ANDREÆ TACQUET
E SOCIETATE JESU
SELECTA EX ARCHIMEDE THEOREMATA,

Via faciliori, ac breviori demonstrata, & novis inventis aucta.

Pertinet ad Conventum S. Mariæ Carmeli Terræ S. Archimi
jussu Admum Rdi Prij
Lauren- rij a Frumo
Menri Protij
Adba Prij
Prij Bonaventura

PATAVII,

M. DC. XCI.

Typis Seminarii Patavini.

SUPERIORUM PERMISSU.

LECTORI.

QUamvis in Mathematicis disciplinis complures summi, & admirabiles viri extiterunt, prima tamen gloria communi quodam consensu Archimedi Syracusano delata est. Sed illum plures laudant, quàm legant, admirantur plures, quàm intelligant. Causæ, opinor, sunt exemplarium moles, & raritas, sermonis ex Græco translati obscuritas nonnulla, demonstrationes prolixæ, & arduæ. Putavi igitur ex studiosæ juventutis usu futurum, si elementis jam illustratis, hæc à me selecta ex Archimede theoremata, & via multò faciliori, ac breviori demonstrata subnecterem. Selegi porrò ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent, viamque in demonstrando eam tenui, ut sperem, eum, qui elementa perceperit, hæc summi Geometræ præclarissima inventa negotio haud magno assecuturum. Sub finem adjectis tredecim

decim propositionibus Archimedis de cylindro, & sphæra doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonstro sesquialteram proportionem in tribus corporibus sphæra, cylindro, & æquilatero cono, utroque sphæræ circumscripto, continuari. Uaria insuper sparsim, inter quæ propositio 12, *& corollaria prop.* 14. *præcipua sunt, & scholia omnia adjeci. Fruere istis, quisquis Geometriæ candidatus es, & quantùm ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cùmque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehique sursum persenseris, mentem ab infimis hisce rebus feliciter jam avulsam attolle etiam altiùs, atque dirige ad veritatem primam æternam, immensam, quæ Deus est, cujus ineffabili visione nos futuros aliquando æternùm beatos confido. Vale.*

DE-

DEFINITIONES;

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos secet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His positis. *Fig. 23. ex Archimede.*

1 Sector sphæræ est, qui à sectore circulari AECG, seu AEBG circa diametrum BC in orbem acto producitur.

2 Segmentum, seu portio sphæræ est, quæ à circulari segmento ECG, seu EBG circa eandem diametrum BC in orbem acto describitur.

3 Portionis sphæricæ (EBG) vertex est diametri immobilis extremitas B. Basis est circulus à recta EG descriptus. Axis est diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baseos intercepta.

4 Cùm sphæricę portionis, aut corporis ei inscripti, aut coni superficiem nomino, semper intelligo absque basi; & dum cylindri superficiem dico, intelligo similiter absque basibus, nisi adjungatur (*tota*), tunc enim accipiuntur & bases.

5 Rursùm cùm de cylindris, vel conis ago, non alios intelligo quàm rectos.

Axiomata.

Fig. 1. & 16. 1 Polygoni circulo inscripti ambitus minor est circuli peripheria.

Fig. 1. 2 Polygoni circulo circumscripti ambitus circuli peripheria major est.

Fig. 16. 3 Quod si polygonum circulo inscriptum circa diametrum (AE) unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies minor sphæræ superficie. Et si polygonum circulo circumscriptum circa diametrum unà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies major superficie sphæræ.

Fig. 17. 4 Similiter ambitus polygoni inscripti segmento circulari (DAF) minor est peripheria segmenti (DAF.) Et si polygonum segmento inscriptum unà cum segmento circa segmenti axem (AO) circumagatur, erit corporis à polygono geniti superficies minor superficie portionis sphæricæ (DAF.)

Fig. 3. & 6. 5 Superficies prismatis cylindro inscripti minor est cylindri superficie, cirumscripti verò major.

Fig. 4. & 8. 6 Et superficies pyramidis cono inscriptæ minor est coni superficie, circumscriptæ autẽ major.

PROPOSITIO I.

Datæ sint figuræ quæcunque seu planæ, seu solidæ A, B. Sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ figuras datas A, ac B semper minùs, ac minùs excedendo in ipsas a a Defin. 6. lib. 12. *desinant, & tamen semper inter se æquales sint.*

Dico

Dico etiam figuras A, & B æquales esse.

E.	F.	
A.	B.	X.

Si non, alterutra major erit: sit ergo A major quàm B excessu X. Per hypothesim dantur magnitudines E, F inter se æquales, quæ excedunt figuras A, B excessu minori, quàm X, quo A ponitur superare B. Ergo F minor est quàm A. Sed F per hypothesim est æqualis E. Ergo etiam E minor est quàm A, quod est absurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo ostendam B non posse esse majorem quàm A. Ergo cùm neutra sit major altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

DAtæ sint figuræ A, & B; sint autem magnitudines aliæ semper atque aliæ, quæ à figuris datis semper minùs, ac minùs deficiendo in ipsas b *desinant, & semper inter se æquales sint.*

b Defin. 6. lib. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A.	B.	Z.
O.	P.	

Si non, alterutra minor erit. Esto igitur A minor quàm B defectu Z. Per hypothesim dari possunt magnitudines O, P inter se æquales, quæ deficiant à figuris datis A, & B defectu minori quàm Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major est quàm A. Sed P per hypothesim est æqualis O. Ergo etiam O major est quàm A, quod repugnat hypothesi, qua statuitur O minor quàm A. Eodem modo ostendam B non esse minorem

quàm

quàm A. quare cum neutra sit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Ambitus polygonorum circulo circumscriptorum, & inscriptorum desinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipsa in circulum desinunt. (*Fig. 1. ex Archim.*)

Si nimirùm arcubus sine fine bisectis plura semper, ac plura latera circulo circumscribantur, & inscribantur.

1 Pars. Intelligantur circulo inscripta, & circumscripta polygona ordinata, sive ut traditur p. 12. lib. 4. sive ut in hac figura, perinde erit. Manifestum est *a* FI esse ad EC (hoc est *b* totum ambitum circumscriptum ad totum ambitum inscriptum) ut IA est ad CA. Atqui IC excessus rectæ IA supra CA fit tandem quacunque data minor, si plura semper, ac plura in infinitum latera circumscribi, & inscribi intelligamus. Ergo etiam excessus ambitus circumscripti supra ambitum inscriptum tandem fiet quovis dato minor. Ergo multò *c* magis excessus ambitus circumscripti supra peripheriam fiet quocumque dato minor. Similiter, quia jam ostendi defectum ambitus inscripti ab ambitu circumscripto fieri quovis dato minorem, multò *o* magis defectus inscripti ambitus à peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tàm inscripti, quàm conscripti in pheripheriam *d* desinunt. Quod erat primum. Hæc ulteriùs demonstrare operæ pretium non est, cùm satis sint manifesta.

a Per coroll. 1. p. 4. l. 6.
b Per 12. l. 5.
c Patet ex axiom. 2.
o Patet ex axiom. 1.
d Per defin. 6. l. 12.

2. Par

2 Pars. Quia jam ostensum est excessum lateris FI supra latus EC fieri tandem quovis dato minorem (est enim FI ad EC, ut IA ad CA) etiam excessus quadrati FI supra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita *e* polygonum circumscriptum ad polygonum inscriptum. Ergo etiam excessus polygoni circumscripti supra inscriptum tandem fiet dato minor. Ergo multò magis excessus polygoni circumscripti supra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inscripti defectus à circulo dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tàm inscripta, quàm circumscripta in circulum *i* desinunt. Quod erat alterum.

e Per 22. l.6.

i Defin. 6. lib. 12.

PROPOSITIO IV.

Polygonum o ordinatum circulo conscriptum (FINTR) æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius:
Et polygonum ordinatum circulo inscriptum æquatur triangulo, cujus basis est polygoni inscripti ambitus, altitudo verò perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

Fig. 1.

o Defin. 3. l.4.

1. Pars. Radius AB ad contactum ductus *a* est perpendicularis ad tangentem IF. Quare si ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum resolvatur in triangula, erit radius AB communis omnium altitudo, adeoque triangula ipsa liquet esse æqualia. Ergo triangulum basim habens parem summæ laterum FI, IN, NT, &c. altitudinem verò AB æquabitur illis *b* omnibus, hoc est toti polygono circumscripto.

a Per 18. l.3.

b Patet ex 1. l.6.

2. Pars

2 Pars. Simili ferè ratiocinio concludetur.

PROPOSITIO V.

Fig. 2. *Circulus est æqualis triangulo, cujus basis est peripheria circuli, altitudo autem semidiameter.*

Polygona ordinata circulo circumscripta, & triangula bases habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, semper sunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumscripta in circulum *b* desinunt, similiterque triangula (ut mox ostendam) quæ pro basi habent ambitum polygoni circumscripti, pro altitudine verò radium AB, tandem desinunt in triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. ergo *c* circulus, & triangulum pro basi habens peripheriam, pro altitudine radium AB æqualia sunt.

a Per præc.
b Per 3, hujus.
c Per 1. hujus.

Quòd autem triangula sub ambitu polygoni, & radio desinant in triangulum sub peripheria, & radio, sic ostendo. Triangula sub ambitu circumscripti polygoni, & radio AB sunt ad triangulum sub peripheria, & radio AB, ut *i* basis ad basim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam, cùm altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam k desinit. Ergo & triangula desinent in triangulum.

i Per 1. l. 6
k Per 3. hujus.

Corollaria.

1 Ex hac & 41. l. 1. patet, rectangulum sub radio, & dimidia circumferentia esse æquale circulo: sub radio, & tota circumferentia esse duplum

duplum; ſub tota diametro, & tota circumferentia eſſe quadruplum circuli.

2 Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum, ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum; ad quadratum verò circumſcriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum. *Fig. 5. l. 4.*

Nam rectangulum ſub CDE, & radio CA, ſeu GF (hoc *d* eſt ipſe circulus) eſt ad rectangulum GFCE, nimirùm ſub FG, & CF, (hoc eſt ad quadratum inſcriptum BCDE) ut *e* CDE dimidia circumferentia eſt ad FG, ſeu CE diametrum; quod erat primum; ac proinde circulus eſt ad duplum rectanguli GFCE (hoc eſt ad FH quadratum circumſcriptum), ut CDE ad duplam diametrum CE, ſive ut quadrans CD ad diametrum CE.

d Per coroll. præc.

e Per 1. l. 6.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quàm ter, & unam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{70}$), plus verò quàm ter, & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus Theorematis demonſtrationem aſſumit Archimedes polygona ordinata alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum, utrumque 96 laterum. Deinde oſtendit 96 latera circulo circumſcripta continere diametrum minùs quàm ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiã, quæ ipſis minor eſt, etiam continere diametrum minùs quàm ter, & $\frac{1}{7}$. Latera verò 96 circumferentiæ inſcripta (ac proinde & circumferentiam, quæ ipſis minor eſt) amplius continere dia-

diametrum, quàm ter, & $\frac{10}{71}$. Porrò longior est hujus rei demonstratio, quàm ut hoc loco adferri debeat. Quòd si ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam statutos arctare poterimus magis, magisque sine termino, atque ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Præstitum est hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliisque. Proportiones præcipuas hactenùs inventas hìc subjicio.

Prima est Archimedis hujusmodi

Diameter 7

Circumfer. 22. major vera.

Diameter 71

Circumf. 223. minor vera

Rationes 22. ad 7, & 223 ad 71. si ad commune consequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497, & 1561 ad 497.

Posita igitur diametro partium 497
erit circumferentia major vera 1562
& circumferentia minor vera 1561

Utraque igitur à vera differt quantitate minori, quàm sit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quòd si rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune consequens, provenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Posita igitur circumferentia partium 4906,
erit diameter minor vera 1561.
diameter major vera 1562.

Utraque igitur à vera diametro differt quantitate minori, quàm sit pars $\frac{1}{4900}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio est Archimedæa multò tò accuratior. Juxta hanc eſt.

Diameter 113.

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes nulla veræ propinquior: ex hac enim, poſita diametro 10, 000, 000, provenit circumferentia 31, 415, 929, quæ à vera ſolùm penes notam primam 9 differt exceſſu paulò majore, quàm ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utraque multò exactior eſt gemina illa Ludolphi à Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris verò notis 36.

Diameter

100000000000000000000

Circumf. major vera

31415926535897932847.

Circumf. minor vera

31415926535897932846.

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri denominata à numero, qui conſtat unitate, & 20 cifris, ac proindè tàm hæc, quàm illa à vera circumferentia differt minori quantitate, quàm ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima

Diameter

1000000000000000000000000000

0000000000

Circumf. major vera.

31415926535897932384626433 8

327950289

Circumf. minor vera.

31415926535897932384626433 8

327950288.

Differentia utriusque circumferentię, inter quam vera existit, est diametri particula una, denominata à numero, qui constat unitate, & 35 cifris, quæ particula ad diametrum minorem habet proportionem, quàm arenula una ad orbem terræ. Non enim constat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Frustrà igitur sit ulteriùs progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, si ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

PRoportionis jam traditæ fructus eximii sunt hi, qui sequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentia.

MAjorem terminum unius è proportionibus jam traditis statue primo loco, minorem secundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis; is erit quæsita diameter.

Ut si detur circumferentia maximi circuli terræ milliaria continere Belgica unius horæ 8640, & quæratur terræ diameter, sic stabunt termini

355 —— 113 —— 8640 ——

multiplica jam secundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ pro diametro orbis terræ.

In-

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

Terminus minor unius è proportionibus ſuprà traditis ſtatuatur primo loco: major ſecundo: Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica *unius horæ* 2750 $\frac{14}{71}$ *& quæratur ambitus; termini ita ſtabunt:*

113 —— 355 —— 2750 $\frac{14}{71}$ ——

Tunc ſecundum multiplica per tertium, & productum divide per primum: provenient milliaria Belgica 8640. *pro ambitu orbis terræ.*

Quàm modicè hæc circumferentia veram excèdat, dictum eſt ſuprà, exceſſu videlicet paulo majore, quàm ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt 9 circiter aut 10 pedibus Rhynlandicis, quorum 18000 conſtituunt milliare horarium. Quòd ſi utamur proportione Ludolphina *etiam priori, cujus termini conſtant 21 notis invenietur circumferentia inſenſibiliter à vera differens non ſolùm diametro data milliariorum* Belgicorum 2750, *qualis eſt terræ; verùm etiam licet diameter ponatur centum milliarium eorundem milliariorum, qualis fortaſsè eſt diameter firmamenti; hac enim poſita proveniet circumferentia minori quantitate à vera differens, quàm una centimillioneſima particula pedis Rhynlandici. Quòd ſi ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum vera majoris, ac minoris excedet 5 milliaria* Belgica. *Non eſt igitur adhibẽ-*

da Archimedæa proportio, nisi in quantitate parva; imò semper expediet Metiana uti, quæ & modicis constat terminis, & plusquam millies exactior est.

Circuli dimensio.

S*Emidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. p. 5. hujus.*

Ut si semidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375, multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica 4320; provenient milliaria Belgica quadrata 5, 940, 000 pro circulo maximo terræ. Differentia inventa circularis areæ à vera habetur, si differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ vera ducatur in semidiametrum datam, aut si differentia semidiametri inventæ à vera ducatur in datam semicircumferentiam.

Dimensio cylindrorum, & Conorum.

E*Am hìc appono, quòd à circuli dimensione pendeat. Cylindrus igitur, & prisma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per basim, Conus, & pyramis ex tertia altitudinis parte in basim ducta, sunt enim partes tertiæ cylindrorum, ac prismatum eandem cum ipsis basim, & altitudinem habentium per 10, & 7. lib. 12.*

Sit basis cylindri, aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50, proveniunt 5000 pedes cubici pro soliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum 33 $\frac{1}{3}$ in 50 proveniunt 1666 $\frac{2}{3}$ pedes cubici pro soliditate coni.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Circulorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri. Fig. 6. & 7 l. 12.

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper, ut *a* diametri AF, & IC. Sed hi *b* ambitus in peripherias deſinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri. Quod erat demonſtr.

a Per coroll. p. 1. l. 12.
b Per 3. hujus.
c Per Poriſ. univ. l. 12.

PROPOSITIO VIII.

Superficies priſmatis Cylindro tàm circumſcripti, quàm inſcripti æquatur rectangulo, cujus altitudo eſt latus cylindri, baſis verò æqualis perimetro baſis priſmaticæ. Fig. 3.

1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundùm lineas EA, NF, &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quòd ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta ſunt, ac proinde etiam *d* recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt verò & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur *f* rectangulo ſub ambitu baſis priſmacæ, & priſmatis, ſeu cylindri latere contento.

d Per defin. 3. l. 11

f Patet ex 1. lib. 6.

Eadem eſt ratio ſecundæ partis, nam latus cylindri communis rursùm eſt altitudo rectangulorum BDIk, kIQP &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

PROPOSITIO IX.

Fig. 4. *Pyramidis ordinatæ cono recto circumscriptæ superficies æqualis est triangulo, cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia (FHLD), altitudo autem latus coni (BG.)*

Et pyramidis ordinatæ cono recto inscriptæ superficies æquatur triangulo; cujus basis est baseos pyramidalis circumferentia, altitudo verò perpendicularis (BO) à vertice in latus baseos deducta.

1 Pars. Ducantur ad contactus G, k, M rectæ BG, Bk, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA *a* rectus est basis plano FkD, etiam planum *b* GBA plano FkD rectum erit. Atqui HG perpendicularis *c* est ad AG communem sectionem planorum, FkD, & GBA. Ergo HG etiam *d* recta est plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque est ad *e* ipsam BG. Ergo BG latus coni, est altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD &c. Igitur triangulum circumferentia FHLD, & latere coni comprehensum æquatur superficiei pyramidis circumscriptæ absque basi. Quod erat primum.

a Per hyp.
b Per 18. l. 11.
c Per 18. l. 3.
d Collig. ex defin. 4. l. 11.
e Per defin. 3. l. 11

2 Partis similis ferè demonstratio est.

PROPOSITIO X.

Superficies prismatis ordinati cylindro recto circumscripti desinit a in cylindri superficiem: & pyramidis cono recto circumscriptæ superficies in coni superficiem desinit. Fig. 3. & 4. a Defin. 6. l. 12.

1 Pars. Prismatum ordinatorum cylindro sine fine conscriptorum, & inscriptorum superficies habebunt tandem inter se differentiam data minorem, uti facilè patebit ex 8, & 3. hujus. Multò igitur magis superficies circumscripti prismatis à superficie cylindri inter inscriptam, & circumscriptam media differet differentia minori quacunque data; hoc est, *b* desinet in cylindricam superficiem minùs semper, ac minùs excedendo. b Per defin. 6. l. 12.

2 Pars. Eodem modo ostenditur ex 9, & 3. hujus.

In figuris tantùm exhibentur cylindri, & coni semisses, ne multitudo linearum confusionem pareret. Cæterùm cogitandi sunt cylindrus, & conus integri, quos prismata, & pyramides circumscriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet, planas superficies circumscriptas esse majores, ex 3 axiomate.

Lemma ad sequen.

Sint AB, CD, EF proportionales, sitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt. Fig. 7.

Recta kB est ad AB, ut EF ad EG. Rectangulũ ergo kB, EG æquatur per 16. l. 6. rectãgulo AB, EF.

EF. Sed hoc per 17. l. 6. æquatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par est quadrato CD. Ergo per 17. lib. 6. KB, CD, EG sunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

Fig. 5. & 6.

Circulus, cujus radius (GH) est medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC), & baseos diametrum (BD) æqualis est superficiei cylindricæ.

Intelligantur circulis ABN, GPH circumscripta esse ordinata polygona; adeoque similia NM, RS, & super NM polygono erectum esse prisma cylindro circumscriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. sunt proportionales, etiam AD (seu AN) GH & dupla BC *o* proportionales erunt. Jam triangulum sub AN, & ambitu polygoni MN contentum *a* æquatur polygono conscripto NM; rectangulum verò sub BC, seu EF, & eodem ambitu NM (hoc est *b* triangulum sub ambitu NM, & dupla BC) æquale est *c* superficiei prismatis cylindro conscripti. Atqui triangulum sub ambitu NM, & AN est ad triangulum sub ambitu NM, & dupla BC, *o* ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM est ad superficiem prismatis cylindro conscripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam ostendi AN, GH duplam BC esse proportionales, ratio AN ad duplam BC est duplicata *d* rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad superficiem prismatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad simile sibi polygonum GRQS rationem habet duplicatam rationis AN ad GH,

o Per lem.
a Per 4. hujus.
b Patet ex 41. lib. 1.
c Per 8. hujus.
o Per 1. l. 6.
d Per defi. 10. lib. 5.

GH, ut facilè colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum GRQS eandem habet rationem; quæ proindè æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cùm & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem, & polygona *i* in circulum GPH deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo GPH æqualis *k* erit. Quod erat dem.

e Per 9. l. 5.

f Per 10. hujus.

i Per 3. hujus.

k Per 1. hujus.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

I *Superficies cylindri recti æqualis eſt rectangulo ſub latere* BC, *& baſeos peripheria contento.*

Fig. 5. & 6.

Dupla BC (ut oſtenſum ſuprà) eſt ad GH, ut GH ad BA, ſeu AN; hoc eſt, ut *n* peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum ſub prima nempè dupla BC, & quarta nempè peripheria BN æquatur *p* triangulo ſub ſecunda GH, & tertia, peripheria ſcilicet P. Sed triangulum ſub GH, & peripheria P æquale *q* eſt circulo GPH; hoc eſt, *r* ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla BC, & peripheria BN (hoc eſt, *ſ* rectangulum ſub BC, & peripheria BN) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſtr.

n Per 7. hujus.

p Patet ex 16. lib. 6.

q Per 5. hujus.

r Per 11. hujus.

ſ Patet ex 41. l. 1.

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe com-

communes. Esto igitur corollarium.

Fig.20.& 21.l.12. 2 Cylindricæ superficies (BM, QN) æquè altæ sunt inter se, ut basium diametri (BF, QR.)

Nam rectangula sub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehensa, quibus cylindricæ superficies *d* sunt æquales, sunt inter se *e* ut bases peripheriæ videlicet CL, SE; hoc est *f* ut diametri BF, QR.

d Per coroll.1. *e Per 1.l.6* *f Per 7. hujus.*

Fig.23.& 24.l.12. 3 Cylindricæ superficies (CI, AR), quæ bases habent æquales, sunt inter se ut altitudines (TI, BR.)

Rectangula enim sub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus superficies *g* cylindricæ sunt æquales, sunt inter *i* se, ut TI, BR.

g Per coroll.1. *i Per 1.l.6*

Fig.20.& 21.l.12. 4 Similes cylindricæ superficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent basium diametri (BF, QR.)

Cùm cylindri ponantur similes, erit MF ad IQ, *o* ut BF ad QR, hoc est, *p* ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula sub peripheriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta similia erunt, ac proinde rationem inter se habebunt *l* duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ; hoc est BF ad QR. Ergo & cylindricæ supeficies &c.

o Defin.4. l.12. *p Per 7. hujus.* *l Per 20. l.6.*

Fig.eadē. 5 Cylindricæ superficies (BM, RI) rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (FM, IQ), & diametrorum (BF, QR), quæ sunt in basibus.

Fig.24.& 25.l.12. 6 Si æquales sunt cylindricæ superficies (AR, FD), erit ut diameter AB ad diametrum FN, ita reciprocè altitudo FH ad altitudinem RB, & è converso.

7 Denique ex eodem 1. coroll. habetur cylindricæ

dricæ ſuperficiei dimenſio, ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos peripheriam, ut ſi altitudo ſit pedum 20, peripheria baſis pedum 6; multiplica 20 per 6, proveniunt 120 pedes quadrati pro cylindrica ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti ſuperficies eſt ad baſim (ABN), ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam partem diametri baſeos. Fig. 6. & 5.

Sit GH media proportionalis inter BC, & BD diametrum baſis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter BA, ſeu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH æquatur curvæ ſuperficiei *b* cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad cylindri baſim ABN rationem habet duplicatam *c* rationis GH ad AN; hoc eſt *d* eandem, quam dupla BC ad BA radium; hoc eſt eandem, quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonſtrandum.

a Per lem. ante p. 11. hujus. *b* Per 11. hujus. *c* Per 2. l. 12. *d* per hyp. & def. 10. lib. 5.

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro baſis æquale, baſeos quadrupla eſt. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Utrumque ex propoſitione manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Circulus, cujus radius (OL) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (BC), & baſis radium (AC,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ. Fig. 9. & 8.

In-

Intelligantur circulis ACG, OPL circumscripta esse polygona ordinata EF, IN, & super polygono EF erectam esse pyramidem cono circumscriptam.

Quoniam per hyp. AC, seu AG est ad OL, ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata *a* rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum sub AG, & ambitu EF est ad triangulum sub BC, & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli sub AG, & ambitu EF ad triangulum sub BC, & eodem ambitu est etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum sub AG, & ambitu EF æquale est *b* polygono EF, & triangulum sub BC, & eodem ambitu EF æquale *c* est superficiei pyramidis circumscriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad superficiem pyramidis etiam est duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum sibi per constr. simile IN est duplicata *d* rationis AG ad OL. Ergo polygonum EF ad superficiem pyramidis, & ad polygonum IN eandem habent rationem, quę proinde ęqualia *e* erunt. Eodem modo ostendam superficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magisque polygonæ circumscribi possunt, semper æquales esse polygonis, quæ circulo OPL possunt circumscribi etiam in infinitum. Quare, cùm & pyramidum *f* superficies in coni superficiem, & polygona in circulum, OPL tandem desinant, etiam coni *l* superficies, & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat dem.

a defi. 10. l. 5.
b Per 4. hujus.
c Per 9. hujus.
d Per 1. l. 12.
e Per 9. l. 5.
f Per 19. hujus.
i Per 3 hujus.
l Per 1. hujus.

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus superficiei conicæ æqualis.

Corol-

Corollaria.

1 R*Ecti coni superficies æqualis est triangulo sub coni latere* (BC), *& baseos peripheria* (CG) *comprehenso.* *Fig. 8. & 9.*

Sit OL radius media proportionalis inter AC, & BC. Quia peripheria CG est ad peripheriam P, ut *a* radius AG ad radium OL; hoc est per hyp. ut OL ad BC, erit triangulum sub prima, nempè peripheria CG, & sub quarta BC *b* æquale triangulo sub secunda, nempè peripheria P, & tertia OL; hoc est *c* circulo OPL, hoc est *d* superficiei conicæ BCD. Quod erat demonstrandum.

a Per 7. hujus.
b Patet ex 16.l.6.
c Per 5. hujus.
d Per hanc. 13.

Ex hoc corollario liquet superficies conicas triangulorum subire leges. Itaque.

2 Superficies conicæ BAF, QXR æqualia latera BA, QX habentes sunt inter se, ut basium diametri BF, QR. *Fig. 20. & 21. lib. 12.*

3 Et (CFT, AZB), quæ bases habent æquales, sunt inter se, ut latera (CF, AZ.) *Fig. 23. & 24. lib. 12.*

4 Et, quæ similes sunt (BAF, QZR), duplicatam habent rationem ejus, quæ est inter basium diametros. *Fig. 20. & 21. lib. 12.*

5 Et quælibet rationem inter se habent compositam ex rationibus laterum (BA, QZ,) & diametrorum (BF, QR), quæ sunt in basibus. *Fig. ead.*

6 Et, quæ æquales sunt, reciprocant latera, & basium diametros; & quæ reciprocant, sunt æquales.

Quæ omnia demonstrantur ex coroll. 1. ut suprà colloraria de cylindrica superficie deduximus ex corollario isthic primo.

7 Metiemur denique conicam superficiē, si latus *Fig. 25. l. 12.*

FC per baseos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut si latus sit pedum 5, peripheria baseos pedum 10, duc 5 per 10, proveniunt 50 pedes quadrati pro conica superficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 8. & 9. Archim.

Coni recta superficies est ad basim, ut latus (BC) ad basis radium (AC.)

Inter latus BC, & basis radium AC sit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC est duplicata *e* rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL *f* est æqualis superficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni basim ACG est duplicata *g* rationis OL ad AC, ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio superficiei conicæ CBD est ad basim ACG, ut BC ad AC. Quod erat dem.

e Defin. 10. lib. 5.
f Per 13. hujus.
g Per 2. l. 12.

Corollaria.

Fig. 27.

1 *Superficies coni recti à triangulo æquilatero circa perpendicularem KA circumacto geniti baseos QT dupla est.*

Est enim KB latus æquale BD, adeoque duplum semisseos AB, quæ baseos radius est.

Fig. 24.

2 *Superficies coni à rectangulo triangulo æquicruri EBD producta est ad basim, ut in quadrato diameter ad latus.*

Ducta enim perpendiculari BA, angulus rectus B bise-

bisecatur, adeoque ABD semirectus est; est autem & ADB *b* semirectus. Ergo DA, BA *c* æquales sunt, ac proinde BD est diameter quadrati Ak, latus verò AD. Est verò eadem AD semidiameter baseos PT, cùm perpendicularis AB secet *d* bifariam ED. Ex quibus, & hac 14 patet corollarium.

b Per coroll. 11. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.
d Patet ex 26. l. 1.

3 *Superficies cylindri recti (GK) est ad superficiem coni recti (GBN,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.* *Fig. 24.*

Nam superficies coni GBN est ad basim MI, ut latus BN ad *e* semidiametrum basis QN; hoc est, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Est autem basis MI ad superficiem cylindri Gk, ut *i* quarta pars diametri ad Nk cylindri latus. Ex æquo igitur superficies conica GBN est ad superficiem cylindricam Gk, ut dimidium latus coni ad cylindri latus Nk. Quod erat demonstr.

e Per 14. hujus.
i Per 12. hujus.

Lemma ad sequen.

In triangulo NPV ducta sit QD parallela ad NV. Dico rectangulum sub PN, & NV æquari rectangulo sub QP, QD unà cum rectangulo sub NQ, & duabus simul sumptis NV, QD.* *Fig. 10.*

Duc lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA secet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN est par NV, patet etiam *a* QB esse parem QD. Igitur rectangulum ON est rectang. PNV. & FQ est PQD. Restat,

a Ex coroll. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.

R ut

ut probemus rectangula OB, EC, BN æquari rectangulo sub NQ, & duabus NA, QB, hoc est sub NQ, & duabus NV, QD. Id verò est manifestum: rectangulum enim sub NQ, & NA,
b Per 1.l.2 QB æquantur *b* his tribus rectangulis sub NQ, & CA (hoc est spatio EC), sub NQ, & NC (hoc est spatio BN), sub NQ, & QB (hoc est rursùm spatio BN), ac proinde spatio OB, quod
c Per 43.l.1. ipsi BN *c* æquale est. Liquet ergo propositum.

PROPOSITIO. XV.

Fig. 11. & 12. *SI conus rectus sectus sit plano QSR basi NZO parallelo, dico circulum GHM, cujus radius GH est medius inter partem lateris NQ, & circulorum QSR, NZO radios QD, NV simul snmptos, æqualem esse superficiei conicæ inter parallelos circulos QSR, NZO interceptę.*

Inter PN, & NV media sit GF. Item inter PQ, & QD sit media Gk, describanturque
b Per 13. hujus. circuli GFL, GkT. Erit hic *b* æqualis super-
c Per eäd. ficiei conicæ QPR, ille superficiei *c* NPO. Re-
d Per lem. ctangulum PNV æquatur *d* rectangulo PQD
e Per constr. unà cum rectangulo sub NQ, & NV, QD simul sumptis. Sed quia *e* GF media est proportio-
f Per 17. l.6. nalis inter PN, NV, rectang. PNV est æquale *f* quadrato GF, & quia Gk est *i* media inter
i Per const.
l Per 17. l.6. PQ, QD, rectang. *l* PQD æquatur quadrato GK: & quia GH media *m* est inter QN, &
m Per hyp. QD, NV simul sumptas, rectangulum sub QN,
n Per 17. l.6. & QD, NV simul sumptis æquale est *n* quadrato GH. Ergo quad. GF par quoque est quadratis GH, Gk. Ergo cùm circuli sint inter se
o Per 2. l.12. ut *o* quadrata radiorum, erit quoque circulus

GFL

G F L æqualis duobus circulis G k T, & G H M. Atqui circulus G F L est æqualis *p* superficiei conicæ N P O. Ergo etiam superficies conica N P O, æquatur duobus circulis G k T, & G H M. Atqui superficiei N P O pars una Q P R *r* æqualis est circulo G k T. Ergo reliqua inter parallelos circulos Z Z, S S comprehensa æquatur circulo G H M. Quod erat demonstrandum.

p Per 13. hujus.

r Per ead.

Lemma ad sequen.

R*Ectæ (B H, C G,) quæ in circulo æquales arcus (B C, H G) intercipiunt, sunt parallelæ.* Fig. 13.

Ducatur enim C H. Quoniam arcus B C, H G per hyp. sunt æquales, etiam *a* anguli B H C, G C H alterni æquales erunt. Ergo *b* B H, & C G sunt parallelæ. Quod erat demonstr.

a Per 29. l. 3.

b Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

I*Nscribatur circulo figura regularis parilatera, & æquilatera, ducaturque EB ab extremitate diametri ad B terminum lateris diametro proximi; angulos verò æqualiter distantes ab A, jungant rectæ BH, CG, DF.* Fig. 13.

Dico, rectangulum, quod diametro AE, & subtensa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inscriptæ (AB, vel BC &c.) & ex omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sumptis.

Duc C H, D G: quoniam B H, C G, D F intercipiunt arcus *a* æquales B C, H G, C D, G F; erunt *b* parallelæ. Pari argumento parallelę sunt

a Per 26. l. 3.

Per lem. præced.

B A, CH, DG, EF. Omnia igitur triangula *e* BAk,
e Per 27. & 25. l. 1. kHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula sunt. Ergo *d* ut Bk ad kA, sic Hk ad kL;
d Per 4. l. 6 & ut Hk ad kL, sic CM ad ML; & ut CM ad ML, sic GM ad MN; & ut GM ad MN, sic DO ad ON; & ut DO ad ON, sic FO ad
e Per 12. l. 5. OE. Ergo *e* ut una antecedentium Bk ad unam consequentium kA, sic omnes antecedentes Bk, kH, CM, MG, DO, OF (hoc est omnes jungentes BH, CG, DF) sunt ad omnes consequentes Ak, kL, LM, MN, NO, OE,
i Per 8. l. 6 hoc est ad diametrum AE. Sed ut Bk ad *i* Ak.
l Per 16. l. 6. sic EB ad BA. Ergo ut omnes simul BH, CG, DF ad AE, sic EB est ad BA. Ergo rectangulum sub omnibus jungentibus BH, CG, DF, & sub BA æquatur ractangulo sub AE, & EB. Quod erat demon.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14. *Segmento circuli DAF, cujus basis DF perpendicularis sit diametro AOE, inscribatur figura equilatera, & parilatera, ducaturque, ut in præcedenti recta EB.*

Dico, rectangulum sub EB, & parte diametri AO, quæ segmenti axis est, comprehensum æquari rectangulo sub latere uno figuræ inscriptæ, & omnibus jungentibus BH, CG vnà cum DO dimidio basis DF simul sumptis comprehenso.

De-

Demonstratio eadem, quæ præcedentis.

Lemma 1. ad sequen.

INscripta sit sphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quatenarius metiatur, circa axem AE consistens, quo manente circulus cum figura circumagatur. Fig. 13.

Dico sphæræ inscriptum iri corpus conicis rectis superficiebus contentum.

Quòd BA, HA, item DE, FE describant integras conorum rectorum superficies manifestum o est. Deinde, quia lineæ CB, GH; & GF, CD concurrunt productæ in eodem utrimque puncto diametri AE similiter pertractæ, quæ jungentes secat normaliter, etiam liquet has describere partes superficierum rectarum conicarum interceptas inter parallelos circulos, quos in sphærica superficie describunt vertices angulorum B, C, D. o *Vide defin. 2. l. 12*

Lemma 2.

SEgmenti sphæræ, cujus axis AO, sectio maxima esto DEF. Huic inscripta sit figura æquilatera dempta basi, quæ circa axem AO in orbem convertatur. Fig. 14.

Dico segmento sphærico inscriptum iri corpus conicis superficiebus contentum.

Probatur, ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

POnantur eadem, quæ in primo lemmate. Et ducatur recta EB ab extremitate diametri ad termi- Fig. 13.

num lateris diametro proximi.

Dico omnibus superficiebus conicis sphæræ in-
a Potentia recta est quadratum ejus. *scriptis æqualem esse circulum, cujus radius (I) potest a rectangulum AEB comprehensum videlicet sub diametro AE, & subtensa EB.*

b Per 17. l.6. Hoc est. *b* cujus radius (I) est medius proportionalis inter AE, & EB.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur re-
c Per 1.l.2 ctis BK, CM, DO bis sumptis, erit *c* rectangulum sub latere uno figuræ inscriptæ maximo circulo (videlicet sub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & sub omnibus simul jungentibus BH, CG, DF æquale rectangulo sub AB, & BK, sub BC, & composita ex BK, & GM, sub CD, & composita ex CM, & DO, sub DE, & DO; sic enim rectæ BK, CM, DO singulæ fuerunt bis acceptæ. Atqui rectangulum sub AB, & omnibus jungentibus BH, CG, DF simul sum-
d Per 16. hujus. ptis æquatur *d* rectangulo AEB, hoc est *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale est rectangu-
e Per hyp. lis sub AB, & BK; sub BC, & composita ex Bk CM, sub CD, & composita ex CM, DO; sub DE, & DO. Sint jam inter AB, & BK media proportionalis P: inter BC, & compositam ex BK, CM media Q: inter CD, & compositam ex CM, DO media R: inter DE, & DO media S. Erunt igitur quadrata
f Per 17. l.6. P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis supradictis. Quare cùm quadratum I jam ostenderim iisdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R,
g Per 2. l.12. S æquale erit. Cùm igitur circuli sint inter se *g*
i Patet ex 22. l.6. & 24. l.5. ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I descriptus omnibus simul circulis, quorum radii P, Q, R, S, æqualis *i* erit. Atqui circuli radio-
l Per 13. hujus. rum P, & S æquantur *l* superficiebus conicis, quas pro-

produxerunt latera AB, ED; siquidem P est media proportionalis inter AB coni latus, & Bk radium baseos, S verò media est inter ED, & DO; & circulus radii Q est æqualis segmento a superficiei conicæ, quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media est inter BC, & compositam ex Bk, CM; & ob eandem causam circulus radii R æquatur segmento superficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I descriptus æquatur omnibus simul conicis superficiebus sphæræ inscriptis. Quod erat dem.

a Per 15. hujus.

PROPOSITIO XIX.

Ponantur eadem, quæ in 2. lemmate, & ducatur recta EB ab extremitate diametri AE ad terminum lateris AB diametro proximi. *Fig. 14.*

Dico omnibus superficiebus conicis segmento sphærico DAF inscriptis æqualem esse circulum, cujus radius est medius proportionalis inter EB, & segmenti axem AO.

Demonstratio planè eadem, quæ præcedentis; sed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Superficies conicæ sphæræ inscriptæ in sphæræ superficiem desinunt. *Fig. 15.*

Data sit superficies quantumvis parva X: manifestum est intra sphæricam superficiem ACEG dari aliam posse concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori, quàm sit X. Ambarum plano sectarum per centrum maximi circuli sint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus AE bisecetur in C, & residuum bisecetur rursùs, & sic deinceps, relinquetur *a* tandem arcus AB minor arcu AN; huic si subtendatur recta AB, manifestum est, eam non pertingere ad peripheriam PDML, esseque latus figuræ æquilateræ, & parilateræ circulo CAGE inscriptæ, cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare si circa diametrum AE in orbem agantur omnia, patet, superficiei sphæricæ exteriori inscribendas esse conicas superficies, quæ includant superficiem sphæricam alteri concentricam, ac proinde illa sint *b* majores. Quoniam igitur sphærica superficies DPLM, deficit à superficie sphærica ACEG quantitate minori, quàm sit data X; multò magis superficies conicæ ab eadem sphærica ACEG deficient quantitate minori, quàm sit data X, ac proinde *c* in ACEG superficiem desinent. Quod erat demonstr.

a Patet ex lem. 2. sch. post 11. l. 6.

b Per axio. 3. hujus.

c Defin. 6. lib. 12.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17.

Conicæ superficies segmento sphærico DAF inscriptæ in ipsam segmenti sphæricam superficiem desinunt.

Demonstrabitur eodem ferè ratiocinio, quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Demonstratum est propos. 18, circulum, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum AE, & rectam EB, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem esse omnibus superficiebus conicis sphæræ inscriptis. *Fig. 16.*

Dico hunc circulum desinere o tandem in circulum, cujus radius est AE sphæræ diameter. *o Vide defin. 6. l. 12*

Nam si plura semper, ac plura in infinitum latera circulo maximo inscribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producunt superficies) patet latus AB fieri tandem quavis data recta minus, ac proinde subtensam EB ad diametrum AE accedere ad intervallum etiam quovis dato minùs, unde fit, ut differentia ipsarum AE, BE etiam fiat quavis data minor. Ergo multò magis media proportionalis inter AE, BE, quæ semper major est, quàm BE, differet ab AE tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus, cujus semediameter est media inter AE, & BE, à circulo, cujus radius est AE, tandem differet defectu minori quocunque dato, hoc est in *i* ipsum desinet. Quod erat demonstr. *i Defin. 6. lib. 12.*

Hæc per se satis clara non est necesse operosiùs demonstrare.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 17. *DEmonstratum est propos. 19, circulum, cujus radius est medius proportionalis inter E B, & A O segmenti axem, æqualem esse omnibus superficiebus conicis portioni sphæricæ D A F inscriptis.*

Dico hunc circulum desinere in circulum, cujus radius est recta A D à segmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui basis est segmentì.

Nam, quia jam ex præced. demonst. liquet E B desinere tandem in A E, patebit quoque, mediam proportionalem inter E B, & A O desinere tandem in mediam proportionalem inter A E, & A O, n hoc est in ipsam A D. Manifestum est igitur, & circulum, cujus radius est medius proportionalis inter E B, & A O, etiam desinere in circulum radii A D. Quod erat demonstrandum.

n Per coroll. 2. p. 8. lib. 6.

Lemma ad sequen.

SI diameter diametri dupla est, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propos. 2. lib. 12. & defin. 10. lib. 5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 16. *CUjuscunque sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli ejusdem sphæræ.*

HOc nobilissimum Archimedis theorema ex jam præmissis expeditè demonstrabimus hunc in modum.

Circu-

Circulo sphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inscripta esse figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur, quæ circa AE in orbem ducta producat conicas superficies superficiei sphæricæ inscriptas, ducaturque EB. Demonstratum jam suprà *a* est, omnes conicas su- *a Per 18. hujus.*
perficies sphæræ inscriptas æquales esse circulo, cujus radius potest rectangulum AEB, hoc est cujus radius est medius proportionalis inter AE, & EB. Atque hoc semper eveniet inscriptionibus in infinitum continuatis. Quare cùm inscri- *b Per 20. hujus.*
ptæ conicæ superficies, *b* tandem desinant in sphæricam superficiem, circulus verò, cujus *c Per 22. hujus.*
radius est medius inter AE, & EB, desinat *c* in circulum, cujus radius AE, ipsa quoque sphæ- *d Per 2. hujus.*
rica superficies *d* æqualis erit circulo radii AE, hoc est *e* quadruplo maximi circuli ACEG. *e Per lem. præc.*
Quod erat demonstrandum.

Viam, qua in theoremate nobilissimo demonstrando hactenùs usi sumus, Archimedæa multò breviorem, & clariorem esse sciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

Ex hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras consecutus est, exhibetur circulus æqualis superficiei sphæricæ, is nimirùm, cujus semidiameter est sphæræ diameter, sive cujus diameter dupla est diametri sphæræ.

Scholium.

Expedita jam erit dimensio superficiei sphæricæ principis inter omnes curvas. Duplex est modus.

1. Men-

1. Mensuretur circulus sphæræ maximus (ut traditur in scholio post P. 6. hujus .) Et multiplicetur per 4. Ut si maximus orbis terræ circulus inventus sit continere quadrata milliaria unius horæ , sive Belgica 5, 940, 000. hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23, 760, 000. quæ in superficie orbis terræ continentur.

2. Diameter sphæræ multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet sphæræ superficiem. Ut si terræ diametro dentur milliaria vnius horę 2750$\frac{14}{17}$. atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640. hi duo numeri omissa fractione multiplicati per invicem dabunt rursùm quadrata milliaria unius horæ 23, 760, 000. totam orbis terræ superficiem constituentia.

Demonstratio patet ex primo coroll. p. 5. hujus; rectangulum enim sub diametro sphærę , & maximi circuli circumferentia per dictum coroll. est quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *Cujuscunque portionis sphæricæ (DAF) superficies ęqualis est circulo , cujus radius est recta (AD) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN) , qui portionis est basis.*

Portionis maximæ sectioni inscripta cogitetur circa axem AO figura æquilatera , & parilatera basi dempta , quæ circa AO in orbem acta portioni inscribet conicas superficies. Ducatur quoque recta EB , ut o suprà . Omnes conicæ super-

• In 18. & 19. hujus.

superficies segmento sphærico jam inscriptæ æquantur *a* circulo cujus radius est medius proportionalis inter EB, & segmenti axem AO. Atque hoc multiplicatis in infinitum inscriptionibus semper contingent. Quare cùm & conicæ superficies segmento inscriptæ desinant *b* in sphæricam segmenti superficiem, & circulus, cujus radius inter EB, & AO medius est, desinat *c* in circulum radii AD, etiam *d* sphærica portionis superficies DAF circulo radii AD æqualis erit. Quod erat demonstr.

a Per 19. hujus. *b Per 21. hujus.* *c Per 23. hujus.* *d Per 2. hujus.*

Hoc alterum est ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, via multò, quàm ipse, breviori, ac clariori jam demonstravimus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

Cylindri recti sphærę circumscripti (HPSV) superficies ęqualis est superficiei sphæræ.

Et si cylindrus, ac sphærę secentur planis ad axem (BG) rectis, erunt singula superficiei cylindricę segmenta segmentis singulis superficiei sphæricæ ęqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus HP æquale est *o* PS diametro basis, erit cylindrica superficies HS, quadrupla *a* baseos, hoc est maximi circuli sphæræ cylindro inscriptæ, cujus cùm etiam *b* quadrupla sit sphæræ superficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat dem.

o Per hyp. *a Per cor. p.12. hujus.* *b Per 24. hujus.*

2. Pars. Ducantur rectæ BO, GO. Quoniam angulus BOG *i* rectus est in semicirculo, ab eoque cadit OC perpendicularis ad BG, erit *c* BO media proportionalis inter GB, & BC, hoc est inter IT, & HI. Ergo circulus radii BO *d* æqualis est superficiei cylindricæ HT. Sed idem circulus

i Per 31. l.3. *c Per cor. 2.p.8.l.6.* *d Per 11. hujus.*

e Per præc. culus æqualis est *e* etiam segmento superficiei sphæricæ OBk. Æquales igitur sunt superficies cylindrica HT, & sphærica OBk.

Deinde, quia eodem modo ostenditur cylindrica HX æquari sphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX reliquæ sphæricæ QOkR inter duos parallelos circulos interceptæ æqualis erit.

Ex his patet de segmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig.18. *SEgmenta superficiei sphæricæ parallelis circulis divisæ eam inter se proportionem habent, quam segmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos rectæ.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim sphæricæ superficiei segmenta OBk, QOkR, MQRN,
a Per præc. &c. *a* æqualia cylindricis HT, IX, LN &c. Atque hæc eandem inter se rationem habent,
b Per 13. l.12. *b* quam axeos segmenta BC, CD, DA &c. Ergo & illa. Quod erat dem.

Scholium.

EX hac innotescit proportio zonarum, & climatum inter se. Sunt enim ad invicem, ut segmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula sinuum.

Ex eadem habetur dimensio segmentorum superficiei sphæricę. Nam, quia & tota sphęrę superficies nota est ex scholio prop. 24, & segmentorum proportio, utpote eadem, quæ partium axis, etiam datur, liquet segmenta singula innotescere.

Cęterùm

Cæterùm & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia, quæ sequuntur, omninò singularia, atque admiranda sunt, planèque digna, ad quæ intelligenda Geometriæ studiosi ardenti studio incumbant.

Lemma ad sequent.

SI speram tangat planum (QN in O) recta (AO) ex centro ad contactum ducta est plano tangenti perpendicularis. *Fig.* 19.

Secentur planum tangens QN, & sphæra per tactum O duobus planis, quæ in sphæra quidem producant circulos OG, OD, in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. l. 3. AO perpendicularis est ad utramque IO, CO, ac proinde per 4. lib. 11. recta plano QN. Quod erat dem.

PROPOSITIO XXVIII.

OMnis sphæra æqualis est cono (ZO) cujus altitudo (KO) par est radio sphæræ, basis verò (Z) superficiei sphæræ æqualis. *Fig.* 20. 21 & 22.

Intelligatur sphæræ circumscriptum esse corpus aliquod poliedrum, cujus solidi anguli novis planis sphæram tangentibus abscindantur. Quo facto orietur aliud corpus poliedrum sphæram continens minus priore, & pluribus constans angulis, & superficiem habens ex pluribus, ac minoribus planis tangentibus compositam. Si poliedri hujusmodi anguli novis planis tangentibus iterùm abscindantur, & tertii poliedri inde nati similiter, atque ita in infinitum: fiet tandem, ut & polie-

poliedrum excedat sphæram solido minori quocunque dato, & superficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, sine termino & minora, & plura erunt) composita sphęricam superficiem excedat quoque plano minori dato quocunque. Quod utrumque, licet demonstrari posset, tamen, quia per se satis clarum, postuletur studio brevitatis. His ita constitutis quæsitum ita concludemus.

Poliedrum jam expositum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis est centrum sphęræ, bases verò sunt plana tangentia, quæ poliedri superficiem constituunt. Et quia rectæ ex centro A ad singulorum planorum contactus ductæ ad plana *a* singula perpendiculares sunt, erunt omnium pyramidum, quibus constat poliedrum, æqualis altitudo, ipse nimirùm AB radius sphęræ. Si jam igitur planum X ponatur æquale superficiei ipsius poliedri, superque eo erecta sit pyramis ad altitudinem MN etiam ęqualem sphæræ radio AB, manifestum est *b* omnes pyramides supradictas, hoc est totum poliedrum ęquari pyramidi XN. Ad eundem modum reliqua omnia poliedra sphęram includentia, quę ex truncatione perpetua solidorum angulorum, alia atque alia nascentur in infinitum, semper ęqualia erunt pyramidibus per XN repręsentatis, quarum altitudines MN sunt radius sphęrę, bases verò X ęquales superficiebus poliedrorum sphęram ambientibus. Quare cùm tandem, & poliedra (ut dixi suprà) in sphęram, & pyramides XN (ut mox ostendam) in conum ZO desinant, etiam *c* sphęra cono ęqualis erit. Quod erat dem.

Quòd autem pyramides XN *d* desinant in conum sic ostendo. Poliedrorum superficies desinunt in sphę-

a Per lem. præc.

b Per 6. lib. 12.

c Per 1. hujus.

d Defin. 6. lib. 12.

sphærę superficiem, ut postulatum suprà. Atqui bases X pyramidum X N semper æquales ponuntur superficiebus poliedrorum, & Z basis coni Z O per hyp. æqualis est superficiei sphæræ, ergo etiam bases X desinent in basim Z; ac proinde, cùm pyramides X N sint ad conum ex hyp. æquè altum, ut e basis X ad basim Z, etiam pyramides in conum desinent.

e Per coroll. p. 11. l. 12.

Demonstratio jam allata hujus propositionis, & sequentis penitus diversa est ab ea, qua usus est Archimedes, quæ quidem valdè subtilis, & ingeniosa est, sed prolixa, & ardua, ad quam videlicet adhibentur duo manifesta, & propositiones undecim præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipsum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis sphæra quadrupla est coni basim habentis æqualem maximo circulo sphęræ, altitudinem verò radium.

Scholium.

Ex hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobilissimæ elicitur dimensio. Nam si diametri sexta pars, sive tertia semidiametri multiplicetur per sphæræ superficiem jam notam per scholium prop. 23, proveniet sphæræ soliditas.

Inventa sit sphæræ terrestris superficies continere quadrata unius horæ milliara 23,760,000, & semidiameter esto milliarium horariorum 1375, cujus tertia pars est $458\frac{1}{3}$. Multiplica 458 omissa fractione per 23,760,000, provenient 10, 882,080, 000 cubica unius horæ milliaria pro soliditate orbis terræ.

Cum enim sphæra sit æqualis a cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis verò superficies sphæræ; coni

a Per hæc 28.

b Per schol. p.6. hujus. *autem soliditas* b *producatur ex parte tertia altitudinis (hoc est radii sphæræ) ducta in basim, (hoc est in sphæræ superficiem) etiam sphæræ soliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in superficiem.*

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 23. *OMnis sector sphæræ æqualis est cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis verò sectoris sphærica superficies.*

ESto primùm sector (AECG) hemisphærio minor. Intelligatur sectori circumscriptum esse poliedrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum instituatur, ut in præcedenti, eodem modo concludetur quęsitum. Id solùm oportebit ostendere, ex quo discursus totus dependet, superficiem poliedri ex planis sphæricam superficiem ECG undequaque tangentibus compositam esse majorem superficie ECG, quod ita fiet. Cogitetur superficiei ECG apponi alia æqualis, & similis planis tangentibus eodem prorsùs modo cincta, quo prior.
c Per axio. 3. hujus. Erit jam tota *c* superficies ex planis composita, major tota sphærica. Ergo etiam dimidia ex planis composita dimidia sphærica ECG major erit.

Esto deinde sector (AEBG) major hemisphærio.
d Per præc. Uterque sector simul sumptus æqualis *d* est cono, cujus altitudo est radius sphæræ, basis autem tota superficies, hoc est *e* duobus conis, quorum altitudo eadem, bases verò pares superficiei
e Patet ex 11. l. 12. sphæricæ segmentis ECG, EBG. Atqui sectorum unus AECG hemisphęrio minor per 1. partē æquatur cono, cujus altitudo est radius, basis verò super-

perficies ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies reliqua EBG. Quod erat dem.

Corollarium.

CUm ſuperficies ECG ſit æqualis o circulo radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG, erunt ſectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes verò circuli radiorum CG, & BG. *o Per 25. hujus.*

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæræ, ſectorum quidem, ſi multiplicetur p *tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop. 27. ſive per circulum radii CG, vel BG, ſegmentorum verò, ſi menſuretur conus EAG, & à ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur, ſi major, eidem adjiciatur.* *Fig. 23.* *p Patet ex ſchol. p. 6. hujus.*

Segmentum (MQRN), quod inter duos circulos ſive parallelos, ſive non parallelos interjicitur menſurabis, ſi ſegmenta QBR, & MBN jam nota auferantur ab invicem. *Fig. 18.*

PROPOSITIO XXX.

HEmiſphærium (EOBD) coni (EBD) eandem ſecum baſim, & altitudinem habentis duplum eſt. *Fgi 42.*

Conus, cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica

EOBD, altitudo autem radius AB, est ad conum EBD, *a* ut basis ad basim, hoc est ut superficies hemisphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cum superficies hemisphærica EOBD dupla *b* sit maximi circuli, etiam conus pro basi habens superficiem EOBD, pro altitudine radium AB duplus est coni EBD. At hemisphærium æquatur *c* cono habenti pro altitudine radium, pro basi superficiem hemisphæricam EOBD. Ergo etiam hemisphærium coni EBD duplum est. Quod erat demonst.

a Per 11. lib. 12.

b Per 24. hujus.

c Per 28. hujus.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25.

Sphæra sit divisa in duo segmenta ILBG, ISKG plano IQGT per centrum A non transeunte, diameter autem plano secanti recta sit BOK.

Ut altitudo OB segmenti ILBG est ad radium sphæræ AB, ita OK altitudo segmenti alterius fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo segmenti ISKG est ad radium AK, seu AB, ita altitudo OB segmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING, & IDG, quorum altitudines sunt ON, OD, basis vero communis IQGT, segmentis sphæricis sunt æquales.

2 Segmentorum eadem est proportio, quæ rectarum DO, NO.

3 Segmentum ISKG est ad maximum sibi inscriptum conum IKG, ut NO ad KO, & segmentum ILBG est ad sibi inscriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO.

Pars

Pars 1. Sphæra, & coni ſecentur plano per diametrum BK, producentur in ſphæra circulus maximus BLKG, in conis verò triangula BIG, IKG; & quia BOK diameter *a* recta eſt circulo QT, erit angulus IOB *b* rectus. Angulus quoque BIK *c* in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo BIK ab angulo recto ducta eſt IO perpendicularis in baſim BK, erit BI ad IO, ut *d* BK ad KI. Ergo ratio duplicata BI ad IO æqualis eſt rationi duplicatæ BK ad KI; hoc eſt (quia BK, KI, KO *f* ſunt tres proportionales) æqualis rationi BK, KO.

a Per hyp.
b per defin. 3. l. 11.
c per 31. l. 3.
d Per 8. l. 6.
f Per corol. 2. p. 8 l. 6.

Deinde, quia eſt ut OK ad radium AB, ita *o* OB ad BD; erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad OK; & permut. DB ad BA, ut BO ad OK; & compon. DA ad BA, ut BK ad OK. Quoniam igitur jam oſtendi rationem BK ad OK duplicatam eſſe rationis BI ad IO, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radiis BI, IO deſcriptorum, erit quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. Igitur conus ſub altitudine DA, & baſi circulo radii IO, hoc eſt circulo QT ęqualis eſt *g* cono ſub altitudine BA, & baſi circulo radii BI; hoc eſt *i* ſectori ſphærico AIBG. Quare ſi tam ſectori AIBG, quàm cono ſub DA, & circulo QT addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum ſphæricum ILBG æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui ſit ſub baſi QT, & altitudine DA, alter IAG ſub eadem baſi QT, & altitudine AO. Sed hi duo coni *k* conficiunt conum IDG. Ergo ſegmentum ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonſtr.

o Per hyp.
p Per 2. l. 12.
g Per 15. lib. 12.
i per corol. p. 29. huius.
k Patet ex 14. l. 12.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum ISKG æquale cono ING, eo ſolùm mutato, ut conus IAG, qui priùs addebatur, jam auferatur.

n Per 14. *l.*12. *Pars* 2. Patet ex prima. Nam coni IDG, & ING ſunt inter ſe *n* ut DO, & NO. Ergo & ſegmenta ILBG, ISkG conis illis æqualia ſunt inter ſe, ut rectæ DO, NO.

q Per eäd. *Pars* 3. Patet ſimiliter ex prima. Nam conus IDG eſt ad conum IBG, *q* ut DO ad BO. Ergo, & ſegmentum ILBG, cono IDG æquale eſt ad conum IBG, ut DO, ad BO.

Scholium.

Ex prima parte hujus theorematis habetur alia, eaque facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio, ſi nimirùm coni IDG, ING menſurentur, quod fiet ſi ſ *tertię partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.*

ſ Vide ſchol. poſt 6. *hujus.*

PROPOSITIO XXXII.

*Fig.*24. *Cylindrus rectus (GK) ſphęrę, cui circumſcribitur & ſoliditate, & ſuperficie tota ſeſquialter eſt.*

Communis ſphæræ, ac cylindri axis eſto BQ, conus verò maximus hemiſphærio EOBD inſcriptus ſit EBD. Quia cylindrus Ek (ſemiſſis totius Gk) triplus eſt *a* coni EBD; hemiſphærium verò *b* ejuſdem coni duplum, patet, cylindrum Ek eſſe ad hemiſphærium, ut 3. ad 2. Ergo etiam totus cylindrus Gk eſt ad totam ſphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

a Per 10. *l.*12. *b Per* 30. *hujus.*

Deinde quia cylindri latus kN eſt æquale baſis diametro GN, erit ejus ſuperficies abſque baſibus *c* quadrupla baſeos MI, ac proinde cum baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſe-

c Per coroll.p. 12. *hujus.*

cupla

cupla baſeos MI, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri Gk ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4. ſive ut 3 ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ ſoliditate, & tota ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

QUanti hoc Theorema fecerit Archimedes argumento eſt, quòd tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcircò fortaſsè inter alia tàm multa, & præclara inventa ſua hoc illi præ reliquis placuit, quòd & corporum, & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem, annulos inter annulorumque ſuperficies demonſtravimus l. 4. cylindricorum, & annularium prop. 13. 14. 15. ſed & ipſa in ſphæra aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum ſe ambientem (qui neceſſariò æquilaterus erit) eſt tàm ſoliditate, quàm ſuperficie, ut 2. ad 3. ita ſphęram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter, & ſuperficie eam habere proportionem, quam 4. ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro, & ſphæra repertam, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphærę natura mirabilis ampliùs innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 26. *Superficies sphæræ dupla est superficiei cylindri quadrati sphæræ inscripti.*

Quadratum maximo sphæræ circulo inscriptum, a quo in orbem ducto describitur quadratus cylindrus, esto AKL, ducaturque AL diameter quadrato, & sphæræ communis. Quoniam quadratum AL par *a* est quadratis æqualibus Ak, kL erit duplum unius Ak. Ergo etiam circulus diametri AL duplus *b* est circuli, cujus diameter Ak, circuli nempe CN. Atqui superficies sphæræ quadrupla *c* est circuli, cujus diameter AL, is enim est maximus sphæræ circulus, cum AL sit sphæræ diameter. Ergo sphæræ superficies octupla est circuli CN. Sed quia Lk, kA *d* æquales sunt, cylindrica superficies ACL quadrupla *e* est circuli CN. Ergo cum sphæræ superficies ejusdem circuli octupla sit, cylindricæ superficiei dupla erit. Quod erat dem.

a Per 47. l. 1.
b Patet ex 2. l. 12.
c Per 24. hujus.
d Per hyp.
e Per coroll. p. 12. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 26. *Sphæræ superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3.*

Ponantur eadem, quæ demonst. præced. Quoniam cylindri latus LK, & basis diameter AK *f* æquales sunt, erit superficies cylindrica CL *g* quadrupla basis CN, ac proinde tota cylindri superficies ad utramque basim CN, & SL est, ut 6 ad 2.

f Per hyp.
g Per coroll. p. 12. hujus.

6 ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim CN, SL ut 8 ad 2, cùm in pręced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8 ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam CL ſuperficem ut 8 ad 6, ſive ut 4 ad 3. Quod erat dem.

Corollarium.

TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2 ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam, ut 12 ad 8 per 32. hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 8 ad 6 per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 12. ad 6. ſive ut 2 ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

CUjuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (IL BG(ad ſuperficiem coni maximi inſcripti eam rationem habet, quam coni latus (BG) ad baſis radium (GO.) *Fig. 26. vel 25.*

Quoniam portionis ILBG ſuperficies *a* ęqualis eſt circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT baſim nempè ſuam, & coni duplicata *b* rationis BG ad GO; hoc eſt *c* rationis ſuperficiei conicæ IBG ad baſim eandem QT. Ergo liquet, ſuperficiem ILBG eſſe ad ſuperficiem conicam IBG, ut eadem conica IBG eſt ad baſim QT. Quare cum conica IBG ſit ad baſim QT, *d* ut BG ad GO, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam IBG ſibi inſcriptam, ut BG ad GO. Quod erat dem.

a Per 25. hujus.
b Per 2. l. 12.
c Per 14. hujus.
d Per 14. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 24. *HEmisphærii superficies (EOBD) ad coni maximi, sive recti inscripti superficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad superficiem verò coni similis circumscripti, ut latus in quadrato ad diametrum.*

1. Partis demonstratio ex præcedenti est manifesta; est enim portionis cujuscunque, ac proinde & hemisphærii superficies EOBD ad conicam inscriptam, ut BD ad DA. Est autem BADk quadratum, cujus diameter est BD, latus DA.

2. Pars. Semissis quadrati circulo (cujus centrum A) circumscripti esto EBC, qua circa axem AB circumacta gignatur conus hemisphærio conscriptus. Quoniam quadratum EC duplum *a* est quadrati EB, seu GI, etiam circulus diametri EC duplus *b* est circuli, cujus diameter GI, hoc est circuli HGDI. Atqui *c* superficies hemisphærii cono EBC inclusi ejusdem circuli dupla est. Ergo circulus diametri EC superficiei hemisphæricæ æqualis est. Quare cùm superficies conica EBC sit ad *d* circulum diametri EC, basim nempe suam, ut latus BE ad basis radium EA, erit quoque ad superficiem hemisphæricam sibi inscriptam, ut BE ad EA, hoc est ut diameter in quadrato EBCF ad suum latus. Quod erat demonstrandum.

Fig. 6. l. 4.

a Patet ex 47. l. 1.
b Per 2. l. 12.
c Per 24. hujus.
d Per 14. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Sphæra ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum & ſoliditate, & ſuperficie eam proportionem habet, quam in quadrato latus ad diametrum. *Fig. eadē, cum Fig. 13. lib. 5.*

Maximo ſphærę circulo HGDI circumſcriptum eſto quadratum EBCF, à quo circa axem BF in orbem acto rhombus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R (inſpice Fig. 13. lib. 5.), quæ proportio per 4 terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt EB ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, ſive R ad S, hoc eſt EC ad EB, ac proinde *b* O eſt ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB, unde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi EBCF. Erit igitur ſphæra HGDI ad ſphæram EBCF in *o* ratione triplicata diametri GI (ſive EB) ad diametrum EC; hoc eſt (quod jam oſtendi) erit ut S ad O. Sphęra autem EBCF eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum, *c* ut 2 ad 1, hoc eſt (quod oſtendi ſuprà) ut O ad R. Igitur ex æquo ſphæra HGDI eſt ad eundem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus, ut S eſt ad R, hoc eſt, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum. Deinde ex ſecunda parte pręcedentis patet hemiſphęrii ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni EBC, ac proinde & totius ſphęrę ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum,

a Per de.fi. 10. lib. 5.
b Per 20. l. 6.
o Per 18. lib. 12.
c Per 30. hujus.

trum. Ergo sphæra tam soliditate quàm superficie est ad rhombum quadratum EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonstr.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27.

SUperficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla est superficiei ejusdem coni.

a Per 35. hujus.

Patet similiter ex 35. Nam superficies portionis BGkD est ad inscriptam conicam, ut *a* Bk ad BA, sed quia conus BkD æquilaterus ponitur, kB est æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam superficies BGkD dupla est inscriptæ conicæ BkD. Quod erat dem.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27.

SPhæræ superficies ad totam coni æquilateri sibi inscripti superficiem eam proportionem habet, quàm 16 ad 9.

d Per def. 3. l. 11.

e Per cor. p. 17. l. 6.

f Per cor. 2. p. 15. l. 4.

Esto Z sphæræ centrum, & conus æquilaterus sphæræ inscriptus BkD, axis sphæræ, ac cono cōmunis kZAO. Per hunc si secetur sphæra, ac conus, producetur in sphæra circulus maximus OBkD, in cono autem triangulum æquilaterum BkD, cujus unum latus BAD erit diameter baseos conicæ QT. Et quia axis coni kA rectus est basi QT, erit angulus BAk *d* rectus. Igitur quadratum BA æquale est *e* rectangulo kAO. Jam quia latus æquilateri trianguli abscindit *f* quartam axis partem AO, erit rectangulum kAO, hoc est qua-

quadratum B A triplum quadrati *i* A O. Quare cum quadratum radii Z O *l* qurdruplum sit quadrati A O, erit quadratum radii Z O ad quadratum radii B A, ut 4 ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B k D est ad circulum Q T ut 4 ad 3. Ergo sunt quatuor circuli O B k D, hoc est *n* tota sphæræ D G superficies ad circulum Q T, ut 16 ad 3. Atqui *o* superficies coni ęquilateri B k D est ad circulum Q T, basim nempè suam, ut 2 ad 1, ac proinde coni B k D tota superficies, unà cum basi scilicet, est ad basim, nempè circulum Q T, ut 3 ad 1, sive ut 9 ad 2. Ergo cum ostenderim sphęræ superficiem esse ad eundem circulum ut 16 ad 3, erit sphęræ D G superficies ad totam ęquilateri coni superficiem, ut 16 ad 9. Quod erat dem.

i Per 1. *l*. 6
l Per 4. *l*. 2. *vel* 20. *l*. 6.
m Per 2. *l*. 12.
n Per 24. *hujus*.
o Per cor. 1. *p*. 14. *hujus*.

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus B D abscindit *p* quartam axis partem A O, erit quoque sphærica superficies B O D *q* quarta pars, ac proinde superficies B G k D tres quartę superficiei totius sphæræ. Quare si superficies tota statuatur esse 16, B G k D superficies erit 12. Atqui superficies B G k D *r* est dupla superficiei conicæ B k D, ac proinde ad eam est, ut 12 ad 6. Ergo tota sphærę superficies est ad conicam BkD, ut 16 ad 6. Deinde, quia superficies coni B k D, (utpote æquilateri) dupla *s* est baseos Q T, liquet, superficiem conicam B k D (nimirùm absque basi) esse ad totam coni superficiem, ut 2 ad 3, hoc est, ut 6 ad 9. Igitur ex æquo tota sphęrę superficies est ad totam ęquilateri coni inscripti superficiem, ut 16 ad 9. Quod erat dem.

p Per *coroll*. 5. *p*. 15. *l*. 4.
q Per 27. *hujus*.
r Per *præc*.
s Per *coroll*. 1. *p*. 14. *hujus*.

PRO-

PROPOSITIO. XL.

Fig. 28. *Sphæræ superficies ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

Circulo sphæræ maximo B P M circumscriptum sit triangulum æquilaterum D O F, à quo circa axem O A B in orbẽ ducto productus sit conus æquilaterus sphæræ circumscriptus[a]. Æquilatero autem triangulo D O F circumscriptus etiam sit circulus N D L O F, quem patet esse concentricum priori, & axis O A B producatur in N. Quoniam B N est *a* quarta pars axis O N, patet O N esse duplam k B. Quare cùm circulorum ratio sit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus B P M ad circulum N D L O F ut 1 ad 4. Atqui ostensum jam est in demonstratione prima præcedenti, circulum N D L O F esse ad circulum Q T basim coni æquilateri sphęræ F L inscripti, ut 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus B P M est ad circulum Q T, ut 1 ad 3. Atqui tota coni D O F superficies circuli Q T *d* tripla est. Ergo tota coni superficies circuli B P M noncupla est. Quare cùm sphæræ T P superficies ejusdem circuli B P M *e* quadrupla sit, erit tota coni æquilateri D O F superficies ad superficiem sphæræ, cui circumscripta est, ut 9 ad 4. Quod erat dem.

a Per cor. 5. p. 15. l. 4.
b Per 2. l. 12.
c Per 22. l. 5.
d Per cor. 1. p. 14. hujus.
e Per 24. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

ÆQuilateri coni sphæræ circumscripti tota superficies quadrupla est superficiei totius coni inscripti eidem sphæra. Fig. 28.

Æquilateri coni DOF circumscripti tota superficies est ad sphæræ superficiem ut *a* 9 ad 4. & sphæræ superficies est ad coni inscripti æquilateri SkT superficiem, ut *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbata circumscripti æquilateri coni tota superficies est ad totam superficiem æquilateri inscripti, ut 16 ad 4, sive, ut 4 ad 1. Quod erat demonst.

a Per præ.
b Per 39. hujus.
c Per 23. l. 5.

PROPOSITIO XLII.

SPhæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum (BKC) eam rationem, habet quam 32 ad 9. Fig. 29.

Sphæra, & conus BkC secentur plano per axem communem kO faciente in sphæra circulum maximum OFkI, in cono autem triangulum æquilaterum BkC. Ducto deinde plano per centrum A ad Ok recto, abscindatur hemisphærium FGkI, cui inscriptus intelligatur conus maximus FkI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abscindit OP *d* quartam partem axis Ok, erit Pk ad Ak, ut 3 ad 2, hoc est ut 9 ad 6. Basis verò QT est ad circulum OFkI, hoc est ad basim ND, ut 3 ad 4, hoc est ut 6 ad 8, uti patet ex demonstratis prop. 39. Quare cùm ratio coni BkC ad conum FkI componatur *e* ex ratione altitudinis Pk ad altitudinem Ak (hoc est

d Per cor. 5. p. 15. l. 4.
e Per sch. p. 15. l. 12.

ex

ex ratione 9 ad 6,) & ex ratione basis QT ad basim ND (hoc est ex ratione 6 ad 8,) erit conus BKC ad conum FKI, ut 9 ad 8. Quare cum sphæra CG quadrupla *f* sit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad sphæram CG, ut 9 ad 32. Quod erat demonstrandum.

f Per 30. hujus.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 28.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus coni æquilateri eidem sphæræ inscripti octupulus est.

Coni æquilateri sphæræ inscripti, & circumscripti sunt SKT, & DOF, & axis communis esto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque, quàm sphæra; eruntque sectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur descriptus esse circulus NDOF, & axis OKB producatur in N. Quoniam verò æquilateri trianguli latus DF abscindit axis ON quartam *a* partem NB, patet NO esse duplam BK. Similiter, quia æquilateri alterius trianguli latus ST abscindit axeos BK *b* quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, sic BO ad CK. Sed NO dupla est BK. Ergo etiam BO dupla est CK. Igitur ob similitudinem triangulorum DOF, SKT etiam *c* DF, & ST diametri videlicet basium conicarum, sunt inter se in proportione dupla. Quare cum coni DOF, SKT sint similes, ac proinde eorum proportio *d* triplicata sit proportionis diametrorum DF, & ST, quæ est 2. ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8. ad 1. Quod erat demonstrandum.

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.
b per idem corol.
c Per 4. l. 6.
d per 12. lib. 12.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Sphæra ad circumscriptum sibi conum æquilaterum (DOF) & soliditate, & superficie eam proportionem habet, quam 4 ad 9. Fig. 28.

Sphæra TP est ad inscriptum *d* sibi conum æquilaterum SkT, ut 32 ad 9. Inscriptus autem SkT conus æquilaterus est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF, ut *f* 1 ad 8, hoc est ut 9 ad 72. Igitur ex æquo sphæra TP est ad conum æquilaterum circumscriptum DOF, ut 32 ad 72; hoc est, ut 4 ad 9. Propositione autem 40. demonstravimus etiam sphæræ superficiem esse ad totam æquilateri coni circumscripti superficiem, ut 4 ad 9. Ergo sphæra & soliditate, & superficie est ad æquilaterum conum sibi circumscriptum, ut 4 ad 9. Quod erat dem.

d Per 42. hujus.

f Per præc.

Quod igitur in sphæra, & cylindro sphæram ambiente miratus est Archimedes, idipsum in sphæra, & æquilatero cono ambiente sphæram jam demonstravimus, ut videlicet & soliditatum inter se eadem proportio rationalis, quæ superficierum, existat. Quemadmodum enim ille reperit, sphæram ad cylindrum esse tàm soliditate, quàm superficie, ut 2 ad 3; ita nos docuimus, sphæram & soliditate, & superficie esse ad conum æquilaterum se ambientem, ut 4 ad 9.

Hinc verò illam ipsam proportionem, nempe sesquialteram, quam existere sphæram inter, ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono circumscripto, & soliditate etiam, ac superficie continuari nullo negotio jam demonstrabimus, atque ita huic pariter opusculo finem imponemus.

T PRO-

PROPOSITIO XLV.

Fig. 30. *Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, & cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, & ipsa sphæra eandem proportionem continuant, nimirùm sesquialteram, tàm quoad soliditatem, quàm quoad superficiem totam.*

Nam per 32. hujus cylindrus rectus G K sphęram ambiens tàm soliditate, quàm tota superficie est ad sphæram, ut 3 ad 2, sive ut 6 ad 4. Per pręcedentem verò circumscriptus sphæræ conus æquilaterus B A D, tàm soliditate, quàm superficie est ad sphęram ut 9 ad 4. Ergo idem conus est ad cylindrum tam soliditate, quàm superficie, ut 9 ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, sphæra sunt inter se, ut hi numeri 9, 6, 4, ac proinde continuant proportionem sesquialteram. Quod erat dem.

FINIS.

Ad majorem Dei gloriam.

P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

Trigonometriæ liber unicus.

CAPUT PRIMUM.

Sinuum Definitiones:

Quid sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

Sinus, Tangentes, Secantes sunt rectæ quædam lineæ, quarum in analysi triangulorum in Geometria practica, in Astronomia, aliisque usus est maximus.

Sinuum Definitiones.

Esto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE divisa sit in partes 90 equales, quas Gradus vocant, & singuli gradus in partes equales 60, quæ vocantur Minuta, sic ut totus arcus CE divisus sit in partes æquales, seu minuta 5400. Ex centro A ad singulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam designo litteris AF. Costituentur hoc facto anguli 5400, quibus subtenduntur arcus totidem uno sese invicem minuto excedentes. Ex his unum Fig. 1.

 desi-

designo litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, secundus duorum minutorum, & sic porrò; sexagesimus minutorum 60; hoc est gradus unius, & sic deinceps: postremus EAC est graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta singula ducantur rectæ ad semidiametrum AC perpendiculares, quæ proinde etiam ipsæ numero erunt 5400 computando radium AE, quarum unam designo litteris FX. Hæ appellantur sinus arcuum, & angulorum uno minuto sese mutuò superantium.

1 Igitur arcus ex. gr. FC, & anguli FAC ab ipso subtensi sinus est recta FX, quæ ab F termino arcus perpendicularis est radio AC.

2 Pars radii XC inter arcum, & sinum intercepta est sinus versus ejusdem arcus FC, & anguli FAC.

3 Sinus complementi, sive sinus secundus arcus FC, & anguli FAC est FI sinus illius arcus, nempe FE, qui quadrantem complet, adeoque & sinus illius anguli, nempe FAE, qui cum priore FAC complet rectum CAE.

4 Sinus totus, sive radius est semidiam. AE.

5 Arcus QF quadrante major eundem habet sinum FX, quem arcus minor CF, qui cum eo semicirculum constituit: & angulus recto major FAQ eumdem habet sinum FX, quem angulus acutus FAC, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2. 6 In omni triangulo rectangulo BAC, latus BC recto angulo oppositum, est sinus totus, sive radius: reliqua verò latera sunt sinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirùm AB est sinus anguli O, latus AC sinus anguli R.

Nam

Nam si centro C intervallo CB describatur quadrans FBL, quia latus angulo recto oppositum CB, est jam radius quadrantis, erit CB sinus totus per definit. 4; latus verò AB per defin. 1. erit sinus anguli O, seu FCB. Rursùm centro B intervallo BC descripto quadrante QCI patet per eandem defin. 1. AC esse sinum anguli R, sive QBC. Ex quo jam nunc apparet, quantus sinuum futurus in Trigonometria sit usus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

ESto circulus BXZ, cujus quadrans BX intelligatur, ut suprà, divisus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A ad contactum B ducatur radius AB, qui *a* cum tangente constituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus singulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF, AL &c. quo facto constituentur anguli FAB, LAB &c. ad 5400, ut suprà, quibus subtenduntur totidem arcus BC, BO, &c. *Fig. 3.* *a Per 18. l. 3.*

7 Arcus igitur BC, & anguli BAF tangens est recta BF, secans verò AF, sinus totus AB: similiter arcus BO, & anguli BAL tangens est BL, secans AL, & sic deinceps.

8 Arcus quadrante minor BO, & arcus quadrante major ZO cum priore BO faciens semicirculum eandem habent tangentem BL, & secantem AOL.

9 In omni triangulo rectangulo FBA respectu acuti anguli FAB tangens est FB ipsi oppositum, latus alterum AB ipsi adjacens est sinus totus, seu radius; hypotenusa verò AF, seu latus recto angulo oppositum est secans. Patet ex definit. 6. & propos. 16. lib. 3. si

centro A per B describatur circulus.

Pari modo respectu alterius acuti anguli A F B tangens est A B, sinus totus, seu radius est F B, secans F A. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. si centro F per B circulum descripseris.

Hypotenusa igitur utriusque acuti secans est, ac proinde cùm hi anguli inæquales sunt, diversis numeris in tabulis sinuum hypotenusa exprimitur.

Cæterùm notandæ in primis sunt, ac probè intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, Secantes ad usum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus, Tangentes, Secantes, est earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut à vera insensibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes divisus, ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus singuli Sinus, Tangentes, Secantes contineant, quæ inventio, ut posteà ostendam, eò acuratior futura est, quò plures in partes radius circuli divisus assumetur. Hoc sinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & novissimè Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000. Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis supputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noster, Pitiscus, Rheticus, aliique complures illustrarunt. Quamvis autem ab iis omnibus præclarè hoc in genere laboratum sit, quia tamen

tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio est, optandum sanè videtur, ut facilior ea studiosis, atque expeditior, si fieri potest, efficiatur. Quare animus mihi est, artificium quàm utile, tàm pulchrum, & clariùs, quàm cæteri fecerunt, & breviùs exponere. Rem omnem tribus Porismatis, & sex Problematibus absolvam. Sit ergo.

Porisma. I.

D*Ato sinu (F C), cujusvis arcus (FB), complementi sinum (F O) invenire.* *Fig. 4.*

Ducto radio AF, quadratum AF *a* æquatur quadratis FC, AC. Quare si ex quadrato radii, seu sinus totius auferas quadratum sinus dati FC, remanet quadratum AC, hoc est quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO sinum complementi quæsitum.

a Per 47. l. 1.

Porisma. II.

D*Ato sinu (C F), cujus arcus (IC,) sinum semisseos ejusdem arcus invenire.* *Fig. 5.*

Arcui IC subtende rectam IC, ad quam è centro perpendicularis sit AL, quæ tàm *b* rectam IC, quàm arcum *c* ILC bissecabit, ac proinde IO est sinus arcus LI semisseos arcus ILC.

b Per 3. l. 3.
c Per 3. l. 3.

Ex sinu dato CF per præcedentem inveniatur sinus complementi CQ, seu FA, quo ablato ex sinu toto AI, nota fit FI. Nota igitur est summa quadratorum IF, CF, hoc est *d* quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata

d 47. l. 1.

drata dabit ea rectam IC, ejusque semissis sinum quæsitum IO.

Porisma III.

Fig. 6. *DAtis sinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB), quorum differentia non sit major 45 minutis, sinuum (IS) arcus cujusdam medii invenire.*

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ sinuum LX, IS ad sinum FR. Et quia arcus LF est non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF sensibiliter à rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO assumi possunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO est parallela LQ erit *a*

a Per Coroll. 1. prop. 4. l. 6.

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia	ad arcus medii, & minimi differentiam
LF	IF
ita sinuum datorum maximi, & minimi differentia	ad sinus medii, & minimi differentiam
LQ	IO

Quare cùm hujus analogiæ tres primi termini sint noti, etiam quartus IO innotescet, quem si addamus sinui dato minori FR, notus erit medius quæsitus IS.

Lemma.

Fig. 7. *SEmissis subtensæ (CB) alicujus arcus (CFB) est sinus semisseos ejusdem arcus.*

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpendipendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. ſinus arcus CF. Atqui per 3. lib. 3. CG eſt ſemiſſis CB, & per 30. lib. 3. CF ſemiſſis CFB. Ergo &c

Problema I.

Sinum arcus 45 graduum invenire.

QUadrantem CFB ſubtendat recta CB, ad quam ex centro A ſit perpendicularis AGF. Quoniam igitur arcus CB 90 grad. *a* biſectus eſt in F, erit FB arcus graduum 45, cujus ſinus eſt BG. Deinde ergo ob æqualitatem laterum AC, AB anguli *b* quoque ACB, ABC æquales ſunt, qui verò ad A rectus erit. Ergo *c* ABC, ſeu ABG ſemirectus. Eſt autem *d* AGB rectus reliquus ergo BAG *e* ſemirectus eſt, ideoque par ipſi ABG. Ergo latera BG, AG *n* ęqualia ſunt. Ergo, quia quadratum AB æquatur *f* utrique quadrato BG, AG, unius quadrati BG duplum erit. Semiſſis ergo quadrati ſinus totius AB æquatur quadrato ſinus 45 graduum BG.

Fig. 7.
a Per 30. l. 3.
b Per 5. l. 1
c Per Coroll. 11. prop. 32. l. 1.
d Per hyp.
e Per 32. l. 1.
n Per 6. l. 6
f Per 47. l. 1.

Quare ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea ſinum 45 grad. qui, quarum partium ſinus totus ponitur 10000000, reperietur earundem eſſe 7071068 ferè.

Problema. II.

Arcuum 60, & 30 graduum ſinus invenire.

ESto quadrans BC; arcus BF graduũ 60, & ſinus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduũ 30, cujus *Fig. 8.*

ſinus

ſinus ſit F G; ducatur autem B F, & ex centro A F. Quoniam arcus B Q F eſt grad. 60. hoc eſt ſexta pars circumferentiæ circuli, erit B F latus hexagoni, ideoque *a* æquale radio A F. Anguli *n* igitur ad A, & B in triangulo A F B ęquales ſunt. Cùm igitur in triangulis X, Z ęquales ſint anguli F B D, F A D; item anguli F D B, F D A utpote recti; latus verò F D commune, erunt *b* quoque latera B D, A D ęqualia: ac proinde quadratum B D eſt quarta pars quadrati ſinus totius A B, ſeu F B; ſed quadratum F B ęquatur *c* quadratis B D, F D. Auferatur ergo quarta pars quadrati ſinus totius, ſive quadratum ſemiſſeos A D ſinus totius à quadrato ſinus totius F B, remanebit quadratum F D, cujus radix quadrata dabit rectam F D, ſinum 60. graduum. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 60. eſt 8660254.

a Per coroll. 1. p. 15. lib. 4.
n Per 6. lib. 1.
b Per 27. lib. 1.
c Per 47. lib. 1.

Sinus porrò F G grad. 30. eſt ſemiſſis ſinus totius, utpote ęqualis ipſi D A. Idem patet ex lemmate. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 30. eſt 5000000.

Problema III.

Sinum 36 graduum invenire.

Fig. 9.

Esto ſemicirculus F B G, cujus baſi radius A B rectus inſiſtat. Tum radio A G biſecto in D ducatur recta D B, quę transferatur ex D in C. Recta B C erit *a* latus pentagoni circulo inſcripti.

a Ptolom. l. 1. almag.

Ex ſumma quadratorum A B radii, ſive ſinus totius, & A D ſemiſſeos radii extrahe radicem quadratam, dabit ea *b* rectam D B, hoc eſt D C. Ex D C aufer D A ſemiſſem radii

b Per 47. lib. 1.

radii, fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB, notum fiet *c* quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni ſubtendens gradus 72. Illius ergo ſemiſſis *d* dabit ſinum 36 graduum. Poſito ſinu toto 10000000, ſinus grad. 36. reperietur partium 5877852.

c Per 47. lib. 1.

d Per lem.

Corollarium.

EX ſinu grad. 36. reperietur *e* ſinus complementi, nempe grad. 54. partium 8090170.

e Per Poriſ. 1.

Problema. IV.

Sinum graduum 12 invenire,

IN quadrante CB ſit arcus BF graduum 30, KB grad. 54, & eorum ſinus DF, GK. Igitur erit eorum differentia KF grad. 24. complementa verò erunt FC, grad. 60, KC grad. 36, quorum ſinus ſint PF, NK.

Fig. 10.

Sinus NK grad. 36. inventus per Probl. 3. auferatur ex ſinu PF grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit OF nota. Tum ſinus FD grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex ſinu KG grad. 54. invento per Coroll. pręced. remanebit OK nota. Radix ſumma quadratorum OF, OK dabit *a* KF ſubtenſam 24 grad. illius verò ſemiſſis dabit *b* ſinum graduum 12.

a Per 47. lib. 11.

b Per lem.

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis sese ordinatim uno minuto superantium invenire.

EX quatuor sinibus per præcedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos sinus omnes adminiculo trium Porismatum premissorum inveniemus hunc in modum.

Ex sinu graduum 45 inveniuntur sinus septem.

PRoblemate 1. inventus est sinus arcus grad. 45, sumatur graduum 45 semissis grad. 22, 30. & semissis horum grad. 11, 15. quę amplius bisecari nequit, sinus harum semissium reperiuntur per porisma 2. nimirùm ex sinu grad. 45. reperitur sinus grad. 22, 30. & ex hoc sinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus
semisses 22, 30. 11, 15.

Accipiantur deinde harum semissium complementa; complementum arcus totius grad. 45, quia ipsi ęquale, tanquam inutile omittitur.

ex semissibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum sinus reperiuntur per Poris. 1. Rursùm ex his complementis sumantur semisses semissium, quoties possunt; tum complementa semissium, donec complementum occurrerit, quod bisecari nequeat.

Ex

Ex compl. 67, 30. 78, 45.
Semiſſ. 33, 45. nulla.
Compl. 56, 15.
Semiſſ. nulla.

Complementa poſtrema erant grad. 67, 30. & grad. 78,45. Ex poſteriori, quia biſecari nequit, nihil ultrà eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30. ſemiſſis eſt grad. 33, 45. cujus ſinus per Poriſ. 2. obtinetur. Hujus complementum eſt grad. 56, 15, cujus ſinus reperitur per Poriſ. 1. Quia verò complementum hoc ultimum non poteſt biſecari, hic terminus erit inveniendi ex ſinu graduum 45. Igitur ex ſinu graduum 45. inventi jam ſunt ſinus ſeptem, quorum inventionis ſeries in tabella appoſita exhibetur.

	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G	M.
	o	l	o	l	o	l	o	l
	90	0	45	0				
Semiſſ.					22	30	11	15
Compl.					67	30	78	45
Semiſſ.					33	45		
Compl.					56	15		

Ex ſinu graduum 60 inveniuntur ſinus 16.

ARcus 60. graduum biſecetur quoties poteſt, & accipiantur ſemiſſium complementa, quæ iterùm biſeca, quoties potes, tum ſemiſſium rursùm accipe complementa, quæ denuò biſeca, & biſectionis complementum aſſume. Ex hac alterna acceptione, quæ ſexies repetita eſt, habentur arcus 16, quorum ſinus per Poriſma 2, & 1 alternatim accepta invenientur.

Sinus grad. 60 ejuſque ſemiſſes		Cõplementa		Semiſſes Complementorum.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
60	0										
30	0										
15	0	75	0	37	30	52	30	26	15	63	45
				18	45	71	15				
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam ſemiſſium, & complementorum ſeriem exhibet tabella hìc appoſita; atque ita ſi hactenùs inventi ſinus ordinentur adnumerato ſinu toto grad. 90. habebimus 24. ſinus arcuum ſeſe gradib. 3. ~~15~~ 45 ſuperantium.

Ex ſinu graduum 36 habentur ſinus 32.

SI enim arcus grad. 36. accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic deinceps. Deinde ipſius ſinus 36, & omnium ſemiſſium complementa, ac rursùm ſemiſſes complementorum; eaque alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32. quorum ſinus per Poriſma 2. & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 32 arcuum exhibet tabella ſubjecta.

Sinus

Sinus grad. 36 cũ suis semiss.		Cõplementa.		Semiss. Cõplementorum.		Cõplementa.		Semiss.		Cõplementa.		Semiss.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l	°	l
36	0	54	0	27	0	63	0	31	30	58	30	29	15	60	45
								15	45	74	15				
				13	30	76	30	38	15	51	45				
				6	45	83	15								
18	0	72	0												
9	0	81	0	40	30	49	30	24	45	65	15				
				20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ex

Ex sinu 12. graduum inveniuntur sinus 64.

HUnc in modum. Ex ſinu 12 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic porrò, tum ipſius 12, & omnium ſemiſſium complementa; ſumantur deinde ſemiſſes complementorum, ac rurſùs ſemiſſium complementa &c. Hęc alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio, ſi duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum ſinus invenientur per Poriſma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64 arcuum exhibet tabella hìc adjecta.

Sinus grad. 12 ejusque semiss.	Cōplementa.	Semiss. Cōplementorum.	Cōplementa.	Semiss.	Cōpl.	Semiss.	Compl.	Semiss.	Cōpl.	Semis.	Cōpl.
G. M.	G. M.	G. M.	G. M.	G. M.	G. M.	G. M.	G. M.	G. M	G. M.	G. M.	G. M.
° l	° l	° l	° l	° l	° l	° l	° l	° l	° l	° l	° l
12 0	78 0	39 0	51 0	25 30	64 30	32 15	57 45				
				12 45	77 15						
		19 30	70 30	35 15	54 45						
		9 45	80 15								
6 0	84 0	42 0	48 0	24 0	66 0	33 0	57 0	28 30	61 30	30 45	59 15
								14 15	75 45		
						16 30	73 30	36 45	53 15		
						8 15	81 45				
		21 0	69 0	34 30	55 30	27 45	62 15				
				17 15	72 45						
		10 30	79 30	39 45	50 15						
		5 15	84 45								
3 0	87 0	43 30	46 30	23 15	66 45						
		21 45	68 15								
1 30	88 30	44 15	45 45								
0 45	89 15										

Quòd si sinus omnes hactenùs inventos sinu toto adnumerato simul in ordinem redigamus, sinus habebimus 120 arcuum sese mutuò 45 minutis superantium, quorum primus est 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′	G. °	M. ′
0	0	3	0	6	0	9	0
0	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	0

Ex his 120 Sinibus.

RELiquos omnes intermedios ope tertii Porismatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primò quæremus inter singulos horum 120 sinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur sinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter singulos jam inventos duo quærentur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358 proveniunt sinus arcuum 1076 se minutis 5 superantium.

Denique inter illos singulos quæremus medios quatuor arcuum uno se minuto excedentium, quos si addamus illis 1076, habentur sinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno se minuto superantium.

pro

Problema, VI.

Secantes, & Tangentes quascunque invenire.

Ex sinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innotescent. *Fig. 3.*

Arcus cujuscunque B S ex gr. 70, 15. secans esto A R, tangens B R, sinus totus A B. Oporteat secantem AR invenire. Duc S k sinum arcus S B, & S N sinum complementi S X. Per prop. 4. lib. 6. ut A k (seu N S) est ad A S, ita A B, (seu A S) est ad A R. Sunt ergo tres proportionales)

NS	AB	AR
Sinus compl. arcus dati grad. 70, 15.	Sinus totus 10000000.	Secans quęsita

Quare si quadratum sinus totius dividatur per N S sinum complementi arcus dati, quotiens dabit secantem quæsitam A R, ut patet ex 18. lib. 9.

Oporteat deinde dati cujuscumque arcus B S tangentem reperire B R. Per prop. 4. lib. 6. ut A k (seu N S) est ad k S, ita A B ad B R. Sunt ergo proportionales.

NS	kS	AB	BR
Sinus compl. arcus dati	Sinus arcus dati	Sinus totus 10000000	Tangēs quæsita

Quare cùm tres primi termini sint noti, per regulam trium innotescet quartus.

Habent igitur studiosi, quod suprà promiseram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tribus *porismatis, & problematis sex comprehensam. Scio, plures alias esse sinuum reperiendorum vias, sed ea, quam proposui, cæteris explicatu, ac demonstratu mihi est visa facilior.*

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig. 4. REpræsentet P B arcus unius minuti, seu 60 secundorum, k B verò arcum 26 secundorum ex gr. sinus verò istorum arcuum sint P M, k N. Quoniam hi arcus insensibiliter differunt à rectis lineis, assumi possunt triangula P B M, k B N tanquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut P B 1 Min. seu 60 secun.	ad k B 26 secun.	ita P M sinus 1 Min.	ad k N sinum 26 secun.

Quare per regulam trium reperietur sinus k N 26 secundorum, multiplicando videlicet secundum 26 per tertium, nempe 2909 sinum 1 minuti, & productum dividendo per primum, nempe 60 secun.

Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi 49 $\frac{29}{60}$ posito sinu toto 10000000. licebitque eadem methodo reperire sinum unius tertii, & sic in infinitum.

Pro-

Problema VIII.

Invenire ſinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam ſecunda contineat.

INveniendus ſit ex. gr. ſinus graduum 36. 20', 16''. Arcum grad. 36. 20'. proximè minorem dato repræſentet F B; arcum verò dato proximè majorem, nempe grad. 36. 21' referat L B. Arcum datum grad. 36. 20' 16'', qui inter hos medius eſt, referat I B. Sinus autem horum trium arcuum ſint L X, F R, I S, & ducatur perpendicularis F O Q. Arcus igitur L F eſt 1', ſeu 60'' arcus I F, 16'', L Q differentia Sinuum L X grad. 36, 21' & F R grad. 36 20'. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1', inſenſibiliter differt à recta linea, & multò adhuc minùs arcus I F, 16'', erit per propoſ. 4. l. 6. *Fig. 6.*

Ut L F	ad IF	ita L Q differentia	ad IO diff.
60''	16''	Sinuum &c.	ſinus &c.

Quare cùm tres primi termini ſint noti, etiam innoteſcet quartus, differentia I O, quæ addita F R ſinui grad. 36. 20'. dabit ſinum quæſitum 15. gra. 36. 20'. 16''.

Problema IX.

Dato Sinui arcum aſſignare.

SInum datum quære in tabulis. Si eum reperies, arcum illi debitum habes adſcriptum, ſi nō reperies, quęre eo proximè & majorem, & minorē, quos referat LX, FR, datum verò repræſentet IS. Ducta perpendiculari FOQ, erit per 4 lib. 6.

LQ exceſſus.

Ut Sinus LX proximè majoris
dato ſupra minorem FR
ad
IO exceſſum
ſinus dati IS
ſupra minorem FR
ita
arcus LF
60 ſecund.
ad
numerum ſecundorum,
quæ debentur arcui IF.

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum innoteſcet, numerus nempe ſecundorum debitus arcui IF, qui additus gradibus, ac minutis arcus noti FB dabit arcum debitum ſinui dato IS.

Atque hæc quidem hactenùs de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum eſt, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia ſequenti Scholio declaremus.

Scholium.

Quæſtio eſt, cur radius circuli in tot partes diviſus aſſumatur.

UT hujus aſſumpti cauſa intelligatur, meminiſſe debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas eſſe vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi 120 ſinus arcuum

cuum se invicem 45 minutis superantium per extractionem radicis reperti sunt, ut patet ex Problem. 1, 2, 3, 4, 5. Cæteri verò omnes inter hos medii ex illis 120 per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis 5 postrema parte constat. Tangentes autem, & Secantes ex sinibus jam notis per regulam eandem reperta sunt, quemadmodum Problem. 6. ostensum est. Jam verò numeri, è quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm sunt non quadrati, ex quibus si radicem educas, ea semper à vera, quæ (ut lib. 3. Arith. cap. 6. demonstravi) impossibilis est, differet excessu, defectuve aliquo, minore tamen, quàm sit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in supputando molestiā negligitur, eò minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, è quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eò major, quò radius in partes plures divisus assumetur. Exemplū stutuamus in sinu 45 graduū, quem Probl. 1. docuimus obtineri, si ex semisse quadrati sinus totius radicem extraxeris. Si numerus radii, seu sinus totius assumatur magnus, qualis hic est 10000000, illius etiam quadratus, adeoq; & quadr. semissis 50000000000000 multò erit major. Porrò radix integra, quę elici potest ex 50000000000000, est 7071067, quæ quia ex maximo numero elicita est, etiam ipsa magnus est numerus. Unde fit, ut ipsius à radice vera impossibili defectus, qui semper unitate minor est, ad ipsam proportionem habeat insensibilem, proindeque tutò, & absque sensibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob causam tantus numerus partium sinus totius assumi debet. Verùm, ut hujus rei causa manifestior evadat, omnia errorum capita exactiùs erunt colligenda. Primum caput erroris est in sinibus illis primis 120, quos reperire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eliciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo insunt errores proprii, videlicet Fig. 6. quòd in triangulis LFQ, IFO arcus LF 45, & arcus IF 15, aut 5 assumantur tanquam rectæ lineæ; atq; insuper, cùm regula proportionum exercetur, quòd fractio ex divisione residua negligatur. Quo vitio postremo etiam Tangentes, & Secantes, quæ omnes ex sinibus per prop. reg. obtinentur, laborent necesse est. Denique cùm sinus perpauci tantum immediatè reperiantur, cæteri verò sinus omnes deducantur ex invicem, ex sinibus autem Tangentes, & Secantes, manifestum est, singulos præter errores sibi proprios contrahere etiam vitia eorum, è quibus ipsi derivantur; unde fit, ut error, qui in sinu immediatè invento simplex erat, in secundo quasi duplicetur, in tertio triplicetur, & sic deinceps. Unde consequens est, eò sinus esse accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactissimos verò esse eos, qui immediatè, hoc est ex aliis nullis inventi sunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur, qui ne essent notabiles, sed quodammodo evanescerent, radium maximo partium numero divisum assumere oportuit; & quamvis defectus illi sint non unus, sed (ut jam ostendi) plures, tamen quòd singuli nullius ferè momenti sunt, etiam simul juncti errorem vix sensibilem inducunt, si assumatur sinus totus partium admodùm multarum; qua enim proportione augetur numerus radii, eadem crescunt numeri sinuum, ac proinde errores, qui in iis supputandis committi debent, magis evanescunt.

Deinde istud etiam tyrones intelligant, si Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad sinum totum

10000000. *quales passim in tabulis reperiuntur abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium* 100000, *totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. posito radio* 10000000 *Sinus* 8 *grad. est* 139173 1, *si cupiam minorem ad radium* 100000, *omissis duabus primis notis, is erit* 13917; *talis enim Sinus, Tangentis, Secantis differentia à majori solùm erit fractio, cujus numerator sint notæ abjectæ, denominator verò sinus totus duobus cyfris mulctatus. Itaque sinus* 8. *grad.* 13917 *minoris à majori* 1391731, *differentia erit* $\frac{31}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex natura logisticæ decimalis, quam exposui Arithm. Practicæ lib.* 2. *cap.* 9. *& seq. præsertim ex Theor.* 1. *&* 2. *c.* 10. *Postremò hoc imprimis hìc observabitur, cùm Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur respectu radii ex gr.* 100000, *exactiores fore eas lineas, si supputentur respectu sinus* 10000000 *datum excedentis duabus cyfris, & ab iis ita supputatis totidem primæ notæ, ut jam dictum est, abjiciantur. Ratio est, quia errores sinuum multis notis constantium, non versantur nisi in primis notis. Ita Regiomontanus, cùm sinus cuperet ad partes radii* 600000, *assumpsit radiũ* 600000, 00000, *& à sinibus ad eum radium supputatis primas quatuor notas sustulit. Similiter Rheticus, ut haberet sinus ad radiũ* 10000000000 *assumpsit radiũ* 100000, 00000, 00000, *& à sinibus per hunc repertis præscidit quinq; notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ residuæ omnes veræ existant, ac proinde sinus ita reperti à veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, sive canone assumitur. Et tales sunt ii omnes, qui in tabulis passim descripti sunt.*

CA-

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analysis.

TRiangulum omne, quod per se manifestum est, tria latera habet, & angulos tres, quæ simul juncta senarium numerum efficiunt. Ex his tria semper nota sint oportet, ut tria reliqua, quæ sunt ignota, cognoscantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, sive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analysis Triangulorum* ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud, seu præstantius, seu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perspiciant, non ea solùm triangula contemplari debent, quæ in carta, vel tabula delineantur; sed ab his cogitationes suas transferre ad ea oportet, quæ in campis, atque in aere, imò & in ipso cœlo per radios visuales, & ipsas rerum distantias, longitudinesque describuntur. Opportunum erit ex iis, quæ posteà erunt uberiùs explananda, exemp. unum, alterumve quasi ad rei totius specimen aliquod affare. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum, quî dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta sint, inveniri possint.

Fig. 11. Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; distantiam verò oculi ab eadem recta AQ horizontalis, cum qua rectum angulum constituit altitudo FQ; radium visualem extentum à turris apice F ad oculum in A repræsentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere descriptum,

ptum cujus unum latus eſt AQ diſtantia oculi à turre, alterum QF ipſa turris altitudo, tertium radius viſualis AF. In hoc triangulo angulus QAF (ut ſuo loco oſtendam) fit notus inſtrumento; latus AQ diſtantia jam ſupponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto QAF, & diſtantia AQ, per univerſale Problema jam dictum invenietur quanta ſit altitudo turris QF. Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam iſtud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ ſit laterum inter ſe proportio, invenire.

Ex hoc Problemate ad diſtantiam Lunæ à Terra dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ eſto C, centrum terræ A, oculus in ſuperficie terræ in B; ſemidiameter orbis Terræ AB. Cogitentur tàm ex terræ centro A, quàm ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto conſtituitur triangulum à Terra ad Lunam pertingens, cujus unum latus eſt ſemidiameter Terræ AB, reliqua duo ſunt diſtantiæ tàm centri Terræ, quàm ipſius oculi à centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB aſtronomico artificio innoteſcit, angulus verò ABC fit notus per inſtrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per univerſale Problema jam dictum innoteſcet, quæ ſit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc eſt, quoties diſtantia lunæ à terra ſemidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipſa etiam diſtantia Lunæ à terra in milliaribus innoteſcet. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujuſmodi, quod tyro fortè aliquis nullius eſſe uſus judicaſſet. Hęc ergo dicta ſint in gratiam eorum, *Fig. 12.*

qui-

quibus illud in ore semper, cui usui, ut ex his etiam cætera, quorum usum non perspiciunt, æstimare discant.

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRiusquam vltrò tendamus, expediet hìc in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus sub hæc initia hærere plerumque tyrones solent. Prætereant ista, qui his non indigent.

1 Datum, & notum idem significant in hac materia.

2 Circumferentiam circuli partiri solent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum singulas rursùs in 60 æquales, quas minuta vocant.

3 Arcus circuli, seu pars circumferentiæ nota dicitur, cùm scitur, quot gradus contineat, tunc enim arcus ille, quanta sit totius circumferentiæ pars, innotescet.

Fig. 14. 4 Angulorum mensuræ sunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tanquam centro inter ejus crura describuntur. Sic anguli C mensura est arcus OQ centro C descriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultima lib. 6. Hac de causa angulus C dicitur esse tot graduum, quot graduum est ille arcus OQ, ut si arcus OQ est grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5 Angulus ille C dari, seu notus esse dicitur, quando scitur, quot graduum sit, hoc est, quot graduum sit arcus OQ inter ejus crura ex vertice, ut centro descriptus.

6 Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice descriptus est 90 grad.

grad. seu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura descriptus, eosque subtendens, est grad. 180, semissis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia subtenduntur à tota circumferentia.

7 Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures describantur arcus O Q, S V; minor æquè est mensura anguli, ac major; quia minor æquè magna pars est suæ circumferentiæ totius, ac major suæ, ac proinde si arcus major O Q est ex. gr. 32 graduum, quorum tota circumferentia major O Q L H est 360, etiam minor arcus S V est graduum 32, quorum minor circumferentia S V R T est 360. Patet ex Corol. 3. prop. 33. lib. 6. *Fig. 14.*

8 Cujuscunque trianguli tres anguli simul sumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli simul sumpti semper efficiunt duos rectos, ac proinde, si ex angulorum verticibus A, B, C tanquam centris inter trianguli cujusvis crura describantur, eodem intervallo circini, tres arcus F G, X Z, O Q simul sumpti semper conflabunt semicirculum, hoc est arcum 180 graduum. Nam si centro C perficiatur semicirculus O Q P, & arcus F G transcribatur ex Q in L; tertius arcus X Z æqualis erit residuo L P, adeoque tres simul arcus O Q, F G, X Z conficiunt integrum semicirculum O Q L P. *Fig. 13.*

9 Cùm in triangulo A B C quocunque, noti sint duo anguli A grad. 125, B grad. 34. etiam C tertius innotescit, si utriusque dati gradus 159 subtrahantur à 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib.

lib. 1. Atque hac de cauſa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur eſſe datus.

Fig. 25. 10 Pari ratione, ſi in quovis triangulo (ABC) notus ſit unus angulus (B grad. 39.) innoteſcit etiam ſumma reliquorum (C, A) ſi gradus anguli noti (B grad. 39.) ſubtrahantur à 180 gradibus; remanent enim gradus (141) ſummæ duorum reliquorum (C, A). Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa dato uno angulo, dicitur & ſumma reliquorum dari.

Fig. 16. 11 In triangulo rectangulo (BAC) dato acuto uno (C grad. 31) etiam acutus alter (B) innoteſcet, ſi acuti dati (C grad. 31) ſubtrahantur à gradibus 90, remanent enim grad. (59) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa in triangulo rectangulo, cùm datur acutus unus, dari dicitur etiam alter.

12 Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cùm primus A eſt ad ſecundum B, ut tertius C ad quartum Z

ut A ad B,
ita C ad Z

13 Termini noti ſunt, qui numeris exprimuntur, hoc eſt, quando ſcitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14 Cùm è quatuor proportionalibus tres termini ſunt noti, quartus verò incognitus, is ſemper innoteſcet, ſi ſecundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum, quotiens enim diviſionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc eſt regula, quæ vulgò proportionum, ſive trium, & ob ſummam utilitatem Aurea appellatur, demonſtrata eſt prop. 19. lib. 9. de qua vide plura lib. 4. Arithm. cap. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis ſinus eiuſdem: & dato

dato ſinu datur angulus; ut ſi detur angulus grad. 40, 16. gradus quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columna prima ad lævam.

His adſcriptum reperies non ſolùm ſinum illis debitum 6463460, ſed etiam tangentem 8470620, & ſecantem 13105396. Contrà ſi detur ſinus ex gr. 6563460, cujus angulum ignores, quære in columua ſinuum numerum datum; vel ſi non reperiatur, ei proximè æqualem, in columna prima ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæſiti.

Denique hoc obſerva: in analyſi trianguli rectanguli quamvis ſolùm duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui quia per ſe notus eſt, & triangulo rectangulo nominato ſatis ſubintelligitur, ulteriùs exprimi non ſolet.

ANA-

ANALYSIS TRIANGULI RECTANGULI.

PROBLEMA PRIMUM

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

Fig. 15. BAsi A C adscribe totum sinum, lateri A B sinum oppositi anguli C, lateri C B sinum anguli oppositi A. Eadem erit laterum proportio, quæ sinuum.

Demonstratio patet ex defin. 6. cap. 1. Itaque si cupiam scire, quanto latus unum sit altero majus ex. gr. BC quàm A C: sinum 10000000 divide per sinum 5150381. Quotiens $1\frac{4849619}{10000000}$ hoc indicabit; sicut enim quotiens est ad 1, ita A C est ad B C.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta B C, cui adscribe sinum totum, lateri B A tangentem acuti C, basi A C secantem ejusdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex definit. 9. cap. 1.

Problema II.

Fig. 16. D*Atis basi* (B C *pedum* 100), *& acuto uno* (B *grad.* 59) *reliqua latera* (*A C*, *A B*) *invenire*.

IN triangulo rectangulo hypotenusa, sive basis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera verò, quæ rectum angulum continent.

Inven-

Inventio lateris AC.

Ut data basis BC, prout est sinus totus 10000000	ad	latus AC, prout est sinus anguli B grad. 59. 8571673
ita eadem basis BC, prout est pedum 100.	ad	ejusdem lateris AC pedes quæsitos.....

In quo analogismo, quia tres primi termini sunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri AC debitorum innotescet per regulam proportionum multiplicando videlicet secundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim $857\frac{167300}{10000000}$ ex ea divisione proveniens, est quartus, qui latebat, numerus pedum scilicet, quos continet latus quęsitum AC.

Non assimilis inventio lateris AB. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32 lib. 1. seu annotat. 11 datur acutus alter C grad. 31; unde etiam sinus utriusq; dantur. Jam

Ut basis BC, prout est sinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout est sinus ang. gr. 31. 5150381
ita basis BC, prout est pedum 100.	ad	lateris ignoti AB pedes quæsitos.....

Cùm ergo tria prima sint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri AB debitorum per regulam trium innotescet.

Demonstratio.

HOc unum tùm hìc, tùm ferè etiam in sequentibus erit demonstrandum, quatuor supradictos terminos esse proportionales. Id verò ex definitione 6. cap. I. manifestum est. Nam basis BC, latus nempe recto angulo A oppositum est sinus totus, seu radius, latus verò AC est sinus anguli oppositi B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium sinus totus, nempe basis BC est 10000000. earum sinus anguli B, nempe latus AC est 8571673; ac proinde ut basis BC prout est sinus totus 10000000 est ad AC 8571673 sinum anguli B, ita eadem basis BC ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæsitum, sive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonstrandum.

Pari modo per defin. 6 BC est sinus totus 10000000, & AB sinus anguli C 31 grad. quì ex tabulis datur 5150381. Ergo ut BC sinus totus 10000000 ad BA sinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100. ad eandem BA incognito pedum numero constantem. Quod erat demonstrandum.

NOTA.

Fundamentum hujus, & omnium sequentium operationum, ac demonstrationum est, quod quando duæ quantitates A, & Z notæ sunt secundum quamvis earum mensuram, & una earum A etiam nota est in alia mensura ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus necessariò innotescet per regulam auream, vide cap. 1. lib. 4. Arithm. nostræ, ubi id demonstratum est.

Pro-

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000), & acuto uno latus reliquum (BA), & basim (BC) invenire. Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut si B detur grad. 54. bis subductis à 90. erit C gr. 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, prout est sinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout est anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
ita latus datum AC, prout est milliariorum 1000	ad	lateris ignoti AB milliaria quæsita.

Inventio basis BC.

Ut latus datum AC, prout est sinus totus 10000000	ad	basim ignotam BC, prout est acuti C dato lateri adjacentis secans 12360680
ita latus datum AC, prout est milliariorum 1000	ad	ignotæ BC baseos milliaria quæsita.

Quare cùm in utroque analogismo tria prima sint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innotescet: eritque latus AB milliariorum $726 \frac{5426}{10000}$ basis verò BC milliariorum $123 \frac{6068}{10000}$.

Demonstratio.

PEr defin. 9. cap. 1. latus AB est tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426, latus verò AC est sinus totus 10000000, hoc est, quarum partium latus AC est 10000000, earum est AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000 est ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæsiti lateris AB, hoc est ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin. 9. cap. 1. respectu anguli C grad. 36 AC est sinus totus 10000000 & BC secans, quę ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC sinus totus 10000000 est ad BC secantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 100 milliarium ad eandem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig. 18. B*asi* (CB 1000 *perticarum*) *&* *uno latere* (AC 891 *perticarum*) *datis*, *invenire acutos angulos*, *&* *latus alterum* (AB.)

Ut basis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita basis eadem CB, prout est sinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, sinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8910000; huic in tabula invenitur proximè æqualis 8910065, cui adscriptus est angulus gr. 63, qui per probl. 9. cap. 1. adhuc reperitur exactiùs 15. ergo est angulus B, qui latebat, invento to autem acuto B datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam verò jam in triangulo rectangulo nota est basis C B cum angulo C, latus quęsitum B A invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3. in Scholio prop. 47. lib. 1. elem.

Demonstratio.

Per defin. 6. cap. 1. CB est sinus totus 10000000, & C A est sinus anguli B. ergo ut basis BC 1000 pertic. ad latus A C 891 pertic. ita basis eadem BC prout est sinus totus 10000000 ad idem latus AC prout est sinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus C A datum pertic. 891	ad	basim C B pertic. 1000
ita sinus totus 10000000	ad	secantem ignoti ang. C datis C B, C A comprehensi.

Demonstratio eadem, sed est defin. 9. cap. 1.

Problema V.

Fig. 19.

Duobus lateribus datis (B A pedum 79, C A pedum 100) acutos angulos, & basim invenire.

Inveniendus sit angulus acutus C.

Ut datum latus A C adjacens quæsito ang. C	ad	alterum latus datum A B.
ita sinus totus 10000000	ad	anguli quæsiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000 ; huic proximè ęqualis invenitur in tabula [illegible], cui adſcriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl. 9. cap. 1. adhuc reperietur exactiùs . Tantus ergo eſt acutus C, qui latebat , quo ex grad. 90 ſubtracto datur & alter B grad. 52, quia verò noti jam ſunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl. 3. etiam baſis B C fiet nota .

Alia baſis inventio ab angulis independens traditur probl. 2. Scholii prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio .

Per defin. 9. cap. 1. reſpectu anguli C ſinus totus eſt C A, tangens B A . Ergo ut C A ex hyp. pedum 100 ad B A ex hyp. pedum 79. ita eadem C A, prout eſt ſinus totus 10000000 ad eandem B A, ut eſt tangens quæſiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

TRiangulum , in quo nullus angulus rectus eſt, obliquangulum voco .

Problema VI.

Fig. 20. 21. *DAtis omnibus lateribus lateris ſegmenta (B F, C F) facta à perpendiculari (A F) ex oppoſito angulo ducta , & ipſam perpendicularem invenire .*

Centro A intervallo lateris minoris A B deſcribatur circulus ſecans reliqua latera in O, & Q, & producatur C A in L: manifeſtum eſt L C eſſe ſummam laterum A C , A B ; & O C differentiam eorundem; item patet ex prop. 3. lib. 3. B Q biſectam eſſe in F. His ita conſtitutis rectangula

B C Q,

BCQ, & LCO *a* æqualia ſunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6. *a Coroll.* 1. *prop.* 36. *l.* 3.

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit.	ad	LC ſummam laterum reliquorum. BA, AC	
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad	rectam CQ.	

Quare cùm tria prima ſint nota, etiam quartum nempe CQ innoteſcet, hæc, ſi perpendicularis intra triangulum cadit, (ut in fig. 20) ablata à latere noto BC notam relinquet BQ, cujus ſemiſſis BF eſt ſegmentum quæſitum minus, quo ſubtracto à latere BC, etiam majus ſegmentum CF innoteſcet.

Quòd ſi perpendicularis cadat extrà (ut in Fig. 21) tunc ex quarta proportionali CQ ſubtrahe latus BC, ut innoteſcat reſiduum BQ, hujus enim ſemiſſis BF dabit ſegmentum minus ad quod adjecto latere BC habetur ſegmentum majus CF.

Ipſa verò perpendicularis AF fiet nota, ſi ex quadrato lateris BA adjacentis minori ſegmento ſubtrahatur quadratum minoris ſegmenti BF, & ex reſiduo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p. 47. lib. 1.

Porrò ipſa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra; cùm enim minor eſt latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cùm major extra.

Hoc problema, quod ſanè proinde pulchrum, atque utile eſt, expeditur etiam per prop. 13. & & 12. lib. 2. ut tradidi in ſcholio ibidem; ſed modus hìc traditus aliquantò facilior eſt.

Problema VII.

Fig. 22. 23. D*Atis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.*

In quovis triangulo eadem eſt inter latera proportio, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum.

Demonſtratio.

Eſto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (aliàs enim res per ſe eſſet manifeſta) & ex majori CB abſcindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia ſunt inter ſe parallelæ, erit *a* CI (hoc eſt AB) ad CB, ut IL ad BF. Sed poſito ſinu toto CI eſt IL ſinus *b* anguli C, & poſito ſinu toto AB, (hoc eſt eodem, quo antè, cum AB, CI æquales ſint) BF eſt *c* ſinus anguli BAC, ergo latus AB eſt ad latus CB, ut ſinus anguli C ad ſinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonſtratio.

a Per Cor. 1 p. 4. lib. 6. *b* Per def. cap. 1. *c* Per eand.

Tantùm nota. Cùm perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus eſſe ſinum anguli BAC, quia *d* ſinus eſt anguli BAF, cum quo *e* eundem habet ſinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

d Per eand. *e* Per def. 5

Problema VIII.

Fig. 24. D*Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex oppoſito angulo demiſſa perpendicularis AF, & per probl. 6 nota fiant ſegmenta BF, CF.

Tùm

Tùm, quia in triangulo rectangulo B F A dantur B A, B F, per probl. 4. similiter innotescet angulus B. Rursùm, quia in triangulo rectangulo C F A dantur C A, C F, per probl. 4. similiter innotescet angulus C, & per prop. 32. lib. 1. seu annot. 9. etiam tertius B A C.

Problema IX.

D*Ato latere (AC), & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire.* Fig. 25.

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato lateri AC opponitur, sinus 6293204.	ad	anguli C oppositi quæsito lateri AB sinum 2756374.
ita latus datum AC 1000 passuum	ad	lateris quæsiti AB passus....

Rursùs per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri AC oppositi sinus 6293204	ad	anguli A oppositi quæsito lateri CB sinum 8195521
ita latus datum AC 1000 passuum	ad	lateris quæsiti CB, passus.

In utroque analogismo tria prima nota sunt, quartum igitur utrobique, nimirùm latera AB, CB innotescent per regulam proportionum.

Problema X.

D*Atis duobus lateribus (CA ped. 216, BA ped. 112) & angulo (Agr. 113) iis cōprehenso, reliquos an-* Fig. 26.

angulos (*C*, *B*), *& latus reliquum* (*C B*) *invenire*.

Quoniam C A, BA latera dantur, etiam datur eorum ſumma 328 ped. & eorundem differentia ped. 104. Rursùm, quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B ſumma (67 grad.) adeoque & ſemiſſis ſummæ (grad. 33, 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis: his poſitis

Ut lat. datorum C A, B A ſumma 328 ped.	ad	laterum CA, BA differentiam 104. ped.
ita tang. 6618856 ſemiſſeos ſummæ incognitorum ang.	ad	tangentem..... ſemiſſeos differ. ignotorum ang. CB

Cùm ergo tria prima ſint nota, per reg. prop. innoteſcet quartum, nempe tangens ſemiſſeos differentiæ angulorum ignotorum C, B... huic in columna tangentium proximè reperitur æqualis..., cui adſcripti ſunt grad..... pro angulo ſemiſſeos differentiæ angulorum C, B, quam ſi addas ad ſemiſſem ſummæ grad. 33, 30, angulorum C, B, habetur B major quæſitus. Si ſubtrahas proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præced. jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonſtratio

Analogiſmi ſuprà poſiti eſt ejuſmodi: fiant
Fig. 27. 26. anguli H P F, F P G æquales angulis ignotis B, C: centro P deſcripto circulo, qui latera angulorum ſecet in H, F, G, ducantur ad F P perpendiculares H R, G L, quæ per defin. 1, & 6, & 5 erunt ſinus angulorum H P F, F P G, poſito ſinu toto, ſeu radio PH, PG, ducatur deinde re-

ēta

ctaHOG, & fiat HX par ipsi GO jungaturque PX, erit XO differentia ipsarum HO, HX, hoc est ipsarum HO, OG, denique ex centro P ducatur ad HG perpendicularis PQ, *a* quæ bisecabit HG, quoniam igitur æquales sunt HQ, GQ; & HX, GO, etiam XQ, OQ æquales erunt. Unde QO est semissis differentiæ XO rectarum HO, OG, ex quo facilè etiam ostenditur, angulum HPQ esse semissem summæ angulorum HPO, OPG, hoc est *b* angulorum B, C: & QPO esse semissem differentiæ angulorum HPO, OPG; hoc est B, C: his positis differentia laterum CA, AB esto Z.

a Per 3. l. 3.

b Per constr.

Quia HR est sinus anguli HPF, hoc est B, & GL sinus anguli FPG, hoc est C, erit latus *c* CA ad latus BA ut HR sinus anguli B ad GL sinum anguli C, hoc *d* est (quia æquiangula sunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA *e* est ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipsarum HO, OG differentiam XO; & invertendo laterum differentia Z est ad CA, ut differentia XO ad HO, atqui (ut jam ostendi) CA est ad BA, ut HO ad OG, igitur *f* ex æquo Z differentia laterum est ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA est ad Z, ut OG ad XO; quoniam ergo (ut ostensum suprà) CA est ad AB, ut HO ad OG, ac proinde *g* componendo summa CA, AB est ad AB, ut HG ad OG; AB verò (ut jam ostendi) sit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo *h* erit summa laterum CA, AB ad Z laterum differentiam, ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, sic semissis HG nempe HQ, quæ *i* tangens est anguli HPQ, ad semissem XO, nempe QO tangentem *k* anguli QPO. Ergo summa laterum CA, AB, est ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens

c Per Probl. 7.

d Per 4. l. 6.

e Per cor. 2 p. 18. l. 5.

f Per 22. l. 5.

g Per 18. l. 5.

h Per 22. l. 5.

i Per Def. 9.

k ibidem.

gens anguli HPQ (qui, ut ostendi suprà, est semissis summæ angulorum B C) ad QO tangentem anguli QPO, qui est semissis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonstrandum.

Alia Problematis solutio.

Fig. 28. 29. Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppositum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cùm detur basis BA, & acutus angulus B A F, per prob. 2 invenientur BF, & AF, qua subtracta ex data C A in Fig. 28. addita verò ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam C F.

Rursùm ergo in trigono rectangulo CFB cùm dentur duo latera BF, CF per probl. 5. innotescet BC latus quæsitum, & angulus C, quem unà cum dato A subtrahe à 180 grad. remanebit B alter quæsitorum.

Problema XI.

Fig. 30. 1. ***D**atis duobus lateribus AB, CB, & angulo uno C iis non comprehenso, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire.*

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppositum	ad	alterum latus datum CB.
ita sinus anguli dati C.	ad	sinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur.

Quare cùm tria prima sint nota, etiam quartum, nempe sinus anguli ignoti A, innotescet, & per sinum

num invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit; ſi verò A obtuſus, tunc angulus per ſinum inventus ſubtractus à 180 gradibus relinquet quęſitum A. Ratio patet ex defin. 5.

Neceſſe igitur hìc eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliundè nota ſit.

Inventis angulis, latus ignotum AC innoteſcet per Probl. 9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehenſa ducta intelligatur BF perdendicularis ad latus ignotum AC. Fig. 32. 33.

In triangulo rectangulo BFC, cùm detur baſis BC, & unus acutus C, innoteſcent per Problema ſecundum CF, & BF. Rursùs in trigono rectangulo BFA cùm dentur baſis AB, & latus BF, innoteſcent per Problema quartum angulus BAF, & latus FA.

Quòd ſi angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, ſit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig. 32. intra triangulum cadat, angulus BAF jam inventus eſt ipſe BAC quæſitus, & tunc FA jam nota addenda eſt ad CF antè repertam, ut innoteſcat totum latus quæſitum AC. Fig. 32.

Si verò BAC ſit obtuſus, adeoque perpendicularis BF, ut in Fig. 33. extra tiangulum cadat, angulus inventus BAF ſubtrahendus eſt à 180 gradibus, ut innoteſcat quæſitus BAC: & tunc FA jam nota demenda ex nota FC, ut innoteſcat latus quæſitum AC. Fig. 33.

Rursùm igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC neceſſe eſt, ut aliundè anguli BAC nota ſit ſpecies.

DE

DE DIMENSIONE
TRIANGULORUM SPHÆRICORUM
Ex encyclopædia P. Gasparis Schotti E Societate Jesu.

DE ELEMENTIS SPHÆRICIS.
§. I.

ELementa sphærica appello, quæ necessaria sunt tùm ad trigonometriam sphæricam, tùm ad universam sphęricam scientiam intelligendam, cujusmodi sunt suppositiones nonnullæ, & definitiones.

Quæ sequuntur, voco suppositiones, non quòd nulla demonstratione egeant, sed quòd demonstrata sumantur à Theodosio, & aliis.

SUPPOSITIONES.

I.

Thed. l. 1. sphær. def. 1. 2. 3. 4.

SPhæra est figura solida comprehensa unica superficie convexa, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ ductæ sunt inter se æquales. Centrum sphæræ est prędictum punctum. Axis sphæræ est recta quædam linea per centrum sphæræ ducta, & utrimque terminata in sphæræ superficie, circa quam quiescentem circumvolvitur sphæra.

Poli

Poli ſphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis. *In appoſita figura (quam globoſam fingere oportet) centrum eſt E; axis AC, & BD; poli A, & C, B, & D. Meliùs intelligentur hæc, & ſequentia, ſi ante oculos habeatur globus materialis.* *Fig. 36.*

II.

Polus circuli in ſphæra deſcripti eſt punctum in ſuperficie ſphæræ, à quo omnes lineæ ad circuli circumferentiam tendentes rectà ſunt inter ſe æquales. *Circuli AFCG polus unus eſt B, alter D; circuli verò BFDG polus unus eſt A, alter C.* *Idë.def.5.* *Fig. 36.*

III.

Circuli ſphæræ aut ſunt maximi, aut non maximi: Maximi ſunt, qui dividunt ſphæram in duas æquales partes. Et hi habent idem centrum cum ſphæra. Ex quo ſequitur, circulos ſphæræ habentes idem cum ipſa centrum eſſe maximos. Non maximi ſunt, qui non dividunt ſphæram in duas partes æquales. Et hi non habent idem centrum cum ſphæra. Unde circuli non habentes idem cum ſphæra centrum, non ſunt maximi. *In figura circulus AFCG eſt maximus; HIKL verò non maximus. Prioris centrum eſt E, idem quod ſphæræ.* *Thed. p. 6. l. 1.* *Fig. 36.*

IV.

In ſphæra maximi circuli ſe mutuò ſecant bifariam: & è contrario in ſphæra circuli, qui ſe mutuò bifariam ſecant, ſunt maximi. *Duo circuli, ABCD, & AFCG ſecant ſe bifariam in A, & C.* *Theod. l. 1 prop. 11. 12* *Fig. 36.*

V.

Omnes maximi circuli ejuſdem ſphæræ ſunt inter

ter

ter se æquales, quia eorum diametri sunt æquales, cùm omnes per idem centrum transeant, *ut patet in diametris AC, BD.*

Fig. 36.

VI.

Theod. prop. 13. l. 1.

Si in sphæra maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos secet, & bifariam eum secat, & per polos ipsius transit. Ad rectos angulos (scilicet sphæricos) secare se dicuntur, quando unus transit per polos alterius, & consequenter non inclinat magis ad unam ejus partem, quàm ad alteram. *Sic AFCG secat circulum ABCD ad angulos rectos in punctis A, & C. Sic etiam BFDG secat circulum ABCD ad angulos rectos in B, & D. Utrobique autem bifariam se mutuò secant.*

Fig. 36.

VII.

Idem prop. 15. l. 1.

Si in sphæra maximus circulus eorum, qui in sphera sunt circulorum, aliquem per polos secet, bifariam, & ad angulos rectos eum secat. *Explicatio patet ex proximè dictis.*

VIII.

Vide Theor. 1. additum ad prop. 15. l. 1. Theod. apud Clau. Fig. 36.

Si in sphæra maximus circulus per polos alterius cujuspiam maximi circuli transeat, transibit vicissim hic per polos illius. *Sic circulus maximus ABCD transit per polos B, & D circuli maximi AFCG & hic vicissim per polos A, & C alterius.*

IX.

Vide Theor. 2. ibid.

Si in sphæra circulus circulum per polos secet, circulus maximus est, & bifariam eum secat, & ad angulos rectos. *Sic quia circulus ABCD secat tam HIKL, quàm AFCG per polos ipsorum B, & D, signum est esse maximum circulum, & utrumque bifariam secat, & ad angulos rectos ad H, & K, item ad A, & C.*

Fig. 36.

Si

X.

Si in ſphæra circulus circulum bifariam, & ad angulos rectos ſecat, circulus maximus eſt, & per polos eum ſecat. *Explicatio patet ex proximè dictis.* *Ibidem Theor. 3.*

XI.

Omnis circulus maximus diſtat undique per quadrantem maximi circuli à ſuo polo, ideoque omnis quadrans à polo maximi circuli in ipſum ductus eſt ei ad angulos rectos. *Sic A F C G diſtat à ſuis polis B, & D per quadrantes A B, C B, A D, C D &c.* *Per coroll. prop. 16. l. 1. Theod. Fig. 36.*

XII.

Si duo, aut plures maximi circuli maximum circulum ad rectos ſecent angulos, concurſus ipſorum erit ipſiuſmet circuli polus. *Patet ex globo materiali, ſi in illo deſcribantur plures circuli maximi ſecantes alium maximum perpendiculariter.*

DEFINITIONES.

Angulus ſphæricus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe mutuò ſecantes continent. *Tales ſunt anguli A E C, C E B &c;* *Dixi,* arcus circulorum maximorum, *quia anguli ab aliis ſphæræ circulis effecti in ſuperficie ſphæræ à Trigonometris non conſiderantur. Dixi prætereà,* ſeſe mutuò ſecantes, *quia omnes circuli maximi in ſphæra ſe mutuò ſecant, & nunquam ſe mutuò tangunt,* per Suppoſit. 4. *Clavius l. de Triang. Sphæricor. defi. 1. Fig. 37.*

II.

Idē def. 2. Angulus sphæricus rectus est, quem in sphæræ superficie duo arcus circulorum maximorum sese ad angulos rectos secantium continent. *Tunc autem duo circuli secant se ad angulos rectos, quando unus ad alterum rectus est, hoc est, quando unus secans alterum non inclinat magis ad unam partem, quàm ad alteram, ut suprà dicebam Supposit. 6.*

III.

Idē def. 3. Angulus sphæricus obtusus est, qui recto major est; acutus verò, qui minor est recto. *Explicatione non eget.*

Vide Clau. l. de triāg. sphæricæ. prop. 10. *Constituitur angulus sphæricus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in superficie sphæræ, si per illud punctum, & per polum dati arcus describatur circulus maximus; hujus enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum constituet, cùm circulus hic ad circulum illius arcus sit rectus* per Supposit. 7. &

Fig. 37. 9. *Sic si arcus* ADB *sit circuli maximi arcus, & polus ejus sit* E; *si ex puncto* A *per* E *ducatur circulus maximus* AEB *&c, erit angulus* A *rectus. Si per datum punctum describatur arcus circuli maximi non per polos dati arcus, constituet circumferentia hujus circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtusum unum, alterum acutum. Sic circuli maximi arcus* FHG *cum circuli maximi arcu* ADB *ad punctum* F *constituit angulum* AFH *obtusum, &* HFD *acutum.*

IV.

Æquales sphærales anguli sunt, qui sub arcubus circulorum ad æquales angulos inclinatorum continentur.

V.

Triangulum sphæricum est, quod tribus arcubus circulorum maximorum sphæræ superficie continetur. *Itaque latera trianguli sphærici sunt arcus maximorum circulorum singulatim semicirculo minores. Triangulum sphæricum est vel æquilaterum, si nimirùm omnes tres arcus fuerint equales: vel isosceles, si duo tantùm arcus fuerint æquales: vel scalenum, si omnes inæquales inter se fuerint. Item vel rectangulum est, si nimirùm aliquem angulum habuerit rectum: vel obtusangulum, si aliquem obtusum habuerit: vel acutangulum, si omnes acuti fuerint. In rectangulo, & obtusangulo triangulo sphærico, si unus angulus est rectus, vel obtusus, possunt alii duo etiam esse recti, vel obtusi, vel alter saltem, quod in rectilineis non contingit.* Idẽ def. 5.

VI.

Arcus anguli sphærici est arcus circuli maximi, cujus polus est in ipso angulo inter duos arcus angulum sphæricum comprehendentes interceptus. *Sic arcus anguli AEC est AC &c; non omnis ergo arcus angulo sphærico oppositus est illius anguli arcus. Quia verò polus circuli maximi abest ab eo quadrante circuli maximi, fit ut uterque arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & anguli positorum sit quadrans. Quare si angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans: si acutus, quadrante minor; si obtusus, major quadrante.* Clau. def. 6. Fig. 37.

VII.

Clav. def. 7. Complementum arcus eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor eſt quadrante; vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante major.

VIII.

Clav. def. 8. Complementum anguli ſphærici eſt exceſſus, quo quadrans arcum ipſius anguli ſuperat, vel ab eo ſuperatur.

IX.

Clav. def. 9. Sinus, Tangens, & Secans anguli ſphærici eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcus, qui arcus anguli dicitur.

§. II.

DE PROPRIETATIBUS angulorum, & triangulorum ſphæricorum.

I.

SI anguli ſphærici crura, ſive latera continuantur, concurrunt, & ſemicirculos efficiunt. Fig. 34. *Sic anguli BAC crura AB, AC continuata concurrunt in D, & efficiunt ſemicirculos ABD, ACD.* Ratio eſt, quia per 1 Definit. *duo arcus BA, & CA ſunt arcus maximorum circulorum ſeſe mutuò ſecantes*; per 4. verò ſuppoſit. *in ſphæra maximi circuli ſe mutuò bifariam ſecant.*

II.

II.

Si anguli ſphærici crura continuata concurrunt, & ſemicirculos efficiunt, fiunt duo anguli oppoſiti inter ſe æquales. *Tales ſunt anguli BAC, BDC. Ratio eſt, quia habent eandem menſuram, nempe arcum GH* juxta Definit. 6. *Clavius l. de triang. ſph. prop. 13. Fig. 34.*

III.

Cùm arcus circuli maximi in ſphæra ſuper arcum circuli maximi conſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit. *Sic arcus circuli maximi IG conſiſtens ſuper arcum AGD facit duos angulos AGI, DGI. Si igitur circulus arcus IG tranſit per polum circuli arcus AGD, ſecetur hic ab illo ad angulos rectos* per 11. Suppoſit. *ſi non per polum tranſit, fit unus angulus obtuſus, alter acutus, æquivalentes tamen duobus rectis.* *Clav. ibid. prop. 5. Fig. 34.*

IV.

Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum duo anguli ſupra baſim ſunt æquales, & productis æqualibus arcubus etiam anguli infra baſim fiunt æquales. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum. *Clav. ibid. prop. 8.*

V.

Si trianguli ſphærici duo anguli ſunt inter ſe æquales, etiam latera ſub æqualibus angulis ſubtenſa ſunt inter ſe æqualia. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum. *Clav. prop. 9.*

VI.

Clau. in cor. prop. 25.

Æquilateri trianguli ſphærici ſingula latera poſſunt eſſe quadrantes maximorum circulorum, & ſingula quadrantibus vel majora, vel minora. Quando ſingula ſunt quadrantes, omnes anguli ſunt recti: quando majora quadrantibus, omnes ſunt obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando in triangulo ſphærico æquiangulo ſinguli anguli ſunt recti, ſingula latera ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora.

VII.

Clau. prop. 25.

Iſoſcelis trianguli ſphærici æqualia duo latera poſſunt eſſe quadrantes, & majora, aut minora quadrantibus. Quando ſunt quadrantes, anguli ſunt recti: quando majora, obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando duo anguli æquales ſupra baſim ſunt recti, latera æqualia ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora.

VIII.

Clau. prop. 26.

In omni triangulo ſphærico iſoſcele, cujus duo latera æqualia ſunt quadrantes, ſi angulus ſub ipſis comprehenſus eſt rectus, baſis eſt quadrans: ſi acutus, quadrante minor: ſi obtuſus, major. Et viciſſim, ſi baſis eſt quadrans, angulus oppoſitus eſt rectus: ſi major quadrante, obtuſus: ſi minor, acutus. Semper autem polus baſis eſt in angulo ſub lateribus comprehenſo.

IX.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes ar- Clau. prop.
cus ſunt quadrante majores, vel unus quadrans, 27.
& reliqui duo quandrante majores, omnes tres anguli ſunt obtuſi.

X.

In omni triangulo ſphærico rectangulo, cujus Clau. prop.
omnes arcus ſunt quadrante minores, reliqui 28.
duo anguli ſunt acuti. Et ſi reliqui duo ſunt acuti, erunt ſinguli arcus quadrante minores.

XI.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes an- Clau. prop.
guli ſunt acuti, arcus ſinguli ſunt quadrante 29.
minores.

XII.

In omni triangulo ſphærico, cujus unus qui- Clau. prop.
dem arcus quadrante major ſit, reliquorum ve- 30.
rò uterque quadrante minor, nullus angulorum rectus eſt.

XIII.

Fieri non poteſt, ut in triangulo ſphærico re- Clau. in
ctangulo unus tantùm arcus ſit quadrans. *Qua-* cor. pro.
re, qui concedit in triangulo unum quadrantem, 38.
concedere debet & alterum, & ſaltem duos angulos rectos.

§. III.

DE DIMENSIONE TRIANGULORUM

Sphæricorum rectangulorum, in quibus unus tantùm est rectus.

SI triangulum sphæricum habet tres rectos, datis, seu cognitis illis, data sunt etiam latera ipsorum, utpote quadrantes, & vicissim *per 6. Propriet.* Si habet duos rectos, datis illis, dantur & latera rectis opposita, nempe duo quadrantes *per 6. Propriet.* Si datur etiam latus tertium, datur angulus tertius; & vicissim, quia tunc latus tertium est mensura anguli *per 6. Defin.* In his igitur casibus nulla trigonometria est opus, sed solùm, quando triangulum habet unicum rectum, & reliquos obliquos, cujusmodi est triangulum appositum rectangulum ad B. Sexdecim variationes in hoc casu occurrere possunt, pro quibus sexdecim regulas præscribimus. In omnibus nomine basis intelligimus arcum recto angulo oppositum, ut hìc arcum AC.

Fig. 35.

Pro-

Propositio I. Problema.

Angulum ex base, & latere, quod angulo quæsito opponitur, invenire.

IN præcedenti triangulo sit data basis AC. 60°. & latus AB 20°, sitque inveniendus angulus C oppositus lateri dato. Fiat, ut sinus totus ad sinum lateris AB dati, ita secans complementi basis AC ad sinum anguli C quæsiti. EXEMPLUM. Sinus totus est 10000000, sinus lateris AB 20° est 3420202; secans complementi basis AC 60°, est 11547005. Ducta secante prædicta per sinum lateris AB, fit summa 39493089595010, qua divisa per radium 10000000, provenit quotiens 3949308 $\frac{9595}{10000}$ pro sinu anguli C, cui respondent 23°. 15′. 42″. *Juxta hanc normam etiam reliquæ operationes institui debent. Brevitatis causa omitto exempla in sequentibus.* Fig. 35.

Propositio II. Problema.

Angulum ex base, & latere, quod angulo quæsito adjacet, invenire.

IN præcedenti triangulo data basis AC sit 60°. 30′, latus BC 30°, sitque inveniendus angulus C lateri dato adjacens. Fiat, ut radius ad tangentem lateris BC dati, ita tangens complementi basis AC, ad sinum complementi anguli C quæsiti. Fig 35.

Pro-

Propositio III. Poblema.

Angulum ex base, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAsis A C sit 60°, 30', angulus A datus sit 13°. 30' & quæratur angulus C. Fiat, ut radius ad sinum complementi basis A C, ita tangens anguli A dati ad tangentem complementi anguli C quæsiti.

Propositio IV. Problema.

Angulum ex latere quæsito angulo opposito, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. ANgulus investigandus sit C, latus datum A B, & angulus datus A. Fiat, ut radius ad sinum anguli A dati, ita sinus complementi lateris A B dati ad sinum complementi anguli C quæsiti.

Propositio V. Problema.

Angulum ex latere quæsito angulo adjacente, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. D*Ummodò constet, num angulus quæsitus sit major recto, aut minor, vel an basis, aut latus alterum non datum sit quadrante majus, aut minus*. Angulus investigandus sit C, latus datum B C, angulus datus A. Fiat, ut radius ad secantem lateris dati, ita sinus complementi anguli dati ad sinum anguli quæsiti.

Pro-

Propoſitio VI. Poblema.

Angulum ex utroque latere circa angulum rectum invenire.

Angulus inveſtigandus ſit C, latera data A B, & B C circa angulum rectum. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum lateris B C, cui angulus quęſitus adjacet, ita tangens complementi alterius lateris A B quæſito angulo oppoſiti ad tangentem complementi anguli C quæſiti. *Fig. 35.*

Propoſitio VII. Poblema.

Latus ex baſe, & altero latere invenire.

Baſis data ſit A C, latus datum B C, latus, quod inveſtigatur, A B. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem dati lateris B C, ita ſinus complementi baſis A C ad ſinum complementi lateris A B quæſiti. *Fig. 35.*

Propoſitio VIII. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

Baſis data ſit A C, angulus datus C, latus, quod quæritur, A B. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum baſis AB, ita ſinus anguli dati C ad ſinum lateris A B quæſiti. *Fig. 35.*

Pro-

Propositio IX. Problema.

Latus ex base, & angulo, qui lateri quæsito adjacet, invenire.

Fig. 35. BAsis data sit AC, angulus datus A, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut sinus totus ad sinum complementi anguli A dati, ita tangens basis AC ad tangentem lateris AB quæsiti.

Propositio X. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui quæsito lateri adjacet, invenire.

Fig. 35. D*ummodò constet, an quæsitum latus sit quadrante majus, aut minus; vel an alter angulus non rectus sit acutus, aut obtusus; vel denique, an basis sit quadrante minor, vel major.* Latus quæsitum sit AB, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut radius ad tangentem complementi anguli A dati, ita tangens lateris BC dati ad sinum lateris AB quæsiti.

Propositio XI. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui lateri quæsito opponitur, invenire.

LAtus quæsitum AB, latus datum BC, angulus datus C. Fiat, ut radius ad sinum lateris BC dati, ita tangens anguli C dati ad tangentem lateris AB quæsiti.

Pro-

Propositio XII. Problema.

Latus ex utroque angulo non recto invenire.

LAtus quæsitum AB, anguli dati A, & C. Fiat, ut sinus totus ad secantem complementi anguli A, ita sinus complementi anguli C ad sinum complementi lateris AB quæsiti. *Fig. 35.*

Propositio XIII. Problema.

Basim ex latere, & angulo ei adjacente invenire.

BAsis quæsita AC, angulus datus A, latus datum AB. Fiat, ut sinus totus ad sinum complementi anguli A dati, ita tangens complementi lateris AB dati ad tangentem complementi basis AC quæsitæ. *Fig. 35.*

Propositio XIV. Problema.

Basim ex latere, & angulo ei opposito invenire.

BAsis quæsita AC, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut sinus totus ad secantem complementi anguli A dati, ita sinus lateris BC dati ad sinum basis AC quæsitæ. *Fig. 35.*

Pro-

Propositio X V. Poblema.

Basim ex utroque latere invenire.

Fig. 35. BAsis quæsita AC, latus unum datum AB, alterum BC. Fiat, ut sinus totus ad sinum complementi lateris A B, ita sinus complementi alterius lateris BC ad sinum complementi basis AC quæsitæ.

Propositio X V I. Poblema.

Basim ex utroque angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAsis quæsita A C, anguli dati A, & C, Fiat, ut sinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi alterius anguli. C ad sinum complementi basis AC quæsitæ.

§. IV.

DE DIMENSIONE TRIANGULORUM

Sphæricorum obliquangulorum.

AD quatuordecim caſus reduci poſſunt cum P. *Joanne Baptiſta Ricciolo* omnia, ad quæ obliquangulorum triangulorum ſphæricorum dimenſiones pertinent, quæ totidem Problematibus cum eodem ſolvo, ut ſequitur.

Propoſitio XVII. Poblema.

Angulum ſpecie præcognitum ex datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito invenire.

A*Ngulus ſpecie præcognitus dicitur, quando ſcitur utrumſit acutus, vel obtuſus.* Fiat, ut ſinus lateris oppoſiti angulo dato ad ſinum anguli dati, ita latus reliquum datum ad ſinum anguli quæſiti, ſi acutus eſt. Si obtuſus eſt, ſubtrahe angulum prædicto modo inventum à gradibus 180, eritque reſiduum angulus quæſitus.

Pro-

Propoſitio XVIII. Problema.

Angulum verticalem ex datis duobus lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, & ſpecie anguli oppoſiti reliquo lateri invenire.

ANgulum *verticalem appello, qui à datis lateribus comprehenditur.* Fiat, ut radius ad tangentem anguli dati, ita ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi *anguli primò inventi*. Deinde fiat, ut tangens lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi anguli primò inventi ad ſinum complementi *anguli ſecundò inventi*. Jam, ſi angulis datis lateribus oppoſitis ſunt ejuſdem ſpeciei, ſumma inventorum angulorum primi, & ſecundi erit angulus verticalis quæſitus; ſin minùs, differentia inventorum angulorum erit quęſitus angulus verticalis.

Propoſitio XIX. Problema.

Angulum utrumque ad baſim ex datis lateribus duobus ſimul ſemicirculo minoribus, & angulo verticali invenire.

FIat, ut ſinus complementi ſemiſummę laterum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi ſemianguli verticalis ad tangentem ſemiſummæ angulorum quęſitorum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ laterum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita tan-

tangens complementi ſemianguli verticali ad tangentem ſemidifferentiæ, addendæ ipſi ſemiſummæ angulorum, ut fiat angulus major, demendę, ut fiat angulus minor quæſitorum.

Propoſitio XX. Problema.

Angulum quemvis ad baſim ex datis lateribus duobus, quorum alterum ſaltem ſit quadrante minus, & angulo verticali acuto inuenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli verticalis, ita tangens complementi lateris oppoſiti angulo quæſito ad tangentem complementi primi caſus. Deinde fiat, ut tangens complementi anguli verticalis, ad ſecantem complementi anguli primò inventi, ita ſinus differentiæ inter primum caſum, ac latus alterum ad tangentem complementi anguli quæſiti.

Propoſitio XXI. Problema.

Angulum tertium ex datis duobus angulis acutis, & latere oppoſito uni eorum, ac ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo dato invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum complementi lateris dati, ita tangens anguli adjacentis eidem lateri ad tangentem complementi primi anguli. Deinde fiat, ut ſinus complementi anguli adjacentis dato lateri ad ſinum complementi reliqui dati anguli, ita ſinus primi anguli ad ſinum ſecundi anguli ſpecie conformis lateri non dato. Jam, ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi anguli inventi conflabit anbit angulum tertium quæsitum; si verò est majus quadrante, summa facta ex secundo angulo, & primi anguli complemento subtracta ex gradibus 180 eundem dabit.

Propositio XXII. Problema.

Angulum basi oppositum ex datis duobus angulis, quorum unus saltem sit acutus, & ex basi iis adjacente, quæ sit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad sinum anguli datorum minoris, ita sinus reliqui anguli dati ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita sinus versus, basis ad inventum secundum. Tertiò addatur inventus secundus sinui verso differentiæ inter utrumvis datorum angulorum, & reliqui supplementum ad gradus 180, & fiet sinus versus anguli verticalis quęsiti.

Propositio XXIII. Problema.

Angulum quemlibet tanquam verticalem ex datis tribus lateribus quærere.

Fiat, ut radius ad secantem complementi lateris unius continentis angulum quæsitum, ita secans complementi lateris alterius eundem continentis ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita differentia sinuum versorum anguli quæsiti.

Pro-

Propositio XXVI. Problema.

Basim ex duobus datis lateribus singulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum opposito, ac specie anguli oppositi reliquo dato lateri invenire.

Flat, ut radius ad secantem anguli dati, ita tangens complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi primi arcus. Deinde fiat, ut sinus complementi lateris adjacentis angulo dato, ad sinum complementi reliqui lateris dati, ita sinus complementi arcus primi ad arcum secundum addendum arcui primo, si anguli lateribus datis oppositi sunt ejusdem speciei, ut habeatur basis; alioquin differentia inventorum arcuum dabit basim.

Propositio XXV. Problema.

Basim ex datis lateribus duobus, quorum saltem unum sit quadrante minus, & ex dato angulo verticali acuto, invenire.

Flat, ut radius ad sinum lateris datorum minoris, ita sinus reliqui lateris ad aliud; invenietur arcus, qui vocetur primus. Deinde fiat, ut radius ad arcum primum, ita sinus versus anguli verticalis ad arcum secundum, quem adde sinui verso differentiæ laterum, & fiet sinus versus basis quæsitæ.

Propositio XXVI. Problema.

Basim adjacentem duobus angulis datis acutis ex iis, & ex latere vni eorum opposito, nec non specie lateris oppositi alteri angulo invenire.

Fiat, ut radius ad secantem anguli adjacentis lateri dato, ita tangens complementi lateris dati ad tangentem primi arcus. Deinde fiat, ut tangens anguli adjacentis lateri dato ad tangentem complementi reliqui anguli dati, ita sinus primi arcus ad sinum secundi arcus specie conformis lateri non dato. Jam si latus datum est minus quadrante, summa primi, & secundi arcus inventi conflabit basim quæsitam. At si majus est quadrante, summa facta ex secundo arcu, & ex complemento primi arcus ad semicirculum conflabit illam.

Propositio XXVII. Problema.

Latus dato angulo oppositum, specie tamen præcognitum, ex datis duobus angulis, & latere vni eorum opposito invenire.

Fiat, ut sinus anguli oppositi dato lateri ad sinum dati lateris, ita sinus reliqui anguli dati ad sinum lateris quæsiti quadrante minoris. At, si debeat esse majus quadrante, subtrahatur latus inventum à gradibus 180, & habebis latus quæsitum.

Pro-

Propositio XXVIII. Problema.

Latus utrumque unico actu ex datis angulis duobus simul duos rectos non excedentibus, & ex base ipsis adjacente invenire.

Fiat, ut sinus complementi semisummæ angulorum datorum ad sinum complementi semidifferentiæ eorundem, ita tangens semibasis ad tangentem semisummæ laterum. Deinde fiat, ut sinus semisummæ angulorum datorum ad sinum semidifferentiæ eorundem, ita tangens semibasis ad tangentem semidifferentiæ laterum addendæ ipsi semisummę laterum, ut habeatur latus majus: demendæ, ut habeatur minus.

Propositio XXIX. Problema.

Latus utrumvis ex datis angulis duobus, quorum saltem unus sit acutus, & ex basi adjacente, quæ sit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad tangentem anguli oppositi lateri quæsito, ita sinus complementi basis ad tangentem complementi primi inventi. Deinde fiat, ut tangens complementi basis ad secantem primi inventi, ita sinus complementi differentię inter primum inventum, & secundum datorum angulorum, si quęritur latus oppositum angulo acuto; vel sinus complementi summę factę ex invento primo, & altero datorum angulorum, si quæritur latus oppositum angulo obtuso ad tangentem complementi lateris quęsiti, si dicta summa, aut differentia non excedat grad. 90. vel complementi ad gradus 180. si excedat.

Propositio XXX. Problema.

Latus quodvis tanquam basim ex datis tribus angulis invenire.

Fiat, ut radius ad secantem complementi alteriutrius angulorum quæsitæ basi adjacentium, ita secans complementi reliqui dictorum angulorum ad arcum, qui vocetur inventum. Deinde fiat, ut radius ad arcum inventum, ita differentia duorum sinuum versorum (de qua mox) ad sinum versus basis quæsitæ. Unus dictorum sinuum versorum sit sinus versus anguli verticalis, alter autem sinus versus differentiæ, quæ est inter quemvis duorum angulorum adjacentium basi, & inter alterius item basi adjacentis supplementum ad gradus 180.

AP-

APPENDIX

Qua demonstratur, ex falso posse directè deduci verum.

IN thesibus Mathematicis, quas Lovanii sesqui abhinc anno Illustriss. D. Theodorus D'Imerselle Comes de Bouchove & S. Imperii magna ingenii commendatione, & auditorum plausu publicè propugnavit, inter cæteras proposui assertionem hujusmodi: *ex falsis posse verum directè elici novis exemplis Geometricis confirmamus*. Hanc assertionem sibi oppugnandam suscepit vir Clarissimus Daniel Lipstorpius in appendice, quam operi suo pereruditо, quod Specimina Philosophiæ Cartesianæ inscripsit, hac de causa adjunxit. Id verò ea modestia, & humanitate præstitit, ut facilè appareat, hoc illi unum fuisse propositum, ut veritatem assequeretur. Ne autem videar doctissimi viri judicium parvi facere, hìc illi breviter respondebo, & appendici appendicem reponam.

Conclusionem igitur oppugnatam sic demonstro.

Datur assertio, quæ directè ex sua contradictoria inferatur. Talis in prop. 12. lib. 9. Eucl. est hæc: *Numerus E metitur numerum A*, quæ demonstratione affirmativa infertur ex sua contradictoria: *E non metitur numerum A*. Quod quidem est æquè certum, ac demonstrationem illam esse legitimam? Talis in Elementis hisce nostris prop. 4. lib. 11. est hæc: *Recta BQ non* *est perpendicularis plano C AF*, quæ affirmativè ducitur ex sua contradictoria: *Recta B Q est perpendicularis plano C AF*. Talis in propositione nostra 35. lib. 5. est hæc: *A est ad B, ut E ad Z*, quæ directè infertur ex sua contradictoria: *A non est ad B, ut E ad Z*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum lib. 5. de proport. p. 201: apud Theodosium (commentante Clavio) l. 3. sph. p. 12. & nos plures similes possumus exhibere tùm Geometricas, tùm alias.

Ecce tibi cosmographicam unam, quam in iisdem thesibus disputandam proposui. *Maris, omnisque adeò humidi superficies eo ipso concluditur esse sphærica, quo id negas*. Ponatur vera esse ejus contradictoria: *Maris superficies sphærica non est*. Quoniam igitur maris superficies sphærica non est, ergo omnes superficiei maritimæ partes non distant æqualiter à centro. Ergo una est altior altera (altiorem enim esse non aliud est, quàm longiùs à centro recedere.) Ergo eæ, quæ altiores sunt, defluunt versus minùs altas, seu decliviores, hanc enim esse humidi naturam experientia constat. Ex tali autem defluxu necessariò oritur omnium partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, seu distantia à centro. Æqualis verò omnium partium superficiei maritimæ à centro distantia infert sphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris superficies sphærica est*.

Habemus igitur hanc: *Maris superficies sphærica est* directè, & affirmativè deductam ex sua contradictoria: *Maris superficies sphærica non est*.

Maneat igitur extra omnem controversiam esse, dari assertiones, quæ directè ex suis contradictoriis inferantur. Atqui assertio, quæ ex sua contra-

contradictoria directè infertur, necessariò vera est, (cùm sit axioma per se clarissimum, id necessariò verum esse, quod suum contradictorium destruit: destruit autem suum contradictorium, quod ex suo contradictorio directè sequitur.) Ergo & assertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta est assertio, falsa est. Ergo ex falso directè, & affirmativè deductum est verum. Demonstrata igitur est conclusio in thesibus proposita.

Quòd verò ejusmodi demonstratio, qua assertio ex sua contradictoria falsa directè infertur, verè scientiam pariat, sic ut absque ulteriori ulla deductione ad impossibile de assertionis veritate securi esse debeamus, ex jam dictis manifestum est, cùm lumine naturæ notissimum sit, id necessariò verum esse, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio sequela legitima, & necessaria infertur. Quòd si verum deducatur ex falso quopiam sibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio scientiam pariet, neque enim de veritate assertionis sic deductæ securi esse possumus, cùm in ea ratio jam allata deficiat, & proprium falso sciamus esse, ut ex eo falsa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perspiciet, nihil opus esse, ut singulis Clarissimi Viri objectionibus, & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis soluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clarissimi Viri, visum est singula breviter attingere.

Primùm supponit ex Dialectica quædam de consequentia directa, & directo (ut vocant) de omni, & de nullo. Tum sententiam exponit suam nostræ oppositam. Subjungit deinde: *hanc sen-*

ten-

tentiam meam stabilio eversione omnium illorum, quæ in contrarium afferri posse videntur.

Primùm (inquit) *quod ex falsis verum concludere videatur, constituit hujusmodi syllogismus: Omnis leo est lapis. Omnis adamas est leo. Ergo omnis adamas est lapis. In quo &c.* Tali syllogismo ad probandam assertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falso non contradictorio, qui proinde etiam, ut ostendi suprà, scientiam non parit. Primum istud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *constituunt hypotheses Astronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantùm sint, & falsæ; tamen juxta eas calculum ecclyipsibus, & aliis observationibus cælestibus convenientem Astronomi exhibent.* Deinde postquam multis contendit, hinc non probari verum ex falso directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam instantiam, quam ex regula falsi depromere licet &c.* contenditque rursùm hìc non elici ex falso verum. Quo quidem in utroque, cùm illi ergo planè assentiar, neque ullum inde pro assertione mea argumentum petam, non me magis illa tangunt, quàm primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis facessunt, modi demonstrandi ab Euclide 9. Elem. p. 12. Cardano lib. 5. de proport. p. 201. & Theodosio lib. 1. sph. p. 12. adhibiti.* quò me digitum intendisse putat, & verè. Ex his siquidem demonstrandi modis evidenter jam demonstravi suprà, ex falso elici directè verum, neque affertur quidquam à Clarissimo Viro, quod demonstrationem nostram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. lib. 9. recitatis subjungit ex eodem Clavio demonstratio tionem p. 12. lib. 1. sph. Theodosii: Tum (inquit) *ut verum fatear, nescio sanè quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare insolitum hunc, & mirabilem argumentandi modum esse putaverint, qui tamen Logicis valdè familiaris est, & duobus principiis omnium evidentissimis, & natura notissimis nititur, hisce nempe: quod idem non possit simul esse, & non esse; item, quodlibet aut sit, aut non sit*. Quid Clavio, Cardano, & cum istis, aliisque etiam mihi, in hac argumentandi forma sit visum mirabile, dicere in promptu est; hoc nimirùm, quòd assertio probanda (G est centrum sphæræ,) directè ex sua contradictoria (G non est centrum sphæræ) consequentiis legitimis, ac necessariis deducatur. Quod quidem, quotiescunque evenit, admiratione dignum est. Tantum verò abest, ut hęc ratio demonstrandi Logicis valdè familiaris sit, ut etiam non defuerint doctissimi viri, quibus ea impossibilis videretur. Ut deinde ostendat vir Clariss. hoc discursu, verum ex falso non deduci, repetit demonstrationem propositionis Theodosianæ, sed forma planè diversa à Claviana illa, quam prius recitaverat, in qua vis argumentationis inter nos controversæ clarissimè cernitur. Subjungit denique: *neque ego tàm lynceus sum, ut exinde videre queam, quo pacto ex falso verum directè sequatur. Illud tamen video, quod si G demonstretur non esse centrum sphæræ*, (vult, credo dicere, *ponatur*, cùm demonstrari nequeat, quod falsum est) *necessariò sit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G sit centrum sphæræ*. Ad hæc verba repetam compendio demonstrationem superiùs datam, qua, opinor, fiet, ut V. C. tametsi, quòd est maximè lynceus

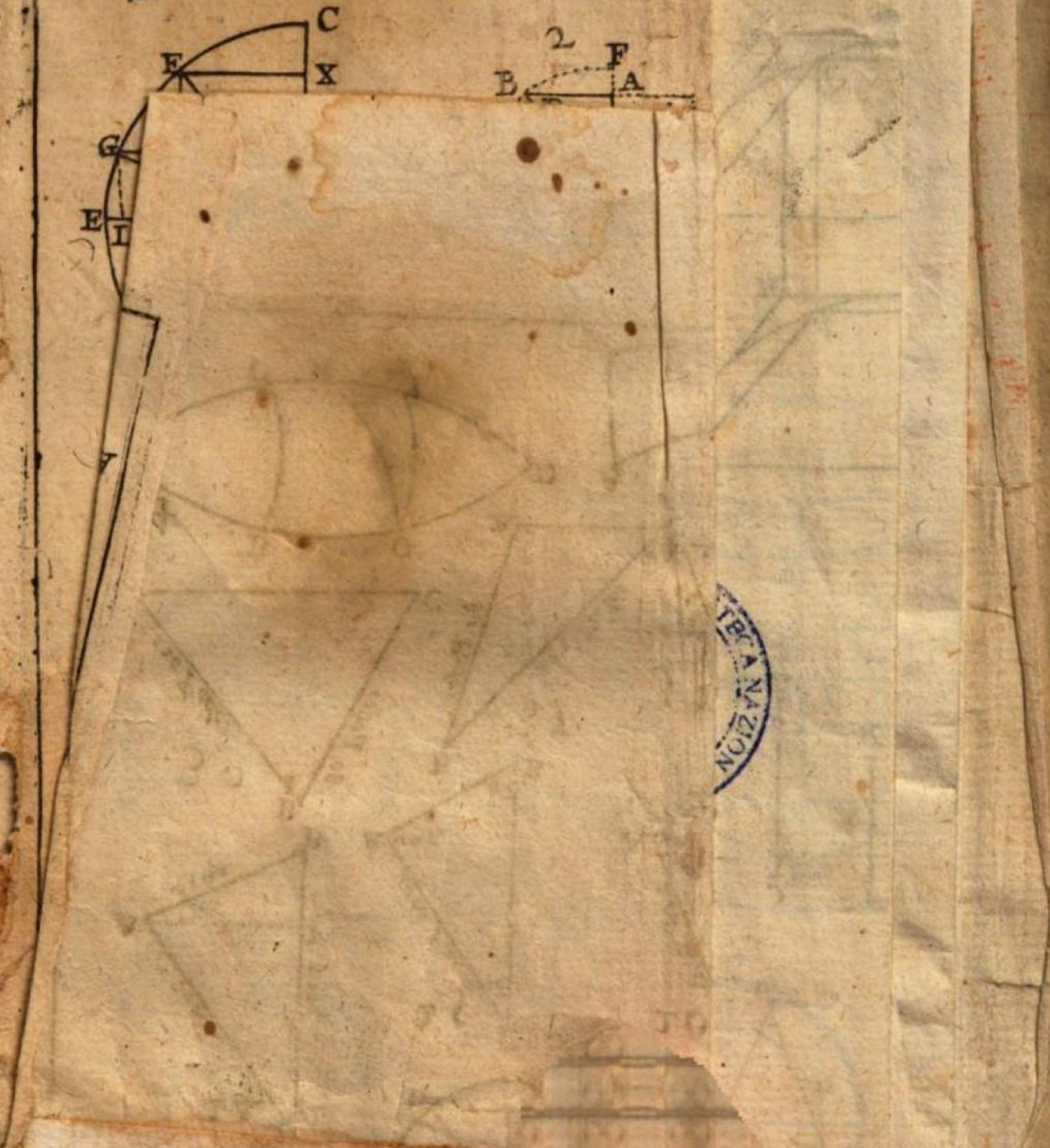
ceus non esset, clarè perspiciat elici directè ex falso verum.

Quoniam admittit (id, quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonstratio) si G ponatur non esse centrum, sequi necessitate absoluta, & formali G esse centrum, manifestum est, G esse centrum, directè sequi ex sua contradictoria, G non est centrum. Ergo ex vi deductionis constat, verum esse, quod G sit centrum, cùm lumine naturali notum sit, id esse necessariò verum, quod suum contradictorium destruit, hoc est, quod ex suo contradictorio directè sequitur. Habemus igitur, quod ex hac: G non est centrum directè deducta sit hæc vera: G est centrum. Atqui hæc: G non est centrum, falsa est, cùm jam ostenderim veram esse hanc: G est centrum. Ergo verum directè deductum est ex falso.

Hæc sunt, Erudite Lector, quæ super hac quæstione breviter hìc putavi apponenda. Cæterùm nihil dubito, quin Clarissimus Lipstorpius eadem animi æquitate responsionem hanc nostram sit accepturus, qua dedit oppugnationem suam, & ego illam accepi.

FINIS.

Fig: 1 SCHEMATA

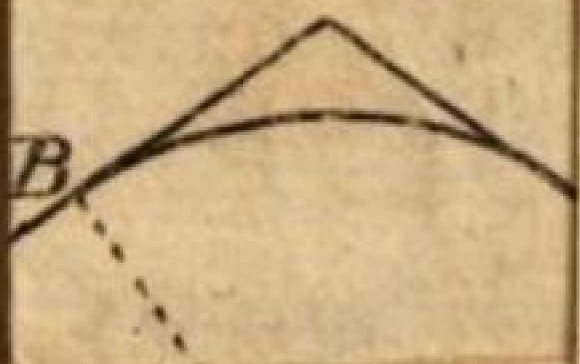


ceu
fals
G
te
tur
ta,
G
cto
ctio
cùn
ver
hoc
qui
est
est
fals
G
est
I
qua
teri
ead
stra
suan

AD TRI

2 3

I. Ar



ula II.

20.