Österreichische
Nationalbibliothek

308.759-B

Alt-

Digitalizzato da Google

s. (Bibliothek)

eite: 6

: 1

Digitalizzato da Google

ÖNB
+Z95522900

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

ELEMENTI
DI
MATEMATICA.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

ELEMENTI
DI
MATEMATICA

Composti per uso della
REALE ACCADEMIA DE'CAVALIERI
GUARDIA-MARINE

Dal primario Professore della medesima

VITO CARAVELLI.

TOMO II. PART. I.

K:K:
MIL:GEOGR:
INSTITUTS
ARCHIV

IN NAPOLI MDCCLXII.
PER GIUSEPPE RAIMONDI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

308.759-B.Acd
2
1

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
PIANA.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

A' DISCRETI LETTORI.

SI è sempre commendato, e si commenderà mai sempre il metodo tenuto da Euclide nel trattare la Geometria elementare; però pochi lodatori hanno compreso in che sì fatto metodo meriti veramente commendazione. Si loda comunemente Euclide, per avere egli disposto le proposizioni della Geometria in modo che ne sia ognuna colla rigidezza geometrica dimostrata. Io sono però d' avviso che, se altro non avesse fatto Euclide, per questo non meritarebbe certamente lode; e che anzi avrebbe meritato biasimo, se altrimenti avesse fatto. Merita somma lode Euclide, perchè tra gl' infiniti diversi metodi, che avrebbe potuto adoperare nel dimostrare tutte le teoriche della suddetta Geometria, ha saputo scegliere quello, in cui vi è bisogno del minor numero possibile di principj, e del minor numero possibile di proposizioni. Chi è Geometra converrà meco su di ciò; e

Digitalizzato da Google

conoscerà nel tempo istesso che non è possibile, senza trascurare in molte proposizioni il rigore geometrico, il poter cambiare tale metodo, se non s' accresca o il numero de' principj, o il numero delle proposizioni, o ambidue insieme.

Con tutto ciò il metodo d' Euclide, per la somma brevità, che racchiude, non è interamente libero da difetti. L' avere Euclide confuse insieme le teoriche diverse, l' averne lasciata qualcuna imperfetta, il non avere avvertito del perchè non si trascorra più innanzi in alcune di esse, l' aver confuso colla definizione delle ragioni eguali i caratteri di conoscerne la loro eguaglianza, e conseguentemente l' avere trattata con qualche oscurità la dottrina della ragione e proporzione geometrica, e l' avere finalmente fatto uso della dottrina della ragione composta, senza averla prima esposta, sono tutti difetti, pè quali ben pochi comprendono la sostanza di tutte le dimostrazioni della Geometria, *giungono a formarsi il sistema generale di tutte le teoriche geometriche, e pervengono alla comprensione dell' intera loro estensione. Intanto per più secoli non ci è stato chi*

Digitalizzato da Google

chi aveſſe ſaputo cambiare il metodo di Euclide con liberare il metodo di trattare la Geometria dà mentovati difetti, ſenza introdurvene degli altri più gravi. Molti, è vero, ſi ſono ingegnati di cambiarlo; ma il cambiamento n' è riuſcito infelice; poichè, cambiandolo, hanno voluto ancora diminuire il numero delle propoſizioni, ſenza accreſcere quello de' principj: onde ſono incorſi nella neceſſità di ſtabilire alcune propoſizioni, ſenza poter mantenere nelle loro dimoſtrazioni il rigore della geometrica dimoſtrazione.

L' unico ch' io ſappia, che abbia mutato il metodo d' Euclide, liberandolo dà cennati difetti, ſenza meritare la taccia della non oſſervata rigidezza geometrica, è il famoſo noſtro D. Nicola de Martino. Chiunque leggerà i ſuoi nuovi elementi della Geometria piana, pubblicati nell' anno 1746, *e ne farà il confronto colla Geometria d' Euclide, ne rimarrà di ciò convinto; poichè vedrà ch' egli non ſolo non ha diminuito nè il numero de' principj adoperati da Euclide, nè quello delle propoſizioni, ſe non che anzi gli ha accreſciuti; e che*

gli

Digitalizzato da Google

gli è felicemente riuscito di trattare la Geometria piana, distinguendo le teoriche diverse l'una dall'altra, e di far comprendere e la concatenazione delle stesse teoriche, e l'intera loro estensione. Lo stesso piano ho cercato anch'io d'eseguire in questi Elementi, i quali saranno, se non m'inganno, per esser di giovamento alla gioventù, ansiosa d'apprendere a dovere la Geometria.

Finalmente gli Elementi della Geometria piana, che vi presento in questa prima parte della Geometria elementare, gli ho divisi in tre libri. Nel primo si contengono tutte le teoriche fondamentali della Geometria piana. Nel secondo si tratta della teorica del cerchio. Nel terzo finalmente si racchiude la dottrina della ragione e della proporzione geometrica, e l'applicazione di tale dottrina a tutto ciò, che appartiene alla Geometria piana. Gradite di buon animo queste mie fatiche, quali esse sieno, perchè il vostro gradimento mi sia di forte stimolo a proseguire innanzi l'incominciato lavoro.

Vivete felici.

INDI-

Digitalizzato da Google

INDICE

DE' CAPI CONTENUTI IN QUESTO TOMO.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI. pag. 1

POSTULATI. 16

ASSIOMI. 17

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria Piana.

CAP. I. *Si premettono alcune proposizioni, che servono di principj a tutte le altre.* 21

CAP. II. *Della teorica delle linee, che sono perpendicolari, e obblique ad altre.* 34

CAP. III. *Della teorica delle linee parallele.* 40

CAP. IV. *Della quantità degli angoli de' triangoli, e d' ogni altra figura rettilinea.* 46

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. V. *Degli angoli de' triangoli considerati per rispetto a' loro lati.* 50
CAP. VI. *De' caratteri da conoscere la perfetta uguaglianza de' triangoli.* 55
CAP. VII. *Delle proprietà fondamentali de' parallelogrammi, e de' caratteri da conoscere la loro uguaglianza, e l' uguaglianza de' triangoli.* 60
CAP. VIII. *Del modo di trasformare in parallelogrammo ogni altra figura rettilinea, e del principale uso di sì fatte trasformazioni.* 70
CAP. IX. *Della formazione de' quadrati e de' rettangoli, della loro composizione, e della quadratura sì di essi, che di ogni altro rettilineo.* 77
CAP. X. *Della quantità de' quadrati formati sopra i lati de' triangoli.* 96
CAP. XI. *Si sciolgono alcuni problemi, che alla teorica de' quadrati, e de' rettangoli appartengono.* 103

LI-

Digitalizzato da Google

LIBRO II.

Della teorica del Cerchio.

CAP. I. *Del ſito, che ha il centro nel cerchio, e del modo di ritrovarlo.* 109

CAP. II. *Dell' ordine, che ſerbano nella loro grandezza le rette tirate alla periferia di qualunque cerchio.* 115

CAP. III. *Del modo come sì due cerchi, che un cerchio, e una retta s' interſecano, e ſi toccano.* 122

CAP. IV. *Degli angoli formati e alli centri, e alle circonferenze de' cerchi.* 135

CAP. V. *Dell' uguaglianza de' rettangoli formati dalle rette, le quali, incontrandoſi dentro, o fuori del cerchio, tramezzano tra 'l punto dell' incontro, e la periferia.* 155

CAP. VI. *Delle Iſcrizioni sì delle figure rettilinee ne' cerchi, che de' cerchi nelle figure rettilinee, e delle Circoſcrizioni tanto delle figure rettilinee intorno a' cerchi, quanto de' cerchi intorno alle figure rettilinee.* 164

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. VII. *Si dimostrano alcune proprietà de' lati delle prime cinque figure regolari, per poterli con facilità determinare relativamente al raggio di qualunque cerchio.* 193

LIBRO III.

Della dottrina della Ragione, e Proporzione geometrica, e dell' applicazione di tale dottrina a tutto ciò, che appartiene alla Geometria Piana.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI. 202

CAP. I. *De' caratteri da conoscere l' uguaglianza, e la disuguaglianza delle ragioni, e dell' uso di tali caratteri in determinare di quali grandezze le ragioni sono eguali, e di quali sono disuguali.* 223

CAP. II. *Della dottrina della Ragione composta.* 232

CAP. III. *Delle principali trasformazioni, che si possono fare nelle due ragioni*

Digitalizzato da Google

gioni di qualsivoglia proporzione geometrica, senza togliere la proporzione. 238

CAP. IV. *Delle proprietà della Proporzione, che ha tutt' i termini omogenei.* 242

CAP. V. *Della teorica delle grandezze, che hanno tra loro ragioni ordinate, e perturbate, e di ciò, che da tal teorica deriva.* 246

CAP. VI. *Delle ragioni eguali, che si possono avere col dividere uno, o due lati di qualunque triangolo.* 252

CAP. VII. *De' caratteri da conoscere e la similianza di due triangoli, e quella di due parallelogrammi.* 257

CAP. VIII. *Del modo di dividere qualunque retta secondo qualsivoglia data ragione, e del modo di ritrovare una retta, che sia in proporzione con altre rette date.* 269

CAP. IX. *Delle ragioni de' triangoli, e de' parallelogrammi.* 281

CAP. X. *Dell' uguaglianza de' triangoli, e de' parallelogrammi, che hanno la ragione delle basi reciproca di quella delle altezze, e dell' uguaglianza de' ret-*

Digitalizzato da Google

rettangoli formati da rette proporzionali . 288
CAP. XI. *Della ragione, che hanno le figure rettilinee simili, e della loro proporzionalità* . 293
CAP. XII. *Si sciolgono alcuni probl., che alla teorica de' rettilinei simili appartengono* . 299
CAP. XIII. *Delle ragioni degli angoli fatti e alli centri, e alle circonferenze de' cerchi, e di quelle de' settori circolari* . 307
CAP. XIV. *Delle ragioni, che hanno le periferie circolari, i cerchi, i loro settori, e le loro porzioni, e della quadratura di tali spazj* . 317

ELE-

Digitalizzato da Google

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA
PIANA.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. LA *Geometria* è una ſcienza, la quale, occupandoſi intorno alla quantità continua, ne dimoſtra le di lei propietà.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

2. Le ſpezie della quantità continua ſono i Solidi, le Superficie, e le Linee.

DEFINIZIONE II.

3. Per *Solido*, o *Corpo* s'intende ogni eſtenſione, o ogni ſpazio, che ha lunghezza, larghezza, e profondità.

DEFINIZIONE III.

4. Ciò, che termina, o racchiude il Solido, diceſi *Superficie*.

COROLLARIO.

5. Dunque la ſuperficie non ha profondità; onde è ella un'eſtenſione, ch'ha ſolamente lunghezza, e larghezza.

DEFINIZIONE IV.

6. Ciò, che termina, o racchiude la ſuperficie, diceſi *Linea*.

COROLLARIO.

7. Dunque la linea non ſolamente è priva di profondità, ma ben anche di larghezza. Onde la linea è un'eſtenſione, ch'ha ſolamente lunghezza.

DE-

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE V.

8. Ciò, che termina, o racchiude la linea ne' suoi estremi, chiamasi *Punto*.

COROLLARIO I.

9. Sicchè il punto non solo è privo di profondità, e di larghezza, ma anche di lunghezza. Onde il punto non ha grandezza alcuna.

COROLLARIO II.

10. Non essendo ciò, che termina una grandezza, parte componente di essa, ma estremo degli ultimi suoi componenti, ne segue non esser i punti parti delle linee, le linee parti delle superficie, e le superficie parti de' solidi. Onde va errato chi pretende essere le linee composte da punti, le superficie composte da linee, e i solidi composti da superficie.

COROLLARIO III.

11. Finalmente essendo i punti estremi delle linee, e le linee estremi delle superficie, è chiaro tagliarsi due linee in un sol punto, e due superficie in una sola linea. Onde nè le linee, nè le superficie, che si tagliano, hanno di comune alcuna loro porzione.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

12. Si noti che per un mero concetto matematico si considera la linea generata dallo scorrere d'un punto, la superficie dallo scorrere laterale d'una linea, e 'l solido generato dal muoversi su, o giù d'una superficie.

DEFINIZIONE VI.

13. Una linea dicesi *Retta*, se niuna delle sue parti è fuori della direzione delle altre. Dicesi poi *Curva*, se ognuna delle sue parti è fuori della direzione della sua vicina.

DEFINIZIONE VII.

14. Una superficie dicesi *Piana*, se niuna delle sue parti è fuori della direzione delle altre. Dicesi poi *Curva*, se ognuna delle sue parti è fuori della direzione della sua vicina.

DEFINIZIONE VIII.

15. Si dice *Angolo piano* la scambievole inclinazione di due linee, che, giacenti in un medesimo piano, s'incontrano, senza fare una linea continuata. Il punto dell'in-

Digitalizzato da Google

incontro dicesi *Vertice*, e le due linee diconsi *Gambe*, o *Lati* dell'angolo.

DEFINIZIONE IX.

16. L'angolo si dice *Rettilineo*, s'è formato da due linee rette; *Curvilineo*, s'è formato da due linee curve; e *Mistilineo*, s'è fatto da una linea retta, e da una linea curva.

AVVERTIMENTO.

17. I Geometri contrassegnano sulle superficie i punti con farvi sopra esse piccioli segni coll'estremità della penna da scrivere, o di altro corpo aguzzo, e le linee co' tratti di penna, o d'altro corpo aguzzo. Per poter poi esprimere i punti, le linee, e gli angoli mettono una lettera a lato del punto, due agli estremi della linea, e tre agli estremi di quelle, che formano l'angolo; e dicono: il punto A, Fig. 1. la linea retta BC, la linea curva DE l'angolo rettilineo FGH, o HGF, l'angolo curvilineo IKL, e l'angolo mistilineo MNO, nominando sempre in mezzo la lettera, che sta al vertice; ovvero dicono l'angolo in G, in K, in N, nominando la sola lettera, ch'è al vertice; purchè non ne possa nascere equivoco.

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE X.

18. Una linea retta dicesi *Perpendicolare* ad un' altra , se l' una cade sull' altra senza inclinarsi più dall' una , che dall' altra banda ; dicesi poi *Obliqua* , se dall' una più , che dall' altra banda s' inclina . Finalmente degli angoli , che da amendue le parti si formano in tutti e due i casi, uno dicesi *Conseguente* dell' altro .

Fig. 2. *Così AB è perpendicolare a CD , se le inclinazioni , o gli angoli ABC , ABD sono eguali ; ed EB è obliqua a CD , se le inclinazioni , o gli angoli EBC , EBD sono disuguali .*

DEFINIZIONE XI.

19. *Angolo retto* dicesi quello , che formano due rette , quando l' una è perpendicolare all' altra ; dicesi poi *Angolo ottuso* quello , ch' è maggiore del retto ; ed *Angolo acuto* quello , ch' è minore del retto .

COROLLARIO I.

20. Quindi essendo a CD perpendicolare la retta AB , ed obliqua la retta EB ; sarà retto sì l' angolo ABC , che 'l suo conseguente eguale ABD ; e sarà ottuso l' angolo EBC , ed acuto EBD .

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

21. In oltre il dire che una linea è perpendicolare ad un'altra, è lo ſteſso che dire che una linea cade ad angoli retti ſu di un'altra.

DEFINIZIONE XII.

22. Due angoli ſi dicono *Verticali* fra loro, ſe i lati di uno formano co' lati dell'altro linee continuate.

Così l'angolo AOC diceſi verticale coll'angolo BOD, e COB verticale con AOD. Fig. 3.

DEFINIZIONE XIII.

23. Due linee rette eſiſtenti ſullo ſteſſo piano ſi dicono *Parallele*, ſe, prolungandole all'infinito da amendue le parti, non s'uniſcono giammai.

Di tal ſorta ſono le rette AB, CD. Fig. 4.

DEFINIZIONE XIV.

24. *Termine* di checcheſſia diceſi ciò, ch'è ſuo eſtremo.

AVVERTIMENTO.

25. I termini, che ſi conſiderano in Geometria, riduconſi a punti, a linee, ed a ſuperficie. I punti ſono termini delle linee, le linee delle ſuperficie, e le ſuperficie de' ſolidi; perchè i punti ſono eſtremi del-

Digitalizzato da Google

delle linee, le linee delle ſuperficie, e le ſuperficie ſono eſtremi de' ſolidi.

COROLLARIO.

26. Perchè il corpo ha tre dimenſioni, la ſuperficie ne ha due, la linea una, e 'l punto niuna. Dunque ogni termine ha ſempre una dimenſione meno della coſa terminata.

DEFINIZIONE XV.

27. Diceſi *Figura* ogni ſpazio racchiuſo da tutte le parti o da uno, o da più termini.

AVVERTIMENTO.

28. Si noti che gli ſpazj ſi racchiudono da linee, o da ſuperficie. Onde le figure riduconſi a ſuperficie, ed a ſolidi.

DEFINIZIONE XVI.

29. Diceſi *Figura piana* ogni ſuperficie piana, terminata o da una, o da più linee; diceſi poi *Figura ſolida* ogni ſolido, terminato da una, o da più ſuperficie.

AVVERTIMENTO.

30. Nella Geometria piana ſi tratta di ciò,

Digitalizzato da Google

ciò, ch' appartiene alle figure piane, e nella ſolida di ciò, che ſpetta alle figure ſolide.

DEFINIZIONE XVII.

31. Per *Perimetro* s' intende il termine intero di qualunque figura piana.

AVVERTIMENTO.

32. I Geometri, per eſprimere una figura, nominano le lettere, che ſtanno al perimetro.

DEFINIZIONE XVIII.

33. Una figura piana diceſi *Rettilinea*, ſe 'l ſuo perimetro è compoſto da linee rette; diceſi *Curvilinea*, ſe 'l perimetro è una linea curva, o compoſto da linee curve; diceſi finalmente *Miſtilinea*, ſe 'l ſuo perimetro è compoſto da linee rette, e curve inſieme.

Così ABCDE è figura rettilinea, EFG, ed HIKL ſono figure curvilinee, e MNOPQ. è figura miſtilinea. Fig. 5.

DEFINIZIONE XIX.

34. D' una figura rettilinea diceſi *Lato* qualunque linea componente il ſuo perimetro, e *Baſe* qualunque lato conſiderato, come parte inferiore del perimetro.

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE XX.

35. Una figura rettilinea dicesi *Trilatera*, se 'l suo perimetro costa di tre lati; dicesi poi *Quadrilatera*, se costa di quattro lati, *Multilatera*, o *Poligona*, se costa di più di quattro lati.

COROLLARIO.

36. Perchè nelle figure rettilinee sono tanti gli angoli, quanti i lati; perciò può dirsi *Triangolo* la figura trilatera, *Quadrangolo* la quadrilatera, e *Multangolo* la multilatera.

DEFINIZIONE XXI.

37. Il triangolo considerato per rispetto a' lati si dice *Equilatero*, se tutti e tre i lati sono eguali; si dice *Isoscele*, se sono eguali solamente due lati; si dice *Scaleno*, se tutt' i lati sono disuguali. Considerato poi per rispetto agli angoli, dicesi *Rettangolo*, se uno degli angoli è retto; dicesi *Ottusangolo*, se uno degli angoli è ottuso; e finalmente dicesi *Acutangolo*, se tutti e tre gli angoli sono acuti.

Fig. 6. *Così il triangolo ABC è equilatero, perchè* $AB = BC = CA$. *Il triangolo DEF è isoscele, perchè è solamente* $DE = EF$. *Il triangolo GHI*

Digitalizzato da Google

GHI è ſcaleno, perchè tutt' i lati ſono diſuguali. Il triangolo poi KLM è rettangolo, perchè l' angolo in L è retto. Il triangolo NOP è ottuſangolo, perchè l' angolo in O è ottuſo. Finalmente il triangolo QRS è acutangolo, perchè tutti gli angoli in Q, R, S ſono acuti.

AVVERTIMENTO.

38. Appreſſo dimoſtreremo che non può avere il triangolo nè più d' un angolo retto, nè più d' un angolo ottuſo, ſebbene tutti e tre poſſono eſſere acuti.

DEFINIZIONE XXII.

39. Nel triangolo rettangolo il lato oppoſto all' angolo retto ſi dice *Ipotenuſa*, e gli altri due chiamanſi *Cateti*.

Così nel triangolo KLM l' ipotenuſa è KM, ed i cateti ſono KL, LM.

DEFINIZIONE XXIII.

40. La figura quadrilatera ſi dice *Parallelogrammo*, ſe i lati oppoſti ſono paralleli; ſi dice poi *Trapezio*, ſe i lati oppoſti non ſono paralleli, o due di eſſi almeno non ſono tali.

Così ABCD è parallelogrammo, perchè le linee AB, CD ſono parallele, e le linee AD, BC ſono altresì parallele. La figura poi EFGH Fig. 7.

è tra-

Digitalizzato da Google

è trapezio, perchè i lati opposti non sono linee parallele.

DEFINIZIONE XXIV.

41. Il parallelogrammo dicesi *Quadrato*, se ha tutt' i lati uguali, e tutti gli angoli retti; dicesi *Rettangolo*, o *Quadrilungo*, se ha tutti gli angoli retti, ma non tutt' i lati eguali; dicesi *Rombo*, se ha tutt' i lati eguali, ma non già gli angoli retti; e finalmente dicesi *Romboide*, se non ha nè gli angoli retti, nè tutt' i lati eguali.

Fig. 8. *Così ABCD è un quadrato, EFGH è un rettangolo, IKLM è un rombo, e NOPQ è una romboide.*

DEFINIZIONE XXV.

42. La figura multangola dicesi *Pentagono*, *Esagono*, *Ettagono*, *Ottagono*, ec., secondochè i suoi lati sono cinque, sei, sette, otto, ec., e per conseguenza ha cinque, sei, sette, otto angoli, ec.

DEFINIZIONE XXVI.

43. Una figura piana rettilinea dicesi *Regolare*, se è equilatera, ed equiangola; dicesi poi *Irregolare*, se non è equilatera, ed equiangola.

DE-

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE XXVII.

44. Due figure rettilinee ſi dicono fra loro *Equilatere*, ſe i lati di una ſono riſpettivamente eguali a' lati dell' altra. Similmente ſi dicono fra loro *Equiangole*, ſe gli angoli di una ſono riſpettivamente eguali agli angoli dell' altra.

DEFINIZIONE XXVIII.

45. Per *Cerchio*, o *Circolo* s' intende una figura piana, ch' è terminata da una linea curva, la quale ritorna in ſe ſteſsa, e che ha un punto dentro di eſſa tale, che tutte le linee rette, che ſi poſſono alla detta curva da tal punto tirare, ſono eguali.

DEFINIZIONE XXIX.

46. La linea curva, che termina il cerchio, ſi dice *Periferia*, o *Circonferenza* del cerchio. Il punto, onde procedono rette eguali alla periferia, diceſi *Centro* del cerchio. Finalmente le rette eguali, procedenti dal centro alla periferia, diconſi *Raggi* del cerchio.

Così lo ſpazio ABC diceſi cerchio. La linea curva ABC diceſi periferia. Il punto O ſi dice centro. Le rette AO, BO, CO, ec. ſi dicono raggi. Fig. 9.

AV-

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

47. Concepiſcono i Geometri generarſi il cerchio col muoverſi una retta in una ſuperficie piana intorno a un ſuo eſtremo fiſſo, ed immobile, e raggirarſi fino a che ritorni al primiero ſuo ſito.

DEFINIZIONE XXX.

48. Diceſi *Arco* del cerco qualunque porzione della ſua periferia. La retta, che taglia l'arco, ſi dice *Corda*, o *Sotteſa* dell'arco. Ogni corda, che paſſa per lo centro, diceſi *Diametro* del cerchio.

Fig.10. *Così nel cerchio ABD la porzione AB della periferia, o la porzione AEDB diceſi Arco, la retta AB ſi dice corda dell'arco AB, o dell'arco AEDB, la corda FC diceſi diametro.*

COROLLARIO.

49. Eſſendo i raggi metà de' diametri, ne ſegue che i raggi dir ſi poſſono anche *Semidiametri*.

DEFINIZIONE XXXI.

50. Diceſi *Porzione*, o *Segmento* del cerchio lo ſpazio compreſo fra un arco e la ſua corda. La porzione tagliata da un dia-

Digitalizzato da Google

diametro dicesi *Semicerchio*. Lo spazio finalmente compreso da due raggi e dall' arco, che comprendono, dicesi *Settore* del cerchio.

Così lo spazio AB, compreso dall' arco AB e dalla corda AB dicesi, porzione del cerchio. Similmente porzione del cerchio si dice lo spazio AEDB. Gli spazj poi FABC, FEDC diconsi Semicerchi. Finalmente lo spazio EOD dicesi settore del cerchio; come altresì settore dicesi lo spazio EABDO.

DEFINIZIONE XXXII.

51. Se la periferia di qualunque cerchio si divide in 360 parti eguali, ognuna di esse dicesi *Grado*. Se un grado si divide in 60 altre parti eguali, ognuna di esse dicesi *Minuto primo*, o *Scrupolo primo*. Se un minuto primo si divide in 60 parti anche eguali, ognuna di tali parti si dice *Minuto secondo*, o *scrupolo secondo*; e così procedendo all' infinito.

COROLLARIO.

52. Dunque la periferia di qualunque cerchio costa di 360°, o di 21600^{1}, o di 1296000^{11}, ec.

Digitalizzato da Google

POSTULATI.

POSTULATO I.

53. Tirare da un punto ad un altro ſu d'un piano una linea retta.

POSTULATO II.

54. Data una linea retta terminata, prolungarla quanto ſi vuole.

POSTULATO III.

55. Dato qualunque punto per centro, e data qualunque retta per intervallo, deſcrivere un cerchio.

AVVERTIMENTO I.

56. Si noti, che per tirare una linea retta da un punto ad un altro, o per tirarla da un punto ſolo, biſogna prima adattare una riga ſu i due punti, o ſul punto, e poſcia diſegnare la linea con far ſcorrere la punta d'una penna, o d'altro corpo aguzzo lungo la riga. Per deſcrivere poi un cerchio, è neceſſario fiſſare una punta di

Digitalizzato da Google

di compasso nel punto, che dee essere il centro, e l'altra, allontanata dalla prima per quanto è lungo il raggio, muoverla in giro, finchè ritorni, ond'è partita.

AVVERTIMENTO II.

57. Si noti ancora, che come tutte le operazioni, che far si possono per isciorre i probl. matematici, che alla Geometria elementare, cioè alla Geometria piana, ed alla Geometria solida appartengono, a tirar linee rette, ed a descriver cerchi si riducono: così gli strumenti, di cui si fa uso nella detta Geometria, riduconsi alla riga, ed al compasso. Onde tutt' i Probl. geometrici, che per isciorli v' è bisogno dell' uso di tali strumenti, diconsi Probl. appartenenti alla Geometria elementare; laddove gli altri, che sciorre non si possono senza l'uso d'altri strumenti, appartengono ad un' altra Geometria, che dicesi Geometria sublime, di cui a suo luogo tratteremo.

ASSIOMI.

ASSIOMA I.

58. Le grandezze, che sono eguali ad

Digitalizzato da Google

una terza, ſono eguali fra loro; e di quelle, che ſono eguali fra loro, ſe una è maggiore, o minore di una terza, le altre ſono anche maggiori, o minori della ſteſſa terza.

ASSIOMA II.

59. Se a grandezze uguali s'aggiungono porzioni eguali, le ſomme, che ſi hanno, ſono anche uguali.

ASSIOMA III.

60. Se da grandezze uguali ſi tolgono porzioni eguali, le reſtanti porzioni ſono anche uguali.

ASSIOMA IV.

61. Se a grandezze diſuguali s'aggiungono porzioni eguali, le ſomme, che ſi hanno, ſono pure diſuguali.

ASSIOMA V.

62. Se da grandezze diſuguali ſi tolgono porzioni eguali, le reſtanti porzioni ſono anche diſuguali.

ASSIOMA VI.

63. Le grandezze, che ſono doppie, tri-

Digitalizzato da Google

triple, quadruple, ec., o metà, terze, quarte parti, ec. d' una terza, ſono pure fra loro eguali.

ASSIOMA VII.

64. Le grandezze, che ſi combaciano inſieme, ſono fra loro perfettamente uguali.

AVVERTIMENTO.

65. Si noti, che due linee ſi combaciano, quando poſta una ſu l' altra, l' una non eſce fuori dell' altra. Similmente ſi combaciano due ſuperficie, quando poſta una ſu l' altra, una di eſſe non eſce fuori dell' altra nè in lunghezza, nè in larghezza. Finalmente ſi combaciano due ſolidi, quando poſto uno dentro dell' altro, l' uno non eſce fuori dell' altro nè in lunghezza, nè in larghezza, nè in profondità. Si noti pure che tutte le grandezze, che ſi combaciano, ſono uguali, ma non tutte quelle, che ſono eguali, ſi combaciano.

ASSIOMA VIII.

66. Il tutto è ſempre maggiore di qualunque ſua parte; ed è 'l tutto uguale a tutte le ſue parti preſe inſieme.

Digitalizzato da Google

ASSIOMA IX.

67. Due linee rette, comunque ſono poſte, non poſſono chiudere ſpazio alcuno.

Imperciocchè o ſono poſte in modo che non s' uniſcono in verun punto, ed allora lo ſpazio è aperto da amendue le parti; o ſono poſte in modo che da una parte s' uniſcono, ed in tal caſo lo ſpazio è aperto dall' altra parte; o finalmente ſono poſte in modo che gli eſtremi dell' una cadono ſu gli eſtremi dell' altra, ed allora l' una combacia coll' altra.

ASSIOMA X.

68. Tutti gli angoli retti ſono eguali.

Imperciocchè due angoli retti ſi combaciano, ſe l' uno ſi mette ſu l' altro.

ASSIOMA XI.

69. Di tutte le linee terminate ne' medeſimi punti, la più brieve è la linea retta; ed addita per conſeguenza ella il più brieve cammino, che far ſi poſſa da un punto ad un altro.

ASSIOMA XII.

70. Se una grandezza è doppia d' un' altra, ed una parte di quella è doppia d' una

Digitalizzato da Google

d'una parte di queſta, ſarà la reſtante porzione della prima doppia della reſtante porzione della ſeconda.

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria Piana.

CAP. I.

Si premettono alcune propoſizioni, che ſervono di principj a tutte le altre.

PROP. I. PROBL. I.

71. *Data qualunque retta terminata, formare ſu di eſſa un triangolo equilatero.*

SOLUZIONE.

Sia data la retta AB.

1. Si deſcrivano col centro A e coll' intervallo AB il cerchio BCD, e col centro B e coll' intervallo BA il cerchio ACE (§ 55), interſecandoſi amendue colle loro periferie nel punto C. Fig. 11.

Digitalizzato da Google

2. Dal punto C alli punti A e B si tirino le rette CA, CB (§ 53).

Dico che ACB è il triangolo equilatero cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i punti A e B centri de' cerchi BCD, ACE, sarà ad AB uguale sì CA, che CB (§ 45). Dunque AC è uguale a BC (§ 58); e per conseguenza i tre lati AB, BC, CA sono tutti fra loro eguali. Sicchè il triangolo ABC è equilatero (§ 37). Per la qual cosa sopra la data retta AB s' è formato il triangolo equilatero ABC. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. II. PROBL. II.

Fig. 12. 72. *Dato un punto, e data una linea retta terminata, tirare dal punto dato un altra retta uguale alla data.*

SOLUZIONE.

Sia dato il punto A, e sia data la retta BC.

1. Si tiri dal punto A al punto B la retta AB (§ 53), e su di essa si formi il triangolo equilatero ABE (§. 71).

2. Si prolunghino i lati EA, EB indefinitamente verso L e M (§ 54).

3. Pre-

Digitalizzato da Google

3. Preso il punto B per centro, e coll' intervallo BC si descriva il cerchio CDF, il quale interseca colla periferia la retta EM in D.

4. Finalmente preso il punto E per centro, e coll' intervallo ED si descriva il cerchio DGH, il quale colla periferia interseca EL in G.

Dico che AG è la retta cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo il punto E centro del cerchio DGH, sarà EG uguale a ED (§ 45); ed essendo il triangolo ABE equilatero, sarà AE uguale a EB. Onde togliendo dalle rette uguali EG, ED le porzioni uguali EA, EB, resterà AG uguale a BD (§ 60). E' in oltre la retta BC uguale a BD, come raggi del cerchio CDF. Dunque alla BD è uguale sì AG, che BC; e perciò AG è uguale a BC (§ 58). Sicchè dal dato punto A s'è tirata la retta AG uguale alla data BC. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. III. PROBL. III.

73. Date due rette disuguali, tagliare dalla maggiore una porzione uguale alla minore.

Digitalizzato da Google

SOLUZIONE.

Fig. 13. Sieno date le rette AB e L, di cui AB sia la maggiore, e L la minore.

1. Dal punto A si tiri AC uguale a L (§ 72).

2. Si prenda il punto A per centro, e coll'intervallo AC si descriva il cerchio CDE (§ 55), il quale colla periferia interseca AB in D.

Dico che AD è la porzione cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo il punto A centro del cerchio CDE, sarà AD uguale ad AC (§ 45). Ma AC s'è tirata uguale a L. Dunque anche AD è uguale a L (§. 58.). Sicchè dalla retta maggiore AB s'è tagliata la porzione AD eguale alla minore L. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. IV. TEOR. I.

Fig. 6. 74. *In ogni triangolo qualunque lato è minore della somma degli altri due.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappresenti GHI qualunque triangolo. Non

Digitalizzato da Google

on formando GH e HI una retta conti-
iata, delle linee GHI e GI terminate
' punti G e I, la retta GI addita il
mmino più brieve, che far si possa da
a I, e non già GHI (§ 69). Dunque
lato GI è minore della somma di GH,
II. Similmente si dimostra essere GH mi-
ore della somma di GI, IH, e HI mi-
iore della somma di IG, GH. Sicchè in
gni triangolo, ec.. Ch'è ciò, che biso-
gnava dimostrare.

PROP. V. TEOR. II.

75. *Se dentro qualunque triangolo ABC si prenderà qualsivoglia punto O, e da tal punto si tireranno le rette OA, OB agli estremi A e B del lato AB, sarà la somma de' lati AC, CB maggiore della somma delle rette AO, OB.* Fig. 14.

DIMOSTRAZIONE.

Si prolunghi BO in D. Essendo la somma di DC, CB maggiore di DB (§ 74); aggiuntovi di comune AD, sarà la somma di AC, CB maggiore della somma di AD, DB (§ 61). Similmente la somma di AD, DO è maggiore di AO; aggiuntovi di comune OB, sarà la somma di AD, DB maggiore della somma di AO, OB. Sicchè tanto più la somma di AC, CB è mag-

Digitalizzato da Google

è maggiore della ſomma di AO, OB. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. VI. TEOR. III.

Fig.15. *76. Se dagli eſtremi A e B di qualunque retta AB tiranſi due altre rette AC, BC, che s' uniſcano in qualunque punto C; volendo dagli ſteſſi punti A e B tirare due altre rette verſo la medeſima parte uguali reſpettivamente a AC, BC, s' uniranno tali rette neceſſariamente nel medeſimo punto C.*

DIMOSTRAZIONE.

Si ſupponga, s' è poſſibile, poterſi titare AD, BD, che s' uniſcano nel punto D diverſo da C, e che ſia AD= AC, e BD = BC. Eſſendo la ſomma di AO, OC maggiore di AC (§74), e perciò maggiore della ſua eguale AD (§58); toltone la comune AO, ſarà CO maggiore di OD (§62). Onde aggiunta ad OC, OD di comune OB, ſarà BC, o la ſua eguale BD maggiore della ſomma di BO, OD. Ma ciò è falſo. Dunque è falſo che le ſuddette rette non ſi debbano neceſſariamente unire nel punto C. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PRO-

Digitalizzato da Google

PROP. VII. TEOR. IV.

77. *Se due triangoli ABC, DEF hanno* Fig. 16.
lato AB = DE, BC = EF, e l' angolo
BC = DEF; ſarà ancora la baſe AC =
F, l' angolo A = D, e l' angolo C = F.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda il triangolo ABC poſto ſopra
triangolo DEF in modo che caſchi il
unto B ſul punto E, e 'l lato AB ſul
ato DE. Eſſendo l'angolo ABC = DEF, caſ-
herà ancora BC ſopra EF; e, per l'ugua-
lianza de' lati, caſcherà il punto A ſul
unto D, e 'l punto C ſul punto F.
Dunque ſi combaciano la baſe AC colla baſe
DF, l'angolo A coll'angolo D, e l'an-
golo C coll'angolo F. E perciò AC = DF,
l'angolo A = D, e l'angolo C = F (§ 64)
Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. VIII. TEOR. V.

78. *Se due triangoli ABC, DEF hanno*
il lato AB = DE, BC = EF, e la baſe AC =
DF; ſarà l' angolo ABC = DEF, l' angolo
A = D, e l' angolo C = F.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda il triangolo ABC poſto ſopra
il

Digitalizzato da Google

il triangolo DEF in modo che la baſe AC ſi combaci colla baſe DF, cioè che caſchi il punto A ſul punto D, e 'l punto C ſul punto F. Caſcherà, per l'uguaglianza de' lati, il punto B ſul punto E (§ 76). Sicchè combaceranno l'angolo B coll'angolo E, l'angolo A coll'angolo D, e l'angolo C coll'angolo F. E perciò l'angolo B = E, A = D, e C = F (§ 64). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. IX. PROBL. IV.

79. *Date tre rette tali che qualunque di eſſe ſia minore della ſomma delle altre due, coſtruire un triangolo, il quale abbia i lati reſpettivamente uguali alle tre rette date.*

SOLUZIONE.

Fig.17. Sieno le rette date A, B, C.

1. Si tiri la retta LN, e ſi prolunghi dalla parte N per quanto biſogna.

2. Si taglino LP = A, PQ = B, QM = C (§ 73).

3. Preſi i punti P e Q per centri, e coll'intervalli PL, QM ſi deſcrivano i cerchi LRT, MRV, interſecandoſi colle periferie nel punto R.

4. Finalmente dal punto R alli punti P e Q ſi tirino le rette RP, RQ.

Dico che PQR è il triangolo cercato.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i punti P e Q centri de' cerchi LRT, MRV, sarà PR = PL, e QR = QM (§ 45). Ma per costruzione è PL = A, PQ = B, QM = C: Dunque RP = A, PQ = B, QR = C. Sicchè s'è descritto il triangolo PQR, i cui lati sono respettivamente uguali alle rette date. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. X. PROBL. V.

80. *Dato un punto in una retta, e dato un angolo rettilineo, formare nel dato punto un altr' angolo eguale all' angolo dato.*

SOLUZIONE.

Sia dato il punto A nella retta AB, e sia dato l'angolo OMP. Fig. 18.

1. Presi ne' lati MO, MP due punti ad arbitrio L e N, s'uniscano colla retta LN.

2. Si prolunghi AB per quanto bisogna verso D e F, e si taglino AD = MN, AB = LM, e BE = LN (§ 73.).

3. Presi i punti A e B per centri, e coll' intervalli AD, BE si descrivano i cerchi DCG, ECH, li quali colle periferie s' interfecano nel punto C,

4. Fi-

Digitalizzato da Google

4. Finalmente dal punto A al punto C si tiri la retta AC (§ 53).

Dico che l' angolo BAC è l' angolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè, congiunta la retta BC, è il lato BA = LM per costruzione, AC = AD, e per conseguenza uguale ad MN, e la base BC = BE, e perciò uguale alla base LN. Dunque l' angolo BAC è uguale all' angolo LMN (§ 78). Sicchè nel dato punto A s' è fatto l' angolo BAC uguale all' angolo dato OMP. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XI. TEOR. VI.

Fig. 19. 81. *Se due triangoli ABC, DEF hanno il lato AB = DE, BC = EF, e l' angolo ABC maggiore dell' angolo DEF; sarà la base AC maggiore della base DF.*

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia nel punto E del lato DE l' angolo DEG uguale all' angolo ABC (§ 80), e, tagliata EG = EF = BC (§ 73), si congiunga DG. Essendo il lato AB = DE, BC = EG, e l' angolo ABC uguale all' angolo DEG, sarà la base AC = DG (§ 77).

In

Digitalizzato da Google

1 oltre la somma di EO, OG è maggiore
EG (§74), e perciò maggiore dell'
guale EF; onde, toltone la comune EO,
rà OG maggiore di OF (§62). Sicchè,
ggiunta a OG, e OF di comune OD,
rà DG, e per conseguenza AC maggiore
ella somma di OD, OF (61), e molto più
aggiore di DF. Ch'è ciò, che bisognava
imostrare.

PROP. XII. TEOR. VII.

82. *Se due triangoli ABC, DEF hanno l lato AB = DE, BC = EF, e la base AC naggiore delle base DF; sarà l' angolo ABC naggiore dell' angolo DEF.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè se l' angolo ABC non è maggiore di DEF; sarà ABC uguale a DEF, o minore di DEF. Onde la base AC è uguale alle base DF (§77), o minore di DF (§81). Ma amendue tali cose ripugnano all'ipotesi. Dunque l'angolo ABC è maggiore dell'angolo DEF. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XIII. PROBL. VI.

83. *Dato un angolo rettilineo, dividerlo in due parti eguali.*

So-

Digitalizzato da Google

SOLUZIONE.

Fig.20. Sia ABC l'angolo dato.

1. Si prenda nel lato AB ad arbitrio il punto D, e dal lato BC si tagli BE = BD (§ 73).

2. Sopra DE si faccia il triangolo equilatero DFE (§ 71).

3. Finalmente dal punto B al punto F si tiri la retta BF.

Dico che BF divide l'angolo ABC in due parti eguali ABF, FBC.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè ne' triangoli DBF, EBF il lato DB è uguale a BE, il lato BF è comune, e le baſe DF è uguale alle baſe FE. Dunque l' angolo DBF è uguale a EBF (§ 78). Sicchè la retta BF divide l'angolo ABC in due parti eguali. Ch'è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

84. Se all' iſteſſo modo ſi divideranno in due parti eguali gli angoli ABF, CBF, s'avrà l'angolo ABC diviſo in 4 parti eguali; e ſe ſimilmente ſi procederà innanzi dividendo in due parti eguali ſempre le quarte parti dell' angolo ABC, indi le parti

Digitalizzato da Google

ottave, ſedicesime, trentaduesime, ec., avrà l' angolo diviſo in 8, 16, 32, 64 rti eguali, ec.. Sicchè ogni angolo retti- eo colla riga e col compaſſo ſi può di- dere in 2, 4, 8, 16, 32, 64 parti egua- , ec.

AVVERTIMENTO.

85. Si noti che ſe ſi vorrà dividere qua- nque angolo rettilineo in tante parti uali, quante ne diſegna ciaſcuno de' nu- eri, che tramezzano tra 2, 4, 8, 16, , 64, ec., l' operazione eſeguir non ſi otrà colla riga, e col compaſſo. Onde il obl. di dividere qualunque angolo retti- neo in 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, . parti eguali non ſi può ſciorre nella Geo- ietria elementare, appartenendo egli alla eometria ſublime. Contuttociò il ſolo an- olo retto può dividerſi in tre parti eguali olla riga e col compaſſo, come ſi vedrà ſuo luogo.

PROP. XIV. PROBL. VII.

86. *Data una linea retta terminata, divi- derla in due parti uguali.*

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data. Fig. 21.

1. Si faccia ſopra AB il triangolo equi-

Digitalizzato da Google

latero ABC (§ 71).

2. Si divida l' angolo ACB in due parti eguali (§ 83) colla retta CD.

Dico che AB è divisa nel punto D in due parti eguali.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè ne' triangoli ACD, BCD è 'l lato AC=BC, il lato CD è comune, e gli angoli ACD, BCD sono eguali. Dunque è AD=DB (§77). Sicchè è divisa AB nel punto D in due parti eguali. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

CAP. II.

Della teorica delle linee, che sono perpendicolari, e obblique ad altre.

PROP. XV. PROBL. VIII.

87. *Dato un punto in una linea retta, innalzare dal punto dato un' altra retta perpendicolare alla data.*

SOLUZIONE.

Fig. 22. Sia dato il punto C nella retta AB.

1. Si

Digitalizzato da Google

1. Si prenda in CA il punto D ad arbitrio, e da CB si tagli CE=CD (§ 73).

2. Si faccia sopra DE il triangolo equilatero DOE (§. 71).

3. Finalmente dal punto O al punto C si tiri la retta OC.

Dico che OC è la perpendicolare cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè ne' triangoli DCO, ECO è 'l lato DC=CE, il lato CO è comune, e la base DO è uguale alle base EO. Dunque l'angolo DCO è uguale all'angolo ECO (§ 78). Sicchè OC è perpendicolare ad AB (§ 18). E perciò dal dato punto C s'è innalzata CO perpendicolare ad AB. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XVI. PROBL. IX.

88. *Data una retta, e dato un punto fuori della sua direzione, calare dal punto dato una perpendicolare alla retta data.*

Soluzione.

Sia AB la retta data, e O sia il punto dato.

1. Si prenda ad arbitrio il punto F, che stia, per rispetto al punto O, dall'altra parte della retta AB.

Digitalizzato da Google

2. Si descriva col centro O, e coll' intervallo OF il cerchio DFE, il quale colla periferia interseca AB ne' punti D ed E.

3. Si divida DE in due parti eguali nel punto C (§ 86), e si congiunga OC.

Dico che OC è la perpendicolare cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunte OD, OE, ne' triangoli DCO, ECO è 'l lato DC=EC, il lato CO è comune, e la base OD è uguale alla base EO. Dunque l' angolo DCO è uguale all' angolo ECO (§ 78). Sicchè OC è perpendicolare ad AB (§ 18). E perciò dal dato punto O s' è calata OC perpendicolare ad AB. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XVII. TEOR. VIII.

89. *Se una retta cade su d' un' altra, forma ella gli angoli conseguenti o retti, o insieme presi uguali a due retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 2. In due modi può su la retta CD cadere un' altra, o perpendicolarmente, come AB, o obbliquamente, come EB. Nel primo caso è chiaro essere gli angoli ABC, ABD eguali (§ 18), e per conseguenza retti (§ 19).

Nell'

Digitalizzato da Google

Nell' altro caſo perchè l' angolo EBC è maggiore del retto ABC di quant' è l' angolo ABE, ed EBD è minore del retto ABD di *quant'* è pure ABE. Dunque coll' eccesſo di uno ſul retto compenſando la mancanza *dell'* altro anche dal retto, ſarà la ſomma degli angoli conſeguenti EBC, EBD ugua*le* a due retti. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

90. Quindi ſe in un punto, come O, Fig.23. s' uniranno quante rette ſi ſieno AO, BO, CO, DO, EO, FO, GO; perchè, prolungata AO in H, è uguale a due retti *sì* la ſomma degli angoli AOB, BOC, COD, DOH, che la ſomma di queſt' al*tri* HOE, EOF, FOG, GOA; ſarà la ſomma di tutti gli angoli, dalle ſuddette rette nel punto O formati, AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOG, GOA eguale a quattro retti.

COROLLARIO II.

91. Sicchè ſolamente quelle figure, di cui tutti gli angoli poſti inſieme uguagliano quattro retti, poſſono riempire uno ſpazio, congiugnendoſi in un punto, ſenza laſciarvi interſtizj voti.

Digitalizzato da Google

PROP. XVIII. TEOR. IX.

92. *Se due rette s' interſecano, gli angoli verticali, che fanno, ſono eguali fra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 3. S' interſechino AB e CD in O. Eſſendo a due retti eguale sì la ſomma degli angoli AOC, AOD, che la ſomma degli angoli AOC, COB (§ 89); ſara la ſomma di AOC, AOD eguale alla ſomma di AOC, COB (§ 58). Onde, toltone il comune AOC, ſarà l' angolo AOD eguale al ſuo verticale COB (§ 60). Similmente ſi dimoſtrano eguali i verticali AOC, DOB. Sicchè ſe due rette, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XIX. TEOR. X.

Fig. 2. 93. *Se dall' eſtremo B della retta BE ſi tirano per direzioni oppoſte due altre rette BC, BD in modo, che la ſomma degli angoli EBC, EBD ſia eguale a due retti; formeranno CB, BD una retta continuata.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda CB prolungata a deſtra; ſarà l' angolo EBC una col ſuo conſeguente ugua-

Digitalizzato da Google

guale a due retti (§ 89), e perciò uguale alla ſomma di EBC, EBD. Onde, toltone il comune EBC, ſarà il conſeguente di EBC uguale a EBD (§ 60). Sicchè BD combacia con CB prolungata; e per conſeguenza CB, BD formano una retta continuata. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XX. TEOR. XI.

94. *Se da un punto qualunque O della retta AB ſi tirano per direzioni oppoſte due altre rette OC, OD in modo, che gli angoli verticali COB, AOD ſieno fra loro eguali; formeranno CO, OD una retta continuata.* Fig. 3.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè aggiugnendo agli angoli eguali AOD, COB di comune AOC, la ſomma di AOD, AOC uguaglierà la ſomma di AOC, COB (§ 59). Ma la ſomma di AOC, COB uguaglia due retti (§ 89). Dunque la ſomma di AOD, AOC anche uguaglia due retti (§ 58). E perciò CO, OD formano una retta continuata (§ 93). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

Digitalizzato da Google

CAP. III.

Della teorica delle Linee parallele.

DEFINIZIONE.

Fig.24. 95. Sieno le rette AB, CD esistenti nel medesimo piano, e sieno tagliate comunque da un'altra retta EH. Si diranno *Angoli alterni* sì AFG, FGD, che BFG, FGC. Si diranno EFB, EFA, CGH, HGD *Angoli esterni*, e FGD, FGC, GFA, GFB, per riguardo agli esterni, si diranno respettivamente *Angoli interni opposti*. Finalmente si diranno *Angoli interni posti dalla stessa parte* sì BFG, FGD, che AFG, FGC.

PROP. XXI TEOR. XII.

96. Se due rette AB, CD esistenti nel medesimo piano vengono tagliate da un' altra EH, e formano gli angoli interni posti dalla stessa parte BFG, FGD uguali a due retti; sono tali rette AB, CD parallele.

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega che AB, CD sieno parallele, prolungate s'uniranno in un punto. S'uni-

Digitalizzato da Google

S' uniſcano, s' è poſſibile, nel punto O. Si prolunghi GC in I, finchè ſia GI = = FO, e s' uniſca IF. Eſſendo uguale a due retti sì la ſomma degli angoli OFG, FGD, che la ſomma di FGD, FGI, ſarà la ſomma di OFG, FGD uguale alla ſomma di FGD, FGI. Onde, toltone il comune FGD, ſarà OFG uguale a FGI (§ 60). In oltre ne' triangoli OFG, FGI è il lato OF = GI, il lato FG comune, e l'angolo OFG uguale all'angolo FGI. Dunque la baſe OG = FI (§ 77). Sicchè nel triangolo OFI la ſomma de' lati OF, FI è uguale alla ſomma di IG, GO, ovvero è uguale al terzo lato IO. Ma ciò è impoſſibile (§ 74). Dunque è impoſſibile che AB, CD non ſieno parallele. Sicchè ſe due rette, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

97. Sebbene AB girando intorno al punto F poſſa ricevere infinite diverſe poſizioni: pure non v' è per AB che una ſola poſizione, nella quale è ella parallela a CD, come chiaramente ſi comprende, poſta la nozione delle parallele. Ma AB è parallela a CD, quando ha tale poſizione che la ſomma degli angoli BFG, FGD ſia uguale a due retti. Dunque AB non è parallela a CD, ſe la poſizione di AB è tale

Digitalizzato da Google

tale che la ſomma degli angoli BFG, FGD ſia maggiore, o minore di due retti.

PROP. XXII. TEOR. XIII.

98. Se due rette AB, CD eſiſtenti nel medeſimo piano vengono tagliate da un' altra retta EH, e formano gli angoli alterni uguali fra loro, o l' angolo eſterno eguale al ſuo interno oppoſto; ſono le rette AB, CE fra loro parallele.

DIMOSTRAZIONE.

I. Sieno eguali gli alterni AFG, FGD. Sarà la ſomma de' due angoli BFG, FGD uguale alla ſomma di AFG, BFG, cioè uguale a due retti (§ 89). Sicchè AB, CD ſono parallele (§ 96).

II. Sia l' angolo eſterno EFB uguale al ſuo interno oppoſto FGD. Sarà la ſomma di BFG, FGD uguale alla ſomma di EFB, BFG, cioè uguale a due retti (§ 89). Onde AB, BC ſono parallele. Sicchè ſe due rette eſiſtenti, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

99. Fin quì ſi ſono eſpoſti i caratteri da conoſcere, ſe due rette ſono parallele. Venghiamo ora alle propietà delle ſteſſe linee parallele.

RPO.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIII. TEOR. XIV.

100. *Se due rette parallele vengono tagliate comunque de un' altra retta,* 1. *la ſomma degli angoli interni poſti dalla ſteſſa parte è uguale a due retti ;* 2. *gli angoli alterni ſono fra loro uguali ;* 3. *l' angolo eſterno è uguale al ſuo interno oppoſto.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno AB, CD parallele, e ſieno comunque tagliate da EH.

I. Se la ſomma degli angoli BFG, FGD non è uguale a due retti, ſarà ella maggiore, o minore di due retti. Dunque AB, CD non ſono parallele (§ 97). Ma ciò ripugna all' ipoteſi. Sicchè la ſomma degli angoli BFG, FGD è uguale a due retti.

II. La ſomma degli angoli AFG, BFG è uguale a due retti (§ 89), e perciò uguale alla ſomma di BFG, FGD. Onde, toltone il comune BFG, ſarà l' angolo AFG uguale al ſuo alterno FGD (§ 60).

III. L' angolo eſterno EFB è ugule ad AFG (§ 92), e perciò uguale al ſuo interno oppoſto FGD. Sicchè ſe due rette parallele, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

101. Essendo i due angoli BFG, FGD insieme presi uguali a due retti; se sarà BFG retto, anche FGD sarà retto. Quindi se fra due perallele si tira una retta perpendicolare ad una di esse, ella è perpendicolare ancora all'altra.

PROP. XXIV. TEOR. XV.

102. *Se due rette sono parallele ad una terza, sono anche parallele fra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 25. Sieno AB e CD parallele a EF. Si tiri GI con qualunque inclinazione. Sarà l'angolo AGH uguale al suo alterno GIF, e l'angolo esterno GHD uguale al suo interno opposto HIF (§ 100). Dunque gli angoli alterni AGH, GHD sono fra loro eguali (§ 58). E perciò AB, CD sono parallele (§ 98). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXV. TEOR. XVI.

Fig. 26. 103. *Se due rette AB, CD sono eguali e parallele, e vengono congiunte dalla stessa parte dalle rette AD, BC; le rette AD, BC so-*

Digitalizzato da Google

ſono anche uguali e parallele fra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiunga AC. Eſſendo ne' due triangoli BAC, DCA il lato AB = DC, il lato AC comune, e l'angolo BAC uguale al ſuo alterno DCA (§ 100); ſarà la baſe BC = AD, e l'angolo BCA uguale all'angolo CAD (§ 77). Dunque AD, BC ſono eguali e parallele (§ 98). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXVI. PROBL. X.

104. *Data una linea retta, e dato un punto fuori della direzione di eſſa, tirare per lo punto dato un' altra retta parallela alla retta data.*

SOLUZIONE.

Sia BC la retta data, e A il dato punto. Fig. 27.

1. Si prenda in BC ad arbitrio il punto F, e ſi congiunga la retta AF.

2. Si faccia nel punto A della retta FA l'angolo DAF uguale all'angolo AFG (§ 80), e ſi prolunghi DA verſo E. Dico che DE è la parallela cercata.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Essendo gli angoli DAF, AFC alterni per costruzione uguali, sarà DE parallela a BC (§ 98). Sicchè per lo punto A s' è tirata DE parallela a BC. Ch' è ciò, che bisognava fare, e di dimostrare.

CAP. IV.

Della quantità degli angoli de' triangoli, e d' ogni altra figura rettilinea.

DEFINIZIONE.

Fig. 28. 105. Rappresenti ABC qualunque triangolo, e 'l lato AC si prolunghi verso D. Si dirà BCD *Angolo esterno*; e CBA, CAB si diranno i suoi *Angoli interni opposti*.

PROP. XXVII. TEOR. XVII.

106. *Tutti e tre gli angoli di qualunque triangolo sono uguali a due retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappresenti ABC qualunque triangolo. Si prolunghi AC in D, e per lo punto C si

Digitalizzato da Google

C ſi tiri CE parallela ad AB (§ 104). Eſſendo l'angolo A uguale a DCE, e B uguale a BCE (§ 100); ſarà la ſomma di A e B uguale alla ſomma di DCE, ECB, o ſia all'angolo BCD. Onde, aggiuntovi di comune ACB, ſarà la ſomma degli angoli ABC, BCA, CAB uguale alla ſomma di BCD, BCA (§ 59); e perciò eguale a due retti (§ 89). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO. I.

107, S'è dimoſtrato eſſer la ſomma degli angoli A e B uguale a BCD. Dunque ſe in qualunque triangolo ſi prolunga un lato, l'angolo eſterno è uguale alla ſomma de' ſuoi interni oppoſti; e perciò l'angolo eſterno è maggiore di ciaſcuno de' ſuoi interni oppoſti.

COROLLARIO II.

108. In oltre, eſſendo la ſomma di tutt' i tre angoli di qualunque triangolo eguale a due angoli retti, ſarà la ſomma di due di eſſi minore di due retti. E perciò un triangolo non può avere nè più d'un angolo retto, nè più d'angolo ottuſo; onde da un punto non ſi può calare ſu d'una retta più d'una perpendicolare.

CO.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO III.

109. Finalmente ſe la ſomma di due angoli d'un triangolo è uguale alla ſomma di due angoli d'un altro triangolo, ſarà il terzo angolo del primo uguale al terzo angolo del ſecondo.

PROP. XXVIII. TEOR. XVIII.

110. *La ſomma di tutti gli angoli di qualunque figura rettilinea, una co' quattro retti, è uguale a tanti retti, quanti ne' diſegna il doppio del numero de' lati della figura.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 29. Rappreſenti ABCDE qualunque figura rettilinea, e, preſo entro di eſſa ad arbitrio il punto O, ſi congiungano le rette AO, BO, CO, DO, EO. Eſſendo tutti gli angoli de' triangoli AOB, BOC, COD, DOE, EOA, cioè tutti gli angoli della figura ABCDE, una cogli angoli formati nel punto O, eguali a tanti retti, quanti è il doppio del numero de' triangoli, o 'l doppio del numero de' lati della figura; ed eſſendo tutti gli angoli formati nel punto O eguali a quattro retti (§ 90). Dunque tutti gli angoli di qualunque figura, una co' quattro retti, è uguale a tanti retti, quan-

Digitalizzato da Google

quanti ne disegna il doppio del numero de' lati della figura. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

111. Quindi, se dalla somma di tanti retti, quanti ne disegna il doppio del numero de' lati della figura, se ne tolgono quattro retti, la somma de' retti restanti darà la somma di tutti gli angoli della figura. Sicchè, se i lati delle figure saranno 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ec., le somme de' loro angoli uguaglieranno le somme di tanti retti, quanti ne disegnano i numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ec.

PROP. XXIX. TEOR. XIX.

112. *Se da una sola parte si prolungano tutti i lati di qualunque figura rettilinea, la somma di tutti gli angoli esterni sarà uguale a quattro retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, prolungando i lati della figura ABCDE, sarà la somma de' suoi angoli una cogli angoli esterni uguale a tanti retti, quanti ne disegna il doppio del numero de' lati della figura, e perciò egua-

Digitalizzato da Google

le alla ſomma degli angoli della figura una co' quattro retti (§ 110). Onde, toltone la comune ſomma degli angoli della figura, ſarà la ſomma di tutti gli angoli eſterni della figura eguale a quattro retti. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

113. Se la figurà ſarà equiangola; perchè gli angoli eſterni ſaranno in tal caſo eguali; ſarà ogni angolo eſterno tale parte di un retto, quale è quella, che ne diſegna il rotto, il cui numeratore è 4, e 'l denominatore è 'l numero de' lati della figura. Quindi, ſe i numeri de' lati delle figure equiangole ſaranno 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ec., ogni angolo eſterno in tali figure ſarà tale parte d' un retto, quale è quella, che ne diſegnano i rotti $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{10}$, ec.

CAP. V.

Degli angoli de' triangoli conſiderati per riſpetto a' loro lati.

PROP. XXX. TEOR. XX.

114. *Se in un triangolo due lati ſono eguali, gli angoli oppoſti a tali lati ſono anche uguali.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo ABC il lato AB = BC. Si divida l'angolo ABC in due parti uguali colla retta BD (§ 83). E perchè i triangoli ABD, CBD hanno il lato AB = BC, il lato BD comune, e l'angolo ABD uguale a CBD; farà l'angolo BAD uguale all'angolo BCD (§ 77). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare. Fig. 30.

COROLLARIO I.

115. Dunque nel triangolo isoscele ABC gli angoli A e C alla base sono fra loro eguali. Quindi ne segue che, prolungati i lati eguali BA, BC al di là dalla base, saranno eguali anche gli angoli fatti sotto la base, come conseguenti degli angoli A e C. Ne segue ancora che 'l triangolo equilatero è anche equiangolo. Ne segue pure che se l' angolo verticale è retto, gli angoli alla base sono semiretti. Finalmente ne segue che se si prolunga uno de' lati uguali al di là dal vertice, l' angolo esterno, come uguale alla somma degli angoli alla base, sarà doppio di ciascuno di questi angoli.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

116. Essendo il lato AB = BC, il lato BD comune, e l'angolo ABD uguale all'angolo CBD; sarà AD = CD, e saranno gli angoli ADB, CDB eguali (§ 77), e perciò retti (§ 19). Sicchè la retta BD, che divide l'angolo verticale ABC del triangolo isoscele ABC in due parti eguali, divide ancora la base AC in due parti eguali e ad angoli retti.

COROLLARIO III.

117. Se BD dividerà AC in due parti uguali; essendo AB = BC, il lato BD comune, e la base AD = DC; sarà l'angolo ABD uguale all'angolo CBD (§ 78), e saranno gli angoli ADB, CDB uguali, e per conseguenza retti (§ 19). Sicchè la retta BD, che divide nel triangolo isoscele la base AC in due parti eguali, divide l'angolo verticale ABC in due parti eguali, e divide altresì la base AC ad angoli retti.

COROLLARIO IV.

118. Finalmente se BD dividerà la base AC ad angoli retti, saranno eguali gli angoli ABD, CBD (§ 109); e per conseguenza sarà la base AC divisa in due parti uguali (§ 116). PRO

Digitalizzato da Google

PROP. XXXI. TEOR. XXI.

119. *Se in un triangolo ABC due angoli A e C ſono eguali, i lati AB, BC oppoſti a tali angoli ſono anche uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega che ſia AB = BC, ſarà AB maggiore, o minore di BC. Sia, s'è poſſibile, AB maggiore di BC. Si tagli BE = BC, e ſi congiunga CE. Eſſendo del triangolo CAE il lato AE prolungato in B, ſarà l'angolo BEC maggiore di CAE (§ 107), e perciò maggiore di BCA, e molto più maggiore di BCE. Sicchè nel triangolo iſoſcele EBC gli angoli alle baſe EC ſono diſuguali. Ma ciò ripugna (§ 115). Dunque ripugna che ſia AB maggiore di BC. Similmente ſi dimoſtra che AB non è minore di BC. Dunque è AB = BC. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

120. Quindi, ſe un triangolo è equiangolo, è anche equilatero.

PROP. XXXII. TEOR. XXII.

121. *Se in un triangolo un lato è maggio-*

Digitalizzato da Google

re d' un altro, l' angolo opposto al lato maggiore è anche maggiore dell' angolo opposto al lato minore.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 31. Abbia il triangolo ABC il lato AC maggiore di AB. Si tagli AD = AB, e s' unisca BD. Essendo AB = AD, sarà l' angolo ABD uguale all' angolo ADB (§ 114). Ma l' angolo ABC è maggiore di ABD (§ *66*). Dunque ABC è maggiore ancora di ADB. E' in oltre ADB maggiore di C (§ 107). Dunque l' angolo ABC è molto più maggiore di ACB. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXXIII. TEOR. XXIII.

122. *Se in un triangolo un angolo è maggiore d' un altro, il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore ancora del lato opposto all' angolo minore.*

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo ABC l' angolo ABC maggiore di ACB. Se AC non è maggiore di AB, sarà AC o eguale ad AB, o minore di AB. Dunque l' angolo ABC sarà o eguale ad ACB (§ 114), o minore di ACB (§ 121). Ma amendue tali co-

Digitalizzato da Google

cose ripugnano all' ipotesi. Sicchè ripugna che non sia AC maggiore di AB. Per la qual cosa se in un triangolo, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

123. Quindi di tutte le rette, che da un punto sopra d' un' altra retta tirar si possono, la perpendicolare è la minima.

CAP. VI.

De' caratteri da conoscere la perfetta uguaglianza de' triangoli.

PROP. XXXIV. TEOR. XXIV.

124. *Se due triangoli ABC, DEF hanno il lato AB = DE, BC = EF, e l' angolo ABC uguale all' angolo DEF, sono tali triangoli eguali fra loro.* Fig. 16.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè se s' intenda il triangolo ABC posto sul triangolo DEF in modo che caschino il punto B sul punto E, e 'l lato AB sul lato DE, combacerà BC con EF, e AC con DF. Onde i trian-

Digitalizzato da Google

goli ABC, DEF pure combaceranno, e per conſeguenza ſaranno tra loro perfettamente eguali (§ 64). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXV. TEOR. XXV.

125. *Se due triangoli ABC, DEF hanno il lato AB = DE, BC = EF, e la baſe AC = DF, ſono tali triangoli fra loro eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè ſe s' intenda il triangolo ABC poſto ſul triangolo DEF in modo che AC combaci con DF, combacerà AB con DE, e BC con EF (§ 76). Onde i triangoli ABC, DEF combaceranno, e per conſeguenza ſaranno fra loro eguali (§ 64). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXVI. TEOR. XXVI.

126. *Se due triangoli ſono fra loro equiangoli, e hanno due lati oppoſti ad angoli eguali fra loro eguali, ſono tali triangoli pure uguali fra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno ne' triangoli ABC, DEF gli angoli A, B, C reſpettivamente uguali agli an-

Digitalizzato da Google

angoli D, E, F, e ſieno i lati AC, DF oppoſti agli angoli eguali B ed E uguali fra loro. S'intenda il triangolo ABC poſto ſul triangolo DEF in modo che AG combaci con DF. Eſſendo l'angolo A uguale all'angolo D, caſcherà il lato AB ſul lato DE. Caſcherà in oltre 'l punto B ſul punto E; altrimenti BC s'unirebbe con AB o ſotto, o ſopra il punto E, e così l'angolo BCA ſarebbe minore, o maggiore di EFD. Ora ciò è contro l'ipoteſi. Dunque il punto B caſca ſul punto E, e'l lato BC ſul lato EF. Sicchè i triangoli ABC, DEF combaciano, e per conſeguenza ſono eguali (§ *64*). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

127. Combaciando AB con DE, e BC con EF, ſarà AB = DE, e BC = EF. Sicchè i triangoli, che ſono fra loro equiangoli, e che hanno due lati oppoſti ad angoli uguali fra loro eguali, ſono fra loro anche equilateri, e ſono eguali que' lati, che ſono oppoſti ad angoli eguali.

AVVERTIMENTO.

128. Per dimoſtrare la verità di queſto teorema, baſta ſupporre ſolamente i due angoli A e C uguali alli due angoli D e F, e

Digitalizzato da Google

F, e due lati uguali, o che essi sieno i lati AC, DF adjacenti agli angoli eguali, o i lati AB, DE opposti ad angoli eguali, non essendovi necessaria la suppositione dell' uguaglianza degli angoli B ed E. Però noi abbiamo supposto esser i triangoli fra loro equiangoli, perchè s' è già dimostrato che i triangoli, li quali hanno due angoli eguali a due angoli, hanno ancora il terzo angolo eguale al terzo (109); e tanto più s'è fatta da noi una tale suppositione, perchè abbiamo voluto di due casi farne un solo.

PROP. XXXVII. TEOR. XXVII.

129. *Se due triangoli ABC, DEF hanno* $AB = DE$, $BC = EF$, *gli angoli A e D uguali fra loro, e gli angoli C e F della medesima spezie, cioè amendue ottusi, o acuti, sono tali triangoli fra loro eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega esser l'angolo ABC uguale a DEF, sarà quello maggiore, o minore di questo. Sia, s'è possibile, ABC maggiore di DEF. Si faccia in B l'angolo ABG uguale a DEF. Essendo ne' triangoli ABG, DEF l'angolo A uguale a D, ABG uguale a DEF, e per conseguenza AGB uguale a DFE (§ 109), e di più $AB = DE$; sarà $BG = EF$ (§ 127), e perciò eguale a BC.

Dun-

Digitalizzato da Google

Dunque l' angolo BGC è uguale a BCG (§ 114). Ma gli angoli G e F ſono della medeſima ſpezie per l'ipoteſi. Dunque anche i loro eguali BGA, BGC ſono della medeſima ſpezie, cioè amendue ottuſi, o acuti. Ma ciò è impoſſibile. Dunque è impoſſibile che l' angolo ABC ſia maggiore di DEF. Similmente ſi dimoſtra che ABC non è minore di DEF. Sicchè gli angoli ABC, DEF ſono eguali; e per conſeguenza uguali anche BCA, EFD (§ 109). Per la qual coſa, eſſendo i triangoli ABC, DEF fra loro equiangoli, ed eſſendo AB = DE, ſarà il triangolo ABC uguale al triangolo DEF (126). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

130. Avendo i triangoli ABC, DEF i due lati AB, BC reſpettivamente uguali alli due lati DE, EF, e l' angolo ABC uguale all' angolo DEF, ſiccome s' è dimoſtrato; ſarà anche la baſe AC uguale alla baſe DF (§ 77). Sicchè ſe due triangoli hanno due lati reſpettivamente uguali a due lati, e degli angoli non compreſi da tali lati due ſono eguali fra loro, e due altri ſono della medeſima ſpezie; non ſolamente i triangoli ſono eguali fra loro, ma ben anche gli altri angoli ſono reſpettivamente uguali agli altri angoli, e l' altro lato è uguale all' altro lato. CA-

Digitalizzato da Google

CAP. VII.

Delle proprietà fondamentali de' Parallelogrammi, e de' caratteri da conoscere la loro uguaglianza, e l' uguaglianza de' triangoli.

DEFINIZIONE I.

131. Si dirà *Diagonale*, o *Diametro* del parallelogrammo la retta, che unisce i vertici di due de' suoi angoli opposti.

Fig. 32. *Così del parallelogrammo ABCD la retta AC si dirà diagonale, o diametro.*

DEFINIZIONE II.

132. Se nella diagonale AC di qualunque parallelogrammo ABCD si prenda ad arbitrio il punto O, e per tal punto si tirino le rette EF, GH respettivamente parallele alli corrispondenti lati del parallelogrammo; si dividerà egli in quattro parallelogrammi AEOG, EBHO, OHCF, OFDG, de' quali i due AEOG, OHCF si diranno *i Parallelogrammi, che stanno intorno alla diagonale*, e gli altri due EBHO, OFDG si diranno i *Supplementi di quelli, che*

Digitalizzato da Google

che ſtanno intorno alla diagonale .

PROP. XXXVIII. TEOR. XXVIII.

133. *In ogni parallelogrammo ſono uguali fra loro sì i lati oppoſti , che gli angoli oppoſti, e la diagonale il divide in due triangoli eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappreſenti ABCD qualunque parallelogrammo , e in eſſo ſi tiri la diagonale AC . Eſſendo parallela AB a DC , e AD a BC (§ 40); ſarà l'angolo BAC uguale a DCA , e DAC uguale a BCA (§ 100). Onde gli angoli oppoſti BAD , BCD ſono fra loro eguali , ed eguali ſono ancora gli oppoſti ABC , ADC (§ 109) . In oltre eſſendo i triangoli ABC , CDA equiangoli fra loro , e avendo il lato AC comune , ſaranno il triangolo ABC = ADC (§ 126), il lato AB = DC , e AD = BC (§ 127). Sicchè in ogni parallelogrammo ſono uguali fra loro , ec. . Ch'è ciò , che biſognava dimoſtrare . Fig. 26.

COROLLARIO I.

134. Eſſendo i due angoli DAB , ADC uguali a due retti (§ 100); ſe DAB ſarà retto , retto ſarà ancora ADC , e retti per conſeguenza ſaranno i loro oppoſti ABC , BCD .

Digitalizzato da Google

BCD . Dunque se in un parallelogrammo un angolo è retto, tutti gli altri sono retti . E perciò un parallelogrammo, che non ha tutt' i lati eguali è romboide, o rettangolo.

COROLLARIO II.

135. In oltre essendo AB = DC, e BC = AD ; se sarà AD = DC , il parallelogrammo sarà equilatero . Sicchè se due lati, che formano uno degli angoli del parallelogrammo, sono eguali, il parallelogrammo è equilatero , e per conseguenza è o rombo, o quadrato.

COROLLARIO III.

136. Di più se un angolo d' un parallelogrammo è uguale a un angolo d' un altro, gli opposti a tali angoli saranno anche uguali ; e uguali saranno altresì gli restanti angoli , come complementi a due retti di angoli eguali . Sicchè i parallelogrammi, li quali hanno un angolo eguale a un angolo, sono fra loro equiangoli.

COROLLARIO IV.

137. Finalmente tirando nel parallelogrammo ABCD le diagonali AC , BD, avranno i triangoli AOB , COD l' angolo OAB

Digitalizzato da Google

OAB uguale all' angolo OCD, l' angolo OBA uguale all' angolo ODC, e 'l lato $AB = DC$. Dunque sarà $AO = OC$, $BO = OD$ (§127). Sicchè le due diagonali del parallelogrammo si dividono in due parti eguali.

PROP. XXXIX. TEOR. XXIX.

138. *Se un parallelogrammo ABCD è rombo, o quadrato, i parallelogrammi, che sono intorno alla sua diagonale AEOG, OHCF sono anche rombi, o quadrati.* Fig. 32.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo $AB = BC$, sarà l' angolo BCA uguale a BAC (§114); ma per le parallele HO, BA è l' angolo HOC uguale a BAC (§100). Dunque gli angoli HOC, HCO sono anche eguali (§58); onde eguali sono pure CH, HO (§119); e per conseguenza il parallelogrammo OHCF è equilatero (§135). E' in oltre il parallelogrammo OHCF equiangolo con ABCD, perchè hanno l' angolo in C di comune (§136). Sicchè OHCF è rombo, o quadrato. Similmente si dimostra che AEOG è anche rombo, o quadrato. Dunque se un parallelogrammo, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XL. TEOR. XXX.

139. *I ſupplementi EBHO , OFDG de' parallelogrammi , che ſono intorno alla diagonale d' un altro parallelogrammo ABCD , ſono eguali fra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Dividendoſi ogni parallelogrammo dalla ſua diagonale in due triangoli eguali (§133), ſaranno i tre triangoli ABC, AEO, OHC reſpettivamente uguali alli tre ADC, AGO, OFC . Sicchè togliendo da ABC i due AEO , OHC , e da ADC gli altri due AGO, OFC, reſteranno i ſupplementi EBHO, OFDG anche uguali fra loro (§60) . Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XLI. TEOR. XXXI.

Fig. 33. 140. *I parallelogrammi ABCD, ABFE, che hanno la medeſima baſe AB , e che ſono racchiuſi fra l' iſteſſe linee parallele DF , AB , ſono eguali fra loro .*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo ad AB uguale sì DC , che EF (§133), ſarà DC = EF (§58); onde, aggiugnendovi di comune la CE, ſarà DE = CF (§59).

Digitalizzato da Google

(§ 59). E' in oltre AD = BC, e AE = BF (§133). Dunque i triangoli ADE, BCF ſono fra loro equilateri, e per conſeguenza eguali (§125); onde, toltone il comune triangolo COE, reſteranno eguali i trapezj ADCO, OBFE (§60); e perciò, aggiuntovi di comune il triangolo ABO, ſaranno i parallelogrammi ABCD, ABFE anche uguali fra loro (§59). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

141. Potendoſi DF prolungare all' infinito, può anche il parallelogrammo ABFE divenire d'infinita lunghezza. Sicchè due parallelogrammi poſſono eſſere uguali, ancorchè l'uno ſia infinitamente più lungo dell' altro.

COROLLARIO II.

142. Se l'angolo ADE è maggiore di AED, ſarà AE anche maggiore di AD (§122); e perciò BF pure maggiore di BC. Ma EF = DC. Dunque il perimetro del parallelogrammo ABFE è maggiore del perimetro del parallelogrammo ABCD. Per la qual coſa due parallelogrammi poſſono eſſere uguali, ancorchè i loro perimetri ſieno diſuguali. Quindi dall' uguaglianza, o diſuguaglianza de' perimetri non ſi può la

Digitalizzato da Google

loro uguaglianza, o diſuguaglianza argomentare.

PROP. XLII. TEOR. XXXII.

Fig. 34. 143. *I parallelogrammi ABCD, EFGH, che hanno le baſi eguali AB, EF, e che ſono racchiuſi fra le ſteſſe linee parallele DG, AF, ſono eguali fra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette DE, CF. Eſſendo ad AB uguale sì DC, che EF, ſarà DC = EF (§ 58). Sono di più DC, EF parallele. Dunque la rette DE, CF ſono pure parallele (§ 103); e perciò la figura DEFC è un parallelogrammo (§ 40). In oltre al parallelogrammo DEFC è uguale sì il parallelogrammo ABCD per la baſe comune DC, che 'l parallelogrammo EFGH per la baſe comune EF, e per eſſer tutti e tre fra le medeſime parallele DG, AF. Sicchè i parallelogrammi ABCD, EFGH ſono fra loro eguali (§ 58). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XLIII. TEOR. XXXIII.

Fig. 33. 144. *I triangoli ABD, ABE, che hanno la ſteſſa baſe AB, e ſono racchiuſi fra le medeſime parallele DE, AB, ſono uguali fra loro.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino per lo punto B le rette BC, BF reſpettivamente parallele ad AD, AE; e DE ſi prolunghi in F. Saranno i parallelogrammi ABCD, ABFE uguali fra loro (§ 140); e perciò eguali fra loro ſaranno ancora le loro metà, cioè i triangoli ABD, ABE. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

145. Eſſendo il parallelogrammo ABCD doppio del triangolo ABD (§ 133), e 'l triangolo ABD uguale al triangolo ABE; arà il parallelogrammo ABCD il doppio ncora del triangolo ABE. Sicchè ſe un arallelogrammo ABCD, e un triangolo ABE hanno la ſteſſa baſe AB, e ſono racchiuſi fra le medeſime parallele DE, AB, parallelogrammo è 'l doppio del trianolo.

PROP. XLIV. TEOR. XXXIV.

146. *I triangoli ABC, EFH, che hanno baſi uguali AB, EF, e che ſono racchiuſi fra le ſteſſe parallele CH, AF, ſono anche uguali fra loro.* Fig. 34.

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Per lo punto A si tiri AD parallela a BC, e pel punto F si tiri FG parallela a EH (§ 104), e s'uniscano le rette tirate con CH prolungata in D e G. Saranno i parallelogrammi ABCD, EFGH fra loro uguali (§ 143). E perciò eguali saranno ancora le loro metà, cioè i triangoli ABC, EFH. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

147. Essendo il parallelogrammo ABCD il doppio del triangolo ABC, e 'l triangolo ABC uguale al triangolo EFH; sarà il parallelogrammo ABCD il doppio ancora del triangolo EFH. Sicchè se un parallelogrammo ABCD e un triangolo EFH hanno basi eguali AB, EF, e sono compresi fra l'istesse linee parallele DH, AF, il parallelogrammo è 'l doppio del triangolo.

PROP. XLV. TEOR. XXXV.

Fig. 35. 148. *Se due triangoli ABC, ABD sono eguali, hanno la stessa base AB, e sono situati dalla medesima parte per rispetto della base AB; la retta CD, che unisce i vertici C, D di tali triangoli, è parallela alla base AB.*

D

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega che CD sia parallela ad AB, si potrà per lo punto C tirare un' altra retta parallela ad AB . Si tiri , s' è possibile , CO parallela ad AB , e si congiunga BO . Sarà il triangolo AOB uguale al triangolo ACB (§ 144). Ma ACB è per l'ipotesi uguale ad ADB. Dunque la parte AOB è anche uguale al tutto ADB . Sicchè, essendo ciò impossibile (§ *66*), impossibile è pure che CD non sia parallela ad AB. Per la qual cosa se due triangoli, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XLVI. TEOR. XXXVI.

149. *Se due triangoli ABC , DEF sono uguali , hanno le basi eguali AB , DE poste nella stessa retta AE , e sono situati dalla stessa parte per rispetto di AE; la retta CF , che unisce i vertici C e F di tali triangoli , è parallela ad AE .* Fig. 36.

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega essere CF parallela ad AE, si potrà per lo punto C tirare un' altra retta parallela ad AE . Si tiri , s' è possibile, CO parallela ad AE, e s' unisca EO. Sarà il triangolo DOE uguale a ACB.

Digitalizzato da Google

(§ 146). Ma ABC per l'ipotesi è uguale a DEF. Dunque la parte DOE è anche uguale al tutto DFE. Sicchè, essendo ciò impossibile, impossibile è ancora, che CF non sia parallela ad AE. Per la qual cosa se due triangoli, ec.. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

150. Ciò, che s'è dimostrato in queste due ultime proposizioni per riguardo de' triangoli, potrebbe anche dimostrarsi per riguardo de' parallelogrammi: però dal soggiungnere sì fatte proposizioni ci asteniamo, non essendo le loro dimostrazioni punto dissimili dalle addotte.

CAP. VIII.

Del modo di trasformare in parallelogrammo ogni altra figura rettilinea, e del principale uso di sì fatte trasformazioni.

PROP. XLVII. PROBL. XI.

151. *Dato qualunque triangolo, e dato qualsivoglia angolo, formare un parallelogrammo,*

Digitalizzato da Google

mo, che sia eguale al dato triangolo, e che abbia un angolo eguale all' angolo dato.

SOLUZIONE.

Sieno ABC il dato triangolo, e O l'angolo dato. Fig. 37.

1. Si divida AC in due parti eguali nel punto D (§ 86).

2. Per lo punto B si tiri l'indefinita BF parallela ad AC (§ 104).

3. Nel punto D si faccia l'angolo CDE uguale al dato O (§ 80).

4. Finalmente per lo punto C si tiri CF parallela a DE.

Dico che DCFE è 'l parallelogrammo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiunga BD. Essendo AD = DC, farà il triangolo ABD uguale al triangolo DBC (§ 146); onde il triangolo ABC è 'l doppio del triangolo DBC. Ma il parallelogrammo DCFE è anche 'l doppio del triangolo DBC (§ 145). Dunque 'l parallelogrammo DCFE è uguale al triangolo ABC (§ 63). E' in oltre l'angolo CDE per la costruzione uguale all'angolo O. Sicchè s'è formato il parallelogrammo DCFE uguale al triangolo ABC, e coll'angolo CDE eguale al dato angolo O. Ch'è ciò,

Digitalizzato da Google

che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XLVIII. PROBL. XII.

152. *Dato un triangolo, dato un angolo, e data una retta terminata, formare un parallelogrammo, che sia uguale al dato triangolo, che abbia un angolo eguale al dato, e che abbia un lato uguale alla retta data.*

SOLUZIONE.

Sieno ABC il dato triangolo, O il dato angolo, e P la retta data.

1. Si formi il parallelogrammo CDEF uguale al triangolo ABC, e coll' angolo CDE uguale al dato O (§ prec.).

2. Si prolunghi EF in G, finchè sia FG = P, e per lo punto G si tiri l' indefinita HI parallela a CF, la quale vada ad unirsi colla DC prolungata in H.

3. Dal punto H al punto F si tiri HF, e si prolunghi in L, finchè s' unisca colla DE prolungata in L.

4. Per lo punto L si tiri LI parallela a EG, e per conseguenza parallela a DH.

5. Finalmente la retta CF si prolunghi in K.

Dico che FGIK è 'l parallelogrammo cercato.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il parallelogrammo FGIK è uguale al parallelogrammo CDEF (§139), e perciò uguale al triangolo ABC. L'angolo KFG è uguale all'angolo EFC (§92); onde è uguale all'angolo CDE, e per conseguenza eguale all'angolo O. Finalmente il lato FG è uguale per la costruzione alla retta P. Sicchè s'è formato il parallelogrammo FGIK uguale al triangolo ABC, coll'angolo KFG uguale all'angolo O, e col lato FG eguale alla retta P. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XLIX. PROBL. XIII.

153. *Dato qualunque rettilineo, e dato qualsivoglia angolo, formare un parallelogrammo eguale al dato rettilineo, e con un angolo eguale all'angolo dato.*

SOLUZIONE.

Sia ABCD il rettilineo dato, e R il dato angolo. Fig. 38.

1. Si divida il rettilineo in quanti triangoli si può egli dividere ABC, ADC co' rette tirate da un angolo agli angoli opposti.

2. Si formi il parallelogrammo LMNO ugua-

Digitalizzato da Google

uguale al triangolo ABC, e coll'angolo MLO uguale a R (§ 151).

2. Si formi ſopra NO il parallelogrammo NOPQ eguale al triangolo ADC, e coll'angolo NOP uguale pure a R (§ 152).

Dico che LMQP è 'l parallelogrammo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo all' angolo R uguale sì NOP, che MLO, ſarà la ſomma degli angoli NOP, NOL eguale alla ſomma di MLO, LON (§ 59), o ſia alla ſomma di due retti (§ 100). Onde LO, OP formano una retta continuata (§ 93). Similmente, eſſendo l'angolo MNO uguale a MLO, e perciò uguale a NOP, ſarà la ſomma di MNO, QNO uguale alla ſomma di PON, ONQ, o ſia alla ſomma di due retti. Sicchè MN, NQ formano pure una retta continuata. Quindi, eſſendo MN, LO parallele, parallele ſono anche l'intere MQ, LP; ed eſſendo ML, e PQ parallele a NO, parallele ſono pure LM, PQ (§ 102). E perciò LMQP è un parallelogrammo. E' in oltre per la coſtruzione il parallelogrammo LMNO uguale al triangolo ABC, e NOPQ uguale ad ADC. Dunque l'intero parallelogrammo LMQP è uguale all' intero rettilineo ABCD (§ 66). Finalmente l'angolo L è uguale per la coſtruzione a R.

Digitalizzato da Google

a R. Sicchè s'è formato il parallelogrammo LMQP uguale al dato rettilineo, e con un angolo eguale all' angolo dato. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

154. Si noti che se 'l rettilineo costerà di più di quattro lati, e si potrà per conseguenza dividere in più di due triangoli; aggiugnendovi allora al secondo parallelogrammo già formato degli altri successivamente, fatti però collo stesso modo, che s'è fatto il secondo, e uguali respettivamente agli altri triangoli del rettilineo; s'avrà finalmente un parallelogrammo uguale a qualunque dato rettilineo, e con un angolo eguale a qualsivoglia angolo dato.

AVVERTIMENTO II.

155. Se poi vorrà aversi un parallelogrammo eguale a un dato rettilineo, con un angolo eguale a un angolo dato, e con un lato eguale a una retta data; si ritroverà prima il parallelogrammo eguale al rettilineo, e con un angolo eguale al dato, e poscia un tale parallelogrammo si trasformerà in un altro eguale, con un angolo eguale al dato, e con un lato eguale alla retta data, secondo s'è insegnato nel § 152; e così s'avrà il parallelogram-

Digitalizzato da Google

grammo cercato. Del reſto, inſegnate le trasformazioni in parallelogrammi di tutti gli altri rettilinei, venghiamo al loro uſo principale. Perciò ſia la ſeguente

PROP. L PROBL. XIV.

156. *Dati due rettilinei qualunque, ritrovare la loro ſomma, o la loro differenza.*

SOLUZIONE.

Fig. 39. Sieno i rettilinei dati P e Q.

1. Si formi il parallelogrammo ABCD uguale al rettilineo P, e con qualunque angolo ABC (§153).

2. Sopra DC ſi formi il parallelogrammo DCFE, che ſia uguale a Q, e che abbia l' angolo DCF uguale ad ABC, o eguale al conſeguente di ABC, ſecondochè ſi fa egli a deſtra, o a ſiniſtra della retta DC, e ſecondochè eſſer dee uguale alla ſomma, o alla differenza de' rettilinei.

Dico che 'l parallelogrammo ABFE è la ſomma, o la differenza delle figure P e Q.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo l' angolo DCF fatto a deſtra della retta DC uguale all' angolo ABC: è chiaro che i parallelogrammi ABCD, CDEF formano un intero parallelogrammo ABFE

Digitalizzato da Google

ABFE uguale alla ſomma loro, e per conſeguenza eguale alla ſomma de' rettilinei P e Q. In oltre eſſendo l'angolo DCF fatto a ſiniſtra della retta DC il complemento a due retti di ABC, ſarà l'angolo DCF uguale all'angolo DCB. Onde CF cade ſu CB; e per conſeguenza DCFE è parte del parallelogrammo ABCD. Sicchè il parallelogrammo ABFE è uguale all'eccesſo di ABCD ſopra DCFE, o ſia all'eccesſo del rettilineo P ſopra Q. Ch'è quanto ſi doveva fare, e dimoſtrare.

CAP. IX.

Della formazione de' quadrati e de' rettangoli, della loro compoſizione, e della quadratura sì di eſſi, che di ogni altro rettilineo.

DEFINIZIONE I.

157. Un quadrato diceſi *formato ſu d' una data linea*, ſe ella è ſuo lato. Diceſi poi un rettangolo *formato da due date linee*, ſe tali linee formano uno de' ſuoi angoli.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

158. Il quadrato dicesi formato su d' una linea, perchè una linea sola basta per la sua formazione. Il rettangolo poi dicesi formato da due linee, perchè di due linee v' è bisogno per la formazione di esso; delle quali linee una contrassegna la sua lunghezza, e l'altra la sua larghezza.

DEFINIZIONE II.

159. Si dirà *palmo*, *piede*, *canna*, *miglio*, ec. *di lunghezza* una linea lunga un palmo, un piede, una canna, un miglio, ec.. Dirassi poi *palmo*, *piede*, *canna*, *miglio*, ec. *quadrato* un quadrato, che ha per lato un palmo, un piede, una canna, un miglio, ec.

DEFINIZIONE III.

160. Si dirà *Quadrare una superficie* il ritrovare di quanti palmi, o piedi, o canne, o miglia quadrate, ec. ella costa.

PROP. LI. PROBL. XV.

161. *Data una retta terminata, formare sopra di lei un quadrato.*

Digitalizzato da Google

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data. Fig. 40.

1. S' innalzi dal punto A la retta AE perpendicolare ad AB (§ 87), e da essa si tagli AD = AB (§ 73).

2. Per gli punti B e D si tirino BC, DC respettivamente parallele ad AD, AB (§ 104), che s' unisconо in C.

Dico che 'l parallelogrammo ABCD è il quadrato cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo ABCD per la costruzione un parallelogrammo, e avendo il lato AD = AB, e l' angolo in A retto, sarà egli equilatero, e rettangolo (§ 134, 135); onde sarà un quadrato (§ 41). Sicchè sopra la data retta AB s' è formato il quadrato ABCD. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

COROLLARIO.

162. Essendo in ogni quadrato eguali tutt' i lati, e retti tutti gli angoli: facilmente s' intende, che debbono combaciarsi e i quadrati fatti sopra rette eguali, e i quadrati, che sono fra loro eguali. Quindi i quadrati formati sopra rette eguali sono eguali

Digitalizzato da Google

li fra loro, e quelli, che ſono fra loro eguali, ſono anche fatti ſopra rette eguali.

PROP. LII. PROBL. XVI.

163. *Date due rette diſuguali, coſtruire un rettangolo, che ſia da tali rette formato.*

SOLUZIONE.

Fig.41. Sieno le rette date AB e L.

1. Dal punto A s'innalzi AE perpendicolare ad AB (§87), e da eſſa ſi tagli AD = L (§73).

2. Per gli punti B e D ſi tirino BC, DC parallele reſpettivamente ad AD, AB (§104).

Dico che ABCD è'l rettangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Avendo il parallelogrammo ABCD l'angolo in A retto per la coſtruzione, tutt' i ſuoi angoli ſaranno retti (§134). Sono in oltre i lati AB, AD diſuguali. Dunque ABCD è rettangolo (§41), e rettangolo formato da AB e AD, o ſia da AB e L (§157). Dunque s'è coſtruito il rettangolo ABCD formato dalle rette AB e L. Ch'è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

164. Sicchè qualora diremo il rettangolo fatto da AB e L, intenderemo il rettangolo ABCD, la cui lunghezza è AB, e la larghezza è AD = L.

PROP. LIII. TEOR. XXXVII.

165. *Se una retta è divisa in qualunque numero di parti, eguali o disuguali che sieno, e un' altra è indivisa, il rettangolo fatto dall' intera divisa e dalla indivisa è uguale alla somma di tutt' i rettangoli fatti dall' indivisa e da ciascuna parte della divisa.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia la retta AB divisa nelle parti AE, EG, GB, e L sia la retta indivisa. Si formi da AB e da AD = L il rettangolo AC (§ 163), e dalli punti E, e G s' innalzino EF, GH perpendicolari ad AB. Saranno AF, EH, GC rettangoli; onde sì GH, che EF sarà uguale ad AD, ovvero a L. Ma AC è uguale alla somma di AF, EH, GC (§ 66). Dunque, essendo formati AC dalle rette AB, AD, o AB e L, AF dalle rette AE, AD, o AE e L, EH dalle rette EG, EF, o EG e L, GC dalle rette GB, GH, o

Fig. 42.

GB

Digitalizzato da Google

GB e L; ſarà il rettangolo formato dalle rette AB e L uguale alla ſomma di quelli, che ſi formano uno da AE e L, l'altro da EG e L, e l'altro da GB e L. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

166. Se anche L ſarà diviſa in parti, i rettangoli fatti da AE e L, da EG e L, da GB e L ſaranno uguali a tutt' i rettangoli formati da AE, EG, GB e da ciaſcuna parte di L. Sicchè ſe ſaranno AB e L amendue diviſe in qualſivoglia numero di parti, il rettangolo fatto da AB e L ſarà uguale alla ſomma di tutt' i rettangoli fatti da ciaſcuna parte di AB con ciaſcuna di L.

COROLLARIO II.

167. Quindi, ſe le parti di AB e L ſaranno tutte eguali, i detti rettangoli ſaranno quadrati, e quadrati tutti eguali. E perchè il numero de' rettangoli fatti da AE e L, da EG e L, da GB e L uguaglia il numero delle parti di AB, e 'l numero de' quadrati, che compongono ciaſcuno de' detti rettangoli eguaglia il numero delle parti di L. Perciò ſe AB e L ſaranno amendue diviſe in parti eguali, il rettangolo formato da AB e L uguaglierà

Digitalizzato da Google

rà la ſomma di tanti quadrati eguali, che hanno per lati le parti di AB, o rette ad eſſe eguali, quanti ne diſegna il prodotto del numero delle parti di AB multiplicato per quello di L.

COROLLARIO III.

168. Sicchè ſe ſarà anche L = AB, nel qual caſo AC diverrà quadrato; ſarà il quadrato fatto ſu AB uguale alla ſomma di tanti quadrati eguali, che hanno per lati le parti di AB, o rette ad eſſe eguali, quanti ne diſegna il prodotto del numero delle parti di AB multiplicato per ſe ſteſſo.

PROP. LIV. TEOR. XXXVIII.

169. *Se una retta è diviſa in qualunque numero di parti, il quadrato fatto ſu di eſſa è uguale alla ſomma de' rettangoli fatti dalla ſteſſa retta e da ciaſcuna ſua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia la retta AB diviſa nelle parti AC, CD, DB. Si prenda L = AB. Potendoſi conſiderare il quadrato fatto ſu AB, come un rettangolo fatto da AB e L; ſarà egli uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da L, o ſia da AB, e da ciaſcuna parte della ſteſſa AB (§ 165). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare. Fig. 43.

Digitalizzato da Google

PROP. LV. TEOR. XXXIX.

170. *Se una retta ſi divide in qualunque numero di parti, il rettangolo fatto dall' intera retta e da una delle ſue parti è uguale al quadrato fatto ſulla ſteſſa parte, una colla ſomma de' rettangoli fatti dalla detta parte; e da ciaſcuna delle altre.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia AB diviſa nelle parti AC, CD, DB. Si concepiſca la parte BD eſſere l' indiviſa. Sarà il rettangolo fatto da AB e BD uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da AC e BD, da CD e BD, da DB e BD (§ 165). Ma l' ultimo di queſti rettangoli è 'l quadrato fatto ſu BD. Dunque il rettangolo fatto dall' intera AB e dalla ſua parte BD è uguale al quadrato fatto ſu BD, una co' rettangoli fatti da AC e BD, e da CD e BD. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LVI. TEOR. XL.

171. *Se una retta è diviſa in qualunque numero di parti, il quadrato fatto ſull' intera retta è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſulle*

Digitalizzato da Google

ſulle parti , una colla ſomma de' rettangoli fatti da ciaſcuna parte e dalle altre , che la ſeguono , due volte preſa .

DIMOSTRAZIONE.

Sia AB diviſa nelle parti AC , CD , DB . Sarà il quadrato fatto ſu AB uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da AB e AC , da AB e CD , da AB e DB (§ 169) . Ma il primo di tali rettangoli è uguale al quadrato fatto ſu AC , una co' rettangoli fatti da AC e CD , da AC e DB ; il ſecondo è uguale al quadrato fatto ſu CD , una co' rettangoli fatti da CD e AC , da CD e DB ; il terzo è uguale al quadrato fatto ſu DB , una co' rettangoli fatti da DB e AC , da DB e CD (§ 170) . Dunque il quadrato fatto ſu AB è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AC , CD , DB , una colla ſomma de' rettangoli fatti da AC e CD , da AC e DB , da CD e DB , due volte preſa . Ch' è ciò , che biſognava dimoſtrare ,

COROLLARIO.

172. Sicchè ſe una retta è diviſa in due ſole parti , il quadrato fatto ſull' intera retta è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſulle parti , una col doppio del rettangolo fatto da amendue le parti . E ſe

Digitalizzato da Google

la retta sarà divisa in due parti eguali; essendo i quadrati delle parti allora eguali, e 'l doppio del rettangolo fatto dalle parti il doppio del quadrato fatto su una di esse; sarà il quadrato fatto sull' intera retta quadruplo del quadrato fatto sulla sua metà.

PROP. LVII. TEOR. XLI.

173. *Se una retta è divisa in un punto qualunque, la somma de' quadrati fatti uno sull' intera retta, e l'altro su una delle sue porzioni è uguale al doppio del rettangolo fatto dall' intera retta e dalla stessa porzione, una col quadrato fatto sull' altra porzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 44. Sia AB divisa in qualunque punto C. Essendo il quadrato fatto su AB uguale alla somma de' quadrati fatti su AC, CB col doppio del rettangolo fatto da AC e CB (§ prec.); sarà la somma de' quadrati fatti su AB, BC uguale al quadrato fatto su AC, una col doppio del rettangolo fatto da AC e CB, e una col doppio del quadrato fatto su CB. Ma la somma del rettangolo fatto da AC e CB, e del quadrato fatto su CB, due volte presa, è uguale al doppio del rettangolo fatto da AB e BC (§170). Sicchè la somma de'

Digitalizzato da Google

de' quadrati fatti ſu AB e BC è uguale al doppio del rettangolo fatto da AB e BC, una col quadrato fatto ſu AC. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LVIII. TEOR. XLII.

174. *Se una retta qualunque AB è diviſa in qualſivoglia punto C, e ad eſſa è aggiunta la porzione BD = BC; ſarà il quadrato fatto ſu AD uguale al quadruplo del rettangolo fatto da AB e BC, una col quadrato fatto ſu AC.* Fig.45.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè il quadrato fatto ſu AD è uguale a' quadrati fatti ſu AB e BD, o ſu AB e BC, una col doppio del rettangolo fatto da AB e BD, o da AB e BC (§ 172). Ma i quadrati fatti ſu AB e BC ſono eguali al doppio del rettangolo fatto da AB e BC, una col quadrato fatto ſu AC (§prec.). Dunque il quadrato fatto ſu AD è uguale al quadruplo del rettangolo fatto da AB e BC, una col quadrato fatto ſu AC. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LIX. TEOR. XLIII.

175. *Se una retta qualunque AB è divi-* Fig.46.

Digitalizzato da Google

ſa in due parti eguali in C, e in due parti diſuguali in D; ſarà il rettangolo fatto dalle parti diſuguali AD, DB, una col quadrato fatto ſulla parte di mezzo CD uguale al quadrato fatto ſu BC, metà di AB.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo il rettangolo fatto da AD e DB uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da AC e DB, e da CD e DB (§ 165), o da CB BD, e da CD e DB; aggiuntovi di comune il quadrato fatto ſu CD, ſarà il rettangolo fatto da AD e DB, una col quadrato fatto ſu CD uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da CB e BD, e da CD e DB, una col quadrato fatto ſu CD. Ma il rettangolo fatto da CD, e DB, una col quadrato fatto ſu CD è uguale al rettangolo fatto da BC e CD (§170). Dunque il rettangolo fatto da AD e DB, una col quadrato fatto ſu CD è uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da CB e BD, e da BC e CD, ovvero al quadrato fatto ſu CB (§169). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

176. Quindi, eſſendo il rettangolo fatto da AD e DB, una col quadrato fatto ſopra CD uguale al quadrato fatto ſu CB, ſarà il ſolo rettangolo fatto da AD e DB ugua-

le

Digitalizzato da Google

le alla differenza de' quadrati fatti ſu CD, e CB. Ma AD è la ſomma di AC e CD, o di BC e CD, e BD è la differenza di CD da CB. Sicchè 'l rettangolo fatto dalla ſomma e dalla differenza di due rette è uguale alla differenza de' quadrati fatti ſulle ſteſſe rette.

PROP. LX. TEOR. XLIV.

177. *Se una retta qualunque AB è diviſa in due parti eguali in C, e in due parti diſuguali in D, la ſomma de' quadrati fatti ſulle parti diſuguali AD, DB è 'l doppio della ſomma de' quadrati fatti uno ſu BC, metà di AB, e l' altro ſu la parte di mezzo CD.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il doppio de' quadrati fatti ſu BC e CD è uguale al quadruplo del rettangolo fatto da BC e CD, una col doppio del quadrato fatto ſu DB (§173). Ma il quadruplo del rettangolo fatto da BC e CD inſieme col quadrato fatto ſu DB, una volta preſo, è uguale al quadrato fatto ſulla ſomma di BC e CD, o ſu AD (§174). Dunque 'l doppio de' quadrati fatti ſu BC e CD è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AD e DB. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

178. Essendo AC la metà della somma di AD, DB, e CD la metà della differenza di BD da DA: è chiaro esser la somma de' quadrati fatti su due rette il doppio de' quadrati fatti uno sulla metà della loro somma, e l'altro sulla metà della loro differenza.

PROP. LXI. TEOR. XLV.

Fig. 47. 179. *Se una retta qualunque AB è divisa in due parti eguali in C, e ad essa è aggiunta qualsivoglia porzione BD; il rettangolo fatto da AD e DB, una col quadrato fatto su CB è uguale al quadrato fatto su CD.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AC = CB, sarà AD la somma di BC e CD, e BD la differenza di BC da CD. Onde 'l rettangolo fatto da AD e DB è uguale alla differenza de' quadrati fatti su CB e CD (§176). Sicchè, aggiuntovi di comune il quadrato fatto su CB, sarà il rettangolo fatto da AD e DB, una col quadrato fatto su CB eguale al quadrato fatto su CD (§59). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXII. TEOR. XLVI.

180. *Se una retta qualunquè AB è divisa pure in due parti eguali in C, e ad essa è aggiunta qualsivoglia porzione BD; la somma de' quadrati formati su AD e DB è 'l doppio della somma de' quadrati formati su CD e CB.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il doppio de' quadrati formati su DC e CB è uguale al quadruplo del rettangolo fatto da DC e CB, una col doppio del quadrato fatto su BD (§173). Ma il quadruplo del rettangolo fatto da DC e CB insieme col quadrato fatto su BD, una volta preso, è uguale al quadrato fatto sulla somma di DC e CB, o su AD (§ 174). Dunque 'l doppio de' quadrati fatti su DC e CB è uguale alla somma de' quadrati fatti su AD e DB. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LXIII. PROBL. XVII.

181. *Ritrovare la quadratura di qualunque quadrato.*

SOLUZIONE.

1. Si misuri un lato del quadrato.
2. Il numero de' pollici, o de' piedi, o de'

Digitalizzato da Google

o de' palmi, ec. di lunghezza, che contiene il lato misurato, si multiplichi per se stesso.

Il prodotto darà la quadratura cercata in pollici, o piedi, o palmi, ec. quadrati.

La ragione di ciò è chiara per lo § 168.

ESEMPJ.

I. Sia il lato d'un quadrato 15 palmi, sarà la quadratura $15 \times 15 = 225$ palmi quadrati. II. sia il lato d'un altro quadrato canne 20. 7, la sua quadratura sarà canne quadrate $20.7 \times 20.7 = 428.49$.

PROP. LXIV. PROBL. XVIII.

182. *Ritrovare la quadratura di qualunque rettangolo.*

SOLUZIONE.

1. Si misurino due lati del rettangolo, che formano uno de' suoi angoli.

2. Il numero de' pollici, o de' piedi, o de' palmi, ec. di lunghezza, che contiene uno de' lati misurati, si multiplichi pel numero de' pollici, o de' piedi, o de' palmi, ec., che contiene l'altro lato misurato.

Il prodotto darà la quadratura cercata in

Digitalizzato da Google

in pollici, o piedi, o palmi, ec. quadrati.
La ragione è manifesta per lo § 167.

ESEMPJ.

I. Sia la lunghezza d'un rettangolo 18 palmi, e la larghezza 8, la sua quadratura sarà $18 \times 8 = 144$ palmi quadrati.
II. Sia la lunghezza d'un altro rettangolo canne 21. 7, e la larghezza 9. 3, la sua quadratura sarà canne quadrate $21.7 \times 9.3 = 201.81$.

PROP. LXV. PROBL. XIX.

183. *Ritrovare la quadratura di qualunque parallelogrammo obbliquangolo ABCD, e di qualunque triangolo ABD:* Fig. 48.

Soluzione.

1. Dall'angolo D si cali DE perpendicolare ad AB.
2. Si misuri sì la base AB, che la perpendicolare DE.
3. Il numero de' pollici, o de' piedi, o de' palmi, ec., che contiene la base AB, si multiplichi pel numero de' pollici, o de' piedi, o de' palmi, ec., che contiene la perpendicolare DE.

Il prodotto darà la quadratura del parallelogrammo ABCD, e la metà di tal prodot-

Digitalizzato da Google

dotto darà la quadratura del triangolo ABD in pollici, o piedi, o palmi, ec. quadrati.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè calando CF perpendicolare ad AB prolungata in F, sarà il parallelogrammo ABCD uguale al rettangolo DEFC (§ 140). Ma DEFC si ha multiplicando DC per DE. Dunque ABCD s'aurà ancora multiplicando DC, o AB per DE; e per conseguenza il triangolo ABD, come metà di ABCD, s'aurà prendendo la metà dello stesso prodotto. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

184. Avendosi il triangolo ABD dalla metà del prodotto, che nasce multiplicando AB per DE, s'aurà ancora multiplicando la metà della base AB per la perpendicolare DE, o l'intera base AB per la metà della perpendicolare DE.

ESEMPIO.

Sia la base AB di palmi 120, e la perpendicolare DE di palmi 26; sarà la quadratura del parallelogrammo ABCD di palmi quadrati $120 \times 26 = 3120$, e quel-

Digitalizzato da Google

quella del triangolo ABD di palmi quadrati 120 × 13 = 1560.

PROP. LXVI. PROBL. XX.

185. *Ritrovare la quadratura di qualunque altro rettilineo.*

SOLUZIONE.

1. Si risolva il rettilineo in quanti triangoli si può egli risolvere con rette tirate da un angolo agli angoli opposti.
2. Si ritrovi la quadratura di ciascuno di tali triangoli.

La somma di sì fatte quadrature sarà la quadratura cercata.

AVVERTIMENTO I.

186. Se 'l rettilineo sarà il trapezio ABCD, che ha i lati opposti AB, DC paralleli; dividendosi egli in due triangoli ABC, ADC di eguali altezza, s'aurà la sua quadratura multiplicando la metà della somma di AB e DC per la perpendicolare CE. Fig. 49.

AVVERTIMENTO II.

187. Se poi un rettilineo, come AB CDEF ha il punto O dentro di esso tale, che Fig. 50.

Digitalizzato da Google

che dalle rette tirate da tal punto a tutti i ſuoi angoli viene e' diviſo in triangoli, li quali hanno le perpendicolari calate dal punto O ſulle loro baſi tutte eguali; ſi può allora la quadratura di tal rettilineo avere ancora multiplicando il ſuo perimetro per la metà d' una delle ſuddette perpendicolari.

CAP. X.

Della quantità de' Quadrati formati ſopra i lati de' triangoli.

PROP. LXVII. TEOR. XLVII.

188. *In ogni triangolo rettangolo il quadrato fatto ſu l' ipotenuſa è uguale alla ſomma de' quadrati formati ſu gli cateti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 51. Sia ABC triangolo rettangolo in B. Sopra i lati AB, BC, CA ſi facciano i quadrati AH, CF, AD (§161). Per B ſi tiri BL parallela a CD, e s' uniſcano le rette BD, AG. Eſſendo retto sì l'angolo ABC, che GBF, ſarà la ſomma di ABC, CBF uguale a due retti; onde AB, BF formano

Digitalizzato da Google

no una retta continuata (§ 93); e perciò, per le perallele BF, CG, l'intera AF è parallela a CG. Similmente si dimostra esser l'intera CH parallela ad AI. Inoltre avendo i triangoli DCB, ACG il lato DC = AC, CB = CG, e l'angolo DCB, somma del retto DCA e di ACB, eguale all'angolo ACG, ch'è somma anche del retto GCB e di ACB, saranno i triangoli DCB, ACG tra loro eguali (§ 124). Ma il rettangolo LDCK è'l doppio del triangolo DCB, con cui ha la stessa base DC, ed è tra le parallele BL, DC, e'l quadrato CGFB è'l doppio del triangolo ACG, co' cui ha la stessa base CG, ed è tra le parallele AF, CG (§ 145). Dunque il rettangolo LDCK è uguale al quadrato CGFB (§ 63). Similmente si dimostra essere il rettangolo ELKA uguale al quadrato ABHI. Sicchè la somma de' due rettangoli AELK, LKCD, o sia il quadrato fatto sull'ipotenusa AC è uguale alla somma de' quadrati AH, CF fatti su i cateti AB, BC. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

189. Rappresenti ABC qualunque triangolo. Dal punto B si tiri BD, che divida la base AC in due parti eguali; e dallo stesso punto B si cali BE perpendicolare ad AC. Sarà la somma de' quadrati fatti Fig. 52.

Digitalizzato da Google

ſu AB, BC eguale alla ſomma de'quadrati fatti ſu AE, EC, una col doppio del quadrato fatto ſu BE. Ma la ſomma de' quadrati fatti ſu AE, EC è 'l doppio de' quadrati fatti ſu CD, DE (§ 177). Dunque la ſomma de' quadrati fatti ſu i lati AB, BC è 'l doppio della ſomma de' quadrati fatti ſu CD, DE, EB, e per conſeguenza è il doppio della ſomma de' quadrati fatti ſu CD e DB.

COROLLARIO II.

Fig. 26. 190. Quindi nel parallelogrammo ABCD ſarà la ſomma de' quadrati fatti ſu i lati BA, AD il doppio de' quadrati fatti ſu BO, OA; e perciò i quadrati fatti ſu tutt' i lati AB, BC, CD, DA ſaranno il quadruplo de' quadrati fatti ſu BO, OA, e per conſeguenza eguali alla ſomma de' quadrati fatti ſulle diagonali AC, BD (§ 172).

PROP. LXVIII. TEOR. XLVIII.

191. *In ogni triangolo ottuſangolo il quadrato fatto ſul lato oppoſto all' angolo ottuſo è maggiore della ſomma de' quadrati fatti ſu gli altri due lati, di quant' è 'l doppio del rettangolo fatto da uno di queſti lati, e dalla porzione, che l' aggiugne la perpendicolare calatavi dal vertice dell' angolo oppoſto.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Sia ABC triangolo ottuſangolo in B, e dal punto A ſi cali AD perpendicolare a CB prolungata in D. Sarà il quadrato fatto ſu AC uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AD, DC (§ 188). Ma il quadrato fatto ſu DC è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu DB, BC, una col doppio del rettangolo fatto da CB e BD (§ 172). Dunque il quadrato fatto ſu AC è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AD, DB, BC, ovvero alli quadrati fatti ſu AB, BC, una col doppio del rettangolo fatto da CB e BD. Per la qual coſa il quadrato fatto ſu AC è maggiore della ſola ſomma de' quadrati fatti ſu AB, BC di quant' è 'l doppio del rettangolo fatto da CB e BD. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare. Fig. 53.

COROLLARIO.

192. Quindi ſe dal quadrato AC di ſi ſottrae la ſomma de' quadrati fatti ſu AB, e BC, il reſiduo ſarà il doppio del rettangolo fatto da CB e BD. Onde dividendo un tale reſiduo pel doppio di BC, s' avrà BD; e ſottraendo il quadrato di BD dal quadrato di AB, s' avrà il quadrato di AD; la cui radice darà AD. Per la qual coſa, dati i lati del triangolo ABC, ſi determi-

Digitalizzato da Google

na la perpendicolare AD; e, determinata la perpendicolare AD, si può determinare ancora la quadratura del triangolo ABC (§ 184).

PROP. LXIX. TEOR. XLIX.

193. *In ogni triangolo il quadrato fatto sul lato opposto a un angolo acuto è minore della somma de' quadrati fatti su i lati, che formano l'angolo acuto, di quant'è il doppio del rettangolo fatto da uno di questi lati, e dalla porzione adiacente all'angolo acuto, che taglia dal medesimo lato la perpendicolare calatavi dal vertice dell'angolo opposto.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 53. e 54. Sia ABC triangolo, che ha l'angolo acuto in C. Dal punto A si cali AD perpendicolare a BC. Sarà la somma de' quadrati fatti su BC e CD uguale al quadrato fatto su BD, una col doppio del rettangolo fatto da BC, e CD (§ 173). Aggiuntovi di comune il quadrato fatto su AD, sarà la somma de' quadrati fatti su BC, CD, DA, ovvero su BC, CA (§188) uguale alla somma de' quadrati fatti su BD, DA, o su AB (§ 188), una col doppio del rettangolo fatto da BC e CD. Per la qual cosa il solo quadrato fatto su AB è minore della somma de' quadrati fatti su BC, CA di quanto è il doppio del rettangolo fatto da BC e CD. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

194. Quindi se dalla somma de' quadrati fatti su AC, CB si sottrae il quadrato fatto su AB, il residuo sarà uguale al doppio del rettangolo fatto da BC e CD. Onde dividendo tal residuo pel doppio di BC, s'avrà DC; e sottraendo il quadrato di DC dal quadrato di AC, s'avrà il quadrato di AD; la cui radice darà la perpendicolare AD. Sicchè, dati i lati del triangolo ABC, si può determinare la perpendicolare AD, e per conseguenza si può determinare la quadratura del triangolo ABC (§ 184).

PROP. LXX. TEOR. L.

195. *L'angolo, che formano due lati d'un triangolo è retto, ottuso, o acuto, secondochè la somma de' quadrati fatti su i lati, che formano l'istesso angolo è uguale, minore, o maggiore del quadrato fatto sul terzo lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Esprima ABC qualsivoglia triangolo. Dal punto B s'innalzi BD perpendicolare a BC, e uguale ad AB; e si congiunga DC. Essendo AB = BD, sarà la somma de' quadrati fatti su AB, BC eguale alla somma de' quadrati fatti su DB, BC, e perciò eguale al quadrato fatto su DC (§188). Onde, secon- Fig. 55.

Digitalizzato da Google

dochè la ſomma de' quadrati fatti ſu AB, BC ſarà eguale, minore, o maggiore del quadrato fatto ſu AC, anche 'l quadrato fatto ſu DC ſarà eguale, minore, o maggiore del quadrato fatto ſu AC; e per conſeguenza DC ſarà eguale, minore, o maggiore di AC. In oltre eſſendo ne' triangoli DBC, ABC il lato DB = BA, e 'l lato BC comune, ſarà l' angolo DBC uguale, minore, o maggiore dell' angolo ABC, ſecondochè DC ſarà eguale, minore, o maggiore di AC (§ 78, 82). Ma DBC è retto. Dunque ABC ſarà retto, ottuſo, o *acuto*. Sicchè l' angolo, che formano due lati, ec. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

196. Se con un filo diviſo in 12 parti eguali ſi farà il triangolo ABC, faccendo sì che AC contenghi 5 di tali parti, AB ne contenghi 3, e BC 4, ſarà l' angolo ABC retto. Imperciocchè il quadrato di AC, cioè 25, è uguale alla ſomma de' quadrati 9 e 16 fatti ſu AB e BC. Se poi il filo ſarà diviſo in 24 parti eguali, s' avrà l' angolo retto, ſe AC ſarà 10, AB 6, e BC 8. Ecco come può farſi *in pratica* un angolo retto ſenz' ajuto d' iſtrumento alcuno.

CA-

Digitalizzato da Google

CAP. XI.

Si sciolgono alcuni Problemi, che alla teorica de' Quadrati, e de' Rettangoli appartengono.

PROP. LXXI. PROBL. XXI.

197. *Dati più quadrati, ritrovarne un altro, che sia eguale alla loro somma.*

SOLUZIONE.

Sieno A, B, C i lati de' quadrati dati Fig. 56

1. Si faccia l'angolo retto LMN, e, tagliate MD = A, ME = B, s'unisca DE.

2. Si taglino MG = DE, MF = C, e s'unisca FG.

Dico che 'l quadrato fatto su FG è 'l quadrato cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il quadrato fatto su FG uguaglia la somma de' quadrati fatti su FM, MG (§ 188), o su C e DE, o su C, EM, MD, o per conseguenza su C, B, A. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXII. PROBL. XXII.

198. *Dati due quadrati diſuguali, ritrovarne uno, che ſia uguale alla loro differenza.*

SOLUZIONE.

Fig. 57. Sieno A e B i lati de' quadrati dati. Si faccia l'angolo retto LMN; e, tagliate MP = B, PO = A, ſi deſcriva col centro O, e coll' intervallo PO il cerchio OQ, che interſeca colla periferia LM in Q. Dico eſſere MQ il lato del quadrato cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunta PQ, il quadrato fatto ſu MQ eguaglia la differenza de' quadrati fatti ſu QP, PM, o ſu PO, PM, o ſu A e B. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LXXIII. PBOBL. XXIII.

199. *Data una retta, e dato un quadrato, dividere la retta data in un punto tale, che 'l rettangolo fatto dalle ſue parti ſia eguale al dato quadrato: è neceſſario però che 'l lato del dato quadrato non ecceda la metà della retta data.*

SOLUZIONE.

Fig. 58. Sia AB la retta data, e L il lato del dato quadrato.

1. Si

Digitalizzato da Google

1. Si divida AB in due parti eguali in O, e col centro O, e coll' intervallo OA si descriva il mezzo cerchio ADB.

2. Dal punto B s' innalzi BE pendicolare ad AB, e uguale a L.

3. Pel punto E si tiri ED parallela ad AB, che interseca la periferia nel punto D.

4. Finalmente dal punto D si cali DG perpendicolare a AB.

Dico essere C il punto cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunta OD, il rettangolo fatto da AC e CB è uguale alla differenza de' quadrati fatti su OC, OB (§176), o su OC, OD; e perciò è uguale al quadrato fatto su DC, o su BE, o su L. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LXXIV. PROBL. XXIV.

200. *Data una retta qualunque AB, prolungarla in modo in D, che 'l rettangolo fatto da AD e DB sia eguale al quadrato fatto su AB.* Fig. 59.

Soluzione.

1. Si divida AB in due parti eguali in O (§ 86).

2. Dal

Digitalizzato da Google

2. Dal punto B s' innalzi BC perpendicolare ad AB, e uguale a OB, e si congiunga AC.

3. Si prolunghi AB in D, finchè sia OD = AC.

Dico essere AD la retta cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il rettangolo fatto da AD e DB, una col quadrato di OB è uguale al quadrato di OD (§ 179), o di AC, ovvero alli quadrati di AB e BC (188). Sicchè, togliendo i quadrati eguali fatti su OB, BC, sarà il rettangolo fatto da AD e DB eguale al quadrato fatto sopra AB. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LXXV. PROBL. XXV.

201. *Data una retta, dividerla in un punto in modo, che 'l rettangolo fatto dall' intera retta, e da una sua parte sia eguale al quadrato fatto sull' altra parte.*

SOLUZIONE.

Fig. 60. Sia AB la retta data.

1. Si prolunghi AB in D in modo, che sia il rettangolo fatto da AD e DB uguale al quadrato fatto su AB (§ prec.).

2. Da AB si tali BC = BD (§ 73).

DI-

Digitalizzato da Google

Dico che 'l rettangolo fatto da BA e AC è uguale al quadrato fatto ſu BC.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ſomma de' rettangoli fatti da AB e BC, e da BA e AC è uguale al quadrato fatto ſu AB (§ 169), e perciò è uguale al rettangolo fatto da AD e DB. Ma il rettangolo fatto da AD e DB è uguale al rettangolo fatto da AB e BD, o da AB e BC, una col quadrato fatto ſu BD, o ſu BC (§ 170). Dunque la ſomma de' rettangoli fatti da AB e BC, e da BA e AC è uguale al rettangolo fatto da AB e BC, una col quadrato fatto ſu BC. Onde, toltone il comune rettangolo fatto da AB e BC, ſarà il rettangolo fatto da BA e AC uguale al quadrato fatto ſu BC (§ 60). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LXXVI. PROBL. XXVI.

202. *Dato qualunque rettilineo, formare un quadrato, che gli ſia uguale.*

SOLUZIONE.

Sia P il rettilineo dato. Fig. 61.

1. Si faccia il rettangolo ABCD uguale al rettilineo P (§ 153). Se verrà AB = BC,

Digitalizzato da Google

BC, il rettangolo AC sarà un quadrato, e sarà sciolto il probl.; ma se verranno AB e BC disuguali; allora

2. Si prolunghi AB in E, finchè sia BE = BC; e, divisa AE in O in due parti eguali (§ 86), si descriva col centro O, e coll' intervallo OA il mezzo cerchio AFE.

3. Finalmente si prolunghi CB in F, finchè incontri la periferia in F.

Dico che 'l quadrato fatto su BF è 'l quadrato cercato

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il rettangolo fatto da AB e BE è uguale all' eccesso del quadrato di OE, o di OF sopra il quadrato di OB (§ 176); e perciò è uguale al quadrato fatto su BF. Ma il rettangolo fatto da AB e BE uguaglia il rettangolo fatto da AB e BC, o sia il rettangolo AC, e per conseguenza il rettilineo P. Sicchè il quadrato fatto su BF è uguale al rettilineo P. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

Fine del primo Libro.

Digitalizzato da Google

LIBRO II.

Della teorica del Cerchio.

CAP. I.

Del ſito, che ha il centro nel cerchio, e del modo di ritrovarlo.

LEMMA.

203. *Una retta, che congiugne due punti qualunque della periferia d' un cerchio, cade interamente dentro del cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

Si prendano ad arbitrio i punti A e B nella periferia del cerchio ABD, e s'uniſcano colla retta AB. Dal centro O ſi tirino i raggi OA, OB, e dallo ſteſſo centro O ſi tiri OC a qualunque punto C di AB. Eſſendo AO = OB, ſarà l'angolo OBA uguale a OAB (§ 114). Ma l'angolo OCB è maggiore di OAC (§ 107). Dunque OCB è anche maggiore di OBC; e perciò OB è mag- Fig. 62.

Digitalizzato da Google

ta EO, e prolungandola in F, farà retto sì l'angolo FEA, che l'angolo FEC. Onde l'angolo FEA è uguale all'angolo FEC (§ *68*), cioè la parte è uguale al tutto. Ma ciò è impossibile (§ *66*). Dunque è impossibile potersi due rette, tirate in un cerchio, intersecare in un punto diverso dal centro amendue in due parti eguali.

PROP. II. TEOR. II.

206. Se da un punto esistente dentro di un cerchio si possono alla periferia tirare più di due rette eguali, un tale punto è il centro del cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. *65*. Sia il punto O esistente dentro del cerchio ACG, da cui si possano tirare tre rette OA, OB, OC eguali fra loro. S'uniscano le rette AB, BC, e si dividano in due parti eguali in D e F; indi per gli punti D e O si tiri DE, e per gli punti F e O si tiri FG. Avendo i triangoli ADO, BDO il lato AD = DB, il lato DO comune, e la base AO = OB, saranno gli angoli ODA, ODB eguali (§ 77), e per conseguenza retti (§ 19). Sicchè DE divide AB in due parti eguali, e ad angoli retti; e perciò in DE è il centro (204). Similmente si dimostra il centro esse-

Digitalizzato da Google

essere ancora in FG. Ma il centro è un *solo* punto. Dunque è il punto O, comune alle due DE, FG. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. III. PROBL. I.

207. *Dato un cerchio, ritrovare il suo centro.*

SOLUZIONE.

Sia ACD il cerchio dato. Fig. 63.

Si prendano nella periferia due punti C e D ad arbitrio, e s' unischino colla retta CD.

2. Si divida CD in due parti eguali in E, e per E si tiri AB perpendicolare a CD.

3. Si divida AB in due parti eguali in O.

Dico che 'l punto O è 'l centro cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Dividendo AB la retta CD in due parti eguali, e ad angoli retti, sarà il centro in AB (§ 204); e per conseguenza sarà *il* punto O, in cui AB è divisa in due parti eguali. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

Digitalizzato da Google

PROP. IV. PROBL. II.

208. *Dato un arco qualunque di cerchio, ritrovare il centro d' un tale cerchio.*

SOLUZIONE.

Fig. *66.* Sia ABC l'arco dato.

1. Si prendano nell' arco ad arbitrio tre punti A, B, C, e si congiungano le rette AB, BC.

2. Divise AB, BC in due parti eguali in D e E, s' innalzino da D, e E le rette DF, EG perpendicolari ad AB, BC, e si prolunghino finattantochè s' intersechino in O.

Dico che O è il centro cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè dividendo DF, EG le rette AB, BC in due parti eguali, e ad angoli retti, sarà il centro del cerchio sì in DF, che in EG (§ 204). Ma il centro è un punto solo. Dunque è il punto O, comune a DF, EG. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

209. Quindi prendendo per centro il punto O, e

Digitalizzato da Google

O, e coll' intervallo d' una delle rette, che poſſono tirarſi dal punto O a uno de' punti A, B, C, deſcrivendo un cerchio, ſi compirà quello, della cui periferia l' arco ABC è porzione.

COROLLARIO II.

210. In oltre è chiaro il modo di deſcrivere un cerchio, che può colla ſua periferia paſſare per tre punti dati A, B, C, che non ſono in una linea retta tutti e tre ſituati.

CAP. II.

Dell' Ordine, che ſerbano nella loro grandezza le rette tirate alla periferia di qualunque cerchio.

DEFINIZIONE.

211. Si dirà *Diſtanza dal centro* d' una retta, che uniſce due punti della periferia d' un cerchio, la perpendicolare calata ſu di lei dal centro.

COROLLARIO.

212. Quindi delle rette, tirate in uno ſteſſo cerchio, quelle ſi diranno egualmente

Digitalizzato da Google

distanti dal centro, su cui cadranno dal centro perpendicolari eguali; quella poi si dirà più vicina, o più distante dal centro di un' altra, su cui cadrà dal centro una perpendicolare minore, o maggiore della perpendicolare, che dallo stesso centro caderà su l' altra.

PROP. V. TEOR. III.

Fig. 67. 213. *Dal punto A, preso ad arbitrio dentro di qualsivoglia cerchio BDF, e diverso dal centro O, si tirino alla periferia quante rette si vogliono AB, AD, AE, ec., delle quali la retta AB, che passa pel centro, si prolunghi in C. Dico* 1. *che di tutte queste rette la massima è AB;* 2. *che la minima è AC;* 3. *che delle altre la AD, la quale è più vicina alla massima, è maggiore della AE, che n' è più lontana;* 4. *finalmente che dal medesimo punto A non si possono tirare alla periferia più di due rette tra loro eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano i raggi OD, OE, e, fatto nel punto O l' angolo AOF uguale all' angolo AOE, si congiunga AF.

I. Essendo OB = OD; aggiungasi di comune AO, sarà AB uguale alla somma di DO, OA, e perciò maggiore di AD (§ 74). Similmente si dimostra essere AB mag-

Digitalizzato da Google

maggiore d' ogni altra retta tirata dal punto A alla periferia . Dunque di tutte le rette, che dal punto A si possono tirare alla periferia, la massima è AB.

II. Essendo la somma de' lati OA, AE del triangolo OAE maggiore del terzo OE (§ 74), e perciò maggiore di OC; toltane la comune OA, sarà AC minore di AE. Similmente si dimostra essere AE minore di ogni altra retta tirata dal punto A alla periferia . Sicchè di tutte le rette, che dal punto A si possono tirare alla periferia, la minima è AC.

III. Avendo i triangoli DOA, EOA il lato DO = EO, il lato OA comune, e l'angolo DOA màggiore di EOA, sarà la base AD maggiore di AE (§ 81). Onde la retta AD, ch' è più vicina alla massima, è maggiore di AE, che n'è più lontana.

IV. Finalmente avendo i triangoli EOA, FOA il lato EO = FO, il lato OA comune, e l'angolo EOA uguale a FOA, sarà la base AE = AF (§ 77). Dunque dal punto A si sono tirate alla periferia due rette AE, AF eguali. Or se dal punto A si tira un' altra retta alla periferia, ella sarà o più vicina alla massima, o più lontana da lei di AE; e perciò sarà maggiore, o minore di AE. Sicchè dal punto A più di due rette eguali non si possono tirare alla periferia. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

Digitalizzato da Google

PROP. VI. TEOR. IV.

Fig. 68. 214. *Dal punto A, ad arbitrio preſo fuori di qualſivoglia cerchio CDF, ſi tirino alla ſua periferia quante rette ſi vogliono AB, AD, AE, ec., delle quali la retta AB paſſi pel centro O. Dico* 1. *che di tutte queſte rette, che giungono alla parte concava della periferia, la maſſima è AB;* 2. *che delle altre la AD, la quale è più vicina alla maſſima, è maggiore di AE, che n'è più lontana;* 3. *che delle rette, che giungono alla parte conveſſa della periferia, la minima è AC;* 4. *che delle altre la AH, ch'è più vicina alla minima, è minore di AG, che n'è più diſtante;* 5. *finalmente che dal punto A non ſi poſſono tirare più di due rette eguali sì alla parte concava della periferia, che alla parte conveſſa.*

DIMOSTRAZIONE.

S'uniſcano i raggi OD, OE, OG, OH; e, fatti nel centro O gli angoli AOF, AOI reſpettivamente uguali agli angoli AOD, AOH, ſi congiungano le rette AF, AI.

I. Eſſendo OB = OD; aggiungaſi di comune AO, ſarà AB uguale alla ſomma di AO, OD, e perciò maggiore di AD (§ 74). Similmente ſi dimoſtra eſſere AB maggiore d'ogni altra retta, che dal punto A può tirarſi alla parte concava della periferia. Dunque di tutte queſte rette AB è la maſſima. II.

Digitalizzato da Google

II. Avendo i triangoli AOD, AOE il lato OD = OE, il lato AO comune, e l'angolo AOD maggiore di AOE, sarà la base AD maggiore di AE (§ 81). Sicchè AD, ch'è più vicina alla massima, è maggiore di AE, che n'è più lontana.

III. In oltre nel triangolo AHO il lato AO è minore della somma di AH, HO (§ 74); onde, toltene le rette eguali OC, OH, resterà AC minore di AH. Similmente si dimostra che AC è minore d'ogni altra retta, che dal punto A può tirarsi alla parte convessa della periferia. E perciò di tutte queste rette AC è la minima.

IV. Di più avendo i triangoli AOH, AOG il lato OH = OG, il lato AO comune, e l'angolo AOH minore di AOG, sarà la base AH minore di AG (§ 81). Sicchè AH, ch'è più vicina alla minima, è minore di AG, che n'è più distante.

V. Avendo finalmente i triangoli AOF, AOD il lato OF = OD, il lato AO comune, e l'angolo AOF uguale ad AOD, sarà la base AF = AD (§ 77). Similmente si dimostra AI = AH. Dunque dal punto A si possono tirare due rette tra loro eguali alla parte concava della periferia, e due ancora tra loro eguali alla parte convessa. Or se se ne vorrà tirare un' altra, ella caderà nella parte concava sotto, o sopra di AD, e nella convessa di quà, o di là di AH; e perciò sarà maggiore o minore di

Digitalizzato da Google

AD, *e* minore, o maggiore di AH. Per la qual cosa dal punto A non si possono tirare più di due rette eguali sì alla parte concava della periferia, che alla parte convessa. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

PROP. VII. TEOR. V.

Fig.69. 215. *In qualunque cerchio ABCD si tirino due rette AB, CD, e dal centro O si calino ad esse le perpendicolari OE, OF. Dico* 1. *che se è AB = CD, anche OE = OF;* 2. *che se OE = OF, pure AB = CD.*

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano i raggi OA, OD.

I. Essendo per l'ipotesi AB = CD, saranno eguali ancora le loro metà AE, DF. E' la somma de' quadrati fatti su AE, EO eguale al quadrato di AO, e la somma de' quadrati fatti su DF, FO uguale al quadrato di DO (§ 188). Dunque, essendo uguali i quadrati fatti su AO, DO (§162), anche la somma de' quadrati fatti su AE, EO è uguale alla somma de' quadrati fatti su DF, FO; onde, tolti i quadrati eguali di AE, DF, saranno eguali i quadrati di OE, OF; e perciò eguali anche le rette OE, OF (§ 162).

II. Essendo OE = OF per l'ipotesi, sarà il quadrato di OE uguale al quadrato di OF

Digitalizzato da Google

OF (§ 162). Ma la ſomma de' quadrati fatti ſu AE, EO è uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu DF, FO. Dunque, tolti i quadrati eguali di OE, OF, eguali ſono anche i quadrati di AE, DF; onde eguali ſono le rette AE, DF (§ 162), ed eguali per conſeguenza i loro doppj AB, CD. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. VIII. TEOR. VI.

216. *Se in qualunque cerchio AFD ſi tirano quante rette ſi vogliono AB, CD, EF, ec., delle quali AB paſſi pel centro O, e CD ſia al centro più vicina di EF. Dico* 1. *che la maſſima è AB;* 2. *che CD è maggiore di EF.* Fig. 70.

DIMOSTRAZIONE.

I. Eſſendo, tirati i raggi OC, OD, la retta OA = OC, e OB = OD, ſarà AB uguale alla ſomma di CO, OD, e perciò maggiore di CD (§ 74). Similmente ſi dimoſtra AB maggiore d'ogni altra retta, che nel cerchio può tirarſi. Onde AB è la maſſima di tutte.

II. Dal centro O ſi calino OI, OK reſpettivamente perpendicolari a CD, EF. Eſſendo per l'ipoteſi OK maggiore di OI; ſi tagli OL = OI, e per L ſi tiri GH parallela a EF, e ſi congiungano le rette OG,

Digitalizzato da Google

OG, OE, OF, OH. Avendo i triangoli GOH, EOF il lato OG = OE, OH = OF, e l'angolo GOH maggiore di EOF (§ *66*), ſarà GH maggiore ancora di EF (§ 81). Ma è GH = CD, perchè OL = OI. Sicchè anche CD è maggiore di EF. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP. III.

Del modo come sì due cerchi, che un cerchio, e una retta s' interſecano, e ſi toccano.

DEFINIZIONE I.

217. Si dicono due cerchi *Segarſi*, ſe una porzione dell' uno cade dentro dell' altro.

DEFINIZIONE II.

218. Si dicono poi due cerchi *Toccarſi*, ſe la periferia dell' uno giugne alla periferia dell'altro, ſenza interſecarſi. Ed in iſpezie ſi dicono *Toccarſi di dentro*, ſe l' uno cade interamente dentro dell' altro, e ſi dicono *Toccarſi di fuori*, ſe l' uno cade interamente fuori dell' altro.

DE-

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE III.

219. Una retta esistente fuori del cerchio, la quale giugne fino alla periferia, e prolungata cade interamente fuori del cerchio, dicesi *Tangente* del cerchio nel punto della periferia, in cui giugne. Una retta poi, che giugne alla periferia, e prolungata cade dentro del cerchio, dicesi *Secante* del cerchio ne' punti, in cui incontra la periferia.

PROP. IX. TEOR. VII.

220. *Due cerchi, che si segano, non possono avere un medesimo centro.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ciò si niega, abbiano i cerchi ABCD, AECF, che s'intersecano, per centro comune il punto O. Si tiri dal punto O al punto A d'intersecazione delle periferie la retta OA, e dall'istesso punto O si tiri OB. Sarà a OA èguale sì OE, che OB. (§45). Dunque è OE = OB (§58), cioè la parte uguale al tutto. Ma ciò è impossibile (§66). Sicchè è impossibile d'avere due cerchi, che si segano, lo stesso centro. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare. Fig. 71.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. X. TEOR. VIII.

221. *Due cerchi, che ſi toccano di dentro, non poſſono avere l' iſteſſo centro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 72. Se ciò ſi niega, abbiano i cerchi ABC, ADE, che ſi toccano di dentro, per centro comune il punto O. Si tiri dal punto O al contatto A la retta OA, e dall' iſteſſo punto O ſi tiri OB. Sarà a OA uguale sì OD, che OB (§ 45). Dunque OD = OB (§ 58), cioè la parte uguale al tutto. Ma ciò è impoſſibile (§ *66*). Sicchè è impoſſibile d' avere due cerchi, che ſi toccano di dentro lo ſteſſo centro. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XI. TEOR. IX.

222. *Un cerchio non s' interſeca con un altro cerchio in più di due punti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 73. Se ciò ſi niega, s' interſechino i cerchi ABCD, ABFDE in tre punti A, B, D. Si ritrovi il centro O del cerchio ABCD, e ſi tirino i raggi OA, OB, OD; ſaranno OA, OB, OD eguali tra loro; e perciò

Digitalizzato da Google

ciò il punto O sarà centro ancora del cerchio ABFDE (§ 206). Sicchè i cerchi, che s' interfecano hanno un medefimo centro. Ma ciò è impoffibile (§ 220). Dunque è impoffibile d' interfecarfi due cerchi in più di due punti. Ch' è ciò, che bifognava dimoftrare.

PROP. XII. TEOR. X.

223. *Se due cerchi fi toccano di dentro, la retta, che congiugne i loro centri, prolungata cade nel luogo del contatto.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ciò fi niega, fi tocchino i cerchi ABC, AEF di dentro in A, e fia O centro del cerchio AEF, e P centro di ABC, tal che la retta PO, che li congiugne, non cafchi in A, ma interfechi una periferia in E e G, e l'altra in B e D. Si congiungano le rette AO, AP. Effendo P centro del cerchio ABC, farà PD = PA, e perciò minore della fomma di PO, OA (§ 74), o fia di PO, OG, ovvero di PG, cioè il tutto minore della parte. Ma ciò è impoffibile (§ *66*). Dunque è impoffibile non cadere la retta, che congiugne i centri nel luogo del contatto. Ch' è ciò, che bifognava dimoftrare. Fig. 74.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XIII. TEOR. XI.

224. *Se due cerchi ſi toccano di fuori, la retta, che congiugne i loro centri paſſa pel luogo del contatto.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 75. Se ciò ſi niega, ſi tocchino i cerchi ABC, ADE di fuori in A, e ſieno O, e P i centri, tal che la retta OP, che li congiugne, non paſſi per A, ma interſechi le periferie altrove in B e D. Si congiungano le rette AO, AP. Eſſendo O e P centri de' cerchi ABC, ADE, ſarà OB = OA, e PD = AP; onde la ſomma di OB, DP ſarà uguale alla ſomma di OA, AP, e perciò maggiore di OP (§ 74). Il che è impoſſibile. Sicchè è impoſſibile non paſſare la retta, che congiugne i centri pel luogo del contatto. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XIV. TEOR. XII.

225. *Se due cerchi ſi toccano di dentro, non ſi toccano che nel ſolo punto, ove cade la retta, che uniſce i loro centri.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Si tocchino i cerchi ABC, ABD in A, e sia P centro del maggiore, e O del minore. La retta PO prolungata caderà nel luogo del contatto A (§ 223). Or se questi cerchi si toccano in qualch' altro punto diverso da A; sia B un tale punto, e si congiungano le rette OB, PB. Essendo OB = OA, sarà la somma di PO, OB uguale ad AP, e perciò uguale a PB. Sicchè la somma di due lati d' un triangolo uguaglia il terzo lato. Ma ciò è impossibile. Dunque è impossibile potersi toccare i cerchi in altro punto diverso da A. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare. Fig.76.

PROP. XV. TEOR. XIII.

226. Se due cerchi si toccano di fuori, non si toccano che nel solo punto, per cui passa la retta, che congiugne i loro centri.

DIMOSTRAZIONE.

Si tocchino i cerchi ABC, ABD in A. S' uniscano i loro centri O e P colla retta OP. E' chiaro che questa retta passa pel luogo del contatto A (§ 224). Or se i cerchi si toccano in qualch' altro punto diverso da A; sia un tale punto B, e si congiungano Fig.77.

Digitalizzato da Google

gano le rette OB , PB . Essendo OB = OA , e PB = PA , sarà la somma di OB e BP uguale a OP . Ma ciò è impossibile . Dunque è impossibile potersi toccare i cerchi in altro punto diverso da A . Ch' è ciò , che bisognava dimostrare .

PROP. XVI. TEOR. XIV.

Fig.78. 227. *Se per l' estremo A del diametro AB di qualsivoglia cerchio AGB si tira la retta CD perpendicolare all' istesso diametro AB , sarà CD tangente del cerchio nel punto A ; e dal contatto A non si potrà tirare un' altra linea retta , che passi tra la periferia , e la tangente .*

DIMOSTRAZIONE.

I. S'intenda dal centro O tirata a qualsivoglia punto E della retta CD , diverso dal punto A , la retta OE . Essendo l'angolo OAE retto , sarà l' angolo OEA minore del retto (§ 108) ; onde sarà OE maggiore di OA (§ 122) , e perciò maggiore dell' eguale OG . Ma OG giugne dal centro alla periferia . Dunque OE giugne dal centro fuori della periferia . Sicchè il punto E è fuori del cerchio . Per la qual cosa la retta CD giugne alla periferia in A , e ogni suo punto cade fuori del cerchio . Sicchè CD è tangente del cerchio in A (§219) .

II.

Digitalizzato da Google

II. Si tiri dal punto A del contatto, s'è possibile, la retta AF, che passi tra la periferia AG, e la tangente AC. Essendo l'angolo OAF minore del retto OAC, la linea OA non sarà perpendicolare ad AF. Si cali dunque OF perpendicolare a AF; sarà OF minore di OA (§ 122), e perciò minore dell'eguale OG; cioè il tutto minore della parte. Ma ciò è impossibile. Sicchè è impossibile poter tirare dal punto A del contatto un'altra retta, che passi tra la periferia, e la tangente. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

228. Sicchè ogni retta tirata dal punto A tra i lati dell'angolo BAC è secante del cerchio, ancorchè faccia ella un angolo con AC di qualsivoglia picciolezza. E perciò a un punto della periferia non si può tirare, che una sola tangente.

COROLLARIO II.

229. Potendosi in OB prolungata all'infinito concepire presi infiniti punti diversi, si possono ancora concepire descritti infiniti cerchi co' raggi disuguali, che si tocchino con AGB di dentro in A. Or perchè di tutti sì fatti infiniti cerchi la CD dee essere tangente comune, perciò non saranno essi toccati dalla CD, che in A.

Digitalizzato da Google

Ma non potendosi tra loro nè pure toccare, che in A. Dunque si dee intendere che le periferie di tutt'i detti infiniti cerchi debbono passare tra la tangente AC, e la periferia AG. Per la qual cosa ancorchè per lo punto A non vi possa passare nè pure una retta, che caschi tra la tangente AC, e tra la periferia AG, vi possono però passare infinite linee circolari, che sieno frapposte tra la detta tangente AC, e la periferia AG.

COROLLARIO III.

230. Quindi se nel punto A v'è qualch' angolo formato dalla tangente AC, e dalla periferia AG, un tale angolo non potrà dividersi da una linea retta, ma potrà esser diviso in un infinito numero di parti da infinite linee circolari.

AVVERTIMENTO.

231. Non tutt' i Geometri convengono che vi sia nel punto del contatto un angolo formato dalla periferia, e dalla tangente, detto comunemente *Angolo del contatto*. Il P. Clavio Gesuita vuole che vi sia, e a ragione; perchè il contatto, secondo s'è dimostrato, si fa in un solo punto, o si tocchino due cerchi, o si tocchino un cerchio, e una retta. Però non si sa intendere, come tra

Digitalizzato da Google

tra i lati d'un tale angolo non poſſa paſſarvi una ſola retta, e poſſono bensì paſſarvi infinite linee circolari, ſenza miſchiarſi l'una coll'altra. Il Pelletario niega che vi ſia il detto angolo, e a tal fine ſuppone il contatto farſi in una retta d'infinita picciolezza; e così convenendo in una retta la tangente colla periferia nel contatto, ogni altra retta tirata dal contatto tra 'l diametro, e la tangente dee cadere dentro del cerchio; ſimilmente convenendo le periferie di due cerchi anche in una retta nel contatto, ne ſegue che dopo quelle rette, nelle quali ſi toccano e tra loro, e colla tangente infinite periferie, debbono ſepararſi, e fraporſi tra la tangente, e la periferia minima, ſenza dividere angolo alcuno nel contatto. Però una tale ſuppoſizione ripugna agli teoremi evidentemente dimoſtrati per riguardo del contatto. Il dire con Clavio, e con altri, che ſono del ſuo avviſo, che l'angolo del contatto, e l'angolo rettilineo ſieno eterogenei; e quindi derivare il non eſſere l'angolo del contatto diviſibile da una retta, ma diviſibile da infinite periferie in infinite parti, è un voler ſorprendere ſenza iſtruire. Il dire poi con Pelletario, e con altri del ſuo avviſo, che 'l cerchio ſia un poligono compoſto da infinite rette d'infinita picciolezza, è fare una ſuppoſizione, quanto comoda per gli Geo-

Digitalizzato da Google

metri, altrettanto lontana dalla realtà; ed è un voler mutare ancora la natura al cerchio: perchè se ciò fosse, non avrebbe più il cerchio tutt' i punti della sua periferia egualmente distanti dal centro. Sicchè delle due addotte opinioni la prima, sebbene uniforme alle verità dimostrate, soffre una difficoltà, che co'lumi, che abbiamo, non si può sciorre; la seconda poi ripugna alla verità dimostrate, ed è fondata su d' una supposizione non vera. Del resto se i Geometri, che verranno dopo noi, saranno più fortunati in iscoprire, onde deriva la soluzione della difficoltà, che s' oppone alla prima delle riferite opinioni, vedranno la verità di sì fatta opinione senza oppozione alcuna, e la vedranno tale, quale i Geometri sogliono vedere tutte le altre verità geometriche.

PROP. XVII. TEOR. XV.

232. *Se una retta CD è tangente del cerchio AGB, e dal centro O al punto del contatto A si tira un' altra retta OA, questa OA è perpendicolare alla tangente CD.*

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega che OA sia perpendicolare a CD, si potrà dal punto O calare un' altra OE perpendicolare a CD. Onde, essen-

Digitalizzato da Google

ſendo l' angolo OEA retto, e OAE per conſeguenza minore del retto (§ 108), ſarà OE minore di OA (§ 122), e perciò minore dell' uguale OG; cioè il tutto minore della parte. Ma ciò è impoſſibile. Dunque è impoſſibile che OA non ſia perpendicolare a CD. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XVIII. TEOR. XVI.

233. *Se una retta CD è tangente del cerchio AGB, e dal punto del contatto A s' innalza un' altra retta AB perpendicolare alla tangente, queſta retta AB paſſa pel centro.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega che AB paſſi pel centro; tirando dal punto A al centro un' altra retta, ſarà anch' ella perpendicolare a CD (§ 232). Onde dal punto A ſi potrebbero innalzare due rette diverſe perpendicolari a CD. Ma ciò è impoſſibile (§ 108). Sicchè è impoſſibile che AB non paſſi pel centro. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XIX. PROBL. III.

234. *Dato un punto fuori d' un cerchio,*

Digitalizzato da Google

tirare dal dato punto una retta, la quale sia tangente del cerchio.

SOLUZIONE.

Fig. 79. Sieno A il punto dato, e BCE il dato cerchio.

1. Si ritrovi il centro O, e da lei al punto A si tiri la retta OA, che interseca la periferia in C.

2. Preso per centro il punto O, e coll' intervallo OA si descriva il cerchio AD, e dal punto C s' innalzi CD perpendicolare ad AO, la quale interseca la periferia AD in D.

3. Dal punto D al punto O si tiri DO, che interseca la periferia CBE in B.

4. Finalmente dal punto A al punto B si tiri la retta AB.

Dico che la retta AB è la tangente cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo ne' due triangoli ABO, DCO il lato AO = OD, OB = OC, e l' angolo AOB = DOC, sarà l' angolo ABO = DCO (§ 77). Ma l' angolo DCO è retto per la costruzione. Dunque anche ABO è retto. E perciò AB è tangente del cerchio nel punto B (§ 227). Sicchè dal dato punto A s' è tirata la retta AB tangente del

Digitalizzato da Google

del cerchio BCE. Ch'è ciò, che bisogna-va fare, e dimostrare.

AVVERTIMENTO.

235. Se occorre di dover tirare la tangente per un punto della periferia, ella si ha facilmente, tirando per l'estremo del raggio cadente in tal punto la perpendicolare al medesimo raggio.

CAP. IV.

Degli angoli formati e alli centri, e alle circonferenze de' cerchi.

DEFINIZIONE I.

236. Dicesi *Angolo al centro* quello, il cui vertice è nel centro del cerchio; dicesi poi *Angolo alla circonferenza* quello, il cui vertice è in un punto della circonferenza.

DEFINIZIONE II.

237. Dicesi *Angolo nella porzione* quello, il cui vertice è in un punto dell'arco della porzione, e i cui lati passano per gli estremi della cor-

Digitalizzato da Google

da. Dicesi poi *Angolo della porzione* l' angolo mistilineo formato dall'arco della porzione, e dalla corda.

DEFINIZIONE III.

238. Si dicono *Porzioni simili di cerchi* quelle, nelle quali si contengono angoli eguali.

PROP. XX. TEOR. XVII.

Fig.80., 81. 239. *L'angolo AOB al centro di qualunque cerchio ACB è il doppio dell'angolo alla circonferenza ACB, qualora appoggiano amendue al medesimo arco AB.*

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto C al centro O si tiri OC, e si prolunghi in D; caderà ella o tra i lati dell'angolo AOB, o fuori. Nel caso

Fig.80. I. Essendo de' triangoli isosceli AOG, BOC il lato CO prolungato in D, sarà l'angolo esterno AOD doppio di ACO, e BOD doppio di BCO (§ 115). Onde la somma di AOD, DOB, o l'intero AOB è 'l doppio della somma di ACO, OCB, o dell'intero ACB. Nel caso

Fig.81. II. Essendo de' triangoli isosceli BOC, AOC il lato CO prolungato in D, sarà tutto l'angolo BOD doppio di tutto l'angolo

Digitalizzato da Google

golo BCO, e la parte del primo AOD anche doppia della parte dell'altro ACO (§ 115). Sicchè sarà ancora il restante del primo AOB il doppio del restante del secondo ACB (§ 70). Per la qual cosa l'angolo al centro, ec. . Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXI. TEOR. XVIII.

240. *Gli angoli contenuti nella medesima porzione di cerchio sono eguali tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i due angoli ABD, ACD fatti nella medesima porzione del cerchio ABCD, o ch' ella sia maggiore del mezzo cerchio, o che sia minore del mezzo cerchio. Si tirino in tutt' i casi i raggi OA, OD. Nel caso Fig. 82, 83, e 84.

I. Essendo sì l'angolo ABD, che ACD metà dell'angolo AOD (§ 239), sarà l'angolo ABD uguale all'angolo ACD (§ 63). Nel caso Fig. 82.

II., e III. Si tiri un raggio qualunque OE, e si congiungano le rette BE, CE. Essendo sì ABE, che ACE metà di AOE (§ 239), sarà l'angolo ABE = ACE (§ 63). Similmente, essendo sì EBD, che ECD metà di EOD, sarà l'angolo EBD = ECD. Dunque la somma de' due angoli ABE, Fig. 83, e 84.

EBD,

Digitalizzato da Google

EBD, o l'intero ABD è uguale alla fomma degli angoli ACE, ECD, o all'intero angolo ACD. Sicchè gli angoli, ec.. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXII. TEOR. XIX.

241. *De' quadrilateri, che si descrivono ne' cerchi, gli angoli opposti sono eguali a due retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 85. Sia il quadrilatero ABCD descritto nel cerchio ABCD. Si tirono in esso le diagonali AC, BD. Essendo l'angolo DAC = DBC, e CAB = CDB (§ prec.), sarà la fomma di DAC, CAB, o l'intero DAB uguale alla fomma di CBD, CDB. Onde aggiuntovi di comune DCB, sarà la fomma degli angoli opposti DAB, DCB uguale alla fomma de' tre CBD, BDC, DCB, e per conseguenza uguale a due retti (§ 106). Similmente si dimostra esser uguale a due retti la fomma degli opposti ABC, ADC. Sicchè de' quadrilateri, ec.. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXIII. TEOR. XX.

242. *L'angolo fatto nel mezzo cerchio è retto, l'angolo fatto in una porzione maggiore del mez-*

Digitalizzato da Google

zo cerchio è acuto, e l' angolo fatto in una porzione minore del mezzo cerchio è ottuſo.

DIMOSTRAZIONE.

Rappreſenti ABCE qualunque cerchio. Si tiri in eſſo il diametro AC, e ſi faccia nel mezzo cerchio ABC l' angolo ABC, e nella porzione minore BDC l' angolo BDC. Si tiri in oltre ad arbitrio il raggio OE, e ſi congiunga BE. Fig. 86.

I. L' angolo ABC è metà della ſomma di AOE, EOC (§ 239), cioè metà di due retti (§ 89). Sicchè l' angolo nel mezzo cerchio ABC è retto.

II. Eſſendo nel triangolo ABC l' angolo ABC retto, ſarà l' angolo BAC minore del retto (§ 108). Dunque l' angolo BAC fatto nella porzione BAEC maggiore del mezzo cerchio è acuto.

III. Eſſendo ABDC un quadrilatero deſcritto nel cerchio, ſaranno i due angoli oppoſti BAC, BDC uguali a due retti (§ 241). Ma BAC è acuto. Dunque BDC è ottuſo. Sicchè l' angolo BDC fatto nella porzione minore del mezzo cerchio è ottuſo. Per la qual coſa l' angolo fatto, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

243. Quindi poſto il vertice dell' angolo

Digitalizzato da Google

lo d' una ſquadra in un punto della periferia d' un mezzo cerchio, e adattato un lato di eſſa all' eſtremo del diametro, che termina da una parte il mezzo cerchio, ſarà ella eſatta, ſe l' altro ſuo lato paſſerà per l' altr' eſtremo del detto diametro; altrimenti ſarà ineſatta; poichè l' eſattezza della ſquadra conſiſte nel formar ella eſattamente l' angolo retto.

COROLLARIO II.

Fig.87. 244. In oltre ſe, preſa l' ipotenuſa AC del triangolo rettangolo ABC per diametro, ſi deſcriverà un cerchio, paſſerà la ſua periferia pel vertice B; altrimenti ſe tagliaſſe il lato AB in qualunque altro punto D, congiunta la retta CD, farebbe l' angolo ADC, come fatto nel mezzo cerchio, retto, e perciò uguale ad ABC. Sicchè nel triangolo BCD vi ſarebbero due angoli retti. Il che è impoſſibile. Sicchè la periferia dee paſſare pel punto B.

AVVERTIMENTO.

Fig.88. 245. Si noti che con facilità ſi può da qualſivoglia punto C della retta AB innalzare la perpendicolare ſu di AB a queſto modo. Si prenda il punto O ad arbitrio ſopra di AB, e ſi congiunga OC. Poſcia, preſo per centro O, e coll' interval-

Digitalizzato da Google

vallo OC si descriva il cerchio DCE, che interseca AB in D. In oltre per D si tiri il diametro DE. Finalmente si congiunga EC. Sarà EC, per l'angolo retto ECD, la perpendicolare cercata. Se poi si vorrà dal punto E calare la perpendicolare ad AB, si procederà con facilità a quest'altro modo. Si prenda in AB ad arbitrio il punto D, e congiunta ED, si divida ella in due parti eguali in O. Poscia, preso per centro il punto O, e coll'intervallo OD si descriva il cerchio DCE, che interseca AB in C. Finalmente si congiunga EC. Sarà EC pure, per l'angolo retto ECD, la perpendicolare cercata.

PROP. XXIV. TEOR. XXI.

246. Se una retta CB *è tangente del cerchio AGD, e dal punto del contatto A si tira una secante qualunque AD, gli angoli fatti dalla tangente, e dalla secante sono eguali a quelli, che si costituiscono nelle porzioni alterne del cerchio; cioè l'angolo BAD è eguale all'angolo AGD fatto nella porzione AGD, e CAD è uguale all'angolo AFD fatto nella porzione AFD.* Fig. 89.

DIMOSTRAZIONE.

Pel contatto A si tiri il diametro AE, e si congiunga DE. Essendo l'angolo ADE

Digitalizzato da Google

retto (§ 242), saranno i due DEA, DAE eguali a un retto (§ 106), e perciò eguali a BAE (§ 232). Sicchè, toltone il comune DAE, sarà l' angolo BAD eguale a DEA, e per conseguenza uguale a DGA (§ 240). In oltre del quadrilatero AFDG l' angolo AFD, come supplemento a due retti di AGD (§ 241) è uguale a CAD, ch' è supplemento a due retti di BAD (§ 89). Per la qual cosa se una retta, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXV. PROBL. IV.

247. *Data una retta terminata, e dato un angolo rettilineo, costruire una porzione di cerchio, la quale abbia per sua corda la retta data, e abbia gli angoli contenuti in essa eguali all' angolo dato.*

SOLUZIONE.

Sia AD la retta data, e sia O il dato angolo.

1. Si faccia nel punto A della retta AD l' angolo DAB uguale all' angolo O (§ 80).

2. Dagli estremi di AD s' innalzino AE, DE respettivamente perpendicolari a AB, AD (§ 87), e si prolunghino, finchè s' uniscano in E.

3. Presa AE per diametro, si descriva il

Digitalizzato da Google

il cerchio AGD, il quale, essendo l'angolo ADE retto, passa pel punto D (§ 244).
Dico che AGD è la porzione cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AE diametro del cerchio AGD, e l'angolo EAB retto, sarà AB tangente nel punto A (§ 227). E' in oltre AD secante dell'istesso cerchio. Dunque gli angoli, che si contengono nella porzione AGD sono eguali all'angolo BAD (§ 246), e perciò eguali all'angolo O. Sicchè s'è costruita la porzione AGD, che ha per sua corda AD, e che ha gli angoli contenuti in lei eguali all'angolo dato O. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XXVI. PROBL. V.

248. *Dato un cerchio, e dato un angolo rettilineo, tagliare dal cerchio dato una porzione, che contenga angoli eguali all'angolo dato.*

SOLUZIONE.

Sia AGD il cerchio dato, e sia O il dato angolo.

Si tiri prima AB tangente del cerchio in qualunque punto A; e poscia si faccia in A l'an-

Digitalizzato da Google

l' angolo BAD eguale a O (§ 80). Dico essere AGD la porzione cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB tangente in A, e AD secante, saranno gli angoli, che si contengono nella porzione AGD eguali a BAD (§ 246), e perciò eguali all' angolo O. Dunque s' è tagliata la porzione AGD, che ha gli angoli in lei contenuti eguali all' angolo dato O. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

LEMMA I.

249. Sopra una linea retta non si possono formare due porzioni di cerchi simili, e disuguali.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 90. Se ciò si niega, si facciano sopra AB le porzioni ACB, ADB simili, e disuguali, s' è possibile. Si tiri dal punto A la retta AD, che tagli le periferie ne' punti C, e D, e si congiungano le rette BC, BD. Essendo per l' ipotesi simili le porzioni, sarà l' angolo ACB = ADB (§ 238). Dunque del triangolo BDC, il cui lato DC è prolungato in A, l' angolo esterno è uguale all'

Digitalizzato da Google

all'interno opposto. Ma ciò è impossibile (§ 107). Sicchè è impossibile poter formare pra una retta due porzioni di cerchi simili, e disuguali. Ch'è cio, che bisognava dimostrare.

LEMMA II.

250. *Se sopra due rette eguali AB, CD si formano porzioni di cerchi AEB, CFD, che sieno simili, tali porzioni sono anche uguali.* Fig. 91.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda posta la porzione AEB sopra l'altra CFD in modo, che AB combaci con CD; combaceranno ancora per la loro simiglianza le porzioni AEB, CFD; altrimenti sopra la medesima retta si potrebbero fare due porzioni di cerchi simili, e disuguali. Ma le grandezze, che combaciano, sono eguali. Dunque la porzione AEB è uguale alla porzione CFD. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

251. Essendo tutt' i mezzi cerchi porzioni simili, tutt' i mezzi cerchi fatti sopra diametri eguali saranno eguali tra loro.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

252. Quindi ogni cerchio viene diviſo da qualunque ſuo diametro in due parti eguali; e tutt' i cerchi, che hanno diametri eguali, e per conſeguenza raggi eguali, ſono tra loro eguali.

COROLLARIO III.

253. Finalmente combaciando tra loro e le periferie, e i raggi di due cerchi eguali, qualora l'uno ſi mette ſu l'altro in modo, che il centro dell' uno caſchi ſul centro dell' altro: è manifeſto i cerchi eguali avere raggi eguali, e per conſeguenza diametri eguali.

PROP. XXVII. TEOR. XXII.

Fig. 92. 254. *Ne' cerchi uguali AEB, CFD gli archi AB, CD, a' quali appoggiano angoli eguali fatti o ne' centri, come AOB, CPD, o nelle circonferenze, come AEB, CFD, ſono eguali tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette AB, CD. Eſſendo ne' triangoli AOB, CPD il lato AO = CP, OB = PD (§ 253), e l'angolo AOB =CPD

Digitalizzato da Google

= CPD per l'ipotesi, sarà la base AB = CD (§ 77). Sono di più, per gli angoli eguali AEB, CFD, le porzioni AEB, CFD simili. Dunque le porzioni AEB, CFD sono tra loro anche uguali (§ 250). Onde, per l'uguaglianza de' cerchi interi, eguali sono pure le restanti porzioni AB, CD. E perciò se si metterà la porzione AB sopra CD in modo, che la retta AB combaci con CD, l'una porzione combacerà coll'altra, e l'arco AB combacerà coll'arco CD. Sicchè l'arco AB è uguale all'arco CD (§ 64). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

255. Dunque, essendo eguali gli archi, a' quali appoggiano angoli eguali fatti ne' centri, o nelle periferie de' cerchi eguali, eguali saranno ancora gli archi, a' quali appoggeranno angoli eguali fatti nel centro, o nella periferia del medesimo cerchio.

PROP. XXVIII. TEOR. XXIII.

256. *Ne' cerchi eguali AEB, CFD gli angoli fatti o ne' centri, come AOB, CPD, o nelle circonferenze, come AEB, CFD, che appoggiano ad archi uguali AB, CD, sono tra loro eguali.*

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega essere l' angolo AOB = CPD, e per conseguenza AEB = CFD, sarà AOB o maggiore, o minore di CPD. Sia, s' è possibile, AOB maggiore di CPD. Si faccia in O l' angolo AOG = CPD. Sarà l' arco AG uguale a CD (§ 254). Ma l' arco CD è uguale per l' ipotesi a AB. Dunque l' arco AG è uguale all' arco AB. Il che è impossibile (§ *66*). Dunque è impossibile esser l' angolo AOB maggiore di CPD. Similmente si dimostra non essere l' angolo AOB minore di CPD. Dunque l' angolo AOB è uguale all' angolo CPD; e per conseguenza AEB uguale a CFD. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

257. Dunque, essendo eguali gli angoli fatti o ne' centri, o nelle periferie di cerchi eguali, qualora appoggiano ad archi eguali, eguali saranno ancora gli angoli fatti o nel centro, o nella periferia di un cerchio, qualora appoggiano pure ad archi eguali.

PROP. XXIX. TEOR. XXIV.

258. *Ne' cerchi eguali AEB, CFD le corde*

Digitalizzato da Google

de uguali AB , CD dividono le periferie in porzioni tra loro reſpettivamente uguali .

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino dalli centri O e P i raggi OA , OB , PC , PD . Eſſendo ne' triangoli AOB, CPD il lato AO = CP , OB = PD (§ 253), e la baſe AB = CD , ſarà l'angolo AOB = CPD (§ 78); e perciò l' arco AGB è uguale all'arco CHD (§ 254). Sono in oltre per l'uguaglianza de' cerchi l' intere circonferenze uguali. Dunque anche i rimanenti archi AEB , CFD ſono eguali tra loro . Ch'è ciò , che biſognava dimoſtrare,

COROLLARIO I.

259. Eſſendoſi dimoſtrato l'angolo AOB = CPD , ſarà ancora l' angolo AEB = CFD (§ 239); onde la porzione AEB è ſimile alla porzione CFD , e perciò la porzione AEB è uguale a CFD (§ 250). Sono pure gl' interi cerchi eguali per l'ipoteſi. Dunque le reſtanti porzioni AGB , CHD ſono anche eguali . Sicchè ne' cerchi eguali le corde eguali dividono i cerchi in porzioni reſpettivamente eguali .

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

260. Quindi le corde eguali tirate in un istesso cerchio dividono e'l cerchio, e la periferia in parti respettivamente eguali.

PROP. XXX. TEOR. XXV.

261. *Ne' cerchi eguali AEB, CFD gli archi eguali AB, CD hanno corde AB, CD anche uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino dalli centri O e P i raggi AO, OB, PC, PD. Essendo ne' triangoli AOB, CPD il lato AO = CP, OB = PD (§ 253), e per l'uguaglianza degli archi AB, CD l'angolo AOB = CPD (§ 356), sarà la base AB uguale alla base CD (§ 77). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

262. Onde in un istesso cerchio gli archi eguali hanno corde eguali.

AVVERTIMENTO.

263. Il penultimo teorema già dimostrato

Digitalizzato da Google

to ci somministra il modo facile di poter dividere qualunque arco di cerchio in due parti eguali. Perciò soggiugniamo il seguente problema.

PROP. XXXI. PROBL. VI.

264. Dato qualunque arco di cerchio, dividerlo in due parti eguali.

SOLUZIONE.

Sia ACB l'arco dato. Fig. 93.

1. S' uniscano gli estremi A e B dell' arco colla retta AB.

2. Si divida AB in due parti eguali in D (§ 86), e dal punto D s' innalzi DC perpendicolare ad AB.

Dico che l'arco ACB è diviso in C in due parti eguali.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, congiunte le rette AC, CB, ne'triangoli ADC, BDC è'l lato AD = DB, il lato DC comune, e l'angolo ADC = BDC. Dunque è ancora la base AC = BC (§ 77); e perciò l'arco AC uguale all'arco CB (§ 260). Sicchè s'è diviso l'arco ACB in due parti eguali in C. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

265. Se all' istesso modo si divideranno in due parti eguali prima gli archi AC, CB, poscia le loro metà, e successivamente le loro parti quarte, ottave, sedicesime, ec., s'aurà l'arco AB diviso in 4, 8, 16, 32, 64 parti eguali, ec.. Sicchè ogni arco di cerchio colla riga, e col compasso si può dividere in 2, 4, 8, 16, 32, 64 parti eguali, ec.

AVVERTIMENTO I.

266. Il dividere poi qualunque arco di cerchio in tante parti eguali, quante ne disegna ciascuno de' numeri, che tramezzano tra 2, 4, 8, 16, 32, ec., è cosa impossibile nella Geometria elementare; richiedendosi per tali divisioni operazioni impossibili ad eseguirsi solamente colla riga, e col compasso. Onde le medesime divisioni, che sono possibili nella Geometria elementare per riguardo dell' angolo rettilineo, sono anche possibili per rispetto dell' arco del cerchio. Nè ciò dee recar maraviglia; poichè il probl. della divisione dell' angolo, e quello della divisione dell' arco non formano in realtà, che un medesimo probl., perchè sapendosi sciorre uno di essi, si sa sciorre l'altro ancora. E in fatti, preso per centro il vertice dell' angolo

Digitalizzato da Google

golo AOB, e con qualsivoglia intervallo OA descritto l' arco AB, se si divide l' angolo AOB in qualunque numero di parti eguali colle rette OC, OD, OE, OF, resta diviso ancora l' arco AB nello stesso numero di parti eguali; e al contrario se si divide l' arco AB in qualunque numero di parti eguali AC, CD, DE, EF, FB, nel medesimo numero di parti eguali resta diviso dalle rette OC, OD, OE, OF anche l'angolo AOB. Fig. 94.

AVVERTIMENTO II.

267. Si noti però che ancorchè la trisezione degli angoli sia generalmente impossibile nella Geometria elementare, la trisezione però dell' angolo retto è possibile. Ed ecco come. Si formi sopra qualunque parte BE del lato BC dell' angolo retto ABC il triangolo equilatero BDE. Essendo l'angolo DBE $\frac{1}{3}$ di due retti, o $\frac{2}{3}$ di un retto, sarà l'angolo ABD $\frac{1}{3}$ di un retto. Onde, dividendo l' angolo DBE in due parti eguali colla retta BG, s'aurà l'angolo retto ABC diviso in tre angoli eguali ABD, DBG, GBC. Se vi sia altr' angolo fuori del retto divisibile in tre parti eguali colla riga, e col compasso, si dirà appresso. Fig. 95.

AVVERTIMENTO III.

268. V'è un metodo meccanico di dividere qualunque angolo in tre parti eguali, che

Digitalizzato da Google

che per la ſua facilità non iſtà male di riferirlo. Sia l'angolo AOB da dividerſi in tre parti eguali. Si deſcriva col centro O, e con qualunque intervallo OA il cerchio ABE. Indi dal punto B ſi tiri BF in modo, che la ſua porzione GF, compreſa tra la periferia, e 'l diametro AE prolungato, ſia uguale al raggio del cerchio. Ritrovata una tale poſizione di BF, inclinandola ora più, e ora meno al raggio BO, ſi tiri pel punto O la retta OC parallela a BF. Finalmente ſi divida in due parti eguali l'angolo BOC; e così s'avrà l'angolo AOB diviſo in tre parti eguali AOC, COD, DOB. Imperciocchè, tirato il raggio OG, eſſendo sì il triangolo OGF, che GOB iſoſcele, ſarà l'angolo OGB, e per conſeguenza OBG doppio di BFO (§ 115). Onde AOB, ch'è uguale alla ſomma di OBF, OFB (§ 107), ſarà triplo di BFO, e perciò triplo del ſuo eguale AOC. Per la qual coſa, eſſendoſi diviſo l'angolo COB in due parti eguali, ſaranno i tre angoli AOC, COD, DOB eguali tra loro; e per conſeguenza ſarà l'angolo AOB diviſo in tre parti eguali.

AVVERTIMENTO IV.

269. Si noti finalmente che v'è uno ſtrumento meccanico, co' cui ſi può dividere qua-

Digitalizzato da Google

qualunque angolo rettilineo non ſolamente in 3, ma ben anche in 5, 7, 9, ec. parti eguali. L' inventore d' un tale ſtrumento è 'l P. Ceva Geſuita; e ſe il famoſo Marcheſe de l' Hoſpital ci laſciò deſcritto l' iſteſſo ſtrumento nel ſuo trattato analitico delle ſezioni coniche ſenza fare menzione del Ceva, è ſicuro però che o 'l Marcheſe ſuddetto preſe una tale invenzione dal Ceva, o fu dall' iſteſſo prevenuto. Intanto non eſſendo un tale ſtrumento coſa d' importanza per la Geometria piana, chi deſidererà ſaperne e la coſtruzione, e l' uſo, potrà leggere lo ſcolio della prop. 30 del 3 libro de' miei elementi di Geometria Piana pubblicati nell' idioma latino nel 1752, che ne ſarà pienamente informato.

CAP. V.

Dell' uguaglianza de' rettangoli formati dalle rette, le quali, incontrandoſi dentro, o fuori del cerchio, tramezzano tra 'l punto dell' incontro, e la periferia.

LEMMA I.

270. *Se una retta tirata nel cerchio ſi divide*

Digitalizzato da Google

vide in qualunque punto, il rettangolo fatto dalle sue parti, una col quadrato di quella, che giungne dal punto della divisione al centro, è uguale al quadrato del raggio del cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 97. I. Sia il diametro AB del cerchio ADC diviso nel punto E diverso dal centro O. Essendo AB divisa in O in due parti eguali, e in E in due parti disuguali, sarà il rettangolo fatto dalle parti AE, EB, una col quadrato di EO eguale al quadrato del raggio OB (§ 175).

II. Sia CD, la quale non passa pel centro O, divisa in due parti eguali in F. Si congiungano FO, OD. Essendo CD divisa in F in due parti eguali, sarà OFD angolo retto (§ 204), e 'l rettangolo fatto da CF e FD lo stesso, che 'l quadrato di DF. Sicchè il rettangolo formato da CF e FD, una col quadrato di FO sarà uguale alla somma de' quadrati fatti su DF, FO, e perciò eguale al quadrato del raggio DO (188).

III. Finalmente sia CD divisa in qualunque altro punto E. Essendo il rettangolo fatto da CE e ED, una col quadrato di EF eguale al quadrato di FD (§ 175); aggiuntovi di comune il quadrato di FO, sarà il rettangolo fatto da CE e ED, una co' quadrati di FE, FO, o una col qua-

Digitalizzato da Google

quadrato di EO uguale alla ſomma de' quadrati di DF, FO, e perciò eguale al quadrato del raggio OD (§ 188). Sicchè ſe una retta, ec. . Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

LEMMA II.

271. *Se da qualunque punto eſiſtente fuori d' un cerchio ſi tira una retta ſecante l' iſteſſo cerchio, ſarà il rettangolo fatto dall' intera ſecante, e dalla ſua porzione eſiſtente fuori del cerchio, una col quadrato del raggio, eguale al quadrato della retta, che giugne dal medeſimo punto al centro.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Dal punto A, eſiſtente fuori del cerchio CDB, ſi tiri la ſecante AB, che paſſa pel centro O. Eſſendo BC diviſa in due parti eguali in O, ed eſſendole aggiunta la porzione CA; è chiaro eſſere il rettangolo fatto da BA e AC, una col quadrato del raggio CO eguale al quadrato di AO (§ 179). Fig. 98.

II. Si tiri dal punto A qualunque altra ſecante AD, che non paſſa pel centro O. Dal centro O ſi cali OG perpendicolare ad AD, e s'uniſca il raggio OE. Eſſendo DE diviſa in G in due parti eguali (§ 204), farà il rettangolo fatto da DA e AE, una col

Digitalizzato da Google

col quadrato di EG eguale al quadrato di AG (§ 179); aggiuntovi di comune il quadrato di GO, ſarà il rettangolo fatto da DA e AE, una colla ſomma de' quadrati fatti ſu EG, GO, o una col quadrato fatto ſul raggio EO eguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AG, GO, e perciò eguale al quadrato fatto ſu AO (§ 188). Sicchè ſe da qualunque punto, ec. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXII. TEOR. XXVI.

272. *Se nel cerchio due rette ſi tagliano tra loro, il rettangolo fatto dalle parti di una è uguale al rettangolo, che ſi forma dalle parti dell' altra.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 99. I. S' interſechino AB, CD nel centro O del cerchio ACBD. Eſſendo AO, CO, BO, DO eguali tra loro, ſaranno i rettangoli formati da AO, OB, e da CO, OD gli ſteſſi, che i quadrati de' raggi AO, OC, e perciò eguali tra loro (§ 162).

Fig. 100, 101, e 102. II. S' interſechino nel cerchio ACBD le rette AB, CD nel punto P diverſo dal centro O. Può darſi il caſo, che AB paſſi pel centro, e divida CD ad angoli retti, come nella figura 100; può darſi ancora il caſo che AB paſſi pel centro, e divida CD ad an-

angoli obbliqui, come nella figura 101; e può finalmente darsi il caso che niuno delle rette passi pel centro, come nella figura 102. Si tiri nell' ultima figura la retta PO. Essendo in tutti questi casi al quadrato del raggio eguale sì il rettangolo formato da AP e PB, una col quadrato di PO, che 'l rettangolo formato da CP e PD, una col medesimo quadrato di PO (§ 270), sarà il rettangolo fatto da AP e PB, una col quadrato di PO uguale al rettangolo di CP e PD, una col quadrato di PO (§ 58). Onde, toltone il comune quadrato di PO, sarà il rettangolo fatto da AP e PB eguale al rettangolo, che si forma da CP e PD. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

273. Dividendo il diametro AB nella figura 100 la retta CD ad angoli retti, sarà CP=PD (§ 204); onde il rettangolo fatto da CP e PD sarà l' istesso, che 'l quadrato di CP; e perciò il rettangolo fatto da AP e PB sarà uguale al quadrato di CP. Sicchè la periferia del cerchio è una curva di tale indole, che da qualunque suo punto C si cali CP perpendicolare al diametro AB, sempre il rettangolo fatto dalle parti AP e PB del diametro è uguale al quadrato della perpendicolare CP.

PRO-

Digitalizzato da Google

PROP. XXXIII. TEOR. XXVII.

274. *Se la retta CP è perpendicolare ad AB, e 'l rettangolo fatto da AP e PB è uguale al quadrato di CP, il punto C cade nella periferia del cerchio, che ha per diametro AB.*

DIMOSTRAZIONE.

Si divida AB in due parti eguali in O, e si congiunga OC. Essendo per l'ipotesi il rettangolo fatto da AP e PB uguale al quadrato di PC; aggiugnendo di comune il quadrato di PO, sarà il rettangolo fatto da AP e PB, una col quadrato di PO, o sia il quadrato di OB (§ 175), uguale alla somma de' quadrati di OP, PC, ovvero eguale al quadrato di OC (§ 188). E perciò OC = OB. Sicchè la periferia del cerchio, che ha per raggio OB, o per diametro AB passa per C. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXXIV. TEOR. XXVIII.

275. *Se da un punto qualunque A, esistente fuori di qualsivoglia cerchio FEB, si tirano quante rette si vogliono alla sua periferia, delle quali una, come AF, sia tangente, e le altre, come AB, AD, ec. sieno secanti; sarà il rettangolo fatto da qualunque secante, e dalla sua*

Fig. 98.

Digitalizzato da Google

ſua porzione eſiſtente fuori del cerchio eguale al quadrato della tangente AF.

DIMOSTRAZIONE.

Imperocchè il rettangolo fatto da BA e AC, o da DA e AE, ec., una col quadrato del raggio è uguale al quadrato di AO (§ 271). Ma, congiunta OF, per l'angolo retto AFO (§ 232) il quadrato di AO è uguale alla ſomma de' quadrati di AF, FO (§ 188). Dunque il rettangolo fatto da BA e AC, o da DA e AE, ec., una col quadrato del raggio è uguale alla ſomma de' quadrati di AF, FO. E perciò, toltone il comune quadrato del raggio, ſarà il rettangolo fatto da BA e AC, o da DA e AE, ec. uguale al quadrato di AF (§ 60). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

276. Eſſendo il rettangolo fatto da qualunque delle dette ſecanti, e dalla ſua porzione eſiſtente fuori del cerchio eguale al quadrato della tangente AF. E' chiaro che, ſe da un punto qualunque eſiſtente fuori d' un cerchio ſi tirano quante rette ſi vogliono ſecanti il cerchio, tutt' i rettangoli fatti dalle intere ſecanti, e dalle

Digitalizzato da Google

loro reſpettive porzioni eſiſtenti fuori del cerchio ſono tra loro eguali.

PROP. XXXV. TEOR. XXIX.

Fig. 103. 277. *Da un punto qualunque A eſiſtente fuori di qualſivoglia cerchio DBE ſi tirino due rette AD, AB, delle quali AD giunga alla parte conveſſa della periferia, e AB alla parte concava. Dico che, ſe il rettangolo fatto dalla ſecante AB, e dalla ſua porzione AC eſiſtente fuori dal cerchio è uguale al quadrato di AD, la retta AD è tangente del cerchio nel punto D.*

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto A ſi tiri la tangente AE, e dal centro O ſi tirino le rette OE, OA, OD. Eſſendo al rettangolo fatto da BA, e AC eguale sì il quadrato di AE (§ 275), che 'l quadrato di AD per l'ipoteſi, ſarà il quadrato di AE uguale al quadrato di AD (§ 58); onde la retta AE = AD (§ 162). In oltre eſſendo ne' triangoli ADO, AEO il lato AD = AE, DO = OE, e la baſe AO comune, ſarà l'angolo ADO uguale all'angolo AEO (§ 78). Ma AEO è retto (§ 232). Sicchè anche ADO è retto; e perciò AD è tangente nel punto D (§ 227). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO I.

278. Non potendosi dal punto A tirare alla parte convessa della periferia un' altra retta eguale alle due AD, AE (§ 214), cioè un' altra retta, il cui quadrato sia uguale al rettangolo fatto da BA, e AC. E' manifesto non potersi tirare dal punto A un' altra retta diversa da AD, e AE, che sia tangente del cerchio. Sicchè da un punto esistente fuori d' un cerchio non si possono tirare, che due tangenti, le quali sono tra loro eguali.

COROLLARIO II.

279. Quindi se intorno ad un cerchio HEG si descriva un quadrilatero qualunque ABCD, il quale tocchi co' suoi lati la periferia in E, F, G, H. Essendo AH = AE, e DH = DG, sarà AD uguale alla somma di AE, DG. Similmente si dimostra che BC è uguale alla somma di BE, CG. Onde la somma de' lati AD, BC è uguale alla somma de' lati AB, CD. Per la qual cosa se un quadrilatero tocca co' tutt' i suoi lati la periferia d' un cerchio, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due lati opposti. Fig. 164.

Digitalizzato da Google

CAP. VI.

Delle Iſcrizioni sì delle figure rettilinee ne' cerchi, che de' cerchi nelle figure rettilinee, e delle Circoſcrizioni tanto delle figure rettilinee intorno a' cerchi, quanto de' cerchi intorno alle figure rettilinee.

DEFINIZIONE I.

280. Quando diremo *Figura regolare*, intenderemo un rettilineo, che ha eguali e tutt' i lati, e tutti gli angoli. Quando poi diremo *Figura irregolare*, intenderemo un rettilineo, che non ha l' uguaglianza degli angoli, o non ha nè l' uguaglianza degli angoli, nè quella de' lati. Quando finalmente diremo *Figura* ſemplicemente, o *Figura rettilinea*, intenderemo un rettilineo, che può eſſere e regolare, e irregolare.

DEFINIZIONE II.

281. Una figura rettilinea diceſi *Iſcritta* in

Digitalizzato da Google

in un cerchio, se'l vertice di ciascuno de' suoi angoli è alla periferia del cerchio; dicesi poi *Circoscritta* intorno al cerchio, se ciascuno de' suoi lati è tangente del cerchio.

COROLLARIO I.

282. Se la figura iscritta nel cerchio sarà equilatera, gli archi da' suoi lati tagliati saranno tutti eguali (§ 260); e perciò dividerà ella la periferia in tanti archi eguali, quanti ne disegnerà il numero de' suoi lati. Sicchè per iscrivere nel cerchio una figura equilatera composta da 3, 4, 5, 6 lati, ec., è necessario dividere la periferia in 3, 4, 5, 6 parti eguali, ec.

COROLLARIO II.

283. Quindi quelle figure equilatere si fanno iscrivere coll'ajuto della riga, e del compasso nel cerchio, che costano di tanti lati, quanti sono le parti eguali, nelle quali coll'ajuto della riga, e del compasso si fa dividere la periferia di qualsivoglia cerchio.

AVVERTIMENTO.

284. Appresso vedremo in quante parti egua-

Digitalizzato da Google

eguali colla riga, e col compasso si può dividere la periferia di qualunque cerchio. Onde quì appresso si vedrà quali sono le figure equilatere, che si fanno iscrivere ne' cerchi coll' ajuto de' suddetti strumenti.

COROLLARIO III.

285. Finalmente appoggiando ogni angolo di qualunque figura equilatera iscritta in un cerchio sull' intera periferia diminuita di due degli archi eguali, che tagliano i suoi lati: è facile ad intendere che tutti gli angoli di sì fatte figure sono eguali tra loro (§ 257). Sicchè le figure equilatere iscritte ne' cerchi sono anche equiangole.

DEFINIZIONE III.

286. Un cerchio dicesi *Iscritto* in una figura rettilinea, se tutt' i lati della figura sono sue tangenti; dicesi poi *Circoscritto* intorno a una figura, se colla sua periferia passa per gli vertici di tutti gli angoli della figura.

DEFINIZIONE IV.

287. Si dice una retta *Adattata* dentro d' un cerchio, se è situata nel cerchio in modo, che l' estremità sue giungono fino alla

Digitalizzato da Google

la circonferenza del cerchio.

COROLLARIO.

288. Essendo il diametro la massima di tutte le rette, che si possono tirare nel cerchio; ne segue che si potrà una retta data adattare dentro d'un dato cerchio, se ella non sarà maggiore del diametro.

PROP. XXXVI. PROBL. VII.

289. *Dato qualunque cerchio, e dato qualsivoglia triangolo, iscrivere nel cerchio un altro triangolo equiangolo al dato.*

SOLUZIONE.

Sieno ABC il cerchio dato, e LMN il dato triangolo. Fig.105.

1. Si tiri DE tangente del cerchio in qualunque punto A.

2. In A si facciano l'angolo DAB uguale a N, e l'angolo EAC uguale a L (§ 80), e le rette AB, AC si prolunghino fino alla periferia in B, e C.

3. Finalmente si congiunga BC.

Dico che ABC è 'l triangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo DE tangente del cerchio in A,

Digitalizzato da Google

farà l'angolo ABC (§ 246) uguale a EAC, e perciò uguale a L, e l' angolo ACB uguale a DAB, e perciò eguale a N; onde l' angolo BAC è uguale a M. Sicchè s'è nel cerchio iſcritto il triangolo ABC equiangolo a LMN. Ch'è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

290. Sicchè ſe in un cerchio ſi vuole iſcrivere un triangolo equilatero, baſta deſcriver prima un triangolo equilatero di qualunque grandezza, che ſi vuole, e poſcia iſcrivere nel cerchio un altro triangolo equiangolo al già deſcritto.

PROP. XXXVII. PROBL. VIII.

291. *Dato qualunque cerchio, e dato qualſivoglia triangolo, circoſcrivere al cerchio un triangolo equiangolo al dato.*

SOLUZIONE.

Fig. 106. Sieno EFG il cerchio dato, e LMN il dato triangolo.

1. Si prolunghi qualunque lato LN del triangolo LMN verſo P e Q.

2. Tirato qualunque raggio OE, ſi facciano nel centro O gli angoli EOF, EOG reſpettivamente uguali agli angoli PLM, QNM (§ 80). 3. Per

Digitalizzato da Google

3. Per gli punti F, G, E si tirino le tangenti AB, BC, CA (§ 235), e si prolunghino, finchè s'uniscano in A, B, C. Dico essere ABC il triangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo retto sì l' angolo AFO, che AEO, sarà la loro somma uguale a due retti; onde la somma degli altri due FAE, FOE del quadrilineo AFOE sarà anche uguale a due retti (§ 111), e perciò eguale alla somma degli due MLN, MLP. Adunque, togliendo gli angoli eguali EOF, PLM, eguali sono ancora FAE, MLN. Similmente si dimostra esser eguali gli angoli ECG, LNM. Sicchè i triangoli ABC, LMN sono tra loro equiangoli (§ 109). E perciò intorno al dato cerchio s' è circoscritto il triangolo ABC equiangolo al triangolo dato LMN. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

COROLLARIO.

292. Sicchè se intorno a un cerchio si vuole circoscrivere un triangolo equilatero, basta descriver prima un triangolo equilatero di qualunque grandezza, e poscia circoscrivere intorno al cerchio un altro triangolo equiangolo al già descritto.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXVIII. PROBL. IX.

293. *Dato qualunque triangolo, iſcrivere dentro di eſſo il cerchio iſcrittibile in lui.*

SOLUZIONE.

Sia ABC il triangolo dato.

1. Si dividano due angoli qualunque A, e C del triangolo in due parti eguali colle rette AO, CO (§ 83), le quali ſi prolunghino, finchè s' uniſcano in O.

2. Da O ſi calino OE, OF, OG reſpettivamente perpendicolari a CA, AB, BC (§ 88).

3. Col centro O, e coll' intervallo OE, o OF, o OG ſi deſcriva il cerchio EFG. Dico che s'è deſcritto il cerchio cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo ne' triangoli OEA, OFA l' angolo OAE = OAF, l' angolo OEA = OFA (§ 68), e 'l lato AO comune, farà il lato OF = OE (§ 127). Similmente ſi dimoſtra che OG = OE. Dunque OE, OF, OG ſono eguali tra loro, e conſeguentemente il cerchio deſcritto paſſa colla periferia per gli punti E, F, G. Sono in oltre i raggi OE, OF, OG perpendicolari reſpettivamente a CA, AB, BC. Sicchè

Digitalizzato da Google

chè CA, AB, BC ſono tangenti del cerchio EFG (§ 227); e perciò il cerchio EFG è iſcritto nel triangolo ABC (§ 286). Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

PROP. XXXIX. PROBL. X.

294. *Dato qualunque triangolo, circoſcrivere intorno ad eſſo il cerchio, che l' è circoſcrittibile.*

SOLUZIONE.

Sia ABC il triangolo dato.

1. Si dividano due lati qualunque AB, BC in due parti eguali in D, ed E (§ 86); e da queſti punti s' innalzino DO, EO perpendicolari reſpettivamente ad AB, BC (§ 87), e ſi prolunghino, finchè s' uniſcano in O. Fig. 107.

8. Si deſcriva, congiunte le rette OA, OB, OC, col centro O, e coll' intervallo OA, o OB, o OC il cerchio ABC.

Dico eſſere ABC il cerchio cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo ne' triangoli ADO, BDO il lato AD = DB, il lato DO comune, e l' angolo ADO = BDO, ſarà la baſe OA = OB (§ 77). Similmente ſi dimoſtra eſſere BO = OC. Dunque OA, OB, OC ſono tra loro

Digitalizzato da Google

ro eguali; e perciò il cerchio descritto passa colla periferia per gli vertici degli angoli A, B, C del triangolo; onde è egli circoscritto al triangolo ABC (§ 286). Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

295. Colla medesima generalità, colla quale si sono sciolti tutt' i Probl. delle iscrizioni, e circoscrizioni relativamente a' triangoli, è impossibile sciorli relativamente a tutte le altre figure rettilinee; richiedendosi in esse alcune determinate condizioni per poter venire situate ne' cerchi, e intorno a' cerchi sì per iscrizioni, che per circoscrizioni. Così il quadrilatero per esempio non può essere situato nel cerchio e per iscrizione, e per circoscrizione, se non ha gli angoli opposti uguali a due retti (§ 241); nè può essere situato intorno al cerchio e per iscrizione, e per circoscrizione, se la somma di due lati opposti non è uguale alla somma de' due altri lati (§ 279). Intanto, ritrovandosi tutte le figure regolari provvedute delle condizioni necessarie ad essere situate dentro de' cerchi, e intorno ad essi sì per iscrizioni, che per circoscrizioni, seguiremo a sciorre i probl. delle iscrizioni, e circoscrizioni relativamente

Digitalizzato da Google

te alle altre figure, ſupponendole però ſempre regolari.

AVVERTIMENTO II.

296. Si noti che ancorchè tutte le figure regolari ſieno iſcrittibili ne' cerchi, per eſſer la periferia di qualunque cerchio atta a ricevere qualunque diviſione in parti eguali: con tutto ciò noi quì non inſegneremo che quelle iſcrizioni, le quali richieggono diviſioni della periferia in parti eguali, che eſeguir ſi poſſono colla riga, e col compaſſo; riſerbandoci le altre per la Geometria ſubblime, a cui appartengono. Ciò poſto, venghiamo alle dette iſcrizioni, e circoſcrizioni.

PROP. XL. PROBL. XI.

297. *Dato qualunque cerchio, iſcrivere dentro di eſſo il* Quadrato.

SOLUZIONE.

Sia ABCD il cerchio dato. Fig. 108.

1. Tirato nel cerchio il diametro AC ad arbitrio, ſi tiri l'altro BD perpendicolare ad AC.

2. Si congiungano le rette AB, BC, CD, DA.

Dico che la figura ABCD è 'l quadrato cercato.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Essendo ne' triangoli AOB, BOC il lato AO = OC, il lato OB comune, e l'angolo AOB = BOC (§ 68), sarà la base AB = BC (§ 77). Similmente si dimostra BC = CD, CD = DA. Dunque i lati AB, BC, CD, DA del quadrilatero ABCD sono tutti eguali. Sono di più gli angoli ABC, BCD, CDA, DAB retti, come fatti in mezzi cerchi (§ 242). Sicchè ABCD è quadrato (§ 41). E perciò nel dato cerchio s'è iscritto il quadrato ABCD. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

AVVERTIMENTO.

298. Se ciascuno de' quattro archi eguali AB, BC, CD, DA, ne' quali è divisa la periferia dal quadrato ABCD, si dividerà in due archi eguali, e si congiungeranno le loro corde; s'avrà la figura ordinata di 8 lati iscritta nel cerchio. Se poi collo stesso metodo si procederà innanzi, s'avranno le figure ordinate di 16, 32, 64 lati, ec. iscritte nel cerchio.

COROLLARIO.

299. Sicchè dalle iscrizioni del quadrato nel cerchio ne derivano le iscrizioni nel

Digitalizzato da Google

nel cerchio delle figure ordinate di 8, 16, 32, 64 lati, ec.

LEMMA I.

300. *Dato un cerchio, e data una retta, che non sia maggiore del suo diametro, adattare la retta data nel cerchio.*

SOLUZIONE.

Sieno ABC il cerchio dato, e L la data retta. Fig. 109.

1. Si tiri nel cerchio qualunque diametro AC. Se sarà AC = L, sarà AC la retta cercata; altrimenti

2. Si tagli AD = L; e, descritto col centro A, e coll'intervallo AD il cerchio DB, si congiunga AB.

Dico essere AB la retta cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo A centro del cerchio DB, sarà AB = AD (§ 45). Ma per la costruzione è AD = L. Dunque è anche AB = L (§ 58). Sicchè nel dato cerchio s'è adattata la retta AB = L. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

Digitalizzato da Google

LEMMA II.

301. *Costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli, che sono alla base, doppio del rimanente.*

SOLUZIONE.

Fig. 110. 1. Si prenda la retta AB di qualunque lunghezza, e si divida in C in modo, che il rettangolo fatto da AB e BC sia uguale al quadrato fatto su AC (§ 201).

2. Col centro A, e coll'intervallo AB si descriva il cerchio BDF; e, adattata in tal cerchio la retta BD = AC (§ prec.), si congiunga AD.

Dico che ABD è 'l triangolo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiunga la retta CD, e intorno al triangolo ACD si circoscriva il cerchio ACDE (§ 294). Essendo il rettangolo fatto da AB e BC uguale al quadrato formato su AC, e per conseguenza su BD, sarà BD tangente del cerchio ACDE in D (§ 277). Onde sarà l'angolo BDC = DAG (§ 246); e perciò, aggiuntovi di comune l'angolo CDA, sarà l'intero angolo ADB uguale alla somma di CAD, CDA. Ma DBC è uguale a BDA (§ 115), e DCB è ugua-

Digitalizzato da Google

è uguale alla somma di CAD, CDA (§ 107). Dunque l'angolo DBC = DCB; e perciò DC = DB, e conseguentemente DG = CA. Per la qual cosa l'angolo CDA = CAD. E' anche l'angolo BDC = CAD. Sicchè l'intero angolo ADB è 'l doppio dell' angolo BAD; e perciò anche ABD è 'l doppio di BAD. S' è adunque costruito il triangolo isoscele ABD, che ha ciascuno degli angoli alla base doppio del rimanente. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XLI. PROBL. XII.

302. *Dato un cerchio, iscrivere in esso il* Pentagono *regolare.*

SOLUZIONE.

Sia il cerchio dato ABD. Fig. 111.

1. Si descriva il triangolo isoscele LMN, che abbia ciascuno degli angoli alla base LN doppio del rimanente (§ prec.).

2. S' iscriva nel cerchio dato il triangolo ACD equiangolo al triangolo LMN (§ 289).

3. Si dividano in due parti eguali gli angoli ADC, ACD colle rette DB, CE, e si congiungano i cinque punti A, B, C, D, E colle rette AB, BC, CD, DE, EA.

Dico essere ABCDE il pentagono cercato.

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il triangolo ACD, come equiangolo al triangolo LMN, ha ciascuno degli angoli alla sua base CD doppio dell' angolo CAD. Onde, avendo diviso gli angoli ADC, ACD in due parti eguali colle rette DB, CE, saranno i cinque angoli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA fatti alla periferia eguali tra loro. Perciò gli archi AB, BC, CD, DE, EA sono anche uguali (§ 255), e conseguentemente eguali sono pure le loro corde AB, BC, CD, DE, EA (§ 262). Sicchè 'l pentagono ABCDE è equilatero; e perciò anche equiangolo (§ 285), e conseguentemente è regolare (§ 280). Per la qual cosa nel dato cerchio s' è iscritto il pentagono ABCDE regolare. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

303. Se ciascuno de' cinque archi eguali, ne' quali è divisa la periferia dal pentagono regolare ABCDE, si dividerà in due archi eguali, e si congiungeranno le loro corde; s' avrà la figura regolare di 10 lati iscritta nel cerchio. Se poi collo stesso metodo si procederà innanzi, s' avranno le figure regolari di 20, 40, 80, 160, ec. iscrit-

Digitalizzato da Google

ſcritte nel medeſimo cerchio .

COROLLARIO.

304. Sicchè dall' iſcrizione del pentagono regolare nel cerchio ne derivano le iſcrizioni nel cerchio delle figure regolari di 10, 20, 40, 80, 160 lati, ec.

AVVERTIMENTO II.

305. Soggiugniamo quì l' iſcrizione dell' eſagono regolare nel cerchio , non per neceſſità che ve ne ſia , potendoſi ella ripetere dall' iſcrizione del triangolo equilatero già inſegnata ; ma per inſegnare un altro metodo aſſai facile , e comodo d' eſeguire una sì fatta iſcrizione . Perciò ſia la ſeguente

PROP. XLII. PROBL. XIII.

306. *Dato qualunque cerchio , iſcriuere dentro di eſſo l'* Eſagono *regolare* .

SOLUZIONE.

Sia ACE il cerchio dato . Fig. 112.

1. Si tiri nel cerchio ACE qualunque diametro AD .

2. Fatto centro il punto A , e coll' intervallo del raggio AO ſi deſcriva il cer-

Digitalizzato da Google

chio BOF, che interſeca colla ſua la periferia del cerchio dato in B e F.

3. Per gli punti B e F ſi tirino i diametri BE, FC.

4. Finalmente i ſei punti A, B, C, D, E, F s'uniſcano colle rette AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Dico eſſere ABCDEF l'eſagono cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo ad AO eguale sì AB, che OB, ſarà il triangolo AOB equilatero. Per la medeſima ragione è equilatero anche AOF. Dunque $\frac{1}{3}$ di due retti è tanto l'angolo AOB, quanto AOF; e perciò $\frac{1}{3}$ di due retti è tanto l'angolo DOE, quanto DOC (§ 92); e conſeguentemente $\frac{1}{3}$ di due retti è anche sì BOC, che EOF (§ 90). Per la qual coſa, eſſendo i ſei angoli AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA fatti nel centro O eguali tra loro, eguali ſaranno ancora gli archi AB, BC, CD, DE, EF, FA (§ 255), ed eguali per conſeguenza le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA (§ 262). Sicchè l'eſagono ABCDEF è equilatero, e perciò anche equiangolo (§ 285); e conſeguentemente regolare (§ 280). Per la qual coſa s'è nel cerchio ACE iſcritto l'eſagono regolare. Ch'è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO I.

307. Se ciascuno degli archi, ne' quali viene la periferia del cerchio divisa dall' esagono regolare iscritto in lui, si divide in due archi eguali, e si congiungono le loro corde; s' avrà il dodecagono regolare iscritto nel cerchio. Similmente procedendo innanzi s' avranno le figure regolari di 24, 48, *96* lati, ec. iscritte nel medesimo cerchio.

COROLLARIO.

308. Sicchè dall' iscrizione nel cerchio dell' esagono ne derivano le iscrizioni nel cerchio delle figure regolari di 12, 24, 48, *96* lati, ec.

AVVERTIMENTO II.

309. Si noti che, per iscrivere l' *Ettagono* nel cerchio, è necessario costruire un triangolo isoscele cogli angoli alla base tripli del rimanente; perchè iscritto nel cerchio un altro triangolo, che li sia equiangolo, dividendo gli angoli alla base del detto triangolo iscritto in tre parti eguali, viene a dividersi la periferia del cerchio in 7 parti uguali; onde viene ad aversi l' ettagono regolare iscritto nel cerchio.

Digitalizzato da Google

Ma il probl. di coſtruire un triangolo iſoſcele della già detta condizione, e quello della triſezione dell'angolo ſono probl. impoſſibili nella Geometria elementare, appartenendo eglino alla Geometria ſubblime. Sicchè nella Geometria elementare l'iſcrizione nel cerchio dell'ettagono regolare è coſa impoſſibile; e conſeguentemente nella ſteſſa geometria elementare impoſſibili ſono ancora le iſcrizioni nel cerchio delle figure regolari di 14, 28, 56 lati, ec.. Per iſcrivere poi nel cerchio il *Nonagono* regolare, ſi debbono dividere in 3 parti eguali gli archi, che tagliano i lati del triangolo equilatero iſcritto nell'iſteſſo cerchio, o ſi dee ricorrere alla coſtruzione d'un triangolo iſoſcele, che abbia gli angoli alla baſe quadrupli del rimanente. Ora eſſendo amendue tali coſe impoſſibili nella Geometria elementare, impoſſibile è ancora l'iſcrizione nel cerchio del nonagono regolare nella medeſima Geometria; e perciò impoſſibili ſono pure le iſcrizioni nel cerchio delle figure regolari di 18, 36, 72 lati, ec.. In oltre per iſcrivere nel cerchio l'*Undecagono*, e'l *Tridecagono* regolari, ſi dee neceſſariamente ricorrere alle coſtruzioni di triangoli iſoſceli tali, che ſieno gli angoli alle baſi in uno quintupli del rimanente, e nell'altro ſeſtupli. Sicchè, eſſendo nella Geometria elementare impoſſibili le coſtruzioni di sì fatti triangoli, impoſſibi-

Digitalizzato da Google

sibili sono pure le iscrizioni delle dette figure nel cerchio. Di più per iscrivere nel cerchio il *Quindecagono* regolare, si debbono dividere o gli archi, che tagliano i lati del triangolo equilatero iscritto nell' istesso cerchio in 5 parti eguali, o gli archi, che tagliano i lati del pentogono regolare iscritto pure nel medesimo cerchio in 3 parti eguali; o si dee ricorrere alla costruzione d'un triangolo isoscele, che abbia gli angoli alla base settupli del rimanente. Però ancorchè la costruzione del detto triangolo isoscele sia impossibile nella Geometria elementare, e impossibili sieno pure generalmente le sezioni di archi di cerchi in 3, e in 5 parti eguali; con tutto ciò le sezioni in 5 e in 3 parti eguali degli archi suddetti possono eseguirsi colla riga, e col compasso. Onde l'iscrizione del quindecagono regolare nel cerchio è possibile; e possibili sono conseguentemente le iscrizioni di tutte le figure regolari di 30, 60, 120 lati, ec.. Perciò soggiugniamo la seguente

PROP. XLIII. PROBL. XIV.

310. *Dato qualunque cerchio, iscrivere dentro di esso il* Quindecagono *regolare*.

Digitalizzato da Google

SOLUZIONE.

Fig. 113. Sia ABC il cerchio dato.

1. Si adattino nel cerchio ABC la retta AB, che sia lato del triangolo equilatero iscrittibile in lei, e la retta AD, che sia lato del pentagono regolare anche iscrittibile nel medesimo cerchio ABC.

2. Si divida l'arco BD in due parti eguali in E (§ 264), e si congiunga BE.

3. Si vada la retta BE adattando intorno intorno nel cerchio; e così s'aurà il quindecagono cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo l'arco AB la terza parte della periferia, e l'arco AD la quinta; della 15 parti eguali, nelle quali il quindecagono regolare dee dividere la periferia, l'arco AB ne conterrà 5, e l'arco AD ne conterrà tre. Onde l'arco BD ne conterrà due; e perciò BE sarà la quindicesima parte della periferia, e conseguentemente la retta BE sarà il lato del quindecagono. Sicchè coll'adattarsi la retta BE intorno intorno nel cerchio, s'avrà il quindecagono regolare iscritto in lei.
Ch'è ciò, che si doveva dimostrare.

COROLLARIO I.

311. Sicchè nella Geometria elementare è di-

Digitalizzato da Google

è divisibile in tre parti eguali non solo l' angolo retto, ma anche l' angolo al centro, che appoggia sull' arco, che taglia il lato del pentagono regolare iscritto. Ed è di più divisibile in cinque parti eguali l' angolo al centro, che appoggia sull' arco, che taglia il lato del triangolo equilatero iscritto pure nel medesimo cerchio.

COROLLARIO II.

312. In oltre le figure regolari iscrittibili nel cerchio coll' ajuto della riga, e del compasso si riducono alla figura di 3, e conseguentemente a quelle di 6, 12, 24, 48 lati, ec., alla figura di 4, e conseguentemente a quelle di 8, 16, 32, 64 lati, ec., alla figura di 5, e conseguentemente a quelle di 10, 20, 40, 80 lati, ec., e alla figura di 15, e conseguentemente a quelle di 30, 60, 120 lati, ec..

AVVERTIMENTO I.

313. Ogni altra figura regolare, dalle dette in fuori, non si può nella Geometria elementare iscrivere nel cerchio; bisognandovi per le loro iscrizioni, o sezioni d' archi impossibili ad eseguirsi colla riga, e col compasso, o costruzioni di triangoli isosceli con condizioni, che nella Geometria elementare sono assolutamente impossibili.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO II.

314. V'è ſtato chi ha creduto non ſolamente eſſer poſſibili nella Geometria elementare le iſcrizioni nel cerchio di tutte le figure regolari, ma ben anche eſſervi per tutte le iſcrizioni una regola generale. Rinaldino ſi perſuaſe falſamente che, ſe
Fig. 114. ſopra il diametro AB del cerchio ADB ſi deſcriva il triangolo equilatero ACB; indi ſi divida il diametro AB in tante parti eguali, quante ne diſegna il numero de' lati della figura, che ſi vuole iſcrivere, per eſempio in 7, volendo iſcrivere l'ettagono; e appreſſo ſi tiri dal punto C la retta CD per l'eſtremo E della ſeconda parte del diametro; e finalmente ſi congiunga BD; queſta retta BD ſia il lato della figura cercata, cioè il lato dell'ettagono in queſto caſo. Una tal regola di Rinaldino ſuccede ſolo nel caſo, che ſi vuole iſcrivere nel cerchio il quadrato; però in tutti gli altri caſi è falſa, come ſi dimoſtrerà nell'Algebra.

AVVERTIMENTO III.

315. Ecco tutto ciò, ch' era da dirſi intorno alle iſcrizioni delle figure regolari ne' cerchi. Venghiamo ora alle circoſcrizioni delle medeſime figure intorno a' cerchi,

Digitalizzato da Google

chi, e alle iſcrizioni de' cerchi nelle figure regolati, e alle circoſcrizioni de' cerchi intorno alle iſteſſe figure.

PROP. XLIV. PROBL. XV.

316. *Dato qualunque cerchio, circoſcrivere intorno di eſſo qualſivoglia figura regolare.*

SOLUZIONE.

Sia ACD il cerchio dato. Fig. 115.

1. S' iſcriva prima nel cerchio la figura ABCDE regolare dello ſteſſo numero di lati di quella, che ſi vuole circoſcrivere, ſe è poſibile colla riga, e col compaſſo.

2. Per gli vertici di tutti gli angoli A, B, C, D, E ſi tirino le tangenti PL, LM, MN, NO, OP, che s' uniſcono in L, M, N, O, P.

Dico eſſere LMNOP la figura cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro Q ſi tirino alli vertici degli angoli della figura iſcritta le rette QA, QB, QC, QD, QE, e alli vertici degli angoli della figura circoſcritta le rette QL, QM, QN, QO, QP. Eſſendo ne' triangoli LAQ, LBQ il lato LA = LB (§ 278), AQ = BQ (§ 45), e la baſe LQ

Digitalizzato da Google

LQ comune, sarà l'angolo ALQ = BLQ, e l'angolo AQL = BQL (§ 78). Sicchè LQ divide in due parti eguali sì l'angolo ALB, che AQB. Similmente si dimostra le rette QM, QN, QO, QP dividere in due parti eguali sì gli angoli BQC, CQD, DQE, EQA, che gli angoli BMC, CND, DOE, EPA. In oltre, per l'uguaglianza degli archi AB, BC, è l'angolo AQB = BQC (§ 257). Onde le loro metà LQB, MQB sono pure tra loro eguali (§ 63). Sono anche gli angoli QBL, QBM eguali, come retti (§ 68). Dunque eguali sono pure gli angoli QLB, QMB; e conseguentemente eguali i loro doppj PLM, LMN. Similmente si dimostra essere l'angolo LMN = MNO, MNO = NOP, NOP = OPL. Dunque la figura LMNOP è equiangola. Finalmente, essendo i triangoli QBL, QBM equiangoli, e avendo di comune il lato QB, sarà LB=BM (§ 127). Allo stesso modo si dimostra essere MC = CN, ND = DO, OE = EP, PA = AL. Ma LA = LB. Dunque LP = LM (§ 63). Similmente è LM = MN, MN = NO, NO = OP. Sicchè la figura LMNOP è anche equilatera. Per la qual cosa intorno al dato cerchio s'è circoscritta la figura LMNOP, che si desiderava. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

317. Sicchè per circoſcrivere intorno al cerchio una figura regolare, è neceſſario ſaperla iſcrivere. Quindi ſi poſſono nella Geometria elementare circoſcrivere intorno a' cerchi ſolamente quelle figure regolari, le cui iſcrizioni ne' cerchi ſono poſſibili.

PROP. XLV. PROBL. XVI.

318. *Data qualunque figura regolare, iſcrivere dentro di eſſa il cerchio.*

Soluzione.

Sia LMNOP la figura regolare data.

1. Si dividano in due parti eguali due angoli qualunque PLM, LMN colle rette LQ, MQ, le quali prolungate s' uniſcono in Q.

2. Da Q ſi calino QA, QB, QC, QD, QE reſpettivamente perpendicolari a PL, LM, MN, NO, OP.

3. Preſo per centro il punto Q, e coll' intervallo QA, o QB, ec. ſi deſcriva il cerchio ACD.

Dico che ACD è 'l cerchio cercato.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette QP, QO, QN. Essendo ne' triangoli PLQ, MLQ il lato PL = ML, il lato LQ comune, e l'angolo PLQ = MLQ, sarà l'angolo LPQ = LMQ. Ma LMQ è metà di LMN. Dunque LPQ anche è metà di LPO. Similmente si dimostra che QO, e QN dividono in due parti eguali gli angoli PON, ONM. In oltre ne' triangoli LAQ, LBQ l'angolo LAQ = LBQ (§ 68), ALQ = BLQ, e 'l lato LQ comune. Onde AQ = BQ (§ 127). Coll'istesso raziocinio si dimostra essere BQ = CQ, CQ = DQ, DQ = EQ. Sicchè tutte le rette AQ, BQ, CQ, DQ, EQ sono tra loro eguali; e perciò il cerchio descritto passa per tutti gli punti A, B, C, D, E, e tocca per conseguenza tutt'i lati della figura in A, B, C, D, E. Per la qual cosa nella data figura s'è iscritto il cerchio ACD. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

COROLLARIO I.

319. Sicchè dividendo due angoli PLM, LMN di qualunque figura regolare LMNOP in due parti eguali colle rette LQ, MQ, che s'uniscono in Q, le rette tirate dal punto Q a tutti gli altri angoli della figu-

ra

Digitalizzato da Google

ra dividono queſt' altri angoli anche in due parti eguali.

COROLLARIO II.

320. In oltre per iſcrivere il cerchio in qualunque figura regolare, d' altro non v' è biſogno che della diviſione di due angoli della figura in due parti eguali. Dunque colla riga, e col compaſſo ſi può iſcrivere il cerchio in ogni figura regolare.

PROP. XLVI. PROBL. XVII.

321. *Data qualunque figura regolare, circoſcrivere intorno di eſſa il cerchio.*

SOLUZIONE.

Sia ABCDE la figura regolare data.

1. Si dividano in due parti eguali due angoli qualunque ABC, BCD colle rette BQ, CQ, le quali prolungate s' uniſcono in Q.

2. Preſo per centro il punto Q, e coll' intervallo QB, o QC ſi deſcriva il cerchio ACD.

Dico che ACD è 'l cerchio cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Si congiungano le rette QD, QE, QA: Dividendo QB, QC gli angoli in B e C del-

Digitalizzato da Google

della figura in due parti eguali, anche QD; QE, QA divideranno in due parti eguali gli angoli in D, E, A della figura. Sicchè gli angoli QAB, QBA ſono tra loro eguali, e conſeguentemente AQ = BQ (§ 119). Similmente ſi dimoſtra eſſere BQ = CQ, CQ = DQ, DQ = EQ. Onde tutte le rette QA, QB, QC, QD, QE ſono tra loro eguali; e perciò il cerchio deſcritto paſſa per tutt' i vertici degli angoli A, B, C, D, E della figura. Per la qual coſa intorno la figura s' è circoſcritto il cerchio ACD. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

COROLLARIO.

322. Per circoſcrivere adunque il cerchio intorno a qualunque figura regolare, d' altro non v' è biſogno, che della diviſione di due angoli della figura in due parti eguali. Onde colla riga, e col compaſſo ſi può circoſcrivere il cerchio intorno a qualunque figura regolare.

CA-

Digitalizzato da Google

CAP. VII.

Si dimostrano alcune proprietà de' lati delle prime cinque figure regolari, per poterli con facilità determinare relativamente al raggio di qualunque cerchio.

PROP. XLVII. TEOR. XXX.

323. *Il lato dell' esagono regolare iscrittibile in un cerchio è uguale al raggio del medesimo cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, per la costruzione fatta, Fig. 112. qualora s' è iscritto l' esagono ABCDEF nel cerchio ACE, il punto A è centro del cerchio BOF. Sicchè è AB = AO, cioè il lato dell' esagono eguale al raggio del cerchio ACE. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

324. Quindi, se 'l raggio d' un cerchio

Digitalizzato da Google

ſi va intorno intorno adattando nel cerchio, ſi ha l'eſagono regolare iſcritto nel cerchio.

PROP. XLVIII. TEOR. XXXI.

325. *Il quadrato del lato del triangolo equilatero iſcrittibile in un cerchio è triplo del quadrato del raggio del medeſimo cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

Dividendo l'eſagono regolare ABCDEF iſcritto nel cerchio ACE la periferia in 6 parti eguali, ſarà l'arco FAB la parte terza della periferia; onde la ſua corda ſarà il lato del triangolo equilatero iſcrittibile nel cerchio ACE. Ma l'angolo fatto dalla ſuddetta corda col lato BC dell'eſagono è retto, come fatto nel mezzo cerchio FBC. Dunque il quadrato del lato del triangolo equilatero, una col quadrato di BC è uguale al quadrato del diametro FC (§ 188), e perciò quadruplo del quadrato di OC, o di BC. Per la qual coſa il quadrato del lato del detto triangolo è triplo del quadrato di BC, o del raggio OC. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

ROP. XLIX. TEOR. XXXII.

326. *Il quadrato iſcritto in un cerchio è l'*

Digitalizzato da Google

è'l doppio del quadrato del raggio del medesimo cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, per la costruzione fatta, Fig. 108. qualora s' è iscritto il quadrato ABCD nel cerchio ABCD, l' angolo AOB è retto. Sicchè sarà il quadrato ABCD fatto su AB uguale alla somma de' quadrati fatti su i raggi AO, OB (§ 188), e perciò doppio del quadrato fatto sul raggio AO. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. L. TEOR. XXXIII.

327. *Se 'l raggio AO di qualunque cerchio ADB si divide in G in modo, che 'l rettangolo fatto da OA e AG sia uguale al quadrato fatto su OG; la porzione OG sarà il lato del decagono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio ADB.* Fig. 116.

DIMOSTRAZIONE.

S'adatti nel mezzo cerchio ADB la retta AC = OG, e si congiunga il raggio OC. Sarà AOC un triangolo isoscele, che avrà gli angoli alla base AC doppj dell' angolo AOC (§ 301). Onde AOC è $\frac{1}{5}$ di due retti, cioè di AOC, COB, e perciò $\frac{1}{4}$ di COB. Sicchè, diviso l' angolo COB

Digitalizzato da Google

in quattro parti eguali COD, DOE, EOF, FOB (§ 84), saranno i cinque angoli AOC, COD, DOE, EOF, FOB tra loro eguali; e perciò eguali i cinque archi AC, CD, DE, EF, FB (§ 255). Per la qual cosa l'arco AC è la quinta parte della mezza periferia; onde AC è lato del decagono regolare. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LI. TEOR. XXXIV.

328. *Se 'l raggio AO si prolunga in H in modo, che 'l rettangolo fatto da AH, e HO sia uguale al quadrato dell' istesso raggio AO; la porzione OH è anche il lato del decagono regolare iscrittibile nel medesimo cerchio ADB.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per l'ipotesi il rettangolo fatto da AH e HO uguale al quadrato di AO; tagliando OG = OH, sarà anche il rettangolo fatto da OA e AG uguale al quadrato di OG (§ 201). Onde OG sarà il lato del decagono regolare (§ prec.); e perciò OH sarà pure il lato del decagono regolare iscrittibile nel cerchio ADB. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LII. TEOR. XXXV.

329. *Il quadrato fatto ſul lato del pentagono regolare iſcrittibile in un cerchio è uguale alla ſomma de' quadrati fatti, uno ſul lato del decagono regolare iſcrittibile nel medeſimo cerchio, e l'altro ſul raggio del cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia ACDEFB un mezzo decagono iſcritto nel mezzo cerchio ADB. Si congiunga AD; e, dal centro O calata OI perpendicolare ad AC, ſi congiunga CK. Sarà AD un lato del pentagono; e ſarà l'angolo DOI uguale all'angolo DOC, una colla metà dell'angolo COA, e perciò eguale alla metà dell'angolo DOB, e conſeguentemente uguale all'angolo DAO (§ 239). Onde OD è tangente del cerchio circoſcritto al triangolo OIA (§ 246); e perciò il rettangolo fatto da AD e DI è uguale al quadrato di DO (§ 275). In oltre, eſſendo ne' triangoli CIK, AIK il lato CI = AI (§ 204), il lato IK comune, e l'angolo CIK = AIK, ſarà l'angolo KCI = KAI. Ma, pel triangolo iſoſcele ACD, l'angolo KAI = CDA (§ 115). Dunque anche ACK = CDA. E perciò AC è tangente del cerchio circoſcritto intorno al triangolo DCK (§ 246); e conſeguente-

Digitalizzato da Google

mente il rettangolo fatto da DA e AK è uguale al quadrato di AC (§ 275). Per la qual cosa la somma de' rettangoli fatti da DA e AK, e da AD e DK, o sia il quadrato di AD (§ 169) è uguale alla somma de' quadrati fatti su AC e DO. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

330. Premessi questi sei teoremi, è facile a determinare i lati delle figure regolari di 3, 4, 5, 6, e 10 lati iscrittibili in qualunque cerchio. Perciò soggiugniamo la seguente

PROP. LIII. PROBL. XVIII.

331. *Dato il raggio d'un cerchio, determinare i lati delle anzi dette figure iscrittibili nel medesimo cerchio.*

SOLUZIONE.

Fig. 117. Sia AB il raggio del cerchio dato.

1. Dal punto B s'innalzi BC perpendicolare, e uguale ad AB, e si congiunga AC.

2. Dal punto C s'innalzi CD perpendicolare ad AC, e uguale ad AB; e si congiunga AD.

3. Si divida AB in E in modo, che 'l ret-

Digitalizzato da Google

rettangolo fatto da BA e AE ſia eguale al quadrato di BE, e ſi congiunga CE; ovvero ſi prolunghi AB in F in modo, che 'l rettangolo fatto da AF e FB ſia uguale al quadrato di AB, e ſi congiunga CF.

Dico eſſere AB il lato dell'eſagono, AC del quadrato, AD del triangolo, BE, o BF del decagono, e CE, o CF del pentagono.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo AB il raggio, ſarà AB il lato dell'eſagono (§ 323). Inoltre, eſſendo il quadrato di AC eguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AB, BC (§ 188), e perciò doppio del quadrato del raggio AB, ſarà AC lato del quadrato (§ 326). Di più, eſſendo il quadrato di AD eguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu AC, CD (§ 188), e perciò triplo del quadrato del raggio AB, ſarà AD lato del triangolo equilatero (§ 325). Così ancora, eſſendo il rettangolo fatto da BA e AE ugual al quadrato di BE, o 'l rettangolo fatto da AF e FB uguale al quadrato di AB, ſarà BE (§ 327), o BF (§ 328) lato del decagono. Finalmente, eſſendo il quadrato di CE, o di CF uguale alla ſomma de' quadrati fatti ſu EB, BC, o ſu FB, BC, ſarà EC, o CF lato del pentagono (§ 329). Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO I.

332. V' è un altro modo ancora più facile del precedente per determinare il lato del decagono, e quello del pentagono relativamente al raggio di qualunque cerchio. Sieno tali lati da determinarsi relativamente al cerchio ABC. Dal centro O s' innalzi OB perpendicolare al diametro AC; e, diviso il raggio OC in due parti eguali in D, si congiunga DB; poscia preso per centro il punto D, e coll' intervallo DB si descriva il cerchio BE, che interseca colla periferia AO in E. Finalmente si congiunga BE. Sarà OE il lato del decagono, e BE il lato del pentagono. Imperciocchè il rettango fatto da CE e EO, una col quadrato fatto su OD è uguale al quadrato di ED (§ 179), e perciò eguale al quadrato di BD, e conseguentemente alli quadrati di BO, OD (§ 188). Sicchè, toltone il comune quadrato di OD, sarà il rettangolo fatto da CE, e EO uguale al quadrato di OB, o di OC. Onde EO è lato del decagono (§ 328), e conseguentemente BE è lato del pentagono (§ 329).

Fig. 118.

AVVERTIMENTO II.

333. La determinazione facile de' lati delle figure regolari serve per la facile i-

scri-

Digitalizzato da Google

ſcrizione delle medeſime figure ne' cerchi. Imperocchè, determinato un lato d'una figura regolare, che ſi vuole iſcrivere in un dato cerchio, adattandolo intorno intorno nel cerchio, ſi ha con facilità l'iſcrizione della figura, che ſi deſidera, nel cerchio.

AVVERTIMENTO III.

334. Finalmente ſe occorrerà calcolare i lati delle ſuddette figure relativamente al raggio di qualunque dato cerchio, l'operazione ſarà facile per ciò, che s'è dimoſtrato. Sia per eſempio il raggio OC di 100 palmi. E perchè il quadrato iſcritto nel cerchio è 20000, il lato ſarà palm. 141. 4, radice di 20000. In oltre, perchè il quadrato del lato del triangolo equilatero è in queſto caſo 30000, il lato del triangolo ſarà pal. 173. 2, radice di 30000. Di più, eſſendo OD = 50, e OB = 100, ſarà il quadrato di BD = 12500; onde la ſua radice 111. 3 dà BD, o ſia DE; e perciò EO, o ſia il lato del decagono = 61. 3. Finalmente, eſſendo OB = 100; EO = 61. 3, ſarà il quadrato di BE = 13757. 69; onde la ſua radice 117. 2 dà il lato del pentagono. Sicchè, poſto il raggio = 100, il lato del triangolo è = 173. 2, il lato del quadrato è = 141. 4, il lato del pentagono è = 117, 2, il lato dell'

Digitalizzato da Google

dell' esagono è = 100, e il lato del decagono = 61. 3.

Fine del secondo Libro.

LIBRO III.

Della dottrina della Ragione, e Proporzione geometrica, e dell' applicazione di tale dottrina a tutto ciò, che appartiene alla Geometria Piana.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

335. Due grandezze si dicono *Omogenee*, se sono uguali, o possono divenirle coll'accrescer l'una, o col diminuire l'altra. Si dicono poi *Eterogenee*, se non hanno uguaglianza, nè possono acquistarla, qualunque accrescimento si dia all'una, o diminuzione all'altra.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO I.

336. Sicchè tutte le linee, di qualunque ſpezie ſieno, ſono grandezze omogenee; perchè ognuna può divenire uguale a qualunque altra, accreſcendoſi la minore, o diminuendoſi la maggiore. Similmente grandezze omogenee ſono e tutte le ſuperficie, e tutt' i ſolidi, e turt' i moti de' corpi, e tutte le celerità, co' cui ſi muovono i corpi, e tutte le forze de' corpi, ec.. Le linee poi colle ſuperficie ſono grandezze eterogenee; perchè una linea, e una ſuperficie non hanno uguaglianza, nè poſſono giammai acquiſtarla, ancorchè la linea s'accreſca fino all' infinito, o la ſuperficie fino all' infinito ſi diminuiſca. Similmente grandezze eterogenee ſono una linea e un ſolido, una ſuperficie e un ſolido, una linea e un moto, ec.

DEFINIZIONE II.

337. Se due grandezze omogenee ſono diſuguali, la minore ſi dice *Parte* della maggiore, e la maggiore ſi dice *Multiplice* della minore.

DEFINIZIONE III.

338. Se la minore miſura eſattamente la

Digitalizzato da Google

la maggiore, si dice la minore *Parte aliquota* della maggiore, e la maggiore *Multiplice aliquoto* della minore. Se poi la minore non misura con esattezza la maggiore, allora la minore si dice *Parte aliquanta* della maggiore, e la maggiore si chiama *Multiplice aliquanto* della minore.

Così misurando il 3 *esattamente il* 15, *il* 3 *è parte aliquota del* 15, *e'l* 15 *multiplice aliquoto del* 3. *Laddove non misurando il* 4 *con esattezza il* 15, *il* 4 *è parte aliquanta del* 15, *e'l* 15 *multiplice aliquanto del* 4.

DEFINIZIONE IV.

339. Se una grandezza minore misura con esattezza più grandezze maggiori, si dice la minore *Parte aliquota comune* di tutte le maggiori. Se poi una grandezza maggiore viene misurata esattamente da più grandezze minori, la maggiore si dice *Multiplice aliquoto comune* di tutte le minori.

Così il 2 *è parte aliquota comune di* 4, 6, 8, 10, *e'l* 12 *è multiplice aliquoto comune di* 2, 3, 4, 6.

AVVERTIMENTO I.

340. Prima di procedere innanzi, veggiamo se due grandezze omogenee in tutti i gradi possibili della loro grandezza hanno sem-

Digitalizzato da Google

ſempre qualche aliquota comune sì, o no. E' certo che niuna quantità in ſe medeſima conſiderata può dirſi grande, o picciola, ma ognuna diceſi grande, o picciola conſiderata per riſpetto ad altre, che ſono o minori, o maggiori di eſſa. Sicchè le quantità non ſi poſſono conſiderare come grandezze, ſe non ſi conſiderano riferendo ognuna a qualch' altra omogenea. Dal conſiderare però le quantità, riferendo ognuna a qualch' altra, n' è derivato il modo d' eſprimerle co' numeri. Il che ſi fa prendendo per unità una parte aliquota della grandezza, che vuole eſprimerſi, ed eſprimendo la ſteſſa grandezza con un numero compoſto da tante unità, quante parti ſono in lei eguali all' aliquota preſa per unità. Così una lunghezza diceſi di 100 miglia, o di 100000 paſſi, o di 500000 piedi, ec. per riſpetto a diverſe ſue aliquote preſe per unità, ovvero per riſpetto a diverſe ſtabilite lunghezze minori, che ſi dicono un miglio, un paſſo, un piede, ec.

COROLLARIO I.

341. Quindi ne ſegue I. che una medeſima grandezza ſi può co' numeri diverſi eſprimere, conſiderandola relativamente a diverſe ſue aliquote. II. Che, non eſſendovi numero eſprimibile, che poſſa coſtare d' infinite unità, ogni grandezza ſi può eſpri-

Digitalizzato da Google

esprimere co' numeri relativamente alle sue aliquote finite, cioè relativamente alle aliquote, che la misurano un numero finito di volte; e non già relativamente alle aliquote infinitamente picciole, cioè relativamente alle aliquote, che la misurano un' infinito numero di volte. III. Che se due grandezze hanno un' aliquota comune finita, si possono elleno esprimere co' numeri composti da unità della stessa grandezza. IV. Che se due grandezze sono esprimibili co' numeri composti da unità della medesima grandezza, hanno anche un' aliquota comune finita, la quale fa le veci d' unità. V. Che se poi due grandezze non hanno un' aliquota comune finita, neppure sono esprimibili co' numeri composti da unità della medesima grandezza. VI. Che se finalmente due grandezze non sono esprimibili co' numeri composti da unità della stessa grandezza, nè tampoco hanno un' aliquota comune finita.

COROLLARIO II.

342. Sicchè dall' esser sì, o no due grandezze omogenee esprimibili co' numeri composti da unità della medesima grandezza, si conosce se hanno sì, o no un' aliquota comune finita, e determinata.

AV-

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO II.

343. Non v'ha dubbio che vi ſieno grandezze omogenee, le quali abbiano qualche aliquota comune finita: poichè una linea di 7 palmi, e un'altra di 11 hanno per aliquota comune finita la lunghezza d'un palmo, la quale miſura 7 volte l'una, e 11 volte l'altra. Similmente una linea di 3 canne, e un'altra di $5\frac{2}{3}$ hanno per aliquota comune finita $\frac{1}{3}$ di canna, che miſura 9 volte l'una, e 17 volte l'altra. Così ancora una ſuperficie di 8 piedi quadrati, e un'altra di 5. 3 hanno per loro aliquota comune finita $\frac{1}{10}$ di piede quadrato, che miſura 80 volte l'una, e 53 volte l'altra, ec.. Che vi ſieno poi grandezze ſenz'alcun'aliquota finita, neppure ſe ne può dubitare. Il lato del quadrato, e la diagonale ci ſomminiſtrano di tali grandezze un'eſempio illuſtre. Eſſendo il quadrato della diagonale doppio di quello del lato; ſe 'l lato del quadrato s'eſprime coll'unità, il quadrato della diagonale deeſi eſprimere col 2, e la diagonale colla radice del 2. Ma una tale radice non può giammai averſi con eſattezza, e i numeri 1. 4, 1. 41, 1. 414, 1. 4142, ec. non ci danno, che valori approſſimanti, e più, o meno approſſimanti, quanto più, o meno è 'l numero de' caratteri decimali ritrovati nella ra-

Digitalizzato da Google

radice. Dunque la vera grandezza della diagonale, posto il lato = 1, non è essattamente 1. 4, nè 1. 41, nè 1. 414, nè 1. 4142, ec.; e perciò parte aliquota comune del lato del quadrato, e della diagonale non è nè la parte decima del lato, nè la centesima, nè la millesima, nè la diecimillesima, nè altra parte finita del lato. Sicchè 'l lato del quadrato, e la diagonale non hanno aliquota comune finita; e se s'esprimono co' numeri 1, e 1.4142, si prende in tal caso per la diagonale una grandezza misurata dalla diecimillesima del lato 14142 volte; la quale grandezza non è esattamente la diagonale. Quali poi sieno le altre grandezze, che non hanno alcun' aliquota finita, si dirà a luogo più opportuno. Ci basta a noi d'aver fatto vedere che tra le grandezze omogenee ve ne sono e di quelle che hanno aliquote comuni finite, e di quelle che non ne hanno punto. E quindi s'intende perchè le grandezze distinte si sono in *Grandezze commensurabili*, e in *Grandezze incommensurabili*.

DEFINIZIONE V.

344. Due grandezze omogenee si dicono *Commensurabili*, se hanno un'aliquota comune finita, cioè se si possono esprimere co' numeri composti da unità della medesima grandezza. Due grandezze poi si dicono

Digitalizzato da Google

no *Incommenſurabili*, ſe non hanno un' aliquota comune finita, cioè ſe non ſono eſprimibili co' numeri compoſti da unità della medeſima grandezza.

COROLLARIO I.

345. Dunque due grandezze incommenſurabili, come il lato del quadrato, e la diagonale, o non hanno affatto aliquota comune, o, ſe l' hanno, è infinitamente picciola; vale a dire che, ſe l' hanno, è tale, che per riſpetto a lei non ſi poſſono le grandezze eſprimere co' numeri.

AVVERTIMENTO I.

346. Si noti che ſi può ſempre ſupporre avere due grandezze incommenſurabili un' aliquota comune infinitamente picciola. Imperciocchè ſupponendo una parte infinitamente picciola del lato del quadrato, una tal parte o miſura con eſattezza la diagonale, o almeno miſura con eſattezza una linea, che differiſce dalla diagonale per una differenza minore della detta parte infinitamente picciola, ovvero per una differenza, che ſenz' errore ſenſibile può traſcurarſi; e perciò miſura ella una linea, che ſenz' errore ſenſibile ſi può prendere per la diagonale.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

347. Sicchè o due gradezze omogenee ſono commenſurabili, ed in tal caſo hanno un' aliquota comune finita, ed aſſignabile, o ſono incommenſurabili, ed in tal' altro caſo hanno un' aliquota comune infinitamente picciola, e ſoltanto immaginabile.

AVVERTIMENTO II.

348. Si noti pure che ſe ſaranno più grandezze omogenee, ch' io per chiarezza chiamo A, B, C, D, ec.; avendo ſempre A e B un' aliquota comune; ſe una tale aliquota ſi chiamerà L, auranno pure ſempre L e C un' aliquota comune, e una tale aliquota ſarà aliquota comune di A, B, C. Similmente avendo ſempre A, B, C un' aliquota comune; ſe una tale aliquota ſi chiamerà M, auranno pure ſempre M e D un' aliquota comune, e una tale aliquota ſarà aliquota comune di A, B, C, D. Allo ſteſſo modo procedendo innanzi ſi conoſce che non ſolamente due, ma quante ſi ſieno grandezze omogenee hanno ſempre un' aliquota comune, la quale dee eſſer finita, ſe le grandezze ſono tutte commenſurabili, ed infinitamente picciola, ſe non ſono tra loro tutte commenſurabili.

DE-

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE VI.

349. Se due, o più grandezze minori misurano esattamente, e ugual numero di volte altrettante grandezze maggiori, le minori si dicono *Parti aliquote simili* delle maggiori, e le maggiori *Multiplici simili*, o *Egualmente multiplici* delle minori.

Così tre linee di palmi 2, 3, 4 *sono aliquote simili d'altrettante linee di palmi* 8, 12, 16; *perchè quelle misurano queste respettivamente con esattezza quattro volte. Similmente una linea di* 3 *palmi, una superficie di palmi quadrati* 5, *e un solito di palmi cubici* 8 *sono aliquote simili d'una linea di palmi* 9, *d'una superficie di palmi quadrati* 15, *e d'un solido di palmi cubici* 24; *poichè quelle misurano queste respettivamente con esattezza tre volte.*

COROLLARIO.

350. E' chiaro che due grandezze, omogenee, o eterogenee, che sieno, possono avere infinite aliquote simili; perchè possono avere infinite parti, come le loro metà, terze, quarte, quinte, e così procedendo all'infinito, che le misurino esattamente, e ugual numero di volte.

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE VII.

351. *Ragione* dicesi il paragone di due grandezze omogenee fatto circa la loro quantità. Le due grandezze diconsi *Termini* della ragione; e con ispezialità quella, che si paragona, si dice *Antecedente*, e l'altra, con cui si fa il paragone, si chiama *Conseguente*.

AVVERTIMENTO.

352. In due modi si possono le grandezze omogenee paragonare circa la loro quantità, o offervando quante volte l'una contiene l'altra, o offervando di quanto l'una avanza l'altra. Quindi è derivata la distinzione della ragione in *Ragione Geometrica*, e in *Ragione Aritmetica*.

DEFINIZIONE VIII.

353. La Ragione dicesi *Geometrica*, se le grandezze si paragonano offervando quante volte l'antecedente contiene il conseguente. Dicesi poi *Aritmetica*, se 'l paragone si fa offervando di quanto l'antecedente eccede il conseguente.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

354. E' neceſſario adunque che i termini della ragione ſieno ſempre grandezze omogenee ; altrimenti l'antecedente non può nè contenere , nè eccedere il conſeguente .

AVVERTIMENTO I.

355. Si noti che ſe A e B contraſſegneranno le due grandezze omogenee da paragonarſi , la loro ragione ſi noterà , o ſcrivendo : *Ragione di A a B* , o ſcrivendo : *Ragione di A : B* ; e ſi profferirà dicendo ſempre : *Ragione di A a B.*

AVVERTIMENTO II.

356. Si noti ancora che , avendo nella Geometria elementare uſo ſolamente la ragione geometrica , della ragione geometrica ſolamente quì tratteremo ; onde col vocabolo *Ragione* ſi dovrà ſempre intendere appreſſo la ragione geometrica .

DEFINIZIONE IX.

357. *Quantità , Eſponente , o Denominatore* della ragione ſi dice il numero , ch' eſpri-

Digitalizzato da Google

ſprime quante volte l'antecedente contiene il conſeguente.

COROLLARIO I.

358. Conſiſtendo la ragione nel paragone di due grandezze omogenee fatto coll'offervare quante volte l'antecedente contiene il conſeguente; ne ſegue che allora ſi conoſcerà la vera ragione di due grandezze, quando ſi conoſcerà con eſattezza quante volte l'antecedente conterrà il conſeguente; conoſcenza invero che non può averſi, ſe le grandezze non s'eſprimono co' numeri compoſti da unità della medeſima grandezza.

COROLLARIO II.

359. Dunque allora la vera ragione di due grandezze ſi conoſce, e ſi determina quanta ſia, quando ſi ſa quante volte il conſeguente miſura l'antecedente, o quante volte l'antecedente, e 'l conſeguente vengono miſurati da qualche loro aliquota comune finita; vale a dire quando le grandezze ſono commenſurabili. Così ſe una grandezza minore miſura 5 volte un'altra maggiore, la ragione della maggiore alla minore ſi ſa eſſere in tal caſo di 5 : 1, e quella della minore alla maggiore di 1 : 5; delle quali ragioni la prima ha per quantità il 5, e la

Digitalizzato da Google

e la seconda $\frac{1}{5}$. Così ancora se l'aliquota comune finita di due grandezze disuguali misura la maggiore 9 volte, e la minore 7, la ragione della maggiore alla minore si fa essere di 9 : 7, e quella della minore alla maggiore di 7 : 9; delle quali ragioni la prima ha per quantità $\frac{9}{7}$, e l'altra $\frac{7}{9}$.

AVVERTIMENTO.

360. Si noti che ancorchè delle grandezze incommensurabili, come del lato del quadrato, e della diagonale, non se ne possa sapere la vera ragione, non essendo tali grandezze al giusto esprimibili co' numeri composti da unità della medesima grandezza: con tutto ciò, perchè, posto il lato = 1, il numero 1. 4142 esprime una linea, che senza sensibile errore si può prendere per la diagonale, la ragione di 1 : 1. 4142 si può prendere non per la ragione vera del lato del quadrato alla diagonale, ma per una ragione prossima alla vera.

COROLLARIO III.

361. Sicchè delle grandezze commensurabili si può determinare la vera ragione, e delle incommensurabili si può determinare una ragione prossima alla vera. E quindi è

Digitalizzato da Google

derivata la distinzione della ragione in *Razionale*, e *Irrazionale*.

DEFINIZIONE X.

362. La ragione di due grandezze si dice *Razionale*, se ella si può con esattezza determinare; si dice poi *Irrazionale*, se si può determinare solamente a un di presso.

COROLLARIO.

363. Sicchè la ragione delle grandezze commensurabili è razionale, e quella delle incommensurabili è irrazionale.

DEFINIZIONE XI.

364. La ragione razionale si dice di *Maggiore ineguaglianza*, di *Eguaglianza*, o di *Minore ineguaglianza*, secondochè l'antecedente è maggiore, eguale, o minore del conseguente.

COROLLARIO.

365. Dunque la quantità della ragione di maggiore ineguaglianza è maggiore dell'unità, quella della ragione d'eguaglianza è uguale all'unità, e quella della ragione di minore ineguaglianza è minore dell'unità.

DE.

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE XII.

366. Si dice l' antecedente avere ragione *Dupla*, *Tripla*, *Quadrupla*, *Quintupla*, ec. al ſuo conſeguente, ſe l' antecedente è doppio, triplo, quadruplo, quintuplo, ec. del conſeguente. Si dice poi l' antecedente avere ragione *Sudduplа*, *Suttripla*, *Suqquadrupla*, ec. al ſuo conſeguente, ſe l' antecedente è la metà, terza, quarta parte, ec. del conſeguente.

DEFINIZIONE XIII.

367. Si dicono *Ragioni eguali* quelle, che hanno quantità eguali; ſi dicono poi *Ragioni diſuguali* quelle, che hanno quantità diſuguali. E ſpezialmente ſi dice *Ragione maggiore* quella, la cui quantità è maggiore.

COROLLARIO I.

368. Dunque quando due ragioni ſono eguali, gli antecedenti ſono o amendue maggiori, o amendue eguali, o amendue minori reſpettivamente de' conſeguenti.

COROLLARIO II.

369. Eſſendo quantità della ragione il nu-

Digitalizzato da Google

numero, ch' esprime quante volte l' antecedente contiene il conseguente; è chiaro che se le quantità di due ragioni sono eguali alla quantità d' una terza ragione, tali quantità sono anche uguali tra loro; e che se le quantità di due ragioni sono eguali tra loro, e la quantità d' una di esse è maggiore, o minore della quantità d' una terza ragione, sarà la quantità dell' altra ragione maggiore, o minore ancora della quantità della terza. E perciò se due ragioni sono eguali a una terza, sono anche uguali tra loro; e se due ragioni sono eguali tra loro, e una di esse è maggiore, o minore d' una terza, l' altra è anche maggiore, o minore della stessa terza.

DEFINIZIONE XIV.

370. Una ragione si dice *Semplice*, s' è 'l paragone di due sole grandezze; si dice poi *Composta*, se la sua quantità è 'l prodotto delle quantità di più ragioni semplici.

Così se saranno le ragioni semplici di 2 : 1, *di* 6 : 2, *di* 12 : 3; *perchè le quantità loro sono* 2, 3, 4, *e 'l prodotto di tali quantità è* 24; *si dirà ogni ragione, che ha per quantità il* 24, *come la ragione di* 24 : 1, *quella di* 48 : 2, *quella di* 72 : 3, *ec. composta*

Digitalizzato da Google

posta dalle ragioni di 2 : 1, *di* 6 : 2, *di* 12 : Ξ

DEFINIZIONE XV.

371. Una ragione composta da più ragioni eguali si dice *Duplicata*, *Triplicata*, *Quadruplicata*, *Quintuplicata*, ec. di ciascuna delle ragioni componenti, secondochè il numero delle componenti è 2, 3, 4, 5, ec.

DEFINIZIONE XVI.

372. La ragione del conseguente all' antecedente in ogni ragione si dice *Reciproca* di quella dell' antecedente al conseguente.

Così della ragione di A : B la reciproca è quella di B : A.

DEFINIZIONE XVII.

373. Se si considererà la ragione di A : B relativamente a quella di C : D; si dirà la ragione di A : B esser *Diretta* della della ragione di C : D, se quella di A : B sarà eguale all' altra di C : D; si dirà poi la ragione di A : B esser *Reciproca* della ragione di C : D, se la ragione di A : B sarà eguale alla ragione di D : C.

Digitalizzato da Google

DEFINIZIONE XVIII.

374. Si dice *Proporzione Geometrica* l' uguaglianza di due ragioni geometriche.

AVVERTIMENTO.

375. Si noti che nella proporzione geometrica tra le due ragioni eguali s' intramettono quattro punti (: :), o 'l ſegno dell' uguaglianza (=). Onde ſi ſcrive la proporzione geometrica a queſto modo A : B :: C : D, o a queſt' altro A : B = C : D, e ſi profferiſce dicendo A ſta al B, come il C al D.

COROLLARIO I.

376. Eſſendo la proporzione formata da due ragioni eguali, il primo, e 'l terzo termine ſaranno o amendue maggiori, o amendue eguali, o amendue minori reſpettivamente degli altri due termini.

COROLLARIO II.

377. Potendo eſſere due ragioni geometriche eguali tra loro, ancorchè le grandezze dell' una ſieno eterogenee colle grandezze dell' altra; ne ſegue che nella proporzione geometrica poſſono eſſere le grandezze

Digitalizzato da Google

dezze d'una ragione omogenee colle grandezze dell'altra, e poſſono anch'eſſere eterogenee.

DEFINIZIONE XIX.

378. La Proporzione geometrica diceſi *Diſcreta*, ſe viene compoſta da quattro grandezze tra loro diverſe; diceſi poi *Continua*, ſe viene compoſta da tre, e quella di mezzo è conſeguente nella prima ragione, e antecedente nella ſeconda.

Così $A : B = C : D$ *diceſi proporzione diſcreta, e continua* $A : B = B : C$.

COROLLARIO.

379. Dunque nella proporzione continua vi ſono tre grandezze, e nella diſcreta quattro. E perciò v'è biſogno almeno di tre grandezze per fare la proporzione.

DEFINIZIONE XX.

380. Le grandezze, che formano la proporzione ſi dicono *Grandezze proporzionali*. Quella di mezzo nella proporzione continua ſi dice la *Mezza proporzionale*. I due antecedenti ſi dicono tra loro *Grandezze omologhe*, e i due conſeguenti ſi dicono pure tra loro *Grandezze omologhe*.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

381. E' vero che la dottrina delle ragioni, e proporzioni, riſguardando tutte le ſpezie di grandezze, merita d' eſſer trattata in una ſcienza più generale della Geometria, e propriamente nell' Algebra, la quale s' occupa intorno a tutte le grandezze conſiderate in generale. Però la neceſſità di dover inſegnare le teoriche più importanti della Geometria, che dalla dottrina della ragione, e proporzione geometrica dipendono, e di doverle inſegnare ſenz' obbligare i giovani a ſtudiare l' Algebra prima della Geometria, ci aſtrigne ad inſegnare in queſto luogo la ſuddetta dottrina della ragione, e proporzione geometrica; riſerbandoci per l' Algebra la dottrina di tutte le ragioni, e proporzioni. Intanto in queſto luogo alla dottrina della ragione, e proporzione geometrica non ſe le diminuirà punto la ſua generalità. Onde ſe faremo uſo delle linee, ciò ſarà per comodo di adoperar ſegni facili a idearſi da' giovani, e facili a farſi. Del reſto le linee faranno quì le veci di caratteri generali, co' cui contraſſegneremo non le ſole lunghezze, ma grandezze d' ogni ſorta.

CA-

Digitalizzato da Google

CAP. I.

De' caratteri da conoſcere l' uguaglianza, e la diſuguaglianza delle ragioni, e dell' uſo di tali caratteri in determinare di quali grandezze le ragioni ſono eguali, e di quali ſono diſuguali.

PROP. I. TEOR. I.

382. *Due ragioni ſono eguali, ſe l' aliquote ſimili de' conſeguenti ſono aliquote ſimili pure degli antecedenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno nelle due ragioni di A : B, e di C : D le grandezze L e M aliquote ſimili sì de' conſeguenti B e D, che degli antecedenti A, e C. E poichè la ragione di A : B è la ſteſſa di quella del numero delle parti di A, che uguagliano L, al numero delle parti di B, che pure uguagliano L; e la ragione di C : D è la ſteſſa di quella del numero delle parti di C, che Fig. 119.

Digitalizzato da Google

C, che uguagliano M, al numero delle parti di D, che uguagliano anche M. Dunque, essendo gli stessi i numeri delle parti di A e C, che uguagliano respettivamente L e M, e gl' istessi i numeri delle parti di B e D, che pure uguagliano respettivamente L e M, la quantità della ragione di A : B sarà la stessa della quantità della ragione di C : D. E perciò la ragione di A : B è uguale alla ragione di C : D (§ 367). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

383. Se i conseguenti B e D saranno aliquote simili degli antecedenti A e C; prese L e M aliquote simili di B e D, saranno L e M aliquote simili ancora di A e C; e perciò le ragioni di A : B, e di C : D saranno eguali. Sicchè due ragioni sono pure eguali, se i conseguenti sono aliquote simili degli antecedenti.

PROP: II. TEOR. II.

384. *Se L e M sono aliquote simili de' conseguenti B e D, e non già degli antecedenti A e C, e L misura più volte A di quello M misura il C; sarà la ragione di A : B maggiore della ragione di C : D.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ragione di A : B è la ſteſſa di quella del numero delle parti di A, che uguagliano L, al numero delle parti di B, che uguagliano pure L. Similmente la ragione di C : D è la ſteſſa di quella del numero delle parti di C, che uguagliano M, al numero delle parti di D, che uguagliano anche M. Ma ancorchè i numeri delle parti di B e D, che uguagliano reſpettivamente L e M ſieno gli ſteſſi, il numero però delle parti di A, che uguagliano L, è maggiore del numero delle parti di C, che uguagliano M. Dunque la quantità della ragione di A : B è maggiore della quantità della ragione di C : D; e conſeguentemente la ragione di A : B è maggiore della ragione di C : D (§ 367). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

385. Se B miſura più volte A di quello che D miſura G; preſe L e M aliquote ſimili di B e D, anche L miſurerà A più volte di quello che M miſura C; onde la ragione di A : B è maggiore della ragione di C : D. Sicchè ſe B miſura A più volte di quel che D miſura C, la ragione

Digitalizzato da Google

gione di A : B è maggiore della ragione di C : D.

PROP. III. TEOR. III.

386. *Sia la ragione di A : B uguale alla ragione di C : D. Dico che tra le infinite diverſe aliquote ſimili, che poſſono avere i conſeguenti, ve ne debbono eſſere di quelle, che ſi poſſono prendere per aliquote degli antecedenti, e tali aliquote ſi debbono prendere ancora per aliquote ſimili de' medeſimi antecedenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Potendo avere B e D infinite diverſe aliquote ſimili (§350), poſſono averne ancora delle aliquote ſimili infinitamente picciole. Dunque B e D poſſono avere aliquote ſimili, che ſi poſſono prendere per aliquote di A e C (§346). Si concepiſca che L e M ſieno sì fatte aliquote. Se L e M non ſono aliquote ſimili di A e C, la ragione di A : B non è eguale a quella di C : D. Ma ciò ripugna all'ipoteſi. Dunque L e M, che ſi poſſono prendere per aliquote di A e C, ſi debbono prendere anche per aliquote ſimili di A e C. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. IV. TEOR. IV.

387. *Sia la ragione di A : B maggiore di quella di C : D. Dico che tra le infinite diverse aliquote simili, che possono avere i conseguenti B e D, ve ne debbono essere di quelle, che si possono prendere per aliquote di A e C, e sì fatte aliquote debbono esser tali, che l' una dee misurare più volte A di quello l' altra misura il C.*

DIMOSTRAZIONE.

Potendo avere B e D infinite diverse aliquote simili (§ 350), possono averne ancora delle aliquote simili infinitamente piciole. Dunque B e D possono avere aliquote simili, che si possono prendere per aliquote di A e C (§ 346). Si concepisca che L e M sieno sì fatte aliquote. Se L non misura più volte A di quello M misura C, misurerà L l' istesso, o minor numero di volte A di quello M misura C. Onde la ragione di A : B è o eguale alla ragione di C : D (§ 382), o minore della stessa ragione di C : D (§ 384). Ma amendue tali cose ripugnano all' ipotesi. Dunque L dee misurare più volte A di quello M misura il C. Sicchè delle grandezze L e M, che si possono prendere per aliquote simili di A e C, più volte L mi-

Digitalizzato da Google

ſura A di quello M miſura il C. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

388. Poſti i caratteri da conoſcere l'uguaglianza, e la diſuguaglianza di due ragioni, e poſte le converſe di tali caratteri. Procediamo a vedere di quali grandezze le ragioni ſono uguali, e di quali ſono diſuguali.

PROP. V. TEOR. V.

389. *Se due grandezze uguali ſi paragonano con una terza omogenea, le due grandezze hanno eguali ragioni alla terza, e la terza ha uguali ragioni alle due grandezze.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 120. Sieno A e B le due grandezze uguali, e C ſia la terza omogenea. S'intenda eſſere L aliquota comune di A e C. Eſſendo A = B, miſurerà L tante volte A, quante volte miſura B. Onde L e L ſono aliquote ſimili sì di A e B, che di C e C. E perciò la ragione di A : C è uguale alla ragione di B : C, e la ragione di C : A è uguale a quella di C : B (§ 382). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. VI. TEOR. VI.

390. *Se due grandezze diſuguali ſi paragonano con una terza omogenea, la ragione della grandezza maggiore alla terza è maggiore della ragione della minore alla ſteſſa terza; e all' oppoſto la ragione della terza alla minore è maggiore della ragione della ſteſſa terza alla maggiore.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno A e B due grandezze diſuguali, delle quali A ſia la maggiore, e B la minore; e ſia C la terza omogenea. Fig. 121.

I. S' intenda eſſere L aliquota comune di A, B, C. Eſſendo A maggiore di B, miſurerà L più volte A che B. Dunque L e L ſono aliquote ſimili di C e C, e non già di A e B; e miſurando L più volte A di quello la ſteſſa L miſura il B, ſarà la ragione di A : C maggiore della ragione di B : C (§ 384).

II. S' intenda eſſere L e M aliquote ſimili di A e B, e aliquote di C. Eſſendo A maggiore di B, ſarà L maggiore ancora di M. Onde M miſurerà più volte C di quello L miſura la ſteſſa C. Dunque M e L ſono aliquote ſimili di B e A, e non già di C e C; e miſurando M più volte C di quello L miſura la ſteſſa

Digitalizzato da Google

C, ſarà la ragione di C: B maggiore della ragione di C: A (§ 384). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. VII. TEOR. VII.

391. *Le grandezze, che hanno uguali ragioni a una terza, ſono eguali tra loro; e le grandezze, alle quali una terza ha eguali ragioni, ſono tra loro anche uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 120. I. Sia la ragione di A: C uguale alla ragione di B: C. Se non è A = B, ſarà A maggiore, o minore di B. Dunque la ragione di A: C è maggiore, o minore di quella di B: C (§ 39.). Ma ciò ripugna all' ipoteſi. Dunque ripugna che non ſia A = B. Onde è A = B.

II. Sia la ragione di C: A uguale alla ragione di C: B. Se non è anche A = B, ſarà A maggiore, o minore di B. Dunque la ragione di C: A è minore, o maggiore di quella di C: B (§ 390). Ma ciò pure ripugna all' ipoteſi. Sicchè ripugna che non ſia A = B; e perciò è A = B. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. VIII. TEOR. VIII.

392 *Sia la ragione di A : C maggiore della ragione di B : C. Dico che A è maggiore di B. Sia in oltre la ragione di C : B maggiore di quella di C : A. Dico pure che A è maggiore di B.* Fig. 121.

DIMOSTRAZIONE.

I. Se si niega esser A maggiore di B, sarà A eguale, o minore di B. Dunque la ragione di A : C è uguale (§ 389), o minore della ragione di B : C (§ 390). Ma ciò ripugna all' ipotesi. Dunque ripugna che non sia A maggiore di B. E per. ciò è A maggiore di B.

II. Se si niega pure essere A maggiore di B, sarà A eguale a B, o minore di B. Dunque la ragione di C : B è uguale alla ragione di C : A (§ 389), o minore della ragione di C : A (§ 390). Ma anche ciò ripugna all' ipotesi. Sicchè ripugna che A non sia maggiore di B. Per la qual cosa A è maggiore di B. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

Digitalizzato da Google

CAP. II.

Della dottrina della Ragione composta.

PROP. IX. TEOR. IX.

Fig.122. 393. *Sieno le ragioni di A : B , di C : D , di E : F , ec. respettivamente eguali alle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q , ec. . Dico la ragione composta da quelle esser eguale alla ragione composta da queste.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo le ragioni di A : B , di C : D, di E , F eguali respettivamente alle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q , gli stessi numeri , ch' esprimeranno le quantità di quelle , esprimeranno ancora respettivamente le quantità di queste . Onde il prodotto delle quantità delle ragioni di A : B , di C : D , di E : F dee uguagliare il prodotto delle quantità delle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q . E perciò la composta dalle ragioni di A : B , di C : D , di E : F è uguale alla composta dalle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q (§367). Ch' è ciò , che bisognava dimostrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. X. TEOR. X.

394. *Sieno le ragioni di A : B , di C : D , di E : F , ec. respettivamente maggiori , o minori delle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q , ec.. Dico che la composta da quelle è anche maggiore , o minore della composta da queste .*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo le ragioni di A : B , di C : D , di E : F maggiori , o minori respettivamente delle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q , saranno i numeri esprimenti le quantità di quelle respettivamente maggiori , o minori de' numeri esprimenti le quantità di queste. Onde il prodotto delle quantità delle ragioni di A : B , di C : D , di E : F dee essere maggiore , o minore del prodotto delle quantità delle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q. E perciò la composta dalle ragioni di A : B , di C : D , di E : F è maggiore , o minore della composta dalle ragioni di L : M , di N : O , di P : Q (§367) . Ch' è ciò , che bisognava dimostrare .

AVVERTIMENTO.

395. Si noti che possono essere due ragio-

Digitalizzato da Google

gioni compoſte eguali, ſenza che le loro componenti ſieno reſpettivamente eguali. Così ſe una ragione viene compoſta da due, che hanno per quantità *6* e 2, e un' altra viene compoſta da due, che hanno per quantità 4, e 3, le due compoſte ſono eguali, e non già le componenti.

PROP. XI. TEOR. XI.

396. *Sieno A, B, C tre grandezze omogenee qualunque. Dico la ragione di A : C eſſer compoſta dalle ragioni di A : B, e di B : C.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappreſentino L, M, N i numeri eſprimenti le grandezze A, B, C relativamente a una loro aliquota comune; eſprimerà il rotto $\frac{L}{M}$ la quantità della ragione di A : B, e 'l rotto $\frac{M}{N}$ la quantità della ragione di B : C. Onde il prodotto $\frac{L}{M} \times \frac{M}{N}$ eſprimerà la quantità della compoſta dalle ragioni di A : B, di B : C. Ma un tale prodotto è uguale al rotto $\frac{L}{N}$, ovvero alla quantità della ragione di A : C. Dunque la ragione di A : C è com-

Digitalizzato da Google

composta dalle ragioni di A : B, e di B : C (§ 370). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

397. Sieno A, B, C, D, E, F, ec. grandezze tutte omogenee. Essendo la ragione di A : F composta dalle ragioni di A : E, di E : F, quella di A : E composta dalle ragioni di A : D, di D : E, quella di A : D composta dalle ragioni di A : C, di C : D, e quella di A : C composta dalle ragioni da A : B, di B : C; sarà la ragione di A : F composta da tutte le ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F. Sicchè se tra due grandezze omogenee se ne intrametrono quant' altre se ne vogliono, e di qualunque grandezza, la ragione della prima all' ultima è sempre composta da tutte le ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta, e così procedendo fino all' ultima.

COROLLARIO II.

398. Quindi se A, B, C, D, E; F, ec. saranno continuamente proporzionali, la ragione della prima A alla terza C sarà composta dalle due ragioni eguali di A : B, e di B : C, e perciò sarà duplicata della ragione di A : B; la ragione della prima A al-

Digitalizzato da Google

A alla quarta D sarà composta dalle tre ragioni eguali di A : B, di B : C, di C : D, e perciò sarà triplicata di quella di A : B; la ragione della prima A alla quinta E sarà composta dalle quattro ragioni eguali di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, e perciò quadruplicata di quella di A : B; la ragione della prima A alla sesta F sarà composta dalle cinque ragioni eguali di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F, e perciò sarà quintuplicata della ragione di A : B; e così procedendo all'infinito.

PROP. XII. TEOR. XII.

399. *Sieno le ragioni di A : B, e di L : M eguali tra loro. Dico che le loro duplicate, triplicate, quadruplicate, ec. sono anche tra loro eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè essendo le ragioni di A : B e di L : M eguali tra loro, le loro duplicate, triplicate, quadruplicate, ec. avranno componenti respettivamente eguali. Onde saranno tra loro eguali (§ 393). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XIII. TEOR. XIII.

400. *Se la ragione di A : B è maggiore, o minore della ragione di* **L** : *M, la duplicata, la triplicata, la quadruplicata, ec. di quella ſono anche maggiori, o minori reſpettivamente della duplicata, triplicata, quadruplicata, ec. di queſta.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè eſſendo la ragione di A : B maggiore, o minore della ragione di L : M, faranno le componenti della duplicata, triplicata, quadruplicata, ec. di quella di A : B reſpettivamente maggiori, o minori delle componenti della duplicata, triplicata, quadruplicata, ec. della ragione di L : M. E perciò la duplicata, la triplicata, la quadruplicata, ec. della ragione di A : B ſono maggiori, o minori della duplicata, triplicata, quadruplicata, ec. della ragione di L : M (§ 394). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XIV. TEOR. XIV.

401. *Se le duplicate, triplicate, quadruplicate, ec. delle ragioni di A : B, e di L : M ſono reſpettivamente eguali, anche le ragioni di A : B e di L : M ſono tra loro eguali.*

DI

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega che le ragioni di A : B e di L : M sieno eguali ; sarà la ragione di A : B maggiore , o minore della ragione di L : M . Onde la duplicata , la triplicata, la quadruplicata , ec. della ragione di A : B saranno maggiori , o minori respettivamente della duplicata , della triplicata , della quadruplicata , ec. di quella di L : M (§ 400). Ma ciò ripugna all' ipotesi . Dunque ripugna che la ragione di A : B non sia eguale a quella di L : M . Sicchè le ragioni di A : B e di L : M sono eguali . Ch' è ciò, che bisognava dimostrare .

CAP. III.

Delle principali trasformazioni , che si possono fare nelle due ragioni di qualsivoglia proporzione geometrica , senza togliere la proporzione .

DEFINIZIONE I.

402. Si dirà che una ragione s' *Inverte* , quando si paragona il suo conseguente coll' antecedente . Così,

Digitalizzato da Google

Così, invertendo la ragione di A : B, nasce la ragione di B : A.

DEFINIZIONE II.

403. Si dirà che una ragione si *Compone*, quando si paragona la somma dell'antecedente e conseguente col medesimo conseguente.

Così, componendo le ragioni di A : B, nasce la ragione di A + B : B.

DEFINIZIONE III.

404. Si dirà che una ragione si *Divide*, quando si paragona l'eccesso dell'antecedente sul conseguente coll'istesso conseguente.

Così, dividendo la ragione di A : B, nasce la ragione dell'eccesso di A sopra il B al B.

DEFINIZIONE IV.

405. Si dirà che una ragione si *Converte*, quando si paragona l'antecedente coll'eccesso dell'antecedente sul conseguente.

Così, convertendo la ragione di A : B, nasce la ragione di A all'eccesso di A sopra il B.

PROP. XV. TEOR. XV.

406. *Se quattro grandezze sono proporzionali,*

Digitalizzato da Google

mali, invertendo i termini delle due ragioni, si hanno grandezze anche proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

Fig.119. Sia A : B = C : D. S'intenda che L e M sieno le aliquote simili di B e D, che si possono prendere per aliquote simili ancora di A e C (§ 386). Dunque, prese A e C per conseguenti, e B e D per antecedenti, le aliquote simili L e M de' conseguenti A e C sono aliquote simili ancora degli antecedenti B e D. Perciò B : A = D : C (§ 382). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVI. TEOR. XVI.

Fig.123. 407. *Sia AB : BC = DE : EF. Dico che componendo sta AC : CB = DF : FE.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda essere L e M le aliquote simili di BC, EF, che si possono prendere anche per le aliquote simili di AB, DE. Misurando L e M respettivamente lo stesso numero di volte sì AB e DE, che BC ed EF, misureranno ancora L e M lo stesso numero di volte AC, DF. Dunque L e M sono aliquote simili sì di BC, EF, che di AC, DF. E perciò AC : CB = DF :

Digitalizzato da Google

= DF : FE (§ 382). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVII. TEOR. XVII.

408. *Sia* $AC : CB = DF : FE$. *Dico che dividendo sarà* $AB : BC = DE : EF$.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda essere L e M le aliquote simili di BC e di EF, che si possono anche prendere per aliquote simili di AC e di DF. Misurando L e M respettivamente lo stesso numero di volte BC, EF, e lo stesso numero di volte AC, DF, misureranno ancora L e M lo stesso numero di volte AB, DE. Dunque L e M sono aliquote simili sì di BC ed EF, che di AB e DE. E perciò AB : BC = DE : EF (§ 382). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVIII. TEOR. XVIII.

409. *Sia* $AB : BC = DE : EF$. *Dico che sta ancora* $AB : AC = DE : DF$.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB : BC = DE : EF, sarà invertendo CB : BA = FE : ED (§406); e componendo CA : AB = FD : DE (§ 407).

Digitalizzato da Google

(§407). Onde di nuovo invertendo sarà AB : AC = DE : DF. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XIX. TEOR. XIX.

410. *Sia AC : CB = DF : FE. Dico che convertendo sarà CA : AB = FD : DE.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AC : CB = DF : FE, sarà dividendo AB : BC = DE : EF (§ 408); onde AB : AC = DE : DF (§ prec.); e invertendo di nuovo sarà CA : AB = FD : DE. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP. IV.

Delle proprietà della Proporzione, che ha tutt' i termini omogenei.

DEFINIZIONE.

411. Si dirà che i termini d'una proporzione si *Permutano*, quando si paragona l'antecedente coll'antecedente, e 'l conseguente col conseguente.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XX. TEOR. XX.

412. *Sieno nella proporzione* $A : B = C : D$ *tutt' i termini omogenei. Dico che permutando sarà* $A : C = B : D$. Fig. 119.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo A, B, C, D grandezze omogenee, sarà la ragione di A : C composta dalle ragioni di A : B, e di B : C, e la ragione di B : D composta dalle ragioni di B : C, e di C : D (§ 397). Ma le componenti dell'una, cioè le ragioni di A : B, e di B : C sono eguali alle componenti dell'altra, cioè alle ragioni di B : C, e di C : D. Dunque le ragioni composte di A : C, e di B : D sono anche eguali (§ 393). Sicchè $A : C = B : D$. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

413. Sieno A e C due grandezze omogenee, e L e M sieno loro aliquote simili; saranno A, C, L, M tutte grandezze omogenee. Dunque, essendo $A : L = C : M$ (§ 383), sarà permutando $A : C = L : M$. Sicchè le grandezze omogenee hanno tra loro la stessa ragione delle parti aliquote simili.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

414. Sieno in oltre A, B, C, D quattro grandezze omogenee proporzionali, e A sia la massima. Essendo nella prima delle due proporzioni A : B = C : D, A : C = B : D la B minore di A, sarà la D minore di C, e nella seconda la C minore di A, anche la D sarà minore di B (§ 376). Dunque se A è la massima, D è la minima.

PROP. XXI. TEOR. XXI.

Fig.124. 415. *Sieno AB, CD, E, F quattro grandezze omogenee proporzionali, e AB sia la massima. Dico essere la somma della massima AB e della minima F maggiore della somma delle altre due CD ed E.*

DIMOSTRAZIONE.

Da AB si tagli AG = E, e da CD si tagli CH = F. Essendo per l'ipotesi AB : CD = E : F, sarà AB : CD = AG : CH; e permutando sarà AB : AG = CD : CH (§ 412). Sicchè convertendo sarà pure AB : BG = CD : DH (§ 410). Ma AB è per l'ipotesi maggiore di CD. Dunque anche BG è maggiore di DH (§ 376). E perciò aggiugnendo alla maggiore BG la somma di

Digitalizzato da Google

di AG e F, e alla minore DH la somma di E e CH, sarà la somma di AB e F maggiore della somma di CD ed E. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

416. Quindi, se AB, CD, ed E sono continuamente proporzionali, la somma delle due estreme è maggiore del doppio di quella di mezzo.

PROP. XXII. TEOR. XXII.

417. *Sia* $AB : DE = BC : EF$. *Dico* Fig. 123. *che sarà ancora* $AC : DF = AB : DE = BC : EF$.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo $AB : DE = BC : EF$, sarà permutando $AB : BC = DE : EF$ (§ 412), e componendo $AC : CB = DF : FE$ (§ 407); e di nuovo permutando $AC : DF = BC : FE$; e perciò anche $AC : DF = AB : DE$. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXIII. TEOR. XXIII.

418. *Sia* $AC : DF = BC : FE$. *Dico che sarà ancora* $AB : DE = AC : DF$.

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AC : DF = CB : FE, sarà permutando AC : CB = DF : FE (§ 412), e convertendo AC : AB = DF : DE (§ 410). Onde invertendo AB : AC = DE : DF (§ 406), e di nuovo permutando AB : DE = AC : DF. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP. V.

Della teorica delle grandezze, che hanno tra loro ragioni ordinate, e perturbate, e di ciò, che da tal teorica deriva.

DEFINIZIONE.

Fig. 122.

419. Sieno le grandezze A, B, C, D, E, F, ec. omogenee tra loro, e quest' altre L, M, N, O, P, Q, ec. anche tra loro omogenee. Si diranno le prime avere *Ragioni ordinate* alle altre, se le ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F saranno respettivamente eguali alle ragioni di L : M, di M : N, di N : O, di O : P, di P : Q; si diranno poi le stes-

se

Digitalizzato da Google

se prime avere *Ragioni perturbate* alle altre, se le ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F saranno respettivamente uguali alle ragioni di P : Q, di O : P, di N : O, di M : N, di L : M.

PROP. XXIV. TEOR. XXIV.

420. *Se qualunque numero di grandezze omogenee A, B, C, D, E, F, ec. hanno ragioni ordinate, o perturbate ad altrettante grandezze anche tra loro omogenee L, M, N, O, P, Q, ec.. Dico che le prime, e le ultime sono in amendue i casi proporzionali, cioè che A : F = L : Q.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la ragione di A : F è composta dalle ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F, e la ragione di L : Q è composta dalle ragioni di L : M, di M : N, di N : O, di O : P, di P : Q (§ 397). Ma le componenti dell'una in amendue i casi sono respettivamente eguali alle componenti dell'altra (§ prec.). Dunque le ragioni di A : F e di L : Q, che sono le composte, sono anche eguali (§ 393). E perciò in amendue i casi A : F = L : Q. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

Digitalizzato da Google

PROP. XXV. TEOR. XXV.

421. *Se qualunque numero di grandezze omogenee* A, B, C, D, E, F, *ec. hanno ragioni ordinate ad altrettante grandezze* L, M, N, O, P, Q, *ec., che ſono tra loro pure omogenee. Dico eſſere la ſomma di quelle all' ultima* F, *come la ſomma di queſte all' ultima* Q.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo A : B = L : M per l' ipoteſi, ſarà componendo (§ 407) A + B : B = L + M : M. Ma per l' ipoteſi B : C = M : N. Dunque A + B, B, C hanno ragioni ordinate a L + M, M, N (§ 419); e perciò A + B : C = L + M : N (§ præc.). Onde di nuovo componendo ſarà A + B + C : C = L + M + N : N. E' in oltre C : D = N : O. Dunque le grandezze A + B + C, C, e D hanno pure ragioni ordinate alle grandezze L + M + N, N, e O. Sicchè A + B + C : D = L + M + N : O (§ prec.): onde, componendo un' altra volta, ſarà la ſomma di A, B, C, D a D, come la ſomma di L, M, N, O a O. Se allo ſteſſo modo ſi procederà innanzi, ſi troverà la ſomma di A, B, C, D, E, F eſſere a F, come la ſomma di L, M, N, O, P, Q a Q. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

422. Se A, B, C, D, E, F, ec., L, M, N, O, P, Q, ec. ſono tutte grandezze omogenee, e le ragioni di A : L, di B : M, di C : N, di D : O, di E : P, di F : Q ſono tutte eguali; perchè permutandole ſono anche le ragioni di A : B, di B : C, di C : D, di D : E, di E : F reſpettivamente eguali alle ragioni di L : M, di M : N, di N : O, di O : P, di P : Q; avranno A, B, C, D, E, F ragioni ordinate a L, M, N, O, P, Q. E perciò la ſomma di quelle ſtarà a F, come la ſomma di queſte a Q, e permutando la ſomma di quelle ſtarà alla ſomma di queſte, come l'ultima F all'ultima Q. Sicchè ſe più ragioni ſono tra loro eguali, e le grandezze ſono tutte omogenee, la ſomma di tutti gli antecedenti ſta alla ſomma di tutt'i conſeguenti, come uno degli antecedenti al ſuo conſeguente.

PROP. XXVI. TEOR. XXVI.

423. *Sieno A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, e ſieno L, M, N, O quattr'altre di tale condizione, che ſtia L : A = N : C, e M : B = O : D. Dico eſſere L, M, N, O anche tra loro proporzionali.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Essendo L : A = N : C, A : B = C : D, M : B = O : D, ovvero invertendo B : M = D : O, auranno L, A, B, M ragioni ordinate a N, C, D, O (§ 419). Dunque sarà ancora L : M = N : O (§ 420). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXVII. TEOR. XXVII.

Fig. 125. 424. *Sia AB : G = DE : H, e BC : G = EF : H. Dico essere ancora AC : G = DF : H.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè AB : G = DE : H, e BC : G = EF : H, ovvero invertendo G : BC = H : EF (§ 406). Dunque AB, G, BC hanno ragioni ordinate a DE, H, EF. E perciò AB : BC = DE : EF (§ 420). Onde componendo sarà AC : CB = DF : FE. Ma AC, CB, G hanno ragioni ordinate a DF, FE, H. Sicchè sarà AC : G = DF : H (§ 420). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXVIII. TEOR. XXVIII.

425. *Sia AC : G = DF : H, e sia AB : G =*

Digitalizzato da Google

G = DE : H . Dico essere ancora BC : G = EF : H .

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè AC : G = DF : H, AB : G = DE : H, ovvero invertendo G : AB = H : DE . Dunque AC , G , AB hanno ragioni ordinate a DF , H , DE . E perciò sarà AC : AB = DF : DE (§ 420) . Onde dividendo sarà CB : BA = FE : ED . Ma per l' ipotesi AB : G = DE : H . Sicchè anche CB , BA , G hanno ragioni ordinate a FE , ED, H . Per la qual cosa sarà BC : G = EF : H . Ch' è ciò , che bisognava dimostrare .

AVVERTIMENTO.

426. Ecco tutta la dottrina della ragione, e proporzione Geometrica . Procediamo ora alle teoriche della Geometria piana dipendenti da tale dottrina .

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. VI.

Delle ragioni eguali, che ſi poſſono avere col dividere uno, o due lati di qualunque triangolo.

LEMMA

Fig. 126. 427. *Se il lato AB di qualunque triangolo ABC ſi divide in qualſivoglia numero di parti eguali AD, DE, EF, FB, e pe' punti D, E, F ſi tirano le rette DG, EH, FI parallele a BC; divideranno tali rette il lato AC in altrettante parti AG, GH, HI, IC anche tra loro eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Per gli punti G, H, e I ſi tirino le rette GK, HL, IM parallele ad AB. Eſſendo GK = DE, HL = EF, IM = FB, (§ 133), ſaranno AD, GK, HL, IM tutte eguali. Onde i triangoli ADG, GKH, HLI, IMC ſono equiangoli, e hanno eguali i lati AD, GK, HL, IM. Dunque AG, GH, HI, IC ſono anche tra loro eguali (§ 127). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIX. TEOR. XXIX.

428. *La retta tirata in qualunque triangolo parallela a un lato, divide gli altri lati in parti proporzionali.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia nel triangolo ABC tirata la retta DE parallela a BC. S'intendano le AD, DB divise in parti eguali alla loro aliquota comune, e per gli punti delle divisioni s'intendano tirate delle rette parallele tutte a BC; divideranno tali rette in altrettante parti eguali anche AE, EC (§ præc.). Sicchè una delle parti, nelle quali si sono concepite divise le rette AD, DB, e una delle parti, nelle quali verrebbero divise le rette AE, EC dalle parallele suddette, sono aliquote simili sì di DB, EC, che di AD, AE. Per la qual cosa le ragioni di AD : DB, e di AE : EC sono eguali (§ 382); e perciò AD : DB = AE : EC. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare. Fig. 127.

PROP. XXX. TEOR. XXX.

429. *Se in qualunque triangolo ABC la retta DE divide i lati AB, AC in parti proporzionali, è anche DE parallela al terzo lato BC.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega esser DE parallela a BC, potrà pel punto D tirarsi un' altra retta parallela a BC. Si tiri, s' è possibile, DF parallela a BC. Sarà la ragione di AF : FC uguale alla ragione di AD : DB (§ præc.). Ma la ragione di AE : EC è per l'ipotesi uguale a quella di AD : DB. Dunque AF : FC = AE : EC (§ 369), e componendo AC : CF = AC : CE (§ 407). Onde CF = CE (§ 391), cioè il tutto è uguale alla parte. Ma ciò è impossibile. Dunque è impossibile che non sia DE parallela a BC. Per la qual cosa se in qualunque triangolo, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXXI. TEOR. XXXI.

Fig. 128. 430. *Se in qualunque triangolo ABC si tirano quante rette si vogliono DG, EH, FI parallele a BC, le parti, nelle quali viene diviso il lato BA da tali rette, hanno ragioni ordinate alle parti, nelle quali dalle stesse rette viene diviso il lato AC.*

DIMOSTRAZIONE.

Per gli punti G e H si tirino GM, HO parallele ad AB. Sarà GK = DE, HN = KL =

Digitalizzato da Google

KL = EF , NO = LM = FB . Essendo nel triangolo AEH la retta DG parallela a EH, sarà AG : GH = AD : DE (§ 428). Similmente, essendo nel triangolo GLI la retta HK parallela a IL, sarà GH : HI = GK : KL = DE : EF . Finalmente , essendo nel triangolo HOC la retta IN parallela a CO, sarà pure HI : IC = HN : NO = EF : FB. Dunque le parti AG , GH , HI , IC hanno ragioni ordinate alle parti AD , DE , EF , FB (§ 419). Ch' è ciò , che bisognava dimostrare .

PROP. XXXII. TEOR. XXXII.

431. *Se in qualunque triangolo ABC si tirano quante rette si vogliono DG , EH , FI dividenti i lati AB , AC in modo , che le parti di AB abbiano ragioni ordinate alle parti di AC ; saranno tali rette DG , EH , FI parallele al terzo lato BC .*

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia la stessa preparazione , che s' è fatta nella precedente prop. . Essendo per l' ipotesi HI : IC = EF : FB , sarà HI : IC = HN : NO . Dunque IN , o sia IF è parallela a BC (§ 429) . Similmente si dimostra essere HE parallela a IF , e conseguentemente parallela a BC , e DG parallela a EH , e conseguentemente parallela a BC .

Sic-

Digitalizzato da Google

Sicchè le rette DG, EH, FI ſono tutte parallele a BC. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXIII. TEOR. XXXIII.

Fig. 129. 432. *Se in qualunque triangolo ABC la retta BD, tirata dall'angolo ABC, divide lo ſteſſo angolo ABC in due parti eguali, divide ancora la baſe AC nella ragione de' lati, cioè la divide in modo, che AD : DC = AB : BC; e ſe BD divide la baſe AC nella ragione de' lati, divide anche l' angolo ABC in due parti eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Pel punto C ſi tiri CE parallela a BD, e ſi prolunghi, finchè s'unifca con AB prolungata in E.

I. Per l'ipoteſi è l'angolo ABD = DBC. Ma, per le parallele BD, CE, è l'angolo BCE = DBC, e BEC = ABD (§ 100). Dunque l'angolo BCE = BEC. Perciò BC = BE, e conſeguentemente AB : BC = AB : BE (§ 389). E' anche AD : DC = AB : BE (§ 428). Sicchè AD : DC = AB : BC (§ 369).

II. Per l'ipoteſi AD : DC = AB : BC. Ma, per le parallele DB, CE, ſta AD : DC = AB : BE. Dunque AB : BC = AB : BE (§ 369). E perciò BC = BE (§ 391), e confe-

Digitalizzato da Google

conſeguentemente l' angolo BEC = BCE (§ 114). Ma ABD = BEC, e DBC = BCE (§ 100). Sicchè anche l' angolo ABD = DBC. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP. VII.

De' caratteri da conoſcere e la ſimiglianza di due triangoli, e quella di due parallelogrammi.

DEFINIZIONE.

433. Due figure rettilinee ſi dicono *Simili*, ſe ſono gli angoli dell' una eguali riſpettivamente agli angoli dell' altra, e hanno di più i lati intorno agli angoli eguali tra loro proporzionali.

COROLLARIO I.

434. Sicchè la figura ABCD ſi dirà ſimile alla figura EFGH, ſe ſarà l' angolo ABC = EFG, BCD = FGH, CDA = GHE, DAB = HEF, e farà di più AB : BC = EF : FG, BC : CD = FG : GH, CD : DA = GH : HE, DA : AB = HE : EF. Fig. 130.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

435. Quindi, se le figure ABCD, LMNO saranno amendue simili alla terza EFGH, saranno agli angoli E, F, G, H eguali rispettivamente sì gli angoli A, B, C, D, che gli angoli L, M, N, O, e alli lati EF, FG, GH, HE rispettivamente proporzionali sì AB, BC, CD, DA, che LM, MN, NO, OL. Onde gli angoli A, B, C, D sono rispettivamente eguali agli angoli L, M, N, O, e i lati AB, BC, CD, DA sono rispettivamente proporzionali alli lati LM, MN, NO, OL. Sicchè le figure simili a una terza sono anche simili tra loro.

PROP. XXXIV. TEOR. XXXIV.

Fig.131. 436. *Sieno i triangoli ABC, DCE equiangoli, cioè sieno l' angolo* $ABC = DCE$, $BCA = CED$, $CAB = EDC$. *Dico tali triangoli essere simili tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dispongano i triangoli in modo, che i lati BC, CE facciano una sola retta continuata. Essendo l' angolo CED = BCA; aggiuntovi di comune ABC, sarà la somma di ABC, DEC uguale alla somma di ABC,

Digitalizzato da Google

ABC, ACB, e perciò minore di due retti (§ 108). Onde BA, ED prolungate s' uniranno in F (§ 97). In oltre, essendo eguali sì gli angoli BCA, CED, che gli angoli DCE, ABC, saranno parallele sì AC, EF, che DC, BF (§ 98). Dunque ACDF è un parallelogrammo, e perciò AF = DC, FD = AC (§ 133). Per la qual cosa, essendo per le parallele AC, FE la AB : AF = BC : CE (§ 428), sarà AB : DC = BC : CE, e permutando AB : BC = DC : CE. Similmente, essendo per le parallele DC, FB la BC : CE = FD : ED (§ 428), sarà BC : CE = CA : ED, e permutando BC : CA = CE : ED. Finalmente essendosi dimostrato avere i tre lati AB, BC, CA ragioni ordinate a DC, CE, ED, sarà BA : AC = CD : DE (§ 420), e invertendo CA : AB = ED : DC. Sicchè i triangoli ABC, DCE, che sono tra loro equiangoli, hanno anche i lati, che stanno intorno agli angoli eguali, tra loro proporzionali; e perciò sono simili (§ 433). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

437. Sicchè quando due triangoli ABC, DCE sono tra loro equiangoli, possono aversi le seguenti proporzioni AB : BC = DC : CE, BC : CA = CE : ED, CA : AB = ED : DC; nelle quali proporzioni

Digitalizzato da Google

gli antecedenti ſono lati oppoſti ad angoli eguali, e i conſeguenti ſono anche lati oppoſti ad angoli eguali. Onde i triangoli hanno i lati, che ſtanno intorno agli angoli eguali, proporzionali, e ſono omologhi quelli, che ſtanno oppoſti ad angoli eguali.

PROP. XXXV. TEOR. XXXV.

Fig.132. 438. *Abbiano i triangoli ABC, DEF; lati proporzionali, cioè AB : BC = DE : EF, BC : CA = EF : FD, CA : AB = FD : DE. Dico tali triangoli eſſere pure ſimili.*

DIMOSTRAZIONE.

Si facciano in E e F gli angoli FEG, EFG riſpettivamente eguali ad ABC, BCA; ed EG, FG ſi prolunghino, finchè s'uniſcano in G. Eſſendo i triangoli GEF, ABC equiangoli tra loro, ſarà GE : EF = AB : BC (§ præc.). Ma per l'ipoteſi AB : BC = DE : EF. Dunque GE : EF = DE : EF (§ 369); e perciò DE = GE (§ 391). Similmente EF : FG = BC : CA. Ma BC : CA = EF : FD. Sicchè EF : FG = EF : FD; perciò DF = FG. Laonde ne' triangoli EDF, EGF è ED = EG, FD = FG, e la baſe EF comune. Perciò gli angoli DEF, EFD, FDE ſono eguali a GEF, EFG, FGE (§ 78), e conſeguentemente ad ABC, BCA, CAB. Sicchè i triangoli ABC,

Digitalizzato da Google

ABC, DEF ſono equiangoli, e per conſeguenza ſimili (§ 436). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

439. Eſſendoſi dimoſtrato l'angolo A = D, B = E, C = F: è chiaro che nelle tre proporzioni AB : BC = DE : EF, BC : CA = EF : FD, CA : AB = FD : DE gli antecedenti ſono oppoſti ad angoli eguali, e i conſeguenti ſono anche oppoſti ad angoli eguali. Sicchè ſe due triangoli hanno i lati proporzionali, ſono anche equiangoli, e gli angoli eguali ſtanno oppoſti a' lati omologhi.

PROP. XXXVI. TEOR. XXXVI.

440. *Abbiano i triangoli ABC, DEF l'angolo ABC = DEF, e i lati AB, BC proporzionali a' lati DE, EF. Dico tali triangoli eſſere anche ſimili.* Fig. 133.

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega eſſere ABC ſimile a DEF, l'angolo BAC ſarà maggiore, o minore di EDF. Sia, s' è poſſibile, BAC maggiore di EDF. Si faccia in A l'angolo BAG = EDF. Eſſendo i triangoli ABG, DEF per ſuppoſizione equiangoli, ſarà AB : BG =

Digitalizzato da Google

DE : EF (§437). Ma per l' ipoteſi AB: BC = DE : EF. Dunque AB : BG = AB: BC; e perciò BG = BC (§391), cioè la parte uguale al tutto. Ora ciò è impoſſibile. Dunque è impoſſibile, che ſia l' angolo BAC maggiore di EDF. Similmente ſi dimoſtra non eſſere BAC minore di EDF. Dunque è BAC = EDF, e conſeguentemente BCA = EFD (§109). Sicchè i triangoli ABC, DEF ſono equiangoli tra loro, e per conſeguenza ſimili (436). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XXXVII. TEOR. XXXVII.

441. *Abbiano i triangoli ABC, DEF gli angoli B ed E eguali, gli angoli C e F della medeſima ſpezie, e i lati BA, AC proporzionali a' lati ED, DF. Dico tali triangoli eſſere pure ſimili.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ſi niega eſſere il triangolo ABC ſimile a DEF, ſarà l' angolo BAC maggiore, o minore di EDF. Sia, s' è poſſibile, BAC maggiore di EDF. Si faccia in A l' angolo BAG = EDF; ſarà AGB = DFE (§109). Onde BA : AG = ED : DF. Ma per l' ipoteſi BA : AC = ED : DF. Dunque BA : AG = BA : AC (§369); e perciò AG = AC (§391), e conſeguentemente

Digitalizzato da Google

mente l'angolo ACG = AGC. Sicchè, essendo gli angoli ACB, DFE per l'ipotesi della stessa spezie, vale a dire amendue ottusi, o acuti, gli angoli AGC, AGB saranno pure amendue ottusi, o acuti. Ma ciò è impossibile. Dunque è impossibile che l'angolo BAC sia maggiore di EDF. Similmente può dimostrarsi non essere BAC minore di EDF. Dunque è BAC = EDF, e per conseguenza ACB = DFE (§ 109). Per la qual cosa i triangoli ABC, DEF sono equiangoli, e conseguentemente simili (§ 436). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XXXVIII. TEOR. XXXVIII.

442. *Abbia il triangolo ABC l'angolo* Fig. 134.
ABC retto, e sia BD perpendicolare ad AC. Dico i triangoli ABD, BDC essere simili tra loro, e simili all'intero ABC.

DIMOSTRAZIONE.

Avendo i triangoli ADB, ABC l'angolo ADB = ABC, e l'angolo A comune, sarà ABD = ACB. Dunque ADB, ABC sono triangoli simili (§ 436). In oltre avendo i triangoli CDB, ABC l'angolo CDB = ABC, e l'angolo C comune, sarà l'angolo CBD = CAB. Onde anche i triangoli CDB, ABC sono simili. Finalmente

Digitalizzato da Google

essendo amendue i triangoli ADB, BDC simili ad ABC, saranno anche ADB, BDC simili tra loro (§ 435). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

443. Dalli tre triangoli simili ABD, ABC, BDC si ricavano le tre seguenti proporzioni continue CA : AB = AB : AD, AC : CB = CB : CD, AD : DB = DB : DC. Sicchè, se dall' angolo retto ABC si cala BD perpendicolare ad AC, il lato AB è mezzo proporzionale tra CA e AD, il lato BC è mezzo proporzionale tra AC e CD, e la perpendicolare BD è mezza proporzionale tra AD e DC.

PROP. XXXIX. TEOR. XXXIX.

Fig. 131. 444. *Abbiano i triangoli ABC, DCE i lati BA, AC proporzionali a CD, DE, e, convenendo BC e CE nel punto C, sia CD parallela a BA, ed ED parallela ad AC. Dico pure che i triangoli ABC, DCE sono simili tra loro,*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo parallele tanto AB, DC, quanto AC, DE, sarà all' angolo DCA eguale sì BAC, che CDE (§ 100). Dunque l' ango-

Digitalizzato da Google

angolo BAC = CDE. Sono di più i lati BA, AC proporzionali a' lati CD, DE. Sicchè i triangoli ABC, DCE ſono tra loro ſimili (§ 440). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

445. Avendo dimoſtrato eſſere ſimili i triangoli ABC, DCE, ſarà l'angolo ACB = DEC. E' anche ACD = CDE. Dunque l'intero angolo DCB è uguale alla ſomma di CED, EDC; onde, aggiuntovi di comune l'angolo DCE, ſarà la ſomma di DCB, DCE uguale alla ſomma di CED, EDC, DCE, e conſeguentemente uguale a due retti (§ 106). Per la qual coſa BC, CE formano una retta continuata. Sicchè ſe due triangoli ABC, DCE hanno i lati BA, AC proporzionali a' lati CD, DE, e, convenendo BC e CE nel punto C, è CD parallela ad AB, e DE parallela ad AC, gli altri due lati BC, CE formano una retta continuata.

AVVERTIMENTO.

446. Ecco tutt' i caratteri, co' quali ſi conoſce due triangoli eſſere ſimili, cioè eſſere equiangoli tra loro, ed avere nel tempo iſteſſo i lati, che ſtanno intorno agli angoli eguali, proporzionali. Procediamo ora

Digitalizzato da Google

ora agli caratteri da conoſcere la ſimiglianza di due parallelogrammi.

PROP. XL. TEOR. XL.

Fig.135. 447. *Abbiano i parallelogrammi AC, EG l' angolo ABC = EFG, e i lati AB, BC proporzionali a' lati EF, FG. Dico tali parallelogrammi eſſere ſimili.*

DIMOSTRAZIONE.

Avendo i parallelogrammi AC, EG l' angolo ABC = EFG, ſarà l'angolo BCD = FGH, CDA = GHE, e DAB = HEF (§ 136). In oltre, eſſendo AB : BC = EF : FG, ſarà DC : CB = HG : FG, e invertendo BC : CD = FG : GH (§ 406). Similmente ſi dimoſtra eſſere CD : DA = GH : HE, e DA : AB = HE : EF. Dunque i parallelogrammi AC, EG ſono equiangoli, e hanno i lati, che ſtanno intorno agli angoli eguali, proporzionali; e perciò ſono ſimili (§ 433). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XLI. TEOR. XLI.

Fig. 32. 448. *Sieno i parallelogrammi GE, FH eſiſtenti intorno la diagonale del parallelogrammo BD. Dico eſſere i parallelogrammi GE, FH ſimili tra loro, e ſimili all' intero BD.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i triangoli CHO, CBA equiangoli, sarà CH : HO = CB : BA (§ 437). Sicchè i parallelogrammi FH, BD hanno l'angolo CHO = CBA (§ 100), e i lati CH, HO proprozionali a'lati CB, BA; e perciò sono simili tra loro (§ præc.). Allo stesso modo si dimostra essere GE simile a BD. Finalmente i parallelogrammi FH, GE sono simili a BD. Dunque sono anche simili tra loro (§ 435). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

449. Esposti già i caratteri da conoscere la simiglianza de' triangoli e de' parallelogrammi, si dovrebbe ora procedere ad insegnare i caratteri indicanti la simiglianza di tutti gli altri rettilinei. Ma di ciò non ci prendiamo briga; perchè tutti gli altri rettilinei non hanno caratteri particolari, che indicano la loro simiglianza; nè si può la loro simiglianza conoscere, se non costa d'essere tra loro equiangoli, e d'avere i lati esistenti intorno agli angoli eguali tra loro proporzionali. Del resto, prima di passare innanzi, soggiugniamo la seguente propositione, perchè è la conversa della precedente.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XLII. TEOR. XLII.

450. *Sieno i parallelogrammi BD, EG ſimili, e abbiano un angolo EAG comune. Dico tali parallelogrammi eſſere ſituati intorno la medeſima diagonale.*

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino ne' parallelogrammi BD, EG le diagonali AC, AO. Eſſendo i parallelogrammi BD, EG ſimili, ſaranno e l'angolo E = B, e i lati AE, EO proporzionali a' lati AB, BC. Onde i triangoli AEO, ABC ſono equiangoli (§440); e perciò l'angolo EAO = BAC. Per la qual coſa la diagonale AO combacia colla diagonale AC; e conſeguentemente i parallelogrammi EG, BD ſono intorno la ſteſſa diagonale. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CA-

Digitalizzato da Google

CAP. VIII.

Del modo di dividere qualunque retta ſecondo qualſivoglia data ragione, e del modo di ritrovare una retta, che ſia in proporzione con altre rette date.

DEFINIZIONE.

451. Una retta ſi dice eſſer *ſegata ſecondo l'eſtrema e media ragione*, ſe viene ſegata in un punto tale, che l'intera retta ſtia alla ſua parte maggiore, come la ſteſſa parte maggiore alla minore.

Così AB ſi dirà ſegata in C ſecondo l' Fig. 60.
eſtrema e media ragione, ſe ſarà AB : BC = BC : AC.

PROP. XLIII. PROBL. I.

452. *Tagliare da qualunque retta data qualſivoglia ſua parte.*

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data, e ſia da tagliarſi Fig. 136.
da lei la ſua terza parte.

1. Si

Digitalizzato da Google

1. Si tiri dal punto A l'indefinita AO, che faccia con AB qualunque angolo OAB.

2. In AO si prenda ad arbitrio il punto D, e da DO si taglino DE, EF amendue uguali ad AD.

3. Congiunta la BF, si tiri per D la retta DC parallela a BF.

Dico AC essere la terza parte di AB.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per le parallele DC, BF la BC : CA = FD : DA (§ 428), farà componendo BA : AC = FA : AD. Ma FA è tripla di AD per la costruzione. Dunque BA è anche tripla di AC; e per conseguenza AC è la terza parte di AB. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XLIV. PROBL. II.

Fig. 128. 453. *Date due rette AB, AC, delle quali AB sia indivisa, e AC sia divisa nelle parti AG, GH, HI, IC; dividere la AB in parti proporzionali alle parti di AC.*

SOLUZIONE.

1. Si dispongano le rette AB, AC in modo, che facciano nel punto A qualsivoglia angolo CAB.

2. Tirata dal punto B al punto C la retta

Digitalizzato da Google

ta BC, si tirino per gli punti G, H, I le rette GD, HE, IF parallele tutte a BC.

Dico essersi divisa AB nelle parti cercate.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè le parti AD, DE, EF, FB sono proporzionali alle parti AG, GH, HI, IC (§ 430). Sicchè s'è divisa AB in parti proporzionali alle parti di AC. Ch' è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. XLV. PROBL. III.

454. *Data qualunque retta terminata, dividerla in qualsivoglia numero di parti eguali.*

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data, e sia ella da di- Fig. 126.
viderſi in 4 parti eguali.

1. Si tiri dal punto A l' indefinita AO, che faccia con AB qualunque angolo OAB.

2. Si prenda in AO ad arbitrio il punto G, e da GO si taglino tre altre parti GH, HI, IC, che sieno eguali ad AG.

3. Si congiunga BC, e per gli punti G, H, I si tirino GD, HE, IF parallele tutte a BC. Dico che AB è divisa in quattro parti eguali AD, DE, EF, FB.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè le parti AD, DE, EF, FB ſono proporzionali alle parti AG, GH, HI, IC (§ 430). Ma queſte ſono eguali. Dunque ſono eguali anche quelle. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. XLVI. PROBL. IV.

455. *Data una retta, dividerla ſecondo l' eſtrema e media ragione.*

SOLUZIONE.

Fig. 137. Sia AB la retta data.

Si divida AB in C in modo, che 'l rettangolo fatto da BA e AC ſia uguale al quadrato di BC (§ 201).

Dico che AB è diviſa in C ſecondo l' eſtrema e media ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Si deſcriva il cerchio BDC, che abbia per diametro, o per corda BC; e, tirata dal punto A la tangente AD, ſi congiungano le rette CD, BD. Sarà il quadrato di AD eguale al rettangolo di BA e AC (§ 275), e per conſeguenza eguale al quadrato di BC. Onde AD = CB (§ 162).

In

Digitalizzato da Google

In oltre avendo i triangoli ACD, ADB l'angolo ADC = ABD, e l'angolo in A comune, sarà l'angolo ACD = ADB (§ 109). Sicchè sarà BA : AD = AD : AC (§ 437); e perciò AB : BC = BC : AC. Per la qual cosa AB è divisa in C secondo l'estrema e media ragione (§ 451). Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

AVVERTIMENTO.

456. Colla stessa facilità che s'è dimostrato essere AB : BC = BC : CA, se il rettangolo di BA e AC è uguale al quadrato di BC, si può anche dimostrare essere il rettangolo di BA e AC uguale al quadrato di BC, se AB : BC = BC : CA. S'intenda fatta la costruzione precedente. Per la simiglianza de' triangoli ADB, ACD le tre rette BA, AD, AC sono continuamente proporzionali, e per l'ipotesi le tre AB, BC, CA sono anche continuamente proporzionali. Dunque la ragione di BA : AC è duplicata sì della ragione di BA : AD, che di quella di AB : BC (§ 398). Onde le duplicate di BA : AD, e di AB : BC sono eguali, e per conseguenza eguali le ragioni di BA : AD, e di AB : BC (§ 401). Per la qual cosa AD = BC (§ 391). Ma il rettangolo di BA e AC è uguale al quadrato di AD (§ 275). Sicchè il

Digitalizzato da Google

rettangolo di BA e AC è anche ugua-
le al quadrato di BC.

COROLLARIO I.

457. Quindi il probl. della divisione della retta secondo l' estrema e media ragione, e quello di dividere la retta in un punto tale, che 'l rettangolo fatto dall' intera retta, e da una delle parti sia uguale al quadrato dell' altra parte, non sono in realtà che un' istesso problema. E perciò il lato del decagono regolare iscritto in un cerchio è la porzione maggiore del raggio diviso secondo l' estrema e media ragione. Di più la somma del raggio e del lato del decagono iscrittibile nell' istesso cerchio forma una retta, che divisa secondo l' estrema e media ragione ha per porzione maggiore il raggio. Finalmente il lato del pentagono regolare iscritto in un cerchio è la porzione maggiore della retta sottendente un angolo dell' istesso pentagono, divisa pure secondo l' estrema e media ragione.

COROLLARIO II.

458. In oltre, divisa AB secondo l' estrema e media ragione in C, il rettangolo di BA e AC è uguale al quadrato di BC. Dunque il doppio del rettangolo di

BA

Digitalizzato da Google

BA e AC, una col quadrato di BC, è triplo del quadrato di BC; e il quadruplo dell' istesso rettangolo di BA e AC, una col quadrato di BC, è quintuplo del quadrato di BC. Ma il doppio del rettangolo di BA e AC, una col quadrato di BC, è uguale alla somma de' quadrati fatti su BA, AC (§ 173); e 'l quadruplo del rettangolo di BA e AC, una col quadrato di BC, è uguale al quadrato della somma di BA e AC (§ 174). Sicchè i quadrati fatti su BA e AC sono tripli dal quadrato di BC, e 'l quadrato fatto sulla somma di BA e AC è quintuplo dell' istesso quadrato fatto su BC.

COROLLARIO III.

459. Di più, essendo AB : BC = BC : CA, sarà invertendo CB : BA = AC : CB (§ 406), e componendo CB e BA insieme sta a BA, come BA a BC (§ 407). Sicchè se AB si divide in C secondo l' estrema e media ragione, aggiugnendo ad AB la porzione maggiore BC, si ha una retta divisa anche secondo l' estrema e media ragione, la cui porzione maggiore è la retta prima AB, e la minore è CB.

COROLLARIO IV.

460. Di vantaggio, posto che 'l rettan-

Digitalizzato da Google

golo di BA e AC ſia uguale al quadrato di BC; ſe s' intende eſſere il punto C più vicino al punto B, o più lontano, ſarà il rettangolo di BA e AC maggiore, o minore del quadrato di BC. Per la qual coſa qualunque retta determinata AB ha le parti AC, CB, nelle quali viene diviſa ſecondo l' eſtrema e media ragione, anche determinate, e invariabili.

COROLLARIO V.

Fig.138. 461. Finalmente, ſe AB e DE ſono amendue diviſe in C e F ſecondo l' eſtrema e media ragione, ſarà AC : CB = DF : FE. Poichè, ſe ciò ſi niega, ſia AG : GB = DF : FE. Sarà componendo la AB : BG = DE : EF (§ 407), e invertendo la BG : GA = EF : FD (§ 406). Ma DE, EF, FD ſono per l' ipoteſi continuamente proporzionali. Dunque continuamente proporzionali ſono anche AB, BG, GA; e perciò AB è diviſa pure in G ſecondo l' eſtrema e media ragione. Il che eſſendo impoſſibile, impoſſibile è pure che non ſia AC : CB = DF : FE.

PROP. XLVII. PROBL. V.

462. Date tre rette, ritrovare la quarta proporzionale.

So-

Digitalizzato da Google

SOLUZIONE.

Sieno A, B, C le tre rette date. Fig. 139.

1. Si faccia qualunque angolo NLQ.

2. Si taglino LM = A, MN = B, e LO = C.

3. Congiunta MO, si tiri per N la retta NP parallela a MO.

Dico essere OP la quarta proporzionale cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, essendo LM : MN = LO : OP (§ 428), sarà ancora A : B = C : OP. Dunque OP è quarta proporzionale dopo A, B, C. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XLVIII. PROBL. VI.

463. *Date due rette, ritrovare la terza proporzionale.*

SOLUZIONE.

Sieno A e B le due rette date. Fig. 140.

1. Si faccia qualunque angolo NLQ.

2. Si taglino LM = A, MN = B, e LO = B.

3. Congiunta MO, si tiri per N la

Digitalizzato da Google

retta NP parallela a MO.

Dico essere OP la terza proporzionale cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo LM : MN = LO : OP (§ 428), sarà A : B = B : OP. Dunque OP è terza proporzionale dopo A e B. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XLIX. PROBL. VII.

464. *Date due rette, ritrovare la mezza proporzionale.*

SOLUZIONE.

Fig. 141. Sieno A e B le due rette date.

1. Si tiri l' indeterminata LN, e da lei si taglino LM = A, MN = B.

2. Sopra LN si descriva il mezzo cerchio LON, e da M s'innalzi MO perpendicolare a LN, che interseca la periferia LON in O.

Dico essere MO la mezza proporzionale cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo, congiunte la rette LO, ON, l' angolo LON retto (§ 242), e OM per-

Digitalizzato da Google

perpendicolare a LN, ſarà LM : MO = MO : MN (§443), e conſeguentemente A : MO = MO : B. Sicchè MO è mezza proporzionale tra A e B. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO I.

465. Se all'iſteſſo modo, ritrovata C mezza proporzionale tra A e B, ſi troverà D mezza proporzionale tra A e C, ed E mezza proporzionale tra C e B, ſaranno D, C, E tre mezze continuamente proporzionali tra A e B. Poichè le ragioni di A : C, e di C : B ſono duplicate di quelle di A : D e di C : E (§398). Ma le ragioni di A : C e di C : B ſono eguali. Dunque anche le ragioni di A : D e di C : E ſono tra loro eguali (§401); onde eguali ſono tutte le ragioni di A : D, di D : C, di C : E, di E : B; e conſeguentemente le tre D, C, E ſono mezze continuamente proporzionali tra A e B. Similmente ſi dimoſtra poterſi allo ſteſſo modo ritrovare tra A e B 7, 15, 31, 63 mezze continuamente proporzionali, ec. Fig.142.

COROLLARIO.

466. Sicchè tra due rette date ſi poſſono ritrovare colla riga, e col compaſſo tante mezze continuamente proporzionali,

Digitalizzato da Google

quante ne disegnano i numeri 1, 3, 7, 15, 31, 63, ec.

AVVERTIMENTO II.

467. Se si vorranno tra due rette date ritrovare tante mezze continuamente proporzionali, quante ne disegna ciascuno de' numeri, che tramezzano tra 1, 3, 7, 15, 31, 63, ec., l' operazione eseguir non si potrà colla riga e col compasso. Onde il probl. di trovare tra due rette date tante mezze continuamente proporzionali, quante ne disegna ciascuno de' numeri 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, ec., non si può sciorre nella Geometria elementare, appartenendo egli alla Geometria sublime. Sicchè coloro, che pretendono di ritrovare coll' ajuto della riga e del compasso due mezze continuamente proporzionali tra due rette date, mostrano di avere troppo scarsa cognizione della Geometria, confondendo i probl. della Geometria sublime con quelli della elementare.

Digitalizzato da Google

CAP. IX.

Delle ragioni de' triangoli, e de' parallelogrammi.

DEFINIZIONE.

468. Dicesi *Altezza* d'un triangolo, o d'un parallelogrammo la perpendicolare calata sulla base dal vertice dell'angolo alla stessa base opposto.

COROLLARIO.

469. Quindi i triangoli, e i parallelogrammi racchiusi tra le stesse parallele hanno altezze eguali.

PROP. L. TEOR. XLIII.

470. *I triangoli, e i parallelogrammi, che hanno eguali altezze, sono tra loro nella ragione delle basi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i triangoli ACB, BCE, e i pa- Fig.143.
rallelogrammi BD, BF racchiusi tra le parallele AE, DF, e per conseguenza d'

egua-

Digitalizzato da Google

eguali altezze. Si concepiſcano le baſi AB, BE diviſe nelle parti AG, GH, HI, IK, KB, BL, LM, ME, delle quali ognuna ſia eguale alla loro aliquota comune; e s' intendano tirate le rette CG, CH, CI, CK, CL, CM. Saranno tutt' i piccioli triangoli ACG, GCH, HCI, ICK, KCB, BCL, LCM, MCE eguali tra loro (§ 146). Onde il triangolo ACG, e la ſua baſe AG ſono aliquote ſimili sì del triangolo BCE e della ſua baſe BE, che del triangolo ACB e della ſua baſe AB. Perciò la ragione del triangolo ACB al triangolo BCE è uguale alla ragione della baſe AB alle baſe BE (§ 382).

In oltre i triangoli ACB, BCE ſono metà de' parallelogrammi BD, BF. Dunque i parallelogrammi BD, BF ſono nella ragione de' triangoli ACB, BCE (§ 413), e per conſeguenza nella ragione delle baſi AB, BE (§ 369). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LI. TEOR. XLIV.

Fig. 144. 471. *I triangoli ACB, BGE, e i parallelogrammi BD, BF, che hanno le baſi AB, BE eguali, e le altezze CH, GI diſuguali, ſono tra loro nella ragione delle altezze CH, GI.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Si dispongano i parallelogrammi BD, BF in modo, che AB, BE facciano una retta continua; e, prolungata FG in O, si congiungano le rette AO, BO. Sarà il triangolo AOB uguale a BGE (§ 146), e OH = GI. In oltre, essendo alla ragione di CH : HO eguale sì quella di CBH : OBH, che quella di CAH : OAH (§ prec.), sarà CBH : OBH = CAH : OAH, e permutando CBH : CAH = OBH : OAH (§ 412). Onde componendo, e permutando sarà l' intero triangolo ACB all' intero AOB, o pure ACB : BGE, come CAH : OAH, o come CH : HO, o come CH : GI. Finalmente i parallelogrammi BD, BF sono nella ragione de' triangoli ACB, BGE (§ 413). Dunque anche i parallelogrammi BD, BF sono tra loro nella ragione delle altezze CH, GI (§ 369). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LII. TEOR. XLV.

472. *I triangoli ADB, EHF, e i parallelogrammi AC, EG, che hanno disuguali basi AB, EF, e disuguali altezze DO, HP, sono tra loro in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.* Fig. 145.

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia il parallelogrammo IL, che abbia l'altezza MQ = DO, e la baſe IK = EF, e ſi tiri in eſſo la diagonale MK. Eſſendo i triangoli ADB, IMK, EHF tre grandezze omogenee, ſarà la ragione di ADB : EHF compoſta dalle ragioni di ADB : IMK e di IMK : EHF (§ 396). Ma ADB : IMK = AB : IK = AB : EF (§ 470), e IMK : EHF = MQ : HP = DO : HP (§ 471). Dunque la ragione di ADB : EHF è compoſta dalle ragioni di AB : EF e di DO : HP. Finalmente la ragione de' parallelogrammi AC, EG è uguale alla ragione de' triangoli ADB, EHF. Dunque anche la ragione de' parallelogrammi AC, EG è compoſta dalle ragioni di AB : EF e di DO : HP. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LIII. TEOR. XLVI.

Fig. 146. 473. *I triangoli ABC, EBG, e i parallelogrammi BD, BF, che hanno un angolo eguale a un angolo, cioè ABC = EBG, ſono tra loro pure in ragione compoſta da quelle de' lati, che ſtanno intorno agli angoli eguali, vale a dire compoſta dalle ragioni di AB : BG e di CB : BE.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

Si diſpongano i parallelogrammi BD, BF in modo, che AB, e BG facciano una retta continuata ; faranno , per gli angoli eguali ABC, EBG , una retta continuata anche CB, BE (§ 94) . Di più da' punti C , ed E ſi calino CI , EH perpendicolari ad AG . Eſſendo i triangoli CBI, EBH equiangoli , ſarà BC : CI = BE : EH (§ 427) , e permutando CB : BE = CI : EH (§ 412). Ma tanto la ragione de triangoli ABC, EBG, quanto quella de' parallelogrammi BD , BF è compoſta dalle ragioni di AB : BG e di CI : EH (§ 472) . Dunque tanto la ragione de' triangoli ABC, EBG, quanto quella de' parallelogrammi BD , BF è compoſta dalle ragioni di AB : BG e di CB : BE . Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO I.

474. Si noti che ſe ſi vuol conoſcere la ragione di due rettilinei qualunque , baſta ridurli in triangoli , o in parallelogrammi ; che la ragione di tali triangoli , o parallelogrammi è la ſteſſa della ragione de' rettilinei. Ed ecco perchè , dopo aver parlato delle ragioni de' triangoli , e parallelogrammi , ci diſpenſiamo di parlare delle ragioni di tutti gli altri rettilinei.

AV-

Digitalizzato da Google

CAP. X.

Dell' uguaglianza de' triangoli, e de' parallelogrammi, che hanno la ragione delle basi reciproca di quella delle altezze, e dell' uguaglianza de' rettangoli formati da rette proporzionali.

PROP. LV. TEOR. XLVIII.

Fig. 148. 477. *Se due triangoli ABD, EFH, o due parallelogrammi AC, EG sono eguali, la ragione delle loro basi AB, EF è reciproca di quella delle altezze* DI, KH; *e se la ragione delle basi AB, EF è reciproca di quella delle altezze* DI, HK, *i triangoli ABD, EFH, ed i parallelogrammi AC, EG sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Dall' altezza maggiore DI si tagli IO = HK, e si congiungano le rette AO, BO.

I. Sieno eguali i triangoli ABD, EFH, e per conseguenza eguali i parallelogrammi AC, EG. Sarà la ragione del triangolo ABO : EFH uguale alla ragione dell' istesso trian-

Digitalizzato da Google

triangolo ABO ad ABD (§ 389). Ma ABO : EFH = AB : EF (§ 470), e ABO : ABD = IO : ID (§ 471) = HK : DI. Dunque AB : EF = HK : DI. Sicchè la ragione delle basi è reciproca di quella delle altezze.

II. Sia la ragione delle basi reciproca di quella delle altezze; sarà AB : EF = HK : DI = IO : ID. Ma AB : EF = ABO : EFH (§ 470), e IO : ID = ABO : ABD (§ 471). Dunque il triangolo ABO : EFH = ABO : ABD. E perciò il triangolo ABD è uguale al triangolo EFH (§ 391); e conseguentemente il parallelogrammo AC è uguale al parallelogrammo EG. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

478. Se è l'angolo DAB = HEF, i due triangoli DAI, HEK sono equiangoli. Onde KH : HE = ID : DA (§ 437), e permutando HK : DI = HE : DA. Dunque se i triangoli ABD, EFH, e i parallelogrammi AC, EG, che hanno l'angolo DAB = HEF, sono eguali, hanno i lati esistenti intorno agli angoli eguali reciprocamente proporzionali, cioè AB : EF = EH : AD, e se hanno i lati esistenti intorno agli angoli eguali reciprocamente proporzionali, sono tra loro eguali.

Digitalizzato da Google

PROP. LVI. TEOR. XLIX.

Fig.149. 479. *Se quattro rette A, B, C, D ſono proporzionali, il rettangolo fatto dalle due eſtreme A e D è uguale al rettangolo fatto dalle due di mezzo B e C; e ſe A, B, C, D ſono quattro rette tali, che 'l rettangolo fatto dalle eſtreme A e D è uguale al rettangolo fatto dalle due di mezzo B e C, ſono elleno proporzionali.*

DIMOSTRAZIONE.

Si facciano il rettangolo **LN**, che abbia il lato **LM = A**, **LO = D**, e il rettangolo **PR**, che abbia **PQ = B**, **PS = C**.

I. Sieno **A**, **B**, **C**, **D** proporzionali. Dunque **LM : PQ = PS : LO**. E perciò i rettangoli **LN**, **PR**, avendo i lati eſiſtenti intorno agli angoli eguali **L** e **P** reciprocamente proporzionali, ſono eguali tra loro (§ prec.). Onde il rettangolo fatto dalle due eſtreme **A** e **D** uguaglia il rettangolo fatto dalle due di mezzo **B** e **C**.

II. Sieno le rette **A**, **B**, **C**, **D** tali, che 'l rettangolo **LN**, fatto dalle eſtreme **A** e **D**, ſia uguale al rettangolo **PR**, fatto dalle due di mezzo **B** e **C**. Sarà **LM : PQ = PS : LO** (§ prec.). E perciò **A : B = C : D**. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LVII. TEOR. L.

480. *Se tre rette A, B, C ſono continuamente proporzionali, il rettangolo fatto dalle due eſtreme A e C uguaglia il quadrato di quella di mezzo B; e ſe A, B, C ſono tre rette tali, che'l rettangolo delle eſtreme A e C uguaglia il quadrato di quella di mezzo B, ſono le tre A, B, C continuamente proporzionali.* Fig. 150.

DIMOSTRAZIONE.

Si facciano il rettangolo LN, che abbia il lato LM = A, e LO = C, e'l quadrato PR, che abbia il lato PQ = B.

I. Sieno A, B, C continuamente proporzionali. Dunque LM : PQ = PQ : LO, o LM : PQ = PS : LO. Sicchè il rettangolo LN, fatto dalle eſtreme A e C, e'l quadrato PR, fatto ſu quella di mezzo B, hanno i lati eſiſtenti intorno agli angoli eguali reciprocamente proporzionali; e per conſeguenza ſono eguali (§ 478).

II. Sieno le rette A, B, C tali, che'l rettangolo LN, fatto dalle eſtreme A e C, ſia uguale al quadrato PR, fatto ſu quella di mezzo B. Sarà LM : PQ = PS : LO (§ 478), e per conſeguenza A : B = B : C. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

481. Coll'ajuto delle prop. dimoſtrate in queſto capo, ſe ne poſſono dimoſtrare molte altre. Ci contentiamo di ſoggiugnere quì un eſempio ſolo. Perciò ſia la ſeguente

PROP. LVIII. TEOR. LI.

Fig.151. 482. *Sia ABCD un quadrilatero iſcritto nel cerchio ABCD. Dico eſſere il rettangolo fatto dalle ſue diagonali AC, BD uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da i lati oppoſti, cioè da AB e CD, e da BC e AD.*

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia nel punto A l'angolo BAE = DAC. Saranno equiangoli e i due triangoli ADE, ACB, e i due ABE, ACD. Dunque AC : CB = AD : DE, e AC : CD = AB : BE (§ 437). E perciò il rettangolo fatto da AC e DE è uguale al rettangolo fatto da BC e AD, e 'l rettangolo fatto da AC e BE è uguale al rettangolo fatto da CD e AB (§ 479). Per la qual coſa la ſomma de' rettangoli fatti da AC e DE, e da AC e BE, o il rettangolo fatto da AC e BD (§ 165) è uguale alla ſomma de' rettangoli fatti da AB e CD, e da BC e AD. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. XI.

Della ragione, che hanno le figure rettilinee ſimili, e della loro proporzionalità.

LEMMA.

483. *Se da due angoli eguali di due poligoni ſimili ſi tirano agli angoli oppoſti delle rette, queſte dividono i poligoni in triangoli eguali di numero, e riſpettivamente ſimili tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i poligoni ABCDEF, LMNOPQ Fig. 152. ſimili tra loro, e dagli angoli eguali A e L ſi tirino agli angoli oppoſti le rette AC, AD, AE, LN, LO, LP. E' chiaro che quante rette ſono tirate in uno, altrettante ne ſono tirate nell' altro. Onde sì fatte rette dividono i poligoni in egual numero di triangoli. In oltre, eſſendo i poligoni ſimili, ſarà l' angolo B = M, e AB : BC = LM : MN (§ 433). Dunque è l' angolo BCA = MNL, e per conſeguenza ACD = LNO, e 'l triangolo ABC ſimile a

Digitalizzato da Google

LMN (§ 440). E perciò AC : CB = LN : NM. Ma BC : CD = MN : NO. Onde AC : CD = LN : NO (§ 420). Sicchè anche i triangoli ACD, LNO ſono ſimili (§ 440). Allo ſteſſo modo ſi dimoſtra eſſere il triangolo ADE ſimile a LOP, e AEF ſimile a LPQ. Per la qual coſa ſe da due angoli eguali, ec.. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. LIX. TEOR. LII.

484. *I triangoli ſimili ſono tra loro in ragione duplicata de' loro lati omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 133. Sieno i triangoli ABC, DEF ſimili, cioè abbiano l'angolo BAC = EDF, ACB = DFE, CBA = FED, e i lati eſiſtenti intorno agli angoli eguali proporzionali. Eſſendo BA : AC = ED : DF, ſarà permutando AB : DE = AC : DF (§ 412). Ma la ragione de' triangoli ABC, DEF è compoſta dalle ragioni di AB : DE, e di AC : DF (§ 473). Sicchè, eſſendo le ragioni componenti eguali, ſarà la ragione de' triangoli ABC, DEF duplicata di quella de' lati omologhi AB, DE (§ 371). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LX. TEOR. LIII.

485. *I poligoni ſimili ſono anche in ragione duplicata de' loro lati omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i poligoni ABCDEF, LMNOPQ ſimili, e dagli angoli eguali A e L ſi tirino agli angoli oppoſti le rette AC, AD, AE, LN, LO, LP; ſaranno i triangoli ABC, ACD, ADE, AEF riſpettivamente ſimili a LMN, LNO, LOP, LPQ, (§ 483). Eſſendo tra loro, per la ſimiglianza de' poligoni, le ragioni di BC: MN e di CD: NO eguali, eguali ſaranno ancora le loro duplicate (§ 399); e perciò la ragione del triangolo ABC: LMN è uguale alla ragione del triangolo ACD: LNO (§ prec.). Similmente ſi dimoſtra che le ragioni di ACD: LNO, di ADE: LOP, di AEF: LPQ ſono tutte eguali. Eſſendo dunque tutte le ragioni di ABC: LMN, di ACD: LNO, di ADE: LOP, di AEF: LPQ eguali, ſarà la ſomma degli antecedenti alla ſomma de' conſeguenti, come uno degli antecedenti al ſuo conſeguente (§ 422), o ſia il poligono ABCDEF al poligono LMNOPQ, come ABC: LMN, e perciò

Fig. 152.

Digitalizzato da Google

in duplicata ragione di AB : LM (§ prec.). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

486. Perchè, ritrovata LR terza proporzionale dopo AB e LM, la ragione di AB : LR è duplicata di quella di AB : LM (§ 398); sarà il poligono ABCDEF il poligono LMNOPQ anche nella ragione di AB : LR.

COROLLARIO II.

487. Essendo i quadrati tutti simili tra loro, saranno anche i quadrati in duplicata ragione de' loro lati. E perciò la duglicata della ragione di due linee è la stessa della ragione de' quadrati fatti sulle medesime linee. Quindi s' intende perchè i Geometri, in vece della ragione duplicata di due linee, nominano spessevolte la ragione de' quadrati delle stesse linee.

PROP. LXI. TEOR. LIV.

Fig. 149. 488. *Se quattro rette A, B, C, D sono proporzionali, i rettilinei simili, che hanno per lati omologhi A e B, sono proporzionali co' rettilinei simili, che hanno per lati omologhi C e D; e se A, B, C, D sono tali, che i rettilinei simili, che hanno per lati omologhi A e*

Digitalizzato da Google

A e B, ſono proporzionali co' rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi C e D, le rette A, B, C, D ſono anche proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

I. ſieno le ragioni di A : B e di C : D eguali tra loro; le loro duplicate ſaranno ancora eguali (§ 399). Dunque la ragione de' rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi A e B, è uguale alla ragione de' rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi C e D (§ 485).

II. Sia la ragione de' rettilinei ſimili, li quali hanno per lati omologhi A e B, eguale alla ragione de' rettilinei ſimili, che hanno per lati omologhi C e D; ſaranno le duplicate delle ragioni di A : B e di C : D eguali (§ 485). E perciò eguali ſaranno pure le ragioni di A : B e di C : D (§ 401). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

489. Ciò che ſi è dimoſtrato de' quadrati fatti ſu i lati d' un triangolo rettangolo, ſi può coll' ajuto della prop. prec. dimoſtrare ancora di tutt' i rettilinei ſimili. Perciò foggiugniamo la ſeguente

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXII. TEOR. LV.

Fig. 153. 490. *Se vi ſono tre rettilinei ſimili P, Q, R, che hanno per lati omologhi i lati del triangolo rettangolo ABC, il rettilineo P, che ha per lato l' ipotenuſa è uguale alla ſomma degli altri due.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il rettilineo Q ſta a R, come il quadrato di AB al quadrato di BC (§ 487). Onde componendo la ſomma di Q e R ſta a R, come la ſomma de' quadrati di AB e BC al quadrato di BC (§ 407). Ma R ſta a P, come il quadrato di BC al quadrato di AC. Dunque la ſomma di Q e R ſta a P, come la ſomma de' quadrati di AB e BC al quadrato di AC (§ 420). Per la qual coſa, eſſendo la ſomma de' quadrati di AB e BC eguale al quadrato di AC (§ 188), anche la ſomma di Q e R è uguale a P. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

Digitalizzato da Google

CAP. XII.

Si ſciolgono alcuni probl., che alla teorica de' rettilinei ſimili appartengono.

PROP. LXIII. PROB. VIII.

491. *Dato un rettilineo, e data una retta, coſtruire ſu di eſſa un altro rettilineo ſimile al dato.*

SOLUZIONE.

Sieno ABCDEF il rettilineo dato, e LM la retta data. Fig. 152.

1. Si divida il rettilineo dato in quanti triangoli ſi può dividere colle rette AC, AD, AE.

2. Ne' punti L e M di LM ſi facciano gli angoli MLN, LMN riſpettivamente uguali a BAC, ABC; s'avrà l'angolo LNM = ACB (§ 109).

3. Si facciano ne' punti L e N di LN gli angoli NLO, LNO riſpettivamente uguali a CAD, ACD; s'avrà l'angolo LON = ADC.

4. Ne' punti L e O di LO ſi facciano gli

Digitalizzato da Google

gli angoli OLP, LOP rispettivamente uguali a DAE, ADE; s'avrà l'angolo LPO = AED.

5. Finalmente ne' punti L e P di LP si facciano gli angoli PLQ, LPQ rispettivamente uguali a EAF, AEF; s'avrà l'angolo LQP = AFE.

Dico essere LMNOPQ il rettilineo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo la somma degli angoli fatti in L, N, O, P eguali rispettivamente alla somma degli angoli, che compongono quelli, che sono in A, C, D, E, saranno i rettilinei LMNOPQ, ABCDEF tra loro equiangoli. In oltre i triangoli LMN, LNO, LOP, LPQ sono rispettivamente equiangoli con ABC, ACD, ADE, AEF. Dunque LM : MN = AB : BC, MN : NL = BC : CA, LN : NO = AC : CD (§ 437). Onde MN : NO = BC : CD (§ 420). Similmente si dimostra essere NO : OP = CD : DE, OP : PQ = DE : EF, PQ : QL = EF : FA. Finalmente, avendo LM, MN, NO, OP, PQ, QL ragioni ordinate ad AB, BC, CD, DE, EF, FA, sarà LM : LQ = AB : AF (§ 420), e invertendo QL : LM = FA : AB (§ 406). Sicchè sopra LM si è costruito il rettilineo LMNOPQ simile al dato ABCDEF.

Ch' è

Digitalizzato da Google

Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP. LXIV. PROB. IX.

492. Dato il rettilineo ABCDEF, e data la ragione di AB: LR, costruire un altro rettilineo simile al dato, al quale lo stesso rettilineo dato abbia la ragione di AB: LR.

SOLUZIONE.

1. Si ritrovi tra AB e LR la mezza proporzionale LM (§ 464).
2. Sopra LM si costruisca il rettilineo LMNOPQ simile ad ABCDEF (§ prec.).
Dico LMNOPQ essere il rettilineo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i rettilinei ABCDEF, LMNOPQ simili per la costruzione, ed essendo AB, LM, LR continuamente proporzionali; saranno i rettilinei ABCDEF, LMNOPQ nella ragione di AB: LR (§ 486). Sicchè si è costruito il rettilineo LMNOPQ simile al dato, al quale lo stesso rettilineo dato ha la ragione di AB: LR. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXV. PROBL. X.

Fig.154. 493. *Dati due rettilinei P e Q, ritrovarne un terzo, che ſia ſimile a P, e uguale a Q.*

SOLUZIONE.

1. Sopra AB ſi faccia il rettangolo AC uguale a P, e ſu BC ſi faccia l'altro CD uguale a Q.

2. Si ritrovi EF, mezza proporzionale tra AB e BD, e ſu EF ſi coſtruiſca il rettilineo R ſimile a P (§ 491).

Dico eſſere R il rettilineo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo BD terza proporzionale dopo AB, EF, ſarà il rettilineo P : R, come AB : BD (§ 486); e perciò come il rettangolo AC : CD, o come l'iſteſſo rettilineo P al rettilineo Q. Dunque il rettilineo R è uguale a Q (§ 391). Per la qual coſa s'è coſtruito il rettilineo R ſimile a P, ed eguale a Q. Ch'è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

LEMMA

Fig.155. 494. *Sopra qualunque retta AB ſi poſſono ſituare infiniti parallelogrammi, come AO, AE, AN,*

Digitalizzato da Google

AN, ec., che sieno minori rispettivamente degl' interi parallelogrammi AH, AD, AL, ec. situati sull' intera AB, e che le differenze sieno i parallelogrammi IH, CD, ML, ec.. Dico che, se IH, CD, ML, ec. sono simili tra loro, il massimo di tutt' i parallelogrammi AO, AE, AN, ec. è il parallelogrammo AE situato su AC, metà di AB.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo IH, CD, ML simili, la diagonale BO di IH prolungata passerà per E e N (§ 450). Si prolunghino IO, CE in Q e P. Essendo FE = ED, sarà GE = SD (§ 143); e perciò GE maggiore di OD, e per conseguenza maggiore di CO; aggiuntovi di comune AS, sarà AE maggiore di AO. Similmente, essendo FE = ED, sarà EL, e perciò ME eguale ad EK; onde ME è maggiore di FN; e perciò, aggiuntovi di comune AR, sarà AE pure maggiore di AN. Allo stesso modo può dimostrarsi AE maggiore di ogni altro delli suddetti infiniti parallelogrammi. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LXVI. PROB. XI.

495. *Data una retta, dato un rettilineo, e dato un parallelogrammo, situare sulla retta data un altro parallelogrammo, che sia eguale al retti-*

Digitalizzato da Google

rettilineo dato, e che sia minore del parallelogrammo intero situato sulla data retta d' un altro parallelogrammo simile al dato.

SOLUZIONE.

Sia AB la retta data, Z il dato rettilineo, e X il dato parallelogrammo.

1. Si divida AB in due parti eguali in C, e, fatto su BC il parallelogrammo CD simile a X, si compisca l' intero ABDF.

Se sarà AE uguale a Z, sarà AE il parallelogrammo cercato. Se poi sarà AE minore di Z, il probl. sarà impossibile (§ prec.). Se finalmente sarà AE maggiore di Z; allora.

2. Si costruisca il parallelogrammo TY eguale all' eccesso di AE, o di CD sopra Z, e simile a X (§ 493), e perciò simile a CD.

3. Si tagli ES = TV, e per S si tiri GH parallela ad AB, che interseca la diagonale BE in O.

4. Per O si tiri IQ parallela a BD.

Dico essere AIOG il parallelogrammo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i parallelogrammi SQ e TY simili a CD, saranno simili tra loro (§ 435). Dunque SQ e TY sono nella ragio-

Digitalizzato da Google

gione de' quadrati di ES, TV (§ 487). Ma tali quadrati ſono eguali (§ 162). Sicchè eguali ſono anche SQ, TY. E perciò SQ è l'eccesſo di CD ſopra Z, e conſeguentemente la ſomma di CO e ID è uguale a Z. E' in oltre la ſomma di CO e ID anche uguale ad AO. Sicchè il parallelogrammo AO è pure uguale a Z. Di più AO è minore di AH di tanto, quant' è IH, ch' è ſimile a CD (§ 448), e perciò ſimile a X. Sicchè ſopra AB s' è ſituato il parallelogrammo AO, che ha le condizioni cercate. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

PROP. LXVII. PROB. XII.

496. Data una retta, dato un rettilineo, e dato un parallelogrammo, ſituare ſulla retta data un altro parallelogrammo, che ſia eguale al rettilineo dato, e che ſia maggiore del parallelogrammo ſituato ſu la ſola data retta d' un altro parallelogrammo ſimile al dato.

SOLUZIONE.

Sieno AB la retta data, Z il dato rettilineo, e X il dato parallelogrammo. Fig. 156.

1. Diviſa AB in due parti eguali in C, ſi faccia ſopra BC il parallelogrammo CE ſimile a X (§ 491), e in eſſo ſi tiri la diagonale BD.

Digitalizzato da Google

2. Si coſtruiſca il parallelogrammo TY eguale alla ſomma di CE e Z, e ſimile a X (§ 493), e conſeguentemente ſimile a CE.

3. Prolungata DC in K, finchè ſia DK = TV, ſi tiri per K la LH paralleia ad AB, che s' incontri con DB prolungata in H.

4. Finalmente, compito il parallelogrammo KF, ſi prolunghi AB in G, e per A ſi riri AL parallela a DK.

Dico ALHG eſſere il parallelogrammo cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo KF e TY ſimili ambidue a CE, ſaranno KF e TY ſimili tra loro (§ 435), e perciò nella ragione de' quadrati di DK, TV (§ 487). Ma i quadrati di DK, TV ſono eguali (§ 162). Onde eguali ſono KF, TY. Per la qual coſa KF è uguale alla ſomma di CE e Z; e conſeguentemente, prolungata EB in I, la ſomma di KB e IF uguaglia Z. E' pure LG uguale alla ſomma di KB e IF. Dunque LG è uguale a Z. Di più LG è maggiore di LB di tanto, quant' è IG, ch' è ſimile a KF (§ 448), e per conſeguenza ſimile a X (§ 435). Sicche ſopra AB s' è ſituato il parallelogrammo LG, che ha le condizioni cercate. Ch' è ciò, che biſognava fare, e dimoſtrare.

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. XIII.

Delle ragioni degli angoli fatti e alli centri, e alle circonferenze de' cerchi, e di quelle de' ſettori circolari.

PROP. LXVIII. TEOR. LVI.

497. *Ne' cerchi eguali AEB, CFD gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri, e gli angoli AEB, CFD fatti nelle periferie, ſono nella ragione degli archi AB, CD, ſu quali appoggiano; e i ſettori AOB, CPD ſono pure nella ſteſſa ragione degli archi AB, CD, da' quali ſono terminati.* Fig. 157

DIMOSTRAZIONE.

I. S' intendano gli archi AB, CD diviſi nelle parti AG, GH, HI, IB, CK, KL, LD, delle quali ognuna ſia eguale alla loro aliquota comune; e s' intendano dagli centri O e P tirate le rette OG, OH, OI, PK, PL. Saranno tutti gli angoli AOG, GOH, HOI, IOB, CPK, KPL, LPD eguali (§ 256). Perciò l'angolo AOG, e l'arco AG ſono aliquote ſimili

Digitalizzato da Google

mili sì dell' angolo CPD e dell' arco CD, che dell' angolo AOB e dell' arco AB. Per la qual cosa l' angolo AOB sta all' angolo CPD, come l' arco AB all' arco CD (§ 382).

II. Gli angoli AEB, CFD, come parti aliquote simili di AOB, CPD, sono tra loro nella ragione di AOB, CPD (§ 413), e perciò nella ragione di AB : CD (§ 369).

III. S' intenda rivoltato il settore AOG sul settore GOH; combaciando l' angolo AOG con GOH, combacerà ancora il settore AOG col settore GOH. Dunque i settori AOG, GOH sono eguali. Similmente si dimostra che ognuno de' settori HOI, IOB, CPK, KPL, LPD uguaglia il settore AOG. Perciò il settore AOG, e l' arco AG sono aliquote simili sì del settore CPD e dell' arco CD, che del settore AOB e dell' arco AB. Per la qual cosa i settori AOB, CPD sono nella ragione degli archi AB, CD (§ 382). Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

498. Essendo nella ragione degli archi, a' quali appoggiano gli angoli fatti ne' centri, o nelle periferie di cerchi eguali, nella stessa ragione degli archi, a' quali appoggiano, sono ancora gli angoli fatti nel centro, o nella periferia del medesimo cerchio.

Digitalizzato da Google

chio. Similmente, essendo i settori de' cerchi eguali nella ragione degli archi, da' quali vengono terminati, nella raggione degli archi, da cui verranno terminati, saranno pure i settori d' un istesso cerchio.

COROLLARIO II.

499. Appoggiando l' angolo retto, fatto nel centro di qualunque cerchio, sulla quarta parte della periferia: è chiaro essere qualunque angolo fatto nel centro d' un cerchio a quattro retti, come l' arco, su cui quello appoggia, all' intera circonferenza, o pure come i gradi del detto arco a 360°. Quindi s' intende perchè un angolo fatto nel centro d' un cerchio dicesi essere di tanti gradi, quanti ne contiene l' arco, su cui e' appoggia.

COROLLARIO III.

500. Essendo l' angolo fatto nella periferia metà di quello, ch' è fatto nel centro, qualora ambidue appoggiano allo stesso arco (§ 239); sarà l' angolo fatto nella periferia a due retti, come l' arco, su cui egli appoggia, all' intera periferia.

COROLLARIO IV.

501. Finalmente il settore contenuto da due

Digitalizzato da Google

due raggi, che formano l'angolo retto, è la quarta parte del cerchio. Dunque ogni ſettore circolare ſta all'intero cerchio, come l'arco del ſettore all'intera periferia, o come i gradi del detto arco a 360°.

PROP. LXIX. TEOR. LVII.

Fig.158. 502. *Sieno AEB, CFD due cerchi qualunque, e ſieno formati angoli eguali AOB, CPD ne' centri, e per conſeguenza angoli eguali AEB, CFD nelle periferie. Dico che gli archi AB, CD ſono proporzionali alle intere periferie, e che i ſettori AOB, CPD ſono proporzionali agl' interi cerchi.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Eſſendo l'angolo AOB = CPD, ſarà l'angolo AOB a quattro retti, come CPD a quattro retti (§ 389). E perciò l'arco AB ſta alla periferia AEB, come CD alla periferia CFD (§ 499), e permutando l'arco AB : CD, come la periferia AEB : CFD (§ 412).

II. Eſſendoſi dimoſtrato ſtare l'arco AB alla periferia AEB, come CD alla periferia CFD, ſtarà il ſettore AOB al cerchio AEB, come il ſettore CPD al cerchio CFD (§ 501). Onde permutando ſtarà il ſettore AOB al ſettore CPD, come il cerchio AEB al cerchio CFD. Ch'è cio, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXX. TEOR. LVIII.

503. *Sieno AEB, CFD due cerchi qualunque, e sieno gli archi AB, CD proporzionali alle intere periferie, o i settori AOB, CPD proporzionali agl' interi cerchi. Dico essere eguali tra loro gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri, e per conseguenza eguali gli angoli AEB, CFD fatti nelle periferie.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo per l'ipotesi l'arco AB : CD, come la periferia AEB alla periferia CFD; sarà permutando l'arco AB alla periferia AEB, come l'arco CD alla periferia CFD (§ 412). E perciò sarà l'angolo AOB a quattro retti, come CPD anche a quattro retti (§ 499). Per la qual cosa l'angolo AOB = CPD (§ 391), e conseguentemente AEB = CFD.

II. Essendo pure per l'ipotesi il settore AOB al settore CPD, come il cerchio AEB al cerchio CFD; sarà permutando il settore AOB al cerchio AEB, come il settore CPD al cerchio CFD. E perciò l'arco AB alla periferia AEB, come l'arco CD alla periferia CFD (§ 501). Onde, per la parte prima, l'angolo AOB = CPD, e conseguentemente l'angolo AEB = CFD. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXI. TEOR. LIX.

504. *Sieno AOB, CPL due angoli disugua-li fatti ne' centri de' cerchi AEB, CFD. Dico* 1. *che la ragione degli angoli AOB, CPL è composta dalla ragione diretta degli archi AB, CL, e dalla reciproca di quella delle periferie AEB, CFD;* 2. *che la ragione degli archi AB, CL è composta dalla ragione delle periferie AEB, CFD, e da quella degli angoli AOB, CPL.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Si faccia nel centro P l' angolo CPD = AOB. Sarà l' angolo AOB : CPL = CPD : CPL (§ 389) = CD : CL (§ 498). Ma essendo gli archi CD, AB, CL tre grandezze omogenee, sarà la ragione dell' arco CD : CL (§ 396) composta dalla ragione di CD: AB, o sia della periferia CFD alla periferia AEB (§ 502), e dalla ragione di AB : CL. Dunque anche la ragione dell' angolo AOB : CPL è composta dalla ragione dell' arco AB : CL, e dalla ragione della periferia CFD : AEB; cioè composta dalla diretta degli archi AB, CL, e dalla reciproca delle periferie AEB, CFD.

II. La ragione dell' arco AB : CL è composta (§ 396) dalla ragione di AB : CD, o sia della periferia AEB alla periferia CFD [§ 502],

Digitalizzato da Google

[§ 502] e dalla ragione di CD : CL, o sia dell' angolo CPD : CPL (§ 498). Ma CPD = AOB. Dunque la ragione dell' arco AB : CL è composta dalla ragione della periferia AEB alla periferia CFD, e dalla ragione dell' angolo AOB : CPL. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

505. Premessi questi teoremi, è facile a dimostrare che gli archi circolari crescono in maggior ragione delle loro corde; e che le tangenti crescono ancora in maggior ragione degli archi, a' quali appartengono. Perciò soggiugniamo le due seguenti proposizioni.

PROP. LXXII. TEOR. LX.

506. *In qualunque cerchio ACD si prenda-* Fig. 159.
no due archi disuguali AB, BC, e si tirino le corde AB, BC. Dico essere la ragione dell'arco AB : BC maggiore della ragione della corda AB : BC.

DIMOSTRAZIONE.

Si divida prima l' angolo ABC in due parti eguali colla retta BD; e, congiunte le rette AC, AD, CD, si cali da D la retta DO perpendicolare ad AC. Poscia, presso

Digitalizzato da Google

so per centro il punto D, si descriva coll' intervallo DE l' arco circolare EG, che interseca AC in F ed E, e DC in G. Finalmente si congiunga DF.

Essendo l' angolo ABD = CBD, sarà l'arco AD = DC (§ 255), e perciò la retta AD = DC [§ 262]. Onde ADC, e FDE sono ambidue triangoli isosceli. Perciò la perpendicolare DO divide in due parti eguali e gli angoli ADC, FDE, e le basi AC, FE (§ 118). Per la qual cosa l' angolo ADO = ODC, FDO = ODE, e conseguentemente ADF = EDC, la retta AO = OC, FO = OE, e conseguentemente AF = EC. In oltre, essendo l' angolo DOE retto, sarà DEC ottuso, e DCE acuto. Onde DC è maggiore di DE [§ 122]. Sicchè l' arco circolare FEG dee incontrare DC sotto il punto C, e fare per conseguenza il settore EDG minore del triangolo EDC. Per la qual cosa la ragione del settore FDE al settore EDG è maggiore della ragione del settore FDE al triangolo EDC [§ 390]. Ma la ragione del settore FDE al triangolo EDC è maggiore della ragione del triangolo FDE al triangolo EDC. Dunque molto più la ragione del settore FDE al settore EDG è maggiore della ragione del triangolo FDE al triangolo EDC; e per conseguenza la ragione dell' arco FE : EG, ovvero dell'angolo FDE : EDG [§ 498], è maggiore della ragione della retta FE : EC. Adunque l'angolo

Digitalizzato da Google

golo FDE contiene l' angolo EDG più volte di quello contiene FE la retta EC . Ma l'angolo ADF contiene una volta esattamente EDG , e AF contiene una volta pure esattamente EC . Sicchè anche la ragione dell' angolo ADE : EDG è maggiore della ragione della retta AE : EC . Finalmente la ragione dell' angolo ADE : EDG , o sia di ADB : BDC è uguale alla ragione dell' arco AB : BC (§ 498), e la ragione di AE : EC è uguale a quella di AB : BC [§ 432]. Sicchè pure la ragione dell' arco AB : BC è maggiore della ragione della corda AB alla corda BC . Ch' è ciò , che bisognava dimostrare .

COROLLARIO.

507. Se nel cerchio ACBD saranno le corde CD , EF perpendicolari al diametro AB . Dividendo il diametro AB in due parti eguali sì gli archi CAD, EAF , che le corde CD , EF , sarà la ragione dell' arco CAD : EAF uguale alla ragione dell' arco CA : AE , e la ragione della corda CD : EF sarà uguale alla ragione di CG : EH (§ 413). Ma la ragione dell' arco CAD : EAF è maggiore della ragione della corda CD : EF (§ prec.) . Dunque anche la ragione dell' arco AC : AE è maggiore della ragione di CG : EH . Per la qual cosa calando Fig. 160.

Digitalizzato da Google

lando dagli diverſi punti dell'arco d'un quadrante circolare AOI le perpendicolari EH, CG, ec. ſopra il raggio AO, gli archi AC, AE ſaranno tra loro in maggior ragione delle perpendicolari ſuddette CG, EH.

PROP. LXXIII. TEOR. LXI.

Fig.161. 508. *Sia AOB qualunque ſettore circolare minore del quadrante. Pel punto A ſi tiri la tangente AC, che s'unisca col raggio OB prolungato in C, e dal centro O ſi tiri qualunque altro raggio OG, che prolungato incontri AC in D. Dico la tangente AC dell'arco AB eſſere alla tangente AD dell'arco AG in maggior ragione dell'arco AB all'arco AG.*

DIMOSTRAZIONE.

Preſo per centro il punto O, e coll'intervallo OD ſi deſcriva l'arco circolare EDF, che interſeca OC in F, e OA prolungata in E. Eſſendo il triangolo COD maggiore del ſettore FOD, ſarà la ragione del triangolo COD al triangolo DOA maggiore ancora di quella del ſettore FOD all'iſteſſo triangolo DOA (§ 390), e molto più maggiore di quella del ſettore FOD al ſettore DOE. Onde la ragione della retta CD : DA è maggiore della ragione dell'arco FD : DE. Perciò, contenendo DA una volta ſe ſteſſa, e l'arco DE

Digitalizzato da Google

DE contenendo pure una volta se stesso, sarà la ragione della tangente CA : AD maggiore di quella dell'arco FE : DE, o dell'angolo FOE : DOE (§ 498), o dell'arco BA : AG. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP. XIV.

Delle ragioni, che hanno le periferie circolari, i cerchi, i loro settori, e le loro porzioni, e della quadratura di tali spazj.

DEFINIZIONE.

509. *Simili* si dicono due archi circolari AB, CD, se sono proporzionali alle intere periferie AEB, CFD. Parimente *simili* si dicono due settori AOB, CPD, e *simili* due porzioni circolari AB, CD, se vengono terminati da archi simili AB, CD. Fig. 158.

COROLLARIO I.

510. S'è già dimostrato che, se gli archi AB, CD sono proporzionali alle intere periferie, gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri, e gli angoli AEB, CFD fatti

Digitalizzato da Google

fatti nelle periferie ſono tra loro anche eguali (§ 503); e che, ſe gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri, o AEB, CFD fatti nelle periferie ſono eguali, gli archi AB, CD ſono proporzionali alle intere periferie (§ 502). Dunque, ſe gli archi AB, CD ſono ſimili, gli angoli AOB, CPD fatti ne' centri, e gli angoli AEB, CFD fatti nelle periferie ſono eguali; e ſe i detti angoli ſono eguali, gli archi AB, CD, alli quali appoggiano, ſono ſimili.

COROLLARIO II.

511. E' chiaro dunque che, qualora i ſettori AOB, CPD ſono ſimili, o ſimili le porzioni circolari AB, CD, gli angoli AOB, CPD ſono eguali, e perciò eguali gli angoli AEB, CFD, e conſeguentemente eguali gli angoli contenuti nelle porzioni AB, CD; e che, qualora gli angoli AOB, CPD ſono eguali, e conſeguentemente eguali gli angoli contenuti nelle porzioni AB, CD, i ſettori AOB, CPD ſono ſimili tra loro, e ſimili tra loro ancora le porzioni circolari AB, CD. Quindi s'intende perchè ſopra ſimili ſi ſono dette le porzioni circolari, che contengono angoli eguali.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO III.

512. Finalmente essendo i settori AOB, CPD proporzionali agl' interi cerchi, se gli archi AB, CD sono proporzionali alle intere periferie, e gli archi AB, CD proporzionali alle intere periferie, se i settori AOB, CPD sono proporzionali agl' interi cerchi: è manifesto i settori simili essere proporzionali agl' interi cerchi, e i settori proporzionali agl' interi cerchi esser simili tra loro.

LEMMA.

513. *Gli archi circolari, che sono infinitamente piccioli per rispetto alle loro periferie, sono simili tra loro, e si possono senza errore sensibile prendere, come congruenti alle loro tangenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i due cerchi AHL, DKM concentrici, e nel centro comune O s'intenda formato l'angolo AOB infinitamente picciolo per rispetto a un retto, e molto più per rispetto a quattro retti. S'intendano pure tirare e le corde AB, DE, e le rette AC, DF tangenti in A e D, che incontrano il raggio OB prolungato in C ne' Fig. 162.

Digitalizzato da Google

ne' punti C e F. Essendo l'arco AB all' intera periferia AHL, come l'angolo AOB a quattro retti (§ 499), ed essendo l'angolo AOB infinitamente picciolo per rispetto a quattro retti, infinitamente picciolo sarà ancora l'arco AB per rispetto alla periferia AHL. Similmente si dimostra essere l'arco DE infinitamente picciolo per rispetto alla periferia DKM. Sono di più gli archi AB, DE, per l'angolo comune AOB, simili (§ 510). Dunque gli archetti AB, DE infinitamente piccioli per rispetto alle periferie AHL, DKM sono simili tra loro. In oltre dell' angolo AOB è metà sì BAC, che EDF. Ma AOB si può avere in conto d' un nulla per rispetto a un retto. Dunque gli angoli OAB, ODE senza sensibile errore si possono prendere per retti. E perciò le corde AB, DE senza errore sensibile si possono prendere, come congruenti colle tangenti AC, DF, e molto più, come congruenti colle tangenti, si possono prendere senza errore sensibile gli archetti AB, DE, che tramezzano tra le tangenti, e le corde. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LXXIV. TEOR. LXII.

514. *Le periferie de' cerchi sono tra loro nella ragione de' raggi.*

DI-

Digitalizzato da Google

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda fatta la preparazione del lem. prec. . Essendo, per gli archetti simili AB, DE, la ragione delle periferie AHL, DKM eguale a quella degli stessi archetti AB, DE (§ 509), e perciò eguale a quella delle tangenti AC, DF, con cui i detti archetti senza errore sensibile si possono prendere, come congruenti; ed essendo, per la simiglianza de' triangoli AOC, DOF, il lato AC : DF = AO : DO (§ 437). Sarà la periferia AHL alla periferia DKM, come il raggio AO al raggio DO. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. LXXV. TEOR. LXIII.

515. *I cerchi sono tra loro nella ragione de' quadrati de' raggi.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda fatta la costruzione pure del lem. prec. . Essendo, per la simiglianza de' settori AOB, DOE, la ragione de' cerchi AHL, DKM eguale a quella de' settori AOB, DOE (§ 512), e perciò eguale a quella de' triangoli AOC, DOF, co' cui i

Digitalizzato da Google

detti ſettori ſenza errore ſenſibile ſi poſſono prendere, come congruenti; ed eſſendo i triangoli ſimili AOC, DOF nella ragione de' quadrati de' loro lati omologhi AO, DO (§ 484); ſarà ancora il cerchio AHL al cerchio DKM, come il quadrato del raggio AO al quadrato del raggio DO (§ 369). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

516. Eſſendo i ſettori ſimili, come HOG, KOI, proporzionali a' cerchi AHL, DKM; ſaranno pure i ſettori ſimili HOG, KOI nella ragione de' quadrati de' raggi GO, IO.

COROLLARIO II.

517. Quindi, eſſendo i triangoli ſimili HOG, KOI anche nella ragione de' quadrati de' raggi GO, IO (§ 484), ſarà il ſettore HOG al ſettore KOI, come il triangolo HOG al triangolo KOI. Onde ſarà la porzione circolare HG alla porzione KI, come il ſettore HOG al ſettore KOI (§ 518), e perciò come il cerchio AHL al cerchio DKM, o come il quadrato di GO al quadrato di OI, e conſeguentemente come il quadrato della corda GH al quadrato della corda IK. Sicchè anche le porzioni circolari

Digitalizzato da Google

lari simili sono proporzionali a' cerchi, e perciò nella ragione de' quadrati de' raggi, e conseguentemente nella ragione de' quadrati delle corde.

COROLLARIO III.

518. In oltre, essendo i quadrati de' diametri quadrupli de' quadrati de' raggi (§ 172), e per conseguenza proporzionali agli stessi quadrati de' raggi; saranno e i cerchi, e i settori simili, e le porzioni circolari simili proporzionali a' quadrati de' diametri.

COROLLARIO IV.

519. Sicchè se, presi i lati d' un triangolo rettangolo per raggi, o per diametri, si descriveranno de' cerchi, o de' settori simili, il cerchio, o 'l settore, che avrà per raggio, o per diametro l' ipotenusa, sarà uguale alla somma degli altri due cerchi, o degli altri due settori. Similmente se sopra i lati d' un triangolo rettangolo si descriveranno porzioni circolari simili, la porzione descritta sopra l' ipotenusa sarà uguale alla somma delle altre due.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO V.

Fig. 163. 520. Per la qual cosa, se sopra i lati del triangolo rettangolo ACB si formeranno i mezzi cerchi ACB, ADC, CFB, sarà il mezzo cerchio ACB eguale alla somma di ADC, CFB. Sicchè, toltene le comuni porzioni AEC, CGB, resterà la somma delle lunette ADCE, CFBG eguale al triangolo rettilineo ACB.

PROP. LXXVI. TEOR. LXIV.

521. *Il cerchio è uguale al triangolo, che ha per base la periferia, e per altezza il raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 162. Rappresentino AHL qualunque cerchio, e AB la parte infinitamente picciola della sua periferia. S' intendano tirati i raggi OA, OB, e s' intenda tirata la tangente AC, che s' unisca col raggio OB prolungato in C. Sarà il cerchio AHL al settore AOB, come la periferia AHL all' arco AB (§ 501), o come la periferia AHL alla tangente AC; e perciò come il triangolo, che ha per base la periferia AHL e per altezza il raggio AO, al triangolo AOC (§ 470)

Digitalizzato da Google

(§ 470), o al ſettore AOB, con cui il triangolo AOC ſi può prendere, come congruente. Sicchè il cerchio AHL è uguale al triangolo, che ha per baſe la periferia AHL, e per altezza il raggio AO (§ 391). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

522 La quadratura dunque di qualunque cerchio ſi ritrova multiplicando la periferia per la metà del raggio.

COROLLARIO II.

523. Eſſendo ogni poligono circoſcritto al cerchio eguale al triangolo, che ha per baſe il ſuo perimetro, e per altezza il raggio; ſarà qualunque poligono circoſcritto al cerchio all' iſteſſo cerchio, come il perimetro di quello alla periferia di queſto (§ 470).

COROLLARIO III.

524. Quindi, eſſendo il perimetro del quadrato circoſcritto al cerchio quadruplo del diametro del medeſimo cerchio, ſarà il quadrato circoſcritto al cerchio all' iſteſſo

Digitalizzato da Google

cerchio, come il quadruplo del diametro alla periferia. E perciò il quadrato iſcritto nel cerchio, come metà del circoſcritto, ſarà all' iſteſſo cerchio, come due volte il diametro alla periferia; e 'l quadrato del raggio ſarà al cerchio, come il ſolo diametro alla periferia (§ 326).

AVVERTIMENTO.

Fig. 141. 525. Da ciò, che s'è dimoſtrato fin quì, ſi ricava che, ſe la retta LN ſi divida in qualunque punto M, il cerchio, che ha per raggio LN è uguale alla ſomma de' cerchi, che hanno per raggi LM, MN, una col rettangolo fatto dalla periferia d' uno di queſti cerchi e dal raggio dell' altro.

Si deſcriva ſopra LN il mezzo cerchio LON, e, innalzata dal punto M la MO perpendicolare a LN, ſi congiungano le rette LO, ON. Sarà, per l' angolo retto LON, il cerchio, che ha per raggio LN, eguale alla ſomma de' cerchi, che hanno per raggi LO, ON (§ 519), e perciò eguale alla ſomma de' cerchi, che hanno per raggi LM, MN, una col doppio del cerchio, che ha per raggio MO. Ma, per eſſere LM, MO, MN continuamente proporzionali, LM ſta a MN, come il quadrato di

Digitalizzato da Google

di MO al quadrato di MN (§ 398). Dunque la periferia del cerchio , il cui raggio è LM ſta alla periferia del cerchio , il cui raggio è MN (§ 514), come il cerchio , che ha per raggio MO al cerchio , che ha per raggio MN (§ 515) ; e per conſeguenza il rettangolo fatto da MN e dalla periferia del cerchio , il cui raggio è LM , è al rettangolo fatto da MN e dalla periferia del cerchio , chie ha per raggio MN, come il cerchio , il cui raggio è MO , al cerchio , il cui raggio è MN. Ma il ſecondo de' detti rettangoli è doppio del cerchio, che ha per raggio MN (§ 522) . Dunque anche il primo è doppio del cerchio , che ha per raggio MO . Similmente ſi dimoſtra che il rettangolo fatto da LM e dalla periferia del cerchio , che ha per raggio MN , è doppio pure del cerchio , il cui raggio è MO. Per la qual coſa il cerchio, che ha per raggio LN è uguale alla ſomma de' cerchi , che hanno per raggi LM , MN , una col rettangolo fatto dalla periferia d' uno di queſti cerchi e dal raggio dell' altro .

Digitalizzato da Google

PROP. LXXVII. TEOR. LXV.

Fig. 162. 526. *Ogni ſettore circolare GOH è uguale al triangolo, che ha per baſe l' arco GH, e per altezza il raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il ſettore GOH ſta al ſettore AOB, come l' arco GH all' archetto AB (§498), o come l' arco GH alla tangente AC, o come il triangolo, che ha per baſe l' arco GH, e per altezza il raggio, al triangolo AOC (§470). Ma il ſettore AOB è uguale al triangolo AOC. Dunque anche il ſettore GOH è uguale al triangolo, che ha per baſe l' arco GH, e per altezza il raggio (§391). Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

527. La quadratura dunque di qualunque ſettore ſi ritrova multiplicando il ſuo arco per la metà del raggio; e conſeguentemente ſi ritrova la quadratura della porzione circolare GH, togliendo dalla quadratura del ſettore GOH quella del triangolo rettilineo GOH.

CO-

Digitalizzato da Google

COROLLARIO II.

528. Riducendoſi i ſettori circolari a triangoli, che hanno per baſi gli archi, e per altezze i raggi; ne ſegue I. che, ſe gli archi ſono eguali, i ſettori ſono nella ragione de' raggi; II. che, ſe i raggi ſono eguali, i ſettori ſono nella ragione degli archi; III. che, ſe ſono diſuguali gli archi e i raggi, la ragione de' ſettori è compoſta da quella degli archi, e da quella de' raggi. IV. che, ſe i ſettori ſono eguali, la ragione degli archi è reciproca di quella de' raggi; V. che, ſe la ragione degli archi è reciproca di quella de' raggi, i ſettori ſono eguali.

AVVERTIMENTO I.

529. S' è già dimoſtrato che, per determinare la quadratura del cerchio, baſta determinare la quadratura d' un triangolo, che abbia per baſe una retta eguale alla periferia, e per altezza il raggio. Onde, per determinare la detta quadratura, è neceſſario rettificare la periferia circolare, vale a dire è neceſſario determinare una linea retta eguale alla periferia del cerchio. Però

Digitalizzato da Google

sì fatta rettificazione nè coll' ajuto della Geometria elementare, nè coll' ajuto della Geometria ſublime s' è potuta giammai avere con eſattezza. Quindi è che i Geometri ſi ſono sforzati d' averla a un di preſſo. L' inſigne Archimede prima d' ogni altro, col determinare relativamente al diametro i perimetri di due poligoni, uno circoſcritto, e l' altro iſcritto nel medeſimo cerchio, e perimetri di poca differenza tra loro, determinò i limiti, tra' quali è compreſa la ragione della periferia al diametro. Altri, marciando ſulle ſteſſe tracce d' Archimede, ſi ſono sforzati di riſtrignere i detti limiti; e gli hanno affettivamente a tal grado di riſtrignimento ridotti, che ognuna delle ragioni, tra' quali è compreſa quella della periferia al diametro, ſi può per la ſteſſa ragione della periferia al diametro prendere, ſenza timore di commettere errore alcuno, che ſia ſenſibile. Finalmente il famoſo Cavalier Newton inſegnò prima di tutti il modo d' avere una ſeria infinita, per determinare a un di preſſo la ragione della periferia al diametro. Ecco tutto ciò, che s' è finora fatto per la rettificazione della periferia circolare dagli più illuſtri Geometri; ed ecco tutto ciò, che ſi ha finora di ſicuro circa la quadratura del cerchio. Del reſto qual ſia la ragione, che ſenza errore ſenſibile ſi può prendere per quella

Digitalizzato da Google

quella del diametro alla periferia, ſi dirà nel quarto tomo, quando ſi tratterà della Trigonometria.

AVVERTIMENTO II.

530. Finalmente ſi noti che, menandoci tutt' i metodi di Geometria, finora conoſciuti, a determinare non con eſattezza, ma a un di preſſo la quadratura del cerchio; ſi può ſicuramente dire eſſere il Probl. dell' eſatta quadratura del cerchio o impoſſibile ad eſſer ſciolto colle forze della Geometria, o pure eſſere dipendente da qualche altro metodo di Geometria, fino a queſto punto ignoto. E' vero che l' impoſſibilità di tal probl. non è ſtata giammai dimoſtrata; ma è veriſſimo altresì che non è ſtata nè pure dimoſtrata mai la ſua poſſibilità. E come mai può dimoſtrarſi che verrà tempo, in cui ſi ſcoprirà un altro metodo di Geometria, diverſo dagli conoſciuti finora, e che cotal metodo menerà i Geometri all' eſatta quadratura del cerchio? Or dunque, ſiccome chi ſi sforza di divider l' angolo in tre parti eguali, e di trovare due mezze continuamente proporzionali tra due rette date coll' ajuto della Geometria elementare, moſtra di non conoſcere che ſi sforza nel tempo iſteſſo di mutare la natura a' Probl., che cerca di ſcior-

Digitalizzato da Google

ſciorre, pretendendo ridurli da Probl. della Geometria ſublime a' Probl. della Geometria elementare: così chi ſi luſinga di ritrovare l'eſatta quadratura del cerchio co' metodi di Geometria già noti, moſtra di non ſapere che i metodi, che conducono all'approſſimazione, non poſſono in verun modo condurre all'eſattezza. Del reſto ſian ſicuri i Pratici che ſe ſi trovaſſe l'eſatta quadratura del cerchio, non ne verrebbe loro vantaggio alcuno. Poichè i metodi d'approſſimazioni, che abbiamo, ſono tali, che ci danno la quadratura del cerchio così proſſima alla vera, che di maggiore eſattezza non v'è biſogno per la pratica.

Fine del terzo Libro.

Digitalizzato da Google

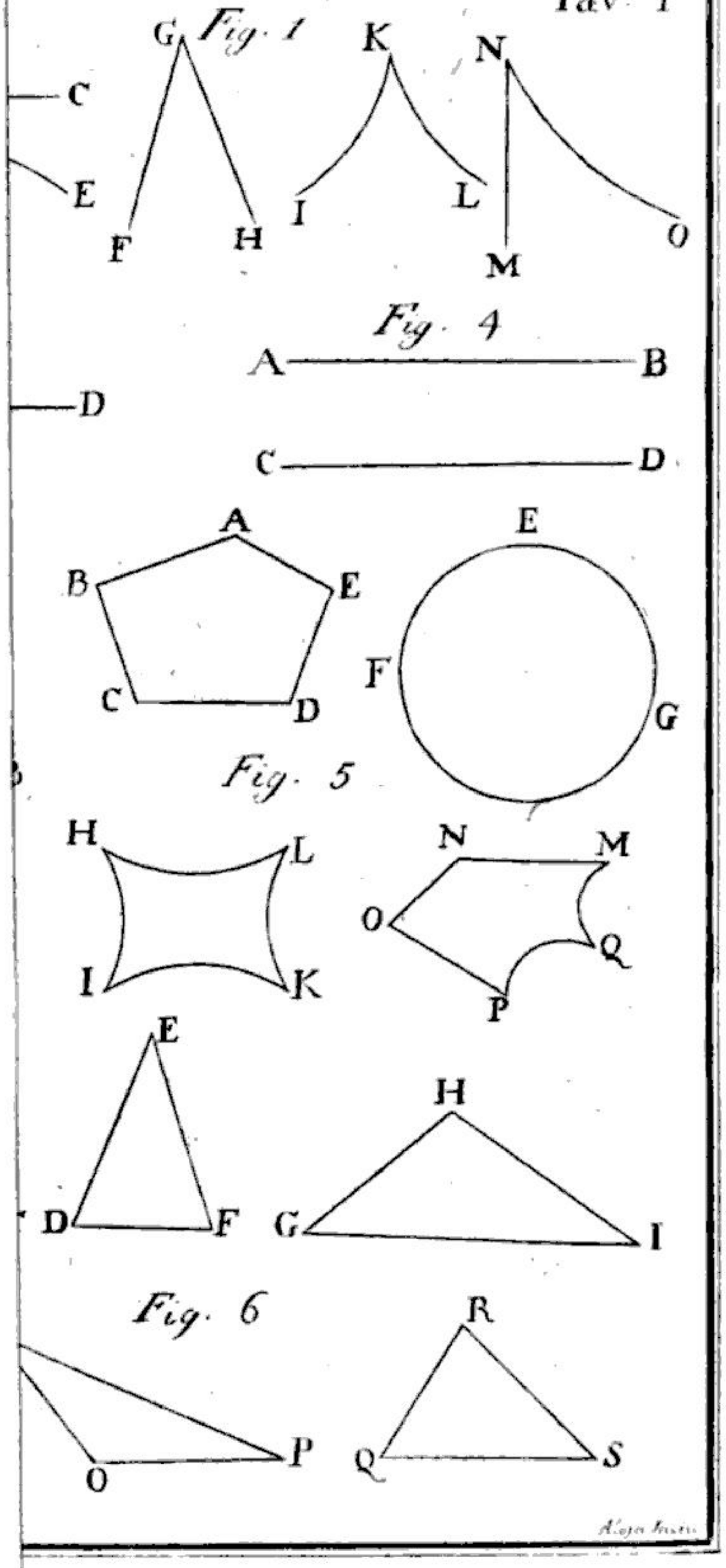
Pag.	verſ.	Errrori	Correzioni
39	1	tetti	retti
42	8	CE	CD
47	25	d' angolo	d' un angolo
99	20	AC di	di AG
110	2	OC	OB
132	9	alla	alle
145	3	pra	ſopra
159	2	niuno	niuna

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitized by Google

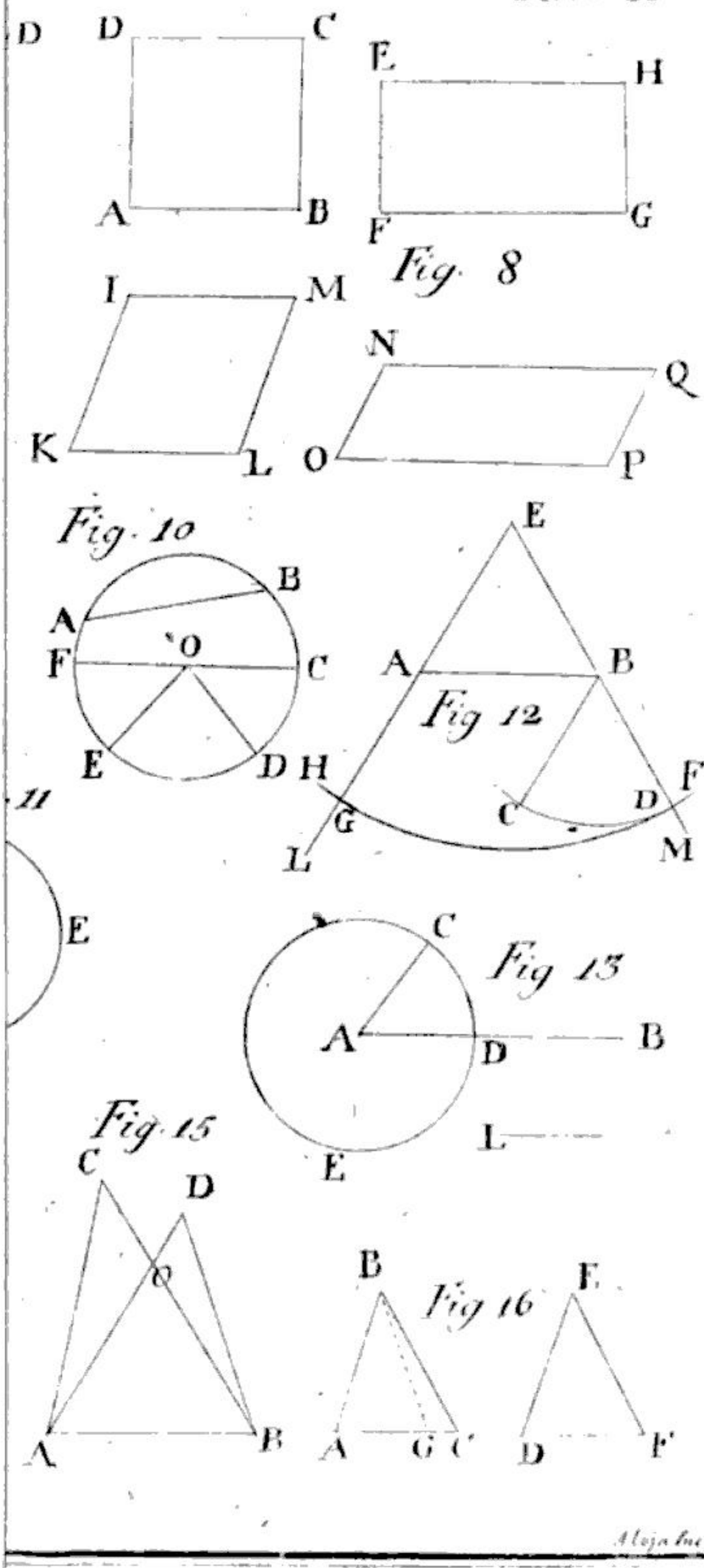
Tav. I



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. II

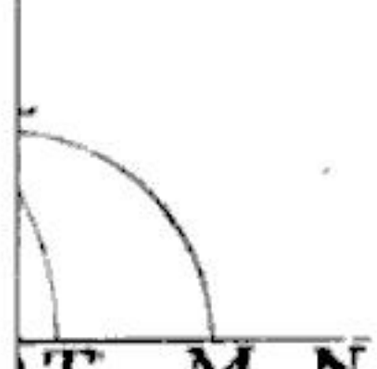


Aloja fec.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. III



17

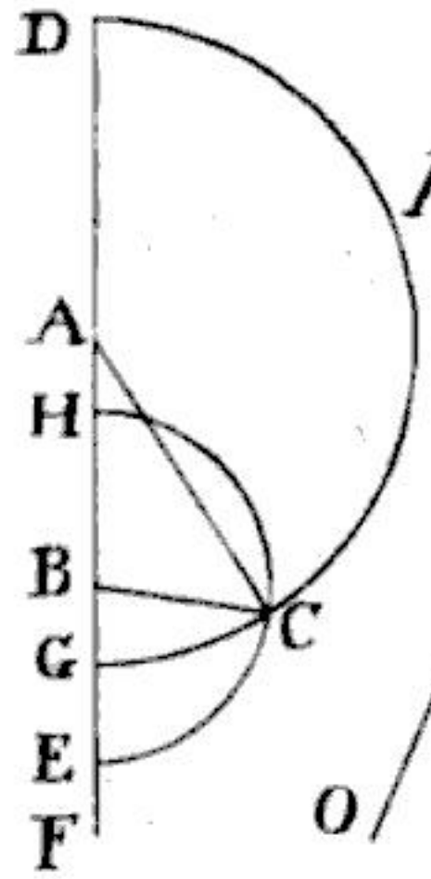
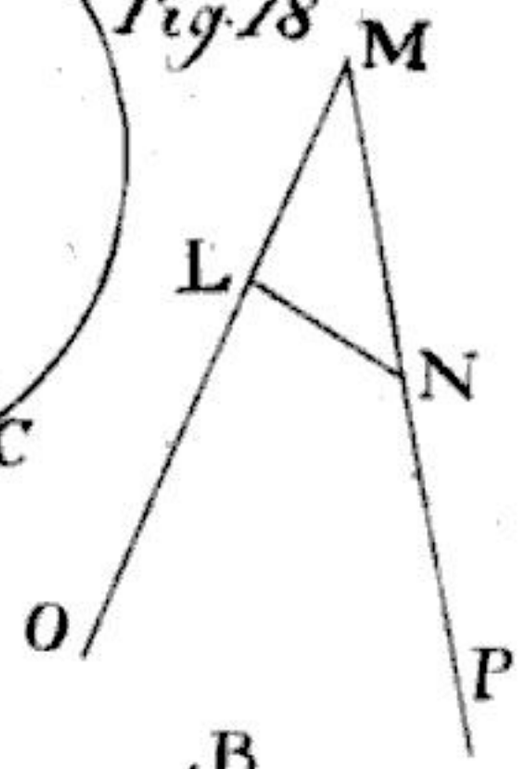


Fig. 18



19

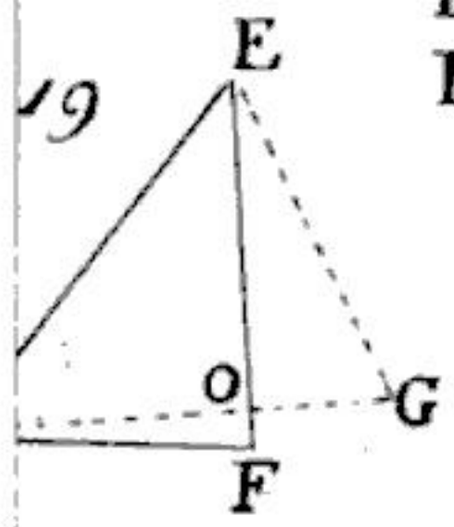


Fig 20

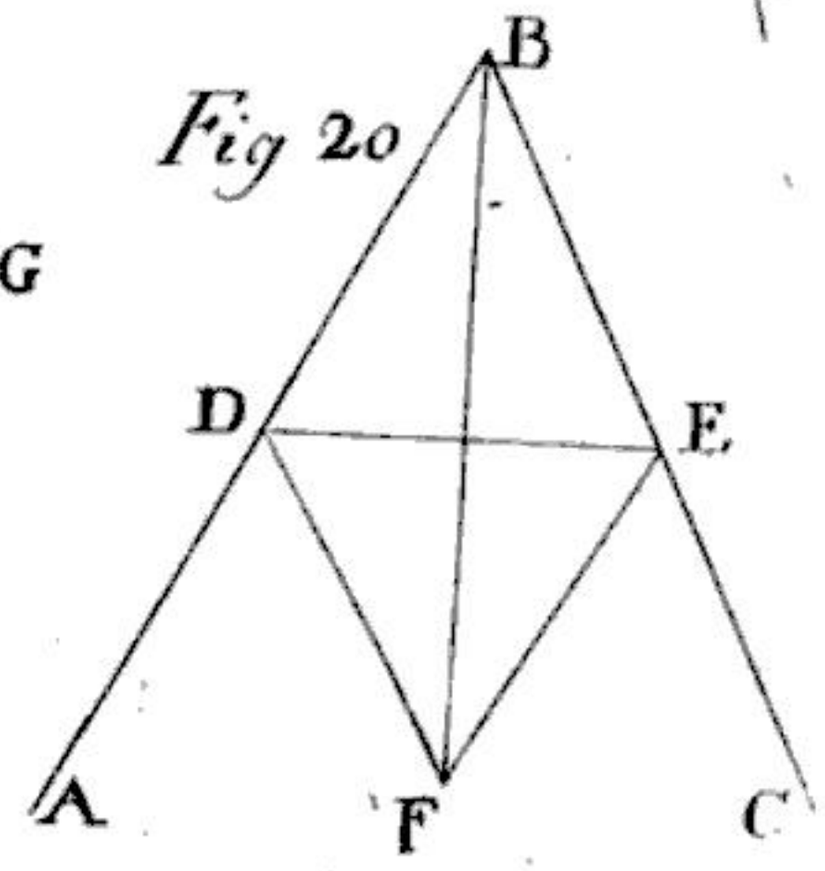
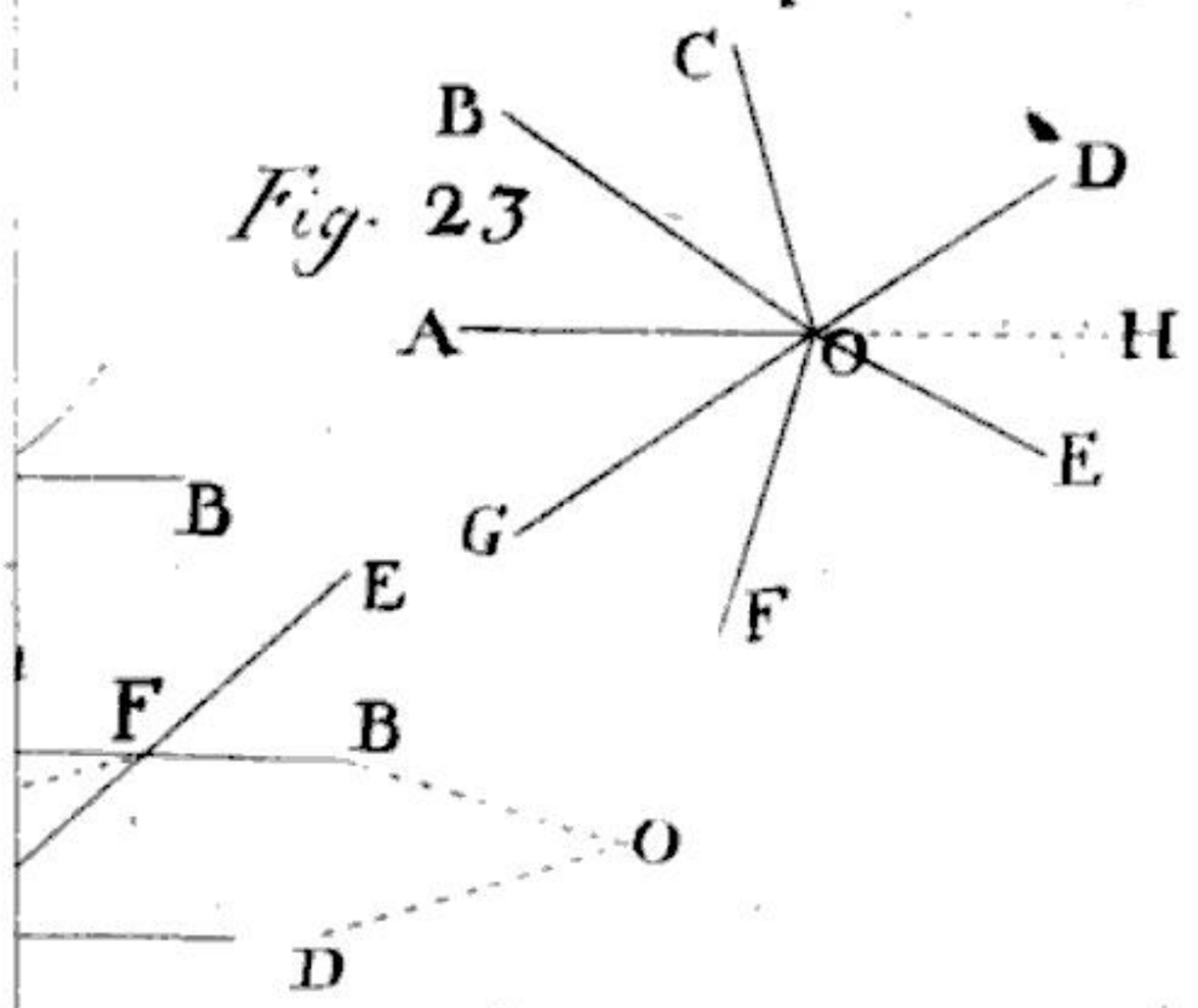


Fig. 23



Aloja Inc.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. IV

Fig. 26

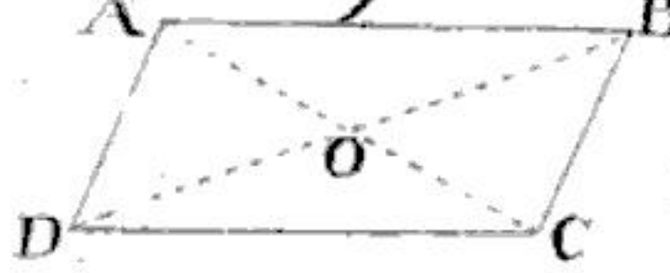
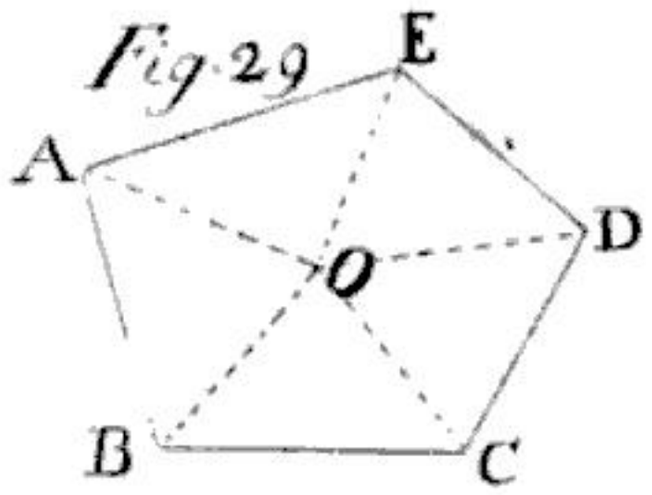




Fig 27

Fig. 29



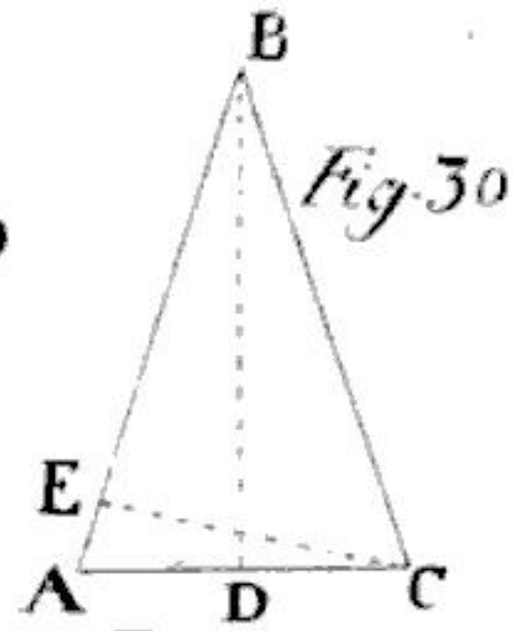


Fig. 30

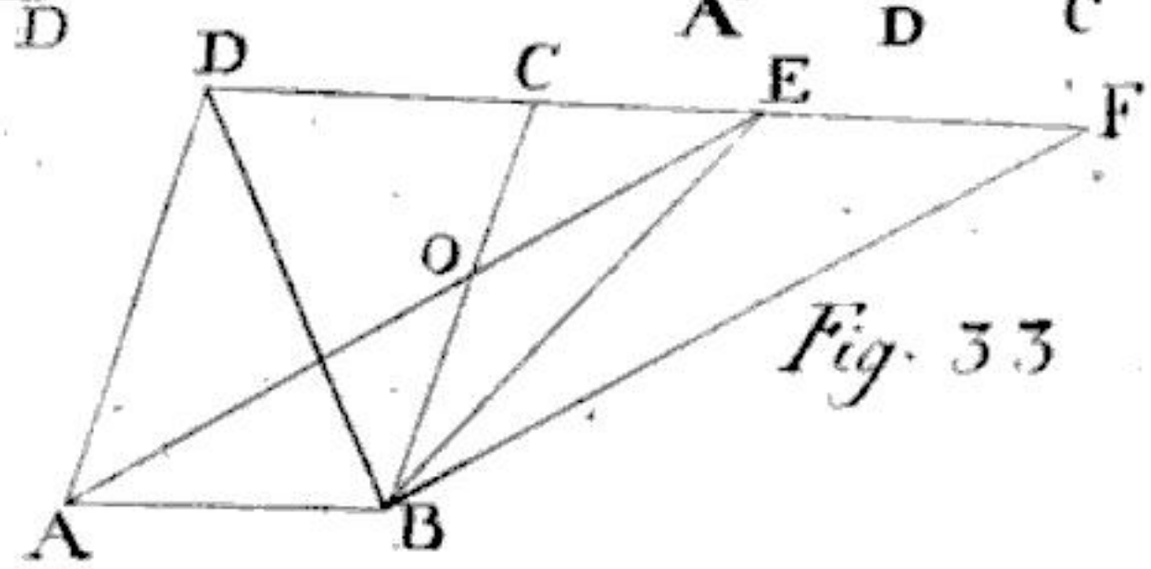
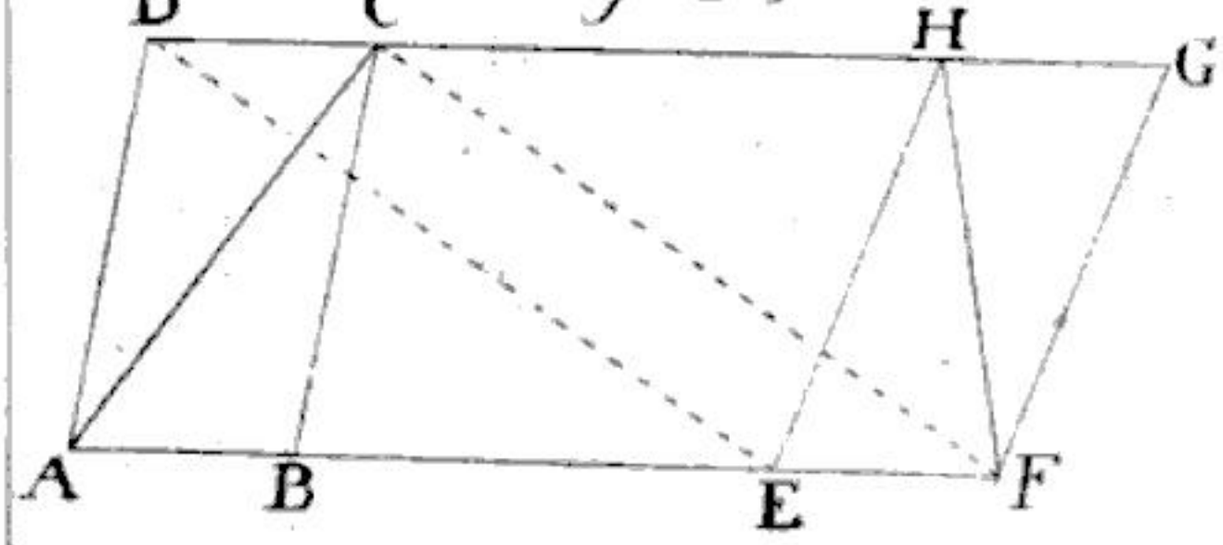


Fig. 33

Fig. 34



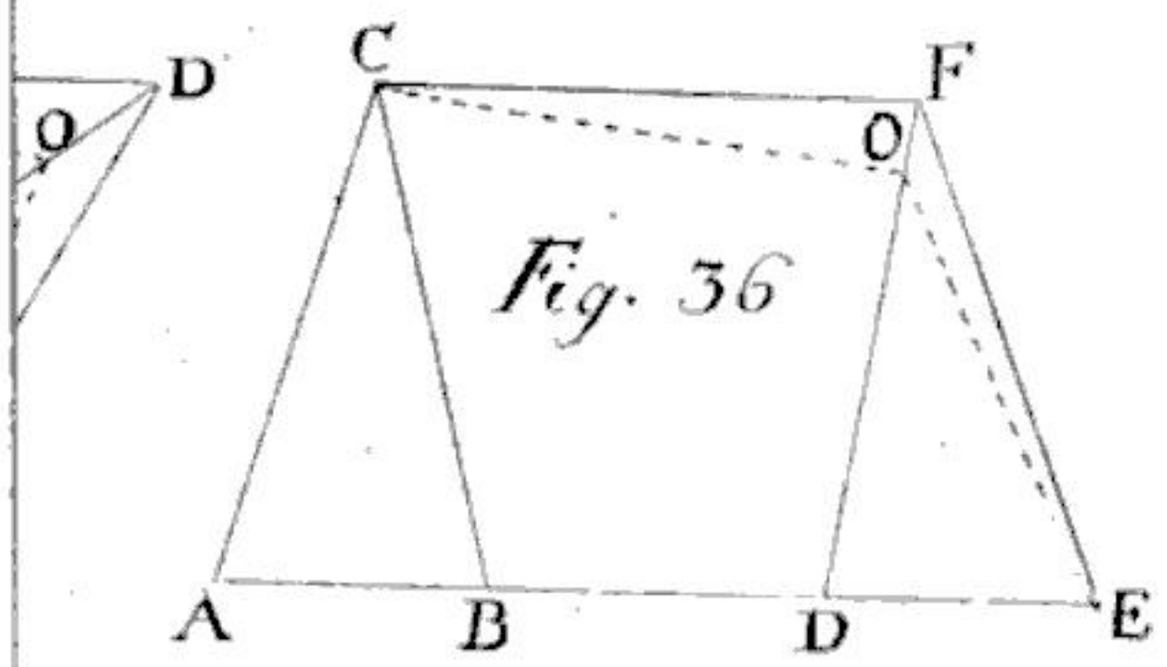
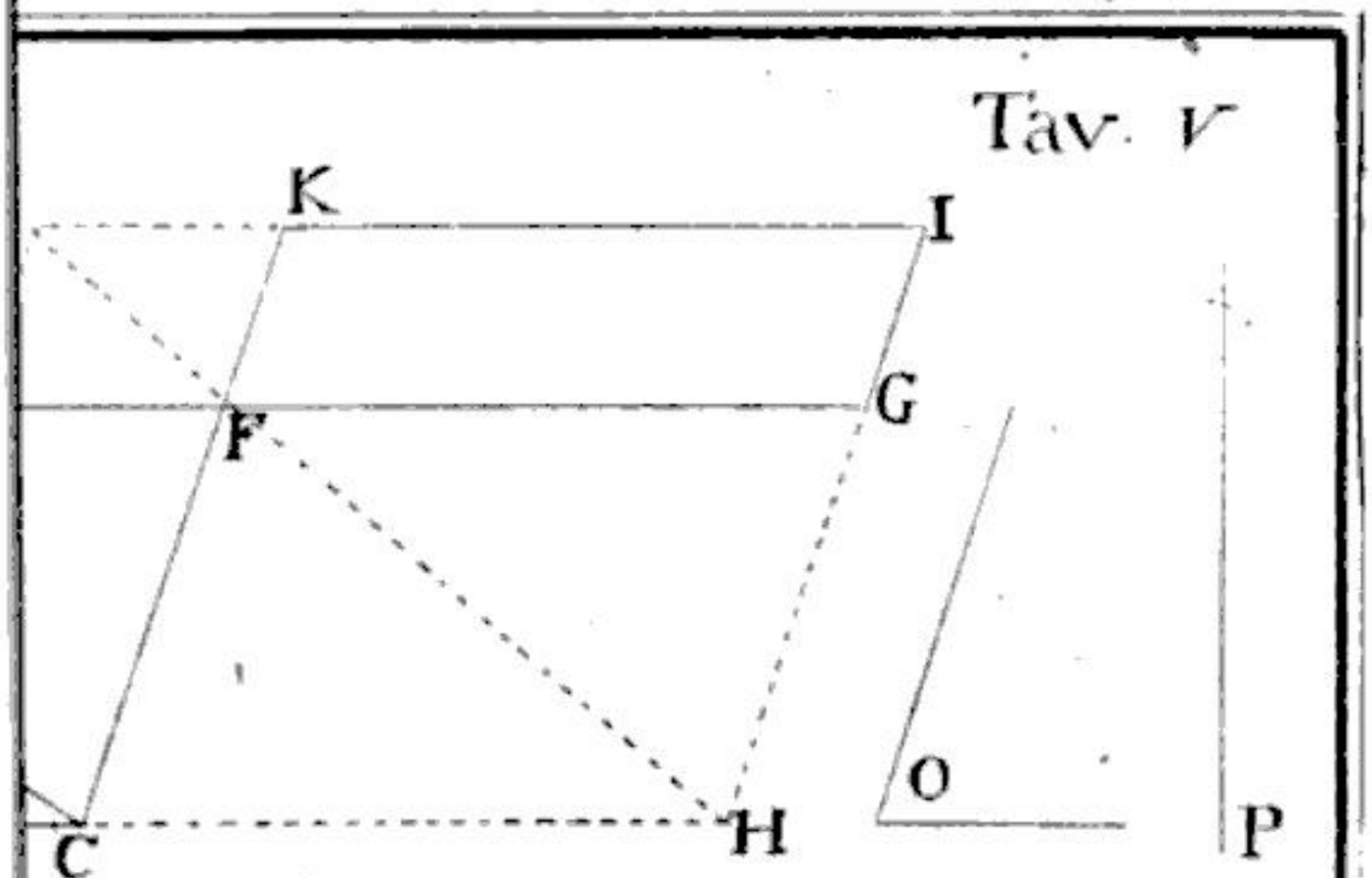


Fig. 36

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google



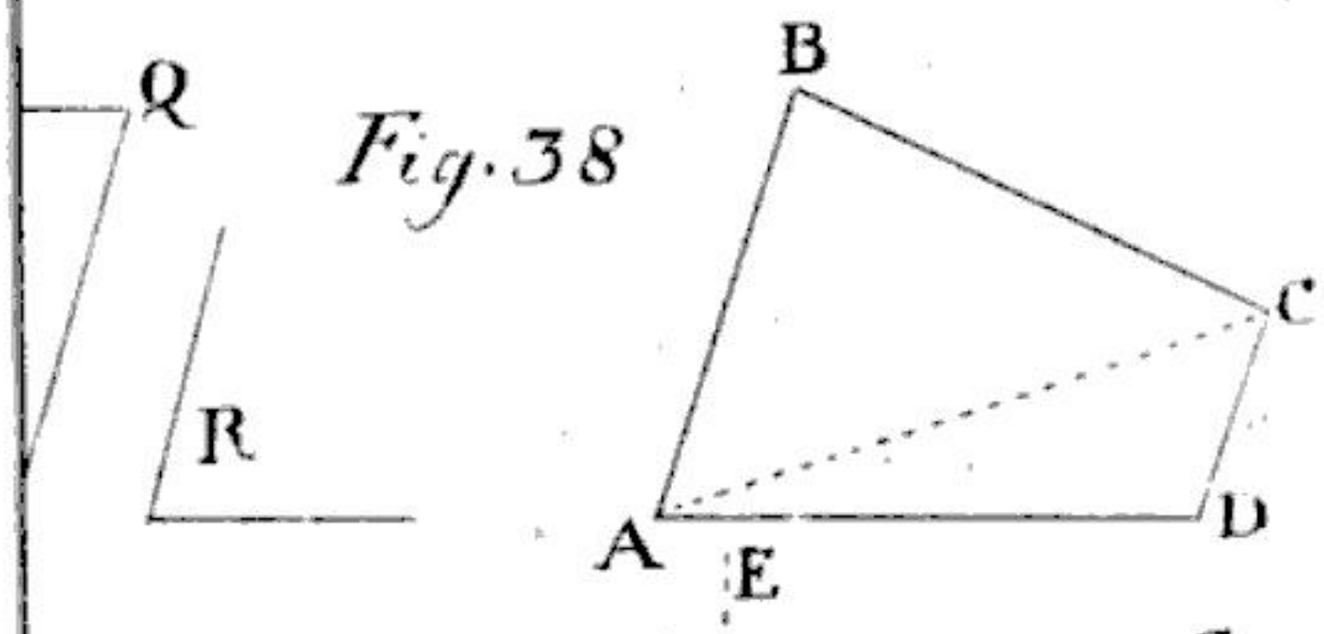


Fig. 38

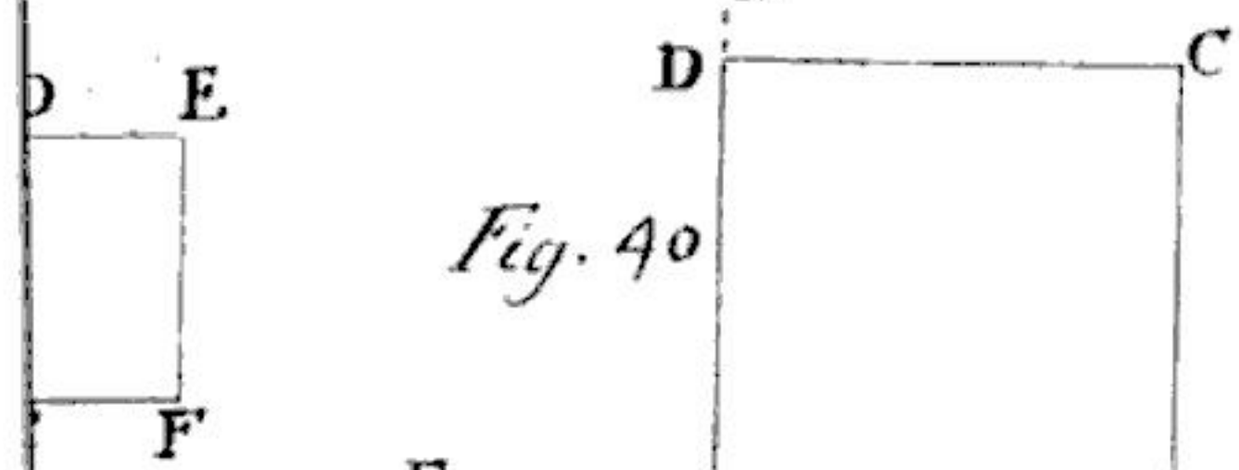


Fig. 40

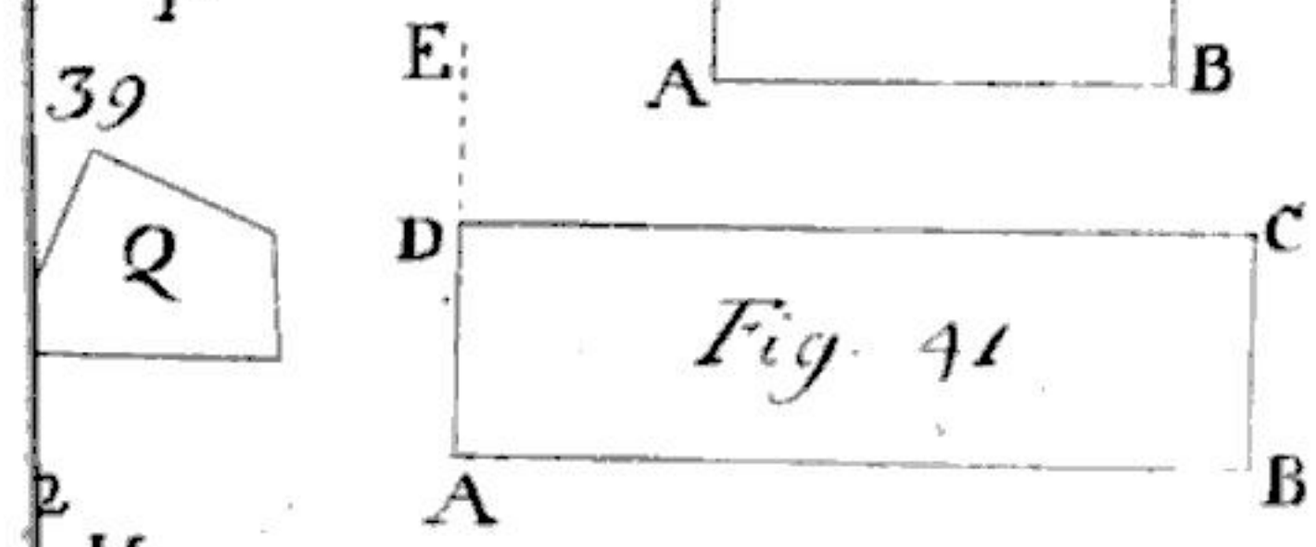


Fig. 41

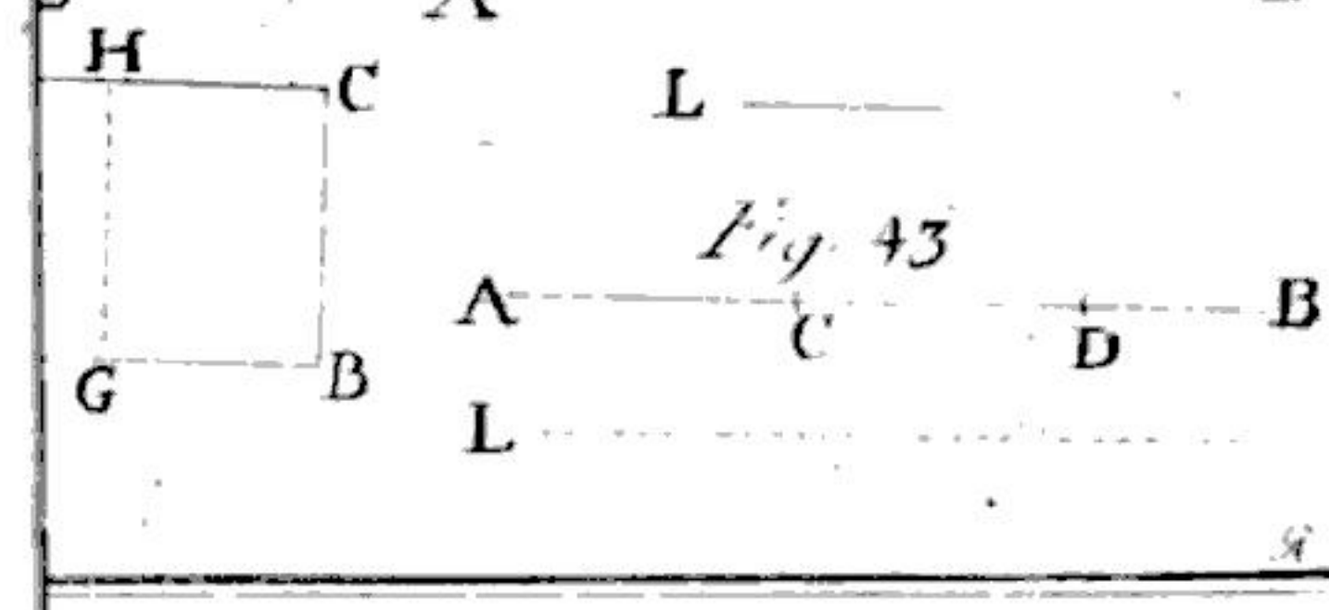


Fig. 43

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. VI

Fig. 45



Fig. 47



Fig. 49

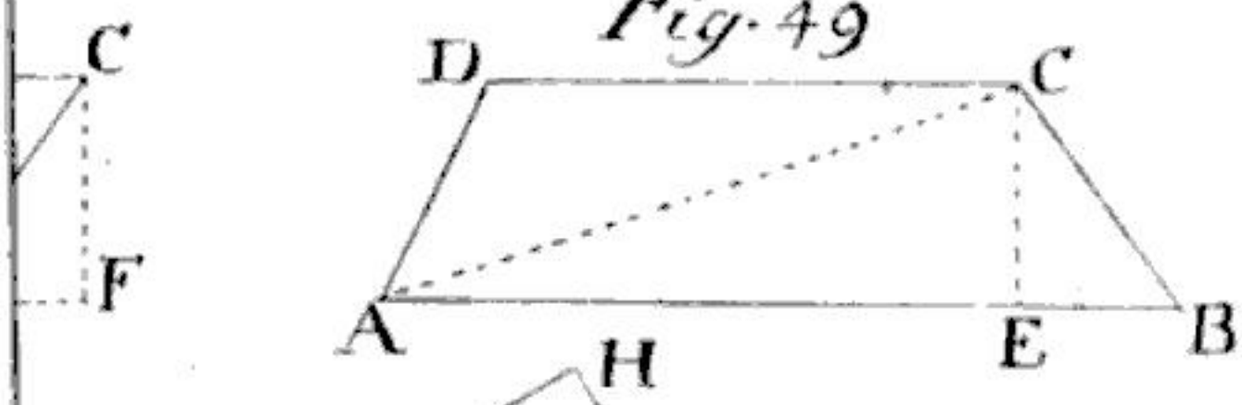


Fig. 53

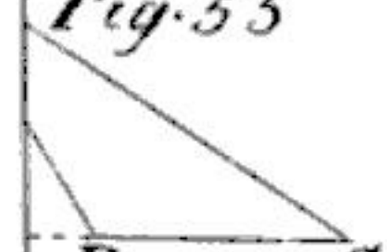


Fig. 51

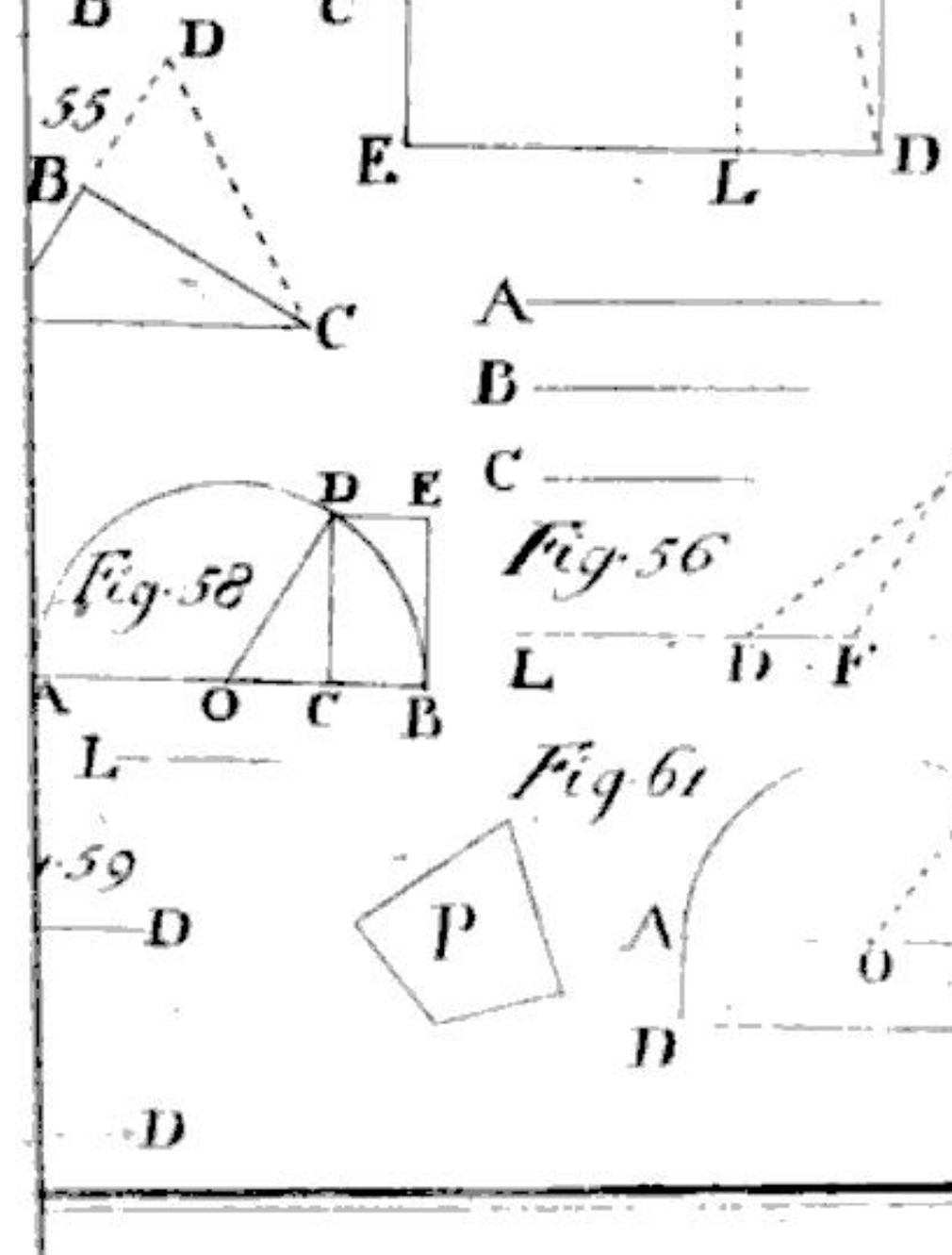


Fig. 55

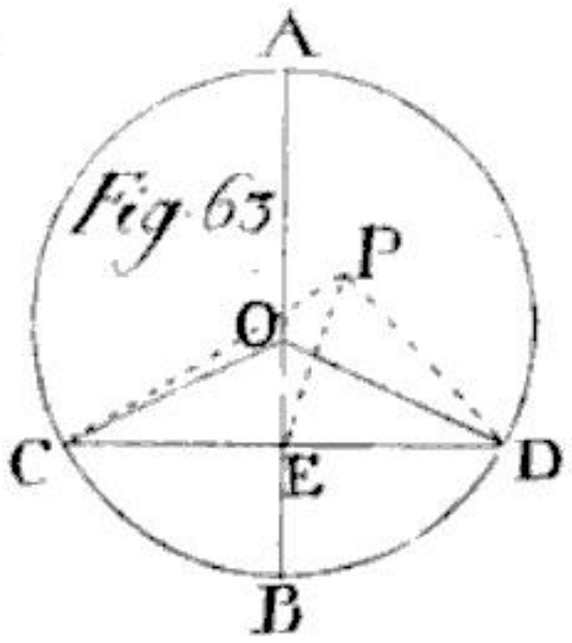
Fig. 58

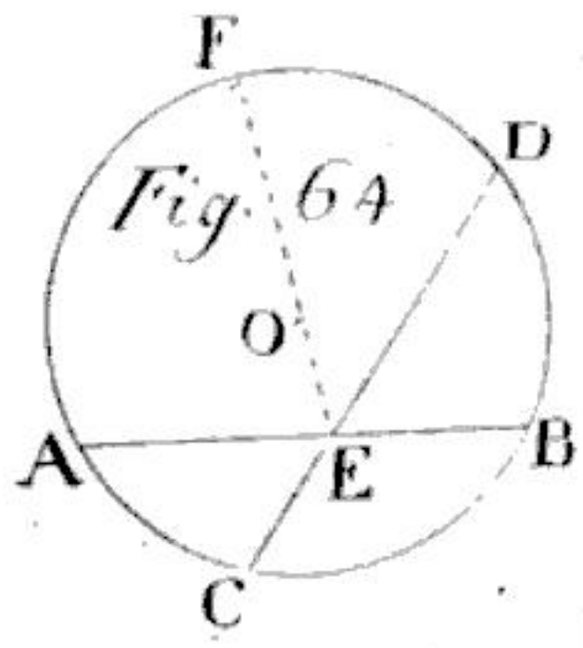
Fig. 56

Digitalizzato da Google

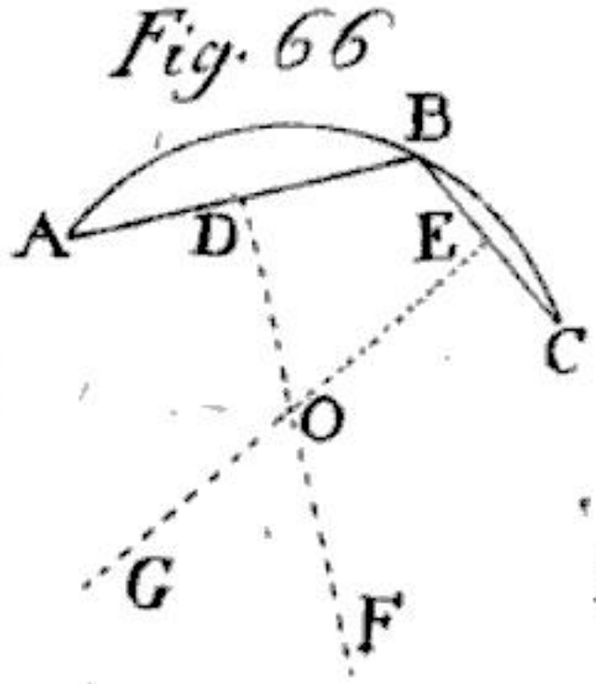
Digitalizzato da Google

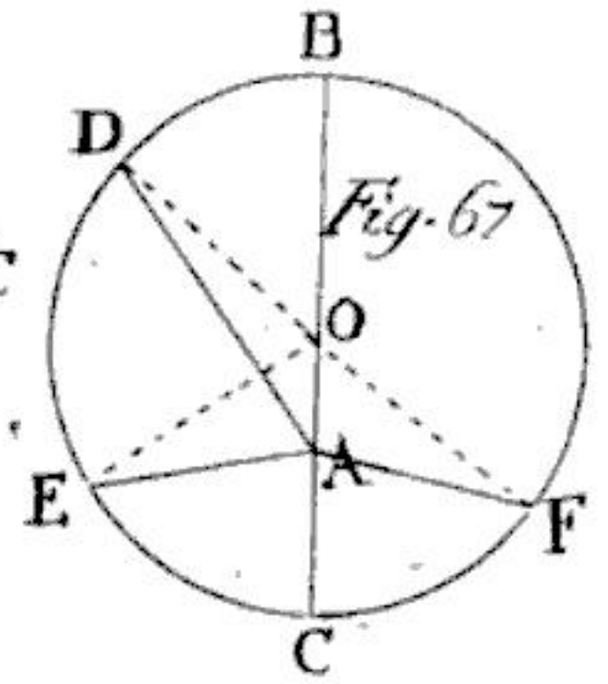
Tav. VII

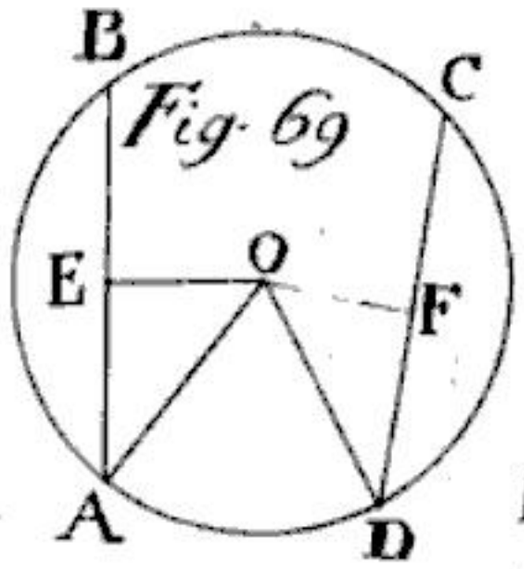




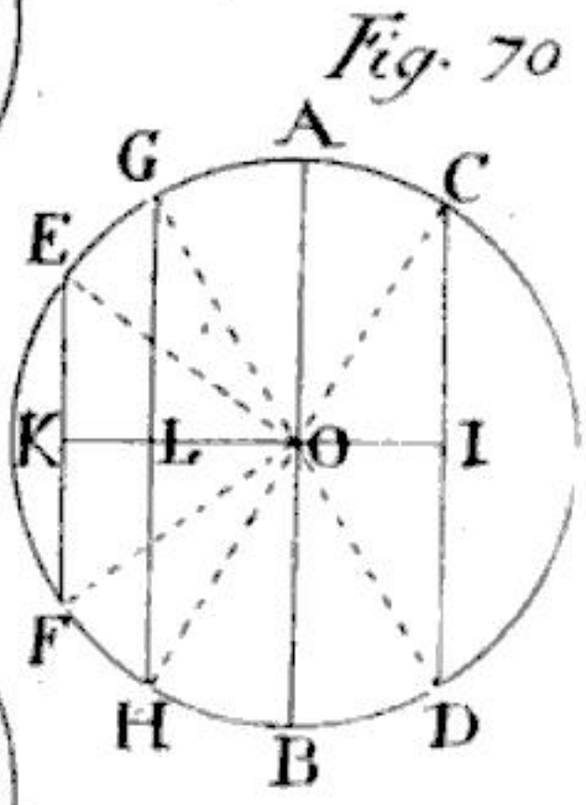


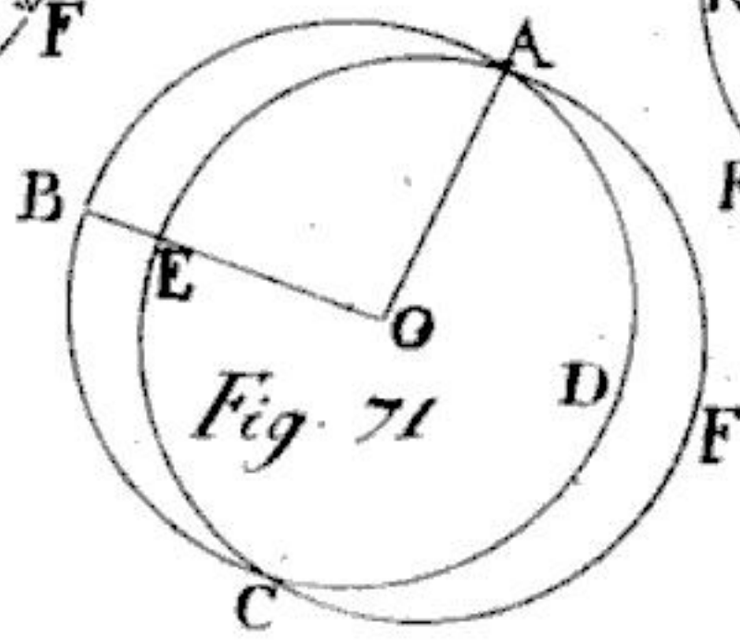












Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. VIII

Fig. 74

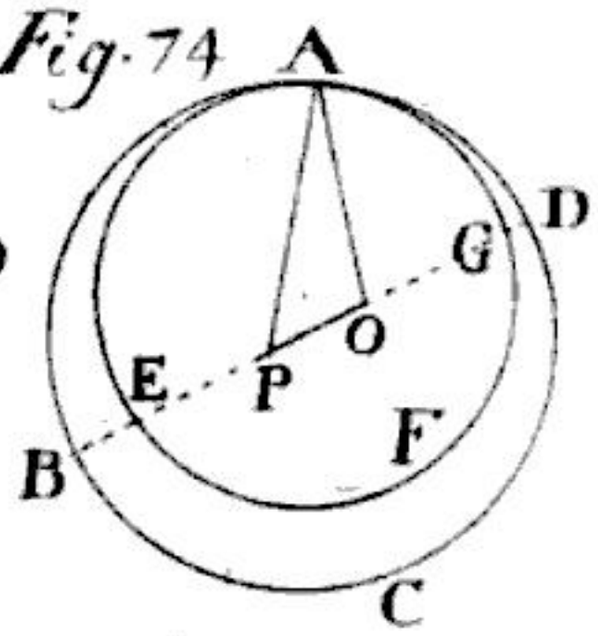


Fig. 73

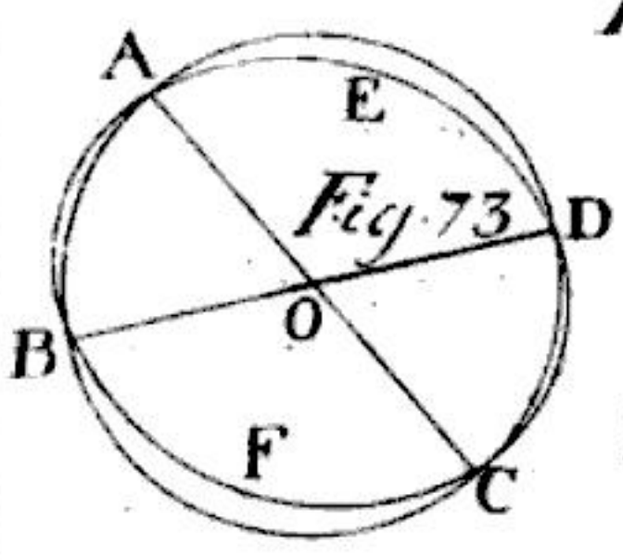
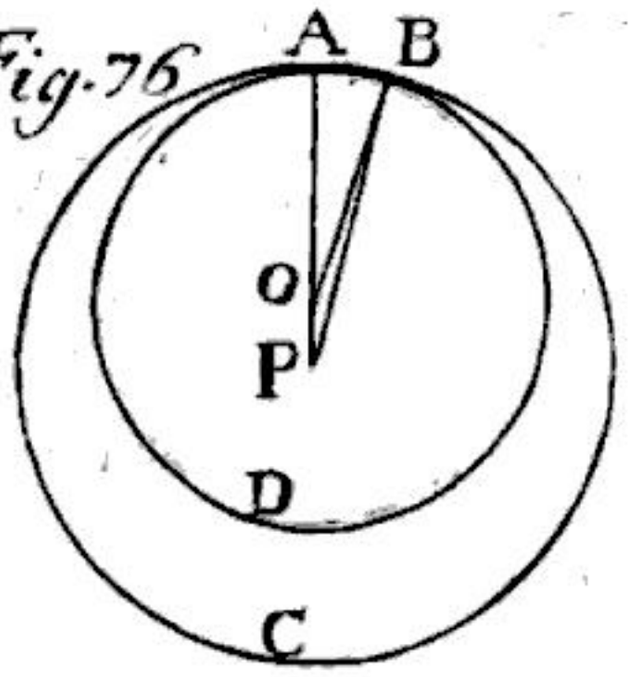


Fig. 76



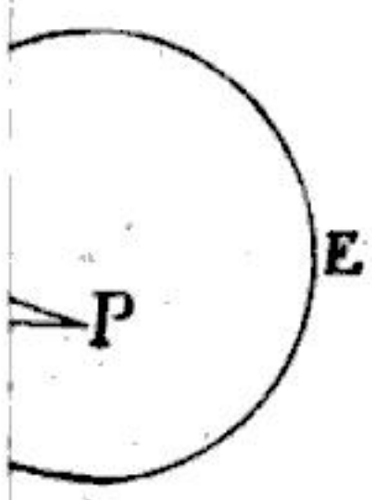


Fig. 78

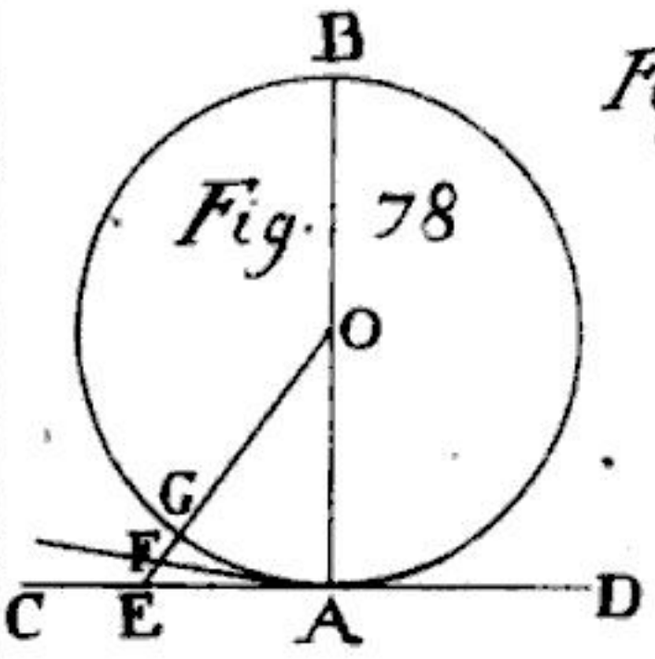
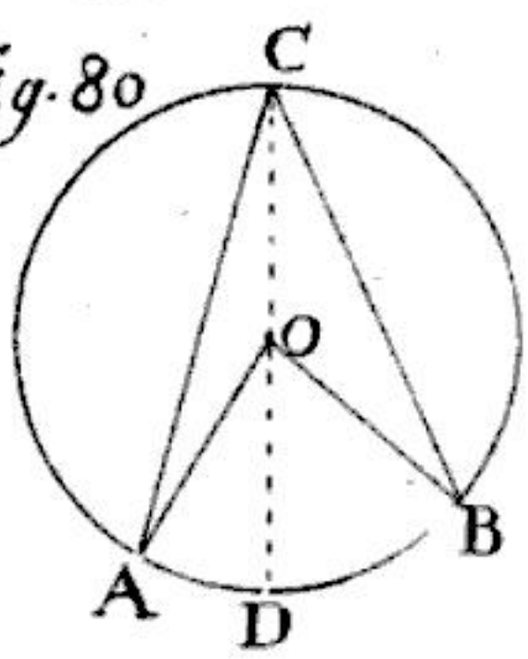


Fig. 80



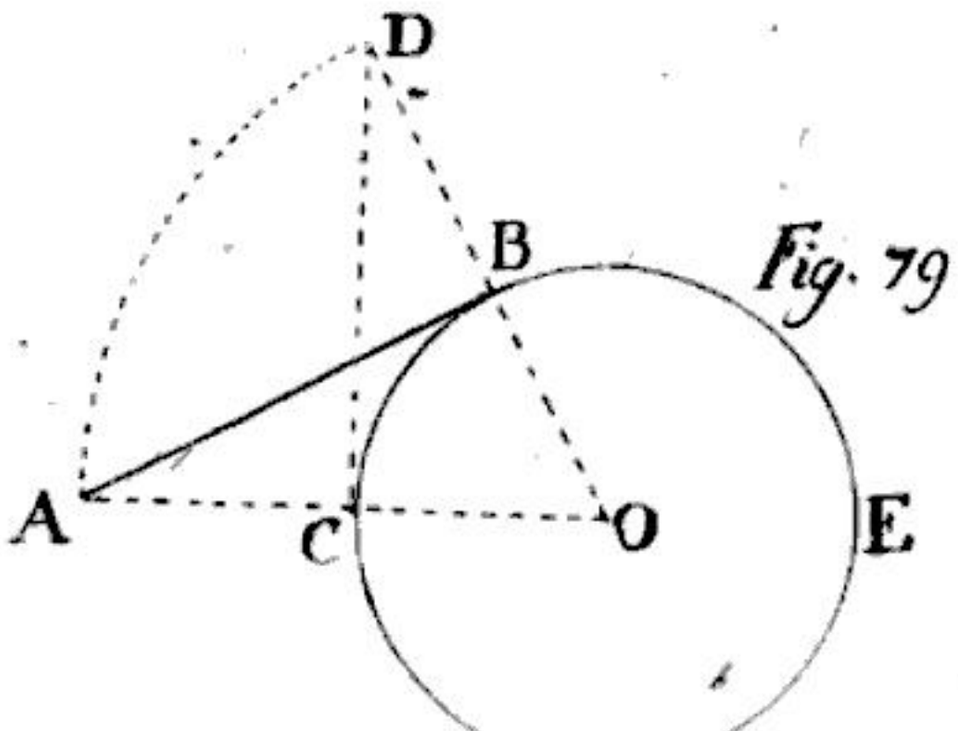


Fig. 79

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. IX

Fig. 83

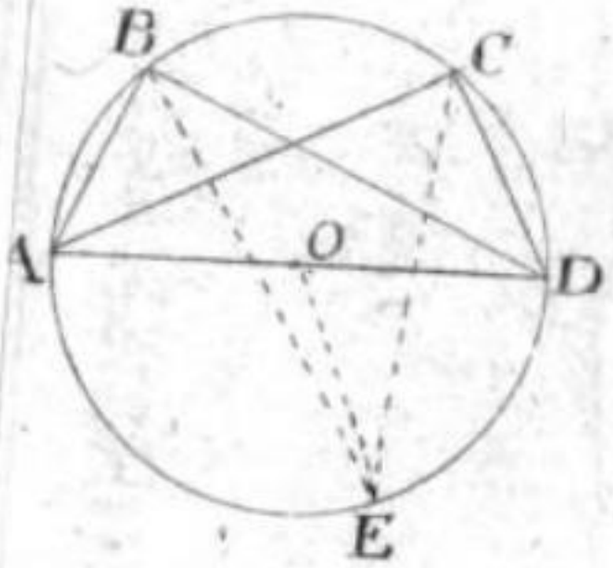


Fig. 84

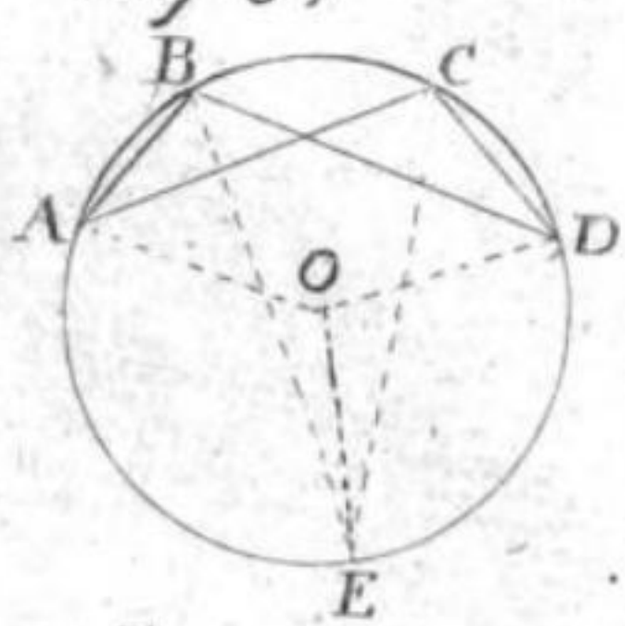


Fig. 86

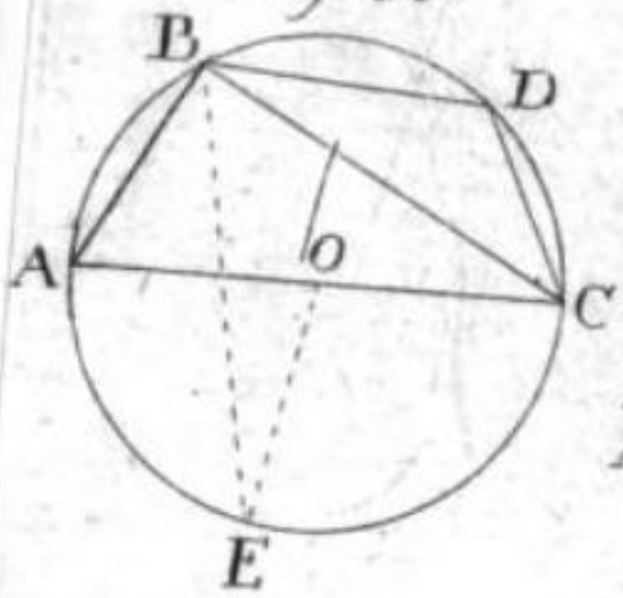


Fig. 88

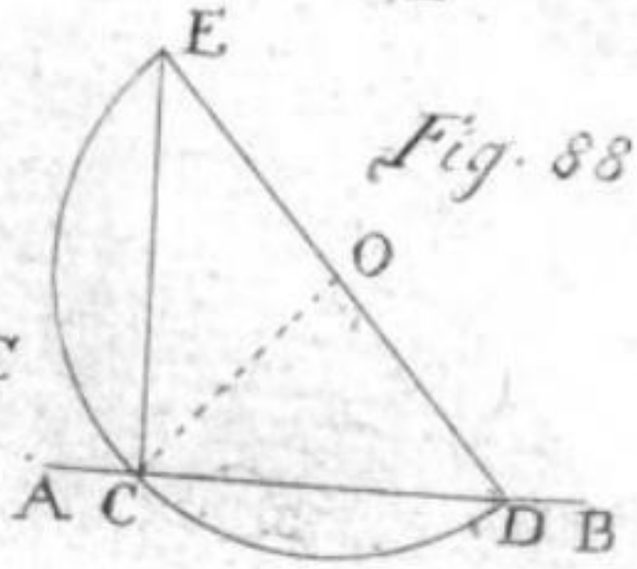


Fig. 87

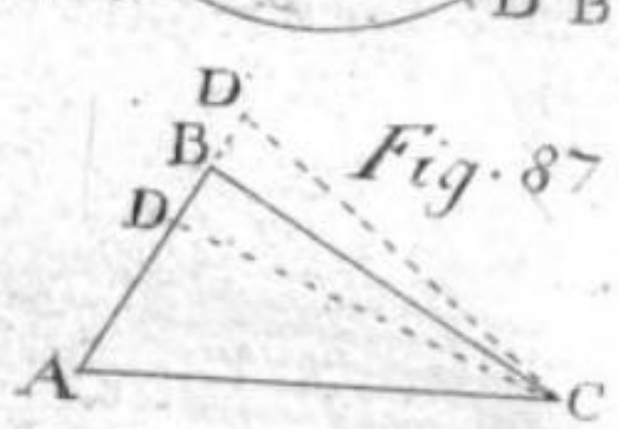


Fig. 89

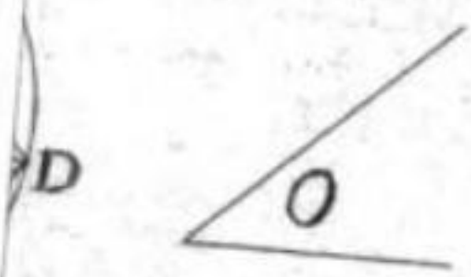
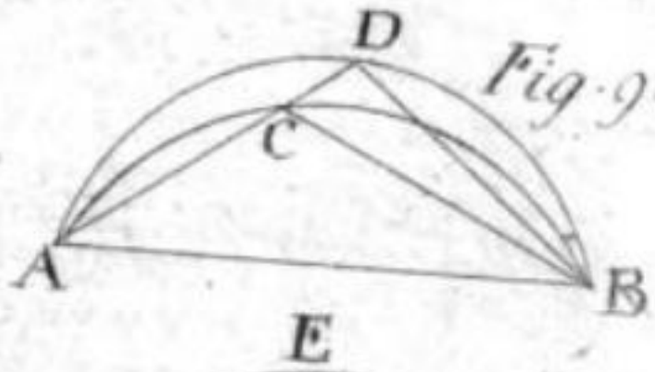
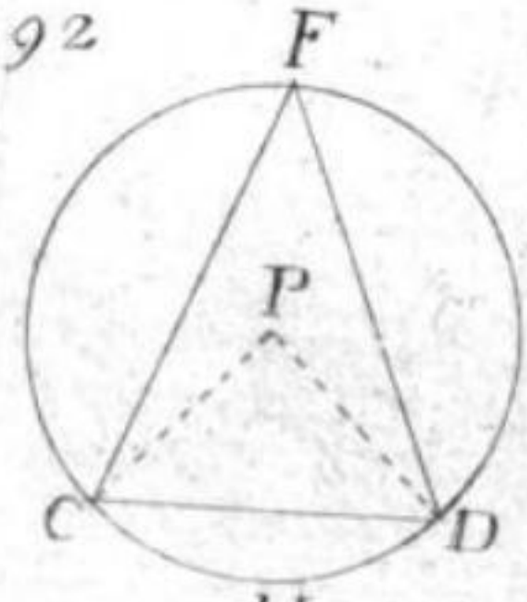


Fig. 90



92



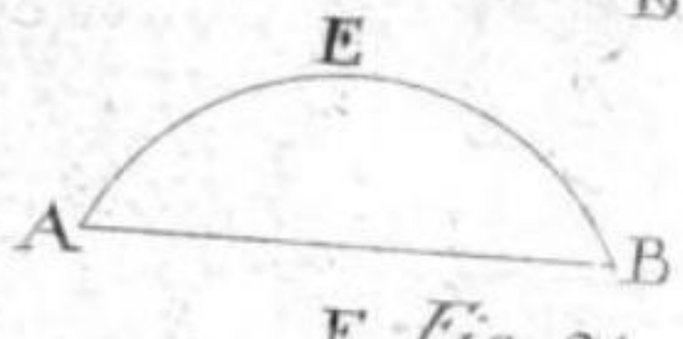


Fig. 91

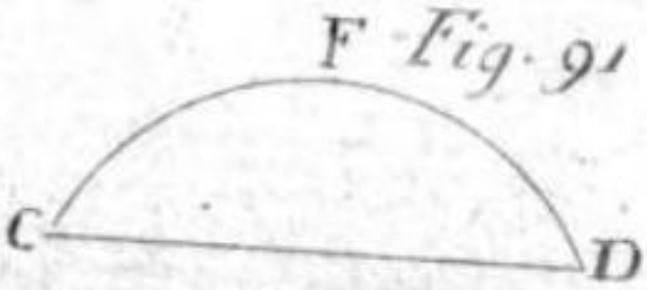
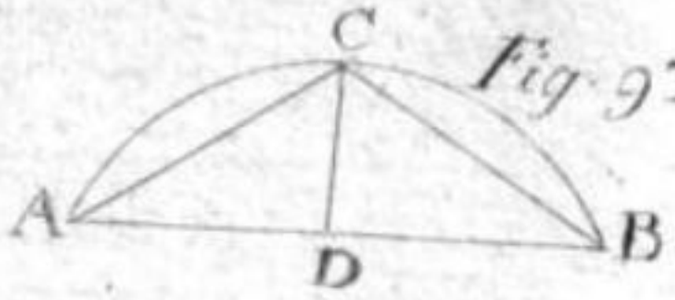


Fig. 93



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. X.

Fig. 95

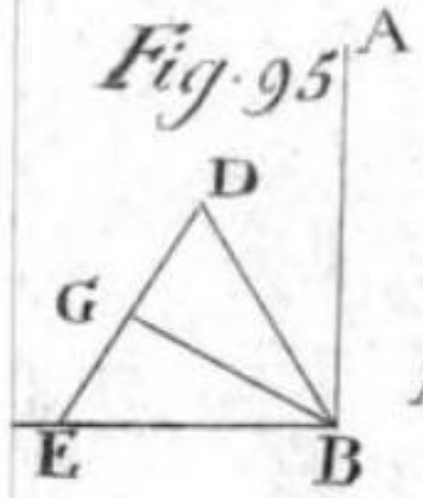


Fig. 96

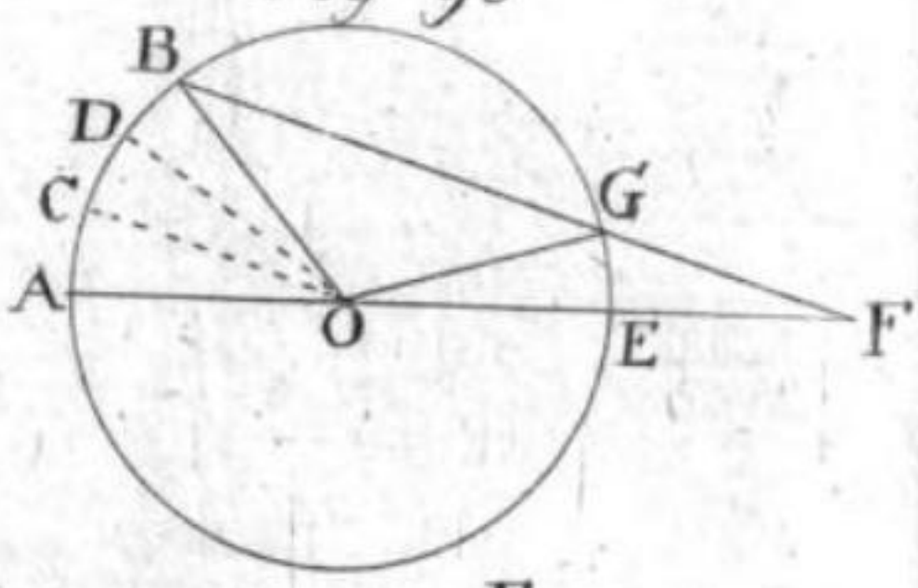


Fig. 97

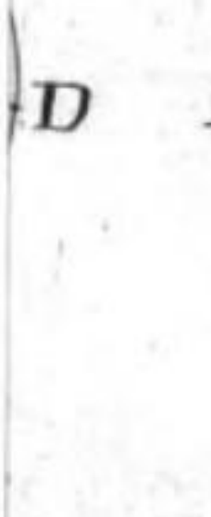


Fig. 98

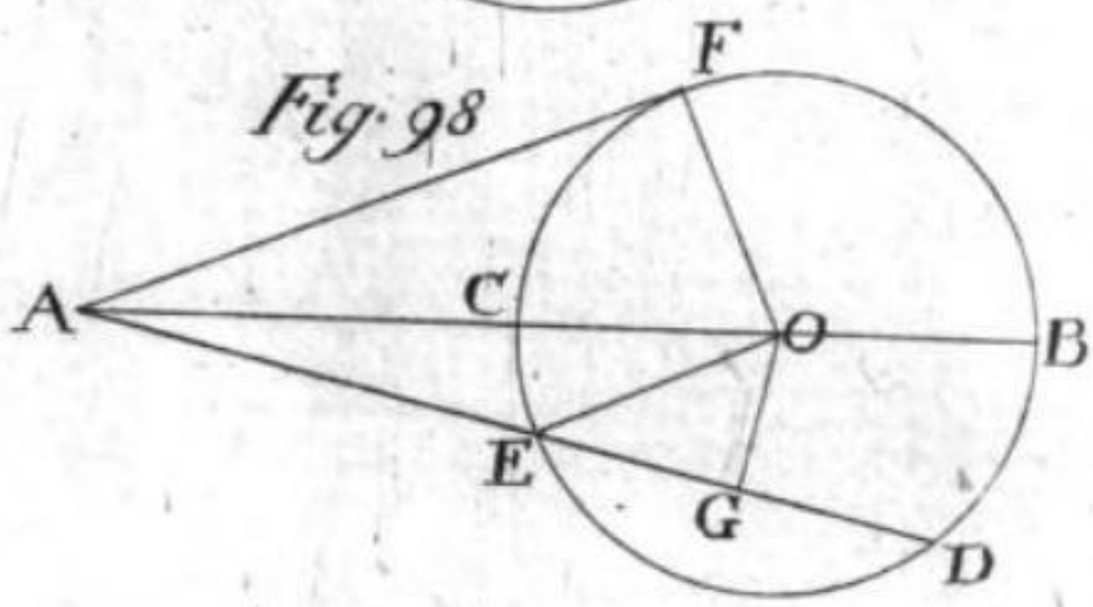


Fig. 100

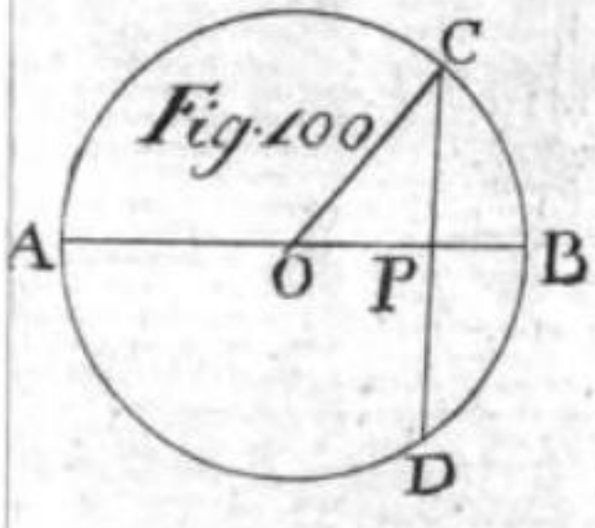


Fig. 101

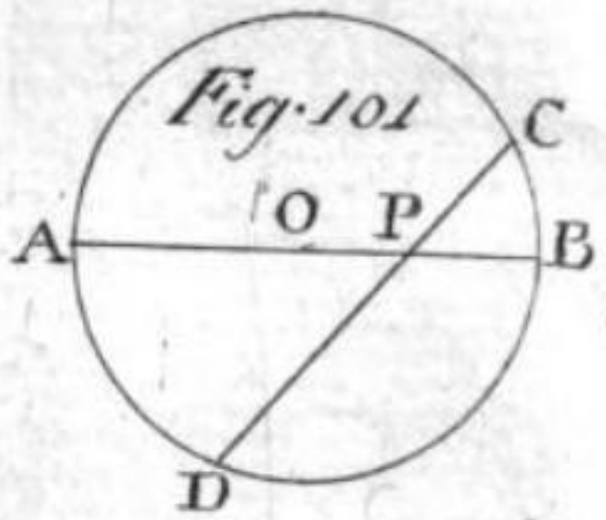


Fig. 103

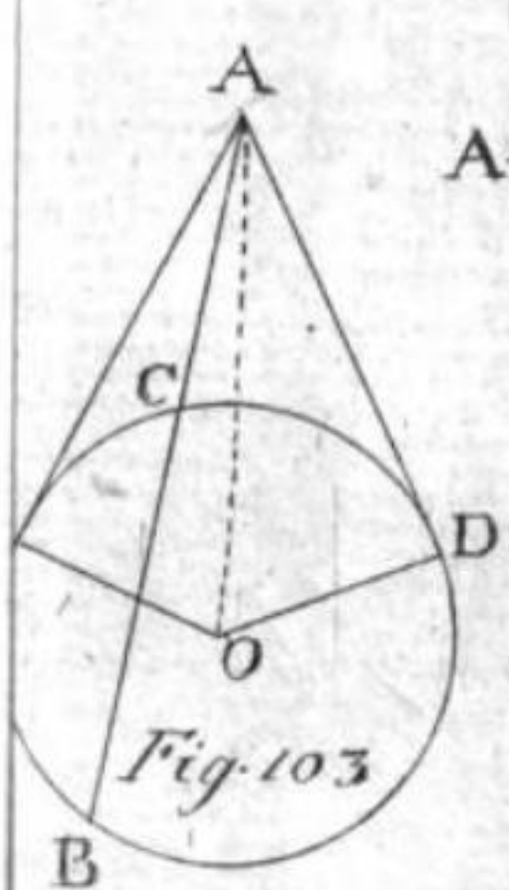
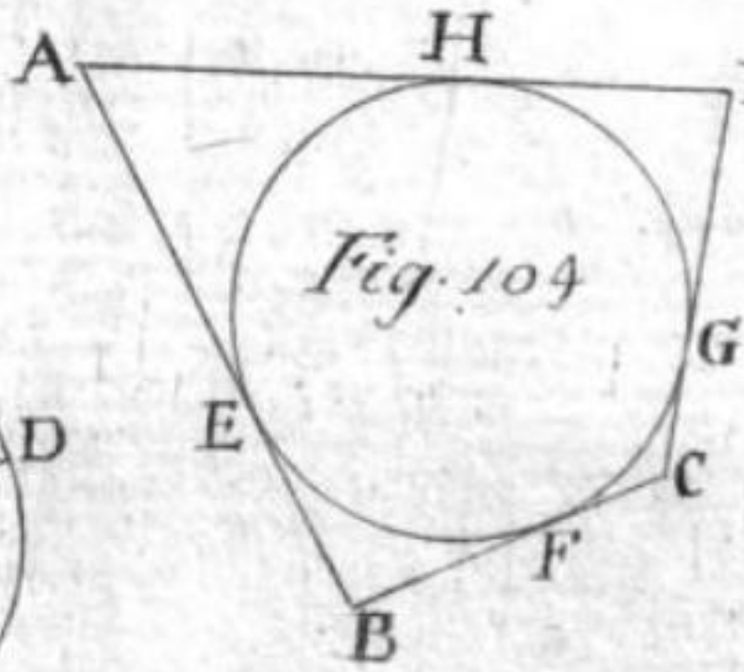


Fig. 104



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. XI

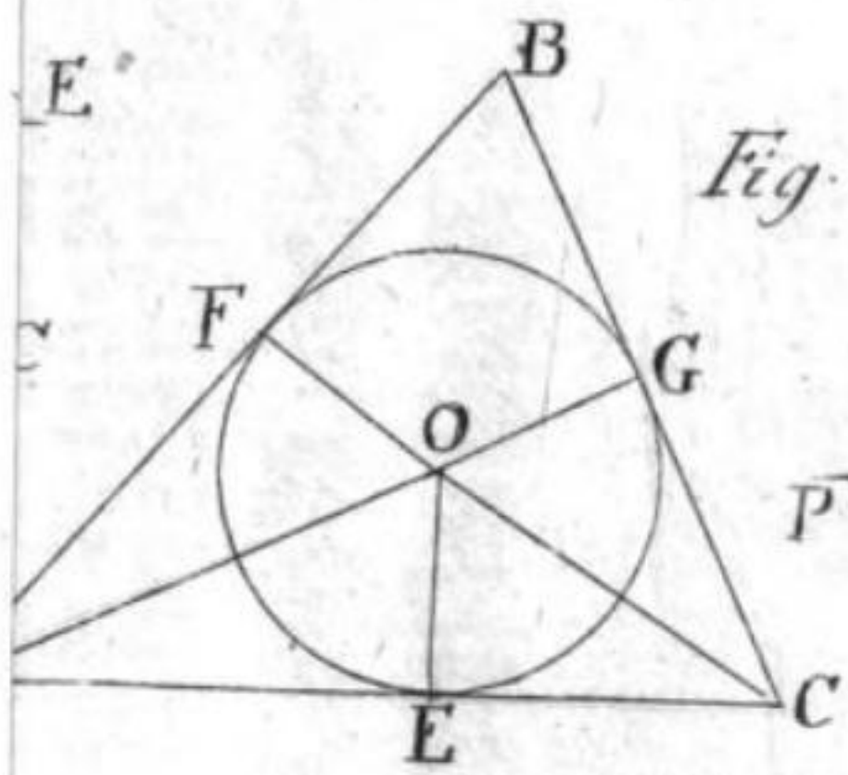


Fig. 106

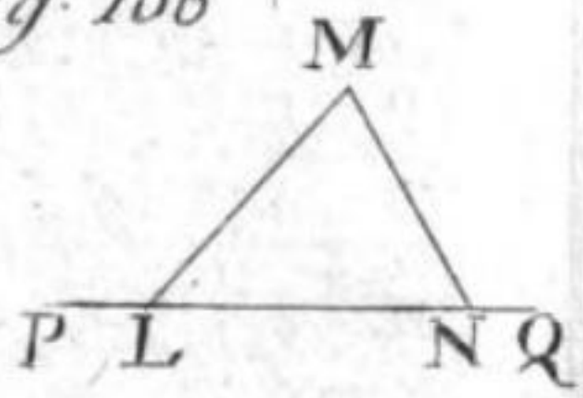


Fig. 107



Fig. 108

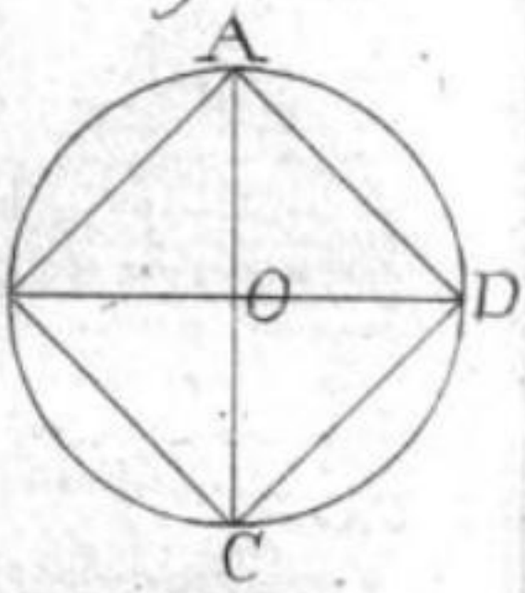


Fig. 111

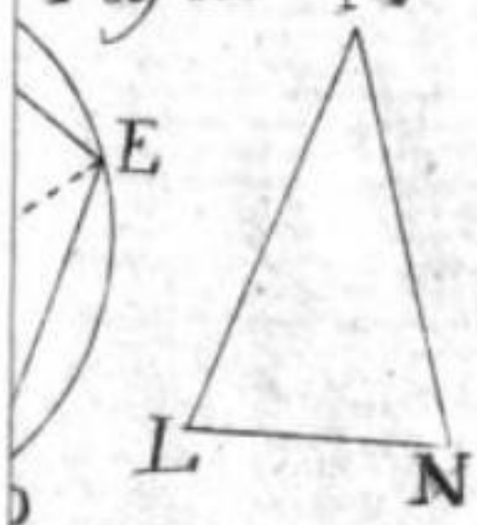


Fig. 110

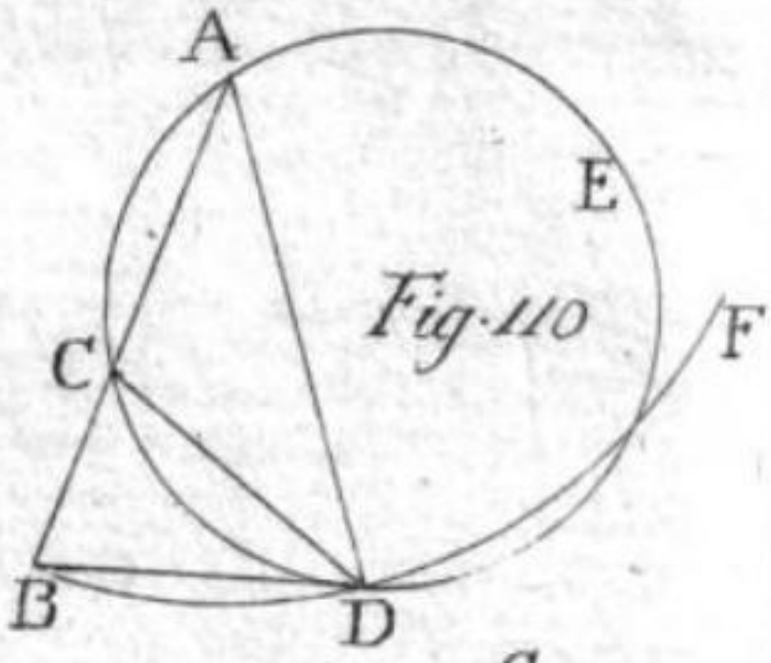


Fig. 114

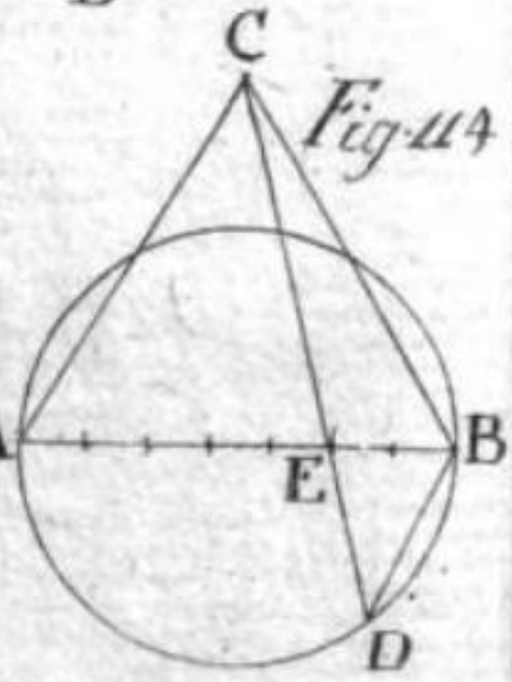


Fig. 112

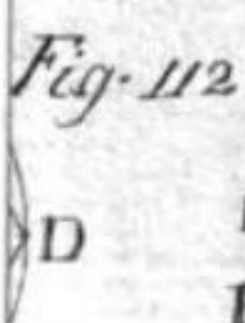
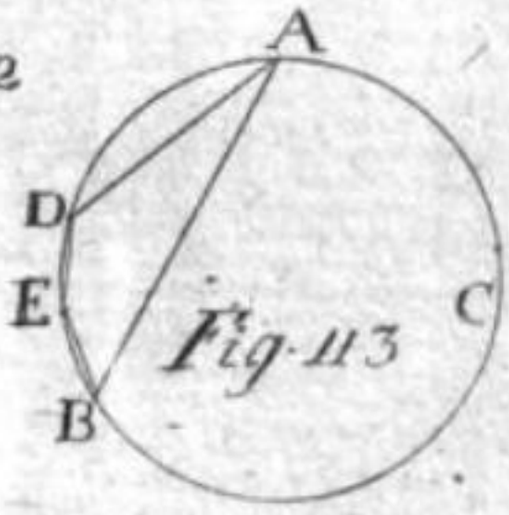


Fig. 113

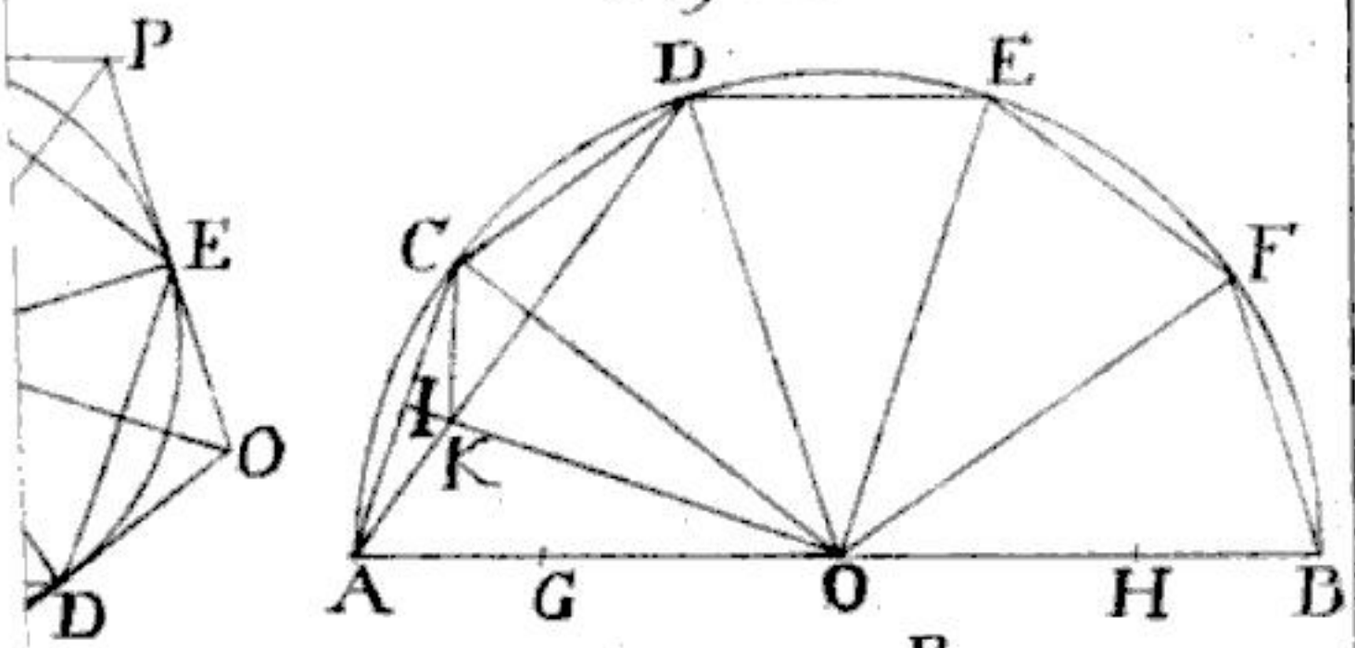


Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. XII

Fig. 116





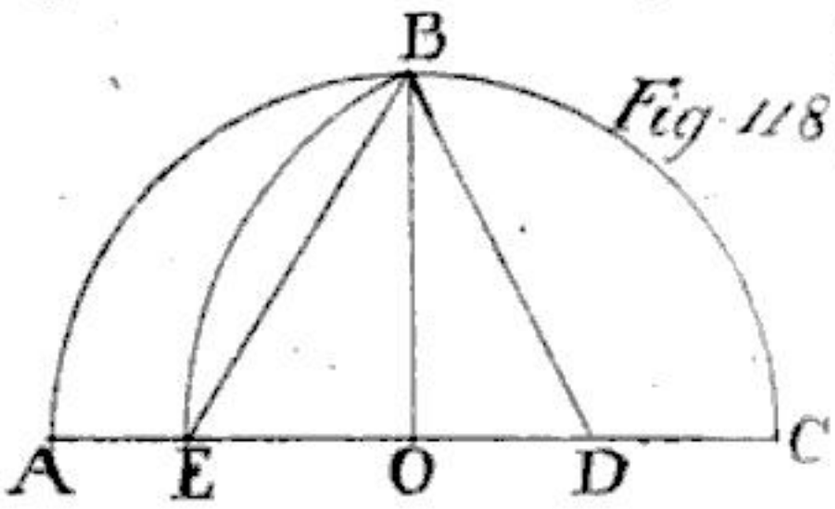


Fig. 118

Fig. 120



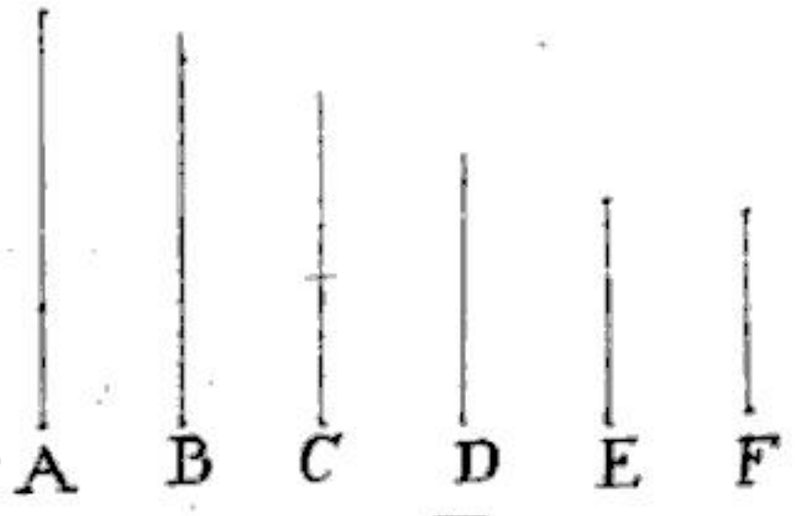


Fig. 122

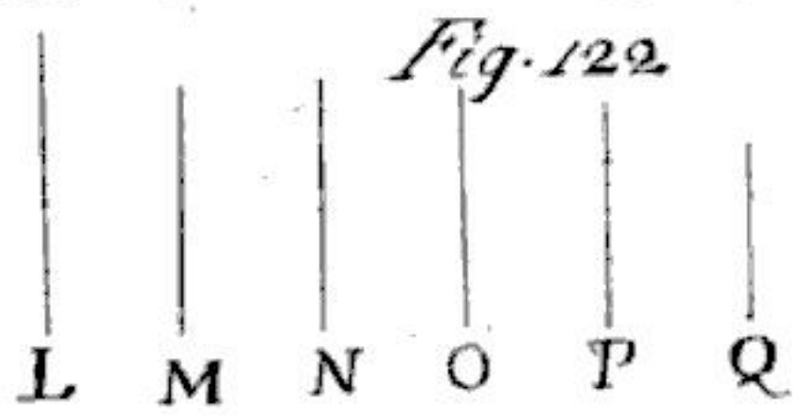


Fig. 121

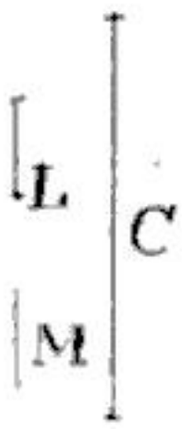


Fig. 124

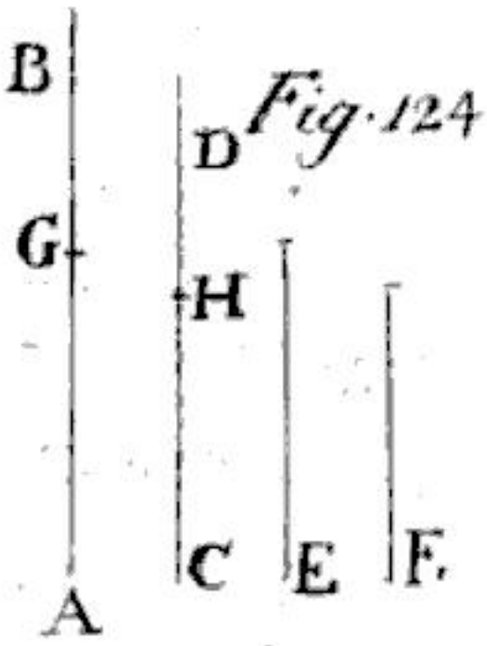


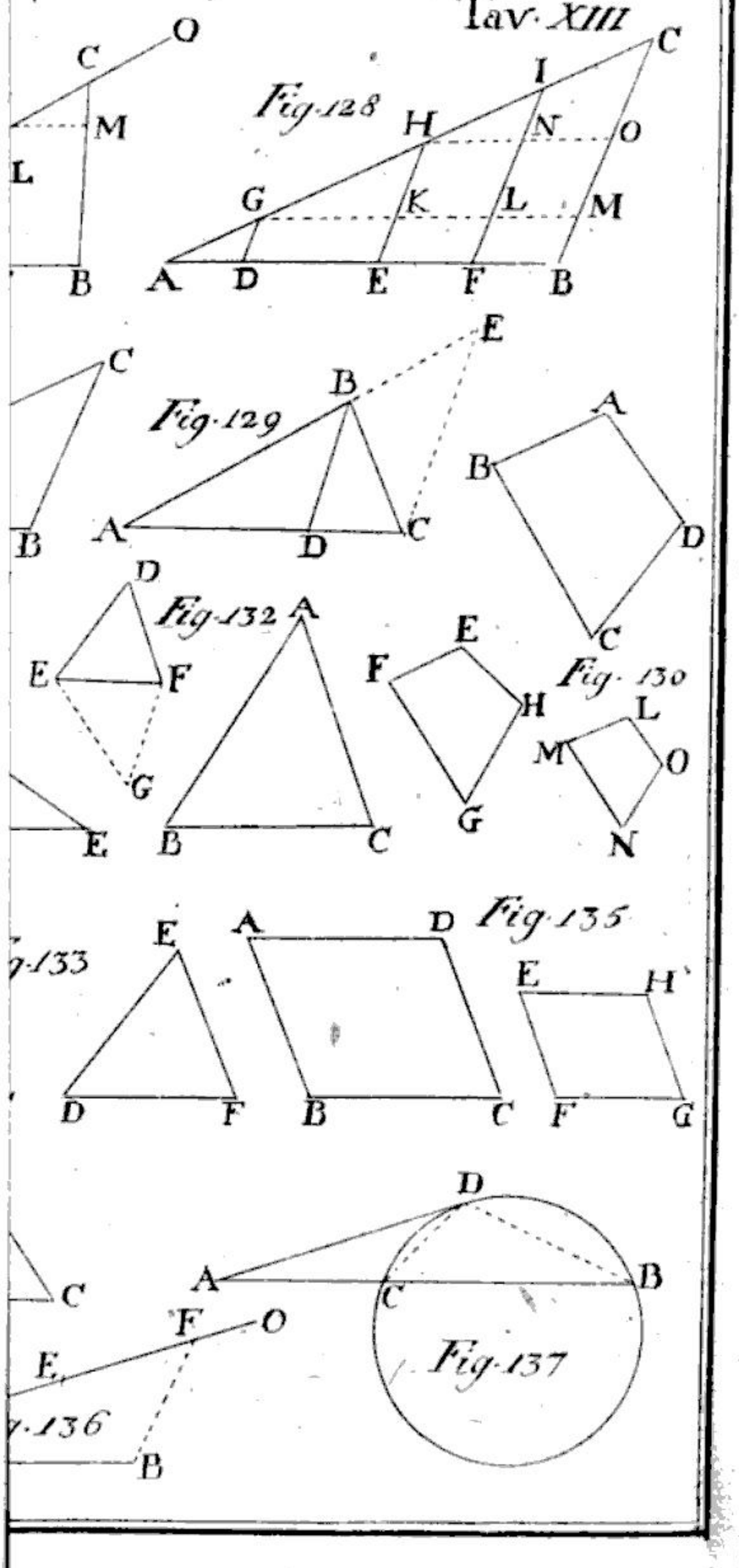
Fig. 125



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. XIII



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. XIV

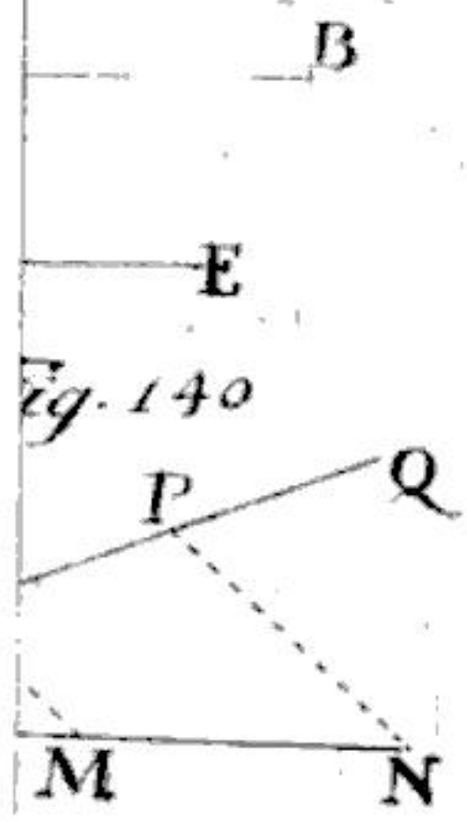


Fig. 140

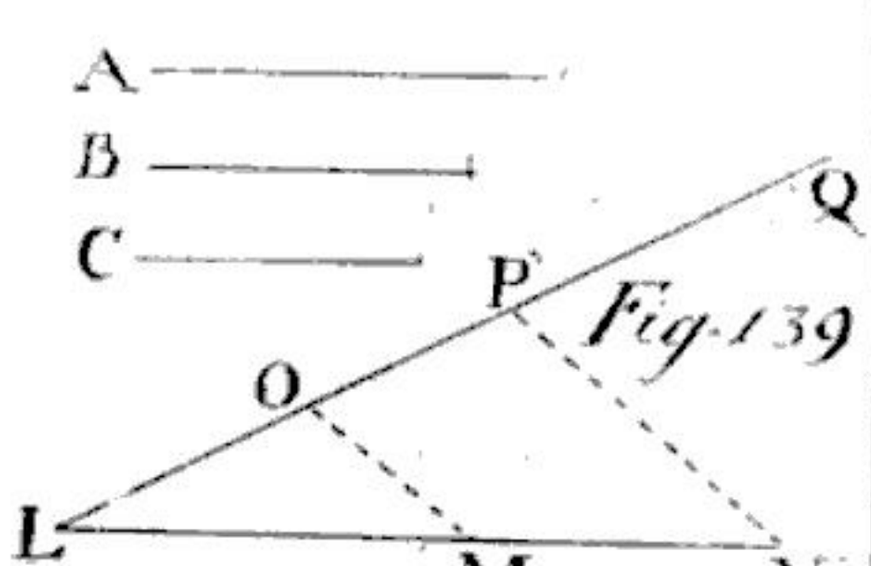


Fig. 139

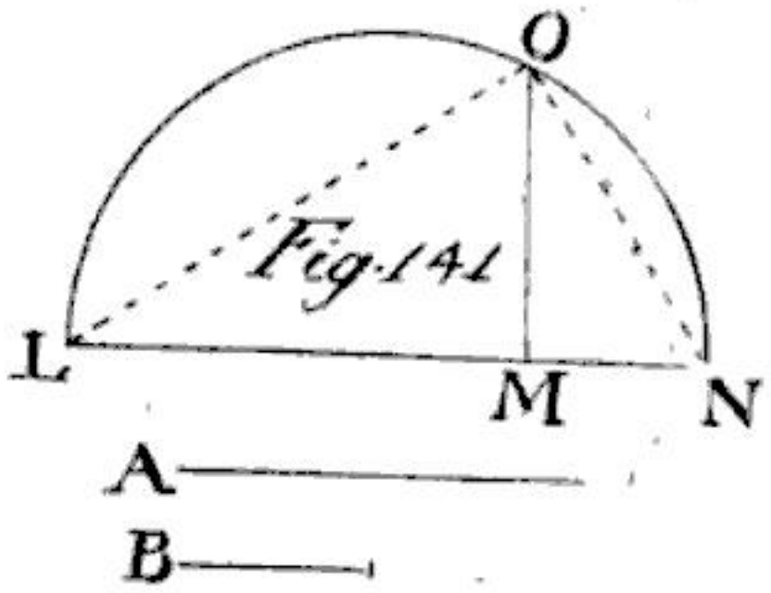
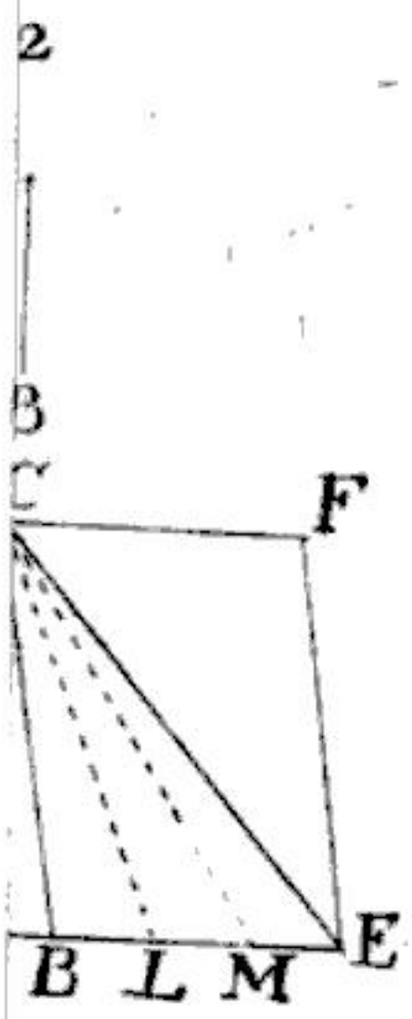


Fig. 141



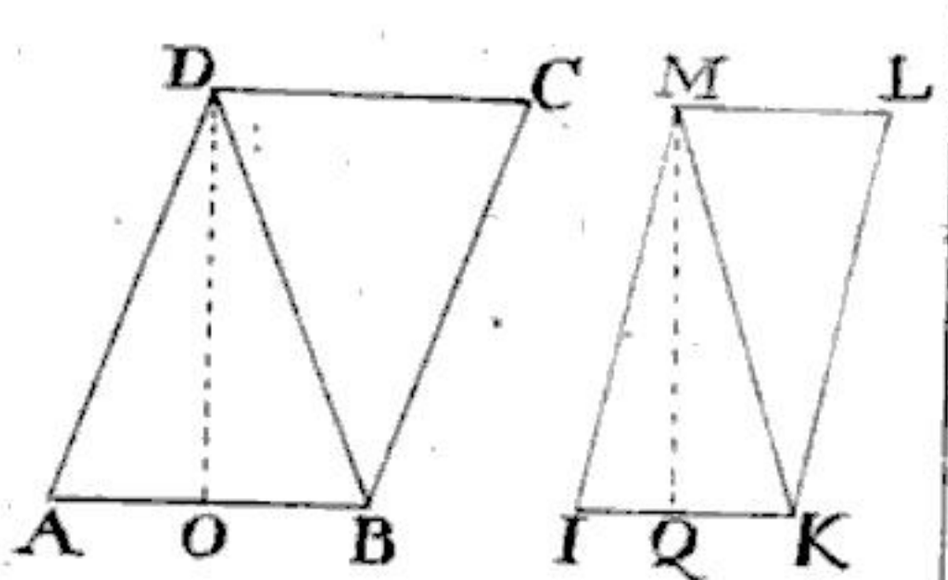


Fig. 145

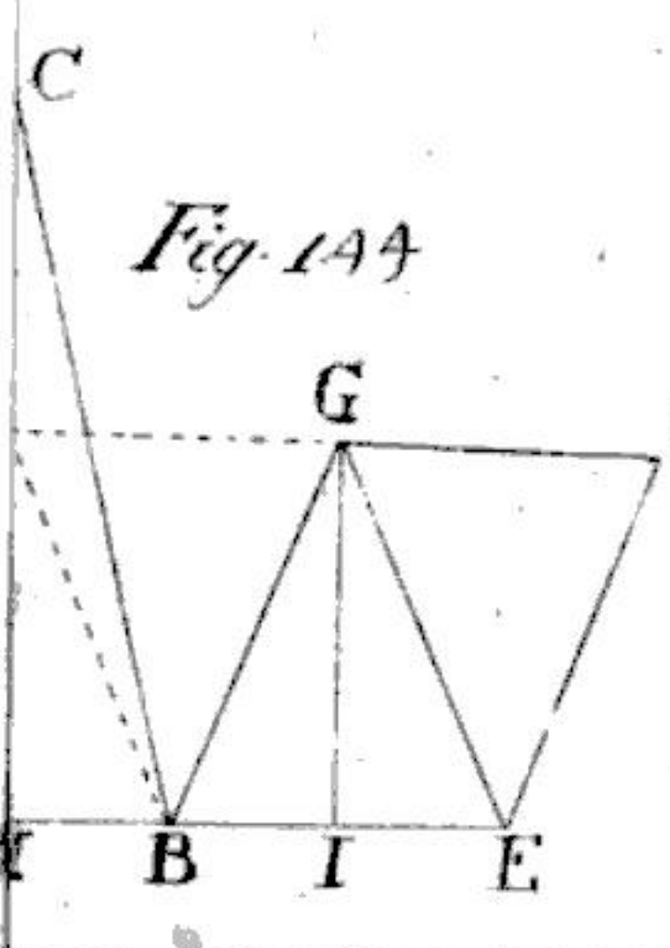


Fig. 144

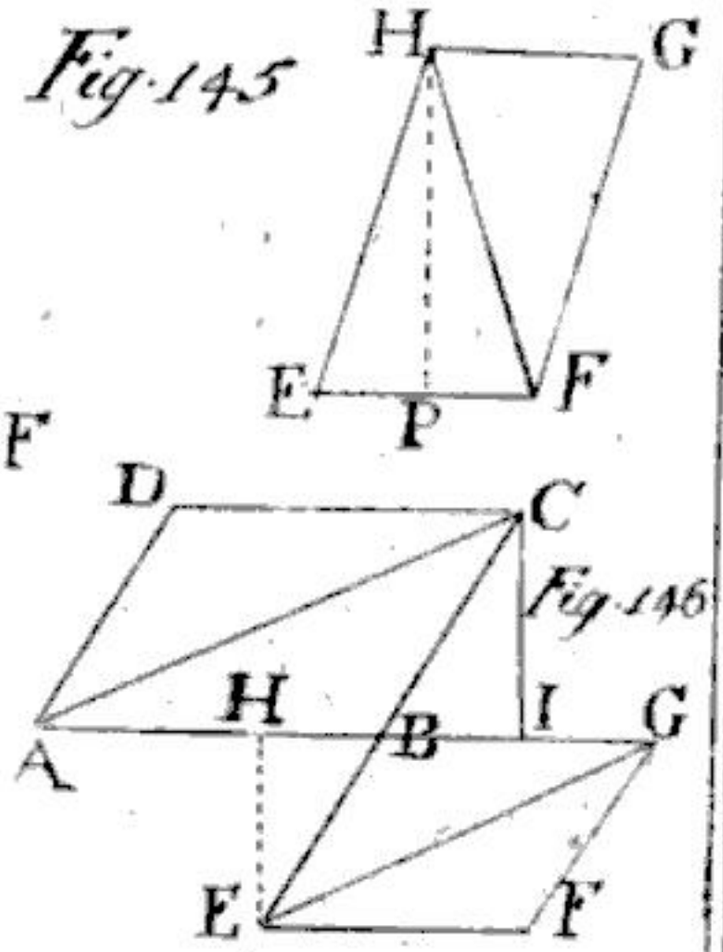


Fig. 146

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. XV.

Fig. 148

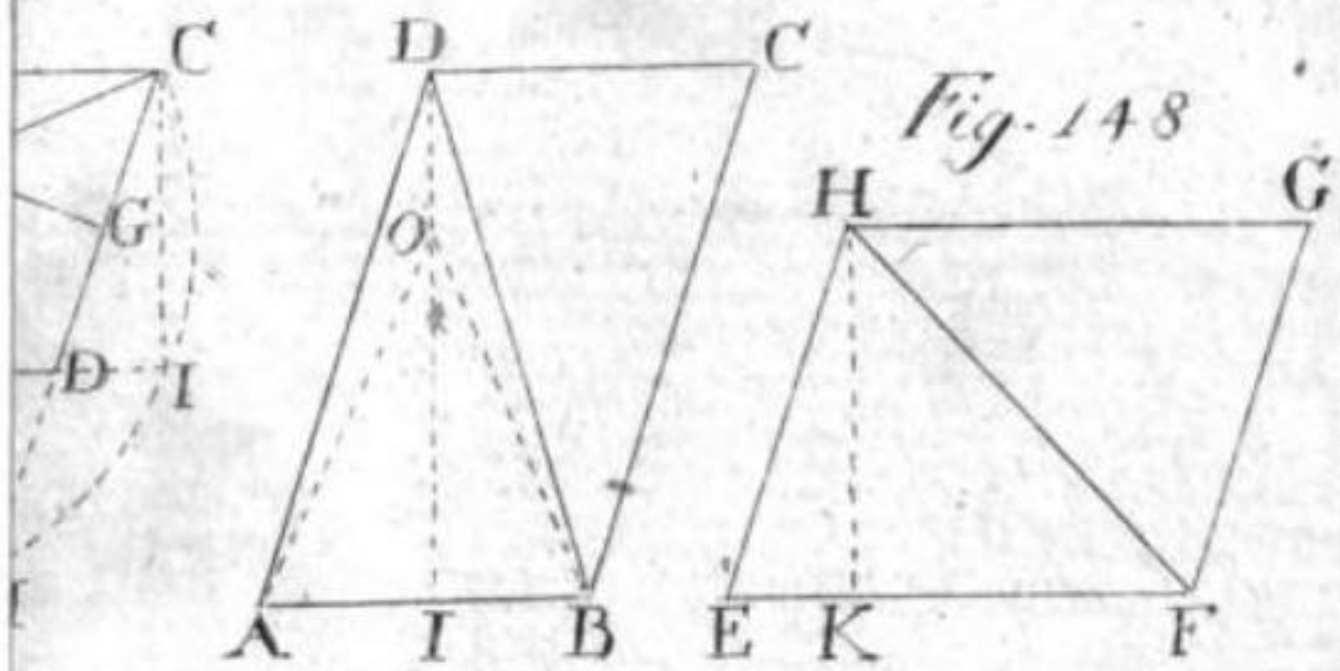


Fig. 150

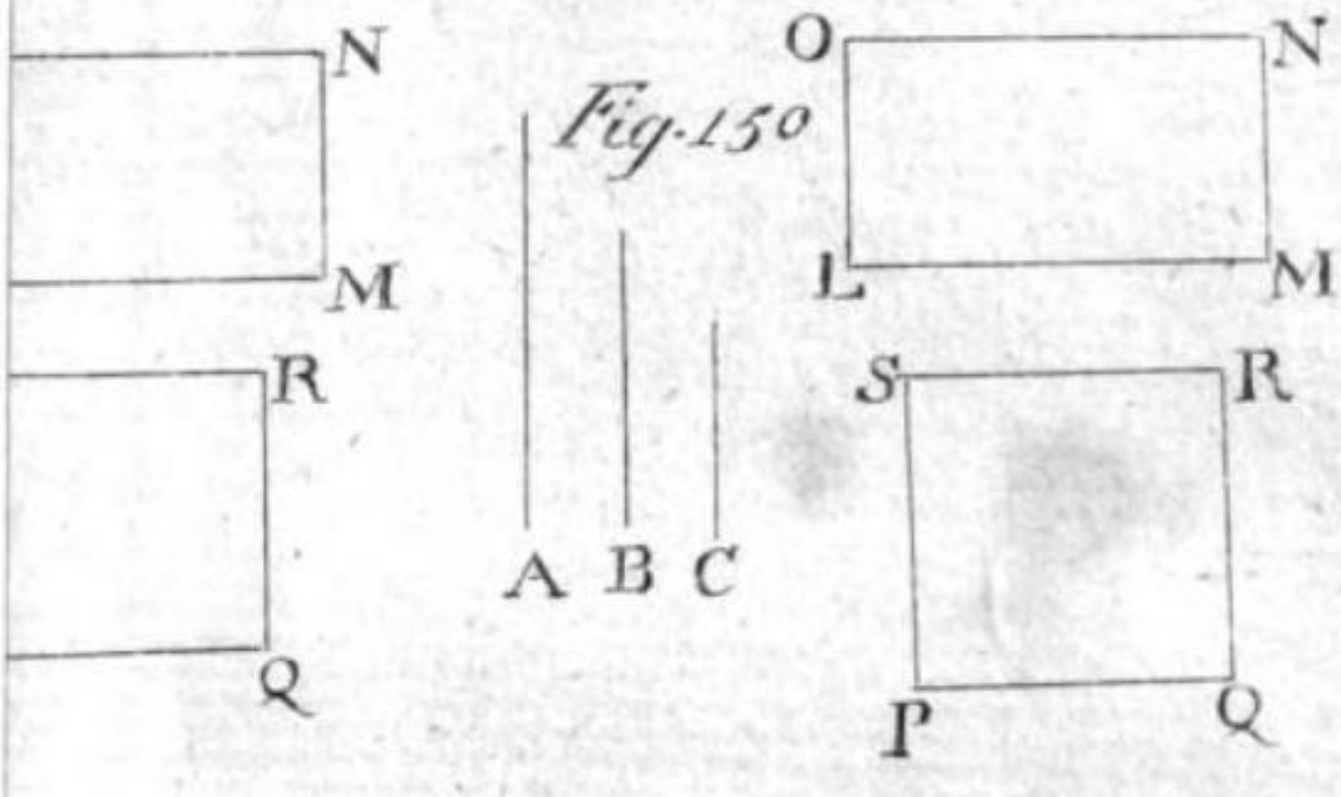


Fig. 152

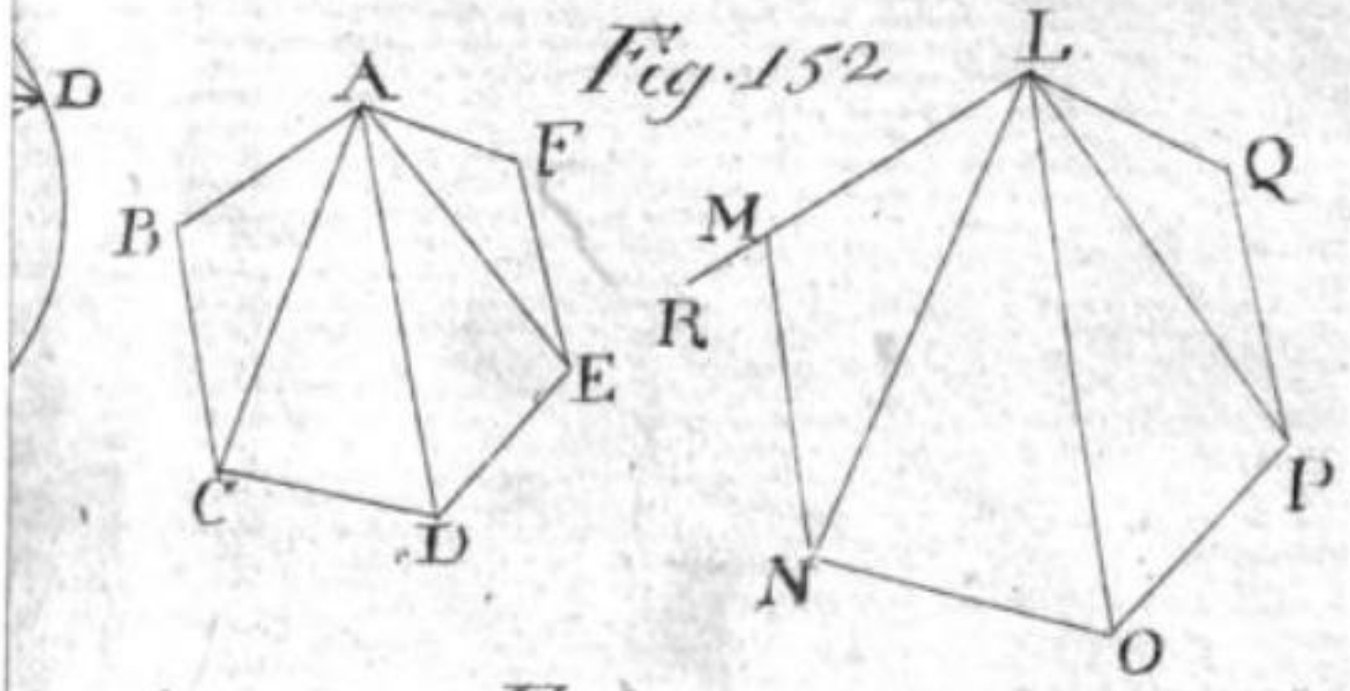
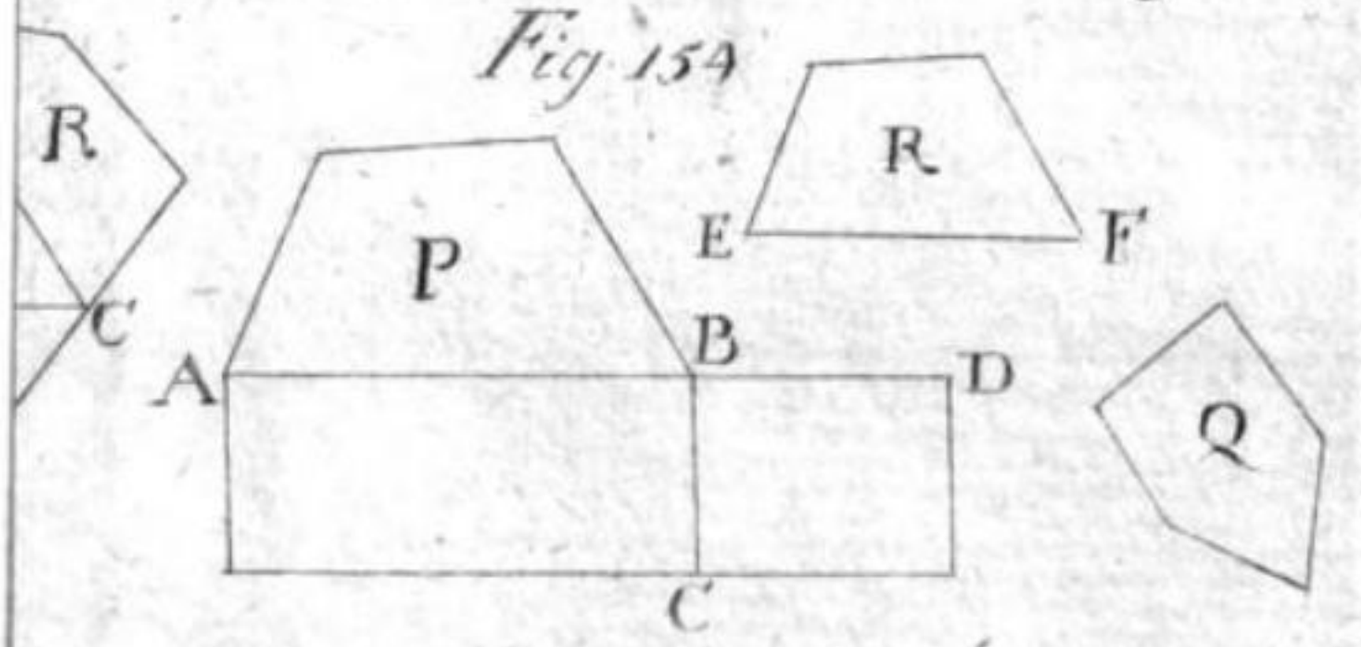


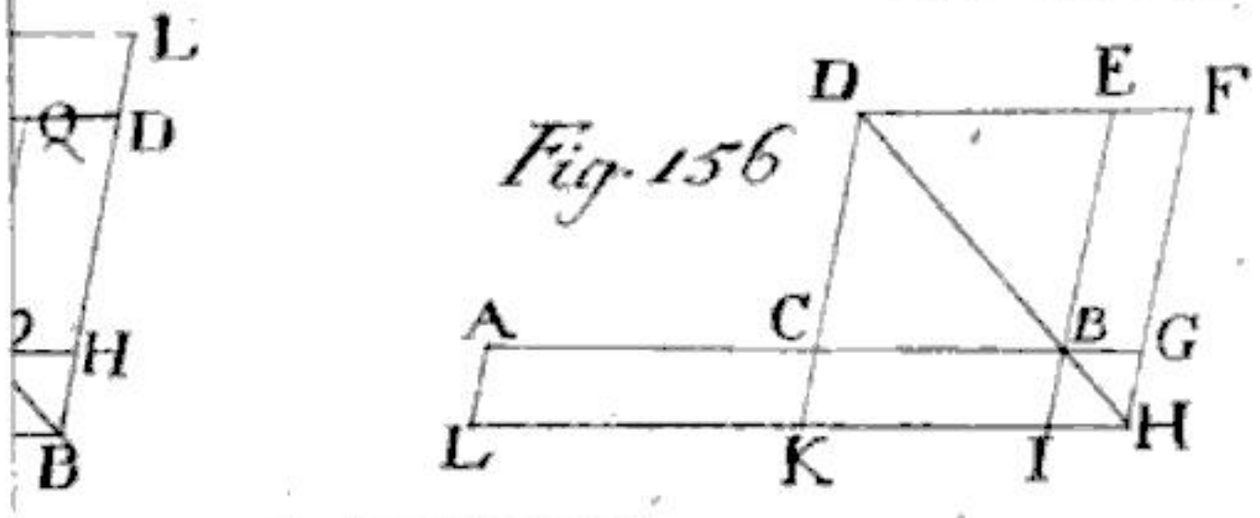
Fig. 154



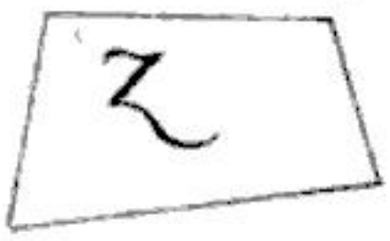
Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. XVI



155







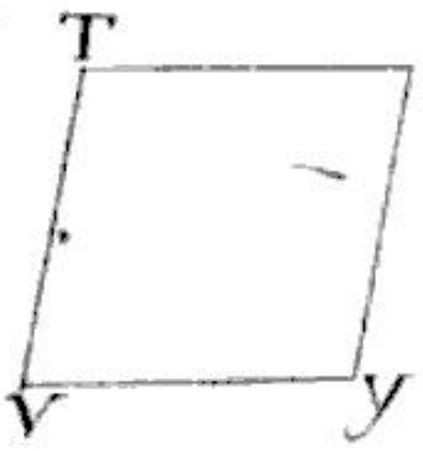


Fig. 156

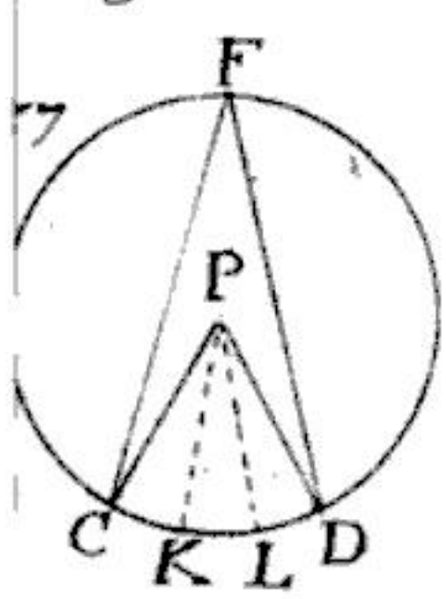
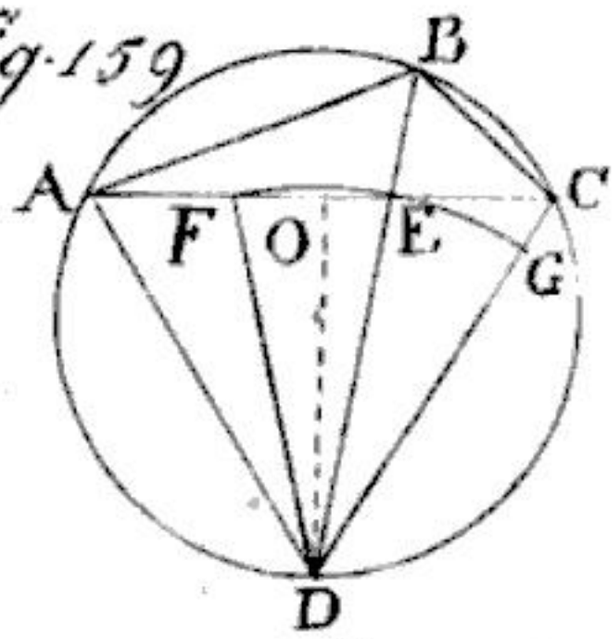
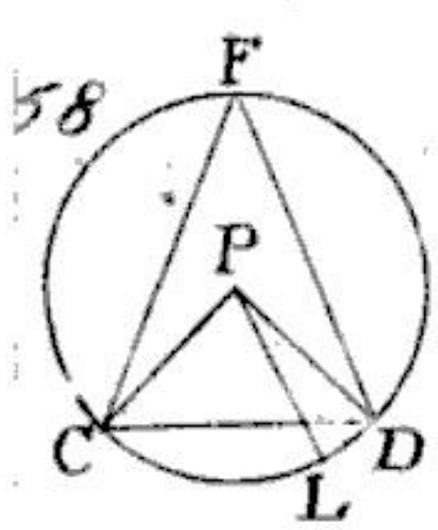


Fig. 159



58



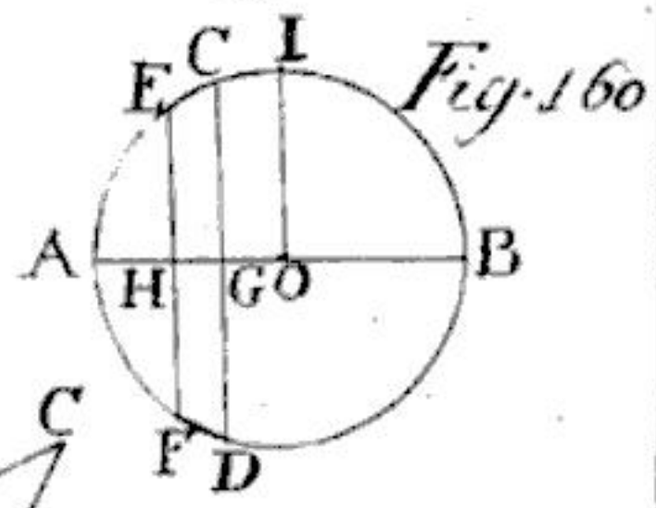


Fig. 160

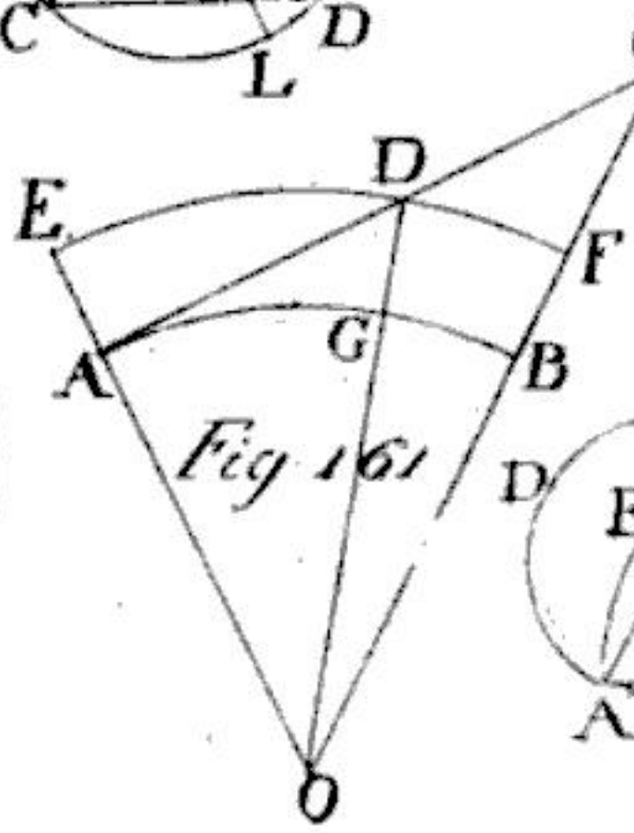


Fig. 161

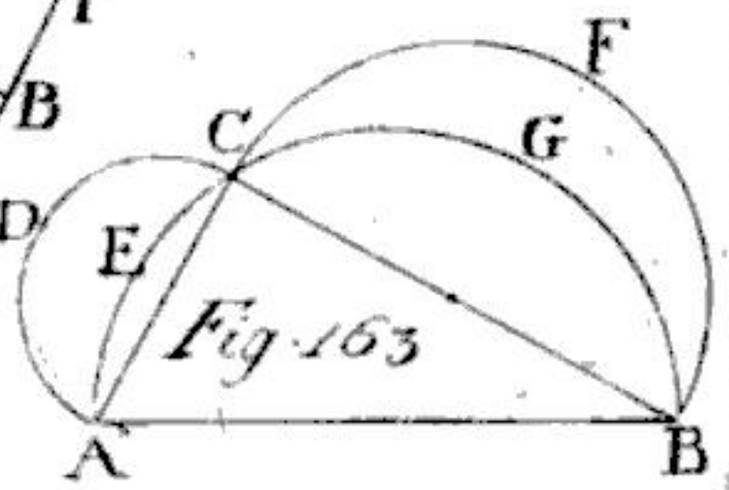


Fig. 163

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizado da Google

Digitalizzato da Google