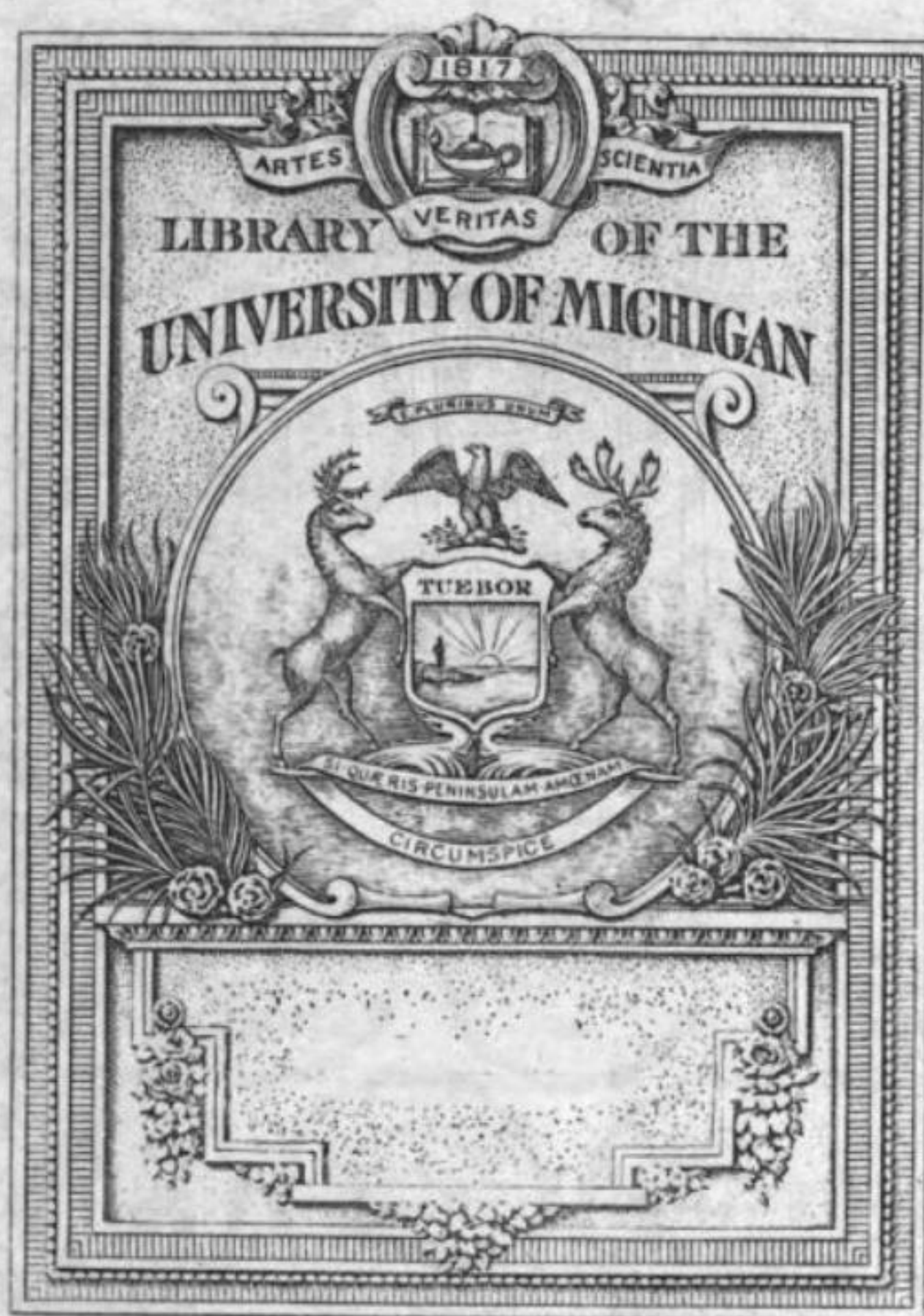
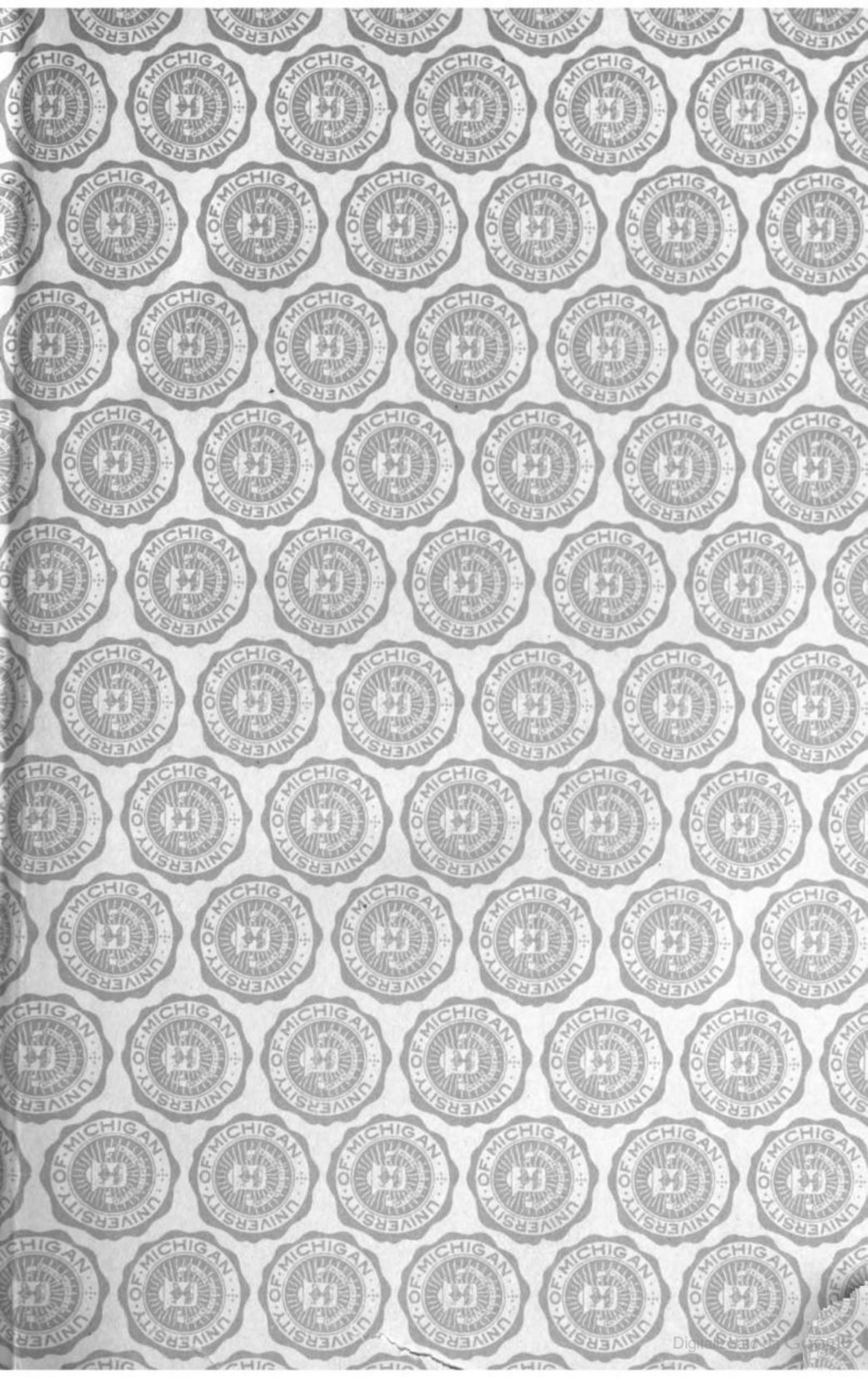






JA

31

238

2731

1750

Q.A

31

ES8

S731

1750

2.3
EUCLIDIS

ELEMENTA

QUINQUE POSTREMA

SOLIDORUM SCIENTIAM

CONTINENTIA,

*Quibus velut Elementum aliud
adjectus est*

FRANCISCI

FLUSSATIS

LIBER

*De Solidorum regularium cujuslibet
intra quodlibet comparatione,*

OPERA ET STUDIO

VITI CARAVELLI,

AD JUVENTUTIS USUM
ACCOMMODATA.



NEAPOLI, M. DCC. L.

Ex Typographia Josephi Raymundi.

SUPERIORUM PERMISSU.



QA

31

E88

S731

1750



VITUS CARAVELLUS

LECTORI STUDIOSO.



UÆ causæ sunt, quamobrem novam hanc Elementorum Geometriæ Solidæ editionem adornaverim, rei utilitas maxima, & commodum Juventutis Mathematicæ studiosæ. De utilitate nihil habeo, quod addam; non enim eorum

sequar exemplum, qui prælonga opusculis vel levissimis proloquia prætexunt in eo toti, ut rem, quam tractant, reliquis præponant disciplinis; quo facto sibi videlicet blandiuntur, ut si ceteris probaverint, disciplinam suam longe dignissimam esse, habeant, unde sibi vehementer placeant; & necessitate studiorum suorum in tantum objecta elevataque, ut iis sublati Resp. nequeat consistere, omnium doctissimi videantur. Non ego Rhetoras, Causidicos, Ictos, Theologos, ceteros præ Geometris pro vitiosa nuce venditem, ut sapere solus videar; non universam sapientiam ab hac una, quam profiteor, scientia proficisci contendo, ut quantum est hominum literis deditorum ad hanc adigam addiscendam; non eos, qui Geometriæ Solidæ expertes sunt, desipere ad unum omnes autumo, ut libello meo emtores parem. Geometris scribo, iis nimirum, quos non latet, Geometrarum nomine dignos non esse, qui corporum di-

men-

ensionem, eorumque inter se comparisonem ignorant. Neque porro Geometris omnibus libellum hunc offero (cui enim usui elementa hæc erunt illis, qui non pœnitendo successu in re geometrica conatus suos exercuerant, universamque cognitionem hanc industria sua exhausserunt?). Sed Juventuti, quæ nunc primum huic dat nomen facultati, operam non inutilem præstitisse me affirmo, ut compendio & laboris, & temporis illhuc inoffenso pede perducatur, quo ceteri per salebrosam tramitem, ac pene impervium vix, aut ne vix quidem pervenerunt. Quem enim non terrent, aut certe non fatigant, ac pene excerebrant, ut ita dicam, Euclidis, Commandini, Clavii longissimæ, & quandoque difficillimæ demonstrationes? Quotus porro quisque est adolescentium, ad cuius captum accommodata sit concisa nimis, & brevis Barrowii scribendi ratio? Hoc igitur ipso gratiam a juventute nos inire satagemus, quod & brevitati simul, & perspicuitati, quantum res ipsa patiebatur, studuimus: neque, quod alterum est in Commandino, & Barrowio incommodum, quidquam in nostris his elementis desiderari voluimus. Id enim propositum est nobis, unico libello integram exhibere, & ne hilum quidem mancā nobilissimam hanc, & utilissimam matheseos partem: quod ut præstaremus non undecimum tantum, & duodecimum Euclidis libros, quod plerique omnes faciunt Elementorum Euclideanorum Interpretes, sed & decimum tertium, & tres reliquos exposuimus; etenim quamvis non sim nescius, decimum quartum, & decimum quintum libros, qui sub Euclidis nomine circumferuntur, a plerisque Hypsicle dari; ultimum vero a Francisco Flussate adjectum esse; quum tamen idem solidorum argumentum in iis pertractetur, conjunctimque ideo edita prostant, operæ pretium esse duxi, omnes recognoscere, simulque proferre. Quod etiam in causa fuit, ut non solum novem propositiones, quibus sive Euclides, sive Hypsicles libros decimum quartum, & decimum
quin-

quintum absolvit, sed omnes omnino a Clavio collectas, in eosque conjectas retinerem. Siquidem quum auctor librorum decimi quarti, & decimi quinti non nisi icosaedrum, & dodecaedrum quoad superficies, & quoad soliditates comparet, & non omnium, sed quorundam dumtaxat solidorum in aliis solidis descriptiones exhibeat; citra piaculum reliqua omitti non posse ratus sum, quæ quinque corporum regularium inter se comparationem eorumque reciprocas inscriptiones suppeditarent: & quum ad integram hujus rei notitiam deesse videretur ratio, ratioque laterum corporum regularium sibi mutuo inscriptorum; iccirco decimus sextus liber rejici minime debuit, in quo id a Francisco Flussate præstitum fuit. Habes igitur, Lector studiose, qui ad Mathematicam animum adpellis, in hoc libello, quicquid ad Geometriam Solidam facit; & ita habes, ut a-
sim dicere, nihil, nisi mediocrem animi attentionem ad ea intelligenda omnia opus tibi esse; quod commodi, ut tibi pararem quandoque Euclideanas demonstrationes prolixas, intricatasque posthabui, aliasque faciliores, brevioresque substitui; & ab aliorum Euclidis expositorum ratiociniis recessi, aliaque rem aggressus sum via. Fruere igitur hoc nostro quicquid est laboris, & vale.

EU-



E U C L I D I S

Elementum Undecimum, &
Solidorum primum.

Definitiones.

I.



SOLIDUM est, quod longitudinem, la- Fig. 1.
titudinem, & crassitudinem habet;
veluti est $ACDF$, cujus longitu-
do est AB , latitudo BC , & altitudo
demum, seu crassities DC .

II.

Solidi autem extremum est superficies. Su-
perficies enim longitudinem, atque latitudinem ha-
bens, altitudine tamen, seu profunditate caret. Qua-
re superficies definiri quoque potest terminus corporis,
seu solidi, uti sunt $ABCG$, $BCDH$, $HDEF$,
 $FAGE$, $FABH$, & $EGCD$. Atque hinc in-
telligitur solidum generari ex motu superficiei sursum,
vel deorsum.

III.

Linea recta (AB) est ad planum (CD) Fig. 2.
recta, cum ad rectas omnes lineas (BG , BK ,
 BI)

BI, BH, &c.), a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos (ABG , ABK , ABI , ABH) efficit.

IV.

Fig. 3. Planum (GE) ad planum (DB) rectum est, cum rectæ lineæ (IK , FM), quæ communi planorum sectioni (HE) ad rectos angulos in uno planorum (GE) ducuntur, alteri plano (DB) ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ (IL) ad planum (DB) inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius lineæ (IL) ad planum (DB) deducta fuerit perpendicularis (IK), atque a puncto (K), quod perpendicularis (IK) in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum (L), quod in eodem est plano, altera recta linea (KL) fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus (ILK) insistente linea (IL), & adjuncta (LK) comprehensus. *Vel clarius: si a sublimi puncto I recte LI, quæ perpendiculariter plano (DB) minime insistit, demittatur in planum normalis IK, ducaturque LK; angulus acutus ILK, dicitur Inclinatio lineæ IL ad planum DB*

VI.

Fig. 4. Plani ($CEDF$, ad planum (AB) inclinatio, est angulus acutus ($G IH$) rectis lineis (GI , IH) contentus, quæ in utroque planorum (CD , AB) ad idem communis sectionis (ED) punctum (I) ductæ, rectos cum sectione (ED) angulos (GIE , HIE) efficiunt.

VII.

Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII.

VIII.

Parallela plana sunt, quæ in omnem partem producta inter se non conveniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

X.

Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas, inclinatio.

Lineæ BA , AC in eodem plano existentes, & in directum minime jacentes, quæ ad punctum A conveniunt, angulum planum BAC constituunt; & si ducatur AD in eodem plano, angulum BAC utcumque intersecans, non efformabitur in A angulus solidus, sed planus BAC a duobus BAD , DAC compositus. Si vero mente concipiatur linea AD elevari ex parte D , firma remanente ex altera in A , efficietur in A angulus solidus. Idem contingeret, si plures aliæ lineæ, ut AD , elevarentur, dummodo in planis a prioribus comprehensis non constituentur.

Fig. 5.

ALITER.

Solidus angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur; ut est A , qui tribus BAD , BAC , DAC continetur.

Fig. 6.

Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existen-

A 2

tes

res plano, necessariae sint ad anguli solidi constitutionem, ut dictum est in def. prima anguli solidi, manifestum est, tres angulos planos in diversis existentes planis saltem requiri, ut angulus solidus efficiatur. Quare duo anguli plani satis non sunt ad angulum solidum constituendum, etiamsi in diversis sint planis. Hiabit enim ex altera parte. Unde necesse est, ut tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis praebent duo parietes cum pavimento domus, vel laqueari, ad unum punctum concurrentes. In eo enim puncto, in quo conveniunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Ubi manifestum est, si una earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, & superesse tantum duas superficies ad invicem inclinat, & hiantes.

Hinc deducitur illos angulos solidos inter se aequales esse, qui planis angulis multitudine, & magnitudine aequalibus, continentur. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se penetrare intelligantur.

XII.

Fig. 7. Pyramis est figura solida ($CADB$) quae planis (ACD , DCB , ACB , ADB) continetur, ab uno plano (ADB) ad unum punctum (C) constituta.

Planum ADB basis dicitur, & esse potest vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, vel quavis alia figura rectilinea, ex cujus lateribus singulis triangula surgunt, in unum punctum C , quod vertex appellatur, coeuntia. Hinc varia Pyramidum denominationes ortum ducunt; aliae enim triangulares, aliae quadrangulares, aliae demum polygonae appellantur, prout basis est vel triangulum, vel quadrangulum, vel polygonum quodcumque.

XIII.

XIII.

Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo (ABF, ECD) sunt & æqualia, & similia, & parallela, alia vero (ABCE, BCDF, AEDF) parallelogramma. *Fig. 8.* *Varia sunt quoque Prismatum denominationes, sicuti varia esse possunt illa plana duo adversa æqualia, similia, & parallela; & si triangula sint, triangularia; si quadrangula, quadrangularia prismata, &c. appellantur.*

XIV.

Sphæra est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat, circumassumta figura. *Seu est solidum a superficie illa, quam semicirculi peripheria describit, dum circa suam diametrum circumvolvitur, comprehensum. Hinc liquet, radios omnes a centro ad superficiem sphæræ ductos inter se esse æquales.*

XV.

Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque a sphæræ superficie terminata.

XVIII.

Per punctum fixum (A) extra planum circuli (BED) acceptum, transiens recta linea (E A e), utrinque indefinite producta, si circa peripheriam
A 3 ejus-
Fig. 9.

6 EUCLIDIS LIB. XI.

eiusdem circuli convertatur, donec in locum redeat, unde moveri coeperat: utraque superficies ex hoc lineæ motu, hinc, atque hinc a fixo puncto (A) resultans, Conica nuncupatur. Solida ex his superficiebus ad circulum (BED), vel huic oppositum (bed) terminatis, comprehensa, Coni appellantur.

XIX.

Punctum fixum A, tam superficiei conicæ, quam ipsius coni vertex dicitur.

XX.

Axis coni est recta (AC), ex vertice (A) ad baseos centrum (C) ducta.

XXI.

Basis vero coni est circulus (BED).

XXII.

Conus rectus est, cum axis (AC) est basi perpendicularis.

XXIII.

Conus scalenus, seu obliquus est, cum axis (AC) est ad basim inclinatus.

Fig. 10.

Potest conus rectus a triangulo rectangulo CBA circa unum latus AB angulo recto adjacens, in orbem ducto, quoque describi. Quapropter si latus quiescens AB æquale fuerit circumducto BC, conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus dicetur; cum angulus ad verticem CAD rectus sit, ob semirectum CAB; si vero AB fuerit BC minus, conus vocabitur amblygonius, seu obtusangulus, quoniam angulus ad verticem CAD obtusus existit, ob angulum CAB semirecto majorem; si demum AB ipso BC majus extiterit, conus descriptus oxygonius, seu acutangulus appellabitur, nam angulus ad verticem CAD

ET SOLIDORUM I.

7

CAD acutus est, ob angulum CAB semirecto minorem.

XXIV.

Si circa duos circulos æquales, & parallelos (C *Fig. 11. 12.* L, OQ) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, sic ut mota sibi ipsi semper parallela maneat, superficies a recta (COF) descripta, dicitur cylindrica superficies: corpus vero, quod hac superficie, & binis circulis continetur, cylindrus vocatur.

XXV.

Bases cylindri sunt circuli (CL, OQ)

XXVI.

Axis cylindri est recta (AB) basium centra connectens.

XXVII.

Latus autem est recta (OC) in cylindri superficie utramque basim tangens.

XXVIII.

Cylindrus dicitur rectus, cum axis ad bases est rectus. Scalenus vero, cum axis ad bases inclinatur.

Describitur quoque cylindrus rectus a rectangulo $OCBA$ circa unum latus BA in orbem ducto. *Fig. 11.*

Quoniam definitio conii, & cylindri Euclidea conos, & cylindros rectos duntaxat spectat, jure iis generaliores substituendas hoc loco curavimus; eo magis, quod in lib. 12. eadem fere demonstrabimus de cono, & cylindro scaleno, quæ Euclides de recto ostendit.

XXIX.

Similes conii, & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

A 4

XXX.

XXX.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXXI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXXII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXXIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXXIV.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Quinque hæc ultima corpora tantum, regularia appellantur, utpote quæ planis regularibus circumscribuntur; nec alia excogitari possunt, quæ ejusmodi sint natura, ut suo loco ostendemus.

XXXV.

Fig. 1. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ, ex adverso, parallelæ sunt, contenta; ita solidum sex quadrilateris $ABCG$, $BCDH$, $ABHE$, $AGEF$, $EGCD$, $EFHD$, comprehensum, quorum opposita AC , FD ; tum AE , BD ; cum AH , GD sunt parallelæ, dicitur parallelepipedum, quasi parallelis planis circumscriptum.

Quoniam in prop. 24. hujus lib. ostendetur hujusmodi plana parallelæ opposita, æqualia esse inter se, similia, & parallelogramma; sequitur tot esse parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum; & si fuerint quadrata, parallelepipedum illud cubus

ET SOLIDORUM I. 9

vocabitur. Ceterum quodcumque parallelepipedum vocari posse prisma, ex prismatis definitione satis liquet, sed non contra.

PROP. I. THEOR. I.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

SIT ABC linea recta. Dico ejus partem unam AB non esse in subiecto plano EF, reliquam vero BC in sublimi, hoc est supra planum elevatam. Fig. 13.

Si negas, protrahatur AB in subiecto plano versus D; erit ex notione plani, & lineæ rectæ, BD ipsi AB in directum, seu ABD linea recta; quare si ABC sit etiam recta: duæ lineæ rectæ ABC, ABD habent commune segmentum AB, quod est absurdum (a). Rectæ igitur pars quædam, &c. Quod erat demonstrandum.

PROP. II. THEOR. II.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in uno sunt plano. Atque triangulum omne in uno est plano.

RECTÆ lineæ AB, CD se mutuo secent in E, atque in EB, ED sumtis punctis F, & G utcumque, ducatur FG, ut fiat triangulum EFG. Dico primo triangulum EFG in uno esse plano. Fig. 14.

Sit, si fieri potest, trianguli FEG pars EHK in uno plano, pars vero HFGK in altero. Ergo rectarum EF, EG partes EH, EK sunt in subiecto plano, partes vero HF, KG in sublimi, quod fieri non posse, jam supra demonstratum est.

Qua-

(a) Axiom. 11. lib. 1.

10 EUCLIDIS LIB. XI.

Quapropter triangulum FEG in uno est plano.
Dico secundo rectas AB , CD in uno plano
pariter existere.

Nam rectæ FE , EG sunt in plano trianguli FEG ,
adeoque in uno plano per primam partem; sed
in quo plano sunt rectæ EF , EG , in eodem sunt
rectæ totæ AB , CD (a). Rectæ igitur AB ,
 CD in uno sunt plano. Si duæ itaque rectæ li-
neæ, &c. q. e. d.

PROP. III. THEOR. III.

*Si duo plana se mutuo secant, communis eorum
sectio est linea recta.*

Fig. 15. **S**it EF communis sectio planorum AB , CD ,
quæ se mutuo secant. Dico hanc EF esse
lineam rectam.

Si communis sectio EF non sit linea recta;
a puncto E ad F ducatur in plano quidem AB ,
recta EGF , in plano vero CD , recta EHF ; re-
ctæ igitur EGF , EHF eisdem terminos E , & F
habentes, spatium concludent, quod fieri non po-
test (b). Communis itaque sectio EF erit linea
recta: ac proinde si duo plana se mutuo, &c. q. e. d.

PROP. IV. THEOR. IV.

*Si recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus,
in communi sectione ad rectos angulos insistat:
illa ducto etiam per ipsas plano ad
angulos rectos erit.*

Fig. 16. **I**ntersecant sese mutuo lineæ GD , EF in B ;
erunt ipsæ in uno plano (c), quod sit $GEDF$.
Di-

(a) Prop. 1. hujus.

(b) Axiom. 10. lib. 1.

(c) Prop. 2. hujus.

ET SOLIDORUM I. 11

Dico, quod si recta AB ad angulos rectos insistat duabus rectis GD , FE in communi earum sectione B , eam plano $GEDF$, quod per ipsas ducitur, ad angulos rectos quoque esse.

Si negas, sit alia quædam AI plano $GEDF$ perpendicularis. Junge IB , & alterutri rectarum, ut FE in plano demitte perpendicularem IC , atque duc AC . Quia in triangulo IBC angulus ICB est rectus, erit IBC recto minor (*a*), adeoque latus IB majus IC (*b*). Ulterius cum AI perpendiculariter plano $GEDF$ insistat ex hypothesis, erunt anguli AIB , AIC (*c*) recti, ac proinde erit quadratum ex AB æquale quadratis, quæ fiunt ex AI , & IB ; similiter quadratum ex AC æquale quadratis ex AI , & IC factis (*d*); sed ex demonstratis IC minor est IB ; Igitur quadrata rectarum AI , IC minora sunt quadratis, quæ fiunt ex AI , & IB , seu quadratum AC minus est quadrato ex AB , ac per consequens recta AC minor AB existit. In triangulo itaque ABC rectangulo in B , latus AC , angulo recto oppositum, minus est AB angulum acutum ABC subtendente, quod est absurdum. Quapropter non AI recta est plano $GEDF$, sed AB ; ac ideo si recta linea rectis duabus, &c. q. e. d.

PROP. V. THEOR. V.

Si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illæ tres rectæ in uno sunt plano.

Insistat recta linea AB tribus lineis rectis BC , BE , BD , se mutuo tangentibus in B , ad angu-

(a) Prop. 32. lib. 1.

(b) Prop. 19. lib. 1.

(c) Def. 3. hujus.

(d) Prop. 47. lib. 1.

gulos rectos in communi puncto tactus B . Dico tres rectas BC , BE , BD , in uno esse plano.

Fig. 17.

Cum enim lineæ BC , BD , se mutuo interfecerint in B , erunt in uno plano (a), quod sit GD . Vis BE non esse in eodem plano, sed in sublimi. Ducatur per AB , & BE planum AE . Et quia plana AE , & GD sibi mutuo occurrunt in B , necessario producta se invicem secabunt. Sit igitur eorum communis sectio BF . Quia vero AB ad rectos angulos ponitur rectis BC , & BD , erit ea ad rectos angulos quoque plano GD per easdem ducto (b); ac per consequens ad rectos angulos rectæ BF (c), quæ in plano GD jacet, ipsamque AB in B tangit. Quare anguli ABF , ABE in eodem plano AF existentes, ambo recti erunt, ac proinde pars, & totum æquales. Quod est absurdum. Recta igitur BE in uno plano est cum rectis BD , BC . Quapropter si recta linea, &c. q. e. d.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Fig. 17.

Incidant duæ rectæ lineæ AB , CD , supra idem planum GH in punctis B , D ad angulos rectos. Dico rectas AB , CD parallelas esse.

Nam juncta BD , anguli ABD , CDB recti sunt (c). Jam in plano GH ducatur DE perpendicularis ipsi BD , & æqualis AB , indeque connectantur rectæ BE , AE , AD . Cum posita sit ED ipsi AB æqualis; duo latera ED , DB trianguli EDB æqualia erunt duobus lateribus AB , BD

(a) Prop. 2. hujus.

(b) Prop. 4. hujus.

(c) Def. 3. hujus.

$\triangle ABD$, alterum alteri; sed anguli EDB , ABD etiam æquales sunt, quia recti; igitur æquales quoque erunt bases AD , BE (a). Præterea quia latera ED , DA trianguli EDA æqualia sunt lateribus AB , BE trianguli ABE , & basis AE communis, erunt anguli ADE , ABE pariter æquales; Sed angulus ABE rectus est (b), igitur rectus & EDA . Sunt vero anguli EDB ex constructione, & EDC per def. 3. recti. Igitur recta ED tribus DC , DA , DB se mutuo tangentibus in D ad rectos angulos insistit; ac proinde CD cum AD , & BD (c) in uno est plano. Sed etiam AB in uno est plano cum AD , & BD (d). Ergo AB , & CD in uno sunt plano. Quocirca cum anguli interni ABD , CDB sint recti, lineæ AB , & CD parallelæ erunt (e). Si duæ itaque rectæ lineæ, &c. q. e. d.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum utraque sumta sint qualibet puncta; illa lineæ, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Fig. 19.

Sint AB , CD duæ rectæ parallelæ, atque in eis sumantur utcumque duo puncta E , & F , quæ connectantur recta EF . Dico rectam EF esse in eodem plano, in quo sunt parallelæ AB , CD .

Planum, in quo sunt parallelæ AB , CD faciet aliud planum, transiens per puncta E , & F . Si EF non sit in plano rectarum AB , CD , nec etiam

- (a) Prop. 4. lib. 1.
- (b) Def. 3. hujus.
- (c) Prop. 5. hujus.
- (d) Prop. 2. hujus.
- (e) Prop. 29. lib. 1.

etiam est planorum communis sectio. Sit igitur communis sectio EGF . Ergo EGF est linea recta (a). Duæ itaque rectæ EGF , EF communes terminos E , & F habentes, spatium claudent; quod fieri non potest (b). Non ergo extra planum rectarum AB , CD erit recta EF ; ac proinde si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, &c. q. e. d.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Fig. 18.

Sint AB , CD parallelæ, sitque AB ad rectos angulos plano GH . Dico rectam CD eidem plano GH ad rectos angulos esse.

Ducatur in plano GH recta BD , eique in eodem plano erigatur perpendicularis DE , ipsi BA æqualis, ac tandem jungantur lineæ AD , AE , BE . Quoniam inter parallelas AB , CD tertia incidit BD , erunt anguli CDB , ABD (c) duobus rectis æquales; sed angulus ABD est rectus (d); igitur rectus & CDB . Præterea duo latera AB , BD trianguli ABD , æqualia sunt duobus ED , DB trianguli EDB , & angulus ABD , æqualis ipsi EDB ; (ambo enim recti sunt). Igitur basis AD æqualis est BE (e).

Similiter triangula ADE , ABE habent duo latera ED , DA duobus AB , BE æqualia, alterum alteri, & basim AE communem. Angulus igitur ADE æqualis est ABE (f). At

an-

(a) Prop. 3. hujus.

(b) Ax. 10. lib. 1.

(c) Prop. 29. lib. 1.

(d) Def. 3. hujus.

(e) Prop. 4. lib. 1.

(f) Prop. 8. lib. 1.

angulus ABE est rectus (a). Ergo rectus & DE. Quapropter cum recta ED duabus DA, B in puncto D, quo se mutuo tangunt, ad angulos rectos insistat, hæc ad rectos angulos sit plano per AD, & DB ducto (b). Sunt autem in hoc eodem plano rectæ CD, AB, propterea quod rectæ DA, DB, parallelas CD, B secantes in D, B, A, in uno sunt plano cum ipsis parallelis (c). Igitur ED ad rectos angulos est rectæ DC. Quocirca cum anguli DE, CDB sint recti, erit CD ad rectos angulos pariter plano per DB, & DE ducto (b), hoc est plano GH. Si duæ itaque sint parallelæ, &c. q.e.d.

PROP. IX. THEOR. IX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæc quoque sunt inter se parallelæ.

Sint rectæ AB, CD ipsi EF parallelæ, sed non in eodem cum EF plano. Dico rectas AB, CD parallelas esse. Fig. 2a.

Nam ex puncto K utcumque sumto in EF ducantur ad ipsam EF duæ perpendiculares; KH quidem in plano parallelarum AB, EF, & KG in plano parallelarum CD, EF, jungaturque HG. Quoniam EK perpendiculariter ad duas KH, KG in puncto tactus K, incidat, erit EK perpendicularis plano KHG (b). Duarum igitur parallelarum AB, EF, item & CD, EF, una EF perpendicularis est plano HKG, ergo & al.

- (a) Def. 3. hujus.
- (b) Prop. 4. hujus.
- (c) Prop. 7. hujus.

& altera (a). Quare rectæ AB, CD perpendiculares sunt eidem plano HKG. Ergo AB, CD parallelæ sunt (b). Quæ igitur eidem rectæ, &c. q. e. d.

PROP. X. THEOR. X.

Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: ille angulos æquales comprehendent.

Fig. 8.

Sint AB, AF se mutuo tangentes in A parallelæ ipsis EC, ED se tangentibus in E, non sint tamen BA, AF in eodem cum CE, ED plano. Dico angulos BAF, DEC sub iis contentos, æquales esse.

Fiant enim BA, CE, item AF, ED inter se æquales, & ducantur AE, BC, FD, FB, DC. Cum sint BA, CE æquales, & parallelæ, æquales & parallelæ quoque sunt AE, BC (c). Eadem ratione AE, FD æquales sunt, & parallelæ. Quare cum rectæ BC, FD eidem AE æquales sint, & parallelæ, erunt etiam BC, FD æquales, & parallelæ (d); ac propterea æquales, & parallelæ erunt rectæ BF, CD. Quapropter cum sint latera AB, AF trianguli ABF æqualia lateribus EC, ED trianguli CED, alterum alteri, & basis BF æqualis ipsi CD, erunt anguli BAF, CED pariter æquales (e). Si igitur duæ rectæ se mutuo, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Prop. 8. hujus.
- (b) Prop. 6. hujus.
- (c) Prop. 33. lib. I.
- (d) Prop. 9. hujus.
- (e) Prop. 8. lib. I.

PROP. XI. PROBL. I.

*A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum
perpendicularem rectam lineam ducere.*

Dato puncto A in sublimi, & subjecto pla- Fig. 11.
no LH , oportet ex puncto A perpendicu-
larem ducere supra planum LH .

Ducatur in plano LH utcumque recta BC , ad
quam ex A demittatur perpendicularis AD , &
per D in plano ducatur IM perpendiculariter su-
pra BC , eique ex A demittatur perpendicularis
 AE . Dico AE perpendicularem esse ad pla-
num LH .

Per punctum enim E in plano ducatur FG
ipsi BC parallela. Quia BD ad rectos angulos
est duabus DA , DM in puncto tactus D , erit
 BD ad angulos rectos quoque plano per AD , &
 DM ducto (a). Sed FG ipsi BC parallela ducta
est; igitur & FE eidem plano ADM ad rectos
angulos insistit (b) ac proinde angulus AEF re-
ctus est. Verum ex constructione angulus AEI
etiam rectus est. Recta itaque AE ad rectos an-
gulos insistit duabus EF , EI in puncto tactus E .
Ergo recta AE (a) plano rectarum FE , EI , hoc
est plano LH perpendicularis est. A dato itaque
puncto, &c. q. e. f.

PROP. XII. PROBL. II.

*Dato plano a puncto, quod in illo datum est, ad
rectos angulos rectam lineam excitare.*

Sit a dato puncto A in plano DE ducenda per- Fig. 12.
pendicularis ad datum planum DE .

B

Ex

(a) Prop. 4. hujus.

(b) Prop. 8. hujus.

18 EUCLIDIS LIB. XI.

Ex puncto C in sublimi utcumque sumto demittatur CB perpendicularis ad planum DE , quæ si ceciderit in A , factum erit, quod proponitur; si vero ceciderit in aliud punctum B , iuncta AB , ducatur ex A recta AF in plano HG , per AB , & BC ducto, ipsi BC parallela. Dico AF rectam esse ad planum DE .

Nam AF , & BC parallelæ sunt, & BC perpendicularis ad planum DE . Ergo FA (a) perpendicularis pariter est ad idem planum DE . Dato itaque plano, &c. q. e. f.

PROP. XIII. THEOR. XI.

Dato plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

Fig. 13.

Sit datum planum BC . Dico, quod ab ejus puncto dato A excitari non possunt ad easdem partes duæ lineæ eidem plano perpendiculares. Erigantur enim ex A , si fieri potest AD , AE , plano BC perpendiculares. Cum igitur duæ AD , AE rectæ sint ad idem planum BC , erunt inter se parallelæ (b), cum tamen conveniant in A . Quod est absurdum. Dato itaque plano, a puncto, &c. q. e. d.

SCHOLIUM.

NON absimili modo demonstrari potest, quod ex puncto A in sublimi ad subjectum planum BC duæ lineæ perpendiculares demitti non possunt. Cadant, si fieri potest AD , AE plano BC perpendiculares. Rectæ igitur AD , AE perpendiculares sunt plano BC . Ergo sunt parallelæ (b). Quare

(a) Prop. 8. hujus.

(b) Prop. 6. hujus.

re parallela AD , AE concurrunt in A . Quod fieri non potest. Ex puncto itaque A in sublimi ad subiectum planum BC duae perpendiculares demitti non possunt.

COROLLARIUM.

Hinc liquet ex puncto quocumque, vel in plano quovis sumto, vel in sublimi, nisi unica perpendicularis ad planum adduci non posse.

PROP. XIV. THEOR. XII.

Ad quae plana eadem recta linea recta est, illa sunt parallela.

SIT EF recta, hoc est perpendicularis ad duo plana AB , CD . Dico plana AB , CD esse parallela.

Fig. 24

Si enim non sint parallela; convenient, si fieri potest, ex parte A , & C producta, sitque communis sectio GH , atque in ea sumatur punctum quodvis I , quod connectatur cum punctis E , & F rectis IE , IF , in planis GAB , GCD existentibus. Quoniam ex hypothese EF perpendicularis est utrique plano AB , CD , anguli FEI , IFE recti erunt (a). Duo itaque anguli trianguli IEF duobus rectis aequales erunt; quod repugnat. Plana ergo AB , & CD non concurrunt; ac proinde parallela sunt. Ad quae igitur plana, &c. q. e. d.

B 2

PROP.

(a) Def. 3. hujus.

PROP. XV. THEOR. XIII.

*Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas
rectas se mutuo tangentes sint parallelæ,
non in eodem consistentes plano.
parallelæ sunt, quæ per illa
ducuntur, plana.*

Fig. 15. **S**int duæ rectæ AB , AC se mutuo tangentes
in A , duabus DE , DF se tangentibus in D
parallelæ, existentibusque in alio cum illis plano.
Dico plana BC , EF , per ipsas ducta, esse pa-
rallæla.

Nam ex A demittatur AG perpendicularis ad
planum EF , occurrens in G , atque per G du-
cantur in plano EF rectæ GH , GI ipsis DE ,
 DF parallelæ. Quoniam AB , & GH parallelæ
sunt tertiæ DE , erunt quoque AB , & GH (a)
inter se parallelæ. Simili ratione rectas AC , IG
parallelas esse ostendam. Anguli igitur IGA ,
 GAC , itemque HGA , GAB duobus rectis
æquantur (b). Sed cum sit AG plano EF per-
pendicularis ex constructione, erunt anguli AGH ,
 AGI (c) recti, ac proinde recti, & GAC ,
 GAB . Recta igitur GA perpendicularis est dua-
bus AC , AB in puncto tactus A . Ergo GA per-
pendicularis est plano BC (d). Est autem ex constru-
ctione perpendicularis plano EF . Ergo AG per-
pendicularis est duobus planis BC , EF ; ac pro-
inde plana BC , EF (e) parallelæ sunt. Si duæ
itaque rectæ lineæ, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Prop. 9. hujus.
- (b) Prop. 29. lib. 1.
- (c) Def. 3. hujus.
- (d) Prop. 4. hujus.
- (e) Prop. 14. hujus.

PROP. XVI. THEOR. XIV.

*Si duo plana parallela plano quopiam secantur:
communes illorum sectiones sunt parallelae.*

Sint plana AB , CD parallela, plano $EGHF$ *Fig. 26.* secta. Dico eorum communes sectiones EF , GH parallelas esse.

Si negas rectas EF , GH parallelas esse, cum sint in eodem plano secante $EGHF$, ex alterutra parte productae alicubi concurrent in K . Quoniam recta FEK in uno (a) est plano, nimirum in AB producta, & HGK in plano DC etiam producta; parallela plana igitur AB , DC producta, ad K quoque convenient. Quod est absurdum, contra definitionem 8. hujus. Sunt itaque rectae FE , HG parallelae; quare si duo plana, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

Quoniam plana AB , CD circa communes sectiones parallelas EF , GH rotari possunt: patet hujusmodi plana infinitas inclinationes ad planum secans sortiri posse. Quare licet verum sit communes sectiones planorum parallelorum, ab alio plano secante factas, parallelas semper esse; absolute tamen verum non est, plana parallela existere, etsi communes eorum sectiones cum alio plano secante parallelae fuerint.

B 3

PROP.

[a) Prop. 1. hujus.

PROP. XVII. THEOR. XV.

*Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secantur ;
in easdem rationes secabuntur.*

Fig. 27. **S**int rectæ AB , CD utcumque ductæ, vel in eodem, vel in diversis planis, parallelis planis EF , GH , IK sectæ in punctis M , R , S , Q , P , N . Dico eas proportionaliter sectas esse, seu MR esse ad RS , ut NP ad PQ .

Nam ducta MQ , & rectis MN , SQ in planis EF , IK , erit triangulum MQN in uno plano (a); similiter & SMQ in uno plano. Præterea si ducantur OP , OR communes sectiones planorum MQN , SMQ cum plano GH , hæ in planis triangularibus MQN , SMQ existent. Quoniam vero parallela plana EF , GH plano MQN secantur, communes sectiones MN , OP (b) parallelæ erunt. Eadem ratione parallelæ erunt RO , SQ . In planis igitur triangularibus MQN , SMQ , rectæ OP , OR rectis MN , SQ parallelæ sunt. Ergo ut est NP ad PQ , ita MO ad OQ (c), & ut MR ad RS , ita MO ad OQ ; ac proinde ut NP ad PQ , ita MR ad RS . Si igitur duæ rectæ, &c. q. e. d.

S C H O L I U M I.

Cum segmenta rectarum AB , CD , planis parallelis EF , GH , IK comprehensa, sint proportionalia, proportionales quoque erunt earundem rectarum partes inter tria alia parallela plana intercepta, si alia plana hæc rectas eadem ratione secarent, & ita deinceps. Quare si plura plana paral-

(a) Prop. 2. hujus.

(b) Prop. 16. hujus.

(c) Prop. 2. lib. 6.

ET SOLIDORUM I. 23

parallelas duas rectas, vel in eodem plano, vel in diversis existentes secant; earundem partes inter plana interceptae proportionales erunt.

SCHOLIUM II.

SI plana EF, GH, IK sint parallela, jam demonstratum est, MR ad RS eandem rationem habere, ac NP ad PQ. Verum si plana EF, GH, IK rectas AB, CD ita secant, ut MR ad RS in eadem ratione sit, qua NP ad PQ, non sequitur plana illa parallela esse. Possunt enim hujusmodi plana circa puncta M, N; R, P; S, Q rotari, iisdem remanentibus rectarum AB, CD segmentis MR, RS, NP, PQ, quae proportionem servant.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Si recta linea plano cuiuspiam ad rectos sit angulos: Omnia, quae per ipsam ducuntur, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Sit recta BC plano DE ad rectos angulos. Di-Fig. 22.
Dico plana omnia per CB ducta plano DE ad rectos angulos esse.

Ductum enim sit per CB planum HG, secans planum DE per rectam IG, atque in IG sumatur punctum quodvis A, per quod in plano HG ducatur AF ipsi BC parallela. Quoniam BC, AF parallelæ positæ sunt, erunt anguli ABC, BAF simul duobus rectis æquales (a); sed ob lineam CB ad planum DE rectam, angulus CBA (b) rectus est. Ergo rectus est & BAF. Præterea parallelarum CB, FA, una CB perpendicularis est ex hypotesi plano ED, igitur

B 4

al-

(a) Prop. 29. lib. 1.

(b) Def. 3. hujus.

altera FA eidem plano DE etiam perpendicularis erit (*a*). Rectæ itaque CB , FA in plano HG ductæ, communi sectioni IG perpendiculares, ad rectos angulos sunt plano DE . Igitur planum HG ad planum DE rectum est (*b*). Eodem ratiocinio ostendam, omnia alia plana per CB ducta, ad planum DE recta esse. Si igitur recta linea plano cuiuspiam, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

Verum si recta BK ad planum DE inclinata fuerit; tunc inter plana infinita, quæ per BK transeunt, unum tantum erit, quod ad rectos angulos insistat plano DE , reliqua vero inclinata sint, oportet. Nam, excitata ex puncto B perpendiculari BC supra planum DE , manifestum est, rectas BC , BK se mutuo in B secantes in uno esse plano (*c*), quod sit HG . Planum igitur GH per BC transiens ad planum DE rectum est. Insistit itaque planum GH ad rectos angulos plano DE , licet per inclinatam BK transeat. Ut autem demonstretur reliqua plana, per inclinatam BK transeuntia, ad planum DE inclinari, transeant duo plana, unum per BC , ut est HG , aliud vero per BK tantum. Vis planum hoc per BK solummodo transiens, rectum esse plano DE . Igitur ex puncto B in hoc plano elevari potest recta plano DE perpendicularis, sed BC in plano HG existens etiam perpendicularis ducta est plano DE . Duæ igitur rectæ ex eodem puncto B elevari possunt eidem plano DE perpendiculares, quod est absurdum (*d*). Plana igitur omnia, quæ per inclinatam BK transeunt, præter planum HG , quod transit etiam per BC , plano DE rectam, ad planum DE inclinantur. **PROP.**

(a) Prop. 8. hujus.

(b) Def. 4. hujus.

(c) Prop. 2. hujus.

(d) Prop. 13. hujus.

PROP. XIX. THEOR. XVII.

Si duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

Sint duo plana CD , EF se mutuo secantia per *Fig. 20.* lineam HG , plano AB ad rectos angulos. Dico communem illorum sectionem HG plano AB rectam esse.

Cum enim planum CD rectum ponatur ad planum AB , manifestum est ex G in plano CD posse duci lineam ad planum AB rectam. Similiter, cum planum EF rectum sit ad planum AB , patet ex G in plano EF duci posse rectam plano AB perpendicularem. Sed ex puncto G una tantum elevari potest linea (a) plano AB recta. Igitur linea, quæ plano AB perpendicularis elevaratur ex G , in utroque plano EF , CD existit; ac proinde est communis sectio HG . Quapropter si duo plana se mutuo, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

Hoc Theorema est conversum precedentis. Ibi enim posito, quod linea quædam recta sit ad planum subiectum, ostensum est plana omnia, quæ per eam transire possunt, ad angulos rectos esse eidem plano subiecto. Hic vero e contra posito, quod duo, vel plura plana, recta sint ad planum subiectum, ostenditur communem sectionem, hoc est lineam, per quam omnia transeunt, eidem plano subiecto ad rectos angulos esse.

PROP.

(a) Prop. 13. hujus.

angulis baseos triangulorum ABC, CAD, DAE , &c. tot rectis æquantur, quotus est numerus triangulorum, pyramidem constituentium, seu quotus est numerus laterum polygoni, bis sumtus. Porro anguli ABC, ABF majores sunt angulo polygoni CBF (a). Idem dic de aliis. Igitur omnes anguli ad bases triangulorum simul accepti majores sunt omnibus angulis polygoni, CBF, BFE, FED , &c. Quare omnes anguli plani ad punctum A constituti cum angulis omnibus polygoni minores sunt tot rectis, quotus est numerus laterum bis sumtus. Sed omnes anguli polygoni una cum quatuor rectis æquantur tot rectis, quotus est numerus laterum polygoni bis sumtus, per lemma. Patet igitur omnes anguli ad punctum A constituti minores quatuor rectis existere. Quapropter omnis solidus angulus, &c. q. e. d.

PROP. XXII. THEOR. XX.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo utlibet assumti reliquo sint majores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, ut ex lineis, æquales illas rectas connectentibus, triangulum constituatur.

Fig-31. **S**int tres anguli plani EAD, FBG, HCK rectis lineis æqualibus EA, AD, FB, BG, CH, CK contenti, hac tamen lege, ut duo quilibet reliquo sint majores. Dico ex rectis ED, FG, HK illas æquales lineas connectentes, triangulum constitui posse, hoc est rectas ED, FG, HK esse ejus conditionis, ut duæ, utcumque sumtæ, reliqua sint majores.

Fiat enim angulus EAI æqualis angulo FBG , & AI æqualis ipsi AE , seu BF , atque ducantur rectæ IE, ID . Cum latera IA, AE æqualia possi-

(a) Prop. 20. hujus.

ET SOLIDORUM I. 29

posita sint lateribus FB , BG , & angulus IAE æqualis ipsi FBG , erit quoque basis IE ipsi FG æqualis (a). Præterea angulus FBG , seu IAE una cum angulo EAD , hoc est angulus IAD major est angulo HCK ex hypothese, latera vero IA , AD trianguli IAD æqualia sunt lateribus HC , CK trianguli HCK ; igitur basis ID major est HK (b). Sed latera IE , ED , hoc est FG , ED majora sunt ID (c). Igitur rectæ FG , & ED simul majores sunt HK . Simili argumento quævis duæ reliquæ majores ostendentur. Eniis itaque triangulum constitui potest. Si fuerint igitur tres anguli plani, &c. q.e.d.

SCHOLIUM I. 30

Fieri autem potest, ut anguli DAE , GBF recti Fig. 31. & 32. sint, vel obtusi. Si primum, lineæ DA , AI rectam DI constituunt (d); & in hoc casu cum latera DE , EI majora sint DI (c), seu ipsis DA , AI , seu HC , CK , erunt DE , EI , seu DE , FG multo magis ipsa HK majora. Si vero alterum; cum anguli DAE , EAI duobus rectis sint majores, juncta DI , hæc ultra punctum A ex parte anguli IAD cadet. Quapropter rectæ DE , EI majores erunt DA , AI (e), seu HC , CK ; ac per consequens DE , EI , seu DE , FG multo magis majores erunt ipsa HK .

SCHO

- (a) Prop. 4. lib. 1.
- (b) Prop. 24. lib. 1.
- (c) Prop. 20. lib. 1.
- (d) Prop. 14. lib. 1.
- (e) Prop. 31. lib. 1.

SCHOLIUM II.

Fig. 31.
& 33.

Cum ex hypothesis tres anguli EAD , FBG , CHK quatuor rectis minores sint, & duo quilibet majores reliquo; angulus solidus Q iis construi posse, satis liquet (a). Et quia latera omnia AE , AD , BF , &c. equalia posita sint, non solum latera AD , BF in unam rectam QN , verum etiam puncta F , & D in unum N coibunt. Eadem ratione coibunt latera BG , CH in unam QM , & AE , CK in QL , & puncta G , H in M ; ac tandem E , K in L . Quapropter bases ED , FG , HK triangulum LMN constituent. Præterea si ab angulo solido Q perpendicularis OO demittatur, ad planum, in quo triangulum LMN existit, hæc cadet vel intra triangulum LMN , vel in unum ex lateribus, vel extra triangulum. In omni tamen casu, ductis MO , LO , NO eas equales esse ostendam. Nam cum sint anguli QOM , QON , QOL (b) recti, erit quadratum rectæ QM æquale iis, qui ex QO , OM (c) fiunt; similiter quadratum rectæ QN æquale quadratis ex QO , ON factis; quare, ob rectas QN , QM equales, quadrata rectarum QO , OM quadratis ex QO , ON factis equalia erunt, & demto communi quadrato rectæ QO , remanebit quadratum rectæ MO æquale quadrato ex ON factis; ac proinde MO , ON equales erunt. Eodem modo ostendetur rectas OM , OL equales esse. Tres igitur rectæ MO , OL , ON equales sunt; quapropter si centro Q , intervallo OM describatur circulus, is erit triangulo LMN circumscriptus (d).

Verum cum sit angulus QOM rectus, erit MQO

re-

[a] Prop. 20. & 21. hujus.

(b) Def. 3. hujus.

(c) Prop. 47. lib. 1.

(d) Prop. 5. lib. 4.

ET SOLIDORUM I.

31
 recto minor (a); ac ideo QM major radio MO (b).

PROP. XXIII. PROBL. III.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodo-
 cumque assumti reliquo sunt majores, solidum
 angulum constituere. Oportet autem illos
 tres angulos quatuor rectis
 minores esse.

Sint dati tres anguli EAD, FBG, HCK Fig. 31.,
33.
 quatuor rectis minores, hac conditione, ut
 duo quilibet reliquo sint majores. Oportet angu-
 lum solidum constituere, qui tribus angulis pla-
 nis, ipsis EAD, FBG, HCK æqualibus, con-
 tineatur.

Fiant AE, AD, BF, BG, CH, CK æqua-
 es inter se, & subtendantur ED, FG, KH,
 atque constituatur triangulum LMN ita, ut
 latus LM rectæ ED, LN rectæ FG, &
 MN ipsi HK æquale sit. Inde triangulo LMN
 circumscribatur circulus LMN (c), cujus cen-
 trum sit O, a quo ducantur rectæ OM, OL,
 ON. Et cum quælibet rectarum æqualium AE,
 AD, BF, &c. radio MO major existat, ut de-
 monstratum est in schol. præced., erit quadratum
 rectæ AE majus quadrato radii MO. Inveniatur
 itaque OQ (d) talis, ut quadratum ex AE factum
 æquetur quadratis ex MO, & OQ, atque a cen-
 tro O erigatur OQ (e) circuli plano LMN recta,
 junganturque MQ, NQ, LQ. Dico factum.

Cum enim QO recta sit plano circuli MLN,
 erunt anguli QOM, QOL, QON recti (f);
 ac

(a) Prop. 32. lib. 1.

(b) Prop. 19. lib. 1.

(c) Prop. 5. lib. 4.

(d) Per probl. 2. schol. prop. 47. lib. 1. ex Tac.

(e) Prop. 13. hujus.

(f) Def. 3. hujus.

ac ideo quadratum rectæ QM æquale quadratis ex QO , OM (a) factis, hoc est quadrato rectæ AE , & rectæ QM ipsi AE æqualis. Rursus quia duo latera MO , OQ trianguli MOQ duobus lateribus LO , OQ trianguli LOQ æqualia sunt, & anguli QOM , QOL recti, erunt bases MQ , QL (b) pariter æquales. Simili modo ostendetur QL , QN æquales esse. Rectæ igitur MQ , QL , QN æquantur. Ostensa est autem recta MQ rectæ AE æqualis. Ergo tres rectæ MQ , QL , QN eidem AE æquantur, & ob id rectis AD , FB , BG , &c. Quapropter duo latera QM , QL trianguli QML duobus AE , AD trianguli AED æqualia sunt, & bases ML , ED pariter æquales ex constructione; igitur æquales erunt, & anguli MLQ , EAD (c). Eodem modo ostendetur angulum LQN angulo FBG , & angulum NQM angulo HCK æqualem esse. Quare, angulus solidus Q tribus planis angulis MLQ , MQN , LQN , qui tribus datis EAD , FBG , HCK æquales ostensi sunt, continetur. Ex tribus itaque angulis planis, &c. q.e.f.

PROP. XXIV. THEOR. XXI.

Si solidum parallelis planis contineatur; adversa illius plana parallelogramma sunt similia, & æqualia.

Fig. 24. **S**It solidum $ACEG$ sex figuris quadrilateris AC , AH , BE , AF , GE , DE contentum, quorum adversæ quælibet sint parallele, hoc est, sit parallelepipedum $ACEG$. Dico primo quævis opposita plana esse parallelogramma.

Planum enim AC duo alia parallela AH , DE se-

(a) Prop. 47. lib. 2.

(b) Prop. 4. lib. 1.

(c) Prop. 8. lib. 1.

secat; igitur communes sectiones AB , CD (a) parallelæ sunt. Similiter idem planum AC secat parallela plana BE , AF ; quare communes sectiones BC , AD pariter parallelæ sunt. Quapropter $ABCD$ parallelogrammum est (b). Non aliter ostendetur reliquas figuras parallelogramma esse.

Dico secundo quævis opposita plana similia esse.

Nam, per primam partem AH , AC , BE parallelogramma sunt; igitur rectæ AB , BH ipsis DC , CE parallelæ sunt, & æquales (c); ac proinde anguli ABH , DCE etiam æquales (d). Simili modo ostendetur angulos BAG , CDF æquales esse; & ita deinceps. Rursus, quia æquales ad æquales eandem rationem habent, erit AB ad CD , ut BH ad CE , & permutando AB ad BH , ut DC ad CE . Eodem ratiocinio demonstrabitur BH ad HG eandem rationem habere, quam CE ad EF , & ita deinceps. Parallelogramma igitur BG , CF (e) similia sunt. Eodem modo probabitur de cæteris oppositis.

Dico demum quævis opposita plana æqualia esse.

Cum enim demonstratum sit rectas AB , BH ipsis DC , CE æquales esse, & angulos ABH , DCE pariter æquales, erunt ductis rectis AH , DE , triangula ABH , DCE (f), ac per consequens parallelogramma BG , CF (c) pariter æqualia. Eadem ratione ostendetur duo quævis alia opposita æqualia esse. Si solidum igitur parallelis planis, &c. q. e. d.

C

PROP.

- (a) Prop. 16. hujus.
- (b) Def. 36. lib. 1.
- (c) Prop. 34. lib. 1.
- (d) Prop. 10. hujus.
- [e] Def. 1. lib. 6.
- (f) Prop. 4. lib. 1.

PROP. XXV. THEOR. XXII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur adversis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Fig. 35. **S**Ecetur parallelepipedum $ABEF$ plano DC oppositis planis AB , EF parallelo. Dico solidum AC ad solidum DE in eadem esse ratione, qua basis Ad , ad Df .

Extendatur enim parallelepipedum in utramque partem quantum libet, & in AF producta capiantur quotcumque partes AS , SG , GH ipsi AD æquales, atque FI , IK rectæ DE pariter æquales. Indeque per puncta H , G , S , I , K ducantur plana HN , GM , SL , IR , KT planis BA , EF parallela. Et quoniam plana opposita solidi $ABCD$ parallela sunt, erit $ABCD$ parallelepipedum (a). Eadem ratione parallelepipeda sunt GN , SM , AL , DE , FR , IT . Quare plana omnia, dicta parallelepipeda circumscribentia, parallelogramma sunt (b). Præterea parallelogramma Sa , Ad bases SA , AD æquales habent, & inter easdem parallelas, HK , Xk existunt. Ergo parallelogramma Sa , Ad æqualia sunt (c), & ob parallelismum rectarum Aa , Dd æquales habent & angulos SAa , ADd . Eodem modo ostendetur reliquos angulos reliquis, alterum alteri, æquales esse. Deinde cum sint tam SA , AD , quam Aa , Dd inter se æquales, erit SA ad AD , ut Aa , ad Dd , seu permutando SA ad Aa , ut AD , ad Dd . Similiter erit Aa ad as , ut Dd ad da . & ita deinceps. Parallelogramma igitur Sa , AD æqualia

(a) Def. 35. hujus.

(b) Prop. 24. hujus.

(c) Prop. 36. lib. 1.

lia sunt, & similia. Eodem ratiocinio demonstratur parallelogramma Sb , Ac æqualia esse inter se; & similia. Jam AB æquale, & simile est ipsi DC . Dum itaque sunt tria plana Sa , Sb , AB parallelepipedum SB tribus Ad , Ac , DC ipsius AC æqualia, & similia, erunt & omnia solidum SB concludentia (a) omnibus, quibus solidum AC continetur, æqualia, & similia; ac proinde parallelepida SB , AC æqualia. Eodem discursu ostendetur tam solida SM , GN solido AC , & FR , IT ipsi DE , quam parallelogramma Hg , Gs ipsi Sa , vel Ad , ac Fi , Ik ipsi Df æqualia esse. Quare quoties bases Da , Df metiuntur DX , Dk , toties solida DB , DE metientur solida DN , DT . Jam vero parallelepipedum DN est æquale, majus, vel minus solido DT , prout basis DX est æqualis, major, vel minor Dk . Itaque cum habeantur quatuor magnitudines, solidum AC prima, solidum DE secunda, basis Ad tertia, & basis Df quarta, & ostensum sit æquemultiplices primæ, & tertiæ vel una excedere, vel una deficere, vel una adæquare æquemultiplices secundæ, & quartæ; erit ut solidum AC ad solidum DE , ita basis Ad ad basim Df . Si solidum igitur parallelepipedum, &c. q. e. d.

SCHOLIUM.

QUod de parallelepipedo in hac propositione demonstratum est, facili negotio omni prismati applicari potest. Hinc

C 2

CO₂

(a) Prop. 24. hujus.

COROLLARIUM.

SI quodcumque prisma plano, adversis planis parallelo secetur, sectio erit figura aequalis, & similis oppositis planis.

PROP. XXVI. PROBL. IV.

Ad datam rectam lineam, ejusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato aequalem.

Fig. 36. **S**It ad punctum A in data recta AB constituendus angulus solidus, aequalis angulo solido dato C, tribus planis DCE, DCF, FCE contento.

A puncto quovis F (a) demitte FG plano DCE rectam, ducque FD, FE, CG, DG, GE. Deinde fac AH aequalem CD, & angulum HAI aequalem DCE, & AI ipsi CE pariter aequalem; atque in plano HAI fac angulum HAL ipsi DCG, & rectam AL rectae CG aequalem. Tum ex puncto L erige LK plano HAI rectam, & ipsi GF aequalem, ac demum junge AK. Dico factum.

Ductis enim rectis HK, KI, HL, LI; propter HA, AL ipsis DC, CG respective aequales, & angulos HAL, DCG ex constructione etiam aequales, erunt aequales & HL, DG (b). Deinde si ab aequalibus angulis HAI, DCE demantur partes aequales HAL, DCG, reliqui LAI, GCE aequales erunt; cum itaque & LA, AI ipsis GC, CE aequalia sint, aequales quoque erunt LI, GE. Praeterea rectae HL, LK ipsis DG, GF sunt aequales, & anguli HLK, DGF

(a) Prop. 11. hujus.

(b) Prop. 4. lib. 1.

DGF æquantur, ambo enim recti sunt (a). Igitur æquales existunt & HK, DF. Eodem modo, conferendo tum triangula ALK, CGF, cum KLI, FGE, ostendetur tam rectas AK, CF, quam KI, FE inter se æquales esse. Cum itaque sint latera HA, AK ipsis DC, CF æqualia, & bases HK, DF etiam æquales, erunt anguli HAK, DCF pariter æquales. Similiter KA, AI ipsis FC, CE æquantur, & KI, FE sunt etiam æquales. Igitur anguli KAI, FCE sunt quoque æquales. Quapropter solidus angulus A tribus angulis planis HAK, KAI, HAI ipsis DCF, FCE, DCE æqualibus, continetur; ac proinde solidus angulus A, solido angulo C æqualis. Ad datam itaque rectam &c. q. e. f.

PROP. XXVII. PROBL. V.

A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Si a data recta AB describendum parallelepipedum simile, & similiter positum parallelepipedum FH. Fig. 37.

Fiat a dato puncto A in data recta AB angulus solidus A æqualis angulo F, itaut tres anguli plani BAC, CAD, BAD ipsis EFI, IFG, EFG æquales sint. Deinde fiat BA ad AD, ut EF ad FG (b), & BA ad AC, ut EF ad FI; eritque ex æquo DA ad AC, ut GF ad FI. Demum completis parallelogrammis CD, BC, BD, perficiatur parallelepipedum AM, ducendo plana dictis parallelogrammis parallela. Dico factum.

C 3

Quo-

(a) Def. 3. hujus.

(b) Prop. 12. lib. 6.

Quoniam enim anguli BAC , EFI æquales positi sunt, & latera circa eos proportionalia, nimirum BA ad AC , ut FE ad FI , erunt parallelogramma BC , EI similia, & similiter posita. Eadem ratione similia, & similiter posita quoque erunt CD , IG , & BD , EG . Parallelogramma igitur tria BC , BD , CD tribus EI , EG , IG similia, & similiter posita sunt; ac proinde similia, & similiter posita sunt & ipsis opposita (*a*). Quare parallelepipedum AM continetur sex planis, quæ similia, & similiter posita sunt iis, quibus concluditur FH . Igitur parallelepipedum AM simile, & similiter positum est ipsi FH , A data ergo recta, &c. q. e. f.

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios adversorum planorum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

Fig. 34. Sit parallelepipedum FB , sintque AH , DE diagonales oppositorum planorum BG , CF . Et quoniam AD , HE ipsi BC parallelæ sunt, & æquales (*b*), erunt & ipsæ AD , HE æquales, & parallelæ; ac proinde AH , DE etiam æquales, & parallelæ. Igitur figura $ADEH$ parallelogrammum est, ac ideo AH , DE in uno sunt plano. Dico planum $ADEH$ per AH , DE transiens, bifariam secare solidum BF .

Cum enim parallelogramma BG , CF æqualia sint, & similia (*a*); erunt triangula ABH , AGH , DCE , DFE (*b*) pariter æqualia. Sunt vero latera circa æquales angulos ABH , AGH , DCE ,

(a) Prop. 24. hujus.

(b) Prop. 34. lib. 1.

DCE, DFE proportionalia. Ergo similia quoque existunt dicta triangula. Insuper plana opposita CA, EG, item CH, DG sunt etiam æqualia, & similia. Quare duo triangula ABH, DCE, & parallelogramma AC, BE, AE prismatis AHEDCB duobus triangulis AGH, DFE, & parallelogrammis GE, GD, AE prismatis ADEFGH æqualia sunt, & similia. Igitur prismata æqualia sunt; ac proinde parallelepipedum AE bifariam sectum erit. Si solidum itaque parallelepipedum, &c. q. e. d.

PROP. XXIX. THEOR. XXIV.

Solida parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

Sint duo parallelepipeda AHKE, AILE *Fig. 28.* super basin AM constituta, & in eadem altitudine, hoc est inter eadem parallela plana, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocantur lineis, nempe AB, AC, ED, EF in recta BF, & GH, GI, MK, ML in HL. Dico parallelepipeda AHKE, AILE esse inter se æqualia.

Cum enim sint AD, AF parallelogramma (a), erunt BD, CF ipsi AE æquales (b), adeoque inter se æquales; unde demta communi CD, reliquæ BC, DF etiam æquales erunt. Sunt vero cum BA, DE, tum AC, EF quoque æquales. Triangula igitur BAC, DEF æquilatera sunt; ergo & æquiangula (c); ac proinde similia (d),

C 4 &

(a) Prop. 24 hujus.

(b) Prop. 34. lib. 1.

(c) Prop. 8. lib. 1.

(d) Prop. 4. lib. 6

& æqualia . Eodem modo ostendetur triangula HGI , KML esse inter se similia, & æqualia. Deinde cum rectæ BH , CI , rectæ GA parallelæ sint, & æquales, erunt IC , HB inter se quoque æquales, & parallelæ; ac ideo parallelæ, & æquales etiam HI , BC . Sunt autem tum AB , GH cum AC , GI æquales. Triangula itaque HGI , BAC æquilatera sunt. Ergo & æquiangula (a); ac proinde similia, & æqualia. Quapropter triangula omnia ABC , EFD , MLK , GIH inter se æqualia, & similia existunt. Est insuper AH parallelogrammo EK , & AI parallelogrammo EL æquale, & simile. Similiter BI , DL æqualia sunt, & similia; nam æquilatera sunt, & æquiangula. Cum itaque omnia plana, quibus continetur prisma $ABCIHG$ æqualia sint, & similia omnibus, quibus circumscribitur prisma $LFEDKM$, erunt dicta prismata inter se æqualia (b); ac propterea addito communi solido $AGICDKME$, æqualia fiant parallelepipeda $AHKE$, $AILE$. Solida parallelepipeda igitur super eandem basin, &c. q. e. d.

PROP. XXX. THEOR. XXV.

*Solida parallelepipeda super eandem basin constituta,
& in eadem altitudine, quorum insistentes
lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis:
inter se sunt æqualia.*

Fig. 39. **S**int duo parallelepipeda $ARQB$, $AKNB$ super eandem basin AS , & in eadem altitudine; hoc est inter eadem parallela plana, constituta; rectæ tamen insistentes, ex quatuor angulis basis exeuntes AM , AH , BD , BG , LR , LK , SQ , SN non sint in eisdem rectis MD , RQ ; hoc est non existant parallelepipeda inter lateralia paralle-

(a) Prop. 8. lib. I. (b) Def. 10. hujus.

ET SOLIDORUM I.

lela plana LQ , AD . Dico parallelepipedum $ARQB$, $AKNB$ esse inter se æqualia.

Cum enim plana MQ , HN basi AS opposita in uno sint plano, ob eandem solidorum altitudinem: protrahantur in eo rectæ RQ , MD , KH usque ad O , F , C , atque ducantur AC , BF , LP , SO . Quia rectæ HG , MD ipsi AB parallelæ sunt (*a*), parallelæ quoque erunt HG , MD (*b*); ac proinde $HCFG$ parallelogrammum, & HG æqualis CF (*c*). Est quoque HG ipsi AB æqualis (*c*); igitur rectæ CF , AB pariter parallelæ sunt, & æquales, ac ideo $ABFC$ parallelogrammum est. Eodem modo ostenditur parallelogramma esse $ACPL$, $LPOS$, $OSBF$. Igitur $APOB$ est parallelepipedum (*d*). Quapropter cum parallelepipedum $APOB$ æquale sit tum parallelepipedo $AKNB$, cum parallelepipedo $ARQB$ (*e*), erunt parallelepipeda $AKNB$, $ARQB$ inter se pariter æqualia. Solida igitur parallelepipeda, &c. q. e. d.

SCHOLIUM I.

HÆ duæ postrema propositiones affinitatem non parvam habent cum prop. 35. lib. I. & eodem demonstrantur artificio, quo illa ostenditur; dummodo triangulorum loco prismata substituantur; affirmatur enim ibi de parallelogrammis, quod de parallelepipedis hic ostenditur.

SCHO.

- (a) Def. 36. lib. I.
- (b) Prop. 9. hujus.
- (c) Prop. 34. lib. I.
- (d) Def. 35. hujus.
- (e) Prop. 29. hujus.

SCHOLIUM II.

Habeat parallelepipedum $ARQB$ lineas insistentes AM, LR, SQ, BD basi AS rectas, & producantur BA, LA, HA in b, l, h , ita ut sit Ab ad Ab , ut AH ad AB , & Ab ad Al , ut AB ad AL , erit ordinando Ab ad Al , ut AH ad AL . Constituantur parallelogramma Ag, As, Ae , quæ similia erunt ipsis AG, AS, AK (a); ac tandem perficiatur parallelepipedum $Acpb$, quod simile quoque erit solido $AKNB$. Deinde protrahatur MA in m , & plana Az , Ad ita constituantur, ut perfectio parallelepipedo $Adqb$, hoc cum inclinato $Acpb$ eandem habeat altitudinem. Solidum tamen $Adqb$ rectum erit, hoc est habebit lineas Am, ld, sq, bz , plano As rectas, ob Am plano AS rectam, seu plano As ; nam parallelogramma, As, AS in uno sunt plano (b). Quare cum habeant solida $ARQB, AKNB$, eandem altitudinem, & solida, $Adqb, Acpb$ eandem quoque altitudinem, erunt rectæ Mm, Hh tribus planis parallelis sectæ, quorum unum transit per puncta M, H , alterum per A , tertium vero per m, b ; igitur erit HA ad Ab , ut MA ad Am (c). Est vero HA ad Ab , ut BA ad Ab ex constructione. Igitur MA ad Am ut BA ad Ab . Quapropter latera circa rectos angulos in Ab, MAB proportionalia sunt. Igitur plana MB, mb similia sunt. Eodem modo ostendetur reliqua plana parallelepipedo recti $Adqb$ reliquis planis parallelepipedo $ARQB$ similia esse. Quare hæc duo solida, similia sunt (d). Si duo itaque parallelepipeda inclinata similia sunt, similia quoque sunt & parallelepipeda recta,

(a) Def. 1. lib. 6.

(b) Prop. 2. hujus.

(c) Prop. 17. hujus.

(d) Def. 9. hujus

recta, quæ cum illis basin eandem habent, & inter eadem parallela plana existunt.

PROP. XXXI. THEOR. XXVI.

Solida parallelepipedæ super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, æqualia sunt inter se.

Super æquales bases AB , DC , & in eadem Fig. 40. altitudine Q constituta sint parallelepipedæ ABQ , DCQ . Dico hæc parallelepipedæ esse inter se æqualia.

Protrahe enim KB in G , ita ut BG æqualis sit ipsi CE , & fac parallelogrammum $BGMF$ æquale, & simile parallelogrammo CD (a), atque perfice parallelogrammum AG , ac tandem produci NG ipsi MF occurrentem in I , & PB , ut cum MF producta in H conveniat. Intelligentur super parallelogramma BM , BI , BN constituta parallelepipedæ, communem altitudinem Q habentia, quorum insistentes lineæ ad bases sint rectæ: manifestum est parallelepipedæ CDQ , BMQ æqualia esse, quia plana unius similia, & æqualia sunt planis alterius. Sed parallelepipedæ BMQ , BIQ æqualia pariter existunt, cum habeant eandem basin, cujus infimum latus est GB , super plano IP erectam, & sint inter eadem lateralia parallela plana, quorum unum est BM , aliud vero huic oppositum. Igitur solida BIQ , DCQ æqualia erunt. Verum cum sint solida ABQ , PGQ partes solidi AGQ , erit solidum ABQ ad solidum BNQ , ut AB ad BN (b), seu ut CD ad BN , seu ut BM , vel BI ad BN . Sed eadem ratione solidum BIQ est ad solidum BNQ , ut BI ad BN . Ergo solida ABQ , BIQ , seu solida ABQ , CDQ eandem rationem habent ad solidum BNQ , adeoque æqualia sunt.

Ha-

(a) Prop. 45. lib. 1.

(b) Prop. 25. hujus.

Habeant deinde parallelepipeda CDQ , ABQ insistentes lineas ad bases inclinatas. Construatur super CD , AB parallelepipeda, quorum insistentes lineæ ad bases rectæ sint, in altitudine Q . Hæc æqualia erunt inclinatis (a). Igitur cum sint parallelepipeda, quorum insistentes lineæ ad bases rectæ sunt, æqualia inter se, ut modo demonstratum est, æqualia quoque erunt & illa, quorum insistentes lineæ ad bases inclinantur. Quapropter solida parallelepipeda, & c. q. e. d.

PROP. XXXII. THEOR. XXVII.

Solida parallelepipeda sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases.

Fig. 40.

Sint bases NB , CD , altitudo communis Q . Dico parallelepipedum NBQ esse ad parallelepipedum CDQ , ut basis NB ad basin CD .

Nam super rectam BP constitue parallelogrammum AB ipsi CD æquale, angulum PBK angulo NGB æquale habens. Igitur AG parallelogrammum est (b). Et quoniam solida NBQ , BAQ partes sunt solidi AGQ , erit solidum NBQ ad solidum BAQ , ut NB ad BA (c) seu ut NB ad CD . Sed solida BAQ , CDQ æqualia sunt (d). Igitur solidum NBQ ad solidum CDQ eandem rationem habet, ac basis NB ad basin CD . Solida itaque parallelepipeda, & c. q. e. d.

S C H O L I U M.

HUic Theoremati aliud consimile subnectimus, ut facile sequens propositio ostendatur.

THEO.

- (a) Prop. 29. & 30. hujus.
- (b) Prop. 45. lib. 1.
- (c) Prop. 25. hujus.
- (d) Prop. 31. hujus.

THEOREMA.

Solida parallelepipeda super æqualibus basibus,
inter se sunt, ut altitudines.

Habeant duo parallelepipeda AD , GN , quo- Fig. 41.
rum insistentes lineæ ad bases rectæ sint,
ases AB , GH æquales, altitudines vero DB ,
 NH , inæquales. Dico solidum AD esse ad so-
lidum GN , ut altitudo DB ad altitudinem NH .
Sumatur enim MB æqualis ipsi NH , & per
 M concipiatur transire planum ML , oppositis
planis AB , EP parallelum. Solida AM , GN
ases, & altitudines æquales habent, igitur æqua-
a sunt (a). Sed solidum AM est ad solidum
 D , ut basis FM ad basin FD (b) seu ut BM
 BD (c), vel ut HN ad BD . Igitur solidum
 N est ad solidum AD , ut altitudo HN ad al-
titudinem BD .

Habeant deinde parallelepipeda insistentes li-
neas ad bases inclinatas. Quoniam hæc æqualia
sunt parallelepipedis rectis sub iisdem basibus, &
altitudinibus constitutis (d): Erunt itaque & pa-
rallelepipeda inclinata, quæ bases æquales habent,
ratione earundem altitudinum. Quocirca soli-
da parallelepipeda, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Prop. 31. hujus.
- (b) Prop. 32. hujus.
- (c) Prop. 1. lib. 6.
- (d) Prop. 29. & 30. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR. XXVIII.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Fig. 37. **S**int duo parallelepipeda AM , FH similia, hoc est planis similibus contenta, sintque eorum latera homologa AB , FE . Dico parallelepipeda AM , FH , in ratione triplicata homologorum laterum inter se existere.

Habeant parallelepipeda lineas insistentes ad bases rectas. Super rectam BL constituatur parallelogrammum $OKLB$ plano BE æquale, & ducatur KN ipsi ML parallela, atque tandem perficiatur planum NO , quod parallelum erit plano MB (a). Quoniam solidum AM est ad solidum OM , ut basis AL ad basin LQ (b) seu, ut AL ad EG , seu in duplicata ratione ipsius AB ad FE (c); plana enim AL , EG similia sunt, & solidum OM est ad solidum FH ut altitudo BR ad PE , per theor. præcedens, seu ut AB ad FE (d); erit ex æquo solidum AM ad solidum FH in ratione composita ex duplicata rectæ AB ad FE , & simplici ipsius AB ad FE , seu in triplicata ratione homologorum laterum AB , FE (e).

Habeant deinde parallelepipeda AM , FH rectas insistentes ad bases AL , EG inclinatas. Quoniam hæc parallelepipedis rectis easdem bases, & altitudines habentibus æqualia sunt (f), & etiam similia per schol. 2. prop. 30.; erunt itaque similia parallelepipeda inclinata, ut sunt recta, hoc est in triplicata ratione homologorum laterum.

(a) Prop. 15. hujus.

(b) Prop. 32. hujus.

(c) Prop. 20. lib. 6.

(d) Def. 1. lib. 6.

(e) Def. 7. lib. 6.

(f) Prop. 29. & 30. hujus.

aterum AB , FE . Quapropter similia solida,
&c. q.e.d.

COROLLARIUM.

Hinc si quatuor rectæ continue proportionales fuerint, cum sit prima ad ultimam in triplicata ratione primæ ad secundam (a), erit quoque prima ad ultimam, ut parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam.

PROP. XXXIV. THEOR. XXIX.

Equalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; & quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia.

Sint primo æqualia parallelepipeda AD , GI super bases AB , GQ constituta. Dico basin AB esse ad basin GQ , ut altitudo solidi GI ad altitudinem solidi AD . Fig. 41.

Sint enim insistentes lineæ ad bases AB , GQ rectæ, hoc est sint parallelepipeda AD , GI recta. Si altitudines æquales fuerint, parallelepipeda erunt in ratione basium (b); sunt vero parallelepipeda æqualia ex hypothesi, igitur æquales & bases; ac proinde patet basin AB ad GQ esse, ut altitudo solidi GI ad altitudinem solidi AD .

Si altitudines sint inæquales, abscinde BM ipsi QI parem, & per M duc planum LM plano AB parallelum. Et quoniam solida AM , GI æquales altitudines habent, erit solidum AM ad solidum GI , ut basis AB ad basin GQ , seu solidum AM ad solidum AD , ut AB ad GQ , sed

(a) Def. 7. lib. 6.

(b) Prop. 32. hujus.

sed solidum AM est ad solidum DA , ut altitudo BM , seu IQ ad altitudinem BD . Igitur basis AB est ad basin GQ , ut altitudo IQ ad altitudinem BD .

Dico secundo, quod, si bases, & altitudines reciprocantur, nempe si AB ad GQ sit, ut IQ ad BD , parallelepipeda AD , GI inter se æqualia sunt.

Nam si ponantur altitudines BD , IQ æquales, cum sit BD ad IQ , ut GQ ad AB , erunt quoque bases AB , GQ æquales, ac per consequens parallelepipeda AD , GI (a) æqualia erunt.

Si altitudines vero inæquales fuerint, secetur BM ipsi IQ æqualis, & ducatur planum LM basi AB parallelum. Ex hypothese DB est ad QI , ut GQ ad AB , seu DB ad BM , ut QG ad AB . Sed DB est ad BM , ut solidum AD ad solidum AM ; & GQ est ad AB , ut solidum GI ad solidum AM . Igitur solidum AD est ad solidum AM , ut solidum GI ad idem solidum AM . Solida ergo AD , GI (b) æqualia sunt.

Sint demum insistentes lineæ ad bases inclinatæ. Erigantur super iisdem basibus, in altitudine eadem, parallelepipeda, quorum insistentes lineæ ad bases sint rectæ. Erunt his inclinata (c) parallelepipeda æqualia. Sed parallelepipeda, quorum insistentes lineæ ad bases sunt rectæ, reciprocant bases, & altitudines, si æqualia sunt; & sunt æqualia, si bases, & altitudines reciprocantur, ut jam ostensum est. Igitur etiam parallelepipeda inclinata, si æqualia fuerint, bases, & altitudines reciprocabunt; & si bases, & altitudines æqua-

(a) Prop. 31. hujus.

(b) Prop. 9. lib. 5.

(c) Prop. 29. & 30. hujus.

dines reciprocabunt, æqualia erunt. Quapropter æqualium solidorum, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

QUæ de parallelepipedis demonstrata sunt prop. 29, 30, 31, 32, 33, 34, etiam conveniunt prismatis triangularibus, quæ sunt dimidia parallelepipeda, ut ex prop. 28. satis liquet, dummodo eadem prædictæ servantur hypotheses. Quare prismata triangularia æque alta sunt, ut bases, & quæ eandem, vel æquales habent bases, & eandem altitudinem, æqualia sunt. Insuper si similia fuerint, eorum proportio triplicata erit proportionis homologorum laterum. Demum si æqualia sunt, reciprocant bases, & altitudines, & si reciprocant bases, & altitudines, æqualia sunt.

PROP. XXXV. THEOR. XXX.

Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; in sublimibus autem lineis quælibet sumta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculæ; a punctis vero, quæ in planis a prioribus fiunt, ad angulos primum positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ: hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

Sint duo anguli plani æquales CDE , FLI , Fig. 42. quorum verticibus D , & L insistant extra ipsorum plana sublimes rectæ DA , LG ita, ut angulus ADC angulo GLF , & ADE angulo GLI sit æqualis. Dico, quod si a punctis A , & G , utcumque sumtis in rectis DA , LG demittantur AN , GH rectæ ad plana angulorum C
 D DE

DE, FLI, occurrentes in N, & H, & adiungantur rectæ ND, HL, anguli ADN, GLH æquales existunt.

Fiant DM, LG æquales; & a punctis M, & G demittantur MB, GH rectæ ad plana angulorum CDE, FLI, & ex punctis B, & H ducantur BC, BE, HF, HI ipsi DC, DE, LF, LI perpendiculares, ac tandem connectantur MC, ME, CE, GF, GI, FI.

Quoniam MB, AN rectæ ductæ sunt ad idem planum CDE, erunt inter se parallelæ (a), ac ideo in uno plano, nempe in plano trianguli ADN; igitur MB in rectam DN incidit. Rursus MB ad planum CDE recta est. Ergo anguli MBC, MBD, MBE (b) recti sunt. Simili ratione recti sunt & anguli GHF, GHL, GHI. Quapropter quadratum rectæ MD æquale erit quadratis rectarum MB, BD (c). Sed ob angulum DEB rectum ex constructione, quadratum rectæ DB quadratis rectarum DE, EB æquatur. Igitur quadratum rectæ MD æquale est quadratis, quæ ex DE, EB, & MB fiunt; at quadrata rectarum MB, BE æqualia sunt quadrato rectæ ME, nam angulus MBE rectus est. Quadratum itaque rectæ DM æquatur quadratis rectarum DE, EM; ac per consequens angulus DEM rectus est (d). Eodem modo ostendetur angulos DCM, LFG, LIG rectos esse. Deinde cum sint duo anguli DCM, CDM trianguli DCM duobus LFG, FLG trianguli FLG æquales, & latera DM, LG æqualia ex constructione, erunt DC, LF pariter æqualia. Simili modo demonstrabitur rectas DE, LI æquales esse. Quare cum latera CD, DE trianguli CDE

æqua-

(a) Prop. 6. hujus.

(b) Def. 3. hujus.

(c) Prop. 47. lib. 1.

(d) Prop. 48. lib. 1.

ET SOLIDORUM I. 51

æqualia sint lateribus FL , LI trianguli FLI , & anguli CDE , FLI æquales ex hypotesi, erunt & bases CE , FI inter se, & anguli DCE , DEC angulis LFI , LIF æquales (a): sunt autem & toti anguli DCB , DEB totis angulis LFH , LIH æquales, cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli ECB , CEB reliquis IFH , FIH æquales erunt; ac propterea cum & latera CE , FI sint ostensa æqualia, erunt latera CB , BE lateribus FH , HI respectively æqualia (b). Duo igitur latera BE , ED trianguli BED æqualia sunt duobus HI , IL trianguli HIL , & anguli BED , HIL etiam æquales ex constructione, igitur æquales & BD , LH (a). Præterea quadratum rectæ DM æquale est quadratis rectarum DB , BM , & quadratum rectæ LG æquale iis, quæ fiunt ex LH , HG . Igitur cum sint DM , LG æquales ex constructione, erunt quadrata rectarum DB , BM quadratis ex LH , & HG factis æqualia; unde demtis quadratis rectarum æqualium DB , LH , habebitur quadratum rectæ MB æquale quadrato rectæ GH . Rectæ igitur MB , GH æquales existunt. Demum cum duo latera MD , DB trianguli MDB æqualia ostensa sint duobus GL , LH trianguli GLH , & bases MB , GH quoque æquales, erunt anguli MDB , GLH (c) pariter æquales. Si fuerint itaque duo plani anguli, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

HInc, si fuerint duo anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, alterum alteri, erunt a punctis extremis lineæ-

D 2

nea-

(a) Prop. 4. lib. 1.

(b) Prop. 26. lib. 1.

(c) Prop. 8. lib. 1.

*nearum sublimium ad plana angulorum primo posit-
torum demissæ perpendiculares inter se æquales, uti
de rectis MB, GH ostensum est.*

PROP. XXXVI. THEOR. XXXI.

*Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint : quod ex
his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale
est descripto a media linea solido parallele-
pipedo, quod æquilaterum quidem sit,
equiangulum vero prædicto.*

Fig. 43. **S**int tres rectæ lineæ A, B, C continue propor-
tionales. Constituatur angulus solidus D tribus
quibuscumque planis angulis EDG, EDF, GD
F, ita ut recta DE ipsi A, & DG ipsi C, at-
que DF ipsi B æqualis sit. Completis autem pa-
rallelogrammis EG, EF, GF, parallelepipedum
EH perficiatur, quod sub tribus rectis A, B, C
dicitur contineri. Deinde ad rectam IK, ejus-
que punctum I fiat solidus angulus I (a) solido
angulo D æqualis, ex tribus angulis planis KI
N, KIM, NIM ipsis EDG, EDF, GDF
æqualibus; ita ut rectæ KI, IN, IM æquales
sint mediæ B. Completis vero parallelogrammis
KN, KM, NM, parallelepipedum KP perfici-
atur, quod sub linea B contineri dicitur. Dico
solida EH, KP æqualia esse.

Nam ex constructione anguli EDG, KIN
æquales sunt. & DE est ad IK, ut IN ad DG.
Igitur parallelogramma EG, KN (b) æqualia
sunt. Præterea anguli KIN, KIM, MIN
ipsis EDG, EDF, FDG æquales positi sunt, &
sublimes lineæ IM, DF pariter æquales. Quare
lineæ ex punctis M, & F ad bases KN, EG
perpendiculariter demissæ, æquales erunt ex corol.
præc.

(a) Prop. 26. hujus.

(b) Prop. 14. lib. 6.

præc. Parallelepipeda igitur EH, KP bases, & altitudines æquales habent. Ergo inter se æqualia sunt (a). Si tres rectæ lineæ igitur proportionales, &c. q. e. d. • •

PROP. XXXVII. THEOR. XXXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt,

Sint quatuor rectæ A, B, C, D proportionales, constituanturque super A, B parallelepipeda similia, & similiter descripta: item super C, & D duo alia etiam similia, & similiter posita describantur, sive hæc sint illis similia, sive non. Dico esse quoque solida A, B, C, D proportionalia. Fig. 44.

Inveniantur E, & F (b) duabus rectis A, & B, item H, & G ipsis C, & D continue proportionales. Cum enim sit A ad B, ut C ad D, & A, B, E, F, item C, D, H, G continue proportionales, erunt A, B, E, F in ordinata ratione cum C, D, H, G, ac per consequens A ad F, ut C ad G (c); sed A est ad F (d) in triplicata ratione ipsius A ad B, seu solidi A ad solidum B (e), & C est ad G in triplicata pariter ratione C ad D, seu solidi C ad solidum D, Igitur solida A, B, C, D proportionalia existunt.

Sint e contra solida A, B, C, D proportionales

D 3

na-

- (a) Prop. 31. hujus.
- (b) Prop. 11. lib. 6.
- (c) Prop. 22. lib. 5.
- (d) Def. 7. lib. 6.
- (e) Prop. 33. hujus,

54 EUCLIDIS LIB. XI.
 nalia . Dico rectas A, B, C, D esse quoque
 proportionales .

Inveniatur enim tribus rectis A, B, C quarta
 proportionalis M (a), super quam describatur
 parallelepipedum (b) ipsi D , vel C simile, simi-
 literque positum . Igitur solida A, B, C, M pro-
 portionalia sunt per primam partem . Sunt vero
 solida A, B, C, D etiam proportionalia ex hy-
 pothesi . Solida itaque $M, \& D$ ad solidum C
 eandem rationem habent, adeoque æqualia sunt
 (c) . Sunt quoque similia ex constructione . Igi-
 tur plana æqualia sunt, & similia (d); ac proin-
 de latera homologa $M, \& D$ æqualia . Quapro-
 pter cum sint rectæ A, B, C, M proportiona-
 les, proportionales quoque erunt rectæ $A, B,$
 C, D . Si quatuor rectæ lineæ itaque proportio-
 nales, &c. q. e. d.

PROP. XXXVIII. THEOR. XXXIII.

*Si planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo
 puncto eorum, quæ in uno sunt planorum, ad
 alterum planum perpendicularis ducta fue-
 rit: in communem sectionem cadet pla-
 norum ducta perpendicularis.*

Fig. 45. **S** It planum AB ad planum AC rectum, co-
 rumque communis sectio AD . Dico quod si
 a puncto E plani AB demittatur ad planum AC
 perpendicularis, hæc in communem sectionem
 AD cadet.

Cadat enim, si fieri potest, ex puncto E linea
 EF ad planum AC recta extra sectionem AD .
 Ducatur ex E recta EG (e) sectioni AD per-
 pen-

- (a) Prop. 12. lib. 6.
- (b) Prop. 27. hujus.
- (c) Prop. 9. lib. 5.
- (d) Def. 10. hujus
- (e) Prop. 12. lib. 1.

pendicularis. Igitur EG recta est ad planum AC (a); est vero EF ad idem planum AC recta. Ex eodem igitur puncto E , extra planum AC existente, duæ perpendiculares ad idem planum AC demitti possunt, quod sane repugnat (b). Quapropter si planum ad planum, &c. q. e. d.

PROP. XXXIX. THEOR. XXXIV.

Si solidi parallelepipedorum, quæ ex adverso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedorum diameter, bifariam se mutuo secabunt.

Sint parallelepipedum DH plana opposita DC , Fig. 46.
 HN , quorum omnia latera bifariam secta sint in Q, F, P, E, R, K, I, L , per quæ extensa sint duo plana IQ, LF , quorum sectio communis sit MG . Ducatur item diameter HD . Dico HD, MG se mutuo bifariam secare.

Ducantur rectæ $GD, GC, \& MH, MN$. Et quia AE, DF æquales sunt, & parallelæ, æquales, & parallelæ (c) quoque erunt AD, EF , Eadem ratione parallelæ erunt, & æquales PQ, DB . Igitur QF, QE parallelogramma sunt, & GF ipsi QD , atque GE ipsi AQ æqualis. Igitur æquales & GE, GF . Cum sint itaque duo latera GF, FD trianguli GFD æqualia duobus GE, EC trianguli GEC , & anguli GFD, GEC etiam æquales (d), æquales erunt & DG, GC (e), atque anguli DGF, CGE . Quare si

D 4 ad-

- (a) Def. 4. hujus.
- (b) Schol. prop. 13. hujus.
- (c) Prop. 33. lib. 1.
- (d) Prop. 29. lib. 1.
- (e) Prop. 4. lib. 1.

addatur communis angulus DGE, erunt anguli CGE, EGD ipsis FGD, DGE, hoc est duobus rectis æquales; ac proinde DG, GC (a) unam lineam rectam constituent. Eodem modo ostenditur rectas NM, MH æquales esse, & unam rectam constituere. Præterea rectæ HC, ND ipsi SB (b) æquales, & parallelæ, inter se æquales erunt, & parallelæ (c); ac ideo æquales, & parallelæ HN, CD (d). Quare rectæ HD, MG, parallelas HN, CD secantes, in uno cum istis plano existent (e); ac proinde se mutuo secabunt in O. Cum autem duo anguli OGD, GDO trianguli GDO duobus (f) OMH, MHO trianguli OMH æquales sint, & rectæ GD, HM æquales, dimidiæ enim sunt rectarum æqualium HN, CD, erunt quoque rectæ (g) OD, OH, & GO, OM inter se pariter æquales, ac propterea HD, MG se mutuo bifariam in O secant. Si solidi parallelepipedi igitur eorum, &c. q.e.d.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur diametros omnes in parallelepipedo se mutuo bifariam secare in uno puncto, nimirum in puncto O, in quo bifariam dividunt rectam MG.

PROP.

- (a) Prop. 14. lib. I.
- (b) Prop. 34. lib. I.
- (c) Prop. 9. hujus.
- (d) Prop. 33. lib. I.
- (e) Prop. 7. hujus.
- (f) Prop. 29. lib. I.
- (g) Def. 26. lib. I.

ET SOLIDORUM I. 57

PROP. XL. THEOR. XXXV.

*Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum
hoc quidem habeat basin parallelogrammum,
illud vero triangulum, duplum autem fue-
rit parallelogrammum trianguli; æqua-
lia erunt ipsa prismata.*

Sint duo prismata ABHFDE, IMKHPN Fig. 42.
æqualis altitudinis, & basis primi sit paralle-
logrammum AD, alterius vero triangulum IM-
K, quod sit dimidium parallelogrammi AD. Di-
co hæc duo prismata inter se æqualia esse.

Nam si perficiantur & basis IR, & parallele-
pipeda ADGB, IRON, erunt bases IR, A-
D æquales, & parallelepipedum ADGB, IRON
etiam inter se æqualia (a), ob basium AD, IR
& altitudinum æqualitatem; ac proinde parallele-
pipedorum dimidia (b), nempe prismata ABHF-
DE, IMKHPN æqualia inter se pariter exi-
stent. Si fuerint igitur duo prismata, &c. q. e. d.

SCHOLIUM.

Quoniam parallelepipedum æqualium altitudinum
sunt inter se in ratione basium, & quæ bases
habent æquales, in ratione altitudinum existunt; sequitur,
parallelepipedum inæqualium altitudinum, & basium
inæqualium esse inter se in ratione composita basium, &
altitudinum. Quapropter parallelepipedum dimensio ha-
betur, si altitudo nimirum ducatur in basin. Sit ba-
sis IR pedum quadratorum 60, altitudo vero 12
pedum; multiplica 60 per 12, proveniunt 720
pedes cubici pro soliditate parallelepipedum IRON.
Et

(a) Prop. 31. hujus.
(b) Prop. 28. hujus.

Et quia prisma IMKHPN est dimidium parallelepipedum, ejus dimensio habebitur; si nimirum altitudo ducatur in dimidiam parallelepipedum IRON basin, nempe triangulum IMK.

Finis Elementi Undecimi.





E U C L I D I S

Elementum Duodecimum, & Solidorum secundum.

PROP. I. THEOR. I.

*Quæ in circulis polygona similia; inter se sunt,
ut a diametris quadrata.*



SINT duò polygona $ABCDEK$, *Fig. 47-*
 $MFHGLP$ similia, inscripta in cir-
culis, quorum diametri sunt AD ,
 MG . Dico hæc polygona esse inter
se, ut quadrata diametrorum AD ,
 MG .

Ducantur AC , BD , MH , FG . Et quoniam
polygona ponuntur similia, erunt anguli ABC ,
 MFH æquales (*a*), & latera AB , BC ipsis MF ,
 FH proportionalia. Quare anguli BCA , FHM
(*b*) æquantur. Igitur æquantur & anguli BDA ,
 FGM (*c*). Sunt autem anguli DBA , GFM
æqua-

(a) Def. 1. lib. 6.

(b) Prop. 6. lib. 6.

(c) Prop. 21. lib. 3.

æquales, quia recti (a). Ergo triangula ABD, MFG æquiangula sunt, adeoque similia (b); ac per consequens BA est ad FM, ut AD ad MG. Jam quia per hypothesim polygona ABCDEK, MFHGLP similia sunt, eorum proportio duplicata erit proportionis laterum homologorum (c) BA, FM, hoc est duplicata proportionis diametrorum AD, MG. Quæ in circulis igitur polygona, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Cum jam ostensum sit AB esse ad MF, ut AD ad MG; erit quoque BC ad FH, ut AD ad MG, & ita de cæteris lateribus. Quare omnia latera polygoni ABCDEK ad omnia latera polygoni MFHGLP sunt, ut AD ad MG (d). Ambitus igitur similium polygonorum circulis inscriptorum inter se sunt, ut diametri.

PROP. II. THEOR. II.

Circuli inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

Sint duo circuli AOQ, CXK, quorum diametri AB, DC. Dico esse circulum AOQ ad circulum CXK, ut quadratum diametri AB ad quadratum diametri CD.

Fig. 48.

Si negas. Sit quadratum diametri AB ad quadratum diametri CD, ut circulus AOQ ad quantitatem T, quæ sit primo minor, quam circulus CXK, quantitate S, si fieri potest. Inscribatur in circulo CFK (e) quadratum CFDK, quod quia

(a) Prop. 31. lib. 3.

(b) Prop. 4. lib. 6.

(c) Prop. 20. lib. 6.

(d) Prop. 12. lib. 5.

(e) Prop. 6. lib. 4.

quia dimidium est quadrati circumscripti, majus erit, quam dimidium ipsius circuli. Secentur deinde bifariam arcus CF , FD , DK , KC in E , X , L , I , & connectantur rectæ CE , EF , &c. atque per E ducatur tangens HG , quæ ipsi CF parallela erit, ac producantur KC , DF in H , & G . Erit $HGFC$ parallelogrammum, cujus dimidium cum sit triangulum CEF , erit hoc majus, quam dimidium segmenti CEF . Similiter reliqua triangula FXD , DLK , &c. reliquorum segmentorum dimidia excedunt. Si rursus bisecentur arcus CE , EF , FX , &c. rectæque adjungantur, eodem modo triangula, segmentorum semisses excedent. Quapropter si e circulo CFK quadratum $CFDK$, & a segmentis triangula detrahantur, & hoc fiat continuo, remanebit tandem magnitudo aliqua minor, quam S . Sint jam segmenta CE , EF , FX , &c. minora magnitudinis S ; erit consequenter polygonum $CEFXDLKJ$ majus quantitate T . Inscribatur autem in circulo ANQ polygonum $AMNOBPQR$ simile polygono $CEFXDLKJ$. Igitur polygona $AMNOBPQR$, $CEFXDLKJ$ in duplicata ratione diametrorum AB , CD (a) existunt, seu ut circulus AOQ ad magnitudinem T ex hypothesis. Sed polygonum $AMNOBPQR$ minus est circulo AOQ . Igitur polygonum $CEFXDLKJ$ (b) minus quoque erit magnitudine T . Ostensum est majus. Quod est absurdum. Magnitudo igitur T minor esse nequit circulo CXK .

Eodem modo demonstrabimus circulum CFK ad magnitudinem, quæ minor sit circulo AOQ , habere non posse eandem rationem, quam habet quadratum diametri CD ad quadratum diametri AB .

Sit deinde magnitudo T major circulo CXK .

Cum

(a) Prop. 1. hujus.

[b] Prop. 14. lib. 9.

Cum ergo ponatur circulus AOQ ad magnitudinem T esse, ut quadratum diametri AB ad quadratum diametri CD ; erit & invertendo T ad circulum AOQ , ut quadratum diametri CD ad quadratum diametri AB . Ponatur ut T ad circulum AOQ , ita circulus CXK ad magnitudinem aliquam, nempe S . Et quia T major ponitur circulo CXK , erit quoque circulus AOQ major magnitudine S . Quare erit, ut quadratum diametri CD ad quadratum diametri AB , ita circulus CXK ad S , quæ minor est circulo AOQ . Quod est absurdum, ut jam demonstratum est. Magnitudo igitur T neque minor esse potest circulo CXK , neque major; adeoque æqualis. Quapropter circulus AOQ erit ad circulum CXK , ut quadratum diametri AB ad quadratum diametri DC . Circuli itaque inter se &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc circuli eandem rationem inter se habent, quam polygona similia in iis descripta.

PROP. III. THEOR. III.

Omnis Pyramis triangularem habens basin, dividitur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; & in duo prismata æqualia; quæ duo prismata majora sunt dimidio totius pyramidis.

Fig. 49. **S**it pyramis, cujus basis triangulum ABC , vertex D . Secentur omnia ejus latera bifariam in F, E, G, H, I, K ; & jungantur rectæ FE, FI, FK , &c. erit pyramis $ABCD$ di-

ET SOLIDORUM II. 63

divisa in duas pyramides $AEGH$, $HIKD$, quarum bases triangula sunt AEG , HIK , & vertices H , D ; & in duo alia solida $EBFGHI$, $FCGHIK$, quæ, ut mox ostendemus, prismata sunt. Dico duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & majora dimidio totius pyramidis $ABCD$.

Cum enim latera AD , DB bifariam secta sint, erunt rectæ ID , DH ipsis IB , HA proportionales, ac ideo HI , AB (a) parallelæ, & triangula HDI , ADB similia. Simili ratione parallelæ erunt EH , BD ; EG , BC ; EI , AD ; GK , AD ; GF , AB ; IK , BC ; HG , DC ; HK , AC ; IF , DC ; FK , BD ; & similia triangula AEH , ABD ; AHG , ADC ; HDK , ADC ; IDK , BDC . Jam cum sint anguli EHA , $HA E$ trianguli AHE æquales angulis IDH , DHI trianguli IDH , & latera AH , HD æqualia, erunt triangula (b) AHE , HDI æqualia, & æquiangula, ac proinde inter se similia. Similiter ostendetur triangula AHG , HDK ; FCG , AGE ; IBF , IDK inter se æqualia esse, & similia. Rursus ob rectas EH , BD , & HI , AB parallelas, $EBIH$ parallelogrammum est. Similiter parallelogramma sunt $EIDH$, $IBFK$, $IFKD$, $IFCK$, $KCGH$, $EBFG$, $EFCG$. Igitur cum sint EH , HG ipsis ID , DK parallelæ, & æquales (c) erunt anguli EHG , IDK æquales (d); ac proinde triangula EHG , IDK (e) æqualia, & æquiangula. Eadem ratione æqualia, & æquiangula erunt triangula EAG , HIK , seu HK , GFC . Quapropter cum plana omnia triangularia pyramidis $AEGH$ æqualia, & similia

osten-

- (a) Prop. 2. lib. 6.
- [b] Prop. 26. lib. 1.
- (c) Prop. 34. lib. 1.
- (d) Prop. 10. lib. 11.
- (e) Prop. 4. lib. 1.

ostensa sint planis omnibus pyramidis $HIKD$, erunt hæ inter se æquales, & similes (*a*). Sunt quoque hujusmodi plana similia planis pyramidis $ABCD$. Igitur pyramides $AE GH$, $HIKD$ (*b*) similes quoque sunt pyramidi $ABCD$.

Deinde quia rectæ HG , IF ipsi DK parallelæ sunt, & æquales, erunt HG , IF inter se quoque æquales, & parallelæ (*c*); adeoque $HGFI$ parallelogrammum. Eadem ratione parallelæ erunt, & æquales EI , GK , & $EIKG$ parallelogrammum. Rursus ob parallelogramma $HEBI$, $GE BF$, $GFIH$ erunt latera EH , HG , EG trianguli EHG lateribus IB , IF , BF trianguli BIF respective æqualia, & parallelæ. Igitur triangula EHG IFB parallelæ sunt, & æquilatera, ac proinde similia. Solidum itaque $BIFGHE$ contentum duobus triangulis BFI , EHG ex adverso æqualibus, & similibus, & parallelis, & tribus parallelogrammibus $EBFG$, $HEBI$, $GHIF$ (*d*) prisma est. Similiter solidum $FCGHIK$ contentum duobus triangulis FCG , KHI ex adverso æqualibus similibus, & parallelis, & tribus parallelogrammibus $HGCK$, $IFCK$, $IFGH$ est quoque prisma. Quoniam vero prismata $EBFGHI$, $FCGHIK$ sunt ejusdem altitudinis, nempe inter parallelæ plana $BCGE$, HIK , & parallelogrammum $EBFG$, basis illius duplum est trianguli FCG , basis hujus, ipsa inter se æqualia erunt (*e*).

Demum quia prisma $EBFGHI$ majus est pyramide $EBFI$, quæ pyramidi $HIKD$ æqualis, & similis est, ut ex æqualitate, & similitudine triangulorum perspicuum est: majora erunt prismata $EBFGHI$, $FCGHIK$ pyramidibus $AE GH$, $HIKD$; ac proinde illa quidem dimidium pyra-

[a] Def. 10. lib. 11.

[b] Def. 9. lib. 11.

[c] Prop. 9. lib. 11.

[d] Def. 13. lib. 11.

[e] Prop. 40. lib. 11.

pyramidis $ABCD$ excedent. Omnis igitur pyramis, &c. q. e. d.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si fuerint duæ pyramides ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum utraque divisa in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia; ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiori divisione natæ sunt, idque semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basin, ita & omnia, quæ in una pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides $ABCD$, $LMNO$ ejusdem altitudinis, quarum bases triangula ABC , LMN , & vertices, D , & O . Dividatur, ut factum est in prop. præc., utraque in duo æqualia prismata, & in duas pyramides inter se æquales, & similes, & similes toti; atque hæ eodem modo dividantur, & sic deinceps. Dico, omnia prismata facta in pyramide $ABCD$ esse ad omnia prismata generata in pyramide $LMNO$, illis multitudine æqualia, ut basis ABC ad basin LMN . Fig. 49.

Cum enim sit BC (a) ad CF , ut MN , ad NV , erunt triangula ABC , GFC similia, similiterque posita (b), proportionalia ipsis LMN , RVN etiam inter se similibus, & similiter positis. Igitur triangula GFC , RVN sunt, ut triangula ABC , LMN . Eodem modo ostendetur triangula AEG , LQR esse inter se, ut triangula ABC , LMN . Sed prismata $CGHIFK$, $NRPTVS$, quia eandem altitudinem habent, ut mox ostendemus,

E sunt

[a] Prop. 15. lib. 5.

(b) Prop. 22. lib. 6.

sunt inter se in ratione basium (a) GFC, RVN ; igitur prismata $CGHIK, NRPTS$ in ratione basium ABC, LMN quoque existent. Præterea ut est prisma $BFGHEI$ ad prisma $FCGHIK$, ita est prisma $MVRPQT$ ad prisma $VNRPTS$; nam æquales ad æquales eandem rationem habent. Igitur componendo duo prismata $FBIEHG, FCGHIK$ erunt ad duo $QMVRPT, VNRPTS$, ut est prisma $FCGHIK$ ad prisma $VNRPTS$, seu ut basis ABC ad basin LMN . Eadem ratione ostendetur, ita esse duo prismata in pyramide $AEFH$ facta ad duo facta in pyramide $LQRP$, ut est ABC ad LMN . Idem dic de prismatibus factis in pyramidibus $HIKD, PTSO$. Quare omnia prismata (b) pyramidis $ABCD$ ad omnia ipsius $LMNO$, illis multitudine æqualia, ita se habent, ut basis ABC ad basin LMN . Si fuerint itaque duæ pyramides, &c. q. e. d.

L E M M A.

QUod autem sit GFC ad RVN , ut prisma $FCGHIK$ ad prisma $VNRPTS$, ita ostenditur. Intelligentur ex D , & O ad bases ABC, LMN , demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum $ABCD, LMNO$. Et quoniam plana parallela HIK, ABC secant & rectam DC , & perpendicularem ex D demissam, erunt earum segmenta proportionalia (c). Secatur autem DC bifariam in K . Igitur bifariam quoque secabitur perpendicularis ex D demissa in puncto, cui planum HIK occurrit. Eadem ratione bifariam secabitur perpendicularis demissa ex O a plano PTS . Quare cum dictæ perpendiculares æquales sint, ea-

(a) Prop. 32. lib. 11.

(b) Prop. 12. lib. 5.

(c) Prop. 17. lib. 11.

earum dimidiæ, nempe prismatum $FCGHIK$, $VNRPTS$ altitudines, æquales erunt, ac proinde prismata (a) $FCGHIK$, $VNRPTS$ in ratione basium GFC , RVN existent.

PROP. V. THEOR. V.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases, inter se sunt, ut bases.

Sint pyramides æqualium altitudinum $ABCD$, *Fig. 49.* $LMNO$, quarum bases triangu-
la ABC , LMN . Dico pyramidem $ABCD$ esse ad pyra-
midem $LMNO$, ut basis ABC ad basin LMN .

Si negas. Sit basis ABC ad LMN , ut pyra-
mis $ABCD$ ad solidum X , quod primo minus sit,
si fieri potest, quam pyramis $LMNO$, quantitate
aliqua, nempe Z . Si dividatur pyramis $LMNO$
in duo æqualia prismata, & in duas pyramides
æquales, juxta prop. 3., & hæ pyramides similiter, &
ita deinceps, pervenietur tandem ad pyramides
ita parvas, ut simul sumtæ minores fuerint solido
 Z . Sint jam inventæ pyramides magnitudine Z
minores. Cum autem pyramis $LMNO$ æqualis
ponatur solidis X , Z ; erunt omnia prismata in
pyramide $LMNO$ facta, solido X majora. Secetur
pyramis $ABCD$ eodem modo, quo secta est py-
ramis $LMNO$. Manifestum est prismata in utra-
que pyramide $ABCD$, $LMNO$ facta, numero æqua-
lia esse. Igitur prismata omnia in pyramide $ABCD$
facta, sunt ad prismata omnia in pyramide $LMNO$,
ut basis ABC ad basin LMN (b), hoc est, ut
pyramis $ABCD$ ad solidum X . Sunt vero pris-
mata in pyramide $ABCD$ minora ipsa pyrami-
de $ABCD$. Igitur prismata in pyramide $LMNO$
 NO minora erunt pariter solido X . Ostensa au-

E 2 tem

(a) Schol. prop. 34. lib. 11.

(b) Prop. 4. hujus.

tem sunt quoque majora. Quod est absurdum. Solidum itaque X minus esse nequit pyramide $LMNO$.

Sit deinde solidum X pyramide $LMNO$ majus. Cum positum sit pyramis $ABCD$ ad solidum X , ut ABC ad LMN ; erit invertendo solidum X ad pyramidem $ABCD$, ut LMN ad ABC . Ponatur solidum X ad pyramidem $ABCD$, ut pyramis $LMNO$ ad solidum Z ; & quia solidum X majus ponitur pyramide $LMNO$, erit pyramis $ABCD$ major solido Z (a). Quare erit basis LMN ad basin ABC , ut pyramis $LMNO$ ad solidum Z , quod minus est pyramide $ABCD$. Quod repugnat, ut jam demonstratum est. Solidum igitur X nec majus, nec minus esse potest pyramide $LMNO$; adeoque æquale. Quapropter cum positum sit ABC ad LMN , ut pyramis $ABCD$, ad solidum X ; erit & ABC ad LMN , ut pyramis $ABCD$ ad pyramidem $LMNO$. Sub eadem altitudine igitur existentes, &c. q. e. d.

PROP. VI. THEOR. VI.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

Fig. 50. **S**Int pyramides ejusdem altitudinis, quarum bases polygonæ CDE , $FIGH$, vertices vero A , & B . Dico esse pyramidem ad pyramidem, ut basis ab basin.

Resolutis enim basibus in triangula C , D , E , & F , I , G , H ; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares divisa. Quoniam pyramis CA est ad pyramidem DA , ut C ad D (b);
erunt

(a) Prop. 14. lib. 5.

(b) Prop. 5. hujus.

ET SOLIDORUM II. 69

erunt componendo pyramides CA, DA simul, seu pyramis CDA , ad pyramidem DA , ut C, D simul ad D . Rursus ut est pyramis DA ad EA , ita D ad E ; ac proinde pyramis CDA est ad EA , ut C, D simul ad E . Igitur componendo erunt pyramides CDA, EA simul, hoc est tota $CDEA$ ad pyramidem EA , ut C, D, E simul ad E , & permutando pyramis $CDEA$ est ad C, D, E , ut pyramis EA ad E . Eodem modo ostendetur pyramidem $FIGHB$ esse ad F, I, G, H , ut pyramis HB ad H . Est vero pyramis EA ad pyramidem HB , ut E ad H (a), seu permutando pyramis EA ad E , ut pyramis HB ad H . Igitur erit pyramis $CDEA$ ad C, D, E , simul, ut pyramis $FIGHB$ ad F, I, G, H simul, seu pyramis $CDEA$ ad pyramidem $FIGHB$, ut bases C, D, E simul ad bases F, I, G, H simul. Quapropter sub eadem altitudine existentes, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur, pyramides quascunque æqualium basium, & altitudinum, æquales esse.

PROP. VII. THEOR. VII.

Omne prisma triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

Sit prisma $ABCDEF$, cujus duo triangula opposita æqualia, & similia ABC, FED . Fig. 31.
Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales.

Nam ductis in tribus parallelogrammis diagonalibus BD, BF, AD ; erit pyramis $ACDB$

 $\begin{matrix} & F & \\ & \nearrow & \searrow \\ B & & D \end{matrix}$

 $\begin{matrix} & 3 & \\ & \nearrow & \searrow \\ A & & D \end{matrix}$

 $\begin{matrix} & & \\ & \nearrow & \searrow \\ & & D \end{matrix}$
ad

(a) Prop. 5. hujus.

ad pyramidem $AFDB$, ut basis ADC ad basin AFD (a); verticem enim communem habent in B . Sunt vero bases ADC , AFD æquales (b). Igitur æquales & pyramides $ACDB$, $AFDB$. Similiter pyramis $BAFD$ est ad pyramidem $BFED$, ut basis ABF ad basin BFE , nam verticem habent in D communem. Igitur cum sint bases ABF , BFE æquales, æquales quoque erunt pyramides $FABD$, $EFBD$. Cum sit itaque pyramis $FABD$ eadem, ac pyramis $AFDB$, erunt tres pyramides $ADCB$, $FADB$, $BFED$, in quas divisum est prisma, inter se æquales. Omne prisma igitur triangularem, &c. q.e.d.

S C H O L I U M . I.

Fig. 52. **H**abeant prisma $BEIM$, & pyramis BEA eandem basin polygonam BE , & altitudinem eandem. Dico, hanc pyramidem esse quoque prismatis tertiam partem. Duc enim DB , DF , DG , AI , AK , AL , & resolve tum prismæ polygonum $BEIM$ in trigona prismata, cum pyramidem polygonam BEA in trigonas pyramides. Et quia pyramides trigonæ $BCDA$, $B DFA$, $F DGA$, $GDEA$ tertiæ partes sunt trigonorum prismatum $BCDAIH$, $BDFKAI$, $G F DAKL$, $EGDALM$ respective, ut jam demonstratum est, erunt quoque omnes simul, hoc est tota pyramis polygonæ BEA totius prismatis polygoni $BEIM$ pars tertia. Hinc deducitur

C O R O L L A R I U M .

Qualibet pyramis pars tertia est prismatis, quod eandem cum illa habet, & basin, & altitudinem.

SCHO-

(a) Prop. 5. hujus.

(b) Prop. 34. lib. I.

SCHOLIUM II.

Quoniam prismatis soliditas producitur ex altitudine in basin ducta, soliditas pyramidis habebitur, si tertia altitudinis pars in basin ducatur.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

Sint pyramides triangulares $ACDB$, $GIHF$ Fig. 53. similes, hoc est similibus triangulis comprehensæ; sintque earum latera homologa AD , GH . Dico pyramides $ACDB$, $GIHF$ esse inter se in triplicata ratione homologorum laterum AD , GH .

Compleantur parallelogramma AM , AN , AR , GO , GP , GQ , perficianturque parallelepipeda AK , GL . Et quoniam pyramides similes positæ sunt, (a) erit ACD ipsi GHI ; BCA ipsi FGI , & BAD ipsi FGH simile; ac proinde similia, & parallelogramma AM , GO ; AR , GQ ; AN , GP . Igitur parallelepipeda AK , GL similia sunt. Ducta deinde RN , habebitur solidum AK duplum prismatis $RND CAB$ (b); sed prisma $RND CAB$ triplum est pyramidis $ACDB$ (c). Solidum itaque AK pyramidis $ACDB$ sextuplum est. Eodem modo ostendetur solidum GL sextuplum esse pyramidis $IGHF$. Igitur pyramides $ACDB$, $IGHF$ sunt inter se, ut similia parallelepipeda AK , GL , sed hæc in ratione triplicata homologorum laterum AD , GH

E 4

GH

(a) Def. 9. lib. 11.

(b) Prop. 28. lib. 11.

(c) Prop. 7. hujus.

GH (a) existunt. Igitur & illæ. Similes itaque pyramides, &c. q. e. d.

S C H O L I U M I.

Fig. 54. **S**I pyramides similes fuerint polygonæ, resolvan-
tur in triangulares OM, PM, QM, RN,
SN, TN. Et quia similes sunt bases (b)
ABCD, FGHK, erunt triangula ABD,
FGK, & DBC, KGH, & DCE, KHI
inter se quoque similia (c); adeoque BD ad GK, ut
DA ad KF. Sed ob similitudinem triangulorum
AMD, FNK ex hypothesis est DA ad KF, ut
DM ad KN. Igitur MD est ad NK, ut DB
ad KG. Eodem modo ostendetur esse DB ad KG,
ut BM ad GN. Quare triangula MDB,
NKG (d) similia sunt; igitur pyramides OM,
RN triangulis similibus continentur; ac proinde
similes sunt. Eodem ratiocinio demonstrabitur pyra-
mides PM, SN, nec non QM, TN inter se si-
miles esse. Quare ratio pyramidum OM, RN est
triplicata rationis AB ad FG, ut jam demonstra-
tum est, & ratio pyramidum PM, SN est tripli-
cata rationis BC ad GH, seu AB ad FG (e);
& ratio pyramidum QM, TN est triplicata ra-
tionis CE ad HI, seu BC ad GH, seu AB ad
FG. Cum ergo ratio singularum ad singulas sit
triplicata rationis AB ad FG, erit quoque ratio
omnium (f) ad omnes, hoc est ratio totius pyrami-
dis AEM ad totam FIN, triplicata rationis AB
ad FG. Hinc

CO-

(a) Prop. 33. lib. 11.

(b) Def. 9. lib. 11.

(c) Prop. 20. lib. 6.

(d) Prop. 5. lib. 6.

(e) Def. 1. lib. 6.

(f) Prop. 12. lib. 5.

COROLLARIUM.

Piramides similes tam trigonæ, quam polygonæ, sunt inter se in triplicata ratione homologorum laterum.

SCHOLIUM II.

Cum sit pyramis $ACDB$ tertia pars prismatis, & hoc dimidium parallelepipedum AK ; si a Fig. 51. prismate dematur pyramis, & prisma a parallelepipedo, pyramis, & hujusmodi solida residua, erunt, ut numeri 1, 2, 3.

PROP. IX. THEOR. IX.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, recipiuntur bases, & altitudines.

Et quarum pyramidum triangulares bases habentium recipiuntur bases, & altitudines; illæ sunt æquales.

Sint duæ pyramides triangulares $CADB$, Fig. 55. $GIHF$ primo æquales. Dico earum bases, & altitudines reciprocas esse; hoc est, esse ACD ad GIH , ut altitudo pyramidis $GIHF$ ad altitudinem pyramidis $ACDB$.

Compleantur parallelepipeda AK , GL , ut factum est in præc., quæ pyramidum sextupla erunt, adeoque æqualia. Igitur AM est ad GO , ut altitudo solidi GL , seu pyramidis $GIHF$. ad altitudinem solidi AK , seu pyramidis $ACDB$ (a). Sed AM est ad GO , ut triangulum ACD ad triangulum GIH . Igitur triangulum ACD est ad triangulum GIH , ut altitudo pyramidis $GIHF$ ad altitudinem pyramidis $ACDB$.

Sint

(a) Prop. 34. lib. 11.

Sint secundo bases, & altitudines reciproæ. Dico pyramides $ACDB$, $GIHF$ æquales esse.

Cum enim sit ACD ad GIH , ut AM ad GO , & ex hypothese ACD ad GIH ; ut altitudo pyramidis $GIHF$, seu solidi GL ad altitudinem pyramidis $ACDB$, seu solidi AK ; erit quoque AM ad GO , ut altitudo solidi GL ad altitudinem solidi AK . Quare parallelepipeda AK , GL æqualia sunt (a); ac proinde æquales & eorum sextæ partes, nempe pyramides $ACDB$, $GIHF$. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares, &c. q. e. d.

Eadem polygonis pyramidibus conveniunt: nam hæ ad trigonas revocari possunt.

COROLLARIA.

QUæ in lib. II. de parallelepipedis, & in hoc de pyramidibus demonstrata sunt, quibuscumque prismatis etiam applicari possunt, cum hæ tripla sint pyramidum eandem basin, & altitudinem habentium. Hinc

- I. Prismata æque alta sunt inter se, ut bases.
- II. Prismata æqualium basium sunt inter se, ut altitudines.
- III. Prismata similia sunt in triplicata ratione homologorum laterum.
- IV. Æqualia prismata reciprocant bases, & altitudines, & quæ reciprocant, æqualia sunt.

PROP.

(a) Prop. 34. lib. II.

PROP. X. THEOR. X.

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem aequalem.

HAbeant conus, & cylindrus basin eandem, *Fig. 56.* & sit circulus AML , & altitudinem eandem oq . Dico conum cylindri esse tertiam partem.

Si negas. Sit primo conus minor tertia parte cylindri, si fieri potest; hoc est, sit cylindrus major, quam triplum coni, & excessus sit D . Inscrībatur in circulo quadratum (a) $ABCL$, atque aliud EF (b) circumscribatur, & intelligantur erecta duo parallelepipeda, quorum bases sint quadrata AC , EF , altitudo communis oq . Quoniam AC dimidium est EF , erit solidum (c) ACq dimidium quoque solidi EFq ; ac ideo solidum ACq dimidium cylindri, cujus basis est circulus AML , excedit. Bisecentur arcus AB , BC , CL , LA in I , M , R , N , & jungantur rectæ AI , IB , BM , &c. atque ducta tangente GH , perficiatur parallelogrammum $AGHB$. Deinde super AIB , $AGHB$ intelligantur prismata sub altitudine coni, & cylindri, nempe sub altitudine oq ; & quia AIB (d) dimidium est ipsius AH ; erit prisma $AIBoq$ dimidium prismatis $AHoq$: ergo solidum $AIBoq$ majus est dimidio segmenti cylindrici, cujus basis est portio circuli AIB . Similiter prismata $BMCoq$, $CRLoq$, $LN Aoq$ majora sunt, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases sunt seg-

men-

(a) Prop. 6. lib. 4.

(b) Prop. 7. lib. 4.

(c) Prop. 32. lib. 11.

(d) Prop. 41. lib. 1.

menta BMC, CRL, LNA. Continuetur bisectio arcuum, & detrahantur prismata, donec segmenta cylindri residua, nempe segmenta, quorum bases sint portiones circuli AI, IB, BM, &c. minora evadant solido D. Cum igitur cylindrus triplum coni excedat magnitudine D, quæ major est segmentis cylindricis, quorum bases sunt AI, IB, &c., erit prisma basis AIBMCRLN, altitudinem oq habens, majus, quam triplum coni. Sed prisma est triplum pyramidis, eandem basin, & altitudinem (a) cum illo habentis. Igitur conus minor erit dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Cylindrus itaque triplo coni major non existit.

Sit deinde conus major, quam tertia pars cylindri, & excessus D. Erigantur duæ pyramides, quarum bases sint quadrata AC, EF, altitudo vero communis oq; erit pyramis super AC dimidium pyramidis super EF (b). Quare pyramis super AC erecta dimidium coni excedit. Si bisecentur arcus AB, BC, &c., & jungantur rectæ AI, IB, BM, &c. eodem modo demonstrabitur pyramides super triangula AIB, BMC, &c. in altitudine oq erectas, dimidium segmentorum coni, quorum bases sunt circuli segmenta AIB, BMC, &c. excedere. Si continuetur hæc bisectio arcuum, & detractio pyramidum, remanebunt tandem segmenta coni minora, quam D. Sint itaque portiones coni, quorum bases, segmenta AI, IB, &c. minores solido D. Igitur pyramis, cujus basis AIBMCRLN, & altitudo oq major est tertia parte cylindri. Sed pyramis (a) est tertia pars prismatis eandem basin, & altitudinem cum illa habentis. Igitur prisma, cujus basis est polygonum AIBMCRLN,

(a) Schol. 1. prop. 7. hujus.

(b) Prop. 6. hujus.

MCRLN, & altitudo oq majus est cylindro, cujus basis est circulus AMN, & altitudo pariter oq. Quod repugnat (a). Cylindrus itaque triplo coni neque major, neque minor existit; adeoque æqualis. Omnis igitur conus, &c. q. e. d.

PROP. XI. THEOR. XI.

Sub eadem altitudine existentes coni, & cylindri, inter se sunt, ut bases.

Sint sub eadem altitudine coni, & cylindri, Fig. 56. quorum bases circuli AML, QKZ, altitudines vero æquales oq, mn. Dico, ut est basis ad basin, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum.

Si negas. Sit ut basis AML ad basin QKZ, ita conus AMLq ad magnitudinem V, quæ primo minor sit, quam conus QKZn magnitudine D, si fieri potest. Fiat eadem præparatio, & argumentatio præcedentis; sintque segmenta conica, quorum bases QS, ST, &c., minora quam D; erit igitur pyramis QSTK OXZPn major solido V. Inscribatur in circulo AML polygonum AIBM CRLN simile polygono QSTK OXZP, & erigatur pyramis AIBM-CRLNq, quæ ad pyramidem QSTK OXZPn erit, ut polygonum (b) AIBM, &c. ad polygonum QSTK, &c. seu, ut circulus AML ad circulum QKZ (c), seu ut conus AMLq ad solidum V ex hypothese. Sed pyramis AIBM-CRLNq minor est cono AMLq. Igitur pyramis QSTK OXZPn minor quoque erit solido V. Ostenfa autem fuit & major. Quod est absurdum. Magnitudo itaque V minor cono QKZn esse nequit. Sit

(a) Axio. 8. lib. 1.

(b) Prop. 6. hujus.

(c) Cor. prop. 2. hujus.

Sit secundo V major cono $QKZn$. Cum positum sit circulus AML ad circulum QKZ , ut conus $AMLq$ ad V ; erit invertendo circulus QKZ ad circulum AML , ut V ad conum $AMLq$. Ponatur, ut V ad conum $AMLq$, ita conus $QKZn$ ad D . Quoniam V major est cono $QKZn$, erit quoque (a) conus $AMLq$ major solido D . Igitur erit circulus QKZ ad circulum AML , ut conus $QKZn$ ad magnitudinem D , quæ minor est cono $AMLq$, quod fieri nequit, ut jam demonstratum est. Magnitudo ergo V neque minor esse potest, neque major cono $QKZn$, adeoque æqualis; ac proinde cum positus sit circulus AML ad circulum QKZ , ut conus $AMLq$ ad V ; erit circulus AML ad circulum QKZ , ut conus $AMLq$ ad conum $QKZn$.

Demum quia cylindri $AMLq$, $QKZn$ (b) tripli sunt conorum $AMLq$, $QKZn$; erit quoque circulus AML ad circulum QKZ , ut cylindrus $AMLq$ ad cylindrum $QKZn$. Quapropter sub eadem altitudine, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur, conos, & cylindros ejusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, sive ambo sint recti, vel scaleni, sive unus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe una, & eadem.

PROP.

(a) Prop. 14. lib. 5.

(b) Prop. 10. hujus.

PROP. XII. THEOR. XII.

*Si cylindrus plano secetur adversis planis parallelo:
erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis
ad axem.*

Secetur cylindrus AC plano EF oppositis pla- Fig. 57.
nis AB , CD parallelo. Dico esse cylindrum
 AE ad cylindrum FC , ut axis SN ad axem NR .

Extendatur cylindrus AC quantumlibet in
utramque partem cum axe SR , & rectangulo
 AR , sumanturque OT , TS ipsi SN , & RP
ipsi NR æquales; indeque ducantur OH , TK ,
 NF , PM ipsi AS , vel DR parallelæ, & æqua-
les, quæ in circumvolutione rectanguli describent
circulos GH , IK , EF , LM parallelos, & æqua-
les (a) ipsis AB , CD . Patet itaque HI , KB ,
 AE , FC , DL cylindros esse, totum cylindrum
 HL componentes. Rursus, quia FB , AI , KG
bases EF , AB ; KI , & altitudines NS ; ST ,
 TO æquales habent, erunt inter se æquales (b).
Eadem ratione æquales & FC , DL . Itaque cy-
lindrus FG cylindri FB æquemultiplex est, ac
axis NO axis NS ; pariterque cylindrus FL cy-
lindri FC æque multiplex est, ac axis NP axis
 NR . Sed cylindrus FG æqualis, major, vel mi-
nor est cylindro FL , prout axis ON æqualis,
major, vel minor axe NP existit. Igitur cylin-
drus AE est ad cylindrum FC , ut axis SN ad
axem NR (c). Si cylindrus itaque plano, &c.
q. e. d.

SCHO.

(a) Def. 1. lib. 3.

(b) Cor. præc.

(c) Def. 7. lib. 5.

S C H O L I U M.

Idem demonstrari potest de cylindro scaleno eodem fere ratiocinio. Nota hanc prop. esse 13 Eucl., ejusque quatuordicesimam in tredicesimum, & duodecimam in quatuordicesimum locum nos transtulisse.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, ut altitudines.

Fig. 58.

HAbeant cylindri AE , CF , & coni ABL , CDH bases AB , CD æquales, altitudines vero LK , OH (nam in conis, & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) inæquales. Dicet esse conum ABL ad conum CDH , & cylindrum AE ad cylindrum CF , ut altitudo LK ad altitudinem HO .

Productis enim cylindro AE , & axe KL , sume LG ipsi OH parem, & per G duc planum basi AB parallelum. Cylindri igitur NM , CF æquales sunt (a). Sed cylindrus AE est ad cylindrum NM , ut KL (b) ad LG , seu OH . Igitur cylindrus AE ad cylindrum CF est, ut altitudo KL ad altitudinem OH .

Quoniam coni ABL , CDH sunt partes tertiæ (c) cylindrorum AE , CF ; erit quoque conus ABL ad conum CDH , ut altitudo LK ad altitudinem HO . Super æqualibus igitur basibus, &c. q. e. d.

SCHO-

(a) Cor. prop. 11. hujus.

(b) Prop. 12. hujus.

(c) Prop. 10. hujus.

SCHOLIUM

Sint cylindri, vel con^{us} scaleni. Erige cylindros, & conos rectos, qui eandem cum scalenis altitudinem, & basin eandem habeant; erunt illi istis aequales (a). Sed cylindri, & con^{us} recti aequalium basium sunt in ratione altitudinum, ut jam demonstratum est, igitur & scaleni, qui bases aequales habent, ut altitudines existunt.

L E M M A.

Si duo cylindri, vel con^{us} scaleni fuerint similes, recti sub iisdem basibus, & altitudinibus, etiam similes erunt.

Sint duo cylindri, vel con^{us} scaleni inter se si- Fig. 59.
miles, quorum bases AMB , ENF , & axes DC , GH . Super iisdem basibus erigantur in iisdem altitudinibus cylindri, vel con^{us} recti, quorum axes sint DI , GK . Dico huiusmodi cylindros rectos, vel rectos conos, etiam inter se similes esse.

Concipiantur transire per rectas CD , DI , item per GH , GK duo plana, secantia bases rectis AB , EF . Et quoniam ID , GK (b) rectæ sunt ad bases AMB , ENF , erunt plana (c) CDI , HGK ad easdem recta; ac proinde rectæ ex I , & K ad bases perpendiculariter demissæ in communes sectiones AB , EF (d) cadent; unde anguli IDB , KGF recti sunt (e). Sed anguli inclinationum CDB , HGF æquales sunt, ob cylindrorum, vel conorum similitudinem. Igitur

F æqua-

(a) Cor. Prop. 11. huius.

(b) Def. 22. & 28. lib. 11.

(c) Schol. Prop. 18. lib. 11.

(d) Prop. 38. lib. 11.

(e) Def. 3. lib. 11.

æquales & anguli IDC , KGH . Præterea coni, vel cylindri $AMBC$, $AMBI$ ejusdem altitudinis ponuntur; igitur recta IC per axium vertices ducta ipsi AB parallela est; ac proinde angulus DIC rectus (a). Similiter rectus est GKH . Triangula itaque DIC , GKH æquiangula sunt; unde (b) DC est ad GH , ut DI ad GK ; sed DC est ad GH , ut AB ad EF (c). Igitur ID ad KG , ut AB ad EF ; ac ideo cylindri, vel coni recti $AMBI$, $ENFK$ (e) similes sunt. Si duo itaque cylindri, vel coni, &c. q. e. d.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Similes coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

Fig. 60.

Sint cylindri AN , EG , & coni AMR , EFL inter se similes. Dico cylindrum ad cylindrum, & conum ad conum habere proportionem triplicatam diametri AM ad diametrum EF .

Sint cylindri, & coni recti, fumaturque cylindrus BC , ejusdem altitudinis cum AN , & ejusdem basis cum EG . Erit cylindrus (d) AN ad cylindrum BC , ut basis AM , ad basin BD , seu EF , vel in duplicata ratione (e) diametri AM ad EF ; & cylindrus BC ad cylindrum EG , ut altitudo QP (f), seu RO ad altitudinem IS , seu ut diameter AM ad diametrum EF (e). Igitur ex æquo erit cylindrus AN ad cylindrum EG in ratione composita ex duplicata diametri AM ad EF , & simplici ipsius AM ad EF , seu in triplicata

(a) Prop. 29. lib. 1.

(b) Prop. 4. lib. 6.

(c) Def. 29. lib. 11.

(d) Prop. 11. hujus.

(e) Prop. 2. hujus.

[f] Prop. 13. hujus.

cata ratione (a) diametrorum AM , EF .

Habeant deinde similes cylindri AN , EG axes ad bases inclinatos. Quoniam isti cylindris rectis easdem bases, & altitudines habentibus æqualia sunt, & isti cylindri recti etiam similes per lemma existunt; erunt itaque similes cylindri inclinati, ut sunt recti similes, hoc est in triplicata ratione diametrorum AM , EF .

Quoniam vero conii eandem proportionem habent, quam cylindri, eorum tripli; erunt quoque conii similes, sive recti sint, sive inclinati, inter se in triplicata ratione diametrorum AM , EF . Similes igitur conii, & cylindri, &c. q. e. d.

PROP. XV. THEOR. XV.

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines, illi sunt æquales.

Sint primo æquales cylindri AC , DE ; ac Fig. 61.
proinde æquales & conii ABG , DFH ,
quorum bases AB , DF , axes, sive altitudi-
nes KG , LH . Dico bases, & altitudines reci-
procas esse, hoc est AB esse ad DF , ut LH
ad KG .

Si altitudines KG , LH æquales sunt; cum cy-
lindri AC , DE ponantur æquales, erunt æquales
& bases AB , DF (b); ac proinde patet esse AB
ad DF , ut LH ad KG .

Si altitudo vero LH major est KG , abscinde
 LI ipsi KG parem, & per I duc planum MO
plano DF parallelum. Quoniam cylindri AC ,
 DM æquales altitudines habent, erit basis DF ad
basin AB (b), ut cylindrus DM ad cylindrum
F 2 AC,

(a) Def. 7. lib. 6.

(b) Prop. 11. hujus.

AC , seu ut cylindrus DM ad cylindrum DE , seu ut altitudo LI , vel KG ad altitudinem LH (a); ac propterea bases, & altitudines reciprocantur.

Sine secundo bases, & altitudines reciprocae, hoc est sit AB ad DF , ut LH ad KG . Dico cylindros AC , DE æquales esse.

Nam si altitudines KG , LH ponuntur æquales, cum sit AB ad DF , ut LH ad KG ; erunt quoque bases AB , DF æquales; ac proinde æquales & cylindri AC , DE (b).

Si altitudines tamen inæquales fuerint, a maiori LH secetur LI ipsi KG æqualis, ducaturque planum MO basi DF parallelum. Ex hypothese AB est ad DF ut LH ad KG , seu LI ; sed AB est ad DF (c), ut cylindrus AC ad cylindrum DM , & LH est ad LI , ut cylindrus DE ad cylindrum DM . Igitur cylindrus AC est ad cylindrum DM , ut cylindrus DE ad idem cylindrum DM . Cylindri itaque (d) AC , DE æquales sunt.

Sed coni tertiæ partes sunt cylindrorum æque altorum super iisdem basibus; igitur etiam coni, si æquantur, bases, & altitudines reciprocant, & si bases, & altitudines reciprocant, æquales existunt. Æqualium itaque conorum, & cylindrorum, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Prop. 13. hujus.
- (b) Cor. prop. 11. hujus.
- (c) Prop. 11. hujus.
- (d) Prop. 9. lib. 5.

ET SOLIDORUM II. 69

erunt componendo pyramides CA , DA simul, seu pyramis CDA , ad pyramidem DA , ut C , & D simul ad D . Rursus ut est pyramis DA ad EA , ita D ad E . Unde ordinando pyramis CDA est ad E , ut C , & D simul ad E ; ideoque componendo erunt pyramides CDA , & EA simul, hoc est tota $CDEA$ ad pyramidem EA , ut C , D , E simul ad E . Eodem modo ostendetur, pyramidem $FIGHB$ esse ad pyramidem HB , ut F , I , G , H ad H . Est vero pyramis EA ad pyramidem HB , ut E ad H (a). Igitur erit & pyramis $CDEA$ ad pyramidem $FIGHB$, ut bases C , D , & E simul ad bases F , I , G , & H simul. Quapropter sub eadem altitudine existentes, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur, pyramides quascunque æqualium basium, & altitudinum, æquales esse.

PROP. VII. THEOR. VII.

Omne prisma triangularem habens basin, dividitur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

Sit prisma $ABCDEF$, cujus duo triangula opposita æqualia, & similia ABC , FED . Dico, huiusmodi prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Fig. 51.

Nam ductis in tribus parallelogrammis diagonalibus BD , BF , AD ; erunt pyramides $ACDB$, $AFDB$, ob æquales bases ACD , (b) AFD , & verticem communem in B , inter se

F 3 æqua-

(a) Prop. 5. hujus.

(b) Prop. 34. lib. 1.

α quales [a]. Similiter α quantur & pyramides $BAFD$, $BFED$; nam habent bases ABF , BFE α quales, & verticem in D communem. Cum sit itaque pyramis $FABD$ eadem, ac pyramis $AFDB$; erunt tres pyramides $ACDB$, $AFDB$, $BFED$, in quas divisum est prisma, inter se α quales. Omne prisma igitur triangularem, &c. q. e. d.

S C H O L I U M I.

Fig. 52. **H**abeant prisma $BEMI$, & pyramis BEA eandem basin polygonam BE , & altitudinem eandem. Dico, hanc pyramidem esse quoque prismatis tertiam partem. Duc enim DB , DF , DG , AI , AK , AL , & resolve tum prisma polygonum $BEMI$ in trigona prismata, cum pyramidem polygonam BEA in trigonas pyramides. Et quia pyramides trigona $BCDA$, $BDEA$, $FDGA$, $GDEA$ tertiae partes sunt trigonorum prismatum $BCDAIH$, $BDFKAI$, $GFDAKL$, $EGDALM$ respective, ut jam demonstratum est, erunt quoque omnes simul, hoc est tota pyramis polygonam BEA totius prismatis polygoni $BEMI$ pars tertia. Hinc deducitur

C O R O L L A R I U M.

Qualibet pyramis pars tertia est prismatis, quod eandem cum illa habet, & basin, & altitudinem.

SCHO.

(2) Cor. prae.

tuo in O secantes ad angulos rectos, ut sint AD , DE , EP , PA quadrantes, & in circulo $ADEP$ inscribatur polygonum ABS , &c. æquilaterum, & parium laterum (a), ita ut latera circulum $TRXZ$ non contingant. Ducta insuper diametro BQ , erigatur OF ad planum $ADEP$ recta, occurrens superfici ei sphaeræ majoris in F , & per FO , & diametros AE , BQ erigi concipiantur duo plana, quæ recta erunt (b) ad planum $ADEP$, & in superficie sphaeræ, ob angulos AOF , BOF (c) rectos, quadrantes AF , BF efficient, qui æquales erunt quadranti AD ; nam quadrantes AF , BF , AD sunt quadrantes circulorum æqualium, quorum radium idem est, ac radium majoris sphaeræ. Applicentur deinde in quadrantibus AF , BF rectæ AC , CM , MK , KF , BG , GN , NI , IF ipsi AB , vel BS æquales, & æque multæ. In reliquis quadrantibus SF , YF , &c. & in tota sphaera eadem constructio fiat. Dico factum.

Nam si ductis CG , MN , KI demittantur ex C , & G lineæ Ca , GL ad planum $APE D$ rectæ, erunt hæ inter se (d) parallelæ, & in communes sectiones AE , BQ (e) incident. Ducatur aL . Quia arcus BG , AC æquales rectas subtendunt ex constructione, inter se (f) æquales erunt; unde æqualia & eorum complementa ad semicirculos, nempe æquales arcus, quibus insistent anguli GBL , CAa . Anguli igitur GBL , CAa æquales existunt. Sunt æquales & anguli GLB , CaA , quia recti (c), & latera GB , CA pariter æqualia. Igitur æqualia erunt (g) tum latera Ca , GL ,
F 4 cum

- (a) Prop. 16. hujus.
- (b) Prop. 18. lib. 11.
- (c) Def. 3. lib. 11.
- (d) Prop. 6. lib. 11.
- (e) Prop. 38. lib. 11.
- (f) Prop. 28. lib. 3.
- (g) Prop. 26. lib. 1.

cum Aa , BL ; ac per consequens æquales & rectæ Oa , OL . Quapropter OL erit ad LB , ut Oa ad Aa . Igitur La , BA (a) parallelæ sunt. Rursus cum sint rectæ Ca , GL æquales, & parallelæ, parallelæ quoque erunt, & æquales (b) CG , AL ; ac proinde parallelæ & CG , AB (c). Rectæ itaque CA , BG , parallelas CG , AB connectentes, in uno (d) cum istis plano sunt. Igitur quadrilaterum $ABGC$ in uno est plano. Eadem ratione in uno erit plano quadrilaterum $MCGN$; item quadrilaterum $MNIK$ in uno plano existet, & triangulum KFI in uno pariter plano. Eodem modo tota sphaera hujusmodi quadrilateris, & triangulis repleta ostendetur. Quare inscriptum est polyedrum.

Ex centro O demittatur OH ad planum (e) $CABG$ recta, & ductis HA , HG , HB , HC , erunt anguli OHA , OHB , OHG , OHC (f) recti; adeoque quadratum rectæ AO æquale erit quadratis (g) rectarum OH , HA , & quadratum rectæ OB æquale quadratis, quæ ex OH , HB fiunt; igitur cum sint OA , OB æquales, erunt & quadrata rectarum OH , HA quadratis ipsarum OH , HB æqualia, & demto communi quadrato rectæ OH , erunt quoque quadrata rectarum AH , BH æqualia; ac ideo æquales & AH , BH . Eodem modo ostendetur, rectas CH , GH ipsi AH , vel BH æquales esse. Quare circa quadrilaterum $ABGC$ circulus describi potest, cujus centrum H (h).

Demum cum sit La ipsi AB parallela, erunt
trian-

- (a) Prop. 2. lib. 6.
- (b) Prop. 33. lib. 1.
- (c) Prop. 9. lib. 11.
- (d) Prop. 7. lib. 11.
- (e) Prop. 11. lib. 11.
- (f) Def. 3. lib. 11.
- (g) Prop. 47. lib. 1.
- (h) Def. 15. lib. 1.

ET SOLIDORUM II. 89

triangula AOB , aOL æquiangula; ac proinde similia. (a) Igitur OB erit ad OL , ut BA ad La ; sed BO major est LO ; igitur BA ipsa La , vel CG major quoque existet. Quadrilateri itaque $ABGC$ circulo inscripti, latus CG reliquis CA , AB , BG minus est; ergo AB plus quam quadrantem subtendit; ac proinde angulus ad centrum AHB obtusus est. Quadratum igitur rectæ AB majus est quadratis (b) rectarum æqualium AH , BH , seu majus duplo quadrati rectæ AH . Porro ducta Bb ad AE perpendiculari, erit angulus BAb major angulo ABb (c); unde Bb (d) major Ab . Sed quadratum rectæ AB quadratis rectarum (e) Ab , Bb æquatur; igitur quadratum rectæ AB duplo quadrati rectæ Bb minor est; ac ideo quadratum rectæ Bb major est quadrato rectæ AH . Quapropter cum quadrata rectarum AH , HO quadrato rectæ AO , & quadrata rectarum Bb , BO quadrato rectæ BO æqualia sint; erunt, ob rectas AO , BO æquales, quadrata rectarum AH , HO quadratis ex Bb , BO factis pariter æqualia; sed quadratum rectæ Bb majus ostensum est quadrato rectæ AH ; igitur quadratum rectæ OH majus quoque erit quadrato rectæ Ob ; ac per consequens recta OH major Ob . Igitur cum sit punctum b (f) extra sphaeram $TRXZ$, potiori jure erit extra ipsam punctum H ; adeoque planum $ABGC$ (cujus proximum centro punctum est H) sphaeram $TRXZ$ non contingit. Eodem ratiocinio ostendetur reliqua plana $CGNM$, $MNIK$, KIF , &c. sphaeram $TRXZ$ minime contingere. Ergo polyedrum majori sphaera inscriptum, minorem non contingit. Quocirca, duabus sphaeris, &c. q. e. f.

CO.

- (a) Prop. 4. lib. 6.
- (b) Prop. 12. lib. 2.
- (c) Schol. præc.
- (d) Prop. 19. lib. 1.
- (e) Prop. 47. lib. 1.
- (f) Corol. præc.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur, si in quavis alia sphaera describatur solidum polyedrum simile praedicto solido polyedro, proportionem polyedri in una sphaera ad polyedrum in altera sphaera esse triplicatam ejus, quam habent sphaerarum diametri. Nam si ex centris sphaerarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectae lineae ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero aequales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphaerarum; ut constat, si intelligatur harum sphaerarum minor intra majorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuo lineae rectae ductae a centris ad basium angulos, ob similitudinem basium; ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulae pyramides in una sphaera ad singulas pyramides illis similes in altera sphaera habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est semidiametrorum sphaerarum, ut constat ex Cor. prop. 8. hujus lib. Sint autem, ut una pyramis ad unam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides; idest ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum: Habebit quoque polyedrum unius sphaerae ad polyedrum alterius sphaerae proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum.

PROP. XVIII. THEOR. XVI.

Sphaerae inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

Fig. 64. **S**int duae sphaerae AMB , CND , quarum diametri AB , CD . Dico, sphaeram AMB esse ad sphaeram CND in triplicata ratione diametri AB ad diametrum CD .

Si

Si negas . Sit primo ratio triplicata diametri AB ad diametrum CD , ut sphaera AMB ad sphaeram HGK , minorem sphaera CND , si fieri potest; intelligaturque sphaera HGK concentrica sphaerae CND . Inscribatur in sphaera (a) CND solidum polyedrum, quod non tangat sphaeram HGK , atque simile inscribatur in sphaera AMB . Hæc polyedra similia (b) sunt in triplicata ratione diametrorum AB , CD , seu ut sphaera AMB ad sphaeram HGK ex hypothefi . Sed sphaera AMB major est polyedro in ea inscripto. Ergo sphaera HGK major quoque polyedro in sphaera CND inscripto existet, pars toto. Quod est absurdum. Quare ratio triplicata diametri AB ad CD esse non potest, ut sphaera AMB ad sphaeram HGK , minorem sphaera CND .

Sit deinde ratio triplicata diametri AB ad diametrum CD , ut sphaera AMB ad sphaeram P , majorem sphaera CND , si possibile est; erit invertendo ratio triplicata diametri CD ad AB , ut sphaera P ad sphaeram AMB . Ponatur ut sphaera P ad sphaeram AMB , ita sphaera CND ad sphaeram Q . Cum sphaera P major posita sit sphaera CND , erit quoque sphaera AMB major Q . Quapropter ratio triplicata diametri CD ad diametrum AB erit, ut sphaera CND ad sphaeram Q , ipsa AMB minorem. Quod est absurdum, ut jam demonstratum est. Ratio itaque triplicata diametri AB ad CD esse non potest, ut sphaera AMB ad sphaeram majorem, vel minorem sphaera CND . Remanet igitur, ut ratio triplicata diametri AB ad CD sit, ut sphaera AMB ad sphaeram CND . Sphaerae itaque inter se, &c. q. e. d.

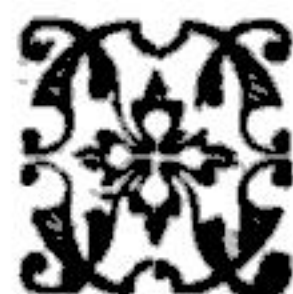
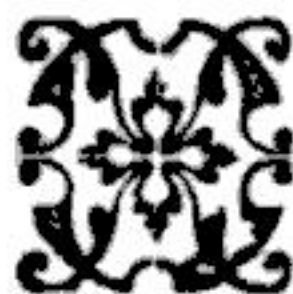
SCHO-

(a) Prop. 17. hujus.

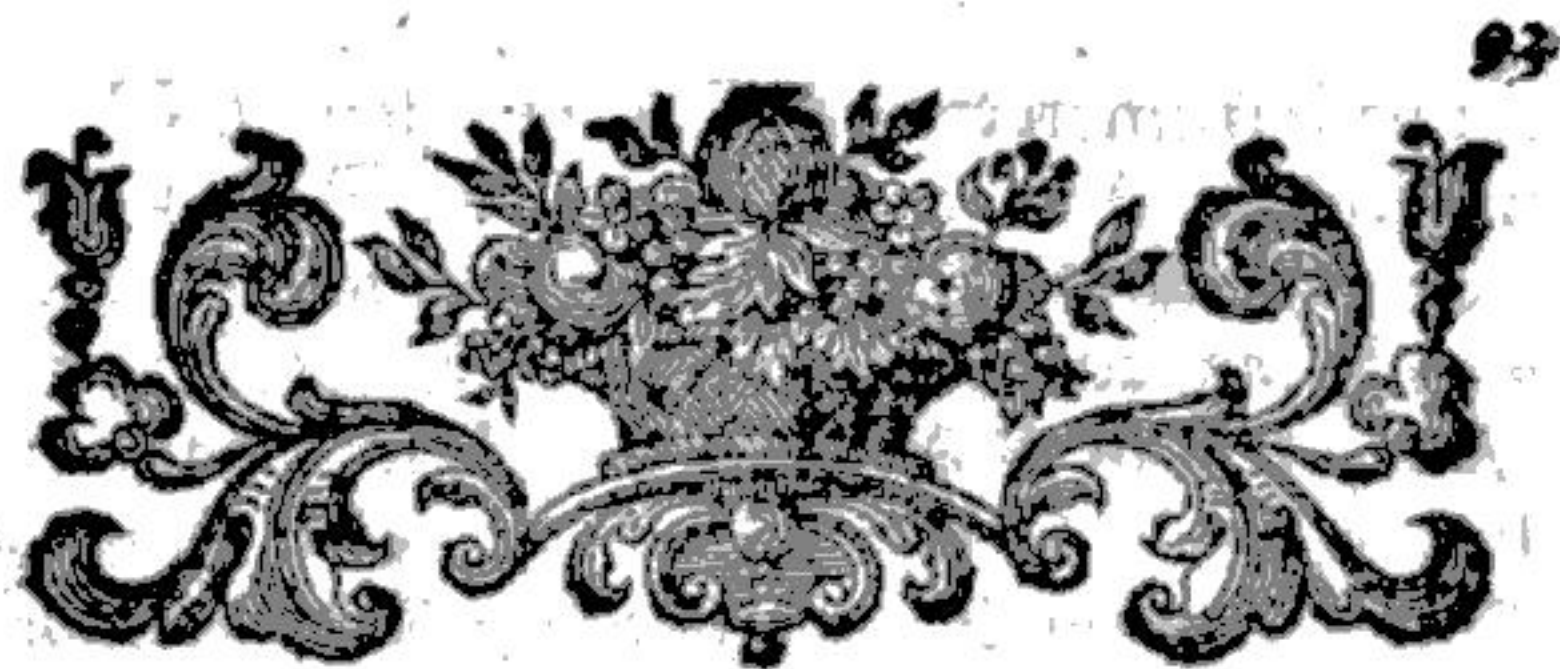
(b) Cor. præc.

Fig. 44. **S**It data sphaera, vel quodlibet aliud solidum, cuius diameter, vel latus sit recta A. Si construere oportet aliud solidum priori simile, ita ut illud ad hoc sit in ratione rectae A ad rectam B: necessarium est, ut inter A, & B duae mediae continue proportionales E, & F inveniantur, quarum prima erit diameter sphaerae, vel latus corporis quaesiti. Nam cum sint A, E, F, B continue proportionales; erit A ad B (a) in triplicata ratione rectae A ad rectam E, seu ut solidum super A descriptum ad solidum super E priori simile, similiterque positum. Hinc patet solida similia augeri, vel minui minime posse, quin inter terminos datae rationis duae mediae continue proportionales inveniantur.

Finis Elementi Duodecimi.



(a) Def. 7. lib. 6.



E U C L I D I S

Elementum tertium decimum, & solidorum tertium.

PROP. I. THEOR. I.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur; majus segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest ejus, quod a dimidia totius describitur, quadrati.



SIT AB in C media, ac extrema ratione secta, & AC majus segmentum. Producta autem BA in D , sit AD dimidia totius AB . Dico quadratum rectæ CD quintuplum esse quadrati rectæ AD . Fig. 62

Describe enim super AB , & DC quadrata $ABML$, $DGEC$, & duc DE ipsi LA ad F productæ, occurrentem in I ; atque per I duc KH ipsi DC parallelam; tandemque produc EC in N .

Et quoniam BA est ad AC , ut AC ad CB (a),
erit

(a) Def. 3. lib. 6.

erit quadratum rectæ AC (a), seu $IKEF$ rectangulo ex AB in BC , seu ex BM in BC , hoc est rectangulo BN æquale. Deinde rectangulum AN est ad rectangulum AK (b), ut LA ad AI , seu ut BA ad AD . Igitur cum posita sit BA ipsius AD dupla, erit & AN ipsius AK duplum; ac proinde rectangulum AN rectangulis AK , HF æquale. Quare AM , seu quadratum rectæ AB gnomoni orI æquatur. Sed quadratum ex AB quadruplum est quadrati rectæ AD . Gnomon igitur orI quadrati AH , seu quadrati ex AD quadruplus existit. Quare addito communi AH , erit CG quintuplum AH , seu quadratum rectæ CD quintuplum ejus, quod sit ex AD . Quapropter si recta linea, &c. q. e. d.

PROP. II. THEOR. II.

Si recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; dupla prædicti segmenti extrema, ac media ratione sectæ, majus segmentum reliqua pars est ejus, quæ a principio, rectæ.

Fig. 65. **S**It CD ita in A divisa, ut quadratum ex DC quintuplum sit quadrati rectæ DA ; sumaturque autem AB ipsius DA dupla. Dico, si AB , secetur extrema, ac media ratione, majus segmentum esse AC , reliquam partem prioris lineæ.

Supponatur constructio præc. prop. Quoniam quadratum CG quintuplum est ex hypothese quadrati AH ; erit gnomon orI quadruplus ipsius AH ; sed ob rectam AB rectæ AD duplam, quadratum AM quadrati AH etiam quadruplum existit. Igitur & quadratum AM gnomoni orI æquale. Præterea (b) rectangulum LC est ad rectangulum AK , ut LA ad AI , seu ut BA ad AD ; est jam

(a) Prop. 17. lib. 6.

(b) Prop. 1. lib. 6.

jam BA dupla ipsius AD ; igitur & LC duplum AK ; ac proinde rectangulum LC rectangulis AK , HF æquale. Quare reliquum quadratum IE reliquo rectangulo BN æquale est, seu quadratum ex AC æquale rectangulo ex MB in BC , vel ex AB in BC ; ac propterea, quum fit ut BA ad AC (a), ita AC ad CB , erit recta AB secta media, ac extrema ratione in puncto C , & majus segmentum AC . Si recta linea igitur sui ipsius, &c. q. e. d.

PROP. III. THEOR. III.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam majoris segmenti, quintuplum potest ejus, quod a dimidia majoris segmenti describitur, quadrati.

SIt AB secta in C media, ac extrema ratione, *Fig. 66.* cujus majus segmentum BC bifariam dividatur in D . Dico quadratum ex AD quintuplum esse quadrati rectæ DC .

Describatur enim super AB quadratum BF , & ducta diagonali AE agantur DM , CI ipsi AF parallelæ, secantes AE in punctis G , & H , per quæ ducantur rectæ KL , NO ipsi BA parallelæ. Manifestum est DO , GH , CL (b) esse quadrata restarum AD , DC , CA . Ex hypothesi AB media, ac extrema ratione secta est in C . Igitur rectangulum ex BA in AC , seu ex BA in AL , nimirum BL quadrato rectæ BC , seu quadruplo quadrati ex DC , nimirum GH æquale est. Deinde ob rectas BD , DC æquales rectangula DK , DG æqualia sunt; igitur cum sint rectangula (c) DG ,

(a) Prop. 17. lib. 6.

(b) Chor. prop. 4. lib. 2.

(c) Prop. 43. lib. 1.

DG , GO inter se æqualia, æqualia erunt & rectangula DK , GO ; quare addito communi DL , erit gnomon rmn rectangulo BL , seu quadruplo quadrati GH æquale, & appposito communi quadrato GH , erit quadratum DO quintuplum quadrati GH , seu quadratum rectæ AD quintuplum ejus, quod fit ex DC . Si recta igitur linea secundum extremam, &c. q. e. d.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur; quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt ejus, quod a majore segmento describitur, quadrati.

Fig. 67. **S**Ecetur AB in C extrema, ac media ratione, sitque segmentum majus AC , & minus CB . Dico, quadrata rectarum AB , BC simul tripla esse quadrati rectæ AC .

Describatur enim super AB quadratum AD , in quo ducta diagonali BE , agatur ex C recta CF ipsi BD parallela, secans BE in puncto G , per quod ducatur IH ipsi AB parallela. Liquet CH , IF (a) quadrata esse rectarum CB , AC . Quoniam igitur est (b) BA ad AC , ut AC ad CB ; erit (c) rectangulum ex AB in BC , nempe AH æquale ipsi IF . Cum ergo AH æquale sit ipsi CD ; erit gnomon MLK , una cum quadrato CH , duplus quadrati IF ; quare addito communi quadrato IF , erit quadratum AD , rectæ AB , una cum quadrato CH , rectæ CB , ejusdem quadrati IF , rectæ AC , triplum. Si recta igitur linea, &c. q. e. d.

PROP.

(a) Cor. prop. 4. lib. 2.

(b) Def. 3. lib. 6.

(c) Prop. 17. lib. 6.

PROP. V. THEOR. V.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis majori segmento: tota recta linea secundum extremam, & mediam rationem secatur, & majus segmentum est, quæ a principio recta linea.

Sit recta AB secta in C extrema, ac media ratione, sitque majus segmentum AC , eique adjiciatur in directum AD æqualis majori segmento AC . Dico, rectam BD secari in A extrema, ac media ratione, esseque majus segmentum AB . Fig. 68

Describatur enim super AB quadratum BF , & compleatur figura, prout eam schema repræsentat. Erunt CK, IG (a) quadrata rectarum AC, CB . Quoniam igitur est, ut (b) BA ad AC , ita AC ad CB ; erit (c) rectangulum ex AB in BC , seu ex FE in EI , nempe FI æquale quadrato CK , rectæ AC . Est autem CK ipsi AL æquale (d). Igitur FI æquale erit ipsi AL , additoque communi BK , erit rectangulum BL contentum sub BD, DL , seu sub BD, DA æquale quadrato BF , rectæ AB ; ac proinde erit, ut (e) DB ad BA , ita BA ad AD . Quapropter DB secatur in A media, & extrema ratione, & majus segmentum est AB . Si recta igitur linea, &c. q. e. d.

S C H O L I U M I.

SI BD in A media, ac extrema ratione secetur, & ex majore segmento AB detrahatur AC , minori segmento AD æqualis. Dico AB pariter secari in C media, ac extrema ratione, & majus segmentum esse AC , quæ æqualis est minori segmento AD . Retenta enim eadem constructione, cum sit DB ad BA , ut BA ad AD , erit (e) rectangulum sub BD, DA , seu BL qua-

(a) Cor. prop. 4. lib. 2.

[b] Def. 3. lib. 6.

(c) Prop. 17. lib. 6.

(d) Prop. 36. lib. 1.

(e) Prop. 17. lib. 6.

quadrato BF rectæ AB æquale; quare demto communi rectangulo BK , reliquum AL , seu CK , nimirum quadratum rectæ AC æquale erit EI , seu rectangulo ex FE in EI , vel ex FE in EG , aut ex AB in BC . Igitur BA erit ad AC , ut AC ad CB . Constat itaque propositum.

S C H O L I U M II.

Fig. 43. **S**It A linea notæ magnitudinis. Liqueat infinitas alias rectas cum A conferri posse. Conferatur cum ea recta B . Si hæ communem mensuram habebunt, commensurabiles longitudine, sin minus incommensurabiles longitudine, dicentur. Si vero harum quadrata, aliud, tanquam communis mensura, metitur, rectæ A , & B , potentia commensurabiles; sin minus, potentia incommensurabiles, appellantur. Recta A notæ magnitudinis, rationalis appellatur, & B rationalis etiam dicetur, si longitudine, ac potentia, vel potentia tantum commensurabilis erit rationali A si vero neque longitudine, & potentia, neque potentia tantum commensurabilis est, irrationalis vocatur. Hinc apparet longe aberrare, qui radicem quadratam numeri 2, vel 3, vel 5, vel 7, &c. seu, quod idem est, lineam rectam, cujus quadratum est 2, vel 3, vel 5, vel 7, &c. irrationalem esse putant, ex eo, quod numero exprimi minime possit; nam licet radix quadrata numeri 2 commensurabilis haud sit numero cuilibet, est tamen ejus quadratum, nempe 2 commensurabilis numero cuilibet quadrato, ut 4, 16, 36, &c.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si recta linea rationalis extrema, ac media ratione secetur; utrumque segmentorum irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

Fig. 69. **S**Ecetur recta rationalis AB in C extrema, & media ratione. Dico utrumque segmentum AC , CB esse lineam irrationalem, quæ Apotome dicitur.

Pro-

ET SOLIDORUM III. 99

Protrahatur enim BA in D , ut sit AD dimidia totius AB . Quoniam quadratum ex CD (a) quintuplum est quadrati rectæ AD , erunt rectæ CD , AD potentia commensurabiles. Est autem AD rationalis, cum sit dimidia rectæ rationalis AB . Igitur & CD rationalis est. Verum quia quadratum ex CD est ad quadratum rectæ AD , ut 5 ad 1, qui numeri minime quadrati sunt; erunt rectæ (b) CD , AD longitudine incommensurabiles; ac proinde rationales, potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD rationali detrahatur AD rationalis, potentia tantum commensurabilis; erit reliqua AC (c) irrationalis, quæ Apotome nuncupatur.

Deinde applicato ad AB rectangulo AE , contento sub AB , CB ; erit rectangulum AE æquale quadrato ex AC . Quamobrem quadratum apotomæ AC , nimirum rectangulum AE , applicatum secundum lineam rationalem AB (d) facit alterum latus BE , hoc est rectam CB , illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea rationalis, &c.q.e.d.

SCHOLIUM.

Hujus Theor. demonstratio sine lib. 10. auxilio intelligi nequaquam potest. Verum qui Algebram minime ignorant facile percipient AC , & CB incommensurabiles esse & longitudine, & potentia rationali AB . Si enim ponatur $AB = 1$; erit $AC = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$, & $CB = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; ac proinde quadratum tam rectæ AC , quam $CB = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$. Ex quo satis liquet, rectas AC , CB & longitudine, & potentia rationali AB incommensurabiles esse; ac propterea AC , AB irrationales.

G 2

PROP.

- (a) Prop. 1. hujus.
- (b) Prop. 9. lib. 10.
- (c) Prop. 74. lib. 10.
- (d) Prop. 98. lib. 10.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si pentagoni æquilateri tres anguli, sive qui deinceps, sive qui non deinceps sint, æquales fuerint: æquiangulum erit ipsum pentagonum.

Fig. 70. **S**int in pentagono æquilatero $ABCDE$ tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C . Dico pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ AC, BE, BD , ducaturque DF . Quoniam ex hypothefi latera EA, AB, BC, CD , & anguli EAB, ABC, BCD sub istis lateribus comprehensi æquantur; erunt (a) bases EB, AC, BD inter se pares, & anguli omnes $AEB, ABE, BAC, BCA, CBD, CDB$ pariter æquales; quare æquales (b) & AF, FB ; ac proinde æquales & FE, FC . Rursus cum sint latera FE, ED ipsis FC, CD æqualia, & basis FD communis, erunt anguli (c) FED, FCD etiam æquales. Ostensi sunt autem æquales & anguli BEA, CDB . Igitur æquales & anguli AED, EDC . Deinde, ob æqualitatem rectarum BD, BE , (d) anguli BDE, BED æquantur. Igitur æquantur, & anguli AED, EDC . Quapropter pentagonum æquilaterum est.

Sint deinde tres anguli non deinceps A, C, D æquales. Quoniam duo latera BA, AE trianguli BAE lateribus BC, CD trianguli BCD æqualia posita sunt, & anguli BAE, BCD etiam æquales, erunt æquales (a) & anguli AEB, BDC , & bases BE, BD . Quare æquales (d) & anguli

(a) Prop. 4. lib. I.

(b) Prop. 6. lib. I.

(c) Prop. 8. lib. I.

(d) Prop. 5. lib. II.

li BED, BDE; ac proinde anguli AED, EDC æquales erunt. Tres anguli igitur deinceps A, E, D æquantur. Ergo pentagonum æquilaterum est per primam partem. Quapropter, si pentagoni æquilateri, &c. q. e. d.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Si pentagoni æquilateri, & equianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema, & media ratione se mutuo secant, & majora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

Subtendantur in pentagono æquilatero, & equi-*Fig. 71.* angulo ABCDE duobus angulis, qui sunt deinceps C, & D, rectæ BD, CE, se mutuo secantes in G. Dico ipsas media, ac extrema ratione secari, majoraque segmenta BG, EG æqualia esse lateri cuilibet pentagoni.

Describatur enim circa pentagonum circulus ABCDE; erunt quinque arcus (a) AB, BC, CD, DE, AE inter se æquales; ac proinde æquales (b) & anguli BDC, ECD. Cum igitur sit angulus externus (c) BGC internis, & oppositis GCD, GDC æqualis, erit angulus BGC duplus unius GCD. Est vero angulus BCE ejusdem GCD etiam duplus, ob arcum BAE arcus ED duplum; anguli igitur BGC, BCG æquales erunt; ac ideo æqualia & latera (d) BG, BC. Rursus, ob rectas CB, CD ex hypothese æquales, anguli CBD, CDB æquales sunt; igitur æquales & anguli CBD, GCD; quare tri-
 G 3 æqua-

(a) Prop. 28. lib. 3.

(b) Prop. 33. lib. 6.

(c) Prop. 32. lib. 1.

(d) Prop. 6. lib. 1.

æquales, & communem BDC , æquiangula sunt; ac proinde (a), ut est BD ad DC , seu BG , ita CD , seu BG ad DG . Recta itaque BD secta est in G media, ac extrema ratione, estque majus segmentum BG lateri pentagoni æquale, ut jam demonstratum est. Eodem modo ostendetur, rectam CE secari in G media, ac extrema ratione, & majus segmentum EG lateri pentagoni esse æquale. Si pentagoni igitur æquilateri, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

Quia arcus BAE , AED æquales existunt, æquales quoque erunt anguli BCG , ABG . Est vero angulus BCG ipsi BGC æqualis, ut jam demonstratum est. Igitur anguli ABG , BGC inter se æquantur; ac proinde CE , BA parallele sunt (b).

PROP. IX. THEOR. IX.

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum componantur: tota recta linea extrema, ac media ratione secatur, & majus ejus segmentum est hexagoni latus.

Fig. 72.

Sit in circulo AEB recta BE latus decagoni, cui in directum addatur EF ipsi BC æqualis, ac proinde latus hexagoni eidem circulo inscripti. Dico, rectam BF sectam esse in E media, ac extrema ratione, & latus hexagoni EF esse majus segmentum.

Ducatur enim ex B per centrum C diameter AB , & jungantur CE , CF . Quoniam arcus BE

(a) Prop. 4. lib. 6.

(b) Prop. 27. lib. 1.

latus decagoni subtendit, erit is pars quinta arcus semicirculi AEB , & arcus AE quadruplus ipsius BE ; ac proinde angulus ACE (a) quadruplus anguli ECB . Est vero angulus ACE æqualis (b) ipsis CBE , CEB , seu duplus unius CEB ; igitur angulus CEB duplus est anguli ECB . Porro angulus CEB æqualis est etiam angulis EFC , ECF , seu ob rectarum CE , EF æqualitatem, duplus anguli ECF ; igitur anguli FCE , ECB æquales existunt, & totus FCB æquatur angulo FBC . Quapropter (c) FC , FB æquales sunt, & CE angulum FCB bifariam dividit; igitur (d) ut est FC , seu FB ad CB , seu FE , ita est FE ad EB ; atque ideo recta BF secta est in E media, ac extrema ratione, estque majus segmentum FE latus hexagoni. Si itaque hexagoni latus, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur, quod si recta aliqua media, ac extrema ratione secetur, ejusque majus segmentum pro radio circuli accipiatur, minus segmentum erit latus decagoni ejusdem circuli.

SCHOLIUM.

Cum sit FB secta in E media, ac extrema ratione, & FE majus segmentum; si ex FE abscindatur EG ipsi EB æqualis, erit EG , seu latus decagoni EB , majus segmentum rectæ EF (e) sectæ eadem ratione in G . Hinc si latus hexagoni circuli aliqujus extrema, ac media ratione secetur; majus illius segmentum erit latus decagoni ejusdem circuli.

G 4

PROP.

- (a) Prop. 33. lib. 6.
- (b) Prop. 32. lib. 1.
- (c) Prop. 6. lib. 1.
- (d) Prop. 3. lib. 6.
- (e) Schol. 1. prop. 5. hujus.

PROP. X. THEOR. X.

*Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur;
pentagoni latus potest & latus hexagoni,
& latus decagoni, in eodem circulo
descriptorum.*

Fig. 73. **S**it pentagonum ordinatum $A C D F G$ descriptum in circulo, cujus centrum H . Dico, quadratum lateris $A C$ æquale esse quadrato lateris hexagoni una cum quadrato lateris decagoni ejusdem circuli.

Ducatur enim diameter $A E$, & connectatur $H C$; indeque secto arcu $A C$ bifariam in B , & arcu $A B$ bifariam in I , jungantur $H B$, $H I$, $B C$, $B A$, $B L$. Quoniam arcus $A B$, $B C$ æquales sunt, erit $A B$ latus decagoni, & angulus (a) $A H B$ angulo $B H C$ æqualis; sunt quoque latera $A H$, $H M$ lateribus $C H$, $H M$ æqualia; igitur æquales erunt & bases (b) $C M$, $A M$, & anguli $C M H$, $A M H$. Eodem modo ostendetur, rectas $A I$, $I B$, & angulos $A I H$, $B I H$ æquales esse. Deinde si ex semicircumferentis $A C D E$, $A G F E$ demantur æquales arcus $A C D$, $A G F$; reliqui $D E$, $E F$ æquales erunt; quare arcus $D E$ arcui $B A$ est æqualis, seu arcus $B I$ duplus; est quoque arcus $C D$ duplus ipsius $B C$; arcus itaque $C E$ arcus $C I$ duplus existit. Igitur (a) angulus $C H E$ duplus est anguli $C H I$; at angulus $C H E$ (c) duplus est quoque anguli $C A E$. Anguli itaque $C H I$, $C A H$ inter se æquales sunt. Quapropter triangula $A C H$, $L C H$, communem angulum $A C H$ quoque habentia, æquiangularia erunt;

(a) Prop. 33. lib. 6.

(b) Prop. 4. lib. 1.

(c) Prop. 20. lib. 3.

erunt; ac proinde (a) AC erit ad CH, ut CH ad CL. Igitur rectangulum ex AC in CL (b) quadrato radii CH æquale erit. Demum cum ostensa sit recta AI ipsi BI æqualis, erunt duo latera AI, IL trianguli AIL duobus BI, IL trianguli BIL æqualia; anguli AIL, BIL pariter æquantur: ergo (c) & bases BL, LA, & anguli IBL, IAL æquales erunt; est vero angulus BAL angulo BCA æqualis, ob rectas BA, BC æquales. Igitur angulus ABL angulo ACB æqualis existit. Triangula itaque ABC, ALB, cum habeant angulos ACB, ABL æquales, & angulum CAB communem, æquiangula erunt. Igitur, erit (a) CA ad AB, ut AB ad AL; ac ideo rectangulum ex CA in AL (b) quadrato rectæ AB æquale erit. Ostensum est autem & rectangulum sub AC, CL æquale quadrato rectæ CH. Igitur rectangula sub AC, CL, & sub CA, AL simul, hoc est (d) quadratum lateris AC æquale est quadratis rectarum CH, AB. Si igitur in circulo pentagonum, &c. q. e. d.

COROLLARIA.

I. **H**inc linea recta HB, quæ ex centro H arcum quempiam AC bisecat, etiam rectam AC illi arcui subtensam bisecat ad angulos rectos.

II. Diameter circuli AE ex angulo quovis A pentagoni ducta bisecat & arcum DF, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum DF oppositum, idque ad angulos rectos per cor. 1. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatere in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, ut constat.

. SCHO.

- (a) Prop. 4. lib. 6.
- (b) Prop. 17. lib. 6.
- (c) Prop. 4. lib. 1.
- (d) Prop. 2. lib. 2.

S C H O L I U M I.

Fig. 74. **H**Æc Euclidis prop. est casus peculiaris sequentis theorematis. Sit figura quævis ordinata circulo inscripta, nimirum quadratum $ACDF$, vel hexagonum $ACDFGP$, &c. Diviso arcu AC bisariam in B , jungantur rectæ AB , BC , quæ erunt latera octogoni in una, & dodecagoni in altera figura; indeque bisecto arcu DF in E ducatur ME , atque AE interfecans CM in H . Dico, quadratum ex AC æquale esse rectangulo ex HC in CM una cum quadrato rectæ AB . Facta eadem præparatione, & argumentatione, quæ ante, eodem modo ostendetur rectangulum ex CA in AL æquale esse quadrato rectæ AB . Sed quia arcus CD duplus est arcus CB , & DE duplus BI ; erit totus arcus CE duplus totius CI ; ac proinde angulus CME duplus (a) anguli CMI . Est vero angulus CME (b) duplus quoque anguli CAH . Igitur anguli CAH , CML æquales existunt. Quapropter trigona ACH , LCM habent angulos CAH , CML æquales, & angulum ACH communem; igitur equiangula sunt; ac proinde (c), ut est AC ad CH , ita CM ad CL ; quare rectangulum (d) ex AC in CL æquale erit rectangulo ex HC in CM . Ostensum est quoque rectangulum ex AC in AL æquale esse quadrato rectæ AB . Igitur rectangula sub AC , CL , & sub CA , AL , hoc est (e) quadratum rectæ AC quadrato rectæ AB una cum rectangulo sub HC , CM contento, æquale existit. q. e. d. En vides Eucl. prop. casum peculiarem esse hujus generalis Theor. Nam cum figura circulo inscripta, pentagonum est, tunc recta AE per centrum transit; atque ideo quadratum

- (a) Prop. 33. lib. 6.
- (b) Prop. 20. lib. 3.
- (c) Prop. 4. lib. 6.
- (d) Prop. 16. lib. 6.
- (e) Prop. 2. lib. 2.

um lateris pentagoni quadrato lateris hexagoni una
um quadrato lateris decagoni ejusdem circuli equa-
est.

SCHOLIUM II.

Hoc loco e re alienum minime erit ostendere pra- Fig. 75.
xim quandam Ptolemei (a), qua una, ea-
emque opera in dato circulo, & pentagonum, &
ecagonum equilaterum describitur. In dato circulo
ABC ducatur diameter BC, & ex centro D eri-
atur DA ipsi BC perpendicularis; deinde secta
DC bisariam in E, jungatur AE, cui equalis ab-
indatur EF; ac tandem ducatur AF. Dico, AF
se. latus pentagoni, & FD latus decagoni.

Cum enim sit DC secta bisariam in E, eique ad-
ita DF; erit rectangulum ex CF in FD una cum
quadrato rectae DE, aequale quadrato (b) rectae FE,
u rectae AE, seu quadratis (c) rectarum AD, DE;
quare dempto communi quadrato rectae DE; erit re-
tangulum ex CF in FD aequale quadrato rectae
AD vel DC; ac ideo (d) FC erit ad DC, ut
AD ad DF. Igitur cum sit DC radius circuli, erit
DF (e) latus decagoni. Præterea cum sint quadrata
rectarum FD, DA, nempe lateris decagoni, & he-
xagoni equalia quadrato rectae AF, erit AF latus
pentagoni. q. e. d.

PROP.

- (a) Almagesti lib. 1. cap. 9.
(b) Prop. 6. lib. 2.
(c) Prop. 47. lib. 1.
(d) Prop. 17. lib. 6.
(e) Corol. prop. 9. hujus,

PROP. XI. THEOR. XI.

Si in circulo rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: pentagoni latus irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

Fig. 76. **S**I in circulo, diametrum rationalem habente, inscribatur (a) pentagonum $A B C D E$ æquilaterum. Dico, ejus latus $A B$ esse lineam irrationalem, quæ dicitur Minor.

Per centrum enim F duc diametros $A G$, $B H$, & jungo $A C$, $A H$; indeque abscinde $F L$, $C M$, quæ sint rectarum $F B$, $A C$ respectivè partes quartæ. Et quia diameter $B H$ ex hypothese rationalis est; rationales quoque erunt $B F$, ejusque pars quarta $F L$; ac proinde rationalis & $B L$; sunt enim ejusmodi rectæ commensurabiles longitudine rationali $B H$. Deinde quia trigona $A C I$, $A F K$ habent angulos $A I C$, $A K L$ (b) rectos, & angulum $C A I$ communem, inter se similia erunt; ac proinde (c) $C I$ erit ad $K F$, ut $C A$ ad $F A$, seu $F B$, vel ut $C M$ ad $F L$, & permutando $C I$ ad $C M$, ut $F K$ ad $F L$, & duplum $C I$, seu $C D$ ad duplum ipsius $C M$, seu $C K$, ut $F K$ ad $F L$, & componendo $C D$, & $C K$ simul ad $C K$, ut $K F$, & $F L$ simul, seu $K L$ ad $F L$; ac propterea erit, ut quadratum (d) rectæ compositæ ex $C D$, $C K$ ad quadratum rectæ $C K$, ita quadratum rectæ $K L$ ad quadratum rectæ $E L$. Quia vero si $A C$ secetur media, ac extrema ratione (ducta videlicet recta $B D$), (e) majus ejus segmentum æquale est lateri pentagoni,

(a) Prop. 11. lib. 4.

(b) Cor. 1., & 2. præc.

(c) Prop. 4. lib. 6.

(d) Prop. 22. lib. 6.

(e) Prop. 8. hujus.

ni, nimirum ipsi DC ; (a) erit quadratum rectæ compositæ ex CD , majori segmento, & CH dimidia totius AC , quintuplum quadrati rectæ CK ; quare & quadratum rectæ KL quintuplum erit quadrati rectæ FL ; rectæ itaque KL , FL saltem potentia commensurabiles sunt. Ostensa est autem FL rationalis; igitur rationalis erit & KL .

Præterea BF quadrupla est rectæ FL ; igitur BL ipsius FL quintupla erit; ac proinde quadratum ex BL erit ad quadratum ex FL , ut 25 ad 1; sed quadratum ex KL est ad quadratum rectæ FL , ut 5 ad 1; igitur quadratum rectæ BL erit ad quadratum rectæ KL , ut 5 ad 1; quia ergo quadrata rectarum BL , KL proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt BL , KL (b) longitudine incommensurabiles; ideoque cum ostensæ sint rationales, erunt rationales, potentia tantum commensurabiles; quare si ex rationali BL dematur KL rationalis, potentia tantum commensurabilis; reliqua BK (c) irrationalis erit, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL .

Sit ulterius quadratum rectæ N excessus quadrati ex BL super quadratum rectæ KL . Igitur cum sit quadratum ex BL ad quadratum ex KL , ut 5 ad 1; erit quadratum ex BL ad quadratum rectæ N , ut 5 ad 4; rectæ itaque BL , & N saltem potentia commensurabiles sunt. Ostensa est iam BL rationalis; igitur & N rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum BL , & N non habent rationem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum: erunt rectæ BL , & N (b) longitudine incommensurabiles; ac proinde rationales, potentia tantum commensurabiles. Quapropter

(a) Prop. 1. hujus.

(b) Prop. 9. lib. 10.

(c) Prop. 74. lib. 10.

propter cum rationalis BL , cujus quadratum æquale est quadrato ex KL una cum quadrato rectæ N sibi longitudine incommensurabilis, ut ostensum est, longitudine commensurabilis sit rationali BH ; erit (a) BK apotome quarta.

Demum cum cum sit (b) angulus BAH rectus, & AK ipsi BH perpendicularis; erunt triangula (c) ABH , ABK similia; ac proinde HB ad BA , ut AB ad BK ; quare rectangulum ex HB in BK æquale erit quadrato rectæ AB . Rectangulum igitur ex rationali BH , & apotome quarta BK æquale existit quadrato rectæ AB . Igitur AB (d) est irrationalis, quæ dicitur minor. Si in circulo itaque rationalem, &c. q. e. d.

SCHOLIUM.

Fig. 75. **P**onatur $CD = AD = 1$; erit quadratum rectæ $AE = \frac{5}{4}$; unde $AE = EF = \sqrt{\frac{5}{4}}$, & $FD = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$; ac proinde quadratum lateris pentagoni $AF = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ & $AF = \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$. Hinc liquet latus pentagoni AF tum longitudine, cum potentia incommensurabile esse radio DC , ac proinde diametro BC . Igitur latus pentagoni est linea irrationalis.

PROP.

- (a) Def. 4. Prop. 85. lib. 10.
- (b) Prop. 31. lib. 3.
- (c) Prop. 8. lib. 6.
- (d) Prop. 95. lib. 10.

PROP. XII. THEOR. XII.

*Si in circulo triangulum æquilaterum describatur;
trianguli latus potentia triplum est ejus
lineæ, quæ ex centro circuli
ducitur.*

Sit triangulum æquilaterum ABC circulo inscri- Fig. 77.
ptum, cujus centrum E . Dico quadratum la-
teris AB triplum esse quadrati ex semidiametro.

Ducatur enim diameter AD , quæ secat (a) &
arcum BC bifariam in D , & rectam BC bifariam,
& ad angulos rectos in I , atque jungatur BD . Et
quoniam arcus BC bifariam sectus est in D , erit
recta BD latus hexagoni, adeoque radio AE æqua-
lis. Quapropter cum sit, ob angulum ABD (b)
rectum, quadratum ex AD quadratis rectarum
 AB , BD æquale; & insuper quadratum ex AD
quadruplum quadrati rectæ AE , vel BD ; erunt
quoque quadrata rectarum AB , BD quadrupla
quadrati rectæ BD ; ac per consequens quadratum
rectæ AB triplum ejus, quod fit ex BD , vel
 AE . Si in circulo igitur triangulum æquilaterum,
&c. q. e. d.

COROLLARIA.

I. **C**um sit ejusdem quadrati rectæ AE , quadra-
tum ex AD quadruplum, & quadratum
rectæ AB triplum; erit quadratum diametri AD ad
quadratum lateris trianguli æquilateri AB , ut 4
ad 3.

II. Et quia (c) AD est ad AB , ut AB ad AI ;
erit

(a) Cor. 2. Prop. 10. hujus.

(b) Prop. 31. lib. 3.

(c) Corol. 1. prop. 8. lib. 6.

III. EUCLIDIS LIB. XIII.

erit quoque (a) quadratum ex AD ad quadratum ex AB , ut quadratum ex AB ad quadratum rectæ AI . Quare quadratum rectæ AB ad quadratum rectæ AI ita se habet, ut 4 ad 3.

III. Ex eadem proportionē deducitur quoque, esse AD ad AI in duplicata ratione AD ad AB , seu ut quadratum ex AD ad quadratum rectæ AB , vel ut 4 ad 3. Igitur AD rectæ DI quadrupla existit.

S C H O L I U M.

IN triangulis BEI , BDI , ob rectarum BD , BE æqualitatem, anguli (b) BEI , BDI æquantur; sunt æquales & anguli BIE , BID , quia recti, & latus BI commune. Igitur (c) bases EI , ID pariter æquales erunt. Semidiameter itaque ED in punto I a latere trianguli æquilateri bisariam dividitur.

D E F I N I T I O N E S.

I. **S**olida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

II. Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROP.

- (a) Prop. 22. lib. 6.
- (b) Prop. 5. lib. 1.
- (c) Prop. 26. lib. 1.

PROP. XIII. PROBL. I.

*Pyramidem constituere, & data sphaera completi,
& demonstrare, quod sphaerae diameter potentia
sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.*

SIt AB diameter sphaerae, Describe semicircu-
lum ADB , & abscinde BC , tertiam par-
tem rectae AB , atque ex C erecta CD super A
 B perpendiculari, iunge AD , DB . Deinde radio *Fig. 78.*
 FH , rectae DC aequali, describe circulum FEG ,
& in eo triangulum aequilaterum FEG , atque
ex H erige (a) HI ipsi AC parem, & ad cir-
culum FEG rectam; ac tandem duc IF , IE ,
 IG . Dico $FEGI$ esse pyramidem quaesitam.

Nam cum sit (b) AC ad CD , ut CD ad C
 B , erit AC ad CB in duplicata ratione (c) A
 C ad CD , seu ut quadratum ex AC ad qua-
dratum rectae CD . Est AC ex constructione du-
pla ipsius CB ; Igitur quadratum ex AC duplum
existet quadrati rectae CD ; ac proinde quadratum
rectae AD , quod aequale est (d) quadratis recta-
rum AC , CD , triplum erit quadrati rectae C
 D , vel HF ; sed quadrati rectae HF (e) triplum est
etiam quadratum rectae FE . Igitur quadrata re-
ctarum AD , EF aequalia erunt; ac proinde
aequales & rectae AD , EF . Deinde latera IH ,
 HF trianguli IHF aequalia posita sunt lateribus
 AC , CD trianguli ACD , anguli vero IHF
 ACD ambo recti sunt, adeoque aequales; igitur
aequales erunt & rectae IF , AD . Eodem modo
ostendetur rectas IE , IG ipsi AD aequales esse.
Quare latera omnia FI , HI , GI , EF , EG ,
 FG

(a) Prop. 12. lib. 11.

(b) Cor. 2. Prop. 8. lib. 6.

(c) Def. 7. lib. 6.

(d) Prop. 47. lib. 1. (e) Prop. 12. hujus.

FG pyramidis æqualia sunt; adeoque æqualia & triangula EFG, FIE, FIG, EIG. Est vero triangulum FEG æquilaterum ex constructione. Igitur pyramis FEGI triangulis æquilateris, ac per consequens æqualibus continetur.

Protrahatur deinde IH in K, ut sit HK ipsi GB æqualis, & punctum C super H collocetur, & AC super HI; patet rectas AB, IK congruere, utpote æquales; quare semicirculus ADB axi AB, vel IK circumductus (a) transibit per puncta E, F, G, (b) adeoque pyramis EFGI sphæræ inscripta erit.

Demum cum posita sit BC pars tertia ipsius AB, erit BA ad AC, ut 3 ad 2; sed (c) BA est ad AD, ut AD ad AC; seu (d) ratio duplicata BA ad AD, hoc est quadratum ex AB ad quadratum rectæ AD, ut BA ad AC. Igitur quadratum ex AB ad quadratum rectæ AD, vel EF ita se habet, ut 3 ad 2. Quadratum itaque diametri sphæræ sesquialterum est quadrati, quod fit ex latere pyramidis EF. Quocirca pyramidem constituimus, & data sphæra complexi sumus, &c. q. e. f.

COROLLARIA.

I. Cum ostensum sit, quadratum ex AB esse ad quadratum rectæ EF, ut 3 ad 2; & quadratum rectæ EF (e) esse ad quadratum radii FH, ut 3 ad 1; erit ex æquo quadratum ex AB ad quadratum radii FH, ut 9 ad 2.

II. Rursus AB est ad AC, seu IH, ut 3 ad 2. Igitur quadratum ex AB est ad quadratum rectæ IH, ut 9 ad 4.

SCHO.

(a) Def. 15. lib. 11.

(b) Def. præc. 1.

(c) Cor. 1. Prop. 8. lib. 6.

(d) Def. 7. lib. 6.

(e) Prop. 12. hujus.

SCHOLIUM.

SI materia aliqua confici oportet Tetraedrum, fiat triangulum æquilaterum ABC , ita ut latus AB duplum sit lateris Tetraedri construendi; indeque *Fig. 79.* sectis bisariam lateribus AB , AC , BC in punctis D , E , F , jungantur rectæ DE , DF , FE , quæ quatuor triangula æqualia, & æquilatera, ut facile ostendi potest, efformabunt; quare si complicantur triangula ADE , BDF , CFE , ita ut puncta A , B , C in unum coeant, Tetraedrum quasitum habebitur.

PROP. XIV. PROBL. II.

Octaedrum constituere, & sphaera complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIt sphaera, quæ constitutam pyramidem comprehendit, cujus diameter AB . Describe semicirculum ACB , atque a centro D erige DC *Fig. 80.* ipsi AB perpendicularem, & junge AC , CB , quæ (a) æquales inter se erunt. Deinde super lineam EF , rectæ AC parem, constitue quadratum $EFGH$, atque duc diametros EG , FH , quæ se mutuo ad angulos rectos, & in partes æquales EI , FI , HI , GI secabunt. Tandem (b) ex I in utramque partem ad planum quadrati erige perpendicularem KL , ita ut KI , IL ipsi EI æquales sint, atque junge puncta K , & L cum punctis E , F , G , H rectis KE , KF , KG , KH , LE , LG , LI , LH . Dico factum. Cum enim posita sit IK ipsi EI aqualis, erunt

H 2 duo

(a) Prop. 4. lib. 1.

(b) Prop. 12. lib. 11.

duo latera HI , IK trianguli HIK duobus HI , EI trianguli HIE æqualia, & angulus HIK , quia (a) rectus est, angulo HIE etiam recto æquatur. Igitur æquales erunt (b) & KH , EH . Eodem modo ostendetur rectas omnes EK , FK , GK , FL , GL , EL , HL lateri quadrati EH , vel AC æquales esse; adeoque octo triangula EKH , EKF , FKG , GKH , EFL , FGL , HGL , ELH æquilatera sunt, ac per consequens æqualia. Constitutum igitur jam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris, & æqualibus.

Deinde cum habeat triangulum EFG latera EF , FG lateribus AC , CB trianguli ACB ex constructione æqualia, & angulum EFG angulo ACB pariter æqualem; erunt bases (b) EG , AB quoque æquales; ac proinde æquales & KL , AB . Rursus si punctum D super I collocetur, & AD super IK , rectæ AB , KL congruent, utpote æquales; quare semicirculus ACB , axi AB , vel KL circumductus, transibit per puncta E , H , G , F ; adeoque Octaedrum spæra inscriptum erit.

Denique quadratum ex AB quadratis rectarum æqualium (c) AC , CB æquale est; igitur quadratum rectæ AB duplum erit quadrati rectæ AC , vel lateris octaedri EF . Itaque octaedrum constituimus, & spæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. q. e. f.

CO.

- (a) Def. 3. lib. 11.
 (b) Prop. 4. lib. 1.
 (c) Prop. 47. lib. 1.

COROLLARIA.

I. **Q**uoniam KL ad quadratum $EFGH$ recta ducta est; erunt recti & anguli (a) KIH , EIK ; quapropter in octaedro tres diametri EG , HF , KL se mutuo in centro sphaerae I secant, & ad angulos rectos.

II. Item plana $FKHL$, $EKGL$, quia per KL ad planum $EFGH$ rectam, transeunt, ad idem planum $EFGH$ recta erunt (b).

III. Cum sint latera EK , KG ipsis AC , CB aequalia, & EG ipsi AB aequalis; erit (c) angulus EKG angulo recto ACB pariter aequalis. Eodem modo ostendetur ceteros angulos tam quadrilateri $ELGK$, quam quadrilateri $FKHL$ rectos esse; quare haec quadrilatera aequaliter, quadrata existunt (d).

IV. Insuper cum sit quadratum diametri sphaerae ad quadratum lateris Tetraedri (e) in ea inscripti, ut 3 ad 2, & quadratum lateris octaedri ad quadratum diametri ejusdem sphaerae, ut 1 ad 2, seu ut 2 ad 4; erit ex aequo quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, ut 3 ad 4. In eadem ratione erunt horum solidorum bases, quae triangula similia sunt; ac proinde octo triangula, quibus octaedrum continetur, erunt ad quatuor triangula, quibus circumscribitur tetraedrum, ut 24 ad 16, seu ut 3 ad 2.

V. Patet quoque octaedrum dividi in duas pyramides $EFGHK$, $HEFGL$, quae, quia basin communem $EFGH$, & aequales altitudines IK , IL habent, (f) aequales sunt; atque insuper, quia plana unius aequalia, & equiangula sunt planis alterius, inter se similes (g) quoque erunt. Basis au-

H 3 tem

(a) Def. 3. lib. 11.

(b) Prop. 18. lib. 11.

(c) Prop. 8. lib. 1. (d) Def. 30. lib. 1.

(e) Prop. 13. hujus.

(f) Corol. prop. 6. lib. 12.

(g) Def. 9. lib. 11

tem communis est quadratum $EFGH$, quod subduplum est quadrati diametri sphaerae AB , ut demonstratum est.

VI. Demum, quia quadratorum latera opposita parallela sunt; parallela erunt latera EH , FG , & EK , LG ; ac proinde parallela (a) & plana KEH , GFL . Cum igitur eadem sit ratio de ceteris basibus octaedri oppositis, sequitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

S C H O L I U M.

Fig. 81. **S**I ex materia aliqua Octaedrum sit conficiendum, praestat triangulum aequilaterum ABC constituere, cujus latus AB duplum sit lateris Octaedri construendi; indeque facta divisione, ut in Schol. prop. 13. docuimus, protrahatur BC versus E , ut sit DE ipsi BC aequalis; ac tandem constructo triangulo aequilatero DFE , atque diviso, eodem modo, quo triangulum ABC , octo triangula aequilatera, & aequalia, ut schema representat, habentur, ex quibus rite complicatis octaedrum quaesitum conficietur.

PROP. XV. PROBL. III.

Cubum constituere, & sphaera complecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphaerae diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

Fig. 82. **S**It sphaerae, quae praedictas figuras comprehendit, diameter AB , circa quam describe semicirculum ACB , & ex AB aufer (b) tertiam partem BD . Deinde ex D erige DC ipsi AB perpendicularem, atque iunge AC , CB . Postea super EF , ipsi CB parem, (c) constitue quadratum

(a) Prop. 15. lib. 11.

(b) Prop. 9. lib. 6.

(c) Prop. 46. lib. 1.

tum EFHG, & ex punctis E, F, H, G erige EM, FI, HK, GL ipsi EF, vel CB pares, & ad planum EFHG rectas, quas connecte rectis MI, IK, KL, LM. Dico factum.

Quoniam enim ME, IF ad planum EH rectæ sunt, erunt anguli MEF, EFI simul duobus rectis (a) æquales; ac proinde rectæ (b) EM, FI parallelæ; sunt EM, FI etiam æquales ex constructione; igitur æquales, & parallelæ erunt (c) & MI, EF. Quapropter EMIF quadratum est, & latera omnia rectæ CB æqualia; Eodem modo ostendetur reliqua quadrilatera EMLG, MIKL, LGHK, IFHK quadrata esse, & omnia eorum latera rectæ CB æqualia; igitur quadrata omnia, quibus continetur solidum FL inter se æqualia sunt. Deinde quia rectæ LM, MI ipsis GE, EF parallelæ sunt, erunt opposita quadrata (d) LMIK, EFHG pariter parallela. Idem dic de ceteris planis oppositis. Quare cubus erit FL.

Præterea in quadratis oppositis EMLG, FIKH duc diametros EL, MG, FK, IH, per quas ducta plana EFKL, MIHG se intersectent in recta NP. Hæc diametros cubi MH, FL, EK, IG bisecabit (e) in O. Insuper cum sit EF rectis FI, FH in puncto tactus F perpendicularis; erit EF recta ad planum (f) IFHK; ac propterea angulus (a) EFK rectus. Similiter rectus erit angulus MIH. Quare cum sint latera EF, FK trianguli EFK lateribus MI, IH trianguli MIH æqualia; erit basis (g) EK basi MH pariter æqualis. Eodem modo ostendetur, reliquos cubi diametros FL, IG ipsi EK, vel MH æqua-

(a) Def. 3. lib. 11.

(b) Prop. 28. lib. 1.

(c) Prop. 33. lib. 1.

(d) Prop. 15. lib. 11.

(e) Cor. prop. 39. lib. 11.

(f) Prop. 4. lib. 11.

(g) Prop. 4. lib. 1.

H æquales esse. Igitur semidiametri omnes OM, OL, OG, OK, OH, OF, OE, OI æquales existunt, & O centrum est cubi. Quare semicirculus circa EK ex centro O descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EK, sphaeram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphaeræ diametri AB, ita demonstratur.

Quadratum ex EK æquale est quadratis rectarum (a) EF, FK; sed quadratum rectæ FK quadratis rectarum æqualium FH, HK, seu duplo quadrati rectæ FH, vel FE æquatur. Igitur quadratum ex EK triplum est quadrati rectæ EF. Deinde cum sit angulus ACB (b) rectus, & CD ipsi AB perpendicularis; erit (c) AB ad BC, ut BC ad BD; ac proinde AB ad BD in duplicata ratione (d) rectæ AB ad BC, seu ut quadratum ex AB ad quadratum ex BC. Est jam AB tripla ipsa BD; igitur quadratum ex AB triplum quoque erit quadrati rectæ BC, vel EF; Quadrata itaque rectarum AB, EK æqualia sunt; ac proinde æquales & AB, EK, diametri nimirum sphaerarum; igitur æquales & sphaeræ.

Quia vero ostensum est quadratum diametri sphaeræ EK triplum esse quadrati lateris cubi EF; manifestum est, diametrum sphaeræ potentia triplum esse lateris cubi. Quocirca cubum constitutum, & sphaera complexi sumus, &c. q.e.f.

SCHO.

(a) Prop. 47. lib. 1.

(b) Prop. 31. lib. 3.

(c) Cor. 1. prop. 8. lib. 6.

(d) Def. 7. lib. 6.

S C H O L I U M I

EX prop. 39. lib. 11. constat, rectam PN bisariam secari in O , ubi se mutuo bisecantur diametri omnes cubi, & rectas MP , IN parallelas esse, & aequales. Quapropter (a) MI , PN inter se aequales existunt, & parallelae; & cum sit angulus MIN rectus, rectus quoque erit angulus (b) INP . Eodem modo ostendetur, angulos PNF , NPE , NPM rectos esse. Igitur PN quadratis $EMLG$, $IFHK$ recta est (c). Hinc, & ex precedenti prop. deducuntur.

C O R O L L A R I A.

I. **D**iametri omnes cubi EK , FL , MH , IG inter se aequales sunt, & se mutuo bisariam secant in centro sphaerae O , in quo bisariam dividunt rectam PN , oppositorum quadratorum centra P , & N conjungentem.

II. Linea PN , quae centra oppositorum quadratorum jungit, lateri cubi EF aequalis existit, & ad opposita quadrata EL , FK recta est; ac proinde OP a centro sphaerae O in basin cubi EL perpendiculariter demissa, aequalis est dimidio lateris cubi EF , & in centrum quadrati EL cadit; item linea, quae ex centro P quadrati EL ad ipsum recta erigitur, ad centrum sphaerae O tendet.

III. Cum sit quadratum diametri sphaerae AB triplum quadrati EH , erit duplum quadrati diametri sphaerae AB sextuplum quadrati EH , seu superficiei cubi FL aequale.

IV. Insuper quadratum ex AB aequale est quadratis rectarum (d) AC , CB ; sed AC est latus Tetraedri, & CB latus cubi in eadem sphaera inscripti. Igitur quadratum diametri sphaerae AB aequale est quadratis laterum Tetraedri, & cubi simul sumtis.

V. De

(a) Prop. 33. lib. 1.

(b) Prop. 29. lib. 1.

(c) Prop. 4. lib. 11.

(d) Prop. 47. lib. 1.

V. Demum si in eadem sphaera describantur Tetraedrum, Octaedrum, & Cubus, cum sit ex cor. 2. prop. 13. hujus, quadratum altitudinis Tetraedri ad quadratum diametri sphaerae, ut 4 ad 9, & per prop. 15. hujus quadratum diametri sphaerae ad quadratum lateris cubi, ut 3 ad 1, seu ut 9 ad 3; erit ordinando quadratum altitudinis Tetraedri ad quadratum lateris Cubi, ut 4 ad 3. Igitur, cum sit etiam per cor. 4. prop. 14. quadratum lateris Tetraedri ad quadratum lateris Octaedri, ut 4 ad 3; erit quadratum altitudinis Tetraedri ad quadratum lateris Cubi, ut quadratum lateris Tetraedri ad quadratum lateris Octaedri; ac proinde altitudo Tetraedri ad latus Cubi ita se habet, ut latus Tetraedri ad latus Octaedri.

SCHOLIUM II.

Fig. 83.

Quod si ex aliqua materia constituentur sex quadrata inter se equalia, disponanturque, ut schema representat; facile, rite complicatis quadratis, cubus secundum totam soliditatem componetur.

PROP. XVI. PROBL. IV.

Icosaedrum constituere, & sphaera complecti, qua & ante dictas figuras: & demonstrare, quod Icosaedri latus irrationalis est linea, quae vocatur Minor.

Fig. 84.

Sit sphaerae, quae praedictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam describe semicirculum ACB, atque ex AB abscinde (a) quintam partem BD, nec non ex D erige DC ipsi AB perpendicularem, ac junge AC, CB; deinde intervallo FE, ipsi BC aequali, describe circulum EKH, cui inscribe (b) pentagonum aequilaterum EKIHG. Biseca arcus EK, KI, IH, HG, GE in e, d, c, b, a, ac junge rectas Ee, eK, Kd, &c. latera nempe decagoni. Insuper erige (c) FO, aM, bN, cP, dQ

(a) Prop. 9. lib. 6.

(b) Prop. 11. lib. 4.

(c) Prop. 12. lib. 11.

dQ , eL ipsi FE , vel BC pares, & ad planum circuli EKH rectas; & connecte ML , LQ , QP , PN , NM ; item EL , EM , KL , KQ , IQ , IP , HP , HN , GN , GM . Demum, producta FO , sume Om , Fn lateri decagoni Ee æquales, atque duc rectas (omnes tamen ad confusionem vitandam non duximus) nK , nI , nH , nG , nE , ac mM , mN , mP , mQ , mL . Dico factum.

Quoniam enim FO , eL rectæ positæ sunt ad planum EKH , erunt inter se (a) parallelæ; sunt jam ex constructione æquales; igitur æquales erunt, & parallelæ (b) Fe , OL eas connectentes. Simili ratiocinio ostendetur, Fd , OQ ; Fc , OP ; Fb , ON ; Fa , OM æquales, & parallelas esse. Quare rectæ omnes OL , OM , ON , OP , OQ radio FE , vel rectæ BC æquales existunt. Deinde cum sint rectæ OL , OQ ipsis Fe , Fd respectivé parallelæ, & æquales; erunt (c) anguli LOQ , eFd pariter æquales; ac proinde æquales & (d) LQ , ed , bases triangulorum LOQ , eFd ; & planum (e) LOQ plano eFd parallelum.

Rursus cum sint Fe , OL parallelæ, & angulus (f) OFe rectus; rectus quoque erit angulus FOL . Eodem modo ostendetur, rectam FO rectis OM , ON , OP , OQ se mutuo in O tangentibus ad rectos angulos insistere; quare rectæ omnes OL , OM , ON , OP , OQ (g) in uno sunt plano. Ostensum est autem planum LOQ plano eFd , seu plano circuli EKH parallelum esse. Igitur planum, quod per rectas OL , OM , ON , OP , OQ transit, plano EKH parallelum existit. Sunt autem in hoc plano rectæ OL , OM , ON , &c. inter se æqua-

(a) Prop. 6. lib. II.

(b) Prop. 33. lib. I.

(d) Prop. 4. lib. I.

(f) Def. 3. lib. II.

(c) Prop. 10. lib. II.

(e) Prop. 15. lib. II.

(g) Prop. 5. lib. II.

æquales. Igitur, si centro O , intervallo OL , circulus describatur, is per L , M , N , P , Q transibit, & æqualis, ac parallelus erit circulo EKH ; ac proinde cum sit de latus pentagoni circuli EKH , erit quoque LQ latus pentagoni circuli LQN . Eodem modo ostendetur, QP , PN , NM , ML lateri pentagoni ed , vel EK æquales esse; Igitur $LMNPQ$ est pentagonum æquilaterum.

Præterea ob angulum LeE (a) rectum, quadratum ex EL æquale est quadratis rectarum (b) Le , eE , seu quadrato lateris decagoni Ee una cum quadrato lateris hexagoni Le , vel FE . Igitur EL (c) lateri pentagoni EK , vel LQ æquale erit. Eadem ratione reliquas EM , MG , GN , NH , &c. lateri pentagoni LQ , vel KE æquales esse ostendetur. Quare decem triangula QKL , KEL , LEM , EMG , &c. æqualia, & æquilatera existunt.

Quoniam itaque angulus MOm rectus est, & Om ex constructione lateri decagoni Ee æqualis; erit quadratum ex Mm quadratis rectarum MO , Om , seu quadrato lateris hexagoni una cum quadrato lateris decagoni æquale. Igitur Mm latus pentagoni (c); ac proinde recta Mm ipsi MN , vel ML , &c. æqualis erit. Eadem ratione mN , mP , mQ , mL , item nI , nK , nE , nG , nH ipsi LQ , vel EK , vel KQ , &c. æquales existunt. Ergo decem alia triangula constituta sunt MmN , NmP , PmQ , QmL , LmM , KnI , KnE , EnG , GnH , KnI æquilatera, & æqualia tam sibi mutuo, quam decem prioribus; ac proinde factum est Icosædron, quod dico comprehendi sphaera diametri AB .

Bisecta enim FO in puncto r , duc rectas rE , rM , rN . Cum sint duo latera MO , Or ,
trian.

(a) Def. 3. lib. 11.

(b) Prop. 47. lib. 1.

[c] Prop. 10. hujus.

ET SOLIDORUM III. 125

trianguli $MO r$ duobus NO , Or trianguli $NO r$ æqualia, & anguli $MO r$, $NO r$ etiam æquales, quia recti; æquales (a) quoque erunt Mr , & N . Similiter cum ostensum sit EF ipsi OM æqualem esse, erunt duo latera EF , Fr trianguli $E Fr$ duobus MO , Or trianguli $MO r$ æqualia; sunt quoque æquales anguli $E Fr$, $MO r$, quia recti. Igitur æquales erunt & Er , Mr . Eodem modo ostendetur, rectas omnes ex r ad decem angulos $E, G, H, I, K, L, M, N, P, Q$ ductas, inter se æquales existere. Quoniam vero OF lateri hexagoni, & Fn lateri decagoni æqualis posita est, erit (b) nO divisa in F media, ac extrema ratione, & majus segmentum FO bifariam sectum erit in r . Quare quadratum ex nr (c) quintuplum erit quadrati rectæ Fr . At cum sit FE ipsi FO æqualis, seu dupla ipsius Fr , erit quadratum ex EF quadruplum quadrati rectæ Fr ; ac ideo quadratum rectæ Er quintuplum quadrati rectæ Fr . Quadrata itaque rectarum Er , & nr æqualia existunt, ac proinde æquales & Er , & nr . Sunt quoque, ob rF , Fn ipsis rO , Om respectivæ æquales ex constructione, æquales nr , & rm . Rectæ igitur, quæ ex r ad angulos omnes Icosaedri ducuntur, æquales inter se existunt; ac propterea sphaera circa diametrum nm descripta ex centro r per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc sphaeram dico æqualem esse sphaeræ diametri AB .
Nam cum sit (d) nr ad Fr , ut nm dupla ipsius nr ad FO duplam ipsius Fr ; erit quoque (e) quadratum rectæ nr ad quadratum rectæ Fr , ut quadratum ex nm ad quadratum ex FO ; sed quadratum ex nr quintuplum est quadrati rectæ Fr , ut jam demonstratum est. Igitur quadratum ex nm quintuplum quoque erit quadrati rectæ FO ,

(a) Prop. 4. lib. 1.

(b) Prop. 9. hujus.

(d) Prop. 15. lib. 5.

(c) Prop. 3. hujus.

(e) Prop. 22. lib. 6.

FO, seu BC. Porro, ob angulum (a) ACB rectum, & rectam CD ipsi AB perpendicularem, (b) AB ad BC est, ut BC ad BD. Igitur AB ad BD ita se habet, ut quadratum ex AB ad quadratum ex BC. Est vero AB ipsius BD quintupla. Quadratum ergo ex AB quintuplum quoque erit quadrati rectæ BC; ac propterea quadrata rectarum AB, mn æqualia erunt, & AB, mn æquales; adeoque æquales & sphaeræ.

Cum demum ostensum sit quadratum ex rationali AB quintuplum esse quadrati rectæ BC, vel FE, erunt AB, EF saltem potentia commensurabiles. Est vero AB rationalis. Igitur rationalis erit & EF; ac per consequens duplum EF, seu diameter circuli EKH rationalis pariter existet. Igitur latus pentagoni EK., seu latus Icosædri (c) irrationalis linea est, quæ dicitur Minor. Icosædri itaque constituimus, & sphaera compleximus, qua & ante prædictas figuras, &c. q. e. f.

COROLLARIA.

I. **H** Inc deducitur, sphaeræ diametrum AB esse potentia quintuplum EF, hoc est semidiametri circuli EKH quinque latera Icosædri ambientis.

II. Item insertur, sphaeræ diametrum mn compositum esse ex latere hexagoni, hoc est ex semidiametro FO, & duobus lateribus Fn, mO decagoni circuli EKH, quinque latera Icosædri circumscribentis.

III. Colligitur demum latera Icosædri opposita, qualia sunt LM, IH, esse parallela. Nam si mente concipiantur ductæ ae, eH, ob arcus abH, edI æquales, æquales (d) quoque erunt anguli aeH, eHI;

(a) Prop. 31. lib. 3.

(b) Cor. 1. prop. 8. lib. 6.

(c) Prop. 11. hujus.

(d) Prop. 33. lib. 6.

HI; ac proinde (a) ae , IH parallelae. Sed eL , aM parallelae sunt, & aequales. Igitur etiam LM , ae parallelae erunt; (b) quare parallelae & LM , IH . Eadem est ratio de ceteris lateribus oppositis.

SCHOLIUM.

Quod si ex materia aliqua viginti triangula aequa- Fig. 85.
lia, & aequilatera, ut schema representat,
conficiantur; ex his, rite complicatis, Icosae-
drum, secundum totam suam soliditatem, com-
ponetur.

PROP. XVII. PROBL. V.

Dodecaedrum constituere, & sphaera complecti, quae
& praedictas figuras, & demonstrare, quod
dodecaedri latus irrationalis est linea, quae
vocatur Apotome.

Sit BE cubus datae sphaerae inscriptus, & BD Fig. 86.
una cubi basis, quae quadratum est, cui insi-
stat ad angulos rectos aliud aequale AE. Bisecen-
tur eorum latera omnia in punctis I, H, G, K,
L, M, N, rectaeque jungantur IG, HK, KM,
LN se mutuo in centrīs quadratorum O, & P
secantes; erunt OK, KP, PL, PN inter se
aequales. Secetur deinde (c) OK in Q media,
ac extrema ratione, & majus segmentum sit OQ,
atque sumtis PR, PS ipsi OQ aequalibus, erunt
quoque PL, PN in R, & S eadem ratione se-
ctae, & RL, SN ipsi QK aequales. Erigantur
postea ex punctis R, & S lineae RU, SX ad
quadratum AE rectae, & QT recta ad quadra-
tum BD, sintque QT, RU, SX ipsi OQ, vel
PR, aut PS aequales. Junctis demum AX, XU,
UD,

(a) Prop. 27. lib. 1.

(b) Prop. 9. lib. 11.

(c) Prop. 30. lib. 6.

ipsis AK, KQ æqualia, & anguli ANS, AKQ recti, adeoque æquales, erunt æquales (a) & AS, AQ . Item duo latera AS, SX trianguli ASX duobus AQ, QT trianguli AQT æqualia sunt: sunt quoque anguli ASX, AQT (b) recti; igitur bases AX, AT æquales erunt. Eodem modo ostendetur, rectas VD, DT ipsi AT , vel AX æquales esse. Ut autem ostendatur latus VX reliquis lateribus pentagoni æquale esse, ita procedendum est. Quadrata rectarum PL, LR , seu rectarum DL, LR , hoc est (c) quadratum rectæ DR triplum est (d) quadrati rectæ RP , vel VY , addito communi quadrato rectæ RV , vel PR , erunt quadrata rectarum DR, RV , seu ob angulum DRV rectum (b), quadratum rectæ DV , quadruplum quadrati rectæ PR , vel VY ; sed quadratum ex VX , ob VX duplam ipsius YV , quadruplum quoque est quadrati ex VY ; igitur quadrata rectarum VX, VD æqualia existunt; ac proinde æquales erunt VX, VD . Pentagonum itaque æquilaterum est. Quod sit pariter æquiangulum, sic ostenditur.

Cum NP secta sit in S media, ac extrema ratione, eique addita PR majori segmento PS æquali; erit quoque RN (e) eodem modo secta, & PN majus segmentum. Igitur quadrata rectarum NR, RP , seu NR, RV simul (d) tripla erunt quadrati rectæ PN , vel AN ; quare quadrata rectarum VR, RN, NA , seu rectarum VR, RA , hoc est, ob angulum rectum ARV , quadratum ex AV quadruplum est quadrati rectæ AN ; sed quadratum ex AD , ipsi AF æquali quadruplum quoque est quadrati rectæ AN . Ergo

I qua-

[a] Prop. 4. lib. 1.

[b] Def. 3. lib. 11.

[c] Prop. 47. lib. 1.

[d] Prop. 4. hujus.

[e] Prop. 5. hujus.

quadrata rectarum AD , AV æqualia sunt; ac proinde æquales & AD , AV . Eodem modo ostendetur, ductis SD , DX , rectas DX , DA æquales esse. Quapropter cum sint tam latera, quam bases triangulorum AXV , XVD , ATD æquales, æquales erunt & anguli AXV , XVD , DTA (a). In pentagono itaque æquilatere tres anguli æquales sunt. Igitur (b) æquiangulum est. Si eadem metodo, qua constitutum est pentagonum $AXVDT$, alia undecim similia pentagona, reliqua undecim cubi latera tangentia, construuntur, constitutum erit dodecaedrum. Quod quidem sphaera comprehenditur, qua & cubus, & præcedentes figurae, ita perspicuum fiet.

Cum enim sit (c) PZ dimidium lateris cubi, hoc est ipsi AN , vel NP æqualis, & PY æqualis ipsi PR , vel PS , aut YX ; erit YZ secunda in P media, ac extrema ratione, quemadmodum NR in eodem puncto P , & ZP majus segmentum; quare quadrata rectarum (d) ZY , YP , seu rectarum ZY , YX , seu ob angulum rectum ZYX , quadratum ex ZX triplum erit quadrati majoris segmenti PZ , seu AN . Sed, ductis semidiametris cubi AZ , BZ , DZ , &c., quadratum semidiametri cubi AZ , vel sphaeræ, cui inscriptus est cubus, triplum quoque est quadrati semilateris cubi AN (quadratum enim diametri sphaeræ, vel cubi (e) triplum est quadrati totius lateris AF); igitur quadratum ex ZX quadrato semidiametri cubi AZ , seu radii sphaeræ æquale est; ac proinde AZ , ZX æquales existunt.

Eo.

- (a) Prop. 8. lib. 1.
- (b) Prop. 7. hujus.
- (c) Cor. 2. Prop. 15. hujus.
- (d) Prop. 4. hujus.
- (e) Prop. 15. hujus.

Eodem modo ostendetur, ducta ZV , hanc æqualem esse ipsi ZD , vel ZA .

Ut autem ostendatur, ZT semidiametro sphæ- *Fig. 87.*
ræ AZ æqualem esse, circa pentagonum æquila-
terum, & æquiangulum $AXVDT$ describatur
circulus $AXVDT$, cui demittatur ex centro
sphære Z perpendicularis ZP . Junctis deinde PA ,
 PX , PV , PD , PT , erunt anguli VPZ ,
 DPZ , TPZ , APZ , XPZ (a) recti; ac pro-
inde quadrata rectarum AP , PZ æqualia erunt (b)
quadrato rectæ AZ ; item quadrata rectarum XP ,
 PZ æqualia quadrato ex XZ . Ostenſæ vero sunt
 AZ , XZ æquales; igitur quadrata rectarum
 AP , PZ quadratis rectarum XP , PZ æqualia
erunt; & demto communi quadrato ex PZ , re-
liqua quadrata ex AP , XP pariter æqualia erunt;
ac ideo æquales & AP , XP . Eodem ratiocinio
demonſtrabitur VP ipsi AP æqualem esse. Qua-
propter P (c) centrum est circuli AVD , & PD ,
 PT , PA , &c. æquales existunt. Cum itaque
sint TP , PZ ipsis AP , PZ æqualia, & anguli
 TPZ , APZ æquales, quia recti, æquales quo-
que erunt TZ , AZ . Quare sphæra complectens
cubum ex centro Z descripta, comprehendet
pentagonum quoque $AXVDT$; eodem modo &
reliqua pentagona dodecaedri; ac ideo eadem
sphæra comprehendetur dodecaedrum, qua cubus
 BE .

Denique cum sit NP ad PS , ut PS ad SN ,
erit quoque NL dupla ipsius NP (d) ad SR *Fig. 86.*
ipsius SP pariter dupla, ut SR ad duplam ipsius
 NS , nempe ad compositam ex NS , RL . Re-
cta igitur SR est majus segmentum rectæ LN ,
seu lateris cubi, media, ac extrema ratione secti.

I 2

Sed

- (a) Def. 3. lib. 11.
- (b) Prop. 47. lib. 1.
- (c) Prop. 9. lib. 3.
- (d) Prop. 15. lib. 5.

Sed latus cubi rationalis linea est, potentia commensurabilis diametro sphaerae, quae rationalis ponitur. Igitur majus segmentum RS (a), hoc est dodecaedri latus VX , illi aequale, irrationalis est linea, quae Apotome nuncupatur. Dodecaedrum itaque constitutum, & sphaera complexi sumus, qua, &c. q. e. d.

COROLLARIA.

I. **H**inc, si latus cubi extrema, ac media ratione secetur, majus segmentum erit latus dodecaedri in eadem sphaera inscripti.

II. Patet quoque latus cubi aequale esse lineae rectae subtendenti angulum pentagoni dodecaedri eadem sphaera comprehensi. Nam AD rectae AV , vel DX aequalem esse demonstravimus.

III. Si AD media, ac extrema ratione secetur, majus segmentum erit lateri pentagoni DT (b) aequale; & recta composita (c) ex AD , DT etiam secta erit eadem ratione, cujus majus segmentum erit AD , minus vero DT . Quare si recta media, ac extrema ratione secta minus segmentum fuerit latus dodecaedri, erit majus segmentum latus cubi ejusdem sphaerae.

IV. Si lateri cubi CB aliud pentagonum dodecaedri applicatum intelligatur, quemadmodum AX - VDT lateri AD applicavimus; latus infimum illius ipsi BC parallelum erit, ut VX parallelum est ipsi AD . Quare, ob parallelas AD , BC , latus infimum illius parallelum erit lateri VX . Idem dic in aliis pentagonis simili modo lateribus cubi applicatis.

V. Praeterea recta ZY , quae per centrum sphaerae Z , & quadrati P transit, latus dodecaedri VX bis-

(a) Prop. 6. hujus.

(b) Prop. 8. hujus.

(c) Prop. 5. hujus.

fariam, & ad angulos rectos dividit. Quare si protrahatur YZ ex parte Z , per centrum quadrati ipsi AE oppositi transibit, atque ideo bisariam, & ad angulos rectos dividet quoque latus dodecaedri, quod ipsi VX parallelum est. Recta igitur, quae puncta media parallelorum laterum dodecaedri jungit, lateribus perpendicularis est, & dupla existit ipsius YZ , seu dupla ipsarum YP , PZ , seu aequalis est ipsis RS , AF ; ac ideo majus segmentum hujus rectae per cor. 3 extrema, ac media ratione sectae, erit lateri cubi AF , & minus lateri dodecaedri VX aequale. Idem dic de rectis bisariam alia parallela latera dodecaedri dividantibus, quae iccirco inter se aequales erunt.

VI. Intelligatur demum ducta OZ . Quia PZ , OK ad idem planum AE rectae sunt, erunt PZ , OK inter se parallelae. Sunt quoque aequales. Igitur aequales, & parallelae erunt ZO , PK . Quapropter cum angulus KPZ rectus sit, rectus erit & angulus PZO . Rectae itaque, quae centra quadratorum cubi jungunt cum sphaerae centro in hoc angulum rectum constituunt. Quia vero tres aequales rectae, quae bisariam, & ad angulos rectos opposita latera parallela dodecaedri secant, per centra quadratorum cubi, & centrum sphaerae transeunt; manifestum est, hujusmodi rectas se mutuo bisariam, & ad angulos rectos in centro sphaerae secari.

SCHOLIUM.

SI ex materia aliqua duodecim pentagona aequilatera, ac equiangulara inter se aequalia construantur, disponanturque, ut schema indicat; ex his, rite complicatis, dodecaedrum, secundum totam soliditatem, efformabitur. Fig. 88

PROP. XVIII. PROBL. VI.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

Fig. 89. Sit AB diameter sphaerae, circa quam describe semicirculum ACB . Sume AD , ut sit dimidia diametri AB , & AE , ut sit pars tertia ejusdem AB , atque erige super AB perpendiculares DC , EF , & BK ipsi AB æqualem. Junge AF , AC , DK , BF , BC , & ex L demitte LI ad AB perpendicularem. Deinde, sumta GD ipsi DI æquali, erige GH super AB pariter perpendicularem, quæ ipsi IL æqualis erit; atque duc AH . Demum (a) seca AF in O media, ac extrema ratione, sitque majus segmentum AO . Dico BF esse latus pyramidis, seu tetraedri, AC , vel BC latus octaedri, AF latus cubi, AO latus dodecaedri, & tandem AH latus icosaedri.

Cum enim angulus AFB (b) rectus sit, & EF ipsi AB perpendicularis; erit (c) AB ad BF , ut BF ad BE ; adeoque AB ad BE in duplicata ratione (d) ipsius AB ad BF , vel ut quadratum ex AB ad quadratum ex BF . Est vero ex constructione AB ad BE , ut 3 ad 2. Igitur quadratum ex AB ad quadratum rectæ BF erit quoque, ut 3 ad 2; ac per consequens BF (e) latus tetraedri. Eodem modo quadratum ex AB est ad illud, quod fit ex BC , ut AB ad BD , seu ut 2 ad 1. Quare BC (f) latus octaedri. Similiter erit quadratum ex AB ad quadratum rectæ AF , ut
BA

- (a) Prop. 30. lib. 6.
- (b) Prop. 31. lib. 3.
- (c) Cor. 1. prop. 8. lib. 6.
- (d) Def. 7. lib. 6.
- (e) Prop. 13. hujus.
- (f) Prop. 14. hujus.

BA ad AE, seu ut 3 ad 1. Igitur AF erit (a) latus cubi. Deinde cum sit latus cubi AF in O media, ac extrema ratione sectum, erit (b) majus segmentum AO latus dodecaedri. Denique cum positæ sint KB, LI eidem AB perpendiculares, erunt KB, LI inter se parallelæ; quapropter (c) KB erit ad BD, ut LI ad DI. Est jam KB dupla ipsi BD. Igitur ipsius DI dupla erit & LI. Quare LI, GI æquales existunt. Præterea cum quadratum ex LD, seu BD æquale sit quadratis rectarum DI, IL; erit quadratum ex BD quintuplum quadrati rectæ DI; ac proinde quadratum diametri AB quintuplum quoque erit quadrati rectæ GI. Itaque GI, vel LI, aut GH (d) est radius circuli pentagonum icosaedri circumscribentis, & AG, vel IB (e) est latus decagoni ejusdem circuli. Unde AH (f) erit latus pentagoni, ac ideo (g) latus icosaedri. Si accipiaturs itaque quadratum diametri sphaeræ AB partium 6, erit quadratum lateris tetraedri 4, octaedri 3, & cubi 2. Quapropter diameter sphaeræ, & latera dictarum figurarum commensurabilia sunt; atque adeo cum diameter sphaeræ AB ponatur esse rationalis, erunt quoque prædicta latera rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, erunt diameter sphaeræ AB, & latera prædictarum figurarum lineæ longitudine incommensurabiles, ac proinde rationales, potentia tantum commensurabiles.

Deinde quia latera icosaedri, & dodecaedri sunt lineæ irrationales, illud nimirum Minor, hoc ve-

I 4

ro

- (a) Prop. 15. hujus.
- (b) Cor. 1. prop. 17. hujus.
- (c) Prop. 4. lib. 6.
- (d) Corol. 1. prop. 16. hujus.
- (e) Cor. 2. prop. 16. hujus.
- (f) Prop. 10. hujus.
- (g) Prop. 16. hujus.

ro Apotome, ut jam demonstratum est; sequitur hujusmodi latera prædictarum figurarum lateribus tum longitudine, cum potentia incommensurabilia esse; alioquin cum latera prædictarum figurarum diametro sphaerae AB sint linearum commensurabiles; erunt & ipsa dicto diametro AB , quæ rationalis posita est, linearum commensurabiles; ac proinde rationales; quod repugnat. Ulterius Minor, & Apotome (a) sunt linearum irrationales prorsus inter se differentes, ita ut neutra sit eadem alteri. Quare latera icosaedri, & dodecaedri inter se quoque incommensurabilia existunt.

Demum cum sit arcus BF major ipso BC , erit latus tetraedri BF majus quoque lateri octaedri BC . Eadem ratione latus octaedri AC majus est latere cubi AF . Similiter diameter sphaerae AB radio circuli pentagonum icosaedri ambientis GH una cum duobus lateribus decagoni ejusdem circuli, nempe duplo rectæ AG æquale existit (b). Quare cum radius GH major sit latere decagoni AG ; erit AG minor tertia parte diametri AB , hoc est minor AE . Igitur GH longius distat a centro D , quam EF , ac per consequens arcus AF major est arcu AH , & latus cubi AF majus latere icosaedri AH . Tandem cum sit AO majus segmentum rectæ AF sectæ in O media, ac extrema ratione; erit rectangulum ex FA , & AO , majus rectangulo ex AF , & FO , seu majus (c) quadrato rectæ AO . Quare rectangula sub FA , AO , & sub AF , FO simul, seu (d) quadratum rectæ AF majus erit duplo quadrati rectæ AO ; atque ideo triplum quadrati ex AF , seu quadratum ex AB sextuplo quadrati ex AO majus quoque existet. Est vero qua-

(a) Schol. Prop. 112. lib. 10.

(b) Cor. 2. Prop. 16. hujus.

(c) Prop. 17. lib. 6.

(d) Prop. 2. lib. 2.

quadratum ex AB quintuplum quadrati rectæ GH (a). Igitur quinque quadrata ex GH majora erunt sex quadratis rectæ AO ; ac proinde unum quadratum rectæ GH majus erit uno quadrato rectæ AO , & GH major ipsa AO , & multo magis AH , latus videlicet icosaedri, major erit, quam AO , latus dodecaedri. Latera itaque quinque figurarum exposuimus, & inter se comparavimus. q. e. f.

S C H O L I U M.

PRæter jam dictas quinque figuras solidas regulares, aliam, quæ planis æquilateris, ac æquiangulis, inter se æqualibus, contineatur, constitui non posse, facile evincitur. Nam ad anguli solidi constitutionem saltem tres anguli plani requiruntur, iique omnes (b) simul quatuor rectis minores esse debent. Atqui 3, 4, 5 anguli trianguli æquilateri quatuor rectis minores sunt; unusquisque enim duas tertias partes unius recti continet. Ex his itaque angulus solidus constitui potest. Ex tribus autem triangulis æquilateris, angulus solidus pyramidis construi potest; ex quatuor, angulus solidus octaedri; ex quinque angulus solidus icosaedri.

Quia vero 6 anguli trianguli æquilateri conficiunt 4 rectos; patet, 6 angulos trianguli æquilateri in unum punctum coire non posse, ut angulum solidum constituent. Idcirco ex triangulis æquilateris, & æqualibus aliud solidum regulare, præter tetraedrum, octaedrum, & icosaedrum construi nequit.

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici solidum angulum cubi, manifestum est. Quoniam vero quatuor quadrata angulum solidum constituere nequeunt; liquet, nullum aliud solidum regulare, præter cubum, quadrata constituere posse.

Ul-

(a) Cor. 1. Prop. 16. hujus.

(b) Prop. 21. lib. 11.

Ulterius tres anguli pentagonici quatuor rectis minores existunt; angulus enim pentagoni regularis sex quintas partes unius recti continet. Poterunt igitur tria pentagona in unum punctum coeuntia solidum angulum dodecaedri constituere. Quia vero quatuor anguli pentagonici quatuor rectis sunt maiores; sequitur a quatuor pentagonis in unum punctum coeuntibus, & multo minus a pluribus, angulus solidus constitui non posse. Hinc liquet, nullum aliud solidum regulare, præter dodecaedrum, ex pentagonis æquilateris, ac æquiangularis inter se æqualibus confici posse.

Demum cum tres anguli hexagonici quatuor rectis æquales sint; unus enim facit 4 tertias unius recti, ac ideo tres faciunt 12 tertias recti, seu 4 rectos. Sequitur ex tribus hexagonis, & multo minus a pluribus, angulus solidus constitui minime posse. Eadem ratione tres anguli reliquarum figurarum hexagono majorum, ut heptagoni, octagoni, &c. & multo minus plures angulum solidum constituere nequeunt. Hinc manifestum est, figuras ordinatas omnes, præter triangulum æquilaterum, quadratum, & pentagonum ordinatum ad angulum solidum constituendum minime esse accommodatas. Quapropter præter dicta 5, alia ordinata corpora dari nequeunt.



EUCLIDIS

Elementum quartumdecimum, & solidorum quartum.

PROP. I. THEOR. I.

Quæ ex centro circuli cujuscumque in pentagoni eidem circulo inscripti latus, perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.



IT a centro A circuli BCEF demissa AD lateri pentagoni BE perpendicularis. Dico, rectam AD dimidiam esse lineæ compositæ ex latere hexagoni, & decagoni ejusdem circuli.

Produc enim AD ad utramque partem, ut sit Fig. 90. CF diameter circuli BEF, atque sumta DH ipsi CD æquali, junge AB, BH, BC, CE. Et quoniam perpendicularis AD secat BE (a) bifariam; erunt latera BD, DC trianguli BDC lateribus ED, DC trianguli EDC æqualia; sunt æquales quoque anguli BDC, EDC, quia re-
cti.

(a) Prop. 3. lib. 3.

Si. Igitur æquales erunt (a) & bases BC, CE , ac proinde æquales & arcus BC, CE . Quare BC erit latus decagoni, & arcus BF quadruplus arcus BC . Quapropter angulus BAF (b) quadruplus existet anguli CAB . Est vero angulus BAF duplus (c) anguli BCA . Igitur angulus ACB duplus quoque erit anguli BAC . Porro cum sint latera CD, DB trianguli CDB lateribus HD, DB trianguli HDB æqualia, & anguli CDB, HDB etiam æquales, nempe recti; æquales erunt & bases (a) BC, BH , & anguli HCB, BHC . Angulus itaque BHC duplus est anguli DAB . Atqui angulus BHC externus æqualis est internis HAB, AEH . Igitur anguli HBA, HAB æquales sunt; ac proinde æquales (d) AH, HB , seu AH, CB ; quare additis æqualibus DH, DC ; fiet AD æqualis duabus DC, CB simul; & rursus addita communi AD , erit dupla rectæ AD æqualis ipsis AC, CB simul; ac propterea AD dimidia duarum simul AC, CB , nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ itaque ex centro circuli, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

EX his deducitur, rectam a centro circuli ad lineam in eodem circulo aptatam, perpendiculariter demissam, arcum a dicta recta subtensam bisariam secare. Ostensum enim est, rectam AD , que ex centro A perpendicularis est ad BE , dividere arcum BE bisariam in C .

PROP.

- (a) Prop. 4. lib. 1.
- (b) Prop. 33. lib. 6.
- (c) Prop. 20. lib. 3.
- (d) Prop. 6. lib. 1.

PROP. II. THEOR. II.

*Si binæ rectæ lineæ extrema , ac media ratione
secantur ; ipsæ similiter secabuntur , in
easdem scilicet proportionēs .*

Sint rectæ AB , CD in E , & F media , ac *Fig. 91.*
extrema ratione sectæ. Dico , ipsas AB , CD
proportionaliter sectas esse in E , & F , nempe
 AB esse ad CD , ut AE ad CF , vel ut EB ad
 FD ; item AE esse ad EB , ut CF ad FD .

Protrahantur enim AB , CD versus G , & H ,
ut sint BG , DH ipsis EB , FD respectivæ æqua-
les . Quoniam (a) rectangulum ex AB in BE
æquale est quadrato rectæ AE , & quadratum ex
 AG (b) æquale quadruplo rectanguli ex AB in
 BE una cum quadrato rectæ AE ; erit quadra-
tum ex AG quintuplum quadrati rectæ AE . Eo-
dem modo ostendetur , quadratum ex CH quin-
tuplum esse quadrati rectæ CF . Quamobrem erit
quadratum ex AG ad quadratum ex CH , ut
quintuplum quadrati ex AE ad quintuplum qua-
drati rectæ CF , seu (c) ut quadratum rectæ AE
ad quadratum rectæ CF ; ac per consequens (d)
 AG erit ad CH , ut AE ad CF , atque per-
mutando AG ad AE , ut CH ad CF , & com-
ponendo , ut AG , & AE simul , seu dupla ipsius AB
ad AE , ita CH , & CF simul , nempe dupla
ipsius CD ad CF ; & rursus permutando , ut du-
pla ipsius AB ad duplam ipsius CD , seu (e)
 AB ad CD , ita AE ad CF ; ac proinde cum
sit , ut tota AB ad totam CD , ita AE ablata
ad ablatam CF ; erit & reliqua (e) EB ad reliquam
 FD ,

(a) Prop. 17. lib. 6.

(b) Prop. 8. lib. 2.

(c) Prop. 15. lib. 5.

(d) Prop. 22. lib. 6.

(e) Prop. 19. lib. 5.

FD, ut tota AB ad totam CD. Quare ut AE ad CF, ita erit EB ad FD, cum utraque ratio eadem sit, ac ratio AB ad CD, & permutando, AE erit ad EB, ut CF ad FD. Si binæ itaque rectæ lineæ, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

Fig. 90. SI ex centro A circuli BEF demittatur ad EB, latus pentagoni ejusdem circuli, perpendicularis AD, atque hæc extrema, ac media ratione secetur in O. Dico, majus segmentum AO dimidio radii, & minus OD dimidio lateris decagoni ejusdem circuli æquale existere.

Quoniam enim perpendicularis AD producta (a) bisariam secat arcum EB in C; si jungatur BC, erit BC latus decagoni circuli BEF. Quare recta composita ex AC, & CB secunda erit extrema (b), ac media ratione, ejusque majus segmentum erit AC. Igitur recta composita ex AC, & CB erit ad AD, ut AC ad AO, & ut BC ad OD. Est vero (c) AD dimidium rectæ compositæ ex AC, & CB; igitur AO ipsius AC, & OD ipsius BC dimidium erit. q. e. d.

PROP. III. THEOR. III.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, utraque simul quadrata quintupla sunt ejus, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

Fig. 91. DEScribatur in circulo, cujus centrum F, pentagonum æquilaterum ABCDE, subten-

(a) Corol. prop. præc.

(b) Prop. 9. lib. 13.

(c) Prop. præc.

ET SOLIDORUM IV. 143

datque AC bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum AC, CD simul quintupla esse quadrati, quod fit ex radio circuli ABCDE.

Duc enim ex A per centrum F rectam AG, quæ bifariam (a) secabit & subtenfam, & arcum CD; adeoque subtenfa CG erit latus decagoni. Quoniam AG dupla est ipsius FG; erit quadratum ex AG quadruplum quadrati rectæ FG. Sed ob angulum (b) ACG rectum, quadratum ex AG quadratis rectarum AC, CG æquale existit. Igitur quadrata rectarum AC, CG simul quadrupla erunt quadrati rectæ FG, & addito communi quadrato rectæ FG; erunt quadrata rectarum AC, CG, GF simul quintupla quadrati radii FG. Cum ergo quadratis rectarum CG, GF, nempe lateris decagoni, & hexagoni æquale sit (c) quadratum lateris pentagoni CD; erunt quoque quadrata rectarum AC, CD simul quintupla quadrati radii FG. Quapropter si in circulo, &c. q. e. d.

PROP. IV. THEOR. IV.

Si latus hexagoni alicujus circuli secetur extrema, ac media ratione; majus illius segmentum erit latus decagoni ejusdem circuli.

Patet ex Schol. prop. 9. lib. 13.

PROP.

- (a) Cor. Prop. 10. lib. 13.
- (b) Prop. 31. lib. 3.
- (c) Prop. 10. lib. 13.

PROP. V. THEOR. V.

Idem circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum, & icosaedri triangulum, eidem sphaera inscriptorum.

Fig. 91. IN sphaera, cujus diameter MN , intelligatur descriptum & dodecaedrum, cujus unum pentagonum sit $ABCDE$, & icosaedrum, cujus unum triangulum sit IHK . Dico circulos $ABCDE$, IHK , ipsa circumscribentes, æquales esse.

Duc diametrum AG , & rectam AC (a) latus cubi ejusdem sphaeræ, quæ subtendat pentagoni bina latera AB , BC , atque junge CG , latus decagoni. Deinde sume PQ , ita ut quadratum ex MN quintuplum sit quadrati rectæ PQ . Seca (b) PQ in R media, ac extrema ratione, sitque PR majus segmentum. Quoniam quadrata rectarum AC , CD , seu AC , AB (c) quintupla sunt quadrati radii FG ; erunt 3 quadrata ex AC , AB simul æqualia 15 quadratis radii FG . Præterea, juncta BD , hæc (d) secabit rectam AC in S media, ac extrema ratione, & majus segmentum AS æquale erit ipsi AB . Quare (e) CA erit ad AS , seu AB , ut PQ ad PR , & (f) quadratum ex AC ad quadratum rectæ AB , ut quadratum ex PQ ad quadratum rectæ PR ; ac proinde 3 quadrata ex AC , seu (g) quadratum rectæ MN , ad 3 quadrata ex AB ita se habebunt, ut 5 quadrata ex PQ , seu quadratum rectæ MN ad 5 quadrata ex PR . Igitur 3 quadrata ex AB , & 5 qua-

(a) Cor. 1. prop. 17. lib. 13.

(b) Prop. 30. lib. 6.

(c) Prop. 3. hujus.

(d) Prop. 8. lib. 13.

(e) Prop. 2. hujus.

(f) Prop. 22. lib. 6.

(g) Prop. 15. lib. 13.

5 quadrata ex PR æqualia erunt. Verum cum sit IH latus pentagoni (a) circulo inscripti, cuius radius PQ ; erunt, ducto radio IL , (b) 3 quadrata ex IL quadrato lateris IH æqualia; ac proinde 15 quadrata ex IL æqualia 5 quadratis ex IH . Sed PR (c) est latus decagoni circuli, cuius radius est PQ . Igitur quadratum lateris pentagoni IH (d) æquale erit quadratis rectarum PQ , PR simul, nimirum lateris hexagoni, & decagoni; unde 5 quadrata ex IH , seu 15 quadrata ex IL æqualia erunt 5 quadratis, quæ ex PQ , & PR fiunt. Quapropter cum sint 3 quadrata ex AC æqualia 5 quadratis ex PQ , & 3 quadrata rectæ AB æqualia 5 quadratis rectæ PR ; erunt 3 quadrata rectarum AC , AB , seu 15 quadrata radii FG æqualia 5 quadratis rectarum PQ , PR , seu 15 quadratis radii IL ; ac proinde quadrata rectarum FG , IL æqualia erunt. Igitur radii FG , IL æquales; ac ideo æquales & circuli $ABCDE$, IHK . Idem itaque circulus, &c. q. e. d.

PROP. VI. THEOR. VI.

Si ex centro circuli pentagoni dodecaedri circumscripti, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni; erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumtum, dodecaedri superficiiei æquale.

EX centro F circuli pentagonum dodecaedri *Fig. 92.* $ABCDE$ circumscripti, demittatur ad latus CD perpendicularis FG . Dico, rectangulum K sub

- (a) Cor. 1. prop. 16. lib. 13.
- (b) Prop. 12. lib. 13.
- (c) Prop. 4. hujus.
- (d) Prop. 10. lib. 13.

sub FG , & CD trigesies sumtum æquale esse toti superficiei dodecaedri.

Ductis enim ex centro F ad omnes angulos pentagoni rectis FA , FB , FC , &c., resolvetur pentagonum in quinque æqualia triangula, ut ex laterum, & basium æqualitate satis liquet. Rectangulum (a) sub CD , & FG duplum est trianguli CFD . Sed cum sint in pentagono $ABCDE$ quinque triangula ipsi CFD æqualia in 12 pentagonis ipsi $ABCDE$ æqualibus, hoc est in tota superficiei dodecaedri, erunt 60 triangula ipsi CFD æqualia; ac proinde superficiei dodecaedri æqualis erit rectangulo sub CD , FG contento, trigesies sumto. Si ex centro itaque circuli, &c. q. e. d.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si ex centro circuli triangulum icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli; erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumtum icosaedri superficiei æquale.

Fig. 94. **E**X centro D circuli triangulum icosaedri ABC circumscribentis, demittatur ad BC perpendicularis DE . Dico, rectangulum sub BC , & DE contentum, trigesies sumtum, æquale esse toti superficiei icosaedri.

Ductis enim ex centro D ad omnes angulos trianguli ABC rectis DA , DB , DC , resolvetur in tria æqualia triangula; nam bina latera unius binis lateribus reliquorum æqualia sunt, & basis unius basibus aliorum æqualis. Rectangulum sub BC , & DE contentum duplum est trianguli BDC . Quoniam vero triangulum ABC tria
con-

(a) Prop. 41. lib. 1.

ET SOLIDORUM IV. 147

continet triangula uni BDC æqualia, 20 triangula ipsi ABC æqualia, seu icosaedri superficies 60 triangula continebit, æqualia triangulo BDC . Quare superficies icosaedri æqualis erit rectangulo sub BC , & DE , contento, trigesies sumto. Si ex centro itaque circuli, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Cum sit rectangulum ex BC , & DE trigesies sumtum superficiei icosaedri, & per præc. rectangulum ex CD in FG etiam trigesies sumtum Fig. 93. dodecaedri superficiei æquale; erit rectangulum ex BC in DE ad rectangulum ex CD in FG , ut superficies icosaedri ad susperficiem dodecaedri.

SCHOLIUM.

Sit ABC triangulum tetraedri. Cum 4 triangula ipsi ABC æqualia, hoc est tota superficies tetraedri, 12 triangula contineat ipsi BDC æqualia; tota superficies tetraedri rectangulo sub BC , & DE contento, sexies sumto, æqualis erit.

Si ABC vero fuerit triangulum octaedri. Cum tota superficies octaedri æqualis sit 8 triangulis ipsi ABC æqualibus, seu 24 triangulis, æqualibus triangulo BDC ; erit superficies octaedri æqualis rectangulo sub BC , & DE contento duodecies sumto.

Sit demum $ABCD$ basis cubi. Demittatur Fig. 95. ex centro E recta EH lateri BC perpendicularis, & per E ducatur FG ipsi BC parallela; erit quadratum AC duplum rectanguli BG , seu rectanguli sub BC , & BF , vel sub BC , & EH contenti; ac proinde 6 quadrata ipsi AC æqualia, hoc est tota superficies cubi æqualis erit 12 rectangulis contentis sub BC , & EH .

PROP. VIII. THEOR. VIII.

*Rectangulum contentum sub tribus quartis partibus
diametri alicujus circuli, & quinque sextis
partibus lineæ subtendentis angulum penta-
goni æquilateri in eodem circulo descripti,
æquale est dicto pentagono.*

Fig. 96. **D**escribatur in circulo, cujus centrum F , pen-
tagonum æquilaterum $A B C D E$, atque du-
cta diameter $A K$ dividatur in quatuor æquales
partes, quarum tres sint $A I$. Recta deinde $B E$
subtendens angulum $B A E$ in sex æquales partes
dividatur, quarum quinque sint $B H$, & una $H E$.
Dico, rectangulum contentum sub $A I$, & $B H$
æquale esse pentagono $A B C D E$.

Ducta enim $B F$. Quoniam $F A$ bifariam divi-
dens arcum $B A E$, bifariam quoque, & ad an-
gulos rectos (a) dividit ipsam $B E$ in G ; manife-
stum est $B G$ tres sextas partes ipsius $B E$ conti-
nere, & $G H$ duas. Igitur $B G$ erit ad $G H$, ut
3 ad 2. Est vero $A I$ ad $A F$ pariter, ut 3 ad
2. Ergo $A I$ ad $A F$ ita se habet, ut $B G$ ad
 $G H$. Quapropter rectangulum sub $A I$, & $G H$
contentum (b) æquale erit rectangulo sub $A F$, &
 $B G$ comprehenso, seu duplum trianguli $A B F$
ac proinde rectangulum sub $A I$, & dimidia ipsius
 $G H$, nempe $E H$ æquale erit triangulo $A B F$.
Sed pentagonum $A B C D E$ quintuplum est trian-
guli $A B F$, & rectangulum sub $A I$, & $B H$ quin-
tuplum quoque existit rectanguli sub $A I$, & $H E$
contenti, ob rectam $B H$ quintuplam ipsius $H E$.
Igitur rectangulum sub $A I$, & $B H$ contentum
æquale erit pentagono $A B C D E$. Rectangulum
itaque contentum, &c. q. e. d.

PROP.

(a) Cor. 1. Prop. 10. lib. 13.

(b) Prop. 16. lib. 6.

PROP. IX. THEOR. IX.

Superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri in eadem sphaera inscripti eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus icosaedri.

Circumscribat circulus (a) ACB & pentagonum dodecaedri, cujus latus sit BC , & triangulum icosaedri, cujus latus sit AB ; & ex centro D demittantur DF , DE ipsis BC , AB respective perpendiculares. Sit deinde M latus cubi in eadem sphaera cum dodecaedro, & icosaedro inscripti. Dico, esse superficiem dodecaedri ad eam icosaedri, ut latus cubi M ad AB , latus icosaedri. Fig. 97.

Quoniam enim rectæ DF media, ac extrema ratione sectæ majus segmentum est dimidium (b) radii DG , quod (c) æquale est ipsi DE ; & lateris cubi M pariter media, ac extrema ratione secti majus segmentum (d) est latus BC pentagoni dodecaedri; erit (e) M ad BC , ut DF ad DE . Igitur rectangulum sub M , & DE contentum æquale erit (f) rectangulo comprehenso sub BC , & DF . Sed rectangulum sub M , & ED est ad rectangulum sub AB , & DE contentum, ut (g) M ad AB . Igitur rectangulum contentum sub BC , & DF erit ad rectangulum sub AB , & DE comprehensum, seu (h) superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri, ut M , latus cubi ad AB , latus

K 3

(a) Prop. 5. hujus.

(b) Schol. Prop. 2. hujus.

(c) Schol. Prop. 12. lib. 13.

(d) Cor. 1. prop. 17. lib. 13.

(e) Prop. 2. hujus.

(f) Prop. 16. lib. 6.

(g) Prop. 1. lib. 6.

(h) Cor. prop. 7. hujus.

150 EUCLIDIS LIB. XIV.
 latus icosaedri. Superficies itaque dodecaedri, &c.
 q. e. d.

PROP. X. THEOR. X.

*Si recta linea secetur extrema, ac media ratione;
 erit ut recta potens id, quod a tota, & id, quod
 a majori segmento, ad rectam potentem id,
 quod a tota, & id, quod a minori
 segmento, ita latus cubi ad latus
 icosaedri eidem sphaera cum
 cubo inscripti.*

Fig. 98. **S**Ecetur AB in C media, ac extrema ratione,
 sitque majus segmentum AC ; deinde radio
 AB describatur circulus $BFGHI$, & in eo de-
 scribantur pentagonum æquilaterum $BFGHI$,
 & triangulum æquilaterum BKL , atque jungatur
 BG . Manifestum est, quod si BF ponatur latus
 dodecaedri alicujus sphaerae, erit BG (a) latus cu-
 bi, & BK (b) latus icosaedri in eadem sphaera
 descripti. Et quia AC (c) est latus decagoni cir-
 culi $BFGHI$; erit quadratum ex BF (d) æqua-
 le quadratis totius AB , & majoris segmenti AC .
 Sumatur deinde recta E , ita ut quadratum rectae
 E æquale sit quadratis totius AB , & minoris
 segmenti BC . Dico, BF esse ad E , ut latus cu-
 bi BG ad latus icosaedri BK eadem sphaera cum
 cubo inscripti.

Nam cum positum sit quadratum rectae E æqua-
 le quadratis totius AB , & minoris segmenti BC ;
 erit quadratum ex E triplum quadrati (e) rectae
 AC . Est vero quadratum ex BK (f) triplum
 quo-

- (a) Cor. 3. Prop. 17. lib. 13.
- (b) Prop. 5. hujus.
- (c) Schol. Prop. 9. lib. 13.
- (d) Prop. 10. lib. 13.
- (e) Prop. 4. lib. 13.
- (f) Prop. 12. lib. 13.

ET SOLIDORUM IV. 151

quoque quadrati radii AB . Igitur quadratum ex BK erit ad quadratum rectæ E , ut quadratum ex AB ad quadratum ex AC ; ac ideo BK ad E , ut BA ad AC . Præterea latus dodecaedri BF (a) est majus segmentum lateris cubi BG extrema, ac media ratione secti. Igitur (b) GB erit ad BF , ut BA ad AC ; ac proinde (c) BG ad BF , ut BK ad E , & invertendo, ac permutando BF ad E , ut BG ad BK . Si recta igitur linea secetur, &c. q.e.d.

LEMMA I.

Si sphaera plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

Secetur sphaera ACB , cujus centrum D plano quopiam communem sectionem, planum nempe AB , constituyente. Dico, planum AB circulum esse. Fig. 99.

Transeat primo planum sectionis per centrum sphaeræ D . Ducantur ex centro D ad perimetrum sectionis AB quocumque rectæ DE , DF , DG , &c. Quoniam hæ rectæ æquales sunt, cum a centro sphaeræ ad ejus superficiem ducantur; erit sectio AB (d) circulus, & ejus centrum idem, ac centrum sphaeræ D .

Transeat deinde planum sectionis AB non per centrum D ; ex hoc ad illud demittatur perpendicularis DE , quæ erit ad rectas quocumque EH , EG , &c. in plano AB ductas perpendicularis. Quare junctis DH , DG ; erit quadratum ex DH æquale quadratis rectarum DE , EH , & quadratum ex DG æquale iis, quæ fiunt ex DE , EG .

K 4

(a) Corol. 1. prop. 17. lib. 13.

(b) Prop. 2. hujus.

(c) Prop. 22. lib. 6.

(d) Def. 15. lib. 1.

EG. Itaque cum sint radii sphaerae **DH**, **DG** aequales, quadrata rectorum **DE**, **EH** aequalia quoque erunt quadratis rectorum **DE**, **EG**, & demto communi quadrato rectae **DE**, aequalia pariter erunt quadrata rectorum **EH**, **EG**; ac proinde aequales & **EH**, **EG**. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex **E** ad perimetrum sectionis **AB** cadentes, aequales esse ipsi **EH**, vel **EG**. Sectio igitur **AB** circulus erit, ejusque centrum **E**, in quod perpendicularis **DE** cadit. q. e. d.

COROLLARIA.

I. **SI** planum ergo sectionis, per centrum sphaerae transit, sectio est circulus, cujus centrum idem est cum centro sphaerae; si planum vero sectionis per centrum sphaerae minime transierit, sectio erit circulus, cujus centrum punctum illud, in quod cadet perpendicularis ex centro sphaerae ad planum secans ducta.

II. Linea igitur, quae centrum sphaerae **D** cum centro circuli **AB**, per centrum sphaerae minime transeuntis jungit, ad dictum circulum recta cadit.

LEMMA II.

Circuli in sphaera aequales aequaliter distant a centro; & circuli aequaliter distantes a centro sphaerae, aequales sunt.

Fig. 100. **S**int in sphaera, cujus centrum **E**, duo circuli **AB**, **CD** aequales. Dico, ipsos aequaliter a centro **E** distare.

Demittantur ex **E** ad circulos **AB**, **CD** perpendiculares **EF**, **EG**, quae in ipsorum centra cadent, ducanturque utcumque radii **FB**, **GC**, qui aequales (a) inter se erunt; atque jungantur **EB**, **EC**.

(a) Def. 1. lib. 2.

ET SOLIDORUM IV. 153

EC. Quoniam, ob angulos EFB , EGC rectos, quadratum ex EB æquale est quadratis rectarum EF , FB , & quadratum ex EC æquale quadratis rectarum EG , GC ; erunt, ob rectas EB , EC æquales, quadrata rectarum EF , FB quadratis rectarum EG , GC æqualia. Quare demtis æqualibus quadratis rectarum æqualium FB , GC , reliqua quadrata rectarum EF , EG æqualia pariter existent; ac proinde EF , EG , seu distantiae circulorum a centro E æquales erunt.

Sint deinde distantiae EF , EG a centro sphære æquales. Dico, circulos AB , CD æquales esse.

Facta eadem constructione, ostendemus, ut paulo ante, quadrata rectarum EF , FB æqualia esse quadratis rectarum EG , GC . Quare, demtis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF , EG , quadrata rectarum FB , GC pariter æqualia erunt; inde æquales & radii FB , GC ; ac proinde æquales & circuli AB , CD . q. e. d.

SCHOLIUM.

Sint circuli AB , CD paralleli, si concipiatur planum $ABCD$, per centrum E transiens, eos secare; communes sectiones (a), seu diametri AB , DC parallele erunt. Jungatur centrum sphære E cum F , centro circuli AB , erit EF ad planum AB recta, itaque ideo angulus EFB rectus. Protrahatur deinde FE , ut communi sectioni DC occurrat in G , & quia diametri AB , DC paralleli sunt, erit angulus (b) EGC pariter rectus; ac proinde EG recta ad planum DC , & G centrum circuli CD ; alias EG recta non esset ad planum CD , per G transire posset aliud planum, secans ipsum DC , cui perpendiculariter insisteret EG , & hoc parallelum esset

(a) Prop. 16. lib. 11.

(b) Prop. 29. lib. 1.

154 EUCLIDIS LIB. XIV.
esset plano AB, seu ipsi CD, quod repugnat.

COROLLARIUM.

EX hoc ulterius infertur, quod si duo plana parallela fuerint, linea, quæ ad unum planorum recta est, ad alterum quoque recta insistit.

PROP. XI. THEOR. XI.

Dodecaedrum ad icosaedrum in eadem cum ipso sphaera descriptum, est ut cubi latus ad latus icosaedri, in una, eademque sphaera.

Fig. 101. **I**N sphaera MNP, cujus centrum G descriptum sit & dodecaedrum, cujus unum pentagonum sit ABCDE, & icosaedrum, cujus unum triangulum sit IHK. Dico, dodecaedrum esse ad icosaedrum, ut latus cubi ad latus icosaedri in una, eademque sphaera.

Quoniam enim omnes anguli tam pentagoni ABCDE, quam trianguli IHK superficiem sphaeræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur duo circuli (a) in sphaera ABCDE, IHK inter se (b) æquales; adeoque si ad eos ex centro G demittantur perpendiculares GF, GL, erunt (c) GF, GL æquales. Eodem modo ostendetur, ad circulos reliqua pentagona dodecaedri, & reliqua trigona icosaedri circumscribentes, perpendiculares ex G demissas ipsi GL, vel GF æquales esse. Quare si ex G ad angulos omnes tam dodecaedri, quam icosaedri rectæ ducantur, resolvetur dodecaedrum in 12 pyramides, ob altitudinum, & basium æqualitatem, inter se æquales; & icosaedrum
in

- (a) Lem. 1.
- (b) Prop. 5. hujus.
- (c) Lem. 2.

in 20 pyramides eadem ratione inter se quoque æquales. Igitur dodecaedrum, ejusque superficies æquemultiplices erunt pyramidis $ABCDEG$, & basis $ABCDE$; similiter icosaedrum, & ejus superficies æquemultiplices pariter existent pyramidis $IHKG$, & basis IHK . Quapropter cum sit pyramis (a) $ABCDEG$ ad pyramidem $IHKG$, ut basis $ABCDE$ ad basin IHK ; erit quoque dodecaedrum (b) ad icosaedrum, ut superficies dodecaedri ad superficiem icosaedri, seu (c) ut latus cubi ad latus icosaedri. Dodecaedrum itaque ad icosaedrum, &c. q. e. d.

PROP. XII. THEOR. XII.

Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductæ.

ESTO ABC triangulum æquilaterum. Ex an-Fig. 102.
gulo A ad latus oppositum BC demittatur perpendicularis AD . Dico, quadratum lateris AB sesquitertium esse quadrati perpendicularis AD , seu quadratum ex AB esse ad quadratum rectæ AD , ut 4 ad 3.

Quoniam enim triangulum ABC æquilaterum est, angulus ABD angulo ACD æqualis erit; sunt jam anguli in D recti. Igitur duo anguli ADB , ABD trianguli ABD duobus angulis ADC , ACD trianguli ACD æquales sunt; est jam latus AD communis. Igitur & reliqua latera (d) BD , DC æqualia existent. Latus igitur BC , seu AB duplum existet rectæ BD ; & ideo quadratum ex AB ad quadratum rectæ BD erit,
ut

(a) Prop. 6. lib. 12.

(b) Prop. 4. lib. 5.

(c) Prop. 9. hujus.

(d) Prop. 26. lib. 1.

ut 4 ad 1. Deinde cum sit quadratum ex AB æquale iis, quæ fiunt ex AD , DB ; erit quadratum ex AB ad quadratum ex AD , ut 4 ad 3. Latus igitur trianguli æquilateri, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc liquet, perpendicularem ab angulo A trianguli æquilateri ad latus oppositum BC deducam, latus BC , & angulum BAC bisariam secare.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Si sphaera diameter fuerit rationalis; erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in eadem sphaera, Media.

Fig. 102. **S**it sphaeræ diameter rationalis M . Dico, tam superficiem tetraedri, quam octaedri in dicta sphaera esse Mediam.

Sit enim ABC unum triangulum tetraedri, & FEH octaedri illius sphaeræ. Demittantur ex angulis A , & E ad opposita latera BC , FG perpendiculares AD , EH . Quoniam quadratum rectæ M sesquialterum est quadrati (a) lateris AB , & (b) duplum quadrati lateris EF ; erunt rectæ M , AB , EF potentia saltem commensurabiles. Est vero M rationalis. Igitur rationales & AB , EF ; ac proinde rationales & earum dimidiæ BD , FH . Præterea cum sit quadratum ex AB ad quadratum ex AD , ut 4 ad 3; erit pars quarta quadrati ex AB , seu quadratum rectæ BD ad quadratum rectæ AD , ut 1 ad 3. Rectæ itaque BD , AD potentia commensurabiles existunt, & quia

(a) Prop. 13. lib. 13.

(b) Prop. 14. lib. 13.

quia BD rationalis est, rationalis quoque erit AD . Quoniam vero quadratum ex BD ad quadratum rectæ AD non habet rationem numeri quadrati ad numerum quadratum; erunt BD , AD rationales, potentia tantum commensurabiles; ac proinde rectangulum (a) sub BD , & AD rationalibus, potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium erit. Est vero triangulum ABC æquale rectangulo sub BD , & AD contento; nam basis trianguli BC dupla est basis rectanguli BD . Igitur & triangulum ABC Medium erit. Eodem modo ostendetur, triangulum EFG Medium esse. Quapropter cum totæ superficies tetraedri, & octaedri commensurabiles sint triangulis ABC , EFG ; erunt pariter (b) superficies tetraedri, & octaedri Mediæ. Si itaque sphaeræ diameter, &c. q. e. d.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Si tetraedrum, atque octaedrum eidem sphaeræ inscribantur; erit basis tetraedri sesquitertia basis octaedri: superficies autem octaedri sesquialtera superficiei tetraedri.

Demonstratio patet ex cor. 4. prop. 14. lib. 13.

PROP.

- (a) Prop. 22. lib. 10.
- (b) Prop. 24. lib. 10.

PROP. XV. THEOR. XV.

Recta linea ex angulo quovis tetraedri in sphaera descripti per centrum sphaerae ducta cadit in centrum basis oppositae, estque perpendicularis ad dictam basin.

Fig. 103. Sit tetraedrum $ABCE$ sphaera, cujus centrum F , comprehensum. Ducatur ex angulo E per F recta EFD incidens in basin ABC circulo inscriptam. Dico, D esse centrum basis ABC , & ED rectam esse ad eandem basin.

Ductis enim AD , DB , DC , FA , FB , FC ; erunt FA , FB , FC inter se aequales, utpote rectae ex centro sphaerae ad ejus superficiem ductae. Quare latera AF , FE trianguli AFE aequalia erunt lateribus CF , FE trianguli CFE ; sunt quoque aequales bases AE , EC . Igitur aequales (a) & anguli AFE , CFE ; ac proinde aequales & deinceps positi AFD , CFD . Eodem modo ostendetur, angulum BFD angulo CFD , vel AFD aequalem esse. Quapropter cum sint latera AF , FD trianguli AFD lateribus CF , FD trianguli CFD aequalia, & anguli AFD , CFD etiam aequales; aequales (b) quoque erunt bases AD , DC . Simili argumento demonstrabimus, BD ipsi DC , vel AD aequalem esse. Quare D (c) centrum est basis ABC , seu circuli eam concludentis. Demum cum sit FD recta jungens centrum sphaerae cum centro D circuli ABC per sphaerae centrum minime transeuntis, erit FD , ac proinde ED (d) basi ABC recta. Recta igitur linea, &c q. e. d.

PROP.

(a) Prop. 8. lib. 1.

(b) Prop. 4. lib. 1.

(c) Prop. 9. lib. 3.

(d) Cor. 2. lem. 1. prop. 10. hujus.

PROP. XVI. THEOR. XVI.

Octaedrum in sphaera descriptum dividitur in duas pyramides aequales, & similes equalium altitudinum; basis vero utriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphaerae.

I Anc prop. demonstravimus in cor. 5. prop. 14. lib. 13.

PROP. XVII. THEOR. XVII.

Tetraedrum sphaerae impositum ad octaedrum in eadem sphaera descriptum se habet, ut rectangulum sub linea potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes ejusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphaerae.

S Int tetraedrum $ABCD$, & octaedrum Fig. 104.
 $LMNOPQ$ in eadem sphaera inscripta, cu-
 us centrum H . Ducatur ex angulo D per H dia-
 neter sphaerae DK , basi ABC occurrens ad I ;
 rit DI (a) recta ad basin ABC , & I ejus cen-
 rum. Deinde per H agatur planum EFG ipsi
 ABC parallelum; erunt rectae EG , EF , FG
 ipsis AC , AB , BC (b) respective parallelae; ic-
 circo anguli GEF , EFG , FGE ipsis (c) CAB ,
 ABC , BCA , alterum alteri, aequales. Quare
 equiangularia erunt triangula EFG , DEF , DFG ,
 EDG ; ac proinde aequilatera, & similia trian-
 gulis ABC , ADB , BDC , ADC . Igitur pyra-
 mi-

(a) Prop. 15. hujus.

(b) Prop. 16. lib. 11.

(c) Prop. 10. lib. 11.

medes $ABCD$, $EFGD$ similes existunt. Cum vero rectæ DI , DC sectæ sint a planis parallelis ABC , EFG ; erit DI ad DH (a), ut DI ad DG . Sed cum sit DI ad DK , ut 2 ad 3 (b) seu ut 4 ad 6, erit DI ad dimidiam DK , nempe DH , seu DC ad DG , ut 4 ad 3. Quapropter cum sit pyramis (c) $ABCD$ ad pyramidem $EFGD$ in triplicata ratione ipsius DC ad DG erit pyramis $ABCD$ ad pyramidem $EFGD$, 64 ad 27.

Sit jam triangulum STV æquilaterum, triangulo EDG æquale, demittaturque ex T ad latum SV perpendicularis TZ . Quoniam quadratum ex DC est ad quadratum ex DG , seu TS , ut 64 ad 36, & quadratum ex TS ad quadratum ex TZ (d), ut 4 ad 3, seu ut 36 ad 27, erit ordinando (e) quadratum ex DC ad quadratum ex TZ , ut 64 ad 27. Quadratum igitur rectæ TZ continet viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC .

Insuper extendatur VS in Y , ut sit VY æqualis VS , ut 64 ad 27, dividaturque VY bifariam in X ; erit VX ad VS , ut 32 ad 27; sed DG , seu VS est ad DC , ut 3 ad 4, seu ut 27 ad 36; erit ordinando VX ad DC , ut 32 ad 36, seu ut 8 ad 9. Quare VX continet octo nonas partes lateris tetraedri DC . Dico, esse tetraedrum $ABCD$ ad octaedrum $LMNOPQ$, ut rectangulum contentum sub recta TZ , cujus quadratum viginti septem sexagesimas quartas partes continet quadrati lateris tetraedri DC , & recta VX , quæ continet octo nonas partes ejusdem lateris DC , ad quadratum diametri sphaeræ.

Ductis enim rectis TX , TY , patet trianguli

(a) Prop. 17. lib. 1.

[b] Cor. 2. prop. 13. lib. 12.

(c) Prop. 8. lib. 12.

(d) Prop. 12. hujus.

(e) Prop. 22. lib. 5.

ET SOLIDORUM IV. 161

guli TXV duplum esse, tam triangulum YTV , quam rectangulum contentum sub VX , & TZ . Igitur rectangulum sub VX , & TZ contentum, & triangulum YTV æqualia existunt. Quapropter rectangulum sub VX , TZ erit ad triangulum TSV , seu EDG , ut triangulum TYV ad triangulum TSV , vel (a) ut VY ad VS , seu ut 64 ad 27, hoc est, ut pyramis $ABCD$ ad pyramidem $EFGD$. Porro cum DI recta sit ad planum ABC , recta quoque erit ad planum (b) EFG . Igitur altitudo pyramidis $EFGD$ est radius sphaeræ DH . Est vero altitudo dimidii octaedri, seu pyramidis $LMNOP$ (c) etiam radius sphaeræ. Igitur basis EFG est ad $LMNO$, ut (d) pyramis $EFGD$ ad pyramidem $LMNOP$; ac proinde basis EFG ad duplum quadrati $LMNO$, seu quadratum diametri sphaeræ, ut pyramis $EFGD$ ad duplum pyramidis $LMNOP$, seu octaedrum $LMNOPQ$. Ostensum jam est rectangulum sub VX , TZ esse ad DEG , seu ad basin EFG , ut pyramis $ABCD$ ad pyramidem $EFGD$; igitur ex æquo erit rectangulum sub VX , TZ ad quadratum diametri sphaeræ, ut pyramis $ABCD$ ad octaedrum $LMNOPQ$. Tetraedrum igitur sphaeræ, &c. q. e. d.

L

PROP.

- (a) Prop. 1. lib. 6.
- (b) Cor. lem. 2. Prop. 10. hujus.
- (c) Prop. 14. lib. 13.
- (d) Prop. 6. lib. 12.

PROP. XVIII. THEOR. XVIII.

Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa, tripla est ejus perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

Fig. 94. Sit triangulum æquilaterum, cujus centrum D. Ducatur ex A per D recta A E, quæ (a) perpendicularis erit ad B C, eamque bifariam dividet. Dico, A E triplam esse ipsius D E.

Ductis enim rectis D B, D C, cum latera B D, D A lateribus B D, D C æqualia sint, & bases A B, B C etiam æquales, æqualia quoque erunt triangula A D B, B D C. Rursus latera B D, D E ipsis C D, D E æqualia existunt, sunt quoque æquales bases B E, E C. Igitur æqualia erunt & triangula B D E, E D C. Quapropter triangulum B D C, seu A D B duplum est trianguli B D E; ac propterea triangulum A B E ipsius B E D triplum. Quare triangulum A B E ad triangulum D B E ita se habet, ut 3 ad 1. Est vero triangulum A B E ad triangulum (b) D B E, ut A E ad D E. Igitur A E erit ad D E, ut 3 ad 1. A E itaque tripla est ipsius D E. q. e. d.

S C H O L I U M.

Cum sint latera B A, A E trianguli B A E lateribus C A, A E trianguli C A E æqualia, & bases B E, E C etiam æquales, æquales erunt & anguli B A E, E A C. Recta igitur, quæ ab uno angulo trianguli æquilateri per ejus centrum ad latus oppositum deducitur, bifariam, & ad angulos rectos

(a) Cor. 2. Prop. 10. lib. 13.

(b) Prop. 1. lib. 6.

Et os dividit latus, & angulum pariter bisariam secat.

PROP. XIX. THEOR. XIX.

Si octaedrum sphaerae inscribatur, erit semidiameter sphaerae potentia tripla ejus perpendicularis, quae ex centro sphaerae in basin quamcumque octaedri deducitur.

Sit triangulum æquilaterum ABC basis aliqua octaedri in sphaera, cujus centrum E , descripti. Ex E demittatur ED recta ad triangulum ABC , ducaturque radius sphaerae BE . Dico, quadratum ex BE triplum esse quadrati rectae DE . Fig. 105.

Quoniam enim ED in centrum circuli (*a*) triangulum ABC circumscribentis cadit, erit ducta BD radius hujus circuli. Cum itaque quadratum diametri sphaerae (*b*) est ad quadratum lateris octaedri, ut 2 ad 1, seu ut 4 ad 2, erit quadratum radii sphaerae BE ad quadratum lateris AB , ut 1 ad 2. Est vero (*c*) quadratum ex AB ad quadratum ex BD , ut 3 ad 1. Igitur ex æquo quadratum ex BE erit ad quadratum ex BD , ut 3 ad 2. Quare cum sit, ob angulum rectum (*d*) BDE , quadratum ex BE æquale iis, quæ ex BD , & DE fiunt, erit quadratum ex BE ad quadratum ex ED , ut 3 ad 1. Si octaedrum itaque sphaerae inscribatur, &c. q. e. d.

L 2

PROP.

(a) Cor. 1. lem. 1. prop. 10. hujus.

(b) Prop. 14. lib. 13.

(c) Prop. 12. lib. 13. (d) Def. 3. lib. 11.

PROP. XX. THEOR. XX.

Duplum quadrati ex diametro cujuslibet sphaerae descripti, aequale est superficiei cubi in illa sphaera collocati: perpendicularis autem a centro sphaerae in aliquam basin cubi demissa, aequalis est dimidio lateris cubi.

Hanc prop. demonstravimus in cor. 2, & 3 prop. 15. lib. 13.

PROP. XXI. THEOR. XXI.

Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum ejusdem sphaerae.

Fig. 106. **I**ntelligentur in sphaera, cujus diameter M , descripti & cubus, cujus unum quadratum sit $ABCD$, & octaedrum, cujus unum triangulum sit EFG . Dico, circulos quadratum $ABCD$, & triangulum EFG circumscribentes aequales esse.

Ducantur enim circulorum radii AH , BH , FI . Quia AB , latus quadrati, circuli quadrantem AB subtendit, erit angulus AHB rectus; ac proinde quadratum ex AB aequale erit quadratis radiorum AH , BH , seu duplum quadrati radii AH . Sed quadratum diametri sphaerae M triplum est (a) quadrati lateris cubi AB . Igitur quadratum ex M sextuplum erit quadrati radii AH . Deinde cum sit quadratum ex M duplum quadrati (b) lateris octaedri EF , & quadratum ex EF triplum (c) quadrati radii FI ; erit quadratum diametri sphaerae M sextuplum quoque quadrati radii FI . Quare

(a) Prop. 15. lib. 13.

(b) Prop. 14. lib. 13.

(c) Prop. 12. lib. 13.

re quadrata radiorum AH , FI æqualia erunt; & propterea æquales & radii AH , FI ; ac per consequens & circuli $ABCD$, EFG . Idem ergo circulus, &c. q. e. d.

SCHOLIUM.

Quoniam linea conjungens centra circulorum parallelorum in sphaera (a) per ejus centrum transit, & ad utrumque circulum recta existit; manifestum est, lineas, quæ centra parallelorum circulorum bases oppositas, & parallelas tam octaedri, quam cubi in eadem sphaera cum octaedro descripti, jungit, basibus perpendiculares esse, & inter se æquales existere; nam unaquæque est dupla distantia illorum circulorum a centro sphaerae, (b) æquidistantium. Est jam recta, quæ jungit centra oppositorum quadratorum cubi, (c) lateri ipsius cubi æqualis. Igitur recta, quæ connectit centra oppositarum basium octaedri, lateri cubi eadem sphaera cum illo inscripti, æqualis existet.

PROP. XXII. THEOR. XXII.

Si octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaera inscribantur; erit octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphaera inscriptum sit & octaedrum *Fig. 107*
 $BCEFA D$, & tetraedrum $GHIK$. Dico, octaedrum esse ad triplum tetraedri, ut latus AB ad latus GH .

Ducta in octaedro diametro AD , resolvetur in quatuor pyramides triangulares $BCDA$, $CDEA$,
 L 3
 BD .

[a] Schol. lem. 2. prop. 10. hujus.

[b] Lem. 2. Prop. 10. hujus.

(c) Cor. 2. Prop. 15. lib. 13.

$B D F A$, $D E F A$, inter se æquales, ut satis liquet ex æqualitate triangulorum, quibus continentur, quarum bases $B C D$, $C D E$, $B D F$, $D E F$ infra quadratum $B C E F$ existunt. Quare octaedrum quadruplum est pyramidis $B C D A$.

Deinde super basin tetraedri $G H I$ constituatur prisma $H G I K L M$, eandem altitudinem tetraedri habens, quod tetraedri triplum erit (*a*); atque super trigonum $N O P$ basi octaedri, & $T V X$ basi tetraedri æquale, constituentur duo alia prismata $N O P S Q R$, $T V X m Z Y$ ejusdem cum octaedro, seu pyramide $B C D A$ altitudinis; erit prisma $O N P S Q R$ triplum (*a*) pyramidis $B C D A$. Est vero octaedrum $A B C D E F$ quadruplum ejusdem pyramidis $B C D A$. Igitur octaedrum $A B C D E F$ ad prisma $N O P S Q R$ erit, ut 4 ad 3, ideoque (*b*) ut basis $T V X$ ad basin $N O P$, seu (*c*) ut prisma $T V X m Z Y$ ad prisma $N O P S Q R$. Igitur octaedrum $A B C D E F$, & prisma $T V X m Z Y$ æqualia existunt. Est vero prisma $T V X m Z Y$ ad prisma $H G I K L M$, ut altitudo prismatis $T V X m Z Y$, seu altitudo octaedri, vel perpendicularis centra basium oppositarum octaedri jungens, hoc est (*d*) latus cubi ad altitudinem prismatis $H G I K L M$, seu tetraedri $G H I K$. Igitur octaedrum $A B C D E F$ est ad triplum tetraedri $G H I K$, ut latus cubi ad altitudinem tetraedri $G H I K$, seu ut (*e*) latus octaedri $A B$ ad latus tetraedri $G H$. Si octaedrum igitur, atque tetraedrum. &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Corol. prop. 7. lib. 12.
- (b) Prop. 14. hujus.
- (c) Schol. Prop. 34. lib. 11.
- (d) Schol. Prop. præc.
- (e) Corol. 5. prop. 15. lib. 13.

PROP. XXIII. THEOR. XXIII.

Si recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema, ac media ratione, & majus ejus segmentum: item totam aliam similiter sectam, & minus ejus segmentum; erit majus segmentum prioris lineae latus icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineae latus dodecaedri ejusdem sphaerae, cujus recta linea proposita diameter existit.

Sint rectae AB, IK media, ac extrema ratio Fig. 108.
ne sectae in C, & L; sitque quadratum ex EF æquale tum quadratis totius AB, & majoris segmenti AC, cum quadratis totius IK, & minoris segmenti LK. Dico, AC esse latus icosaedri, & KL latus dodecaedri ejus sphaerae, cujus diameter EF.

Intelligentur in sphaera, cujus diameter EF, descripta & icosaedrum DEGF, & dodecaedrum ME OF; sintque latera opposita icosaedri DF, EG recta DE juncta, quæ angulum DHE pentagoni, ex icosaedri lateribus DH, HE compositum, subtendet. Quoniam DF, EG (a) parallelæ sunt, erunt anguli FDE, DEG duobus rectis æquales. Cum autem latera FD, DE trianguli FDE lateribus GE, ED trianguli GED æqualia sint, & bases, seu diametri sphaerae EF, DG pariter æquales, æquales erunt & anguli FDE, DEG. Quare angulus FDE rectus erit; & iccirco quadratum ex EF, seu quadrata rectarum AB, AC quadratis rectarum ED, DF æqualia erunt. Constat autem, rectæ DE, angulum pentagoni subtendentis, extrema, ac media ratione sectæ, majus segmentum (b) æquale esse late-

L 4 ri

(a) Cor. 3. Prop. 16. lib. 13.

[b] Prop. 8. lib. 13.

si ejusdem pentagoni, seu DF . Igitur (a) ED erit ad DF , ut AB ad AC , & quadratum ex DE erit ad quadratum ex DF , ut quadratum ex AB ad quadratum rectæ AC , ac componendo quadrata rectarum ED , DF , quadratis rectarum AB , AC æqualia, erunt ad quadratum ex DF , ut quadrata rectarum AB , AC ad quadratum rectæ AC . Igitur quadrata rectarum ED , AC æqualia erunt; ac proinde DF , AC æquales.

Rursus cum sint latera opposita dodecaedri MF , EO (b) parallela, & recta PQ earum puncta media P , & Q jungens lateribus (c) MF , EO perpendicularis; erunt, ob MP , EQ æquales & parallelas, parallelæ & æquales ME , PQ ; ac ideo angulus EMF rectus. Est jam latus dodecaedri MF minus segmentum rectæ PQ (d) media, ac extrema ratione sectæ; igitur MF minus segmentum quoque erit ipsius ME . Quare quadratum ex EF , seu quadrata totius IK , & minoris segmenti LK quadratis totius EM , & ejus minoris segmenti MF æqualia erunt; & ideo minus segmentum LK lateri dodecaedri MF æquale erit. Si recta igitur linea proposita &c. q. e. d.

PROP. XXIV. THEOR. XXIV.

Si latus octaedri potuerit majus, & minus segmentum rectæ lineæ extrema, ac media ratione sectæ: poterit latus icosaedri in eadem sphaera descripti duplum minoris segmenti.

Fig. 109. Sit quadratum lateris octaedri ED æquale quadratis majoris segmenti AC , & minoris CB

(a) Prop. 2. hujus.

(b) Cor. 4. Prop. 17. lib. 13.

(c) Cor. 5. prop. 17. lib. 13.

ET SOLIDORUM IV. 169

CB rectæ **AB**, media, ac extrema ratione sectæ in **C**; sitque in eadem sphaera descriptum icosaëdron, cujus latus **FG**, & recta, quæ angulum pentagoni ex lateribus icosaëdri compositum subtendit **FH**, atque diameter **GH**. Dico, quadratum ex **FG** duplum esse quadrati minoris segmenti **CB**.

Quoniam enim quadratum ex **GH** æquale est quadratis rectarum **HF**, **FG**, ut in præc. demonstratum est, & quadratum ex **DE** æquale iis, quæ fiunt ex **AC**, **CB**; erit quadratum ex **GH** ad quadratum ex **DE**, ut quadrata rectarum **GF**, **FH** ad quadrata rectarum **AC**, **CB**. Est vero quadratum ex diametro sphaeræ **GH** duplum (a) quadrati lateris octaëdri **DE**. Igitur quadrata rectarum **GF**, **FH** dupla quoque erunt quadratorum rectarum **AC**, **CB**. At cum sit **GF** majus segmentum rectæ **FH** media, ac extrema ratione sectæ; erit quoque **FG** (b) minus segmentum rectæ compositæ ex **GF**, **FH** eadem ratione sectæ. Quare **HF** erit ad **FG**, ut **AC** ad **CB**, & (c) quadratum ex **HF** erit ad quadratum ex **FG**, ut quadratum rectæ **AC** ad quadratum rectæ **CB**; atque componendo quadrata rectarum **HF**, **FG** erunt ad quadratum ex **FG**, ut quadrata rectarum **AC**, **CB** ad quadratum rectæ **CB**. Ostensum jam est, quadrata rectarum **HF**, **FG** dupla quadratorum rectarum **AC**, **CB** existere. Igitur quadratum ex **GF** quadrati rectæ **CB** pariter duplum erit. Si latus itaque octaëdri, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) prop. 14. lib. 13.
- (b) Prop. 5. lib. 13.
- (c) Prop. 22. lib. 6.

PROP. XXV. THEOR. XXV.

Si recta linea divisa extrema, ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ latus octaedri ejusdem sphaeræ, in qua dictum minus segmentum latus existit dodecaedri.

Fig. 110. **R**ecta AB secta in D extrema, ac media ratione constituat cum AC , quæ æqualis sit minori segmento AD , angulum rectum BAC , cui subtendatur recta BC ; sitque quadratum ex E subduplum quadrati rectæ BC . Dico, E latus esse octaedri illius sphaeræ, in qua AC est latus dodecaedri.

Cum enim majus segmentum BD (a) sit latus cubi illius sphaeræ, in qua minus segmentum AD , vel AC est latus dodecaedri; erit quadratum diametri illius sphaeræ triplum quadrati (b) lateris cubi BD . Sunt vero quadrata rectarum (c) BA , AD , vel BA , AC , hoc est quadratum ex BC tripla quadrati ex BD . Igitur BC diameter erit illius sphaeræ. Quapropter cum positum sit, quadratum ex BC duplum esse quadrati rectæ E ; erit E (d) latus octaedri illius sphaeræ, in qua DA , vel AC est latus dodecaedri. Si igitur recta linea, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Cor. 3. Prop. 17. lib. 13.
- (b) Prop. 15. lib. 13.
- (c) Prop. 4. lib. 13.
- (d) Prop. 14. lib. 13.

PROP. XXVI. THEOR. XXVI.

*Si latus tetraedri possit majus, & minus segmentum
lineæ rectæ extrema, ac media ratione secta:
latus icosaedri eidem sphaeræ inscripti
potentia sesquialterum est minoris
segmenti.*

Sit quadratum lateris BC tetraedri ABCD æquale quadratis majoris segmenti HK, & minoris KI rectæ HI media, ac extrema ratione in K sectæ; sit quoque EF latus icosaedri EFG ejusdem sphaeræ. Dico, quadratum ex EF sesquialterum esse quadrati minoris segmenti KI. Fig. III.

Nam, ut demonstratum est in prop. 24 hujus, quadrata rectarum GE, EF sunt ad quadrata rectarum HK, KI, ut quadratum ex EF ad quadratum ex KI. Est vero (a) quadratum ex diametro sphaeræ GF, seu quadrata rectarum GE, EF ad quadratum ex latere tetraedri BC, seu quadrata rectarum HK, KI, ut 3 ad 2. Igitur quadratum ex EF erit ad quadratum ex KI pariter, ut 3 ad 2. Si latus itaque tetraedri, &c. q. e. d.

PROP. XXVII. THEOR. XXVII.

*Cubus ad octaedrum in eadem cum ipso sphaerâ
descriptum, est, ut superficies cubi ad octae-
dri superficiem. Item ut latus cubi ad
semidiametrum sphaeræ.*

Sint descripti in eadem sphaerâ cubus AC, & octaedrum FNGH, quorum centra O, & H. Dico, eam esse proportionem cubi ad octaedrum, quam Fig. III.

(a) Prop. 13. lib. 13.

quam habet superficies cubi ad superficiem octaedri; nec non quam habet latus cubi ad semidiametrum sphaeræ.

Quoniam enim circuli, qui quadrata cubi AC & triangula octaedri $FLGN$ (a) comprehendunt inter se æquales sunt; erunt distantia (b) quadratorum cubi, & triangulorum octaedri a centro sphaeræ æquales. Quare ductis rectis a centro sphaeræ ad angulos omnes cum cubi, tum octaedri, cubus resolvetur in sex æquales pyramides, octaedrum in octo pyramides inter se quoque æquales, & ulterius una pyramis cubi (c) erit ad unam pyramidem octaedri, ut basis illius ad basin huius; altitudines enim, seu distantia a centro sphaeræ æquales existunt. Sed cubus, ejusque superficies æquemultiples sunt unius pyramidis cubi, & basis illius; item octaedrum, & ejus superficies æquemultiples sunt unius pyramidis octaedri, & basis istius pyramidis. Igitur (d) cubus erit ad octaedrum, ut superficies cubi ad superficiem octaedri.

Deinde sit FG quadratum illud, quod dividit octaedrum in duas pyramides $FG L$, $FG N$ inter se similes, & æquales; erit LH , altitudo pyramidis $FG L$, radius sphaeræ. Abscindantur BD , LM , ut sint tertiae partes lateris cubi AB , & radius sphaeræ LH . Quoniam quadratum FG est ad quadratum diametri sphaeræ LN , ut (e) 1 ad 2, & quadratum diametri sphaeræ est ad quadratum cubi AE (f), ut 3 ad 1; erit ex æquo quadratum FG ad quadratum AE , ut 3 ad 2, seu ut AB ad AD . Igitur parallelepipedum, cujus
basis

(a) Prop. 21. hujus.

(b) Lem. 2. prop. 10. hujus.

(c) Prop. 6. lib. 12.

(d) Prop. 4. lib. 5.

(e) Cor. 5. Prop. 14. lib. 13.

(f) Prop. 15. lib. 13.

ET SOLIDORUM IV. 173

asis est FG , & altitudo AD æquale erit (a) cubo AC , nam eorum bases, & altitudines reciprocantur. Porro parallelepipedum, cujus basis est FG , & altitudo HL , triplum est tam (b) pyramidis $FG L$, seu dimidii octaedri $FNGL$, quam (c) parallelepipedi, cujus basis est pariter FG , & altitudo LM , quæ pars tertia est altitudinis LH . Igitur parallelepipedum super basin FG , & sub altitudine LM pyramidi $FG L$ æquale existit. Cum vero sit HM dupla ipsius LM ; erit parallelepipedum super basin FG , & sub altitudine HM duplum parallelepipedi super basin FG , & sub altitudine LM constituti, seu æquale octaedro $LFNG$. Quapropter cubus erit ad octaedrum, ut parallelepipedum super basin FG , & sub altitudine AD ad parallelepipedum super basin eandem FG , & sub altitudine HM , hoc est (c) ut AD ad HM , seu ut AB ad HL . Cubus itaque ad octaedrum, &c. q. e. d.

PROP. XXVIII. THEOR. XXVIII.

Si sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam ejusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

Sint quatuor rectæ A, B, C, D continue proportionales, nec non quatuor aliæ A, E, F, G , ita ut A sit antecedens omnium. Dico, C esse ad F , nempe tertiam ad tertiam, in duplicata ratione Fig. 113.

[a] Prop. 34. lib. 11.

[b] Cor. Prop. 7. lib. 12.

[c] Ther. adju. post prop. 32. lib. 11.

ne secundæ B ad secundam E, & D esse ad G, nempe quartam ad quartam, in triplicata ratione secundæ B ad secundam E.

Quoniam tam A, B, C, vel C, B, A, quam A, E, F continue proportionales sunt, erit C ad A (a) in duplicata ratione ipsius B ad A, & A ad F in duplicata ratione ipsius A ad E. Igitur ordinando C erit ad F in duplicata ratione ipsius B ad E.

Rursus cum sint ex hypothese D, C, B, A, & A, E, F, G continue proportionales; erit D ad A in triplicata ratione ipsius B ad A, & A ad G in triplicata ratione ipsius A ad E; igitur ordinando D erit ad G in triplicata ratione ipsius B ad E. Si sint igitur quatuor lineæ, &c. q.e.d.

PROP. XXIX. THEOR. XXIX.

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

Fig. 114. IN triangulo æquilatero ABC ducatur ex angulo A ad latus oppositum BC perpendicularis AD, quæ bifariam (b) secabit BC. Inveniatur (c) deinde E media proportionalis inter AD, & DB. Dico, quadratum lateris AB esse ad triangulum ABC in duplicata ratione lateris AB ad rectam E.

Quoniam AD est ad E, ut E ad BD; erit quadratum rectæ E æquale rectangulo (d) sub AD, & DB contento, seu æquale triangulo ABC.

Igi-

- (a) Def. 7. lib. 6. (b) Cor. Prop. 12. hujus.
 (c) Prop. 13. lib. 6.
 (d) Prop. 17. lib. 6.

ET SOLIDORUM IV. 175

igitur quadratum ex AB ad triangulum ABC
 it, ut quadratum rectæ AB ad quadratum re-
 ctæ E , seu in duplicata ratione rectæ AB ad re-
 ctam E . Quadratum igitur lateris trianguli, &c.
 e. d.

SCHOLIUM.

Hæc, & præc. prop. nullum alium usum hoc lo-
 co habent, quam ut ostendatur sequens prop.,
 eam sine iis breviter demonstrabimus; quia vero
 eas alibi esse possunt, eas præterire minime puta-
 mus.

PROP. XXX. THEOR. XXX.

*cubus, & tetraedrum in eadem sphaera describantur:
 erit quadratum cubi ad triangulum tetraedri, ut
 latus tetraedri ad lineam perpendicularem,
 quæ ex uno angulo trianguli tetraedri ad
 latus oppositum deducitur.*

It quadratum cubi cujusvis $ABCD$, & tetrae-
 dri in eadem sphaera descripti triangulum
 EFG , in quo perpendicularis EH ex angulo E
 latus oppositum FG deducta sit, dividens latus
 G bifariam. Dico quadratum AC esse ad trian-
 gulum EFG , ut EF ad EH . Fig. 115.

Cum enim quadratum ex latere tetraedri
 EF duplum sit (a) quadrati lateris cubi AB , seu
 quadrati AC ; & idem quadratum ex EF duplum
 quoque rectanguli sub EF , & ejus dimidia FH
 contenti; erit rectangulum sub EF , & FH æqua-
 le quadrato AC . Est quoque rectangulum sub EH ,
 & HF æquale triangulo EFG . Igitur quadra-
 tum AC erit ad triangulum EFG , ut rectangu-
 lum sub EF , & FH ad rectangulum sub EH ,
 & FH

(a) Prop. 18. lib. 13.

476 EUCLIDIS LIB. XIV.
 & HF contentum, seu ut (a) EF ad EH. Si
 cubus itaque, & tetraedrum; &c. q. e. d.

PROP. XXXI. THEOR. XXXI.

*Latus tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu
 altitudinis ipsius: axis vero, sive altitudo te-
 traedri potentia sesquitertia est lateris cubi
 in eadem sphaera descripti.*

Fig. 78. Prima pars hujus prop. patet ex demonstratio-
 ne prop. 13 lib. 13. Ibi enim ostendimus, qua-
 dratum ex AD esse ad quadratum ex AC, seu
 quadratum lateris EF esse ad quadratum altitudi-
 nis HI, ut 3. ad 2.

Pars 2. liquet ex cor. 5 prop. 15 lib. 13. Ibi
 enim demonstravimus quadratum altitudinis te-
 traedri esse ad quadratum lateris cubi ejusdem
 sphaerae, ut 4 ad 3. Igitur latus tetraedri, &c.
 q. e. d.

COROLLARIUM.

Quoniam tam quadratum altitudinis tetraedri
 ad quadratum lateris cubi eidem sphaera in-
 scripti, quam quadratum (b) lateris trianguli
 æquilateri ad quadratum perpendicularis ab uno
 ejus angulo ad latus oppositum deductam sit, ut 4
 ad 3; erit altitudo tetraedri ad latus cubi, ut la-
 tus trianguli æquilateri ad perpendicularem ab uno
 ejus angulo ad latus oppositum demissam.

PROP.

[a] Prop. 1. lib. 6.
 (b) Prop. 12. hujus.

PROP. XXXII. THEOR. XXXII.

Cubus triplus est tetraedri eidem sphaerae inscripti.

Inscribantur in eadem sphaera cubus BC , & tetraedrum $EDFG$. Dico, cubum triplum esse tetraedri. Fig. 116.

Super DEF , basin tetraedri, constituatur prisma $EDFGHI$ in eadem altitudine cum tetraedro, quod (a) ejus triplum erit. Quoniam quadratum AB est ad basin EDF (b) , ut latus ED ad perpendicularem ex angulo E ad latus oppositum deductam, seu (c) ut altitudo tetraedri $EDFG$, seu prismatis $EDFGHI$ ad latus, seu altitudinem cubi BC ; erit cubus BC prismati $EDFGHI$ (d) æqualis; ac proinde cubus BC tetraedri $EDFG$ triplus. Cubus itaque triplus, &c. q. e. d.



M PROP.

- (a) Cor. Prop. 7. lib. 12.
- (b) Prop. 30. hujus.
- (c) Cor. præc.
- (d) Prop. 34. lib. 11.



EUCLIDIS

Elementum quintumdecimum, & solidorum quintum.

PROP. I. PROBL. I.

In dato cubo pyramidem describere.

Fig. 117.



IN dato cubo BE pyramidem, seu tetraedrum describere oportet.

Ab uno ejus angulo, nempe A duc AC , AG , AE , diametros quadratorum, angulum solidum A, constituentium; indeque junge CG , CE , GE , quæ diametri quoque erunt reliquorum quadratorum. Dico factum.

Quoniam enim quadrata omnia, quibus continetur cubus, æqualia existunt, æquales erunt & eorum diametri. Quare æquilatera, ac ideo æqualia erunt quatuor triangula CGE , GAE , EAC , CAG . Igitur $CGEA$ (a) tetraedrum est. Quia vero omnes ejus anguli in angulis cubi BE collocantur; patet, tetraedrum $CGEA$ (b) in cubo BE inscriptum esse. q. e. f.

CO.

(a) Def. 31. lib. 11.

(b) Def. 1. Prop. 12. lib. 13.

COROLLARIUM.

Quoniam quadratum diametri AC duplum est quadrati lateris CB; patet, latus cubi CB potentia dimidium esse lateris pyramidis in eo descriptæ. Ulterius quadratum diametri cubi BE triplum est quadrati lateris BC. Igitur quadratum diametri cubi erit ad quadratum lateris pyramidis sibi inscriptæ, ut 3 ad 2.

PROP. II. PROBL. II.

In data pyramide octaedrum describere.

In data pyramide, seu tetraedro ABCD, oportet octaedrum describere. Fig. 49.

Divide latera omnia tetraedri bifariam in punctis H, E, I, F, K, G, quæ juncunt 12 rectis EF, FG, GE, HI, IK, HK, KG, GH, HE, EI, IF, FK. Hæ omnes æquales erunt, cum sint dimidiæ rectarum æqualium, nempe laterum tetraedri. Igitur octo triangula EHI, EHG, IHK, HKG, &c. æquilatera, & æqualia erunt; ac proinde octaedrum EIKGHF constituunt; quod quidem intra tetraedrum (a) descriptum est; nam omnes ejus anguli latera tetraedri ex constructione tangunt. In data igitur pyramide, &c. q. e. f.

COROLLARIA.

I. **H**inc latus pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti; ac proinde quadratum lateris pyramidis est ad quadratum lateris octaedri sibi inscripti, ut 4 ad 1. In eadem ratione erunt eorum bases. Quapropter basis una pyra-

M
2
mi-

(a) Def. 1. prop. 12. lib. 13.

midis erunt ad duas bases octaedri sibi inscripti, ut 4 ad 2, seu ut 2 ad 1, & quatuor bases pyramidis erunt ad 8 bases octaedri, seu superficies pyramidis erit ad superficiem octaedri, ut 16 ad 8, seu ut 2 ad 1.

II. Insuper quia HI , HK ipsis AB , AC respective parallelae sunt, erit (a) basis octaedri HIK basi pyramidis ABC parallela. Eadem ratione basis octaedri EIF basi pyramidis ADC , & FKG ipsi ADB , nec non EHG ipsi BDC parallela erit.

III. Deinde cum sint DI , DH , DK aequales, recta ex angulo solido D ad planum HIK perpendiculariter demissa in centro (b) circuli, triangulum HIK circumscribentis, seu in centro trianguli HIK cadet. Quare si producat, ad planum ABC , plano HIK parallelum, (c) perpendicularis quoque erit. Quoniam vero recta ex D ad basin ABC perpendiculariter demissa bisariam (d) dividitur a plano HIK ; sequitur, rectam ex angulo pyramidis D in basin oppositam perpendiculariter demissam per centrum basis octaedri HIK transire, ibique a basi HIK bisariam secari. Eodem modo ostendetur, rectas ab aliis angulis pyramidis, nimirum A , B , C ad bases oppositas BDC , ADC , ADB perpendiculariter demissas per centra basium octaedri EHG , EIF , FKG transire, & a dictis basibus bisariam dividi.

IV. Demum si ex centro circuli, triangulum ABD circumscribentis, ad aequalia latera AB , BD , AD perpendiculares demittantur, haec aequales (e) erunt, atque in punctis mediis (f) dictorum laterum E , I , H cadent. Quapropter centrum trianguli ABD erit quoque centrum basis octaedri EIH . Hinc liquet,
cen-

(a) Prop. 15. lib. 11.

(b) Schol. 2. Prop. 32. lib. 11.

(c) Schol. lem. 2. prop. 10. lib. 14.

(d) Lem. Prop. 4. lib. 12.

(e) Prop. 14. lib. 3.

(f) Prop. 3. lib. 3.

ET SOLIDORUM V. 181

centra quatuor basium octaedri EIH, IKF, KHG
EFG cum centris quatuor basium pyramidis conve-
nire.

PROP. III. PROBL. III.

In dato cubo octaedrum describere.

SIt in dato cubo DF describendum octaedrum. *Fig. 118.*

Biseca latera quadrati CD in punctis G, L, H, I, & junge GH, IL, se mutuo secantes in N; erit N centrum quadrati CD. Eodem modo reliquorum quadratorum centra R, Q, O, S, P invenies. Junge hujusmodi centra 12 rectis NS, SR, RQ, QP, PO, ON, NR, RP, PN, SQ, QO, OS. Dico factum.

Nam junctis GS, IR, cum ducta sit IR a centro R quadrati BD ad medium punctum lateris DM, erit IR dimidio lateris DE æqualis, ipsique DE parallela. Eadem ratione GS, NI, NG dimidiæ erunt æqualium laterum DE, AD, DM, atque ipsis respective parallelæ; ac ideo tam inter se, quam ipsi IR æquales. Igitur cum sit angulus NIR angulo NGS æqualis, (a) cum ambo angulo recto ADE æquales existant, (b) æquales erunt & NR, NS. Eodem modo ostendetur, reliquas rectas RQ, SQ, QP, &c. ipsi NR, vel NS æquales esse. Igitur 8 triangula NSR, NSO, NPO, SRQ, RQP, QPO, SOQ, RNP æquilatera, & æqualia sunt; ac proinde octaedrum NOQRSP constituunt; quod quidem in cubo DF (c) descriptum est; nam omnes ejus sex anguli, sex cubi bases in earum centris tangunt. Quapropter in dato cubo, &c. q. e. f.

M 3

CO.

(a) Prop. 10. lib. 11.

(b) Prop. 4. lib. 1.

(c) Def. 1. prop. 12. lib. 13.

COROLLARIUM.

Cum sit angulus NIR rectus, & NI ipsi IR equalis, erit quadratum ex NR duplum quadrati ipsius NI . Est jam quadratum rectæ LI , vel lateris cubi AD quadruplum quadrati ipsius NI . Igitur quadratum lateris cubi AD duplum erit quadrati lateris octaedri NR in eo descripti.

PROP. IV. PROBL. IV.

In dato octaedro cubum inscribere.

Fig. 119. **E**sto datum octaedrum ABCDEFG . Oportet in eo cubum describere.

Quoniam in octaedro sex sunt pyramides quadrangulæ, quarum vertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum constituunt. Sit una earum ABCDE . Inveniantur centra I , O , R , L triangulorum AED , AEB , BEC , CED , per quæ ducantur MH , MQ , QP , PH ipsis AD , AB , BC , CD respectivé parallelæ. Et quia ducta recta EIK tripla est (a) ipsius IK ; erit quoque, ob MI ipsi AK parallelam, recta AE ipsius AM pariter tripla. Eadem ratione EB tripla erit rectæ BQ . Eodem modo ostendetur, rectas QP , PH ita secare rectas EB , EC , ED , ut EB , EC , ED triplæ sint ipsarum BQ , CP , DH . Quare rectæ per I , O , R , L ductæ in punctis M , Q , P , H conveniunt, & AM , BQ , CP , DH , ac proinde EM , EQ , EP , EH inter se æquales existunt. Quapropter cum sint anguli MEH , MEQ , QEP , PEH etiam inter se æquales, æquales pariter erunt MH , MQ , QP , PH . Deinde cum sint rectæ HM , MQ ex constructione ipsis DA , AB parallelæ, erit angulus HMQ

(a) Prop. 18. lib. 14.

ET SOLIDORUM V. 183

HMQ (a) angulo recto DAB æqualis, & planum (b) MQPH basi. ABCD parallela. Eodem modo demonstratur, reliquos angulos quadrilateri MQPH rectos esse. Igitur MQPH quadratum est. Ulterius, latera ME, EI lateribus HE, EI æqualia sunt, & anguli MEI, HEI (c) etiam æquales. Igitur æquales erunt & MI, IH. Eodem modo ostendi potest, rectas MQ, QP, PH bifariam sectas esse in centrīs O, R, L. Quapropter si jungantur IO, OR, RL, LI, hæ inter se æquales erunt. Porro cum sint latera MO, MI æqualia, & angulus OMI rectus, erit angulus MOI semirectus; similiter semirectus erit & QOR; ideoque IOR rectus. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli quadrilateri IORL. Quadrilaterum itaque IORL quadratum est. Quod si eodem modo in reliquis quinque octaedri pyramidibus triangulorum centra rectis jungantur, describentur similiter quadrata, quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt, & cubum component; qui quidem intra octaedrum (d) descriptus erit, cum octo ejus anguli octo triangulorum octaedri centra tangent. Quapropter in dato octaedro cubum descripsimus. q. e. f.

COROLLARIUM.

Cum sit AK ad MI, ut EK ad EI, seu ut 3 ad 2, erit quadratum ex AK ad quadratum ex MI, ut 9 ad 4; sed quadratum ex MI est ad quadratum rectæ IO, ut 1 ad 2, seu 4 ad 8; igitur ordinando quadratum ex AK erit ad quadratum ex IO, ut 9 ad 8, & quadruplum quadrati rectæ AK, seu quadratum lateris octaedri AD erit

M 4 ad

[a] Prop. 10. lib. 11.

[b] Prop. 15. lib. 11.

[c] Schol. prop. 18. lib. 14.

[d] Def. 1. prop. 12. lib. 13.

184 EUCLIDIS LIB. XV.
*ad quadratum lateris cubi IO sibi inscripti, ut 36
ad 8, seu ut 9 ad 2.*

SCHOLIUM.

Hinc patet, Cl. Isaacum Barrow in hac prop.
*allucinari; docet enim ipse latera pyramidis
ABCDE bisecari oportere, ut quadratum MQPH
constituatur, indeque supponit latera quadrati MQPH
per triangulorum centra transire, quod sane falsum
esse ex demonstratis facile colligitur.*

PROP. V. PROBL. V.

In dato icosaedro, dodecaedrum describere.

Fig. 120. **S**it ABCDEF una pyramis pentagona dati
icosaedri, triangulis æquilateris, & æqualibus
AFB, BFC, CFD, DFE, EFA contenta.
Inveniantur horum triangulorum centra G, H,
I, K, L, quæ rectis GH, HI, IK, KL, LG
connectantur. Dico, GHIKL esse unum pen-
tagonum dodecaedri quæsitum.

Nam si ex F per dicta centra ducantur rectæ
FM, FN, FP, FO, FQ, hæ rectas (a) AB,
BC, CD, DE, EA bifariam, & ad angulos
rectos dividunt; quare æquales erunt MB, BN,
NC, CP, &c. & ob æquales angulos MBN,
NCP, PDO, OEQ, QAM, æquales pariter
erunt (b) & ductæ MN, NP, PO, OQ, QM, &
anguli BMN, BNM, CNP, CPN, DPO,
&c.; ac proinde æquales & anguli MNP, NPO,
POQ, OQM, QMN. Pentagonum itaque
MNPOQ æquilaterum, & æquiangulum erit,
atque in plano ABCDE existet. Deinde cum
sint latera MB, BF trianguli MBF lateribus
NB,

(a) Schol. Prop. 18. lib. 14.

(b) Prop. 4. lib. 1.

ET SOLIDORUM V. 185

NB, BF trianguli NBF æqualia, & anguli MBF, NBF pariter æquales, æquales erunt & bases (a) MF, NF. Eodem ratiocinio ostendetur, rectas FP, FO, FQ ipsi FM, vel FN æquales existere. Quapropter triangula MFN, NFP, PFO, &c. latera, & bases æquales habent. Igitur anguli (b) MFN, NFP, PFO, &c. æquales erunt. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL æquales inter se sunt; radii enim sunt æqualium circulorum, triangula æqualia circumscribentium; æquales erunt & GH, HI, IK, KL, LG. Insuper cum sint FM, FG ipsis FN, FH respectivæ æquales, erunt GH, MN parallelæ. Similiter HI, NP; IK, PO; KL, OQ; LG, QM parallelæ erunt. Igitur anguli (c) LGH, GHI, HIK, IKL, KLG angulis æqualibus QMN, MNP, NPO, POQ, OQM, ideoque & inter se, æquales erunt; & plana, quæ GH, HI, & HI, IK, nec non per IK, KL, & KL, LG transeunt, plano (d), quod per MN, NP, PO, OQ, QM transit, seu plano ABCDE parallela sunt; adeoque unum planum constituunt. Quapropter GHIKL pentagonum est æquilaterum, & æquiangulum. Quod si eadem arte in aliis undecim icosaedri pyramidibus centra triangulorum rectis connectantur, describentur similiter pentagona æquilatera, & æquiangulara, quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt, atque dodecaedrum constituent; quod quidem in icosaedro (e) descriptum erit, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti basium icosaedri consistent. In dato itaque icosaedro; &c. q. e. f.

PROP.

- (a) Prop. 4. lib. 1.
- (b) Prop. 8. lib. 1.
- (c) Prop. 10. lib. 11.
- (d) Prop. 15. lib. 11.
- (e) Def. 1. Prop. 12. lib. 13.

PROP. VI. PROBL. VI.

In dato octaedro pyramidem describere .

Fig. 121. **S**It ABCDGF octaedrum, & in pyramide superiori ABCDG inveniantur centra E, & L triangulorum ex adverso sibi respondentium AGD, BGC. Similiter in pyramide inferiori ABCDF reperiantur centra K, & M triangulorum ex adverso quoque sibi respondentium ABF, DFC; ac tandem jungantur EK, EL, EM, LK, LM, KM. Dico, KLM E esse pyramidem quaesitam.

Ductis enim per centra E, & K rectis AI, AH bifariam (a) secantibus latera aequalia GD, BF quadrati BD, erunt BH, GI aequales, & parallelæ; ac ideo aequales, & parallelæ etiam BG, HI; sed cum sint (b) AE, AK duplæ ipsarum EI, KH, erunt AI, AH proportionaliter sectæ in E, & K, ac ideo KE, HI parallelæ. Quare HI, seu BG ad KE erit, ut AH ad AK, seu ut 3 ad 2. Eodem modo ostendetur, latera octaedri ad reliqua latera pyramidis KLM E, ut 3 ad 2 existere. Latera itaque omnia dictæ pyramidis aequalia sunt, ideoque aequalia, & æquilatera etiam triangula, quibus continetur. Quapropter KLM E tetraedrum est; quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, intra octaedrum (c) descriptum erit. In dato itaque octaedro, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

HInc deducitur, latus octaedri sesquialterum esse lateris pyramidis sibi inscriptæ.

PROP.

(a) Scho. Prop. 18. lib. 14.

(b) Prop. 18. lib. 14.

(c) Def. 1. Prop. 12. lib. 13.

PROP. VII. PROBL. VII.

In dato dodecaedro icosaedrum describere.

ESto dimidium dodecaedri, in quo inscriben-
dum est icosaedrum, contentum sex pentago-^{Fig. 122.}
nis $ABCDE$, $CFGHD$, $GIKLH$, $KMNQL$,
 $NOAEQ$, $EDHLQ$, quorum centra a , b ,
 c , d , e , P rectis ab , bc , cd , de , ea , aP ,
 bP , cP , dP , eP jungantur. Dico, aPb , bPc ,
 cPd , dPe , ePa esse quinque triangula æquilate-
ra, & æqualia icosaedri construendi.

In pentagonis enim $ABCDE$, $CFGHD$,
ductis BE , FH æquales angulos BAE , FGH
subtendentibus, erunt, ob latera BA , AE late-
ribus FG , GH æqualia, æquales & ipsæ BE ,
 FH . Deinde si ex A , & G ducantur per centra
 a , & b rectæ Ag , Gg , hæ bifariam, & ad an-
gulos rectos secabunt (a) BE , CD , FH . Quare
cum sint BE , FH ipsi CD (b) parallelæ, erunt &
 BE , FH etiam inter se parallelæ. Sunt quoque
 BE , FH æquales, igitur earum dimidiæ Bf , Fh
æquales quoque erunt, & parallelæ. Quapropter
si jungantur BF , fh , erunt BF , fh etiam æqua-
les, & parallelæ. Similiter in pentagonis $CFGH$,
 $DIKLE$, ductis per centra b , & c rectis
 Ci , Ki , atque junctis FD , IL , FI , lm , eo-
dem modo, quo ante ostendetur, rectas FI , lm
æquales esse. Sunt jam BF , FI æquales, cum
contineant angulos æquales æqualibus lineis com-
prehenso (quia tam latera dodecaedri BC , CF ,
quam FG , GI , angulum pentagoni æquianguli
continent, ut ex aliquo materiali dodecaedro li-
quet). Igitur æquales erunt & fh , lm . Porro
cum sint a , b , & c centra æqualium circulorum,
pentagonos æquales comprehendentium, erunt di-
stan-

(a) Cor. 2. Prop. 10. lib. 13. (b) Scho. prop. 8. lib. 13.

stantiæ æqualium rectarum CD , GH a dictis centris, nempe perpendiculares ag , bg , bi , ci (a) inter se æquales. Eadem ratione distantia æqualium rectarum BE , FD , FH , IL a dictis centris, nempe af , bh , bl , cm æquales pariter existent; quapropter æquales erunt, & fg , gh , li , im ; ac proinde æquales & anguli (b) fgh , lim , atque, ob ag , gb , ipsis bi , ic æquales, erunt æquales & ab , bc . Eodem modo æquales ostendentur omnes rectæ, centra pentagonorum jungentes. Quare quinque triangula aPb , bPc , cPd , &c. sub quinque angulis solidis dodecaedri D , H , L , Q , E contenta æquilatera erunt, & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis 15 angulis solidis dodecaedri similia triangula, latera communia habentia, constituentur, descriptum erit icosaedrum intra dodecaedrum, cum 12 anguli solidi icosaedri in centris 12 basium dodecaedri consistent. In dato itaque dodecaedro, &c. q. e. f.

PROP. VIII. PROBL. VIII.

In dato dodecaedro cubum describere.

Fig. 123. Sint quatuor pentagona dodecaedri, in quo inscribendus est cubus $AGBFE$, $BFCML$, $AEDIH$, $EFCKD$ ad latus EF convenientia. Ducantur AB , BC , CD , DA , quæ cum subtendant angulos æquales AGB , BFC , CKD , AED æqualibus rectis AG , GB , BF , FC , CK , KD , DE , AE contentos, inter se æquales existent. Sunt ulterius (c) DC , AB ipsi EF parallelæ. Igitur DC , AB æquales erunt, & (d) parallelæ; quare parallelæ & AD , BC . Ideoque $ABCD$

(a) Prop. 14. lib. 3.

(b) Prop. 8. lib. 1.

(c) Schol. Prop. 8. lib. 13.

(d) Prop. 9. lib. 11.

ET SOLIDORUM V. 189

$ABCD$ parallelogrammum erit. Quia vero planum $ABCD$ productum communem sectionem in sphaera facit circulum (a) circa $ABCD$ descriptum. Erunt tam anguli A , & C , quam anguli B , & D (b) duobus rectis æquales. Quapropter cum sint (c) anguli oppositi A , & C , item B , & D inter se æquales, erunt omnes quatuor A , B , C , D recti; ac proinde $ABCD$ quadratum erit, suos angulos collocans in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum dodecaedri. Si in reliquis octo dodecaedri pentagonis 8 aliæ lineæ eodem modo ducantur, hæ æquales quoque erunt & inter se, & quatuor prioribus; ac proinde omnes 12 rectæ cubum constituent, 6 æqualibus quadratis contentum, quod intra dodecaedrum descriptum erit, quia 12 cubi latera in planis 12 pentagonorum dodecaedri jacent, ejusque 8 anguli in 8 dodecaedri angulis consistent. In dato itaque dodecaedro, &c. q. e. f.

PROP. IX. THEOR. IX.

In dato dodecaedro octaedrum describere.

Sit dodecaedrum, cujus sex opposita latera parallela $AB, CD; EF, GH; ab, cd$. Oportet in eo octaedrum describere. Fig. 124.

Secentur bifariam sex illa latera in punctis I, L, M, N, m, n , quæ connectantur 12 rectis $IL, IN, Im, In, LM, Ln, Lm, MN, Mm, Mn, Nn, Nm$. Dico factum.

Ducantur enim IM, LN, mn , quæ æquales (d) erunt, & se mutuo (e) bifariam, & ad angulos rectos in centro sphaeræ r secabunt. Quare
æqua-

(a) Lem. 1. prop. 10. lib. 14.

(b) Prop. 22. lib. 3.

(c) Prop. 34. lib. 1.

(d) Cor. 5. Prop. 17. lib. 13. (e) Cor. 6. ejusdem.

æquales existent omnes rI , rm , rL , rM , rn , rN , & anguli $Ir m$, $Ir L$, $m r L$, $m r M$, $L r n$, $M r n$, &c. recti, adeoque æquales. Igitur æquales erunt & 12 rectæ IL , Im , IN , Lm , LM , &c.; ac proinde æquilatera, & æqualia 8 triangu-
la ImL , LmM , MmN , NmI , InN , MnN , MnL , LnI , octaedrum intra dodecaedrum de-
scriptum constituentia; nam sex anguli octaedri
sex latera dodecaedri opposita ex constructione tan-
gunt. In dato igitur dodecaedro, &c. q. e. f.

COROLLARIUM.

Cum sit $ILMN$ quadratum unum octaedri, erit
quadratum ex diametro icoaedri IM æquale,
quadratis rectarum æqualium IL , LM , seu duplum
quadrati lateris octaedri IL in icoaedro inscripti.
Igitur cum latus dodecaedri AB (a) sit minus seg-
mentum diametri IM , media, ac extrema ratione
secti, erit latus dodecaedri minus segmentum rectæ,
cujus quadratum duplum est quadrati lateris octae-
dri in icoaedro descripti.

PROP. X. PROBL. X.

In dato dodecaedro pyramidem describere.

Describatur in dato dodecaedro cubus, atque
in hoc pyramis, factum erit, quod propo-
nitur.

Quoniam enim anguli pyramidis in angulis cu-
bi, & anguli cubi in angulis dodecaedri constituun-
tur; liquet, angulos pyramidis in angulis dode-
caedri locari. Quapropter pyramis (b) in dodecae-
dro descripta erit. In dato itaque dodecaedro, &c.
q. e. f.

PROP.

(a) Corol. 5. prop. 17. lib. 13.

(b) Def. 1. Prop. 12. lib. 13.

PROP. XI. PROBL. XI.

In dato icosaedro cubum describere.

Describatur in dato icosaedro dodecaedrum, & in hoc cubus, factum erit, quod proponitur.

Cum enim anguli cubi in angulis dodecaedri, & anguli dodecaedri in centrīs basium icosaedri locum habeant; manifestum est, angulos cubi centra basium icosaedri tangere; ac proinde cubus in icosaedro (a) descriptus erit. In dato itaque icosaedro, &c. q. e. f.

PROP. XII. PROBL. XII.

In dato icosaedro pyramidem describere.

In dato icosaedro describatur cubus, & in hoc pyramis, & factum erit, quod proponitur.

Cum anguli cubi ad centra basium icosaedri, & anguli pyramidis ad angulos cubi locum habeant; patet, angulos pyramidis centra earumdem basium icosaedri attingere, ac proinde pyramidem in icosaedro (a) esse descriptam. In dato igitur icosaedro, &c. q. e. f.

PROP. XIII. PROBL. XIII.

In dato cubo dodecaedrum describere.

Secentur bifariam singula cubi latera, atque jungantur rectæ æquales Ld , Ie , aP , Ih , PQ , QM , Se , Sh , Nf , Ma ; erunt AH , Ih ; Ih , eS ; Ie , AD ; Ie , hS ; aM , PQ ; Ld , Nf parallelæ, & aP , Ih ; Ld , Ie ; MQ , Fig. 129

(a) Def. 1. prop. 12. lib. 13.

MQ , eS ; Nf , Sh se mutuo bifariam, & ad angulos rectos in K , i , T , & p dividunt. Sectis quoque bifariam a M , PQ in V , & R jungantur VR , ip , quæ se mutuo (a) bifariam, & ad angulos rectos (b) secabunt in centro cubi O , atque ip ipsi Ih parallela erit. Dividantur deinde rectæ æquales a V , IK , Kh media, ac extrema ratione; sintque earum majora segmenta a Z , Ib , ch , quæ æqualia erunt; ideoque æquales & ZV , bK , Kc . Jungantur demum Zb , ZK , Zc , ab , aK , ac , atque ducantur AC diameter quadrati BD per punctum i transiens, & AG , HC , diametri cubi in O se mutuo (a) bifariam secantes.

Quoniam Ma perpendicularis est ipsi AH , erit Ma (c) recta ad quadratum AF ; ac ideo (d) anguli Zac , Zab recti erunt. Igitur cum sint quadrata rectarum a V , VZ , seu rectarum AK , Kc , hoc est (e) quadratum ex ac , triplum (f) quadrati rectæ a Z , erunt quadrata rectarum ca , aZ , seu (e) quadratum ex cz quadruplum quadrati rectæ a Z ; ideoque cZ dupla erit ipsius aZ . Eodem modo quadrata rectarum a K , Kb , seu quadratum ex ab æquale est quadratis ex a V , VZ , seu triplo quadrati ex a Z . Igitur quadrata rectarum ba , aZ , seu quadratum ex bz quadruplum erit quadrati rectæ a Z ; ac ideo bZ dupla quoque erit ipsius aZ . Rectæ itaque bZ , Zc æquales existunt, & triangulum bZc est isoscele.

Rursus Va est ad aZ , ut aZ ad ZV , seu ut (g) dupla ipsius aZ ad duplam rectæ ZV , hoc est, ut Zb , vel Zc ad bc . Est vero aZ majus segmentum rectæ Va extrema, ac media ratione
se-

(a) Cor. 1. prop. 15. lib. 13.

(b) Cor. 6. prop. 17. lib. 13.

(c) Def. 4. lib. 11.

(d) Def. 3. lib. 11.

(e) Prop. 47. lib. 1.

(f) Prop. 4. lib. 13.

[g] Prop. 15. lib. 5.

sectæ; igitur (a) bc majus segmentum quoque erit rectæ bZ , vel cZ eadem ratione divisæ.

Concipiatur deinde planum trianguli bZc extendi (ducta per Z recta Yg ipsi AH parallela) per parallelas Yg, Ih , ut sit planum extensum $YIhg$, occurrens diametro AC quadrati BD in n , & diametris cubi AG, HC in m , & t . Per n ducatur nl ipsi Ii , vel AY parallela, erit (b) Al ad ln , ut AI ad Ii . Est vero AI ipsi Ii æqualis. Igitur Al rectæ ln (c) pariter æqualis erit. Similiter IA ad AY ita se habebit, ut Il ad ln , seu IA . Est (d) AY æqualis majori segmento a Z rectæ a V , ipsi AI æqualis; igitur Al majus segmentum quoque erit (a) rectæ Il , extrema, ac media ratione sectæ; ac proinde Il (e) majus segmentum rectæ AI eadem ratione divisæ. Insuper cum sit in ad nA , ut Il ad Al , erit quoque in majus segmentum rectæ IA . Porro quoniam ip ipsi Ih parallela est, si per ip planum concipiatur transire, plano Yh parallelum, hæc duo parallela plana rectas OA, IA proportionaliter secabunt; quare Om ad mA erit, ut in ad nA ; ac ideo Om majus segmentum erit ipsius OA . Eodem modo demonstratur, aliam cubi semidiametrum OH secari a plano Yh in t media, ac extrema ratione, majusque segmentum esse Ot . Si jungantur puncta b, m, Z, t, c rectis bm, mZ, Zt, tc . Dico, rectilineum $bmZtc$, in plano Yh existens, esse pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.

Extendatur enim bm , ut ipsi gY in q occurrat, & jungatur Aq . Et quia planum IS per
N cen-

[a] Prop. 2. lib. 14.

(b) Prop. 4. lib. 6.

[c] Prop. 14. lib. 5.

[d] Prop. 34. lib. 1.

[e] Prop. 5. lib. 13.

centrum O transiens (*a*) parallelum est plano AE , si ducatur Ob , erit Ob (*b*) ipsi Aq parallela; ac ideo triangula Omb , Amq æquiangula erunt. Igitur (*c*) bm ad mq erit, ut Om ad mA ; ac per consequens bm (*d*) majus segmentum erit ipsius bq .

Rursus planum $P a M Q$ dividit cubum bifariam, ideoque per centrum O transit, & (*a*) parallelum est plano $ABCD$. Quare si per m aliud planum, ductum intelligatur, plano $ABCD$ parallelum, rectam IK in x interfecans, erit ut Om ad mA , ita Kx ad xI . Igitur Kx (*d*) majus segmentum erit ipsius KI ; ideoque si ab eo minus segmentum Kb auferatur, erit Kb (*e*) majus segmentum ipsius Kx . Præterea acta qk in plano Yh , ipsi mx parallela, secans KI in k , erit (*c*) bx ad xk , ut bm ad mq . Igitur bx (*d*) majus segmentum est rectæ bk . Quapropter (*d*) Kb ad bx erit, ut bx ad xk , seu ut (*f*) bk ad bx . Ergo Kb , kb æquales erunt. Jam vero planum $P a M Q$, & huic parallelum, quod per xm transit, a plano Yh secantur; igitur communes sectiones (*b*) KZ , xm parallelæ erunt; ac proinde parallelæ & KZ , kq , & qk KZ parallelogrammum; ac ideo (*g*) KZ , kq æquales erunt, & angulus ZKc (*h*) angulo qkb pariter æqualis. Sunt jam latera ZK , Kc lateribus qk , bk æqualia. Igitur æquales (*i*) erunt & Zc , qb , ac proinde æqualia & earum majora segmenta bc , bm . Eodem modo ostendetur, reliqua latera pentagoni $bmZtc$ æqualia esse. Pentagonum

ita-

- (a) Prop. 15. lib. 11.
- (b) Prop. 16. lib. 11.
- (c) Prop. 4. lib. 6.
- (d) Prop. 2. lib. 14.
- (e) Schol. 1. Prop. 5. lib. 13.
- (f) Def. 3. lib. 6.
- [g] Prop. 34. lib. 1.
- [h] Prop. 29. lib. 1.
- (i) Prop. 4. lib. 1.

itaque æquilaterum est. Quod quidem æquiangu-
lum sit, sic ostendo.

Cum sit bc majus segmentum lateris bZ , vel
 cZ trianguli isoscelis bZc : manifestum est (a)
circa triangulum bZc circulum Zbc descri-
bi posse, & in eo pentagonum æquilaterum,
 $Zrbcs$, cujus unum latus sit basis bc . Si
reliqua hujus pentagoni latera minime coincide-
rent cum reliquis lateribus pentagoni æquilateri *Fig. 126.*
 $bmZtc$, latera br , rZ æqualia essent lateribus
 bm , mZ , quod (b) repugnat. Quapropter la-
tera omnia horum pentagonorum coincidunt; ac
proinde pentagonum $bmZtc$ æquiangulum quo-
que existit.

Si itaque eadem arte 12 triangula, bina ni- *Fig. 125.*
mirum ad singulas rectas Ih , PQ , Se , Nf , Ma ,
 Ld , ipsi bZc similia, & æqualia construantur, &
eorum ope 12 pentagona, ipsi $bmZtc$ similia, &
æqualia componantur, constituetur dodecaedrum,
quod non proprie cubo BE inscriptum dicetur.
Nam non omnes ejus anguli, vel in angulis, vel in
lateribus, vel denique in planis cubi constituentur;
sed 12 quidem in 6 planis cubi, 8 vero in pun-
ctis, quibus 8 cubi semidiametri media, ac extre-
ma ratione secantur. Quocirca in dato cubo BE
dodecaedrum, &c. q.e.f.

S C H O L I A.

I. **S**I accipiantur Vs , Rr ipsi VZ , vel bK æqua-
les, & connectantur Zr , sr ; erit Zr dia-
meter dodecaedri, cubo BE inscripti, & Zs ipsi bc ,
atque sr (c) ipsi VR , vel lateri cubi HF æqualis.
Et, quia angulus RVs (d) rectus est, rectus erit (e)
N 2 & Zsr .

(a) Prop. 10. & 11. lib. 4.

(b) Prop. 21. lib. 1.

(c) Prop. 33. lib. 1.

(d) Cor. 2. prop. 15. lib. 12.

(e) Prop. 29. lib. 1.

¶ Zsr . Quapropter quadratum ex diametro dodecaedri Zr æquale erit quadratis rectarum Zs , sr , seu æquale quadrato lateris dodecaedri bc una cum quadrato lateris cubi HF .

II. Quoniam aV est ad VZ , ut aM , dupla ipsius aV ad Zs , duplam ipsius ZV , erit (a) Zs minus segmentum rectæ aM , vel lateris cubi HE extrema, ac media ratione secti; adeoque aZ , & sM simul, seu duplum rectæ aZ , hoc est bZ , majus segmentum erit ejusdem lateris HE . Constat vero, Zs esse latus dodecaedri, & bZ esse latus cubi (b) in dicto dodecaedro inscripti, cum subtendat angulum pentagoni $b m Z$. Igitur si latus cubi extrema, ac media ratione secetur, minus segmentum erit latus dodecaedri descripti in cubo, majus vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

III. Demum quia majus segmentum lateris cubi HE , est latus dodecaedri (c) cubo BE circumscripti; patet, latus cubi HE æquale esse lateri dodecaedri in ipso descripti una cum latere dodecaedri descripti circa eundem cubum.

PROP. XIV. PROBL. XIV.

In dato cubo icosaedrum describere.

Fig. 127. **S**It datus cubus MN . Oportet in eo icosaedrum describere.

Per centra basium cubi A, B, C, D, E, F duc rectas, lateribus cubi parallelas, & nusquam inter se coeunt, quæ omnes æquales erunt. Deinde divide earum medietates extrema, ac media ratione in punctis G, H, I, K, L, O , &c. ita ut majora segmenta GA, AH, IB, BK , &c. quæ æqualia erunt, sint prope centra. Junge ulte-

(a) Prop. 2. lib. 14.

(b) Cor. 2. prop. 17. lib. 13.

(c) Cor. 1. Prop. 17. lib. 13.

ferius quodlibet punctum cum quatuor vicinioribus, ut I cum G, H, X, Q, & X cum I, K, L, G, &c. ut 20 triangula constituentur G I H, G H T, I K X, I K Q, L O K, L O S, S T R, S T Y, X Y G, X Y L, Q R H, Q R O, G I X, G Y T, I Q H, H T R, O S R, O Q K, L Y S, L K X. Dico factum.

Nam, junctis Z A, Z G, Z H, erunt latera Z A, A G lateribus Z A, A H æqualia, & anguli Z A G, Z A H æquales, quia recti; ac proinde æquales (a) & Z G, Z H. Præterea cum sit B Z ad planum M P (b) recta, anguli I Z G, I Z H recti erunt, adeoque æquales. Quapropter æquales erunt (a) & I G, I H, & quadratum ex I G æquale erit quadratis rectarum I Z, Z G, seu rectarum m G, Z A, A G, seu rectarum A m, m G, A G. Sunt vero quadrata rectarum A m, m G (c) tripla quadrati rectæ A G. Igitur quadrata, quæ ex A m, m G, A G fiunt, seu quadratum ex I G quadruplum erit quadrati ex A G, seu æquale quadrato ipsius G H, nam G H ipsius A G dupla est. Quapropter I G, G H æquales erunt.

Eodem modo ostendemus, rectas omnes, dicta 20 trigona constituentes, rectis æqualibus G H, I K, L O, &c. æquales esse. Quapropter 20 illa trigona æquilatera, & æqualia erunt; ac proinde icosædram constituent cubo M N inscriptum, cum omnes ejus 12 anguli in 6 cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. In dato itaque cubo, &c. q. e. f.

S C H O L I A.

I. **S**I ducantur T K, T I, B E, ob B I, E T
æquales, & parallelas, æquales, & paralle-
N 3 la

(a) Prop. 4. lib. 1.

(b) Def. 4. lib. 11.

(c) Prop. 4. lib. 12.

la quoque erunt IT , BE . Est jam BE (a) lateri cubi equalis, & perpendicularis ipsi BZ , igitur & IT . Quare quadratum ex diametro icosaedri TK aequale erit quadratis rectarum TI , IK , seu quadrato lateris cubi una cum quadrato lateris icosaedri IK cubo inscripti.

II. Junctis deinde AC , FD ; patet, tres rectas AC , BE , FD centra oppositorum quadratorum cubi jungentes, aequales esse lateri cubi, adeoque & inter se, atque in centro cubi a bisariam, & ad angulos rectos se mutuo secari. Quapropter puncta media sex oppositorum laterum icosaedri junguntur tribus rectis aequalibus, & se mutuo bisariam, & ad angulos rectos in centro cubi secantibus.

III. Praeterea si jungatur aS , ob latera aE , ET lateribus aE , ES equalia, & angulos aET , aES etiam aequales, quia recti, aequales erunt aT , aS . Eodem modo ostendetur, rectas ex a ad angulos omnes icosaedri ductas, ipsi aT , vel aS aequales esse. Quare centrum cubi a , erit centrum quoque icosaedri sibi inscripti.

IV. Quoniam demum mA est ad AG , ut AG ad Gm , erit mn , dupla ipsius mA ad GH , duplam rectae GA , ut GH , dupla ipsius GA ad mG , Hn simul, quae duplae sunt ipsius mG . Hinc deducitur, latus icosaedri GH cubo inscripti esse majus segmentum lateris cubi mn media, ac extrema ratione secti.

PROP. XV. PROBL. XV.

In dato icosaedro octaedrum describere.

Fig. 124. **S**int AB , CD ; EF , GH ; ab , cd , sex opposita latera icosaedri, cui inscribendum est octaedrum, quae bisariam fecentur in I , L , M , N , m , n , atque jungantur 12 rectae IL , LM , MN , IN , Im , Lm , Mm , &c. Dico, $ILMNmn$ esse octaedrum quaesitum.

Nam

(a) Cor. 2. Prop. 15. lib. 13.

Nam junctis IM , LN , mn bifariam, & ad angulos rectos (a) in centro r se mutuo secantibus; erunt 12 illæ rectæ bases triangulorum IrL , IrM , LrM , mrM , LrM , &c. quorum latera æqualia sunt, & anguli sub lateribus contenti, recti, ac proinde æquales; ac per consequens æqualia, & æquilatera erunt trigona ImL , LmM , ImN , MmN , LnM , &c.; quare octaedrum constituent, quod in icosaedro descriptum erit, cum ejus anguli in bifariis sectionibus sex oppositorum laterum icosaedri locum habeant; in dato itaque icosaedro, &c. q. e. f.

COROLLARIUM.

Quoniam rectæ rI , rm , rL , &c., hoc est rectæ, quæ ex centro icosaedri r ad omnes angulos octaedri ducuntur, inter se æquales existunt; erit r centrum quoque octaedri in icosaedro descripti.

PROP. XIV. PROBL. XIV.

In dato octaedro icosaedrum describere.

Sint $ABCD$, $AECF$, $BEDF$ tria illa quadrata, quæ bifariam dividunt octaedrum, in quo describendum est icosaedrum. Dividantur eorum latera media, ac extrema ratione, & minora segmenta sint AG , AH , CI , CL , BP , BR , DM , DN , ES , EQ , FT , FX , quæ inter se æqualia erunt. Connectatur deinde quodlibet punctum divisionis cum quinque proximis, ut M cum N , H , S , Q , L , & H cum N , M , G , S , T restis MH , NH , MN , HG , MQ , ML , &c. & ita deinceps. Dico factum

Ductis enim tribus octaedri diametris AC , BD ,
 N 4 EF

(a) Cor. 2. præc.

EF inter se æqualibus, & se mutuo (a) bifariam, & ad angulos rectos in centro O secantibus; manifestum est, rectam AC secare GH in a, & BD rectam MN in b. Jungatur insuper Hb, atque ducatur Hc ipsi AO parallela. Quoniam trianglera GAH, NDM, ICL, RBP, SEQ, TFX latera æqualia habent, & angulos sub lateribus contentos, rectos, nempe angulos quadratorum; erunt æquales & eorum bases GH, MN, IL, RP, SQ, TX. Similiter cum sint latera HD, DN lateribus HD, DM æqualia, & anguli HDN, HDM, nempe anguli triangulorum octaedri, æquales, æquales erunt & HN, HM. Eadem ratione rectæ ML, NL, MQ, NT, &c. ipsi MH, vel HN æquales existunt. Præterea cum sint AB, AD in G, & H (b) proportionaliter sectæ, erunt GH, BD (c) parallelæ; adeoque (d) AO erit ad OD, ut Aa ad aH. Est jam AO ipsi OD æqualis; igitur æquales erunt & Aa, aH. Eadem ratione Aa ipsi aG æqualis erit. GH itaque in a bifariam secatur. Eodem modo ostendetur, Mb ipsi Db æqualem esse, & MN bifariam secari in b a diametro BD. Quare aH, seu Oc ipsi bM æqualis erit. Deinde cum sit Aa ad aO in ratione AH ad HD, erit Aa, vel aH minus, aO vero majus segmentum (b) rectæ AO extrema, ac media ratione sectæ. Similiter Db, vel bM minus, & bO majus segmentum erit rectæ DO eadem ratione divisæ. Quare, ob æquales AO, OD, majora segmenta aO, Ob, seu Hc, Ob, æqualia existent. Cum itaque sit Oc ipsi aH, vel minori segmento Aa æqualis, & Ob majori Oa pariter æqualis, erit Oc, seu bM (e) majus segmentum rectæ Ob extrema, ac media

12-

(a) Cor. 1. prop. 14. lib. 13.

(b) Prop. 2. lib. 14.

(c) Prop. 2. lib. 6.

(d) Prop. 4. lib. 6.

(e) Scho. 1. Prop. 5. lib. 13.

ratione sectæ. Igitur quadrata rectarum Ob , bc , seu rectarum Hc , cb , seu, ob angulum Hcb rectum, quadratum ex Hb , triplum erit (a) quadrati rectæ Oc , vel bM . Sed ob latera Hb , bM lateribus Hb , bN æqualia, & bases HM , HN etiam æquales, æquales erunt & anguli HbM , HbN , ideoque recti. Igitur quadratum ex HM , æquale iis, quæ ex Hb , bM fiunt, quadruplum erit quadrati rectæ bM . Est vero quadratum ex MN quadruplum quoque quadrati rectæ Mb . Quadrata itaque rectarum HM , MN æqualia erunt; adeoque æquales & HM , MN ; ac per consequens HMN triangulum æquilaterum erit.

Non secus ostendetur, rectas omnes MS , MQ , ML , NL , NT , NX , GS , HS , &c. ipsi MN , vel GH æquales esse. Quapropter 20 triangu-
gula MHN , MLN , MQS , GSH , GPR , &c. æqualia, & æquilatera erunt, ideoque ico-
saedrum constituent; quod quidem octaedro in-
scriptum erit, cum 12 ejus anguli in 12 sectio-
nibus laterum octaedri resideant. In dato itaque octaedro, &c. q. e. f.

COROLLARIA.

I. **H** Inc sequitur, quadratum lateris icosaedri HNH jungentis majus segmentum DH , & minus segmentum DN duorum laterum DA , DF trianguli æquilateri ADF , extrema, ac media ratione sectorum, duplum esse quadrati minoris segmenti DN . Quadratum enim ex GH , ipsi HN æquali, duplum est quadrati ipsius AH , rectæ ND æqualis. Fig. 129.

II. Insuper deducitur, 8 bases icosaedri, quæ in 8 basibus octaedri locum tenent, eadem centra habere, ac octaedri bases. Nam si accipiatur una basis octaedri AFD cum inscripta basi icosaedri HTN , & a centro O trianguli AFD ducantur OA , OF ,
 OD

(a) Prop. 4. lib. 13.

OD, OH, OT, ON, cum sint AT, AO ipsis NF, FO aequales, & anguli (a) TAO, NFO pariter aequales, nempe dimidii angulorum trianguli aequilateri AFD, aequales erunt & TO, ON. Simili modo ostendetur, rectam OH ipsi OT aequalem esse. Quapropter O centrum erit quoque basis icosaedri HTN.

Fig. 128. III. Deinde si intelligantur ductae OG, OQ, erunt latera OA, AG trianguli OAG aequalia lateribus OE, QE trianguli EOQ. Sunt aequales & anguli GAO, QEO, quia dimidii sunt angulorum quadratorum. Igitur aequales erunt & OG, OQ. Eodem modo ostendi potest, rectas a centro O ad angulos omnes icosaedri ductas aequales esse. Quare centrum octaedri O erit centrum quoque icosaedri in illo descripti.

IV. Demum cum sit triangulum AFD, ad triangulum THN, ut quadratum ex AF ad quadratum ex TH, erit triangulum AFD ad triangulum THN, ut quadratum ex AF ad duplum quadrati minoris segmenti FT. Sunt vero (b) AF, FT potentia incommensurabiles. Igitur incommensurabiles quantitates erunt & triangula AFD, THN, seu bases octaedri, & icosaedri.

PROP. XVII. PROBL. XVII.

In dato octaedro dodecaedrum describere.

Describatur (c) in octaedro icosaedrum, & in hoc (d) dodecaedrum. Dico factum.

Cum enim 20 anguli dodecaedri locum habeant in centris basium icosaedri, quarum (e) 8 concentricae sunt basibus octaedri; liquet, 8 angulos dode-

(a) Scho. prop. 18. lib. 14.

(b) Schol. prop. 6. lib. 13.

(c) Prop. 16. hujus.

(d) Prop. 5. hujus.

[e] Cor. 2. praec.

decaedri in centris octo basium octaedri residere, reliquos 12 vero in centris 12 basium icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis octaedri supponuntur; ac ideo dodecaedrum octaedro inscriptum esse dicetur, quamvis improprie, ut ex def. 1 prop. 12 lib. 13 satis colligitur. In dato itaque dodecaedro, &c. q. e. f.

PROP. XVIII. PROBL. XVIII.

In data pyramide cubum describere.

IN data pyramide (a) describatur octaedrum, & in hoc (b) cubus. Dico factum.

Quoniam enim octo anguli cubi in centris octo basium octaedri statuuntur, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, cum ipsis eadem centra (c) habentes, quatuor aliæ vero bifariam in earum centra (d) rectas a quatuor angulis pyramidis ad bases oppositas perpendiculariter demissas, secant. Fit, ut quatuor anguli cubi in centris quatuor basium pyramidis resideant, & reliqui quatuor in mediis punctis quatuor dictarum perpendicularium. Quapropter cubus pyramidi dicetur descriptus, licet improprie. In data itaque pyramide, &c. q. e. f.

PROP. XIX. PROBL. XIX.

In data pyramide icosaedrum describere.

IN data pyramide (a) inscribatur octaedrum, & in hoc octaedro (e) icosaedrum. Dico factum.

Cum enim 12 anguli icosaedri in 12 lateribus octae-

- (a) Prop. 2. hujus.
- (b) Prop. 4. hujus.
- (c) Cor. prop. 2. hujus.
- (d) Schol. Prop. 2. hujus.
- (e) Prop. 16. hujus.

octaedri resideant, & latera octaedri in planis basium pyramidis; manifestum est, 12 angulos icosaedri in planis basium pyramidis residere. Quapropter icosaedrum pyramidi inscriptum erit. In data itaque pyramide, &c. q. e. f.

PROP. XX. PROBL. XX.

In data pyramide dodecaedrum describere.

INScribatur (a) in data pyramide octaedrum, & in hoc (b) dodecaedrum. Dico factum.

Quoniam enim 8 anguli dodecaedri in centris octo basium octaedri statuuntur; manifestum est, quatuor angulos dodecaedri centra quatuor basium pyramidis tangere, quatuor vero bifarias sectiones perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum; supersunt autem 12 anguli dodecaedri, quorum bini singulis lateribus pyramidis supponuntur. Quapropter dodecaedrum in pyramide proposita descriptum esse dicetur, quamvis non proprie. In data itaque pyramide, &c. q. e. f.

PROP. XXI. PROBL. XXI.

In dato solido regulari sphaeram describere.

EX centro sphaerae, datum solidum complectentis, ad singulas bases perpendiculares demittantur, quae in centra circulorum aequalium, aequales bases comprehendunt, (c) cadent, ideoque (d) aequales erunt. Quapropter sphaera, cujus semidiametri sunt dictae perpendiculares aequales, in solido descripta erit, cum ejus superficies convexa singulas bases in earum centris continget. q. e. f.

Ele-

(a) Prop. 2. hujus.

(b) Prop. 17. hujus.

(c) Cor. 1. lem. 1. prop. 10. lib. 14.

(d) Lem. 2. Prop. 10. lib. 14.



Elementum sextumdecimum, & solidorum sextum.

PROP. I. THEOR. I.

Si in dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud dodecaedrum; erit proportio dodecaedri exterioris ad dodecaedrum interius proportionis, quam habet majus segmentum ad minus rectæ lineæ divisæ extrema, ac media ratione, triplicata.



IT latus cubi in dodecaedro descri- Fig. 91.
pti AB , sectus in E extrema, ac me-
dia ratione; patet, majus segmen-
tum (*a*) AE esse latus dodecaedri,
in quo cubus inscriptus est, & minus
 EB , esse latus dodecaedri (*b*) dicto

cubo inscripti. Igitur dodecaedrum exterius erit
ad dodecaedrum interius in triplicata ratione ma-
joris segmenti AE ad minus EB . Quapropter si
in dodecaedro, &c. q. e. d.

PROP.

[a] Cor. 1. prop. 17. lib. 13.

[b] Schol. 2. Prop. 13. lib. 15.

PROP. II. THEOR. II.

Linea perpendicularis ex quovis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema, ac media ratione.

Fig. 92. **I**N pentagono æquilatero, & æquiangulo $ABCDE$ demittatur ex angulo A ad latus oppositum CD perpendicularis AK , ducaturque BE , angulum BAE subtendens. Dico rectam AK secari in I extrema, ac media ratione.

Nam, ducta AC , cum sint BE , CD (a) parallelæ, erit (b) AI ad IK , ut AH ad HC . Est jam (c) AC secta in H extrema, ac media ratione. Igitur AK eadem ratione secta erit in I . Quare linea perpendicularis, &c. q. e. d.

PROP. III. THEOR. III.

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema, ac media ratione, ita ut prope quemvis angulum sit majus segmentum unius lateris, & minus alterius; hæ sectionibus suis in medio producant basin icosædri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alio triangulo æquilatero, cujus anguli, latera trianguli pyramidis secant extrema, ac media ratione, & latera ipsa bisariam secantur ab angulis basis icosædri.

Fig. 130. **S**It ABC triangulum pyramidis, cujus latera bisariam secantur in D , F , E , atque jungantur DE , DF , EF , triangulum octædri DFE con-

(a) Schol. Prop. 8. lib. 13.

(b) Prop. 2. lib. 6.

(c) Prop. 8. lib. 13.

constituentes (a). Dividantur deinde latera trianguli ABC extrema, ac media ratione in H, G, I , ac jungantur CH, AG, BI . Dico, rectas CH, AG, BI suis sectionibus producere triangulum icosaedri MRQ .

Ducta enim per Q , ubi AG secat EF , recta KL ipsi BC parallela; patet, triangulum EQL ipsi ABC æquiangulum esse, ac ideo æquilaterum. Quare cum sit AL ad LQ , ut AC ad CG , erit, existente CG minori segmento ipsius BC , vel AC , media, ac extrema ratione sectæ, etiam LQ , vel LE minus segmentum ipsius AL ; ac proinde (b) EL , seu QE majus segmentum ipsius AE , vel FE . Est ulterius AE ad EM , ut AC ad CG . Igitur EM minus segmentum quoque existit ipsius AE , vel ipsius DE . Eodem modo ostendetur, rectas BI, CH latera trianguli octaedri EDF ita secare in $Q, R, \& M$, ut FQ, RD, ME sint eorum minora segmenta. Quapropter rectæ BI, AG, CH suis sectionibus triangulum (c) icosaedri MRQ constituunt.

Ducta deinde per M recta NO ipsi CH parallela, erit AL ad EL , ut AQ ad QM ; sed AQ est ad QM , ut AH ad HN , & ut AC ad CO . Igitur cum sit LE minus segmentum ipsius AL , erit quoque CO minus segmentum ipsius AC , & HN minus segmentum rectæ AH ; quare AN majus segmentum erit ipsius AH ; ac ideo AN ipsi (b) BH æqualis. Recta itaque NO ita secat latera AB, AC , ut AN minus segmentum sit ipsius AB , & AO majus segmentum rectæ AC . Eodem modo ostendetur, ductis NP, OP per puncta $R, \& Q$, ipsis AG, BI respectively parallelis, ipsas latera trianguli ABC extrema, ac media ratione secare, adeoque in $N, O \& P$ con-

ve-

(a) Prop. 2. lib. 15.

(b) Schol. 1. Prop. 5. lib. 13.

(c) Prop. 16. lib. 15.

venire : Quapropter latera triangulorum NAO , NBP , PCO æqualia erunt; sunt quoque æquales anguli NAO , NBP , PCO . Igitur æqualia erunt & latera trianguli NPO .

Demum, ob parallelismum rectarum NO , CH , est NM ad MO , ut HQ ad QC ; sed ob parallelas AB , EF , est HQ ad QC , ut BF ad FC . Igitur NM ad MO erit, ut BF ad FC . Sunt jam BF , FC æquales; æquales ergo erunt & NM , MO . Simili argumento ostendetur, rectas NP , PO in R , & Q bifariam sectas esse. Triangulum itaque icosaedri MRQ inscriptum est triangulo æquilatERO NOP , cujus anguli latera basis pyramidi ABC extrema, ac media ratione dividunt, & latera ipsa bifariam secantur in M , R , & Q ab angulis basis icosaedri MRQ . Quapropter si ab angulis trianguli, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Cum sit quadratum ex NO (a) duplum quadrati ipsius AN , & ob NO ipsius RQ duplum, quadratum ex NO quadruplum quadrati rectæ RQ ; erit quadratum minoris segmenti AN lateris pyramidis, extrema, ac media ratione secti, duplum quadrati lateris icosaedri RQ in ea pyramide descripti.

PROP. IV. THEOR. IV.

Minus segmentum lateris pyramidis extrema, ac media ratione secti, duplum est potentia lateris icosaedri, in ea pyramide descripti.

Demonstratio patet ex corol. præc.

PROP.

(a) Cor. 1. Prop. 16. lib. 15.

PROP. V. THEOR. V.

Latus cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descriptæ; latus vero pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti; latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

PAtet ex corollariis prop. 1, 2, & 3 lib. 15.

PROP. VI. THEOR. VI.

Latus dodecaedri majus segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscriptæ.

NAm latus dodecaedri (a) majus segmentum est lateris cubi sibi inscripti, quod potentia dimidium est (b) lateris pyramidis in eo inscriptæ, seu in dodecaedro (c) descriptæ. Igitur latus dodecaedri, &c. q. e. d.

PROP. VII. THEOR. VII.

Si in cubo describatur & icosaedrum, & dodecaedrum; latus icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & dodecaedri.

CUm enim majus segmentum (d) lateris cubi sit latus icosaedri cubo inscripti, & minus (e) latus dodecaedri in eodem cubo descripti; patet, latus icosaedri medium proportionale esse inter latus cubi, & dodecaedri. Si in cubo itaque describatur, &c. q. e. d.

O

PROP.

(a) Corol. 1. prop. 17. lib. 13.

(b) Prop. præc.

(c) Prop. 10. lib. 15.

(d) Schol. 4. Prop. 14. lib. 15.

(e) Schol. 2. Prop. 13. lib. 15.

PROP. VIII. THEOR. VIII.

Latus pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

QUoniam enim quadratum lateris pyramidis est ad quadratum lateris octaedri sibi inscripti (a), ut 4 ad 1; & quadratum lateris dicti octaedri ad quadratum lateris cubi sibi inscripti, ac proinde (b) descripti in pyramide, ut (c) 9 ad 2; erit ex æquo quadratum lateris pyramidis ad quadratum lateris cubi in ea descripti, ut 36 ad 2, seu ut 18 ad 1. Latus igitur pyramidis, &c. q. e. d.

PROP. IX. THEOR. IX.

Latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema, ac media ratione sectæ, cujus majus segmentum latus est dodecaedri in pyramide descripti.

NAm si in pyramide describatur dodecaedrum, & in hoc cubus, erit cubus pyramide quoque inscriptus. Sed latus dodecaedri est majus segmentum lateris cubi (d) in eo descripti. Igitur cum sit quadratum lateris pyramidis ad quadratum lateris cubi in ea descripti, ut 18 ad 1, erit quadratum lateris pyramidis ad quadratum rectæ, extrema, ac media ratione sectæ, cujus majus segmentum est latus dodecaedri in pyramide descripti, ut 18 ad 1. Latus igitur pyramidis, &c. q. e. d.

PROP.

(a) Corol. 1. prop. 2. lib. 15.

(b) Prop. 18. lib. 15.

(c) Cor. Prop. 4. lib. 15.

(d) Cor. 1. prop. 17. lib. 13.

PROP. X. THEOR. X.

Si in octaedro icosaedrum describatur; erit latus icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema, ac media ratione divisi.

Patet ex cor. 1 prop. 16 lib. 15.

PROP. XI. THEOR. XI.

Latus octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

Demonstrationem hujus propositionis invenies in corol. prop. 4 lib. 15.

PROP. XII. THEOR. XII.

Latus icosaedri majus segmentum est ejus rectæ extrema, ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in icosaedro descripti.

Nam si in cubo describatur icosaedrum, & in hoc octaedrum, erit octaedrum cubo pariter inscriptum, ut ex prop. 14, & 15 lib. 15 evidens est. Quare cum sit latus icosaedri cubo inscripti (a) majus segmentum lateris cubi extrema, ac media ratione secti, & quadratum lateri cubi (b) duplum quadrati lateris octaedri sibi inscripti; erit latus icosaedri majus segmentum ejus rectæ extrema, ac media ratione sectæ, cujus quadratum duplum est quadrati lateris octaedri in icosaedro descripti, Latus itaque icosaedri, &c. q. e. d.

O 2

PROP.

(a) Schol. 4. Prop. 14. lib. 15.

(b) Prop. 5. hujus.

PROP. XIII. THEOR. XIII.

Latus cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam ejus, quam habet majus segmentum ad minus rectæ lineæ divisæ extrema, ac media ratione. Latus vero dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad majus ejusdem rectæ lineæ.

CUM enim minus segmentum lateris cubi, extrema, ac media ratione secti sit (*a*) latus dodecaedri cubo inscripti, & majus, latus dodecaedri (*b*) cubo circumscripti; manifestum est, latus cubi esse ad latus dodecaedri in ipso descripti, ut recta extrema, ac media ratione secta ad minus ejus segmentum. Sed tota recta, majus ejus segmentum, & minus (*c*) sunt lineæ continue proportionales. Igitur tota erit ad minus ejus segmentum (*d*) in duplicata ratione majoris segmenti ad minus; ac ideo latus cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti erit quoque in duplicata ratione majoris segmenti ad minus.

Patet quoque, latus dodecaedri esse ad latus cubi in eo descripti, ut majus segmentum rectæ extrema, ac media ratione sectæ ad rectam ipsam, seu ut minus segmentum ad majus ejusdem rectæ. Latus igitur cubi, &c. q. e. d.

PROP. XIV. THEOR. XIV.

Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis.

PAtet ex cor. prop. 6 lib. 15.

PROP.

(*a*) Schol. 2. Prop. 13. lib. 15.

(*b*) Cor. 1. Prop. 17. lib. 13.

(*c*) Def. 3. lib. 6. (*d*) Def. 7. lib. 6.

PROP. XV. THEOR. XV.

Si ex quadrato diametri icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti ; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris icosaedri.

Sit icosaedrum $FNHRGQP$, cujus diameter Fig. 109.
 GH , centrum O , & duo triangula opposita,
 ac parallela $R G Q$, PNH , quorum centra I , &
 L jungantur recta LI , quæ per centrum sphæ-
 ræ, seu icosaedri O (*a*) transibit, & recta erit
 utrique triangulo. Et quoniam anguli cubi, ico-
 saedro inscripti, (*b*) in centris basium icosaedri lo-
 cum habent, erit LI diameter dicti cubi. Quare,
 ducta GI , radio circuli, triangulum $R G Q$ cir-
 cumscribentis, erit, ob angulum rectum OIG ,
 quadratum ex OG æquale (*c*) quadratis rectarum
 OI , IG ; ac proinde quadratum ex GH , dupla
 ipsius GO , quadratis, quæ fiunt ex IL , & ex dupla
 GI , nempe diametro dicti circuli, æquale quoque exi-
 stet. Quapropter, demto a quadrato diametri icosae-
 dri GH quadratum diametri cubi LI , seu (*d*) tri-
 plum quadrati ejus lateris, remanebit quadratum
 diametri circuli, triangulum $R G Q$ circumscri-
 bentis. Hoc igitur dico, sesquitertium esse qua-
 drati lateris icosaedri GR .

Nam quadratum radii GI ad quadratum late-
 ris GR ita se habet (*e*), ut 1 ad 3. Igitur qua-
 druplum quadrati radii GI , nempe quadratum
 diametri circuli, triangulum $R G Q$ comprehen-
 dentis ad quadratum lateris icosaedri GR erit, ut
 4 ad 3. Quapropter si ex quadrato diametri, &c.
 q. e. d.

O 3

CO-

[a] Schol. lem. 2. prop. 10. lib. 14.

[b] Prop. 11. lib. 15.

[c] Prop. 47. lib. 1.

[d] Prop. 15. lib. 13.

[e] Prop. 12. lib. 13.

COROLLARIUM.

Igitur si in icosaedro describatur cubus, & in hoc pyramis, quæ icosaedro pariter inscripta erit, ut patet ex descriptione pyramidis in cubo; cum sit quadratum diametri cubi (a) sesquialterum quadrati lateris pyramidis sibi inscriptæ; erit quadratum diametri icosaedri æquale iis, quæ fiunt & ex recta, cujus quadratum sesquialterum est quadrati lateris pyramidis icosaedro inscriptæ, nempe diametro cubi, & ex recta, cujus quadratum sesquitertium est quadrati lateris ipsius icosaedri, nempe diametro circuli triangulum icosaedri circumscribentis.

PROP. XVI. THEOR. XVI.

Latus dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema, ac media ratione divisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti.

Patet ex cor. prop. 9. lib. 15.

PROP. XVII. THEOR. XVII.

Diameter icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

Patet ex cor. prop. 15. hujus.

PROP. XVIII. THEOR. XVIII.

Latus dodecaedri ad sibi inscripti icosaedri latus se habet, ut minus segmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema, ac media ratione divisæ, ad partem ejusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus ejusdem positæ.

Fig. 122. **S**it dimidium dodecaedrum sex pentagonis AB-CDE, CFGHD, GIKLH, KMNQL, NO.

(a) Cor. Prop. 1. lib. 15.

NOAEQ, EDHLQ contentum, quorum centra a, b, c, d, e, P. Supposita præparatione, & argumentatione prop. 7. lib. 15., manifestum est, rectam ab esse latus icosaedri in dodecaedro descripti, & Ag, Gg, per centra a, & b ductas, inter se æquales esse, & lateri CD perpendiculares; item ag, gb pariter inter se æquales. Igitur Af minus segmentum erit (a) ipsius Ag extrema, ac media ratione sectæ. Dico, ita esse latus dodecaedri AB ad latus icosaedri sibi inscripti ab, ut Af ad rectam ag, inter centrum a, & latus CD interceptam.

Nam si jungatur AG opposita, & parallela latera dodecaedri AO, GI connectens, erit per ea, quæ demonstravimus in prop. 23 lib. 14. latus dodecaedri AB minus segmentum ipsius AG. Quare (b) AG erit ad Ag, ut BA ad Af. Sed, ob æquales Ag, Gg, & ag, gb, est AG ad Ag, ut ab ad ag. Igitur AB ad Af ita se habebit, ut ab ad ag, seu permutando latus dodecaedri AB erit ad latus icosaedri sibi inscripti ab, ut af ad ag. Quapropter latus dodecaedri, &c. q. e. d.

PROP. XIX. THEOR. XIX.

Si dimidium lateris icosaedri extrema, ac media ratione sectum fuerit, minusque ejus segmentum a toto latere icosaedri sublatum; a reliqua quoque recta pars rursus tertia detracta: relinquetur latus dodecaedri in icosaedro descripti.

Circa pentagonum ABCDE ex quinque late-
ribus icosaedri compositum, describatur circulus, cujus centrum I, & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur, angulum solidum icosaedri in Q constituentia. Deinde ex centro I demittatur IHF perpendicu-
O 4 la-

(a) Prop. 2. hujus.

(b) Prop. 2. lib. 14.

laris supra CD , (a) ipsam bifariam secans in H , atque per M , & N , centra triangulorum BOC , COD , agantur rectæ OR , OH (b) ipsas BC , CD bifariam, & ad angulos rectos secantes in R , & H , jungaturque MN , (c) latus dodecaedri in icosaedro descripti. Demum BR secetur in P extrema, ac media ratione, & ablato minori segmento BP , ex reliqua PC tertia pars CQ detrahatur. Dico, reliquam QP lateri dodecaedri MN æqualem existere.

Diviso enim radio IF bifariam in G , patet IG , vel GF (d) majus segmentum esse ipsius IH ; ac proinde HF (e) minus segmentum dimidii radii GF eadem ratione secti. Quare radius IF excedit rectam IH minori segmento dimidiæ ipsius IF . Præterea si jungatur RH , erit, per ea, quæ demonstravimus prop. 5. lib. 15, RH latus pentagoni æquilateri, ac æquianguli, pentagono $ABCDE$ inscripti. Igitur, ductis rectis IC , ID , IR , erunt triangula RIH , CID similia; ac proinde (f) IC , vel IF erit ad IH , ut CD ad RH . Sed IF excedit IH minori segmento dimidiæ ipsius IF . Igitur CD , vel BC excedet ipsam RH minori segmento dimidiæ ipsius BC , seu excedet parte BP ; ac ideo PC , RH æquales erunt. Unde cum sit tam RH ad MN , quam PC ad PQ ex constructione, ut 3 ad 2; erunt PQ , MN inter se quoque æquales. Si dimidium itaque lateris icosaedri, &c. q. e. d.

PROP.

- (a) Prop. 3. lib. 3.
- (b) Schol. prop. 18. lib. 14.
- (c) Prop. 5. lib. 15.
- (d) Schol. Prop. 2. lib. 14.
- (e) Schol. 1. prop. 5. lib. 13.
- (f) Prop. 4. lib. 6.

PROP. XX. THEOR. XX.

Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

NAm si cubo inscribatur pyramis, quia anguli pyramidis in angulis cubi locum habent, eadem sphaera comprehendetur pyramis, qua cubus. Sed cubus triplus est (a) pyramidis in eadem sphaera descriptæ. Ergo cubus pyramidis sibi inscriptæ triplus quoque existet. Cubus itaque sibi inscriptæ, &c. q. e. d.

PROP. XXI. THEOR. XXI.

Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est.

SIt in pyramide $ABCD$ inscriptum octaedrum $EIKGHF$. Dico, pyramidem duplam esse octaedri. Fig. 49.

Quatuor enim pyramides $AEGH$, $EBFI$, $GFCK$, $IHKD$ inter se æquales, & similes pyramidi $ABCD$ cum octaedro $EIKGHF$ integram pyramidem $ABCD$ constituunt. Igitur cum sit pyramis $ABCD$ ad pyramidem $IHKD$ in triplicata ratione ipsius AB ad IH , seu in triplicata ratione numeri 2 ad 1, hoc est ut 8 ad 1; erit pyramis $ABCD$ ad illas quatuor, ut 8 ad 4, seu ut 2 ad 1; ac proinde pyramis $ABCD$ ad octaedrum sibi inscriptum erit quoque, ut 2 ad 1. Pyramis itaque sibi inscripti octaedri, &c. q. e. d.

COROLLARIUM.

Hinc liquet, pyramidem ad octaedrum sibi inscriptum eandem rationem habere, quam eorum latera, vel eorum superficies habent, vel quam habet una.

(a) Prop. 32. lib. 14.

PROP. XXII. THEOR. XXII.

Cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QUoniam si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque descriptum erit, ut constat ex octaedri in pyramide, & pyramidis in cubo descriptione. Igitur cum sit cubus ad pyramidem sibi inscriptam, ut (a) 3 ad 1, seu 6 ad 2, & pyramis ad octaedrum (b) sibi inscriptum, ut 2 ad 1; erit ordinando cubus ad octaedrum sibi inscriptum, ut 6 ad 1. Cubus itaque sibi inscripti octaedri, &c. q. e. d.

PROP. XXIII. THEOR. XXIII.

Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

NAm si in cubo inscribatur octaedrum, & intra octaedrum alius cubus, cum sit quadratum lateris cubi ad quadratum (c) lateris octaedri sibi inscripti, ut 2 ad 1, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi (d) in eo pariter inscripti, ut 9 ad 2; erit ex æquo quadratum lateris cubi externi ad quadratum lateris cubi interni, ut 18 ad 2, seu 9 ad 1; ac proinde latus cubi externi erit ad latus cubi interni, ut 3 ad 1. Quapropter cubus externus ad internum ita se habebit, ut 27 ad 1. Est autem octaedrum (e) ad cubum externum, ut 1 ad 6. Igi-

(a) Prop. 20. hujus.

(b) Prop. 21. hujus.

(c) Prop. 5. hujus.

(d) Cor. prop. 4. lib. 15.

(e) Prop. præc.

Igitur ex æquo octaedrum ad cubum sibi inscriptum erit, ut 27 ad 6, seu ut 9 ad 2. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi, &c. q.e.d.

COROLLARIA.

I. **H**inc liquet, octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem proportionem habere, quam eorum laterum quadrata (a) habent.

II. Præterea si statuatur cubus externus partium 54, pyramis sibi inscripta harum 18 continebit, octaedrum in pyramide, ac proinde in cubo descriptum 9, & cubus in octaedro descriptus continebit 2.

PROP. XXIV. THEOR. XXIV.

Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

NAm si in octaedro describatur cubus, & in hoc pyramis, liquet, hanc octaedro inscriptam esse. Igitur cum sit octaedrum (b) ad sibi inscriptum cubum, ut 9 ad 2, seu ut 27 ad 6, & cubus ad sibi inscriptam pyramidem (c), ut 3 ad 1, seu ut 6 ad 2; erit ordinando octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem, ut 27 ad 2, seu ut 13 ad 1. Quapropter octaedrum, &c. q.e.d.

PROP. XXV. THEOR. XXV.

Pyramis sibi inscripti cubi noncupla est.

NAm octaedrum, sibi que inscriptus cubus in eadem pyramide describuntur. Est autem pyramis ad octaedrum sibi inscriptum, ut 2 ad 1, &

(a) Cor. Prop. 4. lib. 15.

(b) Prop. præc.

(c) Prop. 20. hujus.

1, & octaedrum ad cubum sibi pariter inscriptum, ut 9 ad 2. Igitur ex æquo pyramis ad sibi inscriptum cubum erit, ut 18 ad 2, seu ut 9 ad 1. Quapropter pyramis sibi inscripti cubi, &c. q. e. d.

PROP. XXVI. THEOR. XXVI.

Octaedrum ad sibi inscriptum icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases icosaedri.

Fig. 132. **I**ntelligatur in octaedro $ABCDEF$ inscriptum icosaedrum. Dico, octaedrum esse ad icosaedrum, ut sunt duæ bases octaedri ad quinque bases icosaedri.

Cum enim octo bases icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; sit GHI una basis icosaedri in una basi octaedri AED inscripta, atque O centrum octaedri, ac ideo icosaedri. Demittatur ex O ad basin AED perpendicularis OK , cadens in centrum trianguli AED , seu circuli (a) ipsum circumscribentis; ac proinde in centrum trianguli GHI . Deinde si ex centro O ad omnes angulos tum octaedri, cum icosaedri rectæ ducantur, resolvetur octaedrum in 8 pyramides inter se æquales, & icosaedrum in 20 pyramides pariter æquales inter se. Cum autem sit una pyramis octaedri $ADEO$ ad unam pyramidem icosaedri $HGIO$, ut (b) basis ADE ad basin HGI , erunt 8 pyramides, ipsi $ADEO$ æquales, ad 20 pyramides æquales ipsi $HGIO$, seu octaedrum ad icosaedrum, ut 8 bases, ipsi ADE æquales, ad 20 bases, æquales basi GHI , seu ut 2 bases ipsi AED æquales ad 5 bases, æquales basi HGI . Quapropter octaedrum ad sibi inscriptum icosaedrum, &c. q. e. d.

CO.

(a) Cor. 1. lem. 1. prop. 10. lib. 14.

(b) Prop. 5. lib. 12.

COROLLARIUM.

Quoniam octaedrum, & icosaedrum in eo descriptum in eadem pyramide describuntur. Igitur cum sit pyramis ad sibi inscriptum octaedrum, ut (a), basis pyramidis ad duas bases octaedri, & octaedrum ad sibi inscriptum icosaedrum, ut duæ bases octaedri ad quinque bases icosaedri; erit ordinando pyramis ad sibi inscriptum icosaedrum, ut basis pyramidis ad quinque bases icosaedri.

PROP. XXVII. THEOR. XXVII.

Icosaedrum ad sibi inscriptum dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportionem lateris icosaedri ad latus cubi in eadem cum icosaedro sphaera descripti, & ex proportionem triplicata ejus, quam habet diameter icosaedri ad rectam centra basium icosaedri oppositarum conjungentem.

IN icosaedro GFH, cujus latus K, ducatur LI centra oppositarum basium jungens, & diameter HG; sitque M latus cubi in eadem sphaera cum icosaedro inscripti. Dico, icosaedrum GFH esse ad dodecaedrum sibi inscriptum in ratione composita ex ratione K ad M, & triplicata diametri HG ad LI. Fig. 105.

Quoniam enim dodecaedrum in icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium icosaedri, erit LI, angulos oppositos jungens, diameter dodecaedri. Positis jam tribus magnitudinibus, icosaedrum scilicet GFH, dodecaedrum diametri HG, in eadem nimirum sphaera inscriptum, qua icosaedrum GFH, & dodecaedrum diametri LI, icosaedro GFH inscriptum; erit prima ad tertiam in ratione composita primæ ad se-

(a) Cor. Prop. 21. hujus.

secundam, & secundæ ad tertiam. Est autem (a) prima ad secundam, nempe icosaedrum GFH, ad dodecaedrum diametri HG, ut latus icosaedri K ad latus cubi M, & secunda ad tertiam, nempe dodecaedrum diametri HG ad dodecaedrum diametri LI (b) in triplicata ratione ipsius HG ad LI. Igitur icosaedrum GFH ad dodecaedrum sibi inscriptum erit in ratione composita ex K ad M, & triplicata ipsius HG ad LI. Icosaedrum itaque ad sibi inscriptum dodecaedrum, &c. q. e. d.

L E M M A.

Fig. 51. SI in prismatico ABCDEF ducantur BF, BD, habebitur pyramis ACDFB, cujus basis est parallelogrammum ACD F, & vertex B. Dico, hanc pyramidem prismatis ABCDEF duas tertias partes continere.

Ducta enim AD, patet, pyramidem ADCB tertiam partem esse prismatis ABCDEF. Est autem pyramis ACDFB dupla pyramidis ADCB, ob basin ACD F duplam basis ACD. Igitur pyramis ACDFB duas tertias partes prismatis ABCDEF continebit. q. e. d.

PROP.

(a) Prop. 11. lib. 14.

(b) Cor. Prop. 17. lib. 12.

PROP. XXVIII. THEOR. XXVIII.

Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cujus quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti ejusdem lateris cubi: at vero altitudo ab altitudine, sive latere cubi, minori segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

SIt basis cubi $ABCD$, cujus latera sustentant Fig. 123.
 quatuor æqualia pentagona $AEDIH$, $AGBFE$, $EDKCF$, $FBLMC$ dodecaedri sibi circumscripti; patet, supra quadratum $ABCD$ existere partem dodecaedri, nempe solidum $ABCDEF$. Similiter super quinque reliquas cubi bases quinque alia solida existent æqualia, & similia solido $ABCDEF$, nam illorum plana æqualia, & similia erunt planis hujus. Dico, hæc sex solida, seu excessum dodecaedri supra cubum in eo inscriptum, æquale esse parallelepipedo, cujus quidem basis deficit ab $ABCD$, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi BC , & tertia parte minoris segmenti ejusdem lateris; altitudo vero deficit ab altitudine, seu latere cubi, minori segmento ejus lineæ, quæ minus segmentum est dimidii lateris cubi.

Sectis enim bifariam AD , BC in N , & P , jungatur PN , quæ parallela erit ipsi EF , atque in eam perpendiculares EO , FR ex angulis E , & F demissæ, cadent, ut patet conferendo hoc cum schemate proposit. 17 lib. 13; ductis deinde per O , & R rectis QS , XY lateri AD parallelis, erunt EF , OR , QX inter se æquales, ac ideo (a) majora segmenta lateris cubi AB , & EO , FR dimidiæ lateris dodecaedri EF , & NO , RP simul, seu AQ , BX simul minora segmen-
 ta

[a] Cor. 1. prop. 17. lib. 13.

ta existent lateris cubi AB , ut liquet ex prop. 17 lib. 13. Junctis ulterius QE , ES , FX , FY , constituentur duæ pyramides $AQSD$, $XBCYF$ æquales, ob basium $AQSD$, $XBCY$, & altitudinum EO , FR æqualitatem. Præterea ob parallelas, & æquales EF , QX (a) æquales, & parallelæ erunt QE , XF , ac ideo $EQXF$ parallelogrammum. Similiter parallelæ, & æquales erunt ES , FY , & $EFYS$ parallelogrammum. Quare cum sint QE , ES , QS ipsis XF , FY , XY respective æquales, & parallelæ, erunt trigona QES , XFY æqualia, & parallela. Solidum igitur $QESYFX$ parallelepipedum erit.

Sumatur insuper XT æqualis ipsis AQ , XB simul, ex qua abscindatur ejus tertia pars Tb , ut Xb duas tertias partes minoris segmenti lateris cubi AB contineat, & agantur Ta , bc ipsi AD parallelæ. Quoniam basis TX a dupla est ipsius $XBCY$, ob TX duplam ipsius XB , erit pyramis, cujus basis TY , & vertex F , pyramidis $XBCYF$ pariter dupla; ac proinde pyramis TYF pyramidibus $XBCYF$, $AQSD$ æqualis existet. Sed pyramis TYF (b) duas tertias partes est prismatis, cujus basis est eadem TY , & altitudo FR , vertex vero pars rectæ EF ipsi XT æqualis. Igitur cum Xb duas tertias partes contineat ipsius XT , continebit quoque basis Xc duas tertias ipsius Xa ; ac proinde prisma, cujus basis est Xc , & altitudo RF , vertex vero pars rectæ EF ipsi Xb æqualis, duas tertias partes continebit prioris prismatis, & iccirco æquale erit pyramidibus $AQSD$, $BCYXF$ simul. Huic prismati addatur prisma $QESYFX$, efficietur prisma æquale solido $ABCDEF$, cujus basis erit summa rectangulorum XS , & Xc , seu rectangulum contentum sub latere cubi BC , & recta com-

po-

(a) Prop. 33. lib. 1.

[b] Lem. præc.

posita ex ejus majori segmento XQ , & duabus
 tertiis partibus minoris segmenti Xb ; adeoque a
 base cubi $ABCD$ deficiet rectangulo ba sub la-
 tere cubi bc , & tertia parte minoris segmenti
 Tb contento. Non secus investigabimus alia similia
 quinque prismata æqualia, & proximo dicto prismati,
 & reliquis quinque solidis, super reliquas cubi ba-
 ses constitutis. Quoniam vero duo quælibet prisma-
 ta illiusmodi inter se aptata parallelepipedum com-
 ponunt ejusdem altitudinis FR ; constituentur ex sex
 illis tria parallelepipeda, quorum bases erunt æ-
 dem, ac bases prædictorum prismatum, altitu-
 dines ipsi RF , æquales; ac proinde ex tribus his
 parallelepipedis inter se compositis exurget paral-
 lelepipedum, excessui dodecaedri supra cubum sibi
 inscriptum æquale, cujus basis a base cubi deficiet
 rectangulo ba , & altitudo tripla erit ipsius FR .
 Quod quidem hæc altitudo deficiat a latere cubi BC ,
 minori segmento ejus rectæ, quæ dimidii ipsius
 lateris BC , minus segmentum existit, ita osten-
 demus.

Dividatur latus cubi BC extrema, ac media
 ratione in d ; indeque bisecentur & majus segmen-
 tum Bd in e , & minus Cd in g . Igitur CB erit ad
 Bd , ut Bd ad dC . Est vero segmentum Bd majus
 dimidia ipsius BC ; igitur minus segmentum dC
 majus quoque erit dimidio majoris Bd . Abscin-
 datur itaque dm ipsi de æqualis; erit Bm altitudo
 prædicti parallelepipedum. Porro cum sit dm majus
 segmentum dimidii lateris cubi PC , & dg , vel
 gC minus segmentum ipsius CP ; erit (a)
 gm minus segmentum ipsius dm , & per conse-
 quens mC minus segmentum ipsius gC . Quare
 altitudo Bm deficit a latere cubi BC minori seg-
 mento mC rectæ Cg , quæ dimidii lateris cubi mi-
 nus

(a) Schol. 1. Prop. 5. lib. 13.

nus segmentum existit. Dodecaedrum itaque excedit cubum, &c. q. e. d.

C O R O L L A R I U M.

Quoniam excessus dodecaedri supra cubum sibi inscriptum equalis est parallelepipedo, cujus basis deficit a quadrato $ABCD$ quantitate ba , altitudo vero est Bm ; sequitur, quod si huic parallelepipedo addantur duo parallelepipeda, unum habens basin ba , & altitudinem Bm , alterum vero habens basin $ABCD$, & altitudinem mC , conficietur cubus dodecaedro inscriptus. Quapropter cum dodecaedrum aequale sit cubo sibi inscripto, & supra dicto parallelepipedo, manifestum est, dodecaedrum a duplo cubi, sibi inscripti, deficere duobus parallelepipedis, quorum unum basin habet ba , & altitudinem Bm , alterum vero habet basin $ABCD$, & altitudinem mC , hoc est duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo, lateri cubi, latitudo autem tertiae parti minoris segmenti ejusdem lateris cubi est equalis; altitudo denique a latere cubi deficit minori segmento ejus lineae, quae dimidii lateris cubi minus segmentum est; alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi equalis est, altitudo autem minus segmentum est illius lineae, quae dimidiati lateris cubi minus segmentum existit.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR. XXIX.

Dodecaedrum ad sibi inscriptum icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionem triplicatam ejus, quam habet diameter dodecaedri ad rectam centra basium dodecaedri oppositarum copulantem, & proportionem lateris cubi ad latus icosaedri in eadem sphaera cum cubo descripti.

ESto FME dodecaedrum, ejusque diameter Fig. 108.
EF, & QP recta conjungens centra oppositarum basium, nec non R latus cubi, & S latus icosaedri eadem sphaera cum cubo comprehensi. Dico, dodecaedrum FME esse ad sibi inscriptum icosaedrum in ratione composita ex triplicata ipsius EF ad PQ, & ratione ipsius R ad S.

Cum enim icosaedrum in dodecaedro EMF descriptum angulos suos in centris oppositarum basium dodecaedri statuatur; manifestum est, QP esse hujus icosaedri diameter, ac ideo QP diameter quoque erit (a) dodecaedri eadem sphaera cum dicto icosaedro contenti. Sint jam tres magnitudines, dodecaedrum EMF, dodecaedrum diametri PQ, & icosaedrum ejusdem diametri, seu icosaedrum dodecaedro FME inscriptum; erit prima ad tertiam in composita ratione ex prima ad secundam, & ex secunda ad tertiam. Sed prima est ad secundam, seu dodecaedrum diametri EF ad dodecaedrum diametri PQ (b) in triplicata ratione diametri EF ad PQ, & secunda est ad tertiam, nempe dodecaedrum diametri PQ ad icosaedrum ejusdem diametri, ut (c) latus cubi R ad S, latus praedicti icosaedri. Igitur dodecaedrum EMF erit ad icosaedrum sibi inscriptum in ratione composita-

P 2

posi-

(a) Prop. 5. lib. 14.

(b) Cor. Prop. 17. lib. 12.

(c) Prop. 11. lib. 14.

228 EUCLIDIS LIB. XV.
posita ex triplicata ipsius EF ad PQ, & ex ratione R ad S. Quapropter dodecaedrum, &c. q.e.d.

PROP. XXX. THEOR. XXX.

Dodecaedrum pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti equalis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris ejusdem cubi, altitudo denique a latere ejusdem cubi deficit minore segmento ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejusdem minus segmentum existit; alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est equalis, altitudo vero minus segmentum ejus lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ejusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sive lateri ejusdem cubi sint æquales.

NAm si in pyramide dodecaedrum, & in hoc cubus describatur, erit cubus pyramide etiam inscriptus. Est autem cubus pyramidis, in qua describitur, nona pars (a). Igitur duplum cubi duas nonas partes pyramidis continebit; ac proinde dodecaedrum in pyramide descriptum duas nonas partes pyramidis continebit, minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio in verbis hujus propositionis facta est. Quapropter si dodecaedro duo hæc parallelepipeda addantur, habebitur solidum, duas partes nonas pyramidis complectens. Dodecaedrum itaque pyramidis, &c. q. e. d.

PROP.

(a) Prop. 25. hujus.

PROP. XXXI. THEOR. XXXI.

Octaedrum excedit sibi inscriptum icosaedrum parallelepipedo, cujus basis est quadratum lateris icosaedri, altitudo vero majus segmentum semidiametri octaedri extrema, ac media ratione sectæ.

It octaedrum, cui inscriptum est icosaedrum Fig. 122

$ABCDFE$. Supposita constructione, & argumentatione prop. 16. lib. 15, manifestum est, tam Hc , ipsi AO parallelam, perpendicularem: plano $BE DF$, & majus segmentum esse semidiametri octaedri AO media, ac extrema ratio: sectæ. Similiter si ex L demittatur perpendicularis ad idem planum $BE DF$, hæc majus segmentum erit ipsius CO , ac proinde ipsi Hc æqualis. Dico, excessum octaedri supra icosaedrum sibi inscriptum æquari parallelepipedo, cujus basis quadratum lateris icosaedri MN , altitudo vero Hc .

Cum enim sint HMN , LMN bases icosaedri, patet, supra hæc bases existere partem octaedri, quæ duas pyramides triangulares $MNDH$, $MNDL$, inter se æquales, continet; nam earum altitudines, quarum una est Hc , alia vero perpendicularis ex L ad planum $BE DF$ demissa, æquales existunt, & basis MND communis. Similiter modo prope singulos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & æquis duabus æquales, extra icosaedrum inscriptum; ita ut octaedrum excedet icosaedrum sibi inscriptum 12 pyramidibus ipsi $MNDH$ æqualibus, seu 4 prismatibus basin MND , & altitudinem Hc habentibus; nam prisma triplum est pyramidis ejusdem basis, & altitudinis. Cum autem sit MD , ND æquales, & angulus MDN rectus, sit trigonum MDN dimidium quadrati ipsius MND ,

ND , seu quarta pars (a) quadrati lateris icosaedri MN ; ac proinde prisma, seu parallelepipedum, cujus basis est quadratum ipsius MN , & altitudo Hc quadruplum erit prismatis, cujus basis est trigonum MND , & altitudo Hc , ac per consequens æquale erit excessui octaedri supra icosaedrum sibi inscriptum. Quapropter octaedrum excedit, &c. q. e. d.

S C H O L I U M.

Fig. 129. **H**Uic theoremati aliud non inelegans subjungo. Sit AFD basis octaedri cum inscripta basi icosaedri HTN ; sitque AH minus segmentum lateris octaedri AD , media, ac extrema ratione secti, sumaturque AP tripla ipsius AH . Dico, octaedrum esse ad sibi inscriptum icosaedrum, ut latus octaedri AD ad excessum ipsius AP supra AD , nempe DP , quinquies sumtam.

Cum enim sit AD ad DH , ut DH ad AH , & DH major dimidio ipsius AD , erit AH major quoque dimidio rectæ DH . Igitur AP , tripla ipsius AH major ipsa AD existet. Deinde cum sint quadrata rectarum DA , & AH (b) tripla quadrati ipsius DH , vel tripla rectanguli ex DA in AH , seu equalia rectangulo ex PA in AD , hoc est equalia (c) rectangulo ex AD in DP una cum quadrato rectæ AD ; erit, demto communi quadrato rectæ AD , quadratum ex AH æquale rectangulo sub AD , & DP contento. Quapropter quadratum ex AD erit ad quadratum ex AH , ut rectangulum ex AD in AD ad rectangulum ex AD in DP , seu (d) ut AD ad DP , & quadratum ex AD erit ad duplum quadrati ex AH ,
seu

(a) Cor. 1. prop. 16. lib. 15.

(b) Prop. 4. lib. 13.

(c) Prop. 3. lib. 2.

(d.) Prop. 1. lib. 6.

u quadratum (a) lateris icosaedri TH, hoc est
 sis octaedri AFD ad basin icosaedri THN, ut
 D ad duplam ipsius DP; ac proinde duæ bases
 taedri erunt ad quinque bases icosaedri, seu (b)
 taedrum ad icosaedrum sibi inscriptum erit, ut du-
 a ipsius AD ad DP, decies acceptam, vel ut AD
 DP, quinquies sumtam. q. e. d.

COROLLARIUM.

Inc si in pyramide describatur octaedrum, cuius
 basis una sit AFD, erit in eadem pyramide
 scriptum icosaedrum, cuius una basis est HTN.
 itur cum sit pyramis ad sibi inscriptum octaedrum,
 latus pyramidis (c) ad latus octaedri AD, &
 taedrum ad sibi inscriptum icosaedrum, ut AD ad
 P quinquies sumtam; erit ordinando pyramis ad
 i inscriptum icosaedrum etiam, ut latus pyramidis
 DP, quinquies acceptam.

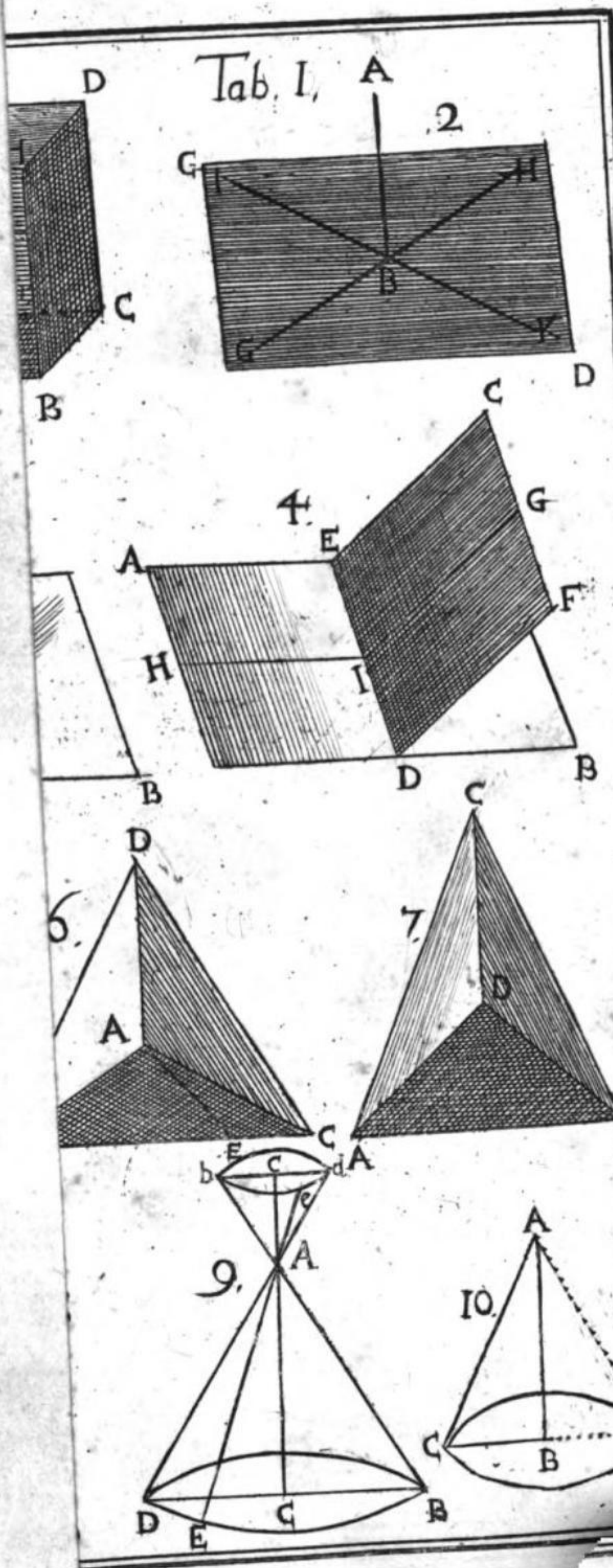
F I N I S.

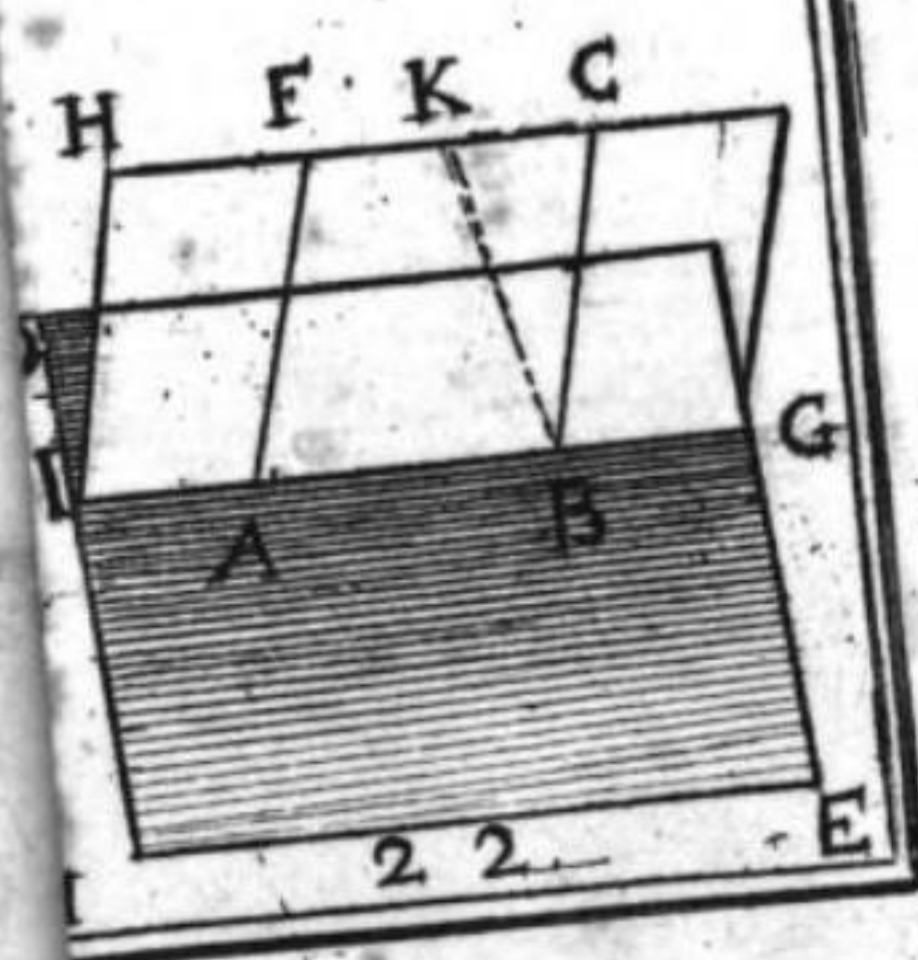
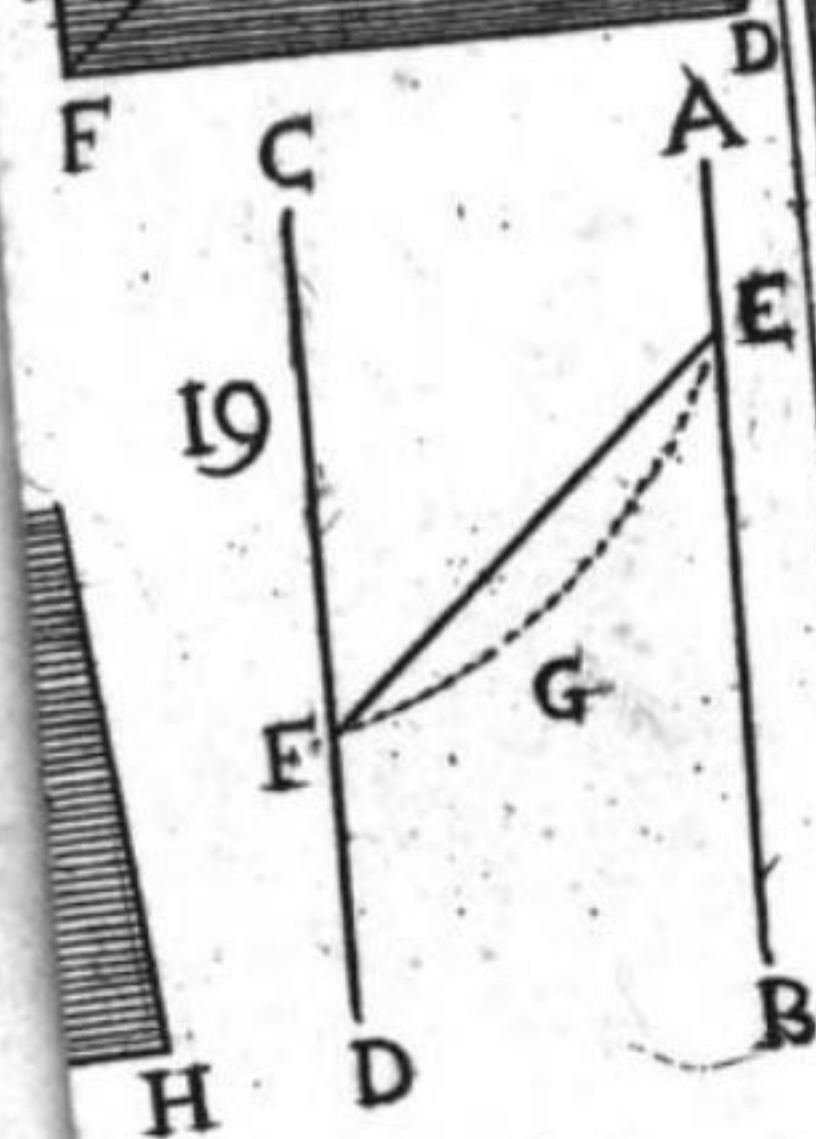
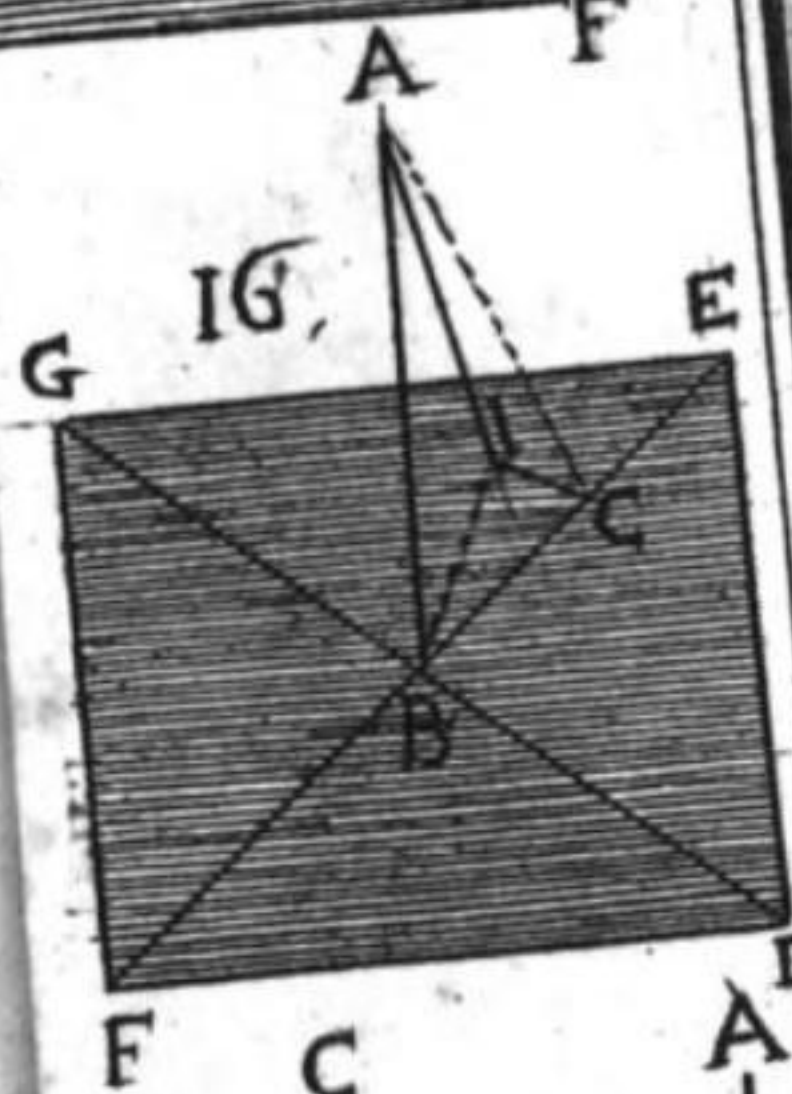
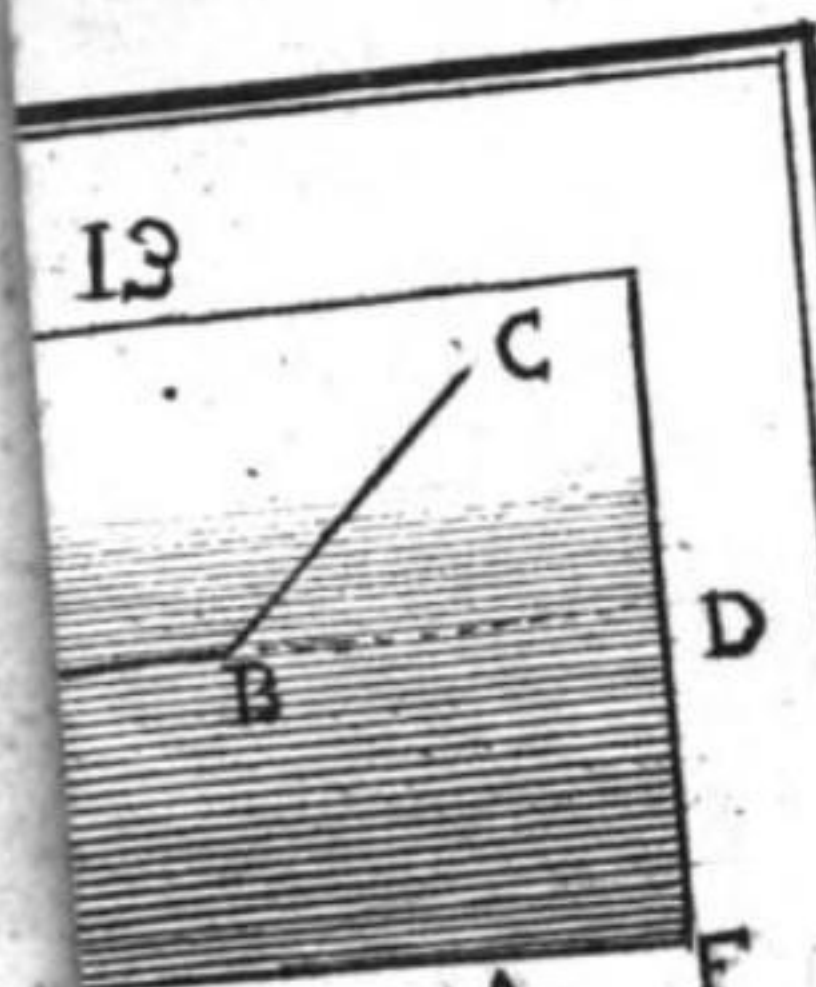
- a] Cor. 1. Prop. 16. lib. 15.
- b] Prop. 26. hujus.
- c] Cor. Prop. 21. hujus.

ERRATA

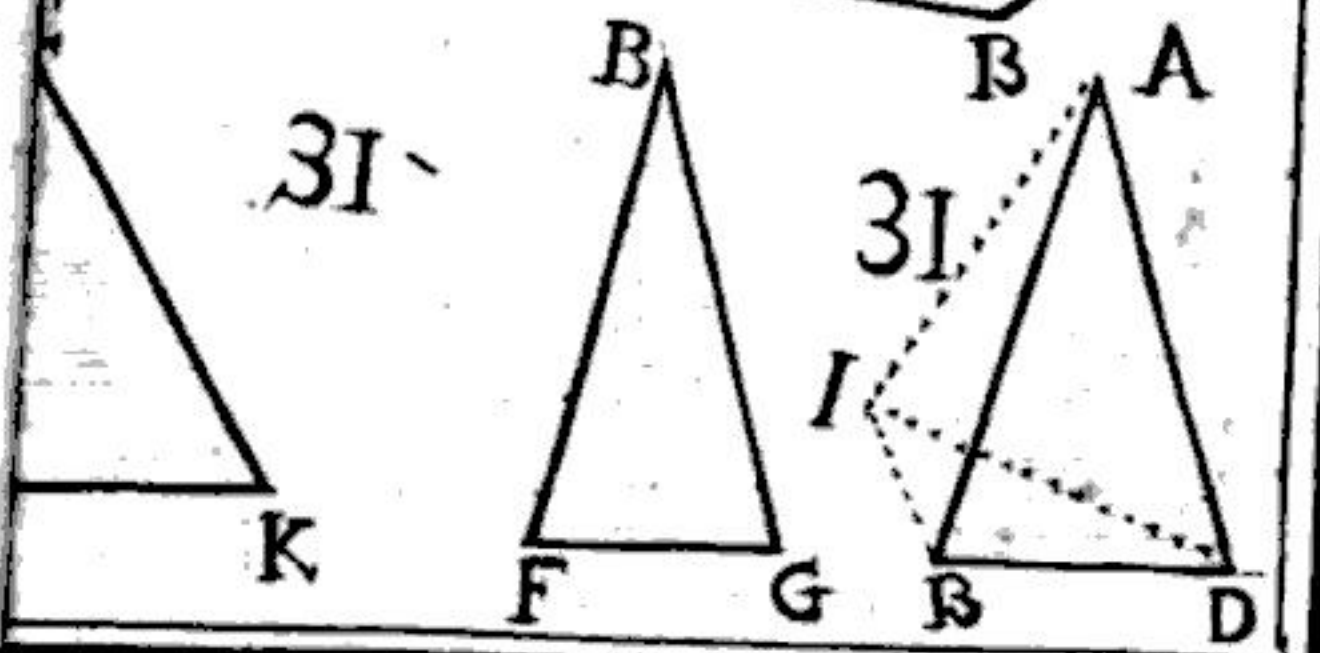
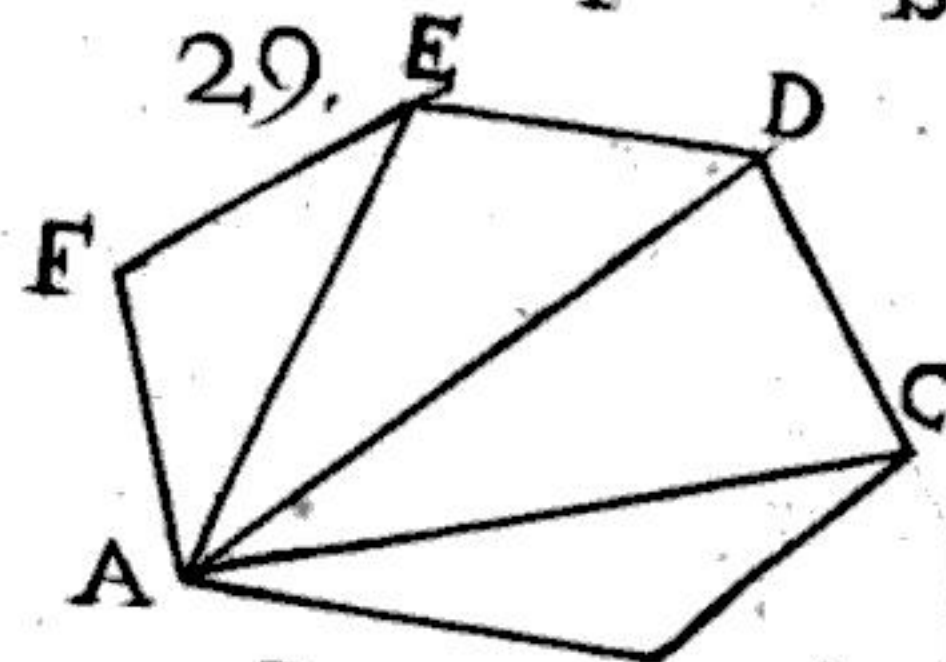
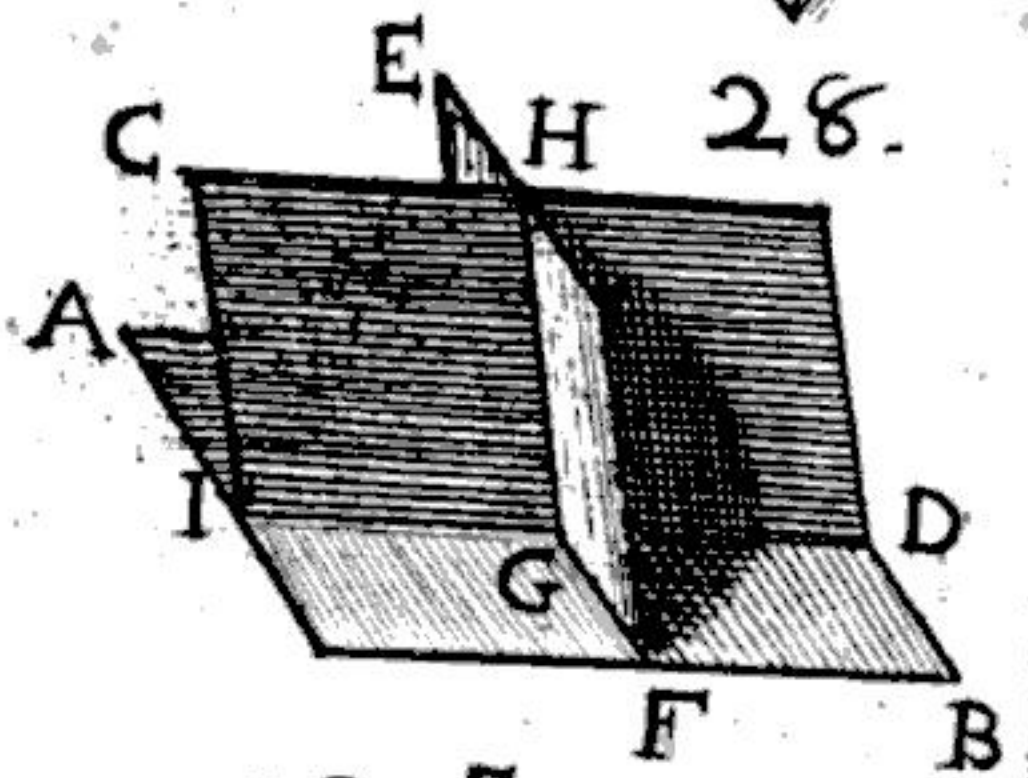
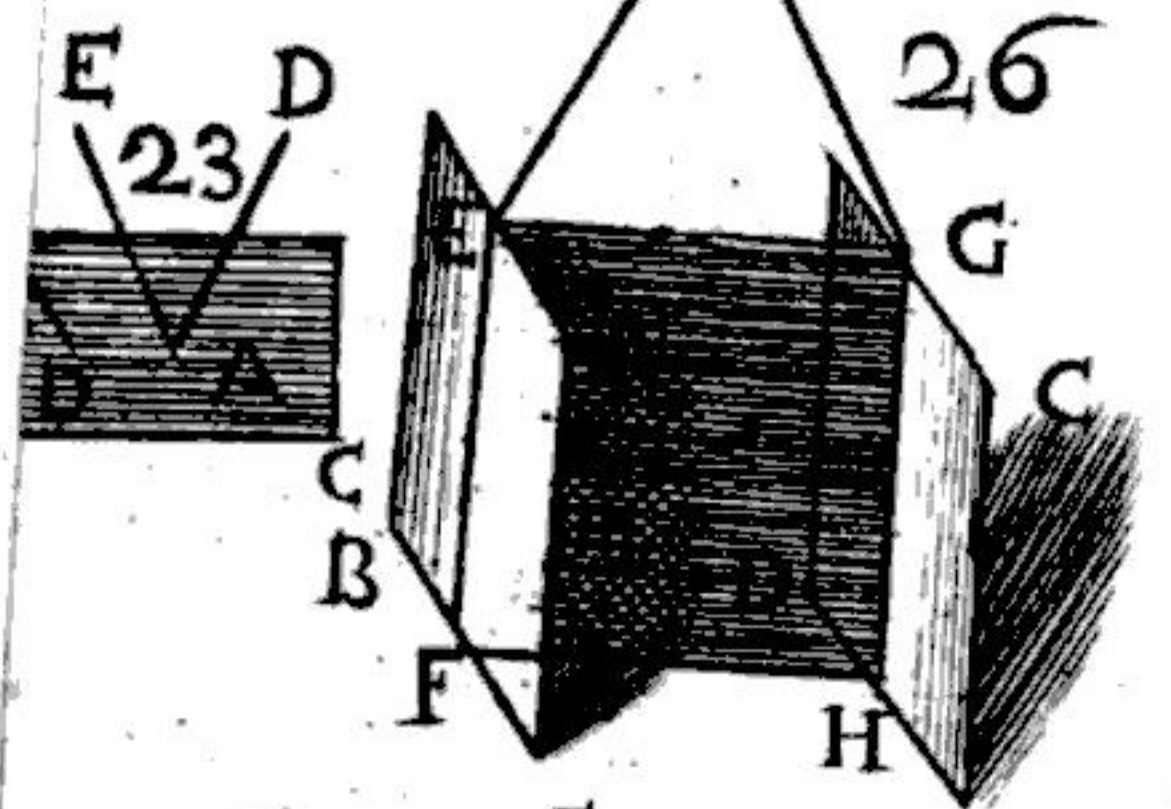
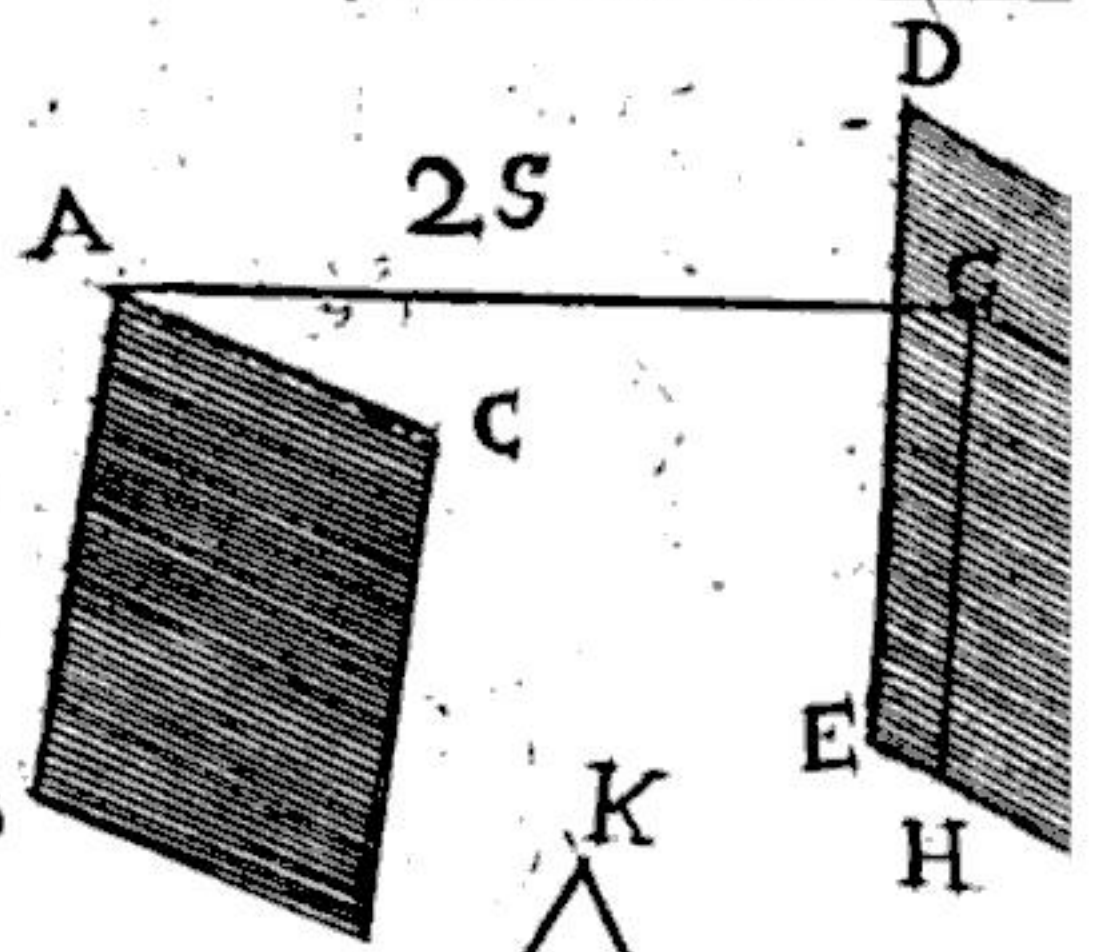
CORRIGE

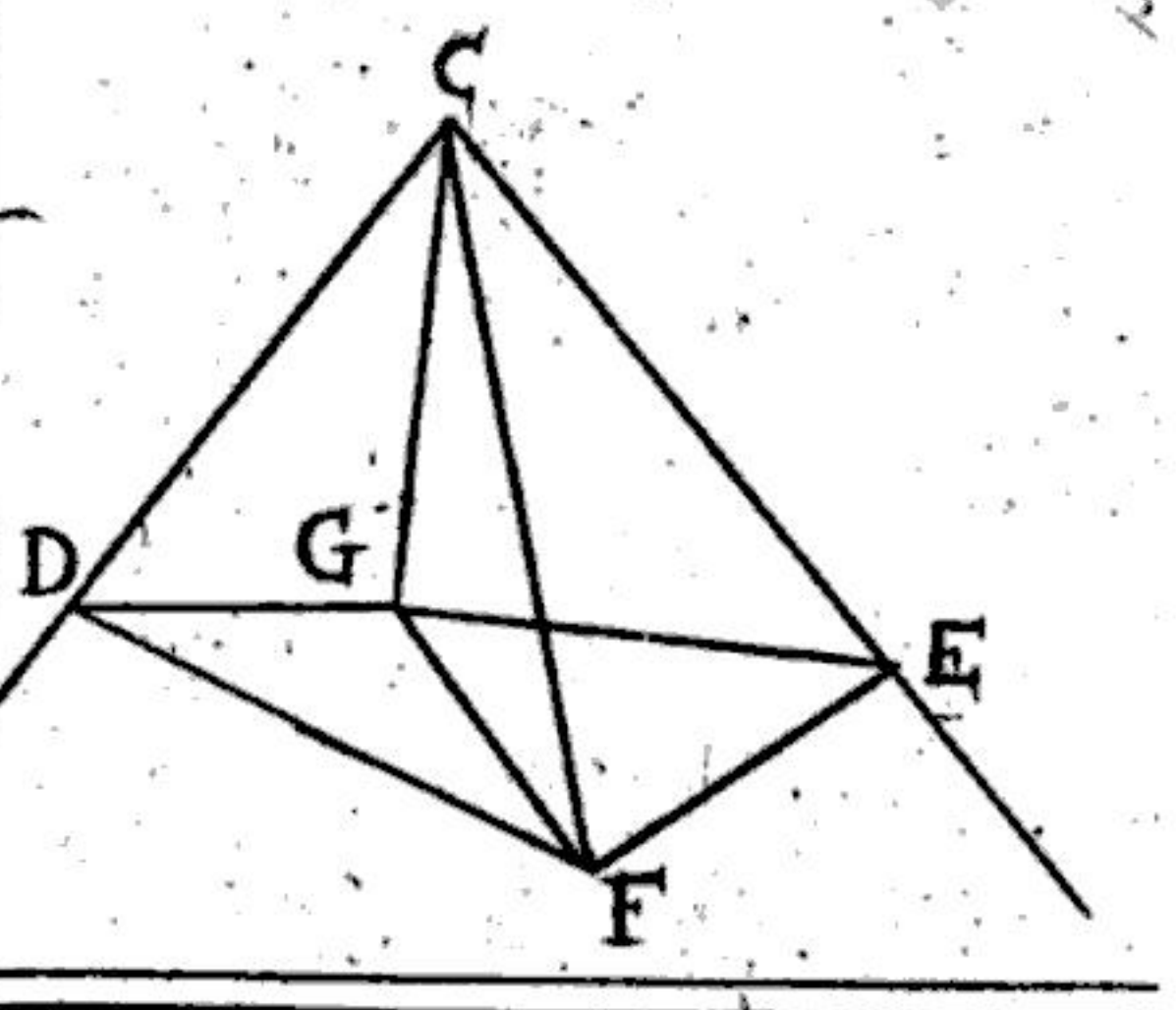
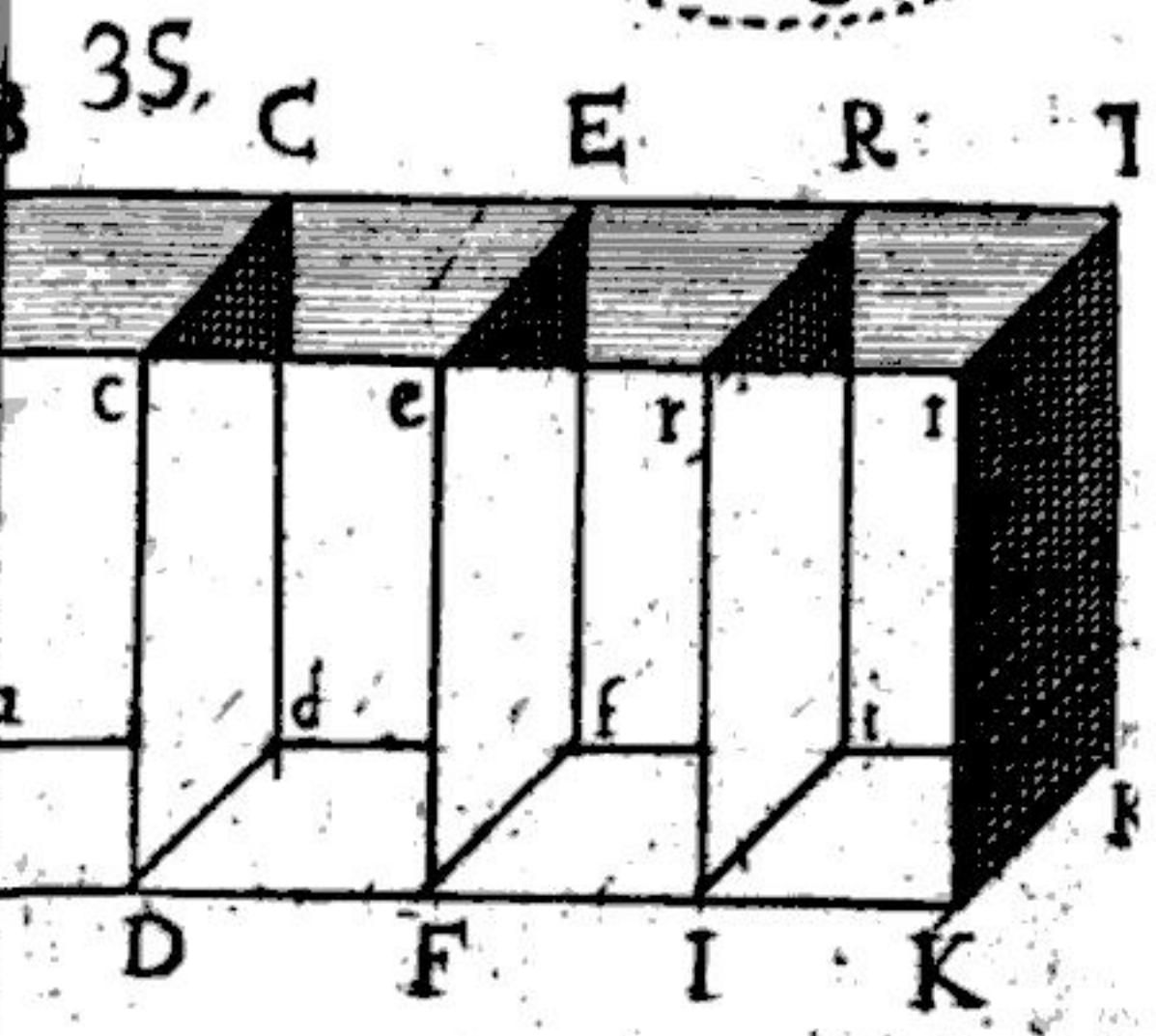
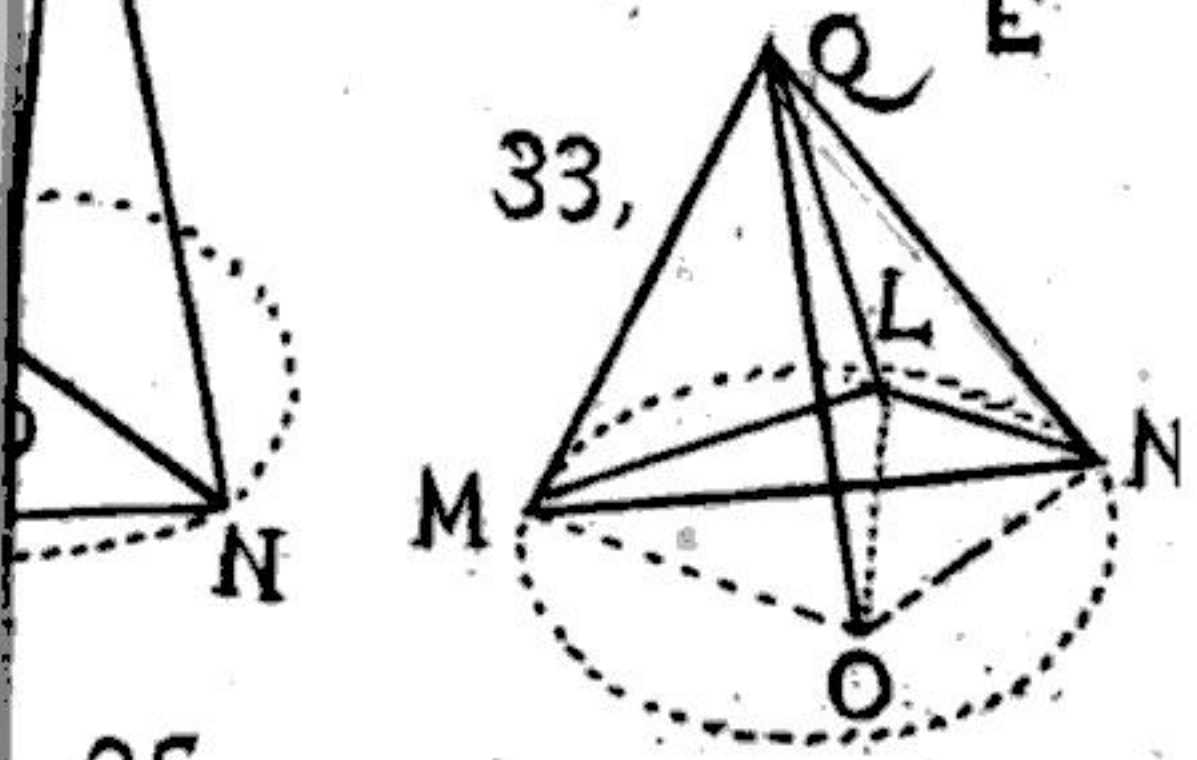
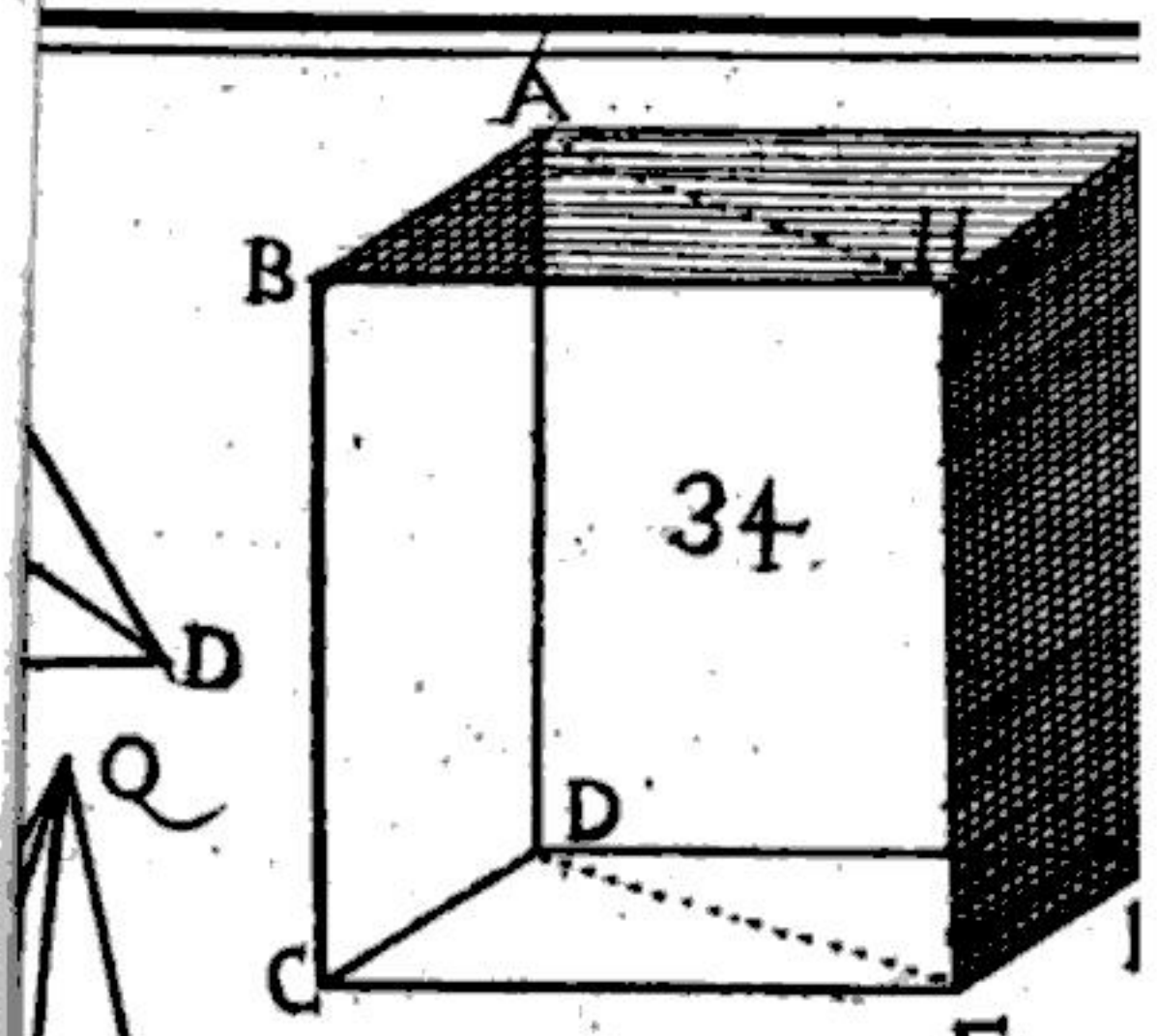
Pag. 11. lin. 22	ABC	ACB
12. prop. 6	Fig. 17.	Fig. 18
28. Fig. 31	BAD	EAD
30. lin. 18	qui	quæ
32. prop. 24	Fig. 24.	Fig. 34
46. lin. 8	plano BE	GE
lin. 25	& etiam similia	& recta etiam similia ex- stunt.
99. lin. 27	$CB = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$	$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$
lin. 28	tam rectæ AC, quam CB	& rectæ $CB = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$ & = AC ipsius
100. lin. 15	CDB	ACB
lin. 16	EDC	DCB
116. lin. 21	sphæra	sphæra
lin. 27	sphæra	sphæra
172. lin. 27	radius sphæræ	radii sphæræ



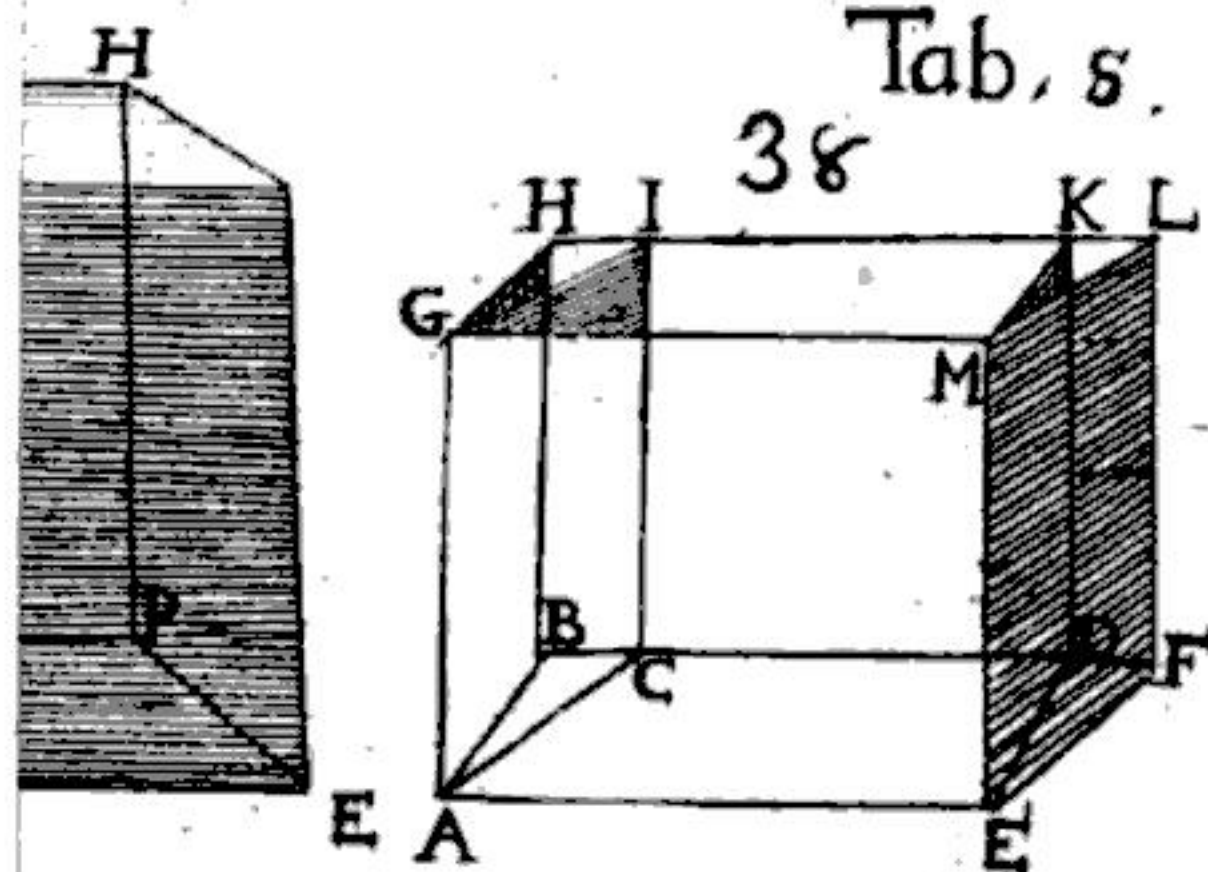


[Illegible text due to extreme image quality and noise]

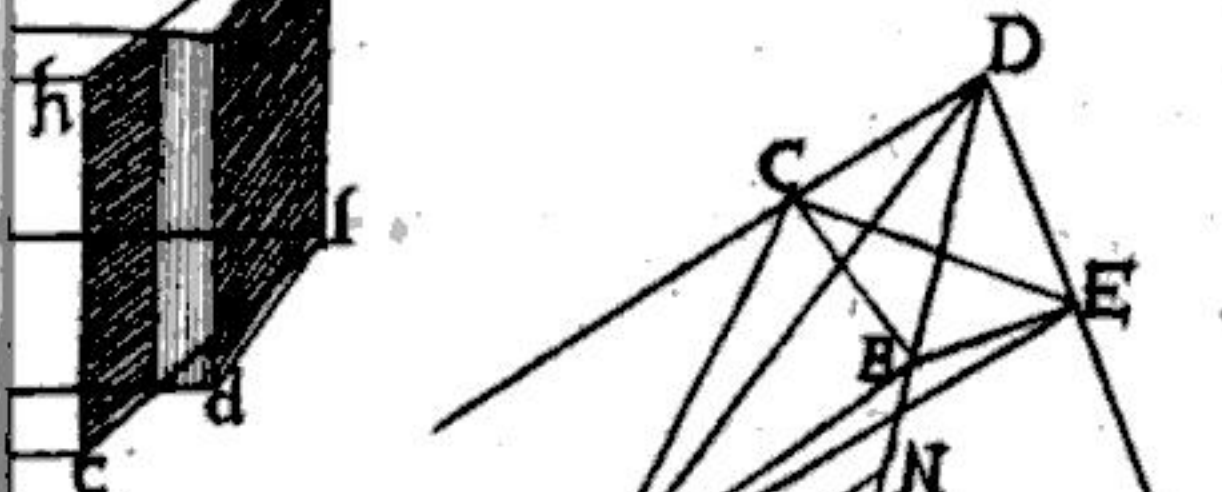
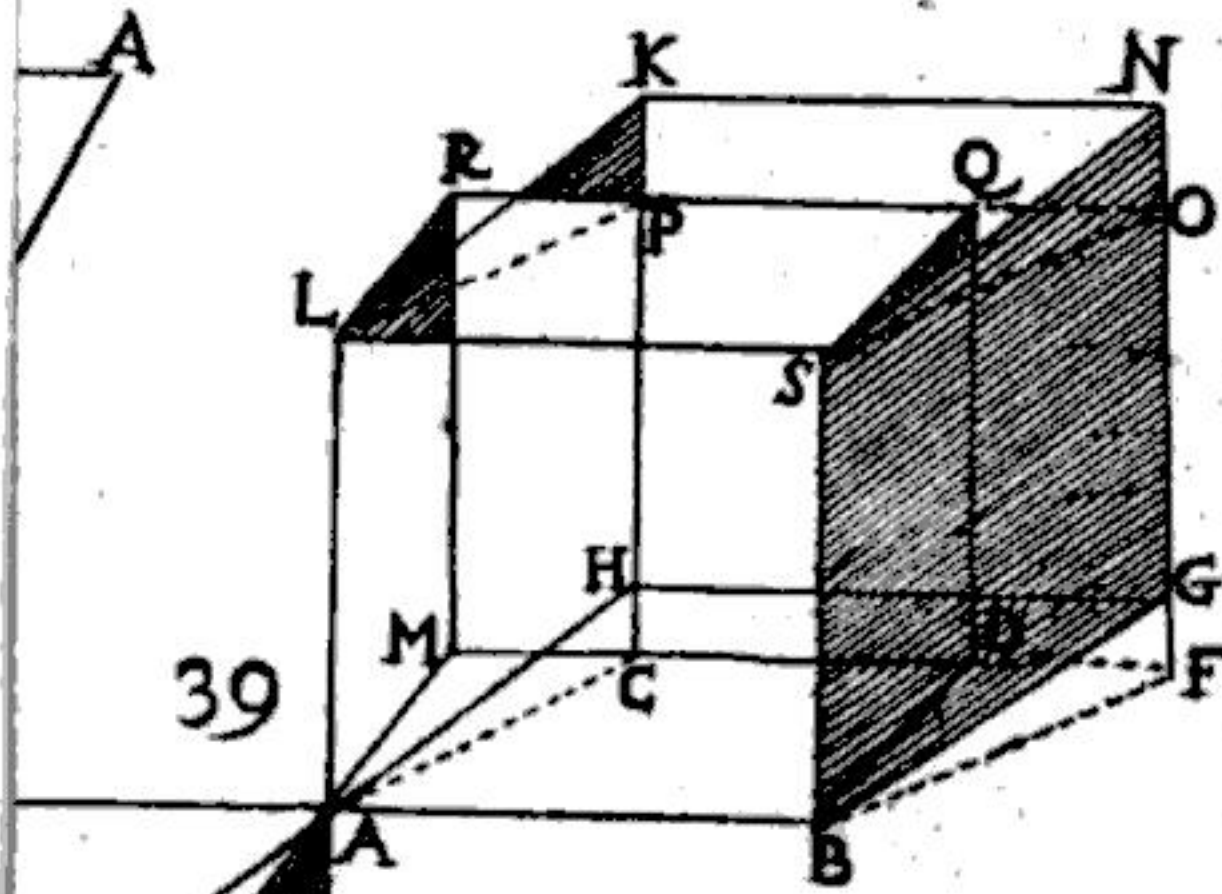




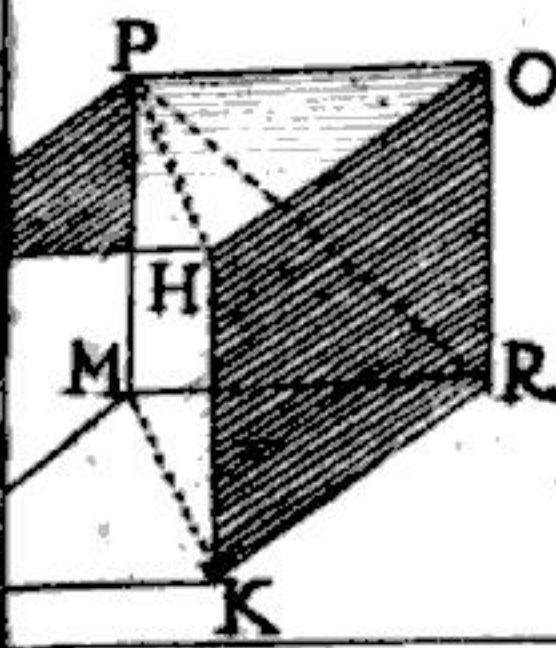
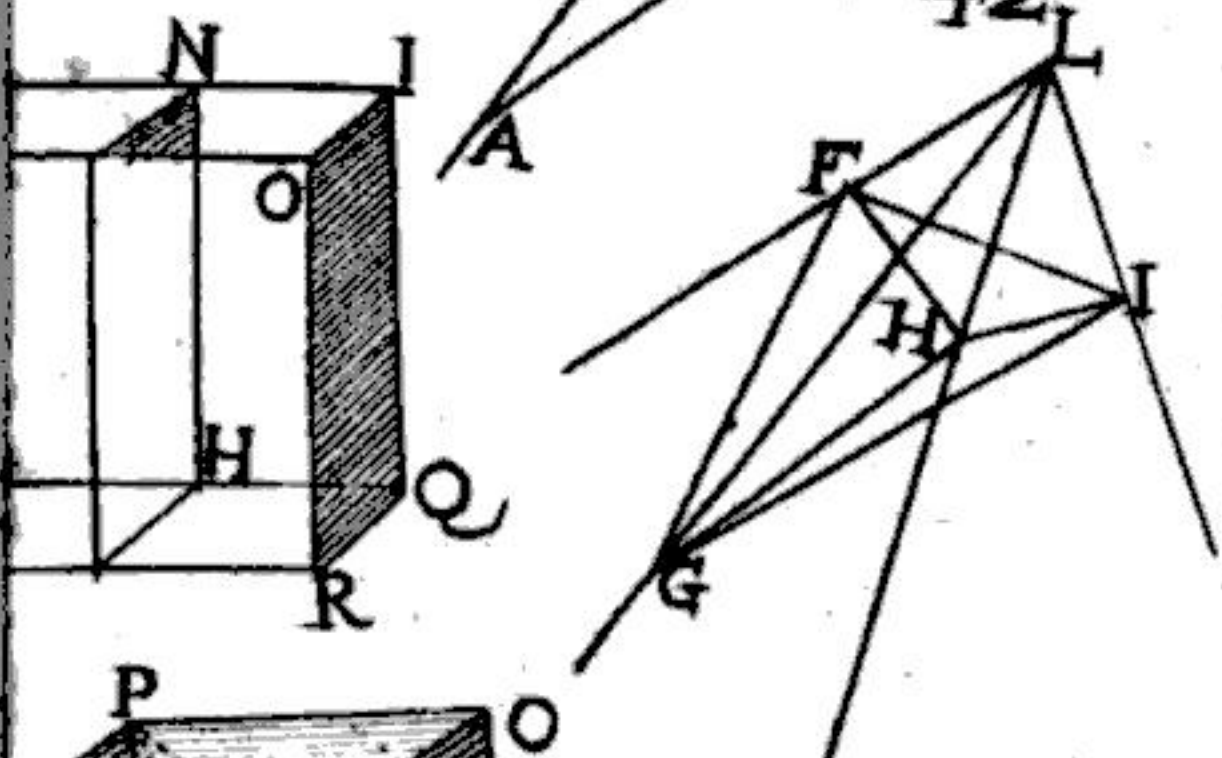
38



39

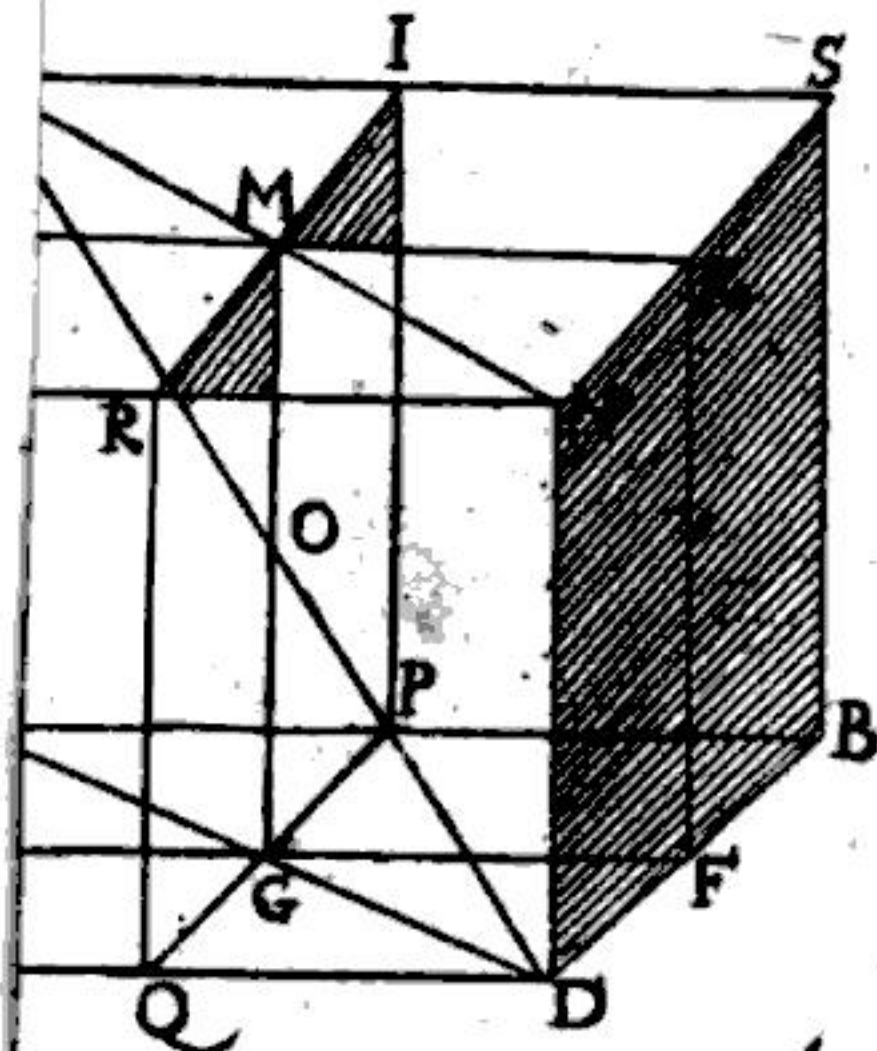
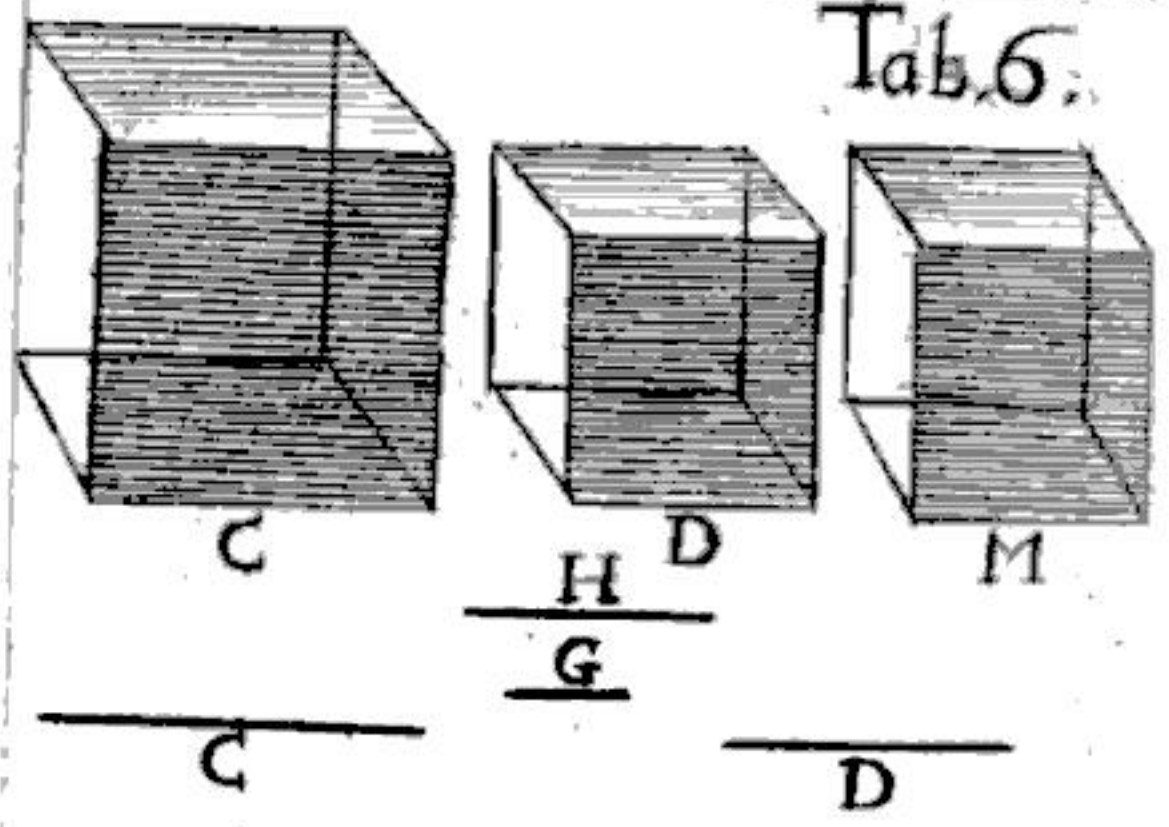


42

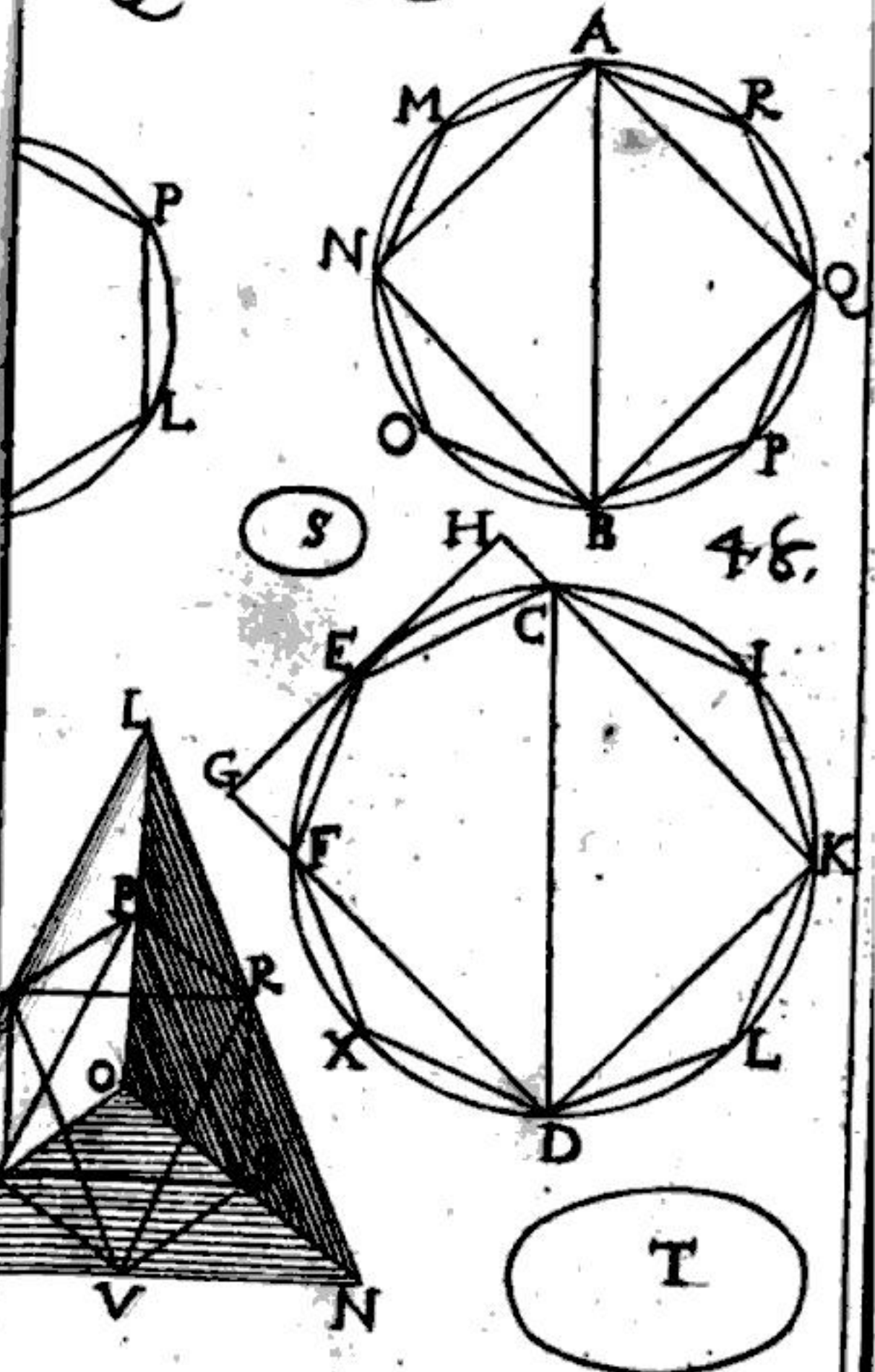


43

A
B
C



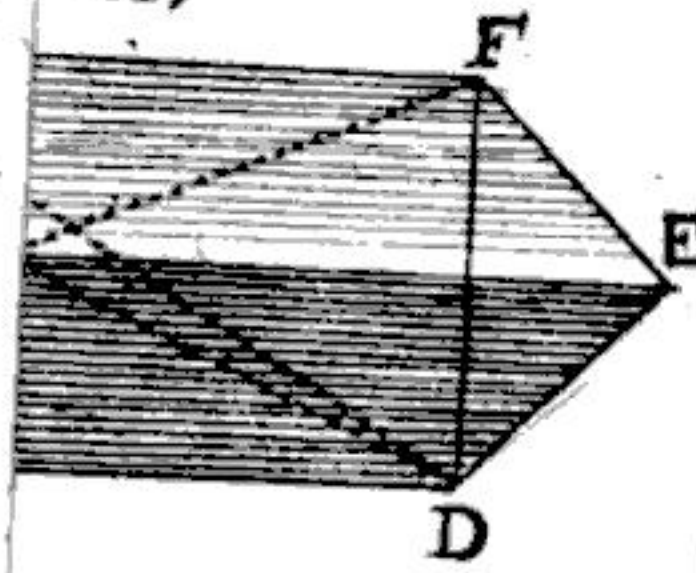
46.



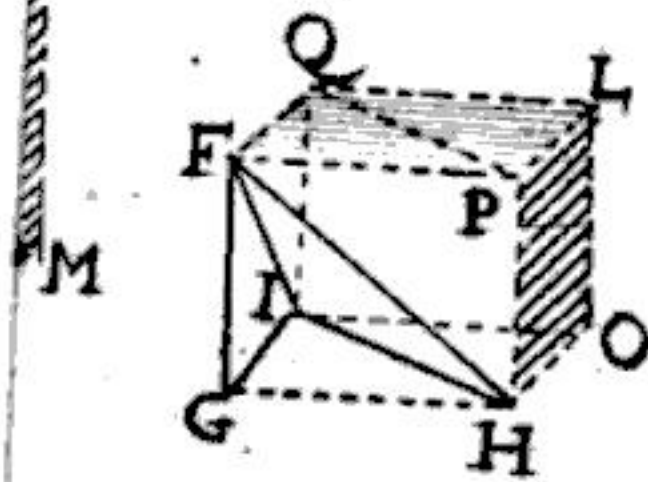
46.

Tab 7.

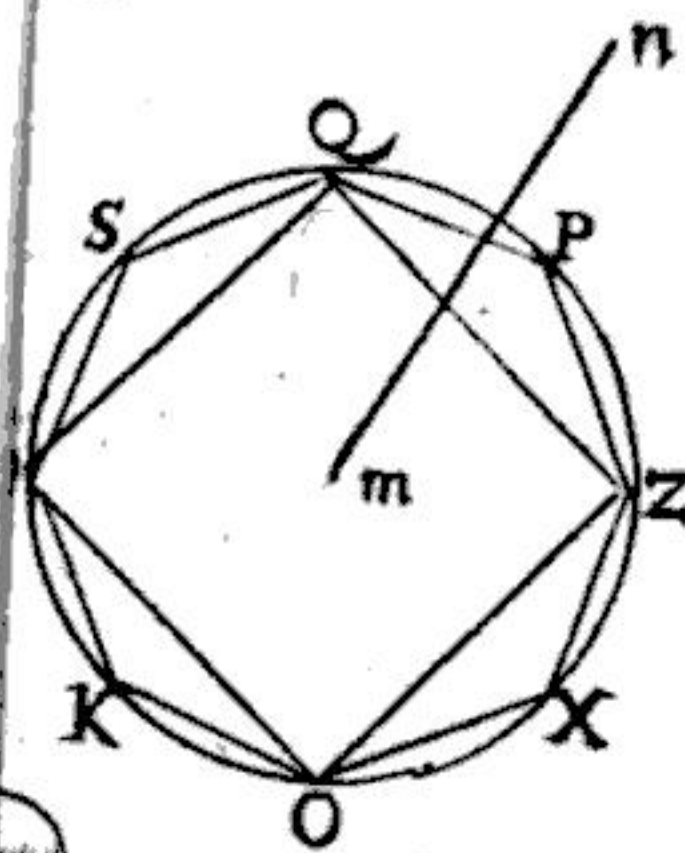
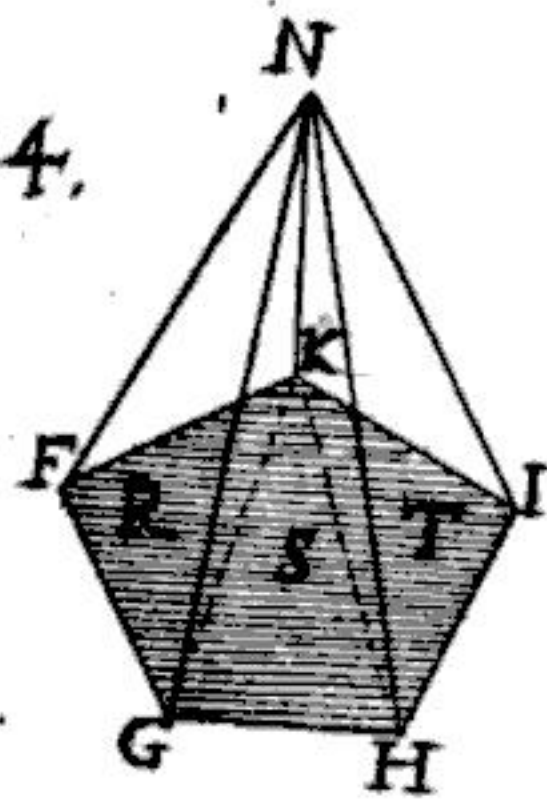
51.



53.

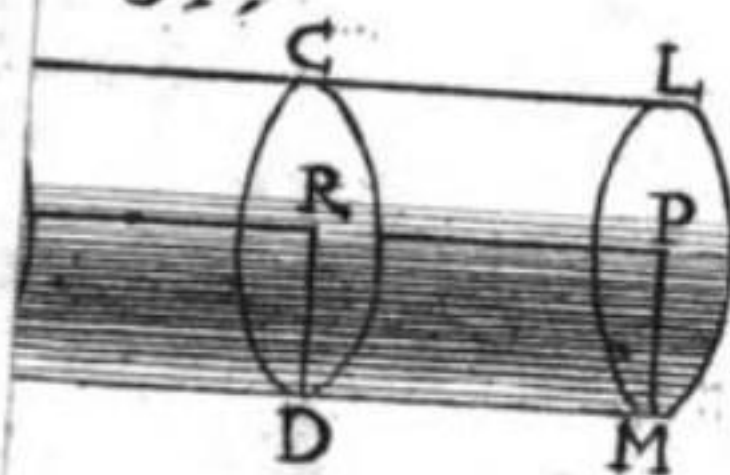


54.

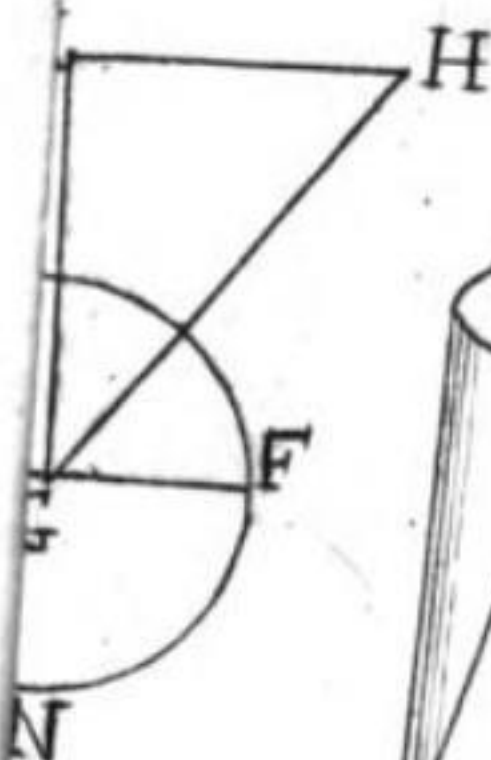
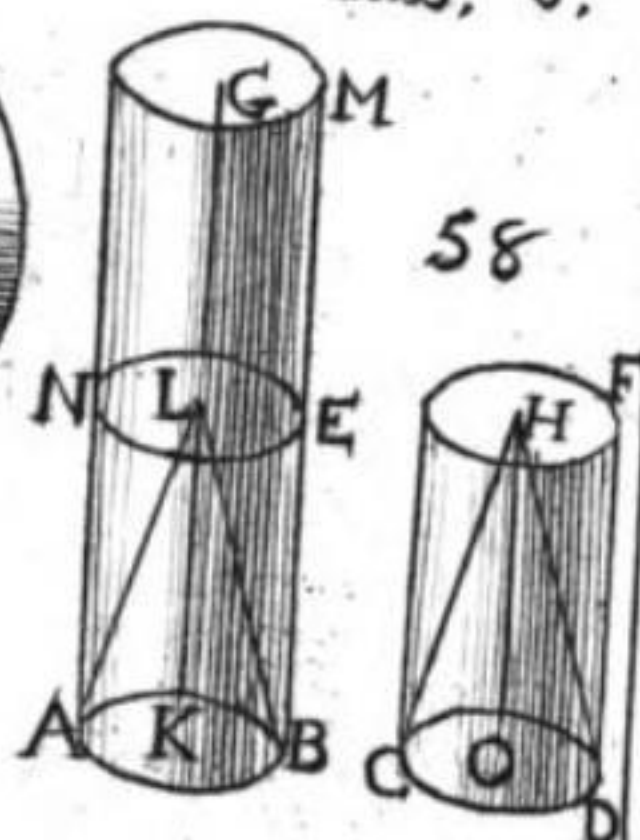


57,

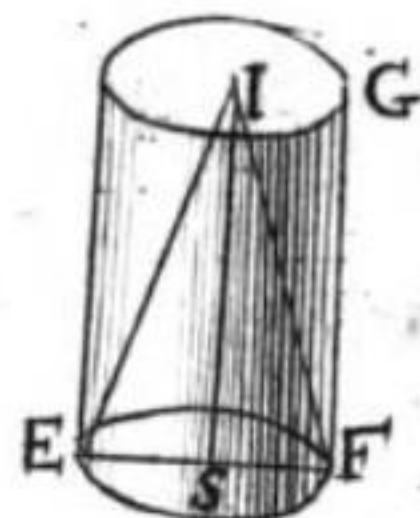
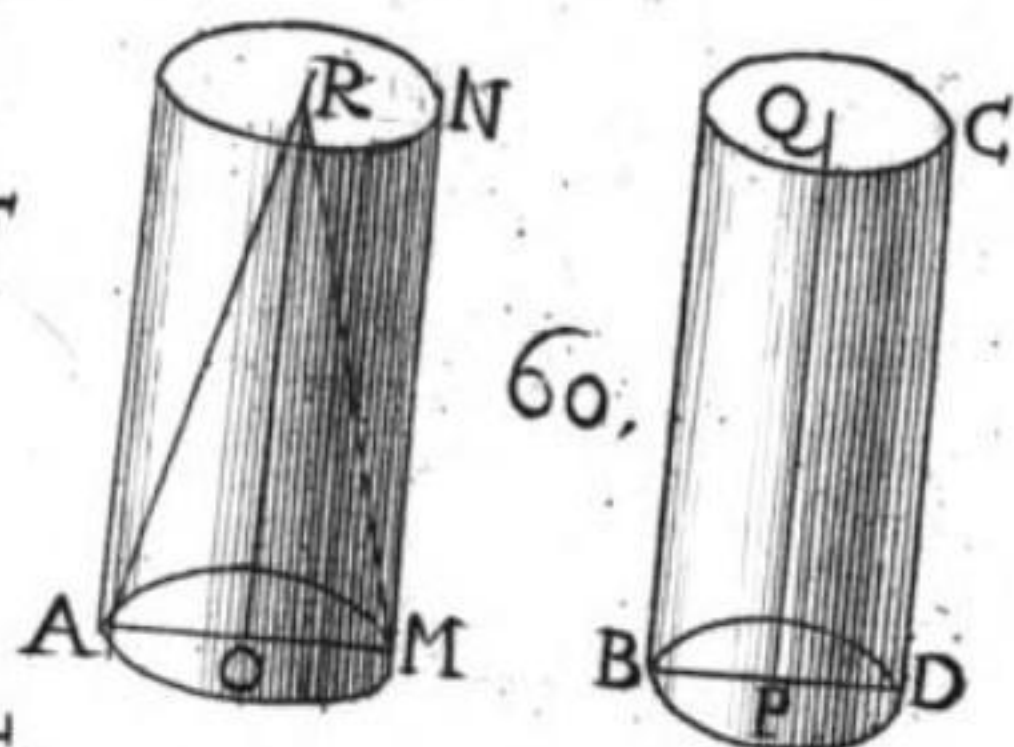
Tab. 6.



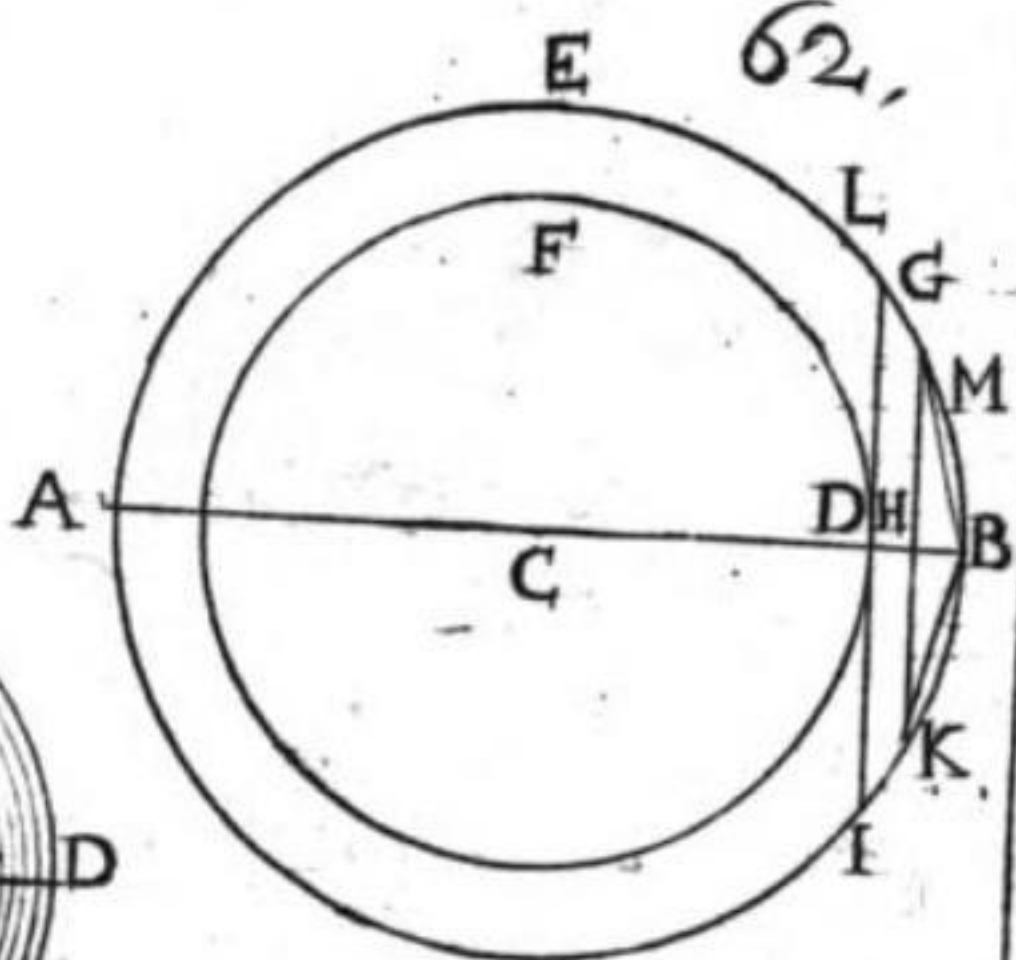
58



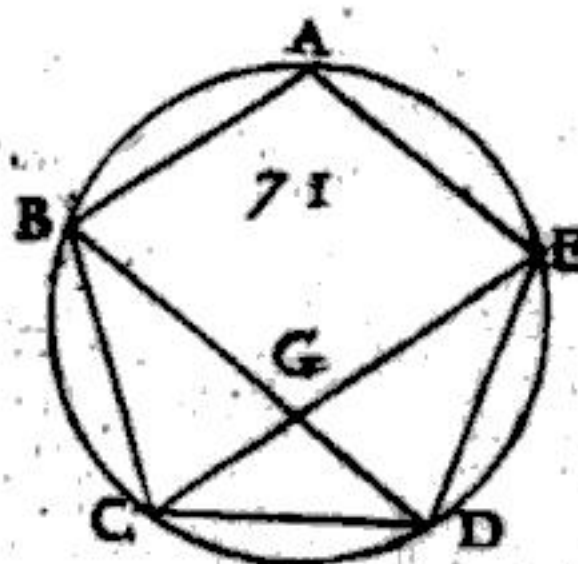
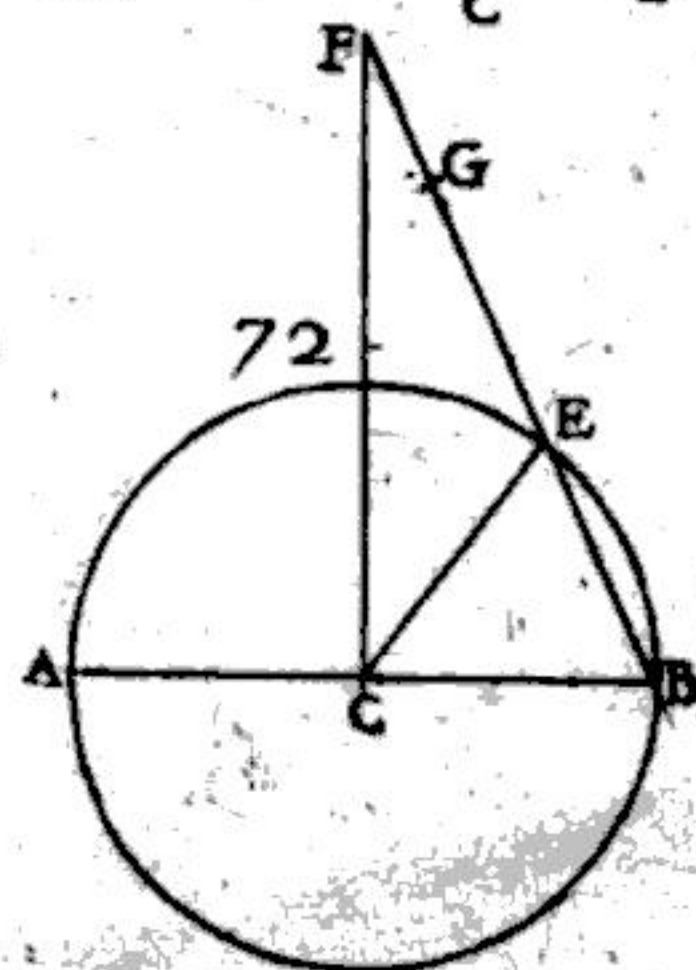
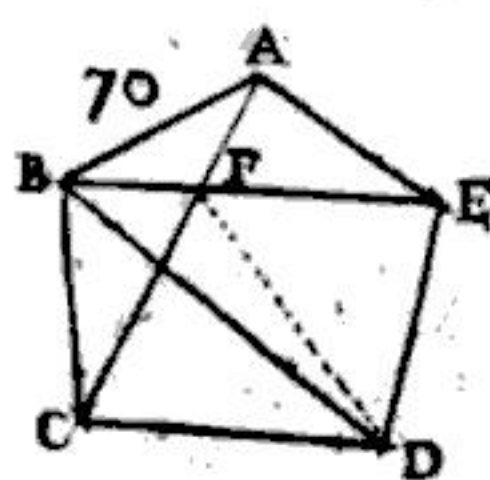
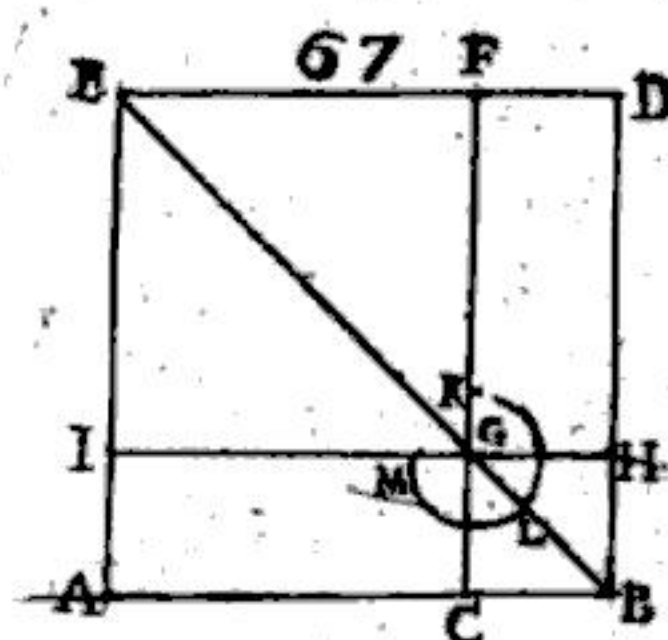
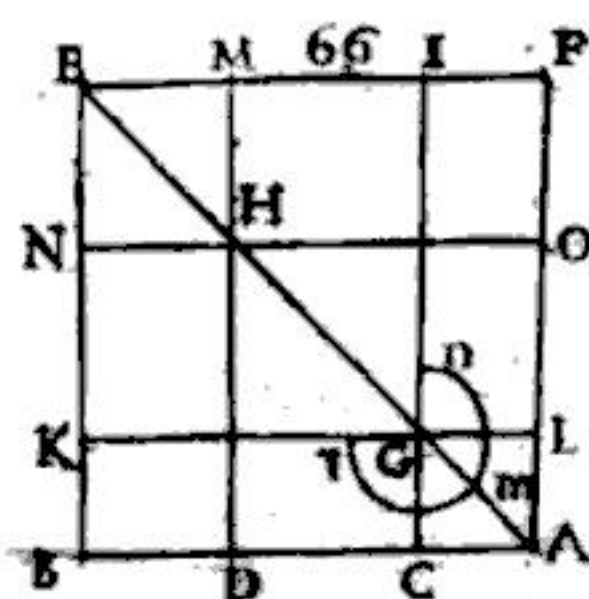
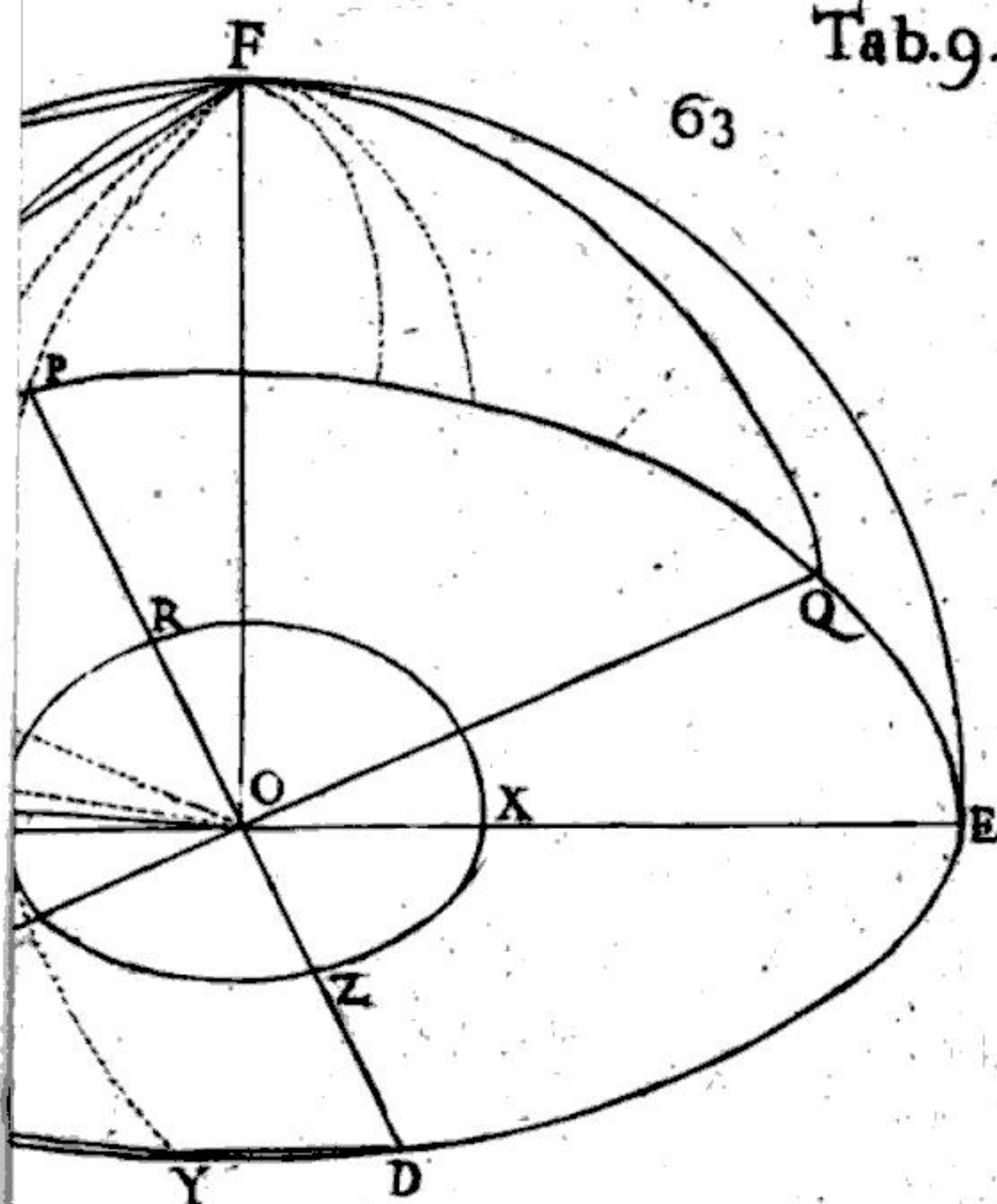
60,



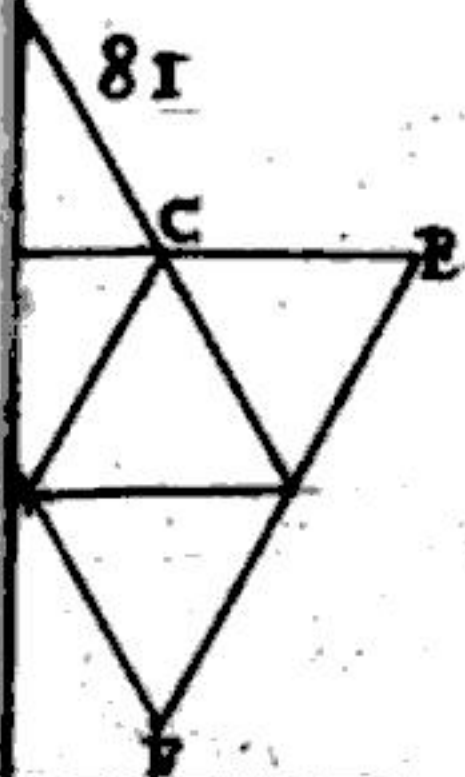
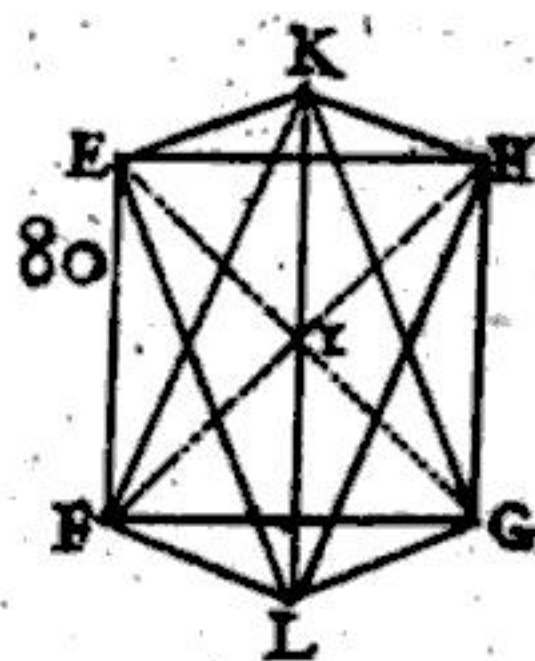
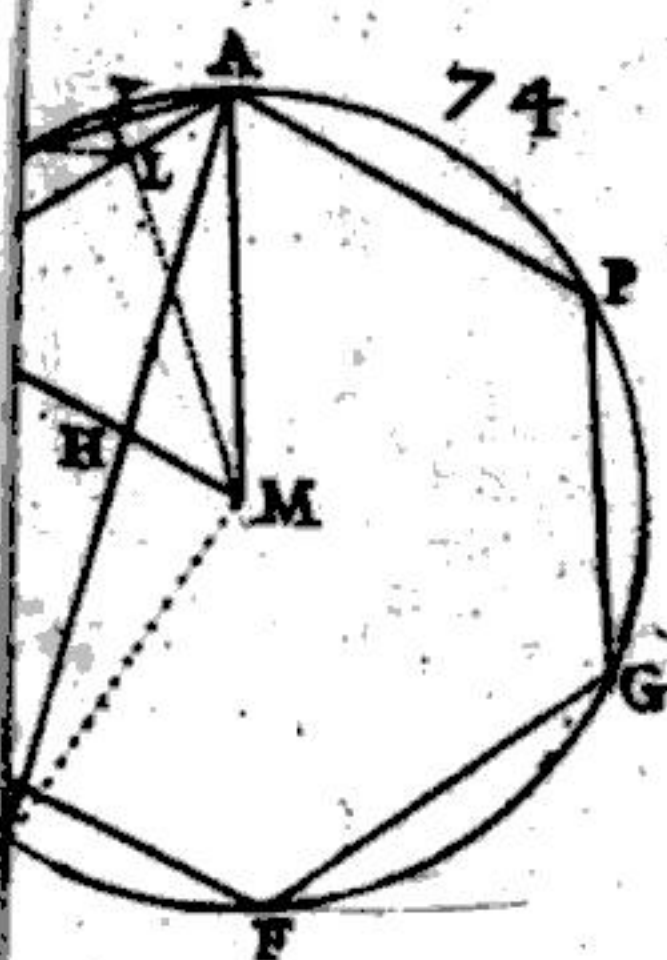
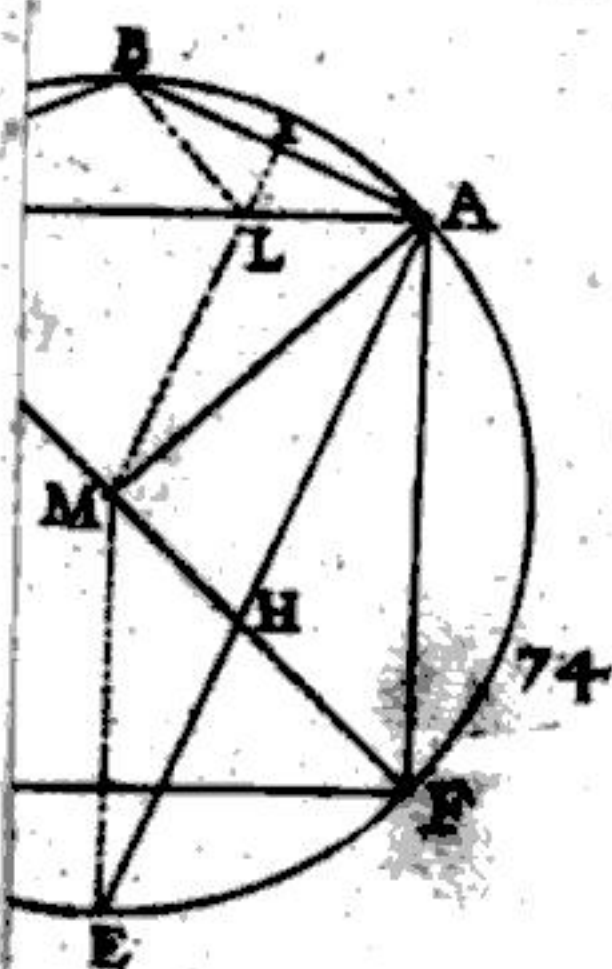
62,

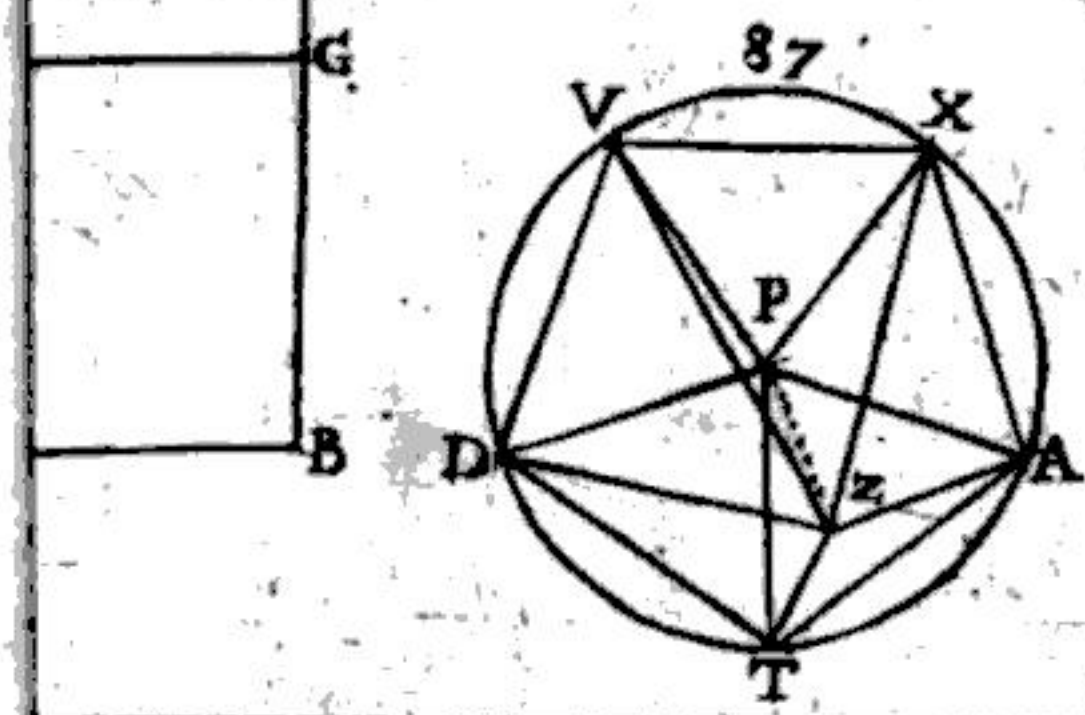
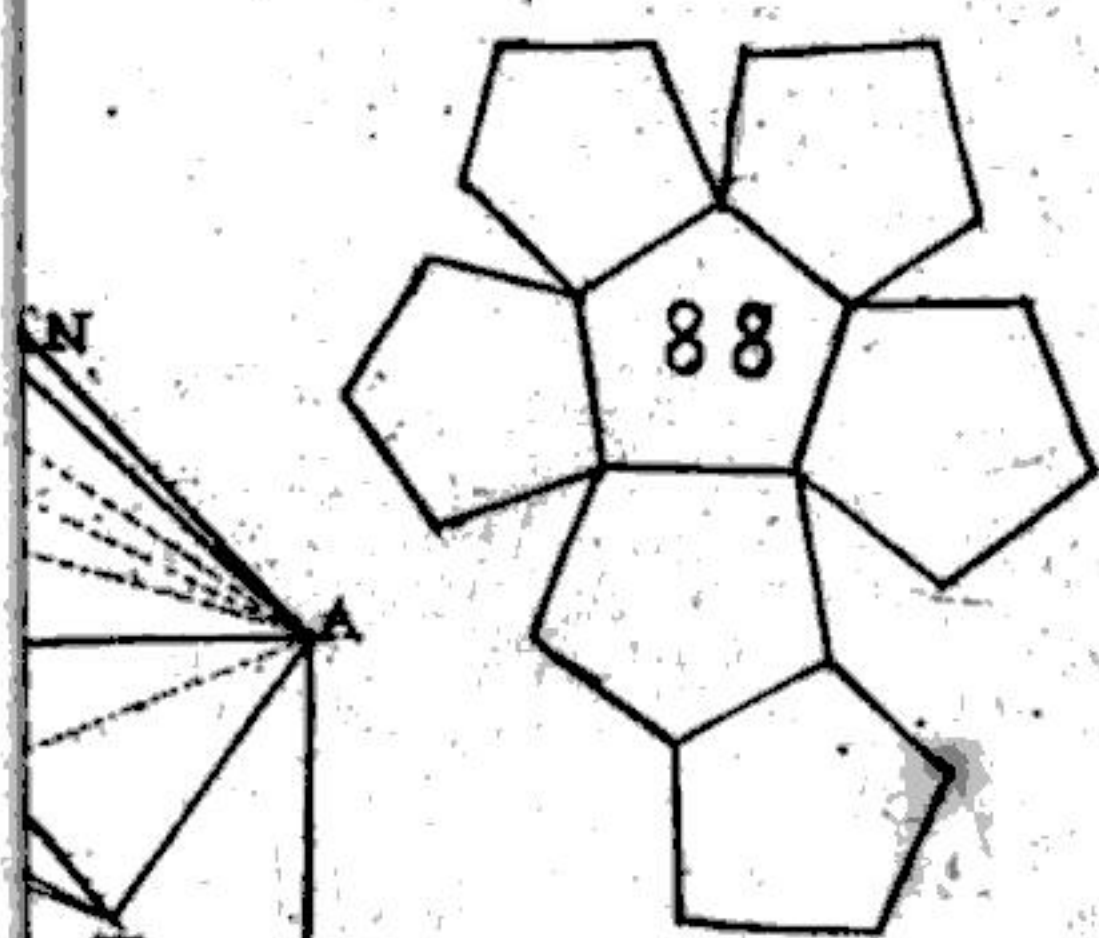
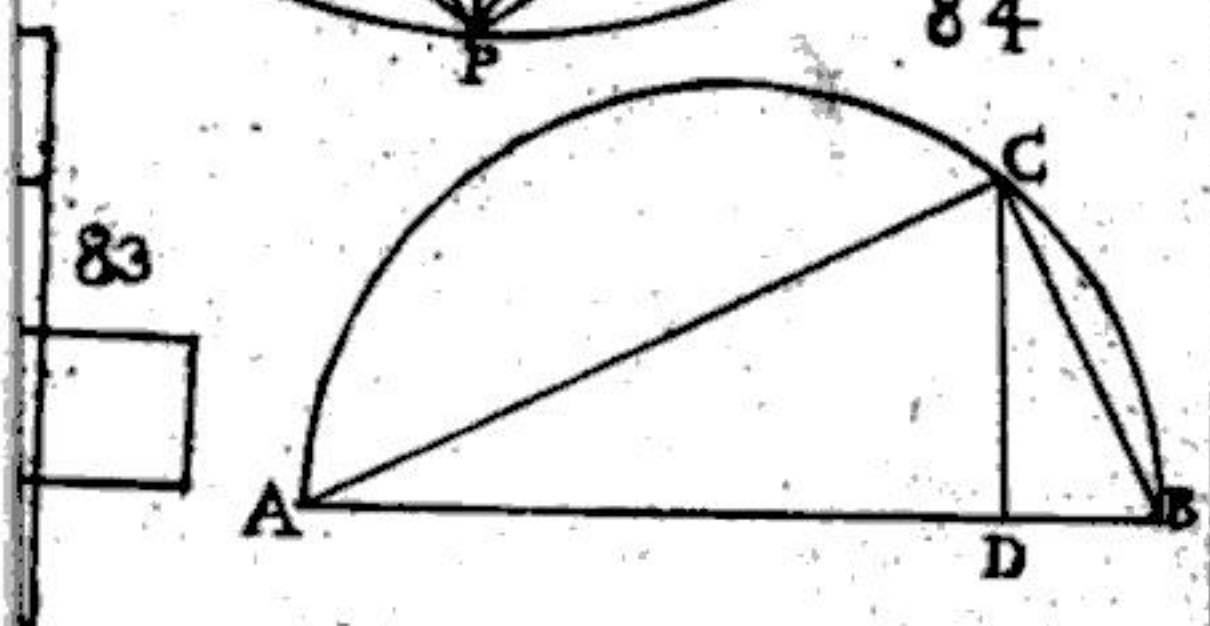
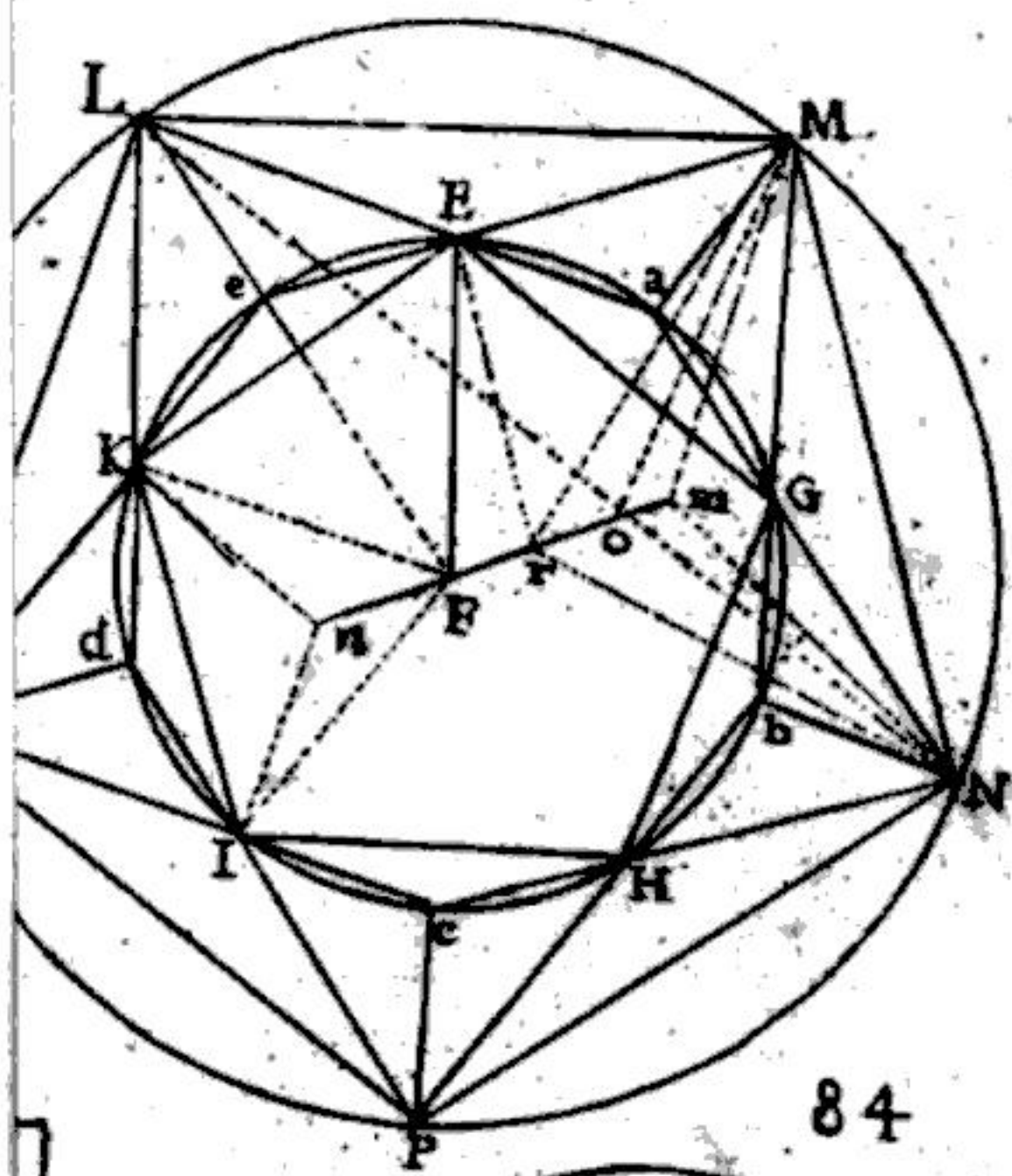


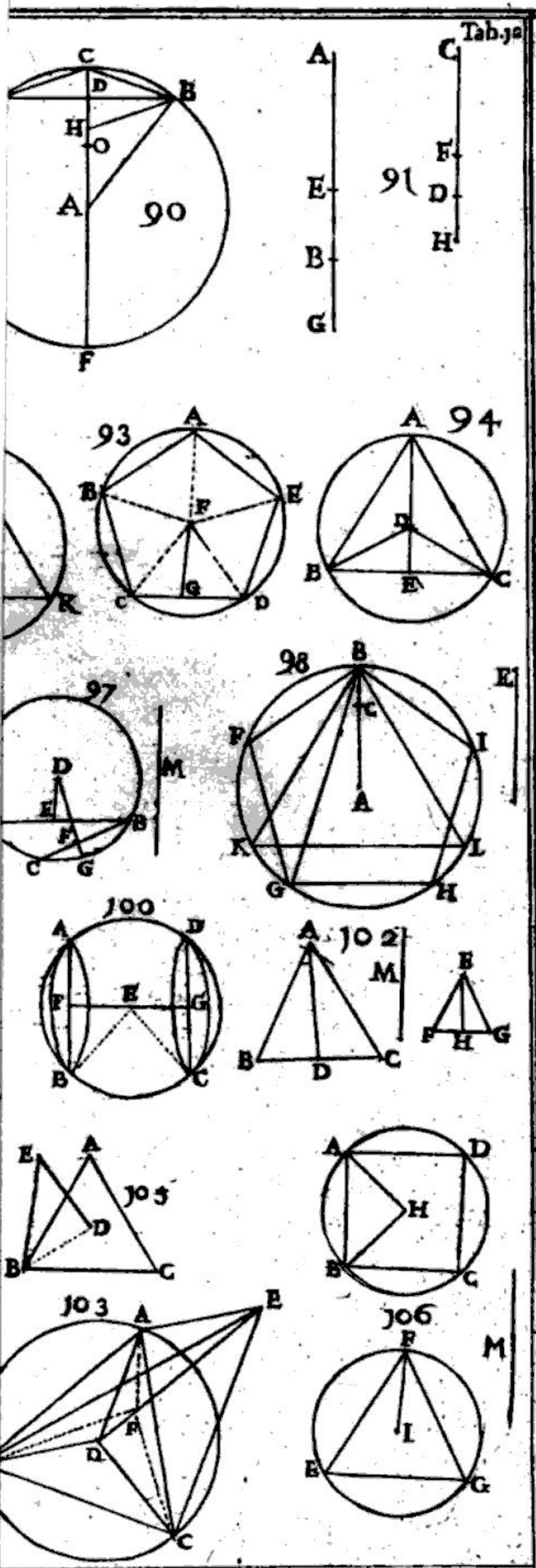
63

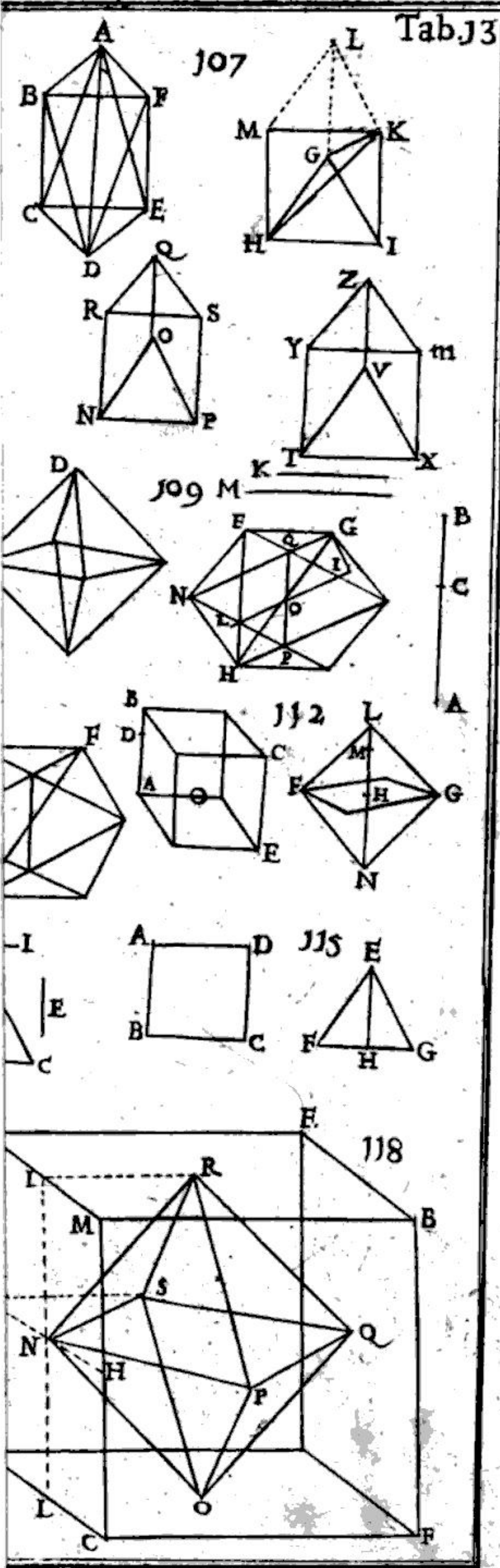


Tab. 10

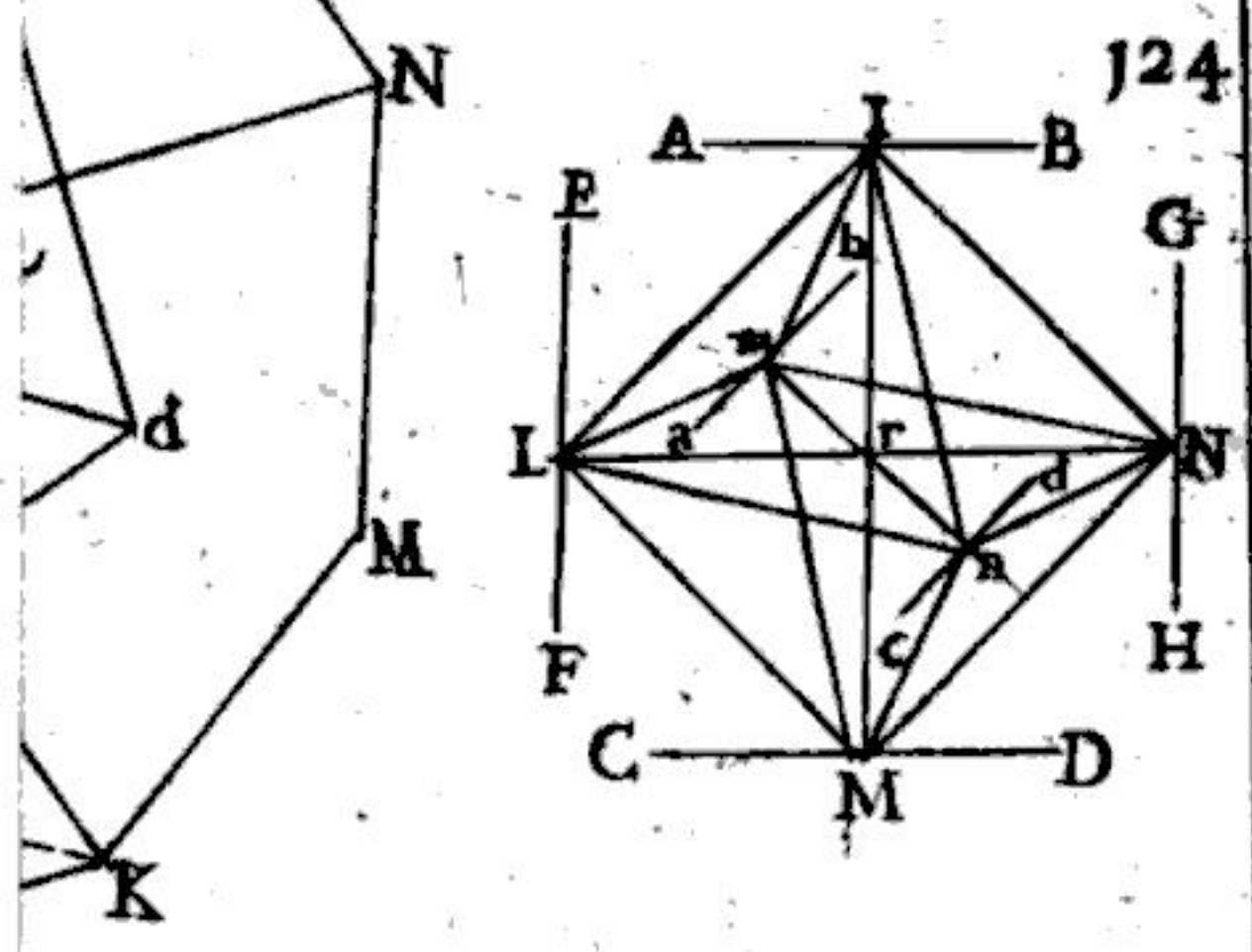
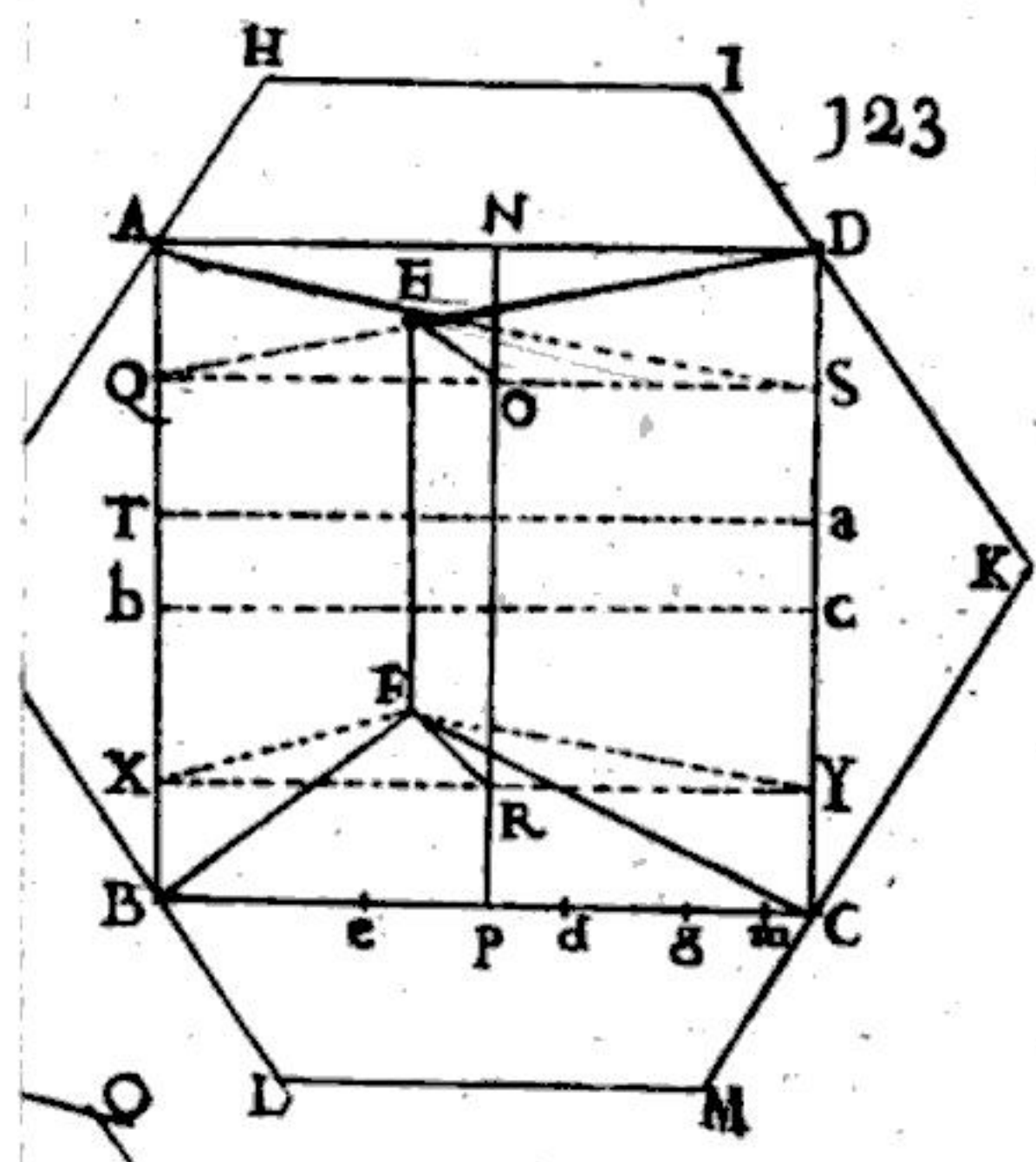
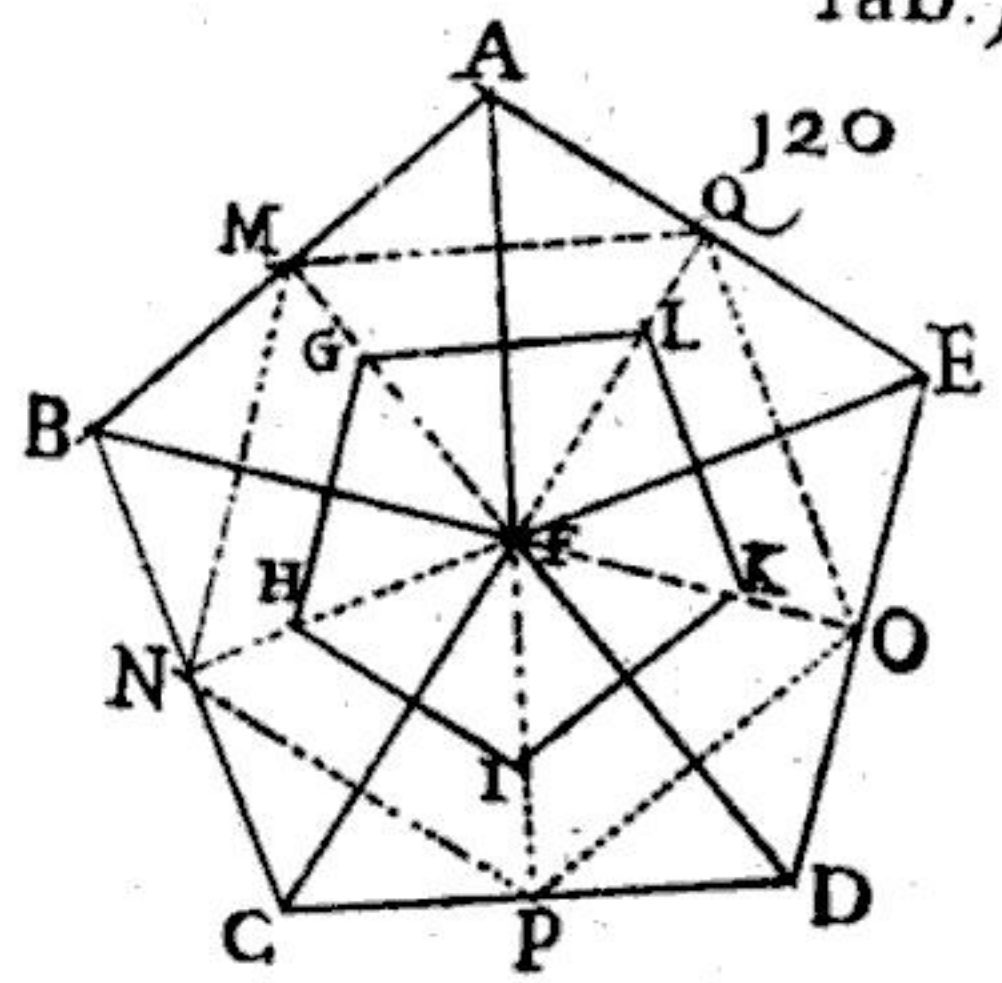






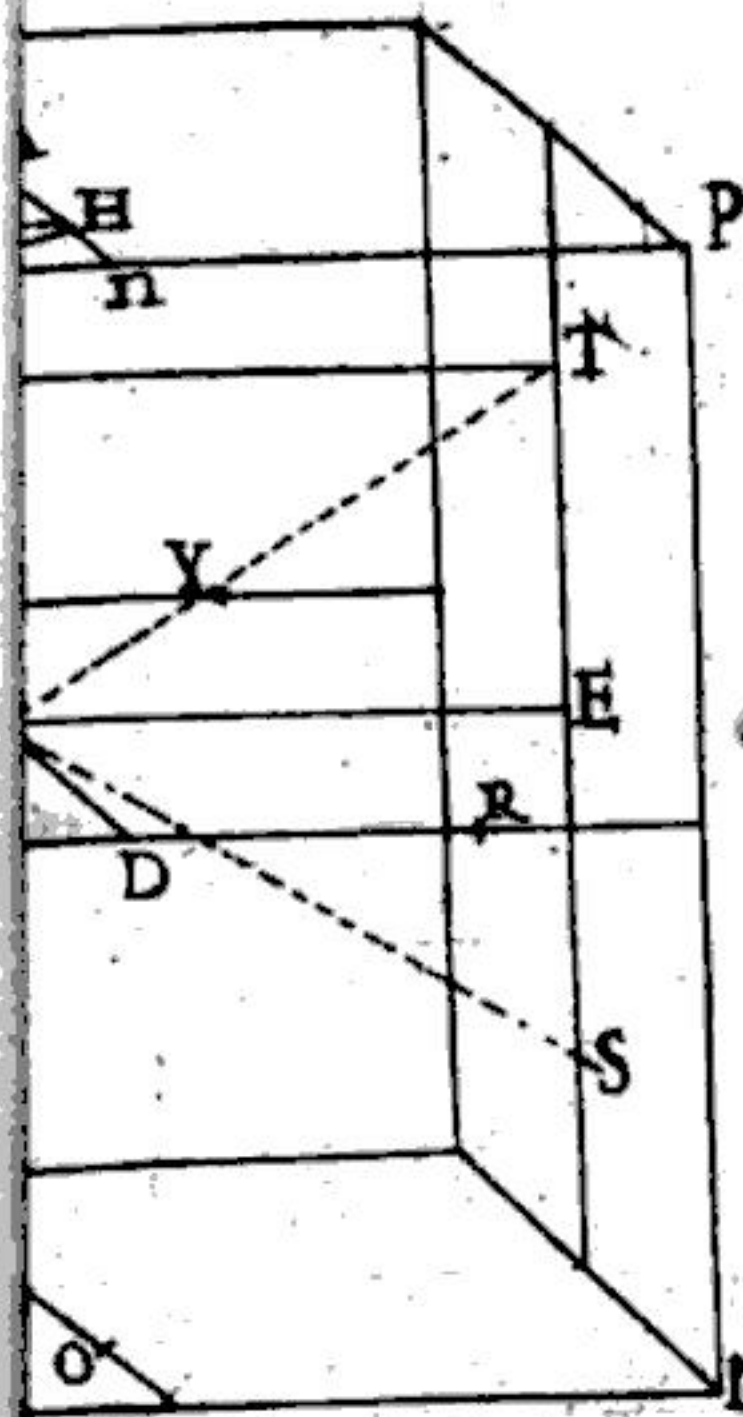
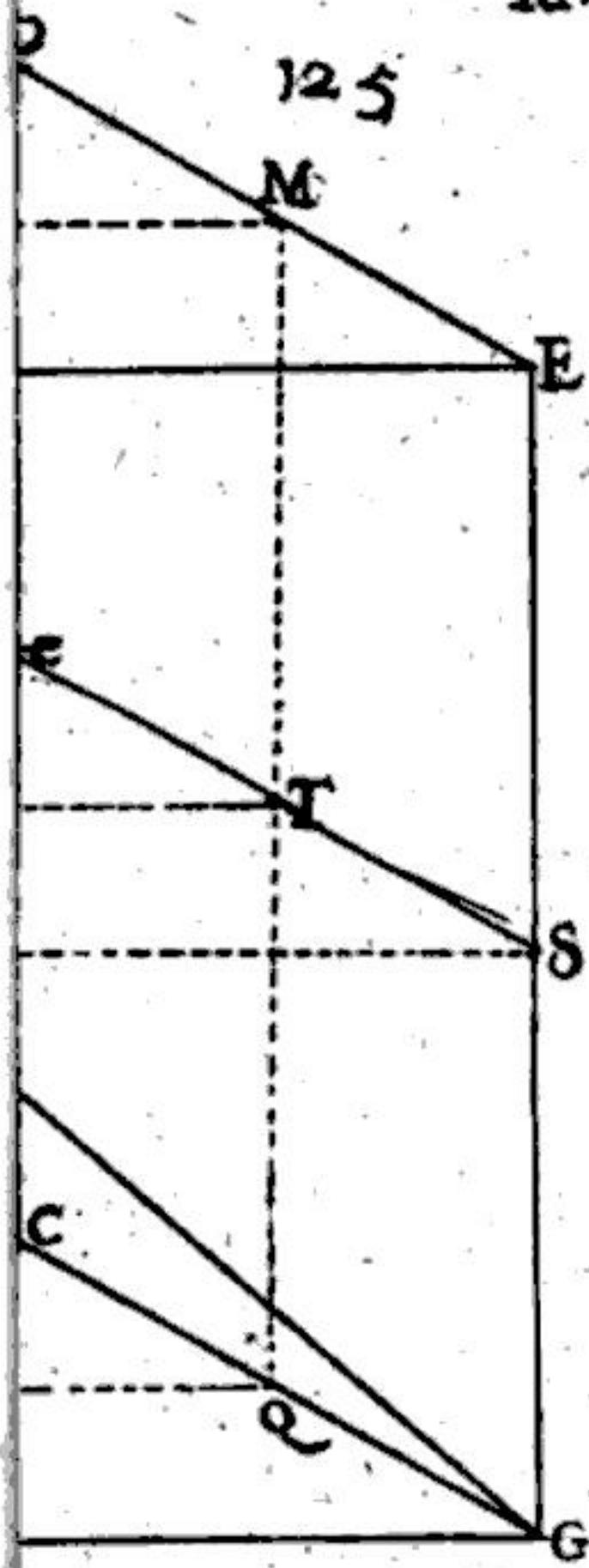


Tab. 14

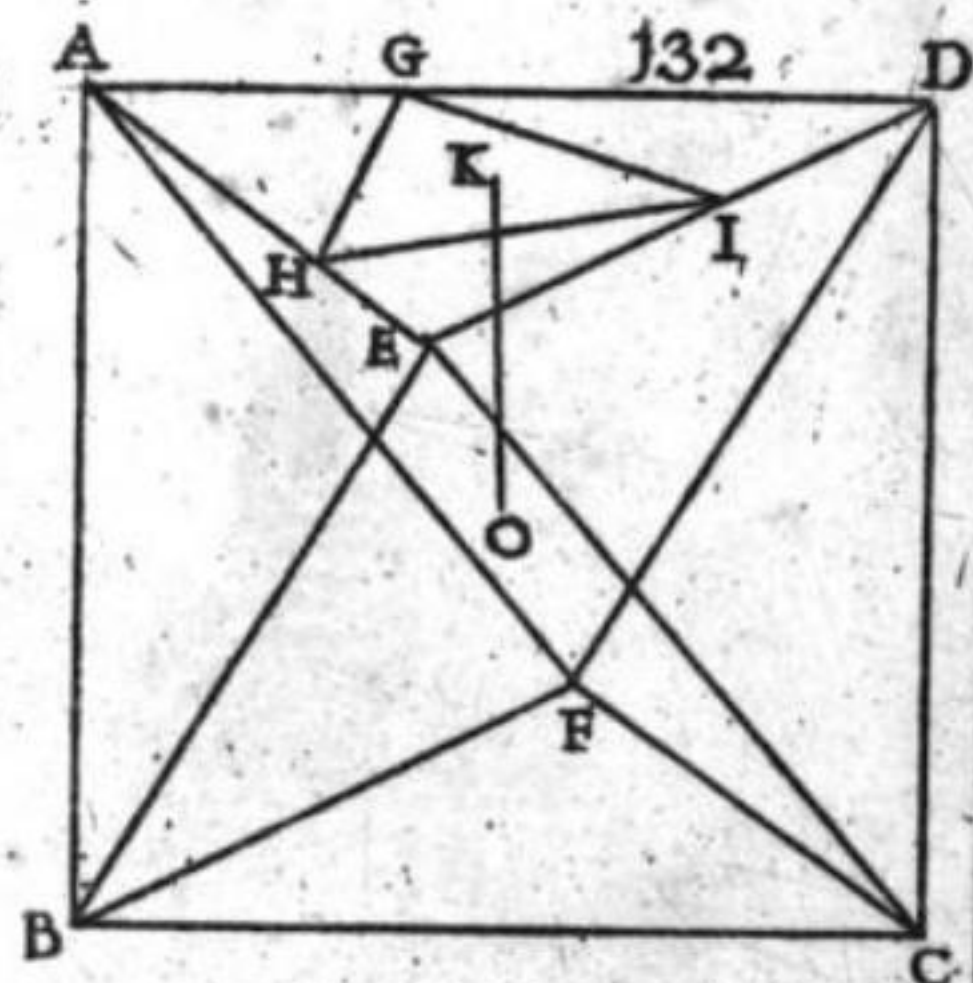
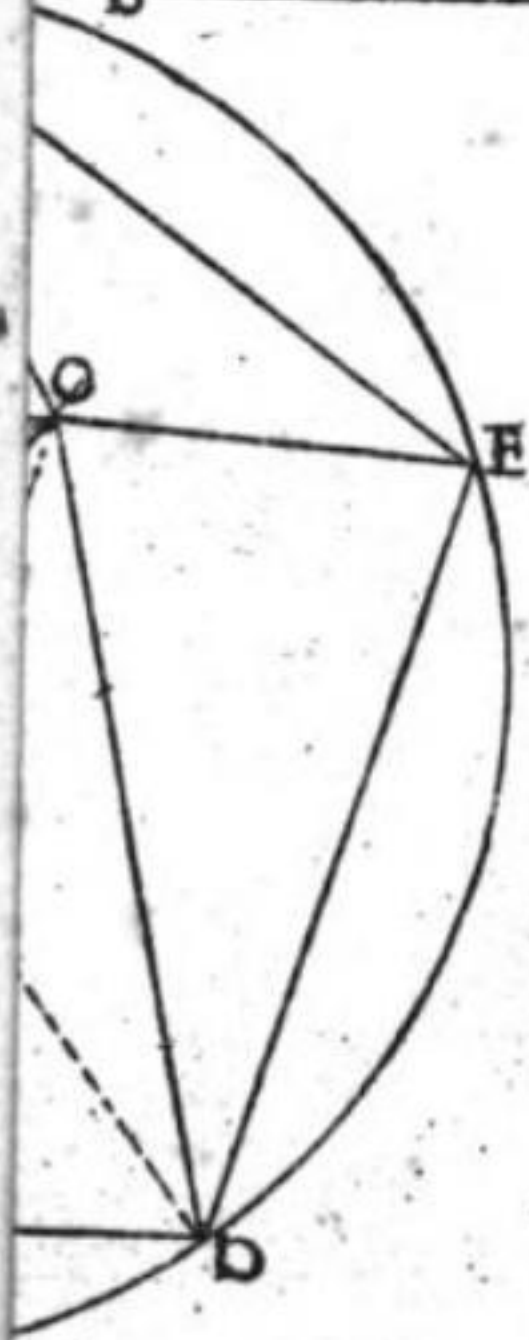
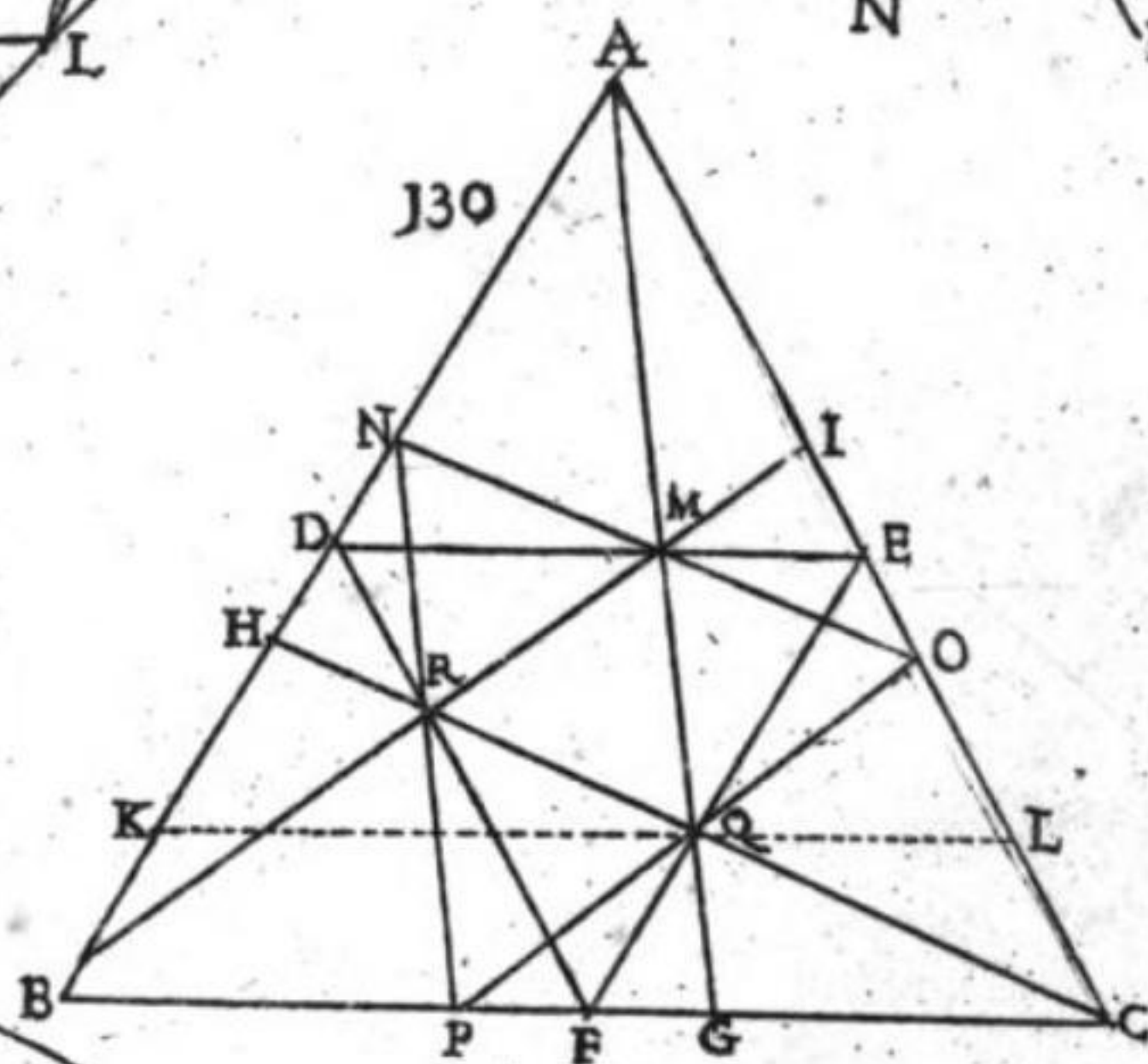
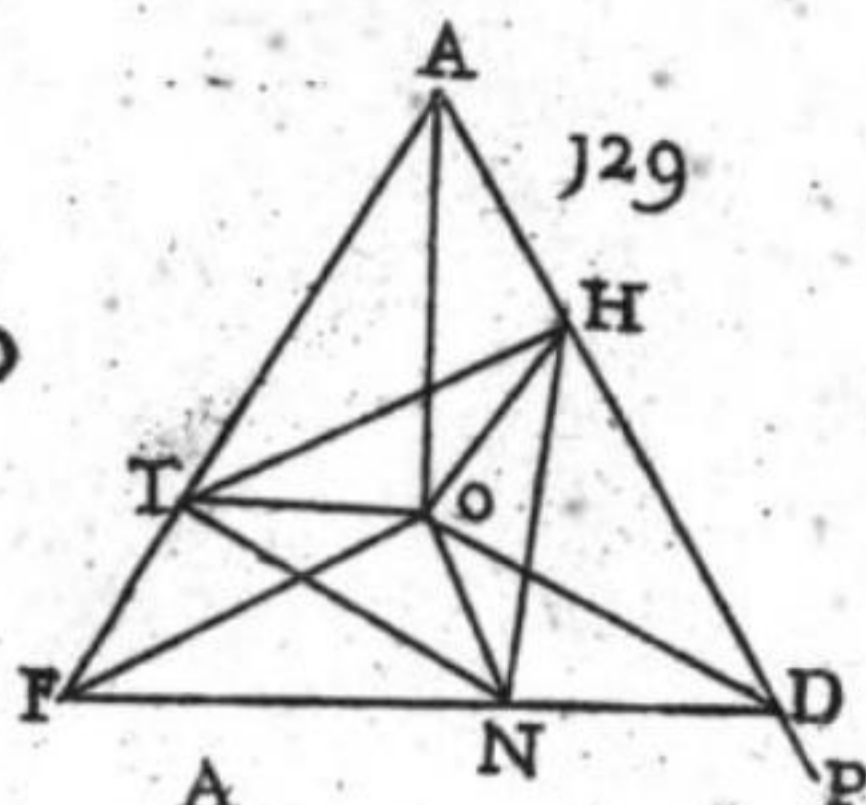
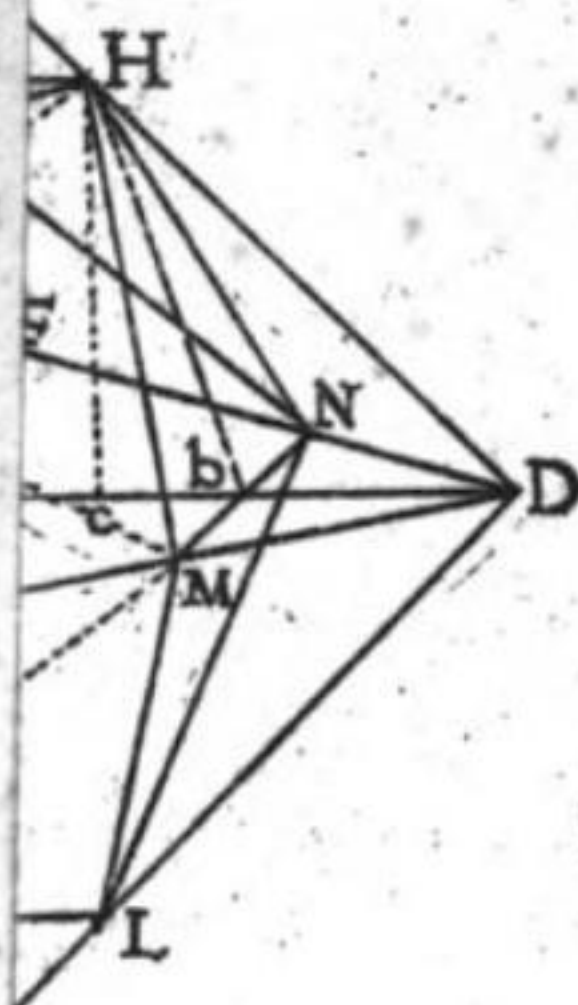


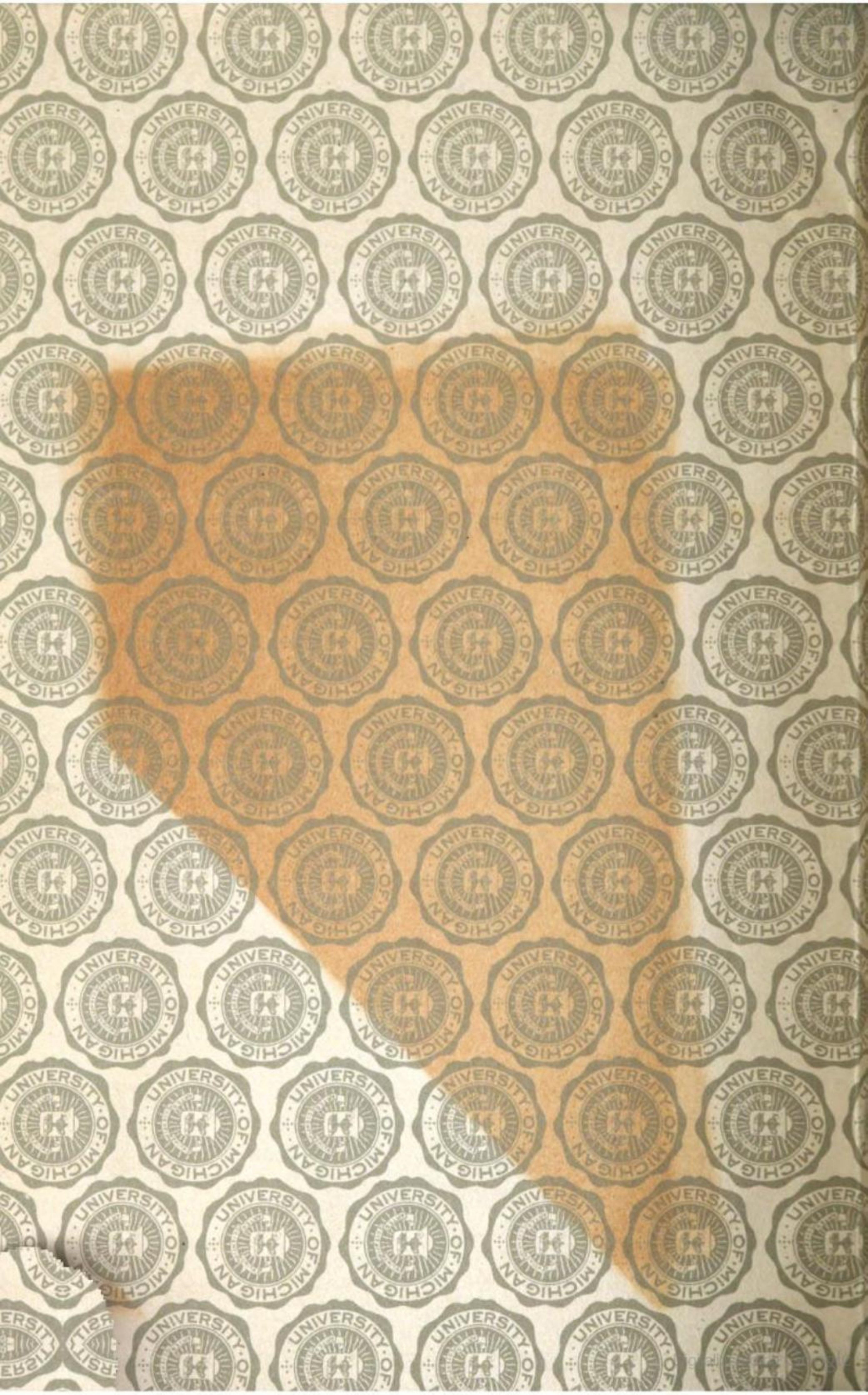
Ta. 15

125









UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 06388 8971

A 543947

DEC 6 1933

UNIV. OF MICH.
LIBRARY

