NUOVI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA PRATICA

composti per uso della

REALE ACCADEMIA MILITARE

dal primario professore della medesima

NICOLÒ DI MARTINO

NAPOLI. MDCCLXXIV.
presso Paolo di Simone
con permesso Regale

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA PRATICA

INTRODUZIONE.

1. Quantunque la Geometria ſia nata dal biſogno, che ebbero di eſſa gli Eggizj in miſurare l'eſtenſione de' terreni, i di cui limiti venivano a confonderſi coll'inondazione del Fiume Nilo; e tuttocche ella prometta di se moltiſſimo, non ſolo nell'inveſtigazione degli arcani della natura, ma eziandio nella perfezione da darſi alle arti, che ſono neceſſarie all'uſo della vita civile: nientedimeno que' ſavj Greci, che dopo gli Eggizj ſi dettero la pena di coltivarla a fondo, e di promoverla al più che foſſe poſſibile, la riguardarono come una ſcienza così pura, e rimota dalle coſe ſenſibili, che niente ſtimarono più proprio per eriggere la noſtra mente all'intelligenza delle coſe aſtratte, e metafiſiche, quanto lo ſtudio della medeſima.

2. Ed in vero, ſebbene la quantità eſteſa in lunghezza, larghezza, e profondità riſieda in tutti i corpi ſoggetti a noſtri ſenſi; tutta volta la Geometria, in formarſi di quella il ſuo objetto, a tal ſegno l'aſtrae da' corpi, e la depura, che niente reſtandovi di ſenſibile, la riduce ad eſſere mera nozione della noſtra mente, e a non conſervare altrove il ſuo eſſere, che in noi medeſimi. Quin-

di tutto ciò, che nella Geometria s'insegna, dee concepirsi da noi con puro intendimento; e le figure sensibili, che in essa impiegar si sogliono, non servono ad altro, se non che ad agevolarci l'intelligenza delle sue teorie astratte: onde si è, che non dobbiamo darci la pena di esaminare, se tali figure siano formate con esattezza, e se corrispondano perfettamente alle cose, che vogliamo rappresentare per mezzo di esse.

3. Nè del genio di questa scienza dobbiamo pensare altrimente dal vedere, che la medesima non solo abbonda di teoremi, che dimostrano verità, ma racchiude ancora moltissimi problemi, che di lor natura propongono a fare qualche cosa. Imperocche egli è da notarsi, che i problemi geometrici non sono, come quei della Meccanica, i quali aggirandosi intorno a cose materiali, ed interamente sensibili, si risolvono con operazioni eziandio sensibili, e manuali; ma anno essi loro un'indole assai diversa, per la ragione, che risiedendo nel nostro intendimento l'oggetto, intorno a cui si aggirano, sono puramente intelligibili ancora le operazioni, che per la loro soluzione s'impiegano: onde si è, che lo scopo di detti problemi non già sia di formare effettivamente le cose, che ci propongono, ma soltanto di dimostrarci la loro possibilità.

4. Ed in verità questo punto non doveasi trascurare da una scienza, che si vanta tra tutte l'altre di essere la più certa, e la più evidente.
166 Imperocche, sebbene le varie figure, così piane, come solide, che ella considera, siano state insculpite dalla natura ne' corpi sensibili; tutta volta queste figure corporee, e materiali soggette a' nostri sensi, non sono così giuste, ed esatte, come quelle, che dalla Geometria stessa sono poste a calcolo. Onde, affinche non avesse a dirsi della medesima, che ella raggioni di cose talmente
1P ideali, che non solo non esistono, ma neppure sono possibili; egli era ben raggionevole, che non meno per mezzo di teoremi ci dimostrasse le

varie

varie proprietà delle sue figure, che per via di problemi ci dasse ancora a divedere la possibilità delle figure medesime, e ci munisse altresì di tutto ciò, che si richiede per la perfetta intelligenza della loro costituzione.

5. Or essendo la Geometria una scienza tutta contemplativa, e non essendo altro il fine de' suoi problemi, se non che di dimostrare la possibilità delle cose, che in essa si considerano; egli è chiaro, che colla sola conoscenza delle astratte sue teorie sia difficile il conseguire que' vantaggi, che ella stessa ci promette. Quindi si è pensato da Matematici di coltivarla ancora per rapporto all'uso, che può farsi della medesima nelle cose sensibili; e perciò oltre a quella teorica, che si trattiene in teorie puramente speculative, ne an formata un' altra più propria per gli bisogni, che possiamo averne nella vita civile, a cui perciò an dato il nome di Geometria pratica. Onde avendo noi in due distinti trattati distesamente spiegata la prima, passeremo ora in quest' altro a ragionare della seconda, che per essere sensibile sarà altresì più amena, e più dilettevole.

6. Si appella adunque Geometria pratica quella scienza, che insegna a formare effettivamente le figure geometriche, ed a misurarle con esattezza. E poiche il suo scopo si è di agevolare il più che sia possibile la formazione, e misura di quelle; perciò in essa si fa uso, non meno de' numeri per esprimere il giusto valore delle figure, che di alcuni istromenti per poterle prontamente descrivere. Ella intanto dipende interamente dalla Geometria teorica, nè può rendersi ragione delle sue operazioni pratiche senza l' anticipata conoscenza di quella. Ma perchè vi sono moltissimi, i quali vogliono gustare i frutti della Geometria pratica, senza darsi la pena di apprendere l' altra teorica; perciò ci studieremo di distendere gli Elementi di essa in guisa tale, che possano intendersi eziandio da coloro, che sono affatto ignari dell' altra.

16

7. Per conseguire un tal fine, egli è uopo incominciare dalle prime nozioni di questa scienza, e perciò noteremo in primo luogo, che sebbene la quantità estesa veggasi ne' corpi sensibili di questo mondo fornita dalla natura di tre dimensioni, non mai fra esse loro disgiunte; nientedimeno i Geometri, con considerare separatamente quelle tre sue dimensioni, distinguono di essa tre spezie: cioè la linea, che riguardano come dotata di una sola dimensione, a cui danno sempre il nome di lunghezza; la superficie, che considerano come fornita di due dimensioni, le quali chiamano lunghezza, e larghezza; e finalmente il corpo, ovvero solido, in cui contemplano tutte tre le dimensioni insieme, le quali appellano lunghezza, larghezza, e profondità.

8. Secondo queste nozioni egli è chiaro, che il corpo debba essere terminato da superficie, e che la superficie debba avere per suoi termini le linee. E poiche eziandio la linea dee essere dotata de' suoi termini; perciò colla loro ricerca è derivata presso i Geometri la considerazione de' punti, i quali sono da essi riguardati, come segni privi di ogni dimensione, e capaci soltanto di sito ovvero posizione. E quantunque secondo questa nozione il punto non debba riporsi nel numero delle quantità geometriche; pure può egli aversi come principio di ciascuna di quelle. Imperocche, siccome col moto del punto dee nascere la linea; così col moto laterale della linea dee prodursi la superficie, e finalmente col moto trasversale della superficie dee generarsi il corpo, ovvero solido.

9. Intanto egli è da notarsi, che nè i punti debbono aversi come parti della linea, nè le linee come parti della superficie, nè le superficie come parti del corpo. Imperocche, dovendo essere la parte della stessa indole col suo tutto, saranno parti della linea altre linee più picciole, parti della superficie altre superficie di minor ampiezza, e parti finalmente del corpo altri corpi di

di mole minore. E quantunque nel metodo degli indivisibili già ricevuto presso i Geometri si consideri la linea come composta d'infiniti punti, la superficie come composta d'infinite linee, ed il corpo come composto d'infinite superficie; nientedimeno, siccome è nostro pensiero d'impiegare tal metodo nella Geometria pratica, così faremo vedere a suo luogo, che il linguaggio di esso sia diverso, ma che la sostanza sia la medesima.

10. Or per quanto alla linea, ella o giace egualmente tra i suoi termini, che sono due punti, e dicesi retta; o piegando verso un qualche lato, non serba egual posizione tra i punti, che la terminano, e si appella curva: e secondo questa nozione egli è chiaro, che la retta sia sempre la medesima, ed al contrario che la curva sia capace d' infinite variazioni. Per quanto poi alla superficie, ella ancora o giacendo egualmente tra i suoi termini, concede da per tutto posizione alla linea retta, e si dice piana; o non essendo egualmente distesa tra le linee, che la terminano, non permette, che si possa sù di essa per ogni lato adattare la linea retta, e si chiama curva: onde vedesi similmente, che la piana sia sempre la stessa, e per lo contrario che la curva sia soggetta ad infiniti cambiamenti.

11. Le superficie piane, per essere di un'indole semplicissima, sono considerate, e poste a calcolo da Geometri independentemente da' corpi; ma non già le superficie curve, le quali non possono concepirsi, senza che si abbiano presenti gli stessi corpi, che le riconoscono per loro termini. Intanto siccome i corpi terminati per ogni lato da superficie si chiamano figure solide; così le superficie piane considerate independentemente da' corpi, e da per tutto terminate da linee si appellano figure piane. E poiche la Geometria si aggira propriamente intorno all' une, e l'altre figure; quindi si è, che ella si divide comunemente in piana, e solida: intendendosi per piana quella parte di essa, che tratta delle figure piane;

e per ſolida quell'altra parte, in cui delle figure ſolide ſi raggiona.

12. Ed in vero in trattare della Geometria teorica di queſta diviſione ſi è fatto uſo; poiche ſiccome ſi ſono formati di eſſa due diſtinti volumi, così nel primo ſi è racchiuſa la parte piana, e nel ſecondo la parte ſolida. Ma ora, che dobbiamo trattare della Geometria pratica, la quale può reſtringerſi comodamente in un ſol volume, ci appiglieremo ad altra diviſione più confacente alla ſua indole. Imperocche, conſiſtendo queſt'altra non già in pure teorie, che debbano eſſere rigoroſamente dimoſtrate, ma in operazioni, e miſure effettive; delle quali alcune ſono più ſemplici, ed altre più compoſte; ſtimiamo più proprio di dividerla in due libri, e di abbracciare nel primo la parte ſua più ſemplice, e nel ſecondo la parte più compoſta.

166

13. Del rimanente, ſebene ſia noſtro penſiero di diſtendere talmente gli Elementi della Geometria pratica, che per l'intelligenza di eſſa non ſi abbia biſogno dell'altra teorica; nientedimeno, ſiccome in queſta ſcienza ſi eſprimono per mezzo de' numeri le lunghezze delle linee, le ampiezze delle ſuperficie, e le capacità de' ſolidi; così niuno dovrà darſi allo ſtudio di eſſa, ſenza eſſerſi prima eſercitato nelle operazioni, che ſogliono farſi intorno a' numeri. Vogliamo adunque, che egli ſia verſato non ſolo nell'algoritmo de' numeri interi, e rotti, ma altresì nell'eſtrazione delle radici, nell' algoritmo de' numeri radicali, nella dottrina delle proporzioni, e progreſſioni tanto arimmetiche, quanto geometriche, e nell' arte di riſolvere le queſtioni arimmetiche per mezzo de' numeri coſſici: le quali coſe ſono ſtate da noi diſteſamente ſpiegate negli Elementi della noſtra Arimmetica.

14. Per quanto poi alle operazioni, e miſure da farſi in queſta ſcienza, ſiccome eſſe dipendono dalle varie proprietà, che competono alle quantità geometriche; così per l'intelligenza del-

lo

le medeſime baſterà, che a ſuo luogo ſi additino le proprietà, dalle quali derivano, ſenza darci la pena di dimoſtrarle. Intanto per ora giova renderſi familiari i ſeguenti aſſiomi. I, che le quantità eguali ad una terza debbano eſſere eguali ancora tra loro. II, che debbano eſſere eguali altresì tra di eſſe, così quelle, che ſono duple, triple, quadruple di una terza; come le altre, che ſono la metà, la terza parte, la quarta parte di una medeſima. III, che ſe di due quantità eguali una ſia maggiore, o minore di una terza, l' altra ne debba eſſere ancora maggiore, o minore. IV, che quantità eguali coll' aggiunta, o detrazione di altre ſimilmente eguali conſervino la loro eguaglianza. V, che quantità diſuguali coll' aggiunta, o detrazione di altre eguali, reſtino diſuguali come prima. VI, che ſiccome un tutto è eguale a tutte le ſue parti unite inſieme, così ſia maggiore di ciaſcuna di eſſe. E VII finalmente, che eguali eſſer debbono le quantità, le quali ſi poſſono talmente adattare tra loro, che l' una ſi combaci coll' altra.

LIBRO I.

Della Parte più ſemplice della Geometria Pratica.

15. TUtto ciò, che nella Geometria pratica ſi propone a fare, dee eſeguirſi per ſue mezzo di due linee, che ſono la retta, e la circolare. Quindi prima d' inoltrarci in queſta ſcienza, uopo è dare una diſtinta nozione, così dell' una, come dell' altra. Ed in primo luogo per quanto alla retta, di già ſi è avvertito (10), che ſi appella con tal nome quella linea, che ſtà diſteſa egualmente tra i punti, che la terminano. Eſſendo adunque così, egli è facile ad intenderſi, che una ſola retta poſſa tirarſi da un punto ad un' altro; ed in conſeguenza, che la poſizione

della retta dipenda da due soli punti. Quindi siccome due rette, che anno due punti comuni, debbono aversi come porzioni di una medesima retta; così, intersegandosi tra loro due rette diverse, dovrà farsi in un sol punto il loro intersegamento.

16. Ma dall'essere la retta egualmente distesa tra i suoi termini ne segue ancora, che di tutte le linee, le quali possono tirarsi da un punto ad un'altro, la più corta debba essere la retta; anzi ogn' altra linea per rapporto alla retta dee stimarsi tanto più lunga, quanto maggiormente da quella travia. Così non solo ciascuna delle due
Fig. 1. curve ACB, ADB sarà più lunga della retta AB, ma la prima di esse ACB sarà più lunga ancora dell'altra ADB. E poiche le altre due AEB,
Fig. 2. AFB formate con rette, che non sono a dirittura, traviano dalla stessa AB a guisa di curve; sarà parimente così ciascuna di esse più lunga della retta AB, come la prima AEB più lunga dell'altra AFB.

17. Da queste due proprietà della linea retta, cioè che la posizione delle sue parti sia sempre la medesima, e che sia la più corta di tutte le linee, che anno i medesimi termini, ne segue inoltre, che la distanza di due punti debba misurarsi per la retta, che congiunge que' punti insieme. Imperocchè, siccome la misura delle distanze dee essere sempre uniforme; così ogni ragion vuole, che le medesime distanze si additino per lo più corto camino, che possa tenersi da un punto all'altro. Il problema adunque di determinare la distanza, che si frappone tra due dati punti, non ad altro si riduce, se non se a determinare la lunghezza della retta, che unisce insieme i due punti dati.

18. Or quantunque nella Geometria teorica si concede, così il potersi tirare la retta da un punto ad un'altro, come il potersi prolungare ad arbitrio una retta data; nientedimeno nella Geometria pratica questi due problemi effettivamen-

te

te debbono eſeguirſi, e perciò biſogna provederſi di quello iſtromento, che comunemente chiamaſi riga. Queſta ſuol farſi di legno ben duro, o pure di ottone, più lunga, o più corta ſecondo il biſogno, e con eſattezza tale, che ſi eſtenda a dirittura per amendue i lati; e quindi ſi è, che le linee tirate per mezzo di eſſa ſiano rette. Può inveſtigarſi intanto, ſe una riga ſia giuſta, ſe dopo eſſerſi tirata con quella una retta, la medeſima ſi rivolti, e ſi adatti di nuovo ſulla retta tirata; poiche venendoſi a combaciare colla retta ancora in queſt' altra ſua poſizione contraria, ſarà ciò baſtante argomento, che ella non ſia fallace.

19. Dovendoſi per mezzo della riga tirare, o prolungare una retta, potrà farſi uſo di quella ſteſſa penna, di cui ci ſerviamo per ſcrivere; ma per maggiore eſattezza ſi fabbrica un' iſtromento di ottone, che a guiſa di penna da ſcrivere poſſa ritenere l' inchioſtro ſenza verſarlo, ed a cui per tal' effetto ſi è dato il nome di tiralinee. E poiche avviene ben ſpeſſo, che le rette tirate una volta ſi debbano cancellare in appreſſo; perciò è neceſſario provederſi ancora del toccalapis, che è un' altro iſtromento eziandio di ottone, proprio per tener fermo un pezzetto di lapis piombino, affinche colla punta di detto lapis poſſano tirarſi quelle rette, che debbono in appreſſo eſſere caſſate. Ed in fine, ſe le rette ſi voleſſero punteggiate, dovrà farſi uſo di picciole rotelle dentate, che ſogliono apporſi in una delle punte del compaſſo, ſiccome da quì a poco diremo.

20. Per quanto poi alla linea circolare, ella è una curva talmente ſituata ſopra di un piano, che rientrando in ſe medeſima, e chiudendo ſpazio, ſi diſcoſta egualmente da un punto di quello ſpazio, che ſi appella ſuo centro; e perciò tutte le rette tirate dal centro alla linea circolare debbono eſſere eguali tra loro. Si fa naſcere da' Geometri una tal curva col movimento di una retta fatto ſopra un piano intorno ad uno de' ſuoi eſtremi fiſſo, ed immobile [illegible] fino a che ritorni

al

al suo luogo primiero; essendo chiaro, che l'altro estremo della stessa retta debba segnare nel piano, sù di cui si muove, una curva egualmente distante dal primo immobile. E poiche niente è più facile a concepirsi, quanto un tal movimento; quindi si è, che nella Geometria teorica si concede volentieri il potersi descrivere la linea circolare con un dato centro, ed un dato intervallo.

21. Rientrando la linea circolare in se medesima, chiara cosa si è, che la retta debba intersegarla in due punti; ma potrebbe ancora incontrarla talmente, che dopo l'incontro cada tutta fuori, senza traversare lo spazio racchiuso da detta linea: onde, siccome nel primo caso la retta dicesi essere secante della linea circolare, così nel secondo si dirà essere sua tangente. Egli è chiaro altresì, che l'intersegamento di due linee circolari debba farsi eziandio in due punti; ma queste ancora possono talmente incontrarsi tra loro, che una di esse cada o tutta dentro, o tutta fuori dell'altra: e perciò si diranno secarsi scambievolmente nel primo caso, e toccarsi o al di dentro, o al di fuori nel secondo.

22. Per descrivere effettivamente la linea circolare con un dato centro, ed un dato intervallo, comunemente si fa uso del compasso, che è un'stromento pur troppo noto. Dipende la sua esattezza dal rimaner egli fermo ad ogni apertura delle sue gambe, e dall'essere la sua testa così ben contornata, che possa aggirarsi liberamente. La parte superiore delle gambe si fa di ottone; ma le loro punte, affinche siano ben tirate, debbono essere fatte d'acciajo. Ed egli è da sapersi, che oltre al compasso, che tiene fisse amendue le punte, se ne costruisce ancora un'altro, in cui una delle due punte può togliersi, per riporvi secondo il bisogno ora una punta, che ritenga l'inchiostro a guisa di penna da scrivere, ora un'altra, che abbia in cima un pezzetto acuminato di lapis piombino, ed ora una terza, che

ca

ſia fornita di una picciola rotella dentata mobile intorno al ſuo aſſe.

CAPITOLO I.

Delle linee rette, così inclinate, come parallele.

23. SIccome le figure piane ſono molto più ſemplici delle figure ſolide; così tra le piane medeſime il primo luogo dee darſi a quelle, che per eſſere terminate da linee rette, ſi appellano figure piane rettilinee. Le rette intanto poſſono eſſere conſiderate, e poſte a calcolo independentemente dalle figure, di cui ſono termini; onde daremo principio alla Geometria pratica, con conſiderare le rette ſecondo la propria loro indole, ſenza riferirle a figura alcuna rettilinea. E poiche è noſtro penſiero di agevolare l' intelligenza di queſta ſcienza, eziandio a coloro, che non anno veruna cognizione della teorica; pertanto prima di ogni altra coſa additeremo brevemente alcune nozioni neceſſarie per intendere quel tanto dovrà dirſi intorno a queſto argomento.

§. I.

Delle principali affezioni delle linee rette.

24. DUe rette ſituate ſopra un medeſimo piano poſſono eſſere tra loro, o inclinate, o parallele. Si dicono eſſere inclinate, quante volte prolungate vanno ad incontrarſi tra di eſſe, ſenza che l' una ſia a dirittura coll' altra. Si dicono all' incontro eſſere parallele, ovvero equidiſtanti, quando per contrario non mai tra loro s' incontrano, per quanto ſi prolunghino dall' una, e l' altra parte. Così le due A B, C D ſono rette inclinate tra loro, per la ragione che prolungate s' incontrano nel punto E, ſenza che formino una retta continuata; ma le altre due FG, H I ſono rette parallele, ovvero equidiſtanti, poi- Fig. 3. Fig. 4.

poiche prolungate da amendue le parti non mai tra esse s' incontrano.

25. Or siccome le rette, che prolungate s'incontrano, senza che siano a dirittura, si dicono essere inclinate tra loro; così la scambievole inclinazione delle medesime si appella angolo. Quindi la quantità di un'angolo dipende, non già dalla lunghezza delle rette, che lo contengono, ma dalla loro apertura; onde si è, che un' angolo dovrà stimarsi maggiore, o minore, secondo che l' apertura delle rette è maggiore, o minore. Lati intanto di un' angolo si appellano le rette stesse, che lo contengono; e si appella ancora suo vertice, o sua cima quel punto, in cui i lati s' incontrano. Così per rapporto all' angolo BAC, Fig. 5. lati si dicono le rette A B, A C, che lo contengono; e vertice, ovvero cima il punto A, in cui sortisce l' incontro di detti lati.

26. In un' angolo può considerarsi ancora la base, la quale sarà quella retta, che unisce insieme gli altri estremi de' suoi lati; siccome per rapporto all' angolo B A C è la retta B C. Ed egli è da sapersi, che qualora due angoli, come B A C, E D F, anno i lati A B, A C eguali ai lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, debbono aver luogo i seguenti quattro teoremi: cioè I, che essendo l' angolo B A C eguale all' angolo E D F, debba essere la base B C ancora eguale alla base E F; II, che essendo l' angolo B A C maggiore dell' angolo E D F, debba essere la base B C eziandio maggiore della base E F. III, che essendo la base B C eguale alla base E F, debba essere l' angolo B A C similmente eguale all' angolo E D F; e IV finalmente, che essendo la base B C maggiore della base E F, debba essere l' angolo BAC altresì maggiore dell' angolo EDF.

27. L' angolo inoltre può essere di trè spezie, cioè retto, ottuso, ed acuto; ma per intendere l' indole di ciascuno di essi, bisogna prima avvertire, che l' incontro di due rette può farsi in due maniere, cioè o perpendicolarmente, o obliqua-

quamente . Si dice una retta incontrarſi perpendicolarmente con un'altra retta , quando gli angoli , che ella forma coll' altra da amendue le parti , ſono eguali tra loro ; ma ſe queſti ſteſſi angoli ſiano tra di eſſi diſuguali , in tal caſo l' una coll' altra ſi dirà incontrarſi obliquamente . Così la retta AB s' incontra perpendicolarmente coll'altra D E , per eſſere eguali i due angoli A B D, ABE ; per lo contrario poi l'altra CB s' incontra obliquamente colla ſteſſa DE, per la ragione, che l' angolo C B D è maggiore dell'altro C B E. Fig. 6.

28. Eſſendo così , egli è facile ora ad intendere la natura, ed indole delli trè angoli riferiti. Imperocche, ſiccome delli due angoli eguali formati dalla perpendicolare ciaſcuno diceſi retto; così delli due diſuguali formati dall' obliqua il maggiore ſi appella ottuſo , ed il minore acuto. E quindi egli è chiaro, che tutti gli angoli retti debbano eſſere eguali tra loro, per la ragione, che la poſizione della perpendicolare è ſempre la medeſima ; ma non già per lo contrario tutti gli ottuſi , o tutti gli acuti , poiche la poſizione dell' obliqua può variare in infinite maniere. Intanto, ſiccome ogni angolo ottuſo è ſempre maggiore del retto, così per lo contrario ogni angolo acuto ſarà ſempre minore del retto.

29. Inoltre conforme la perpendicolare forma angoli retti dall' una, e l' altra parte; così l' obliqua dee formarli tali , che uniti inſieme ſiano eguali a due retti . Imperocche, ſebbene uno di eſſi ſia ottuſo , e l' altro acuto ; ad ogni modo per picciola rifleſſione , che ſi voglia fare , ſi comprenderà facilmente , che di quanto l' ottuſo eccede il retto, di altrettanto l' acuto manca dal retto. Con prolungarſi adunque un lato di un' angolo verſo la cima, dee formarſi un' altro angolo, che inſieme col dato uguagli due retti. Onde egli è facile a dedurne, che interſegandoſi due rette, come A B , C D nel punto E , debbano eſſere eguali tra loro , tanto i due angoli verticali A E C, D E B, quanto gli altri due A E D, B E C. Fig. 7.

30. In-

30. Intorno alla perpendicolare egli è ancora da notarſi, che ſiccome è una la ſua poſizione, così ſopra una retta data da un punto dato in eſſa non può alzarſi ſe non che una ſola perpendicolare; e l'iſteſſo avviene, ſe il punto ſia dato fuori della retta, poiche ancora da quel punto ſulla retta data non potrà abbaſſarſi ſe non che una ſola perpendicolare: a cui compete ancora di eſſere la più corta di tutte le rette, che poſſono tirarſi dall'iſteſſo punto alla ſteſſa retta. È quindi ſi è, che la diſtanza di un dato punto da una data retta ſi miſura da Geometri per la perpendicolare abbaſſata dal dato punto ſulla retta data; poiche queſta perpendicolare, oltre di avere una poſizione coſtante, ci addita ancora il più corto camino, che poſſa tenerſi dal punto ſino alla retta.

31. Con fare uſo di queſto principio, egli è facile ad inveſtigare, quando una retta debba eſſere tangente della linea circolare. Sia perciò la retta A B, sù di cui dal punto C dato fuori di eſſa
Fig. 8.
s' intenda abbaſſata la perpendicolare C D. Queſta adunque ſarà più corta di ogni altra retta, che dallo ſteſſo punto C cade ſulla ſteſſa A B. Quindi la linea circolare, che ſi deſcrive col centro C, e coll'intervallo C D, laſcerà la A B tutta fuori di ſe ſteſſa; e pertanto ſarà la AB tangente della deſcritta linea circolare, quantevolte viene ad eſſerle perpendicolare l'altra C D, che congiunge il centro C col punto dell' incontro D. Per lo contrario poi, eſſendo la A B tangente della linea circolare, non ſolo dovrà eſſerle perpendicolare l'altra C D, che congiunge il centro col punto del contatto; ma altresì la perpendicolare alzata sù di eſſa dal punto del contatto D dovrà paſſare per lo centro C.

32. Paſſiamo ora alle rette paralſele, ovvero equidiſtanti. E poiche la poſizione di eſſe de[v] ſue
eſſere tale, che prolungate dall' una, e l'altra parte non mai trà loro s' incontrino; avranno due rette sì fatta poſizione, quantevolte s' inclinano

nano egualmente ſopra una terza retta. Così ſuppoſto, che le due rette A B, C D ſiano egualmente inclinate ſulla terza E F G, egli non è da porſi indubbio, che l'una non poſſa incontrarſi coll'altra. Imperocchè facendo, che la A B ſi muova verſo l'altra C D ſempre colla ſteſſa inclinazione, verranno a combaciarſi trà loro le due A B, C D. Ma con quel tal movimento le parti di eſſa A B ſi vengono a diſcoſtare egualmente dalla loro prima poſizione. Dunque ancora quando ſi combacia colla C D, il diſcoſtamento delle ſue parti ſarà da pertutto eguale; e pertanto nella prima ſua poſizione non potrà ella incontrarſi colla C D. Fig. 9.

33. Or l'egual inclinazione delle due A B, C D ſulla terza E F G fa, che così l'angolo C F G ſia eguale all'angolo A E G, come l'angolo D F G ſia eguale all'angolo B E G. Quindi il mezzo per conoſcere, ſe due rette come A B, C D ſiano tra loro parallele, ſi è di tirare sù di eſſe ad arbitrio una terza retta E F G, e di vedere ſe uno degli angoli eſteriori, come C F G ſia eguale all'interiore, ed oppoſto A E G, che ſta ſituato con eſſo alla ſteſſa parte. E poiche li due angoli C F G, E F D ſono eguali tra loro, e gli altri due C F G, C F E inſieme ſono eguali a due retti (29); conoſceremo ancora, che le due rette A B, C D ſiano tra loro parallele, quantevolte tirata sù di eſſe ad arbitrio la terza retta E F G, o ſono eguali tra loro i due angoli A E F, E F D, che diconſi alterni, o pure i due interiori A E F, C F E ſituati alla ſteſſa parte ſono inſieme eguali a due retti.

34. Generalmente adunque in tre maniere poſſiamo inveſtigare il paralleliſmo di due rette; poiche tirando sù di quelle ad arbitrio una terza retta, ſi farà egli a noi noto, I quando l'angolo eſteriore è eguale all'interiore, ed oppoſto ſituato alla medeſima parte; II quando i due angoli, che diconſi alterni, ſono trà loro eguali; e III finalmente quando i due angoli interiori ſituati

ti alla ſteſſa parte ſono inſieme eguali a due retti. E poiche una retta, che paſſa per un dato punto, in una ſola poſizione può eſsere parallela ad una retta data; egli è facile ad intenderſi, che eſſendo i due angoli interiori ſituati alla medeſima parte minori di due retti, le due rette debbono andarſi ad incontrare verſo quella parte, ove ſono detti angoli: donde ſi ricaverà facilmente, che eſsendo per lo contrario due rette parallele trà loro, e tirandoſi sù di eſse ad arbitrio una terza retta, neceſsariamente debbono aver luogo tutte tre le riferite uguaglianze.

35. Del rimanente per comprendere più chiaramente l'indole delle rette parallele, giova riflettere, che non potendoſi da un medeſimo punto abbaſsare due perpendicolari sù di una ſteſsa retta, forzoſamente le due perpendicolari alzate ſopra una retta da due punti diverſi debbono eſſere parallele tra loro. Or ſe facciaſi, che amendue pieghino egualmente verſo un qualche lato, egli non è da porſi in dubbio, che le medeſime conſerveranno ſempre il loro paralleliſmo. Onde ſiccome le tre uguaglianze riferite di ſopra chiaramente ſi ravviſano nella prima loro poſizione, per eſsere tutti gli angoli retti; così ſoſſiſteranno eziandio in ogni altra poſizione delle medeſime, per l'egual piegamento, che debbono ricevere, affinche ſi conſervino ſempre tra loro parallele.

36. Intorno alle rette parallele ſono da notarſi due altre proprietà, delle quali una ſi è, che le rette parallele ad una terza ſono parallele ancora tra loro; e l'altra ſi è, che eſsendo due rette eguali, e parallele, quelle, che le congiungono alle ſteſse parti, debbono eſsere ſimilmente eguali, e parallele. Ma ſiccome queſte due proprietà ci ſomminiſtrano due mezzi particolari per indagare il paralleliſmo di due rette; così la ſeconda di eſse ci fa conoſceere propriamente, che i punti di una delle due parallele debbano eſsere egualmente diſtanti dalli punti dell'altra. E quindi

di si è, che si è dato alle medesime il nome di rette parallele, ovvero equidistanti, in quanto che serbano tra loro da per tutto la stessa distanza.

§. II.

Dell'operazioni più semplici intorno alle rette.

37. QUantunque il compasso serva principalmente a descrivere la linea circolare con un dato centro, e con un dato intervallo [22]; nientedimeno può egli impiegarsi ancora a prendere la lunghezza di una data retta, ed a trasportarla ad ogn'altro luogo, in cui possa aversi di quella bisogno. Ma, affinche sia valevole a ciò fare con ogni esattezza, non solamente dee egli restar fermo ad ogni apertura delle sue gambe, ma è necessario ancora, che amendue le sue punte siano fisse: per la ragione, che con slocarsi un tantino una di esse, facilmente può avvenire, che o si aggiunga, o si tolga qualche cosa dalla lunghezza, che dee prendersi; ed in conseguenza, che l'operazione sia difettosa. lue

38. Per quest'altro uso, che può farsi del compasso, egli è facile nella Geometria pratica di adattare ad un dato punto, come A, una retta, che sia eguale ad un'altra retta data BC. Imperocche non dovrà farsi altra cosa, se non che prendere col compasso la lunghezza della data BC, ed indi trasportarla al punto A. Anziche, se presa col compasso quella tale lunghezza, descrivasi col centro A, e coll'apertura corrispondente a detta lunghezza la linea circolare DEF, non una, ma infinite rette potranno adattarsi al punto A, che siano eguali alla BC: per la ragione, che ogni retta tirata dal centro A alla linea circolare DEF dovrà essere eguale alla lunghezza presa [20], ed in conseguenza alla data BC. Fig. 10.

39 Egli è facile ancora da una retta maggiore AB tagliare una porzione, che sia eguale ad un' Fig. 11.

un' altra minore C D. Imperocchè, prendendo col compasso la lunghezza di questa seconda CD, e descrivendo col centro A, e coll' apertura della lunghezza presa la linea circolare E F G, che s' incontri colla prima A B nel punto F, si avrà la porzione A F, che si dimanda. Ed egli è da notarsi, che con questa stessa costruzione possiamo altresì alla retta data A B aggiungere una porzione, che sia eguale all' altra data CD. Imperocchè, se dopo essersi descritta col centro A, e coll' apertura corrispondente alla lunghezza di essa C D la linea circolare E F G, si prolunghi la A B verso A ~~pur~~ fino a che s' incontri colla descritta linea circolare nel punto E; sarà A E la porzione, che si cerca.

40. Ma tralasciate queste operazioni pur troppo chiare di lor natura, passiamo ad altre, che non sono così ovvie. Ed in primo luogo debbasi dividere una retta data, come A B, in due parti eguali. Colli punti A, e B come centri, e con un' istesso intervallo descrivansi due linee circolari, che s' interseghino tra loro ne' punti C, e D; congiungansi poscia questi due punti per la retta C D, che s' incontri colla data A B nel punto E; ed io dico, che le due A E, B E saranno tra loro eguali. Imperocchè, siccome i due angoli A C D, B C D, per avere i lati A C, C D eguali alli lati B C, C D, ciascuno a ciascuno, e la base A D eguale alla base B D, debbono essere eguali tra loro [26]; così considerando in appresso le due A C, C E come lati dell' angolo A C D, e le due B C, C E come lati dell' altro B C D, per la loro eguaglianza dovranno essere eguali ancora le due A E, B E, che si fanno basi degli stessi angoli. Fig. 12.

41. Notisi quì intanto, che siccome le due linee circolari, che si descrivono colli punti A, e B come centri, e coll' istesso intervallo, debbonsi intersegare tra loro per la soluzione del proposto problema; così, per potersi ciò ottenere, è necessario servirsi di un' intervallo maggiore

giore

giore della metà della retta data A B: come in effetto, essendo le due A C, B C insieme maggiori della sola A·B (16), sarà ciascuna di quelle maggiore similmente della metà di essa A B. Notisi ancora, che non è egli necessario di descrivere interamente le suddette due linee circolari, ma basterà segnare que' soli archetti, che s'intersegano tra loro, e ci danno i due punti C, e D, siccome vedesi fatto nella figura. Notisi finalmente, che se i due archetti, che ci danno il punto D, si descrivano con intervallo diverso da quello degli altri due, che ci danno il punto C; pure la retta A B resterà divisa egualmente dall'altra C D.

42. Debbasi in secondo luogo dividere in due parti eguali un dato angolo, come B A C. Col punto A come centro, e con qualsivoglia intervallo descrivansi due archetti circolari, che seghino i due lati A B, A C ne' punti D, ed E; indi con questi punti come centri, e con un' istesso intervallo si descrivano due altri archetti, che s'interseghino tra loro nel punto F; congiungasi finalmente la retta A F, ed io dico, che questa retta dividerà l' angolo proposto B A C in due parti eguali. La ragione è chiara; poiche essendo le due A D, A E eguali tra loro, saranno i due lati A D, A F dell'angolo D A F eguali alli due lati A E, A F dell' angolo E A F, ciascuno a ciascuno. Onde, perche la base del primo DF è ancora eguale alla base dell'altro E F, saranno i due angoli D A F, E A F eguali tra loro (26); ed in conseguenza tutto l'angolo B A C resterà diviso egualmente per la retta A F. Fig. 13.

43. Vogliasi in terzo luogo sulla retta data AB, e propriamente nel punto A formare un' angolo, che sia eguale all' altro dato D C E. Tirisi in quest' angolo dato la base D E; e tagliata dalla A B la porzione A E eguale alla C D [39], descrivansi due archetti circolari, uno col centro A e con intervallo eguale alla C E, l'altro col centro F e con intervallo eguale alla D E, i quali Fig. 14.

due archetti s'interſeghino tra loro nel punto G; congiungaſi finalmente la retta A G, ed io dico, che l' angolo F A G ſarà eguale all'angolo D C E. Imperocchè, eſſendo per coſtruzione le tre AF, AG, FG eguali alle altre tre CD, CE, DE, ciaſcuna a ciaſcuna; avranno i due angoli F A G, D C E non ſolo i due lati eguali alli due lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ma altresì la baſe eguale alla baſe; con che l'angolo F A G dovrà eſſere eziandio eguale all'angolo D C E (26).

Fig. 15. 44. Queſto problema di formare ſulla retta AB, e propriamente nel punto A un' angolo eguale all'altro angolo dato D C E, può riſolverſi ancora in un'altra maniera. Deſcrivaſi primieramente col centro C, e con qualſivoglia intervallo un'arco circolare, che s'incontri colli lati C D, C E ne' punti D, ed E; indi col centro A, e coll'iſteſſo intervallo deſcrivaſi un'altro arco circolare F H, che s' incontri colla A B nel punto F; prendaſi di poi col compaſſo la diſtanza D E, ed applicata una punta di eſſo nel punto F notiſi nell' arco circolare F H il punto G, ove cade l'altra punta; congiungaſi finalmente la retta AG, ed io dico, che ſarà l'angolo FAG eguale all' altro dato D C E. E la ragione è chiara; poichè per coſtruzione le tre A F, A G, F G ſono ſimilmente eguali alle altre tre C D, C E, D E, ciaſcuna a ciaſcuna.

Fig. 16. 45. Con far uſo di queſto problema, poſſiamo in quinto luogo, data la retta A B, e dato fuori di eſſa il punto C, tirare da queſto punto talmente un'altra retta ſulla data A B, che faccia con quella un'angolo eguale ad un' altro angolo dato. Prendaſi nella A B un punto ad arbitrio, che ſia D, e facciaſi in queſto punto l' angolo B D E, eguale all'angolo dato; congiungaſi poſcia la retta C D, e facciaſi nel punto C l' angolo D C F eguale all'angolo C D E; ed io dico, che la C F ſarà la retta, che ſi dimanda. Imperocchè, eſſendo eguali per coſtruzione i due angoli alterni D C F, C D E, ſaranno le due rette

DE,

DE, CF parallele tra loro [39]. Ma per lo parallelismo di queste due rette debbono essere eguali ancora tra loro i due angoli BDE, BFC. Dunque, siccome l' angolo BDE si è fatto eguale all' angolo dato, così ancora l' angolo BFC sarà eguale al medesimo angolo.

46. Vogliasi in sesto luogo dal punto A dato nella retta BC alzare sù di questa una perpendicolare. Col centro A, e con qualsivoglia intervallo descrivansi due archetti circolari, che seghino la BC ne' punti B, e C; indi con questi punti come centri, e con un medesimo intervallo si descrivano due altri archetti, che s' intersechino tra loro nel punto D; congiungasi finalmente la retta AD, ed io dico, che questa retta sia perpendicolare sulla data BC. Imperocche, essendo le due AB, AC eguali tra loro, saranno i due lati AB, AD dell' angolo BAD eguali alli due lati AC, AD dell' angolo CAD, ciascuno a ciascuno. Onde, perche la base del primo BD è ancora eguale alla base dell' altro DC, saranno i due angoli BAD, CAD eguali tra loro [26]; ed in conseguenza la retta AD sarà perpendicolare sull' altra BC (27). Fig. 17.

46. Può avvenire tal volta, che il punto dato sia in una delle estremità della data retta, e che questa retta per qualche ostacolo non possa prolungarsi verso quella estremità. Quando ciò avviene, egli è chiaro, non potersi porre in pratica la costruzione, che si è data; e perciò in luogo di essa si potrà per ora far uso di quest' altra. Debbasi adunque dal punto A termine della retta AB alzare sù di questa una perpendicolare. Prendasi nella AB un' altro punto ad arbitrio, che sia C; ed essendo questo situato tra i due termini della retta AB, si potrà da esso colla costruzione precedente alzare sulla AB la perpendicolare CD. Facciasi di poi nel punto A l' angolo BAE eguale all' angolo BCD (43), il che può farsi, senza che sia necessario prolungare verso A la retta AB; ed egli è chiaro, che la AE Fig. 18.

farà la perpendicolare, che si dimanda.

Fig. 19. 48. Debbasi in settimo luogo dal punto A dato fuori della retta B C abbassare una perpendicolare sulla stessa BC. Col centro A, e con un medesimo intervallo descrivansi due archetti circolari, che seghino la retta BC ne' punti B, e C; indi con questi punti come centri, e similmente con un' istesso intervallo si descrivano due altri archetti, che s' interseghino tra loro nel punto D; congiungasi finalmente la retta A D, ed io dico, che questa retta sarà perpendicolare sulla data BC. Imperocche, potendosi considerare il punto A, come ritrovato coll' intersegamento di due archetti circolari descritti colli centri B, e C, e con un'istesso intervallo; dovrà la A D segare egualmente nel punto E l'altra BC [40]. Quindi essendo i due lati B E, A E dell'angolo A E B eguali alli due lati C E, A E dell'altro AEC, ciascuno a ciascuno, ed essendo ancora la base del primo A B eguale alla base del secondo A C; saranno i due angoli AEB, AEC eguali tra loro (26), ed in conseguenza la A E sarà perpendicolare sull'altra BC (27).

49. Sogliono alcuni risolvere questo problema assai più semplicemente; cioè con descrivere col punto A, come centro, un' arco circolare, che rada la retta BC in un qualche punto, come E;

Fig. 20. ed indi con congiungere la retta A E, che sarà la perpendicolare ricercata. La ragione di questa pratica dipende da ciò, che qualora l'arco circolare descritto rade la BC nel punto E, viene a farsi essa BC tangente di detto arco (21); ed in conseguenza, per quel tanto è stato avvertito di sopra (31), l' altra A E, che congiunge il centro col punto del contatto, dee essere perpendicolare sulla stessa BC. Ma sebene questa pratica sembri molto più semplice, egli è tutta volta da notarsi, che la medesima si rende difficultosa appunto per incontrare l' intervallo, con cui dee descriversi l'arco circolare, che rada la BC in un qualche punto; come in effetto per determinare geometricamente un tale intervallo, bisogna

gna sulla BC abbassare dal punto A la perpendicolare A E.

50. Debbasi finalmente per lo punto dato A tirare una retta, che sia parallela all' altra data BC. Prendasi nella BC un punto ad arbitrio, che sia C, e descrivasi con questo punto come centro, e coll' intervallo C A l'arco circolare AB, che s' incontri colla BC nel punto B; facciasi poscia centro il punto A, e coll' intervallo A C descrivasi l' altro arco circolare CD, sù di cui trasportasi da C in E la distanza A B presa col compasso; congiungasi finalmente la retta A E, ed io dico, che questa retta sia la parallela, che si dimanda. Imperocchè, essendo eguali le due AB, CE, saranno i due lati A B, A C dell' angolo B A C eguali alli due lati C E, A C dell' altro A C E, ciascuno a ciascuno. Onde, perchè la base del primo B C è ancora eguale alla base del secondo AE, saranno i due angoli BAC, ACE eguali tra loro [26]; ed in conseguenza, per essere questi angoli alterni, sarà la retta A E parallela all' altra BC (34). Fig. 21.

51. Il medesimo problema di tirare per lo punto A una retta, che sia parallela all' altra data B C, può risolversi ancora in questa maniera. Prendansi nella B C due punti ad arbitrio, che siano B, e C; indi descrivansi due archi circolari, uno col centro A e coll' intervallo B C, l' altro col centro C e coll' intervallo A B, che s' intersechino tra loro nel punto E; congiungasi finalmente la retta A E, ed io dico, che questa retta sia parallela all' altra data BC. E la ragione è la medesima; poichè essendo le due AB, CE eguali tra loro, saranno i due lati A B, A C dell' angolo B A C eguali alli due lati C E, A C dell' altro A C E, ciascuno a ciascuno; onde, essendo la base del primo BC eguale ancora alla base dell' altro A E, saranno i due angoli B A C, A C E eguali tra loro [26]; ed in conseguenza, per essere questi angoli alterni, sarà la A E parallela all' altra B C (34) Fig. 22.

B 4 Del

52. Del rimanente le operazioni, che nella Geometria pratica più spesso occorrono, sono quelle di alzare, ed abbassare da un dato punto una perpendicolare sù di una data retta, e di tirare per un punto dato una retta, che sia parallela ad un'altra data. Quindi, per eseguire più prontamente queste tali operazioni, non sarà mal fatto di provedersi di quell' istromento, che comunemente chiamasi squadra, e che è un' angolo retto formato con due lamine di ottone distese a guisa di righe. Imperocche siccome si avrà la perpendicolare con adattare un lato della squadra sulla retta data, e con far passare l'altro lato per lo dato punto; così si avrà la parallela, prima con abbassare una perpendicolare sopra la data retta dal punto dato, indi con alzarne un altra da un'altro punto della stessa retta eguale alla prima, e finalmente con congiungere insieme i loro estremi.

53. Ma per le parallele sogliono impiegare ancora i Pratici un'altro istromento formato con due righe d'ebano, o di altro legno duro effettivamente parallele tra loro, le quali sono talmente attaccate con piccioli perni a due altre lamine di ottone, che aggirandosi intorno a que' perni, si possono avvicinare o discostare secondo il bisogno, e rimanere sempre tra loro parallele. Imperocche adattando una delle due righe sulla retta data, ed aggirando l'altra per fino a che passi per lo dato punto, si avrà immediatamente la parallela, che si dimanda. E se mai l'altra riga portata alla massima distanza, in cui può essere per rapporto alla prima, non giunga al punto dato; potrà tirarsi la parallela in quella massima distanza, ed indi rinovarsi l'operazione, con adattare la prima riga sulla retta tirata.

§. III.

§. III.

Della proporzione in generale, e delle principali sue affezioni.

54. COnforme due numeri possono paragonarsi tra loro per via della continenza, così un paragone consimile può istituirsi ancora tra due qualisivogliano altre quantità della stessa spezie, come tra due linee, tra due superficie, tra due corpi, Imperocchè, essendo ogni quantità di sua natura divisibile all'infinito, niente osta di concepire due quantità della stessa spezie talmente divise in parti eguali, che ciascuna parte dell'una sia eguale ancora a ciascuna parte dell'altra. Onde, potendosi giudicare delle due quantità dalla moltitudine delle loro parti, si vede chiaramente, che quanto la molitudine delle parti dell'una contiene la moltitudine delle parti dell'altra, altrettanto una delle due quantità conterrà ancora l'altra.

55. Or potendosi due quantità della stessa spezie paragonare tra di esse per via della continenza, non solo daremo il nome di ragione ad una sì fatta loro comparazione, ma chiameremo ancora quantità di detta ragione quel numero, che ci addita quanto la prima delle due quantità contiene la seconda. Quindi siccome due ragioni dovranno dirsi eguali, o disuguali tra di esse a misura, che le loro quantità sono eguali, o disuguali; così all'uguaglianza di due ragioni daremo altresì il nome di proporzione. Onde quattro quantità si diranno essere tra loro proporzionali, quantevolte la prima di esse tanto contiene la seconda, quanto la terza contiene la quarta; poichè, essendo così, sarà eziandio la ragione della prima alla seconda eguale alla ragione della terza alla quarta.

56. Si vuole intanto quì avvertire, che per la proporzione non sia egli necessario, che tutte

te quattro le quantità siano della stessa spezie; ma basterà, che siano tali trà loro, così le due prime, come le altre due rimanenti: niente ostando, che la ragione per esempio di due linee sia eguale, o a quella di due superficie, o a quella di due corpi. Ma poiche la proporzione può ritrovarsi ancora tra tre sole quantità, il che avviene, quando la ragione della prima alla seconda è eguale alla ragione della seconda alla terza: perciò noteremo ancora, che siccome una tal proporzione dicesi continua a differenza dell'altra, che ritrovandosi tra quattro quantità si appella discreta; così per la proporzione continua forzosamente tutte tre le quantità debbono essere della stessa spezie.

57. Non solo tre quantità, ma più altre ancora possono essere continuamente proporzionali. Per ragion di esempio, se sia come A a B, così B a C; e come B a C, così C a D; e come C a D, così D ad E; diremo, che le cinque quantità A, B, C, D, E siano tra loro continuamente proporzionali. Ed egli è chiaro, che qualunque sia il numero di esse, sempre debbano essere della medesima spezie. Queste tali proporzioni continue, che si ritrovano tra molte quantità di una stessa spezie, si appellano propriamente progressioni; le quali siccome possono estendersi all'infinito, senza esservi mai termine, che sia valevole ad arrestarle; così fa duopo distinguere di esse due classi, cioè una di quelle, i di cui termini continuamente si aumentano, e l'altra di quelle, in cui i termini per lo contrario continuamente si diminuiscono.

58. In oltre una ragione, non solo può essere eguale ad un'altra ragione, ma può comporsi ancora da due, o più altre ragioni. Avviene ciò, quando la sua quantità si produce con moltiplicare insieme le quantità dell'altre ragioni. Così una ragione, che ha per sua quantità il numero 6, dee dirsi composta dalle due ragioni, che anno per loro quantità i numeri 2, e 3;

poichè

poichè con moltiplicare insieme questi due numeri si produce il 6. E similmente la ragione, che ha per sua quantità il numero 24, dee dirsi composta dalle tre ragioni, che anno per loro quantità i numeri 2, 3, e 4; poichè con moltiplicare insieme questi tre numeri si produce il 24. Onde vedesi con ogni chiarezza, che se vi sono due ragioni composte, e le componenti dell' una siano eguali alle componenti dell' altra, ciascuna a ciascuna; ancora le due composte debbano essere eguali tra loro.

59. Quantevolte le componenti di una ragione composta sono tra loro eguali, si dirà la medesima tanto moltiplicata di ciascuna delle sue componenti, quante sono queste di numero: cioè duplicata, se sono due; triplicata, se sono tre; quadruplicata, se sono quattro; e così all' infinito. Ed essendo così, egli è facile ad intendersi, che una ragione sarà duplicata, triplicata, o quadruplicata di un' altra ragione a misura, che la sua quantità si ritroverà essere il quadrato, il cubo, o il quadrato-quadrato della quantità dell' altra ragione. Così della ragione, che ha per sua quantità il numero 3, ne sarà duplicata quella, la di cui quantità è il numero 9; triplicata quell' altra, la di cui quantità è il numero 27; ed infine quadruplicata quella terza, che ha per quantità il numero 81.

60. Quantunque la dottrina delle proporzioni sia stata da noi distesamente spiegata negli Elementi dell' Arimmetica; tuttavolta non sarà mal fatto di addittarne quì i principali teoremi, per averli presenti nell' uso, che dovremo farne in appresso. Ed in primo luogo, giudicando delle ragioni dalle loro quantità, egli è chiaro, che una ragione per rapporto ad un' altra ragione può essere, non solo eguale, ma altresì dupla, tripla, o quadrupla, come ancora la metà, la terza parte, o la quarta parte. Quindi siccome le ragioni eguali ad una terza sono eguali ancora tra loro; così dovranno essere eguali parimente tan-

to quelle, che ſono duple, triple, o quadruple di una terza, quanto l' altre, che ne ſono la metà, la terza parte, o la quarta parte. E ſe mai due ragioni ſono eguali tra loro, non ſolo una di eſſe non potrà eſſere maggiore, o minore di una terza, ſenzache l' altra ancora ne ſia maggiore, o minore; ma ſiccome l' una delle due ſarà per rapporto ad una terza ragione, così l' altra eziandio ſarà per rapporto alla medeſima.

61. Con giudicare delle ragioni per mezzo delle loro quantità, egli è facile ancora ad intenderſi, che ſiccome due quantità eguali debbono avere ad una terza l' iſteſſa ragione; così eſſendo diſuguali due quantità, la maggiore di eſſe ad una terza debba avere maggior ragione, che l' altra minore. Ed in oltre, che ſiccome una medeſima quantità dee avere a due altre eguali la ſteſſa ragione; così avrà ella maggior ragione ad una quantità minore, che ad un'altra maggiore. Ma i converſi di queſti termini debbono ſimilmente aver luogo. Quindi ſiccome due quantità, che anno una ſteſſa ragione ad una terza, ſono eguali tra loro; così di due quantità quella ſarà maggiore, che avrà ad una terza maggior ragione. E di più ſiccome ſono eguali le due quantità, alle quali una terza ha l' iſteſſa ragione; così di due quantità quella ſarà minore, a cui una terza ritrovaſi avere maggior ragione.

62. Intorno alle proporzioni anno luogo ancora alcuni modi di argomentare, per l' intelligenza de' quali noteremo primieramente, che conforme diconſi termini di una ragione le due quantità, che tra loro ſi comparono; così la prima di eſſe ſi appella antecedente, e la ſeconda conſeguente della ragione. Eſſendo adunque proporzionali quattro quantità, potremo in primo luogo invertere i termini delle due ragioni eguali, e fare in modo, che gli antecedenti diventino conſeguenti, ed i conſeguenti antecedenti;

ti; potremo in secondo luogo permutare gli stessi termini, e paragonare l' antecedente coll' antecedente, ed il conseguente col conseguente; potremo in terzo luogo unire insieme ciascuno antecedente col suo conseguente, e paragonare o queste somme colli conseguenti medesimi, o pure gli antecedenti colle riferite somme; potremo finalmente da ciascuno antecedente togliere il suo conseguente, e paragonare o questi residui colli conseguenti medesimi, o pure gli antecedenti colli riferiti residui.

63. Di questi quattro modi di argomentare il primo chiamasi inversione di ragione, il secondo permutazione, il terzo composizione, ed il quarto divisione; onde si è, che le loro conseguenze si ricavano con far' uso delle voci invertendo, permutando, componendo, e dividendo. Si vuole intanto quì avvertire, che siccome il modo di argomentare permutando ha luogo in quelle sole proporzioni, in cui tutti quattro i termini sono della stessa spezie, per la ragione, che altrimente non potrebbe paragonarsi l' antecedente coll' antecedente, ed il conseguente col conseguente; così per quello, che si fa dividendo, egli è necessario, che i due antecedenti siano maggiori de' loro conseguenti: onde se mai fossero minori, non potrà farsi uso di detto modo di argomentare, se prima non s' adopri l' altro dell' inversione, per mezzo di cui gli antecedenti si cambiano in conseguenti, ed i conseguenti in andecedenti.

64. Essendo di una stessa spezie tutti quattro i termini della proporzione, possiamo ancora in un' altra maniera argomentare, così per via di composizione, come per via di divisione; poichè componendo sarà primieramente, come la somma delli due antecedenti alla somma delli due conseguenti, così ciascuno antecedente a ciascuno conseguente; e dividendo sarà in secondo luogo, come la differenza delli due antecedenti alla differenza delli due conseguenti, così ciascuno

ante-

antecedente a ciaſcuno conſeguente. Anzi per quanto al primo di queſti due modi di argomenre, ha egli luogo, ancorche molte ſiano le ragioni eguali; poiche, eſſendo i termini di tutte della ſteſſa ſpezie, ſarà ſempre come la ſomma degli antecedenti alla ſomma de' conſeguenti, così ciaſcuno antecedente a ciaſcuno conſeguente.

65. Per quanto poi alla ragione compoſta, il principal ſuo teorema è queſto; cioè che eſſendovi più quantità della ſteſſa ſpezie, la prima all'ultima ſia in ragion compoſta della prima alla ſeconda, della ſeconda alla terza, della terza alla quarta, e così ſucceſſivamente perſino a che di nuovo ſi giunge all'ultima. Quindi eſſendo la ſuddette quantità continuamente proporzionali, ſaranno eguali tra loro le ragioni componenti; e pertanto la ragione della prima all'ultima ſarà tanto moltiplicata di ciaſcuna delle riferite componenti, quanto è il numero delle quantità ſcemato di una: cioè duplicata, quando le quantità ſono tre; triplicata, quando ſono quattro; quadruplicata, quando ſono cinque; e così all' infinito.

66. Dal riferito teorema della ragion compoſta poſſono con facilità dedurſi due altri modi di argomentare; ma per l'intelligenza di eſſi biſogna prima avvertire, che ſiccome più quantità di una ſteſſa ſpezie ſi dicono eſſere in ordinata ragione con altrettante quantità eziandio di una medeſima ſpezie, quando le ragioni delle prime uguagliano con ordine diretto le ragioni delle ſeconde; così l'une coll'altre ſi diranno eſſere in perturbata ragione, qualora le ragioni delle prime ſono eguali con ordine contrario alle ragioni delle ſeconde. Per ragion di eſempio le cinque quantità A, B, C, D, E ſi dicono eſſere in ordinata ragione colle altre cinque F, G, H, I, L, ſe ſia come A a B, così F a G; come B a C, così G ad H; come C a D, così H ad I; e come D ad E, così I ad L. Ma ſe

poi

poi fosse al contrario, come A a B, così I ad L; come B a C, così H ad I; come C a D, così G ad H; e come D ad E, così F a G; in tal caso l'une coll'altre si diranno essere in perturbata ragione.

67. Or gli altri due modi di argomentare, che si deducono dal teorema della ragion composta, consistono in ciò, che essendo più quantità in ordinata, o in perturbata ragione con altrettante quantità, si possono togliere quelle di mezzo, e paragonare a dirittura le prime coll'ultime. Ed egli è da notarsi, che una sì fatta conseguenza si ricava colla voce ordinando, quando le quantità sono tra loro in ordinata ragione; e colla voce perturbando, quando per lo contrario sono tra di esse in ragion perturbata. Così essendo come sopra le cinque quantità A, B, C, D, E in ordinata, o perturbata ragione colle altre cinque F, G, H, I, L; sarà ordinando, o peturbando come A ad E, così F ad L. Ma qualora più quantità sono in ordinata ragione con altrettante quantità; sarà ancora componendo, come la somma delle prime all'ultima, così la somma delle seconde similmente all'ultima.

68. Del rimanente dalla nozione stessa della proporzione vedesi chiaramente, che essendo quattro quantità proporzionali, non potrà essere la prima eguale, maggiore, o minore della seconda, senza che ancora la terza sia eguale, maggiore, o minore della quarta. Intanto, se le quantità proporzionali siano tra loro della stessa spezie, eziandio la prima non potrà essere eguale, maggiore, o minore della terza, senza che ancora la seconda sia eguale, maggiore, o minore della quarta. E quindi, siccome egli è facile ad intendersi, che delle quattro quantità proporzionali, le quali sono di una medesima spezie, la massima, e la minima debbono ritrovarsi o ne' luoghi estremi, o ne' luoghi di mezzo; così ne segue similmente, che la massima, e la mini-

minima insieme siano maggiori delle due rimanenti ancora unite insieme.

§. IV.

Delle proprietà dell' angolo per rapporto alle rette proporzionali.

69. LE proprietà più rilevanti dell' angolo sono quelle, che riguardano le rette proporzionali. Per additarle con ordine, e dimostrare altresì il loro uso, noteremo in primo luogo, che se un lato di un' angolo sia diviso in parti eguali, le rette, che per gli punti della divisione si tirano parallele alla sua base divideranno l' altro lato eziandio in altrettante parti eguali. Quindi niente sarà più facile, quanto di dividere una data retta in un dato numero di parti eguali.
Fig. 23. Debbasi a cagion di esempio dividere la data AB in tre parti eguali. Facciasi, che la A B sia lato di un' angolo qualsivoglia BAC; indi col compasso prendansi sull' altro lato A C tre parti eguali di una lunghezza arbitraria, e l' una consecutiva all' altra, le quali siano A D, DE, EC; si tirino finalmente per gli punti D, ed E le rette DF, EG parallele alla CB, che è base dell' angolo B A C; ed incontrandosi queste parallele colla data A B ne' punti F, e G, divideranno la medesima in tre parti eguali, che saranno AF, FG, GB.

70. Noteremo in secondo luogo, che con tirarsi in un' angolo qualsivoglia una retta parallela alla sua base, resteranno divisi i due lati del medesimo angolo proporzionalmente da detta parallela. Quindi potremo primieramente, date tre rette, come A B, B C, A D, ritrovare in
Fig. 24. ordine ad esse la quarta proporzionale; poichè ponendo le due prime A B, BC a dirittura, e situando la terza A D in modo tale, che faccia colla A C un' angolo qualsivoglia, se congiungasi la B D, e per lo punto C tirisi l' altra C F paral-

parallela alla BD, che s'incontri colla A D nel punto E, sarà DE la quarta proporzionale, che si dimanda; per dover'essere, come AB a BC, così AD a DE. Potremo ancora, date due rette, come AB e BC, ritrovare, in ordine ad esse, la terza proporzionale; poichè situando similmente a dirittura le due rette date, basterà che nella costruzione precedente prendasi la AD eguale alla seconda BC, ed eziandio la DE sarà la terza proporzionale, che si cerca; per dover'essere come AB a BC, così AD, o sia BC a DE.

71. Noteremo in terzo luogo, che con tirarsi in un' angolo qualsivoglia più rette parallele alla sua base, pure i lati del medesimo resteranno divisi proporzionalmente da dette parallele. Ed essendo così, data una retta divisa in parti ad arbitrio, potremo facilmente dividere un'altra retta data in guisa tale, che le parti di essa siano proporzionali colle parti della prima già divisa. Sia perciò AC la retta divisa come si voglia nelle tre parti AD, DE, EC; e sia AB l'altra retta, che dee dividersi secondo la divisata legge. Si situi quest'altra AB talmente, che faccia colla prima AC un'angolo qualsivoglia; indi, congiunta la CB, tirinsi per gli punti D, ed E le rette DF, EG parallele alla CB, che s'incontrino colla AB ne' punti F, e G. E dovendo essere, come AF ad FG, così AD a DE, e come FG a GB, così DE ad EC; egli è chiaro, che la AB resterà divisa ne' punti F, e G in parti tali, che saranno proporzionali colle parti dell'altra già divisa AC. Fig. 23.

72. Noteremo in quarto luogo, che se un'angolo qualsivoglia dividasi in due parti eguali per una retta, la sua base resterà divisa da detta retta nella ragione, che serbano tra loro i lati del medesimo angolo. Quindi, avendosi un'angolo qualsivoglia, niente sarà più facile, quanto di dividere la sua base nella stessa ragione de' lati. Sia perciò BAC l'angolo dato, e debbasi dividere la sua base BC nella ragione de' lati AB, AC. Fig. 25.

Dividasi l'angolo B A C in due parti eguali per la retta A D(42), la quale vadasi ad incontrare colla base B C nel punto D. E dovendo essere per la riferita proprietà, come B D a C D, così A B ad A C; egli è chiaro, che la base B C sarà divisa nel punto D nella ragione de' lati A B, A C.

73. Noteremo in quinto luogo, che se in un' angolo qualsivoglia tirisi una retta parallela alla sua base, ciascuno de' lati sarà alla porzione di esso compresa tra 'l vertice, e la parallela, come sta la base dell' angolo alla stessa parallela. Ed in virtù di questa proprietà, data una retta come A B, egli è facile di prolungarla talmente per sino ad un'altro punto, che le parti comprese tra i suoi termini, e quest' altro punto siano tra di esse in data ragione. Tirinsi a tal' effetto per gli termini A, e B le due rette A C, B D, che siano parallele tra loro; e fatte le medesime di lunghezza tale, che A C sia a B D nella data ragione(70), congiungasi la C D, che si vada ad incontrare colla A B nel punto E. Dovendo adunque essere per la riferita proprietà, come A E a B E, così A C a B D; egli è chiaro essersi risoluto il problema proposto.

Fig. 26.

74. Noteremo in sesto luogo, che se la parallela alla base dell' angolo tirisi non già nell' angolo proposto, ma nel suo verticale, pure debba aver luogo la stessa proprietà, cioè che ciascuno de' lati sia alla porzione di esso compresa tra 'l vertice, e la parallela, come sta la base dell' angolo alla stessa parallela. Ed essendo così, data una retta, come A B, potremo facilmente dividerla in guisa tale, che le parti di essa siano tra loro in data ragione. Tirinsi a tal' effetto per gli termini A, e B le due rette A C, B D, che siano parallele tra loro, e vadano a parti contrarie; indi faccinsi le medesime di lunghezza tale, che A C sia a B D nella data ragione[70]; congiungasi finalmente la retta C D, che seghi la A B nel punto E. E dovendo essere per la riferita proprietà, come A E a B E, così A C a B D,

Fig. 27.

BD, non farà da porsi in dubbio, che il proposto problema siasi risoluto.

75. Egli è ancora da notarsi, che quest' ultima proprietà dell' angolo conferisce altresì a formare la scala, di cui i Geometri pratici sogliono servirsi per misurare effettivamente la lunghezza di qualsivoglia retta. Imperocchè siccome in detta scala si studiano di racchiudere non solo la lunghezza di quella retta, di cui come misura comune vogliono avvalersi per giudicare della lunghezza dell' altre, ma altresì le varie parti in cui dividono, e suddividono detta misura; così per disegnare senza confusione le minime parti di quella, anno stimato molto opportuno di far' uso della riferita proprietà dell'angolo. In effetto se una retta di picciolissima lunghezza, come A B, dovesse dividersi in molte parti eguali, la divisione di essa in pratica non potrebbe eseguirsi senza qualche confusione; ma con tirare trasversalmente per uno de' suoi termini A l'altra retta A C di lunghezza maggiore, e con dividere quest'altra retta in altrettante parti eguali, egli è facile di additare ancora agiatamente le varie parti della A B. Fig. 28.

76. Congiungasi perciò la terza retta B C, e per gli punti della divisione di essa A C si tirino nell'angolo A C B altrettante rette parallele alla sua base A B, le quali si vadano ad incontrare colla B C in altrettanti punti. Per la proprietà adunque, di cui si tratta, la tutta A C sarà ad ogni sua porzione compresa tra'l vertice C, ed una delle parallele tirate, come stà la base A B alla stessa parallela. Quindi quante parti della A C sono racchiuse in detta porzione, altrettante della A B ne conterrà la parallela corrispondente. Onde siccome la parallela, che corrisponde alla prima porzione dee contenere una sola parte di essa A B; così dovrà contenerne due la corrispondente alla seconda porzione, tre la corrispondente alla terza, quattro la corrispondente alla quarta, e così consecutivamente, dimodochè

le varie parti della A B saranno disegnate con ordine delle varie parallele tirate nell' angolo A C B.

77. Nella formazione adunque della scala di questo artifizio fanno uso i Geometri pratici per disegnare le minime parti di quella retta, di cui si servono per la misura dell' altre. Fingiamo a cagion di esempio, che la divisione di detta retta in parti eguali debba farsi da dieci in dieci. E quantunque con supporsi A B la decima parte di essa, possa ella suddividersi comodamente in dieci altre parti eguali; tuttavolta volendosi poi le altre dieci di ciascuna di queste, la confusione diviene inevitabile. Quindi alzando dalli punti notati nella detta A B altrettante perpendicolari eguali tra loro, e dividendo la prima di esse A C in dieci parti eguali, si avranno le altre dieci parti di ciascuna di quelle contenute nella retta A B, con congiungere per mezzo di rette oblique un termine di ciascuna delle perpendicolari alzate col termine opposto dell' altra perpendicolare immediata, e con tirare per gli punti della divisione di essa A C altrettante rette parallele alla A B.

Fig. 27.

78. Sì fatta scala, acciò non sia sottoposta ad alterazione alcuna, suol farsi dagli Artefici su di una lamina di ottone ben polita, e levigata. Ed egli è da notarsi, che siccome in detta scala suol porsi tutta la lunghezza di quella retta, di cui si fa uso per la misura dell' altre; così le perpendicolari si alzano da tutti i punti notati in detta retta, e le parallele si estendono [illegible]ino a che s' incontrino con tutte le perpendicolari alzate. E ciò si fa per potersi avere speditamente ogni qualunque parte, corrispondente alle divisioni della retta suddetta; siccome per picciola riflessione, che voglia fare, potrà facilmente ciascuno comprendere da se stesso. E se le suddivisioni della medesima retta non si veggono notate in tutta l' estensione della scala; ciò deriva, perche per l' uso, che dobbiamo farne, bastano quelle

sole

sole, che in una delle sue estremità si ritrovano registrate.

79. Con questa occasione giova quì l'avvertire, che siccome non tutte le Nazioni di Europa si servono di una stessa lunghezza per misura dell'altre, così nèspure tutte danno a detta misura il medesimo nome. I nomi intanto più usitati sono quelli di palmo, di piede, e di braccio; e l'applicazione di essi è derivata dall'essersi fatto uso della lunghezza delle membra del nostro corpo, che si appellano con tali nomi, per misurare ogni altra lunghezza. Ma egli è ancora d'avvertirsi, che conforme le riferite membra, secondo la varia statura dell'Uomo, si ravvisano ora di una lunghezza, ed ora di un'altra; così nè tampoco dall'identità del nome, che due diverse Nazioni danno alla misura comune, di cui si servono, dobbiamo darci a credere, che quella comune misura presso di esse sia la medesima. In effetto altro è il palmo di Napoli, che quello di Roma, di Genova, o di Palermo; altro è il piede di Parigi, che quello di Londra, di Leide, o di Astardam; ed altro infine il braccio di Bologna, che quello di Milano, di Mantova, o di Firenze.

80. Il celebre Astronomo Cassini nel suo trattato della figura della terra ci ha dato una lista esattissima delle ragioni, che anno le misure de' luoghi più rinomati di Europa col piede di Parigi. Per dare ancora noi conto di esse in questo trattato di Geometria pratica, conviene prima sapere, che siccome dividesi il piede di Parigi in dodici parti eguali, che si chiamano digiti, e ciascuno digito in altre dodici parti eguali, che si appellano linee; così il Cassini è passato più oltre, ed ha diviso ciascuna linea in altre dieci parti eguali: onde si è, che con tutte tre le riferite divsioni ha egli supposto diviso l'intero piede di Parigi in 1440 parti eguali. Or in stabilire le ragioni, che anno le misure degli altri luoghi col piede suddetto, non ha fatta egli al-

tra cosa, se non che additare quante di quelle parti si contengono in qualsivoglia altra misura.

81. Conforme adunque nel piede di Parigi si contengono 1440 delle riferite parti; così secondo la lista del Cassini dovrà contenerne.

Il piede di Bologna	1682.
Il piede di Danimarca	1404.
Il piede di Leide, e sia del Reno , .	1390.
Il piede di Londra	1350.
Il piede di Svezia . . . , ...	1316.
Il piede Romano del Campidoglio . .	1306.
Il piede di Danzica	1272.
Il piede di Astardam	1258.
Il palmo di Napoli	1169.
Il palmo di Genova . . . . ,	1113.
Il palmo di Palermo	1073.
Il palmo Romano	999.
Il braccio di Bologna	2640.
Il braccio di Firenze in terra	2430.
Il braccio di Parma, e di Piacenza . .	2423.
Il braccio di Reggio	$2348\frac{1}{2}$.
Il braccio di Milano	2166.
Il braccio di Brescia	2075.
Il braccio di Mantova	2062.

82. Secondo questa lista egli è facile ora il giudicare così della ragione, che anno trà loro le misure di due luoghi diversi, come di quella, che serba spezialmente il palmo nostro Napoletano colla misura di ogni altro luogo; essendo chiaro, che il riferito nostro palmo debba essere per ragion di esempio al piede di Leide come 1169 à 1390, ed al piede di Londra come 1169 a 1350. Per quanto poi al palmo nostro, egli a guisa del piede di Parigi si divide primieramente in dodici parti eguali, che chiamiamo oncie; ed indi ciascuna oncia di esso si suddivide in dodici altre parti eguali, che si appellano minuti. Intanto sarebbe da desiderarsi, che così il nostro palmo, come ogni altra misura, di cui si voglia far'uso, si dividesse talmente in parti eguali, che la divisione andasse da dieci in dieci. Poichè in

questa

questa maniera ne' calcoli si verebbero ad impiegare le sole frazioni decimali, le quali non portano seco tanta difficoltà, quanta nell'altre frazioni se ne ravvisa.

83. Intorno alla scala, di cui si servono i Pratici, un'altra cosa rimane ad avvertire; e si è, che ella non è sempre scala effettiva, mà tal volta scala proporzionale. La chiameremo adunque scala effettiva, quantevolte ci pone sotto gli occhi secondo la giusta sua lunghezza, così la retta, di cui si dee far'uso per la misura dell'altre, come ogni altra sua porzione. La diremo poi scala proporzionale, qualora ci rappresenta la misura con altra retta minore, e con parti proporzionali di quest'altra retta ci addita le parti di quella stessa misura. Per quanto poi all'uso di quest'altra scala proporzionale, si vedrà a suo luogo, che ella serve, o a trasportare in picciolo le figure, sulle quali dobbiamo agire; o pure dalle figure trasportate in picciolo a giudicare delle grandi, che quelle ci rappresentano.

84. Del rimanente le riferite proprietà dell'angolo intorno alle rette proporzionali si sono così proprie, che debbono esser vere ancora le loro converse. Quindi può stabilirsi in primo luogo, che quelle rette, le quali dividono i lati di un'angolo, o in parti eguali, ovvero in parti proporzionali, debbano essere parallele alla sua base. Può stabilirsi in secondo luogo, che la retta tirata dal vertice di un'angolo, dividendo la sua base nella ragione de' lati, debba dividere egualmente l'angolo medesimo. Può stabilirsi finalmente, che se con tirarsi in un' angolo qualsivoglia una retta, sia ciascuno lato alla porzione di esso compresa tra 'l vertice, e la retta tirata, come stà la base dell'angolo alla stessa retta, debba essere questa retta parallela alla base dell'angolo.

§. V.

Della vera misura dell' angolo.

85. QUantunque l' eguaglianza, o disugua- glianza di due angoli possa dedursi da quella delle loro basi, quantevolte i lati dell' uno sono eguali alli lati dell' altro, ciascuno a ciascuno [26]; non pertanto dobbiamo darci a credere, che rimanendo i lati di un' angolo sempre gli stessi, debba egli aumentarsi, o diminuirsi a misura dell'aumento, o diminuzione, che riceve la sua base. Quindi per intendere con ogni chiarezza, quale sia la vera misura dell' angolo, bisogna prima aver presente il seguente teorema: cioè che essendovi due linee circolari descritte con eguali intervalli, siccome gli angoli situati ne' loro centri sono eguali tra loro, quando si appoggiano sù archi eguali; così i medesimi debbano essere generalmente nella stessa ragione degli archi, che li sostengono.

86. Per ragione di esempio siano BCD, FGH
Fig. 30. due linee circolari, descritte con eguali intervalli AB, EF; e ne' centri di esse A, ed E siano situati due angoli BAC, FEG, che si appoggino sulli due archi BC, FG. Essendo adunque eguali questi archi, dovranno essere eguali altresì i due angoli BAC, FEG; ma se poi non vi sia uguaglianza tra detti archi, in tal caso l' angolo BAC all' angolo FEG avrà quella stessa ragione, che ha l' arco BC all' arco FG: tanto vero, che a misura, che l' arco BC si ritrova essere duplo, triplo, o quadruplo dell' arco FG, eziandio l' angolo BAC dovrà stimarsi duplo, triplo, o quadruplo dell' angolo FEG.

87. Essendo così, si vede chiaramente, che la misura di un' angolo qualsivoglia debba essere l' arco circolare compreso tra i suoi lati, e descritto col suo vertice come centro, e con un dato intervallo. Ed in vero per picciola riflessione,

ne, che si voglia fare, facilmente potrà comprendersi; che l'aumento, o diminuzione, che riceve l'angolo, debba essere sempre proporzionale all'aumento, o diminuzione, che nel medesimo tempo riceve l'arco riferito. Imperocchè con aggirare egualmente uno de' lati dell'angolo intorno al vertice, chiara cosa si è, che così l'angolo, come l'arco si debba eziandio egualmente aumentare, o diminuire. Onde rimanendo l'arco sempre proporzionale all'apertura dell'angolo, dovrà l'uno essere misura dell'altro.

88. Or non è egli da porsi in dubbio, che tirandosi per lo centro di una linea circolare due rette, che s'interseghino tra loro ad angoli retti, l'intera linea circolare, la quale conserva da per tutto egual curvatura per rapporto al centro, debba rimaner divisa per dette rette in quattro parti eguali. Quindi la misura dell'angolo retto dovrà essere la quarta parte dell'intera linea circolare, che specialmente si appella quadrante. E poichè l'ottuso è sempre maggiore del retto, ed al contrario l'acuto ne è sempre minore; egli è facile ad intendersi, che la misura dell'angolo ottuso debba essere un'arco circolare maggiore del quadrante, ed all'incontro quella dell'acuto un' altro arco circolare minore del quadrante.

89. Per agevolare la misura dell'angolo col riferito arco circolare, si è stimato opportuno di dividere primieramente l'intera linea circolare in trecento sessanta parti eguali, che si chiamano gradi, ed indi ciascuno grado in altre sessanta parti eguali, che si appellano minuti. Imperocchè, siccome dal numero delle parti contenute in un'arco potrà giudicarsi, che porzione sia egli dell'intera linea cercolare, ed in conseguenza in qual ragione sia colla medesima; così con esserci nota questa ragione sapremo altresì quella, che serba colla somma di quattro retti l'angolo misurato da quell'arco, onde potremo facilmente formare idea della giusta sua quantità. In effetto supponendo, che l'arco sia di 22 gradi,

di, e 30 minuti, io veggo, che egli sia la sedicesima parte dell' intera linea circolare; onde conchiudo, che ancora l'angolo misurato da detto arco sia la sedicesima parte della somma di quattro retti.

90. Secondo le due riferite divisioni l' intera linea circolare viene a rimaner divisa in 21600 minuti, il qual numero è così grande, che ogni altra parte più picciola almeno di un mezzo minuto può essere trascurata nelle operazioni, che abbiamo a fare, senza nota di errore sensibile. Gli Astronomi intanto, che nelle loro operazioni anno bisogno di maggior' esattezza, non contenti di quel numero, passano più oltre, e dividono ciascuno minuto primo in sessanta altre parti eguali, che appellano minuti secondi. E quantunque con questa terza divisione possano ancora essi trascurare impunemente quella parte, che è minore almeno di un mezzo minuto secondo; altri però più scrupulosi anno voluto suddividere ancora il minuto secondo in altre sessanta parti eguali, che chiamano minuti terzi.

91. Intorno alla misura dell'angolo è egli da notarsi, che si può ella avere non solo con porre il vertice dell'angolo nel centro della linea circolare, ma altresì con porlo in uno de' punti della stessa linea; ed in questo caso la giusta misura dell' angolo sarà la metà dell' arco, sù di cui egli si appoggia. Dipende ciò da un teorema, che abbiamo intorno a questi angoli, e si è, che se Fig. 31. vi sono due angoli, come BAC, BDC, talmente situati nella linea circolare BCD, che appoggiandosi amendue sù di un medesimo arco BC, uno abbia il suo vertice nel centro A, e l' altro in uno de' punti di detta linea circolare, come in D; il primo di questi angoli BAC debba essere doppio del secondo BDC. Imperocche in virtù di questo teorema siccome l'arco intero BC è la misura dell' angolo BAC; così la metà dell' arco BC dovrà essere la misura dall' altro angolo BDC.

92. Vo-

92. Volendosi misurare l' angolo in quest' altra guisa, si vede chiaramente, che siccome egli ritrovasi essere retto, quantevolte si appoggia sulla metà della linea circolare; così sarà ottuso, qualora è sostenuto da un' arco maggiore di detta metà; e per lo contrario acuto, quando è sostenuto da un' arco minore. Quindi ancora per mezzo dell' arco, in cui ritrovasi situato l'angolo, potrà giudicarsi dalla di lui spezie. Imperocchè, essendo quest' altro arco il residuo di quello, sù di cui si appoggia l' angolo; chiara cosa si è, che l'angolo sarà retto, quante volte è situato in un' arco, che uguaglia la metà dell' intera linea circolare; sarà ottuso, qualora è situato in un' arco minore di detta metà; e finalmente sarà acuto, quando per lo contrario è situato in un' arco maggiore.

93. Quest' altra maniera di misurare l' angolo ci fà conoscere con ogni evidenza la verità di due altri teoremi assai importanti. Il primo si è, che se due angoli, come ABD, ACD, siano situati in un medesimo arco ABCD, debbano i medesimi essere trà loro eguali: per la ragione, che appoggiandosi amendue sull'istesso arco AED, viene ad essere la metà di quest' arco misura di ciascuno di essi. L' altro si è, che se due angoli, come ABD, AED siano situati in archi tali, che unitamente uguaglino l' intera linea circolare, i medesimi insieme debbano essere eguali a due retti; poichè essendo le metà di quegli archi misure di essi, sarà misura loro totale la metà dell' intera linea circolare, che appunto è la misura di due retti. Fig. 32.

94. Il metodo intanto usitato presso i Pratici, per misurare l'angolo, si è, di porre il suo vertice nel centro della linea circolare. Ed egli è chiaro, che siccome ogni angolo des essere sempre minore di due retti; così per misurare qualunque angolo dato col divisato metodo, basta tener divisa nelle sue parti la sola metà dell' intera linea circolare. Ma la divisione del solo quadrante pu- IUe

re

re è bastevole per questanto, di cui si tratta. Imperocchè, se mai si avesse a misurare un'angolo ottuso, come BAC; potrà prendersi col quadrante la misura dell' angolo acuto adjacente CAD. Ed essendo amendue questi angoli insieme eguali a due retti; chiara cosa si è, che colla conoscenza dell' uno si verrà ancora in quella dell' altro.

Fig. 33.

95. In effetto i Pratici del quadrante sogliono servirsi per prendere le misure degli angoli; ed egli si fabbrica dagli Artefici con una lamina di ottone contornata in quella guisa, la quale vien sostenuta da aste di ferro, che vanno ad unirsi insieme in quel luogo, ove dee essere il centro del quadrante; anzi in detto luogo si suol porre ancora un picciolo cerchietto eziandio di ottone, che col suo centro ci addita quello del quadrante medesimo. L'esattezza poi di un quadrante dipende spezialmente dall' esatta divisione delle sue parti; ma oltre a ciò, si richiede altresì, che la lamina per tutta la sua estensione sia in un medesimo piano, e che in questo stesso piano si ritrovi eziandio quel cerchietto, in cui stà segnato il centro del quadrante.

96. Per maggior compendio sogliono ancora i Pratici in luogo del quadrante servirsi o del sestante, che è la sesta parte dell' intera linea circolare, o pure dell' ottante, che è la quarta parte della medesima. Egli è vero, che a prima vista sembra non potersi con essi misurare ogni qualunque angolo acuto; ma attesa la facilità, con cui possiamo avere l' angolo retto, non dureremo fatica a liberarci da un tale inganno. Debbasi a cagion di esempio misurare l'angolo acuto BAC, che ecceda la portata delli due divisati istromenti. Facciasi l'angolo retto BAD, con alzare sul lato AB la perpendicolare AD; ed avendosi con esso l'altro angolo acuto CAD, chiara cosa si è, che la misura di quest'altro angolo potrà prendersi per mezzo di quelli. Quindi essendo i due angoli BAC, CAD insieme eguali al solo retto BAD; colla conoscenza dell' uno si

Fig. 34.

verrà

verrà ancora in quella dell' altro.

97. Essendo ben grande il numero delle parti, che si debbono segnare in tutti tre i riferiti istromenti; egli è chiaro, che per aver campo l' Artefice di fare la divisione di esse con esattezza, debba darsi al raggio dell' istromento una competente lunghezza; anzi appunto per questo motivo, quanto è più lungo il suo raggio, tanto maggiormente deve egli stimarsi esatto. Nè poi dobbiamo darci a credere, che con variarsi il raggio dell' istromento, si viene a variare la misura dell' angolo. Imperocchè egli è da notarsi, che siccome si misura propriamente l' angolo non già colla lunghezza dell' arco circolare, ma col numero delle sue parti; così questo numero di parti è lo stesso tanto nell' arco descritto con maggiore intervallo, quanto in un'altro descritto con intervallo minore: come in effetto si dimostra da Geometri, che se in due linee circolari concentriche siano tirate dal comune loro centro due rette, gli archi frapposti tra dette rette saranno nella stessa ragione colle linee intere circolari, onde conterranno egual numero delle loro parti.

CAPITOLO II.

Delle figure piane rettilinee.

98. SPiegate le operazioni più semplici così intorno alle rette, come intorno agli angoli; passeremo ora alla considerazione delle figure piane, con incominciare prima da quelle, che per essere terminate da linee rette si appellano comunemente figure piane rettilinee. Di queste figure si chiamano lati quelle stesse rette, che le terminano; ed egli è chiaro, che in ciascuna di esse debbano ritrovarsi ancora tanti angoli, quanto sono i lati, che la racchiudono. Or secondo il nostro metodo prima di venire alle operazioni da farsi intorno a queste figure, premette-

metteremo brevemente quel tanto bisogna sapere per l' intelligenza di tali operazioni.

§. I.

Delle principali figure rettilinee, e delle loro affezioni.

99. TRa le figure piane rettilinee la più semplice è la trilatera, che si appella ancora triangolo. Le sue principali affezioni sono le seguenti. I, che due lati uniti insieme sono sempre maggiori del terzo. II, che prolungato un lato a dirittura l' angolo esteriore è eguale alli due interiori, ed opposti unitamente presi. III, che tutti tre i suoi angoli uniti insieme sono eguali a due retti. IV, che così a lati eguali debbono essere opposti angoli eguali, come a lato maggiore angolo maggiore. E V finalmente, che per l' opposto così ad angoli eguali debbono opporsi lati eguali, come ad angolo maggiore lato maggiore.

100. Il triangolo poi, siccome per ragion de' lati si divide in equilatero, che ha tutti tre i lati eguali; in isoscele, che ne ha due solamente eguali; ed in scaleno, che gli ha tutti tre disuguali*: Così per ragion degli angoli si divide in rettangolo, che ha uno degli angoli retto; in ottusangolo, che ha uno degli angoli ottuso; ed in acutangolo, che ha tutti tre gli angoli acuti. Ed egli è da notarsi, che in tanto quest' ultimo deî averli tutti tre acuti, per la ragione, che essendo in ogni triangolo tutti tre gli angoli uniti insieme eguali a due retti, ancora nel rettangolo, e nell' ottusangolo si ritrovano due angoli acuti.

101. Quantunque nell' isoscele suol darsi il nome di base al lato disuguale, ad ogni modo così in esso come in ogni altro triangolo si può prendere per base ciascuno delli tre lati; ed allora la perpendicolare abbassata sù detto lato dall' angolo

lo opposto, si dirà essere l' altezza del triangolo. Or colle basi, e colle altezze dee giudicarsi della ragione, in cui sono tra loro due triangoli. Imperocchè, essendo le basi eguali, saranno i triangoli nella sola ragione delle altezze; essendo le altezze eguali, saranno nella sola ragione delle basi; ed essendo finalmente disuguali così le basi, come le altezze, saranno nella ragion composta di quella delle basi, e di quella dell' altezze.

102. Per imprimere maggiormente nell' animo de' principianti questi tre teoremi, siano i due triangoli ABC, DEF; e prendendo come loro basi i lati BC, EF, si faranno altezze de' medesimi le perpendicolari AG, DH abbassate dagli angoli opposti sù quelli lati. Quindi nella supposizione, che le basi BC, EF siano eguali, i due triangoli ABC, DEF saranno tra loro nella sola ragione delle altezze AG, DH; nella supposizione poi, che siano eguali le altezze AG, DH, saranno gli stessi triangoli nella sola ragione delle basi BC, EF; e finalmente con supporsi disuguali tanto le basi, quanto le altezze, sarà il triangolo ABC al triangolo DEF in ragion composta della base BC alla base EF, e dell' altezza AG all' altezza DH. Fig. 35.

103. Che se poi ne' due triangoli ABC, DEF siano eguali così le basi BC, EF, come le altezze AG, DH; in tal caso chiara cosa si è, che la loro ragione debba essere di eguaglianza. E poichè con situare due triangoli tra due parallele, e con prendere per loro basi que' lati, con cui si appoggiano sù una di quelle parallele, vengono i medesimi ad avere eguali altezze; possiamo quindi dedurne due teoremi. I, che i triangoli, situati sù di una stessa base, e tra le stesse parallele, debbano essere tra loro eguali. E II, che eguali esser debbano parimente que' triangoli, che sono situati sopra basi eguali, e tra le medesime parallele. Nè è difficile ad intendersi, che di tutti questi teoremi eziandio i conversi debbano essere veri.

104. Intanto due triangoli possono essere eguali tra loro, ancorche abbiano bisuguali basi, e disuguali altezze. Avviene ciò, quando le basi di detti triangoli sono nell' inversa, ovvero reciproca ragione delle loro altezze. Così supposto, che la base BC sia alla base EF, come l'altezza DH all'altezza AG; sarà il triangolo ABC eguale al triangolo DEF. E la ragione è chiara. Poichè in questo caso, quanto uno di essi è maggiore dell'altro a riguardo della base, tanto dee esserne minore per rapporto all' altezza. Onde per compensarsi tra loro l'eccesso, ed il difetto, necessariamente i due triangoli si ritroveranno essere tra loro eguali.

jue

105. Egli è quì d' avvertirsi, che se due triangoli abbiano un'angolo eguale ad un' angolo, potrà giudicarsi della loro ragione, senza aver bisogno delle loro altezze; poichè in questo caso la ragione di detti triangoli sarà composta dalle due, che anno tra loro i lati situati intorno agli angoli eguali. Così se i due triangoli ABC, DEF abbiano l' angolo ABC eguale all' angolo DEF, la loro ragione sarà composta dalle due, che anno il lato AB al lato DE, ed il lato BC al lato EF. Ma essendo così, egli è chiaro, che vi sarà uguaglianza tra questi stessi triangoli, quando i lati situati intorno agli angoli eguali sono reciprocamente proporzionali tra loro, cioè quando il lato AB stà a lato DE, come il lato EF al lato BC.

106. Dopo la figura trilatera, o sia triangolo segue la figura quadrilatera, ovvero quadrangolo, le di cui spezie principali sono due, cioè il parallelogrammo, ed il trapezio. Si appella parallelogrammo quella figura quadrilatera, che ha i lati opposti paralleli. All' incontro si chiama trapezio quell' altra, in cui o nessuno lato, o pure uno solo si ritrova essere parallelo col suo opposto. Or essendo ABCD un parallelogrammo, si dirà ancora essere sua diagonale la retta AC, che congiunge insieme i vertici di due angoli

Fig. 36.

goli opposti. E se per un punto E preso in questa diagonale tirinsi le rette FG, HI parallele alli lati AB, BC, siccome con esse resterà diviso il parallelogrammo in quattro altri parallelogrammi; così i due AFEH, CGEI si dicono essere intorno alla diagonale, e gli altri due BGEH, DFEI si chiamano loro supplimenti.

107. Le principali affezioni del parallelogrammo sono le seguenti. I, che i lati opposti debbono essere tra loro eguali. II, che eguali similmente esser debbono gli angoli opposti. III, che la diagonale debba dividere il parallelogrammo in due triangoli eguali. E IV finalmente, che i supplimenti di coloro, che sono intorno alla diagonale, debbono essere eziandio tra loro eguali. Così nel parallelogrammo ABCD sarà in primo luogo tanto il lato AB eguale al lato DC, quanto il lato BC eguale al lato AD; sarà in secondo luogo così l'angolo BAD eguale all'angolo BCD, come l'angolo ABC eguale all'angolo ADC; sarà in terzo luogo il triangolo ABC eguale al triangolo ADC; sarà finalmente il supplimento BGEH eguale al supplimento DFEI.

108. Or per la terza proprietà del parallelogrammo, potendosi egli considerare come un puro triangolo raddoppiato, chiara cosa si è, che per rapporto a parallelogrammi debbono aver luogo quegli stessi teoremi, che abbiamo notati ne' triangoli. Quindi dopo aver avvertito, che in un parallelogrammo può prendersi per base ciascuno de' suoi lati, e che allora altezza del medesimo sarà la perpendicolare alzata da uno de' punti di detto lato fino al lato opposto; stabiliremo in primo luogo, che i parallelogrammi dotati di eguali basi siano, come le altezze; stabiliremo in secondo luogo, che i parallelogrammi forniti di eguali altezze siano, come le basi; stabiliremo finalmente, che essendo disuguali così le basi, come le altezze di due parallelogrammi, la loro ragione sia composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.

109. Qualora poi in due parallelogrammi sono eguali così le basi, come le altezze, la loro ragione dovrà essere ancora di uguaglianza; e perciò due parallelogrammi situati tra le stesse parallele saranno tra loro eguali, sia che abbiano una stessa base, sia che abbiano basi eguali. Intanto, a guisa de' triangoli, possono due parallelogrammi essere tra di essi eguali, ancorche siano disuguali tanto le loro basi, quanto le loro altezze; e ciò avviene, come ne' triangoli, quando le basi dei due parallelogrammi sono in reciproca ragione delle loro altezze. Ed in fine, se due parallelogrammi abbiano un'angolo eguale ad un' angolo, la loro ragione sarà composta ancora dalle due de' lati situati intorno agli angoli eguali; onde si è, che se questi lati siano reciprocamente proporzionali tra loro, la ragione di detti parallelogrammi dovrà essere di uguaglianza.

110. Ma siccome il parallelogrammo è doppio di ciascuno di quei triangoli, ne' quali resta egli diviso dalla sua diagonale, così sarà doppio altresì di ogni altro triangolo, con cui sia situato tra le stesse parallele, e sia fornito di una medesima base. Anzi, se il parallelogrammo, ed il triangolo siano tra le stesse parallele, ed abbiano basi eguali; pure il parallelogrammo dovrà essere doppio del triangolo. Che se poi queste tali figure siano situate tra le stesse parallele, e la base del triangolo sia doppia della base del parallelogrammo; in tal caso la loro ragione dovrà essere di uguaglianza. Ed ecco quanto bisogna sapersi da un Geometra pratico intorno alla teoria de' parallelogrammi in generale.

111. Rimane ora a far vedere le varie spezie del parallelogrammo. Ed in primo luogo egli può avere, o tutti quattro i lati eguali, o solamente gli opposti eguali; e dipoi i suoi angoli possono essere, o tutti retti, o pure due ottusi, e due acuti. Quindi si distinguono quattro spezie de' parallelogrammi: cioè il quadrato, che

ha

ha tutti quattro i lati eguali, e tutti quattro gli angoli retti; il rettangolo, che cogli angoli retti ha ſolamente i lati oppoſti eguali; il rombo, che coll'uguaglianza di tutti i lati ha due angoli ottuſi, e due acuti; e finalmente il romboide, che eſſendo fornito a guiſa del rombo di due angoli ottuſi, e di due acuti ha ſolamente eguali i lati oppoſti.

112. Del trapezio non ſogliono i Geometri formarne teoria ſpeziale, poichè lo pongono a calcolo con dividerlo in due triangoli; e per la ſteſſa ragione neppure ſi trattengono nella conſiderazione delle altre figure piane rettilinee, che 18 ſono terminate da un maggior numero di lati, poichè colla diviſione di eſſe in triangoli ſimilmente può averſi tutto ciò, che le riſguarda. Solamente anno ſtimato neceſſario di eſaminare le affezioni di quelle figure piane rettilinee, le quali per avere i lati, e gli angoli eguali, ſi appellano comunemente figure piane regolari; ma poichè queſte tali figure di lor natura debbono andare accompagnate col cerchio, perciò ci ſerberemo a trattare di eſſe nel capitolo ſeguente, in cui ci proporremo a raggionare della figura circolare.

113. La ſimiglianza in tanto è ſtata eſaminata da Geometri in tutte le figure piane rettilinee. E ſiccome anno chiamate ſimili quelle talì figure, che eſſendo della ſteſſa ſpezie, anno gli angoli eguali agli angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, ed in oltre proporzionali i lati, che ſono ſituati intorno agli angoli eguali; così anno dimoſtrato generalmente, che due figure ſimili ſono tra loro nella duplicata ragione de' lati oppoſti ad angoli eguali: li quali lati ſi chiamano comunemente lati omologi, perciocchè nella proporzione, che ſi richiede per la ſimiglianza delle figure, queſti tali lati fra eſſi loro ſi corriſpondono, e fanno le veci, o amendue di antecedenti, o amendue di conſeguenti.

114. Intorno alla ſimiglianza delle figure è

egli da notarsi, che se bene quella dipenda, e dall'uguaglianza degli angoli, e dalla proporzionalità de' lati situati intorno agli angoli eguali; tuttavolta trattandosi de' triangoli basta, che vi sia una delle due condizioni, poichè insieme con quella vi dovrà essere ancora l'altra. Ed in effetto si dimostrano da Geometri due teoremi. Il primo si è, che i triangoli equiangoli debbano avere i lati proporzionali, e che omologi siano que' lati, che stanno opposti al angoli eguali. L' altro si è, che i triangoli, li quali anno i lati proporzionali, debbano essere equiangoli, e che quei angoli siano tra loro eguali, che stanno opposti a lati omologi.

§. II.

Delle operazioni più semplici intorno a' triangoli, e parallelogrammi.

115. LE operazioni più semplici intorno a triangoli, e parallelogrammi; sono quelle, che riguardano la determinazio ne di tali figure. Per incominciare adunque dal triangolo, noteremo in primo luogo, che rimane egli determinato, con darsi la lunghezza di ciascu no de' suoi lati. Debbasi perciò formare un triangolo, i di cui lati siano eguali alle tre rette date A, B, C,. Facciasi, che la DE sia egua-
Fig. 37. le ad una di esse A; indi descrivansi due archetti circolari, uno col centro D e coll' intervallo della seconda B, l'altro col centro E e coll' intervallo della terza C, li quali due archetti s' interseghino tra loro nel punto F; congiunganfi finalmente le rette DF, EF, ed io dico, che DEF sarà il triangolo, che si dimanda. Imperocche, siccome la DE si è fatta eguale alla prima A delle tre rette date; così per la costruzione le due DF, EF sono eguali all'altre due B, e C, ciascuna a ciascuna. Onde i tre lati del triangolo DEF vengono ad essere eguali alle tre

rette

rette date A, B, C.

116. Intorno a questo problema bisogna intanto avvertire, che siccome per la soluzione di esso le tre rette date A, B, C debbono essere di lunghezza tale, che due di esse unite insieme siano sempre maggiori della terza, comunque si prendano, per essere affezione di ciascuno triangolo, che due lati unitamente presi siano sempre maggiori del rimanente [99]; così è egli talmente generale, che colla sua soluzione potrà formarsi egualmente, ed il triangolo equilatero, e l'isoscele, ed il scaleno. In effetto con porsi eguali tra loro tutte tre le rette date A, B, C, il triangolo formato DEF si ritroverà essere equilatero; con porsi poi eguali le sole due B, e C, il medesimo triangolo DEF verrà ad essere isoscele; e finalmente se tutte tre le date rette A, B, C siano tra loro disuguali, l'istesso triangolo DEF avrà forma tale, che sarà egli scaleno.

117. Ma siccome, affinche il triangolo sorga equilatero, tutte tre le rette date debbono essere tra loro eguali; così per la formazione di un tal triangolo basta dare la lunghezza di un solo lato: come in effetto in questo caso suol proporsi il problema in questi termini: sopra una retta data, come DE, formare un triangolo equilatero; e si forma egli effettivamente coll' intersegamento di due archi circolari, descritti colli centri D ed E, e coll' intervallo della retta data DE. Per la stessa ragione, conforme per fare, che il triangolo sorga isoscele, debbono essere eguali due solamente delle rette date; così per la determinazione di quest' altro triangolo basta dare la lunghezza della sua base, e quella di uno de' suoi lati; ed egli è chiaro, che essendo DE la data base, si formerà il triangolo coll' intersegamento di due archi circolari, descritti colli centri D, ed E, e coll' intervallo del lato dato.

118. Noteremo in secondo luogo, che sebbe-

ne il triangolo resti determinato con darsi ciascuno de' suoi lati; tutta volta non riceve egli la sua determinazione, essendo dato ciascuno de' suoi angoli, per potersi formare infiniti triangoli, che abbiano i medesimi angoli dati. In
Fig. 38. effetto fingiamo, che i dati angoli siano quelli, che si ravvisano nel triangolo ABC. E se per lo punto D preso ad arbitrio nel lato AB tirisi la DE parallela all'altro lato BC, che s' incontri col terzo AC nel punto E; chiara cosa si è, che per le parallele DE, BC sarà tanto l' angolo ADE eguale all'angolo ABC, quanto l' angolo AED eguale all'angolo ACB (34). Quindi gli stessi angoli contenuti nel triangolo ABC si ritroveranno ancora nell'altro ADE, il quale per lo punto D preso ad arbitrio può variare ancora all' infinito.

119. Che se poi insieme cogli angoli diasi il lato opposto ad uno di essi, in tal caso riceverà il triangolo l'intera sua determinazione, ed ecco come. Fingiamo di nuovo, che i tre angoli dati siano quelli, che si ravvisano nel triangolo ABC; e sia in oltre GH il lato opposto à quell' angolo, che dee essere eguale all' angolo BAC. Sulla data GH facciasi così nel punto G l' angolo HGI eguale all' angolo CBA, come nel punto H l' angolo GHI eguale all'angolo BCA [43]; e posto, che le due GI, HI s' incontrino tra loro nel punto I; sarà IGH il triangolo, che si dimanda. Imperocehe, siccome per la costruzione sono eguali tra loro tanto i due angoli HGI, CBA, quanto gli altri due GHI, BCA; così per essere gli angoli di ogni triangolo uniti insieme eguali a due retti [99], sarà ancora il terzo angolo GIH eguale al terzo angolo BAC.

120. Secondo la soluzione, che da noi si è data del problema proposto, non viene a farsi uso
Jve di quell'angolo, a cui dee essere opposto il lato dato; onde sembra potersi egli proporre più semplicemente in questa guisa: formare un triangolo, di cui sia dato così uno de' lati, come ciascuno

ſcuno delli due angoli adjacenti a detto lato. Ma egli è da notarſi, che eſſendo tutti tre gli angoli di ogni triangolo uniti inſieme eguali a due retti (99), non poſſono eſſere dati due di eſſi, ſenza che ſia dato ancora il rimanente; e perciò non dee ſare difficoltà, che nel riferito problema inſieme col lato dato vogliamo dati ancora tutti tre gli angoli. Una condizione più toſto de[?] aggiungerviſi; per eſſere egli poſſibile; e ſi è, che i tre angoli dati debbano eſſere tali, che unitamente preſi ſiano eguali a due retti. lve

121. Noteremo in terzo luogo, che il triangolo rimane ancora determinato con darſi, così due de' ſuoi lati, come l'angolo compreſo da detti lati: In effetto fingiamo, che A, e B ſiano i due lati dati, e che DCE ſia l'angolo, il quale de[?] eſſere compreſo da quelli lati. Tagliſi così dalla CD la porzione CF eguale ad A, come dalla CE la porzione CG eguale a B; congiunganſi poſcia i punti F, e G per la retta FG; e per la coſtruzione medeſima chiara coſa ſi è, che CFG ſia il triangolo, che ſi dimanda; poichè ſiccome le due CF, CG ſi ſono fatte eguali all' altre due date A, e B, ciaſcuna a ciaſcuna, così le medeſime contengono ancora l' angolo dato DCE. Fig. 39. lve

122. Noteremo finalmente, che ſebbene il triangolo reſti determinato con darſi così due de' ſuoi lati, come l'angolo compreſo da detti lati; tutta volta non viene egli a ricevere la ſua determinazione, quantevolte inſieme colli due lati ſi dà l' angolo oppoſto ad uno di eſſi. Fingiamo perciò, che A, e B ſiano i due lati dati, e che DCE ſia l'angolo, il quale de[?] eſſere oppoſto al lato B. Tagliſi dalla CD la porzione CF eguale ad A; indi col centro F, e con intervallo eguale a B deſcrivaſi l' arco circolare GH. E ſiccome queſt' arco potrà ſegare la CE in due punti diverſi G, ed H; così con congiungere le due FG, FH non è egli da porſi in dubbio, che tanto CFG, quanto CFH ſia il triangolo, che ſi dimanda. 16 Fig. 40. lve

123. In questo caso adunque per determinare il triangolo è necessario aggiungervi altra condizione. Per rinvenirla, giova il riflettere, che essendo eguali le due FG, FH, saranno eguali parimente gli angoli ad esse opposti FHG, FGH (99). Quindi per dover' essere questi angoli insieme minori di due retti, sarà ciascuno di essi acuto; ed in conseguenza l' altro angolo FHC sarà ottuso. Onde sebbene colla soluzione del proposto problema si abbiano due triangoli CFG, CFH; vi è però tra di essi questo divario, che l'angolo opposto all' altro lato dato in uno viene ad essere acuto, e nell' altro ottuso; e pertanto con darsi ancora la spezie di quest' altro angolo rimarrà il triangolo interamente determinato.

16

124. Egli è vero, che l'arco circolare descritto col centro F, e con intervallo eguale a B potrebbe tal volta radere la CE, ed incontrarsi colla medesima in un sol punto, come E; ma siccome in questo caso viene a farsi la CE tangente dell' arco circolare, così congiungendo il centro F col punto del contatto E per la retta FE, sarà quest'altra FE perpendicolare sulla CE[31]; ed in conseguenza per essere retto l'angolo FEC, pure sarà data la di lui spezie. Più tosto merita quì di essere avvertito, che il problema, di cui si tratta, ancora coll' aggiunta dell' altra riferita condizione, non è egli sempre solubile, per la ragione, che quell'arco circolare può talvolta affatto non incontrarsi colla CE.

Fig. 41.

125. Del rimanente rimanendo il triangolo determinato in tutti quattro i casi, che sin' ora abbiamo divisati; egli è chiaro potersi investigare la perfetta eguaglianza di due triangoli in quattro maniere. I con vedere, se abbiano i lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno. II con esaminare, se abbiano gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e di più un lato eguale ad un lato, che siano opposti ad angoli eguali. III con riflettere, se abbiano due lati eguali a due

lati

lati, ciascuno a ciascuno, ed eguali altresì gli angoli compresi da detti lati. E finalmente con ricercare, se avendo due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, abbiano ancora due degli angoli opposti a detti lati eguali tra loro, e due altri della stessa spezie.

126. E poichè la simiglianza di due triangoli è molto affine alla perfetta loro uguaglianza, perciò stimiamo ancora doversi quì avvertire, che due triangoli debbono giudicarsi tra loro simili, non solo quando si ritrovano avere, o i lati proporzionali, o gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno; ma ancora, quando essendo due lati dell' uno proporzionali con due lati dell' altro, o sono eguali tra loro gli angoli compresi da detti lati, o degli angoli opposti agli stessi lati due sono tra di essi eguali, e due altri della stessa spezie. Ed accoppiando questi teoremi cogli altri riferiti di sopra, già viene ad aversi presente l' intera teoria de' triangoli.

127. Passiamo ora al parallelogrammo, il quale siccome dee avere i lati opposti non solo paralleli, ma eziandio eguali (107), così rimane egli determinato con darsi due lati adjacenti, e l' angolo compreso da detti lati. Fingiamo perciò, che A, e B siano i due lati adjacenti, e che DCE sia l' angolo, il quale dee essere da quelli compreso. Taglisi primieramente così dalla CD la porzione CF eguale ad A, come dalla CE la porzione CG eguale a B. Tirisi di poi tanto per lo punto F la retta FH parallela alla CG, quanto per lo punto G la retta GH parallela alla CF. Ed incontrandosi queste due parallele tra loro nel punto H, chiara cosa si è, che CFHG sia il parallelogrammo, che si dimanda. lve. Fig. 42. lve

128. Or la riferita formazione del parallelogrammo è così generale, che può adattarsi egualmente a tutte quattro le di lui spezie. In effetto, se i due lati dati A, e B sono disuguali, il parallelogrammo prenderà forma o di rettangolo, o di romboide: cioè di rettangolo, quantevolte

l'an,

l'angolo dato DCE è retto; e di romboide, qualora l'istesso angolo è o acuto, o pure ottuso. Che se poi i due lati A, e B siano uguali, in tal caso l'istesso parallelogrammo prenderà forma o di quadrato, o di rombo: cioè di quadrato, essendo retto l'angolo DCE; e di rombo, essendo egli o acuto, ovvero ottuso. Ma siccome per la formazione del quadrato, e del rombo egli è chiaro, che basta dare un solo lato; così per essere l'angolo retto sempre lo stesso, chiara cosa ancora si è, che per la formazione del quadrato, e del rettangolo non sia egli necessario darsi l'angolo.

16

129. Ed in vero; sebbene per le infinite varietà, che può ricevere così l'angolo acuto, come l'ottuso, non resti determinato il romboide con darsi di esso due lati adjacenti; tuttavolta con esser dati questi lati riceve il rettangolo l'intera sua determinazione, e quindi si è, che egli si dice fatto, ovvero contenuto da detti lati. Siano a cagion di esempio A, e B i due lati dati; e vogliasi con essi formare il rettangolo. Fig. 43. Facciasi, che la CD sia eguale ad uno di detti lati, come A; ed alzata sù di essa da uno de' suoi termini C la perpendicolare CE, facciasi quest'altra eguale all'altro lato B; tirisi poscia così per lo punto D la retta DF parallela alla CE, come per lo punto E la retta EF parallela alla CD, che s'incontrino tra loro nel punto F; ed egli è chiaro, che CDFE sia il rettangolo, che si dimanda.

130. Per la stessa ragione quantunque, per potersi variare all'infinito, tanto l'angolo acuto, quanto l'ottuso, non resti determinato il rombo con darsi uno de' suoi lati; tuttavolta, con esser dato questo lato, riceve il quadrato l'intera sua determinazione, e quindi si è, che si dice egli fatto, ovvero descritto solamente da detto lato. Sia a cagion di esempio A il lato dato, e vogliasi con esso formare il quadrato. Facciasi, che Fig. 44. la BC sia eguale ad A; ed alzata sù di essa da uno

uno de' suoi termini B la perpendicolare BD, facciasi, che quest' altra ancora sia eguale ad A; tirisi poscia, così per lo punto C la retta CE parallela alla BD, come per lo punto D la retta DE parallela alla BC, che s' incontrino tra loro nel punto E; ed egli è chiaro, che BCED sia il quadrato, che si dimanda.

§. III.

Della misura delle figure piane rettilinee.

131. SIccome per misurare la lunghezza delle linee così rette, come curve si fa uso della lunghezza di una data retta; così per misurare le ampiezze ovvero capacità delle superficie tanto piane, quanto curve impiegasi l'ampiezza di una data superficie piana. Questa intanto dee derivarsi da quella stessa retta, con cui le linee si misurano; per la ragione, che dalla misura delle linee si fà passaggio a quella delle superficie, e con esser note l'une si viene poscia nella conoscenza dell' altre. E poichè tra le figure, che possono derivarsi da una data retta, la più semplice a concepirsi si è il quadrato, che sù di essa si descrive; perciò non di altra superficie piana sogliono i Geometri far' uso in misurare tutte l' altre superficie; se non se del quadrato descritto sù quella retta, per mezzo di cui misurano le lunghezze delle linee.

132. Or chiamando palmo, piede, o braccio lineare quella retta, di cui vogliamo avvalerci per misurare le linee; daremo poi, per evitare ogni confusione, il nome di palmo, piede, o braccio quadrato al quadrato della stessa retta, che dobbiamo impiegare nella misura delle superficie. Ed egli è da notarsi, che siccome misurare qualsivoglia linea non vuol significare altra cosa, se non che determinare, quanto il palmo, piede, o braccio lineare si contiene nella lunghezza di quella linea; così misurare qualunque superficie sarà

lo

lo stesso, che definire, quanto il palmo, piede, o braccio quadrato si contiene nell' ampiezza di quella superficie.

133. Per potersi fare agevolmente co' numeri queste tali determinazioni, si disegna coll' unità, così la retta, che è misura delle linee, come il suo quadrato, che è misura delle superficie; ed in questa maniera cogli altri numeri potranno disegnarsi egualmente, tanto l'altre linee, quanto l'altre superficie. Poichè dicendo, che un' altra linea sia a cagion di esempio 2, 3, o 4, non altro vorremo dire, se non che ella sia dupla, tripla, o quadrupla della retta, che è sua misura; e dicendo ancora, che un' altra superficie sia similmente 2, 3, o 4, non vorremo dire altra cosa, se non che ella pure sia dupla, tripla, o quadrupla del quadrato, che è sua misura.

134. Avvertite tali cose, debbasi ora misurare in primo luogo ogn'altro quadrato, come ABCD. Fig. 45. Determinisi primieramente la lunghezza di uno de' suoi lati AB; indi si moltiplichi per se stesso il numero, che la disegna; ed il prodotto nato da questa moltiplicazione disegnerà la capacità del quadrato proposto. Per ragion di esempio fingiamo, che AB sia 3, vale a dire, che contenga tre palmi lineari; e poichè con moltiplicare 3 per 3 si produce 9, sarà 9 il valore del quadrato ABCD, onde verrà egli a contenere nove palmi quadrati. E così ancora se AB sia 5, sarà 25 il valore del quadrato ABCD; se AB sia 9, sarà 81 il valore dello stesso quadrato; e generalmente disegnando col cossico a la lunghezza del lato AB, sarà a^2 la capacità del quadrato ABCD. Ed ecco la ragione, per cui gli Arimmetici chiamano quadrato di un numero queltanto si produce, moltiplicando quel numero per se medesimo.

135. Di sì fatta regola suol darsi da Pratici una dimostrazione oculare, che si fà con dividere tanto il lato AB, quanto l' altro BC in tante parti eguali, quanti sono i palmi lineari, che essi contengono,

tengono, e con tirare per gli punti di amendue le divisioni altrettante rette, che siano reciprocamente parallele a detti lati; poichè in questa maniera si vede chiaramente, contenersi nel quadrato ABCD tanti palmi quadrati, quanti ne addita la regola data. Ma la vera ragione di essa si è, che essendo EF il palmo lineare, ed EFGH il palmo quadrato, i due quadrati ABCD, EFGH come figure simili vengono ad essere nella duplicata ragione de' lati omologi AB, EF [113]. Quindi se AB sia ad EF, come a ad 1; il quadrato ABCD sarà al quadrato EFGH, come a^2 ad 1 (59); e pertanto siccome l'unità è il valore del quadrato EFGH, così sarà a^2 quello dell'altro ABCD.

136. Debbasi in secondo luogo misurare qualunque rettangolo, come ABCD. Si determinino primieramente le lunghezze delli due lati adjacenti AB, BC; si moltiplichino poscia tra loro i due numeri, che le disegnano; ed il prodotto nato da questa moltiplicazione disegnerà la capacità del proposto rettangolo. Per ragion di esempio fingiamo, che AB sia 2, e BC 3, vale a dire, che il primo contenga due palmi lineari, ed il secondo tre; e poichè con moltiplicare 2 per 3 si produce 6, sarà 6 il valore del rettangolo ABCD, onde verrà egli a contenere sei palmi quadrati. E così ancora se AB sia 4, e BC 6, sarà 24 il valore del rettangolo ABCD; se AB sia 5, e BC 8, sarà 40 il valore dello stesso rettangolo; e generalmente disegnando col cossico a la lunghezza del lato AB, e col cossico b quella dell' altro BC, sarà ab il valore del rettangolo ABCD. Fig. 46.

137. Eziandio di quest' altra regola suol darsi da Pratici una dimostrazione oculare, che si fa parimente con dividere i due lati AB, BC in tante parti eguali, quanti sono i palmi lineari, che contengono, e con tirare per gli punti di amendue le divisioni altrettante rette, che siano reciprocamente parallele a detti lati; poichè in questa maniera si vede chiaramente contenersi nel

rettan-

rettangolo ABCD tanti palmi quadrati, quanti ne addita la regola data. Ma la vera ragione di eſſa ſi è, che eſſendo EF il palmo lineare, ed EFGH il palmo quadrato, i due parallelogrammi ABCD, EFGH, come rettangoli, e forniti in conſeguenza di angoli eguali, vengono ad eſſere nella ragion compoſta di AB ad EF, e di BC ad FG o ſia EF (109). Quindi ſe AB ſia ad EF, come a ad 1, e BC ſia ad EF, come b ad 1; il rettangolo ABCD ſarà al quadrato EFGH, come $a\,b$ ad 1 (58); e pertanto, ſiccome l'unità è il valore del quadrato EFGH, così ſarà $a\,b$ quella del rettangolo ABCD.

138. Debbaſi in terzo luogo miſurare ogn' altro parallelogrammo obbliquangolo, come ABCD. Fig. 47. Si determini primieramente, così la lunghezza di uno de' ſuoi lati BC, come quella della perpendicolare BE, alzata da un punto di detto lato [illegible] fino al ſuo oppoſto AD; ſi moltiplichino poſcia tra loro i due numeri, che diſegnano dette lunghezze; ed il prodotto nato da queſta moltiplicazione ſarà la capacità del parallelogrammo propoſto. Per ragion di eſempio fingiamo, che BC ſia 4, e BE 3, vale a dire, che BC ſia di quattro palmi lineari, e BE di tre; e poichè con moltiplicare 4 per 3 ſi produce 12, ſarà 12 il valore del parallelogrammo ABCD, onde verrà egli ad eſſere di dodici palmi quadrati. E così ancora ſe BC ſia 7, e BE 5, ſarà 35 il valore del parallelogrammo ABCD; ſe BC ſia 9, e BE 7, ſarà 63 il valore dello ſteſſo parallelogrammo; e generalmente diſegnando col coſſico a la lunghezza del lato BC, e coll' altro b quella della perpendicolare BE, ſarà $a\,b$ il valore del parallelogrammo ABCD.

139. La ragione poi di queſta regola è facile ad intenderſi. Poichè alzata ſullo ſteſſo lato BC l'altra perpendicolare CF, che s'incontri col lato oppoſto AD nel punto F, ſiccome con eſſa viene ad averſi l'altro parallelogrammo EBCF, così per eſſere amendue ſituati ſulla ſteſſa baſe

BC, e

BC, e tra le ſteſſe parallele AF, BC, ſaranno i medeſimi tra loro eguali [110]. Ma eſſendo EBCF un parallelogrammo rettangolo, il ſuo valore ſi ha, con moltiplicare tra loro i due numeri, che diſegnano le lunghezze de' lati BC, BE (136). Dunque colla ſteſſa moltiplicazione dovrà averſi ancora il valore dell'altro obbliquangolo ABCD. E poiche conſiderando il lato BC come baſe di detto parallelogrammo, viene a farſi ſua altezza la perpendicolare alzata BE; ſi vede da ciò, che la capacità di un parallelogrammo obbliquangolo ſi ha con moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza.

140. Eſſendo così, egli è chiaro, che una ſia la regola per tutti i parallelogrammi; poichè, ſe ſi voglia attentamente riflettere, per ciaſcuno di eſſi non ſi fa altra coſa, ſe non che moltiplicare la baſe per l' altezza. Volendoſi intanto dimoſtrare tal regola con paragonare il parallelogrammo propoſto a dirittura col palmo quadrato, potrà farſi uſo di quel teorema, che due parallelogrammi ſono tra loro nella ragion compoſta di quella delle baſi, e di quella dell'altezze (108). Imperocche eſſendo GH il palmo lineare, e GHIL il palmo quadrato; ſarà il parallelogrammo ABCD al parallelogrammo GHIL in ragion compoſta di BC a GH, e di BE a GL o ſia GH. Quindi ſe BC ſia a GH, come a ad 1, e BE ſia a GH, come b ad 1; il parallelogrammo ABCD ſarà al quadrato GHIL, come ab ad 1 (58); e pertanto ſiccome l'unità è il valore del quadrato GHIL, così ſarà ab quello del parallelogrammo ABCD.

141. Debbaſi in quarto luogo miſurare qualſivoglia triangolo, come ABC. Da uno de' ſuoi angoli A ſi abbaſſi ſul lato oppoſto BC la perpendicolare AD, e determiniſi così la lunghezza di detto lato BC, come quella della perpendicolare abbaſſata AD; ſi moltiplichino poſcia tra loro i due numeri, che diſegnano dette lunghezze; e la metà del prodotto nato da queſta moltiplicazio- Fig. 48.

plicazione sarà la capacità del triangolo proposto. Fingiamo a cagion di esempio, che BC sia 6, e AD 4, vale a dire, che BC sia di sei palmi lineari, e AD di quattro; e poichè con moltiplicare 6 per 4 si produce 24, la di cui metà è 12, sarà 12 il valore del triangolo ABC, onde verrà egli ad essere di dodici palmi quadrati. E così ancora se BC sia 8, e AD 5, sarà 20 il valore del triangolo ABC; se BC sia 10, e AD 7, sarà 35 il valore dello stesso triangolo; e generalmente disegnando col cossico *a* la lunghezza del lato BC, e coll' altro *b* quella della perpendicolare AD, sarà $\frac{1}{2}\ a\ b$ il valore del triangolo ABC.

142. Considerando il lato BC come base del triangolo ABC, viene a farsi sua altezza la perpendicolare abbassata AD; onde è facile il ricavarne, che per avere la capacità di un triangolo qualsivoglia la regola sia di moltiplicare la sua base per la sua altezza, e di prendere la metà del prodotto nato da questa moltiplicazione. E poichè nel triangolo rettangolo considerando come sua base uno de' lati, che sono intorno all' angolo retto. viene a farsi l' altro lato altezza del medesimo; quindi si è, che la capacità di un triangolo rettangolo si ha con moltiplicare tra loro i due lati, che contengono l' angolo retto, e con prendere la metà del prodotto di sì fatta moltiplicazione. Per quanto poi alla ragione della riferita regola, ella si deduce da quel teorema, che se un triangolo, ed un parallelogrammo siano situati sulla stessa base, e tra le stesse parallele, il parallelogrammo debba essere duplo del triangolo [110]. Imperocchè, siccome il prodotto della base per l' altezza ci dà la capacità del parallelogrammo [140]; così la metà di un tal prodotto dee darci quella del triangolo.

143. Finalmente se si voglia l' ampiezza di ogn' altra figura piana rettilinea, non dovrà farsi altra cosa, se non che dividere la figura in triangoli per mezzo di rette tirate da uno de' suoi angoli

goli agli altri opposti, e determinare colla regola data la capacità di ciascuno di detti triangoli. Intanto si potrebbe ancora ella avere con ridurre la figura ad un sol triangolo, la qual riduzione si può ottenere facilmente con questo metodo. Sia primieramente ABCD una figura quadrilatera qualsivoglia, che debba ridursi a triangolo. Congiungasi la AC, a cui per lo punto D tirisi la parallela DE, che si vada ad incontrare col lato BC nel punto E. Io dico, che ABE sia il triangolo ricercato. E la ragione è chiara; poichè siccome i due triangoli ACD, ACE come situati sulla stessa base AC, e tra le stesse parallele AC, DE sono eguali tra loro (103); così coll' aggiunta del comune triangolo ABC, sarà ancora la figura quadrilatera ABCD eguale al triangolo ABE. Fig. 49.

144. Debbasi poscia ridurre a triangolo la figura di cinque lati ABCDE. Congiungasi primieramente la AD, a cui per lo punto E tirisi la parallela EF, che si vada ad incontrare col lato CD nel punto F; ed essendo eguali i due triangoli ADE, ADF (103), coll'aggiunta del comune quadrilatero ABCD, sarà la proposta figura ABCDE eguale ancora all' altro quadrilatero ABCF. Quindi siccome quest'altro quadrilatero con far uso del metodo precedente può ridursi a triangolo; così colla di lui riduzione si ridurrà eziandio a triangolo la figura ABCDE. E dell'istessa maniera, essendo la figura di sei lati, si ridurrà ella collo stesso artifizio primieramente ad una di cinque, indi ad un' altra di quattro, e finalmente al triangolo, che si dimanda. Nè altrimente dovrà farsi, se sia vie più maggiore il numero de' lati della figura, che si vuol ridurre a triangolo. Fig. 50.

145. Adunque per avere la capacità delle altre figure piane rettilinee, è necessario, o che elle si risolvano in tanti triangoli, quanti ne comporta la loro indole, o pure che si riducano ad un sol triangolo secondo il metodo da noi in-

 segna-

segnato. Intanto di que' trapezi, che anno due lati paralleli, può aversi la capacità nella maniera, che segue. Sia ABCD un trapezio tale, che abbia tra loro paralleli i due lati AB, DC.
Fig. 51. Dividasi il lato AD in due parti eguali nel punto E (40); indi abbassata da questo punto sul lato opposto BC la perpendicolare EF, si determini la lunghezza così del lato BC, come della perpendicolare abbassata EF; si moltiplichino poscia tra loro i due numeri, che disegnano dette lunghezze; ed il prodotto nato da questa moltiplicazione disegnerà l' ampiezza, o sia capacità del proposto trapezio.

146. Nè è difficile ad intendersi la ragione di questa regola. Imperocche, tirata per lo punto E la retta GH parallela al lato BC, che si vada ad incontrare colli due AB, DC ne' punti G, ed H, si avranno i due triangoli AEG, DEH, li quali per essere equiangoli, e per avere ancora il lato AE eguale al lato DE, che stanno opposti ad angoli eguali, saranno tra loro eguali [125]. Quindi con aggiungere ad essi la comune figura ABCHE, sarà il parallelogrammo GBCH eguale al trapezio ABCD. Onde siccome la capacità del parallelogrammo GBCH si hà con moltiplicare trà loro i due numeri, che ci additano le lunghezze della sua base BC, e della sua altezza EF (140); così colla stessa moltiplicazione si avrà altresì la capacità del trapezio ABCD.

147. Notisi quì intanto, che se dalli punti A, e D si abbassino sullo stesso lato BC l'altre perpendicolari AI, DL, la loro somma sarà dupla della sola EF. Imperocche, prolungati i due lati AD, BC per sino a che s' incontrino tra loro nel punto M, saranno le tre AI, EF, DL nella stessa ragione colle altre tre AM, EM, DM [73]. Onde siccome la somma delle due AM, DM è dupla della sola EM, così eziandio la somma delle due AI, DL sarà dupla della sola EF (62). Ed essendo così, si avrà ancora la capacità del trapezio ABCD con moltiplicare il lato

BC

BC per la metà della somma delle due AI, DL: tanto vero, che se i due lati paralleli AB, DC siano perpendicolari sul terzo BC, la stessa capacità si avrà con moltiplicare questo terzo lato BC per la somma dimezzata degli altri due lati AB, DC.

§. IV.

Di un metodo facile per dimostrare le affezioni de' rettangoli, e de' quadrati.

148. SI è veduto di sopra, che siccome il quadrato riceve la sua determinazione dalla lunghezza di uno de' suoi lati, così con moltiplicare per se stesso quel numero, che ci addita detta lunghezza, si abbia la sua capacità; e similmente, che conforme il rettangolo rimane determinato con essere dati i due lati, che contengono uno de' suoi angoli retti, così si determini la sua ampiezza con moltiplicare tra loro que' numeri, che disegnano le lunghezze di detti lati. Quindi non vi sarà mezzo più facile per investigare le affezioni de' rettangoli, e de' quadrati, quanto di disegnare con numeri cossici i loro lati, e di formarli per via delle riferite moltiplicazioni. E per darne alcuni esempj, che possano esserci in appresso di qualche uso, dimostreremo primieramente con sì fatto metodo le varie composizioni di tali figure.

149. Ed in primo luogo, se vi sono due rette, una divisa in parti, e l'altra indivisa, il loro rettangolo sarà eguale ai rettangoli fatti dalle parti della divisa nell'altra indivisa. Imperocchè disegnando coi cossici a, b, c le parti della divisa, sarà $a+b+c$ la lunghezza totale di essa; e disegnando ancora col cossico d l'altra indivisa, sarà $ad+bd+cd$ il rettangolo dell'una nell'altra: il quale rettangolo, secondo si vede, ne racchiude tre, cioè uno della parte a nell'indivisa d, l'altra della parte b nella stessa indivisa, ed

il terzo della parte c nella medesima indivisa.

150. In secondo luogo, se vi sia una retta divisa in due parti, il rettangolo fatto dalla tutta in una delle parti sarà eguale al rettangolo delle due parti, ed al quadrato della parte presa. Imperocchè, disegnando coi coffici a, e b le due parti della retta divisa, sarà $a + b$ la lunghezza di tutta la retta; onde il rettangolo fatto dalla medesima in una delle sue parti come b, sarà $ab + b^2$: il quale rettangolo, secondo si vede, contiene il rettangolo delle due parti a, e b, ed il quadrato della parte b, con cui egli è stato formato.

151. In terzo luogo, se vi sia una retta divisa in due parti, il quadrato di detta retta sarà eguale a due rettangoli fatti dalla stessa retta nelle sue parti. Imperocchè, disegnando col coffico a la retta divisa, e cogli altri b, e c le sue parti, potrà esprimersi la lunghezza della stessa retta non solo per a, ma ancora per $b + c$; onde con moltiplicare a per $b + c$, si ritroverà essere $ab + ac$ il suo quadrato: il quale quadrato, secondo si vede, racchiude due rettangoli, uno della tutta a nella parte b, l'altra della stessa tutta a nell' altra parte c.

152. In quarto luogo, se vi sia una retta divisa in due parti, il quadrato di detta retta sarà eguale ai quadrati delle sue parti, e a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime parti. Si disegnino perciò coi coffici a, e b le due parti della retta divisa; e siccome la lunghezza di tutta la retta sarà $a + b$, così con moltiplicare $a + b$ per $a + b$, si ritroverà essere $a^2 + 2ab + b^2$ il suo quadrato: il quale quadrato, secondo si vede, racchiude non solo i quadrati delle due parti a, e b, ma eziandio due volte il rettangolo delle medesime parti.

153. In quinto luogo, se vi sia una retta divisa in due parti, i due quadrati della tutta, e di una delle sue parti saranno eguali a due volte il rettangolo della tutta nella detta parte insieme

col

col quadrato dell' altra parte. Imperocche, disegnando coi cossici a, e b le due parti della retta divisa, sarà $a+b$ la lunghezza della medesima, e $a^2+2ab+b^2$ il suo quadrato. Quindi, aggiungendo a questo quadrato l' altro di una delle parti, come di b, la somma di amendue sarà $a^2+2ab+2b^2$: nella quale somma, secondo si vede, non solo si contiene $2ab+2b^2$, che è due volte il rettangolo della tutta $a+b$ nella parte b, ma ancora a^2, che è il quadrato dell' altra parte a.

154. In sesto luogo, se vi sia una retta divisa in due parti, il quadrato della tutta e di una delle sue parti unite insieme sarà eguale a quattro volte il rettangolo della tutta nella detta parte insieme col quadrato dell' altra parte. Si disegnino perciò coi cossici a, e b le parti della retta divisa; e siccome $a+b$ sarà l' intera sua lunghezza, così aggiungendo alla medesima una delle parti, come b, sarà $a+2b$ la loro somma, e $a^2+4ab+4b^2$ il quadrato di detta somma: nel quale quadrato, secondo si vede, non solo si racchiude $4ab+4b^2$, che è quattro volte il rettangolo della tutta $a+b$ nella parte b, ma ancora a^2, che è il quadrato dell' altra parte a.

155. In settimo luogo, se vi sia una retta divisa in due parti eguali, ed in due altre disuguali, il rettangolo delle parti disuguali insieme col quadrato della porzione frapposta tra l' una, e l' altra divisione sarà eguale al quadrato della metà. Imperocche, disegnando col cossico a questa metà, e coll' altro b quella porzione frapposta; sarà $a+b$ la parte maggiore, ed $a-b$ la parte minore. Quindi, siccome con moltiplicare $a+b$ per $a-b$, si ritroverà essere a^2-b^2 il rettangolo delle sue parti disuguali; così con aggiungerli b^2, che è il quadrato della porzione frapposta, si avrà per loro somma a^2, che è il quadrato della metà a.

156. In ottavo luogo, se vi sia una retta divisa in due parti eguali, a cui sia aggiunta un'

altra a dirittura, il rettangolo della tutta e dell' aggiunta, come una sola retta, nella stessa aggiunta insieme col quadrato della metà sarà eguale al quadrato della metà e dell' aggiunta, come una retta sola. Imperocchè, disegnando col cossico a la metà e l' aggiunta insieme, e coll' altro b la sola metà; sarà $a+b$ la tutta insieme coll' aggiunta, ed $a-b$ l' aggiunta sola. Quindi, siccome con moltiplicare $a+b$ per $a-b$, si ritroverà essere a^2-b^2 il loro rettaangolo; così con aggiungerli b^2, che è il quadrato della metà, si avrà per loro somma a^2, che è il quadrato di a, cioè della metà e dell' aggiunta insieme.

157. In nono luogo, se vi sia una retta divisa in due parti eguali, ed in due altre disuguali, saranno i quadrati delle parti disuguali eguali al doppio de' quadrati, che si fanno dalla metà, e dalla porzione frapposta tra l' una, e l' altra divisione. Si disegni perciò, come sopra, col cossico a la metà della retta, e col cossico b la porzione frapposta. E siccome sarà $a+b$ la parte maggiore, ed $a-b$ la parte minore; così sarà altresì $a^2+2ab+b^2$ il quadrato della prima, ed $a^2-2ab+b^2$ il quadrato della seconda. Ed essendo $2a^2+2b^2$ la somma di amendue, si vede chiaramente, che ella sia doppia de' quadrati fatti dalla metà a, e dalla porzione frapposta b.

158 Finalmente, se vi sia una retta divisa in due parti eguali, a cui sia aggiunta un' altra a dirittura, i due quadrati, uno della tutta e dell' aggiunta, come una sola retta, e l' altro della sola aggiunta, saranno eguali al doppio di due altri quadrati, de' quali uno è fatto dalla metà e dall' aggiunta, come una retta sola, e l' altro dalla sola metà. Si disegni perciò, come sopra, col cossico a la metà e l' aggiunta insieme, e coll' altro b la sola metà. E siccome sarà $a+b$ la tutta e l' aggiunta, ed $a-b$ l' aggiunta sola; così sarà altresì $a^2+2ab+b^2$ il quadrato della prima, ed $a^2-2ab+b^2$ il quadrato della seconda. Ed essendo $2a^2+2b^2$ la somma di amen-

due

due, si vede chiaramente, che ella sia doppia di due altri quadrati, de' quali uno è fatto da a, cioè dalla metà e dall' aggiunta insieme, e l'altro da b, cioè dalla sola metà.

159. Coll'istesso metodo potrà comprovarsi ancora queltanto dimostrano i Geometri intorno alle rette proporzionali, cioè che essendo queste quattro di numero, il rettangolo delle due estreme debba essere eguale al rettangolo delle due di mezzo. Si disegni perciò col cossico n la quantità della ragione così della prima alla seconda, come della terza alla quarta. E disegnando in oltre coi cossici a, e b la seconda, e la quarta; chiara cosa si è, che debba essere na l'espressione della prima, ed nb l'espressione della terza. Quindi le quattro rette proporzionali saranno na, a, nb, b; nelle quali si vede chiaramente aversi l'istesso prodotto con moltiplicare tra loro, così le due estreme, come le due di mezzo.

160. Che se poi le rette proporzionali siano tre, di modo che la loro proporzione sia continua; in tal caso dimostrano i Geometri, che il rettangolo delle due estreme debba essere eguale al quadrato di quella di mezzo. E ciò ancora può comprovarsi coll'istesso metodo. Si disegni pertanto col cossico n la quantità della ragione, così della prima alla seconda, come della seconda alla terza. E disegnando in oltre col cossico a la terza, sarà na la seconda, ed n^2a la prima. Quindi le tre rette continuamente proporzionali saranno n^2a, na, a; nelle quali vedesi chiaramente aversi l'istesso prodotto, sia che si moltiplichino tra loro le due estreme, sia che si moltiplichi per se stessa quella di mezzo.

161. Mà le converse di queste proprietà, che dimostrano i Geometri similmente aver luogo, possono collo stesso metodo eziandio comprovarsi. Se adunque vi sono quattro rette, ed il rettangolo delle due estreme sia eguale al rettangolo delle due di mezzo, quelle tali quattro rette dovranno essere tra loro proporzionali. Per

investigarlo col riferito metodo, si disegnino coi cossici a, b, c, d le quattro rette; indi facciasi come a à b, così c ad una quarta proporzionale [70], che si disegni per e. Essendo adunque a, b, c, e quattro rette proporzionali, sarà $ae = bc$ (159). Mà si vuole, che sia ancora $ad = bc$. Dunque sarà $ae = ad$, ed in conseguenza $e = d$: Onde non solo le quattro a, b, c, e, ma eziandio le quattro a, b, c, d saranno tra loro proporzionali.

162. Che se poi vi sono tre rette, ed il rettangolo delle due estreme sia eguale al quadrato di quella di mezzo; quelle tali tre rette saranno continuamente proporzionali tra loro. Per comprovarlo col divisato metodo, si disegnino coi cossici a, b, c le tre rette, che si debbono dimostrare continuamente proporzionali tra loro; indi facciasi come a à b, così b ad una terza proporzionale [70], che si disegni per d. Ed essendo a, b, d tre rette continuamente proporzionali, sarà $ad = b''$ [160]. Mà si vuole, che sia ancora $ac = b''$. Dunque sarà $ad = ac$, ed in conseguenza $d = c$: onde non solo le tre a, b, d, mà eziandio le tre a, b, c saranno trà loro continuamente proporzionali.

163. Alla perfine faremo uso dell'istesso metodo in comprovare le proprietà, che si dimostrano da Geometri intorno ai triangoli considerati per rapporto ai loro angoli. E per incominciare dal triangolo rettangolo, noteremo primieramente, che se in esso dall'angolo retto si abbassi sul lato apposto, chiamato ipotenusa, la perpendicolare; rimarrà egli da questa diviso in due altri triangoli rettangoli, che saranno equiangoli così tra loro, come coll'istesso triangolo
Fig. 32. proposto. Sia perciò ABC un triangolo, che abbia in A l'angolo retto. Si abbassi da quest'angolo sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD. Io dico, che i tre triangoli ABC, ABD, ACD siano tra loro equiangoli.

164. Imperocche per quanto ai due ABC, ABD

ABD, questi oltre all'angolo comune, che anno in B, sono forniti ancora delli due angoli BAC, BDA, i quali come retti sono tra loro eguali; onde avranno ancora il terzo ACB eguale al terzo BAD, e per tanto saranno equiangoli. Similmente per quanto ai due ABC, ACD, questi oltre all'angolo comune, che anno in C, sono dotati ancora delli due angoli BAC, CDA, i quali come retti sono tra loro eguali; onde avranno altresì il terzo ABC eguale al terzo CAD, ed in conseguenza saranno equiangoli. Quindi per l'uguaglianza delli riferiti angoli saranno eziandio equiangoli i due triangoli ABD, ACD, ne' quali resta diviso dalla perpendicolare AD il proposto triangolo ABC.

165. Noteremo ancora, che nel triangolo rettangolo ABC, con abbassare dall'angolo retto A sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD, si avranno tre proporzioni continue. Imperocchè si è avvertito di sopra(114),che ne'triangoli equiangoli non solo debbono essere proporzionali i lati, che stanno intorno agli angoli eguali, mà che omologi ancora siano que' lati, che sono opposti ad angoli eguali. Adunque per gli triangoli equiangoli ABC, ABD sarà primieramente, come BC ad AB, così AB à BD; per gli altri poi ABC, ACD sarà come BC ad AC, così AC à CD; ed in fine per gli due ABD, ACD sarà come BD ad AD, così AD à CD: di modo che siccome in quest'ultima la perpendicolare AD viene ad essere mezza proporzionale tra le due porzioni dell'ipotenusa; così nelle due prime ciascuno de' lati AB, AC si fà mezza proporzionale trà l'ipotenusa, e la porzione adjacente a detto lato.

166. Notate tali cose, egli è ora da sapersi, che essendo il triangolo ABC rettangolo in A, il quadrato dell'ipotenusa BC, ovvero del lato opposto all'angolo retto, debba essere eguale ai quadrati degli altri due lati AB, AC. Per dimostrarlo, pongasi $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$,

BD

BD$=d$, e CD$=e$. Essendo adunque come BC ad AB, così AB à BD, sarà come c ad a, così a à d; e pertanto sarà $cd=a^2$ [160]. Similmente, essendo come BC ad AC, così AC à CD; sarà come c à b, così b ad e; ed in conseguenza sarà $ce=b^2$. Quindi avremo ancora $cd+ce=a^2+b^2$; onde essendo $cd+ce=c^2$ (151), sarà $c^2=a^2+b^2$, cioè il quadrato dell' ipotenusa BC eguale ai quadrati degli altri due lati AB, AC.

Fig. 53. 167. Essendo poi il triangolo ABC ottusangolo in A, il quadrato del lato BC opposto all' angolo ottuso dovrà essere maggiore de' quadrati degli altri due lati AB, AC in due volte il rettangolo fatto da uno di detti lati nella porzione, che gli aggiunge la perpendicolare abbassata su di esso dall' angolo opposto. Si abbassi perciò sul lato AB prolungato la perpendicolare CD, e pongasi AB$=a$, AC$=b$, BC$=c$, AD$=d$, e CD$=f$, dimodocche sia la tutta BD$=a+d$. Essendo adunque il triangolo ADC rettangolo in D, sarà $b^2=d^2+f^2$; e similmente essendo l' altro triangolo BDC eziandio rettangolo in D, sarà $c^2=a^2+2ad+d^2+f^2$. Quindi ponendo in luogo di d^2+f^2 il suo valore b^2, sarà ancora $c^2=a^2+2ad+b^2$; e pertanto il quadrato del lato BC opposto all' angolo ottuso sarà maggiore de' quadrati degli altri due lati AB, AC in due volte il rettangolo di AB in AD.

Fig. 54 168. Ed in fine, se il triangolo ABC abbia in A un angolo acuto, il quadrato del lato BC opposto a detto angolo dovrà essere minore de' quadrati degli altri due lati AB, AC in due volte il rettangolo fatto da uno di detti lati nella porzione tagliata da esso per la perpendicolare abbassata dall' angolo opposto. Si abbassi perciò sul lato AB la perpendicolare CD, e pongasi parimente AB$=a$, AC$=b$, BC$=c$, AD$=d$, e CD$=f$, dimodocche sia la rimanente BD$=a-d$. Essendo adunque il triangolo ADC rettangolo in D, sarà $b^2=d^2+f^2$; ed essendo l'altro triangolo BDC ancora rettangolo in D, sarà $c^2=a^2-2ad$

+d

$+d^2+f^2$. Quindi ponendo in luogo di d^2+f^2 il suo valore b^2, sarà altresì $c^2=a^2-2ad+b^2$; e pertanto il quadrato del lato BC opposto all'angolo acuto sarà minore de' quadrati degli altri due lati AB, AC in due volte il rettangolo di AB in AD.

169. Quest'ultima proprietà può adattarsi ad ogni spezie di triangolo, per la ragione, che di qualunque forma sia il triangolo, dee sempre egli avere non uno, ma due angoli acuti. Si vuol però avvertire, che siccome nel triangolo rettangolo la perpendicolare dee essere sempre abbassata dall'angolo retto, affinchè non si confonda con uno de' lati; così nell'ottusangolo può ella abbassarsi tanto dall' angolo ottuso, quanto dall' altro angolo acuto. Or se mai ABC sia il triangolo ottusangolo, e volendosi considerare la riferita proprietà per rapporto all'angolo acuto A, si abbassi la perpendicolare CD dall' altro angolo acuto C; chiara cosa si è, che in questo caso la porzione AD dee essere maggiore del lato AB; onde sarà non già $a-d$, ma $d-a$ il valore della BD. Intanto con tutto questo divario pure ritorna la stessa proprietà, per essere $a^2-2ad+d^2$ non meno il quadrato di $a-d$, che quello di $d-a$.

Ive Fig. 55.

Ive

§. V.

Di altre operazioni intorno alle figure piane rettilinee.

170. Le riferite proprietà de' triangoli, che riguardano i quadrati descritti da loro lati, possono essere per la pratica di grandissimo uso. Ed in primo luogo in un triangolo rettangolo potrà determinarsi, così l'ipotenusa essendo dati i due lati intorno all'angolo retto, come uno di questi lati essendo data l'ipotenusa coll'altro lato. Sia perciò il triangolo ABC rettangolo in A, e pongasi $AB=a$, $AC=b$, e $BC=c$. Dovendo essere adunque il quadrato dell'

Fig. 52.

dell'ipotenusa BC eguale ai quadrati dei due lati AB, AC (166); sarà $c^2 = a^2 + b^2$, e $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. E poiche per la stessa ugualianza dee essere ancora $b^2 = c^2 - a^2$; sarà $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$. Quindi dati i due lati AB, AC si determinerà l'ipotenusa BC, con unire insieme i quadrati di detti lati, e con cavare dalla somma la radice quadrata; data poi l'ipotenusa BC col lato AB si determinerà l'altro lato AC, con togliere dal quadrato dell'ipotenusa il quadrato del lato dato e con estrarre dal residuo la radice quadrata.

171. In secondo luogo nell'istesso triangolo rettangolo ABC dati i due lati AB, AC coll'ipotenusa BC, potrà determinarsi così ciascuna delle due porzioni BD, CD, nelle quali resta divisa l'ipotenusa dalla perpendicolare AD, come la perpendicolare medesima. Perciò ponendo, come sopra, AB $= a$, AC $= b$, e BC $= c$, pongasi in oltre BD $= d$, CD $= e$, ed AD $= f$. Dovendo essere adunque come BC ad AB, così AB à BD, e come BC ad AC, così AC à CD [165]; sarà così $cd = a^2$, come $ce = b^2$; ed in conseguenza sarà ancora $d = a^2 : c$, ed $e = b^2 : c$; onde con dividere il quadrato di ciascheduno lato per l'ipotenusa, si avrà la porzione adjacente a detto lato. E dovendo essere altresì come BD ad AD, così AD à CD; sarà $f^2 = de$, ed $f = \sqrt{de}$; onde con moltiplicare tra loro le due porzioni, e con estrarre dal prodotto la radice quadrata, si avrà la perpendicolare AD.

172. Notisi quì intanto, che questa perpendicolare AD può essere determinata ancora, così per mezzo di una sola porzione dell'ipotenusa, e del lato adjacente a detta porzione, come per mezzo di tutti tre i lati del triangolo. Ed in vero, essendo il triangolo ADB rettangolo in D, sarà non solo $a^2 = d^2 + f^2$, ma eziandio $f^2 = a^2 - d^2$; e pertanto dovendo essere $f = \sqrt{(a^2 - d^2)}$, chiara cosa si è, che con togliere dal quadrato del lato AB il quadrato della porzione

zione adjacente B D, e con cavare dal residuo la radice quadrata, si avrà la perpendicolare A D. Essendosi poi ritrovato di sopra così $d = a^2 : c$, come $e = b^2 : c$, e dovendo essere $f^2 = de$; sarà ancora $f^2 = a^2 b^2 : c^2$, ed $f = ab : c$; onde con moltiplicare tra loro i due lati A B, A C, che sono intorno all' angolo retto, e con dividere il prodotto per l' ipotenusa B C, si avrà di nuovo la perpendicolare A D.

173. In terzo luogo, se il triangolo ABC sia ottusangolo in A, e sul lato A B sia abbassata dall' angolo opposto la perpendicolare C D, potremo dati tutti tre i lati del triangolo determinare così la porzione A D, come la perpendicolare abbassata C D. Pongasi perciò $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, e $CD = f$. Dovendo adunque essere per la proprietà (167) di questo triangolo $c^2 = a^2 + b^2 + 2ad$, sarà $2ad = c^2 - a^2 - b^2$, e $d = (c^2 - a^2 - b^2) : 2a$; onde con togliere dal quadrato del lato BC opposto all' angolo ottuso i quadrati degli altri due lati A B, A C, e con dividere il residuo per lo doppio del lato A B, si avrà la porzione A D. E di poi per l' altro triangolo A D C rettangolo in D dovendo essere $b^2 = d^2 + f^2$ [166], sarà $f = \sqrt{[b^2 - d^2]}$; onde con togliere dal quadrato del lato A C il quadrato della porzione ritrovata A D, e con estrarre dal residuo la radice quadrata, si avrà la perpendicolare C D. Fig. 53.

174. Ed in fine, se il triangolo A B C abbia in A un' angolo acuto, e sul lato A B sia abbassata dall' angolo opposto la perpendicolare C D, potremo dati tutti tre i lati del triangolo eziandio determinare, così la porzione A D, come la perpendicolare abbassata C D. Pongasi perciò $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, e $CD = f$. Dovendo adunque essere per la proprietà di questo triangolo (168) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ad$, sarà $2ad = a^2 + b^2 - c^2$, e $d = (a^2 + b^2 - c^2) : 2a$; onde con togliere il quadrato del lato BC opposto all' angolo acuto dai quadrati degli altri due lati Fig. 54.

ti

ti A B, A C, e con dividere il residuo per lo doppio del lato A B, si avrà la porzione A D. E di poi per l'altro triangolo A D C rettangolo in D dovendo essere $b^2 = d^2 + f^2$ [166], sarà $f^2 = b^2 - d^2$, ed $f = \sqrt{(b^2 - d^2)}$; onde con togliere dal quadrato del lato A C il quadrato della porzione ritrovata A D, si avrà la perpendicolare C D.

175. Or egli è da notarsi, che siccome la regola per determinare la capacità di un triangolo, si è di moltiplicare la base per l'altezza, e di prendere la metà del prodotto; così per porre in pratica detta regola de' esserci nota così la base del triangolo, che è uno de' suoi lati, come l'altezza del medesimo, che è la perpendicolare abbassata sù quel lato dall'angolo opposto. Quindi, perche avviene ben spesso, che in un triangolo siano noti tutti tre lati, ma non già la perpendicolare, che da uno degli angoli del triangolo cade sul lato opposto; perciò era necessario il far vedere, come colla conoscenza, che si ha de' lati di un triangolo, possa determinarsi la riferita perpendicolare. Ma questo stesso presentemente ci pone in istato d' investigare la regola dataci da Teone antico Geometra per determinare la capacità di un triangolo per mezzo de' soli lati: con avvertire soltanto, che la differenza di due quadrati, come $a^2 - b^2$, sia eguale al rettangolo della somma de' loro lati $a + b$ nella differenza degli stessi lati $a - b$, secondo si vede col calcolo medesimo.

176. Riprendiamo adunque l' ultimo triangolo
Fig. 54 lo A B C, che quantunque abbia in A l' angolo acuto, può essere tutta volta di qualunque spezie si voglia (169). Ed essendosi posto A B $= a$, A C $= b$, B C $= c$, A D $= d$, e C D $= f$, si è ritrovato $d = (a^2 + b^2 - c^2) : 2a$, ed $f = \sqrt{(b^2 - d^2)}$. Quindi per l'avvertimento fatto dovendo essere $b^2 - d^2$ eguale al prodotto di $b + d$ in $b - d$, sarà ancora $b^2 - d^2$ eguale al prodotto di $b + [a^2 + b^2 - c^2] : 2a$ in $b + [c^2 - a^2 - b^2] : 2a$, o pure di $(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) : 2a$ in $[c^2 -$

$a^2 +$

$a^2 + 2ab - b^2$]: $2a$. Ma per lo ſteſſo avvertimento $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ è il prodotto di $a+b+c$ in $a+b-c$; e $c^2 - a^2 + 2ab - b^2$ è il prodotto di $c+a-b$ in $c-a+b$. Dunque ſarà ancora $b^2 - d^2$ eguale al prodotto delle quattro quantità $a+b+c$, $a+b-c$, $c+a-b$, $c-a+b$ diviſo per $4a^2$; ed f eguale alla radice quadrata di quel tale prodotto diviſa per $2a$.

177. Or delle quattro quantità, che formano il riferito prodotto, ſiccome la prima $a+b+c$ è la ſomma di tutti tre i lati del triangolo, così le altre tre $a+b-c$, $c+a-b$, $c-a+b$ ſono le tre differenze tra le ſomme degli ſteſſi lati preſi a due a due, ed il lato rimanente. Quindi ſi avrà la perpendicolare C D $= f$ prima con prendere così quella ſomma, come queſte tre differenze, indi con moltiplicarle tutte quattro tra loro, poſcia con cavare dal prodotto la radice quadrata, ed in fine con dividere queſta radice per lo doppio del lato A B, ſu di cui cade la perpendicolare. E poichè la capacità del triangolo ſi ha con moltiplicare C D per A B, e con prendere la metà del prodotto; ſi vede da ciò, che ſi avrà la ſteſſa capacità con prendere la quarta parte della riferita radice quadrata, che è appunto la regola di Teone.

178. Del rimanente per non tralaſciare coſa alcuna intorno all'argomento, di cui ſi tratta, ſi vuol quì avvertire, che ſiccome tra tutte le figure piane la più ſemplice a concepirſi ſi è il quadrato; così ſogliono i Geometri, non ſolo miſurare ogn'altra figura piana con un dato quadrato, ma ridurre altresì a quadrato la ſteſſa figura, di cui ſi tratta. Or ſe la figura piana ſia rettilinea, e ſiaſi determinata la ſua capacità, egli è facile di determinare ancora il quadrato, che uguagli detta figura; poichè ſiccome dal numero, che ci addita la capacità di eſſa, può eſtrarſi la radice quadrata, così il quadrato della retta diſegnata da queſta radice ſarà quello, che ſi dimanda. Quindi ſecondo queſta regola ſe la

capa-

capacità della figura sia 25, sarà 5 il lato del quadrato eguale; se la capacità sia 100, sarà 10 il lato dello stesso quadrato; e generalmente essendo ab la capacità della figura data, sarà $\sqrt{ab}$ il lato del quadrato, che l'uguaglia.

179. Ma senza venire alla misura della figura piana rettilinea, di cui si tratta, egli è facile eziandio con costruzione geometrica di ritrovare un quadrato, che sia eguale a detta figura. Ed in vero già si è insegnato di sopra, come geometricamente, ed in una maniera facile possa ridursi a triangolo qualsisia altra figura piana rettilinea. Quindi per mezzo di questa riduzione basterà far vedere, come possa formarsi un quadrato, che sia eguale ad un dato triangolo. Sia perciò A B C il triangolo dato, e dividasi uno de' suoi lati BC in due parti eguali nel punto D. Tirando adunque per lo punto A la retta E F parallela allo stesso lato, ed alzando sul medesimo dai punti B, e D le perpendicolari BE, DF fino alla parallela tirata; chiara cosa si è, che il triangolo A B C sia eguale al rettangolo EBDF (110). Onde con quest'altra riduzione si ridurrà il problema a formare un quadrato, che sia eguale al rettangolo E B D F.

Fig. 56.

180. Or si è veduto di sopra [160], che se vi sono tre rette continuamente proporzionali, il quadrato di quella di mezzo debba essere eguale al rettangolo delle due estreme. Quindi se mai tra i due lati B E, B D del rettangolo E B D F potesse ritrovarsi la mezza proporzionale, il quadrato di questa mezza sarebbe eguale al rettangolo EBDF. Dipende adunque la formazione del quadrato, che si dimanda dall' invenzione della mezza proporzionale tra due rette date: la quale mezza non dureremo fatica a ritrovare, se ci richiamiamo a memoria due teoremi. I, che l' angolo situato nella metà dell' intera linea circolare sia retto; e II, che in un triangolo rettangolo, con abbassare dall' angolo retto sull' ipotenusa la perpendicolare, s' incontrano, non una

ma,

ma tre proporzioni continue, che ſuſſiſtono di lor natura in tre ſoli termini.

181. Siano date adunque le due rette AB, BC, e debbaſi tra di eſſe ritrovare la mezza proporzionale. Si ſituino le due rette date in modo tale, che l'una ſia a dirittura coll'altra; indi, diviſa la tutta AC in due parti eguali nel punto D(40), deſcrivaſi col centro D, e coll'intervallo DA, ovvero DC la mezza linea circolare AEC; ſi alzi finalmente ſulla AC la perpendicolare BE, che s'incontri colla deſcritta linea nel punto E; ed io dico, che queſta BE ſarà la mezza proporzionale tra le due rette date AB, BC. Imperocchè, congiungendo le altre due AE, CE, per lo primo dei due riferiti teoremi dovrà eſſere retto l'angolo AEC. Quindi nel triangolo rettangolo ACE eſſendoſi abbaſſata dall'angolo retto ſull'ipotenuſa AC la perpendicolare EB, ſarà per l'altro teorema come AB a BE, così BE a BC; e per tanto la BE ſarà mezza proporzionale tra le due rette date AB, BC. Fig. 57.

182. Secondo queſta coſtruzione niente ora ſarà più facile, quanto di formare un quadrato, che ſia eguale al rettangolo EBDF, ed in conſeguenza eguale ancora al triangolo ABC. Prolunghiſi il lato EB ~~per~~ fino al punto G, di modo che ſia la BG eguale all'altro lato BD; indi diviſa la tutta EG in due parti eguali nel punto H(40), deſcrivaſi col centro H, e coll'intervallo HE, ovvero HG la mezza linea circolare ELG; diſtendaſi il lato DB ~~per~~ fino a che s'incontri con detta linea nel punto L; ed il quadrato della BL ſarà eguale così al rettangolo EBDF, come al triangolo ABC. Or con ridurre a quadrati le figure piane rettilinee, potremo ancora determinare geometricamente, e la ſomma di due di eſſe, e la differenza che vi è tra una maggiore, ed un'altra minore; poichè non ſi dovrà fare altra coſa, ſe non che determinare, o la ſomma di due quadrati, o la diffe- Fig. 56.

renza tra un quadrato maggiore, ed un' altro minore: il che è facile ad eseguirsi.

183. Ed in primo luogo, se si voglia la somma de' quadrati fatti dalle due A B, B C, basterà congiungere queste tra loro in guisa tale, che l' angolo A B C sia retto; poichè tirando poscia la terza retta A C, per la proprietà del triangolo rettangolo (166) sarà il quadrato della A C eguale ai quadrati delle due A B, B C. Che se poi si voglia la differenza tra il quadrato della retta maggiore A B, e l' altro della minore B C, prima si alzi su questa minore B C la perpendicolare C D, ed indi col centro B, e coll' intervallo dell' altra B A descrivasi un' archetto circolare, che seghi la C D nel punto E; poichè siccome per la stessa proprietà del triangolo rettangolo il quadrato della C E de[ve] essere eguale all' eccesso, con cui il quadrato della B E supera il quadrato della B C, così sarà egli eguale ancora all' eccesso, con cui il quadrato della A B supera il quadrato della stessa B C.

Fig. 58.

Fig. 59

184. Quì cade in acconcio di risolvere geometricamente due altri problemi. Il primo si è di dividere una data retta, come A B, in guisa tale, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un' altra retta data C D. Dividasi perciò la A B in due parti eguali nel punto E; indi con questo punto come centro, e coll' intervallo di E A, ovvero E B descrivasi la mezza linea circolare A G B; alzisi poscia sulla A B la perpendicolare A F eguale all' altra data C D; e se tirata la F G parallela alla A B, che s' incontri colla linea circolare nel punto G, si abbassi da questo punto sulla stessa A B l' altra perpendicolare G H, sarà il rettangolo delle due A H, B H eguale al quadrato, così della G H, come della sua eguale C D. E poichè ponendo $AB = a$, e $CD = GH = b$, si fa $EG = \frac{1}{2}a$, ed $EH = \surd[\frac{1}{4}a^2 - b^2]$, sarà $AH = \frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, e $BH = \frac{1}{2}a + \surd[\frac{1}{4}a^2 - b^2]$.

Fig. 60.

185. L' altro si è di prolungare una data retta,

ta, come A B, talmente [redacted] ſino al punto G, che il rettangolo delle due A G, B G ſia eguale Fig. 61.
al quadrato dell'altra data CD. Dividaſi perciò la AB in due parti eguali nel punto E (40), da cui ſulla ſteſſa A B alziſi la perpendicolare E F eguale all'altra C D; ſi diſtenda di poi la A B talmente [redacted] ſino al punto G, che ſia la E G eguale alla B F; ed il rettangolo delle due A G, B G, ſiccome inſieme col quadrato della B E è eguale al quadrato della EG ovvero BF (156), così ſolo ſarà eguale al quadrato della E F, o ſia C D. E poichè, ponendo $AB = a$, e $CD = EF = b$, ſi fa $BE = \frac{1}{2}a$, ed $EG = \sqrt{[\frac{1}{4}a^2 + b^2]}$, ſarà $AG = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} + \frac{1}{2}a$, e $BG = \sqrt{[\frac{1}{4}a^2 + b^2]} - \frac{1}{2}a$.

186. Hò voluto quì ſoggiungere queſti due problemi, come quelli, a' quali ſi riducono tutti gli altri problemi piani, che ſono d' indole compoſta; ma per eſſi biſogna avvertire, che ſiccome il ſecondo è ſempre ſolubile di ſua natura, così il primo al contrario potrebbe tal volta eſſere impoſſibile: locche avviene, quando la parallela F G non s'incontra colla linea circolare, o pure, che è lo ſteſſo, quando l'altra retta Fig. 60.
data C D è maggiore della metà della prima A B. Quindi ancora per gli altri problemi piani, che a queſti due ſi riducono, è neceſſario avvertire, che coloro, i quali ſi rapportano al ſecondo, ſono ſempre capaci di ſoluzione; ma non così gli altri, che al primo riferir ſi debbono. Ed è neceſſario al Geometra un tal'avvertimento; poichè ſiccome egli dee riſolvere que' problemi, che di lor natura ſono ſolubili, così dee conoſcere, donde deriva l'impoſſibilità di coloro, che non ſi poſſono riſolvere.

187. Col ſecondo problema ſpezialmente può riſolverſi il ſeguente, che è di grandiſſimo uſo per le coſe, che dovremo dire in appreſſo, cioè di dividere una data retta, come A B, talmente in due parti diſuguali, che il rettangolo della Fig. 62.
tutta nella parte minore ſia eguale al quadrato della parte maggiore. Prolunghiſi perciò la A B

talmente ~~per~~ ſino al punto C, che il rettangolo delle due AC, BC ſia eguale al quadrato della ſteſſa AB; tagliſi di poi dalla AB la porzione BD eguale alla BC; ed io dico, che il rettangolo della tutta AB nella parte AD ſia eguale al quadrato dell' altra parte BD. Imperocche, ſiccome il quadrato della tutta AB è eguale ai due rettangoli fatti dalla ſteſſa tutta nelle ſue parti AD, BD (151); così per eſſere la BC eguale alla BD, ſarà il rettangolo delle due AC, BC eguale al rettangolo delle due AB, BD, ed al quadrato della BD (150). Onde, con togliere il comune rettangolo delle due AB, BD, ſarà il rettangolo della tutta AB nella parte AD eguale al quadrato dell' altra parte BD.

188. Or dividendoſi la AB con legge tale nel punto D, che il rettangolo della tutta AB nella parte minore AD ſia eguale al quadrato dell' altra parte maggiore BD, egli è chiaro, che ſarà come la tutta AB alla parte maggiore BD, così queſta ſteſſa parte BD all' altra minore AD; e quindi ſi è, che la AB diceſi da Geometri diviſa in eſtrema, e media ragione nel punto D. Ma dalla coſtruzione medeſima egli è facile a ricavarne i valori di amendue le parti BD, AD. Pongaſi perciò $AB = a$; ed eſſendoſi fatto il rettangolo delle due AC, BC eguale al quadrato della ſteſſa AB, ſarà $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$ [185], e $BC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$. Ma ſi è fatta la BD eguale alla BC. Dunque ſarà eziandio la $BD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, e per tanto ſarà l'altra $AD = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

CAPITOLO III.

Del cerchio, e delle figure piane regolari.

189. Delle figure piane, oltre alle rettilinee, che ſono terminate da linee rette, ne diſtinguono i Geometri due altre claſſi: cioè le curvilinee, che ſono racchiuſe da linee curve; e le

e le miſtilinee, i di cui termini ſono linee rette, e linee curve miſchiate inſieme. Or per l' infinita varietà delle linee curve, non è egli da porſi in dubbio, che infinite altresì ſiano le ſpezie così dell'une, come dell' altre figure; ma noi ci reſtringeremo alla ſola conſiderazione del cerchio, che è una figura piana terminata dalla linea circolare, e delle varie porzioni, che poſſono da eſſo tagliarſi per mezzo di linee rette; ed in queſto capitolo tratteremo ancora di quelle figure piane rettilinee, che comunemente ſi appellano regolari; sì perchè queſte tali figure di lor natura debbono andare accompagnate col cerchio; come ancora perchè il cerchio medeſimo può eſſere conſiderato come l' ultima di sì fatte figure.

§. I.

Delle principali affezioni del cerchio.

190. SIccome il cerchio è una figura piana terminata dalla linea circolare, così queſta linea, che ne coſtituiſce il termine, ſi appella ancora ſua circonferenza. Quelle rette poi, che tirate dal centro alla circonferenza debbono eſſere tra loro tutte eguali, ſi chiamano raggi del cerchio; e ſe uno di queſti raggi ſi prolunghi verſo il centro per ſino a che s' incontri di nuovo colla circonferenza dalla parte oppoſta, il medeſimo così prolungato ſi dirà eſſere diametro del cerchio. Si vede intanto, che tutti i diametri di un' iſteſſo cerchio debbono eſſere eziandio tra loro eguali, e che ciaſcuno di detti diametri debba dividere il cerchio in due parti eguali, le quali perciò comunemente ſi appellano mezzi cerchi, o pure ſemicerchi.

191. Or intorno al centro del cerchio due ſono i teoremi degni da notarſi. Il primo ſi è, che ſe nel cerchio A B C D vi ſiano due rette, come A C, B D, e la prima di eſſe A C ſeghi l' Fig. 63.

 altra

altra BD in due parti eguali, e ad angoli retti, nella AC dovrà ritrovarsi il centro del cerchio. Quindi niente sarà più facile, quanto di determinare il centro del cerchio ABCD; poichè adattando dentro di esso ad arbitrio una retta BD, e dividendo questa retta in due parti eguali nel punto E (40), basterà alzare da questo punto sulla stessa retta la perpendicolare AC, che s' incontri colla circoferenza dall' una, e l' altra parte, ed indi dividere la AC egualmente nel punto F, che sarà il centro ricercato. Ma per lo contrario se la AC passi per lo centro, e seghi l' altra BD, che non vi passa, non potrà segarla ad angoli retti, se non la seghi ancora in due parti eguali, nè potrà segarla in due parti eguali, se non la seghi eziandio ad angoli retti; e quindi si è, che due rette nel solo centro possono segarsi amendue egualmente.

192. L' altro teorema si è, che se da un punto preso dentro di un cerchio cadono alla sua circonferenza tre rette eguali, quel punto dovrà essere il centro del cerchio; e per mezzo di questo teorema egli è facile altresì, di determinare
Fig. 64. 65. 66. il centro di qualunque porzione del cerchio. Sia perciò la porzione di cerchio ABC, e debbasi determinare il suo centro. Si divida la AC in due parti eguali nel punto D (40), da cui si alzi sulla stessa AC la perpendicolare DB, che s' incontri colla circonferenza nel punto B, e congiungasi la AB. Or se mai i due angoli DAB, DBA si ritrovino tra loro eguali, tantocche siano eguali ancora le due DA, DB; l' istesso punto D sarà il centro della porzione. Ma se poi quei due angoli siano disuguali, facciasi l' angolo BAE eguale all' angolo DBA (43); ed incontrandosi tra loro le due AE, BD nel punto E, saranno eguali le tre AE, BE, CE; ed in conseguenza il punto E sarà il centro, che si dimanda.

193. Siccome nel cerchio sono eguali le rette tirate dal centro alla circonferenza; così quelle, che

che cadono sulla stessa circonferenza da ogn' altro punto diverso dal centro, serbano tra loro un certo ordine. Se adunque quel punto, donde cadono le rette, sia dentro del cerchio, la massima sarà quella, che passa per lo centro; la minima quell' altra, che sta a dirittura colla massima; e delle rimanenti la più vicina alla massima sarà maggiore della più lontana. Che se poi il riferito punto sia fuori del cerchio, in tal caso ò le rette cadono sulla parte concava della circonferenza, ed eziandio la massima sarà quella, che passa per lo centro, e dell' altre la più vicina alla massima sarà maggiore della più lontana; o per lo contrario cadono sulla parte convessa, ed all' ora la minima sarà quella, che prolungata passa per lo centro, e dell' altre la più vicina alla minima sarà minore della più lontana.

194. Eziandio le rette adattate con legge tale dentro di un cerchio, che si terminino dall' una, e l' altra parte della circonferenza, serbano tra loro un certo ordine; e si è, che la massima sia il diametro, o pure quella, che passa per lo centro; e dell' altre che la più vicina al centro debba essere maggiore della più lontana. Che se poi due delle riferite rette siano egualmente distanti dal centro, le medesime dovranno essere tra loro eguali; come per lo contrario se sono eguali, dovranno distare dal centro per eguali intervalli. Ma le rette eguali tagliano ancora dalla circonferenza archi eguali, e per l' opposto non possono due rette tagliare archi eguali, se non siano eguali tra loro. E quindi niente sarà più facile, quanto di dividere egualmente un' arco, come A B C; poichè divisa la A C in due parti eguali nel punto D (40), ed alzata da questo punto sulla stessa A C la perpendicolare D B, siccome si faranno eguali le due rette A B, C B, così eziandio l' arco A B sarà eguale all' arco C B. Fig. 64.

195. Della retta, che è tangente del cerchio, ovvero della sua circonferenza, le principali af-

fezioni ſono ſtate da noi notate di ſopra, e ſi riducono alle ſeguenti. I, che ella debba toccare il cerchio in un ſol punto. II, che debba eſſerle perpendicolare quella retta, che congiunge il centro col punto del contatto. III, che la perpendicolare alzata sù di eſſa dal punto del contatto debba paſſare per lo centro. E IV, che la perdendicolore alzata ſull' eſtremità del diametro debba eſſere tangente del cerchio. Or egli è da notarſi preſentemente, che ſebbene per la ſeconda proprietà ad un punto dato nella circonferenza del cerchio non poſſa tirarſi, ſe non che una ſola tangente; tutta volta da un punto dato fuori del cerchio poſſono eſſere tirate alla ſua circonferenza due tangenti: le quali ſiccome debbono eſſere tra loro eguali, così ciaſcuna di eſſe ſarà maggiore di ogn' altra retta, che dallo ſteſſo punto cade ſulla parte conveſſa del cerchio.

16

196. Come debba tirarſi la tangente ad un punto dato nella circonferenza del cerchio, ſi deduce chiaramente dalla quarta proprietà, cioè con tirare a quel punto un diametro, e con alzare dall' iſteſſo punto una perpendicolare a queſto diametro. Per tirare poi la tangente al cerchio da un punto dato fuori di eſſo, potrà farſi
Fig. 67. uſo di queſta pratica. Sia BCD il cerchio, ed A il punto dato fuori di eſſo. Congiungaſi il punto A col centro del cerchio E per la retta AE, e dividaſi queſta retta egualmente nel punto F [40]; con queſto punto come centro, e coll' intervallo FE, ovvero FA deſcrivanſi poſcia due archetti circolari, che ſeghino la circonferenza del cerchio dato ne' punti B, e C; e ciaſcuna delle due AB, AC ſarà la tangente, che ſi dimanda. E la ragione è chiara; poichè congiungendo i raggi BE, CE, ſi farà retto così l'angolo ABE, come l'angolo ACE [92]; onde per la quarta proprietà tanto la AB, quanto la AC dovrà eſſere tangente del cerchio.

lve

197. L' incontro di due cerchi deẻ eſſere regolato da quello delle loro circonferenze; onde

ſi è,

ſi è, che incontrandoſi due cerchi tra loro, poſſono i medeſimi o interſegarſi ſcambievolmente in due punti, o pure toccarſi in un punto ſolo; e qualora ſi toccano, può farſi il loro contatto ò dalla parte di dentro, ò dalla parte di fuori. Or egli è da notarſi, che ſiccome i cerchi, i quali ſi toccano dalla parte di fuori, non poſſono avere un'iſteſſo centro; così ne pure poſſono averlo i cerchi, che ò ſi toccano dalla parte di dentro, ò ſcambievolmente tra loro s'interſegano: dimodoche puo ſtabilirſi generalmente, che i cerchi, i quali s'incontrano, non poſſono eſſere concentrici. Si vuol'ancora avvertire, che toccandoſi tra loro due cerchi, la retta, che uniſce inſieme i loro centri, debba paſſare per lo punto del contatto; e per gli cerchi, che s'interſegano, la ſteſſa retta dovrà dividere egualmente, e ad angoli retti quell' altra, che congiunge inſieme i punti, ne' quali i due cerchi s'interſegano.

198. Per quanto agli angoli, che poſſono ſituarſi, o nel centro del cerchio, o pure nella ſua circonferenza, ne abbiamo notati i principali teoremi in trattare della miſura dell'angolo, e ſono i ſeguenti. I, che così gli uni, come gli altri ſiano tra loro, come gli archi, ſulli quali ſi appoggiano. II, che l'angolo ſituato nel centro ſia duplo di quello ſituato nella circonferenza, quando amendue ſi appoggiano, o ſull' iſteſſo arco, o ſopra archi eguali. III, che l'angolo ſituato nel centro debba ſtimarſi retto, ottuſo, o acuto, ſecondoche egli ſi appoggia sù di un'arco eguale, maggiore, o minore del quadrante. IV., che l'angolo ſituato nella circonferenza debba ſtimarſi retto, ottuſo, o acuto, a miſura che egli ſi appoggia su di un'arco eguale, maggiore, o minore della metà della circonferenza. E V finalmente, che il medeſimo angolo debba giudicarſi retto, ottuſo, ò acuto, ſecondo che l'arco, in cui egli ſta ſituato, è eguale, minore, ò maggiore della metà della circonferenza.

Per

1°

199. Per mezzo de' primi due teoremi si è fatto da noi vedere, come debba essere misurato l'angolo situato, così nel centro, come nella circonferenza di un cerchio: cioè per l'arco, su di cui egli si appoggia, quando sta situato nel centro; e per la metà di dett' arco, quando sta situato nella circonferenza. Or nella circonferenza potrebbe ritrovarsi situato un' angolo, di cui un lato sia secante, ed un' altro tangente del cerchio; onde si vuol quì avvertire, che eziandio di quest' angolo ne sarà misura la metà dell' arco compreso tra i suoi lati, per la ragione, che su di questo arco viene egli propriamente ad appoggiarsi. Così se del cerchio A B C D sia la A C
Fig. 68. secante, e la A E tangente; la metà dell' arco A D C sarà la misura dell' angolo C A E. E poichè questa stessa metà è misura ancora dell' angolo A B C situato nell' arco rimanente; potremo quindi ricavarne, che l' angolo contenuto dalla tangente, e dalla secante debba essere eguale all' angolo situato nell' arco opposto.

200. In virtù poi dell' ultimo teorema già si vede, che gli angoli situati in un medesimo arco debbono essere tutti della stessa spezie; ma secondo fu avvertito ancora di sopra [93] gli stessi angoli debbono essere eziandio eguali tra loro, per la ragione, che si appoggiano altresì sopra un medesimo arco. Or appunto per questa proprietà, egli è molto importante per la pratica di saper descrivere su di una data retta un' arco,
Fig. 69. che sia capace di un' angolo eguale ad un' angolo dato. Sia data adunque la retta A B, e si debba su di essa descrivere un' arco capace dell' angolo A B C. Essendo retto quest' angolo, chiara cosa si è, che si risolverà il problema con dividere la A B egualmente in D, e con descrivere su di essa il semicerchio col centro D, e coll' intervallo D A, ovvero D B. Che se poi l' ango-
Fig. 70. 71. lo A B C sia, o ottuso, o pure acuto, si risolverà il problema ancora facilmente nella maniera, che segue.

Divi-

201. Dividasi pure la A B egualmente in D, e si alzi così la D E perpendicolare sulla stessa A B, come la B E perpendicolare sull'altra BC, le quali s'incontrino tra loro nel punto E; e dovendo essere eguali le due B E, A E, egli non è da porsi in dubbio, che la linea circolare descritta col centro E, e coll'intervallo E B debba passare ancora per lo punto A; or io dico, che l'arco di questa linea situato nella parte opposta all'angolo A B C sia quello, che si dimanda. Per dimostrarlo, pongasi in detto arco un'angolo qualsivoglia A F B; ed essendo la B C perpendicolare sul raggio E B, dovrà essere la medesima tangente della linea circolare(195). Quindi l'angolo A B C viene ad essere contenuto da due rette, delle quali una A B è secante, e l' altra B C tangente della riferita linea. Onde per queltanto si è avvertito poc' anzi (200) l' istesso angolo A B C sarà eguale all' angolo A F B.

202. Per dare quì qualche esempio dell'uso del riferito problema, debbasi sulla base A B formare un triangolo, di cui ne sia data così l' altezza, come l' angolo opposto a detta base. Descrivasi sulla A B l' arco A C B capace dell' angolo dato; indi alzata sulla medesima la perpendicolare A D eguale alla data altezza, tirisi a quella stessa per lo punto D la parallela D C; ed incontrandosi questa parallela coll' arco descritto nel punto C, chiara cosa si è, che A C B sia il triangolo, che si dimanda. Debbasi ancora sulla base AB formare un triangolo, in cui sia dato l'angolo opposto a detta base, e sia data ancora la ragione degli altri due lati. Dividasi la A B talmente in C, che le parti di essa A C, B C siano nella data ragione 74; indi descrivasi sulla tutta A B l' arco A D B capace dell' angolo dato; e se diviso l' arco rimanente A E B in due parti eguali nel punto E [194], congiungasi la EC, che s' incontri coll' arco A D B nel punto D, egli è facile a dimostrarsi, che A D B sia il triangolo, che si cerca. Fig. 72. Fig. 73.

203. Per mezzo dell' istesso poblema possiamo ezian-

Fig. 74. eziandio da un punto A, dato fuori della retta BC, non solo abbassare su di essa una perpendicolare, ma far cadere tale altra retta, che faccia con quella qualsivoglia angolo dato; poichè tirando ad arbitrio sulla BC una retta come AC, e descrivendo sopra di questa l'arco ABC capace dell'angolo dato, che s'incontri colla BC nel punto B, chiara cosa si è, che la AB sia la retta, che si dimanda. Ed in una maniera molto
Fig. 75. consimile potremo altresì dal termine A della retta AB alzare su di essa una perpendicolare, senza essere forzati di prolungare la retta verso quel termine; poichè prendendo fuori della retta un punto ad arbitrio, che sia C, e descrivendo con questo punto come centro, e coll' intervallo CA la linea circolare ABD, che seghi la AB nel punto B, se congiungeremo la BC, che s'incontri colla linea descritta nel punto D, sarà AD la perpendicolare, che si cerca.

16

204. Del rimanente sebbene siano eleganti, e profittevoli le proprietà del cerchio fin' ora riferite; tutta volta la più rilevante, e degna di ogni attenzione si è la seguente, cioè che adat-
Fig. 76. 77. tandosi dentro del cerchio due rette, come AB, CD, le quali s'incontrino tra loro, o dentro, ò fuori del cerchio nel punto E, il rettangolo delle parti dell'una AE, BE debba essere eguale al rettangolo delle parti dell' altra CE, DE. Nè è egli difficile ad intenderne la ragione. Imperocche, congiunte le due AD, CB, non solo saranno eguali i due angoli BAD, DCB, ma saranno equiangoli altresì i due triangoli AED, CEB. Quindi dovendo essere come AE a DE, così CE a BE [114], saranno proporzionali le quattro rette AE, DE, CE, BE; e pertanto il rettangolo delle due estreme AE, BE dovrà essere eguale al rettangolo delle due di mezzo CE, DE (159).

205. Intorno a questa proprietà si vogliono però avvertire due cose. La prima si è, che
Fig. 78. qualora le due rette AB, CD s'intersegano den-

toro del cerchio, potrebbe avvenire, che una di esse A B non solo sia diametro, ma seghi ancora l' altra C D ad angoli retti. In questo caso perche dee segarla eziandio in parti eguali [191], il rettangolo delle due C E, D E non sarà diverso dal quadrato della sola C E. Quindi la proprietà riferita si cambierà in quest' altra, cioè che il quadrato della perpendicolare abbassata sul diametro da un punto della circonferenza debba essere eguale al rettangolo delle due parti del diametro. Il che si deduce ancora da ciò, che essendo la A B diametro, sarà retto l'angolo ACB; ed in conseguenza la C E sarà mezza proporzionale tra le due A E, B E.

206. L'altra cosa si è, che qualora le due rette A E, C E s' intersegano tra loro fuori del cerchio, potrebbe avvenire, che una di esse come C E sia tangente del cerchio. In questo caso siccome i due punti, ne' quali la C E secava prima il cerchio, si riuniscono insieme nel punto del contatto; così le due sue parti si fanno tra loro eguali, ed il rettangolo delle medesime non sarà diverso dal quadrato della sola C E: onde si è, che la riferita proprietà prenderà quest' altra forma, cioè che il rettangolo delle due parti della secante A E, B E debba essere eguale al quadrato della tangente C E: la qual cosa puo dimostrarsi ancora, congiungendo le rette A C, B C; poichè facendosi l' angolo B A C eguale all' angolo ECB [199], saranno equiangoli i due triangoli A E C, B E C; ed in conseguenza dovendo essere come A E a C E, così C E a B E, sarà il rettangolo delle due A E, B E eguele al quadra- della C E. Fig. 79.

207. Notisi quì ancora, che qualora le due rette A B, C D s' incontrano tra loro dentro del cerchio, siccome le medesime vengono a farsi diagonali del quadrilatero iscritto ACBD, così sarà il loro rettangolo eguale agli altri due fatti dai lati opposti di detto quadrilatero. Per dimostrarlo, facciasi l'angolo D B F eguale all'angolo CBA Fig. 80.

[43]; e

(43); e facendosi equiangoli tra loro così i due triangoli ABC, DBF, come gli altri due ABD, CBF, sarà non solo come AB ad AC, così BD a DF, ma ancora come AB ad AD, così CB a CF [114]; onde il rettangolo di AB in DF sarà eguale al rettangolo di AC in BD, ed il rettangolo di AB in CF sarà eguale al rettangolo di AD in CB (159). Ma i due rettangoli fatti dalla AB nelle due parti DF, CF sono eguali al solo rettangolo di AB in CD [149]. Dunque il rettangolo di AB in CD sarà eguale eziandio agli altri due fatti da AC in BD, e da AD in CB.

§. II.

Delle principali affezioni delle figure rettilinee regolari.

208. LE figure piane rettilinee si appellano regolari, quando in esse così i lati, come gli angoli sono tra loro eguali; siccome tra triangoli è il triangolo equilatero, ed il quadrato tra le figure quadrilatere. Queste tali figure anno meritato presso i Geometri una spezial considerazione per la ragione, che oltre all' uso loro frequente giovano ancora non poco per investigare altre affezioni del cerchio. E poichè in trattare di esse dobbiamo porre a calcolo eziandio quelle, che anno più di quattro lati; perciò noteremo prima di ogn' altra cosa, che siccome dicesi triangolo la figura terminata da tre lati, e quadrangolo quella terminata da quattro; così se i lati, che terminano la figura, siano cinque, si dirà ella pentagono, se sei esagono, se sette settagono, se otto ottogono, se nove nonogono, se dieci decagono, e così all' infinito.

209. Or a simiglianza del triangolo equilatero, e del quadrato, ciascuna delle riferite figure essendo regolare rimarrà determinata con darsi

ſi ſoltanto uno de' ſuoi lati ; e ciò perche inſieme con ciaſcuno de' lati verrà ad eſſer dato ancora ciaſcuno degli angoli . Per intenderne la ragione, ſi vuol prima avvertire , che ſiccome ogni figura rettilinea per mezzo di rette tirate da uno de' ſuoi angoli agli altri oppoſti rimane divisa in tanti triangoli , quanto è il numero de' lati minorato di due ; così per eſſere gli angoli di ogni triangolo uniti inſieme eguali a due retti (99), ſarà la ſomma degli angoli della ſteſſa figura eguale a tanti retti , quanti ne addita il numero duplicato de' lati minorato di quattro, cioè a quattro retti , ſe la figura ſia quadrilatero, a ſei retti ſe ſia pentagono , a otto retti ſe ſia eſagono, a dieci retti ſe ſia ſettagono , e così all' infinito . Quindi conforme , data la ſpezie della figura , de eſſere data la ſomma de' ſuoi angoli ; così ſe poi la figura ſia regolare, de eſſere dato ancora ciaſcuno degli angoli . ve ve.

210. In effetto diſegnando ogni angolo per gli ſteſſi gradi e minuti contenuti nell' arco , che è ſua miſura , ſi vede in primo luogo , che ſiccome tutti tre gli angoli di un triangolo uniti inſieme ſono eguali a due retti , cioè a 180 gradi ; così ciaſcun' angolo del triangolo equilatero debba eſſere di gradi 60. Si vede in ſecondo luogo, che conforme tutti gli angoli di un quadrilatero unitamente preſi ſono eguali a quattro retti , cioè a 360 gradi ; così ciaſcun' angolo del quadrato debba eſſere di gradi 90 . Si vede in terzo luogo, che ſiccome la ſomma degli angoli di ogni pentagono è eguale a ſei retti , cioè a 540 gradi ; così ciaſcun' angolo del pentagono regolare debba eſſere di gradi 108 . Si vede in quarto luogo , che conforme la ſomma degli angoli di ogni eſagono è eguale a otto retti , cioè a 720 gradi ; così ciaſcun' angolo dell' eſagono regolare debba eſſere di gradi 120 . Nè altrimenti dovrà determinarſi ciaſcun' angolo di ogn' altra figura regolare.

211. In oltre in ciaſcuna figura regolare vi è un

è un punto, che chiamasi suo centro; e la proprietà di esso si è, che sono eguali, così le rette, che da detto punto si tirano ai vertici degli angoli della figura, come le perpendicolari, che dall'istesso punto si abbassano sulli lati della medesima. Fingiamo a cagion di esempio, che
Fig. 81. BCDEF sia una figura regolare, di cui centro ne sia il punto A. Dovranno adunque essere tra loro eguali non meno le rette AB, AC, AD, AE, AF, che le perpendicolari AG, AH, AI, AL, AM. Ma egli è da notarsi, che siccome per quelle rette restano divisi gli angoli in due parti eguali; così per queste perpendicolari rimangono divisi egualmente i lati. Quindi potrà determinarsi il centro A, o con dividere egualmente due angoli BCD, CDE per le rette CA, DA; o pure con dividere due lati BC, CD egualmente ne' punti G, ed H, e con alzare su di essi le perpendicolari GA, HA.

212. Per lo centro, di cui è fornito ciascuna figura regolare, chiara cosa si è, potersi in essa situare due cerchi, cioè uno, che passi per tutti i vertici degli angoli, ed un' altro, che tocchi tutti i lati; poichè siccome si avrà il primo con descriverlo col centro A, e coll' intervallo di una delle rette AB, AC, AD, AE, AF, così si avrà il secondo descrivendolo coll' istesso centro A, e coll'intervallo di una delle perpendicolari AG, AH, AI, AL, AM. Di questi due cerchi il primo dicesi circonscritto intorno alla figura, ed il secondo iscritto dentro di essa; ed egli è così proprio delle figure regolari di poter dare al cerchio questa doppia situazione; che a riserba del triangolo ogn' altra figura rettilinea, che non sia regolare, non potrà concedergliela, se non se sotto qualche condizione. In effetto se
Fig. 82. ABC sia un triangolo qualsivoglia, egli è facile il far vedere, che così intorno, come dentro di esso si possa descrivere il cerchio.

213. Dividansi primieramente i due lati AB, AC egualmente ne' punti D, ed E [40]; e se si alzi-

alzino sulli medesimi le perpendicolari DF, EF, che s' incontrino tra loro nel punto F, chiara cosa si è, che le tre AF, BF, CF debbano essere tra loro eguali; onde il cerchio, che si descrive col centro F, e coll'intervallo di una di esse, passando per tutti i vertici degli angoli, sarà circonscritto intorno al triangolo ABC. Dividansi poscia i due angoli ABC, BCA egualmente per le rette BD, CD (42); e se dal punto D, in cui elle s'incontrano, si abbassino sulli lati del triangolo le perpendicolari DE, DF, DG, egli è chiaro, che ancora queste tre perpendicolari debbano essere tra loro eguali; e pertanto il cerchio, che si descrive col centro D, e coll' intervallo di una di esse, toccando tutti tre i lati AB, BC, CA, sarà iscritto dentro del triangolo ABC. Fig. 83.

214. Sia ora il quadrilatero ABCD, e se intorno ad esso sia circonscritto un cerchio, dovranno essere eguali a due retti tanto i due angoli ABC, ADC, quanto gli altri due BAD, BCD (93); onde per lo contrario se il quadrilatero non abbia questa condizione, non si potrà intorno ad esso circonscrivere il cerchio. Che se poi dentro del quadrilatero ABCD sia iscritto il cerchio EFGH, siccome le quattro AE, BE, CG, DG, dovranno essere eguali alle altre quattro AH, BF, CF, DH, ciascuna a ciascuna (195), così la somma de i due lati opposti AB, CD dovrà essere eguale alla somma degli altri due AD, BC; onde per lo contrario se non vi sia nel quadrilatero questa condizione, non si potrà dentro di esso iscrivere il cerchio. Or un Geometra attento potrà giudicare delle condizioni necessarie per l'altre figure da queste medesime, che si richiedono nel quadrilatero. Fig. 84 Fig. 85.

215. Conforme ogni figura regolare concede al cerchio le due riferite posizioni; così eziandio il cerchio permette, che tanto intorno, quanto dentro di esso si possa descrivere qualsivoglia figura regolare. Nell' esecuzione intanto di quest' altro problema opposto al primo s'incontra

 qual-

qualche difficoltà; e per comprendere donde ella deriva, giova il rammentarsi, che non possono due rette adattate dentro di un cerchio essere tra loro eguali se non taglino dalla conferenza di quello archi eziandio eguali (194). Essendo così, egli è chiaro, che per iscrivere dentro del cerchio qualsivoglia figura regolare, non debba farsi altra cosa, se non se dividere la sua circonferenza in tante parti eguali, quanti sono i lati della figura. Or non è sempre in nostro arbitrio di poter ciò fare con costruzioni, che dipendano dalla linea retta, e dalla linea circolare; e quindi deriva la difficoltà, che s' incontra nella soluzione del riferito problema.

216. Ecco in tanto le divisioni, che possono farsi con far uso della linea retta, e della linea circolare. In primo luogo siccome la circonferenza BCDE resta divisa egualmente per qualsivoglia diametro BD; così possiamo altresì dividerla in quattro parti eguali per mezzo di due diametri BD, CE, che s' interseghino tra loro ad angoli retti. Quindi niente sarà più facile, quanto d'iscrivere dentro del cerchio il quadrato, o sia quadrangolo regolare; e ponendo il raggio $AB = a$, chiara cosa si è, che debba essere il suo lato $BC = \sqrt{2a^2}$. Possiamo ancora dividere la stessa circonferenza tutt' ad un tempo, ed in tre, ed in sei parti eguali; e ciò con descrivere su'l raggio AB il triangolo equilatero AFB. Imperocche, conforme per l' uguaglianza degli angoli di questo triangolo l'arco BF dee essere di 60 gradi, e pertanto eguale alla sesta parte della circonferenza; così l'altro DF sarà di 120 gradi, ed in conseguenza eguale alla terza parte della medesima. Onde la $BF = a$ sarà il lato dell' esagono regolare, e la $DF = \sqrt{3a^2}$ sarà il lato del triangolo equilatero iscritto dentro del cerchio.

Fig. 86.

lve

217. Possiamo in oltre partire la circonferenza BCDE, ed in dieci, ed in cinque parti eguali; ma per comprendere come ciò debba farsi, sia

Fig. 87.

l'arco

l'arco BC la decima parte di eſſa, vale a dire di 36 gradi. Dovendo adunque eſſere l'angolo BAC eziandio di 36 gradi, ſarà ciaſcuno dei due ABC, ACB di gradi 72. Quindi diviſo uno di eſſi come ABC egualmente per la retta BF (42), ſarà l'angolo BFC eziandio di 72 gradi; e pertanto facendoſi iſoſcele così il triangolo ABF, come l'altro BCF, ſaranno le tre AF, BF, BC tra loro eguali. Onde per l'angolo ABC diviſo egualmente dalla BF dovendo eſſere, come AB a BC, così AF à CF [72]; ſarà ancora, come AC ad AF, così AF a CF. Dividaſi adunque il raggio AC in eſtrema, e media ragione nel punto F [187]; e traſportando col compaſſo la parte maggiore AF così da C in B, come da C in D, ſarà l'arco BC la decima parte, e l'arco BD la quinta parte dell'intera circonferenza; onde ancora la BC ſarà il lato del decagono, e la BD il lato del pentagono regolare iſcritto dentro del cerchio.

218. Ma ſiccome il lato del decagono dee eſſere determinato per rapporto al raggio con quella ſteſſa regola, per mezzo di cui ſi determina la maggior porzione di una retta diviſa in eſtrema, e media ragione; così ſi avrà il lato del pentagono, con aggiungere inſieme i due quadrati del raggio e del lato del decagono, e con eſtrarre dalla ſomma la radice quadrata. Per dimoſtrarlo, pongaſi AC $= a$, AF $=$ BF $=$ BC $= b$, e BD $= x$. Sarà adunque la rimanente CF $= a - b$; e per eſſere come AC ad AF, così AF à BF, ſarà ancora $b^2 = a^2 - ab$, o pure $ab = a^2 - b^2$ Ma eſſendo diviſa egualmente in G così la CF, come la BD, dee eſſere FG $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, e BG $= \frac{1}{2}x$; onde per lo triangolo rettangolo BFG ſi viene poſcia ad avere $b^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$, cioè $x^2 = 3b^2 - a^2 + 2ab$. Dunque ſorrogando in queſta uguaglianza in luogo di ab il ſuo valore $a^2 - b^2$, avremo finalmente $x^2 = b^2\ a^2$, ed $x = \surd(b^2\ a^2)$.

219. Adunque colle riferite diviſioni poſſiamo

 riſciiscrivere per ora nel cerchio cinque figure regolare, cioè il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagno, l'esagono, ed il dodecagono. Ma poiche è in nostro potere di dividere per metà qualsivoglia arco dato, possiamo in oltre colle tre prime iscriverne altre infinite. In effetto colla continua bisezione dell' arco dal triangolo equilatero non solo si passerà all' esagono, che gia abbiamo, ma ancora al dodecagono, e ad altre figure, in cui il numero de' lati và sempre più a farsi doppio. Per la stessa ragione dal quadrato si passerà così all' ottogono, come ad altre figure, nelle quali si và viepiù duplicando il numero de' lati. E così finalmente dal pentagono si farà passaggio tanto al decagono, che già abbiamo, quanto ad ogn' altra figura, i di cui lati sono sempre duplicati di numero.

220. Eziandio di queste figure si potranno determinare i lati per rapporto al raggio; e per ridurre ad una regola le loro determinazioni, egli è chiaro, che chiamando corda di un' arco quella retta, che lo sostiene, il problema si riduce a far vedere, come data la corda di un' arco BD possa determinarsi quella della sua metà BC. Tirisi perciò il diametro BE; ed essendo il triangolo BDE rettangolo in D, egli è facile, per mezzo della corda data BD, di determinare l'altra DE, che si rapporta al residuo della mezza circonferenza. Quindi resterà determinata ancora così la AF, che è la metà di essa DE, come la rimanente porzione del raggio CF. Onde nell' altro triangolo rettangolo BFC essendo dati i due lati BF, CF, che sono intorno all'angolo retto, dovrà essere data ancora l'ipotenusa BC, che è la corda ricercata.

Fig. 88.

16

221. Notisi in questo luogo, che se bene il quindecagono non s'incontri in alcuna serie delle riferite figure regolari, pure per mezzo del triangolo, e del pentagono potrà egli iscriversi nel cerchio. Pongasi perciò, che BC sia il lato del pentagono, e BD il lato del triangolo. Adunque

Fig. 89.

que

que delle quindeci parti eguali, nelle quali dee essere divisa la circonferenza intera per l'iscrizione del quindecagono, ne conterrà trè l'arco BG, e cinque l' arco BD. Quindi nell' arco CD, che è la loro differenza, si conteranno due delle stesse parti; e per tanto con dividere quest' arco CD egualmente nel punto F, sarà ciascuno dei due archi CF, DF la quindicesima parte dell' intera ciconferenza, e la corda di ciascuno di essi sarà il lato del quindecagono.

222. E quindi il quindecagono sarà principio di una nuova serie di figure regolari, che si possono iscrivere nel cerchio; poichè colla continua bisezione dell'arco si avrà per mezzo di esso, *prima* la figura di 30 lati, indi la figura di 60, e di mano in mano ogn' altra figura, in cui si và sempre più duplicando il numero de'lati. Si vede in tanto, che la determinazione de' lati di tutte quest' altre figure dipende dall' investigazione della corda CD, la quale può determinarsi in questa maniera. Tirisi il diametro BE; ed essendo note le corde BC, BD, si potranno per mezzo dei triangoli rettangoli BCE, BDE determinare le altre due CE, DE; onde nel quadrilatero BCDE si avrà così il rettangolo delle due diagonali BD, CE, come il rettangolo de' lati opposti BC, DE. Quindi la differenza di questi due rettangoli ci darà il terzo rettangolo di BE in CD (207); ed in conseguenza con dividere la riferita differenza per lo diametro BE, avremo la corda CD, che si dimanda.

223. Or ogn' altra figura regolare, che non sia racchiusa in una delle quattro divisate serie, non potrà essere iscritta nel cerchio con costruzione, che dipenda dalla linea retta, e dalla linea circolare; e l' istesso dee dirsi delle figure regolari, che debbono essere circonscritte intorno al cerchio, per la ragione, che quest' altre figure si deducono dall' iscritte medesime. In effetto, se BD sia il lato di una qualche figura regolare iscritta dentro del cerchio, avremo il lato dell' altra circon- Fig. 88.

G 3 scrit-

ſcritta della ſteſſa ſpezie, prima con dividere l'arco B D in due parti eguali nel punto C, ed indi con tirare à queſto punto la tangente G H, che ſi vada ad incontrare coi raggi A B, A D prolungati ne' punti G, ed H. E poichè incontrandoſi il raggio A C colla B D nel punto F, dee eſſere come A F ad A C, così B D à G H; di legieri ſi vede, come dato il lato B D della figura iſcritta, poſſa determinarſi l' altro G H della figura circonſcritta.

224. Del rimanente per non tralaſciare coſa alcuna degna da ſaperſi intorno alle figure regolari, ſoggiungeremo ora i ſeguenti teoremi, de' quali uno è conſeguenza dell' altro. I, che le rette tirate dal centro ai vertici degli angoli, non ſolo ſono tra loro eguali, ma dividono la figura in triangoli perfettamente eguali. II, che tutta la figura ſia eguale ad un triangolo, che ha per baſe il ſuo perimetro, e per altezza una delle perpendicolari abbaſſate dal centro ſulli ſuoi lati. III, che la capacità della ſteſſa figura ſi abbia con moltiplicare il ſuo perimetro per una delle riferite perpendicolari, e con prendere la metà del prodotto nato da queſta moltiplicazione. IV, che i perimetri di due figure regolari della ſteſſa ſpezie ſiano come le loro riſpettive perpendicolari. E V finalmente, che le figure medeſime ſiano in duplicata ragione così de' loro perimetri, come delle perpendicolari ſuddette.

§. III.

Del Cerchio conſiderato come poligono regolare.

225. QUantunque il cerchio ſia terminato dalla ſua circonferenza, che è linea curva; ad ogni modo ſi può egli conſiderare ancora come poligono regolare, in cui il numero de' lati ſia maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi. In effetto dimoſtrano i Geometri, che ſe vi ſono due figure regolari, una iſcritta dentro del cerchio,

e l'al-e l'altra circonſcritta, queſte giungono ad eſſere in ragione di eguaglianza col cerchio medeſimo, quante volte il numero de' loro lati ſi aumenta a ſegno tale, che diventi maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi. Onde eſſendo così, non è egli da porſi in dubbio, che l'iſteſſo cerchio poſſa eſſere conſiderato come l'ultimo poligono regolare, di cui egli è capace così per via di iſcrizione, come per via di circonſcrizione.

226. Aggiungaſi à queſto, che ſebbene la linea retta, e la linea curva ſiano d'indole affatto oppoſta; nientedimeno eſſendo amendue diviſibili all'infinito, ſi può riguardare e l'una, e l'altra come compoſta da tante rette di una picciolezza infinita, e riporre tutto il loro divario in ciò, che quei minimi elementi, ſiccome ſono ſituati à dirittura nella retta, così traviano l'uno dall' altro per angoli infinitamente piccioli nella curva. Onde in queſta maniera così la circonferenza del cerchio, come ogn'altra curva potrà eſſere riguardata come perimetro di un poligono, i di cui lati non ſolamente ſono infinitamente piccioli, ed infiniti di numero, ma mancano ancora di eſſere tra loro à dirittura per angoli di una picciolezza eziandio infinita.

227. Ed in vero à dì noſtri i Geometri ſotto queſta forma ſogliono conſiderare le curve tutte; ed appunto per averle eſaminate ſotto queſto aſpetto è riuſcito ad eſſi di promovere tant' oltre la loro teoria. Quindi poi è derivato, che da medeſimi ſi ſiano conſiderate le figure piane curvilinee, come compoſte, ò da tanti piccioli triangoli, o da tanti piccioli trapezj. In effetto, ſe Fig. 90.
A B C ſia una figura piana, terminata per una parte dalle due rette A B, B C, e per l'altra dalla curva A C: conforme con intenderſi tirate dal punto B alla curva rette infinitamente vicine tra loro, rimane ella diviſa in tanti piccioli triangoli; così ſe per gli punti della A B s'intendano tirate altre rette, parallele alla B C, ed eziandio infinitamente vicine tra loro, rimarrà la mede-

desima divisa in tanti piccioli trapezj.

228. Si vuol però quì avvertire, che questi piccioli trapezj possono essere riguardati come tanti piccioli parallelogrammi. Per dimostrarlo, pongasi, che EFGH sia uno di essi; e tirata per lo punto H la retta HI parallela alla EF, egli non è da porsi in dubbio, che per l'infinita vicinanza delle due EH, FG, sia IG infinitamente picciola così per rapporto ad FI, come per rapporto ad FG. Quindi compiuto il parallelogrammo HIGL, eziandio questo sarà infinitamente picciolo così a riguardo del parallelogrammo EFIH, come a riguardo dell'altro EFGL (108). Onde maggiormente i due triangoli GIH, GLH, saranno infinitamente piccioli per rapporto agli stessi parallelogrammi; e pertanto il trapezio EFGH non sarà differente da ciascuno di essi.

229. Elementi consimili si sono dati ancora così alle superficie curve, come alle figure solide terminate da tali superficie, de' quali a suo luogo daremo piena contezza. Intanto giova quì avvertire, che il primo a coltivare la Geometria con questi principj sia stato un nostro Italiano chiamato Buonaventura Cavalerio. E quantunque il suo metodo avesse incontrato da principio molti oppositori per gli indivisibili, de' quali si avvaleva, che sono i punti per rapporto alla linea, le linee per rapporto alla superficie, e le superficie per rapporto al corpo; ad ogni modo con essersi poscia esaminato più a fondo, si conobbe, che quei tali indivisibili lo erano di puro nome, perche in sostanza si riducevano ad essere tante lineette per rapporto alla linea, tante superficiette a riguardo della superficie, e tanti corpicciuoli in ordine al corpo.

230. In effetto per dimostrare secondo il metodo degli indivisibili, che due superficie piane siano tra loro eguali, non basta il far vedere, che tirando in amendue rette parallele, queste sono le stesse così nell'una, come nell' altra, ma bisogna ancora pruovare, che tra le rette dell'una,

e le

e le rette dell'altra vi ſiano eziandio gli ſteſſi intervalli; onde in queſta maniera non ſaranno le rette tirate i loro elementi, ma le ſuperficiette, che tra quelle ſi frappongono. E così ancora per dimoſtrare, che due ſolidi ſiano tra loro eguali, non baſta il far vedere, che diviſi amendue per tante ſuperficie parallele, queſte ſono l'iſteſſe tanto nell' uno, quanto nell'altro, ma biſogna ancora pruovare, che tra le ſuperficie dell'uno, e le ſuperficie dell'altro vi ſiano altresì gli ſteſſi intervalli; onde in queſto modo non ſaranno ſe ſuperficie, per cui ſono diviſi, i loro elementi, ma i piccioli ſolidi, che tra quelle ſi tramezzano.

231. Affinche meglio s'intenda, ove propriamente ſi riduce il metodo degli indiviſibili, ſia ABC una figura piana qualſivoglia, in cui s'intendano tirate tante rette parallele, infinitamente vicine tra loro. Siccome adunque tra queſte parallele ſi tramezzano tanti piccioli parallelogrammi, che ſono i veri elementi della figura; così la ragione di eſſi ſarà compoſta da quella delle parallele, sù di cui come baſi ſi appoggiano, e da quella degli intervalli delle ſteſſe parallele, che ſono le loro altezze (108). Quindi eſſendo eguali queſti intervalli, ſaranno quei piccioli parallelogrammi nella ſola ragione delle parallele; e pertanto conforme potrà giudicarſi della loro ſomma, che è la capacità della figura, dalla ſomma ſteſſa delle parallele, così in queſto ſenſo le medeſime poſſono eſſere riguardate come elementi della figura. Fig. 90.

232. Or ſiccome con queſto ſchiarimento il metodo degli indiviſibili fù poſcia da tutti ricevuto, così per l'uſo di eſſo biſognò, che ſi coltivaſſe l' Arimmetica degli infiniti. In effetto quei teoremi, che riguardano le ſomme così degli infiniti numeri naturali, come delle varie loro infinite potenze, non per altro motivo ſono ſtati da noi dimoſtrati nella noſtra Arimmetica, ſe non perche conferiſcono moltiſſimo ad inveſti-

gare

gare le ragioni delle figure così piane, come solide. E per darne quì qualche esempio, faremo vedere come da quel teorema arimmetico, che la somma degli infiniti numeri naturali sia all'ultimo preso tante volte, quanti sono i numeri, come 1 a 2, possa dedursi l'altro geometrico, che qualora un triangolo, ed un parallelogrammo si ritrovano avere eguali basi, ed eguali altezze, debba essere il triangolo la metà del parallelogrammo.

233. Sia perciò ABC un triangolo qualsivoglia, il di cui lato AB concipiscasi diviso in infinite parti eguali, e per gli punti della divisione s' intendano ancora tirate dentro del triangolo altrettante rette parallele alla base BC. E poiche queste parallele dal vertice [redacted] fino alla base si avanzano con legge tale, che per rapporto alla prima si fà dupla la seconda, tripla la terza, quadrupla la quarta, e così all' infinito; niente sarà più proprio, quanto di disegnare le loro lunghezze per gli stessi numeri naturali. Quindi per lo riferito teorema arimmetico la loro somma sarà all'ultima BC presa altrettante volte, come 1 a 2. Ma la somma di dette parallele ci addita la capacità del triangolo ABC, e l'ultima BC presa altrettante volte ci dà a divedere la capacità del parallelogrammo ABCD. Dunque il triangolo ABC al parallelogrammo ABCD sarà ancora, come 1 a 2.

Fig. 91.

16

234. Per ritornare adunque al nostro assunto, diciamo, che sebbene la linea sia di due spezie opposte, cioè retta, e curva; nientedimeno gli elementi dell'una, e dell'altra sono altre rette di una picciolezza infinita. E siccome queste picciole rette formano la curva, perche mancano di essere tra loro a dirittura per angoli infinitamente piccioli; così deriva la varia curvatura, che si ravvisa tanto in varie curve, quanto in varie parti di una stessa curva, dalla differenza, che vi è così tra le picciole rette, che le compongono, come tra i piccioli angoli, per cui una di

che

esse travia dall'altra. Ma poichè la circonferenza del cerchio ritiene da per tutto l'istessa curvatura, dobbiamo quindi dedurne, che in essa sono eguali così gli elementi, che la formano, come i piccioli angoli, per cui quegli elementi mancano di essere tra loro a dirittura; ed appunto per questa ragione egli il cerchio dee essere considerato come poligono regolare. Ive

235. Qualora poi si anno due diverse circonferenze, per la diversa loro curvatura dobbiamo al contrario dire, che siano diversi non meno i loro elementi, che gli angoli, dai quali derivano le loro curvature. Per quanto poi al numero degli stessi elementi, egli sarà il medesimo così nell' una, come nell' altra circonferenza; e quindi si è, che due diversi cerchi debbono essere considerati come poligoni regolari della stessa spezie. In effetto, se in amendue i cerchi s'intendano iscritte, o circonscritte tutte le figure regolari possibili, egli non è da porsi in dubbio, che queste tali figure prese con ordine si vadano approssimando proporzionalmente agli stessi cerchi. Onde tosto, che uno dei due cerchi si viene a confondere con una delle sue figure, eziandio l'altro cerchio dovrà confondersi colla figura della stessa spezie, che in esso si ritrova.

236. Ptima di passare innanzi, giova quì il far vedere, come con darsi al cerchio la riferita forma, possa egli ritenere la sua proprietà essenziale, che consiste nell' eguaglianza delle rette tirate dal suo centro alla sua circonferenza. Sia perciò il poligono regolare BCDEF, e dal centro A siano tirate così le rette AB, AC, come l'altra AG perpendicolare sul lato BC. Restando adunque l'angolo BAC diviso egualmente per la BG, ci additerà il numero de' lati del poligono non meno quanto sia l'angolo BAC per rapporto a quattro retti, che quanto sia l'altro BAG a riguardo di due soli retti. Quindi con farsi il numero di detti lati maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi, svanirà l'angolo BAG per rap- Fig. 92.

porto

porto a due retti ; e pertanto facendoſi eguali tra loro i due angoli A B G, A G B, ſaranno eguali ancora le rette A B, A G [99]: donde egli è facile il ricavarne, che eziandio le altre rette, tirate dal centro A al perimetro del poligono, ſaranno tra loro eguali.

237. Poichè dunque il cerchio può eſſere conſiderato come poligono regolare, in cui le perpendicolari, che dal centro ſi abbaſſano ſulli lati, ſono i raggi medeſimi, ſi vede ora, che à ſimiglianza di ogni poligono regolare (224) debba egli eſſere eguale ad un triangolo, che ha per baſe la ſua circonferenza diſteſa a dirittura, e per altezza il ſuo raggio. Quindi ſiccome a guiſa del triangolo ſi avrà la ſua capacità, con moltiplicare il raggio per la circonferenza, e con prendere la metà del prodotto; così la ragione di due diverſi cerchi ſarà compoſta dalla ragione de' loro raggi, e dalla ragione delle loro circonferenze. E poichè due cerchi diverſi debbono eſſere conſiderati come due poligoni regolari della ſteſſa ſpezie; ſaranno in oltre le loro circonferenze nella ſemplice ragione de' raggi, ed i cerchi medeſimi nella ragione duplicata così de' raggi, come delle circonferenze.

238. Se dal cerchio ſi taglino porzioni per mezzo de' raggi, queſte tali porzioni comunemente da Geometri ſi appellano ſettori; ſiccome è la porzione BAC tagliata dai due raggi AB, AC,
Fig. 93. o pure l'altra D A E tagliata dagli altri due raggi A D, AE. Or ſiccome egli è chiaro, che i due ſettori B A C, D A E tagliati dall' iſteſſo cerchio debbono eſſere tra loro eguali, quante volte gli archi BC, DE, ſulli quali ſi appoggiano, ſono eguali; così neſpure ſarà difficile ad intendere, che eſſendo diſuguali gli archi B C, D E, debba eſſere, come l'arco BC all' arco D E, così il ſettore B A C al ſettore D A E. Ma da ciò ne ſegue, che un ſettore B A C ſia al ſuo cerchio intero, come ſtà l'arco B C all' intera circonferenza; e per tanto a guiſa del cerchio intero ſarà il

ſet-

settore B A C eguale ad un triangolo, che ha per base l'arco B C distefo a dirittura, e per altezza il raggio A B: onde si avrà la sua capacità, con moltiplicare il raggio A B per l'arco B C, e con prendere la metà del prodotto nato da questa moltiplicazione.

239. Quindi se si prendono due settori in due cerchi diversi, potrà giudicarsi della loro ragione per mezzo di quella, che anno i loro triangoli eguali; e perciò si comporrà la ragione di essi dalla ragione de' raggi, e dalla ragione degli archi: tanto vero, che gli stessi settori dovranno essere tra loro eguali, se gli archi siano nella reciproca ragione de' raggi. Che se poi due settori presi in due diversi cerchi siano sotto angoli eguali; all'ora per l'uguaglianza degli angoli si appoggieranno detti settori sopra archi proporzionali alle circonferenze intere (97), ed in conseguenza proporzionali ancora ai raggi; onde questi tali settori, che si appellano simili, saranno nella duplicata ragione così degli archi, come de' raggi. Ed ecco le principali conseguenze, che si ricavano dal considerare il cerchio sotto forma di poligono regolare.

§. IV.

Della misura, così del cerchio, come di ogni suo settore.

240. QUantunque con essersi data al cerchio la forma di poligono regolare abbiamo presentemente due teoremi, intorno alla capacità così del cerchio intero, come di ogni suo settore; ad ogni modo questi teoremi riescono inutili nella pratica, se non si determini ancora la ragione, che vi è tra la circoferenza del cerchio, ed il suo raggio, ovvero diametro. Egli è vero, che per quanto si fussero affaticati così gli antichi, come i moderni Geometri per determinarla, non mai è stato possibile di averla con esat-

esattezza; ma per via di approssimazione può ella conseguirsi così poco lontana dal vero, che per la pratica non sembra potersi desiderare davantaggio. Onde senza perdere il tempo nella ricerca della vera ragione tra la circonferenza del cerchio, ed il suo diametro, vediamo come ella possa determinarsi per via di limiti.

241. Ed in vero siccome il cerchio può essere considerato, come l'ultima delle figure regolari in esso iscritte, e circonscritte; così per mezzo di queste stesse figure possiamo ancora ricercare i limiti della ragione, che si dimanda. Imperocchè giacendo la circonferenza del cerchio tra il perimetro dell' iscritta, e l'altro della circonscritta; sarà ella maggiore del primo, e minore del secondo; onde eziandio la ragione di essa al suo diametro sarà maggiore della ragione, che ha il perimetro dell' iscritta all' istesso diametro, e minore della ragione, che ha il perimetro della circonscritta al medesimo diametro[61]. Ma conforme in questa ricerca non dobbiamo far uso di altre figure, se non se di quelle, che possiamo effettivamente iscrivere, e circonscrivere nel cerchio, ed i di cui lati possono essere determinati a riguardo del raggio, ovvero diametro; così per agevolare il calcolo lo più che sia possibile, giova incominciarlo dall' esagono regolare iscritto nel cerchio, il di cui lato è eguale all'istesso raggio.

242. Or di già si vide di sopra (220), come essendo dato il lato di una figura regolare iscritta nel cerchio, debbano determinarsi consecutivamente i lati dell'altre figure iscritte, che colla bisezione dell' arco da quella derivano. L'operazione da farsi è la seguente. Sia la BD il lato della figura data, e diviso l'arco BCD egualmente nel punto
Fig. 88. C, sarà la BC il lato dell' altra ad essa consecutiva. Or congiunto il raggio AC, che s'incontri colla BD nel punto F, sarà così BF la metà della BD, come AF la metà della DE. Quindi, siccome con essere data la BD sarà data ancora

cora la BF; così con determinare la DE per mezzo del triangolo rettangolo BDE, resterà determinata eziandio tanto la AF, quanto la CF. Onde, perche nel triangolo rettangolo BFC sono noti i due lati CF, BF situati intorno all' angolo retto, si determinerà facilmente la sua ipotenusa BC, che è il lato ricercato.

243. Questa operazione in tanto può ridursi a maggior compendio, ed ecco come. Pongasi il raggio $AB = AC = a$, ed il lato dato $BD = 2b$ Sarà adunque la $BF = b$, la $DE = \sqrt{(4a^2 - 4b^2)}$ la $AF = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, e la $CF = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$; quindi essendo il quadrato della $CF = 2a^2 - b^2 - \sqrt{(4a^4 - 4a^2b^2)}$, sarà il quadrato della $BC = 2a^2 - \sqrt{[4a^4 - 4a^2b^2]}$; e cavando da questo binomio la radice quadrata, sarà la $BC = \sqrt{[a^2 + ab]} - \sqrt{[a^2 - ab]}$. Onde se la metà del lato dato si aggiunga, e si tolga dal raggio, e moltiplicata così la somma, come la differenza per lo stesso raggio, si cavi in appresso la radice quadrata dall' uno, e l'altro prodotto; sarà la differenza di queste due radici il lato, che si dimanda. Ed in questa maniera se tanto il raggio, quanto il lato dell' esagono iscritto si disegni per l'unità, sarà il lato ricercato '51762 nel dodecagono, '26105 nella figura di 24 lati, '13081 nella figura di 48, e '06544 nella figura di 96.

244. Si vide ancora (223), come essendo noto il lato della figura regolare iscritta nel cerchio, possa determinarsi il lato dell' altra consimile circonscritta. L'operazione da farsi è questa. Si tiri al punto C la tangente GH, che s' incontri ne' punti G, ad H coi due raggi AB, AD; ed essendo la BD il lato dell' iscritta, sarà la GH il lato della circonscritta. Quindi, perche AF stà ad AC, come BD à GH, sarà come $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ad a, così $2b$ à GH; onde se la metà del lato dato si aggiunga, e si tolga dal raggio, e moltiplicata la somma per la differenza si cavi dal prodotto la radice quadrata, con fare in appresso, che questa radice sia al raggio, come il

lato

lato dato ad una quarta proporzionale, si avrà il lato, che si dimanda. Ed in questa maniera disegnando di nuovo coll' unità tanto il raggio, quanto il lato dell' esagono iscritto, sarà il lato ricercato 1' 15470 nell' esagono circonscritto, '53589 nel dodecagono, '26330 nella figura di 24 lati, '13109 nella figura di 48, e '06547 nella figura di 96.

245. Ciò posto, egli è ora da riflettersi, che
16 sebbene la differenza tra il lato dell' iscritta, e l'altro della circonscritta sia sensibile, quando le due figure sono di 6, di 12, di 24, e di 48 lati; ad ogni modo ella diviene quasi insensibile, quante volte il numero de' lati delle stesse figure ascende à 96. Di fatti nella supposizione, che il raggio sia 1, si è ritrovato essere '06544 il lato dell' iscritta, e '06 547 il lato della circonscritta, la differenza de' quali lati è '00003, che è una frazione insensibile per rapporto all' unità. Possiamo adunque avvalerci di queste due figure per determinare i limiti della ragione, che ha la circonferenza del cerchio al suo diametro. E poichè con moltiplicare i loro lati per 96, si fanno 6'28224, e 6'28512 i perimetri delle medesime; perciò il perimetro dell' iscritta sarà al diametro, come 6'28224 à 2, o pure come 3' 14112 ad 1, ed il perimetro della circonscritta sarà all' istesso diametro, come 6' 28512 à 2, ovvero come 3' 14256 ad 1. Dal che ne segue, che la circonferenza del cerchio al suo diametro sia in maggior ragione di 3' 14112 ad 1, ed in minor ragione di 3'14256 ad 1

246. Il celebre Archimede con far uso delle stesse figure s' incontrò con limiti alquanto diversi dai due nostri, e lasciò dimostrato, che la circonferenza del cerchio al suo diametro sia in maggior ragione di $3\frac{10}{71}$ ad 1, ed in minor ragione di $3\frac{1}{7}$ ad 1. Ma egli è facile di dedurre quest' altri limiti da quegli stessi, che si sono da noi ritrovati. Imperocchè, siccome 3' 14112 antecedente del primo nostro limite è un poco più, che $3\frac{10}{71}$; così per lo contrario 3' 14256 antecedente

del

del ſecondo limite è un poco meno, che $3\frac{1}{7}$. Quindi la ragione di 3' 14112 ad 1 ſarà maggiore della ragione di $3\frac{10}{71}$ ad 1; ed all' incontro la ragione di 3' 14256 ad 1 ſarà minore della ragione di $3\frac{1}{7}$ ad 1. Ma ſi è dimoſtrato, che la circonferenza al diametro ſia in maggior ragione di 3' 14112 ad 1, ed in minor ragione di 3' 14256 ad 1. Dunque la ſteſſa circonferenza allo ſteſſo diametro ſarà ancora in maggior ragione di $3\frac{10}{71}$ ad 1, ed in minor ragione di $3\frac{1}{7}$ ad 1.

247. Si vede intanto, che i due limiti di Archimede ſiano tra eſſi loro più diſtanti, che i due da noi ritrovati; onde non è da porſi in dubbio, che la ragione della circonferenza del cerchio al ſuo diametro reſti più determinata coi due noſtri, che coi due di Archimede. Ma ſiccome non è da crederſi, che un Geometra così ſublime non ſi fuſſe di ciò avveduto; così è molto veriſimile, che aveſſe egli ſcelto quei due limiti più diſtanti, sì perchè per la pratica, à cui egli dirigeva le ſue ricerche, i ſuddetti limiti ſono baſtanti à determinare la ragione, di cui ſi tratta, come ancora perchè i medeſimi con numeri piccioli ci additano i confini di detta ragione. E per queſto verſo nè pure deve eſſere tanto commendata l' induſtria di coloro, che con eſſere ricorſi à figure regolari di maggior numero di lati, ſi ſono ſtudiati con vaſti numeri riſtringere i due limiti della richieſta ragione, ed approſſimarli tra loro lo più che ſia poſſibile.

248. Or ſe bene la vera ragione della circonferenza del cerchio al ſuo diametro ſia riſtretta trà i due riferiti limiti; ad ogni modo qualora di eſſa ſi ha biſogno, poſſiamo avvalerci di una delle due, che la terminano. E poichè in pratica torna più conto di errare per eccesso, che per difetto, potremo perciò far uſo, ò del maggior limiti di Archimede, che ci dà la ragione di $3\frac{1}{7}$ ad 1, cioè di 22 à 7, o pure del limite noſtro maggiore, da cui ne riſulta la ragione di 3' 14256 ad 1, cioè di 314256 à 100000. Ma ſiccome queſta

seconda è espressa con numeri ben grandi, così con togliere dai suoi termini uno, ò due caratteri possiamo senza nota di errore sensibile ridurla, ò alla ragione di 31425 à 10000, ò pure alla ragione di 3142 à 1000; ed in amendue i casi sarà sempre più esatta di quella di Archimede.

249. Alcuni fanno uso ancora della ragione di 314 à 100, che si ha con togliere tre caratteri dai due termini della ragione nostra principale; ma impiegandosi ne' calcoli detta ragione, si viene con essa ad errare per difetto, e l'errore è molto sensibile. Di fatti egli è facile il dimostrare, che la circonferenza al diametro sia in maggior ragione di 314 à 100. Imperocchè secondo il limite nostro minore la ragione della circonferenza al diametro è maggiore della ragione di 314112 à 100000. Ma egli è chiaro, che la ragione di 314112 a 100000 sia maggiore della ragione di 314 à 100. Dunque la ragione della circonferenza al diametro sarà molto più maggiore della ragione di 314 à 100. E poichè eziandio la ragione di 223 à 71, che ci dà il limite minore di Archimede, è maggiore della ragione di 314 à 100; per necessità dovrà essere molto sensibile l'errore di difetto, che si commette con detta ragione.

250. Per quanto alla ragione di 3142 a 100, o non sarà inutile quì l'avvertire, che ella viene ad essere quasi mezza trà le due, che si ricavano dai nostri limiti; poichè siccome con dimezzare la differenza di detti limiti avremo la ragione di 314184 a 100000, così questa nuova ragione manca per picciola cosa dall'altra di 3142 à 1000. E da questo stesso possiamo dedurre l'esattezza di detta ragione; poichè conforme ella si avvicina più al limite minore, che al limite maggiore, così eziandio la circonferenza del cerchio per la sua curvatura differisce meno dal perimetro della figura iscritta, che dall'altro della circonscritta. Che se poi la riferita ragione si voglia esprimere con termini più ristretti, potrà ella ridursi alla ragione di 355 à 113, dataci da Adriano Mezio, la quale sebene

sia

ſia un tantino maggiore della ragione di 3142, à 1000, ad ogni modo per la picciolezza de' ſuoi termini dee eſſerle preferita; onde ſi è, che in pratica baſterà appigliarſi ò alla ragione di 22 à 7, ò all'altra di 355 à 113.

251. Determinata per via di approſſimazione la ragione della circonferenza del cerchio al ſuo diametro, vediamo preſentemente, quale ſia l'uſo di eſſa nella miſura del cerchio. Ed in primo luogo dovendo quella ragione aver luogo in ogni cerchio egli non è da porſi in dubbio, che ſi poſſa ora, così dato il diametro di qualſiſia cerchio determinare la ſua circonferenza, come per lo contrario data la circonferenza determinare il diametro. Fingiamo à cagion di eſempio, che il diametro dato ſia 10; e ſervendoci della ragione di Archimede, non avremo à fare altra coſa, ſe non che dire, ſe 7 ci dà 22, quanto dee darci 10? e ritroveremo, che la circonferenza relativa al diametro dato ſia $31\frac{3}{7}$. Fingiamo poſcia, che la circonferenza data ſia 100, e dicendo al contrario, ſe 22 ci dà 7, quanto dee darci 100? ritroveremo, che il diametro relativo alla circonferenza data ſia $31\frac{9}{11}$.

252. In ſecondo luogo, con eſſer noto così il diametro, come la circonferenza di qualſiſia cerchio poſſiamo determinare la ſua capacità. Imperocchè, eſſendo il cerchio eguale ad un triangolo, che ha per baſe la circonferenza, e per altezza il raggio (237), avremo la ſua capacità con moltiplicare la circonferenza per la metà del raggio, che è la quarta parte del diametro. Così con eſſere il diametro 10, la ſua circonferenza ſecondo la ragione di Archimede viene à farſi $31\frac{3}{7}$; quindi moltiplicando $31\frac{3}{7}$ per $2\frac{1}{2}$, che è la quarta parte di 10, ritroveremo, che la capacità del cerchio ſia $78\frac{4}{7}$. Similmente nella ſuppoſizione, che il diametro ſia 15, la ſua circonferenza ſecondo la ragione di 7 à 22 dovrà eſſere $47\frac{1}{7}$; onde moltiplicando $47\frac{1}{7}$ per $3\frac{3}{4}$, che è la quarta parte di 15, ritroveremo, che la capacità del cerchio ſia $176\frac{11}{14}$.

 253. Se-

253. Secondo questa regola, egli è chiaro, non potersi determinare la capacità di un cerchio, di cui ne sia dato il diametro, se non si determini prima la sua circonferenza; ma niente sarà più facile, quanto di evitare quest' altra determinazione, ed ecco come. Si chiami a il diametro, e secondo la ragione di 7 à 22 la sua circoferenza dovrà essere $\frac{22}{7} a$; onde con moltiplicare $\frac{22}{7} a$ per $\frac{1}{4} a$, avremo per la capacità del cerchio $\frac{11}{14} a^2$. Facciasi adunque come 14 ad 11, così a^2, che è il quadrato del diametro, ad una quarta proporzionale, e si avrà la capacità, che si dimanda. E per adattare quest' altra regola ad ogni ragione, di cui si voglia far uso, pongasi indeterminatamente, che la ragione della circonferenza al diametro sia di c à d; ed essendo $a c : d$ la circonferenza relativa al diametro a, sarà $a^2 c : 4 d$ la capacità del cerchio; onde facendo come $4 d$ à c, così a^2 ad una quarta proporzionale, avremo la capacità ricercata.

254. E quindi possiamo in terzo luogo, data la capacità di un cerchio qualsivoglia, determinare per lo contrario il suo diametro. Imperocchè, siccome il quadrato del diametro stà alla capacità del cerchio, come 14 ad 11, o generalmente come $4 d$ à c; così al rovescio la capacità del cerchio sarà al quadrato del diametro, come 11 à 14, o pure come c à $4 d$. Facciasi adunque, come 11 à 14, ovvero come c à $4 d$, così la data capacità ad una quarta proporzionale; e conforme questa dovrà essere il quadrato del diametro, che si dimanda, così la sua radice quadrata ci darà il diametro richiesto. Fingiamo à cagion di esempio, che la capacità del cerchio sia $78\frac{4}{7}$; e facendo come 11 à 14, così $78\frac{4}{7}$ ad una quarta proporzionale, ritroveremo, che questa sia 100; e poichè la sua radice quadrata è 10, sarà 10 ancora il diametro, che si cerca.

255. In quarto luogo, con esser nota la ragione del diametro alla circonferenza, possiamo dato il diametro di un cerchio qualsivoglia determi-

minare non solo l'intera sua circonferenza, ma ogn' altro arco ancora, che abbia con quella data ragione. Fingiamo a cagion di esempio, che il diametro dato sia 10, e di già la circonferenza del cerchio secondo la ragione di Archimede dovrà essere $31\frac{3}{7}$; onde se l'arco, che si dimanda, sia la terza parte di detta circonferenza, dividasi $31\frac{3}{7}$ per 3, ed il quoziente di questa divisione, che è $10\frac{10}{21}$, sarà la lunghezza dell'arco richiesto. Che se poi l'arco sia espresso per gradi e minuti, e contenga per esempio 45 gradi, e 15 minuti, senza darci la pena di esaminare, questo numero di gradi e minuti che parte egli sia dell'intero loro numero contenuto in tutta la circonferenza, basterà dire se 360 gradi danno $31\frac{3}{7}$, che debbono dare 45 gradi, e 15 minuti? ed in questa maniera ritroveremo, che la lunghezza dell'arco sia $3\frac{479}{504}$.

256. Possiamo finalmente, dato il diametro di un cerchio qualsivoglia determinare la capacità di un suo settore terminato da un'arco, che abbia data ragione colla circonferenza intera. Imperocche, siccome con questa data ragione può determinarsi la lunghezza dell'arco; così per essere il settore eguale ad un triangolo, che ha l'arco per base, ed il raggio per altezza (238), si avrà la sua capacità con moltiplicare l'arco per la metà del raggio, che è la quarta parte del diametro. Per ragion di esempio fingiamo, che il diametro del cerchio sia 10, dimodochè la sua circonferenza secondo la ragione di Archimede sia $31\frac{3}{7}$; e se l'arco, da cui è terminato il settore, sia la terza parte di detta conferenza, sarà $10\frac{10}{21}$ la sua lunghezza; onde moltiplicando $10\frac{10}{21}$ per $2\frac{1}{2}$, che è la quarta parte di 10, ritroveremo, che la capacità del settore sia $26\frac{4}{21}$.

§. V.

Di altre operazioni intorno alla figura circolare.

257. INtorno al cerchio rimangono a farsi molte altre operazioni, che non debbono essere ignorate da un Geometra pratico. Ed in primo luogo, essendo le circonferenze, come i raggi, egli è chiaro, che per aumentare, o diminuire la circonferenza di un cerchio in qualunque data ragione, non debba farsi altra cosa, se non che aumentare, o diminuire il raggio in quella stessa ragione. Ma se poi più spezialmente si voglia un cerchio, la di cui circonferenza sia eguale, ò alla somma delle circonferenze di due cerchi dati, o pure alla loro differenza; in tal caso basterà, che egli si descriva con raggio tale, che uguagli, ò la somma, ò la differenza de' raggi dei due dati cerchi. Ed in questa maniera non solo due, ma quantesivogliano circonferenze di cerchi diversi potranno accoppiarsi insieme, e riunirsi nella circonferenza di un cerchio solo.

258. Essendo poscia i cerchi medesimi nella duplicata ragione de' loro raggi, si vede ancora, che per aumentare, ò diminuire un cerchio in qualsivoglia data ragione, come di a à c, si debba prima ritrovare tra le due a, e c la mezza proporzionale, che sia b, ed indi aumentare o diminuire il raggio nella ragione di a à b, di cui viene à farsi duplicata la data di a à c. Ma se poi più spezialmente si voglia un cerchio, che sia eguale, ò alla somma di due cerchi dati, ovvero alla loro differenza; in tal caso basterà prima ritrovare un quadrato, che uguagli ò la somma, o la differenza dei quadrati fatti dalli raggi dei due dati cerchi, ed indi col lato di questo quadrato come raggio descrivere il cerchio, che si dimanda. Ed in questa maniera non solo due, ma quantisivogliano cerchi diversi potranno accoppiarsi insieme, e riunirsi in un sol cerchio.

259. In oltre dall'essere ogni cerchio eguale ad un triangolo, che ha per base la circonferenza, e per altezza il raggio (237), con ogni evidenza si raccoglie; che per formare un quadrato eguale ad uno dato cerchio non debba farsi altra cosa se non se ritrovare la mezza proporzionale trà la metà della circonferenza distesa a dirittura, ed il raggio intero, ed indi su di questa mezza descrivere il quadrato, che si dimanda. E per la stessa ragione, essendo ogni settore eguale ad un triangolo, che ha l'arco per base, ed il raggio per altezza (238), formeremo un quadrato eguale ad un dato settore, se dopo essersi ritrovata la mezza proporzionale tra la metà dell' arco disteso a dirittura, ed il raggio intero, ci serviamo di questa mezza come lato del quadrato, che si dimanda.

260. Quante volte un cerchio, come BCD, contiene dentro di se un' altro cerchio, come EFG, ognuno vede, che con determinare le loro capacità, e con togliere la minore dalla maggiore, resti determinato lo spazio, che si frappone tra le loro circonferenze; ma più elegantemente si può egli avere, con moltiplicare la differenza de' raggi per la somma delle circonferenze dimezzata. Di fatti se formiamo due triangoli rettangoli HIL, HMN, in cui i lati HI, HM siano i raggi, e gli altri due IL, MN siano le circonferenze; siccome questi triangoli sono eguali ai due cerchi, così il trapezio LIMN sarà eguale à quello spazio; ma di già si è dimostrato altrove (147), che per avere la capacità di questo trapezio non dee farsi altra cosa, se non se moltiplicare la MI per la somma dimezzata delle due IL, MN. Fig. 94. Fig. 95.

261. Essendo concentrici i due cerchi BCD, EFG, si appella comunemente zona, ovvero corona circolare quello spazio, che si frappone tra le loro circonferenze. E si vuol quì notare, che se dal comune centro A si tirino due raggi AB, AC, eziandio la capacità della porzione BEFG tagliata dalla corona per questi raggi si avrà con Fig. 94.

 mol-

moltiplicare la differenza de' raggi BE per la somma dimezzata dei due archi BC, EF, che la terminano. Imperocche essendo in questo caso gli archi BC, EF nella ragione delle loro circonferenze, saranno i medesimi, come i raggi AB, AE.
Fig. 95. Onde, se tagliata dalla MN la porzione MO eguale all'arco BC congiungasi la HO, sarà l'altra porzione IP eguale all'altro arco EF; e pertanto essendo i due triangoli HMO, HIP eguali ai due settori BAC, EAF, sarà il trapezio PIMO eguale allo spazio circolare BEFC.

262. Giova ancora quì avvertire, che se divisa
Fig. 94. la differenza de' raggi BE egualmente nel punto Q, si descriva col centro A, e col raggio AQ un'altro cerchio; sarà così la sua circonferenza QRS eguale alla somma dimezzata dell'altre due BCD, EFG, come il suo arco QR eguale alla somma dimezzata degli altri due BC, EF. Imperocche tanto le tre circonferenze BCD, QRS, EFG, quanto i tre archi BC, QR, EF sono, come i raggi AB, AQ, AE. Onde siccome per costruzione il raggio AQ è la metà degli altri due AB, AE, così la circonferenza QRS sarà la metà dell'altre due BCD, EFG, e l'arco QR sarà la metà degli altri due BC, EF. Ed essendo così avremo la corona compresa tra le due circonferenze BCD, EFG, con moltiplicare la differenza de' loro raggi BE per la sola circonferenza QRS; ed avremo ancora la porzione BEFC di detta corona, con moltiplicare la stessa differenza de' raggi per lo solo arco QR.

263. Se si abbia un settore, come BAC, e si
Fig. 96. voglia lo spazio racchiuso tra l'arco BC, e la corda, che lo sostiene, ognuno vede, che con determinare la capacità così del settore BAC, come del triangolo ABC, e con togliere l'una dall'altra, resti determinato detto spazio. Ma per maggior compendio giova il riflettere, che siccome la capacità del settore BAC si ha con moltiplicare l'arco BC per la metà del raggio; così abbassata sul raggio AB la perpendicolare CD, si

avrà

avrà la capacità del triangolo A B C con moltiplicare la C D per la metà dello stesso raggio: donde è facile il ricavarne, che se la differenza tra l'arco BC, e la perpendicolare C D si moltiplichi per lo raggio dimezzato, il prodotto dovrà essere la capacità dello spazio, che si dimanda. E poichè la CD, secondo diremo a suo luogo, si appella seno dell'arco BC; quindi si è, che per avere lo spazio compreso tra l'arco, e la corda dee moltiplicarsi la differenza tra l'arco, ed il suo seno per la metà del raggio.

264. Questi spazj, che racchiudono gli archi colle loro corde, si chiamano propriamente da Geometri porzioni circolari; e qualora gli archi sono simili, cioè contengono un'istesso numero di parti delle loro circonferenze, eziandio le porzioni si appellano simili, per la ragione, che ancora esse contengono un'egual numero di parti dei cerchi, a' quali si rapportano; e quindi si è, che due porzioni simili, a guisa degli stessi cerchi, siano in duplicata ragione de' loro raggi. Ma per picciola riflessione, che si voglia fare, si comprenderà facilmente, che le medesime porzioni simili debbano essere ancora in duplicata ragione così degli archi, come delle corde, che le terminano; poichè attesa la simiglianza di dette porzioni si ritroverà, che tanto gli archi, quanto le corde siano tra loro, come i raggi.

265. Colla determinazione delle porzioni circolari si avrà ancora quella delle lunule, le quali sono racchiuse da due archi, che tra loro s'incontrano. Ma intorno a queste lunule bisogna avvertire, che elle possono essere di due spezie; poichè o sono convesse da amendue le parti, siccome è la lunula A B C D; Fig. 97.
o pure da una parte sono convesse, e dall'altra concave, conforme è l'altra lunula F G H I. In amendue i casi egli è chiaro, che i due archi, per cui è Fig. 98.
terminata la lunula, abbiano una stessa corda. Quindi con determinare le due porzioni circolari contenute da detti archi, e dalla loro corda comune, resterà determinata ancora la stessa lunula; poichè

/ve
chè ſiccome ella deſ eſſere eguale alla ſomma delle due porzioni, quante volte è conveſſa da amendue le parti; così ſarà eguale alla loro differenza, qualora da una parte è conveſſa, e dall' altra concava.

266. Se i due archi, che terminano la lunula, ſi dividono per metà, ed i due punti della loro diviſione ſi congiungano inſieme per una retta, non v'ha dubbio, che ancora la lunula da queſta retta reſterà diviſa per metà. Or di queſte lunule dimezzate, che ſono conveſſe da amendue le parti, ſi ſuole far uſo negli edificj ſecondo l' Architettura gotica; ſiccome è la mezza lunula A B D
Fig. 97. ſoſtenuta dalla retta B D, che divide egualmente ne' punti B, e D i due archi A B C, A D C, che terminano la lunula intera; e ſi forma ella effettivamente con fare, che i due punti B, e D termini della retta B D ſiano centri dei due archi A D, A B. Quindi dovendo eſſere il triangolo A B D equilatero, ſarà ciaſcuno dei due archi A D, A B la ſeſta parte dell' intera circonferenza. E poichè la lunula dimezzata ſi fà eguale alla ſomma dei due ſettori A B D, A D B' minorata del triangolo equilatero; ſi avrà la ſua capacità con moltiplicare la baſe B D per la metà della differenza trà l'intera curva B A D, e l'altezza A E.

267. Dalle coſe dette ſin'ora baſtantemente può raccoglierſi, che un ſpazio circolare di qualunque forma egli ſia non poſſa eſſere determinato, ſe non ſe per via di approſſimazione, per la ragione, che ſempre ſi ha biſogno dell' arco, da cui è terminato detto ſpazio, per la di lui determinazione. Intanto, ſe A B C ſia un triangolo
Fig. 99. rettangolo, e dopo eſſerſi deſcritto ſull' ipotenuſa B C il ſemicerchio B A C, ſe ne deſcrivano due altri A D B, A E C ſulli lati A B, A C; ſarà quel primo eguale à queſt' altri due uniti inſieme; e pertanto le due lunule, che ſi formano, unitamente preſe ſaranno eguali all' iſteſſo triangolo. E ſe il triangolo ſia iſolcele, dimodochè ſiano

ſiano eguali, così i lati A B, A C, come i cerchi deſcritti sù di eſſi; in tal caſo per eſſere le due lunule tra loro eguali, sarà ciaſcuna di eſſe eguale alla metà del triangolo.

268. Con archi circolari di due diverſi cerchi ſogliono formare gli Artefici una figura, che eſſi chiamano ovale. Per darle tutta l'eſtenſione, di cui ella è capace, la deſcriveremo in queſta guiſa. Prendaſi un rombo qualſivoglia A B C D, che può eſſere ancora quadrato, e ſi diſtendino i ſuoi lati verſo i punti A, e C termini della diagonale A C; indi con queſti punti come centri, e con un'iſteſſo intervallo ſi deſcrivano i due archi E F, G H; che ſi vadano ad incontrare coi lati prolungati nei punti E, F, G, H. E poichè le quattro B E, B H, D F, D G ſi fanno tra loro eguali, deſcrivanſi ancora coi centri B, e D, e coll' intervallo di una di eſſe gli altri due archi E H, F G, i quali frammezzandoſi tra i due primi ci daranno l'ovale, di cui ſi tratta. Ed egli è chiaro, che le ſue ſpezie poſſono eſſere infinite, le quali dipendono, così dalla varia forma, che può darſi al rombo, per mezzo di cui ella ſi deſcrive, come dalla diverſità dell' intervallo, con cui ſi deſcrivono i primi due archi circolari; ma di qualunque ſpezie ella ſia, niente sarà più facile, quanto di determinare la ſua capacità. Fig. 100.

269. Quantunque queſta figura non ſia cerchio, nientedimeno perchè l'incontro degli archi, che la contengono, ſi fa per via di contatto, la ſua curvatura è continua, come quella del cerchio. Che ſe poi ſi calcolano i gradi contenuti negli ſteſſi archi, ſi vedrà, che la loro ſomma aſcende à 360, come in una circonferenza intera. Ed in fine, ſe ſi prolunghino le diagonali del rombo A C, B D, reſterà diviſa per eſſe la figura in quattro parti eguali, delle quali ciaſcuna sarà terminata da due archi, che inſieme contengono 90 gradi. Ma intorno à queſte diagonali prolungate ſi vuol'ancora avvertire, che eſſe non mai poſſono eſſere tra loro eguali; poichè

chè essendo le due BI, AI maggiori della BA, coll'aggiunta dell' eguali AM, AE saranno ancora le due BI, MI maggiori della BE o sia BO; e pertanto tolta la comune BI, resterà MI maggiore ancora di OI, ed MN maggiogiore di OP. Quindi siccome le due MN, OP possono aversi come assi dell' ovale; così sarà MN l'asse maggiore; ed OP l'asse minore.

270. Da questa ovale degli Artefici è ben diversa l'altra geometrica; che propriamente si chiama ellisse. Si descrive quest' altra con alligare à due punti, come F e G, l'estremità di un filo FMG più lungo della FG, e con portare questo filo per mezzo di un stile talmente intorno a que' punti, che le parti di esso MF, MG, le quali variano continuamente, restino sempre tese. Mà siccome la figura così descritta si chiama ellisse, così i punti F, e G si appellano suoi fochi; e se la distanza FG di quei fochi si divida egualmente nel punto C, si dirà essere questo punto centro dell' ellisse per la ragione; che tutte le rette, le quali si tirano per detto punto, e si terminano dall' una e l'altra parte dell' ellisse, restano ivi divise in parti eguali. E conforme ciascuna di queste rette si chiama diametro; così alla AB, in cui sono situati i due fochi, si è dato il nome di asse maggiore, ed alla DE, che seca la AB ad angoli retti, quello di asse minore.

Fig. 101.

271. L'indole di questa figura si ricava dalla stessa sua descrizione, e si è, che se da un punto M del suo perimetro si tirino a i fochi le due MF, MG, la loro somma de[v]e essere da pertutto la medesima. E poichè questo stesso avviene così alle due AF, AG, come alle due BF, BG; sarà la AF eguale alla BG; e pertanto la somma delle due MF, MG dovrà essere da pertutto eguale all' asse maggiore AB. Intanto la proprietà sua più rilevante è questa, che se da uno de' punti del suo perimetro si abbassi una perpendicolare sopra uno delli due assi, il suo quadrato

lve

drato sarà al rettangolo delle due porzioni dell' asse, come stà il quadrato dell' altro asse al quadrato del primo. Così essendo la MN perpendicolare sull' asse AB, sarà come il quadrato della MN al rettangolo delle due AN, BN, così il quadrato di DE al quadrato di AB; ed essendo la MO perpendicolare all' altro asse DE, sarà come il quadrato della MO al rettangolo delle due DO, EO, così il quadrato di AB al quadrato di DE.

272. Per dimostrare questa proprietà col calcolo, pongasi l'asse maggiore $AB = 2a$; e dovendo essere $2a$ eziandio la somma delle due MF, MG, se si chiami $2b$ la loro differenza, sarà la minore $MF = a - b$, e la maggiore $MG = a + b$. Pongasi ancora la $CF = c$, e la $CN = x$, tantochè sia la $FN = c - x$, e la $GN = c + x$; ed essendo la differenza de' quadrati MF, FN eguale alla differenza degli altri due MG, GN, sarà $ab = cx$, e $b = cx : a$. Quindi facendosi la $MF = a - cx : a$, se si ponga la $MN = y$, si avrà per lo triangolo rettangolo MNF $y^2 = a^2 + c^2 x^2 : a^2 - c^2 - x^2$, cioè $a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 - a^2 x^2 + c^2 x^2$, o pure $a^2 y^2 : [a^2 - c^2] = a^2 - x^2$, donde si ricava, che $a^2 - c^2$ sia ad a^2, come y^2 ad $a^2 - x^2$. Ma $a^2 - x^2$ è il rettangolo delle due AN, BN; e per essere tanto DF, quanto $DG = a$ viene à farsi $a^2 - c^2$ il quadrato di DC. Dunque sarà come il quadrato di DC al quadrato di AC, o pure come il quadrato di DE al quadrato di AB, così il quadrato di MN al rettangolo di AN in BN; e togliendo i conseguenti dagli antecedenti sarà ancora come il quadrato di DE al quadrato di AB, così il rettangolo di DO in EO al quadrato di NO.

273. Quindi se sopra uno dei due assi, come sopra AB, descrivasi il semicerchio AHB, colla di cui circonferenza s' incontri la MN nel punto H; sarà ancora come il quadrato della MN al quadrato della HN, così il quadrato di DE al quadrato di AB, onde sarà come MN Fig. 102.

ad

ad HN, così DE ad AB. Ed essendo così, egli è facile il dimostrare, che lo spazio ellittico sia allo spazio circolare nella stessa ragione di DE ad AB. Imperocchè diviso l'uno, e l'altro spazio per infinite di quelle perpendicolari distanti tra loro per eguali intervalli, sarà la somma delle MN alla somma delle HN, come DE ad AB. Ma secondo il metodo degli indivisibili lo spazio ellittico, e lo spazio circolare debbono essere tra loro, come quelle somme. Dunque lo spazio ellittico allo spazio circolare sarà, come DE ad AB. Donde poscia ne segue, che se tra i due assi AB, DE si ritrovi una mezza proporzionale, con cui come diametro si descriva un cerchio, sarà questo cerchio eguale all' intero spazio ellittico.

10 Fig. 101. 274. Or se bene il cerchio, e l'ellisse abbiano indole diversa; ad ogni modo se i due fochi F, e G si avvicinino talmente tra loro, che si uniscano insieme nel centro C, all'ora l'ellisse non sarà diversa dal cerchio. Ma se è così, vediamo al contrario, che forma dee prendere l'ellisse, qualora uno dei due fochi, come G, si concepisce situato in una distanza infinita dall'altro F. In questo caso non v'ha dubio, che la curva, per cui si termina la figura, non solo si estenderà eziandio all' infinito, ma si discosterà continuamente dall'asse AB. E poichè per l'infinita distanza del foco G la MG si fà parallela all' istesso asse, saranno eguali ancora le due MG, NG. Onde, siccome prima la somma delle due MF, MG era eguale alla somma dell'altre due AF, AG, così con farsi la MG eguale alla NG, resterà la sola MF eguale alla somma delle due AF, AN.

16

Fig. 103. 275. Con intendersi adunque l'altro foco situato in una distanza infinita dal foco F, si cambierà l'ellisse in un'altra figura, in cui se da un punto M del suo perimetro si tiri così la MF al foco F, come la MN perpendicolare all'asse, sarà la MF eguale alle due AF, AN uni-

re

te insieme. Questa nuova figura, che suol terminarsi per una base perpendicolare all' asse, si chiama da Geometri parabola, di cui la proprietà più rilevante si è, che il quadrato della perpendicolare M N sia eguale a quattro volte il rettangolo delle due A F, A N. Di fatti, essendo la M F eguale a queste due unite insieme, sarà il quadrato della M F eguale al quadrato della somma dell' altre due A F, A N. Ma il primo quadrato è eguale alli quadrati delle due M N, F N; ed il secondo quadrato è eguale a quattro volte il rettangolo delle due A F, A N insieme col quadrato della FN [154]. Dunque togliendone il comune quadrato della F N, resterà il quadrato della M N eguale a quattro volte il rettangolo delle due A F, A N.

276. Or se molte siano le perpendicolari M N abbassate sull' asse, chiara cosa si è, che i loro quadrati, come eguali a rettangoli, che anno per basi le A N, e per comune altezza il quadruplo della A F, saranno come le sole porzioni A N, che corrispondono a dette perpendicolari. E poichè con tirare le rette M O parallele all' asse, che s' incontrino ne' punti O coll' altra A D alzata perpendicolarmente sull' istesso asse, si fanno le A O eguali alle M N, e le M O eguali alle A N; saranno al contrario quest' altre M O come i quadrati delle corrispondenti porzioni A O. Ed essendo così, se ci richiamiamo a memoria quel teorema arimmetico, cioè che la somma de' quadrati degl' infiniti numeri naturali sia all' ultimo preso altrettante volte, come 1 à 3, potremo facilmente dimostrare per mezzo di esso, che se le due C B, C D siano perpendicolari sull' altre due A B, A D, sarà lo spazio parabolico esteriore A D C la terza parte dell rettangolo A B C D, e l' altro interiore A B C i due terzi dello stesso rettangolo. Fig. 104.

277. S' intenda perciò diviso lo spazio esteriore A D C in tanti piccioli trapezj per infinite rette M O distanti tra loro per eguali intervalli. E poi-

poichè le porzioni A O, che ad esse corrispondono, si aumentano come i numeri naturali, niente sarà più proprio, quanto di disegnarle con detti numeri. Quindi l'altre M O, come proporzionali ai quadrati di dette porzioni, potranno essere disegnate per mezzo dei quadrati degli stessi numeri; onde in virtù del riferito teorema aritmetico la somma delle M O sarà all'ultima C D presa altrettante volte, come 1 à 3. Ma secondo il metodo degli indivisibili la somma delle M O ci addita lo spazio parabolico A D C, e la somma di altrettante C D ci rappresenta il rettangolo A BCD. Dunque ancora lo spazio parabolico A D C sarà al rettangolo A B C D, come 1 à 3; ed in conseguenza l'altro spazio parabolico A B C sarà allo stesso rettangolo A B C D, come 2 à 3.

16 278. Del rimanente sebbene nella parabola l'altro foco dee concepirsi situato in una distanza infinita dal foco F; ad ogni modo si può ella descrivere senza che si abbia bisogno di quell'altro foco; ed ecco come. Si prolunghi l'asse verso A talmente ~~per~~ sino al punto C, che siano eguali le due A C, A F; e si alzi sull'istesso asse la perpendicolare C D. Prendasi di poi così la squadra E H G, che si adatti con uno de' suoi lati H E sulla perpendicolare alzata C D; come un filo della stessa lunghezza coll'altro lato H G, di cui un' estremità si attacchi al foco F, e l'altra al termine G dell'altro lato H G. Facciasi finalmente, che la squadra col lato suo H E scorra per la C D, e che il filo per mezzo di un stile resti talmente teso, che una porzione sua M G si combaci coll'altro lato H G; ed in questa maniera dal stile medesimo resterà segnata nel piano la parabola, che si dimanda; poichè siccome l'altra porzione del filo M F dee essere eguale alla M H, così abbassata sull'asse la perpendicolare M N sarà la stessa M F eguale alla C N, cioè eguale alle due A F, A N unite insieme.

Fig. 103.

live

CA-

[redacted]

+CAPITOLO IV.

+

Delle figure solide terminate da superficie piane.

279 DAlla considerazione delle figure piane passeremo ora a quella delle figure solide, le quali siccome sono terminate da superficie, che possono essere e piane, e curve, così per la diversità de' loro termini debbono essere distinte in due classi. La prima classe adunque sarà delle figure solide, che per ogni lato sono terminate da superficie piane. La seconda poi sarà di quell'altre, che almeno per un qualche lato sono terminate da superficie curve. L'argomento intanto di questo capitolo saranno le figure solide della prima classe, intorno alle quali non avremo altro a considerare, se non che la propria loro solidità; poichè i termini di esse, come figure piane rettilinee, si pongono a calcolo colle pratiche precedenti. Ma per essere queste tali figure racchiuse da molte superficie piane, che tra loro s' incontrano; non sarà mal fatto di dire prima qualche cosa, così dell'incontro de' piani, come dell' angolo solido contenuto da più piani scambievolmente inclinati tra loro.

§. I.

Dell' incontro de' piani, e dell' angolo solido.

280. SEbene la posizione della retta dipenda da due punti, nientedimeno due punti soli non bastano a determinare quella del piano, per la ragione, che si possono far passare per una stessa retta non uno, ma infiniti piani. Per avere adunque la posizione del piano, bisogna, che siano dati almeno tre punti, i quali tuttavolta non debbono essere tra loro a dirittura. Quindi, perche questi tre punti determinano così l'angolo contenuto da due rette, come il triangolo racchiuso 166

I chiuso

chiuso da tre; sarà perciò dato, tanto il piano, che passa per gli due lati di un angolo, quanto il piano, che si conduce per gli tre lati di un triangolo. E perchè gli stessi tre punti determinano ancora la parallela, che per uno di essi si tira alla retta, che congiunge gli altri due; quindi parimente si è, che dee essere dato eziandio il piano, che passa per due rette parallele.

281. Siccome l'incontro di due rette si fa in un sol punto, ed egli è impossibile, che elle abbiano una porzione comune; così dee farsi similmente in un punto solo l'incontro di una retta con un piano, ed affatto non può sortire, che di una stessa retta una porzione sia situata sù di un piano, ed un'altra fuori di esso. Ma qualora una retta s' incontra con un piano, può ella avere a riguardo di quel piano due posizioni diverse, cioè una perpendicolare, ed un'altra obbliqua. Si dice una retta essere perpendicolare ad un piano, qualora s' inclina egualmente a tutte le parti, che si possono in quello distinguere. Si dice all'incontro essergli obbliqua, qualora la sua inclinazione alle varie parti del piano non è da per tutto la medesima.

Fig. 105. 282. Quindi, se la AB sia perpendicolare sul piano CDE, ella dee formare angoli retti con tutte le rette BC, BD, BE, che dal punto dell'incontro B si possono tirare nel piano; poichè per l'eguaglianza degli angoli in questo solo caso la AB viene ad inclinarsi egualmente a tutte le sue parti. Ed essendo così, possiamo da ciò dedurne due conseguenze: cioè I, che la perpendicolare AB debba essere la più corta di tutte le rette, che dal punto A cadono sul piano CDE; onde sarà la misura della distanza del punto A dal piano medesimo. II, che descrivendosi nel piano col centro B una linea circolare qualsivoglia CDE, debbano essere eguali tutte le rette, che ad essa si tirano dal punto A; onde si è, che ancora questo punto A può essere riguardato come suo centro.

283. Notisi quì intanto, che siccome delle infinite rette, che possono tirarsi dal punto B nel piano C D E, bastano due sole, che non siano a dirittura, per determinare la posizione del piano; così con essere la A B perpendicolare a queste due rette, sarà perpendicolare ancora così a ciascuna dell' altre, come al piano medesimo. Quindi con unire insieme talmente due squadre, che abbiano un lato comune, e gli altri due inclinati tra loro, avremo un' istromento proprio per alzare, ed abbassare da un dato punto una perpendicolare sù di un piano dato; poichè situando detto istromento in guisa tale sul dato piano, che egli poggi sù di esso coi due lati inclinati, e tocchi col terzo lato il punto dato, ci darà questo stesso terzo lato la perpendicolare, che si dimanda.

284. Che se poi la A B sia obbliqua al piano C D E, per la sua obbliquità saranno disuguali gli angoli, che ella forma colle rette tirate dal punto B nel piano medesimo. Ma intorno a questi angoli, egli è da notarsi, che siccome abbassata sul piano la perpendicolare A C, e tirata per lo punto B la retta C E, il minimo di tutti è l'angolo acuto A B C, ed il massimo l' altro ottuso A B E; così degli altri, che tra quei due si trammezzano, il più vicino al minimo sarà sempre minore del più lontano. E poichè questi altri angoli si vanno insensibilmente aumentando per rapporto al minimo A B C; quindi si è, che tra di essi dee ritrovarsi ancora il retto, siccome è l'angolo A B D, che la A B forma colla B D alzata perpendicolarmente sulla C D. Fig. 106.

285. Da questa nozione dell' obbliqua possiamo similmente dedurne due conseguenze. La prima si è, che per avere l'obbliquità della A B a riguardo del piano C D E debba prima abbassarsi sul piano la perpendicolare A C, ed indi per misura dell' obbliquità ricercata servisi dell' angolo A B C, che è il minimo di tutti quelli, che forma la A B colle rette tirate nel piano dal pun-

è egli da porſi in dubbio, che sì fatti angoli ſiano tutti eguali tra loro; poichè ſi dimoſtra da' Geometri, che ſe vi ſono due angoli ſituati in piani diverſi, ed i lati dell' uno ſiano paralleli ai lati dell' altro, ciaſcuno à ciaſcuno, gli ſteſſi angoli debbano eſſere tra loro eguali.

288. Quindi ſe ciaſcuno degli angoli MON ſia retto, diremo, che dei due piani ABCD, EBCF l' uno s' incontra perpendicolarmente coll' altro; ma ſe poi ciaſcuno di eſſi ſia acuto, diremo per lo contrario, che un piano coll' altro s' incontra obbliquamente. Egli è vero, che gli ſteſſi angoli potrebbero eſſere ottuſi; ma ſiccome in queſto caſo gli adjacenti ad eſſi dalla parte oppoſta ſono acuti, e con queſti altri acuti propriamente dee eſſere miſurata la ſcambievole inclinazione dei due piani; così ſempre vale a dire, che ſortiſce l'incontro obbliquo di due piani, quantevolte le perpendicolari tirate in un piano ſulla comune loro ſezione formano angoli acuti colle perpendicolari, che ſulla ſteſſa comune ſezione ſi tirano nell' altro piano

289. Per ſchiarire davantaggio queſto argomento, giova il riflettere, che ſiccome il piano ABCD paſſa per tutte le perpendicolari MO tirate in eſſo ſulla comune ſezione BC; così la ſua inclinazione a riguardo dell' altro piano EBCF, dipende dalla inclinazione di ciaſcuna di quelle perpendicolari per rapporto all' iſteſſo piano EBCF. Quindi conforme di queſta ſeconda inclinazione dobbiamo giudicarne per mezzo dell' angolo MON, che la ſteſſa perpendicolare MO forma coll' altra NO tirata nell' altro piano EBCF ſulla ſteſſa comune ſezione BC [285]; così il medeſimo angolo MON dee eſſerci di norma per miſurare, quanto il piano ABCD ſia inclinato ſull' altro EBCF.

290. Or ſe una retta ſia perpendicolare ad un piano, egli è ſuor di ogni dubbio, che debba eſſergli ancora perpendicolare ogn' altro piano, che paſſa per quella retta; ma ſi vuol quì notare,

sezioni del piano, in cui sono situate le prime, cogli stessi due piani paralleli. Ma siccome da ciò egli è facile a ricavarne; che tanto due rette parallele, quanto due rette, che formano angolo, debbono essere divise proporzionalmente da piani paralleli; così quì ancora si vuol' avvertire, che possono più piani dividere proporzionalmente o due rette parallele, o due rette, che contengono angolo; senza che essi siano tra loro paralleli.

293. Intorno alle rette parallele considerate per rapporto a piani più cose sono da notarsi. I, che se due rette situate in un piano siano parallele ad una terza situata in un'altro piano, ancora quelle due debbono essere parallele tra loro. II, che se di due rette parallele una sia perpendicolare ad un piano, l'altra ancora debba essere perpendicolare all'istesso piano. III, che se una di esse sia obbliqua ad un piano, l'altra ancora debba avere la stessa obbliquità per rapporto allo stesso piano. IV, che le rette perpendicolari ad un medesimo piano, debbono essere parallele tra loro. E V finalmente, che le rette egualmente oblique ad un medesimo piano possono non essere tra loro parallele.

294. Del rimanente per quanto tocca all'angolo solido, siccome egli si forma con più rette inclinate tra loro, e situate in piani diversi; così è contenuto propriamente dagli angoli piani, che formano le stesse rette prese consecutivamente a due a due. Per ragion di esempio, se le quattro rette AB, AC, AD, AE, che partono dal punto A, siano inclinate tra loro, e situate ancora in diversi piani, avremo colla scambievole loro inclinazione un'angolo solido, il quale sarà contenuto propriamente dai quattro angoli piani BAC, CAD, DAE, EAB, che si anno con prendere quelle stesse rette consecutivamente a due a due. Quindi, conforme per formare un'angolo solido vi vogliono almeno tre rette; così un'angolo di questa indole per lo meno do- Fig. 108.

vrà essere contenuto da tre angoli piani.

295. Or due sono i teoremi principali, che riguardano l'angolo solido. Il primo si è, che essendo egli contenuto da tre soli angoli piani, due di essi uniti insieme siano sempre maggiori del rimanente. L'altro si è, che qualunque sia il numero degli angoli piani, che lo contengono, la somma di essi sia sempre minore di quattro retti. In effetto per quanto al primo, chiara cosa si è, che se due degli tre angoli si distendino sul rimanente, occuperanno i medesimi maggior spazio di quello racchiuso nel rimanente angolo; e per quanto al secondo, egli è chiaro similmente, che volendosi appianare l'angolo solido, e ridurre ad un'istesso piano tutti gli angoli piani, che lo contengono, non potranno questi occupare l'intero spazio, che in un dato piano vi può essere intorno ad un punto, e che viene assorbito da quattro retti.

§. II.

Della nozione, e misura così del cubo, come del parallelepipedo.

296. TRà le figure solide, terminate da superficie piane, il primo luogo suol darsi à quella, che comunemente si appella parallelepipedo. Si termina questa figura da sei superficie piane talmente situate, che le opposte vengono ad essere trà loro parallele, siccome è la figura
Fig. 109. ABCDEFGH: ed attesa l'indole delle comuni sezioni di due piani paralleli con un terzo piano, egli è chiaro, che non solo sarà parallelogrammo ciascuna delle superficie, che terminano il parallelepidedo, ma le opposte saranno ancora due parallelogrammi perfettamente eguali tra loro. Quindi per la perfetta loro eguaglianza, eziandio le diagonali, che in essi si corrispondono, saranno eguali, e parallele; e perciò siccome per due di queste diagonali si potrà condurre

durre un piano, così chiara cosa si è, che questo piano debba dividere il parallelepipedo in due parti eguali.

297. Quantunque il parallelepipedo sia contenuto da sei parallelogrammi, ad ogni modo con determinarne tre, tra essi loro adjacenti, resteranno determinati ancora li tre altri, che come opposti ai primi sono ad essi eguali, ciascuno à ciascuno. La solidità intanto del parallelepipedo dipende non solo dall'ampiezza di detti parallelogrammi, ma eziandio dalle scambievoli loro inclinazioni. E quindi si è, che per l'uguaglianza di due parallelepipedi non basta, che i tre riferiti parallelogrammi siano gli stessi così nell'uno, come nell' altro; ma si richiede ancora, che le scambievoli loro inclinazioni in amendue siano le medesime.

298. I parallelogrammi, che spezialmente si debbono distinguere nel parallelepipedo, sono talmente situati tra loro, che l'uno coll' altro si ritrovano avere un lato comune; onde si è, che in tutti tre i riferiti parallelogrammi non possono incontrarsi, se non che tre soli lati differenti, i quali colla loro situazione corrispondono alle tre dimensioni del parallelepipedo. Ma a riguardo di questi lati similmente bisogna avvertire, che la solidità del parallelepipedo non solo dipende dalle loro lunghezze, ma eziandio dagli angoli, che essi formano tra loro: donde ancora ne avviene, che per l'uguaglianza di due parallelepipedi non basta, che i tre riferiti lati siano gli stessi così nell' uno, come nell'altro, ma si richiede altresì, che gli scambievoli loro angoli in amendue siano i medesimi.

299. Or da quì innanzi diremo, che due parallelepipedi siano equiangoli, quantevolte i tre lati corrispondenti alle tre loro dimensioni contengono gli stessi angoli tanto nell' uno, quanto nell'altro; diremo poi, che i medesimi siano simili, qualora i tre lati dell'uno sono proporzionali ancora coi tre lati corrispondenti dell'altro.

Ed

Ed essendo così, egli è chiaro, che siccome due parallelepipedi sono equiangoli, quando i tre parallelogrammi dell' uno sono equiangoli coi tre parallelogrammi dell' altro, ciascuno con ciascuno; così saranno simili, quando degli stessi parallelogrammi l' uno è simile coll' altro.

300. Se si tagli un parallelepipedo per un piano parallelo ad uno de' suoi parallelogrammi, egli non è da porsi in dubbio, che la sezione sia un' altro parallelogrammo eguale; ed in conseguenza, che il parallelepipedo medesimo resti diviso in due altri parallelepipedi equiangoli così tra loro, come col parallelepipedo intero. Ma siccome da ciò ne segue con ogni evidenza, che se il piano secante sia egualmente distante da i due parallelogrammi opposti, rimane diviso il parallelepipedo in due altri parallelepipedi eguali; così ne pure sarà difficile il ricavarne, che in ogn' altra posizione del piano secante, i novi parallelepipedi debbano essere tra loro, come le parti del lato diviso.

301. In ogni parallelepipedo può prendersi per base ciascuno dei parallelogrammi, che lo terminano; ed all' ora altezza del medesimo sarà la perpendicolare, che si alza sulla base da uno de' suoi punti per fino al parallelogrammo opposto. Or dalle basi, e dall' altezze dee dedursi la ragione, in cui due parallelepipedi sono tra loro; poichè essendo le basi eguali, saranno i parallelepipedi nella sola ragione delle altezze; per lo contrario essendo le altezze eguali, saranno i medesimi nella sola ragione delle basi; ed in fine essendo disuguali così le basi, come le altezze, si comporrà la loro ragione da quella delle basi, e da quella delle altezze.

302. Che se poi siano eguali tanto le basi, quanto le altezze, chiara cosa si è, che la ragione dei due parallelepipedi debba essere di eguaglianza; onde i parallepipedi situati tra piani paralleli, e sopra una stessa, o eguali basi saranno tra loro eguali. Possono intanto due parallelepipedi esse-

re

te eguali, senza che abbiano basi eguali, ed altezze eguali; e ciò avviene, quando le basi di essi sono in reciproca ragione delle loro altezze; poichè in questo caso, quanto l'uno eccede l'altro per ragion della base, altrettanto egli sarà superato da quell'altro per ragion dell'altezza.

303. Ma intorno alla ragione di due parallelepipedi abbiamo due altri teoremi degni da notarsi. Il primo si è, che se i lati corrispondenti all' altezze di essi siano egualmente inclinati sulle loro basi, la ragione dei parallelepipedi sarà composta ancora da quella delle basi, e da quella dei riferiti lati; donde ne avviene, che gli stessi parallelepipedi siano eguali; quante volte le loro basi sono nella reciproca ragione degli stessi lati. L'altro si è, che essendo equiangoli due parallelepipedi, la ragione di essi sarà composta altresì dalle tre, che i lati dell' uno serbano coi corrispondenti lati dell'altro; donde si ricava, che se una di queste ragioni sia reciproca di quella, che si compone dall'altre due, i due parallelepipedi debbano essere tra loro eguali.

304. Per mezzo del secondo teorema egli è facile ora ad intendere, in qual ragione debbono essere tra loro due parallelepipedi simili. Imperocchè, siccome per essere equiangoli questi tali parallelepipedi, la loro ragione dee essere composta dalle tre, che i lati dell' uno serbano coi corrispondenti lati dell'altro; così per essere tra loro proporzionali questi stessi lati, le loro ragioni saranno eguali, ed in conseguenza comporranno insieme una ragione triplicata di ciascuna di esse: dal che ne segue, che due parallelepipedi simili debbano essere tra loro nella triplicata ragione de' lati omologi. Ed ecco brevemente riferiti i principali teoremi, che riguardano i parallelepipedi. 102

305. Del rimanente il parallelepipedo può essere di varie spezie; ma senza venire ad una esatta enumerazione delle varie forme, di cui egli è capace, basterà dividerlo in rettangolo, ed obbli-

quan-

quangolo. Si dirà un parallelepipedo essere rettangolo, quando tutti tre i parallelogrammi, che si debbono in esso distinguere, sono rettangoli; si dirà al contrario essere obbliquangolo, quando uno almeno di quei parallelogrammi è obbliquangolo. Quindi nel primo tutti tre i lati corrispondenti alle tre sue dimensioni conterranno angoli retti; per lo contrario nel secondo almeno due lati dovranno contenere, o un'angolo acuto, o pure un'angolo ottuso.

306. Il parallelepipedo rettangolo spezialmente si chiama solido, e siccome per gli angoli retti, che contengono i suoi lati, rimane egli determinato con darsi ciascuno di detti lati, così dicesi ancora fatto, ovvero formato dagli stessi lati. Intanto, se due di questi lati siano tra loro eguali, il solido si dirà formato dal quadrato di uno di essi nel lato rimanente. Ed in fine se tutti tre i lati siano eguali, con nome più speziale il solido si chiamerà cubo; e siccome per la sua determinazione basterà dare un solo lato, così si dirà egli essere il cubo di quel lato dato.

307. Passiamo ora alla misura del parallelepipedo. Ma prima egli è da notarsi, che siccome per misurare le figure solide, si dee far uso di una figura dell'istessa indole, che sia data; così tra le infinite, che ne abbiamo, si è scelta da Geometri quella propriamente, che chiamasi cubo, per la ragione, che è la più facile a concepirsi. Anzi bisogna notare ancora, che conforme quel quadrato, di cui ci serviamo per misurare ogn' altra superficie, dee essere fatto da quella stessa retta, colla di cui lunghezza si misura ogn' altra superficie; così quel cubo, di cui dobbiamo avvalerci per misurare qualsisia altra figura solida, pure è necessario, che sia formato dalla medesima retta, per la ragione, che siccome colla conoscenza delle linee si viene in quella delle superficie, così con amendue insieme si giunge a quella delle figure solide.

Ive

308. Or conforme abbiamo chiamato palmo, pie-

piede, o braccio lineare la retta, che è misura di ogn'altra linea; e palmo, piede, o braccio quadrato il quadrato della stessa retta, che è misura di ogn'altra superficie; così chiameremo presentemente palmo, piede, o braccio cubico il cubo della medesima retta, che dee essere misura di ogn'altra figura solida. E disegnando coll' unità sì fatto cubo, egli non è da porsi in dubbio, che cogli altri numeri si possono additare le solidità di tutte l'altre figure solide; poichè dicendo à cagion di esempio, che un' altra figura solida sia 2, 3, o 4, non altro vorremo dire, se non se che ella sia dupla, tripla, o quadrupla di quel cubo, che è sua misura.

309. Debbasi adunque misurare in primo luogo ogn' altro cubo, come A B C D. Determinisi primieramente la lunghezza di uno de' suoi lati A B; indi si moltiplichi il numero, che la disegna, due volte per se stesso, ed il prodotto nato da questa moltiplicazione disegnerà la solidità del cubo proposto. Per ragion di esempio fingiamo, che A B sia 3, vale a dire, che contenga tre palmi lineari; e poichè con moltiplicare 3 due volte per se stesso si produce 27, sarà 27 il valore del cubo A B C D, onde verrà egli a contenere 27 palmi cubici. E così ancora se A B sia 9, sarà 729 il valore dello stesso cubo; e generalmente disegnando col cossico a la lunghezza del lato AB, sarà a^3 la solidità del cubo ABCD. Ed ecco la ragione, per cui gli Arimmetici chiamano cubo di un numero quel tanto si produce moltiplicando quel numero due volte per se medesimo. Fig. 110.

310. Di questa regola si suol dare da Pratici una dimostrazione oculare, che si fa con dividere tanto il lato A B, quanto ciascuno degli altri due A C, A D in tante parti eguali, quanti sono i palmi lineari, che essi contengono, e con far passare per gli punti di tutte tre le divisioni altrettanti piani paralleli alle faccie opposte del cubo; poichè in questa maniera si vede chiaramente

mente

sue

mente contenersi nel cubo A B C D tanti palmi cubici, quanti ne addita la regola data. Ma la vera ragione di essa si è, che essendo E F il palmo lineare, ed E F G H il palmo cubico, i due cubi A B C D, E F G H come parallelepipedi simili vengono ad essere nella triplicata ragione de'lati omologi A B, E F (304). Quindi se A B sia ad E F, come a ad 1, il cubo A B C D sarà al cubo E F G H, come a^3 ad 1 (59); e pertanto siccome l'unità è il valore del cubo E F G H, così sarà a^3 quello dell' altro cubo A B C D.

Fig. 111. 311. Debbasi in secondo luogo misurare qualsivoglia parallelepipedo rettangolo, come A B C D, che specialmente dissimo chiamarsi solido. Si determini primieramente la lunghezza di ciascuno dei tre lati A B, A C, A D; indi si moltiplichino trà loro i tre numeri, che disegnano dette lunghezze; ed il prodotto nato da questa moltiplicazione disegnerà la solidità del proposto solido. Per ragion di esempio fingiamo, che A B sia 2, A C 3, e A D 4, vale a dire, che il primo contenga due palmi lineari, il secondo tre, ed il terzo quattro; e poichè con moltiplicare tra loro i tre numeri 2, 3, 4 si produce 24, sarà 24 il valore del solido A B C D, onde verrà egli a contenere 24 palmi cubici. E così ancora se i valori de'lati A B, A C, A D siano 4, 5, 6 sarà 120 il valore dell'istesso solido; e generalmente ponendo $AB = a$, $AC = b$, ed $AD = c$, sarà abc il valore del solido A B C D.

312. Similmente di quest' altra regola suol darsi da Pratici una dimostrazione oculare, che si fà parimente con dividere i tre lati A B, A C, A D in tante parti eguali, quanti sono i palmi lineari, che essi contengono, e con far passare per gli punti di tutte tre le divisioni altrettanti piani paralleli alle faccie opposte del solido; poichè in questa maniera si vede chiaramente contenersi nel solido A B C D tanti palmi cubici, quanti ne addita la regola data. Ma la vera ragione di

essa

eſſa ſi è, che eſſendo EF il palmo lineare, ed EFGH il palmo cubico, i due parallelepipedi ABCD, EFGH, come equiangoli, vengono ad eſſere nella ragione compoſta di AB ad EF, di AC ad EG, o ſia EF, e di AD ad EH, ovvero EF [303]. Quindi ponendo, che AB ſia ad EF come a ad 1, che AC ſia ad EF come b ad 1, e che AD ſia ad EF come c ad 1; ſarà il ſolido ABCD al cubo EFGH, come abc ad 1 [58]; e pertanto, ſiccome l'unità è il valore del cubo EFGH, così ſarà abc il valore del ſolido ABCD.

313. Notiſi in queſto luogo, che ſiccome nel ſolido ABCD due delli tre lati AB, AC, AD poſſono eſſere tra loro eguali; così in queſto caſo, per avere il ſuo valore, baſta determinare così la lunghezza di uno di quelli lati, come l'altra del lato rimanente, ed indi moltiplicare il quadrato del numero corriſpondente alla prima per l'altro numero, che ci addita la ſeconda. Per ragion di eſempio fingiamo, che nel ſolido ABCD ſiano eguali i due lati AB, AC, e ſe AB ſia 3, ed AD 4, ſarà 36 il valore di quel ſolido; poichè conforme il quadrato di 3 è 9, così il prodotto di 9 per 4 è 36. E così ancora eſſendo $AB = a$, ed $AD = c$, ſarà $a^2 c$ il valore dello ſteſſo ſolido, per la ragione, che il quadrato di a è a^2, il quale moltiplicato per c dà per prodotto $a^2 c$. Onde di nuovo ſi vede, che eſſendo tutti tre i lati diſuguali, il ſolido dee dirſi fatto da tutti tre; ma qualora poi due di eſſi ſono eguali, dovrà dirſi egli formato dal quadrato di uno dei due lati eguali nel lato rimanente.

314. Debbaſi finalmente miſurare ogn'altro parallelepipedo, che non ſia rettangolo, come ABCD, i di cui lati ſono AB, AC, AD. Prendaſi come Fig. 112.
ſua baſe il parallelogrammo, che ha per lati le due AB, AC; ed alzata sù di eſſa la perpendicolare AI, [illegible] ſino al parallelogrammo oppoſto, ſi determini così la capacità di detta baſe,

base, come la lunghezza della A I; si moltiplichino poscia tra loro i due numeri, che le disegnano, ed il prodotto nato da questa moltiplicazione ci darà la solidità del proposto parallelepipedo. Fingiamo à cagion di esempio, che l'ampiezza della base sia 20, e la lunghezza della A I sia 4, vale à dire, che quella sia di 20 palmi quadrati, e questa di quattro palmi lineari; e poichè con moltiplicare 20 per 4 si produce 80, sarà 80 il valore del parallelepepido A B C D, onde verrà egli à contenere 80 palmi cubici. Similmente, se fingiamo che la sua base sia 30, e la perpendicolare A I sia 5, sarà 150 il valore del medesimo; e generalmente se la sua base si disegni per $a\,b$, e per c la perpendicolare A I disegnerà $a\,b\,c$ il valore dello stesso parallelepipedo.

315. Quantevolte si prende per base del parallelepipedo obbliquangolo A B C D il parallelogrammo, che ha per lati le due A B, AC, egli è chiaro, che viene a farsi sua altezza la perpendicolare A I; onde la regola per avere la solidità di detto parallelepipedo si riduce a moltiplicare la sua base per la sua altezza. Ma si vuol quì notare, che a questo stesso si riduce ancora, così la regola data per lo cubo, come la regola data per ogn'altro solido; poichè siccome in essi si viene ad avere la base colla moltiplicazione dei due lati, che la contengono; così il rimanente lato, per cui dee moltiplicarsi quel primo prodotto, farà le veci di altezza. Ed in effetto nell'istesso parallelepipedo obbliquangolo ABCD se mai il terzo lato A D sia perpendicolare al piano della base, colla moltiplicazione di questa base per quello lato avremo la sua solidità.

316. È quindi per mezzo di quel teorema, che la raggione di due parallelepipedi dee essere composta dalla ragione delle basi, e dalla ragione dell' altezze, niente sarà più facile, quanto di dimostrare la verità della riferita regola eziandio per rapporto al parallelepipedo obbliquangolo ABCD

Sia

Sia perciò EF il palmo lineare, ed EFGH il palmo cubico. E ſiccome nel parallelepipedo ABCD ſi è preſo per baſe il parallelogrammo, che ha per lati le due AB, AC, e per altezza la perpendicolare AI; così nel cubo EFGH prendaſi per baſe il quadrato, in cui ſono diſteſi i due lati EF, EG, e per altezza il lato rimanente EH. Ponendo adunque, che la baſe del primo ſia alla baſe del ſecondo come ab ad 1, e di più che l'altezza di quello AI ſia all'altezza di queſt'altro EH come c ad 1, per lo riferito teorema ſarà come il parallelepipedo ABCD al cubo EFGH, così abc ad 1; e pertanto conforme l'unità è il valore del cubo EFGH, così ſarà abc il valore del parallelepipedo ABCD.

§. III.

Del modo di dimoſtrare le affezioni del cubo, e del ſolido.

317. DEl metodo tenuto di ſopra per le affezioni del rettangolo, e del quadrato poſſiamo ancora farne uſo per quelle del cubo, e del ſolido. Di fatti per mezzo di eſſo conoſceremo in primo luogo, che ſe vi ſono due rette, una indiviſa, e l'altra diviſa in parti, il ſolido del quadrato dell'indiviſa nell'altra diviſa ſia eguale ai ſolidi fatti da quello ſteſſo quadrato nelle parti della diviſa. Imperocchè, diſegnando coi coſſici a, b, c le parti della diviſa, ſarà $a + b + c$ la lunghezza totale di eſſa; e diſegnando ancora col coſſico d l'altra indiviſa, ſarà d^2 il ſuo quadrato, e $ad^2 + bd^2 + cd^2$ il ſolido di queſto quadrato nella diviſa: il quale ſolido, ſecondo ſi vede, ne racchiude tre, cioè uno del quadrato d^2 nella parte a, l'altro dell'iſteſſo quadrato d^2 nella parte b, ed il terzo del medeſimo quadrato d^2 nella parte c.

318. Conoſceremo in ſecondo luogo, che ſe una retta è diviſa in due parti, il cubo della tutta

ſia eguale à due ſolidi fatti dal quadrato della ſteſſa tutta nelle ſue parti. Imperocche, diſegnando col coſſico a la retta diviſa, e cogli altri b, e c le ſue parti, potrà eſprimerſi la lunghezza della ſteſſa retta non ſolo per a, ma ancora per $b + c$; onde moltiplicando a^2 per $b + c$ ſi ritroverà eſſere $b a^2 + c a^2$ il ſuo cubo: il quale cubo, ſecondo ſi vede, racchiude due ſolidi, uno del quadrato della tutta a^2 nella parte b, l' altro dello ſteſſo quadrato a^2 nell' altra parte c.

319. Conoſceremo in terzo luogo, che e una retta è diviſa in due parti, il ſolido della tutta nelle ſue parti ſia eguale à due altri ſolidi, de'quali uno ſarà fatto dal quadrato della prima parte nella ſeconda, e l'altro dal quadrato della ſeconda parte nella prima. Si diſegnino perciò coi coſſici a, e b le due parti della retta diviſa, e conforme ſarà $a + b$ la ſua lunghezza totale, così con moltiplicare $a + b$ prima per a, ed indi per b, ſi ritroverà eſſere $a^2 b + a b^2$ il ſolido della tutta nelle ſue parti: il quale ſolido, ſecondo ſi vede, ne racchiude due altri, cioè uno del quadrato a^2 nella parte b, e l'altro del quadrato b^2 nella parte a.

320. Conoſceremo in quarto luogo, che ſe una retta è diviſa in due parti, il cubo della tutta ſia eguale ai cubi delle parti, a tre volte il ſolido del quadrato della prima nella ſeconda, e à tre volte il ſolido del quadrato della ſeconda nella prima. Imperocche diſegnando coi coſſici a, e b le parti della retta, ſarà $a + b$ la ſua lunghezza totale; onde ſiccome con moltiplicare $a + b$ per ſe ſteſſo avremo il ſuo quadrato $a^2 + 2 a b + b^2$, così con moltiplicare queſto quadrato di nuovo per $a + b$ avremo il ſuo cubo $a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$: il quale cubo, ſecondo ſi vede, racchiude i cubi delle parti a, e b, tre volte il ſolido del quadrato a^2 nella parte b, e tre volte il ſolido del quadrato b^2 nella parte a.

321. E quindi conoſceremo in quinto luogo, che ſe una retta è diviſa in due parti, il cubo della tutta ſia eguale ai cubi delle parti, e

a tre

a tre volte il solido della stessa tutta nelle stesse parti. Perciò pongasi di nuovo, che le parti della retta siano a, e b; e conforme sarà $a+b$ l'intera sua lunghezza, così il suo cubo si ritroverà essere come sopra $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: nel quale cubo siccome si veggono con ogni evidenza i cubi delle parti a^3, b^3, così oltre di essi vi stà ancora $3a^2b + 3ab^2$, che è tre volte il solido fatto dalla tutta $a+b$ nelle stesse parti a, e b (319).

322. Conosceremo in sesto luogo, che se di due rette disuguali si prendano così i quadrati, come il rettangolo, i solidi fatti da questi piani nella differenza delle due rette, siano eguali insieme alla differenza de'loro cubi. Siano perciò a, e b le due rette disuguali, cioè a la maggiore, e b la minore; e siccome sono a^2, b^2 i loro quadrati, ed ab il loro rettangolo, così sarà $a-b$ la loro differenza; quindi avremo i solidi fatti da quei piani in questa differenza, con moltiplicare $a^2 + b^2 + ab$ per $a-b$: colla quale moltiplicazione tutta volta si produce $a^3 - b^3$, che è la differenza de'cubi delle due rette disuguali a, e b.

323. Conosceremo in settimo luogo, che se di due rette si prendano così i quadrati, come il rettangolo, i solidi fatti dai quadrati nella somma delle due rette, minorati del solido fatto dal rettangolo nella stessa somma, siano eguali ai cubi delle due rette uniti insieme. Siano perciò a, e b le due rette, delle quali la somma è $a+b$; ed essendo a^2, b^2 i loro quadrati, ed ab il loro rettangolo, avremo i primi due solidi minorati del terzo con moltiplicare $a^2 + b^2 - ab$ per $a+b$: colla quale moltiplicazione tutta volta si produce $a^3 + b^3$, che è la somma de' cubi delle due rette a, e b.

324. Conosceremo in fine, che se una retta è divisa talmente in due parti, che una di esse sia dupla dell'altra, il solido fatto dal quadrato della parte dupla nell' altra rimanente sia maggiore di ogn'altro solido fatto dal quadrato di ogn' al-

tra parte della stessa retta nella sua rimanente.
Fig. 113. 114. Per schiarire davantaggio quest' ultimo teorema, che tra tutti gli altri è il più elegante, ed il più profittevole, sia la retta A B, la quale dividasi talmente nel punto C, che la parte A C sia dupla dell'altra BC. Io dico, che se la stessa retta si divida in un' altro punto, come D, il solido fatto dal quadrato della A C nella BC sia maggiore del solido fatto dal quadrato della A D nella BD.

325. Pongasi la A C $= 2a$, e la BC $= a$; ed essendo $4a^2$ il quadrato di $2a$, sarà $4a^3$ il solido di quel quadrato nella BC. Pongasi ancora la
Fig. 113. C D $= c$, e se mai il punto D si ritrovi tra li due A, e C; sarà la A D $= 2a - c$, e la B D $= a + c$; quindi essendo $4a^2 - 4ac + c^2$ il quadrato di $2a - c$, sarà $4a^3 - 3ac^2 + c^3$ il solido di quest' altro quadrato nella BD; e per essere $3a$ maggiore di c, sarà $3ac^2$ maggiore di c^3, ed in conseguenza il primo solido maggiore an-
Fig. 114. cora del secondo. Che se poi il punto D sia situato tra li due B, e C, in tal caso sarà la AD $= 2a + c$, e la BD $= a - c$; onde essendo $4a^2 + 4ac + c^2$ il quadrato di $2a + c$, sarà $4a^3 - 3ac^2 - c^3$ il solido di questo quadrato nella BD; e per tanto il primo solido eziandio sarà maggiore di quest' altro.

326. Dal calcolo medesimo può dedursi ancora, qual sia la differenza tra l'uno, e l'altro solido: Di fatti nel primo caso, essendo $4a^3$ il valore
Fig. 113. del primo solido, e $4a^3 - 3ac^2 + c^3$ il valore del secondo; sarà $3ac^2 - c^3$ la loro differenza, che è un' altro solido fatto da c^2 in $3a - c$, cioè dal quadrato della C D nella differenza delle due A B, C D. Nel secondo caso poi, perchè il
Fig. 114. valore del primo solido è $4a^3$, ed il valore del secondo è $4a^3 - 3ac^2 - c^3$; sarà la differenza di essi $3ac^2 + c^3$, che è un' altro solido fatto da c^2 in $3a + c$, cioè dal quadrato della C D nella somma delle due A B, C D. Ed essendo così, egli è chiaro, che per quanto alla differenza dei due solidi

solidi vi sia qualche divario tra l'uno, e l'altro caso.

327. Con questo stesso metodo possiamo ancora dimostrare la proprietà, notata da Geometri intorno alle quattro rette, che sono continuamente tra loro proporzionali, cioè che così il cubo della seconda sia eguale al solido fatto dal quadrato della prima nella quarta, come il cubo della terza eguale al solido fatto dal quadrato della quarta nella prima. Pongasi perciò, che sia n la quantità della ragione di ciascuna retta all'altra susseguente; e se si disegni la quarta col cossico a, chiara cosa si è, che sarà $n\,a$ la terza, $n^2\,a$ la seconda, ed $n^3\,a$ la prima; quindi le quattro rette continuamente proporzionali saranno $n^3\,a$, $n^2\,a$, $n\,a$, a, nelle quali chiaramente si vede, che tanto il cubo della seconda sia eguale al solido del quadrato della prima nella quarta, quanto il cubo della terza eguale al solido del quadrato della quarta nella prima.

328. La conversa di questa proprietà similmente ha luogo, e si è, che sempre quando vi sono quattro rette, ed in esse così il cubo della seconda è eguale al solido del quadrato della prima nella quarta, come il cubo della terza è eguale al solido del quadrato della quarta nella prima, quelle tali quattro rette debbano essere continuamente tra loro proporzionali. Ma ciò ancora può comprovarsi coll' istesso metodo. Siano perciò a, b, c, d le quattro riferite rette, di modo che in esse sia così $b^3 = a^2 d$, come $c^3 = a\,d^2$. Facciasi, che a sia a b, come b ad e, e che b sia ad e, come e ad f. Le quattro rette adunque a, b, e, f sono continuamente proporzionali, e per tanto sarà così $b^3 = a^2 f$, come $e^3 = a\,f^2$. Ma si ha per ipotesi $b^3 = a^2\,d$; con che sarà $a^2 f = a^2\,d$, ed in conseguenza $f = d$. Quindi, essendo $e^3 = a f^2$, sarà $e^3 = a\,d^2$; onde siccome si ha per ipotesi $c^3 = a\,d^2$, così sarà $e^3 = c^3$, ed $e = c$; con che non solo le quattro a, b, e, f, ma eziandio le quattro a, b, c, d saranno conti-

nuamente tra loro proporzionali.

329. Or se mai tra due rette date si potessero ritrovare due mezze continuamente proporzionali, niente sarebbe più facile, quanto di ridurre a cubo qualsivoglia solido dato. Suppongasi primieramente, che il dato solido sia fatto dal quadrato di a in b, ed essendo c la prima delle due mezze, che cadono tra le altre due a, e b, sarà $c^3 = a^2 b$; ed in conseguenza il cubo della c sarà eguale al solido dato. Che se poi il dato solido sia formato dalle tre rette a, b, c, conforme con ritrovare tra due di esse, cioè tra a, e b la mezza proporzionale d, si avrà $d^2 = ab$, e $d^2 c = abc$; così essendo e la prima delle due mezze, che cadono tra d, e c, sarà $e^3 = d^2 c$; e per tanto dovendo essere ancora $e^3 = abc$, sarà il cubo della e eguale al solido proposto.

330. Anzi in questa maniera potrà ridursi a cubo eziandio qualsivoglia parallelepipedo obbliquangolo; poichè siccome la sua solidità si ha con moltiplicare la base per l' altezza, così la base medesima si viene ad avere con moltiplicare uno de'suoi lati per la perpendicolare alzata sù di esso da uno de'suoi punti per sino al lato opposto. Quindi ancora nel parallelepipedo obbliquangolo si anno tre rette, che colla scambievole loro moltiplicazione ci danno la sua solidità; onde conforme per questo verso si riduce egli ad un parallelepipedo rettangolo, ovvero ad un solido formato da quelle tre rette, le quali si debbono moltiplicare tra loro per avere la sua solidità; così con ritrovare un cubo eguale a questo solido, avremo altresì il cubo eguale al parallelepipedo obbliquangolo proposto.

331. Queste riduzioni a cubi, così de'solidi, come degli altri parallelepipedi sogliono praticarsi da Geometri, appunto per essere il cubo la figura solida più facile a concepirsi; anzi per questa stessa ragione sogliono i medesimi ridurre a cubo eziandio ogn'altra figura solida; siccome riducono a quadrato ogn'altra figura piana per la facil-

-tà,

tà, che incontriamo in concepire il quadrato. Egli è vero, che essendo nota la solidità del parallelepipedo; si può coll' estrazione della radice cuba determinare la lunghezza del lato, da cui dee esser fatto il cubo, che si dimanda; come per ragion di esempio se la solidità sia 64, che ha per sua radice cuba 4, sarà 4 la lunghezza del lato; se la solidità sia 125, che ha per sua radice cuba 5, sarà 5 la lunghezza dello stesso lato; e generalmente se la solidità sia $a^2 b$, sarà $\sqrt[3]{a^2 b}$ la lunghezza del lato, da cui dee farsi il cubo. Ad ogni modo sarebbe da desiderarsi, che si potesse praticare una tal riduzione senza venire alla misura effettiva del parallelepipedo.

332. Per essa adunque, siccome si è fatto vedere, si ha bisogno dell' invenzione di due mezze proporzionali tra due rette date, le quali tutta volta non si possono ritrovare con costruzioni geometriche, che dipendano dalla linea retta, e dalla linea circolare. Intanto con costruzione meccanica facile a porsi in pratica possiamo averle in varie guise. Siano perciò AB, AC le due rette date, le quali si situino in modo tale, che l'angolo BAC contenuto da esse sia retto. Si prendino poscia due squadre, come DEF, GHI, e diasi ad esse posizione tale, che passando i due lati DE, GH per gli punti B e C, e combaciandosi tra loro gli altri due lati EF, HI, le due AB, AC vadano prolungate ai loro vertici E, ed H. Io dico, che le altre due AE, AH saranno le mezze proporzionali ricercate. E la ragione è chiara; poichè siccome per lo triangolo rettangolo BEH dee essere AB ad AE, come AE ad AH, così per l'altro CHE sarà AE ad AH, come AH ad AC. Fig. 115.

333. Più facilmente ancora si possono avere le due mezze tra le due AB, AC, con far uso di una sola squadra, in cui però uno de' lati sia prolungato dall' altra parte. Tirisi adunque così la BD parallela alla AC, come la CE parallela alla AB; e pongasi il vertice della squadra talmen- Fig. 116.

 te

te nel punto A, che si possa ella aggirare intorno a quel punto. Diasi poscia alla squadra posizione tale, che incontrandosi il lato di essa prolungato FG colle due BD, CE ne' punti F, e G, le altre due parallele FH, GH si vadano ad incontrare tra loro in un punto H dell'altro suo lato AH; e saranno le due BF, CG le mezze ricercate. E la ragione similmente è chiara; poichè con incontrarsi la AB colla GH nel punto L, e la AC colla FH nel punto I, sarà come FI ad AI, così AI ad HI, e come HL ad AL, così AL a GL; onde sorrogando in luogo di queste rette le loro eguali, sarà ancora come AB a BF, così BF a CG, e come BF a CG, così CG ad AC.

Fig. 117. 334. Ma in un'altro modo eziandio più facile possiamo investigare le due mezze tra le due AB, AC. Compiscasi il rettangolo ABCD, e sulla sua diagonale AD come diametro descrivasi il cerchio, che passerà per gli punti B, e C. Aggirisi poscia intorno al punto D la riga EF, e si ritrovi di essa posizione tale, che incontrandosi colle due AB, AC prolungate ne' punti E ed F, e colla circonferenza del cerchio nel punto G, siano eguali le due EG, DF. Essendo adunque per la loro eguaglianza il rettangolo di DE in EG eguale al rettangolo di GF in DF, sarà ancora il rettangolo di AE in BE eguale al rettangolo di AF in CF [204]; e pertanto sarà come AE ad AF, così CF à BE [161]. Ma per gli triangoli equiangoli EAF, DCF, EBD abbiamo ancora come AE ad AF, così CD à CF, e così BE à BD [114]. Dunque sarà come CD à CF, così CF à BE, e come CF à BE, così BE à BD; onde le due CF, BE saranno mezze proporzionali tra le due CD, BD, o pure tra le due AB, AC.

335. Notisi in questo luogo, che in un modo quasi consimile possiamo ancora dividere in tre parti eguali così un dato arco, come un dato angolo, il che nè pure può farsi con costruzione geometrica,

trica, che dipenda dalla linea retta, e dalla linea circolare. Debbasi adunque dividere in tre parti eguali così l' angolo BAC, come l'arco BC, che è sua misura. Aggirisi intorno al punto C la riga CF, e si ritrovi di essa posizione tale, che incontrandosi col diametro BD nel punto F, e colla circonferenza del cerchio nel punto E, siano eguali le due AE, EF. Io dico, che l'angolo DAE, e l' arco DE saranno la terza parte dell' angolo BAC, e dell' arco BC. E la ragione è chiara; poichè per l'eguaglianza delle due AE, EF, facendosi l'angolo AEC, o ACE doppio dell' angolo AFC, sarà l' angolo BAC triplo dell' istesso angolo AFC, o pure del suo eguale DAE; ed in conseguenza ancora l' arco BC sarà triplo dell' arco DE. Fig. 118.

§. IV.

Della nozione, e misura così del prisma, come della piramide.

236. Dopo il parallelepipedo seguono il prisma, e la piramide. E per quanto al prisma, si appella con tal nome una figura solida talmente terminata da molte figure piane rettilinee, che due di esse tra loro opposte sono simili eguali e parallele, e tutte le altre sono altrettanti parallelogrammi, che congiungono insieme i lati omologi delle due prime, siccome è la figura ABCDEF. Quindi per l' infinita varietà delle due faccie opposte, eziandio il prisma può essere d' infinite spezie; come in effetto egli dicesi triangolare, quando quelle due faccie sono triangoli, quadrangolare quando sono quadrangoli, pentagonale quando sono pentagoni, e così all' infinito. Ma siccome egli è chiaro, che ancora il parallelepipedo può essere considerato come prisma; così non è da porsi in dubbio, che debba egli avere il suo luogo nella classe de' prismi quadrangolari. Fig. 119.

237. Per

337. Per quanto ai parallelogrammi, che insieme colle due faccie opposte terminano il prisma, più cose sono da notarsi: I, che essi sono tanti di numero, quanti sono i lati di ciascuna di quelle due faccie, cioè tre nel prisma triangolare; quattro nel quadrangolare, cinque nel pentagonale, e così consecutivamente negli altri. II, che i lati di ciascuna delle due faccie opposte, li quali possono essere eguali e disuguali, sono lati ancora di detti parallelogrammi. E III, che i rimanenti lati degli stessi parallelogrammi, per mezzo de' quali l'uno si congiunge coll'altro, sono tutti tra loro non solo eguali, ma eziandio paralleli. Or siccome da ciò ne segue, che quest' altri lati debbono essere egualmente inclinati alle due faccie opposte; così dalla varia loro incliazione a riguardo di dette faccie è derivata la distinzione, che suol farsi del prisma in rettangolo, ed obbliquangolo.

338. Se un prisma si tagli per un piano parallelo alle due faccie opposte, egli non è da porsi in dubbio, che la sezione fatta nel prisma sia un'altra figura piana simile, eguale, e parallela à ciascuna delle due faccie; quindi le due parti, nelle quali rimane diviso il prisma con una tal sezione, saranno due altri prismi della stessa indole col loro tutto. E siccome egli è facile ad intendersi, che quest' altri due prismi siano tra loro eguali, quando il piano secante disti dalle due faccie per eguali intervalli; così da questo stesso si potrà facilmente dedurre, che in ogn' altra posizione dell' istesso piano i medesimi debbano essere tra loro, come le distanze del piano secante dalle faccie opposte.

339. In ogni prisma si prende per base una delle due faccie opposte, e la perpendicolare comune ad amendue si appella sua altezza. Ma eziandio ne' prismi la loro ragione dee dedursi dalle basi, e dall' altezze. Quindi, essendo eguali le basi, saranno i prismi nella sola ragione dell' altezze; essendo eguali le altezze, saranno nella sola ra-

ragione delle basi; ed essendo disuguali così le basi, come le altezze, saranno nella ragion composta dell'une, e dell'altre. Che se poi siano eguali tanto le basi, quanto le altezze, la ragione de' prismi sarà di uguaglianza; onde si è, che i prismi situati tra piani paralleli, e sopra la stessa o eguali basi, siano tra loro eguali. Intanto se le basi siano in reciproca ragione dell'altezze, eziandio dovranno essere eguali tra loro i due prismi.

340. I riferiti teoremi intorno alla ragione di due prismi anno luogo, o che i prismi siano della stessa spezie, o che siano di spezie diversa. Onde egli è facile ad intendersi, che si avrà la solidità di un prisma qualsivoglia con moltiplicare la sua base per la sua altezza, dimodochè se la base del prisma sia *a b*, e l'altezza *c*, sarà *a b c* la sua solidità. In effetto il palmo cubico è un altro prisma; onde il prisma, di cui si cerca la solidità, sarà al palmo cubico in ragion composta della base alla base, e dell'altezza all'altezza. Quindi ponendo, che la base del prisma sia alla base del palmo cubico, come *a b* ad 1, e che l'altezza dell'uno sia all'altezza dell'altro, come *c* ad 1, sarà il prisma al palmo cubico, come *a b c* ad 1 (59); e pertanto essendo l'unità il valore del palmo cubico, sarà *a b c* quello del prisma.

341. Per determinare adunque la solidità di un prisma qualsivoglia, bisogna prima misurare così la sua base, come la sua altezza, ed indi moltiplicare l'una per l'altra. Quindi se il prisma abbia per base una figura piana regolare, siccome si ha la sua base con moltiplicare il perimetro di essa per la metà della perpendicolare, che dal centro della stessa base si abbassa sopra uno de' suoi lati (224); così con moltiplicare tra loro il perimetro della base, la metà della riferita perpendicolare, e l'altezza del prisma, si avrà la solidità di detto prisma. Ed gli è da notarsi, che se il prisma, non solo abbia la base regolare, ma sia ancora rettangolo, si avrà la super-

per-

perficie ſua laterale, che è la ſomma di tutti i parallelogrammi, che lo contengono, con moltiplicare il perimetro della ſua baſe per la ſua altezza; per la ragione, che i riferiti parallelogrammi come rettangoli vengono ad avere una ſteſſa altezza, la quale è quella del priſma.

342. Giova ancora avvertire in queſto luogo, che ſiccome il parallelepipedo reſta diviſo in due priſmi triangolari, quante volte in eſſo ſi fa paſſare un piano per le diagonali corriſpondenti di due parallelogrammi oppoſti [296]; così ogni priſma triangolare può eſſere riguardato come un parallelepipedo dimezzato. Quindi, prendendo per baſe del priſma triangolare uno dei tre parallelogrammi, che lo contengono, avremo ancora la ſua ſolidità con moltiplicare queſt' altra baſe per l'altezza ad eſſa corriſpondente, e con prendere la metà del prodotto nato da queſt'altra moltiplicazione: dal che egli è facile il ricavarne, che la baſe ſua triangolare debba eſſere alla nuova baſe, come l'altezza, che ſi rapporta à queſta ſeconda, al doppio dell'altezza, che ſi rapporta alla prima.

343. Del rimanente ſiccome ogni figura piana rettilinea per mezzo di rette tirate da uno dei ſuoi angoli agli altri oppoſti ſi riſolve in triangoli; così con dividere in triangoli ſimili, ed eguali le due faccie oppoſte di un priſma, e con unire per tanti piani le rette, che in amendue ſi corriſpondono, ſi riſolverà il priſma in altrettanti priſmi triangolari. E conforme la baſe di un priſma può eſſere ridotta ancora ad un ſol triangolo [143]; così con queſta riduzione niente ſarà più facile, quanto di formare un priſma triangolare eguale ad ogn'altro priſma dato. Che ſe poi ſi faccia (179) un quadrato eguale al triangolo, che è baſe del nuovo priſma, potremo inoltre formare un ſolido eguale al priſma dato. Ed in fine con ritrovare un cubo eguale a queſto ſolido (329), avremo altresì un cubo eguale all'iſteſſo dato priſma.

344.

344. La piramide poi è una figura ſolida, che avendo per baſe una figura rettilinea qualſivoglia A B C, ſi termina per l'altre parti da più triangoli A B D, B C D, C A D, che ſi elevano (Fig. 120.) sù quella baſe, e congiungono i lati di eſſa con un iſteſſo punto A, che ſi appella vertice, o cima della piramide. Quindi la piramide ancora à miſura della ſua baſe può eſſere d'infinite ſpezie; come in effetto ella diceſi triangolare, quando la ſua baſe è pure triangolo, quadrangolare quando è quadrangolo, pentagonale quando è pentagono, e così all'infinito. E per quanto ai triangoli, che inſieme colla baſe terminano da per tutto la piramide, chiara coſa ſi è, che eſſi in ciaſcuna piramide ſono tanti di numero, quanti ſono i lati della baſe, cioè tre nella piramide triangolare, quattro nella quadrangolare, cinque nella pentagonale, e così conſecutivamente nell'altre.

345. Eſſendo così, ſi vede, che la piramide triangolare ſia terminata in tutto da quattro triangoli; onde atteſo il minimo numero de' ſuoi termini, ed atteſa altresì l'indole loro ſempliciſſima, queſta tale piramide ſarà la più ſemplice non ſolo di tutte le piramidi, ma eziandio di tutte le figure ſolide. E poichè nella medeſima tutte le quattro faccie ſono triangoli; egli è chiaro parimente, che ciaſcuna di dette faccie può eſſere conſiderata come baſe della piramide. Intanto col cambiamento, che riceve la ſua baſe; dovrà cambiarſi ancora il ſuo vertice, per la ragione, che il vertice della piramide dee eſſere quella punta, che ſtà oppoſta alla baſe. Jue

346. Altezza di ogni piramide è la perpendicolare, che dal vertice cade ſulla baſe; ed eziandio nelle piramidi dalle baſi, e dalle altezze dee dedurſi la loro ragione. Eſſendo adunque eguali le baſi, ſaranno le piramidi nella ſola ragione delle altezze; per lo contrario eſſendo eguali le altezze, ſaranno le medeſime nella ſola ragione delle baſi; ed in fine eſſendo diſuguali così le baſi, co-

me le altezze, si comporrà la loro ragione da quella delle basi, e da quella dell'altezze. Che se poi siano eguali tanto le basi, quanto le altezze, la ragione delle piramidi sarà di eguaglianza; onde si è, che le piramidi situate tra piani paralleli, e sopra la stessa, o eguali basi, siano tra loro eguali. Ma se le basi siano in reciproca ragione delle altezze, pure tra di esse dovranno essere eguali le due piramidi.

347. Da ciò, che la piramide si eleva talmente sulla sua base, che ristringendosi a poco a poco finalmente termina in punta, egli è facile ad intendersi, che se si tagli una piramide per un piano parallelo alla sua base, la sezione fatta nella piramide sia un'altra figura simile, e parallela alla stessa base, ma non già eguale. Quindi delle due parti, nelle quali rimane divisa la piramide con una tal sezione, quella, che giace verso la punta, o sia vertice, sarà un'altra piramide della stessa indole colla piramide divisa; ma l'altra parte, che giace verso la base, sarà una figura solida d'indole diversa, la quale conforme si appella comunemente piramide troncata, così è terminata da due figure piane simili, e parallele, e da molti trapezj, che congiungono insieme i lati omologi di quelle due.

186 348. Or sebene i riferiti teoremi intorno alla ragione di due piramidi abbiano luogo, o che le piramidi siano della stessa spezie, o che siano di spezie diversa; ad ogni modo da nessuno di essi potrà dedursi, come debba essere determinata la solidità di qualsivoglia piramide. Per determinarla adunque, si ha bisogno di qualche attacco tra il prisma, e la piramide; ed a quest' oggetto si è dimostrato da'Geometri, che se un prisma, ed una piramide abbiano basi eguali, ed altezze eguali, il prisma debba essere triplo della piramide; Onde in virtù di questo teorema avremo la solidità di qualsisia paramide, prima con moltiplicare la sua base per la sua altezza, ed indi con prendere la terza parte del prodotto nato dalla

riseriferita moltiplicazione: dimodoche se la base sia *a b*, e *c* l'altezza, sarà $\frac{1}{3}$ *a b c* la solidità della piramide.

349. Ed in vero il prisma triangolare effettivamente può dividersi in tre piramidi eguali, delle quali due col prisma medesimo anno la stessa base, e la stessa altezza; ma poiche la divisione in piramidi del prisma triangolare non è così facile ad intendersi, sostituiremo in luogo di esso il cubo, in cui vedesi con ogni chiarezza, che si avranno sei piramidi eguali, qualora i lati delle sue faccie s'intendano uniti col punto di mezzo per altrettanti triangoli. Or se bene ciascuna di queste piramidi abbia col cubo la stessa base, ad ogni modo la sua altezza è la metà di quella del cubo. Quindi ogn'altra piramide, che situata sulla medesima base abbia col cubo la stessa altezza, sarà dupla di una di quelle; onde sarà ancora non già la sesta parte, ma il terzo del cubo medesimo. E ad esempio del cubo ogn'altro prisma dovrà essere eziandio triplo della piramide, con cui ha la stessa base, e la stessa altezza.

350. Avvalendoci del metodo degli indivisibili, si potrebbe dedurre la verità del riferito teorema da quello, che si è dimostrato nell'Arimmetica, cioè che la somma de'quadrati degli infiniti numeri naturali sia all'ultimo preso altrettante volte, come 1 a 3. Perciò noteremo primieramente, che siccome ogni prisma con piani paralleli alla sua base può essere diviso in molti altri prismi della stessa indole col tutto; così con aumentare il numero di essi all'infinito, e con minorare altresì all'infinito le loro altezze, avremo i veri elementi del prisma. E poichè questi piccioli prismi, che debbono essere riguardati come elementi del grande, sono forniti di eguali basi, saranno i medesimi tra loro, come l'altezze. Onde nella supposizione, che abbiano tutti una stessa altezza, potrà giudicarsi della loro somma, che forma il prisma totale, dalla somma delle loro basi.

351.

351. Noteremo ancora, che siccome ogni piramide con piani paralleli alla sua base può essere divisa in molte parti, così con aumentare all'infinito il numero di queste parti, e con minorare le altezze di esse eziandio all' infinito, avremo i veri elementi della piramide. E quantunque questi elementi a riserba dell' ultimo, che è vera piramide, siano tante picciole piramidi troncate; ad ogni modo per essere le loro altezze di una picciolezza infinita possono i medesimi essere riguardati come tanti piccioli prismi, i quali perciò saranno tra loro nella ragion composta delle basi, e delle altezze. Onde nella supposizione, che abbiano tutti una stessa altezza, potrà giudicarsi della loro somma, che forma la piramide totale, dalla somma delle loro basi.

352. Notate tali cose, s' intenda ora divisa la piramide per piani paralleli alla sua base nei suoi elementi, che abbiano tutti una stessa altezza. E poichè le basi di questi elementi sono altrettante figure piane simili tanto tra loro, quanto colla base stessa della piramide; saranno le medesime nella duplicata raggione de' loro lati omologi (113). Ma questi lati sono situati in uno de'triangoli della piramide, in cui per l'eguali loro distanze si aumentano talmente dal vertice verso la base, che per rapporto al primo il secondo si fa doppio, il terzo triplo, il quarto quadruplo, e così all' infinito. Dunque siccome egli è molto proprio di disegnare questi lati per mezzo dei numeri naturali, così le basi degli elementi della piramide dovranno essere disegnati dai quadrati degli stessi numeri. Onde in virtù del riferito teorema arimmetico la somma di quelle basi, che ci addita la piramide, sarà all' ultima presa altrettante volte, che ci addita il prisma, che ha colla piramide la stessa base, e la stessa altezza, come 1 à 3.

353. Per determinare adunque la solidità di una piramide qualsivoglia, bisogna prima misurare così la sua base, come la sua altezza, ed indi pren-

dere

dere il terzo del prodotto dell' una moltiplicata per l'altra. Quindi se la piramide abbia per base una figura piana regolare, siccome si ha detta base, con moltiplicare il perimetro di essa per la metà della perpendicolare, che dal centro della stessa base si abbassa sopra uno de' suoi lati (224); così con moltiplicare tra loro il perimetro della base, la metà della riferita perpendicolare, e la terza parte dell'altezza della piramide, si avrà la solidità di detta piramide. Ed egli è da notarsi, che se nella piramide non solo sia regolare la base, ma siano isosceli ancora i triangoli, che la contengono, ciò che avviene, quando il vertice della piramide si ritrova nella perpendicolare alzata sulla base dal suo centro; in tal caso si avrà la superficie sua laterale, che è la somma di detti triangoli, con moltiplicare il perimetro della sua base per la metà dell'altezza di uno degli stessi triangoli.

354. Per non tralasciare cosa alcuna, quì ancora si vuol'avvertire, che siccome con dividere in triangoli la base di una data piramide, e con unire le rette, che ne fanno la divisione, col suo vertice, resta divisa la piramide in altrettanti piramidi triangolari; così con ridurre la stessa base ad un sol triangolo, potrà ridursi altresì ad una sola piramide triangolare la piramide data. Che se poi si formi un quadrato eguale a quel triangolo, e sù di esso come base si faccia un solido, la di cui altezza sia eguale alla terza parte dell' altezza della data piramide, avremo il solido eguale alla stessa piramide. Ed in fine formandosi un cubo eguale à quel solido, avremo il cubo, a cui la medesima piramide data dovrà essere eguale. Ed ecco quanto dee sapersi da un Geometra pratico, così intorno ai prismi, come intorno alle piramidi.

§. V.

Dell' altre figure solide terminate da superficie piane.

16

355. Sebbene oltre ai prismi, e alle piramidi vi siano infinite altre figure solide terminate da superficie piane; nientedimeno siccome ciascuna di esse può essere divisa in prismi, e piramidi, così con una tal divisione potremo eziandio porla à calcolo, e determinare la sua solidità. Per ragion di esempio sia A B C D E F la base rettangola di un muro fatto a scarpa, il quale abbia da per tutto la stessa altezza, dimodoche le faccie di esso corrispondenti ai lati AB, BC, CD, DE siano perpendicolari al piano della base, e le altre due, che corrispondono ai lati AF, EF siano obblique al medesimo piano. Per l'obbliquità adunque di quest'altre faccie, dovrà terminarsi il riferito muro dalla parte superiore per un' altra figura più picciola della A B C D E F. Onde supposto, che ella sia eguale alla figura G B C D H I, ecco come dovrà misurarsi la solidità del muro proposto.

Fig. 121.

356. Si prolunghino le due G I, H I ~~per~~ fino à che s'incontrino coll'altre due E F, AF ne' punti L, e M; e per le medesime così prolungate s'intendano passare due piani paralleli alle faccie elevate sulli lati BC, CD. Con questi piani adunque resterà diviso il muro, primieramente in due parallelepipedi elevati sulli due rettangoli, che formano insieme la figura GBCDHI; indi in due prismi triangolari elevati sugli altri due rettangoli A G I M, E H I L; e finalmente in una piramide quadrangolare elevata sul quadrato F L I M, Quindi, per misurare la solidità del muro proposto non avremo a fare altra cosa, se non che determinare separatamente tutte le riferite basi, e determinare ancora l' altezza del muro, che è comune altezza di tutte le divisate

visate

visate figure solide. Imperocche, siccome con moltiplicare l'altezza del muro per la figura GBCDEHI avremo la solidità dei due parallelepipedi; così con moltiplicare la metà della stessa altezza per gli due rettangoli AGIM, EHIL avremo la solidità dei due prismi triangolari; e con moltiplicare in fine il terzo della medesima altezza per lo quadrato FLIM avremo la solidità della piramide triangolare.

257. Ciò, che si è fatto nell' esempio proposto, dovrà praticarsi adunque in ogn' altro caso, che possa occorrere, dimodoche per quanto sia composta la figura solida terminata da superficie piane, sempre con risolverla in prismi, e piramidi potremo porla a calcolo, e determinare la sua solidità; ed egli è da notarsi, che siccome la sua partizione potrà farsi tal volta in varie guise, così per agevolare il calcolo giova appigliarsi alla partizione più semplice, cioè à dire a quella, per cui la figura si divide in parti tali, che possono essere determinate con pochi dati. Quella figura intanto, che ha forma di piramide troncata, può essere misurata, senza che soggiaccia à divisione alcuna; e perciò bisogna rammentarsi, che siccome si viene ad avere la piramide troncata, qualora si divide una piramide intera per un piano parallelo alla sua base, così la propria sua nozione si è, di esser terminata da due figure piane simili e parallele, e da molti trapezj, che uniscono insieme i lati omologi di quelle due.

358. Prendansi adunque due lati omologi delle due faccie simili e parallele, e facciasi che la loro differenza sia all' altezza della piramide troncata, come ciascuno di essi ad una quarta proporzionale; si moltiplichi poscia ciascuna delle due faccie per la quarta proporzionale derivata dal suo lato, e la terza parte della differenza dei due prodotti sarà la solidità della piramide troncata. Per ragion di essempio fingiamo, che la faccia maggiore sia 90, e la minore 10; che i

loro lati omologi siano 3, ed 1; ed in fine, che l'altezza della piramide troncata sia 8. Essendo adunque 2 la differenza dei due lati omologi, dovrà farsi come 2 ad 8, così 3 ad una quarta proporzionale, che sarà 12; e come 2 ad 8, così 1 ad un' altra quarta proporzionale, che sarà 4. Quindi si dovrà poscia moltiplicare 90 per 12, e 10 per 4; ed essendo 1040 la differenza dei due prodotti, sarà la terza parte di questa differenza, cioè $346\frac{2}{3}$ la solidità, che si dimanda.

359. Ma per dare della stessa regola un' altro esempio generale, che possa servirci di norma per ogni piramide troncata, che sia proposta, fingiamo ancora, che la faccia maggiore sia a^2, e la minore b^2; che i loro lati omologi siano c, e d; ed in fine che l'altezza della piramide troncata sia e. In questo caso adunque la differenza dei due lati sarà $c-d$; onde dovrà farsi come $c-d$ ad e, così c ad una quarta proporzionale, che sarà $ce:(c-d)$; e come $c-d$ ad e, così d ad un' altra quarta proporzionale, che sarà $de:(c-d)$. Quindi si dovrà in appresso moltiplicare, così a^2 per $ce:(c-d)$, come b^2 per $de:(c-d)$; ed essendo $(a^2ce-b^2de):(c-d)$ la differenza dei due prodotti, sarà la terza parte di questa differenza, cioè $(a^2ce-b^2de):(3c-3d)$ la solidità della piramide troncata.

360. Per dimostrare la verità della regola data, intendasi compiuta la piramide troncata, e chiamando x l'altezza della piramide aggiunta, sarà $e+x$ l'altezza della piramide totale. Quindi, essendo $\frac{1}{3}b^2x$ la solidità della prima, ed $\frac{1}{3}a^2e+\frac{1}{3}a^2x$ la solidità della seconda; chiara cosa si è, che sarà $\frac{1}{3}a^2e+\frac{1}{3}a^2x-\frac{1}{3}b^2x$ la solidità della piramide troncata. Ma per picciola riflessione, che si voglia fare, egli è facile ad intendersi, che $e+x$ sia ad x, come c à d. Dunque dovendo essere dividendo, come e ad x, così $c-d$ ad d, sarà $x=de:[c-d]$; e pertanto colla sostituzione di questo valore di x, la solidità della piramide troncata diverrà $\frac{1}{3}a^2e+$

$(a^2$

$(a^2 d e - b^2 d e) : (3c - 3d)$, cioè $(a^2 c e - b^2 d e) : [3c - 3d)$, che è l' istesso valore ritrovato di sopra.

361. Notisi in questo luogo, che se la piramide troncata abbia per sua base una figura piana regolare, ed i trapezj, che la cingono, siano egualmente inclinati al piano di detta base, dimodoche abbiano tutti una stessa altezza; in tal caso si avrà la somma loro totale, che è la superficie laterale della piramide troncata, con moltiplicare quell' altezza loro comune, o per la somma dimezzata dei perimetri delle due figure simili, che terminano detta piramide, o pure per lo perimetro di quella sola, che dista dalle due riferite per eguali intervalli. Anzi per l'uso, che dovremo farne in appresso, si vuol notare ancora, che se la comune altezza dei trapezj sia infinitamente picciola, all' ora per essere quasi tra loro eguali le due figure simili, che sono termini della piramide troncata, si avrà la somma di detti trapezj, con moltiplicare quella picciola altezza per lo perimetro di una delle due riferite figure.

362. Per ristringere in questo luogo ciò, che ci rimane a dire intorno alle figure solide terminate da superficie piane, noteremo primieramente, che quella simiglianza, che di sopra abbiamo considerata nei parallelepipedi, ha luogo ancora così nei prismi, e nelle piramidi, come in tutte l'altre figure solide terminate da superficie piane. Ed in vero siccome sono simili due parallelepipedi, quantevolte i parallelogrammi, che terminano l' uno, sono simili coi parallelogrammi, che terminano l'altro, ciascuno con ciascuno; così vi sarà simiglianza tra due altre figure solide della stessa spezie, qualora le figure piane, che sono termini dell' una, si ritrovano essere simili colle figure piane, che sono termini dell' altra, ciascuna con ciascuna. E quindi egli è facile ad intendersi, che gli angoli solidi, che in queste tali figure tra loro si corrispondono,

no, come formati dagli stessi angoli piani disposti collo stesso ordine, debbono essere tra loro eguali.

363. Or per gli prismi, e per le piramidi simili si vede chiaramente, che la loro ragione debba essere triplicata di quella, che anno due lati omologi delle figure piane simili, che sono loro termini; poichè, siccome per lo teorema generale debbono essere in ragion composta delle basi e dell'altezze, così attesa la loro simiglianza le basi saranno in duplicata ragione di detti lati, e le altezze nella loro ragione semplice. Ma da questo medesimo egli è facile à ricavarne, che nella stessa triplicata ragione debbono essere ancora tutte l'altre figure solide, che terminate da superficie piane sono simili tra loro; poichè si possono le due date figure simili talmente dividere in prismi, e piramidi, che le parti dell'una siano simili colle corrispondenti parti dell'altra; onde dalle ragioni di queste parti raccogliendo la ragione de'loro tutti ritroveremo, che eziandio le figure totali siano in triplicata ragione de' lati omologi.

364. Noteremo ancora, che siccome una figura piana terminata da linee rette può essere regolare, ed avere tanto i lati, quanto gli angoli eguali; così potrà essere regolare altresì una figura solida terminata da superficie piane. Or la sua nozione eziandio dee riporsi nell' uguaglianza così delle figure piane, che la terminano, come degli angoli solidi in essa esistenti; ma queste due uguaglianze non possono sussistere insieme, se le figure piane, che sono termini della solida, non siano eguali, e regolari; onde si è, che si appella regolare una figura solida, quando essendo terminata da per tutto da figure piane eguali, e regolari sono eguali ancora i suoi angoli solidi. Intanto queste figure solide regolari, lontano di essere infinite di numero, siccome sono le figure piane regolari, si riducono à cinque sole; le quali si chiamano tetraedro, cubo,

bo, ottoaedro, dodecaedro, e icoſaedro.

365. Ed in vero il loro numero dee eſſere definito, sì perchè non tutte le figure piane regolari poſſono eſſere impiegate nella loro formazione, come ancora perchè quelle, che fanno al caſo, debbono eſſere di un determinato numero. Perciò biſogna rammentarſi di quel tanto fu avvertito di ſopra intorno all'angolo ſolido: cioè I, che queſt'angolo per lo meno dee eſſere contenuto da tre angoli piani (294); e II, che tutti gli angoli piani, che lo contengono, uniti inſieme debbono eſſere minori di quattro retti (295). Or da queſti due principj ſi ricavano due conſeguenze; cioè I, che nella formazione delle figure ſolide regolari poſſono eſſere impiegati ſolamente il triangolo equilatero, il quadrato, ed il pentagono regolare; e II, che in detta formazione può farſi uſo del triangolo equilatero in tre maniere diverſe: donde poſcia ne avviene, che le figure ſolide regolari ſiano in tutto cinque di numero.

366. Per incominciare adunque dal triangolo equilatero, niente oſta, che egli ſia impiegato nella formazione della figura ſolida regolare; poichè eſſendo ciaſcuno de' ſuoi angoli di 60 gradi, potrà averſi l'angolo ſolido non ſolo con tre, ma eziandio con quattro, e con cinque triangoli equilateri adattati ad un'iſteſſo punto. Ed in effetto; ſiccome la ſomma degli angoli piani, che conterranno l'angolo, viene ad eſſere di 180 gradi, quando ſono tre; così ſarà di 240, quando ſono quattro, e di 300, quando ſono cinque, le quali ſomme non giungono à quattro retti. Con ſei poſcia triangoli equilateri egli è impoſſibile di avere l'angolo ſolido, per la ragione che ſei dei loro angoli uniti inſieme aſcendono à 360 gradi, che ſono la miſura di quattro retti; ed egli è chiaro, che molto meno potrà averſi l'angolo ſolido, ſe ſia vie più maggiore il numero de' triangoli equilateri, che formar lo debbano.

367. Or per la ſteſſa ragione eziandio il qua-

ſve

ſue

drato, ed il pentagono regolare possono essere impiegati nella formazione della figura solida regolare; poichè essendo ciascun'angolo del quadrato di 90 gradi, e ciascun' angolo del pentagono di gradi 108; così con tre quadrati come con tre pentagoni potrà aversi l'angolo solido. E di fatti la somma dei tre angoli piani, che lo conterranno, sarà di 270 gradi, quando sono angoli de' quadrati; e di gradi 324, quando sono angoli de' pentagoni. Volendosi poscia aumentare il numero, tanto dei quadrati, quanto dei pentagoni, egli è impossibile di avere con essi l'angolo solido; poichè siccome quattro angoli di quattro quadrati uniti insieme ascendono à 360 gradi, che fanno quattro retti; così quattro angoli di quattro pentagoni danno per loro somma 432 gradi, che sono maggiori di quattro retti.

368. Passando poi alle figure piane regolari superiori al pentagono, nè pure con tre di esse potrà aversi l'angolo solido; e quindi si è, che le medesime non possono essere impiegate nella formazione della figura solida regolare. In effetto se prendiamo la più prossima al pentagono, cioè l'esagono, sarà ciascuno dei suoi angoli di 120 gradi; onde tre angoli di questa indole saranno insieme di 360 gradi, e pertanto come eguali à quattro retti non potranno contenere l'angolo solido. E poichè quanto più si aumenta il numero de' lati della figura piana regolare, diventa tanto più maggiore ciascuno dei suoi angoli; si vede da ciò con ogni evidenza, che molto meno potrà aversi l'angolo solido con far uso di tre figure piane regolari, che siano di un'ordine superiore all' esagono.

369. Per venire ora più d'appresso alla formazione delle cinque figure solide regolari, io dico primieramente, che siccome può aversi l'angolo solido, e con tre, e con quattro, e con cinque triangoli equilateri; così con triangoli eguali di questa indole possiamo avere tre figure solide re-

gegolari : cioè il tetraedro, che sarà terminato da quattro; l'ottoaedro, che sarà contenuto da otto; e l'icosaedro, che sarà racchiuso da venti triangoli equilateri. Or per quanto al tetraedro, egli si avrà con formare l'angolo solido colle punte di tre triangoli, e con adattare sulle basi di questi il triangolo rimanente. Similmente per quanto all'ottoaedro, si verrà egli ad avere, con formare due angoli solidi, ciascuno colle punte di quattro triangoli, e con unire i medesimi talmente insieme, che le basi dei loro triangoli tra di esse si combacino. Per quanto poi all' icosaedro, non è così facile ad intendersi la disposizione dei venti triangoli, che debbono contenerlo.

370. Ed in vero eziandio per l'icosaedro debbono formarsi due angoli solidi, ciascuno colle punte di cinque triangoli; ma rimangono altri dieci triangoli, che debbono essere frapposti tra le basi degli uni, e le basi degli altri in modo tale, che resti da per tutto terminata la figura solida. Quindi, dopo essersi formati quei due angoli solidi, si formi ancora una spezie di corona con cinque altri triangoli elevati perpendicolarmente sopra un qualche piano, che avrà in conseguenza per base un pentagono regolare. E siccome questa corona coll' aggiunta degli altri cinque triangoli si viene a fare una superficie continuata; così potrà ella frapporsi in guisa tale tra i due angoli solidi, che le basi dei suoi triangoli si combacino colle basi di quegli altri, da cui sono formati detti angoli; ed in questa maniera chiaro si è, che si avrà l'icosaedro, che si dimanda.

371. Io dico in secondo luogo, che siccome con tre soli quadrati, e con tre soli pentagoni può aversi l'angolo solido; così tanto con quadrati, quanto con pentagoni eguali non potrà formarsi se non che una sola figura solida regolare. Or essendo ella terminata da quadarati, si appella cubo, e dee essere contenuta da sei quadrati eguali, de' quali gli opposti sono eziandio tra loro paralle-

pve

li. Essendo poi terminata da pentagoni, si chiama dodecaedro; e siccome i pentagoni, che la contengono, debbono essere dodici di numero, così si formerà ella effettivamente; prima con fare due angoli solidi, ciascuno colle punte di tre pentagoni; indi con adattare ne' vuoti, che lasciano tra loro i pentagoni così dell'uno, come dell'altro, altrettanti pentagoni; e finalmente con congiungere insieme le due superficie, che ne risultano in modo tale, che le parti eccedenti dell'una riempiano le parti vuote dell'altra.

372. Del rimanente ciascuna delle cinque divisate figure ha dentro di se un punto, che si appella suo centro; e la di lui proprietà si è, che sono eguali così le rette, che da detto punto si tirano ai vertici degli angoli solidi della figura, come le perpendicolari abbassate dall' istesso punto sulle faccie della medesima, le quali perpendicolari segnano in dette faccie i loro centri. Quindi siccome potrà determinarsi il riferito punto coll'incontro di due perpendicolari alzate sopra due faccie della figura dai loro centri, così se i lati di ciascuna faccia s'intendano uniti coll' istesso punto per altrettanti triangoli, resterà divisa la figura in tante piramidi simili, ed eguali, quante sono le faccie. Ed essendo così egli è facile ad intendersi, che conforme la base di una di dette piramidi replicata tante volte, quante n'addita il loro numero, dee darci la superficie totale della figura; così la solidità della stessa piramide presa ancora altrettante volte ci darà la solidità della stessa figura.

373. Egli è vero, che per porre in pratica questa maniera di determinare la solidità di ciascuna figura solida regolare; si ha bisogno così del lato, con cui sono descritte le faccie della figura, come della perpendicolare, che dal centro della medesima cade sopra una di dette faccie; ma dalle cose, che altrove dovremo dire, si comprenderà facilmente, come dato il lato della figura possa determinarsi la riferita perpendicolare.

lare. Di fatti per lo centro, di cui sono fornite le figure solide regolari, si vedrà in appresso, che così intorno a tali figure, come dentro di esse possa situarsi quell'altra figura solida, che comunemente si appella sfera. Onde siccome per questa proprietà dovremo à suo luogo far vedere, come possa investigarsi la ragione tra il lato della figura, ed il diametro della sfera circonscritta; così colla conoscenza di questa ragione niente sarà più facile, quanto di determinare così le rette, che dal centro della figura si tirano ai vertici dei suoi angoli, come le perpendicolari, che dall' istesso centro cadono sulle faccie della medesima.

CAPITOLO II.

Delle figure solide terminate da superficie curve.

174. SEgue ora l'altra classe delle figure solide, cioè di quelle, che ò da per tutto, ò almeno per un qualche lato sono terminate da superficie curve; ed in queste figure dovremo considerare non solo la propria loro solidità, ma l'ampiezza ancora di queste superficie curve, per cui si terminano. Or siccome egli è chiaro, che le spezie della superficie curva possono essere infinite: così giova quì l'avertire, che deriva la loro varietà tanto dalle varie linee curve, per mezzo di cui si generano, quanto dalle varie maniere, con cui da quelle generar si possono; e quindi si è, che da una stessa linea curva possono essere derivate molte superficie curve tra esse loro differenti. Noi intanto ci ristringeremo a quelle sole superficie curve, che in una maniera facile tirano la loro origine dalla linea circolare; e perciò di quelle sole figure solide eziandio ragioneremo, che sono terminate da tali superficie.

§. I.

§. I.

Della nozione, e misura così del cilindro, come della sua superficie.

375. TRa le superficie curve, che possono derivarsi dalla linea circolare, la più semplice è quella, per cui si termina il cilindro. Ed in vero si deduceva primieramente da Geometri questa figura dal moto di un parallelogrammo rettangolo fatto intorno ad uno de' suoi lati fisso, ed immobile [illegible] fino a che ritornasse al suo primiero luogo. Ma siccome poi si avvidero, che potea aversi la stessa figura con fare in modo, che una data retta percorresse talmente con uno de' suoi estremi la circonferenza di un dato cerchio, che restasse sempre perpendicolare al di lui piano; così conobbero in appresso, che la nozione del cilindro potea rendersi più generale, con dare a quella retta qualunque posizione si voglia a riguardo del piano circolare, e con ritenere semplicemente, che ella nel suo movimento restasse sempre parallela a se medesima.

Fig. 122. 376. Sia adunque ABC un cerchio qualsivoglia, ed alzata da uno de' punti della sua circonferenza la retta AD, come si voglia inclinata al di lui piano, si porti questa retta per tutta la circonferenza con legge tale, che resti sempre parallela a se medesima. Con questo moto egli è chiaro, che l'altro estremo D debba portarsi per la circonferenza di un'altro cerchio eguale e parallelo al primo, e che la stessa retta colla sua lunghezza debba descrivere intorno ai due cerchi una superficie curva. Or siccome chiameremo cilindro la figura solida terminata dai due cerchi, e da questa superficie; così alla superficie medesima daremo il nome di superficie cilindrica.

377. Chiameremo in oltre base del cilindro ciascuno dei due cerchi, che lo terminano; ed asse del medesimo la retta GH, che unisce insieme

ſieme i centri di detti cerchi. E poichè la G H ſi fa parallela à quella retta, che nella formazione del cilindro ſi porta per le circonferenze dei due cerchi; ſi vede da ciò, che l'aſſe del cilindro talvolta ſarà perpendicolare, e tal volta obbliquo al piano della baſe; e quindi ſi è, che il cilindro medeſimo prendendo ora una forma, ed ora un'altra, nel primo caſo diceſi retto, e nel ſecondo obbliquo, ovvero ſcaleno. Finalmente chiameremo altezza del cilindro la perpendicolare, che da un punto della baſe ſi eleva sù di eſſa [redacted] fino al cerchio oppoſto, la quale perpendicolare nel cilindro retto non ſarà differente dal ſuo aſſe.

378. Or di qualunque forma ſia il cilindro, dalla generazione ſua medeſima egli è facile il ricavarne, che ſe egli ſia tagliato per un piano parallelo alla ſua baſe, la ſezione fatta nel cilindro debba eſſere un'altro cerchio eguale e parallelo a ciaſcuno dei due oppoſti. Quindi le due parti, nelle quali reſta diviſo il cilindro con detta ſezione, ſaranno due altri cilindri della ſteſſa indole col loro tutto. E ſiccome egli è chiaro, che queſt'altri due cilindri tanto per le loro ſolidità, quanto per le loro ſuperficie cilindriche debbano eſſere tra loro eguali, quando il piano ſecante diſta dai due cerchi oppoſti per eguali intervalli; così da queſto ſteſſo potrà dedurſi, che in ogni altra poſizione di detto piano non meno i due cilindri, che le due loro ſuperficie cilindriche ſiano, come le corriſpondenti parti dell' aſſe.

379. Adunque colla riferita ſezione avviene nel cilindro quello ſteſſo, che accade nel priſma, quando egli ſi ſeca per un piano parallelo alla ſua baſe. Nè dee eſſere altrimente; poichè, con- ve
ſiderando la baſe del cilindro come poligono regolare, la ſuperficie cilindrica ſarà compoſta da tanti piccioli parallelogrammi deſcritti dalla retta, che ſi porta per lo parimetro della baſe; onde il cilindro medeſimo potrà riguardarſi a guiſa

sa di un prisma. Ed essendo così, eziandio ne' cilindri la loro ragione dovrà dedursi dalle basi, e dall'altezze: dimodochè due cilindri saranno come le basi, quando le altezze sono eguali; saranno come le altezze, quando sono eguali le basi; e saranno in fine nella ragion composta delle basi, e dell' altezze, quando e l' une, e l' altre sono disuguali. E per la stessa ragione saranno due cilindri tra loro eguali, non solo quando sono eguali così le basi, come le altezze, ma eziandio quando l'une coll'altre sono in reciproca ragione.

380. Da ciò, che il cilindro non sia altra cosa, se non che un prisma circolare, ne segue ancora, che la sua solidità debba essere determinata, come quella di ogn'altro prisma, cioè con moltiplicare la sua base per la sua altezza. Ma si vuol quì notare, che dovendo essere parallelogrammo la sezione fatta nel cilindro per un piano, che o passi per l'asse, o sia a quello parallelo; eziandio riterranno l'indole di prisma le due porzioni, nelle quali rimane diviso il cilindro da detto piano. Quindi siccome queste due porzioni, come prismi di eguali altezze, debbono essere tra loro, come le due porzioni della base, sulle quali si appoggiano; così si avrà parimente la solidità di ciascuna di esse, con moltiplicare la porzione della base, a cui ella corrisponde, per l'altezza del cilindro.

381. Per quanto poi alla superficie cilindrica, dee farsi distinzione tra quella del cilindro retto, e l'altra del cilindro scaleno. Incominciando adunque dalla prima, egli è da notarsi, che siccome quella retta, per cui si descrive detta superficie, rimane sempre perpendicolare al piano della base; così i piccioli parallelogrammi, che compongono la stessa superficie, di loro natura sono tutti rettangoli. Onde conforme ciascuno di essi si ha colla moltiplicazione della sua base per la riferita retta, ovvero per l'asse del cilindro; così la superficie cilindrica, che è la loro som-

somma totale, si avrà con moltiplicare la circonferenza della base per lo stesso asse: tanto vero, che sarà ella eguale ad un rettangolo fatto dalla circonferenza della base nel medesimo asse.

382. Quindi, se della superficie cilindrica di un cilindro retto prendiamo la circonferenza per base, e l'asse per altezza, e si abbiano due di queste superficie; chiaro si è, che la ragione di esse debba ritrarsi dalle loro basi, e dalle loro altezze: dimodochè essendo eguali le basi, saranno le due superficie nella sola ragione dell'altezze; essendo eguali le altezze, saranno le medesime nella sola ragione delle basi; ed in fine essendo disuguali così le altezze come le basi, si comporrà la loro ragione da quella delle basi, e da quella dell'altezze. Che se poi siano eguali tanto le basi, quanto le altezze, o pure l'une coll'altre siano in reciproca ragione, le due superficie cilindriche saranno tra loro eguali.

383. Siccome si è fatto vedere, che la superficie cilindrica di un cilindro retto sia eguale al rettangolo fatto dalla circonferenza della base nell'asse; così la base dell'istesso cilindro è eguale ad un altro rettangolo fatto dalla stessa circonferenza nella metà del suo raggio. Quindi la superficie cilindrica sarà alla base del suo cilindro, come l'asse alla metà del raggio; e la stessa superficie sarà ad amendue i cerchi, che terminano il cilindro, come l'asse al raggio intero. Onde con questo teorema niente sarà più facile, quanto di risolvere i due seguenti problemi: cioè I di determinare l'asse, ovvero l'altezza, che dee darsi ad un cilindro retto, affinchè la sua superficie cilindrica serbi data ragione coi due cerchi, che lo terminano; e II di ritrovare un cerchio, che sia eguale alla superficie cilindrica di un dato cilindro retto.

384. Se un cilindro retto si seghi per un piano, che o passi per l'asse, o sia a quello parallelo, eziandio le due porzioni, nelle quali rimane divisa la superficie cilindrica da detto piano avranno

no per ſuoi elementi tanti piccioli parallelogrammi rettangoli. Quindi ſiccome queſte due porzioni ſaranno tra loro, come gli archi circolari della baſe, ſulli quali ſi appoggiano; così ſi avrà ciaſcuna di eſſe parimente con moltiplicare l'arco, a cui ella corriſponde, per l'aſſe del cilindro. E poichè il ſettore della baſe corriſpondente all'iſteſſo arco ſi ha con moltiplicare l'arco per la metà del raggio; ſarà la porzione della ſuperficie cilindrica al corriſpondente ſettore della baſe, come l'aſſe del cilindro al raggio della baſe dimezzato.

385. Paſſiamo ora alla ſuperficie cilindrica del cilindro ſcaleno. E poichè la retta, per mezzo di cui ella ſi deſcrive, è obbliqua al piano della baſe, chiaro ſi è, che non poſſono eſſere rettangoli i piccioli parallelogrammi, che formano detta ſuperficie. Quindi, non eſſendo l'aſſe del cilindro altezza comune di detti parallelogrammetti; non ſi potrà avere queſt'altra ſuperficie, che è la loro ſomma totale, con moltiplicare la circonferenza della baſe per detto aſſe. E per la ſteſſa ragione ſe ſi tagli da eſſa una porzione per un piano, che ò paſſi per l'aſſe, o ſia a quello parallelo, nè pure queſta porzione potrà averſi, con moltiplicare l'arco della circonferenza, a cui ella corriſponde, per lo medeſimo aſſe. Ed ecco il divario tra la ſuperficie cilindrica del cilindro ſcaleno, e l'altra del cilindro retto.

386. Aggiungaſi, che nel cilindro ſcaleno, per eſſere la riferita retta obbliqua al piano della baſe, ella nel ſuo moto continuamente cambia inclinazione a riguardo dei piccioli lati, che formano il perimetro di detta baſe. Quindi quei piccioli parallelogrammi, che debbono averſi come elementi della ſuperficie cilindrica, nè pure ſono tra loro equiangoli. Onde ſebene ciaſcuno di eſſi ſi abbia colla moltiplicazione della ſua picciola baſe per la ſua altezza; ad ogni modo per eſſere diverſe le loro altezze, rieſce difficile il determinare, così la loro ſomma totale, che forma l'intera

tera superficie cilindrica, come la somma di quei, che debbono darci la porzione della superficie corrispondente ad un'arco qualsivoglia della base del cilindro.

387. Si ha bisogno adunque di altro metodo per determinare, così l'intera superficie cilindrica del cilindro scaleno, come una porzione di essa corrispondente ad un' arco qualsivoglia della base. E per poco, che si voglia riflettere, si vedrà chiaramente, che il più naturale sia, di fare nel cilindro scaleno una sezione per un piano, che sia perpendicolare al suo asse. Imperocchè, dovendosi incontrare il perimetro di questa sezione perpendicolarmente coi lati opposti dei piccioli parallelogrammi, che sono gli elementi della superficie cilindrica; si avrà ciascuno parallelogrammetto colla moltiplicazione dell'asse del cilindro per la picciola porzione del perimetro, che in esso sta racchiusa. Onde avremo l'intera superficie cilindrica con moltiplicare l'istesso asse per l'intero perimetro; ed avremo la porzione di essa corrispondente ad un'arco qualsivoglia della base, con moltiplicare il medesimo asse per la porzione del perimetro, che in quella si contiene.

388. Si vuol però quì notare, che per porre in pratica quest'altro metodo, bisogna determinare meccanicamente per mezzo di un filo, così il perimetro della riferita sezione, come ogni porzione dell' istesso perimetro. Imperocchè, siccome detta sezione dee farsi per un piano, perpendicolare all'asse del cilindro scaleno; così la posizione di questo piano non sarà parallela, ma obbliqua al piano della base. Or egli è da sapersi, che la sezione fatta nel cilindro tanto retto, quanto scaleno per un piano obbliquo al piano della base, non è già cerchio, ma è quella figura piana, che si appella ellise. Quindi il perimetro, di cui si ha bisogno per determinare col riferito metodo così l'intera superficie cilindrica del cilindro scaleno, come ogni sua porzione corrispondente ad un'arco della base, sarà il perime-

tro dell'ellisse; il quale tutta volta geometricamente non solo non può essere determinato con esattezza, ma neppure con paragonarsi colla circonferenza di un qualche cerchio.

18.

389. Nè poi è difficile il dimostrare, che la sezione fatta in qualsivoglia cilindro per un piano obbliquo al piano della base, debba essere ellisse. Sia perciò il cilindro A C D B, in cui facciasi la sezione A M B per un piano obbliquo al piano della base C E D; e tirato per l' asse un' altro piano perpendicolare a quello della sezione, siano A B, C D le rette, che egli segna negli altri due A M B, C E D. Prendasi di poi nella A B un punto N ad arbitrio, per cui si tiri la F G parallela alla C D, che s' incontri colle due A C, B D ne' punti F, e G; ed essendo equiangoli i due triangoli A N F, B N G, sarà come F N ad A N, così G N a B N. Quindi congiungendo insieme tanto gli antecedenti, quanto i conseguenti, sarà ancora F G ad A B, non solo come F N ad A N, ma eziandio come G N a B N. Onde perchè il rettangolo delle due F N, G N stà al rettangolo dell' altre due A N, B N in ragion composta di F N ad A N, e di G N a B N; saranno i medesimi rettangoli tra loro, come i quadrati delle due F G, A B.

Fig. 123.

390. Ciò posto, si tiri ora nella sezione la retta N M perpendicolare alla A B; e poichè questa stessa N M dee essere perpendicolare ancora al piano tirato per l' asse, sarà la medesima perpendicolare altresì all' altra F G, che stà situata in quel piano. Ma il piano, che si conduce per le due F G, N M, come parallelo al piano della base C E D, fa nel cilindro una sezione, che non solo dee essere cerchio, ma dee avere eziandio per diametro la stessa F G. Dunque, considerando il punto M come situato nella circonferenza di questo cerchio, sarà il quadrato della M N eguale al rettangolo delle due F N, G N; e per tanto ancora il quadrato della M N sarà al rettangolo dell' altre due A N, B N, come il qua-

lve

lve lve

quadrato di FG al quadrato di AB. Onde, perchè questa proprietà ha luogo da per tutto, sarà la sezione AMB un'ellisse, di cui un'asse sarà la AB, e l'altro asse un' altra retta eguale alla FG, o sia CD.

391. Notisi quì in tanto, che nel cilindro scaleno vi puol' essere caso, in cui la sezione AMB fatta per un piano obbliquo al piano della base tutta via sia cerchio, come quella fatta per un piano parallelo. Avviene ciò, quando è tale l'obbliquità del piano secante a riguardo dell' altro della base, che con tirarsi per l'asse l'altro piano ACDG perpendicolare al piano secante, si fanno eguali tra loro i due angoli ACD, ABG. Di fatti con essere l'angolo ABG eguale all'angolo ACD, o DGF, diventano isosgli i due triangoli BNG, ANF; onde la AB sarà eguale alla FG, ovvero CD. Ma si è dimostrato generalmente, che il quadrato della MN sia al rettangolo delle due AN, BN, come il quadrato di FG al quadrato di AB. Dunque ancora il quadrato della MN sarà eguale al rettangolo delle due AN, BN; e pertanto, essendo la sezione AMB d' indole tale, che il quadrato di ogni perpendicolare abbassata sulla AB dal suo perimetro sia eguale al rettangolo fatto dalle corrispondenti porzioni della stessa AB, sarà ella cerchio, ed avrà la AB per suo diametro. Fig. 128. tle

392. Or egli è molto probabile, che la deduzione dell' ellisse dal cilindro abbia dato motivo ai Geometri di considerare un' altro cilindro, la di cui base sia l'ellisse; e siccome può egli chiamarsi cilindro ellittico a differenza dell'altro circolare, così potrà essere ancora tanto retto, quanto scaleno. Ma egli è da notarsi, che si può formare il cilindro sopra ogn' altra figura piana curvi linea, il quale similmente sarà retto, o scaleno secondoche la retta, per cui si descrive, è perpendicolare, o obbliqua al piano di quella figura. E poichè ciascuno di questi cilindri può essere considerato a guisa di prisma, si avrà la so-

M 2 lidità

lidità di eſſo eziandio colla moltiplicazione della ſua baſe per la ſua altezza . Per quanto poi alla ſuperficie cilindrica, ſempre dee farſi diſtinzione tra quella del cilindro retto , e l' altra del cilindro ſcaleno . Imperocche ſiccome la prima ſi ha con moltiplicare il perimetro della baſe per la retta, che deſcrive la ſuperficie ; così per la ſeconda biſogna prima tagliare il cilindro per un piano perpendicolare a detta retta, ed indi moltiplicare per la medeſima il perimetro della ſezione fatta nel cilindro con detto piano.

393. Ma tralaſciati queſt' altri cilindri , ritorniamo di nuovo ai circolari, intorno ai quali rimane ora a far vedere , quando eſſi debbono ſtimarſi ſimili tra loro . Ed in vero conſiderandoli come priſmi, che anno già ſimili le due faccie oppoſte e parallele , non v' ha dubbio , che vi ſarà tra di eſſi ſimiglianza , quando i piccioli parallelogrammi, che formano la ſuperficie cilindrica dell' uno, ſono eziandio ſimili coi piccioli parallelogrammi , che formano la ſuperficie cilindrica dell' altro , ciaſcuno con ciaſcuno . Or con dare agli aſſi dei due cilindri la ſteſſa inclinazione a riguardo delle baſi , di già vengono a farſi equiangoli i piccioli parallelogrammi , che in amendue i cilindri tra loro ſi corriſpondono ; con fare poi, che gli ſteſſi aſſi ſiano come i diametri delle baſi , o pure come le loro circonferenze, i medeſimi piccioli parallelogrammi verranno ad avere ancora proporzionali i lati , che ſono intorno agli angoli eguali. Onde due cilindri ſaranno tra loro ſimili , quando i loro aſſi non ſolo s' inclinano egualmente ſulle loro baſi , ma ſono ancora come i diametri delle ſteſſe baſi.

394. Da queſta nozione dei cilindri ſimili egli è facile il ricavarne , quale propriamente debba eſſere la loro ragione . Imperocche per lo teorema generale i due cilindri ſono tra loro nella ragion compoſta delle baſi , e dell' altezze . Ma le baſi ſono nella duplicata ragione dei loro diametri ; e per l' eguale inclinazione, che ſerbano

gli

gli assi a riguardo delle basi, le altezze sono o gli assi medesimi, o pure nella loro ragione. Dunque essendo gli assi come i diametri delle basi, la ragione dei due cilindri simili si verrà a fare triplicata non meno di quella dei loro assi, che dell' altra dei riferiti diametri. Intanto ne' cilindri simili eziandio le superficie cilindriche debbono essere simili tra loro, per la ragione, che i piccioli parallelogrammi dell' una sono simili coi piccioli parallelogrammi dell' altra, ciascuno con ciascuno: le quali superficie tutta volta saranno nella duplicata ragione così degli assi, come dei diametri delle basi.

§. II.

Della nozione, e misura così del cono, come della superficie conica.

395. DOpo il cilindro segue il cono, il quale si deduceva primieramente da Geometri dal moto di un triangolo rettangolo fatto intorno ad uno de' lati, che contengono l' angolo retto, fisso ed immobile, per fino a che ritornasse al suo primiero luogo. Ma siccome poi si avvidero, che potea aversi la stessa figura con fare in modo, che una data retta percorresse talmente con uno de' suoi estremi la circonferenza di un dato cerchio, che passasse sempre per un' istesso punto della perpendicolare alzata sul piano del cerchio dal suo centro; così conobbero in appresso, che la nozione del cono potea rendersi più generale, con prendere il punto, per cui dee passare continuamente la retta mobile, in ogn' altra retta, che può elevarsi sul piano del cerchio dal di lui centro.

396. Sia adunque A B C un cerchio qualsisia, Fig. 123.
ed alzata dal centro D la retta D E, come si voglia inclinata sul di lui piano, notisi in quella retta un punto E ad arbitrio, e si porti per tutta la circonferenza dell' istesso cerchio un' altra

retta A E con legge tale, che passi sempre per lo punto E. Egli è chiaro, che aggirandosi in sì fatta guisa quest' altra retta, debba ella descrivere intorno al cerchio una superficie curva, la quale andandosi sempre più ristringendo, sarà finalmente acuminata nel punto E. Or, siccome chiameremo cono la figura solida terminata dal cerchio, e da questa superficie curva; così alla superficie medesima daremo il nome di superficie conica.

397. Il cerchio poi ABC lo diremo essere base del cono; come ancora chiameremo suo vertice, o sua cima il punto E; e suo asse la retta DE, che congiunge il vertice col centro della base. Ma conforme questo asse DE può essere talvolta perpendicolare, e tal volta obbliquo al piano della base; così per la diversa sua inclinazione à riguardo di quel piano, il cono medesimo prenderà ora una forma, ed ora un'altra; onde si è, che nel primo caso si dirà essere cono retto, e nel secondo cono obbliquo, ovvero scaleno. Finalmente altezza del cono è la perpendicolare, che dal suo vertice cade sul piano della sua base; la quale altezza nel cono retto non sarà differente dal suo asse.

398. Or di qualunque forma sia il cono, dalla generazione sua medesima è facile il ricavarne, che se egli sia tagliato per un piano parallelo alla sua base, la sezione fatta nel cono debba essere un'altro cerchio parallelo a quello della base, ma non già eguale. Quindi delle due porzioni, nelle quali rimane diviso il cono con una tal sezione, quella, che giace verso la punta o sia vertice, sarà un'altro cono della stessa indole col cono diviso; ma l'altra parte, che giace verso la base, sarà una figura solida d' indole diversa: la quale siccome si appella comunemente cono troncato, così è terminata da due cerchj disuguali e paralleli, e da una porzione della superficie conica.

399. Se la base del cono si consideri come poligo-

ligono regolare, chiaro ſi è, che la ſuperficie conica ſarà compoſta da tanti piccioli triangoli deſcritti dalla retta, che ſi porta per lo perimetro della baſe; onde il cono medeſimo potrà riguardarſi a guiſa di una piramide. Eſſendo così, eziandio ne' coni la loro ragione dovrà dedurſi dalle baſi, e dall' altezze: dimodoche due coni ſaranno come le baſi, quando le altezze ſono eguali; ſaranno come le altezze, quando ſono eguali le baſi; e ſaranno in fine nella ragion compoſta delle baſi, e dell'altezze, quando e l'une, e l'altre ſono diſuguali. E per la ſteſſa ragione ſaranno due coni tra loro eguali, non ſolo quando ſono eguali così le baſi, come le altezze, ma eziandio quando l' une coll' altre ſono in reciproca ragione,

400. Da ciò, che il cono non ſia altra coſa, ſe non che una piramide circolare, ne ſegue ancora, che la ſua ſolidità debba eſſere determinata, come quella di ogn' altra piramide, cioè con moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza, e con prendere il terzo del prodotto. Ma ſi vuol quì notare, che dovendo eſſere triangolo la ſezione fatta nel cono per un piano, che paſſi per la cima, eziandio riterranno l' indole di piramide le due porzioni, nelle quali rimane diviſo il cono da detto piano. Quindi, ſiccome queſte due porzioni, come piramidi di eguali altezze, debbono eſſere tra loro, come le due porzioni della baſe, ſulle quali ſi appoggiano; così ſi avrà parimente la ſolidità di ciaſcuna di eſſe, con moltiplicare la porzione della baſe, a cui ella corriſponde, per l'altezza del cono, e con prendere del prodotto la terza parte.

401. Adunque ſiccome ogni piramide è la terza parte di quel priſma, con cui ha la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza; così ogni cono ſarà la terza parte di quel cilindro, con cui ha comune tanto la baſe, quanto l'altezza. E per dedurlo col metodo degli indiviſibili da quel teorema arimmetico, che la ſomma de' quadrati degl'in-

finiti numeri naturali ſia all' ultimo preſo altrettante volte, come 1 à 3, baſterà riflettere alle ſeguenti coſe. I, che gli elemonti del cilindro ſono quei piccioli cilindri, nei quali egli ſi riſolve con piani paralleli alla ſua baſe. II, che gli
166 elementi del cono poſſono averſi in una maniera conſimile, i quali ſebene di lor natura ſiano tanti piccioli coni troncati a riſerba dell' ultimo, che è un picciolo cono intero, ad ogni modo per eſſere di un'altezza infinitamente picciola poſſono riguardarſi ancora come tanti piccioli cilindri. E III finalmente, che con dare la ſteſſa altezza così agli elementi del cilindro, come a quei del cono, può giudicarſi delle loro ſomme per mezzo delle ſomme delle loro baſi.

402. Notate tali coſe, intendaſi ora un cono qualſivoglia diviſo per piani paralleli alla ſua baſe nei ſuoi elementi, che abbiano tutti una ſteſſa altezza. E poichè le baſi di queſti elementi ſono altrettanti cerchi, ſaranno le medeſime nella duplicata ragione de' loro raggi, ovvero diametri (237). Ma queſti diametri ſono ſituati in uno de' triangoli, che ſi tagliano dal cono per mezzo de' piani, che paſſano per l'aſſe, ove ancora per l' eguali loro diſtanze ſi aumentano talmente dal vertice verſo la baſe, che per rapporto al primo il ſecondo ſi fa duplo, il terzo triplo, il quarto quadruplo, e così all' infinito. Adunque, ſiccome egli è molto proprio di diſegnare detti diametri per mezzo dei numeri naturali, così le baſi degli elementi del cono dovranno eſſere diſegnate dai quadrati degli ſteſſi numeri. Onde in virtù del riferito teorema arimmetico la ſomma di quelle baſi, che ci addita il cono, ſarà all' ultima preſa altrettante volte, la quale ci addita il cilindro, che ha col cono la ſteſſa baſe, e la ſteſſa altezza, come 1 à 3.

403. Similmente la ſolidità del cono troncato dovrà determinarſi come quella di ogni piramide troncata, con queſto ſolo divario, che ſiccome nella piramide troncata ſi fa uſo di due lati

omologi delle due figure simili, che la terminano; così nel cono troncato in luogo di essi debbono sostituirsi i raggi dei due cerchi, che sono suoi termini. Prendansi adunque detti raggi, e facciasi che la loro differenza sia all' altezza del cono troncato, come ciascuno di essi ad una quarta proporzionale; si moltiplichi poscia ciascuno dei due cerchi per la quarta proporzionale derivata dal suo raggio, e la terza parte della differenza dei due prodotti sarà la solidità, che si dimanda. E per quanto alla dimostrazione della riferita regola, si potrà ella fare eziandio come nella piramide troncata.

404. Per quanto poi alla superficie conica, dovrà farsi distinzione tra quella del cono retto, e l' altra del cono scaleno. Incominciando adunque dalla prima, egli è da notarsi, che per essere l'asse del cono perpendicolare al piano della base, la lunghezza di quella retta, per cui si descrive detta superficie, da per tutto rimane la medesima. Quindi i piccioli triangoli, che compongono la stessa superficie, di loro natura saranno tutti isosceli; e per essere quella stessa retta comune loro altezza, si avrà ciascuno di essi colla moltiplicazione della sua base per la metà di detta retta. Onde avremo la superficie conica, che è la loro somma totale, con moltiplicare la circonferenza della base per la metà della medesima retta: tanto vero, che sarà ella eguale ad un rettangolo fatto dalla circonferenza della base nella metà della suddetta retta.

405. Quindi se della superficie conica di un cono retto prendiamo la circonferenza per base, e la riferita retta per altezza, e si abbiano due di queste superficie; chiaro si è, che la ragione di esse debba ritrarsi dalle loro basi, e dalle loro altezze: dimodoche essendo eguali le basi, saranno le due superficie nella sola ragione dell' altezze; essendo eguali le altezze, saranno le medesime nella sola ragione delle basi; ed in fine essendo disuguali così le altezze, come le basi, si com-

comporrà la loro ragione da quella delle baſi, e da quella dell' altezze. Che ſe poi ſiano eguali, tanto le baſi, quanto le altezze, o pure l'une coll' altre ſiano in reciproca ragione; le due ſuperficie coniche ſaranno tra loro eguali.

406. Siccome la ſuperficie conica di un cono retto è eguale al rettangolo fatto dalla circonferenza della baſe nella metà della retta, che deſcrive detta ſuperficie; così la baſe dell' iſteſſo cono è eguale ad un' altro rettangolo fatto dalla ſteſſa circonferenza nella metà del ſuo raggio. Quindi la ſuperficie conica ſarà alla baſe del ſuo cono, come la retta, che deſcrive la ſuperficie, al raggio della baſe. Onde con queſto teorema niente ſarà più facile, quanto di riſolvere i due ſeguenti problemi: cioè I di determinare l'aſſe, ovvero l'altezza, che dee darſi ad un cono retto, affinche la ſua ſuperficie conica ſerbi data ragione col cerchio, che dee eſſerne baſe; e II di ritrovare un cerchio, che ſia eguale alla ſuperficie conica di un dato cono retto.

407. Se un cono retto ſi ſeghi per un piano, che paſſi per la cima, eziandio le due porzioni, nelle quali rimane diviſa la ſuperficie conica da detto piano, avranno per ſuoi elementi tanti piccioli triangoli iſoſceli. Quindi ſiccome queſte due porzioni ſaranno tra loro, come gli archi circolari della baſe, ſulli quali ſi appoggiano; così ſi avrà ciaſcuna di eſſe parimente con moltiplicare l'arco, a cui ella corriſponde, per la metà della retta, che deſcrive la ſuperficie conica. E poichè il ſettore della baſe corriſpondente all' iſteſſo arco ſi ha con moltiplicare l'arco per la metà del raggio; ſarà la porzione della ſuperficie conica al corriſpondente ſettore della baſe, come la retta, per cui ſi deſcrive la ſuperficie, al raggio della baſe.

408. La ſuperficie conica di un cono troncato può chiamarſi corona conica; e quantevolte ella appartiene ad un cono retto potrà determinarſi a guiſa di una corona circolare, cioè con molti-

pli-

plicare la retta, da cui si descrive, o per la somma dimezzata delle due circonferenze, che la terminano, o pure per quella sola circonferenza, che divide egualmente la riferita retta. E per quanto alla dimostrazione di detta regola, potrà ella farsi eziandio come nella corona circolare. Per l'uso poi, che dovremo farne in appresso, giova quì l'avvertire, che qualora la corona conica del cono retto, è di una larghezza infinitamente picciola, in tal caso potrà ella aversi, con moltiplicare la picciola retta, che la descrive, per una delle due circonferenze, che sono suoi termini; per la ragione, che nel riferito caso quelle due circonferenze sono quasi tra loro eguali. Ed egli è chiaro, che lo stesso avvertimento dee aver luogo similmente nella corona circolare.

409. Passiamo ora alla superficie conica del cono scaleno. E poichè l'asse di questo cono è obbliquo al piano della base, chiaro si è, che la retta, per cui si descrive detta superficie, non conserva da per tutto la stessa lunghezza; onde i piccioli triangoli, che sono gli elementi della medesima, non solo non saranno isosceli, ma nespure tra loro equiangoli. Quindi tanto la riferita superficie, quanto ogn' altra sua porzione corrispondente ad un'arco qualsivoglia della base non potrà essere determinata a guisa dell'altra del cono retto. Imperocchè, sebbene ciascuno di quei picccioli triangoli si abbia colla moltiplicazione della sua picciola base per la sua altezza; ad ogni modo per essere diverse le loro altezze riesce difficile il determinare, così la loro somma totale, che forma l'intera superficie conica, come la somma di quei, per cui si forma una porzione di essa. Onde ecco il divario tra la superficie conica del cono scaleno, e l'altra del cono retto. 16

410. Or sebbene il cono scaleno si possa eziandio troncare per un piano perpendicolare all'asse, e la sua sezione sia similmente ellisse; ad ogni modo, attesa l'indole degli elementi della superficie

ficie conica, non possiamo dal perimetro di questa ellisse ritrarne quel beneficio, che ricavato abbiamo dal perimetro dell' ellisse consimile nel cilindro scaleno. Quindi quel modo meccanico, di cui ci siamo serviti per la superficie cilindrica di detto cilindro, affatto non può aver luogo nella superficie conica del cono consimile; e ciò, che dee farci maggior pena, si è, che per quanto si voglia riflettere, sembra quasi impossibile d'investigare per quest' altra superficie metodo tale, di cui possa farsi uso nella pratica senza nota di errore sensibile; come in effetto il problema, che riguarda la determinazione così dell' intera superficie conica del cono scaleno, come di ogni sua porzione corrispondente ad un' arco della base, tutta via è l'objetto delle ricerche singolari, che anno in mira i nostri Geometri.

411. Dimostriamo intanto, che con troncare un cono, così retto, come scaleno per un piano obbliquo al piano della base, la sezione dee essere come nel cilindro similmente ellisse. Perciò sia il cono HCED, in cui facciasi la sezione AMB per un piano, che troncando detto cono sia obbliquo al piano della base CED; e tirato per l'asse un' altro piano perpendicolare à quello della sezione, siano AB, CD le rette, che egli segna negli altri due AMB, CED. Prendasi di poi nella AB un punto N ad arbitrio, per cui si tiri la FG parallela alla CD, che s' incontri colle due CH, DH ne' punti F, e G; ed il rettangolo delle due FN, GN sarà al rettangolo dell' altre due AN, BN in ragion composta di FN ad AN, e di GN à BN. Ma tirate l'altre due AI, BL parallele alla stessa CD, avremo come FN ad AN, così BL ad AB; e come GN à BN, così AI ad AB. Dunque quegli stessi rettangoli saranno ancora in ragion composta di BL ad AB, e di AI ad AB; e pertanto i medesimi saranno trà loro, come il rettangolo delle due AI, BL al quadrato della AB.

Fig. 126.

412. Ciò posto, si tiri ora nella sezione la retta

ta

sve

ta NM perpendicolare alla AB ; e poichè questa stessa NM dee essere perpendicolare ancora al piano tirato per l'asse, sarà la medesima perpendicolare altresì all'altra FG, che stà situata in quel piano. Ma il piano, che si conduce per le due FG, NM, come parallelo al piano della base CED, fa nel cono una sezione, che non solo sarà cerchio, ma avrà eziandio per diametro la FG. Dunque, considerando il punto M come situato nella circonferenza di questo cerchio, sarà il quadrato della MN eguale al rettangolo delle due FN, GN; e pertanto ancora il quadrato della MN sarà al rettangolo dell'altre due AN, BN come il rettangolo di AI in BL al quadrato di AB. Onde, perche questa proprietà ha luogo da per tutto, sarà la sezione AMB un'ellisse, di cui un'asse sarà la AB, e l'altro asse un'altra retta, eguale alla mezza proporzionale, che cade tra le due AI, BL.

413. Si vuol però quì notare, che nel cono scaleno vi puol'essere caso, in cui la sezione AMB fatta per un piano obbliquo al piano della base tuttavia sia cerchio, come l'altra fatta per un piano parallelo. Avviene ciò, quando è tale l'obbliquità del piano secante à riguardo dell'altro della base, che con tirarsi per l'asse l'altro piano HCD perpendicolare al piano secante, si facciano eguali tra loro i due angoli ACD, ABH. Fig. 127. Di fatti con essere l'angolo ABH eguale all'angolo ACD, o ALB, i due triangoli ABI, BAL diventano equiangoli; onde dovendo essere come AI ad AB, così AB à BL, sarà il rettangolo di AI in BL eguale al quadrato di AB. Ma si è dimostrato generalmente, che il quadrato della MN sia al rettangolo delle due AN, BN, come il rettangolo di AI in BL al quadrato di AB. Dunque eziandio il quadrato della MN sarà eguale al rettangolo delle due AN, BN; e pertanto, essendo la sezione AMB d'indole tale, che il quadrato di ogni perpendicolare abbassata sulla AB dal suo perimetro sia egua-

eguale al rettangolo fatto dalle corriſpondenti porzioni della ſteſſa A B, ſarà ella cerchio, ed avrà la A B per ſuo diametro.

414. Che ſe poi nel cono così retto, come ſcaleno ſia tale l'obbliquità del piano ſecante per rapporto all' altro della baſe, che con tirarſi per
Fig. 128. l'aſſe l'altro piano H C D perpendicolare al piano ſecante, ſi faccia la A B parallela all' altra H D; in tal caſo la ſezione A M B ſarà la parabola, la quale tuttavolta, ſecondo vidimo di
[126] ſopra ~~[42[illegible]]~~, può eſſere conſiderata come una ſpezie di elliſſe. In effetto, eſſendo parallele le due A B, H D, ſarà la G N eguale alla A I, ed in conſeguenza il quadrato della M N ſarà eguale al rettangolo di F N in A I. Ma con farſi l'angolo A I O eguale all' angolo H A I, ſi fanno equiangoli i due triangoli A N F, I A O; e pertanto dovendo eſſere come A N ad F N, così A I ad A O, ſarà il rettangolo di F N in A I eguale al rettangolo di A N in A O. Dunque l'iſteſſo quadrato della M N ſarà eguale ancora al rettangolo delle due A N, A O; onde perche queſta proprietà ha luogo da pertutto, ſarà la ſezione A M B una parabola, in cui ſiccome l'aſſe ſarà la A B, così la diſtanza del ſuo foco dal vertice A ſarà la quarta parte della A O.

415. Or egli è molto veriſimile, che la deduzione dell' elliſſe dal cono abbia dato motivo ai Geometri di conſiderare un' altro cono, la di cui baſe ſia l' elliſſe; e ſiccome può egli chiamarſi cono ellittico a differenza dell' altro circolare, così per eſſere l' elliſſe dotata di centro ſimilmente potrà eſſere tanto retto, quanto ſcaleno. Ma egli è da notarſi, che ſi può formare eziandio il cono ſopra ogn' altra figura piana curvilinea; e ſe mai queſta figura abbia il ſuo centro à guiſa dell' elliſſe, ancora il cono formato ſu di eſſa potrà eſſere così retto, come ſcaleno. Si vede intanto, che ogn' altro cono ſempre puol' eſſere conſiderato ſotto forma di piramide; onde ſi avrà la ſolidità di eſſo parimente con moltiplicare la

ſua

sua base per lo terzo della sua altezza. Per quanto poi alla superficie conica, riesce difficile il determinarla tanto nel cono retto, quanto nel cono scaleno, per la ragione, che in nessuno dei due possono essere isosceli tutti i piccioli triangoli, che formano la superficie conica.

416. Ma tralasciati quest' altri coni, ritorniamo di nuovo ai circolari, intorno ai quali rimane ora a far vedere, quando essi debbono stimarsi simili tra loro. Ed in vero considerandoli come piramidi, che anno già simili le loro basi, non v'ha dubbio, che vi sarà trà di essi somiglianza, quando i piccioli triangoli, che formano la superficie conica dell' uno, sono eziandio simili coi piccioli triangoli, che formano la superficie conica dell'altro. Or con dare agli assi dei due coni la stessa inclinazione à riguardo delle basi, e con fare ancora, che gli stessi assi siano come i diametri delle stesse basi, o pure come le loro circonferenze; chiaro si è, che i piccioli triangoli, li quali in amendue i coni tra loro si corrispondono, vengono ad avere proporzionali i lati, ed in conseguenza ad essere simili. Onde due coni saranno tra loro simili, quando i loro assi non solo s' inclinano egualmente sulle loro basi, ma sono ancora come i diametri delle stesse basi.

417. Da questa nozione dei coni simili egli è facile il ricavarne, quale propriamente debba essere la loro ragione. Imperocche per lo teorema generale i due coni sono tra loro nella ragion composta delle basi, e dell'altezze. Ma le basi sono nella duplicata ragione dei loro diametri; e per l' eguale inclinazione, che serbano gli assi à riguardo delle basi, le altezze sono o gli assi medesimi, o pure nella loro ragione, Dunque essendo gli assi come i diametri delle basi, la ragione dei due coni simili si verrà à fare triplicata non meno di quella dei loro assi, che dell'altra dei riferiti diametri. Intanto ne'coni simili eziandio le superficie coniche debbono essere tra loro simili, per la ragione, che i piccioli triangoli dell'

dell' una sono simili coi piccioli triangoli dell'altra, ciascuno con ciascuno : le quali superficie tutta volta saranno nella duplicata ragione così degli assi, come dei diametri delle basi.

§. III.

Della nozione, e misura così della sfera, come della superficie sferica.

418. Rimane finalmeute la sfera, che si fa derivare da Geomerri dal moto di un semicerchio, come A M B, intorno al suo diametro A B fisso, ed immobile fino a che ritorni al suo primiero luogo; e siccome la figura solida generata in cotal guisa dicesi sfera, così si appella superficie sferica quella, per cui la stessa sfera è terminata da per tutto. Centro poi della sfera si chiama l'istesso punto C, che è centro del semicerchio genitore A M B, ed egli è chiaro, che a simiglianza del cerchio eziandio nella sfera debbono essere eguali tra loro tanto le rette tirate dal centro alla superficie sferica, che si appellano raggi della sfera, quanto le altre tirate per lo centro, e terminate dall'una, e l'altra parte della superficie sferica, che si chiamano diametri della stessa sfera. Fig. 129.

419. Essendo tale l'indole della sfera, si vede primieramente, che siccome ella tira la sua origine dal cerchio, così debba essere similmente cerchio la sezione, che si fa in essa per un qualche piano. Di fatti il piano secante, o passa per lo centro della sfera, e per la sua indole le rette tirate dallo stesso centro al perimetro della sezione di già saranno tra loro eguali; o non passa egli per lo centro, e con abbassare sù di esso da questo centro una perpendicolare, che vi segni un punto, saranno eguali altresì le rette, che dal punto segnato cadono sul perimetro della sezione. In amendue i casi adunque la sezione dee essere cerchio, il quale tutta volta nel primo avrà

sue

per

per centro l'istesso centro della sfera, e nel secondo il punto, che segna nel suo piano la perpendicolare abbassata su di esso da quel centro.

420. E quindi intorno à questi cerchi, che comunemente si appellano sferici, possiamo in secondo luogo stabilire due teoremi. I, che essi siano tra loro eguali all' ora solamente, quando o passano per lo centro della sfera, o si discostano da quel centro per eguali intervalli. E II, che dei cerchi, prodotti nella sfera con varj piani, il massimo sia quello, che passa per lo centro, e degli altri il più vicino al centro sia sempre maggiore del più lontano. Di fatti quei cerchi, che passando per lo centro della sfera sono dotati dell' istesso centro, sogliono distinguersi dagli altri col nome di cerchi massimi; ed egli è chiaro, che con aggirarsi ciascuno di essi intorno al suo diametro fisso ed immobile, debba sempre prodursi la stessa sfera.

421. In terzo luogo, se si seghi una sfera per molti piani paralleli, non v'ha dubbio, che i cerchi sferici, generati con detti piani, debbano essere eziandio tra loro paralleli; ma per le cose dette egli è chiaro ancora, che i loro centri debbano ritrovarsi in un medesimo diametro della sfera, che sarà perpendicolare à ciascuno di essi. In effetto, se nel semicerchio A M B dai punti della circonferenza si abbassino sul diametro A B molte perpendicolari M N, chiara cosa si è, che nel mentre il semicerchio col suo moto circolare produce la sfera, le perpendicolari abbassate descriveranno tanti cerchi paralleli, i di cui centri saranno i punti N. Or il diametro A B per rapporto à detti cerchi si appella asse, e si dicono ancora loro poli i punti A e B, che sono termini dell'asse; onde si è, che le rette tirate alla circonferenza del cerchio sferico da uno de' suoi poli siano tutte tra loro eguali. Fig. 129.

422. Finalmente siccome da ciò, che i cerchi massimi passano per lo centro della sfera, ne segue, che due di essi debbano sempre incontrarsi

N tra

tra loro, e secarsi scambievolmente; così, per dover' essere la comune loro sezione un diametro della sfera, si vede ancora, che col scambievole loro incontro debbano dividersi per metà. Per lo contrario poi non essendo massimi i due cerchi, potrebbero non incontrarsi; e qualora s' incontrano, non mai amendue possono essere divisi in parti eguali, per la ragione, che verrebbero ad avere un' istesso centro, onde un medesimo diametro della sfera sarebbe perpendicolare ad amendue, il che non può essere. Ma comunque sia il cerchio segnato nella sfera, l' altro, che passa per gli suoi poli, dovrà passare ancora per lo suo asse; onde sarà egli cerchio massimo, e dividerà il primo cerchio non solo ad angoli retti, ma eziandio in parti eguali.

423. Del rimanente l'incontro di un piano colla sfera può farsi tal volta con legge tale, che per quanto egli si distenda per tutte le parti, non mai seghi la sfera. In questo caso adunque diremo, che il piano s' incontri colla sfera per via di contatto. E siccome, quando ciò avviene, dee egli toccare la sfera in un sol punto, perchè altrimente sarebbe piano secante; così tanto al piano tangente dovrà essere perpendicolare quella retta, che congiunge il centro della sfera col punto del contatto, quanto la perpendicolare alzata sul piano tangente dal punto del contatto dovrà passare per lo centro della sfera. Ed in effetto, affinchè un piano s' incontri colla sfera in un sol punto, la sua posizione à riguardo della sfera dee essere tale, che il raggio ò diametro tirato al punto dell' incontro sia perpendicolare al piano medesimo.

/ve

424. E quindi, attesa la proprietà del centro, di cui sono fornite le cinque figure solide regolari, si vede chiaramente, che può situarsi la sfera così intorno à tali figure per via di circonscrizione, come dentro di esse per via d' iscrizione. E poichè in dette figure ogn' angolo solido è sostenuto da una base, che è figura piana regolare; si

vede

vede ancora, che nella sfera circonscritta il diametro tirato al vertice dell' angolo solido, dee non solo passare per lo centro di detta base, ma essere ancora perpendicolare al piano della medesima. Onde se A sia il vertice dell' angolo solido, A B il diametro della sfera, ed A C uno de' lati della figura, conforme per essere il punto C vertice di un' altro angolo solido sarà retto l' angolo A C B; così abbassata sul diametro A B la perpendicolare C D, sarà D il centro della riferita base, e C D il raggio del cerchio circonscritto intorno alla medesima. Fig. 130.

425. Per poco poi, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che la base dell' angolo solido nel tetraedro sia una delle sue faccie, nel cubo un triangolo equilatero descritto dalla diagonale di uno de' suoi quadrati, nell'ottoaedro un quadrato fatto dall' istesso suo lato, nel dodecaedro un triangolo equilatero formato dalla retta, che sostiene l' angolo di uno de' suoi pentagoni, e finalmente nell' icosaedro un pentagono descritto col suo medesimo lato, Quindi con essere dato il lato A C della figura, potrà sempre determinarsi il lato della base regolare, che sostiene l' angolo solido; onde con definire in appresso il raggio C D del cerchio circonscritto intorno alla stessa base, avremo così la porzione del diametro A D per mezzo del triangolo rettangolo A D C, come il diametro stesso della sfera A B, che è terza proporzionale dopo le due A D, A C.

426. Ed in vero nelle prime tre figure solide il calcolo con questi principj riesce molto facile. Imperocchè, essendo nel tetraedro la base dell' angolo solido una delle sue faccie, sarà il lato della figura A C eguale al lato di detta base; onde dovendo essere il quadrato di A C al quadrato di C D, come 3 ad 1 (216); sarà dividendo il quadrato di A C al quadrato di A D come 3 à 2; e pertanto così A C ad A D, come A B ad A C sarà nella ragione di $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$. Nel cubo poi essendo la base dell'angolo solido un trian-

golo equilatero fatto dalla diagonale di uno de' suoi quadrati, sarà il quadrato del lato AC al quadrato del lato di detta base, come 1 à 2, o pure come 3 à 6; onde dovendo essere il quadrato di AC al quadrato di CD, come 3 à 2, sarà dividendo il quadrato di AC al quadrato di AD, come 3 ad 1; ed in conseguenza così AC ad AD, come AB ad AC sarà nella ragione di $\sqrt{3}$ ad 1. Ed infine nell'ottoaedro essendo la base dell'angolo solido un quadrato fatto dal suo medesimo lato, sarà il quadrato di AC al quadrato di CD, come 2 ad 1; onde tanto AC ad AD, quanto AB ad AC sarà, come $\sqrt{2}$ ad 1.

427. Nell'altre due figure poi il calcolo è più composto. Ed in primo luogo nel dodecaedro,
Fig. 131. se EFGHI sia uno de' suoi pentagoni, sarà la base dell' angolo solido un triangolo equilatero fatto dalla EG. Quindi, perche congiunte l'altre due EH, FH si fanno isosceli i due triangoli ELH, LHG, saranno eguali le tre EL, LH, GH. Ma per l'angolo EHG diviso egualmente dalla LH dee essere, come EH à GH, così EL à GL [72]. Dunque sarà ancora come EG ad EL, così EL à GL; e pertanto essendo la EG divisa in estrema, e media ragione nel punto L, sarà EL o sia EF ad EG, come $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$ ad 1 (188). Nel dodecaedro adunque il quadrato
Fig. 130. del lato AC sarà al quadtato della base dell'angolo solido, come $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ ad 1, o pure come $9 - 3\sqrt{5}$ à 6; onde dovendo essere il quadrato di AC al quadrato di CD, come $9 - 3\sqrt{5}$ à 2, sarà dividendo il quadrato di AC al quadrato di AD, come $9 - 3\sqrt{5}$ à $7 - 3\sqrt{5}$, ovvero come 6 à $3 - \sqrt{5}$; e pertanto così AC ad AD, come AB ad AC sarà nella ragione di $\sqrt{6}$ à $\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$.

428. Eziandio nell' icosaedro il calcolo è più composto. Imperocche sebbene in quest'altra figura la base dell' angolo solido sia un pentagono formato col suo medesimo lato; ad ogni modo per determinare la ragione tra il quadrato di AC,

ed

ed il quadrato di C D, si ha bisogno del lato del decagono iscritto nell' istesso cerchio, che ha C D per raggio. Di fatti, essendo il lato di questo decagono à CD, come $\sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}$ ad 1, sarà il quadrato dell'uno al quadrato dell' altro, come $\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ ad 1, o pure come $3 - \sqrt{5}$ à 2; onde, attesa la maniera di determinare il lato del pentagono [218] sarà il quadrato di A C al quadrato di C D, come $5 - \sqrt{5}$ à 2. Quindi dividendo il quadrato di A C sarà al quadrato di A D, come $5 - \sqrt{5}$ à $3 - \sqrt{5}$, o pure come 10 à $5 - \sqrt{5}$; e per tanto così A C ad A D, come A B ad A C sarà nella ragione di $\sqrt{10}$ à $\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$.

429. Colla determinazione del diametro della sfera circonscritta intorno alla figura solida regolare, non v'ha dubbio, che rimane determinata altresì ciascuna delle rette tirate dal centro della figura ai vertici dei suoi angoli solidi, per essere queste rette raggi di detta sfera. Ma colla loro determinazione avremo ancora ciascuna delle perpendicolari abbassate dall' istesso centro sulle faccie della figura. Imperocchè, cadendo queste perpendicolari sulli centri di dette faccie, sarà ciascuna di esse lato di un triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa una di quelle rette, e per altro lato il raggio del cerchio circonscritto intorno alla faccia; onde se dal quadrato di quella retta toglieremo il quadrato del raggio del riferito cerchio, la radice quadrata del residuo ci darà la perpendicolare, che si dimanda. E poichè questa perpendicolare de[illegible] essere il raggio della sfera iscritta, avremo con ciò eziandio il diametro di quest' altra sfera. lve

430. Per venire ora all' affezioni della sfera, che riguardano la sua superficie, e la sua solidità, giova averne presente un solo emisfero, di cui chiameremo base il cerchio massimo, che lo sostiene, ed asse ovvero altezza il raggio, che perpendicolarmente si eleva sulla base. Sia adunque A D C un quadrante, che abbia per centro il punto C. E siccome col di lui moto intorno al Fig. 132.

raggio A C fisso ed immobile avremo l' emisfero, che dee tenersi presente; così sarà sua base il cerchio massimo descritto dal raggio C D, e suo asse l'altro raggio immobile A C. E se in oltre intendiamo diviso l'emisfero per tanti cerchi paralleli alla sua base, conforme i loro centri dovranno ritrovarsi nell' asse A C; così i loro raggi saranno le perpendicolari, che dalla circonferenza del quadrante si abbassano sull' istesso asse: dimodoche essendo M, ed O due punti, per cui passano due dei riferiti cerchi, saranno le perpendicolari M N, O P i loro raggi, ed i punti N, e P i loro centri.

431. Or conforme con dividere l' emisfero per tanti cerchi paralleli alla sua base, resta divisa ancora la sua superficie in tante corone sferiche; così se vogliamo supporre, che quelli cerchi siano infiniti di numero, ed infinitamente vicini tra loro, potremo riguardare le riferite corone come i minimi elementi della superficie dell' emisfero. Per investigare intanto l' indole di ciascuna di esse, fingiamo, che la distanza delle due M N, O P sia infinitamente picciola; ed in questa supposizione non v'ha dubbio, che l'archetto M O potrà considerarsi come porzione della M T, che è tangente del quadrante nel punto M. Quindi la picciola corona sferica corrispondente a quell' archetto sarà eziandio corona della superficie conica, che ha per vertice il punto T, e per base la circonferenza descritta col raggio M N; onde come tale sarà ella eguale al rettangolo, che si fa da detta circonferenza nell' archetto M O (408).

432. Intendasi presentemente sulla base dell'emisfero elevato un cilindro retto, che abbia per suo asse l'istesso raggio A C; ed attesa l'indole di ciascuna delle picciole corone sferiche niente sarà più facile, quanto di dimostrare i due seguenti teoremi: cioè I, che la superficie dell' emisfero sia eguale alla superficie cilindrica; e II, che divise amendue le superficie per un piano parallelo al-

alla base, siano eguali ancora le corrispondenti loro porzioni. Di fatti se i piani de i due cerchi, che passano per le rette M N, O P, s' intendano prolungati per fino alla superficie del cilindro, si produrrà eziandio in quella una picciola corona cilindrica, che sarà eguale al rettangolo fatto dalla circonferenza della base nella corrispondente porzione dell'asse N P. Onde per la verità dei due riferiti teoremi basterà dimostrare, che i due rettangoli, eguali alle due picciole divisate corone, siano tra loro eguali.

433. Perciò congiungasi il raggio C M, e tirisi ancora per lo punto O la picciola retta O R parallela all' asse A C. Or non è egli da porsi in dubbio, che il picciolo triangolo MOR sia equiangolo tanto col triangolo MTN, quanto col triangolo C M N; onde sarà come C M ovvero C D ad M N, così M O ad O R, o sia N P. Ma C D sta ad M N, come la circonferenza della base, che ha per raggio la C D, all' altra descritta col raggio M N. Dunque ancora M O sarà ad N P, come la circonferenza della base all' altra, che ha per raggio la M N; e pertanto il rettangolo di questa seconda circonferenza nell'archetto MO, che ci dà l'ampiezza della picciola corona sferica, sarà eguale al rettangolo della circonferenza della base nella picciola porzione dell'asse N P, che ci addita il valore della picciola corona cilindrica corrispondente alla sferica.

434. Essendo così, si vede ora, come debba essere determinata così l' intera superficie dell' emisfero, come ciascuna delle due porzioni, nelle quali ella rimane divisa da un cerchio parallelo alla base, che passi per la M N. Imperocchè conforme avremo l' intera superficie di detto emisfero, con moltiplicare l' asse o sia il raggio A C per la circonferenza della base; così avremo le due sue porzioni, con moltiplicare per la stessa circonferenza le due porzioni dell' asse A N, C N, a cui quelle corrispondono. E poichè il prodotto della prima moltiplicazione ci da anco-

ra il doppio della base dell' emisfero, che è un cerchio massimo; si vede con ciò, che la superficie dell' emisfero sia dupla del cerchio massimo; onde poi ne segue, che l' intera superficie della sfera sia quadrupla dell' istesso cerchio.

435. Da ciò, che la superficie dell' emisfero sia dupla della sua base, che è un cerchio massimo, egli è facile il ricavarne; che la medesima debba essere eguale al cerchio, che ha per raggio la corda A D dell' istesso quadrante. Ma si vuol quì notare, che se da quella superficie se ne tagli una porzione per un piano parallelo alla base, che passi per la M N, ancora questa porzione sarà eguale al cerchio, che ha per raggio la corda corrispondente AM. E la ragione è chiara; poichè conforme la circonferenza della base stà alla circonferenza di detto cerchio, come C D ad AM; così per essere A M mezza proporzionale tra l'asse intero della sfera, e la porzione A N, sarà C D ad A M, come la metà di A M ad A N. Ed in virtù di questo teorema potrà paragonarsi la riferita porzione della superficie sferica eziandio col cerchio, che la sostiene; e sarà la loro ragione duplicata di quella, che anno le due AM, MN.

436. Dalla superficie passeremo alla solidità dell' emisfero. E considerando più attentamente l' indole di quelle picciole corone sferiche, che sono elementi della sua superficie totale, ritroveremo, che ciascuna di esse come terminata da due circonferenze, che sono perimetri di due figure regolari, sia composta da tanti piccioli trapezj, che congiungono i lati di un perimetro coi lati dell' altro. Quindi se l'intera superficie dell'emisfero s' intenda divisa in piccioli trapezj di questa indole, potrà risolversi l' emisfero medesimo in picciole piramidi, che avranno per basi detti trapezj, per vertice comune il centro dell' emisfero, e per altezze i suoi raggi. Onde, attesa la misura di ciascuna di queste piramidi, si avrà la solidità dell' emisfero, che è la loro somma totale, con moltiplicare la sua superficie per la terza parte del suo raggio.

437. Or essendosi dimostrato, che la superficie dell' emisfero sia dupla della sua base, che è un cerchio massimo, avremo ancora la solidità dell' emisfero, con moltiplicare il cerchio massimo per gli due terzi del suo raggio; e se l' istesso cerchio si moltiplichi per gli due terzi dell'intero suo diametro, avremo la solidità dell' intera sfera. Ed essendo così possiamo quindi dedurne due teoremi: cioè I, che se un' emisfero, ed un cilindro abbiano la stessa base, e la stessa altezza, debba contenere l' emisfero due terze parti del cilindro; e II, che se un' emisfero, ed un cono abbiano la medesima base, e la medesima altezza, debba essere l' emisfero doppio del cono: dai quali teoremi poscia ne segue, che il cilindro, l' emisfero, ed il cono siano tra loro, come i numeri 3, 2, 1, li quali formano la proporzione armonica.

438. La considerazione del settore ha luogo ancora nella sfera, e si forma egli colle rette, che si tirano dal centro della sfera alla circonferenza di un cerchio sferico. Imperocchè siccome queste rette sono situate nella superficie del cono, che ha per vertice il centro della sfera, e per base il cerchio sferico; così la figura solida contenuta da questa superficie, e da quella porzione della superficie sferica, sù di cui come base si appoggia, si appella settore sferico. Or egli è chiaro, che eziandio questo settore può essere diviso in tante picciole piramidi dell' indole di sopra riferita; onde la sua solidità si avrà parimente, con moltiplicare la porzione della superficie sferica, che è base del settore, per la terza parte del raggio. Dal che ne segue, che due settori di una stessa sfera siano tra loro come le basi; ma due settori di sfere diverse siano in ragion composta delle basi, e delli raggi: tanto vero, che questi secondi saranno tra loro eguali, quante volte la ragione delle basi è reciproca di quella de' raggi.

439. Colla determinazione del settore sferico nien-

niente sarà più facile, quanto di determinare la porzione della sfera racchiusa in detto settore, per la ragione, che non si dovrà fare altra cosa, se non che togliere dal settore il cono, che similmente vi stà racchiuso. Intanto per maggior compendio potrà farsi uso di questa regola. Sia A N la porzione dell'asse, à cui corrisponde la porzione della sfera, che si vuol determinare. Taglisi dalla A N la terza parte, che sia A E, e si ritrovi la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la C E; si moltiplichi questa circonferenza per lo quadrato della A N, ed il prodotto sarà il valore della porzione, che si dimanda. Così supposto, che sia il raggio A C $= 10$, e la A N $= 6$, sarà la A E $= 2$, e la C E $= 8$; quindi la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la C E, secondo la ragione di Archimede, sarà $25\frac{1}{7}$, la quale moltiplicata per 36, che è il quadrato della A N, darà $905\frac{1}{7}$ per valore della porzione proposta.

440. Essendo adunque la superficie della sfera quadrupla del cerchio massimo, sarà ella eguale al cerchio, che ha per raggio il diametro intero della sfera. Onde siccome con fare un quadrato eguale à questo cerchio, avremo il quadrato eguale alla superficie sferica; così con ritrovare due mezze proporzionali tra il lato di questo quadrato, e la terza parte del raggio della sfera, e con formare sulla prima di esse un cubo, avremo il cubo eguale alla sfera medesima. Ed egli è da notarsi, che con ridurre à quadrato così la base del cilindro, come la base del cono; potremo in una maniera consimile formare un cubo eguale à ciascuna di queste due figure, se non che nel cilindro le due mezze proporzionali debbono ritrovarsi trà il lato del quadrato, e l'intera sua altezza, nel cono poi tra lo stesso lato, e la terza parte della sua altezza.

441. Similmente, essendo la porzione della superficie sferica descritta dall'arco A M eguale al cerchio, che ha per raggio la corda A M; il quadrato

drato eguale à questo cerchio sarà eguale ancora alla riferita porzione della superficie sferica. Onde se ritroviamo in appresso due mezze proporzionali trà il lato di questo quadrato, e la terza parte del raggio della sfera, il cubo della prima di esse sarà eguale al settore sferico, che si appoggia sulla stessa porzione. Ed in fine, se si voglia un cubo eguale alla porzione della sfera racchiusa in detto settore, taglisi dalla A N la terza parte, che sia A E; e ritrovate due mezze proporzionali trà la A N, e la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la C E, sarà il cubo della prima di esse quello, che si dimanda.

442. Del rimanente, se si abbiano due sfere diverse, egli non è da porsi in dubbio, che siano simili così le loro superficie, come le sfere medesime; ma egli è facile presentemente di determinare la ragione così dell' une, come dell'altre. Ed in primo luogo per quanto alle superficie, essendo ciascuna di esse quadrupla del suo cerchio massimo, sarà la loro ragione eguale à quella dei cerchi massimi; ed in conseguenza siccome questi sono in duplicata ragione dei raggi ovvero diametri, così nella stessa duplicata ragione saranno ancora le due superficie sferiche. Onde si è, che per aumentare, o diminuire la superficie di una sfera nella ragione di a à e, si debba prima ritrovare tra le due a, e e la mezza proporzionale, che sia b, ed indi aumentare, o diminuire il raggio nella ragione di a à b, di cui viene à farsi duplicata la data di a à c.

443. Per quanto poi alle sfere, poichè ciascuna di esse, si ha con moltiplicare il cerchio massimo per gli due terzi del diametro, si comporrà la loro ragione da quella dei cerchi massimi, e da quella dei diametri; onde essendo la prima di queste due ragioni duplicata dell' altra, saranno le due sfere tra loro in triplicata ragione dei loro raggi ovvero diametri. E quindi si è, che per aumentare, ò diminuire una sfera nella ragione di a à c, si debbono prima ritrovare due mezze proporzionali

porzionali tra le due a, e c, ed indi supposto, che la prima di esse sia b, aumentare o diminuire il raggio nella ragione di a à b, di cui si viene à fare triplicata la data di a à c.

444. Volendosi una sfera, la di cui superficie sia eguale o alla somma delle superficie di due sfere date, ovvero alla loro differenza; egli è chiaro, che debba ella descriversi con raggio tale, che il suo quadrato uguagli o la somma, o la differenza dei quadrati fatti dalli raggi delle due sfere date. Ma se poi si voglia una sfera eguale alla somma, o alla differenza di due altre sfere; in tal caso il cubo del suo raggio dovrà essere eguale alla somma, o alla differenza dei cubi fatti dalli raggi dell'altre due. Nè è egli difficile di ritrovare un cubo, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri cubi dati, come a^3, b^3. Imperocchè, siccome con ricercare la quarta continuamente proporzionale dopo le due a, e b, che sia c, avremo $b^3 = a^2 c$; così se d sia la prima delle due mezze, che cadono o tra a ed $a + c$, o tra a ed $a - c$, sarà o $d^3 = a^3 + a^2 c$, o $d^3 = a^3 - a^2 c$.

445. Finalmente noteremo in questo luogo, che la simiglianza può incontrarsi ancora tra due porzioni di due diverse sfere; e di fatti ha ella luogo, quando le due porzioni sono tagliate da cerchi, che dividono proporzionalmente i loro assi; onde si è, che così tra le superficie di dette porzioni, come tra le porzioni medesime debbono rimanere le stesse ragioni notate di sopra. Ma essendo simili due porzioni di due diverse sfere, saranno simili altresì tanto i settori sferici, che racchiudono queste porzioni, quanto i coni contenuti in detti settori; e perciò siccome i settori debbono essere nella triplicata ragione dei diametri delle due sfere, così l'intere loro superficie saranno nella ragione duplicata degli stessi diametri.

§. IV.

§. IV.

Continuazione dell' istesso argomento, e di varj sferoidi e conoidi, che possono immaginarsi.

446. INtorno alla sfera possono farsi altre ricerche, degne da sapersi eziandio da un Geometra pratico. Perciò sia à noi di nuovo presente l'emisfero, che si genera colla rivoluzione del quadrante A C D intorno al raggio A C, che sarà suo asse; ed essendo A C E un' altra posizione dell' istesso quadrante, io dico primieramente, che possiamo determinare così la superficie A D E, come ogni sua porzione A M O tagliata per l' arco M O, che ha per polo il punto A. Perciò tanto nel quadrante A C D, quanto nell' altro A C E s'abbassino sull'asse A C infinite perpendicolari M N, O N distanti trà loro per eguali intervalli. E poichè l' angolo M N O formato coll' incontro di due di queste perpendicolari ci addita l'inclinazione dei due piani A C D, A C E (287), sarà egli da per tutto il medesimo; onde l'arco M O, segnato nella superficie per lo piano di quell' angolo, sarà ancora da per tutto una data porzione della sua circonferenza intera. Fig. 133.

447. Or in virtù del metodo degli indivisibili, siccome possiamo riguardare tutte queste intere circonferenze come elementi della superficie dell' emisfero, così gli archi di esse M O possono aversi come elementi della superficie A D E. Quindi la superficie dell' emisfero sarà alla superficie A D E, come la circonferenza della base all' arco D E, o pure come la medesima base al settore D C E. Ma si è dimostrato, che la superficie dell' emisfero sia dupla della sua base. Dunque eziandio la superficie A D E sarà dupla del settore corrispondente D C E; e per tanto si avrà la superficie A D E, con moltiplicare l' arco D E per l' asse A C. Ed applicando questa stessa dimostrazione alla porzione A M O di detta superficie,

avre-

avremo la riferita porzione, con moltiplicare l'iſteſ-ſo arco D E per la porzione dell' aſſe A N, à cui ella corriſponde.

448. Se in luogo dell' emisfero ſi abbia preſente la sfera intera, sù di cui ſi diſtendino i due archi quadrantali A D, A E [redacted] ſino a che s'incontrino di nuovo nel polo oppoſto ad A, non v'hà dubbio, che la ſuperficie racchiuſa tra di eſſi debba eſſere dupla della A D E, ed in conſeguenza quadrupla del ſettore D C E; onde avremo queſt' intera ſuperficie, con moltiplicare l' arco D E per l'aſſe intero della sfera. Eſſendo così, io dico in ſecondo luogo, che colla determinazione della riferita ſuperficie poſſiamo determinare altresì la ſuperficie di ogni triangolo sferico, che ſia contenuto da tre archi di cerchi maſſimi; ed ecco come. Sia A B C queſto tale triangolo, Fig. 134. è diſteſi i ſuoi lati A B, A C, B C [redacted] ſino à che s' incontrino a due a due ne' punti D, E, F, compiſcaſi il cerchio A B D E, che ſi farà baſe di un'emisfero, la di cui ſuperficie ſarà aſſorbita dai quattro triangoli sferici ABC, BCD, ACE, CDE.

449. Poichè dunque i cerchi maſſimi col loro incontro ſi ſecano per metà (422), ſaranno i due archi A C D, C A F tra loro eguali; onde toltone il comune A C, ſarà ancora C D eguale ad A F. Per la ſteſſa ragione dovendo eſſere eguali tanto i due archi B C E, C B F, quanto gli altri due A E D, B A E, ſarà così C E eguale a B F, come D E eguale ad A B; e pertanto i due triangoli sferici C D E, F A B, come formati con eguali archi, ſaranno tra loro eguali. Quindi le tre porzioni della ſuperficie sferica A B D C, B A E C, C A F B unite inſieme ſaranno eguali alla ſuperficie dell' emisfero ſoſtenuto dal cerchio maſſimo A B D E, e à due volte il triangolo sferico A B C. Onde, ſiccome con determinare ciaſcuna di quelle porzioni, e con togliere dalla loro ſomma la ſuperficie dell' emisfero, avremo per reſiduo il doppio del triangolo sferico ABC,

così

così la metà dell' istesso residuo ci darà la superficie del triangolo, che si dimanda.

450. E quindi io dico in terzo luogo, che possiamo determinare parimente ogni porzione della superficie sferica contenuta da due qualisisiano archi, che tra loro s' incontrano. Siano perciò MPO, MQO i due archi, che col loro incontro contengono la porzione MPOQ; e suppongasi primieramente, che uno di essi, come MPO, sia arco di cerchio massimo. La perpendicolare adunque elevata dal centro dell' altro MQO sul piano del suo cerchio segnerà nella superficie della sfera i poli di detto cerchio. Onde, se A sia uno di essi, ed AM, AO siano due altri archi di cerchi massimi, potrà determinarsi così la superficie del triangolo AMPO, come quella del triangolo AMQO; e pertanto tolta l' una dall'altra avremo la porzione MPOQ. Che se poi nessuno dei due MPO, MQO sia arco di cerchio massimo, si tiri per gli punti M, ed O un terzo arco MRO, che sia di questa indole; e potendosi determinare ciascuna delle due porzioni MPOR, MQOR, resterà determinata ancora la terza MPOQ, che è la loro differenza. Fig. 135.

451. Essendo così, io dico finalmente, che comunque siano gli archi, che formano un triangolo sferico, sempre possiamo determinare la superficie di un tal triangolo. Sia perciò ABC il triangolo sferico, e per esaminare il caso più complicato fingiamo, che nessuno dei suoi lati sia arco di cerchio massimo. Si segnino nella superficie della sfera tre archi di questa indole, de' quali uno passi per gli punti A e B, l' altro per gli punti B e C, ed il terzo in fine per gli punti A e C; e siano ADB, BEC, AFC questi tre archi. La superficie adunque del nuovo triangolo sferico formato col loro incontro potrà essere determinata. Ma secondo si è fatto vedere, può determinarsi ancora ciascuna delle tre porzioni ADBA, BECB, CFAC. Dunque Fig. 136.

con

con togliere dal riferito triangolo le porzioni, che cadono dentro di esso, e con aggiungerli quell' altra, se pure vi sia, che cade fuori, avremo la superficie del triangolo proposto.

452. Del rimanente, siccome con archi circolari possono farsi nella superficie della sfera tutte quelle figure, che si formano nella superficie piana con linee rette; così con dividere ciascuna di esse in tanti triangoli sferici, quanti ne comporta la sua indole, sempre potremo determinare la porzione della superficie sferica racchiusa in detta figura. Che se poi dal centro della sfera s'intendano tirate infinite rette al perimetro della stessa figura, avremo con esse una spezie di settore tagliato dalla sfera medesima. E poichè i suoi elelementi sono quelle stesse picciole piramidi, che sono elementi così della sfera intera, come del vero settore sferico; si determinerà pertanto la sua solidità, similmente con moltiplicare la porzione della superficie sferica, che è sua base, per la terza parte del raggio della sfera.

453. Ma per passare ad altre ricerche di maggior rilievo, si vuol quì notare, che à somiglianza delle lunule circolari abbiamo ancora le lunule sferiche. Di fatti, se ADE sia una Fig. 137. 138. mezza lunula circolare, che si aggiri intorno alla sua base DE, in cui sono situati i centri dei due archi AD, AE, che la terminano; avremo con questa sua rivoluzione un' altra lunula sferica, la quale à misura della circolare, con cui si genera, potrà essere parimente, ò convessa da amendue le parti, o pure da una parte convessa e da un' altra concava. Si vede intanto, che in questa lunula sferica s' incontrino due porzioni di due sfere diverse descritte colla rivoluzione degli archi AD, AE intorno all' asse comune DE. Onde con determinare così le loro superficie, come le loro solidità, resterà determinata ancora tanto la superficie della lunula, che è sempre eguale alla somma di quelle due, quanta la solidità della medesima, che sarà eguale talvolta alla somma,

e talvolta alla differenza che ritrovansi avere le medesime porzioni.

§. 3. Del modo di dimostr

§. 4. Della nozione, e m
piramide

§. 5. Dell' altre figure
piane

Cap: [illegible]. Delle figure solide

§. 1. Della nozione, e
della sua superf

§. 2. Della nozione, e
superficie conic

§. 3. Della nozione, e
della sua superf

§. 4. Continuazione d
~~[illegible]~~ sferoidi
ginazi

§. 5. ~~[illegible]~~

§. 5. Dell' anello sfer
che si generano
figura piana in

Cap: 6. Delle figure solidi
di qualsivoglia fi

§. 2. Dell' anello sfer

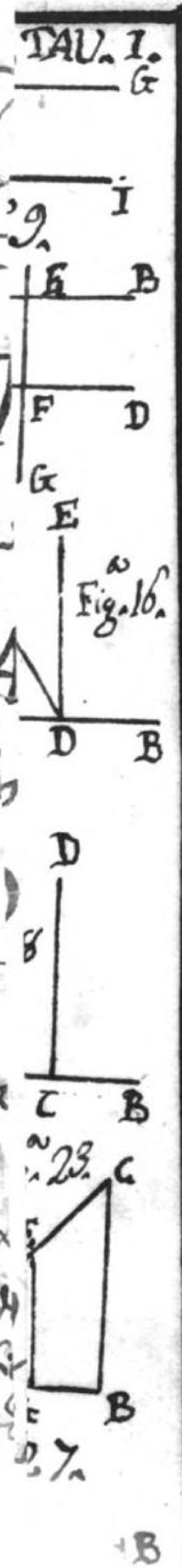


Fig. 1
138

'I ELEMENT

ELLA

TRIA PRATICA

sti per uso della

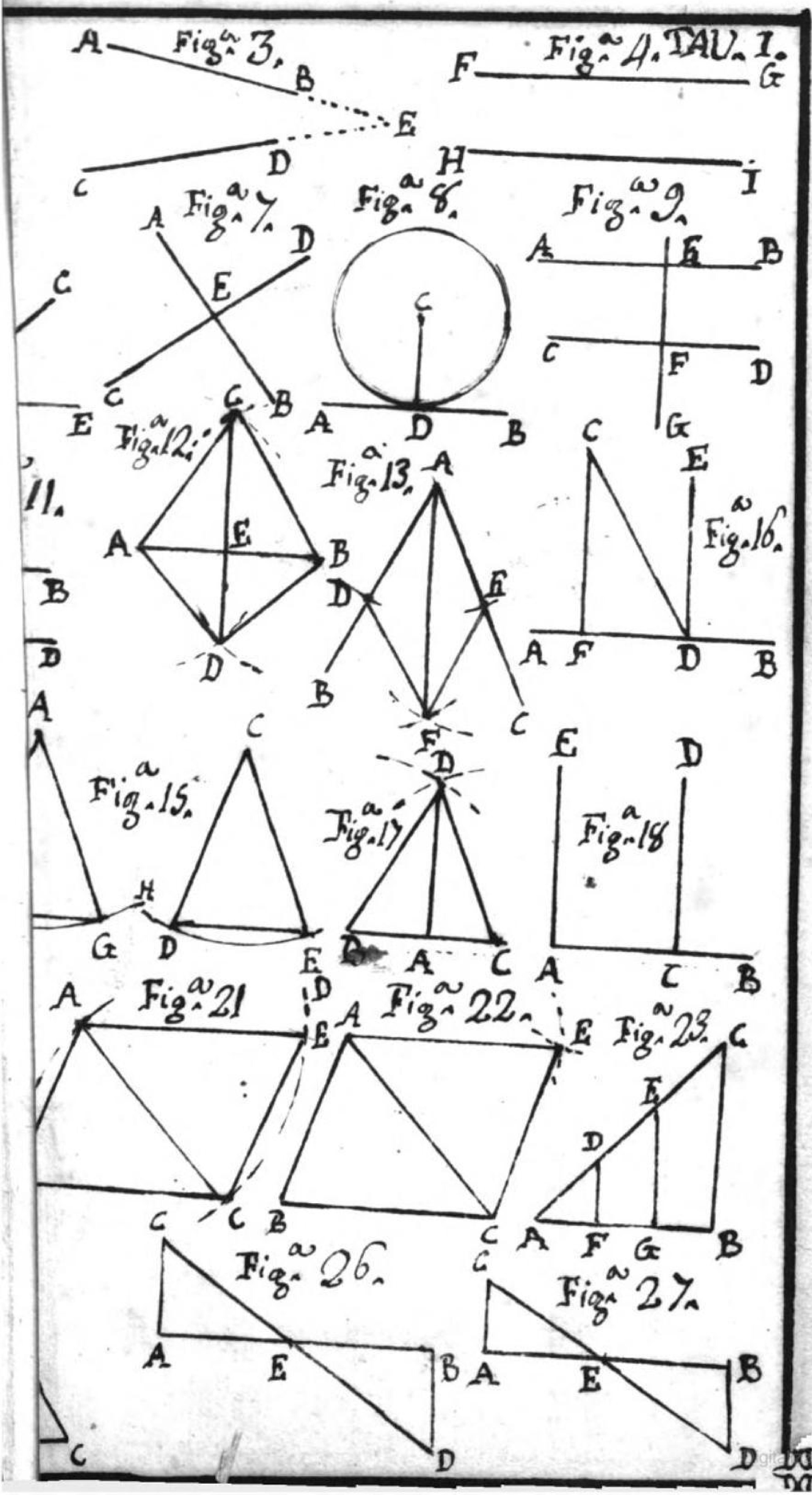
DEMIA MILITAR

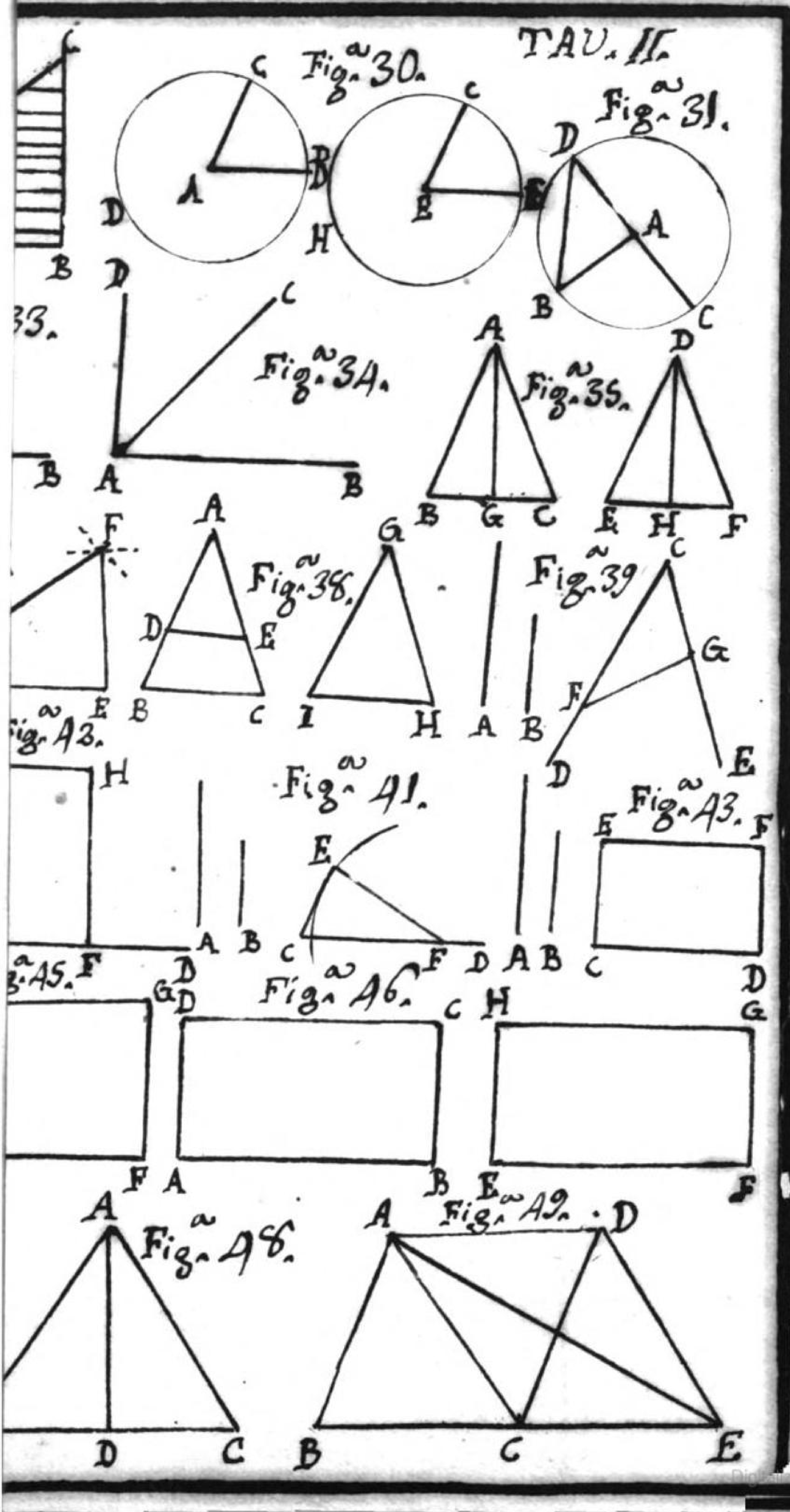
Professore della medesima

I MARTINO

.I. MDCCLXXIV

AOLO DI SIMONE


Tav. 1.
Fig.a 3.
Fig.a 4.
Fig.a 7.
Fig.a 8.
Fig.a 9.
Fig.a 11.
Fig.a 12.
Fig.a 13.
Fig.a 15.
Fig.a 16.
Fig.a 17.
Fig.a 18.
Fig.a 21
Fig.a 22.
Fig.a 23.
Fig.a 26.
Fig.a 27.


TAV. II.
Fig.a 30.
Fig.a 31.
Fig.a 34.
Fig.a 35.
Fig.a 38.
Fig.a 39
Fig.a 41.
Fig.a 43.
Fig.a 46.
Fig.a 48.
Fig.a 49.

TAV. III.

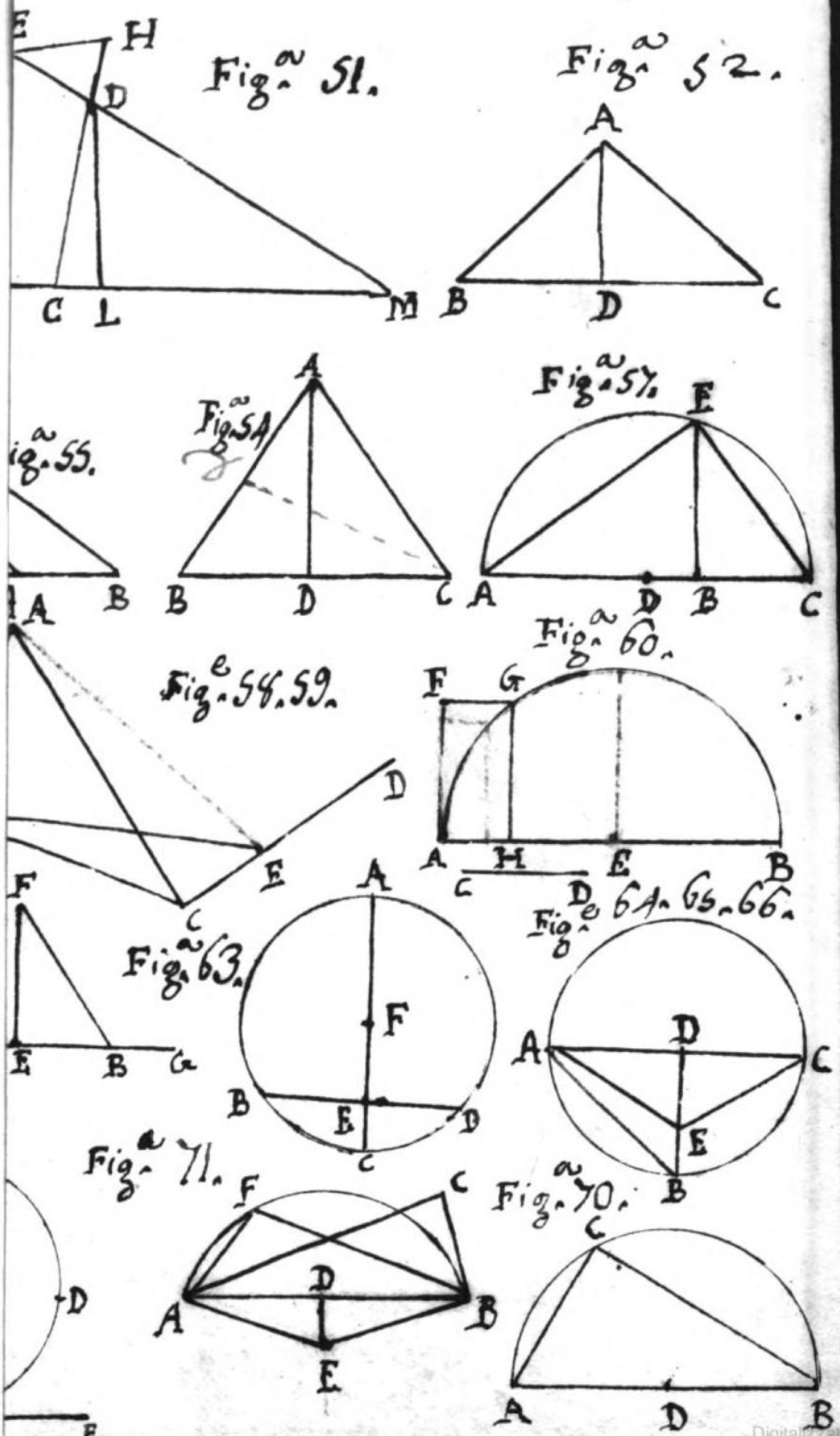


Fig.a 51.
Fig.a 52.
Fig.a 55.
Fig.a 54
Fig.a 57.
Fig.e 58. 59.
Fig.a 60.
Fig.a 63.
Fig.e 64. 65. 66.
Fig.a 71.
Fig.a 70.

TAU. IV.

Fig.ª 74.

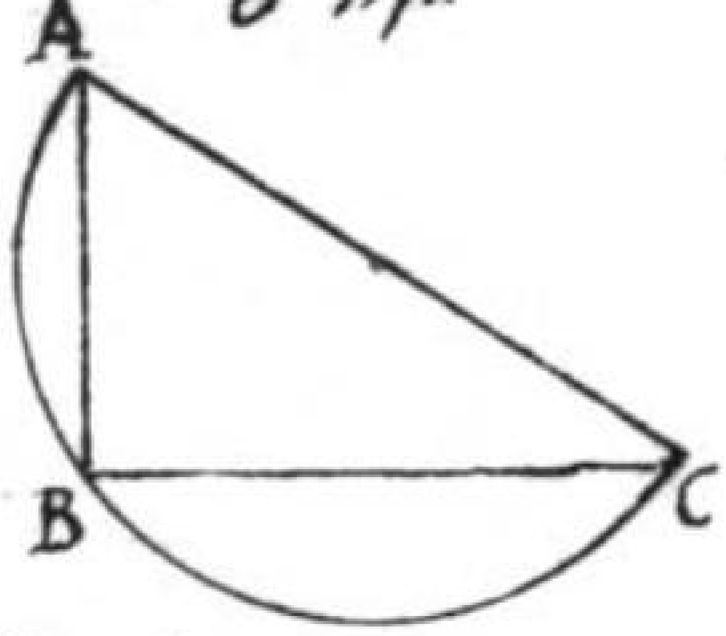


Fig.ª 75.

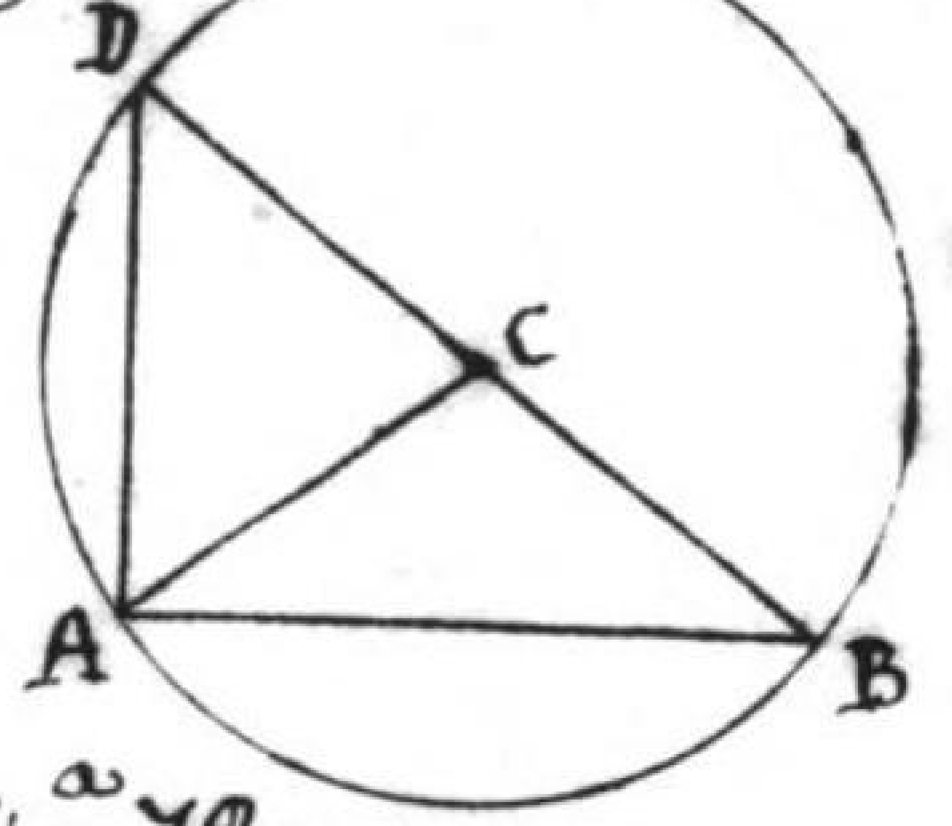


Fig.ª 78.

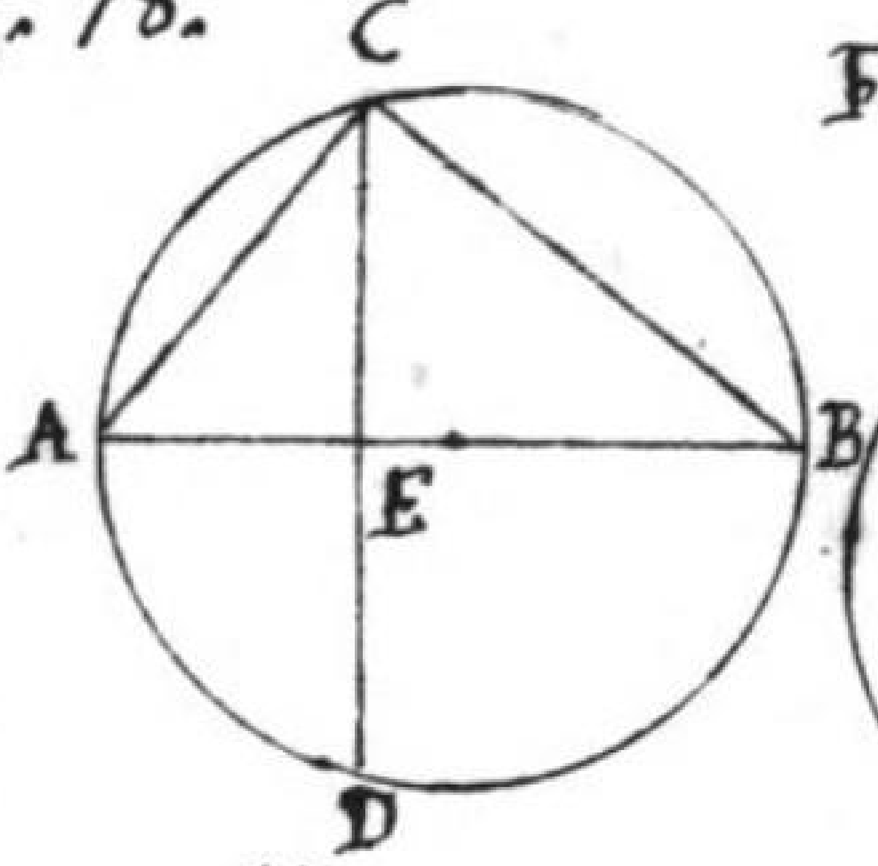


Fig.ª 79.

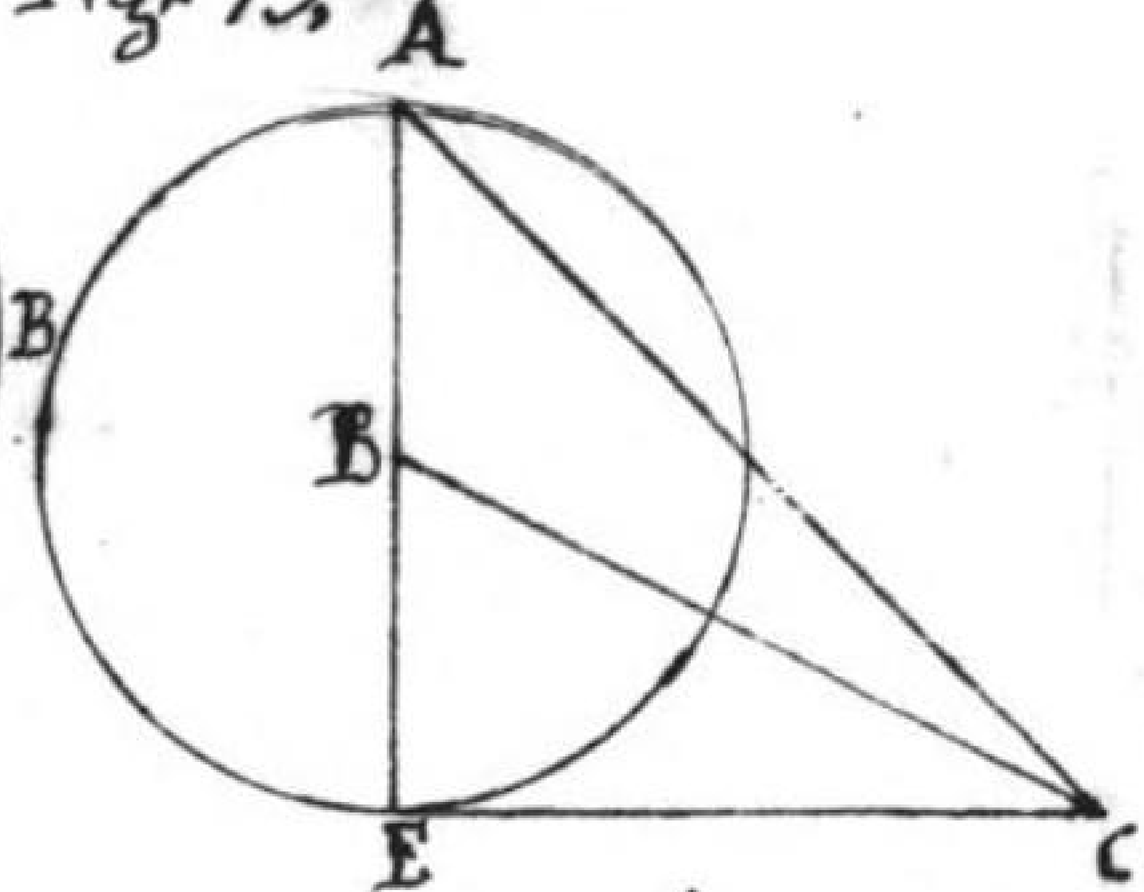


Fig.ª 82.

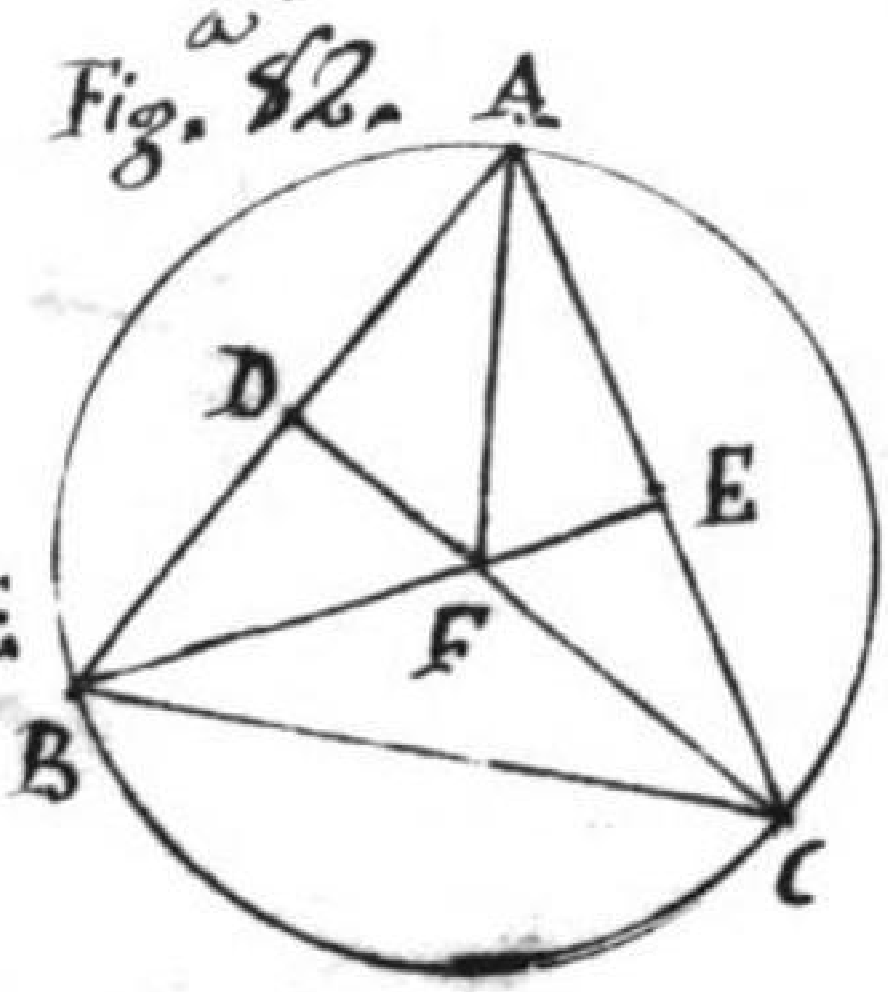
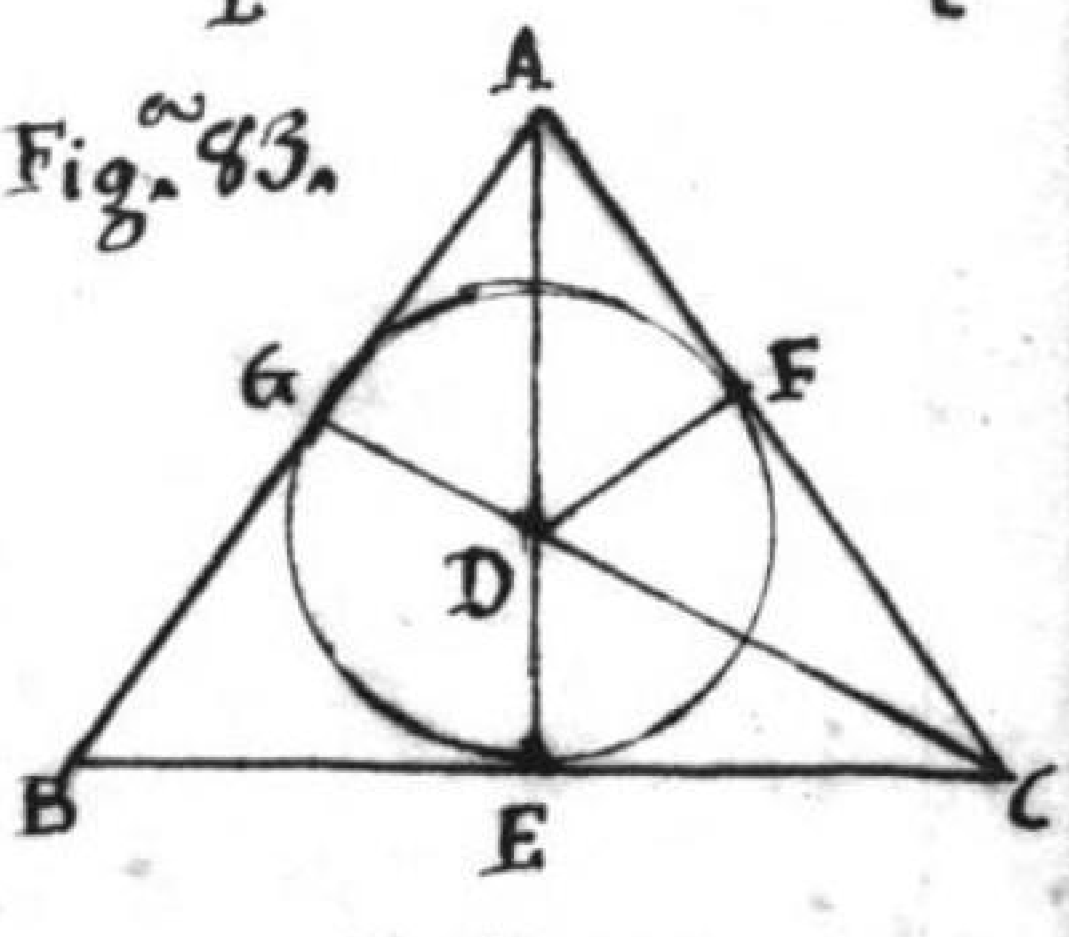


Fig.ª 83.



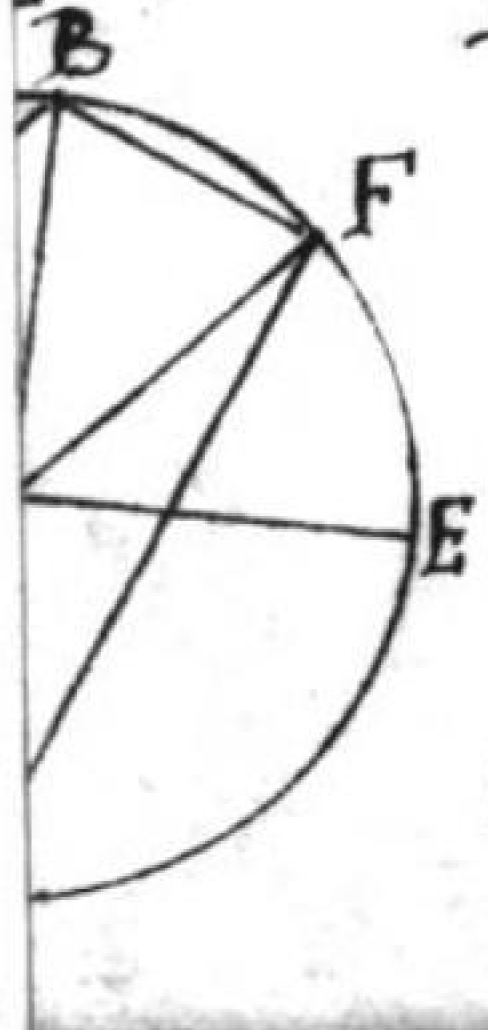


Fig.ª 87.

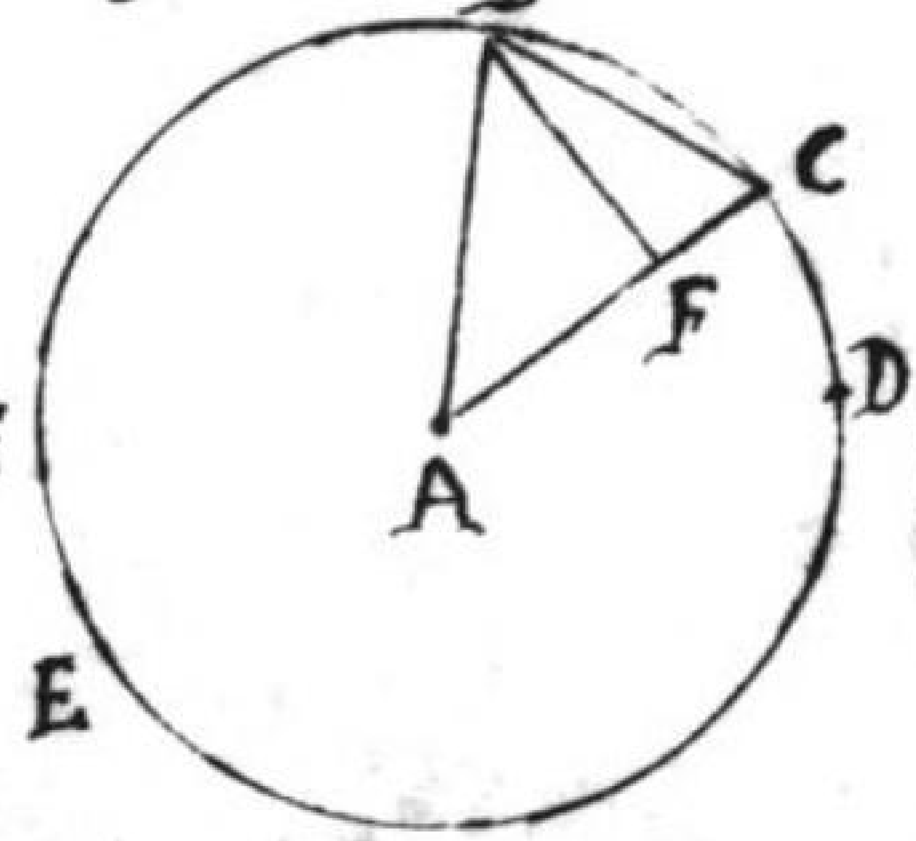
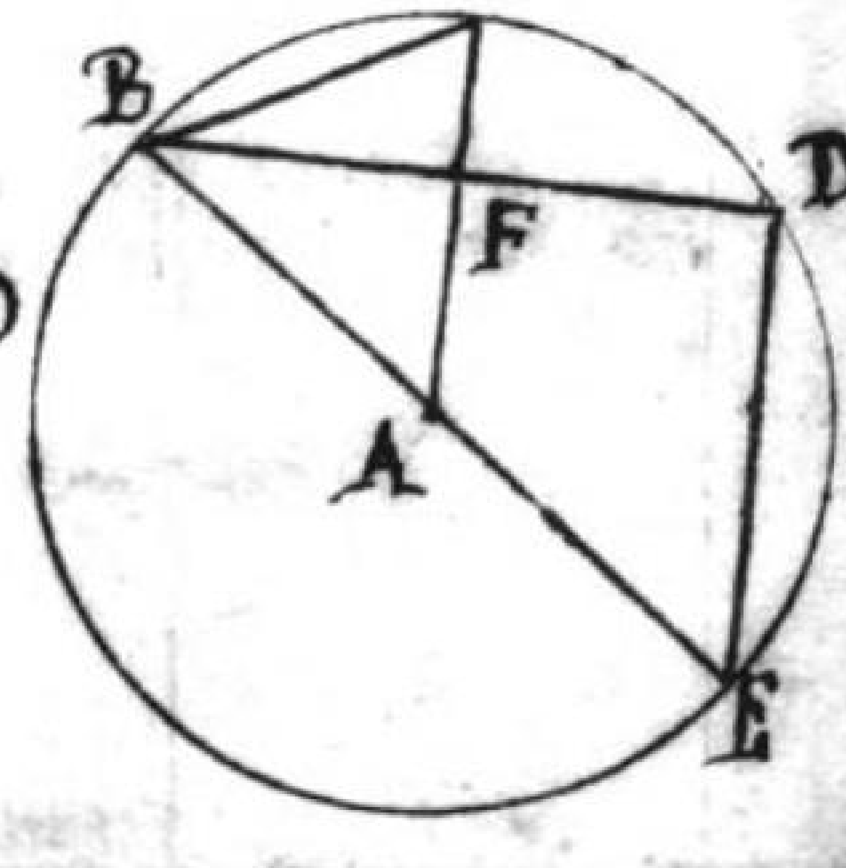
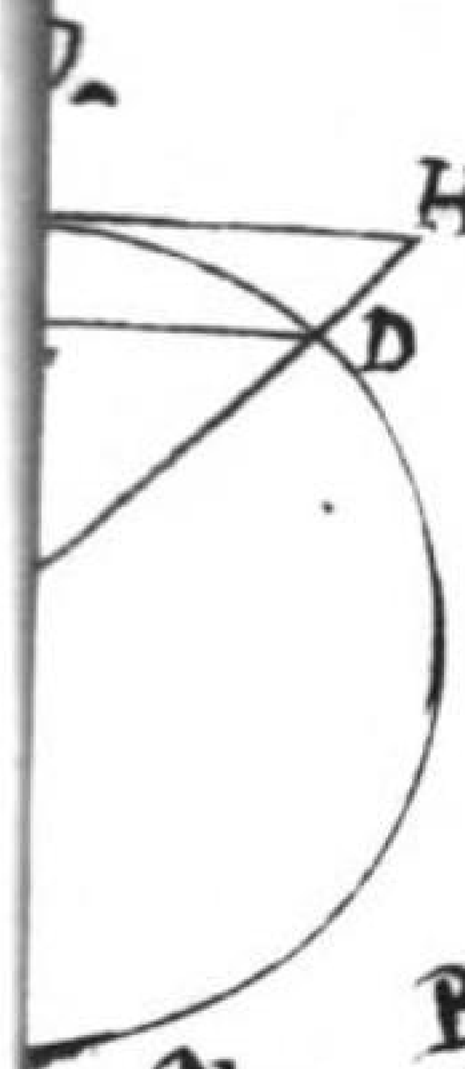


Fig.ª 88.



TAU. V.



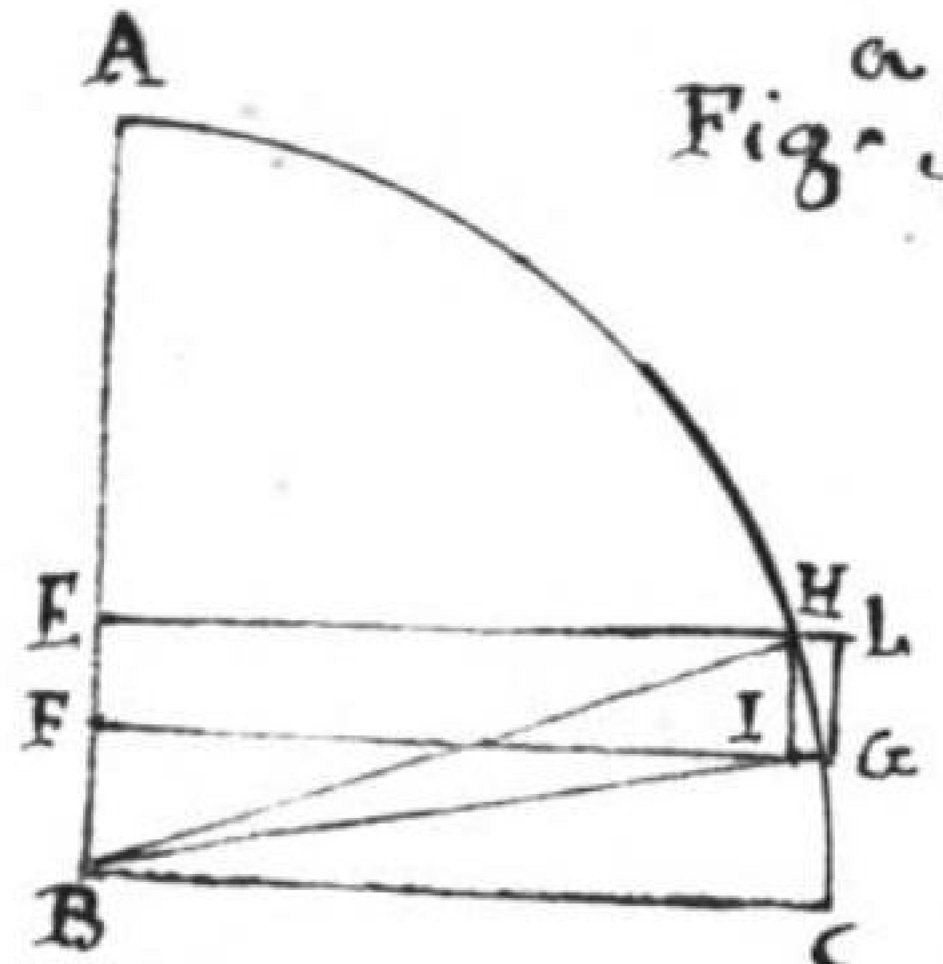


Fig.ª 91.

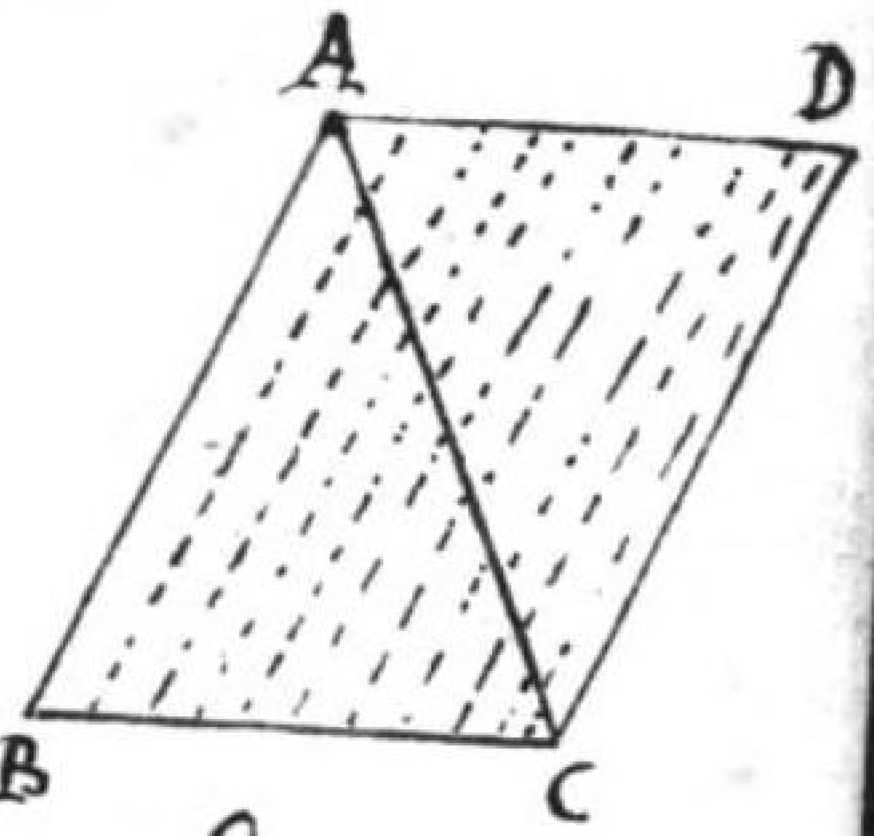


Fig.ª 94.

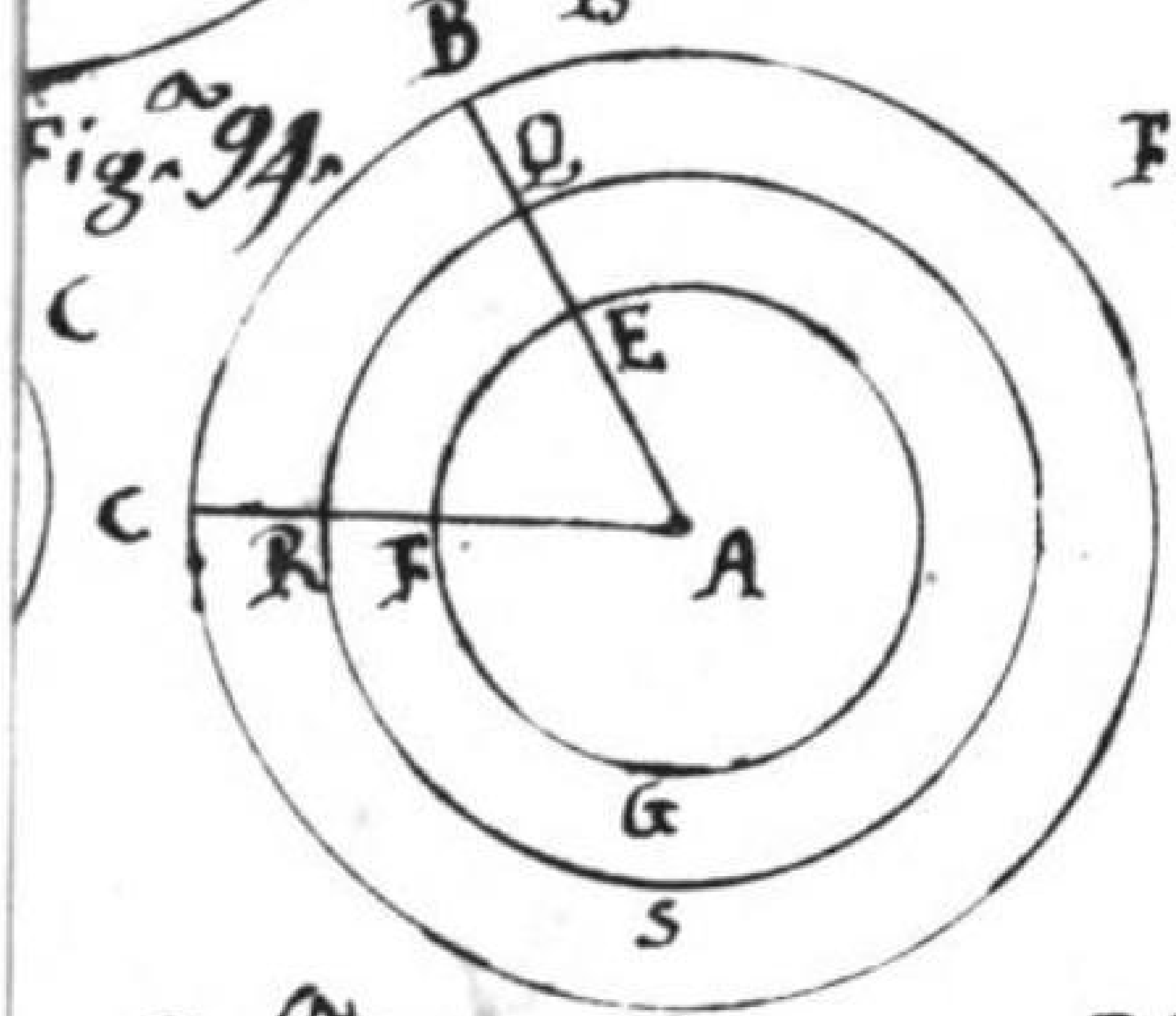


Fig.ª 95.

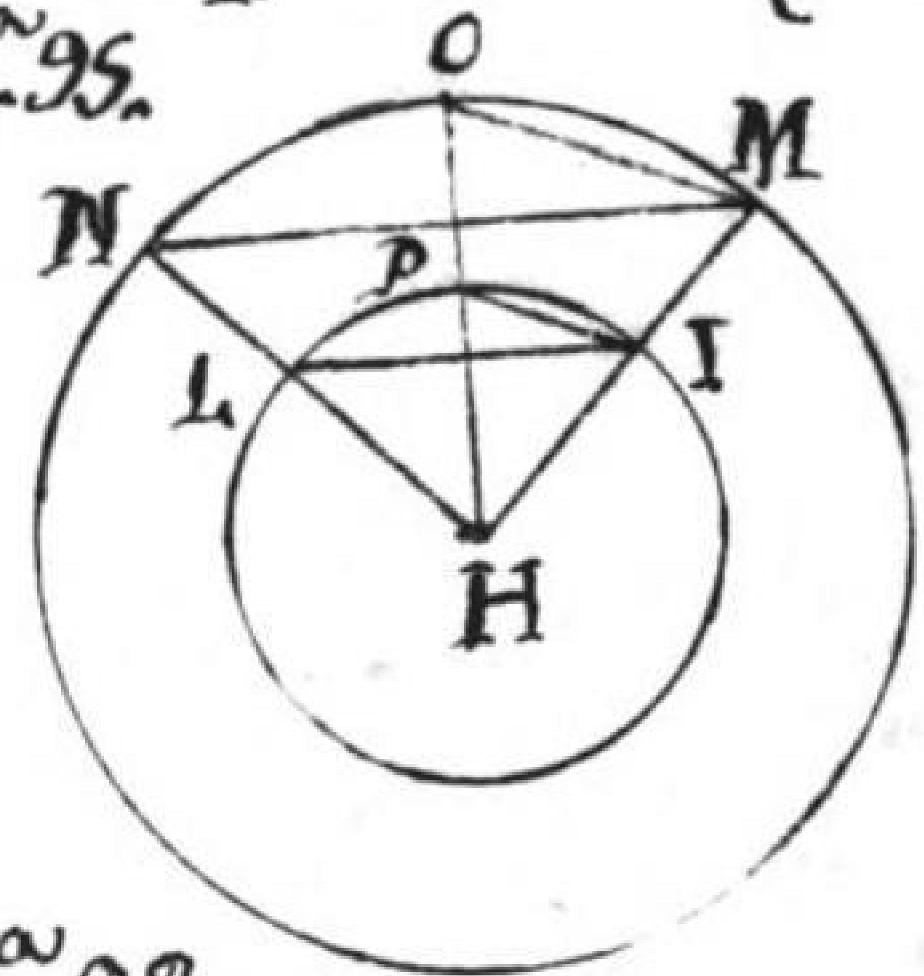


Fig.ª 98.

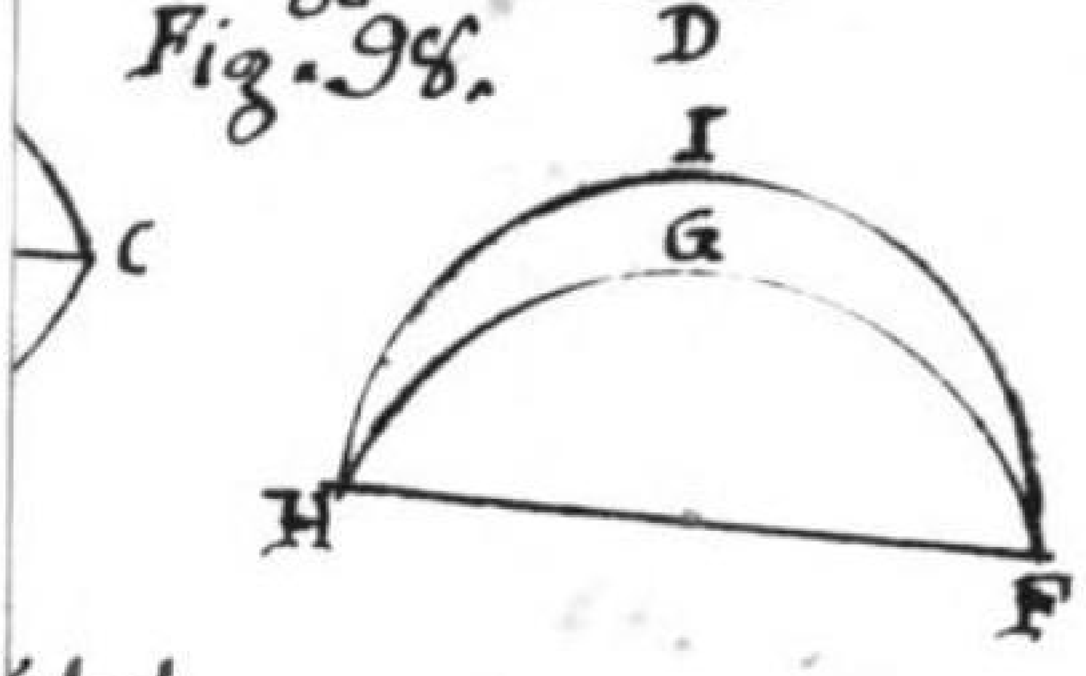
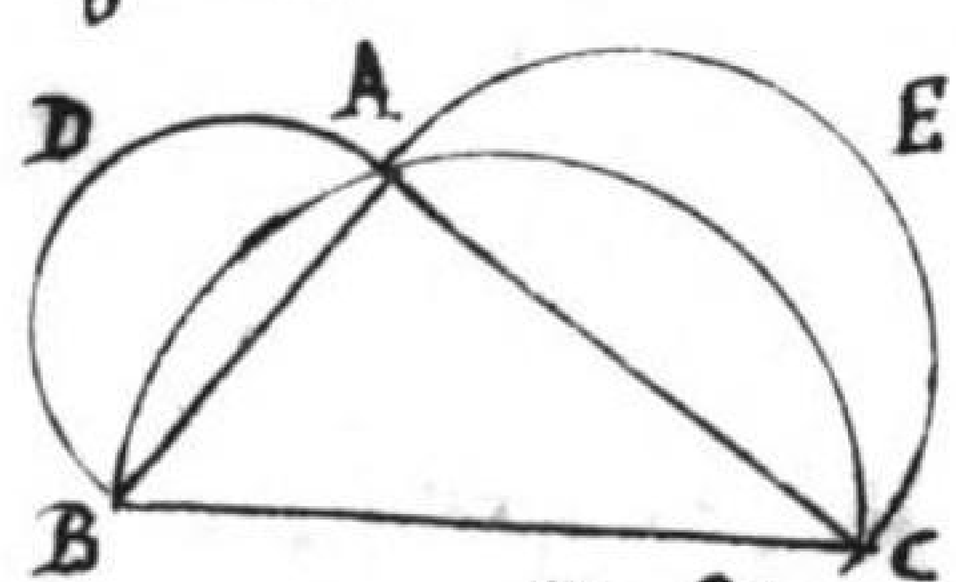


Fig.ª 99.



101.

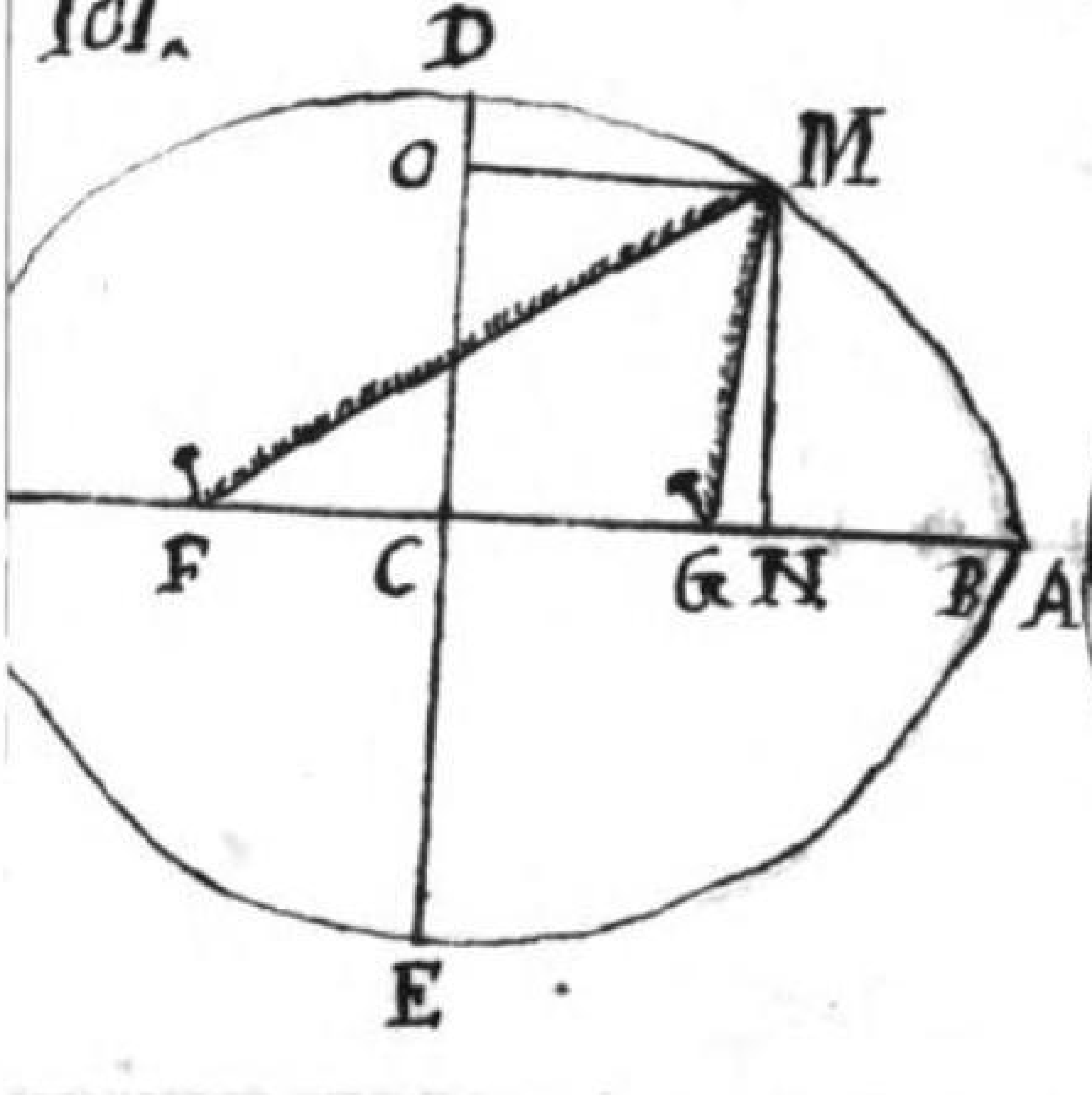
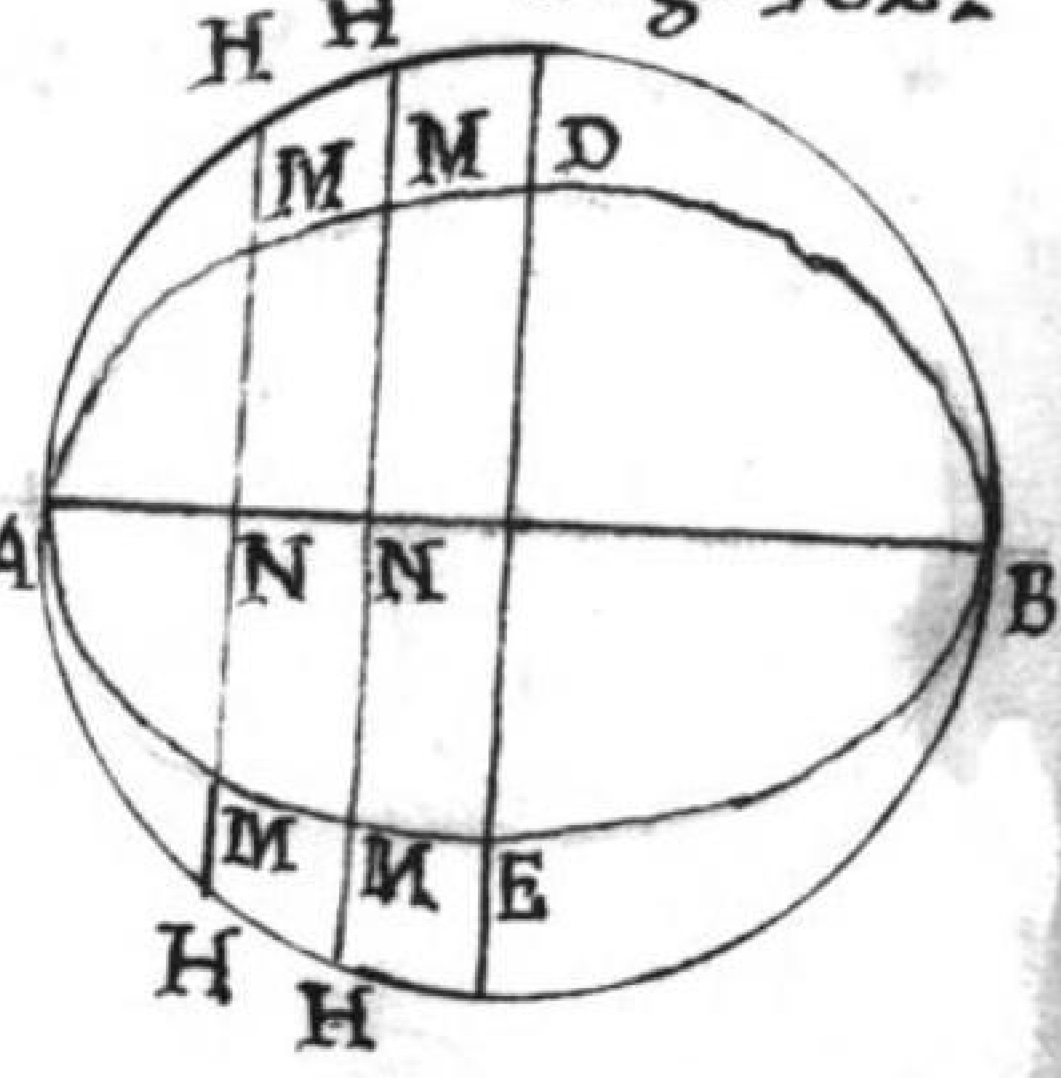
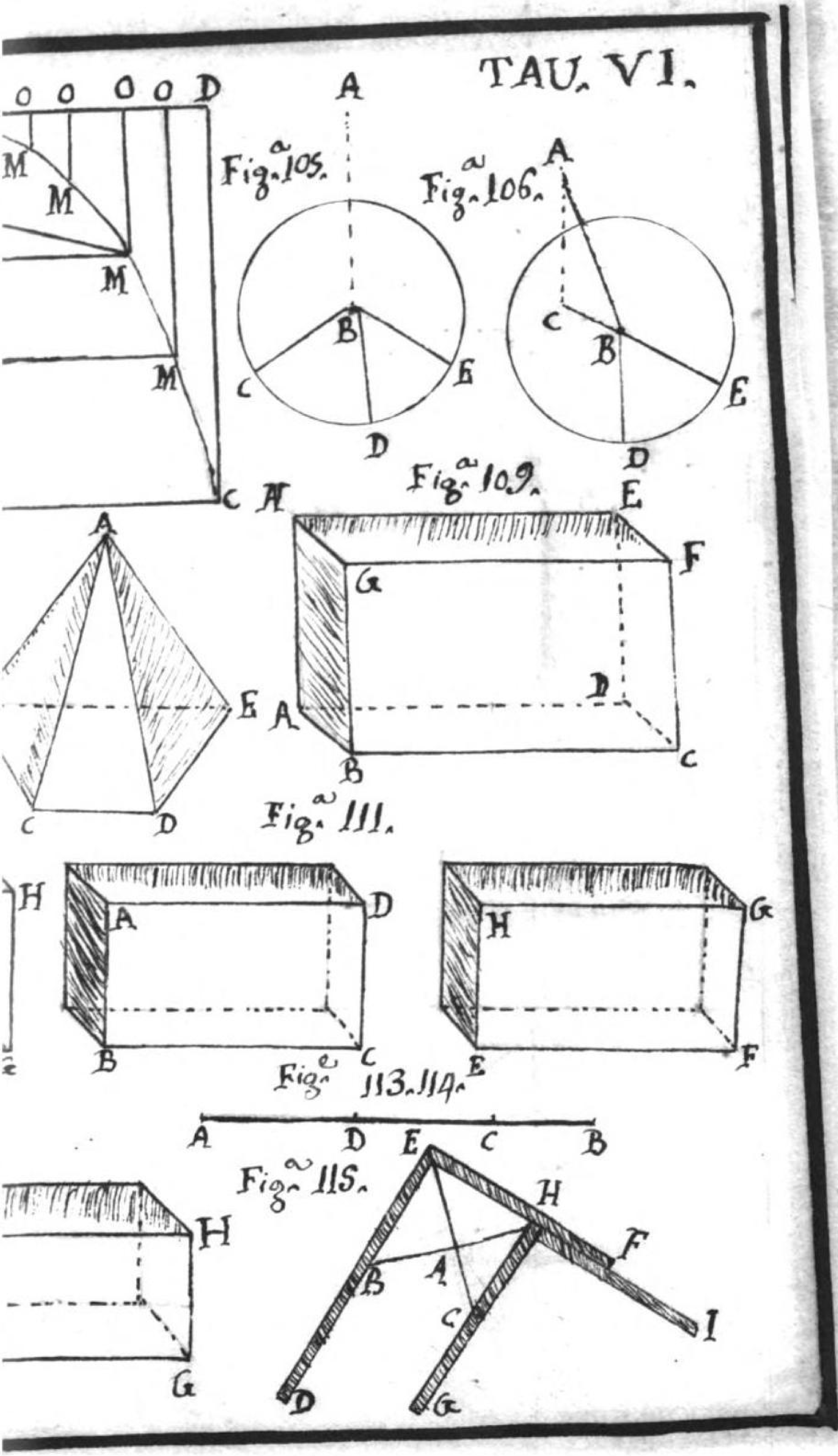
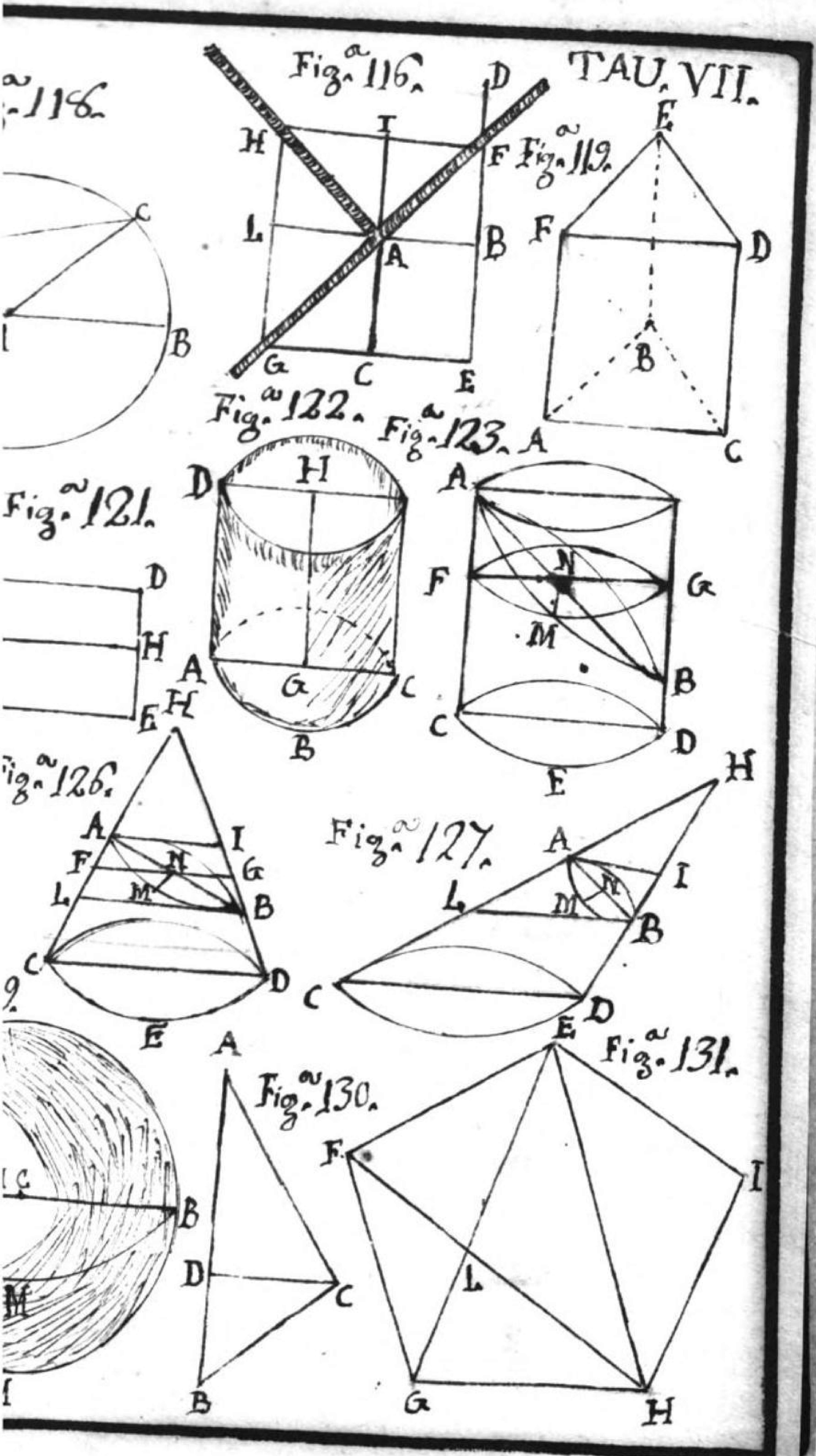


Fig.ª 102.




TAV. VI.
Fig.a 105.
Fig.a 106.
Fig.a 109.
Fig.a 111.
Fig.e 113. 114.
Fig.a 115.


TAV. VII.
Fig.a 118.
C
B
Fig.a 116.
D
H
I
F
L
A
B
G
C
E
Fig.a 119.
E
F
D
B
A
C
Fig.a 122.
D
H
A
G
C
B
Fig.a 123.
A
F
N
G
M
B
C
D
E
Fig.a 121.
D
H
E
Fig.a 126.
H
A
I
F
N
G
L
M
B
C
D
E
Fig.a 127.
H
A
I
L
M
N
B
C
D
E
Fig.a 131.
A
Fig.a 130.
F
I
C
B
D
C
L
M
B
G
H

3.

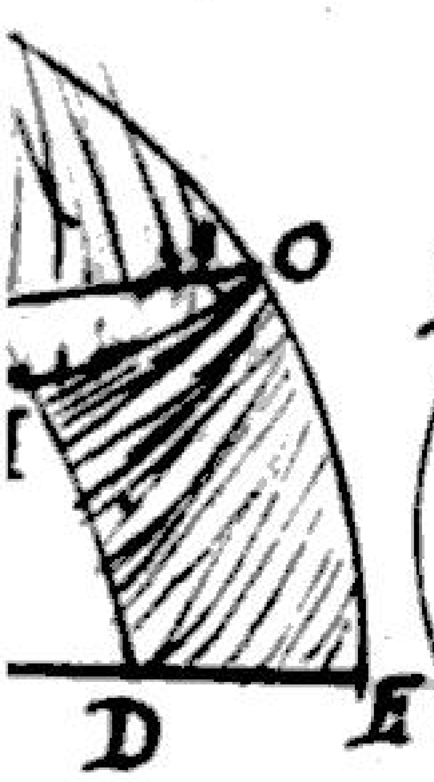


Fig.ª 134.

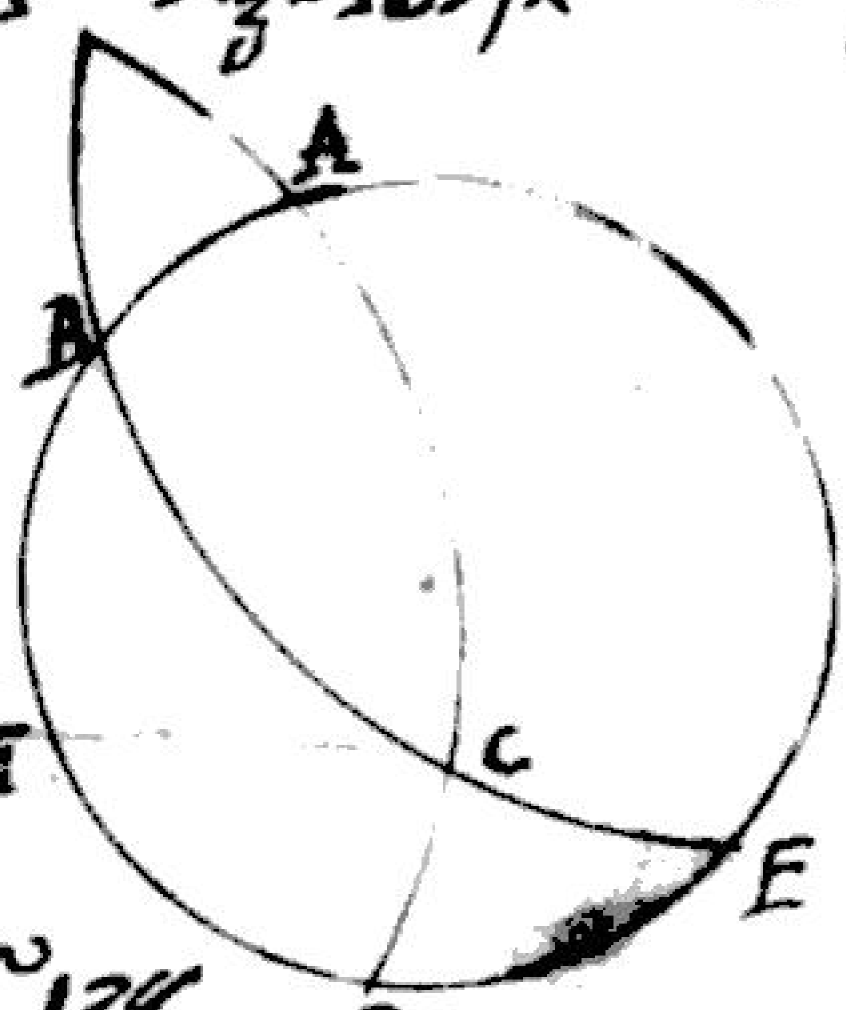
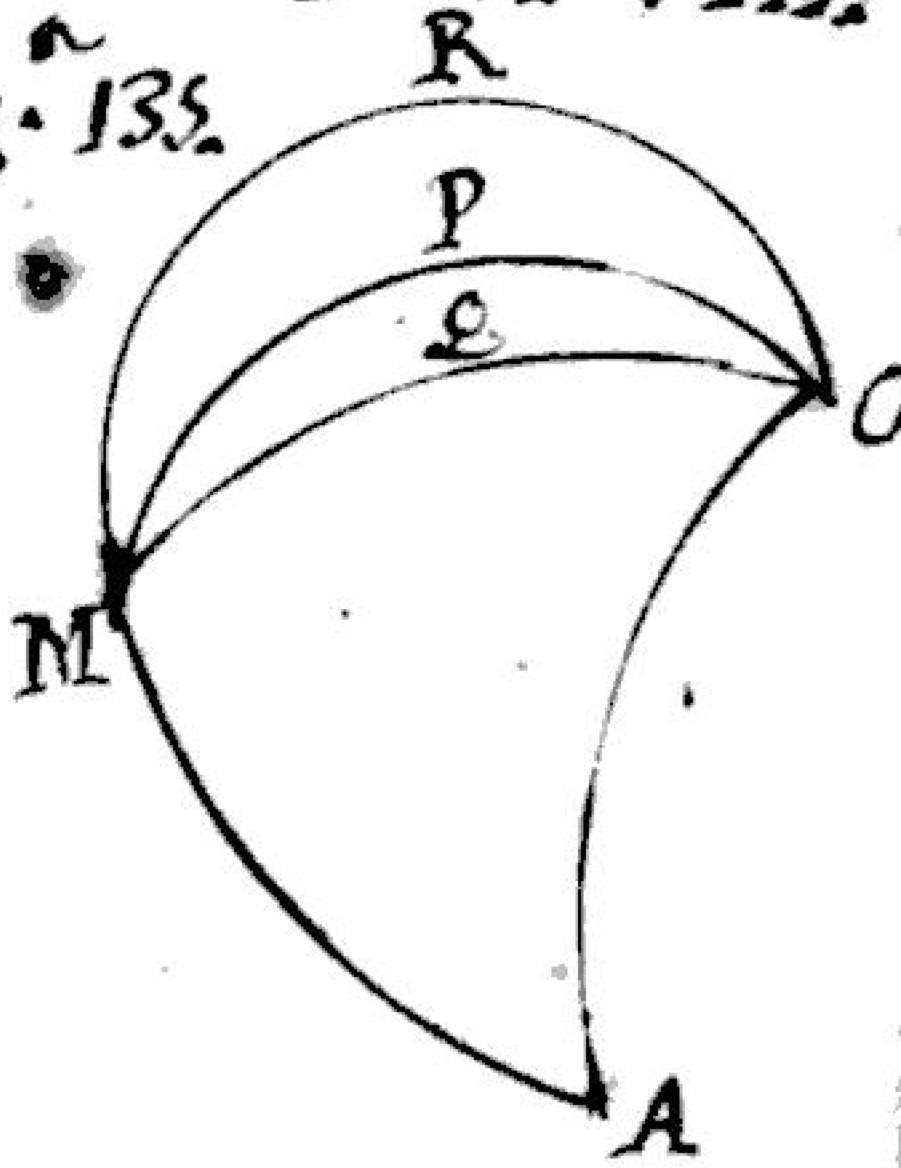


Fig.ª 135.



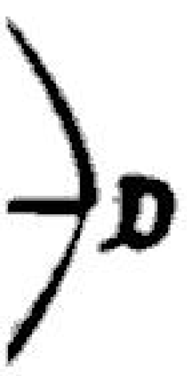


Fig.ª 136.