



1809
TRATTATO

DELL'

EQUILIBRIO

E DEL

MOTO DE' CORPI;

CHITREDA

•••••

DIAMANTO

19700

58955 Bonaparte 61

TRATTATO

DELL'
EQUILIBRIO

E DEL
MOTO DE' CORPI

COMPOSTO DAL FU
NICCOLO' DI MARTINO

Regio Percettore, e Maestro di Matematica

DI

FERDINANDO IV.

NOSTRO AUGUSTISSIMO REGNANTE

Ristampato per uso dell'Accademia
Militare del

B. R. F.

DEDICATO

A S. E. IL SIGNOR

D. FRANCESCO PIGNATELLI

DE' PRINCIPI STRONGOLI

T O M O I.



IN NAPOLI MDCCLXXXI.

PRESSO GIOACCHINO MILO

Con Regal Permessò.

A S. E.

I L S I G N O R

D. FRANCESCO PIGNATELLI

DE' PRINCIPI STRONGOLI

*Ajutante Reale di S.M., e suo Gentiluomo
di Camera di Entrata con gli onori dell'
Esercizio . Maresciallo di Campo ne'
suoi Reali Eserciti , Colonnello Go-
vernatore nel suo Battaglione Real
Ferdinando , e Comandante
del Castello di S. Eramo .*



Atural cosa è, che coloro,
i quali per forza di ami-
cizia , o per vincolo di
sangue furono ai trapassati
congiunti ed uniti, godano nel vederne
anche dopo morte onorata, ed illustrata
anzi

la mano, e pregandovi da Dio ogni be-
ne, mi reco ad onore essere

Di V. E.

Devotiss., ed Oblicatiss. Ser. Vero
Giuseppe di Martino.

T R A T T A T O

DELL' EQUILIBRIO, E DEL MOTO DE' CORPI



1. **L** nostro scopo in questo Trattato si è di ragionare dell' equilibrio, e del moto così de' corpi duri, o siano consistenti, come degli altri, che appellansi fluidi, e perciò racchiuderemo in esso gli Elementi non solo della Statica, e della Meccanica, ma eziandio dell' Idrostatica, e dell' Idraulica (1).

2. Ed in vero egli è stato sempre comune sentimento di doverli distinguere il moto de' corpi dal loro equilibrio: onde si è, che si sono formate due scienze intorno ai corpi consistenti, a cui si sono dati i nomi di Statica, e di Meccanica; e due altre ancora intorno ai corpi fluidi, che sono state dinominate Idrostatica, ed Idraulica (2).

3. S' intende adunque per Statica la scienza, che tratta dell' equilibrio de' corpi consistenti; s' intende all' incontro per Meccanica la scienza, che si aggira intorno al moto de' medesimi corpi. E così ancora chiamasi Idrostatica la scienza, che tratta dell' equilibrio de' corpi fluidi; chiamasi all' incontro Idraulica la scienza, che riguarda il loro moto (3).

4. Intanto, se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che il moto, e l' equilibrio siano due affezioni, le quali non debbono disgiungersi l' una dall' altra; sì perchè dassi luogo al moto de' corpi, che soggiace a' nostri sensi, qualora cessa l' equilibrio; come ancora perchè nell' equilibrio stesso de' corpi si fanno de' continui moti insensibili, che per la loro contrarietà, ed uguaglianza si distruggono in ogni momento.

5. Quindi senza fare una tal distinzione ragionere-

A

nere-

2 **DELL' EQUILIBRIO,**
neremo unitamente del moto , e dell' equilibrio de' corpi . E poichè i corpi fluidi per una special loro tessitura debbono considerarsi separatamente dai corpi consistenti ; perciò prima tratteremo dell' equilibrio , e del moto de' corpi consistenti ; indi dell' equilibrio , e del moto de' corpi fluidi .

L I B R O I.

Dell' equilibrio , e del moto de' corpi consistenti .

6. **Q**uantunque il moto , di cui specialmente dee ragionarsi in questo trattato, sia quello , che deriva dalla gravità de' corpi ; nientedimeno ogni ragion vuole , che si tratti primieramente della scienza del moto in generale , a cui suol darsi il nome di **Dinamica** : non potendosi intendere ciò , che ad un special moto si appartiene, se prima non siano note le affezioni comuni ad ogni moto .

C A P I T O L O I.

Del moto in generale , e delle sue principali affezioni .

7. **C**onforme il moto , di cui dobbiam ragionare , risiede ne' corpi ; così per l' intelligenza di quel tanto dee dirsi intorno al moto giova premettere la nozione di alcune affezioni , che sogliono considerarsi in ogni corpo , siccome sono la massa , la mole , e la densità : con far vedere , quale sia l' indole di ciascuna di esse , e donde propriamente derivi la loro considerazione .

I.

Della massa , della mole , e della densità di qualsivoglia corpo .

8. **E**gli è comune sentimento de' Fisici , che i minimi elementi di qualsivoglia corpo siano pic-

E DEL MOTO DE' CORPI. 3

picciole particelle non solo dotate di estensione, ma eziandio solide, ed impenetrabili. Queste particelle intanto con unirsi insieme non combaciansi perfettamente tra loro, ma lasciano tra di esse alcuni interstizj, che chiamansi comunemente pori, ovvero meati. E quindi si è, che in ogni corpo debba distinguersi così la massa, come la mole (4).

9. S' intende adunque per massa di un corpo l'aggregato, o sia somma de' minimi suoi elementi; s' intende all'incontro per mole l'estensione, sotto di cui vedesi il corpo; formato coll'unione di quei minimi elementi. Onde alla massa appartiene la sola estensione de' minimi elementi, che formano il corpo; alla mole poi, oltre di quella estensione, deve ascriversi ancora l'altra, che risiede ne' pori, ovvero meati.

10. I minimi elementi, di cui il corpo si compone, sono riguardati comunemente da' Fisici come la materia dell'istesso corpo; onde la quantità della materia in ogni corpo non dee stimarsi differente dalla sua massa. La mole poi si appella ancora col nome di volume; e poichè ella consiste in quella estensione, sotto di cui il corpo si ravvisa, perciò la medesima potrà determinarsi facilmente per mezzo della Geometria (5).

11. Or siccome i minimi elementi de' corpi sono diversi tra loro tanto per la grandezza, quanto per la figura; così nè pure i pori, che lasciano tra esso loro, sono tutti della stessa ampiezza. Onde conforme sotto una data mole non sempre ritrovasi racchiusa una stessa quantità di materia; così nè pure una data quantità di materia si conterrà sempre sotto una stessa mole (6).

12. Da ciò è derivata la considerazione della densità, la quale dee stimarsi maggiore, o minore sì per la maggiore, o minore quantità di materia, che si contiene sotto una data mole; come per la minore, o maggiore mole, sotto di cui racchiudesi una data quantità di materia. Onde ne' corpi di eguali

moli le densità sono nella diretta ragione delle masse; ne' corpi all'incontro di eguali masse le stesse densità sono nella reciproca ragione delle moli (7).

13. Qualora poi i corpi ritrovansi avere così masse, come moli disuguali: chiaro si è, che le loro densità debbano essere nella ragion composta della diretta delle masse, e della reciproca delle moli. Dal che egli è facile il ricavarne, che avranno due corpi eguali densità, non solo se siano eguali tanto le loro masse, quanto le loro moli, ma eziandio se le masse, e le moli siano tra di esse nella stessa ragione (8).

14. Se bene per mezzo della Geometria sia facile il definire la mole di un corpo; nientedimeno essendo invisibili, così i minimi suoi elementi, come i pori, che tra questi si frammezzano, non possiamo coll'istessa facilità determinare la massa, e la densità del medesimo corpo. Vedremo intanto in appresso, che la massa di qualsivoglia corpo corrisponde in proporzione al suo proprio peso. Onde le densità di due qualsivoglia corpi faranno nella ragion composta della diretta de' pesi, e della reciproca delle moli (9).

15. Dal teorema generale delle densità possiamo dedurne primieramente, che le masse ovvero pesi di due corpi siano nella ragion composta della diretta delle loro densità, e della diretta ancora delle loro moli. Onde, siccome debbono essere nella semplice ragione delle densità, essendo eguali le moli, e nella semplice ragione delle moli, essendo eguali le densità; così se siano eguali tanto le densità, quanto le moli, o pure l'une coll'altre siano reciprocamente proporzionali, le masse ovvero pesi dei due corpi faranno tra loro eguali (10).

16. Possiamo dedurne in secondo luogo, che le moli di due corpi siano nella ragion composta della diretta delle loro masse, e della reciproca delle loro densità. Onde, conforme debbono essere nella semplice ragion diretta delle masse, essendo eguali
le

E DEL MOTO DE' CORPI. 5

le densità, e nella semplice ragion reciproca delli densità, essendo eguali le masse; così se siano eguale tanto le masse, quanto le densità, o pure l'una coll'altre siano nella stessa ragione, le moli dei due corpi faranno tra loro eguali (11).

II.

Del moto, e della quiete: come ancora dello spazio, del luogo, e del tempo.

17. **P** Remesse le nozioni di tali affezioni, diciamo ora, che un corpo si muove, quante volte si trasporta successivamente da un luogo in un'altro luogo. E conforme dicesi essere luogo di un corpo la porzione dello spazio occupata dal medesimo corpo; così deve intendersi per spazio quella vasta ed immensa estensione, in cui i corpi tutti si contengono, e che non solo è similare da pertutto, ed immobile di sua natura; ma eziandio vacua, e penetrabile (12).

18. Quantunque poi di questa vasta estensione, che forma lo spazio, nè pure col pensiero possano da noi intendersi i termini; nientedimeno sogliamo limitarla per rapporto ai corpi stessi, che in essa si contengono. È perciò oltre allo spazio assoluto, la di cui indole si è di essere immobile così nel suo tutto, come nelle sue parti, giova distinguere lo spazio relativo: per cui siccome intendosi quello, che si considera per rapporto ai corpi, che egli racchiude; così riguardasi come mobile, per cambiarsi col moto degli stessi corpi (13).

19. Poichè dunque per luogo di un corpo intendosi la porzione dello spazio occupata dal medesimo corpo; chiaro si è, che ancora il luogo debba distinguersi in assoluto, e relativo. In fatti, o egli riguardasi come porzione dello spazio assoluto, ed in questo caso dee dirsi luogo assoluto; o il medesimo considerasi come porzione di uno spazio relativo, ed in quest'altro caso dovrà chiamarsi luogo relativo.

6 DELL' EQUILIBRIO,

20. E poichè per moto s'intende il trasporto successivo di un corpo da un luogo in un'altro luogo; chiara cosa ancora si è, che eziandio il moto debba distinguersi in assoluto, e relativo. Di fatti, o il corpo trasportasi da un luogo assoluto in un'altro ancora assoluto, e questo suo trasporto dee dirsi moto assoluto; o trasportasi da un luogo relativo in un'altro ancora relativo, e quest'altro suo trasporto dovrà chiamarsi moto relativo.

21. Al moto poi si oppone la quiete, per cui s'intende la permanenza del corpo in un medesimo luogo. Nè egli è da porsi in dubbio, che ancora la quiete debba distinguersi in assoluta, e relativa. Imperocchè o il corpo persiste sempre in un medesimo luogo assoluto, e questa sua permanenza dee dirsi quiete assoluta; o sempre si ritiene in un'istesso luogo relativo, e quest'altra sua permanenza dovrà chiamarsi quiete relativa.

22. Or per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che la quiete relativa non sia sempre vera quiete. In effetto si è veduto di sopra, che sebbene lo spazio assoluto sia di sua natura immobile; nientedimeno l'altro relativo possa essere capace di moto. Onde se fingiamo, che un qualche spazio relativo, come quello di una nave, effettivamente si muova; non v'ha dubbio, che si muoveranno altresì i corpi tutti, che occupano quello spazio, e godono di una quiete relativa.

23. Per la stessa ragione può avvenire ancora, che il moto relativo o non sia vero moto, o non facciafi con quella legge, sotto di cui a noi si manifesta. In fatti, se una nave con una data velocità muovasi verso occidente; parteciperanno di questo moto tutti i corpi, che nella nave ritrovansi. Onde se uno di essi muovasi verso oriente sulla nave medesima, il suo moto relativo dovrà diminuirsi dell'altro della nave; e perciò siccome si ridurrà egli a vera quiete, se le velocità dei due moti siano eguali; così essendo queste disuguali, si trasporterà

E DEL MOTO DE' CORPI. 7

terà effettivamente il corpo colla differenza delle due velocità, e colla direzione della velocità maggiore.

24. Quindi, per giudicare sanamente del moto; o della quiete relativa di un corpo, dee conoscersi preventivamente lo stato dello spazio relativo, in cui vedesi quel corpo muovere, o stare in quiete. E poichè questo spazio relativo può essere porzione di un'altro spazio relativo maggiore; perciò eziandio lo stato di quest'altro spazio deve essere a noi noto. Ed essendo così, egli è chiaro non essere cosa così facile il giudicare, se un corpo in questo mondo effettivamente si muova, o sia in quiete (14).

25. Del rimanente, consistendo il moto nel trasporto successivo di un corpo da un luogo in un'altro luogo, chiaro si è, che non possa egli essere istantaneo, ma debba farsi sempre in tempo. Intorno al tempo poi giova qui l'avvertire, che egli non sia altra cosa, se non che la durazione successiva delle cose create, le di cui parti si succedono eguabilmente, senza essere soggette a' nostri sensi. Per renderle intanto sensibili, fogliamo noi misurarle col moto eguabile di un qualche corpo; onde si è, che ancora il tempo dee distinguersi in assoluto, e relativo (15).

26. Specialmente poi per la misura del tempo si è ricorso al Sole; sì per essere un corpo, che da tutti si distingue; come ancora, perchè il di lui moto sembra essere eguabile, ed uniforme. Ma se bene una tal misura sia bastante per gli usi della vita civile; nientedimeno pure è soggetta a qualche piccolo errore, per non essere del tutto eguabile il moto del Sole. Ed in fatti gli stessi Astronomi riconoscono qualche divario tra il tempo apparente, ed il tempo vero; onde si è, che si sono studiati di prescrivere regole per uguagliargli, e dedurre l'uno dall'altro (16).

8 **DELL' EQUILIBRIO,**
 III.

*Della velocità , o sia celerità : come ancora del
moto eguabile .*

27. **C**onsistendo il moto nel trasporto successi-
vo del corpo da un luogo in un' altro
luogo , non solo dovrà egli farsi sempre in tempo,
ma eziandio il corpo col suo moto dovrà percorre-
re un qualche spazio . L' esperienza intanto c' inse-
gna , che nè in un dato tempo si percorre sem-
pre dal mobile lo stesso spazio , nè un dato spazio
si percorre sempre dal mobile nel medesimo tem-
po . Onde da ciò è derivata la considerazione della
velocità o sia celerità , che dee dedursi così dallo
spazio , che percorre il mobile , come dal tempo ,
che impiega a percorrerlo .

28. Ed in vero movendosi il corpo in un dato
tempo , la sua velocità dee stimarsi maggiore, o mi-
nore a misura dello spazio maggiore, o minore , che
egli percorre in quel dato tempo . All' incontro poi
portandosi il corpo per un dato spazio , la sua ve-
locità dovrà giudicarsi maggiore, o minore a misura
del tempo minore , o maggiore , che egli impiega a
percorrere quel dato spazio . Onde , essendo dato il
tempo , la velocità farà proporzionale direttamente
allo spazio percorso ; essendo poi dato lo spazio ,
la stessa velocità farà reciprocamente proporzionale
al tempo (17) .

29. Adunque , siccome movendosi due corpi in
tempi eguali , le loro velocità debbono essere nella
diretta ragione degli spazj percorsi ; così al contra-
rio percorrendo due corpi eguali spazj , le stesse lo-
ro velocità dovranno essere nella reciproca ragione
de' tempi . Quindi , se siano disuguali così i tempi ,
come gli spazj , le velocità dei due corpi faranno
nella ragion composta della diretta degli spazj , e
della reciproca de' tempi ; e pertanto , se siano egua-
li tanto gli spazj , quanto i tempi , o pure gli uni
cogli altri siano nella stessa ragione , le velocità dei
due

E DEL MOTO DE' CORPI. 9

due corpi faranno tra loro eguali .

30. Effendo così , per vedere se un corpo mosso continui il suo moto sempre colla stessa velocità , non dovrà farsi altra cosa , se non che notare , se gli spazj percorsi si ritrovino essere sempre nella stessa ragione coi tempi , in cui si percorrono . L'esperienza intanto ci apprende , che non ogni moto , facciasi con questa legge ; e quindi è derivata la divisione del moto in eguabile , e variabile : chiamandosi moto eguabile ovvero uniforme quello , in cui la velocità rimane sempre la medesima ; e moto variabile ovvero difforme l'altro , in cui la velocità varia in ogni momento .

31. Per quanto al moto eguabile , le sue affezioni sono facili a definirsi . Imperocchè , non soggiacendo la di lui velocità a cambiamento alcuno , conforme gli spazj percorsi con un tal moto debbono essere come i tempi , in cui si percorrono ; così in tempi eguali debbono percorrersi spazj eziandio eguali . Ma egli è facile di paragonare ancora tra loro i moti eguabili di due corpi , non solo per le loro velocità , ma altresì tanto per gli spazj , che si percorrono con tali moti , quanto per gli tempi , che s'impiegano a percorrerli .

32. In fatti , se due corpi si muovano egualmente , le loro velocità , che restano sempre le medesime , debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazj , e della reciproca de' tempi . Onde , siccome faranno nella sola ragion diretta degli spazj essendo eguali i tempi , e nella sola ragion reciproca de' tempi , essendo eguali gli spazj ; così se mai siano eguali tanto i tempi , quanto gli spazj , o pure gli uni cogli altri siano nella stessa ragione , le velocità dei due corpi faranno tra loro eguali .

33. Per quanto poi agli spazj , che percorrono due corpi egualmente mossi , questi debbono essere nella ragion composta della diretta delle velocità , e della diretta ancora de' tempi . Onde , conforme faranno nella sola ragion diretta delle velocità

tà

10 DELL' EQUILIBRIO,

tà essendo eguali i tempi, e nella sola ragion diretta dei tempi essendo eguali le velocità; così, se mai siano eguali tanto i tempi, quanto le velocità, o pure le velocità, ed i tempi siano reciprocamente proporzionali, gli spazj percorsi dai due corpi faranno tra loro eguali.

34. Finalmente per quanto ai tempi, che due corpi mossi eguabilmente impiegano a percorrere due qualsivoglia spazj, questi debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazj, e della reciproca della velocità. Onde siccome faranno nella sola ragion diretta degli spazj, essendo eguali le velocità, e nella sola ragion reciproca delle velocità, essendo eguali gli spazj; così se mai siano eguali tanto le velocità, quanto gli spazj, o pure le velocità, e gli spazj siano nella stessa ragione, i tempi impiegati a percorrere detti spazj faranno tra loro eguali.

IV.

Del moto variabile, e delle sue varie specie.

35. **C**onforme nel moto eguabile la velocità rimane sempre la medesima, così al contrario nel moto variabile ella si cambia continuamente. Può cambiarsi intanto la velocità di un mobile non solo con aumentarsi, ma eziandio con diminuirsi; onde si è, che divideasi il moto variabile in accelerato, e ritardato: chiamandosi moto accelerato quello, in cui la velocità sempre si aumenta; e per lo contrario moto ritardato l'altro, in cui la velocità sempre si minora.

36. Or potendosi la velocità di un mobile aumentare, e diminuire con infinite leggi diverse, non v'ha dubbio, che possano essere infinite altresì le specie tanto del moto accelerato, quanto del moto ritardato. Meritano intanto special considerazione il moto eguabilmente accelerato, in cui la velocità si aumenta in ragion del tempo; ed il moto eguabilmente ritardato, in cui la velocità si diminuisce

E DEL MOTO DE' CORPI. II

nuisce nella stessa ragione. E ciò per la ragione, che queste due specie di moto variabile hanno luogo nella caduta, e salita de' gravi, secondo si vedrà in appresso (18).

37. Per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che siccome le parti dello spazio percorse successivamente in tempi eguali sono eziandio eguali nel moto eguabile; così debbono essere sempre più maggiori nel moto accelerato, e sempre più minori nel moto ritardato. Anzi siccome i tempi, in cui si percorrono successivamente eguali parti dello spazio, sono eziandio eguali nel moto eguabile; così dovranno farsi sempre più minori nel moto accelerato, e sempre più maggiori nel moto ritardato.

38. In qualsivisia moto variabile conforme cambiassi la velocità in ogni momento, così chiamassi velocità iniziale quella, con cui incomincia il moto, e si appella velocità finale quella, con cui termina l'istesso moto. Ma egli è da notarsi, che una di queste due velocità può essere tal volta nulla, cioè la velocità iniziale nel moto accelerato, e la velocità finale nel moto ritardato: conforme scorgesi nella caduta libera de' gravi, che è moto accelerato, e nella salita de' medesimi, che è moto ritardato.

39. Quantunque poi nel moto variabile cambiassi la velocità continuamente; nientedimeno, se intendiamo diviso il tempo in particelle infinitamente picciole, non v'ha dubbio, che il cambiamento della velocità in ciascuna di esse farà eziandio di una picciolezza infinita. Quindi siccome si fatto cambiamento può trascurarsi impunemente, e senza nota di errore; così il moto stesso, durante quella picciola porzione di tempo, potrà riguardarsi come eguabile, ed uniforme. Onde essendo nota la legge, con cui cambiassi la velocità per rapporto al tempo, niente farà più facile, quanto il definire, come siano gli spazj percorsi relativamente ai tempi, in cui si percorrono (19).

Fig. 1. 2.

40. Perciò intorno alla retta AB come asse intendasi descritta la curva CD d' indole tale, che esprimendosi i tempi per le ascisse AN , AQ , ci additino le ordinate MN , PQ corrispondenti a dette ascisse le velocità, che ritrovasi avere il mobile nella fine di quei tempi. Ed io dico, che se AC sia l'ordinata della curva, che ci disegna la velocità iniziale, gli spazj percorsi dal mobile nei tempi AN , AQ siano come l'aree corrispondenti $ACMN$, $ACPQ$. Per dimostrarlo, sia mn un' altra ordinata infinitamente vicina alla MN ; ed essendo Nn una porzione di tempo infinitamente picciola, potrà averfi il moto, durante questa picciola porzione di tempo, come eguabile, ed uniforme.

41. Quindi il picciolo spazio, che tra questo mentre si percorre dal mobile, farà congiuntamente come la velocità MN , con cui si percorre, ed il picciolo tempo Nn , in cui si percorre. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il picciolo rettangolo di MN in Nn , che non differisce sensibilmente dal picciolo trapezio $MNnm$. Dunque quel picciolo spazio, e questo picciolo trapezio faranno proporzionali tra loro; e pertanto, avendo luogo da pertutto la stessa dimostrazione, farà componendo così lo spazio percorso nel tempo AN proporzionale all'area $ACMN$, come lo spazio percorso nel tempo AQ proporzionale all'area $ACPQ$.

42. Con questo stesso artificio niente ancora farà più facile, quanto di paragonare lo spazio percorso dal mobile in un qualche tempo così con quello, che nell' istesso tempo si percorrerebbe eguabilmente colla velocità iniziale, come coll' altro, che nel medesimo tempo eziandio eguabilmente si percorrerebbe colla velocità finale. In fatti, se il tempo si disegni per l' ascissa AQ , farà AC la velocità iniziale, e PQ la velocità finale. Onde, se forminsi i due rettangoli $ACRQ$, $ASPQ$; farà lo spazio, che nel tempo AQ si percorre eguabilmente colla velocità iniziale AC , proporzionale al primo

mo

mo di essi; e l'altro spazio, che nel medesimo tempo AQ si percorre eguabilmente colla velocità finale PQ proporzionale al secondo.

43. Or di già si è dimostrato, che lo spazio percorso col moto variabile nel tempo AQ sia proporzionale all'area $ACPQ$. Dunque, conforme egli deve essere allo spazio, che nell'istesso tempo AQ si percorre eguabilmente colla velocità iniziale AC , come l'area $ACPQ$ al rettangolo $ACRQ$; così farà all'altro spazio, che nel medesimo tempo AQ si percorre eziandio eguabilmente colla velocità finale PQ , come la stessa area $ACPQ$ all'altro rettangolo $ASPQ$. Ed egli è da notarsi, che siccome svanisce il primo dei due rettangoli, essendo nulla la velocità iniziale AC ; così svanirà il secondo di essi, se mai sia nulla la velocità finale PQ .

V.

Del momento, o sia quantità di moto di qualsiasi mobile.

44. **Q**ualora un corpo si muove, egli non è da porsi in dubbio, che si muovano altresì tutti i minimi elementi, di cui quel corpo si compone. Quindi la quantità del moto, che risiede nel corpo, sarà la somma, o aggregato de' moti, che risiedono nei minimi suoi elementi. Onde egli è facile il dimostrare, che la stessa quantità di moto debba ripetersi non solo dalla velocità, con cui il corpo si muove, ma eziandio dalla massa, o sia peso del medesimo corpo (20).

45. Ed in vero, siccome l'effetto del moto altro non è, se non se lo spazio, che si percorre dal mobile in un dato tempo; così sembra naturale il credere, che debba giudicarsi della sua quantità per mezzo della velocità stessa del corpo. Ma conforme quello spazio si percorre da tutti i minimi elementi del corpo, e questa velocità ritrovasi in ciascuno di detti elementi; così la giusta misura della riferita

ferita quantità di moto farà la velocità del corpo presa tante volte , quanti sono di numero i suoi elementi .

46. Effendo così , egli è chiaro doverfi ripetere la quantità del moto , che risiede in un corpo , così dalla velocità , con cui il corpo si muove , come dal numero de' suoi minimi elementi . E poichè niente vieta di riguardare in ogni corpo questi minimi elementi come dotati di una data grandezza ; perciò il loro numero in qualsivisia corpo corrisponderà in proporzione alla massa , o sia peso del medesimo corpo . Onde la stessa quantità di moto dovrà dedursi così dalla velocità , come dalla massa .

47. Se adunque due corpi si muovano , le quantità dei loro moti faranno in ragion composta delle loro velocità , e delle loro masse . Onde siccome debbono essere nella semplice ragione delle velocità essendo eguali le masse , e nella semplice ragione delle masse essendo eguali le velocità ; così , se mai siano eguali tanto le velocità , quanto le masse , o pure le masse siano nella reciproca ragione delle velocità , avranno i due corpi eguali quantità di moto .

48. Or conforme il moto di un corpo può essere o eguabile , o variabile ; così la sua quantità farà sempre la stessa nel primo caso , e dovrà cambiarsi continuamente nel secondo . In fatti dovendo ella ripetersi così dalla massa , come dalla velocità di un corpo ; chiaro si è , che in un dato corpo debba giudicarsi di essa per ciò , che avviene alla sola velocità . Onde siccome la velocità è sempre la stessa nel moto eguabile , e cambia continuamente nel moto variabile ; così eziandio la quantità di moto farà costante nel primo , e si cambierà in ogni momento nel secondo (21) .

49. Del rimanente la quantità di moto si appella ancora momento per la ragione , che siccome col moto si rende il corpo capace di agire , così la sua forza attiva dee sumarsi maggiore , o minore

re

re per la maggiore o minore quantità di moto, che in esso risiede. Di fatti l'esperienza stessa ci apprende, che si aumenta la forza attiva di un corpo non meno con aumentare la sua velocità, che con aggiungere ad esso maggior copia di materia. Onde dovendosi eziandio quella ripetere così dalla velocità, come dalla massa del corpo; farà la medesima proporzionale alla quantità di moto dello stesso corpo (22).

50. Intanto sebbene la forza attiva di un corpo, che si muove, sia sempre proporzionale alla quantità del suo moto; nientedimeno l'attuale azione non sempre corrisponderà in proporzione alla stessa quantità di moto. Avviene ciò quante volte agisce il corpo con una sola porzione della sua velocità, poichè siccome in questo caso la rimanente porzione niente contribuisce all'azione, che esercita il corpo, così in definire la stessa azione dovrà tenerfi conto della sola porzione impiegata, nè bisognerà porre a calcolo l'altra rimanente (23).

31. Dall'esser poi la forza attiva di un mobile proporzionale alla quantità del suo moto, egli è facile il ricavarne, che non possa esservi equilibrio tra due corpi, che agiscono tra esso loro colle forze loro totali, se non siano eguali le quantità dei loro moti, da cui derivano le loro forze. E poichè per avere questa uguaglianza, è necessario, che le velocità dei due corpi siano reciprocamente proporzionali alle loro masse, o siano pesi; perciò vi farà equilibrio tra due corpi, che nelle scambievoli loro azioni impiegano le totali loro forze, qualora le velocità, ed i pesi dei due corpi sono reciprocamente proporzionali tra loro (24).

Della forza motrice, e del modo di definire la sua attività.

52. **L**A materia, di cui sono composti i corpi tutti, vien riguardata comunemente da Fisici come inerte, e priva di ogni attività. Quindi siccome un corpo di sua natura è incapace di muoversi da per se stesso, così non potrà egli porsi in moto, se non lo riceva da qualche causa esteriore, che sia valevole a generarlo. Questa causa qualunque ella sia, chiamasi forza motrice, la quale niente vieta di essere talvolta il moto istesso di un'altro corpo, essendo noto per esperienza, che un corpo mosso possa muovere un'altro corpo, con cui egli s'incontra.

53. Or sebbene l'effetto della forza motrice sia il moto, che si produce nel corpo: nientedimeno, per giudicare dirittamente di essa, dee tenerfi conto non solo del moto prodotto, ma eziandio del tempo, che s'impiega nella produzione del moto. Ed in fatti dee stimarsi una forza motrice maggiore, o minore sì per lo moto maggiore, o minore, che produce nel corpo in un dato tempo, come ancora per lo minore, o maggior tempo, che impiega in produrre un dato moto.

54. Le forze motrici adunque, che producono moti diversi in tempi eguali, sono nella diretta ragione de' moti prodotti; quelle poi, che producono moti eguali in tempi diversi, sono nella reciproca ragione de' tempi. Ma siccome essendo disuguali tanto i tempi, quanto i moti, le stesse forze motrici debbono essere nella ragion composta della diretta de' moti, e della reciproca de' tempi; così se mai siano eguali non meno i tempi, che i moti, o pure gli uni cogli altri siano nella stessa ragione, le forze motrici faranno tra loro eguali (25).

55. Conforme poi il moto di un corpo può essere o eguabile, o variabile; così conviene credere, che

che la forza motrice talvolta agisce su' l corpo una volta sola, ed indi lo abbandona, talvolta lo spinge continuamente senza lasciarlo giammai. In effetto nel primo caso il corpo si muove sempre con quella stessa velocità impressagli dalla forza in quella sola volta; onde si è, che il suo moto sia eguabile. All'incontro nel secondo per le continue spinte della forza motrice la velocità del corpo riceve sempre nuovi aumenti; e pertanto il suo moto farà non solo variabile, ma eziandio accelerato.

56. Egli è vero, che il moto variabile può essere ancora ritardato; ma eziandio per questo moto dee ricevere il corpo continue spinte da una qualche forza motrice. Fingiamo perciò, che al corpo sia stata impressa da una qualche forza una data velocità; e se un'altra forza lo spinga continuamente con direzione opposta, colla nuova velocità impressa al corpo da quest'altra forza senza dubbio si minorerà la prima. Onde siccome questa seconda velocità per le continue spinte della forza motrice, che la produce, sempre più si va aumentando; così al contrario la prima per mezzo di essa si andrà sempre più minorando, ed in conseguenza il moto del corpo farà ritardato.

57. Il più delle volte intanto veggiamo ritardarsi il moto di un qualche corpo per la continua resistenza, che incontra il corpo nel mezzo, in cui si muove. Ma in questo caso la stessa resistenza, che dee superarsi dal corpo in ogni momento, si potrà riguardare come un'altra forza, che agisce su' l corpo con direzione opposta al di lui moto. Ed in questa guisa potrà averfi il moto eguabile eziandio per mezzo di una forza, che continuamente spinga il corpo: bastando, che egli facciasi in un mezzo, che colla sua continua resistenza gli tolga quello stesso aumento di velocità, che dalla forza riceve (26).

58. Vedesi ciò nella caduta de' gravi, la quale sebbene da principio sia moto accelerato, tutta volta

B

ta

ta dopo un qualche termine riducesi finalmente ad essere moto eguabile, ed uniforme. In fatti i gravi cadendo intanto si accelerano, perchè sono spinti continuamente da quella forza, che chiamasi gravità. E quantunque il loro moto facciasi nell'aere, che in ogni momento gli toglie porzione della velocità, che acquistano; nientedimeno ciò, che si aggiunge ad essi di velocità, è sempre maggiore di quella, che perdono; onde, non ostante la resistenza dell'aere, il loro moto continua ad essere accelerato.

59. Niente però vieta, che dopo un qualche termine la resistenza dell'aere per rapporto ai gravi, che cadono, diventi tale, che tolga a' detti gravi quello stesso aumento di velocità, che ad essi si aggiunge. Onde siccome in questo caso continuano i gravi la loro caduta con quella medesima velocità, che ritrovansi avere acquistata; così il loro moto non farà più accelerato, ma bensì eguabile, ed uniforme. Anzi se mai la resistenza dell'aere potesse divenire maggiore, cosicchè togliesse ai gravi maggior velocità di quella, che acquistano; in tal caso il loro moto diverrebbe ritardato.

60. Del rimanente intorno alla forza motrice, che spinge il corpo continuamente, giova l'avvertire, che siccome ella può essere o costante, o variabile; così la velocità, che si acquista dal corpo colle continue sue spinte, può aumentarsi o nella stessa ragione col tempo, o pure in altra ragione. E poichè in una particella di tempo infinitamente picciola niente vieta di riguardare come costante qualsivisa forza variabile; perciò, se mai sia nota la legge, con cui cambiasi la forza motrice per rapporto al tempo, potrà determinarsi facilmente, come debba aumentarsi la velocità del corpo relativamente all'istesso tempo (27).

Fig. 1. 2. 61. Descrivasi perciò intorno alla retta AB come asse la curva CD d'indole tale, che esprimendosi i tempi per le ascisse AN, AQ, ci additino le

le ordinate MN , PQ corrispondenti a dette ascisse le forze, che spingono il corpo nella fine di quei tempi. Ed io dico, che se AC sia l'ordinata della curva, che ci disegna la forza iniziale, le velocità acquistate dal corpo nei tempi AN , AQ siano come le aree corrispondenti $ACMN$, $ACPQ$. Per dimostrarlo, sia mn un'altra ordinata infinitamente vicina alla prima MN ; ed essendo Nn una porzione di tempo infinitamente picciola, potrà averfi la forza durante questa picciola porzione di tempo come costante.

62. Quindi il picciolo aumento di velocità, che tra questo mentre si aggiunge al corpo; farà congiuntamente come la forza MN , da cui deriva, ed il picciolo tempo Nn , in cui si genera. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il picciolo rettangolo di MN in Nn , che non differisce sensibilmente dal picciolo trapezio $MNnm$. Dunque quel picciolo aumento di velocità, e questo picciolo trapezio faranno proporzionali tra loro; e pertanto, avendo luogo da pertutto la stessa dimostrazione, farà componendo così la velocità acquistata nel tempo AN proporzionale all'area $ACMN$, come la velocità acquistata nel tempo AQ proporzionale all'area $ACPQ$ (28).

VII.

Delle forze centrali, e del modo di determinare la loro attività.

63. **T**Ra le forze motrici meritano special considerazione quelle, che spingono i corpi verso un qualche centro, ed a cui perciò si è dato il nome di forze centrali. Di questa indole è la forza della gravità, per mezzo di cui i corpi terrestri sono spinti verso il centro della terra. E tale ancora è la forza, che trattiene nei loro orbì così i pianeti primarj, come gli altri secondarj, per la ragione, che i primi sono spinti da quel-

la forza verso il centro del Sole, ed i secondi verso i centri de' loro primarj (29).

64. Quantunque non siano di accordo tra loro i Fisici intorno all' origine di queste forze centrali; tuttavolta niente vieta di riguardarle, come inerenti ai loro centri, e diramate intorno intorno per tante linee rette, che partono dagli stessi centri. Intanto, secondo questa loro nozione, i corpi, su di cui agiscono tali forze, dovranno dirsi non tanto spinti, quanto tirati verso i centri, in cui le forze risiedono; e quindi si è, che tali forze si appellano ancora da alcuni col nome di forze traenti (30).

65. Se bene poi si voglia supporre, che queste tali forze in tutta la lunghezza delle rette, per cui si diramano, conservino sempre l' istesso vigore; pure però la loro attività dovrà tanto più minorarsi, quanto maggiormente si discostano dal loro centro: e ciò per la ragione, che le stesse rette, per cui le forze si diramano, con discostarsi maggiormente dal centro, si fanno vie più divergenti. Anzi nella riferita supposizione egli è facile il dimostrare, che l' attività della forza debba minorarsi in duplicata ragione della sua distanza dal centro.

66. Intendasi perciò diviso tutto lo spazio, che giace intorno al centro della forza, in tanti piccioli strati per superficie sferiche, che abbiano per loro centro comune l' istesso centro della forza. Ed attenda la divergenza delle rette, per cui la forza si dirama, chiaro si è, che l' attività della forza debba tanto più minorarsi, quanto diviene maggiore la superficie sferica, in cui ella si esercita. Onde, siccome la superficie sferica si aumenta nella duplicata ragione della sua distanza dal centro; così in questa stessa duplicata ragione dovrà minorarsi altresì l' attività della forza (31).

67. Intanto, siccome questa legge di diminuzione ha luogo nella supposizione, che la forza in tutta la lunghezza delle rette, per cui si dirama, conservi sempre l' istesso vigore; così potrebbe non esse-

re

re vera una tal supposizione, nel quale caso dovrebbe minorarsi l'attività della forza con altra legge. Qualunque però siasi la legge, con cui si spande la forza intorno al suo centro, se mai ella sia nota, niente sarà più facile, quanto il definire la ragione, che serbano tra loro le velocità, che ritrovansi avere il corpo in varj luoghi, essendo tirato verso il centro da una tale forza.

68. Fingiamo perciò, che C sia il centro della forza, ed AC la retta, per cui il corpo tirato da questa forza si porta verso il centro. Descrivasi intorno alla AC come asse la curva BD d'indole tale, che colle sue ordinate BA , MN , PQ ci disegni le diverse attività della forza nei luoghi corrispondenti A , N , Q . Ed io dico, che le velocità acquistate dal corpo per fino ai luoghi N , e Q si ritroveranno essere tali, che i loro quadrati faranno, come le aree corrispondenti $ABMN$, $ABPQ$.

69. Per dimostrarlo, intendasi intorno alla stessa AC descritta l'altra curva AE di natura tale, che colle sue ordinate NO , QR ci disegni le velocità, che ritrovansi avere il corpo nei luoghi N , e Q ; e suppongasi ancora, che l'altra mo sia talmente vicina alla prima MO , che nel trasporto del corpo per lo picciolo spazio Nn l'attività della forza resti la medesima. Se adunque tirisi la oS parallela alla AC , che s'incontri colla NO nel punto S ; farà OS l'aumento di velocità, che riceve il corpo nel suo trasporto per Nn ; e pertanto, se sia dato il picciolo tempo, in cui si fa detto trasporto, farà quell'aumento di velocità OS proporzionale alla forza MN , da cui si genera.

70. Elevisi ora sulla MO la perpendicolare OH eguale alla NO , e prolunghisi la oS fino a che s'incontri colla NH nel punto I . Facendosi adunque la velocità NO , ovvero OH proporzionale allo spazietto Nn , che con essa si percorre; faranno proporzionali altresì i due piccioli trapezj $HOSI$, $MNnm$, che possono riguardarsi come due piccioli

rettangoli. Onde, perchè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto, farà componendo il triangolo NOH proporzionale all'area $ABMN$; ed in conseguenza, essendo quel triangolo la metà del quadrato fatto dalla NO , farà eziandio questo quadrato proporzionale all'area $ABMN$ (32).

71. In una maniera consimile dimostreremo parimente, che il quadrato della QR sia proporzionale all'area $ABPQ$. Onde non è egli da porsi in dubbio, che i quadrati delle velocità acquistate dal corpo per fino ai luoghi N , e Q siano come le aree corrispondenti $ABMN$, $ABPQ$. Quindi, se intorno al medesimo asse AC descrivasi la terza curva FG d'indole tale, che i quadrati delle sue ordinate NT , QU siano reciprocamente proporzionali all'aree $ABMN$, $ABPQ$; egli è facile il dimostrare, che i tempi, in cui si percorrono dal corpo gli spazj AN , AQ , siano come le aree corrispondenti di quest'altra curva.

72. In fatti, essendo il quadrato dell'ordinata NT reciprocamente proporzionale all'area $ABMN$; farà la stessa NT reciprocamente proporzionale alla velocità, che ritrovasi avere il corpo nel luogo N . Onde, attenta la maniera di definire il tempo nel moto eguabile, farà il picciolo tempo, in cui si percorre dal corpo lo spazietto Nn , proporzionale al picciolo trapezio $TNnt$, che può riguardarsi come un picciolo rettangolo. E poichè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto; perciò i tempi, in cui si percorrono dal corpo gli spazj AN , AQ , faranno come le aree corrispondenti della nuova curva FG .

VIII.

Delle forze vive, e della vera loro misura.

73. **L**E cose dette fin'ora intorno alle forze motrici ci danno bastante lume per definire la celebre controversia delle forze vive, la quale

quale tutta si aggira intorno alla maniera di definirle, e di porle a calcolo. Si appellano adunque col nome di forze vive tutte quelle forze, che non solo spingono continuamente i corpi, su de' quali agiscono, ma colle continue loro spinte ottengono altresì l'effetto di muovere gli stessi corpi; e di trasportargli per un qualche spazio, durante la loro azione,

74. Ciò, che poi si controverte intorno alle forze di questa indole, si è come debbano porsi a calcolo, e quale debba essere la vera loro misura. Imperocchè, essendo data la massa del corpo, su di cui agiscono, alcuni pretendono, che tali forze siano proporzionali alla velocità, che generano nel corpo almeno in un dato tempo; altri all'incontro sono nel sentimento; che le riferite forze corrispondano in proporzione non già alla semplice velocità, che da esse si genera nel corpo, ma bensì al di lei quadrato (33).

75. Ed in vero la prima cosa da noi stabilita intorno a qualsivisa forza motrice si è, che ella sia in ragion composta della diretta del moto prodotto, e della reciproca del tempo, che impiega a produrlo. Onde siccome essendo dato il tempo, la forza motrice deve essere nella semplice ragion diretta del moto prodotto; così, se insieme col tempo sia data ancora la massa del corpo, in cui il moto si produce, la stessa forza motrice dovrà essere proporzionale alla semplice velocità, che ella genera nel corpo.

76. La verità di ciò da nessuno rivocasi in dubbio, quante volte la forza agisce su 'l corpo una volta sola, e con una sola spinta genera in quella qualche velocità, e lo pone in moto. Ma sorge il dubbio intorno alla forza, che spinge il corpo continuamente, ed in ogni spinta aggiunge velocità all'istesso corpo. Imperocchè, siccome in questo caso per avere la forza, da cui deriva la totale velocità generata nel corpo, bisogna riunire insieme

tutte le forze, da cui si sono date al corpo le diverse spinte; così potrebbe avvenire, che la somma di queste forze fosse proporzionale al quadrato della riferita velocità.

77. Nè poi è da porsi in dubbio, che debbanfi riunire insieme tutte le forze, da cui si sono date al corpo le diverse spinte, per poterfi aver la forza, a cui deve ascriversi la totale velocità generata nel corpo. Poichè per prima siccome in ciascuna spinta si aggiunge velocità al corpo, così la forza nella totale sua azione viene a ripetersi tante volte, quante sono le spinte. E di poi potendo essere la forza variabile di sua natura, è necessario, che la medesima per ciascuna spinta si consideri in quel grado di attività, in cui ella era nel punto di dare al corpo quella spinta.

78. Or le forze, che danno al corpo le diverse spinte, in due maniere possono sommarfi insieme: cioè, o relativamente alle parti del tempo, in cui si sono date da essa al corpo quelle spinte; o relativamente alle parti dello spazio, che si percorre dal corpo in quel medesimo tempo. E quindi sorgono due teoremi diversi; poichè siccome sommandole per rapporto alle parti del tempo, la loro somma ritrovafi proporzionale alla semplice velocità generata nel corpo; così al contrario, se vogliansi sommare per rapporto alle parti dello spazio, la stessa somma si farà proporzionale al quadrato della riferita velocità.

Fig. 1. 79. Questi due teoremi di già sono stati dimostrati da noi di sopra. In fatti per quanto al primo, se la curva **CD** descritta intorno all' asse **AB** sia d' indole tale, che le ascisse **AN**, **AQ** ci additino i tempi, e le ordinate **MN**, **PQ** ci esprimano le attività della forza nella fine di quei tempi; chiaro si è, che le aree **ACMN**, **ACPQ** faranno le forze sommate insieme relativamente alle parti del tempo. Onde siccome le velocità generate nel corpo ne' tempi **AN**, **AQ** si sono dimostrate proporzio-

zionali all' aree $ACMN$, $ACPQ$; così le medesime velocità faranno proporzionali altresì alle riferite somme.

80. Per quanto poi al secondo, se la curva BD *Fig. 3.* descritta intorno all' asse AC sia di natura tale, che le ascisse AN , AQ siano gli spazj percorsi dal corpo, e le ordinate MN , PQ siano le attività della forza nei luoghi N , e Q ; chiara cosa ancora si è, che le aree $ABMN$, $ABPQ$ faranno le forze sommate insieme relativamente alle parti dello spazio. Onde, siccome i quadrati delle velocità, che ritrovasi avere il corpo ne' luoghi N , e Q , si sono dimostrati proporzionali all' aree $ABMN$, $ABPQ$; così i medesimi quadrati faranno proporzionali parimente alle riferite somme.

81. Ecco adunque donde deriva propriamente il dubbio, in cui si è intorno alla misura delle forze vive. Imperocchè, siccome queste tali forze agiscono continuamente su' l' corpo, ed aggiungono ad esso velocità in ogni spinta, che gli danno; così ciascuna forza si avrà con unire insieme le forze, che danno al corpo le diverse spinte. Onde se queste forze debbono sommarfi insieme relativamente alle parti del tempo, si farà la forza viva proporzionale alla semplice velocità generata nel corpo; ma se all' incontro dee prenderfi la loro somma relativamente alle parti dello spazio, la stessa forza viva corrisponderà in proporzione al quadrato della riferita velocità,

82. Intanto, se si voglia attentamente riflettere, si comprenderà facilmente, che per avere la forza viva debbano sommarfi relativamente alle parti del tempo le forze, che danno al corpo le diverse spinte; e ciò per la ragione, che essendo continua, e non mai interrotta l' azione della forza viva, le di lei diverse spinte si succedono eguabilmente, come le parti stesse del tempo. Onde dobbiam conchiudere, che la vera misura di qualsivisa forza viva debba ripeterfi dalla semplice velocità generata nel corpo,

po, e non già dal di lei quadrato: della quale verità eccone una breve, e netta dimostrazione.

83. Intendasi diviso il tempo, in cui la forza viva agisce su' l' corpo, in parti eguali, ed infinitamente picciole; ed essendo continua l' azione della forza viva, in ciascuna di quelle parti riceverà il corpo da essa una spinta. Onde siccome gli aumenti di velocità, che riceve il corpo con queste spinte, sono proporzionali alle forze, che li generano; così componendo eziandio la velocità totale corrisponderà in proporzione alla somma di quelle forze. Ma questa somma è la forza viva, che agisce su' l' corpo. Dunque la velocità totale del corpo, e la forza viva, da cui è stata prodotta, faranno parimente proporzionali tra loro.

84. Del rimanente alle forze vive sogliono opporsi le forze morte, per cui s' intendono quelle forze, che sebbene agiscono continuamente su' l' corpo, nientedimeno colla continuata loro azione non sono vevoli a porlo in moto: siccome farebbe il peso di un corpo sostenuto da un qualche piano, il quale non ostante la sua continuata pressione, non mai desta nel piano moto veruno. Ma egli è chiaro, che queste tali forze debbono averfi come morte soltanto per rapporto al corpo, su di cui agiscono, in quanto che incontrano in esso una resistenza, che non può vincersi dalla loro attività (34).

IX.

Della forza dell' inerzia, e dei suoi effetti principali.

85. **Q**uantunque la materia, di cui si compone ogni corpo, sia di sua natura inerte, e priva di ogni attività; nientedimeno conforme i corpi resistono alle forze impresse, così non da altro dee dedursi questa loro resistenza, se non se dall' inerzia stessa della loro materia: Onde non andarono errati coloro, che ci rap-

rappresentarono la materia come un peso inerte; poichè siccome non è da crederfi, che avessero avuto in mente quel peso, che deriva dalla gravità, per essere egli attivo di sua natura, e non già inerte; così è molto verisimile, non altra esser stata la loro mira, se non se di darci a divedere, che la materia per la stessa sua inerzia sia capace di opporsi a qualsivisa forza motrice.

86. Intendiamo adunque per forza d'inerzia quella resistenza, che oppongono i corpi alle forze motrici. E poichè una tal forza non deriva da una qualche causa esteriore, ma è insita alla stessa materia; perciò egli è facile ad intendersi, che la medesima in ogni corpo debba essere proporzionale alla massa, o sia copia di materia, che nell'istesso corpo si racchiude. Questa forza poi è stata conceduta dalla natura ai corpi tutti unicamente per poterli mantenere per mezzo di essa nello stato, in cui ritrovansi; ed appunto collo sforzo, che fanno i corpi per conservarsi nel loro stato, resistono alle forze motrici, le quali al contrario cercano da quello distoglierli.

87. Quindi se bene la forza dell'inerzia non sia capace di produrre moto alcuno, nientedimeno ad essa deve ascriversi la conservazione del moto generato nel corpo da una qualche forza motrice: tanto vero, che siccome non si diparte mai dal corpo una tal forza, così il corpo una volta mosso dee per mezzo di essa persistere sempre nel medesimo moto. E quantunque i moti, che si fanno presso di noi, vadansi minorando a poco a poco, ed alla per fine cessino interamente; tuttavolta non dobbiamo con taluni darci a credere, che ciò derivi da una natural propensione, che abbiano i corpi per la quiete, ma bensì dai continui ostacoli, che incontrano i corpi mossi, e che non possono da questi superarsi senza perdita di moto.

88. Or siccome ogni moto dee farsi con qualche velocità, così la forza dell'inerzia non fa altra co-
fa

fa nel corpo mosso, se non che conservargli quel grado di velocità impressogli dalla forza motrice; e perciò il suo moto di sua natura dovrà essere eguabile, ed uniforme. Onde al contrario, qualora vedesi cambiata la velocità del corpo, che si muove; bisognerà ascrivere quel cambiamento o a qualche ostacolo, che si è opposto al moto del corpo, o pure a qualche forza motrice, che abbia dato altro impulso all'istesso corpo. Anzi, se il cambiamento della velocità sia continuo, cosicchè il moto del corpo faccia variabile; conviene credere, che gli ostacoli, ovvero gl' impulsi siano parimente continui.

89. Per la forza dell'inerzia dee rimaner sempre la stessa, non solo la velocità del corpo, ma eziandio la sua direzione. E poichè, quando un corpo incomincia a muoversi, la direzione del suo moto è sempre una linea retta; perciò ogni moto di sua natura dovrà essere rettilineo. Nè vale il dire, che potrebbe un corpo incominciare il suo moto per una qualche linea curva. Imperocchè egli è noto presso de' Geometri, che ogni curva sia composta di rette infinitamente picciole, che traviano l'una dall'altra per angoli di una picciolezza ancora infinita. Onde, attesa questa nozione, non è egli da porsi in dubbio, che ogni moto nel suo principio debba farsi sempre per una linea retta.

90. Qualora adunque vedesi cambiata la direzione del moto, deve ascriversi quel cambiamento o a qualche ostacolo, in cui siasi incontrato il corpo, che si muove, o pure a nuovo impulso impresso all'istesso corpo da una qualche forza motrice. Anzi, se il cambiamento della direzione sia continuo, cosicchè il moto faccia curvilineo; conviene dire, che gli ostacoli, ovvero gl' impulsi siano eziandio continui. Attenta intanto la forza dell'inerzia, egli è facile il dimostrare, che il corpo mosso per una curva qualsivoglia cerca girare in ogni punto per la tangente con quella stessa velocità, che ritrovasi
ave-

avere in quel medesimo punto .

91. In fatti, con muoversi il corpo per una curva, non fa egli altra cosa, se non che percorrere successivamente le infinite picciole rette, che la compongono. Quindi considerandolo nello stato di aver percorso una di quelle picciole rette, dovrà egli per la forza dell'inerzia continuare il suo moto non solo per la stessa picciola retta prolungata, ma eziandio colla medesima velocità, con cui ritrovasi aver percorso quella picciola retta. Onde, siccome con prolungare la riferita picciola retta si viene ad avere la tangente della curva; così il corpo in ogni punto della curva, che descrive, cercherà di girsene per la tangente con quella stessa velocità, che ritrovasi avere il corpo in quel medesimo punto.

92. Vedesi ciò chiaramente nel corpo, che si porta in giro per mezzo di una fionda. Imperocchè siccome egli aggirasi intorno alla mano, che muove la fionda, in virtù della fionda medesima, che lo trattiene; così non per altra ragione sentesi la mano tirata dal corpo, se non perchè in ogni punto della curva cerca l'istesso corpo girsene per la retta, che tocca la curva in quel punto. E poichè la mano dal corpo tanto più sentesi tirata, quanto è più veloce il di lui moto; perciò nè pure è da porsi in dubbio, che in ogni punto cerca il corpo girsene per la tangente colla stessa velocità, che ivi ritrovasi avere (35).

X.

Della composizione, e risoluzione così delle forze, come de' moti.

93. **Q**ualora il corpo è spinto da una sola forza, siccome il suo moto deve essere proporzionale alla forza medesima, così di sua natura sarà eguabile ed uniforme, e si farà altresì colla stessa direzione, con cui il corpo è spinto dalla forza. Ma niente vieta, che un corpo

po sia spinto nell'istesso tempo da due, o più forze seconde direzioni diverse. Onde dobbiamo ora far vedere, quale sia il moto del corpo, che risulta da tutte quelle forze, e quale ancora la sua direzione.

94. Ed in primo luogo, se il corpo sia spinto da due forze, che separatamente lo trasportino in un dato tempo, e con moto eguabile per gli due lati di un qualche parallelogrammo, egli è facile il dimostrare, che le medesime insieme debbano trasportarlo nell'istesso tempo, ed eziandio eguabilmente per la diagonale del medesimo parallelogrammo. Sia perciò il corpo situato in *A*, da cui si percorra eguabilmente, ed in un dato tempo la *AB* con una forza, e la *AC* con un'altra forza. Compiscasi il parallelogrammo *ABDC*; ed io dico, che colle due forze insieme si percorrerà dal corpo eziandio eguabilmente, e nell'istesso tempo la sua diagonale *AD*.

95. In fatti, se bene il corpo sia spinto dalle due forze con direzioni diverse, nientedimeno col suo moto dovrà egli adempiere per quanto si può l'effetto così dell'una, come dell'altra. Onde, siccome il corpo dee condursi colla prima forza verso la *BD* parallela alla *AC*, e colla seconda verso la *CD* parallela alla *AB*; così bisognerà, che egli nella fine del suo moto si ritrovi nel punto *D*, che è comune alle due rette *BD*, *CD*. Ma dee condursi il corpo da *A* per fino a *D* con moto eguabile, e rettilineo, per non esservi altra forza, che possa mutargli la sua velocità, e la sua direzione. Dunque il corpo spinto dalle due forze dovrà percorrere eguabilmente, e nell'istesso tempo la diagonale *AD*.

96. La stessa verità può dimostrarsi ancora in un'altra maniera, cioè con supporre, che il corpo si muova col solo moto da *A* verso *B*, e che l'altro moto da *A* verso *C* risieda nella *AB*, su di cui il corpo si muove. Imperocchè in questa supposi-

zione il corpo si muoverà eziandio con due moti per la ragione, che oltre al suo moto proprio, il quale si fa egualmente, ed in un dato tempo sulla retta AB da A per fino a B , avrà altresì l'altro moto della retta AB , che si trasporta nello stesso tempo ancora egualmente da AB per fino a CD . Onde, se con questi due moti possiamo dimostrare, che il corpo descrive la diagonale AD ; non v'ha dubbio, che dovrà egli descrivere la stessa diagonale ancora, quando i due moti s'imprimono insieme allo stesso corpo.

97. Suppongasi adunque primieramente, che il corpo col proprio suo moto sia giunto al punto B . E poichè in questo caso la AB col moto suo dee ritrovarsi sull'altra CD ; perciò nella fine dei due moti si ritroverà il corpo nel punto D , su di cui cade il punto B . Suppongasi di poi, che portandosi la AB per fino alla sua parallela EF , il corpo si ritrovi nel punto G . E poichè AE , EG sono spazi percorsi con questi due moti nel medesimo tempo; farà pertanto AE ad EG , come la velocità del moto della retta alla velocità del moto del corpo. Ma per una ragione consimile nella stessa ragione di queste due velocità deve essere ancora AC ad AB ovvero CD . Dunque farà come AE ad EG , così AC a CD ; e pertanto il punto G devrà ritrovarsi nella diagonale AD .

98. Non è egli dunque da porsi in dubbio, che un corpo spinto da due forze vevoli a portarlo separatamente con modo eguabile, ed in un medesimo tempo per gli due lati AB , AC del parallelogrammo $ABDC$, debba descrivere colle due forze insieme la diagonale AD del medesimo parallelogrammo nello stesso tempo, e con moto eziandio eguabile; Onde, siccome i lati AB , AC disegnano tanto le velocità, che s'imprimono al corpo dalle due forze, quanto le loro direzioni; così qualora le stesse forze agiscono insieme su'l corpo, e questo si muove colle spinte, che riceve da ambedue,
dise-

disegnerà la diagonale AD non meno la velocità, che la direzione del suo moto.

Fig. 5. 99. Sia spinto ora il corpo, non solo dalle due forze AB , AC , ma ancora dalla terza AF ; ed in questo caso, se compiesi l'altro parallelogrammo $ADGF$, si porterà egli con moto eguabile per la diagonale AG di quest'altro parallelogrammo. In fatti essendosi dimostrato, che colle due forze AB , AC debba descrivere il corpo la diagonale AD del parallelogrammo $ABDC$; chiaro si è, che queste due forze insieme tanto potranno su'l corpo, quanto la sola forza AD ; e per tanto lo stesso farà, se spingasi il corpo colle tre forze AB , AC , AF , che spingasi colle due AD , AF . Ma essendo spinto dalle due forze AD , AF , deve egli descrivere eguabilmente la diagonale AG del parallelogrammo $ADGF$. Dunque ancora spinto dalle tre AB , AC , AF dovrà descrivere con moto eguabile la stessa diagonale.

100. In una maniera consimile, se il corpo sia spinto non solo dalle tre forze AB , AC , AF , ma eziandio dalla quarta AH ; dovrà egli muoversi con moto eguabile per la diagonale AI del terzo parallelogrammo $AGIH$. Imperocchè dovendo il corpo descrivere la AG , qualora è spinto dalle tre forze AB , AC , AF ; chiaro si è, che queste tre forze insieme tanto potranno su'l corpo, quanto la sola forza AG ; ed in conseguenza lo stesso farà, se spingasi il corpo colle quattro forze AB , AC , AF , AH , che se spingasi colle due AG , AH . Ma con queste due deve egli descrivere eguabilmente la diagonale AI del parallelogrammo $AGIH$. Dunque ancora con quelle quattro dovrà descrivere con moto eguabile la stessa diagonale. Ed egli è chiaro, che in questo modo, qualunque sia il numero delle forze, che spingono il corpo, possa sempre determinarsi il suo moto, e la sua direzione.

101. E quindi ora possiamo dedurne la composizione, e risoluzione delle forze, cotanto profittevole

le

le in esaminare i moti de' corpi. In effetto, descrivendosi dal corpo colle due forze AB , AC insieme la diagonale AD del parallelogrammo $ABDC$, faranno quelle forze su' l' corpo l'istesso effetto, che farebbe su di esso la sola forza AD . Onde siccome quelle due forze insieme compongono la sola forza AD , così al contrario questa sola forza AD potrà risolversi nelle due AB , AC . Generalmente adunque, se i lati di un qualche parallelogrammo disegnino non meno le forze componenti, che le loro direzioni; disegnerà la sua diagonale la quantità, e direzione della forza composta. Ed al contrario, se la quantità, e direzione di una forza disegnisi per una retta, intorno a cui come diagonale descrivesi un parallelogrammo, potrà risolversi quella forza in altre due, di cui così le quantità, come le direzioni faranno disegnate dai lati di detto parallelogrammo (36).

Fig. 4.

102. Essendo così, si vede primieramente, che sebbene date le forze componenti, debba esser data la forza composta, tutta volta non avviene l'istesso, se una data forza debbasi risolvere in altre due; e ciò per la ragione, che potendosi descrivere intorno ad una stessa diagonale infiniti parallelogrammi, potranno ricevere altresì infinite variazioni l'altre due forze, nelle quali dee risolversi la forza data. Si vede in secondo luogo, che siccome in un parallelogrammo, di cui sono dati i lati, la diagonale si fa maggiore o minore, secondochè è minore o maggiore l'angolo contenuto da detti lati; così la forza composta farà maggiore o minore, secondochè le forze componenti sono più o meno tra loro conspitranti.

103. Intanto, conforme in ogni parallelogrammo la diagonale ritrovasi essere sempre minore della somma, e maggiore della differenza dei due lati; così eziandio la forza composta dovrà essere sempre minore della somma, e maggiore della differenza delle due forze componenti. Ma egli è da

C

no-

notarsi, che ciò ha luogo, sempre quando le direzioni delle due forze componenti formano angolo; poichè se mai le due forze siano, o talmente co-
spiranti, che le loro direzioni ricadano sopra una medesima retta, o pure talmente contrarie, che le stesse direzioni siano tra loro a dirittura, allora la forza composta a simiglianza di ciò, che avviene alla diagonale del parallelogrammo per rapporto ai suoi lati, sarà eguale alla somma delle due forze componenti nel primo caso, ed alla differenza delle stesse forze nel secondo (37).

104. Del rimanente tutto ciò, che si è detto intorno alle forze, deve applicarsi altresì alle velocità, che da esse s' imprimono al corpo, ed in conseguenza ai moti, che ne derivano. Se adunque nel corpo si ritrovino due velocità disegnate per gli lati di un qualche parallelogrammo; queste insieme comporranno in esso una velocità, che dovrà esprimersi per mezzo della diagonale dell' istesso parallelogrammo. Ed al contrario, se la velocità, con cui muovesi il corpo, si disegni per una retta, intorno a cui come diagonale descrivasi un parallelogrammo, potrà ella risolversi in due altre velocità corrispondenti ai lati di quel parallelogrammo. Ed essendo così, eziandio intorno alla velocità composta debbono aver luogo gli stessi avvertimenti fatti per la forza composta (38).

XI.

Del moto curvilineo de' corpi, e specialmente di quello fatto con forza centrale.

105. **A** Vvertimmo di sopra, che conforme ogni moto di sua natura deve essere rettilineo; così non possa egli divenire curvilineo, se il corpo movendosi non sia spinto continuamente da una qualche forza motrice, che lo faccia traviare in ogni minima particella di tempo dalla sua primitiva direzione. Or come ciò avvenga, egli è facile
cile

cile presentemente ad intendersi, dopo essersi dimostrata la composizione, e risoluzione così delle forze, come de' moti. Fingiamo perciò, che il corpo con una data velocità si muova per la retta AB , e che il medesimo sia spinto continuamente da una forza motrice, che agisca su di esso con direzioni parallele all'altra retta AC . Io dico, che il moto del corpo dovrà essere curvilineo, e che la curva descritta da detto corpo si ritroverà nel piano delle due rette AB , AC (39). Fig. 6.

106. Per dimostrarlo, intendasi diviso il tempo in parti eguali, ed infinitamente piccole; e se il corpo nella prima di esse colla velocità finita, che egli ha, percorra sulla AB lo spazietto AD , dovrà il medesimo colla stessa velocità continuare il suo moto a dirittura, e percorrere nella seconda particella di tempo l'altro spazietto DE eguale al primo AD . Ma si vuole, che il corpo sia spinto continuamente da una forza motrice con direzioni parallele alla AC , colle quali spinte egli va ricevendo a poco a poco altra velocità diversa da quella, che già in essa risiede. Dunque se fingiamo, che nel luogo D riceva il corpo da quella forza una spinta valevole a fargli descrivere la DF nella seconda particella di tempo; avrà egli due moti, cioè uno per la DE , e l'altro per la DF , coi quali in conseguenza si porterà per la diagonale DG del picciolo parallelogrammo $DEGF$, e devierà dalla prima sua direzione AD .

107. Per la stessa ragione, se nella terza particella di tempo non avesse il corpo altra velocità se non se quella, con cui ha descritto la DG , dovrebbe continuare il suo moto a dirittura, e descrivere la GH eguale alla DG . Ma perchè nel luogo G riceve altra spinta da quella forza, che continuamente agisce su di esso; perciò se fingiamo, che quest' altra spinta sia valevole a fargli descrivere la GI nella terza particella di tempo, avrà egli parimente due moti, cioè uno per la GH ,
O 2
CH,

CH , e l'altra per la GI . Onde coi medesimi insieme si porterà per la diagonale GK dell'altro picciolo parallelogrammo $CHKI$, e devierà di nuovo dalla sua precedente direzione DG . E poichè lo stesso deve avvenire parimente in tutte l'altre particelle di tempo, perciò il moto del corpo si farà per una linea curva situata nel piano delle due rette AB , AC .

108. Nè poi è da porsi in dubbio, che sia vera curva la linea descritta dal corpo; essendo cosa facile il dimostrare, che ella si compone di rette infinitamente picciole, che traviano l'una dall'altra per angoli di una picciolezza ancora infinita. In fatti se bene sia finita la velocità, con cui muovesi il corpo sulla AB ; nientedimeno le due AD , DE , che si descrivono dal corpo con quella velocità nelle prime due particelle di tempo, debbono essere infinitamente picciole. Ma colla spinta, che riceve il corpo dalla forza nel luogo D , si genera in esso una velocità infinitamente picciola per rapporto a quella, che di già risiede nel corpo. Dunque la DF , ovvero EG sarà eziandio infinitamente picciola per rapporto alla DE , e perciò così la diagonale DG del picciolo parallelogrammo $DEGF$, come l'angolo EDG , per cui la stessa DG devia dalla AD , farà di una picciolezza infinita. Ed egli è chiaro, che la stessa dimostrazione debba aver luogo da per tutto.

Fig. 7. 109. Or se la forza, che spinge continuamente il corpo, sia centrale di sua natura, non solo sarà curvilineo il moto del corpo; ma le aree, che egli descrive intorno al centro della forza, faranno proporzionali ai tempi, in cui le descrive. Per dimostrarlo, muovasi di nuovo il corpo con una data velocità per la retta AB , e sia C il centro della forza, che lo spinge continuamente, e cerca di condurlo verso quel centro. In questo caso adunque le picciole rette DF , GI , che si descrivono dal corpo spinto dalla forza, prolungate si andranno
ad

ad incontrare nel punto C ; e se congiungansi l'altre rette CE , CK , faranno eguali tra loro tanto i due piccioli triangoli CDE , CDG , quanto gli altri due CGH , CGK . Ma, congiunta la retta AC , si fanno eguali similmente così i piccioli due triangoli CAD , CDE , come gli altri due CDG , CGH . Dunque i tre piccioli triangoli CAD , CDG , CGK faranno tra loro eguali.

110. Quindi, siccome sono eguali tra loro le particelle di tempo, in cui il corpo col suo moto curvilineo descrive le picciole rette AD , DG , GK ; così sono eguali parimente i piccioli triangoli CAD , CDG , CGK , che si estendono dal centro della forza per fino a quelle picciole rette. Ma la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto, e coi riferiti piccioli triangoli uniti insieme si hanno le aree, che percorre il corpo intorno al centro della forza. Dunque se la forza, che spinge il corpo continuamente, sia centrale di sua natura, non solo farà curvilineo il moto del corpo, ma le aree, che da esso si percorrono intorno al centro della forza, faranno proporzionali altresì ai tempi, in cui si percorrono: di modochè, se C sia il centro della forza, ed AMN la curva descritta dal corpo, farà il tempo per l'arco AM al tempo per l'arco AN , come l'area CAM all'area CAN .

Fig. 8.

111. Conforme poi il corpo deve essere spinto continuamente da una qualche forza, per poter egli descrivere una linea curva; così se mai la descriva con legge tale, che intorno ad un qualche punto percorra aree proporzionali ai tempi, quella forza, che lo spinge, farà quel medesimo punto. Sia perciò $ADCK$ la curva, che si descrive dal corpo; e sia ancora C il punto, intorno a cui dal medesimo corpo si percorrono aree proporzionali ai tempi. Prendansi in detta curva i due archetti infinitamente piccioli AD , DG ; e supposto, che questi archetti, i quali possono considerarsi come due picciole rette, descrivansi dal corpo in eguali parti-

Fig. 7.

celle di tempo, si faranno eguali le due piccole aree, o siano triangoli CAD , CDG .

112. Or se il corpo, dopo aver descritta nella prima particella di tempo la prima picciola retta AD , non fosse spinto nel luogo D da forza veruna; certo si è, che continuerebbe egli il suo moto a dirittura, e descriverebbe nella seconda particella di tempo la DE eguale alla AD . Onde, affinchè il corpo in vece della DE possa descrivere l'altra DG , bisognerà che egli nel luogo D sia spinto da una forza con direzione parallela alla EG . Ma per essere eguali tra loro tanto i due piccioli triangoli CAD , CDG , quanto i due CAD , CDE , si fanno eguali altresì i piccioli due triangoli CDG , CDE , i quali perciò debbono essere tra le stesse parallele. Dunque, facendosi la DC parallela alla EG , farà la stessa DC la direzione, con cui la forza spinge il corpo nel luogo D . E poichè la medesima dimostrazione ha luogo da per tutto, perciò la riferita forza farà centrale di sua natura, ed avrà per suo centro il punto C .

113. E quindi ora vedesi la verità di quel tanto fu avvertito di sopra, cioè che le forze, per mezzo di cui sono trattieneuti nei loro orbi tanto i pianeti primarij, quanto i pianeti secondarij, siano centrali di lor natura, e che nei primi diriganfi propriamente al centro del Sole, e nei secondi ai centri de' loro primarij. Imperocchè di già si è dimostrato, che qualora il corpo portasi per una curva con legge tale, che intorno ad un dato punto percorra aree proporzionali ai tempi, debba egli essere spinto continuamente da una forza centrale, che ha quel punto per suo centro. Ma convengono tra loro gli Astronomi, che i pianeti descrivono talmente i loro orbi, che si percorrano aree proporzionali ai tempi dai primarij intorno al centro del Sole, e dai secondarij intorno ai centri de' loro primarij. Dunque le forze, per mezzo di cui gli stessi pianeti sono trattieneuti nei loro orbi, saranno centrali

trali, e nei primarij si dirigeranno al centro del Sole, e nei secondarij ai centri de' loro primarij.

114. Del rimanente, qualora il corpo spinto da forza centrale si porta per una curva, egli è facile il dimostrare, che la sua velocità in qualsivisia punto della curva debba essere reciprocamente proporzionale alla perpendicolare, che dal centro della forza si abbassa sulla retta, che tocca la curva in quel punto. Sia però AMN la curva, che descrive dal corpo; e sia ancora C il centro della forza, per mezzo di cui egli la descrive. Prendansi in quella curva i due archetti infinitamente piccioli Mm , Nn ; e siccome questi archetti possono riguardarsi come due picciole rette, così i medesimi prolungati a dirittura ci daranno le rette MS , NT , che toccano la curva ne' punti M , ed N . Si abbassino adunque su di esse le perpendicolari CS , CT dal centro della forza C ; ed io dico, che le velocità del corpo nei punti M , ed N siano nella reciproca ragione di queste perpendicolari.

Fig. 8.

115. In fatti se fingiamo, che i due archetti Mm , Nn si descrivano dal corpo in eguali particelle di tempo; si faranno eguali tra loro le due picciole aree, o siano triangoli CMm , CNn ; e pertanto quegli archetti Mm , Nn , che sono basi di questi piccioli triangoli, faranno nella reciproca ragione delle loro altezze CS , CT . Ma gli stessi piccioli archetti si percorrono dal corpo in eguali particelle di tempo colle velocità, che ritrovasi avere il corpo ne' punti M , ed N . Dunque, siccome queste velocità debbono essere tra loro nella diretta ragione di quei piccioli archetti; così le medesime faranno altresì nella ragion reciproca delle perpendicolari CS , CT abbassate dal centro della forza C sulle tangenti MS , NT (40).

Dei corpi, che si muovono circolarmente con moto eguabile, ed uniforme.

116. **S**E un corpo muovasi eguabilmente per una circonferenza di cerchio, non v' ha dubbio, che egli debba essere spinto continuamente da una forza centrale, che ha per centro il centro stesso del cerchio. Imperocchè, essendo eguabile il di lui moto, faranno gli archi, che egli descrive, proporzionali ai tempi, in cui li descrive. Ma nella ragione di quegli archi sono ancora i settori, che li corrispondono. Dunque percorrendo il corpo intorno al centro del cerchio aree, ovvero settori proporzionali ai tempi, per necessità la forza, che lo trattiene nella circonferenza del cerchio, dovrà dirigersi al di lui centro.

117. Ma il converso di ciò può dimostrarsi ancora facilmente, e si è, che se il corpo spinto da forza centrale si porti per una circonferenza di cerchio, che abbia per suo centro l'istesso centro della forza, il di lui moto debba essere eguabile, ed uniforme. In fatti per ciò, che si è dimostrato di sopra, le velocità del corpo in punti diversi della circonferenza, che egli descrive, debbono essere nella reciproca ragione delle perpendicolari, che dal centro della forza si abbassano sulle rette, che toccano la circonferenza in quei medesimi punti. Ma queste perpendicolari cadono sulli punti del contatto; ed in conseguenza come raggi del cerchio sono tra loro in ragion di uguaglianza. Dunque ancora le velocità del corpo faranno tra loro eguali (41).

118. Or se mai due corpi muovansi eguabilmente per le circonferenze di due cerchi diversi, le forze centrali, da cui sono spinti continuamente, faranno in ragion composta della duplicata diretta degli archi, che descrivono nell'istesso tempo, e

Fig. 9. della semplice reciproca de' raggi. Siano perciò
AMD,

E DEL MOTO DE' CORPI. 41

AMD, **BNE** le circonferenze descritte dai due corpi intorno al comune loro centro **C**; e supposto, che **Aa**, **Bb** siano due archetti infinitamente piccioli, faranno i loro seni versi **AF**, **BG** i piccioli spazj, che descriverebbero i due corpi colle forze, da cui sono spinti, nel mentre portansi per quegli archetti. Onde, se fingiamo inoltre, che gli stessi archetti si descrivano dai due corpi in una medesima particella di tempo; faranno le forze, che spingono i due corpi, nella ragione delle due **AF**, **BG**.

119. Or essendo gli archetti **Aa**, **Bb** di una picciolezza infinita, non differiranno i medesimi dalle loro corde; e perciò i loro quadrati, come eguali ai rettangoli **DAF**, **EBG**, faranno nella ragion composta della diretta delle due **AF**, **BG**, e della diretta ancora dell'altre due **AD**, **BE**. Quindi siccome le due **AF**, **BG** ritrovansi essere nella ragion composta della diretta di quei quadrati, e della reciproca dell'altre due **AD**, **BE**; così in questa stessa ragion composta faranno ancora le forze, che spingono i due corpi. Ma descrivendosi le circonferenze eguabilmente, i due piccioli archetti **Aa**, **Bb** sono, come due archi **AM**, **BN** descritti in qualsivis tempo finito; e per essere le due **AD**, **BE** diametri delle circonferenze, la loro ragione è la stessa con quella de' raggi **CA**, **CB**. Dunque le forze, da cui sono spinti i due corpi, faranno altresì in ragion composta della duplicata diretta di due qualsivisiano archi **AM**, **BN** descritti nel medesimo tempo, e della semplice reciproca dei raggi **CA**, **CB** (42).

120. Per essere poi il moto de' corpi eguabile, ed uniforme, chiaro si è, che conforme gli archi **AM**, **BN** descritti nel medesimo tempo sono, come le velocità, con cui si descrivono; così queste stesse velocità siano nella ragion composta della diretta dell'intero circonferenze, o pure de' raggi **CA**, **CB**, e della reciproca de' tempi, che impiegano i corpi

corpi a fare i loro giri, o siano periodi. E quindi forgono due altri teoremi, di cui il primo si è, che le forze, da cui sono spinti i due corpi, siano nella ragion composta della duplicata diretta delle velocità, e della semplice reciproca de' raggi; ed il secondo, che le stesse forze siano nella ragion composta della semplice diretta de' raggi, e della duplicata reciproca de' tempi periodici (43).

121. Essendo così, vedesi chiaramente, che se mai sia nota la ragione, in cui sono tra loro i tempi periodici; niente sia più facile, quanto il definire, come debbano essere tra di esse le forze, che spingono i due corpi. In fatti, se i tempi periodici siano nella semplice ragion diretta de' raggi, le forze dovranno essere nella semplice reciproca degli stessi raggi. Se poi i tempi siano nella sesquiplata ragion diretta de' raggi, cosicchè i loro quadrati siano come i cubi fatti dai raggi; in tal caso le forze faranno nella duplicata reciproca degli stessi raggi. Ed in fine, se vogliasi, che i tempi periodici siano nella ragion duplicata diretta de' raggi, si ritroveranno essere le forze nella ragion triplicata reciproca de' medesimi raggi.

122. Il caso di essere le forze nella reciproca duplicata ragione de' raggi ha luogo nel moto de' corpi celesti. Imperocchè si conviene oggi di presso gli Astronomi, che questi moti facciano con legge tale, che i quadrati de' tempi periodici siano nei pianeti primari, come i cubi delle loro distanze dal centro del Sole, nei satelliti di Giove come i cubi delle loro distanze dal centro di Giove, e nei satelliti di Saturno come i cubi delle loro distanze dal centro di Saturno. Onde conforme si è fatto vedere, che tutti questi corpi sono tratti in ne' loro orbi per forze, che dirigonsi ai riferiti centri; così dobbiam conchiudere ancora, che queste forze si diramino talmente intorno ai loro centri, che con discostarsi da essi si minorino in duplicata ragione della distanza.

123. Egli è vero, che per non esservi altro corpo, che a simiglianza della Luna giri intorno alla terra, non possa adattarsi la stessa dimostrazione alla forza, che trattiene la Luna nel suo orbe, e che dirigesì al centro della terra. Ma essendo il moto della Luna fenomeno dell' istessa indole coi moti degli altri pianeti, conviene credere, che ancora quest' altra forza si spanda colla stessa legge intorno al suo centro. E poichè egli è facile il supputare, che colla forza relativa alla Luna si descriverebbe quì giù in una seconda di tempo quel medesimo spazio, che descrivesì dai corpi terrestri colla forza della gravità; perciò è da crederfi ancora, che la forza della gravità si dirami perfino alla Luna, e che dalla medesima forza sia trattenuta la Luna nell' orbe, che ella descrive intorno alla terra.

124. Nè vale il dire, che gli orbi, per cui si portano i pianeti intorno ai centri delle loro forze, siano più tosto ellittici; e che il centro della forza per qualsivisa pianeta risieda in uno de' fochi dell'ellisse, che egli descrive. Imperocchè per prima, sebbene i riferiti orbi siano ellittici di lor natura, tuttavia i fochi della maggior parte di essi sono così poco distanti dai loro centri, che niente vieta di riguardargli come orbi circolari. E di poi, se la curva descritta dal corpo con forza centrale sia ellisse, ed il centro della forza risieda in uno de' suoi fuochi; egli è facile il dimostrare, che la forza con discostarsi dal suo centro tuttavia debba minorarsi in duplicata ragione della distanza. Anzi se del corpo prendasi quella distanza dal centro, che è mezza tra la massima, e la minima; pure il tempo periodico si ritroverà essere nella sesquuplicata ragione della riferita distanza (44).

128. Del rimanente di già fu avvertito di sopra, che portandosi il corpo per una curva con qualsivisa forza, cerca egli in ogni punto di girsene per la tangente in virtù della sua forza d'inerzia colla
stessa

stessa velocità, che ritrovasi avere in quel punto. Quindi in ogni moto curvilineo oltre alla forza, che trasporta il corpo dalla tangente verso la curva, deve considerarsene ancora un'altra, che al contrario cerca di riportare il corpo dalla curva verso la tangente. E siccome per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che queste due forze siano tra loro eguali, e contrarie; così nè pure si durerà fatica ad intendere, che se la prima sia centrale di sua natura, debba essere centrale ancora la seconda: col divario bensì, che in luogo di tirare il corpo verso il centro, si studia al contrario di allontanarlo da quello; onde si è, che la prima chiamasi forza centripeta, e la seconda forza centrifuga.

126. Attenta intanto la contrarietà, ed uguaglianza di queste due forze, chiaro si è, che altrettanto si è dimostrato intorno alle forze centripete, che costringono i corpi a muoversi eguabilmente per circonferenze de' cerchi, debba aver luogo parimente a riguardo delle loro forze centrifughe. Onde la ragione di quest'altre forze eziandio sarà composta o della duplicata diretta degli archi, che si descrivono dai corpi nell'istesso tempo, e della semplice reciproca de' raggi; o della duplicata diretta delle velocità, con cui muovonsi i corpi, ed eziandio della semplice reciproca de' raggi; o finalmente della semplice diretta de' raggi, e della duplicata reciproca de' tempi periodici: dai quali teoremi generali egli è facile di dedurne infiniti altri speciali.

XIII.

*Dell' azione, e reazione; ed in qual senso
siano eguali, e contrarie.*

127. **U**N corpo, che si muove, allora propriamente dicesi agire, quante volte la forza, che egli ha per ragion del suo moto, è im-

impiegata contra un altro corpo, che gli resiste. Colla resistenza intanto, che gli oppone quest'altro corpo, non è egli da porsi in dubbio, che ancora il secondo corpo agisce su'l primo. Quindi l'azione di un corpo, che agisce, dee sempre andare accoppiata colla reazione dell'altro, che resiste; e perciò suol dirsi comunemente, che ogni agente nello stesso tempo, che agisce, sia costretto di soffrire colla sua azione medesima.

128. Or siccome l'azione, e reazione debbono sempre accoppiarsi insieme, nè mai può disgiungersi l'una dall'altra; così per picciola riflessione, che voglia farsi, s'intenderà facilmente, che le medesime debbano essere non solo contrarie, ma eziandio eguali tra loro. In fatti se potesse darsi un'azione maggiore della reazione, che incontra; senza dubbio quel più di azione non avrebbe reazione contraria. Onde almeno in parte potrebbe agire il corpo senza reazione, il che certamente non può intendersi (45).

129. Intanto una verità così chiara, e manifesta rivocasi da taluno in dubbio per la ragione, che se mai l'azione, e reazione fossero sempre eguali, e contrarie, non mai potrebbe nascere moto dalla scambievole azione di due corpi, come quei, che per la riferita contrarietà, ed uguaglianza dovrebbero rimanere tra loro sempre in equilibrio. Onde, per rispondere alla difficoltà proposta, e togliere altresì ogn'altro dubbio dall'argomento, di cui si tratta, giova esaminare queltanto deve avvenire ai due corpi colla scambievole loro azione.

130. Ed in vero, siccome la forza di agire nel corpo, che si muove, deriva dal suo moto; così nell'azione, che esercita l'istesso corpo su di un altro, che gli resiste, deve egli impiegare porzione di quel moto. Intanto, se bene dal corpo agente perdasi quella porzione di moto, che impiega nella sua azione; nientedimeno la stessa porzione di moto non già si distrugge, ma dal corpo agente
 si tram-

si trammanda colla medesima direzione all' altro , che resiste . Onde ciò , che avviene nella scambievole azione dei due corpi , si è , che quanto moto perdesi dal corpo agente , altrettanto ne acquista l' altro resistente .

131. Conforme poi la perdita di moto , che soffre il corpo agente , deriva dalla sua azione ; così l' acquisto , che ne fa l' altro corpo resistente , deve ascriversi alla sua reazione , o sia resistenza ; e quindi si è , che l' azione , e reazione siano , non solo contrarie , ma eguali ancora tra loro . Imperocchè siccome la contrarietà riluce nella perdita di moto , che soffre l' uno , e nell' acquisto , che ne fa l' altro ; così l' uguaglianza ricavasi da ciò , che la quantità di moto perduta dal corpo agente , e l' altra acquistata dal corpo resistente siano tra loro eguali .

132. Or siccome la scambievole azione dei due corpi deve esercitarsi per fino a che rendonfi incapaci di poter più agire , e reagire tra esso loro ; così per poco , che si voglia riflettere , si comprenderà facilmente , che ciò debba avvenire ; quante volte dal corpo agente si è trammandato tanto di moto al corpo resistente , che ritrovansi avere la stessa velocità , e la stessa direzione . Ed in fatti , qualora due corpi si muovono insieme con eguali velocità , non può il corpo , che segue , spingere l' altro , che precede ; onde nè il primo potrà agire su' l' secondo , nè il secondo resistere al primo .

133. Per quanto al corpo resistente , niente vieta , che egli prima dell' azione eziandio si muova ; onde in questo caso , seguita l' azione , si ritroveranno in esso due moti : cioè il moto , di cui prima godeva ; e l' altro trammandatoli dal corpo agente . Questi due moti intanto possono avere direzioni o cospiranti tra loro , o pure contrarie . Per lo che siccome nel primo caso si muoverà il corpo colla somma dei due moti , e colla comune loro direzione ; così nel secondo caso dovrà egli muoversi colla dif-

differenza dei due moti, e colla direzione del moto maggiore.

134. Se poi si voglia attentamente riflettere, si vedrà, che le direzioni dei due riferiti moti debbano essere conspiranti, o contrarie, secondochè erano conspiranti, o contrarie le direzioni degli altri due moti, con cui prima dell' azione muoveansi i corpi. Onde non si durerà fatica ad intendere, che siccome muovendosi i corpi verso la stessa parte, colla scambievole loro azione non deve alterarsi la somma de' loro moti; così muovendosi a parti contrarie non dovrà cambiarsi la loro differenza.

135. Si vede adunque, che tre cose debbono avvenire ai corpi colla scambievole loro azione. I, che quanto moto perde il corpo, che agisce, altrettanto ne acquista l'altro, che resiste, II, che terminata l'azione debbano i due corpi andare unitamente colla stessa velocità, e colla stessa direzione. E III finalmente, che così la somma de' moti fatti verso la stessa parte, come la differenza de' moti fatti a parti contrarie, non debba alterarsi colla scambievole azione dei due corpi.

136. Si vuol però qui notare, che la comune velocità, con cui debbono andare unitamente i corpi, seguita l'azione, potrebbe talvolta essere nulla. Avviene ciò, quando i corpi prima dell' azione si muovono a parti contrarie con moti eguali; poichè, facendosi nulla la differenza de' loro moti, che dee rimanere dopo l'azione, dovrà essere nulla parimente la riferita velocità. Ed ecco l'unico caso, in cui dalla scambievole azione di due corpi non risulta moto veruno, ma restano i due corpi seguita l'azione fermi ed immobili.

137. Del rimanente per la perfetta intelligenza di questanto finora si è detto, giova l'avvertire, che sebbene il fonte di ogni resistenza sia la forza dell' inerzia, la quale corrisponde in proporzione alla massa del corpo, che resiste; nientedimeno, siccome per mezzo di essa si sforza il corpo di
man-

mantenerfi nello stato, in cui egli ritrovafi; così trattandosi della resistenza, che oppone un corpo ad un altro corpo, dee tenerfi conto così della forza dell'inerzia, come dello stato stesso del corpo; onde si è, che un medesimo corpo può resistere in varie guise.

138. Questo stato intanto dee considerarsi non già in se stesso, ma relativamente al corpo, che agisce; e perciò egli può essere di tre specie: cioè, o stato di moto cospirante, ma meno celere; o stato di quiete, ovvero di privazione di moto; o finalmente stato di moto contrario. Qualunque però siasi lo stato del corpo, che resiste, egli colla scambievole azione dee ridursi a stato di moto cospirante, ed ugualmente celere; e ciò per la ragione, che con questo nuovo stato cessa così l'azione, come la resistenza, o sia reazione (46).

XIV.

Delle leggi del moto nell' incontro de' corpi inerti.

139. **D**Ai principj ora stabiliti egli è facile di dedurne le leggi di moto, che debbono aver luogo nell'incontro de' corpi. Nello stabilimento intanto di queste leggi giova distinguere due specie di corpi; e ciò per la ragione, che alcuni agiscono colla sola forza, che deriva dal loro moto; altri all'incontro possono agire ancora con un'altra forza, che si desta in essi per mezzo della percossa, ed appellasi forza elastica. Onde dando ai primi il nome di corpi inerti, ed ai secondi il nome di corpi elastici; primieramente ragioneremo delle leggi, che si osservano nell'incontro de' corpi inerti; indi di quelle, che osservar si debbono nell'incontro de' corpi elastici.

140. Per l'intelligenza di queste leggi giova prima l'avvertire, che se esprimasi con numeri, così la massa o sia peso del corpo, che si muove, come
la

la velocità, che ritrovafi avere l'istefio corpo; fi potrà esprimere col prodotto di quefti due numeri la quantità di moto, che rifiede nel medefimo corpo. Così, fe il corpo A abbia 2 libbre di peso, e 5 gradi di velocità; diremo, che il fuo moto fia di 10 gradi, per effere 10 il prodotto di 2 per 5. E così ancora fe l'altro corpo B abbia 3 libbre di peso, e 4 gradi di velocità; diremo, che il fuo moto fia di 12 gradi, per effere 12 il prodotto di 3 per 4.

141. La ragione è chiara. Imperocchè, fecondo fi vide di fopra, i moti dei due corpi A, e B debbono effere in ragione compofita dei loro pefi, e delle loro velocità. Onde, effendo per fuppoftione i pefi di effi nella ragione di 2 a 3, e le velocità nella ragione di 5 a 4; farà il moto del corpo A al moto del corpo B in ragion compofita di 2 a 3, e di 5 a 4. Ma moltiplicando tra loro così gli antecedenti 2, e 5, come i confequenti 3, e 4 di quefte due ragioni, ancora i prodotti 10, e 12 fono nella ifteffa ragion compofita. Dunque il moto del corpo A al moto del corpo B farà, come 10 a 12; e pertanto effendo il moto del corpo A di 10 gradi, farà di gradi 12 il moto del corpo B.

142. Quindi al contrario, fe fia efpreffo con numeri così il moto di un corpo, come il fuo peso, potrà efprimerfi la di lui velocità per mezzo del quoziente, che ricavafi dalla divifione del primo numero per lo fecondo. Così, fe il moto del corpo A fia di 10 gradi, ed il fuo peso di 2 libbre; diremo, che la fua velocità fia di 5 gradi, per effere 5 il quoziente, che fi deduce dalla divifione di 10 per 2. E fimilmente, fe il moto del corpo B fia di 12 gradi, ed il fuo peso di 3 libbre; diremo, che la fua velocità fia di 4 gradi, per effere 4 il quoziente, che fi ricava dalla divifione di 12 per 3.

143. Premefse tali cofe, veniamo ora alle leggi di moto, che debbono aver luogo nell'incontro de'

D

cor-

corpi inerti. Riduconsi queste leggi a far vedere, come dati i corpi, che s'incontrano e dati i moti, con cui s'incontrano, possano determinarsi gli altri moti, che debbono avere gli stessi corpi dopo l'incontro. Onde è necessario, che siano a noi note non solo le masse, ovvero pesi dei due corpi, ma eziandio le loro velocità, e le loro direzioni; poichè siccome coi pesi, e colle velocità conosceremo i primitivi moti dei due corpi, così per mezzo delle direzioni sapremo altresì, se quei moti facciano verso la stessa parte, o pure a parti contrarie (47).

144. Adunque, dopo essersi determinati i primitivi moti dei due corpi, prendasi o la loro somma se facciano verso la stessa parte, o la loro differenza se facciano a parti contrarie. E poichè i due corpi dopo l'incontro debbono talmente muoversi insieme con una stessa velocità, che non deve alterarsi la somma, o differenza de' loro moti primitivi; perciò se la stessa somma, o differenza dividasi per lo peso dei due corpi insieme, il quoziente di questa divisione ci darà la comune velocità dei due corpi, dalla quale poi egli è facile di dedurne i loro moti (48).

145. Per ischiarire questa regola generale con esempi speciali, siano A, e B due corpi, di cui il primo A sia di 2 libbre, ed il secondo B di libbre 3. Muovansi primieramente questi corpi verso la stessa parte, e sia di 5 gradi la velocità del primo A, che precede, e di gradi 10 la velocità dell'altro B, che inseguendo il primo A, dovrà finalmente incontrarlo. Poichè dunque il primo A è di 2 libbre, ed il medesimo muovesi con 5 gradi di velocità; farà il suo moto primitivo di gradi 10. E così ancora, perchè il secondo A è di 3 libbre, e la sua velocità è di 10 gradi; farà il suo moto primitivo di gradi 30.

146. Facendosi poi questi moti verso la stessa parte, coll'incontro dei due corpi non dovrà alterarsi

E DEL MOTO DE' CORPI. 51

rarfi la loro somma, che ritrovafi essere di gradi 40. Onde essendo di 5 libbre il peso dei due corpi insieme, si avrà la comune velocità degli stessi corpi dopo l'incontro, con dividere 40 per 5. E poichè il quoziente di questa divisione ritrovafi essere 8, perciò la riferita comune velocità farà di 8 gradi. Onde dopo l'incontro farà di gradi 16 il moto del corpo A, e di gradi 24 il moto del corpo B: coi quali moti continueranno i due corpi a muoversi verso la stessa parte, per cui muoveansi prima dell'incontro (49).

147. Suppongafi ora, che i due corpi A, e B colle stesse velocità muovansi a parti contrarie; ed in questo caso per mezzo dell'incontro non dovrà alterarsi la differenza de' loro moti, che ritrovafi essere di gradi 20; onde, per avere la comune velocità dei due corpi dopo l'incontro, bisognerà dividere 20 per 5. E poichè il quoziente di quest'altra divisione ritrovafi essere 4, perciò la riferita comune velocità farà di 4 gradi, ed in conseguenza dopo l'incontro farà di gradi 8 il moto del corpo A, e di gradi 12 il moto del corpo B: i quali moti si faranno verso quella parte, per cui faceasi prima dell'incontro il moto maggiore del corpo B (50).

148. Suppongafi finalmente, che dei due corpi A, e B il primo A sia in quiete, e l'altro B muovasi verso di esso eziandio con 30 gradi di moto. Effendo adunque in quiete il corpo A, potrà dirsi, che egli abbia zero di moto; onde o che i moti si considerino fatti verso la stessa parte, o a parti contrarie, così la loro somma, come la loro differenza farà di gradi 30. Quindi per avere la comune velocità dei due corpi dopo l'incontro, dovrà dividerfi 30 per 5; ed essendo 6 il quoziente di questa divisione, farà la riferita comune velocità di 6 gradi. Onde dopo l'incontro farà di gradi 12 il moto del corpo A, e di gradi 16 il moto del corpo B: i quali moti si faranno verso la stessa parte, per cui faceasi prima dell'incontro il moto del corpo B (51).

140. Del rimanente dalle riferite leggi di moto egli è facile il ricavarne, che non possa un corpo imprimere successivamente eguali gradi di velocità ad un'altro corpo eguale, se la sua velocità non sia di due gradi essendo l'altro quiescente, di tre gradi muovendosi l'altro col grado impresso, di quattro gradi muovendosi l'altro coi due gradi ricevuti, e così all'infinito. Quindi, riguardando la forza viva come un mobile, che imprime continuamente velocità al corpo, su di cui agisce, credesi da taluni potersi facilmente dimostrare, che la riferita forza debba essere proporzionale al quadrato della totale velocità impressa al corpo, eziandio nella supposizione di doverli sommare relativamente alle parti del tempo i varj gradi della sua attività; ed ecco come.

Fig. 10.

150. Intendasi la AB divisa in parti eguali, ed infinitamente picciole, colle quali esprimansi così le eguali particelle di tempo, in cui si danno dalla forza viva al corpo le diverse spinte, come le eguali particelle di velocità, che riceve il corpo con quelle stesse spinte. Adunque siccome la forza viva, per imprimere al corpo la prima particella di velocità, deve averne due; così dovrà averne tre per imprimergli la seconda, quattro per imprimergli la terza, e così all'infinito. Quindi le attività della forza nelle diverse particelle del tempo dovranno esprimersi per le corrispondenti ordinate del triangolo ABC. Onde la loro somma, come proporzionale all'istesso triangolo, farà in duplicata ragione così della totale velocità impressa al corpo, come del tempo impiegato ad imprimergliela.

151. Ma per prima si vuol notare, che la maniera di agire delle forze, che continuamente spingono i corpi, è molto diversa da quella, con cui agiscono i corpi, che si muovono; e ciò per la ragione, che questi con agire perdono sempre porzione del loro moto, quandochè le forze nelle loro azioni niente perdono della loro attività. Di poi colla riferita dimo-

dimostrazione si farebbe la forza viva proporzionale al quadrato della velocità generata nel corpo soltanto nel caso, che aumentasi la velocità del corpo in ragion del tempo. Ed in fine ancora quando un corpo col suo moto agisce su di un'altro corpo, che gli resiste, dee giudicarsi della forza, da cui deriva l'azione, per mezzo del solo moto, che egli perde; giacchè l'altro rimanente gli ha servito più tosto per essere in istato d'impiegare nell'azione la porzione di moto perduta (52).

XV.

Delle leggi del moto nell'incontro de' corpi elastici.

152. **L**E precedenti leggi di moto hanno luogo nell'incontro de' corpi inerti, i quali agiscono colla sola forza, che deriva dal loro moto; conforme sono, o i corpi, che col loro incontro affatto non si piegano; o pure quei, che piegandosi sono incapaci di rimettersi nel primo loro stato. Ma oltre a questi corpi abbiamo ancora gli elastici, che quantunque siano pieghevoli, possono tutta volta ritornare al primo stato per mezzo della forza elastica, che si desta in essi colla percossa. Onde passeremo ora a far vedere, quali siano le leggi del moto nell'incontro de' corpi elastici, per cui bisogna tener conto così della forza, che nasce dal loro moto, come dell'altra, che si risveglia in essi coll'urto medesimo.

153. Ed in vero, conforme due corpi elastici comprimendosi col loro incontro, hanno forza per rimettersi nel primo stato; così con questa forza generansi in essi velocità, con cui portansi a parti contrarie. Quindi nell'incontro di questi corpi, oltre di quella comune velocità, con cui si muoverebbero insieme verso la stessa parte, se fossero inerti, debbono considerarsi ancora le velocità, che ricevono dalla loro forza elastica. E conforme cia-

scuno dei due corpi ritrovafi avere dopo l'incontro due velocità, una comune, e l'altra propria; così il corpo, che precede, si muoverà colla somma delle due sue, per essere cospiranti le loro direzioni; e l'altro, che segue, si muoverà al contrario colla differenza delle due, che gli spettano, per essere le direzioni di quest'altre tra loro contrarie (53).

154. Ma siccome per la contrarietà delle direzioni, che ritrovansi avere le due velocità del secondo corpo, deve egli muoversi colla differenza di quelle velocità; così per la stessa ragione bisognerà parimente, che il medesimo si muova colla direzione della velocità maggiore. Onde, se mai sia maggiore la velocità, che gli spetta come corpo inerte, dovrà muoversi verso la stessa parte del primo corpo; ma se al contrario sia maggiore la velocità, che riceve dalla forza elastica, il suo moto dovrà farsi verso la parte opposta. Niente però vieta, che le due sue velocità siano tal volta tra loro eguali; ed in questo caso, per farsi nulla la differenza di esse, rimarrà il corpo senza moto, ed in conseguenza fermo ed immobile.

155. Or conforme i due corpi elastici si comprimono colla stessa velocità, con cui s'incontrano; così per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che questa velocità sia eguale o alla differenza delle velocità, che risiedono nei due corpi, se i loro moti facciano verso la stessa parte; o pure alla somma di esse, se gli stessi moti facciano a parti contrarie. Onde, se mai i corpi siano perfettamente elastici, cosichè ritornino al primo loro stato colla stessa forza, con cui si comprimono; eziandio la velocità generata nei due corpi insieme dalla loro forza elastica farà eguale o alla differenza delle velocità, che risiedevano ne' corpi prima dell'incontro, o pure alla loro somma (54).

156. Nè poi è egli difficile ad intendersi, come la velocità generata nei due corpi insieme dalla loro

loro forza elastica, debba distribuirsi agli stessi corpi. Imperocchè, qualora dopo la compressione cercano i due corpi di rimettersi nel primo stato, non v'ha dubbio, che tuttavia agiscono tra esso loro. Onde conforme l'azione, e reazione sono sempre eguali, e contrarie; così faranno eguali, e contrarij i moti, con cui i corpi effettivamente si rimettono nello stato di prima. E perciò la distribuzione della riferita velocità dee farsi in modo, che le porzioni da darsi ai due corpi con direzioni opposte siano reciprocamente proporzionali ai loro pesi; poichè in questa guisa vengono ad essere eguali, e contrarij i moti, che ne risultano (55).

157. Essendo così, ecco ora, che dee farsi per definire le leggi del moto nell'incontro de' corpi perfettamente elastici. Primieramente ritrovisi la comune velocità, con cui i due corpi si muoverebbero insieme verso la stessa parte, se fossero inerti. Indi la velocità, con cui s'incontrano, distribuisca si ad essi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. E conforme dopo l'incontro il corpo, che precede, dee muoversi colla somma di quella velocità comune, e di quest'altra propria; così il moto dell'altro corpo dovrà farsi colla differenza tra la stessa velocità comune, e l'altra sua propria: il quale moto, dovendosi fare colla direzione della velocità maggiore, talvolta si farà verso la stessa parte, ove portasi il primo corpo, talvolta verso la parte opposta.

158. Siano adunque A, e B due corpi perfettamente elastici, di cui il primo A sia di 2 libbre, ed il secondo B di libbre 3. Muovansi primieramente questi corpi verso la stessa parte con velocità tali, che il primo A ne abbia 5 gradi, ed il secondo B gradi 10; e di già, se i corpi fossero inerti, la comune loro velocità dopo l'incontro farebbe di 8 gradi. Ma muovendosi i due corpi verso la stessa parte, dee farsi il loro incontro colla differenza delle loro velocità, che è di gradi 5; e distri-

buendo ad essi questa velocità nella reciproca ragione de' loro pesi, il primo A di 2 libbre ne deve avere 3 gradi, ed il secondo B di libbre 3 deve averne gradi 2. Dunque dopo l'incontro la velocità del primo A farà di 11 gradi, e la velocità del secondo B di gradi 6, colle quali velocità si muoveranno i due corpi verso la stessa parte (56).

159. Muovansi in appresso gli stessi corpi colle stesse velocità a parti contrarie, dimodoche l'uno vada contro dell'altro. Ed in quest'altro caso conforme, se i corpi fossero inerti, la comune loro velocità dopo l'incontro farebbe di 4 gradi; così, per muoversi a parti opposte, si farà il loro incontro colla somma delle loro velocità, che è di gradi 15. Quindi distribuendo ad essi questa velocità nella reciproca ragione de' loro pesi, il primo A di 2 libbre ne avrà 9 gradi, ed il secondo B di libbre 3 ne avrà gradi 6. Onde dopo l'incontro la velocità del primo A farà di 13 gradi, e la velocità del secondo B di gradi 2, colle quali velocità tuttavolta dovranno muoversi eziandio a parti contrarie (57).

160. Finalmente dei medesimi corpi il primo A sia in quiete, ed il secondo B muovasi contro di esso colla stessa velocità di 10 gradi. Ed in questo terzo caso conforme, se i corpi fossero inerti, la comune loro velocità dopo l'incontro farebbe di 6 gradi; così, per essere il corpo A in quiete, si farà il loro incontro colla sola velocità del corpo B, che è di gradi 10. Distribuiscafi adunque agli stessi corpi questa velocità nella reciproca ragione de' loro pesi; ed il primo A di 2 libbre ne avrà 6 gradi, ed il secondo B di libbre 3 ne avrà gradi 4. Onde dopo l'incontro la velocità del primo A farà di 12 gradi, e la velocità del secondo B di gradi 2, colle quali velocità si muoveranno i due corpi verso la stessa parte.

161. Del rimanente, se i due corpi perfettamente elastici siano eguali, ovvero dello stesso peso, si

ri-

E DEL MOTO DE' CORPI. 57.

ritroverà I, che muovendosi verso la stessa parte, tuttavia dopo l'incontro continueranno a muoversi colla stessa direzione; ma il primo colla velocità del secondo, ed il secondo con quella del primo, II, che muovendosi a parti contrarie, permuteranno eziandio insieme coll'incontro le primitive loro velocità, colle quali tuttavia si muoveranno a parti contrarie. E III finalmente, che essendo in quiete uno dei due corpi, e l'altro muovendosi contro di esso, il primo si muoverà dopo l'incontro colla velocità del secondo, ed al contrario il secondo resterà fermo ed immobile (58).

XVI.

Conseguenze, che si ricavano dalle precedenti leggi di moto.

162. **D** Alle leggi di moto, che debbono aver luogo nell'incontro de' corpi perfettamente elastici, possiamo ora dedurne tre conseguenze. La prima si è, che sebbene i due corpi dopo l'incontro debbanfi muovere non solo colla comune velocità, che avrebbero, se fossero inerti, ma eziandio con quelle, che ricevono dalla loro forza elastica; pure però dee rimanere la stessa così la somma de' moti, che prima si facevano verso la stessa parte, come la differenza di quei, che faceansi prima a parti contrarie. In fatti colla sola comune velocità questa somma, o questa differenza non deve alterarsi. Ma le altre velocità impresse ai due corpi dalla loro forza elastica producono in essi moti eguali, e contrari. Dunque neppure con quest'altre velocità dovrà alterarsi la riferita somma, o la riferita differenza.

163. La seconda conseguenza si è; che dopo l'incontro dei due corpi perfettamente elastici, la velocità primitiva di quello, che precede, ritrovasi sempre aumentata del doppio di quella, che riceve dalla forza elastica; ed all'incontro la velocità
pri-

Fig. 11.
12.

primitiva dell'altro, che segue, ritrovasi sempre diminuita del doppio di quella, che dalla stessa forza se gl' imprime. Per dimostrarlo geometricamente, esprimansi colle rette AB , AC i pesi dei due corpi, e coll'altre AD , AE così le loro velocità, come le loro direzioni. Ed essendo i moti dei due corpi in ragion composta dei loro pesi, e delle loro velocità; chiaro si è, che potranno esprimersi quei moti per mezzo dei due rettangoli BD , CE .

164. Sia ora AF la comune velocità, con cui muovonsi i due corpi dopo l'incontro, essendo inerti. E poichè per mezzo dell'incontro non deve alterarsi la somma de' moti, che prima si facevano verso la stessa parte, e la differenza di quei, che faceansi prima a parti contrarie; perciò la somma, o differenza dei due rettangoli BD , CE farà eguale al rettangolo CG , che è la somma dei due BF , CF . Onde siccome da ciò egli è facile il ricavarne, che siano eguali i due rettangoli EH , DG ; così da questa stessa loro eguaglianza ne segue, che i lati di essi DF , EF siano nella reciproca ragione degli altri due FG , FH , o pure dei due AB , AC (59).

165. Quindi, essendo DE la velocità, con cui i due corpi AB , AC s'incontrano, faranno DF , EF le porzioni di essa, che per ragion della forza elastica spettano a detti corpi; onde dopo l'incontro il primo AB si muoverà colla somma delle due velocità AF , DF , ed il secondo AC colla differenza delle due AF , EF . Ma la somma delle due AF , DF è eguale alla AD aumentata del doppio della DF ; ed all'incontro la differenza delle due AF , EF è eguale alla AE diminuita del doppio EF . Dunque dopo l'incontro il primo corpo AB si muoverà colla sua velocità primitiva aumentata del doppio di quella, che riceve dalla forza elastica; ed al contrario il secondo AC colla sua velocità primitiva diminuita del doppio di quella, che dalla stessa forza se gl' imprime.

166. La terza ed ultima conseguenza si è, che moltiplicando i pesi dei due corpi una volta per gli quadrati delle loro velocità primitive, ed un'altra volta per gli quadrati delle velocità, con cui si muovono dopo l'incontro, la somma dei prodotti in ambedue le volte deve essere la stessa. Per dimostrarlo eziandio geometricamente, siano di nuovo AB , AC i pesi dei due corpi; AD , AE le loro velocità, e le loro direzioni; ed AF la comune velocità, con cui muovonfi i due corpi dopo l'incontro, essendo inerti. E poichè le velocità, che ricevono dalla forza elastica sono le due DF , EF ; si muoverà dopo l'incontro il primo di essi AB colla somma delle due velocità AF , DF ; ed il secondo AC colla differenza delle due AF , EF .

Fig. 11.
12.

167. Or siccome il quadrato della somma delle due AF , DF è maggiore del quadrato della AD nel quadruplo del rettangolo fatto dalle stesse due AF , DF ; così al contrario il quadrato della differenza delle due AF , EF è minore del quadrato della AE nel quadruplo del rettangolo fatto dalle medesime due AF , EF . Onde i pesi dei due corpi AB , AC moltiplicati per gli quadrati delle loro velocità primitive AD , AE ci daranno la stessa somma, che ricavasi dagli stessi pesi moltiplicati per gli quadrati delle velocità, con cui si muovono i due corpi dopo l'incontro, se il solido delle tre AB , AF , DF sia eguale al solido dell'altre tre AC , AF , EF , o pure se il rettangolo delle due AB , DF sia eguale al rettangolo dell'altre due AC , EF (60).

168. La conseguenza adunque, di cui si tratta, riducesi a far vedere, che il rettangolo delle due AB , DF sia eguale al rettangolo dell'altre due AC , EF . Ciò intanto si ritrova essere di già da noi dimostrato; poicchè siccome nell'altra conseguenza si è fatto vedere, che debbano essere eguali tra loro i due rettangoli DG , EH ; così per essere le due AB , AC eguali all'altre due FG , FH , il
pri-

primo di essi è fatto dalla AB nella DF, ed il secondo dalla AC nella EF. Onde non è egli da porsi in dubbio, che se i pesi dei due corpi una volta si moltiplichino per gli quadrati delle velocità loro primitive, ed un'altra volta per gli quadrati delle velocità, con cui si muovono dopo l'incontro, la somma de' prodotti in ambedue le volte debba essere la stessa (61).

169. Prima di passare oltre, giova qui l'avvertire, che sebbene siasi da noi supposto, che i corpi siano perfettamente elastici, e che ritornino in conseguenza al primo loro stato colla stessa forza, con cui si comprimono; nientedimeno se non siano di questa indole, e sia nota la ragione, che ha la forza comprimente alla forza elastica, pure col medesimo artificio potranno determinarsi le leggi di moto, che debbono aver luogo nel loro incontro. In fatti la velocità, con cui comprimonsi quest'altri corpi, tuttavia è eguale o alla differenza delle loro velocità, se muovonsi verso la stessa parte, o alla somma delle medesime, se i moti facciansi a parti contrarie. Onde con esser nota la ragione tra la forza comprimente, e la forza elastica, facilmente potrà determinarsi la velocità, che nei due corpi insieme generasi dalla loro forza elastica.

170. Questa velocità poi eziandio dovrà distribuirsi ai due corpi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. Onde non solo farà a noi nota la comune velocità, con cui dopo l'incontro debbono muoversi insieme i due corpi, essendo inerti; ma sapremo altresì le velocità, che ricevono gli stessi corpi dalla loro forza elastica. E siccome ciascuno dei due corpi ritrovasi avere dopo l'incontro due velocità, cioè una comune, e l'altra propria; così il corpo, che precede, eziandio si muoverà colla somma delle due sue, per essere co-spiranti le loro direzioni; e l'altro, che segue, pure al contrario si muoverà colla differenza delle due, che gli spettano, per essere le direzioni di quest'altre tra loro contrarie.

E DEL MOTO DE' CORPI. 61

171. Così, se il corpo A di 2 libbre abbia 10 gradi di velocità, ed il corpo B di libbre 3 ne abbia 20; chiaro si è, che facendosi i loro moti verso la stessa parte, sia di gradi 16 la comune velocità con cui dopo l'incontro debbono muoversi insieme, essendo inerti. E poichè l'incontro di essi si fa, con 10 gradi di velocità; perciò se suppongasi, che la loro forza elastica sia la metà di quella, con cui si comprimono, farà di gradi 5 la velocità generata da quella forza nei due corpi insieme; e distribuendola ai medesimi con direzioni contrarie nella reciproca ragione de' loro pesi, ne spetteranno 3 gradi al corpo A di 2 libbre, e gradi 2 al corpo B di 3 libbre. Onde i due corpi dopo l'incontro si muoveranno tuttavia verso la stessa parte, ma il corpo A con 19 gradi di velocità, ed il corpo B con gradi 14.

172. Un' altro avvertimento dee farsi in questo luogo, e si è, che se mai dei due corpi, che s'incontrano, uno sia elastico, e l'altro inflessibile, pure dopo l'incontro debbono muoversi, come se ambedue fossero elastici. Imperocchè se bene con incontrarsi tra loro comprimasi solamente il corpo elastico; nientedimeno, qualora questo corpo dopo la compressione cerca di rimettersi colla sua forza elastica nel primo stato, tuttavia agisce sull'altro corpo; onde si è, che con questa azione eziandio la velocità generata da quella forza dee distribuirsi ai due corpi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. E' necessario però, che l'altro corpo sia inflessibile per la ragione, che se mai fosse pieghevole, potrebbe non ricevere col solo incontro tutto il piegamento, di cui è capace; onde siccome colla nuova azione del corpo elastico continuerebbe egli a piegarsi, così la distribuzione della velocità, che si genera dalla forza elastica, potrebbe farsi in altra ragione.

*Delle leggi del moto nell'incontro obliquo
de' corpi.*

173. **I**N trattare delle leggi di moto, che debbono aver luogo nell'incontro de' corpi, tacitamente si è supposto, che i loro moti facciano sopra una medesima linea retta, ed in conseguenza che i due corpi s'incontrino a dirittura. Potrebbe intanto avvenire, che gli stessi corpi muovansi sopra rette diverse, le quali formino un qualche angolo, e che incontrandosi nel vertice di quest'angolo sia obliquo il loro incontro. Onde, per non tralasciare quest'altro caso, passeremo ora a ragionare delle leggi di moto, che debbono osservarsi nell'incontro obliquo de' corpi.

Fig. 13.
14.

174. Siano adunque *A*, e *B* due corpi, i quali muovendosi egualmente sulle rette *AC*, *BC*, che formano l'angolo *ACB*, vadansi ad incontrare tra loro obliquamente nel vertice *C* di quest'angolo. E poichè i due corpi *A*, e *B* percorrono le due rette *AC*, *BC* con moto eguale, e nel medesimo tempo, faranno le loro velocità proporzionali alle stesse rette; e pertanto se la velocità del corpo *A* esprimasi colla prima *AC*, dovrà l'altra *BC* designarci la velocità del corpo *B*. Onde dobbiamo far vedere; come date le velocità, e le direzioni dei due corpi *A*, e *B*, che s'incontrano obliquamente nel punto *C*, possono determinarsi le velocità, e le direzioni degli stessi corpi dopo l'incontro (62).

175. Determinisi perciò la posizione del piano *CD*, che tocca i due corpi nel luogo dell'incontro; ed abbassate su di esso le perpendicolari *AD*, *BE*, compiscansi i parallelogrammi *ADCF*, *BECEG*. Potendosi adunque risolvere la velocità *AC* nelle due *AD*, *AF*, e la velocità *BC* nelle due *BE*, *BG*; si muoverà verso *C* il corpo *A* colle due velocità *AD*, *AF*, ed il corpo *B* colle due *BE*, *BG*. Ma per essere parallele le direzioni delle
ve-

velocità AF , BG , non possono i due corpi con esse incontrarsi. Dunque, siccome il loro incontro si farà colle velocità AD , BE , o pure colle due FC , GC , le cui direzioni sono contrarie; così le prime due si conserveranno nei corpi senza veruna mutazione.

176. Or se i due corpi A , e B siano inerti, il loro incontro colle velocità FC , GC dee farsi talmente, che si muoveranno in appresso insieme verso la stessa parte, e colla stessa velocità. Quindi se CH sia questa comune loro velocità segnata secondo la sua direzione, e sulla DC prolungata prendansi le porzioni CI , CL eguali alle due AF , BG ; si ritroverà avere dopo l'incontro il corpo A le due velocità CH , CI , ed il corpo B le due CH , CL . Onde compiuti i parallelogrammi $CHMI$, $CHNL$, si faranno effettivamente i moti dei due corpi per le diagonali CM , CN ; e farà CM la velocità del primo corpo, e CN la velocità dell'altro.

Fig. 13.

177. Se poi i due corpi A , e B siano elastici, in tal caso il loro incontro colle velocità FC , GC si farà in modo, che si muoveranno in appresso con velocità diverse. Quindi, se CH , CK siano queste loro velocità segnate secondo le proprie loro direzioni, e prendansi di nuovo sulla DC prolungata le porzioni CI , CL eguali alle due AF , BG ; si ritroverà avere dopo l'incontro il corpo A le due velocità CH , CI , ed il corpo B le due CK , CL . Onde, compiuti i parallelogrammi $CHMI$, $CKNL$, si faranno effettivamente i moti dei due corpi per le diagonali CM , CN ; e farà CM la velocità del primo corpo, e CN la velocità dell'altro.

Fig. 14.

178. Si vede dunque, che le leggi di moto dell'incontro obliquo derivano da quelle dell'incontro diretto. Imperocchè, determinata la posizione del piano, che tocca i due corpi nel luogo dell'incontro, conforme possiamo risolvere la velocità obli-
qua

qua di ciascuno dei due corpi in due altre laterali, di cui una sia perpendicolare, e l'altra parallela a quel piano; così l'incontro si farà colle sole velocità perpendicolari, e l'altre parallele rimaranno intatte nei due corpi. E poichè con quelle velocità perpendicolari s'incontrano i due corpi direttamente tra loro; perciò determinando la velocità, che deve avere ciascuno di essi dopo l'incontro, e componendo colla medesima l'altra parallela, che rimane intatta nel corpo, avremo così le totali velocità dei due corpi dopo l'incontro, come le direzioni dei loro moti.

179. Or qualunque siasi l'indole de' corpi, che s'incontrano, e comunque facciasi il loro incontro, se uno di essi sia in quiete, e l'altro si muova verso di quello; non v'ha dubbio, che dopo l'incontro sempre dovrà muoversi il corpo quiescente. Ciò però deve intendersi nel caso, che i pesi dei due corpi siano tra loro in ragion finita; poichè se mai il peso del corpo quiescente sia infinitamente grande per rapporto al peso dell'altro, che si muove, farà così picciola la velocità impressagli dal corpo mosso, che dopo l'incontro tuttavia dovrà egli riguardarsi come fermo, ed immobile.

Fig. 15.

180. Per intenderne la ragione, e per vedere altresì quelltanto deve avvenire dopo l'incontro al corpo, che si muove; sia A il corpo, che essendo di peso finito si muove con velocità ancora finita, e sia B il corpo quiescente di un peso infinitamente maggiore. Suppongasi primieramente, che il moto del corpo A facciasi secondo la retta AB perpendicolare al piano DE, che tocca i due corpi nel luogo dell'incontro. E conforme in questo caso l'incontro dei due corpi deve averfi come diretto; così il corpo A agirà contra l'altro B coll'intera sua velocità. Onde, se i due corpi siano inerti, si avrà la comune velocità, con cui debbono andare insieme dopo l'incontro, con dividere il numero, che ci addita il moto del corpo A, per

per l'altro, che ci dimostra il peso dei due corpi insieme.

181. Or essendo finito non meno il peso, che la velocità del corpo A, il di lui moto dovrà esprimersi per un numero ancora finito; ed al contrario essendo infinitamente grande il peso del corpo B, dovrà disegnarsi il peso dei due corpi insieme per un numero eziandio infinitamente grande. Ma il quoziente, che ricavasi dalla divisione di un dato numero per un altro variabile, deesi tanto più minorare, quanto maggiormente si aumenta il divisore variabile. Dunque con dividere il numero, che ci addita il moto del corpo A, per l'altro, che ci dimostra il peso dei due corpi insieme, avremo in quoziente un numero infinitamente picciolo; e pertanto facendosi di una picciolezza ancora infinita la comune velocità dei due corpi, lo stato di essi dopo l'incontro non farà differente da quello della quiete.

182. Se poi i due corpi siano perfettamente elastici, o pure uno di essi sia tale, e l'altro inflessibile; allora dopo l'incontro resterà tuttavia fermo, ed immobile il corpo B, ma l'altro A ritornerà per la stessa BA colla primitiva sua velocità. In fatti, siccome con questa velocità incontransi tra loro i due corpi, così ad essa farà eguale l'altra, che nei due corpi insieme generasi dalla forza elastica. Ma quest'altra velocità non differente dalla prima dee distribuirsi agli stessi corpi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. Dunque facendosi infinitamente picciola la porzione, che ne spetta al corpo B, dovrà darsi la riferita velocità interamente al corpo A, il quale perciò dopo l'incontro ritornerà per la BA colla velocità sua primitiva (63).

183. Suppongasi in appresso, che la AB, per cui si muove il corpo A, sia obliqua al piano DE, che tocca i due corpi nel luogo dell'incontro. E conforme in quest'altro caso l'incontro dei due corpi

E pi

Fig. 16.

pi deve averfi come obliquo, così il corpo A agirà contra l'altro B non già coll'intera sua velocità, ma con una delle due, che la compongono. In effetto, se abbassata sul piano DE la perpendicolare AD, compiscafì il parallelogrammo ADBF; potrà risolverfi la velocità obliqua AB del corpo A nelle due laterali AD, AF. Onde effendo la direzione della velocità AF parallela al piano DE l'incontro de' due corpi, ed in conseguenza la loro scambievole azione si farà colla sola velocità AD, o sia FB, la di cui direzione è perpendicolare al medesimo piano.

184. Or conforme la velocità AF niente conferisce all'incontro dei due corpi, così la medesima senza ricevere cambiamento alcuno si conserverà nel corpo A. Quindi nella supposizione, che i due corpi siano inerti, resterà il corpo B tuttavia fermo ed immobile dopo l'incontro, ma l'altro A continuerà a muoversi su'l piano DE colla velocità AF, che in esso rimane intatta. Nella supposizione poi, che i due corpi siano perfettamente elastici, o pure che uno di essi sia tale, e l'altro inflessibile, si muoverà il corpo A dopo l'incontro eziandio colla velocità, che lo fa ritornare per la BF; onde se facciasi la BE eguale alla DB, e compiscafì il parallelogrammo FBEC, si farà il moto del corpo A per la diagonale BC, e la stessa BC farà la velocità totale.

185. Giova intanto quì notare, che con essere eguali così le due DB, BE, come le due AD, CE, faranno eguali parimente tanto le altre due AB, BC, quanto i due angoli ABD, CBE; poichè da ciò potremo dedurne, che nell'incontro obliquo pure il corpo perfettamente elastico A debba rifletterfi colla stessa sua velocità primitiva, ma con direzione tale bensì, che l'angolo della riflessione CBE sia eguale all'angolo dell'incidenza ABD. Del rimanente se l'elasticità del corpo non sia perfetta, egli è facile ad intendersi, che effendo l'in-

con-

contro diretto, debba ritornare il corpo per l'istesso cammino, ma con minor velocità della sua primitiva; essendo poi obliquo, debba egli riflettersi non solo con minor velocità, ma eziandio in modo, che l'angolo della riflessione sia minore dell'angolo dell'incidenza (64).

XVIII.

Del moto comune, e quando egli non altera gli effetti dei moti proprj.

186. **C**onforme muovendosi un corpo, si muovono altresì tutti i minimi elementi, che lo compongono; così muovendosi un qualche spazio relativo, come quello di una nave, si muoveranno parimente tutti corpi, che in quello spazio si contengono. Ma sebene i minimi elementi del corpo per la loro coesione non siano capaci di altri moti; nientedimeno i corpi racchiusi nello spazio, per essere distaccati l'uno dall'altro, possono muoversi ancora tra loro. Quindi il moto dello spazio, di cui partecipano tutti i corpi, che in esso racchiudonsi, riguardasi come moto loro comune; all'incontro i moti, con cui gli stessi corpi muovonsi tra loro, sogliono averli come moti proprj.

187. Or quantunque il moto dello spazio sia comune a tutti i corpi, che in esso contengono; tutta volta di quel moto non sempre ne partecipano egualmente gli stessi corpi. Avviene ciò, quante volte lo spazio col suo moto aggirasi intorno ad un qualche punto; poichè in questo caso, siccome non tutte le parti dello spazio muovonsi colla stessa velocità, così nè pure la velocità, che ricevono i corpi da quel moto comune, sarà in tutti la stessa. Ed in fatti, se la AB aggirandosi intorno al punto C si trasporti per fino alla *ab*, gli spazi percorsi nello stesso tempo dai punti A, e B faranno gli archi *Aa*, *Bb*. Onde siccome questi

Fig. 17.

archi, per essere simili, sono nella ragione de' raggi CA, CB; così in questa stessa ragione faranno parimente le velocità tanto dei punti A, e B, quanto dei corpi situati in detti punti.

188. Ciò, che diciamo de' corpi, che muovonfi col moto dello spazio, in cui si contengono, può avvenire altresì ai minimi elementi del corpo, che si muove. Imperocchè, se mai il moto del corpo facciafi intorno ad un qualche punto, faranno disuguali gli spazj, che si percorrono nello stesso tempo dai minimi suoi elementi; ed in conseguenza disuguali ancora le velocità, con cui gli stessi elementi si muovono. Onde siccome per definire la quantità di moto, che in questo caso risiede nel corpo, per necessità debbonfi riunire insieme le diverse velocità dei minimi suoi elementi; così la velocità d' ascriversi all' istesso corpo farà quella, che essendo comune a tutti gli elementi produce nel corpo la stessa quantità di moto; e dimostreremo a suo luogo in qual punto del corpo ritrovasi questa mezzana velocità, per mezzo di cui ritiene il corpo l' istesso momento.

189. Ma nè pure basta, che il moto dello spazio facciafi a dirittura, per poterne partecipare egualmente i corpi tutti, che in esso contengonfi; poichè se mai qualche forza centrale spinga lo spazio a dirittura verso il suo centro, pure le velocità dei corpi possono essere diverse. In fatti la forza centrale non essendo dell' istessa attività in ogni sua distanza dal centro, agisce diversamente sulle diverse parti dello spazio. E se bene queste parti per la loro coesione debbano comporre insieme le diverse spinte, che dalla forza ricevono, ed accelerarsi in conseguenza egualmente; nientedimeno i corpi, che in esse ritrovansi, per essere distaccati l' uno dall' altro, possono risentire gli effetti di quelle diverse spinte, ed accelerarsi per tanto diversamente (65).

190. Quindi per potere i corpi racchiusi in un
qual-

qualche spazio partecipare egualmente del di lui moto, dovrà egli muoversi non solo a dirittura, ma eziandio eguabilmente; ed in questo caso il comune moto dello spazio non potrà alterare gli effetti dei proprij moti; con cui gli stessi corpi muovonfi tra loro. Imperocchè, essendo eguali, e co- spiranti le velocità, che ricevono i corpi dal comune moto dello spazio, senza dubbio questi con esse non potranno tra loro incontrarsi. Quindi l'incontro de' corpi si farà tuttavia colle sole velocità dei proprij loro moti; e perciò, non ostante il comune moto dello spazio, pure gli effetti dell'incontro dovranno essere gli stessi: siccome vedesi nella nave, dentro di cui agiscono scambievolmente i corpi coi proprij loro moti egualmente se la nave sia immobile, che se muovasi a dirittura con moto eguabile.

191. Conforme poi il moto rettilineo, ed eguabile dello spazio intanto non altera gli effetti dei proprij moti de' corpi, che in esso contengono, in quanto che sono eguali, e co- spiranti le velocità, che ricevono gli stessi corpi dal comune moto dello spazio; così potrà stabilirsi come principio indubitato, che se con direzioni parallele imprimansi a' corpi, che si muovono, altre velocità eguali, non debbano alterarsi con queste nuove velocità gli effetti dei primi loro moti. Per far uso intanto di questo principio, dimostreremo per mezzo di esso, che se bene spingendosi un corpo verso un piano immobile, riceva il piano la percossa colla stessa direzione, con cui il corpo si spinge; nientedimeno, se il piano muovasi secondo la sua lunghezza, dovrà egli riceverla con direzione diversa.

192. Sia perciò BC il piano, che muovesi secondo la sua lunghezza da B verso C ; e sia A il corpo, che spinto verso quel piano per la retta AC lo percuote nel punto C . Esprimasi per la BC la velocità del piano, e per la AC la velocità

E 3

tà

Fig. 18.

tà del corpo; e se facciasi la CD parallela alla AB , io dico, che si riceverà dal piano la percossa secondo la direzione della DC . Per dimostrarlo, imprimasi tanto al piano, quanto al corpo un' altra velocità eguale, e contraria a quella del piano. E conforme per mezzo di essa il piano, diviene immobile, così terminato il parallelogrammo $ACBE$, si muoverà il corpo colle due velocità AC , AE , le quali compongono insieme la velocità disegnata dalla diagonale AB .

193. Colla nuova velocità adunque impressa così al piano, come al corpo, ricevesi dal piano la percossa colla direzione della AB . Ma questa nuova velocità non deve alterare gli effetti dei primi moti del piano, e del corpo. Dunque eziandio senza di essa dovrà riceverfi dal piano la percossa con direzione consimile; e pertanto essendosi fatta la DC parallela alla AB , si riceverà la percossa dal piano mobile colla direzione della DC . Ed in fatti, se terminato l'altro parallelogrammo $ACBD$, la velocità AC del corpo risolvasi nelle due AD , AB , la prima di esse AD sarà eguale, e conspurante con quella del piano. Onde muovendosi il corpo, ed il piano con una velocità comune, per necessità dovrà percuotersi il piano dal corpo, come se il piano fosse immobile, ed il corpo si muovesse verso di esso colla sola velocità AB .

194. Col cambiamento della direzione, con cui ricevesi la percossa dal piano mobile, può rendersi ragione, almeno nella supposizione di aggirarsi annualmente la terra intorno al Sole, della paralasse, o sia mutazione di sito, a cui soggiacciono le stelle fisse. Imperocchè, siccome noi veggiamo i corpi per mezzo de' raggi di luce, che o quelli ci mandano, o pure ci riflettono; così dobbiamo vederli in que' luoghi propriamente, che ci additano le direzioni, con cui l'occhio è percosso dagli stessi raggi. Onde se mai l'occhio si muova, e da un sito passi in un altro nel mentre, che i raggi partano

tano

tano dai corpi, e giungono per fino a noi; dovrà egli riceverne le percoffe con direzioni diverse da quelle, con cui ci s'inviano; e pertanto eziandio i corpi dovranno vederfi in luoghi diversi da quei, in cui ritrovansi.

195. Or se bene ne' corpi non molto da noi distanti non mai possa avvenire, che l'occhio cambi sito nel mentre, che i loro raggi da essi giungono per fino a noi, per essere momentaneo il loro transito; nientedimeno non dee dirsi lo stesso delle stelle fisse, i di cui raggi per l'immensa loro distanza non possono portarsi per fino a noi senza tempo considerabile. Se adunque in A sia una stella fissa, e nel mentre, che i suoi raggi portansi per fino a noi, l'occhio col moto annuo della terra si trasporti da B per fino a C; farà percoffo l'occhio da detti raggi colla direzione della DC parallela alla BA. Onde, ficcome la stella, che ritrovasi in A, dee vederfi in D; così dovrà giudicarsi della sua deviazione dal luogo vero, che chiamasi paralasse, per mezzo dell'angolo BAC eguale al suo alterno ACD.

C A P I T O L O II.

Del moto de' corpi derivato dalla gravità.

196. **P**Remessa la scienza del moto in generale, passeremo ora a ragionare del moto de' corpi gravi, per cui prima di ogni altra cosa è necessario investigare l'indole di quella forza, che rende grave, e ponderoso qualsivisia corpo terrestre. Ed in fatti, sebbene non siano di accordo tra loro i Fisici intorno all'origine di una tal forza; nientedimeno la sua maniera di agire può dedursi bastantemente dagli effetti pur troppo noti, che ella produce ne' corpi (66).

*Della forza della gravità, e della sua
maniera di agire.*

197. **S**iccome i corpi terrestri lasciati in libertà portansi verso la terra con moto accelerato; così la forza, che li spinge continuamente, e produce in essi quel moto, comunemente chiamasi gravità. L'esperienza intanto ci apprende, che si esercita questa forza non solo ne' luoghi superiori alla terra, ma eziandio nelle valli, e ne' luoghi sotterranei. Onde conviene credere, che i corpi terrestri spinti continuamente dalla riferita forza cerchino di portarsi verso un qualche punto interno della terra, il quale perciò riguardasi come comune centro de' gravi.

198. Or nella supposizione di esser sferica la figura della terra, egli è facile il dimostrare, che il di lei centro debba essere il comune centro de' gravi. Imperocchè una delle proprietà della figura sferica si è, che le rette perpendicolari alla sua superficie s'incontrino prolungate nel di lei centro. Ma l'esperienza ci dimostra, che i corpi terrestri spinti dalla gravità portansi verso la terra per rette perpendicolar i alla sua superficie. Dunque nella supposizione di esser sferica la superficie della terra, si porteranno i riferiti corpi verso il centro di essa, il quale perciò farà il comune centro de' gravi (67).

199. Conforme poi i corpi terrestri colle continue spinte, che ricevono dalla forza della gravità, rendono gravi, e ponderosi; così l'esperienza stessa c' insegna, che con cambiarsi la figura di un corpo non s'induce cambiamento alcuno nel di lui peso. Ma siccome da ciò ne segue, che la forza della gravità agisce egualmente in tutti i minimi elementi del corpo; così neppure sarà difficile il ricavarne, che il peso, e la massa in ogni corpo debbano essere proporzionali tra loro.

200. Fingiamo perciò, che i minimi elementi in ogni corpo siano di una data grandezza; e per agire in tutti egualmente la forza della gravità; faranno eguali altresì le loro gravitazioni. Ma da queste gravitazioni riunite insieme risulta la gravitazione, o sia peso totale del corpo. Dunque dovrà giudicarsi del peso di un corpo per lo numero dei minimi elementi, che lo compongono; e pertanto siccome questo numero corrisponde in proporzione alla massa del corpo, così il peso, e la massa in ogni corpo faranno proporzionali tra loro.

201. Quantunque poi dall'osservazioni, che possono farsi, ricavasi ancora, che ovunque portisi un dato corpo, il suo peso non mai si alteri; niente-dimeno non possiamo da ciò dedurne, che in ogni distanza dal centro della terra l'azione della gravità sia sempre la stessa. In fatti le distanze, di cui facciamo uso in fare tali osservazioni, sono così poco differenti l'una dall'altra, che possono riguardarsi come eguali tra loro. Onde sebbene vogliasi supporre, che col cambiamento della distanza debba cambiarsi l'azione della gravità; pure però un dato corpo dovrà ritenere l'istesso peso in tutte le distanze, in cui possiamo condurlo (68).

202. Ed in vero, volendone giudicare per la forza, che trattiene la Luna nel suo orbe, egli è molto probabile, che l'azione della gravità con discostarsi dal centro della terra, da cui si dirama, si minori in duplicata ragione della distanza. Quindi i pesi di due corpi collocati in diverse distanze dal centro della terra faranno in ragione composta della semplice diretta delle loro masse, e della duplicata reciproca delle loro distanze. Onde conforme debbono essere nella sola ragion diretta delle masse, essendo eguali le distanze, e nella sola ragion reciproca dei quadrati delle distanze, essendo eguali le masse; così se mai siano eguali tanto le masse, quanto le distanze, o pure le masse ed i quadrati delle distanze siano nella stessa ragione, i pesi dei due

due corpi faranno tra loro eguali .

203. La forza poi, che trattiene la Luna nel suo orbe, dee stimarsi della stessa indole con quella, che trattiene nei loro orbi così i pianeti primarij, come gli altri secondarij . Onde egli è assai verisimile ancora, che la gravitazione sia universale, e che conforme i corpi terrestri insieme colla Luna gravitano verso il centro della terra; così debbano gravitare altresì con leggi consimili i pianeti primarij verso il centro del Sole, ed i pianeti secondarij verso i centri de' loro primarij . Intanto, se vogliansi paragonare tra loro i pesi dei due corpi, che gravitano verso centri diversi; in tal caso dovrà tenersi conto non solo delle loro masse, e delle loro distanze dai riferiti centri, ma eziandio delle quantità assolute delle forze, per cui rendono i due corpi gravi, e ponderosi .

204. In fatti sebbene le forze, che partono dai divisati centri, si diramino intorno intorno con legge tale, che ciascuna di esse con discostarsi dal suo centro si minori in duplicata ragione della distanza; nientedimeno se mai le stesse forze nella prima loro origine siano di diverso vigore, non v' ha dubbio, che in eguali distanze dai loro centri saranno diverse altresì le loro attività; onde eziandio corpi di eguali masse situati in quelle eguali distanze dovranno essere diversamente gravi, e ponderosi . Il vigore adunque della forza nella prima sua origine si è la quantità sua assoluta; e perciò di essa parimente dee tenersi conto, qualora il peso di un corpo, che gravita verso un centro, vuol paragonarsi col peso di un' altro corpo, che gravita verso un' altro centro .

205. Or siccome ciascuna delle riferite forze cerca di portare verso il suo centro qualsiasi corpo, che ritrovasi nella sfera della sua attività; così si ha bastante motivo per credere, che la quantità assoluta della forza corrisponda in proporzione alla copia di materia riunita, e raccolta nel di lei centro .

tro. E poichè i vasti corpi, che risiedono nei centri delle forze, formati si sono col raccoglimento di quella materia; perciò le quantità assolute delle stesse forze faranno, come le masse dei vasti corpi, che occupano i loro centri. Onde i pesi di due corpi, che gravitano verso centri diversi, faranno in ragion composta della semplice diretta delle loro masse, della duplicata reciproca delle loro distanze da quei centri, e della semplice diretta delle masse dei corpi, che risiedono negli stessi centri.

206. Del rimanente, se mai sia vero, che colle riferite forze sian formati i vasti corpi, che occupano i loro centri; conviene credere, che con forze consimili sian forti parimente tutti gli altri gran corpi, che in questo mondo si ravvisano; e perciò eziandio dal centro di ciascuno di essi si diramerà una forza, la di cui quantità assoluta corrisponderà in proporzione alla massa del corpo, e che con discostarsi dal suo centro si minorerà in duplicata ragione della distanza. Non avendo poi limiti l'espansioni di tutte queste forze, agirà ciascuna di esse in tutti i corpi, con cui s'incontra; e pertanto la gravitazione sarà non solo universale, ma eziandio reciproca: dimodochè il sole, la terra, i pianeti primarj, i pianeti secondarj, e le stelle fisse graviteranno reciprocamente tra esse loro.

207. Egli è vero, che le gravitazioni di un corpo verso due diversi centri possono essere tali, che l'una s'vanisca a riguardo dell'altra; ma niente vieta, che gli effetti di ciascuna di esse sian talvolta sensibili. In fatti delle due gravitazioni della Luna verso il centro della terra, e verso il centro del Sole, non v'ha dubbio, che la prima avanzi di molto la seconda; onde si è, che la Luna si aggiri intorno alla terra, e non già intorno al Sole. In tanto per rapporto alla gravitazione maggiore della Luna verso il centro della terra non s'vanisce
l'altra

l'altra minore verso il centro del Sole, ma ella ancora rimane sensibile; e quindi si è, che il moto della Luna sia soggetto a varie disuguaglianze, le quali perciò spiegansi felicemente colle riferite due gravitazioni.

208. Similmente se bene la gravitazione dell'acque del nostro oceano verso il centro della terra sia maggiore così di quella, che esercitano verso il centro della Luna, come dell'altra, che esercitano verso il centro del Sole, nientedimeno quest'altre due loro gravitazioni non svaniscono per rapporto alla prima, ma esse ancora sono sensibili. E quindi avviene, che le riferite acque siano soggette al flusso, e riflusso, il quale secondo le varie situazioni del Sole, e della Luna a riguardo della terra riceve parimente varie mutazioni, di cui perciò può rendersi ragione con porre a calcolo tutte tre le riferite gravitazioni.

II.

Dell' origine delle forze, da cui deriva la gravitazione universale, e reciproca de' corpi.

209. **Q**uantunque non sia nostro istituto di entrare in ricerche puramente fisiche; nientedimeno delle forze, da cui deriva la gravitazione universale, e reciproca de' corpi, giova investigarne l'origine. Ed in vero, se voglia averci per indubitato, che ogni minima particella di materia sia capace di dividersi all'infinito; conviene dire, che la primitiva materia altro non era, se non che un tutto, in cui nascevano le parti coll'attuale sua divisione. Quindi siccome dee dirsi ancora, che le parti, in cui fu divisa da principio la stessa materia, ritrovavansi unite insieme per principio insito alle stesse parti, così non ostante la loro separazione, dovette rimanere in esse un tal principio; e perciò nelle minime particelle della materia

E DEL MOTO DE' CORPI. 77

ria debbono ammetterfi forze, per mezzo di cui cercano unirsi di nuovo, con attirarsi scambievolmente tra loro.

210. Derivando queste forze traenti nelle minime particelle della materia da quel principio infito, per cui prima univansi insieme; chiaro si è, che la quantità assoluta di ciascuna di esse debba corrispondere in proporzione alla particella stessa, in cui risiede. E per una ragione consimile, qualora spandesi questa forza intorno intorno per rette, che partono dal suo fonte; conserverà ella in tutta la lunghezza di queste rette l'istesso vigore. Onde siccome con discostarsi dal suo fonte non può ricevere altra diminuzione, se non se quella, che deriva dalla divergenza delle rette, per cui si dirama; così per necessità dovrà diminuirsi in duplicata ragione della distanza.

211. Or conforme le minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia, compongono i corpi; così la formazione di questi corpi deve ascriversi propriamente a quelle forze, per mezzo di cui le stesse particelle scambievolmente tra loro si attirano. Quantunque poi le riferite particelle colle scambievoli loro attrazioni congiungansi insieme di bel nuovo, e formino i corpi sensibili; nientedimeno per gli pori, o siano meati, che lasciano tra esso loro, non uniscono in modo, che non possano separarsi, ed unirsi ad altre parti, che maggiormente le attirano. E quindi si è, che almeno presso di noi non sempre sussistono gli stessi corpi, ma nel mentre, che alcuni risolvonsi, altri al contrario si generano, e ricevono il loro essere (69).

212. Veggonfi intanto nella vasta estensione di questo mondo moltissimi corpi, che non solo sono di una mole grandissima, ma sembrano altresì incapaci di potersi risolvere. Perciò conviene credere, che nel centro di ciascuno di essi ritrovisi una parte molto considerabile della primitiva materia, la quale per l'eccessiva sua forza traente non solo è stata

è stata valevole di attirarsi in somma copia le altre parti più picciole, ma le tiene altresì talmente a se unite, che non così facilmente possono distaccarsene. E poichè gli stessi corpi veggonsi presso a poco di figura sferica, perciò è da crederfi, che eziandio quelle parti considerabili della primitiva materia, le quali occupano i loro centri, siano della stessa figura.

213. Ed in fatti qualora queste parti centrali pongonsi di figura sferica, le loro forze traenti faranno della stessa attività non solo in tutta la loro superficie, ma eziandio in eguali distanze da quella. Onde siccome le riferite parti centrali attireranno a se da per tutto egual copia di altre parti più picciole; così quest'altre parti, unendosi colle loro centrali, si disporranno in modo, che non altereranno sensibilmente la loro figura sferica. E poichè l'unione delle medesime picciole parti colle loro centrali deve essere più, o meno stretta a misura della maggiore, o minore attività della forza, che con quelle le unisce; perciò non solo faranno sferici i corpi, che formansi, ma farà tale ancora la loro tessitura, che conforme la densità in ciascuno di essi deve essere la stessa in eguali distanze dal centro, così dovrà diminuirsi in distanza maggiore.

214. Or non v'ha dubbio, che con unirsi colle riferite parti centrali gran copia di altre parti più picciole, debbano aumentarsi a proporzione le loro forze traenti; ed appunto queste forze così aumentate sono quelle, da cui deriva l'universale, e reciproca gravitazione de' corpi: Nè poi è da porsi in dubbio, che ne' vasti corpi di questo mondo, con riunirsi insieme le forze traenti delle medesime loro particelle, abbianfi forze, che si diramino dai loro centri, e con discostarsi da essi si minorino in duplicata ragione della distanza. Imperocchè, se intendansi divisi que' corpi in strati concentrici di una bassezza così picciola, che possano averfi come super-

E DEL MOTO DE' CORPI. 79

superficie sferiche concentriche; farà ciascuno di questi strati egualmente denso da per tutto. Onde basterà far vedere, che in uno strato di questa indole colla riferita legge si eserciti la forza traente, che si ha con riunire insieme le forze delle minime particelle, che lo compongono.

215. Generisi perciò lo strato, di cui si tratta, colla rivoluzione della circonferenza AMB ; e sia AB il diametro, su di cui prolungato ritrovasi il corpo D tirato dallo stesso strato. Tirisi alla circonferenza la retta DMN ad arbitrio, a cui sia infinitamente vicina l'altra Dmn ; e si abbassino su'l diametro AB le perpendicolari MO , NR . Le porzioni adunque dello strato, che si generano colla rivoluzione dei due archetti Mm , Nn intorno al diametro AB , sono proporzionali ai due rettangoli OMm , RNn . Onde le loro forze traenti a riguardo del corpo D faranno in ragion composta della diretta de' rettangoli OMm , RNn , e della reciproca de' quadrati fatti dalle due DM , DN . Quindi, per essere nella diretta ragione di queste due, tanto le perpendicolari MO , NR , quanto gli archetti Mm , Nn , faranno eguali le riferite forze traenti; e perciò la loro somma potrà esprimersi per la ragione, che ha il doppio del rettangolo OMm al quadrato della DM .

216. Si abbassi ora dal centro C la CE perpendicolare sulla MN , e sia la Ee parallela alla retta, che tocca la circonferenza nel punto M . Facendosi adunque proporzionali così le quattro Mm , DM , Ee , DE , come le quattro MO , DM , CE , DC ; farà il rettangolo OMm al quadrato della DM , come il rettangolo CEe al rettangolo CDE ; e pertanto la somma delle riferite due forze potrà esprimersi altresì per la ragione, che ha il doppio del rettangolo CEe al rettangolo CDE . Ma nella supposizione di essere l'arco AH la metà dei due AM , BN , l'altro Hh la metà degli altri due Mm , Nn , e la HI perpendicolare su'l diametro AB , si

OMm

Fig. 19.

fanno eguali i due rettangoli CEe , IHh . Dunque la somma delle stesse forze potrà disegnarsi parimente per la ragione, che ha il doppio del rettangolo IHh al rettangolo CDE .

217. Se poi ciascuna delle forze, con cui le minime particelle delle divise porzioni dello strato tirano il corpo, risolvasi in due, di cui una sia perpendicolare, e l'altra parallela al diametro AB ; si distruggeranno tra esso loro le attrazioni del corpo, che derivano dalle forze perpendicolari, e farà tirato il corpo dalle sole forze parallele, la di cui somma agirà su'l corpo, come se si diramasse dal centro C . Ma la somma di queste forze parallele sta alla somma delle forze totali, come DO a DM , o pure come DE a DC , o finalmente come il rettangolo CDE al quadrato della DC . Dunque la somma delle riferite forze parallele dovrà esprimersi per la ragione, che ha il doppio del rettangolo IHh al quadrato della DC ; e pertanto essendo il rettangolo IHh proporzionale alla porzione dello strato, che si genera colla rivoluzione dell'archetto Hh intorno al diametro, ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, non solo si diramerà dal centro la forza traente dell'intero strato, ma con discostarsene si diminuirà altresì in duplicata ragione della distanza.

218. Del rimanente quantunque dai nostri principj ne segua, che ancora le stelle fisse sian dotate di forze traenti consimili, con cui non solo gravitano sciambievolmente tra loro, ma cercano altresì di attirare a se tutti i corpi del nostro sistema solare; nientedimeno questi corpi non debbono sentirne gli effetti, sì per l'immensa distanza, in cui sono le stelle fisse a riguardo di ciascuno di essi, come ancora per equilibrarsi tra loro le forze traenti delle medesime stelle. In fatti, siccome il Cielo stellifero è talmente ripieno di stelle, che niente vieta di riguardarlo come un'orbe egualmente denso da per tutto; così, se AMB sia la circonferenza

E DEL MOTO DE' CORPI. 81

renza di cerchio , colla di cui rivoluzione generasi il riferito orbe , e D il corpo , che situato dentro di esso vien tirato per ogni lato dalle minime particelle , che lo compongono , ritroveremo essere eguali tra loro le forze , che cercano di tirare il corpo a parti contrarie ; e perciò l' istesso corpo dovrà rimanere fermo ed immobile .

219. Per quanto ai corpi terrestri , ancora essi sono dotati di forze traenti , con cui scambievolmente gravitano tra loro ; ma non dee sembrarci strano , che questa scambievole loro gravitazione non sia sensibile , per svanire a riguardo di quella , con cui gravitano verso il centro della terra . Aggiungasi , che per un' altra ragione ancora le forze traenti de' corpi terrestri debbono essere regolarmente molto languide ; e si è , che sebbene le forze delle minime particelle , in cui fu divisa da principio la primitiva materia , con discostarsi dai loro fonti , diminuiscono in duplicata ragione della distanza ; niente dimeno le forze di altre parti grandi derivate dall' unione di quelle , lontano di osservare la stessa legge di diminuzione , possono al contrario spandersi con infinite leggi diverse . Questa ragione intanto merita di esser posta in tutta la sua luce , maggiormente che per mezzo di essa si farà a noi noto donde derivi la varietà , che ne' corpi terrestri si ravvisa .

III.

Continuazione dello stesso argomento , e donde derivi la specifica differenza de' corpi .

220. **Q**uantunque siansi formati i corpi colle minime particelle , in cui fu divisa da principio la primitiva materia ; niente dimeno gl' immediati loro elementi non sono già le riferite minime particelle , ma altre di mole maggiore , che sono nate dall' unione di quelle . In fatti siccome separate , che furono le prime particelle
F della

della materia, incominciarono subito ad unirsi insieme colle loro forze traenti; così avanti, che forgessero i corpi, e riceveffero il loro essere, conviene credere, che si fossero fatte di quelle particelle varie consecutive unioni. Onde le particelle di mole maggiore nate con queste varie unioni successive sono gl' immediati elementi de' corpi, i quali elementi perciò debbonfi distinguere in vari ordini, secondo le replicate unioni, per mezzo di cui formati si sono.

221. Siccome adunque debbono averfi per elementi del primo ordine le particelle di mole maggiore nate dalla prima unione di quelle, in cui fu divisa la primitiva materia; così elementi del secondo ordine faranno le altre di mole vie più maggiore derivate dalla nuova unione degli elementi del primo. Per la stessa ragione poi le particelle formate coll' unione degli elementi del secondo faranno elementi del terzo ordine; come ancora l'altre generate coll' unione degli elementi del terzo faranno elementi del quarto ordine. E quantunque sia a noi ignoto, quanti ordini di elementi sianfi formati prima, che i corpi riceveffero il loro essere; conviene tuttavolta credere, che non sia picciolo il loro numero per la ragione, che da essi dee ripetersi l'immensa varietà, che tra i corpi si ravvisa.

222. Vediamo intanto, quali siano le affezioni, per cui gli elementi di diverso ordine si fanno d' indole ancora diversa. Ed in primo luogo non v' ha dubbio, che debbano essere tra loro differenti sì per la mole, come ancora per la densità: con questo divario bensì, che siccome la mole deve aumentarsi a misura, che gli elementi da un' ordine passano in un'altro; così al contrario la densità debba diminuirsi, con farsi gli elementi di un' ordine superiore. In fatti l'ampiezza de' pori, che lasciano tra loro le particelle, che confusamente insieme si uniscono, deriva presso a poco dalla mole delle stesse particelle. Onde conforme negli elementi di un' ordi-

ordine superiore gl' immediati componenti sono di mole maggiore, così farà maggiore altresì l'ampiezza de' pori, che tra quei componenti si frammezzano; e pertanto la densità degli stessi elementi dovrà essere parimente maggiore (70).

223. Per schiarire di vantaggio questa diversa densità, per cui elementi di diverso ordine debbono essere tra loro differenti, giova l'avvertire, che siccome gli elementi di qualsivisia ordine superiore sono nati dalle consecutive unioni degli elementi di tutti gli altri ordini inferiori; così in essi debbono ritrovarsi i pori derivati tanto dall'ultima unione, quanto da tutte l'altre unioni precedenti. Onde se voglia supporfi, che in ogni unione i pori uguaglino la mole delle particelle, che si uniscono, farà la parte porosa alla parte solida, come 1 ad 1 negli elementi del primo ordine, come 3 ad 1 negli elementi del secondo, come 7 ad 1 negli elementi del terzo, e così consecutivamente negli altri; e perciò le densità, che sono in ragion composta della diretta delle masse, e della reciproca delle moli, si diminuiranno negli stessi elementi in modo, che ciascuna farà la metà della precedente.

224. La seconda differenza, che incontrasi tra elementi di diverso ordine, dee ripetersi dalla coesione degl' immediati loro componenti; la quale deve essere tanto più debole, quanto maggiormente elevasi l'ordine degli elementi. Per intenderne la ragione, basta riflettere ai seguenti due principi. I, che siccome due qualsivisiano particelle di materia uniscono insieme per mezzo delle forze, con cui scambievolmente tra loro si attirano: così il grado della loro coesione dipende dall'attività delle forze, con cui insieme si uniscono. E II, che siccome la forza di qualsivisiano particella di materia si ha, con riunire insieme le forze dell'altre parti più picciole, che la compongono; così la medesima si raccoglie in uno dei punti interni della stessa particel-

ticella, da cui poscia per tante rette divergenti diramasi verso la superficie.

225. Or non v'ha dubbio, che con farsi l'elemento di un'ordine superiore, elevasi altresì l'ordine degl'immediati suoi componenti, nei quali perciò aumentasi non solo la mole, ma eziandio la ragione della parte porosa alla parte solida. Quindi sebbene in ciascuno di essi sia maggiore così la copia della sua materia, come la quantità assoluta della sua forza traente; nientedimeno, attento il secondo principio, l'attività di questa forza deve essere molto minore nella di lui superficie. Onde qualora gli stessi componenti uniscansi insieme colle loro forze traenti, e colla loro unione formano l'elemento, di cui si tratta; per necessità la loro coesione deve essere meno valida, come quella, che in virtù del secondo principio dee ripetersi dall'attività delle forze, per mezzo di cui insieme si uniscono.

226. Egli è vero, che per giudicare del grado di coesione, che ritrovasi tra due qualsivoglia particelle di materia unite insieme colle loro forze traenti; dee tenerfi conto altresì del numero de' punti, in cui toccansi le stesse particelle colla loro solidità; ma eziandio per questo capo, con farsi più elevato l'ordine, a cui l'elemento si riduce, la coesione tra gl'immediati suoi componenti deve essere più debole. In fatti se bene per farsi questi componenti di mole maggiore, sia maggiore parimente nel luogo del contatto la comune loro superficie; nientedimeno; perchè negli stessi componenti la parte porosa avanza di molto la parte solida, moltissimi punti della parte solida dell'uno corrisponderanno a punti della parte porosa dell'altro; e perciò il numero de' punti, in cui le parti solide dei medesimi componenti tra loro si toccano, farà più tosto minore.

227. La terza, ed ultima differenza, che ritrovasi tra elementi di diverso ordine, deriva dalla precedente; e si è, che un'elemento tanto più facilmente

mente possa risolversi negli altri immediati, che lo compongono, quanto scorgefi più elevato l'ordine, a cui egli si riduce. In effetto di qualunque ordine sia l'elemento, non potrà egli risolversi, se prima non tolgasi la coesione tra gli altri elementi di ordine inferiore, di cui il medesimo immediatamente si compone. Ma di già si è dimostrato, che questa coesione debba essere tanto più debole, quanto maggiormente elevasi l'ordine, a cui appartiene l'elemento. Dunque, con farsi l'elemento di un'ordine superiore, siccome con maggior facilità può togliersi la coesione tra i suoi componenti immediati, così l'elemento stesso potrà più facilmente ancora risolversi.

228. Per risolvere intanto un'elemento, non v'ha dubbio, che si ha bisogno di una forza maggiore di quella, da cui deriva la coesione tra i suoi componenti immediati. Quindi per poco, che vogliasi riflettere, s'intenderà facilmente, che non possa egli risolversi coll'attività di coloro, che immediatamente lo precedono; ma debba farsi la risoluzione di esso per mezzo di altri elementi, il di cui ordine sia di due gradi almeno più basso. Onde così gli elementi del primo ordine, come quei del secondo non potranno affatto risolversi. Imperocchè sebbene per la risoluzione di coloro, che sono del secondo ordine, potrebbe bastare l'attività delle minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia; nientedimeno non possono averfi queste tali particelle, se prima non risolvansi gli elementi del primo ordine.

229. Ciò, che poi è comune a tutti gli elementi di qualunque ordine essi si siano, riguarda l'espansione delle loro forze, la quale non dee soggiacere alla stessa legge, con cui spandonsi le forze delle minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia. In fatti si è veduto di sopra, che ne'vasti corpi di questo mondo non per altra ragione diramansi le forze da' loro centri, e

diminuisconsi con discostarsi da essi in duplicata ragione della distanza, se non perchè la loro figura è sferica, e ciascuno de' medesimi in eguali distanze dal centro ritrovasi essere egualmente denso. Onde se mai il corpo non sia sferico, o pure la sua densità in eguali distanze dal centro non sia la medesima; per necessità dovrà spandersi la forza con altra legge.

230. Or attenta la maniera, con cui formansi gli elementi, non è da crederfi, che la loro figura sia sferica; e se mai alcuni di essi abbiano presso a poco una tal figura, egli è molto verisimile, che i medesimi in eguali distanze dai centri non siano egualmente densi. Onde le forze negli elementi sebbene si diramino da uno dei punti loro interiori, con discostarsi nientedimeno da essi non si minoreranno in duplicata ragione della distanza. Conforme poi per determinare la legge della diminuzione, che seguono le loro forze, dee tenerfi conto non meno della loro figura, che della varia loro densità; così a misura, che variano negli elementi queste due affezioni, debbono variare altresì le leggi, con cui le loro forze si spandono; e perciò potranno spandersi con infinite leggi diverse.

231. Comunque però negli elementi mutisi la legge, con cui diminuisconsi le forze discostandosi dai loro centri, non v' ha dubbio, che debba farsi la diminuzione di esse sempre in maggior ragione della duplicata della distanza; e perciò si diminuiranno le forze sì per la divergenza delle rette, per cui si diramano, come ancora per non conservarsi dell'istesso vigore in tutta la lunghezza di queste rette. Intanto se vogliansi considerare separatamente le riferite due diminuzioni, non è egli da porsi in dubbio, che la seconda di esse possa farsi in qualsivisa ragione della distanza; poichè facendosi la prima continuamente in duplicata ragione, sempre con comporre insieme le due ragioni si avrà una ragione maggiore della duplicata,
ficcò-

siccome deve essere quella , con cui si fa la diminuzione totale .

232. Siccome poi le forze negli elementi non conservansi dell' istesso vigore in tutta la lunghezza delle rette , per cui si diramino ; così accaderà il più delle volte , che le stesse forze non siano sensibili , se non in picciole distanze dai loro centri . Quindi sebbene gli elementi colle loro forze possano sempre unirsi insieme , e formare i corpi soggetti a nostri sensi ; nientedimeno questi corpi colle loro forze , le quali risultano dall'unione di quelle , che risiedono nei loro elementi , rare volte potranno attirarsi scambievolmente in modo , che siano manifesti gli effetti delle loro scambievoli attrazioni . Ed ecco , che ancorchè la loro gravitazione verso il centro della terra non fosse notabilmente maggiore ; pure le scambievoli attrazioni , che esercitano tra esso loro con forze molto languide , assai di rado dovrebbero essere sensibili .

233. Del rimanente la varietà , che si ravvisa ne' corpi , non da altro dee ripetersi , se non se dalla diversità delle forze , che ritrovansi tra gli elementi , di cui si compongono ; nè ciò si oppone al comune sentimento de' Fisici , i quali stimano doverfi quella varietà dedurre dalle varie figure , e dalle varie densità degli stessi loro elementi ; poichè , secondo è stato avvertito , dee variare in un elemento la forza a misura , che varia in esso così la figura , come la densità . Onde il metodo da tenersi nelle ricerche fisiche si è , primieramente d'investigare per mezzo delle osservazioni , e dell'esperienze le forze , che risiedono negli elementi di qualsivoglia corpo ; ed indi di dedurre da queste forze gli effetti che producono i corpi , o separatamente l' uno dall' altro , o pure mescolati insieme (71) .

Delle leggi, che si osservano nella caduta verticale de' gravi.

234. **Q**uantunque la gravità abbia luogo così ne' corpi terrestri, come ne' celesti; nientedimeno i moti, che specialmente da noi considerarsi debbono, sono quei, che produce la gravità terrestre ne' corpi, che alla nostra terra si appartengono. Or le distanze di questi corpi dal centro della terra, da cui diramasi la gravità terrestre, sono così poco differenti l'una dall'altra, che possono averli presso a poco come eguali tra loro. Quindi se bene la gravità terrestre, con discostarsi dal suo centro, diminuisca in duplicata ragione della distanza; ad ogni modo presso la superficie della terra, ove deve essere da noi considerata, senza nota di errore può riguardarsi come costante. Onde in questa supposizione niente sarà più facile, quanto di definire; e porre a calcolo i moti de' gravi terrestri (72).

235. Ed in primo luogo, siccome un grave terrestre lasciato in libertà dee portarsi verso la terra per una retta perpendicolare alla sua superficie, così il suo moto dovrà essere eguabilmente accelerato. Per dimostrarlo, intendasi diviso il tempo in particelle eguali, ed infinitamente picciole; ed essendo il grave continuamente spinto dalla gravità terrestre, riceverà egli in ogni particella di tempo una spinta diversa. Ma nella supposizione di essere costante la stessa gravità, queste spinte debbono essere eguali. Dunque gl' incrementi di velocità, che acquista il grave colle medesime spinte, saranno eziandio eguali; e pertanto aumentandosi la sua velocità in ragione del tempo, il suo moto dovrà essere eguabilmente accelerato.

236. La stessa cosa può dedursi ancora dal teorema generale dimostrato di sopra (61). Fingiamo perciò, che la curva CD descritta intorno all'asse
AB

AB sia d'indole tale, che esprimendosi i tempi per l'ascisse **AN**, **AQ**, possano disegnarsi per le ordinate corrispondenti **MN**, **PQ** le attività della forza nella fine di que' tempi; ed in virtù del riferito teorema le velocità acquistate dal corpo ne' tempi **AN**, **AQ** faranno, come le aree **ACMN**, **ACPQ**. Ma nella supposizione di essere la forza costante, la curva **CD** cambiasi in una retta parallela all'asse **AB**, e le riferite aree diventano parallelogrammi di eguali altezze. Dunque siccome questi parallelogrammi debbono essere tra loro, come le basi **AN**, **AQ**; così le velocità acquistate dal corpo ne' tempi **AN**, **AQ** faranno proporzionali agli stessi tempi.

237. Essendo la caduta libera del grave moto egualmente accelerato, possiamo dimostrare in secondo luogo, che gli spazj percorsi dal grave, numerati dal principio della sua caduta, siano come i quadrati de' tempi, in cui si percorrono. Esprimansi perciò i tempi per le ascisse **AN**, **AQ**, e le velocità, che ritrovasi avere il grave nella fine di que' tempi, per le ordinate corrispondenti **MN**, **PQ**. Ed essendo le velocità proporzionali ai tempi, si termineranno le ordinate **MN**, **PQ** alla retta **AD**, che incontrasi alla **AB** nel punto **A**. Quindi per ciò, che è stato dimostrato di sopra (40), gli spazj percorsi dal grave nei tempi **AN**, **AQ**, faranno, come i triangoli **AMN**, **APQ**. Ma questi triangoli, per essere simili, sono come i quadrati dei lati omologhi **AN**, **AQ**. Dunque ancora gli spazj, che si percorrono dal grave nei tempi **AN**, **AQ** faranno; come i quadrati dei tempi, in cui si percorrono.

Fig. 21.

238. La stessa verità può dimostrarsi ancora in un'altra maniera, ed ecco come. Esprimansi per le ascisse **AN**, **AQ** prese sull'asse **AC** gli spazj percorsi dal grave in due qualsivoglia tempi; e se le attività, che ritrovasi avere la gravità terrestre ne' luoghi **A**, **N**, **Q** si disegnino per le ordinate **BA**, **MN**,

Fig. 3.

MN,

MN , PQ della curva BD , faranno i quadrati delle velocità acquistate dal grave fino ai luoghi N , e Q , come le aree corrispondenti $ABMN$, $ABPQ$ (68). Ma nella supposizione di essere costante la gravità terrestre, la curva BD cambiafi in una retta parallela all'asse AC , e le riferite aree diventano parallelogrammi di eguali altezze. Dunque siccome questi parallelogrammi debbono essere tra loro, come le basi AN , AQ ; così in questa stessa ragione faranno ancora i quadrati delle riferite velocità; e pertanto essendo le velocità proporzionali ai tempi, faranno gli spazj AN , AQ percorsi dal grave, ed i quadrati dei tempi, in cui si percorrono, nella stessa ragione.

239. Essendo così, può dimostrarsi in terzo luogo, che gli spazj percorsi successivamente dal grave in tempi eguali siano, come i numeri impari $1, 3, 5, 7, 9, \&c.$ Distinguanfi perciò i tempi in modo, che numerati dal principio della caduta siano tra loro, come i numeri naturali $1, 2, 3, 4, 5, \&c.$; e per altrettanto è stato dimostrato gli spazj percorsi dal grave in detti tempi faranno, come i quadrati degli stessi numeri $1, 4, 9, 16, 25, \&c.$ Ma togliendo ciascun tempo da quello, che segue, vengono ad averfi tempi eguali; e togliendo ancora ciascun spazio dall'altro susseguente, vengono ad averfi spazj, che sono come i numeri impari $1, 3, 5, 7, 9, \&c.$ Dunque gli spazj, che successivamente si percorrono dal grave in tempi eguali, debbono essere tra loro, come i riferiti numeri impari $1, 3, 5, 7, 9, \&c.$

240. Recca intanto meraviglia, come i divisati spazj possano essere tra loro in questa ragione, quandochè la velocità del grave diventa dupla nel secondo tempo, tripla nel terzo, quadrupla nel quarto, e così all'infinito. Ma egli è da notarsi, che la nuova velocità, che aggiungesi al grave in ogni tempo, generasi a poco a poco, ed eguabilmente. Quindi il grave in descrivere lo spazio corrispondente

dente a qualsisia dei tempi eguali, non impiega tutta la nuova velocità, che riceve in detto tempo, ma semplicemente la sua metà. Onde fatto il computo si ritroverà, che eziandio le velocità, con cui dal grave si percorrono spazj in tempi eguali, siano come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c. (73).

241. Può dimostrarsi finalmente, che lo spazio percorso dal grave in un dato tempo sia la metà di quello, che nell'istesso tempo si percorrerebbe eguabilmente colla velocità finale. In fatti, se AQ Fig. 21. disegni il tempo, e PQ la velocità finale; dovrà disegnarsi il primo spazio per mezzo del triangolo APQ, ed il secondo per mezzo del parallelogrammo ASPQ (42). Onde siccome il triangolo APQ è la metà del parallelogrammo ASPQ, così eziandio il primo spazio dovrà essere la metà del secondo. E di poi, secondo l'avvertimento poc'anzi fatto, nella descrizione del primo spazio impiegasi dal grave solamente la metà della velocità finale. Dunque descrivendosi il secondo spazio coll'intera velocità, per necessità il primo dovrà essere la metà del secondo.

242. Del rimanente per non tralasciare cosa alcuna intorno alla caduta verticale de' gravi, noteremo ora due cose. La prima si è, che tutti i gravi lasciati in libertà debbano in tempi eguali acquistare eguali velocità, e descrivere spazj eziandio eguali. Dipende ciò dall'essere costante la gravità presso la superficie della terra, e dall'essere eguali le spinte, che da essa continuamente ricevono non già i gravi, ma le minime, ed eguali loro particelle. Imperocchè siccome per queste eguali spinte debbono le stesse particelle accelerarsi egualmente in tempi eguali, e descrivere spazj similmente eguali; così ancora per rapporto ai gravi, che si compongono di quelle particelle, dovranno essere eguali tanto le velocità, che acquistano in tempi eguali, quanto gli spazj, che percorrono negli stessi tempi (74).

243. Egli è vero, che in pratica non sempre avviene, che gravi diversi cadendo liberamente percorrano eguali spazj in tempi eguali; ma ciò deve ascriversi alla resistenza dell'aere; la quale siccome non è la stessa per rapporto a tutti i gravi, così nè pure minora egualmente le velocità, che da essi si acquistano. Intanto se prendasi un tubo di vetro bastantemente lungo, da cui tolga si tutto l'aere per mezzo della machina pneumatica, e dentro di esso faccian si cadere da una stessa altezza due qualsivoglia gravi; si vedrà, che giungeranno questi gravi al fondo del tubo in un medesimo tempo. Onde non è egli da porsi in dubbio, che tolta via la resistenza dell'aere, debbano essere eguali così gli spazj, che in eguali tempi si percorrono da' gravi, come le velocità, che nei medesimi tempi da essi si acquistano (75).

244. L'altra cosa da notarsi si è, che secondo le osservazioni fatte per mezzo de' pendoli un grave qualsivoglia lasciato in libertà debba descrivere nel tempo di una seconda 15 piedi di Parigi con una dodicesima parte di più. Onde perchè gli spazj, che percorre il grave dal principio della sua caduta, debbono essere come i quadrati de' tempi, in cui gli percorre; niente sarà più facile, quanto di definire così lo spazio, che dee percorrersi dal grave in qualsivoglia tempo dato, come il tempo, che deve impiegare il grave a percorrere qualsivoglia dato spazio. Ed in fatti, se il tempo dato sia di 10 seconde, farà di piedi 1508 con una terza parte di più lo spazio, che si dimanda; ed al contrario, se lo spazio dato sia di 2000 piedi, farà di 11 seconde con una metà di più il tempo, che si cerca (76).

Delle leggi, che si osservano nella caduta obliqua de' gravi.

245. **C**onforme un grave col suo peso cerca di portarsi verso la terra con direzione perpendicolare alla sua superficie; così se mai sia egli sostenuto da un piano orizzontale, impiegherà tutto il suo peso in premere il piano, che lo sostiene; onde si è, che il medesimo grave dovrà rimanere fermo ed immobile. Non avviene però lo stesso, se il grave posi su di un piano, che sia inclinato sull'orizzonte; poichè in questo caso premerà egli il piano, su di cui poggia, con una sola porzione del suo peso; onde coll'altra rimanente, che non dee rimanere oziosa, si porterà tuttavia verso la terra, ma con direzione parallela al medesimo piano.

246. Sia perciò BC un piano orizzontale, a cui *Fig. 22.* inclinisi un altro ad arbitrio, e sia AB . Situisi su di quest'altro piano inclinato il grave D , e siccome egli col suo peso agisce secondo la DE perpendicolare al piano orizzontale BC , così premerà l'altro piano inclinato AB secondo la retta DF perpendicolare all'istesso piano. Quindi se il peso totale del grave esprimasi per la DG , e compiuto il parallelogrammo $DFGH$, dividasi nelle parti DF , DH ; premerà egli il piano inclinato AB colla sola parte DF . Onde l'altra parte DH , che non impiegasi nella pressione, rimarrà intatta nel grave, la quale perciò farà, che il grave portisi verso la terra colla sua medesima direzione.

247. Essendo così, sogliono distinguersi due pesi in un grave, che poggia sopra un piano inclinato; di cui uno è il peso suo totale, che chiamasi peso assoluto; e l'altro è la porzione dello stesso peso totale, che conduce il grave per la lunghezza del piano, la quale porzione appellasi peso relativo. Onde nel grave D , che poggia su'l piano inclina-

clinato AB , il peso assoluto sarà quello, che si è espresso per la DG ; all' incontro il peso relativo sarà la porzione del medesimo peso assoluto corrispondente alla DH . Ed egli è chiaro, che se bene il peso assoluto del grave sia sempre lo stesso, nientedimeno il peso relativo debba variare secondo varia l' inclinazione del piano, su di cui poggia l' istesso grave: siccome in effetto chiamasi peso relativo, perchè si considera relativamente al piano inclinato (77).

248. Qualunque però siasi l' inclinazione del piano, egli è facile il dimostrare, che il peso assoluto sia al peso relativo, come la lunghezza del piano alla sua altezza. Così se dal punto A si abbassi su' l' piano orizzontale BC la perpendicolare AC , farà questa AC l' altezza del piano inclinato AB . Onde ciò, che dee dimostrarsi, si è, che il peso assoluto del grave D sia al peso suo relativo, come la lunghezza AB del piano inclinato all' altezza AC del medesimo piano: il che ricavasi dall' essere i due triangoli DGH , ABC tra loro equiangoli. Imperocchè in virtù di essi deve essere, come DG a DH , così AB ad AC . Ma di già si è veduto, che esprimendosi per la DG il peso assoluto, debba designarsi per la DH il peso relativo. Dunque ancora il peso assoluto deve essere al peso relativo, come AB ad AC (78).

249. Se poi prendasi per raggio la lunghezza del piano inclinato AB , chiaro si è, che la sua altezza AC si farà seno dell' angolo ABC , per mezzo di cui si misura l' obliquità, o sia inclinazione del piano. Quindi comunque inclinisi il piano AB sull' altro orizzontale BC , il peso assoluto del grave D farà al suo peso relativo, come sta il raggio al seno dell' angolo, che ci addita l' inclinazione del medesimo piano. Onde siccome il peso relativo dee farsi eguale al peso assoluto, quantevolte facendosi l' angolo ABC retto, il piano AB diviene verticale; così al contrario dovrà egli annientarsi, qualora

ra

ra combaciandosi tra loro i due piani AB, BC , ed annientandosi l'angolo ABC , diventa orizzontale il piano AB .

250. La verità di questanto si è dimostrato intorno alla ragione tra il peso assoluto, ed il peso relativo può comprovarsi ancora coll'esperienza, ed ecco come. Pongasi in A una girella, per cui facciasi passare il filo DIL attaccato con uno de' suoi estremi al grave D ; indi dall'altro estremo dello stesso filo sospendasi un altro grave L , che coll'attività del suo peso arresti su 'l piano AB il primo grave. Poichè dunque il grave D cerca di portarsi per la lunghezza del piano AB col suo peso relativo, chiaro si è, che non potrà egli essere arrestato dall'altro grave L , se il peso assoluto di questo non sia eguale al peso relativo di quello. Onde se mai ritrovassi, che il peso assoluto del grave D sia al peso assoluto del grave L , come AB ad AC ; in questa stessa ragione dovrà essere parimente il peso assoluto del grave D al peso suo relativo.

251. Si vuol però qui notare, che in fare la riferita esperienza dee farsi uso di una girella, per mezzo di cui la porzione del filo DI facciasi parallela al piano AB ; e ciò per la ragione, che se mai non fosse parallela, il grave L non arresterebbe su'l piano l'altro D col peso suo totale, ma solamente con una porzione di esso. Fingiamo perciò, che la DI sia inclinata su'l piano AB , ed esprimasi per la stessa DI il peso totale del grave L . Tirisi la IM parallela al piano AB , su di cui si abbassi la perpendicolare DM . E conforme quello stesso peso può dividersi nelle due parti IM, DM ; così non è egli da porsi in dubbio, che il grave D sia arrestato sul piano AB dalla sola prima IM , impiegandosi l'altra DM più tosto a premere l'istesso grave contro di quel piano.

Fig. 23.

252. Intanto in questo stesso caso non sarà egli difficile il definire, come debbano essere tra loro i pesi

pesi totali dei due gravi D , ed L . Imperocchè di già il peso totale del grave D deve essere alla parte dell'altro corrispondente alla IM ; come AB ad AC . Ma questa parte sta al suo tutto, come IM a DI . Dunque il peso totale del grave D dovrà essere al peso totale dell'altro L in ragion composta di AB ad AC , e di IM a DI : E poichè tirandosi la AN parallela alla DI , ed abbassandosi su di essa la perpendicolare BN , si fanno equiangoli i due triangoli DIM , ABN ; farà IM a DI , come AN ad AB . Onde il peso totale del grave D dovrà essere al peso totale del grave L in ragion composta di AB ad AC , e di AN ad AB , o pure nella semplice ragione di AN ad AC .

253. Or se bene la caduta del grave per un piano inclinato debba ripetersi da una sola porzione del peso suo assoluto, la quale chiamasi peso relativo; pure però deve ella farsi colle stesse leggi, che si osservano nella caduta verticale. In fatti, secondo è stato dimostrato, il peso assoluto del grave sta al peso relativo, come la lunghezza del piano inclinato alla sua altezza. Onde siccome per tutta la lunghezza del piano il peso assoluto non mai si altera, così nè pure dovrà soggiacere a cambiamento alcuno il peso relativo. Quindi tanto la caduta verticale del grave, quanto l'altra per un piano inclinato deve ascriversi a forza costante; e perciò debbono osservarsi le medesime leggi così nell'una, come nell'altra caduta.

254. Qualora adunque portasi il grave col suo peso relativo per un piano inclinato, dovrà egli accelerarsi talmente, che si aumenterà la sua velocità in ragion del tempo, ed in conseguenza il suo moto farà egualmente accelerato. Quindi siccome gli spazj, che egli percorre, numerati dal principio del suo moto, debbono essere, come i quadrati dei tempi, in cui si percorrono, così gli altri percorsi successivamente in tempi eguali faranno, come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c. Ed
in

in fine lo spazio percorso dall'istesso grave in un dato tempo farà la metà di quello, che si percorrerebbe nell'istesso tempo egualmente colla velocità finale (79).

255. Del rimanente, siccome debbonfi osservare le stesse leggi tanto nella caduta verticale de' gravi, quanto nell'altra obliqua; così avvalendoci di un piano lunghissimo, che sia molto poco inclinato sull'orizzonte, potremo facilmente sperimentare, se le leggi esposte abbiano luogo così nell'una, come nell'altra caduta. Prendasi perciò un grave di figura sferica, cosicchè possa muoversi liberamente sulla lunghezza del piano; e notinsi gli spazj, che successivamente da esso si percorrono in tempi eguali. Se adunque ritroveremo, che questi spazj siano tra loro, come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c.; faranno vere senza dubbio le riferite leggi.

256. La ragione poi, per cui il piano lunghissimo deve essere molto poco inclinato sull'orizzonte, dipende da ciò, che essendo picciola l'inclinazione del piano, non viene ad essere così rapido il moto del grave; onde possono notarsi con esattezza gli spazj, che successivamente si percorrono dall'istesso grave in tempi eguali. Ed egli è d'avvertirsi, che siccome il piano dee spianarsi in modo, che non resti in esso scabrezza alcuna sensibile, con cui si opponga al moto del grave; così in fare la riferita esperienza dee tenerfi conto della resistenza dell'aere, la quale togliendo continuamente qualche poco di velocità al grave farà, che i divisati spazj non siano esattamente tra loro nella ragione de' numeri impari.

*Della caduta obliqua paragonata colla
caduta verticale.*

257. **P** Aragoneremo ora la caduta obliqua de' gravi colla loro caduta verticale. Ed in primo luogo dimostreremo, che la velocità acquistata da un grave colla sua caduta verticale sia all'altra, che acquistarebbe nell'istesso tempo cadendo obliquamente per lo piano inclinato AB , come sta la lunghezza AB del piano alla sua altezza AC . Intendasi perciò diviso il tempo in particelle infinitamente picciole. Ed essendo gli aumenti di velocità, che in ciascuna di esse riceve il grave colle due sue cadute, come le forze costanti, da cui le stesse cadute derivano; chiaro si è, che componendo ancora le velocità totali faranno nella stessa ragione. Ma la caduta verticale del grave dipende dal suo peso assoluto, e l'altra obliqua deriva dal peso suo relativo. Dunque conforme è stato dimostrato (248), che questi due pesi siano tra loro nella ragione di AB ad AC ; così nella medesima ragione faranno altresì le velocità, che si acquistano nell'istesso tempo dal grave colle due sue cadute (80).

Fig. 24.

258. Da ciò intanto possiamo dedurne, che debbano essere eguali tra loro le velocità, che si acquistano nell'istesso tempo da due gravi, che cadono obliquamente per un medesimo piano inclinato AB . In fatti per rapporto a ciascuno de' due gravi la velocità acquistata colla caduta verticale sta all'altra, che si acquista nel medesimo tempo colla caduta obliqua, come AB ad AC . Dunque le velocità, che acquistano i due gravi in un dato tempo colle loro cadute verticali, faranno nella stessa ragione colle velocità, che acquistano gli stessi gravi nel medesimo tempo colle loro cadute oblique. Ma si è dimostrato di sopra (242), che le prime due velocità siano in ragion di uguaglianza. Dunque ancora

cora l'altre due velocità faranno tra loro eguali, colle quali in conseguenza i due gravi dovranno percorrere spazj eziandio eguali (81).

259. Dimostreremo in secondo luogo, che se un grave cadendo obliquamente per un piano inclinato AB percorra la porzione AD nel medesimo tempo, in cui colla caduta verticale descrive la AC ; le tre rette AB , AC , AD debbano essere continuamente proporzionali. Imperocchè, secondo è stato dimostrato (257), le velocità acquistate dal grave colle due sue cadute ne' punti C , e D debbono essere nella ragione di AB ad AC . Ma con quelle velocità debbono descrivere egualmente, e nel medesimo tempo spazj doppj dei due AC , AD . Dunque le stesse velocità faranno ancora nella ragione di questi spazj doppj, o pure delle due AC , AD ; e pertanto dovendo essere, come AB ad AC , così AC ad AD , le tre rette AB , AC , AD faranno continuamente proporzionali tra loro.

260 Ma siccome con dimostrazione negativa possiamo al contrario far vedere, che essendo le tre AB , AC , AD continuamente proporzionali, debba il grave colla sua caduta obliqua percorrere la AD nell'istesso tempo, in cui colla caduta verticale descrive la AC ; così niente sarà più facile, quanto di determinare la porzione AD del piano inclinato, che dee percorrerfi dal grave nel medesimo tempo, in cui verticalmente portasi per la AC . Si abbassi perciò dal punto C la perpendicolare GD su'l piano inclinato; ed io dico, che la porzione AD tagliata da questa perpendicolare sia quella, che si domanda: il che dipende da ciò, che essendo il triangolo ACB rettangolo in C , ed essendosi dall'angolo retto abbassata la perpendicolare AD sulla sua ipotenusa, le tre AB , AC , AD debbono essere continuamente proporzionali tra loro.

261. Se poi dal punto A partano due piani diversi AB , AE , e presa su'l primo di essi la porzione AD ad arbitrio, debba determinarsi la por-

zione AF dell'altro piano, che si percorre dal grave nel medesimo tempo, in cui si porta per la AD ; potremo avvalerci della seguente costruzione. S'innalzi primieramente su 'l piano AB la perpendicolare DC , che s'incontri colla verticale AC nel punto C ; indi da questo punto si abbassi sull'altro piano AE l'altra perpendicolare AF , che tagli da esso la porzione AF ; ed io dico, che la AF sia la porzione, che si cerca. La ragione è chiara. Imperocchè, tanto le due AC , AD , quanto le due AC , AF debbono percorrerfi dal grave in tempi eguali. Onde faranno eguali parimente i tempi, in cui si percorreranno dal grave le due AD , AF .

Fig. 25.

262. Effendo così, egli è facile ad intendersi, che se il cerchio ACD sia perpendicolarmente elevato sull'orizzonte, le corde di esso AD , AF , che partono dal punto supremo A , debbono percorrerfi dal grave nel medesimo tempo, in cui si porta per lo diametro verticale AC . Tirisi perciò al punto C la tangente CE , che s'incontri colle due corde AD , AF prolungate ne' punti B , ed E ; e congiungansi le due CD , CF . Effendo adunque la CE tangente del cerchio, farà l'angolo ACE retto; e pertanto la stessa CE , come perpendicolare sulla verticale AC , farà retta orizzontale. Ma per essere i due angoli ADC , AFC situati nel mezzo cerchio, ciascuno di essi similmente è retto. Dunque effendo le due CD , CF perpendicolati sull'altre due AB , AE , che sono rette inclinate sull'orizzonte; si percorrerà dal grave tanto la AD , quanto la AF nell'istesso tempo, in cui portasi per la AC .

263. Ma eziandio le corde DC , FC , che nel riferito cerchio si terminano al punto più basso C , debbonsi percorrere dal grave nel medesimo tempo, in cui portasi per lo diametro verticale AC . Compiscasi perciò il parallelogrammo $CADG$, e per lo punto G tirisi l'altra orizzontale GH , che vadasi ad incontrare colla corda DC prolungata nel punto

punto H. Effendo adunque paralele le due AC, DG, farà la DG fimilmente retta verticale. Ma l'angolo DCG, come eguale al suo alterno ADC, è retto. Dunque facendofi la CC perpendicolare sulla DH, che è retta inclinata sull'orizzonte, fi percorrerà dal grave la DC nell'ifteffo tempo, in cui portafi per la DG, ovvero AC. Ed in una maniera confimile fi dimoftrerà parimente, che l'altra corda FC debba percorrerfi dal grave eziandio nel medefimo tempo (82).

264. Dimoftreremo in terzo luogo, che il tempo, in cui percorre il grave la lunghezza del piano inclinato AB, fia al tempo, in cui portafi per la fua altezza AC, nella ifteffa ragione delle due AB, AC. Si abbaffi perciò dal punto C la perpendicolare CD su'l piano inclinato AB; e per ciò, che è ftato dimoftrato (260), colla caduta obliqua, e colla caduta verticale fi percorreranno dal grave le due AD, AC nel medefimo tempo. Ma il tempo per la AB ftà al tempo per la AD nella fudduplicata ragione delle due AB, AD, ed in confequenza nella ragione femplice dell'altre due AB, AC, per effere continuamente proporzionali le tre rette AB, AC, AD. Dunque ancora i tempi per le due AB, AC faranno tra loro nella femplice ragione di AB ad AC.

Fig. 26.

265. Quindi fe dal medefimo punto A partano due diverfi piani inclinati AB, AE, che fi terminino alla ifteffa retta orizzontale CE, ed abbiano in confequenza la medefima altezza AC, egli è facile ad intenderfi, che i riferiti due piani debbanfi percorrere dal grave in tempi proporzionali alle loro lunghezze. In fatti ficcome il tempo per la AB deve effere al tempo per la AC nella ragione di AB ad AC; così il tempo per la AC farà al tempo per la AE nella ragione di AC ad AE. Quindi il tempo per la AB farà al tempo per la AE in ragion compofta di AB ad AC, e di AC ad AE. Ma quefte due ragioni componono la ragione

di AB ad AE . Dunque ancora il tempo per la AB farà al tempo per la AE nella semplice ragione di AB ad AE .

Fig. 24. 266. Dimostreremo finalmente, che le velocità acquistate dal grave colla sua caduta obliqua per la lunghezza del piano inclinato AB , e colla sua caduta verticale per l'altezza dell'istesso piano AC , siano tra loro eguali. Si abbassi perciò di nuovo la perpendicolare CD su'l piano inclinato AB ; e percorrendosi dal grave le due AC , AD nel medesimo tempo, farà la velocità acquistata per la AC alla velocità acquistata per la AD , come AB ad AC . Ma la velocità acquistata per la AB sta alla velocità acquistata per la AD , come il tempo per la AB al tempo per la AD , ovvero AC . Dunque essendosi dimostrato, che questi due tempi siano tra loro nella stessa ragione di AB ad AC , farà la velocità acquistata per la AB eguale alla velocità acquistata per la AC .

267. Essendo così non si durerà fatica ad intendere, che se dal medesimo punto A partano due diversi piani inclinati AB , AE , che si terminino alla stessa retta orizzontale CE , ed abbiano in conseguenza la medesima altezza AC , siano eguali le velocità, che si acquistano dal grave con portarsi per le loro lunghezze. Quindi generalmente può stabilirsi, che portandosi un grave da un'orizzontale più alta ad un'altra più bassa, debba egli acquistare la stessa velocità così colla caduta sua verticale, come con qualsiasi altra caduta obliqua. Nè ciò dee sembrarci strano. Imperocchè se bene nella caduta obliqua sia spinto il grave da forza tanto più picciola, quanto più picciolo è il seno dell'angolo, che misura l'inclinazione del piano, per cui cade; nientedimeno la picciolezza della forza vien compensata dal tempo proporzionalmente più lungo, che impiegasi in quella caduta (83).

*Della caduta de' gravi per piani contigui
diversamente inclinati sull'
orizzonte.*

268. **U**N grave può portarsi ancora così per piani contigui diversamente inclinati sull'orizzonte, come altresì per superficie, che siano curve. Onde passeremo ora a far vedere, quali siano le leggi di quest'altre due cadute. Per incominciare dalla prima, siano AB , BC due piani contigui, di cui il secondo vada ad incontrare prolungato coll'orizzontale AD nel punto D . Se adunque voglia si supporre, che il grave passando dal piano AB nell'altro BC niente perda della velocità acquistata, ma semplicemente muti direzione; chiaro si è, che colla caduta per gli due piani AB , BC debba egli acquistare la stessa velocità, che acquista cadendo a dirittura per lo piano DC . Imperocchè, essendo eguali le velocità, che acquistansi per gli due piani AB , DB (267), entrerà il grave nel secondo piano colla velocità acquistata per DB ; onde nel termine di esso C si ritroverà egli avere la stessa velocità, che acquistasi cadendo per DC .

269. Se poi tra le due DB , DC ritrovisi la mezza proporzionale, che sia DE , egli è facile il dimostrare, che nella stessa caduta il tempo per lo primo piano AB sia al tempo, in cui con moto continuato si percorre l'altro piano BC , come AB a BE . In fatti dovendo essere il tempo per DB al tempo per DC nella sudduplicata ragione di DB a DC , o pure nella ragion semplice di DB a DE ; sarà il tempo per DB al tempo per BC , come DB a BE . Ma il tempo per AB sta al tempo per DB , come AB a DB (264). Dunque il tempo per AB sarà al tempo per BC in ragion composta di AB a DB , e di DB a BE ; e pertanto, siccome queste due ragioni compongono in-

fieme la ragione di AB a BE , così in questa stessa ragione faranno altresì i tempi, in cui il grave con moto continuato percorre i due piani AB , BC (84).

270. Quindi se due altri piani contigui ab , bc siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei due AB , BC , e le lunghezze degli uni siano proporzionali alle lunghezze degli altri; farà il tempo per gli primi due piani AB , BC al tempo per gli altri due ab , bc nella sudduplicata ragione delle totali loro lunghezze. Prolunghisi perciò il secondo piano bc fino a che vadasi ad incontrare coll'orizzontale ad nel punto d , e tra le due db , dc ritrovisi parimente la mezza proporzionale, che sia de . Facendosi adunque simili le due figure, faranno le rette dell'una proporzionali alle corrispondenti rette dell'altre. Onde essendo le due AB , BE nella stessa ragione colle due ab , be , farà il tempo per AB al tempo per BC , come il tempo per ab al tempo per bc ; e pertanto il tempo per gli due piani AB , BC farà al tempo per gli altri due ab , bc , come il tempo per AB al tempo per ab .

271. Per essere poscia i due piani AB , ab egualmente inclinati sull'orizzonte, chiaro si è, che i medesimi possono riguardarsi come porzioni di un medesimo piano inclinato. Quindi i riferiti due piani si percorreranno in tempi, che faranno in sudduplicata ragione delle loro lunghezze; e perciò ancora il tempo per gli due piani AB , BC farà al tempo per gli altri due ab , bc in sudduplicata ragione di AB ad ab . Ma essendo le lunghezze dei due piani AB , BC proporzionali alle lunghezze degli altri due ab , bc , la somma delle due prime sta alla somma dell'altre due, come la sola lunghezza AB alla sola lunghezza ab . Dunque il tempo per gli due piani AB , BC farà al tempo per gli altri due ab , bc nella sudduplicata ragione delle totali loro lunghezze.

272. Ciò, che si è dimostrato intorno alla caduta del grave per due soli piani contigui, ha luogo parimente, quando portasi il grave con moto continuato per più piani della stessa indole. In fatti nella supposizione, che nel passaggio del grave da un piano in un altro niente perdesi della velocità acquistata, sempre nella fine del moto si ritroverà egli avere tanta velocità, quanta ne acquista colla caduta per un solo piano egualmente alto. E conforme possono facilmente determinarsi i tempi, in cui ad uno ad uno percorronsi dal grave con moto continuato i riferiti piani; così se si abbiano altrettanti piani contigui, che siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei primi, e le di cui lunghezze siano proporzionali alle lunghezze di quelli; pure potrà dimostrarsi, che i tempi per le due serie de' piani siano nella sudduplicata ragione delle totali loro lunghezze.

273. Or la supposizione di non perdersi velocità nel passaggio del grave da un piano in un altro, si discosta molto dal vero; e ciò per la ragione, che il nuovo piano non essendo a dirittura col precedente deve opporsi al moto del grave. Niente però è egli più facile, quanto di determinare la ragione tra la velocità acquistata dal grave per lo primo piano, e l'altra, con cui l'istesso grave entra nel secondo. Siano perciò AB , BC i due piani, e la velocità acquistata per lo primo di essi AB esprimasi per la sua propria lunghezza. Se adunque su'l secondo piano prolungato si abbassi la perpendicolare AD , e compiscasi il parallelogrammo $ADBE$; potrà risolversi la velocità AB nelle due AD , AE . Ma di queste due la prima AD come perpendicolare al piano BC soltanto preme il suddetto piano, colla di cui reazione ella in conseguenza si perde. Dunque il passaggio del grave dal piano AB nell'altro BC si farà colla sola velocità parallela AE , ovvero DB .

Fig. 27.

274. Quindi possono stabilirsi due teoremi, di cui il primo si è, che la velocità acquistata dal grave per lo primo piano AB sia a quella, che si perde col passaggio dello stesso grave nel secondo piano BC , come AB ad AD ; ed il secondo, che la medesima velocità acquistata sia all'altra, che rimane nel grave, e con cui si fa il riferito passaggio, come AB a DB . Se poi vogliasi prendere la AB per raggio o seno totale, chiaro si è, che farà la AD seno primo dell'angolo ABD formato dai due piani col loro incontro, e la DB seno secondo del medesimo angolo. Onde conforme nel primo teorema la ragione della velocità acquistata all'altra, che si perde, deve essere eguale alla ragione, che ha il raggio al seno primo dell'angolo contenuto dai due piani; così nel secondo teorema la ragione della velocità acquistata all'altra, che rimane, farà eguale alla ragione, che ha il raggio al seno secondo del medesimo angolo.

275. Si abbassi ora su'l primo piano AB l'altra perpendicolare DF ; ed egli è facile il dimostrare, che il grave entri nel secondo piano BC colla velocità, che si acquista per FB . In fatti per ciò, che è stato dimostrato, la velocità acquistata per AB sta alla velocità, con cui entra il grave nel secondo piano BC , come AB a DB . Ma per essere le tre AB , DB , BF continuamente proporzionali, nella stessa ragione di AB a DB sta ancora la velocità acquistata per AB all'altra, che si acquista colla caduta per FB . Dunque la velocità, con cui entra il grave nel secondo piano BC , e l'altra, che egli acquista, cadendo per FB , faranno tra loro eguali. Ed essendo così, egli è chiaro, che se prolunghisi il secondo piano fino a che vadasi ad incontrare coll'orizzontale FG nel punto G , la velocità acquistata per gli due piani AB , BC farà tanta, quanta se ne acquista colla caduta per lo solo piano GC .

276. Se poi tra le due GB, GC ritrovisi la mezza proporzionale, che sia GH ; può dimostrarsi ancora facilmente, che il tempo per lo primo piano AB sia al tempo, in cui con moto continuato si percorre l'altro piano BC , come DB a BH . In effetto nella supposizione, di non perdersi velocità nella caduta per gli due piani FB, BC , il tempo per FB deve essere al tempo per BC , come FB a BH (269). Ma essendo continuamente proporzionali le tre rette AB, DB, FB , il tempo per AB sta al tempo per FB , come AB a DB , o pure come DB ad FB . Dunque portandosi il grave per gli due piani AB, BC , il tempo per AB farà al tempo per BC , come DB a BH . E da ciò con dimostrazione consimile a quella di sopra potrà ricavarsi, che se gli altri due piani ab, bc siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei due AB, BC , e le lunghezze degli uni siano proporzionali alle lunghezze degli altri, il tempo per gli primi due AB, BC sia al tempo per gli altri due ab, bc nella sudduplicata ragione delle loro lunghezze totali (85).

277. Del rimanente per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che qualunque sia il numero de' piani contigui, per cui portasi il grave, sempre con reiterare la costruzione, di cui ci siamo serviti essendo due, possa determinarsi la velocità, che si ritroverà avere il grave nella fine del suo moto. Anzi siccome possono determinarsi facilmente ancora i tempi, in cui ad uno ad uno si percorrono dal grave con moto continuato i riferiti piani; così, se si abbiano altrettanti piani contigui, che siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei primi, e le di cui lunghezze siano proporzionali alle lunghezze di quelli, tuttavia potrà dimostrarsi, che i tempi per le due serie de' piani siano nella sudduplicata ragione delle totali loro lunghezze: dimodochè questa proprietà deve aver luogo tanto se si perda velocità nel passaggio

sag-

108 **DELL' EQUILIBRIO,**
saggio del grave da un piano in un altro, quanto
se non facciasi di essa perdita veruna (86).

VIII.

Della caduta de' gravi per superficie curve.

278. **S**Egue ora l'altra caduta de' gravi, che di-
cemo potersi fare per superficie curve. Ed in vero, potendosi riguardare ciascuna di
queste superficie, come composta di piani infinita-
mente piccioli, che traviano l'uno dall'altro per
angoli di una picciolezza ancora infinita; chiaro si
è, che con essersi esaminata la caduta de' gravi per
piani contigui diversamente inclinati sull'orizzonte,
debba riuscire facile l'esame di quest'altra, con cui
portansi i gravi per superficie curve; siccome in
effetto tra le due cadute non osservasi altro diva-
rio, se non se quello, che deriva dall'infinita pic-
ciolezza così de' piani, di cui si compone la su-
perficie curva, come degli angoli, che formano
tra loro gli stessi piani.

279. In primo luogo adunque, se bene portan-
dosi il grave per piani contigui diversamente in-
clinati sull'orizzonte, debba egli perdere velocità
nel passare da un piano in un'altro; non avviene
però lo stesso, quante volte portasi il grave per
una superficie curva, per non farsi della velocità
acquistata perdita veruna. Deriva ciò appunto dall'
essere infinitamente piccioli gli angoli, che forma-
no tra loro i piani, di cui si compone la superfi-
cie curva. In fatti secondo è stato dimostrato di
sopra (274), nel passare il grave da un piano in
un'altro la velocità acquistata sta a quella, che si
perde, come il raggio al seno primo dell'angolo
contenuto dai due piani. Ma con farsi l'angolo dei
due piani infinitamente picciolo, eziandio il suo se-
no primo si fa di una picciolezza infinita. Dunque
la velocità, che si perde, farà così picciola, che
non dovrà tenerli conto della sua perdita.

280.

280. Si potrebbe in tanto ridire, che sebbene a riguardo di una superficie curva la perdita di velocità, che si fa nel passare il grave da uno de' suoi piani nell' altro contiguo, sia infinitamente picciola; nientedimeno conforme queste perdite sono continue, ed in conseguenza infinite di numero, così potrebbe avvenire, che la somma di esse fosse una velocità finita. Quindi per rispondere alla difficoltà proposta, e per vedere altresì quale sia l'effettiva velocità, che si perde; giova riflettere, che quantunque risolvendo la velocità disegnata per la AB nelle due laterali AD , DB , la prima di esse AD perdisi dal grave nel passaggio, che egli fa dal piano AB nell' altro BC ; ad ogni modo siccome rimane al grave l'altra velocità DB , così la velocità acquistata si ritroverà effettivamente diminuita di tanto, per quanto DB differisce dalla AB .

Fig. 28.

281. Or se col punto B come centro, e coll' intervallo della BA descrivasi il mezzo cerchio EAF , che s' incontri colla DB prolungata nei punti E , ed F ; chiaro si è, che la differenza delle due DB , AB sia la DE , che è seno verso dell'angolo ABD , onde l'effettiva diminuzione, che soffre la velocità acquistata nel passaggio del grave dal piano AB nell' altro BC , corrisponderà in proporzione alla stessa DE . Quantunque poi facendosi l'angolo ABD infinitamente picciolo, facciasi di una picciolezza eziandio infinita tanto la AD , quanto la DE ; nientedimeno per essere DE ad AD , come AD a DF , sarà la picciolezza della DE infinitamente minore per rapporto a quella della AD ; e perciò la somma di tutte le infinitamente picciole velocità, che perde il grave portandosi per una superficie curva, tuttavia sarà una velocità infinitamente picciola (87).

282. Sia ora AM la superficie curva, per cui portasi il grave colla sua caduta; e sia ancora AB la retta orizzontale corrispondente al punto A , donde incomincia la caduta del grave. Poichè dunque

niente

niente perdesi della velocità, che va acquistando il grave colla sua caduta; avrà egli in ogni punto M della curva, che percorre nella riferita superficie, tanta velocità, quanta ne acquisterebbe colla caduta verticale fatta per la NM . Onde siccome compiuto il parallelogrammo $ANMO$ la velocità del grave nel punto M deve essere nella sudduplicata ragione della NM , ovvero AO ; così se intorno all'altra verticale AD come asse descrivasi la parabola apolloniana AR , chiaro si è, che la stessa velocità possa disegnarsi per la OR , che è l'ordinata di questa parabola corrispondente all'ascissa AO .

283. Quindi se mai la curva AM descritta dal grave sia d'indole tale, che qualsivisia suo arco AM sia proporzionale all'area parabolica corrispondente AOR ; egli è facile il dimostrare, che il tempo della caduta per l'arco AM sia proporzionale alla AO , ovvero MN . Sia perciò l'altra $m or$ infinitamente vicina alla prima MOR ; ed essendo l'arco AM proporzionale all'area AOR , corrisponderà altresì in proporzione il picciolo archetto Mm al picciolo trapezio $ORro$; onde l'istesso picciolo archetto farà in ragion composta delle due OR , Oo . Ma l'archetto Mm deve essere ancora in ragion composta della velocità OR , con cui si descrive, e del picciolo tempo, in cui si descrive. Dunque questo picciolo tempo farà proporzionale alla Oo ; ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione farà il tempo della caduta per l'arco AM proporzionale alla AO , ovvero MN .

284. Da ciò intanto possiamo dedurne due conseguenze. La prima si è, che essendo la curva AM descritta dal grave della riferita indole, la velocità, che acquistasi colla caduta per l'arco AM , sia in sudduplicata ragione del tempo, in cui si acquista; e ciò per la ragione, che siccome quella velocità deve essere in ragion sudduplicata della MN , così questo tempo corrisponde in proporzione alla stessa MN . L'altra conseguenza si è, che portandosi il
grave

E DEL MOTO DE' CORPI. III

grave per la divisa curva debba egli in tempi eguali discostarsi egualmente dall' orizzontale AB ; poichè additandoci la MN così il tempo, in cui si percorre dal grave l' arco AM , come l' allontanamento dell' istesso grave dall' orizzontale AB , si aumenterà il tempo nella stessa ragione col riferito allontanamento; e perciò essendo eguali i tempi, eziandio gli allontanamenti dovranno essere eguali.

285. Or conforme la curva AM descritta dal *Fig. 30.* grave dee riguardarsi come una serie d' infinite picciole rette diversamente inclinate sull' orizzonte; così col prolungamento di esse si avranno le rette, che sono tangenti della stessa curva. Quindi se MT sia la retta, che tocca la curva nel punto M ; si accelererà il grave in questo punto, come se egli si portasse per la MT . Onde per rapporto alla medesima MT dovrà definirsi nel punto M così la forza, da cui deriva l' accelerazione del grave, come l' altra, per mezzo di cui l' istesso grave preme la curva. Dal che egli è facile il ricavarne, che se la curva AM sia circonferenza di cerchio, la quale abbia per suo diametro la AB , e per suo centro il punto C , debba essere proporzionale nel punto M la forza premente al seno primo dell' arco AM , e la forza acceleratrice al suo seno secondo.

286. Congiungasi perciò il raggio CM , su di cui dal punto N si abbassi la perpendicolare NH . E siccome il grave col suo peso assoluto agisce secondo la direzione della verticale NM ; così per essere la CM perpendicolare, e la NH parallela alla tangente MT , agirà il medesimo grave colla sua forza premente secondo la direzione della CM , e colla sua forza acceleratrice secondo la direzione della NH . Onde il peso assoluto del grave farà alla forza premente, come NM ad HM ; e l' istesso peso assoluto farà alla forza acceleratrice, come NM ad NH . Ma per essere i due triangoli NMH , CMN tra loro equiangoli, i tre lati dell' uno NM , HM ,

HM, NH sono proporzionali ai tre lati dell' altro CM, NM, CN. Dunque il peso assoluto, la forza premente, e la forza acceleratrice faranno tra loro, come le tre rette CM, NM, CN; e pertanto, siccome il peso assoluto, che non mai si altera, può esprimersi per mezzo del raggio CM eziandio costante; così potrà disegnarsi per la NM, che è seno primo dell' arco AM, la forza premente, e per la CN, che è seno secondo del medesimo arco, la forza acceleratrice.

287. Finalmente se in superficie diverse si abbiano due curve AM, *am*, non solo simili tra loro, ma similmente ancora inclinate sull' orizzonte; non v' ha dubbio, che potranno le medesime riguardarsi come serie di un' egual numero di rette infinitamente picciole, non solo proporzionali, ma inclinate altresì sull' orizzonte colla stessa legge. Quindi per ciò, che è stato dimostrato di sopra, si percorreranno le riferite due curve in tempi, che faranno nella sudduplicata ragione delle loro lunghezze totali. Onde se mai le stesse curve siano due archi circolari, faranno simili tra loro i due settori CAM, *Cam*; e pertanto dovendo essere come l' arco AM all' arco *am*, così il raggio CA al raggio *Ca*, faranno i tempi, in cui percorronsi i due archi AM, *am* nella sudduplicata ragione dei loro raggi CA, *Ca* (88).

IX.

*Della salita de' gravi per superficie così
piane, come curve.*

288. **A**lla caduta del grave si oppone la sua salita, per cui siccome è necessario, che imprimasi al grave qualche velocità, che lo porti in alto, così potrà egli ascendere per superficie, non solo piane, ma eziandio curve. Ed in primo luogo, se la velocità imprimasi al grave con direzione verticale, egli si porterà in alto verticalmente,

mente, senza esservi bisogno di superficie alcuna, che lo conservi in quella direzione. Imperocchè sebbene nel medesimo tempo, che sale, sia spinto continuamente verso basso dal peso suo assoluto; nientedimeno queste continue spinte si ricevono dal grave con direzione interamente contraria al suo moto; onde si è, che minoreranno a poco a poco la sua velocità, ma non altereranno la sua direzione.

289. Or siccome le stesse spinte generano nel grave con direzione contraria una nuova velocità, che aumentasi in ragion del tempo; così la prima velocità impressa al grave coll'aggiunta dell'altra nuova dovrà diminuirsi nella stessa ragione; e perciò la salita verticale del grave sarà moto egualmente ritardato. Si vede intanto, che il grave colla sua salita verticale debba portarsi a quell'altezza, per cui cadendo riacquista la velocità impressagli; anzi se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà ancora, che in ogni punto della stessa altezza debba rimanere al grave tanta velocità, quanta ne riacquista con cadere per l'altezza rimanente: dimodochè le diverse velocità, che ritrovasi avere il grave nella salita, e nella caduta, dovranno essere tra loro eguali.

290. Quindi se il tempo della salita totale dividasi in parti eguali; pure gli spazj percorsi successivamente dal grave ascendente in queste eguali parti di tempo dovranno essere, come altrettanti termini della serie de' numeri impari, ma presi con ordine contrario, e non già a dirittura. Onde se l'eguali parti del tempo siano quattro, gli spazj, che consecutivamente in esse si percorrono, saranno come i numeri 7, 5, 3, 1. E per la stessa ragione, se l'eguali parti del tempo siano cinque, nella loro durata si percorreranno successivamente spazj tali, che paragonati tra loro si ritroveranno essere, come i numeri 9, 7, 5, 3, 1. Ed essendo così, saranno nella duplicata ragione de' tempi non
 H già.

già gli spazj numerati dal principio della salita del grave, ma gli altri, che si numerano per fino all'ultimo termine di essa.

291. Per poco poi, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che gli spazj numerati dal principio della salita del grave debbano essere in ragion composta dei tempi, in cui si percorrono, e degli altri, che si hanno con togliere gli stessi tempi dal duplo di quello, che impiegasi nella salita totale. Così se il tempo della salita totale sia di quattro seconde, lo spazio percorso nella prima seconda sarà allo spazio percorso nelle prime due seconde in ragion composta di 1 a 2, e di 7 a 6, o pure nella semplice ragione di 7 a 12. E così parimente, se il tempo della salita totale sia di cinque seconde, lo spazio percorso nella prima seconda sarà allo spazio percorso nelle prime due seconde in ragion composta di 1 a 2, e di 9 ad 8, ovvero nella semplice ragione di 9 a 16 (89).

Fig. 31.

292. Notifi quì intanto, che essendo data la velocità, che imprimesi al grave, può determinarsi facilmente così l'altezza, a cui sale l'istesso grave, come il tempo, che impiegasi in detta salita. In fatti, se AB sia un'altezza di 15 piedi con una dodicesima parte di più, si percorrerà ella da un grave cadente nel tempo di una seconda, e colla velocità finale si percorrerà eguabilmente nel medesimo tempo il duplo della AB . Quindi se la data velocità sia tale, che nel tempo di una seconda si percorra con essa eguabilmente il duplo della AC ; faranno le due velocità tra loro nella ragione di AB ad AC . Onde la terza proporzionale dopo le due AB , AC farà l'altezza, a cui sale il grave colla data velocità; ed il tempo della sua salita totale sarà al tempo di una seconda, come AC ad AB .

293. Per dimostrarlo, sia a AD la terza proporzionale dopo le due AB , AC . Ed essendo continuamente proporzionali le tre rette AB , AC , AD ; farà

farà la prima AB alla seconda AC in sudduplicata ragione della prima AB alla terza AD. Ma in questa stessa sudduplicata ragione sono ancora le velocità, che acquistansi colla caduta per le due AB, AD. Dunque la ragione di queste velocità farà eguale alla ragione di AB ad AC; e pertanto, facendosi la data velocità eguale a quella, che acquistasi colla caduta per la AD, farà quella stessa AD l'altezza, a cui sale il grave colla data velocità. I tempi poi, che impiegansi così nella caduta, come nella salita per le due AB, AD, similmente debbono essere nella ragione di AB ad AC. Onde essendo di una seconda il primo di questi tempi, farà il tempo della totale salita del grave al tempo di una seconda, come AC ad AB (90).

294. Imprimasi ora la velocità al grave colla direzione della AE, che sia inclinata all'orizzonte; ed in questo caso chiaro si è non potersi conservare nel grave, che sale, la stessa direzione, se non sia egli sostenuto da un piano, che abbia per rapporto all'orizzonte la stessa inclinazione. Con portarsi intanto il grave per questo piano inclinato, che lo sostiene, tuttavia farà egli spinto continuamente verso basso dal suo peso relativo. Onde conforme con queste continue spinte generasi in esso con direzione contraria una nuova velocità, che si aumenta in ragion del tempo; così la prima velocità impressa al grave coll'aggiunta dell'altra nuova si diminuirà nella stessa ragione; e per tanto eziandio la salita del grave per un piano inclinato sull'orizzonte farà moto eguabilmente ritardato.

295. Quindi le stesse leggi, che hanno luogo nella salita verticale del grave, debbono osservarsi altresì nella di lui salita obliqua. Se dunque dividasi il tempo della salita obliqua totale in parti eguali, gli spazj percorsi successivamente in queste eguali parti di tempo pure dovranno essere, come altrettanti termini della serie de' numeri impari presi con ordine contrario. È conforme gli spazj nume-

rati fino all' ultimo termine della salita, tuttavia debbono essere nella duplicata ragione de' tempi, in cui si percorrono; così gli altri spazi numerati dal principio della salita eziandio faranno in ragion composta dei tempi, in cui descrivonfi, e degli altri, che si hanno con togliere gli stessi tempi dal duplo di quelli, che impiegasi nella salita totale.

296. Con esser data poi la velocità, che s'imprime al grave secondo la direzione dell' obliqua AE , egli è facile di determinare così l' ultimo termine della salita obliqua del grave, come il tempo, che impiegasi dall' istesso grave per giugnere a quell' ultimo termine. Determinisi perciò primieramente l' altezza verticale AD , a cui può ascendere il grave colla data velocità impressagli verticalmente; e si determini ancora il tempo della salita per la AD . Tirisi di poi per lo punto D l' orizzontale DE , che s'incontri coll' obliqua AE nel punto E ; e per picciola riflessione, che voglia farsi, s'intenderà facilmente, che il punto E sia l' ultimo termine della salita obliqua del grave, e che il tempo della salita per la AE sia al tempo della salita per la AD , come AE ad AD .

297. Finalmente può salire il grave eziandio per una linea curva, come AMF ; ma conforme per potersi ciò fare, deve egli essere sostenuto da superficie della stessa curvatura, così nel punto A deve imprimerli al grave la velocità secondo la direzione della tangente AH . Questa velocità poi pure diminuiscesi continuamente dal peso relativo del grave, che agisce sempre con direzione contraria; ma cambiandosi questo peso in ogni punto della curva, non sarà la salita del grave moto egualmente accelerato. Con portarsi in tanto il grave per la curva AMF , tuttavia dovrà egli ascendere per fino a quel punto, da cui cadendo per la stessa curva riacquista in A la primitiva sua velocità; e se F sia questo punto, che può determinarsi parimente

mente per mezzo della falita verticale, eziandio in ogni altro punto M della curva dovrà rimanere al grave tanta velocità, quanta ne acquista cadendo per l'arco rimanente FM .

298. Quindi se la curva sia composta di due parti, le quali abbiano in A una curvatura continua; il grave, che cade per una di esse, dovrà salire per l'altra in modo, che non solo ascenderà alla stessa altezza, da cui cade, ma in eguali altezze della falita, e della caduta avrà velocità eziandio eguali. E poicchè lo stesso deve avvenire, qualora ricade il grave per quest' altra parte della curva; perciò il grave con salire, e ricadere farà in un continuo, e perpetuo moto. Quantunque poi in pratica veggasi il di lui moto a poco a poco rallentarsi, e finalmente estinguersi; ciò tuttavolta deve ascrivere alla resistenza dell'aere, che minora continuamente la velocità del grave così nella caduta, come nella falita. Aggiungasi, che per quanto si spiana la superficie, che dee sostenere il grave, sempre rimanderà in essa qualche scabrezza, che non solo ritarderà il grave, ma lo farà talvolta traviare dal suo cammino.

X.

Del moto de' pendoli per archi circolari.

299. **S**Egue ora il moto de' pendoli, i quali altro non sono, se non che gravi sospesi da punti fissi per mezzo de' fili sottilissimi, che con moto oscillatorio aggiransi intorno a que' punti, e descrivono archi circolari. Per investigare le leggi del loro moto, sia il pendolo CA , a cui diafi la posizione obliqua CD , affinchè lasciato in quel sito possa di là cadere, e descrivere in conseguenza l'arco circolare DAE . Dividasi il peso assoluto del grave in due parti, di cui una sia parallela, e l'altra perpendicolare alla lunghezza del filo CD . E poicchè il grave colla parte parallela cerca

Fig. 32.

H 3 di

di distaccarsi dal filo, che lo trattiene, perciò si ponerà egli in moto colla sola parte perpendicolare. Onde se si voglia attentamente riflettere, si vedrà, che descrive il grave l'arco circolare DAE , come appunto lo descriverebbe, se in vece di essere attaccato al filo, fosse sostenuto da una superficie curva della stessa curvatura (91).

300. Quindi siccome il grave, dopo la sua caduta per l'arco DA , dee salire per l'altro eguale AE ; così ricadendo in appresso per quest' altro AE , dovrà al contrario risalire per lo primo AD . Volendosi poi prescindere così dalla resistenza dell'aere, come dall'altra, che deriva dallo stropicciamento del filo intorno al punto C ; chiaro si è, che non mai debba interrompersi questo reciproco cadere, e salire del grave. Onde il moto del pendolo non solo farà oscillatorio di sua natura, ma eziandio di una continua, e perpetua durata. E perchè nella riferita supposizione il medesimo grave in ciascuna delle sue oscillazioni dee percorrere sempre lo stesso spazio, cioè la lunghezza dell'arco circolare DAE ; perciò i tempi, in cui si fanno dal pendolo l'eguali sue oscillazioni, faranno parimente tra loro eguali.

301. Quantunque poi le oscillazioni del pendolo s'è per la resistenza dell'aere, come per lo stropicciamento del filo, continuamente si raccorcino; pure però, se elleno facciansi per archi piccioli, faranno eguali presso a poco i tempi, in cui si fanno. Fingiamo perciò, che i piccioli archi, per cui si fanno dal pendolo due diverse oscillazioni, s'iano DAE , dAe . E poichè debbono essere molto più piccioli gli altri due DA , dA , che sono le loro metà, si confonderà ciascuno di essi colla sua corda. Onde siccome sono eguali i tempi per queste corde (262), così presso a poco faranno eguali altresì i tempi per gli archi DA , dA . Ma i tempi per gli archi intieri DAE , dAe sono dupli di quelli, che impiegansi per le loro metà. Dunque
anco-

ancora i tempi per gli archi DAE , dAe potranno averfi come eguali tra loro.

302. Effendo così, potranno misurarsi l'eguali parti del tempo per mezzo delle picciole oscillazioni, che si fanno da un pendolo; poichè se bene tra i tempi di esse debba esservi qualche divario, nientedimeno l'esperienza stessa fa vedere essere così insensibile questo divario, che la misura del tempo riesce molto più esatta con far uso del pendolo, che con ricorrere al moto del sole. Ed in fatti, se prendansi due pendoli egualmente lunghi, e le picciole oscillazioni di uno di essi siano un tantino maggiori delle picciole oscillazioni dell'altro; si vedrà, che in cento oscillazioni appena incontrasi il divario del tempo di una sola oscillazione. Conforme poi le parti più picciole del tempo sono le seconde, di cui 60 formano il minuto primo; così il pendolo da impiegarsi nella misura del tempo deve essere così lungo, che faccia ciascuna delle sue oscillazioni nel tempo di una seconda.

303. Per determinare intanto la lunghezza di questo pendolo, dimostreremo primieramente il seguente teorema, cioè, che se due pendoli facciano le loro oscillazioni per archi simili, i tempi di due di esse siano nella sudduplicata ragione delle lunghezze degli stessi pendoli. Fingiamo perciò, che i due archi simili, per cui si fanno dai due pendoli CA , Ca le loro oscillazioni, siano DAE , dae . E poichè gli altri due archi DA , da , che sono le loro metà, vengono ad essere non solo simili, ma inclinati altresì egualmente sull'orizzonte; sarà il tempo per l'arco DA al tempo per l'arco da nella sudduplicata ragione del raggio CA al raggio Ca (287). Ma i tempi per gli archi intieri DAE , dae sono dupli di quelli, che impiegansi per le loro metà DA , da . Dunque ancora questi altri tempi saranno nella sudduplicata ragione de'

Fig. 33.

raggi CA , Ca , i quali raggi sono le lunghezze stesse dei due pendoli.

304. Or potendosi riguardare le picciole oscillazioni di due pendoli come fatte per archi simili, faranno i tempi di due di esse eziandio nella sudduplicata ragione delle lunghezze degli stessi pendoli. Ma questi tempi sono reciprocamente proporzionali alle somme delle oscillazioni, che si fanno dai due pendoli in un medesimo tempo. Dunque tutte queste oscillazioni unite insieme faranno nella reciproca sudduplicata ragione delle riferite lunghezze. Onde siccome date le lunghezze di due pendoli, e dato il numero delle picciole oscillazioni, che si fanno da uno di essi in un tempo dato, può determinarsi facilmente il numero delle picciole oscillazioni, che si fanno nell'istesso tempo dall'altro pendolo; così al contrario dati i numeri delle picciole oscillazioni, che si fanno da due pendoli in un medesimo tempo, e data la lunghezza di uno di essi, non sarà egli difficile di definire la lunghezza dell'altro (92).

305. Quindi niente sarà più facile, quanto di determinare la lunghezza del pendolo, che faccia ciascuna delle sue picciole oscillazioni nel tempo di una seconda. Prendasi perciò un pendolo ad arbitrio, e notisi il numero delle picciole oscillazioni, che egli fa in un dato tempo, come in quello di un minuto primo. L'altro pendolo adunque, che si dimanda, dovrà fare in questo stesso minuto di tempo 60 picciole oscillazioni. Onde il quadrato di questo numero 60 dovrà essere al quadrato dell'altro numero notato, come la lunghezza del pendolo preso ad arbitrio alla lunghezza del pendolo ricercato; e perciò se la lunghezza del pendolo arbitrario moltiplichisi per lo quadrato del numero notato, ed il prodotto dividasi per lo quadrato di 60, si avrà col quoziente di questa divisione la lunghezza del pendolo, che si dimanda.

306. Determinata la lunghezza del pendolo, che fa ciascuna delle sue picciole oscillazioni nel tempo di una seconda, può determinarsi altresì lo spazio, che nello stesso tempo di una seconda si percorre dal grave colla sua caduta verticale. In fatti il riferito pendolo nel tempo di una mezza seconda dee fare la metà di una sola oscillazione. Ma per essere l'oscillazione picciola, la sua metà si fa in un'arco non differente dalla sua corda, la quale corda si percorre dal grave nello stesso tempo, in cui colla caduta verticale descrivesi l'intero diametro del cerchio (262), che è il duplo della lunghezza del pendolo. Dunque nel tempo di una mezza seconda dee percorrerfi colla caduta verticale tanto spazio, quanto è il duplo della lunghezza del pendolo; e pertanto lo spazio percorso colla medesima caduta nel tempo di una seconda dovrà essere l'ottuplo della stessa lunghezza.

307. Del rimanente al moto del pendolo appartiene ancora un'altra proprietà, e si è, che la sua velocità nel punto più basso sia, come la corda dell'arco, che egli descrive per fino a quel punto. Fingiamo perciò, che il pendolo CA faccia le sue oscillazioni per l'arco DAE. Congiungasi la DE, che s'incontri col diametro verticale AB nel punto F; e la velocità del pendolo nel punto più basso A farà quella, che acquistasi colla caduta verticale per la FA; onde il suo quadrato corrisponderà in proporzione alla stessa FA. Ma il quadrato della corda DA, o EA, come eguale al rettangolo fatto dalla FA nel diametro AB, eziandio corrisponde in proporzione alla EA. Dunque la velocità del pendolo nel punto più basso A, e la corda DA, o EA dell'arco, che egli descrive per fino a quel punto, faranno proporzionali tra loro.

Fig. 34.

408. Conforme poi essendo picciole le oscillazioni del pendolo, la sua velocità nel punto più basso A deve essere, come l'arco DA, o EA, che egli descri-

Fig. 35.

descrive per fino a quel punto; così attenta questa proprietà potrà costruirsi una machina per comprovare le leggi di moto, che hanno luogo nell'incontro de' corpi. Formisi perciò di legno, o di altra materia il triangolo isoscele MNO , nella di cui cima prendansi due punti C , e c egualmente distanti dalla base MN , e così vicini, che i due pendoli di egual lunghezza tra loro si tocchino. Descrivansi di poi cogli stessi punti come centri i due archi AD , $a d$; e se dividasi ciascuno di essi in piccole parti eguali, ai di cui termini pongansi i rispettivi numeri 1, 2, 3, 4, &c., avremo la machina, che si dimanda: dimodochè coi due pendoli CA , ca potranno comprovarsi le riferite leggi di moto.

309. In fatti siccome per fare, che i due pendoli s'incontrino tra loro con date velocità, basta lasciarli cadere dai punti, che ci additano i gradi di esse; così con notare i punti, a cui ascendono gli stessi pendoli dopo essersi incontrati, sapremo le velocità, con cui si muovono dopo l'incontro. Quantunque poi siano disuguali gli archi, per cui lasciansi cadere; nientedimeno attenta la loro picciolezza, si percorreranno quegli archi dai due pendoli in eguali tempi; onde l'incontro di questi si farà nel luogo più basso. Ed in fine se bene gli stessi pendoli muovansi per archi circolari, pure però l'incontro di essi farà diretto; poichè siccome incontransi propriamente colla direzione delle rette, che toccano i due archi ne' punti A , ed a , così queste due rette, come perpendicolari sulle due CA , ca , vengono ad essere tra loro a dirittura.

*Della natura , e delle principali proprietà
 della cicloide .*

310. **Q**uantunque con far uso delle picciole oscillazioni di un pendolo , si misurino le eguali parti del tempo con maggior esattezza , che col moto del sole ; pure però una tal misura soggiace a qualche picciolo errore , per non essere del tutto eguali i tempi , in cui si fanno dal pendolo le sue picciole oscillazioni . Intanto se potesse farsi in modo , che il pendolo invece di descrivere archi circolari , si portasse per archi di quella curva , che comunemente chiamasi cicloide ; si avrebbe colle oscillazioni di quest' altro pendolo la vera , ed esatta misura del tempo , per essere esattamente eguali i tempi , in cui quest' altro pendolo farebbe le sue oscillazioni . Onde per l' intelligenza di quest' altro faremo per dire intorno al moto de' pendoli da farsi per archi cicloidalì , giova prima far vedere quale sia l' indole della curva chiamata cicloide , e quali ancora le principali sue affezioni .

311. Prendasi perciò un cerchio ad arbitrio , come AMB , di cui centro ne sia il punto C , diametro la retta AB , e tangente al punto B l' altra BD . Aggirisi questo cerchio sulla sua tangente BD , così dall' una , come dall' altra parte , perfino a che coll' altra estremità B del suo diametro tocchi la BD nel punto D . Con questa sua rivoluzione adunque da ambedue le parti si descriveranno dal punto A due curve simili , ed eguali AND , AND . E conforme ciascuna di esse farà la metà della curva chiamata cicloide , così colle medesime unite insieme avremo la cicloide intiera DAD : di cui chiameremo vertice il punto A , asse la retta AB , base l' altra DBD , che resta divisa dall' asse per metà , e ad angoli retti , e finalmente cerchio genitore l' istesso cerchio AMB , colla di cui rivoluzione generasi la cicloide .

Fig. 36.

312. Or' attenta la generazione di questa curva, non v' ha dubbio, che la mezza circonferenza **AMB** sia eguale alla **BD**, che è la metà della base della cicloide; ma io dico di più, che essendo la **NO** parallela alla **BD**, ancora l'arco **AM** debba essere eguale alla **MN**. Sia perciò **NPQ** la posizione del mezzo cerchio genitore, quando il punto **A** cade su' l punto **N**. E poichè la **PR**alzata perpendicolarmente sulla **BD** dee passare per lo centro **C**, faranno eguali così le due **CR**, **CO**, come le due **NR**, **MO**. Onde facendosi eguali le corde **PN**, **BM**, faranno eguali altresì tanto gli archi sostenuti da queste corde, quanto i due rimanenti **PQ**, **AM**. Ma per la generazione della cicloide l'arco **PQ** deve essere eguale alla retta **PB** ovvero **RO**; ed essendo eguali le due **NR**, **MO**, ancora le due **MN**, **RO** debbono essere eguali. Dunque l'arco **AM**, e la retta **MN** faranno eziandio eguali tra loro.

Fig. 37.

313. Da ciò poi può dedursi in primo luogo, che se la **NT** tocchi la cicloide nel punto **N**, e la **PN** sia perpendicolare sulla tangente **NT**, le due **NT**, **PN** debbano essere parallele alle corde **AM**, **BM**. Facciasi perciò, che la **MT** sia tangente del cerchio in **M**, e se l'altra **mn** sia infinitamente vicina alla prima **MN**, potranno riguardarsi i due archetti **Mm**, **Nn** come porzioni delle tangenti **MT**, **NT**; onde la differenza delle due **MN**, **mn** farà all'archetto **Mm** come **MN** ad **MT**. Ma per essere le due **MN**, **mn** eguali ai due archi **AM**, **Am**, ancora la loro differenza deve essere eguale all'archetto **Mm**. Dunque facendosi eguali le due **MN**, **MT**, farà l'angolo **OMT** duplo dell'angolo **ONT**: e pertanto, essendo lo stesso angolo **OMT** duplo altresì dell'angolo **OMA**, faranno i due angoli **ONT**, **OMA** tra loro eguali; con che faranno parallele così le due **NT**, **AM**, come le due **PN**, **BM**.

314. Può dedursi in secondo luogo, che l'arco cicloide-

cicloideale AN sia duplo della corda AM . Descrivasi perciò col punto A come centro, e coll'intervallo della corda infinitamente vicina $A m$ l'archetto mi ; e potendosi riguardare quest'archetto come una perpendicolare abbassata sulla base Mh del picciolo triangolo isoscele $M m h$, resterà divisa la Mh per metà nel punto i . Quindi il picciolo archetto cicloideale $N n$, come eguale alla Mh , farà duplo della Mi , che è la differenza delle due corde AM , $A m$; e per la stessa ragione ogni altro archetto cicloideale farà eziandio duplo della differenza delle due corde, che li corrispondono. Onde l'arco cicloideale AN , che è la somma di tutti quegli archetti, similmente farà duplo della corda AM , che è la somma di tutte le riferite differenze; e perciò ancora la mezza cicloide AND farà dupla del diametro AB , che è la corda ad essa corrispondente.

315. Può dedursi finalmente, che se compiscasi il rettangolo $AONR$, lo spazio cicloideale esteriore ANR sia eguale al corrispondente spazio circolare AMO . Facciasi perciò la nr parallela alla NR , la quale prolunghisi per fino a che s'incontri colla NO in l . Essendo adunque equiangoli i due triangoli AMO , nNl , sarà come AO ad MO , così nl ad Nl ; e sostituendo le eguali, sarà ancora come NR ad MO , così Oo ad Rr . Onde i piccioli due trapezj $NRrn$, $MOom$ non differenti dai due piccioli rettangoli NRr , MOo , faranno tra loro eguali. Conforme poi, per aver luogo da per tutto la stessa dimostrazione, lo spazio cicloideale ANR deve essere eguale all'altro circolare AMO ; così se compiscasi l'altro rettangolo $ABDE$, farà l'intero spazio cicloideale esteriore ADE eguale all'intero mezzo cerchio AMB : dal che egli è facile il ricavarne, che l'altro spazio cicloideale interiore ADB sia triplo dello stesso mezzo cerchio.

316. Alla cicloide appartiene ancora un'altra pro-

Fig. 38. proprietà molto elegante, e si è che ella sviuppandosi ne genera un'altra eguale con posizione contraria. Per dimostrarlo, daremo prima una nozione generale delle curve, che generansi in questo modo. Sia perciò ABC una curva qualsivoglia, intorno a cui intendasi avvolto un filo egualmente teso da per tutto; si distacchi poscia questo filo a poco a poco dalla curva, incominciando dal termine A ; e se le porzioni distaccate BM , CN restino sempre tese, si avrà l'altra curva AMN , per rapporto a cui la prima ABC chiamasi sviluppata. Le porzioni poi del filo BM , CN , che riguardansi come suoi raggi, chiaro si è, che siano eguali agli archi AB , AC , da cui si sono distaccate; e se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà ancora, che gli stessi raggi tocchino la sviluppata ne' punti B , e C , ed incontrinsi ad angoli retti coll'altra curva AMN . Onde per determinare la sviluppata di qualsivoglia curva data, non dovrà fare altra cosa, se non che definire il punto, in cui due perpendicolari infinitamente vicine della data curva tra loro s'incontrano.

Fig. 39. 317. Ciò posto, egli è facile il dimostrare, che la sviluppata della mezza cicloide AND sia un'altra mezza cicloide eguale situata al rovescio. Siano perciò NR , nR le due perpendicolari infinitamente vicine, le quali come parallele alle corde BM , Bm faranno, che siano eguali i due piccioli angoli NRn , MBm ; onde se congiungiamo l'altra corda AM , che s'incontri colla Bm in i , farà come Nn ad Mi , così NR a BM . Ma potendosi riguardare la mi come un archetto circolare descritto col punto A come centro, chiaro si è, che la Mi sia la differenza delle due corde AM , Am . Dunque siccome l'archetto cicloidale Nn deve essere duplo della Mi (314), così si avrà il punto R della sviluppata corrispondente al punto N , con fare, che la NR sia dupla della BM , ovvero NP ; e per la stessa ragione, se facciasi la

AH

AH dupla del diametro AB, farà H il punto della sviluppata corrispondente al vertice A.

318. Compiscasi ora il rettangolo DBHE; e se sulla DE come diametro descrivasi il mezzo cerchio DIE, farà egli eguale all' altro mezzo cerchio AMB. Quindi, tirata la RIL parallela alla BD, faranno eguali non solo le due BO, DL, ma eziandio le corde BM, DI. Onde facendosi eguali tra loro così gli archi sostenuti da queste corde, come gli altri rimanenti AM, EI; faranno eguali altresì, non meno i due angoli ABM, EDI, che gli altri due DBM, BDI; e pertanto la corda DI, come parallela alla corda BM, farà parallela ancora alla PR. Ma per la cicloide deve essere così l' arco AM eguale alla MN, ovvero BP, come l' arco BM eguale alla DP, ovvero IR. Dunque, essendo eguali i due archi BM, DI, eziandio l' arco DI farà eguale alla IR; e perciò il punto R si ritroverà nella mezza cicloide, che descrivesi colla rivoluzione del mezzo cerchio DIE sulla base EH (93).

XII.

Del moto de' pendoli per archi cicloidalì.

319. **P**Remesso quanto basta intorno alla cicloide, passeremo ora a ragionare del moto de' pendoli da farsi per archi cicloidalì, per cui bisogna prima investigare ciò, che avvenir deve ad un corpo, che in percorrere un dato spazio è spinto continuamente da forza proporzionale alla parte di esso, che rimane a percorrerfi. Sia perciò AC lo spazio, che deesi percorrere dal corpo; e se la forza, che lo spinge in qualsisia punto N, sia proporzionale alla parte rimanente CN, chiaro si è, che le diverse attività della forza nei diversi punti dello spazio potranno esprimersi per le ordinate corrispondenti del triangolo ABC. Onde in virtù del teorema generale dimostrato di sopra (68) farà

Fig 40.

farà il quadrato della velocità, che ritrovasi avere il corpo nel punto N , come l'area corrispondente $ABMN$.

320. Or da ciò possono dedursi varie conseguenze. La prima si è, che se col punto C come centro, e coll'intervallo della CA descrivasi il quadrante AOD , la velocità del corpo nel punto N sia come la corrispondente ordinata NO del quadrante descritto. In fatti l'area $ABMN$, a cui è proporzionale il quadrato della riferita velocità, come eguale alla differenza dei due triangoli ABC , NMC , corrispondente in proporzione alla differenza de' quadrati fatti dalle due CA , CN . Ma la differenza di questi quadrati è eguale al quadrato della NO . Dunque ancora l'area $ABMN$ corrisponderà in proporzione al quadrato della NO ; e pertanto la velocità del corpo nel punto N sarà proporzionale alla NO .

321. La seconda conseguenza si è, che il tempo per la AN sia come l'arco corrispondente AO del medesimo quadrante. Facciasi perciò, che l'altra no sia infinitamente vicina alla prima NO , e tirisi ancora la or parallela alla AC . Potendosi adunque riguardare il picciolo archetto Oo come porzione della retta, che tocca il quadrante nel punto O , faranno eguiangoli i due triangoli CNO , Oro ; e pertanto, dovendo essere, come CO ad NO , così Oo ad or , ovvero Nn , sarà il rettangolo delle due CO , Nn eguale al rettangolo dell'altre due NO , Oo . Quindi, per essere il raggio CO costante, sarà il picciolo spazietto Nn in ragion composta delle due NO , Oo . Ma lo stesso picciolo spazietto deve essere altresì in ragion composta della velocità NO , con cui si percorre, e del picciolo tempo, in cui si percorre. Dunque questo picciolo tempo sarà come l'archetto Oo ; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il tempo per la AN , come l'arco AO .

322. La terza conseguenza si è, che nel medesimo tempo, in cui si percorre dal corpo lo spazio AC , debba descriversi egualmente colla velocità finale CD uno spazio eguale alla circonferenza del quadrante AOD . In fatti nel mentre, che dal corpo si percorre lo spazietto Nn colla velocità NO , dee descriversi colla velocità finale CD un'altro spazietto, che sia ad Nn , come CD , ovvero CO ad NO . Ma per gli due triangoli CNO , Oro tra loro equiangoli CO sta ad NO , come Oo ad Nn . Dunque sarà Oo l'altro spazietto, che dee descriversi colla velocità finale CD nel mentre, che si percorre dal corpo colla velocità NO lo spazietto Nn ; e pertanto, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, nel medesimo tempo, in cui si percorre dal corpo lo spazio AC , dovrà descriversi egualmente colla velocità finale CD uno spazio eguale alla circonferenza del quadrante AOD (94).

323. La quarta, ed ultima conseguenza si è, che essendo spinto il corpo dalla riferita forza, sia che egli incominci il suo moto dal punto A , sia che lo incominci da un'altro punto, come a , debbano essere eguali i tempi, in cui percorre i due spazi AC , aC . Descrivasi perciò l'altro quadrante ad ; e conforme la velocità finale del secondo moto corrisponde in proporzione alla Cd , così nel mentre, che dal corpo si percorre lo spazio aC , dee descriversi egualmente colla velocità finale Cd un'altro spazio eguale alla circonferenza del quadrante ad . Quindi per essere le circonferenze dei due quadranti AD , ad , come le sole velocità CD , Cd , con cui egualmente si descrivono, faranno eguali i tempi, che impieganfi nella loro descrizione. Onde eziandio il corpo coi due suoi moti dovrà percorrere i due spazi AC , aC in tempi eguali (95).

324. Per venire ora al moto de' pendoli da farsi *Fig. 41* per archi cicloidalì, sia la mezza cicloide AND

I

tal-

talmente elevata a perpendicolo full'orizzonte, che il punto più basso di essa sia il suo vertice A . Prendansi nel suo perimetro ad arbitrio due punti, che siano N , ed n ; ed io dico, che sebbene siano disuguali i due archi cicloidalì NA , nA , nientedimeno un grave debba percorrere nel medesimo tempo, così l'arco maggiore NA , come l'altro minore nA . Si abbassino perciò le perpendicolari NO , no full'asse AB , che s'incontrino colla circonferenza del cerchio genitore ne' punti M , ed m ; e congiungansi così le corde AM , Am , come le altre due BM , Bm . E per quel tanto è stato dimostrato, conforme le rette, che toccano la mezza cicloide ne' punti N , ed n , debbono essere parallele alle corde AM , Am ; così gli archi cicloidalì NA , nA faranno dupli delle stesse corde.

325. Quindi le forze, che accelerano il grave nei punti N , ed n ; agiranno con direzioni parallele alle corde AM , Am ; e perciò, se il peso assoluto del grave esprimasi per la verticale AB , si faranno proporzionali le stesse forze, non meno alle corde AM , Am , che agli archi cicloidalì NA , nA . E poichè questo stesso ha luogo da per tutto, perciò il grave cadendo per ciascuno dei due archi NA , nA farà spinto continuamente da una forza proporzionale in ogni punto alla parte dello spazio, che rimane a percorrerfi. Onde sia che il grave cada per l'arco maggiore NA , sia che cada per l'altro minore nA , dovranno essere eguali i tempi, in cui questi due archi disuguali da esso si percorrono (96).

326. Nè poi è egli difficile di definire il tempo, che impiegasi dal grave a percorrere qualsivis arco cicloidale terminato al punto più basso A . Imperocchè nel mentre, che percorre il grave la mezza cicloide DNA , colla velocità finale, che si acquista colla caduta verticale per la BA , dee descriversi egualmente un spazio eguale alla circonferen-

ferenza del quadrante , che ha per raggio la lunghezza stessa della mezza cicloide (322) . Ma per essere questa lunghezza dupla della BA , il riferito spazio è eguale altresì alla circonferenza dell'intero cerchio genitore ; e nel mentre , che il grave cade per la BA , con quella stessa velocità finale dee descriversi eguabilmente un spazio duplo della BA . Dunque il tempo della caduta così per la mezza cicloide DNA , come per ogn'altro arco cicloidale NA farà al tempo della caduta per la BA , come la circonferenza dell' intero cerchio genitore al duplo del suo diametro .

327. Or per fare , che un pendolo faccia le sue oscillazioni nella cicloide DAD , basta determinare le sue svoluppate DRH , DRH delle due sue metà . In fatti siccome ciascuna di esse con svilupparsi descrive la mezza cicloide aggiacente DNA ; così, se H sia il centro del pendolo , ed HA la sua lunghezza , con avvolgersi il filo ora intorno ad una delle due svoluppate , ed ora intorno all'altra , si porterà il pendolo continuamente per la cicloide DAD . Ed abbenchè , così per la resistenza dell' aere , come per lo stropicciamento del filo non meno intorno al punto H , che intorno alle due svoluppate , debbano raccorciarsi continuamente le sue oscillazioni ; nientedimeno secondo è stato dimostrato i tempi , in cui si fanno dal pendolo le sue disuguali oscillazioni , dovranno essere tra loro eguali .

328. Si è veduto intanto di sopra , che la sviluppata della metà di una cicloide sia un' altra mezza cicloide eguale , descritta bensì con posizione contraria alla prima . Onde se dopo essersi esattamente delineata su di un piano la cicloide DAD , in cui si vuole , che il pendolo faccia le sue oscillazioni , prendansi due laminette di ottone , a ciascuna delle quali darsi la stessa convessità della sua metà AND ; queste due laminette faranno le svoluppate , che debbono adattarsi intorno al pendolo

per fare, che egli faccia le sue oscillazioni nella descritta cicloide. Siccome poi la loro posizione deve essere tale, che si tocchino nel centro del pendolo coi loro estremi, e l'una sia rivoltata verso l'altra colla sua convessità; così non essendo necessario, che il pendolo descriva l'intera cicloide, basterà adattarci le porzioni di esse, corrispondenti all'arco cicloidale, che dee descriversi (97).

XIII.

Della caduta de' gravi la più celere.

329. **P**ER non tralasciare cosa alcuna intorno alla caduta de' gravi, ricercheremo presentemente, quale sia la caduta di essi la più celere, o più tosto qual cammino debba tenere un grave, affinchè da un punto più alto ad un'altro più basso si porti nel più breve tempo, che sia possibile. Ed in vero, se i due punti dati siano in una stessa verticale, non è egli da porsi in dubbio, che la caduta la più celere sia quella, che si fa per la verticale medesima; poichè, siccome la caduta verticale dipende dal peso totale del grave, così ogn'altra caduta si fa con forza minore del riferito peso, onde il tempo per quest'altra caduta dee essere sempre maggiore. La ricerca adunque di questanto si domanda dee farsi nel caso, che i due dati punti si ritrovino in verticali diverse; e se mai la più celere caduta non facciasi per la retta, che li congiunge insieme, senza dubbio dovrà ella farsi per una curva, per cui il grave niente perde della velocità, che egli acquista.

330. Or se intendansi tirate tra i due punti dati tutte le linee, che possono unirgli insieme, e le medesime dividansi in piccioli elementi per orizzontali infinitamente vicine tra loro; chiaro si è, che ne' punti di esse, corrispondenti ad una stessa orizzontale, debba avere il grave eguali velocità. Quindi gli elementi delle medesime linee, che tra loro
 si cor-

si corrispondono, si percorreranno dal grave con velocità eziandio eguali. E perciò, se vogliasi attentamente riflettere, non si durerà fatica ad intendere, che la ricerca della linea, per cui dee farsi la caduta la più celere, dipende dall'investigare, come da due dati punti debbano inclinarsi sopra una retta data due altre rette, affinchè portandosi un corpo per queste rette con date velocità, vada egli da un punto all'altro nel più breve tempo, che sia possibile.

331. Sia perciò MN la retta data, e siano ancora A , e B i due punti, da cui debbono inclinarsi sulla MN le rette AC , BC . Facciasi che la velocità, con cui si percorre la AC , sia alla velocità, con cui si percorre la BC , nella reciproca ragione delle due BC , CD . E poichè i tempi debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazj, e della reciproca delle velocità; farà il tempo per AC al tempo per BC in ragion composta di AC a BC , e di BC a CD . Ma queste due ragioni compongono insieme la semplice ragione di AC a CD . Dunque i tempi per le due AC , BC faranno, come AC a CD ; e pertanto, siccome può esprimersi colla AC il tempo per AC , e colla CD il tempo per BC , così, i due tempi insieme potranno disegnarsi colla somma delle due AC , CD .

Fig. 43.

332. Quindi le rette AC , BC debbono inclinarsi sulla MN in modo, che la somma delle due AC , CD sia la più picciola; e perciò attenta l'indole così dei minimi, come dei massimi, se Ac , Bc siano due altre rette infinitamente vicine alle prime AC , BC , non dovrà alterarsi in esse la riferita somma. Se adunque tirisi la Dd parallela alla MN , dovrà essere non solo la somma delle due AC , CD , eguale alla somma dell'altre due Ac , cd , ma altresì la differenza delle due AC , Ac eguale alla differenza dell'altre due CD , cd ; e pertanto, se terminato il parallelogrammo $CDdo$ descrivansi col

punti A , e d come centri, e cogli intervalli Ac , do gli archetti cH , or, farà la CH differenza delle due AC ; Ac eguale alla cr differenza dell'altre due CD , cd (98).

333. Effendo poi i due archetti cH , or infinitamente piccioli, chiaro si è, che i medesimi possono riguardarsi, come due perpendicolari abbassate sulle rette AC , cd . Onde se si abbassi sulla cd l'altra perpendicolare Ch , farà CH a ch , come co a cC , ovvero come CD a BC . Ma nella ragione di CD a BC sono ancora le velocità, con cui descrivonfi le due AC , BC ; e prendendo la cC per raggio, si viene a fare la CH seno secondo dell'angolo ACM , e la ch seno secondo dell'angolo BcN , o BCN . Dunque le due rette AC , BC debbono inclinarsi sulla MN in modo, che i seni secondi delle loro inclinazioni siano, come le velocità, con cui descrivonfi le stesse rette. Ed in fatti dando ad esse la riferita inclinazione, egli è facile il dimostrare, che le medesime debbanfi percorrere colle date velocità in minor tempo di quello, che impiegasi in descriverne altre due, inclinate sulla MN con altra legge (99).

Fig. 44.

334. Siano perciò AD , BD l'altre due rette, inclinate sulla MN con altra legge; e dopo essersi fatta la DE parallela alla AC , si abbassino così su di essa le perpendicolari AE , CF , come sulla BC la perpendicolare DG . Prendendosi adunque per raggio la CD , si farà la DF seno secondo dell'angolo EDM , o ACM , e la CG seno secondo dell'angolo BCN . Onde siccome le velocità date debbono essere nella ragione delle due rette DF , CG ; così queste stesse rette si percorreranno con quelle velocità in tempi eguali. Ma colla prima velocità le due EF , AC come eguali si percorrono in tempi eziandio eguali; e colla seconda velocità si percorre in minor tempo la minore BC , che la maggiore BD . Dunque il tempo per le due AC , BC sarà minore del tempo per le due ED , BD , ed

in

in conseguenza molto più minore del tempo per le due AD, BD (100).

335. Effendo così, si vede ora, che qualora i due punti dati ritrovansi in verticali diverse, la caduta la più celere debba farsi per una linea, i di cui piccioli elementi inclinansi sulle orizzontali corrispondenti in modo, che i seni secondi delle loro inclinazioni siano, come le velocità, con cui si percorrono gli stessi elementi. E da ciò, egli è facile il ricavarne, che una tale caduta non mai possa farsi per la retta, che congiunge insieme i due punti dati. Imperocchè i piccioli elementi di questa retta inclinansi egualmente sulle orizzontali, che li corrispondono; onde essendo eguali i seni secondi delle loro inclinazioni, dovrebbero essere eguali altresì le velocità, con cui gli elementi stessi si percorrono: il che non può avvenire al grave, che col peso suo relativo portasi per quella retta; ma bensì al corpo, che la descrive con moto eguabile, ed uniforme.

336. Col riferito principio intanto neppure sarà *Fig. 39.* egli difficile il dimostrare, che la caduta la più celere debba farsi propriamente per un'arco cicloidale. Sia perciò DNA una mezza cicloide talmente elevata sull'orizzonte, che il punto più basso di essa sia il suo vertice A. E poichè la NT, che tocca la mezza cicloide nel punto N, dee essere parallela alla corda AM; sarà AMO, o pure ABM l'angolo, che ci addita l'inclinazione del picciolo archetto Nn sull'orizzontale NO; e pertanto, prendendo la AB per raggio, sarà l'altra corda BM il seno secondo della riferita inclinazione. Ma così quest'altra corda BM, come la velocità, con cui si percorre l'archetto Nn, sta nella sudduplicata ragione della BO. Dunque la velocità, ed il seno secondo faranno proporzionali tra loro; ed in conseguenza la caduta la più celere da D fino ad N dovrà farsi per l'arco cicloidale DN.

337. Per determinare poi la mezza cicloide. in
I 4 cui

Fig. 45.

cui sia situato, tanto il punto D , quanto il punto N , potrà farsi in questo modo. Descrivasi primieramente ad arbitrio la mezza cicloide Dna , che abbia per vertice il punto a , per asse la verticale ab , e per base l'orizzontale bD ; indi congiungasi la DN , che seghi la descritta mezza cicloide nel punto n . Tirisi di poi la NA parallela alla na , che s'incontri colla Da prolungata nel punto A ; ed io dico, che la mezza cicloide ricercata debba avere per vertice il punto A , per asse la verticale AB , e per base l'orizzontale BD . Per dimostrarlo, abbassinsi sulle due ab , AB le perpendicolari no , NO , che s'incontrino colle circonferenze dei due mezzi cerchi genitori ne' punti m , ed M ; e se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che nella ragione di ab ad AB siano così le due bo , BO , come le due no , NO .

338. Poichè dunque i diametri ab , AB dei due mezzi cerchi genitori sono divisi proporzionalmente ne' punti o , ed O ; faranno nella medesima ragione di ab ad AB , e le due mo , MO , e le due mn , MN , ed altresì i due archi am , AM ; onde farà, come mn ad MN , così l'arco am , all'arco AM . Ma per la mezza cicloide Dna la mn , e l'arco am sono tra loro eguali. Dunque faranno eguali parimente la MN , e l'arco AM ; ed in conseguenza la mezza cicloide, che si descrive col vertice A , e coll'asse AB , dovrà passare non solo per lo punto D , ma eziandio per l'altro N . Essendo poi le corde am , AM eziandio nella ragione di ab ad AB ; egli è facile ad intendersi, che le due mezze cicloidi descritte sulla stessa base, e terminate ad un medesimo punto siano divise dalla DN proporzionalmente ne' punti n , ed N .

Del moto de' progetti, e della natura della curva, che da essi si descrive.

339. **R**Imane finalmente a trattarsi del moto de' progetti, il quale moto deriva così dalla velocità, che imprime al grave la forza proiettile, come dall'altra, che genera continuamente nello stesso grave la forza della gravità. Ed in vero, se la prima velocità imprimasi al grave con direzione verticale, non potrà egli traviare da questa direzione coll'altra velocità, che aumentasi in ragion del tempo; poichè eziandio quest'altra velocità generasi nel grave con direzione verticale. Intanto sebbene siano verticali le direzioni delle due velocità, possono tutta volta essere tra loro, non solo conspирanti, ma eziandio contrarie; e quindi si è, che il moto del grave sia eguabilmente accelerato nel primo caso, ed eguabilmente ritardato nel secondo.

340. Quantunque poi, essendo conspирanti le direzioni delle due velocità, il moto del grave sia eguabilmente accelerato; nientedimeno per definire gli spazj, che si percorrono con questo moto, dee tenerfi conto così dell'una, come dell'altra velocità. Quindi siccome per principio del moto dee prenderfi non già il punto, da cui il grave incomincia a muoversi, ma l'altro più elevato, da cui portandosi l'istesso grave fino a quel punto acquista la velocità impressa dalla forza proiettile; così al tempo del moto attuale dovrà aggiungerfi ancora l'altro, in cui si percorre dal grave la distanza dei due punti. Ed in questa maniera il moto accelerato del grave tuttavia si farà in modo, che gli spazj numerati dal principio del moto siano, come i quadrati dei tempi, in cui si percorrono (101).

341. Fingiamo ora, che la direzione della velocità impressa al grave dalla forza proiettile sia diversa dalla verticale; ed in questo caso non v'ha dubbio, che coll'altra velocità, la quale genera conti-

continuamente nello stesso grave la forza della gravità, debba egli traviare da quella direzione, e portarsi in conseguenza per una linea curva. Per determinare intanto l'indole di questa curva, sia

Fig. 46. AB la retta verticale, AC la direzione, con cui imprimesi al grave la velocità dalla forza proiettile, ed AMD la curva; per cui portasi l'istesso grave colle due velocità insieme. Descrivansi intorno a questa curva i due parallelogrammi $ANMO$, $AQPR$; e nel mentre, che colla prima velocità percorronsi sulla AC gli spazj AO , AR , chiaro si è, che coll'altra velocità si percorreranno sulla AB gli spazj AN , AQ .

342. Or siccome i primi due spazj AO , AR , come percorsi con moto eguabile, ed uniforme, debbono essere nella semplice ragione de' tempi, in cui si percorrono; così gli altri due AN , AQ , come percorsi con moto eguabilmente accelerato, che incomincia dal punto A , dovranno essere nella loro duplicata ragione. Quindi eziandio questi due spazj AN , AQ faranno nella duplicata ragione dei primi due AO , AR , o pure dei loro eguali MN , PQ . Onde conforme la curva AMD ritrovasi essere d'indole tale, che i quadrati delle ordinate MN , PQ sono, come le ascisse corrispondenti AN , AQ ; così la medesima curva farà una parabola, che avrà per suo diametro la verticale AB , per suo vertice il punto A , e per tangente a questo vertice la retta AC , colla di cui direzione si è impressa al grave la velocità dalla forza proiettile.

343. Per poco poi, che vogliasi riflettere, s'intenderà facilmente, che l'ampiezza di questa parabola dipende dalla velocità, che s'imprime al grave dalla forza proiettile. In fatti la di lei ampiezza dee ripetersi propriamente dal parametro del suo diametro AB ; ed egli è facile il dimostrare, che questo parametro sia quadruplo dell'altezza, per cui acquistasi cadendo la riferita velocità. Fingiamo perciò, che AE sia quella altezza; e colla velocità,

locità, che acquistasi cadendo per essa, dovrà percorrersi egualmente nel medesimo tempo la AO dupla della AE . Ma in questo stesso tempo colla caduta per la AB dee percorrersi la AN eguale alla AE . Dunque la AO , ovvero MN sarà dupla ancora della AN ; e pertanto il parametro del diametro AB , come terza proporzionale dopo le due AN , MN , sarà quadrupla della AN , o sia AE .

344. Quindi se sia data la parabola AMD , niente sarà più facile, quanto di spingere il grave in modo, che si porti per la parabola data. Perciò tirisi primieramente la retta AC , che tocchi la parabola nel punto A ; indi prolunghisi il diametro AB talmente sino al punto E , che la AE sia eguale alla quarta parte del suo parametro. E se colla velocità, che si acquista cadendo per la AE , spingasi il grave secondo la direzione della AC ; non v'ha dubbio, che dovrà egli portarsi per la parabola data AMD . In ogn'altro punto poi della stessa parabola, chiaro si è, che la velocità del grave debba essere tanta, quanta ne dovrebbe egli ricevere dalla forza proiettile, per incominciarla a descrivere da quel punto. Onde per una ragione consimile la velocità, che ritrovasi avere il grave in qualsivisia punto M della parabola, si acquista colla caduta per un'altezza eguale alla quarta parte del parametro di quel diametro, che ha per suo vertice il punto M .

345. Essendo così, non sarà egli difficile il definire la ragione, in cui sono tra loro le velocità, che ritrovasi avere il grave in diversi punti della parabola, che egli descrive. Sia perciò AB l'asse della parabola, A il vertice principale, ed F il foco. Prendansi nella stessa parabola due punti ad arbitrio, li quali siano M , e P ; ed io dico, che le velocità del grave in questi punti siano nella sud-duplicata ragione delle rette MF , PF tirate dagli stessi punti al foco F . Dipende ciò da una proprietà della parabola, la quale si è, che i parametri
dei

Fig. 47.

dei diametri, che hanno per loro vertici i punti M , e P , siano quadrupli delle rette MF , PF . Imperocchè siccome le altezze, per cui cadendo acquistansi le velocità, che ritrovansi avere il grave ne' punti M , e P , debbono essere eguali alle due MF , PF ; così le velocità medesime faranno nella sudduplicata ragione di MF a PF .

346. Or delle rette, che tiransi dai diversi punti della parabola al foco F , non v'ha dubbio, che la più picciola sia la AF tirata dal vertice principale A ; onde la minima velocità, che ritrovansi avere il grave in descrivere la parabola, farà quella, che risiede in esso nel riferito vertice. Conforme poi di quelle stesse rette la più distante dalla AF è sempre maggiore della più vicina; così con discostarsi il grave dal vertice principale della parabola, dovrà sempre aumentarsi la di lui velocità. Ed in fine, siccome sono eguali le rette, che nelle due parti della parabola distano egualmente dalla AF , e formano con essa angoli eguali; così eziandio le velocità, che ritrovansi avere il grave ne' punti della parabola egualmente distanti dal vertice principale A , dovranno essere tra loro eguali.

347. Prolunghisi ora l'asse della parabola AB talmente fino al punto E , che siano eguali le due AE , AF ; e di già la velocità, che ritrovansi avere il grave nel vertice principale A , si acquisterà colla caduta per la AE , che è la quarta parte del parametro dell'asse AB . Ma io dico di più, che se per lo punto E tirisi l'orizzontale EH , la velocità del grave in ogn'altro punto M della parabola dovrà acquistarsi colla caduta da quella orizzontale fino al punto M . In fatti la EH , come perpendicolare sull'asse BE , viene ad essere quella retta, che comunemente chiamasi direttrice della parabola. Onde la perpendicolare MH abbassata su di essa, siccome dee essere eguale alla MF , così farà eguale altresì alla quarta parte del parametro di quel diametro, che ha per vertice il pun-

to M; e pertanto la velocità del grave nel punto M farà quella, che acquistasi colla caduta per la MH (102).

XV.

Del moto de' progetti, che terminasi alla stessa orizzontale, da cui incomincia.

348. **D**Eterminata, così l'indole della curva, che descrivono i progetti, come la velocità, che ritrovansi avere in qualsivoglia punto di essa; egli è facile ora ad intendersi ogni'altra affezione del loro moto. Ed in primo luogo, se il progetto debba muoversi in modo, che si termini il di lui moto alla stessa retta orizzontale, da cui incomincia; non v'ha dubbio, che la forza proiettile dee spingerlo con direzione, che lo sollevi sulla stessa orizzontale. Onde nel suo moto possono considerarsi tre cose; cioè la velocità, che imprime si al grave dalla forza proiettile; l'angolo, che forma colla verticale la direzione di questa velocità; e l'ampiezza della parabola descritta dal grave, che è l'orizzontale racchiusa tra il principio del moto, ed il suo termine.

349. Sia perciò in A situato un grave, il quale colla velocità, che acquistasi cadendo per la verticale AE, spingasi dalla forza proiettile secondo la direzione della AC. Sia in oltre AMD la parabola descritta dall'istesso grave, la quale parabola incontrisi coll'orizzontale AD nel punto D, che sia l'ultimo termine del moto del grave. La velocità adunque da considerarsi in questo moto farà quella, che acquistasi colla caduta per la AE, L'angolo poi, che forma la direzione AC di questa velocità colla verticale AE, farà l'angolo CAE. Ed in fine l'ampiezza della parabola descritta dal grave farà l'orizzontale AD racchiusa tra il principio del moto A, ed il suo termine D, la quale
ampiezz-

Fig. 48.

ampiezza ci dà a dividere l'estensione, o sia portata dello stesso moto.

350. Or queste tre cose, che possono considerarsi nel moto del progetto, hanno un tale attacco tra loro, che date due di esse, niente farà più facile, quanto di determinare la terza, che rimane. In fatti se intorno alla AD come diagonale descrivasi il parallelogrammo $ACDB$, farà la DB una delle ordinate del diametro AB . Onde essendo il parametro di questo diametro quadruplo della AE , farà il quadrato della DB ovvero AC eguale al rettangolo fatto dal quadruplo della AE nella AB ovvero CD . Maalzata sulla AC la perpendicolare CF , che s'incontri colla AE prolungata nel punto F , ed abbassata sulla AF l'altra perpendicolare CG , il quadrato della stessa AC dee essere eguale altresì al rettangolo fatto dalla AF nella AG , ovvero CD . Dunque il quadruplo della AE , e la AF faranno tra loro eguali.

351. Essendo così, può dimostrarsi ora il seguente teorema, cioè, che se dell'angolo, che forma la direzione della velocità colla retta verticale, prendasi il duplo, la metà del raggio sia al seno di quest'angolo duplo, come l'altezza, per cui acquistasi cadendo la stessa velocità, all'ampiezza della parabola. Dividasi perciò la AF per metà nel punto H . E poichè il mezzo cerchio, che descrivasi sulla AF come diametro dee passare per lo punto C , faranno eguali le due AH , CH . Onde essendo isoscele il triangolo AHC , faranno eguali ancora i due angoli CAH , ACH . Ma l'angolo CHF , come esteriore, dee essere eguale ai due CAH , ACH uniti insieme. Dunque il medesimo angolo CHF farà duplo del solo CAH , che formasi sulla direzione della velocità AC colla retta verticale AE .

352. Per essere poi il triangolo CGH rettangolo in G , farà come CH a CG , così il raggio al seno dell'angolo CHF ; e pertanto, prendendo le
metà

metà dei due antecedenti di questa analogia, farà ancora come la metà della CH alla CG , così la metà del raggio al seno dell'angolo CHF . Ma la metà della CH è eguale alla AE , per cui acquistasi cadendo la velocità impressa al grave; ed in oltre la CG è eguale alla AD , che è l'ampiezza della parabola descritta dallo stesso grave. Dunque se dell'angolo, che forma la direzione della velocità colla retta verticale, prendasi il duplo, la metà del raggio farà al seno di quest'angolo duplo, come l'altezza, per cui acquistasi cadendo la stessa velocità, all'ampiezza della parabola.

353. Se adunque insieme coll'angolo CAE sia data la verticale AE , si determinerà l'ampiezza AD con fare, come la metà del raggio al seno del duplo dell'angolo CAE , così la verticale data AE ad una quarta proporzionale. Se poi al contrario insieme coll'angolo CAE sia data l'ampiezza AD , si determinerà la verticale AE con fare al rovescio, come il seno del duplo dell'angolo CAE alla metà del raggio, così l'ampiezza data AD ad una quarta proporzionale. Ed in fine, se sia data tanto la verticale AE , quanto l'ampiezza AD , si determinerà l'angolo CAE con fare, come la verticale data AE alla data ampiezza AD , così la metà del raggio ad una quarta proporzionale; poichè la metà dell'angolo, a cui questa quarta proporzionale rapportasi come seno, farà l'angolo ricercato.

354. Questa quarta proporzionale intanto può rapportarsi come seno, così ad un'angolo acuto, come ad un'altro ottuso, che faccia due retti con quell'acuto; onde eziandio la AC potrà formare colla AE due angoli, li quali per essere le metà di quelli due faranno insieme eguali ad un solo retto. Niente però vieta, che questi due angoli siano talvolta tra loro eguali, e ciò avviene sempre quando l'ampiezza AD è dupla della verticale AE ; poichè, face d'ora in questo caso la quarta proporzionale eguale al raggio, farà retto ciascuno dei due angoli-

angoli, a cui ella rapportasi come seno, e pertanto le loro metà faranno di gradi 45. Ed in fine, se la AD sia maggiore del duplo della AE, la stessa quarta proporzionale si farà maggiore ancora del raggio e perciò, conforme ella non può rapportarsi come seno ad angolo alcuno, così neppure la AC potrà formare verun'angolo colla AE.

355. Quindi intorno all'ampiezza della parabola AD possono stabilirsi tre cose. I, che qualunque siasi l'angolo CAE, che la linea della direzione AC forma colla verticale AE, non mai l'ampiezza AD possa essere maggiore del duplo dell'altezza AE, per cui acquistasi cadendo la velocità impressa al grave dalla forza proiettile. II, che siccome la massima ampiezza si ha, quante volte l'angolo CAE è di gradi 45, ed in conseguenza eguale alla metà del retto; così la stessa massima ampiezza debba essere eguale al duplo della AE. E III. finalmente, che siccome con ogn'altro angolo sia minore, sia maggiore di gradi 45, l'ampiezza AD dee farsi sempre minore del duplo della AE; così debba ella essere la stessa nei due angoli, che uniti insieme formano il retto.

356. Del rimanente, se l'orizzontale AD, che è l'ampiezza della parabola, dividasi per metà nel punto N; non v'ha dubbio, che la perpendicolare NMalzata su di essa debba essere l'asse, ed in conseguenza l'altezza della stessa parabola. Ma egli è facile ancora il dimostrare, che la AG sia il quadruplo di questa altezza. In fatti attenta la proprietà della tangente della parabola, se prolunghisi la NM fino a che s'incontri colla AC nel punto O; si faranno eguali le due NM, MO, e pertanto la NO sarà dupla della NM. Ma per essere i due triangoli ADC, ANO tra loro equiangoli, AD sta ad AN, come DC ad NO. Dunque essendo la AD dupla della AN, farà la DC, ovvero AG dupla ancora della NO; ed in conseguenza la stessa AG farà quadrupla dell'altezza NM.

357. Da ciò poi possono dedursi due teoremi. Il primo si è, che l'ampiezza della parabola AD sia alla sua altezza NM, come il raggio alla quarta parte della tangente seconda dell'angolo CAE. Imperocchè essendo il triangolo ACG rettangolo in G, deve essere come il raggio alla tangente seconda dell'angolo CAE, così il lato CG al lato AG. Ma il lato CG è eguale all'ampiezza della parabola AD, e l'altro lato AG è eguale al quadruplo della sua altezza NM. Dunque sarà ancora come il raggio alla tangente seconda dell'angolo CAE, così l'ampiezza AD al quadruplo dell'altezza NM; e pertanto prendendo le quarte parti dei due conseguenti di quest'analogia, sarà l'ampiezza della parabola AD alla sua altezza NM, come il raggio alla quarta parte della tangente seconda dell'angolo CAE.

358. L'altro teorema si è, che la verticale AE, per cui acquistasi cadendo la velocità impressa al grave, sia all'altezza della parabola NM nella duplicata ragione del raggio al seno secondo dell'angolo CAE. Imperocchè essendo le tre AF, AC, AG continuamente proporzionali, sarà la prima AF alla terza AG nella duplicata ragione della prima AF alla seconda AC. Ma per essere le due AF, AC quadruple dell'altre due AE, NM, la ragione di AF ad AC è eguale alla ragione di AE ad NM; ed in oltre, per essere il triangolo ACF rettangolo in C, la ragione di AF ad AC è eguale alla ragione del raggio al seno secondo dell'angolo CAE. Dunque la verticale AE all'altezza NM sarà nella duplicata ragione del raggio al seno secondo dell'angolo CAE (103).

Della formazione di una tavola per regolare il riferito moto de' progetti.

359. **Q**uantunque i principali problemi intorno al moto de' progetti, che terminasi alla stessa orizzontale, da cui incomincia, possano risolversi col canone trigonometrico; nientedimeno per agevolare la soluzione di essi nella pratica, giova costruire una tavola, in cui sia notata l'ampiezza della parabola, che descrivesi dal grave con una data velocità per ogni angolo, che possa formare colla retta verticale la direzione della stessa velocità. Per costruire intanto questa tavola, dee definirsi primieramente l'altezza, per cui acquistasi cadendo la velocità data. E poichè quest' altezza deve essere la metà dell' ampiezza di quella parabola, che descrivesi colla data velocità, e coll' angolo di 45 gradi; perciò la medesima potrà determinarsi, con investigare per mezzo di reiterati esperimenti l' ampiezza della riferita parabola.

360. Dopo essersi adunque definita l'altezza, per cui acquistasi cadendo la data velocità, si determinerà l' ampiezza della parabola per qualsivoglia angolo dato, primieramente con prendere nel canone trigonometrico il seno dell' angolo duplo, ed indi con fare, che la metà del raggio sia a questo seno, come la riferita altezza ad una quarta proporzionale. Nella formazione poi della tavola basterà notare i minuti di qualsivoglia grado da 10 in 10; poichè, per quanto agli altri angoli, che tra quelli si frammezzano, si avranno le loro ampiezze coll' aggiunta delle parti proporzionali. Ed in fine, dopo essersi formata la tavola fino all' angolo di gradi 45, non occorre continuarla più oltre, per la ragione, che secondo è stato avvertito di sopra, andando più innanzi ritornano le stesse ampiezze con ordine contrario.

361. Sempre quando imprimefi al grave quella medesima velocità, con cui si è formata la tavola, chiaro si è, che la tavola stessa ci additerà così l'angolo, di cui dee farsi uso per una data ampiezza, come l'ampiezza, che dee corrispondere ad un'angolo dato. Ma io dico di più, che possono ritrarsi dalla tavola i medesimi usi, eziandio quando la velocità da imprimerfi al grave è diversa da quella della tavola. In fatti, se vogliafi attentamente riflettere, si vedrà, che le ampiezze di due parabole descritte con un medesimo angolo siano, come le altezze, per cui acquistansi cadendo le velocità, colle quali si descrivono le due parabole. Onde siccome queste altezze sono nella duplicata ragione delle velocità, che colla caduta per esse si acquistano, così nella stessa duplicata ragione faranno altresì l'ampiezze delle due parabole.

362. Se adunque la velocità, che deve imprimerfi al grave, sia dupla di quella, con cui si è formata la tavola; dovrà quadruplicarsi per qualsivoglia angolo l'ampiezza notata nella stessa tavola. Onde l'angolo corrispondente ad una data ampiezza sarà quello, che corrisponde nella tavola alla quarta parte dell'ampiezza data; ed al contrario l'ampiezza corrispondente ad un dato angolo sarà il quadruplo di quella, che corrisponde nella tavola all'angolo dato. Se poi vogliafi la velocità, che deve imprimerfi al grave, affinché la parabola descritta con un dato angolo abbia altresì una data ampiezza; ritrovisi la mezza proporzionale tra l'ampiezza data, e l'altra, che corrisponde nella tavola all'angolo dato; e la velocità ricercata sarà alla velocità della tavola, come la mezza proporzionale ritrovata all'ampiezza della stessa tavola.

363. Oltre all'ampiezze, possono notarsi altresì nella tavola le altezze delle parabole, che descrivonsi dal grave colla data velocità; ed attento il primo teorema dimostrato di sopra intorno a cia-

scuna di esse, si determinerà l'altezza della parabola per qualsivoglia angolo dato, primieramente con prendere nel canone trigonometrico la tangente seconda del dato angolo, ed indi con fare, che il raggio sia alla quarta parte di questa tangente, come l'ampiezza della parabola alla sua altezza. Per le altezze poi necessariamente dee continuarsi la tavola fino ai 90 gradi; poichè se bene dopo i gradi 45 ritornino le stesse ampiezze con ordine contrario, nientedimeno le altezze continuano tuttavia ad essere differenti. Ed in fine se le parabole debbansi descrivere con velocità maggiore, o minore, si avranno le loro altezze con aumentare, o diminuire quelle della tavola nella duplicata ragione della nuova velocità.

364. Ed in fatti essendo dato l'angolo, con cui imprimesi la velocità al grave; così l'ampiezza della parabola, che descrive il grave, come la di lei altezza corrisponderà in proporzione alla verticale, per cui acquistasi cadendo la velocità, che se gl' imprime. Onde siccome questa verticale è nella duplicata ragione della riferita velocità, così nella stessa duplicata ragione farà parimente tanto l'ampiezza, quanto l'altezza della parabola. Conforme poi da ciò con ogni chiarezza ne siegue, che nelle parabole, le quali descrivonsi con angoli eguali, e con velocità disuguali, le ampiezze, e le altezze siano tra loro nella stessa ragione; così nè pure farà egli difficile il ricavarne, che descrivendosi le riferite parabole da gravi, che partano da un medesimo punto, debbano ritrovarsi in una stessa retta, non solo i vertici loro principali, ma eziandio i loro fochi.

Fig. 49. 365. Siano perciò AMD , Amd due parabole descritte da due gravi con un medesimo angolo, e con velocità disuguali. Le loro ampiezze adunque faranno le orizzontali AD , Ad , colle quali s'incontrano; e se dividansi queste ampiezze per metà nei punti N , ed n , le perpendicolari NM , nm
alza-

alzate su di esse faranno le loro altezze. Or essendo NM ad nm , come AD ad Ad ; farà altresì NM ad nm , come AN ad An . Onde se congiungasi il punto A col vertice principale M di una delle due parabole per mezzo della retta AM , dovrà passare questa retta prolungata per lo vertice principale m dell'altra parabola. Se poi siano F , ed f i fochi delle due parabole, faranno i parametri dei loro assi quadrupli delle due MF , mf . Onde dovendo essere MF ad mf , come AN ad An , o pure come AM ad Am ; eziandio la AF , che tirasi dal punto A al foco F , dovrà passare prolungata per l'altro fuoco f .

366. Descrivansi ora le parabole tutto al contrario con velocità eguali, e con angoli disuguali; e se i gravi, che le descrivono, partano da un medesimo punto, neppure farà egli difficile il definire così il luogo dei vertici loro principali, come l'altro dei loro fochi. Sia perciò AE la verticale, per cui acquistasi cadendo la comune velocità, colla quale descrivonfi le riferite parabole; e sia AMD una di esse, la quale abbia per asse la MF , per vertice principale il punto M , e per foco il punto F . Io dico primieramente, che questo foco F debba ritrovarsi nella circonferenza del cerchio, che descrivesi col punto A come centro, e coll'intervallo della AE . Dipende ciò dall'essere eguale alla quarta parte del parametro del diametro AB così la AE , come la AF ; poichè facendosi eguali le due AE , AF , per necessità la circonferenza del cerchio, che ha per centro il punto A , e per intervallo la AE , dovrà passare per lo punto F .

Fig. 50.

367. Io dico in secondo luogo, che il vertice principale M debba ritrovarsi nell'ellisse, che ha la AE per asse picciolo, ed il suo duplo per asse grande. Per dimostrarlo, tirisi l'orizzontale EH , con cui vadasi ad incontrare l'asse della parabola nel punto H . Il parametro adunque di quest'asse sarà eguale

K 3

al

al quadruplo della MH ; e pertanto il quadrato della AN farà al rettangolo delle due NM, MH , come 4 ad 1. Ma abbassata sulla AE la perpendicolare MO , le tre AN, NM, MH si fanno eguali alle altre tre MO, AO, OE . Dunque ancora il quadrato della MO farà al rettangolo delle due AO, OE , come 4 ad 1. Or nella riferita ellisse il quadrato dell'asse grande al quadrato dell'asse picciolo sta eziandio, come 4 ad 1. Dunque il quadrato della MO farà al rettangolo delle due AO, OE , come il quadrato dell'asse grande al quadrato dell'asse picciolo; ed in conseguenza, dovendo essere la MO ordinata dell'asse picciolo, farà il suo termine M uno dei punti dell'ellisse.

468. A queste parabole intanto compete ancora un'altra proprietà, e si è, che se al foco F di ciascuna di esse tirisi la AF , che s'incontri prolungata colla parabola nel punto P , debba ritrovarsi questo punto P eziandio nella parabola, che ha per vertice principale il punto E , e per foco il punto A . Prolunghisi perciò la AE fino al punto G , dimodochè siano eguali le due AE, EG ; e sulle orizzontali EQ, GR si abbassi dal punto P la perpendicolare PQR . Per la parabola adunque AMD debbono essere eguali così le due AF, AE , come le PF, PQ . Onde la AP farà eguale alle due AE, PQ unite insieme. Ma per essersi fatta la EG , o sia QR eguale alla AE ; le due AE, PQ insieme sono eguali alla PR . Dunque la AP , e la PR faranno tra loro eguali; e pertanto la parabola, che descrivesi col vertice principale E , e col foco A , dovrà passare per P .

369. Ma io dico di più, che questa nuova parabola, e l'altra AMD debbano avere nel comune punto P la stessa tangente, ed in conseguenza toccarsi tra loro in quel medesimo punto. In fatti essendo eguali tanto le due PA, PR , quanto le due PF, PQ ; farà come PA a PF , così PR a PQ . Onde se congiungasi così la AR , come la FQ ;
que-

queste due AR , FQ faranno tra loro parallele. Ma per avere la retta, che tocca la parabola AMD nel punto P , non dee farsi altra cosa, se non che dividere la FQ per metà nel punto S , e congiungere insieme i due punti P , e S per la retta PS . Dunque perchè la PS divide eziandio la AR per metà nel punto T , sarà la PS tangente altresì della parabola, che ha per vertice principale il punto E , e per foco il punto A ; e perciò le due parabole si toccheranno tra loro nel punto P (104).

XVII.

Del moto de' progetti terminato ad una orizzontale diversa da quella, da cui principia.

370. **E** Samineremo ora il moto de' progetti, che terminasi non già all'orizzontale, da cui principia, ma ad un'altra differente, la quale se sia più elevata della prima, pure il grave dee spingersi in modo, che si sollevi su di esse. Sia perciò AN l'orizzontale, da cui incomincia il moto; e BD l'altra orizzontale, a cui terminasi lo stesso moto. Sia di poi AE la verticale, per cui acquistasi cadendo la velocità da imprimersi al grave; ed AC la direzione, con cui imprimesi al grave la stessa velocità. Sia finalmente AMD la parabola, che colla riferita velocità, e colla riferita direzione descrivesi dal grave, la quale parabola incontrisi colla seconda orizzontale BD nel punto D .

Fig. 51.

371. Or in questo moto, che incomincia dall'orizzontale AN , e terminasi all'altra BD , pure debbono considerarsi tre cose: cioè la verticale AE , per cui acquistasi cadendo la velocità, che s'imprime al grave; l'angolo CAE , che la direzione della velocità AC forma colla verticale AE ; ed in fine la BD , che è la distanza orizzontale tra il principio del moto A , ed il suo termine D . Onde i problemi attinenti a questo moto similmente sono

tre; nel primo de' quali, data l'orizzontale BD insieme coll'angolo CAE , dimandasi la verticale AE ; nel secondo, data la verticale AE insieme coll'angolo CAE , cercasi l'orizzontale BD ; e nel terzo finalmente, data così l'orizzontale BD , come la verticale AE , si dimanda l'angolo CAE .

372. Per quanto al primo, la sua soluzione è molto facile. Tirisi perciò al diametro AB l'ordinata DG ; e dovendo ella essere parallela alla AC , che tocca la parabola nel punto A , farà l'angolo DGA eguale all'angolo CAE . Onde se facciasi come il raggio alla tangente seconda del dato angolo CAE , così l'orizzontale data BD ad una quarta proporzionale, si farà a noi nota la BG ; e pertanto, con essere data la distanza AB delle due orizzontali AN , BD , sapremo altresì la lunghezza della AG . Facciansi di poi i quadrati delle due BD , BG ; e se dalla loro somma cavisi la radice quadrata, verremo in cognizione della DG . Quindi con ritrovare la terza proporzionale dopo le due AG , DG , avremo il parametro del diametro AB ; ed in conseguenza, con prenderne la quarta parte, resterà determinata la verticale AE , che si dimanda.

373. Molto più facile intanto riuscirà la soluzione di questo primo problema, se essendo l'orizzontale AN , da cui incomincia il moto, più elevata dall'altra BD , a cui egli si termina, spingasi il grave dalla forza proiettile secondo la direzione della stessa AN . Di fatti in questo caso debbono combaciarsi tra loro le due AC , AN ; e pertanto, essendo retto l'angolo dato CAE , farà la AB l'asse della parabola, che descrivesi dal grave. Quindi facendosi sua ordinata l'orizzontale data BD , farà la terza proporzionale dopo le due AB , BD il suo parametro. Onde si avrà la verticale ricercata AE , primieramente con determinare la retta, che è terza proporzionale dopo le due AB , BD , ed indi con prenderne di essa la quarta parte.

374. Per quanto al secondo, si potrà egli risolvere in questo modo. Facciasi l'angolo CAF eguale all'angolo dato CAE . E conforme, tagliando la AF eguale alla verticale data AE , il punto F si fa foco della parabola; così, tirando per questo punto la MO parallela al diametro AB , avremo con essa l'asse della stessa parabola. Si abbassi di poi sulla MO la perpendicolare AN ; ed essendo eguali i due angoli AFO, FAE , sarà l'angolo AFO duplo dell'angolo dato CAE . Onde se facciasi come il raggio al seno di quest'angolo duplo, così la verticale data AE , ovvero AF ad una quarta proporzionale, si farà a noi nota la AN , o sia BO ; e pertanto, se prendansi i quadrati delle due AF, AN , e dalla loro differenza cavisi la radice quadrata, si avrà con questa radice la lunghezza della FN .

375. Si abbassi inoltre sull'asse MO la perpendicolare EH ; e se dividasi la FH per metà nel punto M , sarà questo punto il vertice dell'asse, ed il quadruplo della FM il suo parametro. Ma con essere note le due AE, FN , deve esserci nota altresì così la FH , come la sua metà FM . Dunque se determinisi questa metà, e di essa prendasi il quadruplo, resterà determinato parimente il parametro dell'asse. Finalmente essendo note le due AB, MN , sarà nota ancora la MO , che è l'ascissa corrispondente all'ordinata dell'asse DO . Onde se il parametro dell'asse di già determinato moltiplicasi per la MO , e dal prodotto cavisi la radice quadrata, si avrà con questa radice la DO , la quale coll'aggiunta della AN , ovvero BO ci darà l'orizzontale BD , che si dimanda.

376. Notisi qui intanto, che se l'angolo dato CAE sia di gradi 45, il calcolo riuscirà molto più facile; poichè, facendosi retto il suo duplo EAF , sarà la stessa AF la perpendicolare abbassata sull'asse dal punto A ; e pertanto la FM sarà eguale alla metà della verticale data AE . Se poi l'oriz-

zon-

zontale AN , da cui incomincia il moto del grave, sia più elevata dell'altra BD , a cui terminasi lo stesso moto, e l'angolo dato CAE sia retto; in tal caso la AB farà l'asse della parabola, ed il quadruplo della AE farà il suo parametro. Onde si determinerà l'orizzontale BD , che si dimanda, primieramente con moltiplicare il quadruplo della verticale data per la distanza AB delle due orizzontali, ed indi con estrarre dal prodotto la radice quadrata.

Fig. 52. 377. Finalmente per quanto al terzo problema, che è il più difficile, si potrebbe egli risolvere geometricamente in questo modo. Facciasi primieramente la EH parallela alla BD , e si abbassi su di essa la perpendicolare DI . Descrivansi di poi coi punti A , e D come centri, e cogli intervalli delle due AE , DI gli archi circolari EF , IF , che s'intersechino tra loro nel punto F . Congiungasi finalmente la AF , ed io dico, che se dividasi l'angolo EAF in due parti eguali per la retta AC , farà CAE l'angolo, che si dimanda. In fatti essendo eguali così le due AE , AF , come le due DI , DF , farà F il foco della parabola. Quindi la AC , che divide per metà l'angolo EAF , si farà tangente della stessa parabola in A . Onde colla velocità, che acquistasi colla caduta per la AE , dovrà spingersi il grave secondo la direzione della AC .

378. Secondo questa costruzione vedesi chiaramente, che il problema, di cui si tratta, sia capace regolarmente di due soluzioni. In effetto, se i due archi EF , IF , dopo essersi incontrati nel punto F , distendansi più oltre, s'incontreranno di nuovo in un altro punto f . Onde la direzione della velocità da imprimerli al grave potrà essere tanto la retta, che divide per metà l'angolo EAF , quanto la retta, che divide in parti eguali l'altro angolo EAf . Se poi vogliasi attentamente riflettere, si vedrà ancora, che i fuochi F , ed f delle due parabole, che possono descriversi dal grave, debbano esse-

essere egualmente distanti dalla AD , che congiunge insieme i centri dei due archi. Onde facendosi eguali tra loro i due angoli DAF , DAf , sarà l'angolo ricercato in una soluzione eguale alla metà della differenza dei due DAE , DAF , ed in un'altra eguale alla metà della loro somma.

379. Quindi per ridurre a calcolo l'istesso problema, non dovrà farsi altra cosa, se non che determinare i due angoli DAE , DAF . Ed in vero per quanto al primo DAE , resterà egli determinato, se facciasi come AB a BD , così il raggio ad una quarta proporzionale; poichè l'angolo ottuso, a cui questa quarta proporzionale rapportasi come tangente, ci darà l'angolo DAE . Per quanto poi all'altro DAF ; determinisi primieramente la AD , che è ipotenufa del triangolo rettangolo ABD , di cui sono noti i due lati AB , BD . E poichè nel triangolo DAF sono noti tutti tre i lati, potrà determinarsi facilmente la porzione AL , che taglia dalla AD la perpendicolare FL . Onde se facciasi come AF ad AL , così il raggio ad una quarta proporzionale; l'angolo acuto, a cui questa quarta proporzionale rapportasi come seno secondo, ci darà l'altro angolo DAF .

380. Quantunque poi il problema sia capace regolarmente di sue soluzioni, niente però vieta, che queste due soluzioni riducansi talvolta ad una. Avviene ciò, sempre quando le due AE , DI insieme sono eguali alla AD ; poichè in questo caso i due archi circolari, che descrivonfi coi punti A , e D come centri, e cogl' intervalli delle due AE , DI , si toccheranno tra loro in un sol punto; e perciò, conforme una sola parabola potrà descriversi dal grave colla velocità, che acquistasi cadendo per la AE ; così una sola sarà la direzione, con cui dovrà imprimerfi al grave la riferita velocità. Il punto intanto, in cui toccansi tra loro i due archi, si ritroverà nella AD . Onde siccome l'angolo ricercato deve essere la metà dell'angolo DAE , così la solu-

soluzione arimmetica del problema riducesi alla determinazione di quest'angolo.

381. Ma egli è da notarsi, che può avvenire ancora talvolta, che il problema sia impossibile. Accade ciò, qualora le due AE , DI insieme sono minori della AD ; poichè in quest'altro caso i due archi circolari descritti co' punti A , e D come centri, e cogl' intervalli delle due AE , DI affatto non s'incontrano; onde siccome per mezzo di essi non ritrovasi punto alcuno, così nè pure il problema farà capace di veruna soluzione. Finalmente il caso di essere retto l'angolo ricercato si avrà, quante volte la differenza delle due AB , AE ritrovasi essere mezza proporzionale tra la differenza dell'altre due BD , DI , e la loro somma. Ma conforme il problema ancora in questo caso ammette due soluzioni diverse; così l'angolo, che si dimanda, in una di esse si avrà colla metà della somma dei due DAE , DAB , ed in un'altra colla metà della loro differenza (105).

C A P I T O L O III.

Dell' equilibrio de' gravi nelle scambievoli loro azioni.

382. **N**El capitolo precedente si è trattato de' moti, che possono avvenire a qualsivoglia corpo grave per ragion del suo proprio peso; passeremo ora a ragionare in quest'altro dell'equilibrio, che osservasi nelle azioni, che per mezzo degli stessi pesi esercitano tra esso loro due, o più gravi, i quali hanno tra di essi un qualche attacco. E poichè ogni altra potenza può riguardarsi come un grave dotato di peso proporzionale alla sua forza di agire; perciò si tratterà in questo capitolo dell'equilibrio, che osservasi non solo nelle scambievoli azioni de' corpi gravi, ma eziandio in quelle di altre potenze; onde si è, che il suo argomen-
to

to farà molto più difteso di quello, che egli sembra promettere.

I.

Del centro di gravità di qualsivoglia grave, e della sua linea di direzione.

383. **Q**uantunque il peso di un corpo sia sparso egualmente in tutte le minime particelle, che lo compongono; niente-dimeno il costume si è, di considerarlo come raccolto, e riunito talmente in uno de' punti dello stesso corpo, che fuori di esso non siavi altro peso nell'altre parti rimanenti; e quindi si è, che il riferito punto riguardasi comunemente come centro della propria gravità, o sia peso del corpo. Si vede intanto, che conforme il corpo dee rimanere in equilibrio, quante volte tienesi sospeso per un filo, che passa prolungato per quel centro; così al contrario se situisi un corpo talmente sopra un piano verticale, che resti su di esso fermo, ed immobile, questo piano dovrà passare prolungato per lo stesso centro (106).

384. Quindi con un piano di questa indole potrà determinarsi facilmente il centro di gravità di qualsivoglia corpo, ed ecco come. Situisi su di esso il corpo, di cui si tratta, ora secondo la sua lunghezza, ora secondo la sua larghezza, ed ora finalmente secondo la sua altezza, o sia profondità: ed in tutte tre queste situazioni cerchi la posizione, in cui il corpo rimane su'l piano in equilibrio, ed in conseguenza fermo, ed immobile. Il piano adunque in ciascuna delle tre posizioni del corpo dovrà passare prolungato per lo centro della sua gravità. Onde siccome questo centro dee ritrovarsi in tutte tre le sezioni fatte nel corpo dal medesimo piano; così il punto comune alle tre riferite sezioni farà il centro, che si dimanda.

385. La ragione poi, per cui il totale peso del corpo considerasi come riunito, e raccolto nel divisato centro, dipende da ciò; che qualora il corpo spinto dal suo peso portasi liberamente verso la terra, vien regolato il di lui moto dal suddetto centro, e le altre parti del corpo, quasicchè prive di peso, non fanno altra cosa, se non che secondare la sua direzione. Ed in fatti la retta perpendicolare alla superficie della terra, per cui il corpo si muove, descrivesi propriamente dal centro della sua gravità; onde si è, che rimane ella determinata, con congiungersi il centro della gravità del corpo col centro della terra, che è il comune centro de' gravi.

386. Questa retta suol chiamarsi linea di direzione, in quantoche per essa dirigesì il moto del corpo derivato dalla gravità. Ed egli è da notarsi, che se bene le direzioni de' corpi gravi vadansi ad incontrare prolungate nel centro della terra; nientedimeno, se si abbiano due gravi così poco distanti l'uno dall'altro, che la loro distanza sia insensibile per rapporto a ciascuna di quelle, per cui gli stessi gravi distano dal centro della terra, in tal caso le loro direzioni potranno averfi come parallele: conforme in effetto le mura degli edifici, che innalzansi a perpendicolo sulla superficie della terra sembrano essere parallele tra loro.

387. Or sebbene il grave lasciato in libertà portisi verso il centro della terra per la linea di direzione; nientedimeno l'esperienza stessa ci dimostra, che egli nel cadere non sempre conservasi. Onde giova quì l'avvertire, che riterrà il grave la prima sua posizione, sempre quando tra gl' infiniti piani verticali, che passano per la sua linea di direzione, ritrovasene uno, intorno a cui si equilibrano tra loro le due parti dello stesso grave. Ma se mai nessuno di essi sia di questa indole, in tal caso il grave nel momento stesso, che in comincia a cadere, si aggirerà intorno al suo centro di gravità

vità fino a che la sua posizione facciafi tale , che uno dei riferiti piani divida il grave in due parti , che fia tra loro in equilibrio intorno a quel piano .

388. Se poi vogliafi attentamente riflettere, s'intenderà facilmente , che il moto circolare del grave debba farfi intorno a quel piano verticale , per rapporto a cui le due parti dello ſteſſo grave maggiormente ſi diſcoſtano dall' equilibrio . E poichè deriva quel moto appunto da ciò , che il centro di gravità del grave è tirato verſo baſſo più da una parte , che dall' altra ; perciò nè pure ſi durerà fatica ad intendere , che la direzione del medefimo moto debba eſſere la ſteſſa con quella della parte , che eſercita azione maggiore ; dimodochè accaderà al grave cadente lo ſteſſo , che vedefi avvenire ad una girella , la quale ſe per mezzo di una corda ſia tirata verſo baſſo da due peſi diſuguali , incomincia ſubito ad aggirarſi verſo quel lato , da cui pende peſo maggiore ,

389. Nè vale il dire , che potrebbe il grave rimaner diviſo in parti , che maggiormente ſi diſcoſtino dall' equilibrio , da due , o più piani verticali . Imperocchè ſe ciò poteſſe avvenire , il centro di gravità del grave farebbe tirato maggiormente verſo baſſo da due , o più forze eguali con direzioni , che formano angoli tra loro . Quindi ficcome il grave dovrebbe aggirarſi verſo quel lato , per cui dirigeſi la forza , che ſi ha colla loro compoſizione ; così la parte , che prepondera più di ogni altra , ed eſercita azione maggiore , ſi verrebbe a ritrovare nel medefimo lato . Onde tuttavia farebbe uno il piano verticale , per cui il grave rimane diviſo in due parti , che maggiormente ſi diſcoſtano dall' equilibrio , il quale piano farebbe perpendicolare alla direzione della forza compoſta .

390. Del rimanente , ficcome il grave col ſuo peſo cerca di avvicinarſi ſempre più al centro della terra ; così dee giudicarſi di queſto avvicinamento , non già per ciò , che vedefi avvenire all' eſterna ſuper-

per-

perficie del grave, ma per altrettanto accade al suo centro di gravità, in cui si riunisce, e si raccoglie il di lui peso. Onde intorno al moto di un grave, che dee nascere dal suo proprio peso, possono stabilirsi due principj. Il primo si è, che debba muoversi il grave col suo peso, ogni qualvolta egli ritrovasi avere posizione tale, che permette al suo centro di gravità di avvicinarsi al centro della terra. L'altro principio si è, che il moto del grave debba farsi in modo, che lo stesso centro di gravità avvicini all'altro della terra il più, che sia possibile.

Fig. 53.

391. Per fare qualche uso di questi principj, esaminiamo primieramente ciò, che deve avvenire al grave $ABCD$, che ritrovasi situato su'l piano orizzontale MN . Sia perciò E il suo centro di gravità; e se la sua linea di direzione EF cada su di un qualche punto interno della sua base BC , chiaro si è non poterli il grave muovere in altra guisa, se non che con aggirarsi intorno ad uno dei termini della stessa base, come intorno a B . Ma egli è facile il dimostrare, che si oppone questo moto al primo principio. In fatti essendo l'angolo EBM ottuso, farà l'arco EG descritto col centro B , e coll'intervallo della BE , maggiore del quadrante. Onde siccome porzione di esio elevasi sull'orizzontale EH , così il centro E , con portarsi per quella porzione, in vece di avvicinarsi al centro della terra, si discostarebbe più tosto da quello.

392. Quantunque poi cadendo la linea della direzione su'l termine della base B , facciasi retto l'angolo EBM , ed in conseguenza eguale al quadrante l'arco EG ; pure però il grave dee rimanere fermo, ed immobile. Imperocchè siccome il picciolo archetto aggiacente al centro E , ritrovasi situato sull'orizzontale EH , che è tangente dell'arco EG ; così il centro E , con portarsi per quell'archetto, neppure avvicina al centro della terra. Si muoverà adunque il grave nel solo caso, che la
linea

linea di direzione EF cada fuori della base BC ; e ciò per la ragione, che facendosi acuto l'angolo EBM , farà l'arco EG minore del quadrante; onde ritrovandosi quest'arco interamente racchiuso tra le due orizzontali EH , MN , il centro E avvicinasì al centro della terra, con portarsi per la sua lunghezza,

393. Esaminiamo in appresso ciò, che deve avvenire allo stesso grave $ABCD$, essendo inclinato sull'orizzonte il piano MN , su di cui egli ritrovasi situato. Si abbassi perciò dal centro E la perpendicolare EF sul piano MN ; e dopo essersi tirata la EH parallela allo stesso piano, descrivasi col centro B , e coll'intervallo della BE l'arco circolare EG . Quest'arco adunque farà maggiore del quadrante, qualora la EF cade dentro della base BC ; ed al contrario minore, quante volte la stessa EF cade fuori. Quindi il centro E , per poterli avvicinare il più che sia possibile al centro della terra, dovrà portarsi per la EH nel primo caso, e per l'arco EG nel secondo. Onde il grave sempre dovrà muoversi su 'l piano inclinato MN , ma nel primo caso dovrà strisciare per la lunghezza del piano, e nel secondo dovrà aggirarsi intorno al punto B .

394. Se poi la perpendicolare abbassata sul piano dal centro E cada sul termine della base B ; in tal caso l'arco EG farà quadrante, e la EH si farà tangente di esso in E . Onde nel principio del moto il centro E egualmente si avvicinerà al centro della terra, portandosi per la EH , che per l'arco EG . Con continuarsi intanto il moto, non v'ha dubbio che sia maggiore l'avvicinamento fatto per EG , che l'altro fatto per la EH ; e perciò il grave dovrà muoversi sul piano inclinato MN , non già strisciando per la sua lunghezza, ma bensì con aggirarsi intorno al punto B . Quindi un grave di figura sferica percorrerà la lunghezza del piano sempre rotolando; e poichè ne' progetti fa le veci di

L piano

piano inclinato la velocità, che se gl' imprime dalla forza proiettile, perciò ancora essi rotolando descriveranno la parabola, per cui si muovono (107).

II.

Del principio generale dell' equilibrio, e dell' applicazione di esso alla bilancia.

395. **D**ue gravi non possono agire tra esso loro, se per mezzo di un qualche strumento, a cui sia applicato ciascuno di essi, non siano in un certo modo uniti, e ligati insieme. Or conforme quest' istrumento, che unisce, e liga insieme i due gravi, che agiscono tra esso loro, comunemente chiamasi machina; così sebbene sia scambievolmente l' azione degli stessi gravi, ad ogni modo il costume si è, di riguardare uno dei due come potenza, e l' altro come resistenza. Anzi è stato necessario di fare una tal distinzione, eziandio per la ragione, che siccome facciamo uso delle macchine non solo per elevare in alto smisurati pesi, ma altresì per trasportargli orizzontalmente da un luogo in un altro, o pure per comprimere, e spezzare corpi difficili a cedere; così per vincere, e superare le divise resistenze talvolta impiegasi il peso di un grave, e talvolta una potenza di altra indole (108).

396. Quantunque nell' uso, che si fa delle macchine, la potenza, e la resistenza non siano sempre pesi di corpi gravi; niente però vieta di riguardare così l' una, come l' altra a guisa di un peso. In fatti qualunque siasi la potenza, che impiegasi in una qualche machina per vincere, e superare una data resistenza; certo si è, che se ella faccia a cagion di esempio lo stesso effetto, che farebbe un peso di 10. libbre sostituito in luogo di essa, equivalerà la medesima al riferito peso. E per la stessa ragione, qualunque siasi la resistenza, che per mezzo di una machina dee vincerfi, e superarsi da una data

data potenza; certa cosa ancora si è, che se ella faccia per ragion di esemplo alla potenza la stessa opposizione, che farebbe un peso di 100. libbre sostituito in sua vece, equivalerà la medesima al peso diviso.

397. Con esser data poi la machina, a cui applicansi la potenza, e la resistenza, possono determinarsi facilmente così gli spazj, che percorrono ambedue nel medesimo tempo, come le velocità, con cui descrivonsi questi spazj. Onde considerando la potenza, e la resistenza come due corpi, che muovonsi con date velocità, agiranno tra effo loro con forze proporzionali ai loro moti; e perciò faranno le medesime in equilibrio, quantevolte ritrovansi essere nella reciproca ragione delle loro velocità (51). Questa reciproca ragione adunque si è il principio generale dell'equilibrio, e conforme con essa egli è facile di definire la potenza, che per mezzo di una data machina equilibrafi con una resistenza data; così per poco, che si aumenti questa potenza, non solo cesserà l'equilibrio, ma resterà altresì vinta, e superata la data resistenza.

398. Debbonfi qui intanto avvertire due cose. La prima si è, che siccome la velocità, con cui agiscono tra effo loro la potenza, e la resistenza, debbono ripetersi dagli spazj, che percorrono ambedue nel medesimo tempo; così questi spazj debbono prenderfi, e misurarfi secondo le direzioni, con cui la potenza, e la resistenza esercitano le loro azioni. L'altro si è, che conforme la stessa potenza, che impiegasi a vincere, e superare la resistenza data, dee porre in moto altresì la machina, di cui si fa uso; così in determinare la riferita potenza dee tenerfi conto altresì dell'altra resistenza, che deriva dal peso delle parti della machina, e dallo stropicciamento loro scambievole. Noi intanto prescinderemo per ora da quest'altra resistenza, e faremo vedere a suo luogo, come spe-

cialmente possa definirsi, e porsi a calcolo quella, che nasce dallo stropicciamento delle parti della macchina (109).

399. Per applicare presentemente il riferito principio generale dell' equilibrio alle machine le più semplici, e le più usitate, incominceremo dalla bilancia, che riguardasi come una retta orizzontale priva di ogni gravità, la quale sospesa da uno de' punti di mezzo tiene attaccati ai suoi estremi due pesi, che pendono da essi liberamente. Sia adunque *Fig. 55.* *AB* questa retta orizzontale, la quale sia sospesa dal punto *C*, che considerasi come suo centro. Siano ancora *M*, ed *N* i due pesi, che pendono liberamente dai suoi estremi *A*, e *B*. Io dico, che faranno questi due pesi in equilibrio, quantevolte ritrovansi essere nella reciproca ragione delle braccia della bilancia, da cui pendono, vale a dire, quante volte il peso *M* sta al peso *N*, come il braccio *BC* al braccio *AC*.

400. Per dimostrarlo, trasportisi la bilancia colla scambievole azione dei due pesi dalla posizione *ACB* all' altra infinitamente vicina *aCb*. E poichè gli archetti *Aa*, *Bb* descritti intorno al centro della bilancia *C* dai due termini *A*, e *B* possono riguardarsi come due picciole rette alzate perpendicolarmente sulla *AB*; chiaro si è, che i medesimi archetti siano gli spazj, che percorrono secondo le loro direzioni i due pesi *M*, ed *N* in quel picciolo moto della bilancia; onde la velocità del peso *M* farà alla velocità del peso *N*, come l' archetto *Aa* all' archetto *Bb*. Ma per essere simili i due piccioli settori *ACa*, *BCb*, l' archetto *Aa* sta all' archetto *Bb* nella ragione di *AC* a *BC*. Dunque in questa stessa ragione faranno altresì le velocità dei due pesi *M*, ed *N*; e perciò gli stessi pesi faranno tra loro in equilibrio, sempre quando il peso *M* sta al peso *N*, come *BC* ad *AC*.

401. Or sebbene la bilancia comune abbia le sue braccia a dirittura, e pongasi la medesima in sito
oriz-

orizzontale, sempre quando trattasi d'investigare l'equilibrio dei due pesi, che pendono liberamente dai suoi termini; niente però vieta di formare una bilancia, le di cui braccia facciano angolo tra loro, ed abbiano per rapporto all'orizzonte qualsivisia posizione, siccome è la bilancia ACB . Ma in questo caso, per non essere le direzioni AM , BN dei due pesi perpendicolari sulle braccia della bilancia AC , BC , debbonsi prendere le loro distanze dal centro C , che sono le perpendicolari CD , CE abbassate su di esse da quel centro; e si avrà l'equilibrio, quante volte il peso M sta al peso N , come la distanza CE alla distanza CD . Per dimostrarlo, trasportisi ancora la bilancia dalla sua posizione ACB all'altra infinitamente vicina aCb , e si abbassino sulle stesse direzioni l'altre picciole perpendicolari am , bn .

Fig. 56.

402. Gli spazj adunque, che in quel picciolo moto della bilancia percorronsi dai due pesi M , ed N secondo le loro direzioni, sono le due Am , Bn ; onde si è, che la velocità del peso M sia alla velocità del peso N , come Am a Bn , o pure in ragion composta di Am ad Aa , di Aa a Bb , e di Bb a Bn . Ma per essere i due piccioli triangoli Ama , Bnb equiangoli coi due CDA , CEB , e per essere ancora simili i due piccioli settori ACa , BCb , le tre riferite ragioni sono eguali all'altre tre di CD ad AC , di AC a BC , e di BC a CE , le quali ragioni compongono insieme la sola ragione di CD a CE . Dunque la velocità del peso M farà alla velocità del peso N eziandio nella ragione di CD a CE ; e perciò gli stessi pesi faranno tra loro in equilibrio, sempre quando il peso M sta al peso N , come la distanza CE alla distanza CD .

403. Niente vieta altresì, di rendere inclinate sull'orizzonte le direzioni dei due pesi così nella bilancia rettilinea, come nell'altra angolare, bastando far passare per le due girelle F , e G le corde

Fig. 57.

de, a cui sono attaccati gli stessi pesi. Ed eziandio in questo caso, se dal centro C della bilancia si abbassino sulle due AF , BG le perpendicolari CD , CE , si avrà l'equilibrio, sempre quando il peso M sta al peso N , come CE a CD . Per dimostrarlo, trasportisi di nuovo la bilancia dalla sua posizione ACB all'altra infinitamente vicina aCb ; indi coi punti F , e G come centri, e cogli intervalli delle due Fa , Gb descrivansi i due piccioli archi circolari am , bn , che potranno riguardarsi come due picciole rette abbassate perpendicolarmente sulle stesse due AF , BG .

404. Gli spazi adunque, che in quel picciolo moto della bilancia percorronsi dai due pesi M , ed N secondo le direzioni, con cui tirano verso basso le braccia della stessa bilancia, sono le due Am , Bn ; ed in conseguenza la velocità del peso M farà alla velocità del peso N come Am a Bn , o pure in ragion composta di Am ad Aa , di Aa a Eb , e di Bb a Bn . Ma per essere i due piccioli triangoli Ama , Bbn equiangoli coi due CDA , CEB , e per essere altresì simili i due piccioli settori ACa , BCb , le riferite tre ragioni sono eguali all'altre tre di CD ad AC , di AC a BC , e di BC a CE , le quali ragioni compongono insieme la sola ragione di CD a CE . Dunque la velocità del peso M farà alla velocità del peso N eziandio nella ragione di CD a CE ; e pertanto faranno tra loro in equilibrio gli stessi pesi, sempre quando il peso M sta al peso N nella reciproca ragione di CD a CE .

405. Giova intanto di essersi esaminato questo terzo caso, che è il più universale. Imperocchè siccome le due braccia della bilancia possono essere tirate verso basso, non solo da due pesi, ma eziandio da due potenze animate; così non v'ha dubbio, che queste due potenze possano tirarle con direzioni, che talvolta siano perpendicolari, e talvolta inclinate sull'orizzonte. Tenendosi poi attac-

cata

cata la bilancia col suo centro ad un punto fisso, ed immobile ; chiaro si è , che per mezzo di potenze animate potranno tirarsi le sue braccia non solo verso basso , ma altresì verso qualunque lato si voglia . Onde avvalendoci della stessa dimostrazione , tuttavia ritroveremo , che faranno in equilibrio le due potenze , sempre quando sono reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal centro della bilancia (110) .

III.

Dell' equilibrio , che osservasi nella leva , nell' asse nella ruota , e nel polispasto .

406. **A** Fine alla bilancia si è la leva , per cui intendesi quel lungo palo , di cui si fa uso per smuovere un grave di smisurato peso, ed il quale riguardasi come una retta rigida priva di gravità . In fatti per poterli colla leva AB smuovere il grave M , primieramente dee porsi sotto il grave l' estremo di essa A ; indi la stessa leva dee sostentarsi con uno de' suoi punti C su di un qualche appoggio , che con voce greca chiamasi ipomoclio ; ed in fine l' altro suo estremo B dee premerli verso basso per mezzo di una qualche potenza , come N . Quindi si ridurrà la leva ad una bilancia , che avrà per centro il punto C , e per braccia le due AB, BC . Onde il peso M , e la potenza N faranno in equilibrio , sempre quando sono reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal punto del sostegno C .

Fig. 58.

407. Questa leva , in cui ritrovasi il peso in un estremo , la potenza nell' altro estremo , ed il sostegno in un punto di mezzo , chiamasi leva del primo genere ; e ciò per la ragione , che sogliono considerarsene altre due , di cui una dinominata leva del secondo genere tiene il sostegno in un'estremo , la potenza nell' altro estremo , ed il peso in un punto di mezzo ; e l' altra chiamata leva di ter-

Fig. 59.
60.

zo genere tiene al contrario il sostegno in un'estremo, il peso nell'altro estremo, e la potenza in un punto di mezzo. Quantunque poi in ciascuna di quest'altre due leve la potenza debba agire con direzione, che porti la leva in alto; pure però il peso, e la potenza faranno tra loro in equilibrio, quante volte ritrovansi essere reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal punto del sostegno.

408. Con ciascuna di queste leve può agire una potenza non solo contro il peso di un grave, ma eziandio contro qualsiasi altra resistenza; ed ovunque tendano le loro direzioni, che debbono essere colla leva sempre in un medesimo piano, tuttavia si avrà l'equilibrio, sempre quando la resistenza, e la potenza sono reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal punto del sostegno. Ciò che poi dee notarsi intorno alle stesse leve, si è, che la meno efficace sia quella del terzo genere. Di fatti in questa leva la resistenza ritrovasi in uno de' suoi estremi, e la potenza in uno de' punti di mezzo. Onde siccome dall'altro estremo, che è il punto del sostegno, meno dista la direzione della potenza, che l'altra della resistenza; così al contrario la potenza, che equilibra colla resistenza, dovrà essere sempre maggiore della resistenza medesima (III).

Fig. 61. 409. Dopo la leva siegue l'asse nella ruota, che appellasi con questo nome, perchè consiste in una ruota situata intorno ad un'asse, che passa per lo suo centro, e guarnita esteriormente di molti bastoncini ficcati a perpendicolo nella sua convessità, che in greco chiamansi scitale. Si fa uso di questa macchina per portare in alto qualsiasi peso; e si ottiene ciò, primieramente con porre l'asse talmente in sito orizzontale, che possa aggirarsi intorno ai suoi estremi; indi con avvolgere una fune intorno alla parte inferiore dell'asse, a cui sia attaccato il peso, che dee portarsi in alto; e finalmente con
aggi-

aggirare la ruota insieme coll' asse per mezzo di una potenza animata, che tiri successivamente a se i bastoncini esteriori della ruota. Ed in fatti colla rivoluzione della ruota avvolgesi sempre più la fune intorno all' asse; onde si è, che elevasi il peso attaccato alla stessa fune.

410. In questa machina il peso, e la potenza sono tra loro in equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come il perimetro dell' asse al perimetro dell' orbe, che passa per le estremità dei bastoncini esteriori della ruota. Imperocchè in una rivoluzione intiera della machina, siccome la potenza percorre tanto spazio, quanto è il perimetro del riferito orbe; così il peso sale per un' altezza eguale alla fune, che avvolgesi intorno all' asse, ed in conseguenza eguale al perimetro del medesimo asse. Quindi la velocità della potenza sarà alla velocità del peso, come il perimetro dell' orbe esteriore al perimetro dell' asse. Onde attento il principio generale dell' equilibrio, si equilibreranno tra loro il peso, e la potenza, quante volte la potenza sta al peso, come il perimetro dell' asse al perimetro dell' orbe esteriore (112).

411. La riferita machina riducesi eziandio ad una bilancia. Descrivansi perciò in un piano verticale due cerchi concentrici, di cui il più picciolo sia il perimetro dell' asse, ed il più grande il perimetro dell' orbe esteriore. Se adunque per lo comune centro C tirisi l' orizzontale ACB, che s' incontri

Fig. 62.

col primo cerchio nel punto A, e col secondo nel punto B; chiaro si è, che il peso penderà dall' estremità del raggio CA, e la potenza sarà applicata a perpendicolo sull' estremità dell' altro raggio CB. Ma nella rivoluzione di questi raggi il punto C rimane fisso, ed immobile. Dunque coll' orizzontale ACB avremo una bilancia, in cui faranno in equilibrio il peso, e la potenza, sempre quando la potenza sta al peso, come il raggio AC al raggio BC, o pure come la circonferenza del cerchio pic-

ciò-

ciolo alla circonferenza del cerchio grande.

412. Confimile a questa machina si è l'altra, che chiamasi argano, e di cui si fa uso non già per tirare in alto un grave, ma per condurlo da un luogo in un altro su di un piano orizzontale. Per renderla intanto atta a questo moto, erigesi l'asse a perpendicolo su 'l piano, per cui dee condursi il grave; e senza apporvi ruota alcuna aggirasi egli dalla potenza intorno a se stesso per mezzo di due leve, che si fan passare per due buchi fatti nella parte sua superiore. E poichè nel mentre, che la potenza percorre il perimetro dell'orbe descritto intorno all'estremità delle due leve, tuttavia il grave trasportasi per uno spazio eguale al perimetro dell'asse; perciò eziandio nell'argano la potenza, e la resistenza faranno tra loro in equilibrio, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come il perimetro dell'asse al perimetro dell'orbe esteriore.

Fig. 63.
64.

413. Dall'asse nella ruota passeremo al polispasto, che è una machina composta di una, o più girelle mobili intorno ai loro assi, per cui si fa passare una fune, che tirata da una potenza animata conduce in alto un dato peso. In questa machina dee tenerfi conto non tanto delle girelle, che la compongono, quanto delle funi, da cui è sostenuto il peso, che portasi in alto; onde si è, che secondo il numero di esse dividefi in varie specie, chiamandosi monospasto, se il peso sia sostenuto da una sola fune, bispasto, se da due, trispasto, se da tre, quadrispasto, se da quattro, e così all'infinito. Ed in fatti, qualunque siasi il polispasto, farà la potenza in equilibrio col peso, sempre quando la potenza sta al peso, come l'unità al numero delle funi, che sostengono l'istesso peso (113).

414. Per dimostrarlo, basta riflettere, che per poterfi il peso elevare a cagion di esemplo per l'altezza di un palmo, conforme deve accortarsi di un palmo ciascuna delle funi, che lo sostentano, così la potenza debba tirarne a se tanti palmi, quante sono

sono di numero le stesse funi . Quindi lo spazio percorso dal peso sarà allo spazio percorso nel medesimo tempo della potenza , come l'unità al numero delle funi , che sostentano il peso ; e perciò in questa stessa ragione sarà altresì la velocità del peso alla velocità della potenza . Ma secondo il principio generale dell'equilibrio non possono la potenza , ed il peso equilibrarsi tra loro , se non siano nella reciproca ragione delle velocità , con cui si muovono . Dunque in ogni polispasto sarà la potenza in equilibrio col peso , quante volte la potenza sta al peso , come l'unità al numero delle funi , che sostengono l'istesso peso .

415. Secondo questo teorema adunque , per potersi dar luogo all'equilibrio , la potenza deve essere al peso , come 1 a 2 nel bispastro , come 1 a 3 nel tripastro , come 1 a 4 nel quadripastro , e così all'infinito . Per la stessa ragione poi si avrà l'equilibrio nel monospasto , sempre quando la potenza , ed il peso sono tra loro in ragion di uguaglianza . Nè a ciò si oppone altrettanto sperimentasi alla giornata , cioè che si duri maggior fatica in tirare a mano l'acqua dai pozzi , che in tirarla per mezzo del monospasto , o sia della girella . Imperocchè il divario deriva da ciò , che avvalendoci della girella , la tiriamo all'ingiù ; onde il proprio peso delle braccia , che si portano verso basso , conferisce non poco a tirarla . All'incontro tirandola a mano , la tiriamo all'insu ; e pertanto oltre al peso dell'acqua dee sollevarsi altresì quello delle braccia , da cui dipende la fatica maggiore (114) .

416. Con questa occasione notifi in questo luogo , che intanto il numero delle girelle , di cui si compone il polispasto , non sempre corrisponde al numero delle funi , che sostentano il peso , in quanto che il polispasto non sempre formasi in modo , che la direzione della potenza tenda verso basso , ma talvolta la sua struttura è tale , che la potenza deve agire con direzione tendente verso sopra .

In

In fatti nel primo caso il peso non sostentasi da quella fune, a cui applicasi la potenza; e perciò il numero delle girelle si fa eguale al numero delle funi, che sostentano il peso. All' incontro nel secondo caso il peso è sostenuto eziandio da quella fune, a cui deve applicarsi la potenza; ed in conseguenza il numero delle funi, da cui pende il peso, supera di uno l'altro delle girelle. Intanto attenta la maggior facilità, con cui la potenza agisce verso basso, giova formare il polispasto in modo, che il numero delle girelle sia eguale al numero delle funi, da cui è sostenuto il peso.

417. Un altro avvertimento dee farsi in questo luogo, e si è, che la girella attaccata ad un punto fisso riducesi ad una leva del primo genere; quella poi, che scorre per la fune, dee riguardarsi come leva del secondo genere. Considerisi perciò il solo diametro orizzontale della girella. Ed essendo questa fissa, il peso penderà da uno ai suoi estremi, la potenza agirà nell'altro estremo, ed il punto del sostegno sarà quello, che divide il diametro per metà. Onde non solo la girella farà leva del primo genere, ma saranno in equilibrio la potenza, ed il peso, sempre quando sono tra loro in ragion di uguaglianza. Essendo poi la girella mobile, il peso penderà dal punto, che divide il diametro egualmente, la potenza agirà in uno de' suoi estremi, ed il punto del sostegno sarà nell'altro estremo. Onde si ridurrà la girella ad una leva del secondo genere, in cui si avrà l'equilibrio, quante volte la potenza sta al peso, come 1 a 2.

*Dell' equilibrio, che osservasi nel piano
inclinato nel cuneo, e nella vite.*

418. **O**Ltre alle riferite machine semplici ne abbiamo tre altre, cioè il piano inclinato, il cuneo, e la vite. Ed in primo luogo, per quanto al piano inclinato, sia AB questo piano, il quale per rapporto all'altro orizzontale BC abbia per sua altezza la verticale AC ; e debbasi per questo piano tirare un peso da una potenza, che agisce con direzione parallela alla AN . Si abbassi sulla AN la perpendicolare BN ; ed io dico, che la potenza, ed il peso faranno in equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come AC ad AN . Per dimostrarlo, fingiamo, che il peso siasi tirato dalla potenza da B fino ad A ; e se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che gli spazj percorsi dal peso, e dalla potenza secondo le loro direzioni siano eguali alle due AC, AN . Quindi le loro velocità faranno nella ragione di AC, AN ; e pertanto si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come AC ad AN .

Fig. 65.

419. Da ciò intanto, che è stato dimostrato di sopra (252), eziandio con altri principj, possono dedursi due conseguenze. La prima si è, che se la potenza agisca con direzione parallela alla stessa lunghezza del piano inclinato AB , si avrà l'equilibrio, quante volte la potenza sta al peso, come AC ad AB . L'altra si è, che essendo la direzione della potenza parallela alla BC , che è la base del piano inclinato, si equilibreranno tra loro il peso, e la potenza, qualora la potenza sta al peso, come AC a BC . Ed in fatti, conforme nel primo caso combaciansi tra di esse le due AN, AB , ed in conseguenza diventano eguali; così nel secondo caso si fanno parallele le due AN, BC , le quali dovendo formare un parallelogrammo coll'altre due AC, BN , faranno eziandio eguali tra loro (115).

420. Per quanto poi al cuneo, s'intende per esso quell'istrumento, di cui si fa uso per spezzare i corpi, e che comunemente chiamasi zeppa. Egli formasi di ferro, o pure di legno durissimo a guisa di un prisma triangolare. E conforme sono regolarmente isosceli i due triangoli opposti, così chiamasi taglio ovvero punta del cuneo la retta, che unisce insieme i vertici dei due triangoli; base del cuneo il parallelogrammo opposto alla punta; altezza del cuneo la perpendicolare, che dalla punta si abbassa sulla base; ed in fine crassezza del cuneo la base di ciascuno dei due triangoli, i quali hanno col cuneo la stessa altezza. Si spezza poi il corpo per mezzo del cuneo, primieramente con adattarlo a perpendicolo in una fessura fatta nel corpo, ed indi con spingerlo più in dentro per mezzo di reiterate percosse; onde si è, che la potenza sia la percossa da farsi a perpendicolo sulla base del cuneo, e la resistenza sia la coesione tra le parti del corpo.

421. Equilibrafi nel cuneo la potenza colla resistenza, quante volte la potenza sta alla resistenza, come la metà della crassezza del cuneo alla sua altezza. Per dimostrarlo, fingiamo, che ABC sia uno dei triangoli isosceli del cuneo; e se dal suo vertice A si abbassi sulla base BC la perpendicolare AD , farà BC la crassezza del cuneo, ed AD la sua altezza. Fingiamo ancora, che il cuneo per mezzo della potenza siasi a tal segno intromesso dentro del corpo, che sia AG la profondità, in cui giace immerso, ed EF la distanza, per cui ritrovansi disgiunte, e separate le parti superiori del corpo. Or sebbene la stessa AG sia lo spazio percorso così dal cuneo, come dalla potenza; nientedimeno, per avere l'altro spazio percorso nel medesimo tempo dalla resistenza, dee tenersi conto altresì delle distanze tra le parti inferiori del corpo, che similmente restano separate, e prendersi la distanza mezza.

422. Perciò intendansi nel triangolo AEF tirate rette parallele alla EF infinitamente vicine tra loro, ed egualmente distanti l'una dall'altra. Queste parallele adunque faranno le distanze, per cui le parti del lato AE ritrovansi disgiunte, e separate dall'altre corrispondenti del lato AF . Ma per la natura del triangolo le stesse parallele dalla massima, che è la EF , fino alla minima, che è l'aggiacente al punto A , minoransi in progressione arimmetica. Dunque si avrà la distanza mezza, con prendere la metà della loro somma. Quindi essendo la distanza minima di una picciolezza infinita, farà la distanza mezza eguale alla metà della sola massima EF ; e pertanto nel mentre, che dalla potenza si percorre la AG , si percorrerà dalla resistenza uno spazio eguale alla metà della EF .

423. Essendo così, la velocità della potenza farà alla velocità della resistenza, come la AG alla metà della EF . Ma per essere i due triangoli AEF , ABC tra loro equiangoli, le due AG , EF sono nella stessa ragione coll'altre due AD , BC . Dunque la velocità della potenza alla velocità della resistenza farà ancora, come l'altezza del cuneo AD alla metà della sua crassezza BC ; ed in conseguenza, attento il principio generale dell'equilibrio, si equilibreranno tra loro nel cuneo la potenza, e la resistenza, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come la metà della crassezza del cuneo alla sua altezza. Con che si vede ingannarsi coloro, che prendendo tutta la EF per lo spazio percorso dalla resistenza, credono averfi l'equilibrio, quantevolte la potenza sta alla resistenza, come la crassezza intiera del cuneo alla sua altezza.

424. Nè vale il dire, che conforme il cuneo per mezzo di replicate percosse entra a poco a poco dentro del corpo; così le fibre, che compongono lo stesso corpo, non si spezzano tutte insieme, ma bensì ad una ad una. Imperciocchè sebbene ciò sia
più

più che vero, pure però la velocità della potenza deve essere alla velocità della resistenza, come l'altezza del cuneo alla sua crassezza dimezzata. Perciò si vuol riflettere, che le fibre del corpo, tutt'occhè sottilissime, non sono già linee geometriche, ma filamenti dotati di qualche profondità. Quindi siccome in questa profondità deve immergersi il cuneo, affinchè si spezzi la fibra, così la separazione fatta coll'immersione del cuneo ci darà un vuoto, che farà sempre un picciolo triangolo simile all'altro ABC . Onde sempre l'altezza di questo picciolo triangolo farà lo spazio percorso così dal cuneo, come dalla potenza, e la metà della sua base farà lo spazio percorso dalla resistenza (116).

425. Si studiano taluni di ridurre il cuneo a due leve, che sono in contrasto l'una coll'altra; ma egli è più naturale di ridurlo a due piani inclinati; siccome in effetto uno di essi è la AB ; e l'altro la AC , che sono le due credute leve. Questi due piani poi, conforme hanno per comune loro base la AD ; così per essere isoscele il triangolo ABC , avranno altresì eguali altezze, che sono le due BD , CD . E poichè la potenza spinge il cuneo colla direzione della DA , chiaro si è, che in ambidue i piani agisce la potenza con direzione parallela alla comune loro base. Quindi si avrà in essi l'equilibrio, quante volte la potenza sta alla resistenza, come l'altezza del piano alla sua base (419). Ma la potenza, e la resistenza da considerarsi in ciascuno dei due piani sono le metà di quelle, che agiscono tra loro nel cuneo. Dunque ancora nel cuneo si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come la metà della crassezza del cuneo alla sua altezza.

426. Finalmente per quanto alla vite, ella consiste in un lungo cilindro verticale, che colle spire incise nella sua convessità conduce si per le spire incolpite nella concavità di due altri cilindri più corti. Questi cilindri incisi colle spire generalmen-

mente chiamansi coclee . Ma siccome si appellano coclee interne , ovvero masculee quelle , in cui le spire sporgono in fuori nella loro convessità ; così al contrario diconsi coclee esterne , ovvero feminee l'altre , in cui le spire rientrano in dentro nella loro concavità . Quindi la vite si compone di tre coclee , cioè di una masculea , e di due altre feminee . E poichè la coclea masculea colle sue spire cacciate in fuori dee condursi per le spire incavate nell'altre due feminee ; perciò non solo le tre coclee debbono essere di egual diametro , ma bisogna altresì , che in esse siano eguali gl' intervalli delle loro spire .

427. Le spire poi della coclea masculea conduconsi per le spire dell'altre due coclee feminee , per mezzo di una leva , che spinta lateralmente dalla potenza , applicata alla sua estremità con direzione perpendicolare alla sua lunghezza , fa girare la coclea intorno al suo asse . E poichè può farsi questa rivoluzione ora in modo , che la coclea si elevi , ed ora in maniera , che la coclea si abbassi ; perciò potrà farsi uso delle vite , così per condurre in alto un dato peso , che dee collocarsi al di sopra della coclea masculea , come per comprimere un dato corpo , che al contrario dee situarsi al di sotto della stessa coclea . Intanto sia , che con essa debba elevarsi un dato peso , sia che debba comprimersi un dato corpo , si avrà l'equilibrio , sempre quando la potenza sta alla resistenza , come l'intervallo di due spire vicine al perimetro dell'orbe , per cui portasi la potenza applicata alla leva .

428. In fatti in una rivoluzione intiera della coclea masculea , siccome la potenza percorre l'intiero perimetro del suo orbe ; così l'altezza , per cui si eleva , o si abbassa la stessa coclea , sarà eguale all'intervallo di due spire vicine . Quindi per farsi eguale allo stesso intervallo eziandio lo spazio , che nel medesimo tempo si percorre dalla resistenza , sarà la velocità della potenza alla velocità della re-

M

sisten-

sistenza, come il perimetro dell'orbe, per cui portasi la potenza, all'intervallo di due spire vicine. Onde attento il principio generale dell'equilibrio, si equilibreranno tra loro nella vite la potenza, e la resistenza, quante volte la potenza sta alla resistenza, come l'intervallo di due spire vicine al perimetro dell'orbe, che si descrive dalla potenza.

429. Del rimanente ancora questa macchina riducesi ad un piano inclinato, che si avrà con ispiegare una delle spire incise intorno alla coclea malculea. In fatti siccome la spira distesa a dirittura ci dà la lunghezza del piano inclinato; così la sua base si farà eguale al perimetro della coclea, e la sua altezza all'intervallo di due spire vicine. Quindi se la potenza, che agisce con direzione parallela alla base, sia applicata al perimetro stesso della coclea, si avrà l'equilibrio, quantevolte la potenza sta alla resistenza, come l'intervallo di due spire vicine al riferito perimetro. Onde tenendo conto dell'aumento, che riceve la velocità della potenza, con applicarsi all'estremità della leva; chiaro si è, che in quest'altro caso l'equilibrio si avrà, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come l'intervallo di due spire vicine al perimetro dell'orbe, per cui la potenza si conduce (117).

V.

Dell'equilibrio, che osservasi nelle macchine fatte con ruote dentate.

430. **C**On far uso del principio generale stabilito di sopra, può definirsi il caso dell'equilibrio tra la potenza, e la resistenza eziandio nelle macchine composte, le quali possono variare all'infinito. Dasi perciò moto alla macchina, qualunque ella sia; e notinsi gli spazj, che la potenza, e la resistenza percorrono nel medesimo tempo. Nella ragione adunque, in cui sono questi spazj, faranno altresì le velocità, con cui la potenza, e la

e la resistenza agiscono tra effo loro. Onde si avrà l'equilibrio, se facciasi, che la ragione della potenza alla resistenza sia reciproca di quella, in cui sono tra loro i riferiti spazj. Per darne qualche effempio, imprendereino quì a considerare alcune di quelle machine, che formansi con ruote dentate, tanto maggiormente, che con queste ruote aumentasi mirabilmente il momento della potenza.

431. Ed in primo luogo si fa uso delle ruote dentate in quella stessa machina, che chiamasi asse nella ruota. Sia perciò *AB* la ruota situata intorno all'asse *CD*, e fingiamo, che nel suo perimetro si ritrovino 30 denti egualmente distanti l'uno dall'altro. Sia di poi *EF* un'altra ruota volubile intorno ad un'altro asse *GH*; e suppongasi, che la sua struttura sia tale, che incontrandosi colla prima *AB* trasporti seco in ogni sua rivoluzione 10 denti di essa. Adunque quest'altra ruota *EF* dovrà aggirarsi tre volte intorno al suo asse *GH*, affinchè possa seco condurre tutti i 30 denti della prima ruota *AB*, e permettere che questa stessa prima ruota faccia l'intero suo giro. Onde la potenza, che per mezzo della leva *IL* fa girare la ruota *EF*, percorrerà il perimetro del suo orbe ancora tre volte in una sola rivoluzione della ruota *AB*.

Fig. 68.

432. Con aggirarsi intanto la ruota *AB* una sola volta intorno al suo asse *CD*, chiaro si è, che elevasi il peso per un'altezza eguale al perimetro del medesimo asse. Quindi la velocità del peso farà alla velocità della potenza, come il perimetro dell'asse *CD* al triplo del perimetro dell'orbe, per cui portasi la potenza; e pertanto si avrà l'equilibrio, se la potenza sia al peso in questa stessa ragione. Si vede adunque, che con porre 30 denti nella ruota *AB*, e con fare, che l'altra *EF* in ogni sua rivoluzione ne trasporti seco 10, aumentasi il momento della potenza nella ragione di 1 a 3, o pure di 10 a 30. Onde generalmente, se *n* sia il numero de' denti, che ritrovansi nella ruo-

ta AB , ed n il numero di quei, che trasportansi dall'altra ruota EF in ciascuna sua rivoluzione, si aumenterà il momento della potenza nella ragione di n ad m .

433. Effendo poi m il numero de' denti, che ritrovansi nella prima ruota AE , si avrà l'altra ruota EF , che in ogni sua rivoluzione ne trasporti seco il numero n ; primieramente con farla di ampiezza tale, che i raggi delle due ruote siano tra loro, come m ad n ; ed indi con apporre nel suo perimetro tanti denti, e non più, quanti ne disegna il numero n . In fatti effendo i raggi delle due ruote nella ragione di m ad n , faranno in questa stessa ragione così i loro perimetri, come le distanze dei loro denti. Quindi ogni dente della seconda ruota ne condurrà seco un'altro della prima; e pertanto, siccome n è il numero de' denti posti nella seconda ruota, così in ogni sua rivoluzione se ne trasporteranno tanti della prima, quanti ne addita lo stesso numero n .

434. Or dovendosi costruire le due ruote colle riferite leggi, non possiamo a nostro piacere aumentare il numero dei denti nella prima ruota, e diminuire il numero di coloro, che dee condurre seco la seconda in ogni sua rivoluzione; sì perchè il raggio della seconda ruota si dovrebbe minorare di molto per rapporto a quello della prima; come ancora perchè i loro denti dovrebbero affottigliarsi non poco, e farsi in conseguenza più deboli. Quindi per aumentare maggiormente il momento della potenza, piuttosto deve aggiungerfi alla macchina una terza ruota dentata, che porti seco in ogni sua rivoluzione un dato numero dei denti della seconda; poichè in questa maniera tuttavia la potenza dovrà percorrere maggior numero di volte il perimetro del suo orbe nel mentre, che il peso sale per un'altezza eguale al perimetro dell'asse della prima ruota.

435. Ed in vero, se la macchina sia fatta con
due

due sole ruote dentate, e dei 30 denti posti nella prima ne trasporti seco la seconda in ogni sua rivoluzione non più, che 10; di già si è veduto, che si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sia al peso, come il perimetro dell'asse della prima ruota al triplo dell'orbe, per cui dee condursi la potenza. Aggiungasi ora alla machina una terza ruota, che dei 10 denti posti nella seconda ne porti seco cinque in ciascuna sua rivoluzione. Ed in questo caso, siccome la seconda ruota farà l'intero suo giro dopo due rivoluzioni della terza, così per l'intero giro della prima dovranno farsi dalla terza sei rivoluzioni. Onde si avrà l'equilibrio, quante volte la potenza sia al peso, come il perimetro dell'asse della prima ruota al sestuplo del perimetro dell'orbe, che dee descrivere la potenza.

436. Coll'aggiunta adunque della terza ruota aumentasi il momento della potenza nella ragione di 1 a 6, o pure di 5 a 30. Onde si vede, che siccome essendo due le ruote dentate, l'aumento si fa nella ragione dei denti della seconda ai denti della prima; così, se le ruote dentate siano tre, l'aumento dovrà farsi nella ragione dei denti della terza ai denti della prima. Qualunque poi siasi il numero delle ruote dentate, con cui formasi la machina, si dimostrerà in una maniera consimile, che si aumenterà il momento della potenza nella ragione dei denti dell'ultima ruota ai denti della prima. E perciò nella stima della machina non occorre darsi pena dei denti delle ruote intermedie, ma basta tener conto dei soli denti della prima, e dell'ultima ruota.

437. In fatti la leva, a cui applicasi la potenza, aggira sempre l'ultima ruota. Onde se dividasi il numero dei denti della prima per lo numero dei denti dell'ultima, il quoziente di questa divisione ci dà a divedere le rivoluzioni, che debbono farsi dall'ultima ruota, affinchè la prima faccia l'intero suo giro; e perciò si avrà l'equilibrio, sempre quan-

do la potenza sta al peso, come il perimetro dell' asse della prima ruota al perimetro dell' orbe, per cui dee condursi la potenza, moltiplicato per lo stesso quoziente. Questo quoziente intanto potrebbe talvolta racchiudere qualche rotto; e quindi si è, che tornerà più conto di dire, che l' equilibrio si abbia, quante volte la potenza sta al peso in ragion composta del perimetro dell' asse della prima ruota al perimetro dell' orbe, che dee descrivere la potenza, e del numero dei denti dell' ultima ruota al numero dei denti della prima.

Fig. 89. 438. Le ruote dentate applicansi ancora alla coclea, ed ecco come. Sia *AB* una ruota dentata posta intorno al suo asse *CD*; e sia ancora *EF* una coclea maschile incisa non già con una, ma con varie spire egualmente distanti tra loro. Situasi questa coclea talmente sulla ruota, che aggirandosi intorno ai suoi estremi, trasporti seco colle sue spire in ogni rivoluzione un' egual numero dei denti della ruota. Colla rivoluzione adunque della coclea *EF* deve aggirarsi parimente così la ruota dentata *AB*, come il suo asse *CD*. Onde potrà farsi uso di questa machina nell' elevazione de' pesi, bastando attaccargli ad una fune, che vadasi complicando intorno all' asse *CD*. Comunemente ella chiamasi coclea infinita, per la ragione, che non dovendo portarsi per dentro di altre coclee feminee, può continuarsi il suo moto all' infinito. Ma il vero si è, che la riferita machina riducesi alla precedente, col solo divario, che in essa la coclea stessa fa le veci di un' altra ruota dentata.

439. Ed in fatti, con aggirarsi la coclea *EF* intorno al suo asse, ciascuna delle sue spire porta seco un dente della ruota *AB*. Onde se i denti di questa siano 30, e le spire di quella 5; condurrà seco la coclea in ogni sua rivoluzione cinque soli denti della ruota; e pertanto dopo sei rivoluzioni della coclea farà la ruota l' intero suo giro. Ma aggirasi la coclea intorno al suo asse per mezzo della

la potenza applicata all'estremità della leva GH. Dunque per farsi l'intero giro della ruota, ancora la potenza dovrà percorrere sei volte il perimetro del suo orbe; ed in conseguenza si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come il perimetro dell'asse della ruota al sestuplo del perimetro dell'orbe, per cui dee condursi la potenza: dimodoche aumentasi il momento della potenza nella ragione di 1 a 6, o pure di 5 a 30, che vale a dire nella ragione del numero delle spire della co- clea al numero dei denti della ruota (118).

VI.

Soluzione di una difficoltà intorno al principio generale dell'equilibrio.

440. **Q**uantunque due corpi, che agiscono tra essi loro con velocità reciprocamente proporzionali alle loro masse, o siano pesi, debbano rimanere in equilibrio nel conflitto loro scambievole; nientedimeno credono alcuni, che non possa farsi uso di un tal principio, quante volte trattasi di definire la legge dell'equilibrio tra la potenza, e la resistenza in qualsiviasa macchina, per la ragione, che non risiede in esse velocità alcuna nello stato, in cui ritrovansi. E tanto maggiormente confermansì in questo loro sentimento dal vedere, che il celebre Archimede per dimostrare, che nella bilancia non possono equilibrarsi due pesi tra loro, se non siano nella reciproca ragione delle braccia, da cui pendono, abbia ricorso piuttosto al principio del centro di gravità, il quale si è, che tenendosi un grave sospeso per un filo, che passa per quel centro, le di lui parti debbano rimanere in equilibrio.

441. Per convincergli intanto del contrario, potrebbe essere bastante argomento il fargli riflettere, che la stima delle machine fatta col divisato principio accordasi perfettamente con quelltanto intorno

ad esse l'esperienza stessa ci apprende. Ma giova di rispondere direttamente alla difficoltà proposta, perchè in questa maniera avremo luogo d'investigare ciò, che avviene alla potenza, ed alla resistenza, che equilibransi tra loro in una qualche macchina. Ed in primo luogo diasi per vero, che equilibrandosi queste tra loro, non risieda in esse velocità alcuna. Non potrà però negarsi, che ciascuna delle due faccia almeno un sforzo continuo per imprimere moto, ed in conseguenza velocità alla sua contraria. Onde questi continui sforzi, che fanno, dovranno riguardarsi come due forze motrici, con cui cercano scambievolmente di porsi in moto, e di preponderare l'una sull'altra.

442. Or nel caso dell' equilibrio non è egli da porsi in dubbio, che le riferite forze motrici debbano essere tra loro eguali. Quindi faranno eguali altresì i moti, che la potenza, e la resistenza colle riferite forze cercano d'imprimerli scambievolmente. Onde si avrà il loro equilibrio almeno quando sono nella reciproca ragione delle velocità, che che ciascuna delle due studiasi d'imprimere alla sua contraria. Ma io dico di più, che queste velocità colle divise forze effettivamente si generano, e che intanto la potenza, e la resistenza non muovonsi per mezzo di esse con moto sensibile, perchè appena nate immediatamente tra esso loro si distruggono. Per intenderne la ragione, siaci di essempio la bilancia *ACB*, che abbia per suo centro il punto *C*, e dai di cui estremi pendano liberamente i due pesi *M*, ed *N*.

443. Fingiamo adunque, che cogli sforzi continui di questi pesi il primo *M* elevi l'estremo *B* per l'archetto *Bb*, ed il secondo *N* elevi l'estremo *A* per l'archetto *Aa*. E poichè con elevarsi ciascuno de' due estremi, deve abbassarsi nel medesimo tempo il suo contrario; perciò trovandosi l'estremo *B* per l'archetto *Bb*, si abbasserà il contrario *A* per l'archetto *Aa*; ed in una maniera consimile-

simile, elevandosi l'estremo A per l'archetto Ac , si abbasserà il contrario B per l'archetto Bd . Quindi ciascuno dei due pesi, che pendono da questi estremi, sarà agitato nel medesimo tempo da due velocità contrarie: cioè il peso M dalle due Ac , Aa , ed il peso N dalle due Bb , Bd . Onde se mai potesse dimostrarsi, che le altre due velocità Aa , Bd siano eguali alle loro contrarie Ac , Bb ; non v'ha dubbio, che per la loro contrarietà, ed uguaglianza si dovrebbero tra esso loro distruggere.

444. Perciò giova il riflettere, che così l'elevazione dei due estremi A , e B , come il loro abbassamento dee ripetersi da un medesimo principio, cioè dagli sforzi eguali dei due pesi M , ed N , che pendono da detti estremi; poichè così si faranno a noi note due verità; di cui una si è, che la somma delle due velocità Aa , Bd sia eguale alla somma dell'altre due Ac , Bb ; e l'altra, che tanto le due Aa , Bd , quanto le due Ac , Bb siano nella reciproca ragione dei due pesi M , ed N . Quindi facendosi proporzionali tra loro le quattro velocità Aa , Bd , Ac , Bb ; farà la somma delle due Aa , Bd , alla somma dell'altre due Ac , Bb nella stessa ragione, così delle due Aa , Ac , come delle due Bd , Bb . Onde conforme sono eguali tra loro quelle due somme, così faranno eguali altresì, tanto le due Aa , Ac , quanto le due Bd , Bb .

445. Con ispiegarfi l'equilibrio dei due pesi M , ed N in questa guisa, vedesi chiaramente, che i medesimi tutt'occhè quiescenti, ed immobili siano tra loro in un conflitto continuo, per derivare la loro quiete da moti eguali, e contrarj. Conforme poi per definire la legge del loro equilibrio, dee determinarsi la ragione della velocità, che imprimonfi scambievolmente gli stessi pesi cogli sforzi loro continui; così vedesi ancora, che questa ragione resti determinata per mezzo dell'altra degli spazj, che percorronsi dai due pesi secondo le loro direzioni, comunque muovasi la bilancia. Imperocchè

chè sebbene le velocità siano, o le due Ac , Bb , o le due Aa , Bd ; nientedimeno per essere eguali tra loro così le due Ac , Aa , come le due Bb , Bd , possiamo dire, che le stesse velocità siano, o le due Aa , Bb , che generansi con trasportarsi la bilancia nel sito aCb , o pure le due Ac , Bd , che produconsi col suo trasporto nel sito contrario cCd .

446. Per quanto alla dimostrazione di Archimede intorno all'equilibrio della bilancia, egli è vero, che in essa si fa uso del principio del centro di gravità; ma questo principio riducesi al nostro, giacchè non per altra ragione equilibransi le parti di un grave intorno al suo centro di gravità, se non perchè sono costrette a muoversi nel medesimo tempo con moti eguali, e contrarj. Per essere poi molto ingegnosa, ed elegante la suddetta dimostrazione, stimiamo ben fatto di soggiungerla in questo luogo con tutta la brevità, e chiarezza possibile. Sia perciò DM un prisma formato con materia egualmente densa da per tutto. E siccome il suo centro di gravità dee ritrovarsi nel piano, che divide la sua lunghezza DE per metà in F ; così se lo intendiamo diviso in due altri prismi disuguali DN , EN , i centri di gravità di quest' altri due prismi similmente si ritroveranno ne' piani, che dividono le loro lunghezze DG , EG per metà in H , ed I .

447. Prendasi di poi una bilancia, che uguagli la HI colla sua lunghezza AB , la FH col suo braccio AC , e la FI coll' altro suo braccio BC ; ed attachisi il prisma DM agli estremi A , e B di questa bilancia colle due corde eguali AH , BI , che passino prolungate per gli centri di gravità degli altri due DN , EN . Se adunque sospendiamo la bilancia dal suo centro, resterà sospeso il prisma DM con corda, che passerà prolungata per lo suo centro di gravità; onde in questa posizione dovrà egli conservarsi immobile, ovvero in equilibrio.

Ma

Ma se separiamo i due prismi DN , EN , eziandio ciascuno di essi rimane sospeso con corda, che passa prolungata per lo centro della sua propria gravità. Dunque colla loro separazione tuttavia sussisterà l'equilibrio; e perciò rimane soltanto a dimostrarsi, che i pesi dei due prismi DN , EN siano tra loro nella reciproca ragione delle braccia AC , BC , da cui pendono.

448. Ed in vero, essendo i due prismi DN , EN della stessa densità, i pesi di essi faranno come le loro moli, o pure come le loro lunghezze DG , EG . Ma queste lunghezze sono nella stessa ragione colle loro metà GH , GI . Dunque ancora il peso del prisma DN sarà al peso del prisma EN , come GH a GI . Essendo poi eguale alla metà della DE , così la HI , come la DF ; faranno eguali le due HI , DF . Onde toltane la comune FH , farà la FI eguale alla DH ovvero GH ; e pertanto ancora l'altre due FH , GI faranno tra loro eguali. Quindi i pesi dei due prismi DN , EN faranno altresì nella ragione di FI ad FH ; ed in conseguenza, per essere alle due braccia BC , AC della bilancia eguali alle due FI , FH , farà il peso del prisma DN al peso del prisma EN , come il braccio BC al braccio AC .

449. Del rimanente sebbene nella riferita dimostrazione i gravi, che pendono dalle due estremità della bilancia, siano due prismi non solo di eguali densità, ma eziandio di forma tale, che situati secondo le loro lunghezze ritrovansi essere porzioni di un medesimo prisma; nientedimeno egli è facile di estenderla a gravi, che siano differenti tra loro, così per la densità, come per la figura. In fatti il peso di qualsivoglia grave, come proporzionale alla quantità della sua materia, non riceve cambiamento alcuno con cambiarsi la densità, e la figura dello stesso grave. Onde se ai due prismi diafi altra figura, e mutisi altresì la densità di uno di essi, i loro pesi tuttavia faranno gli stessi; e perciò i pesi
dei

dei nuovi gravi, che seguitano ad essere tra loro in equilibrio, pure faranno nella reciproca ragione delle braccia, da cui pendono (119).

VII.

Della resistenza, che deriva dallo stropicciamento delle parti di una macchina.

450. **A** Vvertimmo di sopra, che in qualsiviasa macchina oltre alla resistenza principale, dee vincersi, e superarsi dalla potenza, debba tenerfi conto altresì così della resistenza, che deriva dal peso delle parti della macchina, come dell'altra, che nasce dallo scambievole loro stropicciamento. Or sebbene la prima di queste due resistenze sia facile a definirsi, per essere noto a noi il peso delle parti della macchina, che debbonfi muovere dalla potenza; nientedimeno la seconda non potrà determinarsi, se prima non si esami dove avvenga, che stropiccianfi tra esso loro due corpi, quante volte uno di essi si muove sull'altro. Onde per non tralasciare cosa alcuna intorno alle macchine, primieramente ricercheremo la causa dello stropicciamento scambievole di due corpi, ed indi faremo vedere, come egli debba definirsi, e porfi a calcolo.

451. Ed in vero stropiccianfi tra esso loro due corpi, di cui uno si muove sull'altro, in quanto che sono ruvide, e scabre le superficie, in cui si toccano. In fatti deriva questa loro scabrezza dall'essere le parti di essa, dove più sollevate, e dove più depresse. Quindi toccandosi i due corpi tra loro colle riferite superficie, immergonfi le parti più sollevate dell'una nelle cavità delle parti più depresse dell'altra. Onde intralcianfi le stesse parti in modo, che non può muoversi uno dei due corpi sull'altro, senza stropicciarsi scambievolmente tra esso loro. Conforme poi dee ripetersi lo stropicciamento loro scambievole dalla scabrezza delle superficie,

ficie, in cui si toccano; così, non v' ha dubbio, che debba egli stimarsi maggiore, o minore a misura della maggiore, o minore scabrezza, che ritrovasi in dette superficie; e perciò, se potesse farsi in modo, che le divise superficie fossero pulite, e levigate; non vi farebbe stropicciamento alcuno, ed in conseguenza neppure resistenza.

452. Qui però si vogliono notare due cose. La prima si è, che una superficie può essere pulita, e levigata, eziandio se sia curva di sua natura. Imperocchè sebbene la curvità della superficie non permetta, che i minimi suoi elementi siano tra loro a dirittura; nientedimeno non osta, che gli angoli, per cui traviano l'uno dall'altro, siano di una picciolezza infinita. Onde in questa supposizione gli elementi della superficie saranno situati in modo, che non si troverà tra di essi cavità alcuna; e perciò la superficie medesima, tuttocchè curva, dovrà averfi come priva di ogni scabrezza, ed in conseguenza come pulita, e levigata. Ed in fatti gli specchi, di cui facciamo uso per riflettere i raggi della luce, debbono essere immuni da qualsivisia scabrezza; ma ciò non ostante distinguonfi di essi tre specie, dei quali alcuni sono piani, altri convessi, ed altri finalmente concavi.

453. L'altra cosa da notarsi si è, che siccome i corpi tutti sono porosi di lor natura, e composti altresì di parti eterogenee; così le loro superficie non mai potranno pulirsi in modo, che rendansi prive di ogni scabrezza. Per convincerci di ciò, basta riguardare con un microscopio quelle stesse superficie, che all'occhio nudo sembrano pulite, e levigate; poichè ravvisteremo in esse a vicenda tante alture, e tante cavità, che ci recherà meraviglia, come quelle non siano a noi sensibili. Ed affinchè non credasi, che le disuguaglianze di questa indole niente pregiudichino al moto de' corpi, basta far muovere sulle stesse superficie una formica, o altro picciolo animaletto, che sia; poichè siccome
sensi-

fenfibilmente vedraffi, che egli ora fi eleva, ed ora fi abbassa; così queſto ſteſſo dovrà efferci di argomento, che le parti più ſolleivate, e le altre più deprefſe delle riferite ſuperficie, tuttocchè inſenſibili, ſiano di oſtacolo al moto de' corpi.

454. Sempre però farà vero, che quanto più ſi minora la ſcabrezza delle ſuperficie, in cui i due corpi ſi toccano, tanto più ſpeditamente poſſa muoverſi uno di eſſi ſull' altro. Vedefi ciò nelle machine; che ſcorgonſi più pronte, e ſpedite al moto, dopo efferſi uſate qualche tempo, che quando partono dalle mani dell' Arteſice, ed incominciano a travagliare. E la ragione ſi è, che ficcome l' Arteſice, per quanto ſtudio ponga nella ſtruttura di eſſe, non mai può renderle immuni da ogni ſcabrezza; così con farſi uſo delle medefime, abbattonſi ſempre più le parti più ſolleivate, ed in conſeguenza quella ſcabrezza diventa minore. E da ciò ancora dipende, che ungendofi le ſteſſe machine con una qualche materia oleaginofa, rendonſi più atte, e ſpedite al moto; poichè inſinuandofi quella tal materia nelle cavità delle parti più deprefſe, le pone per dir così nello ſteſſo livello coll' altre più elevate; onde minorafi la ſcabrezza, che nelle machine ſi ritrova.

455. Or la prima coſa, di cui dee tenerſi conto per definire lo ſtropicciamento di due corpi, ſi è la denſità della materia, di cui eſſi ſi compongono. In fatti di già ſi è veduto, che ſtropiccianſi i due corpi tra eſſo loro per la ragione, che eſſendo ſcabre le ſuperficie, in cui ſi toccano, le parti più ſolleivate dell' una immergonſi nella cavità delle parti più deprefſe dell' altra; ed in conſeguenza ſono come tanti uncini, che ligano inſieme i due corpi, ed impediſcono, che uno di eſſi poſſa muoverſi liberamente ſull' altro. Quindi non ſi durerà fatica ad intendere, che lo ſtropicciamento dei due corpi debba eſſere tanto maggiore, quanto ſono più validi, e reſiſtenti i riferiti uncini. Onde ficcome il
vigo-

vigore , e resistenza di questi corrisponde presso a poco in proporzione alla densità della materia , di cui i due corpi si compongono ; così alla stessa densità sarà proporzionale altresì lo stropicciamento de' medesimi corpi .

456. Dee tenersi conto in secondo luogo delle superficie , in cui toccansi i due corpi , che stropiccianfi tra esso loro . Imperocchè di già si è avvertito , che le parti più sollevate di una delle due superficie , con immergersi nelle cavità delle parti più depresse dell' altra , sono come tanti uncini , che tenendo ligati insieme i due corpi vietano , che uno di essi possa muoversi liberamente sull' altro . Quindi l'ostacolo , ed in conseguenza lo stropicciamento dei due corpi deve essere tanto maggiore , quanto maggiore è il numero dei riferiti uncini . Onde siccome il numero di questi corrisponde in proporzione alle superficie , in cui toccansi i due corpi , che tra esso loro stropiccianfi ; così eziandio il loro stropicciamento sarà proporzionale alle stesse superficie . Per essere poi eguali tra loro queste due superficie , chiaro si è , che basta tener conto soltanto di una di esse ; e perciò lo stropicciamento di due corpi sarà proporzionale per questo verso alla comune loro superficie nel luogo del contatto .

457. Finalmente siccome con minorarsi al più , che sia possibile , la scabrezza delle superficie , in cui toccansi i due corpi , che tra esso loro stropiccianfi , non possono le parti più sollevate dell' una immergersi nelle cavità delle parti più depresse dell' altra , se non vi sia una forza , che preme una delle due superficie verso dell' altra ; così eziandio di questa forza premente dee tenersi conto per definire , e porre a calcolo lo stropicciamento dei due corpi . Ed in fatti per poco , che vogliasi riflettere , s' intenderà facilmente , che i due corpi colle loro superficie tanto più debbano stropicciarsi tra esso loro , quanto maggiormente immergonsi le parti più sollevate dell' una nelle cavità delle parti più depresse

depreffe dell'altra . Onde siccome questa immersione aumentasi a misura della forza, che preme una delle due superficie verso dell'altra; così lo stropicciamento dei due corpi corrisponderà in proporzione alla stessa forza premente .

458. Quindi intorno allo stropicciamento di due corpi può stabilirsi il seguente teorema generale , cioè, che egli sia in ragion composta della densità della loro materia, della comune loro superficie, e della forza loro premente . Conforme poi da questo teorema ne segue, che lo stesso stropicciamento sia in ragion composta della densità, e della comune superficie, essendo data la forza premente; della densità, e della forza premente, essendo data la comune superficie; ed in fine della comune superficie, e della forza premente, essendo data la densità: così neppure sarà difficile il ricavarne, che egli debba essere nella semplice ragione della densità, se sia data così la comune superficie, come la forza premente; nella semplice ragione della comune superficie, se sia data così la forza premente, come la densità; ed in fine nella semplice ragione della forza premente, se sia data tanto la densità, quanto la comune superficie .

459. Dal medesimo teorema generale egli è facile ancora il ricavarne, che lo stropicciamento di due corpi debba essere dato, primieramente se insieme colla densità della loro materia sia data, così la comune loro superficie, come la forza loro premente; in secondo luogo, se essendo data la sola densità, sia la comune superficie reciprocamente proporzionale alla forza premente; in terzo luogo, se essendo data la sola comune superficie, sia la densità reciprocamente proporzionale alla stessa forza premente; in quarto luogo, se essendo data la sola forza premente, siano la densità, e la comune superficie reciprocamente proporzionali tra loro; ed in fine, se nessuna delle riferite tre cose essendo data, sia una di esse nella reciproca ragione di quella,

la, che si compone dell'altre due.

460. Del rimanente, siccome dei due corpi, che stropiccianfi tra esso loro, uno poggia sull'altro, così la forza loro premente dee dedursi dal peso del corpo superiore sostenuto dall'altro inferiore; onde si è, che per definirla, deve esserci nota la situazione del primo corpo per rapporto al secondo. In fatti se il corpo inferiore sostenga l'altro superiore a guisa di un piano orizzontale, chiaro si è, che la forza premente sia il totale peso del corpo superiore; ma se poi lo sostenga a guisa di un piano inclinato sull'orizzonte, in tal caso dovrà averfi per forza premente, non già l'intero peso del corpo superiore, ma quella sola porzione di esso, che sta al peso intero, come il seno secondo dell'angolo dell'inclinazione al raggio, o sia seno totale; e ciò per la ragione, che in quest'altro caso, secondo è stato dimostrato di sopra, il corpo superiore preme l'altro inferiore colla sola riferita porzione del suo peso assoluto.

461. Quantunque poi la forza premente debba ripetersi regolarmente dal peso del corpo superiore sostenuto dall'altro inferiore; nientedimeno può ella aumentarsi talvolta col moto stesso del corpo superiore, il che avviene, qualora egli si muove con direzione, che faccia angolo colla superficie dell'altro inferiore, su di cui si muove. E quindi si è, che stropiccianfi tra esso loro due corpi, eziandio quando uno di essi portasi lungo la superficie verticale dell'altro. Imperocchè sebbene in questo caso la riferita superficie non sostenga porzione alcuna del peso del corpo, che si muove; nientedimeno per poco, che la direzione del moto s'inclini su di essa, il moto stesso farà le veci di forza premente. Intanto se vogliasi attentamente riflettere, si comprenderà facilmente, che siccome per forza premente deve averfi l'intero moto del corpo, quante volte la sua direzione è perpendicolare sulla superficie dell'altro corpo; così essendo altra l'in-

N

cli-

clinazione di detta direzione, si farà la pressione con quella sola porzione di moto, che sta al moto intero, come il seno primo dell'angolo dell'inclinazione al seno totale.

462. Un altro avvertimento dee farsi in questo luogo, e si è, che lo stropicciamento di due corpi minorasi di molto, se uno di essi in vece di strisciare sulla superficie dell'altro corpo, muovasi in modo, che si aggiri su di essa. Ne è egli difficile ad intenderne la ragione; poichè qualora un corpo aggirasi sulla superficie di un altro corpo, la stessa sua rivoluzione fa, che si abbassino le parti anteriori, ed elevinsi quelle di dietro; onde senza quasi consumo di forza sprigionansi le parti più sollevate dalle cavità dell'altre più depresse, in cui eransi immerse: il che senza dubbio non avviene, quante volte il moto si fa strisciando. Quindi nella struttura delle machine non mai debbonsi far strisciare quelle parti, che possono aggirarsi; e perciò non farebbe mal fatto, se gli assi volubili, in vece di riporgli dentro de' forami rotondi, si appoggiassero sopra girelle mobili; poichè in questa maniera verrebbero ad aggirarsi, non meno le superficie dei loro estremi, che le altre su di cui gli estremi stessi si appoggiano (120).

VIII.

*Del comune centro di gravità di quanti si
siano gravi, e delle principali
loro affezioni.*

463. **C**ONforme quel punto di un grave, intorno a cui equilibransi le sue parti, riguardasi come centro della sua gravità; così se si abbiano più gravi disgiunti l'uno dall'altro, e tra di essi ritrovisi un punto, con cui congiungendosi per tante rette gli stessi gravi, siano intorno ad esso in equilibrio, potrà averli questo punto come comune centro delle loro gravità. Nè è egli da

da porsi in dubbio, che debba ritrovarsi un tal punto tra i riferiti gravi. Imperocchè con congiungergli insieme per tante rette formasi un nuovo grave verso da ciascuno di essi. Quindi eziandio per rapporto a questo nuovo grave deve esservi un punto, in cui si uniscono, e si riconcentrano i pesi dei varj gravi, che lo compongono. Onde siccome con tenergli sospesi per un filo attaccato a questo punto, debbono rimanere tra loro in equilibrio; così il medesimo punto sarà il comune centro di gravità degli stessi gravi.

464. Ed in vero se siano a noi noti i centri di gravità di due, o più gravi, niente sarà più facile, quanto di determinare il punto, che deve essere il comune loro centro di gravità. Perciò fingiamo primieramente, che i gravi siano due, e disegninsi per gli punti *A*, e *B* così i propri loro centri di gravità, come i gravi medesimi, i di cui pesi si riuniscono in detti centri. Congiungansi la *AB*, e dividasi la medesima talmente nel punto *C*, che il grave *A* sia al grave *B*, come *BC* ad *AC*. Io dico, che il punto *C* sia il comune centro di gravità dei due gravi *A*, e *B*. La ragione è chiara. Imperocchè se sospendiamo la *AB* per un filo attaccato al punto *C*, avremo con essa una bilancia. Ma per costruzione i due gravi *A*, e *B* sono nella reciproca ragione delle braccia *AC*, *BC*, da cui pendono. Dunque i medesimi gravi con quella sospensione faranno tra loro in equilibrio; e pertanto il comune loro centro di gravità dovrà essere il punto *C*.

Fig. 71.

465. Fingiamo in appresso, che i gravi siano tre, e disegninsi parimente per gli punti *A*, *B*, *C*, così i propri loro centri di gravità, come i gravi medesimi. Ritrovinsi primieramente il comune centro di gravità dei due gravi *A*, e *B*, il quale sia il punto *D*; indi congiungasi la *CD*, la quale dividasi talmente in *E*, che i due gravi *A*, e *B* insieme siano al terzo *C*, come *CE* a *DE*; ed io dico,

Fig. 72.

dico; che il punto E sia il comune centro di gravità dei tre gravi A , B , C . Suspendansi perciò i suddetti gravi per un filo attaccato al punto E ; ed essendo D il comune centro dei due A , e B , graviteranno questi due nei loro luoghi della stessa maniera, che gravitano riuniti nel punto D . Ma in questo punto di già equilibransi col terzo C , per essere la somma di essi a quest'altro grave C , come CE a DE . Dunque ancora nei loro luoghi faranno in equilibrio col medesimo grave C ; e pertanto il comune centro di gravità di tutti tre i gravi dovrà essere il punto E .

466. Or egli è chiaro, che equilibransi intorno al punto E non solo i due gravi A , e B col terzo C ; ma eziandio, così i due A , e C col terzo B , come i due B , e C col terzo A . Quindi se distendesi la BE fino a che s'incontri colla AC nel punto F , non solamente farà questo punto il comune centro di gravità dei due gravi A , e C ; ma farà ancora come la somma di questi due gravi al terzo B , così BE ad FE . E per la stessa ragione, se distendesi la AE fino a che s'incontri colla BC nel punto G , non solo si avrà con questo punto il comune centro di gravità degli altri due gravi B , e C ; ma farà in oltre come la somma di questi stessi gravi al terzo A , così AE a GE . Onde siccome per determinare il comune centro di gravità di tre gravi, A , B , C , dee prima rinvenirsi quello, che è comune a due di essi, così rimarrà egli sempre determinato, sia che si ritrovi il comune centro dei due A , e B , sia l'altro dei due A , e C , sia il terzo dei due B , e C .

467. In una maniera consimile potrà determinarsi il comune centro di gravità di quanti si siano gravi. Separisi perciò dal loro numero un grave ad arbitrio, e ritrovisi il comune centro di gravità dei gravi rimanenti. Congiungasi di poi questo centro col grave separato per una retta; e se dividasi questa retta con legge tale, che la somma

ma

ma dei primi gravi sia al grave separato, come la porzione aggiacente a questo grave alla porzione rimanente, farà il punto della divisione il comune centro di gravità dei gravi proposti. Onde si vede, non poterli definire il comune centro di gravità di quanti si siano gravi, se non si proceda nella ricerca di esso con ordine: siccome in effetto essendo quattro i gravi, primieramente dovrà ritrovarsi il centro comune a due di essi, indi il centro comune a tre, ed in fine quello, che è comune a tutti quattro.

468. Nella ricerca intanto del riferito centro potrebbe farsi uso di altro metodo, ed ecco come. Fingiamo, che i gravi siano quattro, cioè *A*, *B*, *C*, *D*. Ritrovansi primieramente, così il comune centro dei due *A*, e *B*, il quale sia *E*, come il comune centro degli altri due *C*, e *D*, il quale sia *F*; dividasi di poi la *EF* talmente in *G*, che la somma dei primi due *A*, e *B* sia alla somma degli altri due *C*, e *D*, come *FG* ad *EG*; ed io dico, che il punto *G* sia il comune centro di gravità dei gravi proposti. Suspendansi perciò i suddetti gravi per un filo attaccato al punto *G*; ed egli è chiaro, che graviteranno i medesimi nei loro luoghi della stessa maniera, che gravitano ponendo i due *A*, e *B* nel comune loro centro *E*, e gli altri due *C*, e *D* nel comune loro centro *F*. Ma in questa posizione di già equilibransi tra esso loro, per essere la somma degli uni alla somma degli altri, come *FG* ad *EG*. Dunque ancora nei loro luoghi faranno tra di essi in equilibrio; e perciò il comune loro centro di gravità dovrà essere il punto *G*.

469. Del riferito centro tre sono le affezioni principali. La prima si è, che se per esso tirisi un piano, e moltiplichinsi per le distanze dei loro centri di gravità da detto piano, così i gravi di un lato, come i gravi dell'altro; le somme de' prodotti siano tra loro eguali. L'altra si è, che se un piano lasci tutti i gravi da un medesimo lato, e mol-

tiplichisi ciascuno dei gravi per la distanza del suo centro di gravità dal piano; la somma de' prodotti sia eguale al prodotto di tutti i gravi insieme per la distanza del comune loro centro di gravità dal medesimo piano. La terza finalmente si è, che se un piano lasci gravi così da un lato, come dall' altro, e moltiplichinsi per le distanze dei loro centri di gravità dal piano tanto gli uni, quanto gli altri; la differenza tra le somme de' rispettivi prodotti eziandio sia eguale al prodotto di tutti i gravi insieme per la distanza del comune loro centro di gravità dal medesimo piano.

470. Per dimostrare la verità di esse, siano i due gravi *A*, e *B*, che abbiano per comune loro centro di gravità il punto *C*. Tirisi primieramente per questo centro il piano *DE*; e se mai sia perpendicolare su di esso la *AB*, faranno *AC*, *BC* le distanze dei due gravi dal medesimo piano. Onde essendo il grave *A* al grave *B*, come *BC* ad *AC*; farà il prodotto del grave *A* per la sua distanza *AC* eguale al prodotto del grave *B* per la sua distanza *BC*. Qualora poi la *AB* non è perpendicolare sul piano *DE*, abbassinsi su di esso le perpendicolari *AD*, *BE*. E siccome queste perpendicolari faranno le distanze dei due gravi dal medesimo piano; così per essere equiangoli i due triangoli *BCE*, *ACD*, farà come *BE* ad *AD*, così *BC* ad *AC*. Ma *BC* sta ad *AC*, come il grave *A* al grave *B*. Dunque farà ancora come il grave *A* al grave *B*, così *BE* ad *AD*; e pertanto il prodotto del grave *A* per la sua distanza *AD* pure farà eguale al prodotto del grave *B* per la sua distanza *BE*.

471. Sia di poi *FG* il piano, che lascia i due gravi dal medesimo lato; ed abbassate su di esso le perpendicolari *AF*, *BG*, *CH*, tirisi per *C* l'altro piano parallelo *DE*. Or siccome il prodotto del grave *A* per *AF* è eguale a due prodotti, uno del grave *A* per *AD*, e l'altro del grave *A* per *DF*,

DF, ovvero **CH**; così due prodotti, uno del grave **B** per **BE**, e l'altro del grave **B** per **BG**, faranno eguali al solo prodotto del grave **B** per **EG** ovvero **CH**. Quindi tre prodotti, uno del grave **A** per **AF**, l'altro del grave **B** per **BE**; ed il terzo del grave **B** per **BG**, faranno eguali a tre altri prodotti, uno del grave **A** per **AD**, l'altro del grave **A** per **CH**, ed il terzo del grave **B** per **CH**. Ma di già si è dimostrato, che il prodotto del grave **B** per **BE** sia eguale al prodotto del grave **A** per **AD**. Dunque togliendo via questi prodotti, faranno i due di **A** per **AF**, e di **B** per **BG** eguali agli altri due di **A** per **CH**, e di **B** per **CH**, oppure al solo prodotto dei due gravi **A**, e **B** insieme per **CH**.

472. Sia finalmente **IL** il piano, che non passando per **C** lascia il grave **A** da un lato, ed il grave **B** dall'altro lato. Si abbassino su di esso le perpendicolari **AI**, **BL**, **CM**; e tirisi parimente per **C** l'altro piano parallelo **DE**. Siccome adunque il prodotto del grave **A** per **AD** è eguale a due prodotti, uno del grave **A** per **AI**, e l'altro del grave **A** per **DI**, ovvero **CM**; così eziandio il prodotto del grave **B** per **BL** farà eguale a due prodotti, uno del grave **B** per **BE**, e l'altro del grave **B** per **EL**, ovvero **CM**. Quindi due prodotti, uno di **A** per **AD**, e l'altro di **B** per **BL**, faranno eguali a quattro prodotti, uno di **A** per **AI**, l'altro di **A** per **CM**, il terzo di **B** per **BE**, ed il quarto di **B** per **CM**. Ma di già si è dimostrato, che il prodotto di **A** per **AD** sia eguale al prodotto di **B** per **BE**. Dunque il solo prodotto di **B** per **BL** farà eguale a tre prodotti uno di **A** per **AI**, l'altro di **A** per **CM**, ed il terzo di **B** per **CM**; e per tanto la differenza tra i due prodotti di **A** per **AI**, e di **B** per **BL** farà eguale al prodotto dei due gravi **A**, e **B** insieme per **CM**.

473. In una maniera consimile potrà dimostrarsi la verità delle stesse affezioni per qualsivoglia numero

Fig. 73.

de' gravi , se non che fa duopo avvertire , che nella dimostrazione della prima di esse dee farsi uso altresì del centro comune ai gravi , che ritrovansi da un medesimo lato del piano . Per darne quì un' effempio , che possa servirci di norma per tutti gli altri , che possono occorrere , siano i quattro gravi A , B , C , D , i quali abbiano per comune loro centro di gravità il punto G . Tirisi per questo punto il piano MN , che lasci i due gravi A , e B da un lato , e gli altri due C , e D dall' altro lato . Sia di poi E il comune centro dei due primi , ed F il comune centro degli altri due . E per ragion dell' equilibrio , conforme il punto G dee ritrovarsi nella retta EF , che congiunge insieme quest' altri due centri ; così la somma dei due gravi A , e B dovrà essere alla somma degli altri due C , e D , come FG ad EG .

474. Si abbassino ora sul piano MN le perpendicolari EH , FI . E facendosi equiangoli i due triangoli FGI , EGH , farà FG ad EG , come FI ad EH . Onde siccome la somma dei due gravi A , e B deve essere alla somma degli altri due C , e D eziandio , come FI ad EH ; così il prodotto dei primi due insieme per EH farà eguale al prodotto degli altri due insieme per FI . Ma abbassando sul piano MN le perpendicolari AM , BN , il prodotto dei due gravi A , e B insieme per EH deve essere eguale ai due prodotti del grave A per AM , e del grave B per BN ; come ancora , abbassando sul medesimo piano l' altre due perpendicolari CO , DR , l' altro prodotto dei due gravi C , e D insieme per FI deve essere eguale ai due prodotti del grave C per CO , e del grave D per DR . Dunque ancora i due prodotti del grave A per AM , e del grave B per BN faranno eguali agli altri due del grave C per CO , e del grave D per DR (121).

Del modo di determinare il centro di gravità delle linee così rette, come curve.

475. **Q**uantunque la gravità sia affezione della materia, ed in conseguenza del corpo; nientedimeno il costume si è di ascriverla non solo ai corpi, ma eziandio ai loro termini, che sono le linee, e le superficie. Ed in vero possono darsi filamenti di materia così sottili, che sia di una picciolezza infinita così la loro larghezza, come la loro profondità. Onde siccome questi tali filamenti di materia debbono riguardarsi come pure linee, così potrà ascriversi la gravità almeno alle linee di questa indole. Ed in una maniera consimile niente vieta, che dianzi pellicole di materia talmente tenui, che sia di una picciolezza infinita la loro crassezza. Onde conforme queste tali pellicole di materia debbono averfi come pure superficie, così almeno le superficie di questa sorte faranno dotate di gravità. Anzi in questa guisa può ascriversi la gravità eziandio ai punti, bastando riguardargli come corpi così efili, che sia di una picciolezza infinita ciascuna delle tre loro dimensioni.

476. Or qualunque siasi la grandezza grave, purchè ella abbia da per tutto la stessa densità, e sia nota altresì la sua indole, potrà determinarsi il centro della sua propria gravità per mezzo di quel tanto si è dimostrato poc' anzi intorno al comune centro di gravità di quanti si siano gravi. Tralasciando adunque i punti, in cui il centro di gravità, e la grandezza grave confondonfi tra effo loro, incominceremo dalle linee, tra le quali siccome la più semplice è la linea retta; così non è egli da porsi in dubbio, che il centro di gravità di qualsivisa retta data sia il punto, che la divide per metà. Quindi se si abbia un'angolo rettilineo, come *BAC*, *Fig. 74.* si ritroverà il centro di gravità delle due rette *AB*, *AC*,

AC , che lo contengono, primieramente con dividere in parti eguali, così la AB nel punto D , come la AC nel punto E ; ed indi con dividere ancora la DE talmente in F , che la AB sia alla AC , come EF a DF .

477. Si vede intanto, che in una maniera simile possa determinarsi il centro di gravità così del perimetro di un dato triangolo, come del perimetro di qualsivisa figura rettilinea data. In fatti se gli estremi delle rette AB , AC , che contengono l'angolo BAC , congiungansi insieme per mezzo dell'altra retta BC , avremo il triangolo ABC . Onde se dopo essersi divisa la BC per metà nel punto G , dividasi in oltre la FG talmente in H , che le due AB , AC insieme siano alla BC , come GH ad FH , farà H il centro di gravità del perimetro del triangolo ABC . Anzi nelle figure terminate da un maggior numero de' lati potrà determinarsi il centro di gravità del loro perimetro, eziandio con prendere i lati a due a due. Così se si abbia il quadrilatero $ABCD$, primieramente potrà ritrovarsi il punto E , che sia centro di gravità dei due lati AB , AC ; indi il punto F , che sia centro di gravità degli altri due lati BD , CD ; ed in fine potrà dividerfi la EF talmente in G , che la somma dei due lati AB , AC sia alla somma degli altri due BD , CD , come FG ad EG .

Fig. 75.

478. Se la figura rettilinea sia regolare, non si durerà fatica ad intendere, che il centro di gravità del suo perimetro sia il centro stesso della figura. In fatti se per questo centro, e per uno de' suoi angoli tirisi una retta, chiaro si è, che non solo resterà diviso il perimetro per metà da questa retta, ma i piccioli elementi delle due metà, che tra di essi si corrispondono, faranno ed eguali tra loro, ed egualmente distanti dalla stessa retta. Onde siccome le due riferite metà equilibransi tra esso loro intorno a quella retta, così nella medesima dovrà ritrovarsi il centro di gravità dell' intero perimetro. Ma la
stessa

stessa dimostrazione ha luogo per rapporto ad ogn' altra retta, che tirasi dentro del perimetro colla stessa legge. Dunque il centro di gravità farà il punto comune a due di queste rette; ed in conseguenza, essendo questo punto il centro della figura, col medesimo si avrà il centro di gravità del suo perimetro. Dal che egli è facile il ricavarne, che ancora il centro di gravità del perimetro di un cerchio sia il suo medesimo centro.

479. Per quanto alle linee curve, si determinerà il loro centro di gravità con ricorrere ai minimi loro elementi, che possono riguardarsi come tanti punti gravi, ed ecco come. Sia AM una curva qualsivoglia, di cui fingiamo, che sia D il suo centro di gravità. Siano ancora AC , BC due rette date di posizione, che s'interseghino tra loro ad angoli retti nel punto C ; ed abbassinsi su di esse le perpendicolari DE , DF . Attenta adunque la seconda proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi, la somma de' prodotti, che si hanno con moltiplicare i minimi elementi della curva per le loro distanze dalla AC , sarà eguale al prodotto della stessa curva per la DE ; come ancora la somma di quei, che si hanno con moltiplicare gli stessi elementi per le loro distanze dalla BC , sarà eguale al prodotto della medesima curva per la DF . Quindi se determininsi le due riferite somme, resteranno determinati altresì gli eguali loro prodotti; e pertanto facendosi note le due DE , DF , o pure le loro eguali CF ; CE , niente farà più facile, quanto di definire la posizione del centro D , che si dimanda.

480. Per darne un' esempio fingiamo, che la curva AM sia un' arco circolare, che abbia per suo centro il punto C ; e se Mm sia uno dei suoi elementi, dal di cui termine M si abbassi sulla AC la perpendicolare MN , farà MN la sua distanza dalla AC , e CN la sua distanza dalla BC . Abbassando di poi l' altra perpendicolare mn dall' altro suo

Fig. 76..

fuo termine m , e facendo la mr parallela alla AC ; faranno equiangoli i due triangoli CMN , Mmr , i quali perciò ci daranno due analogie; di cui una si è, che CM sia ad MN , come Mm ad mr , ovvero Nn ; e l'altra, che CM sia a CN , come Mm ad Mr . Quindi il prodotto di Mm per MN farà eguale al prodotto del raggio CM per Nn , ed il prodotto di Mm per CN farà eguale al prodotto del medesimo raggio CM per Mr . Onde perchè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto; perciò farà la prima delle due somme eguale al prodotto del raggio AC per AN , e la seconda eguale al prodotto del raggio AC per MN .

481. Effendo così, farà il prodotto del raggio AC per AN eguale al prodotto dell'arco AM per CF , ed il prodotto del raggio AC per MN eguale al prodotto dell'arco AM per CE . Quindi se facciasi primieramente, come l'arco AM al raggio AC , così AN ad una quarta proporzionale, avremo la CF ; e se facciasi in appresso, come l'arco AM al raggio AC , così MN ad un'altra quarta proporzionale, avremo la CE . Onde determinate le due CF , CE , se compiscasi il rettangolo $ECFD$, avremo finalmente il centro D , che si dimanda. Da ciò intanto possiamo dedurne due conseguenze, che renderanno molto più facile la determinazione del centro, di cui si tratta. La prima si è, che il riferito centro debba ritrovarsi nel raggio, che divide l'arco per metà. E la seconda, che la porzione di questo raggio compresa tra il centro dell'arco, e l'altro della sua gravità sia alla corda dell'arco, come il raggio all'arco medesimo: dimodochè si avrà la suddetta porzione con fare, che l'arco sia alla sua corda, come il raggio ad una quarta proporzionale.

482. In fatti effendo così le due AN , CF , come le due MN , CE nella ragione dell'arco AM al raggio AC ; farà AN a CF , ovvero DE , come MN a CE . Onde facendosi equiangoli i due triangoli

goli ANM, DEC, farà l'angolo AMN eguale all'angolo ACD. Ma i due angoli AMN, ACM appoggiansi sopra archi eguali; ed in conseguenza il primo di essi AMN come situato nella circonferenza deve essere la metà dell'altro ACM, che ritrovasi nel centro. Dunque ancora l'angolo ACD sarà la metà dell'angolo ACM; e pertanto la AD prolungata dividerà in due parti eguali, così l'angolo ACM, come l'arco AM sostenuto da quell'angolo, che è la prima conseguenza. Per essere poi equiangoli i due triangoli DEG, ANM, farà altresì, come CD ad AM, così CE ad AN. Ma CE sta ad AN, come il raggio AC all'arco AM. Dunque nella stessa ragione del raggio AC all'arco AM farà parimente la CD alla AM, cioè la porzione del raggio compresa tra il centro dell'arco, e l'altro della sua gravità alla corda del medesimo arco, che è la seconda conseguenza.

483. Ed in vero, che il centro di gravità di un'arco circolare debba ritrovarsi nel raggio, che lo divide per metà, può dedursi ancora da ciò, che i minimi elementi delle due metà, che tra di essi si corrispondono, sono ed eguali tra loro, ed egualmente distanti da quel raggio. Imperocchè siccome per queste due uguaglianze le suddette due metà debbono equilibrarsi tra loro intorno al riferito raggio; così per necessità nel medesimo raggio deve essere situato altresì il centro di gravità dell'arco intero. Quindi se si voglia attentamente riflettere, s'intenderà facilmente, che intanto il centro di gravità di un'arco circolare ritrovasi nel raggio, che lo divide in due parti eguali, in quanto che le due sue metà sono simili, e similmente situate per rapporto al suddetto raggio. Onde se mai si abbia un'altra curva, che sia divisa egualmente da una retta colla stessa legge, pure il suo centro di gravità dovrà ritrovarsi nella riferita retta.

484. Qualora poi è nota la retta, in cui ritrovasi il centro di gravità di una curva data, chiaro si è,

Fig. 77.

si è, che per avere la posizione di esso non debba farsi altra cosa, se non che definire la sua distanza da una retta, che s'interseghi con quell'altra ad angoli retti. Così se la curva MAO sia un'arco circolare descritto col punto C come centro, di già il suo centro di gravità D dee ritrovarsi nel raggio CA, che lo divide per metà nel punto A. Onde se EF sia un diametro perpendicolare sul raggio CA, si avrà la posizione del centro D, che si dimanda, con determinare la DC, che è la sua distanza dalla EF. E poichè con dimostrazione simile alla precedente ritrovasi, che la somma de' prodotti, che si hanno con moltiplicare i minimi elementi dell'arco MAO, per le loro distanze dalla stessa EF, sia eguale al prodotto del raggio CA per la MO, che è la corda dell'arco; perciò il prodotto del raggio CA per la MO farà eguale al prodotto dell'arco MAO per la DC; e pertanto si determinerà la DC, se facciasi come l'arco MAO alla sua corda, così il raggio CA ad una quarta proporzionale: dimodochè se l'arco sia eguale alla mezza circonferenza EAF, la DC farà terza proporzionale dopo la sua metà, che è il quadrante AE, o AF, ed il suo raggio AC.

Fig. 78.

485. Giova intanto qui l'avvertire, che se l'arco circolare MAO sia maggiore della mezza circonferenza EAF; pure dovrà determinarsi la DC, che è la distanza del suo centro di gravità dal diametro EF perpendicolare sul raggio CA, con fare, come l'arco MAO alla sua corda MO, così il raggio AC ad una quarta proporzionale; ma la dimostrazione dovrà ripetersi dalla terza proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi. In fatti siccome il diametro EF lascia una porzione dell'arco da un lato, ed un'altra porzione dall'altro lato; così se moltiplichinsi gli elementi di dette porzioni per le loro distanze dalla EF, farà la differenza tra le somme de' prodotti eguale al prodotto dell'arco MAO per la DC. Ma la somma
cor-

corrispondente alla porzione EAF, che sta da un lato della EF, si fa eguale al prodotto del raggio CA per la EF; e la somma corrispondente all'altre due porzioni ME, OF, che stanno dall'altro lato, si fa eguale al prodotto del raggio CA per la differenza delle due EF, MO. Dunque la differenza tra le due riferite somme tuttavia sarà eguale al prodotto del raggio CA per la MO, che è la corda dell'arco.

486. Si vede adunque, che qualunque siasi la lunghezza dell'arco circolare MAO, non solo dee ritrovarsi il suo centro di gravità D nel raggio CA, che lo divide per metà; ma deve essere altresì, come l'arco MAO alla sua corda MO, così il raggio CA alla DC. Onde siccome con aumentarsi l'arco aumentasi la ragione, che egli serba colla sua corda; così col suo aumento dovrà aumentarsi parimente l'altra ragione eguale del raggio CA alla DC. Quindi la DC, che è la distanza tra il centro dell'arco, e l'altro della sua gravità, tanto più dee diminuirsi per rapporto al raggio CA, quanto maggiormente aumentasi l'arco relativamente alla sua corda. E perciò se l'arco facciasi eguale alla circonferenza del cerchio, cosicchè diventi infinitamente grande a riguardo della sua corda; diverrà la DC di una picciolezza infinita per rapporto al raggio CA; onde si è, che il centro della circonferenza, ed il suo centro di gravità si riuniranno insieme, ne faranno differenti l'uno dall'altro (122).

X.

Del modo di determinare il centro di gravità delle figure piane.

487. **D**Alle linee passeremo alle figure piane; e siccome dee darsi il primo luogo a quelle, che terminate da linee rette appellansi figure rettilinee, così tra le figure di questa indole
la

Fig. 79.

la più semplice si è il triangolo . Supposto adunque, che ABC sia un triangolo qualsivoglia, e che la AD divida il lato BC per metà nel punto D ; chiaro si è, che la stessa AD dovrà dividere ancora egualmente tutte le rette, che dentro del triangolo possono tirarsi parallele al lato BC . Quindi riguardando queste rette parallele come elementi del triangolo, si equilibreranno tra esso loro le due sue parti ADB , ADC intorno alla AD ; e pertanto della stessa AD dovrà ritrovarsi il centro della sua gravità . Ma per una ragione consimile il medesimo centro dee ritrovarsi ancora nella BE , che divide il lato AC per metà nel punto E . Dunque il centro di gravità del triangolo ABC dovrà essere il punto F , in cui interseghansi le due AD , BE .

488. Or egli è facile il dimostrare, che in ciascuna delle due AD , BE sia tale la posizione del punto F , che debba essere, tanto la AF dupla della DF , quanto la BF dupla della EF . In fatti essendo i due lati BC , AC divisi egualmente nei punti D , ed E ; sarà BD a DC , come AE ad EC ; e pertanto la DE sarà parallela al terzo lato AB . Quindi facendosi equiangoli i due triangoli ABC , EDC , sarà ancora come AB a DE , così BC a DC ; ed in conseguenza, conforme la BC è dupla della DC , così eziandio la AB sarà dupla della DE . Ma per le medesime parallele AB , DE sono equiangoli altresì i due triangoli ABF , DEF . Dunque nella ragione di AB a DE faranno così le due AF , DF , come le due BF , EF ; e perciò, essendosi dimostrato, che la AB sia dupla della DE , sarà parimente tanto la AF dupla della DF , quanto la BF dupla EF .

489. Conforme poi ogn' altra figura rettilinea può dividersi in triangoli per mezzo di rette tirate da uno de' suoi angoli agli altri opposti; così con determinare i centri di gravità dei suddetti triangoli, potrà definirsi altresì il centro di gravità dell'in-

l'intera figura. Sia perciò il quadrilatero $ABCD$, *Fig. 80.* il quale dividasi per mezzo della AC nei due triangoli ABC , ACD ; e sia ancora E il centro di gravità del primo triangolo, ed F quello del secondo. Se adunque dividiamo la EF talmente in G , che il triangolo ABC sia al triangolo ACD , come FG ad EG ; farà G il centro di gravità dell'intero quadrilatero $ABCD$. E così parimente, se la figura sia pentagono, dimodochè oltre ai riferiti due triangoli abbia ancora il terzo CDH ; ritrovifi il centro di gravità di questo terzo triangolo, che sia il punto I ; e se dividasi la GI talmente in L , che il quadrilatero $ABCD$ sia al terzo triangolo CDH , come IL a GL ; farà L il centro di gravità dell'intero pentagono.

490. Se la figura rettilinea sia regolare, il suo centro di gravità farà il centro stesso della figura. Imperocchè se per questo centro, e per uno de' suoi angoli tirisi una retta; dividerà questa retta per metà tutte le perpendicolari, che alzansi su di essa fino al perimetro della figura. Quindi riguardando queste perpendicolari come elementi della stessa figura, le due sue parti, che giacciono nei due lati della retta, si equilibreranno tra esso loro intorno alla medesima retta; e perciò nella suddetta retta si ritroverà il centro di gravità dell'intera figura. Ma per una ragione consimile lo stesso centro dee ritrovarsi altresì in ogni altra retta, che tirasi dentro della figura colla medesima legge. Dunque dovrà egli essere un punto comune a due di queste rette; ed in conseguenza, siccome questo punto è il centro della figura, così il medesimo centro farà quello della sua gravità. Dal che egli è facile il ricavarne, che il centro di gravità di un cerchio sia il suo medesimo centro.

491. Per quanto poi alle figure piane terminate da linee curve, potrà determinarsi il loro centro di gravità con ricorrere ai minimi loro elementi, che si hanno con tirare dentro di esse rette parallele

O

lele

Fig. 81. lele infinitamente vicine tra loro. Sia perciò ABC una di queste figure, la quale per un lato sia terminata dalla curva AMB , e per gli altri dalle due rette AC, BC , che interseghinfi tra loro ad angoli retti nel punto C . Sia ancora D il centro di gravità della stessa figura, da cui abbassinfi sulle due AC, BC le perpendicolari DE, DF . Se adunque moltiplichinfi gli elementi della figura per le distanze dei loro centri di gravità dalla AC ; farà la somma de' prodotti eguale al prodotto della figura ABC per la DE . E così ancora, se moltiplichinfi gli stessi elementi per le distanze dei loro centri di gravità dall'altra BC ; farà la somma de' prodotti eguale al prodotto della figura ABC per la DF . Onde siccome con determinare le due riferite somme restano determinati altresì gli eguali loro prodotti, ed in conseguenza le due DE, DF , o pure le loro eguali CF, CE ; così per mezzo di queste due rette potrà definirfi facilmente la posizione del punto D , che si dimanda.

492. Fingiamo perciò, che la figura ABC sia un quadrante di cerchio, che abbia per suo centro il punto C ; e per rendere l'esempio più generale fingiamo ancora, che D sia il centro di gravità dello spazio circolare AMN tagliato per la MN parallela al raggio BC . Se adunque la mn sia un'altra parallela infinitamente vicina alla prima MN ; farà il picciolo trapezio $MNnm$ uno degli elementi dello spazio. E poichè egli può riguardarsi come una semplice retta, si troverà il suo centro di gravità nella metà della sua lunghezza; e perciò farà la metà della MN la sua distanza dal raggio AC , e la CN la sua distanza dall'altro raggio BC . Quindi siccome il prodotto del riferito picciolo trapezio per la prima distanza si fa eguale alla metà del solido quadrato della MN nella Nn , così il prodotto dello stesso picciolo trapezio per la seconda distanza si farà eguale al solido del rettangolo delle due MN, CN nella Nn . Onde deducendosi le
 stesse

stesse uguaglianze da ogni altro elemento dello spazio circolare AMN , riducesi la cosa ad investigare la somma così degli uni, come degli altri solidi.

493. Ed in vero, essendo il quadrato della MN eguale alla differenza degli altri due CM , CN ; farà il solido del quadrato della MN nella Nn eguale a due altri solidi, uno del quadrato del raggio AC nella Nn , l'altro del quadrato della CN nella Nn . Ma colla somma de' solidi affini al primo si ha il solido del quadrato del raggio AC nella AN ; e colla somma de' solidi affini al secondo si ha la differenza di due piramidi quadrate, di cui così i lati delle basi, come le altezze sono le due AC , CN . Dunque se la differenza di queste piramidi facciasi eguale al solido del quadrato del raggio AC nella AH ; farà la differenza tra le due somme eguale al solido del quadrato del raggio AC nella HN . Onde dovendo essere la metà di questo solido eguale al prodotto dello spazio circolare AMN per la DE , si determinerà la DE con fare come lo spazio circolare AMN al quadrato del raggio AC , così la metà della HN ad una quarta proporzionale.

494. Per quanto poi all'altro solido del rettangolo delle due CN , MN nella Nn , tirisi al punto M la tangente MT , e facciasi la mr parallela al raggio AC . Essendo adunque equiangoli i due triangoli MNT , Mrm , farà come MN ad NT , così Mr ad mr , ovvero Nn . Onde siccome il rettangolo delle due MN , Nn è eguale al rettangolo dell'altre due NT , Mr ; così farà il solido delle tre CN , MN , Nn eguale al solido dell'altre tre CN , NT , Mr . Ma per essere il rettangolo delle due CN , NT eguale al quadrato della MN , il solido delle tre CN , NT , Mr è eguale al solido del quadrato della MN nella Mr . Dunque a questo stesso solido farà eguale parimente l'altro del rettangolo delle due CN , MN nella Nn . Quindi la somma di tutti i solidi affini farà eguale alla pira-

mide, che ha per base il quadrato della MN , e per altezza la stessa MN . Onde dovendo essere questa piramide eguale al prodotto dello spazio circolare AMN per la DF , si determinerà la DF con fare, come lo spazio circolare AMN al quadrato della MN , così la terza parte della stessa MN ad una quarta proporzionale.

495. Fingiamo ora, che lo spazio circolare, di cui dee determinarsi il centro di gravità D , sia l'intero quadrante ABC . E combaciandosi in questo caso la MN col raggio BC , chiaro si è, che si determinerà la DF con fare, come il quadrante ABC al quadrato del raggio BC , così la terza parte dello stesso raggio ad una quarta proporzionale. Ma io dico di più, che della stessa costruzione dee farsi uso altresì per determinare la DE . Imperocchè annientandosi la CN , e facendosi la AN eguale all'altro raggio AC ; farà il prodotto del quadrante ABC per la DE eguale alla metà della differenza tra il cubo del raggio AC , e la piramide quadrata, di cui così il lato della base, come l'altezza è il medesimo raggio. Ma la metà di questa differenza è eguale al solido, che si fa dal quadrato del raggio AC nella terza parte dello stesso raggio. Dunque a questo stesso solido farà eguale parimente il prodotto del quadrante ABC per la DE ; e pertanto si avrà la DE con fare, come il quadrante ABC al quadrato del raggio AC , così la terza parte del medesimo raggio ad una quarta proporzionale.

Fig. 82. 496. Se lo spazio circolare AMN sia maggiore del quadrante ABC , farà il prodotto del riferito spazio per la DE eguale alla metà della differenza tra il solido del quadrato del raggio AC nella AN , e la somma di due piramidi quadrate, di cui così i lati delle basi, come le altezze sono le due AC , CN . Onde se facciasi, che la somma di queste piramidi sia eguale al solido del quadrato del raggio AC nella AH , si determinerà la DE eziandio con fare,

fare , come lo spazio circolare AMN al quadrato del raggio AC , così la metà della HN ad una quarta proporzionale . Per quanto poi alla DF , quantunque per determinarla debba ricorrersi alla terza proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi , per la ragione che il raggio BC lascia una porzione dello spazio da un lato, ed un'altra porzione dell'altro lato ; nientedimeno pure si ritroverà , che debba ella definirsi con fare , come lo spazio circolare AMN al quadrato della MN , così la terza parte della stessa MN ad una quarta proporzionale .

497. Del rimanente , se mai allo spazio circolare AMN aggiungasi l'altro eguale AON , che si trova dall'altro lato ; non v' ha dubbio , che il centro di gravità dello spazio intiero MAO si ritroverà nel raggio AC , che lo divide per metà . Onde siccome per determinarlo basterà definire la sola sua distanza dal centro C ; così si avrà questa distanza con fare , che lo spazio circolare MAO sia al quadrato fatto dalla metà della MO , come i due terzi della stessa metà ad una quarta proporzionale . Conforme poi da ciò ne siegue , che per avere la distanza tra il centro C del mezzo cerchio BAG , e l'altro della sua gravità debba farsi , che il mezzo cerchio BAG sia al quadrato del raggio BC , come i due terzi dello stesso raggio alla riferita distanza ; così neppure sarà difficile il ricavarne , che il centro di gravità del cerchio intiero sia il suo medesimo centro. Ed in fine , se ritrovifi il centro di gravità così dello spazio circolare MAO , come del triangolo COM , e dividasi la retta , che li congiunge insieme , nella reciproca ragione dello spazio , e del triangolo ; si avrà col punto di questa divisione il centro di gravità del settore CMO (123).

Fig. 81.
82.

*Del modo di determinare il centro di gravità
così delle figure solide, come dei
loro perimetri.*

498. **R**estano le figure solide, tra le quali considereremo in primo luogo quelle, che sono terminate da superficie piane. Ed in vero, se vogliasi il centro di gravità del perimetro di una di queste figure, non dovrà farsi altra cosa, se non che determinare i centri di gravità di tutte le facce, che lo compongono. Imperocchè siccome con dividere la retta, che congiunge insieme due di essi nella reciproca ragione delle facce, a cui corrispondono, si ha il centro comune alle due facce; così se congiungasi questo centro con quello di una terza faccia, e la retta, che gli unisce insieme, dividasi nella reciproca ragione delle prime due facce alla terza, si avrà il centro comune alle tre facce. Onde avvalendoci sempre dello stesso artificio fino a che resti afforbito l'intero numero delle facce, avremo finalmente il comune loro centro di gravità, ed in conseguenza quello del perimetro della figura.

499. Per quanto poi al centro di gravità della figura medesima, fingiamo primieramente, che ella sia una prisma. E se il prisma dato seghisi per infiniti piani paralleli alla sua base, ed egualmente distanti l'uno dall'altro; faranno le sezioni fatte nel prisma altrettante figure piane simili, ed eguali alla stessa base. Quindi i loro centri di gravità si ritroveranno in una medesima retta, la quale perciò potrà chiamarsi retta centrale. Onde il centro di gravità comune a tutte le sezioni farà il punto, che divide la retta centrale per metà. Ma potendosi riguardare le riferite sezioni come elementi del prisma, il comune loro centro di gravità non è differente da quello del prisma. Dunque ancora il centro di gravità del prisma farà il pun-

punto , che divide egualmente la retta centrale ; è pertanto , siccome questa retta si ha con unire il centro di gravità delle base del prima coll' altro della faccia opposta , così con dividere la stessa retta per metà si avrà il centro di gravità del prisma proposto .

500. Fingiamo in appresso , che la figura data sia una piramide . E quantunque le sezioni fatte nella piramide con infiniti piani paralleli alla sua base , ed egualmente distanti l' uno dall' altro , siano figure piane soltanto simili alla stessa base ; pure però i loro centri di gravità dovranno ritrovarsi nella retta , che congiunge il centro di gravità della base col vertice della piramide ; onde in questa stessa retta centrale sarà situato altresì il centro di gravità comune a tutte le sezioni , che non è differente da quello della piramide . Per investigare intanto la posizione di esso , tirisi per lo vertice della piramide un piano parallelo alla sua base , ed i prodotti delle sezioni per le distanze dei loro centri di gravità dal piano tirato faranno , come i cubi delle stesse distanze ; onde essendo queste distanze tra loro , come gl' infiniti numeri naturali presi dall'unità , sarà la somma de' prodotti all'ultimo preso altrettante volte , come 1 a 4 .

501. Or siccome la somma de' prodotti deve essere eguale al prodotto dell' intiera piramide per la distanza del suo centro di gravità dal medesimo piano ; così l' ultimo di essi preso altrettante volte sarà eguale al prodotto della base della piramide per lo quadrato della sua altezza ; onde eziandio questi due prodotti faranno tra loro nella ragione di 1 a 4 . Ma la piramide si ha colla moltiplicazione della sua base per la terza parte della sua altezza . Dunque ponendo a parte ciò , che è comune ai due prodotti , ancora la distanza del centro di gravità della piramide dal riferito piano sarà al triplo dell' altezza della piramide nella ragione di 1 a 4 ; e pertanto facendosi la suddetta distanza

eguale ai tre quarti dell' altezza della piramide , si avrà il centro di gravità , che si dimanda , con dividere la retta centrale in modo , che la porzione di essa aggiacente al vertice sia tripla della porzione rimanente .

502. Per quanto all' altre figure solide terminate da superficie piane , di già ciascuna di esse può dividerfi in modo , che le sue parti siano prismi , e piramidi . Onde con determinare i centri di gravità dei prismi , e delle piramidi , che la compongono , niente farà più facile , quanto di definire il centro di gravità di tutta la figura . Intanto se la figura , di cui si dimanda il centro di gravità , sia una piramide troncata ; in vece di dividerla in prismi , e piramidi , tornerà più conto di renderla intiera coll' aggiunta di un' altra piramide . In fatti se ritrovifi il centro di gravità , così della piramide aggiunta , come della piramide intiera ; e la retta , che congiunge insieme questi due centri , distendasi verso la piramide troncata in modo , che la stessa retta sia alla parte distesa , come la piramide troncata alla piramide aggiunta ; si avrà col termine della parte distesa il centro di gravità della piramide intiera .

Fig. 83. 503. Per venire ora alle figure solide terminate da superficie curve , sia il triangolo ABC rettangolo in B , e vogliasi il centro di gravità così della superficie conica , che descrivesi colla rivoluzione dell' ipotenusa AC intorno al lato AB , come del cono medesimo . Prendasi nella AC la porzione infinitamente picciola Mm , e da i suoi estremi abbassinsi sull' asse del cono AB le perpendicolari MN , mn . Essendo adunque le due Mm , Nn in data ragione , ed essendo la circonferenza descritta col raggio MN proporzionale allo stesso raggio , o pure alla AN ; farà la picciola corona conica corrispondente alla Mm proporzionale al rettangolo delle due AN , Nn . Quindi se per lo vertice del cono tirisi un piano parallelo alla sua base , farà il prodotto della stessa piccio-

picciola corona per la distanza del suo centro di gravità del piano tirato proporzionalmente al solido del quadrato della AN nella Nn . Onde la somma de' prodotti di tutte le picciole corone coniche per le distanze dei loro centri di gravità dal medesimo piano farà proporzionale alla piramide quadrata, di cui così il lato della base, come l'altezza è eguale alla AB .

504. Conforme poi la picciola corona conica corrispondente alla Mm è proporzionale al rettangolo delle due AN , Nn ; così l'intera superficie conica farà proporzionale alla metà del quadrato della AB . Quindi il prodotto della stessa superficie conica per la distanza del suo centro di gravità dal menzionato piano corrisponderà in proporzione al solido della metà del quadrato della AB nella stessa distanza. Onde dovendo essere questo solido eguale alla riferita piramide quadrata, si farà la suddetta distanza eguale ai due terzi della AB . Riguardando poscia il cono come una piramide circolare, chiaro si è, che la distanza dal suo centro di gravità dal medesimo piano debba farsi eguale ai tre quarti della stessa AB . E perciò siccome il centro di gravità della superficie conica si ha, con dividere l'asse AB in modo, che la porzione aggiacente al vertice sia dupla della porzione rimanente; così l'altro del cono si avrà, con dividere il medesimo asse talmente, che la porzione aggiacente al vertice sia tripla dell'altra rimanente.

505. Sia inoltre il mezzo cerchio AMB , colla *Fig. 84.* di cui rivoluzione intorno al diametro AB descrivasi la sfera; e debbasi ritrovare il centro di gravità così della superficie sferica corrispondente all'arco AM , come del settore sferico sostenuto da detta superficie. Prendasi l'archetto infinitamente picciolo Mm , dai di cui estremi abbassinsi sul diametro AB le perpendicolari MN , mn . E se facciasi la mr parallela allo stesso diametro, faranno equiangoli i due triangoli CMN , Mmr ; ed in consequen-

seguenza, essendo CN ad MN , come Mr ad mr , ovvero Nn , farà il rettangolo delle due CN , Nn eguale al rettangolo dell'altre due MN , Mr . Tirisi di poi per lo centro C il piano DE , a cui sia perpendicolare il raggio AC . E poichè la picciola corona sferica corrispondente all'archetto Mm è proporzionale alla Nn , farà il prodotto della stessa picciola corona per la distanza del suo centro di gravità dal piano DE proporzionale al rettangolo delle due CN , Nn , o pure delle due MN , Mr . Onde la somma di tutti i prodotti consimili corrisponderà in proporzione alla metà del quadrato della MN , o pure alla metà del rettangolo delle due AN , BN .

506. Or essendo la superficie sferica corrispondente all'arco AM proporzionale alla AN , farà il prodotto della stessa superficie per la distanza del suo centro di gravità dal medesimo piano DE proporzionale al rettangolo della AN nella stessa distanza. Quindi dovendo essere questo rettangolo eguale alla metà dell'altro delle due AN , BN , farà la riferita distanza eguale alla metà della BN , o pure alla metà della somma delle due AC , CN . E perciò se dividasi la AN egualmente, si avrà col punto della divisione il centro di gravità della superficie sferica, che descrivesi colla rivoluzione dell'arco AM . Conforme poi da ciò ne segue, che facendosi l'arco AM eguale al quadrante AD , il cercato centro si abbia con dividere per metà il raggio AD ; così non ostante, che l'arco faccia maggiore del quadrante, pure il centro di gravità della superficie sferica corrispondente dovrà determinarsi con costruzione consimile.

507. Per quanto al centro di gravità del settore sferico, prendasi per suo elemento la porzione sostenuta dalla picciola corona sferica corrispondente all'archetto Mm , e dividasi questa stessa porzione in picciole piramidi eguali, che abbiano il centro C per comune loro vertice. Poichè dunque queste pic-

picciole piramidi eguali sono egualmente distanti dalla CN ; si ritroverà nella stessa CN il comune loro centro di gravità, da cui non è differente quello dell'intera porzione. Quindi siccome il centro di gravità di ciascuna di esse dista da C per gli tre quarti della CM , così eziandio il centro di gravità dell'intera porzione farà distante da C per gli tre quarti della CN . Onde perchè corrisponde in proporzione così la riferita porzione del settore alla Nn , come il settore medesimo alla AN ; con dimostrazione simile alla precedente si ritroverà, che il centro di gravità del settore sia distante dal piano DE per le tre ottave parti della somma delle due AC, CN .

508. Conformemente poi nel settore sferico si contiene ed il cono, che descrivesi colla rivoluzione del triangolo CNM , e la porzione della sfera, che generasi colla rivoluzione dello spazio circolare ANM ; così con determinare i centri di gravità del cono, e del settore potrà definirsi altresì quello, che appartiene alla porzione della sfera. Congiungansi perciò i due riferiti centri per una retta; e se questa retta distendasi verso la porzione della sfera in modo, che la stessa retta sia alla parte distesa, come la porzione della sfera al cono, si avrà col termine della parte distesa il centro, che si dimanda. Anzi in una maniera consimile potrà determinarsi ancora il centro di gravità della porzione maggiore, che generasi colla rivoluzione dell'altro spazio circolare BNM : cioè con congiungere il centro della porzione minore coll'altro della sfera per una retta, e con prolungare questa retta in modo, che la medesima retta sia alla parte prolungata, come la porzione maggiore alla porzione minore.

509. Quindi siccome determinasi con esattezza così il centro di gravità del cono, che descrivesi colla rivoluzione del triangolo CNM ; come quello del settore sferico sostenuto dalla superficie corrispondente all'arco AM ; così si determinerà ancora

ra

ra esattamente il centro di gravità della porzione sferica, che generasi colla rivoluzione dello spazio circolare ANM. In fatti conforme il cono si ha, con moltiplicare il cerchio descritto col raggio MN per la terza parte della CN; così se AF sia la terza parte della AN, si avrà la porzione sferica, con moltiplicare la circonferenza, che ha per diametro la CF, per lo quadrato della AN. Quindi la porzione sferica farà al cono in ragion composta del quadrato della AN al quadrato della MN, e della CF alla sesta parte della CN, o pure in ragion composta della AN alla BN, e del sestuplo della CF alla CN. Onde se la retta, che congiunge insieme i centri di gravità del cono, e del settore, distendasi in modo, che la stessa retta sia alla parte distesa nella medesima ragion composta, si avrà il centro di gravità della porzione sferica.

510. Con esattezza si determinerà parimente il centro di gravità della porzione sferica maggiore, che generasi colla rivoluzione dell'altro spazio circolare BNM. Imperocchè se BG sia la terza parte della BN, ancora quest'altra porzione maggiore si avrà, con moltiplicare la circonferenza, che ha per diametro la CG, per lo quadrato della BN. Quindi la porzione maggiore farà alla porzione minore in ragion composta della CG alla CF, e del quadrato della BN al quadrato della AN. Onde se la retta, che congiunge insieme il centro di gravità della porzione minore col centro della sfera, prolunghisi in modo, che la stessa retta sia alla parte prolungata nella medesima ragion composta, si avrà il centro di gravità dell'altra porzione maggiore. Del rimanente la maniera stessa di determinare il centro di gravità del settore sferico, chiaramente ci fa conoscere, che quello dell'emisfero sia distante dalla sua base per le tre ottave parti del suo raggio (124).

Del modo di definire le grandezze, che generansi colla rivoluzione di altre grandezze più semplici.

511. **N**iente è più familiare presso de' Geometri, quanto di derivare grandezze dalla rivoluzione di altre grandezze più semplici. Così generasi il cerchio colla rivoluzione di una retta intorno ad uno de' suoi termini; generasi il cilindro retto colla rivoluzione di un parallelogrammo rettangolo intorno ad uno de' suoi lati; generasi il cono retto colla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati, che contengono l'angolo retto; generasi finalmente la sfera colla rivoluzione di un mezzo cerchio intorno al suo diametro. Or considerandosi come grave la grandezza, che aggirasi, potrà determinarsi l'altra, che si genera, per mezzo del centro di gravità della stessa grandezza generatrice; ed il teorema generale si è, che moltiplicandosi la grandezza generatrice per l'arco circolare, che si descrive dal suo centro di gravità, il prodotto debba essere eguale all'altra grandezza, che si genera.

512. Ed in vero le grandezze, che col loro moto possono generare altre grandezze più composte, sono tanto le linee, quanto le superficie, che giacciono in un medesimo piano, poichè siccome generansi superficie col moto laterale delle linee, così produconsi corpi col moto traversale delle superficie. Se adunque il moto laterale di una linea giacente in un medesimo piano facciasi in modo, che i minimi suoi elementi portinsi per rette parallele, a cui siano perpendicolari gli stessi elementi; chiaro si è, che si avrà la superficie, che si genera, con moltiplicare la linea generatrice per una di quelle rette. E così parimente, se il moto traversale di una superficie piana facciasi con legge tale, che i minimi suoi elementi percorrano rette parallele, a cui siano perpendicolari i medesimi elementi; chiara

ra

ra cosa ancora si è , che si avrà il corpo , che si produce , con moltiplicare la superficie generatrice per una delle riferite rette .

Fig. 85: 513. Da questi stessi principj intanto egli è facile il ricavarne la verità del proposto teorema generale , ed ecco come . Sia AB l'asse della rivoluzione , e sia CMD la grandezza , che intorno ad essa si aggira . Dividasi questa grandezza in minimi elementi per rette parallele all'asse AB , ed aggirisi la medesima in modo , che sia infinitamente picciolo l'angolo della sua rivoluzione . L'archetto adunque , che descrivesi dal centro di gravità ; così di ogni elemento , come di tutta la grandezza , sarà proporzionale alla sua distanza dall'asse AB , che viene ad essere il raggio di detto archetto . Onde attenta la seconda proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi , se moltiplichinsi gli elementi della grandezza CMD per gli archetti descritti dai loro centri di gravità , sarà la somma de' prodotti eguale al prodotto di tutta la grandezza CMD per l'archetto descritto dal suo proprio centro .

514. Per ritrovarsi poi racchiuso qualsivoglia elemento della grandezza tra rette parallele all'asse AB , chiaro si è , che le parti sue più picciole portansi per archetti eguali a quello , che si descrive dal suo centro di gravità . Quindi potendosi riguardare tutti questi archetti come picciole rette , non solo parallele tra loro , ma perpendicolari altresì all'elemento , a cui si rapportano ; sarà il prodotto dell'elemento per uno di essi eguale alla grandezza , che generasi colla picciola rivoluzione dello stesso elemento . Onde siccome colla somma di tutti i prodotti consimili si viene ad avere la grandezza , che generasi colla picciola rivoluzione di tutta la grandezza generatrice ; così la grandezza generata , ed il prodotto della generatrice per l'archetto descritto dal suo centro di gravità saranno eziandio eguali tra loro .

515. Colla stessa dimostrazione si farà vedere, che la riferita uguaglianza debba aver luogo in ogni altra picciola rivoluzione della grandezza generatrice. Onde non è egli da porsi in dubbio, che la grandezza, che generasi colla rivoluzione di un'altra grandezza più semplice, sia eguale al prodotto della grandezza generatrice per l'arco circolare, che descrivesi dal suo centro di gravità. Si vuol però qui notare, che la medesima cosa debba avvenire altresì, se il centro di gravità della grandezza generatrice portasi per una curva, a cui sia sempre perpendicolare la stessa grandezza. Imperocchè siccome i minimi elementi della curva possono riguardarsi come tanti archetti circolari descritti con diversi centri, i quali ritrovansi nella sua sviluppata; così, con portarsi la grandezza generatrice per ciascuno di essi, aggirasi la medesima intorno ad un'asse alzato dal suo centro perpendicolarmente sul piano della curva.

516. Per ischiarire con esempj la verità del riferito teorema, aggirasi primieramente la retta AC intorno ad uno de' suoi termini A. Colla sua rivoluzione adunque si genererà il cerchio CMN, che avrà per suo raggio la stessa retta AC. E poichè la medesima AC rimane divisa egualmente dal suo centro di gravità; si porterà questo centro nella rivoluzione della retta per una circonferenza di cerchio, che farà la metà di quella, per cui terminasi il cerchio CMN. Onde si avrà l'area del cerchio CMN, con moltiplicare il suo raggio AC per la metà della sua circonferenza. Per la stessa ragione poi, se la retta AC aggirasi intorno al suo termine A fino a che si generi il settore CAM; si porterà il suo centro di gravità per un arco circolare, che farà la metà dell'altro CM, su di cui appoggiasi il settore. Onde ancora l'area del settore si avrà, con moltiplicare il suo raggio AC per la metà dell'arco CM, che sostiene il settore.

Fig. 86.

Fig. 87.

517. Aggirisi in appresso il parallelogrammo rettangolo $ABCD$ intorno al suo lato AB . E siccome colla sua rivoluzione generasi il cilindro retto, così con quella del lato opposto CD si genererà la sua superficie cilindrica. Portandosi adunque il centro di gravità dal lato CD per una circonferenza di cerchio eguale a quella, per cui terminasi la base del cilindro; si avrà la superficie cilindrica, con moltiplicare il lato, che la descrive, per la circonferenza della base. E poichè il centro di gravità del parallelogrammo $ABCD$ ritrovasi nella metà della EF , che divide egualmente i due lati opposti AB, CD ; si porterà egli per una circonferenza di cerchio, che farà la metà di quella della base. Onde si avrà la solidità del cilindro retto, con moltiplicare la metà della circonferenza della base primieramente per lo lato BC , che è il suo raggio, ed indi per l'altro lato AB , che è l'asse del cilindro: dimodochè farà ella eguale al prodotto della base per l'asse.

Fig. 88.

518. Aggirisi inoltre il triangolo rettangolo ABC intorno al lato AB , che è uno dei due, che contengono l'angolo retto. E siccome colla sua rivoluzione generasi il cono retto, così con quella dell'ipotenusa AC si genererà la sua superficie conica. Portandosi adunque il centro di gravità della riferita ipotenusa per una circonferenza di cerchio eguale alla metà di quella, per cui terminasi la base del cono; si avrà la superficie conica, con moltiplicare l'ipotenusa, che la descrive, per la metà della circonferenza della base. E poichè il centro di gravità del triangolo ABC ritrovasi nei due terzi della AG , che divide il lato BC per metà; si porterà egli per la circonferenza di un cerchio, che farà la terza parte di quella della base. Onde si avrà la solidità del cono retto, con moltiplicare la terza parte della circonferenza della base primieramente per la metà del lato BC , che è il suo raggio, ed indi per l'altro lato AB , che l'asse del

cono:

cono: dimodochè farà ella eguale al prodotto della terza parte della base per l'asse.

519. Aggirisi finalmente il mezzo cerchio AEB *Fig. 89.* intorno al suo diametro AB. E conforme colla sua rivoluzione generasi la sfera, così con quella della mezza circonferenza si genererà la sua superficie sferica. Taglisi adunque dal raggio CE alzato perpendicolarmente sul diametro AB la porzione CD, che sia al medesimo raggio, come il diametro AB alla mezza circonferenza AEB; e per ciò, che è stato dimostrato di sopra, il punto D farà il centro di gravità della mezza circonferenza AEB. Quindi nella sua rivoluzione si porterà questo centro per la circonferenza di un cerchio, che farà alla circonferenza di quello, che ha per raggio la CE, come CD a CE, o pure come il diametro AB alla mezza circonferenza AEB. Onde si avrà la superficie sferica, con moltiplicare il diametro AB per l'intera sua circonferenza, dimodochè farà ella eguale al quadruplo del cerchio massimo della sfera.

520. Se poi la porzione CD sia di lunghezza tale, che il mezzo cerchio AEB sia al quadrato del raggio CE; come i due terzi dello stesso raggio alla CD; in tal caso il punto D farà il centro di gravità del mezzo cerchio AEB, e si porterà egli per una circonferenza di cerchio, che farà alla circonferenza di quello, che ha per raggio la CE, come i due terzi del quadrato di questo raggio al mezzo cerchio AEB. Onde si avrà la solidità della sfera con moltiplicare la circonferenza del cerchio massimo primieramente per l'intero suo diametro, ed indi per la terza parte del suo raggio, che vale a dire con moltiplicare la superficie sferica per la terza parte del suo raggio. Ed in questo stesso modo chiaro si è, che potrà determinarsi parimente così la superficie sferica, che descrivesi colla rivoluzione di qualsivis arco AM della mezza circonferenza AEB, come la solidità
 P* e del-

e della porzione della sfera racchiusa sotto la stessa superficie, e del settore sferico, che su di essa si appoggia.

521. Or conforme con aggirarsi un mezzo cerchio intorno al suo diametro generasi la sfera; così colla rivoluzione di ogni altra porzione di cerchio intorno alla sua corda producesi un solido chiamato sferoide, che sarà acuminato, o incavato ne' suoi poli, secondocchè la porzione di cerchio, da cui egli si deduce, prendesi minore, o maggiore del mezzo cerchio; onde con far uso del medesimo teorema potrà determinarsi facilmente così la superficie, come la solidità dell' uno, e dell' altro sferoide. E poichè quel solido, che chiamasi botte, può riguardarsi come formato colla rivoluzione di un' arco circolare intorno ad una retta parallela alla sua corda; perciò, se determinisi così il centro, come la lunghezza dell' arco, con cui egli si forma, potrà definirsi altresì non meno l' interna sua capacità, che la sua superficie curva.

522. Se poi aggirisi un cerchio intiero intorno ad una retta presa ad arbitrio nel suo piano, chiaro si è, che si genererà quel solido, che chiamasi anello sferico, la di cui solidità si produce colla rivoluzione del cerchio, e la superficie curva colla rivoluzione della sua circonferenza. Quindi essendo il centro di gravità così del cerchio, come della circonferenza il suo medesimo centro, possono stabilirsi intorno all' anello sferico due teoremi. Il primo si è, che la solidità dell' anello si abbia con moltiplicare il cerchio, che si aggira, per la circonferenza, che nella sua rivoluzione percorre il suo centro. L' altro si è, che la superficie curva dello stesso anello si abbia con moltiplicare la circonferenza del medesimo cerchio per quella stessa, che si percorre dal suo centro (125).

Del modo di definire così la velocità mezza, come il centro del moto delle grandezze che si aggirano.

523. **Q**ualora una grandezza aggirasi intorno ad un qualche asse, non è egli da porsi in dubbio, che siano diverse tra loro le velocità, con cui si muovono i minimi suoi elementi. Quindi siccome per avere la quantità di moto, che risiede in tutta la grandezza, dee moltiplicarsi ciascuno de' suoi elementi per la velocità, con cui egli si muove, così chiamasi velocità mezza quella, con cui muovendosi tutti gli elementi della grandezza, si viene ad avere la stessa quantità di moto, che di già in essa ritrovasi; onde se mai sia nota questa quantità di moto, potrà determinarsi la velocità mezza della grandezza con dividere la riferita quantità per la grandezza medesima. Intanto dovendosi incontrare la suddetta velocità in uno degli elementi della grandezza, che si aggira, tornerà più conto di ricercarla con definire l'elemento, o sia il punto della grandezza, in cui ella s'incontra.

524. Ed in vero con far uso della seconda proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi può dimostrarsi il seguente teorema generale, cioè che qualunque siasi la grandezza, che aggirasi intorno ad un'asse, la sua velocità mezza sia quella, che risiede nel suo centro di gravità. In fatti se intendasi divisa la grandezza in minimi elementi per rette, o per piani paralleli all'asse della rivoluzione; la velocità di ciascuno di questi elementi corrisponderà in proporzione alla sua distanza dal medesimo asse. Quindi attenta la riferita proprietà, la somma de' prodotti, che si hanno con moltiplicare gli stessi elementi per le proprie loro velocità, sarà eguale al prodotto di tutta la grandezza per la velocità del suo centro di gravità.

gravità. Onde siccome con questa velocità viene ad avere la grandezza la stessa quantità di moto, che in essa ritrovasi, così la medesima farà la sua velocità mezza.

525. Or muovendosi la grandezza in modo, che tutti i suoi elementi abbiano la stessa velocità, non è egli da porsi in dubbio, che il moto di essa si riunisce, e si raccoglie nel suo centro di gravità. Ma se mai la grandezza aggirasi intorno ad un'asse, ed in conseguenza i suoi elementi muovansi con velocità proporzionali alle loro distanze da quell'asse; in tal caso potrà definirsi il centro del moto, primieramente con trasformare la grandezza in un'altra, in cui i suoi elementi siano aumentati nella ragione delle loro velocità, ed indi con determinare il centro di gravità di questa nuova grandezza.

Fig. 90. Così se intorno all'asse AB aggirasi la retta CD , e facciasi da per tutto, che la NM parallela all'asse AB sia proporzionale alla sua distanza CN dal medesimo asse; sarà il triangolo CDE la nuova grandezza. Onde se F sia il suo centro di gravità, e tirisi la FG parallela all'istesso asse, che s'incontri colla CD nel punto G ; sarà G il centro del moto della OD , il quale perciò si ritroverà nei due terzi della sua lunghezza.

526. Similmente, se intorno all'asse AB aggirasi il triangolo CDE , e la figura piana CDH sia di tal natura, che la NO sia proporzionale al rettangolo delle due CN , NM , o pure al quadrato della sola CN ; sarà questa figura la nuova grandezza. Onde se I sia il suo centro di gravità, e tirisi la IL parallela all'asse AB , che s'incontri colla CF nel punto L ; sarà L il centro, in cui si riunisce il moto del triangolo CDE , il quale perciò si ritroverà nei tre quarti della tutta CK . E così finalmente, se intorno all'asse AB aggirasi il cono, che si ha colla rivoluzione del triangolo rettangolo CDE intorno al lato CD , e la figura CDH sia d'indole tale, che la NO sia proporzionale

nale al solido della CN nel quadrato della NM, o pure al cubo della sola CN; farà questa figura la nuova grandezza. Onde se dal suo centro di gravità I tirisi la IB parallela all'asse AB, che s'incontri colla CD nel punto R; farà R il centro del moto del diviso cono, il quale perciò si ritroverà nei quattro quinti della CD.

527. Ne poi è egli difficile il dimostrare, che aggirandosi una grandezza qualsivisa intorno ad un'asse, ed aumentandosi ciascuno de' suoi elementi nella ragione della velocità, con cui egli si muove, si abbia col centro di gravità della nuova grandezza il centro del moto della prima. Imperocchè attenta la ragione, in cui si vuole aumentato ciascuno elemento della grandezza; che si aggira, chiaro si è, che gli elementi della nuova grandezza siano proporzionali ai momenti degli elementi corrispondenti della prima. Quindi se la nuova grandezza muovasi in modo, che tutti i suoi elementi abbiano la stessa velocità; ancora i momenti degli stessi suoi elementi corrisponderanno in proporzione ai momenti dei rispettivi elementi della prima. Onde siccome debbono corrispondersi tra loro i centri di moto dell'una, e dell'altra grandezza; così il centro del moto della prima si avrà senza dubbio col centro di gravità della nuova grandezza.

528. Del rimanente il centro del moto si appella ancora centro di percussione per la ragione, che riunendosi in esso la forza di agire, che risiede nella grandezza a cagion del suo moto, si ha la massima percossa, quante volte l'incontro della grandezza coll'ostacolo si fa col riferito centro. E poichè le oscillazioni di un pendolo, a cui siano attaccati vari pesi in diverse distanze dall'asse, da cui egli pende, debbono ripetersi dal moto, che risiede in ciascuno di detti pesi; perciò la vera lunghezza di un pendolo composto sarà quella, che si frappone tra l'asse della sospensione, ed il centro del suo moto. Quindi in un pendolo di que-

sta indole il centro del moto si appella altresì centro di oscillazione; e se mai si voglia un pendolo semplice, che faccia le sue oscillazioni nel medesimo tempo con quelle di un pendolo composto, la sua lunghezza dovrà farsi eguale alla riferita distanza.

Fig. 91. 529. Or in un pendolo composto non è egli difficile il definire la distanza tra il centro di oscillazione, e l'asse della sospensione. Siano perciò *A*, e *B* i pesi del pendolo, o pure i proprj loro centri di gravità; e sia ancora *C* il centro di gravità comune ad ambedue, *D* il centro di oscillazione, ed *EF* l'asse della sospensione. Abbassinsi su di questo asse le perpendicolari *AE*, *BF*, *CG*, *DH*; ed essendo *C* il comune centro di gravità dei due pesi *A*, e *B*, faranno due prodotti, uno di *A* per *AE*, l'altro di *B* per *BF*, eguali al solo prodotto di *A*, e *B* insieme per *CG*. Ma per corrispondere a *D* il comune centro di gravità degli stessi pesi aumentati nella ragione delle loro velocità, due altri prodotti, uno di *A* per lo quadrato della *AE*, l'altro di *B* per lo quadrato della *BF*; sono eguali al prodotto dei primi due insieme per la *DH*. Dunque questi altri due prodotti faranno eguali altresì al solo prodotto di *A*, e *B* insieme per lo rettangolo delle due *CG*, *DH*; e pertanto si avrà la distanza ricercata *DH* con dividere la loro somma per lo prodotto, che si ha moltiplicando i due pesi *A*, e *B* insieme per la *CG*.

530. Questa determinazione intanto della distanza *DH* deve averfi come esatta, sempre quando i diversi pesi *A*, e *B* del pendolo composto sono così piccioli, che non incontrasi sensibile divario tra le diverse velocità, con cui nell'oscillazioni del pendolo muovonsi le minime parti di ciascuno di essi. In fatti quando ciò avviene, i pesi *A*, e *B* aumentati nella ragione delle loro velocità ritengono presso a poco gli stessi centri di gravità, che avevano prima; e quindi si è, che i due prodotti

dotti, uno del peso A per lo quadrato della AE , l'altro del peso B per lo quadrato della BF , siano eguali al solo prodotto dei due pesi A , e B insieme per lo rettangolo delle due CG , DG . Quora poi ritrovafi divario sensibile tra le velocità, con cui muovonfi le minime parti dei pesi A , e B ; in tal caso con aumentarsi questi pesi nella ragione delle loro velocità, cambiansi sensibilmente i loro centri di gravità. Onde siccome non può sussistere l'uguaglianza tra i riferiti prodotti, così neppure potrà determinarsi nell'accennata guisa la distanza DH , di cui si tratta.

531. Quindi per definire in quest'altro caso la distanza ricercata DH , primieramente dovrà ritrovarfi il centro del moto così del peso A , come del peso B ; indi supposto, che a , e b siano questi centri, dovranno determinarsi altresì le loro distanze ae , bf dall'asse della sospensione. Ed in fatti, attenta la maniera di determinare il centro del moto di qualsivoglia grandezza, chiaro si è, che ad a , e b corrispondono i centri di gravità dei nuovi pesi, che si hanno con aumentare le minime parti dei due A , e B nella ragione delle loro velocità. Quindi due prodotti, uno del peso A per lo rettangolo delle due AE , ae , l'altro del peso B per lo rettangolo delle due BF , bf , faranno eguali al solo prodotto dei due pesi A , e B insieme per lo rettangolo delle due CG , DH . Onde se dividasi la somma dei primi due prodotti per lo prodotto, che si ha moltiplicando i due pesi A , e B insieme per la CG ; il quoziente di questa divisione ci darà la distanza DH , che si dimanda (126).

Dell' equilibrio di più potenze, applicate ad un corpo rigido, ed inflessibile.

532. **P** Afferremo ora a ragionare dell' equilibrio di più potenze, che con diverse direzioni sforzansi di tirare a se un medesimo corpo; e per andare con ordine, distingueremo due casi: cioè uno, quando il corpo tirato da più potenze è rigido, ed inflessibile; e l'altro, quando al contrario egli è di sua natura pieghevole. Per l'esame intanto così dell'uno, come dell'altro caso, giova prima investigare, quando equilibransi tra esso loro più potenze, che cercano di tirare a se un medesimo punto; ed intorno a questo equilibrio può stabilirsi il seguente teorema generale: cioè, che se le rette AB , AC , AD , AE disegnino così le potenze, che tirano il punto A , come le proprie loro direzioni, debbano equilibrarsi tra loro le riferite potenze, sempre quando il punto A ritrovasi essere il comune centro di gravità di altrettanti pesi eguali situati nei termini B , C , D , E di quelle rette.

533. Fingiamo perciò, che non già le potenze, ma i riferiti pesi tirino a se il punto A ; e per poco, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che ciascuno di essi lo tirerà con forza proporzionale alla potenza, a cui egli corrisponde. Onde faranno tra loro in equilibrio le potenze, sempre quando i pesi colle loro forze equilibransi intorno al punto A . Ma non possono i pesi equilibrarsi intorno a quel punto, se egli non sia il comune loro centro di gravità. Dunque ancora le potenze disegnate per le rette AB , AC , AD , AE non potranno essere tra loro in equilibrio, se il punto A tirato da dette potenze non sia il comune centro di gravità di altrettanti pesi eguali situati nei termini, B , C , D , E di quelle rette.

534. Per mezzo di questo teorema possiamo in
primo

primo luogo comporre insieme quante si siano potenze AC , AD , AE , che tirano il punto A , ed ecco come. Pongansi primieramente nei loro termini altrettanti pesi eguali; e ritrovisi il comune loro centro di gravità, che sia il punto F . Prolunglisi di poi la AF talmente fino al punto G , che la AG sia tripla della AF ; ed io dico, che la potenza composta sia la AG . Per dimostrarlo, sia AB un' altra potenza che equilibrisi colle tre date AC , AD , AE ; e per ragion dell' equilibrio la potenza, che si ha colla composizione delle tre AC , AD , AE , dovrà essere eguale, e contraria alla AB . Ma se al punto B pongasi un' altro peso eguale a ciascuno de' tre primi, il comune centro di gravità di tutti quattro i pesi deve essere il punto A . Dunque non solo faranno a dirittura le due AB , AF , ma farà altresì la AB tripla della AF ; e pertanto, facendosi eguali, e contrarie le due AB , AG , farà AG la potenza, che si ha colla composizione delle tre AC , AD , AE .

535. Possiamo in secondo luogo esaminare ciocche deve avvenire al punto A , essendo egli tirato da più potenze AB , AC , AD , AE , ed ecco come. Separisi primieramente ad arbitrio una di esse dall'altre, e sia la AB ; indi le rimanenti AC , AD , AE compongansi insieme, e sia AG la potenza, che si ha colla loro composizione. Se adunque le due AB , AG siano eguali, e contrarie; il punto A farà tirato egualmente per ogni lato, ed in conseguenza rimarrà egli fermo, ed immobile. Ma se le due AB , AG siano contrarie, ma non già eguali; in tal caso il punto A si muoverà con velocità proporzionale alla loro differenza, e colla direzione della potenza maggiore. Ed in fine, se le due AB , AG non siano contrarie, ma contengano un qualche angolo; si muoverà il punto A per la diagonale del parallelogrammo formato colle stesse due, e la velocità del suo moto corrisponderà in proporzione alla lunghezza della medesima diagonale.

Fig. 93.

536. Possiamo finalmente dimostrare un'altro teorema speciale, e si è, che per poterli equilibrare tra loro la tre potenze AB , AC , AD , che tirano il punto A , primieramente le loro direzioni debbono essere in un medesimo piano, ed indi il centro di gravità del triangolo BCD formato colle rette, che congiungono i loro estremi, deve essere il punto A . In fatti secondo il teorema generale non possono essere in equilibrio le tre potenze AB , AC , AD , se il punto A non sia il centro di gravità di tre pesi eguali situati ne' punti B , C , D . Ma perchè ciò possa avvenire, primieramente la AB deve incontrarsi prolungata colla CD , indi deve dividerla per metà in E , e finalmente la stessa AB deve essere dupla della AE . Dunque per poterli dar luogo all'equilibrio, non solo la AB dee ritrovarsi nel medesimo piano coll'altre due AC , AD , ma bisogna altresì, che il centro di gravità del triangolo BCD sia il punto A .

537. Ma in un'altra maniera ancora può indagarsi l'equilibrio tra le tre potenze AB , AC , AD , che tirano il punto A ; e si è, se essendo le loro direzioni in un medesimo piano, sia ciascuna di esse proporzionale al seno dell'angolo contenuto dall'altre due. Compitacsi perciò il parallelogrammo $ACFD$, ed essendo i tre angoli ACF , AFC , CAF complimenti a due retti degli altri tre CAD , BAD , BAC , avranno così gli uni, come gli altri gli stessi seni. Ma per ragion del triangolo ACF , i di cui lati sono eguali alle tre rette, che ci additano le potenze, la prima potenza AB corrisponde in proporzione al seno dell'angolo ACF , la seconda AC al seno dell'angolo AFC , e la terza AD al seno dell'angolo CAF . Dunque corrisponderà altresì in proporzione la prima AB al seno dell'angolo CAD , la seconda AC al seno dell'angolo BAD , e la terza AD al seno dell'angolo BAC .

538. Esaminato l'equilibrio delle potenze, che
tra-

tirano a se un medesimo punto, fingiamo ora, che la BCD sia la lunghezza di un qualche corpo rigido, ed inflessibile, a cui applichinsi più potenze, come BE, CF, DG , che la tirino verso un medesimo lato con direzioni esistenti in un' istesso piano. Se adunque le loro direzioni s'incontrino prolungate in un medesimo punto, farà tirata da esse la retta BCD , come farebbe tirato quel punto. Onde tuttavia col metodo esposto potrà definirsi la potenza, che si ha colla loro composizione. Non incontrandosi poi le loro direzioni in un medesimo punto, prendasi nel piano di esse dall'altro lato un punto A ad arbitrio, e tirinsi alla retta BCD le parallele EH, FI, GL , che vadansi ad incontrare colle rette AB, AC, AD prolungate ne' punti H, I, L . E siccome può risolversi la prima potenza BE nelle due BH, EH , la seconda CF nelle due CI, FI , e la terza DG nelle due DL, GL ; così, se MN sia la potenza composta dalle tre convergenti BH, CI, DL , ed NO la potenza composta dalle tre parallele EH, FI, GL , farà MO la potenza, che si ha colla composizione delle tre date BE, CF, DG .

Fig. 94.

539. Quindi si avrà l'equilibrio tra le potenze BE, CF, DG , che tirano verso un medesimo lato la retta BCD , o se questa stessa retta sia tirata verso il lato opposto da una potenza eguale, contraria alla MO , o pure se nel punto M pongasi un sostegno, che faccia le veci di quest'altra potenza. In ambidue i casi intanto egli è facile il dimostrare, che se moltiplichinsi le potenze per le distanze delle loro direzioni dal punto M , i prodotti nati dalle due BE, CF , che sono da una parte, siano eguali al prodotto nato dalla DG , che ritrovasi dall'altra parte. Si abbassino perciò le perpendicolari Mr, Ms, Bt sulle rette BH, BE, EH ; e facendosi i due triangoli BMr, BMs equiangoli cogli altri due BHt, BEt , le due ragioni di Mr a BM , e di BM ad Ms faranno eguali all'altre due ragioni di Bt a BH , e di BE a Bt . Quindi la ragione

gione di Mr ad Ms , che si compone dalle prime due, farà eziandio eguale alla ragione di BE a BH , che si compone dall'altre due; e pertanto i prodotti delle due BH , BE nelle loro distanze Mr , Ms dal punto M faranno tra loro eguali.

540. In una maniera consimile dimostreremo, che siano eguali tra loro, così i prodotti delle due CI , CF per le loro distanze dal punto M , come i prodotti delle due DL , DG per le loro distanze dal medesimo punto. Onde basterà far vedere, che i prodotti delle due BH , CI per le loro distanze dal punto M siano eguali al prodotto della DL per la sua distanza dallo stesso punto. Perciò risolvatisi come sopra le potenze BE , CF , DG così nelle parallele EH , FI , GL , come nelle convergenti BH , CI , DL . E poichè le potenze parallele niente conferiscono in tirare la retta BCD , perciò farà tirata questa retta dalle sole potenze convergenti. Onde non potranno equilibrarsi tra loro le potenze BE , CF , DG , se non siano altresì in equilibrio le loro convergenti BH , CI , DL , le quali compongono insieme la potenza MN , la di cui direzione passa prolungata per lo punto A .

541. Si applichino ora al punto A le potenze convergenti BH , CI , DL secondo le proprie loro direzioni; e siano Ah , Ai , Al . Essendo adunque AM la direzione della potenza, che si ha colla loro composizione; nella stessa AM dovrà ritrovarsi il comune centro di gravità di altrettanti pesi eguali posti nei punti h , i , l . Onde ficcome le distanze dei punti h ; ed i dalla AM debbono essere eguali alla distanza del punto l dalla stessa AM ; così i prodotti della AM per le prime distanze faranno eziandio eguali al prodotto della medesima AM per l'altra distanza. Ma i primi prodotti sono eguali a quei, che si hanno con moltiplicare le potenze Ah , Ai per le distanze delle loro direzioni dal punto M , e l'altro prodotto è eguale a quello, che si ha con moltiplicare la po-

tenza

tenza Al per la distanza della sua direzione dal medesimo punto. Dunque i prodotti delle potenze BH , CI per le distanze delle loro direzioni dal punto M faranno parimente eguali al prodotto della potenza DL per la distanza della sua direzione dallo stesso punto (127).

XV.

Dell' equilibrio di più potenze applicate ad un corpo di sua natura pieghevole.

542. **E** Samineremo ora l' altro caso; quando il corpo tirato da più potenze è di sua natura pieghevole. Fingiamo perciò, che la BCD Fig. 95. sia la lunghezza di una corda, o di altro corpo confimile, la quale sia attaccata coi suoi termini B , e D a due punti fissi, ed immobili. Applicchisi primieramente ad un punto di essa C la sola potenza CE , da cui le porzioni CB , CD siano talmente tese, che si spezzino tendendosi di vantaggio. E siccome impiegasi l' azione di questa potenza in tendere le porzioni della corda CB , CD , le quali perciò dispongonsi in modo, che contengono insieme un qualche angolo; così non è egli da porsi in dubbio, che resistono alla medesima le forze, che colla coesione delle loro parti esercitano le stesse porzioni.

543. Quindi considerando il punto C come tirato da tre potenze, che agiscono colle direzioni CB , CD , CE ; ed equilibransi tra esso loro; farà la resistenza della porzione CB alla resistenza della porzione CD , come il seno dell'angolo DCE al seno dell'angolo BCE . Onde le resistenze delle due porzioni CB , CD non possono essere tra loro eguali, se non siano eguali altresì i due angoli BCE , DCE ; e pertanto se la direzione della potenza CE non divida per metà l'angolo BCD contenuto dalle due porzioni della corda. Conforme poi la potenza CE deve essere alla resistenza di ciascuna delle due porzioni, come

come il seno dell'angolo BCD al seno dell'angolo opposto alla porzione, di cui si tratta; così nella supposizione di essere eguali le resistenze delle due porzioni, la stessa potenza farà a ciascuna delle due resistenze, come il seno dell'angolo BCD al seno della sua metà.

Fig. 96.

544. Applicchisi in appresso alla stessa BCD un'altra potenza FG ; che la tiri a se colla medesima legge della prima CE . E considerando la sola porzione di essa CF , che per la sua tensione può riguardarsi come una retta rigida; chiaro si è, che ella sia tirata per un lato dalle due potenze CE , FG , e per l'altro da due altre potenze, che agiscono colle direzioni CB , FD . Quindi siccome la tirano le due prime, come se tirassero il punto A , in cui incontransi prolungate le loro direzioni; così la tireranno le altre due come tirassero il punto H , in cui le direzioni di esse prolungate parimente s'incontrano. Onde se vogliansi le due potenze, che risultano dalla composizione così dell'une, come dell'altre, non è egli da porsi in dubbio, che passerà per lo punto A la direzione della prima, e per lo punto H la direzione della seconda; e pertanto, perchè queste due potenze per ragion dell'equilibrio debbono essere eguali, e contrarie, farà AH la direzione così dell'una, come dell'altra.

545. Considerisi di poi separatamente così la porzione BCF , come la porzione CFD ; e si dimostrerà come sopra, che non possano essere eguali le resistenze delle loro porzioni BC , CF , FD , se non dividasi egualmente così l'angolo BCF dalla direzione della potenza CE , come l'angolo CFD dalla direzione della potenza FG . E poichè la potenza, che si ha colla composizione delle due CE , FG , ed agisce colla direzione AH , tira la $BCFD$, come se applicata al punto H tirasse la BHD ; chiaro si è, che oppongonsi ad essa le sole resistenze delle due porzioni estreme BC , DF , le quali agiscono

scono colle direzioni BH , DH . Onde siccome queste resistenze debbono essere tra loro, come i seni dei due angoli AHD , AHB ; così non potranno le medesime essere eguali, se la AH non divida egualmente l'angolo BHD contenuto dalle due porzioni estreme BC , DF .

546. Applicchisi inoltre alla medesima BCD una terza potenza, che sia IL . E considerando primieramente la sola porzione $BCFI$, che è tirata dalle due potenze CE , FG ; dimostreremo come sopra, che incontrandosi prolungate le due CE , FG nel punto M , e le due BC , IF nel punto N , sia MN la direzione della potenza, che si ha colla composizione delle due CE , FG . Se poi la NO sia la potenza composta, che agisce con quella direzione; chiaro si è, che ella tirerà la porzione $BCFI$, come se applicata al punto N tirasse la BN . Quindi le tre potenze CE , FG , IL tireranno la $BCFID$ nella stessa guisa, che le due NO , IL tirano la $BNID$. Onde se incontransi prolungate le due NO , IL nel punto A , e le due BN , DI nel punto H ; sarà AH la direzione della potenza, che si ha colla composizione così delle due NO , IL , come delle tre CE , FG , IL ;

Fig. 97.

547. Questa potenza intanto, che equivale alle tre CE , FG , IL , ed agisce colla direzione AH , tira la $BCFID$, come se applicata al punto H tirasse la BHD . Quindi si opporranno ad essa le sole resistenze delle due porzioni estreme BC , DI , le quali agiscono colle direzioni BH , DH . Onde siccome queste resistenze debbono essere tra loro, come i seni dei due angoli AHD , AHB ; così non potranno le medesime essere eguali, se la AH non divida egualmente l'angolo BHD contenuto dalle due porzioni estreme BC , DI . Ed in fine affinché siano eguali le resistenze così delle porzioni estreme BC , DI , come dell'altre due di mezzo CF , IF ; si dimostrerà come sopra, che ciascuno dei tre angoli BCF , CFI , FID debba essere divi-

so

so per metà dalla direzione della potenza, che ritrovasi applicata al suo vertice.

548. Or qualunque siasi il numero delle potenze, che tirano a sé la BCD ; chiaro si è, che con comporre insieme con ordine, cioè primieramente la prima colla seconda, indi la composta di esse colla terza, e così di mano in mano fino all'ultima, resterà determinata finalmente la direzione della potenza, che si ha colla composizione di tutte. Conforme poi può ella riguardarsi come una direzione mezza delle stesse potenze; così si ritroverà, che la medesima debba sempre passare per lo punto, in cui incontransi prolungate le due porzioni estreme della BCD . Ed in fine, siccome per poter essere eguali le resistenze di queste due porzioni la stessa mezza direzione dee dividere per metà l'angolo formato col loro incontro; così non potranno essere eguali le resistenze di tutte le porzioni della BCD , se ciascuno degli angoli, che le medesime formano insieme, non sia diviso egualmente dalla direzione della potenza, che ritrovasi applicata al suo vertice.

Fig. 98.

549. Del rimanente, siccome con aumentarli all'infinito il numero delle potenze, che tirano la BCD , la medesima diventa una linea curva; così con prolungarsi a dirittura le due estreme porzioni di essa, contigue ai punti B , e D , si avranno le rette, che toccano la curva in detti punti. Quindi se BH , DH siano queste tangenti, la mezza direzione dell'infinita potenze, che tirano la BCD , passerà per H , che è il punto del loro incontro. E poichè alle stesse infinite potenze, o pure a quella, che da esse si compone, oppongonsi le resistenze delle riferite due porzioni estreme, le quali agiscono colle direzioni delle rispettive tangenti; perciò non potranno queste resistenze essere tra loro eguali, se la stessa mezza direzione non divida per metà l'angolo BHD contenuto dalle due tangenti. Ed in fine, affinchè siano eguali le resistenze di tutti i
nimi

nimi elementi della BCD , egli è necessario, che la BCD sia segata ad angoli retti dalla direzione di ciascuna potenza.

550. Per poco poi, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che qualora le infinite potenze, per mezzo di cui incurvasi la BCD , agiscono con direzioni perpendicolari alla stessa curva, debba essere altresì ciascuna di esse proporzionale al seno dell'angolo, che ci addita la curvatura della curva in quel luogo, ove ritrovasi applicata la stessa potenza. Onde se mai le infinite potenze siano tutte tra loro eguali, la curva, in cui piegasi la BCD , dovrà essere di egual curvatura da per tutto; e perciò farà ella circonferenza di cerchio, nel di cui centro s'incontreranno prolungate le direzioni delle stesse potenze: siccome in effetto quelle picciole ampolle, che formansi da fanciulli con sapone sciolto nell'acqua, non per altra ragione veggonsi essere perfettamente rotonde, se non perchè l'aere racchiuso dentro di esse colla sua forza elastica preme egualmente, e ad angoli retti le minime loro particelle.

551. Ma conforme, essendo disuguali tra loro le infinite potenze, che tirano la BCD perpendicolarmente, deve essere altra l'indole della curva, in cui la piegano; così potrà ella determinarsi facilmente; se mai sia nota l'attività di ciascuna potenza. Fingiamo perciò, che BCD sia la curva, in cui coll'azione del vento piegasi la vela di una nave. E quantunque muovasi il vento colla direzione della AC , che è l'asse della curva; niente-dimeno le pressioni, che egli esercita contra i minimi suoi elementi, si fanno per rette perpendicolari agli stessi elementi. Se poi Mm sia un dato elemento della curva, dimostreremo a suo luogo, che essendo OM parallela alla AC , la pressione del vento contra detto elemento sia come il quadrato del seno dell'angolo OMm . Ma es-

Fig. 99.

Q

sen-

sendo MT la retta, che tocca la curva nel punto M , la stessa pressione deve essere altresì come il seno dell'angolo TMm . Dunque il quadrato di quel primo seno farà nella semplice ragione di questo altro.

552. Sia ora MN l'ordinata della curva corrispondente al punto M , e siano ancora mo , mr perpendicolari sulle due MN , MT . Se dunque prendasi la Mm per raggio, farà Mo il seno dell'angolo OMm , ed mr il seno dell'angolo TMm ; e perciò il quadrato della Mo farà nella semplice ragione della mr . Quindi se sull'asse AC alzisi la perpendicolare CE di lunghezza tale, che il quadrato della Mo sia eguale al rettangolo delle due CE , mr ; avrà luogo questa uguaglianza da per tutto, e farà CE ad Mo , come Mo ad mr , o pure in ragion composta di Mo ad Mm , e di Mm ad mr . Ma tirate le due EF , Ef parallele all'altre due MT , Mr , ed abbassata sulla EF la perpendicolare fs , si fanno equiangoli così i due triangoli Mom , Cef , come gli altri due Mmr , Efs . Dunque essendo Mo ad Mm , come CE ad Ef , ed Mm ad mr , come Ef ad fs ; farà CE ad Mo , come CE ad fs , ed in conseguenza le due Mo , fs faranno tra loro eguali.

553. Per farsi poi equiangoli eziandio i due triangoli Mom , Ffs ; chiaro si è, che non possono le due Mo , fs essere tra loro eguali, se non siano eguali altresì l'altre due Mm , Ff . Onde perchè quest'uguaglianza deve aver luogo da per tutto, farà l'arco CM eguale alla CF ; e perciò riguardando la costante CE come parametro della curva, la sua indole farà tale, che il parametro CE sia a qualsiasi arco CM , come l'ordinata corrispondente MN alla porzione dell'asse NT , che sostiene la tangente MT . Ed in fatti, essendosi dimostrato l'arco CM eguale alla CF , avrà il parametro CE la stessa ragione alla CF , che all'arco CM .

Ma

Ma per effere i due triangoli CEF , NMT tra loro equiangoli, la ragione delle due CE , CF è eguale alla ragione dell'altre due MN , NT . Dunque il parametro CE farà all'arco CM , come l'ordinata MN alla sottangente NT .

554. Effendo così, egli è facile il dimostrare, che la curva, in cui piegasi la vela di una nave spinta dal vento sia la stessa con quella, in cui per l'attività del suo peso incurvasi la corda BCD , *Fig. 100.* che attaccata coi suoi termini B , e D a due punti fissi, ed immobili pende liberamente. Sia perciò C il punto più basso della corda; e considerando la verticale CA come asse della curva, avremo la tangente nel vertice C con alzare sull'asse CA la perpendicolare CH . Quindi se MH sia la retta, che tocca la *st. ff.* curva in un altro punto M , passerà per lo punto H , in cui incontransi le due CH , MH , la mezza direzione delle infinite potenze, che tirano la porzione CM . Onde siccome queste infinite potenze sono i piccioli pesi dei minimi elementi della stessa porzione; così avremo la potenza, che le medesime compongono insieme, con attaccare al punto H il peso P , che sia eguale al peso della porzione CM .

555. Si abbassi ora sull'asse CA l'ordinata MN , e prolunghisi ancora la MH fino a che s'incontri col medesimo asse nel punto T . Equilibrandosi adunque il peso P colle resistenze, che esercita la corda nei punti C , ed M ; farà la resistenza in C al peso P , come il seno dell'angolo MHP al seno dell'angolo CHM . Ma questi seni sono gli stessi coi due degli angoli THP , CHT , i quali sono tra loro nella ragione di CH a CT , o pure di MN ad NT . Dunque la resistenza in C al peso P farà eziandio in questa stessa ragione. Onde se la resistenza in C , che rimane sempre la stessa, esprimasi per la retta costante CE , la quale perciò potrà riguardarsi come parametro della curva;

Q 2

ed

ed il peso P , che uguaglia quello della porzione CM , esprimasi per la lunghezza della stessa porzione, a cui ritrovasi essere sempre proporzionale; farà il parametro CE all'arco CM , come l'ordinata MN alla sottangente NT (128).

XVI.

Della resistenza, che i gravi sospesi verticalmente oppongono al loro peso.

556. **P**er non tralasciare cosa alcuna, che meriti di essere esaminata, tratteremo finalmente della resistenza, che i gravi sospesi oppongono al proprio loro peso. Ed in vero tenendosi un grave sospeso verticalmente, siccome le parti inferiori coll'attività del loro peso cercano di distaccarsi dall'altre superiori; così ciò, che le trattiene, e si oppone alla loro separazione, si è la forza della coesione, che unisce insieme l'une coll'altre. Or essendo il grave egualmente denso da per tutto, non è egli da porsi in dubbio, che questa forza sia della stessa attività in tutte le minime particelle del grave. Onde siccome in qualsiasi luogo deve ella corrispondere in proporzione al numero delle particelle, che ritrovansi nella sezione orizzontale fatta in quel luogo; così la sezione, e la forza saranno da per tutto proporzionali tra loro. E perciò può stabilirsi su di ciò il seguente teorema generale, cioè, che un grave egualmente denso da per tutto, e sospeso verticalmente resiste in ogni luogo al peso delle parti inferiori con forza proporzionale alla sezione orizzontale fatta nel medesimo luogo.

557. Quindi un grave prismatico, ovvero cilindrico, che sospeso verticalmente non si spezza per l'attività del suo peso, neppure dovrà spezzarsi aumentandosi la sua base; poichè in quella stessa ragione, in cui aumentasi il peso, che ritrovasi
sotto

sotto qualsivisia sezione orizzontale del grave, si aumenterà altresì la sezione medesima, a cui la resistenza corrisponde in proporzione. Ma non avviene così, se facciasi maggiore così la base, come la lunghezza del riferito grave; poichè la resistenza aumentasi nella sola ragione della base, quandochè il peso, a cui ella si oppone, diventa maggiore non solo per l'aumento della base, ma eziandio per quello della lunghezza. Onde siccome due gravi prismatici, ovvero cilindrici, che essendo della stessa materia sono altresì di egual lunghezza, debbono essere egualmente resistenti; così quello dei due sarà meno resistente, che ritrovasi avere lunghezza maggiore.

558. Affinchè poi un grave sospeso verticalmente sia di egual resistenza da per tutto, chiaro si è, che la sua figura debba essere tale, che la sezione orizzontale fatta in qualsivisia luogo corrisponda in proporzione alla parte dello stesso grave, che giace sotto la sezione. Quindi un grave prismatico ovvero cilindrico non potrà essere di questa indole per la ragione, che la sezione orizzontale è la stessa da per tutto, quandochè la porzione, che ritrovasi sotto la sezione, si diminuisce con farsi la sezione più bassa, e si aumenta con farsi al contrario più alta. Anzi per questa stessa ragione, se mai un grave dotato di tal figura sia talmente lungo, che non possa sostenere il suo proprio peso; dovrà egli spezzarsi nella parte sua suprema, cioè nel luogo, da cui egli incomincia a pendere liberamente. Ed in fine, se vogliasi la massima lunghezza, a cui può estendersi lo stesso grave senza spezzarsi; primieramente dovrà determinarsi il massimo peso, che può egli sostenere attaccato alla sua estremità; ed indi dovrà distendersi il grave fino a che il peso della parte aggiunta uguagli quel massimo peso.

559. Siccome poi un grave sospeso verticalmente farà di egual resistenza da per tutto, quante vol-

te la sezione orizzontale fatta in qualsivoglia luogo corrisponde in proporzione alla porzione dello stesso grave, che giace sotto la sezione; così si avrà un grave di questa indole colla rivoluzione intorno al suo asse di quella curva, che i moderni Geometri chiamano curva logaritmica, ed in cui prendendosi le ascisse in progressione aritmetica, ritrovansi essere le ordinate corrispondenti in progressione geo-

Fig. 101. metrica. Per dimostrarlo sia *CMD* la curva logaritmica, che abbia per suo asse la *AB*. Se adunque su di questo asse prendansi le ascisse *A₁*, *A₂*, *A₃*, *A₄*, *A₅*, &c. in progressione aritmetica, cosicchè siano egualmente differenti tra loro; le ordinate corrispondenti *M₁*, *M₂*, *M₃*, *M₄*, *M₅*, &c. faranno in progressione geometrica; e quella stessa ragione, in cui sta la prima *M₁* alla seconda *M₂*, avrà altresì la seconda *M₂* alla terza *M₃*, la terza *M₃* alla quarta *M₄*, la quarta *M₄* alla quinta *M₅*, e così dell'altre.

560. Quindi la natura della curva logaritmica propriamente si è, che le ordinate prese in egual distanza tra loro formino sempre una progressione geometrica. E poichè dopo due qualsivoglia rette date può sempre ritrovarsi una terza proporzionale, che similmente farà data; chiaro si è, che la stessa logaritmica debba estendersi all'infinito, così dalla parte, verso dove aumentansi le sue ordinate, come dall'altra, verso dove minoransi. Onde siccome ella da un lato dee sempre più discostarsi dal suo asse, e dall'altro sempre più ad esso avvicinarsi; così dovrà averfi il medesimo asse come asintoto della logaritmica, cioè come una retta, a cui accostasi continuamente la curva, senza giammai incontrarla. Se poi prendansi quattro ordinate, non già egualmente distanti tra loro, ma bensì con legge tale, che la distanza tra le prime due sia eguale alla distanza tra l'altre due; pure la ragione dell'une sarà eguale alla ragione dell'altre.

561. Effendo così, può dimostrarsi primieramente intorno alla logaritmica, che la porzione dell'asse, da cui è sostenuta qualsivoglia sua tangente, sia da per tutto della stessa lunghezza. Siano perciò *MS*, *PT* due rette, che tocchino ne' punti *M*; e *P* la logaritmica *CMD*, e s'incontrino coll'asse *AB* ne' punti *S*, e *T*; io dico, che effendo *MN*, *PQ* le ordinate abbassate full'asse dai due punti del contatto, siano eguali le porzioni *NS*, *QT*, che sostengono le due tangenti. Per dimostrarlo fingiamo, che *Nn*, *Qq* siano due porzioni dell'asse infinitamente picciole, ed eguali tra loro; ed effendo *mn*, *pq* le ordinate corrispondenti ai punti *n*, e *q*, farà *MN* ad *mn*, come *PQ* a *pq*. Ma potendosi riguardare i due archetti *Mm*, *Pp* come porzioni delle tangenti *MS*, *PT*, chiaro si è, che le due *MN*, *mn* siano nella ragione di *NS* ad *nS*, e le altre due *PQ*, *pq* nella ragione di *QT* a *qT*. Dunque dovendo essere *NS* ad *nS*, come *QT* a *qT*, farà altresì come *NS* ad *Nn*, così *QT* a *Qq*; e pertanto conforme sono eguali le due *Nn*, *Qq*, così saranno eguali parimente le due *NS*, *QT*.

Fig. 102.

562. Può dimostrarsi in secondo luogo, che lo spazio infinitamente lungo *BACD* tagliato da un'ordinata qualsivoglia *CA* verso quella parte, ove la logaritmica sempre più si avvicina al suo asse, sia eguale al rettangolo fatto dalla stessa ordinata *CA* nella sottotangente *NS*. Tirisi perciò la *mo* parallela all'asse *AB*; ed effendo equiangoli i due triangoli *MNS*, *Mom*, farà *MN* ad *NS*, come *Mo* ad *om*, ovvero *Nn*. Onde il rettangolo delle due *MN*, *Nn*, non differente dal picciolo trapezio *MNnm*, farà eguale al rettangolo dell'altre due *NS*, *Mo*; ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, farà l'intero spazio *BACD* eguale al rettangolo, che si fa dall'intera ordinata *CA* nella sottotangente *NS*, che si è dimostrata essere da per tutto costante. Per la stessa ragione poi lo spazio *BQPD* tagliato dall'altra ordinata *PQ* farà

Q 4 egua-

eguale al rettangolo fatto dalla PQ nella stessa sottotangente: donde egli è facile il ricavarne, che i due spazi $BACD$, $BQPD$ siano tra loro, come le ordinate CA , PQ , a cui si terminano.

563. Può dimostrarsi in terzo luogo, che se E sia il centro di gravità dello spazio infinitamente lungo $BACD$, debba essere eguale alla sottotangente NS la sua distanza EF dall' ordinata CA , ed alla quarta parte di questa ordinata la sua distanza EG dall' asse AB . In fatti essendo il picciolo trapezio $MNnm$ eguale al rettangolo delle due Mo , NS ; si avrà il solido delle tre AN , Mo , NS con moltiplicarlo per la distanza del suo centro di gravità dalla CA , e la metà del solido dell'altre tre MN , Mo , NS con moltiplicarlo per la distanza dello stesso centro dalla AB . Onde si ritroverà, che la somma de' prodotti consimili al primo sia eguale al prodotto dello spazio $BACD$ per la NS , e la somma de' prodotti consimili al secondo sia eguale al prodotto del medesimo spazio per la quarta parte della CA . Ma le stesse somme debbono essere eguali ai prodotti dello spazio $BACD$ per le due EF , EG . Dunque farà la EF eguale alla NS , e la EG eguale alla quarta parte della CA .

564. Può dimostrarsi finalmente, che il solido descritto colla rivoluzione dello spazio infinitamente lungo $BACD$ intorno all' asse AB sia eguale alla metà del cilindro, che ha per base il cerchio descritto coll' ordinata AC come raggio, e per altezza la sottotangente NS . In fatti siccome il riferito cerchio si ha con moltiplicare la sua circonferenza per la metà del raggio CA , così la picciola corona del medesimo cerchio corrispondente alla porzione del raggio Ct si avrà con moltiplicare la stessa circonferenza per la Ct . Quindi il cerchio farà alla picciola corona, come la metà della CA alla Ct , o pure come la metà della NS alla Aa ; onde il prodotto del cerchio per la Aa sarà eguale
al

E DEL MOTO DE' CORPI. 249

al prodotto della picciola corona per la metà della NS ; ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, farà il solido formato colla rivoluzione dello spazio $BACD$ intorno all'asse AB eguale alla metà del cilindro, che ha per base il cerchio descritto col raggio CA , e per altezza la sottotangente NS .

565. La stessa verità può dimostrarsi ancora in altra guisa, ed ecco come. Sia E il centro di gravità dello spazio infinitamente lungo $BACD$. E poichè la sua distanza EG dall'asse AB si è dimostrata eguale alla quarta parte della CA ; si porterà il centro E nella rivoluzione dello spazio per una circonferenza di cerchio, che farà la quarta parte di quella, che si descrive col raggio CA . Onde il solido, che si genera, farà eguale al prodotto dello spazio $BACD$, o pure del rettangolo delle due CA , NS per la quarta parte della riferita circonferenza. Ma moltiplicando il raggio CA per la quarta parte della sua circonferenza si ha la metà del cerchio descritto collo stesso raggio. Dunque il solido, che si genera colla rivoluzione dello spazio infinitamente lungo intorno all'asse AB farà eguale alla metà del cilindro, che ha per base il suddetto cerchio, e per altezza la sottotangente NS .

566. In una maniera consimile dimostreremo altresì, che il solido formato colla rivoluzione dell'altro spazio infinitamente lungo $BQPD$ intorno all'asse AB sia eguale alla metà del cilindro, che ha per base il cerchio descritto coll'ordinata PQ come raggio, e per altezza la stessa sottotangente: dal che egli è facile il ricavarne, che i solidi formati colla rivoluzione dei due spazi $BACD$, $BQPD$ intorno all'asse AB siano tra loro, come i cerchi, che hanno per raggi le due ordinate CA , PQ . Ed essendo così, non è egli da porsi in dubbio, che questi stessi solidi sospesi verticalmente debbano essere di egual resistenza da per tutto; poichè ovunque

que facciasi in essi la fezione orizzontale, farà la porzione, che giace sotto la fezione, proporzionale alla fezione medesima. Se poi sugli stessi spazj **BACD**, **BQPD** elevinsi solidi, che si terminino ad altri spazj simili, eguali, e paralleli ai primi; si ritroverà, che ancora questi altri solidi sospesi verticalmente fiano di equal resistenza per tutta la loro lunghezza.

567. Del rimanente egli è qui da notarsi, che sebbene un solido prismatico ovvero cilindrico sospeso verticalmente non sia di equal resistenza da per tutto; nientedimeno se il medesimo voglia considerarsi come privo della sua gravità, e colla forza, che deriva dalla coesione delle sue parti, debba egli resistere ad un dato peso attaccato alla sua estremità, in tal caso la sua resistenza farà la stessa per tutta la sua lunghezza. In fatti siccome è dato il peso, che colla sua attività si sforza di spezzare il solido in qualsivisia sua fezione; così è data altresì la forza, che resiste al dato peso. Onde essendo in tutte le fezioni il peso, e la forza proporzionali tra loro, per necessità il solido dovrà essere egualmente resistente da per tutto. Per la stessa ragione poi due solidi prismatici ovvero cilindrici privi di gravità resisteranno egualmente a due pesi attaccati ai loro termini, sempre quando le loro basi sono nella stessa ragione coi pesi, che agiscono contro di essi (129).

Della resistenza , che i gravi sospesi orizzontalmente oppongono al loro peso .

568. **Q**uantunque un grave sospeso orizzontalmente sia eziandio soggetto a spezzarsi per l'attività del suo proprio peso ; nientedimeno in quest' altra sua posizione il peso , e la resistenza agiscono tra esso loro per mezzo di una leva ; onde si è , che dee giudicarsi del loro equilibrio in altra guisa . Fingiamo perciò, *Fig. 103.* che ADE sia il grave , il quale ficcato con uno de' suoi estremi dentro di un qualche muro rimane sospeso orizzontalmente . E se mai prevalendo l'attività del suo peso , si spezzi egli presso la sezione verticale ABC ; chiaro si è , che il medesimo spezzandosi si aggirerà intorno alla retta orizzontale BC , che è la base della riferita sezione . Onde conforme la stessa BC dee riguardarsi come il sostegno della leva , per mezzo di cui il peso , e la resistenza agiscono tra esso loro ; così se nel piano inferiore del grave sia F il punto , a cui corrisponde il suo centro di gravità ; e nella sezione verticale ABC il punto , in cui si riunisce la sua resistenza , sia G ; avremo le due braccia della leva con abbassare sulla BC le perpendicolari FH , GH .

569. Or secondo è stato avvertito di sopra , qualora il grave è egualmente denso da per tutto , l'attività della coesione deve essere la stessa in tutte le sue parti ; e perciò spandendosi egualmente nella sezione ABC la forza , con cui ella resiste al peso del grave , si riunirà la medesima nel centro di gravità della stessa sezione . Quindi siccome il momento della forza , che tende a spezzare il grave ADE presso la sezione verticale ABC , si ha con moltiplicare il peso del grave per la distanza del suo centro di gravità dal piano della sezione ; così il momento dell' altra forza , con cui la sezione

ne ABC impedisce, che il grave non si spezzi, si avrà con moltiplicare la medesima sezione per la distanza del suo centro di gravità dalla sua base BC . Onde conforme si ha l'equilibrio, sempre quando i riferiti due prodotti, o siano momenti sono tra loro eguali; così farà il grave di egual resistenza da per tutto, quantevolte gli stessi momenti in qualsivisia sua sezione verticale sono tra di essi in data regione.

570. Essendo così, se il grave sia prismatico, ovvero cilindrico, chiaro si è, che sospeso orizzontalmente non possa egli essere di egual resistenza da per tutto; e ciò per la ragione, che il momento della resistenza in ogni sua sezione verticale ritrovasi essere sempre lo stesso, quandocchè con diminuirsi la lunghezza del grave si diminuisce il momento del peso, e perchè minorasi il peso medesimo, e perchè la distanza del suo centro di gravità dal piano della sezione si fa eziandio minore. Anzi il riferito grave neppure potrà essere egualmente resistente per tutta la sua lunghezza, se considerato come privo di gravità debba egli resistere colla forza, che deriva dalla coesione delle sue parti, ad un dato peso attaccato alla sua estremità. Imperocchè sebbene sia dato il peso, che tende a spezzarlo in qualsivisia sua sezione verticale; niente-dimeno il di lui momento tuttavia si diminuisce con avvicinarsi la sezione al medesimo peso; onde si è, che il momento della resistenza, ed il momento del peso non faranno da per tutto in data ragione tra loro.

Fig. 104. 571. Intanto se AD sia una parabola, che abbia per vertice principale il punto D , e per tangente a questo vertice la retta BD ; colla sua rivoluzione intorno alla riferita tangente avremo un solido, che sospeso orizzontalmente farà da per tutto di egual resistenza. Prendasi perciò nella parabola un punto M ad arbitrio, da cui si abbassi sulla BD la perpendi-

pendicolare MN . E poichè colla sezione verticale fatta in quel punto generasi un cerchio, che ha per raggio la MN ; chiaro si è, che il momento della resistenza, che si esercita in detta sezione, sia nella triplicata ragione della MN , o pure nella sestuplicata della DN . Ma essendo la porzione del solido corrispondente alla medesima sezione nella quintuplicata ragione della DN , ed essendo inoltre la distanza del suo centro di gravità dal piano della stessa sezione nella semplice ragione della DN , ancora il momento del peso della riferita porzione deve essere nella sestuplicata ragione della DN . Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso faranno proporzionali tra loro; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione; sarà il solido, di cui si tratta, egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

572. Se poi sullo spazio parabolico ABD elevisi un solido, che si vada a terminare all'altro spazio abd simile, eguale, e parallelo al primo; egli è facile il dimostrare, che ancora questo altro solido sospeso orizzontalmente in modo, che abbia per sua base il rettangolo $BDdb$, sia di egual resistenza da per tutto. Prendasi perciò di nuovo nella parabola un punto M ad arbitrio, da cui si abbassi ancora sulla BD la perpendicolare MN . E poichè colla sezione verticale fatta in quel punto producesi il rettangolo $MNnm$, di cui è data la base Nn ; sarà il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, nella duplicata ragione della MN , o pure nella quadruplicata della DN . Ma per essere la porzione del solido corrispondente alla medesima sezione nella triplicata ragione della DN , e per essere inoltre la distanza del suo centro di gravità dal piano della stessa sezione nella semplice ragione della DN , ancora il momento del peso della riferita porzione viene ad essere nella quadruplicata ragione della DN . Dunque il momento della resistenza,

za,

Fig. 105.

za, ed il momento del peso faranno proporzionali tra loro; e pertanto, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il diviso solido di egual resistenza per tutta la sua lunghezza.

573. Un'altro solido egualmente resistente da per tutto si ha altresì per mezzo dello spazio logaritmico infinitamente lungo $BACD$; ma conforme *Fig. 102.* deve egli elevarsi su 'l riferito spazio in modo, che si termini ad un'altro spazio simile, eguale, e parallelo al primo; così il medesimo dee sospendersi orizzontalmente con legge tale, che abbia per sua base uno dei due spazi. In fatti se MN sia un'ordinata della logaritmica, e facciasi nel solido una sezione verticale, che corrisponda alla MN ; si avrà con essa un rettangolo, la di cui altezza sarà data; onde il momento della resistenza, che esercitarsi in detta sezione, sarà proporzionale alla MN . Ma alla stessa MN è ancora proporzionale il momento del peso, che ritrovasi nella proporzione del solido corrispondente alla medesima sezione, per essere la distanza del suo centro di gravità dal piano della sezione eguale alla sottotangente della logaritmica, che è da per tutto la stessa. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso faranno proporzionali tra loro; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il riferito solido egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

574. Volendosi poscia considerare il solido, che dee sospendersi orizzontalmente, come privo di gravità, resisterà egli egualmente da per tutto ad un dato peso attaccato alla sua estremità, se abbia *Fig. 106.* per sua base un triangolo qualsivoglia, come BDC , e sia elevato su di esso in modo, che si termini ad un'altro triangolo simile, eguale, e parallelo al primo. Tirisi perciò la MN parallela alla BC . E siccome facendosi nel solido una sezione verticale, che corrisponda alla MN , si avrà con essa
un

E DEL MOTO DE' CORPI. 255

un rettangolo, la di cui altezza sarà data; così il momento della resistenza, che esercitafi in detta sezione, sarà proporzionale alla sua base MN . Ma essendo la DH perpendicolare sulle due BC, MN , chiaro si è, che il momento del peso attaccato al punto D sia proporzionale alla DO . Dunque il momento della resistenza al momento del peso sarà, come MN a DO , o pure come BC a DH ; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il diviso solido egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

575. Un solido di questa indole può averfi ancora per mezzo della parabola, ed ecco come. Sia AD la parabola, che abbia per vertice principale il punto D , e per asse la BD . Si abbassi sull'asse l'ordinata AB , ed elevisi sullo spazio ABD un solido, che si vada a terminare ad un' altro spazio abd simile, eguale, e parallelo al primo. Io dico, che sospingendosi questo solido orizzontalmente in modo, che abbia per sua base il rettangolo $BDbd$, resisterà egli egualmente da per tutto ad un dato peso attaccato alla sua estremità. Prendasi perciò nella parabola un punto M ad arbitrio; ed essendo la sezione verticale fatta in questo punto il rettangolo MNm , la di cui base Nn è data, sarà il momento della resistenza, che esercitafi in detta sezione, nella duplicata ragione della MN , o pure nella semplice ragione della DN . Ma in questa stessa semplice ragione è altresì il momento del peso. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso saranno proporzionali tra loro; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il riferito solido egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

Fig. 107.

576. Se poi la curva AD sia d'indole tale, che i cubi delle sue ordinate perpendicolarmente abbassate sull'asse BD siano, come le ascisse corrispondenti; ancora colla sua rivoluzione intorno all'asse

Fig. 108.

BD

BD si avrà un solido, che sospeso orizzontalmente, e considerato come privo di gravità resisterà egualmente da per tutto ad un dato peso attaccato alla sua estremità. Prendasi perciò nella curva un punto **M** ad arbitrio, da cui si abbassi sull' asse **BD** l' ordinata **MN**. E poichè colla sezione verticale fatta in quel punto generasi un cerchio, che ha per raggio la **MN**; chiaro si è, che il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, sia nella triplicata ragione della **MN**, o pure nella semplice ragione della **DN**. Ma in questa stessa semplice ragione è altresì il momento del peso. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso faranno proporzionali tra loro; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il solido, di cui si tratta, egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

577. Or un solido, che si sospende orizzontalmente, può situarsi ancora in modo, che ciascuno de' suoi estremi sia sostenuto da un qualche appoggio; ma in questo caso, siccome il peso totale del solido si riunisce nel suo centro di gravità, così eziandio la resistenza si riunirà nella sezione verticale fatta nello stesso centro; onde si è, che si avrà la resistenza totale, con moltiplicare la riferita sezione per l' intiera lunghezza del solido. Per poco poi, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che per avere il momento del peso debba moltiplicarsi il solido per ciascuna delle due rette, che ci additano le distanze del suo centro di gravità dai due appoggi. E poichè, spezzandosi il solido nella sezione verticale, in cui si riunisce la resistenza totale, incomincia egli a spezzarsi dalla parte sua più bassa; perciò neppure sarà egli difficile ad intendersi, che si avrà il momento della resistenza totale con moltiplicarla per la distanza del centro di gravità della sezione dalla parte sua più alta.

578. Se poi il solido sospeso orizzontalmente colla riferita legge voglia considerarsi come privo di gravità, ed il medesimo debba resistere ad un dato peso attaccato ad uno de' suoi punti; tuttavia avrà luogo la stessa teoria, se non che la resistenza si riunirà nella sezione verticale fatta nel luogo, donde pende il peso dato. Giova intanto l'avvertire, che siccome per avere il momento del peso deve egli moltiplicarsi per le due rette, che ci additano le sue distanze dai due appoggi; così con cambiare il punto, a cui attaccafi il dato peso, si cambierà altresì il momento dello stesso peso. Ed essendo così, non si durerà fatica ad intendere, che resisterà il solido con egual forza al peso dato, ovunque egli si attacchi, sempre quando la sua figura è tale, che ciascuna sezione verticale moltiplicata per la distanza del suo centro di gravità dalla parte sua più alta sia in data ragione col rettangolo delle due rette, che ci additano le distanze della stessa sezione dai due appoggi.

579. Del rimanente in un solido sospeso orizzontalmente potrebbe non essere vero, che la forza della resistenza si riunisca, e si raccolga nel centro di gravità della sezione, in cui ella si esercita. Suppongasi perciò, come per altro sembra molto verisimile, che i piccioli filamenti della sezione siano di lor natura capaci di distendersi; ed in questa supposizione chiaro si è, che resisteranno gli stessi filamenti coll' intiere loro forze, quantevolte si faranno distesi in modo, che si spezzino con distendersi di vantaggio. Or per ragion della leva, per mezzo di cui i medesimi filamenti agiscono resistendo, chiara cosa ancora si è, che non tutti si distendono egualmente, ma quei bensì soffrono distensione maggiore, che maggiormente si discostano dal punto del sostegno. Onde nella riferita supposizione, siccome la forza della resistenza non si spanderà egualmente per gli filamenti della sezione, co-

R

sì

si neppure la medesima si riunirà nel centro di gravità della stessa sezione.

580. Se poi si voglia attentamente riflettere, s'intenderà facilmente, che nella supposizione, di cui si tratta, debba riunirsi la forza della resistenza in quel punto della sezione, in cui si riunirebbe il moto di essa, se la medesima si aggirasse intorno al sostegno della leva. Ed essendo così, neppure si durerà fatica ad intendere, che i solidi riferiti di sopra debbano essere egualmente resistenti da per tutto, eziandio se voglia supporfi, che i filamenti della sezione, in cui esercitafi la resistenza, siano capaci di distendersi. Imperocchè sebbene per definire il momento della resistenza in luogo della distanza del centro di gravità della sezione dal sostegno della leva debba sostituirsi quella del centro di percussione; nientedimeno, per essere queste due distanze in ciascuna sezione proporzionali tra loro, tuttavia il momento della resistenza farà da per tutto in data ragione col momento del peso (130).

FINE DEL PRIMO LIBRO.

I N D I C E

DE' CAPITOLI, E DE' PARAGRAFI
CONTENUTI NEL

LIBRO PRIMO

IN CUI SI TRATTA

Dell' Equilibrio, e del Moto de' Corpi
Consistenti.

CAP. I.	D El moto in generale, e delle sue principali affezioni.	2
I.	Della massa, della mole, e della densità di qualsivoglia corpo.	2
II.	Del moto, e della quiete: come ancora dello spazio, del luogo, e del tempo.	5
III.	Della velocità, o sia celerità: come ancora del moto eguabile.	8
IV.	Del moto variabile, e delle sue varie specie.	10
V.	Del momento, o sia quantità di moto di qualsivoglia mobile.	13
VI.	Della forza motrice, e del modo di definire la sua attività.	16
VII.	Delle forze centrali, e del modo di determinare la loro attività.	19
VIII.	Delle forze vive, e della vera loro misura.	22
IX.	Della forza dell' inerzia, e de' suoi effetti principali.	26
X.	Della composizione, e risoluzione così delle forze, come de' moti.	29
XI.	Del moto curvilineo de' corpi, e specialmente di quello fatto con forza centrale.	34
	R 3	XII.

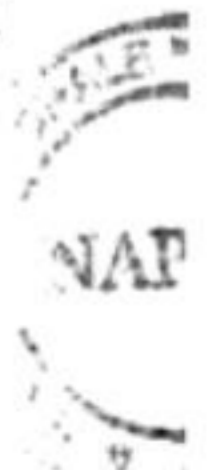
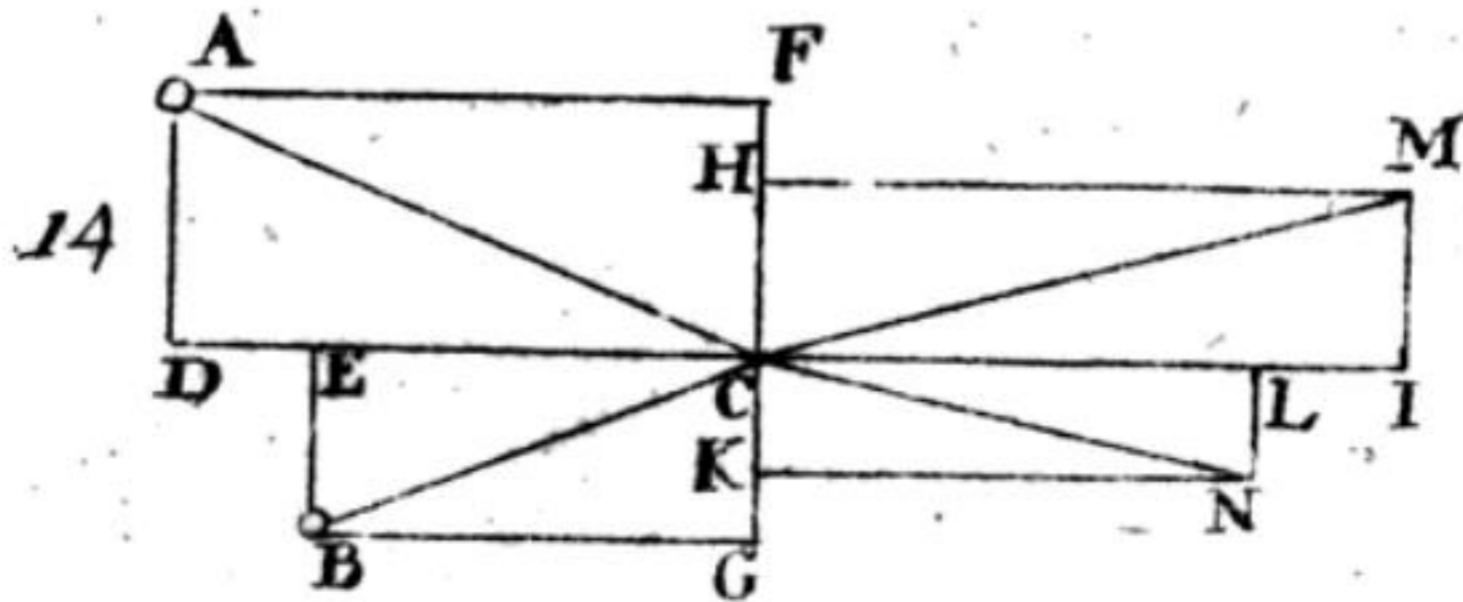
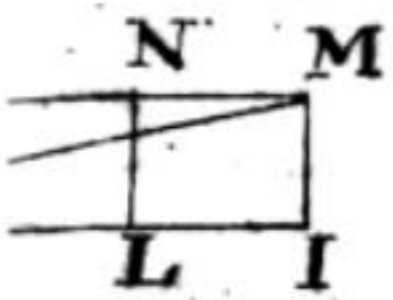
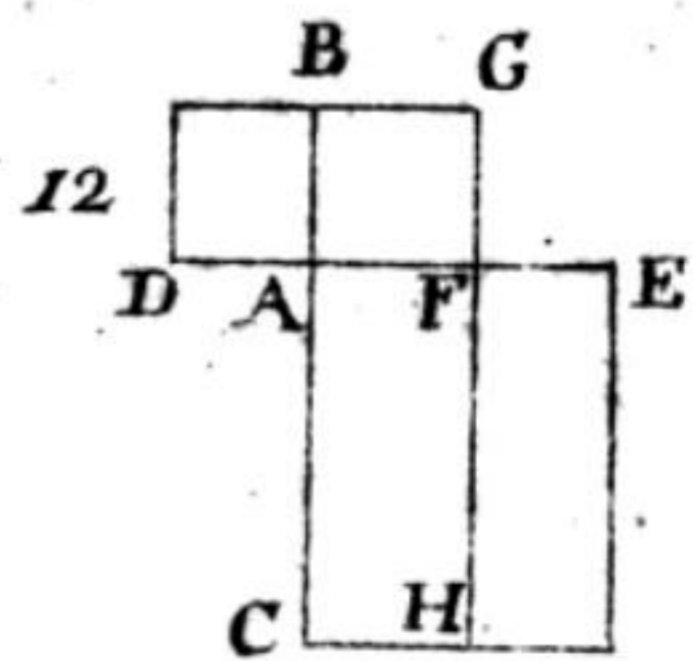
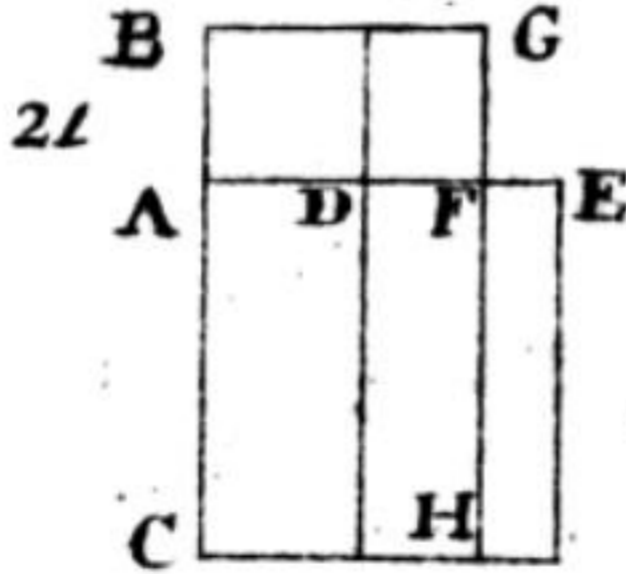
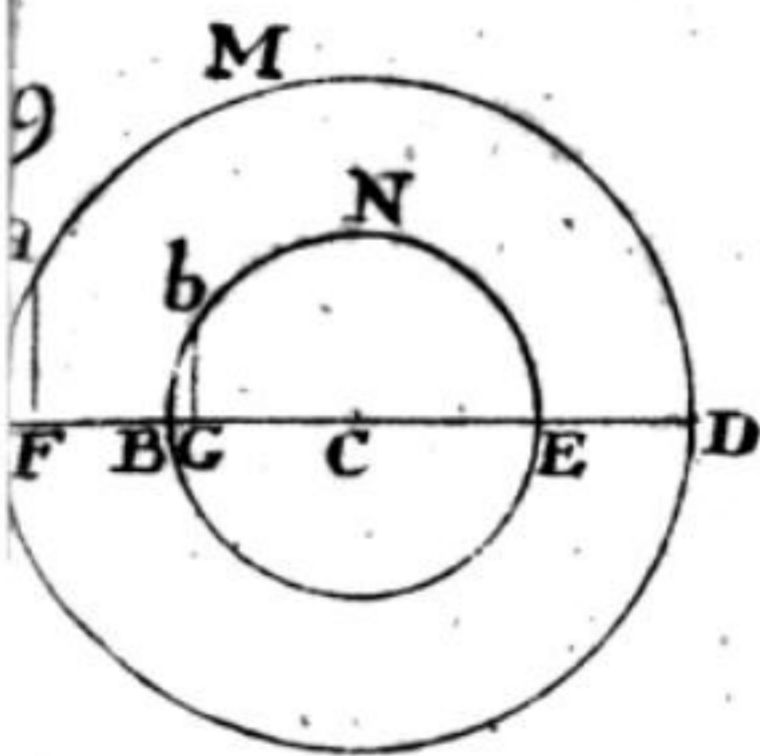
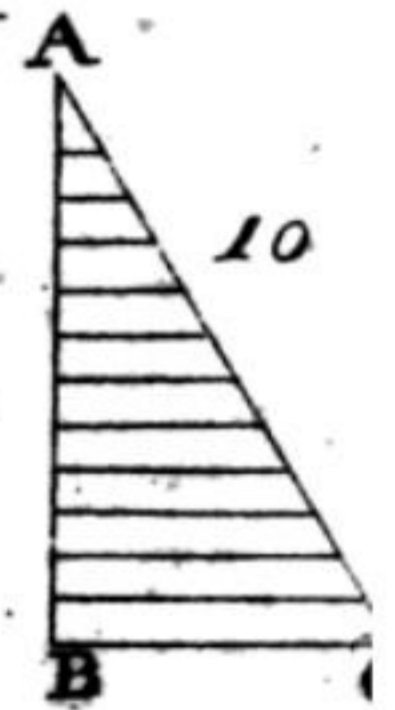
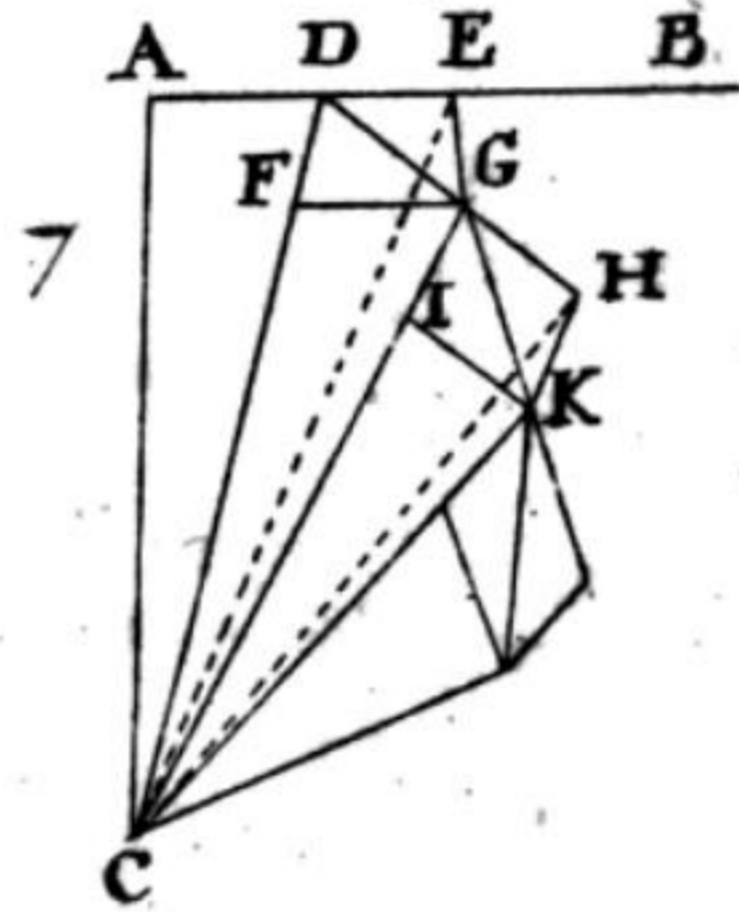
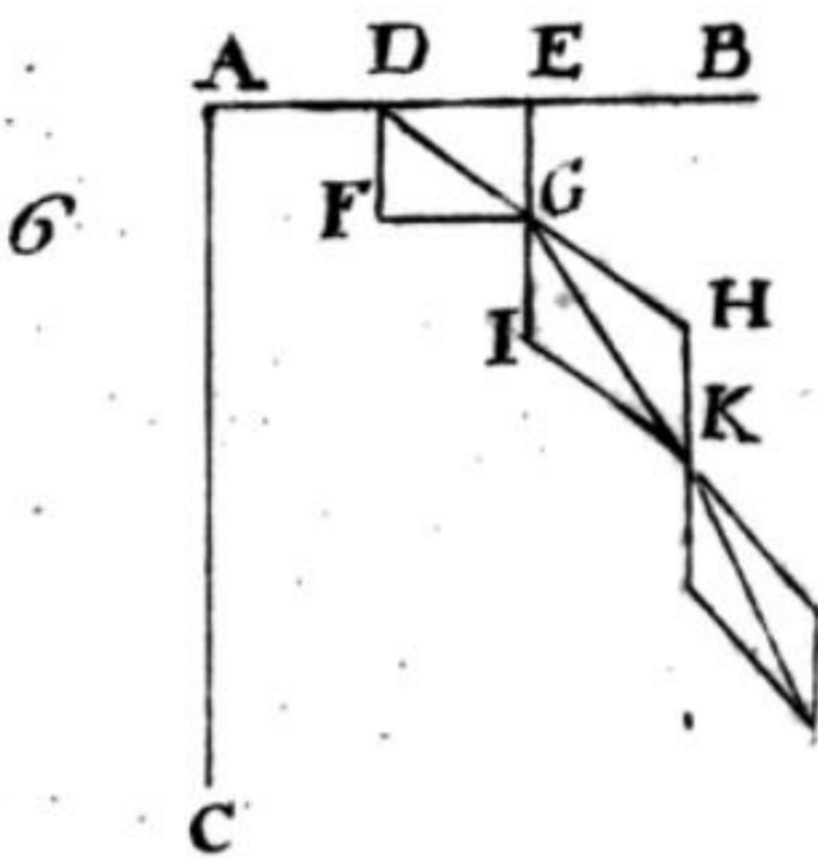
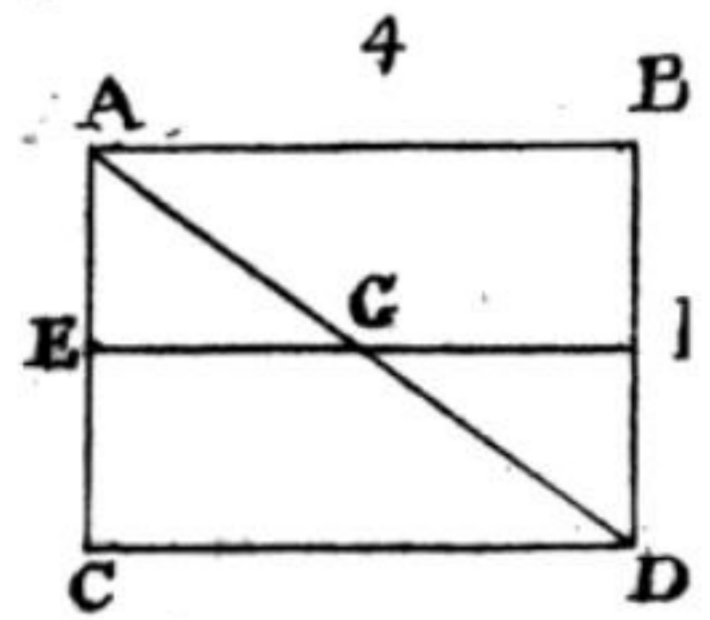
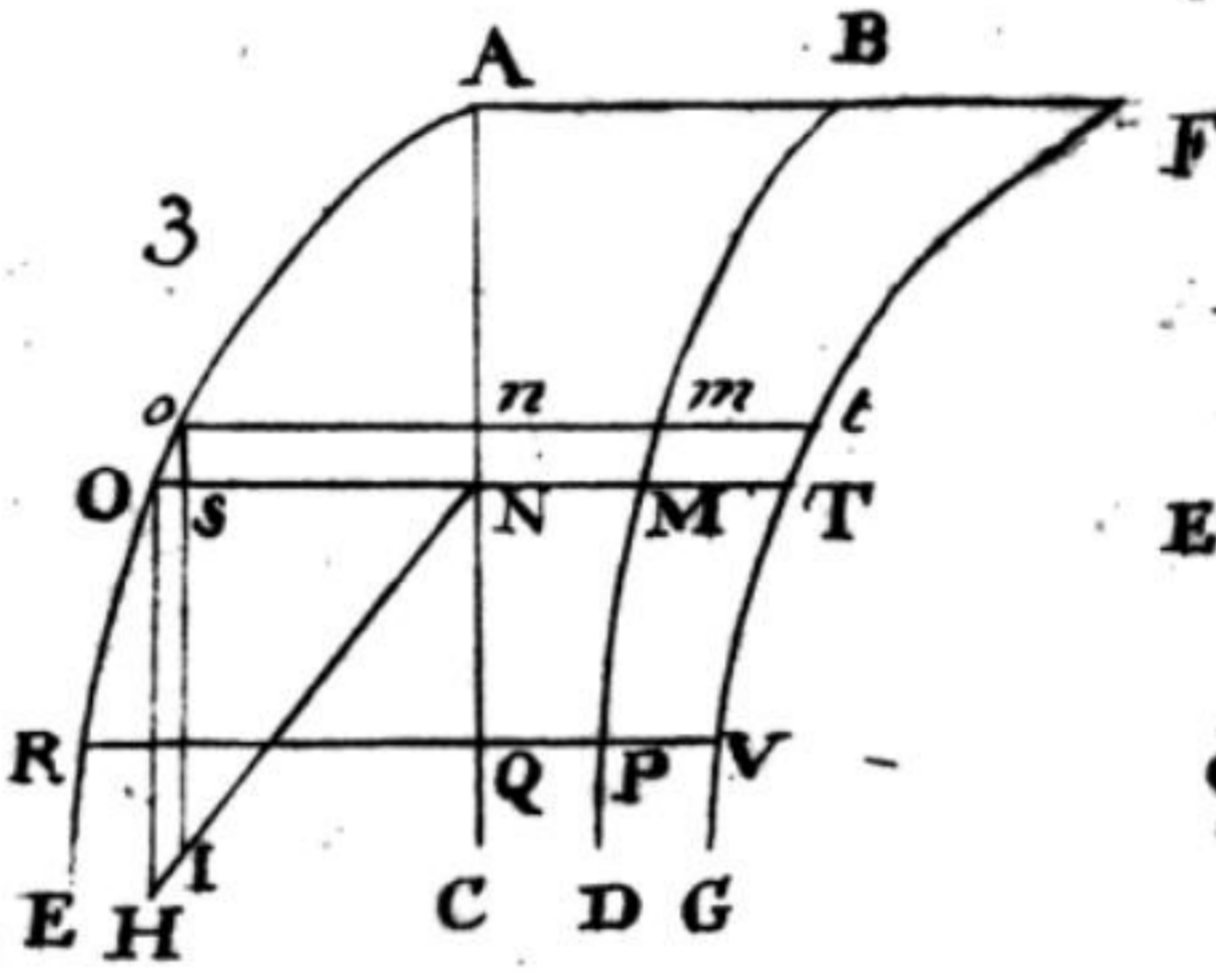
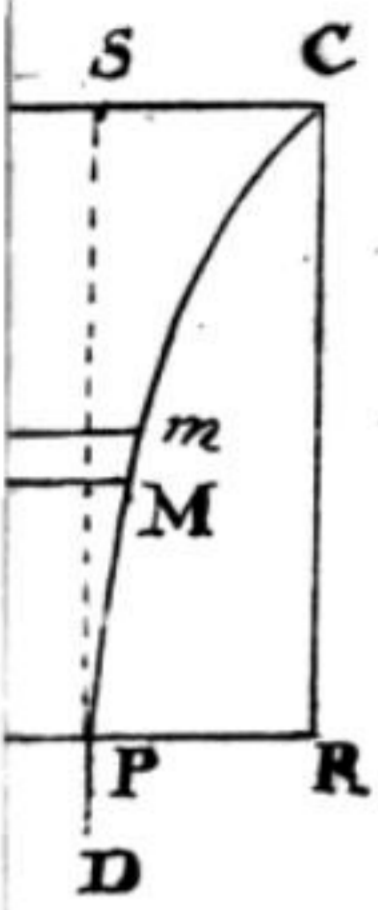
XII. Dei corpi, che si muovono circolarmente con moto eguabile, ed uniforme.	40
XIII. Dell'azione, e reazione; ed in qual senso siano eguali, e contrarie.	44
XIV. Delle leggi del moto nell'incontro de' corpi inerti.	48
XV. Delle leggi del moto nell'incontro de' corpi elastici.	53
XVI. Conseguenze, che si ricavano dalle precedenti leggi di moto.	57
XVII. Delle leggi del moto nell'incontro obliquo de' corpi.	62
XVIII. Del moto comune, e quando egli non altera gli effetti dei moti proprj.	67
CAP. II. Del moto de' corpi derivato dalla gravità.	71
I. Della forza della gravità, e della sua maniera di agire.	72
II. Dell'origine delle forze, da cui deriva la gravitazione universale, e reciproca de' corpi.	76
III. Continuazione dello stesso argomento, e donde derivi la specifica differenza de' corpi.	81
IV. Delle leggi, che si osservano nella caduta verticale de' gravi.	88
V. Delle leggi, che si osservano nella caduta obliqua de' gravi.	93
VI. Della caduta obliqua paragonata colla caduta verticale.	98
VII. Della caduta de' gravi per piani contigui diversamente inclinati sull'orizzonte.	103
VIII. Della caduta de' gravi per superficie curve.	108
IX. Della salita de' gravi per superficie così piane, come curve.	112
X. Del moto de' pendoli per archi circolari.	117
XI. Della natura, e delle principali proprietà della cicloide.	123
XII. Del moto de' pendoli per archi cicloidalì.	127
XIII.	

- XIII. Della caduta de' gravi la più *celere*. 132
- XIV. Del moto de' progetti, e della natura della curva, che da essi si descrive. 137
- XV. Del moto de' progetti, che terminasi alla stessa orizzontale, da cui incomincia. 141
- XVI. Della formazione di una tavola per regolare il riferito moto de' progetti. 146
- XVII. Del moto de' progetti terminato ad una orizzontale diversa da quella, da cui principia. 151
- CAP. III. Dell' equilibrio de' gravi nelle scambievoli loro azioni. 156
- I. Del centro di gravità di qualsivisia grave, e della sua linea di direzione. 157
- II. Del principio generale dell' equilibrio, e dell' applicazione di esso alla bilancia. 162
- III. Dell' equilibrio, che osservasi nella leva, nell' asse nella ruota, e nel polispasto. 167
- IV. Dell' equilibrio, che osservasi nel piano inclinato nel cuneo, e nella vite. 175
- V. Dell' equilibrio, che osservasi nelle machine fatte con ruote dentate. 178
- VI. Soluzione di una difficoltà intorno al principio generale dell' equilibrio. 183
- VII. Della resistenza, che deriva dallo stropicciamento delle parti di una macchina. 188
- VIII. Del comune centro di gravità di quanti si siano gravi, e delle principali loro affezioni. 194
- IX. Del modo di determinare il centro di gravità delle linee così rette, come curve. 201
- X. Del modo di determinare il centro di gravità delle figure piane. 207
- XI. Del modo di determinare il centro di gravità così delle figure solide, come dei loro perimetri. 214
- XII. Del modo di definire le grandezze, che generansi colla rivoluzione di altre grandezze più semplici. 221
- XIII. Del modo di definire così la velocità mezza, come

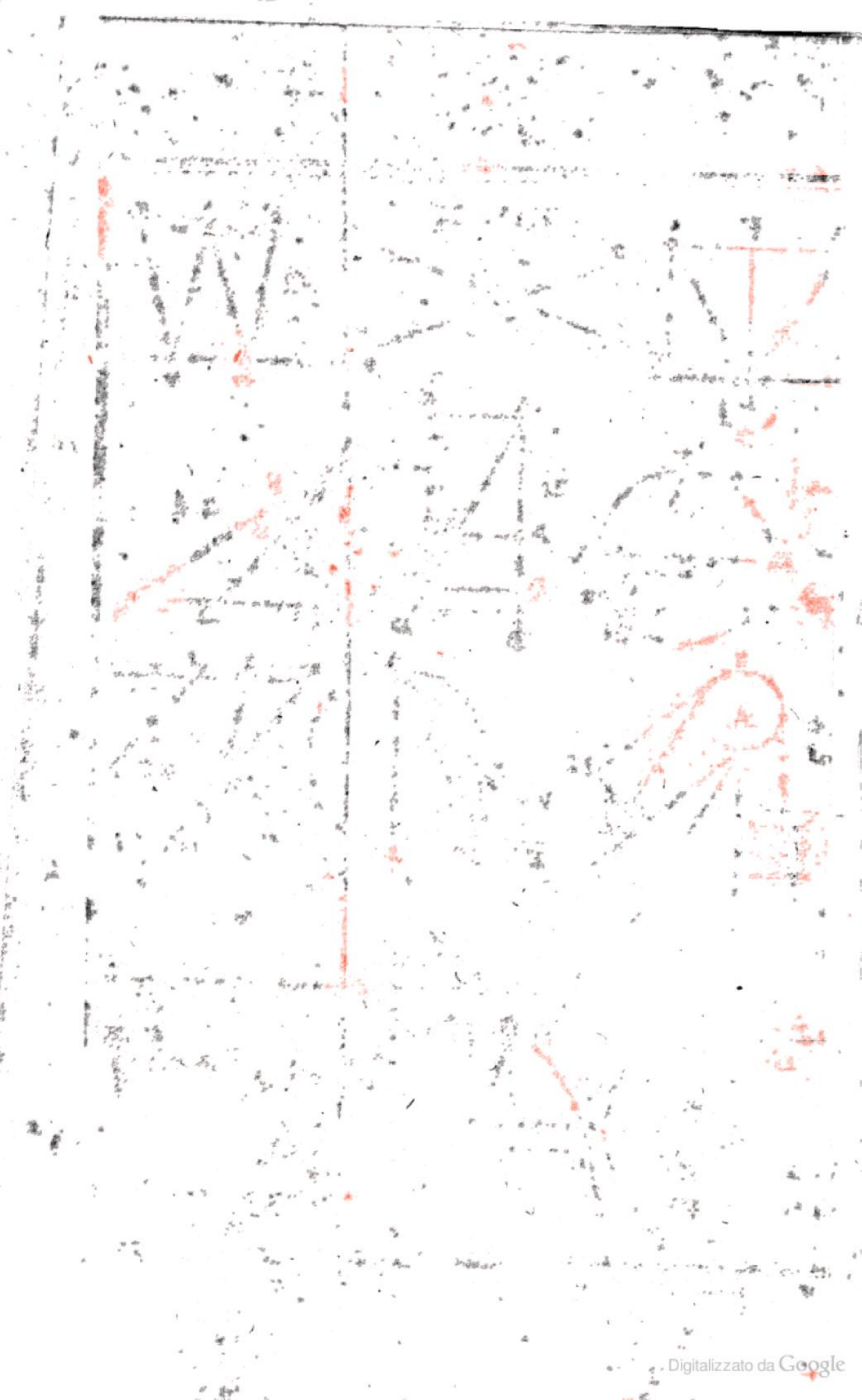
- come il centro del moto delle grandezze che si
aggirano. 227
- XIV. Dell' equilibrio di più potenze applicate ad un
corpo rigido, ed inflessibile. 232
- XV. Dell' equilibrio di più potenze applicate ad un
corpo di sua natura pieghevole. 237
- XVI. Della resistenza, che i gravi sospesi vertical-
mente oppongono al loro peso. 244
- XVII. Della resistenza, che i gravi sospesi orizzon-
talmente oppongono al loro peso. 251

FINE DELL' INDICE.

TAVOLA I



Aloja Inc.



TAV. II

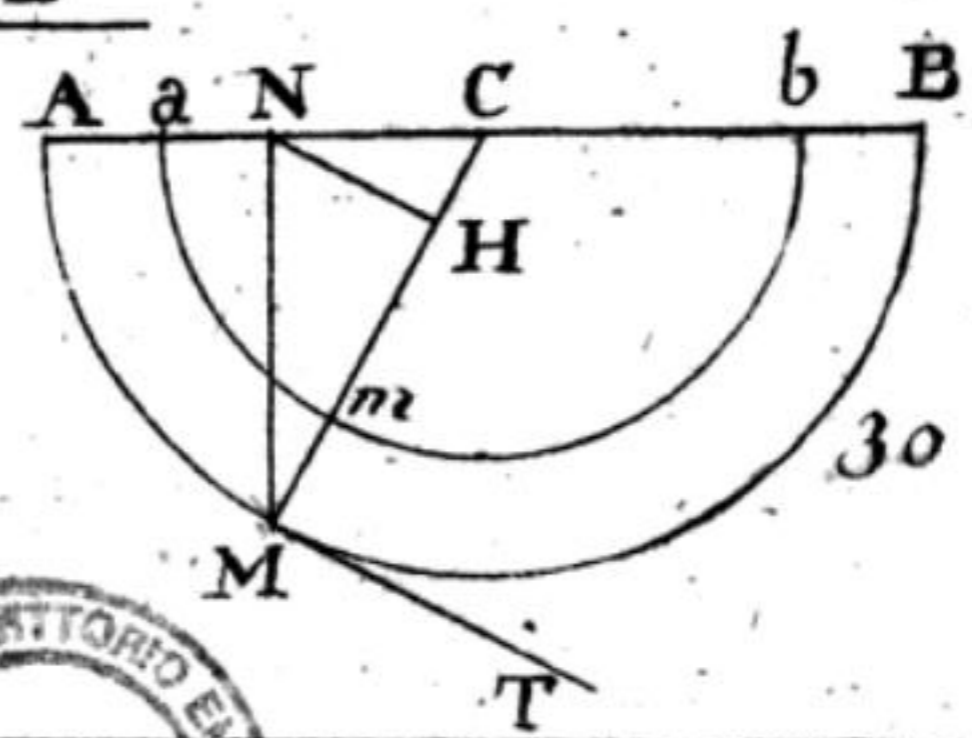
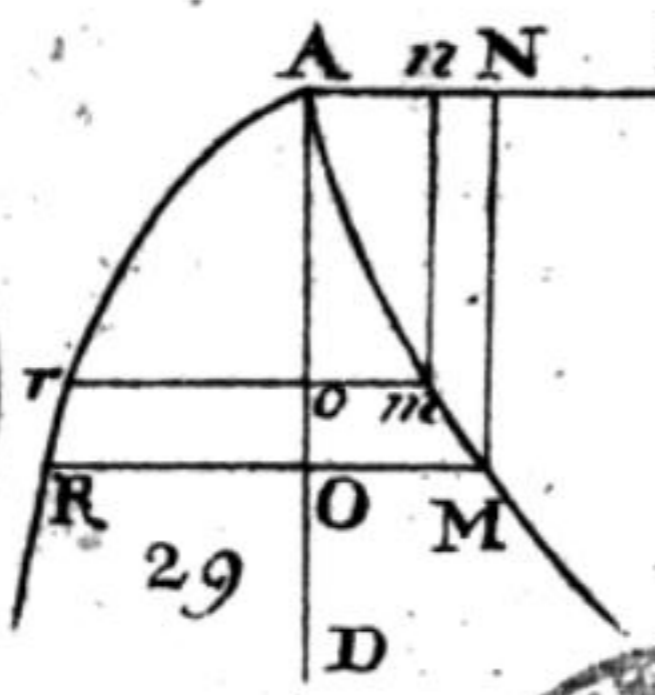
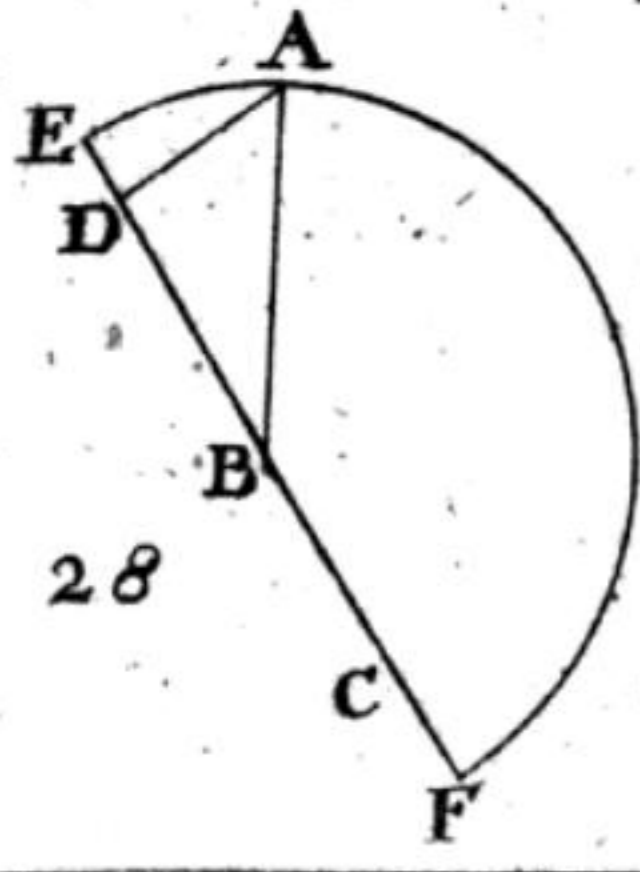
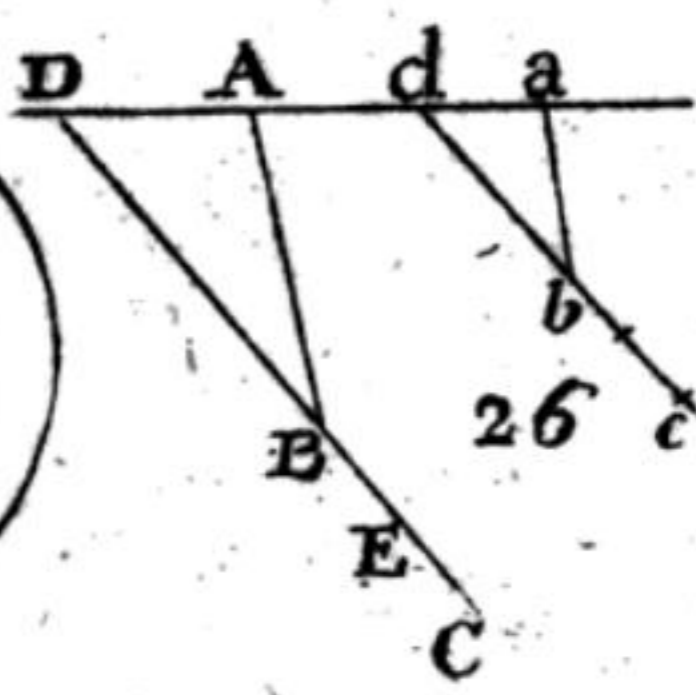
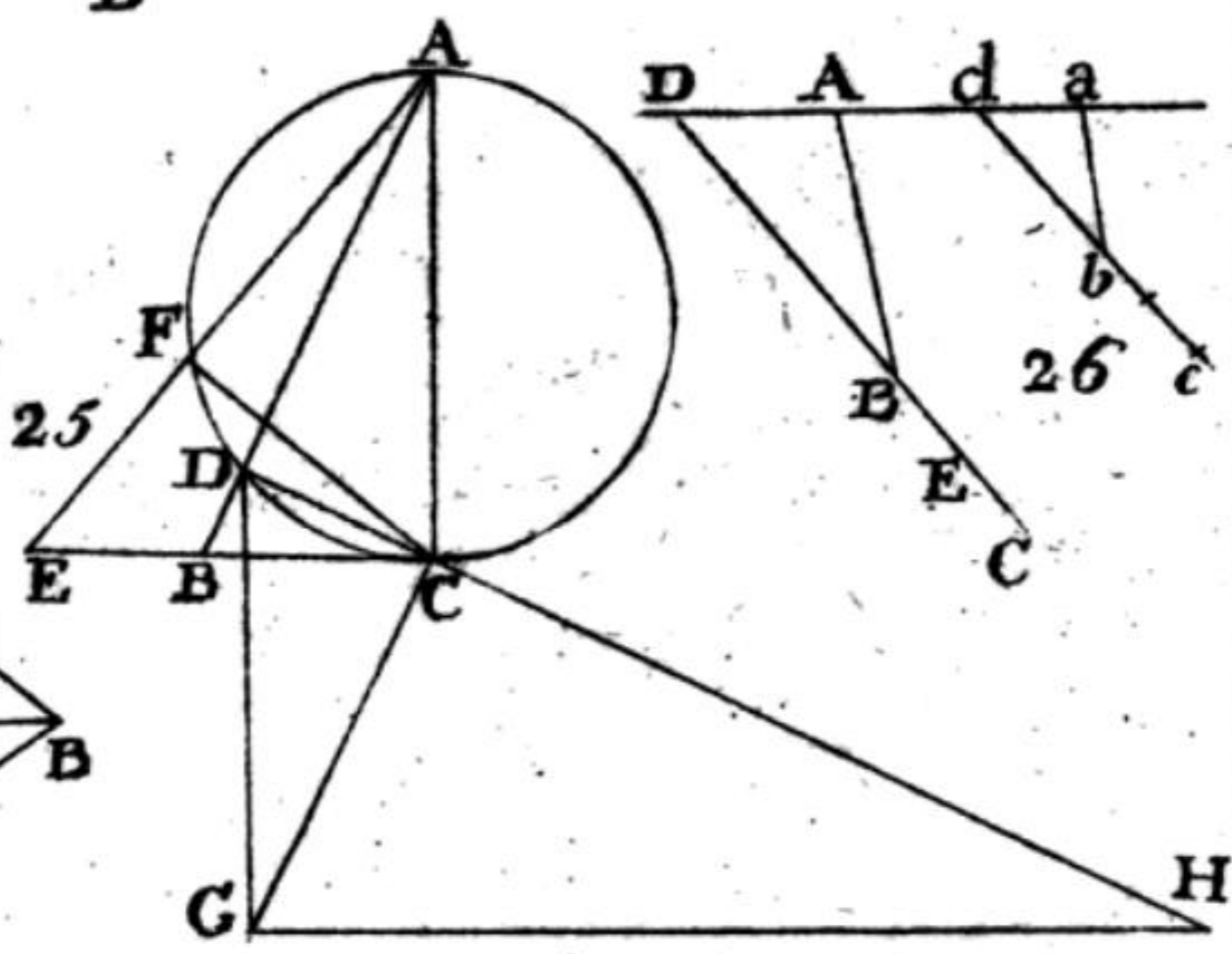
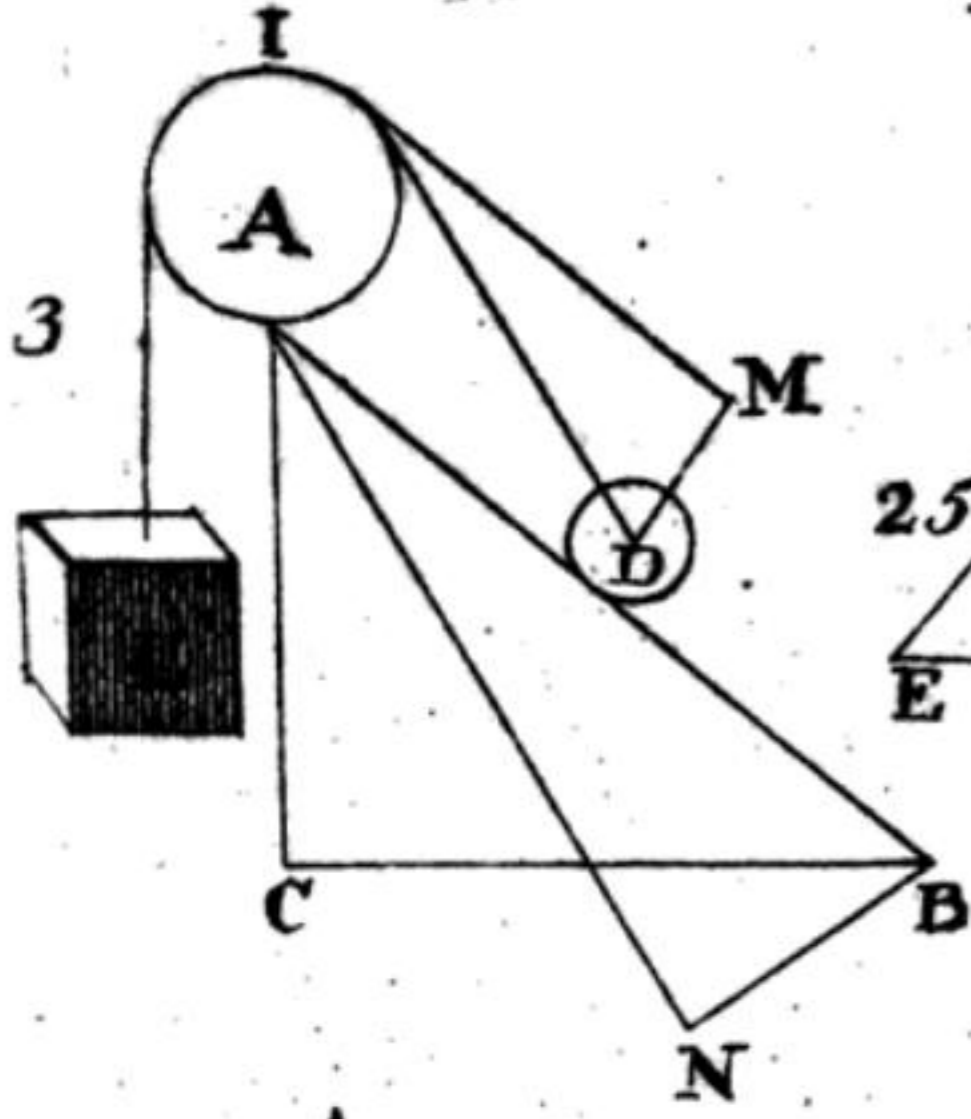
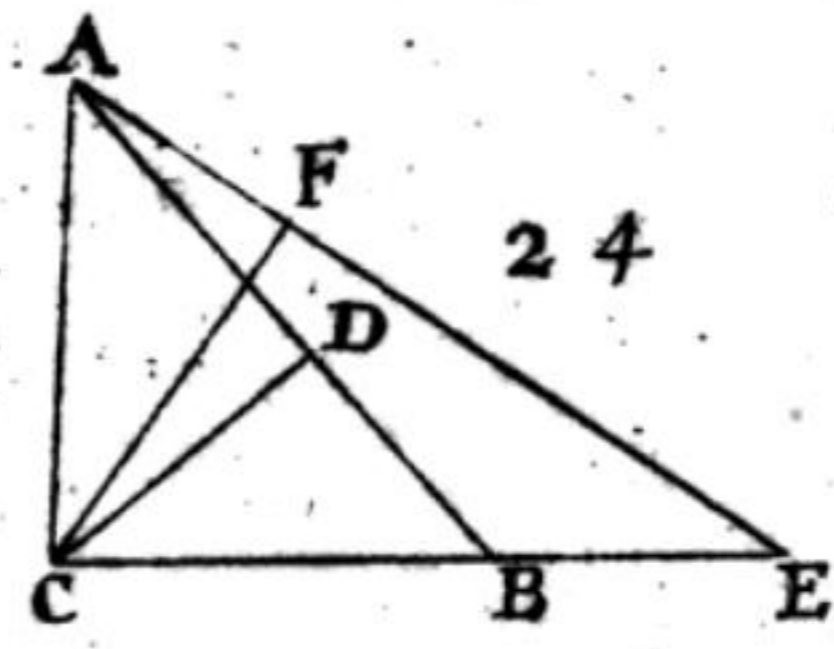
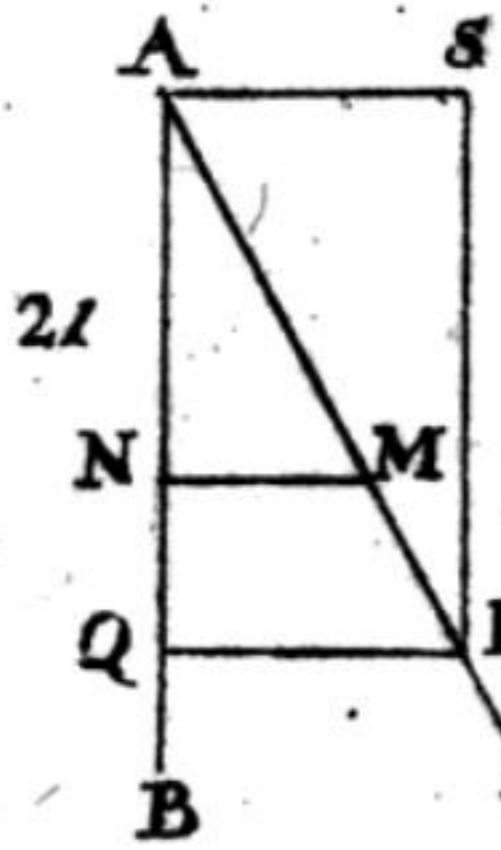
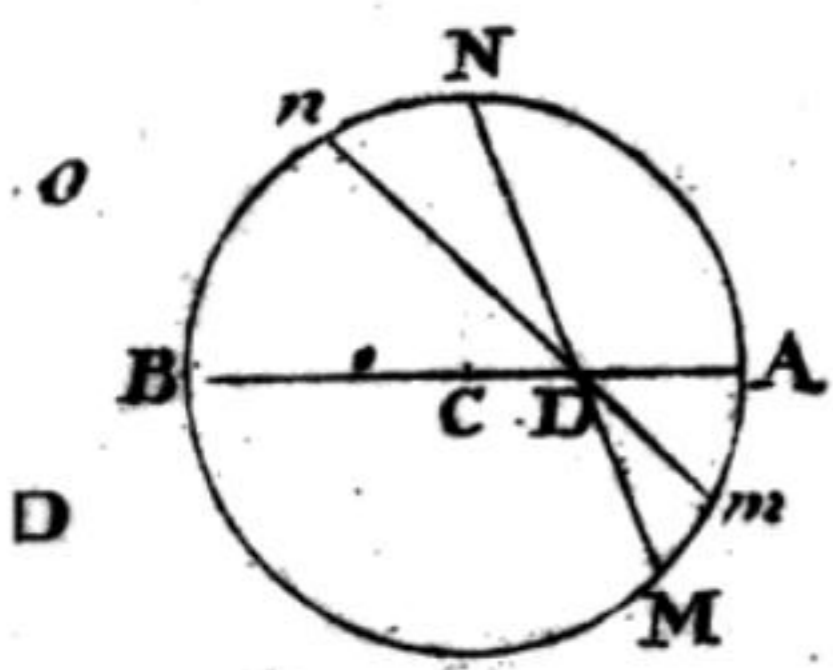
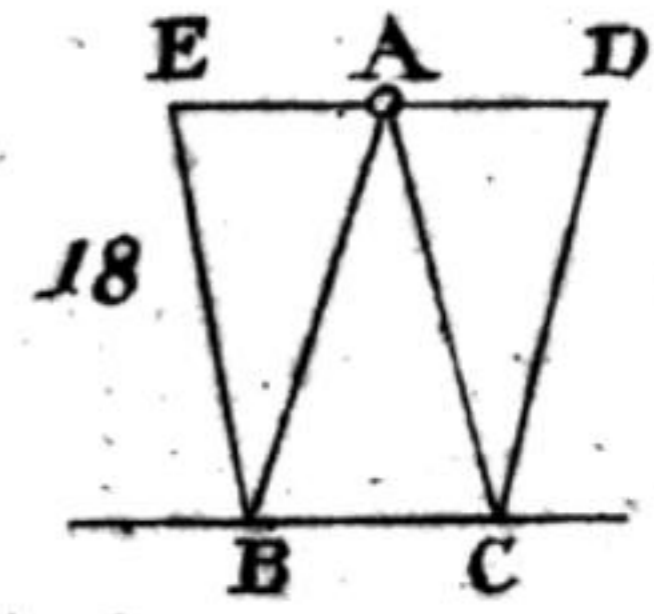
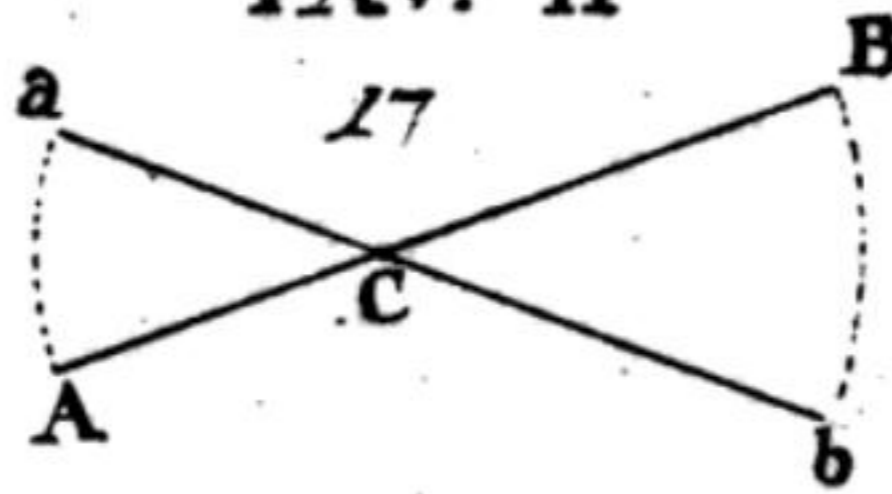
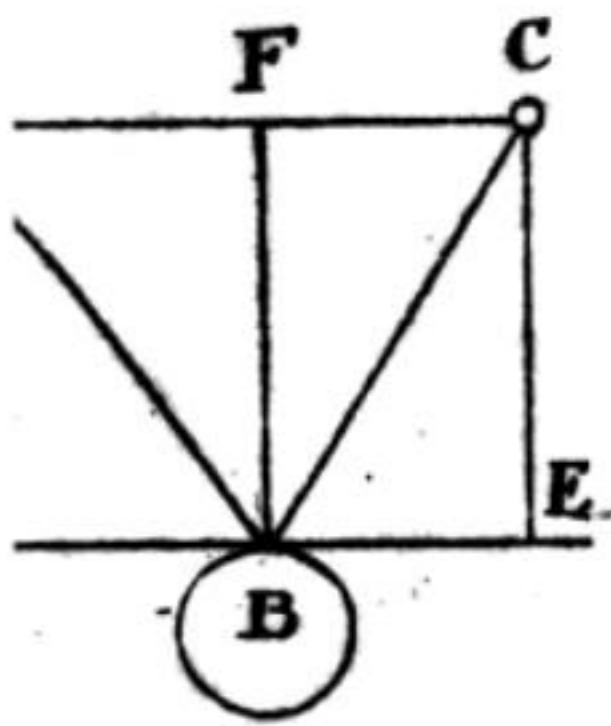
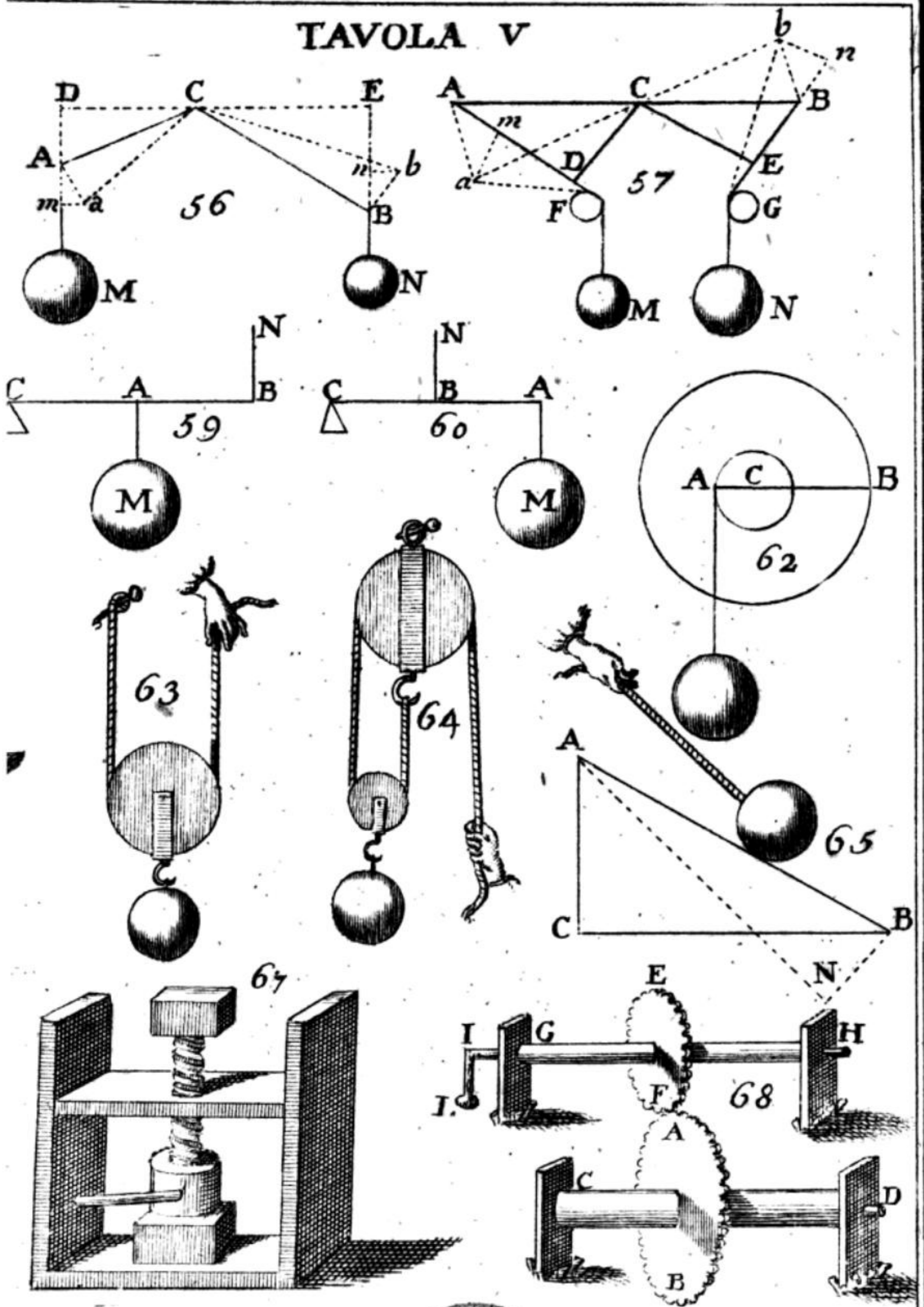


TAVOLA V



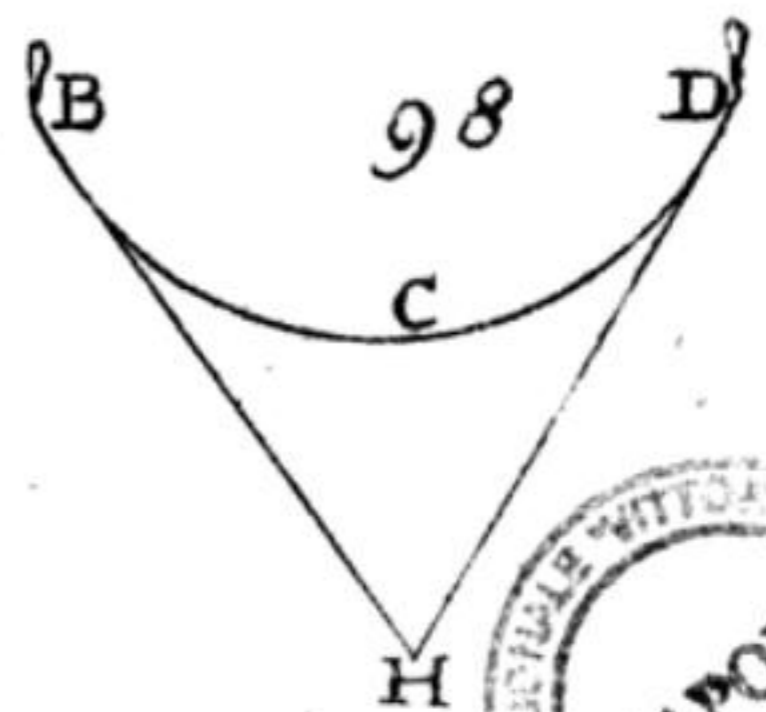
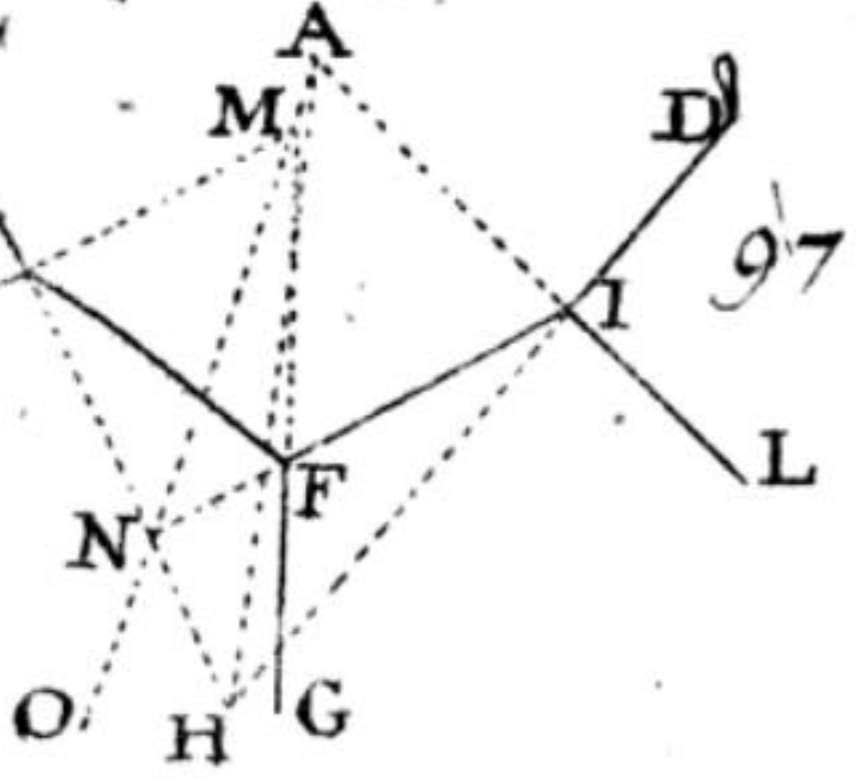
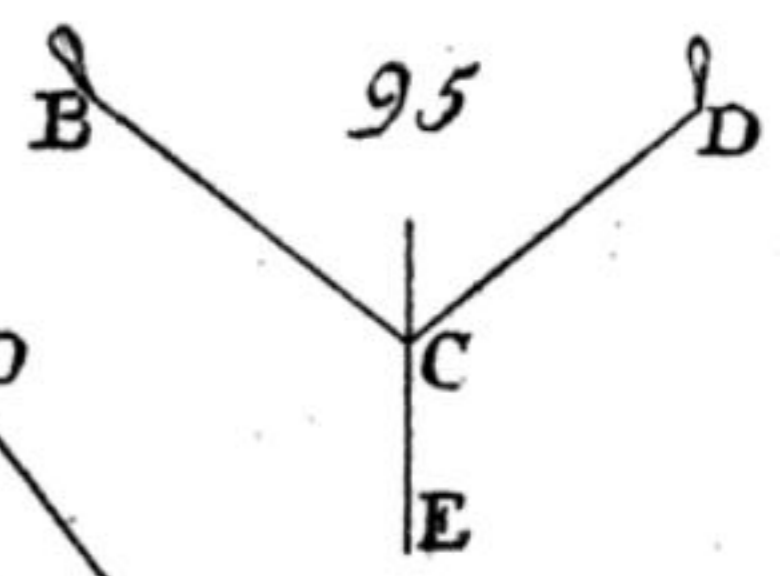
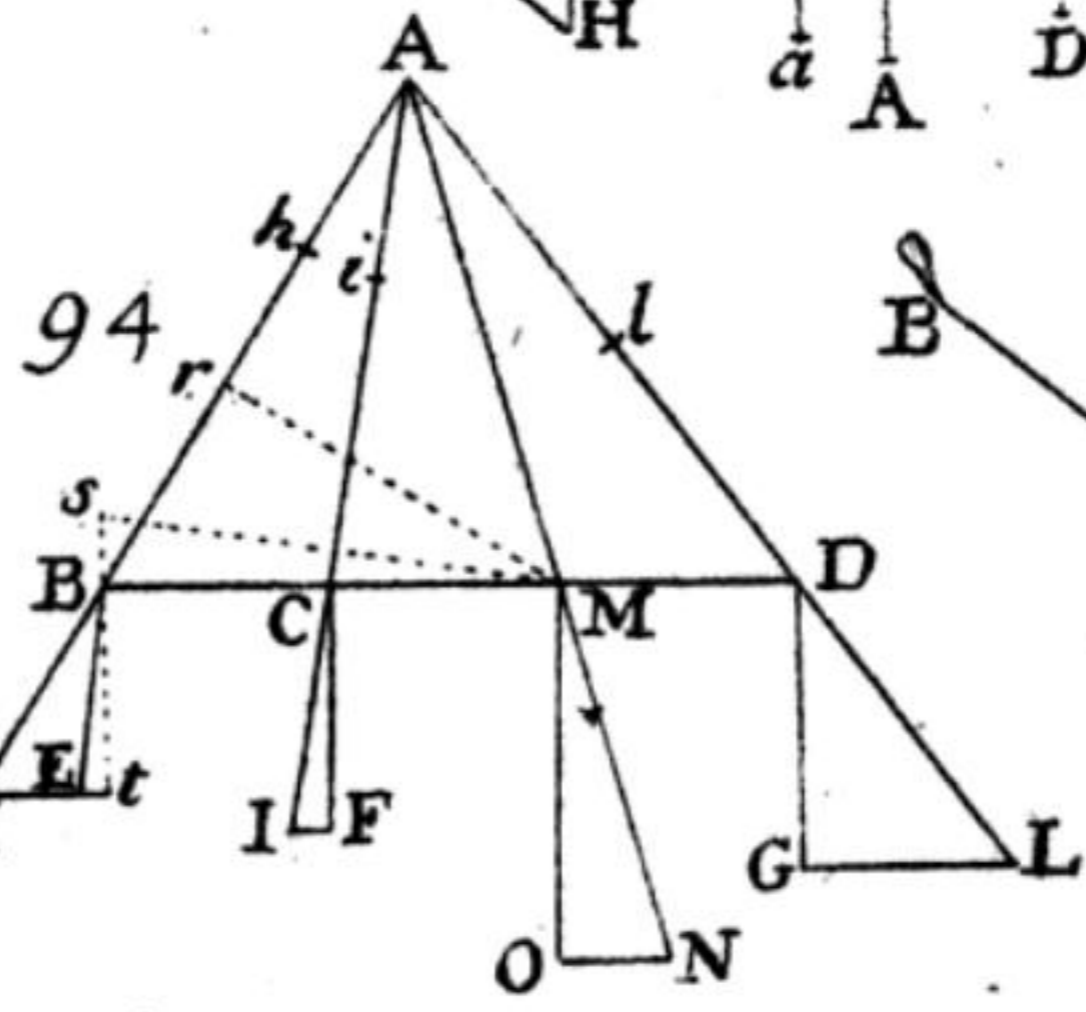
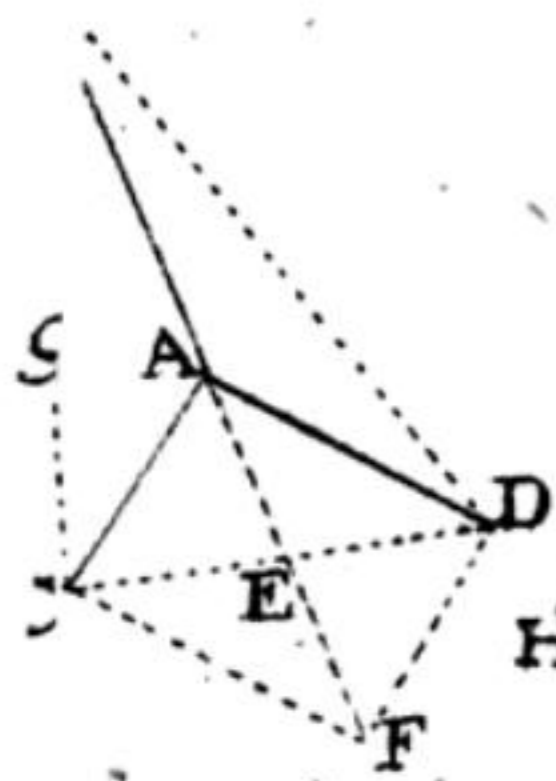
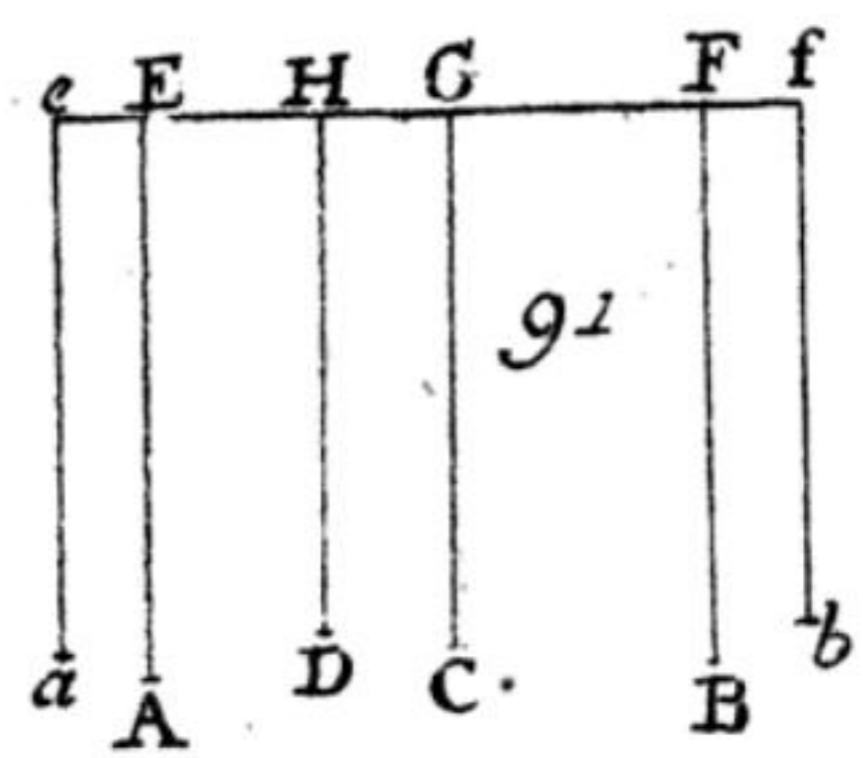
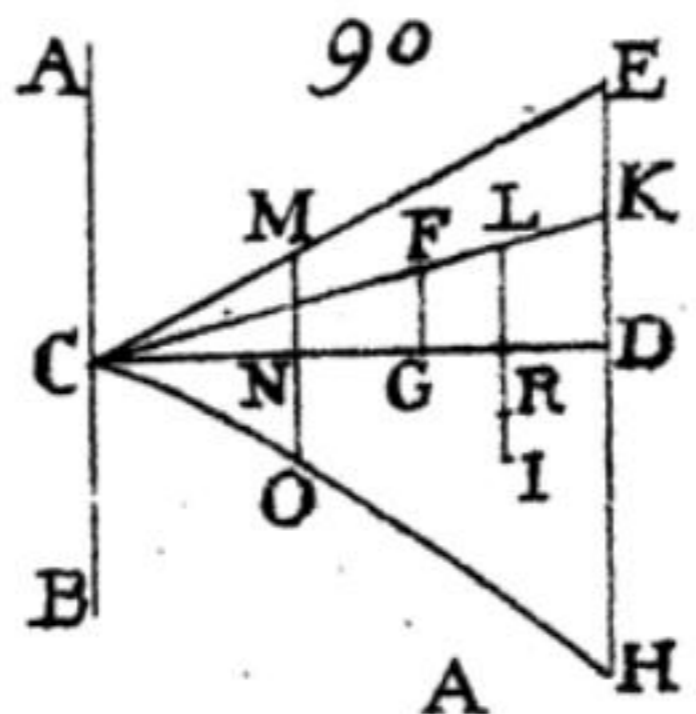
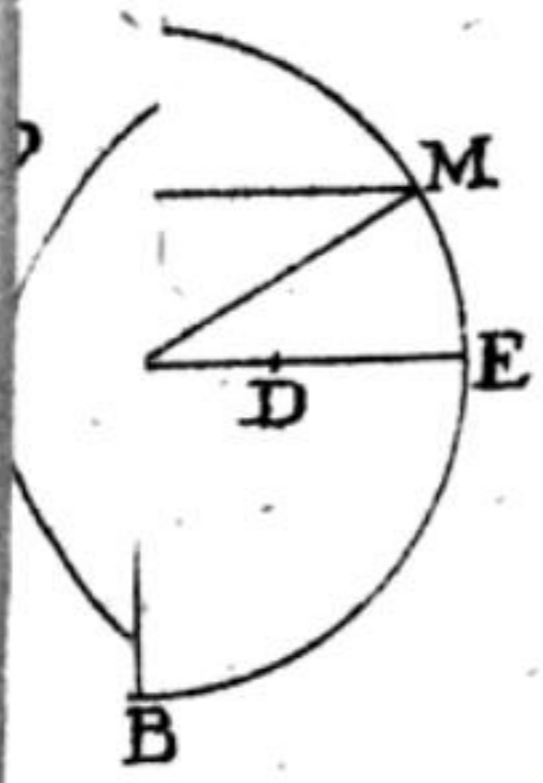
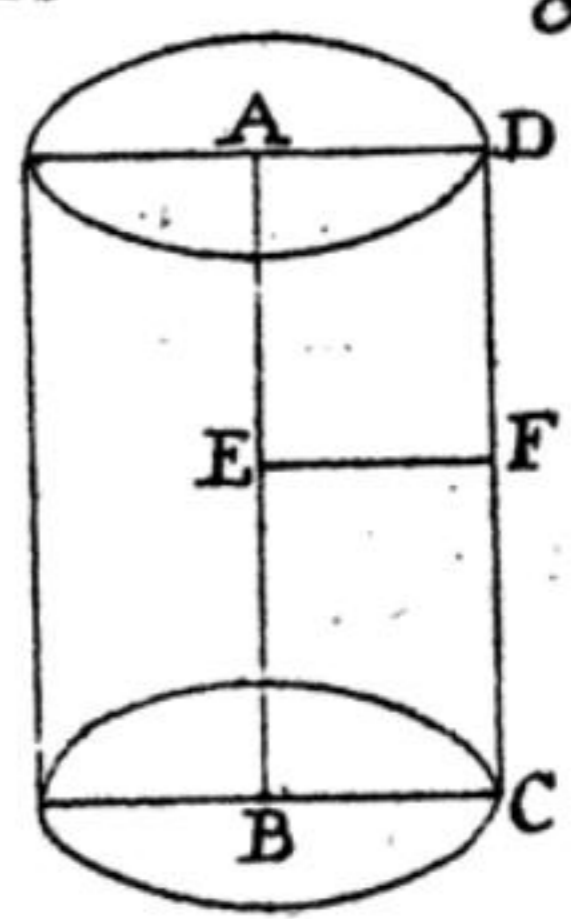
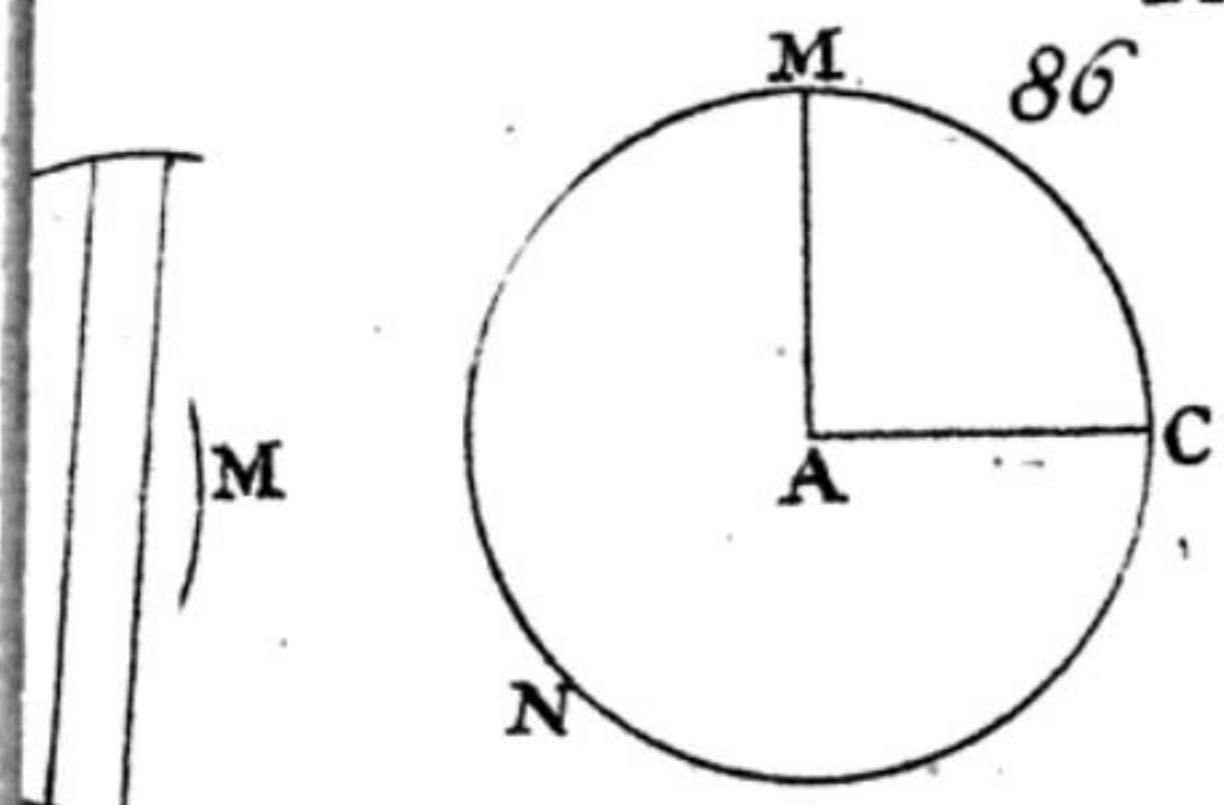


TAVOLA VIII

