48

# EXERCITATIO ACADEMICA
# IN ELEMENTA
# GEOMETRIÆ PLANÆ EUCLIDIS

AB AUDITORIBUS ALMI COLLEGII NEAPOLITANI

# D. THOMÆ AQUINATIS

ALANO MAC-DONALDO
JACOBO FERRARO
ANGELO DE ANCORA
MICHAELE ANGELO CONTI
JOANNE BAPTISTA BROGGIA
ANTONIO DE ANCORA

*Pridie idus ſextilis anni 1757.*

IBIDEM

PUBLICE INSTITUENDA

*ADSIDENTE*

## FRATRE JOACHIMO MAJO

Sacræ Theologiæ Baccalaureo, & Matheſeos, Linguarum Orientalium, Artiſque Oratoriæ Anteceſſore.



NEAPOLI Ex Typographia Simoniana MDCCLVII.
*Auctoritate Publica.*

Τοῦ ἀεὶ ὄντος, ἡ γεωμετρικὴ, γνῶσίς ἐστιν. Ἑλκὸν ἄρα πρὸς ἀλήθειαν ψυχὴν εἴη ἂν, καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας, πρὸς τὸ ἄνω σχεῖν, ἃ νῦν κάτω (οὐ δέον) ἔχομεν.

*Geometria ejus, quod est semper, cognitio est. Attollet igitur ad veritatem animum, atque ita ad philosophandum præparabit cogitationem, ut ad supera convertamus, quæ nunc (contra quam decet) ad inferiora dejicimus.*

Plato Dial. 7. de Republ.


Alojo Incis.

MICHAELI REGIO BRANCIFORTIO
INSIGNIVM ORDINVM
AVREI VELLERIS DIVI IANVARII
ET SACRAE MILITIAE HIEROSOLYMITANAE
EQVITI SVMMO
PRAEFECTVRAE DIVI IOANNIS AD MARE
BALLIVIO PRAETORI
BENEFICIORVM EQVESTRIVM
CALATRAVAE DIVI IACOBI AC MARTINI ALIORVMQVE
COMMENDATORI AMPLISSIMO
VTRIVSQVE SICILIAE REGIS
EX SANCTIORIS AMPLIORISQVE CONSILII
SENATORIBVS
EIVSDEM
TRIREMIVM TOTIVSQVE REI MARITIMAE
PRAEPOSITO

RE-

REGVM
CVM HISPANI TVM NEAPOLITANI
CVBICVLARIO INCLYTO .
HIS CETERISQVE TITVLIS MAGNO
AT VIRTVTE SAPIENTIA FAMA
PRAECIPVE
CLEMENTIA MAGNANIMITATE PRVDENTIA
DIFFICILLIMIS TEMPORIBVS
PROBATIS
EGREGIISQVE FACINORIBVS
PRO REGE PRO REPVBLICA PRO POPVLO GESTIS
VERE MAXIMO
ALANVS MAC-DONALDVS
IN CLASSIBVS
VEXILLIS CVSTODIENDIS ADDICTVS
EIVS
DEVINCTISSIMVS CLIENS
QVAS NEAPOLI IN ALMO LYCEO
DIVI THOMAE AQVINATIS
AVSPICE
FRATRE IOACHIMO MAIO
MATHESEOS ELOQVENTIAE
GRAECARVM HEBRAEARVMQVE LITTERARVM
PROFESSORE
ASSECLIS ADIVNCTVS
PALAM EXHIBET DEMONSTRANDAS
GEOMETRIAE PLANAE PROPOSITIONES
BENEFICENTISSIMO AC PERPETVO
SVI
ANTISTITI TVTELARIQVE
IN OBSEQVENTIS ANIMI
MONVMENTVM

50

# PROOEMIUM.

GEOMETRIÆ, *vel potius scientiarum omnium Elementa, Viri amplissimi, quibus aptitudine illa mentis nostræ, qua ex re una in alteram gradatim ascendere, ab ipsa accepimus natura, veluti ex simplicissimis rerum noscendarum seminibus ad altissimas, & abditissimas veritates adsurgit animus, tanti ad scientias quaslibet, artesque comparandas experientia docuit valere, ut iis deficientibus, nec digitum quidem proficere quemlibet in litterarum Republica, nec veritatem exquirere posse, sed densioris ignaviæ caligine quaquaversus perfundi, quovis tempore, & loco experta semper fuerit omnis ætas. Id tam palam fuit omnibus retro sæculis, ut prisca gens mortalium summo sategerit semper conatu viridem florentemque juventam nonnisi scientiarum primordiis, & elementis primum addicere; ut quiret eam dein feliciter in studiorum campum pedetentim ducere; quod & Pythagoram præ ceteris triplici suo conscripto elementorum Commentario* institutivo *nempe pro pueris*, civili *pro juvenibus*, & naturali *pro viris, egisse commemorat Laertius* (a)*; unde prima isthæc elementa* mathemata, *seu disciplinæ universo Græcorum ore nuncupata fuere; indeque Horatius cecinit* (b):

> .....ut pueris olim dant crustula blandi
> Doctores, elementa velint, ut discere prima.

*Qua-*

(1) *Laert. in vita Pythag. & Gellius lib. 1. cap. 9.*
(2) *Horat. lib. 1. sat. 1. v. 25.*

*Quare hoc captu priscis illis temporibus in duobus unice versabantur homines, qui litteris sedulam navabant operam* mathematicis *nempe, aut elementaribus disciplinis, &* philosophicis, *seu rebus civilibus, & naturalibus. Priores a peritioribus Magistris teneræ instillabantur ætati; posteriores vero provectiorum in recessibus contemplationem exercebant: illæ animos ad omnem muniebant scientiam, viamque parabant, istæ animum jam defæcatum, & promtum ad abditissima quæque perscrutanda evehebant; hocce sagaci, prudentique ductu ad summa rerum fastigia Viri trahebantur sapientes. Eadem quoque experientia duce, hoc nostro ævo quanta qualiaque in facultatibus quibusvis comparandis sint Elementorum, disciplinarumque momenta, quis non dignovit? Profecto, ut corpora, quæ continua vicissitudine oriuntur, & intereunt ex minimis exilibusve egredi videntur initiis, ita stabiles sempiternæque res, quibus nobilissimæ quæque facultates continentur, tenuissimis super elementis inniti quotidie experimur: & uti animadvertente Tullio, ex fici vel minimo granulo, aut ex vitis tenuissimo acino, aut ex ceterarum frugum, aut stirpium seminibus minutissimis immensos truncos, ramosque procreari cernimus, ita ex minimis hisce dictu, audituque perexiguis elementorum initiis ingentem, infinitamque problematum, theorematum, & propositionum quarumcumque, omnem seu artem, seu scientiam spectantium, comperimus exoriri molem: imo ex iis dumtaxat, omnem philosophandi rationem, ratiocinandi methodum, rerum harmoniam, omniaque seu instrumenta, seu utillima artefacta ad res quascumque vel intimius dignoscendas, vel utilius tractandas tamquam unico ex fonte accepimus. Serio igitur prudentique consilio, quemadmodum Majores nostri, ita & hujus ævi sapientiores Viri post Euclidem ducem Elementa isthæc & profunde*

*per-*

*perscrutari , & medullitus explorare ad utilem , solidam , diligentemque Juventutis eruditionem pro aris studuerunt , & focis . Qua de re quis laudibus non ad æthera extollet hoc nostrum magni nominis almum Lyceum, in quo dum diligenti cura solidiores instillantur ob Reipublicæ augmentum , Juventutisque profectum omnes cum theologicæ , tum philosophicæ facultates , eodem ictu , et tempore , Adolescentes ad prima rerum omnium addicuntur & applicantur Geometrica Elementa : ut iis , veluti clavi quadam quisque nostrum sibi valeat aperire januas ad scientiarum omnium maximo cum incremento adripiendum iter? Eapropter nos, qui ejusmodi pacto instructi proximè elapso anno iisdem Elementis, qua potuimus, omnem navavimus operam secundum captus nostri, imbecillisque ætatis indolem , & experientia comperimus brevi in ipsis quemlibet nostrum complevisse tempora multa ; dum nostris Magistris ad rectam institutionem nostram omnem moventibus lapidem gratias rependimus summas , heic de iisdem Elementis periculum facere, in vestro amplissimo conspectu satagimus: ut inde Vobis nostram operam probantibus & fructum, majori potiorique conatu ad reliqua valeamus admovere animum , & vires . Eja benigno excipite corde, quæ heic sciscitantibus Vobis in medium proferre contendimus , & dum imbecillitas nostra , incultusque sermo tædio forsan Vobis, & molestiæ erit, animum saltem nostrum, studiumque solidis hisce in Scientiis proficiendi ut adprobetis, exoramus.*

# PLANORUM ELEMENTA

## ORDINE NATURALI DIGESTA.

GEOMETRIA a terræ dimenſione olim nuncupata (1), quoad nomen eſt terræ menſura; quoad rem vero latius ejus natura patet: eſt enim ea matheſeos pars, quæ utpote ceterarum fundamentum, & baſis, quantitatem omnem generatim in longum, latum, & altum extenſam contemplatur. Iſtiuſmodi autem dimenſiones, non prout in re ſimul conjunctæ reperiuntur; ſed ut a mente ſeorſim concipi valent, conſiderat; & perinde quantitatem ipſam in lineas, ſuperficies, & ſolida digerit: potiſſimum tamen ipſa, ut ait Proclus, in contemplatione verſatur figurarum, quæ aut lineis, aut ſuperficiebus continentur, & in planis dumtaxat, ſive ſolidis conſiſtunt; quare in *Planam*, & *Solidam*, ſeu, ut ajunt, in *Planeometriam*, & *Stereometriam* diſpeſcitur. Nobis igitur per iſtiuſmodi Exercitia de *Planis* tantum, quæ prioribus ſex libris complexus eſt Euclides, ediſſerendum occurrit.

## EX PRIMO ELEMENTORUM LIBRO PROPOSITIONES.

I. QUas in primo libro exhibet Euclides propoſitiones numero ſunt quadraginta octo: quarum triginta quatuor ſunt theoremata, quibus rectilineorum adfectiones demonſtrat, & quatuordecim ſunt problemata, quibus eorumdem conſtructiones exponit; quare omnes pro rectilinearum figurarum doctrina enucleanda, ſunt inſtitutæ, & ad tres claſſes facili negotio commode redigi poſſunt, nimirum & ad lineas rectas, & ad triangula, & ad parallelogramma, ſive figuras quadrilateras, quæ lineis rectis, & parallelis continentur. Quemadmodum ergo theoremata, & problemata ſeorſim exponere lubet, ita ſecundum præfatas haſce claſſes ea digerere conabimur.



[1] A terræ dimenſione Γεωμετρία dicta eſt, quaſi terræ menſura, vel ars ipſa terram dimetiendi a voce Græca γέα, aut γῆ, *terra*, & μετρέω, ſeu μετρῶ *metior*. Cauſſam nomini præbuit, quod a terræ dimenſione ars hæc cœperit; ut ſcribit Cic. 4. Acad. etenim teſte Servio ad 3. Eclog. & Proclo, talis diſciplina inventa fuit, quum Nilus æquo plus creſcens, confudiſſet terminos poſſeſſionum, ad quos innovandos Ægyptii Philoſophi lineis agros diviſerunt.

# PRIMI LIBRI THEOREMATA

## DE LINEIS RECTIS.

II. Lineas rectas conſiderat Euclides, vel ut ſibi mutuo occurrentes, & angulum conſtituentes, vel ut inter ſe parallelas, & numquam convenientes. Circa primas quatuor occurrunt Euclidis theoremata, nimirum I. Ad eamdem rectam lineam, duabus eiſdem rectis lineis, non conſtituentur duæ aliæ rectæ lineæ æquales altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ terminos habentes (1). II. Quum recta linea inſiſtens ſuper alia recta linea angulos deinceps fecerit, eos vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet (2). III. Si ex puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppoſitas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ conſtituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ (3). IV. Si duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter ſe æquales erunt (4). Huic propoſitioni addi poteſt ejus converſa, quæ ſic exhibetur. Si ex puncto in recta linea dato ducantur hinc inde ad partes oppoſitas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ efficiant angulos ad verticem æquales, iſtæ duæ rectæ lineæ erunt in directum (5).

III. Circa theoriam parallelarum quinque ab Euclide demonſtrantur theoremata, nempe. I. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ (6). II. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & oppoſito ad eamdem partem: vel

(1) Prop. 7. lib. 1. Euclides teſte Proclo, reperit theorema hoc, ut eſſet lemma octavæ propoſitionis; non enim ad plura ſuam utilitatem extendit, nullumque alium uſum apud Geometras habet.

(2) Prop. 13. lib. 1. Hoc theorema ab Euclide fuit procuſum; qui ajente Proclo, maximam in eo diligentiam adhibuit: etenim per illud & expoſuit modum, quo recta una ſuper altera inſiſtere debeat, nempe non in directum, ſed ad angulum; & indicavit, quod angulus unus ſemper duobus rectis ſit minor; alias non eſſet angulus, ſed una recta.

(3) Prop. 14. lib. 1. Hoc theorema Euclides cudit ad convertendam præcedentem, & per impoſſibile ſibique repugnans demonſtrat; converſa enim theorematum per impoſſibilia oſtendi debent, ut inquit Proclus.

(4) Prop. 15. lib. 1. Theorema iſtud, teſte Eudemo, a Thalete Mileſio fuit primum repertum, & ab Euclide deinceps demonſtratum; qua etiam demonſtratione innuit, ſi plures rectæ ſeſe mutuo ſecent, has efficere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

(5) Corollarium eſt 15. Propoſitionis.

(6) Pr. 27. lib. 1. In hoc theoremate Euclides alternos angulos appellat eos, qui neq; ad eaſdem partes, neque deinceps ſunt; ſed ab incidente, quæ utrique inter parallelas exiſtit, diſtinguuntur, & differunt, quod alter ſurſum, alter deorſum ponatur.

vel duos angulos interiores ad eamdem partem positos duobus rectis æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ. Istæ duæ propositiones exhibent tres conditiones, quibus parallelismum rectarum dignoscitur (1). III. Si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea, hæc efficiet & angulos alternos æquales, & angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem: & duos angulos interiores ad eamdem partem positos duobus rectis æquales. Propositio ista utramque præcedentem convertit, & proprietates parallelarum exponit (2). IV. Quæ eidem sunt parallelæ, inter se sunt parallelæ (3). V. Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas, inter se sunt etiam æquales, & parallelæ (4).

## DE TRIANGULIS.

IV. Considerat Euclides triangula & quoad se inspecta, & inter se collata; hoc est demonstrat proprietates cum absolutas, tum relativas triangulorum. Quoad proprietates absolutas & investigat illas, quæ sunt omnium triangulorum communes, & illas, quæ sunt quorumdam triangulorum peculiares: omnia isthæc sigillatim exponere curabimus.

## DE TRIAGULIS QVOAD SE INSPECTIS, SIVE DE PROPRIETATIBUS ABSOLUTIS TRIANGULORUM CUM COMMUNIBUS, TUM PECULIARIBUS.

V. Universales, & communes triangulorum proprietates quinque sunt, quæ hisce theorematibus exhibentur. I. In omni triangulo, uno latere producto, exterior angulus est major alterutro interiore & opposito (5). II. Omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt quomodocumque sumti (6). III. Cujuscumque trianguli

B 2 uno

[1] Prop. 28. lib. 1. Hoc theorema repertum fuit ab Euclide; tamen a Ptolemæo alia via demonstratur, teste Proclo.

[2] Prop. 29. lib. 1. Theoremate isto Euclides, ut inquit Proclus, utramque præcedentem convertit; quod enim in utraque illa est quæsitum, in hac positionem facit: & quæ in illis data sunt, demonstrare proponit.

[3] Prop. 30. lib. 1. Euclidis est hoc theorema: quo explicat respectum parallelarum: qui in omnibus non semper contingit; non enim, quæ ejusdem sunt dupla, inter se sunt dupla, ut inquit Proclus.

[4] Prop. 33. lib. 1. Confinium parallelarũ est theorema istud: unde per ipsum parallelogrammorum ortum latenter tradit Euclides; parallelogrammum enim fit ab æqualibus, & parallelis.

[5] Ex lib. 1. prop. 16. quam reperit Euclides.

[6] Ex lib. 1. prop. 17. est Euclidis, qui per hoc theorema, ut inquit Proclus, indeterminate demonstrat, duos quoslibet trianguli angulos duobus rectis minores esse; at in propositione 32. determinabitur, quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo. Tres enim ipsius anguli duobus rectis æquales sunt: quare duo tanto minores erunt duobus rectis, quantus est reliquus angulus.

uno latere producto, angulus exterior est æqualis duobus interioribus, & oppositis simul sumtis : & anguli omnes simul duobus rectis sunt æquales (1). IV. In omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo quomodocumque sumta (2). V. Si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ, eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli; angulum vero majorem continebunt (3).

VI. Adfectiones peculiares quorumdam triangulorum juxta Euclidem egrediuntur aut ex lateribus, aut ex angulis dati trianguli : priores hæc quatuor theoremata exhibent, nimirum. I. Isoscelium triangulorum anguli ad basim sunt inter se æquales : & productis æqualibus lateribus anguli infra basim etiam inter se æquales erunt. Hinc venit triangula æquilatera esse etiam æquiangula (4). II. Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos subtendentia pariter æqualia erunt. Hæc propositio convertit antecedentem ; & perinde colligere pronum est, triangulum æquiangulum esse etiam æquilaterum (5). III. Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit, Hinc eruere licet, triangulum scalenum, quod cuncta latera inæqualia habet, omnes etiam angulos habere pariter inæquales (6). IV. In omni vicissim triangulo majori angulo majus latus opponitur : Hæc propositio est conversa præcedentis, & ex illa per contrarium patet, si omnes anguli trianguli sint inæquales, triangulum esse scalenum (7).

VII. Istiusmodi sunt proprietates cujuslibet trianguli quoad latera inspecti ; quoad angulos vero Euclides in primo libro solum demonstrat celebrem proprietatem trianguli rectanguli, demonstraturus in 2. lib. adfectiones trianguli obtusanguli, & acutanguli : hoc autem per duo theoremata complet. I. In tringulis rectangulis quadratum quod

fit

[1] Prop.32. lib.1. Hujus theoramatis ortum Pythagoræ adscribit Eudemus, ut Proclus tradit ; qui etiam notat ex hoc theoremate indicari, quantum angulus exterior trianguli sit major utroque interiore, & opposito, nempe reliquo; & quantum duo quilibet anguli trianguli duobus rectis sint minores, nempe uno. Unde hoc theorema complectitur doctrinam propositionis 16. & 17. & ex hoc etiam aperitur via ad reperiendum, omnium rectilineorum anguli quot rectis sint æquales : omnis enim figura rectilinea in triangula resolvitur.

[2] Prop. 20. lib. 1. Hoc theorema ab Euclide editum, ut scribit Proclus, Epicurei vero illud velut inutile rejecerunt, & ipsū tam manifestum esse dixeunt, ut probatione non egeret ; at non animadverterunt, quod esto sensu sit notum ; scientiam tamen numquam gignere posset, nisi fuisset demonstratione firmatum.

[3] Ex lib. 1. prop.21. Euclidis.

[4] Prop. 5. lib. 1. Thales Milesius hoc theorema reperit teste Proclo : is enim primus animadvertit æquicruris angulos ad basim esse æquales, & more antiquorum similes appellavit.

[5] Ex lib. 1. prop. 6. Euclides hoc theoremate convertit præcedentem ad indicandum in triangulis quibusvis latera, & angulos mire sibi invicem respondere.

(6) Ex Lib.1.prop. 18. Euclidis.

(7) Ex Lib. 1. prop. 19. Euclidis, qua convertit præcedentem ad evincendum in triangulis & latera & angulos æquo, parique incedere gressu.

fit ex latere rectum angulum fubtendente (quod græce dicitur *hypotenufa*) æquale eft quadratis laterum rectum angulum continentium (quæ græce *catheta* nuncupantur) (1). II. Si quadratum ex uno latere trianguli æquale fit quadratis, quæ ex aliis lateribus fiunt, angulus fub his latribus contentus, rectus erit (2).

## DE TRIANGULIS INVICEM COLLATIS, HOC EST DE PROPRIETATIBUS RELATIVIS EORUMDEM.

VIII. COmparat Euclides triangula inter fe ad inferendam eorumdem aut æqualitatem, aut inæqualitatem, aut tantummodo aliquorum æqualitatem quoad aream, five fpatium: ejus theoremata, quibus hafce triangulorum relativas proprietates demonftrat, funt quinque, videlicet. I. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, & angulos fub iis lateribus contentos æquales, habebunt & bafim bafi æqualem: erunt reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera fubtenduntur: eritque triangulum æquale triangulo (3). II. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & bafim bafi æqualem, & angulos fub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt: hæc propofitio convertit quartam (4). III. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & angulum fub iis lateribus contentum angulo majorem, & bafim bafi majorem pariter habebunt (5). IV. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & bafim bafi majorem; habebunt & angulum fub iis lateribus contentum angulo majorem: hoc theorema eft converfum præcedentis (6). V. Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & unum latus uni lateri æqua-

(1) Prop. 47. lib. 1. Theorema iftud tefte Laertio, & Proclo, Pythagoræ ortum debet, qui, ut ex Apollodoro apud eumdem Laertium, ob ejus inventionem ita lætitia fuit adfectus, ut Hecatombea, hoc eft, facrificium centum bovum Diis immolaverit.

(2) Prop. 48. lib. 1. Pythagoræ etiam adfcribitur theorema iftud; quo præcedens ex toto convertitur.

(3) Prop. 4. lib. 1. Hoc theorema Euclides reperit, qui in eo demonftrando utitur fuperimpofitione, quæ maximo ufui eft apud Mathematicos; & Archimedes eam ufurpavit non folum in libro de centro gravitatis planorum; fed etiam in folidis, ut de Conoidibus, & de Sphæroidibus, &c.

(4) Prop. 8. lib. 1. quæ ad Euclidem refertur.

(5) Prop. 24. lib. 1. Hanc propofitionem Euclides opponit quartæ. Per illam enim angulos, qui funt ad vertices triangulorum æquales ponit, per hanc vero inæquales: per illam bafes æquales demonftrat, per hanc inæquales.

(6) Prop. 25. lib. 1. Per tale theorema Euclides ipfe & oppofitum octavæ propofitionis demonftrat, & præcedentem convertit; quæ diverfo pacto ab aliis demonftratur, ut tradit Proclus.

æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſive quod uni æqualium angulorum opponitur, omnia reliqua etiam æqualia habebunt: hæc propoſitio quoad primam partem convertit quartam (1). His propoſitionibus nova alia addi poteſt, quæ complet perfectam æqualitatem triangulorum, eſtque ſequens: Si duo triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem, & circa reliquos angulos duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquos angulos ejuſdem ſpeciei, hoc eſt, vel utrumque acutum, vel utrumque obtuſum &c. omnia reliqua æqualia habebunt.

IX. Theoremata, ex quibus Euclides deducit æqualitatem areæ, ſive ſpatii triangulorum ſunt quatuor ſequentia, videlicet. I. Triangula in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (2). II. Triangula in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (3). Ambæ, quæ ſequuntur, ſunt propoſitiones iſtarum converſæ. III. Triangula æqualia in eadem baſi, & ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in eiſdem parallelis (4). Triangula in æqualibus baſibus, ac in directum jacentibus, ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in iiſdem parallelis (5).

## DE PARALLELOGRAMMIS.

X. DE parallelogrammis etiam Euclides demonſtrat cum adfectiones abſolutas, tum eorumdem adfectiones relativas. Proprietates abſolutas hæc duo theoremata oſtendunt. I. Parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ, ex adverſo ſunt, inter ſe ſunt æqualia: ſimiliter autem anguli: diagonalis vero ea bifariam dividit (6). II. Parallelogrammorum ſpatiorum eorum, quæ circa diametrum ſunt complementa, inter ſe ſunt æqualia (7).

XI. Adfectiones parallelogrammorum relativas illas dicimus, quæ ipſa ſpectant tam inter ſe, quam cum triangulis collata: quas hæc tria Euclidis theoremata demonſtrant. I. Parallelogramma in eadem

(1) Prop. 26. lib. 1. Theorema iſtud ad Thaletem Mileſium refertur auctorem, ut Proclus ex Eudemo tradit. Iſto autem Euclides doctrinam omnem æqualitatis, & inæqualitatis triangulorum claudit; & ad parallelas, & parallel[illegible]mma pertranſit.

(2) Ex lib. 1. prop. [illegible]7. Euclidis.

(3) Ex lib. 1. prop. [illegible]. Euclidis.

(4) Ex lib. 1. prop. [illegible]9. Euclidis, qua convertit 37.

(5) Ex lib. 1. prop. 40. Euclidis, qua convertit 38.

(6) Ex lib. 1. prop. 34. Euclidis. Quam heic de parallelogrammis demonſtrat, tertia adfectio circulo quoque convenit, & ellipſi.

(7) Ex 1. lib. prop. 43. Euclidis, qui unum tantum hujus theorematis caſum exponit; eſto ejus tres ſint caſus: vel enim, quæ circa diametrum ſunt complementa ſe ſe in punto tangunt, vel ſe ſecant, vel a ſe disjunguntur. Eadem autem ſemper congruit demonſtratio, quamquam non ſemper quadrilatera ſint ſupplementa, ut docet Commandinus.

dem basi, & in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia (1). II. Parallelogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, sunt etiam inter se æqualia (2). Si parallelogrammum, & triangulum habeant eamdem basim, & sint inter easdem parallelas constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli (3).

## PROBLEMATA PRIMI LIBRI.

XII. HUjus primi libri problemata instituit Euclides ad exponendum ortus, & constructiones rectilinearum quoque figurarum: quare ipsa ad quatuor classes commode revocari possunt; nimirum & ad rectas tum quoad communem praxim, tum perpendiculares, tum parallelas; & ad angulos; & ad triangula; & ad parallelogramma tandem sive quoad se inspecta, sive inter se collata; secundum has igitur classes ea heic proponere placet.

XIII. Praxis communis rectarum per hæc tria Euclidis problemata indicatur. I. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere (4). II. Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori portionem æqualem abscindere (5). III. Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere (6).

XIV.

(1) Ex Lib. 1. prop. 35. Euclidis, qui per hoc, & quæ sequuntur theoremata parallelogrammi cujuslibet dimentionem exposuit. Hæc theoremata, ut Federicus Commandinus ex Proclo inquit, ex eorum numero sunt, quæ in mathematicis disciplinis admirabilia appellantur. Stupet enim vulgus statim cum videt a longitudine multiplicata spatiorum æqualitatem non destrui, & tamen eadem existente basi, quantum parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur.

(2) Ex lib. 1. prop. 36. Euclidis. In præcedenti theoremate Euclides easdem bases accepit, heic vero æquales: id autem commune utriusque parallelogrammis posuit, inter easdem esse parallelas. Hoc theorema per bases sejunctas demonstravit Euclides; attamen, ut inquit Proclus, a Theone demonstratio fuit ad meliorem redacta formam, ut omnibus casibus congruere videatur.

(3) Ex lib. 1. prop. 41. Euclidis. Hujus theorematis demonstratio etiam valet, si parallelogrammum, & triangulum habeant æquales bases; nam cum triangula in basibus æqualibus sint æqualia, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit.

(4) Ex lib. 1. prop. 2. Euclidis; qui in ipsa dedit quidem punctum sola positione, hoc enim tantum pacto dari potest; linea etiam datur specie, & magnitudine. Sumsit quoque punctum datum extra rectã datam; esto possit esse & in eadem recta, & in ejusdem rectæ extremitate; in quo casu eadem foret demonstratio, etsi diversa constructio.

(5) Ex lib. 1. prop. 3. Euclidis.

(6) Ex lib. 1. prop. 10. Euclidis; qui rectam terminatam ponit; siquidem ex utraque parte infinitam rectam bifariam dividere non possumus; infinitæ vero ex altera parte tantum, ubicumque punctum accipiatur, inæqualis semper fiet sectio. Apollonius Pergæus rectam lineam terminatam diverso pacto ab Euclide bifariam secat, ope duorum circulorum ad modum primæ propositionis; attamen in idem convenit, animadvertente Commandino.

XIV. Quoad rectas perpendiculares, & parallelas hæc tria apud Euclidem extant problemata. I. Ex puncto in recta linea dato perpendicularem rectam lineam excitare (1). II. Super rectam infinitam ex puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam demittere (2). III. Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere (3).

XV. Praxim deinceps angulorum, quæ ipsos sive quoad se inspectos, sive inter se collatos spectat, hæc duo nos docent problemata. I. Datum angulum rectilineum bifariam secare (4). III. Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum, angulum dato angulo rectilineo æqualem constituere (5).

XVI. Triangula itidem per hæc duo problemata construuntur. I. In data recta linea terminata triangulum æquilaterum costituere (6). II. Ex tribus rectis, quæ tribus aliis datis sint æquales triangulum constituere; oportet autem, ut ex tribus datis duæ simul reliqua majores sint, quomodocumque sumtæ (7).

XVII. Tandem problemata, quæ ad parallelogramma etiam costruenda attinent, sunt hæc quatuor. I. In data recta linea terminata quadratum constituere (8). II. Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo dato (9). III. Ad datam rectam li-

(1) Ex lib. 1. prop. 11. Euclidis, qui punctum in medio lineæ designat: esto sumi etiam possit in altera ejus extremitate; quo in casu eadem efformanda esset constructio, recta tantum producta.

(2) Prop. 12. lib. 1. Hoc problema, ut refert Proclus, Oenopides primus investigavit, utile ipsum ad Astrologiam existimans: & datur in eo recta infinita; cum punctum extra ipsam sumatur, ne cum linea data confundatur.

(3) Prop. 31. lib. 1. quæ est Euclidis; qui per tale problema ortum parallelarum videtur tradere.

(4) Ex lib. 1. Prop. 9. Euclidis. Ex hoc problemate angulus tantummodo rectilineus secari velet; quia aliorum sectio ad elementarem institutionem non attinet; angulus autem rectilineus hinc etiam secari potest in quatuor angulos æquales, in octo, in sexdecim &c. semper procedendo per augmentum duplex; eoquod omnis pars sectionis semper bifariam secari poterit: in quamlibet vero aliam inæqualem portionem eum secare præsentem constructionem transgreditur.

(5) Prop. 23. lib. 1. Hoc problema ab Oenopide inventum fuisse tradit Eudemus.

(6) Ex lib. 1. Prop. 1. Quæ est Euclidis, qui esto solum in ipsa modum recenseat, quo in data recta triangulum æquilaterum valeat constitui: potest tamen in ipsa recta constitui, & triangulum isosceles, si accipiatur ipsa recta vel æque major, vel æque minor; & triangulum scalenum; si non ex puncto, in quo illi duo circuli se secant, sed ex alio seu extra, seu intra circulorum circumferentiam quomodolibet designato rectæ ducantur; sic enim tria latera trianguli inæqualia oriuntur.

(7) Prop. 22. lib. 1. Hoc problema est Euclidis; attamen ejus demonstratio a Theone fuit immutata, ut animadvertit Proclus.

(8) Prop. 46. lib. 1. Problema istud Euclides procudit, & præcipue deservit constructioni propositionis 47. lib. 1. & ad totum elementum secundum.

(9) Ex lib. 1. prop. 42. Euclidis.

lineam, dato triangulo, æquale parallelogrammum constituere in dato angulo (1). III. Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo (2).

## EX SECUNDO ELEMENTORUM LIBRO.

I. PEr quatuordecim propositiones, quarum duodecim sunt theoremata, & duo tantum problemata, edisserit in hoc secundo libro Euclides de Potentiis rectarum; hoc est de quadratis, atque rectangulis omnibus, quæ ex ipsis rectis, sive ex earumdem partibus egrediuntur. Eorum doctrinam eo potissimum momento prosequitur, ut proprietates trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli, quas adjicere debuerat ad propositionem quadragesimam septimam libri primi, commode demonstrare posset. Has igitur propositiones eodem superius statuto ordine proferemus.

## THEOREMATA SECUNDI LIBRI.

II. QUæ cudit in hoc secundo libro theoremata Euclides, ad duas classes recta methodo redigi valent; videlicet, & ad varias rectangulorum constructiones, quæ ex diversa rectarum sectione oriuntur: & ad proprietates trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli; secundum igitur has classes illa omnia proferenda ducimus.

## DE RECTANGULIS, QUÆ EX VARIA RECTARUM SECTIONE ORIUNTUR.

III. PRimum hujus libri theorema tamquam fundamentum ceterorum proponit Euclides, quodque, esto ipse demonstret, potest tamen veluti axioma accipi, & facili negotio descendit ex secunda parte octavi axiomatis libri primi, quo profertur, totum omnibus

C suis

(1) Prop. 44. lib. 1. Antiqua sunt, ut ait Eudemus, Pythagoreorum inventa istiusmodi spatiorum applicationes, excessus, & defectus: dum enim ipsi proposita recta, datum spatium toti rectæ coaptaverunt, tunc spatium illud lineæ applicari dixerunt: cum vero spatii longitudinem ipsa recta majorem, effecerūt, tunc excedere: cum tandem minorem, tunc deficere. Euclides autem isto in problemate applicationem parallelogrammi ad rectam tantum recenset; acturus dein de excessu, & defectu cum in secundo, tum in sexto elemento, ut Proclus animadvertit.

(2) Prop. 45. lib. 1. Problema istud etiam est Euclidis, teste Proclo, qui per hoc problema doctrinam, quam in duobus præcedentibus tradiderat de constitutione, & applicatione æqualium dato triangulo parallelogrammorum, universaliorem reddit, applicationem ad quodlibet rectilineum extendens.

ſuis partibus ſimul ſumtis æquale eſſe ; ex quo omnes veluti hujus libri propoſitiones clariſſime deſcendunt ; qua de re primum heic conſiderat Euclides lineas ſectas, & inſectas, atque rectangula, quæ ex ipſis egrediuntur, invicem confert : deinceps comparat quoque rectangula, & quadrata, quæ oriuntur ex recta aut ſecta utcumque, aut ſecta in partes æquales, & inæquales, aut tandem ſecta in partes æquales, & utcumque protenſa per aliam rectam ei adjectam : ſecundum igitur hunc ordinem decem prima theoremata proferemus.

IV. Circa rectas ſectas, & inſectas hoc unicum adeſt theorema. Si fuerint duæ rectæ lineæ, una quidem ſecta in quotcumque partes, altera vero inſecta, rectangulum, quod fit ex tota, & inſecta, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem inſecta (1).

V. Quoad rectas ſectas utcumque quinque alia ſequuntur theoremata, quæ ex primo quoque deſcendunt, & ſunt. I. Si recta linea ſecta fuerint utcumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt a tota, & partibus (2). II. Si recta linea ſecetur utcumque, rectangulum ex tota, & parte una, æquale erit rectangulo ſub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta (3). III. Si recta linea ſecetur ut cumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit quadratis partium una cum rectangulo bis ſub partibus contento (4). Ex hujus theorematis demonſtratione duo deſcendunt : primum, parallelogramma circa diagonalem quadrati eſſe quoque quadrata : ſecundum, quod ſi recta ſecetur in partes æquales, quadratum totius erit quadruplum quadrati dimidiæ. IV. Si recta linea ſecetur utcumque, quadrata, quæ fiunt ex tota & parte una, æqualia erunt rectangulo bis contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (5). V. Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum quod fit a tota, & parte una, veluti ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (6).

VI.

[1] Prop. 1. lib. 2. Non ſolum hoc theorema, verum & omnes ſecundi elementi propoſitiones judicio omnium Euclidi adſcribuntur, qui eas omnes unice cudit ad demonſtrandas cum obtuſanguli, tum acutanguli proprietates, ob quas totum ſecundũ conſcripſit librum. Iſtiuſmodi autẽ propoſitiones fere omnes demonſtrantur axiomate illo: Totum eſt ſuis partibus ſimul ſumtis æquale. Decem prima hujus elementi theoremata, quæ ſpectant rectangula, & quadrata ex linearum ſectione oriunda, vera etiam in numeris reperiuntur, quoties numeri, ut lineę, dividuntur in partes ; etenim rectangula quoque numerica ex multiplicatione duorum numerorũ promanant, & quadrata numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum ; unde de numeris idem valet, quod de lineis.

Ex hoc quoque theoremate perſpicue conſtat, in quadratis ſpatiis parallelogramma circa diametrum, quadrata eſſe.

[2] Prop. 2. lib. 2.

[3] Prop. 3. lib. 2. Hoc, & duo præcedentia theoremata demonſtrandæ multiplicationi plurimum deſerviunt.

[4] Prop. 4. lib. 2. Hoc theorema radicum quadraticarum extractioni non parum confert.

[5] Prop. 7. lib. 2.

[6] Prop. 8. lib. 2.

VI. De rectis sectis in partes æquales, & inæquales hæc duo theoremata demonstrat Euclides. I. Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, erit rectangulum ex partibus inæqualibus, una cum quadrato portionis, quæ inter utramque sectionem interjicitur, æquale ei, quod a dimidia describitur, quadrato (1). II. Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramquæ sectionem interjecta (2).

VII. Tandem de linea secta in partes æquales, & producta per adjectionem alterius hæc duo alia exhibet Euclides theoremata. I. Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta veluti ex unica linea in ipsam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, similiter tamquam ex unica linea (3). II. Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, quadrata duo, unum ex tota, & adjecta veluti ex unica linea, alterum ex ipsa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta (4).

## DE RECTANCULIS LATERUM TRIANGULI OBTUSANGULI, ET ACUTANGULI.

VIII. IN propositione 47. lib. 1. invicem comparavit Euclides quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli rectanguli: heic autem versatur circa quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli, exposita jam de potentiis rectarum doctrina, quæ omnino præmittenda erat, & sequentia duo cudit theoremata. I. In triangulis obtusangulis quadratum, quod fit ex latere obtusum angulum subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis ex opposito angulo demissa (5). II. In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere acutum angulum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis ex opposito angu-



[1] Prop.5.lib.2. Theorema istud cum tribus, quæ sequuntur, ad Algebram multum conducunt.

[2] Prop. 9. lib. 2. Quæ cum reliquis, quæ sequuntur, Trigonometriæ planæ deservit.

[3] Prop.6.lib.2.

[4] Prop.10.lib.2.

[5] Prop.12.lib.2. Ad hanc, & sequentem propositionem totum dirigitur secundum ab Euclide elementum: & per hæc duo theoremata demonstrat ipse proprietates illas triangulorum, quas in primo libro reliquerat.

angulo demiſſa . Ex hoc theoremate tale exiſtit corollarium : In omni parallelogrammo quadrata diagonalium æqualia ſunt quadratis laterum (1) .

## SECUNDI LIBRI PROBLEMATA .

IX. DUo tantum ſunt iſtiuſmodi ſecundi libri problemata, quorum unum potentias rectarum ſpectat , alterum rectilineorum æqualitatem . I. Datam rectam lineam ſubinde dividere, ut rectangulum , quod fit ex tota , & parte una , æquale ſit quadrato partis alterius (2) . II. Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere (3). Ex problematis hujus demonſtratione duo eliciuntur corollaria . I. Si ex puncto aliquo in circuli circumferentia ſumto , perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum talis perpendicularis æquale erit rectangulo ſub diametri ſegmentis comprehenſo . II. Si quadratum , quod fit perpendiculari erecta ſuper diametro circuli , æquale ſit rectangulo , quod ſit ex ſegmentis, circuli circumferentia tranſibit per extremitatem perpendicularis .

## EX TERTIO ELEMENTORUM LIBRO PROPOSITIONES.

I. QUamquam Euclides in tertio Elementorum Libro unam tantum contempletur figuram , circulum nempe : non paucæ tamen ſunt adfectiones , & conſtructiones , quas de hujuſmodi figura demonſtrat : plurimas enim ſive in circulo , ſive ad circulum ductas rectas lineas inter ſe comparat ; circulos etiam & ſe ſe mutuo interſecantes , & vel ſe invicem vel rectas ipſas tangentes conſiderat ; centra circulorum , & portionum determinat ; anguloſque tandem , qui ſive ad centra , ſive ad circumferentias conſiſtunt, ſeſe inter componit ; quare cum in hoc libro propoſitiones triginta ſeptem occurant , quarum una & triginta theo-

[1] Prop.13.lib.2. Quamquam Euclides in definitionibus lib.1.acutangulum triangulum nuncupaverit illud , quod omnes acutos habeat angulos : heic tamen omnia triangula appellat acutangula : propterea quod omnia habeant ſaltem unum angulum acutum ; unde propoſitio iſta hot pacto exponitur quoad ſenſum: Omnis trianguli latus , quod acutum ſubtendit angulum , minus poteſt eſſe , quam latera , acutum angulum continentia ; quod & de triangulo rectangulo , & de obtuſangulo quoque valet .

[2] Prop. 11. lib. 2. Hoc problema ſoli geometricæ accidit partitioni , non autem numericæ : nullus enim numerus ita ſecari poteſt , ut productum ex toto in partem unam , æquale ſit quadrato partis reliquæ . Hoc idem problema demonſtrat Euclides in ſexto libro : ubi diverſo modo illud exhibet dicens : datam rectam extrema , & media ratione ſecari: hic autem, quoniam de proportione nihil palam tradiderat , non dicit rectam media , ac extrema ratione ſecari .

[3] Prop. 14. lib. 2.

theoremata ſunt, & ſex aliæ problemata; iſtas per determinatas claſſes proferre debito ordine curabimus.

## TERTII LIBRI THEOREMATA.

II. AD quatuor claſſes hujus libri theoremata commode rediguntur. Ad primam nempe, quæ ſpectat circulorum centra: ad ſecundam, quæ colligit rectas ad circuli circumferentias ductas: ad tertiam, quæ ſive circulos ſeſe invicem occurrentes comprehendit, ſive rectas, quæ circulum ipſum tangunt: ad quartam demum, quæ angulos ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſtitutos, concludit.

## DE CIRCULORUM CENTRIS.

III. CEntra circulorum per quatuor theoremata inveſtigantur. I. Si in circulo recta quædam linea ſecet aliam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos, in ſecante erit centrum circuli (1). II. Si recta linea per centrum ducta, aliam rectam lineam non ductam per centrum bifariam ſecet, ſecabit ad angulos rectos: & ſi ſecet ad angulos rectos, ſecabit bifariam. Perinde infertur quoque, rectam in circulo ductam ſecantem aliam aut ad angulos rectos, aut bifariam, in ſe centrum circuli continere (2). III. In circulo ſi duæ rectæ lineæ ſeſe in centro non ſecent, utraque bifariam non ſecabitur (3). IV. Si e puncto intra circulum ſumto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, adſumtum punctum erit centrum circuli (4).

## DE RECTIS AD CIRCULI CIRCUMFERENTIAM DUCTIS.

IV. CIrca rectas ad circuli circumferentiam ductas ſex ab Euclide demonſtrantur theoremata, nimirum. I. Si in circuli circumferentia duo puncta ſumantur, quæ puncta iſta conjungit recta linea, tota intra circulum cadet (5). II. Si in circuli diametro capiatur punctum aliquod, quod non ſit centrum, & ex eo ducantur ad circum-

(1) Coroll. propoſ. 1. lib. 3. Propoſitiones cunctas hujus tertii elementi ab Euclide acceptas ferunt omnes.

[2] Prop. 3. lib. 3. Ex hoc theoremate Euclides latenter indicat, cum in circulo recta una aliam non ductam per centrum ſecaverit, tria evenire, & rectam ſecantem tranſire per circuli centrum; & aliam ſecare & bifariam, & ad angulos rectos: quorum uno dato, aliud evincitur.

[3] Prop. 4. lib. 3.

[4] Prop. 9. lib. 3.

[5] Prop. 2. lib. 3. qua indicat quoque Euclides, rectam quamlibet circulum tangentem in unico tantum puncto periferiæ occurrere; alioquin caderet intra circulum, & non eſſet tangens, ſed ſecans.

cumferentiam plures aliæ rectæ lineæ, earum omnium maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum, minima vero reliqua portio diametri: aliarum autem, quæ maxime propinquiores sunt, majores erunt semper remotioribus: & ab illo eodem puncto non nisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (1). III. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam, earum utique, quæ pertingunt ad concavam, maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum: aliarum vero, quæ maximæ sunt propinquiores, majores erunt semper remotioribus: vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illa, quæ producta transit per centrum: aliarum vero, quæ minimæ sunt propinquiores, minores erunt semper remotioribus: & ab illo eodem puncto, cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (2). IV. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant: & quæ æqualiter a centro distant inter se sunt æquales (3). V. In circulo maxima linearum in ipso ductarum est diameter, seu quæ transit per centrum: aliarum autem, quæ centro sunt propinquiores, majores semper erunt remotioribus (4). VI. Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, erit rectangulum sub segmentis unius æquale rectangulo sub segmentis alterius. Quæ proprietas obtinet etiam, si duæ rectæ in circulo ductæ sibi invicem extra circulum occurrant (5).

## DE CIRCULIS SIBI INVICEM OCCURRENTIBUS, ET DE RECTIS CIRCULUM AUT TANGENTIBUS, AUT SECANTIBUS.

V. QUoad circulos sibi invicem occurrentes sex alia extant apud Euclidem theoremata. I. Circuli, qui se mutuo secant, non possunt unum idemque centrum habere (6). II. Circuli, qui sese intus contingunt, non possunt unum idemque centrum habere (7). III. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat (8). IV. Si duo circuli sese intus contingant, recta conjungens centra ipsorum transibit per punctum contactus (9). V. Si duo circuli sese extra contingant, recta conjungens centra ipsorum, transibit per punctum contactus (10). VI. Circulus circulum in pluribus, quam

[1] Prop.7. lib.3. Ex hac propositione colligitur solum ex centro duci posse ad circumferentiam rectas omnes æquales; nam ex alio quovis puncto non nisi duæ æquales ducentur.
[2] Prop. 8. lib. 3.
[3] Prop. 14. lib. 3.
[4] Prop. 15. lib. 3.
[5] Prop. 35. lib. 3.
[6] Prop.5.lib.3.
[7] Prop.6.lib.3.
[8] Prop.10.lib.3.
[9] Prop.11.lib.3.
[10] Prop.12.lib.3.

quam in uno puncto non contingit sive intra, sive extra eum contingat (1).

VI. Quoad rectas circulum tangentes tria solum demonstrantur theoremata. I. Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eum erigatur, hæc tota cadet extra circulum, & in locum ipsa, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta linea duci poterit. Perinde facile ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datum, si ex tali puncto ducatur diameter ad circulum, & ex eodem puncto erigatur perpendicularis ad diametrum (2). II. Si circulum recta contingat linea, quæ centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem (3). III. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur, hæc transibit per centum circuli (4).

VII. Tandem quoad rectas, quæ ex eodem puncto ductæ circulum, & tangunt, & secant, theoremata duo sunt. I. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum contigat, altera eumdem utcumque secet, rectangulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum, æquale erit quadrato, quod fit ex tangente (5). II. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera incidat in eum; sitque rectangulum

(1) Prop. 13. lib. 3.

(2) Prop. 16. lib. 3. Per hoc theorema nos quoque Euclides docet & rectam lineam, quæ ab extremitate diametri ducitur, circulum contingere, illumque tangere in uno tantum puncto, alias intra ipsum caderet: & angulum contactus, hoc est a tangente, & circuli peripheria contentum, minorem esse quocumque angulo rectilineo acuto, & angulum semicirculi, hoc est diametro, & circuli peripheria comprehensum, quocumque angulo acuto rectilineo esse majorem; etenim in locum tangente, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta ex puncto contactus duci potest.

Neque exinde eruitur, angulum contactus nulla prorsus quantitate gaudere; quia esto tam minor sit quocumque angulo acuto, ut per nullam rectam minui possit, potest tamen augeri: & esto minui nequeat per rectam lineam infinitesimum angulum ordinis primi capientem, minui tamen potest per alias rectas dividentes hunc angulum infinitesimum, nempe per aliam circuli circumferentiam descriptam per punctum contactus, & majore intervallo, quam sit circuli centrum: etenim nomine quantitatis apud Mathematicos id omne intelligitur, quod plus minusque suscipiens, quocumque modo augeri potest, aut minui.

[3] Prop. 18. lib. 3.

[4] Prop. 19. lib. 3. ex qua colligitur, si intra circulum aliqua ponatur recta, atque ex uno ejus extremo alia extra circulum ducatur, tria evenire posse. I. Rectam lineam intra circulum positam esse diametrum, seu per centrum transire. II. Ductam extra centrum esse tangentem. III. Unam alteri ad angulos rectos insistere, quorum si duo contigerint, tertium necessario eveniet.

[5] Prop. 36. lib. 3. Hoc theorema duo nos docet. I. Si ab eodem extra circulum puncto quotvis ducantur secantes, omnia rectangula inter se æqualia esse; etenim singula quadrato tangentis æquantur. II. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt æquales esse: earum quippe quadrata singula eidem æquantur quadrato ex Commandino.

gulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum æquale quadrato incidentis, incidens iſta recta linea tangens erit (1).

## DE ANGULIS SIVE AD CENTRA, SIVE AD CIRCUMFERENTIAS CIRCULORUM CONSTITUTIS, ET DE CIRCULORUM PORTIONIBUS.

VIII. QUæ exponunt adfectiones angulorum, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſiſtunt, theoremata ſeptem numerantur, nimirum. I. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad circumferentiam, cum ſuper eodem arcu inſiſtunt (2). II. Qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales (3). III. Quadrilaterorum in circulo inſcriptorum anguli oppoſiti duobus rectis ſunt æquales (4). IV. In circulis æqualibus æquales anguli, æqualibns arcubus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſint poſiti (5). V. In circulis æqualibus anguli, qui ſive ad centra, ſive ad circum ferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, ſunt etiam æquales inter ſe (6). VI. Angulus in ſemicirculo rectus eſt: qui vero eſt in portione majore eſt recto minor: & qui in portione minore eſt recto major (7). VII. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum ſecans ducatur, anguli ſub tangente & ſecante contenti, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus conſtituuntur (8).

IX. Theoremata tandem, quæ ad circulorum portiones attinent hæc quatuor ſunt. I. In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales conſtitui non poſſunt ad eaſdem partes (9). II. In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones conſtitutæ, ſunt etiam æquales (10). III. In circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ, æquales arcus abſcindunt: majorem quidem æqualem majori, minorem vero minori (11). IV. In circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ ſubtendunt. Hæc propoſitio præcedentem convertit (12).

TER-

[1] Prop. 37. lib. 3. qua convertitur præcedens; & ex ea evincitur quoque, quæ ex eodem puncto ad circulum ducuntur rectæ, æquales eſſe tangentes.

[2] *Prop.20.lib.3.*

[3] Prop.21.lib.3.

[4] Prop.22.lib.3.

[5] Prop.26.lib.3. Quod in hoc theoremate de æqualibus circulis demonſtrat Euclides, multo fortius de uno eodemque circulo evincitur.

[6] Prop.27.lib.3. Quæ converſa eſt præcedentis; & eadem demonſtratio erit, ſi anguli æqualibus circumferentiis ejuſdem circuli inſiſtant.

[7] Prop.31.lib.3.

[8] Prop.32.lib.3.

[9] Prop.23.lib.3.

[10] Prop.24.lib.3.

[11] Prop. 28. lib. 3.

[12] Prop.29. lib.3. quæ eſt præcedentis converſa.

## TERTII LIBRI PROBLEMATA.

X. PRaxes & constructiones circulorum, quas Euclides in hoc tertio libro exponit aut circulum ipsum spectant, aut ea quæ circulo adveniunt; quare trifariam digeruntur & in ea, quæ ad circulum quoad se inspectum attinent: & in ea, quæ ad tangentem: & in ea tandem, quæ ad angulos in circuli portione constitutos.

XI. Primæ classis duo sunt. I. Dati circuli centrum invenire (1). II. Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, & circulum perficere (2). III. Datam circuli portionem bifariam dividere (3).

XII. Secundæ vero classis unum tantum extat problema nimirum. Ex dato extra circulum puncto tangentem ad circulum ducere (4).

XIII. Tertiæ tandem classis etiam duo sunt. I. In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato (5). II. Ex dato circulo abscindere portionem, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato (6).

## EX QUARTO ELEMENTORUM LIBRO PROBLEMATA.

XIV. PEr sexdecim propositiones edisserit Euclides in quarto libro de inscriptione, & circumscriptione cum figurarum regularium in circulo, tum circuli in figuris regularibus. Figuræ autem regulares, quas potissime exponit sunt triangulum, quadratum, pentagonum, hexagonum, & quindecagonum (7). Omnes hujus elementi propositiones sunt problemata numero sexdecim: quarum quatuor respiciunt triangulum, quatuor quadratum, totidem pentagonum, una hexagonum, altera quindecagonum, & duæ tantem sunt lemmmata; perinde justa hasce tres



[1] Prop.1.lib.3. Ex hoc problemate est perspicuum, si in circulo recta quædam linea rectam aliam quandam bifariam secabit, & ad angulos rectos, in secante circuli centrum inesse.

[2] Prop.25.lib.3.

[3] Prop.30.lib.3.

[4] Prop.17.lib.3.

[5] Prop.33.lib.3.

[6] Prop.34.lib.3.

[7] Esto varia sit, & multiformis circumscriptionum, & inscriptionum figurarum contemplatio, Euclides tamen non multum admodum progressus est: perveniens namque ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens [ qui astrorum scientiam magis spectant ] finem dicendi fecit; non quod alia, non fuerit rimatus, sed quod nullo negotio construi queant; ut Federicus Commandinus animadvertit.

classes præfata problemata exponemus (1). At prius lemmata, utpote simpliciora dabimus.

II. Lemmata duo sunt nempe. I. In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ sit æqualis: oportet autem, ut data recta linea non sit major diametro dati circuli (2). II. Æquicrure triangulum constituere, cujus uterque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis (3).

III. Et quidem circa figuras trilateras, sive triangula, quatuor proferuntur problemata: suntque sequentia. I. In dato circulo describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (4). II. Circa datum circulum describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (5). III. In dato triangulo circulum describere (6). IV. Circa datum triangulum circulum describere (7).

IV. Circa vero figuras quadrilateras hæc quatuor alia extant problemata. I. In dato circulo quadratum describere (8). II. Circa datum circulum quadratum describere (9). III. In dato quadrato circulum describere. (10) IV. Circa datum quadratum circulum describere (11).

V. Ad multilateras tandem figuras spectant sex reliquæ propositiones: quarum quatuor ad pentagonum attinent, una ad hexagonum, & altera ad quindecagonum. Igitur I. In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere (12). II. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere (13). III. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere (14). IV. Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere (15). V. In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere (16). VI. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, &

[1] Omnes hujus elementi propositiones, ut inquit Guilielmus Whistonius, Trigonometriæ magis inserviunt: earum namque ope figurarum, & corporum magnitudines, & varios astrorum adspectus, & circuli quadraturam, & circulorum duplicatam rationem, & non pauca alia non ab re perscrutamur.

[2] Prop.1.lib.4. Hæc, omnesque aliæ quarti libri propositiones Euclidi adscribuntur, demtis solummodo quatuor illis, quæ ad triangulum spectant: quæ teste Andrea Tacquetio, Thaleti Milesio debentur; quarum inventione lætitia elatus bovem immolasse dicitur.

[3] Prop.10.lib.4.

[4] Prop.2.lib.4.

[5] Prop.3.lib.4.

[6] Prop.4.lib.4.

[7] Prop.5.lib.4.

[8] Prop.6.lib.4.

[9] Prop.7.lib.4.

[10] Prop.8.lib.4.

[11] Prop.9.lib.4.

[12] Prop.11.lib.4.

[13] Prop.12.lib.4.

[14] Prop.13.lib.4.

[15] Prop.14.lib.4.

[16] Prop.15. lib. 4. Post hoc problema Euclides tria alia pro suæ doctrinæ ordine adnectere debuerat, alterum de descriptione hexagoni circa datum circulum; alterum de descriptione circuli in dato hexagono; alterum tandem de descriptione circuli circa datum hexagonum, atque alia de circumscriptione quindecagoni circa circulum, & vicissim; at hæc facillima, & nullius negotii aliorum studio commisit.

& æquiangulum describere (1).

## EX QUINTO ELEMENTORUM LIBRO THEOREMATA.

I. UTilem, necessariamque proportionum doctrinam generatim inspectam (2) per vigintiquinque propositiones exponit Euclides in hoc quinto libro (3): suntque omnes theoremata, quæ Eudoxius quidam, qui Platonis magister fuit, adinvenit, & Euclides solum collegit, ut ait Eudemus, Proclus, Commandinus, aliique; per hæc magnitudines generatim inter se comparatas considerat, earumque analogiam perscrutatur. Quoniam autem Euclides cum omnibus Veteribus proportionem ipsam ope multiplicium demonstrat: propterea omnia theoremata hujus elementi in tres classes commode digeruntur; partim enim respiciunt quantitates æquemultiplices, partim quantitates proportionales, partim demum mutationes, quæ fiunt per terminos proportionales, quas argumentandi modos e proportione petitos appellant.

## DE QUANTITATIBUS ÆQUEMULTIPLICIBUS.

II. SEx sunt, quæ quantitates æquemultiplices spectant, theoremata nimirum. I. Si fuerint quotcumque magnitudines, quotcumque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æquemultiplices, quotuplex est una unius, totuplices erunt & omnes omnium (4). II. Si prima secundæ tam multipex fuerit, quam tertia



[1] Prop.16.lib.4.

[2] Totum hoc quintum planorum elementum commune est Geometriæ, Arithmeticæ, Musicæ, Astronomiæ, Staticæ, & omni simpliciter Matheseos disciplinæ; quæ enim in ipso demonstrantur theoremata, non solum Geometriæ congruunt, verum ad ceterarum omnium usus, & contemplationes referuntur; quippe quæ proportionibus inter se connexis fere totæ nitantur, & modos de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc mutuari solent; speciatim vero Geodesia, seu practica Geometria, quæ linearum, figurarum, atque corporum mensuras, quas complectitur, e proportionum doctrina plerumque haurit; & Arithmetica, cujus omnes propositiones, etiam sublatis septimo, octavo, nono, & de numeris ex professo agentibus libris, ex his demonstrari commode possent; & Statica, quæ nonnisi per doctrinam proportionum corporum pondera perscrutatur. Perinde tam utilis est, & necessarium, ut si ejus doctrina de medio auferretur, nihil præclarum, aut egregium in mathesi relinqueretur.

[3] Esto propositiones omnes hujus elementi innumeræ sint; Euclides tamen solum 25. collegit, atque ceteræ, quæ v. libro adjectæ reperiuntur, a Campano, Theone, aliisque fuerunt additæ.

[4] Prop.1.lib.5.

quartæ ; fuerit autem & quinta ſecundæ tam multiplex quam ſexta quartæ, erit compoſita ex prima, & quinta tam multiplex ſecundæ quam compoſita ex tertia, & ſexta multiplex quartæ (1). III. Si prima ſecundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ, æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt etiam æquemultiplices ſecundæ, & quartæ (2). IV. Si prima ad ſecundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquimultiplices ſecundæ & quartæ eamdem quoque rationem habebunt (3). V. Si tota totius tam multiplex ſit, quam ablata ablatæ, erit reliqua reliquæ tam multiplex, quam tota totius (4). VI. Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam ſint earumdem æquemultiplices, erunt & reliquæ vel iiſdem æquales, vel earumdem æquemultiplices (5).

## DE QUANTITATIBUS PROPORTIONALIBUS, SEU DE PROPRIETATIBUS PROPORTIONIS.

III. AD quantitates proportionales duodecim iſta theoremata ſpectant. I. Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem, & eamdem ad æquales (6). II. Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem, & eadem ad minorem (7). III. Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, inter ſe ſunt æquales: & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter ſe æquales ſunt (8). IV. Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem habet rationem, illa major eſt: ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor (9). V. Rationes, quæ eidem ſunt æquales, inter ſe ſunt etiam æquales (10). VI. Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes (11). VII. Si prima habuerit ad ſecundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad ſextam, & prima ad ſecundam majorem quoque rationem habebit, quam quinta ad ſextam (12). VIII. Si quatuor magnitudines pro-

[1] Prop.2.lib.5.
[2] Prop.3.lib.5.
[3] Prop.4.lib.5. Hoc theorema propius ſpectat ad demonſtrationem definitionis magnitudinum, quæ ſunt in eadem proportione, ut eſt, quando æquemultiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, atque æquemultiplices ſecundæ, & quartæ, hoc eſt, conſequentium, vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt; hic enim demonſtrat, & ipſas inter ſe eamdem habere proportionem, ut habet Commandinus.
[4] Prop.5.lib.5.
[5] Prop.6.lib.5.
[6] Prop.7.lib.5.
[7] Prop.8.lib.5.
[8] Prop.9.lib.5.
[9] Prop.10.lib.5.
[10] Prop.11.lib.5.
[11] Prop.12.lib.5.
[12] Prop.13.lib.5.

proportionales fuerint; prima, & secunda erunt, vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Hoc theorema lemma est sextidecimi theorematis (1). IX. Partes cum suis multiplicibus comparatæ eamdem cum iis servant rationem (2). X. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam (3). XI. Si prima ad secundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam; fuerit autem ut quinta ad secundam, ita sexta ad quartam, erit composita ex prima, & quinta ad secundam, ut composita ex tertia, & sexta ad quartam (4). XII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima ipsarum simul reliquis duabus majores erunt (5).

## DE ARGUMENTANDI MODIS E PROPORTIONE PETITIS.

IV. Modos argumentandi, qui ex proportione eruuntur sequentia novem ostendunt theoremata. I. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & invertendo etiam proportionales erunt (6). II. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutando etiam proportionales erunt (7). III. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & dividendo etiam proportionales erunt (8). IV. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & componendo etiam proportionales erunt (9). V. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & convertendo etiam proportiones erunt (10). VI. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis totidem, primæ ipsarum erunt vel una æquales: vel una majores: vel una minores ultimis earumdem. Hoc theorema est lemma vigesimi secundi (11). VII. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipsarum quoque erunt vel una æquales: vel una majores: vel una minores ultimis earumdem. Theorema istud est lemma vigesimi tertii (12). VIII. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (13). IX. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (14).

D 3 EX

(1) Prop.14.lib.5.
(2) Prop.15.lib.5.
(3) Prop.19.lib.5.
(4) Prop.24.lib.5.
(5) Prop.25.lib.5.
(6) Coroll.propos.4.
(7) Prop.16.lib.5.
(8) Prop.17.lib.5.
(9) Prop.18.lib.5.
(10) Coroll.Prop.19.
(11) Prop.20.lib.5.
(12) Prop.21.lib.5.
(13) Prop.22.lib.5.
(14) Prop.23.lib.5.

## EX SEXTO ELEMENTORUM LIBRO.

I. QUam in quinto libro univerſim de omni magnitudine expoſuit proportionis doctrinam Euclides, variis peculiaribus uſibus planarum figurarum applicare contendit in hoc ſexto libro; quare proportiones, quæ in quibuſvis figuris planis occurrere poſſunt, demonſtrare conatur (1). Triginta tribus propoſitionibus, quarum tres, & viginti ſunt theoremata, & decem problemata, totum ſuum complet intentum: quæ omnia per certas claſſes ſic proferre curabimus.

### THEOREMATA SEXTI LIBRI.

II. HUjus Libri theoremata juxta varias planorum proportiones, quas exhibent, quatuor claſſibus facili negotio comprehenduntur: alia enim ſpectant lineas: alia angulos, & ſectores: alia triangula: & alia demum reliquas figuras rectilineas; ſecundum quas claſſes ea hoc ordine recenſebimus.

### DE PROPORTIONE RECTARUM, QUIBUS FIGURÆ RECTILINEÆ CONTINENTUR, ET DE PROPORTIONE ANGULORUM, ATQUE SECTORUM.

III. PRopoſitiones igitur, quæ ad rectarum proportionem ſpectant, quibus figuræ ipſæ continentur, per hæc tria theoremata exponit Euclides. I. Si fuerint quatuor rectæ lineæ proportionales erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis: & viciſſim ſi rectangulum ex mediis æquale ſit rectangulo ex extremis, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt (2). II. Si ſint tres rectæ lineæ proportionales, erit rectangulum ex extremis æquale quadrato quod deſcribitur a media. Et viciſſim, ſi rectangulum ex extremis æquale ſit quadrato a media deſcripto; tres rectæ lineæ proportionales erunt (3). III. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint erunt rectilinea ſimilia, ſimiliterque ab eis deſcripta etiam proportionalia; & viciſſim ſi rectilinea proportionalia ſint, ipſæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt (4).

IV. Ad ſecundam claſſem de angulis & ſectoribus unum attinet theorema nimirum. In æqualibus circulis anguli ſive ad centra, ſive ad cir-

[1] Totum hoc ſextum Elementum Euclidi inventori vulgo adſcribitur; attamen complures alii variis ejuſdem propoſitionibus inſudarunt; omneſque Greciæ Geometræ ſummo ſtudio ipſis incumbuerunt, ut Plato, Architas Tarentinus, Menæchmus, Eratoſthenes, Philo Byzantinus, Hero, Apollonius Pergæus, Nicomedes, Pappus, aliique, teſte Eudemo, Proclo, & Eutochio.

[2] Prop.16. lib.6. Hinc cujuslibet trianguli rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimenſione facile dimetimur.

[3] Prop.17.lib.6. Hinc lineam inacceſſam, cujus terminus alter eſt acceſſibilis, metiri diſcimus.

[4] Prop.22.lib.6.

circumferentias positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt; similiter autem & sectores (1).

DE PROPORTIONE, ET SIMILITUDINE TRIANGULORUM.

V. Circa propositiones tertiæ classis, quæ pertinent ad proportionem, atque similitudinem triangulorum duo theoremata sunt, quæ versantur circa triangula in genere, nempe. I. Si uni laterum trianguli, parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter: & vicissim si secet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit (2). II. Recta, quæ secat, angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, secabit basim in ratione laterum: & vicissim recta, quæ secat basim alicujus trianguli in ratione laterum, secabit angulum verticalem bifariam (3). Alia theoremata demonstrant proprietates trianguli rectanguli speciatim; suntque duo sequentia. I. Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad basim perpendicularis demittatur, hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ cum toti, tum inter se similia erunt (4). II. In triangulis rectangulis figura quævis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis erit figuris, quæ illi similes, & similiter positæ, describuntur a lateribus rectum angulum continentibus (5).

VI. Per alias tandem propositiones comparantur triangula inter se sive quoad areas, sive quoad similitudines. Circa comparationes quoad areas hæc tria extant theoremata. I. Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter se sunt ut bases (6). II. Triangula, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia: & vicissim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt etiam æqualia inter se (7). III. Triangula

[1] Prop.33. lib.6. Hinc perspicuum est etiam angulum esse ad angulum, ut sector ad sectorem.

[2] Prop.2. lib.6. Hoc theorema nos quoque docet, si ad unum trianguli latus ductæ fuerint plures parallelæ, fore omnia laterum segmenta proportionalia.

[3] Prop.3. lib.6. Quod theorema indicat etiam, si recta, quæ angulum trianguli bifariam secat, & bisecabit etiam basim, triangulum fore Isosceles, quia duo latera habebit æqualia, & bisecans recta erit perpendicularis basi.

[4] Prop.8. lib.6. Ex hoc theoremate est manifestum, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, ductam basis partibus mediam proportionalem esse: & quodlibet latus trianguli medium esse proportionale inter basim, & unamquamque partem.

[5] Prop.31. lib.6. Hoc theorema universalius est propositione 47. lib. 1. quia extenditur ad omnes rectilineas figuras.

[6] Prop.1. lib.6. Hoc est maximum theorema, a quo totum sextum dependet elementum; imo quidquid de quibusvis figuris sive planis, sive solidis fuit umquam demonstratum ab isto descendit.

(7) Prop.15. lib.6. Ex hoc, & præcedenti theoremate evincitur, tam parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases, & altitudines, esse æqualia: & contra.

la similia sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum (1).

VII. Tandem de similitudine triangulorum hæc quinque alia extant theoremata. I. Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia: & homologa sunt latera illa, quæ æquales angulos subtendunt (2). II. Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula: & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera subtendunt (3). III. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum istos angulos proportionalia: sunt etiam æquiangula: & æquales habent angulos illos, quos homologa latera subtendunt (4). IV. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, hoc est utrumque vel majorem, vel minorem recto, erunt etiam æquiangula: & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia (5). V. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum habeant quoque latera homologa parallela, reliqua eorum latera in directum erunt (6).

## DE RELIQUIS FIGURIS RECTILINEIS.

VIII. QUæ tandem theoremata reliquas figuras rectilineas proportionales ostendunt, sunt septem, quæ sequuntur. I. Parallelogramma, quæ æqualia sunt & habent, unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportinalia: & vicissim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt *etiam* æqualia inter se (7). II. Poligona similia dividuntur in triangula numero æqualia: similia, & homologa totis: duplicatamque habent rationem laterum homologorum (8). III. Quæ eidem rectilineo sunt similia, inter se sunt similia (9). IV. Parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam (10). V. Parallelogramma,

quæ

[1] Prop.19.lib.*6*.
[2] Prop.4.lib.*6*.
[3] Prop.5.lib.*6*.
[4] Prop.6.lib.*6*.
[5] Prop.7.lib.*6*. Ex hoc theoremate, & quatuor præcedentibus constat similitudinem triangulorum evinci posse; si habeant latera proportionalia; si habeant unum angulum uni angulo æqualem; & latera circum æquales angulos proportionalia; & reliquos angulos ejusdem speciei inter se.
[6] Prop.32.lib.*6*.

[7] Prop.14.lib.*6*. Ex theoremate isto pendet demonstratio regulæ inversæ, sive reciprocæ proportionum, qua ex datis tribus terminis quartum invenitur, multiplicando in se invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, inde habetur quartus.
[8] Prop.20.lib.*6*. Ex hoc theoremate indigitatur methodus figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione data.
[9] Prop.21.lib.*6*.
[10] Prop.23.lib.*6*.