RACCOLTA
DI VARJ, E' DIVERSI
OPUSCOLI.
TOMO.
LXXXII.

1

IN ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EUCLIDIS DISSERTATIO ACADEMICA

A PATRIBUS AUDITORIBUS

ALMI COLLEGII

D. THOMÆ AQUINATIS

F. ANTONINO M. DE SERIO. F. CHERUBINO M. RUGERIO.
F. AMBROSIO M. VIVIANO. F. HIERONYMO M. DE JESU.
F. VINCENTIO M. JUDICE. F. JESUALDO M. CORSETTI.

PUBLICE IBIDEM HABENDA

XVI. *Cal. Quintiles ann.* 1760.

AUSPICE

FRATRE JOACHIMO MAJO

Sac. Theol. Baccalaureo, & Mathefeos &c. Anteceffore.

Ferd. Adouasio Sculp.

NEAPOLI Excudebant Paulus, & Nicolaus Simonii MDCCLX.

PUBLICA EX AUCTORITATE.

Erit ergo congruus ordo addiſcendi; ut primo quidem pueri logicalibus inſtruantur, quia Logica docet modum totius Philoſophiæ. Secundo autem inſtruendi ſunt in Mathematicis, quæ nec experientia indigent, nec imaginationem traſcendunt. Tertio autem in Naturalibus, quæ etſi non excedant ſenſum, & imaginationem, requirunt tamen experientiam. Quarto in Moralibus, quæ requirunt experientiam, & animum a paſſionibus liberum. Quinto autem in Sapientialibus, & Divinis, quæ traſcendunt imaginationem, & requirunt validum intellectum.

D. Thom. in *6.* Ethic. lect. 7.

Geometria ejus, quod eſt, ſemper cognitio eſt. Attollet ad veritatem animum, atque ita ad philoſophandum præparabit cogitationem; ut ad ſupera convertamus, quæ nunc contra quam decet ad inferiora dejicimus.

Plato Dial. 7. de Republ.

DIVO THOMAE AQVINATI
QVINTO ECCLESIAE DOCTORI ANGELICO
THEOLOGORVM PRINCIPI ET MAGISTRO
QVI
VTI PER DIVINAM SCIENTIAM
ABDITISSIMA DEI ARCANA PERVADENS
HAERETICORVM FVLMEN CREDENTIVM DVCTOR
RELIGIONIS MVNIMEN EXSTITIT
ITA PER MATHEMATA
CVNCTA AD NVMERVM PONDVS ET MENSVRAM
VTI FVERVNT CONDITA EXIGENS
VERITATEM OMNEM
COMPERIT SCRIPSIT DOCVIT
NEAPOLITANA ACADEMIA
AVGVSTO EIVS NOMINE INSIGNITA
EVCLIDEA ISTHAEC ELEMENTA
PER SVOS PP. AVDITORES
PVBLICE DEMONSTRANDA
STVDIORVM SVORVM
AVSPICI ET PATRONO

4


Hæ tibi sunt artes, pacique imponere morem
Virgil. Æneid. lib. 6. v. 47.
Publica privatis secernere, sacra profanis
Horat. Art. Poet. v. 397.
MARCHIO NICOLAVS FRAGGIANNI A SACRATIORIBVS VTRIVSQVE SICILIÆ CONSILIIS
Cũ tu inter Scabiẽ tantã, et contagia lucri
Nil parvũ sapias, et adhuc sublimia cures
Horat. 1. Epist. 12. v. 14.

PROŒMIUM.

S*Ublimia, Viri amplissimi, Scientiæ Dei studia, quibus nos quotquot sumus Jesu Servatoris militiæ adscripti, inque Ecclesiæ Ministerium acciti, in hoc almo, ac pervetusto Licæo diu, noctuque Angelico Præceptore Duce, ac sedulis rerum nostrarum eruditis Moderatoribus continenter insistimus, & versamur, etsi veritatem omnem ex uno Dei eloquio, cui unice innituntur, accipiant, sibiquemet ipsis sola sufficiant; nihil tamen est, quin ab illis mathematicæ disciplinæ ceu inutiles & noxiæ, ac Viris Theologis prorsus indignæ, ut quidam in Mathemata plus nimio infensi* (a) *prædicare satagerunt; sejungantur prorsus, ac proscriptione perpetua procul abigantur, & amandentur. Quum enim, docente Apostolo* (b), Invisibilia Dei a creatura mundi, per ea, quæ facta sunt intellecta, conspiciuntur, sempiterna quoque ejus Virtus, & Divinitas; *jam quæ de Deo, ejusque dotibus, ac operibus Divino præeunte eloquio sacra demonstrat Theologia fallere nescia; nonnisi per administras naturales scientias nobis cominus accedentes affatim, dilucideque pro nostro captu sciri, & demonstrari queunt. Hasce autem inter administras scientias, quæ mentem nostram ad sublimia mirifice dirigunt, atque ad abditissima Dei arcana intimius dignoscenda maximopere conducunt, nonne Mathematicæ disciplinæ primi subsellii esse videntur? Neutiquam sane verum est, quod Seneca olim pronunciavit* (c): nihil Mathematicis doctrinis inesse frugis, *vel quod Aristippus, aut Pollienus* (d), nihil eas præseferre veritatis: *imo ceu inanes, & ridiculæ habitæ semper fuerunt, quas Stoica, & Sceptica ingenia pro evertenda Mathematica evidentia, ac certitudine, excogitarunt, argutiæ. Nihil istæ profanum exhibent, ut putant qui in illas apertas gerunt inimicitias; nihil in Mechanica positum; nihil cum vana jam exsecrata divinandi arte. Istæ sanæ sunt disci-*

(*a*) Picus Mirandul. apud Alb. Fabric. in Bibl. Græca lib.3.cap.14. §.9.
(*b*) Ad Rom. 1. 20.
(*c*) Senec. Epist.88.
(*d*) Arist.3. Met. & Cic. Acad. 4.

ſciplinæ, quæ, ut Plato (a) *ſcripſit*, mentem attollunt in eum locum, ubi eſt ens beatiſſimum, *nam teſte Proclo* (b) *media verſantur Phyſicen inter, & Metaphyſicen, quæ mentem a ſenſibilibus ad inſenſibilia rapiunt: iſtæ ſunt, quas Theologia quotidie fidas ceu ancillas vocat ad arcem, ac veluti vigiles adminiſtras ad æternæ civitatis mœnia arceſſit, compellitque. Hiſce mortalium quiſque ad intorquenda adverſantium tela, ad declinandos ſophiſmatum ictus, ad ſolide dijudicandum, ad firme, luculenterque ratiocinandum, & ad grandia extollenda vehementer excitatur. Per has humanum ingenium firmiſſimis, experientiæque conſentaneis munitur principiis, certis concluſionibus eliciendis quotidie aſſueſcit, utilibuſque inſtituitur regulis, præceptiſque, ad jucundas cujuſque ſcientiæ quæſtiones enodandas, & ad mira omni in arte patranda opera diu multumque acuitur, & excitatur. Id haud ſolum omnes priſci noverunt Philoſophi, verum & omnes fermè Viri Eccleſiæ principes. Hæc Origenis ſententia fuit, qui* (c) *quos maxime idoneos ad ſacra ſtudia crederet; eos in Geometricis, & Arithmeticis exercebat. Ita quoque Auguſtinus, & Hieronymus in ſacrorum librorum interpretatione, numerorum, ac ſiderum ſcientiam veluti ad multa neceſſariam, adſciverunt; ac ob inſcitiam numerorum multa non intelligi, quæ translate, ac myſtice poſita ſunt in ſcripturis, arbitrati ſunt. Atque ut alios mittam, divus ipſe Thomas, dum præcepta adoleſcentibus addiſcendi indidit* (d) *primum Dialecticæ in ſtudiis eſſe inſtituendos monuit, deinde in Mathematicis, quæ animum a ſenſibilibus rebus ad ſublimia extollunt, demum in Theologicis. Sed quid pluribus hac in re egemus teſtimoniis, ubi ratio ſuppetit? Quonam quæſo pacto nos peregrinantes a Domino ad Deum ipſum agnoſcendum trahimur, niſi per tot tantaque pulchre, ac mirifice a ſummo ipſo Numine in hoc terrarum orbe condita, & in numero, pondere, & menſura digeſta corpora? Hæc autem unde nota haberemus; niſi nos præiret illa Matheſeos fax, qua una numeros, menſuras, ac pondera perſcrutamur? Profecto quod totam hanc terreni faciem orbis delineemus amuſſim, remque mundi publicam longe lateque diffuſam, ſimul univerſam conſpectui ſubjiciamus noſtro; quod* tem-

(*a*) Plat. lib. 7. de Republ. & in Epinom.
(*b*) In lib. 1. Euclid.
(*c*) Euſeb. Hiſt. Eccl. l. 6. cap. 1.
(*d*) 6. Ethic. lect. 7.

temporum vicissitudines digeramus, caducarum vices rerum debitis conditionibus statuamus, tempestatum recursus, annorum periodos, dierum noctiumque incrementa, horarum ac minutorum discrimina, lucis & umbræ confinia internoscamus, id omne una mathesis docet. Dum solis lucem, subtilemque efficaciam in nostros derivamus usus; dum visus radios in immensum exporrigimus; vicinas rerum species animadvertimus; semotas adducimus; occultas recludimus, & naturæ latebras aperimus, id sane Matheseos ope præstamus. Ob quæ autem distantes nubium moles, dissitas terrarum regiones, devias æquoris plagas, elatos montium vertices, imas vallium radices, profundas ponti voragines, orbisque occultos recessus perscrutamur: ob quæ mentem superis admovemus, superosque nobis præsentes reddimus, æthereas conscendimus sphæras, perque orbium cælestium extensas moles spatiamur, astra metimur, interstitia definimus, vagantia sidera coercemus, & cælis ipsis inviolabiles veluti præscribimus leges; ob quæ tandem mundanæ hujus machinæ longe diffusam molem animo conjicimus, opificii Divini stupendam harmoniam admiramur, Opificemque ipsum supremum & experimentis addiscimus, & pio affectu agnoscimus, & veneramur; nisi per mathemata, quæ solum de omnibus mire edisserendo, & firma principia exhibent, & certas veritates luculenter demonstrant? Quid ultra potioris commodi, atque augmenti Theologia habet; quod ab una Mathesi non recognoscit? Si ei exponenda erunt Divina eloquia; id sane Mathesis una præstabit, sine qua innumera loca clariori luci non redderentur. Dubio procul sine Arithmetica quid dignum proferet de numero Israelitarum brevi tempore adaucto (a) *atque de numero seu Levitarum Templo inservientium* (b) *seu Populi, quem David numerari jussit* (c) *seu curruum, atque equorum Regis Salomonis* (d) *& de aliis non paucis? Quid sine Geometria opportunum adducet de Arcæ Noeticæ* (e) *& Babelicæ Turris* (f) *mensuris, de aquarum altitudine in Diluvio* (g) *ceterisque id genus? Quomodo sine Statica loquetur de Quantitate metallorum, quæ Israelitæ ad Ædificium Templi contribuerunt* (h) *de Librarum vitiis* (i) *de Pondere armorum Goliati* (k) *& quæ sunt alia? Utque reliqua* rete-

(*a*) Exodi 12. & Gen. 46. (*b*) Num. 3. (*c*) Reg. 2. (*d*) 1. Reg. 4. (*e*) Gen. 6. (*f*) Gen. 11. (*g*) Gen. 7. (*h*) Exod. 39. (*i*) Levit. 19. (*k*) 1. Reg. 17.

reticeam sine Astronomia non poterit sane opportuna profari de creatione Cælorum, Solis, Lunæ, Siderum, Terræ, de annis solaribus, atque lunaribus Hebræorum, de Jobi Arcturo, de Magorum Stella; deque magna in Christi morte Eclipsi. Poterit ne hisce potissimum temporibus adversus Hæreticorum impetus arma sumere, cum ex illis non pauci ejusmodi prælia contra Sanctissimam Religionem nostram, uno præsidio Mathematico freti, ingruunt? Poterit arcana Divina æqua lance librare, & proponere, quæ firmam, facilem, & aptam exigunt mentem, luculenta ratiocinia, rectam methodum, & alia innumera adjuncta, quæ a sola præstantur Mathesi? Neque opus est pluribus in his præsertim angustiis, in quibus Exercitiis nostris locus est concedendus, & tempus. Ea propter bene ac sapienter hoc in almo Collegio præcipuis nostris studiis Theologicis prima Matheseos Elementa per aliquod subsecivum tempus pertransenda adjunguntur; ut qui in Ecclesiæ ministerium, & fidelium utilitatem adlecti, idoneos nosmetipsos reddere debemus Evangelii Ministros, per hæc opportuna præsidia id agamus. Periculum igitur in re tam gravi in conspectu vestro ad breve tempus facturis adeste humaniter, Viri præstantissimi. Illud tantum unum ut præ oculis habeatis enixe precamur, nos in hac laboriosa Universitate tot gravari cumulatis curis, exercitiisque frequentibus, ut vix spirandi tempus relinquatur, & tot sumere identidem personas, ut mirum sane sit adolescentis ingenium tantæ varietati sufficere. Eadem namque die modo matutinæ scholæ pluries ad theologicas lectiones nos vocant: modo cum exotericis tum acroaticis exercitiis adesse, & antemeridiane, & pomeridiane jubent horæ; nunc Græca, aut Hæbraica urgent; nunc moralia instant; interdum Theologi sumus, philosophamur interdum, alias interrogando objecta proponimus, alias respondendo dogmata sustinemus; & tota nobis adeundo, colloquendo, scribendo, disputando, conferendo semper conteritur dies. Quare benigne adeste, quidquid protulerimus vestro adspectu, vestrisque auribus indignum humaniter excipite; totamque hanc exercitationem nostram ita temperate, ut majorem spem, & animum inde sumentes, nobis hæc nobilia, jucunda, atque nostro muneri utilia, & fructuosa studia nullo umquam tempore displiceant.

PLANORUM ELEMENTA

ORDINE NATURALI DIGESTA.

GEOMETRIA a terræ dimensione olim nuncupata (1), quoad nomen est terræ mensura ; quoad rem vero latius ejus natura patet . Est enim ea Matheseos pars , quæ utpote ceterarum fundamentum , & basis, quantitatem omnem generatim in longum , latum, & altum extensam contemplatur . Istiusmodi autem dimensiones , non prout in re simul conjunctæ reperiuntur , sed ut a mente seorsim concipi valent, considerat ; & perinde quantitatem ipsam in lineas , superficies , & solida digerit . Potissimum tamen ipsa , ut ait Proclus , in contemplatione versatur figurarum , quæ aut lineis , aut superficiebus continentur; & sive in planis dumtaxat , sive in solidis consistunt ; quare in *Planam*, & *Solidam* , seu , ut ajunt , in *Planometriam* , & *Stereometriam* dispescitur . Nobis igitur per istiusmodi Exercitia de *Planis* tantum , quæ prioribus sex libris complexus est Euclides , edisserendum occurrit .

EX PRIMO ELEMENTORUM LIBRO

PROPOSITIONES.

I. QUas in primo libro exhibet Euclides propositiones , numero sunt quadraginta octo : quarum triginta quatuor sunt theoremata, quibus rectilineorum adfectiones demonstrat , & quatuordecim sunt problemata, quibus eorumdem constructiones exponit . Quare omnes pro rectilinearum figurarum doctrina enucleanda sunt institutæ, & ad tres classes facili negotio commode redigi possunt , nimirum ad lineas rectas , ad triangula , & ad parallelogramma , sive figuras quadrilateras , quæ lineis rectis , & parallelis continentur . Quemadmodum ergo theoremata , & problemata seorsim exponere lubet , ita secundum præfatas hasce classes ea digerere conabimur .

[1] A terræ dimensione Γεωμετρία dicta est , quasi terræ mensura , vel ars ipsa terram dimetiendi a voce Græca γέα, aut γῆ *terra* , & μετρέω , seu μετρῶ *metior*. Causam nomini præbuit , quod a terræ dimensione ars hæc cœperit ; uti scribit Cic. 4. Acad. etenim teste Servio ad 3. Eclog. & Proclo , talis disciplina inventa fuit , eo quod Nilus æquo plus crescens, confundebat terminos possessionum , ad quos innovandos Ægyptii Philosophi lineis agros diviserunt .

PRIMI LIBRI THEOREMATA

DE LINEIS RECTIS.

II. Lineas rectas considerat Euclides vel ut sibi mutuo occurrentes, & angulum constituentes, vel ut inter se parallelas & numquam convenientes. Circa priores quatuor occurrunt Euclidis theoremata, nimirum I. Ad eamdem rectam lineam, duabus eisdem rectis lineis, non constituentur duæ aliæ rectæ lineæ æqnales altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ rectæ lineæ terminos habentes (1). II. Quum recta linea insistens super alia recta linea angulos deinceps fecerit, eos vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet (2). III. Si ex puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ constituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt, illæ duæ rectæ lineæ (3). IV. Si duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, anguli, quos ad verticem faciunt, inter se æquales erunt (4). Huic propositioni addi potest ejus conversa, quæ sic exhibetur. Si ex puncto in recta linea dato ducantur hinc inde ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ efficiant angulos ad verticem æquales, istæ duæ rectæ lineæ erunt in directum (5).

III. Circa theoriam parallelarum quinque ab Euclide demonstrantur theoremata, nempe. I. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ (6). II. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem: vel

[1] Prop. 7. lib. 1. Euclides, teste Proclo, reperit theorema hoc, ut esset lemma octavæ propositionis; non enim ad plura suam utilitatem extendit, nullumque alium usum apud Geometras habet.

[2] Prop. 13. lib. 1. Hoc theorema ab Euclide fuit procusum, qui ajente Proclo, maximam in eo diligentiam adhibuit: etenim per illud & exposuit modum, quo recta una super altera insistere debeat, nempe non in directum, sed ad angulum; & indicavit, quod angulus quilibet duobus singulis rectis sit minor; alias non esset angulus, sed una recta.

[3] Prop. 14. lib. 1. Hoc theorema Euclides cudit ad convertendam præcedentem, & per absurdum sibique repugnans demonstrat; conversa enim theorematum per absurda ostendi debent, ut inquit Proclus.

[4] Prop. 15. lib. 1. Theorema istud, teste Eudemo, a Thalete Milesio fuit primum repertum, & ab Euclide deinceps demonstratum; qua etiam demonstratione innuit, si plures rectæ sese mutuo secent, eas efficere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

[5] Corollarium est 15. Propositionis.

[6] Prop. 27. lib. 1. In hoc theoremate Euclides alternos angulos appellat eos, qui neque ad easdem partes, neque deinceps sunt; sed ab incidente, quæ utrique inter parallelas exsistit, distinguuntur, & differunt, quod alter sursum, alter deorsum ponatur.

vel duos angulos interiores ad eamdem partem positos duobus rectis æquales; parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ. Istæ duæ propositiones exhibent tres conditiones, quibus parallelismum rectarum dignoscitur (1). III. Si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea, hæc efficiet & angulos alternos æquales, & angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem: & duos angulos interiores ad eamdem partem positos duobus rectis æquales. Propositio ista utramque præcedentem convertit, & proprietates parallelarum exponit (2). IV. Quæ eidem sunt parallelæ, inter se sunt parallelæ (3). V. Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas; inter se sunt etiam æquales, & parallelæ (4).

DE TRIANGULIS.

IV. Considerat Euclides triangula & quoad se inspecta, & inter se collata; hoc est demonstrat proprietates cum absolutas, tum relativas triangulorum. Quoad proprietates absolutas & investigat illas, quæ sunt omnium triangulorum communes; & illas, quæ sunt quorumdam triangulorum peculiares: omnia isthæc theoremata sigillatim exponere curabimus.

DE TRIANGULIS QUOAD SE INSPECTIS, SIVE DE PROPRIETATIBUS ABSOLUTIS TRIANGULORUM TUM COMMUNIBUS, TUM PECULIARIBUS.

V. Universales, & communes triangulorum proprietates quinque sunt, quæ hisce theorematis exhibentur. I. In omni triangulo, uno latere producto, exterior angulus est major alterutro interiore, & opposito (5). II. Omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt quomodocumque sumti (6). III. Cujuscumque trianguli

 uno

[1] Prop. 28. lib. 1. Hoc theorema repertum fuit ab Euclide; tamen a Ptolemæo alia via demonstratur, teste Proclo.

[2] Prop. 29. lib. 1. Theoremate isto Euclides, ut inquit Proclus, utramque præcedentem convertit; quod enim in utraque illa est quæsitum, in hac est datum: & quæ in illis data sunt, heic demonstrare proponit.

[3] Prop. 30. lib. 1. Euclidis est hoc theorema: quo explicat respectum parallelarum: qui in omnibus non semper contingit; non enim, quæ ejusdem sunt dupla, inter se sunt dupla, ut inquit Proclus.

[4] Prop. 33. lib. 1. Confinium parallelarum est theorema istud: unde per ipsum parallelogrammorum ortum latenter tradit Euclides; parallelogrammum enim fit ab rectis æqualibus, & parallelis.

[5] Ex lib. 1. prop. 16. cujus etiam auctor est Euclides.

[6] Ex lib. 1. prop. 17. est Euclidis, qui per hoc theorema, ut refert Proclus, indeterminate demonstrat, duos quoslibet trianguli angulos duobus rectis minores esse; at in propositione 32. determinabitur, quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo. Tres enim ipsius anguli duobus rectis æquales sunt: quare duo tanto minores erunt duobus rectis, quantus est reliquus angulus.

uno latere producto, angulus exterior est æqualis duobus interioribus, & oppositis simul sumtis: & anguli omnes simul duobus rectis sunt æquales (1). IV. In omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo quomodocumque sumta (2). V. Si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ, eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli; angulum vero majorem continebunt (3).

VI. Adfectiones peculiares quorumdam triangulorum juxta Euclidem egrediuntur aut ex lateribus, aut ex angulis dati trianguli: priores hæc quatuor theoremata exhibent, nimirum. I. Isoscelium triangulorum anguli ad basim sunt inter se æquales: & productis æqualibus lateribus anguli infra basim etiam inter se æquales erunt. Hinc venit triangula æquilatera esse etiam æquiangula (4). II. Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos subtendentia pariter æqualia erunt. Hæc propositio convertit antecedentem; & perinde colligere pronum est, triangulum æquiangulum esse etiam æquilaterum (5). III. Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit. Hinc eruere licet, triangulum scalenum, quod cuncta latera inæqualia habet, omnes etiam angulos habere pariter inæquales (6). IV. In omni vicissim triangulo majori angulo majus latus opponitur: Hæc propositio est conversa præcedentis, & ex illa per contrarium patet, si omnes anguli trianguli sint inæquales, triangulum esse scalenum (7).

VII. Istiusmodi sunt proprietates cujuslibet trianguli quoad latera inspecti; quoad angulos vero Euclides in primo libro solum demonstrat celebrem proprietatem trianguli rectanguli, demonstraturus in 2. lib. adfectiones trianguli obtusanguli, & acutanguli: hoc autem per duo theoremata complet. I. In triangulis rectangulis quadratum quod

fit

[1] Prop.32. lib.1. Hujus theorematis ortum Pythagoræ abscribit Eudemus, ut Proclus tradit; qui etiam notat ex hoc theoremate indicari, quantum angulus exterior trianguli sit major utroque interiore, & opposito, nempe reliquo; & quantum duo quilibet anguli trianguli duobus rectis sint minores, nempe uno. Unde hoc theorema complectitur doctrinam propositionis 16. & 17. & ex hoc etiam aperitur via ad reperiendum, omnium rectilineorum anguli quot rectis sint æquales: omnis enim figura rectilinea in triangula resolvitur.

[2] Prop.20. lib.1. Hoc theorema ab Euclide editum, ut scribit Proclus, Epicurei velut inutile rejecerunt, & ipsum tam manifestum esse dixerunt, ut probatione non egeret; non animadvertentes, quidem, illud, quamvis sensu notum, scientiam tamen numquam gignere posse, nisi demonstratione fuisset firmatum.

[3] Ex lib.1. prop.21. Euclidis.

[4] Prop.5. lib.1. Thales Milesius hoc theorema adinvenit, teste Proclo: is enim prius animadvertit, trianguli æquicruris angulos ad basim esse æquales, & more antiquorum similes appellavit.

[5] Ex lib. 1. prop. 6. Euclides hoc theoremate convertit præcedentem, ut innueret, in triangulis quibusvis latera, & angulos mire sibi invicem respondere.

[6] Ex Lib. 1. prop. 18. Euclidis.

[7] Ex Lib. 1. prop. 19. Euclidis, qua convertit præcedentem ad evincendum, in triangulis & latera, & angulos æquo, parique incedere gradu.

fit ex latere rectum angulum subtendente (quod græco dicitur *hypotenusa*) æquale est quadratis laterum rectum angulum continentium (quæ græce *catheta* nuncupantur) (1). II. Si quadratum ex uno latere trianguli æquale sit quadratis, quæ ex aliis lateribus fiunt, angulus sub his lateribus contentus, rectus erit (2).

DE TRIANGULIS INVICEM COLLATIS, HOC EST DE PROPRIETATIBUS RELATIVIS EORUMDEM.

VIII. Comparat Euclides triangula inter se ad inferendam eorumdem aut æqualitatem, aut inæqualitatem, aut dumtaxat aliquorum æqualitatem quoad aream, sive spatium. Ejus theoremata, quibus hasce triangulorum relativas proprietates demonstrat, sunt quinque, videlicet. I. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, & angulos sub iis lateribus contentos æquales, habebunt & basim basi æqualem: erit triangulum æquale triangulo; eruntque reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur (3). II. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & basim basi æqualem, & angulos sub æqualibus lateribus contentos pariter æquales habebunt: hæc propositio convertit quartam (4). III. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & angulum sub iis lateribus contentum angulo majorem, & basim basi majorem pariter habebunt (5). IV. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia alterum alteri, & basim basi majorem; habebunt & angulum sub iis lateribus contentum angulo majorem: hoc theorema est conversum præcedentis (6). V. Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri; & unum latus uni lateri æqua-

[1] Prop. 47. lib. 1. Theorema istud, teste Laertio, & Proclo, Pythagoræ ortum debet, qui, ut ex Apollodoro apud eumdem Laertium, ob ejus inventionem ita lætitia fuit adfectus, ut Hecatombem, hoc est, sacrificium centum bovum Diis immolaverit.

[2] Prop. 48. lib. 1. Pythagoræ etiam adscribitur theorema istud; quo præcedens ex toto convertitur.

[3] Prop. 4. lib. 1. Hoc theorema Euclides reperit, qui in eo demonstrando utitur superimpositione, quæ maximo usui est apud Mathematicos; & Archimedes eam usurpavit non solum in libro de centro gravitatis planorum, sed etiam in solidis, ut de Conoidibus, & de Sphæroidibps, &c.

[4] Prop. 8. lib. 1. quæ ad Euclidem refertur, qua quartam convertit quoad primam partem.

[5] Prop. 24. lib. 1. Hanc propositionem Euclides opponit quartæ. Per illam enim angulos, qui sunt ad vertices triangulorum æquales ponit, per hanc vero inæquales: per illam bases æquales demonstrat, per hanc inæquales.

[6] Prop. 25. lib. 1. Per tale theorema Euclides ipse & oppositam octavæ propositioni demonstrat, & præcedentem convertit; quæ diverso pacto ab aliis demonstratur, ut tradit Proclus.

æquale, ſive quod æqualibus adjacet angulis, ſive quod uni æqualium angulorum opponitur, omnia reliqua etiam æqualia habebunt: hæc propoſitio hypotheſim habet adverſam quartæ (1). His propoſitionibus nova alia addi poteſt, quæ complet perfectam æqualitatem triangulorum, eſtque ſequens: Si duo triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem, & circa reliquos angulos duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquos angulos ejuſdem ſpeciei, hoc eſt, vel utrumque acutum, vel utrumque obtuſum, omnia reliqua æqualia habebunt.

IX. Theoremata, ex quibus Euclides deducit æqualitatem areæ, ſive ſpatii triangulorum ſunt quatuor ſequentia, videlicet. I. Triangula in eadem baſi, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (2). II. Triangula in æqualibus baſibus, & in iiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia (3). Ambæ, quæ ſequuntur, ſunt propoſitiones iſtarum converſæ. III. Triangula æqualia in eadem baſi, & ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in eiſdem parallelis (4). Triangula in æqualibus baſibus, ac in directum jacentibus, ad eamdem partem conſtituta, ſunt etiam in iiſdem parallelis (5).

DE PARALLELOGRAMMIS.

X. De parallelogrammis etiam Euclides demonſtrat cum adfectiones abſolutas, tum eorumdem adfectiones relativas. Proprietates abſolutas hæc duo theoremata oſtendunt. I. Parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ, ex adverſo ſunt, inter ſe ſunt æqualia: ſimiliter autem anguli: diagonalis vero ea bifariam dividit (6). II. Parallelogrammorum ſpatiorum eorum, quæ circa diametrum ſunt complementa, inter ſe ſunt æqualia (7).

XI. Adfectiones parallelogrammorum relativas illas dicimus, quæ ipſa ſpectant tam inter ſe, quam cum triangulis collata: quas hæc tria Euclidis theoremata demonſtrant. I. Parallelogramma in eadem

[1] Prop. 26. lib. 1. Theorema iſtud ad Thaletem Mileſium refertur auctorem, ut Proclus ex Eudemo ſcribit. Iſto autem Euclides doctrinam omnem æqualitatis, & inæqualitatis triangulorum claudit, & ad parallelas, & parallelogramma pertranſit.

[2] Ex lib. 1. prop. 37. Euclidis.

[3] Ex lib. 1. prop. 38. Euclidis.

[4] Ex lib. 1. prop. 39. Euclidis, qua convertit 37.

[5] Ex lib. 1. prop. 40. Euclidis, qua convertit 38.

[6] Ex lib. 1. prop. 34. Euclidis. Quam heic de parallelogrammis demonſtrat, tertia adfectio, circulo quoque convenit, & ellipſi.

[7] Ex 1. lib. prop. 43. Euclidis, cui unum tantum hujus theorematis caſum exponit; etſi ejus tres ſint caſus: vel enim, quæ circa diametrum ſunt complementa ſe ſe in puncto tangunt: vel ſe ſecant: vel a ſe disjunguntur. Eadem autem ſemper congruit demonſtratio, quamquam non ſemper quadrilatera ſint ſupplementa, ut docet Commandinus.

dem basi, & in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia (1). II. Parallelogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, sunt etiam inter se æqualia (2). Si parallelogrammum, & triangulum habeant eamdem basim, & sint inter easdem parallelas constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli (3).

PROBLEMATA PRIMI LIBRI.

XII. Hujus primi libri problemata instituit Euclides ad exponendum ortus, & constructiones rectilinearum quoque figurarum: quare ipsa ad quatuor classes commode revocari possunt; nimirum & ad rectas quoad communem praxim, tum perpendiculares, tum parallelas; & ad angulos; & ad triangula; & ad parallelogramma tandem sive quoad se inspecta, sive inter se collata; secundum has igitur classes ea heic proponere placet.

XIII. Praxis communis rectarum per hæc tria Euclidis problemata indicatur. I. Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere (4). II. Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori portionem æqualem abscindere (5). III. Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere (6).

XIV.

[1] Ex lib. 1. prop. 35. Euclidis, qui per hoc, & quæ sequuntur theoremata, parallelogrammi cujuslibet dimensionem exposuit. Hæc theoremata, ut Federicus Commandinus ex Proclo inquit, ex eorum numero sunt, quæ in mathematicis disciplinis *admirabilia* appellantur. Stupet enim vulgus statim cum videt, a longitudine multiplicata spatiorum æqualitatem non destrui; & tamen, eadem existente basi, quantum parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudines augentur.

[2] Ex lib. 1. prop. 36. Euclidis. In præcedenti theoremate Euclides easdem bases accepit, heic vero æquales: id autem commune utrisque parallelogrammis posuit, inter easdem esse parallelas. Hoc theorema per bases sejunctas demonstravit Euclides; attamen, ut inquit Proclus, a Theone demonstratio fuit ad meliorem redacta formam, ut omnibus casibus congruere videatur.

[3] Ex lib. 1. prop. 41. Euclidis. Hujus theorematis demonstratio etiam valet, si parallelogrammum, & triangulum habeant æquales bases; nam cum triangula in basibus æqualibus sint æqualia, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit.

[4] Ex lib. 1. prop. 2. Euclidis, qui in ipsa dedit quidem punctum solo positione, hoc enim tantum pacto dari potest; linea etiam datur specie, & magnitudine. Sumsit quoque punctum datum extra rectam datam, etsi possit esse & in eadem recta, & in ejusdem rectæ extremitate; in quo casu eadem foret demonstratio, licet diversa constructio.

[5] Ex lib. 1. prop. 3. Euclidis.

[6] Ex lib. 1. prop. 10. Euclidis; qui rectam terminatam ponit; siquidem ex utraque parte infinitam rectam bifariam dividere non possumus; infinitæ vero ex altera parte tantum, ubicumque punctum accipiatur, inæqualis semper fiet sectio. Apollonius Pergæus rectam lineam terminatam diverso pacto ab Euclide bifariam secat; ope scilicet duorum circulorum ad modum primæ propositionis; attamen in idem convenit: consule Commandinum.

XIV. Quoad rectas perpendiculares, & parallelas hæc tria apud Euclides extant problemata. I. Ex puncto in recta linea dato perpendicularem rectam lineam excitare (1). II. Super rectam infinitam ex puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam demittere (2). III. Per datum punctum, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere (3).

XV. Praxim deinceps angulorum, quæ ipſos ſive quoad ſe inſpectos, ſive inter ſe collatos ſpectat, hæc duo nos docent problemata. I. Datum angulum rectilineum bifariam ſecare (4). III. Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum, angulum dato angulo rectilineo æqualem conſtituere (5).

XVI. Triangula itidem per hæc duo problemata conſtruuntur. I. In data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere (6). II. Ex tribus rectis, quæ tribus aliis datis ſint æquales triangulum conſtituere; oportet autem, ut ex tribus datis duæ ſimul reliqua majores ſint, quomodocumque ſumtæ (7).

XVII. Tandem problemata, quæ ad parallelogramma etiam coſtruenda attinent, ſunt hæc quatuor. I. In data recta linea terminata quadratum conſtituere (8). II. Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo dato (9). III. Ad datam rectam lineam,

[1] Ex lib.1. prop.11. Euclidis, qui punctum in medio lineæ deſignat: etſi ſumi etiam poſſit in altera ejus extremitate; quo in caſu eadem efformanda eſſet conſtructio, recta tantum producta.

[2] Prop.12. lib.1. Hoc problema, ut refert Proclus, Oenopides primus inveſtigavit, utile ipſum ad Aſtrologiam exiſtimans: & datur in eo recta infinita; cum punctum extra ipſam ſumatur, ne cum linea data confundatur.

[3] Prop.31. lib.1. quæ eſt Euclidis; qui per tale problema ortum parallelarum videtur tradere.

[4] Ex lib.1. prop.9. Euclidis. Ex hoc problemate angulus dumtaxat rectilineus ſecari valet; quia aliorum ſectio ad elementarem inſtitutionem non attinet; angulus autem rectilineus hinc etiam ſecari poteſt in quatuor angulos æquales, in octo, in ſexdecim, &c. ſemper procedendo per augmentum duplex; eo quod omnis pars ſectionis ſemper bifariam ſecari poterit: in quamlibet vero aliam inæqualem portionem eum ſecare præſentem conſtructionem tranſgreditur.

[5] Prop.23. lib.1. Hoc problema ab Oenopide inventum fuiſſe tradit Eudemus.

[6] Ex lib.1. prop.1. Quæ eſt Euclidis, qui etſi ſolum in ipſa modum recenſeat, quo in data recta triangulum æquilaterum valeat conſtitui: poteſt tamen in ipſa recta conſtitui & triangulum iſoſceles, ſi accipiatur ipſa recta vel aque major, vel æque minor; & triangulum ſcalenum, ſi non ex puncto, in quo illi duo circuli ſe ſecant, ſed ex alio, ſeu extra, ſeu intra circulorum circumferentiam quomodolibet deſignato rectæ ducantur; ſic enim tria latera trianguli inæqualia oriuntur.

[7] Prop.22. lib.1. Hoc problema eſt Euclidis; attamen ejus demonſtratio a Theone fuit immutata, ut animadvertit Proclus.

[8] Prop.46. lib.1. Problema iſtud Euclides procudit, & præcipue deſervit conſtructioni propoſitionis 47. lib.1. & ad totum elementum ſecundum.

[9] Ex lib.1. prop.42. Euclidis.

lineam, dato triangulo, æquale parallelogrammum constituere in dato angulo (1). IV. Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo (2).

EX SECUNDO ELEMENTORUM LIBRO.

I. PEr quatuordecim propositiones, quarum duodecim sunt theoremata, & duo tantum problemata, edisserit in hoc secundo libro Euclides de Potentiis rectarum, hoc est de quadratis, atque rectangulis omnibus, quæ ex ipsis rectis, sive ex earumdem partibus emergunt. Eorum doctrinam eo potissimum momento prosequitur, ut proprietates trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli, quas adjicere debuerat ad propositionem quadragesimam septimam libri primi, commode demonstrare posset. Has igitur propositiones eodem superius statuto ordine proferemus.

THEOREMATA SECUNDI LIBRI.

II. QUæ cudit in hoc secundo libro theoremata Euclides, ad duas classes recta methodo redigi valent, videlicet ad varias rectangulorum constitutiones, quæ ex diversa rectarum sectione oriuntur: & ad proprietates trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli; secundum igitnr has classes illa omnia proferenda ducimus.

DE RECTANGULIS, QUÆ EX VARIA RECTARUM SECTIONE ORIUNTUR.

III. PRimum hujus libri theorema tamquam fundamentum ceterorum proponit Euclides, quodque, licet ipse demonstret: potest tamen veluti axioma accipi, & facili negotio descendit ex secunda parte octavi axiomatis libri primi, quo profertur, totum omnibus suis

C

[1] Prop.44. lib.1. Antiqua sunt, ut ait Eudemus, Pythagoreorum inventa istiusmodi spatiorum applicationes, excessus, & defectus: dum enim ipsi proposita recta, datum spatium toti rectæ coaptaverunt, tunc spatium illud lineæ applicari, dixerunt: cum vero spatii longitudinem ipsa recta majorem effecerunt, tunc excedere: cum tandem minorem, tunc deficere. Euclides autem isto in problemate applicationem parallelogrammi ad rectam tantum recenset, acturus deinceps de excessu, & defectu cum in secundo, tum in sexto elemenro, ut Proclus animadvertit.

[2] Prop.45.lib.1. Problema istud etiam est Euclidis, teste Proclo, qui per hoc problema doctrinam, quam in duobus præcedentibus tradiderat de constitutione, & applicatione æqualium dato triangulo parallelogrammorum, universaliorem reddit applicationem ad quodlibet rectilineum extendens.

ſuis partibus ſimul ſumtis æquale eſſe ; ex quo omnes veluti hujus libri propoſitiones clariſſime deſcendunt ; qua de re primum heic conſiderat Euclides lineas ſectas, & inſectas, atque rectangula, quæ ex ipſis effluunt, invicem confert : deinceps comparat quoque rectangula, & quadrata, quæ oriuntur ex recta aut ſecta utcumque, aut ſecta in partes æquales, & inæquales, aut tandem ſecta in partes æquales, & utcumque protenſa per aliam rectam ei adjectam, ſecundum igitur hunc ordinem decem prima theoremata proferemus.

IV. Circa rectas ſectas, & inſectas hoc unicum adeſt theorema. Si fuerint duæ rectæ lineæ, una quidem ſecta in quotcumque partes, altera vero inſecta, rectangulum, quod fit ex tota, & inſecta, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem inſecta (1).

V. Quoad rectas ſectas utcumque quinque alia ſequuntur theoremata, quæ ex primo quoque deſcendunt, & ſunt. I. Si recta linea ſecta fuerit utcumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt a tota, & partibus (2). II. Si recta linea ſecetur utcumque, rectangulum ex tota; & parte una, æquale erit rectangulo ſub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta (3). III. Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum quod fit a tota; æquale erit quadratis partium una cum rectangulo bis ſub partibus contento (4). Ex hujus theorematis demonſtratione duo deſcendunt: primum, parallelogramma circa diagonalem quadrati eſſe quoque quadrata : ſecundum, quod ſi recta ſecetur in partes æquales, quadratum totius erit quadruplum quadrati dimidiæ. IV. Si recta linea ſecetur utcumque, quadrata, quæ fiunt ex tota & parte una, æqualia erunt rectangulo bis contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (5). V. Si recta linea ſecetur utcumque, quadratum quod fit a tota, & parte una, veluti ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento ſub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (6).

VI.

[1] Prop. 1. lib. 2. Non ſolum hoc theorema, verum & omnes ſecundi elementi propoſitiones judicio omnium Euclidi adſcribuntur, qui eas omnes unice cudit ad demonſtrandas cum obtuſanguli, tum acutanguli proprietates, ob quas totum ſecundum conſcripſit librum. Iſtiuſmodi autem propoſitiones fere omnes demonſtrantur axiomate illo. *Totum eſt ſuis partibus ſimul ſumtis æquale*. Decem prima hujus elementi theoremata, quæ ſpectant rectangula, & quadrata ex linearum ſectione oriunda, vera etiam in numeris deprehendimus, quoties numeri, ut lineæ dividuntur in partes ; etenim rectangula quoque numerica ex multiplicatione duorum numerorum promanant, & quadrata numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum ; unde de numeris idem valet, quod de lineis.

Ex hoc quoque theoremate perſpicue conſtat, in quadratis ſpatiis parallelogramma circa diametrum quadrata eſſe.

[2] Prop. 2. lib. 2.

[3] Prop. 3. lib. 2. Hoc, & duo præcedentia theoremata demonſtrandæ multiplicationi plurimum deſerviunt.

[4] Prop. 4. lib. 2. Hoc theorema radicum quadraticarum extractioni non parum confert.

[5] Prop. 7. lib. 2.

[6] Prop. 8. lib. 2.

VI. De rectis sectis in partes æquales, & inæquales hæc duo theoremata demonstrat Euclides. I. si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, erit rectangulum ex partibus inæqualibus una cum quadrato portionis, quæ inter utramque sectionem interjicitur, æquale ei, quod a dimidia describuntur, quadrato (1). II. Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque sectionem interjecta (2).

VII. Tandem de linea secta in partes æquales, & producta per adjectionem alterius hæc duo alia exhibet Euclides theoremata. I. Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta veluti ex unica linea in ipsam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, similiter tamquam ex unica linea (3). II. Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, quadrata duo, unum ex tota, & adjecta veluti ex una linea, alterum ex ipsa adjecta dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta (4).

DE QUADRATIS LATERUM TRIANGULI OBTUSANGULI, ET ACUTANGULI.

VIII. IN propositione 47. lib. 1. invicem comparavit Euclides quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli rectanguli: heic autem versatur circa quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli cum obtusanguli tum acutanguli, exposita jam de potentiis rectarum doctrina, quæ omnino præmittenda erat, hæc sequentia duo cudit thoremata. I. In triangulis obtusangulis quadratum, quod fit ex latere obtusum angulum subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtusum, adjungit ei perpendicularis ex opposito angulo demissa (5). II. In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere acutum angulum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus acutum angulum continentibus, restangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis ex opposito angu-

[1] Prop. 5. lib. 2. Theorema istud cum tribus, quæ sequuntur, ad Algebram multum conducit.

[2] Prop. 9. lib. 2. Quæ cum reliquis, quæ sequuntur, Trigonometriæ planæ deservit.

[3] Prop. 6. lib. 2.

[4] Prop. 10. lib. 2.

[5] Prop. 11. lib. 2. Ad hanc, & sequentem propositionem totum dirigitur secundum ab Euclide elementum: & per hæc duo theoremata demonstrat ipse proprietates illas triangulorum, quas in primo libro, reliquerat.

angulo demissa. Ex hoc theoremate tale extat corollarium: In omni parallelogrammo quadrata diagonalium æqualia sunt quadratis laterum (1).

SECUNDI LIBRI PROBLEMATA.

IX. Duo tantum sunt istiusmodi secundi libri problemata quorum unum potentias rectarum spectat, alterum rectilineorum æqualitatem. I. Datam rectam lineam subinde dividere, ut rectangulum, quod fit ex tota, & parte una, æquale sit quadrato partis alterius (2). II. Dato rectilineo æquale quadratum constituere (3): Ex problematis hujus demonstratione duo eliciuntur corollaria. I. Si ex puncto aliquo in circuli circumferentia sumto, perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum talis perpendicularis æquale erit rectangulo sub diametri segmentis comprehenso. II. Si quadratum, quod fit perpendiculari erecta super diametro circuli, æquale sit rectangulo, quod fit ex segmentis, circuli circumferentia transibit per extremitatem perpendicularis.

EX TERTIO ELEMENTORUM LIBRO PROPOSITIONES.

I. Quamquam Euclides in tertio Elementorum Libro unam tantum contempletur figuram, circulum nempe, non paucæ tamen sunt adfectiones, & constructiones, quas de hujusmodi figura demonstrat. Plurimas enim sive in circulo, sive ad circulum ductas rectas lineas inter se comparat, circulos etiam & se se mutuo intersecantes, & vel se se invicem, vel rectas ipsas tangentes considerat; centra circulorum, & portionum determinat; angulosque tandem, qui sive ad centra, sive ad circumferentias consistunt, sese inter componit; quare cum in hoc libro propositiones triginta septem occurrant, quarum una & triginta theo-

[1] Prop. 12. lib. 2. Quamquam Euclides in definitionibus lib. 1. acutangulum triangulum nuncupaverit illud, quod omnes autos habet angulos: heic tamen omnia triangula appellat acutangula: propterea quod omnia habeant saltem unum angulum acutum; unde propositio ista hoc pacto exponitur quoad sensum: Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest esse, quam latera acutum angulum continentia; quod & de triangulo rectangulo, & de obtusangulo quoque valet quoad latus oppositum angulo acuto.

[2] Prop. 10. lib. 2. Hoc problema soli geometricæ accidit partitioni, non autem numericæ: nullus enim numerus ita secari potest, ut productum ex toto in partem unam, æquale sit quadrato partis reliquæ. Hoc idem problema demonstrat Euclides in sexto libro, ubi diverso modo illud exhibet dicens, Datam rectam terminatam extrema, & media ratione secare: heic autem, quoniam de proportione nihil palam tradiderat, non dicit rectam media, ac extrema ratione secare.

[3] Prop. 14. lib. 2.

theoremata ſunt, & ſex aliæ problemata; iſtas per jam determinatas claſſes proferre debito ordine curabimus.

TERTII LIBRI THEOREMATA.

II. AD quatuor claſſes hujus libri theoremata commode rediguntur. Ad primam nempe, quæ ſpectat circulorum centra: ad ſecundam, quæ colligit rectas ad circuli circumferentias ductas: ad tertiam, quæ ſive circulos ſeſe invicem occurrentes comprehendit, ſive rectas, quæ circulum ipſum tangunt: ad quartam demum, quæ angulos ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſtitutos, concludit:

DE CIRCULORUM CENTRIS.

III. CEntra circulorum per quatuor theoremata inveſtigantur. I. Si in circulo recta quædam linea ſecet aliam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos, in ſecante erit centrum circuli (1). II. Si recta linea per centrum ducta, aliam rectam lineam non ductam per centrum bifariam ſecet, ſecabit ad angulos rectos: & ſi ſecet ad angulos rectos, ſecabit bifariam. Perinde infertur quoque, rectam in circulo ductam ſecantem aliam aut ad angulos rectos, aut bifariam, in ſe centrum circuli continere (2). III. In circulo ſi duæ rectæ lineæ ſeſe in centro non ſecent, utraque bifariam non ſecabitur (3). IV. Si e puncto intra circulum ſumto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, adſumtum punctum erit centrum circuli (4).

DE RECTIS AD CIRCULI CIRCUMFERENTIAM DUCTIS.

IV. CIrca rectas ad circuli circumferentiam ductas ſex ab Euclide demonſtrantur theoremata, nimirum. I. Si in circuli circumferentia duo puncta ſumantur, quæ puncta iſta conjungit recta linea, tota intra circulum cadet (5). II. Si in circuli diametro capiatur punctum aliquod, quod non ſit centrum, & ex eo ducantur ad circum-

[1] Coroll. prop. 1. lib. 3. Propoſitiones cunctas hujus tertii elementi ab Euclide acceptas ferunt omnes.

[2] Prop. 3. lib. 3. Ex hoc theoremate Euclides latenter indicat, cum in circulo recta una aliam non ductam per centrum ſecaverit, tria evenire: & rectam ſecantem tranſire per circuli centrum: & aliam ſecare & bifariam, & etiam ad angulos rectos; quorum uno dato, duo alia evincuntur.

(3) Prop 4. lib. 3.

(4) Prop. 9. lib. 3.

(5) Prop. 2. lib. 3. qua indicat quoque Euclides, rectam quamlibet circulum tangentem in unico tantum puncto periferiæ occurrere; alioquin caderet intra circulum, & non eſſet tangens, ſed ſecans.

cumferentiam plures aliæ rectæ lineæ, earum omnium maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum, minima vero reliqua portio diametri: aliarum autem, quæ maximæ propinquiores sunt, majores erunt semper remotioribus: & ab illo eodem puncto non nisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (1). III. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam, earum utique, quæ pertingunt ad concavam, maxima quidem erit illa quæ transit per centrum: aliarum vero, quæ maximæ sunt propinquiores, majores erunt semper remotioribus: vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illa, quæ producta transit per centrum: aliarum vero, quæ minimæ sunt propinquiores, minores erunt semper remotioribus: & ab illo eodem puncto cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam non nisi due rectæ lineæ æquales duci poterunt (2). IV. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant: & quæ æqualiter a centro distant, inter se sunt æquales (3). V. In circulo maxima linearum in ipso ductarum est diameter, seu quæ transit per centrum, aliarum autem, quæ centro sunt propinquiores, majores semper erunt remotioribus (4). VI. Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, erit rectangulum sub segmentis unius æquale rectangulo sub segmentis alterius (5). Quæ proprietas obtinet etiam, si duæ rectæ in circulo ductæ sibi invicem extra circulum occurrant.

DE ANGULIS SIVE AD CENTRA, SIVE AD CIRCUMFERENTIAS CIRCULORUM CONSTITUTIS, ET DE CIRCULORUM PORTIONIBUS.

V. QUoad circulos sibi invicem occurrentes sex alia exstant apud Euclidem theoremata. I. Circuli, qui se mutuo secant, non possunt unum idemque centrum habere (6). II. Circuli, qui sese intus contingunt, non possunt unum idemque centrum habere (7). III. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat (8). IV. Si duo circuli sese intus contingant, recta conjungens centra ipsorum transibit per punctum contactus (9). V. si duo circuli sese extra contingant, recta conjungens centra ipsorum, transibit per punctum contactus (10). VI. Circulus circulum in pluribus, quam

(1) Prop.7. lib.3. Ex hac propositione colligitur, solum ex centro duci posse ad circumferentiam rectas omnes æquales; nam ex alio quovis puncto non nisi duæ æquales ducentur.

(2) Prop.8. lib.3.

(3) Prop.14. lib.4.

[4] Prop.15. lib.3.

[5] Prop.35. lib.3.

[6] Prop.5. lib.3.

[7] Prop.6. lib.3.

[8] Prop.10. lib.3.

[9] Prop.1'. lib.3.

[10] Prop.12. lib.3.

quam in uno puncto non contingit sive intra, sive extra eum contingat (1).

VI. Quoad rectas circulum tangentes tria solum demonstrantur theoremata. I. Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eum erigatur, hæc tota cadet extra circulum; & in locum ipsa, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta linea duci poterit. Perinde facile ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datum, si ex tali puncto ducatur diameter ad circulum, & ex eodem puncto erigatur perpendicularis ad diametrum (2). II. Si circulum recta contingat linea, quæ centrum cum puncto contactus conjugit, perpendicularis erit ad tangentem (3). III. Si circulum recta contingat linea & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur, hæc transibit per centrum circuli (4).

VII. Tandem quoad rectas, quæ ex eodem puncto ductæ circulum & tangunt, & secant, theoremata duo sunt. I. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum contingat, altera eumdem utcumque secet, rectangulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum, æquale erit quadrato, quod fit ex tangente (5). II. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duæ rectæ lineæ, quarum una circulum secet, altera incidat in eum; sitque rectangulum

gulum

(1) Prop.13. lib.3.

(2) Prop.16. lib.3. Per hoc cheorema nos quoque Euclides docet & rectam lineam, quæ ab extremitate diametri ducitur, circulum contingere, illumque tangere in uno tantum puncto, alias intra ipsum caderet: & angulum contactus, hoc est a tangente, & circuli peripheria contentum, minorem esse quocumque angulo rectilineo acuto: & angulum semicirculi, hoc est diametro, & circuli peripheria comprehensum, quocumque angulo auto rectilineo esse majorem; etenim in locum tangente, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta ex puncto contactus duci potest.

Neque exinde eruitur, angulum contactus nulla prorsus quantitate gaudere; quia licet tam minor sit quocumque angulo acuto, ut per nullam rectam minui possit, potest tamen augeri: & esto minui nequeat per rectam lineam infinitesimum angulum ordinis primi capientem, minui tamen potest per alias rectas dividentes hunc angulum infinitesimum, nempe per aliam circuli circumferentiam descriptam per punctum contactus, & majore intervallo, quam sit circuli centrum: etenim nomine quantitatis apud Mathematicos id omne intelligitur, quod plus, minusque suscipiens, quocumque modo augeri potest, aut minui.

(3) Prop.18. lib.3.

[4] Prop.19. lib.3. ex qua colligitur, si intra circulum aliqua ponatur recta, atque ex uno ejus extremo alia extra circulum ducatur, tria evenire posse. I. Rectam lineam intra circulum positam esse diametrum, seu per centrum transire. II. Ductam extra centrum esse tangentem. III. Unam alteri ad angulos rectos insistere; quorum si duo contingerint, tertium necessario eveniet.

[5] Prop.36. lib.3. Hoc theorema duo nos docet. I. Si ab eodem extra circulum puncto quotvis ducantur secantes, omnia rectangula inter se æqualia esse; etenim singula quadrato tangentis æquantur. II. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt æquales esse: earum quippe quadrata singula eidem æquantur quadrato ex Commandino.

gulum ſub ſecante tota, & portione extra circulum exiſtente contentum æquale quadrato incidentis, incidens iſta recta linea tangens erit (1).

DE ANGULIS SIVE AD CENTRA, SIVE AD CIRCUMFERENTIAS CIRCULORUM CONSTITUTIS, ET DE CIRCULORUM PORTIONIBUS.

VIII. QUæ exponunt adfectiones angulorum, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias circulorum conſiſtunt, theoremata, ſeptem numerantur, nimirum. I. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad circumferentiam, cum ſuper eodem arcu inſiſtunt (2). II. Qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales (3). III. Quadrilaterorum in circulo inſcriptorum anguli oppoſiti duobus rectis ſunt æquales (4). IV. In circulis æqualibus æquales anguli, æqualibus arcubus inſiſtunt ſive ad centra, ſive ad circumferentias ſint poſiti (5). V. In circulis æqualibus anguli, qui ſive ad centra, ſive ad circumferentias poſiti, æqualibus arcubus inſiſtunt, ſunt etiam æquales inter ſe (6). VI. Angulus in ſemicirculo rectus eſt: qui vero eſt in portione majore eſt recto minor: & qui in portione minore eſt recto major (7). VII. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum ſecans ducatur, anguli ſub tangente & ſecante contenti, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus conſtituuntur (8).

IX. Theoremata tandem, quæ ad circulorum portiones attinent hæc quatuor ſunt. I. In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales conſtitui non poſſunt ad eaſdem partes (9). II. In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones conſtitutæ, ſunt etiam æquales (10). III. In circulis æqualibus, æqules rectæ lineæ, æquales arcus abſcindunt: majorem quidem æqualem majori, minorem vero minori (11). IV. In circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ ſubtendunt. Hæc propoſitio præcedentem convertit (12).

TER-

[1] Prop. 37. lib. 3. qua convertitur præcedens; & ex ea evincitur quoque, quæ ex eodem puncto ad circulum ducuntur rectæ æquales, eſſe tangentes.
[2] Prop.20. lib.3.
[3] Prop.21. lib.3.
[4] Prop.22. lib.3.
[5] Prop.26. lib.3. Quod in hoc theoremate de æqualibus circulis demonſtrat Euclides, multo fortius de uno eodemque circulo evincitur.
[6] Prop.27. lib.3. Quæ converſa eſt præcedentis; & eadem demonſtratio erit, ſi anguli æqualibus circumferentiis ejuſdem circuli inſiſtant.
[7] Prop.31.lib.3.
[8] Prop.32.lib.3.
(9) Prop.23.lib.3.
(10) Prop.24.lib.3.
(11) Prop.28.lib 3.
(12) Prop.29.lib.3. quæ eſt præcedentis converſa.

TERTII LIBRI PROBLEMATA.

X. PRaxes & constructiones circulorum, quas Euclides in hoc tertio libro exponit aut circulum ipsum spectant, aut ea, quæ circulo adveniunt; quare trifariam digeruntur & in ea, quæ ad circulum quoad se inspectum: & in ea, quæ ad tangentem: & in ea tandem, quæ ad angulos in circuli portione constitutos attinent.

XI. Primæ classis duo sunt. I. Dati circuli centrum invenire (1). II. Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, & circulum perficere (2). III. Datam circuli portionem bifariam dividere (3).

XII. Secundæ vero classis unum tantum extat problema, nimirum: Ex dato extra circulum puncto tangentem ad circulum ducere (4).

XIII. Tertiæ tandem classis etiam duo sunt. I. In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato (5). II. Ex dato circulo abscindere portionem, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato (6).

EX QUARTO ELEMENTORUM LIBRO PROBLEMATA:

XIV. PEr sexdecim propositiones edisserit Euclides in quarto libro de inscriptione, & circumscrptione tum figurarum regularium in circulo, tum circuli in figuris regularibus. Figuræ autem regulares, quas potissime exponit, sunt triangulum, quadratum, pentagonum, hexagonum, & quindecagonum (7). Omnes hujus elementi propositiones sunt problemata numero sexdecim: quarum quatuor respiciunt triangulum, quatuor quadratum, totidem pentagonum, una hexagonum, altera quindecagonum, & duæ tandem sunt lemmata; perinde secundum hasce tres classes præfata problemata exponemus (8). At prius lemmata, utpote simpliciora dabimus.

D II. Lem-

(1) Prop.1.lib.3. Ex hoc problemate est perspicuum, si in circulo recta quædam linea rectam aliam quamlibet bifariam secaverit, & ad angulos rectos, in secante circuli centrum inesse.

(2) Prop.25.lib.3.

(3) Prop.30.lib.3.

(4) Prop.17.lib.3.

(5) Prop.33.lib.3.

(6) Prop.34.lib.3.

[7] Esto varia sit, & multiformis circumscriptionum, & inscriptionum figurarum contemplatio, Euclides tamen non ultra admodum progressus est. Perveniens namque ad heuagonum, & postremo quindecagoni angulos tradens [qui astrorum scientiam magis spectant] finem dicendi fecit; non quod alia non fuerit rimatus, sed quod nullo negotio construi queant, ut Commandinus animadvertit.

(8) Omnes hujus elementi propositiones, ut inquit Guilielmus Whistonius, Trigonometriæ magis inserviunt: earum namque ope figurarum & corporum magnitudines, & varios astrorum aspectus, & circuli quadraturam, & circulorum duplicatam rationem, & plura alia non abs re perscrutari poterimus.

II. Lemmata duo sunt, nempe. I. In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ sit æqualis: oportet autem, ut data recta linea non sit major diametro dati circuli (1). II. Æquicrure triangulum constituere, cujus uterque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis (2).

III. Et quidem circa figuras trilateras, sive triangula, quatuor proferuntur problemata; suntque sequentia. I. In dato circulo describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (3). II. Circa datum circulum describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (4). III. In dato triangulo circulum describere (5). IV. Circa datum triangulum circulum describere (6).

IV. Circa vero figuras quadrilateras hæc quatuor alia exstant problemata. I. In dato circulo quadratum describere (7). II. Circa datum circulum quadratum describere (8). III. In dato quadrato circulum describere (9). IV. Circa datum quadratum circulum describere (10).

V. Ad multilateras tandem figuras spectant sex reliquæ propositiones: quarum quatuor ad pentagonum attinet, una ad hexagonum, & altera ad quindecagonum. Igitur I. In dato circulo pentagonum æquilaterum, & equiangulum describere (11). II. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & equiangulum describere (12). III. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere (13). IV. Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere (14). V. In dato circulo exagonum æquilaterum & æquiangulum describere (15). VI. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere (16).

EX

(1) Prop. 1. lib. 4. Hæc, omnesque aliæ quarti libri propositiones Euclidi adscribuntur, demtis solummodo quatuor illis, quæ ad triangulum spectant: quæ teste Andrea Tacquetio, Thaleti Milesio debentur; qui ob earum inventionem lætitia elatus bovem immolasse perhibetur.

(2) Prop. 10. lib. 4.
(3) Prop. 2. lib. 4.
(4) Prop. 3. lib. 4.
(5) Prop. 4. lib. 4.
(6) Prop. 5. lib. 4.
(7) Prop. 6. lib. 4.
(8) Prop. 7. lib. 4.
(9) Prop. 8. lib. 4.
(10) Prop. 9. lib. 4.
(11) Prop. 11. lib. 4.
(12) Prop. 12. lib. 4.
(13) Prop. 13. lib. 4.
(14) Prop. 14. lib. 4.

(15) Prop. 15. lib. 4. Post hoc problema Euclides tria alia pro suæ doctrinæ ordine adnectere debuerat, unum de descriptione hexagoni circa datum circulum; alterum de descriptione circuli in dato hexagono; tertium tandem de descriptione circuli circa datum hexagonum, atque alia de circumscriptione quindecagoni circa circulum, & vicissim; at hæc ceu facillima, & nullius negotii aliorum studio commisit.

(16) Prop. 16. lib. 4.

EX QUINTO ELEMENTORUM LIBRO THEOREMATA.

I. UTilem, neceſſariamque proportionum doctrinam generatim inſpectam (1) per vigintiquinque propoſitiones exponit Euclides in hoc quinto libro (2): ſuntque omnes theoremata, quæ Eudoxius Platonis magiſter adinvenit, & Euclides ſolum collegit, ut fuerunt Eudemus, Proclus, Commandinus, aliique; & per hæc magnitudines generatim inter ſe comparatas conſiderat, earumque analogiam perſcrutatur. Quoniam autem Euclides cum omnibus Veteribus proportionem ipſam ope multiplicium demonſtrat, propterea omnia theoremata hujus Elementi in tres claſſes commode digeruntur; partim enim reſpiciunt quantitates æquemultiplices, partim quantitates proportionales, partim demum mutationes, quæ fiunt per terminos proportionales, quas argumentandi modos e proportione petitos, appellant.

DE QUANTITATIBUS ÆQUEMULTIPLICIBUS.

II. SEx ſunt, quæ quantitates æquemultiplices ſpectant, theoremata, nimirum. I. Si fuerint quotcumque magnitudines, quotcumque magnitudinem æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquemultiplices, quotuplex eſt una unius, totuplices erunt & omnes omnium (3). II. Si prima ſecundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ; fuerit autem & quinta ſecundæ tam multiplex quam ſexta quartæ, erit compoſita ex prima, & quinta tam multiplex ſecundæ,

D 2 quam

(1) Totum hoc quintum planorum Elementum commune eſt Geometriæ, Arithmeticæ, Muſicæ, Aſtronomiæ, Staticæ, & omni ſimpliciter Matheſeos diſciplinæ; quæ enim in ipſo demonſtrantur theoremata nedum Geometriæ congruunt, verum ad ceterarum omnium uſus, & contemplationes referuntur; quippe quæ proportionibus inter ſe connexis fere totæ innitantur, & modos de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc mutuari ſoleant; ſpeciatim vero Geodeſia, ſeu practica Geometria, quæ linearum, figurarum, atque corporum menſuras, quas complectitur, e proportionum doctrina plurimum excerpit; & Arithmetica, cujus omnes propoſitiones, etiam ſublatis ſeptimo, octavo, & nono, de numeris ex profeſſo agentibus libris, ex hiſce potiſſimum demonſtrat; & Statica non niſi per doctrinam proportionum corporum pondera perſcrutatur. Eapropter tam utile eſt, & neceſſarium, ut ſi ejus doctrina de medio auferretur, nihil præclarum, aut egregium in Matheſi relinqueretur.

(2) Quamquam propoſitiones omnes hujus Elementi innumeræ ſint, Euclides tamen ſolum 25. collegit; ceteræ vero, quæ huic libro adjectæ reperiuntur, a Campano, Theone, aliiſque fuerunt additæ.

(3) Prop. 1. lib. 5.

quam composita ex tertia, & sexta multiplex quartæ (1). III. Si prima secundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ, æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt etiam æquemultiplices secundæ, & quartæ (2). IV. Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices secundæ, & quartæ eamdem quoque rationem habebunt (3). V. Si tota totius tam multiplex sit, quam abluta ablatæ, erit reliqua reliquæ tam multiplex, quam tota totius (4). VI. Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam sint earumdem æquemultiplices, erunt & reliquæ vel iisdem æquales, vel earumdem æquemultiplices (5).

DE QUANTITATIBUS PROPORTIONALIBUS, SEU DE PROPRIETATIBUS PROPORTIONIS.

III. AD quantitates proportionales duodecim ista theoremata spectant. I. Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem, & eadem ad æquales (6). II. Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem, & eadem ad minorem (7). III. Quæ ad eamdem, eamdem habent rationem, inter se sunt æquales: & ad quas eadem, eamdem rationem habet, etiam inter se æquales sunt (8). IV. Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem habet rationem, illa major est: ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa est minor (9). V. Rationes, quæ eidem sunt æquales, inter se sunt etiam æquales (10). VI. Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes (11). VII. Si prima habuerit ad secundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad sextam, & prima ad secundam majorem quoque rationem habebit, quam quinta ad sextam (12). VIII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima, & secunda erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Hoc theorema lemma

[1] Prop.2.lib.5.
[2] Prop.3.lib.5.
[3] Prop.4.lib.5. Hoc theorema propius spectat ad demonstrationem definitionis magnitudinum, quæ sunt in eadem proportione, ut est, quando æquemultiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æquemultiplices secundæ, & quartæ, hoc est, consequentium, vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt; tunc demonstrat & ipsas inter se eamdem habere proportionem, ut habet Commaadinus.
[4] Prop.5.lib.5.
[5] Prop.6.lib.5.
[6] Prop.7.lib.5.
[7] Prop.8.lib.5.
[8] Prop.9.lib 5.
[9] Prop.10.lib.5.
[10] Prop.11.lib.5.
[11] Prop.12.lib.5.
[12] Prop.13.lib.5.

ma est sextidecimi theorematis (1). IX. Partes cum suis multiplicibus comparatæ eamdem cum iis servant rationem (2). X. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam (3). XI. Si prima ad secundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam; fuerit autem ut quinta a secundam, ita sexta ad quartam, erit composita ex prima, & quinta ad secundam, ut composita ex tertia, & sexta ad quartam (4). XII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima ipsarum simul reliquis duabus majores erunt (5).

DE ARGUMENDANDI MODIS E PROPORTIONE PETITIS.

IV. Modos argumentandi, qui ex proportione eruuntur sequentia novem ostendunt theoremata. I. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & invertendo etiam proportionales erunt (6). II. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutando etiam proportionales erunt (7). III. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & dividendo etiam proportionales erunt (8). IV. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & componendo etiam proportionales erunt (9). V. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & convertendo etiam proportionales erunt (10). VI. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis totidem, primæ ipsarum erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Hoc theorema est lemma vigesimi secundi (11). VII. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipsarum quoque erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Theorema istud est lemma vigesimi tertii (12). VIII. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (13). IX. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (14).

(1) Prop.14.lib.5.
(2) Prop.15.lib.5.
(3) Prop.19.lib.5.
(4) Prop.24.lib.5.
(5) Prop.25.lib.5.
(6) Coroll.propos.4.
(7) Prop.16.lib.5.
(8) Prop.17.lib.5.
(9) Prop.18.lib.5.
(10) Coroll.prop.19.
(11) Prop.20.lib.5.
(12) Prop.21.lib.5.
(13) Prop.22.lib.5.
(14) Prop.23.lib.5.

EX SEXTO ELEMENTORUM LIBRO.

I. QUam in quinto libro univerſim de omni magnitudine expoſuit proportionis doctrinam Euclides, variis peculiaribus uſibus planarum figurarum applicare contendit in hoc ſexto libro; quare proportiones, quæ in quibuſvis figuris planis occurrere poſſunt, demonſtrare conatur (1). Triginta tribus propoſitionibus, quarum tres, & viginti ſunt theoremata, & decem problemata, totum hoc complet Elementum: quæ omnia per certas claſſes ſic proferre curabimus.

THEOREMATA SEXTI LIBRI.

II. HUjus libri theoremata ſecundum varias planorum proportiones, quas exhibent, quatuor claſſibus facili negotio comprehenduntur: alia enim ſpectant lineas: alia angulos, & ſectatores: alia triangula: & alia demum reliquas figuras rectilineas, ſecundum quas claſſes ea hoc ordine recenſebimus.

DE PROPORTIONE RECTARUM, QUIBUS FIGURÆ RECTILINEÆ CONTINENTUR, ET DE PROPORTIONE ANGULORUM, ATQUE SECTORUM.

III. PRopoſitiones igitur, quæ ad rectarum proportionem ſpectant, quibus figuræ ipſæ continentur, per hæc tria theoremata exponit Euclides. I. Si fuerint quatuor rectæ lineæ proportionales erit rectangulum ex mediis æquale rectangulo ex extremis: & viciſſim ſi rectangulum ex mediis æquale ſit rectangulo ex extremis, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt (2). II. Si ſint tres rectæ lineæ proportionales, erit rectangulum ex extremis æquale quadrato quod deſcribitur a media: & viciſſim, ſi rectangulum ex extremis æquale ſit quadrato a media deſcripto, tres rectæ lineæ proportionales erunt (3). III. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, erunt rectilinea ſimilia, ſimiliterque ab eis deſcripta etiam proportionalia: & viciſſim ſi rectilinea proportionalia ſint, ipſæ rectæ lineæ etiam proportionales erunt (4).

IV. Ad ſecundam claſſem de angulis & ſectoribus unum attinet theorema, nimirum: In æqualibus circulis anguli ſive ad centra, ſive ad cir-

(1) Totum hoc ſextum Elementum Euclidi inventori vulgo adſcribitur; attamen complures alii variis ejuſdem propoſitionibus inſudarunt, omneſque Græciæ Geometræ ſummo ſtudio ipſis incumbuerunt, ut Plato, Architas Tarentinus, Menæchmus, Eratoſthenes, Philo Byzantinus, Hero, Apollonius Pergæus, Nicomedes, Pappus, aliique, teſtibus Eudemo, Proclo, & Eutochio.

(2) Prop. 16. lib. 6. Hinc cujuslibet trianguli rectanguli aream ex unius lineæ rectæ dimenſione facile dimetimur.

(3) Prop. 17. lib. 6. Hinc lineam inaceſſam, cujus terminus alter eſt acceſſibilis, metiri diſcimus.

(4) Prop. 22. lib. 6.

circumferentias positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt; similiter autem & sectores (1).

DE PROPORTIONE, ET SIMILITUDINE TRIANGULORUM.

V. Circa propositiones tertiæ classis, quæ pertinent ad proportionem, atque similitudinem triangulorum duo theoremata sunt, quæ versantur circa triangula in genere, nempe. I. Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter: & vicissim si secet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit (2). II. Recta, quæ secat, angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, secabit basim in ratione laterum: & vicissim recta, quæ secat basim alicujus trianguli in ratione laterum, secabit angulum verticalem bifariam (3). Alia theoremata demonstrant proprietates trianguli rectanguli speciatim; suntque duo sequentia. I. Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad basim perpendicularis demittatur, hæc dividet triangulum in duo alia triangula, quæ cum toti, tum inter se similia erunt (4). II. In triangulis rectangulis figura quævis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis erit figuris, quæ illi similes, & similiter positæ, describuntur a lateribus rectum angulum continentibus (5).

VI. Per alias tandem propositiones comparantur triangula inter se sive quoad areas, sive quoad similitudines. Circa comparationes quoad areas hæc tria exstant theoremata. I. Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter se sunt ut bases (6). II. Triangula, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia: & vicissim triangula, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt etiam æqualia inter se (7). III. Triangu-

la

(1) Prop. 33. lib. 6. Hinc perspicuum est etiam, angulum esse ad angulum, ut sector ad sectorem.

(2) Prop. 2. lib. 6. Hoc theorema nos quoque docet, si ad unum trianguli latus ductæ fuerint plures parallelæ, fore omnia laterum segmenta proportionalia.

(3) Prop. 3. lib. 6. Quod theorema indicat etiam, si recta, quæ angulum trianguli bifariam secat, & bisecabit etiam basim, triangulum fore isosceles, quia duo latera habebit æqualia, & bisecans recta erit perpendicularis ad basim.

(4) Prop. 8. lib. 6. Ex hoc theoremate est manifestum, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, ductam inter basis partes mediam proportionalem esse: & quodlibet latus trianguli medium esse proportionale inter basim, & unamquamque partem.

(5) Prop. 31. lib. 6. Hoc theorema universalius est propositione 47. lib. 1. quia extenditur ad omnes rectilineas figuras.

(6) Prop. 1. lib. 6. Hoc est maximum theorema, a quo totum sextum dependet elementum; imo quidquid de quibusvis figuris sive planis, sive solidis fuit umquam demonstratum, ab isto descendit.

(7) Prop. 15. lib. 6. Ex hoc, & præcedenti theoremate evincitur, tam parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant bases, & altitudines, esse æqualia, & contra.

la similia sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum (1).

VII. Tandem de similitudine triangulorum hæc quinque alia exstant theoremata. I. Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia: & homologa sunt latera illa, quæ æquales angulos subtendunt (2). II. Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula: & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera subtendunt (3). III. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum istos angulos proportionalia, sunt etiam æquiangula: & æquales habent angulos illos, quos homologa latera subtendunt (4). IV. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, hoc est utrumque vel majorem, vel minorem recto, erunt etiam æquiangula: & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia (5). V. Si duo triangula habent duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum habeant quoque latera homologa parallela, reliqua eorum latera in directum erunt (6).

DE RELIQUIS FIGURIS RECTILINEIS.

VIII. Quæ tandem theoremata reliquas figuras rectilineas proportionales ostendunt, sunt septem, quæ sequuntur. I. Parallelogramma, quæ æqualia sunt, & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia: & vicissim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt etiam æqualia inter se (7). II. Poligona similia dividuntur in triangula numero æqualia; similia, & homologa totis: duplicatamque habent rationem laterum homologorum (8). III. Quæ eidem rectilineo sunt similia, inter se sunt similia (9). IV. Parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam (10). V. Parallelogramma, quæ

(1) Prop.19.lib.6.
(2) Prop.4.lib.6.
(3) Prop.5.lib.6.
(4) Prop.6.lib.6.
(5) Prop.7.lib.6. Ex hoc, & quatuor præcedentibus theorematis constat, similitudinem triangulorum evinci posse; si habeant latera proportionalia; si habeant unum angulum uni angulo æqualem; & latera circum æquales angulos proportionalia; & reliquos angulos ejusdem speciei inter se.
(6) Prop.32.lib.6.
(7) Prop.14.lib.6. Ex theoremate isto pendet demonstratio regulæ inversæ, sive reciprocæ proportionum, qua ex datis tribus terminis quartus invenitur, multiplicando inse invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, inde habetur quartus.
(8) Prop.20.lib.6. Ex hoc theoremate indicatur methodus figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione data.
(9) Prop.21.lib.6.
(10) Prop.23.lib.6.

quæ ſunt circa diametrum alterius, cum toti, tum inter ſe ſimilia ſunt (1). VI. Si ex pararellogrammo aliud auferatur, quod communem cum eo angulum habens, ſit eidem ſimile, ſimiliterque poſitum, conſiſtet cum illo circa eamdem diagonalem (2). VII. Omnium parallelogrammorum, quæ ad eamdem rectam applicata, deficiunt parallelogrammis alicui dato ſimilibus, maximum eſt illud, quod applicatur ſuper dimidia (3)..

SEXTI LIBRI PROBLEMATA.

IX. EOdem tandem ordine ſexti elementi problemata ſive ad rectas, ſive ad figuras proportionales conſtituendas ſpectant, ſuntque decem.

X. Primæ Claſſis ſunt ſex iſthæc problemata. I. A data recta linea optatam partem abſcindere (4). II. Datam rectam lineam ſecare in partes proportionales partibus, in quas ſecta eſt alia data recta linea (5). III. Datis duabus rectis lineis tertiam proportionalem invenire (6). IV. Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire (7). V. Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire (8). VI. Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione dividere (9).

XI. Secundæ vero claſſis, quæ ad proportionem rectilineorum ſpectant quatuor problemata ſunt. I. A data recta linea dato rectilineo, ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere (10). II. Rectilineum conſtituere, quod ſit ſimile uni dato, & æquale alteri dato (11). III. Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile: oportet autem, ut datum rectilineum non majus ſit eo parallelogrammo, quod applicatum ſuper dimidia datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo, quod eidem dato ſit ſimile (12). IV. Ad datam rectam lineam dato rectilineo, æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo, quod alteri dato ſit ſimile (13).

F I N I S.

(1) Pro.24.lib.6.
(2) Prop.26.lib.6. Hinc motuum compoſitionem æſtimare diſcimus ex Whiſtonio apud Tacquetum.
(3) Prop.27.lib.6.
(4) Prop.9.lib.6.
(5) Prop.10.lib.6. Ex hoc problemate diſcitur modus, quo recta data in quotvis æquales partes ſecari poterit.
(6) Prop.11.lib.6.
(7) Prop.12.lib.6.
(8) Prop.13.lib.6.
(8) Prop.30.lib.6. Hujus ſectionis admirabilis eſt vis in corporum regularium inſcriptione, & comparatione.
(10) Prop.18.lib.6. Hinc methodus aperitur ædificia omnia in tabulis deſcribendi: etenim per hoc problema figuræ, quamvis ingentes, ad ſimiles figuras exiguas rediguntur, & contra.
(11) Prop.25.lib.6.
(12) Prop.28.lib.6.
(13) Prop.29.lib.6.