CHRISTIANI WOLFII
ELEMENTA
ARITHMETICES, AC GEOMETRIÆ

Quibus præfigitur ejusdem Auctoris

BREVIS COMMENTATIO

DE METHODO MATHEMATICA

Ad usum studiosæ Mathematum juventutis nunc primum seorsim edita.

NEAPOLI CIƆIƆCCLXIII.
EX TYPOGRAPHIA SIMONIANA
Expensis Jo: Maximi Porcellii
Superiorum permissu.

INDEX

Ostendens paragraphos, in quibus definitiones, & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, A designare Arithmeticam, G. Geometriam.

Prop.

Pr.20	G.§.309
21	315
22	350
25	295
26	315
27	315
28	289
29	289
30	293
31	317.318
	319
32	323
35	381
36	379
37	380
Elem. IV.	
Def. 3.	G.§.116
6	117
Prop.5	294.297
6	353
7	351
12	355
15	357
Elem. V.	
Def. 1.	A.§.30
2	142
3	126
4	131
5	219
6	155
7	158
8	155
9	156
10	159.216
11	159.216
13	173
14	169
15	190
16	193
17	193
18	194.195
19	194
20	195
Prop.4	185
5	188
6	188
7	168
8	203.205

Prop. 9	A.§.177
10	204.206
11	167
12	155
15	178
16	173
17	193
18	190
19	188
22	194
23	198
Elem. VI.	
Def. 1.	G.§.175
3	258
4	227
5	A.159
Prop.1.	G.289
2	268
3	269
4	267
5	207
6	183
8	329
9	274
10	274
12	271
13	327
16	378
17	377
18	360
19	398
20	403
23	476.388
33	314
Elem. XI.	
Def. 1.	G.§.444
3	486
4	494
6	476
8	498
9	564
11	445
12	472
13	456
14	470
15	470
16	470
17	470

Def.18	G.§.467
19	467
20	468
27	475
28	475
29	475
30	462
Prop. 1	478
2	480.481
3	482
4	484
5	491
6	492
7	483
8	492
9	495
10	496
11	505
12	502
13	488
14	497
15	500
16	499
17	501
18	506
18	508
21	452
28	537
29	535
30	535
31	535
32	573
33	578
34	580
Elem. XII.	
Prop.1	G.§.408
2	408
5	573
6	573
7	543
8	578
9	580
10	547
11	573
12	578
14	573
15	580
18	579

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

SI quid mei judicii est operam non inanem sumit, qui Methodum Mathematicorum diligentissime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum potest, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perspicit; verum ad alias etiam disciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorsus insigni, eandem transfert. Quodsi vero Mathesis non aliam præter hanc unicam cultoribus sui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent, quotquot disciplinarum studia ingrediuntur. Eumque in finem studium Mathematicum tantopere commendant viri docti ac *intelligentes*, *quos inter* (*a*) LOCKIUM, (*b*) MALEBRANCHIUM, (*c*) TSCHIRNHAUSIUM *nominasse sufficiat*, *quorum in Philosophia rationali illustranda solertia haud paucorum opinionem vicit*. *Hanc igitur de methodo mathematica commentationem mole exiguam*, *sed rerum ubertate gravem Elementis Matheseos universæ præmisi*, *ne in iis desiderari paterer industriam meam*, *quorum ad recte philosophandum quam maxime necessaria est cognitio*: (*d*) *inprimis cum exiguus admodum sit eorum numerus*, *quibus interiora methodi sunt perspecta*; *multo minor autem illorum*, *qui methodo mathematica prompte utuntur*. *Cæterum hæc commentatio de methodo singulari cum attentione perlegenda*, *&*, *ubi Arithmeticæ ac Geometriæ elementa evolvuntur*, *præcepta methodi sunt relegenda*, *tum ut penitus intelligantur*, *tum ut appareat*, *quomodo iis satisfiat*. *Ita demum Matheseos studium vere acuet intellectum*.

CON-

(a) In Tractatu de directione ingenii (qui inter opera posthuma idiomate Anglico Londini 1706. edita habetur) p. 30.

(b) De inquirenda veritate lib. *6.* c. *6.* & *7.*

(c) In introductione ad Mathesin & Physicam Germanice conscripta p. m. 17. & seqq.

(d) Uberius huc spectantia exposuimus in Logica seu Philosophia rationali.

CONSPECTUS COMMENTATIONIS DE METHODO MATHEMATICA.

Methodus Mathematica definitur §.1. & ejus forma generaliter describitur §.2. Hæc ut specialius explicetur, docetur quid sint definitiones §.3. & harum gratia traditur explicatio notionum tum in genere §.4. cum in specie clararum §.6. obscurarum §.7. distinctarum §. 8. confusarum §.9. adæquatarum §.10. 11. & inadæquatarum §. 12. Ostenditur, quænam notiones in numerum definitionum admittantur §. 13. 14. 15. Definitiones dividuntur in nominales & reales §. 16. 17. 18. Exponuntur quatuor modi inveniendi definitiones nominales §. 19. 20. 21. 22. & quatuor alii inveniendi reales §. 25. 26. 27. 28. Indicatur, quomodo innotescat, quod definitiones tam nominales §. 23. 24. quam reales §. 29. possibiles sint. Declaratur indoles axiomatum & postulatorum §. 30. 31. 33. & abusus quidam notantur §. 32. Disseritur quoque de experientia §.34. 35. 36. 37. Definitur Theorema §. 38. & distincte agitur de propositionis partibus, Thesi, atque Hypothesi §. 39. 40. 41. 42. & de demonstratione §.43. 45. 47. ubi etiam docetur usus citationum Mathematicis in demonstrationibus solennis §.44. Similiter declaratur Problematum §. 48. Corollariorum §. 49. 50. Scholiorum §. 51. ratio. Asseritur Methodi Mathematicæ universalitas §.52. & ratio redditur, cur interdum Mathesis judicium acuere debeat §. 53. interdum minus §. 54. Denique respondetur ad objectiones, quæ contra Methodum Mathematicam a nonnullis afferri solent §. 55. 56. 57.

DE METHODO MATHEMATICA BREVIS COMMENTATIO.

PER *Methodum Mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a definitionibus; inde ad Axiomata & Postulata, in Mathesi mixta ad Experientias seu Observationes, progrediuntur; his tandem Theoremata & Problemata superstruunt: ubique vero Corollaria & Scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus *Leibnitius* (*a*): quæ quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. 6. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit, e. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. 7. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est e. gr. plantæ, ad cujus conspectum dubitas, utrum ea sit nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis: e. gr. quod circulus sit figura, linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. 9. *Confusa* est *notio* clara, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est e. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Distincta *notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris: e. gr. notio circuli paulo ante tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad

(a) In actis Eruditorum An. 1684. p. 537.

ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita *Euclides* non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant, e. gr. Quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se: quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales: quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia &c. Defectum scilicet analyseos supplent propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum Definitionum Mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in Definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia sit necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta, rei genesin, hoc est, modum, quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus, attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, Eclipsin Lunæ esse privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt, quæ distingui possunt, eique fini singula primum singillatim considerari; mox inter se conferri debent, ut definitio notio distincta evadat, qualis (*vi* §. 13.) esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendentes varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. E. gr. Si ex definitione *Trianguli* quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem *Figuræ* habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in definitionibus obvias consideres, alias iis geminas comminisci datur: qua ratione definitiones aliæ inveniuntur. E. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem substitue, ut definitio *Figuræ quadrilateræ* aut *multilateræ* cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero (*vi* §. 20.) determinationes quædam omitti, sic etiam novæ superaddi possunt. E. gr. in definitione trianguli, species & ratio linearum, quam inter se habent, determinari potest. Ponamus nimirum lineas esse rectas; generalis notio trianguli in notionem *Trianguli rectilinei* abit. Ponamus porro esse latera omnia inter

se

se æqualia; notio trianguli generalis in notionem *Trianguli æquilateri* degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam posita. Quis enim, quæ actu existere cognoscit, utrum esse possint nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ se percipere sibi conscius est: id quod valde absonum. E. gr. Si quis Lunam deficientem intuetur; quod Eclipsin pati possit, dubitare nequit. Idem de illis definitionibus judicium esto, quæ a possibilibus abstrahuntur.

§. 24. Alia vero definitionum per methodum tertiam & quartam inventarum est ratio. Utrobique enim arbitrium regnat, sive juxta tertiam determinationes datas in alias similes convertas, sive juxta quartam datis alias superaddas: nostrum autem arbitrium nullam rebus existendi necessitatem imponit. Licet e. gr. spatium tribus lineis rectis comprehendi possit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ spatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter se æquales esse possint. Tales itaque definitiones possibiles esse demonstrandum est: id quod Geometræ circa figuras præstant, dum earum constructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales vel a priori inveniuntur, vel a posteriori innotescunt. A priori definitiones reales investigabis, si ex plurium possibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam possibile producis, e. gr. ex combinatione machinarum simplicium machinam quandam compositam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo casui persæpe aliquid datur. Exemplo est compositio telescopii per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante *Borello*.

§. 26. Difficilius idem præstatur, si ex data definitione nominali realis invenienda. Hoc enim in casu notiones distinctas eorum evolvere tenemur quæ in ista continentur, ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur; postea cognitiones jam ante acquisitas mente recolere debemus, visuri num talia succurrant, per quæ rei formationem concipere licet. E. gr. datur in Astronomia definitio nominalis Eclipsis Lunæ, quod scilicet sit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda est definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi istud a Sole secundum lineas rectas in corpus lunare incidere & tempore plenilunii Ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hisce corporibus interpositam in locum Soli oppositum projicere umbram succurrit; haud difficulter innotescit, Eclipsin Lunæ oriri, si ea umbram terræ ingrediatur.

§. 27. A posteriori definitiones reales innotescunt, si rei formationi præsentes attendimus. E. gr. Si quis videat in campo circulum describi, fune circa clavum fixum in gyrum acto: is genesin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad definitiones reales quoque pervenitur, dum compositum totum in suas partes simplices resolvitur, quod in organicis potissimum locum habet. Hac ratione e. gr. structuram machinæ jam extantis assequimur.

§. 29. Circa hoc definitionum genus duo consideranda sunt, antequam de illarum possibilitate judicare licet, nempe 1. utrum ea existant aut existere possint, nec ne, quæ ad genesin rei concurrere assumimus; 2. num ab iis proficisci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus: id quod ex natura definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum

rum vero certitudinem vel experientia, vel eorum, quæ per consequentias legitimas alio tempore deduximus, reminiscentia consequimur. Ita, e. gr. in definitione circuli superius (§. 27.) tradita per experientiam claret, lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi posse. Ast in definitione Eclipsis Lunaris ratione, experientia licet stipata, assequimur, Lunam Telluris umbram ingredi posse.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales cum in se considerari, tum inter se conferri possunt. Quicquid ex consideratione eorum, quæ in una definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, si quid rei convenire, aut non convenire enunciet; *Postulatum* vero, si quid effici posse affirmet vel neget. E. gr. Ex genesi circuli liquet, omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter se æquales esse, cum unam eandemque lineam in diverso situ referant. Hæc adeo propositio in axiomatum numero habetur. Ast dum per eandem definitionem intelligitur, ex quovis puncto quovis intervallo circulum describi posse: id inter postulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur axiomatum & postulatorum veritas per intuitum definitionum, ex quibus fluunt, cognoscitur, demonstratione nulla indigent. Vera enim esse intelliguntur, quam primum realitas definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *propositiones per se notæ*, item *ex terminis manifestæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac axiomatum proprietate abutuntur, dum præmissas syllogismorum, quas probare nesciunt, pro axiomatibus venditant. Hinc videas in axiomatum numerum referri propositiones, quas sine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non est, ipsum *Euclidem*, qui in demonstrando se virum præstitit, propositiones uti-

que

que demonſtrabiles in axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11.), ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet per recordationem vel maxime confuſam eorum, quæ olim ſæpius experti ſumus aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus, immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes, quale e. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe: item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. *Euclidis* igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo ſi verum fateri fas eſt, vera axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 34. Cum axiomatibus & poſtulatis etiam Experientiæ nonnunquam confunduntur. *Experiri* autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus, e. gr. dum, accenſa candela, conſpicua fieri videmus quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans caſum ſingularem in medium proferre tenetur, niſi vel ſenſui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Matheſi exactiſſime obſervatur. Neque enim, e. gr. in Aſtronomia Solis orientis & occidentis obſervationes recenſentur, utpote quotidianæ ac omnibus ſatis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum obſervationes, a diverſis Aſtronomis, tempore diverſo, diverſiſque inſtrumentis celebratæ, fideliter referuntur, cum non in cujuſvis poteſtate exiſtant.

§. 36. Mathematici quoque experientias a concluſioniſionibus inde deductis accurate diſtinguunt, aliis ut plurimum has cum iſtis confundentibus. E.gr. Quod, candela accenſa, corpora, quæ ante non apparebant, in conſpectum prodeant, per experientiam innoteſcit. Quodſi vero perpendens, lumen in cauſa eſſe, cur tenebris diſcuſſis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo ſe habentium eundem eſſe effectum, infero; Quicquid lumine colluſtratur, videri poteſt: hæc propoſitio non in experientiarum, ſed concluſionum per legitimam conſequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Iſtiusmodi concluſiones omiſſis experientiis commemorantur, ſi modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perſpectus. E.gr. Maximam Solis declinationem non immediate metimur, ſed ex data elevatione Æquatoris & altitudine meridiana Solis in ſolſtitio invenimus. Proprias igitur de ea obſervationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in ſolſtitio obſervatam annotet opus eſt, ſed ſufficere poteſt, ut ipſam declinationem ſtatim indicet. Si enim conſtet, quantam elevationem Æquatoris aſſumſerit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod ſi vero non appareat, quomodo propoſitio data ex prævia quadam experientia eliciatur; caſus ſingularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari poſſit. Quod enim aliquid perceperis, cum demonſtrare nequeas; ut credatur, jure poſcis: ſed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini ſubſit, ut fides deductis habeatur, ſine ratione flagitas.

§. 38. Propoſitio theoretica ex pluribus definitionibus inter ſe collatis eruta *Theorema* appellatur. E. gr. Si in Geometria triangulum cum parallelogrammo ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipſis eorundem definitionitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis infertur; Parallelogrammum esse trianguli duplum: ea propositio in theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem sunt, quæ in omni theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe atque *Demonstratio*. Ista quidem enunciatur, quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi convenire concipere valet.

§. 40. Absolute possibile non est nisi ens a se: reliqua vero omnia tantum admisso alio possibilia esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in propositione una exprimenda. E. gr. Triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint sigillatim æquales. In propositione itaque tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commode distinguitur: quarum ista conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur, quod vel affirmatur, vel negatur. E. gr. in propositione allata hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant*; thesis autem, *illud hujus dimidium est*.

§. 41. Notandum vero, si in ipsa rei definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, hypothesin distincte non exprimi. E. gr. Si tres in triangulo anguli 180. graduum dicantur; hypothesi carere videtur propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 42.

§. 42. Datur autem in propoſitione affirmativa neceſſarius nexus inter hypotheſin atque theſin; in negativa autem nullus concipi poteſt, ſed hæc illi repugnat. Quoniam ſcilicet in ſubjecto deprehenditur, quod hypotheſis involvit; ei quoque convenire debet, quod in theſi continetur. E. gr. in hoc theoremate, quod *triangulum ſit dimidium parallelogrammi ſuper eadem baſi & ejuſdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus baſin & altitudinem baſi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein aſſerimus, quod ſit parallelogrammi dimidium. Poſterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter theſin & hypotheſin in propoſitionibus affirmativis; repugnantiam in negativis *Demonstratio* manifeſtat. Eorum igitur definitiones, quæ in hypotheſi ac theſi continentur, eorundemque proprietates ex iſtis derivatæ aut aliunde cognitæ demonſtrationum principia exiſtunt. Quoniam vero in Matheſi principia non admittuntur, niſi quæ ante fuerunt evicta; definitiones ac propoſitiones, quibus demonſtrationes ſuperſtruuntur, citari ſolent, partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris conſtet, unde ipſorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes definitionum, axiomatum, poſtulatorum, theorematum & problematum non exiguum habent uſum, nec ſine ratione in Matheſi ſingulis cogitationum generibus ſingula nomina imponuntur. Demonſtratio namque non convincit niſi principiis demonſtrandi extra dubitationis aleam poſitis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera ſupponenda ſint, antequam veritatis propoſitionis datæ convinci poſſis. Et quoniam definitiones primi conceptus exiſtunt, axiomata vero ex iis immediate deducuntur, theoremata vero vel immediate, vel mediate ex

iiſdem

iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in demonstratione provocatur, statim addiscitur, utrum multa supponenda sint, nec ne, & quo ordine sit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem definitionum, axiomatum & postulatorum, thorematum & problematum dijudicandam peculiaribus artificiis opus sit; nomina veritatum citatarum simul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonstrandi persuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero est ratio ex principiis conclusiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis Logicis, ubi de syllogismo agitur, dudum exposita. Sunt enim demonstrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi syllogismorum concludantur, omissis saltem præmissis, quæ vel sponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut sit demonstratio, præmissæ syllogismorum novis syllogismis tamdiu probandæ sunt, donec perveniatur ad syllogismum, in quo præmissæ sunt vel definitiones, quas jam constat esse possibiles, vel propositiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonstratu haud difficile foret, (*a*) genuinam demonstrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non posse, nisi cogitationes nostræ juxta regulas syllogisticas dirigantur; his tamen ambagibus in præsenti opus non est. Cum enim de quæstione facti disputemus; exempla allegasse sufficit. Scilicet non ignotum est, *Clavium* demonstrationem propositionis primæ Elementi primi *Euclidis* in syllogismos resolvisse: immo *Herlinum* atque *Dasipodium* sex priora Elementa *Euclidis* & *Henischium* integram Arithmeticam per syllogis-

(a) Ostendimus id in *Logica* §. 551. & seqq.

gismos in forma exhibitos demonstrasse.

§. 47. Equidem non ignoro, esse hac nostra præsertim ætate non paucos, qui sibi persuadent, demonstrationum mathematicarum formam a legibus syllogismorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; sed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, sed & attentione magis severa utentibus; quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & sic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoscerem. Fatetur certè *Leibnitius*, (*a*) vir in Mathesi & omni eruditione reliqua summus, *firmam esse demonstrationem, quæ præscriptam a Logica formam servat.* Similiter *Joannes Wallisius*, Mathematicus profundus, (*b*) agnoscit, *id, quod in Mathesi proponitur probandum, syllogismi unius pluriumve ope deduci*. Immo ingeniosissimus etiam *Hugenius* (*c*) observavit, *paralogismos in Mathesi sæpius vitio formæ existere*. Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (*d*) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum virorum autoritas,) fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu scilicet in Mathesi versamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inspectione non minus, quam ex aliarum propositionum citatione multæ præmissæ syllogismorum supplentur: ad quod si non satis attendatur, quam sancte in demonstrationibus mathematicis leges syllogismorum custodiantur non apparet.

§.48.

(a) *Acta Erudit.* A. 1684. p.541. conf. *Essais de Theodicée* p. 37. 40. 41. 73.

(b) Operum Mathem. Vol. 3. f. 180. hoc est Logic. lib.3. c. 22.

(c) *Acta Erudit.* A. 1711. p. 477.

(d) Vide eas in *Logica* §. 551. & seqq.

§. 48. *Problemata* facienda proponunt & tribus partibus constant, *Propositione* scilicet, *Resolutione* ac *Demonstratione*. In propositione, quid fieri debeat, indicatur. In resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur, quod erat faciendum. Denique in demonstratione evincitur, factis iis, quæ resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque problema demonstrandum, in theorema convertitur, cujus hypothesin resolutio, thesin vero propositio constituit. Generalis enim omnium problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est: Factis iis, quæ resolutio præcipit, illud quoque efficitur, quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de problematibus plura dicantur.

§. 49. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur propositiones generales, & ex quibusdam propositiones sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur propositiones *Corollaria* nuncupantur.

§. 50. Primum corollariorum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc vel isto in specie ut denuo demonstretur opus non est. E. gr. ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. E. gr. Si theorema ti, cujus modo mentionem feci, hoc corollarium subjungatur; *in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus esse potest*: ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51.

§. 51. In *Scholiis* denique tam definitionibus, quam propositionibus earumque corollariis subjungi solitis, obscura declarantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, &, si qua alia scitu nec injucunda, nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet, nec diffitebitur, sine ea ad solidam rerum cognitionem perveniri haudquaquam posse. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo sæpius *Geometrarum Methodus*, quia huc usque Mathematici fere soli, in Geometria inprimis, ejus leges sancte custodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis disciplinis applicare studuerunt; conatui tamen ipsorum eventus minime respondit. Etenim nunc notiones non satis evolverunt, nunc sine probatione assumserunt quæ maxime probari debebant, nunc per saltum ratiocinati sunt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri possunt.

§. 53. Explicatæ methodi legibus cum ex asse satisfiat in Mathesi præsertim pura, non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant, hoc est, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognoscendam animum appellunt, accuratius, quam alii solent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale demonstrationum mathematicarum meditatio censeri debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex studio Matheseos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quasdam mathematicas aliasque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri solitas, addiscunt. Licet enim in vita communi utiles existant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §.

præc. hæc nonnisi a seria demonstrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Superest ut ad objectiones duas respondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre solent, præsertim cum satis prævideam non defuturos, qui easdem contra Elementa mea Matheseos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1. *quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent:* 2. *quod ordinem, quo generaliora & simpliciora specialibus & compositis præponi necesse est, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco absolvant.*

§. 56. Objectioni primæ ut satisfiat, explicandum est, quando definitiones sunt superfluæ, & quales esse debeant propositiones, ut probatione non indigeant: id quod ex fine definitionum atque indole demonstrationum redditur manifestum. Definitiones nimirum hunc habent usum, ut vel subsequentibus aliis intelligendis inserviant, vel principia demonstrandi præbeant. Ostendant igitur adversarii, *Euclidem* aut Geometram alium ullam dedisse definitionem, qua nec ad subsequentes explicandas, nec in propositionibus demonstrandis utitur. Quamdiu vero exempla istiusmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere desinant, quod nimii sint in definiendo, & suum potius errorem agnoscant, quod definitionibus non alium tribuant usum, nisi qui in rebus definitis agnoscendis & ab aliis distinguendis consistit. Diximus porro superius, præmissas syllogismorum tamdiu continuandas esse, donec ad definitiones, quas jam constat esse possibiles, & propositiones identicas, perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi propositiones identicæ ac experientiæ claræ, in quibus notiones primæ fundantur. Reliquæ propositiones omnes sunt demonmonſtrandæ. Oſtendant igitur adverſarii *Euclidem* aut Geometram alium propoſitiones identicas & notiones in experientiis claris fundatas demonſtraſſe. Quamdiu vero hujuſmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere deſinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipſis videntur, & potius diſcant, quod in demonſtrando nunquam nimis accurati eſſe poſſimus, præſertim ubi extra Matheſin verſamur, nec ut ibi figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonſtrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo ſine in demonſtrando accurati eſſe nequimus. Eo nimirum ordine ſingula proponenda ſunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum ſatis experiamur, id fieri minime poſſe, ſi in unum cumulum congerantur, quæ de ſubjecto eodem cognoſci poſſunt; *ordo ſcholæ* Philoſophis vulgaribus relinquendus & a Geometris aliiſque, quibus res profundius meditari datum eſt, *ordo naturæ* retinendus.

F I N I S.

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

NON dubito fore aliquos, qui mirabuntur, quod Elementa Matheseos universæ conscribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero quam perperam nonnulli Mathesin universalem appellant, eam ego ab Arithmetica diversam non agnosco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea considerant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio est, cur non aliæ ipsarum, quam numerorum sint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Mathesi universali vulgo tractari solent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potissimum doctrina spectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare solent, non integrum trado, quia in demonstrationibus Arithmeticis & Geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reservatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus solius demonstro, quia cum rigore demonstrandi, quem mihi observandum proposui, ea demonstrandi ratio non subsistit, utpote in qua multa communiter sine probatione assumuntur, quæ & a veteribus demonstrata, nec mihi sine probatione concedi posse visa sunt, ubi solidam doctrinam cordi habueris. Veram autem MATHESIN UNIVERSALEM in desideratorum numero colloco, eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam mensuras convenientes præscribit:

nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda necessaria sunt; ea ad Analysin rejeci. Tyrones sub initium praxes arithmeticas solas cum definitionibus sibi familiares reddere debent, theorematibus problematumque demonstrationibus omissis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent, ut non modo eorum sensum clare perspiciant, sed eadem quoque memoriæ firmiter infigant, quo in promptu sint, quoties iis vel ad demonstrandum, vel ad inveniendum opus est. Iis intellectis problematum demonstrationes expendere, ac his perceptis inoffenso pede ad theorematum demonstrationes progredi licebit. Absit autem, ut quis arbitretur, omnibus calcandam esse hanc semitam. Quorum enim est major mentis acies, congenita vel aliis studiis acquisita, & facilius conservatur attentio; illi elementa integra eo ordine perlegere possunt, quo conscripta sunt. Usus Arithmeticæ per disciplinas reliquas omnes se diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit & ante eas cum cura addiscenda est. Quantus Arithmeticæ in vita civili usus sit, experientia loquitur: quantus in Physicis & aliis Philosophiæ partibus, experientur quotquot, Mathesi absoluta, solidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu possit, in ipsa pertractatione hinc inde annotavimus, &, si quis culturam convenientem studio Arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magistra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO I.

1. ARITHMETICA est numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus *6.* & 8. junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2. *Patet adeo, Arithmeticam practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia* Cartesius *cum in Tractatu de methodo, tum in iis, quæ de ingenii directione inter posthuma habentur,* & R. P. Malebranchius *in egregio opere de inquirenda veritate. Plura, quamvis paucis, nos damus infra* (§. 125.)

DEFINITIO II.

3. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris *Leibnitius* unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

DEFINITIO III.

4. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

5. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversæ* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6. *Ponamus e. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO V.

7. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A, erunt A, B, C, D &c. *Plura* seu *Multa*.

DEFINITIO VI.

8. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

9. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero C & D dicentur ejus *Partes*, & intuitu partis B, reliquas C & D &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

11. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur; numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in Geometria & Analysi abunde patebit.*

SCHOLION II.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales comprehendere valeamus.*

DEFINITIO IX.

13. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas*.

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quæsiveris, quanta ea sit: quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumis & illius ad hanc relationem quæris, ac pro diversa unitate assumta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enuncias. Latitudo igitur fluvii*

vii

vii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitarem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.

DEFINITIO X.

15. *Æqualia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. *Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest, quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 15.); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15.): erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

18. *Signum æqualitatis est* $=$.

SCHOLION.

19. *Hoc signo primus usus est* Hariotus *Anglus* (*a*), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* Cartesio *adhibent Signum sequens* ꝏ; *quidam etiam alia. Apud Auctores* Harioto *antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.*

DEFINITIO XI.

20. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16.) & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17.); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20.).

HYPOTHESIS II.

22. *Signum majoritatis* est $>$; *minoritatis* $<$.

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus usus est* Hariotus (*b*). *Eum secuti celeberrimus* Wallisius (*c*) *&* R. P. Lamy (*d*). *Aliis alia placent: plerisque nulla sunt.*

DE-

(a) In Artis Analyticæ praxi, Sect. 1. f. 10.
(b) Loc. cit.
(c) Vide Arith. c. 35. f. 186. Vol. 1. Oper. Mathem.
(d) Elementis Geometriæ lib. 3. sect. 5. p. 177. Edit. Par. 1710.

DEFINITIO XII.

24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo* est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM I.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero, modo sit istiusmodi ut sine alio assumto intelligi possit.

COROLLARIUM II.

26. Cum quantitas sine alio assumto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 13. 14.); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§.25.), atque adeo quantitas est discrimen internum similium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem distinctam primus eruit* Leibnitius. *Dixit nempe* similia, quæ non possunt distingui, nisi per compræsentiam. *Quoniam vero terminus* compræsentiæ *plerisque obscurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem substituere libuit. Ceterum res* compræsentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, si in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorsus inter se similia esse. Illorum unum possideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodsi* Cajus *in præsentia* Grachi *horologium suum depromat, næ is attonitus sibi persuadebit horologium suum esse, quod* Cajus *manu tenet; at diversum a suo agnoscet, ubi & suum depromit, hoc est horologium* Caji *a suo distinguit* Grachus *per compræsentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed si locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia similia interjectum menti una cum ipsis exhibetur; vel si dimensiones templorum aut statuarum similium ad staturam nostram aut mensuram datam aliam referimus; similia animo compræsentia sistuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS III.

28. *Signum similitudinis est* ∽.

SCHO-

SCHOLION.

29. *Commendatur in Miscellaneis Berolinensibus* (a). *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO XIII.

30. *Pars aliquota* est, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* est, quæ repetita aliquoties semper vel major, vel minor est toto.

DEFINITIO XIV.

31. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

32. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* vero sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit.

DEFINITIO XVI.

33. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* est, cujus unitas denotat certam quandam entis speciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. E. gr. *Si quis simpliciter dicat*, sex; *is non determinat, quænam sint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra si quis dixerit cum addito*, sex globi aurei; *is speciem entium determinat, quæ numerat, adeoque utitur* numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abstractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO XVII.

35. *Numeri inter se homogenei* sunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHO-

(a) Part. 3. pag. 159.

SCHOLION.

36. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit* (§. 10.) . *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus* (§. 5.) . *E. gr. ea globi proprietas est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiei a centro æqualiter distent. Quodsi igitur hanc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eædem, quatenus sub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodsi vero globos porro distinguas e. gr. per materiam, ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diversæ evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.*

DEFINITIO XVIII.

37. *Numerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XIX.

38. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XX.

39. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XXI.

40. *Numerus rationalis integer* est, cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO XXII.

41. *Numerus rationalis fractus* est, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO XXIII.

42. *Numerus rationalis mixtus* est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

43. *Numerus irrationalis sive surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

Hy-

HYPOTHESIS IV.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indigitandos, & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in hypothesi tradimus, ubivis (quantum constat) gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus Weigelius *in Arithmetica Tetractyca ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed &* Illustris Leibnitius (*a*) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonnisi duabus notis* 1 *&* 0 *utentem ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit* Cl. Dangicourt *circa progressiones arithmeticas* (*b*). *Nimirum quoniam Arithmetica Dyadica duabus tantum notis utitur, leges progressionum numerorum dyadice expressorum facillime omnium deteguntur. Et* Carolus XII. *Rex Sueciæ, calculum sexagenarium excogitavit, referente* Emanuele Suedenborgio (*c*), *novis characteribus & numeris novisque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum satis versati.*

DEFINITIO XXV.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt: *unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem*. Iidem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; sex *Sexaginta*; septem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *No-*

(a) Histoire de l'Academie Royale des Sciences An. 1703. p. 175. & seqq. Edit. Amstel.
(b) In Miscellaneis Berolinens. p. 336. & seqq.
(c) Observat. miscellan. part. 4. p. 1. & seqq.

Nonaginta. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius ejusque quævis multipla dicentur *Articuli*.

SCHOLION.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inserviunt.*

HYPOTHESIS V.

49. *Notæ numericæ constituantur novem sequentes:* 1. 2. 3. 4. 5. *6. 7.* 8. *9. Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios &c. indigitare possimus, valor ipsis tribuatur localis, ita ut solitariæ vel in loco dextimo positæ unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ scilicet sit* Nullitatis *nota*.

COROLLARIUM I.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt.

Unitates Decades Centenarii	Simplices.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum.
Unitates Decades Centenarii	Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Billionum.

Uni-

Unitates
Decades } Trillionum.
Centenarii

Unitates
Decades } Millenariorum Trillionum &c.
Centenarii

SCHOLION I.

51. *Characterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios docent* Georgius Henischius *in libello de numeratione multiplici, vetere & recenti, atque* Guil. Beveregius *in Arithmeticæ chronologicæ libro primo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitatæ reliquis præstent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatius sit, ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur: quem morem nos sequimur. Ab Arabibus inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* Wallisius (*a*), *quod* Alsepadi *Arabs in Commentario ad* Tograi *poema* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam Indis tribuat. Idem refert* (*b*), *quod Saraceni eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio* Gerberti, *monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus Ecclesiasticis, tandem ad Pontificatum maximum nomine* Sylvestri II. *circa* A. C. 999. *evectus, ex ipsis ejus epistolis* A. 1636. *Parisiis recusis probat.* Joannes Fridericus Weidlerus, *Mathematum apud Wittebergenses Professor clarissimus,* (*c*) *ex MSC.* Boëthii *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ asservatur, & in quo Noster characteres numerorum Arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam* Boëthio *fuisse cognitos, quem* A. C. 524. *vitam finiisse constat.* Wallisius (*d*) *non ignoravit, in* Boëthii, Bedæ *aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi extare; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum* Weidlerus *MSC. cujus authoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.*

SCHO-

(a) Arithmet. Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math.

(b) In Tract. de Algebr. c. 4. f. 11. & seqq. Vol. II. Oper. Mathem.

(c) In Differtatione de characteribus numerorum vulgaribus & eorum ætatibus A. 1727. publice ventilata §. 8. seqq. p. 17. & seqq.

(d) In Tract. de Algebr. loc. cit.

SCHOLION II.

52. *Ex collatione diverſarum figurarum numeralium diſcant velim, qui artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo ſitum ſit, ut ars characteriſtica perficiatur.*

COROLLARIUM II.

53. Quodſi notis numericis ſubſtituantur litteræ ad arbitrium electæ iiſque idem tribuatur valor, qui illis tribui ſolet (§. 49.); numerum occulte ſcribere licet.

SCHOLION III.

54. E. gr. *Denotent litteræ infra ſcriptæ in ſecunda ſerie eoſdem numeros, quos deſignant notæ ſuperiores ſupra ſcriptæ in prima.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748. = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad deſignanda mercium pretia in ſchedulis affixis.*

PROBLEMA I.

55. *Numerum ſcriptum enunciare; hoc eſt, cuilibet characteri valorem competentem aſſignare.*

Reſolutio. 1. Numerus propoſitus per commata dividatur in claſſes, tres notas unicuique aſſignando, initio a dextris facto.

2. Nota dextima claſſis tertiæ notetur lineola transverſa apici adſcribenda; dextima claſſis quintæ duabus; dextima ſeptimæ tribus &c.

3. Comma ſolitarium per millenarios, lineola transverſa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero ſiniſtima claſſis uniuſcujuſque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50.). *Sic factum eſt, quod petebatur.*

E. gr. Numerus ſequens.

$2''', 125, 473'', 613, 578', 432, 597$

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadringentis ſeptuaginta tribus billionibus, ſexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis ſeptuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta ſeptem.

SCHO-

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum usus in rebus distincte concipiendis, seu ex confusione extricandis vires intellectus humani extendat; abunde perspicient oculatiores, si ad præsens problema fuerint satis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Litteris majoribus usus est* Vieta (*a*) *: minores introduxit* Hariotus (*b*) *, quem mox imitatus est* Cartesius (*c*) *& nunc sequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS VII.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri, interjecta lineola, subscribitur. Eorum inferior, seu* Denominator *, indicat unitatem seu totum in partes divisum; superior vero, seu* Numerator*, numerat partes in casu proposito datas.* E. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator vero 2, duas istiusmodi partes assignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator subscribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 41.).

DEFINITIO XXVI.

61. *Additio* est inventio alicujus numeri ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *summandi*; quæsitus autem *summa* vel *aggregatum*.

C Co-

(a) In variis scriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur.
(b) In Artis Analyticæ praxi. (c) In Geometria.

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

63. *Signum additionis est* $+$, *quod per* plus *efferri solet*. Ita $3+4$ denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur: 3 plus 4.

DEFINITIO XXVII.

64. *Subtractio* est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum* appellatur.

HYPOTHESIS IX.

65. *Signum subtractionis est* —, *quod per* minus *efferri solet*. E. gr. $7-3$ denotat differentiam inter 3 & 7, & pronunciatur: 7 minus 3.

DEFINITIO XXVIII.

66. *Multiplicatio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæsitus *Factum*, item *Productum*. In specie, factorum alter, qui aliquoties sumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat, quoties ille sumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties sumto æqualis (§. *66*), istiusmodi autem inventio non est nisi iterata additio (§. *62*.); multiplicatio est iterata ejusdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

68. *Signum multiplicationis est punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco positum*, *quod per* multiplicatum *effertur*. E. gr. 4.3 denotat

tat factum ex 4 in 3; item 7.5.9, factum, cujus factores sunt 7, 5 & 9. *Litteræ sine ullo signo junguntur*. E. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *b c d* factum, cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXIX.

69. *Divisio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit divisio, *Divisor*; qui denique indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & divisione opus non est, ut numeri dati sint homogenei, quemadmodum in additione & subtractione requirebatur (§. 61. 64.). Cum enim in additione ex duobus vel pluribus numeris componatur unus tanquam ex partibus totum (§. 61. 9.); omnes omnino summandi ad eandem unitatem referri (§. 10.), consequenter homogenei inter se esse debent (§. 35.). Quoniam vero porro liquet, summam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipsis unitatem referri; consequenter iisdem homogeneam esse (§. cit.); in subtractione vero numerus minuendus respondet summæ, subtrahendus & residuus aggregandis seu summandis (§. 61. 64.): ulterius patet, in subtractione etiam minuendum, subtrahendum & residuum numeros inter se homogeneos esse debere. In multiplicatione contra multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, sicut in divisione divisor ad unitatem rationem dividendi ad quotum, adeoque opus non est, ut multiplicator multiplicando & facto, divisor dividendo & quoto sit homogeneus. Quodsi divisor consideretur tanquam pars dividendi, ex dictis constat, divisorem esse dividendo homogeneum: sed tum quotus, qui indicat, quoties pars ista ex suo toto auferri potest, nec dividendo, nec divisori homogeneus. Singula suo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS XI.

71. *Signum divisionis sunt duo puncta* (:), *quæ per divisum efferri solent*. E. gr. 8 : 4 denotat quotum ex divisione 8 per 4 emergentem. Similiter *a*:*b* est quotus ex divisione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXX.

72. *Numerus par* est, qui bifariam, sive per 2 dividi potest; ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

73. *Numerus impar* est, qui a pari unitate differt, ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXXII.

74. Numerus A *metiri*, vel juxta alios, *numerare* dicitur numerum B, si eum ita dividit, ut quotus sit numerus integer sine fractione, vel si fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXIII.

75. *Numerus primus in se* est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

76. *Numerus compositus* est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

77. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. *Mensura maxima numeri* est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

78. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum* est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, si fuerit numerus maximus, qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24; 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO XXXVII.

79. *Numeri primi inter se* sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

De-

DEFINITIO XXXVIII.

80. *Numeri compositi inter se* sunt, qui, præter unitatem, communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA I.

81. *Idem est æquale sibimetipsi.*

SCHOLION.

82. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analysi usus.*

AXIOMA II.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales* (§. 15.).

THEOREMA I.

84. *Totum est majus qualibet sua parte.*

Dem. Cujus pars alteri toti æqualis est, id ipsum altero majus est (§. 20.). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§. 81.). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLION.

85. *En exemplum Analyseos perfectæ. Continetur enim demonstratio syllogismo, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero Analyseos perfectæ indicium est* (§. 45. de Meth.) *Ne tyrones Logicæ, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus syllogismi terminis, vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC Fig. 1. ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC: id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20.). Sed lineæ AB pars (nempe AC) alteri lineæ AC toti (nempe sibimet ipsi) æqualis est. Ergo linea AB linea AC major (nempe totum AB parte AC majus) est. *Quod erat demonstrandum.*

THEOREMA II.

86. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

Dem. Cum idem sit æquale sibimetipsi (§. 81.); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est. Sed totum idem est cum omnibus partibus suis simul sumtis (§. 9.): ergo iisdem æquale est. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

87. *Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia; ea sunt æqualia inter se.*

Dem. 1. Sit $A = C$ & $B = C$; dico esse $A = B$. Quoniam enim $B = C$, *per hypothesim*, B salva quantitate substitui potest ipsi C (§. 15.). Substituatur adeo B ipsi C in casu priori, ubi $A = C$: habebimus $A = B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro sit $A = B$ & præterea $C = A$, $D = B$; dico esse $C = D$. Quoniam enim $A = B$ & $C = A$, *per hypothesim*, erit $B = C$ *per cas.* 1. Quare cum porro sit $D = B$, *per hypothesim*, erit quoque $C = D$ *per cas.* 1. *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

88. *Si æqualibus* (A & B) *æqualia* (C & D) *addas, aggregata* ($A + C$ & $B + D$) *sunt æqualia.*

Dem. $A + C = A + C$ (§. 81.). Sed quoniam $C = D$, *per hypothesim*, poterit D substitui pro C (§. 15.): quo facto, habemus $A + C = A + D$. Porro $B + D = B + D$ (§. 81.). Sed $A = B$, *per hypothesim*. Ergo A substitui potest pro B (§. 15.): quo facto, habemus $B + D = A + D$. Quare $B + D = A + C$ (§. 87.) *Q. e. d.*

THEOREMA V.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero æqualium majus vel minus est.*

Dem. 1. Sit $A = B$ & $C > A$, dico esse $C > B$. Quoniam enim $C > A$, *per hypothesim*, A parti ipsius C æquale est (§. 20), quæ dicatur P. Porro cum sit $A = B$, *per hypothesim*, erit etiam $P = B$ (§. 87.). Ergo $C > B$ (§. 20.). *Quod erat unum.*

2. Sit $A = B$, & $C < A$, dico esse $C < B$.

Quia

Quia $C < A$, *per hypothesim*, parti hujus æquale est (§. 20.), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo sit $P + C = A$ (§. 86.) & $A = B$, *per hypothesim*, erit quoque $P + C = B$ (§. 87.). Est itaque C parti ipsius B æqualis (§. 9.); consequenter $C < B$ (§. 20.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C) vel æqualia addas, aggregatum prius ($B + C$) majus est, posterius vero ($A + C$) minus. Quodsi majori (B) majus (C) & minori (A) minus (D) addas, aggregatum prius ($B + C$) majus est, posterius ($A + D$) minus.*

Dem. Quoniam $A < B$, *per hypothesim*, parti hujus æquale est (§. 20.). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9.), quæ dicatur P, estque adeo $B = P + A$ (§. 86). Quare cum etiam sit $B + C = P + A + C$ (§. 88.); erit $A + C$ pars ipsius $P + A + C$ (§. 9) & hinc $P + A + C > A + C$ (§. 84), consequenter $B + C > A + C$ (§. 89.). *Quod erat unum.*

Quoniam $B > A$, *per hypothesim*, erit $B + C > A + C$, *per demonstrata*. Similiter quia $C > D$, *per hypothesim*, erit $A + C > A + D$, *per demonstrata*. Ergo cum $A + D$ sit pars ipsius $A + C$ (§. 20.); erit multo magis $B + C > A + D$ (§. 84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

91. *Si æqualia (A & B) ab æqualibus (C & D) subtrahas, quæ relinquuntur ($C - A$ & $D - B$) æqualia sunt.*

Dem. $C - A = C - A$ (§. 81.). Sed quoniam $A = B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15.). Quod si ergo substituatur, habebimus $C - A = C - B$. Similiter $D - B = D - B$ (§. 81). Sed quia $C = D$, *per hypothe-*

sim, salva quantitate C pro D substitui potest (§. 15). Quodsi ergo substituatur, habebimus $D - B = C - B$. Quamobrem $C - A = D - B$ (§.87).

THEOREMA VIII.

92. *Si a majori* (*A*) *& minori* (*B*) *idem* (*C*) *vel æqualia subtrahas; residuum prius* (*$A - C$*) *majus est, posterius* (*$B - C$*) *minus*.

Dem. Quia $B < A$, parti hujus æquale est (§.20.). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque $A = B + P$. (§. 86), consequenter $A - C = P + B - C$ (§. 91.). Sed $B - C$ est pars ipsius $P + B - C$ (§. 9), consequenter $P + B - C > B - C$ (§. 84.). Ergo & $A - C > B - C$ (§. 89.). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

93. *Si æqualia* (*A & B*) *per æqualia* (*m & n*) *multiplices; facta* (*m A & n B*) *æqualia sunt*.

Dem. Quia $A = B$, *per hypothesim*, erit etiam $A + A = B + B$, seu in genere $A + A + A + A$ &c. $=$ $B + B + B + B$ &c. (§.88). Jam cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§.67.), si *m* & *n* fuerint multiplicatores, erit $A + A + A + A$ &c. $= m A$ (§. 67. 68.). & $B + B + B + B = n B$ (§. §. *cit.*) Quare cum in eo casu, ubi $A + A + A + A$ &c. $= B + B + B + B$ &c. sit $m = n$; erit etiam $m A = n B$ (§. 87.). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

94. *Si æqualia* (*A & B*) *per æqualia* (*C & D*) *dividas, quoti* (*A: C & B: D*) *æquales sunt*.

Dem. $A : C = A : C$ (§.81.). Sed quia $A = B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§.15.), & sic $A : C = B : C$. Ob eandem rationem $B : D = B : C$. Quare $A : C = B : D$ (§. 87.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur*

aut

aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares in numeris præsertim rationalibus per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maximi facio, tum quia prima & secunda (id quod supra §.85. *annotavimus*) Analyseos perfectæ; *tum quia reliquæ* Calculi universalis *ideam animo ingenerant, in talium substitutione consistentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versemur (id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt) : hoc, si tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani subsidium.*

CAPUT II.

De speciebus Arithmeticæ in numeris integris.

PROBLEMA II.

96. *Numeros quotcumque datos addere.*

Res. 1. Numeri homogenei sub homogeneis, hoc est, ita scribantur, ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. respondeant.

2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.

3. Singillatim addantur unitates, & summa earum ipsis subscribatur.

4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero summa sub decadibus collocanda.

5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quæsita.

E. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: 4 & 3 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (sc. *decas*) & 6 (*decades*) sunt 7 (*decades*) : additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur 6 sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) 6, &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 sub centenariis datis, & 10 centena-

3578	A
524	B
63	C
4165.	

narii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 *millenariis* datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsita 4165.

Dem. Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sint partes eorumdem (§. 50.); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9.). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decadibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86.), adeoque summa eorundem est (§. 59.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

97. *Unitates numerorum singulæ tamdiu per digitos repræsententur & eorum ope additio absolvatur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicunque numero addas, e. gr. quod* $3+2=5$, $9+5=14$ *&c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM I.

98. Quoniam seriei sinisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96.); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadum abjectarum seriei proxime sinisteriori connumeretur.

E. gr. Si numeri addendi fuerint A, B, C, ita procedendum: cum 7 & 3 sint 10; residuus numerus 5 scribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 sunt 10; 2 & 1 sunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum. Quoniam vero 7 & 2 sunt 9, porro 9 & 1 sunt 11; adde 1 seriei millenariorum & residuum 1 scribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 sunt 10 millenarii, seu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero sunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

8763	A
5247	B
2125	C
16135	

SCHOLION II.

99. *Modus hic addendi est maxime naturalis (§. 49.): nec absimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur valor speciei proxime majoris, quoties fieri potest, & pro unoquoque unitas reponi-*

tur

tur in serie proxime majore. E. gr. sint expensæ:

Januarii	45 thal.	16 grosſ.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit ſumma	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant groſſum, in ſerie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9 valor groſſi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur ſeriei groſſorum. Similiter quoniam thalerus 24 groſſis conſtat, in ſerie groſſorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco groſſorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in corollario, aut problemate peraguntur.

COROLLARIUM II.

100. Si omnes numeri dati unitatum inſtar conſiderentur, evidens eſt inter ſummandum tot novenarios omitti, quot unitates ex ſumma ſeriei dexterioris in ſiniſteriorem transferuntur. Sic in exemplo problematis loco *quindecim* ſub unitatibus ſcribimus 5, ſub decadibus 1, quorum numerorum inſtar unitatum conſideratorum ſumma eſt 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter, ſi ſumma unitatum *viginti ſeptem*; ſub unitatibus collocamus 7, ſub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc ſolvitur.

PROBLEMA III.

101. ***Examinare additionem, hoc eſt, explorare, utrum numerus inventus ſit æqualis omnibus datis ſimul ſumtis, nec ne.***

Reſ. 1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex ſerie qualibet dexteriore in proxime ſiniſteriorem rejiciuntur, & operatione abſoluta addantur, ut numerus novenariorum inter ſummandum omiſſorum innoteſcat (§. 100.).

2. Abjiciatur præterea ex ſumma inventa novenarius, quoties fieri poteſt, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter ſummandum omiſſorum: quæ ſumma una cum numero

reſi-

residuo, si quis fuerit, probe notetur.

3. Tandem ex numeris summandis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quoties fieri potest, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero residuo, si quis fuerit, denuo notetur.

Quodsi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis simul sumtis (§. 91.), consequenter additio rite peracta (§.61.). *Q. e. i. & d.*

E. gr. in exemplo problematis inter summandum 3 novenarii omittuntur & ex summa reperta unus adhuc deleri potest: quo facto, relinquuntur 7. Sed si ex numeris summandis 4 novenarii abjiciantur, 7 similiter relinquuntur. Quare additio rite peracta est.

SCHOLION.

102. *Discrimen inter demonstrationem & examen haud obscurum est. Illa evincit per regulas præscriptas inveniri debere numerum quæsitum; hoc docet, regulas ad casum singularem rite fuisse applicatas. Unde apparet examinis utilitas, frustra obnitente* Ramo (*a*), *qui demonstrationem cum examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex summa, quam aggregandis, notis singulis instar digitorum consideratis, abjiciatur novenarius, & ex residui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum examen tum fallere possit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantisper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia sunt examina, etsi non omnes errores detegant, modo iisdem sese non subducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

103. *Numerum minorem e majore subtrahere.*

Res. 1. Numerus minor ea lege majori subscribatur, ut homogenei homogeneis respondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§.96.).

2. Sub numeris hisce ducatur linea recta.

3. Subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & residua singula loco conveniente infra lineam scri-

(1) In Schol. Mathem. lib. 4. p. 114.

scribantur, nempe residuum unitatum sub unitatibus, decadum sub decadibus &c.

4. Quod si nota major a minori veniat subtrahenda, ex sinisteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50.) hic 10. valebit, ut subtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipsum mulctatum esse obliviscamur.

5. Si in loco sinisteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime sequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipsum unitate minutum esse constet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50.). Quamobrem ubi plures cyphræ sese insequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo subtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore subtrahere licet.

E. gr. Si ex 98.0.0.4.0.34.59
subtrahas 4743865263

Differentia est 505653 8196

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates infra lineam scribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco convenienti ponendæ. Centenarii 2 ex 3 subducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde si 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, residui fiunt millenari 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam si 8 ex 3 subtrahere debes, ab 8 sinisterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem subtractio facillime absolvatur.

Dem. Numerus inventus prodit, si unitates, decades, cen-

centenarios &c. numeri minoris ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris subducas, *vi operationis*, hoc est, si singulas partes numeri minoris a singulis partibus majoris subtrahas (§. 50.). Sed singulæ partes numeri minoris simul sumtæ sunt numero minori, & partes singulæ majoris simul sumtæ sunt majori æquales (§. 86.). Ergo idem relinqui debet numerus, si totum numerum minorem e toto majore subtrahas (§. 91.). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a se invicem subtrahendi; unitas mutuo petita non* 10, *sed tot unitates valet, quot unitates speciei minoris constituunt valorem unitatis speciei majoris.*

E. gr.	45. thal.	16. gr.	6. num.	
	27	23	9	
	17 thal.	16 gr.	9 num.	

Nimirum cum 9 *nummi ex* 6 *subtrahi nequeant, ex* 16 *grossis unus convertitur in* 12 *nummos, ut loco* 6 *habeantur* 18. *Subductis adeo* 9 *nummis ex* 18, *relinquuntur* 9. *Similiter cum* 23 *grossi ex residuis* 15 *auferri nequeant; ex* 45 *thaleris unus ablatus in* 24 *grossos convertitur: unde si subtrahantur* 23, *residuus est* 1 *grossus* 15 *addendus, ut residui loco ponantur* 16 *grossi. Denique* 27 *thaleri a* 44 *ablati relinquunt* 17.

SCHOLION II.

105. *Quodsi numerus major e minore subtrahi jubeatur, evidens est id fieri non posse. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur signo* —. *E. gr. Si quis* 8 *thaleros solvere debet, atque nonnisi* 3 *possidet: tribus solutis,* 5 *adhuc debet, qui per* — 5 *indigitantur.*

PROBLEMA V.

106. *Examinare subtractionem.*

Res. Residuo addatur subtrahendus (§. 96.). Quodsi summa fuerit æqualis minuendo; subtractio rite peracta erit (§. 64.).

E. gr.	9 8 0 0 4 0 3 4 5 9	Minuendus.
	4 7 4 3 8 6 5 2 6 3	Subtrahend.
	5 0 5 6 5 3 8 1 9 6	Differentia.
	9 8 0 0 4 0 3 4 5 9	

Ali-

Aliter. Quoniam in ſubtractione reſiduum cum ſubtrahendo æquatur minuendo (§. *64*). Si minuendus ſumatur pro aggregato, reſiduum cum ſubtrahendo pro aggregandis (§. *61*.); examen per novenarium ſuccedet ut in additione (§. 101.).

PROBLEMA VI.

107. *Examinare additionem per ſubtractionem.*

1. Deſcribantur in continua ſerie multipla ſeptenarii centenario inferiora, nempe 7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. continua Septenarii additione invenienda. Eſt enim $7+7=14$, $14+7=21$ &c.
2. In exemplo ad examinandum propoſito, veluti

	566
8259	8259
	526
2687	2687
	3425
	3425
10946	10946

ſumantur in aggregato binæ notæ ſiniſtimæ 10, & cum multiplis ſeptenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur, & reſiduum 3 iiſdem ſuperſcribatur.
4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente *9*, numerus inde reſultans *39* conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis, & proxime minori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.
5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.
6. Singulæ aggregandorum ſeries *2687* & *8259* eodem modo tractentur.
7. Reſidua ſuper notis dextimis *6* & *6* addantur & a ſumma 12 ſeptenarius vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quod-

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta erit.

Dem. Ad operationem attendenti manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptuli, e. gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. *61.*), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. *86. 87.*). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§. *91.*). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. Q. *e. d.*

Aliter 1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§. *96.*).

2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§. 103.). Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, remaneat cyphra, additio rite peracta erit.

E. gr. Sit exemplum additionis

	A	B	C	D
	3	5	7	9
	8	4	6	2
	5	3	7	6
1	7	4	1	7
	1	2	1	0

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16. ſubducatur ex 17 & reſiduum 1 ſcribatur ſub 7. Similiter ſumma notarum in ſerie B 12 auferatur ex 14, reſiduo 2 ſub 4 ſcripto. Summa notarum in ſerie C 20 tollatur ex 21 & reſiduum 1 ponatur ſub 1. Denique ſi ſumma ſeriei D 17 ex 17 ſubtrahatur, relinquitur 0: quod indicio eſt, numerum 17417 eſſe ſummam quæſitam.

Dem. Ex operatione patet, a millenariis ſummæ ſub-

ſubtrahi omnes millenarios ſummandorum & a centenariis, decadibus, unitatibus ſummæ omnes centenarios, decades, unitates ſummandorum. Quodſi ergo operatione abſoluta nihil relinquitur, ſumma tot præciſe millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri ſummandi ſimul ſumti continent; atque adeo ſumma numeris ſummandis ſimul ſumtis æqualis eſt (§. 87.); conſequenter additio rite peracta (§. 61.).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, ſi loco ſeptenarii numerus alius ſumatur ipſa demonſtratio inſinuat. Solent etiam examinis loco additionem iterare, ſed diverſa ratione, ita ut una vice aſcendendo, altera vero deſcendendo ſummatio perficiatur, facto tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo verſus ſiniſtram.*

PROBLEMA VII.

109. *Abacum Pythagoricum, hoc eſt, Tabulam conſtruere, in qua facta ex ſingulis digitis in ſingulos repræſentantur.*

Reſ. 1. Latera quadrati alicujus ſingula in 9 partes æquales dividantur, & per lineas ipſi parallelas in areolas quadratas area ejus reſolvatur.

2. In ſerie horizontali ſumma & laterali ſiniſtima ſcribantur novem notæ numericæ, ſeu ſinguli digiti.

3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 ſcribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur ſub 4. Addantur 2 & 6, aggregatum 8 ponatur ſub 6; & ita porro.

4. Quodſi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus Pythagoricus conſtruetur. *Q. e. d.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum Pythagoricum memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA VIII.

111. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

Res. 1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. *96*).

2. Ducatur sub iis linea recta.

3. Infra hanc ex abaco Pythagorico scribantur singula producta ex singulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris, similiter ex illis in reliquas hujus notas, ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. *96.*). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

E.gr.

E. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum vi abaci Pythagorici sit 30, scribe o sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta o versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur, prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

$$\begin{array}{r} 38476 \\ 35 \\ \hline 192380 \\ 115428 \\ \hline 1346660 \end{array}$$

Dem. Vi operationis & Abaci Pythagorici primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50.), adeoque multiplicandum ipsum (§. 9.), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. 61.), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est, partes (§. 50.), consequenter totus multiplicator (§. 9.) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 66.). Q. e. d.

SCHOLION.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjungantur, ut ex sequentibus exemplis fit manifestum.*

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 30 \\ \hline 107340 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4760 \\ 2000 \\ \hline 9520000 \end{array}$$

PROBLEMA IX.

Fig.2. 113. *Lamellas Neperianas parare, quarum ope multiplicationem ac divisionem facilius absolvere licet, quam per abacum Pythagoricum.*

Res. 1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula divisæ, quæ per Diagonales denuo in duo triangula singula resolvantur.

2. In illis quadratulis ea lege scribatur tabula Pythagorica, ut notæ solitariæ aut dextræ triangulum dextrum, notæ autem sinistræ sinistrum cedat. *Sic factum est, quod petebatur.*

SCHOLION.

114. *Has lamellas sub initium seculi superioris invenit* Joannes Neperus *Baro Merchistonii Scotus, & peculiari libello descripsit, cui* Rhabdologiæ *nomen imposuit.*

PROBLEMA X.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium, lamellarum Neperianarum ope.*

Res. 1. Lamellas ita dispone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.

2. Eis ad sinistram junge lamellam unitatum.

3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam &

4. Ipsi respondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exscribe, ut in unam summam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.

5. Eodem modo exscribe numeros reliquis multiplicatoris notis respondentes, & decenter infra factores (§. 111.) scribe.

6. Tandem ut ante (§. 111.) facta hæc partialia in unam summam collige. *Sic f. e. q. p.*

Fig.3. E. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 respondet,

$$\begin{array}{r} 5978 \\ 937 \\ \hline 41846 \\ 17934 \\ 53802 \\ \hline 5601386 \end{array}$$

det, exſcribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo verſus ſiniſtram proxime ſequente 9 & 5 adde, & ſummæ 14 notam dextram ſcribe juxta 6, ſed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; ſiniſtram vero itidem 1 adde notæ 3 in ſiniſtro triangulo deprehenſæ. Summam 4 ſi 1846 a ſiniſtris jungas, habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

PROBLEMA XI.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque ſine abaci Pythagorici ſubſidio multiplicare.*

Reſ. Omne artificium huc redit, ut ex ſimplo, duplo & decuplo per additionem, ſubtractionem & mediationem, ſingula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet ſibimetipſi additus producit ſui *duplum*. Addatur huic ſimplum, ſumma eſt numeri dati *triplum*. Duplum addatur ſibimetipſi, aggregatum eſt numeri dati *quadruplum*. Medietur decuplum, hoc eſt, ipſe numerus datus cyphra auctus (§. 112.), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur ſimplum vel duplum, habebitur *ſextuplum* vel *ſeptuplum*. Ex decuplo ſubtrahatur duplum vel ſimplum, reſiduum erit *octuplum* vel *noncuplum*. Sine abaci itaque Pythagorici ſubſidio multiplicaturo familiaris ſit ſequens a *Jobo Ludolffo*, in Academia Erfordienſi nuper Mathematum Profeſſore, in Arithmeticam primum introducta.

NOMENCLATURA.

1. Simplum.	1. *Simplum.*
2. Duplum.	$1 + 1$ *Simplum & ſimplum.*
3. Triplum.	$2 + 1$ *Duplum & ſimplum.*
4. Quadruplum.	$2 + 2$ *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2} + 1$ *Decupli dimidium & ſimplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2} + 2$ *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	$10 - 2$ *Decuplum ſine duplo.*
9. Noncuplum.	$10 - 1$ *Decuplum ſine ſimplo.*

E. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894 3894	3894 7788
	7788	11682
Quadruplum	**Quintuplum**	**Sextuplum**
7788 7788	38940	3894 19470
15576	19470	23364
Septuplum	**Octuplum**	**Noncuplum**
7788 19470	389.40 7788	389.4.0 3894
27258	31152	35046

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, infra lineam ſcribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui poſſint, quæ deſiderantur. Subducta igitur altera linea ſcribantur more conſueto (§. 111.) multiplicandi multipla.

E.gr.

37896 A
(6874)
75792 B
189480 C
151584 D
265272 E
303168 F
227376 G
260497104

E. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam scribatur B ipsius A duplum & porro C decupli ipsius A dimidium. Reperies ergo 1°. D ipsius A quadruplum sumendo duplum ipsius B; 2°. E septuplum ipsius A addendo B & C; 3°. F octuplum ipsius A vel addendo C, B & A, vel B subducendo a decuplo ipsius A, hoc est ex A cyphra aucto; 4°. denique G addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis constet, sæpius ex productis jam inventis per additionem vel subtractionem inveniri possunt, quæ adhuc desiderantur, nec tum *Nomenclaturæ* propositæ stricte inhærendum, ita ut non opus sit infra lineam demum scribi duplum multiplicandi, & decupli ejusdem dimidium.

743) 895765482
1791530964
3583061928
6270358374
665553753126

E. gr. sit multiplicans 743. Factum facillime invenietur, si multiplicando subscribatur 1° duplum, 2° dupli duplum, 3° summa ex simplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc multipla multiplicando addantur.

Similiter si multiplicans fuerit 789, sub multiplicando scribitur decuplum sine simplo, quod est noncuplum. Ex eo si denuo auferatur simplum, relinquetur octuplum. Quod si & ab hoc simplum subducas, residuum erit septuplum.

789) 8 9.5 7.6.5.482
8.0.6.1889.3.38
7.1.66.1.238.56
6 27 0 3 58 374
7067589.65298

PROBLEMA XII.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

Res. Casus I. Si divisor unica fuerit nota

1. Scribatur is sub nota dividendi sinistima, aut, si ea minor fuerit, sub proxime sequente, ac ope *Abaci Pythagorici* investigetur, quoties in nota vel notis suprascriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram versus post lunulam loco quoti.

D 4 2. Quo-

2. Quotus ducatur in divisorem, & productum ex nota vel notis suprascriptis dividendi subtrahatur, & his deletis, si quod fuerit residuum, suprascribatur.

3. Divisor ad notam subsequentem versus dexteram promoveatur, & ope *Abaci Pythagorici* denuo investigetur, quoties is in notis suprascriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.

4. Quodsi hæc operatio per singulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 7856, divisor 3. Ponantur 3 sub 7 & per *Abacum Pythagoricum* innotescit, 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti, & factum ex 2 in 3, hoc est 6, subtrahatur ex 7 lineola transversa delendis, residua unitas suprascribatur. Promoveatur divisor 3 sub 8, cumque, vi *Abaci Pythagorici*, 3 in 18 sexies contineatur, scribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6, ex 18 subducatur: quo in casu nihil relinquitur. Quodsi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618, & binarius 2 remanet: id quod indicio est, numerum propositum in tres partes æquales exacte dividi non posse.

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\ \cancel{2}\cancel{2} \\ \cancel{7}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{6}\ (2618\tfrac{2}{3} \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \end{array}$$

Dem. Ex ipsa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est, in singulis ejus partibus (§. 50.), adeoque in toto dividendo (§. 9.) contineatur; consequenter unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem. Est igitur quotus (§. 69.). *Q. e. d.*

Casus II. Si divisor ex notis pluribus constet

1. Sinistima ejus nota scribatur sub nota sinistima dividendi, & reliquæ dexteriores sub proxime sequentibus versus dexteram.

2. Ope *Abaci Pythagorici* investigetur, quoties prima divisoris nota in prima dividendi contineatur.

3. Numerus inventus ducatur in divisorem integrum, & dispiciatur, utrum factum ex numeris su-

ſuprascriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.

4. Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam, & ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola tranſverſa deleantur, & qui reſidui fuerint, ſuprascribantur. Quodſi vero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in diviſorem ad notas dividendi quam proxime accedat, & ex iis auferri queat.

5. Diviſor loco uno verſus dexteram promoveatur, & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec diviſor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

E.gr. Sit dividendus 7856, diviſor 32. Scribantur 32 ſub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in eo contineantur; ducantur 2 in 32, & quia factum 64 ex 78 ſubtrahi poteſt, 2 ſcribantur poſt lunulam &, ſubtractione peracta reſiduiſque 14 ſuprascriptis, diviſor loco uno promoveatur. Quo facto inveſtigetur, quoties 3 in 14 contineantur, & factum ex 4 in 32, hoc eſt 128, ſubducatur ex 145, reſiduo 17 ſuprascripto & 4 in loco quoti poſt lunulam repoſitis. Promoveatur diviſor denuo loco uno, & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in diviſorem 32, nempe 160 ſubtrahatur ex 176, reſiduo 16 ut ante ſuprascripto. Dico numerum inventum $245\frac{16}{32}$ eſſe quotum quæſitum.

```
 1
 21
147
7856 (245 16/32
3222
 33
```

Si diviſor ex pluribus præſertim conſtet notis, præſtat multipla quoti ſubtrahenda ſub notis dividendi, ex quibus ſubtractio fieri debet, immediate ſcribi, & ſub ſubtrahendo reſiduum, cui, continuandæ diviſionis gratia, jungitur nota dividendi ſequens, donec nulla ſuperfuerit, adeoque diviſio abſoluta.

E. gr. Sit dividendus 385797, diviſor 8672, quem tibi ſub lo-

```
385797 (44
34688  (8672
------
 38917
 34688
------
  4219
```

loco quoti notabis. Jam cum 8 in 38 quater contineatur, ſcribe diviſoris 8672 quadruplum ſub notis dividendi 38579, & reſiduum 3891 ſub eodem, juncta eidem nota ſequente 7, ut diviſio continuari poſſit. Quoniam itaque diviſor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum diviſoris, ut ante, ſub iiſdem ponitur & ex ipſis aufertur. Erit $44\frac{4219}{8672}$ quotus.

Dem. Eadem fere eſt demonſtratio, quæ in caſu primo, hoc unice notato, quod, cum ex *Abaco Pythagorico* conſtare nequeat, quoties diviſor integer in notis dividendi ſupraſcriptis contineatur, interea ſupponatur toties illum in his contineri, quoties ſiniſtima diviſoris nota continetur in ſiniſtima aut duabus ſiniſtimis dividendi notis. Licet enim hæc ſuppoſitio ſubinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox inſtituitur, cum factum ex diviſore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pſeudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION.

118. *Equidem hæc methodus tædioſa videtur, quod raro verus quotus prima ſtatim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod inſtituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

PROBLEMA XIII.

119. *Diviſionem per lamellas Neperianas abſolvere.*

Reſ. 1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte referant diviſorem.

2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.

3. Sub diviſore deſcende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, diſquiritur, aut numerus ipſis proxime minor ex dividendo ſubtrahendus.

4. Numerus in lamella unitatum reſpondens ſcribatur loco quoti.

5. Quod-

5. Quodsi eadem ratione partes quoti reliquas investiges, divisio tota absolvetur.

E. G. Sit dividendus 5601386, divisor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; sub divisore de- Fig. 3.
scendendo in infima serie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc subtrahitur & in lamella unitatum respondens 9 loco quoti scribitur. Residuo 2211 jungitur nota dividendi sequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipsi in lamella unitatum respondens 3. scribatur loco quoti, & subtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
5601386(937
53802..
-------
 22118.
 17934.
-------
  41846
  41846
-------
  00000
```

PROBLEMA XIV.

120. *Sine abaci Pythagorici subsidio numerum datum dividere per alium datum.*

Res. 1. Dividendo ad dexteram more consueto jungatur lunula, & infra locum quoti ducatur linea recta.

2. Infra hanc lineam scribatur divisor, ejus duplum & decupli dimidium sive quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2 & 5 adscribi oportet. Inde nimirum quodcunque divisoris multiplum (§. 116.) elicitur.

3. Tot dividendi notæ, quot divisor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innotescet.

4. Is more solito post lunulam scribatur, ipsi vero respondens multiplum divisoris sub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his subducatur.

5. Residuo adjungatur nota dividendi proxime sequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodsi hæc operatio continuetur, sine *abaci Pythagorici* subsidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

E. gr. Sit dividendus 385724615, divisor 175. Scribantur numeri dati cum divisoris multiplis, ut hic factum esse apparet.

Cum

```
385724615   (2204140
350            175 | 1
 357           350 | 2
 350           875 | 3
  724
  700
   246
   175
    711
    700
     115
```

Cum multiplis divisoris compara 385, & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit; scribe 2 loco quoti & 350 subduc ex 385. Residuo 35 junge notam dividendi proxime sequentem 7, & 357 denuo compara cum divisoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 subtrahe & quoti loco rursus scribe 2. Residuo 7 junge notam subsequentem 2. Quia dividendus 72 est divisore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 874 cadant, ipsisque dupli duplum, hoc est quadruplum divisoris, 700 quam proxime conveniat, quotus erit hoc in casu 4. Quodsi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & residuum erit 115.

S C H O L I O N.

121. *Hæc dividendi methodus & meditandi difficultatem, & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia est altera in problemate undecimo exposita. Quamvis igitur eam serio commendem, nolim tamen ut abacus Pythagoricus prorsus rejiciatur, quoniam subinde casus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia assertum nostrum confirmabit.*

P R O B L E M A XV.

122. *Examinare multiplicationem.*

Res. Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, si multiplicatio rite fuerit peracta

```
38476 ) 1346660 ( 35
        115428
        ------
         192380
         192380
         ------
         000000
```

E. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum est 1346660 (§. 111.). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus est 35.

Al. 1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri potest.

2. Re

2. Residuum 2 ducatur in multiplicatorem 4, si novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium superaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri potest, noteturque residuum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodsi residuum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus residuo; operatio rite peracta erit.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, residuum in multiplicando ducatur non in ipsum multiplicatorem, sed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

E. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2: quorum residuorum factum cum sit 4, id indicio est multiplicationem rite fuisse peractam.

857
65
4285
5142
55705

Dem. Cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67.), & factum quidem summæ, multiplicandus toties iteratus, quot multiplicator unitates habet, numeris aggregandis respondeat (§. 61. 66.); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus est novenarius, quoties fieri potest (§. 101.). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto, quoties datur, residuum toties relinquitur, quot multiplicator unitates habet; evidens est, istud in multiplicatorem duci, atque ex facto novenarium denuo exterminari debere, quoties licet, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde est, sive residuum in multiplicatorem, sive multiplicator in residuum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207.), independenter ab his, demonstrabitur, per primum patet, etiam ex multiplicatore, si novenario major fuerit,

no-

novenarium toties exterminari debere, quoties fieri poteſt, & reſiduum hoc deducendum eſſe in reſiduum ex multiplicando, ut habeatur reſiduum numeris aggregandis reſpondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

123. *Demonſtratio majorem evidentiam nanciſcitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA XVI.

124. *Examinare diviſionem.*

Reſ. 1. Quotus ducatur in diviſorem, aut diviſor in quotum.

2. Facto addatur, ſi quod a diviſione fuerit reſiduum.

Quodſi hac ratione prodeat dividendus, diviſio legitime peracta erit (§. 212.).

$$\begin{array}{r} 245 \\ \underline{32} \\ 490 \\ \underline{735} \\ 7840 \\ \underline{16} \\ 7856 \end{array}$$

E. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus eſt 245, reſiduum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Conſtat igitur diviſionem legitime fuiſſe peractam.

Al. Cum vi examinis prioris dividendus ſit factum ex diviſore in quotum; examen quoque inſtituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex diviſore & quoto novenarium, quoties datur, atque reſiduum in diviſore multiplicando per reſiduum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo reſiduum ex diviſione.

E. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem ſi tentetur in diviſore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 reſiduum erit. Quodſi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur reſiduum ex diviſione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur ut in dividendo reſiduum 8.

SCHO-

SCHOLION GENERALE.

125. *Superest ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expositis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum scriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in divisione a subtractione peracta deletione &c. continentur. Scriptio numerorum varias suppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti præsentes exhibet, quamdiu libuerit, qui alias disparent, cum vix eam subierint: quo ipso cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domesticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum defiguntur. Hinc discimus*

1. Intellectum uti debere in meditando subsidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet casu particulari derivandis.
2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia sistenda esse: quod observasse in tyronibus quoque instituendis plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci ajunt) unguiculis familiarissimæ ipsis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide imprimis cor. 1. probl. 2. (§. 98.), probl. 4. (§. 103.), probl. 11. (§. 116.), & probl. 14. (§. 120.). Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet

3. Ad minuendam in meditando difficultatem singula distincte imaginationi repræsentanda esse, ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas, & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in Analysi patebit. Eadem secundæ juncta, tyronum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Inservit etiam confusæ cognitioni eorum, quæ singillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum demonstrationes Geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis, aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut diversa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios, &c., & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur; nec minus in multiplicatione ac divisione facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, &, quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmeticis, vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates, e. gr. ex abaco Pythagorico, in memoriam nobis revocamus. Unde patet

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitas in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur, integrum divisorem in omnibus dividendi notis suprascriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus, nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, e. gr. si in Astronomia multa admodum phænomena motus siderum dentur, qualis esse debeat rei natura, e. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phænomenis satisfiat, primo investigandum, dein ulterius disquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis satisfiat, nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere, eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione, prima statim vice, veram elicere licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum non minus in inveniendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæsitum inveniri; examina tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Con-

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO XXXIX.

126. R*Atio* est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantite alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in specie *antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *consequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

127. Euclides *rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit vir summus* Leibnitius. *Equidem &* Hobbesius *definitionis Euclideæ correctionem tentavit* (*a*)*; sed infeliciter. Cum enim rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod Euclidea, quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, quæ rationem inter se habere possunt.*

SCHOLION II.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM I.

129. Cum in fractionibns relatio numeratoris ad denomi-

E na-

(a) In Tractatu de principiis & ratiocinatione Geometrarum c. XI. p. 22.

natorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§.59.); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

130. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83.). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

131. Si termini rationis fuerint inæquales, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21.); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20.): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur. id quod divisio prodit (§. 69.).

COROLLARIUM IV.

132. Ceterum quia ratio per se fintelligibilis (§. 126.), iis discernendis inservire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27.).

DEFINITIO XL.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, e. gr. *6* ad *3*. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, e. gr. 3 ad *6*.

DEFINITIO XLI.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas vel numerus rationalis ad numerum rationalem, e. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, qnæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

135. *Sint duæ quantitates A & B, sitque A < B. Si A ex B toties subtrahas, quoties fieri poterit, e. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut 1 ad 5, hoc est, A in B quinquies continetur, seu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, e. gr. ter, itidemque ex B, e. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu* $A = \frac{3}{7} B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A. Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri pos-*

sit,

sit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates, quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur definitioni rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, sine tertio homogeneo assumto, ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus aut prædicta pars pro unitate assumitur & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numeros exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.

DEFINITIO XLII.

136. *Exponentem rationis* dico Quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. E. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis*.

SCHOLION.

137. *In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris vel rationalibus, vel irrationalibus eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM I.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse est exponens rationis, e. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69.).

COROLLARIUM IV.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131. 136.), atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71.).

DEFINITIO XLIII.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex*; *ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3 &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$ &c. E. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam,

continet enim ſenarius binarium ter; contra 2 ad 6 eſt in ratione ſubtripla, continet enim binarius tertiam ſenarii partem.

DEFINITIO XLIV.

143. Si terminus major minorem ſemel continet ac inſuper partem ipſius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *ſuperparticularis*, *ratio* minoris inæqualitatis *ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo vocatur *ſeſquialtera*, ſi exponens $1\frac{1}{2}$; *ſeſquitertia*, ſi $1\frac{1}{3}$ &c. in altero *ſubſeſquialtera*, ſi exponens $\frac{2}{3}$; *ſubſeſquitertia*, ſi $\frac{3}{4}$ &c. E. gr. 3 ad 2 eſt in ratione ſeſquialtera; 2 ad 3 in ſubſeſquialtera.

DEFINITIO XLV.

144. Si terminus major minorem ſemel continet ac inſuper partes ipſius aliquot aliquotas; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *ſuperpartiens*; *ratio* minoris inæqualitatis *ſubſuperpartiens*. Speciatim in caſu priore dicitur *ſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $1\frac{2}{3}$; *ſupertripartiens quartas*, ſi $1\frac{3}{4}$; *ſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $1\frac{4}{7}$ &c. in poſteriore *ſubſuperbipartiens tertias*, ſi exponens $\frac{3}{5}$; *ſubſupertripartiens quartas*, ſi $\frac{4}{7}$; *ſubſuperquadripartiens ſeptimas*, ſi $\frac{7}{11}$ &c. E. gr. 5 ad 3 eſt ratio ſuperbipartiens tertias; ſed 3 ad 5 ratio ſubſuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & inſuper partem ipſius aliquotam; *ratio* majoris inæqualitatis vocatur *multiplex ſuperparticularis*; ratio minoris inæqualitatis *ſubmultiplex ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo dicitur *dupla ſeſquialtera*, ſi exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla ſeſquiquarta*, ſi $3\frac{1}{4}$ &c. in altero *ſubdupla ſubſeſquialtera*, ſi exponens $\frac{2}{5}$; *ſubtripla ſubſeſquiquarta*, ſi $\frac{4}{13}$ &c. E. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam ſeſqui-

quin-

quintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XLVII.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *ratio* majoris inæqualitatis dicitur *multiplex superpartiens*; ratio minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo vocatur *dupla superbipartiens tertias*, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$ &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$ &c. E. gr. Ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLION I.

147. *En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, e. gr. pro dupla 2 : 1, pro sesquialtera 3 : 2); non tamen ab eo ignorari possunt, qui scripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam* Clavius *annotavit* (a) *exponentes rationis majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, si denominatorem exponentis dividas per numeratorem. E. gr. si exponens fuerit* $\frac{5}{8}$; *erit* $8 : 5 = 1\frac{3}{5}$. *Unde innotescit, rationem vocari subsupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

SCHOLION II.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perspecturus speciebus recensitis plures non dari, considerare debet, quotum ex divisione termini majoris per minorem emergentem, seu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel esse* 1°. *Numerum integrum, vel mixtum, hunc vero vel* 2°. *ex unitate & fractione, cujus numerator est unitas, vel* 3°. *ex unitate & fractione, cujus numerator est numerus, vel* 4°. *ex numero & fractione, cujus numerator est unitas, vel denique* 5°. *ex numero & fractione, cujus numerator numerus est, constare. Habemus ergo in casu primo* ratio-

(a) In Comment. ad Elem. V. Euclidis. f. 179. Tom. 1. Op.

tiones multiplices & submultiplices, *in secundo* superparticulares & subsuperparticulares, *in tertio* superpartientes & subsuperpartientes, *in quarto* multiplices superparticulares & submultiplices subsuperparticulares, *in quinto denique* multiplices superpartientes & submultiplices subsuperpartientes. *Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari possunt. Aut enim exponens 1°. est fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel simplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si simplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel 2°. unitas est, vel 3°. unitate major. Similiter si multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel 4°. unitas est, vel 5°. unitate major. In casu primo* ratio *est* submultiplex; *in secundo* subsuperparticularis; *in tertio* subsuperpartiens; *in quarto* submultiplex subsuperparticularis; *in quinto* submultiplex subsuperpartiens.

DEFINITIO XLVIII.

149. *Rationes eædem* sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

150. *Per hanc definitionem agnosci posse etiam identitatem rationum irrationalium patet ex schol. def. 42. (§. 137.).*

COROLLARIUM I.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis suum consequentem, vel quantam consequentis partem continet; toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in consequente suo continetur, toties antecedens alterius continetur in suo consequente (§. 131.).

COROLLARIUM II.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit $A : B = C : D$, seu in exemplo singulari $8 : 4 = 30 : 15$. Et hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus (§. 141.).

SCHOLION II.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter A. B :: C. D. scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non-scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

Co-

COROLLARIUM III.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (141.), in rationibus autem iisdem exponentes iidem sint (§. 149.), rationes eædem sunt etiam similes (§. 24.), & contra.

DEFINITIO XLIX.

155. Rationum duarum identitas vel similitudo dicitur *Proportio*. Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales*. E. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO L.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem cum antecedente secundæ, ut si 3 : *6* = *6* : 12: *Discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si 3 : *6* = 4 : 8. In proportione continua *terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *Medius proportionalis* appellatur. Ita numerus *6* est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius a S. Vincentio (*a*) *considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, & Proportionalitatem vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

DEFINITIO LI.

158. Rationum diversarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, si fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, si F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. E. gr. *6* ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam *6* : 3 (= 2) > 5 : 4 (= $1\frac{1}{4}$); sed 3 ad *6* minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

(a) Quadraturæ Circuli lib. 8. f. 865.

DEFINITIO LII.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita *6* ad *96* est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata*. Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEOREMA XI.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

Dem. Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40.); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41.). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§. 31.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69.); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati, (§. 160.), adeoque numerus rationalis (§. 39.).

COROLLARIUM II.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§. 134. 136.); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161.).

THEOREMA XII.

163. *Commensurabilia sunt inter se, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

Dem. Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31.). Quodsi adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40.). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31.); Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§. 39.); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

164. Commensurabilium ratio est rationalis; incommensurabilium irrationalis (§. 134.).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM II.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162.).

THEOREMA XIII.

167. *Rationes A : B & F : G similes eidem tertiæ C : D sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

Dem. Rationes similes eidem tertiæ sunt etiam ex-

$6 : 3 = 8 : 4$
$10 : 5 = 8 : 4$
Ergo $6 : 3 = 10 : 5$

eædem eidem tertiæ (§.154.). Quare cum sit A : B = F : G & C : D = F : G (§. 152.); erit A : B = C : D (§. 87.), consequenter A ad B ut C ad D (§.152.). *Quod erat unum.*

Porro A : B = C : D, & F : G = H : E, itemque C : D = H : E, *per hypoth.* Sed A : B = H : E, *per demonstr.* Ergo etiam A : B = F : G, *per demonstr. Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

168. *Idem C ad æqualia A & B; & æqualia A & B ad idem C vel etiam æqualia C & D, eandem rationem habent.*

Dem. A = B, *per hypoth.* Ergo C : A = C : B (§. 71. 94.); consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152.). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A : C = B : C (§. 71. 94.), consequenter A & B ad C eandem rationem habent (§.152.). *Quod erat secundum.*

Sit denique A = C & B = D, erit A : B = C : D (§. 71. 94.), consequenter ratio utrobique eadem (§. 152.). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XV.

169. *Si fuerit A : B = C : D, erit etiam invertendo B : A = D : C.*

Dem. Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E, & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E, & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69.); consequenter B : A = 1 : E & B : C = 1 : G (§. 152.). Sed A : B = C : D, *per hypoth.* seu E = G. (§. 15.). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168.), consequenter B : A = D : C (§. 167.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

170. *Partes similes* P *&* p *eandem rationem habent ad tota* T *&* t: *si tota ad partes eandem rationem habent, sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

Dem. Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam p ad t; partes p & P per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt (§. 132.). Erunt adeo dissimiles (§. 24.): Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut p ad t. *Quod erat unum.*

Si $t : p = T : P$, *per hypoth.* erit $p : t = P : T$ (§. 169.). Ergo, *per demonstrata*, P & p sunt partes similes. *Quod erat alterum.*

Si P & p sunt partes similes totorum T & t, erit $P : T = p : t$, *per num.* 1. adeoque $T : P = t : p$ (§. 169.), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent.

THEOREMA XVII.

171. *Partes similes* P *&* p *sunt inter se ut tota* T *&* t.

Dem. Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 9.); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, e. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus t toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars p, donec parti ipsius T simili, quæ est P, æqualis fiat. Toties itaque P continet p, quoties T ipsum t. Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151.). *Q. e. d.*

SCHOLION

172. *Notandum est, numerum, qui indicat, quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent.* E. gr. *In Geome-*

metria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.

THEOREMA XVIII.

173. *Si* A : B = C : D; *erit etiam* alternando *seu* permutando A : C = B : D.

Dem. I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20.), eæque similes (§. 170.) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est antecedentes A & C eam inter se rationem habent quam consequentes B & D. (§. 171.).

II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia A : B = C : D, *per hypoth.* erit B : A = D : C (§. 169.), consequenter B : D = A : C *per cas.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

174. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 69.).

COROLLARIUM II.

175. Si fuerit A : B = C : D & B = D, erit etiam A = C. Est enim A : C = B : D (§. 173.). Sed B = D, *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149.).

COROLLARIUM III.

176. Si fuerit B : A = D : C & B = D; erit etiam A = C. Cum enim sit A : B = C : D (§. 169.); erit etiam A = C (§. 175.).

THEOREMA XIX.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.*

Dem. A : B = D : B, *per hypoth.* Ergo A : D = B : B (§. 173.). Sed B = B (§. 81.). Quare A = D (§. 149.). Et idem eodem modo ostenditur, si A : B =

B=D : C & B=C. *Quod erat unum.*

Similiter C : A=C : B, *per hypoth.* Ergo C : C =A : B (§. 173.). Sed C=C (§. 81.). Quare A =B (§. 149.). Et idem eodem modo patet, si C : A=D : B & C=D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

178. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.*

Dem. Cum sit 1 : C = A : D & 1 : C = B : E (§. 66.); erit A : D = B : E (§. 167.), consequenter A : B = D : E (§. 173.). *Q. e. d.*

$$\begin{array}{cc} 6 & 12 \\ 3 & 3 \\ \hline 18 & 36 \end{array}$$

6 : 12 = 18 : 36.

SCHOLION.

179. *Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, (per hypoth.) unitas quoque in utroque eadem est (§. 13.), consequenter 1 : C eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

180. Ergo si A > B, etiam AC > BC (§. 149.), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA XXI.

181. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

Dem. Cum sit 1 : C = F : A & 1 : C = G : B (§. 174.); erit F : A = G : B (§. 167.), consequenter F : G = A : B (§. 173.). *Q. e. d.*

$$3\,\big)\,\overline{24 : 12}$$
$$\quad 8 : \ 4$$

8 : 4 = 24 : 12

COROLLARIUM.

182. Si A > B, etiam F > G (§. 149.), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA XXII.

183. *Si rationum similium A : B & C : D ante-*

te-

tecedentes, vel consequentes per idem E dividas; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.

Dem. Quoniam $A : B = C : D$, *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 173.). Sed $A : E = F$ & $C : E = G$, *per hypoth.* Ergo $F : G = A : C$ (§. 181.) $= B : D$ (§. 167.), consequenter $F : B = G : D$ (§. 173.). *Quod erat unum.*

$$\begin{array}{c} 3 : 6 = 12 : 24 \\ \underline{3 \qquad\quad 3} \\ 1 : 6 = 4 : 24 \end{array}$$

Similiter quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 173.). Sed $B : E = H$ & $D : E = K$ *per hypoth.* Ergo $B : D = H : K$ (§. 181.), consequenter $A : C = H : K$ (§. 167.) & hinc tandem $A : H = C : K$ (§. 173.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

184. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta AE & CE ad consequentes B & D, in posteriore antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.*

Dem. Quia $A : B = C : D$, *per hypoth.* $A : C = B : D$ (§. 173.). Sed $EA : EC = A : C$ (§. 178.). Ergo $EA : EC = B : D$ (§. 167.), consequenter $EA : B = EC : D$ (§. 173.). *Quod erat unum.*

$$\begin{array}{c} 2 : 6 = 3 : 9 \\ \underline{6 \qquad\quad 6} \\ 12 : 6 = 18 : 9 \end{array}$$

Eodem modo ostenditur, esse $A : BE = C : DE$, *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

185. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut dividas; in casu priore facta, in posteriore quoti eandem inter se rationem habent.*

Dem.

Dem. A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo EA : B = EC : D (§. 184.), consequenter EA : FB = EC : FD (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

3 : 6	=	12 : 24	
2 3		2 3	
6 : 18	=	24 : 72	
3 : 6	=	12 : 24	
3 2		3 2	
1 : 3	=	4 : 12	

Sit A : E = G, B : F = H, C : E = K & D : F = L. Quoniam A : B = C : D, *per hypoth.* G : B = K : D (§. 183.). Ergo & G : H = K : L (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXV.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad consequentem suum. Et majus antecedente rationis minoris ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad suum consequentem.*

Dem. Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D; erit A : B < C : D (§. 158.). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut minus quam A, hoc est, pars ipsius (§. 20.), per B dividatur (§. 182.): quæ pars si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in majore ratione antecedentis pars eandem rationem habet ad consequentem, quam minoris antecedens ad suum (§. 152.). *Quod erat unum.*

Similiter si A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit A : B < C : D (§. 158.). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut majus quam A, cujus adeo pars est A (§. 20.), per B dividatur (§. 182.): quod si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam majoris antecedens ad suum consequentem (§. 152.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

187. *Si fuerint quotcunque rationes similes A :*

B,

B, C : D, E : F, G : H &c. summa omnium antecedentium A + C + E + G &c. est ad summam omnium consequentium B + D + F + H &c. ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.

Dem. Ponamus e.gr. esse $A = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{2}D$, $E = \frac{1}{2}F$, $G = \frac{1}{2}H$; erit $A + C + E + G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}H$ (§. 88.), hoc est summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium, consequenter ut antecedens unius rationis ad suum consequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcunque ratio antecedentium ad consequentes ponatur vel etiam antecedentes sint consequentibus majores: patet propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVII.

188. *Si fuerit ut totum A + C ad totum B + D, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum A + C ad totum B + D, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

Dem. Aut $A : B = C : D$, aut $A : B > C : D$, aut denique $A : B > C : D$ (§. 21.). Ponamus $A : B > C : D$. Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (186.), hoc est, $F : B = C : D$ (§. 152.), consequenter $F + C : B + D = C : D$ (§. 187.). Quare cum etiam sit $A + C : B + D = C : D$, *per hypoth.* erit $F + C = A + C$ (§. 177.), adeoque $F = A$ (§. 91.). Sed F est pars ipsius A *per demonstrata*: Pars igitur toti æqualis: quod cum sit absurdum (§. 84.), ut sit $A : B > C : D$, fieri nequit.

$$\begin{array}{r}24 : 12\\ \underline{6 : \ 3}\\ 18 : 9\end{array}$$

Sit jam $A : B < C : D$. Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186.), hoc est, $G : B = C : D$ (§. 152.), consequenter $G + C : B + D = C : D$. (§. 187.)

187.). Quare cum etiam sit $A + C : B + D = C : D$ *per hypoth.* erit $G + C = A + C$ (§. 177.), adeoque $G = A$ (§. 91.) Sed A est pars ipsius G *per demonstrata*. Ergo pars toti æqualis: quod cum sit absurdum, ut sit $A : B < C : D$ fieri nequit: Quoniam itaque nec $A : B > C : D$, nec $A : B < C : D$ *per demonstrata*: erit utique $A : B = C : D$. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

189. *In rationibus similibus $A : B$ & $C : D$, differentia antecedentium $A - C$ est ad differentiam consequentium $C - D$, ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.*

Dem. Quoniam $A : B = C : D$ *per hypoth.*, erit $A : C = B : D$ (§. 173.). Ponamus $A > C$ & $B > D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 9. 20.). Quamobrem cum sit $A : B = C : D$ *per hypoth.*, erit $A - C : B - D = A : B$ (§. 188.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* componendo, *ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis secundæ ad antecedentem vel consequentem secundæ.*

Dem. Si $A : B = C : D$ *per hypoth.* erit $A : C = B : D$ (§. 173.). Sed $A + B : C + D = A : C = B : D$ (§. 187.). Ergo $A + B : A = C + D : C$, item $A + B : B = C + D : D$ (§. 173.) *Q. e. d.*

$$4 : 2 = 10 : 5$$
$$6 : 4 = 15 : 10$$
vel $6 : 2 = 15 : 5$

THEOREMA XXX.

191. *Si fuerit $A : B = a : b$ & $A : C = a : c$ &c. erit $A : A + B + C = a : a + b + c$.*

 Dem.

Dem. Quoniam $A : B = a : b$ & $A : C = a : c$ *per hypoth.*, erit $A : a = B : b = C : c$ (§. 173. 167.). Quare $A : a = A + B + C : a + b + c$ (§. 187.). & hinc $A : A + B + C = a : a + b + c$ (§. 173.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque similes* $A : B = C : D = E : F = G : H = I : K = L : M$ *&c. erit summa omnium antecedentium primarum rationum* $A + E + I$ *&c. ad summam omnium consequentium* $B + F + K$ *&c., ut summa omnium antecedentium secundarum rationum* $C + G + L$ *&c. ad summam omnium consequentium* $D + H + M$ *&c.*

Dem. Cum $A : B$, $E : F$, $I : K$ &c. itemque $C : D$, $G : H$, $L : M$ &c. sint rationes similes, *per hypoth.* erit $A + E + I$ &c. : $B + F + K$ &c. $= A : B$, & $C + G + L$ &c. : $D + H + M$ &c. $= C : D$ (§: 187.). Est vero $A : B = C : D$ *per hypoth.* Ergo $A + E + I$ &c. : $B + F + K$ &c. $= C + G + L$ &c. : $D + H + M$ &c. (§. 167.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* dividendo *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem; itemque* convertendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.*

Dem. Si fuerit $A : B = C : D$ *per hypoth.*, erit $A : C = B : D$ (§. 173.), consequenter $A - B : C - D = B : D = A : C$ (§. 189.). Ergo $A - B : B = C - D : D$, & $A - B : A = C -$

$$\begin{array}{l} \underline{6 : 4 = 15 : 10} \\ 2 : 4 = 5 : 10 \\ 2 : 6 = 5 : 15 \end{array}$$

C — D : C (§. 173.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIII.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ D ad consequentem suum E; & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita consequens secundæ E ad aliud quidpiam F: erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C, ut antecedens secundæ D ad F.*

Dem. Quoniam A : B = D : E & B : C = E : F, *per hypoth.*, erit A : D = B : E, & B : E = C : F (§.173.), consequenter A : D = C : F (167.). Quare A : C = D : F (§.173.). *Q. e. d.*

4 : 2 = 6 : 3
2 : 8 = 3 : 12
4 : 8 = 6 : 12

COROLLARIUM I.

195. Quodsi fuerit A : B = D : E & C : B = F : E; cum etiam sit B : C = E : F (§. 169.), erit A : C = D : F (§. 194.).

COROLLARIUM II.

196. Similiter si fuerit A : B = C : D, & A : F = C : G; cum etiam sit B : A = D : C (§. 169.), erit B : F = D : G (§. 194.).

COROLLARIUM III.

197. Si denique fuerit A : B = C : D & F : A = G : C, cum etiam sit A : F = C : G (§.169.), erit B : F = D : G (§. 196.).

THEOREMA XXXIV.

198. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ E ad suum consequentem F; & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C, ut D ad consequentem secundæ F.*

Dem. Quoniam A : B = E : F, *per hypoth.*, si ponatur B : C = F : G, erit A : C = E : G (§.194.). Est vero etiam B : C = D : E, *per hypoth.* Ergo

8 : 4 = 12 : 6
4 : 16 = 3 : 12
8 : 16 = 3 : 6

D : E = F : G (§. 167.), & D : F = E : G (§. 173.), consequenter A : C = D : F (§. 167.). *Q. e. d.*

Corollarium I.

199. Quodsi fuerit A : B = E : F & C : B = E : D, cum etiam sit B : C = D : E (§. 169.), erit A : C = D : F (§. 198.).

Corollarium II.

200. Similiter si fuerit B : A = F : E & B : C = D : E, cum etiam sit A : B = E : F (§. 169.), erit A : C = D : F (§. 198.).

Corollarium III.

201. Si porro fuerit B : A = F : E & C : B = E : D, cum etiam sit B : C = D : E (§. 169.), erit A : C = D : F (§. 200.).

Corollarium IV.

202. Si idem C vel æqualia per majus A & minus B dividas, quotus prior F erit minor posteriore G. Est enim A : C = 1 : F & B : C = 1 : G (§. 174.), adeoque C : B = G : 1 (§. 169.). Ergo A : B = G : F (§. 198.). Sed A > B, *per hypoth.* Ergo G > F (§. 149.).

Theorema XXXV.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet, quam minus B.*

Dem. Quoniam A > B, *per hypoth.* erit A : C > B : C (§. 202.), hoc est, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158.). *Q. e. d.*

Theorema XXXVI.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus est.*

Dem. Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipsius A eandem C rationem habet quam B ad idem C (§. 186.), adeoque ipsi B æqualis est (§. 177.). Quare A > B (§. 20.). *Q. e. d.*

Theorema XXXVII.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

Dem. Quoniam A > *per hypoth.* erit C : A < C : B (§. 202.). Ergo C ad A minorem habet ratio-tionem quam ad B (§. 158.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.*

Dem. Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186.), hoc est, D : A = C : B (§. 152.), & hinc D : C = A : B (§. 173.). Sed D < C (§. 20.). Ergo A < B (§. 140.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

207. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

Dem. Sint duo factores A & B, erit 1 : A = B : AB, & 1 : B = A : BA (§. 66.). Est vero etiam 1 : A = B : BA (§. 173.), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth.* B : AB = B : BA (§. 167.). Ergo AB = BA (§. 177.).

4	2
2	4
8 =	8

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB = BA (§. 207.); erit CAB = CBA (§. 93.), adeoque & ABC = BAC (§. 207.). Similiter quia CB = BC (§. 207.); erit ACB = ABC (§. 93.), adeoque & CBA = BCA (§. 207.). Quare CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA (§. 87.); hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores; sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA XL.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur, quotus est multiplicans: si per multiplicantem, quotus est multiplicandus.*

Dem. Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 66.). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 69.). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 177.). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. 66.); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173.). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. 69.). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 177.). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 76.).

THEOREMA XLI.

212. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra; factum est dividendus.*

Dem. Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 174.). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. 66.). Ergo factum æquale est dividendo (§. 177.). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207.); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLII.

213. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales $A : B = C : D$, sint totidem aliæ inter se quoque proportionales $E : F = G : H$, si posteriores singulas in singulas priores ducas, facta inter se proportionalia sunt, nempe $AE : FB = GC : DH$.*

Dem. Cum sit *per hypoth.*

$$\begin{array}{l} A : B = C : D \;\&\; E : F = G : H \\ E \quad F \quad\; E \quad F \qquad C \quad D \quad\; C \quad D \\ \hline \end{array}$$

erit $EA : FB = EC : FD$ & $CE : DF = CG : DH$.

H. (§. 185.). Sed EC = CE & FD = DF (§. 207.). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 167.) = GC : HD (§. 207.). *Q. e. d.*

Theorema XLIII.

214. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

Dem. Si rationis primæ A : B exponens sit = m; secundæ C : D exponens = n. Erit m : 1 = A : B & n : 1 = C : D (§.140.). Ergo mn : 1 = AC : BD (§. 213.), consequenter mn est exponens rationis AC : BD (§. 140.), hoc est compositæ ex A : B & C : D (§. 159.). *Q. e. d.*

Scholion.

215. *Sint rationes* 8 : 4 *&* 24 : 6. *Illius exponens est* 2, *hujus* 4. *Rationem compositam datarum habent* 192 *&* 24. *Sed* 192 : 24 = 8, *quod est factum ex* 2 *in* 4. *Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

Theorema XLIV.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D &c. prima A ad tertiam C est in ratione duplicata; ad quartam D in ratione triplicata &c. primæ A ad secundum B.*

Dem. 1. Quoniam A : B = B : C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipsius A ad B (§. 159.). Sed AB : BC = A : C §. 181.). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 167.). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D. *per hypoth.* ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159.). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178.). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 167.). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

217. *Si fuerit quæcunque quantitatum A, B, C, D, E, F &c. series; ratio primæ A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

Dem. Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c (§. 159.). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 178.). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§. 167.). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

218. *Rationes compositæ ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt, inter se æquales sunt.*

Dem. Sit A : B = C : D, E : F = G : H, I : K = L : M, *per hypoth.* erit AE : FB = CG : DH (§. 213.), adeoque & AEI : FBK = CGL : MHD (§. *cit.*). Ratio vero AEI : FBK componitur ex rationibus A : B, E : F & I : K; ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 159.). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

$$\begin{array}{l} 6 : 3 = 4 : 2 \\ 3 : 1 = 12 : 4 \\ \underline{5 : 1 = 20 : 4} \\ 90 : 3 = 960 : 32 \\ = 30 \end{array}$$

THEOREMA XLVII.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D, æquemultiplices primæ atque tertiæ A & C, itemque secundæ ac quartæ B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.*

Dem. Denotentur æquemultiplices ipsarum A & C per mA & mC, itemque æquemultiplices ipsarum B & D. per nB & nD. Cum sit A : B = C : D, *per hypoth.* erit etiam mA : nB = mC : nD (§. 185.).

(§. 185.), consequenter m A : m C = n B : n D (§. 173.). Quamobrem si mA = m C, erit n B = n D; si mA > mC, etiam nB > nD; si mA < m C, etiam nB < nD (§. 151.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* Euclides (a) *in iis definiendis, ac inde ceteras demonstrat.*

CAPUT IV.

De speciebus Arithmeticæ in numeris fractis.

THEOREMA XLVIII.

221. *Si numerator est æqualis denominatori, fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro; si minor, fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro; si major, fractio $\frac{5}{4}$ integro seu unitate major est.*

Dem. Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (e. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 59.). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis; *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86.). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor, *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis, consequenter eodem minor (§. 20.). *Quod erat secundum.*

Si denique numerator major est denominatore; *per hypoth.*, plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 86.). Ergo integrum parti fractionis æquale est, consequenter ipsa integro major

(a) Elem. V. def. 5.

jor (§. 20.). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales vel eodem majores dicuntur vulgo* spuriæ, *quia proprie loquendo fractiones non sunt, nisi quæ integro minores* (§. 38.).

PROBLEMA XVII.

223. *Invenire, quot integra fractio* ($\frac{8}{4}$), *quæ integro major, contineat.*

Res. Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare, quod petebatur.

Dem. Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. *69.*). Sed denominator idem est cum integro (§. *59.*). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

Res. 1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.

2. Factum scribatur loco numeratoris. Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

Dem. Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§.*66.169.*). Sed unitas & denominator datus sunt idem integrum (§. *59.*). Ergo fractio & numerus integer æquales sunt (§. 177.). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

225. *Fractiones homogeneæ æquales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent; major est, cujus numerator habet rationem majorem; minor vero, cujus numerator habet minorem.*

Dem. Cum fractiones inter se sint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 35.), adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt

runt (§. 59.). Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent, fractiones æquales sunt (§. 177.): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est; cujus numerator minorem habet, ea minor est (§. 204.). *Q. e. d.*

E. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{3}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, si numerator unius toties contineatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries continetur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo: id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.*

COROLLARIUM.

227. Quodsi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in casu priori facta ($\frac{8}{12}$) in posteriori quoti ($\frac{2}{3}$) constituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 178. 181.).

PROBLEMA XIX.

228. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

Res. 1. Dividatur numerus major per minorem.

2. Divisor primæ divisionis seu numerus datus minor denuo dividatur per residuum primæ divisionis.

3. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum.

E. gr. Sint numeri dati 168 & 240, reperietur eorum communis mensura maxima 24 hunc in modum:

7		
182	24	1
240 (1	168 (2	72 (3
168	72	24

Si-

Similiter communis menſura maxima numeratorum 95 & 47 reperitur 1.

Dem. Diviſor ultimus 24 metitur diviſorem antecedentis (in noſtro quidem caſu ſecundæ) diviſionis 72, (*per hypoth. &* §. 74.). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc eſt, in noſtro caſu ſecundæ) diviſionis 168, quippe ex dividendo ultimæ diviſionis 72, aliquoties (hic quidem bis) ſumto & ejus diviſore 24 compoſitum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & reſiduum primæ diviſionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in noſtro caſu ſemel) ſumto & reſiduo primæ diviſionis 72 compoſitum. Eſt itaque communis numerorum datorum menſura (§. 78.).

Eſſe vero communem menſuram maximam ordine retrogado per indirectum demonſtratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem eſſe menſuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat reſiduum primæ ſeu diviſorem ſecundæ diviſionis 72, adeoque & reſiduum ſecundæ diviſionis ſeu diviſorem tertiæ, hoc eſt, in noſtro caſu inventam communem menſuram 24. Sed numerus is eadem major eſt, *ex hyp.* Ergo communem menſuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24: Quod cum ſit abſurdum (§. 74.), major communis menſura non datur. Eſt igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION.

229. *Qui demonſtrationem uno quaſi obtutu comprehendere cupiunt; illos hæc numerorum datorum reſolutio juvabit.*

I. $72 = 3.24$, per diviſ. ter.

II. $168 = 2.72 + 24$, per diviſ. ſec. $= 2.3.24 + 24$, per num. I $= 7.24$.

III. $240 = 1.168 + 72$ per diviſ. prim. $= 7.24 + 3.24$. per num. I & II $= 10.24$.

SCHO-

SCHOLION II.

230. *In lineis communis mensura maxima invenitur per mutuam earundem a se invicem subtractionem. In numeris autem compendii gratia divisio subtractioni substituitur: ut exemplum ostendit.*

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA XX.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere, h.e. invenire fractionem datæ* ($\frac{20}{48}$) *æquivalentem, sed minoribus numeris expressam.*

Res. Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48 per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæsitam $\frac{5}{12}$ (§. 227.).

COROLLARIUM I.

232. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 228.); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

234. *Molestius accidit inexercitatis communem mensuram maximam quærere, quam iterata per mensuras minores sponte animadversas divisione fractiones reducere.*

PROBLEMA XXI.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere, h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales sunt & communi denominatore gaudent.*

Res. Casus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

E. gr. $\frac{2}{3}, \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5}, \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{10}{15}, \frac{12}{15}$.

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

E. gr. $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{4}{4}, \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4}, \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{6}{6} = \frac{48}{72}, \frac{12}{72}, \frac{54}{72}$.

Dem.

Dem. Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 93. & §. 207. 208. Quod vero æquivaleant primum propositis, manifestum est per §. 227. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXII.

236. *Fractiones addere.*

Res. 1. Si fractiones datæ diversos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 235.).

2. Addantur numeratores (§. *96.*) & summæ subscribatur denominator communis.

E. gr. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}$ (§. 235.) $=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$ (§. 223). $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{48}{72}+\frac{12}{72}+\frac{54}{72}$ (§. 235.) $=\frac{114}{72}=1\frac{42}{72}$ §. 223.) $=1\frac{7}{12}$ (§. 231.).

Dem. Cum denominatores sint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59.); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. *61.*); ad eandem denominationem sunt reducendi (§.35.). *Q.e.d.*

PROBLEMA XXIII.

237. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

Res. 1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235.).

2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 103.) & residuo denominator communis subscribatur.

E. gr. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (§. 231.) & $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}$ (§. 235.) $=\frac{1}{10}$.

THEOREMA L.

238. *Fractio æquatur Numeratori per denominatorem diviso, hoc est,* $\frac{3}{4}=3:4$.

Dem. Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem seu integrum ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§.38.59.). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140.), si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator

tor 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177.). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviso (§. 136.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

Res. Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quæsitam.

E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231.).

Dem. Sit $\frac{A}{B}$ ($\frac{2}{3}$) $=$ A : B (§. 238.) $=$ F. & $\frac{C}{D}$ ($\frac{1}{2}$) $=$ C : D (§. *cit.*) $=$ G. erit B : A $=$ 1 : F & D : C $=$ 1 : G (§. 69.). Ergo BD : AC $=$ 1 : FG (§. 213.), hoc est $\frac{AC}{BD}$ ($\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$) $= \frac{FG}{1}$ (§. 169.) $=$ FG ($\frac{2}{6}$). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera divisio sit, quæ multiplicatio vocatur. E. gr. $\frac{2}{3}$ multiplicare per $\frac{1}{2}$ idem est hac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

241. *Hinc fractionum multiplicatio sequente modo facilius demonstratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ instar totius considerata dividenda est in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, scilicet in nostro casu in tres, & pars ista multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59.).

SCHOLION III.

242. *Vix autem opus est ut annotemus, si fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem in integrum numerum datum. E. gr. factum ex $\frac{3}{7}$ in 2 est $\frac{6}{7}$.*

PROBLEMA XXV.

243. *Fractionem $\frac{4}{5}$ per aliam fractionem $\frac{2}{3}$ dividere.*

Res. 1. Divisor invertatur. E. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$. 2. Divisor inversus ducatur in dividendum (§. 239.): quod

quod prodit $\frac{12}{10}$ seu $1\frac{1}{5}$ (§.223.) est quotus quæsitus.

Dem. Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69.); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 169.). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 235.), cum eædem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 238.); erit Numerator fractionis dividendæ ad Numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 181.), consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad Numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 167.). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt, & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per dividentem emergens (§. 177.). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§. 235.). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus (*juxta* §. 239.) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

S C H O L I O N.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes* (§. 141.), *eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare.*

P R O B L E M A XXVI.

245. *Integrum 3 per fractionem $\frac{4}{7}$ dividere.*

Res. 1. Divisor invertatur, ut in problemate præcedente (§. 243.). E. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.

2. Numerus integer datus 3 ducatur in Numerato-

to-

torem 7 divisoris inversi.

3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

Dem. Eadem est cum demonstratione problematis præcedentis (§. 243.).

CAPUT V.

De Potentiis numerorum, Genesi præsertim ac Analysi numerorum quadratorum & cubicorum.

DEFINITIO LIII.

246. SI numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur; factum 4 *Numerus quadratus*, ipse autem hujus intuitu *Radix quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad radicem quadratam, ita radix ad ipsum quadratum (§. 66. 246.); erit radix media proportionalis inter unitatem & quadratum (§. 156.).

DEFINITIO LIV.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* seu *Cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix cubica*.

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad radicem, ita radix ad quadratum (§. 66. 246.); & ut unitas ad radicem ita quadratum ad cubum (§. 66. 248.); erit etiam radix ad quadratum ut quadratum ad cubum (§. 167.), hoc est, unitas, radix, quadratum & cubus in continua proportione progrediuntur (§. 156.), & radix cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter unitatem & cubum.

DEFINITIO LV.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *potestatum*, *potentiarum*, *dignitatum* nomine appellari so-

ſolent. *Vieta* eaſdem *Magnitudines ſcalares* vocat.

DEFINITIO LVI.

251. *Exponens dignitatis* eſt numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens quadrati eſt 2, cubi 3 (§. 246. 248.).

DEFINITIO LVII.

252. Hodie tantum non omnes, dignitates optime diſtinguunt per exponentes, ita ut radix dicatur *dignitas prima*, quadratum *ſecunda*, cubus *tertia* &c. Qui Arabes ſequuntur, ſingulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diverſa tamen ab iis, quibus cum *Diophanto* (*a*) utuntur *Vieta* (*b*) & *Oughtredus* (*c*). Nomina Arabum ſunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, ſeu *Biquadratum*, *Surdeſolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdeſolidum ſecundum*, *Quadratiquadrati quadratum*, *Cubus cubi*, *Quadratum Surdeſolidi*, *Surdeſolidum tertium* &c. Nomina Diophanti ſunt: *Latus* ſeu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus* &c.

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zenſum. *Hinc compoſita:* Zenſizenſus, Zenſicubus, Zenſizenzenſus, Zenſurdeſolidus &c.

HYPOTHESIS XII.

254. *Qui Arabum denominationibus uſi ſunt, potentiarum ſigna Arabica adhibuerunt. At multo commodius* Carteſius (*d*) *monito* Kepleri (*e*) *obſecutus radici ſuperius a dextris jungit exponentem; e. gr. ſi* a *fuerit radix, erunt potentiæ ipſam ſequen-*

(a) In *Libris Arithmeticorum*.
(b) In *Iſagoge in Artem Analyt.* c. 3. f. m. 3.
(c) In *Clave Mathem.* c. 12. p. m. 34.
(d) In Geometria.
(e) Harmonices mundi lib. 1. f. 35. 36.

quentes a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c.; *vel*, *si* $a = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 &c. *ita ut sit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO LVIII.

255. *Quantitatem ad dignitatem desideratam evehere* idem est ac invenire factum ex ipsa aliquoties in se ducta emergens. E. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem est ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LIX.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere*, *vel latus educere* idem est ac invenire numerum 2, qui aliquoties in se ipsum ductus datam potentiam (ex. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates superiores nonnisi in Analysi usum habeant; in præsenti genesin & analysin quadratorum & cuborum tantum trademus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos nosse debet, quos sequens tabula exhibet:*

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729

DEFINITIO LX.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis superioris cujuscunque dicitur *binomia*, si ex duabus; *trinomia*, si ex tribus, *multinomia* sive *polynomia*, si ex pluribus, quam duabus partibus constat.

THEOREMA LI.

259. *Potentiæ ejusdem gradus sunt in ratione toties multiplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem, hoc est, quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam, quadrato-quadrata quadruplicatam &c. rationem suarum radicum.*

 Dem.

Dem. Potentiæ oriuntur, si radices A & B aliquoties in seipsas ducas (§. 250.). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio quadratorum componitur ex duabus, cuborum ex tribus, quadrato-quadratorum ex quatuor &c. reliquarum potentiarum ex tot rationibus similibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo quadrata habent rationem duplicatam, cubi triplicatam &c. ceteræ potentiæ rationem tantuplicatam suarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§. 159.).

THEOREMA LII.

260. *Quantitatum proportionalium potentiæ eædem sunt etiam proportionales.*

Dem. Habent enim potentiæ eædem rationem multiplicatam ipsarum A: B, B: C, C: D, D: E &c. vel A: B, C: D, E: F &c. (§. 259.). Sed hæ rationes omnes inter se eædem sunt *per hypoth.* Ergo potentiæ istæ v. gr. A^3; B^3, C^3, D^3, E^3, &c. constituunt rationes compositas ex rationibus, quarum singulæ singulis æquales sunt (§. 250.), consequenter easdem (§. 218.), atque adeo proportionales sunt (§. 155.). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ, componitur ex quadrato partis primæ, ex facto dupli primæ in alteram, & ex quadrato partis alterius.*

Dem. Prodit enim numerus quadratus, si radix in seipsam ducitur (§. 246.). Utraque vero pars radicis sigillatim ducitur in utramque simul (§. 111.). Quare productum componi debet 1°. ex facto partis primæ in seipsam, hoc est, ex quadrato partis primæ (§. 246.), 2°. ex facto partis primæ in secundam, & ex facto secundæ in primam, hoc est, ex duplo facto primæ in secundam, seu ex facto dupli primæ in secundam (§.207. 208.), 3° ex fa-

facto partis secundæ in seipsam, hoc est, ex quadrato partis secundæ (§. 246.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonstratio ocularis, si in quocunque exemplo singulari multiplicatio non actu peragitur, sed saltem indicatur; quo in casu exempli universalis vices tuetur: id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria repræsentant, quod singularia in universum omnia commune habent. E. gr. sit radix binomia* 34 *aut* 30 + 4; *erit*

30 + 4	*Radix binomia.*
30 + 4	
16	*Quadratum partis II.*
120	*Facta ex I. in II.*
120	
900	*Quadratum partis I.*
1156	*Quadratum totius.*

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonstrationibus concipiendis, quam in propositionibus inveniendis.

COROLLARIUM I.

263. Cum pars dextra sive secunda inter unitates, sinistra sive prima inter decades locum obtineat (§. 50.); quadratum illius in loco dextimo, factum ex unius duplo in alteram in secundo, quadratum denique alterum in tertio a dextimo terminari debet (§. 49.).

SCHOLION II.

264. *Scilicet quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo facto ex parte una in alteram cyphra una, quadrato autem partis sinistræ duæ adjunguntur, ut numeri solitarie positi justum locum nanscisantur* (§. 49.).

COROLLARIUM II.

265. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures sinistimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, quadratum numeri cujuscunque componi ex quadratis singularum partium, & factis ex duplo partis cujuslibet in omnes ipsa sinisteriores: ut adeo theorema unum compositioni omnium numerorum quadratorum sufficiat.

SCHOLION III.

266. *Sit radix* 346: *sumatur* 340 *pro parte una & 6 pro altera; erit* (§. 261.).

340+6	
340+6	
36	*Quadratum partis III.*
2040 2040	*Facta ex parte III. in I. & II. simul.*
1600	*Quadratum partis II.*
12000 12000	*Facta ex I. in II.*
90000	*Quadratum partis I.*
119716	*Quadratum totius.*

COROLLARIUM III.

267. Quonam in loco singula producta terminentur, ex corollario primo & ejus scholio intelligitur (§. 263. 264.). Habenda nimirum est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur, ut justum nanciscantur locum (§. 49.).

SCHOLION IV.

268. *Extractio radicis quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi quadratis per theorema præsens componendis operam prius impenderis,*

PROBLEMA XXVII.

269. *Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.*

Res. & Dem. 1. Nnmerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes radicis, quot classes habentur (§. 265. 267.). Notandum vero, quod classi finistimæ interdum nonnisi nota unica relinquatur.

2. Jam cum in classe finistima reperiatur quadratum notæ finistimæ radicis (§. *cit.*); in Tabula radicum (§. 275.) quæratur numerus quadratus ei, qui classem finistimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipso subtrahatur; radix vero ejus post lunulam scribatur.

3. Quoti inventi duplum ponatur sub nota finistima classis subsequentis & inde porro finistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Investigetur novus quo-

quotus *per abacum Pythagoricum* (§. 109.), inventuſque poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda radicis (§. 261. 210.).

4. Idem quotus ponatur ſub nota dextima illius claſſis & factum ex numero ſubſcripto integro in diviſorem (§. 163.) ſubducatur, ut in diviſione moris eſt.

5. Quodſi operatio juxta regulam tertiam & quartam in reliquis claſſibus iteretur; prodibit radix quæſita (§. 265. 267.).

E. gr.

11	56	(34
9	: :	
2	56	
	64	
2	56	
	0	

11	97	16	(346
9	: :	: :	
2	97	: :	
	64	: :	
2	56	: :	
	41	16	
	6	86	
	41	16	
		0	

PROBLEMA XXVIII.

270. *Radicem quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator eſt numerus quadratus.*

Reſ. & Dem. Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239.); quadratum autem ex ductu ejuſdem numeri in ſeipſum enaſcitur (§. 246.); radicem quadratam extracturus eam ſigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita radix quadrata ex $\frac{4}{9}$ eſt $\frac{2}{3}$, ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, ſi per hunc multiplicentur & facto tanquam numeratori denominator datus ſubſcribatur (§. 224.); ſi numerus datus, qui quadratus non eſt, ad fractionem re-

ducatur, cujus denominator est quadratus & ex fractione extrahatur radix (§. 270.); quæ prodit fractio radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris quadrati radix indicat.

SCHOLION I.

272. *E. gr. Si ex* 2 *extrahenda radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc* 2 *in* 36, *ut prodeat fractio* $\frac{72}{36}$, *cujus radix* $\frac{8}{6}$ *sive* $1\frac{2}{6}$ *exhibet radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam* $\frac{1}{6}$.

COROLLARIUM II.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus eidem non nisi cyphras, 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112.); radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans numero, qui quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLION II.

274. E. gr. *Sit extrahenda radix quadrata ex* 345; *prodibit* $\frac{1857}{100}$.

```
3 | 45    (18 57/100
1 | : :
----------------
2 | 45
  (28)
  224
----------------
   2.1. | 0.0
   (3   | 68)
   1 8    25
----------------
     27.5. | 00
     (37   | 07)
     259     49
     ------------
     15      51
```

SCHOLION III.

275. *Si tabulis numerorum quadratorum pro radicibus ab* 1 *usque ad* 1000 *utaris; in iis evolvi potest numerus quadratus proxime minor eo, qui tres classes sinisteriores occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, e. gr. in nostro casu* 294. *Plures notæ una inveniuntur, si tabulæ longius extendantur.*

```
           (294 9/10
8697.5
86436
----------------
  539 | 0.0
 (58  | 89)
  530 | 01
----------------
    8   99
```

THEO-

THEOREMA LIV.

276. *Numerus cubicus radicis binomiæ componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam, & ex facto tripli quadrati partis secundæ in primam.*

Dem. Numerus cubicus prodit, si quadratum per radicem multiplicetur (§. 248.). Sed quadratum radicis binomiæ componitur ex quadratis partium & facto duplo ex parte una in alteram (§. 261.). Quare cubus componitur ex cubo partis primæ, ex triplo facto quadrati partis primæ in secundam, ex triplo facto quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex facto tripli quadrati partis primæ in secundam, & facto tripli quadrati partis secundæ in primam (§. 207.) atque ex cubo partis secundæ (§. 246. 248.). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

277. *Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit e. gr. radix 34 seu 30 + 4. erit*

30 + 4	*Radix*
16	*Quadrat. part. II.*
120	*Facta ex I. in II.*
120	
900	*Quadrat. part. I.*
64	*Cubus part. II.*
480	*Facta ex quadrat. II. in I.*
480	
3600	*Factum ex quadrat. I. in II.*
480	*Fact. ex quadrat. II. in I.*
3600	*Facta ex quadrat. I. in II.*
3600	
27000	*Cubus part. I.*
39304	*Cubus totius.*

COROLLARIUM I.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50.): numerus cubicus dextræ in loco dextimo, factum ex triplo quadrato ejus in sinistram

in

in ſecundo, factum ex triplo quadrato ſiniſtræ in dexteram in tertio, cubus denique partis ſiniſtræ in quarto loco terminatur (§. 49.).

COROLLARIUM II.

279. Si radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ dextimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod cubus quicunque componatur ex cubis ſingularum partium radicis, & ex factis tripli quadrati quarumlibet ſiniſteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex factis tripli quadrati cujuslibet dexterioris in omnes ſiniſteriores.

SCHOLION II.

280. *Sit radix 346. Sume 340 pro parte una radicis, erit 6 pars altera, conſequenter (§. 276.).*

346	
346	
90000	*Quadrat. part. I.*
12000 12000	*Facta ex I. in II.*
1600	*Quadrat. part. II.*
115600	*Quadrat. I. & II. ſimul.*
2040 2040	*Facta ex III. in I. & II. ſimul.*
36	*Quadrat. part. III.*
27000000	*Cubus part. I.*
3600000 3600000	*Facta ex quadr. I. in II.*
480000	*Fact. ex quadr. II. in I.*
3600000	*Fact. ex quadr. I in II.*
480000 480000	*Fact. ex quadr. II. in I.*
64000	*Cubus part. II.*
693600 693600	*Fact. ex quadr. I. & II. ſimul in III.*
12240	*Fact. ex quad. III. in I. & II. ſim.*
693600	*Fact. ex quadr. I. & II. ſim. in* III.
12240 12240	*Fact. ex quadr.*III. *in* I. & II. *ſimul.*
216	*Cubus part.* III.
41421736	*Cubus totius.*

Notandum ſcilicet, ſectionem numeri in duas partes arbitrariam eſſe, cumque theorema generaliter de radice utcunque in duas partes diviſa loquatur, idem quoque ad quamlibet ſectio-

ctionem applicari posse. E. gr. *numerus* 346 *non modo stante theoremate in* 340 & 6, *vel in* 300. & 46, *verum etiam in* 195 & 151, *in* 89 & 257, & *in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit*. *Ceterum idem valere in numeris quadratis, immo in genere in potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur*.

COROLLARIUM III.

281. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex corollario primo (§. 278.) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vide exemplum in schol. præc.* (§. 280.).

PROBLEMA XXIX.

282. *Ex numero dato radicem cubicam extrahere.*

Res. & Dem. 1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot classes emergunt (§. 278. 281.). Notandum vero, non repugnare, ut classi sinistimæ una, vel duæ notæ cedant.

2. In Tabula radicum (§. 257.) quæratur numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur; ejus vero radix post lunulam scribatur; est enim pars prima radicis (§. 274.).

3. Quoti inventi quadratum triplum (§. 278. 281.) scribatur sub nota sinistima classis subsequentis, & inde porro sinistrorsum si ex pluribus notis constiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars secunda radicis (§. *cit.* & §. 210.).

4. Divisor ducatur in novum quotum & productum sub eo deleto scribatur; sub nota vero media classis ejusdem terminetur factum ex triplo quadrato novi Quoti in præcedentem; sub dextima denique cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam summam collecta ex notis numeri cubici suprascriptis subtrahantur (§. *cit.*).

5.

5. Quodsi operatio per reliquas classes juxta regulam tertiam & quartam continuetur, prodibit radix quæsita (§. 275.).

E. g.	~~47~~	437	928 (362
	~~27~~		
	~~20~~	~~437~~	
Divisor (	2	7)..	
Fact. ex D. in Q.	16	2 . .	
Fac. ex 3 □ N. Q. in pr.	3	24 .	
Cubus N. Q.		216	
Summa factor.	~~19~~	~~656~~	
		~~781~~	~~928~~
Divisor (		388	8)..
Fact. ex Div. in Q. N.		777	6 . .
Fact. ex 3 □ N. Q. in pr.		4	32 .
Cubus N. Q.			8
Summa factorum		~~781~~	~~928~~
		000	000

PROBLEMA XXX.

283. *Radicem cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator cubus est.*

Res. & Dem. Eodem, quo supra (§. 270.), modo patet, radicem sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam esse.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ est $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

284. Hinc porro eodem, quo supra, (§. 271.), modo consequitur, radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, si numerus, qui cubus non est, per hujus denominatoris cubum multiplicetur & radici cubicæ ex facto extractæ tamquam numeratori denominator datus subjiciatur.

SCHOLION I.

285. E. gr. *Si ex* 12 *extrahenda radix cubica prope vera, defectu minore quam* $\frac{1}{8}$; *ducatur* 12 *in* 512 *cubum ipsius* 8, *& ex facto* 6144 *extrahatur radix cubica* 18, *erit* $\frac{18}{8}$ *seu* $2\frac{2}{8}$ *radix prope vera, cujus defectus est minor quam* $\frac{1}{8}$.

COROLLARIUM II.

286. Immo inde ulterius eodem, quo supra (§. 273.), mo-

modo fluit, radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, si 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non cubo dextrorsum pro decimis, centesimis, millesimis &c. partibus jungantur & operatio (§. 282.) continuetur.

SCHOLION II.

287. E. gr. *Sit extrahenda radix cubica ex 3; eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

```
3 ( 1 44/100
1
----------------
2. | 0.0.0
   | 3 . .
1  | 2 . .
   | 48 .
   |   64
----------------
1  | 744
----------------
      256. | 0.0.0
        58 | 8 . .
       235 | 2 . .
         6 | 72 .
           |   64
------------------
      241    984
------------------
       14    016
```

SCHOLION II.

288. *Si tabulis numerorum cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra* (§. 275.) *in extrahenda radice quadrata commendavimus.*

PROBLEMA XXXI.

289. ***Examinare extractionem radicis quadratæ ac cubicæ.***

Ref. I. Radix quadrata inventa ducatur in se ipsam & facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo radix extracta; erit numerus inventus radix quadrata dati, vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246.).

E. gr.

```
  18.57
  18.57
-------
  12999
  9285
 14856
 1857
-------
3448449
   1551
-------
3450000
```

E. gr. Radicem quadratam prope veram ex 345 supra (§. 274.) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc radicem 18. 57 in seipsam, & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta erit (§. 248.).

```
   1.44
   1.44
-------
    576
   576
  144
-------
  20736
    144
-------
  82944
 82944
20736
-------
2985984
  14016
-------
3000000
```

E. gr. Superius (§. 287.) ex 3 extracta radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc radicem 1. 44 in seipsam & factum 20736 denuo in 1. 44. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est radix 3 sex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

THEOREMA LV.

290. *Exponens rationis quadratorum est quadratum, cuborum cubus & in genere potentiarum cujuscunque gradus potentia ejusdem gradus exponentis radicum.*

Dem. Quadrata enim habent rationem duplicatam, cubi triplicatam & in genere potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum radicum (§. 259.). Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium (§. 214.), exponens vero ratio-

num

num simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ & in genere multiplicatæ quæcunque, idem sit (§. 159.); exponens rationis duplicatæ erit quadratum (§. 246.), triplicatæ cubus (§. 248.) & in genere multiplicatæ cujuscunque potentia exponentis radicum (§. 250.). *Q. e. d.*

THEOREMA LVI.

291. *Si ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum & in genere potentiæ cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione radicis per radicem integer prodire debet.*

Dem. Quotus ex divisione numeri quadrati per quadratum, cubi per cubum & in genere potentiæ cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis quadratorum, cuborum, vel in genere potentiarum similium se mutuo dividentium (§. 136.), adeoque quadratum, cubus & in genere potentia exponentis rationis radicum (§. 290.). Quare cum idem sit numerus rationalis integer, *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer quadratus, cubus vel potentia alterius gradus: cujus quoniam radix itidem rationalis integer esse debet (§. 250.); etiam exponens radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Quare si radix radicem non metitur, nec quadratum quadratum, nec cubus cubum, nec potentia quæcunque aliam similem metitur (§. 74.), consequenter fractio integro major ex istiusmodi quadratis, cubis, vel potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223.).

THEOREMA LVII.

293. *Si numeri integri non datur radix in integris, nec dabitur per fractos.*

Dem. Ponamus dari numerum fractum, qui sit radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per sei-

seipsum produci debet numerus datus (§. 250.). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239.), isque in præsente casu ad integrum irreducibilis (§. 292.). Quare cum numerus datus sit integer, *ex hypoth.* fractus ejus radix esse nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto oriantur (§. 75.): ex numeris primis in se nulla perfecta radix extrahi potest in integris (§. 256.), adeoque nec per fractos dari potest (§. 293.).

HYPOTHESIS XIII.

295. *Interdum utile est, extractionem radicis tantum indicari præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens* $\sqrt{}$ *: cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.* E. gr. $\sqrt{2}$ denotat radicem ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

296. *In Geometria, & Analysi demonstrabitur, tales radices, quæ actu dari non possunt, esse ad unitatem, ut rectam lineam ad rectam aliam, consequenter numeros (§. 10.) eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri* surdi : *quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit* (a). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari sueverunt.*

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA LVIII.

297. *SI fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

Dem.

(a) Vid. *Stifelius* in Arithm. integra lib. 2. c. 12. p. 134.

Dem. A : B = C : D (*per hypoth.* & §. 152.). Ergo AD : BC = CD : DC (§. 185.). Sed CD = DC (§. 207.). Igitur AD = BC (§. 149.). *Q. e. d.*

$$\begin{array}{l} 6:3 = 8:4 \\ \underline{4 \quad\;\; 3} \\ 24 = 24 \end{array}$$

THEOREMA LIX.

298. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales, factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

Dem. Quoniam enim A : B = B : C (*per hypoth.* & §. 156. 152.); erit AC = BB (§. 297.). Sed BB est quadratum ipsius B (§. 250.). Ergo factum extremarum AC æquatur quadrato mediæ. *Q. e. d.*

$$\begin{array}{l} 6:12 = 12:24 \\ \underline{\quad 12 \qquad\quad 6} \\ 144 = 144 \end{array}$$

THEOREMA LX.

299. *Si quantitas AD producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D fuerit æqualis alteri BC ex duabus aliis B & C eodem modo productæ; erit A : B = C : D.*

Dem. AC : AD = C : D (§. 178.). Sed AD = BC, *per hypoth.* Ergo AC : BC = C : D (§. 168.) consequenter A : B = C : D (§. 181.). *Q. e. d.*

$$\begin{array}{l} 6 \quad 8 \\ \underline{4 \quad 3} \\ 24 = 24 \\ 4:8 = 3:6 \end{array}$$

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXXII.

301. *Inter duos numeros (8. & 72.) medium proportionalem invenire.*

Res. 1. Datorum unus 72. multiplicetur per alterum 8. (§. 111.).

2. Ex facto 576. extrahatur radix quadrata 24. (§. 269.); quæ erit numerus quæsitus (§. 298.).

PROBLEMA XXXIII.

302. *Datis tribus numeris* 3. 12. 5. *quartum; aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

Res. 1. Secundus 12. ducatur in tertium 5, aut in altero casu secundus in seipsum.

2. Factum 60. dividatur per primum 3. Quotus 20. est quartus, in altero casu tertius quæsitus.

Dem. Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (§. 297. 298.). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§. 210.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

303. Data quælibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Quodsi enim *per probl. præs.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæsitæ (§. 225.).

3 — 2 — 24 E. gr. Sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam
2 cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.
48

3
48 (16
33

COROLLARIUM II.

304. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. E.gr. cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

305. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION I.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum (.) numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut e. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio millesimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *scribimus* 0.23; *loco* $5\frac{47}{10000}$.

scri-

ſcribimus 5. 0047. *Eſt vero harum fractionum non exiguus in Matheſi uſus, quas primus in condendis Tabulis ſinuum adhibuit* Johannes Regiomontanus.

SCHOLION II.

307. *Reſolutio hujus problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Uſus ejus ampliſſimus tam in vita communi, quam in ſcientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac regula nullibi eſſe utendum, niſi ubi de numerorum datorum proportione conſtiterit.* E. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, ſi aperiatur. Ponamus, intra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri debet, quanto tempore 100 congii effluant. Tres in hoc caſu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipſa experientia docet, aquam ſub initium celerius, poſtea tardius effluere, conſequenter quantitatem aquæ effluentis non eſſe tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæſtio per Regulam trium ſolvi nequit.*

SCHOLION III.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis ſuis proportionalia ſunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium ſolvit. Dato igitur pretio quantitatis cujuſdam determinatæ mercis, per Regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuſcunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio reſpondens, E. gr. pretium 3 librarum ſunt 4 thaleri, quantum eſt pretium 17 librarum? Cum ſit, ut 3 libræ ad 17 libras, ita illarum pretium (quod eſt 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:*

3 L. — 17 L. — 4 Th.

$$\begin{array}{ll} \underline{4} & \overset{2}{\cancel{68}}\ (22\tfrac{2}{3}\ \text{th.} \\ 68 & \cancel{33} \end{array}$$

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ *thaleris? Cum ſint ut 4 thaleri ad* $22\frac{2}{3}$, *ita 3 libræ ad quæſitas; harum numerus ita innoteſcit:*

4. Th. — $22\frac{2}{3}$ Th. — 3 L.

$$\begin{array}{ll} \underline{3} & \overset{2}{\cancel{68}}\ (17\ \text{L.} \\ 68 & \cancel{44} \end{array}$$

Hinc ſimul patet, quomodo Regula trium examinetur, hoc eſt, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

SCHOLION IV.

300. *Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si æqualibus articulis æqualia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa æqualia singuli absolvunt. E. gr. Intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt?*

6 F. — 360 F. — 2 H.

$$\frac{\begin{array}{r}360\\2\end{array}}{720}\qquad \begin{array}{l}\cancel{1}\\ \cancel{720}\\ \cancel{666}\end{array}\ (120\ H.$$

SCHOLION V.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, libræ in semiuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. E. gr. 3 libræ & 4 semunciæ veneunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti libræ 2? Calculus talis est*

3 L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.

$$\frac{32}{100}\ S. — \frac{32}{64}\ S. — \frac{24}{52}\ gr.$$

$$\frac{52}{128}$$

$$\frac{320}{3328}\qquad \begin{array}{l}\cancel{33}28\\ \cancel{11}00\end{array}\ (33\tfrac{28}{100}\ \text{seu}\ \tfrac{7}{25}\ gr.$$

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ grossi, ita reperies (§. 304.).

25 — 7 — 12

$$\frac{7}{84}\qquad \begin{array}{l}\cancel{2}9\\ 84\\ \cancel{2}5\end{array}\ (3\tfrac{9}{25}\ num.$$

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit, ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.

SCHOLION VI.

311. *In scriptis Arithmeticorum* Regula trium inversa *occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *usi sumus* (§. 302.), *quia scilicet termini*

mini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. E. gr. 125 *milites operi extruendo* 6 *menses impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra* 2 *absolvatur. Evidens est, quod sit, ut spatium* 2 *mensium ad spatium* 6 *mensium, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quo minore enim temporis intervallo exstruitur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:*

2 M. — *6* M. — 125 Mil.
6
750

11
750 (375 Mil.
222

SCHOLION VII.

312. *Interdum gemina Regulæ trium applicatione opus est, antequam numerus quæsitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari Regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula composita *appellatur. E. gr.* 300 *thaleri dant intra* 2 *annos usuram* 36 *thalerorum, quantam dabunt* 20000 *thaleri intra* 12 *annos. Hic per Regulam trium primum invenitur, quanta sit usura a* 20000 *expectanda intra* 2 *annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra* 12 *annos existat:*

300 Th. — 20000 Th. — *36* Us.
36
720000

1
720000 (2400 Us.
333300

2 A. — 12 A. — 2400 Us.
12
4800
24
28800

28800 (14400 Us.
222

SCHOLION VIII.

313. *Exemplis istiusmodi Regula trium semel applicata satisfacere potest. Cum enim in nostro casu bis* 300 *thaleri eandem dent usuram intra* 1 *annum, quam* 300 *intra* 2, *& duodecies* 20000 *tantam intra* 1 *annum, quanta* 20000 *intra* 12; *omissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis* 300, *id est* 600 *thaleri dant usuram (intra annum scilicet)* 36, *quantum dabunt duodecies* 20000, *id est* 240000 *thaleri (itidem intra annum?)*

600 Th. — 240000 Th. — 36 uf.

```
      36
    -------
    1440000     22
      72        8640000
    -------     6666600 (14400
    8640000
```

Posterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia sæpe prolabimur.

SCHOLION IX.

314. *Dantur & alii casus, in quibus iteratæ Regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur, quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. E. gr. Lucrum commune trium personarum est 2000 thalerorum, collatum primi 1000, secundum 500, tertii 300: Inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi	1000 Th.	
secundi	500	
tertii	300	
Summa Collatorum	1800 Th.	

1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.

```
              2 000
           ---------
            2000000
111
12222
2000000 (1111 2/18 Lucrum primi.
188800
111
```

1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.

```
        2 000
      ---------
       1000000
111
555
1000000 (555 10/18 Lucrum secundi.
188800
11
```

1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.

```
        2 000
      ---------
       600000
33
3666
600000 (333 6/18 Lucrum tertii.
188800
11
```

EXA-

EXAMEN.

$1111\frac{2}{18}$	Lucrum	primi
$555\frac{10}{18}$		secundi
$333\frac{6}{18}$		tertii
2000	Th. Lucrum commune.	

SCHOLION X.

315. *Non desunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum in Medicina aut artibus aliis ex data ratione, quam pondera miscibilium inter se habent, inveniuntur pondera miscibilium requisita, ut mixtum integrum sit ponderis dati. E. gr. Tria simplicia compositionem alicujus medicamenti ingrediuntur, dosis unius est* 4, *alterius* 5, *tertii* 2 *unciarum: inveniri debent doses singulorum requisitæ, ut pondus compositi sit* 8 *librarum. En calculi typum:*

Pondus {primi, secundi, tertii} simplicis 4 Unc. 5 2

Summa 11 Unc.

11 Unc. — 8 L. — 4 Unc.
16
128 Unc.
4
512

1
176
512
111
1
($46\frac{6}{11}$ Pond. simp. primi

11 Unc. — 128 Unc. — 5 Unc.
5
640

1
192
640
111
1
($58\frac{2}{11}$ Pond. simp. secund.

11 Unc. — 128 Unc. — 2 Unc.
2
256

33
256
111
1
($23\frac{3}{11}$ Pond. simp. tertii.

EXAMEN.

Pondus simplicis	primi	$46\frac{6}{11}$	Unc.
	secundi	$58\frac{2}{11}$	
	tertii	$23\frac{3}{11}$	
Pondus mixti		128	Unc. = 8 lib.

SCHOLION XI.

316. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen*

men ferunt. Ex iis utilissima commemoramus. Nimirum quoniam per Regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis (§. 302.), *primus & secundus* (§. 181.) *vel etiam primus & tertius* (§. 183.) *per eundem, si fieri potest, numerum exacte dividantur & quoti in ipsorum loca surrogentur: ceu ex subsequente apparet exemplo.*

Pretium 3 Lib. *est* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3
Fac. 21. Thal.

Pretium 14 Lib. *est* 26 Thal. *quant.* 7 lib.
7) 2 2)... 1
Fac. 13 Thal.

SCHOLION XII.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit* 1 *& alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in* Schol. 5 (§. 310.) *præscripta calculus initur; ut sequens exemplum docet.*

Pret. 1. Lib. *est* 3 th. 8. gr. 6 num. *quant.* 5. L.
5
16 th. 18. gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum, adeoque quinquies 6, grossos 2 & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur; prodibit pretium quæsitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION XIII.

318. *Si terminus primus vel secundus fuerit* 1, *& in priore casu secundus aut tertius, in posteriore primus in factores resolvi potest; integram sæpe operationem sine scriptionis subsidio mens absolvit; id quod exempla, quæ sequuntur, docent.*

Pretium 1 Libr. *est* 24 th. *quantum* 20 Libr.
4 4
6 80
6
Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *est* 18 th. *quantum* 1 libr.
3 2
4 ~~18~~ (~~6~~ ($1\frac{1}{2}$ th.
~~3~~ ~~4~~

Potest etiam numerus datus resolvi partim in factores, partim in partes componentes. E. gr. 1. *libra constat* 9 *grossis, quodnam est pretium* 35. *librarum?*

Quo-

Quoniam	1 *libra constat*		9 *grossis*
constabunt	3 *lib.*	1 *thal.*	3 *gr.*
	30 *lib.*	11 *thal.*	6 *gr.*
	5 *lib.*	1 *thal.*	21 *gr.*
	35 *lib.*	13 *thal.*	9 *gr.*

Hic nempe numerus 35, *per quem multiplicatio fieri debet, resolvitur in partes* 30 & 5, *pars vero altera* 30 *in factores* 3 & 10.

SCHOLION XIV.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit* 1, *multa compendia similia multiplicatio & divisio sine abaci Pythagorici subsidio peragenda* (§. 116. 120.), *suppeditat*. *E. gr. pretium* 9 *librarum est* 20 *thalerorum, quantum est pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium desideratum, si parti decimæ illius, id est* 2 *thaleris, addatur pars nona hujus decimæ, id est,* $\frac{2}{9}$ *unius thaleri, ut adeo inveniatur* $2\frac{2}{9}$ *thal. Item: Pretium* 5 *librarum est* 54 *thalerorum, quantum erit pretium* 1 *libræ? R. Quoniam pretium quæsitum est quinta pars dati, duplum partis decimæ pretii dati* $10\frac{4}{5}$ *thal. erit quæsitum. Item: Pretium* 1 *libræ est* 18 *grossorum, quantum erit librarum* 19? *R. Quoniam* 19=20−1. *a duplo pretii dati cyphra aucti* 360 *subducatur simplum* 18, *residuum erit pretium* 342 *grossorum quæsitum*.

SCHOLION XV.

320. *Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. E. gr. Pretium* 5 *librarum est* 30 *thalerorum, quantum erit* 4 *librarum? R. Quoniam pretium* 4 *librarum una parte quinta deficere debet a pretio* 5 *librarum; pretium datum* 30 *dividatur per* 5 & *quotus* 6 *ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum* 24. *Item: pretium* 8 *librarum est* 24 *thalerorum, quantum erit librarum* 9? *R. Quia pretium* 9 *librarum una parte octava excedit pretium* 8 *librarum, pretium datum* 24 *dividatur per* 8 & *quotus* 3 *eidem addatur, summa* 27 *erit quæsitum*.

SCHOLION XVI.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* E. gr. *Pret.* 100 libr. *est* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.

50) 2.) —
Fac.²) 15 th. 2 gr.

It: Pret. 60 libr. *est* 80 th. *quant.* 2520 lib.

60)	1	6	42
		480	6
		7	7
		Fac. 3360 thal.	

CA-

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

322. SI in ſerie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ ſecundæ ac tertiæ; eas *continue æquidifferentes* voco. Si vero in ſerie quatuor eadem fuerit differentia primæ & ſecundæ, quæ tertiæ, ac quartæ, *diſcretim æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 ſunt numeri diſcretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* Arithmetice proportionales (*& vere proportionales, de quibus ante*, Geometrice proportionales *appellari ſolent, ut ab iis diſtinguantur:*) *ſed minus proprie, nec ad mentem veterum.*

COROLLARIUM I.

324. Si termini ſemper creſcunt, in continue æquidifferentibus terminus ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia; tertius ſumma ex ſecundo & differentia: ſi decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; ſecundus aggregatum ex tertio & differentia (§. 106.).

COROLLARIUM II.

325. Similiter in diſcretim æquidifferentibus ſi termini creſcunt, ſecundus eſt aggregatum ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia: ſi vero decreſcunt, primus eſt aggregatum ex ſecundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106.).

THEOREMA LXI.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes, ſumma primi & tertii eſt medii dupla.*

Dem. Si enim termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia, tertius ex ſecundo & differentia (§.324.), adeoque ex primo & differentia dupla. Quare ſi tertio addatur primus; ſum-

4.	7.	10
	7	4
14	=	14

ſumma primi & tertii conſtabit ex primo duplo & differentia dupla. Erit adeo ſecundi dupla. *Q. e. d.*

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi termini decreſcunt.

SCHOLION.

327. *Si terminus primus ſit I, ſecundus II, tertius III, differentia D, demonſtratio ocularis erit iſtiuſmodi:*

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{II} = \mathrm{I} + D \\ & \mathrm{III} = \mathrm{II} + D \\ \hline \textit{Ergo} & \mathrm{III} = \mathrm{I} + 2D \\ \textit{Hinc} & \mathrm{III} + \mathrm{I} = 2\,\mathrm{I} + 2D \\ & \qquad = 2\,\mathrm{II}. \end{array}$$

THEOREMA LXII.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes, ſumma primi & quarti æqualis eſt ſummæ ſecundi & tertii.*

Dem. Si termini creſcunt, ſecundus componitur ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia (§. 325.). Quare ſi primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia conſtat: Si vero ſecundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter ſe æqualia (§. 88.). *Q. e. d.*

$$\begin{array}{ccc} 3 - 5 & = & 8 - 10 \\ 8 & & 3 \\ \hline 13 & = & 13 \end{array}$$

Eodem modo demonſtratio procedit, ſi conſequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus ſit I, ſecundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonſtratio ocularis erit iſtiuſmodi:*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{II} = \mathrm{I} + D & \mathrm{IV} = \mathrm{III} + D \\ \mathrm{III} \quad \mathrm{III} & \mathrm{I} \quad \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{II} + \mathrm{III} = \mathrm{III} + \mathrm{I} + D & \mathrm{IV} + \mathrm{I} = \mathrm{I} + \mathrm{III} + D \end{array}$$

PROBLEMA XXXIV.

330. *Inter duos numeros 9 & 13 medium æquidifferentem invenire.*

Reſ.

Ref. 1. Addantur numeri dati 9 & 13.

2. Summa 22 dividatur bifariam, five per 2. Quotus 11 erit numerus quæfitus (§. 326.).

PROBLEMA XXXV.

331. *Datis tribus numeris* 8, 5, 9, *quartum æquidifferentem invenire.*

Ref. 1. Numerus fecundus 5 addatur tertio 9.

2. A fumma 14 fubtrahatur primus 8. Refiduus 6 eft quartus quæfitus. (§. 328.).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

332. SEries quantitatum juxta eandem rationem crefcentium vel decrefcentium vocatur *Progreffio Geometrica*. E. gr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128, vel 729. 243. 81. 27. 9. 3. 1.

DEFINITIO LXIII.

333. Series quantitatum fecundum eandem differentiam crefcentium vel decrefcentium dicitur *Progreffio Arithmetica*. E. gr. 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30 vel 32. 28. 24. 20. 16. 12. 8. 4.

DEFINITIO LXIV.

334. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus fubfcribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*: *Stifelius* in Arithmetica fua (*a*) *Exponentes* vocat. E. gr. fint duæ progreffiones:

Geom.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.
Arith.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.

erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus fexti 32; 7 logarithmus octavi 128 &c.

Co-

(a) Lib. 3. c. 5. p. 249. b.

COROLLARIUM I.

335. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

COROLLARIUM II.

336. Cumque in progressione geometrica ab unitate incipiente, termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 250. 332.), si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato, logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 251.). E. gr. 2 est dignitas prima, ejusque exponens 1; *64* dignitas sexta, ejusque exponens *6*.

THEOREMA LXIII.

337. *Si Logarithmus unitatis sit* o; *erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

Dem. Est enim ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. *66.*). Quare logarithmus facti est æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334.), adeoque differentia inter logarithmum unitatis & summam logarithmorum efficientium (§. 331.). Sed logarithmus unitatis est o, *per hypoth.* Ergo summa ex logarithmis efficientium est logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

338. Cum factores quadrati sint inter se æquales, hoc est, quadratum sit factum ex radice in seipsam (§. 24*6.*); logarithmus quadrati est duplus logarithmi radicis.

COROLLARIUM II.

339. Eodem modo patet, logarithmum cubi esse triplum (§. 248.); biquadrati quadruplum; potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi radicis (§. 250.).

COROLLARIUM III.

340. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus radicis ad logarithmum potentiæ, seu ipsius dignitatis (§. 251. 255.).

COROLLARIUM IV.

341. Quare logarithmus potentiæ prodit, si logarithmum radicis multiplices per exponentem ejus (§. *65.*); adeoque logarithmus radicis habetur, si logarithmus dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLION.

342. *E. gr. 3 summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus radicis quadratæ 8 est dimidius logarithmi 6 quadrati 64, & 2 logarithmus radicis cubicæ 4 est subtriplus logarithmi 6 cubi 64.*

THEOREMA LXIV.

243. *Si logarithmus unitatis est 0, erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum divisoris & dividendi.*

Dem. Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. *69.*). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334.); adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331.). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

344. *E. gr. 2 differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.*

SCHOLION II.

345. *Progressiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recensitas recenset, atque varios eorum usus monstrat* Stifelius [a]*: qui tamen longe cedunt usui logarithmorum in Trigonometria a* Justo Brygio *primum reperto* [b]*, sed a* Johanne Nepero *supra laudato primum ostenso* [c].

PROBLEMA XXXVI.

346. *Numeri cujuscunque logarithmum invenire ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus construere.*

Res. 1. Quoniam 1. 10. 100. 1000. 10000 &c. Progres-

(a) In Arithmet. lib. 1. c. 4. p. 35. & seqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50.

(b) *Keplerus* in Tabulis Rudolphinis c. 3. f. 11.

(c) In Mirifici Logarithmorum Canonis descriptione.

gressionem Geometricam constituunt (§.332.); eorum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in Progressione Arithmetica progredientes (§. 334.). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur 0. 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000 &c.

2. Equidem manifestum est, (§. 334.) numerorum, qui in scala progressionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen veris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum esse logarithmum novenarii seu 9. Inter 1.0000000 & 10. 0000000 quæratur medius proportionalis C (§. 301.) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1. 00000000 medius æquidifferens (§. 330.), qui erit logarithmus ipsius C (§. 334.), hoc est, numeri ternarium superantis $\frac{1622777}{10000000}$ adeoque a novenario multum distantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur 9.0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305.): qui cum a novenario ne unica quidem particula millionesima differat: ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quærantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0. 9542425 1.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2 & ita porro. CAL-

CALCULI TYPUS.

	Num. medii proportional.	Logarithmi.		Num. medii proportional.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9.0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421889
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	9.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95442253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim

4. Enimvero non opus est, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore investigentur: compositi enim cum per alios numeros dividi possint (§. 76.), adeoque & ex aliis se mutuo multiplicantibus (§. 212.) oriantur, eorum logarithmi *per Theor. 63. & 64.* (§. 337. *& seqq.*) inveniuntur. E. gr. si logarithmus numeri 9 bisecetur, prodit logarithmus 0. 47712125 numeri 3 (§. 338.).

COROLLARIUM.

347. Characteristica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10 est 0, pro numeris a 10 ad 100 est 1, pro numeris a 100 ad 1000 est 2 &c.

SCHOLION.

348. *Canonem Logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 usque ad* 20000 *& a* 90000 *ad* 100000 *primus construxit* Henricus Briggius, *Professor Geometriæ Savilianus in Academia Oxoniensi, ex consilio tamen primi inventoris* Neperi (*a*) *& methodum construendi una exposuit in sua Arithmetica Logarithmica. Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus Vlaccus (*b*). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon Logarithmorum pro numeris ab* 1 *usque ad* 10000.

PROBLEMA XXXVII.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

Res. 1. Resecentur 4 notæ ad sinistram numeri dati & earum ex canone excerpatur logarithmus.

2. Characteristicæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram residuæ (§. 347.).

3. Logarithmus inventus subtrahatur a proxime sequente in canone.

4. Inferatur: ut differentia numerorum in canone evolutorum, ad differentiam tabularem logarithmorum ipsis respondentium: ita notæ residuæ numeri dati, ad differentiam logarithmicam *per*

I *Probl.*

(a) Vide præfat. ad Arithmeticam Logarithm.
(b) In altera editione Arithmeticæ Logarithmicæ Briggii.

Probl. 33. (§. 302.) inveniendam: quæ si

5. Addatur logarithmo *per n.* 1. *&* 2 invento; summa erit logarithmus quæsitus.

E. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reseca quatuor notas 0237 & characteristicam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus respondentis 3.9655309 auge unitate. Hinc.

e logarith. numeri 9238	=	3.9655780
subduc. log. num. 9237	=	3.9655309
relinquitur differ. tabul.	- -	471
Inferatur : 10 — 471 — 5		
. 5) 2 ——		1 (§.316).
235		
Jam logarithmo		4.9655309
addatur different. inventa		235
Summa est logar. quæs.		4.9655544

S C H O L I O N.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non sunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis scrupulosi non sumus, methodus tradita sufficit, si præsertim notæ residuæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in nostro casu adeo exactum reperimus, ut accuratior in tabulis majoribus* Briggii *non occurrat.*

P R O B L E M A XXXVIII.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

Res. 1. Logarithmus numeratoris subtrahatur a logarithmo denominatoris.

2. Residuo præfigatur signum subtractionis —.

E. gr. Quærendus est logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980
Logarithmus 3 = 0.4771213
Logarithmus $\frac{3}{7}$ = —0.3679767

Dem. Cum fractio sit quotus, ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238.); logarithmus ejus est differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343.), adeoque si numerator minor denominatore, major logarithmus e minore subtrahendus, quo in casu differentia e-

va-

vadit negativa (§. 105.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

352. *Logarithmum fractionis propriæ esse negativum, si unitatis sit* 0, *jam notavit* Stifelius (*a*), *& mirum non est. Fractio enim minor unitate* (§. 221.). *Sed unitatis logarithmus est* 0 (§. 346.). *Ergo fractionis logarithmus est nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

353. Cum in fractione spuria $\frac{9}{5}$ numerator sit major denominatore; ejus logarithmus habetur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 238. 343.).

Logarithmus 9 = 0. 9542425
Logarithmus 5 = 0. 6989700

Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0. 2552725

COROLLARIUM II.

354. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem spuriam $\frac{23}{7}$ reduci possunt (§. 224.); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 = 1. 3617278
Logarithmus 7 = 0. 8450980

Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166289

PROBLEMA XXXIX.

355. *Invenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.*

Res. I. Si numerus, cui convenit logarithmus inter 1000 & 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3 (§. 347.).

1. Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas *per probl.* 33. (§. 302.) inveniendas, & numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

(a) In Arithmet. integra lib. 3. c. 5. p. 249. b.

E. gr. Quæratur numerus respondens Logarithmo 3.7589982.

Logarithmus proxime major		3.7590632
———	minor	3.7589875
	Differentia prima	757
Logarithmus datus		3.7589982
— proxime minor.		3.7589875
	Differentia secunda	107

757 — 100 — 107   107.00 (14
100   757
10700   313.0
302 8
102

Cum numerus logarithmo minori conveniens sit 5741; quæsitus erit 5741 $\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1 vel 2 (§. 347.), characteristica mutatur in 3 & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 346.).

E. gr. Quæratur numerus logarithmo 1. 9201662 conveniens. Cum in tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime minori respondet numerus 83. 21. Est itaque quæsitus 83$\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XL.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis, qui in tabulis continentur.*

Res. 1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo tabulæ minor.

2. Quæratur numerus ei respondens (§. 355.) &

3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus (§. 346.).

E.gr.

E. gr. Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui respondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000; factum 57411100 erit numerus quæsitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tædiosa evadit.*

PROBLEMA XLI.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.*

Res. 1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus tabulæ sive numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.

2. Logarithmo residuo conveniens numerus quæratur (§. 355.).

Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

E. gr. Quæratur fractio respondens Logar. defectivo — 0.3679767

Hic ex 4.0000000 subd.

relinquit 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Est ergo fractio quæsita $\frac{428571}{1000000}$.

Dem. Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 138.); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. *69.*). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 337. *66.*): Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 305.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

Res. 1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.

2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quæsiti (§. 302. 337. 343.).

E. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarith. 68	=	1. 8325089
Logarith. 3	=	0. 4771213
Aggregatum	=	2. 3096302
Logarithm. 4	=	0. 6020600
Logarith. quæs.		1. 7075702,

cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæsiti sunt a* Briggio *&* Vlacco *Logarithmi, cum* Neperus *tantum canonem utut diversæ indolis logarithmorum pro sinibus & tangentibus construxisset. Tyrones igitur hanc de Logarithmis doctrinam tantisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXV.

361. F*Ractio decimalis* est, cujus denominator est *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305.).

COROLLARIUM I.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION I.

363. E. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic seriei:* $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM II.

364. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1. 10. 100 1000. 10000. 100000. sunt 0. 1. 2. 3. 4. 5 (§. 346.); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$ scribatur 3. 42857 (§. 306.), loco denominatorum numeratoribus solitarie positis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ scribimus $3^{\circ}.4'2''8'''5''''7^{V}$.

Co-

COROLLARIUM III.

365. Quoniam apices, qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omissis, veluti in nostro casu 3.42857′′′′′.

COROLLARIUM IV.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 351.), denominator autem fractionis decimalis sit articulus primarius (§. 361.), adeoque ejus logarithmus præter characteristicam nonnisi meris cyphris constet (§. 346.): a characteristica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonnisi characteristica logarithmi denominatoris subtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION I.

367. *E. gr. Si fractio decimalis fuerit* 8.735; *logarithmus numeratoris* 8735 *est* 3. 9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3. 0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0. 9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0. 324; *logarithmus numeratoris est* 2. 5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3.0000000, *consequenter logarithmus fractionis decimalis* — 1. 5105456. *Iidem ergo sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.*

COROLLARIUM V.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (§. 366).

SCHOLION II.

369. *E. gr. In fractione decimali* 8.735′′′ *apex ultimæ notæ est* 3; *a logarithmi igitur numeri* 8735, *qui est*, 3.9412629, *characteristica* 3 *subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis* 0. 9412629. *Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphras, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphras habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO LXVI.

370. *Fractio decimalis exacta est*, quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.

E. gr. $0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit $8 : 10 = 4 : 5$ (§. 181.).

DEFINITIO LXVII.

371. *Fractio decimalis approximans* est, quæ ratio-

tionem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram, nempe vel vera minorem, vel majorem, defectu tamen vel excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.

E. gr. $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858. exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem nonnisi prope veram defectu scilicet existente minore, quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXVIII.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

E.gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0.42857 & 0.0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex ''' : nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XLIII.

373. *Fractiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.*

Res. & Dem. Quoniam fractiones decimales perinde ac numeri integri constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364.); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis, additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98. 103.), nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371.).

Vide exemplum

I. Additionis:

3. 50782'''''	0. 0638''''
0. 0003	0. 00562'''''
51. 247	7. 138
54. 75512	7. 20742

II. Subtractionis.

2. 7864''''	0. 95436'''''
0. 158	0. 08512
2. 6284	0. 86924

PROBLEMA XLIV.

374. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

Res. & Dem. Si fractiones decimales ad formam nu-

numerorum integrorum reducantur (§. 306.), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111.); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364.), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337.).

```
 0.42857
 0.0047
---------
  299999
 171428
---------
0.002014279
```

E. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc est, 0. 42857′′′′′ per 0. 0047′′′′ multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7 & deinde in 4 sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

Corollarium I.

```
 2.3576+
   0.34
---------
  94304
 70728
---------
0.801584
```

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multiplum notæ deficientis, quæ ultimam *6* proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multiplum notæ ultimæ *6* inde augeatur (§. 111.); in facto numerus locorum, in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0. 801.

Corollarium II.

```
 18.357
   6.34
---------
  73428
 55071
110142
---------
116.38338
```

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in factore incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero *6*, adeoque nonnisi duæ notæ dexteriores 11. certæ sunt. In exemplo anteriore si factor 0, 34°. ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.

Corollarium III.

```
 0.6666
    6.8
---------
  53332
 30000
---------
 453322
```

377. Quodsi nota deficiens, quæ proxime sequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando, & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat. E. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est *6*,

fa-

facto ex 6 in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex 6 in 6 adduntur 3.

SCHOLION.

378. *Casus alios brevitatis gratia prætermittimus.*

PROBLEMA XLIV.

378. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

Ref. & Dem. Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306.), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 117.); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364.), apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 343.) & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

E. gr. Si 0.002014279 dividatur per 0.0047, quotus est 0.42857 (§. 374. 210.). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3 & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0.002014279 dividatur per 0.42857, quotus est 0.0047 (§. *cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 364.), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0.0047.

COROLLARIUM I.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major, vel minor (§. 371.); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. E. gr. Si dividendus fuerit 21.3456 & divisor 3.82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5 certa est.

COROLLARIUM II.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

Co-

COROLLARIUM III.

382. Si & divisor, & dividendus fuerint fractiones approximantes, evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. E. gr. Si divisor sit 2. 5786. dividendus 3.067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia divisoris 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1. 1.

PROBLEMA XLV.

383. *Notas certas in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium accuratius determinare.*

Res. Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eædem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ.

Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18. 358 & 6.35; factum quod obtinetur 116. 57330 convenit cum superiori 116. 38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio relinquebatur (§. 376.). Similiter si in exemplo divisionis superiori (§. 382.) nunc 3068 dividas per 2. 5786, nunc 3067 per 2. 5787, quotus utrobique est 1. 1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

$$
\begin{array}{r}
18.358 \\
6.35 \\
\hline
91790 \\
55074 \\
110148 \\
\hline
116.57330
\end{array}
$$

SCHOLION.

384. *Ipsa praxis loquetur, nos subinde posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, quæ per superiora (§. 376. 382.) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.*

CAPUT X.

De Fractionibus Sexagesimalibus.

DEFINITIO LXIX.

385. FRactiones sexagesimales sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ physicales.*

SCHOLION.

386. E.gr. *Si integrum sit* 1, *fractiones istiusmodi sunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1. 60. 3600. 216000. 12960000 &c. sunt 0. 1. 2. 3. 4 &c. (§. 334.); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis perinde ac in fractionibus decimalibus tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. E. gr. $\frac{3}{1} = 3^{\circ}$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO LXX.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum* sive *scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum* sive *scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum* sive *scrupulum tertium*, & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex sive index est 1, secundi 2, tertii 3 & ita porro (§. 387.).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.*

PROBLEMA XLVI.

391. *Fractiones sexagesimales addere.*

Res. Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§. 99.).

E. gr.	35°	$46'$	$8''$	$15'''$
	17	20	15	40
		14	18	
	53	20	41	55

PRO-

PROBLEMA XLVII.

392. *Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.*

Res. Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§. 104.).

E. gr.	28°.	15'.	4".	20'''
	17	29	18	45
	10	45	45	35

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet *60*. Ita 1" = *60*''', 1' = *60*", 1° = *60*' (§. 388.)

PROBLEMA XLVIII.

393. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.*

Res. Multiplicatio fractionum sexagesimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§. 374.), nisi quod ex specie minore abjiciatur toties sexagenarius, quoties fieri potest, & tot speciei proxime majori addantur unitates, quoties sexagenarius fuit abjectus (§. 388.): id quod divisio per *60* prodit (§. 223.).

E. gr. Si multiplicandus 3° 15' 38", multiplicator 2° 18' 47". Duc singulas partes multiplicandi 1°. in 47, 2°. in 18, 3°. in 2; erit factum ex 38 in 47 = 1786 scr. quartis = 29''' 46''''. Scribuntur adeo 46 pro specie minima infra lineam cum suo apice & 29''' reservantur speciei proxime sequenti annumeranda. Cum igitur factum ex 47" in 15' = 705''''; additis 29 prodibunt 734''' = 12". 14'''. Scribuntur adeo 14 infra lineam & 12" reservantur facto proxime sequenti ex 3° in 47" addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam summam (§. 391.) collecta exhibent factum quæsitum 7° 32' 30" 38''' 46'''' aut, si prope verum quæsiveris, 7° 32' 31", cum species proxime major dimidium illius superet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

		3°	15'	38"
		2	18	47
	2	33	14	46''''
9	58	41	24	
6	31	16		
7°	32'	30"	38'''	46''''

SCHO-

SCHOLION.

394. *Ne tædia divisionis devoranda sint, constructus est* Canon hexacontadon, *qui facta in species resoluta exhibet, veluti factum ex 38 in 47 = 29. 46. Ratio constructionis ex operatione in problemate præcepta patet, modo notetur, perinde ac in abaco Pythagorico (§. 100.) factorem unum a latere, alterum in fronte canonis describi.*

PROBLEMA XLIX.

395. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales dividere.*

Res. Divisio peragitur ut in fractionibus decimalibus, nisi quod in multiplicatione quoti per divisorem tenenda sint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393.) &, ubi species dividendi prima fuerit minor specie divisoris prima, ista reducenda sit ad speciem proxime minorem & sequenti addenda, ut divisioni sit locus.

E. gr. Si $7^{\circ}\ 32'\ 30''\ 38'''\ 46''''$ dividere jubeamur per $2^{\circ}\ 18'\ 47''$; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco scribe 3°. Duc 3° in $2^{\circ}\ 18'\ 47''$ & factum $6^{\circ}\ 56'\ 21''$ subtrahe ex $7^{\circ}\ 32'\ 30''$, ut relinquatur $36'\ 9''$. Junge residuo speciem sequentem 38 & divisionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit absoluta, quemadmodum ex typo exempli liquet:

$2^{\circ}\ 18'$)	7°	$32'$	$30''$	$38'''$	$46''''$	(3° 15
$47''$)	6	56	21	: :	: :	$38''$
		36	9	38	: :	
		34	41	45	: :	
		1	27	53	: :	
	sive		87	53	46	
			87	53	46	
				0		

SCHOLION.

396. *Non absimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcumque absolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in divisione mensuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

PErexiguus est eorum numerus, qui Geometriæ pretium suum statuunt: notatione enim delusi cum Arte agrimensoria eam pessime confundunt, nec ea animo ipsorum obversatur idea, quam nomen tam augustum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis distinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in scientiis, quam in artibus ejus sit usus. Equidem ob problemata, quorum resolutionem trado, nonnisi ad locorum distantias variorum objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, còrporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheseos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam superius (a) dicta sunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ studium, a rigore in demonstrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non solent, & passim demonstro, quæ sine probatione ab aliis assumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic ausus; sed sufficit eum probari peritis, & quod majus est, me-

(a) In Commentat. de Methodo §. 52. 53.

methodum nostram præstare, ne extra Mathesin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidisse, supra etiam (a) annotavimus. Euclides & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus Leibnitius similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret, multum ejus in Geometria esse usum, ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum constructiones inter principia demonstrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inserviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea similitudinis notione uti, cum Leibnitiana clarior sit. Tyrones definitionibus evolutis neglecta demonstratione problemata solvant. Hoc labore perfuncti ex theorematum hypothesibus figuras construant & demonstrationes empyricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio (b). Tandem eo ordine elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu possunt habere attentam; difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant.

ELE-

(a) L. c. §. 52.
(b) In schol. theor. 7. §. 158.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT I.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO I.

1. G*Eometria* eſt ſcientia extenſorum quatenus terminata ſunt, hoc eſt, Linearum, Superficierum & Solidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extenſio ex ſimultanea alicujus rei per locum diffuſione oritur; ita in mente repræſentatur, dum multa in uno continuo ſimul percipimus. Hinc notio extenſionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§.9. Arith.); *ſed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, ſuperficies ac ſolida repræſentari poſſunt. Unde eſt, quod Geometria rebus plurimis applicari poſſit, ejuſque adeo quam latiſſime pateat uſus.*

DEFINITIO II.

3. *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini eſſe poſſunt. Nempe *Congruentia* eſt coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium faceſſat, vitanda eſt vocis* termini *æquivocatio: id quod in ſequentibus ſatis cavetur. A termini vero definitione conſulto abſtinemus, ne ad demonſtrationes metaphyſicas dilabamur.*

DEFINITIO III.

5. *Eundem situm habere* dicuntur, inter quæ idem extensum poni potest.

DEFINITIO IV.

6. *Punctum* est, quod quaquaversum seipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos.

COROLLARIUM I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§.3.).

COROLLARIUM II.

8. Nec ullas in eo distinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* Euclides: *Punctum est, inquit, cujus pars nulla est. Nec sine ratione punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipsa Geometrica summo cum studio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus existit.*

DEFINITIO V.

Tab.I. Fig.1. 10. *Linea* describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

11. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B; secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est (§. 6.).

COROLLARIUM II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8.), linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

SCHOLION I.

13. *Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a se distinctos*, vi Cor. 1. (§. 11.)?

SCHOLION II.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una a reliquis actu separari queat; necessarium tamen ac perutile est, ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abstractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem neglectis ceteris cognoscere jubemur, e. gr. altitudinem turris sine latitudine ac profunditate ipsius, latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem.*

DE-

DEFINITIO VI.

15. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

16. Ita e. gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, quæ ab illa ad hanc duci potest.

DEFINITIO VII.

17. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcumque est toti similis. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM I.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt nisi quantitate (§. 26. *Arith.*).

COROLLARIUM II.

19. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10.); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim diversitate hujus motus partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 24. *Arith.*), contra definitionem (§. 17.). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate ac directione, celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio, consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM I.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.* Tab. I. Fig. 1.

POSTULATUM II.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO VIII.

22. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO IX.

23. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. Hæc definitio latior praxi respondet: strictius Euclides *mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri fit æqualis: quam nos in Arithmetica partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO X.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas* & ita porro.

SCHOLION.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias præter* Willebrordum Snellium (*a*) *exponunt* Ricciolus (*b*), Malletus (*c*), Cl. Eisenschmidius (*d*) *aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium pes regius Parisinus est* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque pes integer particulas* 1440.

Pes Regius Parisinus	1440	Constantinopolitanus	3140
Rhenanus	$1391\frac{3}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{3}{4}$
Londin.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{2}{3}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION II.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit* Stevinus, *teste ipsius Geometria practica, dubio procul exemplo* Regiomontani. *Indicem autem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364. Arithm.) *quos circello inclusos nume-*

(a) In Eratosthene Batavo, lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121. & seqq.
(b) In Geogr. Reform. lib. 2. c. 7. f. 43. & seqq.
(c) Geometrie practique, lib. 1. p. 108.
(d) In disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr. Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

meris adscribit. Sed commodius Joannes Bayerus *in Logistica decimali & Stereometria logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. E. gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur, 3° 5′ 7″ 8‴. Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra sive decempedas designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica (§. 306.). Ita loco 3° 5′ 7″ 8‴ scribemus 3. 578. Admodum R. P.* Franciscus Noël *autor est* (e), *divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO XI.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. Termini superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ, secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO XII.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XIII.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.*

DEFINITIO XIV.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

(e) In Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis, c. 7. p. 104 & seqq.

DEFINITIO XV.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XVI.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVII.

Tab.I. Fig.2. 37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVIII.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XIX.

39. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§.37.).

DEFINITIO XX.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AFB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. *Euclides* arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales* (§.385. Arith.) & *apicibus suis notantur* (§. 387. Arith.). *Gradui*

dui tanquam integro seu unitati cessit 0, *minuto primo* 1, *secundo* 2, *tertio* 3 *&c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis* (§. 27.). *E. gr.* 3 *gradus*, 25 *minuta*, 16 *secunda ita scribes*: 3° 25' 16''. *Etsi autem Ægyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per* 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9. *exacte dividitur, nec minus eum fecerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrescunt, quem* 2. 3. 4. 5 *&* 6 *metiuntur; non tamen sine ratione suaserunt post* Stevinum (*a*) Oughtredus (*b*), Wallisius (*c*) *aliique, ut sepositis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilior quam sexagesimalium* (§. 364. & seqq. 393. & seqq. Arith.). *Id consilium secuti sunt* Henricus Briggius *in Canone triangulorum artificiali apud* Henricum Gellibrand *in Trigonometria Britannica*, Johannes Newton *in Astronomia pariter ac Trigonometria Britannica &* Nicolaus Mercator *in Institutionibus Astronomicis*. Stevinus (*d*) *contendit, eandem ciruli divisionem antiquitus, in* seculo sapiente, *quod adstruere conatur, obtinuisse*.

DEFINITIO XXI.

44. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Excentrici* vero, qui habent diversa. Tab. I. Fig. 2.

DEFINITIO XXII.

45. *Segmentum circuli* est pars ipsius AFBA arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo majus est; *minus* vero, quod minus est.

DEFINITIO XXIII.

46. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD atque arcu AD comprehensa.

(a) In præf. ad Tract. de Logistica decimali.
(b) Clavis Mathemat. c. 1. p. m. 2.
(c) Algebræ c. 9. f. 39. Vol. II. Oper. Math.
(d) In Cosmographia lib. 1. def. 6. f. 109. Operum Gallice editorum.

DEFINITIO XXIV.

Tab.I. Fig.3. Fig.5. Fig.4. 47. Recta HI circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit*, si huic occurrens totus intra hunc, *extus vero tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadit.

COROLLARIUM I.

48. Recta CL ex centro C ad contactum L ducta est radius circuli (§. 39.).

COROLLARIUM II.

Fig.4. 49. Circuli ergo se extus tangentes in L diversa centra C & *c* habent, adeoque eccentrici sunt (§. 44.).

DEFINITIO XXV.

Tab.I. Fig.6. 50. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas.

COROLLARIUM I.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM II.

Tab.I. Fig.7. 52. Si recta MN circulum in O secet, pars ejus ON intra circulum cadit (§. 37.).

COROLLARIUM III.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (§.37.), pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO XXVI.

Tab.I. Fig.9. 54. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *crura*; punctum concursus A *Vertex anguli*.

SCHOLION.

55. *Angulus hic vel unica littera* A *vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus litteris* BAC *indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor, veluti* x, *eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

DE-

DEFINITIO XXVII.

56. *Angulus insistere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVIII.

57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, radio prorsus arbitrario AE, intra crura ejus AC & AB descriptus. Tab. I. Fig. 9.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 41. *Geom.* & §. 132. *Arithm.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§. 41.).

DEFINITIO XXIX.

60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH. Tab. I. Fig. 10.

DEFINITIO XXX.

61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXI.

62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur, anguli AED latere uno ED in C producto. Tab. I. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 61.).

COROLLARIUM II.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§. 60.).

DEFINITIO XXXII.

65. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est. Tab. I. Fig. 11.

De-

DEFINITIO XXXIII.

Tab.I. Fig.6. 66. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major.

DEFINITIO XXXIV.

Tab.I. Fig.6. 67. *Anguli verticales* *o* & *x* sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED.

DEFINITIO XXXV.

Tab.I. Fig.12. 68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y* dicuntur *alterni*.

DEFINITIO XXXVI.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item *z* & *y*, dicuntur *oppositi*: & quidem *u* dicitur *oppositus externus*, *z* vero *oppositus internus* ipsius *y*.

DEFINITIO XXXVII.

Tab.I. Fig.13. 70. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*.

COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38. & 54.) atque arcui AD insistit (§. 56.).

DEFINITIO XXXVIII.

Tab.I. Fig.13. 72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

73. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 39.), atque arcui AD insistit (§. 41. 56.); consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57.).

De-

Definitio XXXIX.

74. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur. Tab. I. Fig. 14.

Corollarium.

75. Insistit ergo arcui HI (§. 41. 56.).

Definitio XL.

76. *Angulus contactus* HLM est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit. Tab. I. Fig. 3.

Definitio XLI.

77. *Angulus segmenti* MLH vel MLI est, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

Definitio XLII.

78. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea efficit rectum angulum. Tab. I. Fig. 11.

Corollarium.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65.) & contra.

Definitio XLIII.

80. *Linea* AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum. Tab. I. Fig. 9.

Definitio XLIV.

81. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantiam servat. Tab. I. Fig. 12.

Corollarium.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

Definitio XLV.

83. *Lineæ convergentes* TO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor. Tab. I. Fig. 15.

Definitio XLVI.

84. *Lineæ divergentes* TN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

De-

DEFINITIO XLVII.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta absolute considerata *dicuntur* punctis opponi, *si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos* (§. 191.), *qualis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel superficiem duci possunt* (§. 224.); *perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur.*

DEFINITIO XLVIII.

87. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLIX.

Tab.I. Fig.16. 88. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.

DEFINITIO L.

Tab.I. Fig.17. 89. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet.

DEFINITIO LI.

Tab.I. Fig.18. 90. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia.

DEFINITIO LII.

Tab.I. Fig.19. 91. *Triangulum rectangulum* KML est, cujus angulus unus K rectus est.

DEFINITIO LIII.

Tab.I. Fig.20. 92. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO LIV.

Tab.I. Fig.16. 93. *Triangulum acutangulum* ACB est, cujus singuli anguli sunt acuti.

DEFINITIO LV.

94. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singu-

li

Ii anguli ſunt obliqui.

DEFINITIO LVI.

95. *Hypothenuſa* ML eſt latus, in triangulo rectangulo, angulo recto K oppoſitum. Tab.I. Fig.19.

DEFINITIO LVII.

96. *Catheti* ſunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LVIII.

97. *Figura quadrilatera* eſt, cujus perimeter ex quatuor lateribus conſtat. *Rectangula* dicitur, ſi anguli ejus ſinguli fuerint recti; *obliquangula*, ſi obliqui.

DEFINITIO LIX.

98. *Quadratum* ABDC eſt figura quadrilatera, æquilatera, rectangula. Tab.I. Fig.21.

DEFINITIO LX.

99. *Rhombus* EFHG eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Tab.I. Fig.22.

DEFINITIO LXI.

100. *Rectangulum* ſive *oblongum* MLKI eſt figura quadrilatera, rectangula, latera oppoſita ML & IK, item IM & LK æqualia habens. Tab.I. Fig.23.

DEFINITIO LXII.

101. *Rhomboides* NOPQ eſt figura quadrilatera, obliquangula, latera oppoſita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens. Tab.I. Fig.24.

DEFINITIO LXIII.

102. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela.

DEFINITIO LXIV.

103. *Trapezium* RTUS eſt figura quadrilatera non parallelogramma. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera oppoſita ſunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum baſium* dici ſolet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iiſdem dicitur. Tab.I. Fig.25.

DE-

DEFINITIO LXV.

Tab.I. Fig.26. 27. 104. *Figura polygona* seu *multilatera* ABCED vel FGHKI est, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodsi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; si sex, *Hexagonum*; si septem, *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXVI.

105. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXVII.

106. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVIII.

107. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXIX.

108. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXX.

109. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO LXXI.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

DEFINITIO LXXII.

Tab.I. Fig.24. 111. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXIII.

Tab.I. Fig.19. 112. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem seu latus figuræ quodlibet pro basi assumere licet.

DE-

DEFINITIO LXXIV.

114. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositus. Tab. I. Fig. 19.

DEFINITIO LXXV.

115. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO LXXVI.

116. *Figura* ABCDE dicitur *Circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit: tuncque *Circulus* figuræ dicitur circumscriptus. Tab. VI. Fig. 107.

DEFINITIO LXXVII.

117. *Figura abcde* dicitur *Circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant, tuncque *Circulus* figuræ dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO LXXVIII.

118. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*, & in *pedes quadratos*, sicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO LXXIX.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent, adeoque similia sunt (§. 24. *Arithm.*).

CAPUT II.

De Propositionibus quibusdam Fundamentalibus.

PROBLEMA I.

121. A *Dato puncto A, ad datum punctum B lineam rectam ducere.*

Res.

Tab.I. Fig.28. *Res.* I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam E F ad puncta data A & B applicatam graphio H I, penna aut plumbagine.

II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum creta vel cerussa delibutum punctis datis A & B apprimatur &, medio digitis prehenso, sursum trahatur moxque iterum demittatur.

Tab.I. Fig.29. III. In campo

Recta designatur per baculos L K in punctis datis beneficio libellæ M ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinium aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

SCHOLION I.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebeninæ. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhærescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis & his similibus familiare vitium.*

SCHOLION II.

Tab.I. Fig.29. 123. *Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod anserinis duriores, lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero LK cuspide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra præsertim duriore defigi queant.*

SCHOLION III.

124. *Utendum vero est atramento non communi, sed Sinico; tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamsi atrius sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

PROBLEMA II.

125. *Duobus baculis in solo defixis, tertium vel plures in eadem recta cum iis infigere.*

Res. Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ra-

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in Opticis.

PROBLEMA III.

126. *Lineam rectam metiri.*

Res. Ad manus sit necesse est mensura (§. 23.). Nimirum pro lineis in charta datis abscindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25.). In campo vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes & decempedas legitime divisis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes & pedem ultimum in digitos dividi. Quodsi ergo lineam rectam metiri jubearis. Tab. I. Fig. 30.

I. In charta

1. Ponatur crus circini unum in A & eo usque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, e. gr. in 10. ponatur & notetur, quemnam pedem mensuræ alterum attingat, e. gr. 5. Erit linea AB 1° 5'.

II. In Campo

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121.) &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125.).
2. Funis cannabinus aut catena mensuram largiens ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 234.): quod perpendiculo appenso evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION I.

127. *Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem recta continuo collocatis (§. 12.). Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi atque annulorum crass-* Tab. I. Fig. 31.

 sitiem

ſitiem longitudini menſuræ non accenſeri debere. Quodſi tamen hæc ſit pars menſuræ eaque ſubdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipſo B defigi poterit. Parantur autem catenæ P Q ex filis ferreis pedalibus, earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant moleſtæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium craſſis utendum.

Tab.I. Fig.32.

SCHOLION II.

128. *Si pertica circa alterum ſui extremum tanquam centrum per quadrantem circuli elevata & per alterum rurſus demiſſa lineam metitur; craſſities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula craſſitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ, ab inæqualitate extenſionis prorſus liberæ, prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis inſtrui oportet, ut obſervantibus, quæ in ſcholio præcedente diximus, tanto minus periculi ſuperſit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION III.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diverſæ inæqualiter tendunt.* Schwenterus (*a*) *autor eſt, cum aliquando exercitiis Geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, horæ unius intervallo, ad pedes 15 rediiſſe. Ut igitur hi nævi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipſe autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus & poſtquam exſiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamſi funem iſtiuſmodi per diem integrum ſub aquis demerſum detineas. Ne autem funis humum contingat, ſuſtentaculum Z ipſi ſupponendum. Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenſo globo vel pondere plumbeo conſtat.*

Tab.I. Fig.33.

PROBLEMA IV.

130. *Data longitudine lineæ in menſura e. gr. Pariſina, invenire eandem in menſura alia, e. gr. Londinenſi, cujus ad priorem nota eſt ratio.*

Reſ. Sit e. gr. linea data 186 pedum Pariſinorum, quæritur quot eadem ſit pedum Londinenſium? Quoniam pes Londinenſis eſt ad Pariſinum ut 135 ad 144 (§. 26.); inferatur (§. 311. *Arithm.*):

135

(a) Geometr. pract. lib. 1. Tract. 1. p. 381.

$135 : 144 = 186 \quad 26784 \; (198\frac{54}{135}$ ped. Londin.

186	135) 135 : :
864	1328 :
1152	1215 :
144	1134
26784	1080
	54

PROBLEMA V.

131. *Ex dato quovis centro C dato radio quocunque AC Circulum describere.*

Ref. I. In charta Tab. II.

1. Collocetur circini crus unum in centro dato C Fig. 34. & aperiatur intervallo radii dati A C.
2. Moveatur circinus circa centrum C: ita crus alterum peripheriam defignabit (§. 37.).

II. In folo & quotiefcunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur, radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga five lignea, five ferrea.

SCHOLION I.

132. *Si fune aut filo utimur, cavendum eft, ne ftylus FA,* Tab. II. *quo peripheria defignatur e fitu perpendiculari dimoveatur:* Fig. 35. *id quod impedit filum transverfum FE, fi fuerit AF = 3, AE = 4 & FE = 5. Ratio patet per theorema Pythagoricum infra demonftrandum.* (§. 417.).

SCHOLION II.

133. *Circini, ut inftrumenta Geometrica reliqua, ex ori-* Tab. II. *chalco parantur ob durabilitatem, tractabilitatem & nitorem* Fig. 37. *hujus metalli. Cufpides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut fubtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem funt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus defcribendis infervit, crus alterum variari poteft, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum vifum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur abfoluta operatione rurfus delendi. Longitudo vel 3 vel 6 digitorum effe folet.*

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo de-

terminatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§. 119.); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 120.). Eomodo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA II.

Tab.I. Fig.2. 135. *Diameter AE dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum in duas partes æquales.*

Dem. Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§. 131.). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§. 120.). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§.170. *Arithm.*), consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§. 177. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE (producta, si opus sit, §. 21.) ex assumto in ea puncto C describi potest semicirculus.

THEOREMA III.

Tab.II. Fig.34. 137. *Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB; tum arcus DE & BA ad peripherias, tum sectores DCE & ACB ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.*

Dem. Cum circuli concentrici *per hypoth.* idem centrum C habeant (§. 44.), & arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur, radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131.); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (§. 119.), consequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (§. 120.) adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Co-

COROLLARIUM I.

138. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti sint arcus circulorum concentricorum (§. 44.); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent, consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 173. *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§. 41.); ipsi quoque eundem continere debent. Tab. II. Fig. 34.

COROLLARIUM II.

139. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 58.); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (§. 137.).

COROLLARIUM III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

THEOREMA IV.

141. *Angulorum æqualium A & a mensuræ BC & de sunt arcus similes, & contra si angulorum A & a mensuræ BC & de similes sunt, anguli æquales sunt.* Tab. II. Fig. 46.

Dem. Cum anguli cujuscunque A vel *a* quantitas æstimetur per rationem arcus BC vel *de*, ex vertice A vel *a* intra crura descripti, ad integram peripheriam (§. 58.); si A $=$ *a*, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet, consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 42.), similes sunt (§. 170. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si arcus BC & *de*, mensuræ angulorum A & *a* (§. 57.), fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 42.), eandem rationem habent (§. 170. *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æstimetur (§. 58.), eadem omnino esse debet, hoc est, anguli æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (§. 170. *Arithm.*), si fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 177. *Arithm.*).

Si ergo mensuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ vel æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 141.), & contra.

THEOREMA V.

Tab.I. Fig.11. 143. *Anguli recti KLM mensura est quadrans circuli.*

Dem. Producatur LM in N (§. 21.); erit $x = o$ (§. 65.). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 136.); angulorum x & o mensuræ AC & CB junctim sumtæ conficiunt semicirculum (§. 57.). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est circuli quadrans (§. 142.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Cum quadrans circuli 90° complectatur (§. 41.); angulus rectus est 90° (§. 59.).

COROLLARIUM II.

145. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 141.), & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM III.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66.).

THEOREMA VI.

Tab.I. Fig.6. 147. *Duo anguli deinceps positi* x & y, *aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti sunt æquales duobus rectis. Et contra si* x & y *fuerint duobus rectis æquales, CE sita est in directum ipsi ED.*

Dem. Quoniam in casu priore anguli x & y sunt deinceps positi, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§. 62.). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136.); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57.). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143.). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142.). *Quod erat unum.*

Quodsi

Quodsi x & y fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita, recta quædam alia veluti EA ipsi ED in directum jacebit (§. 21.), atque hinc $o+y$ & x erunt deinceps positi (§. 62.), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque $o+y+x=y+x$ (§. 87. *Arithm.* & §. 145. *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 84. *Arithm.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

148. Anguli, qui sunt deinceps, x & y, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, conficiunt 180° (§. 144.).

COROLLARIUM II.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

150. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum Quadrante metiri jubemur & ad eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149.).

COROLLARIUM IV.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 148.).

PROBLEMA VI.

152. *Angulum metiri.* Tab. II. Fig. 36.

Res. Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 57.), totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta

1. Centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur & radius ejus CE cruri BC admovetur.

2. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepto numerantur.

Tab.II. II. In Campo

Fig.38. 1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.

2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.

3. Gradus, quem regula instrumento indicat notatur.

SCHOLION I.

153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur*, Instrumentum transportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro, quidam nonnisi quadrante utuntur.*

SCHOLION II.

154. *Diameter transportatorii est trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero instrumentorum goniometricorum unius pedis aut ad summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In transportatoriis gradus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratissime in charta designaturi, diametrum transportatorio non multo minorem diametro ejus instrumenti quo in campo usi sunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA VII.

Tab.II. 155. *Data quantitate anguli, ipsum describere.*

Fig.36. *Res.* I. In charta

1. Ducatur recta CB &

2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.

3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gra-

gradum ultimum notetur punctum D.

4. Ducatur recta CA per C & D. Erit ACB angulus quæsitus (§. 141.).

II. In campo Tab. II. Fig. 38.

1. Collocetur instrumentum goniometricum ut in probl. præc. (§. 152.).

2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.

3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VII.

156. *Si recta AB alteram CD secet in E, anguli verticales* x *&* o, *item* y *&* E, *sunt æquales.* Tab. I. Fig. 6.

Dem. $\left.\begin{array}{l} x + y = 180^\circ \\ y + o = 180^\circ \end{array}\right\}$ (§. 148.)

Ergo $x + y = y + o$ (§. 87. *Arithm.*) adeoque $x = o$ (§. 91. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse $y = E$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

157. Quodsi in campo aut alio in casu angulum inaccessum x metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis o: hunc ejus loco metiri licet.

SCHOLION.

158. *Cum tyrones sub initium studii Mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant ratiociniis ex assumtis deductis minus adsueti; figuras per data ex hypothesibus theorematum assumta construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem explorare (§. 126. 152.) juvat: ita sensus & veritas propositionis elucescit, & animus ad demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In demonstratione magis acquiescunt tyrones, examine ratiocinationis legitimæ sic facto, non secus ac theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoriis consonæ deprehenduntur.*

THEOREMA VIII.

159. *Omnes anguli* x, y, o, E *&c. circa punctum aliquod* E *constituti sunt æquales quatuor rectis.* Tab. I. Fig. 6.

Dem.

Dem. Describatur ex puncto E vertice communi angulorum x, y, o, E &c. (§. 45.) intervallo quocunque Ea circulus (§. 131.); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas db, bc, ca, ad &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143.). Mensura ergo angulorum x, y, o, E &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 55.). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143.). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli circa idem punctum constituti junctim 360° conficiunt (§. 144.).

THEOREMA IX.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

Dem. Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3.). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§. 15. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Porro quoniam, quæ sibi mutuo congruunt, eosdem terminos habere possunt (§. 3.): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

Dem. Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 26. *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 15. *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent, consequenter sibi mutuo congruunt (§. 3.). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XI.

163. *Si linea lineæ congruit, singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

Dem. Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 3.). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta, secundum latitudinem & profunditatem ipsæmet sui termini existunt (§. 11.). Ergo si lineæ congruunt, non modo puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§. 39.), consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 3.).

COROLLARIUM II.

165. Ex uno itaque puncto eodem radio circulus nonnisi unicus describi potest.

THEOREMA XII.

166. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *æquales, & vertex unius* a *ponatur super verticem alterius* A; *præterea crus illius* ac *super crus hujus* AC: *etiam crus alterum* ab *super alterum* AB *cadet.* Tab. II. Fig. 39.

Dem. Si negas, necesse est ut *ab* vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A, radio AD, arcus D*f* (§. 131.): erit DE mensura anguli BAC, *De* vel *Df* mensura anguli *bac* (§. 39.); Ergo in casu priore *De* mensura anguli *bac* minor; in posteriore eadem mensura *Df* major foret mensura anguli BAC (§. 20. *Arithm.*). Quod utrumque cum sit absurdum (§. 142.); crus *ab* super AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

167. *Si vertex & crura anguli unius DAE supra verticem & crura alterius BAC cadant; angulus unus DAE alteri BAC æqualis est.* Tab. I. Fig. 9.

Dem. Describatur enim ex communi vertice A, in-

intra crura AD & AE, arcus DE (§. 131.): erit is mensura anguli DAE (§. 57.). Sed quoniam crura DA & DE supra crura alterius anguli AB & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli BAC (§. *cit.*), consequenter DAE = BAC (§. 142.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIV.

Tab. II. Fig. 40. 168. *Lineæ rectæ æquales sibi mutuo congruunt.*

Dem. Est $ab = AB$, *per hypoth.* Est vero etiam recta *ab* similis rectæ AB (§. 17.). Ergo *ab* ipsi AB congruit (§. 162.) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab* supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet (§. 3. 11.).

COROLLARIUM II.

170. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§. 162.), atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM III.

171. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 39.), ubi æquales fuerint, sibi mutuo congruunt (§. 168.), consequenter etiam circuli congruere debent (§. 164.), atque adeo circuli æquales sunt, quorum æquales sunt radii (§. 161.).

COROLLARIUM IV.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habenti, minor est circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (§. 20. *Arithm.*).

THEOREMA XV.

Tab. I. Fig. 2. 173. *Si centro circuli C applicetur lineæ rectæ CD, radio AC æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.*

Dem. Quoniam recta CD radio æqualis *per hypoth.* ipsi congruet (§. 168.), adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 3.). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39.). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum

mum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

174. *Anguli similes sunt etiam æquales.*

Dem. In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24. *Arithm.*). Quare cum anguli distinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 58.), si anguli sunt similes, arcus isti ad suas peripherias eandem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§. 141. *Geom.* & §. 170. *Arithm.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 141.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVII.

175. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales & latera homologa proportionalia.*

Dem. In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24. *Arithm.*). Quare cum figuræ nequeant distingui nisi per angulos & latera; illi æquales (§. 174.), hæc proportionalia esse debet (§. 154. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

176. *Sermo nobis tantum est de figuris rectilineis, quarum latera in se spectata omnia inter se similia sunt. Alias addendum foret, latera homologa debere esse insuper inter se similia & similiter posita, e. gr. arcus circulorum similes convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA XVIII.

177. *Figurarum sibi mutuo congruentium* RTUS & rtus *anguli & latera homologa inter se æqualia sunt.* Tab. I. Fig. 25.

Dem. Quoniam figuræ RTUS & *rtus* sibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini esse possunt (§. 3.). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 31.); una *rtus* supra alteram RTUS ita poni potest, ut *tu* ipsi TU, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS &c. congruat. Ergo latera homomologa sunt inter se æqualia (§. 161.). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s*, &c. vertices; TU, TR, RS, SU & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 54.). Quamobrem & anguli homologi æquales sunt (§. 167.). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

178. *Patet ex scholio præcedente, quomodo idem theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.*

CAPUT III.

De Linearum Rectarum & Triangulorum Symptomatis.

THEOREMA XIX.

Tab.II, Fig.41. 179. *SI in duobus triangulis* ABC *&* abc *fuerit* A = a, AB = ab, AC = ac; *erit etiam* BC = bc, C = c, B = b *totaque triangula æqualia & similia erunt.*

Dem. Concipiamus triangulum *abc* ita poni super alterum ABC, ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab* = AB, *a* = A & *ac* = AC, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 168.), recta *ac* super AC (§. 166.) & punctum *c* super C (§. 169.), consequenter *bc* super BC (§. 170.) cadit, adeoque △ *abc* alteri ABC congruit (§. 3.), consequenter *bc* = BC (§. 161.), *c* = C & *b* = B (§. 167.), totaque triangula æqualia & similia sunt (§. 161.). *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

Tab.II. Fig.41. 180. *Datis duobus lateribus* AB & AC *cum angulo intercepto* A *triangulum construere.*

Ref. 1. Assumpto AB pro basi, in A constituatur angulus datus (§. 155.).

2. In

2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.

3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§. 179.).

S C H O L I O N.

181. *Tyrones latera & angulos datos in numeris assumant: quod in aliquibus casibus ad demonstrationes empiricas distinctius percipiendas proderit, quas supra (§. 158.) commendavimus.*

C O R O L L A R I U M I.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

C O R O L L A R I U M II.

183. Quare si in duobus triangulis ACB & *acb* fiat *a* = A & *ab* : *ac* = AB : AC; triangula eodem modo determinantur (§. 119.), adeoque similia sunt (§. 120.) consequenter etiam *c* = C & *b* = B, *ab* : *bc* = AB : BC &c. (§. 175.).

T H E O R E M A XX.

184. *In triangulo æquicruro DFE 1°. anguli ad basin* y *&* u *sunt æquales, 2°. recta FG, quæ angulum DFE bifariam secat, basin quoque DE, & 3°. triangulum ipsum bifariam secat: immo 4°. FG ad basin DE perpendicularis.* Tab. II. Fig. 44.

Dem. Nam *o* = *x*, *per hypoth.* DF = FE (§. 89.) & FG = FG (§. 81. *Arithm.*). Ergo 1°. *y* = *u*, 2°. DG = GE, 3°. △DFG = △GFE (§. 179.). Et quia etiam anguli ad G æquales, (*per §. cit.*) 4°. FG ad DE normalis est (§. 79.). *Q. e. d.*

C O R O L L A R I U M.

185. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 88. 89.); theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

T H E O R E M A XXI.

186. *In triangulo æquilatero ABC omnes anguli sunt inter se æquales.* Tab. I. Fig. 16.

Dem. Est enim AC = CB (§. 88.). Ergo A = B (§. 184.). Est vero etiam AC = A[illegible] §.

88.). Ergo C = B (§. 184.). Quare A = C (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105.).

THEOREMA XXII.

Tab.III Fig. 55. 188. *Si trianguli A B C latus unum A C continuetur in D; erit angulus externus D A B major quolibet interno opposito B vel C.*

Dem. Concipiatur A B bifariam divisa in F, ductaque recta C F producenda in G (§.21.), donec fiat F G = F C. Quoniam G C secat A B in F (§.50.), erit $z = y$ (§. 156.), consequenter $o = x$ (§.179.). Sed D A B > o (§.84. *Arithm.*). Ergo & D A B > x (§.89. *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse D A B, aut, quod perinde est (§. 156.), ejus verticalem H A C > A C B. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIII.

Tab.III Fig.57. 189. *In omni triangulo A B C latus majus A C opponitur majori angulo B; minus A B minori C, & contra.*

Dem. Quoniam A B < A C, *per hypoth.* parti hujus A D æqualis est (§. 20. *Arithm.*). Ducatur recta B D (§.121.): erit B A D triangulum æquicrurum (§.89.), adeoque $o = x$ (§. 184.). Sed o > C (§. 188.). Ergo x > C (§. 89. *Arithm.*), consequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.*

Sit B > C, *per hypoth.* Si non sit A C > A B, erit vel A C = A B, vel A C < A B, adeoque in casu primo B = C (§. 184.), in altero B < C, *per demonst.* Sed cum utrumque hypothesin evertat, absurdum est; consequenter si angulus B > C, etiam A C > A B. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

Tab.III Fig.57. 190. *In omni triangulo A B D duo latera A D & B D simul sumta sunt tertio A B majora.*

Dem.

Dem. Producatur A D in C (§.21.), donec fiat B D = D C, adeoque A C = A D + D B (§.88. *Arithm.*): erit △ B D C æquicrurum (§. 89.) & hinc $y = C$ (§. 184.), consequenter $C < x + y$ (§.48. *Arithm.*). Quare A C seu A D + D B > A B (§. 189.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

191. *Linea recta A B est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos A & B continentur.* Tab.I. Fig.1.

Dem. Sit curva quæcunque A C B. Ducantur rectæ A C & C B: erit A C + C B > A B (§.190.). Ducantur porro rectæ A D & D C, item C E & E B: erit A D + D C > A C & C E + E B > C B (§. *cit.*), consequenter A D + D C + C E + E B > A C + C B (§.90. *Arithm.*), adeoque multo magis A D + D C + C E + E B > A B. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denuo majus ipsa A B. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant, erit ea major recta A B intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta A B minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ad B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15. 36.): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170.); via in plano brevissima est numero unica.

COROLLARIUM II.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37.).

PROBLEMA IX.

194. *Metiri distantiam duorum locorum A & B ex eodem tertio C accessorum.*

Res. 1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus. Tab.II. Fig.42.

2. Linea A C transferatur ope funis & catenæ ex

M C in

C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 125.).

3. Eadem ratione ex C in *b* transferatur linea CB.

4. Investigetur longitudo rectæ *a b* (§.126.). Dico, *a b* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

Dem. Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§.192.). Quoniam vero A*a* & B*b* sunt lineæ rectæ *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 50.).

erit $x = y$ (§. 156.).

Præterea $\left.\begin{array}{l} aC = CA \\ bC = CB \end{array}\right\}$ *per constr.*

Ergo $ba = AB$ (§. 179.). *Q. e. d.*

Tab.II. Fig.42. *Al.* 1. Collocato instrumento goniometrico in C investigetur quantitas anguli x (§.152.).

2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126.).

3. Ex datis cruribus AC & CB cum angulo intercepto x construatur juxta scalam geometricam modicam triangulum *a c b* (§. 180.).

4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis *a b* (§. 126.).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

Dem. Est enim $x = x$ & $ac : cb = AC : CB$, *per constr.* consequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 183.). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis *c b* & *a b* in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majore respondent (§. 155. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab.II. Fig.43. *Al.* 1. In mensula Geometrica in D horizontaliter collocata assumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam

2. applicata regula cum dioptris tamdiu huc illucque moveatur, donec per ea prospicienti punctum B occurrat, ducaturque in hoc regulæ situ recta *c b*.

3.Si-

3. Similiter collineatio fiat in punctum A ducaturque ca.
4. Investigetur longitudo rectarum cA & cB (§. 126.) &
5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex c in a & b.
6. Tandem in eadem mensura inveniatur longitudo ipsius ab (§. 126.).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

Dem. Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION I.

195. *Quodsi angustia spatii non permittit, ut integræ AC & BC in a & b transferantur; poterunt* aC & bC *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *&c. ipsarum AC & BC: quo in casu eodem modo ut in resolutione secunda demonstrabitur, esse* ab $=$ $\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipsius AB.* Tab. II. Fig. 42.

SCHOLION II.

196. *Notent tyrones artificium, quo demonstrationes Geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, sed & proprio Marte invenire possunt. Nimirum quicquid vel ex constructione problematis aut hypothesi theorematis, vel ex conspectu figuræ utramque repræsentantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimatur, veluti in demonstratione prima præsentis, quod* x $=$ y aC $=$ AC *&* bC $=$ BC. *Quo facto dispiciatur, cujusnam theorematum antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod ab* $=$ AB. *Cum vero maxima demonstrationum pars ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.*

THEOREMA XXVI.

197. *Si ex punctis extremis C & O rectæ alicujus radiis CP & PO, qui junctim sumti recta CO majores sunt, describantur circuli; ii se mutuo secabunt.* Tab. I. Fig. 8.

Dem. Sit CP $<$ CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20. *Arithm.*), adeoque ipsi congruit (§. 168.). Quare si ex centro C radio CP circulus

PNQP describatur (§. 131.); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173.). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus, fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, *per hypoth.* & CP = CN (§. 40.); erit NO < PO (§. 92. *Arithm.*). Sed PO = MO (§. 40. & *per demonst.*). Ergo NO < MO (§. 89. *Arithm.*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP, consequenter circuli se mutuo secant (§. 52.). *Quod erat unum.*

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP > CO, vel CP = CO. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA X.

Tab. I. Fig. 16. 198. *Super data recta AB triangulum æquilaterum construere.*

Res. 1. Ex A tanquam centro intervallo ipsius AB describatur arcus *y*, &

2. Ex B eodem intervallo alius *x* (§. 131.), qui priorem in C intersecabit (§. 197.).

3. Ducantur rectæ AC & CB: erit ACB triangulum æquilaterum.

Dem. Etenim AC = AB & BC = AB (§. 40.). Ergo AC = BC (§. 87. *Arithm.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 88.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

199. *Data basi DE & crure DF, quod illa dimidia majus sit, triangulum æquicrurum construere.*

Tab. I. Fig. 17. *Res.* 1. Ex uno basis extremo D intervallo cruris dati DF describatur arcus, &

2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131.), qui ob DF + EF > DE *per hypoth. & constr.* priorem in F intersecabit (§. 197.).

3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121.). Dico, DFE esse triangulum æquicrurum.

Dem.

Dem. DF = FE, *per constr.* Ergo EDF est triangulum æquicrurum (§. 89.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

200. Determinatis ergo basi DE & crure DF totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df* : *de* (§. 119.), consequenter similia (§. 120.), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175. & 109.).

THEOREMA XXVII.

202. *Duo semicirculi* CLE *&* DGF *nonnisi in puncto unico* G *se mutuo secare possunt.* Tab. II. Fig. 45.

Dem. Secent enim, si fieri possit, præterea se etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta intersectionum L & G rectæ AL, AG, BL, BG; puncta item intersectionum connectantur recta GL (§. 121.). Quoniam BL = BG (§. 40.); erit BGL = BLG (§. 184.). Sed BGL > AGL (§. 84. *Arithm.*): ergo BLG > AGL (§. 89. *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 40.); AGL = ALG (§. 184.). Quare BLG > ALG (§. 89. *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84. *Arithm.*); duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non nisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA XXVIII.

204. *Si in duobus triangulis* ACB *&* acb *fuerit* AC = ac, AB = ab, BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia sunt & similia.* Tab. II. Fig. 41.

Dem. Ex centro A radio AC, descriptus concipiatur arcus *y* &, ex centro B radio BC, alius *x* (§. 131.). Concipiamus porro △ *acb* ita poni supra △ ACB, ut punctum *a* super A & recta

ab ſuper AB, cadat. Quoniam $ab = AB$, *per hypoth.* punctum b ſuper B cadet (§.169.). Et quia $ac = AC$ & $bc = BC$, *per hypoth.* recta ac in arcu y & bc in arcu x terminabitur (§.173.), conſequenter punctum c ſuper C cadet (§.202.) & rectæ ac, bc rectis AC, BC congruent (§.170.). Quare $a = A$, $b = B$, $c = C$ (§.167.); cumque $\triangle acb$ alteri ACB congruat (§.3.), $\triangle acb =$ & $\backsim \triangle ACB$ (§. 161.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

Tab.I. Fig.18. 205. *Datis tribus lateribus AB, BC, CA, quorum duo ſimul ſumta AC & BC tertio AB majora ſunt, triangulum conſtruere.*

Reſ. 1. Aſſumta AB pro baſi ex A intervallo ipſius AC deſcribatur arcus y &

2. ex B intervallo ipſius BC arcus alius x (§.131.), qui ob $AC + BC > AB$ *per hypoth.* priorem in C ſecabit (§. 197.).

3. Ducantur rectæ AC & BC (§. 121.). *Ita factum eſt, quod petebatur.*

COROLLARIUM I.

206. Cum ex tribus datis rectis nonniſi unicum triangulum conſtrui poſſit (§. 204.); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

207. Quare ſi in duobus triangulis ACB & acb fiat $AC : AB = ac : ab$, $AC : BC = ac : bc$; triangula eodem modo determinantur (§. 119.), conſequenter ſimilia (§.120.), adeoque ſibi mutuo æquiangula ſunt (§. 175. 109.).

PROBLEMA XIII.

Tab.II. Fig.46. 208. *Angulo dato DAE æqualem* bac *conſtituere.*

Reſ. I. In charta

1. Ex A intervallo AC deſcribatur arcus BC, erit $AB = AC$ (§. 40.).

2. Ducatur recta $ac = AC$ & ex a intervallo ipſius AB deſcribatur arcus x, item

3. Ex *c* intervallo ipsius CB alius *y*, qui ob AB + BC > AC (§.190.), seu *ab* + *bc* > *ac* (§. 190.), priorem in *b* intersecabit (§.197.).

4. Ducatur recta *ab* (§.121.).

Dico esse *a* = A.

II. In Solo

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§.125.).

2. In *a* & *c* defigantur baculi ea lege, ut sit *ac* = AC.

3. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut pars ipsius *ab* = AB & altera *cb* = CB fiat.

4. In *b* defigatur baculus.

Dico esse *bac* = BAC.

Interdum etiam in solo uti licet modo priore.

Dem. In utroque casu *ac* = AC, *ab* = AB, *cb* = CB, *per construct.* Ergo *bac* = BAC (§. 204.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

209. *Angulum datum HIK in duas partes aequales dividere.* Tab. II. Fig. 47.

Res. 1. Ex centro I ducatur radio quocunque arcus LM (§.131.).

2. Ex L & M, intervallo dimidia LM majore, ducantur arcus se mutuo secantes in N (§. 197.).

3. Ducatur recta IN (§. 121.).

Dico esse HIN = NIK.

Dem. Est enim IL = IM (§.40.), LN = MN, *per constr.* IN = IN. Ergo HIN = NIK (§.204.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XV.

210. *Lineam rectam AB in duas partes aequales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.* Tab. II. Fig. 50.

Res. I. In charta

1. Ex A & B, intervallo dimidia AB majore, du-

cantur arcus ſe mutuo in C ſecantes (§. 197.).

2. Fiat ſimilis interſectio infra lineam in D (§. cit.).

3. Ducatur recta DC (§. 121.).

Dico eſſe AE = EB.

Dem. △ ACB eſt æquicrurum (§. 198.) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209.). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E & ad AB in E perpendicularis (§. 184.). *Q. e. d.*

Tab. II. Fig. 51. *Al.* 1. Ponatur circinus in A & eo uſque aperiatur, donec medium lineæ attingere videatur in D.

2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto

3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo.

1. Filum longitudini lineæ AB æquale complicetur, ut punctum medium inveniatur.

2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineæ datæ rurſus coextendatur.

3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum eſt, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi poſteriores equidem ſecandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius eſt uſus.*

PROBLEMA XVI.

212. *Ex puncto G in recta ML dato perpendicularem GI excitare.*

Tab. II. Fig. 49. *Reſ.* I. In charta.

1. Poſito circino in G, arbitrario intervallo reſecentur utrinque partes æquales GK & GH.

2. Ex punctis K & H, intervallo dimidia KH majore, fiat interſectio in I (§. 197.).

3. Ducatur recta GI (§. 121.), quæ erit ad ML perpendicularis.

Dem. Nam KG = GH & KI = IH, *per conſtruct.* IG = IG. Ergo anguli ad G ſunt æquales (§. 204.),

(§. 204.), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79.). *Q. e. d.*

Al. 1. Normæ, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat. Tab. II. Fig. 52.

2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121.), quæ erit ad ML perpendicularis.

Dem. Angulus normæ est rectus, *per hypoth.* sed ipsi æqualis est IGL (§. 167.): ergo IGL est itidem rectus (§. 145.), adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78.).

II. In solo

Norma utimur majore & juxta crus GI filum extenditur. Aut Tab. II. Fig. 52.

1. Filum KIH in duas partes æquales in I divisum ex punctis K & H extenditur & Tab. II. Fig. 49.

2. In I baculus defigitur, tandemque

3. KH bifariam secatur in G (§. 210.).

Dico esse GI ad KH perpendicularem.

Dem. Cum KI = HI, & KG = GH, *per construct.* GI = GI. Anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204.), consequenter IG ad ML normalis (§. 79.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

213. *Ex uno puncto D super eadem recta AB nonnisi perpendicularis unica CD erigi potest in eodem plano.* Tab. III Fig. 53.

Dem. Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78.). Et quoniam CD perpendicularis ad AD, *per hypoth.* ADC similiter rectus est (§. *cit.*), consequenter ADE = ADC (§. 145.): quod cum sit absurdum (§. 84. *Arithm.*), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XXX.

Tab.III Fig.53. 214. *Si recta CD perpendicularis ad DB continuetur in F, erit etiam DF ad DB perpendicularis.*

Dem. Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus *x* rectus est (§. 78.). Ergo *y* similiter rectus est (§.65.), consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

Tab.III Fig.54. 215. *Si duo puncta H & Q alicujus rectæ HI a duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter distent; erit HI ad MN perpendicularis.*

Dem. Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, *per hypoth.* HK = HL & QK = QL (§.192.). Est vero etiam QH = QH. Ergo *o* = *x* (§.204.), consequenter cum HI = HI, anguli ad I æquales (§. 179.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

Tab.III Fig.54. 216. *A dato puncto H ad rectam MN perpendicularem HI demittere.*

Res. I. In charta

1. Posito circino in H intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§. 197.).
3. Ducatur per Q recta HI (§. 121.).

Hæc erit ad MN perpendicularis.

Dem. Quoniam KH = LH & KQ = LQ *per construct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§. 192.). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215.). *Q. e. d.*

Tab.II. Fig.52. *Al.* 1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat.

2. Ducatur recta GI (§. 121.), quæ ad ML perpendicularis erit.

Dem.

Dem. Eadem est quæ in casu simili problematis 16. (§. 212.).

II. In solo

Aut utimur norma majore, ut in probl. *16.* aut Tab. III Fig. 54.

1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur.

2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210.). Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

Dem. Quoniam KH = LH & KI = LI, *per construct.* HI = HI; anguli ad I sunt æquales (§. 204.), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

217. *Ab uno puncto H ad eandem rectam LM non nisi unica perpendicularis HI duci potest.* Tab. III Fig. 56.

Dem. Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit *o* rectus (§. 78.). Quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit *x* quoque rectus (§. *cit.*). Est vero *o* > *x* (§. 188.), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145.), a puncto H ad LM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIII.

218. *In omni triangulo rectangulo HIK angulus nonnisi x rectus est; reliqui H & K sunt acuti.* Tab. III Fig. 56.

Dem. Angulus *y* rectus est (§. *79.*). Sed *y* > *m*, item *y* > H (§. 188.). Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§. *66.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§. 95. 189.).

THEO-

THEOREMA XXXIV.

Tab.I. Fig.20. 221. *In triangulo obtusangulo PNO angulus obtusus nonnisi unicus est, reliqui P & O sunt acuti.*

Dem. $y + x = 2$ rectis (§. 147.). Sed y, utpote obtusus *per hypoth.* major recto (§.66.). Ergo x recto minor. Quoniam vero $x > O$, item $x > P$ (§. 188.); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM II.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§.189.).

THEOREMA XXXV.

Tab.III Fig.56. 224. *Linea perpendicularis HI est brevissima omnium, quæ a puncto H ad eandem rectam LM duci possunt.*

Dem. Quoniam HI perpendicularis ad LM *per hypoth.* angulus x rectus est (§.78.), adeoque HK hypothenusa, consequenter $HK > HI$ (§. 220.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

225. Ergo distantia puncti a linea vel plano est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15.).

COROLLARIUM II.

Tab.III Fig.58. 226. Quare si linea HI fuerit ipsi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia & contra (§. 81.).

COROLLARIUM III.

227. Altitudo figuræ est perpendiculum ex vertice in basin demissum (§. 115.).

COROLLARIUM IV.

Tab.I. Fig.19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91.) & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§.78.). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 114.), adeoque MK altitudo (§. 227.).

COROLLARIUM V.

Tab.I. Fig.21. 23. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98. 100.), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§.78.). Quod si ergo latus unum

num CD vel IK sumatur pro basi; erit A vel L vertex (§. 114.), consequenter AC vel LK altitudo (§. 227.).

THEOREMA XXXVI.

230. *Si* HI *fuerit parallela & BA perpendicularis ad* KL; *erit eadem* AB *etiam perpendicularis ad* HI. Tab. III Fig. 58.

Dem. Fiat EB = BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212.); erit GE = CD (§. 225.) & E = D (§. 78. 145.), consequenter BG = BC & $y = u$ (§. 179.). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u + x = o + y$ (§. 79.). Ergo & $x = o$ (§. 91. *Arithm.*). Quare cum porro sit AB = AB; erit & $m = n$ (§. 179.), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 79.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225.), adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 81.).

THEOREMA XXXVII.

232. *Parallelæ* AB *&* EF *eidem tertiæ* CD *sunt etiam parallelæ inter se, & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.* Tab. III Fig. 59.

Dem. Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (§. 216.): erunt eædem perpendiculares ad AB & EF (§. 214. 230.). Ergo GH = KL & HI = LM (§. 226.), consequenter GH + HI = KL + LM (§. 88. *Arithm.*) hoc est, GI = KM (§. 86. 87. *Arithm.*) adeoque AB parallela ipsi EF (§. 225. 81.). *Quod erat unum.*

Posterius patet per prius.

THEOREMA XXXVIII.

233. *Si duas parallelas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G *&* H, *erunt* 1°. *anguli alterni* y *&* u *æquales;* 2°. *angulus externus* x *æquatur interno opposito* u; 3°. *duo interni oppositi* o *&* u Tab. III Fig. 60.

sunt

ſunt æquales duobus rectis.

Dem. Si recta EF ſecet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifeſta ſunt per Theorema 36 (§. 230.). Si vero oblique ſecet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 212.). Producatur GI in M & HK in L (§. 21.), donec fiat $IM = GI$ & $KL = HK$.

1°. Quoniam GI perpendicularis ad CD *per conſtruct.* erunt anguli ad I æquales (§. 79.). Porro $GI = IM$ *per conſtr.* & $HI = IH$. Ergo $HG = HM$ & $u = z$ (§. 179.). Eodem modo oſtenditur eſſe $HG = GL$ & $y = t$. Quamobrem & $GL = HM$ (§. 87. *Arithm.*). Eſt vero etiam $HK = GI$ (§. 226.) & hinc $HK + KL = GI + IM$ (§. 88. *Arithm.*), hoc eſt, $HL = GM$ (§. 86. *Arithm.*) & $GH = GH$: Unde $t + y = u + z$ (§. 204.). Cum itaque $t = y$ & $u = z$ *per demonſtrata*: erit $y + y = u + u$ (§. 15. *Arithm.*), hoc eſt $2y = 2u$, conſequenter $y = u$ (§. 94. *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2°. $x = y$ (§. 156.) & $u = y$ (*per n.* 1.). Ergo $x = u$ (§. 87. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

3°. $x + o = 180°$. (§. 148.). Sed $x = u$ (*per num.* 2.). Ergo $u + o = 180°$. (§. 15. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA XVIII.

234. *Datis duobus lateribus AB & BC cum angulo A uni eorum BC oppoſito, triangulum ABC conſtruere.*

Tab. II. Fig. 41.

Reſ. 1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208.), factaque AB uni datorum laterum æquali,

2. Ex B intervallo alterius lateris dati BC crus anguli AC interſecetur in C.

3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121.). *Sic factum eſt, quod petebatur.*

Co-

COROLLARIUM I.

235. Cum ex duobus lateribus atque angulo uni eorum opposito triangulum construi possit; iis datis, trianguli reliqui anguli & crus reliquum una determinatur. Quare si in duobus triangulis ABC & *abc* fuerit AB = *ab*, BC = *bc* & A = *a*; erit etiam AC = *ac*, B = *b*, C = *c*, & △ABC = △*abc*: nulla enim subest ratio, cur triangula ex æqualibus datis constructa inæqualia forent.

SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia esse, quæ per æqualia determinantur, seu, quod perinde est, figuras esse æquales, quæ ex æqualibus datis eodem modo construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.*

COROLLARIUM II.

237. Quodsi in duobus triangulis ABC & *abc* fuerit A = *a* & AB : BC = *ab* : *bc*, triangula eodem modo determinantur (§. 110.), adeoque similia sunt (§. 120.), consequenter etiam B = *b*, C = *c*, BC : CA = *bc* : *ca* & CA : AB = *ca* : *ab* (§. 175.).

THEOREMA XXXIX.

238. *Perpendicula KH & GI æquales parallelarum partes KG & HI intercipiunt.* Tab. III Fig. 60.

Dem. KH = GI (§. 230. 226.), *u* = *y* (§. 233.) & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 235.). *Q. e. d.*

THEOREMA XL.

239. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppositis* y *&* z *simul sumtis.* Tab. III Fig. 61.

Dem. Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y$ & $o = z$ (§. 233.), consequenter $DCA = x + o = y + z$ (§. 88. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XLI.

240. *In quovis triangulo ACB tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt æquales duobus rectis seu* 180°. Tab. III Fig. 61.

Dem. Nam $o + x = y + z$ (§. 239.). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88. *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 147.): ergo $y + z + u = 180°$ (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Co-

COROLLARIUM I.

Tab.I. Fig.19. 241. In triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, si triangulum fuerit æquicrurum (§. 184.).

COROLLARIUM II.

242. Si unus angulus est obtusus, duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66.).

COROLLARIUM III.

Tab.I. Fig.16. 243. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus est 60°, nimirum 180 : 3. (§. 186.).

COROLLARIUM IV.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91.); triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; &, si summa duorum ex 180° aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

246. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius sive sigillatim, sive junctim; etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 91. *Arith.*).

COROLLARIUM VII.

Tab.III Fig.61. 247. In quovis triangulo anguli ad basin *y* & *z* junctim sumti sunt duobus rectis minores.

COROLLARIUM VIII.

Tab.I. Fig.17. 248. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad basin *y* & *u* æquales sunt (§. 184.), si angulus ad verticem F subtrahitur a 180° & residuum bisecatur, unus angulorum æqualium *y* vel *u* prodit. Similiter si duplum anguli unius ad basin *y* a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur.

PROBLEMA XIX.

Tab.III Fig.62. 249. *In extremitate F lineæ FG perpendicularem FH excitare.*

Ref. 1. Super FG construatur △ æquilaterum FIG (§. 189.).

2. Producatur GI in H (§. 121.), donec fiat HI = GI.

3. Ducatur recta HF (§. 121.): quæ erit ad FG perpendicularis.

Dem.

Dem. Quoniam $\triangle FIG$ est æquilaterum, *per constr.* $o = 60^\circ$. & $u = 60^\circ$. (§. 243.). Ergo $y = 120^\circ$. (§. 234.), consequenter ob $FI = HI$ *per constr.* $x = 30^\circ$. (§. 248.). Cum adeo $x + o = 90^\circ$; angulus ad F rectus (§. 144.) & HF ad FG perpendicularis est (§. 78.). *Q. e. d.*

THEOREMA XLII.

250. *Si recta DE secet rectam AB in C; non alibi eandem denuo secabit.* Tab. III Fig. 63.

Dem. Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, e. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170.) atque adeo eam non secat (§. 50.): quod cum hypothesi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipsam AB secare potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

251. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc *fuerit* $AB = ab$, $A = a$ *&* $B = b$; *erit etiam* $AC = ac$, $BC = bc$, $C = c$ *&* $\triangle ACB = \&\backsim \triangle acb$. Tab. II. Fig. 41.

Dem. Concipiamus $\triangle abc$ poni supra alterum ABC, ita ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam $ab = AB$, $a = A$ & $b = B$, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169.), recta *ac* super AC & *bc* super BC (§. 167.), consequenter *c* super C (§. 250.) cadit. Cum adeo $\triangle abc$ alteri ABC congruat (§. 3.); erit $ac = AC$, $bc = BC$, $c = C$ (§. 177.) & $\triangle abc = \&\backsim \triangle ABC$. (§. 161.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit $A = a$, $B = b$ & $BC = bc$; erit etiam $C = c$ (§. 246.), consequenter $AC = ac$, $AB = ab$ & $\triangle ACB = \triangle acb$ (§. 251.).

THEOREMA XLIV.

253. *Si in triangulo DFE anguli ad basin u*

N   *& y*

& y æquales; triangulum est æquicrurum.

Tab.II. Fig.44. *Dem.* Secet FG angulum F bifariam (§. 209.); erit DF = FE (§. 252.). Est ergo △DFE æquicrurum (§. 89.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 88.).

THEOREMA XLV.

Tab.III Fig.60. 255. *Si duas lineas AB & CD secet transversa EF in G & H, ita ut vel* 1°. y = u; *vel* 2°. x = u; *vel* 3°. o + u = 180°; *erunt lineæ istæ inter se parallelæ.*

Dem. 1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212.); erit K = I (§. 78. 145.). Est vero & *y = u, per hypoth.* & HG = HG. Quare HK = GI (§. 252.), consequenter cum HK & GI sint distantiæ linearum AB & CD (§. 225.); lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 81.). *Quod erat primum.*

2. *x = u per hypoth. x = y* (§. 156.). Ergo *y = u* (§. 87. *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 1. *Quod erat secundum.*

3. *o + u* = 180°, *per hypoth.* Sed *o + x* = 180°. (§. 147.). Ergo *u = x* (§. 87. *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLVI.

Tab.III Fig.58. 256. *Si duæ lineæ EG & AB fuerint perpendiculares ad eandem tertiam HI; erunt inter se parallelæ.*

Dem. Fiat AB = EG ducaturque recta KL; erit HI ipsi KL parallela (§. 81.), consequenter EB = GA (§. 238.). Quare cum etiam sit GB = GB; erit *y = u* (§. 204.), consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255.). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLVII.

257. *Parallelæ DF & GA inter easdem parallelas FA & DG sunt æquales. Et contra, si DF & GA fuerint parallelæ & æquales; erit etiam FA ipsi DG parallela & æqualis.* Tab. III Fig. 64.

Dem. Ducatur recta DA (§. 121.): erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233.). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 251.). *Quod erat unum.*

DF = AG, *per hypoth.* & cum eædem lineæ sint parallelæ, *per hypoth.* $o = u$ (§. 233.). Quare cum etiam sit DA = DA, erit $x = y$ (§. 179.), consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255.), adeoque etiam æqualis *per num.* 1. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XX.

258. *Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere.* Tab. III Fig. 65.

Ref. I. In charta

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216.).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 212.) ∴
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 81.).

Al. 1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur.

2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet (§. 81.).

Al. 1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.

2. In V fiat $o = x$ (§. 208.).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 255.).

Al. Ex modo præcedente enatus est sequens

1. Triangulum rectangulum AVN ex ligno ebenino aut alio Indico paratum ita applicetur ad re- Tab. III Fig. 66.

ctam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.

2. Hypothenusæ ejusdem trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.

3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ, basis VN, ob $y = x$, ipsi RS parallela (§. 255.). *Q. e. d.*

Tab.III Fig.67. *Al.* Utimur interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122.) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum

1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.
2. Altera ad datum punctum V adducatur &
3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur: quæ erit ipsi RS parallela.

Dem. Ducatur obliqua linea EH (§. 121.). Quoniam EG = FH, EF = GH *per constr.* & EH = EH, erit $o = x$ (§. 204.) adeoque FH parallela ipsi EG (§. 255.). Sed AB ipsi EG & RS ipsi FH parallela, *per constr.* Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232.). *Q. e. d.*

II. In campo

Commode utimur modo primo antecedentium, vel

Tab.III Fig.68. 1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125.).

2. Ad V fiat $o = x$ (§. 208.).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 125.), ipsi RS parallela (§. 255.).

Tab.III Fig.68. *Al.* 1. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125.).

2. Fiat

2. Fiat $u = x$ (§. 208.) & TA = VK.

3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125.).

Erit MN parallela ipsi RS.

Dem. Quoniam $x = u$ *per constr.* erit TA parallela ipsi KV (§. 255.), consequenter $z = y$ (§. 233.). Est vero etiam TA = KV, *per construct.* & TV = TV. Ergo $m = n$ (§. 179.), consequenter MN parallela ipsi RS (§. 255.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo præsens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.*

THEOREMA XLVIII.

260. *Per idem punctum C eidem rectæ DE parallela nonnisi unica AB duci potest.* Tab. III Fig. 69.

Dem. Ducatur enim, si fieri potest, adhuc alia HG, priorem secans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212.); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230.), consequenter anguli CKL (§. 214.) & CLK recti (§. 78.): quod cum sit absurdum (§. 218.), per C nonnisi AB ipsi DE parallela duci potest. *Q. e. d.*

Al. Angulus NCH = NQD & NCA = NQD (§. 233.). Ergo NCH = NCA (§. 87. *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84. *Arithm.*), HG & AB non sunt simul ipsi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

261. *Si recta NO secet duas rectas alias HG & DE in C & Q ita ut duo anguli interni opposi-* Tab. III Fig. 69.

ti HCO & DQN fuerint simul sumti duobus rectis majores; lineæ GH & ED versus eam plagam divergunt.

Dem. Ducatur ACB parallela ipsi DE per C (§. 258.); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233.). Sed HCO & DQN simul sunt duobus rectis majores, *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§.90. *Arithm.*), consequenter AC intra spatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212.): erit PR = CF (§. 226.), consequenter PS > PR (§. 84. *Arithm.*) > CF (§. 89. *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CH & QD versus H & D crescunt (§. 225.), adeoque lineæ CH & QD versus eam plagam divergunt (§. 84.). *Q. e. d.*

THEOREMA L.

Tab.III Fig.69. 262. *Si duas rectas HG & DE secet transversa NO in C & Q, ita ut Anguli GCO & EQN simul sumti sint duobus rectis minores; lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt.*

Dem. Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233.), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258.): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233.). Sed GCO & EQN simul sumti sunt duobus rectis minores *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ (§. 90. *Arithm.*), consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216.); erit CF = IL (§. 226.), consequenter IK < IL (§. 84. *Arithm.*) < CF (§. 89. *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CG & QE decrescunt versus G & E (§. 225.), adeoque lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt (§. 83.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis ma-

majores (§. 147.). Quare lineæ, quæ versus unam plagam convergunt (§. 262.), versus oppositam divergunt (§. 261.).

PROBLEMA XXI.

264. *Datis recta AB & angulis adjacentibus, A & B, qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum ABC describere.* Tab. I. Fig. 18.

Dem. 1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155.).

2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250. 262.). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

265. Data ergo linea una datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

266. Quare si in duobus triangulis fiat $A = a$ & $B = b$; triangula eodem modo determinantur (§. 119.), adeoque similia sunt (§. 120.). Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM III.

267. Si in duobus triangulis fuerit $A = a$ & $B = b$; consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145.); erit etiam $C = c$ (§. 246.), hoc est, $\Delta\Delta$ ACB & *acb* sibi mutuo æquiangula (§. 109.). Quare $\Delta\Delta$ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 296.) & hinc latera homologa seu æqualibus angulis opposita proportionalia habent (§. 175.).

THEOREMA LI.

268. *Si in Triangulo ABC recta DE basi AC parallela ducatur, segmenta crurum cruribus proportionalia sunt, hoc est,* $BA : BC = BD : BE = AD : EC$ & $BA : AC = BD : DE$, *atque* $\Delta BDE \backsim \Delta BAC$. Tab. III. Fig. 70.

Dem. Quoniam DE parallela ipsi AC, erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233.), adeoque $\Delta BDE \backsim \Delta BAC$ & $BA : BC = BD : BE$ & $BA : AC = BD : DE$ (§. 267.). Ergo & $BA : BD = BC : BE$ (§. 173. *Arithm.*) consequenter $AD : BD = EC : BE$ (§. 193. *Arithm.*) seu $BD : AD = BE : EC$ (§. 169. *Arithm.*), vel denique $BD : BE =$

AD : EC (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LII.

Tab. III Fig. 71. 269. *Recta FH angulum GFE bifariam secans basin GE cruribus adjacentibus EF & GF proportionaliter secat.*

Dem. Producatur EF in I (§. 21.), donec fiat FI = GF, erit $o + x = y + u$ (§. 239.). Sed $o = x$ *per hypoth.* & $y = u$ (§. 184.), adeoque $2y = 2o$ (§. 15. *Arithm.*). Ergo $o = y$ (§. 94. *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255.). Quare EF : EH = FI : GH (§. 268.) = GF : GH (§. 168. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Est ergo & EF : GF = EH : GH (§. 173. *Arithm.*), consequenter EF + FG : EF = GE : EH (§. 190. *Arithm.*); seu EF + FG : GE = EF : EH (§. 173. *Arithm.*) hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXII.

Tab. III Fig. 72. 271. *Datis tribus lineis* AB, AC & BD, *invenire quartam proportionalem.*

Res. 1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.

2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.

3. Ducatur recta BC (§. 121.).

4. In D constituatur angulus ipsi ABC æqualis (§. 208.).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

Dem. Quoniam $o = x$, *per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 255.). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

272. Quodsi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

Co-

COROLLARIUM II.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140. *Arithm.*).

PROBLEMA XXIII.

274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.* Tab. IV. Fig. 73.

Res. 1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.

2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 198.).

3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in *b*.

4. Ducatur recta *ab*: ducantur itidem aliæ ex E in 1. 2. 3. &c.

Dico esse $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{5} AB$, $a2 = \frac{2}{5} AB$ &c.

Dem. Quoniam $Ea = Eb$ & $EC = ED$, *per construct.* erit $Ea : Eb = EC : ED$ (§. 168. *Arithm.*). Quare cum angulus E utrique triangulo ECD & E*ab* communis sit: erit $EC : CD = Ea : ab$ & $o = x$ (§. 183.). Sed $EC = CD$ *per construct.* Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x$ *per demonstr.* erit *a* 1 parallela ipsi C 1 (§. 255.), consequenter $EC : C1 = Ea : a1$ (§. 268.), hoc est, ob $EC = CD$, *per construct.* & $Ea = ab$, *per demonstr.* $CD : C1 = ab : a1$ (§. 168. *Arithm.*). Sed $C1 = \frac{1}{5} CD$, *per construct.* Ergo $a1 = \frac{1}{5} ab$ (§. 151. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse $a2 = \frac{2}{5} AB$, consequenter $12 = \frac{1}{5} AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

275. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta *ab* secabitur in eadem ratione. Est nempe $CD : C1 = ab : a1$; $CD : C2 = ab : a2$ &c. (§. 274.). Tab. IV Fig. 74.

SCHOLION.

276. *Corollarii hujus usus amplissimus est in Architectura tam civili, quam militari, præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandæ, vel contrahendæ.*

PRO-

PROBLEMA XXIV.

Tab. IV Fig. 75. 277. *Scalam Geometricam construere.*

Res. 1. Ducatur recta AF & in eam transferantur partes 10 æquales B 1, 1 2, 2 3, 3 4 &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit.

2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 249.).

3. Per puncta divisionum 1. 2. 3. 4. 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258.).

4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.

5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur (§. 121.).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B 1, 1 2, 2 3, 3 4 &c. pedes, 9 9 digitum unum, 8 8 digitos duos, 7 7 tres, 6 6 quatuor &c.

Dem. $B\,1 = 1\,2 = 2\,3$ &c. $= \frac{1}{10} AB$, *per construct.* Sed pes est decempedæ pars decima (§. 25.). Ergo cum AB sit decempeda, *per hypoth.* erunt B 1, 1 2, 2 3 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 9 9 est parallela ipsi A 9, *per construct.* $C\,9 : CA = 9\,9 : A\,9$ (§. 268.). Sed $C\,9 = \frac{1}{10} CA$, *per construct.* Ergo $9\,9 = \frac{1}{10} A\,9$ (151. *Arithm.*). Quare cum A 9 sit pes, *per demonstr.* erit 9 9 digitus (§. 25.). Eodem modo ostenditur esse 8 8 duos, 7 7 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.*

COROLLARIUM.

279. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K, erit intervallum $IK = 1^{\circ}\,4'\,5''$ & ita porro.

PRO-

PROBLEMA XXV.

280. *Invenire distantiam duorum locorum A B, quorum unus B tantum accedi potest.* Tab. IV Fig. 76.

Res. 1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta B E transferatur ex E in C; ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 125.).

2. In C constituatur angulus E C F ipsi B æqualis (§. 208.).

3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125.).

Dico esse D C = B A.

Dem. Nam B E = E C, *o* = *x*, *per construct.* & *y* = *u* (§. 156.). Ergo A B = D C (§. 251.). *Q. e. d.*

Al. 1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125.), itidemque alius utcunque in K. Tab. IV. Fig. 77

2. Ex K in L transferatur I K, in M vero K B.

3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125.).

Dico esse M N = B A.

Dem. B K = K M & I K = K L, *per construct.* *o* = *u*, (§. 156.). Ergo I B = M L & *y* = *x* (§. 179.). Quare cum sit *o* + *m* = *u* + *n* (§. 156.), & I K = K L *per constr.* erit I A = N L (§. 251.), consequenter A B = N M (§. 91. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Al. 1. Mensula Geometrica in C collocata, per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *a c* & *c b*. Tab. IV Fig. 78.

2. Quæratur distantia stationis a loco accesso A C (§. 126.), &

3. Ex Scala Geometrica in *a c* transferatur (§. 277.).

4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum *a* ipsi A immineat & per dioptras regulæ ad *a c* ap-

applicatæ baculus in prima ſtatione C defixus conſpiciatur.

5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *a b*.

6. Denique in Scala Geometrica capiatur intervallum ipſius *a b* (§. 277.).

Ita diſtantia quæſita A B innoteſcet.

Dem. Quoniam *c* = C & *a* = A (*per conſtruct.* & §. 167.), erit *a c* : *a b* = A C : A B (§. 267.), hoc eſt, iidem numeri rationes *a c* : *a b* & A C : A B indigitant (§. 149. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. IV Fig. 78. *Al.* 1. Baculo in C defixo inveſtigetur quantitas angulorum A & C (§. 152.), itemque longitudo ipſius A C (§. 126.).

2. Ope inſtrumenti tranſportatorii & ſcalæ Geometricæ conſtruatur triangulum *a c b* (§. 264.).

3. Ad ſcalam Geometricam applicetur recta *a b* (§. 277.).

Ita diſtantia A B innoteſcet.

Dem. Eadem eſt, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXVI.

281. *Metiri diſtantiam duorum locorum inacceſſorum* A B.

Tab. IV Fig. 76. *Reſ.* Sine inſtrumentis tædioſior eſt problematis reſolutio, quam ut commendari poſſit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E aſſumta rectas B E & A E inveniat (§. 280.).

2. His datis reperiet D C ipſi B A æqualem (§. 194.).

Tab. IV Fig. 79. *Al.* 1. Duabus ſtationibus in C & D electis in prima C collocetur menſula & per dioptras collineetur in D, B & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *c d*, *c b*, *c a*.

2. Quæratur diſtantia ſtationum C D (§. 126.) &

3. Ex ſcala Geometrica transferatur in *c d* (§. 279.).

4. Baculo in C defixo menſula collocetur in D ea

lege

lege, ut punctum d ipsi D, hoc est puncto, in quo defigebatur ante baculus, immineat & per dioptras regulæ ad cd applicatæ respicienti baculus in C occurrat.

5. Hinc porro collineatio fiat in A & B ducanturque rectæ da & db.

6. Tandem distantia punctorum a & b investigetur in scala Geometrica (§. 279.).

Dico esse $cd : ab = CD : AB$.

Dem. Est enim $cdb = CDB$ & $bcd = BCD$ (*per construct.* & §. 167.). Ergo $dc : cb = DC : CB$ (§. 267.). Similiter cum sit $acd = ACD$ & $adc = ADC$ (*per construct.* & §. 167.), erit $dc : ac = DC : AC$, adeoque $bc : ac = BC : AC$ (§. 196. *Arithm.*), consequenter ob $acb = ACB$ (*per construct.* & §. 167.) $ac : ab = AC : AB$ (§. 183.), & ob $dc : ac = DC : AC$, *per demonstr.* $dc : ab = DC : AB$ (§. 197. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Al. 1. Electis duabus stationibus C & D investigetur quantitas angulorum y & x, item z & w (§. 152.), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86. *Arithm.*). Tab. IV Fig. 80.

2. Quæratur porro distantia stationum CD (§. 126.) &

3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex scala Geometrica transferatur recta cd ipsi CD respondens (§. 279.).

4. Super ea ope angulorum x & D construatur triangulum bcd & ope angulorum z & C alterum acd (§. 264.).

5. Tandem in scala Geometrica investigetur distantia punctorum a & b (§. 279.).

Dico esse $ab : cd = AB : CD$.

Dem. Eadem est cum proxime præcedente.

SCHOLION I.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus*

bus stationibus reperiri distantias plurium locorum.

SCHOLION II.

Tab. IV Fig. 81. 283. *Nec minus manifestum est, mensulæ situm in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.*

PROBLEMA XXVII.

284. *Altitudinem accessam* AB *metiri.*

Tab. V. Fig. 82. *Res.* 1. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.

2. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121.).

3. Quodsi contingat, ut E & B sint cum oculo C in eadem recta; erit CA = AB; sin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit, propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus est; sin punctum superius, procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.

4. Tandem distantiam oculi C ab altitudine AB metiaris necesse est (§. 126.).

Dico esse CA = AB.

Dem. Quoniam enim AB (§. 227.) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares; inter se parallelæ sunt (§. 256.), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268.). Sed CD = DE, *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 149. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. V. Fig. 83. *Al.* 1. In distantia plurium e. gr. 30, 40 & amplius pedum defigatur perpendiculariter baculus DE & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta.

2. Investigetur distantia baculorum GF & baculi minoris ab altitudine quæsita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126.).

3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302. *Arithm.*).

4. Huic

4. Huic addatur altitudo baculi minoris F C vel pars A H.

Dico summam esse altitudinem A B.

E. gr. Sit H F = 48', G F = 20', G E = 16', F C = 5''.

$$\begin{array}{llllll} 20 & - 16 & - 48 & 5)\ 192\ (38\tfrac{2}{5} = BH \\ 5 & \ \ 4 & \ \ 4 & 15 \quad\quad 5 = FC \\ \hline & & 192 & 42 \quad 43\tfrac{2}{5} = AB \\ & & & 40 \\ \hline & & & \ \ 2 \end{array}$$

Dem. Cum H F ipsi A C parallela supponatur, sintque B A (§. 227.) & E D *per construct.* ad A C perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad H F (§. 230.); adeoque G E & B H parallelæ (§. 256.), consequenter G F : G E = H F : H B (§. 268.). *Quod erat unum.*

Porro cum H A & F C sint perpendiculares inter easdem parallelas H F & A C (*per constr.* & §. 227.); erit F C = H A (§. 226.). Quare B H + F C = B H + H A (§. 88. *Arithm.*) = B A (§. 86. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Al. 1. Mensula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipsius F E sit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q. Tab. V. Fig. 84.

2. Ducatur recta *e f* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertamur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat. Tab. IV Fig. 81.

3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *e b*.

4. Quæratur distantia stationis ab altitudine *e* C (§. 126.) &

5. Ex Scala Geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279.).

6. Ex

6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212.), quod
7. Ad Scalam Geometricam applicatum (§. 279.) partem altitudinis AC manifestat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, summam esse altitudinem AB.

Dem. Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227.) & C*e* ipsi BD parallela *per constr.* erit eadem AC perpendicularis ad CE (§. 230.). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per constr.* Ergo *bc* ipsi AC parallela (§. 256.), consequenter *ec* : *cb* = EC : CA (§. 268.).

Al. 1. Investigetur quantitas anguli *e* (§. 152.) & distantia stationis *e*C (§. 126.).
2. Super *ec* in Scala Geometrica minore assumta (§. 279.) construatur triangulum ad *c* rectangulum *cbe* (§. 264.).
3. Reliqua fiant ut ante.

Dem. Est enim *c* = C & *e* = E, *per constr.* Ergo *ec* : *cb* = EC : CB (§. 267.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam instrumenti altitudo, quam ipsa CB addenda, in altitudine accessa facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur & in instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo BC eodem modo investigari potest, quo ipsam AC invenimus.*

PROBLEMA XXVIII.

Tab.V. Fig.83. 286. *Altitudinem inaccessam AB metiri.*

Res. Sine instrumentis prolixa est operatio. Nimirum

1. Distantia stationis CA vel FH quæritur per problema 25 (§. 280.).
2. Reliqua fiunt, ut in problemate præcedente (§. 284.).

Tab.V. Fig.85. n.1. *Al.* 1. Statione in D electa mensula collocetur ut in in problemate præcedente (§. 234.).

2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.

3. Baculi in G defixi, ut sit in recta *f*C, quæratur distantia a puncto *f* (§. 126.) &

4. Ex scala Geometrica transferatur in *fe* (§. 279.)

5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus & mensula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipsi G immineat & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta *ea*.

7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 216.): quæ

8. Ad Scalam Geometricam (§. 279.) applicata prodit altitudinem AC.

9. Quodsi puncta B, E, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f* ut habeatur AB; sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducatur *eb*, perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in Scalam Geometricam translata manifestabit AB. Tab.V. Fig.85. n.2.

Dem. In △△ enim *fea* & F*e*A est angulus *afc* = AFC & *aef* = A*e*F, *per construct.* Ergo *fe*: *ea* = F*e*: *e*A (§. 267.). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (per §. 227. & constr.) adeoque inter se parallelæ (§. 256.). Quare *ae*: *ac* = A*e*: AC (§. 268.), consequenter *fe*: *ac* = F*e*: AC (§. 194. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam *ab* parallela ipsi AB *per demonstrata*: erit *ae*: *ab* = A*e*: AB (§. 268.), consequenter *fe*: *ab* = F*e*: AB (*per demonst.* & §. 194. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Al. 1. Investigetur quantitas anguli AFC in D & anguli A*e*C in G, itemque C*e*B in eadem statione G (§. 152.). Tab.V. Fig.85.

O 2. Quæ-

2. Quæratur distantia F*e* (§. 126.).
3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum *aef* (§. 279.).
4. Demittatur ex vertice *a* in basin continuatam perpendicularis *ac* (§. 216.) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi C*e*B æqualis (§. 208.) & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *ab* in *b* occurrat (§. 21.).

Dico esse *fc*: *ab* = FC: AB.

Dem. Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA LIII.

Tab.I. Fig.5. 287. *Circuli se intus tangentes sunt eccentrici.*

Dem. Quoniam circulus unus alterum intus tangit, *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47.). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 121.); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50.), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (§. 9. *Arithm.*). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL = CM & CL = CN (§. 40.), adeoque CM = CN (§. 87. *Arithm.*), quod cum sit absurdum (*per demonstr. &* §. 84. *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44.). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

Tab.V. Fig.86. 288. *Duo circuli se mutuo secantes sunt eccentrici.*

Dem. Quoniam circulus X alterum Z secat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53.). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z secabit

pe-

peripheriam illius in E (§. 50.) eritque C B pars ipsius C E (§. 9. *Arithm.*). Quodsi C ponatur centrum etiam circuli Z; erit C B = A C & C E = A C (§. 40.), adeoque C B = C E (§. 87. *Arithm.*). Quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84. *Arithm.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44.). *Q. e. d.*

THEOREMA LV.

289. *In eodem vel in æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE æquales arcus subtendunt: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

Dem. Quoniam A B = D E *per hypoth.* B C = C E & A C = C D (§. 40.); angulus A C B = D C E (§. 204.) consequenter arcus A B & D E, mensuræ angulorum A C B & D C E (§. 57.), æquales sunt (§. 142.). *Quod erat primum.*

Arcus A B & D E æquales sunt *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum A C B & D C E (§. 57.): anguli igitur isti æquales sunt (§. 142.). Quoniam porro B C = C E & A C = C D (§. 40.); erit quoque A B = D E (§. 179.). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LVI.

290. *Si in circulis inæqualibus arcus AB & ab fuerint similes, chordæ cognomines ad suos radios AC & ac eandem rationem habent.* Tab. V. Fig. 87.

Dem. Quoniam arcus A B & *ab* similes sunt, *per hypoth.* iidemque mensuræ angulorum A C B & *acb* (§. 57.); erit A C B = *acb* (§. 142.). Est vero A C : B C = *ac* : *bc* (§. 40. *Geom.* & §. 149. *Arithm.*). Ergo A B : B C = *ab* : *bc* (§. 183.). *Q. e. d.*

THEOREMA LVII.

291. *Radius C E, chordam B A bifariam secans in D, etiam arcum bifariam secat in E & ad chordam B A perpendicularis: & contra.* Tab. V. Fig. 88.

Dem. A D = D B, *per hypoth.* A C = C B (§. 40.) & D C = D C. Ergo $o = x$ & $y = u$ (§. 204.), consequenter C E ad A B perpendicularis in D (§. 79.) & arcus A E atque E B, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57.), æquales sunt (§. 142.). *Quod erat primum.*

Sint arcus A E & E B æquales *per hypoth.* cum iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 57.); erit $y = u$ (§. 142.). Est vero etiam A C = C B (§. 40.) & D C = D C. Ergo A D = D B & $o = x$ (§. 179.), consequenter C D ad A B perpendicularis (§. 79.). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius C E perpendicularis ad chordam A B in D *per hypoth.* erit $o = x$ (§. 79.). Est vero etiam A C = C B (§. 40.) & hinc $m = n$ (§. 184.), consequenter $y = u$ (§. 246.). Quare arcus A E & E B, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57.), æquales sunt (§. 142.) & A D = D B (§. 251.). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LVIII.

Tab. V. Fig. 88. 292. *Si recta NE chordam AB bifariam secet & ad eam perpendicularis fuerit; per centrum transit & tam arcum AEB, quam ANB bifariam secat.*

Dem. Quoniam N D perpendicularis ad A B, *per hypoth.* erit $o = x$ (§. 79.). Est vero etiam A D = D B *per hypoth.* & N D = N D. Ergo A N = N B (§. 179.), consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 289.). Eodem modo ostenditur, arcus A E & E B æquales esse. *Quod erat unum.*

Arcus A N = N B & A E = E B, *per demonstr.* Ergo N A + A E = N B + B E (§. 88. *Arithm.*) consequenter N E diameter circuli (§. 135.), adeoque per centrum transit (§. 39.). *Quod erat alterum.*

PRO-

PROBLEMA XXIX.

293. *Datum arcum AB in duas partes æquales dividere.*

Ref. & Dem. Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210.), hæc arcum AB bifariam secabit (§. 292.). *Q. e. f. & d.* Tab. V. Fig. 88.

PROBLEMA XXX.

294. *Per data tria puncta non in directum jacentia A, B & C circulum describere.* Tab. V. Fig. 89.

Ref. 1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.

2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121.). Dico I esse centrum circuli per A, C & B describendi (§. 131.).

Dem. Puncta A, C & B sunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 38.). Sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis & ED ipsam AC, GH vero BC bifariam secat (§. 210.). Ergo utraque per centrum transit (§. 292.). Quare cum DE & GH tantum in I se mutuo secent (§. 250.); erit I centrum circuli per puncta data A, C & B transeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

295. Assumtis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales sunt (§. 161.).

COROLLARIUM III.

297. Omne triangulum est circulo inscriptibile (§. 116.).

THEOREMA LIX.

298. *In eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE a centro C æqualiter distant: & contra.* Tab. V. Fig. 87.

Dem. Quoniam FC & CG sunt distantiæ chordarum AB & DE a centro C, *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225.): & hinc o & x recti (§. 78.), adeoque æquales (§. 145.). Porro cum AB = DE *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis, *per demonstrata*, ipsam AB; CG vero perpendicularis ad DE, *per demonstrata*, ipsam DE bisecet (§. 291.); erit FA = DG (§. 177. *Arithm.*). Quare cum etiam sit AC = CD (§. 40.); erit CF = CG (§. 235.). *Quod erat unum.*

Quodsi distantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* cum sit $o = x$ *per demonstr.* & AC = CD (§. 40.); erit AF = DG (§. 235.). Sed AF = $\frac{1}{2}$ AB & DG = $\frac{1}{2}$ DE (§. 291.). Ergo AB = DE (§. 177. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LX.

Tab. I. Fig. 7.

299. *Chordarum maxima est diameter AB.*

Dem. Est enim CO = BC & CN = CA (§. 40.). Sed CO + CN > ON (§. 190.). Ergo BC + CA, hoc est, BA > ON (§. 89. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXI.

Tab. V. Fig. 90.

300. *Si intra triangulum ACB supra ejusdem basi AB construatur triangulum ADB; erunt crura interioris AD & DB simul sumta minora cruribus exterioris AC & CB simul sumtis; angulus vero ad verticem interioris D major angulo ad verticem exterioris C.*

Dem. Quia AE < AC + CE (§. 190.); AE + EB < AC + CE + EB (§. 90. *Arithm.*), hoc est, AD + DE + EB < AC + CB (§. 86. 89. *Arithm.*). Sed DB < DE + EB (§. 190.). Ergo multo magis AD + DB < AC + CB. *Quod erat unum.*

Quoniam $o > x$ & $u > m$ (§. 188.); erit $o + x > x + m$ (§. 90. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEO-

THEOREMA LXII.

301. *Chorda arcus majoris AB major est, chorda minoris AD minor.* Tab.V. Fig.91.

Dem. EB + EC > BC (§.190.), hoc est, quia DE + EC = BC (§.40.), EB + EC > DE + EC (§.89. *Arithm.*), consequenter EB > DE (§.92. *Arithm.*). Est vero AE + DE > DA (§.190.). Ergo multo magis AE + EB > DA, hoc est, AB > DA (§.86.89. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXIII.

302. *Secantium MA, MN, ME ex eodem puncto M ductarum maxima est MA, quæ per centrum transit; reliquæ sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, MO, MB sunt tanto majores, quo magis a centro distant; minima est MB secantis MA per centrum transeuntis.* Tab.I. Fig.7.

Dem. 1. NC + MC > MN (§.190.). Sed NC = CA (§.40.). Ergo CA + CM = NC + MC (§.88. *Arithm.*) = MA (§.86. *Arithm.*) > MN (§.89. *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. MO + EO > ME (§.190.). Sed ON > EO (§.286.). Ergo multo magis MO + ON, hoc est, MN (§.86. *Arithm.*) > ME. *Quod erat secundum.*

3. CO + OM > MC (§.190.). Sed CO = CB (§.40.). Ergo OM > MB (§.90. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. CD + DM > CO + OM (§.300.). Sed CD = CO (§.40.). Ergo DM > OM (§.90. *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIV.

303. *Si ex puncto E intra circulum assumto ducantur in peripheriam rectæ EF, EB, EG &c. item EA, ED, EH &c. maxima erit EF, quæ per centrum C transit, reliquæ EB, EG &c. tanto* Tab.V. Fig.92.

to majores, quo maximæ propiores. Contra minima est E A, quæ continuata per centrum transit: reliquæ E D, E H &c. sunt tanto majores, qui ab ea remotiores.

Dem. 1. E C + B C > E B (§. 190.). Sed B C = F C (§. 40.). Ergo E C + B C = E C + F C (§. 88. *Arithm.*) hoc est, E F (§. 86. *Arithm.*) > E B (§. 89. *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. E I + G I > G E & I B + I C > B C (§. 190.), hoc est, ob B C = G I + I C (§. 40.), I B + I C > G I + I C (§. 89. *Arithm.*), adeoque I B > G I (§. 92. *Arithm.*). Quare E I + I B > E I + G I (§. 90. *Arithm.*); adeoque E I + I B, hoc est, E B (§. 86. *Arithm.*) > G E. *Quod erat alterum.*

3. E C + E D > D C (§. 190.). Sed C D = E C + E A (§. 40.). Ergo E C + E D > E C + E A (§. 89. *Arithm.*), consequenter E D > E A (§. 92. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. E K + K D > E D & K H + K C > C H (§. 190.), hoc est, ob C H = C K + K D (§. 40.), K H + K C > K C + K D (§. 98. *Arithm.*), adeoque K H > K D (§. 92. *Arithm.*). Quare E K + K H > E K + K D (§. 90. *Arithm.*), adeoque E K + K H, hoc est, E H (§. 86. *Arithm.*) > E D. *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXV.

304. *Recta I L radio C L perpendiculariter insistens tangit circulum in unico puncto L: nec inter tangentem H L & circulum alia recta duci potest.*

Tab. I. Fig. 3. *Dem.* Ducatur enim quælibet alia C K (§. 121.). Quoniam I L perpendicularis ad C L *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 78.); K erit acutus (§. 218.). Ergo C K > C L (§. 220.), consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea L I seu H I extra circulum cadit (§. 40.), & ideo circuculum tangit in unico puncto L (§. 47.). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216.); erit D rectus (§. 78.), adeoque CL > CD (§. 220.). Cadit itaque D intra circulum (§. 40.): quod cum hypothesi repugnet (§. 47.), inter tangentem & circulum per contactum transiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL & arcu ML interceptus, est quovis rectilineo minor: angulus vero semicirculi, inter radium CL & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* Euclidis *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est de eo controversia inter* Jacobum Peletarium *Cenomani in Gallia Matheseos Professorem &* Christophorum Clavium *Jesuitam Bambergensem: quorum* (a) *hic angulum contactus rectilineo heterogeneum* (§. 30. Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum sustulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem de angulo contactus & semicirculi Tractatum A. 1656. conscripsit* Wallisius, *qui legitur Operum Vol. II. f. 605. & seqq. ubi cum* Peletario, *angulum contactus omni assignabili minorem adeoque nullius magnitudinis esse defendit.*

COROLLARIUM II.

307. Circulum in eodem puncto L nonnisi unica recta HI tangere potest.

THEOREMA LXVI.

308. *Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

Dem. Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216.), hæcque utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47.), consequenter Tab. I. Fig. 3.

ter

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117. & seqq. Tom. I. Oper.

ter CK > CN (§. 84. *Arithm.*) > CL (§. 40. *Geom.* & §. 89. *Arithm.*). Est vero etiam CK < CL (§. 220.): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78.).

COROLLARIUM II.

310. Si HI circulum tangat & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216.), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXXI.

Tab.I. Fig.3. 311. *Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.*

Res. & Dem. 1. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.

2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249.), quæ circulum in L tanget (§. 308.). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA LXVII.

Tab.V. Fig.91. 312. *Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.*

Dem. Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216.): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230.), ob FH & GI, *per hypoth.* parallelas; dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291.). Quare KF — KG = KH — KI, hoc est, FG = HI (§. 91. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXVIII.

Tab.I. Fig.13. 313. *Angulus ad centrum ACD est duplus anguli ad peripheriam ABD, eidem arcui AD insistentis.*

Dem. I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258.), erit EB = DF (§. 312.), adeoque $o = x$ (§. 142.). Sed $o = y$ (§. 156.). Ergo $x = y$ (§. 87. *Arithm.*) $= \frac{1}{2}$ ACD. Porro $o = u$ (§. 233.). Ergo $u = y = \frac{1}{2}$ ACD (§. 87. *Arithm.*

Arithm.). *Quod erat primum.*

II. In casu altero $o = 2y$ & $u = 2x$ *per caf.* 1. Ergo $u + o = 2x + 2y$ (§. 88. *Arithm.*) hoc est, $ABD = \frac{1}{2} ACD$ (§. 94. *Arithm.*). *Quod erat secundum.* Tab.V. Fig.93.

III. In casu tertio $o + u = 2y + 2x$ *per caf.* 1. & $o = 2y$ *per caf.* 1. Ergo $u = 2x$ (§. 91. *Arithm.*), hoc est, $\frac{1}{2} ACD = ABD$ (§. 94. *Arithm.*). *Quod erat tertium.* Fig.94.

THEOREMA LXIX.

314. *Anguli ad peripheriam ABD mensura est arcus dimidius AD, cui insistit.* Tab.I. Fig.13.

Dem. I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70. 56.), adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72. 135.). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73.). Ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313. 142.). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Ducatur utcunque recta CD: erit arcus dimidius AD mensura anguli ACD & $\frac{1}{2}$ DB mensura ipsius DCB *per caf.* 1. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Quod erat secundum.* Tab.V. Fig.95.

III. Sit denique HIK angulus in minore segmento. Ducatur utcunque recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura anguli HIL & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK *per caf.* 1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.* Tab.V. Fig.96.

COROLLARIUM I.

315. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI vel æqualibus arcubus insistentes æquales sunt (§. 142.). Tab.I. Fig.14.

COROLLARIUM II.

316. Quare cum porro sit $o = x + u$ (§. 239.); erit anguli extra centrum mensura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistunt (§. 314.). Tab.I. Fig.14.

COROLLARIUM III.

317. Cum angulus in semicirculo ACB semicirculo insi- Tab.V. Fig.95.

stat

ſtat *per hypoth.* menſura ejus eſt circuli quadrans (§. 314.), adeoque ipſe rectus eſt (§. 143.).

COROLLARIUM IV.

Tab.V. Fig.96. 318. Cum angulus in majore ſegmento DIF arcui minori DF, quam eſt ſemicirculus, inſiſtat (§.70.); menſura ejus eſt ſemiquadrante minor (§.314.), adeoque ipſe recto minor (§. 143.), conſequenter acutus (§. 66.).

COROLLARIUM V.

Tab.V. Fig.96. 319. Non abſimili ratione liquet, angulum in minore ſegmento HIK eſſe obtuſum.

COROLLARIUM VI.

Tab.VI Fig.97. 320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239.) & anguli o menſura eſt $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314.); anguli extra peripheriam G menſura eſt differentia inter dimidium arcum concavum LM, cui inſiſtit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXII.

Tab.VI Fig.98. 321. *Normam examinare, utrum exacta ſit nec ne.*

Reſ. 1. Deſcribatur intervallo arbitrario ſemicirculus AEF &

2. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario aſſumtum rectæ AE & FE.

3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex ſuper E cadat. Hoc enim ſi fieri poteſt; erit norma exacta.

Dem. Tum enim angulus normæ LEM æqualis eſt angulo AEF (§.167.), adeoque rectus (§.317.), conſequenter norma exacta (§. 212.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXX.

Tab.VI. Fig.99. 322. *Menſura anguli minoris ſegmenti ATB eſt dimidium arcus TDB; anguli vero majoris ſegmenti BTH dimidium arcus majoris BGT.*

Dem. Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308.). Cum adeo ejus menſura ſit arcus dimidius EBT (§. 135. 143.), anguli vero BTE dimidius arcus EB (§. 314.); erit anguli ATB menſura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eo-

Eodem modo patet, cum dimidius semicirculus EGT sit mensura anguli ETH (§. 135. 143.) & dimidius arcus EB mensura anguli BTE (§. 314.), esse dimidium arcum BGT mensuram anguli BTH. *Quod erat alterum*.

COROLLARIUM I.

323. Cum anguli G mensura etiam sit dimidius arcus BDT, ipsius D vero arcus dimidius BGT (§. 314.); angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH (§. 142.).

COROLLARIUM II.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH (§. 156.). Ergo ejus mensura dimidius arcus TG (§. 322.). Est vero anguli ATB mensura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare semisumma eorumdem arcuum est mensura anguli BTF.

COROLLARIUM III.

325. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322.), consequenter anguli ipsi sunt æquales (§. 142.) & ideo LM = MN (§. 253.). Tab. VI Fig. 100

COROLLARIUM IV.

326. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus (§. 140. 243.), angulorum vero L & N junctim sumtorum arcus LN (§. 322.); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti mensura differentia arcus intercepti LN a semicirculo.

PROBLEMA XXXIII.

327. *Inter duas lineas AB & BE mediam proportionalem BD invenire*. Tab. VI Fig. 101

Res. 1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210.).

2. Ex C intervallo ipsius AC describatur semicirculus ADE (§. 136.).

3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212.).

Dico esse AB : BD = BD : BE.

Dem. Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per construct.* m & n sunt anguli recti (§. 78.).

Sed

Sed $o + x$ est itidem rectus (§. 317.) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $o = x$ (§. 246.), consequenter $y = x$ (§. *cit.*), & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

328. Cum sit AB : BD = BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302. *Arithm.*). Sit e. gr. AB = 80''', BD = 300'''; erit BE = 1125''', adeoque AB + BE = AE 1205''' seu fere 12'.

COROLLARIUM II.

329. Ex demonstratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 267.).

COROLLARIUM III.

330. Cum adeo etiam sit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis ut in resolutione problematis erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM IV.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247. *Arithm.*).

THEOREMA LXXI.

Tab. I. Fig. 14. 332. *Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erit HK : LK = KI : KM.*

Dem. Quoniam enim $x = x$ & $u = u$ (§. 315.): ideo HK : LK = KI : KM (§. 267.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXII.

Tab. VI Fig. 97. 333. *Si fuerint duæ secantes GL & GM ex eodem puncto G ductæ; erit GM : GL = GN : GO.*

Dem. Angulus x est utrique triangulo GNO & GLM communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 324.). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 314.). Quare GNO = GML (§. 142.), consequenter GM : GL = GN : GO (§. 267.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXIII.

Tab. VI Fig. 102 334. *Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ*

AD

AD & AB, quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens AD media proportionalis inter totam secantem AB & ejus portionem extra circulum AC.

Dem. Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 323.). Ergo AC: AD = AD: AB (§. 267.). *Q. e. d.*

CAPUT V.

De Figurarum descriptione.

Theorema LXXIV.

335. *In parallelogrammis latera opposita sunt æqualia, & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erunt eædem parallelogramma.* Tab. VI Fig. 103

Dem. Quoniam OPQN parallelogrammum, *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ, & ON parallela ipsi PQ (§. 102.), consequenter ducta diagonali PN erit $x = o$ & $n = m$ (§. 233.), adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 251.). *Quod erat unum.*

Quodsi OP = NQ & ON = PQ *per hypoth.* cum etiam sit NP = NP; erit $x = o$ & $n = m$ (§. 204.). *Quod erat alterum.*

Corollarium.

336. Cum in Quadrato, Oblongo, Rhombo & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§. 98. 99. 100. 101.); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus & Rhomboides parallelogramma (§. 335.).

Theorema LXXV.

337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales, anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales, anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.* Tab. VI Fig. 103

Dem.

Dem. In Parallelogrammis $ON = PQ$ & $PO = QN$ (§. 335.). Sed $PN = PN$. Ergo $\Delta NOP = \Delta NQP$ (§.204.): *Quod erat unum.*

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 103.): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 233.). *Quod erat secundum.*

Quoniam angulus $O + N = N + Q$, *per demonstrata*; erit $O = Q$ (§. 91. *Arithm.*). Similiter quoniam $Q + P = Q + N$ *per demonstrata*; erit $P = N$ (§. 91. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique $NO + PO > NP$ & $PQ + QN > PN$ (§. 190.). *Quod erat quartum.*

PROBLEMA XXXIV.

Tab.VI Fig.104 338. *Super data recta CD quadratum construere.*

Res. 1. In C erigatur perpendicularis AC (§.249.) $= CD$.

2. Ex D & A intervallo ipsius CD fiat intersectio in B (§. 197.).

3. Ducantur AB & DB.

Dem. $AC = CD = AB = BD$, *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet esse $C = B$ (§. 204.). Sed C rectus est *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 145.), consequenter o & x, item y & m semirecti (§. 741.), adeoque $o + x$ & $x + m$ itidem recti. Quare figura est quadratum (§. 98.). *Q. e. d.*

Al. 1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD æquales (§. 249.)

2. Ducatur recta AB.

Dem. Est enim $CA = DB = CD$, *per constr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD *per constr.* anguli ad D & C sunt recti (§. 78.) adeoque BA parallela ipsi DC (§. 226.); consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233.) & ob parallelas AC & BD (§. 256.) $AB = CD$ (§.

238.

238.). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

339. *Datis duabus rectis MI & IK rectangulum parallelogrammum seu oblongum construere.*

Ref. 1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249.). Tab. VI Fig. 105

2. Ex M intervallo ML = IK describatur arcus & ex K intervallo KL = IM alius priorem intersecans in L (§. 197.).

3. Ducantur rectæ ML & KL.

Dem. MI = KL & ML = IK, *per construct.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335.) consequenter I = L, & I + M ac I + K = duobus rectis (§. 337.). Sed I est rectus, *per constr.* Ergo & L (§. 145.), itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa oblongum (§. 100.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

340. *Data recta GH una cum angulo obliquo G rhombum construere.* Tab. VI Fig. 106

Ref. 1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato æqualis (§. 208.).

2. Fiat GE = GH & reliqua peragantur ut in probl. 34. (§. 338.).

Dem. EG = EF = FH = HG, *per constr.* Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335.), consequenter G = F & G + H ac G + F = duobus rectis (§. 337.). Sed G est angulus obliquus *ex hypothesi*: Ergo & F, consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa rhombus est (§. 99.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVII.

341. *Datis duabus rectis ON & OP una cum angulo intercipiendo O rhomboidem construere.* Tab. VI Fig. 103

Ref. 1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 208.).

2. Reliqua peragantur ut in probl. 35. (§. 339.).

Dem. Eadem est, quæ problematis præcedentis.

THEOREMA LXXVI.

Tab.VI Fig.107 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales ducanturque subtensæ AB, BC, CD &c. figura circulo inscripta regularis est.*

Dem. Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289.) cumque anguli A, B, C &c. æqualibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315.). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVIII.

343. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque polygono.*

Res. 1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.

2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

E. gr. Pentag.	180	Hexag.	180
	5		6
	900		1080
	360		360
	540		720

Tab.VI Fig.108 *Dem.* Quælibet figura ex assumto in ea puncto F in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240.). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§. 159.). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Tab.VI Fig.111 *Al.* Cum numerus triangulorum ABC, CAD & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per dia-

diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D & E (§. 240.). *Q. e. i. & d.*

E. gr. pro Pentag. 180 pro Hexag. 180

$$\frac{\quad 3 \quad}{540} \qquad \frac{\quad 4 \quad}{720}$$

COROLLARIUM I.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus polygoni regularis (§. 106.).

SCHOLION.

345. *En tibi tabulam, in qua summa angulorum in figuris rectilineis quibuscunque & quantitas unius in regularibus a trigono usque ad dodecagonum exhibetur (§. 343.). Construitur columna secunda continua additione 180; tertia vero numeris in columna per numerum angulorum sive laterum divisis (§. 344.). Utimur hac tabula tum in figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet instrumento rite explorata fuerit, necne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in tabula definitur, e. gr. si in heptagono superet 900.*

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang.Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig.reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1800	150

COROLLARIUM II.

346. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur, Tab.VI
anguli externi 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis Fig.108
efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147.). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343.). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

PROBLEMA XXXIX.

347. *Dato polygono regulari cuicunque ABCDE* Tab.VI
circulum circumscribere. Fig.107

 Res.

Res. 1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis E F & D F (§. 209.), ob angulos F E D & F D E duobus rectis minores, concursuris in F (§. 262.).

2. Ex puncto concursus F describatur radio E F circulus (§. 131.).

Dem. Quoniam *o* & *u* sunt angulorum polygoni dimidii *per constr.* erit $o = u$ (§. 106. *Geom.* & §. 94. *Arithm.*), consequenter E F = F D (§. 253.). Circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 40.). Ducatur jam ex F in A recta F A (§. 121.). Quoniam $o = x$, *per constr.* E D = E A (§. 106.) & E F = E F; erit A F = F D (§. 179.). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40.). Porro quia A F = E F, *per demonstr.* erit $m = x$ (§. 184.). Sed *x* dimidius angulus polygoni, *per constr.* Ergo & *m* (§. 87. *Arithm.*); consequenter etiam *y*. Quare si ducatur F B (§. 121.); erit ut ante F B = F E, adeoque radius circuli. Eodem modo ostenditur F C, & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circulum transire per omnes angulos polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 116.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 216.).

PROBLEMA XL.

349. *Invenire angulum in dato polygono regulari.*

Res. & Dem. Concipiatur polygonum regulare A B C D E circulo inscriptum (§. 348.). Quoniam arcus dimidius B C D E est mensura anguli quæsiti A (§. 314.); arcus vero A B, qui ipsius E A B dimidius, habetur, circuli peripheriam per numerum laterum dividendo (§. 289.); angulus polygoni A relinquitur, si arcum A B a semicirculo subtraxeris. *Q. e. i. & d.*

E.gr.

E. gr. Quæratur angulus pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 est arcus AB, qui ex 180 subductus relinquit 108 angulum pentagoni quæsitum.

THEOREMA LXXVII.

350. *Quadrilateri circulo inscripti GHIK anguli bini oppositi H & K, item G & I conficiunt duos rectos.* Tab. VI Fig. 109

Dem. Insistunt enim junctim sumti integro circulo, e. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56.), adeoque ipsorum mensura est semicirculus (§. 314.). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLI.

351. *Circulo quadratum circumscribere.* Tab. VI Fig. *

Res. 1. Ducantur diametri AB & DE se mutuo in centro C ad angulos rectos secantes (§. 210.).

2. Ex A, E, B, D, intervallo radii, fiant intersectiones in F, G, H, I.

3. Ducantur rectæ FG, GH, IH & IF. Erit FGHI quadratum circulo circumscriptum.

Dem. Anguli ad A, E, B, D sunt recti (§. 338.) adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304.). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§. 338.) & FG = GH = HI = FI = 2 AC *per constr.* Ergo FGIH est quadratum (§. 98.) idque circulo circumscriptum (§. 117.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

352. *Super data recta ED polygonum regulare quodcunque describere.*

Res. 1. Quæratur angulus polygoni (§. 344. 349.). Tab. VI Fig. 107

2. Fiat in E ipsi æqualis (§. 155.) & EA = ED.

3. Per puncta A, E, D describatur circuli peripheria (§. 294.).

4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsita (§. 342. 348.).

Al. 1. In E & D fiant anguli dimidio angulo polygoni sigillatim æquales (§. 155.), quorum crura EF & DF se mutuo secabunt in F (§. 262.).

2. Ex F tanquam centro, radio EF, describatur circulus, qui erit circulus polygono circumscriptus (§. 347.).

3. Reliqua absolvantur ut ante.

PROBLEMA XLIII.

353. *Circulo dato polygonum regulare quodcunque inscribere.*

Tab. VI. Fig. 107 *Res.* 1. Dividantur 360. per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 59.).

2. Construatur is ad centrum (§. 155.).

3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 342. 117.). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

354. *Resolutio problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem instrumento transportatorio utamur (§. 155.): non tamen ideo condemnenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt* Euclides (*a*) *&* Ptolemæus (*b*) *: de qua in Analysi. Equidem & heptagoni, enneagoni & hendecagoni constructiones Geometricæ passim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt: sed a rigore demonstrationum abhorrent.* Joh. Carolus Renaldinus (*c*) *omnium polygonorum describendorum regulam catholicam præscribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat*, Cl. Wagnerus, Mathemat. in Academia Helmstad. Professor *ostendit* (*d*) *& nos in Analysi ostendemus.*

PROBLEMA XLIV.

355. *Polygonum regulare quodcunque circulo circumscribere.*

Res.

(a) Elem. 4. prop. 11. 16. & Elem. 13. prop. 10.

(b) Almag. lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. Joannes Regiomontanus in epitome hujus Almag. lib. 1. prop. 1.

(c) Lib. 2. de Resolut. & composit. Mathem. f. 367.

(d) In peculiari Dissertatione Helmstadii 1700 habita.

Res. 1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. pentagonum ABCDE, si pentagonum *abcde* circumscribendum (§. 353.). Tab. VI Fig. 107

2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam F*h* ad eandem in H normalem (§. 210.), quæ arcum cognominem in *h* secat.

3. Per A & B producantur radii FA & FB.

4. Per *h* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum polygoni circumscripti.

5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e* = F*d* = F*c* = F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*: erit *abcde* polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.*

Dem. Quoniam *ab* parallela ipsi AB *per construct.* erit angulus F*ha* = FHA (§. 233.). Sed ob FH ad AB perpendicularem *per construct.* FHA rectus est (§. 78.). Ergo etiam F*ha* rectus (§. 145.), consequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78. 304.). Est vero etiam angulus F*ab* = FAB (§. 233.), adeoque dimidius angulus polygoni (§. 347.). Porro quoniam AB = AE *per construct.* & FA = FE = FB (§. 40.); erit angulus *b*F*a* = *a*F*e* (§. 204.). Quare cum etiam sit F*a* = F*e* *per construct.* &, ob F*ab* = F*ba* *per demonstrata*, rectos ad *h* & latus F*h* utrique triangulo F*ah* & F*hb* commune, F*b* = F*a* (§. 252.); erit *ae* = *ab* & F*ae* = F*ab* (§. 179.), consequenter *a* angulus polygoni, e. gr. in nostro casu pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e*, *d*, *c*, *b* esse angulos polygoni circumscribendi & *ed* = *dc* = *cb* = *ab*. Quod vero etiam *ae* circulum in *g* tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216.); erit angulus ad *g* rectus (§. 78.). Quoniam porro F*ah* = F*ag* *per demonstrata*, & F*a* = F*a*; erit F*h* = F*g* (§. 252.). Quare cum F*h*

 sit

ſit radius circuli *per conſtruct.* erit etiam F*g* radius circuli (§. 40.), atque adeo *ae* circulum in *g* tangit (§. 304.). Idem eodem modo oſtenditur de rectis *ed*, *dc*, *bc*: Polygonum itaque *abcde* circulo eſt circumſcriptum (§. 117.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVIII.

Tab.VI Fig.110 356. *Latus hexagoni AB æquatur radio circuli circumſcripti AC.*

Dem. Angulus C = 60° (§. 57.). Ergo A + B = 120° (§. 245.), conſequenter ob AC = BC (§. 40.) A = B = 60° (§. 184.). Quare △ ACB æquilaterum (§. 254.), conſequenter AB = AC (§. 88.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

357. Hexagonum regulare circulo inſcribitur, ſi radius ad peripheriam ſexies applicetur.

COROLLARIUM II.

358. Si ſuper linea data AB hexagonum deſcribendum; triangulum æquilaterum ACB conſtruitur (§. 198.): eſt enim vertex C centrum circuli hexagono quæſito circumſcribendi (§. 356.).

PROBLEMA XLV.

Tab.VI. Fig.111 359. *Datis omnibus lateribus figuræ cujuſcunque & tot diagonalibus, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.*

Reſ. Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE reſolvatur, quot ſunt latera, demtis tribus; non alia re opus eſt, quam ut unum triangulum ſuper altero excitetur (§. 205.).

PROBLEMA XLVI.

Tab.VI. Fig.112 360. *Datis omnibus lateribus figuræ & tot angulis, quot ſunt latera, demtis tribus, figuram conſtruere.*

Reſ. 1. Ducatur recta AB uni datorum laterum æqualis.

2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155.)

(§. 155.) & latera AE & BC per data debite determinentur.

3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155.) & determinetur latus DC &c.

4. Tandem ex E & D fiat intersectio in F intervallo laterum EF & DF.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur eritque æqualis quæsitæ (§. 161. 177.).

Eodem modo construi possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 106.).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli præter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non est.

SCHOLION.

362. *Tyrones ut se exerceant in figuris irregularibus describendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus, assumere debent. Quodsi contingat figuram non terminari, id indicio erit, casum esse impossibilem, adeoque vel in angulorum, vel in linearum quantitate quædam erunt immutanda.*

PROBLEMA XLVII.

363. *Areæ cujusdam campestris rectilineæ* abcde *libere permeabilis Ichnographiam perficere, hoc est, figuram areæ campestri similem describere.* Tab. VI Fig. 111

Res. 1. Investigetur longitudo singulorum laterum *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, itemque diagonalium *ac* & *ad* (§. 126.).

2. Construatur figura ABCDEA (§. 359.) juxta scalam geometricam minorem (§. 279.).

Dico figuram ABCDE esse figuræ campi *abcde* similem.

Dem. Est enim $AB : BC = ab : bc$, $BC : CD = bc : cd$, $CD : DE = cd : de$ &c. Etenim e. gr. *ab*, 6; & *bc*, 7 pedum in campo existentibus, etiam $AB = 6$ & $BC = 7$ in charta *per constr.* Quare cum porro sit $AC : AB = ac : ab$, $AC : AD = ac : ad$, $AD : AE = ad : ae$ &c. *per constr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$,

s =

$s = s$, $t = t$ (§. 207.); consequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88. *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi *abcde* similis (§. 175.). *Q. e. d.*

Tab.VI Fig.113 *Al.* 1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum *a* vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos ducanturque lineæ indefinitæ *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

2. Investigetur longitudo rectarum *a*B, *a*C, *a*D, *a*E (§. 126.) &

3. Exinde juxta scalam modicam (§. 279.) determinentur *ab*, *ac*, *ad*, *ae*.

4. Ducantur *bc*, *cd*, *de*.

Dico *abcde* esse similem figuræ ABCDE.

Dem. Quoniam in $\triangle\triangle$ *abc* & *a*BC angulus *a* communis & $ab : ac = a\mathrm{B} : a\mathrm{C}$ *per constr.* erit angulus $abc = a\mathrm{BC}$ & $acb = a\mathrm{CB}$, nec non $ab : bc = \mathrm{AB} : \mathrm{BC}$ & $ac : bc = \mathrm{AC} : \mathrm{BC}$ (§. 237.). Similiter quoniam in $\triangle\triangle$ *acd* & *a*CD angulus *a* communis & $ac : ad = a\mathrm{C} : a\mathrm{D}$, atque in $\triangle\triangle$ *dae* & D*a*E angulus *a* itidem communis & $ad : ae = a\mathrm{D} : a\mathrm{E}$ *per construct.* erit angulus $acd = a\mathrm{CD}$ & $adc = a\mathrm{DC}$, nec non $ac : cd = a\mathrm{C} : c\mathrm{D}$ & $ad : cd = a\mathrm{D} : c\mathrm{D}$, itemque angulus $ade = a\mathrm{DE}$ & $aed = a\mathrm{ED}$, nec non $ad : de = a\mathrm{D} : \mathrm{DE}$ & $ae : ed = a\mathrm{E} : \mathrm{ED}$ (§. 237.). Quoniam itaque $a = a$, $b = \mathrm{B}$, $acb + acd = a\mathrm{CB} + a\mathrm{CD}$, h. e. $c = \mathrm{C}$, $adc + ade = a\mathrm{DC} + a\mathrm{DE}$, h. e. $d = \mathrm{D}$ & denique $e = \mathrm{E}$ *per demonstrata*, figuræ *abcde* & *a*BCDE inter se æquiangulæ sunt (§. 109.). Porro cum sit $ac : bc = a\mathrm{C} : \mathrm{BC}$ & $ac : cd = a\mathrm{C} : \mathrm{CD}$ *per demonstr.* erit etiam $bc : cd = \mathrm{BC} : \mathrm{CD}$ (§. 196. *Arithm.*) & cum sit $ad : dc = a\mathrm{D} : \mathrm{DC}$ & $ad : de = a\mathrm{D} : \mathrm{DE}$ *per demonstr.* erit denuo $dc : de = \mathrm{DC} : \mathrm{DE}$. Quamobrem cum

quo-

quoque sit $ab:bc = aB:BC$ & $ae:ed = aE:ED$ *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ $abcde$ & $aBCDE$ similes (§. 175.). *Q. e. d.*

Al. 1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum f, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E defixos ducanturque rectæ indefinitæ fa, fb, fc, &c. Tab. VI Fig. 114

2. Investigetur longitudo rectarum fA, fB, fC, fD, fE (§. 126.).

3. Inde determinetur longitudo rectarum fa, fb, fc &c. juxta scalam modicam (§. 279.).

4. Tandem ducantur ab, bc, cd, &c.

Dico $abcdeg$ esse figuræ ABCDEG similem.

Dem. Angulus f utrique $\triangle\, fab$ & fAB communis, estque $fa:fb = fA:fB$ *per constr.* Ergo anguli ad a & A, item ad b & B æquales sunt atque $fa:ab = fA:AB$ (§. 237.). Eodem modo ostenditur esse in $\triangle\triangle\, fga$ & fGA angulos ad a & A æquales, atque $fa:ag = fA:AG$, consequenter $ab:ag = AB:AG$ (§. 196. *Arithm.*) & angulus $bag = BAG$ (§. 86. *Arithm.*). Quare cum eadem ratione demonstretur, esse $g = G$, $e = E$, $d = D$, $c = C$, $b = B$ & $ag:ge = AG:GE$, $ge:ed = GE:ED$, $ed:dc = ED:DC$, $dc:cb = DC:CB$ & $cb:ba = CB:BA$, figura $abcdeg$ est majori ABCDEG similis (§. 175.). *Q. e. d.*

Al. 1. Collocato instrumento Goniometrico in a investigetur quantitas angulorum x, m, r (§. 152.) & longitudo rectarum ab, ac, ad & ae (§. 126.). Tab. VI Fig. 111

2. Construantur juxta scalam modicam $\triangle\triangle$ ABC, ACD & ADE (§. 180.).

Dico ABCDE esse similem figuræ $abcde$.

Dem. Coincidit cum secunda problematis præsentis.

Al.

Tab.VI *Al.* 1. Collocato instrumento Goniometrico in *f*,
Fig.114 investigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152.), & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126.).

2. Construantur ut ante juxta scalam modicam △△ *bfa*, *afg*, *gfe*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180.).

Dico *abcdeg* esse similem figuræ ABCDEG.

Dem. Coincidit cum tertia problematis præsentis.

Tab.VI *Al.* 1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in
Fig.111 360 gradus divisa & quæ in cardine meridiei ac septentrionis dioptris instructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipsi *a* immineat & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipsi *ab* imminente versus ortum vel occasum.

2. Pyxidis dioptræ convertantur successive ad baculos in *c*, *d* & *e* defixos, notenturque ut ante in singulis casibus anguli declinationis.

3. Investigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 126.).

4. Ducatur in charta recta LM & assumto in ea puncto A applicetur centrum instrumenti transportatorii & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155.), atque ex harum longitudine per scalam modicam determinetur longitudo ipsarum AB, AC, AD, AE (§. 279.).

Dico figuram ABCDE esse alteri *abcde* similem.

Dem. In campo acus magnetica semper eidem lineæ respondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile est, etsi diversis in pyxide successive immineat. Lineam istam designet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo descriptus est circulus. Quodsi jam linea meridiana na pyxidis admovetur lateri AB erit principium numerationis in g & acus indicabit in f quantitatem anguli i. In instrumento transportatorio initium numerandi fit in f, & si arcus fg declinationi in campo observatæ æqualis assumitur, angulus i idem erit, qui ante, situsque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim fg perinde metitur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat acus, sive numerandi principium in f, sive in g fiat. Eodem modo liquet, arcus fh, fk, fl determinare situm rectarum AC, AD, AE respectu lineæ LM, consequenter anguli x, m, r in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in demostratione secunda.

Al. Quodsi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit instructa, sed lignea regula fg ita affixa, ut linea meridiana ejusdem bd, transiens per centrum pyxidis c sit eidem parallela: Tab. XI Fig. 174

1. Regula fg ad latus figuræ AB applicetur, quo facto AB erit ipsi bd parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ ae circa centrum c libere mobilis cuspis a: dico esse angulum bca ipsi BAL æqualem, si ML ducatur acui magneticæ ae in I productæ parallela.
3. Eodem modo si regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta ae designet situm acus, bd autem ipsi AE parallela lineam medianam pyxidis; erit angulus acb ipsi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

Dem. Id tantummodo demonstrari debet, angulum acb esse ipsi BAL & in altero situ pyxidis ipsi EAL æqualem. Quoniam ex resolutione patet, bd esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi ecd (§. 233.), consequenter

ejus

ejus verticali *b c a* æqualis (§. 156. *Geom.* & §. 87. *Arithm.*). Similiter cum ſit M L ipſi I *a* parallela, *per conſtruct.* erunt alterni I H A & H A L æquales (§. 233.) conſequenter H A L = *b c a* (§. 87. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter ſi pyxis ad diagonalem A E applicatur, cum ſit *b d* ipſi E A parallela *vi ſolutionis*; erit N K A = *e c d* (§. 233.). Quare cum porro ſit *b c a* = *e c d* (§. 156.); erit N K A = *b c a* (§. 87. *Arithm.*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota ſitum obtinet priori, quem habuerat, parallelum, eſtque adeo N *a* ipſi I *a* parallela; M L vero parallela ipſi I *a per conſtruct.* erit etiam M L ipſi N *a* parallela (§. 232.), conſequenter N K A = E A L (§. 233.), ac ideo EAL = *b c a* (§. 87. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Tab. VII. Fig. 115 *Al.* 1. Charta ſuper menſula expanſa ex centro *o* deſcribatur circulus.

2. In eodem defigatur ſtylus, cui inſeratur regula cum dioptris.

3 Collineetur in ſingulos areæ angulos A, B, C &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter oppoſita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.

Tab. VII. Fig. 116 4. Inveſtigetur longitudo rectarum *o* A, *o* B, *o* C &c. (§. 126.).

5. Charta a menſula remota alteri mundæ coextendatur in tabula & Parallelifmus ad *a a* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipſi parallela A A commode duci poſſit (§. 258.).

6. Idem Parallelifmus applicetur ad *b b* & eo uſque aperiatur, donec recta B B huic parallela ducta alteram A A ipſi *a a* parallelam in puncto commodo O interſecet.

7. Applicetur porro ſucceſſive ad rectas *c c*, *d d*, *e e*, quæ confuſionis evitandæ gratia in ſchemate

non

non omnes sunt expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis *a a* & *b b* parallelarum, ducanturque per idem dictis *c c*, *d d*, *e e* parallelæ C C &c.

8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis *o* A, *o* B, *o* C &c. respondentium juxta scalam modicam (§. 279.). Ita enim ut supra Ichnographiam absolvere licebit.

Dem. Coincidit cum tertia probl. præs. modo demonstretur, si plures lineæ *a a*, *b b*, *c c* &c. se intersecent in *o* & his ducantur totidem aliæ parallelæ A A, B B, C C &c. se itidem in O intersecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim B B, donec ipsi *a a* occurrat in *f*; continuentur etiam C C & *c c*, donec ipsis *b b* & A A occurrant in *g* & *k*. Erit, ob parallelas *a a* & A A, $m = f$ &, ob parallelas *b b* & B B, $y = f$ (§. 233.), adeoque $m = y$ (§. 87. *Arithm.*). Similiter, ob parallelas *b b* & B B, $n = g$ &, ob parallelas *c c* & C C, $x = g$ (§. 233.), adeoque $n = x$ (§. 87. *Arithm.*). Item, ob parallelas *a a* & A A, $z = k$ &, ob parallelas *c c* & C C, $l = k$ (§. 233.), adeoque $l = z$ (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VII. Fig. 116

SCHOLION I.

364. *Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes, littera initialis in singulis nota quadam numerica notanda &, ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud litteris aliis usurpandum.*

SCHOLION II.

365. *Etiam sine parallelismo Ichnographiam facillime conficere datur, si puncta* a *&* a, *item* b, c, d *&c. subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim* a *&* a *dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum* O: *reliqua puncta* b, c, d *&c. situm angulorum figuræ respectu hujus centri determinant.*

SCHO-

SCHOLION III.

366. Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphæram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Præstat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quæ septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphærio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex ære, cupro vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.

PROBLEMA XLVIII.

Tab. VII. Fig. 117

367. Ichnographiam areæ ABCDE ex duabus stationibus A & B perficere.

Res. 1. Posita mensula in A collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D & E ducanturque rectæ versus eos ex *a*.

2. Quæratur distantia stationum A B (§. 126.) & in mensulam ex scala Geometrica (§. 279.) transferatur in *a b*.

3. Mensula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam *b a* applicata per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.

4. Ex puncto *b* in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c* intersecant.

5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *a e*, *e d*, *d c*.

Dico, Ichnographiam esse absolutam.

Dem. Quoniam 1°. $ABC = abc$ & $CAB = cab$ (*per constr.*) erit $AB : BC = ab : bc$ &

AB:

AB : AC = *ab* : *ac* (§. 267.). Similiter 2°. quia EAB = *eab* & EBA = *eba*, *per constr.* erit AEB = *aeb*, itemque EA : AB = *ea* : *ab* & EB : AB = *eb* : *ab* (§. *cit.*). Porro 3°. cum sit DAB = *dab* & DBA = *dba*; erit etiam DA : AB = *da* : *ab* & DB : AB = *db* : *ab* (§. *cit.*). 4°. DBC = *dbc*, *per constr.* &, quoniam DB : AB = *db* : *ab* (*per num.* 3.) atque AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1.); DB : BC = *db* : *bc* (§. 194. *Arithm.*). Ergo CDB = *cdb* atque BCD = *bcd* & BC : CD = *bc* : *cd*, nec non BD : CD = *bd* : *cd* (§. 183.). 5°. DB : BC = *db* : *bc* (*per demonstrata n.* 4.) & AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1.). Ergo DB : AB = *db* : *ab* (§. 195. *Arithm.*). Est vero etiam EB : AB = *eb* : *ab* (*per num.* 2.). Ergo DB : EB = *db* : *eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam sit DBE = *dbe*, *per construct.*, erit BDE = *bde* & DEB = *deb*, nec non DB : DE = *db* : *de* & DE : EB = *de* : *eb* (§. 183.). 6°. BD : CD = *bd* : *cd* (*per num.* 4.) & DB : DE = *db* : *de* (*per num.* 5.). Ergo CD : DE = *cd* : *de* (§. 196. *Arithm.*). 7°. EB : AB = *eb* : *ab* (*per num.* 2.) & DE : EB = *de* : *eb* (*per num.* 5.). Ergo DE : AB = *de* : *ab* (§. 197. *Arithm.*). Quare cum porro sit EA : AB = *ea* : *ab* (*per num.* 2.) erit DE : EA = *de* : *ea* (§. 195. *Arithm.*). 8°. Quia CDB = *cdb* (*per num.* 4.) & BDE = *bde* (*per num.* 5.); erit CDE = *cde* (§. 88. *Arithm.*). 9°. Similiter quia AEB = *aeb* (*per num.* 2.) & DEB = *deb* (*per num.* 5.) erit DEA = *dea* (§. 88. *Arithm.*). Cum itaque sit EAB = *eab*, & ABC = *abc*, *per constr.*, BCD = *bcd* (*per num.* 4.), CDE = *cde* (*per num.* 8.), & DEA = *dea* (*per num.* 9.); atque præterea AB : BC = *ab* : *bc* (*per num.* 1.), BC : CD = *bc* : *cd* (*per num.* 4.), CD : DE $=$ *cd* : *de* (*per n.* 6.), DE : EA $=$ *de* : *ea* (*per num.* 7.), tandemque EA : AB $=$ *ea* : *ab* (*per n.* 2.); figuræ ABCDE altera *abcde* similis eſt (§. 175.). *Q. e. d.*

Al. 1. In A inveſtigetur quantitas angulorum EAD,
Tab. VII. Fig. 117 DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC (§. 152.); quæraturque ſtationum diſtantia AB (§. 126.).

2. Ducta in charta recta *ab* per ſcalam modicam diſtantiæ ſtationum AB convenienter determinetur (§. 279.).

3. In *a* conſtituantur angulis EAD, DAC, CAB æquales *ead*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipſis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155.).

4. Tandem puncta interſectionum *b*, *c*, *d*, *e*, *a*, rectis connectantur.

Dico *abcde* eſſe ſimilem areæ ABCDE.

Dem. Coincidit cum præcedente.

Al. 1. Ope pyxidis magneticæ obſerventur ut in probl. præc. ex duabus ſtationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.

2. Quæratur diſtantia ſtationum (§. 126.).

3. In charta eodem modo, quo in probl. præc. determinetur ſitus rectarum *ab*, *ac*, *ad* &c. ac puncta interſectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita Ichnographia erit abſoluta.

Dem. Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonſtratione penultima problematis præcedentis dicta ſunt.

PROBLEMA XLIX.

368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

Tab. VII. Fig. 117 *Reſ.* 1. Menſula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae*

in

in eadem designari possit.

2. Longitudo utriusque rectæ A B & A E (§.126.) explorata ex scala minore transferatur in mensulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279.).

3. Mensula in B translocetur, ita ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,

4. Idem dirigatur per easdem in C, quo sicut ante, angulo A B C æqualis *a b c* & rectæ B C proportionalis *b c* in mensula designari possint.

5. Quodsi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis.

Dem. Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singulis angulis areæ & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt *per constr.* Figura igitur delineata est areæ similis (§. 175.). *Q. e. d.*

Al. Quæratur longitudo omnium laterum (§.126.) & quantitas tot angulorum, quot sunt latera, demtis tribus (§. 152.). His enim datis Ichnographia *per probl.* 46. (§. 360.), vi demonstrationis præcedentis absolvetur.

Al. 1. Notetur in singulis angulis figuræ A, B, C, D, E, laterum A B, B C, C D, D E, A E declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ ut in probl. 47 (§. 363.). Tab. VII. Fig. 118 n. 1.

2. Quæratur simul longitudo laterum (§. 126.).

3. In charta designetur linea *a b* & in eam transferatur ex scala modica longitudo lateris A B (§. 279.). n. 2.

4. Ad rectam *a b* applicetur latus pyxidis lineæ ejusdem meridianæ parallelum, ita tamen, ut extremum ipsius septentrionale septentrionem respiciat & charta cum pyxide huc illucque mo-

veatur, donec acus angulum declinationis debitum monſtret.

5. Charta immota idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri A E indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per ſcalam modicam ipſi A E proportionalem determinare licet.
6. Quodſi hæc operatio continuetur; Ichnographia tandem abſolvetur.

Dem. Non aliud hic demonſtrandum eſt, quam angulum *bae* ope pyxidis magneticæ in charta ſic deſignatum eſſe alteri B A E in campo æqualem. Superius uſum pyxidis magneticæ nullis dioptris inſtructæ exponentes demonſtravimus, pyxide ad latus figuræ A B in campo ita applicata ut linea meridiana ejuſdem ſit huic parallela, angulum declinationis acus eſſe ipſi B A M æqualem, ſi M L ita ducatur ope pyxidis, ut ejuſdem lineæ meridianæ parallela exiſtat (§. 363.). Eodem modo ex ibidem demonſtratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ A E applicata, eſſe angulum E A L angulo declinationis acus in hoc ſitu æqualem. His jam datis, ſi latus pyxidis lineæ meridianæ ejuſdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur & charta cum pyxide vertatur, donec acus, in conveniente ſitu, angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus B A, monſtret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter ſi eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris A E convenientem monſtret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea*I angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe rectam K I per *a* ea lege eſſe ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili reſpondeat, centro in *a* collocato. Eſt igitur 1 = I & 6 = VI

(*per*

(*per construct.*). Sed $1 + 7 + 6 = 180°$ & $\mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{VI} = 180°$ (§. 147.), consequenter $1 + 7 + 6 = \mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{VI}$ (§. 87. *Arithm.*). Quare $7 = \mathrm{VII}$ (§. 91. *Arithm.*). *Q. e. d.*

Vel: 1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ. Tab. VII. Fig. 118 n. 2.

2. Instrumentum transportatorium parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *a* K respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria instrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A.

3. Ab *a* per *z* ducatur recta & ex *a* in *b* transferatur ex scala modica longitudo rectæ A B in campo mensuratæ.

4. Regula parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera cui cohæret instrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y* : quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.

5. Hac operatione continuata, integra areæ Ichnographia tandem absolvetur.

Dem. $1 = \mathrm{I}$, $2 = \mathrm{II}$, $3 = \mathrm{III}$, $4 = \mathrm{IV}$ & $5 = \mathrm{V}$ (*per constr.*) & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum instrumenti transportatorii refert) ipsi *a* K parallela, (*per construct.*), acus vero magnetica in B est parallela situi in A ; erit $1 = 8$ & $\mathrm{I} = \mathrm{VIII}$ (§. 233.), consequenter $8 = \mathrm{VIII}$. (§. 87. *Arithm.*). Simili modo ostenditur esse $6 = \mathrm{VI}$. Quare cum sit $1 + 7 + 6 = \mathrm{I} + \mathrm{VII} + \mathrm{VI}$ (§. 147. *Geom.* & §. 87. *Arithm.*); erit $7 = \mathrm{VII}$ (§. 91. *Arithm.*). Porro $2 = \mathrm{II}$ (*per constr.*) & $8 = \mathrm{VIII}$, (*per demonstr.*). Ergo $8 + 2 = \mathrm{VIII} + \mathrm{II}$ (§. 88. *Arithm.*). Similiter $12 = 2$ & $\mathrm{XII} = \mathrm{II}$ (§. 233.) & $3 = \mathrm{III}$, (*per constr.*). Quare cum ſit $12+9+3=XII+IX+III$ (§. 147.); erit $9=IX$ (§. 91. *Arithm.*). Porro $4=IV$ (*per conſtr.*) & hinc, cum ſit $10=3$ & $X=III$ (§. 233.), adeoque ob $3=III$ (*per demonſtr.*) $10=X$ (§.87.*Arithm.*), $4+10=IV+X$ (§.88. *Arithm.*). Denique $5=V$ (*per conſtr.*) & $4+11=IV+XI$ (§. 233. *Geom.* & §. 87. *Arithm.*) adeoque ob $4=IV$ (*per conſtr.*) $11=XI$. Quare $5+11=V+XI$ (§. 88.*Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *a b c d e* ſunt æquales ſingulis angulis areæ A B C D E. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia ſint (*per conſtr.*) figura *a b c d e* areæ A B C D E ſimilis (§. 175.). *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

369. *Figuræ in charta delineatæ ſimilem in campo deſignare.*

Reſ. Quoniam hoc problema eſt inverſum alterius, quo Inchnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur caſus, quot hujus commemoravimus, ſed & ipſius reſolutio ex reſolutionibus problematum immediate præcedentium intelligitur. E. gr. Si ſemicirculo vel menſula & pertica utimur: anguli ſinguli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti &c. in ſolo deſignantur *per probl. 7.* (§. 155.) & latera vel diagonales &c. per menſuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De Figurarum Dimenſione ac Diviſione.

PROBLEMA LI.

370. INvenire *aream quadrati.*

Reſ. 1. Quæratur longitudo lateris (§.126.).
2. Hæc ducatur in ſeipſam.

Fa-

Factum exprimit aream Quadrati.

Sit e. gr. Latus quadrati = 345 erit Area = 119025.

Dem. Aream quadrati investigans quærit, quot digiti quadrati; hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 118.). Evidens vero est, si latus quadrati A B concipiatur in quotcunque partes æquales & quadratum ipsum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum series, quot partes habet latus A B & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus B C, vel idem A B habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.* Tab. VII. Fig. 119

COROLLARIUM I.

371. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100. Cum igitur decempeda sit 10 pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 25.): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos &c. continet (§. 118.).

COROLLARIUM II.

372. Si latus quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118.).

COROLLARIUM III.

373. Datus igitur numerus in priori casu facile in digitos, pedes & perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra sinistram versus duæ notæ digitis, duæ pedibus resecentur: quæ enim sinistram versus residuæ fiunt, perticis cedunt. E. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM IV.

374. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 159. *Arithm.*). E. gr. Quadratum lateris dupli est quadruplum quadrati lateris simpli. Et quadrata æqualia sunt, quorum latera æqualia sunt.

PROBLEMA LII.

375. *Invenire aream rectanguli A B C D.* Tab. VII. Fig. 120

Res. 1. Investigetur longitudo laterum A B & A C (§. 126.).

 2. Du-

2. Ducatur A B in A C. Factum erit area rectangul.

Dem. Eadem est, quæ problematis præcedentis

COROLLARIUM I.

376. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 159. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continuæ proportionales, quadratum mediæ rectangulo extremarum æquale est (§. 298. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; rectangulum sub extremis æquatur rectangulo sub mediis (§. 297. *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

Tab.VI Fig.102 379. Quare si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit quadratum tangentis AD rectangulo sub secante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334. & 377.).

COROLLARIUM V.

Tab.VI Fig.97. 380. Si duæ vel plures secantes HL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt rectangula sub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 332. & 379.).

COROLLARIUM VI.

Tab.I. Fig.14. 381. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erunt rectangula sub segmentis inter se æqualia (§. 332. 378.).

COROLLARIUM VII.

382. Cum orgya, qua lignorum strues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per probl. præc. vel præs.* inveniri potest. Per hanc itaque si factum ex longitudine in latitudinem struis dividatur; quotus indicat, quot ipsa orgyas contineat (§. 69. *Arithm.*).

THEOREMA LXXIX.

Tab. VII Fig.121 383. *Duo parallelogramma ABDC & ECDF super eadem basi CD & inter easdem parallelas AF & CD constituta sunt inter se æqualia.*

Dem. Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB = CD & EF = CD (§. 335.), consequenter AB = EF (§. 87. *Arithm.*) & hinc porro AE = BF (§. 88. *Arithm.*). Quoniam porro AC = BD & CE = DF (§. 335.); erit

△ACE

Δ ACE $=$ Δ BDF. (§. 204.), adeoque ABGC $=$ FEGD (§. 91. *Arithm.*), consequenter ABDC $=$ EFDC (§. 88. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ, *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226.): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227.); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 383.).

COROLLARIUM II.

385. Ergo & triangula super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam Parall. ACDB $=$ Parall. ECDF (§. 384.), sed Δ ACD $= \frac{1}{2}$ Parall. ACDB & Δ FCD $= \frac{1}{2}$ Parall. ECDF (§. 337.). Ergo Δ ACD $=$ Δ FCD (§. 94. *Arithm.*). Tab. VII. Fig. 121

COROLLARIUM III.

386. Quodcunque adeo triangulum CFD est dimidium parallelogrammi ACDB super eadem vel æquali basi CD & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam Δ CFD $=$ Δ ACD (§. 337.). Sed Δ ACD $= \frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 355.). Ergo Δ CFD $= \frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 87. *Arithm.*).

PROBLEMA LIII.

387. *Invenire aream rhombi & rhomboidis seu parallelogrammi obliquanguli.*

Res. 1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§. 216.), quæ erit altitudo parallelogrammi (§. 227.). Tab. VII. Fig. 122

2. Multiplicetur basis per altitudinem.

E. gr. Sit CD $= 4^{\circ}\ 5'\ 6''$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
\text{AE} = & & & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & & 1 & 8 & 2 & 4 \\
 & 1 & 3 & 6 & 8 & \\
 & 9 & 1 & 2 & & \\
\hline
\text{Erit Area} = & 1 & 0^{\circ} & 6 & 7' & 0\ 4''
\end{array}
$$

Dem. Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 384.). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375. & 229.). Er-

Ergo eidem æqualis eſt area parallelogrammi obliquanguli (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

388. Parallelogramma ſunt in ratione compoſita altitudinum & baſium (§. 150. *Arithm.*), adeoque & triangula eorum dimidia (§. 386.) in eadem exiſtunt (§. 181. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

389. Ergo ſi altitudines ſunt æquales, baſium; ſi baſes ſunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

390. Parallelogramma æqualia baſes & altitudines reciprocant (§. 209. *Arithm.*).

THEOREMA LXXX.

Tab. VII. Fig. 123. 391. *Triangulum eſt æquale parallelogrammo ſuper eadem baſi ſed dimidiæ altitudinis, itemque parallelogrammo ſuper dimidia baſi & ejuſdem altitudinis.*

Dem. Sit A E F B parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque ſuper eadem baſi A B & intra eaſdem baſi parallelas A B & E F exiſtenti æquale ſit (§. 383.) atque adeo eidem ſalva quantitate ſubſtitui poſſit (§. 15. *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum A D C fuerit rectangulum, aſſumta A D pro baſi, erit C D altitudo; ſumta vero D C pro baſi, erit A D altitudo (§. 228.). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli A E (§. 229.) ſit altitudini dimidiæ trianguli C G æqualis *per hypoth.* & angulus ad D ſit rectus (§. 91.) adeoque ob E F & A B parallelas (§. 102.) is ad G ſimiliter rectus (§. 233.), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100.), & hinc G = E (§. 145.); ſint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156.): erit △ C G H = △ E H A (§. 252.), conſequenter E G D A = △ A C D (§. 88. *Arithm.*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum A C B fuerit obliquangulum, per perpendiculum D C in duo rectangula A D C, & C D B reſolvetur (§. 78. 91.). Ergo ſi fiat F B = D G dimidiæ altitudini; erit D G F B =

△DCB

$\triangle DCB$ & $AEGD = \triangle ACD$, *per caf.* 1. Ergo $AEFB = \triangle ACB$ (§. 88. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Sit $DK = KB = \frac{1}{2} DB$ & $GD = AG = \frac{1}{2} AD$; erit $GK = \frac{1}{2} AB$, adeoque dimidia basis. Jam $CFKD = \triangle DCB$ & $GECD = \triangle ACD$, *per caf.* 1. Quare $EGKF = \triangle ACB$ (§. 88. *Arithm.*). *Quod erat alterum.* Tab. VIII. Fig. 124

PROBLEMA LIV.

392. *Invenire aream Trianguli.*

Ref. & Dem. 1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 387.). Tab. VIII. Fig. 125

2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 386.).

Al. Basis dimidia $\frac{1}{2} AB$ multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam $\frac{1}{2} CD$. Factum erit area trianguli (§. 391. 387.).

E. gr.

$$\begin{array}{r} AB = 3^{\circ}\,4'\,2'' \\ CD = 2\;3\;4 \\ \hline 1368 \\ 1026 \\ 684 \\ \hline 80028 \\ 2)\overline{} \\ \triangle ACB\ 40014 \end{array} \qquad \begin{array}{r} AB = 3^{\circ}\,4'\,2'' \\ \tfrac{1}{2}CD = 1\;1\;7 \\ \hline 2394 \\ 342 \\ 342 \\ \hline \triangle 40014 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \tfrac{1}{2}\,AB = 1^{\circ}\,7'\,1'' \\ CD = 2\;3\;4 \\ \hline 684 \\ 513 \\ 342 \\ \hline \triangle 40014 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299. *Arithm.*), consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

394. Si area trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210. *Arithm.*).

PRO-

PROBLEMA LV.

395. *Invenire latus quadrati parallelogrammo, vel triangulo dato æqualis.*

Ref. Quæratur inter basin & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis *per* §. 327. aut in numeris *per.* §. 301. *Arithm.* Ita prodit latus quadrati quæsitum.

Dem. Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375. 387.) & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392.). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 298. *Arithm.*) erit quadratum istud in priori casu parallelogrammo, in posteriori triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXXI.

Tab. VII. Fig. 122. 396. *In parallelogrammis & triangulis similibus altitudines sunt lateribus homologis proportionales & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.*

Dem. Cum altitudines A E & *a e* sint ad bases C D & *c d* perpendiculares (§. 227.); Erunt E & *e* anguli recti (§. 78.) adeoque æquales (§. 145.). Et quia parallelogrammum A B D C ipsi *a b d c*; triangulum C A D ipsi *c a d* simile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175.). Quare A C : A E = *a c : a e* (§. 267.). Est vero etiam A C : C D = *a c : c d* (§. 175.). Ergo A E : C D = *a e : c d* (§. 196. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonstr.* erit A C : C E = *a c : c e* (§. 267.). Est vero etiam A C : C D = *a c : c d* (§. 175.). Ergo C E : C D = *c e : c d* (§. 196. *Arithm.*); adeoque E D : C E = *e d : c e* (§. 193. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHO-

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC $\sim$ abdc & Δ ACD $\sim$ Δ acd, per hypoth. *perpendicula* AE & ae *pariterque segmenta basium* CE & ce, *itidemque* ED & ed *eodem modo determinantur* (§. 119. 216.), *adeoque similia sunt* (§. 120.). *Cum adeo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant* (§. 24. Arithm.), *lineæ autem rectæ utpote similes* (§. 17.) *non aliter nisi ratione discerni possint* (§. 132. Arithm.); *tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149. Arithm.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se tum ad latera homologa eandem rationem habere.*

COROLLARIUM I.

398. Quoniam parallelogramma & triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388.), similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396.); igitur parallelogramma & triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159. *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397.).

COROLLARIUM II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum altitudinum & segmentorum basium homologorum, necnon linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374.).

PROBLEMA LV.

400. *Invenire aream polygoni irregularis ac trapezii.* Tab. VIII. Fig. 126 n. 1.

Res. 1. Resolvatur per diagonales A D & A C in triangula.

2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392.) &

3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 86. *Arithm.*).

E. gr. $\frac{1}{2}$ AD = 43′ $\quad$ $\frac{1}{2}$AD = 43′ $\quad$ $\frac{1}{2}$AC = 42′

EF = 35 $\quad$ GC = 45 $\quad$ BH = 30

215 $\quad$ 215 $\quad$ ΔABC, 1260

129 $\quad$ 172

Δ AED, 1505 $\quad$ ΔDAC, 1935

ΔAED, 1505

ΔABC, 1260

Area polygoni irreg. $\quad$ 47°00′

Quodsi

Quodsi $\frac{1}{2}$ A D multiplicetur per summam altitudinum E F + G C, vel integra A D per $\frac{1}{2}$ (E F + G C); ita prodibit area trapezii A E D C.

$$\begin{array}{ll} \text{E. gr. } EF = 35 & \tfrac{1}{2}AD = 43 \\ GC = 45 & EF + GC = 80 \\ \hline EF + GC = 80 & AEDC = 3440 \\ \cline{1-1} \tfrac{1}{2}(EF + GC) = 40 & \\ AD = 86 & \\ \cline{1-1} AEDC = 3440 & \end{array}$$

Tab. VIII. Fig. 127 Similiter si in trapezio fuerit A B ipsi C D parallela, erunt triangulorum altitudines B F & G C æquales (§. 226. 227.), consequenter trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum A B & C D in altitudinem ejus B F (§. 392.).

Tab. VIII. Fig. 127 E. gr. Sit AB = 246″, CD = 378″, BF = 195″

$$\begin{array}{rr} \text{erit } AB + CD = & 624 \\ BF = & 195 \\ \hline & 3120 \\ & 5616 \\ & 624 \\ \hline \text{Area Trapezii} & 121680 \end{array}$$

THEOREMA LXXXII.

Tab. VI Fig. 107 401. *Figura regularis A B C D E ex centro circuli circumscripti F in triangula æqualia atque similia resolvitur & area ejus æquatur triangulo, cujus basis peripheria totius polygoni AB + BC + CD &c. altitudo perpendiculum F G ex centro F in latus unum A B demissum. Idem valet de area circumscripti* a b c d e, *nisi quod altitudo sit radius F G.*

Dem. Quoniam A B = B C = C D = D E = E A (§. 106.) & A F = F B = F C = F D = F E (§. 40.); triangula A F B, B F C, C F D, D F E, E F A æqualia & similia sunt (§. 204.). *Quod erat unum.*

Con-

Constituantur triangula AFB, BFC, CFD &c. in quæ resolutum est polygonum ABCDE super eadem recta AA (§. 199.). Erigatur in A perpendicularis Af (§. 249.) ipsi altitudini triangulorum æqualis. Erit AfB $=$ AFB, BfC $=$ BFC, CfD $=$ CFD &c. (§. 385.); consequenter AfA $=$ AFB $+$ BFC $+$ CFD &c. (§. 88. *Arithm.*) æqualis est areæ polygoni regularis (§. 86. 87. *Arithm.*). *Quod erat secundum.* Tab. VIII. Fig. 128

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g ducta sit radius & ad latus ae perpendicularis (§. 308.); erit ea altitudo trianguli aFe (§. 227.). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.* Tab. VI Fig. 107

PROBLEMA LVI.

402. *Invenire aream polygoni regularis.*

Res. & Dem. 1. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum, e. gr. latus hexagoni per 3. Tab. VI Fig. 107

2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit area quæsita (§. 392. 401.).

E. gr. AB $=$	$5^{\circ}\,4'$
dimidius Numer. later.	$2\frac{1}{2}$
	27
	108
Semiperimeter $=$	135
FG $=$	29
	1215
	270
Area Pentagoni	$39^{\circ}\,15'$

THEOREMA LXXXIII.

403. *Quadrilatera & Polygona similia ABCDE & abcde per diagonales AC, AD & ac, ad in similia triangula ABC & abc, ACD & acd, ADE & ade dividuntur, & inter se & totis proportionalia.* Tab. VI Fig. 111

Dem.

Dem. Quoniam $ABCDE \backsim abcde$ *per hypoth.* erit $o = o$ & $AB : BC = ab : bc$ (§.175.). Ergo $\triangle\, bac \backsim \triangle\, BAC$, $y = y$ atque $bc : ca = BC : CA$ (§. 183.). Est vero etiam $bc : cd = BC : CD$ & $n + y = n + y$ (§. 175.). Ergo $ca : cd = CA : CD$ (§. 156. *Arithm.*) & $n = n$ (§. 91. *Arithm.*), consequenter $\triangle\, cad \backsim \triangle\, CAD$, $cd : da = CD : DA$ & $u = u$ (§. 183.). Est vero etiam $u + s = u + s$ & $cd : de = CD : DE$ (§. 175.). Ergo $s = s$ (§. 91. *Arithm.*) & $da : de = DA : DE$ (§. 196. *Arithm.*), consequenter $\triangle\, dea \backsim \triangle\, DEA$ (§. 183.). *Quod erat primum.*

Quoniam $\triangle ABC \backsim \triangle abc$, $\triangle DAC \backsim \triangle dac$ & $\triangle\, DAE \backsim \triangle\, dae$ *per demonstrata*; erit $\triangle ABC : \triangle abc = CA^2 : ca^2$, $\triangle DAC : \triangle dac = CA^2 : ca^2 = DA^2 : da^2$, & $\triangle DAE : \triangle\, dae = DA^2 : da^2$ (§. 398.), consequenter $\triangle\, ABC : \triangle\, abc = \triangle DCA : \triangle\, dca$ & $\triangle DCA : \triangle dca = \triangle DAE : \triangle dae$ (§.167. *Arithm.*), adeoque etiam $\triangle DEA : \triangle dea = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. *cit.*). Sunt igitur $\triangle\triangle ABC, ACD, ADE$, & abc, acd, ade inter se proportionalia. *Quod erat secundum.*

Quoniam denique $\triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca = \triangle DEA : \triangle dea$ *per secundum hujus*; erit $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA : \triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = \triangle ABC : \triangle abc$ (§. 192. *Arithm.*). Sed $\triangle ABC + \triangle DCA + \triangle DEA =$ polygono $ABCDE$ & $\triangle abc + \triangle dca + \triangle dea = abcde$ (§. 86. *Arithm.*). Ergo $ABCDE : abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle DCA : \triangle dca$ &c. (§. 168. *Arithm.*), consequenter $ABCDE : \triangle ABC = abcde : \triangle abc$ & $ABCDE : \triangle DCA = abcde : \triangle dca$ &c. (§. 173. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Co-

COROLLARIUM.

404. Cum polygona regularia ſint æquilatera & æquiangula (§. 106.), tum etiam ſibi mutuo æquiangula (§. 344.); polygona regularia ejuſdem ordinis, veluti omnia pentagona, omnia hexagona &c. regularia inter ſe ſimilia ſunt (§. 175.). Polygona igitur regularia ejuſdem ordinis per diagonales in triangula ſimilia dividuntur & inter ſe, & totis proportionalia.

SCHOLION.

405. *Poterat theorema præſens ex notione determinationis facilius demonſtrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *ſint ſimiles*, per hypoth. *adeoque anguli* A *&* a *æquales* (§. 175.), *atque præterea diagonales* AC, AD *&* ac, ad *ex angulis hiſce æqualibus* A *&* a *ducantur*; △△ ABC *&* abc, CAD *&* cad, DAE *&* dae *eodem modo determinantur* (§. 119.); *conſequenter & inter ſe ſimilia ſunt & ſimiles partes figurarum exiſtunt* (§. 120.), *eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem* (§. 170. Arithm.), *immo eandem inter ſe rationem quam polygona aut quadrilatera habent* (§. 171. Arithm.).

THEOREMA LXXXIV.

406. *Figuræ tam regulares, quam ſimiles irregulares habent rationem duplicatam homologorum laterum.* Tab. VI. Fig. III.

Dem. Sint figuræ ABCDE & *abcde* ſive regulares, ſive irregulares ſimiles, eæque ſive quadrilateræ, ſive polygonæ quæcunque ejuſdem ordinis; erit $ABCDE : abcde = \triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle ADE : \triangle ade$ (§. 403. 404.). Sed $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$; $\triangle ADC : \triangle adc = CD^2 : cd^2$ & $\triangle ADE : ade = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 398.). Ergo $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = EA^2 : ea^2$ (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

407. *Eodem modo oſtenditur, figuras rectilineas ſimiles eſſe in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A *&* a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405.).

THEOREMA LXXXV.

408. *Circuli & figuræ ſimiles ipſis inſcriptæ vel circumſcriptæ ſunt inter ſe ut quadrata diametrorum.*

Dem. Ponamus deſcribi duos circulos & iis circumſcribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119. & 357.). Sunt ergo figuræ utræque inter ſe ſimiles (§. 128.). Cum adeo utrobique eadem ſint, per quæ diſtingui debent (§. 24. *Arithm.*): quadrata circulis circumſcripta ad ſuos circulos eandem rationem habere debent (§. 132. *Arithm.*). Quamobrem circuli inter ſe ſunt ut quadrata diametrorum (§. 173. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo oſtenditur, figuras ſimiles circulis inſcriptas vel circumſcriptas eſſe ut circulos, quibus inſcribuntur vel circumſcribuntur. Sed circuli ſunt ut quadrata diametrorum, *per demonſtrata.* Ergo figuræ ipſis inſcriptæ & circumſcriptæ ſimiles ſunt ut quadrata diametrorum (§. 167. *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Tab. VI. Fig. 107. *Al.* Reſolvantur polygona circulis inſcripta ABCDE & $abcde$ ex centris F & f in $\triangle\triangle$ AFB, BFC, CFD, & afb, bfc, cfd, &c. erit angulus FAB $= fab$ & FBA $= fba$ &c. (§. 344. 347.), conſequenter $\triangle$ AFB $\backsim \triangle afb$ (§. 267.). Eodem modo patet, eſſe $\triangle$ BFC $\backsim \triangle bfc$, $\triangle$ CFD $\backsim \triangle cfd$ &c. Habemus itaque $\triangle AFB : \triangle afb = BF^2 : bf^2$, $\triangle BFC : \triangle bfc = BF^2 : bf^2$ &c. (§. 398.). Ergo $ABCDE : abcde = BF^2 : bf^2$ (§. 167. *Arithm.*), conſequenter cum radii BF & bf ſint ut diametri (§. 39. *Geom.* & 178. *Arithm.*), polygona ſimilia circulo inſcripta ſunt ut quadrata diametrorum (§. 260. *Arithm.*). Et idem eodem modo oſtenditur de polygonis circulo circumſcriptis, cum triangula ſimilia etiam ſint in ratione dupli-

cata

cata altitudinum (§. 398.), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355.).

Quodsi jam polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam circuli erunt inter se ut diametrorum quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374.), adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39. *Geom.* & §. 181. *Arithm.*), & radiorum (§. 260. 259. *Arithm.*).

THEOREMA LXXXVI.

410. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheriæ, altitudo radio æqualis.*

Dem. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus indefinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 240.), consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228.). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, *per demonstrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401.). *Q. e. d.* Tab. VIII. Fig. 129.

SCHOLION.

411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est* Keplerus (a). Eam

(a) In Nova Stereometria doliorum vinariorum part. 1. theor. 2. f. B2.

Eam exemplo ejus excitatus (*a*) *sub nomine* Methodi indivisibilium *magis excoluit* Cavalerius. *Demonstrationem indirectam dedit* Archimedes (*b*) *non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigidantur.*

COROLLARIUM I.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388.). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409.). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

413. Cum adeo sit, ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173. *Arithm.*); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39. *Geom.* & §. 181. *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION.

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur: cum omnes circuli inter se similes sint* (§. 134.), *per quæ distingui possent, ea eadem sunt* (§. 24. Arithm.). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret* (§. 132. Arithm.); *ratio in omnibus eadem esse debet.* Q. e. d.

THEOREMA LXXXVII.

Tab. VIII. Fig. 133

415. *Sector circuli ACD æqualis est triangulo, cujus basis arcus AD, altitudo radius AC.*

Dem. Eadem est, quæ theorematis præcedentis (§. 410.).

THEOREMA LXXXVIII.

416. *Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est circulo. Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria circuli.*

Tab. VI Fig. 107

Dem. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 342.). Sed chordæ sunt arcubus minores (§. 191.). Ergo singula polygoni latera AB, BC, CD &c. sunt singulis arcubus eisdem respondentibus minora, con-

(a) Vide præfat. ad Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam. p. b. 2.

(b) In libello de circuli dimensione, prop. 1.

consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheria minor (§. 90. *Arithm.*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt: area polygoni parti circuli congruit (§. 9. *Arithm.* & §. 3. *Geom.*), adeoque ipsi æqualis est (§. 161.), consequenter polygonum inscriptum circulo minus (§. 20. *Arithm.*). *Quod erat primum & secundum.*

Latera polygoni circumscripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355.) adeoque tota extra eum cadunt (§. 47.), consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9. *Arithm.* & §. 3. *Geom.*). Hinc ipsi æqualis (§. 161.), hoc est, circulus polygono circumscripto minor est (§. 20. *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli & perimetrorum (§. 401. 410. 388.), consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159. *Arithm.*). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181. *Arithm.*). Sed polygonum majus circulo, *per demonstr.* Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149. *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXXXIX.

417. *In triangulo rectangulo ABC quadratum hypothenusæ AC æquale est quadratis laterum AHIB & BCED simul sumtis.* Tab. VIII. Fig. 130

Dem. Ducantur rectæ AE & BF (§. 121.), itemque BK ipsi CF parallela (§. 258.). Quoniam $\triangle$ ACE cum quadrato CEDB super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 336.) existit; hujus dimidium est (§. 391.). Ex eadem ratione $\triangle$ BCF est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x = o$ (§. 98. 145.), adeoque $x + y = o + y$ (§. 88. *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 98.); ideo $\triangle$ ACE = $\triangle$ BCF (§. 179.), consequenter BCED = LCFK (§. 93. *Arithm.*). Eodem

 mo-

modo ostenditur, esse $AHIB = ALKG$. Quamobrem $BCED + AHIB = LCFK + ALKG$ (88. *Arithm.*) $= ACFG$ (§. 86. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

418. *Hoc theorema* Pythagoras *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur. Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus* Hecatombe, *hoc est, centum bovum sacrificio redemtum fertur.*

COROLLARIUM I.

Tab. VIII. Fig. 131. 419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249.); 2°. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. *cit.*) ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & $BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417.). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 132. 420. Quodsi AB fuerit $= 1$ & $AC = 1$; erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat $AD = CB = \sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat $AE = 2$; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat $AF = EB = \sqrt{5}$; erit $FB = \sqrt{6}$ & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, consequenter numeri (§. 10. *Arithm.*) iique irrationales (§. 43. 295. *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

421. Cum CB sit diagonalis Quadrati (§. 111.); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420.), adeoque unitati incommensurabilis (§. 43. *Arithm.*), consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM IV.

422. Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31. *Arithm.*), consequenter rationes irrationales (§. 164. *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur (§. 419.).

PROBLEMA LVII.

Tab. VIII. Fig. 133. 423. *Datis chorda AB & radio AC invenire chordam arcus dimidii AD.*

Res. & Dem. Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D, *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis (§. 291.), adeoque anguli ad E recti sunt (§. 78.). Quare

1. A

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§. 417.).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 269. *Arithm.*), quæ erit EC.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417.).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269. *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

E. gr. Sit radius AC = 10000 & AB latus hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356.) & AE = 5000.

Quare	$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
	$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
	$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
	$CE = 8660$	$DA = 5176$
	$DC = 10000$	
	$DE = 1340$	

PROBLEMA LVIII.

424. *Dato latere polygoni regularis inscripti AB invenire latus circumscripti FG.* Tab. VIII. Fig. 134

Res. & Dem. Quoniam FG parallela ipsi AB & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355.); erit AE = ½ AB & CE : EA = CD : DG (§. 268.). Quare si ob angulum rectum ad E (§. 291.) EC investigetur ut in problemate præcedente; reperietur DG (§. 302. *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim CE : CD = EA : DG & CE : CD = EB : DF (§. 268.). Cum adeo sit EA : DG = EB : DF (§. 167. *Arithm.*) & EA = EB, *per demonstrata*: erit etiam DG = DF (§. 177. *Arithm.*) adeoque FG = 2 DG. *Q. e. i. & d.*

E. gr. Sit CD = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423.), adeoque DG =

 5773.

5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA LIX.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

Ref. 1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423.), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.

2. Invento hoc latere, quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§. 424.).

3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni tam inscripti, quam circumscripti (§. 106.).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416. *Geom.* & §. 205. *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit e. gr. radius circuli 1 seu (ut latera polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1.000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000; reperietur, continua a quadrato bisectione, latus polygoni 1, 073, 741, 824 laterum inscripti vero proxime minus 0.0000000005851 6723170686387122 circumscripti autem latus vero itidem proxime majus 0.00000000005851672317068638 73784. Hinc perimeter circumscripta 6.28318530717958649156537 vero proxime major; inscripta autem 6.2831853071795864 5093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 2.000000000 0000000, erit peripheria minor quam 6.2831853071795865, major vero quam 6.2831853071795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 10000000000000000 ad 31 41592653589 7932. Compendia calculi tradit *Ludolphus a Ceulen* (a).

SCHOLION I.

426. *In quadrando circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta*

(a) In libro de circulo & adscriptis conf. Fundamenta Arithmetica & Geometrica lib. 6. probl. 1. p. m. 241. & seqq.

culta, desudarunt ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut nostra præsertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi: Archimedes (*a*) *ei fini excogitavit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta & circumscripta, & polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimeter polygoni inscripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumscripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho a Ceulen (*b*), *qui tandem reperit, posita diametro peripheriam esse minorem quam* 3. 14159265358979323846264338327950, *sed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam ut* 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415: *in qua proportione* Ptolemæus, Vieta, Hugenius *cum* Ludolpho *consentiunt.* Hugenius (*c*) *compendiosiorem monstravit viam; sed pluribus theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.*

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria 113. 31415 : 10000 (§. 272. *Arithm.*) hoc est 355 quam proxime.

SCHOLION II.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus Metius *tradit* (*d*) *a parente suo inventam & demonstratam* (*e*); *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quodsi enim numerum 355 septem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per 113 dividas; quotus cum proportione Ludolphina collatus ostendet eam ne quidem* $\frac{3}{100000000}$ *a vera differre.*

PROBLEMA LX.

429. ***Data diametro circuli invenire peripheriam & aream ejus, & data peripheria diametrum.***

Res.

(a) In libello de circuli dimensione prop. 2.
(b) In Zetematum Geometricorum Epilogismo Zetem. 2. p. 92.
(c) In inventis de circuli magnitudine prop. 10. p. 15. & prop. 20. p. 40.
(d) In Geometria practica p. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89.
(e) In libello adversus quadraturam circuli Simonis a Quercu conscripto.

Ref. & Dem. 1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426. 427.); una data, invenietur altera (§. 302. *Arithm.*).

2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410. 392.).

E. gr. Sit diameter 56: erit

$$\begin{array}{ll} 100 - 314 - 56 & \text{Periph.} \quad 17584''' \\ \quad\quad\quad 56 & \tfrac{1}{4}\ \text{Diam.} \quad 1400 \\ \hline \quad\quad 1884 & \quad\quad 7033600 \\ \quad 1570 & \quad\quad 17584 \\ \hline \text{Per.} 17^{\circ} 5' 8'' 4''' & \text{Area } 24^{\circ} 61' 76'' 00''' \end{array}$$

COROLLARIUM I.

430. Si diameter 100; peripheria 314 (§. 426.), adeoque area circuli 7850 (§. 429.). Est vero quadratum diametri 10000 (§. 370.): ergo hoc ad aream circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181. *Arithm.*), quam proxime.

COROLLARIUM II.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427.), adeoque area circuli $10028\frac{3}{4}$ (§. 429.). Est vero quadratum diametri 12769 (§. 370.). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{3}{4}$ hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178. *Arithm.*) consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181. *Arithm.*), quæ Metiana proportio priori accuratior.

COROLLARIUM III.

432. Area igitur circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & quadratum diametri; vel ad 452, 355 & quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302. *Arithm.*).

Sit e. gr. diameter 560'', erit quadratum ejus $31^{\circ} 36' 00''$. Quare.

$$\begin{array}{l} 1000 - 31^{\circ} 36' 00'' - 785 \\ \quad\quad\quad 785 \\ \hline \quad\quad 1568000 \\ \quad\quad 25088 \\ \quad\quad 21952 \\ \hline 24^{\circ} 61' 76'' \quad \text{Area circuli.} \end{array}$$

COROLLARIUM IV.

Tab. VIII. Fig. 135. 433. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF.

PROBLEMA LXI.

434. *Data area circuli, invenire diametrum.*

Ref.

Ref. 1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus quartus proportionalis 313600 (§. 302. *Arithm.*): qui est quadratum diametri (§. 430.).

2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§. 269. *Arithm.*), quæ est diameter (§. 236. *Arithm.* & §. 370. *Geom.*).

PROBLEMA LXII.

435. *Dato radio circuli* AC *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam invenire aream sectoris* ACB. Tab. VIII. Fig. 133

Ref. 1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*): qui est semiperipheria (§. 436. *Geom.* & §. 181. *Arithm.*).

2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB & semiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem mensura, in qua radius AC datur.

3. Tandem arcus AB ducatur in semiradium. Factum exprimet aream sectoris (§. 415. 392.).

E. gr. Sit radius 6'; arcus 60°.

$$100 - 314 - 600''$$
$$\underline{\quad 6\ 00 \quad}$$
Semiperiph. 1884 | 00
$$180 - 1884 - 60$$
$$60)\ 3 \overline{\qquad\qquad} 1$$
$$628''' = AB$$
$$\underline{300 = \tfrac{1}{2}\ AC}$$
Area 18' 84'' 100 | = ACB

PROBLEMA LXIII.

436. *Datis altitudine segmenti* DE & *dimidia basi* EA, *invenire aream ejus.* Tab. VIII. Fig. 133.

Ref. 1. Quæratur diameter (§. 328.).

2. Describatur circulus (§. 131.) & in eo applicetur basis segmenti AB.

3. Ducantur radii AC & BC & ope instrumenti transportatorii investigetur numerus graduum arcus ADB.

4. Da-

4. Dato jam radio AC una cum arcus ADB ad peripheriam ratione, investigetur area sectoris ACB &

5. Ex chorda A B atque altitudinis segmenti D E complemento ad radium E C, area trianguli A C B (§. 392.).

6. Hoc denique ex illo auferatur : residuum erit segmentum A D B E A.

E. gr. Sit A B = $600'''$, D E = $80'''$; erit D F = $1205'''$ (§. 313.), arcus A B = $60°$ (§. 152.). Ergo area sectoris A D B C = $18'\,84''$ (§. 435.). Jam E C = $522\frac{1}{2}'''$ A E = $300'''$. Quare Δ A C B = $156756''$ consequenter segmentum A E B D A = $31650''$.

C O R O L L A R I U M.

437. Quodsi segmentum majus B F A quæratur ; triangulum B C A sectori B F A C B addendum.

S C H O L I O N.

438. *Ne pro invenienda area sectoris atque segmenti peripheriam investigare opus sit ; arcuum gradus atque scrupula tam prima, quam secunda istiusmodi particulis expressa in tabula subsequente exhibere placet, qualium diameter est* 100000.

Grad.	Part. per.	Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.	Sec.	Part. per.
1	872	70	61086	1	14	2	0
2	1745	80	69813	2	29	3	$\frac{1}{2}$
3	2617	90	78539	3	43	4	$\frac{1}{2}$
4	3490	100	87266	4	58	5	1
5	4363	110	95993	5	72	6	1
6	5235	120	104719	6	87	7	$1\frac{1}{2}$
7	6108	130	113446	7	101	8	$1\frac{1}{2}$
8	6981	140	122173	8	116	9	2
9	7853	150	130899	9	130	10	2
10	8726			10	145		
20	17453	160	139626	20	290	20	4
30	26179	170	148353	30	436	30	7
40	34906	180	157079	40	581	40	9
50	43633	360	314159	50	727	50	12
60	52359						

tam

Constructio tabulæ intelligitur ex resolutione problematis 61 (§. 435.): usus talis est. Sit e. gr. ut in casu problematis citati diameter 1200″, arcus 60°. Cum 60 gradibus in tabula respondeant 52359 particulæ diametri; inferatur:

$$\begin{array}{r} 100000 - 52359 - 1200 \\ 1200 \\ \hline 10471800 \\ 52359 \\ \hline 628|30800 \end{array}$$

Est ergo arcus 628″, ut supra (§. cit.) *eundem reperimus.*

PROBLEMA LXIV.

439. *Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 136

Ref. Fiat EF = AD & ducatur recta DF: erit ADFC = DBEF.

Dem. Ducatur diagonalis AE: erit $o = x$ (§. 156.) & ob parallelas AB & EC (§. 102.) $y = u$ (§. 233.). Sed AD = FE, *per construct.* Ergo △ADG = △FGE (§. 252.). Est vero △ACE = △AEB (§. 337.). Quare ACFG = DBEG (§. 91. *Arithm.*), consequenter ADFC = DBEF (§. 88. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXV.

440. *Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere.* Tab. VIII. Fig. 137, 138.

Ref. 1. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 274.).

2. In parallelogrammo ducantur rectæ 11, 22; in triangulo A1, A2.

Dem. Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102.); eandem altitudinem habent (§. 227. 228.). Sunt itaque in basium ratione (§. 389.), consequenter ob C1 = 12 = 2D, *per constr.* æquales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD per-

perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 213.); triangula A C 1, 1 A 2, 2 A D eandem altitudinem (§. 228.), adeoque basium rationem habent (§. 389.). Sed bases æquales sunt, *per constr.* Ergo & triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LXVI.

Tab. VIII. Fig. 139. 441. *Figuram rectilineam quamcunque ABCDE in partes æquales dividere.*

Res. 1. Quæratur area figuræ (§. 400.) & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, e. gr. in 3.

2. Area partis, in nostro casu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.

3. Area trianguli A E D subtrahatur a parte tertia & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ A D; erit quotus altitudo trianguli A I D priori A E D addendi, ut A E D I sit pars tertia figuræ (§. 394.).

4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi A D (§. 258.), quæ secabit latus A B in I: quo puncto dato, rectam D I ducere licet, tertiam partem figuræ A I D E abscindentem.

5. Pars tertia dimidia sive sexta totius figuræ dividatur per $\frac{1}{2}$ D I, quotus erit altitudo trianguli I K D sextam figuræ partem constituentis (§. 394.).

6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi I D parallela, ut habeatur punctum K (§. 258.).

7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{1}$ K D, ut habeatur altitudo trianguli K L D sextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394.).

8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi K D parallela (§. 258.), ut punctum L determinetur ducaturque recta K L, quæ partem figuræ tertiam K I D L resecabit.

9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

E.gr.

E. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″ ADC = 91350 & ABC = 108750 (§. 392.), adeoque area figuræ 239832 (§. 400.); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

Pars III = 79944
AED = 39732
AID = 40212 (155 + seu 156 fere = IM
½ AD = 258) 258
1441
1290
1512
1290
222

Pars VI = 39972 (151″ = KN.
½ DI = 264) 264
1357
1320
372
264
108

Pars VI = 39972 (139″ = LO
½ DK = 287) 287
11,27
861
26,62
2583
79

SCHOLION I.

442. *Si AED majus tertia e. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo AED auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars AEDI per duo triangula uti ceteræ determinetur.*

SCHOLION II.

443. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK & DL *facile determinantur* (§. 126.).

Finis Partis Prioris.

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ solidæ.

DEFINITIO I.

444. *Solidum* ſive *corpus* eſt magnitudo tribus dimenſionibus prædita, ſeu extenſum in longitudinem, latitudinem atque profunditatem.

DEFINITIO II.

445. Angulus ſolidus B eſt plurium quam duarum linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano conſtitutarum ad omnes inclinatio.

Tab. VIII. Fig. 141.

COROLLARIUM I.

446. Ergo angulus ſolidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non conſtitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum ſolidum conſtituendum requiruntur (§. 445.); tres minimum anguli plani ad ſolidum conſtituendum neceſſarii.

SCHOLION I.

448. *Unde etiam* angulus ſolidus *definitur*, *quod ſit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non conſiſtentibus, ad idem tamen punctum conſtitutis, continetur.*

COROLLARIUM III.

449. Ut anguli ſolidi ſint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine diſpoſitis contineri debent (§. 15. *Arithm.*).

SCHOLION II.

450. *Suppono ſcilicet, ut anguli ſolidi ſalva quantitate ſibi mutuo ſubſtitui poſſint, eos intra ſe invicem poſitos congrue-*

gruere debere: quemadmodum etiam anguli solidi æquales *vulgo definiuntur, quod intra se invicem positi congruant.*

COROLLARIUM IV.

451. Cum anguli solidi distingui nequeant nisi per planos, quibus continentur (§. 448.), ubi plani & numero, & magnitudine æquales ac eodem ordine dispositi fuerint, ea coincidunt per quæ a se invicem distingui debent. Sunt ergo similes (§. 24. *Arithm.*), consequenter anguli solidi similes sunt æquales & contra (§. 449.).

COROLLARIUM V.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant summam 360 graduum; planum circuli sternunt (§. 41. 59.) adeoque solidum angulum non constituunt (§. 446.). Quare summa eorum, qui ultra solidum non assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 144.) minor esse debet.

DEFINITIO III.

453. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus terminatum. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* Plato *in* Timæo *corpora, quæ statuit, simplicia, cœlum puta, ignem, aerem, aquam atque terram cum iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453.), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 449.).

DEFINITIO IV.

456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Prisma* ABC DFEA describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis, seu in nullam partem inclinatur; *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare sive trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera & ita porro. Tab. VIII. Fig. 140

COROLLARIUM I.

457. Quodlibet adeo prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257.), consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102.). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur.

COROLLARIUM II.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456. *Geom.* & §. 81. *Arithm.*), ergo & inter se æqualia sunt (§. 87. *Arithm.*).

DEFINITIO V.

Tab. VIII. Fig. 141. 459. Si planum describens ABCD fuerit quadratum & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE rectus; *Cubus describitur*.

COROLLARIUM I.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD = EFGH (§. 459. *Geom.* & §. 81. *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230.), consequenter ABFE quadratum (§. 338.), ipsi ABCD æquale (§. 374.). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459. *Geom.* & §. 81. *Arithm.*) consequenter etiam æqualia inter se (§. 87. *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

Tab. VIII. Fig. 142. 462. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur.

COROLLARIUM I.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia (§. 462. *Geom.* & §. 81. *Arithm.*), adeoque & æqualia inter se (§. 87. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462. *Geom.* & §. 81. *Arithm.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257.), consequenter LMNO parallelogrammum (§. 102.). Eodem modo ostenditur, plana

na terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO VII.

465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos eidem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur; *Cylindrum* describit *rectum*. Tab. VIII. Fig. 143

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO VIII.

467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K; describetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur *Axis Coni*: qui si ad diametrum circuli NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta vocatur *Latus Coni*. Possumus quoque *Coni* genesin ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo ita deorsum fertur, ut centrum continuo sit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur; *Conus* describitur *rectus*. Tab. IX Fig. 144

COROLLARIUM.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela; per ultimam coni genesin erit KL : KP = PQ : LM. Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum sectionis basi coni parallele factæ circulus est eadem minor.

 SCHO-

SCHOLION.

469. *Ex genesi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejusdem longitudinis in quovis peripheriæ puncto; patet lineam describentem KM, quæ altero sui extremo peripheriæ NM constanter adhæret, per punctum fixum K aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere.*

DEFINITIO IX.

Tab.IX Fig.145. 470. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur, diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ*.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex sphæræ superficie in centrum, ductæ sunt inter se æquales (§. 40.).

DEFINITIO X.

Tab.IX Fig.146. 472. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D coëuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

473. Si ac, cb, ba, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC : Dc = CA : ca = CB : cb (§. 268.) adeoque CA : ca = CB : cb (§. 167. *Arithm.*), consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA : ca = AB : ab, erit triangulum acb simile triangulo ACB (§. 207.). Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 473.), consequenter cum vi demonstrationis primæ problematis 47 (§. 363.) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis

vis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

475. *Tetraëdrum* est solidum quatuor; *Octaëdrum* est solidum octo; *Icosaëdrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum: *Dodecaëdrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum. Tab. IX Fig. 147 148. 149 150.

DEFINITIO XII.

476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares. Tab. XI Fig. 151

DEFINITIO XIII.

477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA I.

478. *Rectæ lineæ pars quædam AB non est in subjecto plano DE, pars vero BC in sublimi.* Tab. XI Fig. 175

Dem. Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (§. 21.); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC, *per hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum (§. 19.) rectæ lineæ quædam pars AB non poteſt eſſe in ſubjecto plano DE, pars vero quædam BC in ſublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab.XI Fig.176 479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF ſegmentum commune DE habere nequeunt (§. 478.), conſequenter duæ rectæ CAB & CF ſe mutuo non interſecant niſi in uno puncto D.

COROLLARIUM II.

Tab.XI Fig.177 480. Cumque pars rectæ AD eſſet in ſubjecto plano, pars vero BD in ſublimi, ſi trianguli ABC pars ADE eſſet in ſubjecto plano, pars vero DBCE in ſublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM III.

Tab.XI Fig.178 481. Et quoniam rectarum BE & DC ſe mutuo ſecantium in A partes AB & AC ſunt crura trianguli ABC; erunt eadem in eodem plano (§. 480.). Sed in eodem plano eſt EA, in quo eſt AB, & AD in eodem eſt, in quo eſt AC (§. 478.). Ergo lineæ ſe mutuo ſecantes EB & DC in eodem ſunt plano.

THEOREMA II.

Tab.XI Fig.179 482. *Si duo plana ABCD & EFHG ſe mutuo ſecent; erit communis ſectio recta IK.*

Dem. Quoniam rectæ AB & EF ſe mutuo non interſecant niſi in puncto I, nec rectæ DC & GH niſi in puncto K (§. 479.); ſi communis planorum ſectio non eſt recta unica, ſed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri poſſe patet, ſi ſectio communis planorum ABCD & EFHG non eſt recta unica IK, utut planum ſectionis lineis curvis in punctis I & K coëuntibus terminari ſumas (§. 191.). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis omnibus coincidere debent (§. 170.), conſequenter communis ſectio eſſe nequit niſi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA III.

483. *Si duæ rectæ AB & CD fuerint in eodem plano, recta EF eas secans in G & H erit in eodem plano.* Tab. XI Fig. 180

Dem. Secet planum aliud planum datum, in quo positæ sunt rectæ AB & CD, in punctis G & H; recta transiens per G & H est communis sectio planorum (§. 482.). Sed eadem est pars lineæ EF (§. 170.), quæ duas AB & CD secat *per hypoth.* Recta igitur EF est in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

484. *Si recta IE fuerit perpendicularis ad rectam KL in plano ABCD ductam; erit ea perpendicularis ad rectas omnes MN, OP &c. quæ per punctum E ducuntur.* Tab. XI Fig. 181

Dem. Concipiamus enim rectam KL, cui IE perpendiculariter insistit; circa punctum E moveri, donec ipsi MN immineat. Quoniam recta KL cum recta MN coincidit (§. 36.), IE vero situm ad eandem non mutat: erit ipsa IE etiam perpendicularis ad MN. Eodem modo patet, eandem rectam IE etiam perpendicularem esse debere ad rectam OP & quamcunque aliam per punctum E in plano ABCD ductam. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE, ad rectam KL in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78.).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur, quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA V.

487. *Si recta IE fuerit ad planum ABCD perpendicularis, & ex E tanquam centro in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ* Tab. XI Fig. 182

IG, IF &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.

Dem. Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G &c. radii EF, EG &c. erit EF = EG (§. 40.), cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485.), etiam FEI = GEI (§. 145.). Quare cum porro sit EI = EI; erit FI = GI (§. 179.). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Tab. XI Fig. 181 488. *Ex eodem puncto E ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis EI duci potest.*

Dem. Ducatur, si fieri potest, adhuc alia EQ & per punctum E in plano recta OP: erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486.): quod cum sit absurdum (§. 213.), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

Tab. XI Fig. 182 489. *Ab eodem puncto I in sublimi dato ad idem planum ABCD perpendicularis nonnisi unica IE demitti potest.*

Dem. Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480.). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486.): quod cum sit absurdum (§. 218.), a puncto I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

Tab. XI Fig. 182 490. *Linea perpendicularis IE est brevissima, quæ a puncto extra planum dato ad idem duci potest.*

Dem. Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480.) & angulus ad E rectus (§. 486.). Est igitur IE < IG (§. 220.). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA IX.

491 *Si recta LE duabus rectis FE & HE, vel pluribus FE, HE, IE in eodem puncto E concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt duæ illæ rectæ FE & HE vel plures FE, HE & IE in eodem plano ABCD.* Tab. XI Fig. 183

Dem. Sit enim, si fieri potest, recta EH in plano ABCD & EF in plano LEGK. Erit ergo linea EG cum EH in eodem plano, consequenter LE perpendicularis ad EH insistet ipsi EG ad angulum rectum (§. 485.). Sed cum LE etiam ipsi EF sit perpendicularis, *per hypoth.* erit etiam angulus LEF rectus (§. 78.), consequenter angulus LEF ipsi LEG æqualis (§. 145.), pars nempe toti (§. 9. *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84. *Arithm.*), rectæ FE & HE, quibus recta LE in puncto E perpendiculariter insistit, in eodem sunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Si plures fuerint rectæ EF, EH, EI &c. quibus recta EL perpendiculariter insistit; patet *per demonstrata*, esse rectas EI & EH, itemque EH & EF in eodem plano ABCD. Sunt igitur & rectæ EI & EF, consequenter omnes rectæ EI, EH & EF in eodem plano ABCD. *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

492. *Lineæ rectæ GE & HF eidem plano ABCD perpendiculares sunt inter se parallelæ; & si una parallelarum GE & HF fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.* Tab. XI Fig. 184

Dem. Ducatur recta EF & cum GE perpendicularis sit ad planum ABDC *per hypoth.* insistet ea rectæ EL in plano isto ductæ ad angulos rectos; erit ergo etiam GE perpendicularis ad EF (§. 484.). Sumatur EL = EF & moveatur GE

ju-

juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut rectæ EL semper inhæreat ad angulum rectum; erit LI perpendicularis ad EL (§. 78.) & ipsi GE parallela (§. 256.). Moveatur recta EL cum sua perpendiculari LI, donec ipsi EF congruat (§. 168.), consequenter punctum E in F cadat (§. 3.). Quoniam LI rectæ EF est perpendicularis, *per demonstrata*; ad idem vero punctum F ejusdem rectæ EF nonnisi unica recta perpendicularis esse potest (§. 213.); etiam recta LI cadet in rectam FH, atque adeo HF erit ad EF perpendicularis, consequenter HF & GE inter se parallelæ. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter se parallelæ & GE ad planum perpendicularis. Patet, ut ante, si ponatur perpendicularis ad rectam EL, eam etiam perpendicularem esse debere ad EF. Ad eandem EF igitur etiam perpendicularis est HF (§. 230.), consequenter HF perpendicularis ad planum ABDC (§. 484. 486.). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

SCHOLION.

494. *Hinc* Euclides planum *definit* ad planum rectum *sive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH sectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ sunt alteri plano ABDC.*

THEOREMA XI.

Tab. XI Fig. 185 495. *Rectæ AB & EF, quæ sunt eidem rectæ CD parallelæ, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallelæ.*

Dem. Ducatur in plano parallelarum AB & CD recta GH ad AB perpendicularis, & ex H perpendicularis HI ad EF in plano parallelarum CD & EF. Jungantur puncta G & I recta GI; erit trian-

triangulum GHI in eodem plano (§. 480.). Quoniam AG perpendicularis ad GH & EI perpendicularis ad HI, *per construct.* erunt etiam AG & EI perpendiculares ad GI (§. 484.), consequenter inter se parallelæ (§. 256.). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

496. *Si duæ rectæ AC & CB fuerint parallelæ duabus rectis DF & FE, etiamsi non sint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt æquales sunt.* Tab.X. Fig.167

Dem. Fiat CB = FE & CA = FD: quoniam CB parallela ipsi FE & CA parallela ipsi FD *per hypothesim*; erit BE ipsi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257.), consequenter BE parallela (§. 495.) & æqualis (§. 87. *Arithm.*) ipsi AD, ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 257.). Est igitur angulus DFE = ACB (§. 204.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

497. *Si recta IK duobus planis ABCD & EFGH fuerit perpendicularis, erunt plana inter se parallela.* Tab.XI Fig.186

Dem. Ducatur recta IL in plano ABCD & erigatur ML ad eam perpendicularis, quæ plano EFGH in M occurrit, cumque angulus I rectus sit, *per hypoth.* ad IK parallela est (§. 492.), consequenter plano EFGH ad angulos rectos insistit (§. 492.). Quamobrem si puncta M & K jungantur recta MK, erit angulus K rectus (§. 485.), consequenter LM = IK (§. 238.). Cum eodem modo demonstretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipsi IK parallelam eidem æqualem esse; plana ABCD & EFGH ubivis a se invicem eodem intervallo distare (§. 225.) patet. Sunt igitur inter se parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* planum *ABCD* alteri *EFGH dicitur* paral-

rallelum, *perinde ac recta alteri rectæ parallela est* (§.81.), *si ubivis eandem ab eadem distantiam servat*.

THEOREMA XIV.

Tab.XI Fig.187 499. *Si planum ADCB secet duo plana parallela EFGH & IKLM; erunt sectiones AD & BC inter se parallelæ*.

Dem. Ponamus enim sectiones AD & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81. 83.). Cum igitur si plana cum ipsis continuentur totæ in iisdem sint (§. 478.); ipsa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§. 498.): quod cum sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

Tab.XI Fig.188 500. *Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes AC & AB duabus aliis se mutuo tangentibus EG & EF fuerint parallelæ, etiam plana ACDB & EGLF per ipsas ducta erunt parallela*.

Dem. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258.); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495.). Perpendicularis igitur AH ad HK etiam perpendicularis est ad AB (§. 230.), consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§.497.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

Tab.XI Fig.189 501. *Duæ lineæ rectæ NR & OS a planis parallelis ABDC, EFHG, IKLM proportionaliter secantur, ut nempe sit PR : PN = TS : TO.*

Dem. Jungantur puncta sectionum N & O, R & S rectis NO, et RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§.480.), & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§.499.). Est igitur RQ : QO

= RP

= RP : PN & QR : QO = TS : TO (§. 268.). consequenter RP : PN = TS : TO (§. 167. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

502. *Ad datum planum ABDC in dato puncto E erigere perpendicularem EI.* Tab. XI Fig. 182

Res. Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 437.).

COROLLARIUM I.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum veluti EIF sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare; ut adeo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. *Necesse est ut normæ crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

COROLLARIUM II.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano, erecta huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE inde demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet.

THEOREMA XVII.

506. *Si in plano EFGH uno recta EI est ad planum ABCD perpendicularis, omni recta IK vel LM ad sectionem HG perpendicularis est ad planum perpendicularis.* Tab. XI Fig. 190

Dem. Quoniam recta EH est ad planum recta *per hypothesim*, IK vel LM ducatur ipsi EH parallela (§. 258.); erit IK vel LM ad HG

erperpendicularis (§. 230.), consequenter eædem IK & LM etiam perpendiculares sunt ad rectas quascunque alias, quæ per puncta K & M in plano ducuntur, veluti ad PQ & RS (§. 484.), adeoque ad planum ipsum (§. 486.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

507. *Coincidit hoc theorema cum corollario theorematis 10 (§. 193.): unde definitionem plani perpendicularis ad alterum deduximus.*

THEOREMA XVIII.

Tab.XI Fig.191 508. *Sectio NO duorum planorum EFGH & IKLM ad idem tertium ADCB perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

Dem. Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 507.). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§.488.), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§. 482.); sectio illa communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

Tab.IX Fig.151 509. *Plani KLGE ad planum ABDC in omnibus punctis F, f &c. inclinatio eadem.*

Dem. Erigantur ex punctis F & *f* perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliæ FI & *fi* in plano EKLG (§.212.); fiatque HF = *hf* & FI = *fi*, erunt HF & *hf*, itemque FI, & *fi* parallelæ (§. 256.), consequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipsi F*f* & H*h* parallelæ ipsi F*f*, & H*h* = F*f*, itemque I*i* = F*f* (§.257.), adeoque etiam H*h*

pa-

parallela ipsi I i (§.495.) & H h=I i (§.87. *Arithm.*). Quoniam itaque H I & $h\,i$ inter se parallelæ atque æquales sunt (§.257.): erunt anguli F & f æquales (§. 204.), atque adeo inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 476.). *Q.e.d.*

CAPUT III.

De Solidorum Constructione.

PROBLEMA II.

510. *Cubum A D C B F E H G vel parallelepipedem I K M L N O P Q in plano describere.* Tab. VIII.

Res. 1. Construatur pro cubo rhombus DABC (§.340.); Fig. 141 pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§.341.). 142.

2. Construantur porro pro cubo quadratum A E F B & rhombus B C G F (§. 338. 340.), pro parallelepipedo rectangulum L M O N, cujus latus L N altitudini æquale & rhomboides M K P O (§. 339. 341.).

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur; ut plana lateralia FBCG & M K P O videri possint; erit solidum A G cubus (§. 459.); solidum vero L P parallelepipedum (§. 462.).

PROBLEMA III.

511. *Prisma A C B F D E in plano describere.*

Res. 1. Describatur basis; e. gr. triangulum A C B, Tab. VIII. si prisma fuerit triangulare. Fig. 140

2. In A excitetur perpendicularis ad A B altitudini æqualis A E (§. 249.).

3. Construantur parallelogramma A C E D, BCDF. (§. 341.).

Erit A C B F D E prisma triangulare (§.456.457.)

PROBLEMA IV.

512. *Pyramidem D A C B in plano describere.* Tab. IX Fig. 146

Res.

Ref. 1. Deſcribatur baſis, e. gr. triangulum ACB ſi triangularis fuerit; ita tamen ut latus AB, tanquam a facie averſum, non exprimatur.

2. Super AC & CB conſtruantur triangula ADC & CDB in puncto D coeuntia: ſeu aſſumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 472.).

PROBLEMA V.

Tab.IX Fig.152 513. *Rete deſcribere, ex quo cubus conſtrui poſſit.*

Ref. 1. In rectam AB latus cubi quater transferatur

2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249.) & parallelogrammum ACBD compleatur (§. 339.).

3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M & O.

4. Denique ducantur rectæ IK, LM, NO & BD, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH & agantur rectæ EG, FH.

Dem. CK & AI ad AC perpendiculares ſunt *per conſtr.* & AI = CK = AC, *per conſtr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338.). Non abſimili modo oſtenditur eſſe IKML, MLNO &c. quadrata ipſi AK æqualia. Eſt itaque ADFG rete, ex quo cubus conſtrui poteſt (§. 460.). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

Tab.IX Fig.153 514. *Rete deſcribere, ex quo parallelepipedum conſtrui poteſt.*

Ref. & Dem. 1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.

2. Super his lineis tanquam baſibus conſtruantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum commu-

nis

nis altitudo A B altitudini parallelepipedi æqualis.

3. Super E F vero et H I construantur parallelogramma E M & H O, quorum altitudo E L & H N latitudini parallepipedi æqualis (§. 339.): Quoniam A E B H = GFIK, EHIF = GCKD, E L M F = H N O I (§. 383.); ex hoc reti parallepipedum construere licet (§. 463. 464.). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA VII.

515. *Rete pro prismate describere.* Tab. IX

Res. 1. Construatur basis prismatis e. gr. pro triangulari triangulum K B D. Fig. 154

2. Continuetur latus B D in A & E, donec fiat A B = BK & D E = D K.

3. Super A B, B D & D E construantur parallelogramma A G, B H, D F, quorum altitudo A C altitudini prismatis æqualis (§. 339.).

4. Denique super G H triangulum G I H, ipsi B K D æquale (§. 205.).

Ex hoc reti prisma triangulare, nec absimili modo multangulare quodcunque construetur (§. 457.).

THEOREMA XX.

516. *Superficies cylindri recti seclusis basibus æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri.* Tab. IX Fig. 155

Dem. Concipiatur arcus E F adeo parvus ut pro linea recta haberi possit, ducanturque rectæ E G & FH inter se parallelæ & ad E F perpendiculares. Quoniam etiam arcus E F ipsi G H parallelus (§. 465.); erit E G H F rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi E F H G æqualia resolvitur, quorum communis altitudo est E G seu altitudo cylindri (§. 229.), bases vero junctim sumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri (§. 389.). *Q. e. d.*

SCHOLION.

517. *Nimirum arculus in quolibet casu tam exiguus assumitur, ut, si ejus differentia multiplicari supponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur divisa, prodeat particula in dato casu inassignabilis, adeoque contemptibilis parvitatis: quod fieri posse patet, quod polygonum circulo inscriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum est in aliis casibus, ubi de indefinite parvo sermo fuerit. Sed ex instituto ea de re dicimus in philosophia prima.*

PROBLEMA VIII.

Tab.IX 518. *Rete pro cylindro describere.*

Fig.156 *Res.* 1. Eadem diametro describantur circuli AB & CD.

2. Inveniatur horum peripheria (§. 429.).

3. Super BC altitudini cylindri æquali construatur rectangulum (§. 339.), ita ut CD sit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti construi potest cylindrus (§. 517.).

THEOREMA XXI.

Tab.IX 519. *Superficies coni recti seclusa basi æqualis* Fig.157 *est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus coni.*

Dem. Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur, cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240.), estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78.), consequenter trianguli KML altitudo (§. 228.). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 467. 251.). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 389.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

520. Superficies coni recti æquatur sectori circuli latere coni tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (§. 415.), adeoque ad suam peripheriam eam rationem habet, quam diameter basis ad latus coni (§. 412. *Geom.* & §. 167. *Arithm.*).

PRO-

PROBLEMA IX.

521. *Rete pro pyramide describere.* Tab. IX Fig. 158

Ref. Sit e. gr. construenda pyramis triangularis.

1. Radio A B describatur arcus B E & ei applicentur tres chordæ B C, C D & D E inter se æquales.
2. Super D C construatur triangulum æquilaterum D F C ducanturque rectæ A D & A C.

Ex hoc reti pyramis construi potest (§. 472.).

SCHOLION.

522. *Si latera basis pyramidis D C, C F & D F inæqualia fuerint; evidens est fieri debere E D = D F & C B = C F. Nec adeo latet, quid factu opus sit, si basis fuerit polygonum sive regulare, sive irregulare.*

PROBLEMA X.

523. *Rete pro Cono recto describere.* Tab. IX Fig. 159

Ref. 1. Diametro basis A B describatur Circulus & diameter producatur in C, donec A C lateri coni æqualis fiat.

2. Quæratur ad 2 A C & A B in numeris determinatas, atque 360° numerus quartus proportionalis (§. 302. *Arithm.*).
3. Radio C A ex centro C describatur arcus D E & ope instrumenti transportatorii fiat angulus D C E, consequenter arcus D E (§. 54.) numero graduum invento æqualis.

Erit sector C D E cum circulo A B rete pro cono recto (§. 520.).

COROLLARIUM.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus coni truncati & radio C F arcus G H describatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus G H atque F C numerus quartus proportionalis quæratur & inde diameter circuli I F determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim C D B A E rete pro cono integro, C G F I H pro cono abscisso (§. 523.): ergo D B E H I G pro truncato.

PROBLEMA XI.

525. *Rete pro Tetraëdro describere.* Tab. IX Fig. 160

Ref. 1. Construatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198.).

2. Super ſingulis ejus lateribus conſtruantur adhuc alia itidem æquilatera D A E, E B F & F C D (§. *cit.*).

Ex hoc reti tetraëdrum conſtrui poteſt (§. 475.).

COROLLARIUM.

526. Quodſi B C continuetur in H, donec fiat C H = F C, & ut in reſolutione problematis conſtruantur triangula æquilatera C H I, C G H, H L I, D C I (§. 198.); ex reti octaëdrum conſtrui poteſt (§. 475.).

PROBLEMA XII.

527. *Rete pro Icoſaëdro deſcribere.*

Tab.X. Fig.162 *Reſ.* 1. Conſtruatur triangulum æquilaterum A B C (§. 198.).

2. In baſi A B continuata fiat A B = B F = F G = G H = H D.

3. Per C agatur ipſi A B parallela C E (§. 258.) & fiat A B = C I = I K = K L = L M = M E.

4. Ducantur rectæ C S per C & B, N T per I & F, O V per K & G &c.

5. Similiter ducantur aliæ rectæ Y O per B & I, S P per F & K, T Q per G & L &c.

Dico ex hoc reti conſtrui poſſe Icoſaedrum.

Dem. Demonſtrandum eſt, viginti triangula A C B, A B Y, C B I, C I N, B S F, B I F, I O K &c. æquilatera & inter ſe æqualia eſſe (§. 475.): id quod ſequenti ratione pateſcit. Quoniam C E parallela ipſi A D *per conſtruct.* & A C ipſi B I (§. 257.); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233.), conſequenter C A B = & ∽ C B I (§. 251.). Eodem modo oſtenditur eſſe C B I = & ∽ B I F = & ∽ F I K &c. Porro quoniam C I & B F ſunt inter ſe æquales atque parallelæ *per conſtr.* erit N T parallela ipſi C S (§. 257.), adeoque $y = u$ & $t = o$ (§. 233.), conſequenter C I N = & ∽ C B I (§. 251.). Eodem modo oſtenditur eſſe C B I = & ∽ I O K = & ∽ K P L &c. = & ∽ B S F = & ∽ F T G &c. Sunt itaque omnia triangula inter ſe

æqua-

æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

528. *Rete pro dodecaëdro describere.*

Res. 1. Describatur pentagonum regulare (§. 352.). Tab. X. Fig. 165

2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipsi AB æquales.

3. Eodem modo ducantur AI & CH, BL & DK, BN & EM &c.

4. Intervallo lateris pentagoni fiat intersectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS &c.

5. Eodem modo construantur pentagona reliqua *a*, *b*, *c*, *d*, *e f*.

Dem. Demostrandum est pentagona omnia esse regularia ipsique ABCDE æqualia (§. 475.). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, *per constr.* Cumque anguli *x* mensura sit arcus dimidius ABCD (§. 324.), anguli vero pentagoni E similiter sit mensura dimidius arcus ABCD (§. 314.); erit angulus *x* angulo pentagoni E æqualis (§. 141.). Et quoniam eodem modo ostenditur, esse quoque angulum *u* angulo pentagoni æqualem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352.), idque, ob latus commune AB, ipsi AEDCB æquale (§. 177. 161.). Eadem demonstratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens est, omnia & regularia, & inter se æqualia esse. *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

529. *Corpora Geometrica construere.* Tab. IX Fig. 160

Res. 1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 511. & seqq.).

2. Delineata exscindantur, resecta charta superflua juxta eorum perimetros.

3. Exscissa agglutinentur chartæ coloratæ.

4. Hujus superfluum ita resecetur, ut partibus pe-

rimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, e. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, scalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri solidi.

6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA XXII.

530. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum & Icosaëdrum sunt corpora regularia, nec præter hæc quinque aliud possibile.*

Dem. Cubus sex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icosaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 460. 475.). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453.). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum efficiendum concurrunt (§. 523. 524. 525.). Quoniam vero summa 6 istiusmodi angulorum est 360° (§. 243.); triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri potest (§. 452.). In cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 511.). Quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 98. 144.); quadratis nullum corpus continetur nisi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis solidum constituunt (§. 526.). Quia vero summa quatuor est 432°, & summa trium in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345.), ad angulum vero solidum constituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447.); pentagonis regularibus nonnisi dodecaëdrum: figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari potest. Corpora igitur regularia nonnisi quinque sunt. *Quod erat alterum.*

CA-

CAPUT IV.

De Dimensione Solidorum.

PROBLEMA XV.

531. S*Uperficiem ac soliditatem Cubi determinare.* Tab.X. Fig.161

Res. I. Cum superficies cubi ex sex quadratis æqualibus componatur (§. 460.); latus cubi in seipsum ducatur & factum per 6 multiplicetur (§.370.).
II. Quodsi idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

Sit e. gr. latus cubi AB 2° 7′ 4″.

AB = 274	Basis = 75076
274	AB = 274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC = 75076	Solidit. 20570824
6	
Superfic. 450456.	

Dem. Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 477.); soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque æquales divisum concipiamus, tot erunt cuborum ordines, quot in latere AB partes & in quolibet ordine totidem existent, quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§.370.), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q.e.d.* Tab.X. Fig.164

COROLLARIUM I.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10

pedum, pes 10 digitorum &c. (§. 25.); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est 20° 570′ 824″. Similiter cum pertica Rhenana sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit 11904′ & 712″. Quodsi 11904′ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536′, adeoque habebis 6°, 1536′ & 712″.

SCHOLION.

533. *Patet adeo, quantum divisio mensuræ in* 10 *partes præstet divisione in* 12.

COROLLARIUM II.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 259. *Arithm.*) & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA XXIII.

535. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

Dem. Concipiatur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 463. 456. 466.); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 87. *Arithm.*), consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt (§. 88. *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

Tab. VIII. Fig. 142. 536. *Metiri superficiem ac soliditatem parallelepidedi.*

Ref. 1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375. 387.).

2. Addantur in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464.).

3. Quodsi basis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

Sit

Sit e. gr. LM = 36', MK = 15', MO = 12' & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
54	1152	
	2	
Solid. 6°480'	23 04' Superficies.	

Dem. De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in probl. 15 (§. 531.) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535.); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

537. *Planum diagonale AHFD dividit parallelepipedum ABDCEFG in duo prismata ADCEFH & ADBFGH inter se æqualia.*

Dem. Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337.). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF perpendicularis ad DB (§. 462.), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 492. 494.); eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 227.) & ipsa itidem æqualia sunt (§. 536.). *Q. e. d.* Tab. X. Fig. 165

COROLLARIUM.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedi super eadem basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XVII.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem prismatis.*

Res. 1. Quæratur basis (§. 392. 400. 402) & multiplicetur per 2.

2. Quæ-

2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium & earum summa addatur facto antecedenti.

Tab. VIII. Fig. 140 Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 456.).

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas.

E. gr. Sit BC = 4°3′2″, AG = 3°5′7″ CD = 8°6′9″.

$\frac{1}{2}$ BC = 216″	AC = 432″
AG = 357	CD = 869
1512	3888
1080	2592
648	3456
Basis 77112″	ACDE 375408
CD = 869	3
	1126224
694008	2 ABC 154224
462672	
616896	Superfic. 128°04′48″
67°010′328″ Solidit.	

Dem. Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 539.). Quodsi vero dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem soliditas parallelepidedi prodit (§. 537.). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

540. *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area uniuscujusque sigillatim invenienda.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. VIII. Fig. 143 541. *Data diametro AB & altitudine cylindri CF; invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

Res. 1. Quæratur peripheria baseos & basis ipsa (§. 429.)

429.), hæcque multiplicetur per 2.

2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies, seclusis basibus (§. 517.).

3. Quare si eidem addatur factum antecedens, habebitur superficies integra.

4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

E.gr. Sit AB = 5°6′ CF = 24°6′; erit peripheria = 17°584.

CF = 24°600

10550400
70336
35168

Sup.absque Bas. 432°56′64″ |·00
Dupl. Bas. 49 23 52

Superfic. 481°80′16″
Basis = 24°61′76″
CF = 2460

14770560
984704
492352

605°592′960‴.

Dem. Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§. 410.); cylindrus æqualis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§.520.), Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 539.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

542. *Pyramides & Coni super eadem basi & ejusdem altitudinis sunt æquales.* Tab.X. Fig.166

Dem. Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258.), erit IK = LM (§. 226.); adeoque ob CK = DM *per hypoth.* CI = DL (§. 91. *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis paralrallelorum: Jam cum sit △CEF ∽ △CAB & △DGH ∽ △DAB (§. 268.); erit CI : CK = EF : AB & DL : DM = GH : AB (§. 396.). Sed CI = DL & CK = DM, *per demonstr.* Ergo EF : AB = GH : AB (§. 167. *Arithm.*), consequenter EF = GH (§. 177. *Arithm.*). Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 474.), consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406.). Quare cum $EF^2 = GH^2$ *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168. *Arithm.*), consequenter plana ista inter se æqualia sunt (§. 177. *Arithm.*). Igitur & disci, quantumlibet exiguæ crassitiei, in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt, quot ex altera; pyramis una alteri æqualis sit necesse est (§. 88. *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468.). Cum adeo circuli isti æquales sint (§. 171.), eodem quo ante modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

543. *Prisma triangulare in tres pyramides æquales dividi potest.*

Tab. X. Fig. 167. *Dem.* Quoniam planum ACB parallelum plano ADE (§. 456.), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498.) atque bases ACB & DFE æquales (§. 457.). Sunt ergo æquales (§. 543.). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457.), △CFB = △BFE (§. 337).

Ha-

Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent, ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC nonnisi unica perpendicularis duci potest (§. 488.); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent, consequenter æquales sunt (§. 543.). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87. *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

COROLLARIUM I.

545. **Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.**

COROLLARIUM II.

546. **Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187. *Arithm.*).**

COROLLARIUM III.

547. **Quia conus pro pyramide infinitangula haberi potest & cylindrus pro prismate infinitangulo, conus pars tertia est cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.**

PROBLEMA XIX.

548. *Metiri superficiem ac soliditatem pyramidis & coni.*

Res. Quæratur soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 540. 542.), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 547. 548.).

E.gr. Si soliditas prismatis fuerit *67010328''*, ut in probl. 17. (§. 540.); erit soliditas pyramidis *22336776''*. Si soliditas cylindri fuerit *605592960''* ut in probl. 18 (§. 542.); erit soliditas coni 201864320''.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA areæ investigentur (§. 392.) atque in unam summam colligantur. Tab. IX Fig. 146

Co-

Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§. 519.) & basi, qui circulus est, eidem addita.

Tab. IX Fig. 144 E. gr. Sit diameter coni $NM = 56'$ erit peripheria $17584'''$, basis $246176''$ (§. 429.). Sit altitudo $KL = 246''$. Quoniam $LM = \frac{1}{2} NM = 28'$ & $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 60516 + 784 = 61300$ (§. 417.) erit $KM = 2475'''$ (§. 269. *Arithm.*), consequenter superficies coni seclusa basi $2166020''$ & hinc integra $2412196''$.

PROBLEMA XX.

Tab. X. Fig. 168 n. 1. 549. *Metiri superficiem ac soliditatem coni truncati; datis ejus altitudine CH & diametris basium AB & CD.*

Res. 1. Datis diametris basium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 429.).

2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum semidifferentiæ radiorum AH & ex aggregato extrahatur radix (§. 269. *Arithm.*), ut habeatur latus AC.

3. Semisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Sit e. gr. $AB = 8'$, $CD = 6'$, $CH = 10'$, erit $AH = 1'$.

$$
\begin{array}{l}
200 - 314 - 8'' \\
\quad\quad\;\; 8 \\
\hline
\quad\; 2512''' \text{ periph. maj.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
CH^2 = 100' \\
AH^2 = \;\;\; 1 \\
\hline
AC^2 = 101
\end{array}
$$

Ergo $AC = 1005'''$ fere,

$$
\begin{array}{rl}
100 - 314 - 6' & \\
6 & \\
\hline
1884''' & \text{Periph. min.} \\
2512 & \text{Periph. maj.} \\
\hline
4396 & \text{Summa.} \\
\hline
2198 & \text{Semisumma.} \\
1005 & AC \\
\hline
10990 & \\
219800 & \\
\hline
2208990 & \text{Superfic. coni trunc.}
\end{array}
$$

Dem.

Dem. Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris E C D a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis H I peripheria diametro C D descripta, altitudo M K, latus E C; superficies majoris vero triangulo, cujus basis N O peripheria diametro A B descripta, altitudo M L, latus A E (§. 519.). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium H I O N, cujus quidem bases H I & N O peripheriis diametris C D atque A B descriptis æquales sunt, altitudo K L vero latus A C existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum peripheriarum in A C ducta (§. 400.). *Q. e. d.* Tab. X. Fig. 168 n. 1. n. 2.

Demissa ex C perpendiclari C H ad diametrum A B, cum etiam sit axis E F ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 467.), erunt C H & E F parallelæ (§. 492.). Quamobrem cum triangulum EAF secet duo plana parallela C D & A B *per hypoth.* erunt semidiametri C G & A F parallelæ (§. 499), consequenter C G = H F (§. 226.) & C H = F G (§. 238.). Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268.): ut differentia semidiametrorum A H ad altitudinem coni truncati C H, ita semidiameter major A F ad altitudinem coni integri F E, per probl. 33. Arithm. (302. *Arithm.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa subducat altitudinem coni truncati G F, ut relinquatur altitudo ablati E G.
3. Quærat soliditatem conorum C E D & A E B (§. 549).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati A C D B.

E.gr.

E.gr. Sint omnia, ut ante: erit FE=40', & hinc EG=30:

Periph. major	2512'''
$\frac{1}{4}$ AB	200
Basis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
	3
Conus AEB	669866666$\frac{2}{3}$
Periph. min.	1884'''
$\frac{1}{4}$ CD	1$\frac{1}{2}$00
	94200
	1884
Basis min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000
Con. AEB	669866666$\frac{2}{3}$
Con. trunc.	387266666$\frac{2}{3}$

THEOREMA XXVII.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

Dem. Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius dissident, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coeuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantiate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis supercies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. X. Fig. 169 & 551. *Sphæra est ad cylindrum super æquali basi ejusdem altitudinis ut 2 ad 3.*

Dem. Si quadratum ABDC cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, ipsum quidem cylindrum (§. 465.) quadrans hemisphærium (§. 470.), triangulum conum (§. 476.) describit. Altitudo horum

rum

rum corporum cum eadem ſit nempe DC (§.227.); ſi ea in diſcos quantumlibet exiguæ craſſitiei ſecentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH ſemidiameter unius diſci cylindri; erit EG ſemidiameter diſci reſpondentis in hemiſphærio, EF ſemidiameter diſci in cono. Cum vero hi diſci ſint circuli, quod ex geneſi patet (§. 131.); erunt ipſi inter ſe ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408.), hoc eſt, cum ſit ob paralleliſmum EH & CB *per hypoth.* EH = CB (§. 238.) = CG (§. 40.), atque ob CD : DA = CE : EF (§. 268.) & CD = DA (§. 98.) EC = EF, ut quadrata rectarum CG, EG & EC. Quare ſi diſcum coni a diſco cylindri ſubtrahas, relinquitur diſcus ſphæræ (§. 417.). Idem cum valeat de ſingulis diſcis ex reliquis diviſionibus emergentibus, ſoliditas ſphæræ relinquetur ſoliditate coni ex ſoliditate cylindri ſubducta. Eſt vero conus $\frac{1}{3}$ Cylindri (§. 547.). Ergo ſphæra duas ejuſdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

552. *Cubus diametri eſt ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

Dem. Si diameter ſphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531.) & cylindrus eandem cum ſphæra baſin & altitudinem habens 785000 (§. 541.), conſequenter ſphæra 1570000 : 3. (§. 551.). Eſt itaque cubus diametri ad ſphæram ut 1000000 ad 1570000 : 3, hoc eſt, ut 300 ad 157 (§. 178. *Arithm.*) *Q. e. d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri eſſe ad ſphæram propemodum ut* 300 *ad* 157. *In demonſtratione enim aſſumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314. (§. 426.).

THEOREMA XXX.

554. *Superficies ſphæræ eſt quadrupla circuli radio ſphæræ deſcripti.*

V *Dem.*

Dem. Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphæræ (§. 551.) superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri aut sextam diametri partem dividitur (§. 548.). Est vero soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ Circuli maximi in diametrum (§. 551. 541.). Quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ Diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphæræ descripti, (§. 210. *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208. 210. *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243. *Arithm.*), hoc est quadruplus circuli maximi (§. 223. *Arithm.*). Sed idem est superficies sphæræ, *per demonstrata*. Ergo sphæræ superficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429.). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta, consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphæræ descripti, altitudo diameter sphæræ (§. 375.).

PROBLEMA XXI.

556. *Data diametro sphæræ, invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

Res. 1. Quæratur peripheria circuli radio sphæræ describendi (§. 429.).

2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 556.).

3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphæræ soliditas (§. 550. 540.).

E. g. Sit diameter 5600''', erit

Periph. Circuli	17584'''
Diam.	5600
	10550400
	87920
Superf. sphær.	98470400'''

Su-

Superf. Sphær.	984704″ | 00	
Diamet.	560″	
	59082240	
	4923520	
	551434240	

15 4
$\cancel{5}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}0$ (91905706 $\frac{2}{3}$ Sol. Sphær.
$\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}$

Al. 1. Quæratur cubus diametri 175616000″ (§. 531.).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000″ numerus quartus proportionalis 91905706$\frac{2}{3}$ (§. 302. *Arithm.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 552.).

S C H O L I O N.

557. *Segmenta sphæræ ac sectores inferius in Analysi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

P R O B L E M A XXII.

558. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque corporum regularium.*

Res. Cubi soliditas investigatur per probl. 15. (§. 539.). Tetraëdrum cum sit pyramis & Octaëdrum pyramis geminata, icosaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie icosaëdri & dodecaëdri sunt, vertices in centro coëunt (§. 472. 475.); horum corporum soliditas habetur per probl. 19 (§. 548.). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 392. & 402.) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icosaëdro per 20 (§. 475.).

P R O B L E M A XXIII.

559. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.* Tab. X. Fig. 170

Res. 1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo ei-

que aqua aut arena superfundatur & altitudo aquæ seu arenæ A B notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo A C.
3. Subtrahatur A C ex A B, ut relinquatur B C.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis E C G F, altitudo B C; ejus soliditas invenietur per probl. 16 (§. 536.).

Sit e. gr. A B 8', A C 5'; erit B C 3'. Sit porro D B 12', B E 4'; erit soliditas corporis 144'.

SCHOLION I.

560. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, e. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepidedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION II.

562. *Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydrostaticas aliis adhuc modis fieri potest, uti suo loco ostendetur.*

PROBLEMA XXIV.

Tab. X. 563. *Invenire soliditatem corporis cavi.*

Fig. 171 *Res. Casus I.* Si corpus cavum in numero Geometricorum non contineatur, resolutio eadem, quæ problematis præcedentis (§. 600.).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphæra, pyramis vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclusa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 536. 539. 541. 548. 556.) inveniatur: hac enim ex ista subducta, relinquitur soliditas corporis cavi.

Sit e. gr. soliditas cylindri cavi A B C D invenienda, sitque diameter totius corporis A B 56'', longitudo A C 2° 4' 6'', 6″, erit ſoliditas cylindri incluſa cavitate 605′ 502″ 960‴. Sit diameter cavitatis 500‴; erit ſoliditas 482′ 775″ 000‴: quæ ex ſupra inventa ſubducta relinquit ſoliditatem corporis cavi 122′ 817″ 960‴.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA XXXI.

564. *Corpora ſimilia ſunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & ſimilia exiſtunt.*

Dem. Cum corpora ex planorum terminantium concurſu gigni poſſe concipiamus; eodem modo determinantur, ſi plana terminantia & numero æqualia fuerint & ſimilia (§. 119.). Sunt igitur & ipſa ſimilia (§. 120.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis ſimilibus anguli homologi ſint æquales (§. 175.), anguli vero ſolidi homologi ex concurſu planorum homologorum (§. 446.) & in corporibus ſimilibus multitudine æqualium oriantur (§. 564.); in corporibus ſimilibus anguli ſolidi homologi æquales ſunt (§. 449.).

COROLLARIUM II.

566. Quoniam in planis ſimilibus latera homologa ſunt proportionalia (§. 175.); ſi e. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud ſimile *abdcehgf* (quod in tabula non expreſſimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd* & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 104. *Arithm.*). Cum adeo ſit AB : *ab* = BD : *bd* & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173. *Arithm.*); corporum ſimilium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione exiſtunt. Tab.X. Fig.165

COROLLARIUM III.

567. Cubus ſex quadratis æqualibus terminatur (§. 460.). Sunt vero quadrata omnia ſimilia (§. 98. 175.). Ergo cubi omnes ſunt ſimiles (§. 564.).

COROLLARIUM IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regularibus, adeoque ſimilibus (§. 106. 175.) & ejuſdem quidem ſpeciei numero æqualibus (§. 530.) terminantur; corpora quoque re-

gularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564.).

COROLLARIUM V.

569. Omnia igitur Tetraedra, omnia quoque Octaedra, Dodecaedra & Icosaedra similia sunt (§. 530.).

THEOREMA XXXII.

570. *Cylindrorum & Conorum similium altitudines sunt ut radii basium axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

Tab. VIII. Fig. 143 Tab. X. Fig. 144

Dem. Si Coni & Cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 34. *Arithm.*). Patet vero Conos & Cylindros non posse distingui nisi per rationem axis D F vel K L ad diametrum basis D E vel N M atque angulum C F E vel K L M, quem efficit axis cum diametro (§. 465. 467.). Axes igitur in Conis & Cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis perinde ac in planis (§. 228.) altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in Conis & Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465. 467.), adeoque patet, *per demonstrata*, altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur, ideo axibus (§. 252.), consequenter etiam diametris basium (§. 167. *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXIII.

571. *Omnis sphæra est alteri similis.*

Tab. IX Fig. 145

Dem. Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione theorematis 2. part. 1. (§. 135.). Sed sphæra describitur semicirculo K circa diametrum A B gyrato (§. 459.): omnes igitur

sphæ-

sphæræ eodem modo determinantur (§. 119.), adeoque similes sunt (§. 120.). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIV.

572. *Omnia prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides & coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

Dem. Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536. 539. 541. 548. *Geom.* & §. 178. *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159. *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

573. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum, si altitudines, basium rationem habent (§. 181. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

574. Cylindrorum & Conorum bases sunt circuli (§. 465. 467.). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409.). Ergo cylindri & coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572.); & si fuerint æque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573.).

COROLLARIUM III.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159. *Arithm.*).

PROBLEMA XXV.

576. *Invenire cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem, vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, e. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.*

Res. 1. Investigetur soliditas corporis per problemata *Cap. præc.* tradita.

2. Ex ea vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, e gr. triplo aut subquadruplo extrahatur radix cubica (§. 282. *Arithm.*), quæ erit latus cubi desiderati (§. 531. *Geom.* & §. 248. *Arithm.*).

E. gr. Sit soliditas cylindri $107^{\circ}\ 171'\ 875''$ reperietur latus cubi æqualis $4^{\circ}\ 7'\ 5''$.

PROBLEMA XXVI.

577. *Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest,*

V 4

test, invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos datæ.

Ref. 1. Inveniatur soliditas corporis per problemata *Cap. præc.* tradita.

2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & cylindris (§. 536. 539. 541. *Geom.* & §. 210. *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548. *Geom.* & §. *cit. Arithm.*).

3. Si altitudo detur, soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*).

4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387. 392. 402. 456. 462.), quorum alteruter pro basi triangulari prismatis per 2 multiplicanda (§. 392.) & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402.).

5. Pro Cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 404.).

E. gr. Sit soliditas alicujus corporis 3° 456′ 978″. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo 2° 4′ 6″. Reperietur basis 1° 40′ 53″ fere; diameter 134″.

THEOREMA XXXV.

578. *Corpora similia, prismata, parallelepipeda, cylindri, pyramides atque coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.*

Dem. Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572.). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406. 570.) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566.). Ergo corpora ipsa in ratione

tri-

triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 150. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVI.

579. *Sphæræ sunt ut cubi diametrorum.*

Dem. Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumscriptum (§. 351.). Quodsi semicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille sphæram, hoc cylindrum describet, cujus altitudo AB diametro basis IH æqualis (§. 470. 465.). Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex theorematis 2 Part. 1. demonstratione constat (§. 135.), omnem semicirculum esse alteri similem, & AB ad BH utrobique est ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri simile (§. 175.); inde generabitur sphæra & cylindrus alteri similis (§. 119. 120.). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (§. 24. *Arithm.*); erit cylindrus unus ad suam sphæram ut alter ad suam sphæram (§. 132. *Arithm.*), consequenter sphæræ sunt inter se ut isti cylindri (§. 173. *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575.) hoc est, ut cubi earundem existunt (§. 259. *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. VI Fig. *

THEOREMA XXXVII.

580. *Æqualia parallelepipeda, prismata, cylindri, coni & pyramides reciprocant bases & altitudines.*

Dem. Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex basibus in altitudinem æqualia sunt (§. 536. &c.). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 229. *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, est ad cubum diametri ut 785 ad 1000.* Tab. X. Fig. 172 n. 1.

Dem. Si diameter AB 100, erit basis 7850 (§. 429.). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 541.). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531.). Ergo Cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181. *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

PROBLEMA XXVII.

582. *Virgulam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, e. gr. vini, cerevisiæ &c. in vase cylindrico contenti.*

Tab. X. Fig. 172 n. 1. 2. *Res.* 1. Diameter vasis cylindrici ABDE, uni mensuræ qua ad fluida mensuranda utimur æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 249.).

2. Ex A transferatur in 1 recta A 1 rectæ AB æqualis; erit B 1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.

3. Fiat A 2 = B 1, erit B 2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vasorum capaciorum A 4, A 5, A 6, A 7 &c.

4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ A 1, A 2, A 3, A 4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

Al. Diametri A 2, A 3, A 4, A 5, A 6, A 7 &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum scalæ Geometritricæ divisæ (§. 277.) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter AB = 1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269. *Arithm.*) erit A 2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A 3, A 4, A 5 &c. quem in usum constructa est tabula sequens:

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1. 000	13	3. 605	25	5. 000	37	6. 082
2	1. 414	14	3. 741	26	5. 099	38	6. 164
3	1. 732	15	3. 873	27	5. 196	39	6. 244
4	2. 000	16	4. 000	28	5. 291	40	6. 324
5	2. 236	17	4. 123	29	5. 385	41	6. 403
6	2. 449	18	4. 242	30	5. 477	42	6. 480
7	2. 645	19	4. 359	31	5. 567	43	6. 557
8	2. 828	20	4. 472	32	5. 657	44	6. 633
9	3. 000	21	4. 582	33	5. 744	45	6. 708
10	3. 162	22	4. 690	34	5. 831	46	6. 782
11	3. 316	23	4. 796	35	5. 916	47	6. 855
12	3. 464	24	4. 898	36	6. 000	48	6. 928

Dem. Cylindri eandem altitudinem habentes sunt inter se ut quadrata diametrorum (§. 574.). Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram nonnisi unam capientis. Quare si inde radices extrahantur, habebuntur in resolutione altera diametri ipsæ (§. 246. *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB = A 1, erit ipsius B 1 quadratum duplum, quadratum ipsius B 2 triplum, quadratum ipsius B 3 quadruplum &c. quadrati ipsius A 1 (§. 417). Unde denuo patet esse rectas A 2, A 3, A 4 &c. diametros vasorum quæsitas.

ſitas. Quodſi itaque has diviſiones ad diametrum vaſis cylindrici applices; illico conſtabit, quot menſuras capiat vas cylindricum eandem cum iſto baſin, ſed altitudinem illius habens, quod unam menſuram capit. Quare ſi porro ope alterius diviſionis in virgula factæ inveſtiges, quoties altitudo unius menſuræ in altitudine vaſis dati contineatur & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus menſurarum cavitatem vaſis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

583. *E. gr. Sit diameter vaſis cylindrici* 8, *altitudo* 12: *erit numerus menſurarum, quas capit* 96.

SCHOLION II.

584. *Altitudo cylindri menſuram unam capientis quo minor aſſumitur, eo diameter baſis fit major. Unde tam ipſa, quam diametri cylindrorum plures menſuras capientium poſtea facilius in ſuas minutias ſubdividuntur.* Bayerus (*a*) *ſuadet, ut altitudo nonniſi unius digiti aſſumatur.*

SCHOLION III.

585. *Inveniuntur autem diametri vaſorum unam vel plures partes decimas menſuræ capientium, ſi decima vel plures decimæ partes vaſis unam menſuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur baſis cylindri circularis* (§. 541): *etenim hac data diameter habetur per probl.* 58. (§. 434.). *Eodem modo inveniuntur diametri pro ſcrupulis vaſorum duas & plures menſuras capientium.*

SCHOLION IV.

586. *Quodſi altitudo vaſis conſtanter eadem retineatur, diametri pro menſuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit e. gr. diameter unius menſuræ* 1 *ſeu* 1000 *partium decimalium; erit ejus quadratum* 1000000: *cujus pars decima* 100000. *Inde extracta radix quadrata* 316 *continet partes decimales diametri unius menſuræ, quæ conveniunt diametro cylindri decimam menſuræ partem continentis, ejuſdem tamen cum cylindro integram menſuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ nempe* 200000 *radix extrahatur; prodit diameter baſis* $\frac{2}{10}$ *unius menſuræ capientis* 447 *& ita porro. Quodſi quadrato diametri unius menſuræ* 1000000 *adjicias partem decimam* 100000 *& ex ſumma extrahas radicem quadratam* 1. 049; *erit ea diameter vaſis, quæ capit* $1\frac{1}{10}$ *menſuræ. Ratio patet per demonſtrationem problem-*

(a) *In der volkommenen Viſierkunſt*, *c.* 25. *p.* 126.

blematis præsentis. Atque sic patet, quomodo virgula pithometrica accuratius construi possit, ut intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales.

Diametri pro mensuris integris & earum partibus decimalibus.

			3.	0	1.732	6.	0	2.449	9.	0	3.000
0.	1	316		1	1.761		1	2.469		1	3.016
	2	447		2	1.788		2	2.489		2	3.033
	3	548		3	1.816		3	2.509		3	3.049
	4	632		4	1.844		4	2.529		4	3.066
	5	707		5	1.871		5	2.549		5	3.082
	6	775		6	1.897		6	2.569		6	3.098
	7	837		7	1.923		7	2.588		7	3.114
	8	894		8	1.949		8	2.607		8	3.130
	9	949		9	1.975		9	2.626		9	3.146
1.	0	1.000	4.	0	2.000	7.	0	2.645	10.	0	3.162
	1	1.049		1	2.025		1	2.664		1	3.178
	2	1.095		2	2.049		2	2.683		2	3.194
	3	1.140		3	2.073		3	2.702		3	3.210
	4	1.183		4	2.097		4	2.720		4	3.226
	5	1.225		5	2.121		5	2.738		5	3.241
	6	1.265		6	2.145		6	2.756		6	3.256
	7	1.304		7	2.168		7	2.774		7	3.271
	8	1.342		8	2.191		8	2.792		8	3.286
	9	1.378		9	2.214		9	2.810		9	3.301
2.	0	1.414	5.	0	2.236	8.	0	2.828	11.	0	3.316
	1	1.449		1	2.258		1	2.846		1	3.331
	2	1.483		2	2.280		2	2.864		2	3.346
	3	1.517		3	2.302		3	2.881		3	3.361
	4	1.549		4	2.324		4	2.898		4	3.371
	5	1.581		5	2.345		5	2.915		5	3.391
	6	1.612		6	2.366		6	2.932		6	3.406
	7	1.643		7	2.387		7	2.949		7	3.421
	8	1.673		8	2.408		8	2.966		8	3.436
	9	1.703		9	2.429		9	2.383		9	3.451

SCHOLION V.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum mensuram hic constitui cylindrum, quemadmodum supra solidorum omnium mensura assumtus est cubus. Unde & virgula pithometrica sic constructa* virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum mensura constituitur circulus, sicuti supra omnium superficierum mensura quadratum.*

PROBLEMA XXVIII.

Tab.X. Fig.173 588. *Invenire soliditatem Dolii, hoc est, determinare numerum mensurarum, quas capit.*

Res. 1. Virga pithometrica vi probl. præc. (§. 583.) decenter applicata, exploretur tam longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH & AB.

2. Cum experientia non invita, rigore licet Geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus basis inter fundum & ventrem Dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 348. *Arithm.*) qui *Diameter æquata* dici solet.

3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit factum *vi demonstrationis problem. præced.* (§. 583.) numerus mensurarum, quas capit Dolium.

Sit e. gr. AB = 8	AC = 15
GH = 12	$\frac{1}{2}$ (AB+GH) = 10
erit AB+GH = 20	capac. dolii 150 mensf.
$\frac{1}{2}$ (AB+GH) = 10	

SCHOLION I.

589. *Quodsi contingat, fundum non esse perfecte circularem, sed unam diametrum esse altera longiorem, utramque diametrum metiri & earum semisummam pro diametro circuli fundo Dolii æqualis assumere solent.*

SCHOLION II.

590. *Tabulæ, ex quibus inter se coassatis Dolia construi solent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur Dolii non assumenda est recta FE, sed AC, quæ habetur, si quantitas prominentiæ tabularum una cum ejus dimidio, cui fundi crassities æqualis supponitur, a recta FE utrinque subtrahitur. Solent autem quantitates subtrahendas creta notare utrinque in ipsa superficie Dolii, e. gr. in K, si quantitas* sub-

subtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem virgulam parant, in partes minutas æquales divisam.

SCHOLION III.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema crassis & orbibus ligneis pariter crassis Dolium construunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION IV.

592. *Possemus equidem soliditatem cavitatis Dolii eodem modo explorare, quo supra corpora cava metiri docuimus* (§. 563.): *si enim per soliditatem unius mensuræ divideretur, prodiret dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obstat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION V.

593. *Prostat etiam methodus, qua sine ullo calculo capacitas Dolii invenitur. Utuntur ea in Batavia & variis Germaniæ locis. Sed cum supponat, omnia Dolia esse inter se similia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc est, semisummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* Keplerus (a) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas mensorum in se continet.* Virga enim, *inquit*, introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulorum qui vincula sunt, viminumque quibus circuli lignei stringuntur. Eliminat & excessum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia mensurandi una eademque opera præstare nulla potest. *Unde ad privatorum securitatem fraudesque eliminandas suadet*, ut lex illa Dolii construendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum magistratuum autoritate diligentiaque conservetur, pœnisque & proscriptione vasorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in Doliis Austriacis observatur.*

SCHOLION VI.

594. *Sunt, qui assumunt, Dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus soliditatem per probl.* 20 (§. 549.) *quærunt. Alii cum aliis corporibus Geometricis id comparant.* Clavius (b) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto sphæroidis Archimedeæ habet, quoad prius consentiente, quoad posterius vero contradicente* Keplero (c). Clavio *tamen assentitur* Oughtredus *eumque in finem regulam a se inventam proposuit* (d). Wallisius *pro frustro fusi parabolici habet* (e). *Enimvero cum methodus proposita praxi satis respondeat, reli-* quæ

(a) In Stereometria doliorum vinariorum part. 3. art. 3. f. n. 3.
(b) Geom. pract. lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.
(c) In Srereometria part. 2. fol. H. 3.
(d) In Clave Mathematica c. 19. p. m. 103.
(e) In Algebra c. 81. Vol. II. Oper. f. 350.

quæ vero quæ ab Anglis potissimum proponuntur (a), *utut ex profundiori Geometria derivatæ, molestiores sint nec ex Elementis Geometriæ demonstrari possunt; illa contenti esse possumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ mensoriæ a* Keplero *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA XXIX.

595. *Construere virgulam pithometricam, qua sine calculo capacitatem Dolii explorare licet.*

Tab.X. Fig.172 n.1. *Res. & Dem.* 1. Cum vasa pro quibus virga hæc paratur, esse debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, si fiat ut 785 ad 1000 ita soliditas unius mensuræ ad numerum quartum proportionalem, per probl. 29 (§. 302. *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam mensuram capientis (§. 581.).

2. Inde ergo si extrahitur radix cubica (§. 282. *Arithm.*); prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem & diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis *per hypoth.* si ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269. *Arithm.*); prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§.417.).

4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quæ capiunt mensuras duas, tres, quatuor &c. tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578.), consequenter etiam ob similitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183.) ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 260. *Arithm.*). Quare, si diagonalis vasis unam mensuram capientis concipiatur in 1000 partes divisa & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000: quadruplo 4000000000 &c. extrahantur radices cubicæ (§.282.) *Arithm.*); prodibunt diagonales vaso-

(a) Vid. The general Gauger by Mr. Dougharty p. 141. & seqq.

sorum, quæ duas, tres, quatuor &c. mensuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in virgulam & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277.): ita enim ex parata hac scala particulas millesimas diagonalibus reliquis competentes in virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in præsente casu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis est semisummæ diametrorum orbis A B & ventris G H estque $FB = \frac{1}{2}(AB + GH)$, adeoque G B Tab. IV Fig. 81. diagonalis in cylindro, cujus diameter semisumma diametrorum A B & G H: capacitas ejus statim innotescit, si per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.*

S C H O L I O N I.

596. *Constructioni virgulæ itaque inservit Tabula sequens.*

Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.
1	1000	13	2351	25	2924	37	3332	49	3659
2	1259	14	2410	26	2962	38	3361	50	3683
3	1442	15	2466	27	3000	39	3391	51	3708
4	1587	16	2519	28	3036	40	3419	52	3732
5	1709	17	2571	29	3072	41	3448	53	3756
6	1817	18	2620	30	3107	42	3476	54	3779
7	1912	19	2668	31	3141	43	3503	55	3802
8	2000	20	2714	32	3174	44	3530	56	3825
9	2080	21	2758	33	3207	45	3556	57	3848
10	2154	22	2802	34	3239	46	3583	58	3870
11	2223	23	2843	35	3271	47	3608	59	3892
12	2289	24	2884	36	3301	48	3634	60	3914

S C H O L I O N II.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari solet quemadmodum precedens* cylindrica. *Et facile ad alia dolia similia construitur,*

in

in quibus longitudo dimidia GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.

PROBLEMA XXX.

598. *Virgam pithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

Res. 1. Assumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita & numerus mensurarum e. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.

Tab. IV. Fig. 81. 2. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.

3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emissa, quæ numero mensurarum per divisionem paulo ante n. 1. invento respondet, in virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.

4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in Dolio contenti respondens.

5. Horum decrementorum intervallis in una virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, e. gr. in 200 aut plures.

Ita virga pro Dolio non pleno metiendo constructa est.

SCHOLION.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem Dolio istiusmodi virgulam parare volueris, sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex Dolio emissæ respondent, e.*

gr.

gr. si integrum Dolium capiat 64 mensuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis scribatur 63.

PROBLEMA XXXI.

600. ***Determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.***

Res. 1. Investigetur capacitas totius dolii *per probl.* 28. (§. 588.). Tab. X.

2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus Fig. 178 sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una dolii parte altius sit, quam in altera, virga per problema præcedens (§. 599.) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.

3. Ea rursus extracta notetur, quot partes in facie æqualium vino madidæ sint.

4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera virgulæ facie profunditati totius Dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per probl.* 33. *Aritm.* (§. 302.) inveniendum.

5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in virga, quot numerus inventus exprimit & transferatur in scalam scrupulorum vigesimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipsi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus mensurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus mensurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere potest. *Q. e. i.*

E. gr. sit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro scrupulorum vigesimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 mensurarum.

Fiat: 160 — 58 — 120   ~~1~~2
40) ~~4~~ 3   3   ~~1~~74 ($43\frac{1}{2}$
174   44

Pona-

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in ſcala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ numerum menſurarum indicabit, quas fluidum Dolio contentum replere poteſt.

SCHOLION.

601. *Si Dolia omnia eſſent ſimilia per methodum propoſitam ſatis accurate inveniretur quantitas fluidi in dolio non pleno: ſed in diſſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa eſt methodus, & rigori geometrico ſatisfaciens & praxi reſpondens. Quam enim* Keplerus *dedit* (a), *ea nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſtea eidem ſubſtituerit* (b); *ſatis tamen intricata eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* Bayerus (c) & Dougharty (d) *tradunt.*

Finis Elementorum Geometriæ.

(a) in Stereometria Doliorum f. O. 2. b.
(b) *In dem Auszuge der uhralten Meſſe- Kunſt* Archimedis §. 88. f. 95.
(c) In Concmetriæ Mauritianæ c. 9. p. 102. & ſeqq.
(d) The General *Gauger* p. 164. & ſeqq.

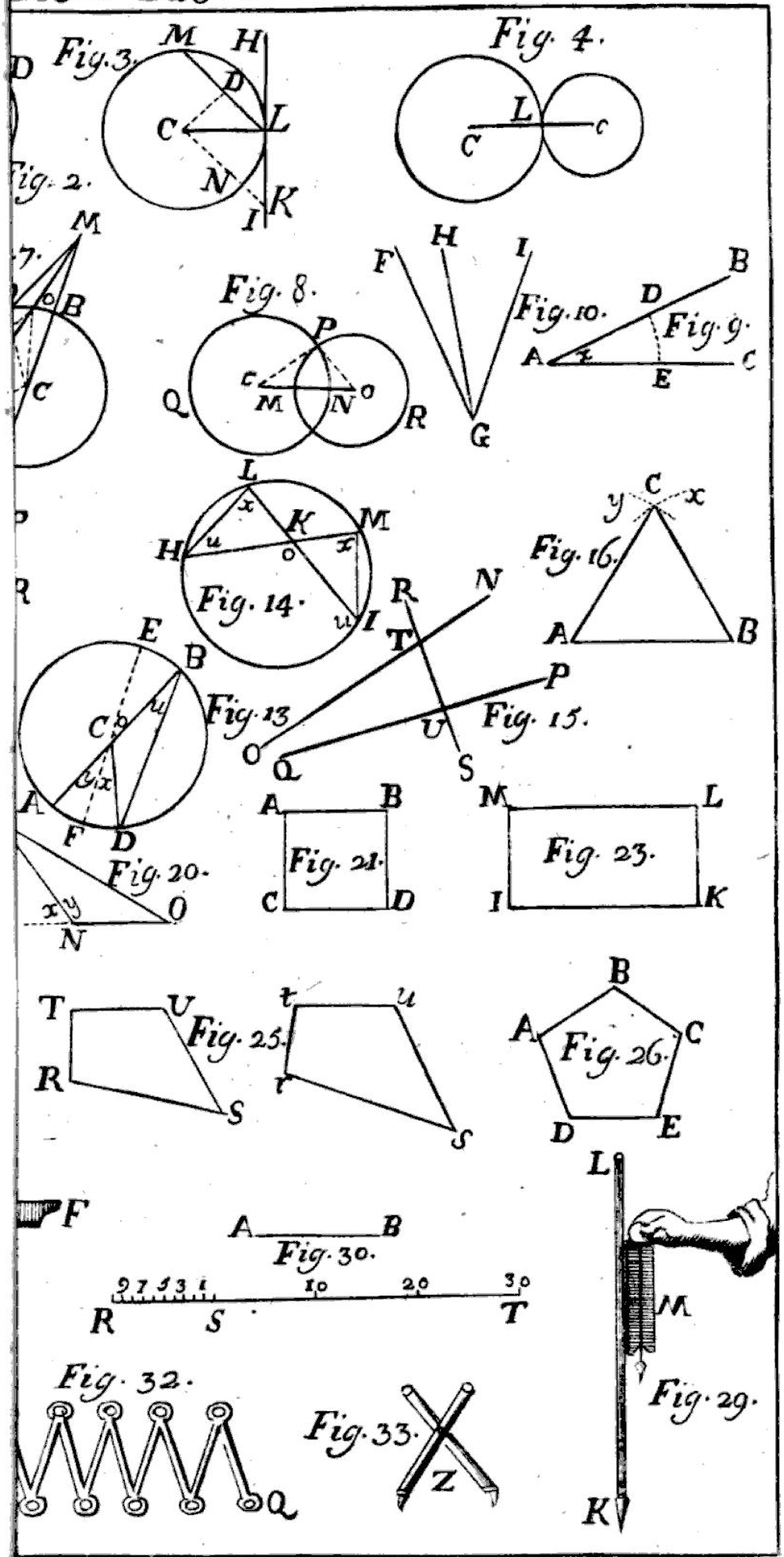


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 29.
Fig. 30.
9 7 5 3 1 10 20 30
Fig. 32.
Fig. 33.

Fig: Geom: Tab: II.

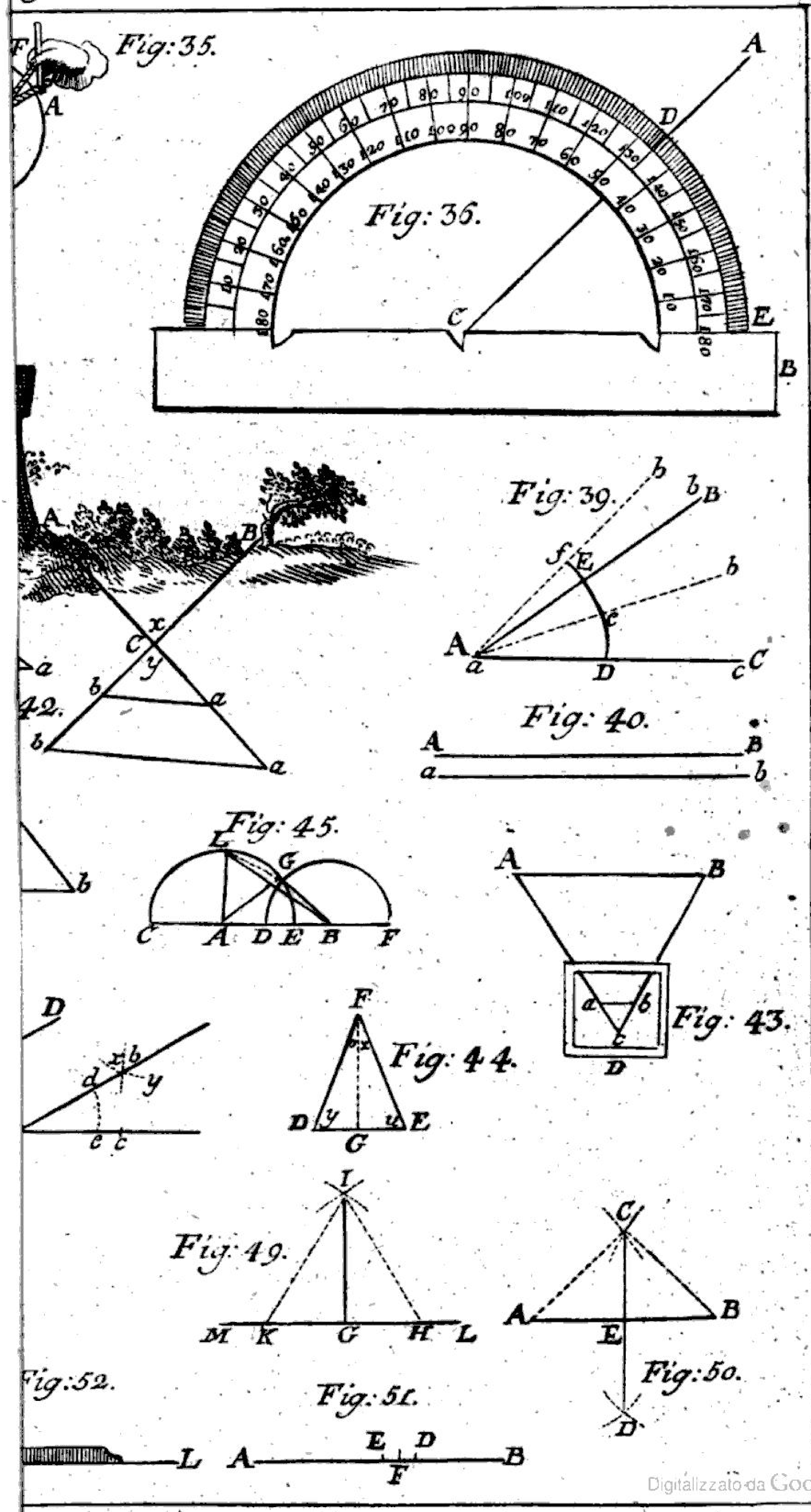


Fig. 55.

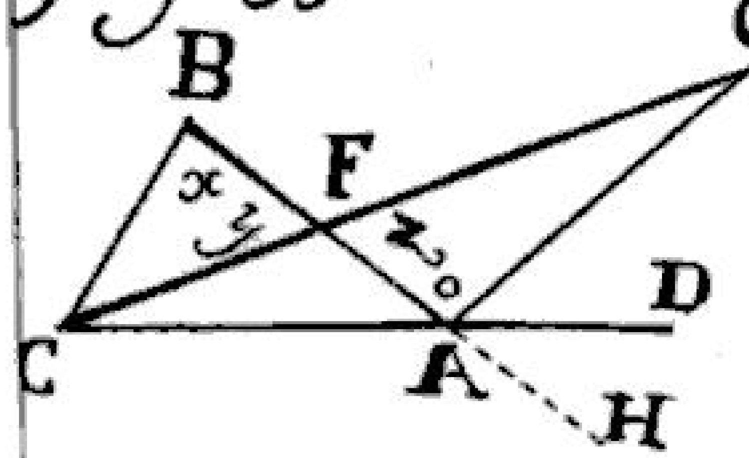


Fig 56

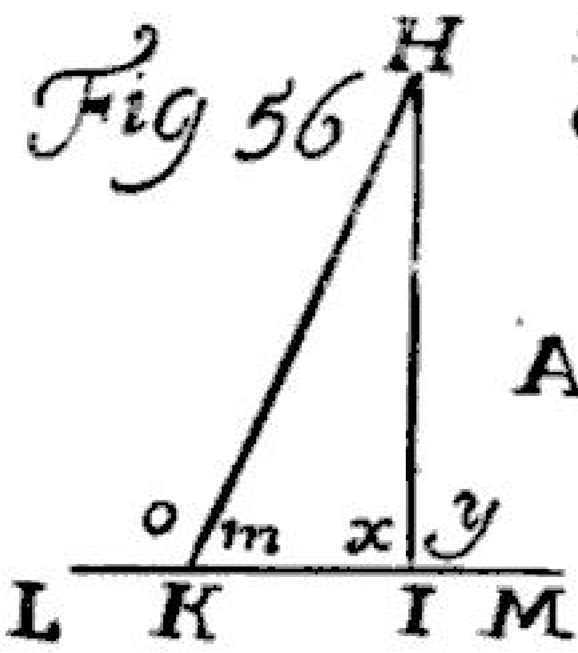
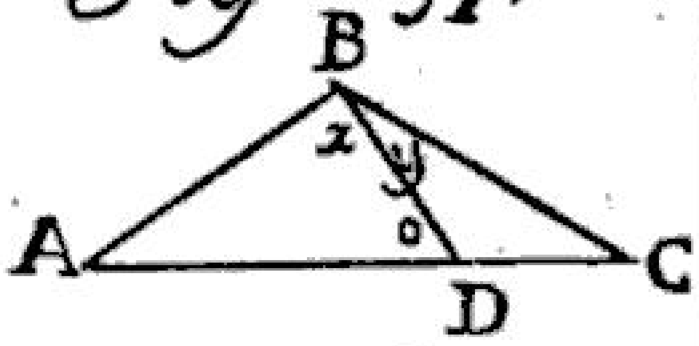


Fig. 57.



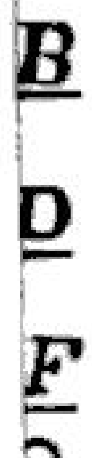


Fig. 63

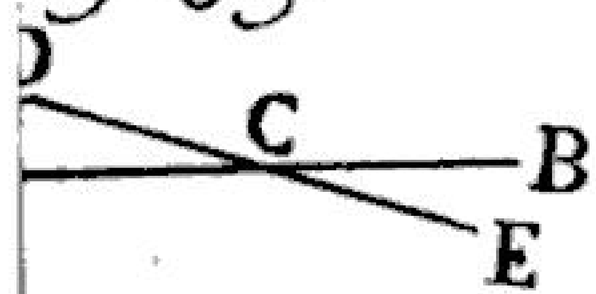


Fig. 60

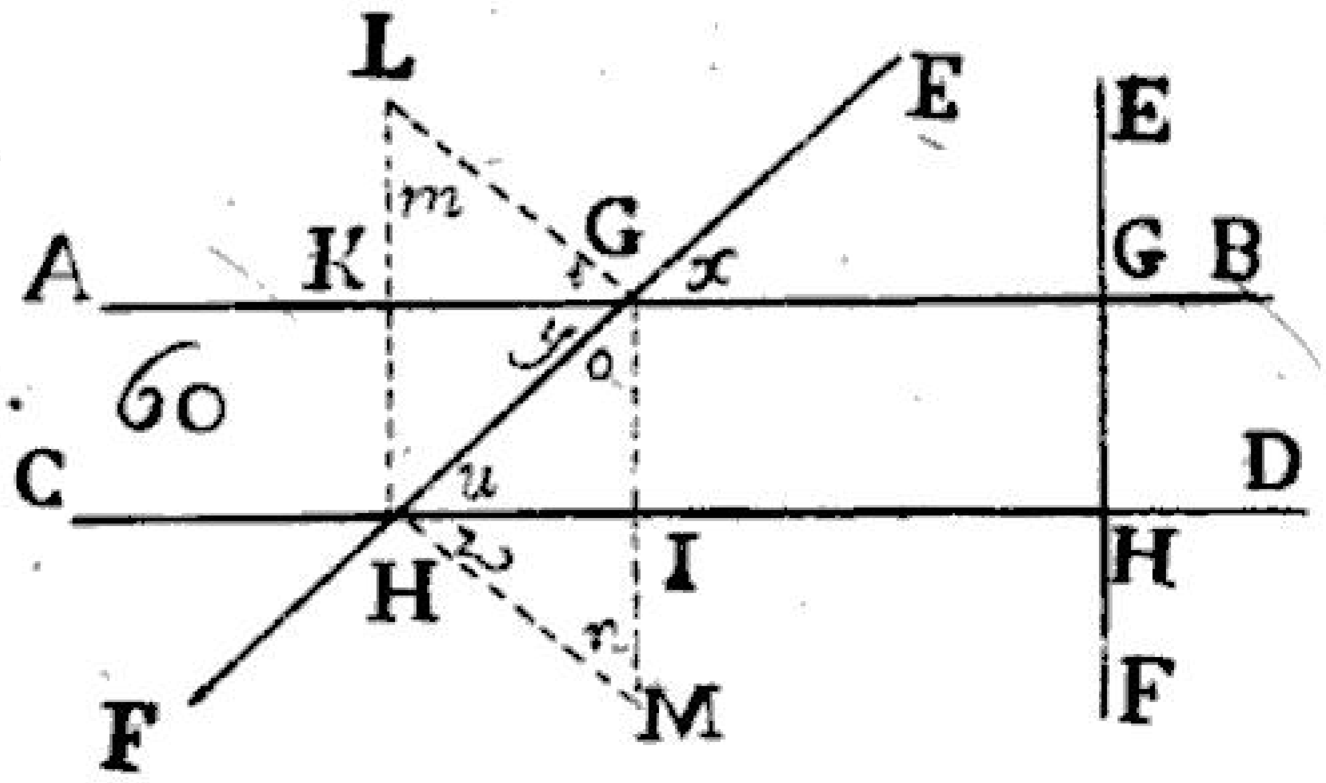


Fig 65

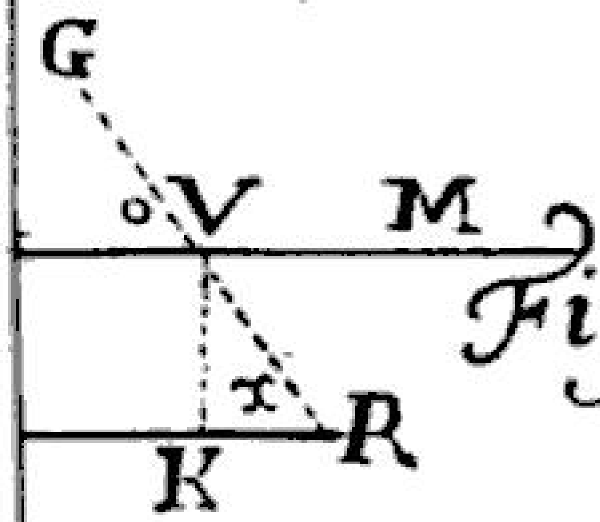
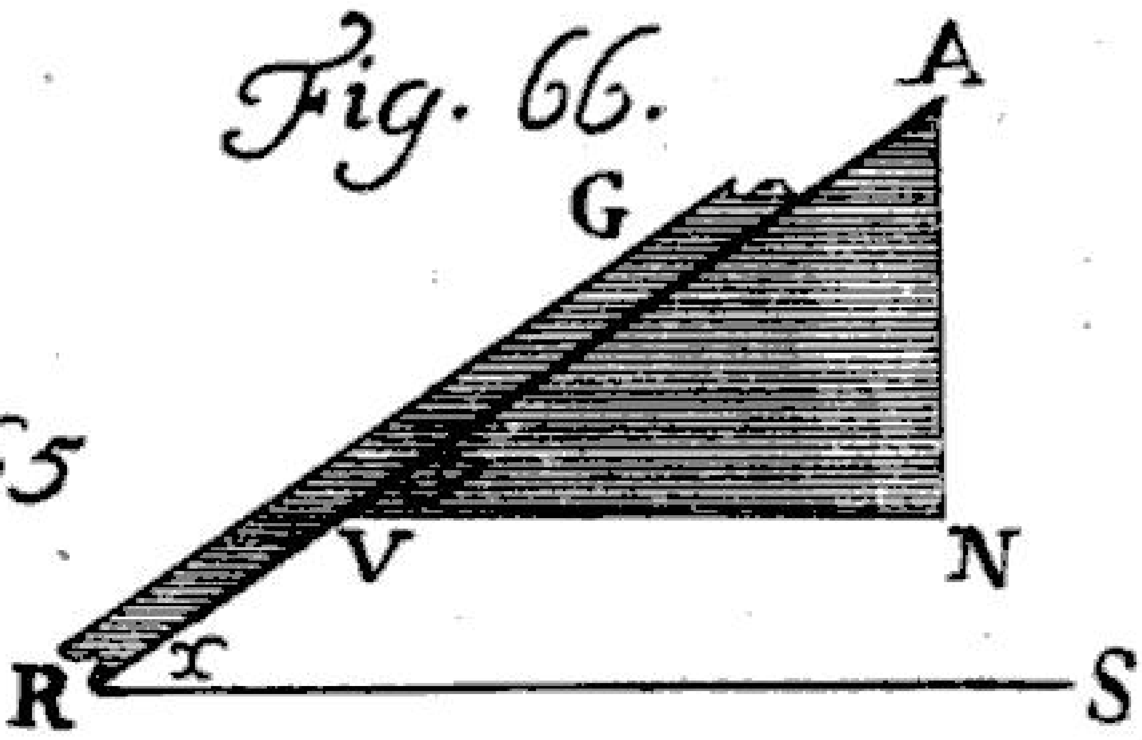


Fig. 66.



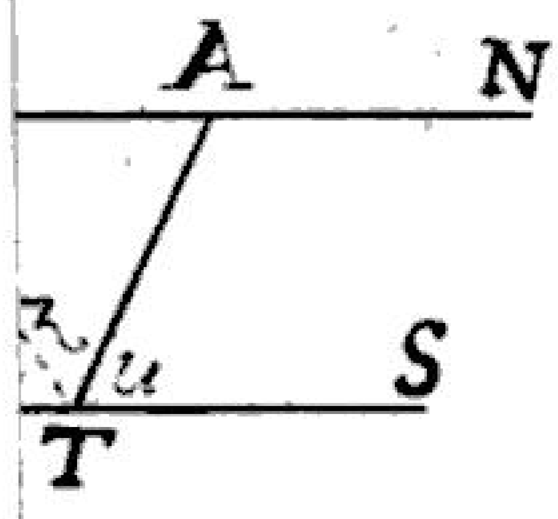


Fig. 10.

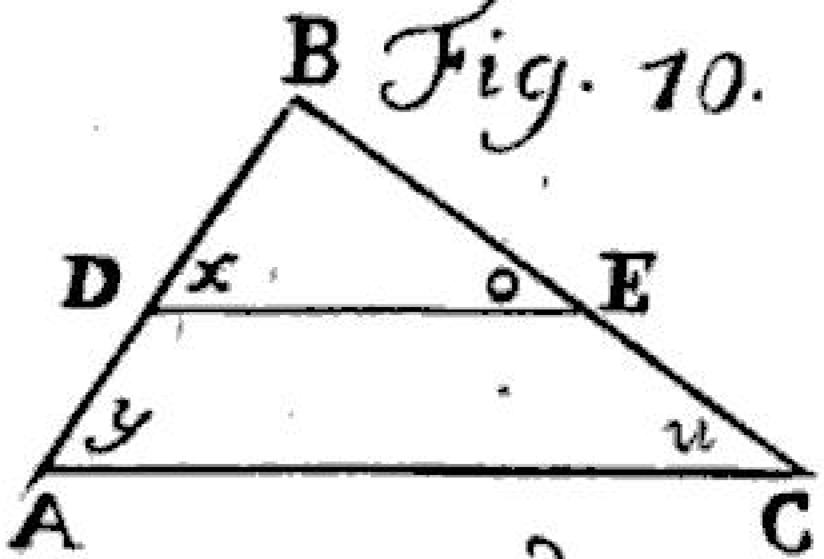
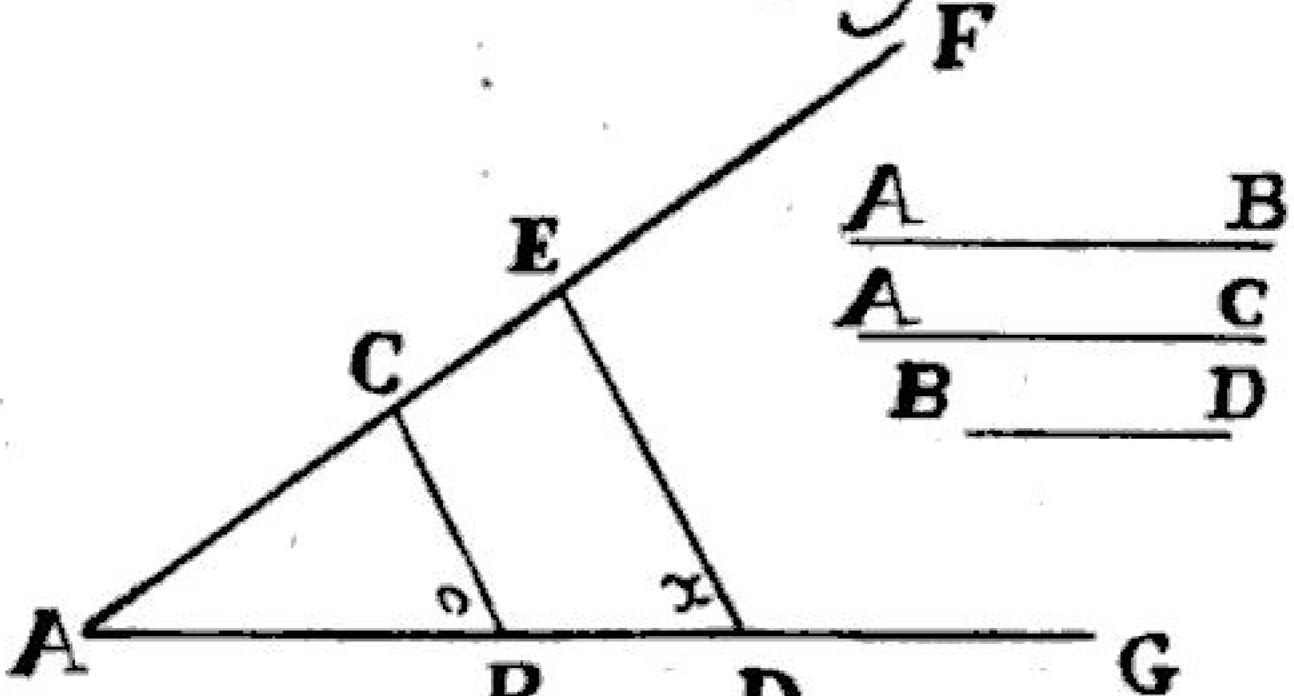
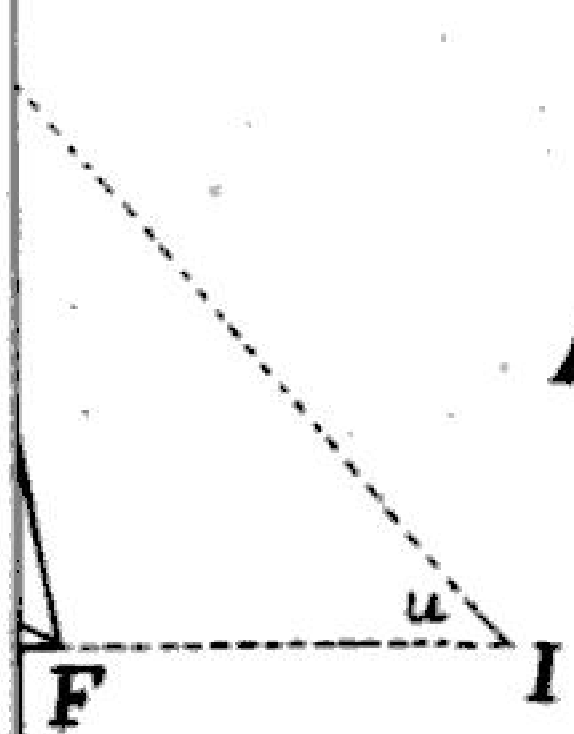


Fig. 72.



…71.



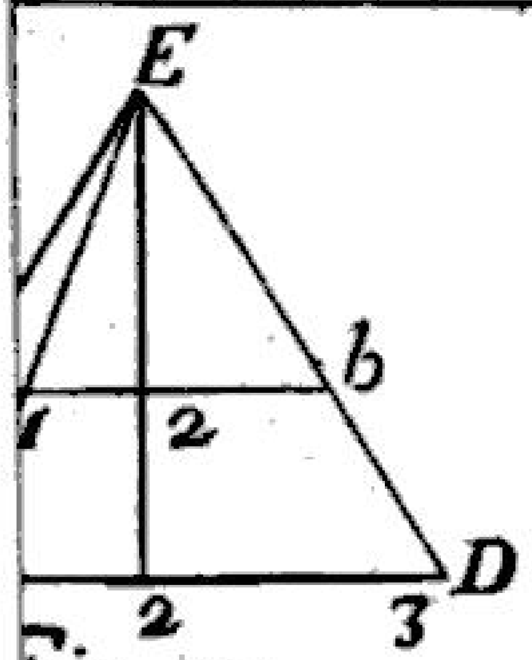


Fig: 74.

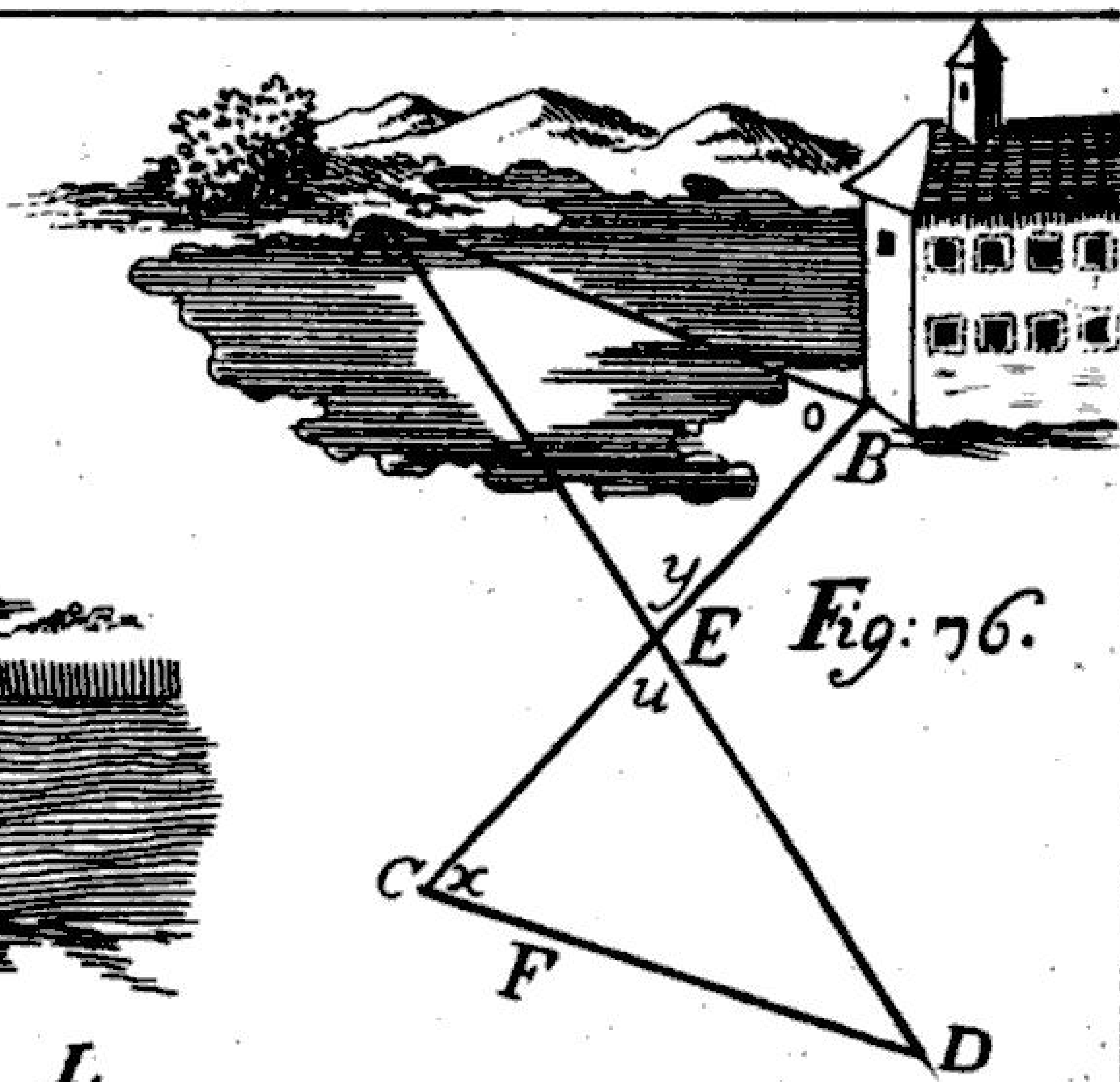
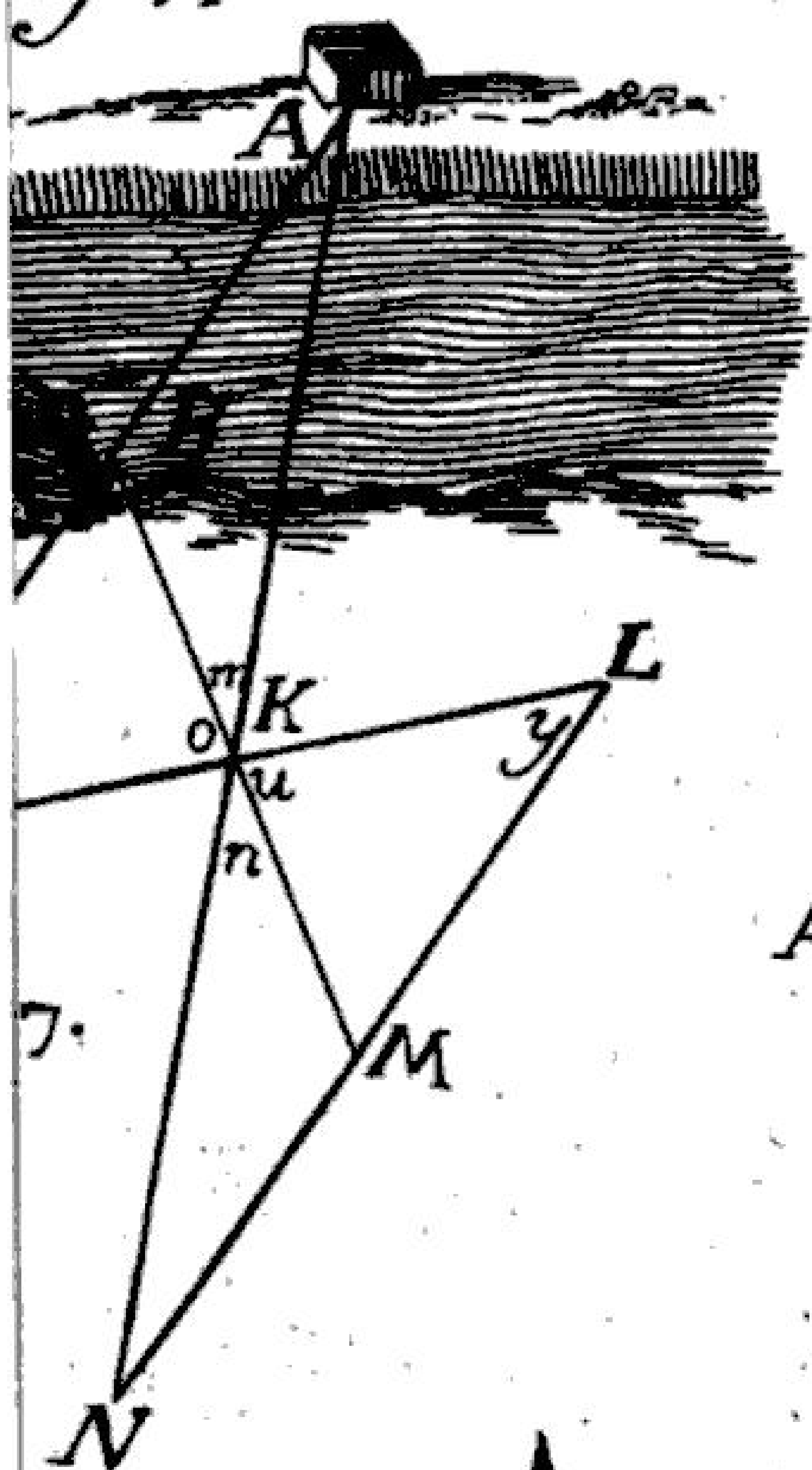


Fig: 76.



7.

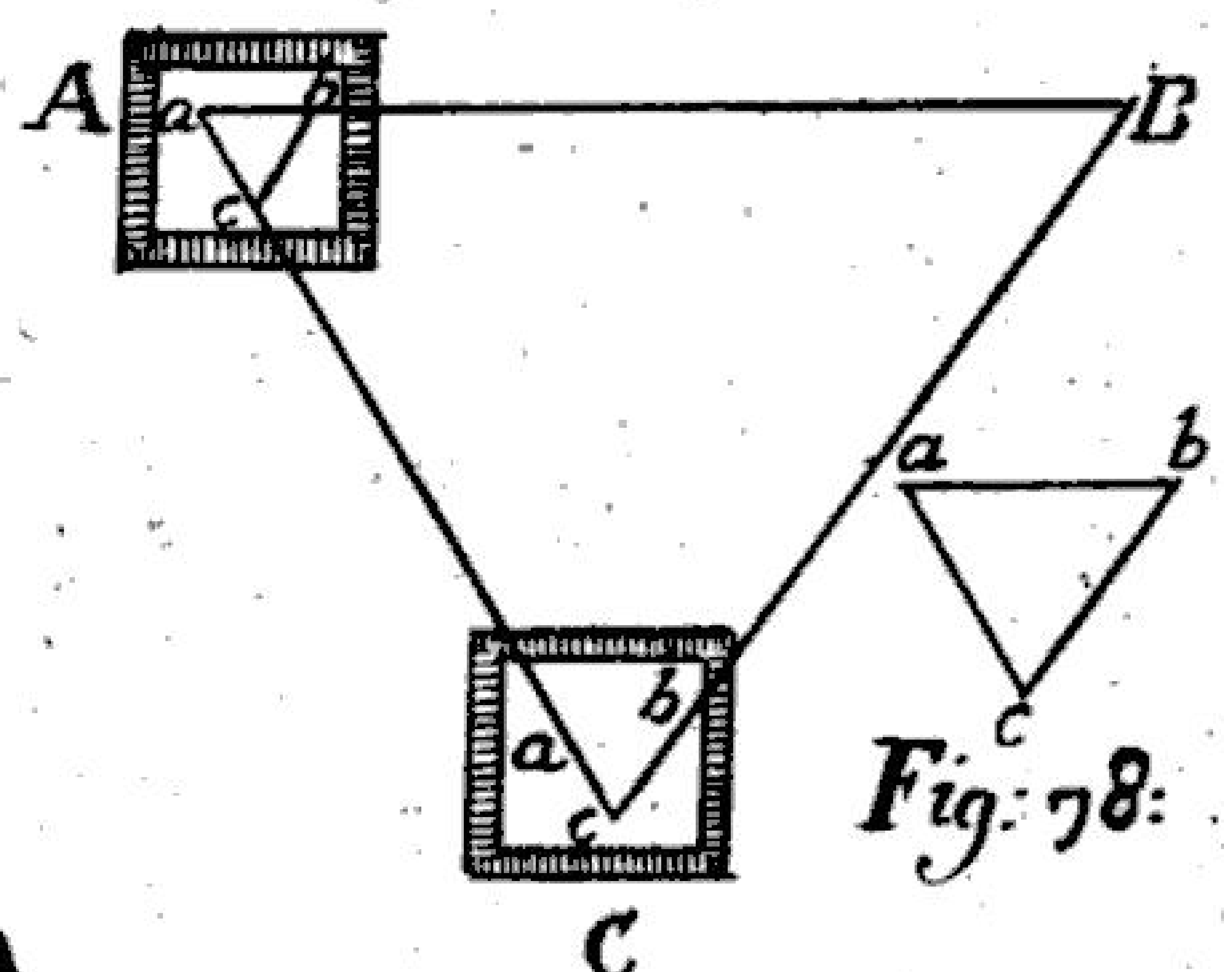


Fig: 78:

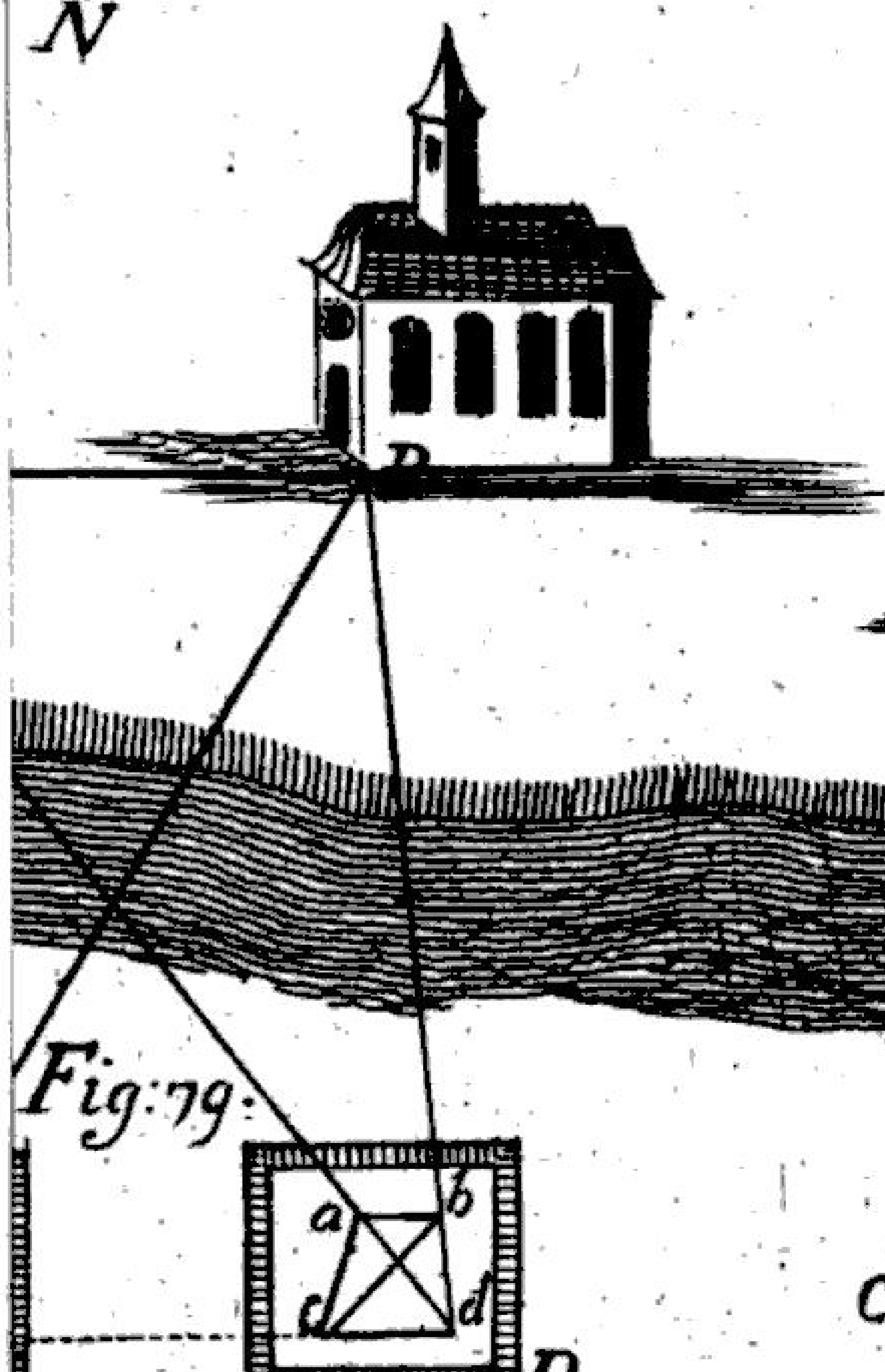


Fig: 79.

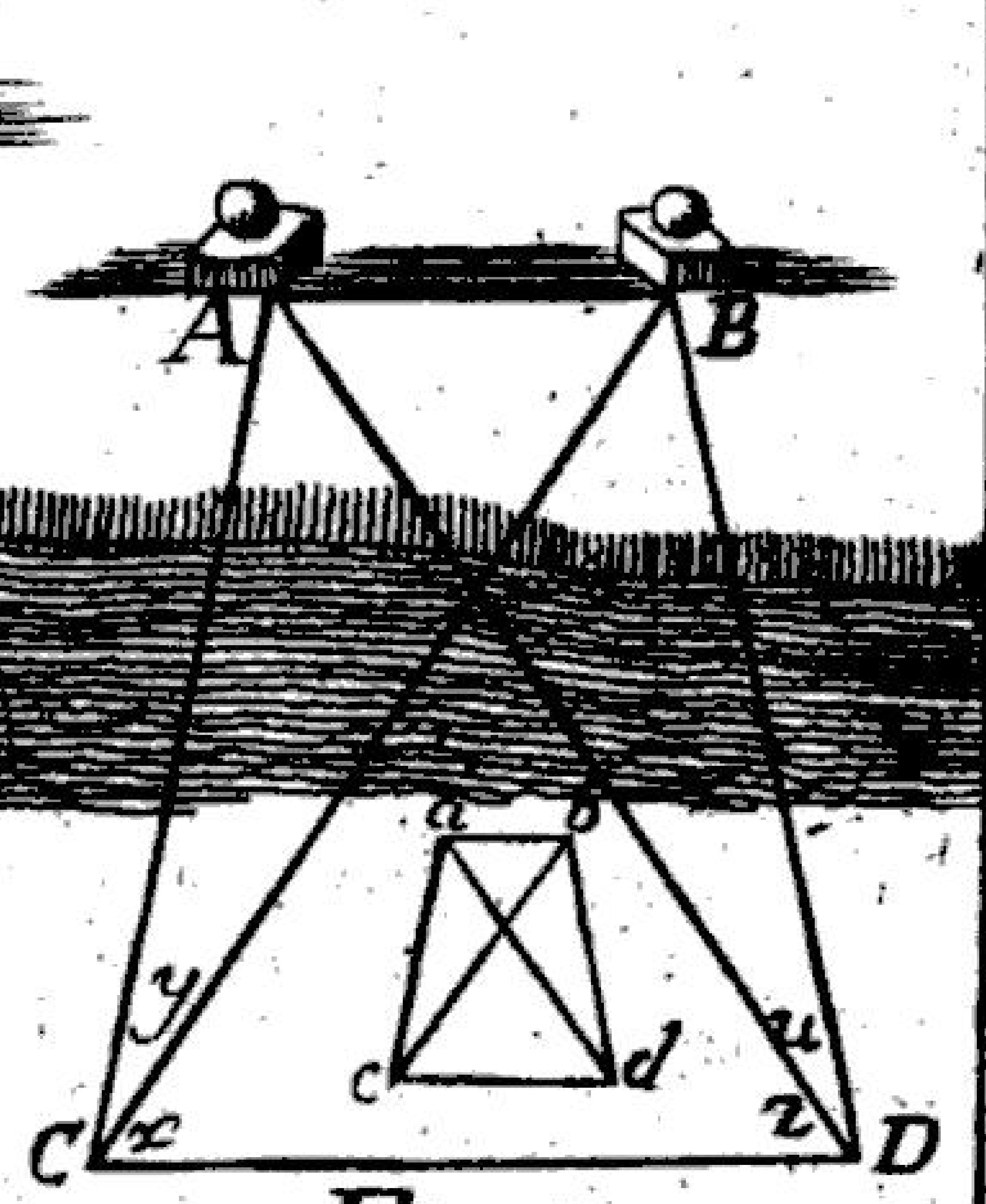


Fig: 80.

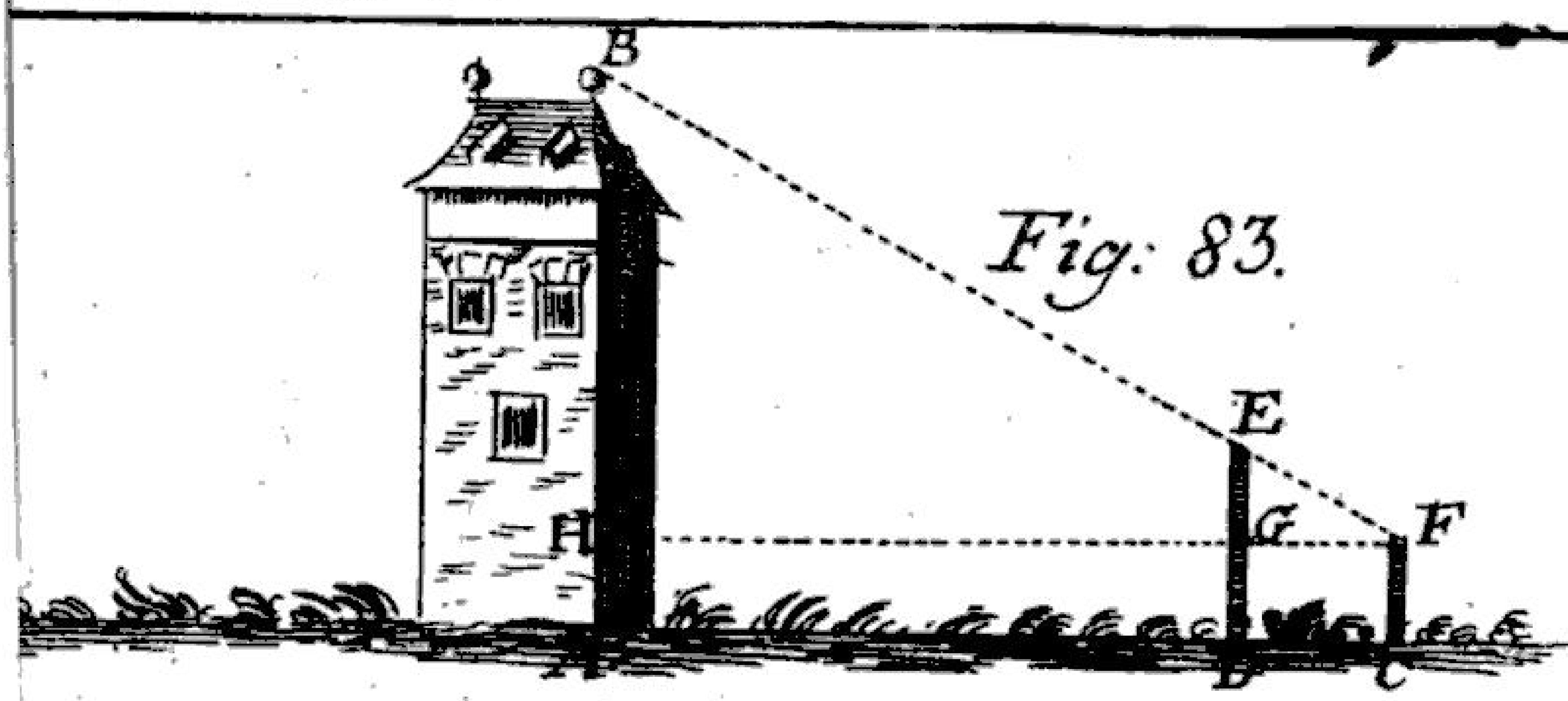


Fig: 83.

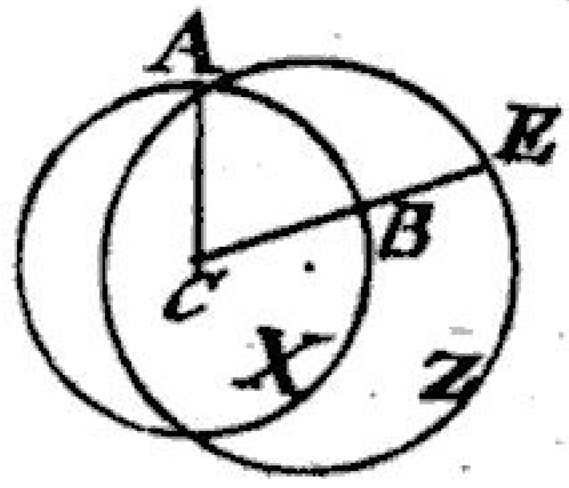
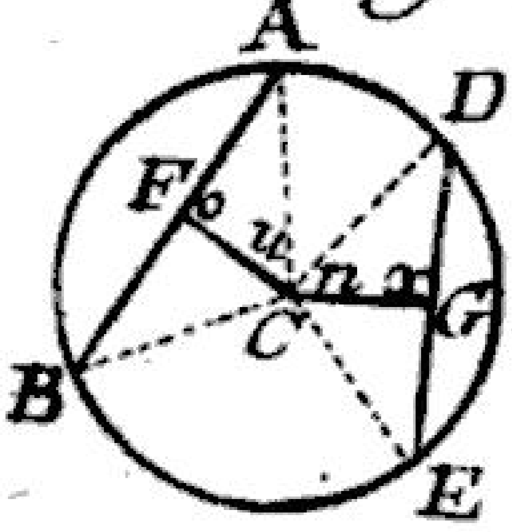
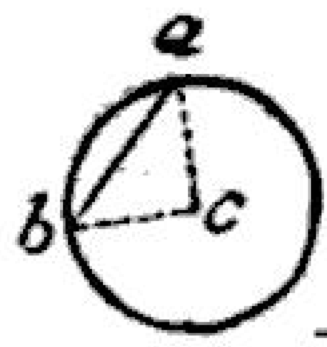
Fig: 86.


Fig: 87.




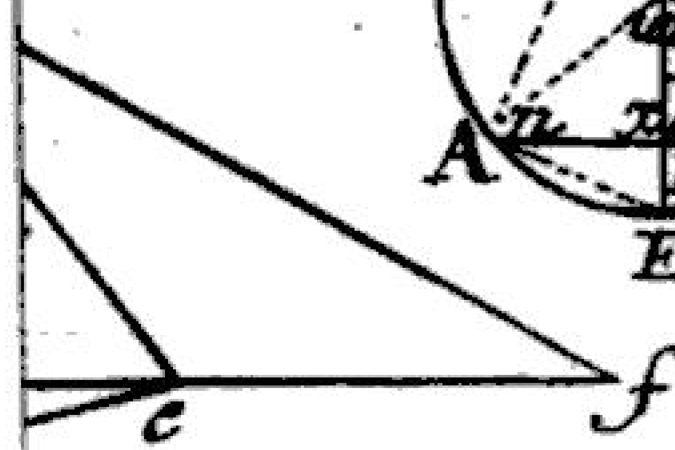


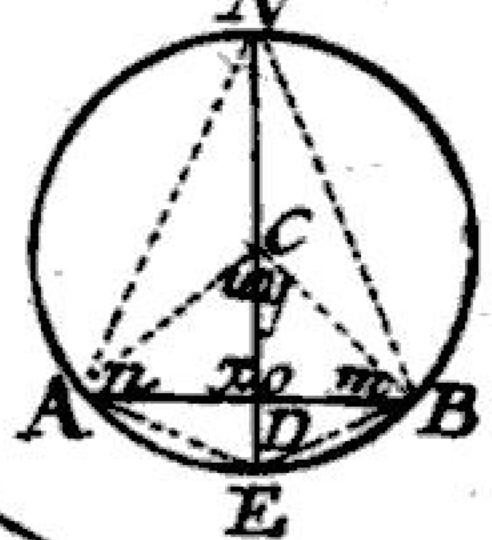
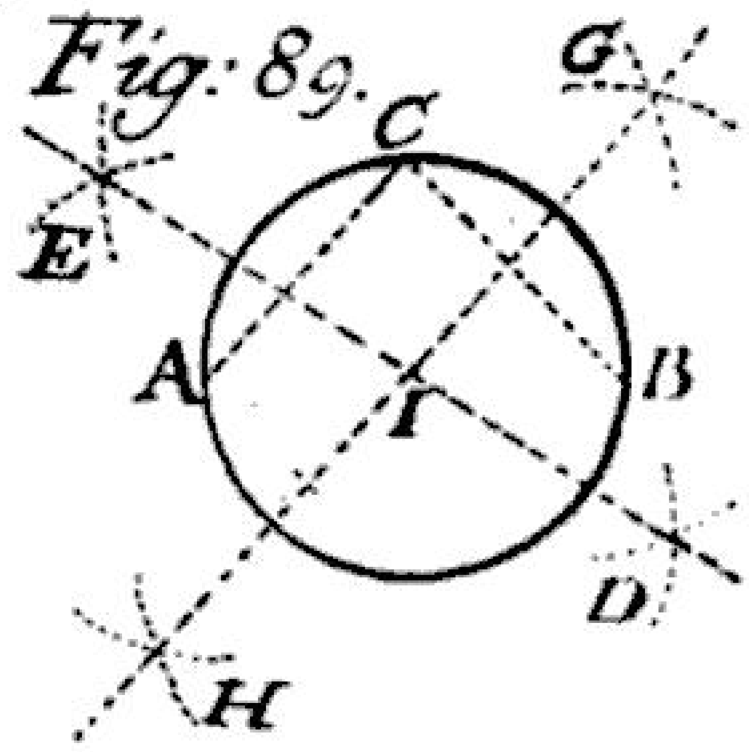
Fig: 88.


Fig: 89.


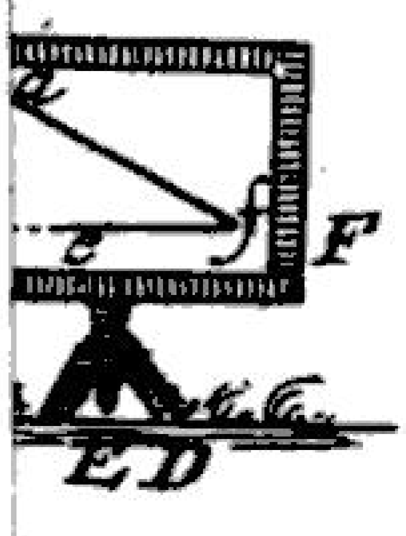


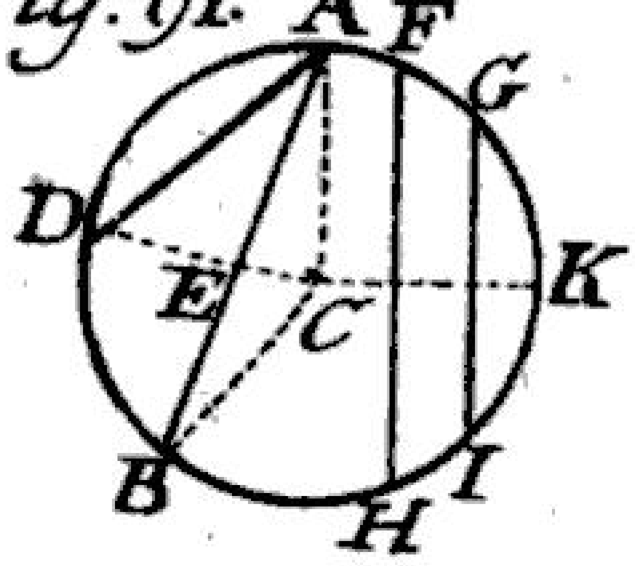
Fig: 91.


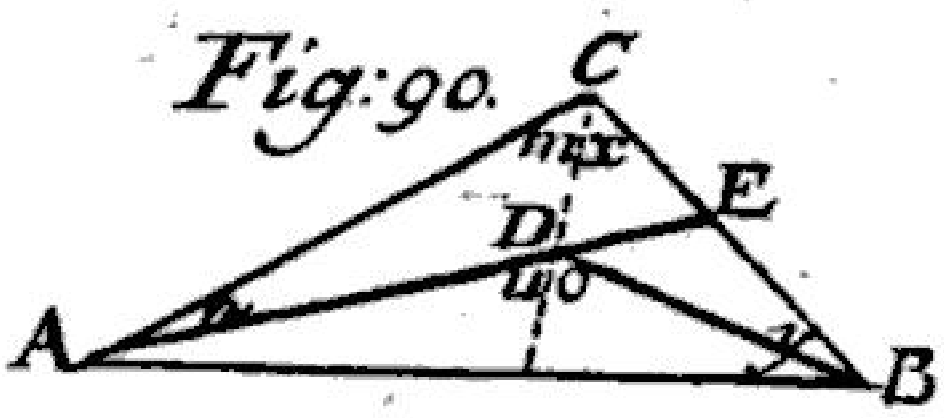
Fig: 90.


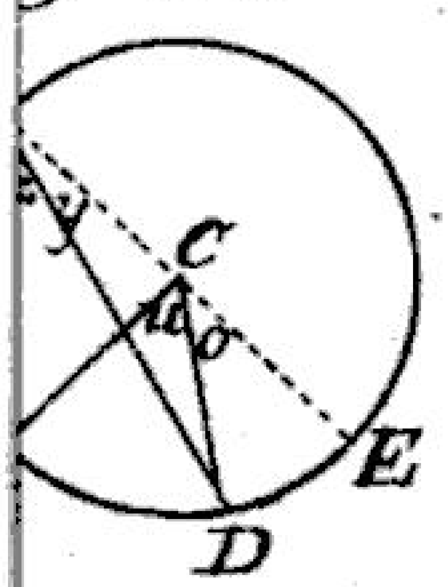
Fig: 94.


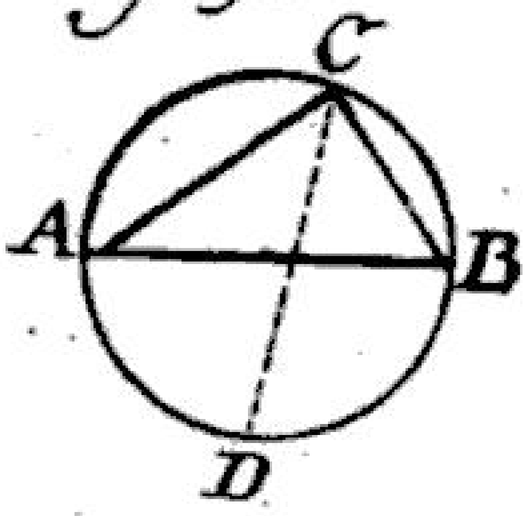
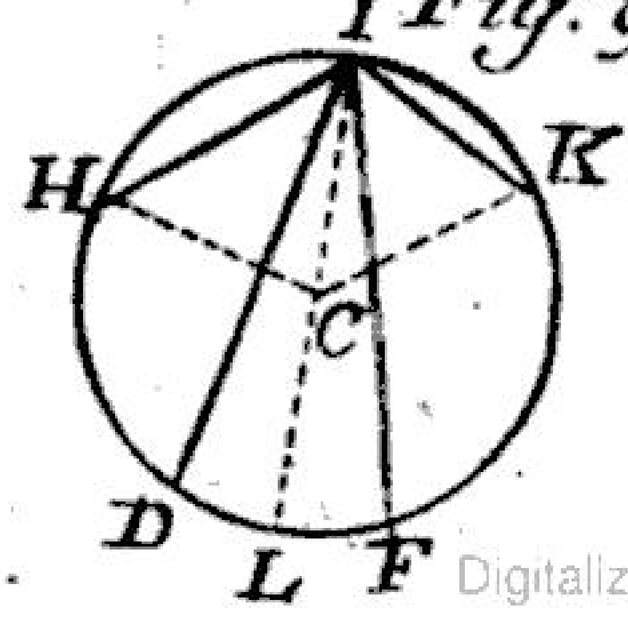
Fig: 95.


Fig: 96.


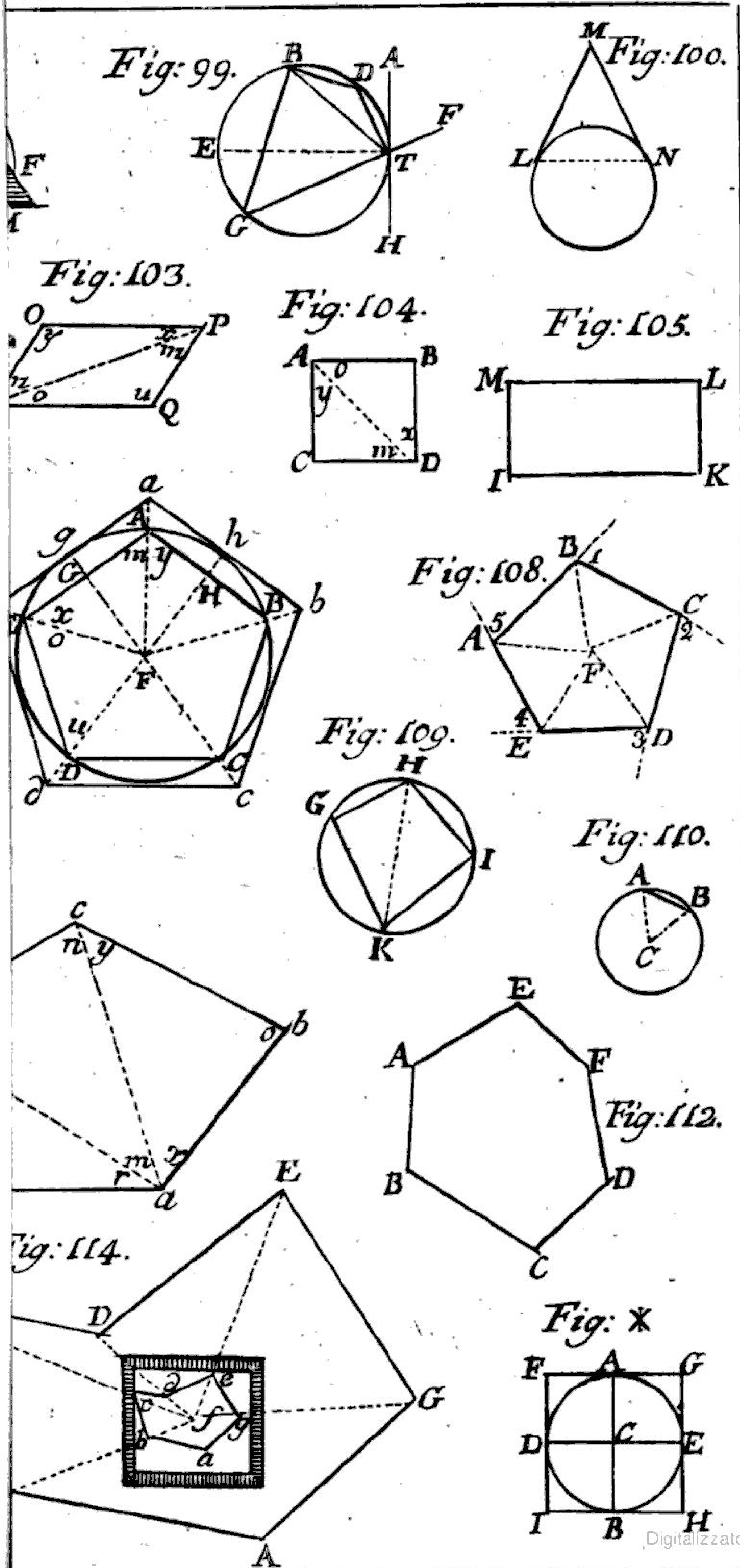
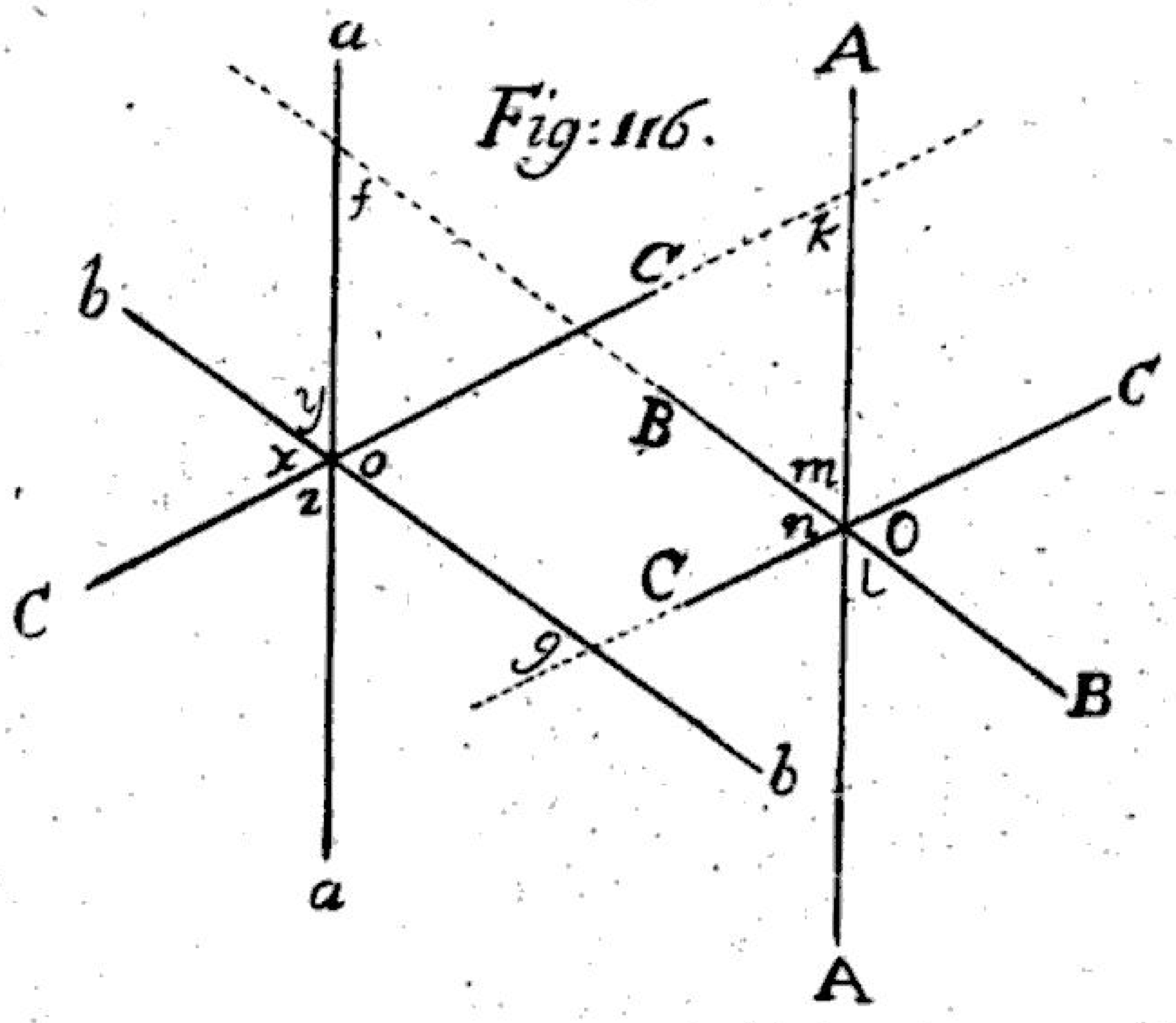


Fig: 99.
B D A F E T G H
Fig: 100.
M L N
Fig: 103.
O y x P m n o u Q
Fig: 104.
A o B y x C m D
Fig: 105.
M L I K
a g h A m y G H B b x o F u D C d c
Fig: 108.
B 1 C 2 A 5 F 4 E 3 D
Fig: 109.
H G I K
Fig: 110.
A B C
c n y o b m x r a
E A F Fig: 112. B D C
Fig: 114.
E D d e c f g b a G A
Fig: *
F A G D C E I B H

Fig: 116.



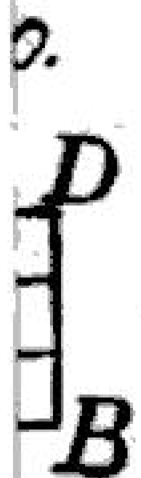
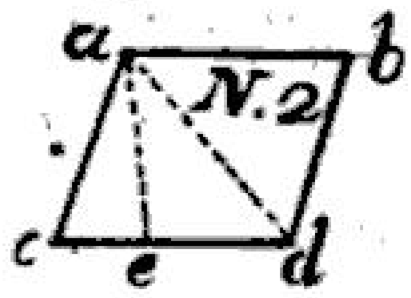


Fig: 122.



Pyxis magnetica

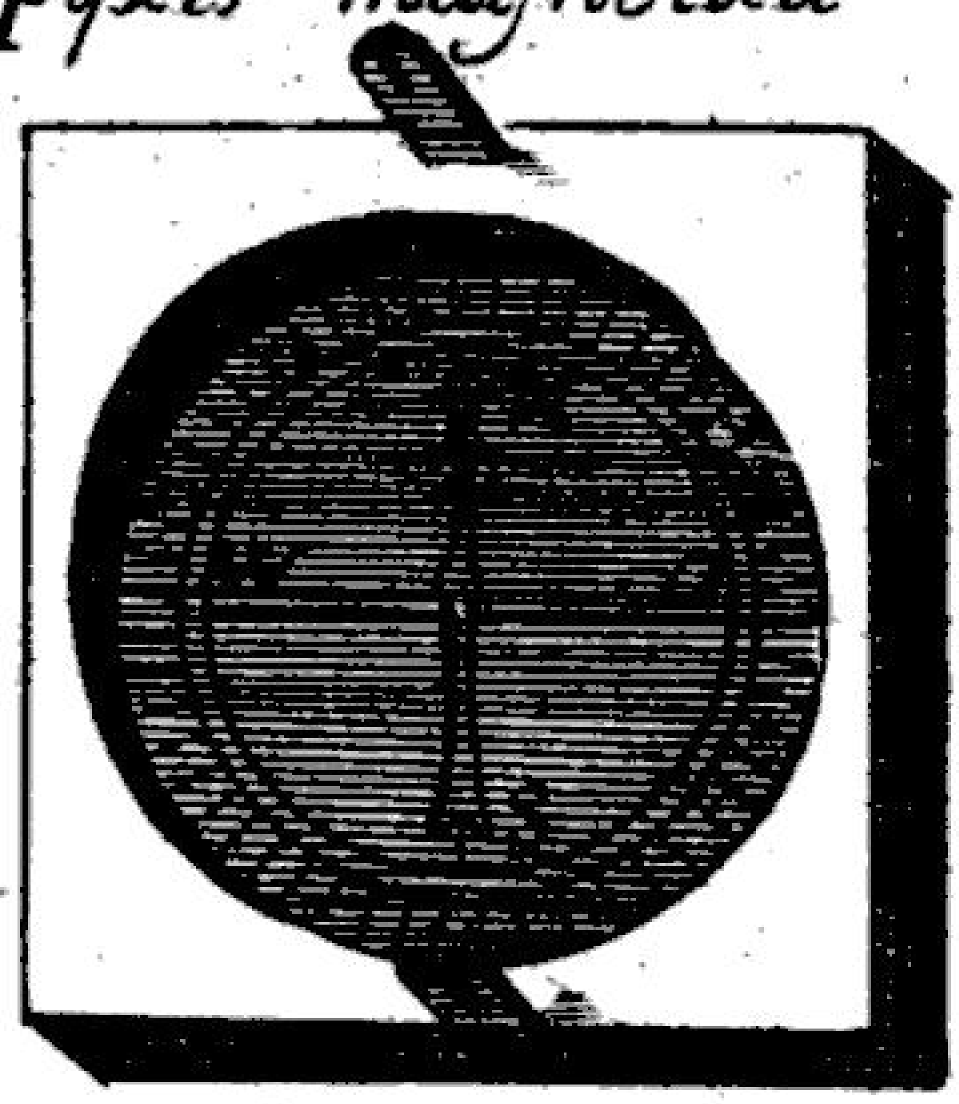


Fig: 122.

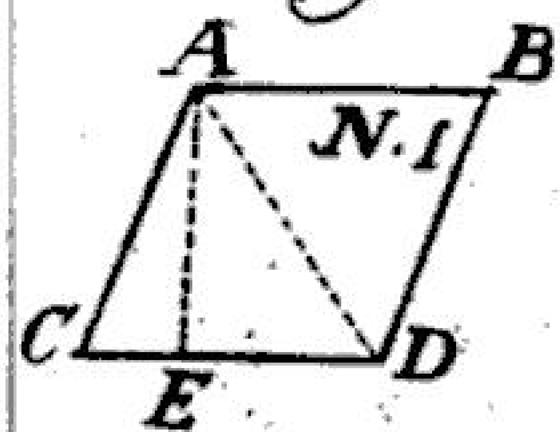
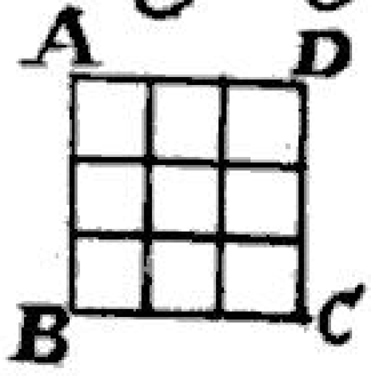


Fig: 119



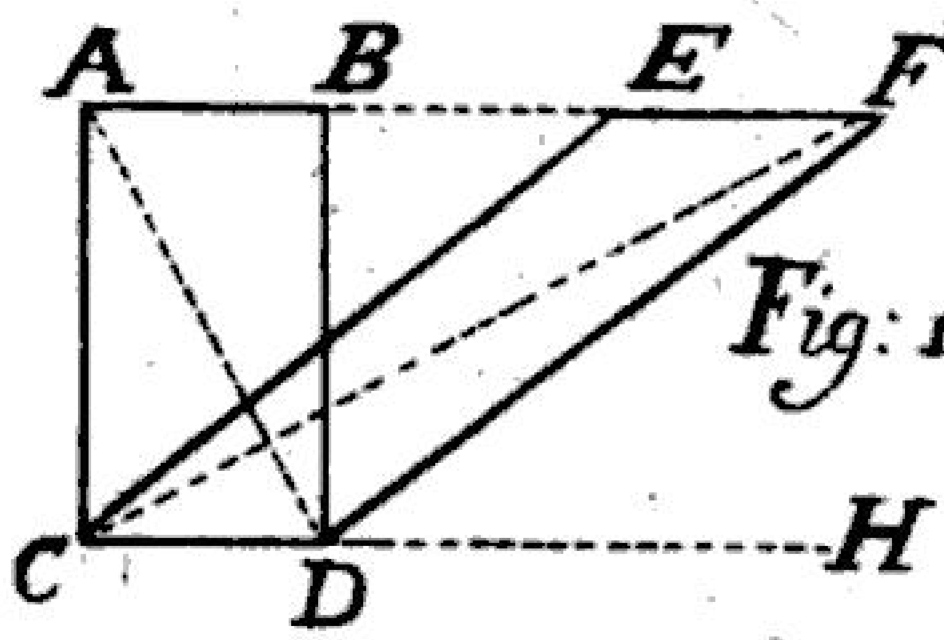


Fig: 121.

Fig: 118.

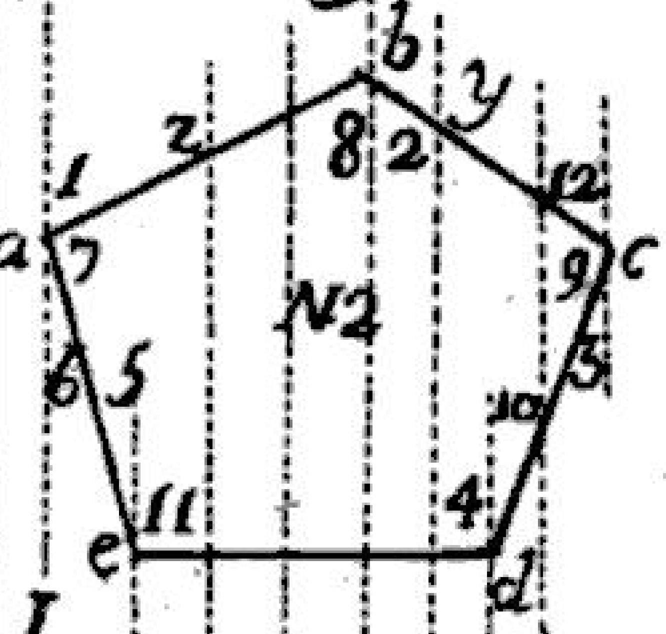
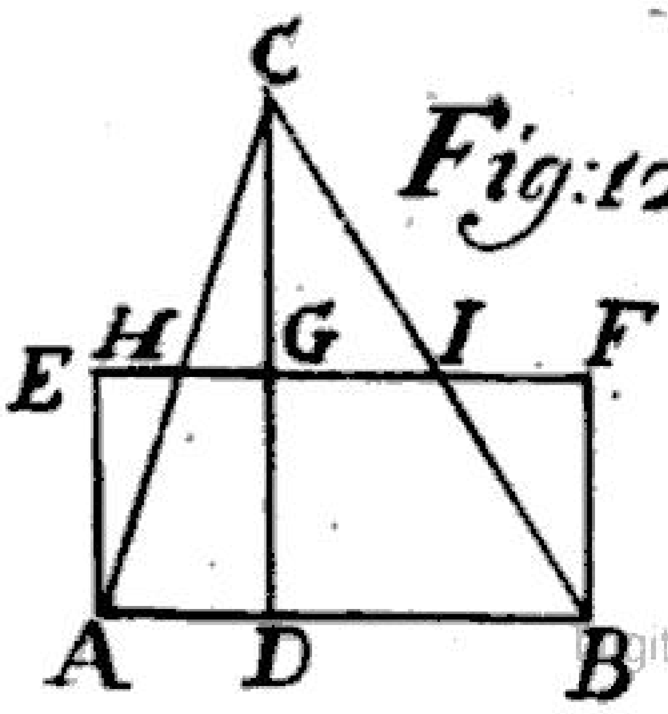
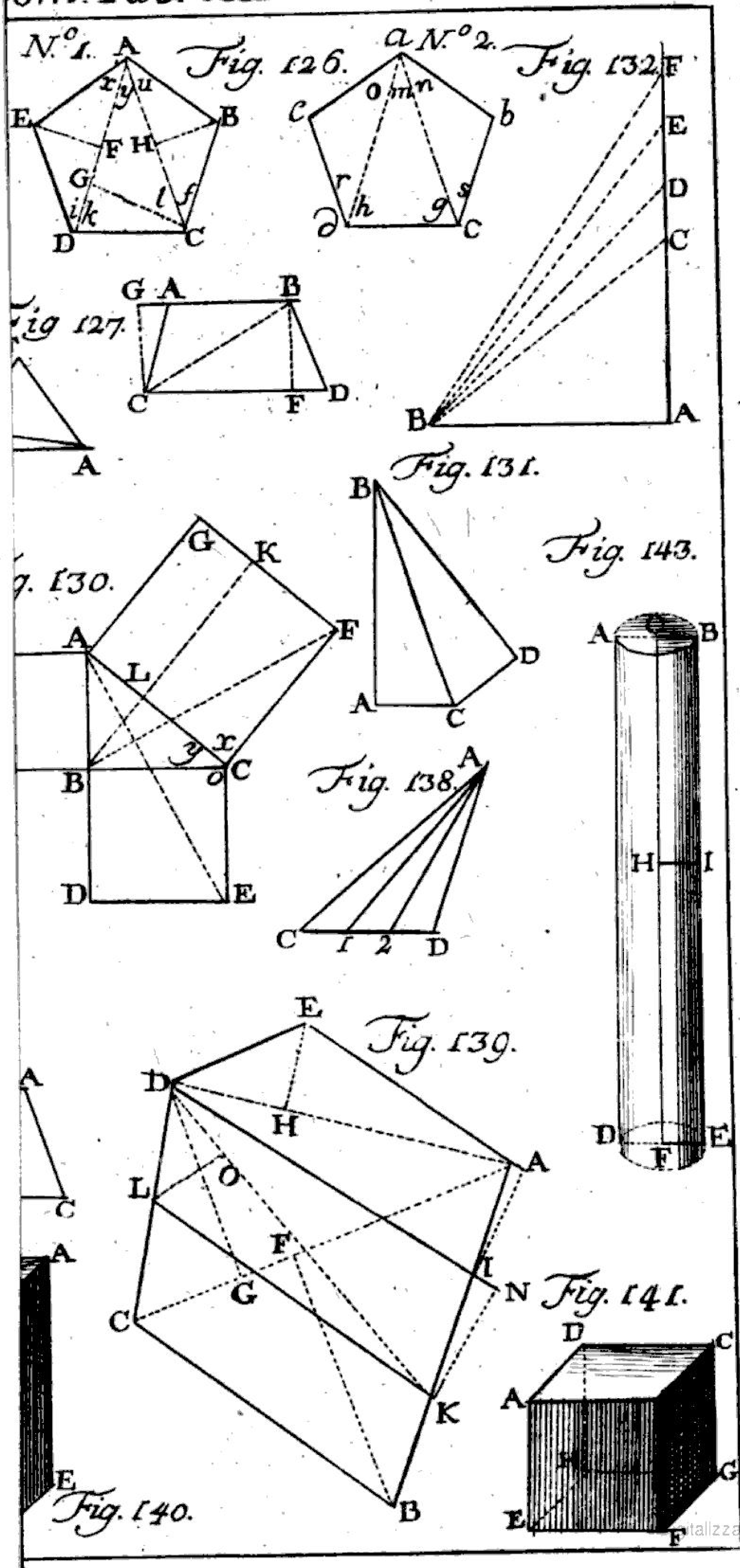


Fig: 123.




N.° 1.
Fig. 126.
N.° 2.
Fig. 132.
Fig 127.
Fig. 131.
Fig. 143.
Fig. 130.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 141.
Fig. 140.

m: Tab: IX.

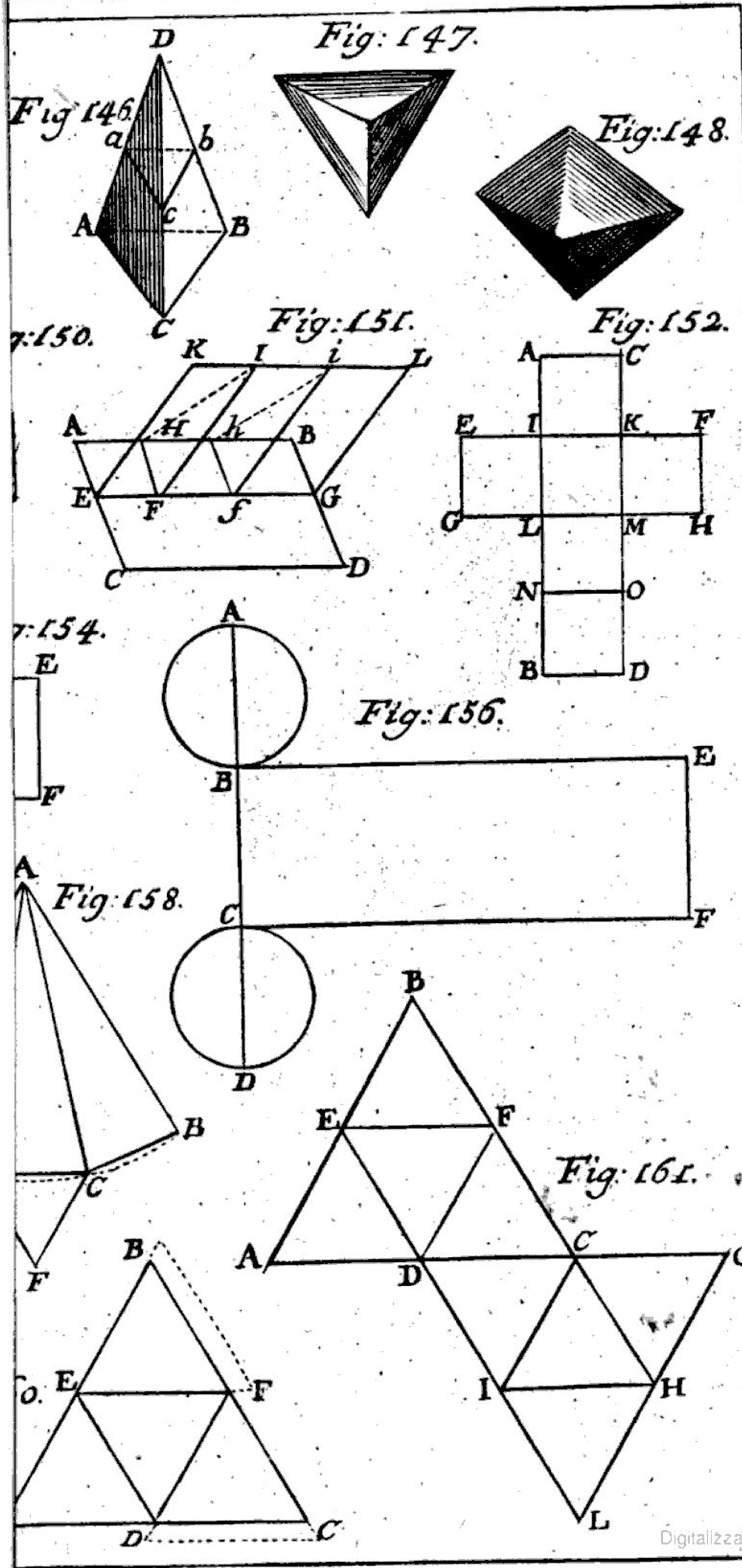
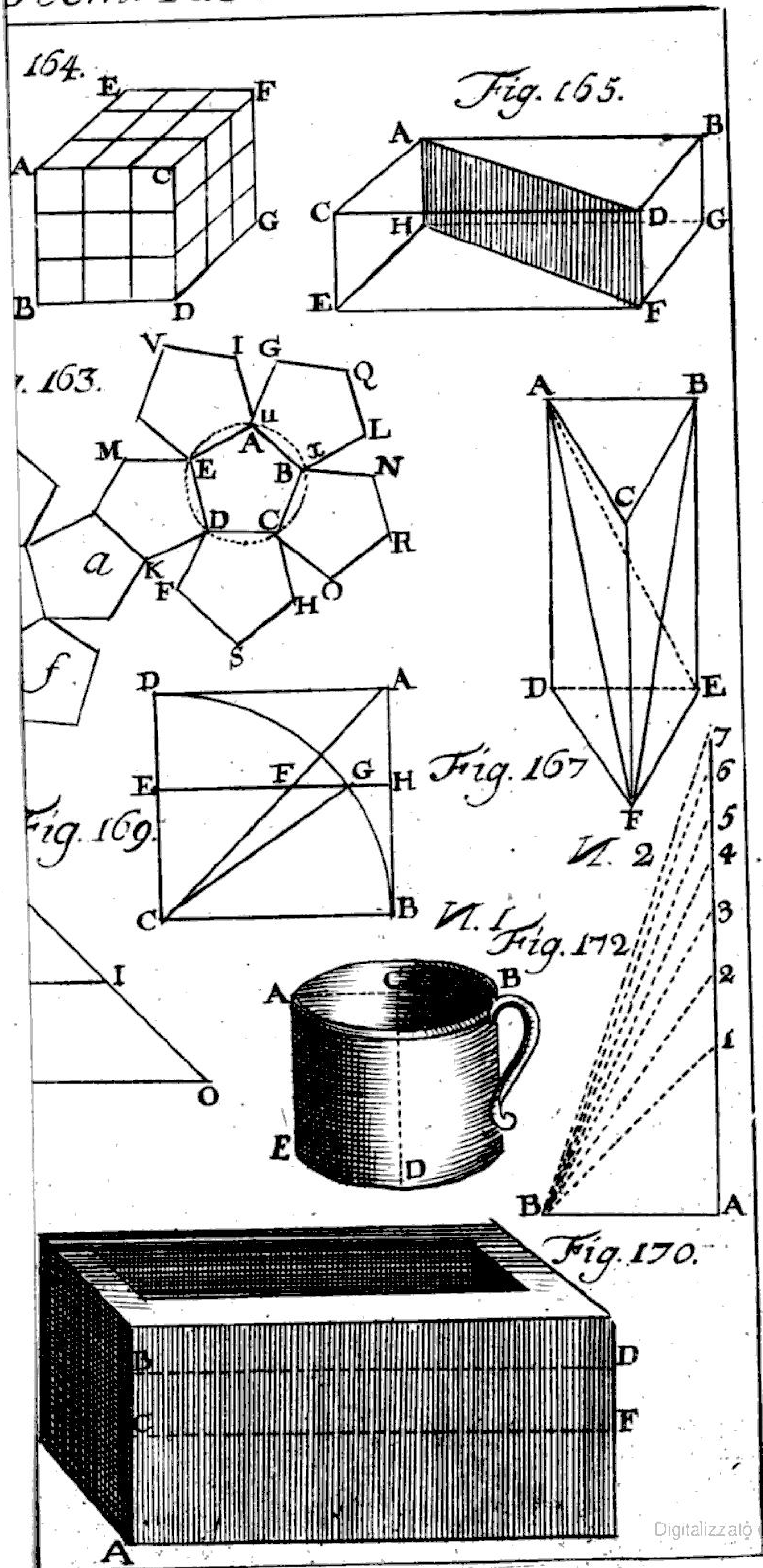


Fig: 146.
Fig: 147.
Fig: 148.
g: 150.
Fig: 151.
Fig: 152.
g: 154.
Fig: 156.
Fig: 158.
Fig: 161.
o.

Geom: Tab: X.



175:

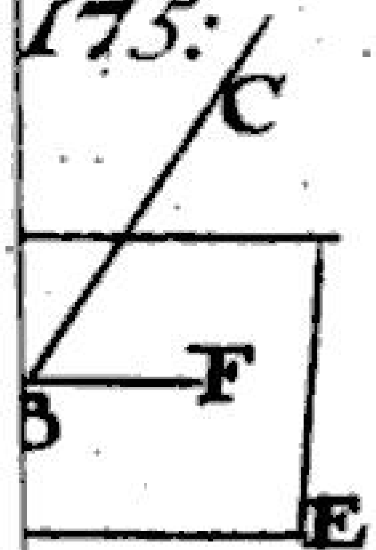


Fig: 176:

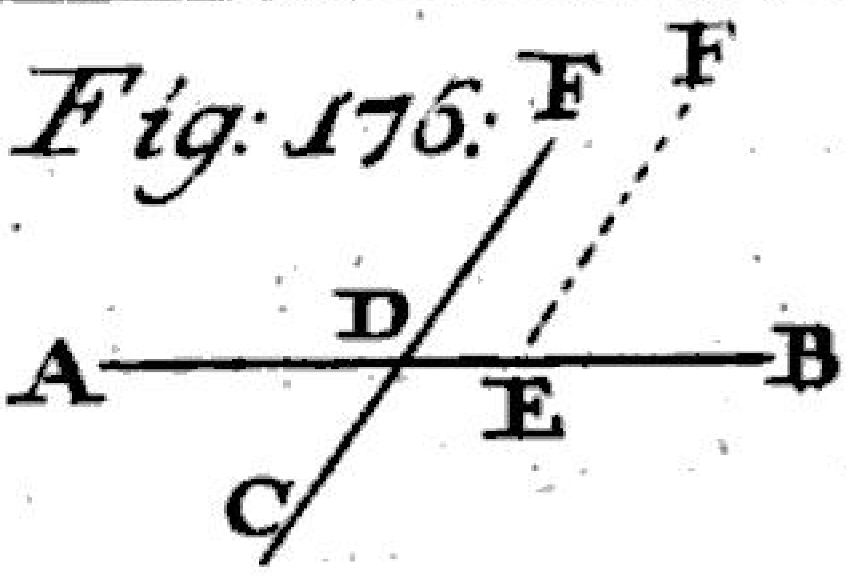


Fig: 178:

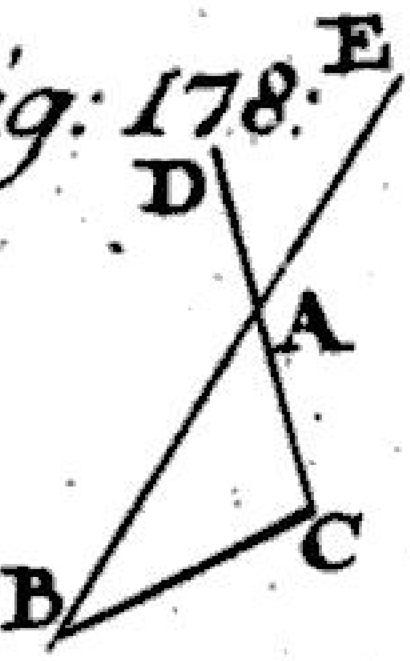


Fig: 181:

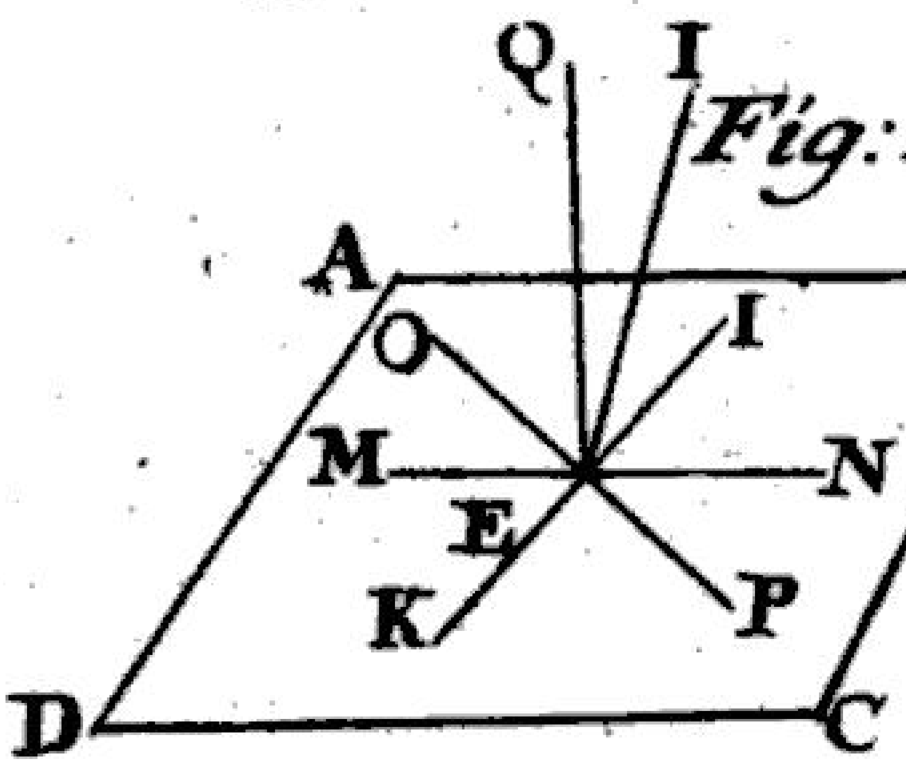


Fig: 182:

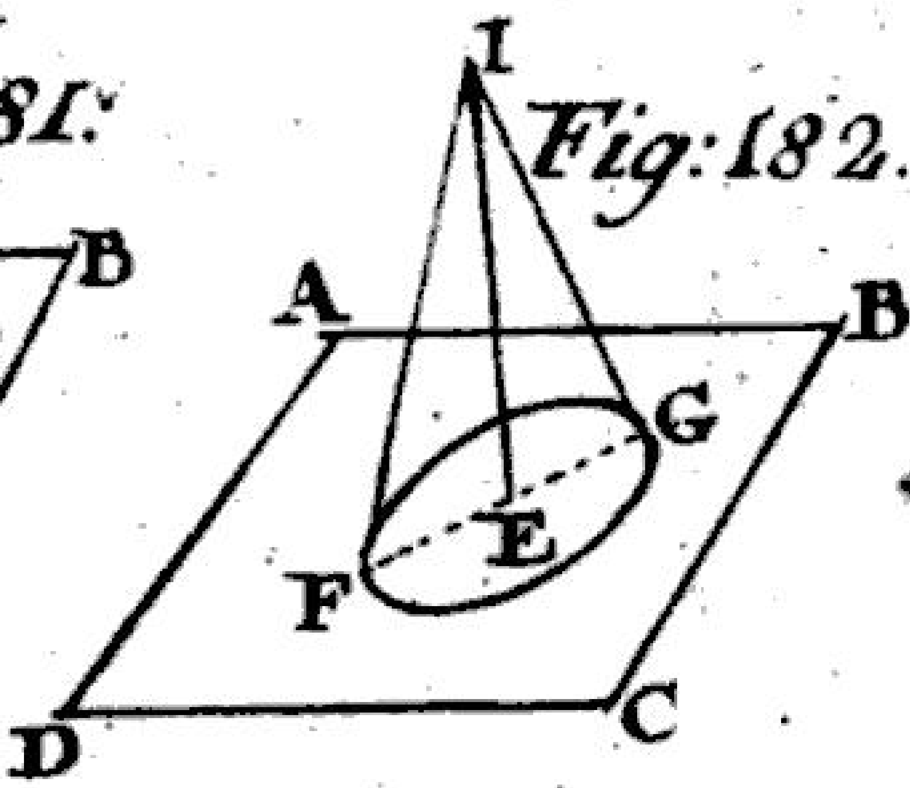


Fig: 184.

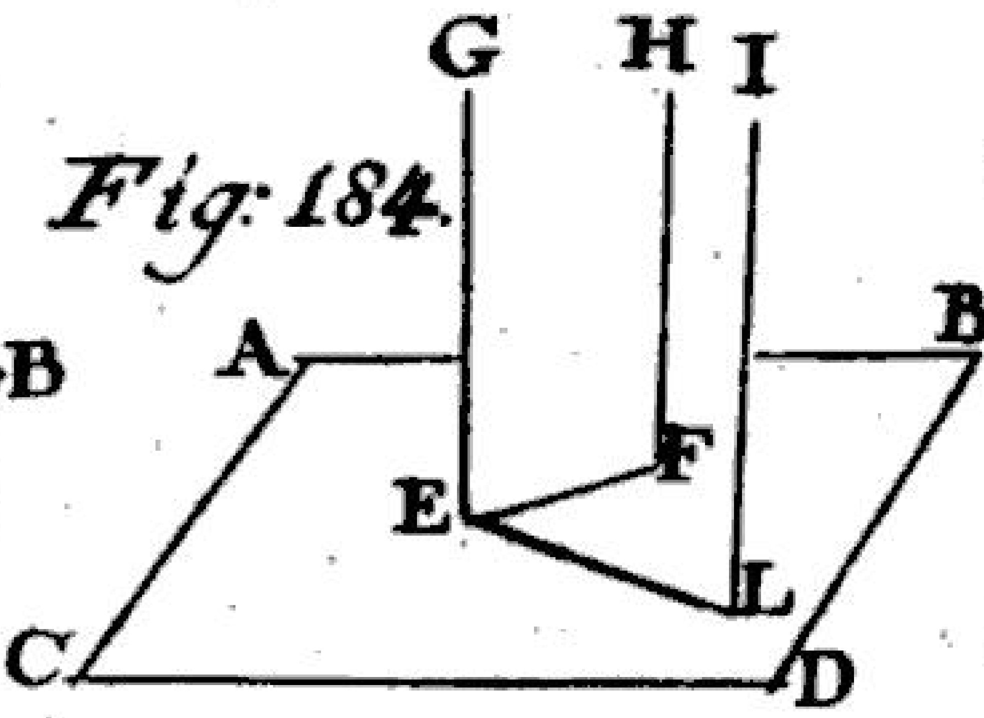


Fig: 186:

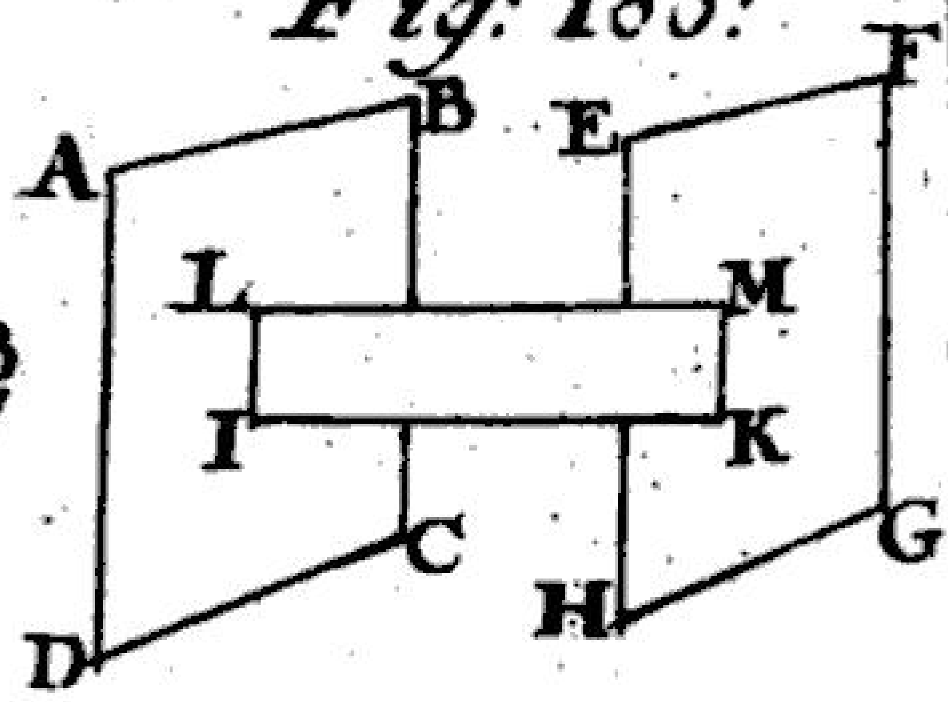


Fig: 187:

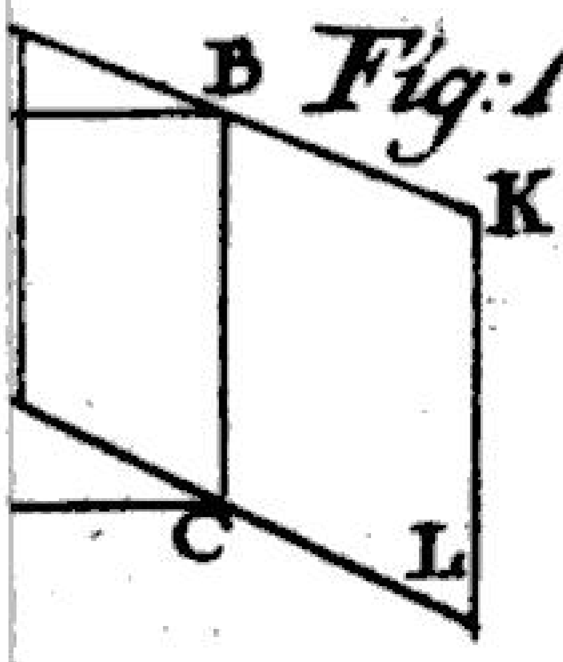


Fig: 191:

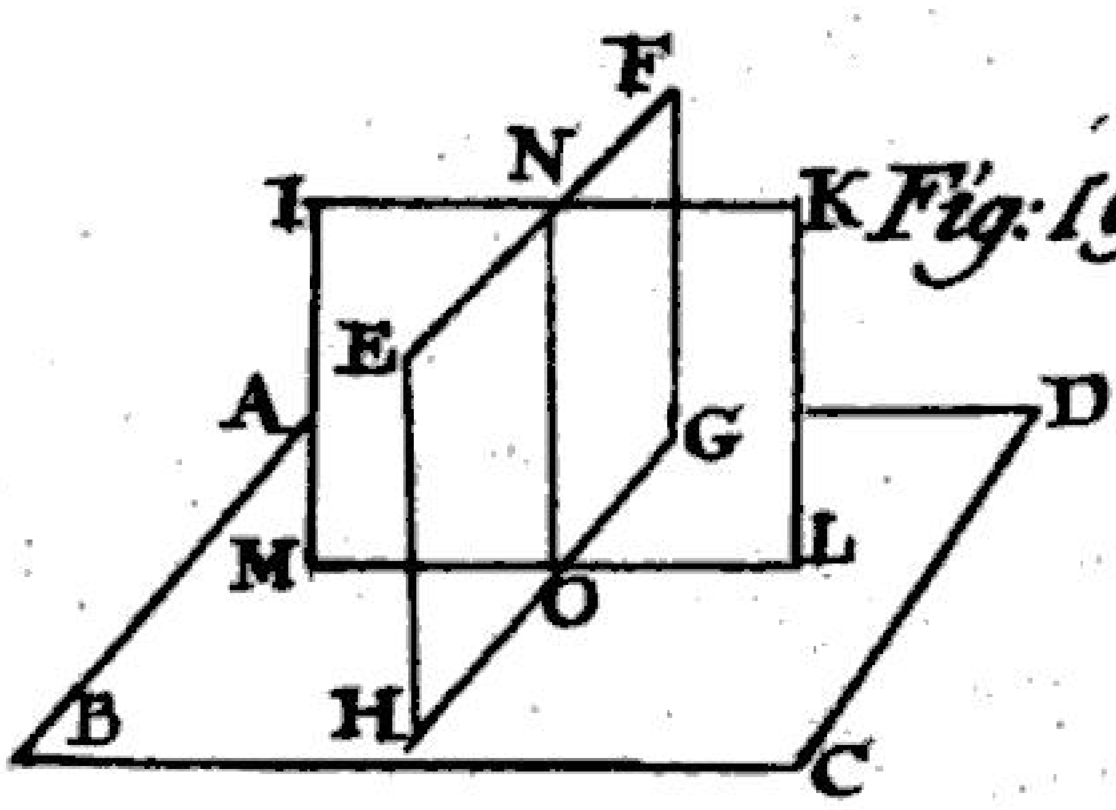


Fig: 190.

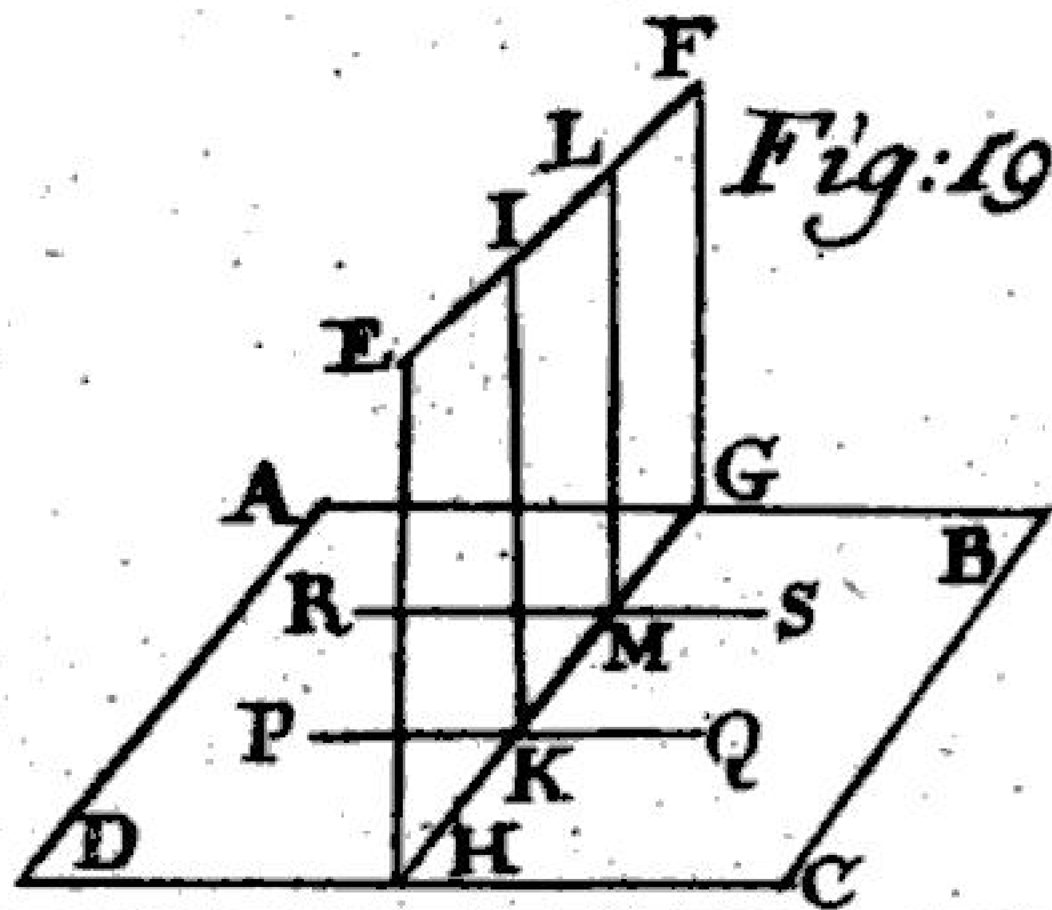


Fig: 188.

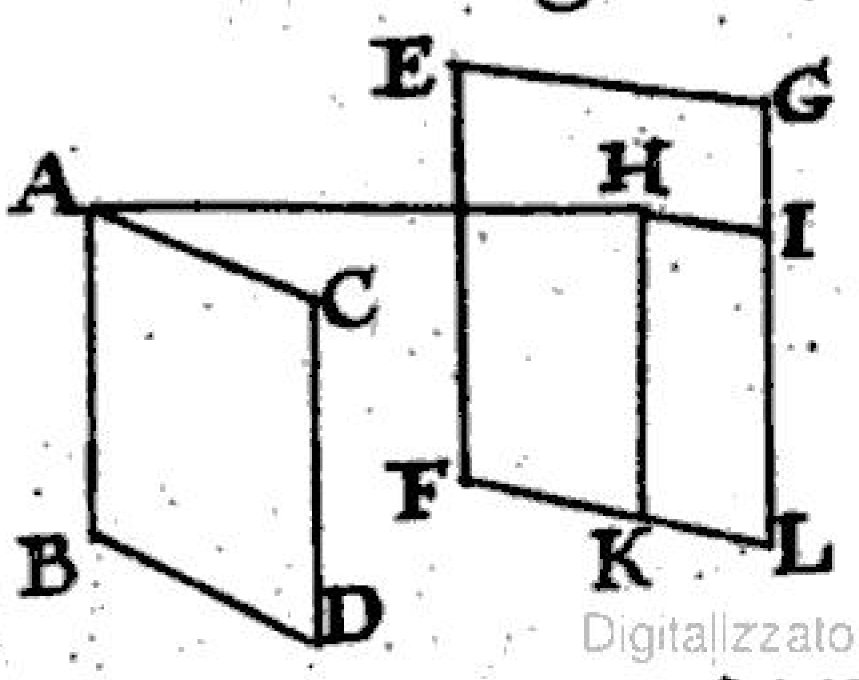


Fig: 2.

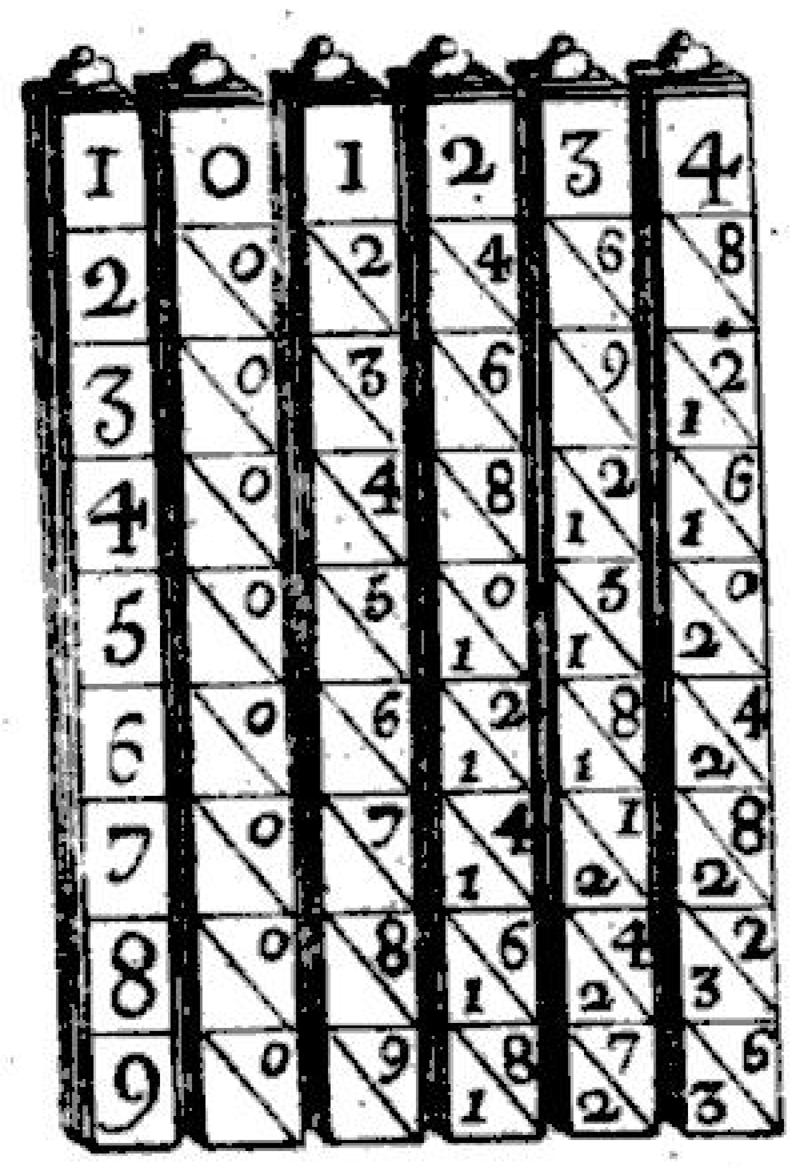


Fig: 1.

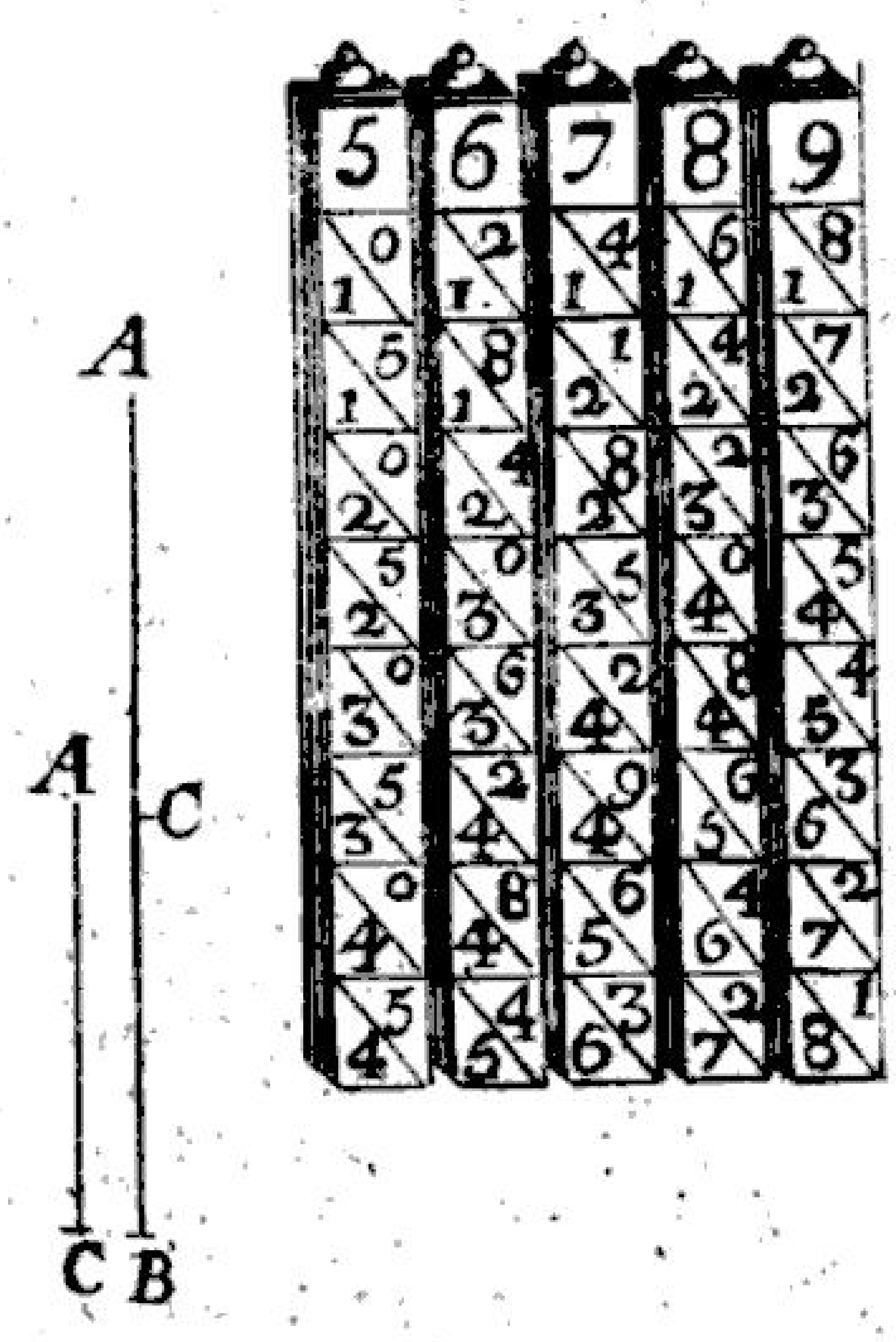


Fig: 3.