , l'istesso quadrato della DE è eguale ancora al rettangolo delle due BE , CE insieme col quadrato della DC , ovvero DA (124). Dunque il rettangolo delle due BE , CE insieme col quadrato della DA farà eguale alli quadrati delle altre due DA , AE (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della DA , rimarrà il rettangolo delle due BE , CE eguale al quadrato della AE (13).

Fig. 106.

197. Pongasi in secondo luogo, che la secante BC non passi per lo centro del cerchio D ; ed egli è facile a dimostrarsi, che ancora in questo caso il rettangolo delle due BE , CE debba essere eguale al quadrato della tangente AE . Congiungasi per questo effetto la DE , la quale vadasi ad incontrare colla circonferenza del cerchio nelli punti G , ed H . Poicche dunque le due BC , GH s'incontrano tra loro fuori del cerchio nel punto E , farà il rettangolo delle porzioni della prima BE , CE eguale al rettangolo delle porzioni della seconda GE , HE (194). Ma passando la GH per lo centro del cerchio, il rettangolo fatto dalle sue porzioni GE , HE dee essere eguale al quadrato della tangente AE (196). Dunque ancora il rettangolo contenuto dalle due BE , CE farà eguale al quadrato della tangente AE (11).

198. Ma

198. Ma siccome, quando la AE è tangente, e la BE è secante del cerchio, il rettangolo delle porzioni della secante BE , CE dee essere eguale al quadrato della tangente AE ; così per lo contrario, essendo il rettangolo delle due BE , CE eguale al quadrato della AE , dovrà essere questa AE tangente del cerchio. Per dimostrarlo, tirisi dal punto E la tangente al cerchio EF (171), e congiungansi le rette DA , DE , DF . Essendo adunque EF tangente del cerchio, sarà il rettangolo delle due BE , CE eguale al quadrato della tangente EF (196). Ma per ipotesi il rettangolo delle due BE , CE è eguale al quadrato della AE . Dunque il quadrato della AE , ed il quadrato della EF faranno tra loro eguali (11); ed in conseguenza eguali altresì saranno le due AE , EF (113). Quindi li due angoli DAE , DFE , avendo non solo li lati DA , AE eguali alli lati DF , EF , ciascuno a ciascuno, ma ancora la base DE comune, saranno tra loro eguali (39). Onde, siccome per la tangente EF è retto l'angolo DFE (168), così sarà retto ancora l'altro DAE ; e pertanto la AE sarà similmente tangente del cerchio (167).

Fig. 106.

199. E quindi si vede, che le tangenti tirate al cerchio da un medesimo punto, siccome sono le due EA , EF , debbano essere tra loro eguali; qual cosa puo dimostrarli ancora per mezzo della sola proprietà del triangolo rettangolo in questa maniera. Congiungansi le rette DA , DE , DF ; e per essere le due EA , EF tangenti del cerchio, sarà retto tanto l'angolo DAE , quanto l'angolo DFE (168); onde il quadrato della stessa DE sarà eguale così alli quadrati delle due DA , EA come alli quadrati delle due DF , EF (129). Quindi li quadrati delle due DA , EA saranno eguali alli quadrati delle due DF , EF (11); e pertanto, tolti li quadrati eguali fatti dalla DA , e dalla DF , rimarrà il quadrato della EA eguale al quadrato della EF (13); onde le tangenti EA , EF faranno tra loro eguali (113).

Fig. 106.

200. Del rimanente dall'essere eguali le tangenti

F ti

Fig. 107.

ti tirate al cerchio da un medesimo punto facilmente puo dedursi, che se li quattro lati di un quadrilatero tocchino il cerchio, le somme degli opposti debbano essere tra loro eguali. Perciò sia ABCD questo tale quadrilatero, i di cui quattro lati AB, BC, CD, DA tocchino il cerchio nelli punti E, F, G, H. Essendo adunque eguali così le due AE, AH, come le due BE, BF; sarà la tutta AB eguale alle due AH, BF insieme (13). E similmente, essendo eguali tanto le due CG, CF, quanto le due DG, DH; sarà la tutta CD eguale alle due CF, DH insieme. Con che la somma delli due lati AB, CD sarà eguale alla somma delle quattro AH, BF, CF, DH, ovvero alla somma degli altri due lati BC, DA.

CAPITOLO V.

Della teoria delle figure regolari.

201. **D**Imostrata la teoria del cerchio, non sarà difficile ora l'intendere quel tanto ci rimane a dire intorno alle figure rettilinee, che chiamansi regolari. E poicche l'esame di queste tali figure non si limita alle sole trilatere, e quadrilatere, ma dee estendersi ancora a molte di quelle, che generalmente sono state chiamate multilateri; perciò non sarà mal fatto di additare prima i nomi, colli quali sogliono distinguersi tra loro queste altre figure. Avvertiremo adunque, che siccome la figura dicesi trigono ovvero triangolo quando è terminata da tre lati, e quadrigono ovvero quadrangolo quando è terminata da quattro; così se i lati, che la terminano, siano cinque si appella pentagano, se sei esagono, se sette settagono, se otto ottogono, se nove nonogono, se dieci decagono, e così all'infinito.

§. I.

Della nozione delle figure regolari.

202. **U**Na figura rettilinea dicesi regolare, quando sono eguali tra loro così i lati, che la terminano, come gli angoli contenuti da detti lati; e perciò la sua nozione vien riposta nell'essere insieme equilatera, ed equiangola. Ma quantunque l'una, e l'altra condizione insieme rendano regolare qualsivoglia figura rettilinea; nientedimeno, trattandosi del triangolo, basterà assicurarsi, che vi sia una delle dette condizioni; poicché unitamente con quella vi dovrà essere ancora l'altra, per esser stato dimostrato, che tanto il triangolo equilatero debba essere similmente equiangolo (78), quanto il triangolo equiangolo debba essere ancora equilatero (79).

203. Or dall'esposta nozione delle figure regolari egli è facile a ricavarne, che se gli angoli di ciascuna di esse siano divisi in due parti eguali per altrettante rette, l'incontro di queste rette debba farsi in un medesimo punto. Perciò sia la figura regolare ABCDEF, i di cui angoli ABC, BCD dividansi in due parti eguali per le rette BG, CG, le quali s'incontrino tra loro nel punto G; e congiungansi le altre rette DG, EG, FG, AG. Essendo adunque l'angolo BCG eguale all'angolo DCG, ed essendo ancora li due lati BC, CG eguali alli due lati DC, CG, ciascuno a ciascuno; faranno li due triangoli BGC, DGC perfettamente tra loro eguali (87); e pertanto sarà l'angolo CBG eguale all'angolo CDG. Quindi per l'uguaglianza delli due angoli ABC, CDE, siccome CBG è la metà dell'angolo ABC, così CDG sarà ancora la metà dell'angolo CDE. Ed avendo luogo la stessa dimostrazione da per tutto, eziandio li rimanenti angoli della figura proposta saranno divisi per metà dalle altre rette DG, EG, FG, AG.

Fig. 108.

F 2

204. Ma

84 ELEMENTI DELLA

204. Ma siccome le rette, le quali dividono per metà gli angoli di una figura regolare, s'incontrano tutte in un'istesso punto; così non sarà difficile il dimostrare, che le medesime rette debbano tutte essere tra loro eguali. Imperocchè, essendo eguali gli angoli della figura regolare $ABCDEF$, faranno eguali altresì le metà, nelle quali i medesimi restano divisi dalle rette AG , BG , CG , DG , EG , FG (11). Quindi nelli triangoli AGB , BGC , CGD , DGE , EGF , FGA gli angoli, che sono sopra le basi di essi AB , BC , CD , DE , EF , FA , faranno tra loro eguali; ed in conseguenza, dovendo essere eguali altresì i lati, che si oppongono a detti angoli (73), faranno eguali le rette AG , BG , CG , DG , EG , FG , che dividono egualmente gli angoli della figura regolare.

Fig. 108.

205. Poicche dunque sono eguali le rette AG , BG , CG , DG , EG , FG , che dividono per metà gli angoli della figura regolare $ABCDEF$; potrà riguardarsi il punto G , in cui quelle rette s'incontrano, come centro della figura medesima. Ed in effetto da qui innanzi chiameremo centro di una figura regolare quel punto, da cui tutte le rette tirate alli vertici degli angoli della stessa figura sono tra loro eguali. E siccome ogni figura regolare dee essere dotata di sì fatto centro, così per quelltanto è stato dimostrato poco prima (203) potrà il medesimo ritrovarsi per mezzo dell'incontro di due rette, che dividono egualmente due angoli della figura proposta.

206. Eguali altresì faranno le perpendicolari, che dal centro di una figura regolare si abbassano sopra i lati della medesima. Per dimostrarlo, sia di nuovo la figura regolare $ABCDEF$, che abbia per suo centro il punto G , da cui si abbassino sopra i lati della figura le perpendicolari GH , GI , GL , GM , GN , GO (50). E poicche l'angolo ABC è diviso egualmente dalla retta BG , faranno gli angoli del triangolo BGH eguali agli angoli del triangolo BGI , ciascuno a ciascuno. Ma gli stessi trian-

goli

Fig. 108.

GEOMETRIA PIANA. 85

goli anno ancora il lato GB comune, che sta opposto ad angoli eguali. Dunque, dovendo i medesimi essere perfettamente eguali tra loro (85), faranno eguali le due perpendicolari GH, GI; e dell'istessa maniera si dimostrerà, che sieno eguali ancora le rimanenti.

207. Per quanto a queste perpendicolari, elle dividono ancora egualmente li lati, sulli quali cadono. Imperocchè, essendo eguali non solo gli angoli BAF, ABC, ma ancora le loro metà BAG, ABG; faranno gli angoli del triangolo AGH, eguali agli angoli del triangolo BGH, ciascuno a ciascuno. Ma gli stessi triangoli anno parimente non solo il lato GA eguale al lato GB, ma comune altresì il lato GH, li quali lati stanno opposti ad angoli eguali. Dunque, dovendo i medesimi essere perfettamente tra loro eguali (85), faranno ancora eguali li due rimanenti lati AH, BH; e pertanto il lato della figura AB sarà diviso egualmente dalla sua perpendicolare GH; ed avendo luogo l'istessa dimostrazione da per tutto, ancora gli altri lati saranno divisi per metà dalle loro perpendicolari.

208. È quindi, data una figura regolare, potrà determinarsi il suo centro, non solo coll'incontro delle rette, che dividono egualmente due delli suoi angoli; ma ancora coll'incontro di quelle, che dividono per metà, e ad angoli retti due delli suoi lati. Imperocchè per le cose fin' ora dimostrate si vede chiaramente, che il punto, che si determina coll'uno, e l'altro incontro, debba essere talmente situato nella figura data, che sieno eguali tra loro, tanto le rette, le quali da detto punto si tirano alli vertici degli angoli della figura, quanto le perpendicolari, che dal medesimo punto si abbassano sulli lati della stessa figura.

209. Del rimanente, per dimostrare un'altra proprietà singolare delle figure regolari, notisi in questo luogo, che siccome gli angoli di ogni triangolo uniti insieme sono eguali a due retti (71), così gli angoli di qualunque figura rettilinea presi

unitamente debbano essere eguali a tanti retti, quanti ne addita il doppio del numero de' lati minorato di quattro: dimodoche dovranno essere eguali a quattro retti essendo la figura quadrangolo, a sei retti essendo pentagono, a otto retti essendo esagono, a dieci retti essendo settagono, a dodici retti essendo ottogono, a quattordici retti essendo nonogono, a sedici retti essendo decagono, e così all'infinito.

210. Nè è cosa difficile ad intenderne la ragione. Imperocchè ogni figura rettilinea con rette tirate da un'angolo agli angoli opposti divide in tanti triangoli, quanti ne addita il numero de' lati scemato di due. Ma gli angoli di ciascuno triangolo sono insieme eguali a due retti (71). Dunque gli angoli di tutti i triangoli, ne' quali è divisa la figura, saranno eguali a tanti retti, quanti ne disegna il doppio del numero de' lati scemato di quattro; ed in conseguenza, perche gli angoli della figura risultano dagli angoli di quelli triangoli, ad altrettanti retti saranno eguali ancora gli angoli della figura medesima.

211. Or da ciò egli è chiaro, che, data la specie della figura rettilinea, debba essere data ancora la somma delli suoi angoli; dimodoche, essendovi due figure rettilinee della medesima specie, la somma degli angoli dell'una dovrà essere eguale alla somma degli angoli dell'altra. E poicche nelle figure regolari così li lati, come gli angoli sono eguali tra loro (202); chiara cosa ancora si è, che, data la specie della figura regolare, debba essere dato parimente ciascuno delli suoi angoli: di maniera che, essendovi due figure regolari della medesima specie, gli angoli dell'una dovranno essere eguali agli angoli dell'altra, ciascuno a ciascuno.

212. Ed essendo così, la proprietà singolare di ciascuna figura regolare, che ci rimane a dimostrare, sarà, che dato uno de' suoi lati, debba essere data ancora la figura medesima: dimodoche, essendo eguali li lati di due figure regolari della stessa specie, dovranno le figure medesime essere pari-

parimente tra loro eguali. E la ragione è chiara; poicche per essere eguali così li lati, come gli angoli di dette figure, ciascuno a ciascuno, potranno le stesse talmente adattarsi tra loro, che l'una si combaci coll'altra; onde venendosi a combaciare, forzosamente quelle dovranno essere tra loro eguali (15).

§. II.

Della situazione del cerchio nelle figure regolari.

213. **I**L cerchio dicesi situato in una figura rettilinea qualsivoglia, quantevolte la sua circonferenza o passa per tutti i vertici degli angoli della figura, o tocca tutti i lati della medesima. Quindi una tal situazione puo farsi in due maniere, cioè o per via di circonscrizione, o per via d'iscrizione. Quantevolte la circonferenza passa per tutti i vertici degli angoli della figura, in tal caso dicesi il cerchio circonscritto intorno a quella; ma se poi la circonferenza toccasse i lati tutti della figura, allora si direbbe il cerchio iscritto dentro di essa.

214. Or non è da porsi in dubbio, che essendo la figura regolare, possa in essa situarsi il cerchio così per via di circonscrizione, come per via d'iscrizione. Imperocchè, ritrovato il centro della figura (208), faranno eguali tanto le rette, che da quello si tirano alli vertici degli angoli della figura (204), quanto le perpendicolari, che dal medesimo centro si abbassano sulli lati della stessa figura (206). Onde, siccome il cerchio, che si descrive coll'intervallo di una di quelle rette, passerà per gli riferiti vertici, e farà circonscritto intorno alla figura; così l'altro, che descrivesi coll'intervallo di una di queste perpendicolari, toccherà i lati della figura (167), e farà iscritto dentro di essa.

215. Quindi, facendo uso delle due maniere stabilite di sopra (208) per determinare il centro di

F 4 una

Fig. 108. una figura regolare, potremo altresì in due modi diversi risolvere il problema, di cui si tratta. Sia perciò la figura regolare $ABCDEF$; e delli due modi il primo consiste in dividere li due angoli ABC , BCD egualmente per le rette BG , CG (41), ed in abbassare dal punto G , in cui queste s'incontrano, la perpendicolare GH sul lato AB (50); e l'altro in dividere egualmente ne'punti H , ed I li due lati AB , BC (42), ed inalzare da questi punti su gli stessi lati le perpendicolari HG , IG (49), che s'incontrino tra loro nel punto G . Imperocchè in amendue i modi li cerchi, che si descrivono col centro G , e cogli intervalli GB , GH , faranno quelli, che si dimandano.

Fig. 109. 216. Intanto, se la figura data sia quadrato, come è la figura $ABCD$, ciascuno delli due modi può ricevere qualche variazione, e renderli ancora più semplice. Imperocchè, per quanto al primo, basterà tirare le diagonali AC , BD , e dal punto G , in cui quelle s'intersecano, abbassare sul lato AB la perpendicolare GH (50); per la ragione, che con dette diagonali vengono a dividersi egualmente tutti gli angoli del quadrato. Per quanto poi al secondo basterà segare egualmente ne'punti H , I , L , M tutti quattro i lati (42), e congiungere i punti opposti per le rette HL , IM , che s'incontrino nel punto G ; e ciò perchè dette rette vengono ad essere perpendicolari sulli lati, alli quali corrispondono.

217. Del rimanente è così proprio delle figure regolari di poterli in ciascuna di esse situare il cerchio tanto per via di circoscrizione, quanto per via d'iscrizione, che a riserva del solo triangolo niuna altra figura rettilinea si scorge tale, che non essendo regolare possa sempre concedere al cerchio una tal situazione. Ed affinché non vi sia dubbio intorno a ciò, che diciamo, prima faremo vedere, che, dato qualunque triangolo, si possa sempre così intorno ad esso, come dentro del medesimo descrivere il cerchio; ed indi dimostreremo, che, data ogni altra figura rettilinea, necessa-
ria.

riamente si richiedano certe condizioni per poterli risolvere l'istesso problema.

218. Sia dato adunque un triangolo qualsivoglia ABC , e vogliasi in primo luogo circoscrivere intorno ad esso il cerchio. Dividansi li due lati AB , BC egualmente ne' punti D , ed E (42); indi da questi punti sugli stessi lati s'inalzino le perpendicolari DF , EF (49), che s'incontrino tra loro nel punto F ; e congiungansi finalmente le rette FA , FB , FC . Poicche dunque li due angoli ADF , BDF sono eguali, ed anno li lati AD , DF eguali alli lati BD , DF , ciascuno a ciascuno; faranno le loro basi FA , FB ancora eguali (38). Ma per la stessa ragione debbono essere eguali eziandio le due FB , FC . Dunque le tre rette FA , FB , FC faranno tra loro eguali; e per tanto il cerchio, che descrivesi col centro F , e coll'intervallo FA , dovendo passare ancora per gli punti B , e C , farà egli circoscritto intorno al triangolo dato. Fig. 110.

219. Vogliasi in secondo luogo dentro del medesimo triangolo ABC iscrivere il cerchio. Dividansi li due angoli BAC , ABC egualmente per le rette AD , BD (41); e dal punto D , in cui queste s'incontrano, si abbassino sulli lati AB , BC , AC le perpendicolari DE , DF , DG (50). Poicche dunque li due triangoli ADE , ADG anno non solo gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, ma comune ancora il lato AD , che stà opposto ad angoli eguali; faranno i medesimi perfettamente eguali tra loro (85), ed in conseguenza faranno eguali le due DE , DG . Ma per la stessa ragione debbono essere eguali eziandio le due DE , DF . Dunque le tre perpendicolari DE , DF , DG faranno tra loro eguali; e per tanto il cerchio, che descrivesi col centro D , e coll'intervallo DE , dovendo non solo passare per gli punti E , e G , ma toccare ancora li lati AB , BC , AC (167), farà egli iscritto dentro del triangolo dato. Fig. 111.

220. Or per quanto al quadrilatero ovvero quadrangolo, per poterli intorno ad esso circoscrivere

re

re il cerchio, è necessario, che gli angoli opposti uniti insieme siano eguali a' due retti (176); e per poterli dentro del medesimo iscrivere il cerchio, si richiede, che le somme de' lati opposti siano tra loro eguali (200). Quindi per ogni altro quadrilatero, o sia quadrangolo il problema dee averli come impossibile. Imperocchè, se mai egli fosse capace di soluzione, si potrebbe così dentro del cerchio situare un quadrilatero, senza che li suoi angoli opposti fossero eguali a due retti, come intorno al cerchio adattare un quadrilatero, senza che fossero eguali le somme delli suoi lati opposti; quali cose non possono aver luogo.

Fig. 112.

221. Ma per intendere l'intima ragione della impossibilità del problema, quante volte mancano nel quadrilatero le riferite condizioni, notifi primieramente, che, dato il quadrilatero ABCD, di già viene ad essere dato il cerchio, che passa per gli soli tre punti A, B, C, per la ragione, che il centro di tal cerchio non può ritrovarsi, se non se nell'incontro delle due rette EG, FG, che segano egualmente, e ad angoli retti li due lati AB, BC (218). Onde, affinché possa passare il medesimo cerchio per lo quarto punto D, è necessario, che questo quarto punto sia situato nella direzione della sua circonferenza. Ed avendo egli una tal situazione, qualora li due angoli ABC, ADC sono insieme eguali a due retti (176); per necessità dee avere il quadrilatero sì fatta condizione, per poterli intorno ad esso circoscrivere il cerchio.

Fig. 113.

222. Notifi ancora, che, dato il quadrilatero ABCD, di già viene ad essere dato il cerchio, che tocca li soli tre lati AB, BC, CD, per la ragione, che il centro di tal cerchio non può ritrovarsi, se non se nell'incontro delle due rette BE, CE, che dividono egualmente li due angoli ABC, BCD (219). Onde, affinché il medesimo cerchio possa toccare ancora il quarto lato AD, è necessario che questo quarto lato sia in una situazione tale, che possa egli divenire tangente del cerchio sudetto. Ed avendo egli una tal situazione, qualora la somma

ma

GEOMETRIA PIANA. 91

ma delli due lati AD , BC è eguale alla somma degli altri due AB , CD (200); per necessità dee esservi nel quadrilatero sì fatta condizione, per poterli dentro di esso iscrivere il cerchio.

223. Con questi principj non sarà ora difficile l'investigare, quali condizioni siano necessarie per ogni altra figura rettilinea, affinche il problema, di cui si tratta, sia capace di soluzione. Perciò sia il pentagono $ABCDF$, e trattandosi di circoscrivere il cerchio intorno ad esso, siccome egli resta determinato colli soli tre punti A , B , C (218), così passerà per gli altri due D , ed E , se tirate le rette AD , BD siano eguali a due retti tanto li due angoli ABC , ADC , quanto gli altri due ABD , AED (176). Trattandosi poscia d'iscrivere il cerchio dentro dell'istesso pentagono, ancora questo rimane determinato con toccare li soli tre lati AB , BC , CD (219). Onde toccherà eziandio gli altri due DE , AE , se incontrandosi il lato BA col lato DE in F , ed il lato CD col lato AE in G , sia così la somma delli due BC , DF eguale alla somma delli due BF , CD , come la somma delli due BC , AG eguale alla somma delli due AB , CG (200).

Fig. 114

§ III.

Della situazione delle figure regolari nel cerchio:

224. **C**onforme nelle figure regolari può sempre situarsi il cerchio, e per via d'iscrizione, e per via di circoscrizione; così per lo contrario ancora egli il cerchio in amendue le maniere concede sempre situazione alle figure regolari. Dicesi adunque una figura qualsivoglia iscritta dentro del cerchio, quando i vertici degli angoli della figura si ritrovano nella circonferenza del cerchio. Al contrario dicesi una figura circoscritta intorno al cerchio, quando li lati della figura toccano la circonferenza del cerchio. Or dobbiamo presentemente far vedere, come, dato

dato il cerchio, si possono così dentro di esso, come intorno al medesimo descrivere le figure regolari.

Fig. 175.

225. Ed in primo luogo, quante volte è iscritta dentro del cerchio una qualche figura regolare, non farà cosa difficile circoscriverne un'altra della stessa specie intorno al medesimo cerchio. Perciò sia il cerchio ACE, dentro del quale sia iscritta la figura regolare ABCDE. Tirinsi alli punti A, B, C, D, E le tangenti FG, GH, HI, IL, LF (171), le quali s'incontrino tra loro nelli punti G, H, I, L, F. E siccome la figura FGHIL contenuta da queste tangenti è della stessa specie coll'altra ABCDE, così farà ella regolare, cioè avrà li lati, e gli angoli eguali, ed a cagion de' suoi lati, che per la costruzione medesima toccano la circonferenza del cerchio, farà ancora circoscritta intorno al cerchio dato.

226. Per dimostrarlo, ritrovisi il centro del cerchio M (145), da cui tirinsi così le rette MA, MB, MC, MD, ME, come le altre MF, MG, MH, MI, ML. Poicché dunque in ogni quadrilatero gli angoli uniti insieme sono eguali a quattro retti (209), e quelli che formano li raggi colle tangenti sono retti (168); saranno eguali a due retti così li due AGB, AMB, come li due BHC, BMC; con che li due AGB, AMB saranno eguali agli altri due BHC, BMC (11). Ma, essendo eguali le rette AB, BC, debbono essere eguali ancora tanto gli archi AB, BC (187), quanto gli angoli AMB, BMC (186). Dunque eziandio li due angoli AGB, BHC saranno tra loro eguali (13). E dimostrandosi della stessa maniera eguali ancora li rimanenti angoli della figura, di già farà ella equiangola.

227. In oltre, essendo eguali così le due AG, BG (199), come le due AM, BM, farà l'angolo AGM eguale all'angolo BGM (39); ed in conseguenza tutto l'angolo AGB sarà diviso egualmente per la retta MG. Ma per la stessa ragione ancora gli altri angoli debbono essere divisi egualmente per le
 ret-

GEOMETRIA PIANA. 93

rette MH, MI, ML, MF. Dunque, siccome sono stati dimostrati eguali tra loro detti angoli, così saranno eguali altresì le loro metà (111). Quindi li triangoli FMG, GMH, HMI, IML, LMF saranno perfettamente eguali (85); e con ciò saranno eguali ancora li lati FG, GH, HI, IL, LF. Onde la figura FGHIL circonscritta intorno al cerchio non solo farà equiangola, ma ancora equilatera; e per tanto farà ella figura regolare.

228. Essendo così, basterà per lo problema, di cui si tratta, far vedere, come s'iscrivono dentro del cerchio le figure regolari; ed ancora in questo caso giova l'avvertire, che la figura iscritta dentro del cerchio, sempre quando è equilatera, per necessità dee essere eziandio equiangola. Per dimostrarlo, sia ABCDE una figura equilatera iscritta dentro del cerchio ACE; ed essendo eguali le rette AB, BC, CD, DE, EA, faranno eguali ancora gli archi tagliati dalla circonferenza per dette rette (187). Onde, perche l'arco CD è eguale all'arco AB; coll'aggiunta del comune DEA farà ancora l'arco CDEA eguale all'arco DEAB (13). Ma gli angoli ABC, BCD, che sono nella circonferenza, si appoggiano sopra questi archi. Dunque similmente l'angolo ABC farà eguale all'angolo BCD (186). E poicche la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto, farà la figura ABCDE non solo equilatera, ma ancora equiangola.

Fig. 115.

229. Quindi l'istesso problema della iscrizione delle figure regolari dentro del cerchio riducesi a conciliare alle figure da iscriversi la sola uguaglianza de'lati. E poicche questa va sempre accompagnata coll'uguaglianza degli archi sostenuti da detti lati (187); si avrà la medesima con dividerli la circonferenza in tante parti eguali, quanti sono i lati della figura, che deesi iscrivere dentro del cerchio. E perciò trattandosi del triangolo equilatero, si dovrà dividere la circonferenza in tre parti eguali; siccome bisognerà, che si divida in quattro parti eguali, trattandosi del quadrato; in cinque parti eguali, trattandosi del pentagono equilatero, e così all'infinito.

230. Per

Fig. 116.

230. Per incominciare adunque dal triangolo equilatero, sia ABC il cerchio, dentro di cui egli debba iscriversi. Se ne formi uno sopra una retta qualsivoglia, e sia DEF (80); indi tirata la retta GH , che tocchi il cerchio in un qualche punto punto A (171), facciasi così l'angolo GAB eguale all'angolo DFE , come l'angolo HAC eguale all'angolo DEF (40). E siccome, incontrandosi le due AB , AC colla circonferenza ne' punti B , e C , resterà divisa la medesima in tre parti eguali; così congiunta la BC , farà ABC il triangolo, che si dimanda. Imperocchè gli angoli ACB , ABC , come eguali all' due GAB , HAC (178), faranno eguali ancora agli altri due DFE , DEF (11); con che il terzo BAC farà eziandio eguale al terzo EDF (71). Onde, essendo il triangolo ABC equiangolo col triangolo DEF , faranno li tre suoi angoli eguali tra loro; ed in conseguenza così la circonferenza farà divisa in tre parti eguali, come egli il triangolo farà tale, quale si dimanda.

Fig. 117.

231. Col medesimo artificio egli è chiaro potersi iscrivere dentro del cerchio un triangolo, che sia equiangolo con qualunque altro triangolo dato. E se mai un tal triangolo si volesse circoscrivere intorno al cerchio, nè pure sarebbe cosa difficile a farsi. Perciò sia ABC il cerchio, e DEF il triangolo. Prolunghisi il lato EF dall'una, e l'altra parte ne' punti G , ed H ; indi ritrovato il centro del cerchio I (145), e tirato un raggio qualsivoglia IA , facciasi così l'angolo AIB eguale all'angolo DEG , come l'angolo AIC eguale all'angolo DFH (40). Tirinsi poscia alli punti A , B , C le tangenti LM , MN , NL (171), che s'incontrino tra loro ne' punti L , M , N ; e farà NLM il triangolo, che si dimanda. Imperocchè li due angoli AIB , AMB , come eguali a due retti (209), debbono essere eguali agli altri due DEG , DEF (51); onde, essendosi fatto l'angolo AIB eguale all'angolo DEG , farà ancora l'altro AMB eguale all'altro DEF (13). Ma per la stessa ragione eziandio l'angolo ALC dee essere eguale all'angolo DFE .
Dun-

GEOMETRIA PIANA. 95

Dunque sarà il terzo BNC eguale al terzo EDF (71); e per tanto li due triangoli NML , DEF faranno tra loro equiangoli.

232. Per quanto poi al quadrato, per cui dee dividerfi la circonferenza del cerchio in quattro parti eguali, il problema è facile a risolversi. Sia $ABCD$ il cerchio, dentro di cui dee iscriversi il quadrato. Ritrovifi il suo centro (145), che sia il punto E ; e tirato per esso un diametro qualsivoglia AC , si alzi su questo diametro dal medesimo centro la perpendicolare EB (49), che s'incontri colla circonferenza ne' punti B , e D . Li due diametri adunque AC , BD , che s'intersecano tra loro ad angoli retti, divideranno la circonferenza in quattro parti eguali; e congiunte le rette AB , BC , CD , DA , farà $ABCD$ il quadrato, che si dimanda. E la ragione è chiara; poicche, essendo eguali gli angoli AEB , BEC , CED , DEA , che stanno situati nel centro, per necessità dovranno essere eguali ancora gli archi AB , BC , CD , DA , sulli quali quegli angoli si appoggiano (185). Fig. 1184

233. Non è così facile il problema, quando si tratta d'iscrivere dentro del cerchio un pentagono regolare; poicche per la di lui soluzione si ha bisogno di un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli sopra la base doppio dell'angolo verticale; e perciò prima è necessario di far vedere, come possa formarsi un tal triangolo. Sia adunque AB una retta qualsivoglia, la quale dividasi talmente in C , che il rettangolo della tutta AB nella parte BC sia eguale al quadrato dell'altra parte AC (138); e formato il triangolo isoscele ABD , che abbia la base BD eguale alla AC (80), farà questo il triangolo, che si cerca. Per dimostrarlo, congiungasi la CD , ed intorno al triangolo ACD circoscrivasi il cerchio (218). Essendo adunque il rettangolo delle due AB , BC eguale al quadrato della AC , ovvero BD ; farà questa BD tangente del cerchio (198). Onde dovendo essere l'angolo BDC eguale all'angolo CAD (178), coll'aggiun-

aggiunta del comune ADC farà l'angolo ADB, ovvero ABD eguale alli due insieme CAD, ADC, o pure al solo BCD (70). Quindi faranno eguali così le due CD, BD (73), come le due CD, AC; ed in conseguenza, essendo l'angolo CAD eguale all'angolo ADC (72), farà tutto l'angolo ADB doppio dell'angolo CAD.

234. Formato il triangolo isoscele ABD, che abbia ciascuno degli angoli sopra la base BD doppio dell'angolo verticale BAD; farà ora agevol cosa dividere la circonferenza in cinque parti eguali, ed iscrivere dentro del cerchio un pentagono regolare. Sia perciò EGI il cerchio, dentro di cui iscrivasi il triangolo EGH equiangolo col triangolo ABD (231). Sarà adunque così l'angolo EGH, come l'angolo EHG doppio dell'angolo GEH; e per tanto, divisi quegli angoli egualmente per le rette GI, HF (40), faranno li cinque angoli EHF, FHG, GEH, HGI, IGE eguali tra loro. Onde, essendo questi angoli situati nella circonferenza, faranno eguali parimente gli archi EF, FG, GH, HI, IE, sulli quali essi si appoggiano (185); ed in conseguenza, congiunte le rette EF, FG, HI, IE, farà EFGHI il pentagono, che si dimanda.

§. IV.

Del modo di estendere più oltre la iscrizione delle figure regolari.

235. **P**ER mezzo delle tre figure regolari, che sono state iscritte dentro del cerchio, cioè del triangolo, del quadrato, e del pentagono, egli è facile ora di estendere il problema molto più oltre. E per comprenderne la maniera, giova il ricordarsi, che per iscrivere dentro del cerchio una figura regolare non altro debba farsi, se non se dividere la circonferenza in tante parti eguali, quanti sono i lati della figura, che dee iscriversi (229). Essendosi adunque fatto vedere di sopra (188), che ogni qualunque arco possa dividersi

GEOMETRIA PIANA. 97

dersi per metà ; facendo uso di una tal divisione potremo coll'ajuto delle mentovate figure regolari, se non tutte le rimanenti, almeno moltissime altre iscrivere dentro del cerchio.

236. Ed in primo luogo di già col triangolo equilatero resta divisa la circonferenza del cerchio in tre archi eguali . Dunque, dividendosi per metà ciascuno di quegli archi, resterà ella divisa in sei ; colla divisione eguale di questi altri archi, rimarrà divisa in dodici ; e così all'infinito. Onde coll'ajuto del triangolo equilatero potrà iscriversi dentro del cerchio prima l'esagono regolare, indi il dodecagono regolare, e successivamente tutte le altre figure regolari, delle quali il numero de' lati va sempre a farsi doppio. Ma collo stesso artificio, servendoci del quadrato, potremo iscrivere dentro del cerchio non solo l'ottogono, ma ogni altra figura regolare, di cui il numero de' lati cresce nel doppio. Ed in fine, avvalendoci del pentagono regolare, estenderemo il problema così al decagono, come a qualsivoglia altra figura regolare, in cui si va duplicando il numero de' lati.

237. Intanto per l'esagono regolare, se bene possa egli iscriversi dentro del cerchio con dividere per metà gli archi sostenuti dalli lati del triangolo equilatero; nientedimeno più facilmente si risolverà il problema nella maniera, che segue. Sia ACE il cerchio, che abbia per suo centro il punto G. Prendasi nella circonferenza un punto A ad arbitrio; e descrivasi un'altro cerchio col centro A, e coll'intervallo AG, il quale seghi il cerchio dato ACE nelli punti B, ed F. Congiungansi poscia le rette BG, AG, FG, che s'incontrino colla circonferenza dalla parte opposta ne' punti E, D, C. Ed io dico, che per queste rette sarà divisa la stessa circonferenza in sei parti eguali; ed in conseguenza che, congiunte le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA, sarà ABCDEF l'esagono regolare, che si dimanda.

Fig. 120.

238. Nè è cosa difficile ad intenderne la ragione. Imperocchè, essendo per la costruzione me-

G

desima

desima equilateri li due triangoli ABG , AFG , e dovendo essere eguali a due retti tutti tre gli angoli di ogni triangolo (71); farà ciascuno delli due AGB , AGF eguale alli due terzi di un retto. Onde tale farà ancora così l'angolo BGC , che è loro supplemento a due retti (51), come ciascuno degli altri tre CGD , DGE , EGF , che sono eguali alli tre primi (53). Quindi tutti sei questi angoli faranno tra loro eguali (11), li quali come situati nel centro del cerchio dovranno appoggiarsi su archi eguali (185). Con che l'intiera circonferenza farà divisa in sei parti eguali; e pertanto la figura $ABCDEF$ farà un'esagono regolare.

239. Or se un arco, conforme egli si divide per metà, potesse ancora segarsi in tre parti eguali, chiara cosa farebbe, che coll'ajuto delle stesse tre prime figure regolari si potrebbero iscrivere dentro del cerchio tutte le altre, delle quali il numero de'lati si va avanzando nel triplo. Ma per lo trisegamento dell'arco si richiede una Geometria più sublime, e superiore alla ordinaria, siccome è quella, di cui presentemente si tratta. Quindi a riguardo di queste altre figure regolari il problema è impossibile secondo la Geometria ordinaria, e soltanto dee eccettuarfi il caso del quindecagono regolare; poicchè se bene per esso debba segarsi in tre parti eguali ciascuno degli archi sostenuti dalli lati del pentagono regolare, tutta volta il trisegamento di questi tali archi è cosa facile ad ottenersi.

Fig. 121.

240. Perciò sia ABC il cerchio, dentro di cui dee iscriversi il quindecagono regolare. Iscrivasi dentro di esso, così il triangolo equilatero (230), come il pentagono regolare (234), e sia AC uno de'lati del primo, ed AB uno de'lati del secondo. Adunque delle quindici parti eguali, nelle quali dee dividersi la circonferenza del cerchio, ne conterrà cinque l'arco AC , e tre l'arco AB . Quindi le contenute nell'arco BC faranno due; e perciò, dividendosi questo arco BC egualmente nel punto D (188), farà l'arco BD , o CD la quindicesima par-

parte della circonferenza intera . Onde , trasportandosi la sua lunghezza successivamente sulla circonferenza medesima , non solo sarà questa divisa in quindici parti eguali , quante ne bisognano per la iscrizione della figura , di cui si tratta , ma ancora l'arco AB sostenuto dal lato del pentagono regolare sarà diviso in tre parti eguali .

241. Non potendosi colla Geometria ordinaria dividere un'arco in tre parti eguali , non sarà mal fatto di additare qui un modo meccanico per potersi eseguire una tal divisione . Sia adunque il cerchio ABCD , che abbia per centro il punto E ; e debba dividersi in tre parti eguali un'arco qualsivoglia di esso AB . Aggirisi intorno al punto B la retta BF ; e ritrovisi per essa una posizione tale , che incontrandosi col diametro AD nel punto F , sia la porzione CF compresa tra la circonferenza , ed il diametro , eguale al raggio CE . Tirisi poscia per lo centro E la retta EG parallela alla BF (65) ; e diviso l'angolo BEG egualmente per la retta EH (41) , sarà l'arco AB secato in tre parti eguali ne' punti G , ed H .

Fig. 122.

242. Imperocchè , essendo eguali così le due BE , CE , come le due CE , CF ; saranno eguali altresì tanto gli angoli ECB , EBC , quanto gli angoli DFC , DEC (72) . Quindi l'angolo ECB , o sia EBC , come eguale alli due DFC , DEC (70) , sarà doppio del solo DFC ; e per tanto l'angolo AEB , che è eguale alli due insieme EBC , DFC , sarà triplo dell'istesso angolo DFC . Ma per le parallele BF , EG l'angolo DFC è eguale all'angolo AEG (62) . Dunque l'angolo AEB sarà ancora triplo dell'angolo AEG ; ed in conseguenza dovendo dell'istesso AEG essere doppio l'angolo GEB , che è stato diviso egualmente per la retta GH , saranno li tre AEG , GEH , HEB eguali tra loro ; con che eguali eziandio saranno gli archi AG , GH , HB , sugli quali quegli angoli si appoggiano (185) .

243. Più oltre si estenderebbe il problema della iscrizione delle figure regolari dentro del cerchio , se un'arco potesse dividersi in tante parti eguali ,

quante ne disegnano i numeri primi; poicche con tali divisioni, avvalendoci sempre delle prime tre figure regolari, ci sarebbe permesso d'iscrivere dentro del cerchio eziandio quelle figure, delle quali il numero de' lati cresce nel quintuplo, nel settuplo, nell' undecuplo, e così all'infinito. Ma colla Geometria ordinaria siccome non è divisibile un'arco in tre parti eguali, così molto meno può egli dividersi in cinque, in sette, in undici, ed in ogni altra moltitudine di parti eguali, che sia espressa da numero primo più alto.

244. Egli è vero, che non ostante l'immensa estensione, che potrebbe darsi al problema, pure resterebbero ad iscriversi quelle altre figure regolari, che hanno tanti lati, quanti ne additano i numeri primi superiori al cinque. Ma, sempre quando potesse dividersi un'arco in qualunque numero di parti eguali, ancora queste altre figure si potrebbero iscrivere dentro del cerchio; poicche con praticarsi la divisione corrispondente al numero de' lati della figura colle due metà della circonferenza, e con prendersi a due a due le parti divise, pure la circonferenza intera si ritroverebbe partita in tanti archi eguali, quanti sono i lati della figura da iscriversi.

245. Per la iscrizione di quelle figure regolari, delle quali il numero de' lati è impare, conferisce non poco l'estendere più oltre quel problema, di cui ci siamo serviti per la iscrizione del pentagono regolare (233), e formare un triangolo isoscele, in cui ciascuno degli angoli sopra la base sia triplo, quadruplo, quintuplo, o come si voglia moltiplice dell'angolo verticale. Imperocchè con applicarsi dentro del cerchio questo tale triangolo, e con dividersi gli angoli sopra la base in tante parti eguali, per quanto essi sono moltiplici dell'angolo verticale, resterà divisa la circonferenza intera in un numero impare de' archi eguali, e con ciò si iscriverà dentro del cerchio la figura regolare, che dee avere un'egual numero de' lati. Ma il promuovere

vere più oltre quel tale problema, ancora appartiene alla Geometria superiore.

§. V.

Delle affezioni proprie di alcune figure regolari.

246. **P**ER non tralasciare cosa alcuna degna da sapersi intorno alle figure regolari, dimostreremo ora certe affezioni, che sono proprie di alcune di esse. E per incominciare dalle più facili, noteremo in primo luogo intorno all'esagono regolare, che il suo lato sia eguale al raggio del cerchio, in cui è egli iscritto. Deducesi ciò chiaramente dalla sua iscrizione medesima (237), ma può dimostrarsi ancora nella maniera, che segue. Iscrivasi dentro del cerchio il triangolo equilatero ABC (230), e si abbassi sul lato BC la perpendicolare AE (50), la quale, attesa la perfetta uguaglianza delli due triangoli ABE, ACE (85), lo dividerà ancora egualmente, ed in conseguenza passerà per lo centro del cerchio D (146). Quindi, congiunti i raggi DB, DC, saranno eguali i due angoli BDE, CDE (39); e per tanto, prolungata la AE per fino alla circonferenza, saranno eguali ancora li due archi BF, CF (185); con che il lato dell'esagono regolare sarà la retta BF, che sostiene la metà dell'arco BFC. Ma il triangolo DBF, come equiangolo col triangolo ABC, è ancora equilatero. Dunque il lato dell'esagono regolare BF sarà eguale al raggio DB.

Fig. 123.

247. Noteremo in secondo luogo intorno al triangolo regolare, che il quadrato del suo lato sia triplo del quadrato fatto dal raggio del cerchio, in cui è egli iscritto. Per dimostrarlo, ripigliasi la stessa figura, in cui restino le cose nella medesima maniera. Ed essendo regolare, o sia equilatero non solo il triangolo ABC, ma ancora l'altro DBF; saranno li due triangoli BED, BEF perfettamente tra loro eguali (85); e perciò il raggio DF sarà diviso egualmente dalla perpendicolare BE; onde

Fig. 123.

G 3 de

de il suo quadrato, come eguale alli rettangoli della tutta DF nelle parti DE , EF (118), sarà doppio del rettangolo fatto dalle due DF , DE , o pure dalle due AD , DE . Ma il quadrato della AB , cioè del lato del triangolo regolare iscritto dentro del cerchio, è eguale alli quadrati delli raggi AD , DB insieme con due volte il rettangolo fatto dalle due AD , DE (130). Dunque il medesimo quadrato sarà eguale a tre volte il quadrato del raggio, ed in conseguenza sarà triplo del quadrato dello stesso raggio.

Fig. 118.

248. Noteremo in terzo luogo intorno al quadrangolo regolare, che il quadrato del suo lato sia doppio del quadrato fatto dal raggio del cerchio, in cui è egli iscritto. Sia perciò $ABCD$ il quadrangolo regolare iscritto dentro del cerchio; e congiunte le diagonali AC , BD , s'intersegheranno queste tra loro ad angoli retti nel centro del cerchio E (232). Quindi, essendo il triangolo AEB rettangolo in E , sarà il quadrato del lato AB eguale alli quadrati delli due raggi AE , BE (129); e per tanto il quadrato dello stesso lato AB sarà doppio del quadrato fatto dal solo raggio AE . Ma giova ancora l'avvertire, che abbassata dal centro E sul lato AB la perpendicolare EF (50), debba questa essere eguale alla metà del medesimo lato AB , per la ragione, che dividendosi l'angolo AEB egualmente dalla EF , li due angoli AEF , EAF debbono esse tra loro eguali.

Fig. 124.

249. Noteremo in quarto luogo intorno al decagono regolare, che tolto il suo lato dal raggio del cerchio, in cui è egli iscritto, sia il quadrato del medesimo lato eguale al rettangolo fatto dal raggio nella porzione rimanente. Per dimostrarlo, siano AB , BC , CD , DE , EF li cinque lati del decagono regolare, che si ritrovano situati nel semicerchio ACF . E siccome, tirati i raggi BG , CG , DG , EG , debbono essere eguali li cinque angoli AGB , BGC , CGD , DGE , EGF (186), così sarà l'angolo BGF quadruplo del solo AGB . Ma l'angolo BGF è eguale alli due insieme ABG ,
BAG

BAG (70). Dunque essendo questi trà loro eguali (72), farà ciascuno di essi doppio dell' angolo AGB. Quindi, diviso l' angolo ABG egualmente per la BH (41), faranno eguali così li due GBH, HGB, come li due BAH, BHA; onde dovendo essere eguali le tre rette GH, BH, AB, farà GH la porzione del raggio GA, che uguaglia il lato AB del decagono regolare. Ma per l' uguaglianza degli angoli ABH, BGH, il lato AB dee essere tangente del cerchio circoscritto intorno al triangolo GBH (180). Dunque il quadrato dello stesso lato AB farà eguale al rettangolo del raggio GA nella sua porzione rimanente AH (196).

250. Noteremo in quinto luogo intorno allo stesso decagono regolare, che aggiunto il suo lato al raggio del cerchio, in cui è egli iscritto, sia il quadrato del raggio eguale al rettangolo, che si fa dalla somma del raggio, e del lato nel lato medesimo. Per dimostrarlo, sia AB il raggio del cerchio, e BC il lato del decagono aggiunto al raggio. Tagliata adunque dal medesimo raggio la porzione BD eguale alla BC (31), farà il rettangolo del raggio AB nella porzione rimanente AD eguale al quadrato della BC (249); con che, apposto il comune rettangolo dello stesso raggio AB nella porzione BD, o sia BC, faranno ancora li rettangoli del raggio AB nelle porzioni BD, AD eguali al rettangolo delle due AB, BC, ed al quadrato della BC (13). Ma li rettangoli del raggio AB nelle porzioni BD, AD sono eguali al quadrato del raggio AB (118); ed il rettangolo delle due AB, BC insieme col quadrato della BC è eguale al rettangolo della AC nella BC (117). Dunque il quadrato del raggio AB, ed il rettangolo della AC nella BC faranno tra loro eguali (11).

251. Noteremo finalmente intorno al pentagono regolare, che il quadrato del suo lato sia eguale al quadrato del raggio insieme col quadrato del lato del decagono regolare. Perciò siano AB, BC, CD, DE, EF li cinque archi sostenuti nel semi-

Fig. 125.

Fig. 126.

cerchio ACF da cinque lati di un tal decagono; e divisi li due AB, DE egualmente ne' punti H, ed I (188), farà l'angolo CGH eguale all'angolo CGI (186). Ma l'angolo CGI, come metà dell'angolo CGF, è eguale all'angolo CAG. Dunque ancora l'angolo CGH farà eguale all'angolo CAG (11); e per tanto dovendo essere il raggio CG tangente del cerchio circoscritto intorno al triangolo ALG (180), farà il suo quadrato eguale al rettangolo delle due AC, CL (196). Or per l'uguaglianza degli angoli ABL, BCA il lato del decagono AB è tangente del cerchio circoscritto intorno al triangolo BCL; ed in conseguenza il quadrato di detto lato è eguale al rettangolo delle due AC, AL. Dunque li quadrati del raggio CG, e del lato del decagono AB, come eguali alli rettangoli della tutta AC nelle parti CL, AL, saranno eguali al quadrato del lato del pentagono AC.

Fig. 127.

252. E quindi, per le divise figure regolari, egli è facile, dato il raggio del cerchio, in cui esse debbono essere iscritte, determinare i loro lati. Sia perciò AB il raggio dato. Alzisi primieramente sopra di esso la perpendicolare BC (49), che si faccia al medesimo eguale (31); e siccome l'istesso raggio AB è il lato dell'esagono (246), così farà AC il lato del quadrangolo (248). Alzisi di poi sopra la AC l'altra perpendicolare CD eguale similmente al raggio AB; e farà AD il lato del triangolo (247). Dividasi poscia l'istesso raggio AB talmente in E, che il rettangolo delle due AB, AE sia eguale al quadrato della BE (138); e farà BE il lato del decagono (249). Finalmente congiungansi li punti C, ed E per la retta CE; e farà questa CE il lato del pentagono (251). Nè dee passarli sotto silenzio, che con prolungarsi il raggio AB talmente per fino al punto F, che il rettangolo delle due AF, BF sia eguale al quadrato del raggio AB (137); farà ancora BF il lato del decagono (250), e CF quello del pentagono (251).

253. Or determinati i lati delle mentovate figure regolari per rapporto al raggio del cerchio.

in cui le medesime debbono essere iscritte, basterà per la loro iscrizione andare adattando successivamente dentro del cerchio li lati sudetti, senza darli la pena di dividere l'intera circonferenza in tante parti eguali, quanti sono i lati della figura da iscriversi. E per quanto tocca al problema di adattare dentro di un dato cerchio una retta, che sia eguale ad un'altra retta data, non sarà difficile cosa il risolverlo. Imperocchè, posto, che ABC sia il dato cerchio, e DE la retta data, con tagliarsi dal diametro AC la porzione AF eguale alla DE (31), e con descriversi col centro A, e coll'intervallo AF l'altro cerchio FBG, che seghi il dato nel punto B, sarà AB la retta, che si dimanda. Ma dalla costruzione medesima, e da quel tanto è stato dimostrato di sopra (158), egli è chiaro, che per essere il problema solubile, la retta data DE non dee essere maggiore del diametro del cerchio dato. Fig. 128.

L I B R O II.

Delle Teorie più composte della Geometria piana.

54. **N**El libro precedente sono state da noi dimostrate le teorie più semplici della Geometria piana; passeremo ora alle altre più composte, siccome sono quelle, che dalla dottrina delle proporzioni dipendono. Una tal dottrina, per essere comune a tutte le spezie della quantità, non solo ha luogo nella Geometria così piana, come solida, ma si estende ancora a tutte le altre scienze matematiche. Intanto, non essendo ragionevole di supporla qui nota, prima tratteremo di essa in generale, indi con applicarla alle linee rette, alle figure rettilinee, ed al cerchio medesimo, dimostreremo quelle teorie, che debbono essere l'argomento di questo secondo libro.

255. La ragione, per cui la dottrina delle proporzioni è comune a tutte le spezie della quantità, dipende dalla proprietà, che a tutte compete, di
po-

potersi dividere in parti così eguali, come disuguali. Ma giova qui l'avvertire, che di qualunque specie sia la quantità, la sua divisione in parti si estende all'infinito, senza esservi mai termine, per cui possa arrestarsi. Imperocchè, divisa la quantità data in alcune parti, ancora queste riteranno l'indole del loro tutto, e saranno divisibili in altre parti; e per la stessa ragione potendosi queste altre eziandio dividere, non mai giungerà la divisione della quantità data a segno tale, che non possa andare più oltre.

256. Egli è vero, che una divisione senza limiti non può effettivamente eseguirsi; ma non essendovi ripugnanza nel concepirla, almeno col pensiero potrà ella ascriversi alla quantità, come stata fosse di già eseguita. E perciò così nel trattare della dottrina delle proporzioni in generale, come nell'applicarla alle varie specie della quantità estesa, che si considerano nella Geometria piana, non ci faremo scrupolo di supporre tal volta divisa la quantità in una moltitudine così grande de' parti eguali, che ella sia maggiore di ogni qualunque numero, che possa assegnarsi.

157. Supponendosi in tanto così minutamente divisa la quantità, egli non è da porsi in dubbio, che ciascuna delle sue particelle sia così picciola per rapporto alla quantità intera, che possa ella trascurarsi, senza che riceva diminuzione alcuna la quantità medesima. E poicché col farsi uso di questo principio moltissime verità geometriche si dimostrano con una somma semplicità; lo adopreremo noi tal volta da qui innanzi, ed assumeremo come eguali quelle quantità, le quali differiscono tra loro per una differenza così picciola, che sia minore di ogni particella, che possa in esse assegnarsi.

CAPITOLO I.

Della dottrina delle proporzioni in generale.

258. **S**iccome le quantità possono essere di varie spezie, così chiameremo omogenee quelle fra di esse, che ad una medesima spezie si rapportano. Si distinguono queste tali quantità per la proprietà, che esse hanno di essere tra loro o eguali, o disuguali; giacchè per quanto a quelle, che sono di spezie diversa, e che possono dirsi eterogenee, conforme non sono tra di esse eguali, così nè pure debbono riguardarsi come disuguali. Ma alle medesime quantità omogenee compete ancora un'altra proprietà, e si è di potersi paragonare tra loro per via della continenza. E poicche da questa affezione è derivata la considerazione così della ragione, che dee essere tra due quantità omogenee, come della proporzione, che due di qualunque spezie possono formare con altre due ad esse omogenee; perciò prima di ogni altra cosa è necessario, che nella dilucidazione di una tal affezione alquanto ci distendiamo.

§. I.

Della comparazione delle quantità omogenee per via della continenza.

259. **L**A continenza, per cui diciamo essere paragonabili tra loro due qualsivoglia quantità omogenee, consiste in ciò, che tra gl' infiniti numeri intieri, o rotti, che possono darsi, debba sempre esservene uno, il quale dimostri, quanto delle due quantità l'una contiene l'altra. Ed in primo luogo, quante volte le due quantità sono tra di esse eguali, non è da porsi in dubbio, che una tal comparazione debba tra loro aver luogo; poicche per l'uguaglianza medesima chiaramente si vede, che ciascuna delle due quantità contiene l'al-

l'altra giustamente una volta . Più tosto adunque dee esaminarsi il caso , quando le due quantità omogenee sono disuguali , ed in conseguenza tali , che la minore di esse debba riguardarsi come parte della maggiore .

260. Ma per questo caso notifi primieramente , che la parte a riguardo del tutto puo essere di due specie , cioè o aliquota , o aliquanta . Si chiama parte aliquota , quando replicata più volte compone giustamente il tutto , a cui si rapporta . Per lo contrario si appella parte aliquanta , quando colla sua reiterata posizione forma una quantità maggiore , o minore del tutto , a cui si riferisce . Così a riguardo della linea di dieci palmi dee dirsi parte aliquota quella di due , per la ragione , che replicata cinque volte diventa ancora essa di dieci palmi ; ma l'altra di tre palmi dovrà chiamarsi sua parte aliquanta , come quella , che presa tre volte diviene di nove , e presa quattro volte diviene di dodici palmi .

261. Siccome poi una quantità , la quale è parte aliquota di due altre , dicesi essere parte aliquota loro comune ; così se due quantità siano talmente parti aliquote di altre due , che per la formazione di esse debbano ripetersi un'istesso numero di volte , in tal caso si diranno essere loro parti aliquote simili . Così la linea di due palmi è parte aliquota comune di quella di otto , e di quella di dieci ; ma se vi sono due linee , una di due palmi , e l'altra di tre , queste a riguardo delle altre due , che sono di otto , e di dodici palmi , faranno parti aliquote simili ; poicche , siccome quella di due palmi dee prendersi quattro volte per formare quella di otto , così l'altra di tre palmi dee essere presa ancora quattro volte per formare l'altra di dodici .

262. In oltre , conforme la parte , che replicata più volte compone giustamente il tutto , a cui si riferisce , dicesi essere sua parte aliquota ; così il tutto a riguardo di quella parte si dirà essere suo multiplice . E quindi , siccome multiplice comune

mune di due quantità dee essere una terza quantità, di cui ciascuna di quelle sia parte aliquota; così moltiplici simili, o pure egualmente moltiplici di due quantità dovranno essere due altre quantità, delle quali quelle due siano parti aliquote simili. E secondo queste definizioni se vi sono due linee, una di due palmi, e l'altra di tre, farà loro moltiplice comune quella di dodici, e moltiplici simili, ovvero egualmente moltiplici le altre due di otto, e di dodici palmi.

263. Quantevolte di due quantità omogenee disuguali una è parte aliquota dell'altra, egli è facile ad intendersi, che le medesime siano paragonabili tra loro per via della continenza. Poicche, siccome la minore è tanto parte della maggiore quante sono le volte, che ella dee replicarsi per comporla; così la maggiore farà tanto moltiplice della minore, quanto è il numero di quelle medesime volte. Così nella ipotesi, che la minore replicata tre volte formi la maggiore, si dirà, che la minore sia la terza parte della maggiore, e la maggiore il triplo della minore. E così ancora supponendo, che la minore replicata cinque volte formi la maggiore, diremo, che la minore sia la quinta parte della maggiore, e la maggiore il quintuplo della minore.

264. La difficoltà s'incontra, quando di due quantità omogenee disuguali una è parte aliquota dell'altra; e pure se queste anno una parte aliquota comune, non si dura fatica ad intendersi, che le medesime siano paragonabili tra loro per via della continenza. Fingiamo a cagion di esempio, che le due quantità siano le due linee A, e B, delle quali la prima A sia di tre palmi, e la seconda B di cinque; di maniera che comune loro parte aliquota sia la terza linea C di un palmo solo. E poicche la A è il triplo della C, e la C è la quinta parte della B; dovrà dirsi della A, che ella sia il triplo della quinta parte della B, o pure che contenga tre quinte parti della B. E per la stessa ragione, essendo la B il quintuplo della

Fig. 129.

C, e

C, e la C la terza parte della A; dovrà dirsi della B, che ella sia il quintuplo della terza parte della A, o pure che contenga cinque terze parti della A.

265. Or se si voglia attentamente riflettere, due quantità, che sono omogenee, debbono sempre avere una parte aliquota comune. Imperocchè di già è stato avvertito, che ogni quantità almeno col pensiero può supporfi divisa in una moltitudine innumerabile di parti eguali (256). Ma siccome ciascuna di queste particelle per la loro uguaglianza è parte aliquota della quantità divisa; così non è egli da porsi in dubbio, che la medesima particella sia eziandio parte aliquota di ogni altra quantità, che è omogenea colla stessa quantità divisa, per la ragione, che se mai colla sua posizione innumerabilmente reiterata non giungesse a formare con esattezza l'altra quantità, l'avanzo di questa farebbe così picciolo, che senza sua diminuzione potrebbe essere trascurato (257); ed in conseguenza sempre quella tale particella farebbe parte aliquota dell'altra quantità omogenea colla divisa.

266. Poicché dunque due quantità omogenee debbono sempre avere una qualche parte aliquota comune, saranno le medesime sempre paragonabili tra loro per via della continenza (264); ed il solo divario, che vi farà, quantevolte per giungere a quella comune parte aliquota egli è necessario di ricorrere ad una moltitudine innumerabile di parti eguali, consiste in ciò, che siccome non possono comprendersi le moltitudini delle volte, che dee ripetersi la stessa parte per formare le due quantità, così nè pure potrà esprimersi il quanto della loro continenza. E quindi è nata la divisione delle quantità omogenee in commensurabili, ed incommensurabili; la quale per altro non dovrebbe aver luogo, se col nostro intendimento potessimo sempre giungere a concepire, quantevolte la comune parte aliquota di due quantità omogenee giustamente le misura.

GEOMETRIA PIANA. III

267. Del rimanente siccome la ragione, per cui due quantità omogenee, delle quali una è parte aliquanta dell'altra, sono sempre paragonabili tra loro per via della continenza, si è, perche tali quantità debbono sempre avere una parte aliquota comune, a cui si possono supporre eguali le parti, nelle quali esse sono divisibili; così da questo stesso fonte dee ripetersi ancora la ragione, per cui una comparazione consimile può istituirsi eziandio così tra le quantità omogenee, che sono eguali, come tra quelle, delle quali una è parte aliquota dell'altra. Ed in effetto, potendosi riguardare qualsivoglia quantità come parte aliquota tanto di se stessa, quanto di ogni altra sua eguale; sarà a riguardo delle prime ciascuna delle due parte aliquota loro comune; ed a riguardo delle seconde potrà averfi come tale la quantità stessa minore.

§. II.

Delle nozioni della ragione, e della proporzione.

268. **S**iccome due quantità omogenee sono sempre paragonabili tra di esse per via della continenza, così si appella loro ragione la continenza stessa della seconda nella prima. Le quantità intanto, che paragonate tra loro, danno luogo alla ragione, sogliono considerarsi come suoi termini, delli quali il primo dicesi antecedente, ed il secondo conseguente. E poicche l'antecedente può più, o meno contenere il conseguente, ancora la ragione dee avere la sua quantità, la quale dipende dalla comune parte aliquota delli suoi termini. Imperocche, partiti questi almeno col pensiero in parti, che siano a quella eguali, e diviso il numero delle parti dell'antecedente per lo numero delle parti del conseguente; ci additerà il quoziente di questa divisione, quanto l'antecedente contiene il conseguente; e perciò l'istesso quoziente farà la quantità della ragione, che si dimanda.

269. La ragione intanto può essere o di uguaglianza, o di disuguaglianza. Dicesi essere di uguaglianza, quando i suoi termini sono tra loro eguali. Per lo contrario si dice essere di disuguaglianza, quando i termini di essa sono disuguali; e secondo che l'antecedente è maggiore, o minore del conseguente, si dirà ancora la ragione, che sia di maggiore, o minore disuguaglianza. E poichè la quantità della ragione dee additarci, quanto l'antecedente contiene il conseguente (268); egli è facile ad intendersi, che ella debba essere eguale all'unità, quando la ragione è di uguaglianza; maggiore dell'unità, quando la ragione è di maggiore disuguaglianza; ed in fine minore dell'unità, quando per lo contrario la ragione è di minore disuguaglianza.

270. Possono ancora le ragioni paragonarsi tra di esse per mezzo delle loro quantità, che come numeri sono sempre omogenee; ed in virtù di questa comparazione siccome due ragioni debbono dirsi eguali, quando eguali sono le loro quantità, così sarà l'una maggiore o minore dell'altra, secondo che la quantità della prima è maggiore o minore della quantità della seconda. Specialmente poi si dirà una ragione essere dupla, tripla, o quadrupla di un'altra ragione, quando la sua quantità è dupla, tripla, o quadrupla della quantità dell'altra; conforme per lo contrario si dirà una ragione essere la metà, la terza parte, o la quarta parte di un'altra ragione, quando la sua quantità è la metà, la terza parte, o la quarta parte della quantità dell'altra.

271. E quindi, giudicando sempre delle ragioni per le loro quantità, si vede in primo luogo, che le ragioni eguali ad una terza debbano essere eguali ancora tra loro. Si vede in secondo luogo, che eguali parimente esser debbono così le ragioni, che sono duple, triple, o quadruple di una terza; come le altre, che sono la metà, la terza parte, o la quarta parte di una stessa ragione. Si vede in terzo luogo, che se di due ragioni eguali una sia maggiore o minore di una terza, l'altra debba essere di quella stessa ancora maggiore o minore. Si vede

vede finalmente, che essendo disuguali due ragioni, se la minore sia maggiore di una terza, l'altra tanto più ne debba essere maggiore; e se la maggiore sia minore di una terza, l'altra tanto più ne debba essere minore.

272. Mà intorno all' uguaglianza, e disuguaglianza di due ragioni abbiamo ancora altri teoremi, che per dedursi immediatamente dalla nozione stessa della ragione, possono più tosto averfi come assiomi. Ed in primo luogo siccome non è da porsi in dubbio, che due quantità eguali egualmente contengono una terza; così nè pure dee negarsi, che di due quantità disuguali la maggiore contenga una terza molto più, che la minore. Onde di già abbiamo due teoremi. I, che essendo eguali due quantità, eguali similmente esser debbano le ragioni, che quelle anno ad una terza. E II., che essendo disuguali due quantità, la maggiore ad una terza debba avere maggior ragione, che la minore.

273. In secondo luogo siccome egli è chiaro, che una terza quantità debba contenere egualmente ciascuna delle due eguali; così chiara cosa ancora si è, che qualora due quantità sono disuguali, una terza debba contenere molto più la minore, che la maggiore. Onde alli due teoremi precedenti potremo aggiungere questi altri due. I, che essendo eguali due quantità, una terza debba avere l'istessa ragione all'una, che all'altra. E II., che essendo disuguali due quantità, una terza debba avere maggior ragione alla minore, che alla maggiore.

274. In terzo luogo con dimostrazioni negative ritroveremo veri eziandio li conversi di tutti quattro i teoremi precedenti; e perciò oltre ad essi ne avremo ancora quattro altri. I, che le quantità, le quali anno ad una terza l'istessa ragione, siano eguali tra loro. II, che delle quantità, le quali anno ragione ad una terza, quella sia maggiore, a cui corrisponde ragione maggiore. III, che le quantità, alle quali una terza ha l'istessa

H

ra-

ragione, siano tra loro eguali. E IV, che delle quantità, alle quali ha ragione una terza, quella sia minore, che somministra a quella terza ragione maggiore.

275. Finalmente dovendo due quantità egualmente contenere così le loro parti aliquote simili, come i loro moltiplici simili, potrà riporsi nella classe de' teoremi, che riguardano l'uguaglianza di due ragioni, ancora quest'altro; cioè, che due quantità debbono avere eguali ragioni tanto alle loro parti aliquote simili, quanto alli loro moltiplici simili. E poicche ogni quantità può essere riguardata e come parte aliquota, e come moltiplice di qualunque altra, che sia ad essa eguale; in virtù di un tal teorema dovranno essere eguali ancora le ragioni, che anno due quantità alle loro eguali.

276. Or sempre quando sono eguali due ragioni, la loro uguaglianza chiamasi proporzione, e gli antecedenti di esse si dicono essere proporzionali alli loro conseguenti. Quindi per la proporzione non è necessario, che tutti quattro i termini siano omogenei, ma basterà che siano tali a due a due; e perciò due linee potranno formare proporzione non solo con due altre linee, ma ancora con due superficie, o pure con due corpi o solidi. Anzi questo è il gran vantaggio, che dalle proporzioni si raccoglie, cioè, che per mezzo di esse colle ragioni delle quantità più semplici si additano le ragioni delle altre più composte. Intanto in ogni proporzione così li due antecedenti, come li due conseguenti si dicono essere tra loro omologhi, in quanto che si corrispondono tra di essi nelle due ragioni eguali, che formano la proporzione.

277. Poicche dunque la proporzione consiste nell'uguaglianza di due ragioni, per necessità gli antecedenti di essa dovranno egualmente contenere i loro conseguenti; e perciò quelli per rapporto a questi saranno insieme o maggiori, o minori, o eguali. L'uguaglianza intanto di due

ra-

ragioni dipende dall'uguaglianza delle loro quantità (270). Onde, attesa la maniera come si determina la quantità di ogni ragione (268), non vi sarà mezzo più sicuro per la conoscenza delle quantità proporzionali, se non se di vedere, se possa darsi tale parte aliquota della prima e della seconda, e tale ancora della terza e della quarta, che le medesime siano eziandio parti aliquote simili tanto della prima e della terza, quanto della seconda e della quarta.

278. Quante volte la proporzione ritrovasi trà quantità, che sono tutte tra loro omogenee, ella puo stare ancora in tre soli termini; e ciò avviene, quando quello di mezzo fa le veci di conseguente nella prima ragione, e le veci di antecedente nella seconda. Così essendo omogenee le tre quantità A, B, C , ed essendo la ragione di A a B eguale alla ragione di B a C ; chiaramente si vede, che con esse sole regge la proporzione, poicche quella di mezzo B si prende due volte. Una tal proporzione chiamasi continua a differenza della discreta, la quale sussiste in quattro termini distinti. E qualora si ha una serie di molte quantità omogenee continuamente proporzionali, si fatta serie specialmente si chiama progressione.

Fig. 130.

§. III.

Della nozione della ragione, che dicesi composta.

279. **L**E quantità delle ragioni, come numeri interi o rotti, si possono e moltiplicare, e dividere tra loro. Quindi se mai la quantità di una ragione si ritrovi essere il prodotto delle quantità di due, o più altre ragioni, in tal caso quella tale ragione si dirà essere composta ovvero prodotta da queste altre ragioni, le quali in conseguenza faranno riguardate come componenti di quella. Così avvalendoci delle quantità numeriche, la ragione di 20 a 2, che ha per sua quantità 10, dee dirsi

H 2 com-

composta dalle ragioni di 8 a 4 , e di 15 a 3 , le di cui quantità sono 2 , e 5 . E così ancora la ragione di 48 a 2 dovrà dirsi composta dalle ragioni di 12 a 6 , di 15 a 5 , e di 40 a 10 , per essere 24 la quantità di quella , e 2 , 3 , e 4 le quantità di queste altre .

280. L'uso della ragion composta nella dottrina delle proporzioni non può a bastanza commendarsi, onde giova anticipatamente averne nota la teoria. Ed in primo luogo se vi sono due ragioni composte , e le componenti dell'una siano eguali alle componenti dell'altra , ciascuna a ciascuna ; egli non è da porsi in dubbio , che eguali similmente esser debbano le stesse ragioni composte . Ma non perciò sarà sempre vero il converso , cioè , che essendo eguali le ragioni composte , debbano essere eguali le loro ragioni componenti ; poicché siccome li numeri , che producono un'altro , non sono sempre gli stessi , così le componenti di una ragione composta possono non essere sempre le medesime .

281. In secondo luogo se vi sono due ragioni composte , e ciascuna delle componenti della prima sia maggiore , o minore di ciascuna delle componenti dell'altra ; nè pure potrà negarsi , che la prima ragione composta debba essere similmente maggiore , o minore della seconda . E poicché l'istesso dee avvenire , se essendo le altre componenti tra loro eguali , soltanto una della prima sia maggiore , o minore di una della seconda ; si potrà quindi facilmente dedurre , che se vi sono due ragioni , delle quali ciascuna sia composta da due altre , e siano eguali tra di esse così le composte , come due delle componenti , ancora le altre due ragioni , che concorrono alla composizione di quelle , debbano essere tra loro eguali .

282. Ma per dimostrare intorno alla ragion composta altri teoremi molto più rilevanti , notisi primieramente , che non solo due quantità omogenee , ma ancora tre , anzi quante si vogliano , debbano sempre avere una parte aliquota comune .

ne. Per comprenderne la ragione, siano A, B, C Fig. 131. le tre quantità omogenee, e sia D la comune parte aliquota delle due prime A , e B . Adunque o la stessa D è similmente parte aliquota della terza C , e di già tutte trè ne avranno una comune; o ella non è tale, e quella, che è comune parte aliquota delle due D , e C , dovendo misurare giustamente le due A , e B , che sono moltiplici di D , farà parte aliquota comune delle tre A, B, C .

283. Notisi ancora, che se presi tre numeri ad arbitrio, dividasi così il primo per lo secondo, come il secondo per lo terzo, il prodotto de' quozienti, che si avranno, farà quello, che risulta dalla divisione del primo per lo terzo. Vedesi ciò chiaramente cogli esempj medesimi; poicche essendo 40, 10, e 5 li tre numeri, faranno 4, e 2 li quozienti del primo diviso per lo secondo, e del secondo diviso per lo terzo, li quali moltiplicati insieme producono 8, che è il quoziente del primo diviso per lo terzo. Ma disegnandosi i quozienti per mezzo di due frazioni, delle quali numeratori ne siano li dividendi, e denominatori li divisori; egli è facile ad intenderne la ragione, e formare di tal verità una dimostrazione generale.

284. Avvertite tali cose, dimostreremo ora, che se vi sono tre quantità omogenee, la ragione della prima alla terza debba esser composta dalle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza. Perciò sieno A, B, C le tre quantità omogenee; e siccome esse debbono avere una parte aliquota comune (282), così concepscanli divise in parti, che sieno a quella eguali; con che avremo tre numeri, uno per le parti di A , l'altro per le parti di B , ed il terzo per le parti di C ; onde il quoziente del primo diviso per lo terzo sarà il prodotto de' quozienti del primo diviso per lo secondo, e del secondo diviso per lo terzo (283). Ma quel quoziente è la quantità della ragione di A a C , e questi altri due sono le quantità delle ragioni di

H 3 A a B ,

A a B, e di B a C (268). Dunque la ragione di A a C farà composta dalla ragione di A a B, e dalla ragione di B a C (279).

Fig. 131.

285. Quindi essendo quattro le quantità omogenee, potrà dimostrarsi ancora, che la ragione della prima alla quarta debba essere composta dalle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, e della terza alla quarta. Perciò siano A, B, C, D le quattro quantità omogenee; e considerate le tre A, C, D, farà la ragione di A a D composta da due sole, cioè da quella di A a C, e dall'altra di C a D (284). Ma per le tre quantità A, B, C la ragione di A a C si compone dalla ragione di A a B, e dalla ragione di B a C. Dunque la ragione di A a D farà composta da tre ragioni, cioè dalla ragione di A a B, dalla ragione di B a C, e dalla ragione di C a D. E poicche dell'istessa maniera puo andarfi sempre più oltre, farà vero generalmente, che in una serie di quantità omogenee la ragione della prima all'ultima sia composta dalle ragioni, che risultano paragonandosi ciascuno termine della serie col suo susseguente.

286. Siccome niente vieta, che le ragioni componenti siano tra loro eguali; così quando ciò avviene, la ragione composta si dirà essere tanto moltiplicata di ciascuna di esse, quanto è il numero delle medesime; cioè duplicata, quando sono due; triplicata, quando sono tre; quadruplicata, quando sono quattro; e così all'infinito. Quindi nè la duplicata dee confondersi colla dupla, nè la triplicata colla tripla, nè la quadruplicata colla quadrupla. Imperocchè una ragione dicesi dupla, tripla, o quadrupla di un'altra, quando la sua quantità è dupla, tripla, o quadrupla della quantità dell'altra (271). Ma per potersi dire, che una ragione sia duplicata, triplicata, o quadruplicata di un'altra ragione, egli è necessario che la quantità di quella si produca con moltiplicarsi la quantità di questa una, due, o tre volte per se medesima.

287. Or egli è facile a dimostrarsi, che in una
pro-

proporzione continua la prima quantità alla terza sia in ragione duplicata, così della prima alla seconda, come della seconda alla terza. Imperocchè, se A, B, C sono le tre quantità continuamente proporzionali, sarà la ragione di A a C composta dalla ragione di A a B , e dalla ragione di B a C (284). Ma per la supposta proporzione queste due ragioni sono eguali tra loro (278). Dunque la ragione di A a C sarà duplicata di ciascuna di esse (286). Che se poi le quantità continuamente proporzionali fossero quattro, in tal caso con simile ragionamento si pruovarebbe, che la ragione della prima alla quarta sia triplicata e della ragione della prima alla seconda, e della ragione della seconda alla terza, e della ragione della terza alla quarta. Ed egli è chiaro potersi estendere la stessa teoria a qualsivoglia numero di quantità continuamente proporzionali.

Fig. 130.

288. Del rimanente egli non è da porsi in dubbio, che essendo eguali due ragioni, debbano essere eguali ancora le loro duplicate, triplicate, o quadruplicate; e che per lo contrario essendo queste eguali, debba altresì tra quelle esservi uguaglianza. E quindi facilmente può dimostrarsi, che la mezza proporzionale tra due quantità date debba essere ancora data. Pongasi perciò, che così C , come B sia mezza proporzionale tra le due A e D . Sarà adunque la ragione di A a D duplicata tanto della ragione di A a C , quanto della ragione di A a B (287). Con che dovendo essere queste due ragioni eguali, sarà ancora C eguale a B (274). Ma qualunque sia il numero delle mezze proporzionali, che si vogliono frapporre tra due quantità date; con dimostrazione non dissimile si farà vedere, che ancora quelle debbano essere

Fig. 131.

§. IV.

Delle affezioni comuni ad ogni proporzione.

289. **D**Alle cose fin qui esposte possono con facilità dedursi le affezioni, così comuni ad ogni proporzione, come proprie di quelle, che hanno tutti i termini omogenei. Ed in primo luogo ogni proporzione, con invertire i termini di essa, e fare antecedenti i conseguenti e conseguenti gli antecedenti, dee eziandio sussistere. Per dimostrarlo, notisi primieramente, che siccome tra due quantità si possono considerare due ragioni, cioè una della prima alla seconda, e l'altra della seconda alla prima; così la quantità di una di queste ragioni sarà sempre il contrapposto della quantità dell'altra ragione. In effetto se delle due quantità la prima sia il duplo, o triplo della seconda, questa della prima ne sarà la metà, o la terza parte; se la prima contenga cinque terze parti, o sette quinte parti della seconda, questa per lo contrario conterrà tre quinte parti, o cinque settime parti della seconda; e così all'infinito. E da ciò è derivato, che delle due ragioni, le quali possono considerarsi tra due quantità, l'una dicesi essere inversa dell'altra.

Fig. 131.

290. Da questa nozione della ragione inversa, che si appella ancora reciproca, con ogni chiarezza si vede, che quante volte sono eguali due ragioni, ancora le loro inverse debbano essere eguali. Ma essendo così, non sarà difficile il dimostrare, che una proporzione non debba alterarsi, con invertire i termini di essa, e fare antecedenti i conseguenti, e conseguenti gli antecedenti. Siano adunque proporzionali le quattro quantità A, B, C, D. Io dico, che invertendo tali ancora debbano essere le quattro B, A, D, C. Imperocchè l'inversa della ragione di A a B è quella di B ad A; e l'inversa della ragione di C a D è quella di D a C. Ma essendo proporzionali le quattro quantità

tità A, B, C, D, la ragione di A a B è eguale alla ragione di C a D (276). Dunque ancora la ragione di B ad A farà eguale alla ragione di D a C; e pertanto le quattro quantità B, A, D, C faranno similmente proporzionali.

291. In secondo luogo se gli antecedenti di una proporzione si aggiungano alli loro conseguenti, e le somme si comparino colli medesimi conseguenti, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AB a BC, così DE ad EF. Io dico, che componendo, ovvero congiungendo farà ancora come AC a BC, così DF ad EF. Imperocchè siccome per la supposta proporzione le due AB, DE egualmente contengono le altre due BC, EF; così queste BC, EF ancora egualmente contengono se stesse, cioè a dire una volta. Ma AC contiene BC e di quanto AB contiene BC, e di quanto BC contiene se stessa; e similmente DF contiene EF e di quanto DE contiene EF, e di quanto EF contiene se medesima. Dunque ancora le due AC, DF egualmente conteranno le altre due BC, EF; e pertanto farà come AC a BC, così DF ad EF.

Fig. 132.

292. In terzo luogo, se gli antecedenti di una proporzione aggiungansi alli loro conseguenti, e gli antecedenti stessi si comparino colle somme, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AB a BC, così DE ad EF. Io dico, che per una seconda spezie di composizione, ovvero congiunzione farà ancora come AB ad AC, così DE a DF. Imperocchè essendo per ipotesi come AB a BC, così DE ad EF; farà invertendo come BC ad AB, così EF a DE (290). Quindi per la composizione di già dimostrata farà come AC ad AB, così DF a DE (291); ed in conseguenza invertendo di nuovo farà come AB ad AC, così DE a DF.

Fig. 132.

293. In quarto luogo siccome ogni proporzione con invertire i termini di essa se mai vi sia bisogno, può sempre avere gli antecedenti maggiori delli conseguenti; così se questi si tolgano da quelli, ed i residui si comparino colli conseguenti medesimi, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò

Fig. 132. come AC a BC , così DF ad EF . Io dico, che dividendo, ovvero disgiugnendo sarà ancora come AB a BC , così DE ad EF . Se è possibile, abbia AB a BC maggior ragione che DE ad EF . Adunque AB conterrà BC più di quello, che DE contiene EF (270); ed in conseguenza perche BC , ed EF egualmente contengono se stesse, ancora AC conterrà BC più di quello, che DF contiene EF ; con che la ragione di AC a BC sarà maggiore della ragione di DF ad EF . Ma per la supposta proporzione queste due ragioni debbono essere eguali tra loro (276). Dunque non è egli vero, che AB a BC abbia maggior ragione, che DE ad EF ; e dimostrandosi dell'istessa maniera, che nè pure abbia ragione minore, sarà come AB a BC , così DE ad EF .

Fig. 132. 294. In quinto luogo, se dagli antecedenti di una proporzione tolgansi li loro conseguenti, e gli antecedenti stessi si comparino colli residui, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AC a BC , così DF ad EF . Io dico, che per una seconda spezie di divisione, a cui si è dato il nome di conversione, sarà ancora come AC ad AB , così DF a DE . Imperocchè, essendo per ipotesi come AC a BC , così DF ad EF ; sarà per la divisione di già dimostrata come AB a BC , così DE ad EF (293). Quindi invertendo sarà come BC ad AB , così EF a DE (290); ed in conseguenza per la prima spezie di composizione sarà come AC ad AB , così DF a DE (291).

Fig. 133. 295. Per dimostrare altre affezioni di qualunque proporzione, notisi in questo luogo, che se le ragioni di più quantità siano eguali alle ragioni di altrettante quantità, si diranno le prime quantità essere in ragione ordinata colle seconde, quante volte le ragioni eguali delle une, e delle altre si corrispondono con ordine; per lo contrario si diranno essere in ragione perturbata, quando le stesse ragioni eguali si corrispondono per l'opposto. Così essendo A, B, C, D le prime quantità, ed E, F, G, H le seconde; diremo, che le une
colle

colle altre siano in ragione ordinata, quando si ha come A a B così E ad F, come B a C così F a G, come C a D così G ad H; e per lo contrario diremo, che siano in ragione perturbata, quando si ha come A a B così G ad H, come B a C così F a G, come C a D così E ad F.

296. Essendo così, egli è facile in sesto luogo a dimostrarsi, che se più quantità sono con altrettante o in ragione ordinata, o in ragione perturbata, debbano le prime colle ultime formare sempre una proporzione. Siano perciò le quattro quantità A, B, C, D in ordinata, o perturbata ragione colle altre quattro E, F, G, H. E siccome la ragione di A a D è composta dalle ragioni di A a B, di B a C, e di C a D; così la ragione di E ad H sarà composta dalle ragioni di E ad F, di F a G, e di G ad H (285). Ma le componenti dell'una sono eguali alle componenti dell'altra, ciascuna a ciascuna, con questo solo divario, che l'uguaglianza s'incontra con ordine nella ragione ordinata, e per l'opposto nella ragione perturbata (295). Dunque ancora la ragione di A a D sarà eguale alla ragione di E ad H (280); ed in conseguenza le quattro quantità A, D, E, H saranno proporzionali (276). Fig. 133.

297. Che se poi le quantità A, B, C, D sono solamente in ordinata ragione colle altre E, F, G, H, può dimostrarsi in settimo luogo, che ancora le loro somme debbano colle ultime formare sempre una proporzione. Imperocchè essendo come A a B, così E ad F; sarà componendo come la somma delle due A e B a B così la somma delle due E ed F ad F (291). Ma B sta a C, come F a G. Dunque ordinando sarà come la somma delle due A e B a C, così la somma delle due E ed F a G (296). E poicché componendo di nuovo dee essere come la somma delle tre A, B, C a C, così la somma delle tre E, F, G a G, e C sta a D come G ad H; sarà di nuovo ordinando come la somma delle tre A, B, C a D così la somma delle tre E, F, G ad H; ed in Fig. 133.

con-

conseguenza altra volta componendo come la somma delle quattro A, B, C, D a D , così la somma delle quattro E, F, G, H ad H .

Fig. 133. 298. In ottavo luogo se due quantità sono proporzionali agli antecedenti di una proporzione, e due altre alli conseguenti, ancora tra queste quantità vi farà proporzione. Siano perciò A, B, C, D li quattro termini della proporzione; e pongasi, che le due E, G siano le quantità proporzionali agli antecedenti A, C ; e le altre due F, H le quantità proporzionali alli conseguenti B, D . Poicche dunque F sta a B , come H a D ; farà invertendo come B ad F , così D ad H (290). Ma E sta ad A , come G a C ; ed A sta a B , come C a D . Dunque le quattro quantità E, A, B, F faranno in ordinata ragione colle altre quattro G, C, D, H (295); e perciò ordinando farà come E ad F , così G ad H (296). Che se poi così le une, come le altre quantità siano proporzionali a medesimi termini, tanto più tra di esse dovrà esservi proporzione.

Fig. 132. 299. In nono luogo se a medesimi termini siano proporzionali così due quantità, come altre due, congiunte con ordine le une colle altre ancora le somme saranno proporzionali a quegli stessi termini. Siano perciò le due quantità G, H , alle quali siano proporzionali così le due AB, DE , come le due BC, EF . Io dico, che congiunta la AB colla BC , e la DE colla EF , ancora le somme AC, DF saranno proporzionali alle stesse G, H . Poicche agli stessi termini G, H sono proporzionali così le due AB, DE , come le due BC, EF ; farà come AB a BC , così DE ed EF (298); ed in conseguenza componendo farà ancora come AC a BC , così DF ad EF (291). Ma per ipotesi BC sta a G , come EF ad H . Dunque le tre AC, BC, G faranno in ordinata ragione colle altre tre DF, EF, H (295); e perciò ordinando farà come AC a G , così DF ad H (296).

300. Finalmente se a medesimi termini siano proporzionali così due quantità, come altre due, tolte

con

con ordine le une dalle altre, ancora le rimanenti faranno proporzionali a quegli stessi termini. Perciò siano di nuovo le due quantità G , ed H , alle quali siano proporzionali tanto le due AC , DF , quanto le due AB , DE . Io dico, che tolta la AB dalla AC , e la DE dalla DF , ancora le rimanenti BC , EF faranno proporzionali alle stesse G , ed H . Poicché agli stessi termini G , ed H sono proporzionali così le due AC , DF , come le due AB , DE ; farà come AC ad AB , così DF a DE (298): ed in conseguenza dividendo farà come BC ad AB , così EF a DE (293). Ma per ipotesi AB sta a G , come DE ad H . Dunque le tre BC , AB , G faranno in ordinata ragione colle altre tre EF , DE , H (295); e perciò ordinando farà come BC a G , così EF ad H (296).

Fig. 132.

§. V.

Delle affezioni della proporzione, di cui tutti i termini sono omogenei.

301. **A**lla proporzione, di cui tutti i termini sono omogenei, oltre alle proprietà precedenti ne competono ancora molte altre. E primieramente siccome è proprio delle quantità omogenee di essere tra loro o eguali, o disuguali; così in una tal proporzione li primi due termini a riguardo degli altri due debbono essere insieme o eguali, o maggiori, o minori. Per dimostrarlo, siano proporzionali le quattro quantità omogenee A , B , C , D ; e pongasi in primo luogo, che la prima A sia eguale alla terza C . Essendo adunque per la loro uguaglianza la ragione di A a B eguale alla ragione di C a B (272), faranno le due ragioni, di C a B , e di C a D ancora tra loro eguali (271); e pertanto la seconda B dovrà essere parimente eguale alla quarta D (274). Pongasi in secondo luogo, che A sia maggiore di C ; ed in questo caso essendo la ragione di A a B maggiore della ragione di C a B ,

Fig. 131.

a B, farà ancora la ragione di C a D maggiore della ragione di C a B; con che eziandio B dovrà essere maggiore di D. Pongasi finalmente, che A sia minore di C, e secondo questa posizione essendo la ragione di C a B maggiore della ragione di A a B, farà la ragione di C a B maggiore ancora della ragione di C a D; e pertanto similmente B dovrà essere minore di D.

Fig. 134.

302. Essendo così, può dimostrarsi ancora, che se quattro quantità omogenee sono proporzionali tra loro, la massima e la minima unite insieme debbano essere maggiori delle altre due. Siano perciò proporzionali le quattro quantità omogenee AB, C, DE, F; e pongasi, che la prima AB sia la massima. Siccome dunque AB è maggiore di DE, così sarà C maggiore di F (301). Ma per essere la ragione di AB a C eguale alla ragione di DE ad F, non può AB essere maggiore di C, senza che ancora DE sia maggiore di F (277). Dunque la quarta F sarà la minima. Quindi se delle due AB, DE siano BG, EH le porzioni eguali alle loro minori C, ed F; farà come AB a BG. Così DE ad EH; ed in conseguenza convertendo come AB ad AG, così DE a DH (294). Onde ancora AG sarà maggiore di DH; e coll'aggiunta tanto delle eguali BG e C, quanto delle altre eguali F ed EH, faranno le due AB ed F insieme similmente maggiori delle altre due DE, e C (13).

Fig. 131.

303. In oltre, siccome le quantità omogenee sono sempre paragonabili tra loro per via della continenza, così in una proporzione, che ha tutti quattro i termini omogenei, potrà paragonarsi per quel verso tanto l'antecedente coll' antecedente, quanto il conseguente col conseguente; ma permutati in questa maniera i termini, la proporzione tra di essi tuttavia dovrà sussistere. Per dimostrarlo, siano A, B, C, D quattro quantità omogenee; e pongasi, che A sia a B, come C a D. Io dico, che permutando farà ancora come A a C, così B a D. Imperocchè conforme la ragione
ac

ne di A a C si compone dalle ragioni di A a B, e di B a C; così la ragione di B a D si compone dalle ragioni di B a C, e di C a D (284). Onde essendo le componenti dell'una eguali alle componenti dell'altra, ciascuna a ciascuna, ancora la ragione di A a C farà eguale alla ragione di C a D (280).

304. E quindi egli è facile a dimostrare, che se le parti di una quantità sono in data ragione colle parti di un'altra, ancora le quantità medesime debbano esse tra loro nella stessa ragione. Siano perciò AC, DF due quantità omogenee, delle quali la prima AC sia divisa nelle parti AB, BC, e la seconda DF nelle parti DE, EF; e sia in oltre come la parte AB alla parte DE, così l'altra BC all'altra EF. Io dico, che la tutta AC alla tutta DF sia ancora, come la parte AB alla parte DE, o pure come l'altra BC all'altra EF. Imperocchè, essendo come AB a DE, così BC ad EF; farà permutando come AB a BC, così DE ad EF (303). Ma componendo dee essere come AC a BC, così DF ad EF (291). Dunque permutando di nuovo farà come AC a DF, così BC ad EF.

Fig. 132.

305. Facilmente ancora può dimostrarsi, che se in una data ragione siano tra loro così due quantità, come due parti di esse, eziandio le parti rimanenti debbano essere nella stessa ragione. Perciò siano di nuovo le due quantità omogenee AC, DF, delle quali la prima AC sia divisa nelle parti AB, BC, e la seconda DF nelle parti DE, EF; e sia in oltre come la tutta AC alla tutta DF, così la parte BC alla parte EF. Io dico, che ancora la rimanente AB alla rimanente DE debba essere, come la tutta AC alla tutta DF, o pure come la parte BC alla parte EF. Imperocchè, essendo come AC a DF, così BC ad EF; farà permutando come AC a BC, così DF ad EF (303). Ma dividendo dee essere come AB a BC, così DE ad EF (293). Dunque permutando di nuovo farà come AB a DE, così BC ad EF.

Fig. 132.

306. No-

306. Notifi intanto in questo luogo, che questi due teoremi spettanti alla proporzione, che ha tutti quattro i termini tra loro omogenei, sono differenti dalli due ultimi, dimostrati di sopra per ogni proporzione, solamente per la diversa maniera, con cui sono stati esposti. Imperocchè, siccome in quelli si trattava di quattro quantità, che a due a due fossero proporzionali a quantità date, e capaci o di unirsi insieme, o di sottrarsi l'une dall'altre; così in questi si considerano quattro quantità, che a due a due siano in data ragione, e capaci di essere o unite insieme, o l'une dall'altre sottratte. Ma se attentamente si riflette, appunto da questa diversa espressione deriva, che le quantità in questi esser debbano sempre tutte omogenee, ed in quelli possano essere ancora tali solamente a due a due.

307. Quindi non sarà mal fatto per la proporzione, di cui presentemente si tratta, di enunciare diversamente ancora un'altro de' teoremi dimostrati di sopra per ogni proporzione; e si è, che se più quantità omogenee paragonate con altrettante, ciascuna con ciascuna, siano con quelle in data ragione; eziandio le somme dell'une, e dell'altre debbano essere nella stessa ragione. Siano perciò le quattro quantità omogenee A, B, C, D, ciascuna delle quali sia in data ragione colla corrispondente delle altre quattro E, F, G, H. Io dico, che la somma di quelle alla somma di queste debba essere ancora nella stessa ragione. Imperocchè, essendo A ad E, come B ad F, come C a G, come D ad H; avremo permutando come A a B, così E ad F; come B a C, così F a G; e come C a D, così G ad H (303). Quindi essendo le quattro A, B, C, D in ordinata ragione colle altre quattro E, F, G, H; farà come la somma di quelle a D, così la somma di queste ad H (297); ed in conseguenza permutando di nuovo la somma delle quattro A, B, C, D farà alla somma delle altre quattro E, F, G, H, come D ad H, cioè nella medesima data ragione.

CA-

CAPITOLO II.

Della dottrina delle proporzioni applicata alle linee rette.

308. **D**Imostrata la dottrina delle proporzioni in generale, passeremo ora ad applicarla alle varie spezie della quantità estesa, che si considerano nella Geometria piana, e con ciò ad ispiegare le teorie più composte di questa scienza. Incominceremo adunque dalle linee rette, le quali siccome tra tutte le quantità estese sono le più semplici, così per la stessa loro semplicità sono le più proprie per additarci le ragioni delle altre, che anno un'andole più composta. E poicché le linee rette vengono in considerazione o per gli angoli, che formano, o per le figure stesse, delle quali sono termini; perciò in applicare ad esse la dottrina delle proporzioni, le riguarderemo principalmente, o come lati di un qualche angolo, o come lati de' triangoli, ne' quali possono risolversi tutte le altre figure rettilinee.

§. I.

Delle ragioni eguali, che possono averfi colli lati, e la base di un'angolo.

309. **F**ondamento di quelltanto sarà dimostrato in questo capitolo è il teorema, che segue; cioè, che se di un'angolo qualsivoglia dividasi un lato in parti eguali, e per i punti della divisione tirinsi rette parallele alla base dell'angolo, ancora l'altro lato debba essere diviso in altrettante parti eguali per queste rette parallele. Sia perciò l'angolo BAC ; e diviso il lato AB nelle parti eguali AD , DE , EB , tirinsi per i punti D , ed E le rette DF , EG parallele alla base BC , che s'incontrino coll'altro lato AC ne' punti F , e G . Tirandosi adunque per questi punti le altre rette

Fig: 35

I . FH ,

a DB, così AE ad EC; e se le due DE, BC non sono parallele tra loro, tirisi per lo punto D la retta DF parallela alla BC (65), che s'incontri coll'altro lato AC nel punto F. E poicche li due lati dell'angolo AB, AC sono divisi dalla retta DF parallela alla base BC; sarà come AD a DB così AF ad FC (310). Ma per ipotesi AD sta a DB, come AE ad EC. Dunque sarà ancora come AF ad FC, così AE ad EC (271). Onde dovendo essere componendo come AC ad FC, così AC ad EC (291); averà AC la stessa ragione ad FC, che ad EC. Con che le due FC, EC saranno tra loro eguali (274); il che non può essere (14).

312. Possiamo altresì dimostrare, che se li lati di un'angolo si dividano per molte rette parallele alla base, la divisione di essi debba sempre farsi proporzionalmente, tanto che le ragioni delle parti di uno saranno sempre eguali alle ragioni delle corrispondenti parti dell'altro. Sia perciò l'angolo BAC, alla di cui base BC tirinsi ad arbitrio due rette parallele DE, FG, che s'incontrino col lato AB ne' punti D ed F, e col lato AC ne' punti E e G. Facciasi, che la EI tirata per lo punto E sia ancora parallela al lato AB (65); e convenga la medesima colle due FG, BC ne' punti H, ed I. Saranno adunque eguali tra loro così le due DF, EH, come le due FB, HI (91); e perciò sarà come DF ad FB, così EH ad HI (272). Ma per l'angolo CEI, in cui sta tirata la retta GH parallela alla base CI, come sta EH ad HI, così sta EG a GC (310). Dunque sarà ancora come DF ad FB, così EG a GC (271). E per le parallele DE, FG essendo altresì come AD a DF, così AE ad EG; saranno li lati AB, AC divisi proporzionalmente per le due DE, FG.

Fig. 137.

313. Il converso di ciò eziandio potrà dimostrarsi; cioè, che se i due lati di un'angolo sono divisi proporzionalmente in molte parti, le rette, che congiungono con ordine i punti delle loro divisioni, debbano essere parallele alla base dell'angolo. Perciò pongasi ora, che le tre parti AD, DF, FB, Fig. 137.

1 2

FB

FB del lato AB abbiano tra loro le stesse ragioni, che anno tra di esse le parti AE, EG, GC dell'altro lato AC. Essendo adunque come AD a DF, così AE ad EG, e come DF ad FB, così EG a GC; faranno le tre AD, DF, FB in ordinata ragione colle altre tre AE, EG, GC (295); onde farà come AB somma di quelle ad FB, così AC somma di queste a GC (297). E poicche dividendo esser dee come AF ad FB, così AG a GC (293); farà FG parallela a BC (311). Ma essendo come AD a DF, così AE ad EG; la DE è parallela ad FG. Dunque le due DE, BC saranno ancora parallele tra loro (64).

Fig. 138.

314. Possiamo in oltre dimostrare, che la retta, per cui si divide un'angolo in due parti eguali, debba dividere la base dell'angolo nella ragione de' lati. Sia perciò l'angolo BAC, il quale dividasi in due parti eguali per la retta AD, che s'incontri colla base BC dell'istesso angolo nel punto D. Io dico, che le parti BD, DC, nelle quali resta divisa la base, siano tra loro nella ragione de' lati AB, AC. Tirisi per lo punto C la retta CE parallela alla DA (65), la quale convenga col lato BA prolungato nel punto E; e farà così l'angolo BAD eguale all'angolo AEC (62), come l'angolo CAD eguale all'angolo ACE (61). Onde conforme per ipotesi sono eguali li due angoli BAD, CAD; così eguali ancora faranno gli altri due AEC, ACE (11). Quindi dovendo essere eguali altresì li due lati AC, AE (73); farà come AB ad AC, così AB ad AE (273). Ma per l'angolo CBE, in cui sta tirata la retta DA parallela alla base CE, come sta BD a CD, così sta AB ad AE (310). Dunque farà ancora come BD a CD, così AB ad AC (271).

Fig. 138.

315. Possiamo finalmente dimostrare, che per lo contrario se la base di un'angolo sia divisa nella ragione de' lati per una retta tirata dal vertice, debba l'istessa retta dividere l'angolo in due parti eguali. Perciò sia di nuovo l'angolo BAC, la di cui base BC sia talmente divisa in D dalla retta AD

tira-

tirata dal vertice, che sia come BD a CD , così AB ad AC . Io dico, che la stessa AD debba dividere per metà l'angolo BAC . Tirisi similmente per lo punto C la retta CE parallela alla DA (65), che s'incontri col lato BA prolungato nel punto E . E poicche nell'angolo CBE sta tirata la retta DA parallela alla base CE ; farà come AB ad AE , così BD a CD (310). Ma per supposizione BD sta a CD , come AB ad AC . Dunque farà ancora come AB ad AC , così AB ad AE (271); e pertanto le due AC , AE faranno tra loro eguali (274). Quindi eguali altresì faranno li due angoli AEC , ACE (72). Onde perche per le parallele DA , CE l'angolo AEC è eguale all'angolo BAD (62), e l'angolo ACE è eguale all'angolo CAD (61); faranno li due BAD , CAD parimente eguali tra loro (11).

§. II.

Delle ragioni eguali, che possono averfi colli lati di due triangoli.

316. **C**onsidereremo ora le rette come lati de' triangoli, e perciò dovremo dimostrare, quali sono quelli triangoli, nelli quali le ragioni de' lati sono tra loro eguali. Tali adunque debbono essere tutti coloro, che sono equiangoli, cioè a dire, che anno gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno; poiche li lati esistenti intorno alli loro angoli eguali avranno tra di essi la stessa ragione, tanto che formeranno sempre una proporzione, ed omologhi faranno quelli lati, che stanno opposti ad angoli eguali. Perciò siano li due triangoli ABC , DCE , li quali abbiano l'angolo ABC eguale all'angolo DCE , l'angolo ACB eguale all'angolo DEC , ed il terzo BAC eguale al terzo CDE . Io dico, che farà I, come AB a BC , così DC a CE ; II, come BC a CA , così CE ad ED ; e III, come CA ad AB , così ED a DC . Fig. 139

I 3

317. Per

317. Per dimostrarlo, dispongansi li due triangoli ABC, DCE talmente, che li due lati BC, CE siano tra loro a dirittura. Ed essendo l'angolo ACB eguale all'angolo DEC, coll'aggiunta del comune ABC faranno li due ABC, ACB ancora eguali alli due ABC, DEC (13); e pertanto a guisa di quelli eziandio questi saranno minori di due retti (71). Quindi le due BA, ED prolungate verso la parte, in cui sono detti angoli, si dovranno incontrare tra di esse in un qualche punto, come F (60); e per l'uguaglianza così degli angoli ABC, DCE, come degli angoli ACB, DEC faranno parallele tanto le due BF, CD, quanto le due CA, EF (58). Onde essendo ACDF un parallelogrammo, faranno tra loro eguali, così le due CA, DF, come le altre due FA, DC (91).

318. Poicche adunque nell'angolo FBE sta tirata la retta AC parallela alla sua base FE; sarà come AB ad FA ovvero DC, così BC a CE (310); onde permutando sarà come AB a BC, così DC a CE (303). Ed ancora perche nell'angolo BEF sta tirata la retta CD parallela alla base di esso BF; sarà come CE a BC, così ED a DF ovvero CA. Con che siccome invertendo dee essere come BC a CE, così CA ad ED (290); così permutando sarà come BC a CA, così CE ad ED. Quindi essendo le tre AB, BC, CA in ordinata ragione colle altre tre DC, CE, ED (295); sarà ordinando come AB a CA, così DC ad ED (296); ed in conseguenza invertendo sarà come CA ad AB, così ED a DC. 3

Fig. 140. 319. Ma da questo medesimo egli è facile a dedurre il contrario; cioè, che li triangoli, nelli quali le ragioni de'lati sono tra loro eguali, debbano essere equiangoli, ed avere eguali quegli angoli, che stanno opposti alli lati omologhi. Siano perciò li due triangoli ABC, DEF, nelli quali sia come AB a BC così DE ad EF; e come BC a CA, così EF ad FD. Facciasi tanto l'angolo CBG eguale all'angolo FED, quanto l'angolo BCG eguale all'angolo EFD

EFD (40). Ed essendo equiangoli li due triangoli GBC, DEF; sarà come GB a BC, così DE ad EF; e come BC a CG, così EF ad FD (316). Ma per ipotesi ancora AB sta a BC, come DE ad EF; ed eziandio BC sta a CA, come EF ad FD. Dunque sarà come AB a BC, così GB a BC; e come BC a CA, così BC a CG (271). Quindi dovendo essere eguali tanto le due AB, GB, quanto le due CA, CG (274); saranno li due triangoli ABC, GBC perfettamente eguali (84); ed in conseguenza sarà così l'angolo CBA eguale all'angolo CBG o sia FED, come l'angolo BCA eguale all'angolo BCG o sia EFD.

320. Può dedursi in secondo luogo, che sempre quando due triangoli hanno un'angolo eguale ad un'angolo, e li lati intorno a questi angoli nella stessa ragione; debbano essere eguali ancora gli altri angoli opposti alli lati omologhi, ciascuno a ciascuno; ed in conseguenza eguali altresì le ragioni, che quegli stessi lati hanno alli due rimanenti. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; e sia come AB ad AC, così DE ad DF. Facciasi tanto l'angolo BAG eguale all'angolo EDF ovvero BAC, quanto l'angolo ABG eguale all'angolo DEF (40). Ed essendo equiangoli li due triangoli ABG, DEF, sarà come AB ad AG, così DE a DF (316). Ma per ipotesi ancora AB sta ad AC, come DE a DF. Dunque sarà come AB ad AC, così AB ad AG (271); e pertanto essendo eguali le due AC, AG (274), faranno li due triangoli ABC, ABG perfettamente eguali (87). Quindi sarà così l'angolo ABC eguale all'angolo ABG o sia DEF, come l'angolo ACB eguale all'angolo AGB o sia DFE; ed in conseguenza sarà come AB a BC, così DE ad EF; e come AC a BC, così DF ad EF.

Fig. 141.

321. Può dedursi in terzo luogo, che se due triangoli hanno due angoli tra loro eguali, ed altri due della stessa specie, cioè a dire o acuti, o ottusi, ed in

oltre li lati opposti a detti angoli nella stessa ragione; debbano essere eguali ancora così li rimanenti angoli, come quelli della stessa specie; ed in conseguenza eguali altresì le ragioni, che quegli stessi lati anno alli due rimanenti. Siano perciò li due triangoli ABC , DEF , li quali abbiano l'angolo ABC eguale all'angolo DEF , e l'angolo ACB della stessa specie coll'angolo DFE ; e sia in oltre come AB ad AC , così DE a DF . Adunque se non sono eguali li rimanenti angoli BAC , EDF , sia il primo maggiore del secondo, e facciasi l'angolo BAG eguale all'angolo EDF (40). Ed essendo equiangoli li due triangoli ABG , DEF ; sarà come AB ad AG , così DE a DF (316). Ma per ipotesi ancora AB sta ad AC , come DE a DF . Dunque sarà come AB ad AC , così AB ad AG (271); e per tanto essendo eguali le due AC , AG (274), faranno eguali altresì li due angoli AGC , ACG (72). Quindi ancora l'angolo AGC sarà della stessa specie coll'angolo DFE , o pure col suo eguale AGB ; qual cosa non potendo aver luogo (51), non sarà egli vero, che l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF . Con che dovendo essere tra loro eguali, non solo sarà l'angolo ACB similmente eguale all'angolo DFE , ma sarà eziandio come AB a BC , così DE ad EF ; e come AC a BC , così DF ad EF .

322. Può dedursi finalmente, che nel triangolo rettangolo vi debbano essere tre proporzioni continue di linee rette, per la ragione, che la perpendicolare abbassata sulla sua ipotenusa dall'angolo retto dee dividerlo in due altri triangoli, equiangoli così tra di essi, come coll'istesso triangolo rettangolo. Sia perciò il triangolo rettangolo ABC , e dall'angolo retto A si abbassi sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD . Equiangoli adunque saranno in primo luogo li due triangoli ABC , DBA ; poicché siccome l'uno, e l'altro è rettangolo, così anno ancora in B un'angolo comune, e perciò dovranno avere il terzo ACB similmente eguale al terzo DAB . Equiangoli in secondo luogo saranno

no

negli altri due ABC , DAC ; per la ragione, che essendo amendue rettangoli, ed avendo in C un'angolo comune, dovranno avere il terzo ABC ancora eguale al terzo DAC . Finalmente equiangoli faranno li due triangoli DBA , DAC ; poicche secondo si è veduto oltre agli angoli retti anno ancora tanto l'angolo ABD eguale all'angolo DAC , quanto l'angolo DAB eguale all'angolo ACD .

323. Or la prima proporzione continua, che s'incontra nel triangolo rettangolo ABC , sta tra le rette BC , AB , BD ; poicche essendo equiangoli li due triangoli ABC , DBA , farà come BC ad AB , così AB a BD (316). La seconda poi si ritrova tra le rette BC , AC , CD ; per la ragione, che essendo equiangoli li due triangoli ABC , DAC , dovrà essere come BC ad AC , così AC a CD . Ed in fine la terza sussiste tra le rette BD , AD , CD ; poicche per essere equiangoli li due triangoli DBA , DAC , farà come BD ad AD , così AD a CD . Ma siccome apprendiamo con questa terza, che la perpendicolare abbassata dall'angolo retto sia mezza proporzionale tra le due porzioni di quel lato, che chiamasi ipotenusa; così le prime due ci danno a divedere, che ciascuno degli altri due lati sia mezzo proporzionale tra l'ipotenusa, e la porzione di essa adjacente a detto lato.

§. III.

Della soluzione di alcuni problemi intorno alle rette proporzionali.

324. **I**Ntorno alla proporzione delle rette possono proporsi molti problemi di non picciolo uso in questa scienza. E poicche la soluzione di essi dipende da alcuni delli teoremi precedenti; perciò non farà mal fatto di soggiungerli in questo luogo, e di risolverli brevemente. Il primo adunque si è di tagliare da una data retta una parte aliquota qualsivoglia, ed in conseguen-

Fig. 144.

za di dividere l'istessa retta in un dato numero di parti eguali. Sia perciò AB la retta data, da cui se ne debba per ragion di esempio tagliare la terza parte. Facciasi al punto A un'angolo qualsivoglia BAC ; indi presa nel lato AC una porzione ad arbitrio, che sia AD , taglinsi da DC prolungata se bisogna le altre due porzioni DE , EF , delle quali ciascuna sia eguale ad AD (31). Congiungasi poscia la retta FB . E tirata per lo punto D la retta DG parallela alla FB (65), che s'incontri colla data AB nel punto G ; sarà AG la terza parte, che si dimanda. Imperocchè, essendosi nell'angolo BAF tirata la retta DG parallela alla sua base FB ; sarà come AD a DF , così AG a GB (310). Ma componendo dee essere come AD ad AF , così AG ad AB (292). Dunque siccome AD è la terza parte di AF , così sarà AG la terza parte della data retta AB .

Fig. 145.

325. Il secondo si è di dividere una data retta proporzionalmente ad un'altra di già divisa, tanto che le parti di questa siano in ordinata ragione colle parti della retta data, che dee dividersi. Siano perciò due rette AB , AE , delle quali la prima AB sia indivisa, e la seconda AE sia divisa come si voglia nelle parti AC , CD , DE . Dispongansi queste due rette talmente, che avendo un comune termine A formino tra di esse un'angolo qualsivoglia BAE ; indi congiungansi gli altri loro termini B , ed E per la retta BE , a cui per gli punti C , e D tirinsi le parallele CF , DG (65), che s'incontrino colla retta AB nelli punti F , e G ; ed io dico, che come sta divisa la AE nelli punti C e D , così sarà divisa la AB nelli punti F e G : ciò che è chiaro per la costruzione medesima. Imperocchè, essendosi nell'angolo BAE tirate le rette CF , DG parallele alla sua base BE ; per necessità dovrà essere come AF ad FG , così AC a CD ; e come FG a GB , così CD a DE (312).

326. Il terzo si è di ritrovare una retta, che sia quarta proporzionale in ordine a tre altre rette date.

date. Perciò siano AB, BC, AD le tre rette date, delle quali le due prime AB, BC pongansi a dirittura, di modo che formino una retta continuata AC , e la terza AD dispongasi talmente con questa AC , che avendo un termine comune A facciano tra di esse un'angolo qualsivoglia CAD . Congiungansi poscia li due punti B, D per la retta BD , a cui tirisi per lo punto C la parallela CE (65), che s'incontri colla AD prolungata nel punto E ; ed io dico, che DE sarà la quarta proporzionale, che si dimanda. Imperocchè, essendo li due lati AC, AE dell'angolo CAE divisi per la retta BD parallela alla sua base CE , dovrà essere come AB a BC , così AD a DE (310); e pertanto in ordine alle tre rette date AB, BC, AD sarà DE la quarta proporzionale.

Fig. 140.

327. Il quarto si è di ritrovare una retta, che sia terza proporzionale in ordine a due altre rette date; e la soluzione di questo non è molto diversa da quella del precedente. Siano per tale effetto AB, BC le due date rette, le quali pongansi a dirittura, di maniera che formino insieme una retta continuata. Tirisi poscia dal punto A un'altra retta AE , che faccia con AC un'angolo qualsivoglia; e da questa AE taglisi la porzione AD eguale alla seconda BC (31). Finalmente uniti i punti B, D per la retta BD , si tiri per lo punto C l'altra CE ad essa parallela (65), che s'incontri colla AE nel punto E ; ed io dico, che DE sarà la terza proporzionale, che si dimanda. Imperocchè, essendo li due lati AC, AE dell'angolo CAE divisi per la retta BD parallela alla sua base CE , sarà come AB a BC , così AD a DE (310). Ma per l'uguaglianza delle due AD, BC come sta AD a DE , così sta BC a DE (272). Dunque sarà ancora come AB a BC , così BC a DE , (271); ed in conseguenza in ordine alle due date AB, BC sarà DE la terza proporzionale.

Fig. 141.

328. Il quinto, ed ultimo si è di ritrovare tra due rette date una mezza proporzionale; ed affinché si comprenda, come egli debba risolversi, siano $AB,$
 BC

Fig. 147.

BC le due rette date, delle quali se ne formi una retta continuata AC; e divisa la medesima in due parti eguali nel punto D (42), descrivasi con questo punto come centro, e coll'intervallo della DA ovvero DC il semicerchio AEC. Si alzi di poi dal punto B sulla stessa AC la perpendicolare BE (49), che s'incontri colla circonferenza del semicerchio nel punto E; ed io dico, che questa BE sia la mezza proporzionale, che si dimanda. Imperocchè, congiunte le rette AE, CE, l'angolo AEC come situato nel semicerchio sarà retto (177). Onde nel triangolo rettangolo EAC essendosi dall'angolo retto E abbassata sull'ipotenusa AC la perpendicolare BE, sarà questa mezza proporzionale tra le due AB, BC (323). E con questa occasione non sarà mal fatto di avvertire, che ogni perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza del cerchio sopra il suo diametro debba essere mezza proporzionale tra le due porzioni dell'istesso diametro.

Fig. 148.

329. Tra due rette date, siccome sempre può darsi una mezza proporzionale; così nè pure ripugna di darsene due; ma egli è impossibile di determinarle col solo cerchio, e solamente con una qualche costruzione meccanica potranno per ora averfi. La più semplice, e la più facile a praticarsi è la seguente. Siano AB, BC le due rette date, le quali si dispongano talmente, che facciano insieme un'angolo retto. Prendansi poscia due squadre, cioè due altri angoli retti, le quali colli lati DE, GH si aggirino intorno alli punti A, e C in modo tale, che gli altri due lati di esse EF, HI si combacino sempre tra loro. E se si arrestino le medesime, quando sono giunte ad una posizione tale, che le due AB, CB prolungate passino per gli punti H, ed E; faranno BE, BH le due mezze proporzionali, che si dimandano. Imperocchè, essendo rettangoli li due triangoli AEH, EHC, ed essendo BE, BH perpendicolari sulle loro ipotenuse; sarà come AB a BE,

BE,

BE, così BE a BH; e come BE a BH, così BH a BC (323).

330. Col cerchio intanto si possono geometricamente determinare tre mezze proporzionali tra due rette date. Imperocchè se A, ed E sieno le rette, si potrà tra di esse ritrovare una sola mezza (328). Onde se questa sia C, ed indi ritrovisi così la mezza tra A e C, come la mezza tra C ed E, le quali siano B e D; faranno B, C, D le tre mezze, che si dimandano. Imperocchè, formando le tre A, B, C una proporzione continua; farà A a C in duplicata ragione di B a C (287). E similmente formando le altre tre C, D, E un'altra proporzione continua; farà C ad E in duplicata ragione di C a D. Ma per essere proporzionali le tre A, C, E, la ragione di A a C è eguale alla ragione di C ad E (276). Dunque ancora le due ragioni di B a C, e di C a D, delle quali quelle sono duplicate, faranno tra loro eguali (288). Onde essendo come A a B, così B a C; come B a C, così C a D; come C a D, così D ad E; faranno le cinque A, B, C, D, E continuamente proporzionali.

Fig. 148.

§. IV.

Delle rette reciproche, e delli loro problemi principali.

331. **Q**uantunque, date due rette, debba essere data ancora la mezza proporzionale, che tra di esse può situarsi (288); niente di meno una stessa retta può essere tale non solo tra due rette, ma tra infinite altre prese a due a due. In effetto se C sia la retta, che dee fare le veci di mezza proporzionale, siccome può prendersi un'altra retta A ad arbitrio, così a riguardo delle due A, e C può ritrovarsi la terza proporzionale E (327). Formando adunque le tre A, C, E una proporzione continua; farà C mezza proporzionale tra le due A, ed E. Ma conforme A può variarsi

Fig. 149.

riarsi all'infinito, così infinite variazioni potrà ricevere altresì l'altra E; con che la stessa C si ritroverà essere mezza proporzionale tra infinite rette prese a due a due.

332. Sempre quando la stessa retta, che è mezza proporzionale tra due, è tale ancora tra due altre, si diranno queste altre due essere reciproche colle due prime; e la loro proprietà sarà, che situandosi l'une in mezzo dell'altre, formeranno tutte quattro una proporzione. Per dimostrarlo, sia la stessa C mezza proporzionale tanto tra le due A ed E, quanto tra le due B e D. Io dico, che situandosi queste in mezzo di quelle, farà come A a B, così D ad E. Imperocchè essendo come B a C, così C a D; sarà invertendo come C a B, così D a C (290). Ma A sta a C, come C ad E. Dunque le tre rette A, C, B saranno in perturbata ragione colle altre tre D, C, E (295); ed in conseguenza perturbando farà come A a B, così D ad E (296).

Fig. 149.



Fig. 149.

333. La conversa di questa proprietà dee ancora aver luogo, cioè, che se due rette situate in mezzo di due altre formino con queste una proporzione, debbano così l'une, come l'altre avere una stessa mezza proporzionale, ed in conseguenza essere tra loro reciproche. Siano perciò proporzionali le quattro rette A, B, D, E; e sia C la mezza, che cade tra le due B, e D. Io dico, che la stessa C debba essere mezza ancora tra le due A, ed E. Imperocchè essendo proporzionali le quattro A, B, D, E; farà come A a B, così D ad E. E similmente essendo proporzionali le tre B, C, D; farà come B a C così C a D. Quindi le tre A, B, C saranno in perturbata ragione colle altre tre C, D, E (295). Onde dovendo essere perturbando come A a C, così C ad E (296); farà C mezza proporzionale tra le due A ad E.

334. E quindi possiamo in oltre dimostrare, che se con due rette date siano reciproche non solo due altre rette, ma eziandio altre due, queste con quelle debbano essere similmente reciproche. Sia-

no

no perciò colle medesime A, e B reciproche così **Fig. 150.**
 le due C, e D, come le due E, ed F. Io dico,
 che ancora le due C, e D saranno reciproche col-
 le altre due E, ed F. Poicche C, e D sono reci-
 proche con A, e B; sarà come C ad A, così B a
 D (332). E similmente essendo E, ed F recipro-
 che con A, e B; sarà come E ad A, così B ad
 F. Quindi dovendo essere invertendo come A ad
 E, così F a B (290); saranno le tre C, A, E in
 perturbata ragione colle altre tre F, B, D (295).
 Ma perturbando dee essere come C ad E, così F
 a D (296). Dunque saranno le due C, e D re-
 ciproche colle altre due E, ed F (333).

335. Intorno alle rette reciproche due sono li
 problemi, che meritano aver luogo in questi Ele-
 menti. Il primo si è di ritrovare due rette, che
 siano reciproche con due altre date, ed unite in-
 sieme siano eguali ad una data retta. Per risolver-
 lo, siano A, e B le due rette, colle quali debbono **Fig. 151.**
 essere reciproche quelle, che si dimandano; e sia
 CD l'altra retta, a cui le medesime insieme deb-
 bono essere eguali. Descrivasi sopra CD come
 diametro il semicerchio CED; indi ritrovata la
 mezza proporzionale tra le due A, e B, che sia
 F (328), alzisi dal punto C sulla stessa CD la
 perpendicolare CG (49), la quale facciasi eguale
 ad F (31); tirisi poscia per fino alla circonferen-
 za la retta GE parallela a CD (65); ed abbassata
 su questa l'altra perpendicolare EH (50), saranno
 le due CH, DH reciproche colle due date A,
 e B.

336. Imperocchè essendo retti li due angoli
 EHC, HCG, saranno le due EH, CG parallele
 tra loro (63). Ma per la costruzione parallele so-
 no ancora le due CH, GE. Dunque CHEG fa-
 rà un parallelogrammo; ed in conseguenza sarà
 EH eguale a CG, o sia F (91). Quindi siccome
 EH è mezza proporzionale tra le due CH, DH
 (328), così mezza tra le stesse farà ancora la sua
 eguale F; ed in conseguenza essendo una medesi-
 ma retta mezza proporzionale tanto tra le due A,
 e B,

e B, quanto tra le due CH, DH, faranno queste reciproche con quelle (332). E poicche per la proprietà del cerchio altrove da noi dimostrata (189) il quadrato della EH ovvero F è eguale al rettangolo delle due CH, DH; egli è chiaro poterfi colla stessa costruzione dividere una data retta talmente, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra retta data.

337. Notifi intanto in questo luogo, che per essere solubile il problema proposto, egli è necessario, che la metà della retta, a cui insieme debbono essere eguali le due reciproche, che si dimandano, non sia minore della mezza proporzionale, che cade tra le altre due date; cioè, che la metà di CD non sia minore di F. Imperocchè le perpendicolari abbassate dalla circonferenza sul diametro CD, se si prolunghino per fino alla circonferenza opposta, faranno tutte divise egualmente da quel diametro (146). Onde siccome delle rette situate dentro del cerchio la massima è quella, che passa per lo centro (158); così delle riferite perpendicolari la massima sarà IL, che corrisponde al centro L; e perciò se mai IL, che è la metà di CD, sia minore di CG ovvero F, la parallela al diametro GE non potrà incontrarsi colla circonferenza del semicerchio; ed in conseguenza ne pure il problema potrà risolversi.

Fig. 152. 338. L'altro problema si è di ritrovare due rette, che siano reciproche con due altre date, e differiscano tra loro per una data retta. Per risolverlo, siano di nuovo A, e B le due rette, colle quali debbono essere reciproche quelle, che si dimandano; e sia CD la retta, per cui le medesime debbono differire tra loro. Ritrovifi la mezza proporzionale tra le due rette date A, e B, la quale sia E (328); e prolunghisi la CD talmente per fino al punto H, che il rettangolo delle due CH, DH sia eguale al quadrato di E (137). Io dico, che queste medesime CH, DH, le quali differiscono tra loro per la retta data CD, faranno reciproche colle due date A, e B.

339. Per

GEOMETRIA PIANA. 145

339. Per dimostrarlo, descrivasi intorno alla retta CD un cerchio qualsivoglia CDF, a cui dal punto H tirisi la tangente HF (171). E poichè il quadrato di questa tangente è eguale al rettangolo delle due CH, DH (196); farà la medesima HF eguale ad E, che per costruzione è mezza proporzionale tra le due A, e B, ed uguaglia col suo quadrato quello stesso rettangolo. Ma congiunte le rette CF, DF, l'angolo HFD contenuto dalla tangente HF, e dalla secante DF è eguale all'angolo FCD situato nell'opposta porzione del cerchio (178). Dunque per gli due triangoli equiangoli CHF, FHD dovendo essere come CH ad HF, così HF a DH (316); farà la stessa HF mezza proporzionale ancora tra le due CH, DH; e pertanto queste due CH, DH dovranno essere reciproche colle due date A, e B (330).

340. Del rimanente giova qui l'avvertire, che siccome quando tre rette formano tra di esse una proporzione continua, quella di mezzo dee prendersi due volte; così qualora tra due rette date ritrovasi una mezza proporzionale, propriamente vengono ad averfi due altre rette, eguali tra loro, e reciproche colle due date. Quindi il problema di ritrovare una mezza proporzionale tra due date rette può riguardarsi come caso speciale del precedente. Imperocchè conforme in quello si dimandano due rette, che siano reciproche con due altre date, e differiscano tra loro per una data retta; così supponendosi quest'altra retta talmente picciola, che possa essere trascurata, diverranno eguali tra loro le due reciproche, che si dimandano: ed in conseguenza si ridurrà il problema a ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date.

§. V.

Della divisione della retta in estrema, e media ragione.

341. **S**E mai una retta fosse talmente divisa, che la stessa colle sue parti formasse una proporzione continua, di modo che fosse come la tutta alla parte maggiore, così la parte maggiore alla parte minore; in tal caso la divisione della retta si direbbe fatta in estrema, e media ragione, in quanto che la medesima colle sue parti conterrebbe così l'altro termine estremo, come quello di mezzo della proporzione continua. Or che possa aver luogo una tal divisione, egli è facile a dimostrarsi. Imperocchè, data la retta AB , di già può ella dividersi talmente nel punto C , che il rettangolo della tutta AB nella parte AC sia eguale al quadrato dell'altra parte BC (138); ma da una tal divisione necessariamente ne segue, che AB sia a BC , come BC ad AC .

Fig. 153.

342. Per dimostrarlo, descrivasi intorno alla retta BC un cerchio qualsivoglia BCD , a cui dal punto A tirisi la tangente AD (171). E poicché il quadrato di questa tangente AD è eguale al rettangolo delle due AB , AC (196), il quale rettangolo per ipotesi è eguale al quadrato della BC ; faranno li due quadrati di AD , e di BC tra loro eguali (11); e perciò la BC farà ancora eguale alla tangente AD (113). Ma congiunte le due BD , CD , l'angolo ADC contenuto dalla tangente AD , e dalla secante CD è eguale all'angolo DBC situato nell'opposta porzione del cerchio (178). Dunque essendo equiangoli li due triangoli ADB , ACD , farà come AB ad AD , così AD ad AC (316); ed in conseguenza per l'uguaglianza delle due AD , BC farà ancora come AB a BC , così BC ad AC .

343. Ma siccome con dividersi la AB talmente in C , che il rettangolo delle due AB , AC sia egua-

eguale al quadrato di BC , si ha la divisione di essa in estrema, e media ragione; così il converso di ciò dee ancora aver luogo, cioè, che essendo la AB talmente divisa in C , che AB sia a BC , come BC ad AC , debba essere il rettangolo delle due AB , AC eguale al quadrato di BC . Perciò intorno alla BC descrivasi di nuovo un cerchio qualsivoglia BCD , a cui tirata similmente dal punto A la tangente AD (171), congiungansi le due BD , CD . Essendo adunque equiangoli li due triangoli ADB , ACD ; sarà come AB ad AD , così AD ad AC (316). Onde per essere tanto AD , quanto BC mezza proporzionale tra le due AB , AC ; sarà AD eguale a BC (288). Ma il rettangolo delle due AB , AC è eguale al quadrato della AD (196). Dunque l'istesso rettangolo di AB in AC sarà eguale ancora al quadrato dell'altra BC (11).

344. Poicché dunque la divisione della retta in estrema, e media ragione ricade nell'altra, con cui la stessa retta si divide talmente, che il rettangolo della tutta, e di una parte sia eguale al quadrato dell'altra parte; non solo potrà averfi la prima divisione per mezzo della seconda, ma i teoremi espressi con una delle due potranno essere enunciati ancora coll'altra. Quindi togliendosi dal raggio il lato del decagono regolare, siccome il rettangolo del raggio nella porzione rimanente è eguale al quadrato di detto lato (249), così egli il raggio resterà diviso in estrema, e media ragione. E similmente aggiungendosi al raggio il lato del decagono regolare, non solo il rettangolo della retta composta nel lato sudetto sarà eguale al quadrato del raggio (250), ma la retta medesima si ritroverà divisa in estrema, e media ragione colle due parti, che la compongono.

345. Dalla identità, che si scorge tra l'una, e l'altra divisione, possono dedursi ancora due belle proprietà della retta divisa in estrema, e media ragione; cioè che li quadrati della tutta, e della porzione minore siano eguali al triplo del quadrato della

Fig. 153. porzione maggiore ; e che il quadrato fatto dalla tutta, e dalla porzione minore insieme sia eguale al quintuplo del quadrato dell'altra porzione. Sia perciò la AB talmente divisa in C , che AB sia a BC , come BC ad AC . Ed essendo il quadrato di BC eguale al rettangolo delle due AB , AC (343); sarà così il doppio del rettangolo eguale al doppio del quadrato, come il quadruplo del rettangolo eguale al quadruplo del quadrato (11). Ma li quadrati delle due AB , AC sono eguali a due volte il rettangolo delle medesime, insieme col quadrato di BC (120); ed il quadrato fatto dalle due insieme AB , AC è eguale a quattro volte il rettangolo fatto dalle stesse, insieme col quadrato di BC (121). Dunque li quadrati delle due AB , AC saranno eguali al triplo del quadrato di BC ; ed il quadrato di esse insieme AB , AC sarà eguale al quintuplo del quadrato fatto dalla stessa BC .

Fig. 154. 346. Quantevolte è data la retta, che dee dividerfi in estrema, e media ragione; egli è facile a dimostrarsi, che debbano essere date ancora le porzioni, che derivano da una tal divisione. Sia perciò la AB talmente divisa in C , che sia come AB a BC , così BC ad AC . E se è possibile, sia ancora come AB a BD , così BD ad AD . Pongasi, che BC sia maggiore di BD . E siccome ad AC avrà maggior ragione BC , che BD (272); così BD avrà maggior ragione ad AC , che ad AD (273). Quindi BC ad AC avrà molto più maggior ragione, che BD ad AD (271). Ma per ipotesi BC sta ad AC , come AB a BC ; e BD sta ad AD , come AB a BD . Dunque ancora AB a BC avrà maggior ragione, che AB a BD : qual cosa non puo essere; poicche essendo BC maggiore di BD , dee essere per lo contrario la ragione di AB a BD maggiore della ragione di AB a BC .

Fig. 154. 347. Quindi potrà in oltre dimostrarsi, che se due rette sono divise in estrema, e media ragione, debbano le medesime essere divise proporzionalmente. Sia perciò divisa in estrema e media ragione tanto la AB nel punto C , quanto la EF nel
nel

nel punto G ; e siano BC , FG le due porzioni maggiori . Adunque se AC non sia a BC , come EG ad FG ; facciasi , che AD sia a BD , come EG ad FG (325) ; e componendo sarà come AB a BD , così EF ad FG (291) . Ma per ipotesi EF sta ad FG , come FG ad EG ; e dall' essersi fatto , che AD sia a BD , come EG ad FG , ne segue invertendo , che BD sia ad AD , come FG ad EG (290) . Dunque sarà ancora come AB a BD , così BD ad AD (271) ; e pertanto la stessa AB sarà divisa in estrema , e media ragione tanto nel punto C , quanto nel punto D , il che non può essere (346) .

348. Del rimanente , essendo una retta divisa in estrema , e media ragione , con aggiungersi ad essa la porzione maggiore si avrà un'altra retta similmente divisa in estrema , e media ragione , di cui però l'aggiunta sarà la porzione minore , e la retta primitiva la porzione maggiore . Per dimo- Fig. 155.
strarlo , dividasi la AB talmente in C , che sia come AB a BC , così BC ad AC ; e prolunghisi la medesima per sino al punto D , di modo che siano eguali le due BD , BC . Adunque per l'uguaglianza di queste due sarà ancora , come AB a BD , così BC ad AC . Onde conforme invertendo sarà BD ad AB , come AC a BC (290) ; così sarà componendo AD ad AB , come AB a BC , ovvero BD (291) ; e pertanto la tutta AD sarà divisa in estrema , e media ragione nel punto D , di cui minor porzione sarà l'aggiunta BD , e porzione maggiore la retta primitiva AB .

C A P I T O L O III.

Della dottrina delle proporzioni applicata alle figure rettilinee .

349. **D**Opo essersi applicata la dottrina delle proporzioni alle linee rette , l'ordine richiede , che si faccia l'applicazione di essa alle figure , che hanno le rette stesse per loro termini ,

K 3 cioè

cioè a dire alle figure, che chiamansi rettilinee, E poicche secondo l'avvertimento più volte fatto colla teoria de' triangoli egli è facile di porre a calcolo ogn' altra figura rettilinea; perciò buona parte di quelltanto dovrà dirsi intorno alla dottrina delle proporzioni applicata alle figure rettilinee, riguarderà i triangoli; alli quali tutta volta accoppieremo quasi sempre i parallelogrammi, sì perche questi a ben considerarsi sono triangoli raddoppiati, come ancora perche l'uso di essi nelle speculazioni geometriche non è meno frequente di quello de' triangoli.

§. I.

Della ragione, in cui sono cost i triangoli, come i parallelogrammi.

350. **T**anto nel triangolo, quanto nel parallelogrammo puo prendersi per base qualunque lato si voglia; ma determinata una volta la base, si chiamerà altezza del triangolo, e del parallelogrammo la perpendicolare, che si abbassa sulla base dall'angolo opposto. Così nel triangolo ABC, o pure nel parallelogrammo ABCD prendendosi per base il lato BC, dovrà chiamarsi altezza la perpendicolare AE, che cade su quella base dall'angolo opposto A. E secondo questa definizione siccome egli è chiaro, che due triangoli, o due parallelogrammi situati tra le stesse parallele debbano avere eguali altezze, quantevolte colle loro basi si appoggiano ad una delle due parallele; così chiara cosa ancora si è, che essendo eguali le altezze di due triangoli, o di due parallelogrammi, debbano questi potersi sempre situare tra due parallele.

351. Quantevolte due triangoli anno eguali altezze, la loro ragione dovrà essere eguale a quella delle basi. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, ABD situati tra le medesime parallele, ed in conseguenza dotati di un' istessa altezza per

per rapporto alle basi BC , BD . Io dico, che il triangolo ABC sia al triangolo ABD , come la base BC alla base BD . Poicche le due BC , BD debbono avere una parte aliquota comune (265), concepiscansi le medesime divise in parti, che siano a quella eguali. E se dalli punti della divisione intendansi ancora tirate rette al punto A , queste divideranno i due triangoli ABC , ABD in altrettanti triangoli più piccioli, che per essere situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele faranno eziandio tra loro eguali (96). Quindi ancora i due triangoli ABC , ABD saranno divisi in parti eguali ad un'aliquota loro comune. Ma le comuni aliquote, colle quali si sono fatte le divisioni delle basi, e delli triangoli, sono aliquote simili così del triangolo ABC e della base BC , come del triangolo ABD e della base BD . Dunque la ragione delli triangoli, e la ragione delle basi saranno tra loro eguali (277); e perciò il triangolo ABC farà al triangolo ABD , come la base BC alla base BD .

352. Per lo contrario poi se due triangoli anno eguali basi, la loro ragione dovrà essere eguale a quella delle altezze. Siano perciò CD , EF , GH tre rette parallele, alle quali sia perpendicolare la retta IAB ; e fatte eguali le due BC , BD , congiungansi le rette AC , AD , ID . Adunque li due triangoli ABC , IBD per rapporto alle altezze AB , IB avranno eguali basi; onde dovrà dimostrarsi, che il triangolo ABC sia al triangolo IBD , come l'altezza AB all'altezza IB . E poicche sono eguali li due triangoli ABC , ABD (96), farà il triangolo ABC al triangolo IBD , come il triangolo ABD al triangolo IBD (273). Ma prendendosi AB , IB per basi delli due triangoli ABD , IBD , questi avranno la stessa altezza, ed in conseguenza farà come il triangolo ABD al triangolo IBD , così AB ad IB (351). Dunque ancora il triangolo ABC farà al triangolo IBD , come AB ad IB (271).

Fig. 158.

353. Egli è vero, che li due triangoli ABC ,
 K 4 BID ,

IBD, delli quali si è fatto uso per la dimostrazione di questo secondo teorema, anno per loro lati le altezze medesime AB, IB; ma dimostrato il teorema per rapporto a questi triangoli, egli è facile di estenderlo a tutti gli altri. Imperocchè siccome due altri triangoli, che situati sopra le basi BC, BD si terminano alle parallele EF, GH, sono eguali alli due ABC, IBD (95), così le altezze di essi saranno ancora eguali alle due AB, IB. Onde eziandio questi altri triangoli saranno tra di essi nella ragione delle loro altezze. E poichè ancora nella dimostrazione del primo teorema si è dato alli due triangoli un comune lato, ed un comune vertice; si potrà con una considerazione consimile estendere quel tale teorema a tutti gli altri triangoli.

Fig. 159.

354. Finalmente se due triangoli anno basi disuguali, ed altezze disuguali, la loro ragione dovrà essere composta da quella delle basi, e da quella delle altezze. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, DEF, delli quali siano disuguali così le basi BC, EF, come le altezze AG, DH. Io dico, che il triangolo ABC sia al triangolo DEF in ragion composta di BC ad EF, e di AG a DH. Dall'altezza maggiore AG tagli si la porzione IG eguale alla minore DH (31), e congiungansi le due BI, CI. Adunque siccome il triangolo ABC dee essere al triangolo IBC, come AG ad IG ovvero DH (352); così il triangolo IBC sarà al triangolo DEF, come BC ad EF (351). Ma il triangolo ABC sta al triangolo DEF in ragion composta del triangolo ABC al triangolo IBC, e del triangolo IBC al triangolo DEF (284). Dunque la ragione del triangolo ABC al triangolo DEF sarà composta ancora da quella di AG a DH, e da quella di BC ad EF (280).

355. Alli tre riferiti teoremi possiamo ancora aggiungere quest'altro, cioè, che avendo due triangoli un'angolo eguale ad un'angolo, la loro ragione debba essere composta da quelle de'lati, che sono intorno agli angoli eguali. Perciò siano
ABC,

ABC, DEC li due triangoli, che anno l'angolo **Fig. 160.**
 ACB eguale all'angolo DCE; e disponganli li
 medesimi talmente, che i due lati AC, DC sia-
 no a dirittura. Per l'uguaglianza adunque di que-
 gli angoli sarà ancora il lato BC a dirittura col
 lato EC (54). Onde congiunta la AE, sarà come
 il triangolo ABC al triangolo AEC, così BC ad
 EC; e come il triangolo AEC al triangolo DEC,
 così AC a DC (351). Ma il triangolo ABC sta
 al triangolo DEC in ragion composta del trian-
 golo ABC al triangolo AEC, e del triangolo
 AEC al triangolo DEC (284). Dunque la ragio-
 ne del triangolo ABC al triangolo DEC sarà
 composta ancora da quella di BC ad EC, e da
 quella di AC a DC (280).

356. Giova intanto l'avvertire, che questo quar-
 to teorema non è, che un caso speciale del ter-
 zo, il quale si estende a tutti i triangoli; ed in
 effetto si può egli dal terzo immediatamente de-
 durre in questa maniera. Prendansi per basi delli
 due triangoli ABC, DEC li due lati BC, EC;
 e le perpendicolari AF, DG abbassate su questi
 lati dagli angoli opposti faranno le altezze degli
 stessi triangoli. Quindi il triangolo ABC sarà al
 triangolo DEC in ragion composta di BC ad EC,
 e di AF a DG (354). Ma per l'uguaglianza de-
 gli angoli ACB, DCE li due triangoli ACF,
 DCG sono equiangoli; ed in conseguenza doven-
 do essere come AC ad AF, così DC a DG (316),
 sarà permutando come AC a DC, così AF a
 DG (303). Dunque il triangolo ABC al triango-
 lo DEC sarà ancora in ragion composta di BC
 ad EC, e di AC a DC (280).

357. Effendo diviso ogni parallelogrammo dalla
 sua diagonale in due triangoli eguali (91); la ra-
 gione di due parallelogrammi sarà eguale a quel-
 la de' triangoli, che sono le loro metà (275). On-
 de ancora per rapporto alli parallelogrammi deb-
 bono aver luogo gli stessi teoremi, cioè I, che
 se due parallelogrammi anno eguali altezze, la
 loro ragione sia eguale a quella delle basi. II,
 che

che per lo contrario se due parallelogrammi anno eguali basi , la loro ragione sia eguale a quella delle altezze . III, che se due parallelogrammi anno basi , ed altezze disuguali , la loro ragione sia composta da quella delle basi, e da quella delle altezze . E IV, che se due parallelogrammi sono equiangoli , la loro ragione sia composta da quelle de'lati.

358. Generalmente adunque così i triangoli , come i parallelogrammi debbono essere in ragion composta delle basi , e delle altezze . Quindi essendo i medesimi nella sola ragione delle basi , dovranno essere eguali le loro altezze ; e per lo contrario essendo nella sola ragione delle altezze , dovranno essere eguali le loro basi . Imperocchè , siccome una ragione dicesi composta da due altre ragioni , quando la sua quantità si produce colla moltiplicazione delle quantità delle ragioni componenti (279); così non può una ragione composta essere eguale ad una delle due , che la compongono , se l'altra componente non abbia per sua quantità l'unità medesima . Ma essendo tale la quantità di essa , la ragione farà di uguaglianza , ed in conseguenza i suoi termini saranno tra loro eguali (269).

Fig 159.

359. Del rimanente se bene la ragione di due triangoli , o di due parallelogrammi generalmente sia composta da quella delle basi , e da quella delle altezze ; egli è facile tutta volta di esprimerla con altra ragione , che sia semplice . Perciò siano BC , EF le basi delli due triangoli , o delli due parallelogrammi , ed AG , DH le loro altezze . Prendasi una retta I ad arbitrio , e ritrovisi la quarta proporzionale tanto in ordine alle tre BC , EF , I , che sia L , quanto in ordine alle tre AG , DH , L , che sia M (326). La ragione adunque di I ad M , come composta dalle due di I ad L , e di L ad M , che per costruzione sono eguali alle altre due di BC ad EF , e di AG a DH , farà quella , che si dimanda . E dell'istessa maniera potrà ritrovarsi la ragione semplice , atta ad esprimere la composta delli due triangoli , o delli due
due

due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo.

§. II.

Dell'uguaglianza di due triangoli, e di due parallelogrammi.

360. **E** Ssendo eguali così le basi, come le altezze di due triangoli, egli non è da porsi in dubbio, che gli stessi triangoli debbano essere tra loro eguali. Deducesi ciò chiaramente da quelltanto è stato dimostrato intorno ad essi, cioè, che la loro ragione sia eguale a quella delle basi essendo eguali le altezze (351), ed eguale a quella delle altezze essendo eguali le basi (352). Ma poi una tal verità ricade in quella altrove da noi pruovata (96), cioè, che li triangoli situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele debbano essere tra loro eguali; per la ragione, che non possono due triangoli situarsi tra le medesime parallele, senzache abbiano ancora eguali altezze. Or se bene non vi sia uguaglianza tra le basi, e tra le altezze di due triangoli; pure talvolta li due triangoli possono essere tra loro eguali.

361. Avviene ciò, quando la base, e l'altezza di uno di essi sono reciproche colla base, e coll' altezza dell'altro. Per dimostrarlo, siano i due triangoli ABC, DEF; ed abbassate sopra le basi BC, EF le perpendicolari AG, DH, sia come BC ad EF, così DH ad AG. Io dico, che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEF. Dall' altezza maggiore AG tagliasi la porzione GI eguale alla minore DH, e congiungansi le due BI, CI. Siccome adunque il triangolo IBC dee essere al triangolo ABC, come GI ovvero DH ad AG (352); così il triangolo IBC sarà al triangolo DEF, come BC ad EF (351). Ma per ipotesi BC sta ad EF, come DH ad AG. Dunque sarà ancora come il triangolo IBC al triangolo ABC, così l'istesso triangolo IBC all'altro DEF (271);

Fig. 159.

(271); e pertanto li due triangoli ABC , DEF faranno tra loro eguali (274).

Fig. 159.

362. Ma facilmente puo dimostrarsi ancora il converso di un tal teorema, cioè, che essendo eguali due triangoli, la base e l'altezza di uno di essi debbano essere reciproche colla base e coll'altezza dell'altro. Perciò pongasi ora, che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEF ; ed abbassate sopra le basi BC , EF le perpendicolari AG , DH (50), io dico, che sarà come BC ad EF , così DH ad AG . Taglisi similmente dall'altezza maggiore AG la porzione GI eguale alla minore DH (31) e congiungansi le due BI , CI . Essendo adunque eguali li due triangoli ABC , DEF , avrà il terzo triangolo IBC la stessa ragione all'uno, che all'altro (273). Ma il triangolo IBC sta al triangolo DEF , come BC ad EF (351); ed il triangolo IBC sta al triangolo ABC , come GI ovvero DH ad AG (352). Dunque sarà ancora come BC ad EF , così DH ad AG (271).

Fig. 160.

363. Sono eguali eziandio tra loro due triangoli, quantevolte anno un'angolo eguale ad un'angolo, e li lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC , DEC , nelli quali sia l'angolo ACB eguale all'angolo DCE , e sia ancora come BC ad EC , così DC ad AC . Disponganli i medesimi talmente, che i due lati AC , DC siano a dirittura; e per l'uguaglianza degli angoli faranno ancora a dirittura li due BC , EC (54). Quindi congiunta la AE , sarà il triangolo ABC al triangolo AEC , come BC ad EC ; ed il triangolo DEC al triangolo AEC , come DC ad AC (351). Ma per ipotesi BC sta a EC , come DC ad AC . Dunque sarà ancora come il triangolo ABC al triangolo AEC , così il triangolo DEC all'istesso triangolo AEC (271); e pertanto li due ABC , DEC faranno tra loro eguali (274).

364. Per lo contrario poi se due triangoli sono eguali, ed anno un'angolo eguale ad un'angolo, avranno li lati intorno a questi angoli reciprocamente

men-

mente proporzionali . Perciò nelli due triangoli ABC , DEC restino come prima eguali li due angoli ACB , DCE , ma sia ora il triangolo ACB eguale al triangolo DEC . Io dico , che sarà come BC ad EC , così DC ad AC . Diasi alli triangoli la stessa situazione , tanto che siano a dirittura così li due lati AC , DC , come gli altri due BC , EC ; e congiungasi la AE . Essendo adunque eguali li due triangoli ABC , DEC , saranno eguali altresì le ragioni , che i medesimi anno al terzo AEC (272) . Ma il triangolo ABC sta al triangolo AEC , come BC ad EC ; ed il triangolo DEC sta al triangolo AEC , come DC ad AC (351) . Dunque sarà ancora come BC ad EC , così DC ad AC (271) .

Fig. 160.

365. Questi due teoremi sono casi speciali delli due precedenti ; e perciò possono ancora da quelli dedursi nella maniera , che segue . Si abbassino sulle basi BC , EC le perpendicolari AF , DG (50) ; e per l'uguaglianza degli angoli ACB , DCE faranno equiangoli li due triangoli ACF , DCG . Onde dovendo essere come DC a DG , così AC ad AF (316) ; sarà permutando come DC ad AC , così DG ad AF (303) . Quindi ponendosi in primo luogo , che BC sia ad EC , come DC ad AC ; sarà ancora come BC ad EC , così DG ad AF (271) ; e pertanto li due triangoli ABC , DEC dovranno essere tra loro eguali (361) . Ponendosi poscia , che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEC ; sarà come BC ad EC , così DG ad AF (362) ; ed in conseguenza sarà ancora come BC ad EC , così DC ad AC (271) .

Fig. 160.

366. Tutti quattro i riferiti teoremi debbono aver luogo ancora per rapporto alli parallelogrammi , come quelli , che si dividono dalle loro diagonali in due triangoli eguali (91) . Quindi siccome se la base , e l'altezza di un parallelogrammo sono reciproche colla base , e coll'altezza di un'altro , li due parallelogrammi faranno tra loro eguali ; così per lo contrario essendo i medesimi eguali , dovranno la base , e l'altezza di uno di essi essere reci-

reciproche colla base, e coll'altezza dell'altro. Ed in oltre, conforme se due parallelogrammi anno un'angolo eguale ad un'angolo, ed i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali, saranno tra loro eguali; così essendo i medesimi eguali, ed avendo un'angolo eguale ad un'angolo, dovranno avere i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali.

367. Per maggiormente dilucidare tutta questa teoria, noteremo in questo luogo, che una ragione composta da due altre ragioni in due maniere può essere di uguaglianza. La prima si è, quando è tale ciascuna delle due componenti; poicche dovendo essere l'unità medesima la quantità dell'una, e dell'altra (269), farà eziandio l'unità la quantità della ragione composta, e pertanto ancora questa farà di uguaglianza. L'altra si è, quando delle due ragioni componenti una è inversa ovvero reciproca dell'altra; poicche dovendo la quantità di una di esse essere il contrapposto della quantità dell'altra, si produrrà similmente l'unità colla loro moltiplicazione, e perciò la ragione composta pure farà di uguaglianza.

368. Or due triangoli, o due parallelogrammi generalmente sono tra di essi in ragion composta delle basi, e delle altezze (354. 357). Onde la loro ragione sarà di uguaglianza non solo quando è tale così la ragione delle basi, come quella delle altezze, ma ancora quando di queste due l'una è reciproca dell'altra; e perciò due triangoli, o due parallelogrammi dovranno essere tra loro eguali, quando la base, e l'altezza di uno di essi sono reciproche colla base, e coll'altezza dell'altro. L'egualità poi delli due triangoli, o delli due parallelogrammi fa, che la ragione composta dalle loro basi, e dalle loro altezze sia di uguaglianza; e pertanto non possono due triangoli, o due parallelogrammi essere tra loro eguali, senza che la base, e l'altezza di uno di essi siano reciproche colla base, e coll'altezza dell'altro.

369. Qualora poi due triangoli, o due parallelo-

lo-

logrammi anno un'angolo eguale ad un'angolo, la loro ragione si compone dalli lati, che sono intorno agli angoli eguali (355. 357). Onde sarà la medesima di uguaglianza non solo quando sono tali le ragioni de' lati sudetti, ma ancora quando di esse l'una è reciproca dell'altra; e perciò due triangoli, o due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo, dovranno essere tra loro eguali, quando intorno a questi angoli anno ancora i lati reciprocamente proporzionali. L'egualità poi delli due triangoli, o delli due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo, fa, che la ragione composta dalli lati esistenti intorno agli angoli eguali sia di uguaglianza; e pertanto due triangoli, o due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo, non possono essere tra loro eguali, senza che siano reciprocamente proporzionali li lati, li quali stanno intorno agli angoli eguali.

§. III.

Di una proprietà singolare delle rette proporzionali.

370. **D** Alla teoria precedente può dedursi una proprietà molto singolare delle rette proporzionali, e si è, che il rettangolo delle estreme debba essere eguale al rettangolo di quelle di mezzo. Siano perciò le quattro rette A, B, C, D; e sia come A a B, così C a D. Facciasi così il rettangolo delle due A, e D come il rettangolo delle altre due B, e C (110), li quali in conseguenza saranno due parallelogrammi, che avranno un'angolo eguale ad un'angolo. Ma essendo per ipotesi come A a B, così C a D, li lati intorno agli angoli eguali vengono ad essere reciprocamente proporzionali. Dunque li medesimi parallelogrammi saranno tra loro eguali (366); e pertanto il rettangolo delle due A, e D farà eguale al rettangolo delle altre due B, e C.

Fig. 161.

371. Que-

Fig. 161.

371. Questa proprietà talmente appartiene alle rette proporzionali, che per lo contrario se vi sono quattro rette, ed il rettangolo delle estreme sia eguale al rettangolo di quelle di mezzo, le medesime dovranno essere proporzionali. Per dimostrarlo, siano le quattro rette A, B, C, D ; e pongasi, che il rettangolo delle due $A, e D$ sia eguale al rettangolo delle due $B, e C$. Facciansi questi rettangoli (110), li quali in conseguenza faranno due parallelogrammi, che avranno un'angolo eguale ad un'angolo. Ma per l'uguaglianza degli stessi parallelogrammi li lati intorno agli angoli eguali debbono essere reciprocamente proporzionali (366). Dunque sarà come A a B , così C a D .

372. Egli è vero, che quando la proporzione è continua, ella sussiste in tre soli termini. Ma secondo è stato avvertito altrove (278), il termine di mezzo si prende due volte; onde la medesima proprietà dee aver luogo eziandio nelle rette, che formano una proporzione continua. Intanto, perche il rettangolo fatto da due rette eguali non è differente dal quadrato di una di esse; egli è facile ad intendersi, che essendo tre rette continuamente proporzionali, il rettangolo delle estreme debba essere eguale al quadrato di quella di mezzo; e per lo contrario che se di tre rette il rettangolo delle estreme sia eguale al quadrato di quella di mezzo, le medesime debbano essere continuamente proporzionali.

373. Or di quanta importanza sia nelle speculazioni geometriche sì fatta proprietà, non può a bastanza ridirsi. Per mezzo di essa vedesi chiaramente, che essendo due rette reciproche con due altre, debbano i rettangoli dell'une, e dell'altre essere tra loro eguali; e per lo contrario, che essendo il rettangolo di due rette eguale al rettangolo di altre due, debbano queste con quelle essere reciproche. Vedesi ancora, che essendo una retta divisa in estrema, e media ragione, debba il rettangolo della tutta, e della parte minore essere

tere eguale al quadrato della parte maggiore ; e per lo contrario che essendo il rettangolo della tutta, e di una parte eguale al quadrato dell'altra parte, debba la retta essere divisa in estrema, e media ragione.

374. Dalla stessa proprietà delle rette proporzionali puo dedursi facilmente la verità di quel tanto fu dimostrato intorno al triangolo rettangolo (129), cioè che il quadrato del lato chiamato ipotenusa sia eguale alli quadrati degli altri due lati. Imperocchè, se ABC sia il triangolo rettangolo, e dall'angolo retto A sia abbassata sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD (50); sarà come BC ad AB, così AB a BD; e come BC ad AC, così AC a CD (323). Onde sarà tanto il rettangolo delle due BC, BD eguale al quadrato di AB, quanto il rettangolo delle due BC, CD eguale al quadrato di AC. Ma a quelli due rettangoli insieme è eguale il quadrato dell'ipotenusa BC (118). Dunque il quadrato della stessa ipotenusa BC sarà eguale ancora alli quadrati degli altri due lati AB, AC.

Fig. 162.

375. Dal medesimo fonte puo ricavarsi ancora la proprietà del cerchio altrove da noi dimostrata (189), cioè che il quadrato della retta abbassata da un punto della circonferenza perpendicolarmente sul diametro sia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni dell'istesso diametro. Imperocchè, se BC sia il diametro del cerchio, ed AD la perpendicolare abbassata su di esso da un punto A della circonferenza; congiunte le due AB, AC, sarà retto l'angolo BAC (177). Onde perche la medesima AD viene ad essere perpendicolare sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo; saranno le tre BD, AD, CD continuamente proporzionali (323); e pertanto il rettangolo delle estreme BD, CD sarà eguale al quadrato di quella di mezzo AD.

Fig. 163.

376. E siccome intorno al cerchio fu dimostrato ancora, che intersegandosi due rette, o dentro, o fuori di esso, il rettangolo delle porzioni di una delle due

L

sia

Fig. 162.
164.
sia eguale: al rettangolo delle porzioni dell' altra (192. 194.); così eziandio quest' altra affezione del cerchio può dedursi dallo stesso principio. Siano perciò AC , BD le due rette situate nel cerchio ABC , le quali s' incontrino tra di esse sia dentro, sia fuori nel punto E . E poicché congiunte le due AD , BC , sono eguali li due angoli DAC , DBC (175); sarà il triangolo AED equiangolo col triangolo BCE . Onde dovendo essere come AE a DE , così BE a CE (316); sarà il rettangolo delle due AE , CE eguale al rettangolo delle altre due BE , DE .

Fig. 165.

377. Quando le due rette s' incontrano fuori del cerchio, può avvenire, che una di esse sia tangente; ed in questo caso fu dimostrato, che il rettangolo delle due porzioni della secante sia eguale al quadrato della tangente (196). Ma ciò ancora ricavasi facilmente dalla proprietà delle rette proporzionali. Imperocchè, se BE sia la tangente del cerchio, ed AE la secante; congiunte le due AB , CB , sarà l'angolo CBE eguale all'angolo CAB (178). Quindi essendo equiangoli li due triangoli ABE , BCE , sarà come AE a BE , così BE a CE (316); e pertanto il rettangolo delle due AE , CE sarà eguale al quadrato della tangente BE .

Fig. 166.

378. Ma tralasciati questi esempj, dalli quali niente si ricava di nuovo, dimostreremo più tosto colla proprietà delle rette proporzionali un' altra affezione singolare del cerchio; e si è, che iscritto dentro di esso un quadrilatero, il rettangolo delle due diagonali sia eguale alli rettangoli delli lati opposti. Perciò dentro del cerchio ABC iscrivasi il quadrilatero $ABCD$, in cui tirate le diagonali AC , BD , facciasi l'angolo ADE eguale all'angolo CDB (40). Essendo adunque equiangoli così li due triangoli DBC , DAE , come li due DBA , DCE ; sarà come BD a DC , così AD ad AE ; e come BD ad AB , così CD a CE (316). Onde li due rettangoli di BC in AD , e di AB in CD faranno eguali agli altri due di BD in AE , e di BD in CE . Ma questi due sono eguali al solo rettangolo di BD in AC (115). Dunque al
me

medesimo rettangolo di BD in AC faranno eguali ancora quelli due (11).

§ IV.

Della simiglianza delle figure rettilinee.

377. **D**ue figure rettilinee, che sono di una medesima specie, si dicono essere tra loro simili, quante volte hanno gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e proporzionali altresì i lati esistenti intorno agli angoli eguali. Così il pentagono ABCDE si dirà essere simile all'altro pentagono FGHIL, se essendo l'angolo A eguale all'angolo F, l'angolo B eguale all'angolo G, l'angolo C eguale all'angolo H, l'angolo D eguale all'angolo I, e l'angolo E eguale all'angolo L; sia ancora come AB a BC, così FG a GH; come BC a CD, così GH ad HI; come CD a DE, così HI ad IL; e come DE ad EA, così IL ad LF. Fig. 167.

380. Trattandosi intanto della simiglianza di due triangoli, basterà assicurarsi, che vi sia una delle due riferite condizioni; poicche insieme con quella vi dovrà essere ancora l'altra, per essere stato dimostrato, che tanto nelli triangoli equiangoli debbano essere proporzionali i lati esistenti intorno agli angoli eguali (316); quanto nelli triangoli, che hanno i lati proporzionali, debbano essere eguali gli angoli, intorno a cui quelli lati sono situati (319). Onde così li triangoli, che si ritrovano essere equiangoli, come gli altri, nelli quali i lati si scorgono proporzionali, debbono subito senz'altro esame pronunciarsi simili tra loro.

381. Ma oltre a questi due, abbiamo ancora due altri mezzi per giudicare della simiglianza di due triangoli. Il primo si è, di vedere se li due triangoli abbiano un'angolo eguale ad un'angolo, e li lati intorno a questi angoli nella stessa ragione. L'altro si è d'investigare, se gli stessi due triangoli abbiano due angoli eguali, altri due della stessa spe-

L. 2 zic.

zic, e li lati opposti a detti angoli nella medesima ragione. Imperocchè, secondo è stato dimostrato di sopra, li due triangoli debbono essere equiangoli tanto nel primo caso (320), quanto nel secondo (321); onde in amendue li casi li medesimi saranno tra loro simili.

Fig. 168.

382. E quindi simili eziandio saranno due triangoli, se essendo due lati nella stessa ragione con due lati, e dandosi alli rimanenti un termine comune, siano paralleli li lati omologhi. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC , DCE , nella quali pongasi, che li due lati AB , AC siano nella stessa ragione colli due DC , DE ; e dato alli rimanenti BC , CE il comune termine C , siano ancora paralleli così li due AB , DC , come li due AC , DE . Per queste parallele adunque sarà allo stesso angolo ACD eguale tanto l'angolo BAC , quanto l'angolo CDE (61). Onde dovendo essere eguali tra loro questi due angoli (11), avranno li due triangoli un'angolo eguale ad un angolo, e li lati intorno a questi angoli nella stessa ragione: e perciò li medesimi triangoli saranno tra di essi simili (381).

Fig. 169.

383. Con questa occasione notisi in questo luogo, che sempre quando in due triangoli due lati sono nella stessa ragione con due lati, e dato alli rimanenti un comune termine sono paralleli li lati omologhi, li rimanenti lati debbono essere tra loro a dirittura. La ragione è chiara. Imperocchè, posto di nuovo, che ABC , DCE siano questi tali triangoli; di già per quel tanto è stato dimostrato debbono essere simili (382). Onde dovendo essere l'angolo ACB eguale all'angolo DEC , ed essendo l'angolo ACD eguale all'angolo CDE ; sarà tutto l'angolo DCB eguale alli due DEC , CDE (13). Quindi coll'aggiunta del comune DCE , saranno li due DCB , DCE eguali alli tre angoli del triangolo DCE ; e perciò dovendo essere quelli due insieme eguali a due retti (71), saranno li due lati BC , CE tra loro a dirittura (52).

384. Per quanto poi alli parallelogrammi, se essi hanno

hanno un'angolo comune, e sono situati intorno ad una stessa diagonale, debbono essere tra loro simili. Per dimostrarlo, siano li due parallelogrammi ABCD, AEFG, li quali forniti del comune angolo A siano situati intorno alla medesima diagonale AC. Dovendo adunque essere parallele così le due BC, EF, come le due CD, FG; chiaro si è, che li due parallelogrammi siano equiangoli. Ma per le stesse parallele sono ancora equiangoli tanto li due triangoli ABC, AEF, quanto gli altri due ACD, AFG. Dunque dovendo essere come AB a BC, così AE ad EF, e come CD ad AD, così FG ad AG (316); gli stessi due parallelogrammi avranno ancora i lati proporzionali, ed in conseguenza saranno simili.

Fig. 169.

385. Il converso di ciò dee ancora aver luogo, cioè, che essendo due parallelogrammi simili, ed avendo un'angolo comune, debbano essere situati intorno ad una stessa diagonale. Perciò li due parallelogrammi ABCD, AEFG, che hanno il comune angolo A, pongansi ora tra loro simili; e per la loro simiglianza non solo sarà l'angolo ABC eguale all'angolo AEF, ma sarà ancora come AB a BC, così AE ad EF. Quindi congiunte le due diagonali AC, AF, saranno equiangoli li due triangoli ABC, AEF (320); con che dovendo essere l'angolo BAC eguale all'angolo EAF, formeranno le due diagonali una medesima retta; e per tanto li due parallelogrammi saranno situati intorno ad una stessa diagonale.

Fig. 169a

386. Essendo così, possiamo eziandio dimostrare, che di tutti i parallelogrammi situati sopra una data retta, e mancanti dalla medesima per altri parallelogrammi tra loro simili, il massimo sia quello, che sta situato sulla metà. Sia perciò AB la retta data, su di cui siano situati li due parallelogrammi ACDE, ALIG mancanti dalla stessa retta per gli altri due BCDF, BLIH tra di essi simili. Io dico, che essendo AC la metà della retta AB, il parallelogrammo ACDE debba essere maggiore dell'altro ALIG. Per dimostrarlo,

Fig. 170
171.

tirisi la diagonale BD , la quale per la simiglianza delli due parallelogrammi $BCDF$, $BLIH$ passerà per lo punto I ; e facciasi, che convengano tra loro così le due CD , GH , come le due IL , EF .

Fig. 170. 387. Pongasi primieramente, che AL sia maggiore di AC ; ed essendo eguali le due DE , DF , farà il parallelogrammo DG eguale ancora all'altro parallelogrammo DH (94). Ma li due CI , IF sono eziandio tra loro eguali (92). Dunque siccome DH è maggiore di IF , così ancora DG farà maggiore di CI ; ed in conseguenza coll'aggiunta del comune CG , farà il parallelogrammo $ACDE$ similmente maggiore del parallelogrammo $ALIG$.

Fig. 171. Pongasi in secondo luogo, che AL sia minore di AC ; ed essendo eguali così li due parallelogrammi DL , DH , come li due DH , DG ; saranno eguali ancora li due DL , DG . Onde dovendo essere DL maggiore di IE ; coll'aggiunta del comune LE farà il parallelogrammo $ACDE$ eziandio maggiore del parallelogrammo $ALIG$.

Fig. 167. 388. Generalmente poi le figure poligone simili debbono dividersi in triangoli non solo eguali di numero, ma simili ancora tra loro. Per dimostrarlo, siano $ABCDE$, $FGHIL$ queste tali figure, le quali dividansi in triangoli per mezzo di rette tirate dagli angoli eguali A , ed F agli altri opposti. E poicchè per la simiglianza delle figure l'angolo B è eguale all'angolo G , e li lati intorno a questi angoli sono nella stessa ragione; li due triangoli ABC , FGH saranno equiangoli (320), ed in conseguenza simili (281). Quindi dovendo essere AC a BC , come FH a GH , ed essendo BC a CD , come GH ad HI ; farà ordinando come AC a CD , così FH ad HI (296); e per tanto eziandio li due triangoli ACD , FHI saranno simili. E dell'istessa maniera si dimostreranno simili parimente gli altri due rimanenti triangoli.

389. Per lo contrario le figure poligone, nate dall'ordinata unione de' triangoli simili, debbono essere

essere eziandio simili. Per comprenderne la ragione, alli due triangoli simili ABC , FGH aggiungansi con ordine gli altri due ancora simili ACD , AHI . E poicchè tanto in quelli, quanto in questi sono eguali così gli angoli, come le ragioni de' lati; ancora li due quadrilateri $ABCD$, $FGHI$ faranno equiangoli, ed avranno proporzionali li lati intorno agli angoli eguali. Aggiungansi poscia a questi due quadrilateri eziandio con ordine gli altri due triangoli simili ADE , FIL ; e li pentagoni $ABCDE$, $FGHIL$, che si avranno coll'aggiunta di essi, per la medesima ragione ancora saranno forniti delle stesse due condizioni. E poicchè coll'aggiunta di quanti si vogliano altri triangoli simili dee sempre avvenire lo stesso, perciò le figure poligone, che si producono in sì fatta guisa, saranno sempre simili tra loro.

Fig. 167

390. E quindi ora egli è facile di descrivere sopra una data retta una figura rettilinea, che sia simile ad un'altra figura rettilinea data. Sia perciò AB la data retta, ed $FGHIL$ la data figura rettilinea. Dividasi questa figura per mezzo delle rette FH , FI in triangoli. E posto, che la retta AB debba essere omologa col lato FG , facciasi così l'angolo ABC eguale all'angolo FGH , come l'angolo BAC eguale all'angolo GFH (40); tanto che li due triangoli ABC , FGH siano equiangoli, ed in conseguenza simili. Facciasi ancora tanto l'angolo ACD eguale all'angolo FHI , quanto l'angolo CAD eguale all'angolo HFI ; e saranno simili altresì li due triangoli ACD , FHI . Facciasi finalmente così l'angolo ADE eguale all'angolo FIL , come l'angolo DAE eguale all'angolo IFL ; e simili eziandio saranno li due triangoli ADE , FIL . Onde le due figure $ABCDE$, $FGHIL$, come nate dall'unione ordinata de' triangoli simili, saranno parimente simili tra loro (389).

Fig. 168

391. Del rimanente dalla nozione stessa delle figure simili vedesi chiaramente, che le figure simili ad una terza siano simili ancora tra loro. Imperocchè, siccome due figure non possono essere

equiangole con una terza, se non siano equiangole eziandio tra di esse; così le ragioni delli lati di due figure non possono essere eguali alle ragioni delli lati di un' altra, se non siano parimente tra loro eguali. Vedesi ancora, che le figure regolari di una medesima specie siano tutte simili tra di esse. Poicchè conforme per rapportarsi ad una stessa specie debbono avere gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno (212); così per essere in ciascuna figura eguali li lati, le ragioni di questi in amendue le figure sono di uguaglianza (269), ed in conseguenza tra di esse eguali.

§. V.

Della ragione, in cui sono le figure rettilinee simili.

392. **L**A ragione, in cui sono le figure rettilinee simili, merita di essere specialmente considerata, sì perchè è alquanto diversa da quella dell' altre, come ancora perchè l' uso di essa nelle ricerche geometriche è molto frequente. Ed in primo luogo egli è facile il dimostrare, che li triangoli simili debbano essere in duplicata ragione delli loro lati omologhi. Siano perciò ABC, DEF li due triangoli simili, li quali abbiano l' angolo A eguale all' angolo D, l' angolo B eguale all' angolo E, e l' angolo C eguale all' angolo F. Li lati adunque AB, BC faranno nella stessa ragione colli lati DE, EF. Onde dovendo essere come AB a BC, così DE ad EF; sarà permutando come AB a DE, così BC ad EF (303). Ma per l' uguaglianza degli angoli B, ed E il triangolo ABC sta al triangolo DEF in ragion composta di AB a DE, e di BC ad EF (355). Dunque essendo queste due ragioni eguali, sarà la ragione degli stessi triangoli duplicata di ciascuna di esse (280); e perciò li triangoli simili faranno in duplicata ragione delli loro lati omologhi.

Fig. 172.

393. Quindi può dimostrarsi in secondo luogo, che

che li triangoli simili, nelli quali si dividono due figure poligone simili, debbano essere tra loro proporzionali. Perciò siano $ABCDE$, $FGHIL$ le due figure poligone simili; e pongasi, che il triangolo ABC sia simile al triangolo FGH , il triangolo ACD simile al triangolo AHI , ed il triangolo ADE simile al triangolo AIL . Essendo adunque nella duplicata ragione delli lati omologhi AC , FH tanto li due triangoli ABC , FGH , quanto li due ACD , FHI (392); sarà il triangolo ABC al triangolo FGH , come il triangolo ACD al triangolo FHI . E similmente essendo nella duplicata ragione delli lati omologhi AD , FI così li due triangoli ACD , FHI , come li due ADE , FIL ; sarà come il triangolo ACD al triangolo FHI , così il triangolo ADE al triangolo FIL . Onde li tre triangoli ABC , ACD , ADE della figura $ABCDE$ saranno proporzionali alli tre triangoli FGH , FHI , FIL dell' altra figura $FGHIL$.

Fig. 167.

394. Ed essendo così, puo dimostrarsi finalmente, che ancora le figure poligone simili debbano essere in duplicata ragione delli loro lati omologhi. Perciò siano di nuovo $ABCDE$, $FGHIL$ le due figure poligone simili, le quali dividansi in triangoli eziandio simili tra loro. E per quel tanto è stato dimostrato (393), li triangoli ABC , ACD , ADE della figura $ABCDE$ saranno proporzionali alli triangoli FGH , FHI , FIL dell' altra figura $FGHIL$. Quindi la somma degli uni alla somma degli altri sarà ancora nella stessa ragione (307); ed in conseguenza la figura $ABCDE$ somma delli primi sarà alla figura $FGHIL$ somma delli secondi, come il triangolo ABC al triangolo FGH . Ma questi triangoli come simili, sono in duplicata ragione delli lati omologhi AB , FG (392). Dunque nella stessa duplicata ragione saranno ancora le due figure poligone simili (271).

Fig. 167.

395. Or da ciò, che tutte le figure simili siano in duplicata ragione de' lati omologhi, possono dimostrarsi ancora tre altri teoremi. Il primo si è, che essendo quattro rette proporzionali, e descrivendosi
figu-

figure simili tanto sopra la prima e la seconda quanto sopra la terza e la quarta, ancora queste figure siano proporzionali. Imperocchè per la proporzionalità delle rette, essendo la ragione della prima alla seconda eguale alla ragione della terza alla quarta; saranno eguali altresì le loro duplicate (288). Ma per la simiglianza delle figure descritte, le prime due sono in duplicata ragione della prima alla seconda retta, e le altre due sono in duplicata ragione della terza alla quarta retta (394). Dunque ancora la ragione delle prime due figure sarà eguale alla ragione delle altre due; e perciò tutte quattro saranno tra loro proporzionali.

396. L'altro si è, che se vi sono quattro rette, e descritte figure simili tanto sopra la prima e la seconda, quanto sopra la terza e la quarta, siano proporzionali queste figure, ancora le quattro rette debbano essere proporzionali. Imperocchè per la proporzionalità delle figure la ragione delle prime due è eguale alla ragione delle altre due. Ma per la simiglianza delle medesime le prime due sono in duplicata ragione della prima alla seconda retta, e le altre due sono in duplicata ragione della terza alla quarta retta (394). Dunque dovendo essere eguali queste due ragioni duplicate, saranno eguali altresì le loro semplici (288); e pertanto le quattro rette saranno proporzionali.

Fig. 173. 397. Il terzo ed ultimo si è, che descrivendosi tre figure simili sopra li lati del triangolo rettangolo, la descritta sull'ipotenusa debba essere eguale alle due descritte sopra gli altri due lati. Sia perciò il triangolo ABC rettangolo in A, e sopra li suoi lati intendansi descritti così tre quadrati, come tre altri poligoni simili. Saranno adunque così gli uni, come gli altri in duplicata ragione delli lati medesimi (394); e perciò li poligoni descritti sopra li lati AB, AC saranno al poligono descritto sull'ipotenusa BC, come sono li quadrati di quegli stessi lati AB, AC al quadrato della medesima ipotenusa BC. Ma tra li quadrati delli lati
AB,

GEOMETRIA PIANA. 171

AB, AC, ed il quadrato dell'ipotenusa BC vi è ragione di uguaglianza (129). Dunque di uguaglianza sarà ancora la ragione, che vi è tra li poligoni descritti sulli medesimi lati, ed il poligono descritto sulla stessa ipotenusa.

398. Del rimanente siccome tra tutte le figure rettilinee le più semplici a concepirsi sono li quadrati; così niente e più frequente presso li Geometri, quanto di esprimere la ragione di due figure simili per mezzo della ragione, che hanno li quadrati delli loro lati omologhi. Onde supposto, che AB, FG siano li lati omologhi delle due figure simili ABCDE, FGHIL, si dirà, che la figura ABCDE sia alla figura FGHIL, come il quadrato di AB al quadrato di FG. Intanto se in ordine alle due AB, FG ritrovisi la terza proporzionale, che sia FM (326); sarà ancora la figura ABCDE alla figura FGHIL, come AB ad FM. Poicche conforme le due figure per la loro simiglianza sono in duplicata ragione delli lati omologhi AB, FG (394); così per essere proporzionali le tre rette AB, FG, FM, eziandio AB ad FM sarà in duplicata ragione di AB ad FG (287).

Fig. 167.

399. Essendo così, niente sarà più facile, quanto di descrivere una figura, a cui un'altra data non solo sia simile, ma abbia ancora data ragione. Pongasi perciò, che ABCDE sia la figura data, e che la data ragione sia di AB ad FM. Ritrovvisi tra le due AB, FM la mezza proporzionale, che sia FG (327); e descritta sopra questa FG la figura FGHIL simile alla data ABCDE (390), sarà la medesima FGHIL la figura, che si dimanda. Imperocchè, siccome ella per la costruzione medesima è simile alla figura data ABCDE; così per essere FM terza proporzionale in ordine alli lati omologhi AB, FG delle due figure, sarà la figura ABCDE alla figura FGHIL, come AB ad FM (398).

Fig. 167.

400. Che se poi date due figure, come A, e B, se ne voglia una terza, che sia simile alla prima,

Fig. 174.

cd

ed eguale alla seconda ; in tal caso descrivasi primieramente sul lato CD della prima figura il parallelogrammo CE , che sia eguale alla medesima (104) ; indi sul lato DE descrivasi l'altro parallelogrammo EF , che sia eguale alla seconda figura, e che abbia l'altro lato DF a dirittura con CD (103) ; ritrovisi poscia tra le due CD , DF la mezza proporzionale, che sia GH (326) ; e descrivendoli sopra questa CH la figura I simile ad A (390), sarà la stessa eguale ancora all'altra B . Imperocchè le due figure A , ed I , come simili, sono nella ragione di CD a DF (398), cioè del parallelogrammo CE al parallelogrammo EF (356), o pure della figura A alla figura B . Onde avendo la figura A l'istessa ragione ad I , che a B ; saranno le due I , e B tra loro eguali (274).

Fig. 170.

401. E quindi ora potranno facilmente risolversi due altri problemi. Il primo si è di descrivere sopra una retta data un parallelogrammo, eguale ad una data figura, e mancante dalla stessa retta per un'altro parallelogrammo, simile ad undato. Sia perciò AB la data retta, P la data figura, e Q il parallelogrammo dato. Dividasi la AB egualmente in C (42), e sulla metà BC descrivasi il parallelogrammo CF simile al dato Q (390). E siccome il problema sarà risoluto, se l'adiacente CE sia eguale alla figura P ; così essendo altrimenti, non potrà egli risolversi, se non sia CE maggiore di P (386). Ritrovifi adunque l'eccesso, con cui CE supera P , e sia R (106); e descritto il parallelogrammo MN , che sia eguale ad R , e simile a CF (400), sarà AI il parallelogrammo, che si dimanda.

402. Imperocchè li due CF , MN , come simili, debbono essere intorno alla stessa diagonale (385). Onde, compita la figura, saranno simili ancora li due CF , HL (384); e perciò AI sarà mancante dalla retta AB per un parallelogrammo simile a CF , ovvero Q . In oltre, essendo CH eguale a CG (94), IF eguale a CI (92), ed MN eguale ad R ; sarà CF ovvero CE eguale ad AI , ed R infie-

GEOMETRIA PIANA. 173

insieme. Ma essendo R l'eccesso, con cui CE supera P , l'istesso CE è eguale ancora a P , ed R insieme. Dunque AI , ed R insieme saranno eguali a P , ed R insieme; e per tanto, tolto il comune R , sarà AI eguale a P .

401. L'altro problema si è di descrivere sopra una data retta un parallelogrammo, che sia eguale ad una data figura, ed ecceda la stessa retta per un'altro parallelogrammo, simile ad un dato. Fig. 175.
Per risolverlo, sia di nuovo AB la data retta, P la data figura, e Q il parallelogrammo dato. Dividasi la AB egualmente in C (42); e descritto sulla metà BC il parallelogrammo CF simile al dato Q (390), ritrovisi la somma di CF , e P , che sia R (106). Descrivasi poscia il parallelogrammo MN , che sia eguale ad R , e simile a CF (400); e sarà AI il parallelogrammo, che si dimanda.

404. Imperocchè li due CF , MN , come simili, debbono essere intorno alla stessa diagonale DI (385). Onde, compiuta la figura, saranno simili ancora così li due MN , HL (384), come li due HL , CF (391); e perciò AI eccederà la retta AB per un parallelogrammo simile a CF , ovvero Q . In oltre, essendo CH eguale a CG (94), e BN eguale a CH (92); sarà MN eguale ad AI insieme con CF . Ma l'istesso MN , come eguale ad R , è eguale ancora a P insieme con CF . Dunque AI , e CF insieme saranno eguali a P , e CF insieme; e pertanto, tolto il comune CF , sarà AI eguale a P .

CAPITOLO IV.

Della dottrina delle proporzioni applicate al cerchio.

405. **F**inalmente applicheremo la dottrina delle proporzioni alla figura circolare, che è l'unica tra le figure curvilinee considerata da noi in questi Elementi. Ma una tal applicazione riescirebbe o molto scarsa, o molto penosa, se con-

tinuas-

tinuissimo a riguardare il cerchio sotto la sua forma consueta. Quindi faremo vedere in questo capitolo, potersi egli considerare ancora come un poligono regolare, di cui il numero de' lati sia maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi. Ed in questa maniera oltre alli teoremi, che con facilità si deducono dalla sua forma ordinaria, agevole cosa sarà di dimostrare altri molti, che forse sono li più eleganti, e li più profittevoli. Distingueremo in tanto gli uni dagli altri, e daremo a quelli il primo luogo, che possono dimostrarsi, senza punto alterate la nozione comune del cerchio.

§. I.

Della ragione, in cui sono gli archi, ed i settori circolari.

406. **C**onforme arco si appella qualunque porzione della circonferenza del cerchio, così dicesi settore lo spazio circolare contenuto da due raggi, e dall'arco corrispondente. Quindi se dal centro A del cerchio BCDE tirinsi così li due raggi AB, AC, come gli altri due AD, AE; non meno lo spazio circolare BAC, che l'altro DAE dovrà dirsi settore; ed egli è facile il dimostrare, che essendo eguali li due archi BC, DE, debbano essere eguali similmente li due settori ABC, ADE terminati da quegli archi. Imperocchè con adattarsi l'uno sull'altro talmente, che il raggio AB cada sul raggio AD; per l'uguaglianza delle rette tirate dal centro alla circonferenza, caderà ancora l'arco BC sull'arco DE. Onde essendo eguali questi due archi, caderà altresì tanto il punto C sul punto E, quanto il raggio AC sul raggio AE; e pertanto combaciandosi li due settori ABC, DEF, saranno i medesimi tra loro eguali.

407. Generalmente poi due settori di un medesimo cerchio debbono essere tra loro, come gli archi,

GEOMETRIA PIANA. 175

archi, per cui si terminano, dimodoche il settore ABC farà al settore ACD, come l'arco BC all'arco CD. Per dimostrarlo, concepiscansi i due archi BC, CD divisi in parti, che siano eguali all'aliquota comune, che debbono avere (265); e se dalli punti della divisione intendansi tirate rette al centro A, queste divideranno i due settori ABC, ACD in altrettanti settori più piccioli, che per essere terminati da archetti eguali saranno eziandio eguali tra loro (406). Onde ancora i due settori ABC, ACD saranno divisi in parti, eguali ad un'aliquota loro comune. Ma queste comuni aliquote degli archi, e delli settori sono aliquote simili così dell'arco BC e del settore ABC, come dell'arco CD e del settore ACD. Dunque la ragione degli archi, e la ragione delli settori faranno tra di esse eguali (277); e pertanto il settore ABC farà al settore ACD, come l'arco BC all'arco CD.

Fig. 176.

408. Non solo i settori, ma ancora gli angoli situati nel centro del cerchio sono, come gli archi, sulli quali si appoggiano. Siano perciò BAC, CAD due angoli situati nel centro A del cerchio BCD. Io dico, che l'arco BC sia all'arco CD, come l'angolo BAC all'angolo CAD. Per dimostrarlo, concepiscansi di nuovo li due archi BC, CD divisi in parti, eguali all'aliquota comune, che debbono avere (265); e se dalli punti della divisione s'intendano tirate rette al centro A, queste divideranno i due angoli BAC, CAD in altrettanti angoli più piccioli, che per essere situati nel centro, e sostenuti da archetti eguali saranno eziandio eguali tra loro (185). Onde ancora li due angoli BAC, CAD saranno divisi in parti, eguali ad un'aliquota loro comune. Ma queste comuni aliquote degli archi, e degli angoli sono aliquote simili così dell'arco BC e dell'angolo BAC, come dell'arco CD e dell'angolo CAD. Dunque la ragione degli archi, e la ragione degli angoli faranno tra di esse eguali (277); e pertanto l'arco BC farà all'arco CD, come l'angolo BAC all'ango-

Fig. 176.

Fig. 176. 409. Eziandio gli angoli situati nella circonferenza del cerchio debbono essere, come gli archi, sulle quali si appoggiano. Perciò prendasi nella circonferenza BED un punto F ad arbitrio, e congiungansi le rette BF, CF, DF . Io dico, che l'arco BC sia all'arco CD , come l'angolo BFC all'angolo CFD . Potrebbe ciò pruovarsi con dimostrazione non diversa dalle due precedenti, per dover essere eguali ancora gli angoli situati nella circonferenza, quantevolte sono sostenuti da archi eguali (185); ma più brevemente dimostreremo una tal verità nella maniera seguente. Poicche sulli medesimi archi BC, CD si appoggiano tanto gli angoli BAC, CAD situati nel centro, quanto gli angoli BFC, CFD situati nella circonferenza; saranno quelli doppii di questi (173); e perciò l'angolo BAC sarà all'angolo CAD , come l'angolo BFC all'angolo CFD (275). Ma di già è stato dimostrato, che l'arco BC sia all'arco CD , come l'angolo BAC all'angolo CAD (408). Dunque sarà ancora come l'arco BC all'arco CD , così l'angolo BFC all'angolo CFD (271).

Fig. 176. 410. Da questi due teoremi possiamo dedurne due altri. Il primo si è, che ogni angolo situato nel centro debba essere al quadruplo di un retto, come l'arco, che lo sostiene, alla circonferenza intera. Sia perciò BAC l'angolo situato nel centro. E supposto, che l'altro CAD sia retto; sarà l'arco CD , su cui quest'altro si appoggia, la quarta parte dell'intera circonferenza (232). Onde l'angolo CAD al suo quadruplo avrà la stessa ragione, che l'arco CD all'intera circonferenza. Ma l'angolo BAC sta all'angolo CAD , come l'arco BC all'arco CD (408). Dunque ordinando sarà come l'angolo BAC al quadruplo del retto CAD , così l'arco BC alla circonferenza intera (296).

Fig. 177. 411. L'altro si è, che ogni angolo situato nella circonferenza debba essere al doppio di un retto, come l'arco, che lo sostiene, alla circonferenza intera. Per dimostrarlo, sia BFC l'angolo situato nella circonferenza. E supposto, che l'altro CAD sia retto, sarà questo situato nel semicerchio (177); e per-

e perciò l'arco CD , su cui si appoggia, farà la metà dell'intera circonferenza; con che l'angolo CFD farà al suo doppio, come l'arco CD all'intera circonferenza (275). Ma l'angolo BFC sta all'angolo CFD , come l'arco BC all'arco CD (409). Dunque ordinando farà come l'angolo BFC al doppio del retto CFD , così l'arco BC alla circonferenza intera (296).

412. Essendo così possiamo in oltre dimostrare, che se nelli centri, o nelle circonferenze di due cerchi diversi siano situati due angoli eguali, gli archi, che li sostengono, debbano essere come le circonferenze intere. Siano perciò ABC , DEF li due cerchi diversi, e li due angoli eguali situati nelli loro centri siano BGC , EHF . Essendo adunque eguali li due angoli BGC , EHF ; ciascuno di essi al quadruplo di un retto avrà l'istessa ragione (273). Ma l'angolo BGC sta al quadruplo di un retto, come l'arco BC all'intera circonferenza ABC (410); e similmente l'angolo EHF sta al quadruplo di un retto, come l'arco EF all'intera circonferenza DEF . Dunque farà ancora come l'arco BC alla circonferenza ABC , così l'arco EF alla circonferenza DEF (271); ed in conseguenza permutando l'arco BC farà all'arco EF , come la circonferenza ABC alla circonferenza DEF (303).

Fig. 178.

413. Dell'istessa maniera potrà farsi la dimostrazione, se li due angoli eguali siano situati nelle circonferenze delli due cerchi. Imperocchè, supposto, che BAC , EDF siano questi tali angoli, per la loro uguaglianza avrà ciascuno di essi al doppio di un retto la stessa ragione (273). Ma l'angolo BAC sta al doppio di un retto, come l'arco BC all'intera circonferenza ABC (411); e similmente l'angolo EDF sta al doppio di un retto, come l'arco EF all'intera circonferenza DEF . Dunque farà ancora come l'arco BC alla circonferenza ABC , così l'arco EF alla circonferenza DEF (271); ed in conseguenza permutando farà come l'arco BC all'arco EF , così la circonferenza ABC alla circonferenza DEF (303). Oltre che dovendo questa

M

pro-

proporzione aver luogo, quando sono eguali gli angoli BGC , EHF situati nelli centri (412); per necessità dovrà ella sussistere ancora, essendo eguali gli altri BAC , EDF situati nelle circonferenze; poicche non può darsi uguaglianza tra questi, senza che vi sia ancora tra quelli (172).

Fig. 178. 414. Finalmente possiamo dimostrare, che situandosi nelli centri di due cerchi diversi due angoli eguali, li settori racchiusi sotto questi angoli debbano essere come li cerchi interi. Siano perciò BGC , EHF li due angoli eguali situati nelli centri G , ed H delli due cerchi diversi ABC , DEF . E poicche il settore GBC sta al settore rimanente $GCAB$, come l'arco BC all'arco rimanente CAB (407); sarà componendo come il settore GBC al cerchio intero, così l'arco BC alla circonferenza intera (292). E similmente poicche il settore HEF sta al settore rimanente $HFDE$, come l'arco EF all'arco rimanente FDE ; sarà componendo, come il settore HEF al cerchio intero, così l'arco EF alla circonferenza intera. Ma per l'uguaglianza degli angoli BGC , EHF gli archi BC , EF sono proporzionali alle loro circonferenze (412). Dunque ancora li settori GBC , HEF saranno proporzionali alli loro cerchi (271); ed in conseguenza permutando la ragione delli settori, e la ragione delli cerchi saranno tra loro eguali (303).

§. II.

Degli archi circolari paragonati colle rette, che li determinano.

Fig. 179. 415. **Q**uantunque sia stato dimostrato, che archi eguali debbano essere sostenuti da rette eguali; tuttavolta si aumenta l'arco in maggior ragione della retta, che lo sostiene. Per dare di ciò un'esempio molto sensibile, prendansi nella circonferenza $BCDE$ li tre archi eguali BC , CD , DE , tanto che siano eguali ancora le rette, da cui quegli archi vengono sostenuti. L'arco adunque BCD è dop-

doppio dell'arco BC; ma essendo la retta BD minore delle due BC, CD unite insieme (24), farà la medesima minore del doppio della sola BC. Similmente l'arco BDE è triplo dell'arco BC; ma la retta BE come minore delle due BD, DE, è molto più minore delle tre BC, CD, DE; onde la stessa BE farà minore ancora del triplo della sola BC.

416. Giova intanto dimostrare generalmente una tal verità; e perciò prendansi nella circonferenza BCDE due archi ad arbitrio BC, CD, delli quali il primo BC pongasi maggiore dell'altro CD. Io dico, che la ragione dell'arco BC all'arco CD sia maggiore della ragione, che anno le rette, da cui detti archi vengono sostenuti. Congiungansi queste rette, e dividasi l'angolo BCD contenuto da esse egualmente per la retta CE (41), che s'incontri colla BD in F, e colla circonferenza opposta in E. Essendo adunque eguali li due angoli BCE, DCE; saranno eguali ancora tanto gli archi BE, DE, sulli quali essi si appoggiano (185), quanto le rette BE, DE, che sostengono detti archi (187). Onde abbassata sulla BD la perpendicolare EG (50), saranno eguali ancora le due BG DG (85); ed in conseguenza facendosi GH eguale a GF (31), saranno eguali altresì così le rimanenti BH, DF (13), come le due EH, EF (38); con che ancora gli angoli BEH, DEF saranno tra loro eguali (39).

Fig. 180.

417. Descrivasi poscia col centro E, e coll'intervallo EF un'arco circolare. E siccome per l'uguaglianza delle due EF, EH passerà egli per lo punto H; così per essere la ED maggiore di EF, s'incontrerà il medesimo colla ED in un qualche punto, come I. Quindi il settore EFH sarà maggiore del triangolo FEH, ed il settore EFI sarà minore del triangolo FED. Onde siccome al settore EFI avrà maggior ragione il settore EFH, che il triangolo FEH (272); così il triangolo FEH avrà maggior ragione al settore EFI, che al triangolo FED (273); e perciò la ragione del

M 2

set-

settore EFH al settore EFI sarà molto più maggiore, che la ragione del triangolo FEH al triangolo FED (271). Ma il settore EFH sta al settore EFI, come l'arco FH all'arco FI (407), o pure come l'angolo CEH all'angolo CED (408); ed il triangolo FEH sta al triangolo FED, come FH ad FD (351). Dunque la ragione dell'angolo CEH all'angolo CED sarà eziandio maggiore della ragione di FH ad FD; ed in conseguenza l'angolo CEH conterrà l'angolo CED più di quello, che FH contiene FD.

418. Or essendo eguali tanto gli angoli BEH, CED, quanto le rette BH, FD; egli non è da porsi in dubbio, che l'angolo BEH, e la retta BH egualmente contengano l'angolo CED, e la retta FD. Onde essendosi dimostrato, che l'angolo CEH contenga l'angolo CED più di quello, che FH contiene FD; nè pure potrà negarsi, che ancora l'angolo CEB debba contenere l'angolo CED più di quello, che BF contiene FD. Quindi la ragione dell'angolo CEB all'angolo CED sarà maggiore della ragione di BF ad FD. Ma per essere li due angoli CEB, CED situati nella circonferenza del cerchio BCDE, la loro ragione è eguale a quella delli due archi BC, CD, sulli quali si appoggiano (409); e per essere l'angolo BCD diviso egualmente per la retta CF, la ragione delle rette BF, FD è eguale a quella delle altre due BC, CD (314). Dunque la ragione dell'arco BC all'arco CD sarà similmente maggiore della ragione della retta BC alla retta CD (271).

419. Le rette, che sostengono gli archi circolari, comunemente corde degli stessi archi si appellano. E quantunque per ciò, che è stato dimostrato, altra sia la ragione delle corde, ed altra quella degli archi; egli è chiaro però, che colla determinazione delle corde, debbano rimanere determinati ancora gli archi, alli quali quelle corde si rapportano. Nè dee farci difficoltà, che ogni corda sostiene insieme due archi, li quali quasi sempre sono disuguali, cioè uno minore della
 metà

GEOMETRIA PIANA. 181

metà della circonferenza , e l'altro maggiore ; sì perchè le corde si rapportano propriamente agli archi , che non eccedono la metà della circonferenza ; come ancora perchè determinati questi archi , ancora gli altri , che sono supplimenti di essi alla circonferenza intera , ricevono la loro determinazione .

420. Gli archi intanto , che non eccedono il quadrante , ovvero la quarta parte della circonferenza , possono determinarsi ancora con altre rette , che si appellano loro seni . Così posto , che BC , BD siano due archi non maggiori del quadrante , potrà averfi la determinazione di essi per mezzo delle perpendicolari CE , DF abbassate dalli loro termini C , e D sul raggio AB tirato all'altro termine B . Queste perpendicolari CE , DF si dicono essere seni delli due archi BC , BD . E poicchè prolungate le medesime perfino a che s'incontrino colla circonferenza opposta ne' punti G , ed H , restano divisi egualmente dal raggio AB così li due archi CBG , DBH , come le loro corde CG , DH ; chiaro quindi si rende , che il seno di ogni arco sia la metà della corda , che sostiene l'arco doppio .

Fig. 181.

421. Ed essendo così , facilmente possiamo dimostrare , che l'arco si aumenta ancora in maggior ragione del suo seno . Pongasi perciò , che l'arco BC sia maggiore dell' arco BD . Io dico , che la ragione delli due archi BC , BD sia maggiore della ragione delli loro seni CE , DF . Imperocchè , essendo divisi egualmente dal raggio AB , così gli archi CBG , DBH , come le corde CG , DH ; farà come l' arco BC all' arco BD , così l' arco CBG all' arco DBH ; e come il seno CE al seno DF , così la corda CG alla corda DH (275) . Ma di già è stato dimostrato , che l' arco CBG all' arco DBH abbia maggior ragione , che la corda CG alla corda DH (416) . Dunque ancora l' arco BC all' arco BD avrà maggior ragione , che il seno CE al seno DF (271) .

Fig. 181.

422. Gli stessi archi , che non eccedono il quadrante , possono determinarsi altresì per mezzo delle

Fig. 132. le loro tangenti. Così supposto di nuovo, che BC , BD siano due archi non maggiori del quadrante, ed alzata sul raggio AB la perpendicolare BE , che s'incontri cogli altri due raggi AC , AD prolungati nelli punti E , ed F ; si diranno essere le due BE , BF tangenti delli due archi BC , BD ; e qualora sono determinate queste tangenti, chiara cosa si è, che ancora gli archi, alli quali si rapportano, debbano ricevere la loro determinazione. Ma per quanto alla tangente, dee ella aumentarsi in maggior ragione dell' arco: di modo che, essendo l' arco BC maggiore dell' arco BD , dovrà essere la ragione delle tangenti BE , BF maggiore di quella degli archi BC , BD , alli quali quelle tangenti si rapportano.

423. Per dimostrarlo, descrivasi col centro A , e coll' intervallo AF l' altro arco circolare GFH , il quale s'incontri con AB nel punto G , e con AE nel punto H . Essendo adunque il triangolo FAE maggiore del settore AFH , avrà il triangolo FAE maggior ragione al triangolo BAF , che il settore AFH all' istesso triangolo BAF (272). Ma per essere il triangolo BAF minore del settore AGF , il settore AFH ha maggior ragione al triangolo BAF , che all' altro settore AGF (273). Dunque la ragione del triangolo FAE al triangolo BAF sarà molto più maggiore, che la ragione del settore AFH al settore AGF (271); e perciò il triangolo FAE conterrà il triangolo BAF più di quello, che il settore AFH contiene il settore AGF .

424. Quindi perchè ogni quantità contiene se stessa una volta, ancora il triangolo BAE conterrà il triangolo BAF più di quello, che il settore AGH contiene il settore AGF ; ed in conseguenza la ragione del triangolo BAE al triangolo BAF sarà maggiore della ragione del settore AGH al settore AGF . Ma il triangolo BAE sta al triangolo BAF , come BE a BF (351); ed il settore AGH sta al settore AGF , come l' arco GH all' arco GF (407), o pure come l' angolo GAH all' angolo GAF (408), o finalmente come l' arco BC
all'

all' arco BD . Dunque la ragione della tangente BE alla tangente BF sarà similmente maggiore della ragione dell' arco BC all' arco BD (271).

425. Del rimanente notifi in questo luogo, che così li seni, come le tangenti ricevono tutto il loro aumento, quante volte l' arco giunge ad essere quadrante; e quindi si è, che tali rette debbano rapportarsi propriamente ad archi non maggiori di quello. Possono in tanto le medesime rette considerarsi ancora per rapporto ad archi maggiori del quadrante; le quali però non saranno diverse da quelle, che sono seni, e tangenti degli altri archi minori, residui di quelli maggiori. In effetto, posto che BCF sia la metà della circonferenza disugualmente divisa in C , non solo la stessa CD sarà seno di amendue gli archi BC , FC , ma ancora la tangente FG dell' arco maggiore FC sarà eguale alla tangente BE dell' altro minore BC . Onde per gli archi maggiori del quadrante è necessario avvertire, che ciascuno di essi si aumenta in maggior ragione tanto del suo seno, quanto della sua tangente. Fig. 182.

426. Notifi ancora, che quante volte l' arco BC diviene quadrante, a tal segno si aumenta la sua tangente BE , che giunge ad essere infinita. La ragione è chiara; poicchè facendosi l' arco BC quadrante, l' angolo BAC dee esser retto (232); onde essendo retto similmente l' angolo ABE (168); saranno parallele le due BE , AC (63); e pertanto il loro incontro, con cui resta determinata la lunghezza della tangente, si discosterà infinitamente dalla retta AB . Per quanto poi al seno CD , diventando l' arco BC quadrante, egli dee cadere sul centro A , ed in conseguenza farsi eguale al raggio medesimo. Quindi il raggio, come seno del quadrante, sarà maggiore di ogn' altro seno; e per questa ragione si appella comunemente seno massimo, o seno totale.

§. III.

Della risoluzione de' problemi, che riguardano i lati, e gli angoli del triangolo.

427. **S** iccome nel cerchio gli archi non sono nella ragione delle loro corde, così nel triangolo ne pure gli angoli sono nella ragione de' lati opposti. Per dimostrarlo, sia il triangolo *ABC*, in cui pongasi l'angolo *ABC* maggiore dell'angolo *ACB*. Io dico, che la ragione degli angoli *ABC*, *ACB* sia maggiore di quella, che hanno i lati opposti *AC*, *AB*. Imperocchè descritto il cerchio intorno al triangolo (218), farà l'angolo *ABC* all'angolo *ACB*, come l'arco *AC* all'arco *AB* (409). Onde siccome per ipotesi l'angolo *ABC* è maggiore dell'angolo *ACB*, così l'arco *AC* farà ancora maggiore dell'arco *AB*. Quindi la ragione degli archi *AC*, *AB* farà maggiore della ragione, che hanno le loro corde (416); e pertanto ancora l'angolo *ABC* all'angolo *ACB* avrà maggior ragione, che il lato *AC* al lato *AB* (271).

Fig. 183.

428. Non essendo gli angoli del triangolo nella ragione de' lati opposti, ben si vede, che non senza qualche artificio debbonsi risolvere i problemi, che riguardano i lati, e gli angoli del triangolo. Dipende un tal'artificio dal teorema di sopra dimostrato (408), cioè, che gli angoli situati nel centro di un cerchio siano come gli archi, sulli quali si appoggiano. Imperocchè in virtù di questo teorema potrà ripeterli la quantità di un'angolo dall'arco circolare, che col vertice dell'angolo come centro, e con un dato intervallo descrivesi tra li suoi lati. Onde siccome gli stessi seni, e le stesse tangenti, con cui si determinano gli archi circolari, possono essere impiegati altresì per la determinazione degli angoli; così con farsi uso di tali rette potrà averli la risoluzione delli riferiti problemi.

Fig. 184.

429. Posto adunque, che *BAC* sia un'angolo qual-

qualſivoglia , ci verrà additata la quantità di eſſo dall'arco BC deſcritto tra li ſuoi lati col centro A , e coll'intervallo AB di una data lunghezza . E conforme le due CD , BE ſono ſeno , e tangente dell'arco BC ; così le medefime faranno riguardate altresì come ſeno , e tangente dell'angolo BAC , e ſerviranno a determinare tanto l'uno , quanto l'altro . Quindi eſſendo retto l'angolo , che corriſponde al quadrante (232) ; dovranno eſſere acuti coloro , che corriſpondono ad archi minori del quadrante , ed ottuſi quegli altri , che corriſpondono ad archi maggiori . Onde li ſeni , e le tangenti degli angoli ottuſi faranno quelle ſteſſe rette , che ſono ſeni , e tangenti degli angoli acuti , che formano due retti con quegli ottuſi (425).

430. Or nel triangolo rettangolo vedeſi chiaramente , che prendendoſi per raggio l'ipotenuſa , debba farſi ciaſcuno lato ſeno dell'angolo oppoſto ; e prendendoſi per raggio uno delli due lati , che ſono intorno all'angolo retto , debba farſi l'altro lato tangente dell'angolo oppoſto . Così nel triangolo ADC , rettangolo in D , ſta preſo per raggio l'ipotenuſa AC , ed il lato CD ritrovaſi eſſere ſeno dell'angolo oppoſto CAD ; nel triangolo poi ABE , ſimilmente rettangolo in B , ſta preſo per raggio il lato AB , e l'altro lato BE ritrovaſi eſſere tangente dell'angolo oppoſto BAE . Quindi nell' iſteſſo triangolo rettangolo debbono aver luogo tre proporzioni ; poicchè I. l'ipotenuſa a ciaſcuno lato dee eſſere , come il raggio al ſeno dell'angolo oppoſto , II. li due lati debbono eſſere tra loro , come li ſeni degli angoli oppoſti , e III. uno delli due lati dee eſſere all'altro lato , come il raggio alla tangente dell'angolo adjacente al primo lato , ed oppoſto al ſecondo .

Fig. 184.

431. Con queſte tre proporzioni agevole coſa ſi è , riſolvere i problemi , che riguardano il triangolo rettangolo . Sia perciò ABC queſto tale triangolo , il quale abbia in A l'angolo retto . Ed in primo luogo , dati gli altri due angoli B , e C coll'ipotenuſa BC , debbanſi determinare li due lati AB , AC . Poic-

Fig. 185.

chè

che sono dati gli angoli B , e C ; saranno dati ancora i seni, per mezzo de' quali essi si determinano. Quindi facendosi primieramente, come il raggio al seno dell'angolo B , così l'ipotenusa BC ad una quarta proporzionale; si avrà la lunghezza del lato AC . E facendosi ancora, come il raggio al seno dell'angolo C , così l'ipotenusa BC ad un'altra quarta proporzionale, si avrà la lunghezza dell'altro lato AB .

Fig. 185.

432. In secondo luogo, dati gli altri due angoli B , e C col lato AB , debbasi determinare l'ipotenusa BC coll'altro lato AC . Poicché sono dati gli angoli B , e C ; saranno dati altresì li seni, per mezzo de' quali essi si determinano. Onde facendosi primieramente, come il seno dell'angolo C al raggio, così il lato AB ad una quarta proporzionale; si avrà la lunghezza dell'ipotenusa BC . E facendosi ancora, come il seno dell'angolo C al seno dell'angolo B , così il lato AB ad una quarta proporzionale; si avrà la lunghezza dell'altro lato AC . Ma il lato AC può determinarsi eziandio per mezzo della tangente dell'angolo B , che similmente è data; poicché facendosi, come il raggio alla tangente dell'angolo B , così il lato AB ad una quarta proporzionale, si avrà l'altro lato AC .

Fig. 185.

433. In terzo luogo, data l'ipotenusa BC col lato AB , debbansi determinare gli altri due angoli B , e C coll'altro lato AC . Facciasi come l'ipotenusa BC al lato AB , così il raggio ad una quarta proporzionale; e siccome questa dee essere il seno dell'angolo C , così per mezzo di essa resterà determinato l'angolo medesimo, colla di cui determinazione si avrà ancora quella dell'angolo B , per la ragione, che li due B , e C insieme debbono essere eguali ad un retto (71). Facciasi poscia come il raggio al seno dell'angolo B , così l'ipotenusa BC ad una quarta proporzionale; o pure come il raggio alla tangente dell'angolo B , così il lato AB ad una quarta proporzionale; o finalmente, come il seno dell'angolo C al seno dell'

an-

GEOMETRIA PIANA. 187

angolo B, così il lato AB ad una quarta proporzionale; ed in tutti tre li casi si avrà l'altro lato AC.

434. Finalmente dati li due lati AB, AC, deb- Fig. 185d
 banfi determinare gli altri due angoli B, e C coll'ipotenusa BC. Facciasi come il lato AB al lato AC, così il raggio ad una quarta proporzionale. E poicchè questa dee essere la tangente dell'angolo B, resterà determinato per mezzo di essa il medesimo angolo, colla di cui determinazione si avrà ancora quella dell'angolo C, che è il supplimento ad un retto dell'angolo B. Facciasi poscia, come il seno dell'angolo B al raggio, così il lato AC ad una quarta proporzionale; o pure come il seno dell'angolo C al raggio, così il lato AB ad una quarta proporzionale; ed in amendue li casi si avrà la lunghezza dell'ipotenusa BC.

435. Per quanto poi alli problemi, che riguardano il triangolo obliquangolo; la soluzione di essi dipende da tre teoremi. Il primo si è, che in ogni triangolo li lati debbano essere tra loro, come li seni degli angoli apposti. Per dimostrarlo, sia il triangolo ABC, intorno a cui descrivasi il cerchio, Fig. 183e
 che abbia per centro il punto D. Abbassate adunque da questo centro sulli lati AB, BC, CA le perpendicolari DE, DF, DG, e prolungate le medesime per fino alla circonferenza; saranno divisi egualmente da dette perpendicolari così li lati del triangolo (146), come gli archi sostenuti da detti lati (185); e pertanto le metà degli stessi lati AE, BF, CG faranno seni degli angoli ADE, BDF, CDG. Ma questi angoli, come metà degli altri ADB, BDC, CDA, sono eguali agli angoli ACB, BAC, CBA (173). Dunque le medesime metà AE, BF, CG faranno seni ancora degli angoli ACB, BAC, CBA; ed in conseguenza li lati AB, BC, CA, come proporzionali a quelle metà (275), saranno come li seni degli angoli opposti.

436. L'altro si è, che in ogni triangolo la somma di due lati disuguali debba essere alla loro differenza, come la tangente della dimezzata somma

GEOMETRIA PIANA. 180

somma delli due lati AB , AC , e la seconda CF è la loro differenza. Dunque la somma, e la differenza delle due porzioni BD , CD faranno reciproche colla somma, e colla differenza delli due lati AB , AC .

438. Or in virtù del primo di questi teoremi, siccome dati gli angoli del triangolo ABC restano determinate colla loro seni, che similmente debbono essere dati, le ragioni de' lati opposti; così con darsi insieme cogli angoli un lato AB , possono determinarsi facilmente gli altri due BC , CA . Poicche facendosi primieramente come il seno dell'angolo C al seno dell'angolo A , così AB ad una quarta proporzionale; si avrà il lato BC . E facendosi ancora come il seno dell'angolo C al seno dell'angolo B , così il lato AB ad un'altra quarta proporzionale, si avrà l'altro lato CA . Ma coll'istesso teorema, dati li due lati AB , BC coll'angolo C opposto ad uno di essi, possono determinarsi altresì gli altri due angoli A , e B col terzo lato CA . Poicche facendosi come AB a BC , così il seno dell'angolo C ad una quarta proporzionale; sarà questa il seno dell'angolo A , per mezzo di cui siccome resta determinato l'angolo medesimo, così colla determinazione di esso si avrà eziandio quella e del terzo angolo B , che forma due retti cogli altri due (71), e del terzo lato CA opposto all'angolo B .

Fig. 185.

439. Col secondo teorema poi, dati li due lati disuguali AB , BC del triangolo ABC , e dato l'angolo compreso da detti lati, potranno determinarsi gli altri due angoli opposti agli stessi lati, insieme col rimanente lato AC . Imperocche dovendo gli altri due angoli formare due retti col dato (71); sarà data così la somma di essi dimezzata, come la tangente di una tal somma. Onde facendosi come la somma delli lati AB , BC alla loro differenza, così la riferita tangente ad una quarta proporzionale; si avrà ancora la tangente della differenza dimezzata delli medesimi angoli, per mezzo della quale siccome resta determinata l'istessa dimezzata

Fig. 186.

ta

GEOMETRIA PIANA. 191

AFI; farà come AC a CD, così AG a GH; e come AB a BE, così AF ad FI (316). Onde tanto li due diversi seni CD, GH, quanto le due diverse tangenti BE, FI saranno proporzionali alli loro raggi.

§. IV.

Del cerchio considerato come poligono regolare, e delli teoremi, che se ne ricavano.

442. **P**Er dimostrare altri teoremi intorno alla dottrina delle proporzioni applicata al cerchio, faremo ora vedere, che egli il cerchio possa considerarsi ancora sotto altro aspetto, cioè come poligono regolare, in cui il numero de' lati sia maggiore di ogni qualunque numero, che possa assegnarsi. Ed in vero se bene la linea retta, e la linea curva siano di un' indole affatto opposta; tuttavolta quelle minime particelle, che debbono risultare dalla loro illimitata divisione, e che sono infinitamente picciole per rapporto ad esse, possono averli così nell'una, che nell'altra, come tante picciole rette; e tutto il divario tra la retta, e la curva potrà ripetersi da ciò, che tali particelle nella retta stanno a dirittura, e traviano per angoli infinitamente piccioli nella curva.

443. Non solo adunque la circonferenza del cerchio, ma ogn' altra curva può considerarsi come perimetro di un poligono, in cui i lati sono infinitamente piccioli, e mancano di essere tra loro a dirittura per angoli di una picciolezza ancora infinita. Né da ciò può dedursi, che ogni curva debba essere da per tutto di egual curvatura. Imperocchè se bene i suoi lati siano infinitamente piccioli, e tali siano ancora gli angoli, per cui l' uno travia dall' altro; niente di meno non ostante questa infinita picciolezza così gli uni, come gli altri ritengono ciò, che è proprio di ogni quantità. Onde potendo essere tra di essi differenti, possono altresì colla loro varietà conciliare alle
varie

varie parti della curva varia curvatura ; come in effetto da questo stesso fonte deriva altresì l' infinita diversità , che tra le medesime curve si ravvisa .

444. Or che debba essere regolare quel poligono , che col suo perimetro costituisce la circonferenza del cerchio , bastantemente lo addita la egual curvatura , che ella da per tutto ritiene . Ma per provarlo con argomento più efficace , dimostreremo prima il seguente teorema , cioè , che nelli poligoni regolari della stessa specie li perimetri debbano essere come le perpendicolari abbassate dalli loro centri su due lati di essi . Perciò siano ABCD , EFGH li due poligoni regolari della stessa specie ; e dalli loro centri I , ed L siano abbassate sulli lati AB , EF le perpendicolari IM , LN . Io dico , che il perimetro del poligono ABCD sia al perimetro dell'altro poligono EFGH , come IM ad LN .

Fig. 185.

445. Poicchè li due poligoni sono della stessa specie ; sarà l'angolo ABC eguale all'angolo EFG (211) . Onde essendo questi angoli divisi per metà dalle rette IB , LF (203) ; sarà ancora l'angolo ABI eguale all'angolo EFL ; ed in conseguenza li due triangoli IBM , LFN saranno equiangoli . Quindi dovendo essere come IM a BM , così LN ad FN (316) ; sarà permutando come IM ad LN , così BM ad FN (303) . Ma li due lati AB , EF sono divisi egualmente dalle perpendicolari IM , LN (207) ; e pertanto BM sta ad FN , come AB ad EF (275) . Dunque sarà ancora come IM ad LN , così AB ad EF (271) . E poicchè sono eguali tra loro così li lati AB , BC , CD , DA , come li lati EF , FG , GH , HE ; saranno quelli a questi in data ragione . Onde dovendo essere le loro somme , che formano li perimetri delli due poligoni , come AB ad EF (307) ; sarà il perimetro del poligono ABCD al perimetro dell'altro poligono EFGH , come IM ad LN (271) .

446. Dimostrato questo teorema , sia ora il cerchio BCD , dentro di cui iscrivasi un poligono rego-

Fig. 189.

rego-

regolare, come $BCDE$; e divisi gli archi sostenuti dalli suoi lati egualmente ne' punti F, G, H, I (188), tirinsi a questi punti le tangenti LM, MN, NO, OL (171). Essendo adunque eguali gli archi FG, GH, HI, IF ; sarà regolare altresì il poligono $LMNO$ formato da quelle tangenti, e circoscritto intorno al cerchio (225). Ma questo altro poligono $LMNO$ è ancora della stessa specie col primo $BCDE$. Dunque per quel tanto è stato dimostrato (444), i loro perimetri saranno, come le perpendicolari abbassate sulli lati LM, BC dal centro del cerchio A , che è centro comune degli stessi poligoni. E poicchè, tirato il raggio AF , che s'incontri con BC in P , sono AF, AP queste tali perpendicolari; sarà il perimetro del poligono $LMNO$ al perimetro dell'altro poligono $BCDE$, come AF ad AP , o pure come AB ad AP .

447. Or egli è facile il dimostrare, che la ragione di AB ad AP debba farsi di uguaglianza, quante volte il numero de'lati di ciascuno poligono è maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi. Imperocchè restando divisa la circonferenza del cerchio dalli lati del poligono iscritto in un consimile numero di archi eguali, sarà l'arco BFC , sostenuto da uno di detti lati, infinitamente picciolo per rapporto alla circonferenza intera; onde per rapporto al quadruplo di un retto, tale ancora sarà l'angolo BAC , che si appoggia sull'arco BFC (410); ed in conseguenza l'angolo BAF , come metà dell'angolo BAC , sarà eziandio di una picciolezza infinita per rapporto al doppio di un retto (275). Quindi nel triangolo BAP dovranno averli come eguali a due retti li due soli APB, ABP (357); e pertanto essendo retto l'angolo APB , sarà retto ancora l'altro APB ; con che le due AB, AP , come opposte ad angoli eguali, saranno similmente eguali tra loro (73).

448. Ma siccome la ragione di AB ad AP dee farsi di uguaglianza, quante volte il numero de'
N
lati

lati di ciascuno poligono è maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi; così per essere li perimetri delli due poligoni nella ragione di AB ad AP , dovrà farsi ancora tale la ragione di quelli perimetri. E poicchè ciò non può avvenire in altra guisa, se non con approssimarsi talmente l'uno all'altro perimetro, che svanisca ogni intervallo, che possa tra di essi considerarsi; per necessità li due perimetri dovranno combaciarsi tra loro. Quindi la circonferenza del cerchio, che giace racchiusa tra quegli stessi perimetri, verrà a confondersi con ciascuno di essi. Onde non solo ella dovrà riguardarsi come perimetro di un poligono regolare, in cui il numero de' lati sia maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi; ma ancora il cerchio medesimo non sarà differente da un tal poligono.

Fig. 189.

449. Per venire ora alli teoremi, che possono dimostrarsi con riguardare il cerchio sotto tal forma, notifi primieramente, che se del poligono regolare $LMNO$ circoscritto intorno al cerchio distendasi un lato OL verso Q , e facciasi OQ eguale al suo perimetro, sarà il poligono $LMNO$ eguale al triangolo AOQ . Imperocchè, essendo eguali le altezze AF , AG , AH , AI delli triangoli ALM , AMN , ANO , AOL ; saranno questi tra loro, come le basi LM , MN , NO , OL (351). Onde il poligono $LMNO$ somma de' triangoli sarà al solo triangolo AOL , come OQ somma delle basi alla sola base OL (397). Ma OQ sta ad OL , come il triangolo AOQ al triangolo AOL (351). Dunque sarà ancora come il poligono $LMNO$ al triangolo AOL , così il triangolo AOQ all'istesso triangolo AOL (271); e pertanto il poligono $LMNO$, ed il triangolo AOQ saranno tra loro eguali (274).

450. Essendo così, dimostreremo in primo luogo, che ogni cerchio debba essere eguale ad un triangolo, che ha per base la sua circonferenza, e per altezza il suo raggio. Imperocchè qualunque sia il numero de' lati del poligono regolare

LMNO

LMNO circoscritto intorno al cerchio BCD, sempre un tal poligono dovrà essere eguale al triangolo AOQ, che ha per base il suo perimetro, e per altezza il raggio del cerchio (449). Ma quante volte il numero de' lati del poligono regolare LMNO è maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi, di già è stato dimostrato, che la circonferenza del cerchio BCD debba confondersi col suo perimetro, ed egli il cerchio non debba essere differente dal poligono medesimo (448). Dunque ancora il cerchio BCD dovrà essere eguale ad un triangolo, che ha per base la sua circonferenza, e per altezza il suo raggio.

Fig. 189.

451. Dimostreremo in secondo luogo, che ogni cerchio sia al quadrato circoscritto intorno ad esso, come la circonferenza al quadruplo del diametro. Sia perciò il cerchio BCD, attorno di cui circoscrivasi il quadrato FGHI. E siccome il cerchio BCD è eguale ad un triangolo, che ha per base la sua circonferenza, e per altezza il suo raggio (450); così il quadrato circoscritto FGHI farà eguale ad un'altro triangolo, che ha per base il suo perimetro, o sia il quadruplo del diametro, e per altezza l'istesso raggio (549). Onde il cerchio BCD, ed il quadrato FGHI saranno tra di essi, come i riferiti due triangoli (275). Ma questi triangoli per la comune altezza, che si ritrovano avere, sono tra loro nella ragione delle basi, cioè a dire della circonferenza al quadruplo del diametro (351). Dunque il cerchio BCD, ed il quadrato circoscritto FGHI saranno ancora nella istessa ragione.

Fig. 190.

452. Dimostreremo in terzo luogo, che ogni cerchio sia al quadrato iscritto dentro di esso, come la circonferenza al doppio del diametro. Perciò pongasi di nuovo, che FGHI sia il quadrato circoscritto intorno al cerchio BCD; e congiunte le rette BC, CD, DE, EB, farà BCDE il quadrato iscritto dentro del medesimo. Ma per le parallele FI, BD, GH tanto il parallelogrammo FBDI è doppio del triangolo EBD, quanto l'altro paralle-

Fig. 190.

rallelogrammo $GBDH$ è doppio dell' altro triangolo CBD (63). Dunque sarà il quadrato circoscritto $FGHI$ doppio ancora del quadrato iscritto $BCDE$. Onde siccome il cerchio BCD sta al quadrato circoscritto $FGHI$, come la circonferenza al quadruplo del diametro (451); così l'istesso cerchio BCD sarà al quadrato iscritto $BCDE$, come la stessa circonferenza al doppio del diametro.

453. Dimostreremo in quarto luogo, che due cerchi debbano essere tra di essi in ragion composta delle loro circonferenze, e delli loro raggi. Siano perciò li due cerchi BCD , EFG , descritti intorno al comune centro A ; e tirate le tangenti BH , EI a due punti di essi B , ed E , concepiscansi queste tangenti eguali alle loro circonferenze. Essendo adunque li due cerchi BCD , EFG eguali alli due triangoli ABH , AEI (450); sarà il cerchio BCD al cerchio EFG , come il triangolo ABH al triangolo AEI (275). Ma la ragione di questi triangoli si compone da quella delle basi BH , EI , e da quella delle altezze AB , AE (354). Dunque nella stessa ragion composta faranno ancora li due cerchi BCD , EFG (271); e pertanto si comporrà la ragione di essi da quella delle loro circonferenze, e da quella delli loro raggi.

454. Dimostreremo in quinto luogo, che ogni settore debba essere eguale ad un triangolo, che ha per base l'arco, da cui si termina il settore, e per altezza il raggio del medesimo arco. Prendasi perciò nel cerchio BCD un settore qualsivoglia ABC ; e tirata al punto B la tangente BH , concepiscasi, che tanto BH sia eguale alla circonferenza intera, quanto la porzione BL sia eguale all'arco BC . Adunque l'intera circonferenza sarà all'arco BC , come BH a BL (275). Ma l'intera circonferenza sta all'arco BC , come il cerchio BCD al settore ABC (407); e BH sta a BL , come il triangolo ABH al triangolo ABL (351). Dunque sarà ancora come il cerchio BCD al settore ABC , così il triangolo ABH al triangolo ABL (271); e pertanto siccome il cerchio BCD è egua-

è eguale al triangolo ABH (450), così sarà il settore ABC eguale all'altro triangolo ABL (302).

Fig. 192.

455. Dimostreremo in sesto luogo, che un' arco circolare, come BC, sia al suo seno CN, come il settore ABC al triangolo ABC; e che l'istesso arco BC sia alla sua tangente BO, come il settore ABC al triangolo ABO. Imperocchè, posto di nuovo, che la tangente BL sia eguale all'arco BC, sarà il settore ABC eguale al triangolo ABL (454). Ma BL sta a CN, come il triangolo ABL al triangolo ABC; e BL sta a BO, come il triangolo ABL al triangolo ABO (351). Dunque sarà ancora l'arco BC al suo seno CN, come il settore ABC al triangolo ABC; e l'arco BC alla sua tangente BO, come il settore ABC al triangolo ABO. Ed essendo così, egli è chiaro, che l'arco BC sia minore del suo seno CN, e maggiore della sua tangente BO.

456. Dimostreremo in settimo luogo, che due settori presi in due diversi cerchi debbano essere tra di essi in ragion composta degli archi, da cui sono terminati, e delli raggi de' loro cerchi. Siano perciò li due cerchi BCD, EFG descritti intorno al comune centro A; e prendansi in essi li due settori ABC, AEF. Tirinsi alli due punti B, ed E le tangenti BL, EM, le quali concepiscansi eguali alli due archi BC, EF. Ed essendo li due settori ABC, AEF eguali alli due triangoli ABL, AEM (454); sarà il settore ABC al settore AEF, come il triangolo ABL al triangolo AEM (275). Ma la ragione di questi triangoli si compone da quella delle basi BL, EM, e da quella delle altezze AB, AE (354). Dunque nella stessa ragion composta saranno ancora li due settori ABC, AEF (271); e pertanto si comporrà la ragione di essi da quella degli archi BC, EF, e da quella delli raggi AB, AE.

Fig. 191.

457. Dimostreremo finalmente, che essendo tra loro eguali li due settori ABC, AEF, siano gli archi BC, EF reciprocamente proporzionali alli raggi AB, AE; e per lo contrario, che essendo gli ar-

Fig. 191.

che BC , EF nella reciproca ragione delli raggi AB , AE , siano eguali li due settori ABC , AEF . Imperocchè la ragione delli due settori ABC , AEF si compone da quella degli archi BC , EF , e da quella delli raggi AB , AE (456). Dunque essendo eguali li due settori, questa ragion composta dovrà essere di uguaglianza; ed in conseguenza delle due componenti una sarà reciproca dell'altra (367). Per lo contrario pot' essendo la ragione degli archi BC , EF reciproca della ragione, in cui sono li raggi AB , AE , si comporrà da queste due ragioni insieme una ragione di uguaglianza. Onde essendo li due settori ABC , AEF in questa ragion composta, li medesimi saranno tra loro eguali.

§. V.

Della simiglianza de' cerchi, e delli teoremi, che da essa si ricavano.

458. **D** Alla nuova forma, che si è data al cerchio, oltre alli precedenti possono dedursi ancora altri teoremi; ma per essi è necessario prima avvertire, che quantunque due cerchi diversi debbano confondersi con poligoni regolari ancora diversi, tutta volta la specie delli poligoni dee essere sempre la stessa. Siano perciò BCD , EFG due cerchi diversi, descritti intorno al comune centro A ; e posto, che la picciola retta BC sia il lato del poligono regolare, con cui si confonde il cerchio BCD , congiungansi li raggi AB , AC , li quali si distendino per fino alla circonferenza dell'altro cerchio EFG . Essendo adunque gli archetti BC , EF proporzionali alle circonferenze intere (412); saranno i medesimi parti aliquote simili delle stesse circonferenze; e pertanto li due poligoni regolari, che dentro delli cerchi BCD , EFG hanno per loro lati le picciole rette BC , EF , saranno della stessa specie.

459. E poicchè sono eguali tra loro così le due

AB.

Fig. 198.

AB, **AC**, come le due **BE**, **CF**; farà come **AB** a **BE**, così **AC** a **CF** (275); onde le due **BC**, **EF** faranno tra loro parallele (311). Quindi abbassata su una di esse **BC** la perpendicolare **AH**, e prolungata la medesima perfino a che s' incontri coll' altra **EF** in **I**; farà ancora **AI** perpendicolare sull' altra **EF** (62); e pertanto essendo equiangoli li due triangoli **ABH**, **AEI**, farà come **AB** ad **AH**, così **AE** ad **AI** (316). Ma per confonderli il cerchio **BCD** col poligono regolare, che ha per lato la picciola retta **BC**, la ragione di **AB** ad **AH** dee essere di uguaglianza (447). Dunque di uguaglianza farà ancora la ragione di **AE** ad **AI**; ed in conseguenza eziandio il cerchio **EPG** dovrà confonderli col poligono regolare, che ha per lato la picciola retta **EF** (448).

460. Or da ciò, che due cerchi debbansi confondere con poligoni regolari della stessa spezie, egli è facile ad intendersi, che siccome questi tali poligoni sono simili tra loro, così simili parimente esser debbano gli stessi cerchi, che con quelli si confondono. Ma con questa simiglianza possono dimostrarsi presentemente due altri teoremi, cioè **I**, che le circonferenze di due cerchi siano nella stessa ragione colli loro raggi; e **II**, che li cerchi medesimi siano in duplicata ragione degli stessi raggi. Anzi col primo di questi teoremi resterà comprovata altresì la verità di quell' tanto fu avanzato di sopra (184); cioè, che siccome essendo eguali li raggi, sono eguali ancora le loro circonferenze; così per lo contrario essendo eguali le circonferenze, eziandio i raggi di esse debbano essere tra loro eguali.

461. Adunque per quanto al primo teorema, pongasi di nuovo, che **BC**, **EF** siano i lati delli due poligoni, colli quali si confondono i due cerchi **BCD**, **EPG**. Ed essendo questi poligoni simili tra loro; faranno li lati di uno di essi proporzionali alli lati dell' altro. Onde le loro somme, che sono i perimetri delli due poligoni, o pure le circonferenze delli due cerchi, faranno come li soli

Fig. 193.

N 4

lati

lati BC , EF (307). Ma per gli triangoli equiangoli ABC , $A'EF$, li lati BC , EF sono come li raggi AB , $A'E$. Dunque ancora le circonferenze delli due cerchi saranno, come li raggi. Per quanto poi al secondo teorema, di già è stato dimostrato, che la ragione di due cerchi si compone da quella delle loro circonferenze, e da quella delli loro raggi (453). Dunque essendo le circonferenze, come li raggi, sarà la ragione degli stessi cerchi duplicata della sola de' raggi (386).

Fig. 194.

462. Non solo due cerchi diversi, ma eziandio due settori di essi, racchiusi sotto angoli eguali, debbono essere simili tra loro. Siano perciò li due cerchi ABC , DEF , nelli di cui centri G , ed H pongansi li due angoli eguali AGB , DHE . E poicchè questi cerchi si confondono con poligoni regolari della stessa spezie; saranno i lati, che formano le loro circonferenze, eguali di numero. Ma per l'uguaglianza degli angoli AGB , DHE , gli archi AB , DE sono nella stessa ragione con quelle circonferenze (412). Dunque ancora i lati, che formano detti archi, saranno eguali di numero. Quindi la figura contenuta dalli raggi GA , GB , e dalli lati dell'arco AB sarà simile alla figura, che li raggi HD , HE contengono colli lati dell'arco DE ; ed in conseguenza confondendosi i due settori GAB , HDE con queste tali figure, ancora essi saranno tra loro simili.

Fig. 194.

463. Intorno a questi due settori simili possono dimostrarsi gli stessi due teoremi, cioè I, che gli archi, per cui si terminano, siano nella stessa ragione colli loro raggi; e II, che i settori medesimi siano in duplicata ragione delli stessi raggi. Imperocchè per l'uguaglianza degli angoli AGB , DHE gli due archi AB , DE debbono essere, come le circonferenze intere (412). Onde siccome queste circonferenze sono, come li raggi GA , HD ; così nella stessa ragione saranno ancora gli archi AB , DE . In oltre di già è stato dimostrato, che li due settori GAB , HDE sono in ragion composta degli archi AB , DE , e delli raggi GA , HD (456).
Dun-

GEOMETRIA PIANA. 201

Dunque essendo queste due ragioni tra loro eguali, saranno i medesimi settori in duplicata ragione delli soli raggi (386).

464. Essendo simili i due settori GAB , HDE , saranno simili ancora gli altri due rimanenti settori $GBCA$, $HEFD$. E la ragione è chiara; poicchè con essere eguali di numero i lati, che formano li due archi AB , DE , eziandio gli archi rimanenti BCA , EFD debbono essere formati da lati eguali di numero. Ma per la stessa ragione, congiunte le rette AB , DE , saranno simili parimente non meno le due porzioni terminate dagli archi AB , DE , che le altre due terminate dagli archi rimanenti BCA , EFD . E poicchè gli angoli situati così nell'une, come nell'altre porzioni debbono essere tra loro eguali; vedesi ora la ragione, che c'indusse a chiamare simili quelle porzioni circolari, nelle quali possono situarsi angoli eguali (182).

465. Per quanto a queste porzioni simili, siccome non può porsi in dubbio, che gli archi, per cui si terminano, siano nella stessa ragione colli loro raggi; così facilmente può dimostrarsi, che le porzioni medesime siano in duplicata ragione degli stessi raggi. Imperocchè, essendo simili tanto li due settori GAB , HDE , quanto li due triangoli AGB , DHE ; saranno così gli uni, come gli altri in duplicata ragione delli raggi GA , HD . Ma le porzioni terminate dagli archi AB , DE sono gli eccessi, con cui i settori superano i triangoli. Dunque ancora dette porzioni saranno nella stessa duplicata ragione (305). E per essere i cerchi interi nella medesima duplicata ragione; dovrà ella aver luogo parimente tra le altre porzioni terminate dagli archi rimanenti BCA , EFD .

466. Ma le porzioni simili sono ancora in duplicata ragione delle rette, che le sostengono. Imperocchè per essere equiangoli li due triangoli AGB , DHE , saranno li raggi GA , HD nella stessa ragione colle rette AB , DE , che sostengono

Fig. 194.

Fig. 194.

Fig. 194.

gono le porzioni simili. Ma di già è stato dimostrato, che queste porzioni sono in duplicata ragione delli raggi GA , HD (465). Dunque le medesime porzioni saranno parimente in duplicata ragione delle rette AB , DE . Per gli mezzi cerchi poi, che eziandio sono porzioni simili, la cosa è fuor di ogni dubbio; poicchè essendo essi sostenuti dalli diametri, che sono doppi delli raggi, chiaramente si vede, che i medesimi debbano essere tra loro in duplicata ragione delle rette, che li sostengono.

Fig. 195.

467. È quindi ora la proprietà del triangolo rettangolo dee estendersi altresì a tutte quest'altre figure simili. Essendo adunque ABC un triangolo rettangolo in A , sarà primieramente il cerchio descritto col raggio BC eguale agli altri due cerchi descritti colli raggi AB , AC ; sarà in secondo luogo un settore descritto col raggio BC eguale agli altri due settori simili descritti colli raggi AB , AC ; sarà finalmente una porzione circolare descritta sull'ipotenusa BC eguale alle altre due porzioni simili descritte sulli lati AB , AC . E poicchè questa terza uguaglianza dee aver luogo ancora, quando le porzioni simili, che si descrivono, sono mezzi cerchi; avremo con essa due lunule circolari, che unite insieme faranno eguali allo stesso triangolo ABC .

468. La ragione è chiara; poicchè il mezzo cerchio, che descrivesi sull'ipotenusa BC , dee passare per lo punto A , in cui ritrovasi l'angolo retto (177). Onde essendo egli eguale agli altri due mezzi cerchi, descritti sulli lati AB , AC ; con togliersi le comuni due porzioni tagliate da esso per gli lati AB , AC , rimarrà il triangolo ABC eguale alle due lunule circolari. Qualora intanto li due lati AB , AC sono tra loro eguali, faranno le stesse lunule eguali ancora tra di esse; ed abbassata sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD , faranno eguali altresì li due triangoli rettangoli ADB , ADC , nelli quali resta diviso per quella perpendicolare il triangolo ABC . Onde in questo

questo caso ciascuna delle due lunule sarà eguale a ciascuno delli due triangoli.

469. Or se bene possa darsi una lunula circolare eguale ad un triangolo; non perciò, data ogni lunula, può determinarsi un triangolo, o altra figura rettilinea, che sia alla medesima eguale. Ma l'istessa difficoltà s'incontra ancora, se si voglia determinare con figure rettilinee, o il cerchio intero, o qualche suo settore, o in fine qualche sua porzione; poicchè per quanto siasi travagliato intorno a questi problemi, non mai si è potuto venire a capo della risoluzione di essi. Tutti intanto sarebbero risolti, se fosse a noi nota la vera ragione, che ha il raggio del cerchio alla sua circonferenza. Imperocchè con questa ragione potrebbe determinarsi la lunghezza così dell'intera circonferenza, come di ogn'altro arco circolare; colla di cui determinazione agevole cosa sarebbe per mezzo de' teoremi dimostrati in questo capitolo, di risolvere tutti i riferiti problemi.

470. Ma eziandio il problema, che riguarda la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, si è ritrovato superiore ad ogni nostra conoscenza; e tutti i mezzi impiegati per la soluzione di esso appena sono stati bastanti a determinare i limiti, tra li quali ritrovasi quella ragione. Quali siano questi limiti, e come debbansi investigare; sarà spiegato nella Geometria pratica, ove dee farsi uso di quanto è stato dimostrato in questi Elementi. Però con essi talmente si determina per via di approssimazione la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, che, per quanto appartiene alla pratica, non sembra doverfi desiderare d'avanzaggio. Onde con farsi uso di una tal ragione, poco distante dalla vera, eziandio i divisiati problemi potranno risolversi per via di approssimazione, senza molto discostarsi dalle vere loro soluzioni.

471. Il problema intanto, in cui si dimanda la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, si riguarda come spettante alla rettificazione del cerchio; poicchè per mezzo di esso siccome può determi-

narsi

narfi la lunghezza non meno della circonferenza intera, che di ogn'altro arco circolare, così possono ritrovarfi similmente rette, che fiano eguali alle medefime curve. Gli altri poi, in cui fi dimandano spazii circolari, fi riguardano come spettanti alla quadratura del cerchio; per la ragione, che ficcome ciascuno spazio dee determinarfì con figure rettilinee, così tra queste fpezialmente fi è fcelto il quadrato, che più facilmente cade sotto il noftro intendimento. E poicchè la foluzione di quefti altri problemi non dee farci difficoltà veruna, fuppolta nota la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio; quindi fi è, che la quadratura del cerchio fi confidera come confequenza della fua rettificazione.

Fig. 196.

472. Del rimanente intorno agli angoli fituati nelli centri, o nelle circonferenze di due cerchi diverfi, puo ora dimofterarfì il fequente teorema, cioè, che la loro ragione fia compofta dalla diretta degli archi, fulli quali fi appoggiano, e dalla reciproca de' raggi degli ftelfi archi. Siano perciò li due cerchi diverfi ABC, DEF, nelli di cui centri G, ed H ponganfì li due angoli difuguali BGC, EHF. Gli altri due adunque BAC, EBF fituati nelle circonferenze, come metà di quelli, faranno ancora difuguali. Or bifogna dimofterare, che la ragione così degli uni, come degli altri fia compofta dalla diretta degli archi BC, EF, e dalla reciproca delli raggi GB, HE, cioè a dire, che tanto li due BGC, EHF, quanto gli altri due BAC, EDF fiano in ragion compofta dell' arco BC all' arco EF, e del raggio HE al raggio GB.

473. Dal raggio maggiore HE taglifi la porzione HI eguale all' altro minore GB (31); indi coll' ifteffo centro H, e coll' intervallo HI defcrivafi l' altro arco IL, che s' incontri con HF in L. Effendo adunque gli archi BC, IL defcritti con eguali intervalli; farà l' angolo BGC all' angolo EHF, come l' arco BC all' arco IL (408). Ma l' arco BC all' arco IL fta in ragion compofta dell'

GEOMETRIA PIANA. 205

dell'arco BC all'arco EF, e dell'arco EF all'arco IL (284). Dunque in questa stessa ragion composta sarà ancora l'angolo BGC all'angolo EHF (271); ed in conseguenza essendo l'arco BF all'arco IL, come il raggio HE al raggio HI, ovvero GB (463), sarà l'angolo BGC all'angolo EHF in ragion composta dell'arco BC all'arco EF, e del raggio HE al raggio GB; la quale eziandio dovrà aver luogo tra gli angoli BAC, EDF, per essere questi nella medesima ragione colli loro doppi BGC, EHF (275).

474. Per quanto poi agli archi, sulli quali si appoggiano gli angoli, la loro ragione dee essere composta e dalla diretta degli angoli, e dalla diretta de' raggi. Per dimostrarlo, facciasi nel centro G l'angolo CGM eguale all'angolo EHF (41). Fig. 196. E per l'uguaglianza di questi angoli sarà primieramente come l'arco BC all'arco CM, così l'angolo BGC all'angolo EHF (408); e sarà ancora come l'arco CM all'arco EF, così il raggio GB al raggio HE (463). Ma l'arco BC sta all'arco EF in ragion composta dell'arco BC all'arco CM, e dell'arco CM all'arco EF (284). Dunque la ragione dell'arco BC all'arco EF si comporrà ancora da quella dell'angolo BGC all'angolo EHF, e da quella del raggio GB al raggio HE (280). Ed essendo li due angoli BGC, EHF nella stessa ragione cogli altri due BAC, EDF (275); sarà altresì l'arco BC all'arco EF in ragion composta dell'angolo BAC all'angolo EDF, e del raggio GB al raggio HF.

CAPITOLO V.

*Delli problemi attinenti alla Geometria piana,
e del modo di risolverli.*

475. **C** On essersi applicata la dottrina delle proporzioni a tutte le spezie della quantità estesa, che si considerano nella Geometria piana; potrebbe porsi fine a questi Elementi, dive-

diventati per altro bastantemente pingui, e copiosi. Ma rimane a trattarsi di un' altra teoria egualmente utile, e necessaria; cioè del metodo, che dee tenerli in risolvere tutti gli altri problemi, che alla Geometria piana si appartengono. Imperocchè se bene la soluzione di ciascuno di essi debba ripetersi da quelli medesimi, che sono stati proposti, e risolti in questi Elementi; nientedimeno senza un qualche metodo non farà cosa così facile rinvenirne la costruzione, e tessere il ragionamento proprio per dimostrarla. Convien dunque, che gli studiosi di questa scienza non ignorino tal metodo, e sappiano altresì distinguere i problemi, che colla Geometria piana possono risolversi.

§. I.

Del metodo da tenersi nella risoluzione de' problemi geometrici.

476. **I**L metodo da tenersi in risolvere qualunque problema geometrico si è di supporre già fatto quelltanto in esso si dimanda, e di esaminare le conseguenze, che da una tal supposizione discendono. Imperocchè se mai tra queste se ne incontra alcuna, che possa aver luogo, e sia noto a noi, come ella debba eseguirsi, da essa dovrà ripetersi la soluzione del problema proposto; e si avrà la dimostrazione della costruzione, che ne risulta, con invertersi il ragionamento, per mezzo di cui si è giunto a quella conseguenza. Così volendosi sulla retta AB descrivere un triangolo equilatero, si consideri tal triangolo come già descritto; e supposto, che egli sia il triangolo ABC , faranno eguali così le due AB, AC , come le due AB, BC ; ed in conseguenza il punto C sarà situato nell'interseguimento delli due cerchi descritti colli centri A , e B , e coll'intervallo della stessa AB . Onde potendosi descrivere questi due cerchi, si ritroverà il punto C coll'interseguimento di essi, e colla loro natura si dimostrerà, che il

Fig. 197.

al triangolo ABC sia equilatero.

477. Per investigare le conseguenze, che possono dedursi dalla supposta risoluzione del problema, è necessario il più delle volte avvalersi di una, o più delle costruzioni già note. Debbaasi per ragion di esempio dividere il triangolo ABC per una retta parallela al lato BC in data ragione, cioè in quella di FG a GH. Pongasi, che DE sia la parallela, che si dimanda. Ed essendo il triangolo ADE al rimanente trapezio DBCE, come FG a GH; sarà componendo, come il triangolo ADE al triangolo ABC, così FG ad FH (292). Ma per essere simili li due triangoli ADE, ABC, la loro ragione è duplicata di quella, in cui sono li lati omologhi AD, AB (393); e con farsi, che FI sia mezza proporzionale fra le due FG, FH, ancora FG ad FH sta in duplicata ragione di FG ad FI (287). Dunque sarà come AD ad AB, così FG ad FI; e pertanto potendo aver luogo questa proporzione, da essa medesima dovrà ripetersi la soluzione del problema proposto.

Fig. 198.

478. Quindi si risolverà il problema, di cui si tratta, nella maniera seguente. Facciaasi, che FI sia mezza proporzionale tra le due FG, FH (328); indi in ordine alle tre FI, FG, AB ritrovisi la quarta proporzionale, che sia AD (326); tirisi poscia per lo punto D la retta DE parallela a BC (65); ed io dico, che il triangolo ABC resti diviso dalla medesima nella ragione di FG a GH. Imperocchè, per essere simili li due triangoli ADE, ABC, sarà la loro ragione duplicata di quella, che hanno i lati omologhi AD, AB (392); e per essere proporzionali le tre rette FG, FI, FH, sarà FG ad FH in duplicata ragione di FG ad FI (287). Ma per la costruzione AD sta ad AB, come FG ad FI. Dunque sarà come il triangolo ADE al triangolo ABC, così FG ad FH (271); ed in conseguenza dividendo sarà ancora, come il triangolo ADE al rimanente trapezio DBCF, così FG a GH (294).

479. Debbaasi ancora nel cerchio ABCD tirare una

Fig. 199.

una tangente, che incontrandosi coll'altre due AE , CF , faccia, che le porzioni di queste siano in data ragione, cioè in quella di GH ad HI . Suppongasi già tirata detta tangente, e sia EBF . Sarà adunque come AE a CF , così GH ad HI . Ed essendo eguali tanto le due AE , BE , quanto le due CF , BF (199); sarà ancora come BE a BF , così GH a GI . Ma, abbassate sulla retta AC le perpendicolari BL , EM , FN (50), dee essere come BE a BF , così LM ad LN (312); e per farsi equiangoli li due triangoli AEM , CFN , dee essere ancora come AE a CF , così AM a CN (316). Dunque così le due LM , LN , come le due AM , CN faranno nella ragione di GH ad HI ; e pertanto nella stessa ragione di GH ad HI faranno ancora le composte da quelle AL , CL (304).

480. Or per essersi giunto ad una conseguenza, che può aver luogo, si risolverà il problema nella maniera, che segue. Dividasi la retta AC talmente nel punto L , che AL sia a CL , come GH ad HI (325); ed alzata sulla stessa AC la perpendicolare LB , che s' incontri colla circonferenza nel punto B , tirisi a questo punto la tangente EBF . Io dico, che AE sarà a CF , come GH ad HI . Imperocchè essendo eguali tanto le due AE , BE , quanto le due CF , BF ; sarà AE a CF , come BE a BF . Onde, abbassate le altre perpendicolari EM , FN , faranno nella ragione di AE a CF non solo le due AM , CN , ma ancora le altre due LM , LN ; e pertanto ancora AL a CL sarà nella stessa ragione di AE a CF (304). Ma per la costruzione AL sta a CL , come GH ad HI . Dunque la ragione di AE a CF , e la ragione di GH ad HI faranno tra loro eguali (271).

Fig 200. 481. Debbaasi inoltre col lato AB descrivere un triangolo isoscele, in cui ciascuno degli angoli sopra la base sia doppio dell'angolo verticale. Sia ABC un tal triangolo, dimodochè tanto l'angolo ABC , quanto l'angolo ACB sia doppio dell'angolo BAC . Dividasi uno degli angoli doppi, come ACB , egualmente per la retta CD (41).
Ed

Ed essendo eguali li due DAC, DCA; farà l'angolo CDB, che è eguale ad essi insieme (70), ancora doppio dell'angolo BAC; onde eziandio eguali faranno li due CDB, CBD. Quindi eguali faranno così le rette BC, CD, come le rette CD, AD (71); e perciò la base del triangolo BC farà eguale ad AD. E poicchè per l'uguaglianza degli angoli BCD, DAC la base BC dee essere tangente del cerchio descritto intorno al triangolo ADC (180); farà il rettangolo delle due AB, DB eguale al quadrato di BC (196). Onde dovendo essere l'istesso rettangolo eguale ancora al quadrato di AD; farà la retta AB talmente divisa in D, che il rettangolo della tutta, e di una porzione farà eguale al quadrato dell'altra porzione.

482. Potendo adunque aver luogo una tal divisione, per mezzo di essa dovrà risolversi il problema proposto; e perciò la sua soluzione farà la seguente. Dividasi il lato AB talmente in D, che il rettangolo di AB in DB sia eguale al quadrato di AD (138); facciasi poscia, che la base del triangolo isoscele sia la retta BC eguale ad AD; ed io dico, che così l'angolo ABC, come l'angolo ACB sia doppio dell'angolo verticale BAC. Imperocchè, essendo BC eguale ad AD, farà il rettangolo di AB in DB eguale ancora al quadrato di BC. Onde, congiunta CD, dovrà essere BC tangente del cerchio descritto intorno al triangolo ACD (198); e pertanto l'angolo BCD farà eguale all'angolo DAC (179). Quindi l'angolo CDB, come eguale alli due DAC, ACD, farà eguale all'angolo ACB, o ABC; ed in conseguenza essendo eguali le due BC, CD (73), farà ancora AD eguale a CD. Onde, facendosi l'angolo ACD eguale all'angolo DAC (72), farà tutto l'angolo ACB, o ABC doppio dell'angolo BAC.

483. Debbaasi finalmente nel triangolo BAC dall'angolo A al lato opposto BC tirare una retta, il di cui quadrato sia al rettangolo fatto dalle porzioni di detto lato, come GH ad HI. Suppongaasi il problema di già risoluto, e sia AD la retta,
O
che

Fig. 201.

che si dimanda. Adunque il quadrato di AD farà al rettangolo di BD in CD , come GH ad HI . E poicchè, descritto il cerchio intorno al triangolo (218), e prolungata la retta AD perfino a che s'incontri colla circonferenza nel punto E , dee essere il rettangolo di BD in CD eguale al rettangolo di AD in DE (193); farà il quadrato di AD a quest'altro rettangolo ancora, come GH ad HI (273); ed in conseguenza: per la comune altezza AD , le loro basi AD , DE saranno similmente, come GH ad HI (367). Ma tirata EF parallela a DB , che s'incontri con AB in F , viene ad essere AD a DE , come AB a BF (310). Dunque eziandio AB a BF farà nella stessa ragione di GH ad HI (271); e pertanto potendo aver luogo questa proporzione, da essa dovrà dedursi la soluzione del problema proposto.

484. Distendasi adunque il lato AB perfino ad F , e facciasi, che BF sia quarta proporzionale in ordine alle tre GH , HI , AB (326); tirisi poscia la retta FE parallela a BC , che s'incontri col cerchio descritto intorno al triangolo ABC nel punto E ; ed io dico, che congiunta la retta AE , che seghi il lato BC in D , farà il quadrato di AD al rettangolo di BD in CD , come GH ad HI . Imperocchè essendo il rettangolo di BD in CD eguale al rettangolo di AD in DE (193); avrà il quadrato di AD l'istessa ragione all'uno, che all'altro rettangolo (273). Onde siccome, per la comune altezza AD , il quadrato di AD sta al rettangolo di AD in DE , come AD a DE (357), o pure come AB a BF (310); così l'istesso quadrato di AD farà al rettangolo di BD in CD similmente come AB a BF (271). Ma per la costruzione AB ita a BF , come GH ad HI . Dunque nella medesima ragione di GH ad HI farà ancora il quadrato di AD al rettangolo di BD in CD .

485. Per quanto a questo problema, non sarà inutile quì l'avvertire, che egli puo avere un'altro caso, e si è, quando la retta AB , che in esso si dimanda, dee essere tirata fuori del triangolo

Fig. 202.

lo dato ABC . Intanto , perche ancora in questo caso ella dee incontrarsi col cerchio descritto intorno allo stesso triangolo in un qualche punto , come E ; pure il rettangolo di BD in CD sarà eguale al rettangolo di AD in DE (194) . Onde con supporli risoluto il problema , e contrarsi EF parallela a BC , che s'incontri con AB in F , eziandio sarà come AB a BF , così GH ad HI . Quindi si avrà la soluzione di quest' altro caso , con tagliarsi da AB la porzione BF , che sia quarta proporzionale in ordine alle tre GH , HI , AB , e con tirarsi FE parallela a CB , che seghi il cerchio descritto intorno al triangolo nel punto E ; poicchè la retta AD tirata per questo punto si ritroverà essere di lunghezza tale , che il suo quadrato sarà al rettangolo delle due BD , CD , come GH ad HI .

§. II.

Della risoluzione de' problemi piani , e primieramente di quelli del primo genere .

486. **S**piegato il metodo , che dee tenersi per risolvere qualunque problema geometrico , tratteremo ora più specialmente della risoluzione di coloro , che come attinenti alla Geometria piana , comunemente piani si appellano . Qualora adunque un problema è piano di sua natura , egli non è da porsi in dubbio , che con supporli fatto quel tanto in esso si dimanda , debba sempre giungersi ad una conseguenza non solo possibile , ma eseguita ancora in questi Elementi ; poicche tutto il nostro studio è stato di racchiudere in essi , così i principali teoremi della Geometria piana , come i problemi fondamentali della medesima . Onde per lo contrario sempre quando dalla supposta risoluzione di un qualche problema non puo dedursi una delle conseguenze già note , dovrà cid esserci di argomento , che quel tale problema sia di altra indole ,

O 2 e per

e per tanto che non possa egli risolversi colla sola Geometria piana.

487. Ma poiche moltissimi sono i problemi, che sono stati proposti, e risolti in questi Elementi; perciò egli è da sapersi, che a quelli specialmente possono ridursi tutti gli altri attinenti alla Geometria piana, che riguardano le rette proporzionali. Quindi per la varietà di coloro, alli quali si riducono, possono i medesimi problemi essere di due generi. Imperocchè o essi si risolvono, sia con ritrovarsi una retta, che sia in data ragione con un'altra data, sia con dividerfi una retta data in data ragione; e questi tali problemi, come più semplici, faranno del primo genere. O per la loro risoluzione è necessario avvalersi, sia di una retta, che sia mezza proporzionale tra due rette date, sia di due rette, che siano reciproche con due altre date, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza; e quest'altri, come più composti, faranno del secondo genere.

488. Per incominciare adunque da quelli del primo genere, essi si risolvono con uno di questi due, cioè o con ritrovarsi una retta, che sia in data ragione con un'altra data, o con dividerfi una retta data in data ragione. Ma siccome egli è chiaro, che il primo delli due riferiti problemi riducesi alla ricerca, sia di una quarta proporzionale in ordine a tre rette date (326), sia di una terza in ordine a due sole date (327); così chiara cosa ancora si è, che l'altro sia caso speciale di quello, in cui si tratta di dividere una data retta proporzionalmente ad un'altra di già divisa (325). Imperocche, posto, che AB sia la retta da dividerfi, e che la data ragione sia di AC a CD; con farsi di queste due rette una retta continuata, e con dividerfi la data AB proporzionalmente all'altra AD, si avrà quel tanto si cerca: dimodocche l'intera soluzione del problema si otterrà, con unirsi le due AB, AD talmente, che formino un'angolo qualsivoglia, **C**
con

con tirarsi per lo punto C la retta CE parallela all'altra DB.

489. Ma conforme il riferito problema riducesi a ritrovare due rette, che siano in data ragione tra loro, e che unite insieme siano uguali ad un'altra data; così a simiglianza di esso puo proporsene un'altro, e si è di ritrovare due rette, che siano tra di esse in data ragione, e che differiscano tra loro per un'altra data. La soluzione intanto di quest'altro problema è quasi la medesima. Imperocche posto di nuovo, che AB sia la retta, per cui debbono differire le due, che si cercano, e che la data ragione sia di AC a CD; basterà, che la retta minore CD si adatti sopra l'altra maggiore AC in guisa tale, che il punto D si ritrovi tra li due A, e C; perche con unirsi le due AB, AC talmente, che formino un'angolo qualsivoglia, e con tirarsi per lo punto C la retta CE parallela all'altra DB, si avranno le due rette AE, BE, che si dimandano.

Fig. 204.

490. Quest'altro problema ancora può essere di uso per la soluzione de' problemi piani del primo genere; e perciò quando si tratta di risolvere questi tali problemi, bisogna propriamente averne presenti tre, de' quali il primo si è di ritrovare una retta, che sia in data ragione con un'altra retta data; il secondo si è di ritrovare due rette, che siano in data ragione tra loro, e che unite insieme siano eguali ad un'altra data; ed il terzo, ed ultimo si è di ritrovare due rette, che siano tra di esse in data ragione, e che differiscano tra loro per una retta data. Qualora adunque un problema geometrico puo ridursi ad uno di questi tre, egli dee averfi come problema piano del primo genere; e per lo contrario essendo egli tale di sua natura, dovrà sempre risolversi con uno delli tre riferiti problemi, tanto vero, che farebbe errore gravissimo, volerlo risolvere con altro problema, che sia d'indole più composta.

491. Per dare qualche esempio de' problemi piani del

Fig. 205. del primo genere, debbasi primieramente sulla retta data AB formare un triangolo isoscele, che sia eguale all'altro triangolo dato DEF . Suppongasi il problema di già risoluto, e sia ABC il triangolo isoscele, che si dimanda. Abbassata adunque sulla base di esso AB la perpendicolare CG , per l'uguaglianza delli lati AC , BC saranno eguali ancora le due AG , BG (84). Ma per l'uguaglianza delli due triangoli ABC , DEF , le basi di essi AB , DE debbono essere in reciproca ragione delle loro altezze (362). Dunque posto, che FH sia perpendicolare sull'altra DE , farà come AB a DE , così FH a CG . Quindi si ritroverà il vertice C del triangolo, che si dimanda, primieramente con dividerli la data AB egualmente nel punto G , ed indi con alzarli su di essa la perpendicolare GC di lunghezza tale, che sia come GC ad FH , così DE ad AB . Onde riducendosi il problema a ritrovare una retta, che sia in data ragione con un'altra data, dovrà egli riguardarsi come problema piano del primo genere.

Fig. 206. 492. Debba in secondo luogo dentro del triangolo ABC iscrivere un quadrato, che si appoggi con uno de' suoi lati sulla base di quello BC . Sia $DEFG$ il quadrato, che si dimanda. Ed essendo parallele le due DE , BC ; faranno equiangoli li due triangoli ADE , ABC , e pertanto farà come AD ad AB , così DE a BC (316). Ma abbassata sulla base BC la perpendicolare AH , che s'incontri con DE in I , sono equiangoli ancora li due triangoli ADI , ABH ; ed in conseguenza AD stà ad AB , come AI ad AH . Dunque farà come AI ad AH , così DE a BC ; ed essendo eguali le due DE , IH , farà eziandio come AI ad AH , così IH a BC ; onde permutando farà come AI ad IH , così AH a BC . Quindi si risolverà il problema proposto, con dividerli AH talmente in I , che sia come AI ad IH , così AH a BC ; e perciò riducendosi la di lui risoluzione a ritrovare due rette, che siano tra loro in data ragione, e che unite insieme uguaglino un'altra

altra data, dovrà egli averfi come problema piano del primo genere.

493. Debbaſi finalmente dal punto A dato fuori dell'angolo CBD tirare una retta, che incontrandoſi coll'altro lato di quello BC, BD ſerbi data ragione colla ſua porzione, compresa dentro del medefimo angolo. Sia ACD la retta, che ſi dimanda; e pongaſi, che la ragione della tutta AD alla parte CD ſia eguale a quella di F a G. Tirifi per lo punto A la retta AE parallela al lato BC, che ſ'incontri coll'altro lato BD prolungato nel punto E. Ed eſſendo equiangoli li due triangoli AED, CBD, farà come AD a CD, così ED a BD (316). Ma ſi vuole, che AD ſia a CD, come F a G, Dunque ſarà ancora come F a G, così ED a BD (271). Quindi ſi riſolverà il problema propoſto con prolungarſi EB talmente in D, che ſia come ED a BD, così F a G; e pertanto riducendoſi la di lui ſoluzione a ritrovare due rette, che ſiano tra loro in data ragione, e che differiſcano per un'altra data, dovrà egli riguardarſi come problema piano del primo genere.

Fig. 207.

494. Del rimanente i problemi piani del primo genere ſi potrebbero con maggior compendio ridurre alla ſola ricerca di una retta, che ſia in data ragione con un'altra data; per la ragione, che con queſto problema egli è facile di riſolvere gli altri due, ne' quali ſi tratta di ritrovare due rette, che ſiano tra loro in data ragione, e delle quali ne ſia data o la ſomma, o la differenza. In eſſetto poſto, che AB ſia la ſomma, o la differenza delle due rette AE, BE, che ſi dimandano, e che la loro ragione ſia eguale a quella di AC, a CD; farà come AE a BE, così AC a CD; e perciò componendo, o dividendo farà ancora come AB a BE, così AD a CD. Quindi ſi avrà la BE, che è una delle due rette, che ſi cercano, con ritrovarſi la quarta proporzionale in ordine alle tre date AD, CD, AB; e con prenderſi poſcia la differenza, o la ſomma delle due AB, BE, ſi avrà l'altra AE.

Fig. 203.
204.

495. Ma se bene con questa riduzione par, che si renda più compendiosa la risoluzione de' problemi piani del primo genere; non istimiamo per tanto dovercene far uso, poicche quello stesso artificio, che impiegasi per la ricerca di una retta, che sia in data ragione con un'altra data, dee praticarsi ancora per ritrovarne due, che siano tra di esse in data ragione, e delle quali ne sia data, o la somma, o la differenza. Più tosto giova quì l'avvertire, che quantunque un problema piano del primo genere possa talvolta risolversi con costruzione molto più semplice, cioè o con tagliarsi da una retta maggiore una porzione eguale ad un'altra minore, o con dividerli una data retta in due parti eguali, o finalmente con tirarsi per un dato punto una perpendicolare, o una parallela ad una retta data; niente di meno, quando si voglia attentamente riflettere, queste tali costruzioni almeno a riguardo del problema, in cui s'impiegano, ricadono in quelle, delle quali propriamente si dovrebbe far uso.

Fig-208.

496. Debba si per ragion di esempio dal punto D dato in un lato del triangolo ABC tirare la retta DEF, che incontrandosi cogli altri due lati ne' punti E, ed F, faccia eguali li due triangoli BDE, CFE. Egli non è da porsi in dubbio, che con tirarsi BF parallela a DC si abbia la soluzione del proposto problema; poicche facendosi eguali li due triangoli DBC, CFD, faranno eguali ancora li due BDE, CFE, che rimangono con togliersi da quelli il comune CED. Ma siccome con questa costruzione non si fa altra cosa, che ritrovare una quarta proporzionale in ordine alle tre rette date AD, DB, AC; così egli è facile il dimostrare, che il riferito problema di sua natura alla ricerca di quella ci conduce. Imperocche dovendo essere eguali li due triangoli BDE, CFE; coll'aggiunta del comune CED faranno eziandio eguali li due DBC, CFD; e perciò il triangolo ACD avrà l'istessa ragione all'uno, che all'altro. Ma il triangolo

ACD

ACD sta al triangolo DBC, come AD a DB (351); e similmente il triangolo ACD sta al triangolo CFD, come AC a CF. Dunque sarà come AD a DB, così AC a CF.

497. Debbaſi ancora nella retta AB ritrovare il punto C, da cui tirate le rette CD, CE agli altri due punti D, ed E dati di poſizione, ſiano eguali gli angoli ACD, BCE. Egli è chiaro, che abbaffandofi ſulla retta AB la perpendicolare DA, e tagliandofi da eſſa prolungata la porzione AF eguale a DA, ſi abbia coll'interſegamento delle due AB, EF il punto C, che ſi dimanda; poicche facendofi eguali li due angoli ACD, ACF, ed eſſendo l'angolo ACF eguale all'angolo BCE, faranno eguali ancora li due ACD, BCE. Intanto, abbaffata l'altra perpendicolare EB, vedefi chiaramente, che con quella tale coſtruzione rimane diviſa la retta AB nella ragione di AF o ſia DA ad EB; e qualora voglia farſi matura riſeſſione, non altro di ſua natura richiede il problema per poterſi riſolvere. Imperocche, dovendo eſſere eguali li due angoli ACD, BCE, faranno li due triangoli ADC, BEC tra loro equiangoli. Onde eſſendo come DA ad AC, così EB a BC; farà permutando come DA ad EB, così AC a BC.

Fig. 2091

§. III.

Della riſoluzione de' problemi piani del ſecondo genere.

498. **S**iccome i problemi piani del primo genere ſi riducono, o a ritrovare una retta, che ſia in data ragione con un'altra data, o a ritrovarne due, che ſiano tra loro in data ragione, e delle quali ne ſia data o la ſomma, o la differenza; così quelli del ſecondo genere ſi poſſono ſempre riſolvere, o con ritrovarſi una retta, che ſia mezza proporzionale tra due rette date, o con ritrovarſene due, che ſiano reciproche

che con due altre date, e che o colla loro somma, o colla loro differenza uguagliano una terza data. Onde siccome le costruzioni, che s'impiegano per la determinazione di queste rette, sono più composte di quelle, che si praticano per determinare le prime; così non è egli da porsi in dubbio, che l'indole de' problemi piani del secondo genere sia più composta di quella, che anno i problemi del primo.

Fig. 210.

499. Per illustrare questi problemi con qualche esempio, debbasi in primo luogo descrivere un cerchio, che avendo per sue tangenti li due lati dell'angolo BAC passi ancora per un dato punto D. Suppongasi il problema di già risoluto, e sia BCD il cerchio, che si dimanda. Essendo adunque le due AB, AC tangenti del cerchio, dovrà passare per lo di lui centro la retta AE, che divide egualmente l'angolo BAC (199). Onde abbassata su di essa la perpendicolare DEF, e fatta EF eguale a DE; sarà il punto F nella circonferenza del medesimo cerchio (146). Ma incontrandosi la stessa DF colla tangente AB nel punto G, dee essere il rettangolo delle due DG, FG eguale al quadrato di BG (196). Dunque sarà come DG a BG, così BG ad FG (371); e perciò si ritroverà il terzo punto B, che determina il cerchio, con tagliarsi da GA la porzione GB, che sia mezza proporzionale tra le due DG, FG. Onde riducendosi il proposto problema a ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date, dovrà egli riguardarsi come problema piano del secondo genere.

Fig. 211.
212.

500. Debba in secondo luogo per lo punto D dato dentro, o fuori del triangolo ABC tirare la retta EF, la quale incontrandosi colli lati AB, AC faccia, che li due triangoli ABC, AEF siano tra loro in data ragione. Pongasi, che la data ragione sia di AC ad AG; e fatta DH parallela ad AB, taglisi da AC la porzione AI, che sia ad AG, come AB a DH. Essendo adunque nella ragione di AC ad AG, tanto li due triangoli

goli ABC , AEF , quanto li due ABC , ABG ; farà il triangolo AEF eguale al triangolo ABG , ed in conseguenza farà come AG ad AF , così AE ad AB (362). Quindi essendo per costruzione come AI ad AG , così AB a DH ; farà perturbando come AI ad AF , così AE a DH . Ma AE sta a DH , come AF ad HF . Dunque farà ancora come AI ad AF , così AF ad HF ; e perciò dividendo farà come AI ad FI , così AF ad AH . Le due adunque AF , FI , che colla loro somma, o differenza uguagliano la data AI , sono reciproche colle due date AH , AI . Onde riducendosi il problema alla ricerca di due rette, che siano reciproche con altre due, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza; dovrà egli considerarsi come problema piano del secondo genere.

501. Debba finalmente dal dato punto A tirare la retta ABC , che incontrandosi colli lati dell'angolo dato BDC faccia il triangolo BCD eguale all'altro dato EFG . Tirisi AH parallela a BD , che s'incontri con CD in H ; ed abbassate sulle rette CH , FG le perpendicolari BI , AL , EM facciasi, che DN sia ad FG , come EM ad AL . Essendo adunque eguali li due triangoli BCD , EFG , farà come FG a CD , così BI ad EM (362). Ma per costruzione DN sta ad FG , come EM ad AL . Dunque farà perturbando come DN a CD , così BI ad AL . Quindi essendo BI ad AL , come BC ad AC , o pure come CD a CH (316); farà ancora come DN a CD , così CD a CH ; ed in conseguenza dividendo farà come DN a CN , così CD a DH . Le due adunque CD , CN , che colla loro differenza uguagliano la data DN , sono reciproche coll'altre due date DN , DH . Onde riducendosi il problema a ritrovare due rette, che avendo una data differenza siano reciproche con due altre date; dovrà egli averfi come problema piano del secondo genere.

Fig. 213.

502. Notifi in questo luogo, che le due rette date,

Fig. 214.

date, colle quali debbono essere reciproche l'altre due, che per la risoluzione del problema necessitano, possono talvolta essere eguali tra loro. Deb-
 basi perciò dall'angolo D del quadrato $ABCD$ tirare la retta DEF , che incontrandosi colli due lati AB , BC , faccia, che la porzione EF sia di data lunghezza. Congiungasi la diagonale DB , da cui tagliata la porzione BG eguale ad EF , tirisi GH parallela a DA , e formisi l'angolo DEI eguale all'angolo DBF . Essendo adunque equiangoli li due triangoli DEI , DBF ; sarà come DE ad EI , così DB a BF (316). Ma per le parallele AD , BE si ha ancora come EF , o sia BG a DE , così BF ad AB (310). Dunque perturbando sarà come BG ad EI , così DB ad AB ; ed in conseguenza essendo DB ad AB , come BG a BH , faranno le due EI , BH tra loro eguali. Onde se mai fosse noto il punto I , potrebbe risolversi il problema proposto per mezzo di un cerchio descritto con quel punto come centro, e coll'intervallo della retta data BH .

503. Or per la determinazione di quel punto I , giova riflettere, che essendo eguali tanto li due angoli ABD , FBI , quanto li due ABD , CBD , debba essere l'angolo FBI eguale all'angolo CBD . Quindi coll'aggiunta del comune CBF , faranno eguali ancora li due angoli CBI , DBF ; e pertanto essendosi fatto l'angolo DEI eguale all'angolo DBF , sarà l'istesso angolo DEI eguale similmente all'angolo CBI . Ma per l'uguaglianza di questi angoli si fanno equiangoli li due triangoli DEI , EBI ; ed in conseguenza DI sta ad EI , come EI a BI (316). Dunque, essendosi dimostrata EI eguale a BH , sarà ancora come DI a BH , così BH a BI ; e perciò il punto I dovrà determinarsi colla ricerca di due rette, che avendo per loro differenza la data DB , siano reciproche con altre due, delle quali ciascuna sia eguale all'altra data BH .

504. Del rimanente sebene talvolta un problema piano del secondo genere possa risolversi con

co-

costruzione più semplice; nientedimeno, se si voglia attentamente riflettere, sempre si ritroverà, che la sua soluzione riducesi ad uno delli riferiti problemi. Debbaſi per ragion di eſempio nella circonferenza del cerchio ABC determinare il punto A, da cui tirate le rette AD, AE agli altri due D, ed E dati di poſizione, che s'incontrino colla ſteſſa circonferenza ne' punti B, e C, ſia BC parallela a DE. Tirifi al punto B la tangente BF, ed eſſendo l'angolo CBF eguale all'angolo BAC (178), farà l'altro DBF eguale all'altro ACB, o ſia AED; onde farà come DE a DA, così DB a DF (316). E poicchè tirata l'altra tangente DG, ſi ha ancora come DA a DG, così DG a DB; farà perturbando come DE a DG, così DG a DF; e perciò ſi riſolverà il propoſto problema con farſi DF terza proporzionale in ordine alle due date DE, DG, e con tirarſi la tangente FB. Ma poicchè tirata per lo centro del cerchio la retta FHI, ſono date le due FH, FI, tra le quali FB è mezza proporzionale; vedefi chiaramente, che la riferita coſtruzione tuttocche ſemplice riduceſi alla ricerca di una mezza proporzionale tra due rette date.

Fig. 215.

505. Debbaſi ſimilmente nel perimetro del ſemicerchio ACB determinare il punto C, per cui tirata la tangente DE, che s'incontri coll'altre due AD, BE ne' punti D, ed E, ſia DE eguale alla retta data FG. Si abbaffi ſul diametro AB la perpendicolare CH, e dal punto C al centro I tirifi la retta CI. Eſſendo adunque retto l'angolo DCI (168), faranno li due DCH, CIH tra loro eguali; onde nella ragione di CI a CH dovrà eſſere così CD ad AH, come CE a BH; e pertanto farà ancora come DE, o ſia FG ad AB, così CI a CH. Quindi ſi riſolverà il propoſto problema con prenderſi ſopra di AD la porzione AL, che ſia quarta proporzionale in ordine alle tre date FG, AB, CI, e con tirarſi LC parallela ad AB. Ma poicchè con una tal coſtruzione effettivamente vengonſi a ritrovare le due rette

Fig. 216.

te

te AH , BH , che uguagliando insieme la data AB , sono reciproche con altre due, delle quali ciascuna è eguale ad AL ; perciò la genuina soluzione del problema proposto riducesi propriamente alla ricerca di tali rette reciproche.

Fig. 217. 506. Debbasi infine dall'angolo D del quadrato $ABCD$ di nuovo tirare la retta DEF , la quale incontrandosi colli due lati AB , BC faccia, che la porzione EF sia eguale alla data DG . Si alzi sopra di DF la perpendicolare FH , che s'incontri con DC in H ; e tirata FI parallela a BC , congiungasi EH . Essendo adunque equiangoli li due triangoli DCE , FIH , ed essendo CD eguale ad FI , farà DE eguale ancora ad FH ; e pertanto li quadrati delle due DG , DE , o pure delle tre DG , DC , CE , o infine delle due CG , CE faranno eguali alli quadrati dell'altre due EF , FH , o pure al solo quadrato di EH , o finalmente alli quadrati delle due CH , CE . Onde, tolto il comune quadrato di CE , rimarrà il quadrato di CG eguale al quadrato di CH ; ed in conseguenza le due CG , CH faranno tra loro eguali. Quindi si risolverà il proposto problema, con farsi CH eguale a CG , e con descriversi sopra di DH come diametro il semicerchio DFH . Ma egli è facile a dimostrarsi, che con questa costruzione pure vengono a ritrovarsi due rette, che uguagliando colla loro differenza una data retta siano reciproche con due altre date.

507. Taglisi perciò da CH la porzione CL eguale a CD ; e per la retta DL , che rimane divisa egualmente in C , farà il rettangolo delle due DH , LH insieme col quadrato di CL o sia CD eguale al quadrato di CH (124). Ma il quadrato di CH , come eguale a quello di CG , è eguale alli quadrati delle due CD , DG . Dunque farà il rettangolo di DH in LH insieme col quadrato di CD eguale alli quadrati delle due CD , DG . Quindi, tolto il comune quadrato di CD , rimarrà il rettangolo di DH in LH eguale al solo quadrato di DG ; e pertanto dovendo essere

fere come DH a DG , così DG ad LH (372), faranno le due DH , LH non solo differenti tra loro per la data DL , ma reciproche ancora con altre due, delle quali ciascuna è eguale a DG . Del rimanente a questa nuova soluzione del proposto problema dee preferirsi l'altra data di sopra; poichè con essa si risolve il problema semplicemente nell'ipotesi, che la figura $ABCD$ sia un quadrato, quandocchè l'altra ha luogo eziandio se la figura $ABCD$ fosse un rombo.

508. Quest'ultimo esempio ci da motivo di avvertire in questo luogo, che il problema delle rette reciproche puo risolversi colla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri quadrati dati. Per dimostrarlo pongasi primieramente, che le due rette AC , BC differenti tra loro per la data AB , siano reciproche coll'altre due date D , ed E . Dividasi AB egualmente nel punto F , e facciasi, che G sia mezza proporzionale tra le due D , ed E . Poichè dunque il rettangolo di queste due dee essere eguale tanto al rettangolo di AC in BC , quanto al quadrato di G ; farà il rettangolo di AC in BC eguale al quadrato di G ; e per tanto coll'aggiunta del comune quadrato di BF , farà il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di BF eguale alli quadrati delle due BF , e G . Ma il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di BF è eguale al quadrato di CF (124). Dunque ancora il quadrato di CF farà eguale alli quadrati delle due BF , e G . Onde si avranno le due rette AC , BC , che differenti tra loro per AB siano reciproche coll'altre due D , ed E , se divisa la AB egualmente in F , e ritrovata tra le due D , ed E la mezza proporzionale G , facciasi, che il quadrato di CF sia eguale alla somma delli quadrati descritti dalle due BF , e G .

Fig. 218.

509. Pongasi in secondo luogo, che le due rette AC , BC , reciproche colle due altre D , ed E , uguaglino insieme la data AB . Dividasi ancora la tutta AB egualmente in F , e facciasi simil-

Fig. 219.

men-

mente, che G sia mezza proporzionale tra le due D , ed E . E poicche il rettangolo di queste due dee essere eguale così al rettangolo di AC in BC , come al quadrato di G , farà il rettangolo di AC in BC eguale al quadrato di G ; e per tanto coll'aggiunta del comune quadrato di CF , farà il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di CF eguale alli quadrati delle due CF , e G . Ma il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di CF è eguale al quadrato di BF (122). Dunque farà ancora il quadrato di BF eguali alli quadrati descritti dalle due CF , e G ; ed in conseguenza il quadrato di CF farà l'eccesso, con cui il quadrato di BF supera il quadrato di G . Onde si avranno le due rette AC , BC , che eguali insieme ad AB siano reciproche coll'altre due D , ed E , se divisa la AB egualmente in F , e ritrovata tra le due D , ed E la mezza proporzionale G , facciasi, che il quadrato di CF sia eguale all'eccesso, con cui il quadrato di AB supera il quadrato di G .

Fig. 218.
219.

§ 10. Ma se voglia farsi matura riflessione, l'artificio altrove da noi tenuto per ritrovare due rette, che siano reciproche con due altre date, e delle quali ne sia data, o la somma, o la differenza, appunto riducesi alla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri quadrati dati. Onde questi due problemi non debbono averli come differenti tra loro; e perciò potrà l'uno sostituirsi in vece dell'altro. Quello in tanto delle rette reciproche può risolversi ancora in un'altra maniera, cioè con descriversi sulla data AB il parallelogrammo rettangolo AH , che eguale all'altro contenuto dalle due D , ed E sia eccedente, o mancante a riguardo della stessa retta per lo terzo BH simile ad un quadrato qualsivoglia (401. 403). Imperocche dovendo essere BH ancora quadrato, saranno eguali le due BC , CH ; ed in conseguenza essendo il rettangolo di AC in BC eziandio eguale al rettangolo di C in E , saranno le due AC , BC reciproche coll'altre due D , ed E . §.IV.

§. IV.

Della natura de' luoghi geometrici, e delle varie loro differenze.

511. **P**ER non tralasciare cosa alcuna intorno all'argomento, di cui si tratta, daremo ora qualche idea de' luoghi geometrici, senza de' quali non mai puo intendersi a fondo l'artificio, di cui si servono i Geometri per risolvere i loro problemi. Ed in primo luogo dalle cose sin' ora dette bastantemente puo raccogliersi, che la soluzione di qualunque problema geometrico riducesi a determinare la posizione di un qualche punto. Ma, siccome questo punto dee essere determinato per mezzo delle condizioni apposte nel problema medesimo; cosi per lo difetto di qualche condizione avviene tal volta, che non si abbia l'intera sua determinazione. E poiche quando questo accade, infiniti sono i punti, colli quali puo risolversi il problema, di cui si tratta; perciò la serie di essi, che puo incontrarsi, o in una linea, o in una superficie, o finalmente in un solido, si appella luogo geometrico.

512. Sia dato per ragion di esemplo nella retta AB il punto A , e vogliasi fuori di quella retta ritrovare il punto M , da cui abbassata sulla medesima la perpendicolare MN , sia AN ad MN in data ragione. Taglisi da AB una porzione ad arbitrio, che sia AC , ed alzisi dal punto C la perpendicolare CD di lunghezza tale, che sia AC a CD in quella data ragione. Congiungasi poscia la retta AD , la quale prolunghisi dall'una, e l'altra parte verso E , ed F . E poiche ogni punto di essa è bastante a risolvere il problema proposto; perciò la medesima, come serie degl' infiniti punti, colli quali puo risolversi il riferito problema, si appella luogo geometrico. Similmente, se dati i due punti A , e B debbasi ritrovare il terzo M , dimodocche unite le rette AM , BM sia ret-

Fig. 220.

Fig. 221.

R
to

to l'angolo AMB ; infiniti faranno i punti propri per un tal quesito. E siccome quelli s'incontrano tutti nella circonferenza del cerchio descritto sulla retta AB come diametro; così questa circonferenza, come serie delli suddetti punti, chiamasi luogo geometrico.

Fig. 222. 513. Amendue questi luoghi ci conducono ad una linea; ma vi possono essere altri luoghi, li quali di lor natura ci portino, o ad una qualche superficie, o pure ad un qualche solido. Siano perciò A, B, C tre punti egualmente distanti tra loro, e debbasi ritrovare il quarto M , da cui abbassate le perpendicolari MN, MO, MR sulle rette AB, BC, AC , sia la somma di esse eguale ad AD , che da uno di detti punti cade perpendicolarmente sulla retta opposta. Prendasi il punto M ad arbitrio dentro del triangolo ABC . E poicchè li tre triangoli AMB, BMC, AMC sono come le altezze MN, MO, MR (352); farà l'intero triangolo ABC al solo BMC , come la somma di esse MN, MO, MR alla sola MO . Ma il triangolo ABC sta al triangolo MBC , come AD ad MO . Dunque le tre insieme MN, MO, MR faranno eguali ad AD . Quindi tutti i punti situati dentro del triangolo ABC sono bastanti a risolvere il problema proposto; e perciò il luogo geometrico corrispondente ad un tal problema farà la superficie di quel triangolo.

514. Conforme quando il luogo geometrico ci conduce ad una linea, può questa essere e retta, e curva; così conducendoci egli ad una superficie, la medesima potrà essere non solo piana, ma curva similmente. Non essendosi intanto trattato in questi Elementi delle superficie curve, non possiamo qui dare esempio alcuno de' luoghi geometrici, che ci conducono a tali superficie. E per la stessa ragione, non essendosi in essi ragionato de' solidi, nè pure potrà darsi esempio de' luoghi geometrici, che ci portano ad un qualche solido. Onde basterà per ora lo aver avvertito, che i
luo-

G E O M E T R I A P I A N A. 227

luoghi geometrici possono essere di tre generi, e che di essi altri ci menano ad una linea, altri ad una superficie, ed altri finalmente ad un solido.

515. Ma quantunque i luoghi geometrici siano di tre generi, tuttavolta per la risoluzione de' problemi basta la sola teoria di coloro, che alla linea ci conducono; e quindi si è, che sotto tal nome comunemente essi soli s' intendono. Riducesi la loro teoria ad investigare l' indole della linea, che forma il luogo, ed a far vedere, come ella possa determinarsi; ma per potersi ciò fare, debbono esserci prima note, così le principali proprietà, per cui le linee tra loro si distinguono, come le più semplici loro determinazioni. Onde perchè tali cose sono note a noi per ora, solamente a riguardo della linea retta, e della linea circolare; perciò di quelli soli luoghi tratteremo presentemente, che a queste linee ci conducono, li quali come attinenti alla Geometria piana, luoghi piani specialmente si appellano.

516. Per l' investigazione, e costruzione de' luoghi piani potremo avvalerci di quello stesso metodo, che si è proposto di sopra per risolvere qualunque problema geometrico, maggiormente che secondo è stato avvertito, nasce il luogo dalla risoluzione di un problema, che per lo difetto di qualche condizione è indeterminato di sua natura. Proposto adunque un tal problema, suppongasi già fatto quell' tanto in esso si dimanda. E se dopo essersi percorse tutte le condizioni nel medesimo apposte, ritrovasi a riguardo di quel punto, a cui il problema si riduce, una proprietà, che sia comune a tutti i punti della retta, o della linea circolare; dovrà ciò esserci di argomento, che il problema proposto sia indeterminato, e che il luogo ad esso corrispondente sia una linea retta, o una linea circolare, la quale resterà determinata con quella stessa proprietà, a cui si è giunto colla supposta risoluzione del problema.

517. Debbaasi primieramente ritrovare il punto Fig. 223.
M, da cui tirate agli altri due **A**, e **B** dati di
P 2 po-

posizione le rette MA , MB , siano queste tra loro eguali. Congiungasi la retta AB , sopra di cui alzisi la perpendicolare AC , e compiscasi il rettangolo $ANMO$. Essendo adunque eguali le due MA , MB , saranno eguali ancora le altre due AO , BO (84); e pertanto AO , o sia MN farà la metà della tutta AB . Quindi per questa metà dovrà essere il punto M distante dalla perpendicolare AC . E poicchè questa proprietà compete ad ogni punto della retta, che tirasi per lo punto O parallela ad AC ; perciò il proposto problema sarà indeterminato di sua natura; e siccome il luogo, che li corrisponde, è una linea retta, così si determinerà questa retta, con dividerli la data AB egualmente nel punto O , e con tirarsi per questo punto la retta DE , che sia parallela ad AC , o pure perpendicolare alla stessa AB .

Fig. 224. 518. Debbaſi in ſecondo luogo dentro del triangolo ABC ritrovare il punto M , per cui tirata la retta NO parallela al lato BC , che s'incontri cogli altri due AB , AC ne' punti N , ed O , ſia MO ad MN in data ragione. Dividaſi in queſta ſteſſa ragione il lato BC nel punto D . Ed eſſendo come DC a DB , così MO ad MN ; farà componendo come BC a DB , così NO ad MN . Ma per eſſere li due triangoli ABC , ANO tra loro equiangoli, AB ſta a BC , come AN ad NO (316). Dunque farà ordinando come AB a DB , così AN ad MN ; ed in conſeguenza competendo queſta proprietà a tutti i punti della retta AE , che dal punto A tirasi per lo punto D , farà il proposto problema indeterminato di ſua natura, ed il ſuo luogo farà la ſteſſa retta AE , la quale ſi determina, con dividerli il lato BC talmente in D , che ſia DC a DB nella ſteſſa ragione di MO ad MN .

Fig. 225. 519. Debbaſi in terzo luogo dentro dell'angolo BAC ritrovare il punto M , da cui abbassaſte le perpendicolari MN , MO ſull'i lati AB , AC , ſiano le medefime tra loro in data ragione. Prendaſi nel lato AB ad arbitrio il punto B , ſu di cui alzifi l'al-

GEOMETRIA PIANA. 229

l'altra perpendicolare BC ; e s'incontrino le due MN, BC coll' altro lato AC ne' punti R, e C. Essendo adunque equiangoli li due triangoli MOR, ABC, farà come MO ad MR, così AB ad AC. Onde con farsi, che la ragione di MN ad MO sia eguale alla ragione di AD ad AB ; farà ordinando come MN ad MR, così AD ad AC. Quindi il problema proposto, ricadendo nel precedente, farà indeterminato di sua natura ; e pertanto il suo luogo farà una linea retta, la quale si determinerà con dividerli la perpendicolare BC talmente in E, che sia BE a CE, come AD ad AC, e con tirarsi per lo punto E la retta AF, che farà il luogo cercato.

520. Debbaſi in quarto luogo ritrovare il punto M, da cui tirate agli altri due A, e B dati di posizione le rette MA, MB, siano queste tra loro in data ragione. Congiungasi la retta AB, la quale dividasi talmente in C, che sia AC a BC in quella stessa ragione. Ed essendo MA ad MB, come AC a BC, farà l'angolo AMB diviso egualmente per la retta MC (315); onde con farsi l'angolo CMD eguale all'angolo acuto MCD, non solo saranno eguali le due MD, CD, ma farà ancora l'angolo BMD eguale all'angolo CAM. Quindi essendo equiangoli li due triangoli AMD, MBD, farà come MA ad MD o sia CD, così MB a BD; e pertanto dovendo essere permutando come MA ad MB, così CD a BD, farà data ancora la ragione delle due CD, BD; con che il punto D sarà similmente dato. Ma la posizione del punto M richiede, che siano eguali le due MD, CD; e questa proprietà compete ad ogni punto della linea circolare, che descrivesi col centro C, e coll'intervallo CD. Dunque il proposto problema farà indeterminato di sua natura, e la riferita linea circolare farà il luogo, che li corrisponde.

Fig. 226.

521. Debbaſi in quinto luogo ritrovare il punto M, da cui abbassata sulla retta data AB la perpendicolare MN, sia la differenza tra il quadrato

Fig. 227.
228.

P 3

to

Fig. 227. to di questa perpendicolare, ed il rettangolo di AN in BN eguale al quadrato dell'altra data EF. Dividasi la AB egualmente in C, e pongasi primieramente, che il quadrato di MN sia maggiore del rettangolo di AN in BN. Essendo adunque il quadrato di MN eguale al rettangolo di AN in BN insieme col quadrato di EF; coll'aggiunta del comune quadrato di CN, farà il quadrato di CM eguale alli quadrati delle due CA, EF. Maalzata sopra di AB la perpendicolare AD eguale ad EF, ancora il quadrato di CD è eguale alli quadrati delle due CA, EF. Dunque farà il quadrato di CM eguale al quadrato di CD, ed in conseguenza le due CM, CD faranno tra loro eguali. Onde, perche questa proprietà compete ad ogni punto della linea circolare descritta col centro C, e coll'intervallo CD; farà il proposto problema di sua natura indeterminato, ed il suo luogo farà la riferita linea circolare.

Fig. 228. 522. Pongasi poscia, che il quadrato di MN sia minore del rettangolo di AN in BN. Ed essendo li quadrati delle due MN, EF eguali al rettangolo di AN in BN; coll'aggiunta del comune quadrato di CN, faranno li quadrati delle due CM, EF eguali al quadrato di AC; onde l'eccesso, con cui il quadrato di AC supera il quadrato di EF, farà eguale al quadrato di CM. Ma, descritto sopra di AC come diametro il semicerchio ADC, e adattata dentro di esso la retta AD eguale ad EF, quel medesimo eccesso è eguale ancora al quadrato di CD. Dunque farà il quadrato di CM eguale al quadrato di CD, ed in conseguenza le due CM, CD faranno tra loro eguali. Quindi, perche questa proprietà compete ad ogni punto della linea circolare descritta col centro C, e coll'intervallo CD; farà il problema proposto ancora per rapporto a quest'altro caso indeterminato di sua natura, e la suddetta linea circolare farà il luogo, che li corrisponde.

Fig. 229. 523. Debba finalmente ritrovare il punto M, da cui tirate agli altre due A, e B dati di posizione.

zione le rette MA , MB , sia data la somma de' loro quadrati. Pongasi, che detta somma sia doppia del quadrato fatto da EF ; e divisa la retta AB egualmente in C , si abbassi su di essa la perpendicolare MN . Essendo adunque li quadrati delle due AN , BN doppii delli quadrati dell'altre due AC , CN (126); saranno li quadrati delle tre AC , CN , MN , o pure li quadrati delle due AC , CM eguali al quadrato di EF ; con che l'eccesso, con cui il quadrato di EF supera il quadrato di AC , sarà eguale al quadrato di CM . Ma,alzata sulla stessa retta AB l'altra perpendicolare CD , ed applicata nell'angolo ACD la retta AD eguale ad EF , quel medesimo eccesso è eguale ancora al quadrato di CD . Dunque sarà il quadrato di CM eguale al quadrato di CD , e pertanto le due CM , CD saranno tra loro eguali. Onde il proposto problema sarà indeterminato di sua natura, ed il luogo, che li corrisponde, sarà la linea circolare descritta col centro C , e coll'intervallo CD .

524. Notifi in questo luogo, che se in vece della somma fosse data la differenza de' quadrati fatti dalle due MA , MB , il problema sarebbe ancora indeterminato, il quale però ci condurrebbe ad una retta perpendicolare sulla data AB . Pongasi perciò, che la riferita differenza sia eguale al quadrato di EF . Ed essendo la medesima eguale alla differenza de' quadrati fatti dall'altre due AN , BN ; sarà ancora quest'altra differenza eguale al quadrato di EF . Ma presa CO eguale a CN , dee essere quest'altra differenza eguale al rettangolo di AB in NO (123). Dunque il rettangolo di AB in NO , ed il quadrato di EF saranno tra loro eguali; ed in conseguenza sarà come AB ad EF , così EF ad NO (372). Quindi essendo date le due AB , EF , sarà data ancora così la tutta NO , come la sua metà CN ; e pertanto il luogo del punto M sarà la retta ND alzata perpendicolarmente dal punto dato N sull'altra AB .

Fig. 230.

§. V.

Dell' uso de' luoghi geometrici nella risoluzione de' problemi.

525. **D**Ata un'idea, così de' luoghi geometrici in generale, come di quelli, che specialmente chiamansi piani; non sarà difficile ora l'intendere a fondo l'artificio, che impiegano i Geometri nella risoluzione de' loro problemi. Perciò egli è da notarsi, che siccome nasce il luogo, quante volte si toglie dal problema alcuna delle condizioni, che lo determinano; così con togliersene ora una, ed ora un'altra, possono sempre rinvenirsi due luoghi, che separatamente contengano le condizioni di quello. Quindi, con descriversi questi luoghi, chiara cosa si è, che nel loro incontro debbano ritrovarsi riunite insieme le stesse condizioni; e pertanto con quel medesimo incontro si avrà il punto, a cui riducesi la risoluzione del problema proposto.

Fig. 291. 526. Debba si per ragion di esempio ritrovare il punto M , da cui abbassate le perpendicolari MN , MO , MR sulli lati del triangolo ABC , siano queste tra loro in data ragione. Cerchisi primieramente detto punto colla sola ragione delle due MN , MO , che cadono sulli lati dell'angolo ABC ; e potendo egli avere infinite posizioni, determinisi il luogo di ciascuna di esse (519), e sia la retta BD . Cerchisi poscia l'istesso punto colla sola ragione delle due MO , MR , che cadono sulli lati dell'altro angolo BCA ; e determinisi parimente la retta CE , che sia il luogo dell'infinite sue posizioni. Notisi finalmente il punto M , in cui le due rette BD , CE tra loro s'incontrano; e questo farà il punto, che si dimanda. Poicche, essendo egli situato in ciascuna di quelle rette, per necessità dovrà esser data così la ragione delle due MN , MO , come la ragione dell'altre due MO , MR .

GEOMETRIA PIANA. 233

527. Debbaſi ancora ritrovare il punto M , da Fig. 232. cui tirate agli altri due A , e B dati di poſizione le rette MA , MB , ſia data coſi la loro ragione, come la differenza de' loro quadrati. Cerchiſi primieramente detto punto colla ſola ragione, in cui debbono eſſere le due MA , MB ; ed eſſendo egli capace d'infinite poſizioni, ritroviſi la linea circolare CD , che ſia il luogo di ciaſcuna di eſſe (520). Cerchiſi poſcia l'iſteſſo punto colla ſola differenza, che dee eſſervi tra li quadrati delle medefime MA , MB ; e ſia la retta EF il luogo delle infinite poſizioni, che egli puo avere (524). Notiſi finalmente il punto M , in cui la retta EF s'incontra colla linea circolare; e ritrovandoſi egli in ciaſcuna di queſte linee, farà data, coſi la ragione delle due MA , MB , come la differenza de' loro quadrati; onde l'iſteſſo punto M farà quello, che ſi dimanda.

528. Qualora adunque ſi tratta di riſolvere qualche problema, tutta l'arte riduceſi a ritrovare due luoghi geometrici, che ſeparatamente contengano le condizioni nel medefimo appoſte; ma affinche la ſoluzione del problema ſia ſemplice, ed elegante, debbono ſcieglierſi ancora que' luoghi, che più facilmente poſſono coſtruirſi; e perciò giova percorrere le conſeguenze, che dalle condizioni del problema diſcendono; poicche avviene ben ſpeſſo, che ſi abbiano luoghi più ſemplici più toſto colle loro conſeguenze, che colle condizioni medefime. Coſi per ritrovare il punto M , da cui tirate agli altri due A , e B dati Fig. 233. di poſizione le rette MA , MB , ſia data coſi la loro ragione, come la ſomma de' loro quadrati; potrebbe farſi uſo delli due luoghi, alli quali ci conducono la data ragione delle due MA , MB , e la data ſomma de' loro quadrati; ma poſſono averſi luoghi più ſemplici nella maniera, che ſe-
gue.

529. Pongaſi, che li quadrati delle due MA , MB inſieme ſiano eguali al quadrato di CD ; ed alzata ſu di queſta la perpendicolare DE , pongaſi an-

si ancora, che MA sia ad MB , come CD a DE .
 Congiungasi poscia la retta CE , su di cui faccia-
 si cadere finalmente l'altra perpendicolare DF .
 Essendo adunque equiangoli li due triangoli CFD ,
 CDE , saranno le due CF , DF nella stessa ragio-
 ne di CD a DE (316); ed essendo il triangolo CFD
 rettangolo in F , saranno li quadrati delle mede-
 sime CF, DF eguali al quadrato di CD (127). Ma que-
 ste stesse condizioni debbono avere ancora le due
 MA, MB . Dunque sarà MA eguale a CF , ed
 MB eguale a DF ; e per tanto i luoghi più sem-
 plici per determinare il punto M saranno le due
 linee circolari descritte colli centri A e B , e
 con intervalli eguali alle due CF, DF .

Fig. 234.

530. Ma per altra ragione non dobbiamo sem-
 pre appigliarci a que'luoghi, che ci somministra-
 no a prima vista le condizioni del problema; e
 si è, perchè non sempre essi si confanno coll' in-
 dole del problema medesimo. Debba si per ragion
 di esempio sulla retta data AB formare il trian-
 golo AMB , in cui sia data così la ragione de'
 lati MA, MB , come la somma de' medesimi.
 Le condizioni di questo problema naturalmente
 ci conducono a due luoghi, de' quali uno ricava-
 si dalla data ragione de' lati MA, MB , l'altro
 dalla data somma di essi. Ma se bene il primo
 di questi luoghi sia una linea circolare (520), l'altro
 tutta volta è una curva più composta, la quale
 affatto non si richiede per la soluzione del pro-
 blema, di cui si tratta. Onde per avere luoghi
 confacenti alla sua indole, per necessità deesi ri-
 correre alle conseguenze, che da quelle stesse con-
 dizioni si deducono.

531. Pongasi perciò, che CD sia la somma del-
 li due lati MA, MB . E dividendosi la medesi-
 ma CD talmente in E , che sia CE a DE nella
 stessa ragione, in cui debbono essere li due lati
 MA, MB ; sarà MA eguale a CE , ed MB egua-
 le a DE . Con che i luoghi propri per ritrovare
 il punto M saranno le due linee circolari descrit-
 te colli centri A e B , e con intervalli eguali
 alle

GEOMETRIA PIANA. 235

alle due CE , DE . L'istesso avviene, se sulla retta data AB vogliafi formare un triangolo, in cui sia data così la ragione de' lati MA , MB , come la differenza de' medesimi. Imperocche il luogo, che deducesi dalla data differenza di detti lati, è una curva molto più composta della linea circolare: quandoche, essendo CD la data differenza, e prolungandosi la medesima talmente in E , che sia CE a DE nella stessa ragione di MA ad MB , può averfi il punto M colle due linee circolari, che si descrivono colli centri A e B , e con intervalli eguali alle due CE , DE .

Fig. 235.

532. Ed in vero, dovendosi risolvere qualche problema, sarebbe errore gravissimo servirsi de' luoghi superiori alla sua indole. Quindi il primo studio dee riporsi nella ricerca de' luoghi, che si confacciano col problema medesimo; siccome per gli problemi piani sono quelli, che ci conducono alla linea retta, ed alla linea circolare. Fra li luoghi poi adattati alla natura del problema, debbono essere preferiti coloro, che più facilmente possono costruirsi, per la ragione, che quanto più facile è la loro costruzione, tanto sarà più semplice ed elegante la soluzione del problema medesimo. E quindi si è, che ne pure per gli luoghi dobbiamo contentarci di quelle costruzioni, che a prima faccia ci si presentano; ma bisogna, che si rifletta intorno alla natura di essi, e che si percorrano le conseguenze, che ne discendono, per vedere se con queste conseguenze possono averfi degli stessi luoghi costruzioni più semplici.

533. Esempio di ciò può esserci il problema di sopra proposto (526), in cui tratta di ritrovare il punto M , donde abbassate le perpendicolari MN , MO , MR sulli lati del triangolo ABC , siano queste tra loro in data ragione. Imperocche li luoghi confacenti all'indole di questo problema sono le rette BD , CE , delle quali una si determina colla ragione delle due MN , MO , e l'altra colla ragione dell'altre due MO , MR . Ma poiche la natura di esse richiede, che ancora l'al-

Fig. 237.

tre

tre perpendicolari abbassate dagli altri loro punti sulli medesimi lati serbino le stesse ragioni; si potranno le medesime con costruzione assai semplice definire nella seguente maniera. Si alzino sopra li lati AB , BC , AC da tre punti presi ad arbitrio le perpendicolari FP , GQ , HS , che siano tra loro in quella data ragione; si tirino poscia per gli loro estremi le rette PI , IL , SL parallele alli medesimi lati; e le due BD , CE tirate per gli punti I ed L , ne quali quelle s'incontrano, saranno le rette, che si dimandano.

Fig. 236. 534. Egli è ancora da notarsi, che se mai il punto, a cui riducesi il problema, che dee risolversi, sia in un luogo già dato, la legge della semplicità richiede, che nella soluzione del problema faccia uso di detto luogo. Debba per ragion di esempio dal punto dato A tirare la retta ABC , dimodocché la porzione di essa BC compresa dentro del dato cerchio BCD sia eguale ad un'altra retta data. Poicché questo problema riducesi a determinare nella circonferenza del cerchio dato il punto B , per cui passa la retta, che si dimanda; dovrà essere la stessa circonferenza uno de' luoghi, che debbono essere impiegati per la sua soluzione. E per quanto all'altro, si ritroverà egli facilmente, se divisa la BC egualmente in E , e tirata al cerchio la tangente AD , alzisi su di questa la perpendicolare DF eguale a BE . Imperocché siccome con una tal costruzione si fanno eguali le due AE , AF ; così con tagliarsi da AF la porzione FG eguale a DF , sarà AB eguale ancora ad AG ; e pertanto l'altro luogo sarà la linea circolare, che descrivesi col centro A , e coll'intervallo AG .

Fig. 237. 535. Debba ancora dal dato punto A tirare la retta ABC , la quale incontrandosi colla circonferenza del cerchio dato BCD ne' punti B , e C faccia, che le due AB , AC siano tra loro in data ragione. Poicché quest' altro problema ancora riducesi a ritrovare nella circonferenza del dato cerchio il punto B , per cui passa la retta, che si di-

si dimanda ; dovrà parimente essere la stessa circonferenza uno de' luoghi da impiegarsi nella soluzione di esso. Per quanto poi all'altro , si ritroverà egli facilmente , se tirata al cerchio la tangente AD , pongasi che AE sia ad AD nella stessa ragione di AB ad AC , e facciasi che AF sia mezza proporzionale tra le due AE , AD . Imperocchè essendo in proporzione continua così le tre AB , AD , AC , come le tre AE , AF , AD ; farà tanto AB ad AC in duplicata ragione di AB ad AD , quanto AE ad AD in duplicata ragione di AF ad AD (287) ; e perciò essendo AB ad AC , come AE ad AD , farà ancora come AB ad AD , così AF alla stessa AD ; con che dovendo essere eguali le due AB , AF , farà la linea circolare , che descrivesi col centro A , e coll' intervallo AF , l'altro luogo , che si dimanda .

536. Del rimanente un problema geometrico tuttocchè determinato può ricevere tal volta varie soluzioni, locchè avviene, quando i luoghi , per mezzo de' quali egli si risolve , s'incontrano tra loro in più di un punto . Quindi ancora per questo verso dee farsi distinzione tra i problemi piani del primo genere , e quelli del secondo . Imperocchè dovendosi i primi risolvere con due rette , le quali s'incontrano in un sol punto , non potranno essi ammettere , se non che una sola soluzione . All'incontro i secondi , richiedendo di lor natura o due linee circolari , o una retta ed una linea circolare , le quali regolarmente s'incontrano in due punti , saranno capaci di due soluzioni diverse . Ma egli è da notarsi , che siccome queste due diverse soluzioni si riuniscono in una sola , quando le linee , colle quali si determinano , s'incontrano tra loro toccandosi : così ambedue possono svanire , e darci a divedere , che il problema sia impossibile , qualora le stesse linee affatto fra di esse non s'incontrano .

537. Egli è vero , che le due rette , colle quali si risolve un problema del primo genere , possono
tal

tal volta farsi parallele; ma non perciò svanisce interamente la sua soluzione, per la ragione, che le parallele possono considerarsi come rette, le quali s'incontrano tra di esse in una distanza infinita.

Fig. 538. Debbaſi per ragion di eſempio prolungare la retta data AB per fino in C , dimodocche AC a BC ſia in data ragione. Egli è chiaro, che alzate ſu di eſſa le perpendicolari AD , BE , che ſiano tra loro in quella ſteſſa ragione, ritrovaſi il punto, che ſi dimanda, coll'incontro delle due AD , BE . Queſte intanto diventano parallele, quantevolte la data ragione è di uguaglianza; ma ſupponendoli, che il loro incontro ſi faccia in un punto C infinitamente diſtante dalli due A , e B , pure il problema rimane riſolto; poicche per l'infinita lunghezza delle due AC , BC può traſcurarſi a riguardo di eſſe la data AB ; ed in conſeguenza le medefime AC , BC faranno tra loro in ragione di uguaglianza.

Fig. 539. Ma per altra ragione ancora può avvenire, che un problema geometrico ſia capace di varie ſoluzioni; e ſi è, perche uno de' luoghi, che per eſſo ſ'impiegano, può avere tal volta doppia poſizione. Debbaſi perciò ſulla data baſe AB formare un triangolo, in cui ſia data coſì l'altezza, come la ragione degli altri due lati. Deſcrivafi primieramente la linea circolare CD , la quale ſia di tal natura, che le rette tirate da ciaſcuno de' ſuoi punti agli altri due A , e B dati di poſizione ſiano in quella data ragione; indi dalla perpendicolare AE alzata ſulla retta AB tagliſi la porzione AF eguale alla data altezza; tirifi finalmente per lo punto F la retta FG parallela alla ſteſſa AB ; ed egli è chiaro, che incontrandoſi queſta parallela colla deſcritta linea circolare, ſi avrà la ſoluzione del problema propoſto. Ma poicche con farſi AF eguale all'altezza data, ſi ritrovano nello ſteſſo tempo due punti F , farà doppia la poſizione della parallela FG ; e per tanto il problema farà capace di quattro ſoluzioni diverſe.

539. Queſto medefimo può illuſtrarſi ancora con
quel

GEOMETRIA PIANA. 239

quel problema, in cui dato il quadrato $ABCD$ Fig. 240. trattasi di tirare dal punto D la retta DEF , la quale incontrandosi colli due lati AB , BC ne' punti E ed F faccia, che la porzione EF sia eguale alla data DG . Imperocche secondo fu dimostrato di sopra (506), si avrà la soluzione di esso con tagliarsi dal lato DC prolungato la porzione CH eguale a CG , e con descriversi sopra DH , come diametro un semicerchio, che s'incontri col lato AB . Ma poicche con farsi CH eguale a CG si anno nel medesimo tempo due punti H , saranno due i semicerchi, che possono descriversi; e perciò potendosi così l'uno, come l'altro incontrare col lato AB in due punti diversi, saranno non due, ma quattro le diverse soluzioni, che potrà ricevere l'istesso problema.

540. Ciò, che si è notato intorno alla doppia posizione di un luogo, può avvenire ancora in un problema piano del primo genere; onde per questo verso niente osta, che possa egli avere due soluzioni diverse. Siano dati per ragion di esempio in una retta due punti A , e B , e debbasi nella medesima ritrovare il terzo C , dimodo che AC a BC sia in data ragione. Si alzino sulla retta data le perpendicolari AD , BE ; e presa in una di esse la porzione AD ad arbitrio, tagliasi dall'altra la porzione BE di lunghezza tale, che le due AD , BE siano tra loro in quella data ragione. Egli è chiaro, che coll'incontro delle due rette AB , DE si abbia il punto C , che si dimanda. Ma poicche, con tagliarsi quella tale porzione AE , vengono ad averli nello stesso tempo due punti E , sarà doppia la posizione della retta DE ; e perciò il problema proposto tuttocche del primo genere sarà capace di due soluzioni diverse. Fig. 241.

541. Egli è però da notarsi, che dee farsi differenza tra le diverse soluzioni, che derivano dalla molteplicità de' punti, ne' quali i due luoghi s'incontrano, e tra quelle, che risultano dalla doppia posizione di uno degli stessi luoghi. Imperocche le prime, per averli con una stessa costruzione,

ne, non mai possono separarsi, ma di lor natura vanno sempre congiunte insieme; all'incontro le seconde, perche dipendono da costruzioni diverse, non anno tra loro unione così stretta, ed in conseguenza possono essere separate. In effetto queste seconde debbono essere considerate come casi diversi del problema, di cui si tratta; in quanto che nella costruzione di esse bisogna cambiarsi la posizione di qualche linea. E con questa occasione non farà inutile qui l'avvertire, che siccome a riguardo di un istesso teorema si distinguono varj casi, per gli varj cambiamenti, che debbono farsi nella sua dimostrazione; così per rapporto ad un medesimo problema la varietà de' casi dee ripetersi dalle varie mutazioni, che può ricevere la sua costruzione.

I L F I N E.

IN.

A01 1461425

I N D I C E

De' Capitoli, e de' Paragrafi,
Che si contengono in questi Elementi.

L I B R O I.

Delle Teorie più semplici della Geometria piana.

CAP. I. **D**ella teoria delle linee.

- §. I. Della nozione della linea retta.
- §. II. Della nozione della linea circolare.
- §. III. Degli angoli formati colle rette, che s' incontrano.
- §. IV. Della perpendicolare e dell' obliqua, e degli angoli, che formano.
- §. V. Delle rette parallele, ovvero equidistanti.

CAP. II. Della teoria de' triangoli, e de' parallelogrammi.

- §. I. Delle principali proprietà del triangolo.
- §. II. Delle varie spezie del triangolo.
- §. III. Della perfetta uguaglianza de' triangoli.
- §. IV. Delle proprietà così assolute, come relative del parallelogrammo.
- §. V. Della formazione de' parallelogrammi eguali a figure rettilinee date.

CAP. III. Della teoria de' rettangoli, e de' quadrati.

- §. I. Della nozione così del rettangolo, come del quadrato.
- §. II. Delle composizioni più semplici del rettangolo, e del quadrato.
- §. III. Di altre composizioni più implicate del rettangolo, e del quadrato.
- §. IV. Delli quadrati descritti dalli lati di un triangolo.

Q

§. V.

I N D I C E.

- §.V. Della soluzione di alcuni problemi, attinenti all'istesso argomento.
- CAP.IV. Della teoria del cerchio.
- §.I. Della nozione del cerchio, e della determinazione del di lui centro.
- §.II. Dell'ordine, che serbano le rette tirate alla circonferenza del cerchio.
- §.III. Dell'incontro così di due cerchi, come del cerchio, e della retta.
- §.IV. Degli angoli situati così nel centro, come nella circonferenza del cerchio.
- §.V. Della proprietà la più rilevante del cerchio.
- CAP.V. Della teoria delle figure regolari.
- §.I. Della nozione delle figure regolari.
- §.II. Della situazione del cerchio nelle figure regolari.
- §.III. Della situazione delle figure regolari nel cerchio.
- §.IV. Del modo di estendere più oltre la iscrizione delle figure regolari.
- §.V. Delle affezioni proprie di alcune figure regolari.

L I B R O II.

Delle Teorie più composte della Geometria piana.

- CAP.I. **D**ella dottrina delle proporzioni in generale.
- §.I. Della comparazione delle quantità omogenee per via della continenza.
- §.II. Delle nozioni della ragione, e della proporzione.
- §.III. Della nozione della ragione, che dicesi composta.
- §.IV. Delle affezioni comuni ad ogni proporzione.
- §.V. Delle affezioni della proporzione, che ha tutti i termini omogenei.
- CAP.II. Della dottrina delle proporzioni applicata alle linee rette. §. I.

AGGIUNTE, E CAMBIAMENTI

da farsi in questi Elementi.

I. **I**L problema proposto nell' articolo 137 può rendersi più generale. Trattasi in esso di prolungare la data AB talmente in D , che il rettangolo delle due AD , BD sia eguale al quadrato della stessa AB . Ma può egli risolversi ancora nel caso, che l'istesso rettangolo debba essere eguale al quadrato di qualunque retta data. Poiché divisa la AB egualmente in C (42), e ritrovato un quadrato, che sia eguale alli due fatti dalla BC , e dall'altra data (135), basterà, che si tagli la porzione CD eguale al lato di questo quadrato (31). E per quanto alla dimostrazione, vedesi chiaramente, che ella rimane la medesima. Bisogna intanto renderlo così generale, per la ragione, che in questo senso dee essere impiegato nella soluzione di quello proposto altrove (338), in cui trattasi di ritrovare due rette, le quali differenti tra loro per una data retta, siano reciproche con due altre date.

II. Ad esempio del riferito problema può ivi proporsi un'altro, e si è di dividere la data AB talmente in E , che il rettangolo delle due AE , BE sia eguale al quadrato di un'altra data, non maggiore della metà di AB . Per risolverlo, dividasi la AB egualmente in C (42); e ritrovato un quadrato, che sia eguale all'eccesso, con cui il quadrato di BC supera il quadrato dell'altra data (136), taglisi la porzione CE eguale al lato del quadrato ritrovato (31). Io dico, che il punto E sia quello, che si dimanda. Imperocchè, siccome per la costruzione il quadrato di BC dee essere eguale al quadrato di CE , ed a quello dell'altra data; così essendo la AB divisa egualmente in C , e disugualmente in E , farà l'istesso quadrato di BC eguale ancora al rettangolo delle due AE , BE insieme col quadrato di CE (122); e pertanto il rettangolo di AE in BE , ed il quadrato dell'altra data saranno tra loro eguali.

III.

Fig. 151.

III. Di questo problema può farsi uso nella soluzione di quell'altro, proposto in altro luogo (335), in cui trattasi di ritrovare due rette, le quali essendo insieme eguali ad una data retta, siano reciproche con due altre date. Per dimostrarlo, pongasi, come ivi, che A , e B siano le due rette, colle quali debbono essere reciproche quelle, che si dimandano; e che CD sia l'altra retta, a cui le medesime insieme debbono essere eguali. Ritrovisi la mezza proporzionale tra le due A , e B , che sia F (328); e dividasi la CD talmente in H , che il rettangolo delle due CH , DH sia eguale al quadrato di F . Io dico, che le medesime CH , DH saranno reciproche colle due date A , e B . Imperocchè, essendo il rettangolo di CH in DH eguale al quadrato di F , sarà F mezza proporzionale tra le due CH , DH (372). Ma la stessa F è mezza proporzionale ancora tra le due A , e B . Dunque quelle con queste saranno reciproche (333).

IV. Egli è vero, che colla ricerca di due rette, che essendo insieme eguali ad una data retta, siano reciproche con due altre date, si è fatto vedere ancora, come una retta data possa dividersi talmente, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra data (336). Ma appunto per non essersi posto nel suo luogo questo secondo problema, si è dovuto risolvere il primo con artificio tale, che fosse valevole a darci tutto ad un tempo la soluzione così dell'uno, come dell'altro. Giova intanto, che si separino tra loro questi due problemi, e che si deduchi l'uno dall'altro; sì perchè in questa maniera formasi idea più distinta del divario, che vi è nell'invenzione delle rette reciproche, quando è data la loro somma, e quando è data la loro differenza; come ancora perchè così vedesi più chiaramente la verità di quell'altro è stato altrove avvertito (510), cioè che il problema delle rette reciproche riducesi alla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri quadrati dati.

V.

V. Ma qualora si risolve separatamente il problema, in cui si tratta di dividere una data retta in modo tale, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra data, bisogna farsi notare, che affinché egli sia solubile, debba l'altra data non essere maggiore della metà di quella, che dee dividersi, ciocchè ricavasi facilmente da quel teorema, che essendo una retta divisa in parti uguali, ed in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali insieme col quadrato della porzione compresa tra l'una, e l'altra divisione debba essere eguale al quadrato della metà (122). Ritrovandosi fatto un tal avvertimento, egli è facile poscia a comprendersi, che per potersi avere due rette, le quali essendo insieme eguali ad una data retta siano reciproche con due altre date, sia necessario, che la metà di quella data retta non sia minore della mezza proporzionale, che cade tra l'altre due date (337).

VI. Doppo essersi dimostrato nell' articolo 325, come debba dividersi una data retta proporzionalmente ad un'altra di già divisa, può farsi vedere in quel medesimo luogo, come con un tal problema possono ritrovarsi due rette, che essendo insieme eguali ad una retta data, siano tra loro in data ragione; ed ivi ancora può farsi notare il cambiamento da farsi nella costruzione, qualora si vogliono due rette, che essendo differenti tra loro per una retta data, siano tra di esse similmente in data ragione. Imperocchè se bene e l'uno, e l'altro sia stato da noi altrove eseguito (488.489), tutta volta il proprio lor luogo è dopo il citato articolo, maggiormente che la preventiva conoscenza di tali problemi necessariamente si richiede per potersi risolvere tutti gli altri problemi piani del primo genere, li quali secondo si è detto (490) riduconsi, o a ritrovare una retta, che sia in data ragione con un'altra data; o pure a ritrovarne due, che siano in data ragione tra loro, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza.

VII. Si è fatto vedere nell' articolo 540, donde avviene, che essendo dati in una retta due pun-
ti

Fig. 241. ti A, e B, e volendosi nella medesima il terzo C, di cui la posizione sia tale, che le due AC, BC siano tra loro in data ragione, il problema riceva due casi diversi. Ma l'istessa considerazione puo farsi ancora a riguardo del problema, in cui il rettangolo delle due AC, BC dee essere eguale al quadrato di un'altra data. Pongasi percio, che quest'altra data sia la perpendicolare AD; ed alzata dal punto B l'altra perpendicolare, tagliasi da essa la porzione BE eguale ad AD. Congiungasi poscia la retta DE, che s'incontri col cerchio descritto sul diametro AB nel punto F; ed egli è chiaro, che la retta FC alzata perpendicolarmente su quella DE debba darci il punto C, che si dimanda. Or qui ancora con farsi BE eguale ad AD, vengono ad averli due punti E. Onde essendo doppia la posizione della retta DE, due ancora faranno i casi di quest'altro problema, e ciascuno di essi potrà ricevere altresì due soluzioni diverse.

VIII. Io non posso rendere avvertito il Lettore degli errori, che forse sono incorsi nell'impressione di questi Elementi; perocche non ho avuto tempo bastante per rileggerli con quella attenzione, che si richiedeva per farmi accorto di essi. Ne ho notati intanto due intorno alla citazione delle figure, li quali tanto più debbono essere corretti, poicche possono recare qualche difficoltà ad un Lettore poco attento. Il primo riguarda la figura citata negli articoli 69, e 76, la quale dee essere la 2, e non già la 23. L'altro concerne le figure citate negli articoli 422, e 425, le quali tuttocche diverse tra di esse sono segnate col medesimo numero 182; onde per distinguersi l'una dall'altra, ho procurato, che nell'incisione di esse vi si aggiungessero ancora i numeri Romani I, e II, dimodocche fosse notata col numero I la figura dell'articolo 422, e col numero II quella dell'articolo 425.

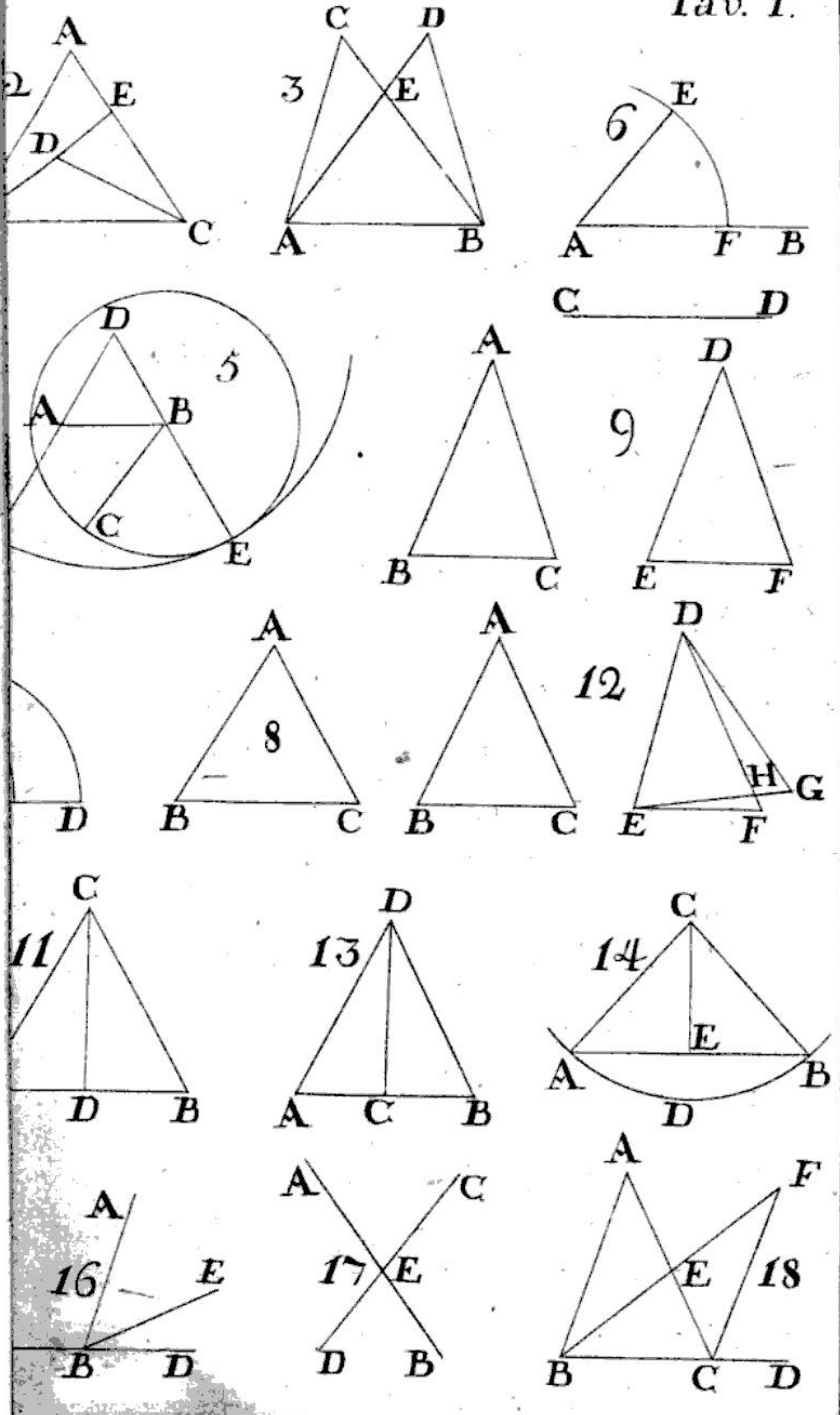
I N D I C E.

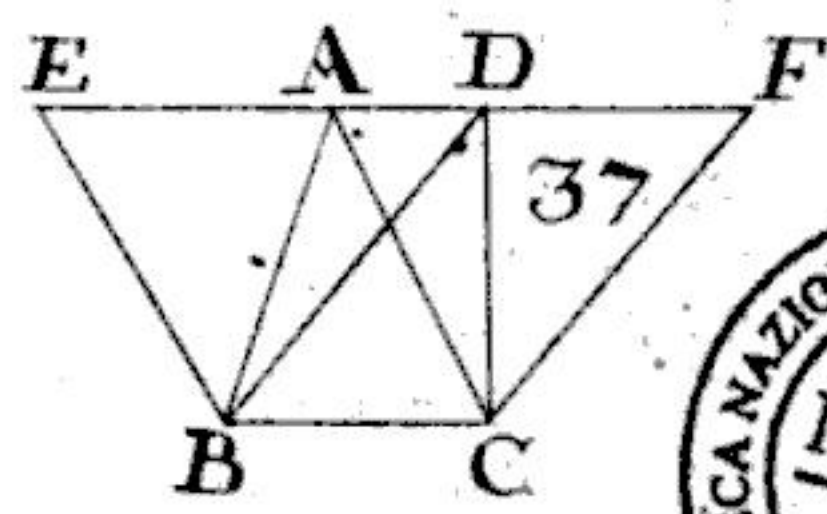
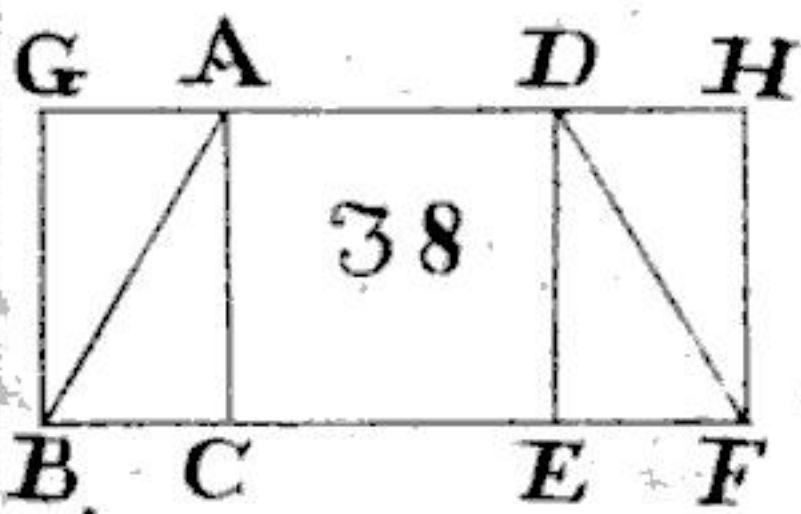
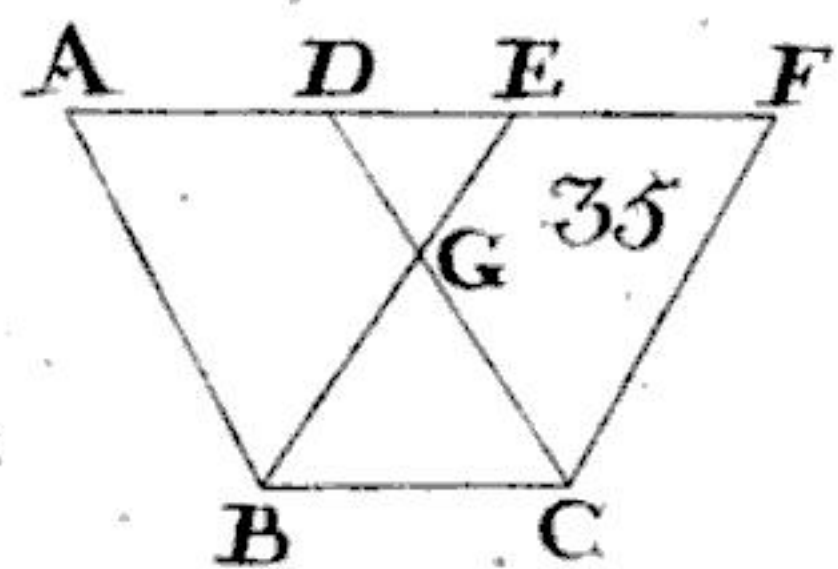
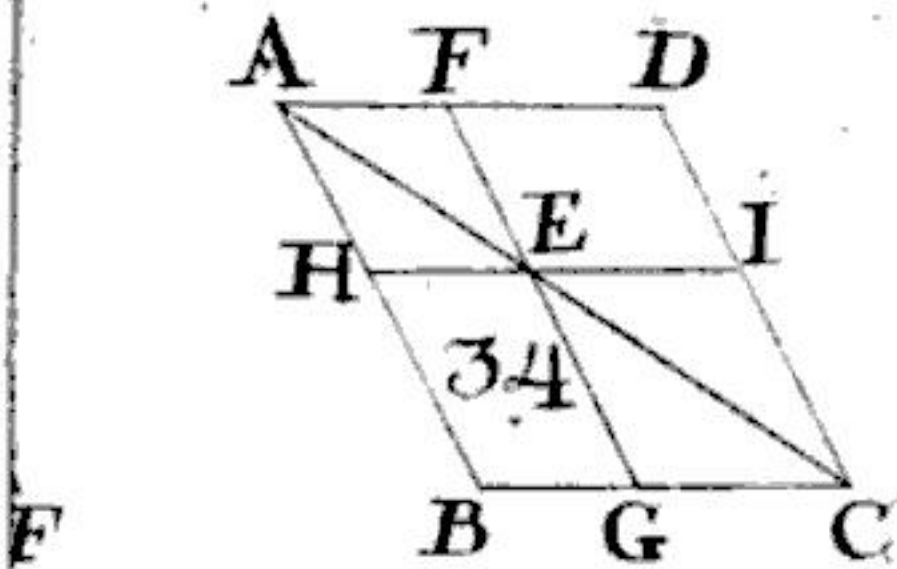
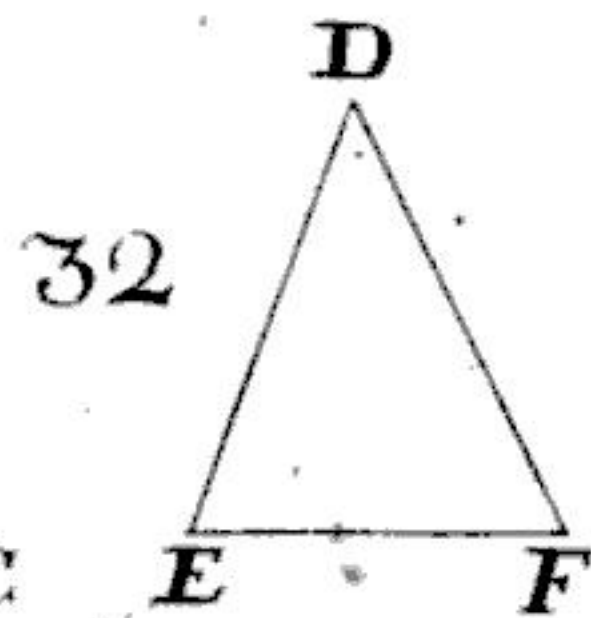
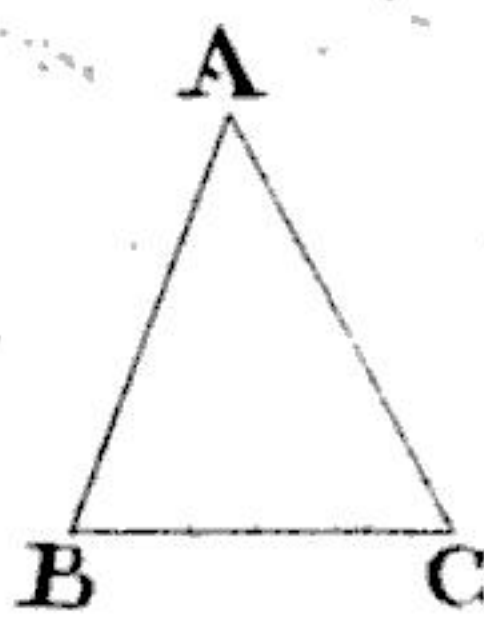
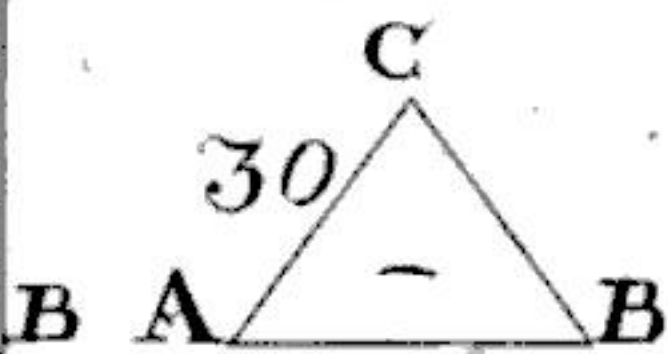
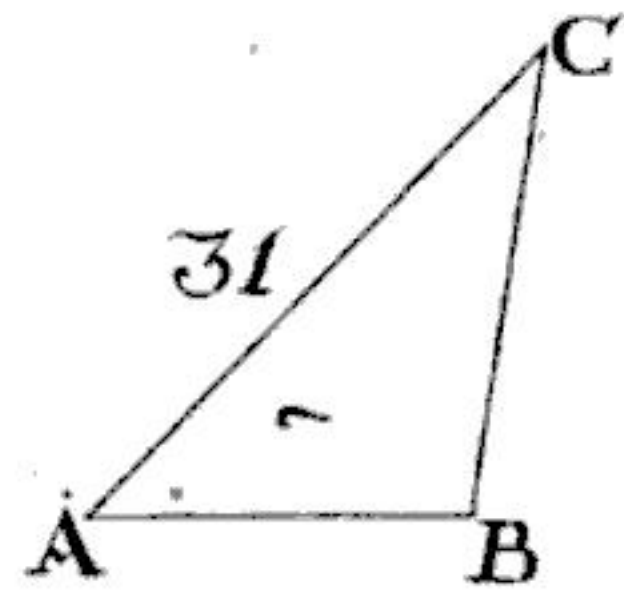
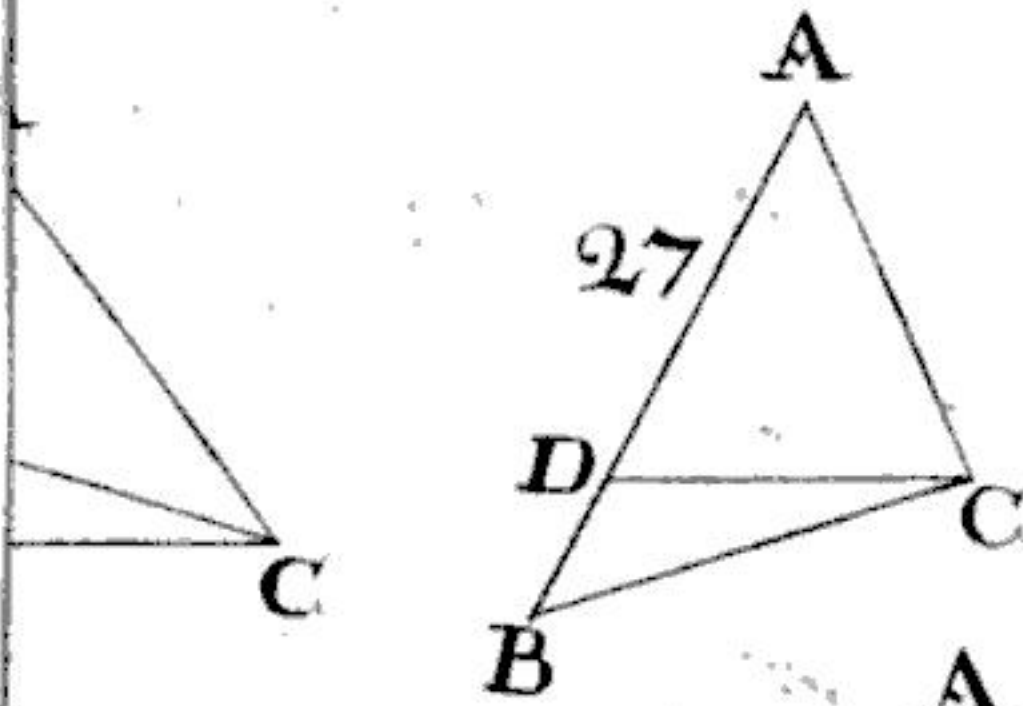
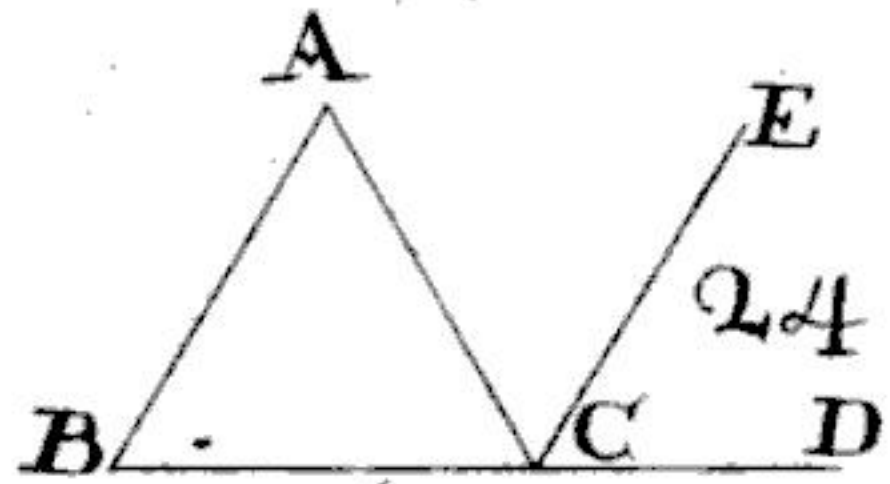
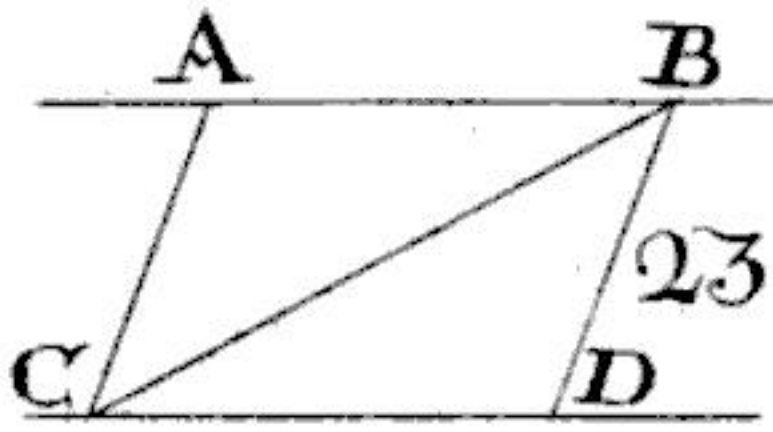
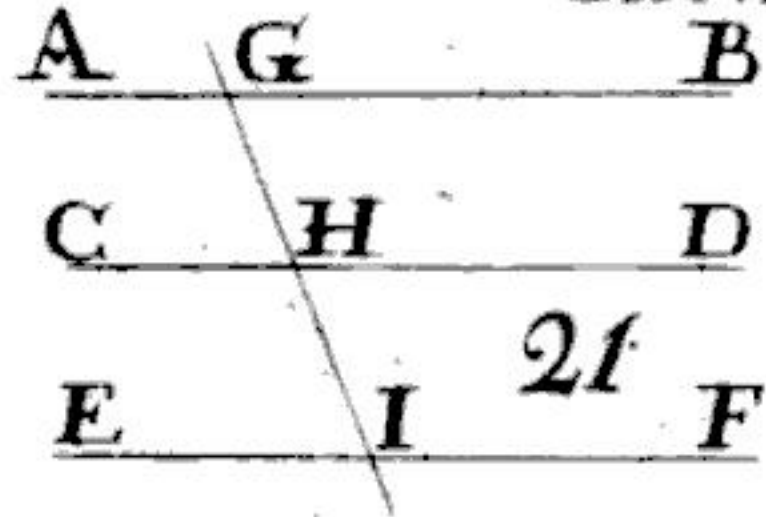
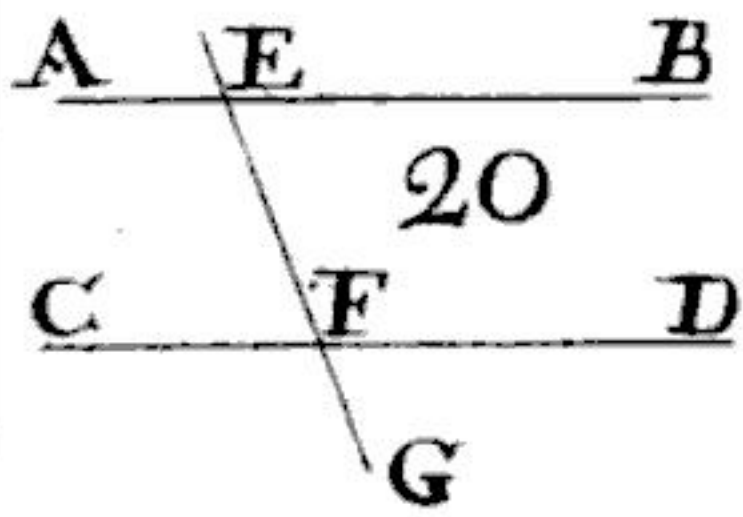
- §.I. Delle ragioni eguali, che possono averfi colla
lati, e la base di un'angolo.
- §.II. Delle ragioni eguali, che possono averfi colla
lati di due triangoli.
- §.III. Della soluzione di alcuni problemi intorno
alle rette proporzionali.
- §.IV. Delle rette reciproche, e delli loro problemi
principali.
- §.V. Della divisione della retta in estrema, e
media ragione.
- CAP. III.** Della dottrina delle proporzioni applicata
alle figure rettilinee.
- §.I. Della ragione, in cui sono così i triangoli,
come i parallelogrammi.
- §.II. Dell'uguaglianza di due triangoli, e di due
parallelogrammi.
- §.III. Di una proprietà singolare delle rette pro-
porzionali.
- §.IV. Della simiglianza delle figure rettilinee.
- §.V. Della ragione, in cui sono le figure rettili-
nee simili.
- CAP. IV.** Della dottrina delle proporzioni applicata
al cerchio.
- §.I. Della ragione, in cui sono gli archi, ed i set-
tori circolari.
- §.II. Degli archi circolari paragonati colle rette,
che li determinano.
- §.III. Della risoluzione de' problemi, che rignar-
dano i lati, e gli angoli del triangolo.
- §.IV. Del cerchio considerato come poligono rego-
lare, e delli teoremi, che se ne ricavano.
- §.V. Della simiglianza de' cerchi, e delli teore-
mi, che da essa si deducono.
- CAP. V.** Delli problemi attinenti alla Geometria pia-
na, e del modo di risolverli.
- §.I. Del metodo da tenersi nella risoluzione de' pro-
blemi geometrici.
- §.II. Della risoluzione de' problemi piani, e pri-
mieramente di quelli del primo genere.
- §.III. Della risoluzione de' problemi piani del se-
condo genere.

I N D I C E.
§.IV. Della natura de' luoghi geometrici, e delle
varie loro differenze.
§.V. Dell' uso de' luoghi geometrici nella risoluzio-
ne de' problemi.

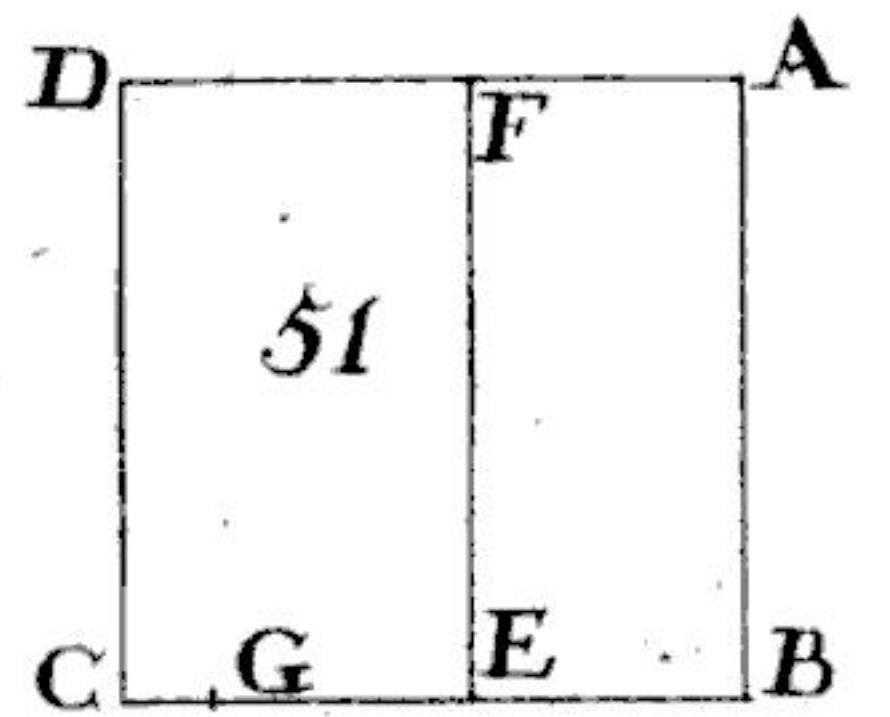
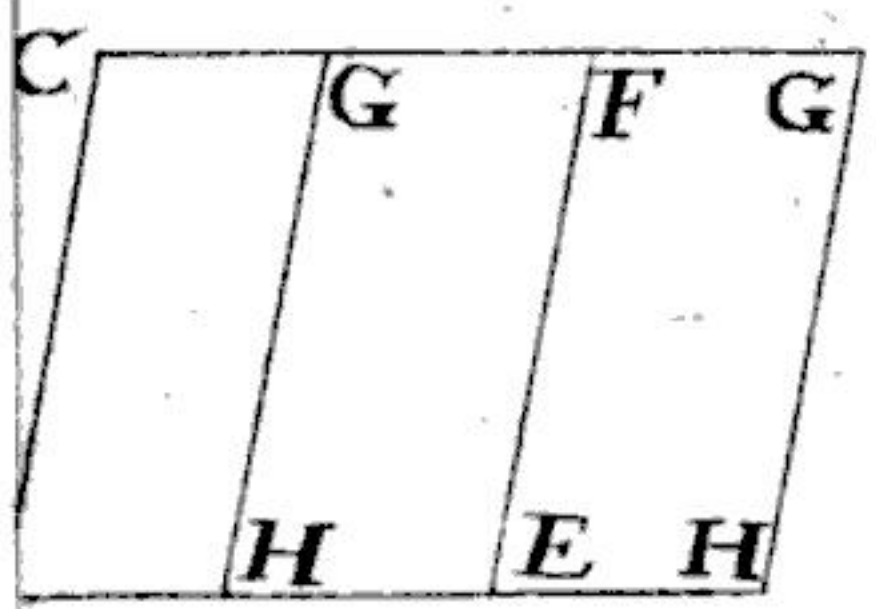
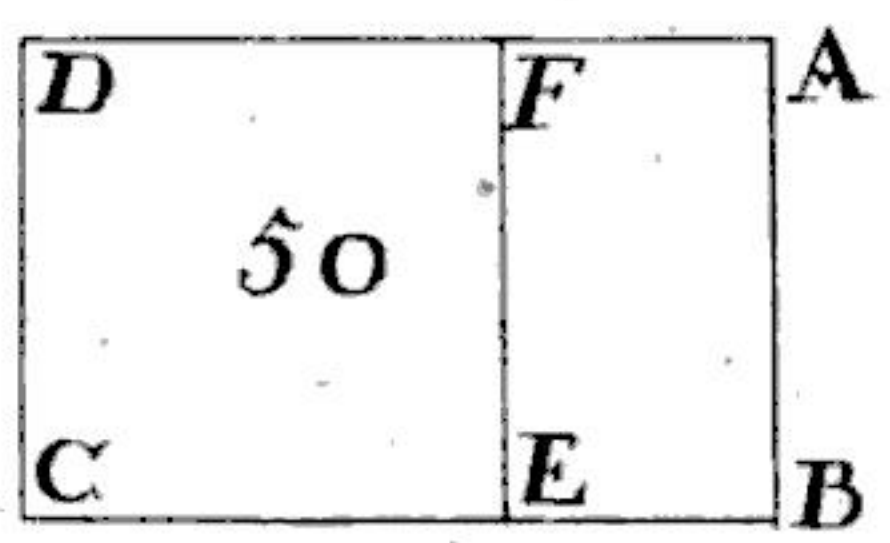
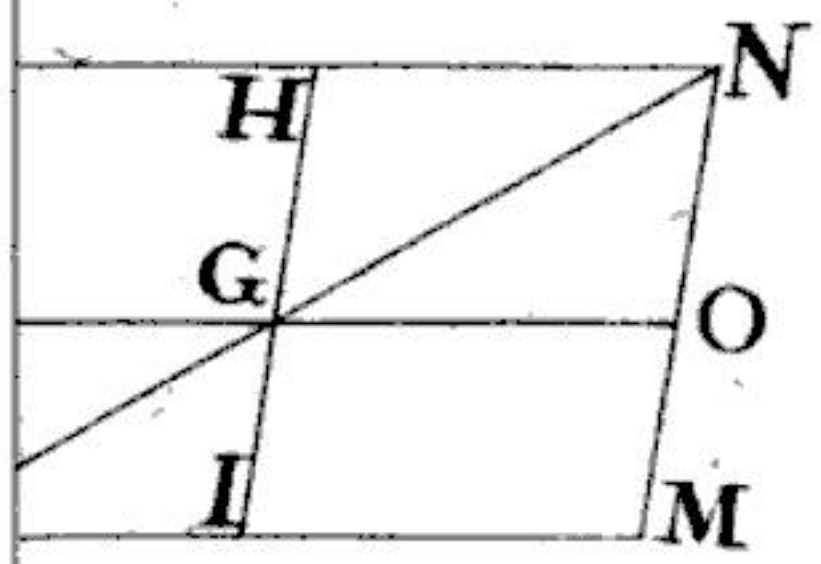
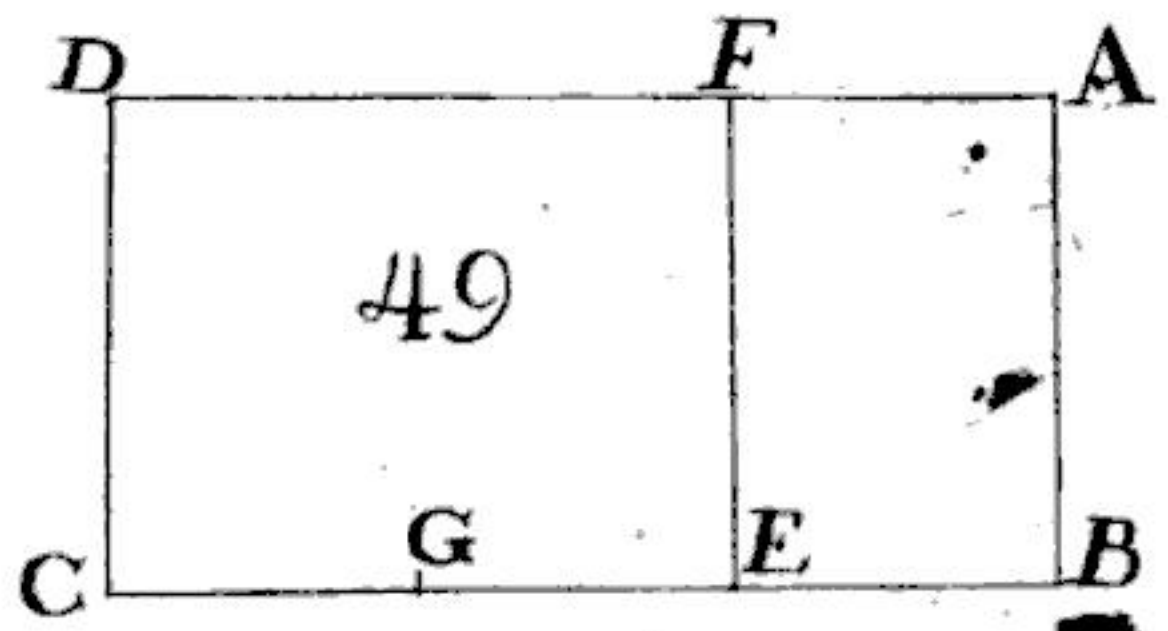
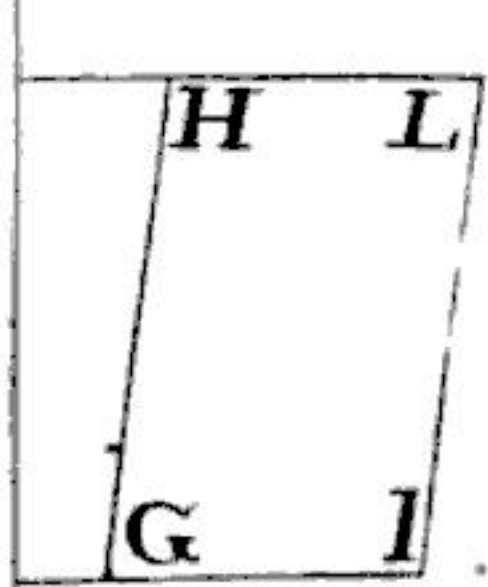
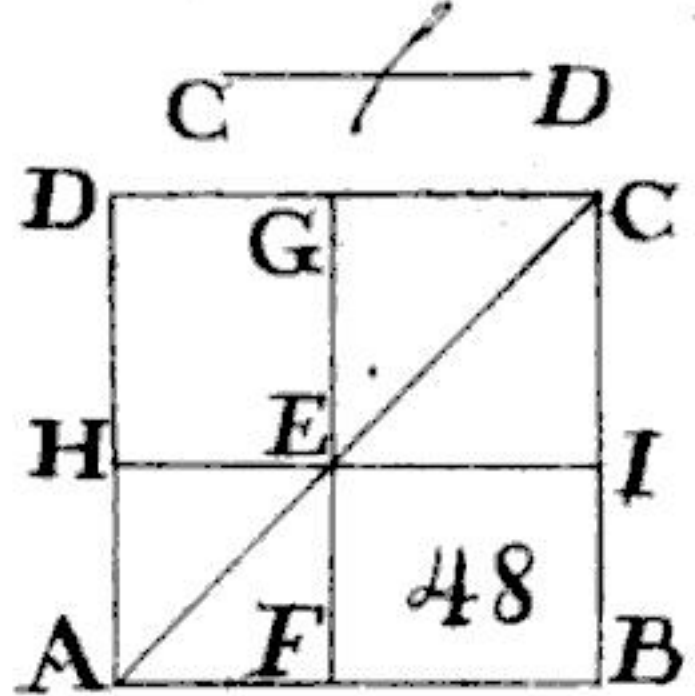
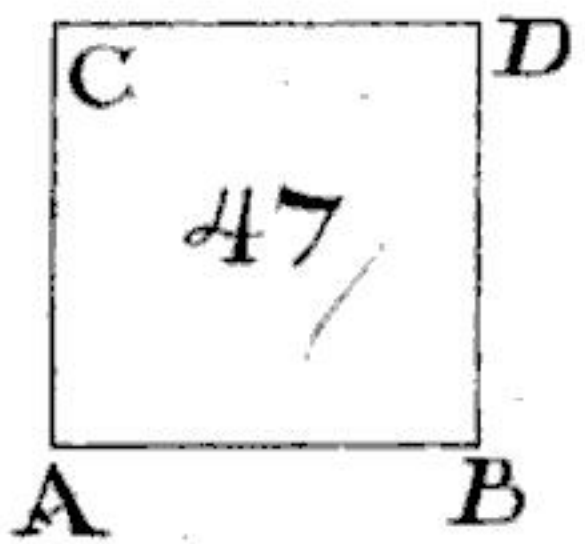
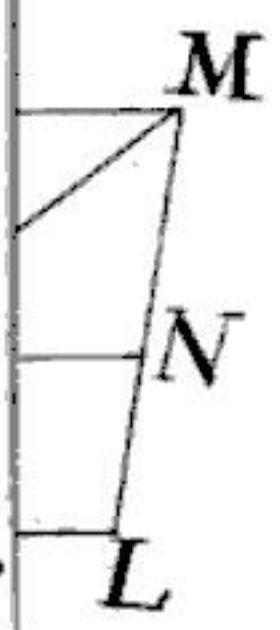
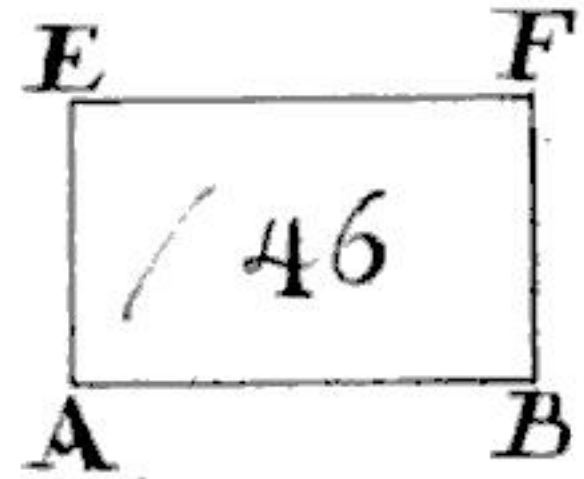
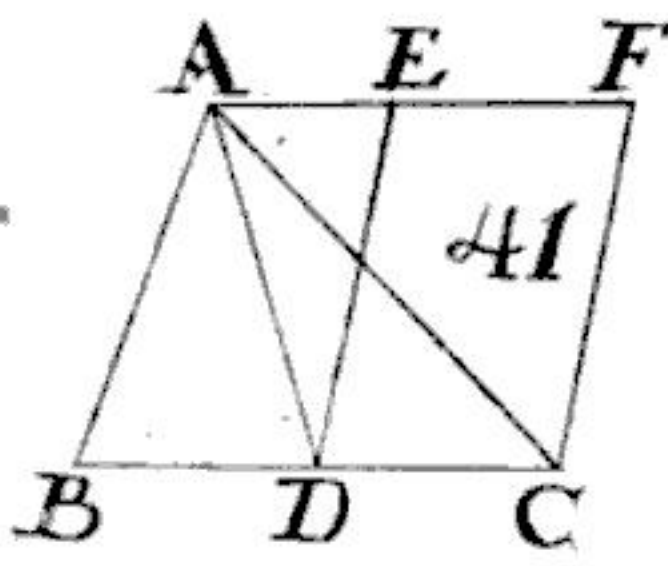
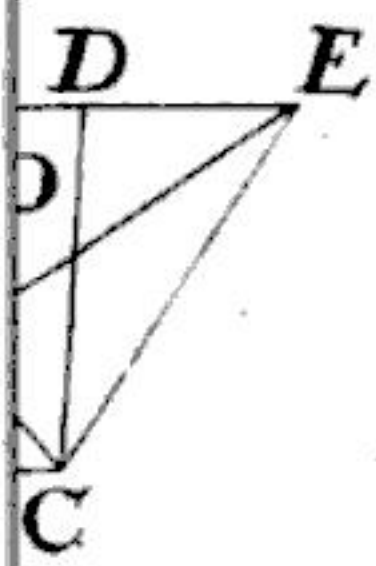
IL FINE DELL' INDICE.

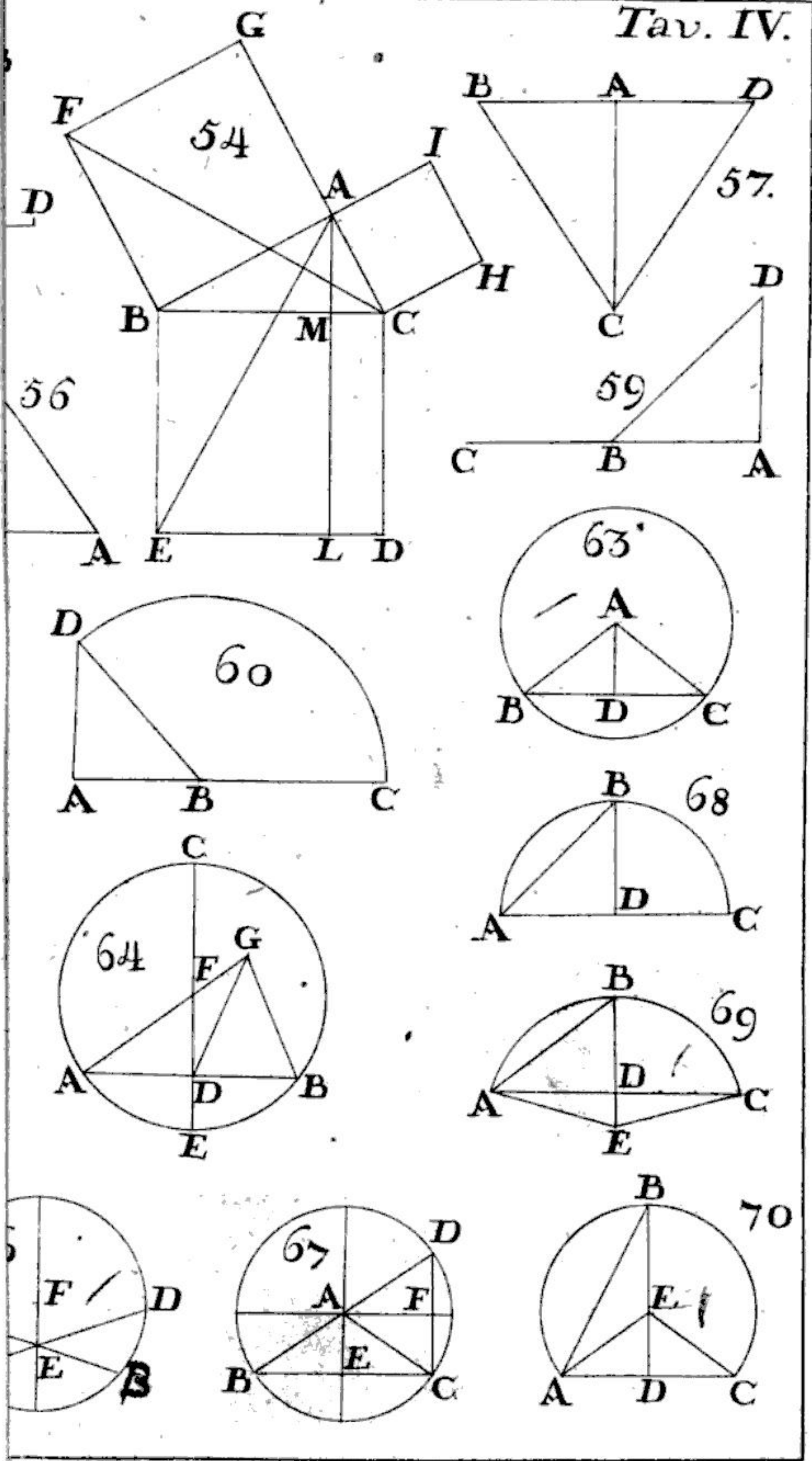
AG.

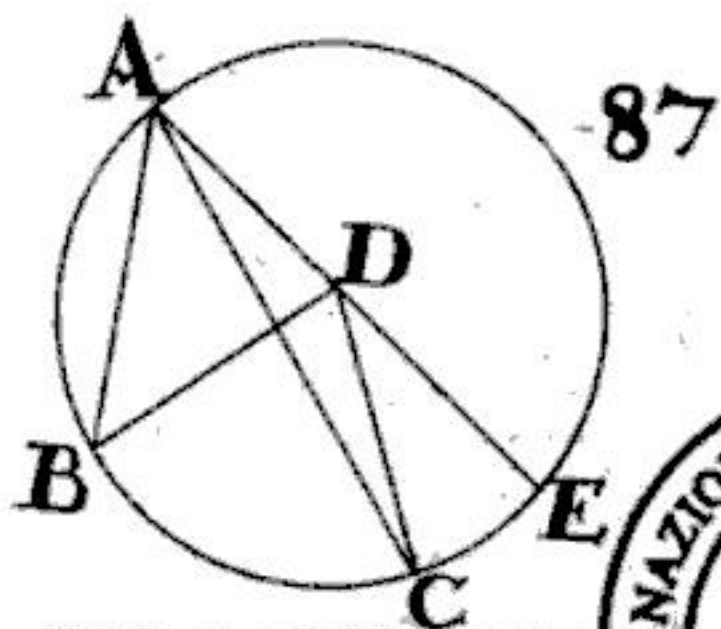
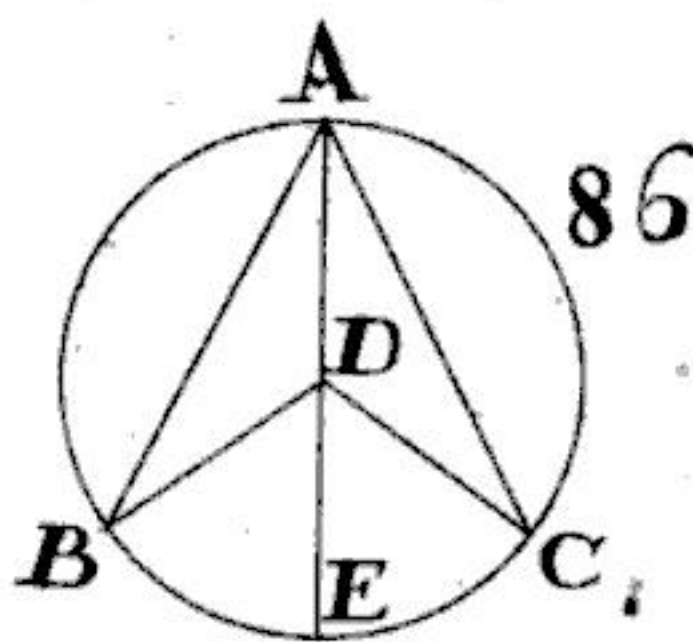
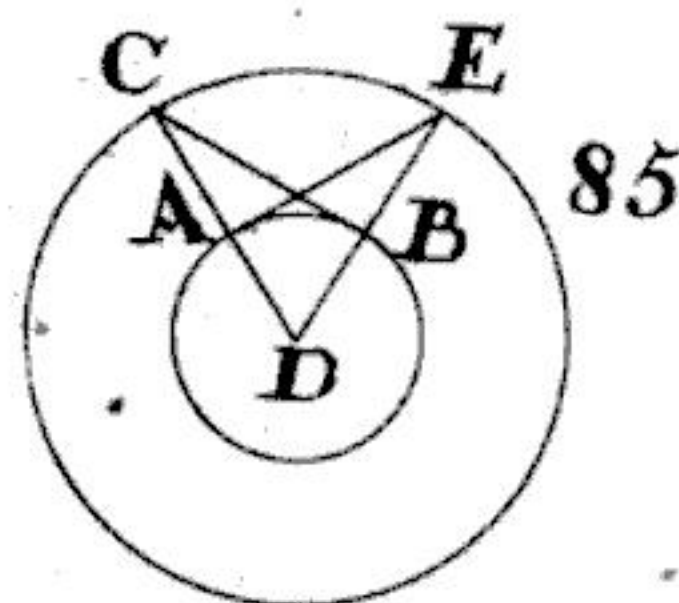
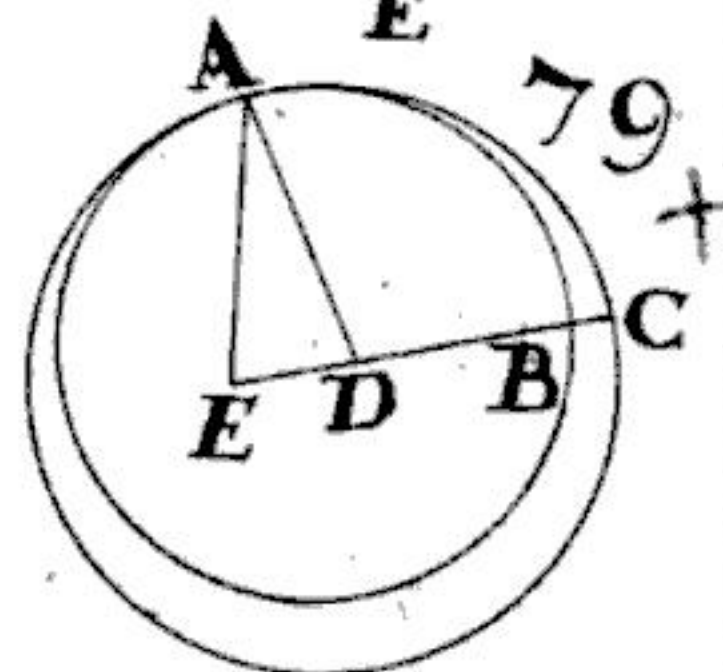
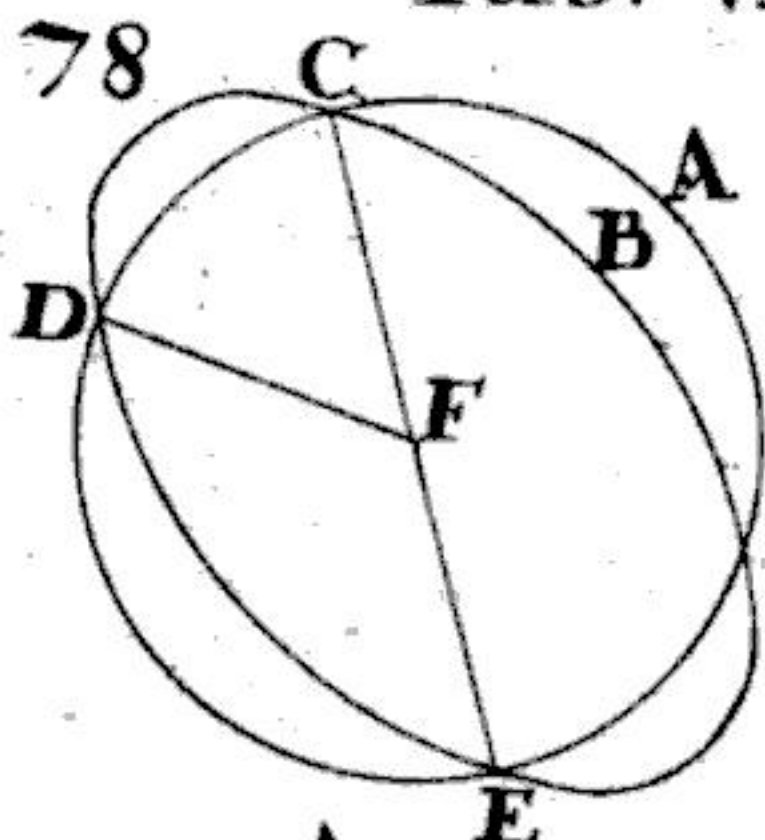
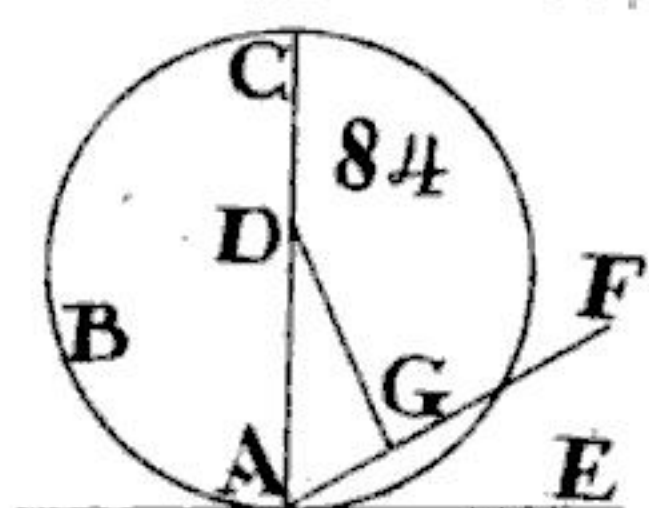
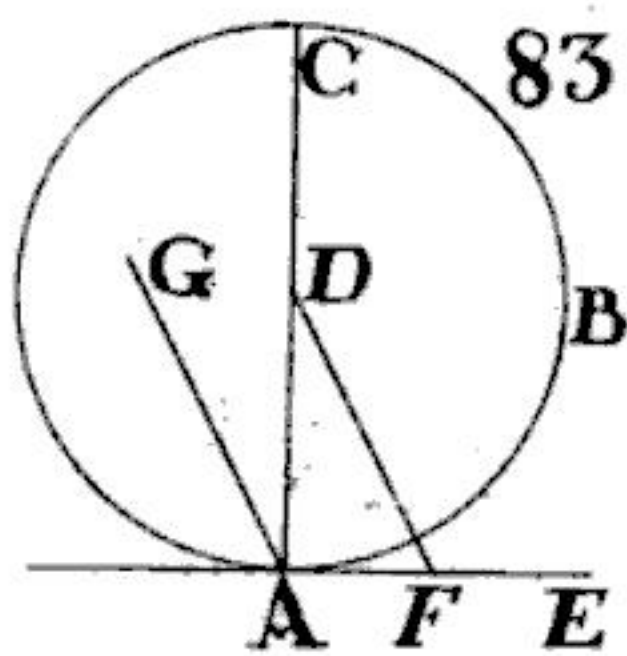
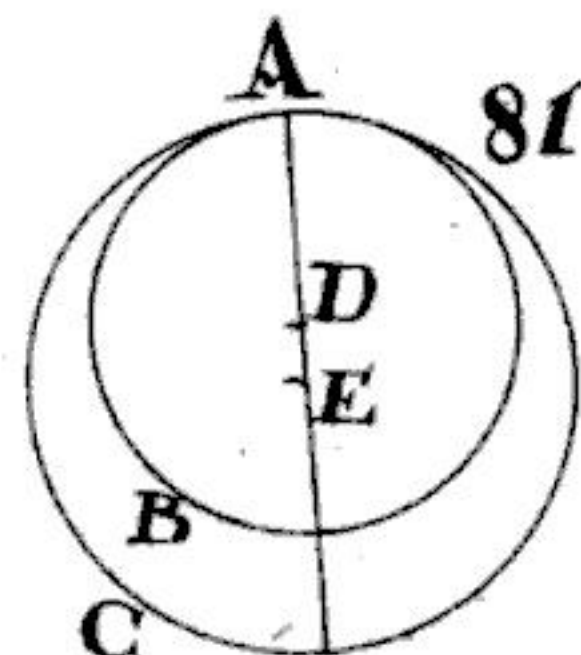
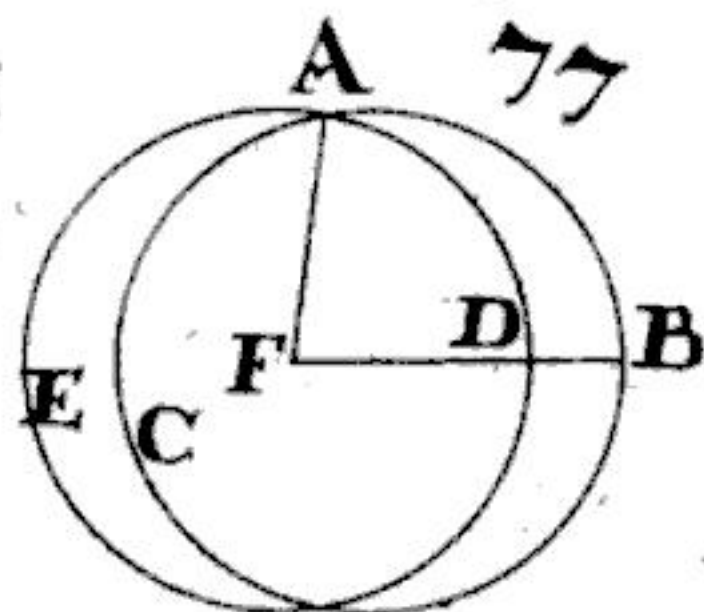
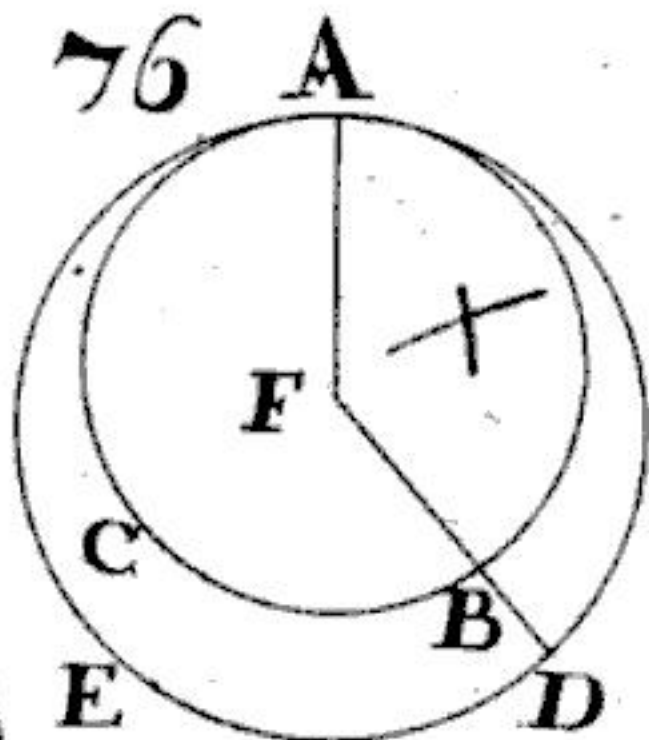
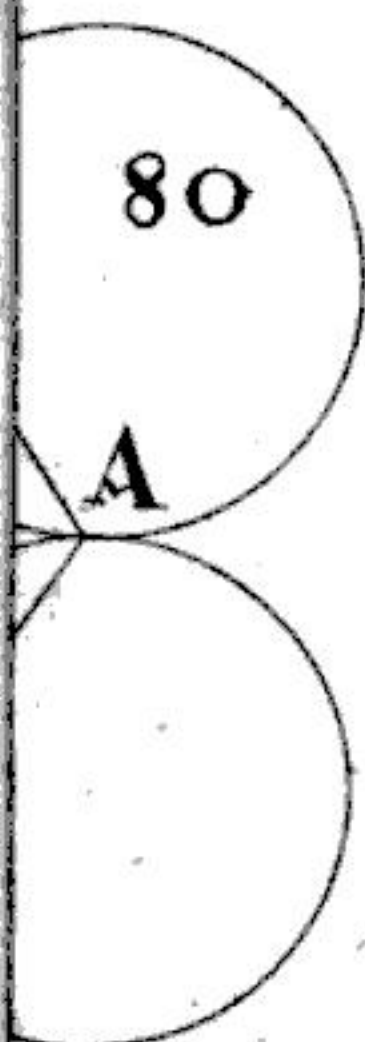
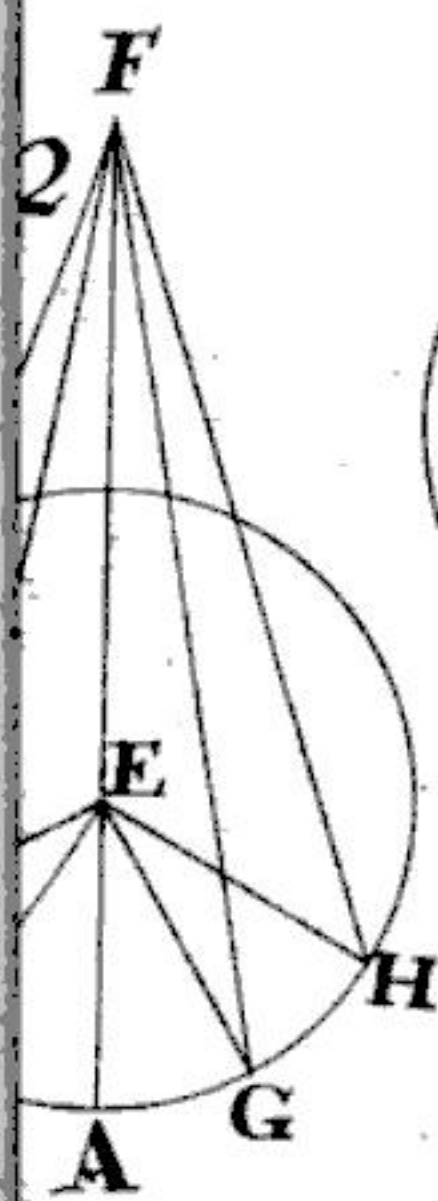


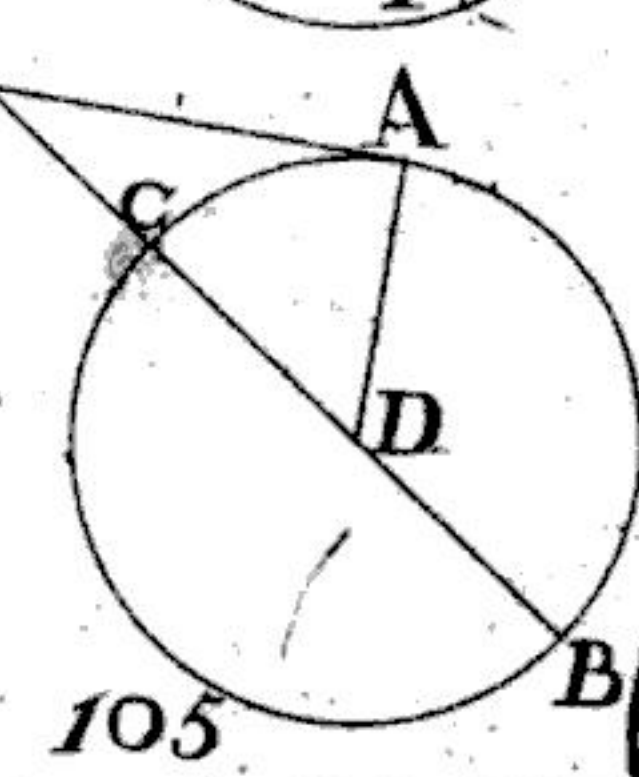
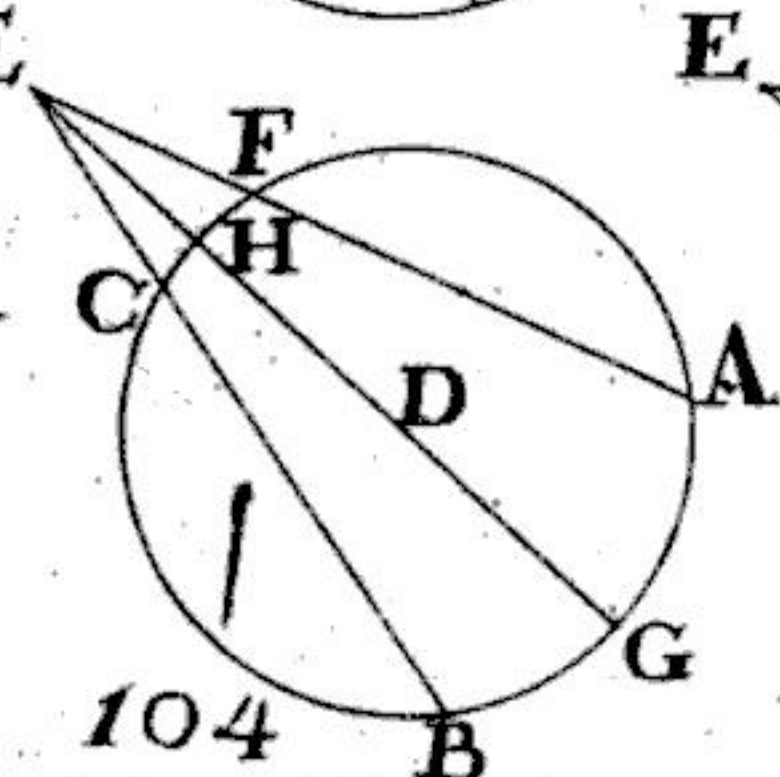
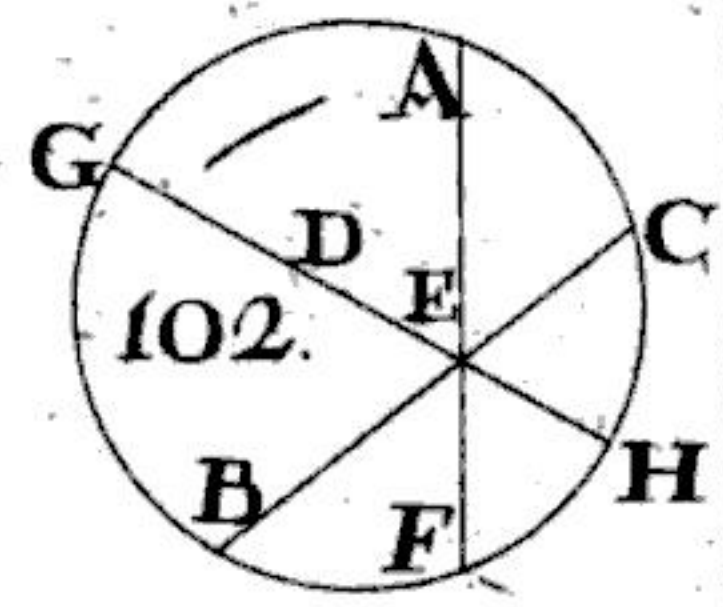
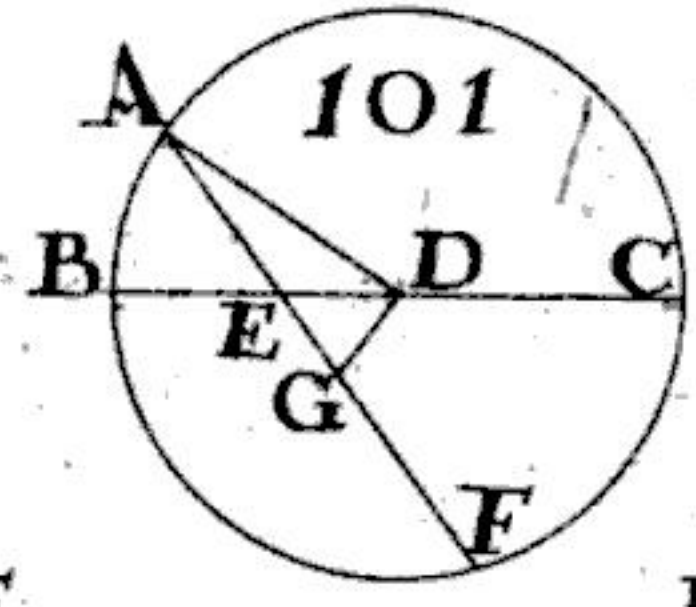
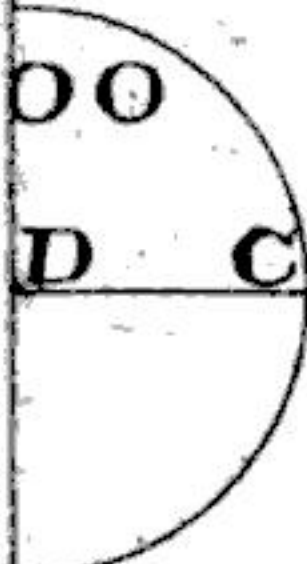
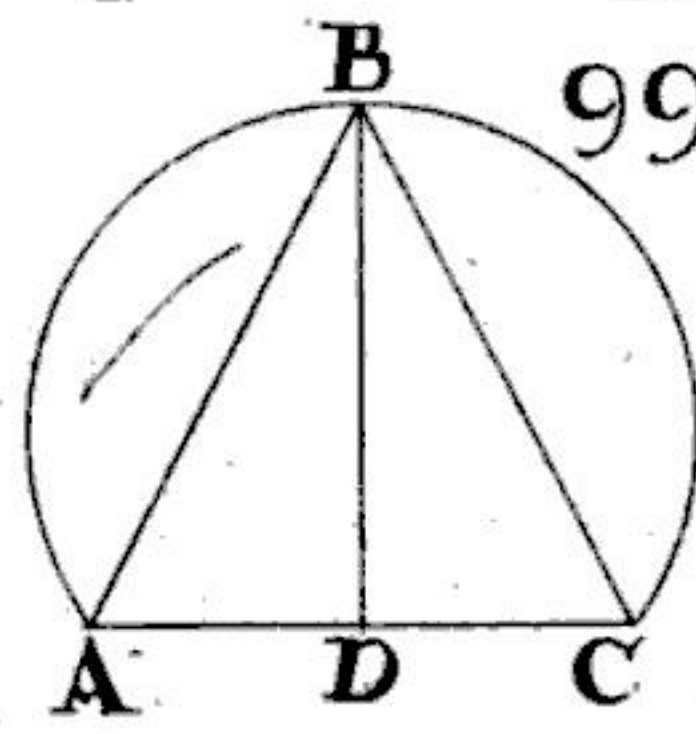
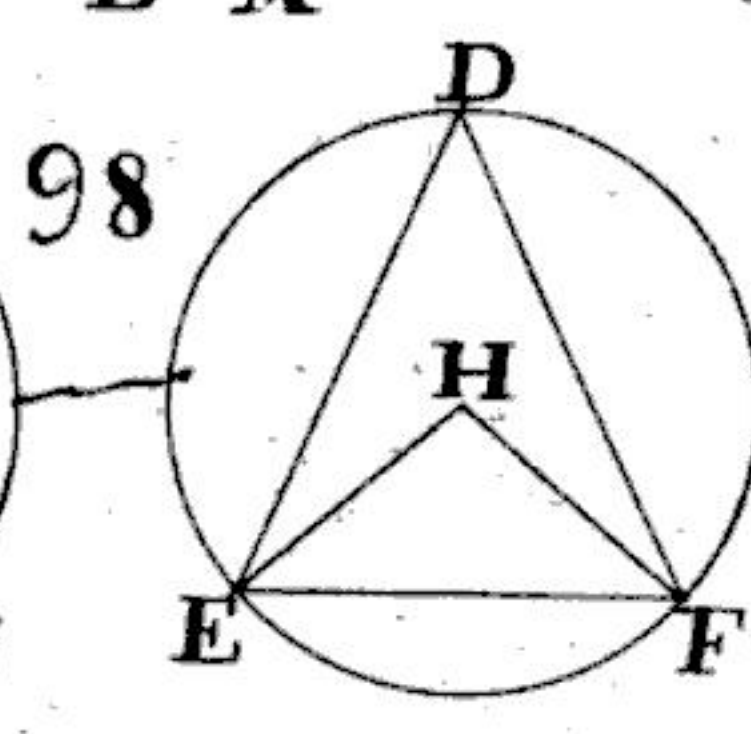
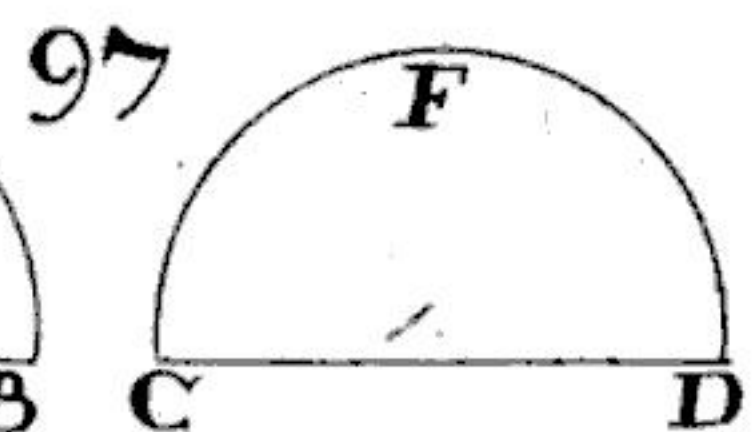
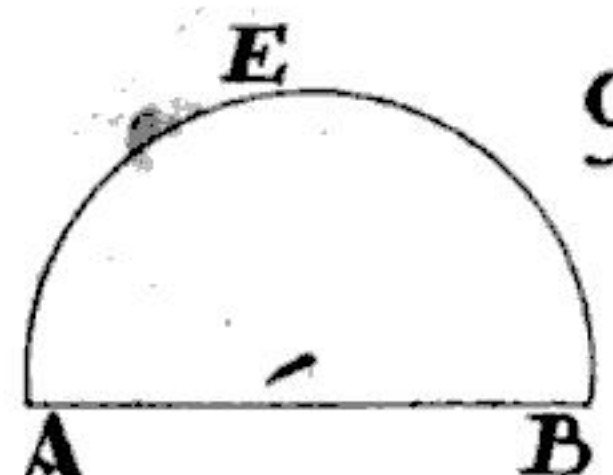
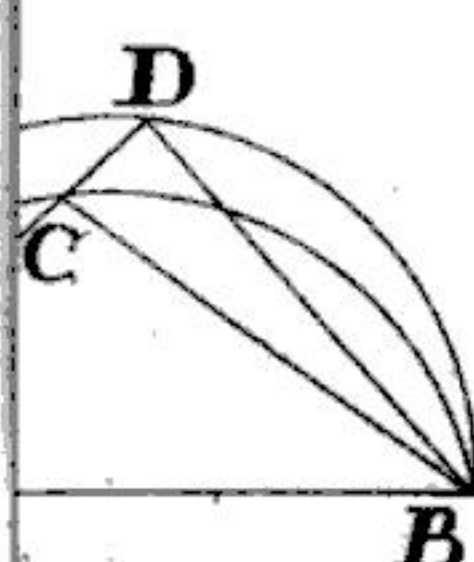
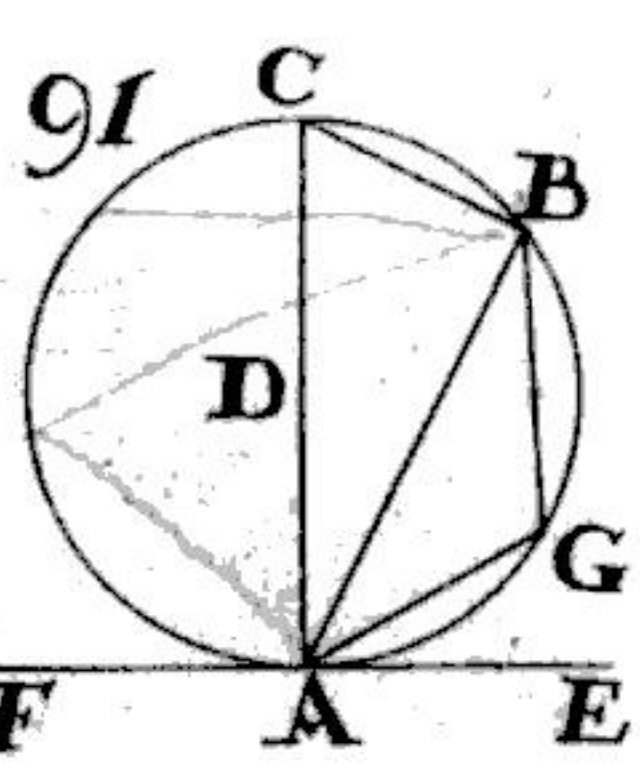
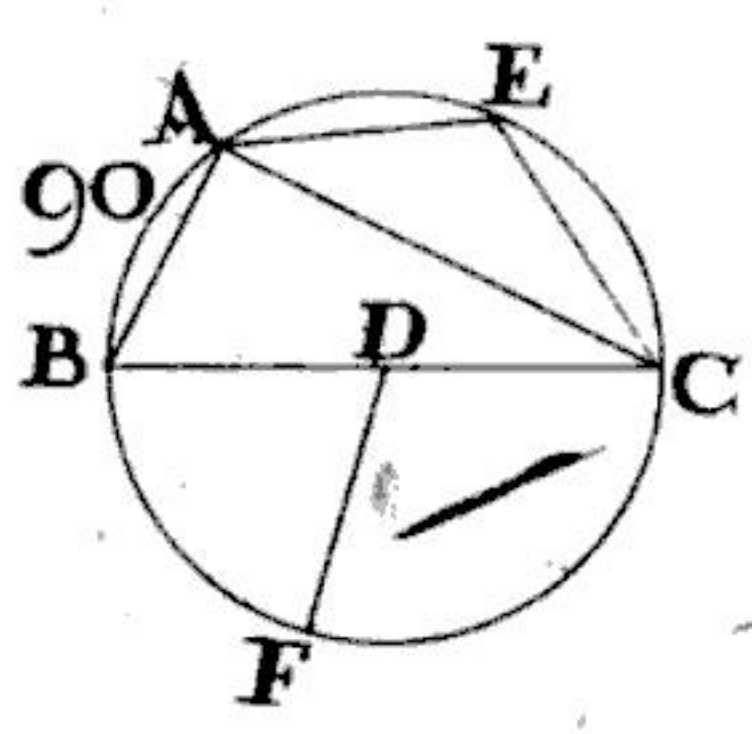
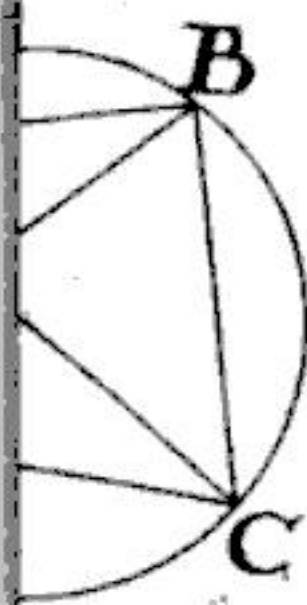


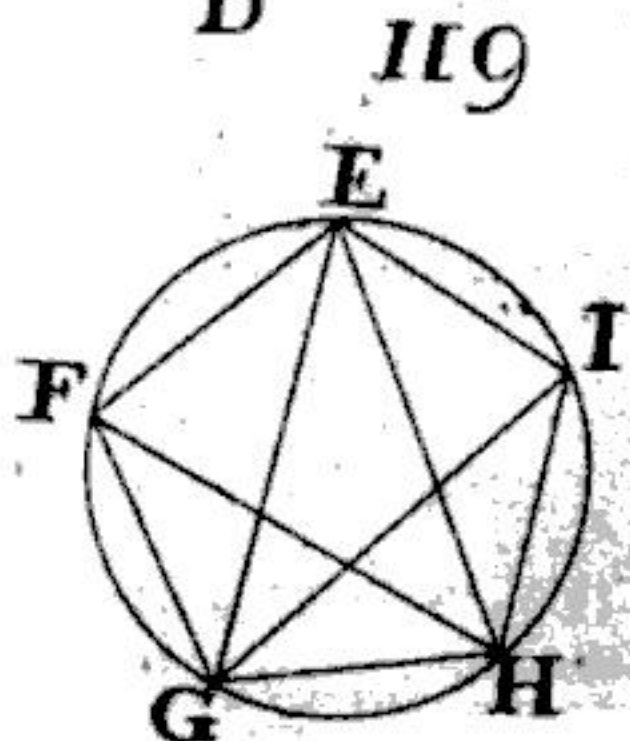
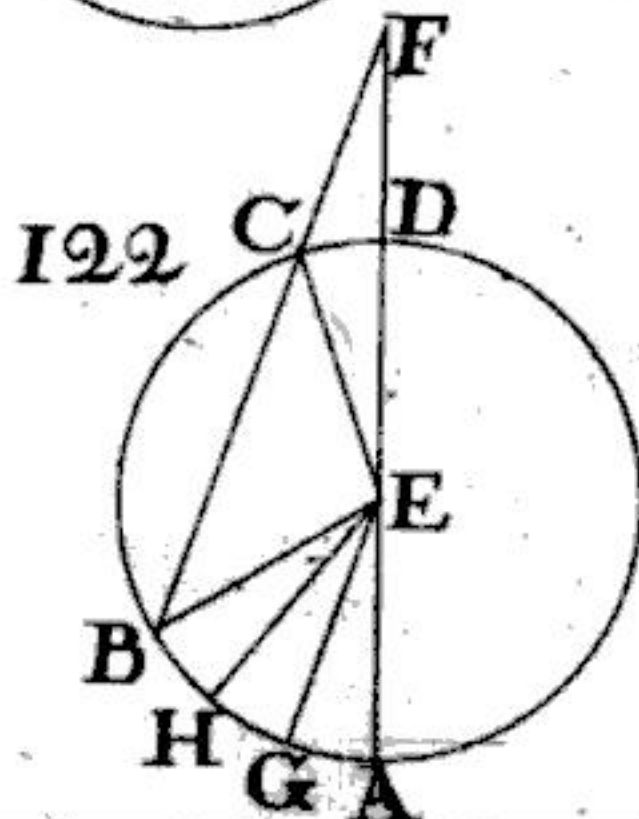
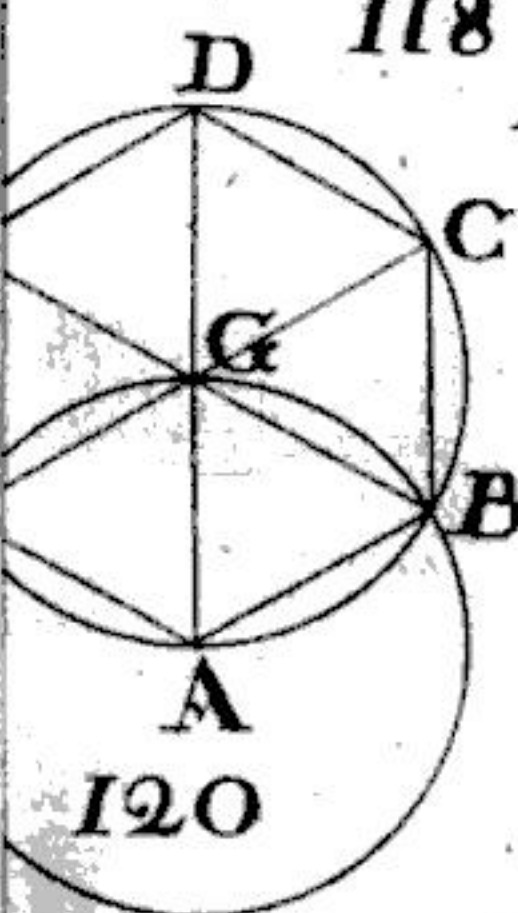
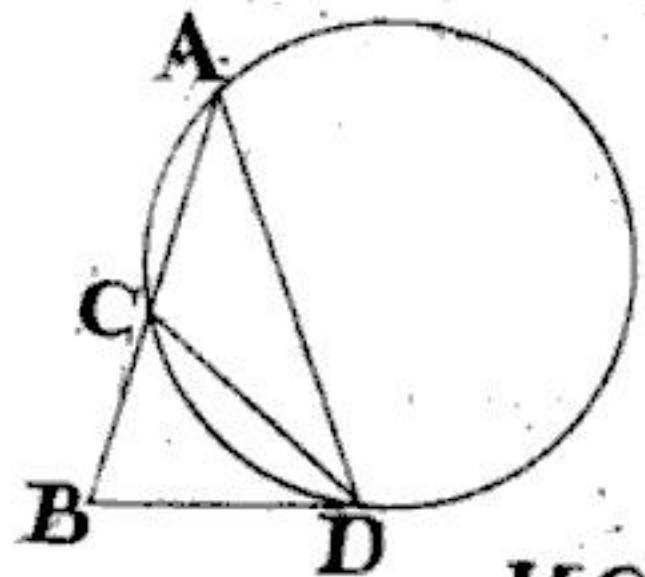
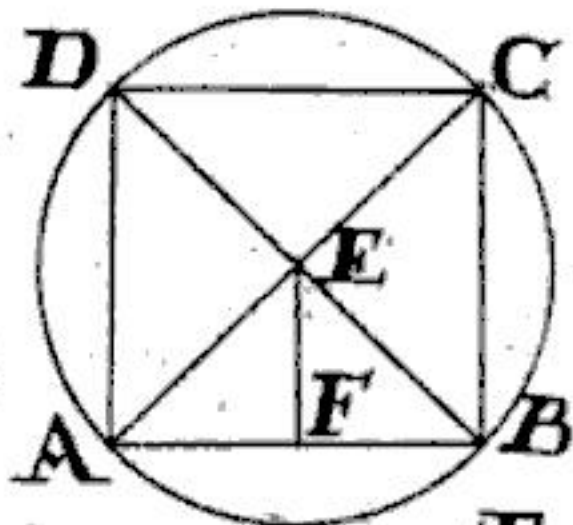
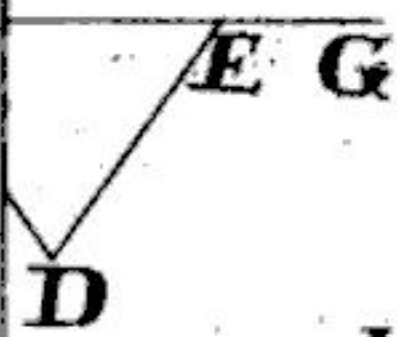
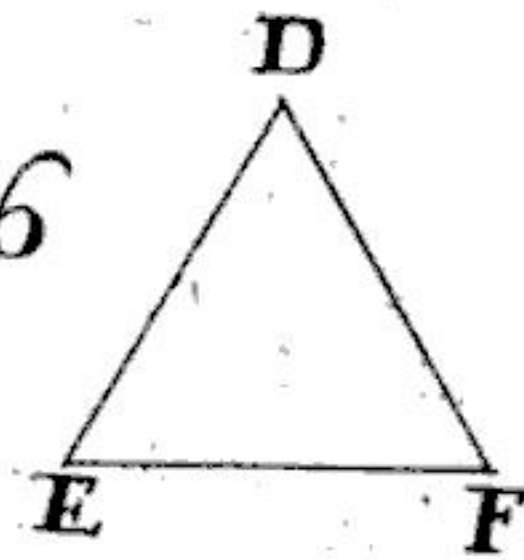
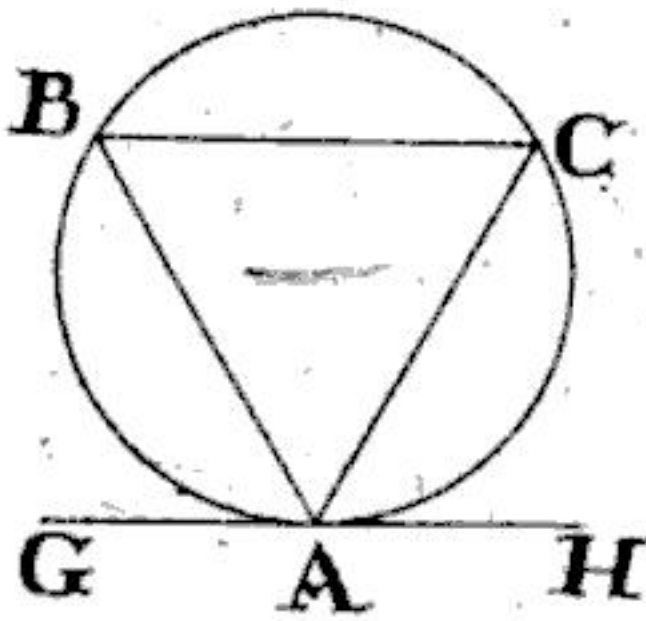
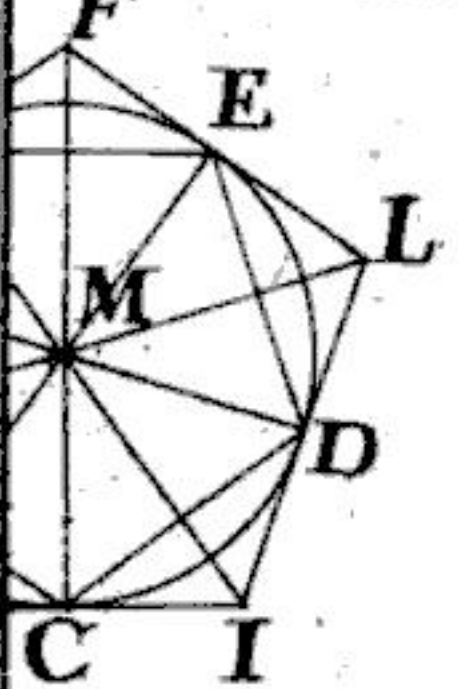
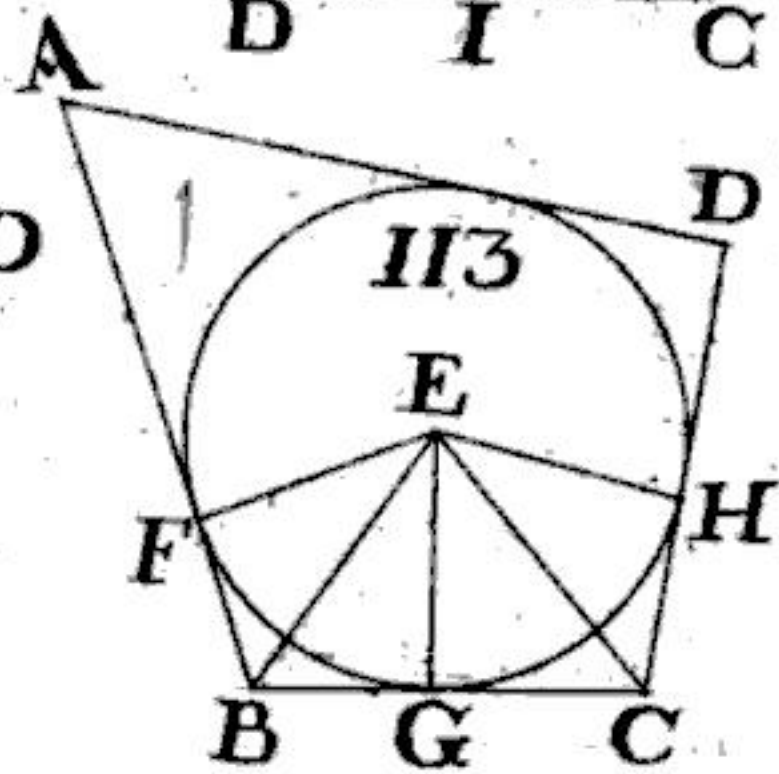
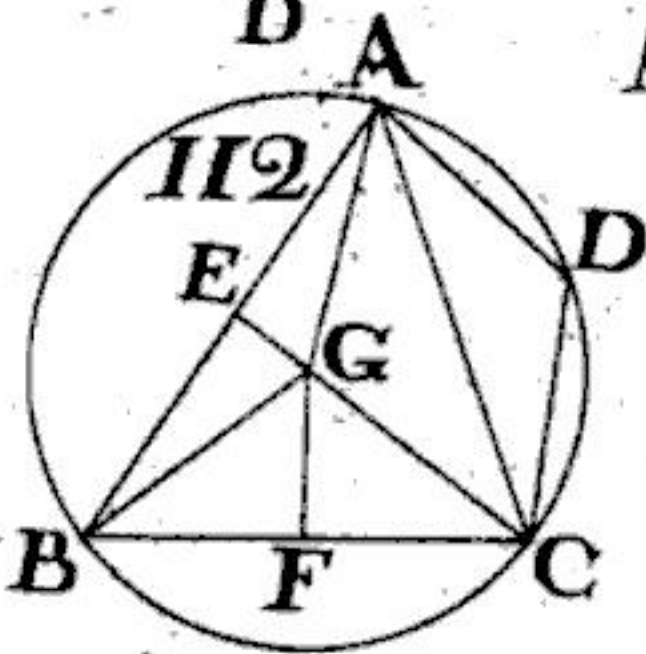
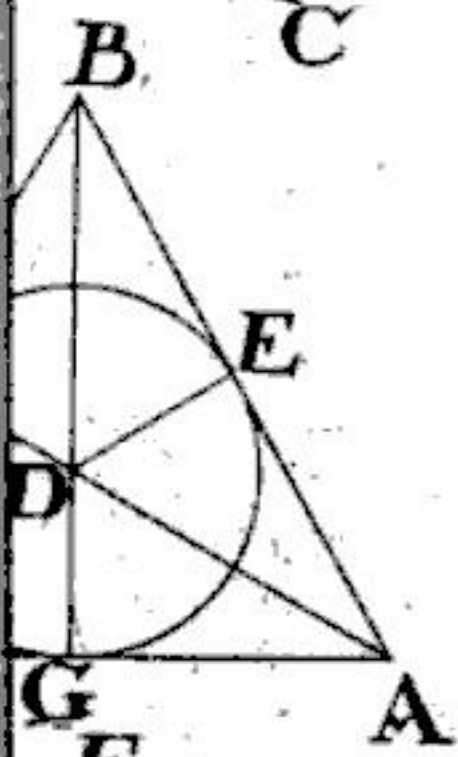
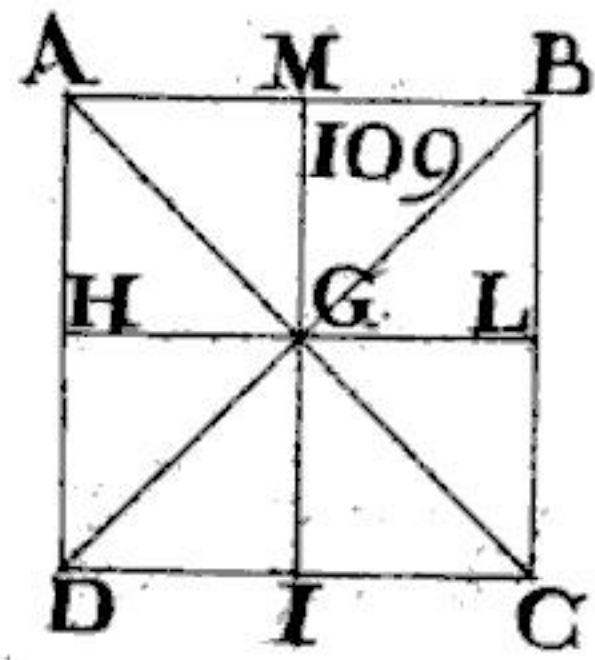
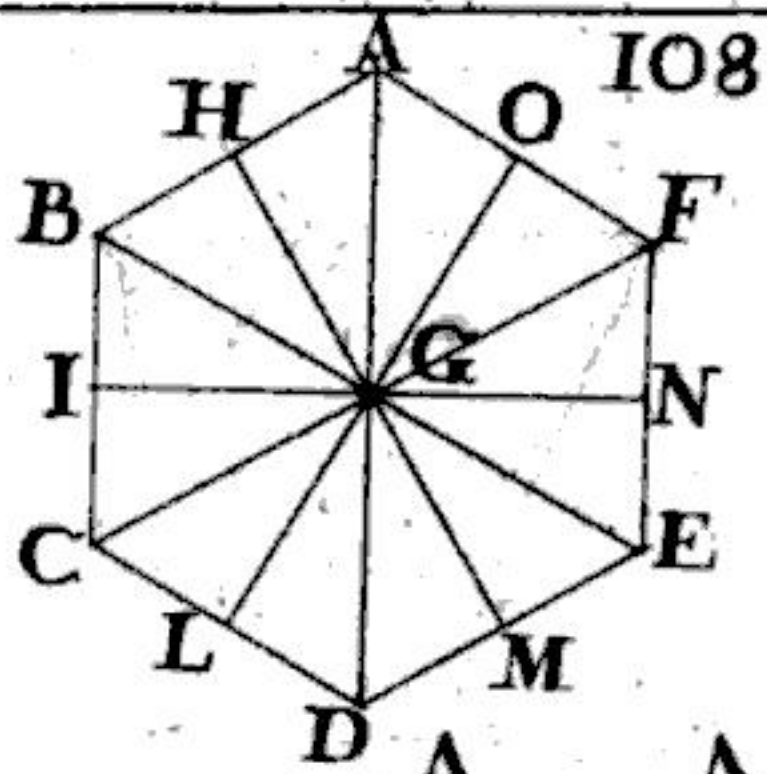
Tav. III.

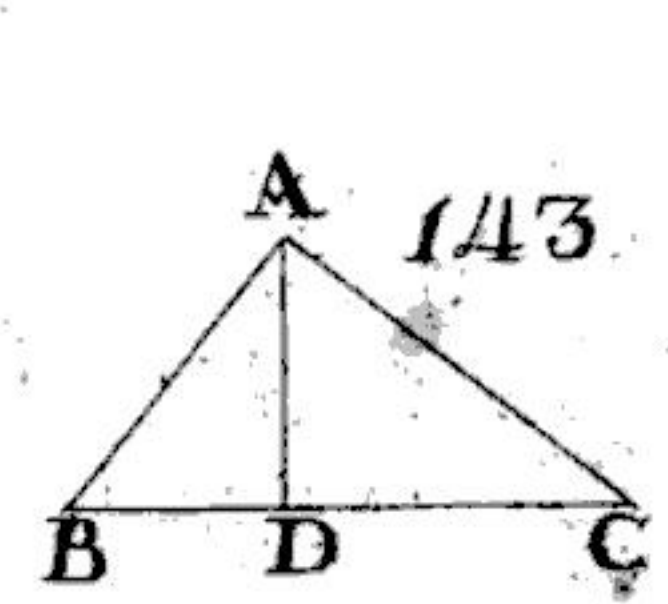
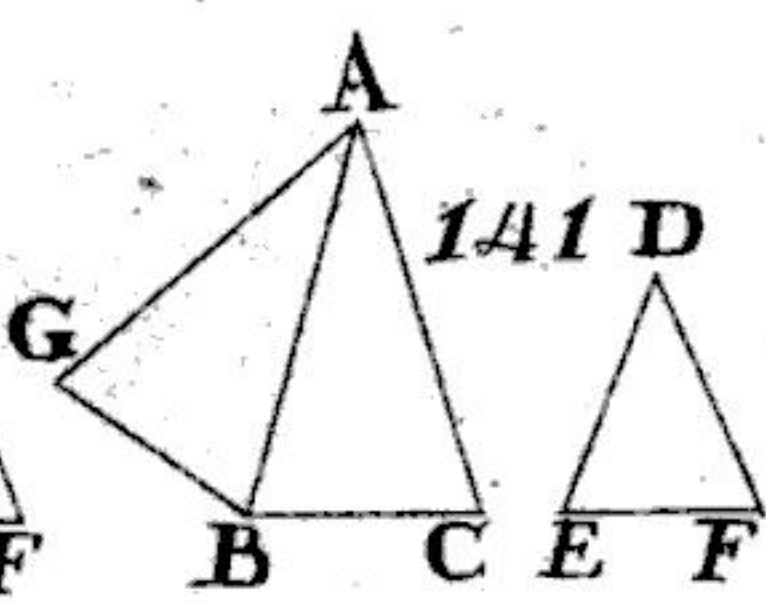
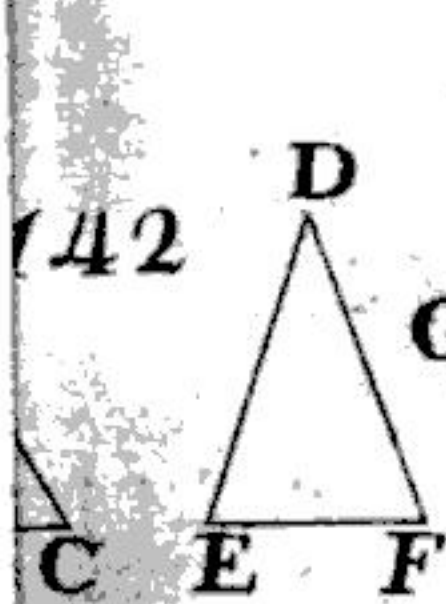
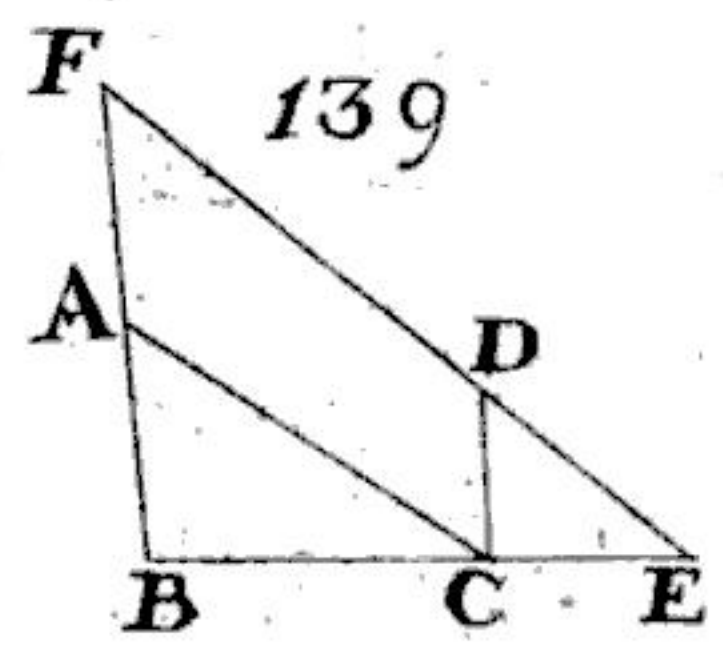
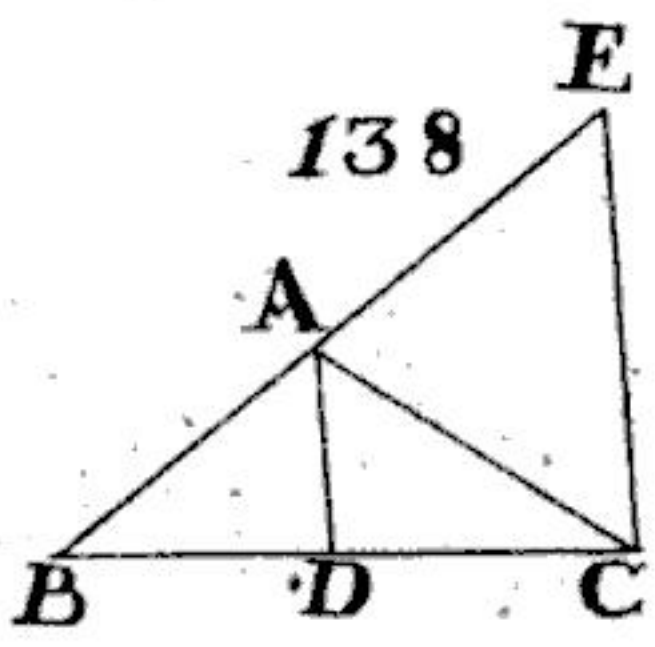
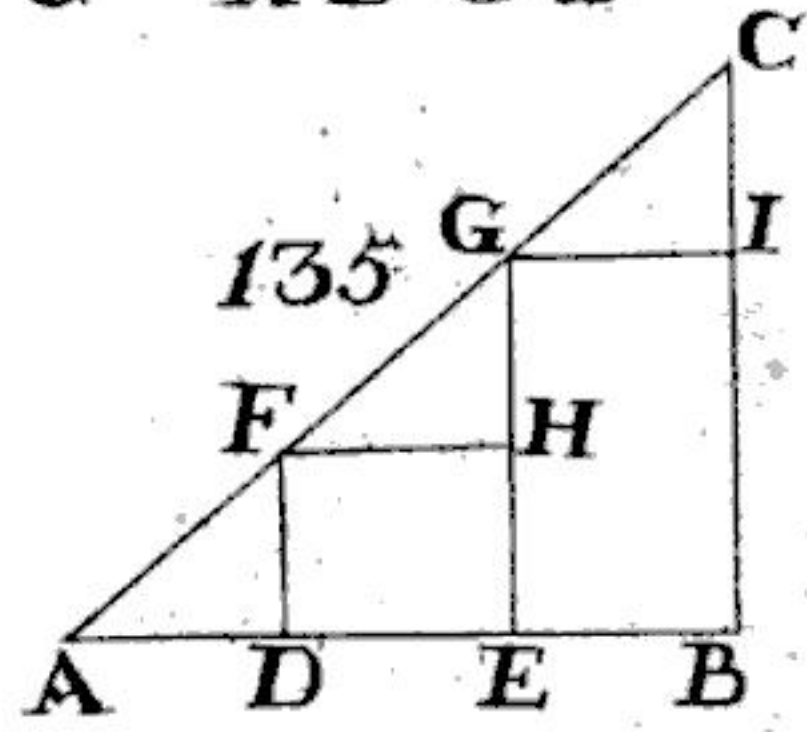
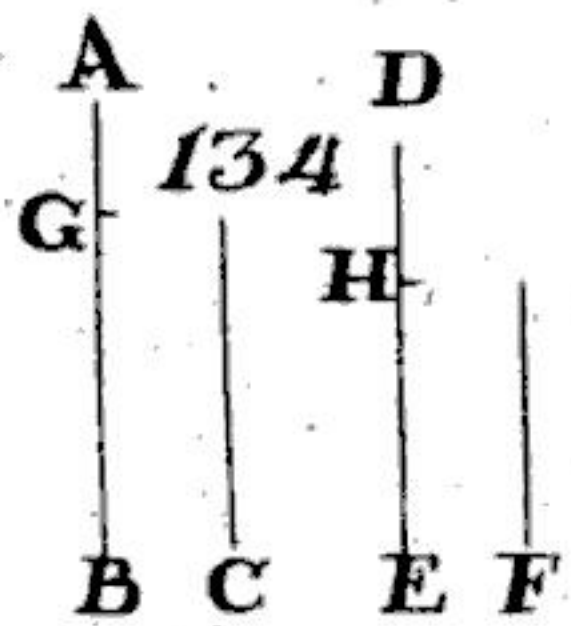
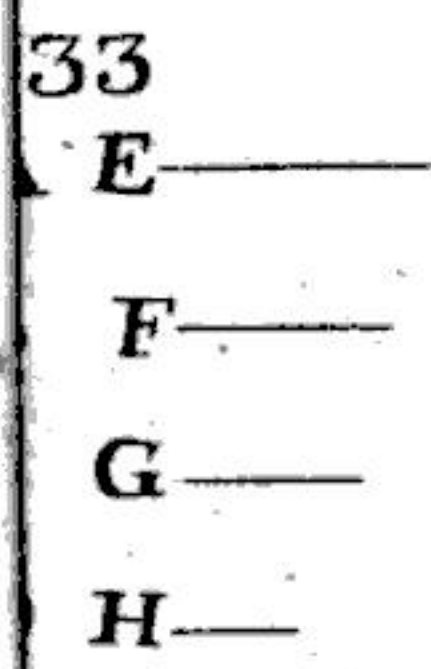
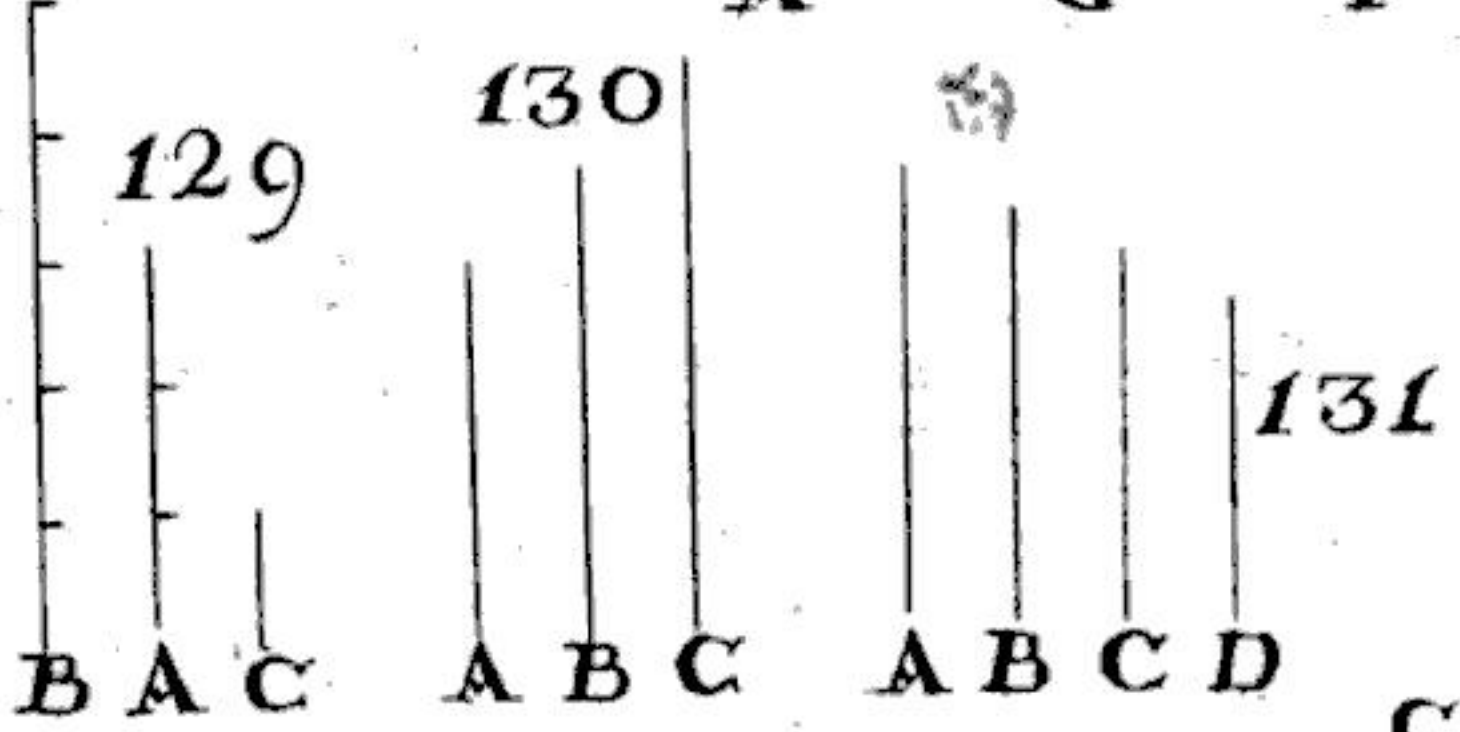
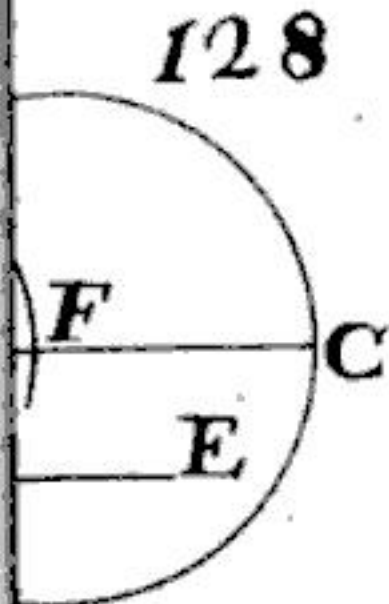
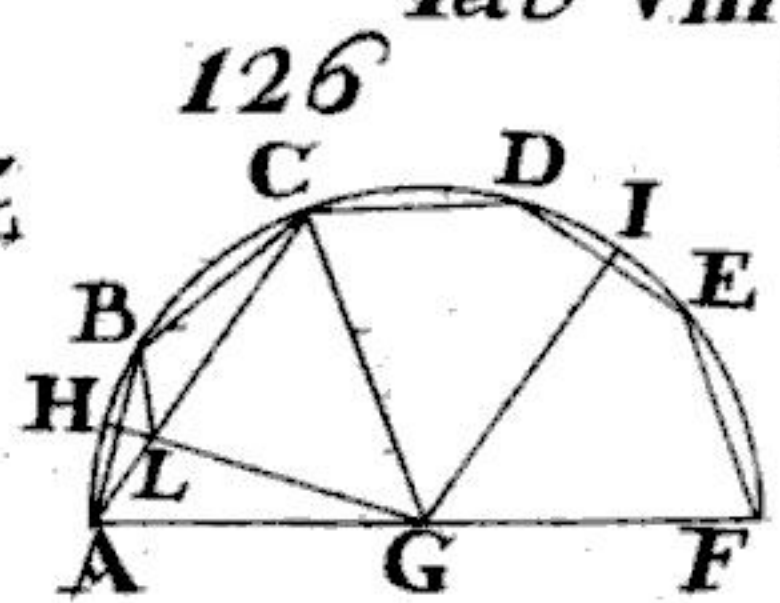
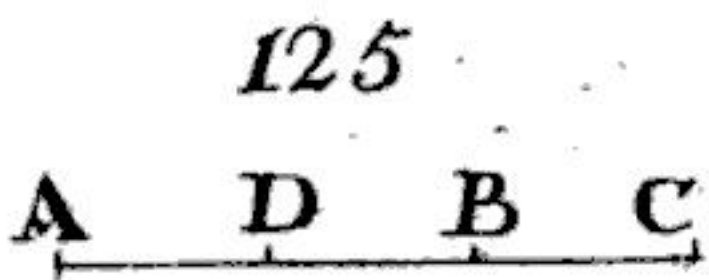
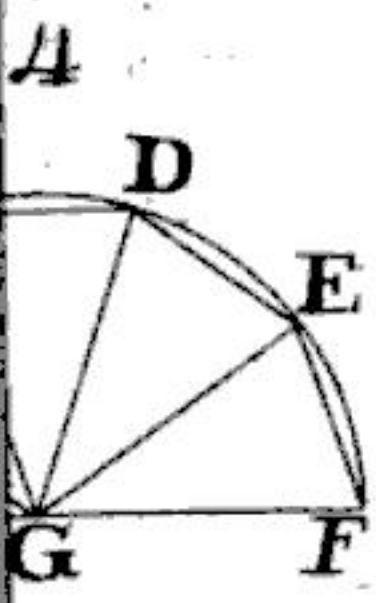


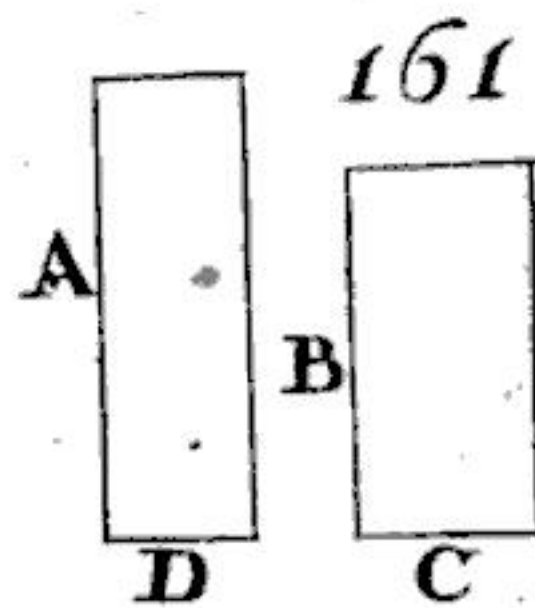
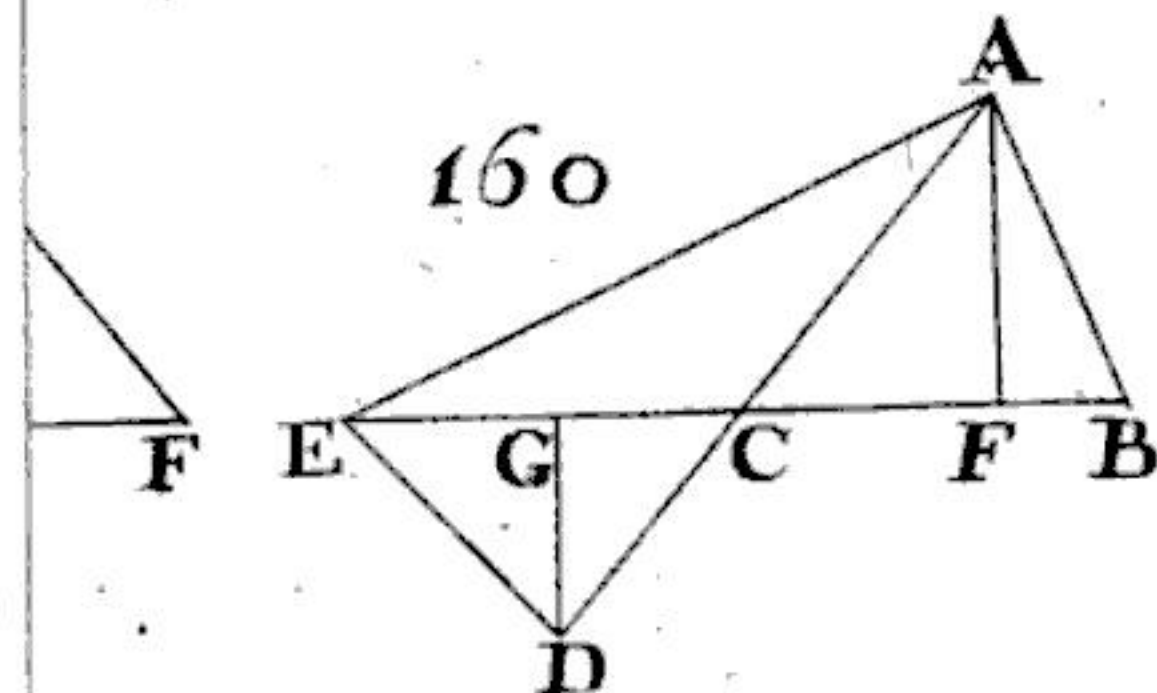
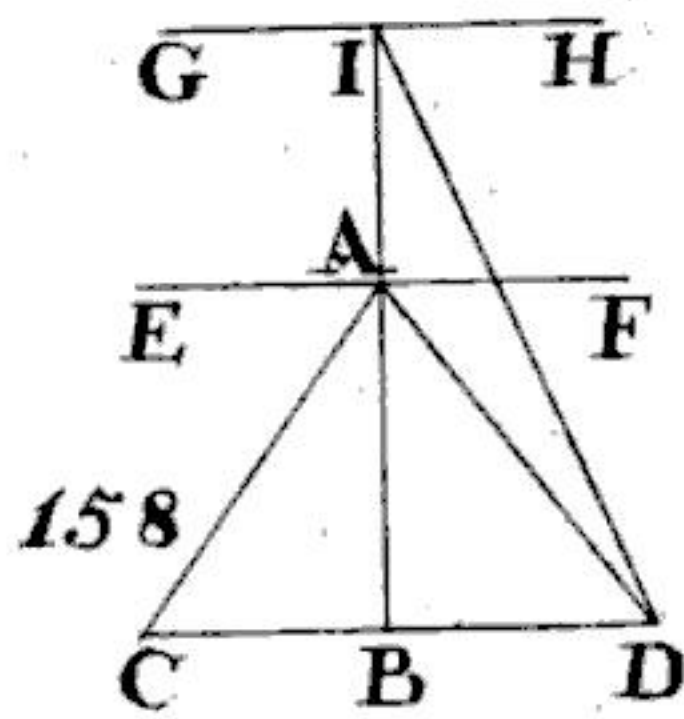
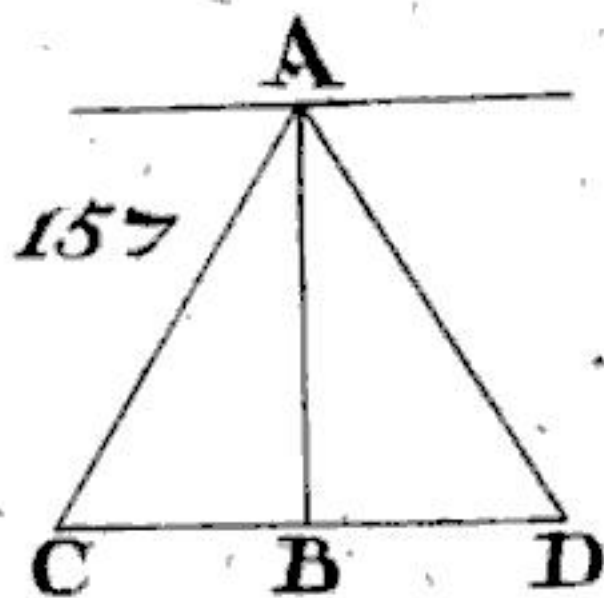
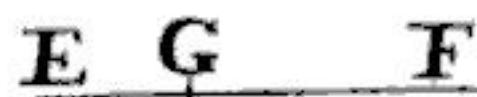
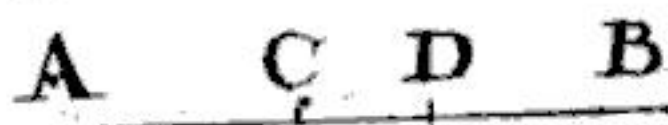
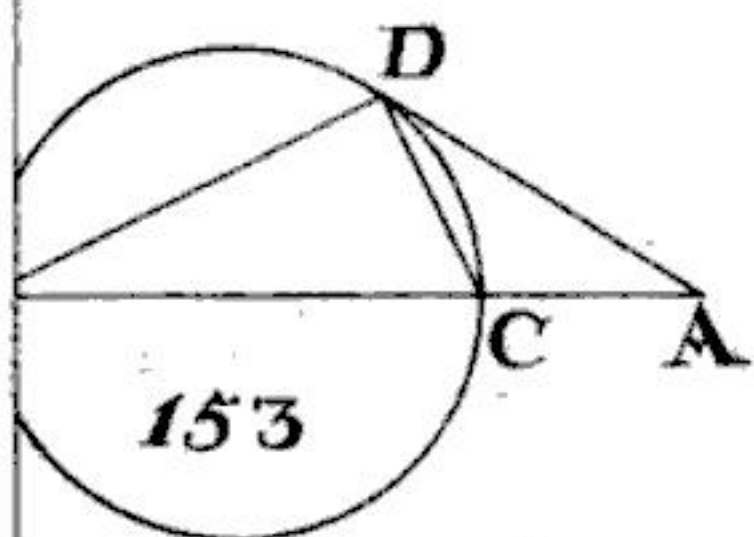
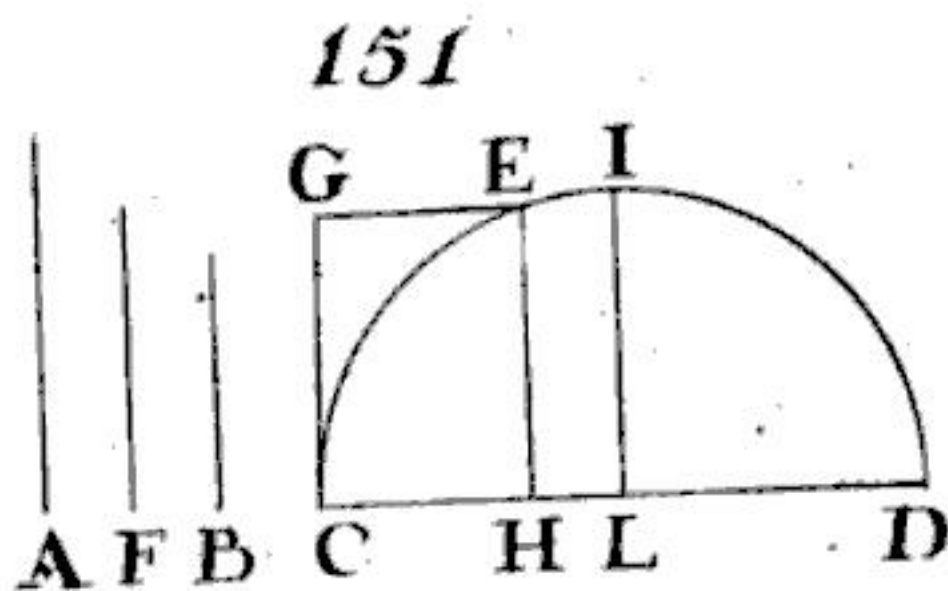
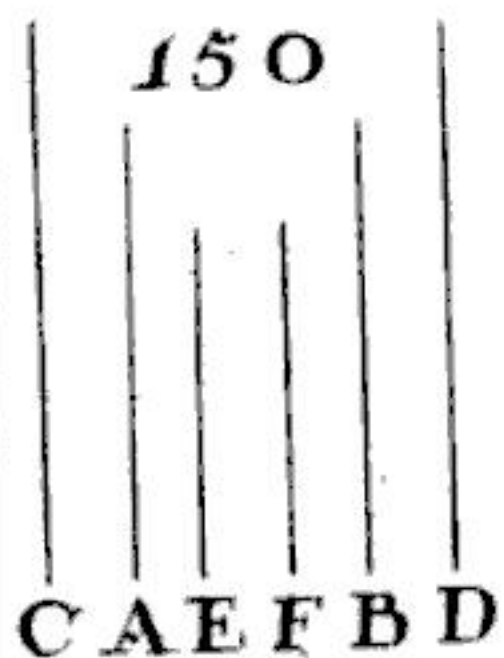
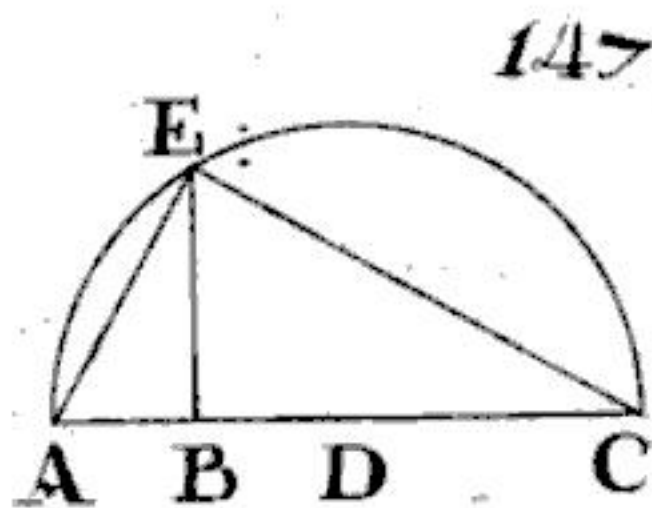
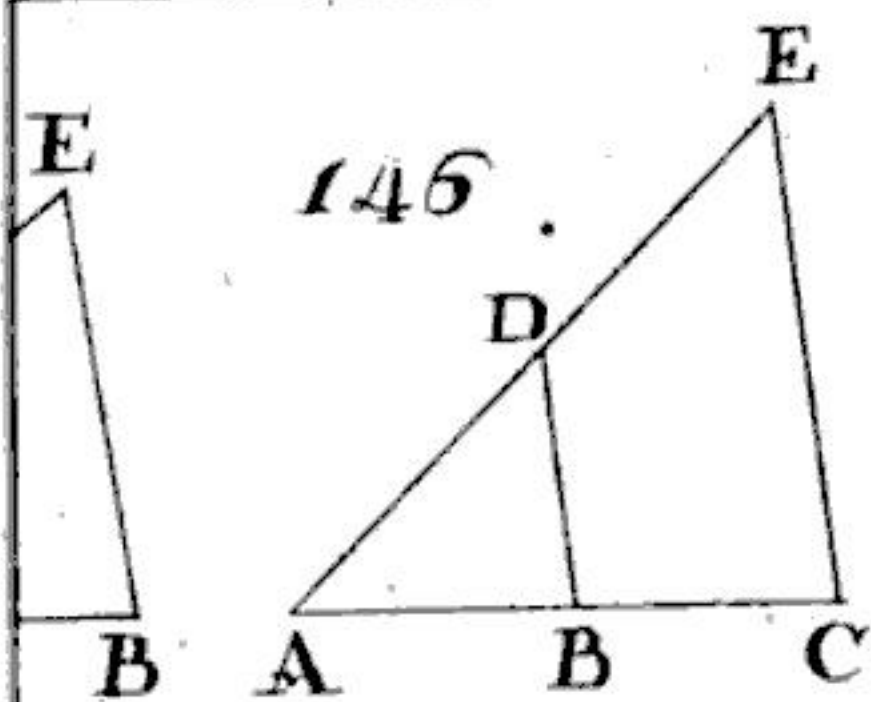


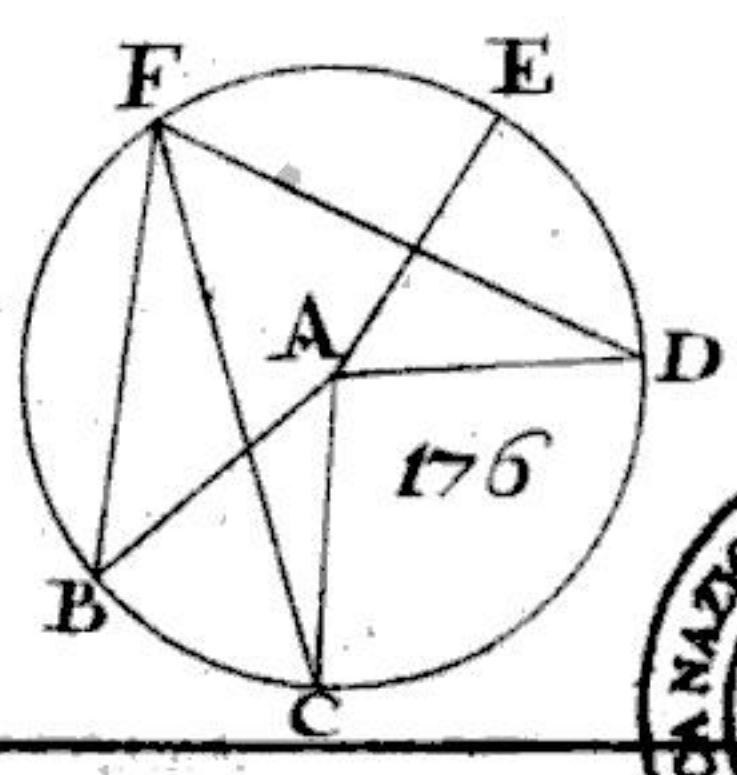
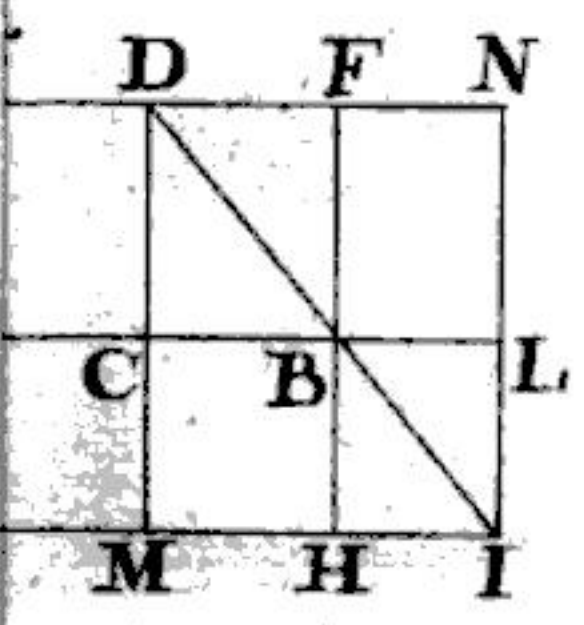
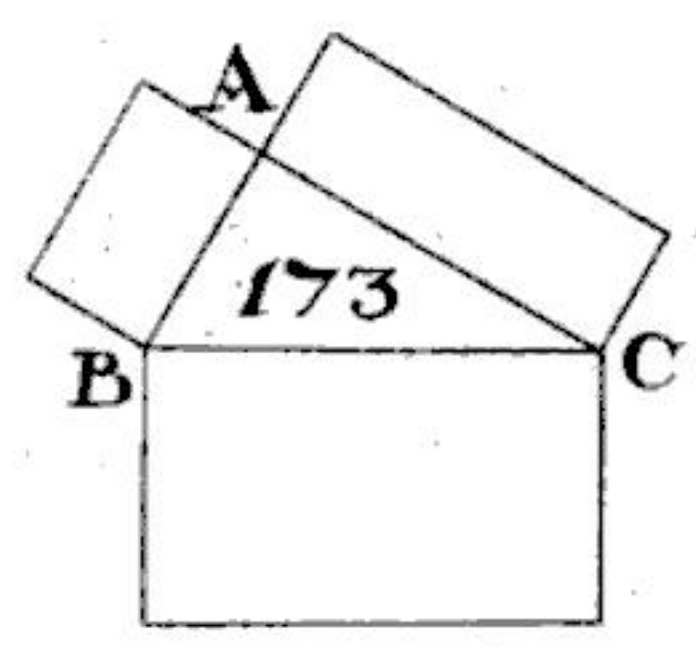
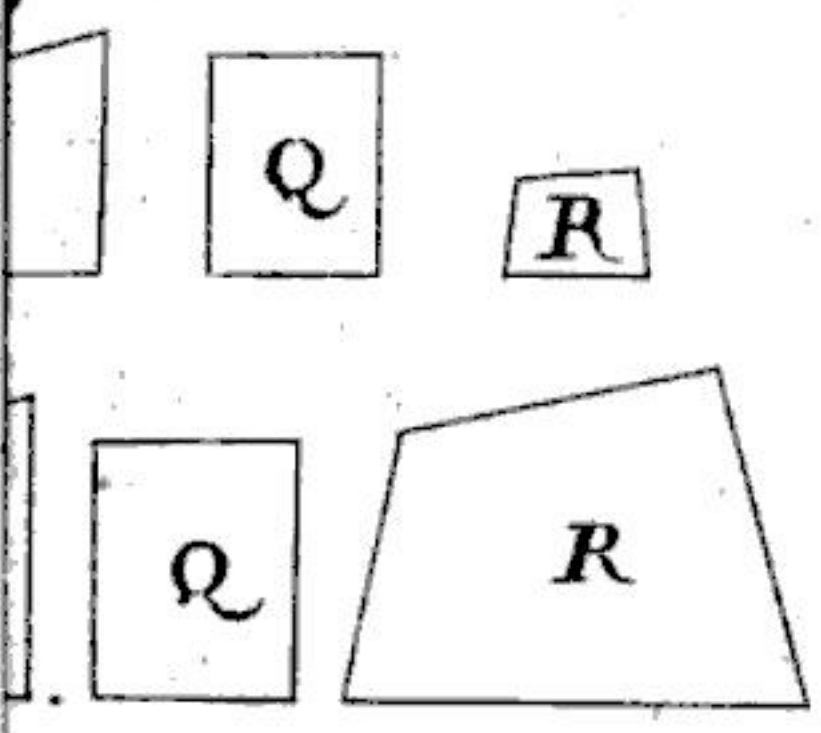
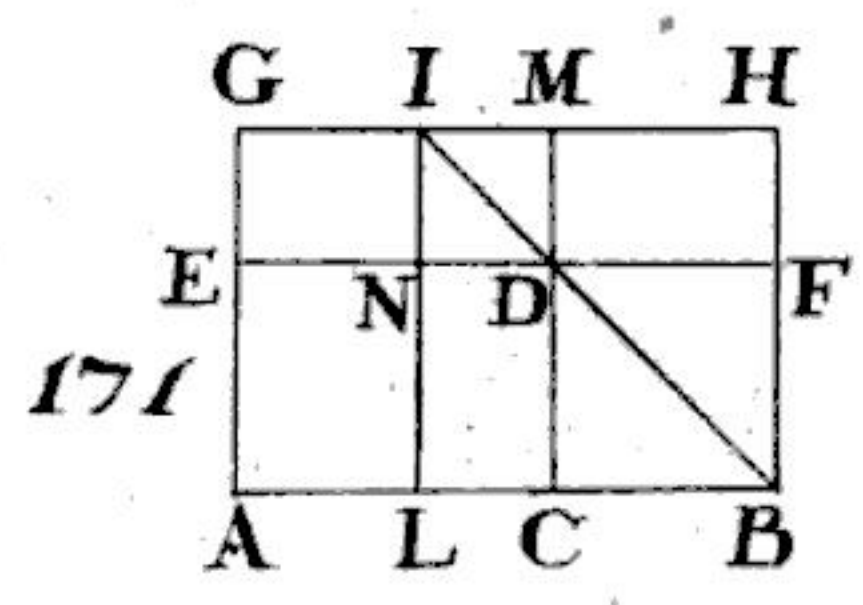
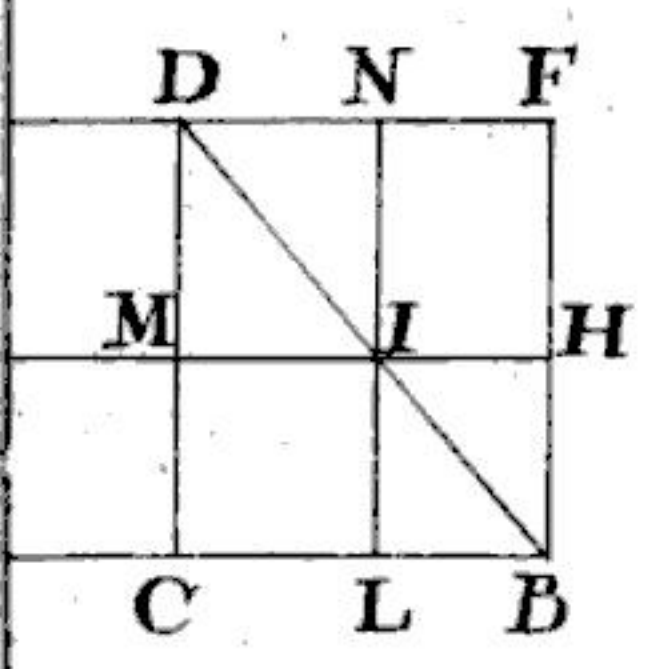
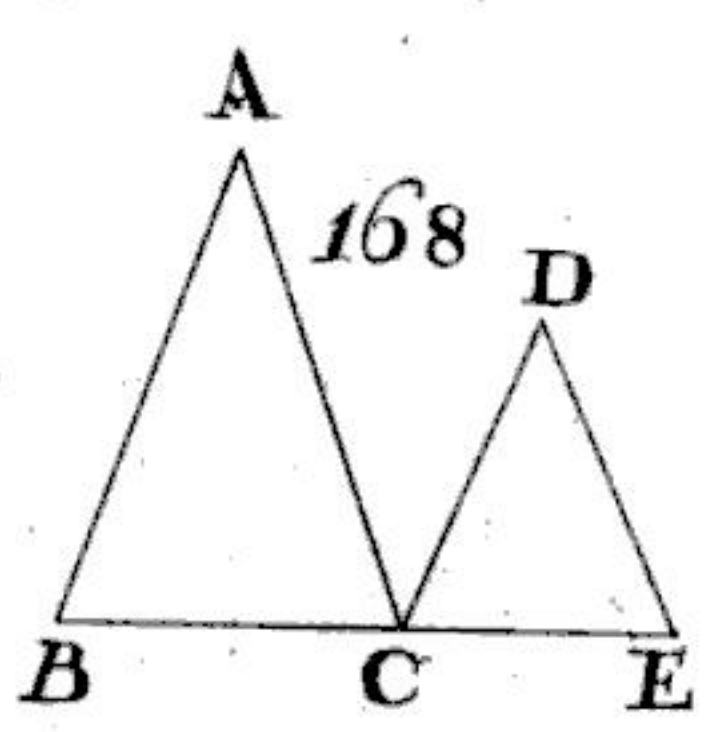
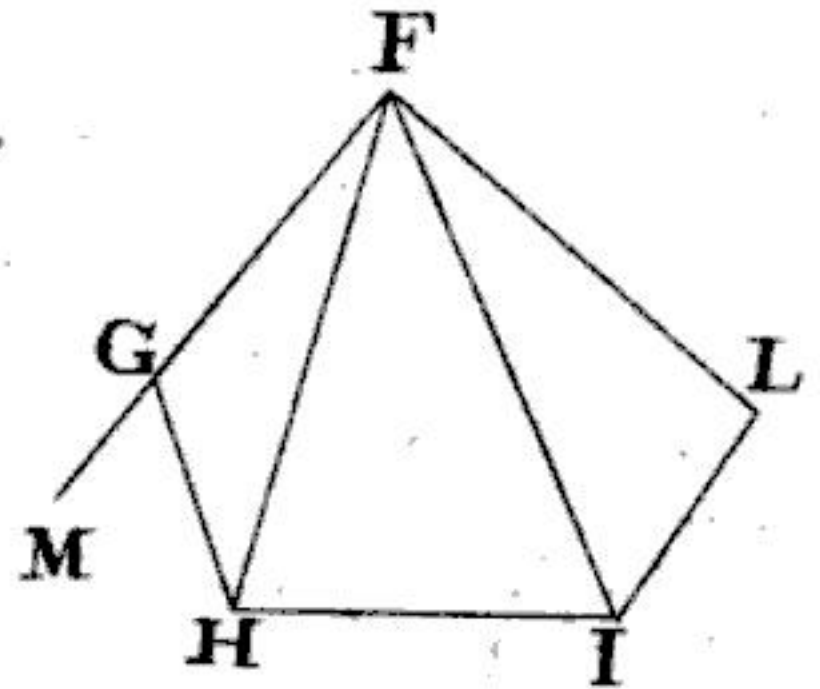
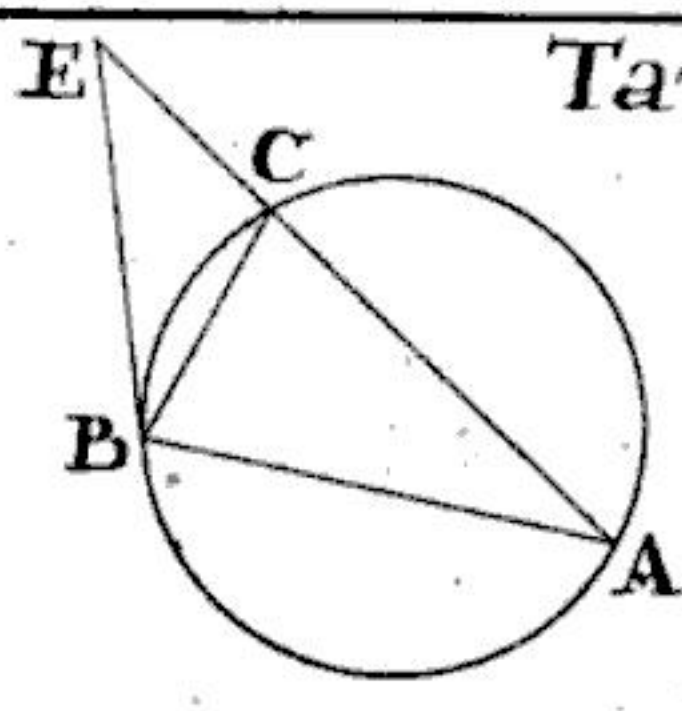
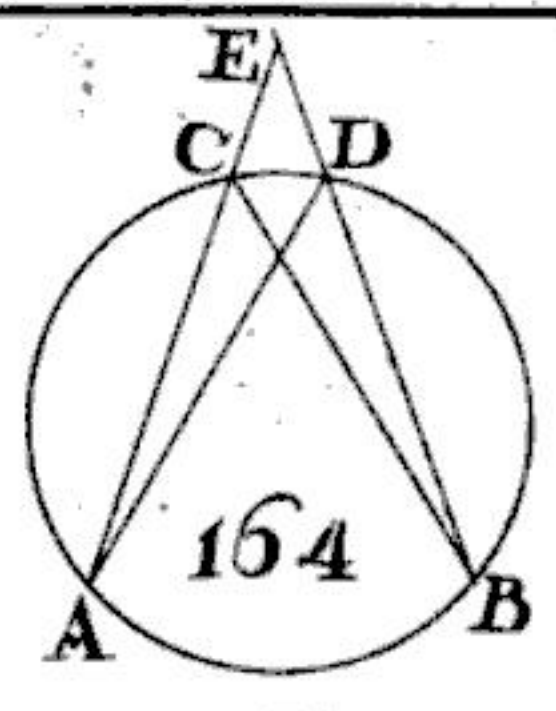
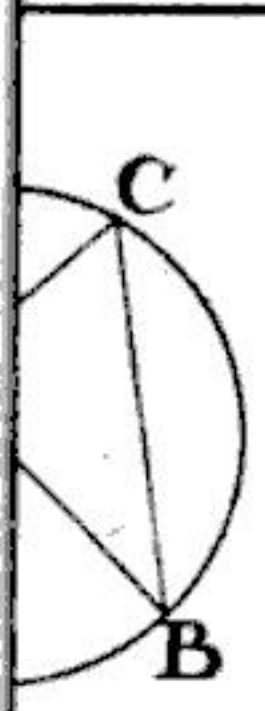




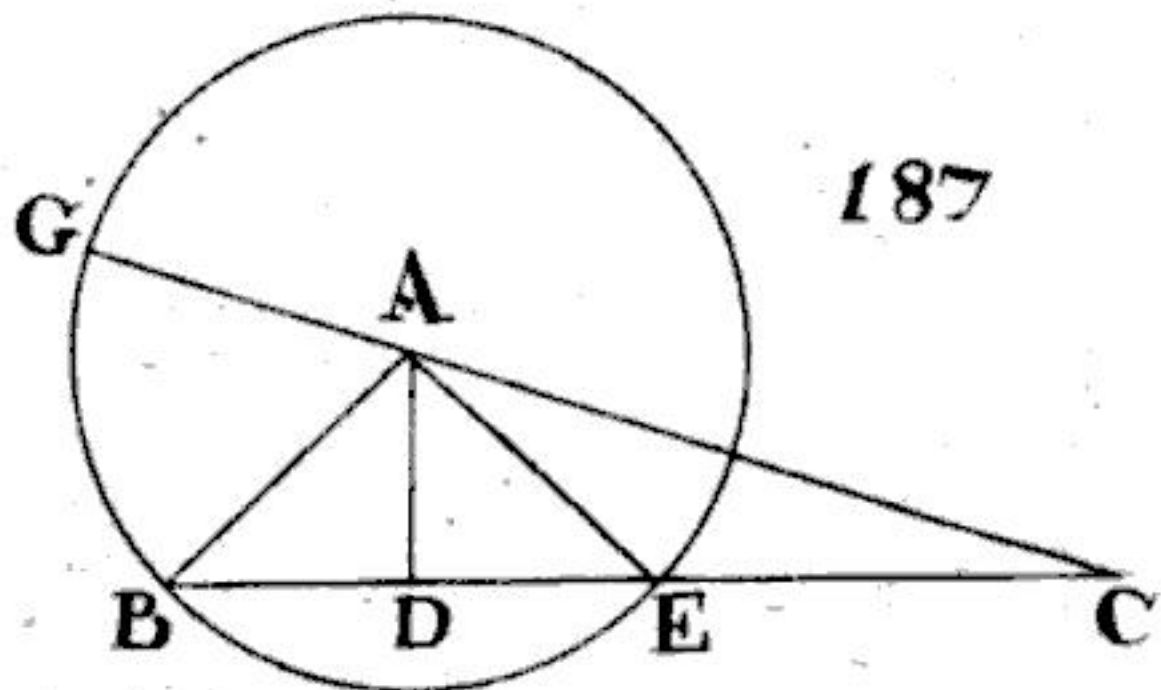
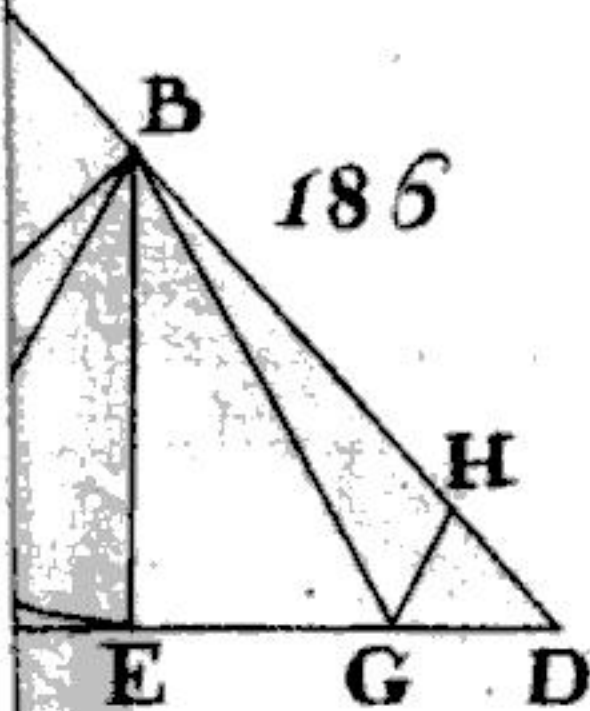
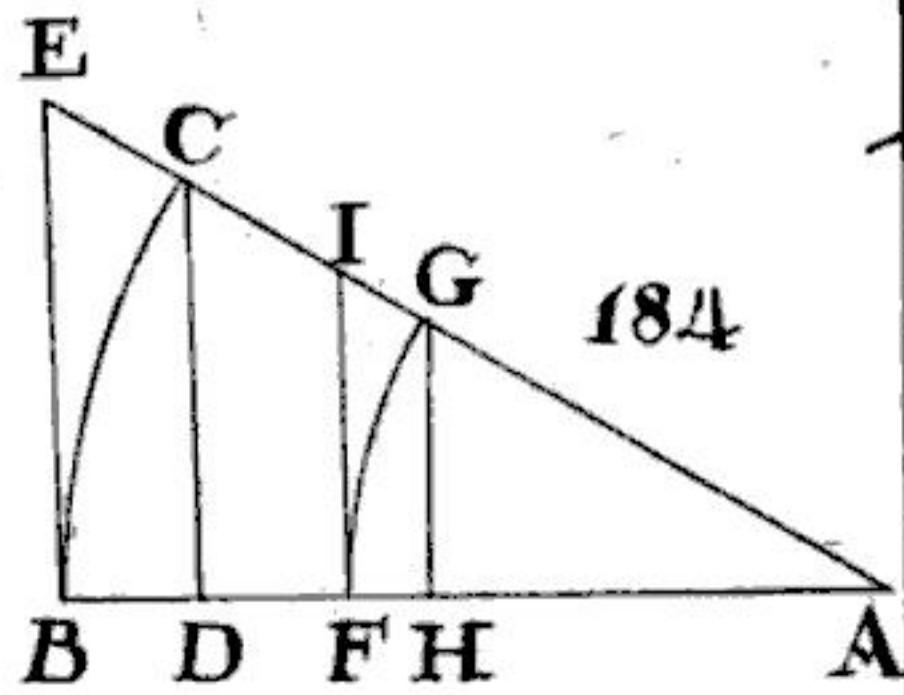
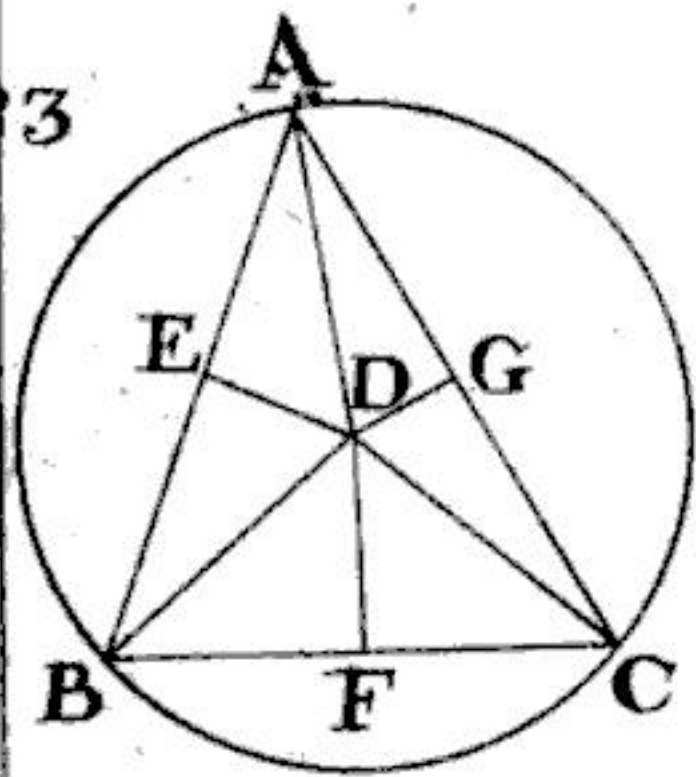
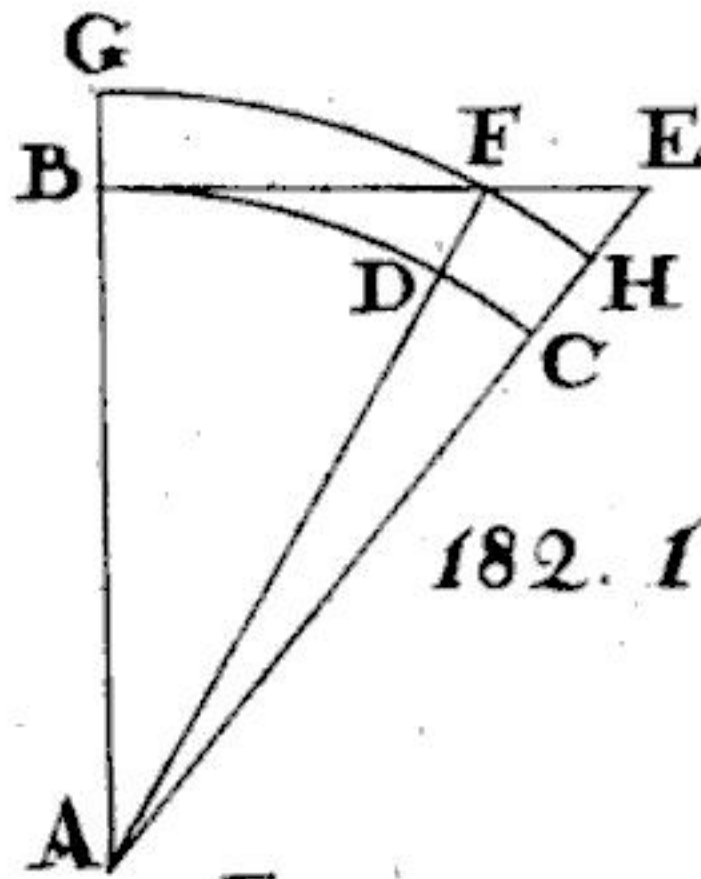
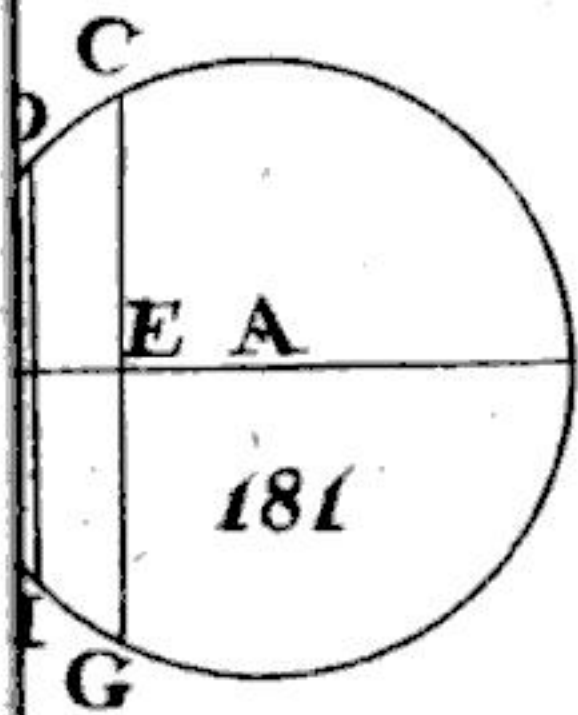
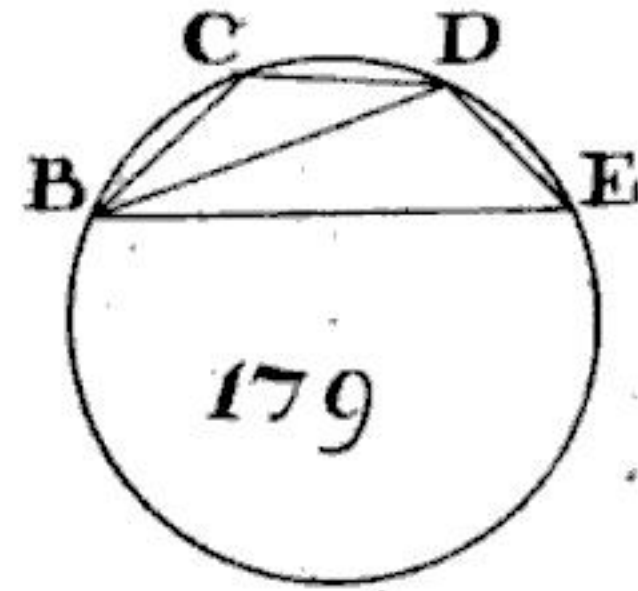
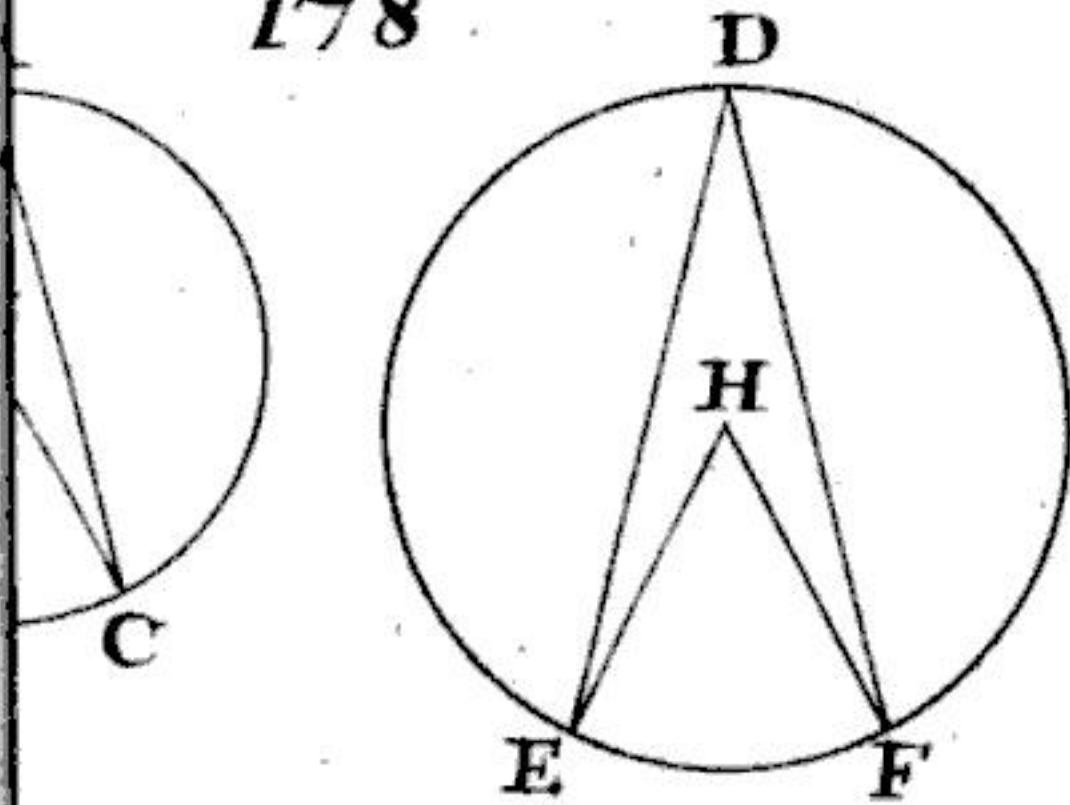


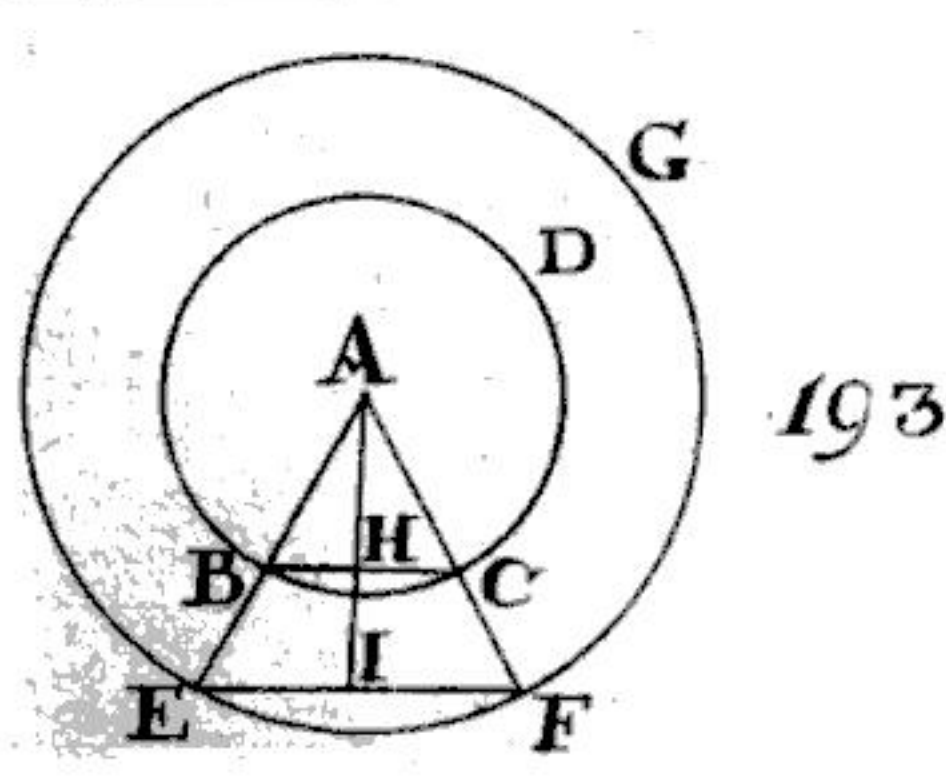
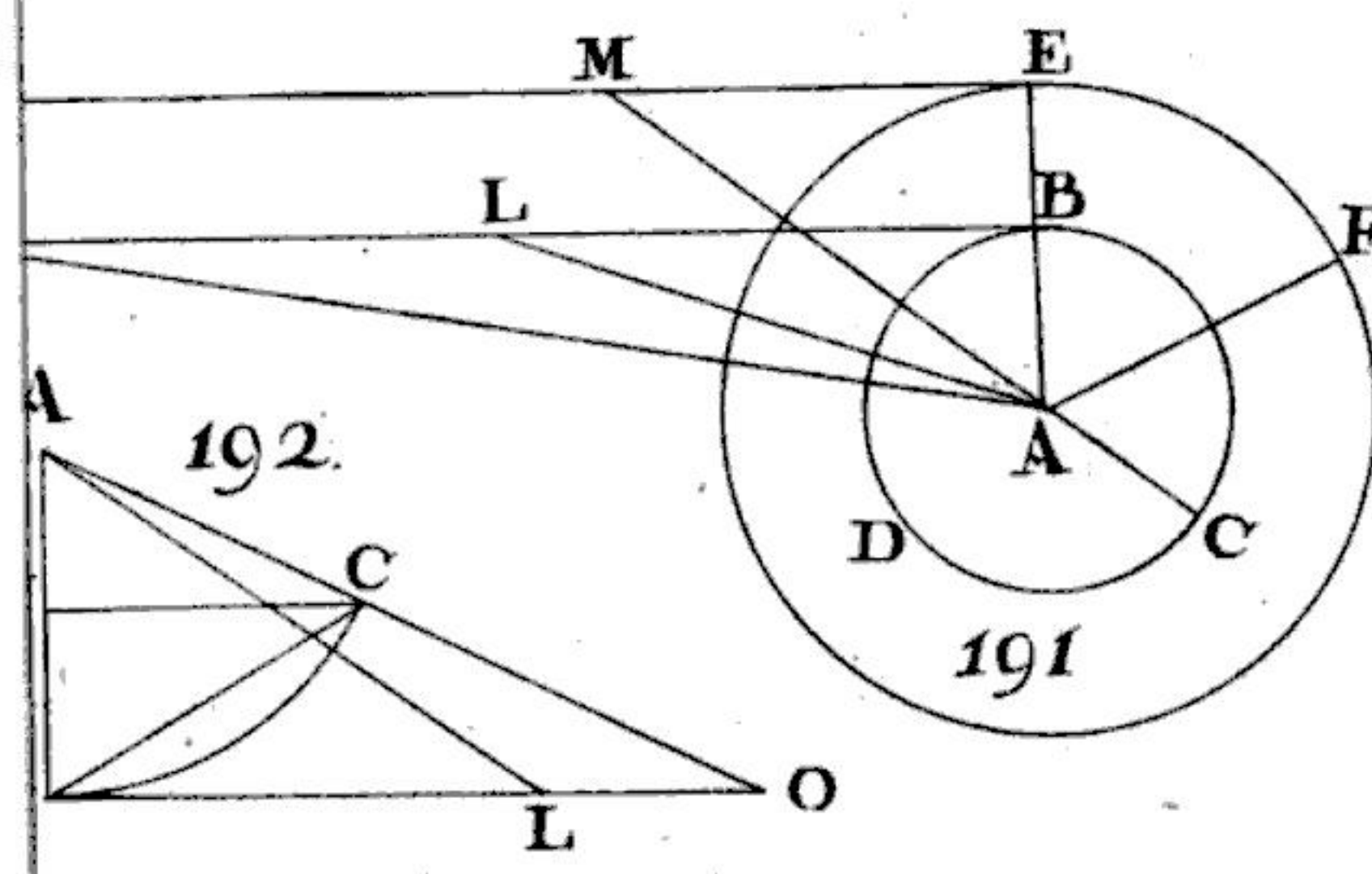
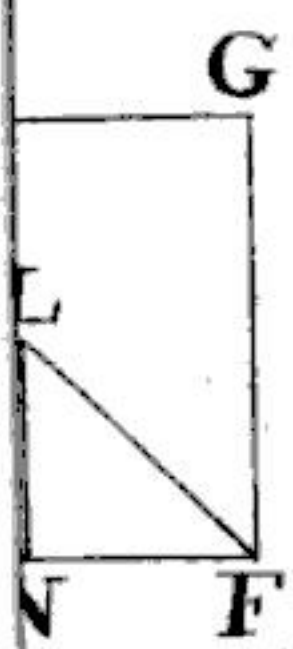
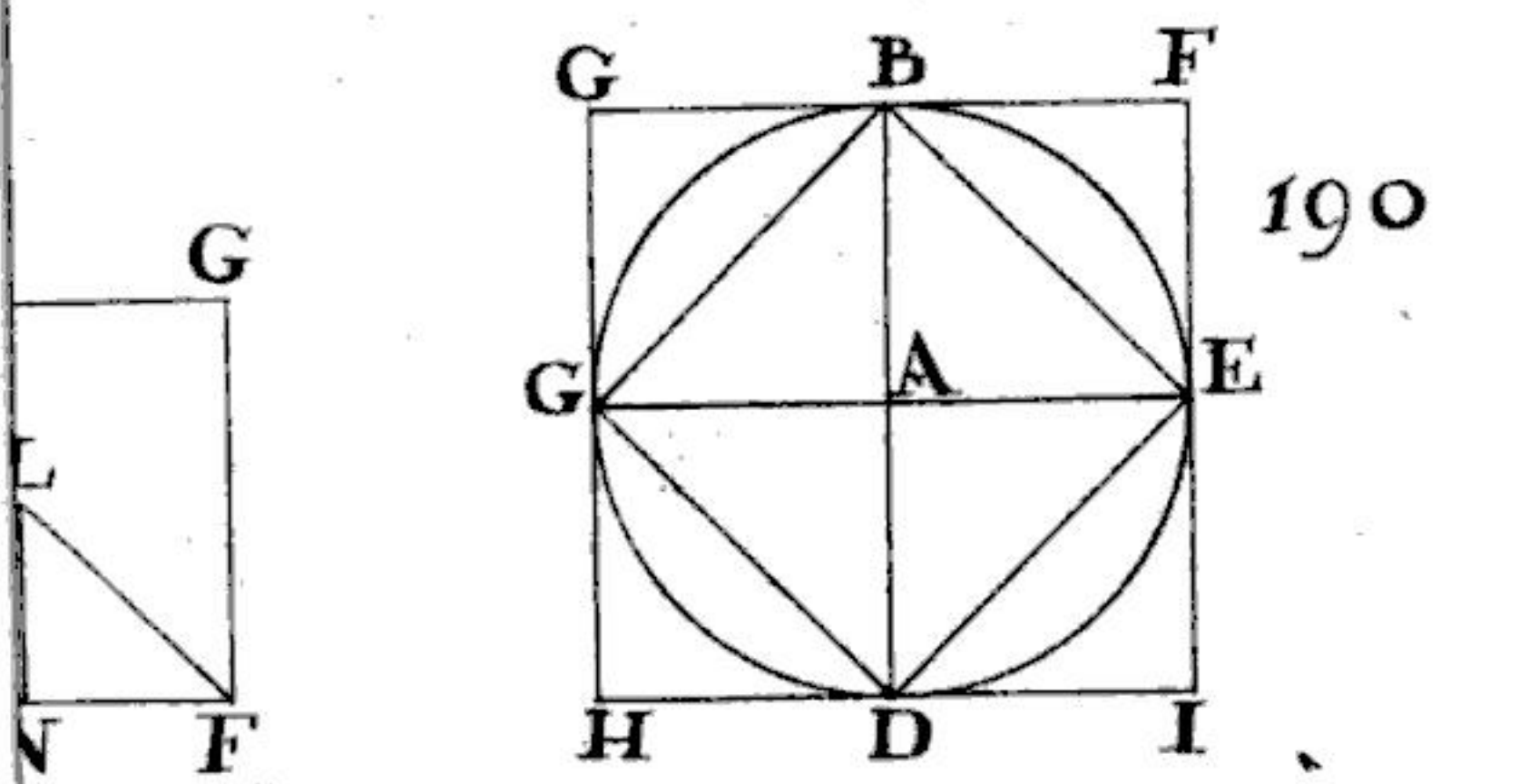


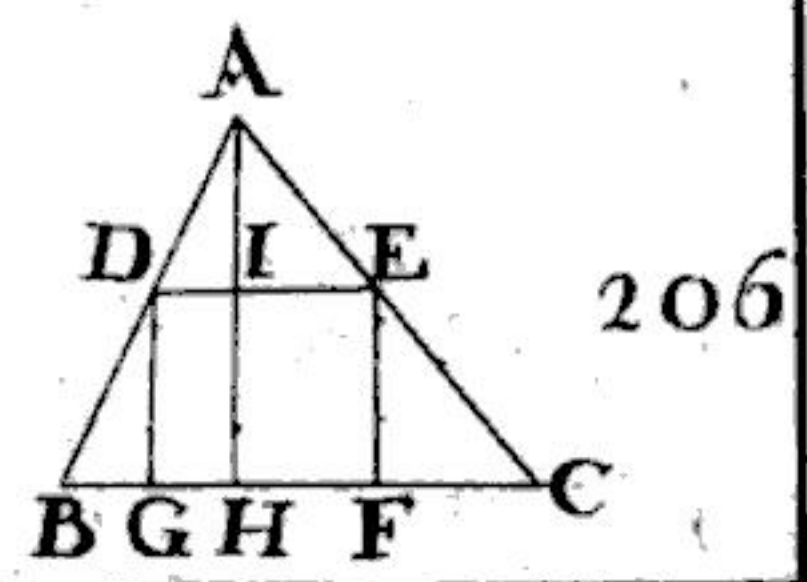
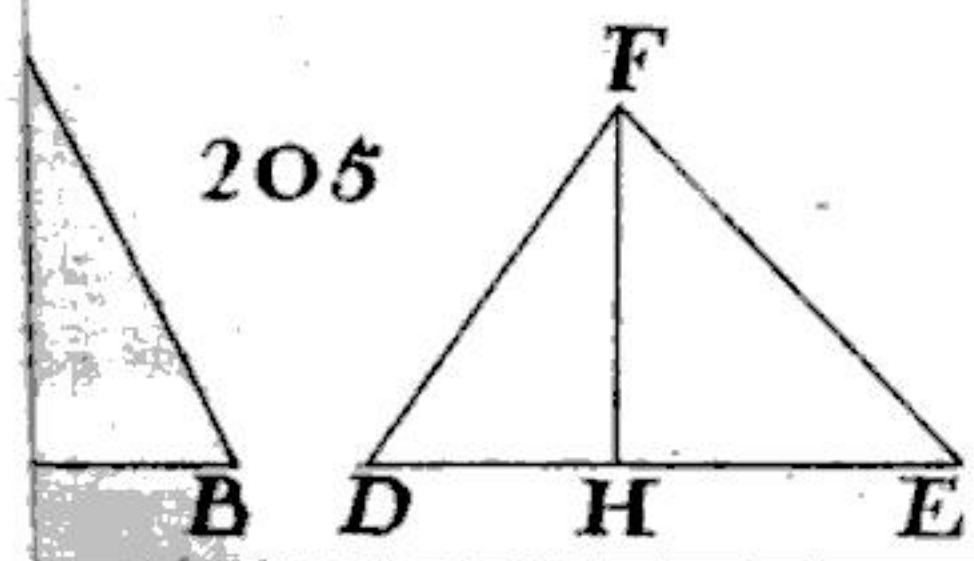
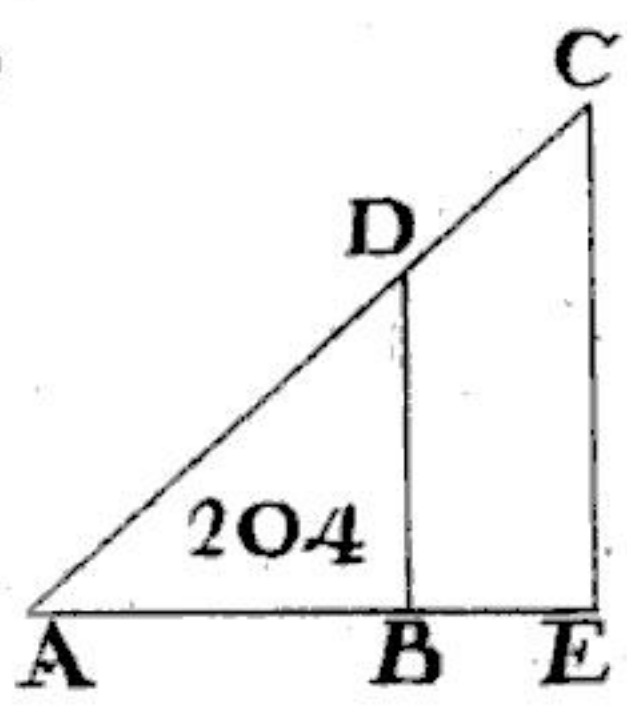
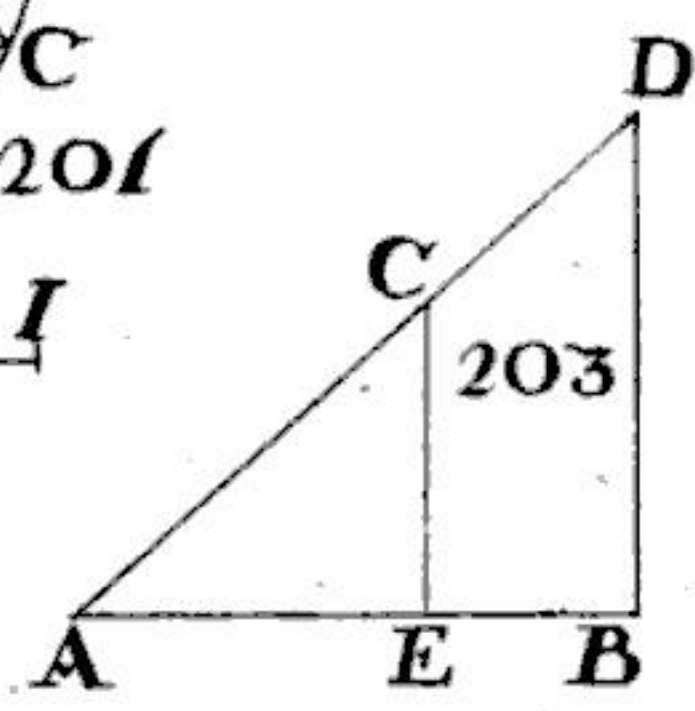
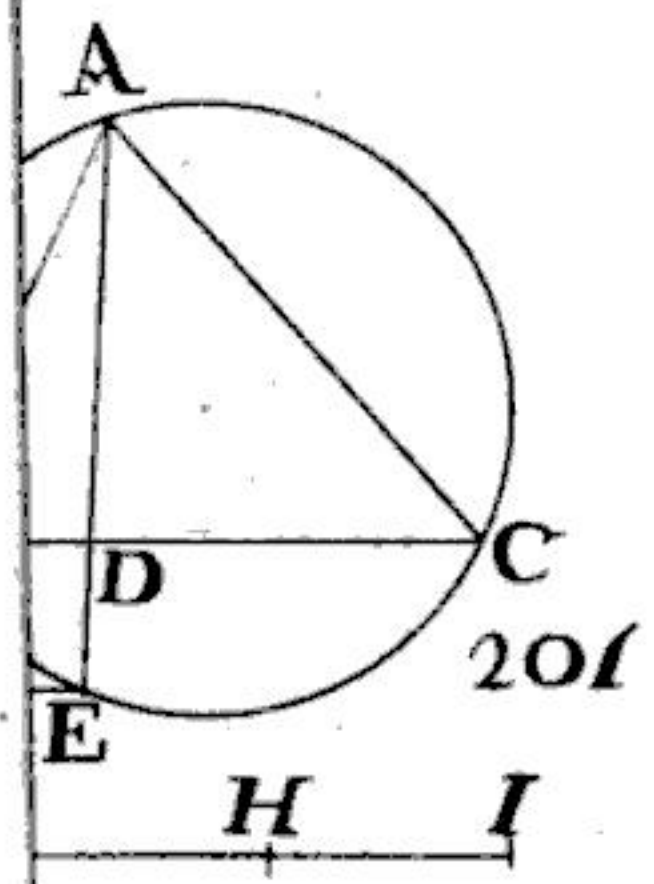
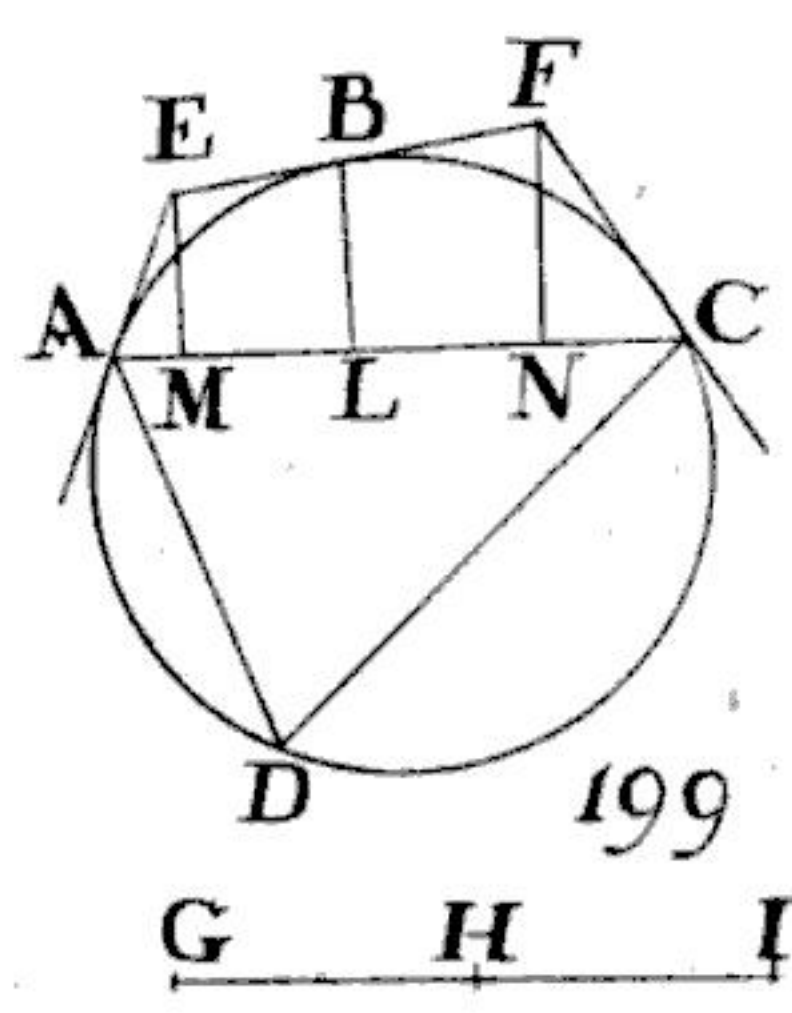
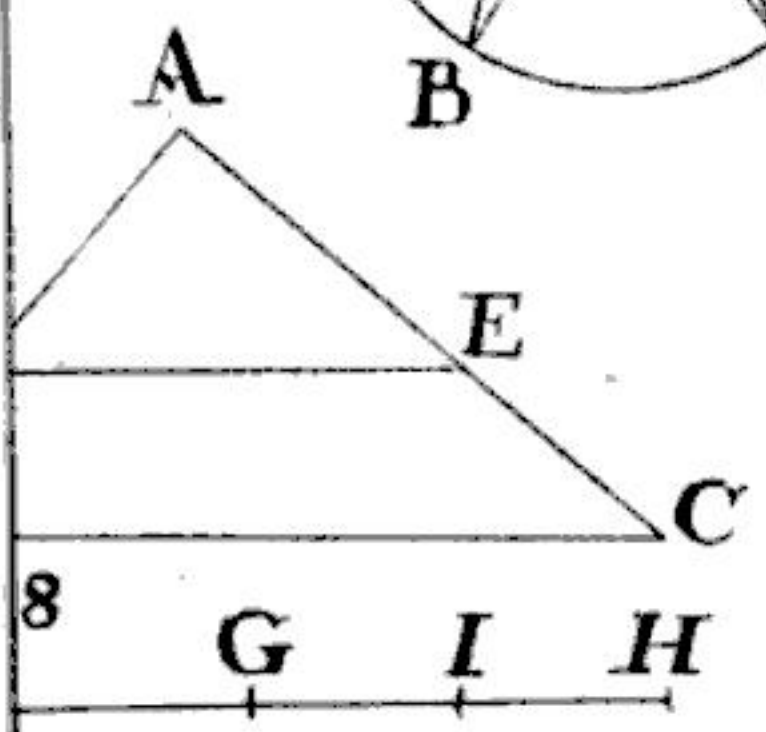
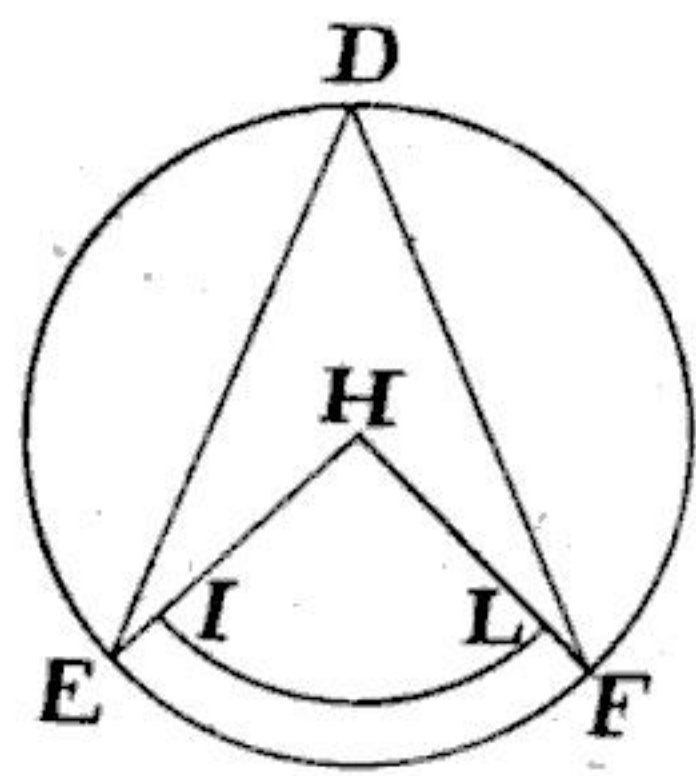
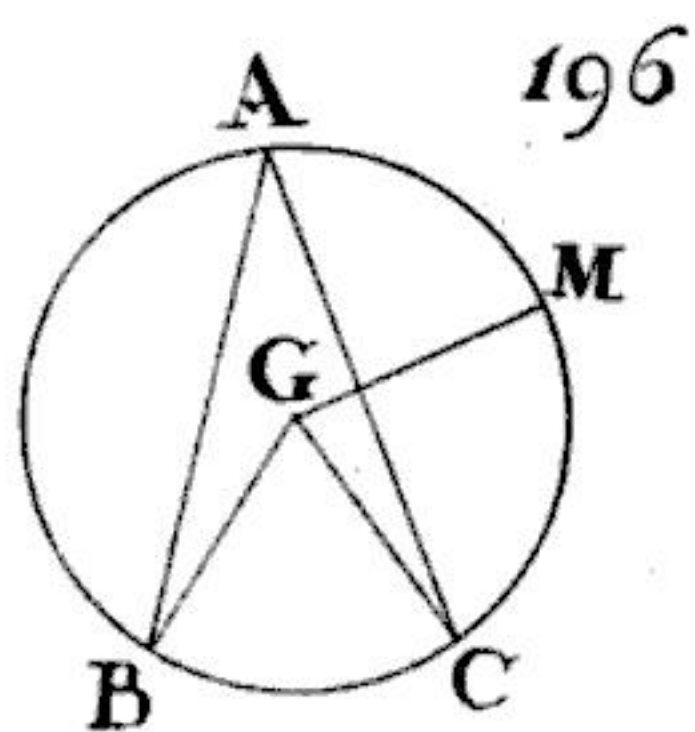


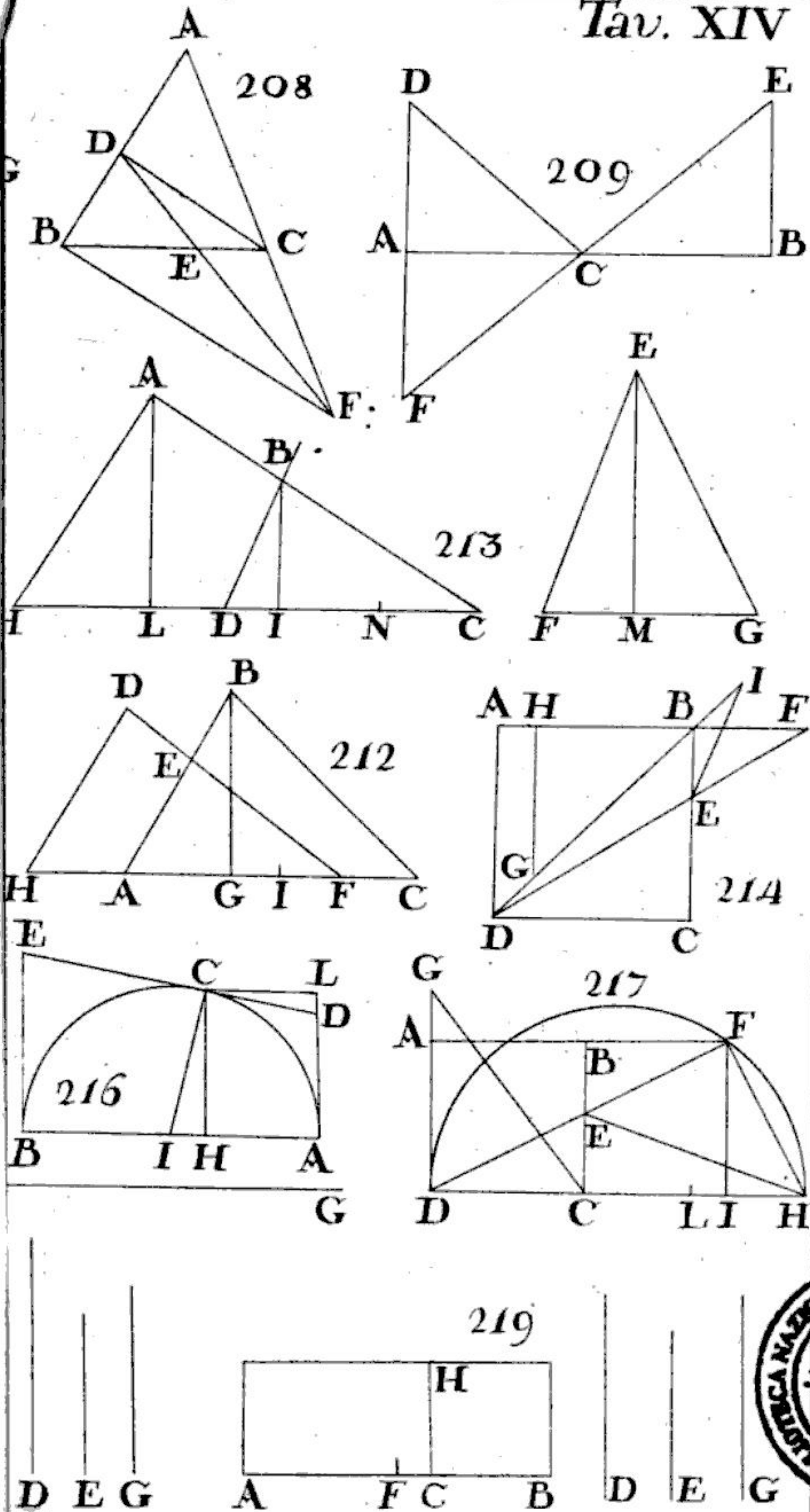


178

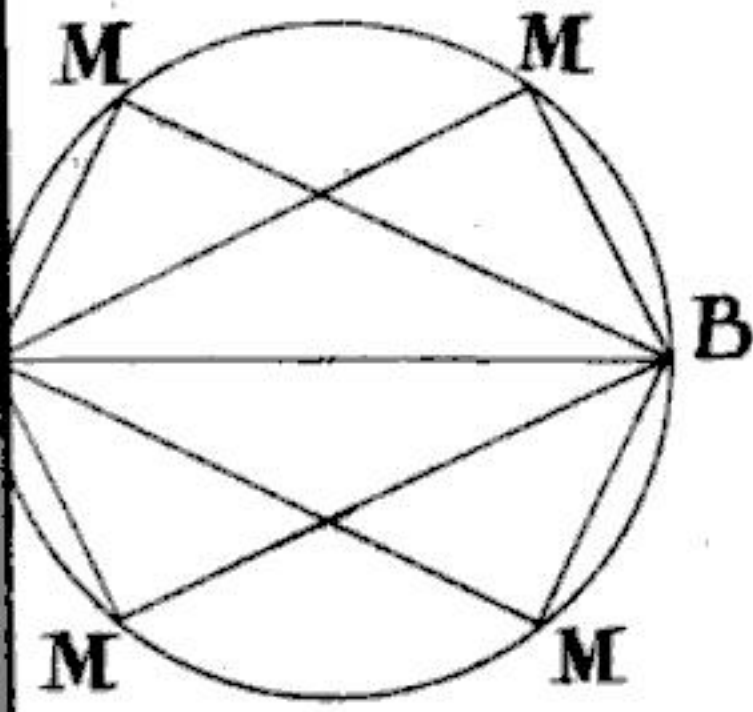




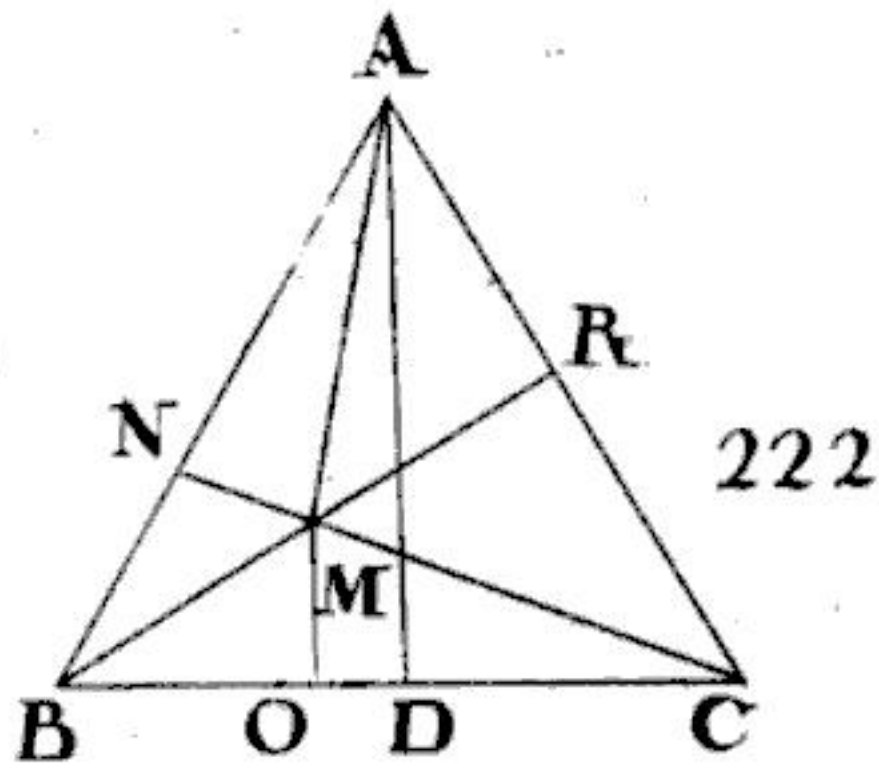




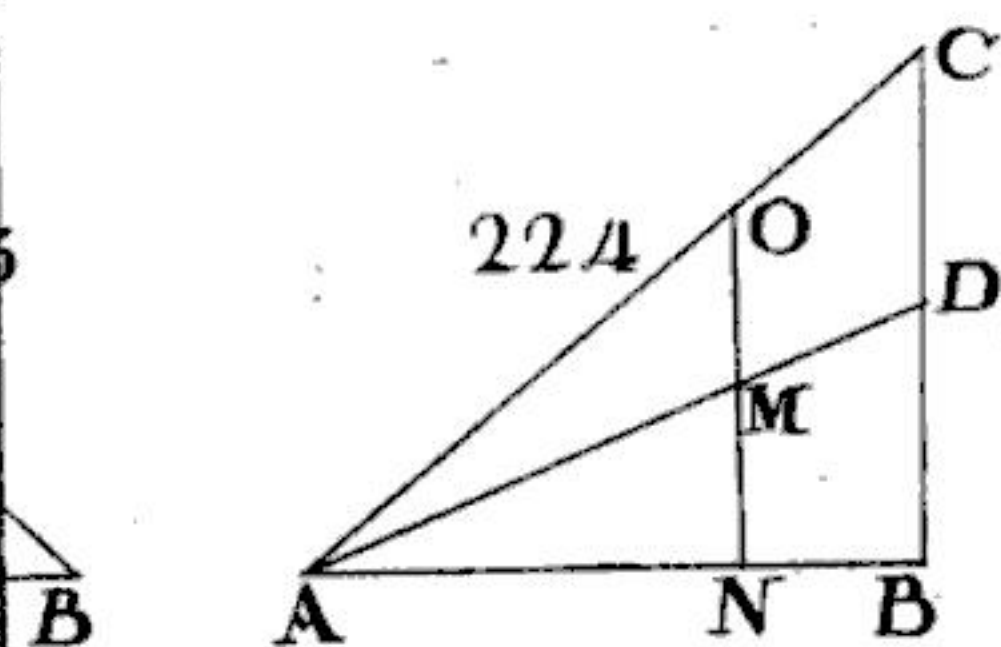
221



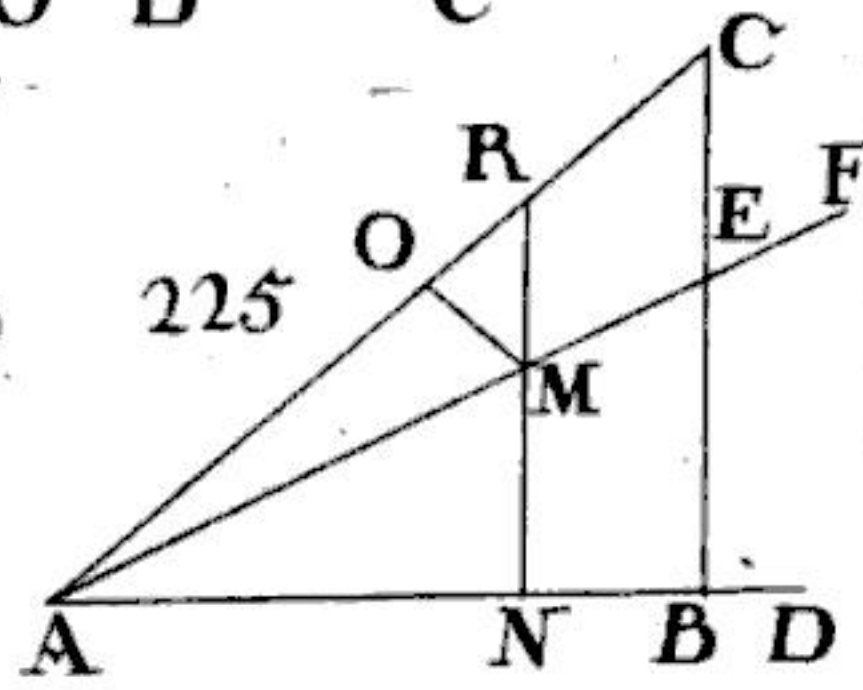
Tav. XV



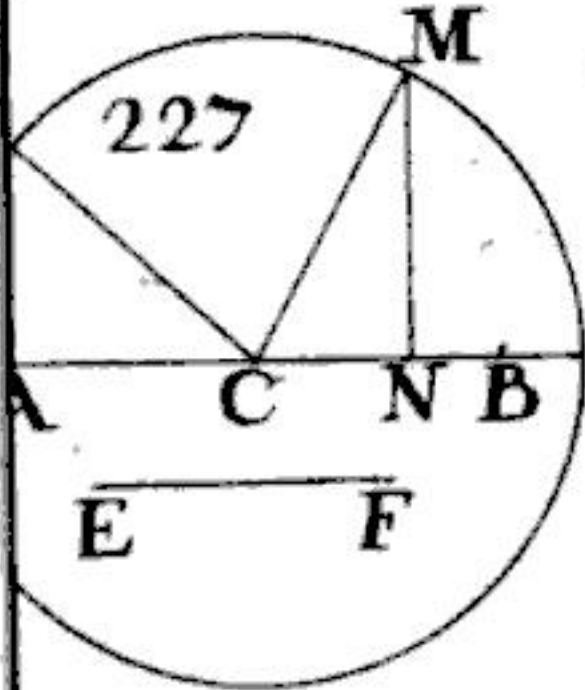
224



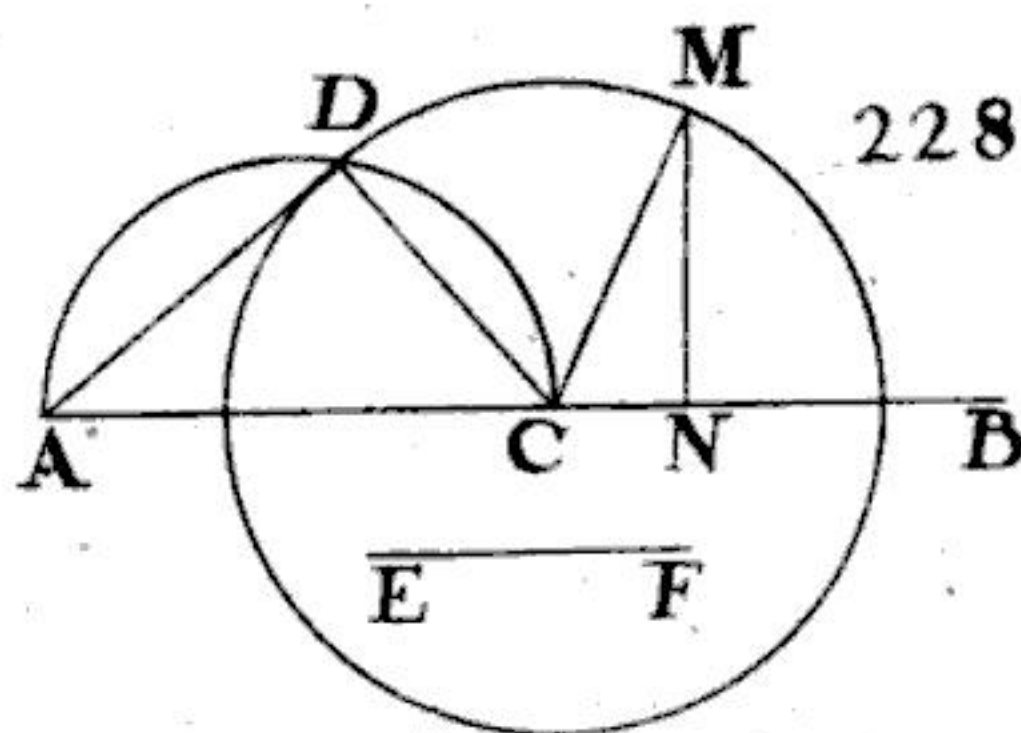
225



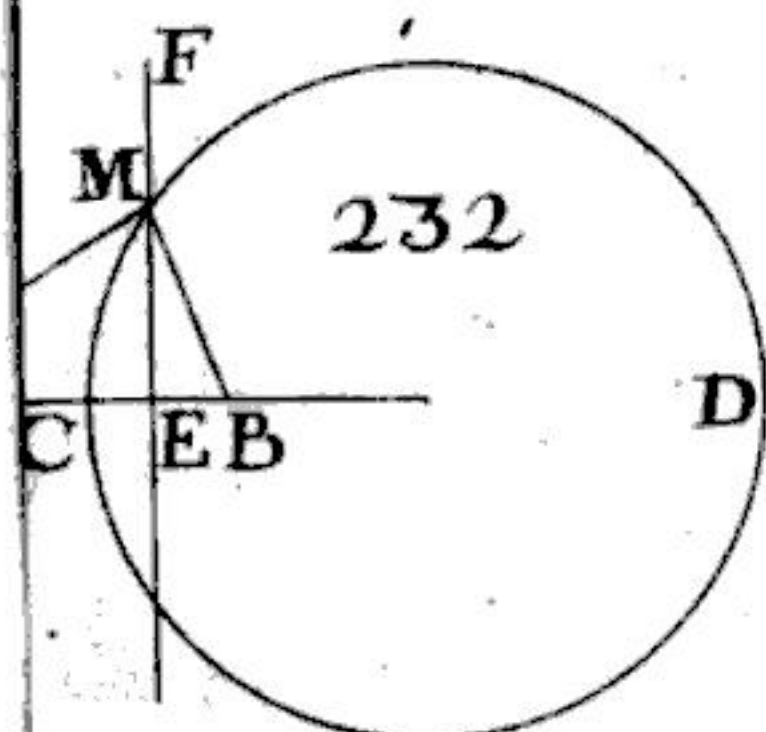
227



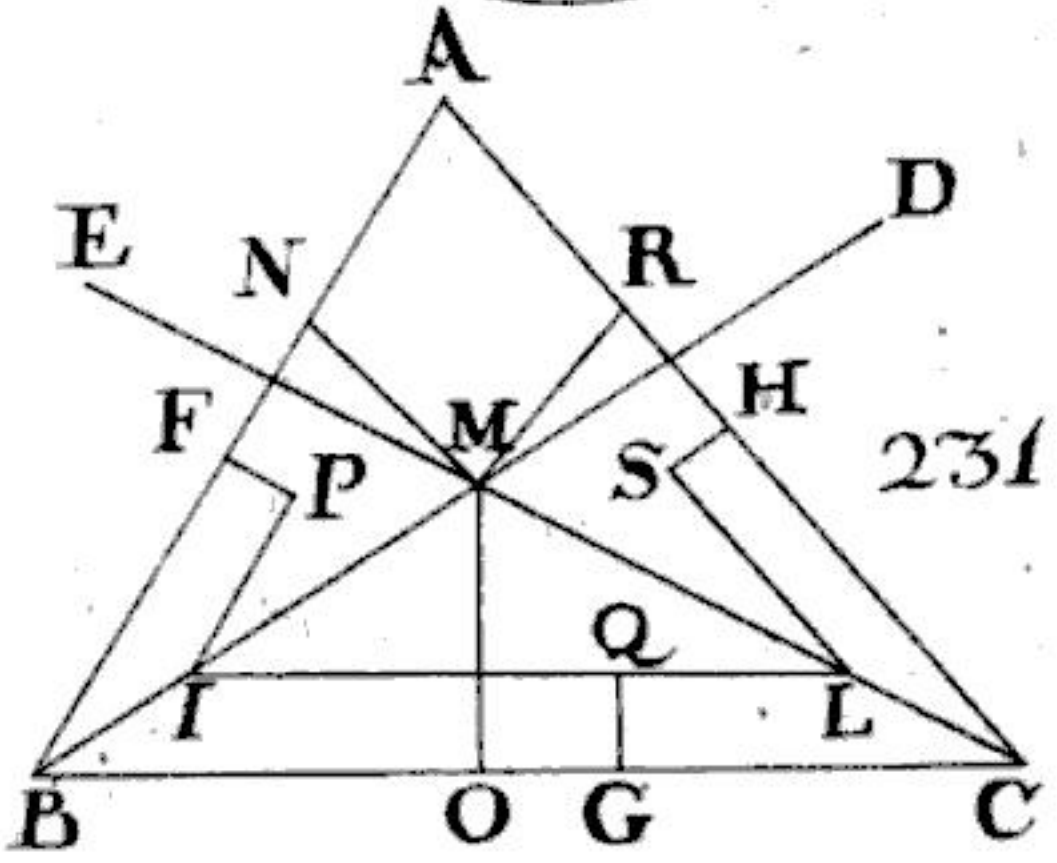
228



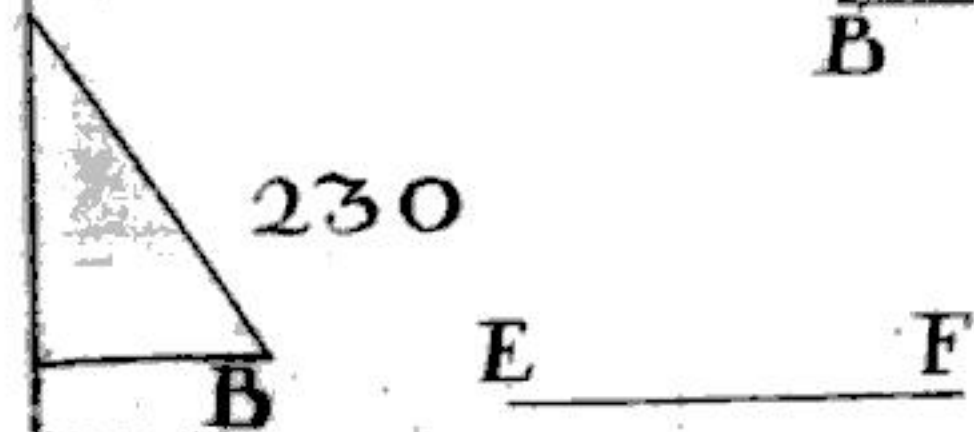
232



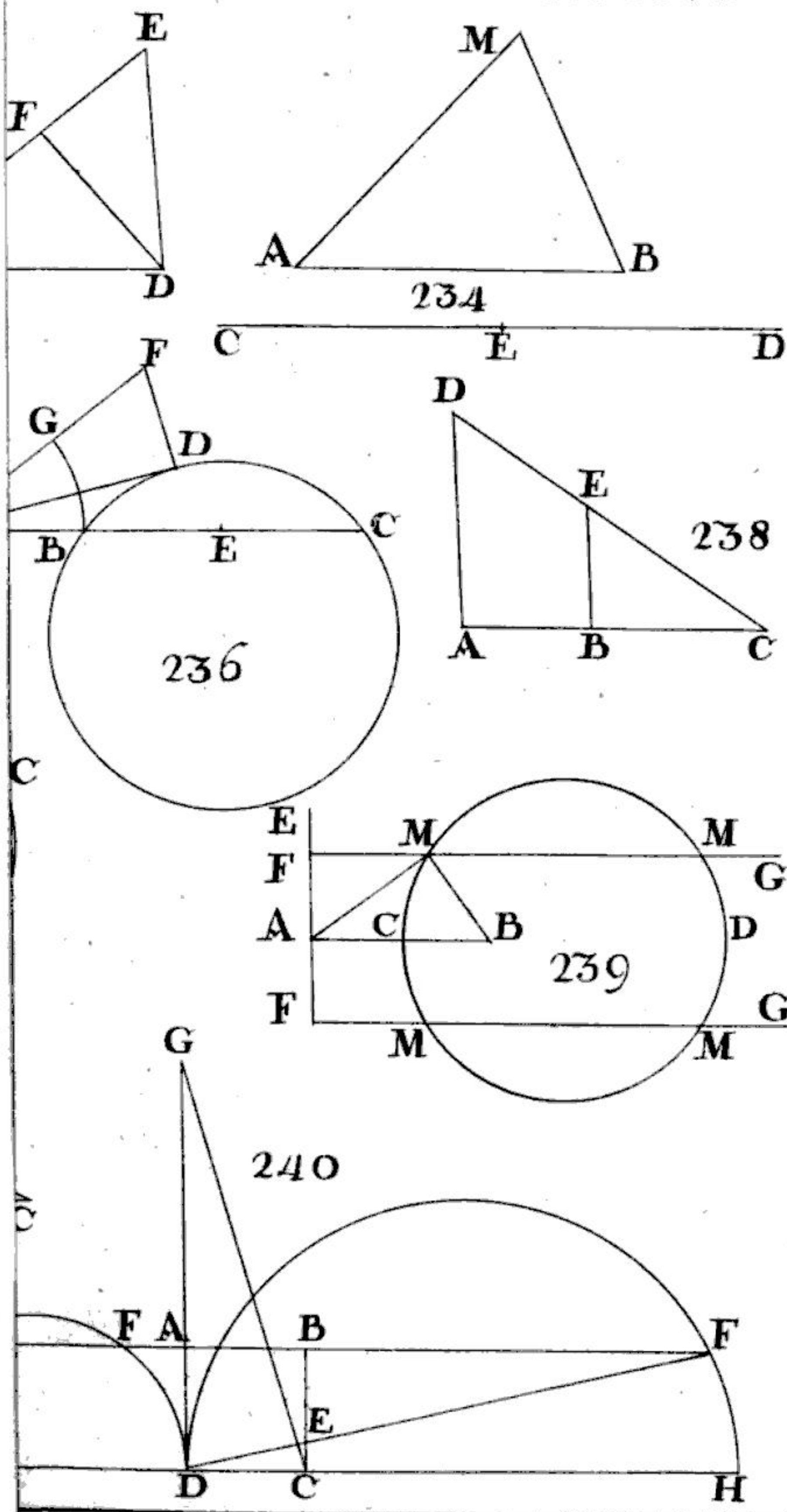
231



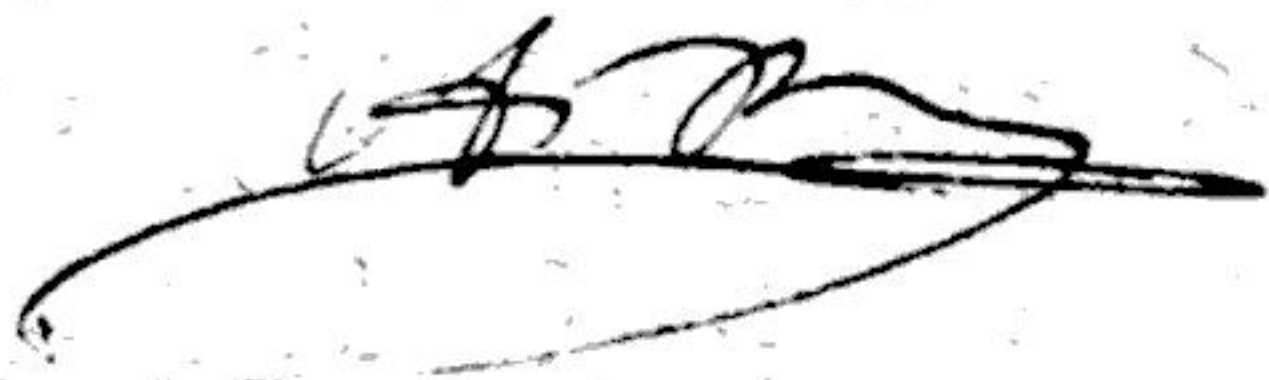
230

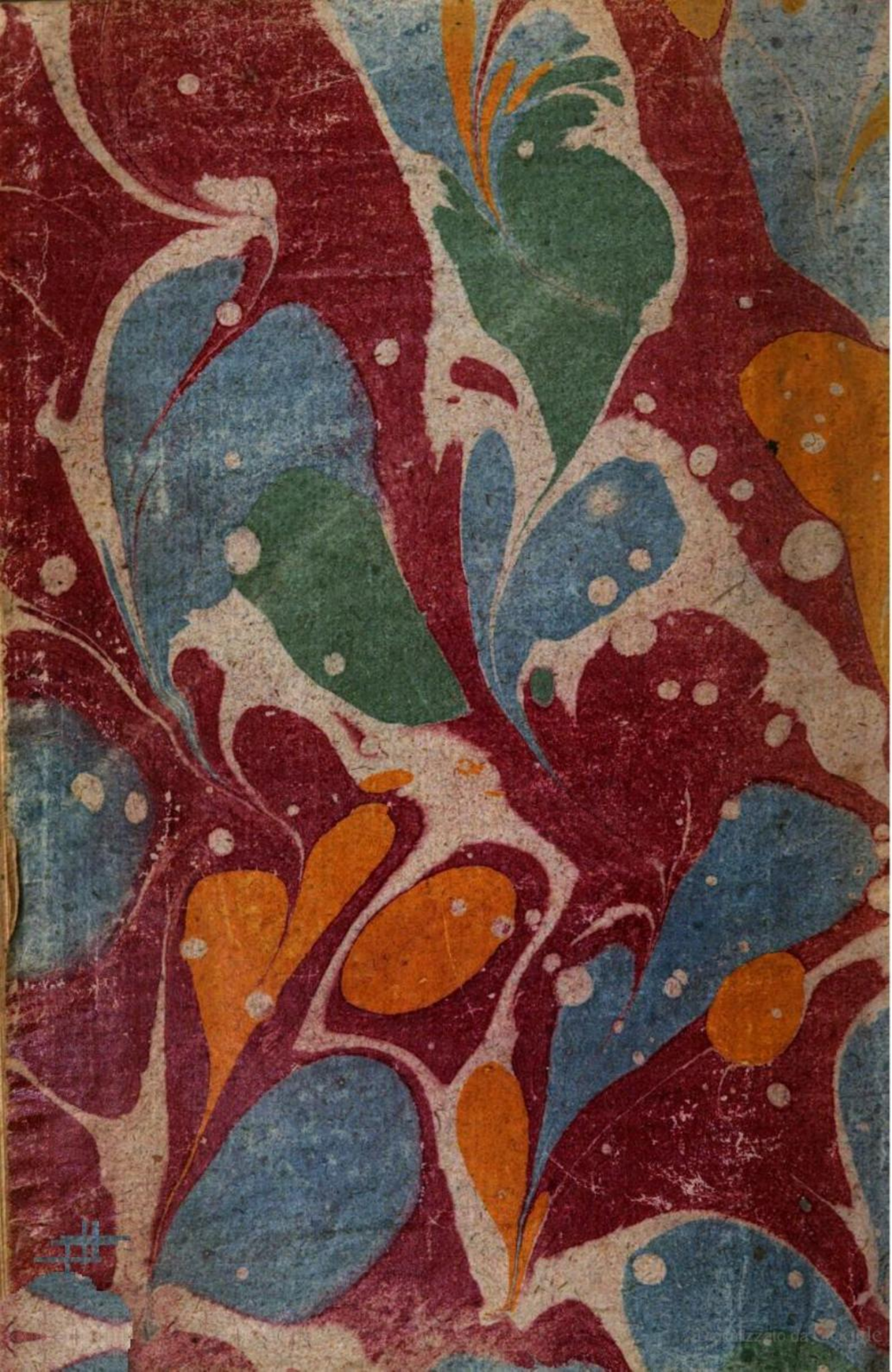


Tav. XVI



Interno, con sedici tavole di B. Scipione
di 17. Novembre 1838.







XXXII
C. 20