
NICOLAUS DE MARTINO MATHE
SEOS PROFESSOR FERDINANDI IV.
SICIL. REGIS PRAECEPTOR.
Gius. Aloja Reg. Inc.

ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
COSI' PIANA, COME SOLIDA

COLL' AGGIUNTA

DI UN BREVE TRATTATO

DELLE SEZIONI CONICHE

COMPOSTI

PER USO DELLA REGALE ACCADEMIA MILITARE

DI

NICCOLO' DI MARTINO

PRIMARIO PROFESSORE DELLA MEDESIMA.

TOMO I.

IN NAPOLI
NELLA STAMPERIA SIMONIANA
MDCCLXVIII.

PREFAZIONE.

AL DISCRETO LETTORE.

PEr uso della Reale Accademia Militare, di cui ho l'onore di esserne Primario Professore, fin dal primo suo stabilimento si sono dati da me alla luce varj Trattati disgiunti l' uno dall' altro. Doveasi al presente fare una nuova edizione degli Elementi della Geometria Piana, per non esservi più esemplari della prima; ma avanti d' intraprenderla, mi suggerì il Comandante D. Giuseppe Pietra della stessa Reale Accademia, che invigila su di essa con zelo ed amore di formare un Corso continuato, così degli Trattati dati alla luce, come degli altri non ancora impressi. Non mi dispiacque il suo consiglio non ostante che nell' età in cui mi ritrovo, dovrei *piuttosto cercar riposo, che impegnarmi in nuove fatiche; ma per lo preciso bisogno che si ha degli riferiti Elementi si danno per ora alla luce tre tometti, di cui il primo racchiude gli Elementi della Geometria Piana il secondo gli Elementi della Geometria Solida ed il terzo un breve trattato delle Sezioni Coniche. Conforme poi a questi debbonsi premettere gli Elementi dell' Aritmetica da cui dee darsi principio allo studio delle Scienze Matematiche, così dopo di essi si daranno altresì alla luce, primieramente gli Elementi della Trigonometria Piana coll' uso di essa nelle operazioni da farsi sul terreno, indi gli Elementi dell' Algebra, e dell' Analisi Geometrica, e finalmente un breve Trattato del Calcolo così differenziale come integrale. Con questi trattati si avrà quanto basta per le Scienze Matematiche che chiamansi pure; ma per le altre che appellansi Fisico-Matematiche ci restrin-*

geremo alle più necessarie come sono la Dinamica, la Statica, la Meccanica, l'Idrostatica e l'Idraulica, racchiudendole in due trattati, di cui uno sarà dell'Equilibrio e del moto de' corpi Solidi, e l'altro dell'Equilibrio e del moto de' Corpi fluidi. Terminaremo finalmente il corso destinato per uso della riferita Reale Accademia con due altri trattati, a cui specialmente debbono essere dirette le mire di un Giovane Militare, cioè col trattato della Fortificazione così regolare come irregolare, e con un altro di ciò, che riguarda l'Artiglieria. Egli è vero che un giovane Militare dee essere istruito ancora nella Geografia per poter leggere con profitto la Storia così Antica, come Moderna, di cui non li farebbe onore l'esserne ignudo. Ma per quanto tocca ad una tal Scienza può egli apprenderla da se stessa; poichè sebbene la sua parte teorica richieda qualche cognizione Astronomica niente-

tedimeno dopo lo studio dell'Arimmetica, e della Geometria non incontrerà in essa difficoltà veruna.

IN-

INDICE

DELLI PARAGRAFI

CONTENUTI NEL PRIMO LIBRO DELLA GEOMETRIA PIANA.

§.XIII.

§.XXVII.

§.XXXVIII.

ELEMENTI

DELLA GEOMETRIA

COSÌ PIANA, COME SOLIDA.

INTRODUZIONE.

1. LA Geometria è una Scienza, che aggiraſi intorno alla quantità eſteſa in lunghezza, larghezza, e profondità. Si ravviſa una tal quantità, così ne' corpi, come nello ſpazio; e con conſiderarſi ſeparatamente le tre ſue dimenſioni, diſtinguonſi di eſſa tre ſpecie, che chiamanſi linea, ſuperficie, e corpo ovvero ſolido.

2. S' intende per linea la quantità eſteſa, conſiderata con una ſola dimenſione, che appellaſi ſempre lunghezza. S'intende per ſuperficie la quantità eſteſa,

considerata con due dimensioni, di cui una dicesi lunghezza, e l'altra larghezza. S' intende finalmente per corpo, ovvero solido la quantità estesa, considerata con tutte tre le sue dimensioni.

3. Se di una linea considerinsi li soli termini, si avranno li punti, di cui trattasi ancora in questa Scienza; e perciò la vera loro nozione si è, di esser privi di ogni dimensione, e capaci soltanto di sito, ovvero posizione. Ma, siccome li termini delle linee sono li punti, così quelli delle superficie sono le linee, e quelli del corpo sono le superficie.

4. Or chiaro si è, che debba generarsi la linea col moto di un punto, la superficie col moto laterale di una linea, ed il corpo col moto trasversale di una superficie. Ma non perciò dee credersi, che le parti della linea siano li punti, le parti della superficie siano le linee, e le parti del corpo siano le superficie.

5. In fatti la parte dee essere della stessa indole col suo tutto; onde, conforme dee comporsi la linea di altre lineette, la superficie di altre superficie più picciole, ed il corpo di altri corpicciuoli; così la divisione di tutte tre le quantità nei riferiti loro componenti, almeno col pensiero, può condursi all'infinito.

La

6. La linea intanto può essere di due specie, cioè retta, e curva. Chiamasi linea retta quella, che si distende egualmente tra li suoi termini. Chiamasi all' incontro linea curva quella, che piegando verso un qualche lato, non serba egual posizione tra li punti, che la terminano.

7. Eziandio la superficie dividesi in piana, e curva. Si appella superficie piana quella, su di cui può adattarsi da per tutto la linea retta. Si appella al contrario superficie curva quella, che non permette di potersi su di essa adattare la linea retta per ogni verso.

8. Or, siccome le superficie piane, terminate da per tutto da linee, chiamansi figure piane; così li corpi o siano solidi, terminati per ogni lato da superficie, appellansi figure solide. E poichè la Geometria aggirasi propriamente intorno a queste figure; perciò ella suol dividersi in piana, e solida.

9. Nè poi è da porsi in dubbio, che competa alla Geometria il carattere di vera scienza; sì perchè ella studiasi di definire con esattezza tutto ciò, di cui si tratta; come ancora, perchè deduce le sue proposizioni, o dalle stesse definizioni, o da principj chiari, ed evidenti, o da altre proposizioni antecedentemente dimostrate.

10. Ma, conforme le sue proposizioni sono, o teoremi, che dimostrano qualche verità, o problemi, che insegnano a fare qualche cosa; così eziandio li suoi principj sono, o teoremi facili, che chiamansi assiomi, o problemi facili, che appellansi postulati, ovvero dimande.

11. Fra gl' assiomi intanto ve ne sono alcuni così generali, che possono adattarsi a qualsisia specie della quantità estesa. Onde, dovendo la conoscenza di essi precedere ogn' altra ricerca, li soggiungeremo quì brevemente, con restringerne il numero al più che sia possibile.

12. Il primo adunque si è, che le quantità eguali ad una terza, siano eguali ancora tra di loro. Dal che ne segue, che debbano essere eguali parimente, così le quantità, che sono duple, triple, o quadruple di una terza; come le quantità, che sono la metà, la terza parte, o la quarta parte di un' altra.

13. Il secondo si è, che se di due quantità eguali una sia maggiore o minore di una terza, l'altra debba esserne ancora maggiore o minore. Onde, se mai le due quantità siano disuguali, conforme essendo la minore maggiore di una terza, l' altra dee esserne molto mag-

maggiore; così al contrario essendo la maggiore minore di una terza, l' altra dee esserne molto minore.

14. Il terzo si è, che le quantità eguali coll' aggiunta, o detrazione di altre eguali conservano tuttavia la loro uguaglianza; e perciò, se una consimile aggiunta, o detrazione facciasi a quantità, che siano disuguali, queste rimaneranno nella stessa disuguaglianza, in cui erano prima.

15. Il quarto si è, che il tutto, conforme è eguale alle parti, che lo compongono, unite insieme, così sia maggiore di ciascheduna di esse: cioè a dire, che una quantità composta di due o più altre quantità, conforme le uguaglia unite insieme, così sia maggiore di ognuna di esse.

16. Il quinto, ed ultimo si è, che le quantità, che adattate insieme si combaciano, siano eguali tra di loro. Ed egli è da notarsi, che siccome quest'assioma compete alle sole quantità estese, che sono capaci di sito, ovvero posizione; così il suo converso non sempre è vero, cioè che le quantità eguali debbano combaciarsi adattate insieme.

LIBRO I.

Della Geometria Piana.

17. SEcondo è ſtato avvertito (8) l' objetto della Geometria piana ſono le figure, che chiamanſi piane. Per l' intelligenza intanto di tali figure ſi dee eſſerci nota l' indole, così delle linee, che le terminano, come degl' angoli, formati coll' incontro delle ſteſſe linee. Onde daremo principio alla Geometria piana coll' eſame primieramente delle linee, ed indi degl' angoli.

§. I.

Dell' indole della linea retta.

18. LInea retta ſi è chiamata (6) quella, che giace egualmente tra li ſuoi termini. Dal che ne ſegue I, che ella ſia la più corta di tutte le linee, che hanno gli ſteſſi termini. II, che da un punto ad un' altro punto non poſſa tirarſi, ſe non ſe una ſola linea retta. III, che la poſizione della linea retta dipenda da due ſoli punti. IV, che l' interſegamento di due linee rette debba farſi in un ſol punto. E V finalmente

nalmente, che due linee rette non possano formare figura.

19. Le riferite conseguenze debbono aversi, come assiomi speciali, che riguardano la linea retta. Ma intorno ad essa si dimandano due cose, che come facili ad eseguirsi, di leggieri debbono essere concedute. La prima si è, di potersi tirare una retta da un punto ad un altro punto. L'altra si è, di potersi prolungare a dirittura qualsisia retta data.

20. Queste sono le prime due dimande, o siano postulati della Geometria elementare, le quali si eseguono nella pratica, con far uso di una riga di ottone, o pure di legno. Per conoscere intanto, se una riga sia esatta, basterà tirare per mezzo di essa una retta su di un piano, ed indi osservare, se la medesima rivoltata si combaci esattamente colla retta tirata.

21. Additandoci la retta il più corto cammino, che possa tenersi da un punto ad un'altro punto; chiaro si è, che debba misurarsi la distanza, che si frappone tra due punti dati, per la retta, che li congiunge insieme: dimodochè, con misurare la lunghezza di questa retta, si renderà a noi nota la distanza, che si dimanda.

22. La misura intanto di qualsisia

retta dee farsi per mezzo di un' altra retta, che sia di data lunghezza; come sarebbe presso noi il nostro palmo, il quale siccome dividesi in dodici parti eguali, che chiamansi once, così ciascheduna di queste parti si suddivide in altre dodici similmente eguali, che appellansi minuti.

23. Potrebbe farsi uso ancora del piede parigino, le di cui divisioni sono simili a quelle del nostro palmo, se non che chiamansi digiti, ovvero pollici le prime dodici parti eguali, in cui egli si divide, ed appellansi linee l' altre dodici, in cui si suddivide ciascheduno pollice; ma il piede parigino è di maggior lunghezza del nostro palmo, poichè delle 144 parti, in cui egli resta diviso, ne contiene presso a poco il nostro palmo 117.

24. La retta poi, di cui si fa uso per misurare la lunghezza dell' altre rette, dee additarci con esattezza ogni minima loro porzione; e quindi si è, che ella si divide, e suddivide in un numero così grande di parti eguali, che ogn' altra particella più picciola possa trascurarsi senza nota di errore sensibile.

25. Ed in fatti, siccome per potersi fare il calcolo delle rette, che si misurano, con rotti decimali, sogliono farsi

le

le divisioni, e suddivisioni della riferita retta da 10 in 10; così nella scala, che formasi su di essa, notansi non solo così le sue decime parti, come le centesime, ma eziandio le parti millesime. Spiegheremo intanto altrove, come tutte le riferite parti possono notarsi sulla scala senza confusione.

§. II.

Dell' indole della linea circolare.

26. PEr quanto alla linea curva, la prima cosa da notarsi si è, che ella per ragion della sua curvatura ritrovasi essere concava da un lato, e convessa dall' altro. Ma, siccome prendendo in una curva due punti, e congiungendogli insieme per una retta, dee discostarsi questa retta dalla curva; così la medesima dovrà sempre cadere verso quel lato, ove ritrovasi la sua concavità.

27. L' altra cosa da notarsi si è, che se bene le linee rette siano tutte della stessa indole, nientedimeno la linea curva può essere capace d' infinite variazioni. Intanto nella Geometria elementare considerasi la sola linea circolare, per cui s' intende una curva, che rientrando in se stessa, discostasi egualmen-

te da un punto, che riguardasi come suo centro; onde si è, che le rette tirate dal centro per sino alla linea circolare sono tutte eguali tra di loro.

Fig. 1. 28. Quindi, siccome aggirandosi una retta, come AB, intorno al suo termine A fisso, ed immobile, descrivesi dall' altro termine B la linea circolare BCD, che ha per centro il primo termine A; così la posizione di questa linea dipende, così dal suo centro, come dall' intervallo, o sia distanza di uno de' suoi punti dallo stesso centro; e perciò dato il centro, e dato l' intervallo, sarà data di posizione la linea circolare.

29. La lunghezza intanto della linea circolare dipende da quella dell'intervallo. Onde, conforme sono eguali le linee circolari descritte con eguali intervalli; così, se mai descrivansi con intervalli disuguali, quella sarà più lunga, a cui corrisponde intervallo maggiore; anzi dimostreremo a suo luogo, che aumentasi la sua lunghezza a misura del suo intervallo.

30. Or, siccome per essere la linea circolare concava verso il centro, la retta, che unisce insieme due de' suoi punti, dee cadere dentro di essa; così, essendo ella da per tutto di egual curvatura, due archi eguali della medesima

ma dovranno combaciarsi adattati insieme; e farsi eguali in conseguenza le loro corde, o siano le rette, che li sostengono.

31. Il converso intanto di ciò richiede qualche restrizione; poichè siccome una stessa corda sostiene sempre due archi, che all' ora solamente sono eguali, quando ella passa per lo centro; così adattandosi in una linea circolare due corde eguali, che non passino per lo centro, sarà l' arco maggiore eguale al maggiore, e l'arco minore eguale al minore.

32. Le riferite due proprietà hanno luogo altresì per rapporto a due linee circolari diverse, che siano eguali tra di loro: dimodochè, siccome prendendosi in esse due archi eguali, debbono essere eguali ancora le loro corde; così, adattandosi nelle medesime due corde eguali, che non passino per gli loro centri, si farà l' arco maggiore eguale al maggiore, e l' arco minore eguale al minore.

33. Or la terza dimanda, o sia postulato della Geometria elementare si è, di potersi descrivere la linea circolare con qualsisia centro, e qualsisia intervallo. E siccome la descrizione di essa si esegue nella pratica per mezzo del compasso, così l'esattezza di questo

dipende dal rimanere egli fermo ad ogni apertura delle ſue gambe, e dall' eſſere ſottili le ſue punte, le quali perciò ſogliono farſi di acciajo, e non già di ottone.

34. Col compaſſo poi potrà prenderſi altresì la lunghezza di qualſiſia retta ſegnata ſul piano. Onde, ſe mai l' intervallo, con cui dee deſcriverſi la linea circolare, non ſia contiguo al ſuo centro, primieramente ſi prenderà col compaſſo la lunghezza di quell' intervallo, ed indi tenendoſi ferma l' apertura delle ſue gambe, ſi deſcriverà la linea circolare, di cui ſi ha biſogno.

35. Quindi, date due rette diſuguali, niente ſarà più facile, quanto di tagliare dalla maggiore di eſſa una porzione eguale all' altra minore. Sia per-
Fig. 2. ciò AB la retta maggiore, e CD l'altra minore. Prendaſi col compaſſo la lunghezza della minore CD; indi col punto A come centro, e con quell' apertura deſcrivaſi l' arco circolare EF, che ſeghi la maggiore AB nel punto F; ed egli è chiaro, che la porzione AF, come eguale all' intervallo di queſt' arco, ſia eguale ancora alla CD (12).

36. In una maniera conſimile, ſe ſi abbiano due archi diſuguali, o di un' iſteſſa, o di due linee circolari eguali, ſi potrà dall' arco maggiore tagliare una

na porzione eguale all' altro minore. Sia perciò AB l' arco maggiore, e CD l' altro minore. Prendasi col compasso la lunghezza della corda dell' arco minore CD; indi col punto A come centro, e con quell'apertura descrivasi l'arco circolare EF, che seghi l'arco maggiore AB nel punto F; e li due archi AF, CD, come sostenuti da corde eguali, saranno eguali ancora tra di loro (32). *Fig.* 3.

§. III.

Dell' affezioni più semplici dell' angolo.

37. S'Intende per angolo la scambievole inclinazione di due linee, che su di un piano incontransi tra di loro, senza essere a dirittura; onde dee ripetersi la sua quantità, non già dalla lunghezza delle linee, che lo contengono, ma bensì dalla loro apertura. Quantunque poi per ragion delle linee, da cui è contenuto, possa egli essere di tre specie, cioè rettilineo, curvilineo, e mistilineo; nientedimeno limiteremo per ora la voce di angolo al solo rettilineo, che è contenuto da due linee rette.

38. In quest' angolo debbonsi distinguere tre cose, cioè li lati, il vertice, e la base. Chiamansi lati di un angolo

lo le due rette, che lo contengono, ed a cui può darsi qualunque lunghezza si voglia. Chiamasi vertice il punto, in cui s' incontrano li due lati. Ed in fine chiamasi base la retta, che unisce insieme gli altri due termini degli stessi lati.

Fig. 4. 39. Così nell' angolo BAC li lati sono le due rette AB, AC, che lo contengono; il vertice è il punto A, in cui incontransi li due lati; e finalmente la base è la retta BC, che congiunge insieme gl' altri due termini B, e C degli stessi lati. Onde si vede, che la lunghezza della base di un'angolo dipende da quella de' lati, che possono farsi più lunghi, o più corti, secondochè il bisogno richiede.

40. Rimanendo intanto li lati di un' angolo sempre della stessa lunghezza, chiaro si è, non potersi aumentare, o diminuire l' angolo, se non si aumenti, o si diminuisca ancora la base. Onde, se due angoli abbiano li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, siccome essendo eguali gl'angoli debbono essere eguali ancora le basi, così essendo uno di essi maggiore dell' altro, eziandio la base del primo dovrà essere maggiore della base del secondo.

41. Ma egli è chiaro parimente, che ritenendo li lati di un' angolo sempre

pre la stessa lunghezza, non possa aumentarsi, o diminuirsi la sua base, se non si aumenti, o si diminuisca eziandio lo stesso angolo. E perciò, se due angoli abbiano li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, conforme essendo eguali le basi, debbono essere eguali ancora gl' angoli; così essendo la base di uno di essi maggiore della base dell' altro, dovrà essere il primo angolo similmente maggiore del secondo.

42. Quindi nella pratica niente sarà più facile, quanto di giudicare dell' uguaglianza, o disuguaglianza di due angoli. Facciasi perciò, che li lati di uno di essi siano eguali ai lati dell' altro, ciascuno a ciascuno. E siccome, ritrovandosi eguali le loro basi, dovrà conchiudersi, che ancora li due angoli siano eguali; così la disuguaglianza delle basi farà, che eziandio gl' angoli siano disuguali, e che quell' angolo sia maggiore, a cui rapportasi base maggiore.

43. Per mezzo di queste verità possono ora risolversi varj problemi. Il primo si è, di formare sopra una retta data, e propriamente ad un dato punto un' angolo, che sia eguale ad un' altro angolo dato. Sia perciò AB la *Fig.*
retta data, A il punto dato nella medesima retta, e DCE l' angolo dato. 5.
Deesi

Deesi adunque sulla AB, e propriamente al punto A formare un' angolo, che sia eguale all' altro dato DCE.

44. Tirisi nell' angolo dato DCE la base DE, e taglisi dalla AB la porzione AF eguale al lato CD (35). Descrivansi di poi colli punti A, ed F come centri, e cogl' intervalli delle due CE, DE due archi circolari, che s'intersehino nel punto G; ed io dico, che congiungendosi la AG, sarà FAG l' angolo ricercato. Per dimostrarlo, tirisi eziandio in quest' altro angolo la base FG.

45. Conforme adunque per costruzione sono eguali le due AF, CD; così, per essersi descritti li due archi circolari, che s' intersegano nel punto G, cogl' intervalli delle due CE, DE, saranno eguali altresì, tanto le due AG, CE, quanto le due FG, DE. Onde, avendo li due angoli FAG, DCE non solamente li lati AF, AG eguali ai lati CD, CE, ciascuno a ciascuno, ma eziandio la base FG eguale alla base DE, sarà (41) l' angolo formato FAG eguale all' angolo dato DCE.

46. Il secondo problema si è, di dividere un dato angolo in altri due,
Fig. 6. che siano tra di loro eguali. Sia perciò BAC l' angolo dato. Prendasi nel lato AB un punto D ad arbitrio. Indi, ta-

tagliata dall' altro lato AC la porzione AE eguale alla AD (35), descrivansi colli punti D, ed E come centri, e con un medesimo intervallo due archi circolari che s' interseghino nel punto F. Congiungasi finalmente la AF; ed io dico, che siano eguali li due angoli DAF, EAF, in cui è diviso l' angolo dato BAC.

47. Per dimostrarlo, tirinsi nelli due angoli le basi DF, EF. Ed essendo per costruzione eguali le due AD, AE, saranno li lati AD, AF dell' angolo DAF eguali ai lati AE, AF dell' altro angolo EAF, ciascuno a ciascuno. Ma sono eguali ancora le loro basi DF, EF, per essersi descritti con un medesimo intervallo li due archi circolari, che interseganſi nel punto F. Dunque li due angoli DAF, EAF, in cui è diviso l' angolo dato BAC, saranno parimente eguali (41).

48. Il terzo problema si è, di dividere una data retta in due parti eguali. Sia perciò AB la retta data. Descrivansi primieramente colli punti A, e B come centri, e con un medesimo intervallo due archi circolari, che s' interseghino da un lato della AB nel punto C. Indi eziandio cogli stessi centri, e con un medesimo intervallo descrivansi due altri archi circolari, che s' inter- *Fig.* 7.

ter-

terseghino dall' altro lato nel punto D. Congiungasi finalmente la CD, che s' incontri colla AB nel punto E; ed io dico, che le due porzioni AE, BE, in cui rimane divisa la AB, siano eguali tra di loro.

49. Per dimostrarlo, congiungansi così le due AC, BC, come le due AD, BD. Ed essendosi descritti con un medesimo intervallo, tanto li due archi circolari, che interseganti nel punto C, come gl' altri due, che intersegansi nel punto D; saranno eguali così le due AC, BC, come le due AD, BD. Onde, siccome debbono essere eguali li due angoli ACD, BCD (41); così facendosi terminare al punto E il comune loro lato, saranno eguali altresì le loro basi AE, BE (40).

50. Il quarto, ed ultimo problema si è, di dividere in due parti eguali un dato arco circolare, la di cui risoluzio-
Fig. ne è simile a quella del precedente. Sia
8. perciò AB l' arco dato. Descrivansi primieramente colli punti A, e B come centri, e con un medesimo intervallo due archi circolari, che s' interseghino da un lato nel punto C. Indi eziandio cogli stessi centri, e con un medesimo intervallo descrivansi due altri circolari, che s' interseghino dall' altro lato nel punto D. Congiungasi finalmente la CD,

CD, che s' incontri coll' arco dato AB nel punto E; ed io dico, che le due porzioni AE, BE, in cui egli resta diviso, siano tra di loro eguali.

51. Per dimostrarlo, congiunganfi così le due AC, BC, come le due AD, BD. Ed essendosi descritti con un medesimo intervallò, così li primi, come gl' altri due archi circolari; saranno eguali, tanto le due AC, BC, quanto le due AD, BD. Onde, siccome debbono essere eguali li due angoli ACD, BCD (41); così facendosi terminare al punto E il comune loro lato, saranno eguali altresì le corde dei due archi AE, BE (40); e pertanto gli stessi archi saranno eziandio eguali (31).

52. Così nell' uno, come nell' altro problema niente vieta, di descrivere da un medesimo lato tanto li primi due archi circolari, quanto gl' altri due. Specialmente poi nel secondo, se si abbia il centro dell' arco dato, basterà descrivere colli punti A, e B come centri, e con un medesimo intervallo due soli archi circolari, che s' interseghino in un punto diverso dal centro dell' arco dato. Ma comunque risolvasi il problema, chiaro si è, che colla stessa retta CD dividesi per metà così il dato arco, come la sua corda.

§. IV.

§. IV.

Delle varie specie dell' angolo.

53. L'Angolo per ragion dell' inclinazione delle rette, che lo contengono, può essere di tre specie, cioè retto, ottuso, ed acuto; ma per intendere l' indole di ciascheduno di essi, si vuol prima notare, che una retta può incontrarsi con un' altra retta in due maniere; cioè o perpendicolarmente, facendo con quella da ambedue le parti angoli eguali; o obbliquamente, facendo al contrario colla medesima angoli disuguali.

54. Or siccome ciascuno dei due angoli eguali formati dalla perpendicolare chiamasi retto, così dei due disuguali formati dall' obbliqua il minore dicesi acuto, ed il maggiore ottuso. Onde si vede, che un' angolo debba giudicarsi retto, acuto, o ottuso, secondochè prolungato uno de' suoi lati verso il vertice formasi dall' altra parte un' altro angolo, che per rapporto ad esso sia eguale, maggiore, o minore.

55. Essendo la posizione della perpendicolare sempre la stessa, chiaro si è, che gl' angoli retti siano tutti eguali tra di loro. Ma non dee dirsi lo stesso,

così

così degl' acuti, come degl'ottusi; poichè, potendo variare all'infinito la posizione dell'obbliqua, possono, e gl'uni, e gl'altri ricevere altresì infinite variazioni. Intanto per rapporto al retto, conforme ogn' acuto è sempre minore; così al contrario ogn' ottuso è sempre maggiore.

56. Nè poi è egli difficile di dare ad una retta posizione tale, che sia perpendicolare sopra un' altra retta data. Sia perciò data la retta AB, e *Fig.* debbasi primieramente innalzare su di *9.* essa una perpendicolare dal punto C dato nella stessa retta. Prendasi nella CA un punto D ad arbitrio; indi, fatta la CE eguale alla CD (35), descrivansi colli punti D, ed E come centri, e con un medesimo intervallo due archi circolari, che s' interseghino nel punto F; congiungasi finalmente la CF, ed io dico, che questa retta sia la perpendicolare ricercata.

57. Per dimostrarlo, congiunganfi l' altre due DF, EF. Essendo adunque per costruzione eguali le due CD, CE, saranno li lati CD, CF dell' angolo DCF eguali ai lati CE, CF dell' altro angolo ECF, ciascuno a ciascuno. Ma sono eguali ancora le loro basi DF, EF, per essersi descritti con un medesimo intervallo li due archi circolari, che

che interſeganſi nel punto F. Dunque ſaranno eguali eziandio li due angoli DCF, ECF (41); e pertanto la CF ſarà perpendicolare ſulla retta data AB (53).

Fig. 10. 58. Debbaſi in ſecondo luogo ſulla ſteſſa AB abbaſſare una perpendicolare dal punto C dato fuori di eſſa. Prendaſi dall' altra parte della AB un punto D ad arbitrio. Indi col centro C, e coll' intervallo della CD deſcrivaſi l' arco circolare EDF, che ſeghi la AB prolungata, ſe biſogna, ne' punti E, ed F. Deſcrivanſi poſcia con queſti punti come centri, e con un medeſimo intervallo due altri archi circolari, che s' interſeghino nel punto G. Congiungaſi finalmente la CG, che s' incontri colla AB nel punto H; ed io dico, che la CH ſia la perpendicolare ricercata.

59. Per dimoſtrarlo, congiunganſi così le due CE, CF, come le due GE, GF. Eſſendo adunque per coſtruzione eguali tra di loro tanto l' une, quanto l' altre; chiaro ſi è, che la EF ſia diviſa dalla CH per metà nel punto H (48). Quindi, eſſendo li lati EH, CH dell' angolo CHE eguali ai lati FH, CH dell' altro angolo CHF, ciaſcuno a ciaſcuno, ed eſſendo eguali parimente le loro baſi CE, CF; ſaranno

no eguali eziandio li due angoli CHE, CHF (41), ed in conseguenza la CH sarà perpendicolare sulla retta data AB (53).

60. Or se bene una retta, incontrandosi obbliquamente con un'altra retta, formi con quella un'angolo acuto da una parte, ed un'angolo ottuso dall'altra; nientedimeno questi due angoli insieme sono sempre eguali a due retti. In fatti, se CD sia la retta, che incontrasi obbliquamente coll' altra AB, e dal punto dell' incontro C s' alzi sulla stessa AB la perpendicolare CE (56); chiaro si è, che siccome l' acuto ACD manca dal retto ACE per l' angolo DCE, così l'ottuso BCD superi l'altro retto BCE per lo stesso angolo DCE. Onde l' acuto ACD, e l' ottuso BCD insieme saranno eguali ai due retti ACE, BCE. *Fig.* II.

61. Al contrario poi, se dal termine C della retta CD tirinsi a parti contrarie l' altre due CA, CB con legge tale, che li due angoli ACD, BCD insieme siano eguali a due retti, formeranno quest' altre due una retta continuata; e ciò per la ragione, che se la CA stasse a dirittura, non già colla CB, ma con un altra CF, sarebbero li due angoli ACD, FCD insieme eguali a due retti (60); dal che ne seguirebbe, *Fig.* II.

be, che l' angolo minore BCD ſarebbe eguale all' altro maggiore FCD, il che non può eſſere.

62. Con interſegarſi poſcia due rette tra di loro, egli è facile il dimoſtrare, che gl' angoli verticali debbano eſſere
Fig. eguali. Interſeghinſi perciò le due AB,
12. CD nel punto E. Io dico, che ſiano eguali, così li due angoli verticali AEC, BED, come gl' altri due AED, BEC. In fatti, eſſendo eguali a due retti tanto li due AEC, AED, quanto li due BED, AED (*60*), ſaranno li primi due eguali a queſt' altri due; onde, toltone il comune AED, rimaneranno eguali ancora li due AEC, BED (14); ed in una maniera conſimile ſi dimoſtrerà, che ſiano eguali parimente gl'altri due AED, BEC.

Fig. *63.* Al contrario poi, ſe da un pun-
12. to E della retta AC tirinſi a parti contrarie l' altre due EC, ED con legge tale, che ſiano eguali tra di loro li due angoli verticali AEC, BED, formeranno queſt' altre due una retta continuata. In fatti, eſſendo l'angolo AEC, eguale all' angolo BED, coll' aggiunta del comune AED, ſaranno li due AEC, AED eguali agl' altri due BED, AED (14). Quindi ſiccome queſti due ſono eguali a due retti (*60*), così ſaranno eguali a due retti ancora quegl' altri

altri due; e pertanto le due rette EC, ED formeranno insieme una retta continuata (61).

64. Del rimanente, conforme nella pratica niente più spesso avviene, quanto di doversi sopra una retta data innalzare, o abbassare la perpendicolare da un dato punto; così per agevolarne l'operazione, si suol far uso della squadra, che è un'angolo retto formato con due laminette di ottone. In fatti, adattandosi un lato della squadra sulla retta data, e facendosi passare l'altro lato per lo punto dato, si avrà la perpendicolare ricercata. Per investigare intanto, se la squadra sia giusta, basterà trasportarla dall' altra parte della perpendicolare tirata, ed osservare, se li suoi lati si combacino colle stesse rette.

§. V.

Della vera misura dell' angolo.

65. LA vera misura dell' angolo non è già la sua base, ma bensì l' arco circolare, che col suo vertice come centro, e con un dato intervallo descrivesi tra li suoi lati. Così, se si *Fig.*
abbia l' angolo BAC, e tra li suoi lati 13.
AB, AC descrivasi col vertice A, come centro, e con un dato intervallo

 l'arco

l'arco circolare BC; potrà giudicarsi della sua quantità per mezzo della lunghezza di quest' arco; e ciò per la ragione, che aggirandosi il lato AC intorno al vertice A, l'arco, e l'angolo ricevono aumenti eguali.

66. Per dimostrarlo, fingiamo, che con essersi il lato AC aggirato persino alla AD, siasi fatto l' arco BD duplo dell' arco BC. Io dico, che ancora l'angolo BAD facciasi duplo dell'angolo BAC. In fatti, essendo eguali li due archi BC, CD, saranno eguali altresì le loro corde (30). Quindi, avendo li due angoli BAC, CAD non solo li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, ma eziandio la base eguale alla base, saranno li medesimi tra esso loro eguali (41); e pertanto sarà l' angolo BAD duplo dell' angolo BAC.

Fig. 1. 67. Or se per lo centro A della linea circolare BCDE tirinsi le due rette BD, CE in modo, che l' una sia perpendicolare sull' altra, conforme sono retti li quattro angoli BAC, CAD, DAE, EAB, così la linea circolare resterà divisa in quattro parti eguali, che perciò chiamansi quadranti. Onde, siccome il quadrante viene ad essere la misura dell' angolo retto, così dovrà misurarsi ogn' angolo acuto per un arco minore del quadrante, ed al contrario

rio ogn' angolo ottuso per un arco, che ne sia maggiore.

68. Per agevolare intanto la misura di qualsisia angolo per mezzo del riferito arco circolare, dividono li Geometri primieramente l' intera linea circolare in 360 parti eguali, che chiamano gradi; indi ciascheduno grado in altre 60 parti eguali, che chiamano minuti primi; e finalmente ciascheduno minuto primo in 60 altre parti eguali, che appellano minuti secondi, o semplicemente seconde. Onde ogn' angolo dicesi essere di tanti gradi, e minuti, quanti ne contiene l' arco, che lo misura.

69. Con tenersi conto nella misura di un' angolo, non già della lunghezza dell' arco circolare, ma de' suoi gradi, e minuti, ottengonsi due vantaggi. Il primo si è, di potersi egli descrivere con qualsisia intervallo; e ciò per la ragione, che qualunque sia il suo intervallo, contenerà egli sempre lo stesso numero de' gradi, e minuti. In fatti, se tra li lati dell' angolo BAC de- *Fig.* scrivansi col centro A due archi circo- 13. lari BC, EF; egli è facile il dimostrare, che quanti gradi, e minuti contengonsi nel primo di essi BC, altrettanti debba contenerne ancora l' altro EF.

70. Siano perciò BCD, EFG le linee circolari, a cui rapportansi li due archi BC, EF; ed intendasi divisa la prima di esse BCD in tante parti eguali, quanti sono i suoi gradi, e minuti. Se adunque dal centro A tirinsi rette ai punti della divisione, saranno eguali altresì gl' angoli contenuti da queste rette (65). Onde, siccome per la loro uguaglianza, ancora l'altra linea circolare EFG sarà divisa dalle stesse rette in altrettante parti eguali; così quanti gradi, e minuti contengonsi nell' arco BC, altrettanti dovrà contenerne eziandio l' altro arco EF.

71. L' altro vantaggio si è, che con disegnarsi un' angolo per mezzo de' suoi gradi, e minuti, può subito conoscersi, come egli sia per rapporto all' angolo retto, che per essere costante, cioè sempre di 90 gradi, dee servirci di norma per giudicare della quantità degl' angoli, così acuti, come ottusi. In fatti, se un' angolo acuto sia di 30 gradi, vedesi chiaramente, che egli sia eguale alla terza parte di un' angolo retto. E così ancora, se un' angolo ottuso sia di 135 gradi, non si dura fatica ad intendere, che egli sia eguale all' angolo retto insieme colla sua metà.

72. Or nella divisione in parti eguali dell' intera linea circolare si sono arre-

arreſtati li Geometri ai minuti ſecondi per la ragione, che un'angolo talmente picciolo, che debba eſſere miſurato per un' arco minore di un minuto ſecondo, può traſcurarſi nella pratica, ſenza nota di errore ſenſibile. Anzi impiegânſi li minuti ſecondi ſoltanto per miſurare gl' angoli, di cui ſi ha biſogno per porre a calcolo li moti celeſti, che richiedono eſattezza maggiore; poichè, per quanto agl' angoli attinenti a coſe terreſtri, baſterà tener conto de'ſoli minuti primi.

73. Per la miſura intanto degl' angoli, baſta dividere ne' ſuoi gradi, e minuti la ſola metà della linea circolare; e ciò per la ragione, che un'angolo per quanto ottuſo, che egli ſia, dee eſſere ſempre minore di due retti, cioè di 180 gradi. Anzi il ſolo quadrante è ancora ſufficiente per la miſura di qualſiſia angolo; poichè, ſiccome con prolungarſi verſo il vertice un lato dell' angolo ottuſo, formaſi dall' altra parte un' angolo acuto, che inſieme con quell' ottuſo ci dà la ſomma di due retti (60), così colla miſura dell' angolo acuto ſi conoſcerà altresì di quanti gradi, e minuti ſia l' altro angolo ottuſo.

74. E pure per la miſura degl' angoli acuti potrebbe baſtare il ſolo ottante, cioè l' ottava parte della linea

circolare, o ſia la metà del quadrante,
Fig. che è di gradi 45. In fatti, ſe l' an-
14. golo BAC ſia maggiore di 45 gradi, con alzarſi su 'l lato AB la perpendicolare AD, sarà l' altro angolo CAD il ſuo reſiduo al retto, ed in conſeguenza minore di gradi 45. Onde, ſiccome potrà miſurarſi queſt' altro angolo per mezzo dell' ottante, così colla miſura di eſſo ſi verrà in cognizione di quanti gradi, e minuti ſia l' angolo propoſto.

75. Comunemente però per la miſura effettiva degl' angoli ſi fa uſo del quadrante, il quale formaſi dagl' Artefici di ottone, affinchè non ſoffra alterazione alcuna; ma per quanto grande che ſia la ſua eſtenſione, appena poſſono notarſi nel ſuo giro li gradi, e minuti primi; anzi in quelli, che adopranſi per le coſe terreſtri, e che per eſſere più maneggiabili formanſi di minor eſtenſione, veggonſi notati nel ſuo giro li ſoli gradi. Spiegheremo intanto altrove l' artificio, che ſi pratica, per avere preſſo a poco con queſti li minuti primi; e con quegl'altri li minuti ſecondi.

§.VI.

§. VI.

Delle proprietà delle rette parallele.

76. LE rette parallele ſono d'indole oppoſta a quelle, che incontranſi, e formano angoli, per la ragione, che ſe bene ſiano ſituate ſopra un medeſimo piano, nientedimeno la loro poſizione è tale, che prolungate all' infinito da ambedue le parti, non mai tra eſſo loro s' incontrano; e le medeſime chiamanſi ancora rette equidiſtanti, poichè ſerbano tra di eſſe ſempre la ſteſſa diſtanza.

77. Per intendere le proprietà di queſte tali rette, biſogna prima dimoſtrare il ſeguente teorema, cioè, che ogn' angolo ſia minore di quello, che formaſi eſteriormente col prolungamento della ſua baſe. Sia perciò l' angolo *Fig.* BAC, la di cui baſe BC prolunghiſi 15. a dirittura verſo D. Io dico, che l'angolo propoſto BAC ſia minore dell' altro eſteriore ACD, formato col prolungamento della baſe BC.

78. Per dimoſtrarlo, dividaſi il lato AC per metà nel punto E (48), per cui tirata la BF, facciaſi la EF eguale alla BE (35), e congiungaſi la CF. Eſſendo adunque eguali gl' angoli ver-

ticali AEB, CEF (62), ed essendo li lati del primo AE, BE eguali ai lati del secondo CE, EF, ciascuno a ciascuno; saranno eguali ancora le loro basi AB, CF (40). Quindi, avendo gl' altri due angoli BAE, ECF non solo li lati eguali ai lati, ma eziandio la base eguale alla base, sarà l' angolo BAE eguale all' angolo ECF (41), ed in conseguenza minore dell'altro ECD.

79. Or da questo teorema possiamo dedurne tre altri, che ci somministrano altrettante regole per conoscere le rette parallele. Il primo si è, che cadendo sopra due rette una terza retta, e facendo gl' angoli alterni eguali, le due
Fig. rette debbano essere parallele. Siano
16. perciò le due rette AB, CD, sulle quali cada la terza EFG, e faccia gl' angoli alterni eguali, cioè l' angolo AFG eguale all' angolo FGD. Io dico, che le due rette AB, CD siano parallele.

80. Se ciò si niega, incontrinsi le due rette AB, CD prolungate nel punto H. Facendosi adunque la FH base dell' angolo FGH, sarà quest' angolo minore dell'angolo AFG, formato col prolungamento di detta base (78). Ma si vuole, che li due angoli AFG, FGD siano tra di loro eguali. Dunque non è egli vero, che le due rette AB,

CD

CD prolungate s'incontrano; e pertanto le medesime rette saranno parallele tra di loro.

81. Il secondo teorema si è, che cadendo sopra due rette una terza retta, e facendo l'angolo esteriore eguale all' interiore, ed opposto alla stessa parte, le due rette debbano essere ancora parallele. Siano perciò di nuovo le due rette AB, CD, sulle quali cada la terza EFG, e faccia l'angolo esteriore EFB eguale all' angolo FGD, che è l'interiore, ed opposto alla stessa parte. Io dico, che con quest' altra uguaglianza le due rette debbano essere eziandio parallele. *Fig. 16.*

82. In fatti, intersegandosi le due AB, EG nel punto F, debbono essere eguali tra di loro li due angoli verticali EFB, AFG (*62*); onde, conforme si vuole, che il primo di essi EFB sia eguale all' angolo FGD, così eziandio l' altro AFG sarà eguale allo stesso angolo FGD. Ma questi due angoli sono alterni, ed è stato di già dimostrato (79), che essendo eguali gl' angoli alterni, le due rette debbano essere parallele. Dunque ancora con essere l' angolo esteriore EFB eguale all'interiore, ed opposto alla stessa parte FGD, la AB sarà parallela alla CD.

83. Il terzo, ed ultimo teorema si

è, che cadendo ſopra due rette una terza retta, e facendo eguali a due retti li due angoli interiori ſituati alla ſteſſa parte, le due rette debbano eſſere eziandio parallele. Cada perciò di nuo-
Fig. 16. vo ſulle due AB, CD la terza retta EFG, e faccia eguali a due retti li due angoli interiori BFG, FGD, che ritrovanſi ſituati alla ſteſſa parte. Io dico, che con queſta terza uguaglianza le due rette AB, CD debbano eſſere parimente parallele.

84. La ragione è chiara. Imperocchè, ſiccome per la ſuppoſizione ſono eguali a due retti li due angoli BFG, FGD, così ſono eguali a due retti eziandio gl'altri due BFG, AFG (60). Dunque, facendoſi queſti due BFG, AFG eguali a quegl'altri due BFG, FGD, ſe tolgaſi da eſſi il comune angolo BFG, ſaranno li due rimanenti AFG, FGD ſimilmente eguali (14), li quali per eſſere alterni faranno, che le due AB, CD ancora con quella terza uguaglianza ſiano parallele.

85. Or non è da porſi in dubbio, che ſia una la poſizione della retta, che paſſando per un dato punto, è parallela ad un'altra retta data; onde ſe minoriſi uno dei due angoli BFG, FGD, coſicchè gli ſteſſi inſieme ſiano minori di due retti, le due rette AB,
CD

CD non saranno più parallele, ma dovranno incontrarsi verso quella parte, ove essi sono situati. Ed essendo così, egli è facile il dimostrare, che essendo due rette parallele, debbano aver luogo tutte tre le riferite uguaglianze.

86. Siano perciò AB, CD due rette parallele, sulle quali cada la terza EFG. Io dico primieramente, che debbano essere eguali tra di loro li due angoli alterni AFG, FGD. Imperocchè, se uno di essi AFG fosse maggiore dell' altro FGD, coll' aggiunta del comune BFG, sarebbero li due AFG, BFG maggiori ancora degl' altri due BFG, FGD (14). Ma li due AFG, BFG sono eguali a due retti (60). Dunque gl' altri due BFG, FGD sarebbero minori di due retti; e pertanto le due rette AB, CD non sarebbero parallele, come è stato supposto, ma s' incontrarebbero prolungate verso li punti B, e D (85). *Fig.* 16.

87. Io dico in secondo luogo, che l' angolo esteriore EFB debba essere eguale all' angolo FGD, che è l' interiore, ed opposto alla stessa parte. In fatti di già è stato dimostrato (86), che siano eguali tra di loro li due angoli alterni AFG, FGD. Ma sono eguali ancora li due AFG, EFB, per essere

angoli verticali (62). Dunque, essendo allo stesso angolo AFG eguale, così l'angolo EFB, come l' angolo FGD, faranno questi due eziandio eguali tra di loro (12).

88. Io dico finalmente, che li due angoli interiori BFG, FGD situati alla stessa parte siano insieme eguali a due retti. Imperocchè, essendo eguali tra di loro li due angoli alterni AFG, FGD (86), coll' aggiunta del comune BFG, saranno li due AFG, BFG eguali ancora agl' altri due BFG, FGD (13). Ma li primi due AFG, BFG sono eguali a due retti (60). Dunque eziandio gl' altri due BFG, FGD saranno eguali a due retti.

89. E quindi intorno alle rette parallele possono dimostrarsi due altri teoremi. Il primo si è, che le rette parallele ad una terza debbano essere parallele ancora tra di loro. Siano perciò
Fig. 17. le due rette AB, CD, e ciascheduna di esse sia parallela alla terza EF. Io dico, che le due AB, CD siano tra esso loro eziandio parallele. Per dimostrarlo, tirisi la GHI, che seghi tutte tre le rette ne' punti G, H, ed I.

90. Essendo adunque parallele le due AB, EF, sarà l'angolo AGH eguale al suo alterno HIF (86). E similmente, essendo parallele l'altre due CD, EF, sarà

sarà l' angolo esteriore GHD eguale allo stesso angolo HIF (87), che è il suo interiore, ed opposto alla stessa parte. Onde, facendosi eguali tra di loro li due angoli alterni AGH, GHD (12), ancora le due rette AB, CD saranno parallele (79).

91. L' altro teorema si è, che se due rette siano eguali, e parallele, ancora l' altre due, che le congiungono alle stesse parti, debbano essere eguali, e parallele. Siano perciò eguali, e parallele le due rette AB, CD, le quali congiunganssi alle stesse parti per l'altre due AC, BD. Io dico, che ancora quest' altre due AC, BD debbano essere eguali, e parallele. Per dimostrarlo, tirisi dal punto A al punto D la retta AD. *Fig.* 18.

92. Essendo adunque parallele le due AB, CD, saranno gl' angoli alterni BAD, ADC eguali tra di loro (86); e pertanto, avendo quest' angoli li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, saranno le loro basi BD, AC eziandio eguali (40). Ma con questa uguaglianza gl'altri angoli alterni BDA, DAC vengono ad avere eguali, così li lati, come le basi. Dunque, dovendo essi ancora essere eguali (41), saranno le due BD, AC non solo eguali, ma eziandio parallele (79).

Del

93. Del rimanente, per quanto al problema di tirare per un dato punto una retta parallela ad un' altra retta data, potrà egli risolversi nel seguente
Fig. modo. Sia A il dato punto, e BC la
19. retta data. Prendasi in questa retta un punto ad arbitrio, e sia D; indi, congiunta la AD, facciasi su di essa, e propriamente al punto A l'angolo DAE eguale all'angolo ADC (43); prolunghisi finalmente la EA verso F, e per l'uguaglianza dei due angoli DAE, ADC sarà EF la parallela ricercata (79).

94. Per fare intanto l'angolo DAE eguale all' angolo ADC, può farsi uso di quest'altra pratica. Col centro D, e con qualsisia intervallo descrivasi primieramente tra li lati dell'angolo ADC l'arco circolare GH; indi col centro A, e col medesimo intervallo descrivasi l' altro arco IK, che s' incontri colla AD nel punto K; taglisi di poi da quest' altro arco la porzione KL eguale al primo GH (36); e colla retta AE tirata per lo punto L si avrà l' angolo ricercato (65).

§.VII.

§. VII.

Delle proprietà più semplici del triangolo.

95. SEguono ora le figure piane, che per ragion delle linee, che le terminano, possono essere di tre specie, cioè rettilinee, curvilinee, e mistilinee. Ma, per incominciare dalle rettilinee, che sono d' indole più semplice, conforme riguardansi come lati di esse le rette, che le racchiudono; così, attento il numero de' loro lati, sogliono dividersi tali figure in trilatere, quadrilatere, e moltilatere; anzi, perchè in esse incontransi tanti angoli, quanti sono li lati, perciò le trilatere chiamansi ancora triangoli, le quadrilatere quadrangoli, e le moltilatere moltangoli, ovvero poligoni.

96. Or per quanto ai triangoli, la prima loro proprietà si è, che due lati uniti insieme siano sempre maggiori del terzo, comunque si prendano. In *Fig.* fatti, se ABC sia un triangolo, con- 20. forme il solo lato BC è una retta, che ha per suoi termini li punti B, e C; così gl' altri due lati AB, AC formano insieme un' altra linea racchiusa tra gli stessi termini. Onde, attenta l' indole

dole della linea retta, di essere la più corta di tutte le linee, che hanno li medesimi termini (18), per necessità li due lati AB, AC uniti insieme debbono essere maggiori del rimanente lato BC.

97. Può darsi intanto a questa proprietà maggior estensione, e si è, che gli stessi due lati AB, AC siano maggiori ancora delle due rette BD, CD, che tirate dai punti B, e C inconstransi tra di loro dentro del triangolo nel punto D. In fatti, prolungata la BD per sino a che s' incontri col lato AC nel punto E; per ragion del triangolo ABE, saranno le due AB, AE insieme maggiori della sola BE; e pertanto coll' aggiunta della comune CE, ancora le due AB, AC saranno maggiori delle due BE, CE (14). Ma per la stessa ragione queste due BE, CE debbono essere eziandio maggiori delle due BD, CD. Dunque le prime due AB, AC saranno molto maggiori di quest'altre due BD, CD.

98. La seconda proprietà del triangolo si è, che prolungato uno de' suoi lati, l' angolo esteriore sia eguale ai due interiori, ed opposti uniti insieme.

Fig. 21. Sia perciò il triangolo ABC, e prolunghisi uno de' suoi lati, come BC, a dirittura verso D. Io dico, che l' angolo esteriore ACD, formato col prolunlungamento di quel lato, sia eguale ai due insieme CBA, BAC, che sono gl'interiori, ed opposti. Per dimostrarlo, tirisi la CE parallela alla BA (93).

99. Essendo adunque parallele le due CE, BA, e cadendo su di esse la terza AC; saranno eguali li due angoli ACE, BAC (86). Ma per la BD, che cade eziandio sulle stesse parallele CE, BA, sono eguali ancora gl' altri due angoli DCE, CBA (87). Dunque tutto l'angolo esteriore ACD, come eguale ai due ACE, DCE, sarà eguale altresì ai due interiori, ed opposti CBA, BAC.

100. Conforme poi da ciò ne segue, che lo stesso angolo esteriore sia maggiore di ciascheduno dei due interiori, ed opposti; così egli è facile il dimostrare, che se bene nel triangolo ABC li due lati AB, AC siano maggiori delle due rette BD, CD, che tirate dai punti B, e C incontransi tra di loro dentro del triangolo; nientedimeno l'angolo BDC, contenuto da queste rette, debba essere maggiore dell' angolo BAC contenuto dalli due lati. *Fig.* 20.

101. Prolunghisi perciò la BD per fino a che s' incontri col lato AC nel punto E; e per ragion del triangolo ABE, il di cui lato AE sta prolunga-

to

to verso C, sarà l' angolo CED maggiore dell' angolo BAC. Ma per l' altro triangolo CDE, in cui il lato ED sta prolungato verso B, l' angolo BDC è maggiore dell' angolo CED. Dunque lo stesso angolo BDC, contenuto dalle due rette BD, CD, sarà molto maggiore dell' angolo BAC, contenuto dai due lati AB, AC.

102. La terza proprietà del triangolo si è, che tutti tre li suoi angoli uniti insieme siano eguali a due retti.
Fig. In fatti, se nel triangolo ABC prolun-
21. ghisi il lato BC verso D, conforme l' angolo ACD si fa eguale ai due CBA, BAC (98); così coll' aggiunta del comune ACB, saranno li due ACD, ACB eguali a tutti tre gl' angoli del triangolo; e per tanto, essendo li due ACD, ACB insieme eguali a due retti (60), saranno tutti tre gl' angoli del triangolo eziandio eguali a due retti.

103. Essendo adunque eguali a due retti tutti tre gl' angoli del triangolo, chiaro si è, che due di essi insieme debbano essere minori di due retti. Ma attenta la stessa proprietà, conforme essendo noti due angoli di un triangolo, dee essere noto altresì l' angolo rimanente; così, se mai in un triangolo sia noto uno de' suoi angoli, dovrà essere nota parimente la somma degl' altri

due. Ed in fine, se due triangoli abbiano due angoli eguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ancora li rimanenti angoli dovranno essere eguali.

104. La quarta proprietà del triangolo si è, che a lati eguali debbano essere opposti angoli similmente eguali. Siano perciò eguali li due lati AB, AC del triangolo ABC. Io dico, che *Fig.* gl' angoli ad essi opposti ACB, ABC 22. siano eziandio eguali. In fatti, diviso il rimanente lato BC per metà nel punto D (48), e congiunta la AD, avranno li due angoli ACD, ABD non solo li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, ma eziandio la base comune; onde per necessità li medesimi dovranno essere tra di loro eguali (41).

105. La quinta proprietà del triangolo si è, che a lato maggiore debba essere opposto angolo ancora maggiore. Fingiamo perciò, che nel triangolo *Fig.* ABC il lato AB sia maggiore del lato 23. AC. Io dico, che l' angolo ACB opposto al primo lato sia maggiore altresì dell' angolo ABC opposto al secondo. Per dimostrarlo, taglisi dal lato maggiore AB la porzione AD eguale all' altro minore AC, e congiungasi la CD.

106. Essendo adunque nel triangolo ADC eguali li due lati AD, AC, saranno eguali ancora li loro angoli opposti

posti ACD, ADC (104); e per tanto l' angolo ACB, come maggiore del primo di essi ACD, sarà maggiore eziandio dell' altro ADC. Ma, per ragion del triangolo BCD, il di cui lato BD sta prolungato verso A, l'angolo ADC è maggiore dell' angolo ABC (100). Dunque sarà l'angolo ACB molto maggiore dell' angolo ABC.

107. La sesta proprietà del triangolo si è, che ad angoli eguali debbano essere opposti lati similmente eguali.
Fig. Siano perciò nel triangolo ABC eguali
22. li due angoli ACB, ABC. Io dico, che li lati ad essi opposti AB, AC siano parimente eguali. La ragione è chiara; poichè, se mai uno di essi, come AB, fosse maggiore dell' altro AC, sarebbe l'angolo ACB, opposto a quel lato, maggiore ancora dell'angolo ABC, opposto a quest' altro (*106*), il che è contrario a quel tanto si suppone.

108. L' ultima proprietà del triangolo si è, che ad angolo maggiore debba essere opposto lato eziandio maggiore.
Fig. Fingiamo perciò, che nel triangolo
23. ABC l' angolo ACB sia maggiore dell' angolo ABC. Io dico, che il lato AB, opposto al primo angolo, sia maggiore del lato AC, opposto al secondo. La ragione similmente è chiara. Imperocchè,

chè, conforme non può essergli eguale, perchè sarebbero eguali li due angoli ACB, ABC (104); così nè pure può esserne minore, perchè sarebbe l'angolo ACB minore dell' angolo ABC (108).

§. VIII.

Delle varie specie del triangolo.

109. DEl triangolo varie sono le specie. Ed in primo luogo per ragion de' lati, che lo racchiudono, egli dividesi in equilatero, isoscele, e scaleno. Chiamasi triangolo equilatero quello, che ha tutti tre li lati eguali. Chiamasi triangolo isoscele quello, che ne ha due solamente eguali. Chiamasi finalmente triangolo scaleno quello, in cui tutti tre li lati sono disuguali.

110. Attente le due proprietà del triangolo, che a lati eguali sono opposti angoli ancora eguali (104), e che a lato maggiore si oppone eziandio angolo maggiore (105); chiaro si è, che siccome debbono essere eguali tutti tre gl' angoli nel triangolo equilatero, e due solamente nel triangolo isoscele; così saranno tutti tre disuguali nel triangolo scaleno, talmente, che al lato massimo sarà opposto l' angolo massimo, al lato mez-

mezzano l' angolo mezzano, ed al lato minimo l' angolo minimo.

111. Attente poi l' altre due proprietà del triangolo, converse delle precedenti, cioè, che ad angoli eguali sono opposti lati ancora eguali (107), e che ad angolo maggiore si oppone lato eziandio maggiore (108); chiara cosa ancora si è, che siccome dee essere equilatero quel triangolo, che ha tutti tre gl' angoli eguali, ed isoscele quell' altro, che ne ha due solamente eguali; così, se mai il triangolo abbia tutti tre gl' angoli disuguali, dovrà egli essere scaleno, talmente, che all' angolo massimo sarà opposto il lato massimo, all' angolo mezzano il lato mezzano, ed all' angolo minimo il lato minimo.

112. Nel triangolo isoscele il terzo lato disuguale riguardasi come sua base; e potendo egli essere maggiore, e minore di ciascheduno dei due lati eguali, farà, che lo stesso triangolo sia capace di due forme diverse. Conforme poi l' angolo opposto alla base suol chiamarsi angolo verticale, così sarà egli maggiore, o minore di ciascheduno dei due angoli eguali, secondochè la base stessa è maggiore, o minore di ciascheduno dei due lati eguali.

113. Di qualunque forma sia il triangolo isoscele, egli è facile il dimostrare,

ſtrare, che la perpendicolare, abbaſſata ſulla baſe dall'angolo verticale, debba dividere per metà, così l'angolo, come la baſe. Sia perciò ABC un triangolo iſoſcele, e dall' angolo verticale A ſi abbaſſi ſulla baſe BC la perpendicolare AD. Io dico, che ſiano eguali così li due angoli BAD, CAD, ne' quali è diviſo l'angolo verticale BAC, come le due porzioni BD, CD della baſe BC. *Fig.* 22.

114. In fatti, eſſendo la AD perpendicolare ſulla BC, ſaranno eguali tra di loro li due angoli ADB, ADC (55). Ma, per ragion del triangolo iſoſcele, ſono eguali ancora li due ABD, ACD. Dunque li rimanenti due BAD, CAD ſimilmente dovranno eſſere eguali (103). E poichè queſti due angoli hanno il lato AB eguale al lato AC, ed il lato AD comune; eziandio le loro baſi BD, CD dovranno eſſere eguali (40).

115. Per poco poi, che ſi voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che di queſta proprietà del triangolo iſoſcele debbono eſſere vere ancora le converſe. Se adunque la AD divida l'angolo verticale BAC in due parti eguali, ella dividerà la baſe BC non ſolo per metà, ma eziandio ad angoli retti. E ſe la ſteſſa AD divida la baſe BC in

in due parti eguali, ella dividerà altresì così la medesima base ad angoli retti, come l'angolo verticale BAC per metà.

116. Le stesse proprietà hanno luogo parimente nel triangolo equilatero; come quello, che può riguardarsi come isoscele. Considerandolo intanto sotto questo aspetto, potrà prendersi per base ciascheduno de' suoi lati; onde competeranno le riferite proprietà a ciascheduno de' suoi angoli. Ma nel triangolo equilatero incontrasi altresì ciò di speciale, che sono eguali tra di loro le perpendicolari, abbassate dagl'angoli sulli lati opposti.

Fig. 24. 117. Per dimostrarlo, sia il triangolo equilatero ABC, e sulli lati BC, AC si abbassino dagl' angoli opposti le perpendicolari AD, BE. Essendo adunque eguali li due lati BC, AC, saranno eguali ancora le loro metà BD, CE. Onde, essendo eguali li due angoli ABD, BCE, ed avendo li medesimi li lati AB, BC eguali ai lati BC, CE, ciascuno a ciascuno; eziandio le loro basi, che sono le perpendicolari abbassate AD, BE, dovranno essere eguali (40).

118. Or tanto egli è vero, che il triangolo equilatero possa riguardarsi come isoscele, che da se stesso egli si frappone tra gl'infiniti triangoli isosceli, che posso-

possono situarsi sopra una data base. In fatti, se la AB debba essere la loro base comune, e dal punto C, che la divide per metà, alzisi su di essa la perpendicolare CD; colli punti di questa perpendicolare si avranno li vertici degl' infiniti triangoli isosceli, che possono situarsi sulla data base AB. *Fig.* 25.

119. Ma, siccome in questa perpendicolare CD dee esservi un punto, come E, tanto distante da ciascheduno dei due A, e B, per quanto questi distano tra di loro; così il triangolo AEB, che si avrà con questo punto, sarà non solo isoscele, ma eziandio equilatero. Ed egli è chiaro, esser tale la situazione di questo triangolo, che per mezzo di esso li triangoli isosceli, che hanno base maggiore, restano disgiunti dagl'altri, che al contrario hanno base minore.

120. Conforme poi, per descrivere sulla data retta AB il triangolo equilatero AEB, non dee farsi altra cosa, se non che colli punti A, e B come centri, e coll' intervallo della stessa AB descrivere due archi circolari, che s'intersceghino nel punto E; così volendo su di quella medesima retta come base descrivere un triangolo isoscele, di cui sia dato ancora ciascuno dei due lati eguali, li due archi circolari dovranno de- *Fig.* 25.

descriversi cogli stessi centri A, e B, ma con intervallo, che sia eguale al lato dato.

121. Nè altrimente dovrà risolversi il problema, di descrivere un triangolo scaleno, di cui siano dati tutti li lati.
Fig. 26. Imperocchè, se la AB sia il suo lato massimo, da cui taglisi, così la porzione AC eguale al lato mezzano, come la porzione BD eguale al lato minimo; queste due porzioni insieme dovranno essere maggiori della AB (96). Onde, se colli punti A, e B come centri, e cogl' intervalli delle due AC, BD descrivansi due archi circolari; questi dovranno intersegarsi in un qualche punto, come E; e pertanto, congiunte le due AE, BE, sarà ABE il triangolo ricercato.

122. In secondo luogo il triangolo per ragion degl' angoli, che contengono li suoi lati, dividesi in rettangolo, ottusangolo, ed acutangolo. Chiamasi triangolo rettangolo quello, in cui ritrovasi l' angolo retto. Chiamasi triangolo ottusangolo quello, in cui incontrasi l' angolo ottuso. Chiamasi finalmente triangolo acutangolo quello, che privo così del retto, come dell' ottuso, ritrovasi avere tutti tre gl' angoli acuti.

123. Ed in vero, essendosi dimostrato (102), che tutti tre gl' angoli di qual-

qualsisia triangolo siano insieme eguali a due retti; chiaro si è, non potersi incontrare in un triangolo, se non se un solo angolo retto, ed un solo ottuso. Quindi, tanto nel triangolo rettangolo, quanto nell' ottusangolo gl' altri due angoli debbono essere acuti. Onde, per potersi un triangolo chiamare acutangolo, ciascheduno de' suoi angoli dee essere acuto.

124. Ma da ciò, che tutti tre gl' angoli di qualsisia triangolo formino insieme la somma di due retti, può dedursi ancora, che siccome li due angoli acuti, che ritrovansi nel triangolo rettangolo, debbono essere insieme eguali ad un'altro retto; così li due, che sono nel triangolo ottusangolo, non solo dovranno essere insieme minori del retto, ma di quanto l'ottuso supera il retto, di altrettanto la loro somma dovrà esserne minore.

§. IX.

Della perfetta uguaglianza de' triangoli.

125. NEl triangolo debbono considerarsi sette cose, cioè li tre lati, li tre angoli, e lo spazio racchiuso, o sia l' ampiezza. Or, siccome

per la semplice uguaglianza di due triangoli basta, che siano eguali le loro ampiezze; così per la perfetta loro uguaglianza debbono essere eguali, non solo l' ampiezze, ma eziandio così li lati, come gl' angoli opposti a detti lati; e potranno conoscersi li triangoli perfettamente eguali per mezzo dei quattro teoremi, che seguono.

126. Il primo teorema si è, che essendo li lati di un triangolo eguali ai lati di un' altro triangolo, ciascuno a ciascuno, debbano essere li due triangoli perfettamente eguali. Siano perciò
Fig. 27. li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, cioè il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, ed il lato BC eguale al lato EF. Io dico, che questi due triangoli debbano essere perfettamente eguali.

127. Per dimostrarlo, concepiscasi il triangolo ABC posto sull' altro DEF con legge tale, che il punto B cada su 'l punto E, ed il lato BC su 'l lato EF. Siccome adunque, per l' uguaglianza di questi lati, dee cadere il punto C su 'l punto F; così, per l' uguaglianza degli altri lati, caderà altresì il punto A su 'l punto D. Onde, combaciandosi li due triangoli ABC, DEF, saranno eguali non solo le loro ampiezze,

ze, ma eziandio gl'angoli opposti ai lati eguali; e pertanto li due triangoli saranno perfettamente eguali tra di loro.

128. Che poi, per l' uguaglianza degl'altri lati dei due triangoli, debba cadere altresì il punto A sul punto D, potrà dimostrarsi negativamente in questo modo. Se sia possibile, cada egli su di un'altro punto, come G, di modo che il triangolo ABC posto sull' altro DEF sia GEF. Intersegandosi adunque la GE colla DF nel punto H, saranno le due DH, EH maggiori della DE, ovvero dalla sua eguale GE (*96*). Onde, siccome toltane la comune EH rimane la DH eziandio maggiore della GH (14); così coll' aggiunta dell' altra comune FH, sarà la DF, o pure la sua eguale GF maggiore similmente delle due GH, FH, il che non può aver luogo.

129. Il secondo teorema si è, che se due triangoli abbiano due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed eguali altresì gl' angoli contenuti da detti lati, li medesimi debbano essere perfettamente eguali. Siano perciò di nuovo li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, e l'angolo BAC eguale all' angolo EDF. Io dico, che questi due triangoli debbano *Fig.* 27.

 essere

essere perfettamente eguali.

130. Per dimostrarlo, concepiscasi il triangolo ABC posto sull' altro DEF con legge tale, che il punto A cada su 'l punto D, ed il lato AB su 'l lato DE. Siccome adunque, per l' uguaglianza degl' angoli BAC, EDF, dee cadere altresì l'altro lato AC sull'altro lato DF; così, per essere eguali tanto li due lati AB, DE, come gl' altri due AC, DF, caderà similmente il punto B su 'l punto E, ed il punto C su 'l punto F. Onde, combaciandosi li due triangoli, dovranno essere li medesimi perfettamente eguali.

131. Il terzo teorema si è, che se due triangoli abbiano due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, e degl' angoli opposti a questi lati due siano eguali, e due della stessa specie, cioè o ambidue acuti, o ambidue ottusi, li medesimi debbano essere perfettamente
Fig. eguali. Siano perciò di nuovo li due
28. triangoli ABC, DEF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, l'angolo ABC eguale all' angolo DEF, e l' angolo ACB della stessa specie coll' angolo DFE. Io dico, che questi due triangoli debbano essere perfettamente eguali.

132. In fatti sarebbero tali, se potesse dimostrarsi, che siano eguali ancora

li

li rimanenti lati BC, EF (126). Adunque, se vogliasi, che quest'altri due lati non siano eguali, ma che il lato BC sia maggiore del lato EF, taglisi dal lato maggiore BC la porzione BG, che sia eguale al lato minore EF (35), e congiungasi la AG. Or essendo li due lati AB, BG del triangolo ABG eguali ai due lati DE, EF dell' altro triangolo DEF, ed essendo altresì eguali gl' angoli contenuti da detti lati; per lo teorema precedente (129), questi due triangoli saranno perfettamente eguali; onde sarà il terzo lato AG eguale al terzo lato DF, e l' angolo AGB eguale all' angolo DFE.

133. Essendo adunque alla stessa DF eguale, così la AG, come la AC, saranno queste due eguali tra di loro (12). Onde, facendosi isoscele il triangolo CAG, saranno eguali altresì li due angoli AGC, ACG (110). Ma si sono dimostrati parimente eguali gl' altri due AGB, DFE. Dunque, siccome sono della stessa specie li due ACG, DFE, così saranno eziandio della stessa specie gl' altri due AGC, AGB, il che non può aver luogo; poichè dovendo essere insieme eguali a due retti (60), se uno di essi è acuto, l' altro dovrà essere ottuso. Non è egli dunque vero, che il lato BC sia maggiore del lato EF; e

pertanto, dovendo essere eguali quest' altri due lati, saranno li due triangoli perfettamente eguali (126).

134. Il quarto, ed ultimo teorema si è, che se due triangoli abbiano gl' angoli eguali agl' angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, che siano opposti ad angoli eguali, li due triangoli debbano essere perfettamente eguali. Siano perciò di nuovo
Fig. 27. li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano gl' angoli eguali agl' angoli, ciascuno a ciascuno, cioè l'angolo ABC eguale all' angolo DEF, l' angolo ACB eguale all' angolo DFE, ed in conseguenza il rimanente BAC eguale al rimanente EDF, e di vantaggio abbiano ancora il lato BC eguale al lato EF, che sono opposti ad angoli eguali. Io dico, che questi due triangoli debbano essere perfettamente eguali.

135. Per dimostrarlo, concepiscasi il triangolo ABC situato sull'altro DEF con legge tale, che il punto B cada su 'l punto E, ed il lato BC su 'l lato EF. Essendo adunque eguali questi due lati, caderà ancora il punto C su 'l punto F. Ma, per essere eguali non meno li due angoli ABC, DEF, che gl' altri due ACB, DFE, dee cadere parimente il lato BA su 'l lato ED, il lato CA su 'l lato FD, ed il pun-
to

to A su 'l punto D. Dunque combaciandosi tra di loro li due triangoli, saranno li medesimi perfettamente eguali.

136. Or, siccome la perfetta uguaglianza di due triangoli fa, che situandosi con ordine uno di essi sull' altro, li medesimi si combacino; così questi tali triangoli debbono aversi, come un' istesso triangolo replicato. E da ciò ricavasi, che riceve il triangolo la sua determinazione, primieramente con darsi tutti tre li lati; indi con darsi due lati insieme coll' angolo contenuto da questi lati; in oltre con darsi due lati, l' angolo opposto ad uno di essi, e la specie dell' angolo opposto all' altro lato; ed in fine con darsi tutti tre gl'angoli insieme con un lato opposto ad uno di essi.

137. Colli riferiti dati non per altra ragione rimane determinato il triangolo, se non perchè per mezzo di essi, non può variare la di lui forma; e quindi si è, che qualora sono dati due lati del triangolo insieme coll' angolo opposto ad uno di essi, dee essere data altresì la specie dell' angolo opposto all' altro lato. Imperocchè, siccome con quei soli dati si hanno due triangoli, differenti tra di loro per l' altro angolo, che in uno di essi si fa acuto,

e nell' altro ottuſo ; così con darſi altresì la ſpecie di queſt' altro angolo , riceve il triangolo l' intera ſua determinazione.

Fig. 29. 138. Per dimoſtrarlo, fingiamo, che li due lati del triangolo debbano eſſere eguali alle due rette A , e B, e che DCE ſia l' angolo oppoſto al ſecondo lato. Facciaſi la CD eguale alla retta A ; indi col centro D , e coll' intervallo dell' altra retta B deſcrivaſi l' arco circolare FG , che ſeghi la CE ne' punti F, e G. Se adunque congiunganſi le due DF , DG , sarà ciaſcuna di eſſe eguale alla retta B; e pertanto così DCF, come DCG sarà il triangolo ricercato: li quali due triangoli ſono differenti tra eſſo loro per l' altro angolo oppoſto al primo lato , che è ottuſo nel triangolo DCF, ed acuto nell' altro DCG.

139. Per la perfetta intelligenza di queſto problema , ſi abbaſſi dal punto D la perpendicolare DE ſulla CE. E ſiccome vedeſi chiaramente, che l'arco circolare, deſcritto coll' intervallo della retta B, ſega la CE in due punti diverſi, ſempre quando la ſteſſa B è maggiore della DE ; così chiara coſa ancora ſi è , che ſe mai queſte due rette foſſero eguali, in tal caſo il riferito arco ſegnarebbe ſulla DE il ſolo punto E,

E, onde il ſolo triangolo DCE adempirebbe le condizioni del problema, in cui tuttavolta l'angolo oppoſto al primo lato ſarebbe retto, e non già ottuſo, o acuto.

140. Che ſe poi la retta B ſia minore della perpendicolare abbaſſata DE, all'ora dall' arco circolare non ſegnaſi ſulla CE punto veruno; e pertanto, non potendo aver luogo il triangolo, che ſi dimanda, il problema dee dirſi impoſſibile. Ed eſſendo così, dovrà conchiuderſi, che ſe bene regolarmente due ſiano li triangoli, che adempiono le condizioni del problema; nientedimeno, ſiccome queſti tal volta ſi riuniſcono inſieme, e riduconſi ad un ſolo, così poſſono ancora affatto non ſuſſiſtere.

§. X.

Delle proprietà più ſemplici del parallelogrammo.

141. ESaminati li triangoli, paſſeremo ora a conſiderare li quadrilateri, che per gli quattro angoli, che contengono, appellanſi ancora quadrangoli. Di eſſi due ſono le ſpecie principali, cioè il parallelogrammo, ed il trapezio. Chiamaſi parallelogrammo

quel quadrilatero, che ha li lati opposti paralleli. Chiamasi all'incontro trapezio quell'altro quadrilatero, che ha o un solo lato parallelo al suo opposto, o pure nessuno.

142. Di qualsisia specie sia il quadrilatero, si appella sua diagonale quella retta, che tirasi da uno de' suoi angoli all' altro opposto. E poichè ella divide il quadrilatero in due triangoli, in ciascheduno de' quali li tre angoli insieme sono eguali a due retti (102); chiaro si è, che li quattro angoli di qualsisia quadrilatero debbano essere insieme eguali a quattro retti; e perciò, se tre di essi siano noti, dovrà essere noto ancora l'angolo rimanente.

143. Nel parallelogrammo intanto sono eguali, così li lati, come gl' angoli opposti; e se in esso tirisi la diagonale, questa lo dividerà in due triangoli perfettamente eguali. Sia perciò
Fig. 30. il parallelogrammo ABCD, in cui tirisi la diagonale AC. Essendo adunque parallele, tanto le due AB, DC, quanto le due AD, BC; saranno eguali tra di loro così li due angoli BAC, DCA, come gl' altri due DAC, BCA (86); e pertanto, con unire gl' uni cogl'altri, sarà tutto l' angolo BAD eguale al suo opposto BCD.

144. Or avendo li due triangoli ABC,

ABC, CDA due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno; saranno eguali altresì li rimanenti loro angoli (103), che sono gl' altri due opposti. Onde, perchè gli stessi triangoli hanno altresì il lato AC comune, che è opposto ad angoli eguali; saranno li medesimi perfettamente eguali (134); e pertanto saranno eguali tra di loro, così li due lati opposti AB, DC, come gl' altri due AD, BC.

145. Al contrario poi, se in un quadrilatero siano eguali, o li lati opposti, o gl' angoli opposti, il medesimo dovrà essere parallelogrammo. Sia perciò il *Fig.*
quadrilatero ABCD, in cui siano e- 30.
guali primieramente li lati opposti. Se adunque tirisi in esso la diagonale AC, saranno li lati del triangolo ABC eguali ai lati dell' altro ADC, ciascuno a ciascuno. Quindi, dovendo essere li due triangoli perfettamente eguali (126), saranno eguali altresì, così li due angoli alterni BAC, DCA, come gl' altri due CAD, ACB; e per tanto, facendosi parallele non meno le due AB, DC, che l' altre due AD, BC (79), il quadrilatero ABCD dovrà essere parallelogrammo.

146. Nello stesso quadrilatero ABCD *Fig.*
siano eguali in secondo luogo gl' angoli 30.
opposti. Io dico, che egli debba essere

ezian-

eziandio parallelogrammo. In fatti per l'uguaglianza degl'angoli opposti, saranno li due BAD, ABC eguali agl'altri due BCD, ADC. Onde, dovendo essere tutti quattro insieme eguali a quattro retti (142), saranno eguali a due retti così li primi due, come gl'altri due; e per tanto le due AD, BC saranno parallele (83). Della stessa maniera si dimostrerà, che siano parallele ancora le due AB, DC. Dunque il quadrilatero ABCD sarà parallelogrammo.

147. Al parallelogrammo compete ancora un'altra proprietà, e si è, che li supplimenti degl' altri due parallelogrammi, che sono intorno alla sua diagonale, siano tra di loro eguali. Sia
Fig. 31.
perciò il parallelogrammo ABCD, e nella sua diagonale AC prendasi un punto E ad arbitrio, per cui tirinsi le rette FG, HI parallele ai lati AB, BC. E siccome queste due rette dividono il parallelogrammo in altri quattro parallelogrammi, che disegnati per brevità colle sole lettere opposte, sono FH, GI, BE, DE; così questi due BE, DE diconsi essere supplimenti degl'altri due FH, GI, che sono intorno alla diagonale AC.

148. Or comunque prendasi nella diagonale AC il punto E, li due supplimenti BE, DE debbono essere sem-

pre eguali tra di loro. In fatti per ciò, che è stato dimostrato (143), debbono essere eguali, non solo li due triangoli ABC, ADC; ma eziandio, così li due AHE, AFE, come gl' altri due CGE, CIE. Onde, se dal triangolo ABC tolgansi li due AHE, CGE, e dall'altro triangolo ADC tolgansi gl' altri due AFE, CIE, rimaneranno li due supplimenti BE, DE eziandio eguali (14).

149. Essendo nel parallelogrammo paralleli tra di loro li lati opposti, chiaro si è, che li due angoli esistenti sopra un'istesso lato siano insieme eguali a due retti (85). Onde conforme, essendo retto uno di essi, dee essere retto ancora l' altro; così al contrario, se uno sia acuto, l' altro dovrà essere ottuso; e perciò il parallelogrammo per ragion degl' angoli può essere o rettangolo, in cui tutti gl' angoli sono retti, o obbliquangolo, in cui due angoli sono acuti, e due altri ottusi.

150. Conforme poi nel parallelogrammo li lati opposti debbono essere necessariamente eguali (88); così niente vieta, che il parallelogrammo abbia tal volta forma tale, che tutti quattro li lati siano eguali; e quindi si è, che tanto per ragion degl' angoli, quanto per ragion de' lati distinguonsi del parallelogrammo quattro specie, che chiamansi

mansi quadrato, rettangolo, rombo, e romboide.

151. Se adunque il parallelogrammo abbia gl' angoli retti, e tutti quattro li lati eguali, si chiamerà egli quadrato; ma se insieme cogl' angoli retti abbia soltanto li lati opposti eguali, si disegnerà col semplice nome di rettangolo. E così ancora si darà ad esso il nome di rombo, se essendo obbliquangolo, abbia tutti quattro li lati eguali; ma se sia obbliquangolo, ed abbia soltanto li lati opposti eguali, se gli darà quello di romboide.

Fig. 152. Del rimanente li parallelogram-
32. mi, che meritano special considerazione, sono li quadrati, e li rettangoli, in cui tutti gl' angoli sono retti. Onde primieramente intorno al quadrato si vuol notare, che essendo eguali tutti quattro li suoi lati, riceve egli la sua determinazione dalla lunghezza di uno di essi; e perciò, siccome sono eguali li quadrati descritti sopra rette eguali, così al contrario essendo eguali tra di loro due quadrati, saranno eguali parimente le rette, su di cui sono descritti.

153. Si descriverà intanto il quadrato su di una retta data AB, se alzata su di essa dal punto A la perpendicolare AC (56), taglisi da questa perpendicolare la porzione AD eguale alla

alla ſteſſa AB (35); poichè, deſcrivendoſi in appreſſo colli punti B, e D come centri, e coll' intervallo della medeſima AB due archi circolari, che s' interſeghino nel punto E, e congiungendoſi le due BE, DE, ſi avrà il quadrato ricercato.

154. Noteremo in ſecondo luogo intorno al rettangolo, che eſſendo eguali in eſſo ſoltanto li lati oppoſti, non può ricevere egli la ſua determinazione, ſe non ſiano dati ambidue li lati, che ſono intorno ad uno degl' angoli retti. E ſiccome di queſti due lati uno ci addita la ſua lunghezza, e l' altro la ſua larghezza; così diremo, che il rettangolo ſia fatto, ovvero contenuto dagli ſteſſi lati.

155. Or ſe le due rette AB, CD *Fig.*
ſieno li due lati, che debbono contenere il rettangolo; egli ſi formerà, primieramente con alzare ſulla prima AB dal ſuo termine A la perpendicolare AE (56); indi con tagliare da queſta perpendicolare la porzione AF, che ſia eguale all' altra CD (35); e finalmente con deſcrivere colli punti B, ed F come centri, e cogl' intervalli delle due AF, AB due archi circolari, che s' interſeghino nel punto G; poichè, congiunte le rette BG, FG, ſarà ABGF il rettangolo ricercato. *33.*

156. Intorno al quadrato si vuol ancora notare, che li parallelogrammi rettangoli, situati intorno alla sua diagonale, debbano essere ancora quadrati.
Fig. 31. Sia perciò il quadrato ABCD, ed intorno alla sua diagonale AC facciansi come sopra (147) li due parallelogrammi rettangoli FH, GI. Conforme adunque per l' uguaglianza delle due AB BC sono eguali li due angoli ACB, CAB (104); così per le parallele HI, BC sarà l' angolo AEH eguale all' angolo ACB (87). Onde, facendosi eguali li due angoli AEH, EAH, saranno eguali ancora le due AH, EH (107); e pertanto il parallelogrammo rettangolo FH sarà quadrato. Ed in una maniera consimile si dimostrerà, che sia eziandio quadrato l' altro parallelogrammo rettangolo GI.

157. Che se poi il punto E prendasi talmente nella diagonale AC, che resti ella divisa per metà; in tal caso non solo saranno quadrati li due FH, GI, ma ancora li due supplimenti BE, DE, tantochè tutti quattro li parallelogrammi rettangoli, in cui ritrovasi diviso il quadrato ABCD, saranno eguali tra di loro. Dal che ne segue, che il quadrato descritto sopra una retta sia quadruplo del quadrato, che descrivesi sulla sua metà.

§. XI.

§. XI.

Dell' uguaglianza così de' parallelogrammi, come de' triangoli.

158. PEr mezzo delle proprietà del parallelogrammo possono ora dimostrarsi varj teoremi intorno all' uguaglianza, così degli stessi parallelogrammi, come de' triangoli. Ed in primo luogo, se due parallelogrammi siano situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, li medesimi dovranno essere eguali. Siano perciò li due *Fig.* parallelogrammi AC, BF, li quali sia- 34. no situati sulla stessa base BC, e tra le stesse parallele BC, AE. Io dico, che questi due parallelogrammi siano tra di loro eguali.

159. La ragione è chiara; poichè essendo eguale alla BC, così la AD, come la EF (143), saranno queste due tra di loro eguali; ed in conseguenza, coll' aggiunta della comune DE, saranno eguali ancora le due AE, DF (14). Quindi, per essere eziandio eguali tanto le due AB, DC, quanto le due BE, CF, saranno li due triangoli ABE, DCF perfettamente eguali (126). Onde, siccome con togliere da essi il comune triangolo DGE, rimane

il

il trapezio ABGD eguale al trapezio EGCF; così coll' aggiunta dell' altro comune triangolo BCG, sarà il parallelogrammo AC eguale al parallelogrammo BF.

160. In secondo luogo, se due parallelogrammi siano situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele, questi ancora dovranno essere tra di loro eguali. Siano perciò li due parallelogrammi BD, FH, li quali siano situati sopra eguali basi BC, FG, e tra le stesse parallele BG, AH. Io dico, che quest' altri due parallelogrammi siano parimente eguali tra di loro. Per dimostrarlo, congiungansi le due AF, DG.

Fig. 35.

161. Essendo adunque eguali le due AD, BC (143), e volendosi, che la BC sia eguale alla FG, saranno eguali ancora le due AD, FG (12), le quali per essere parallele faranno, che eziandio l' altre due AF, DG siano eguali, e parallele (91). Quindi, essendo il quadrilatero AFGD similmente parallelogrammo, sarà egli eguale così al parallelogrammo BD, come all' altro FH (158); e pertanto questi due parallelogrammi saranno tra di loro eguali.

162. In terzo luogo, se due triangoli siano situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, essi ancora dovran-

vranno essere eguali. Siano perciò li due triangoli ABC, DBC, li quali siano situati sulla stessa base BC, e tra le stesse parallele BC, AD. Io dico, *Fig.*
che eziandio questi due triangoli debbano essere tra di loro eguali. Per dimostrarlo, tirinsi per gli punti B, e C le rette BE, CF parallele alle due CA, BD (93), che vadansi ad incontrare colla AD prolungata ne' punti E, ed F. *36.*

163. Con queste parallele adunque si avranno li due parallelogrammi CE, BF, li quali, come situati sulla stessa base BC, e tra le stesse parallele BC, EF, dovranno essere tra di loro eguali (158). Ma li due triangoli ABC, DBC sono le metà dei due parallelogrammi CE, BF, per essere questi divisi dalle loro diagonali in due triangoli perfettamente eguali (143). Dunque ancora li due triangoli ABC, DBC dovranno essere eguali.

164. Finalmente, se due triangoli siano situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele, eziandio quest' altri triangoli dovranno essere eguali. Siano *Fig.*
perciò li due triangoli ABC, DEF, li *37.*
quali siano situati sopra basi eguali BC, EF, e tra le stesse parallele BF, AD. Io dico, che quest' altri due triangoli debbano essere parimente eguali; e la di-

dimoſtrazione è ſimile a quella del teorema precedente.

165. In fatti, ſe per gli punti C, ed F tirinſi le rette CG, FH parallele alle due BA, ED (93), che vadanſi ad incontrare colla AD ne' punti G, ed H; con eſſe ſi formeranno quì ancora li due parallelogrammi BG, EH, che ſaranno tra di loro eguali (160). Ma li due triangoli ABC, DEF ſono le metà di queſti due parallelogrammi (143). Dunque ancora li due triangoli ABC, DEF dovranno eſſere eguali.

166. Queſti quattro teoremi poſſono riunirſi inſieme, ed enunciarſi nella maniera, che ſegue: cioè, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi debbano eſſere eguali tra di loro, ſe ſituati tra le ſteſſe parallele abbiano, o una medeſima baſe, o baſi eguali; ma con dimoſtrazione negativa può comprovarſi ancora il ſuo converſo: cioè, che ſe due triangoli, o due parallelogrammi ſiano eguali, e ſituati ſopra una retta verſo la ſteſſa parte abbiano o una medeſima baſe, o baſi eguali, debbano così gl' uni, come gli altri eſſere ancora tra le ſteſſe parallele.

Fig. 167. Per dare un lume, come debba farſene la dimoſtrazione, fingiamo,
38. che li due triangoli ABC, DBC ſituati ſulla ſteſſa baſe BC verſo la medeſima

parte

parte ſiano eguali. Io dico, che le due AD, BC, tra le quali ſono ſituati, debbano eſſere parallele. Se ciò ſi niega, ſia la AE parallela alla BC, che s'incontri colla BD nel punto E, e congiungaſi la CE. Li due triangoli adunque ABC, EBC, come ſituati ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe parallele BC, AE, debbono eſſere eguali (162). Onde, volendoſi che il triangolo ABC ſia eguale al triangolo DBC, ſaranno eguali ancora li due DBC, EBC, il che non può eſſere.

168. Niente vieta, che un triangolo, ed un parallelogrammo ſiano ſituati ſopra una ſteſſa baſe, e tra le ſteſſe parallele; ma in queſto caſo ſarà il triangolo eguale alla metà del parallelogrammo. Per dimoſtrarlo, ſiano ſituati *Fig.*
ſulla ſteſſa baſe BC, e tra le ſteſſe pa- 39.
rallele BC, AE il triangolo ABC, ed il parallelogrammo BE. Congiunta adunque la DC, ſaranno li due triangoli ABC, DBC eguali tra di loro (162). Onde, ſiccome il ſecondo DBC è eguale alla metà del parallelogrammo BE (143), così ancora il primo ABC ſarà eguale alla metà dello ſteſſo parallelogrammo.

169. Saranno intanto eguali tra di loro il triangolo, ed il parallelogrammo, quantevolte la baſe del triangolo è du-

è dupla della base del parallelogrammo.
Fig. 39. In fatti, se prolungata la BC verso F, facciasi la CF eguale alla BC, e congiungasi la AF, saranno eguali li due triangoli ABC, ACF (164). Onde, essendo il primo di essi ABC eguale alla metà, così dell'intero triangolo ABF, come del parallelogrammo BC, sarà il triangolo ABF eguale al parallelogrammo BC.

170. Quindi niente sarà più facile, quanto di formare un parallelogrammo, che sia eguale ad un dato triangolo, ed abbia un' angolo eguale ad un' angolo dato. Sia perciò ABF il dato triangolo. Dividasi la sua base BF in due parti eguali nel punto C (48); indi sulla BC, e propriamente al punto C facciasi l' angolo BCE eguale all'angolo dato (43); tirinsi di poi per gli punti A, e B le rette AE, BD parallele alle due BC, CE (93); ed egli è chiaro, che BE sia il parallelogrammo ricercato.

Fig. 39.

171. Del rimanente si vuol quì notare, che così nel triangolo, come nel parallelogrammo, oltre alla base, che può essere qualsisia de' loro lati, considerasi ancora l' altezza, per cui s' intende la perpendicolare abbassata sulla base dell' angolo opposto. E poichè li triangoli, e li parallelogrammi dotati di

di eguali altezze possono situarsi tra le stesse parallele; ne segue da ciò, che conforme due triangoli, e due parallelogrammi, in cui sono eguali tanto le basi, quanto l'altezze, debbono essere eguali; così avendo un triangolo, ed un parallelogrammo eguali basi, ed eguali altezze, dovrà il triangolo essere eguale alla metà del parallelogrammo.

§. XII.

Dell' ugualianza de' rettangoli, e de' quadrati.

172. OLtre ai riferiti teoremi intorno all' uguaglianza de' parallelogrammi in generale, se ne dimostrano altri, che riguardano l'uguaglianza de' rettangoli, e de' quadrati. Il primo si è, che avendosi due rette, una divisa in parti, l'altra indivisa, il rettangolo fatto da queste due rette sia eguale ai rettangoli, che si fanno dall' indivisa nelle parti della divisa. Siano *Fig.*
perciò le due rette AB, BC, di cui 40.
la prima AB sia divisa nelle parti AE, BE, e l' altra BC sia indivisa. Io dico, che il rettangolo AC, contenuto da queste due rette, sia eguale ai rettangoli

ſatti dall' indiviſa BC nelle parti della diviſa AE, BE.

173. Per dimoſtrarlo, tiriſi per lo punto E la retta EF parallela alla BC, che s' incontri colla CD nel punto F. E ſiccome il rettangolo AC rimane diviſo da queſta parallela negl' altri due AF, BF; così, per eſſere la EF eguale alla BC, il primo di eſſi AF ſarà fatto dalla BC nella parte AE, ed il ſecondo BF dalla ſteſſa BC nell'altra parte BE. Ma l' intero rettangolo AC è eguale ai due inſieme AF, BF. Dunque il rettangolo contenuto dalle due AB, BC ſarà eguale ai due rettangoli fatti dall' indiviſa BC nelle parti della diviſa AE, BE.

174. Il ſecondo ſi è, che eſſendo una retta diviſa in due parti, il rettangolo fatto dalla tutta in una di eſſe ſia eguale al quadrato di queſta parte, ed al rettangolo fatto da ambedue le
Fig. parti. Sia perciò la retta AB diviſa
40. nelle due parti AE, BE. Io dico, che il rettangolo fatto dalla tutta AB nella parte AE ſia eguale al quadrato di queſta parte, ed al rettangolo fatto dalle due parti AE, BE. Per dimoſtrarlo, baſta ſupporre nel teorema antecedente, che l' indiviſa BC ſia eguale alla parte AE dell' altra diviſa AB.

154. In fatti, con eſſere la BC eguale

guale alla parte AE, chiaro si è, che siccome l' intero rettangolo AC viene ad essere contenuto dalla tutta AB, e dalla parte AE; così degl' altri due AF, BF, in cui egli è diviso, il primo AF sarà il quadrato della stessa parte AE, ed il secondo BF sarà il rettangolo fatto dalle due parti AE, BE. Onde, essendo l' intero rettangolo AC eguale ai due AF, BF, sarà il rettangolo della tutta AB nella parte AE eguale al quadrato di questa parte, ed al rettangolo delle due parti AE, BE.

176. Il terzo si è, che essendo una retta divisa in due parti, il quadrato della tutta sia eguale ai rettangoli fatti dalla stessa tutta nelle sue parti. Sia *Fig.* perciò la retta AB divisa nelle parti 41. AE, BE. Io dico, che il quadrato della tutta AB sia eguale a due rettangoli, uno fatto dalla tutta AB nella parte AE, e l' altro fatto dalla stessa tutta AB nell' altra parte AE. Per dimostrarlo, basta supporre nel primo teorema, che l' indivisa BC sia eguale all' altra divisa AB.

177. In fatti, con essere eguali le due AB, BC, chiaro si è, che siccome l' intero rettangolo AC viene ad essere il quadrato descritto sulla AB; così degl' altri due AF, BF, in cui egli è diviso, il primo AF sarà il ret-

tangolo fatto dalla tutta AB nella parte AE, ed il secondo BF sarà il rettangolo fatto dalla stessa tutta AB nell' altra parte BE. Onde, essendo l'intero rettangolo AC eguale ai due AF, BF, sarà il quadrato della tutta AB eguale ai due rettangoli fatti dalla stessa tutta AB nelle sue parti AE, BE.

178. Il quarto si è, che essendo una retta divisa in due parti, il quadrato della tutta sia eguale ai quadrati delle sue parti, ed al doppio del rettangolo fatto dalle stesse parti. Sia perciò la retta AB divisa nelle parti AE, BE.
Fig. Io dico, che il quadrato della tutta
42. AB sia eguale ai quadrati delle sue parti AE, BE, ed al doppio del rettangolo fatto dalle stesse parti: il che può dimostrarsi facilmente per mezzo del secondo, e terzo teorema.

179. In fatti per lo terzo teorema, il quadrato della tutta AB dee essere eguale a due rettangoli, uno fatto dalla tutta AB nella parte AE, e l'altro fatto dalla stessa tutta AB nell' altra parte BE. Ma per lo secondo teorema il primo di essi è eguale al quadrato della parte AE, ed al rettangolo delle due parti AE, BE; ed il secondo è eguale al quadrato della parte BE, ed al rettangolo delle stesse parti AE, BE. Dunque sarà il quadrato della tutta

ta

ta AB eguale ai quadrati delle due parti AE, BE, ed al doppio del rettangolo fatto dalle medesime parti.

180. Il quinto si è, che se una retta sia divisa in due parti, li quadrati della tutta, e di una delle sue parti siano eguali al doppio del rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte insieme col quadrato dell' altra parte. Sia perciò la retta AB divisa nelle due parti AE, BE. Io dico, che li quadrati della tutta AB, e della parte BE siano eguali al doppio del rettangolo fatto dalla stessa tutta AB nella stessa parte BE insieme col quadrato dell' altra parte AE: il che può dimostrarsi facilmente per mezzo del secondo, e quarto teorema. *Fig. 42.*

181. In fatti, dovendo essere per lo quarto teorema il quadrato della tutta AB eguale ai quadrati delle parti AE, BE, ed al doppio del loro rettangolo; coll' aggiunta del comune quadrato della BE, saranno li quadrati della tutta AB, e della parte BE eguali al quadrato della parte AE, al doppio del quadrato dell'altra parte BE, ed al doppio del rettangolo delle parti AE, BE. Ma per lo secondo teorema il doppio del quadrato della parte BE, ed il doppio del rettangolo delle due parti AE, BE debbono essere insieme eguali

 al

al doppio del rettangolo della tutta AB nella parte BE. Dunque li quadrati della tutta AB, e della parte BE saranno eguali al doppio del rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte, ed al quadrato dell'altra parte AE.

182. Il sesto si è, che essendo una retta divisa in due parti, il quadrato della tutta, e di una parte unite insieme sia eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte insieme col quadrato dell' altra
Fig. parte. Sia perciò la retta AB divisa
42. nelle due parti AE, BE. Io dico, che il quadrato della tutta AB, e della parte BE unite insieme sia eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalla stessa tutta AB nella stessa parte BE insieme col quadrato dell' altra parte AE; il che può dimostrarsi facilmente per mezzo del quarto, e quinto teorema.

183. In fatti, dovendo essere per lo quinto teorema li quadrati della tutta AB, e della parte BE eguali al doppio del rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte insieme col quadrato dell' altra parte AE; saranno li quadrati della tutta AB, e della parte BE insieme col doppio di questo rettangolo eguali al quadruplo dello stesso rettangolo, ed al quadrato dell' altra parte AE. Ma per lo quarto teorema li

li quadrati della tutta AB, e della parte BD insieme col doppio del rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte debbono essere eguali al quadrato, che si fa dalla tutta AB, e dalla parte BE unite insieme. Dunque questo stesso quadrato sarà eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalla tutta AB nella parte BE insieme col quadrato dell' altra parte AE.

184. Da questi tre ultimi teoremi possono dedursi altrettante conseguenze, che pongono in chiaro il loro scambievole rapporto. La prima si è, che il quadrato della somma di due rette sia maggiore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro rettangolo. In fatti, se AE, BE siano le due rette, sarà AB la loro somma. Onde, essendosi dimostrato nel quarto teorema, che il quadrato della AB sia eguale ai quadrati delle due AE, BE insieme col doppio del rettangolo fatto dalle stesse AE, BE; chiaro si è, che il quadrato della somma delle due rette AE, BE sia maggiore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro rettangolo. *Fig.* 42.

185. La seconda conseguenza si è, che il quadrato della differenza di due rette disuguali sia minore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro

Fig. rettangolo. In fatti, se AB, BE siano
42. le due rette disuguali, sarà AE la loro differenza. Onde, essendosi dimostrato nel quinto teorema, che li quadrati delle due AB, BE siano eguali al doppio del rettangolo fatto dalle stesse AB, BE, insieme col quadrato della AE; chiaro si è, che il quadrato della differenza delle due rette disuguali AB, BE sia minore delli quadrati delle stesse rette nel doppio del loro rettangolo.

186. La terza, ed ultima conseguenza si è, che il quadrato della somma di due rette disuguali sia maggiore del quadrato della loro differenza nel qua-
Fig. druplo del loro rettangolo. In fatti,
42. se AB, BE siano le due rette disuguali, conforme colle medesime unite insieme si avrà la loro somma, così sarà AE la loro differenza. Onde, essendosi dimostrato nel sesto teorema, che il quadrato delle due AB, BE unite insieme sia eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalle stesse due AB, BE insieme col quadrato della AE; chiaro si è, che il quadrato della somma delle due rette disuguali AB, BE sia maggiore del quadrato della loro differenza AE nel quadruplo del loro rettangolo.

§. XIII.

§. XIII.

Continuazione dello ſteſſo argomento.

187. INtorno all'uguaglianza de' rettangoli, e de' quadrati rimangono a dimoſtrarſi quattro altri teoremi, che ſono d' indole più compoſta dei precedenti. Il primo ſi è, che eſſendo una retta diviſa in parti eguali, ed in parti diſuguali, il rettangolo delle due diſuguali inſieme col quadrato della porzione, frappoſta tra l'una e l' altra diviſione, ſia eguale al quadrato della metà. Dividaſi perciò la retta AB in due parti eguali nel punto C, ed in altre due diſuguali nel punto D. Io dico, che il rettangolo delle due diſuguali AD, DB inſieme col quadrato della porzione di mezzo CD ſia eguale al quadrato della metà CB. *Fig.* 43.

188. Poichè la AD ritrovaſi diviſa nelle parti AC, CD, e la DB è indiviſa; ſarà il rettangolo delle due AD, DB eguale a due rettangoli, uno della AC ovvero CB nella DB, e l'altro della CD nella ſteſſa DB (172). Ma il primo di queſti due rettangoli è eguale al ſecondo inſieme col quadrato della DB (174). Dunque il rettangolo delle due AD, DB ſarà eguale altresì

al doppio del rettangolo della CD nella DB, ed al quadrato della DB; e per tanto, coll' aggiunta del quadrato della CD, sarà lo stesso rettangolo insieme con questo quadrato eguale ancora ai quadrati delle due CD, DB, ed al doppio del loro rettangolo.

189. Essendo poi la CB divisa nelle parti CD, DB, eziandio il quadrato della CB dee essere eguale ai quadrati delle due CD, DB, ed al doppio del loro rettangolo (178). Onde, facendosi il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CD eguale finalmente al quadrato della CB, dovrà conchiudersi, che essendo una retta divisa in parti eguali, ed in parti disuguali, il rettangolo delle due disuguali insieme col quadrato della porzione di mezzo debba essere eguale al quadrato della metà.

190. E quindi ricavasi, che la differenza di due quadrati disuguali, sia eguale al rettangolo, che si fa dalla somma de' loro lati nella differenza degli stessi lati. In fatti essendosi dimostrato, che il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CD sia eguale al quadrato della CB; sarà la differenza tra il quadrato maggiore della CB, ed il quadrato minore della CD eguale al rettangolo delle due

AD,

AD, DB; ma, per essere eguali le due AC, CB, chiaro si è, che conforme la AD è la somma de' lati di quelli due quadrati disuguali, così la DB sia la differenza degli stessi lati.

191. Il secondo teorema si è, che se una retta dividasi in due parti eguali, ed alla medesima aggiungasi un' altra retta a dirittura; il rettangolo fatto dalla tutta, e dall' aggiunta, come una sola retta, nella stessa aggiunta insieme col quadrato della metà debba essere eguale al quadrato della metà, e dell' aggiunta unite insieme. Dividasi perciò la retta AB in due parti eguali nel punto C, a cui aggiungasi a dirittura l' altra BD. Io dico, che il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della metà CB debba essere eguale al quadrato della CD. *Fig.* 44.

192. Poichè la AD ritrovasi divisa nelle parti AC, CD, e la DB è indivisa; sarà il rettangolo delle due AD, DB eguale a due rettangoli, uno della AC ovvero CB nella DB, e l' altro della CD nella stessa DB (172). Ma questo secondo rettangolo è eguale al primo insieme col quadrato della DB (174). Dunque il rettangolo delle due AD, DB sarà eguale altresì al doppio del rettangolo della CB nella DB, ed al quadrato della DB; e pertanto coll'ag-

giunta del quadrato della CB, sarà lo stesso rettangolo insieme con questo quadrato eguale ancora ai quadrati delle due CB, DB, ed al doppio del loro rettangolo.

193. Essendo poi la CD divisa nelle parti CB, DB, eziandio il quadrato della CD dee essere eguale ai quadrati delle due CB, DB, ed al doppio del loro rettangolo (178). Onde facendosi il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CB eguale finalmente al quadrato della CD, dovrà conchiudersi, che se una retta dividasi in due parti eguali, ed alla medesima aggiungasi un'altra retta a dirittura, il rettangolo fatto dalla tutta, e dall'aggiunta, come una sola retta, nella stessa aggiunta insieme col quadrato della metà debba essere eguale al quadrato della metà, e dell' aggiunta unite insieme.

194. Eziandio da questo teorema può dedursi, che la differenza di due quadrati disuguali sia eguale al rettangolo, che si fa dalla somma de' loro lati nella differenza degli stessi lati. In fatti, essendosi dimostrato, che il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CB sia eguale al quadrato della CD; sarà la differenza tra il quadrato maggiore della CD, ed il qua-

quadrato minore della C B eguale al rettangolo delle due AD, DB; ma egli è chiaro, che conforme, per essere eguali le due AC, CB, la AD è la somma de' lati di questi due quadrati disuguali, così la BD sia la differenza degli stessi lati.

195. Il terzo teorema si è, che essendo una retta divisa in parti eguali, ed in parti disuguali, li quadrati delle due disuguali debbano essere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla metà, e l'altro fatto dalla porzione, che si frappone tra l'una, e l'altra divisione. Dividasi perciò la retta *Fig.* AB in due parti eguali nel punto C, 43. ed in altre due disuguali nel punto D. Io dico, che li quadrati delle due disuguali AD, DB debbano essere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla metà CB, e l'altro fatto dalla porzione di mezzo CD.

196. La ragione è chiara; poichè essendo la AD eguale alla somma delle due CB, CD, sarà il suo quadrato maggiore dei quadrati di quest' altre due nel doppio del loro rettangolo (185). Ma, per essere la DB eguale alla differenza delle stesse due CB, CD, il suo quadrato dee essere al contrario minore dei loro quadrati nel doppio dello stesso rettangolo (186). Dunque, congiun-

giungendosi insieme li quadrati delle due AD, DB, la loro somma dovrà essere eguale al doppio delli quadrati fatti dall'altre due CB, CD.

197. E quindi ricavasi, che la somma di due quadrati disuguali sia eguale alla metà di due altri quadrati, uno fatto dalla somma de' loro lati, e l'altro fatto dalla differenza degli stessi lati. In fatti, essendosi dimostrato, che li quadrati delle due AD, DB siano eguali al doppio delli quadrati dell'altre due CB, CD; saranno al contrario li quadrati di queste due CB, CD eguali alla metà delli quadrati fatti da quelle due AD, DB; ma egli è chiaro, che siccome la AD è eguale alla somma delle due CB, CD, così la DB sia eguale alla loro differenza.

198. Il quarto, ed ultimo teorema si è, che se una retta dividasi in due parti eguali, ed alla medesima aggiungasi un'altra retta a dirittura; due quadrati, uno della tutta, e dell'aggiunta, come una sola retta, e l'altro della sola aggiunta, debbano essere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla metà, e l'altro fatto dalla metà,
Fig. e dall'aggiunta unite insieme. Dividasi
44. perciò la retta AB in due parti eguali nel punto C, a cui aggiungasi a dirittura l'altra BD. Io dico, che li quadrati

drati delle due AD, DB debbano essere eguali al doppio di due altri quadrati, uno fatto dalla CB, e l' altro fatto dalla CD.

199. La ragione similmente è chiara; poichè, essendo la AD eguale alla somma delle due CB, CD, sarà il suo quadrato maggiore dei quadrati di quest'altre due nel doppio del loro rettangolo (185). Ma, per essere la DB eguale alla differenza delle stesse due CB, CD, il suo quadrato dee essere al contrario minore dei loro quadrati eziandio nel doppio dello stesso rettangolo (186). Dunque, congiungendosi insieme li quadrati delle due AD, DB, la loro somma dovrà essere eguale al doppio dei quadrati fatti dall' altre due CB, CD.

200. Eziandio da questo teorema può dedursi, che la somma di due quadrati disuguali sia eguale alla metà di due altri quadrati, uno fatto dalla somma de' loro lati, e l' altro fatto dalla differenza degli stessi lati. In fatti, essendosi dimostrato, che li quadrati delle due AD, DB siano eguali al doppio dei quadrati dell' altre due CB, CD; saranno al contrario li quadrati di queste due CB, CD eguali alla metà delli quadrati di quell' altre due AD, BD; ma egli è chiaro, che siccome la AD è eguale alla somma delle due CB, CD,

CD, così la BD sia eguale alla loro differenza.

§. XIV.

Delle proprietà de' triangoli relative ai quadrati de' loro lati.

201. DImostreremo ora le proprietà de' triangoli, che rapportansi ai quadrati de' loro lati. Ed in primo luogo, se il triangolo sia rettangolo, conforme il lato opposto all'angolo retto chiamasi ipotenusa, così il suo quadrato sarà eguale ai quadrati degl' altri due lati, che contengono l'angolo retto. Sia perciò il triangolo ABC rettangolo in A. Io dico, che il quadrato dell' ipotenusa BC sia eguale ai quadrati degl' altri due lati AB, AC.

Fig. 45.

202. Per dimostrarlo, descrivansi questi tre quadrati, e siano BE, AG, AI (153); indi tirata la AMN parallela alla BD (93), congiunganſi le due AD, CG. Essendo adunque retto, così l' angolo BAC, come l' angolo BAF, saranno li due insieme eguali a due retti; e pertanto le due AC, AF formeranno una retta continuata (61). Onde essendo parallele, tanto le due BG, CF, quanto le due BD, AN; sarà così il triangolo BCG eguale alla metà

metà del parallelogrammo AG, come il triangolo BDA eguale alla metà del parallelogrammo BN (168).

203. Essendo poi retti, ed in conseguenza eguali li due angoli ABG, CBD, coll' aggiunta del comune ABC, saranno eguali ancora li due GBC, ABD. Onde, essendo li due lati GB, BC eguali ai due lati AB, BD, ciascuno a ciascuno; saranno eguali altresì così li due triangoli BCG, BDA (129), come li due parallelogrammi AG, BN; e pertanto dovendo essere per la stessa ragione eguali ancora gl' altri due parallelogrammi AI, CN, sarà il quadrato BE descritto sull' ipotenusa BC eguale ai quadrati AG, AI descritti sugl' altri due lati AB, AC.

204. Or, siccome la AM è perpendicolare sull' ipotenusa BC, e la divide nelle due porzioni BM, CM; così dalla dimostrazione stessa può dedursi, che li quadrati dei lati AB, AC siano eguali ai rettangoli fatti dall' ipotenusa nelle porzioni contigue a detti lati. In fatti si è dimostrato, che il quadrato AG descritto su 'l lato AB sia eguale al parallelogrammo rettangolo BN; ma, per essere eguali le due BD, BC, questo parallelogrammo rettangolo è contenuto dalle due BC, BM.

205. E da ciò può dedursi ancora, che

che il quadrato della perpendicolare AM ſia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni dell' ipotenuſa BM, CM. Imperocchè, ſiccome per lo triangolo AMB rettangolo in M, il quadrato del lato AB è eguale altresì ai quadrati delle due AM, BM; così, per eſſere il rettangolo dell' ipotenuſa BC, e della porzione BM eguale al quadrato di queſta porzione, ed al rettangolo delle due BM, CM (174), ſarà il ſolo quadrato della AM eguale al ſolo rettangolo delle due BM, CM.

206. Alle riferite uguaglianze intanto può aggiungerſene un' altra, e ſi è, che il rettangolo dell' ipotenuſa BC nella perpendicolare AM ſia eguale al rettangolo dei due lati AB, AC. In
Fig. 46. fatti, ſe BE ſia il primo rettangolo, per l' uguaglianza delle due AM, CE dovrà paſſare la EF per lo punto A; e per tanto il triangolo ABC ſarà eguale alla metà di quel rettangolo (168). Ma poſto, che AD ſia il rettangolo dei due lati AB, AC, lo ſteſſo triangolo dee eſſere eziandio eguale alla metà di queſt' altro rettangolo. Dunque li due rettangoli BE, AD ſaranno tra di loro eguali.

207. In ſecondo luogo, ſe il triangolo ſia ottuſangolo, ſarà il quadrato del lato oppoſto all' angolo ottuſo maggiore

giore

giore dei quadrati degl' altri due lati, che lo contengono, nel doppio del rettangolo fatto da uno di questi lati nella porzione aggiuntagli dalla perpendicolare, abbassata su di esso dall' angolo opposto. Sia perciò il triangolo ABC ottusangolo in A, e si abbassi su 'l lato BA prolungato la perpendicolare CD dall' angolo opposto C. Io dico, che il quadrato del lato BC sia maggiore dei quadrati degl' altri due BA, AC nel doppio rettangolo fatto dal lato BA nella porzione aggiunta AD. Fig. 47.

208. In fatti, essendo la BD divisa nelle parti BA, AD, sarà il suo quadrato eguale ai quadrati delle parti BA, AD, ed al doppio del loro rettangolo (178); onde, coll'aggiunta del comune quadrato della CD, saranno li quadrati delle due BD, CD eguale ai quadrati delle tre BA, AD, CD, ed al doppio dello stesso rettangolo. Ma, per gli due triangoli BDC, ADC rettangoli in D, li quadrati delle due BD, CD sono eguali al solo quadrato della BC; e li quadrati dell' altre due AD, CD sono eguali al solo quadrato della AC (201). Dunque, dovendo essere il quadrato del lato BC eguale ai quadrati degl' altri due lati BA, AC, ed al doppio del rettangolo fatto dal lato BA nella porzione aggiunta AD, sarà egli

mag-

maggiore degl' altri due quadrati nel doppio del riferito rettangolo.

209. Finalmente, se il triangolo sia acutangolo, sarà il quadrato del lato opposto ad uno degl'angoli acuti minore dei quadrati degl' altri due lati, che lo contengono, nel doppio del rettangolo fatto da uno di questi lati nella porzione, che ne taglia presso l'angolo acuto la perpendicolare, abbassata su di
Fig. esso dall' angolo opposto. Sia perciò il
48. triangolo acutangolo ABC, e si abbassi su 'l lato AB dall'angolo opposto C la perpendicolare CD. Io dico, che il quadrato del lato BC, opposto all'angolo acuto A, sia minore dei quadrati degl' altri due lati AB, AC nel doppio rettangolo fatto dal lato AB nella porzione risecata AD.

210. In fatti essendo la AB divisa nelle due parti AD, BD; sarà il quadrato della BD insieme col doppio del rettangolo delle due AB, AD eguale ai quadrati di queste stesse due (180); onde coll'aggiunta del comune quadrato della CD, saranno li quadrati delle due BD, CD insieme col doppio dello stesso rettangolo eguali ai quadrati delle tre AB, AD, CD. Ma, per gli triangoli BDC, ADC rettangoli in D, li quadrati delle due BD, CD sono eguali al solo quadrato della BC; e li quadrati dell'altre due

due AD, CD sono eguali al solo quadrato della AC (201). Dunque, dovendo essere il quadrato del lato BC insieme col doppio del riferito rettangolo eguale ai quadrati degl' altri due lati AB, AC, sarà egli solo minore di quest'altri due quadrati nel doppio dello stesso rettangolo.

211. Si vuol però quì notare, che quest' ultima proprietà non per altra ragione ascrivesi al triangolo acutangolo, se non perchè essendo in esso acuti tutti tre gl' angoli, può ella adattarsi a ciascuno de' suoi lati; ma, poichè ritrovansi così nel triangolo rettangolo, come nell'ottusangolo due angoli acuti, chiaro si è, che la stessa proprietà debba aver luogo ancora in quest' altri triangoli per rapporto ai soli lati, che oppongonsi agl' angoli acuti: come in fatti di essa dee farsi uso, se nel triangolo ottusangolo vogliasi per mezzo de' suoi lati determinare la perpendicolare, che dall' angolo ottuso cade su 'l lato opposto.

212. Or delle tre riferite proprietà hanno luogo ancora le converse, che possono comprovarsi facilmente con dimostrazioni negative; e sono, che un lato del triangolo debba essere opposto ad angolo retto, ottuso, o acuto, secondochè il di lui quadrato ritrovasi egua-

eguale, maggiore, o minore dei quadrati degl' altri due lati. Ma, che l'angolo debba essere retto nel caso dell'uguaglianza, può dimostrarsi positiva-
Fig. mente in questo modo. Sia il triangolo
49. ABC, in cui il quadrato del lato BC sia eguale ai quadrati degl'altri due lati AB, AC. Io dico, che l'angolo BAC, a cui si oppone il lato BC, debba essere retto.

213. Alzisi perciò su 'l lato AB la perpendicolare AD (56), la quale facciasi eguale all' altro lato AC (35), e congiungasi la CD. Essendo adunque eguali le due AC, AD, saranno eguali ancora li loro quadrati (152); e pertanto, coll' aggiunta del comune quadrato della AB, saranno li quadrati delle due AB, AC eguali ai quadrati dell' altre due AB, AD. Ma si vuole, che li primi due siano eguali al quadrato della BC; e per essere il triangolo ABD rettangolo in A, gl' altri due sono eguali al quadrato della BD (201). Dunque, facendosi eguali li quadrati delle due BC, BD, saranno eguali così queste due rette, come gl' angoli ad esse opposti BAC, BAD; ed in conseguenza, conforme l' angolo BAD è retto, così sarà retto ancora l' altro BAC.

214. Del rimanente, siccome il paral-

rallelogrammo rettangolo vien diviso dalle due sue diagonali in triangoli eziandio rettangoli; così, attenta la proprietà di questi triangoli, chiaro si è, che li quadrati delle stesse diagonali siano eguali ai quadrati di tutti quattro li lati. Ma questo stesso dee aver luogo eziandio nel parallelogrammo obbliquangolo; e ciò per la ragione, che delle due diagonali una lo divide in due triangoli ottusangoli, e l'altra in due triangoli acutangoli. Sia perciò il parallelogrammo obbliquangolo ABCD, in cui tirinsi le due diagonali AC, BD, e sulli lati BC, AD si abbassino le perpendicolari AE, BF. *Fig.* 50.

215. Con queste perpendicolari adunque si avrà l' altro parallelogrammo AFBE, onde facendosi la BE eguale alla AF, sarà il rettangolo delle due BC, BE eguale al rettangolo dell' altre due AD, AF. Ma il quadrato della diagonale AC è maggiore dei quadrati fatti dalli due dati AB, BC nel doppio del primo rettangolo (207); ed all' incontro il quadrato dell' altra diagonale BD è minore dei quadrati fatti dalli due lati AB, AD, o pure dalli due CD, AD nel doppio del secondo rettangolo (209). Dunque li quadrati delle due diagonali congiunti insieme saranno

ranno eguali ai quadrati di tutti quattro li lati.

§. XV.

Della risoluzione di alcuni problemi intorno ai rettangoli, e li quadrati.

216. INtorno ai rettangoli, e li quadrati possono ora risolversi varj problemi, di cui il primo si è, di ritrovare un quadrato, che sia eguale alla somma di due, o più altri quadrati dati. Perciò siano dati primieramente li quadrati delle due AB, EF. Alzisi sulla prima di esse AB la perpendicolare AC (56), la quale facciasi eguale all' altra EF; e congiunta la BC, sarà il suo quadrato eguale ai due quadrati dati. In fatti, per lo triangolo BAC rettangolo in A, il quadrato della BC è eguale ai quadrati delle due AB, AC (201); onde, essendosi fatta la AC eguale alla EF, sarà lo stesso quadrato eguale altresì ai quadrati delle due AB, EF.

Fig. 51.

217. Se poi, oltre ai quadrati delle due AB, EF sia dato ancora il quadrato della terza GH; chiaro si è, che con alzare sulla BC l'altra perpendicolare CD, e con farla eguale alla GH, si farà il quadrato della BD eguale alla somma di tutti tre li quadrati dati. E con

con questo stesso artificio potrà rinvenirsi un quadrato, che sia duplo, triplo, quadruplo di un' altro quadrato dato; poichè, siccome con fare la AC eguale alla AB, il quadrato della BC si fa duplo del quadrato della AB; così con fare in appresso la CD eguale alla stessa AB, si farà il quadrato della BD triplo dello stesso quadrato.

218. Il secondo problema si è, di ritrovare un quadrato, che sia eguale alla differenza di due altri quadrati disuguali dati. Siano perciò le due AB, EF li lati dei due quadrati, e sia la *Fig.* AB il lato del quadrato minore, e la 52. EF il lato dell' altro maggiore. Alzisi sulla AB la perpendicolare AD (56), indi col punto B come centro, e coll' intervallo dell'altra EF descrivasi un'arco circolare, che seghi la AD nel punto C. Io dico, che il quadrato della AC sia eguale alla differenza dei due quadrati dati.

219. Per dimostrarlo, congiungasi la BC. Essendosi adunque descritto l'arco circolare coll'intervallo della EF, saranno eguali le due BC, EF, ed in conseguenza eguali ancora li loro quadrati. Ma, per lo triangolo ABC rettangolo in A, il quadrato della BC è eguale ai quadrati delle due AC, AB (201). Dunque a questi stessi quadrati

farà eguale ancora il quadrato della EF; e per tanto, ficcome togliendofi dal quadrato della EF quello della AB, rimane il quadrato della AC, così queſto ſteſſo quadrato farà eguale alla differenza di quegl' altri due.

220. Il terzo problema ſi è, di ritrovare un quadrato, che ſia eguale ad un dato rettangolo. Siano perciò
Fig. 53. AE, AF le due rette, che contengono il rettangolo dato. Ponganſi queſte due rette a dirittura, coſicchè la EF ſia una retta continuata; e dal comune loro termine A alziſi ſulla EF la perpendicolare AD (56). Dividaſi di poi la ſteſſa EF in due parti eguali nel punto B (48); e deſcrivaſi con queſto punto come centro, e coll' intervallo della BE un' arco circolare, che ſeghi la AD nel punto C. Io dico, che il quadrato della porzione AC ſia eguale al rettangolo delle due AE, AF.

221. Per dimoſtrarlo, congiungaſi la BC; ed eſſendo eguali le due BC, BE, ſaranno eguali ancora li loro quadrati. Ma, per lo triangolo ABC rettangolo in A, il quadrato della BC, è eguale ai quadrati delle due AC, AB (201), e per eſſere la EF diviſa in parti eguali nel punto B, ed in parti diſuguali nel punto A, l' altro quadrato della BE è eguale al rettan-

go-

golo delle due AE, AF, ed al quadrato della AB (187). Dunque li quadrati delle due AC, AB saranno ancora eguali a questo rettangolo, ed a questo quadrato; e pertanto, togliendone il comune quadrato della AB, rimanerà il quadrato della AC eguale al rettangolo delle due AE, AF.

222. Notisi quì intanto, che per mezzo di questo problema può descriversi ancora un quadrato, che sia eguale ad un dato triangolo. In fatti di già si è fatto vedere altrove (170), potersi formare con qualsivoglia angolo un parallelogrammo, che sia eguale ad un triangolo dato. Onde, se il parallelogrammo eguale al triangolo formisi coll' angolo retto, e ritrovisi un quadrato, che sia eguale a questo parallelogrammo rettangolo; chiaro si è, che il medesimo quadrato sarà eguale parimente al dato triangolo.

223. Il quarto problema si è, di prolungare talmente una retta data, che il rettangolo fatto dalla retta così prolungata nella porzione aggiunta sia eguale al quadrato di un' altra data retta. Sia perciò DA la retta, che dee *Fig.* prolungarsi, e sia ancora FG l' altra 54. retta data. Dividasi la DA per metà nel punto B, ed alzata su di essa la perpendicolare AC eguale alla FG,

prolunghisi la BA talmente per fino al punto E, che siano eguali le due BC, BE. Io dico, che il rettangolo della DE nella AE sia eguale al quadrato della FG, ovvero AC.

224. Poichè sono eguali le due BC, BE, saranno eguali ancora li loro quadrati. Ma, per essere la DA divisa egualmente nel punto B, a cui ritrovasi aggiunta l'altra AE, il rettangolo delle due DE, AE insieme col quadrato della AB è eguale al quadrato della BE (191); e per essere il triangolo ABC rettangolo in A, li quadrati delle due AC, AB sono eguali al quadrato della BC (201). Dunque ancora il rettangolo delle due DE, AE insieme col quadrato della AB sarà eguale ai quadrati delle due AC, AB; e per tanto, togliendone il comune quadrato della AB, rimanerà il rettangolo delle due DE, AE eguale al quadrato della AC.

225. Il quinto problema si è, di dividere talmente una data retta, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra retta data. Sia *Fig.* perciò AB la retta da dividersi, e sia 55. ancora HI l'altra retta data. Dividasi la AB per metà nel punto C, da cui alzata sulla stessa AB la perpendicolare CD, taglisi da questa perpendicolare la porzione CE eguale alla HI. Tirisi di

poi

poi per lo punto E la retta EF parallela alla AB; e col punto C come centro, e coll' intervallo della CA, ovvero CB descrivasi un' arco circolare, che seghi la EF nel punto F. Si abbassi finalmente da questo punto sulla AB l'altra perpendicolare FG; ed io dico, che il rettangolo delle due AG, BG sia eguale al quadrato della HI.

226. Per dimostrarlo, congiungasi la CF. Essendo adunque eguali le due CF, CB, saranno eguali ancora li loro quadrati. Ma, per lo triangolo CGF rettangolo in G, il quadrato della CF è eguale a i quadrati delle due CG, FG, ovvero delle due CG, CE, o finalmente delle due CG, HI; e per essere la AB divisa in parti eguali nel punto C, ed in parti disuguali nel punto G, il quadrato della CB è eguale al rettangolo delle due AG, BG insieme col quadrato della CG. Dunque, toltone il comune quadrato della CG, sarà il quadrato della HI eguale al rettangolo delle due AG, BG. Si vede intanto, che per essere questo problema capace di soluzione, la HI non dee essere maggiore della metà della AB.

227. Il sesto, ed ultimo problema si è, di dividere talmente una data retta, che il rettangolo della tutta,

e di una delle sue parti sia eguale al
Fig. quadrato dell' altra parte. Sia perciò
56. AB la retta data, la quale prolunghisi talmente per fino al punto C, che il rettangolo delle due AC, BC sia eguale al quadrato della stessa AB (223). Taglisi di poi dalla AB la porzione BD eguale alla BC; ed io dico, che il quadrato di questa porzione BD sia eguale al rettangolo della tutta AB nell' altra porzione AD.

228. In fatti il rettangolo delle due AC, BC, come eguale al quadrato della AB, è eguale a due rettangoli, uno della AB nella BD, e l'altro della AB nella AD (176). Ma, per essere la BD eguale alla BC, quello stesso rettangolo è eguale ancora al rettangolo della AB nella BD, ed al quadrato della BD (174). Dunque, togliendone il comune rettangolo della AB nella BD, sarà il solo rettangolo della AB nella AD eguale al solo quadrato della BD.

229. Dall' essersi intanto divisa la AB nel punto D colla divisata legge ne seguono due altre uguaglianze. La prima si è, che li quadrati della tutta AB, e della porzione minore AD siano eguali al triplo del quadrato fatto dalla porzione maggiore BD. In fatti quelli due quadrati sono eguali al duplo

plo del rettangolo fatto dalle due AB, AD, ed al quadrato della BD (180). Ma il duplo di questo rettangolo è eguale al duplo del quadrato della B D. Dunque li quadrati delle due AB, AD saranno eguali al triplo del quadrato della BD.

230. L'altra uguaglianza si è, che il quadrato della tutta AB, e della porzione minore AD unite insieme sia eguale al quintuplo del quadrato fatto dalla porzione maggiore BD. In fatti quel quadrato è eguale al quadruplo del rettangolo fatto dalle due AB, AD, ed al quadrato della BD (182). Ma il quadruplo di questo rettangolo è eguale al quadruplo del quadrato della BD. Dunque il quadrato delle due AB, AD unite insieme sarà eguale al quintuplo del quadrato della BD.

§. XVI.

Dell' indole dell' altre figure rettilinee.

231. PEr quanto all'altre figure rettilinee, che sono racchiuse da un maggior numero de' lati, se bene distinguansi dalle precedenti col comune nome di figure moltilatere, ovvero di poligoni; nientedimeno esse ancora hanno li nomi loro speciali, chia-

mandosi pentagoni, se li lati, che le racchiudono, sono cinque, esagoni se sono sei, settagoni se sono sette, ottogoni se sono otto, e così dell' altre. E poichè, con tirare rette da uno de' loro angoli agl' altri opposti, dividonsi in triangoli; perciò per mezzo di questi triangoli pongonsi a calcolo tali figure.

232. Conforme poi quelle rette, che da uno degl' angoli del poligono tiransi agl' angoli opposti, possono riguardarsi come sue diagonali; così resterà diviso il poligono in tanti triangoli, quanti ne addita il numero de' suoi lati minorato di due, cioè in tre essendo pentagono, in quattro essendo esagono, e così dell' altre. Ed attenta questa divisione egli è facile ad intendersi, che gl' angoli di qualsisia poligono uniti insieme siano eguali a tanti retti, quanti ne disegna il duplicato numero de' lati minorato di quattro.

233. In fatti si hanno gl' angoli del poligono, con unire insieme gl' angoli dei triangoli, in cui lo dividono le sue diagonali. Ma questi triangoli sono tanti di numero, quanti ne addita il numero de' lati minorato di due; e gl' angoli di ciascheduno di essi sono insieme eguali a due retti (102). Dunque gl' angoli del poligono uniti insieme saranno

no eguali a tanti retti, quanti ne diſegna il duplicato numero degli ſteſſi lati minorato di quattro.

234. Queſto ſteſſo può dimoſtrarſi ancora in un'altro modo, ed ecco come. Prendaſi dentro del poligono un punto ad arbitrio, da cui tirinſi rette ai ſuoi angoli. E ſiccome con queſte rette rimane diviſo il poligono in tanti triangoli, quanti ſono li lati; così gl' angoli di tutti queſti triangoli inſieme ſaranno eguali a tanti retti, quanti ne addita il duplicato numero degli ſteſſi lati. Onde, non appartenendo al poligono gl' angoli, che ritrovanſi intorno al punto preſo, ed eſſendo queſt'angoli inſieme eguali a quattro retti (67); ſaranno gl' angoli del poligono eguali a tanti retti, quanti ne addita il duplicato numero de' lati minorato di quattro.

235. Da ciò intanto ne ſegue, che prolungandoſi li lati di un poligono verſo la ſteſſa parte, gl' angoli, che formanſi al di fuori, ſiano inſieme eguali a quattro retti. In fatti, conforme ciaſcuno di eſſi col ſuo interiore contiguo ci da la ſomma di due retti (60); così gl'eſteriori, ed interiori inſieme ſaranno eguali a tanti retti, quanti ne diſegna il duplicato numero de' lati. Ma ſi è dimoſtrato, che la

E 5 ſom-

somma dei soli interiori sia eguale a tanti retti, quanti ne addita lo stesso duplicato numero de' lati minorato di quattro. Dunque la somma degl' altri esteriori dovrà essere eguale a quattro retti.

236. Per quanto alla determinazione di un poligono, egli la riceve con darsi un lato meno di quelli, che debbono contenerlo, e con darsi altresì gl' angoli contenuti dai lati dati. Sia perciò il poligono ABCDE, di cui siano dati li soli lati AB, BC, CD, DE, e li soli angoli ABC, BCD, CDE. Diasi posizione al primo lato AB; ed essendo egli dato, saranno dati ancora di posizione li due punti A, e B. Ma con esser dati gl' angoli ABC, BCD, CDE insieme colli lati BC, CD, DE, sono dati di posizione eziandio li punti C, D, E. Dunque sarà dato altresì, tanto il rimanente lato EA, quanto ciascuno dei rimanenti angoli DEA, EAB; e pertanto il poligono stesso resterà determinato.

Fig. 57.

237. Ma io dico di più, che se tirinsi nel poligono le diagonali AC, AD, rimangono determinati parimente li tre triangoli ABC, ACD, ADE, in cui egli resta diviso. In fatti, con essere dati li lati AB, BC insieme coll' angolo da essi contenuto ABC, già il pri-

primo triangolo ABC riceve la ſua determinazione (136). Dunque, rimanendo determinato non ſolo il ſuo terzo lato AC, ma eziandio l' angolo ACB, ancora nel ſecondo triangolo ACD ſaranno dati li due lati AC, CD inſieme coll' angolo da eſſi contenuto ACD. Onde, conforme queſt' altro triangolo riceve parimente la ſua determinazione, così per la ſteſſa ragione dovrà eziandio riceverla il triangolo rimanente ADE.

238. Finalmente, ſiccome poneſi a calcolo qualſiſia poligono per mezzo dei triangoli, in cui lo dividono le ſue diagonali; così con rette parallele niente è egli più facile, quanto di ridurre ad un ſol triangolo qualſiſia poligono dato; ma per poterſi meglio intendere la maniera di eſeguire una tal riduzione, giova incominciare dal quadrilatero, che per reſtar diviſo dalla ſua diagonale in due triangoli, riduceſi ad un ſol triangolo per mezzo di una ſola parallela.

239. Debbaſi adunque in primo luogo ridurre a triangolo il quadrilatero ABCD. Tiriſi per lo punto D la retta DE parallela alla diagonale AC (93), che s' incontri col lato BC nel punto E. E poichè, congiunta la AE, li due triangoli ACE, ACD ritrovanſi ſituati *Fig.* 58.

E 6 ſulla

sulla stessa base AC, e tra le stesse parallele AC, DE; saranno li medesimi tra di loro eguali (162). Onde, coll'aggiunta del comune triangolo ABC, sarà il triangolo ABE eguale al quadrilatero dato ABCD.

Fig. 240. Debbasi in secondo luogo ri-
59. durre a triangolo il pentagono ABCDE. Tirisi similmente per lo punto E la retta EF parallela alla diagonale AD, che s'incontri col lato CD nel punto F. Se adunque congiungasi la AF, li due triangoli ADF, ADE, come situati sulla stessa base AD, e tra le stesse parallele AD, EF, saranno tra di loro eguali. Onde, siccome coll'aggiunta del comune quadrilatero ABCD, l'altro quadrilatero ABCF si fa eguale al pentagono ABCDE; così, con ridurre a triangolo quest' altro quadrilatero ABCF, si avrà la riduzione ricercata del dato pentagono.

Fig. 241. Debbasi in terzo luogo ridurre
60. a triangolo l' esagono ABCDEF. Tirisi parimente per lo punto F la retta FG parallela alla diagonale AE, che s'incontri col lato DE nel punto G; e se congiungasi la AG, li due triangoli AEG, AEF, come situati sulla stessa base AE, e tra le stesse parallele AE, FG, saranno tra di loro eguali. Onde, conforme coll'aggiunta del comune penta-

ta-

tagono ABCDE, sarà l'altro pentagono ABCDG eguale all'esagono ABCDEF; così, con ridurre quest' altro pentagono primieramente a quadrilatero, ed indi a triangolo, si avrà la riduzione, che si dimanda del dato esagono.

242. Or in una maniera consimile si ridurrà a triangolo qualsisia altro poligono, se non che a misura, che aumentasi il numero de' suoi lati, si aumenteranno altresì le riduzioni, di cui si ha bisogno per giugnere alla riduzione ricercata: come in fatti il settagono primieramente dovrà ridursi ad esagono, indi a pentagono, di poi a quadrilatero, e finalmente a triangolo; e quindi si è, che se bene per lo quadrilatero basti una sola parallela, nientedimeno bisognerà tirarne due per lo pentagono, tre per l' esagono, quattro per lo settagono, e così per gl' altri poligoni.

243. La riduzione intanto, che specialmente desiderasi da Geometri, si è quella, per mezzo di cui un dato poligono riducesi a quadrato; e ciò per la ragione, che tra tutte le figure rettilinee la più facile a misurarsi si è il quadrato; ma con ridurre a triangolo un dato poligono, egli è facile di ridurlo in appresso a quadrato. Imperocchè, dovendo essere quel triangolo e-

guale

guale al rettangolo, che si fa dalla metà della sua base nella sua altezza (172); chiaro si è, che con descrivere un quadrato, che sia eguale a questo rettangolo, si avrà il quadrato ricercato.

§. XVII.

Dell' indole delle figure rettilinee regolari.

244. CHiamansi figure rettilinee regolari quelle, in cui così li lati, come gl' angoli sono eguali, siccome è il triangolo equilatero tra le figure trilatere, ed il quadrato tra le figure quadrilatere. In queste tali figure, per la loro regolarità, ritrovasi un punto, che riguardasi, come loro centro; e la sua proprietà si è, che le rette, tirate da questo punto agl' angoli della figura, siano eguali tra di loro, e dividano gli stessi angoli in due parti eguali.

Fig. 61. 245. Sia perciò ABCDE una figura rettilinea regolare, e dividasi per metà così l' angolo ABC per la retta BF, come l' angolo BCD per l' altra CF (46), le quali due rette s' incontrino tra di loro nel punto F. Essendo adunque eguali li due angoli ABC, BCD, saranno eguali ancora, così le loro metà

tà FBC, FCB, come le due BF, CF. Ma, congiunta la DF, ritrovansi essere perfettamente eguali li due triangoli BCF, DCF (129). Dunque dovranno essere eguali parimente, tanto le due BF, DF, quanto li due angoli FBC, FDC; e pertanto, siccome il primo di essi FBC è la metà dell' angolo ABC, così ancora l' altro FDC sarà la metà del suo eguale CDE.

246. Or conforme si è dimostrato, che la DF non solo sia eguale a ciascheduna delle due BF, CF, ma divida ancora per metà l' angolo CDE; così, congiunte l'altre due EF, AF, si dimostrerà parimente, che ciascuna di esse sia eguale a ciascuna delle tre BF, CF, DF, e che li due angoli DEA, EAB siano divisi per metà dalle stesse due EF, AF. Onde, attenta l' uguaglianza delle rette BF, CF, DF, EF, AF tirate dal punto F agl' angoli della figura, e la divisione per metà di quest' angoli fatta dalle stesse rette, sarà F il centro della figura regolare proposta.

247. Ma allo stesso centro compete ancora un'altra proprietà, e si è, che le perpendicolari da esso abbassate sulli lati della figura siano eguali tra di loro, e dividano per metà gli stessi lati. *Fig.*
Si abbassino perciò sulli lati AB, BC *61.*
le

le perpendicolari FG, FH; e facendosi perfettamente eguali li due triangoli BFG, BFH (134), saranno eguali tra di loro queste due perpendicolari. Ma, per farsi ancora perfettamente eguali, così li due triangoli AFG, BFG, come gl' altri due BFH, CFH, sono eguali tanto le due AG, BG, quanto le due BH, CH. Dunque li due lati AB, BC saranno divisi per metà da quelle stesse perpendicolari.

248. Quindi il centro della figura regolare ABCDE potrà ritrovarsi, non solo con dividere li due angoli ABC, BCD egualmente per le rette BF, CF; ma eziandio con dividere li due lati AB, BC per metà ne' punti G, ed H; e con alzare su di essi da questi punti le perpendicolari GF, HF; poichè coll' incontro, così di quelle due rette, come di queste due perpendicolari, si avrà il centro ricercato. Anzi potrà aversi altresì lo stesso centro, se diviso l'angolo ABC egualmente per la retta BF, dividasi il lato AB per metà nel punto G; poichè alzata su di esso da questo punto la perpendicolare GF, che s' incontri colla BF nel punto F, si avrà con questo punto il centro, che si dimanda.

249. Conforme poi sono eguali le rette, che tiransi agl' angoli di una figura

gura regolare dal suo centro , così sono eguali altresì gl' angoli contenuti dalle stesse rette . E poichè quest' angoli sono tanti di numero , quanti sono li lati della figura , e li medesimi uniti insieme sono eguali a quattro retti, cioè a 360 gradi ; perciò potrà determinarsi ciascheduno di essi, con dividere li 360 gradi in tante parti eguali, quanti sono li lati della figura ; onde sarà egli di 120 gradi nel triangolo equilatero , di gradi 90 nel quadrato , di gradi 72 nel pentagono regolare, e di gradi 60 nell' esagono regolare .

250. Quest' angolo intanto , come situato nel centro della figura regolare, chiamasi angolo al centro ; e con essere egli noto, può determinarsi ancora ciascuno degl' angoli della stessa figura, per dover egli essere il supplimento a due retti dell' angolo al centro . In fatti , essendo li due angoli ABC , BCD divisi per metà dalle rette BF , CF ; sarà l' angolo ABC eguale ai due CBF, BCF . Onde, coll' aggiunta del comune BFC , saranno li due angoli insieme ABC , BFC eguali ai tre angoli del triangolo BCF , la di cui somma è eguale a due retti (102). *Fig. 61.*

251. Ma senza far uso dell' angolo al centro , può determinarsi ciascuno degl' angoli della figura per mezzo della

la loro proprietà, che tutti insieme siano eguali a tanti retti, quanti ne addita il duplicato numero de' lati minorato di quattro (234), cioè con dividere la somma di questi retti per lo numero degl' angoli, o pure dei lati della figura. Così nel pentagono regolare, essendo la somma degl' angoli eguale a sei retti, cioè a 540 gradi, si ritroverà, che ciascuno di essi debba essere di gradi 108; e per la stessa ragione sarà di gradi 120 ciascuno degl' angoli dell'esagono regolare.

252. Del rimanente, conforme il triangolo equilatero, ed il quadrato rimangono determinati, con esser dato uno de' loro lati; così lo stesso avviene ad ogn' altra figura regolare. E poichè le rette tirate dal centro ai suoi angoli dividono la figura in triangoli isosceli, che hanno per loro basi li lati della stessa figura, ed in cui sono noti tutti tre gl' angoli; chiaro si è, che con esser dato un lato della figura, non solo la figura intiera, ma tutti questi triangoli, che sono tra di loro eguali, ricevono la loro determinazione.

253. Con essere intanto eguali tra di loro li riferiti triangoli isosceli, potrà facilmente ridursi a triangolo, ed in conseguenza a quadrato qualsisia figura regolare. Sia perciò la figura regolare

ABCDE,

ABCDE, che abbia per suo centro il punto F. Prolunghisi il lato AB a dirittura verso M, da cui taglinsi successivamente le porzioni BI, IK, KL, LM eguali agl' altri lati BC, CD, DE, EA. E poichè, congiunte le rette FI, FK, FL, FM, si fanno eguali ancora li triangoli AFB, BFI, IFK, KFL, LFM; sarà l' intero triangolo AFM eguale alla figura proposta. *Fig. 61.*

254. Ed essendo così, potrà stabilirsi intorno alle figure regolari il seguente teorema, cioè, che ciascuna di esse sia eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale al suo perimetro, e per altezza la perpendicolare abbassata dal suo centro sopra uno de' suoi lati. Dal che ne segue, che la stessa figura debba essere altresì eguale ad un rettangolo fatto da una retta eguale alla metà del suo perimetro nella stessa perpendicolare; onde si è, che il quadrato eguale a questo rettangolo sarà eguale altresì alla stessa figura.

§.XVIII.

§. XVIII.

Della misura delle figure rettilinee.

255. DImostrata l'indole delle figure rettilinee, passeremo ora alla loro misura, ove per altro diriggesi lo scopo principale di questa scienza. Ed in vero, conforme misurasi la lunghezza delle rette per mezzo di una retta data (22); così dovrà misurarsi l' ampiezza di qualsisia figura rettilinea per mezzo del quadrato descritto sulla stessa retta. Onde, volendoci avvalere del nostro palmo per la misura delle rette, bisognerà, che si misurino le figure rettilinee col quadrato descritto sullo stesso palmo, che perciò potrà chiamarsi palmo quadrato.

256. Ma conforme il nostro palmo dividesi in once, e minuti (22), così ancora il palmo quadrato dovrà dividersi in once quadrate, e minuti quadrati. Per intendere però, quale ne debba essere il numero, giova riflettere, che qualunque sia il numero delle parti eguali, in cui dividesi una data retta, il quadrato descritto su di essa debba contenere tanti piccoli quadrati fatti da quelle stesse parti, quanti ne addita il prodotto, che si ha, con moltiplicare

quel

quel numero per se stesso.

257. In fatti, se la retta AB sia *Fig.*
divisa per ragion di esempio in quattro *62.*
parti eguali, e su di essa descrivasi il quadrato ABCD, vedesi chiaramente, che diviso l'altro lato BC similmente in quattro parti eguali, e tirate per gli punti di ambedue le divisioni rette parallele alle due CD, AD, resti diviso il quadrato ABCD per mezzo di queste parallele in 16 piccioli quadrati fatti da quelle parti, che sono in conseguenza tanti di numero, quanti ne addita il prodotto, che si ha, con moltiplicare per se stesso il numero 4.

258. Dividendosi adunque il nostro palmo in 12 once, dovranno contenersi nel palmo quadrato 144 once quadrate; e così ancora, dividendosi ciascuna oncia in 12 minuti, dovranno contenersi nell' oncia quadrata 144 minuti quadrati. Onde, per avere li palmi quadrati, che contengonsi in un dato numero di once quadrate, dovrà dividersi questo dato numero di once quadrate per 144; e lo stesso dovrà farsi, se da un dato numero di minuti quadrati debbansi dedurre l'once quadrate, che in esso contengonsi.

259. Da quel tanto si è detto, già vedesi, come debba misurarsi qualsisia quadrato, cioè con moltiplicare per se

stesso

ſteſſo il numero di palmi, once, o minuti, che contengonſi in uno de' ſuoi
Fig. lati: dimodochè, conforme eſſendo il
62. lato AB di quattro palmi, dee eſſere il ſuo quadrato ABCD di 16 palmi quadrati; così lo ſteſſo quadrato ſarà di 16 once quadrate, ſe il lato AB ſia di 4 once; e di 16 minuti quadrati, ſe il lato AB ſia di 4 minuti.

260. Soltanto deeſi avvertire, che ſe nel lato AB contenganſi palmi inſieme con once, ſi agevolerà la moltiplicazione, con ridurre ad once eziandio li palmi. Così, ſe il lato AB ſia di 3 palmi, e 4 once, colla riferita riduzione ſara egli di 40 once. Onde, contenendoſi nel quadrato ABCD 1600 once quadrate, ſarà egli di 11 palmi quadrati, e 16 once quadrate. E lo ſteſſo dovrà praticarſi, ſe nel lato AB contenganſi palmi, once, e minuti.

261. In una maniera conſimile potrà dimoſtrarſi, che per miſurare ogn' altro parallelogrammo rettangolo, altro non debba farſi, ſe non ſe moltiplicare tra di loro li numeri dei palmi, once, e minuti contenuti nei due lati AB, BC, che ſono intorno all' angolo
Fig. retto ABC. Anzi nel quadrato non
63. per altra ragione moltiplicaſi per se ſteſſo il numero dei palmi, once, e minuti contenuti nel ſolo lato AB, ſe

non

non perchè ſono eguali tra di loro li due lati AB, BC.

262. Notiſi quì intanto, che ſe per baſe del parallelogrammo rettangolo ABCD prendaſi il lato AB, la ſua altezza ſarà l' altro lato BC, che inſiſte su 'l primo ad angoli retti. Onde la regola per miſurare qualſiſia parallelogrammo rettangolo ſi è, di moltiplicare tra di loro li numeri dei palmi, once, e minuti, che contengonſi nella ſua baſe, e nella ſua altezza, o pure per ſpiegarci più brevemente da quì innanzi, di moltiplicare la ſua baſe per la ſua altezza.

263. Queſta ſteſſa regola ha luogo ancora nel parallelogrammo obbliquangolo. Sia perciò ABCD queſto tale *Fig.*
parallelogrammo, in cui prendaſi per *64.*
baſe il lato AB. Se adunque su di queſto lato ſi abbaſſi dall' angolo oppoſto C la perpendicolare CE, ſarà queſta perpendicolare la ſua altezza. Onde deeſi dimoſtrare, che ſi abbia la ſuperficie, o ſia ampiezza, del propoſto parallelogrammo obbliquangolo ABCD, con moltiplicare la ſua baſe AB per la ſua altezza CE.

264. Si abbaſſi perciò ſullo ſteſſo lato AB dall' altro angolo oppoſto D l'altra perpendicolare DF; ed eſſendo parallele le due CE, DF, ſarà FECD

un

un altro parallelogrammo eguale al primo ABCD (158). Ma, per essere rettangolo quest' altro parallelogrammo FECD, si ha la sua superficie colla moltiplicazione delle due DC, CE, o pure colla moltiplicazione delle due AB, CE (261). Dunque colla moltiplicazione delle stesse due AB, CE si avrà altresì la superficie del parallelogrammo obbliquangolo ABCD.

265. Misurasi adunque qualsisia parallelogrammo con moltiplicare la sua base per la sua altezza. E poichè il triangolo è la metà del parallelogrammo, con cui ha la stessa base, e la stessa altezza (171); perciò nella misura del triangolo similmente la base, e l' altezza debbono moltiplicarsi tra di loro, ma del prodotto dee prendersi la metà: dimodochè, essendo la base di 10 palmi, e l' altezza di 8, sarà il triangolo di 40 palmi quadrati.

Fig. 266. Quindi, se il triangolo ABC
65. sia rettangolo in A, e si abbassi sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD, si avrà la sua superficie colla metà del prodotto, che si ha, o con moltiplicare l' ipotenusa BC per la perpendicolare AD, o pure con moltiplicare tra di loro li due lati AB, AC, che sono intorno all' angolo retto; poichè, siccome prendendosi per base del triangolo

lo

lo l' ipotenuſa BC, la ſua altezza è la perpendicolare AD; così, ſe prendaſi per baſe uno dei due lati AB, AC, la ſua altezza dovrà eſſere l' altro lato. Onde di nuovo ſi vede, che il rettangolo delle due BC, AD ſia eguale al rettangolo dell' altre due AB, AC.

267. Or colla miſura del triangolo potrà averſi la miſura d' ogn' altra figura rettilinea; poichè, ſiccome può ella dividerſi in triangoli per mezzo delle diagonali tirate da uno de' ſuoi angoli agl' altri oppoſti, così con miſurare ad uno ad uno queſti triangoli, e con unirgli inſieme, ſi avrà la ſuperficie dell' intera figura. Onde, ſe ABCD ſia un trapezio, e ſulla diagonale BD ſi abbaſſino dagl' angoli oppoſti le perpendicolari AE, CF, ſi avrà la ſua ſuperficie, con moltiplicare la diagonale BD per la ſomma delle due perpendicolari AE, CF, e con prendere la metà del prodotto. *Fig. 66.*

268. Ma per quanto al trapezio ſi vuol notare, che eſſendo in eſſo paralleli due lati oppoſti, come AB, DC può averſi più facilmente la ſua ſuperficie, con dividere il terzo lato AD per metà nel punto E, con abbaſſare da queſto punto ſul lato rimanente BC la perpendicolare EF, e con moltiplicare tra di loro le due BC, EF; e ciò *Fig. 67.*

per la ragione, che tirata per lo ſteſſo punto E la retta GH parallela al lato BC, ſi fanno eguali li due triangoli AEG, DEH; onde coll' aggiunta del comune pentagono EABCH ſarà il trapezio ABCD eguale al parallelogrammo GBCH.

269. Se la figura rettilinea ſia regolare, qualunque ſia il numero de' lati, che la contengono, potrà ella miſurarſi, ſenza eſſervi biſogno di dividerla in triangoli per mezzo delle ſue diagonali. In fatti ſi è dimoſtrato di ſopra (254), che una tal figura ſia eguale ad un triangolo, che ha per baſe il ſuo perimetro, e per altezza la perpendicolare abbaſſata dal ſuo centro ſopra uno de' ſuoi lati. Onde ſi avrà la ſua ſuperficie colla metà del prodotto, che ſi ha, con moltiplicare il ſuo perimetro per la riferita perpendicolare.

§. XIX.

Continuazione dello ſteſſo argomento.

270. CON dividerſi il palmo in once, e minuti, ritrovaſi egli diviſo in 144 parti eguali; onde, attenta la ſua lunghezza, ſarà così picciola ciaſcheduna di queſte parti, che ſe mai nella miſura di qualche retta ſo-

ſopravanzi porzione di eſſa, potrà ella almeno nella pratica traſcurarſi ſenza nota di errore ſenſibile. Ma, ſe vogliaſi tener conto eziandio di queſta porzione, potrà ſuddividerſi il minuto in altre 10 parti eguali, che potranno chiamarſi linee, ed inveſtigare preſſo a poco, quante di queſte linee contengonſi in quella porzione di retta, che ſopravanza.

271. Con queſt' altra diviſione del minuto in linee, conforme ritrovaſi diviſo il palmo in 1440 parti eguali; così nel palmo quadrato ſi conteneranno tanti piccioli quadrati fatti da queſte parti, quanti ne addita il prodotto, che ſi ha, con moltiplicare per se ſteſſo il numero 1440. E facendoſi uſo della diviſione del minuto in linee, eziandio deeſi avvertire, che ſe mai le rette ſiano eſpreſſe con palmi, once, minuti, e linee, ſi agevolerà il calcolo nella miſura delle figure, con ridurre a linee, così li palmi, come l'once, e li minuti.

272. Tornando conto di far uſo de' rotti decimali ne' calcoli, che poſſono occorrere, giova far vedere almeno per coloro, che non ſono molto verſati nel calcolo de' rotti, come l'once, li minuti, e le linee, che ritrovanſi inſieme colli palmi, poſſano ridurſi a rotti decimali;

 e co-e come al contrario da quell' avanzò di palmo, che ritrovasi espresso con rotti decimali, possano dedursi le linee, li minuti, e l'once.

273. Ed in primo luogo, se insieme colli palmi ritrovinsi solamente once, si ridurranno quest' once a rotto decimale, con aggiungere al loro numero più zeri, e con dividerlo in appresso per 12. Così, se una retta sia di 3 palmi, e 7 once, e vogliasi condurre il rotto decimale, a cui riduconsi le 7 once, per fino alle millesime, si aggiungeranno tre zeri al numero 7, ed indi si dividerà 7000 per 12. E poichè il quoziente di questa divisione presso a poco è 583, si ridurranno le 7 once a 583 millesime parti del palmo; onde la retta di 3 palmi, e 7 once dovrà esprimersi in questo modo 3'583.

274. Ma se insieme colli palmi ritrovinsi once, e minuti; primieramente dovranno ridursi a minuti eziandio l'once, ed indi dopo essersi aggiunti più zeri all' intero loro numero, dovrà egli dividersi per 144. Così, se una retta sia di 3 palmi, 7 once, e 5 minuti, colla riduzione dell' once a minuti, sarà ella di 3 palmi, e 89 minuti; onde aumentando di tre zeri il numero 89, dovrà dividersi 89000 per

144;

144; ed essendo il quoziente di questa divisione presso a poco 618, le 7 once, e 5 minuti si ridurranno a 618 millesime parti del palmo; e pertanto il valore della retta sarà 3'618.

275. Finalmente, se insieme colli palmi ritrovinsi once, minuti, e linee; primieramente dovranno ridursi a linee, così l' once, come li minuti; ed indi, dopo essersi aggiunti più zeri all' intero loro numero, dovrà egli dividersi per 1440. Così, se una retta sia di 3 palmi, 7 once, 5 minuti, e 4 linee, colla riferita riduzione sarà ella di 3 palmi, e 894 linee; onde, aumentando di tre zeri il numero 894, dovrà dividersi 894000 per 1440; ed essendo al di presso il quoziente di questa divisione 621, si ridurranno le 7 once, 5 minuti, e 4 linee a 621 millesime parti del palmo; e per tanto il valore della retta sarà 3'621.

276. La ragione poi, perchè debba dividersi per 12 il numero dell' once, per 144 il numero dei minuti, e per 1440 il numero delle linee; dee ripetersi da ciò, che siccome l' once contenute nel palmo sono 12, così sono 144 li minuti, e 1440 le linee, che formano lo stesso palmo. Ed in fatti per rapporto al palmo dee riguardarsi il numero dell' once come un rotto, di

 cui

cui il denominatore è 12 ; il numero dei minuti come un' altro rotto, che ha per denominatore 144 ; ed in fine il numero delle linee come un terzo rotto, il di cui denominatore è 1440.

277. Ed essendo così, egli è chiaro, che per mezzo delle riferite regole riduconsi a rotti decimali l' once, li minuti, e le linee, che ritrovansi insieme colli palmi, con quello stesso artificio, che praticasi per ridurre a rotto decimale qualsisia frazione ordinaria. Nella divisione intanto da farsi accade il più delle volte, che vi resti qualche avanzo ; onde, siccome questo avanzo può trascurarsi impunemente, essendo minore della metà del divisore ; così se mai le sia eguale, o pure maggiore, potrà egli aggiungersi al quoziente come un' altra unità, siccome vedesi fatto negl' esempj addotti.

278. Quello però, che specialmente deesi avvertire, si è, che dovendosi il quoziente aggiungere al numero dei palmi, come rotto decimale, se mai la divisione non possa farsi col primo dei zeri apposti, si passerà al secondo, ma con porre un zero nel quoziente ; e per la stessa ragione, se nè pure col secondo possa ella eseguirsi, si passerà al terzo, ma con porre nel quoziente un' altro zero. Onde di una retta di 3 palmi,

palmi, 7 minuti, e 5 linee sarà 3'052 il suo valore; e similmente di una retta di 3 palmi, e 5 linee il suo valore sarà 3'003.

279. Or al contrario, essendo espresso con rotto decimale quell' avanzo di palmo, che ritrovasi in una retta, si dedurranno da esso le linee, primieramente con moltiplicare il numeratore del rotto decimale per 1440, che è il numero delle linee contenute nel palmo, ed indi con dividere il prodotto per lo denominatore dello stesso rotto. Onde, se il valore della retta sia 3'621, moltiplicandosi 621 per 1440, e dividendosi il prodotto per 1000, sarà ella presso a poco di 3 palmi, e 894 linee.

280. In questo numero intanto di linee, contengonsi once, e minuti. Onde, conforme per ricavarne li minuti, ciascuno de' quali componesi di dieci linee, dee egli dividersi per 10; così, se il quoziente nato da questa divisione dividasi di nuovo per 12, che è il numero de' minuti contenuti nell' oncia, si avranno eziandio l'once. Ed in fatti, essendo 89 il quoziente della prima divisione, e 4 il residuo, si ridurranno le 894 linee a 89 minuti, e 4 linee; essendo poi 7 il quoziente dell' altra divisione, e 5 il residuo, si ridurranno

li 89 minuti a 7 once, e 5 minuti; onde la retta sarà di 3 palmi, 7 once, 5 minuti, e 4 linee.

281. Or ponendosi a calcolo li rotti decimali a guisa de' numeri intieri, non è da porsi in dubbio, che con esprimersi per mezzo di tali rotti gl'avanzi di palmo, che incontransi nelle rette, rendasi più facile il calcolo nella misura delle figure. Così, se la base di un parallelogrammo sia di palmi 4'53, e l' altezza di palmi 3'25, sarà la sua superficie di 14'7225 palmi quadrati. E così ancora, se la base di un triangolo sia di palmi 6'254, e l'altezza di palmi 5'23, la sua superficie sarà di 16'29421 palmi quadrati.

282. Se poi voglian si ridurre a linee quadrate li rotti decimali, che ritrovansi uniti ai palmi, non dovrà farsi altra cosa, se non che moltiplicare li loro numeratori per lo quadrato di 1440, e dividere li prodotti nati da questa moltiplicazione per gli loro denominatori. Onde la superficie del parallelogrammo si ritroverà essere di 14 palmi, e 1498176 linee quadrate, e quella del triangolo di 16 palmi, e 6099739 linee quadrate.

283. Anzi, conforme, con dividere per 144 li riferiti numeri di linee quadrate, si vengono ad avere li minuti

qua-

quadrati, che in esse contengonsi; così, se li quozienti nati da queste divisioni dividansi di nuovo per 144, si avranno l' once quadrate contenute ne' numeri dei minuti quadrati. Onde la superficie del parallelogrammo si ritroverà essere di 14 palmi, 72 once, e 36 minuti quadrati, e quella del triangolo di 16 palmi, 2 once, 23 minuti, e 43 linee quadrate.

§. XX.

Del modo di dedurre l'altezza del triangolo dai suoi lati.

284. L'Altezza del triangolo, di cui si ha bisogno per la sua misura, può dedursi dai suoi medesimi lati, qualora questi sono noti. Sia *Fig.* perciò il triangolo ABC primieramente *65.* rettangolo in A, ed essendosi dimostrato (201), che il quadrato dell' ipotenusa BC sia eguale ai quadrati degl'altri due lati AB, AC; potrà determinarsi facilmente, non meno l'ipotenusa BC, essendo noti li due lati AB, AC, che uno di questi lati, essendo nota l'ipotenusa coll' altro lato.

285. In fatti, se sono noti li due lati AB, AC, che contengono l' angolo retto, si determinerà l'ipotenusa

BC, primieramente con fare l quadrati di detti lati, ed indi con e rarre la radice quadrata dalla loro so ma. Così, se il lato AB sia di 6 p mi, e l'altro AC di 8, saranno 36, e 64 li loro quadrati, ed in conseguen a la somma di questi quadrati sarà oo; onde, essendo 10 la radice qu drata di 100, sarà l'ipotenusa BC di 1 palmi. E così ancora, se il lato A B sia di 10 palmi, ed il lato AC di 12, sarà l'ipotenusa BC di palmi 15'626.

286. Se poi sia nota l'ipotenus BC insieme col lato AB, si determ nerà l'altro lato AC, primieramente cc n fare il quadrato tanto dell' ipotenusa, come del lato noto, ed indi con estrarre la radice quadrata dalla differenza di questi due quadrati. Così, se l' ipotenusa BC sia di 10 palmi, ed il lato AB di 6, saranno 100, e 36 li loro quadrati; onde, essendo 64 la differenza di questi due quadrati, la di cui radice quadrata è 8, sarà l' altro lato AC di 8 palmi. E così ancora, se l' ipotenusa BC sia di 10 palmi, ed il lato AB di 5, sarà l' altro lato di palmi 8'66.

187. Si abbassi ora dall'angolo retto A sull' ipotenusa BC la perpendicolare AD; e per quel tanto è stato dimostràto (204) sarà, così il quadrato del lato

lato AB eguale al rettangolo delle due BC, BD, come il quadrato dell' altro lato AC eguale al rettangolo delle due BC, CD. Onde, con esser nota l'ipotenusa BC insieme colli due lati AB, AC, si determineranno le due porzioni BD, CD dell' ipotenusa, primieramente con fare li quadrati dei due lati AB, AC, ed indi con dividere ciascheduno di essi per l'ipotenusa BC; poichè li quozienti nati da questa divisioni saranno li valori delle due porzioni BD, CD.

288. Per schiarire ciò con qualche esempio, sia il lato AB di 15 palmi, ed il lato AC di 20. Essendo dunque 225 il quadrato del primo, e 400 il quadrato del secondo, sarà 625 la loro somma; e per tanto, essendo 25 la radice quadrata di questa somma, dovrà essere l'ipotenusa BC di 25 palmi. Or se dividasi per 25 così il quadrato 225 del lato AB, come il quadrato 400 dell' altro lato AC; sarà 9 il quoziente della prima divisione, e 16 il quoziente della seconda. Onde delle due porzioni dell' ipotenusa la prima BD dovrà essere di 9 palmi, e la seconda CD di 16.

289. Essendosi in oltre dimostrato (205), che il rettangolo delle due porzioni BD, CD sia eguale al quadrato

della perpendicolare AD, chiaro si è, che se moltiplichinsi tra di loro li valori di quelle due porzioni, e dal prodotto cavisi la radice quadrata, si avrà con questa radice il valore della perpendicolare AD, la quale perciò nell' esempio rapportato si ritroverà essere di 12 palmi. Ma essendosi altresì dimostrato (206), che il rettangolo dei due lati AB, AC sia eguale al rettangolo dell' ipotenusa BC nella perpendicolare AD, potrà aversi ancora il valore di questa perpendicolare, con moltiplicare tra di loro li due lati AB, AC, e con dividere il prodotto per l' ipotenusa BC.

Fig. 47. 290. Sia in secondo luogo il triangolo ABC ottusangolo in A, e sul lato AB prolungato verso A si abbassi dall' angolo opposto C la perpendicolare CD. Per quel tanto dunque è stato dimostrato (207) il quadrato del lato BC opposto all'angolo ottuso è maggiore dei quadrati degl' altri due lati AB, AC nel doppio del rettangolo fatto dal lato AB nella porzione aggiunta AD. Onde, se mai siano noti li valori di tutti tre li lati di questo triangolo, potrà determinarsi il valore della porzione AD nel seguente modo.

291. Faccianfi li quadrati dei due lati AB, AC, e la loro somma tolgasi

gasi dal quadrato del terzo lato BC; dividasi di poi il residuo per lo doppio del lato AB, ed il quoziente nato da questa divisione sarà il valore della porzione AD. Così, se il lato AB sia di 7 palmi, il lato AC di 15, ed il lato BC di 20; saranno 49, 225, e 400 li loro quadrati. Onde, conforme togliendosi dal terzo la somma dei due primi, si ha 126 per residuo; così, dividendosi questo residuo per 14, cioè per lo doppio del lato AB, sarà 9 il quoziente di questa divisione; e per tanto la porzione AD dovrà essere di 9 palmi.

392. Con essersi determinata la porzione AD, potrà determinarsi in appresso la perpendicolare CD per mezzo del triangolo rettangolo CAD, di cui la AC è l'ipotenusa, e le due AD, CD sono li lati intorno all'angolo retto. In fatti, essendo 225 il quadrato dell' ipotenusa AC, e 81 il quadrato del lato AD, sarà 144 la loro differenza; e pertanto, essendo 12 la radice quadrata di questa differenza, sarà l' altro lato, o sia la perpendicolare CD di 12 palmi. Anzi col valore della AD facendosi nota la tutta BD, potrebbe determinarsi ancora la perpendicolare CD per mezzo dell' altro triangolo rettangolo BDC.

253. Sia finalmente il triangolo ABC acutangolo in A, e sul lato AB si ab- *Fig.* 48.
bassi

bassi dall' angolo opposto C la perpendicolare CD. Per quel tanto dunque è stato dimostrato (209) il quadrato del lato BC opposto all' angolo acuto è minore dei quadrati degl' altri due lati AB, AC nel doppio del rettangolo fatto dal lato AB nella porzione AD. Onde, se siano noti tutti tre li lati del triangolo, potrà determinarsi in una maniera non molto diversa dalla precedente, primieramente la porzione AD, ed indi la perpendicolare CD.

294. In fatti, se dalla somma de' quadrati fatti dai due lati AB, AC tolgasi il quadrato del terzo lato BC, e dividasi il residuo per lo doppio del lato AB; si avrà col quoziente di questa divisione il valore della porzione AD. E se in appresso il quadrato di questa porzione tolgasi dal quadrato del lato AC, e dal residuo cavisi la radice quadrata; si avrà con questa radice il valore della perpendicolare CD. Onde, se il lato AC sia di 25 palmi, il lato AC di 15, ed il lato BC di 20; si ritroverà essere la porzione AD di palmi 9, e la perpendicolare CD di palmi 12.

Fig. 47. 48. 295. Notisi quì intanto, che così nel triangolo ottusangolo, come nell' acutangolo, determinata la perpendicolare CD abbassata sul lato AB dal suo an-

angolo opposto, si determineranno l'altre due, che cadono su gl' altri due dalli loro angoli opposti, primieramente con moltiplicare il lato AB per la sua perpendicolare CD, ed indi con dividere il prodotto per quell' altro lato, di cui si cerca la perpendicolare; e ciò per la ragione, che attenta la misura del triangolo li rettangoli, fatti dalli tre lati nelle loro rispettive perpendicolari, debbono essere tra esso loro eguali.

296. Del rimanente può aversi la superficie del triangolo colli soli lati, senza esservi bisogno di perpendicolare alcuna. Prendasi perciò la somma di tutti tre li lati, e ritrovinsi le differenze tra ciascuno di essi, e la somma degl' altri due. Moltiplichinsi di poi tra di loro quella somma, e queste tre differenze, dal di cui prodotto cavisi la radice quadrata. Prendasi finalmente la quarta parte di questa radice, e con essa si avrà la superficie del triangolo ricercata.

297. Così, se dei tre lati del triangolo uno sia di 7 palmi, l' altro di 15, ed il terzo di 20, sarà 42 la loro somma; e se ciascheduno di essi tolgasi dalla somma degl' altri due, saranno 28, 12, e 2 le tre differenze. Onde, siccome con moltiplicare insieme quella somma, e queste tre differenze, si ha per pro-

prodotto 28224, la di cui radice quadrata è 168; così, essendo 42 la quarta parte di questa radice, sarà la superficie del triangolo di 42 palmi quadrati: come in fatti, essendosi ritrovata la perpendicolare abbassata sul primo lato dall' angolo opposto di palmi 12, la metà del prodotto di 7 per 12 è 42.

298. Similmente se dei tre lati del triangolo, uno sia di 25 palmi, l'altro di 15, ed il terzo di 20, sarà 60 la loro somma; e se ciascheduno di essi tolgasi dalla somma degl' altri due, saranno 10, 30, e 20 le tre differenze. Onde, siccome con moltiplicare insieme quella somma, e queste tre differenze, si ha per prodotto 360000, la di cui radice quadrata è 600; così, essendo 150 la quarta parte di questa radice, sarà la superficie del triangolo di 150 palmi quadrati: ed in fatti essendosi ritrovata di palmi 12 la perpendicolare abbassata sul primo lato dall' angolo opposto, la metà del prodotto di 25 per 12 è 150.

§.XXI.

§. XXI.

Delle proprietà del cerchio, relative al suo centro, e alla sua tangente.

299. QUantunque per l' infinite variazioni della linea curva siano d' infinite specie altresì, tanto le figure piane curvilinee, quanto le mistilinee; nientedimeno nella Geometria elementare trattasi soltanto del cerchio, e delle sue varie porzioni. S' intende adunque per cerchio la figura piana terminata dalla linea circolare, che riguardata come suo termine appellasi sua circonferenza. E poichè il centro della linea circolare dicesi essere centro ancora del cerchio, perciò la sua indole si è, che le rette tirate dal centro per fino alla circonferenza siano tutte eguali tra di loro.

300. Conforme poi queste rette chiamansi raggi del cerchio, così prolungate verso il centro per fino a che s' incontrino di nuovo colla circonferenza, si diranno essere suoi diametri, li quali perciò debbono essere ancora eguali tra di loro. E poichè li medesimi passono per lo centro, chiaro si è, che ciascheduno di essi debba dividere il cerchio in due parti eguali, che per tal'effetto chia-

chiamansi mezzi cerchi. Ma, se dentro del cerchio adattisi una retta, che non passi per lo centro, resterà diviso il cerchio in due parti disuguali, di cui ciascuna si dirà essere porzione del cerchio.

301. Or la prima proprietà del cerchio si è, che se dentro di esso tirisi una retta, la quale seghi un'altra retta per metà, e ad angoli retti, dovrà ella passare per lo centro, ed essere in conseguenza diametro dello stesso cerchio. Sia perciò il cerchio ABCD, *Fig. 68.* dentro di cui tirisi la retta AC, che seghi l'altra BD per metà, e ad angoli retti nel punto E; e se sia possibile, abbia il cerchio per suo centro il punto F situato fuori della AC. Congiunte adunque le due BF, DF, per la loro uguaglianza saranno eguali li due angoli BEF, DEF (104). Onde, dovendo essere retto ciascuno di essi (54), sarà l'angolo minore BEF eguale all'altro maggiore BEA, che similmente è retto, il che non può essere.

302. Essendo così, si ritroverà il centro del cerchio ABCD, se tirata dentro di esso una retta, come BD, e divisa la medesima per metà nel punto E, alzisi sulla stessa da questo punto la perpendicolare EA, che s'incontri colla

cir-

circonferenza ne' punti A, e C; poichè il punto G, che divide per metà la AC, sarà il centro ricercato. Intanto può egli ritrovarsi ancora in un' altro modo, di cui può farsi uso per qualsisia porzione di cerchio: cioè, con tirare dentro del cerchio due rette, e con alzare su di esse dai punti, che le dividono per metà, due perpendicolari; poichè queste col loro incontro ci daranno il centro, che si dimanda.

303. Della riferita proprietà ha luogo ancora la conversa, cioè che la retta tirata per lo centro di un cerchio, segando un' altra retta, che non passa per lo centro, ad angoli retti, debba segarla ancora per metà; ed al contrario, segandola per metà debba segarla ancora ad angoli retti. In fatti, se dal centro A del cerchio BCD tirinsi li due raggi AB, AC, che formino un' angolo qualsivoglia BAC, e congiungasi la BC, il triangolo ABC sarà isoscele. Onde, attenta la proprietà di questo triangolo altrove dimostrata (113), conforme la retta AE tirata dall'angolo verticale, segando la base BC ad angoli retti, dee segarla ancora per metà; così al contrario, segandola per metà, dee segarla altresì ad angoli retti. *Fig. 69.*

304. Dal che ne segue, che interse-

segandosi due rette dentro di un cerchio in un punto diverso dal suo centro, ambedue non possano esser divise
Fig. per metà in quello stesso punto. Sia
70. perciò il cerchio BCD, dentro di cui s' interseghino le due rette BC, DF nel punto E diverso dal centro A, e congiungasi la AE. Adunque, se tanto la AC, quanto la DF fosse divisa per metà nel punto E, dovrebbe la AE segare così l' una, come l' altra retta ancora ad angoli retti (303). Onde, facendosi retti li due angoli AED, AEB, sarebbe l' angolo minore AED eguale all' angolo maggiore AEB, il che non può essere.

305. Intorno al centro ha luogo altresì un' altra proprietà, e si è, che se da un punto preso dentro di un cerchio cadano sulla circonferenza tre rette eguali, quel punto debba esserne il
Fig. centro. Sia perciò il cerchio BCD, e
69. dal punto A preso dentro di esso cadano sulla sua circonferenza le tre rette eguali AB, AC, AD. Congiunte adunque le due BC, CD, saranno isosceli li due triangoli ABC, ACD; e pertanto, se le medesime dividansi per metà ne' punti E, ed F, saranno divise ad angoli retti dall' altre due AE, AF (113). Onde, dovendo passare per lo centro del cerchio ciascheduna di queste due

due (301), dovrà egli essere il punto A, che è comune ad ambedue.

306. Quindi, siccome vedesi con ogni chiarezza, che li cerchi descritti collo stesso centro, non possano incontrarsi; così egli è facile ancora ad intendersi, che intersegandosi due cerchi, debba farsi il loro intersegamento in due soli punti. Imperocchè, se mai egli si facesse in tre punti, le rette tirate a questi punti dal centro di uno dei due cerchi, come eguali tra di loro, farebbero, che l' altro cerchio avesse col primo lo stesso centro. Onde li due cerchi, come descritti con un medesimo centro, non dovrebbero intersegarsi tra di loro, come si suppone.

307. L' intersegamento adunque di due cerchi, dee farsi in due soli punti; ma la retta, che li congiunge insieme, dee esser divisa per metà, e ad angoli retti dall' altra, che unisce insieme li centri dei due cerchi. In fatti, se B, *Fig.*
e C siano li punti d' intersegamento 71.
dei due cerchi, che hanno per loro centri li punti A, e D; per l' uguaglianza così delle due AB, AC, come delle due DB, DC, la retta AD dividerà egualmente, tanto l'angolo BAC, quanto l' angolo BDC (48). Onde, essendo isosceli li due triangoli ABC, DBC, la comune loro base BC dovrà essere

essere divisa dalla stessa A D non solo per metà, ma eziandio ad angoli retti (115).

308. Possono intanto due cerchi incontrarsi tra di loro, senza esservi intersegamento alcuno; e ciò avviene, qualora unendosi insieme li due punti d' intersegamento, uno dei due cerchi cade, o tutto dentro, o tutto fuori dell' altro. In questo caso diconsi li due cerchi toccarsi tra di loro; ed o che si tocchino al di dentro, o al di fuori, chiaro si è, che non possono toccarsi, se non in un sol punto. E poichè il punto del contatto si ha coll' unione dei due punti d' intersegamento, egli è facile ancora ad intendersi, che debba passare per lo punto del contatto la retta, che unisce insieme li centri dei due cerchi.

309. Ancora una retta può essere tangente di un cerchio, cioè incontrarlo in modo, che cada tutta fuori di esso; e sarà ella tale, qualora alzisi sul diametro perpendicolarmente da uno dei suoi termini. Per dimostrarlo, sia il cerchio BCD, di cui il punto A
Fig. sia centro, e la BD diametro. Se a-
72. dunque su di questo diametro alzisi dal suo termine B la perpendicolare B E, e ad uno de' suoi punti come E tirisi dal centro A la retta A E; l' angolo ABE

ABE come retto sarà maggiore dell'altro acuto AEB. Onde, facendosi la AE maggiore ancora dell' altra AB (108), si ritroverà il punto E fuori del cerchio, e lo stesso dovrà avvenire ad ogn' altro punto della BE, la quale perciò sarà tangente del cerchio.

310. Al contrario poi, se una retta sia tangente di un cerchio, il diametro, che si termina al punto del contatto, dovrà insistere su di essa ad angoli retti. Sia perciò la BE tangente del cerchio *Fig.*
BCD; e se il diametro DB non insista *72.*
su di essa ad angoli retti, si abbassi dal centro A sulla BE la perpendicolare AE, che s' incontri colla circonferenza del cerchio nel punto C. Poichè dunque l' angolo AEB come retto è maggiore dell' altro acuto ABE, sarà la AB maggiore della AE (108); ed in conseguenza, per essere eguali le due AB, AC, eziandio la AC sarà maggiore della AE, il che non può essere.

311. Essendo così, può dimostrarsi *Fig.*
ancora, che se una retta sia tangente *72.*
di un cerchio, la perpendicolare alzata su di essa dal punto del contatto, debba passare per lo centro, ed essere in conseguenza diametro del cerchio. Sia *Fig.*
perciò la BE tangente del cerchio BCD, *72.*
e se la BD alzata su di essa perpendico-

co-

colarmente dal punto del contatto non passi per lo centro del cerchio, pongasi, che centro ne sia il punto F. Congiunta adunque la FB, dovrà questa essere perpendicolare sulla tangente BE. Onde, essendo retto così l'angolo DBE, come l'angolo FBE, dovranno essere eguali tra di loro questi due angoli, il che non può sussistere.

312. Notisi quì intanto, che essendo una retta tangente di un cerchio, ogn' altra retta tirata dal punto del contatto dovrà cadere dentro del cerchio, e farsi in conseguenza sua secante. Per dimostrarlo, sia BE tangente
Fig. 72. del cerchio BCD, e dal punto del contatto B tirisi ad arbitrio un' altra retta, che sia BG. Essendo dunque retto l'angolo ABE, l'altro ABG dovrà essere acuto; e per tanto, se dal centro A si abbassi sulla BG la perpendicolare AG, sarà l'angolo AGB maggiore dell' angolo ABG. Onde, dovendo essere la AB, che è raggio del cerchio, similmente maggiore della AG, si ritroverà il punto G dentro del cerchio.

313. Ma siccome da ciò ne segue, che nello spazio compreso tra la tangente BE, e la circonferenza del cerchio non possa tirarsi altra retta dal punto del contatto; così da questo stesso deduconsi due altre conseguenze. La

pri-

prima ſi è, che l'angolo miſtilineo, contenuto dalla tangente, e dalla circonferenza del cerchio, il quale chiamaſi angolo del contatto, ſia minore di ogn'angolo acuto rettilineo. E la seconda ſi è, che l'altro angolo miſtilineo, contenuto dal diametro, e dalla ſteſſa circonferenza, il quale appellaſi angolo del mezzo cerchio, ſia al contrario maggiore di ogn'angolo acuto rettilineo.

314. Del rimanente, per tirare la tangente al cerchio da un punto dato nella ſua circonferenza, altro non dee farſi, ſe non che alzare da quel punto una perpendicolare ſul diametro, che ſi termina allo ſteſſo punto (309). Ma, per tirarla da un punto dato fuori del cerchio, potrà farſi in queſto modo. Sia *Fig.* il cerchio BCD, che abbia per ſuo cen- *73.* tro il punto A, e ſia E il punto dato fuori di eſſo, da cui deeſi tirare la tangente.

315. Congiungaſi primieramente la AE, che ſeghi la circonferenza del cerchio dato nel punto B; indi collo ſteſſo centro A, e coll'intervallo della AE deſcrivaſi l'altro cerchio EFG; alziſi di poi ſulla ſteſſa AE la perpendicolare BF, che s' incontri colla circonferenza di queſt'altro cerchio nel punto F; congiungaſi finalmente la AF, che ſeghi la circonferenza del primo nel

punto C; ed io dico, che la retta EC, tirata dal punto E al punto C, sia la tangente ricercata.

316. La ragione è chiara; poichè essendo eguali così le due AE, AF, come le due AC, AB, saranno li due triangoli CAE, BAF perfettamente eguali (129); e per tanto sarà l'angolo ACE eguale all'angolo ABF. Quindi, essendo questo secondo angolo ABF retto per construzione, sarà retto altresì il primo ACE; ed in conseguenza la CE, come perpendicolare sul raggio AC, sarà tangente del cerchio BCD (309).

§. XXII.

Delle proprietà del cerchio relative alle rette tirate alla sua circonferenza da qualsisia punto.

317. POssono tirarsi rette alla circonferenza del cerchio, non solo dal suo centro, ma da qualsisia altro punto, che si voglia prendere, o dentro, o fuori di esso. Quantunque poi quest'altre rette non siano eguali, nientedimeno serbano tra di esse un certo ordine, di cui giova averne la conoscenza. Adunque, se le rette siano tirate da un punto preso dentro del cerchio, la massima sarà quella, che passa

paſſa per lo centro ; la minima quell' altra, che giace a dirittura colla maſſima; e delle rimanenti non ſolo la più vicina alla maſſima ſarà maggiore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe dovrà averne un'altra eguale dall'altra parte.

318. Per dimoſtrarlo, ſia il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A, e dal punto F preſo dentro di eſſo tirinſi alla ſua circonferenza le rette FB, FC, FD, FE, di cui la FB paſſi per lo centro A, e la FE formi con eſſa una retta continuata. Io dico primieramente, che di queſte rette la FB ſia la maſſima, e la FE la minima. In fatti, ſe congiungaſi la AC, ſarà la FB eguale alle due FA, AC unite inſieme, ed in conſeguenza maggiore della FC; onde, dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione maggiore d'ogn' altra retta, ſarà ſenza dubbio la maſſima. Se poi congiungaſi la AD, ſarà la AE eguale alla AD, ed in conſeguenza minore delle due AF, FD unite inſieme; onde, ſiccome toltane la comune AF rimane la FE minore della FD, così dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione minore d'ogn' altra, ſarà ſenza dubbio la minima.

Fig. 43.

319. Io dico in ſecondo luogo, che la FC più vicina alla maſſima ſia mag-

giore della più lontana FD, e che ciascuna di esse debba averne un'altra eguale dall'altra parte. In fatti, essendo l'angolo FAC maggiore dell'angolo FAD, ed avendo questi due angoli li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno; sarà la base del primo FC maggiore della base del secondo FD. Se poi facciasi sulla FA, e propriamente al punto A, così l'angolo FAG eguale all'angolo FAC, come l'angolo FAH eguale all'angolo FAD, e congiungansi le due FG, FH, saranno eguali le basi, tanto dei due angoli FAG, FAC, quanto degl' altri due FAH, FAD; e per tanto sarà la FG eguale alla FC, e la FH eguale alla FD.

320. Prendasi in appresso il punto fuori del cerchio, e se le rette siano tirate sulla parte concava della sua circonferenza, la massima sarà quella, che passa per lo centro, e dell' altre non solo la più vicina alla massima sarà maggiore della più lontana, ma ciascuna di esse ne avrà un'altra eguale
Fig. dall'altra parte. Per dimostrarlo, sia il
75. cerchio BCDE, che abbia per suo centro il punto A. Prendasi fuori di esso il punto F, da cui tirinsi sulla parte concava della sua circonferenza le rette FB, FC, FD; e di queste rette la prima

ma FB paſſi per lo centro A.

321. Se adunque congiungaſi la AC, ſarà la FB eguale alle due FA, AC unite inſieme, ed in conſeguenza maggiore della FC; onde, dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione maggiore d' ogn' altra retta, ſarà certamente la maſſima. Se poi congiungaſi la AD, ſarà l' angolo FAC maggiore dell' angolo FAD; onde, avendo queſti due angoli li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ſarà la baſe del primo FC maggiore ancora della baſe dell' altro FD. Ed in fine, ſe ſulla FA, e propriamente al punto A facciaſi, così l'angolo FAG eguale all' angolo FAC, come l' angolo FAH eguale all' angolo FAD, e congiunganſi le due FG, FH; chiaro ſi è, che ſarà la FG eguale alla FC, e la FH eguale alla FD.

322. Se poi le rette, che tiranſi dal punto preſo fuori del cerchio, cadono ſulla parte conveſſa della ſua circonferenza; la minima ſarà quella, che prolungata paſſa per lo centro, e dell' altre non ſolo la più vicina alla minima ſarà minore della più lontana, ma ciaſcuna di eſſe ne avrà un'altra eguale dall' altra parte. Per dimoſtrarlo, *Fig.*
ſia di nuovo il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A; e dal *76.*
punto F preſo fuori di eſſo cadano ſul-

la parte conveſſa della ſua circonferenza le rette FE, FD, FC, di cui la prima FE prolungata paſſi per lo centro A.

323. Se adunque congiungaſi la AD, ſarà la FA minore delle due FD, AD unite inſieme; ed in conſeguenza, toltene le due eguali AE, AD, ſarà la FE minore ancora della FD; onde, dovendo ella eſſere per la ſteſſa ragione minore d' ogn' altra retta, ſarà ſenza meno la minima. Se poi congiungaſi la AC, ſarà l' angolo FAD minore dell' angolo FAC; onde avendo queſti due angoli li lati eguali ai lati, ciaſcuno a ciaſcuno, ſarà la baſe del primo FD minore ancora della baſe dell' altro FC. Ed in fine, ſe ſulla FA, e propriamente al punto A facciaſi, così l' angolo FAG eguale all' angolo FAC, come l' angolo FAH eguale all' angolo FAD, e congiunganſi le due FG, FH; chiaro ſi è, che ſarà la FG eguale alla FC, e la FH eguale alla FD.

324. Poſſono intanto tirarſi le rette da un punto preſo nella ſteſſa ſua circonferenza; ma ſiccome queſte rette cadono tutte ſulla parte concava, così con dimoſtrazioni conſimili ſi farà vedere, che la maſſima ſia quella, che paſſa per lo centro, e che dell' altre non ſolo la più vicina alla maſſima ſia mag-

maggiore della più lontana, ma ciascuna di esse debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Più tosto giova investigare l'ordine, che serbano le rette, che adattate dentro del cerchio non partono da punto veruno; e per questa ricerca si vuol prima notare, che due rette situate dentro del cerchio diconsi essere egualmente distanti dal centro, qualora sono eguali le perpendicolari abbassate su di esse dallo stesso centro.

325. Or il primo teorema intorno a quest' altre rette si è, che le rette egualmente distanti dal centro siano eguali ancora tra di loro. Sia perciò il cerchio BCDE, che abbia per suo centro il punto A; e dentro di esso adattinsi le due rette CB, DE, che siano egualmente distanti dal centro A, dimodochè siano eguali le perpendicolari AF, AG abbassate su di esse dallo stesso centro. Io dico, che le due rette CB, DE siano eguali ancora tra di loro. In fatti, essendo divisa per metà, così la CB nel punto F, come la DE nel punto G (303), saranno eguali le due CB, DE, se possa dimostrarsi, che siano eguali le loro metà CF, DG. *Fig. 77.*

326. Congiungansi perciò le due AC, AD; e per gli due triangoli rettangoli AFC, AGD sarà, così il quadrato

della AC eguale ai quadrati delle due AF, CF, come il quadrato della AD eguale ai quadrati dell'altre due AG, DG (201); e pertanto, essendo il quadrato della AC eguale al quadrato della AD, saranno li quadrati delle due AF, CF eguali ancora ai quadrati dell' altre due AG, DG. Ma, per essere la AF eguale alla AG, sono eguali altresì li loro quadrati. Dunque colla detrazione di essi sarà il quadrato della CF parimente eguale al quadrato della DG; ed in conseguenza le due CF, DG saranno eziandio tra di loro eguali.

327. Il secondo teorema si è, che le rette eguali debbano essere ancora
Fig. egualmente distanti dal centro. Poste
77. adunque le stesse cose, dee dimostrarsi, che essendo eguali le due rette CB, DE, siano eguali parimente le due perpendicolari AF, AG, che sono le loro distanze dal centro: il che è chiaro, poichè, con essere eguali le due CB, DE, sono eguali ancora, così le loro metà CF, DG, come li quadrati di queste metà. Onde, essendo li quadrati delle due AF, CF eguali ai quadrati dell' altre due AG, DG, se tolgansi da essi quelli due quadrati eguali, sarà il quadrato della AF eguale al quadrato della AG; e pertanto ancora le due

due AF, AG saranno tra di loro eguali.

328. Il terzo, ed ultimo teorema si è, che delle rette adattate dentro del cerchio la massima sia quella, che passa per lo centro, e dell' altre la più vicina al centro sia maggiore della più lontana. Adattinsi perciò dentro del cerchio BCD le rette BC, DE, FG, delle quali la prima BC passi per lo centro A. Adunque, se congiunganfi le due AD, AE, per essere la AB eguale alla AD, e la AC eguale alla AE, sarà la BC eguale alle due AD, AE, ed in conseguenza maggiore della DE; onde dovendo ella essere per la stessa ragione maggiore di ogn' altra retta, che non passa per lo centro, sarà la BD senza meno la massima. *Fig.* 78.

329. Si abbassino di poi sull' altre due DE, FG dal centro A le perpendicolari AH, AI; e se pongasi, che la DE sia più vicina al centro dell' altra FG, sarà la AI maggiore della AH; onde, tagliata dalla AI la porzione AK eguale alla AH, e tirata per lo punto K la retta MN parallela alla FG, le due DE, MN come egualmente distanti dal centro saranno eguali. Ma congiunte, così le due AF, AG, come le due AM, AN, per farsi l' angolo MAN maggiore dell' angolo

FAG, dee essere la base del primo MN maggiore ancora della base dell'altro FG. Dunque la DE più vicina al centro sarà eziandio maggiore della più lontana FG.

§. XXIII.

Delle proprietà del cerchio relative agl' angoli, che in esso s'incontrano.

330. PEr venire ora alle proprietà del cerchio, che riguardano gl' angoli, che in esso s' incontrano, si vuol prima notare, che siccome chiamasi angolo al centro quello, che ha il centro stesso per suo vertice; così appellasi angolo alla circonferenza quello, che ha per vertice un punto della stessa circonferenza. Or appoggiandosi questi due angoli sopra un medesimo arco, sarà l' angolo al centro doppio dell' angolo
Fig. alla circonferenza. Sia perciò il cer-
79. chio BCDE, che abbia per centro il punto A, e sul medesimo arco BD appoggisi, così l' angolo al centro BAD, come l' angolo alla circonferenza BED. Io dico, che il primo BAD sia doppio del secondo BED.

331. Per dimostrarlo, congiungasi la EA, che distendasi verso C. Essendo adunque eguali le due AE, AB, sa-

ſaranno eguali ancora li due angoli ABE, AEB (104); e pertanto l'angolo eſteriore BAC, come eguale ai due interiori, ed oppoſti ABE, AEB (98), ſarà doppio del ſolo AEB. Ma per la ſteſſa ragione ancora l'angolo DAC dee eſſere doppio dell'angolo AED. Dunque, congiungendo inſieme, così li due angoli BAC, DAC, come gl'altri due AEB, AED, ſarà l'intero angolo al centro BAD ſimilmente doppio dell'intero angolo alla circonferenza BED.

332. Egli è vero, che li due angoli poſſono eſſere ſituati in modo, che la EA prolungata cada fuori di eſſi; ma in queſto caſo, con prendere non già le ſomme, ma le differenze dei riferiti angoli, pure avrà luogo la ſteſſa dimoſtrazione. Più toſto dee avvertirſi, che ſe mai l'angolo BED ſia di ampiezza tale, che le due AB, AD, o ſiano a dirittura, o pure s'inclinino verſo il vertice E di quell'angolo; in tal caſo dovranno farſi al centro due angoli, come BAC, DAC, e congiungerſi la EC; poichè, facendoſi il primo BAC doppio dell'angolo BEC, ed il ſecondo DAC doppio dell'altro angolo DEC, ſarà la loro ſomma doppia dell'angolo BED. *Fig. 80.* *Fig. 81.*

333. Da ciò intanto, che l'angolo

al centro ſia doppio dell' angolo alla circonferenza, quantevolte ſi appoggiano ambidue ſopra un medeſimo arco, poſſono dedurſi tre conſeguenze. La prima ſi è, che gl' angoli ſituati in una ſteſſa porzione di cerchio ſiano tutti eguali tra di loro. La ſeconda ſi è, che ciaſcuno di eſſi abbia per miſura la metà dell' arco, su di cui ſi appoggia. E la terza ſi è, che l' angolo ſituato in una porzione di cerchio inſieme coll' altro ſituato nella rimanente porzione debba darci la ſomma di due retti.

334. Ma comunque nel cerchio ritroviſi ſituato un' angolo, ſempre potrà egli miſurarſi con archi dello ſteſſo
Fig. cerchio. In fatti, ſe dentro del cerchio
82. BCDE ſia ſituato l' angolo BAC in modo, che il ſuo vertice ſia diverſo dal centro, e diſtendanſi li ſuoi lati verſo il vertice per ſino a che s'incontrino di nuovo colla circonferenza del cerchio nei punti D, ed E; ſi avrà la ſua miſura colla ſomma dimezzata dei due archi BC, DE; e ciò per la ragione, che congiunta la CD, l' angolo BAC ſi fa eguale ai due BDC, DCE, di cui il primo miſuraſi colla metà dell' arco BC, ed il ſecondo colla metà dell' altro arco DE.

335. Se poi nel cerchio BCDE l'ango-

golo BAC sia talmente situato, che il *Fig.*
suo vertice A cada fuori del cerchio; 83.
in tal caso si avrà la sua misura, non già colla somma, ma colla differenza dimezzata dei due archi BC, DE, che rimangono racchiusi tra li suoi lati. Congiungasi perciò la BD, e siccome l' angolo BDC si fa eguale alla somma dei due BAC, ABD, così al contrario l' angolo BAC sarà eguale alla differenza dei due BDC, ABD. Onde, misurandosi il primo di questi due angoli BDC colla metà dell' arco BC, ed il secondo colla metà dell' arco DE; chiaro si è, doversi misurare l' angolo BAC colla differenza dimezzata dei due archi BC, DE.

336. Per quanto all' angolo situato in una qualche porzione di cerchio, può facilmente dimostrarsi, che egli sia retto, acuto, o ottuso, secondochè la porzione è eguale, maggiore, o minore del mezzo cerchio. Sia perciò il cer- *Fig.*
chio BCDE, che abbia per centro il 84.
punto A, e per diametro la BD. Situisi primieramente nel mezzo cerchio BCD l' angolo BCD. Io dico, che quest'angolo sia retto. In fatti, se congiungasi la AC, saranno eguali, così li due angoli ACB, ABC, come gl' altri due ACD, ADC. Onde, facendosi tutto l' angolo BCD eguale ai due ABC, ADC,

ADC, e dovendo essere tutti tre insieme eguali a due retti; chiaro si è, che l'angolo BCD debba essere retto.

337. Situisi di poi nella porzione CBD maggiore del mezzo cerchio l'angolo CED; ed io dico, che quest'altro angolo sia acuto. La ragione è chiara; poichè, essendosi dimostrato retto l'angolo BCD, sarà l'altro CBD acuto; e pertanto, essendo eguali li due angoli CBD, CED (333), ancora l'angolo CED dovrà essere acuto. Situisi finalmente nella porzione CFD minore del mezzo cerchio l'angolo CFD; ed io dico, che questo terzo angolo sia ottuso. La ragione similmente è chiara; poichè l'angolo CFD insieme coll'altro CED situato nella rimanente porzione del cerchio, dee darci la somma di due retti (333); onde essendo acuto l'angolo CED, l'altro CFD dovrà essere ottuso.

338. Essendo così può dimostrarsi finalmente, che se una retta sia tangente di un cerchio, e dal punto del contatto tirisi un'altra retta, che seghi il cerchio in due porzioni; gl'angoli fatti dalla tangente, e dalla secante siano eguali a quelli, che sono situati nelle contrarie porzioni del cerchio.
Fig. Sia perciò il cerchio ABCD, di cui
85. tangente ne sia la retta FG, e dal punto

punto del contatto A tirisi l' altra retta AC, che seghi il cerchio nelle due porzioni ABC, ADC. Io dico, che dei due angoli CAF, CAG fatti dalla tangente, e dalla secante il primo CAF sia eguale all' angolo situato nella porzione AEC, ed il secondo eguale all' angolo situato nella porzione ABC.

339. Per dimostrarlo, siano AEC, ABC gl' angoli situati in queste due porzioni, ed alzata sulla tangente FG la perpendicolare AD, congiungasi la CD. Essendo dunque la AD diametro del cerchio (311), ella lo dividerà in due parti eguali; e pertanto l' angolo ACD, come situato nel mezzo cerchio, sarà retto. Quindi, dovendo gl' altri due angoli CAD, CDA formare insieme un' altro retto, ed essendo retto l' angolo DAF; sarà quest'angolo DAF eguale ai due CAD, CDA; ed in conseguenza, toltone il comune CAD, sarà l' angolo CAF eguale all' angolo CDA, ovvero al suo eguale AEC.

340. Essendo poi eguali a due retti, tanto li due angoli CAF, CAG, quanto li due AEC, ABC; saranno li primi due CAF, CAG eguali a quest' altri due AEC, ABC; onde, essendosi dimostrato l' angolo CAF eguale all' angolo AEC, con toglierne questi due, rimanerà l'altro angolo CAG simil-

ſimilmente eguale all'altro angolo ABC; e pertanto dovrà conchiuderſi, che gl' angoli fatti dalla tangente, e dalla ſecante ſiano eguali a quelli, che ſono ſituati nelle contrarie porzioni del cerchio.

341. Per mezzo di queſto teorema poſſono ora riſolverſi due problemi. Il primo ſi è, di adattare in un dato cerchio talmente una retta, che tagli dallo ſteſſo cerchio una porzione capace di un' angolo eguale ad un' angolo da-
Fig. to. Sia perciò ABD il dato cerchio,
85. nella di cui circonferenza prendaſi ad arbitrio il punto A; indi tirata a queſto punto la tangente AF, facciaſi su di eſſa l'angolo FAC eguale all'angolo dato; ed io dico, che la AC ſia la retta ricercata. In fatti, ſiccome ella taglia dal cerchio la porzione AEC; così l' angolo AEC ſituato in queſta porzione, come eguale all'angolo FAC (338), ſarà eguale altresì all' angolo dato.

342. L'altro problema ſi è, di deſcrivere ſopra una data retta una porzione di cerchio, che ſia capace di un'
Fig. angolo eguale ad un' angolo dato. Sia
86. perciò AB la retta data, la quale dividaſi per metà nel punto C, e facciaſi su di eſſa l' angolo BAD eguale all' angolo dato. Si alzino di poi ſulle due

due AB, AD le perpendicolari CE, AE, che s'incontrino insieme nel punto E, e congiungasi la BE. Facendosi adunque eguali le due AE, BE, il cerchio descritto col punto E come centro, e coll'intervallo della EA dovrà passare per lo punto B. Descrivasi adunque questo cerchio; ed io dico, che la porzione di esso AFB, che rimane sulla retta data AB, sia quella, che si dimanda.

343. Per dimostrarlo, situisi in questa porzione l'angolo AFB. E poichè la EA è raggio del cerchio, su di cui per costruzione è perpendicolare l'altra AD; sarà quest'altra AD tangente dello stesso cerchio (309); ed in conseguenza l'angolo BAD sarà eguale all' angolo AFB (338). Ma l'angolo BAD si è fatto eguale all'angolo dato. Dunque allo stesso angolo dato sarà eguale ancora l'angolo AFB; e pertanto sulla retta data AB si è descritta la porzione di cerchio AFB capace di un angolo eguale all'angolo dato.

§.XXIV.

§. XXIV.

Della proprietà più rilevante del cerchio.

344. Rimane a dimostrarsi la proprietà la più rilevante del cerchio, la quale se bene nella sua origine sia semplicissima, nientedimeno per gli varj cambiamenti, che possono farsi nelle rette, colle quali si esprime, riceve estensione non picciola, per cui prende ancora forme diverse. Ed in vero nella forma sua più semplice, la proprietà si è, che il quadrato della perpendicolare, abbassata sul diametro di un cerchio da un punto, preso nella sua circonferenza, sia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni del diametro. Potrebbe ciò dedursi dall' esser retto l' angolo situato nel mezzo cerchio, e da quel tanto è stato dimostrato (205) intorno al triangolo rettangolo; ma giova dimostrarlo nel seguente modo.

Fig. 27. 345. Sia il cerchio BCD, che abbia per suo centro il punto A, e la BD per suo diametro. Prendasi nella sua circonferenza il punto C ad arbitrio, da cui si abbassi sul diametro BD la perpendicolare CE, e congiungasi la AC.

AC. Siccome adunque, per lo triangolo CEA rettangolo in E, il quadrato della AC, ovvèro AB è eguale ai quadrati delle due CE, AE (201); così, per essere la BD divisa in parti eguali nel punto A, ed in parti disuguali nel punto E, sarà il rettangolo delle due BE, DE insieme col quadrato della AE eguale al quadrato della AB (187). Onde, dovendo essere li quadrati delle due CE, AE eguali a questo rettangolo, ed a questo quadrato, se tolgasi da essi il comune quadrato della AE, sarà il quadrato della perpendicolare CE eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni del diametro BE, DE.

346. Or se prolunghisi la CE per fino a che s' incontri di nuovo colla circonferenza del cerchio nel punto F, conforme la tutta CF rimane divisa per metà nel punto E, così il rettangolo delle due sue porzioni CE, EF non sarà diverso dal quadrato della CE. Onde la stessa proprietà potrà esprimersi ancora in quest' altro modo, cioè, che se una retta tirata dentro del cerchio sia divisa perpendicolarmente dal diametro, il rettangolo fatto dalle due porzioni della retta sarà eguale all' altro fatto dalle due porzioni del diametro. Ma una tal uguaglianza dee aver

luo-

Fig. luogo, ancorchè la retta CF tirata den-
88. tro del cerchio ſia diviſa dal diametro BD obbliquamente nel punto E.

347. Per dimoſtrarlo, ſi abbaſſi dal centro A ſulla CF la perpendicolare AG, coſicchè ſia ella diviſa per metà nel punto G. E ſiccome il rettangolo delle due CE, EF inſieme col quadrato della GE ſi fa eguale al quadrato della CG; così coll' aggiunta dell' altro quadrato della AG, ſarà lo ſteſſo rettangolo inſieme col quadrato della AE eguale al quadrato della AC, ovvero AB. Ma a queſto medeſimo quadrato della AB è eguale ancora il rettangolo delle due BE, DE inſieme col quadrato della ſteſſa AE. Dunque, togliendone il comune quadrato della AE, ſarà il rettangolo delle due porzioni della retta CE, EF eguale al rettangolo delle due porzioni del diametro BE, DE.

Fig. 348. Ma io dico di più, che la
89. medeſima uguaglianza debba aver luogo, ancorchè la BD, da cui è diviſa la retta CF, non ſia diametro del cerchio. Congiungaſi perciò la AE, la quale diſtendaſi per ſino a che s'incontri colla circonferenza del cerchio ne' punti G, ed H. Eſſendo adunque la GH diametro del cerchio, dovrà eſſere il rettangolo delle due CE, EF eguale

le al rettangolo delle due porzioni GE, HE di questo diametro. Ma per la stessa ragione ancora il rettangolo delle due BE, DE dee essere eguale al rettangolo delle stesse due porzioni del diametro GE, HE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle due porzioni della CF, e l'altro fatto dalle due porzioni della BD, saranno eguali tra di loro.

349. Essendo così, la proprietà di cui si tratta, dovrà esprimersi generalmente nel seguente modo, cioè, che se due qualsisiano rette si seghino scambievolmente dentro del cerchio, il rettangolo fatto dalle porzioni di una di esse sia eguale al rettangolo fatto dalle porzioni dell'altra. Ma esprimendosi la proprietà in questo modo, ella dovrà aver luogo, ancorchè le due rette si seghino scambievolmente fuori del cerchio. Perciò le due rette CF, BD tirinsi nel cerchio in modo, che prolungate vadansi ad incontrare fuori del cerchio nel punto E. Io dico, che il rettangolo delle due CE, FE sia tuttavia eguale al rettangolo dell'altre due BE, DE. *Fig. 90.*

350. Per dimostrarlo, pongasi primieramente, che una delle due rette, come la BD, sia diametro del cerchio, e passi in conseguenza per lo centro A.

Si

Si abbassi da questo centro sull' altra CF la perpendicolare AG, e congiungasi la AF. Rimanendo adunque divisa la CF per metà nel punto G, e ritrovandosi aggiunta ad essa l' altra FE, sarà il rettangolo delle due CE, FE insieme col quadrato della FG eguale al quadrato della EG (191); e pertanto coll'aggiunta dell'altro quadrato della AG, sarà lo stesso rettangolo delle due CE, FE insieme col quadrato dalla AF, ovvero AD, eguale al quadrato della AE. Ma, per essere la BD divisa per metà nel punto A, e per ritrovarsi ad essa aggiunta l' altra DF, ancora il rettangolo delle due BE, DE insieme col quadrato della stessa AD dee essere eguale al quadrato della AE. Dunque, togliendone il comune quadrato della AD, sarà il rettangolo delle due BE, DE eguale al rettangolo dell' altre due CE, FE.

Fig. 91. 351. Che se poi nessuna delle due rette CF, BD sia diametro del cerchio, si dimostreranno eguali gli stessi due rettangoli, con tirare dal centro A al punto E la retta AE, che s' incontri colla circonferenza del cerchio ne' punti G, ed H. Imperocchè, essendo la GH diametro del cerchio, dovrà essere il rettangolo delle due CE, FE eguale al rettangolo dell' altre due GE, HE.

HE. Ma per la stessa ragione a questo secondo rettangolo dee essere eguale ancora il rettangolo delle due BE, DE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle due CE, FE, e l'altro fatto dall' altre due BE, DE, saranno eziandio eguali tra di loro.

352. Notisi quì intanto, che affinchè la proprietà, di cui si tratta, possa estendersi alle rette, che scambievolmente si segano fuori del cerchio, dee ella esprimersi in questo modo, che se due rette adattate dentro del cerchio tra esso loro s' incontrino, li rettangoli fatti dalle parti di esse, prese dai loro termini per fino al punto dell'incontro, debbano essere eguali tra di loro. Ma qualora le due rette incontransi fuori del cerchio, niente vieta, che una di esse facciasi tangente del cerchio: il che avviene, quante volte li due termini della retta, avvicinandosi sempre più tra di loro, si riuniscono in un sol punto.

353. Quindi la proprietà, di cui si tratta, prendendo in questo caso nuova forma, dovrà esprimersi nel seguente modo, cioè, che se da un punto preso fuori del cerchio tirinsi due rette, di cui una sia tangente del cerchio, e l'altra secante, il quadrato della tangente sia eguale al rettangolo fatto dall' intera

tera secante nella porzione di essa, che rimane fuori del cerchio. Sia perciò il cerchio BCD, che abbia per suo cen-
Fig. tro il punto A. Prendasi fuori di esso
92. un punto E ad arbitrio, da cui tirinsi le due rette EB, EC in modo, che la prima EB seghi il cerchio ne' punti B, e D, e l' altra EC lo tocchi nel punto C. Io dico, che il quadrato di questa EC sia eguale al rettangolo delle due BE, DE.

354. Pongasi primieramente, che la BD passi per lo centro A, e sia in conseguenza diametro. Essendo adunque la EC tangente, se congiungasi la AE, sarà retto l'angolo ACE (310); e per tanto il quadrato della AE sarà eguale ai quadrati delle due EC, AC (201). Ma, per essere la BD divisa per metà nel punto A, e per ritrovarsi ad essa aggiunta l'altra DE, il quadrato della stessa AE è eguale ancora al rettangolo delle due BE, DE insieme col quadrato della AD (191). Dunque li quadrati delle due EC, AC saranno eguali al rettangolo delle dne BE, DE, ed al quadrato della AD; ed in conseguenza, se tolgansi da essi li due quadrati eguali della AC, e della AD, sarà il quadrato della EC eguale al rettangolo delle due BE, DE.

355. Non essendo poi la BD diametro

metro del cerchio, congiungasi la AE, *Fig.*
che s' incontri colla circonferenza del *93.*
cerchio ne' punti G, ed H. Essendo adunque la GH diametro del cerchio, sarà il quadrato della EC eguale al rettangolo delle due GE, HE. Ma a questo rettangolo è eguale ancora l'altro delle due BE, DE, per la ragione, che le due rette BD, GH, tirate dentro del cerchio, incontransi prolungate nel punto E fuori dello stesso cerchio. Dunque il quadrato della tangente EC sarà eguale al rettangolo fatto dall'intera secante BE nella porzione DE, che rimane fuori del cerchio.

356. Il converso intanto di ciò, dee *Fig.*
similmente aver luogo, cioè, che es- *92.*
sendo il quadrato della EC eguale al rettangolo delle due BE, DE, la EC debba essere tangente del cerchio. Tirisi dal punto E la tangente al cerchio, che sia la EF (314), e congiungansi le due AC, AF. Essendo adunque la EF tangente del cerchio, sarà il suo quadrato eguale al rettangolo delle due BE, DE; e pertanto, volendosi che a questo rettangolo sia eguale il quadrato della EC, saranno eguali tra di loro li quadrati delle due EC, EF. Quindi, facendosi la EC eguale alla EF, li due triangoli ACE, AFE saranno perfettamente eguali (126); ed in con-

feguenza l' angolo ACE, come eguale all' altro AFE, dovendo effere retto, farà, che la EC fia tangente del cerchio (309).

Fig. 92. 357. Del rimanente dall' efferfi dimoftrato, che le due EC, EF fiano eguali, poffiamo dedurne, che le due tangenti, che poffono tirarfi al cerchio da un medefimo punto, debbano effere eguali tra di loro: il che ricavafi ancora da ciò, che effendo le due EC, EF tangenti del cerchio, dee effere retto, così l' angolo ACE, come l' angolo AFE. Onde, facendofi il quadrato della AE eguale, così ai quadrati delle due AC, CE, come ai quadrati dell' altre due AF, FE, conforme il quadrato della AC è eguale al quadrato della AF, così farà il quadrato della EC eziandio eguale al quadrato della EF; e pertanto le fteffe due EC, EF faranno tra di loro eguali.

§.XXV.

§. XXV.

Delle figure regolari, considerate per rapporto al cerchio.

358. PEr rapporto al cerchio compete alle figure regolari un' altra proprietà, cioè, di potersi iscrivere, e circonscrivere, così il cerchio in ciascuna di esse, come al contrario ognuna di loro nel cerchio. Ed in vero, qualunque sia la figura rettilinea, se un cerchio sia situato in modo, che passi per gli vertici di tutti gl' angoli, conforme il cerchio dicesi circonscritto intorno alla figura, così al contrario la figura si dirà essere iscritta dentro del cerchio; ma se la situazione del cerchio sia tale, che tocchi tutti li lati, conforme il cerchio dicesi iscritto dentro della figura, così al contrario la figura si dirà essere circonscritta intorno al cerchio.

359. Trattandosi del triangolo, li quattro problemi, che distinguonsi su di questo assunto, possono sempre risolversi, qualunque sia la sua forma. Per *Fig.*
dimostrarlo, debbasi in primo luogo in- *94.*
torno al dato triangolo A B C circonscrivere il cerchio. Dividansi li due lati AB, BC per metà ne' punti D, ed E,

 dia

dai quali alzinsi sugli stessi lati le perpendicolari DF, EF, che s'incontrino nel punto F. Se adunque congiungansi le rette AF, BF, CF, saranno perfettamente eguali, così li due triangoli ADF, BDF, come gl'altri due BEF, CEF (129). Onde, essendo eguali tra di loro quelle tre rette, il cerchio, che descrivesi col centro F, e col raggio FA, passerà per gl'altri due punti B, e C; ed in conseguenza sarà circonscritto intorno al dato triangolo.

Fig. 95. 360. Debbasi in secondo luogo dentro del dato triangolo ABC iscrivere il cerchio. Dividasi per metà, così l'angolo ABC per la retta BD, come l'angolo BCA per la retta CD; e dal punto D, in cui incontransi le due rette BD, CD, si abbassino sulli lati del triangolo AB, BC, CA le perpendicolari DE, DF, DG. Essendo adunque perfettamente eguali, non meno li due triangoli BDE, BDF, che gl'altri due CDF, CDG, saranno quelle tre perpendicolari eguali tra di loro. Onde, siccome il cerchio, che descrivesi col centro D, e col raggio DE, dee passare per gl'altri due punti F, e G; così, facendosi sue tangenti tutti tre li lati AB, BC, CA, sarà egli iscritto dentro del dato triangolo.

361. Debbasi in terzo luogo dentro del

del dato cerchio ABC iscrivere un triangolo, che sia equiangolo col triangolo dato DEF. Prendasi nella circonferenza del cerchio un punto A ad arbitrio, a cui tirisi la tangente GH. Indi sulla stessa tangente, e propriamente al punto del contatto A facciasi, così l' angolo GAB eguale all' angolo DFE, come l' angolo HAC eguale all' angolo DEF, e congiungasi la BC. Poichè dunque per la tangente GH li due angoli GAB, HAC debbono essere eguali ai due ACB, ABC (138), saranno questi due eziandio eguali agl' altri due DFE, DEF; e pertanto il triangolo ABC, iscritto dentro del dato cerchio, sarà equiangolo col dato triangolo DEF. *Fig. 96.*

362. Debbasi finalmente intorno al dato cerchio ABC circonscrivere un triangolo, che sia equiangolo col triangolo dato DEF. Distendasi primieramente uno de' lati del triangolo, come EF, verso G, ed H; indi al centro I del cerchio facciasi, così l' angolo AIB eguale all' angolo DEG, come l' angolo AIC eguale all' angolo DFH; tirinsi finalmente ai punti A, B, C le tangenti KL, LM, MK, ed il triangolo MKL, che formasi con queste tangenti, siccome è circonscritto intorno al cerchio ABC, così sarà equiangolo ancora col triangolo dato DEF. *Fig. 97.*

363. In fatti, per le tangenti KL, LM, li due angoli IAL, IBL del quadrilatero AIBL sono retti. Dunque gl' altri due AIB, ALB uniti insieme debbono essere eguali a due retti (142). Ma ancora li due DEG, DEF sono eguali a due retti uniti insieme (60). Dunque, se tolgansi da essi gl' angoli AIB, DEG, che per construzione sono eguali, li rimanenti due ALB, DEF saranno parimente eguali. Onde, dovendo essere per la stessa ragione eguali ancora li due angoli AKC, DFE; chiaro si è, che il triangolo MKL, circonscritto intorno al cerchio ABC, sia equiangolo col triangolo dato DEF.

364. Or non essendo regolari l' altre figure rettilinee superiori al triangolo, non sempre per rapporto ad esse potranno risolversi gli stessi quattro problemi. In fatti, se intorno al quadri-
Fig. 98. latero ABCD debbasi circonscrivere il cerchio, chiaro si è, che coll' incontro delle perpendicolari alzate sulli lati AB, BC dai punti, che li dividono per metà, rimane determinato il cerchio, che passa per gli tre punti A, B, C. Onde lo stesso cerchio non potrà passare per lo rimanente punto D, se non si apponga al quadrilatero qualche condizione, la quale si è, che le somme degl' angoli opposti siano eguali.

365.

365. E così ancora, se dentro del quadrilatero ABCD debbasi iscrivere il cerchio, chiara cosa si è, che coll' incontro delle rette, che dividono per metà li due angoli ABC, BCD, rimane determinato il cerchio, che tocca li tre lati AB, BC, CD. Onde lo stesso cerchio non potrà toccare il lato rimanente DA, se il quadrilatero non abbia qualche condizione, la quale si è, che le somme de' lati opposti siano eguali. *Fig. 99.*

366. Ed in vero, che nel quadrilatero iscritto dentro del cerchio siano eguali le somme degl' angoli opposti, ricavasi da ciò, che gl' angoli opposti, come situati in due porzioni, che formano il cerchio intero, debbano darci insieme la somma di due retti (333). Se poi si rifletta al teorema di sopra dimostrato (357), che le due tangenti tirate al cerchio da un' istesso punto debbano essere eguali tra di loro; egli è facile ancora ad intendersi, che nel quadrilatero circonscritto intorno al cerchio siano eguali le somme de' lati opposti.

367. Or nelle figure regolari li due primi problemi non per altra ragione possono sempre risolversi, se non perchè in ciascuna di esse ritrovasi il centro, che rende eguali, così le rette da

esso tirate agl' angoli della figura, come le perpendicolari abbassate sulli suoi lati da quel centro. Se adunque intorno ad una figura regolare debbasi circonscrivere il cerchio, basterà descriverlo collo stesso centro della figura, e che abbia per raggio una delle rette tirate agl' angoli; ma se debbasi iscrivere il cerchio dentro della figura, pure dovrà egli descriversi collo stesso centro della figura, ma per raggio dovrà avere una delle perpendicolari abbassate sulli lati.

368. Per quanto poi al problema d' iscrivere dentro di un dato cerchio una figura regolare, di cui sia dato il numero de' lati; chiaro si è, che ella si avrà, con dividere la circonferenza del cerchio in tante parti eguali, quanti sono li lati, e con unire li punti della divisione gradatamente per rette; poichè, siccome queste rette, come corde di archi eguali, sono eziandio eguali tra di loro; così gl' angoli contenuti dalle stesse rette, ritrovandosi appoggiati sopra archi eguali, avranno la stessa misura (333), ed in conseguenza saranno parimente eguali.

369. Finalmente per quanto al problema di circonscrivere intorno ad un dato cerchio una figura regolare, di cui sia dato il numero de' lati; questa an-

ancora si avrà, con dividere la circonferenza del cerchio in tante parti eguali, quanti sono li lati, e con tirare tangenti ai punti della divisione. Ma, potendosi porre in dubbio, che la figura racchiusa da queste tangenti, e circonscritta intorno al cerchio, sia regolare; perciò per dimostrarlo, dividasi *Fig.*
la circonferenza del cerchio BCDE, 100.
che ha per centro il punto A, nelle parti eguali BC, CD, DE, EB, ed ai punti B, C, D, E tirinsi le tangenti FG, GH, HI, IF, che s'incontrino insieme ne' punti G, H, I, F.

370. Se adunque congiungasi la AF, sarà questa ipotenusa comune dei due triangoli rettangoli ABF, AEF; e per tanto, facendosi eguali le due BF, EF, la stessa AF dividerà per metà così l' angolo BAE, come l' angolo BFE. Per la stessa ragione ancora la AG dividerà per metà non meno l' angolo BAC, che l'altro BGC. Onde, siccome per l' uguaglianza degl' archi BE, BC sono eguali gl' angoli BAE, BAC, così saranno eguali ancora le loro metà BAF, BAG; ed in conseguenza, per farsi li due triangoli ABF, ABG perfettamente eguali (134), saranno eguali parimente le due BF, BG.

371. Della stessa maniera si dimostrerà, che siano eguali tanto le due

EF, EI, quanto le due CG, CH. Onde, essendo la BF eguale alla EF, e la BG eguale alla CG, sarà la FG eguale così alla FI, come alla GH. E poichè si è dimostrato, che le due rette AF, AG, dividono per metà li due angoli BFE, BGC, e le metà di essi AFB, AGB sono eguali tra di loro; saranno eguali parimente gl'angoli BFE, BGC contenuti dai tre lati della figura IF, FG, GH; e per tanto, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, non dovrà porsi in dubbio, che la figura FGHI, circonscritta intorno al cerchio, sia regolare.

372. Quantunque poi il problema, di dividere una data circonferenza di cerchio in un dato numero di parti eguali, non possa sempre risolversi per mezzo della linea retta, e della linea circolare, che sono le sole linee, di cui si avvale la Geometria elementare nella risoluzione de' suoi problemi; nientedimeno non dee egli riputarsi impossibile nei casi, ove non giungono le due riferite linee, per la ragione, che può aversi la sua risoluzione per mezzo di altre linee più composte, delle quali trattasi nella Geometria sublime. E quindi si è, che il terzo, e quarto problema sono solubili nella Geometria elementare a riguardo

di

di quelle ſole figure regolari, per cui la diviſione in parti eguali della circonferenza del dato cerchio può averſi colla linea retta, e colla linea circolare.

373. Ed in primo luogo, potendoſi dividere colle riferite linee la circonferenza del dato cerchio in ſei parti eguali, quindi ſi è, che potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio l'eſagono regolare. In fatti la ſeſta parte della circonferenza dee eſſere di 60 gradi; onde ſe BCDE ſia il dato cerchio, *Fig.*
e preſo nella ſua circonferenza il punto B ad arbitrio, deſcrivaſi con queſto 101.
punto, come centro, e coll' intervallo del raggio AB un' arco circolare, che ſeghi la ſteſſa circonferenza nel punto C, il triangolo ABC, che ſi ha colle tre rette AB, AC, BC, ſarà equilatero; e pertanto, attenta l' uguaglianza de' ſuoi angoli, ſarà l' arco BC di gradi 60.

374. In ſecondo luogo colle ſteſſe linee può dividerſi la circonferenza del dato cerchio in tre parti eguali; e perciò potrà iſcriverſi, e circonſcriverſi nello ſteſſo cerchio il triangolo equilatero, che è il triangolo regolare. In fatti la terza parte della circonferenza dee eſſere di 120 gradi; onde ſe BCDE ſia *Fig.*
il cerchio, ſiccome può prenderſi nella 101.

sua circonferenza l' arco BC di gradi 60, così se dalla medesima taglisi in appresso l' altro arco CD eguale al primo BC, sarà l' intero arco BCD di 120 gradi.

375. In terzo luogo con far uso delle stesse linee può dividersi la circonferenza del dato cerchio in quattro parti eguali; onde si è, che potrà iscriversi, e circonscriversi nello stesso cerchio il quadrato, che è il quadrilatero regolare. In fatti il quadrante, o sia la quarta parte della circonferenza, che è la misura dell' angolo retto, dee essere di 90 gradi. Onde, se per lo centro del cerchio dato tirinsi due diametri, di cui uno sia perpendicolare sull' altro, chiaro si è, che questi diametri divideranno la circonferenza in quattro parti eguali, delle quali perciò ciascheduna sarà di gradi 90.

376. In quarto luogo per mezzo delle stesse linee può dividersi la circonferenza del dato cerchio in dieci parti eguali, colla quale divisione in conseguenza potrà iscriversi, e circonscriversi nello stesso cerchio il decagono
Fig. regolare. Sia perciò BCDE il cerchio
102. dato, che abbia per suo centro il punto A. Dividasi il raggio di esso AB talmente nel punto F, che il rettangelo fatto dallo stesso raggio nella porzione

zione BF sia eguale al quadrato dell' altra porzione AF (227). Descrivasi di poi col punto B come centro, e coll'intervallo della AF un' arco circolare, che seghi la circonferenza del cerchio nel punto C; ed io dico, che l' arco BC sia la decima parte della stessa circonferenza, ed in conseguenza di 36 gradi.

277. Per dimostrarlo, congiunganssi le rette AC, BC, CF, ed intorno al triangolo ACF circonscrivasi il cerchio AFG (359). Essendo adunque il rettangolo delle due AB, BF eguale al quadrato della AF, ovvero BC, sarà questa BC tangente del cerchio AFG (356). Onde, dovendo essere l' angolo BCF eguale all' angolo CAF (338), coll' aggiunta del comune ACF, sarà tutto l' angolo ACB, o sia ABC eguale ai due angoli insieme CAF, ACF, ed in conseguenza al solo BFC. Quindi, facendosi eguali le due BC, CF, saranno eguali parimente così le due CF, AF, come gl' angoli ad esse opposti CAF, ACF; e pertanto l' angolo ACB, o sia ABC, che si è dimostrato eguale a questi due uniti insieme, sarà doppio del solo angolo CAF.

378. Or da ciò, che nel triangolo isoscele ABC ciascuno degl' angoli esistenti sopra la sua base BC sia doppio, dell'

dell' angolo verticale BAC , egli è facile ad intendersi, che l' arco BC, per mezzo di cui si misura quest' angolo verticale, sia di 36 gradi , ed in conseguenza la decima parte dell' intera circonferenza . Imperocchè, dovendo essere l' angolo verticale BAC la quinta parte di tutti tre gl' angoli del triangolo isoscele uniti insieme, sarà egli di tanti gradi, quanti ne contiene la quinta parte di 180. Onde, secondo questo computo , tanto l' angolo verticale BAC, quanto l' arco BC , che lo misura, dovrà essere di gradi 36.

379. In quinto luogo , con far uso delle medesime linee , può dividersi la circonferenza del dato cerchio in cinque parti eguali , colla quale divisione potrà iscriversi , e circonscriversi nello stesso cerchio il pentagono regolare. Infatti la quinta parte della circonferenza intera dee essere di 72 gradi; onde, se
Fig. BCDE sia il cerchio dato, siccome può
102. prendersi nella sua circonferenza l' arco BC di gradi 36 , così se in appresso taglisi dalla medesima l' altro arco CD eguale al primo BC, sarà l' intero arco BCD di 72 gradi.

380. Finalmente, essendosi dimostrato, che possa dividersi la circonferenza del dato cerchio, così in tre, come in cinque parti eguali, potrà ella dividersi an-

ancora in quindici, ed in conseguenza iscriversi, e circonscriversi nello stesso cerchio il quindecagono regolare. Sia perciò BCDE il dato cerchio, nella di cui circonferenza prendasi, così l' arco BC, che sia la sua quinta parte (379), come l' arco BE, che sia la sua terza parte (374). Essendo adunque il primo BC di 72 gradi, e l' altro BE di 120; sarà l' arco CE, che è la loro differenza, di gradi 48. Onde, se quest' arco CE dividasi per metà nel punto D, ciascheduno dei due CD, DE sarà di 24 gradi, quanti appunto ne contiene la quindicesima parte dell' intera circonferenza. *Fig. 103.*

§. XXVI.

Continuazione dello stesso argomento.

381. IL numero delle figure regolari, che possono iscriversi, e circonscriversi in un dato cerchio per mezzo delle linee, di cui fa uso la Geometria elementare, può ricevere maggior aumento, ed ecco come. Di già si è veduto di sopra (50), potersi dividere per metà qualsisia dato arco circolare. Onde, se faccians le riferite divisioni della circonferenza in parti eguali, ed indi suddividasi ciascuna di que-

queste parti in altre due, chiaro si è, che si raddoppierà il numero di esse. E poichè lo stesso può praticarsi, così in quest' altre parti, come nell' altre, che seguono; chiaro ancora si è, che si anderà gradatamente sempre più aumentando il loro numero.

382. Colla divisione adunque della circonferenza in quattro parti eguali, di cui si ha bisogno per l' iscrizione, e circonscrizione del quadrato, possono aversi gradatamente l' altre di 8, di 16, di 32, &c. Similmente colla divisione della stessa circonferenza in sei parti eguali, che si richiede per l' iscrizione, e circonscrizione dell' esagono regolare, si avranno successivamente l' altre di 12, di 24, di 48, &c. E così finalmente si avranno nuove divisioni, così con quella, che dee farsi per lo decagono, come coll' altra, che bisogna per lo quindecagono regolare.

383. Delle divisioni intanto, che richiedono il triangolo equilatero, ed il pentagono regolare, non occorre tenerne conto, per la ragione, che le prime, che da esse ricavansi, sono le due, di cui si ha bisogno per l' esagono, ed il decagono regolare, quandochè da queste due si sono ricavate quell' altre. Ma, se bene col divisato artificio aumentisi dismisuratamente il numero

mero delle figure regolari, che possono iscriversi, e circonscriversi in un dato cerchio; niente di meno pure ne restano altre moltissime, di cui nella Geometria elementare non può aversene l' iscrizione, e circonscrizione.

384. Si aumentarebbe tutta volta maggiormente il loro numero, se conforme qualsisia dato arco circolare può dividersi per metà, così potesse egli dividersi altresì in tre parti eguali. Ma una tal divisione oltrepassa li limiti della Geometria elementare, la quale, secondo è stato avvertito, nella risoluzione de' suoi problemi fa uso soltanto della linea retta, e della linea circolare. Intanto con construzione meccanica, che facilmente può porsi in pratica, qualsia dato arco circolare può dividersi ancora in tre parti eguali, ed ecco come.

385. Sia BC l'arco circolare, che *Fig.* dee dividersi in tre parti eguali, e sia 104. A il centro del cerchio, a cui appartiene lo stesso arco. Aggirisi intorno al punto C la riga CE, e ritrovisi per essa posizione tale, che incontrandosi la medesima col diametro BD prolungato nel punto E, sia la porzione EF, compresa tra questo diametro, e la circonferenza del cerchio, eguale al raggio AF. Arrestisi la riga in questa posizione, e se per lo centro A tirisi la AG pa-

parallela alla stessa riga, che s' incontri coll' arco BC nel punto G, sarà l'arco BG la terza parte dell' arco proposto BC.

386. La ragione è chiara. Imperocchè, essendo eguali le tre EF, AF, AC, saranno eguali ancora tra di loro, così li due angoli EAF, AEF, come gl' altri due ACF, AFC (104). Quindi l' angolo AFC, o pure il suo eguale ACF, per essere eguale ai due insieme EAF, AEF (98), sarà doppio del solo angolo AEF; e l' angolo BAC, come eguale ai due insieme ACF, AEF, sarà triplo del medesimo angolo AEF. Ma, per le parallele EC, AG, l' angolo AEF è eguale all' angolo BAG (87). Dunque lo stesso angolo BAC sarà triplo ancora dell' angolo BAG; e pertanto, essendo gli archi BC, BG le misure di questi due angoli, sarà il primo di essi BC similmente triplo dell' altro BG.

Fig. 387. In un' altro modo ancora, non
105. molto diverso dal precedente, può dividersi l' arco BC in tre parti eguali, ed ecco come. Alzisi sul raggio AB la perpendicolare AG, ed intorno al punto C aggirisi la riga CF per sino a che abbia posizione tale, che la porzione di essa HF, compresa tra la circonferenza del cerchio, e la perpendi-

co-

colare alzata, facciasi eguale allo stesso raggio. Arrestisi la riga in questa posizione; e se alla medesima per lo centro A tirisi la parallela AG, che s'incontri coll' arco BC nel punto G, sarà di nuovo l' arco BG la terza parte dell' arco dato BC.

388. Per dimostrarlo, prolunghisi la riga CF verso F per fino a che s' incontri col diametro BD nel punto E. Essendo adunque retto l' angolo DAG, ed essendo tutti tre gl' angoli di ogni triangolo uniti insieme eguali a due retti (102); saranno gl'altri due angoli AHE, AEH insieme eguali all' angolo DAG. Ma, per l' uguaglianza delle due AF, HF, l' angolo AHE è eguale all' angolo HAF (104). Dunque, togliendone questi due, saranno eguali ancora li rimanenti due angoli AEH, FAE; e per tanto, facendosi ancora la EF eguale al raggio AF, questa nuova construzione meccanica ricaderà nell'altra precedente.

389. Del rimanente intorno ai lati delle principali figure regolari, che possono iscriversi dentro del cerchio, sono d' avvertirsi più cose. La prima si è, che siccome vedesi chiaramente, che il lato dell' esagono regolare sia eguale al raggio stesso del cerchio; così il lato del triangolo equilatero, o sia regolare

sa-

sarà di lunghezza tale, che il suo quadrato sarà triplo del quadrato del rag-
Fig. gio. In fatti, se BCD sia un mezzo
106. cerchio, in cui l' arco BC sia di 60 gradi, sarà il rimanente arco CD di gradi 120; e pertanto delle loro corde la prima BC sarà il lato dell' esagono regolare, e la seconda CD il lato del triangolo equilatero.

390. Or, essendo retto l' angolo situato nel mezzo cerchio (336), sarà il triangolo BCD rettangolo in C; ed in conseguenza il quadrato della sua ipotenusa BD sarà eguale ai quadrati delli due lati BC, CD. Ma, per essere la BD divisa per metà nel punto A, centro del mezzo cerchio, il suo quadrato è quadruplo del quadrato della AB (157); e per essere BC il lato dell' esagono regolare, il suo quadrato è eguale al semplice quadrato della stessa AB. Dunque, dovendo essere li quadrati delle due BC, CD eguali al quadruplo del quadrato della AB, sarà il solo quadrato della CD eguale al triplo del quadrato della AB.

391. La seconda cosa si è, che del quadrato iscritto dentro del cerchio sia tale la lunghezza del lato, che il quadrato istesso sarà eguale al duplo del
Fig. quadrato del raggio. In fatti, se l'arco
107. BCD sia di 90 gradi, sarà la corda sua

ſua BD il lato del quadrato iſcritto dentro del cerchio. Ma, ſe A ſia il centro dell'arco BCD, e congiunganſi li due raggi AB, AD, dee eſſere retto l'angolo BAD contenuto da queſti raggi, per eſſere miſurato dallo ſteſſo arco BCD. Dunque, eſſendo il triangolo BAD rettangolo in A, ſarà il quadrato della ſua ipotenuſa BD eguale ai quadrati delli due raggi AB, AD, ed in conſeguenza eguale al doppio del quadrato d'uno di eſſi.

392. La terza, ed ultima coſa d'avvertirſi ſi è, che ſiccome dividendoſi il raggio del cerchio talmente, che il rettangolo fatto dal raggio in una delle ſue porzioni ſia eguale al quadrato dell' altra porzione, ſi ha con queſt' altra porzione il lato del decagono regolare iſcritto dentro del cerchio (376); così il lato del pentagono regolare ſia di lunghezza tale, che il ſuo quadrato dovrà eſſere eguale al quadrato del raggio inſieme col quadrato fatto dal lato del decagono regolare. Sia perciò il cerchio BCDE, *Fig.*
che abbia per ſuo centro il punto A; 108.
e dividaſi il raggio AB talmente nel punto F, che il rettangolo fatto dallo ſteſſo raggio nella porzione BF ſia eguale al quadrato dell' altra porzione AF.

393. Se adunque col centro B, e coll'

coll' intervallo della A F descrivasi un' arco circolare, che seghi la circonferenza del cerchio nel punto C, sarà l' arco B C di 36 gradi, e la sua corda BC eguale alla AF il lato del decagono regolare iscritto dentro del cerchio (376), e se in oltre dalla stessa circonferenza taglisi l' altro arco C D eguale al primo BC, sarà l' intero arco BCD di gradi 72, e la sua corda BD il lato del pentagono regolare iscritto dentro del medesimo cerchio (379). Onde dovrà dimostrarsi, che il quadrato della BD sia eguale al quadrato del raggio insieme col quadrato della BC, ovvero A F.

394. Ed in vero, essendo l' angolo BAC di 36 gradi, sarà così l' angolo A B C, come l' angolo A C B di gradi 72; e pertanto, facendosi eguali tra di loro li due angoli ABC, DAF, ed avendo questi angoli li lati A B, B C eguali ai lati A D, A F, ciascuno a ciascuno, saranno le loro basi A C, DF similmente eguali. Quindi, essendo la DF eguale al raggio AD, il triangolo ADF sarà isoscele; ed in conseguenza la sua base A F sarà divisa per metà nel punto G dalla perpendicolare D G, abbassata su di essa dall' angolo verticale; con che il rettangolo delle due BF, AF sarà eguale al doppio

pio del rettangolo fatto dalla BF nella FG.

395. Or, essendo il triangolo BFD ottusangolo in F, il quadrato del lato BD opposto all' angolo ottuso dee essere eguale ai quadrati delli due lati BF, DF insieme col doppio del rettangolo del lato BF nella FG. Onde il quadrato della BD sarà eguale ai quadrati delle due BF, DF insieme col rettangolo della BF nella AF. Ma il quadrato della BF insieme con questo rettangolo è eguale al rettangolo delle due AB, BF (174), o pure al quadrato della AF, ovvero BC. Dunque il quadrato della BD, che è il lato del pentagono regolare, sarà eguale al quadrato della DF, o sia del raggio AB insieme col quadrato della BC, che è il lato del decagono regolare.

§. XXVII.

Della nozione della ragione, così semplice, come composta.

396. SEgue ora la dottrina delle ragioni, e delle proporzioni, di cui si ha bisogno per quel tanto rimane a dirsi intorno alle figure piane; e per incominciare dalla spiega di alcuni termini, di cui si fa uso, noteremo

mo primieramente, che essendovi due quantità omogenee, ovvero della stessa indole, come due linee, due superficie, o due corpi, conforme la minore dee riguardarsi come parte della maggiore, così dicesi ella essere sua parte aliquota, qualora replicata più volte esattamente la misura, siccome sarebbe una retta di due palmi per rapporto ad un' altra di otto.

397. Ma se poi una quantità minore misuri esattamente due, o più altre maggiori, allora ella si dirà essere parte aliquota loro comune, siccome sarebbe una retta di due palmi per rapporto all' altre due di otto, e di dieci. Ed in fine due quantità minori, che misurano con esattezza un' istesso numero di volte due altre maggiori, si diranno essere parti aliquote simili di quest' altre due, siccome sarebbero le rette di due, e di tre palmi per rapporto all' altre due di otto, e di dodici.

398. Al contrario poi, conforme la quantità maggiore chiamasi moltiplice della minore, che esattamente la misura; così si dirà ella essere moltiplice comune di due, o più minori, che la misurano con esattezza: siccome altresì due quantità maggiori, che sono misurate esattamente un' istesso numero di volte

volte da due altre minori, si diranno essere moltiplici simili, ovvero egualmente moltiplici di quest' altre due.

399. Conforme niente vieta, che due quantità omogenee abbiano due, o più aliquote comuni; così possono darsi quantità, che ne siano affatto prive, le quali perciò chiamansi quantità incommensurabili. Ma ciò dee intendersi di un' aliquota comune, che sia finita; poichè, siccome la divisione di ogni quantità non ha mai termine, ed almeno col pensiero estendesi all' infinito; così due quantità omogenee saranno sempre capaci di un' aliquota comune infinitamente picciola, cioè minore di ogni quantità assignabile.

400. Avendosi due quantità omogenee, non è da porsi in dubbio, che una di esse contenga sempre un che dell' altra; anzi il quanto di questa continenza potrà sempre esprimersi con un qualche numero, quantevolte le due quantità omogenee hanno un' aliquota comune finita. Così, se vi siano due rette, una di otto palmi, e l' altra di due, la prima conterrà il quadruplo della seconda, ed al contrario la seconda la quarta parte della prima. E così ancora, essendovi due rette, una di cinque palmi, e l' altra di tre, la prima conterrà il quintuplo della ter-

za parte della seconda, ed al contrario la seconda il triplo della quinta parte della prima.

401. Or intendesi presso li Geometri per nome di ragione la comparazione, che si fa di due quantità omogenee, per quel quanto la prima di esse contiene della seconda. E siccome le due quantità omogenee, che si comparano, chiamansi termini della ragione; così la prima di esse dicesi essere suo antecedente, e la seconda suo conseguente. Ma alla ragione ascrivesi ancora la sua quantità, per cui s' intende quel quanto stesso, che l'antecedente contiene del conseguente; onde sarà 4 la quantità della ragione di una retta di otto palmi ad un'altra di due, ed al contrario $\frac{1}{4}$ la quantità di quella, che ha una retta di due palmi ad un' altra di otto.

402. Se l'antecedente, ed il conseguente della ragione intendansi divisi in parti, che siano eguali ad un' aliquota loro comune; egli è fuor di ogni dubbio, che la quantità della ragione sia il quoziente, che si ha con dividere il numero delle parti dell' antecedente per lo numero delle parti del conseguente. Ed in fatti, perchè il numero 8 diviso per l' altro 2 dà 4 per quoziente; quindi si è, che sia 4 la quan-

quantità della ragione di una retta di otto palmi ad un' altra di due. E così ancora, perchè il numero 2 diviso per l' altro 8 dà $\frac{1}{4}$ per quoziente; da ciò deriva, che sia $\frac{1}{4}$ la quantità della ragione di una retta di due palmi ad un' altra di otto.

403. Egli è vero, che essendo li termini della ragione quantità incommensurabili, la comune loro aliquota, come infinitamente picciola, non permette di potersi esprimere con numeri le moltitudini delle parti eguali, che in essi si contengono; ma sempre sarà vero, che la quantità della ragione sia il quoziente, che si avrebbe, se l'infinita moltitudine delle parti dell' antecedente potesse dividersi per la moltitudine similmente infinita delle parti del conseguente; ed appunto, per non potersi esprimere con numero alcuno il quoziente di questa divisione, è inesprimibile altresì la quantità stessa della ragione.

404. Niente vieta, che li termini della ragione siano tal volta eguali; e quando ciò avviene, siccome la ragione dicesi essere di uguaglianza, così chiaro si è, che la sua quantità debba essere l' unità. Essendo poi disuguali li termini della ragione, si dirà ella essere di disuguaglianza; anzi secondochè

l' antecedente è maggiore, o minore del conseguente, la ragione stessa dovrà dirsi di maggiore, o minore disuguaglianza. Onde si vede, che la quantità della ragione debba essere maggiore dell' unità in quella di maggior disuguaglianza, ed al contrario minore dell' unità nell' altra di minor disuguaglianza.

405. Come sia una ragione per rapporto ad un' altra ragione, potrà dedursi dalle stesse loro quantità. Onde, conforme una ragione è eguale ad un' altra ragione, quante volte le loro quantità sono eguali; così una ragione sarà maggiore, o minore di un' altra ragione, secondochè la quantità della prima è maggiore, o minore della quantità della seconda. Specialmente poi sarà una ragione dupla, tripla, o quadrupla di un'altra ragione, sempre quando la quantità della prima è dupla, tripla, o quadrupla della quantità della seconda: siccome al contrario sarà una ragione la metà, la terza parte, o la quarta parte di un' altra ragione, qualora la quantità della prima è la metà, la terza parte, o la quarta parte della metà della seconda.

406. Quindi intorno alle ragioni possono aversi come assiomi li seguenti teoremi. I, che le ragioni eguali ad

una

una terza ſiano eguali ancora tra di loro. II, che ſiano eguali parimente, così le ragioni, che ſono duple, triple, o quadruple di una terza, come le ragioni, che ſono la metà, la terza parte, o la quarta parte di una ſteſſa ragione. III, che ſe di due ragioni eguali una ſia maggiore, o minore di una terza ragione, l'altra debba eſſerne ancora maggiore, o minore. IV, che ſe di due ragioni diſuguali la minore ſia maggiore di una terza ragione, l'altra debba eſſerne molto maggiore. E V finalmente, che ſe di due ragioni diſuguali la maggiore ſia minore di una terza ragione, l'altra debba eſſerne molto minore.

407. Per poco poi, che ſi voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che ſiano aſſiomi altresì queſt'altri teoremi. I, che quantità eguali, paragonate con una terza, abbiano a quella la ſteſſa ragione. II, che una medeſima quantità, paragonata con due altre eguali, abbia a quelle la ſteſſa ragione. III, che, eſſendo due quantità diſuguali, la maggiore ad una terza abbia maggior ragione, che la minore. E IV finalmente, che una medeſima quantità, paragonata con due altre diſuguali, abbia maggior ragione alla minore, che alla maggiore.

408. Di questi quattro teoremi hanno luogo ancora li conversi, che similmente possono aversi, come tanti assiomi, e sono. I, che le quantità, le quali hanno ad una terza la stessa ragione, siano tra di loro eguali. II, che siano eguali parimente le quantità, a cui una terza ha la stessa ragione. III, che di due quantità quella sia maggiore, che ritrovasi avere ad una terza maggior ragione. E IV finalmente, che di due quantità quella sia minore, a cui una terza ritrovasi avere maggior ragione.

409. Prima di andare innanzi, notisi in questo luogo, che una ragione dicesi essere reciproca, ovvero inversa di un'altra ragione, quantevolte sono opposte tra di esse le loro quantità. Così, essendo 4, e $\frac{1}{4}$ numeri opposti, la ragione, che ha per quantità $\frac{1}{4}$, si dirà essere reciproca di quella, di cui la quantità è 4. E così ancora, essendo $\frac{5}{3}$, e $\frac{3}{5}$ numeri opposti, la ragione, che ha per quantità $\frac{3}{5}$ dovrà dirsi reciproca di quella, di cui la quantità è $\frac{5}{3}$. Onde si vede, che se due ragioni siano eguali, le loro reciproche debbano essere ancora eguali.

410. Una ragione poi dicesi composta da due, o più altre ragioni, sempre quando la sua quantità si ha, con

mol-

moltiplicare insieme le quantità di quell' altre ragioni. Così, essendo *6* il prodotto di 2 per 3, la ragione, che ha *6* per sua quantità, si dirà composta dalle due, le di cui quantità sono 2, e 3. E similmente, essendo 24 il prodotto di 2, 3, e 4, la ragione, che ha per quantità 24, dovrà dirsi composta dalle tre, di cui le quantità sono 2, 3, e 4. Onde si vede, che essendo le componenti di una ragione eguali alle componenti di un' altra ragione, ciascuna a ciascuna, le composte debbano essere ancora eguali.

411. Or siccome le quantità omogenee, qualora dividonsi in parti, che siano eguali ad un' aliquota loro comune, possono esprimersi con numeri; così, essendo espresse in questa guisa, potranno comporsi le loro ragioni, con moltiplicare insieme, tanto gl' antecedenti, quanto li conseguenti. In fatti, avendosi due ragioni, una di 4 a 2, e l' altra di 9 a 3, la loro composta sarà di 36 a *6*. E così parimente, avendosi tre ragioni, una di 4 a 2, l' altra di *6* a 2, e la terza di 8 a 2, la composta sarà di 192 a 8.

412. Per mezzo dell' espressioni numeriche delle quantità omogenee vedesi ancora, che avendosi una serie di più quantità omogenee, la ragione del-

la prima all' ultima ſia compoſta dalle ragioni della prima alla ſeconda, della ſeconda alla terza, e così conſecutivamente per ſino a che di nuovo giungaſi all' ultima. Così, ſe li numeri, per mezzo di cui eſprimonſi quattro quantità omogenee, ſiano 48, 24, 8, e 2; chiaro ſi è, che ſarà 48 a 2 in ragion compoſta di 48 a 24, di 24 a 8, e di 8 a 2.

413. Il teorema intanto, che merita ſpecial conſiderazione intorno alla ragion compoſta, ſi è, che ſe una ragione ſia compoſta da due altre ragioni, di cui una ſia reciproca dell' altra, la compoſta debba eſſere ragione di uguaglianza. Ed in fatti, eſſendo reciproche le due componenti, le loro quantità ſaranno oppoſte tra eſſo loro (409); e pertanto moltiplicate inſieme daranno per prodotto l' unità, che è la quantità della ragione di uguaglianza. Al contrario poi, ſe una ragione, compoſta da due altre ragioni, ſia di uguaglianza, le due componenti dovranno eſſere tra di loro reciproche.

414. Del rimanente, ſe una ragione ſia compoſta da due, o tre ragioni eguali, ſi dirà ella eſſere duplicata, o triplicata di ciaſcuna delle ſue componenti; onde ſarà una ragione duplicata, o triplicata di un' altra ragione,
ſem-

ſempre quando la quantità della prima è il quadrato, o il cubo della quantità della ſeconda. Ed eſſendo così egli è facile ad intenderſi, che ſiccome eſſendo eguali le ragioni ſemplici, debbano eſſere eguali altresì le ragioni loro duplicate, o triplicate; così al contrario eſſendo eguali le duplicate, o triplicate, ancora le ſemplici debbano eſſere eguali.

415. Or ſe ſi abbiano tre quantità omogenee, e la ragione dalla prima alla ſeconda ſia eguale alla ragione della ſeconda alla terza; chiaro ſi è, che la ragione della prima alla terza, come compoſta da quelle due ragioni eguali (412), debba eſſere duplicata di ciaſcuna di eſſe. Ma ſe poi le quantità omogenee ſiano quattro, e la ragione della prima alla ſeconda ſia eguale, così alla ragione della ſeconda alla terza, come alla ragione della terza alla quarta; in tal caſo la ragione della prima alla quarta, per eſſere compoſta da queſte tre ragioni eguali, ſarà triplicata di ciaſcuna di eſſe.

§. XXVIII.

Della natura, e proprietà della proporzione.

416. PEr proporzione intendono li Geometri l' uguaglianza di due ragioni; onde si è, che ella richiede quattro termini, di cui due sono gl' antecedenti delle due ragioni eguali, e gl' altri due li loro conseguenti. Può intanto sussistere la proporzione ancora in tre termini; e ciò avviene, quando quello di mezzo fa le veci di conseguente nella prima ragione, e di antecedente nell' altra. Una tal proporzione chiamasi continua, a differenza dell' altra, che ritrovasi tra quattro termini distinti, la quale appellasi discreta. Ma se bene in questa li primi due possano essere di una specie, e gl' altri due di un' altra; niente di meno nella continua tutti tre li termini debbono essere della stessa specie.

417. Or nelli termini di una proporzione possono farsi varj cambiamenti senza, che ella si alteri. Ed in primo luogo sussisterà la proporzione, se invertansi li suoi termini in modo, che gl' antecedenti faccians conseguenti, ed al contrario li conseguenti antecedenti.

denti. Onde, se le quattro quantità A, B, C, D siano proporzionali, dimodochè A sia a B, come C a D; invertendo dovrà essere ancora, come B ad A, così D a C.

418. Per intenderne la ragione, basta riflettere, che siccome tra due quantità omogenee possono considerarsi due ragioni, una della prima alla seconda, e l' altra della seconda alla prima; così, per essere opposte tra di loro le quantità di queste due ragioni, una di esse sarà reciproca dell' altra (409). Volendosi adunque, che la ragione di A a B sia eguale alla ragione di C a D; saranno eguali ancora l' altre due di B ad A, e di D a C, che sono le loro reciproche; e pertanto, essendo A a B, come C a D, invertendo dovrà essere ancora, come B ad A, così D a C.

419. In secondo luogo, se li termini di una proporzione siano tutti omogenei, ella sussisterà ancora, se permutandosi li suoi termini, paragonisi l' antecedente coll' antecedente, ed il conseguente col conseguente. Siano perciò A, B, C, D quattro quantità omogenee, e pongasi, che le medesime siano ancora proporzionali, dimodochè sia A a B, come C a D. Io dico, che permutando debba essere parimente, come l' antecedente A all' an-

tecedente C, così il conseguente B al conseguente D.

420. In fatti, siccome, per le tre quantità consecutive A, B, C, la ragione di A a C si compone dalle due di A a B, e di B a C; così (412), per l'altre tre B, C, D similmente consecutive, la ragione di B a D sarà composta dalla due di B a C, e di C a D. Ma le componenti della prima sono eguali alle componenti della seconda, ciascuna a ciascuna. Dunque ancora le due composte di A a C, e di B a D saranno eguali (410); e pertanto, essendo A a B, come C a D, permutando dovrà essere ancora, come A a C, così B a D.

421. In terzo luogo sussisterà tuttavia la proporzione, se congiungendosi gl'antecedenti colli loro rispettivi conseguenti, paragoninsi le loro somme cogli stessi conseguenti. Siano perciò proporzionali le quattro quantità A, B, C, D, dimodochè A sia a B, come C a D. Io dico, che componendo debba essere ancora, come A insieme con B a B, così C insieme con D a D.

422. Per intenderne la ragione basta riflettere, che siccome la ragione di due quantità eguali è ragione di uguaglianza, così con aggiungere all'ante-

tecedente di una ragione il suo conseguente, la quantità di essa aumentasi dell' unità. Essendo adunque eguali le quantità delle due ragioni di A a B, e di C a D, con aggiungere ad esse l' unità, saranno tutta via eguali; e pertanto, se A sia a B, come C a D, componendo dovrà essere ancora, come A insieme con B a B, così C insieme con D a D.

423. Ma nè pure alterasi la proporzione, se colle riferite somme si paragonino gli stessi antecedenti. Imperocchè, essendo A a B, come C a D; sarà invertendo come B ad A, così D a C (417). Onde, conforme componendo dee essere, come B insieme con A ad A, così D insieme con C a C; così invertendo di nuovo sarà A ad A insieme con B, come C a C insieme con D; ed una tal conseguenza, qualora se ne ha bisogno, potrà ricavarsi con far uso della stessa voce componendo.

424. Finalmente non soffrirà alterazione veruna la proporzione, se essendo gl' antecedenti maggiori dei loro conseguenti, tolgansi questi da quelli, e paragoninsi li residui colli stessi conseguenti. Siano perciò proporzionali le quattro quantità A, B, C, D, dimodochè A sia a B, come C a D, e siano

ſiano ancora li due antecedenti A, e C maggiori dei loro conſeguenti B, e D. Io dico, che dividendo debba eſſere parimente, come A minorato di B a B, così C minorato di D a D.

425. Per intenderne la ragione, quì ancora deeſi riflettere, che per eſſere di uguaglianza la ragione di due quantità eguali, qualora l' antecedente di una ragione minoraſi del ſuo conſeguente, la quantità di eſſa ſi viene a minorare dell' unità. Onde, eſſendo eguali le quantità delle due ragioni di A a B, e di C a D, con togliere da eſſe l' unità, reſteranno tutta via eguali; e pertanto, ſe A ſia a B, come C a D, dovrà eſſere ancora, come A minorato di B a B, così C minorato di D a D.

426. Ma nè tampoco alteraſi la proporzione; ſe colli riferiti reſidui ſi paragonino gli ſteſſi antecedenti; poichè ſecondo ſi dimoſtrerà da quì a poco, ſe A ſia a B, come C a D, e gl' antecedenti A, e C ſiano maggiori dei loro riſpettivi conſeguenti B, e D; dovrà eſſere ancora, come A ad A minorato di B, così C a C minorato di D; ed una tal conſeguenza, qualora ſe ne ha biſogno, potrà dedurſi con far uſo della ſteſſa voce dividendo, quan-

tumtunque per essa si avvalga Euclide di quella di convertendo.

427. Per dimostrare altre proprietà delle proporzioni, si vuol prima notare, che se vi siano più quantità tra di loro omogenee da un lato, ed altrettante similmente tra di esse omogenee dall' altro lato; si diranno le prime essere in ordinata ragione colle seconde, quante volte le consecutive ragioni di quelle sono eguali con ordine diretto alle consecutive ragioni di quest' altre; ma se poi le riferite ragioni siano eguali tra di loro con ordine contrario, in tal caso le prime colle seconde si diranno essere in ragion perturbata.

428. Per schiarire queste due definizioni con qualche esempio, siano A, B, C, D le quantità omogenee, che sono da un lato, ed E, F, G, H le quantità similmente omogenee, che sono dall' altro. Se adunque sia, come A a B così E ad F, come B a C così F a G, e come C a D così G ad H, le prime quantità A, B, C, D sono in ordinata ragione coll' altre E, F, G, H; ma se poi sia, come A a B così G ad H, come B a C così F a G, e come C a D così E ad F, in tal caso le stesse quantità saranno tra di loro in perturbata ragione.

429. Or tanto se le riferite quantità siano tra di esse in ordinata ragione, quanto se siano in perturbata ragione, egli è facile il dimostrare, che le prime coll' ultime debbano essere nella stessa ragione. In fatti, siccome la ragione di A a D è composta dalle tre di A a B, di B a C, e di C a D (412); così la ragione di E ad H si compone dalle tre altre di E ad F, di F a G, e di G ad H. Ma le componenti della prima sono eguali alle componenti della seconda, ciascuna a ciascuna. Dunque saranno eguali parimente le due ragioni composte; e pertanto A sarà a D, come E ad H.

430. Da ciò intanto può dedursi la verità di quel tanto è stato poc' anzi avvertito (426): cioè, che se A sia a B, come C a D, e gl' antecedenti A, e C siano maggiori dei loro conseguenti B, e D; debba essere ancora, come A ad A minorato di B, così C a C minorato di D. Imperocchè, essendo A a B, come C a D, sarà invertendo (417) B ad A, come D a C. Ma si è dimostrato, che A minorato di B sia a B, come C minorato di D a D (424). Dunque ordinando sarà, come A minorato di B ad A, così C minorato di D a C (129); ed in conseguenza invertendo di nuovo sarà, come A ad A mi-

minorato di B, così C a C minorato di D.

431. Può dedursi altresì, che li due modi di argomentare componendo di sopra dimostrati (421, 423) debbano aver luogo, qualunque sia il numero delle quantità proporzionali. Siano perciò le tre quantità A, B, C proporzionali coll'altre tre D, E, F, dimodochè sia, come A a B, così D ad E, e come B a C, così E ad F. Io dico primieramente, che la somma delle tre A, B, C sia a C, come la somma dell'altre tre D, E, F ad F.

432. In fatti, essendo A a B, come D ad E, sarà componendo (401), come A insieme con B a B, così D insieme con E ad E. Ma si vuole ancora, che B sia a C, come E ad F. Dunque ordinando sarà come A insieme con B a C, così D insieme con E ad F (429); e per tanto componendo di nuovo la somma delle tre A, B, C sarà a C, come la somma dell'altre tre D, E, F ad F.

433. Io dico in secondo luogo, che A sia alla somma delle tre A, B, C, come D alla somma dell'altre tre D, E, F. In fatti, essendo le tre A, B, C in ordinata ragione coll'altre tre D, E, F, sarà ordinando come A a C, così D ad F; ed in conseguenza invertendo, come

come C ad A, così F a D. Ma si è dimostrato, che la somma delle tre A, B, C sia a C, come la somma dell'altre tre D, E, F ad F. Dunque ordinando di nuovo sarà, come la somma delle tre A, B, C ad A, così la somma dell'altre tre D, E, F a D; e pertanto di nuovo invertendo sarà, come A alla somma delle tre A, B, C, così D alla somma dell'altre tre D, E, F.

434. Intorno alle proporzioni, di cui tutti i termini sono omogenei, meritano di esser dimostrate tre altre proprietà. La prima si è, che se si abbiano quattro quantità omogenee, e due di esse siano in data ragione coll'altre due; ancora la somma delle due prime alla somma dell'altre due debba essere nella stessa ragione. Siano perciò le quattro quantità omogenee A, B, C, D, e nella ragione di E ad F sia così A a C, come B a D. Io dico, che la somma delle due A, e B sia alla somma dell'altre due C, e D nella stessa ragione di E ad F.

435. Poichè tanto A a C, quanto B a D sta nella ragione di E ad F; sarà come A a C, così B a D; e permutando sarà ancora, come A a B, così C a D (419). Quindi, dovendo essere componendo, come la somma delle due

A, e

A, e B a B, così la somma dell'altre due C, e D a D (421); sarà di nuovo permutando, come la somma delle due A, e B alla somma dell' altre due C e D, così B a D; e per tanto, essendo B a D nella ragion di E ad F, ancora quelle due somme saranno nella stessa ragione.

436. Per poco intanto, che si voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che una tal proprietà debba aver luogo, qualunque sia il numero delle quantità omogenee; e perciò ella potrà proporsi più generalmente nel seguente modo, cioè, che se più quantità omogenee siano in data ragione con altrettante quantità eziandio omogenee, la somma delle prime alla somma dell'altre sia ancora nella stessa ragione, la qual proprietà così generalmente espressa è di grandissimo uso nelle ricerche geometriche.

437. La seconda proprietà si è, che se si abbiano quattro quantità omogenee, e due di esse siano in data ragione coll' altre due; ancora la differenza delle due prime debba essere alla differenza dell' altre due nella stessa ragione. Siano perciò di nuovo le quattro quantità omogenee A, B, C, D, e nella ragione di E ad F sia, così A a C, come B a D. Io dico, che la differen-

ferenza delle due A, e C debba essere alla differenza dell' altre due B, e D nella stessa ragione di E ad F. Per dimostrarlo, pongasi, che le due A, e C siano maggiori dell' altre due B, e D.

438. Poichè dunque, tanto A a C, quanto B a D sta nella ragione di E ad F; sarà, come A a C, così B a D; e permutando sarà ancora, come A a B, così C a D (419). Quindi, dovendo essere dividendo, come la differenza delle due A, e B a B, così la differenza dell' altre due C, e D a D (424); sarà di nuovo permutando, come la differenza delle due A, e B alla differenza dell' altre due C, e D, così B a D; e per tanto, essendo B a D nella ragione di E ad F, ancora quelle due differenze saranno nella stessa ragione.

439. La terza proprietà si è, che due quantità omogenee siano nella stessa ragione, così colle loro aliquote simili, come colli loro moltiplici simili. Siano perciò A, e B le due quantità omogenee, di cui siano l'altre due C, e D, o aliquote simili, o moltiplici simili. Io dico, che A sia a B, come C a D. In fatti, per la nozione stessa così dell' aliquote simili, come dei moltiplici simili, quanto A contiene di C, al-

altrettanto B conterrà di D. Onde, dovendo essere A a C, come B a D; sarà permutando (419) come A a B, così C a D.

440. La quarta, ed ultima proprietà si è, che essendo proporzionali quattro quantità omogenee, la massima, e la minima insieme siano maggiori dell' altre due. Intanto per dimostrarla, si vuol prima avvertire, che siccome per la natura stessa della proporzione non può la prima essere eguale, maggiore, o minore della seconda, se ancora la terza non sia eguale, maggiore, o minore della quarta; così, attenta la conseguenza del modo di argomentare permutando, nè pure la prima potrà essere eguale, maggiore, o minore della terza, se ancora la seconda non sia eguale, maggiore, o minore della quarta.

441. Ciò avvertito, siano ora proporzionali le quattro quantità omogenee A, B, C, D; e supposto, che A sia la massima, per l' avvertimento fatto, dovrà essere D la minima. Poichè dunque A sta a B, come C a D, sarà dividendo, come la differenza delle due A, e B a B, così la differenza dell' altre due C, e D a D (424); e pertanto, essendo B maggiore di D, sarà la differenza delle due A, e B maggiore ancora della differenza dell'

altre

altre due C, e D. Ma, con aggiungere a queste differenze tanto B, quanto D, la prima diventa somma delle due A, e D, e la seconda somma delle due B, e C. Dunque ancora la somma delle due A, e D, cioè della massima, e della minima sarà maggiore della somma dell' altre due B, e C.

§. XXIX.

Delle proporzioni, che possono aversi colli lati, così degl' angoli, come de' triangoli.

442. COlli lati, così degl' angoli, come de' triangoli possono aversi varie proporzioni, che sono di grandissimo uso nelle ricerche geometriche. Il teorema fondamentale, da cui esse derivano, si è il seguente: cioè, che se un lato di un' angolo sia diviso in quante si vogliano parti eguali, e per gli punti della divisione tirinsi rette parallele alla base dell' angolo, che s' incontrino coll' altro lato; ancora quest' altro lato sarà diviso in altret-
Fig. tante parti eguali. Sia perciò l' angolo
109. BAC, il di cui lato AB sia diviso nelle parti eguali AD, DE, EB. Tirinsi per gli punti della divisione D,

ed

ed E le rette DF, EG parallele alla base dell' angolo BC, che s' incontrino coll' altro lato AC ne' punti F, e G. Io dico, che le parti AF, FG, GC di quest' altro lato, siano parimente eguali.

443. Per dimostrarlo, tirinsi per gl' altri punti F, e G le rette FH, GI parallele al lato AB. Essendo adunque DH, EI parallelogrammi, saranno eguali, così le due DE, FH, come le due EB, GI (143); ed in conseguenza, per la supposta uguaglianza delle parti AD, DE, EB, saranno eguali ancora li lati AD, FH, GI dei triangoli ADF, FHG, GIC. Ma, per le parallele tirate, questi triangoli hanno gl' angoli eguali agl' angoli, ciascuno a ciascuno, ed i lati loro eguali AD, FH, GI sono opposti ad angoli eguali. Dunque, dovendo li medesimi essere perfettamente eguali (134), saranno gli altri loro lati AF, FG, GC parimente eguali.

444. Or per mezzo di questo teorema egli è facile ora il dimostrare, che se in un' angolo tirisi una retta parallela alla sua base, questa retta debba dividere proporzionalmente li due lati dell' angolo. Sia perciò l' angolo *Fig.*
BAC, in cui tirisi la retta DE paral- 110.
lela alla sua base BC, che s' incontri colli

colli due lati AB, AC ne' punti D, ed E. Io dico, che gli stessi lati siano divisi proporzionalmente in questi punti, dimodochè sarà AD a DB, come AE ad EC. Per dimostrarlo, concepiscansi divise le due AD, DB in parti eguali all' aliquota loro comune, qualunque ella sia; e per gli punti della divisione intendansi ancora tirate rette parallele alla BC ovvero DE.

445. Dovendo adunque per mezzo di queste parallele rimaner divise l' altre due AE, EC eziandio in parti eguali, sarà ciascuna di quest' altre parti aliquota comune ancora delle due AE, EC. Ma in quante parti sono divise le prime due AD, DB, in altrettante restano divise altresì l' altre due AE, EC. Dunque, se le moltitudini delle parti, contenute nelle due AD, AE, dividansi per le moltitudini delle parti, contenute nell' altre due DB, EC; saranno eguali li quozienti di queste due divisioni; e per tanto, essendo questi quozienti le quantità delle due ragioni di AD a DB, e di AE ad EC (402), saranno eguali ancora tra di loro queste due ragioni; con che AD sarà a DB, come AE ad EC.

446. Negativamente intanto può dimostrarsi ancora il converso di questo teorema, cioè, che se li lati di un'angolo

golo siano divisi proporzionalmente da una retta, debba essere questa retta parallela alla base dell' angolo. Pongasi perciò, che li lati AB, AC dell'angolo BAC siano divisi dalla retta DE proporzionalmente ne' punti D, ed E, dimodochè sia AD a DB, come AE ad EC; e se si niega, che la DE sia parallela alla base BC, tirisi per lo punto D la DF parallela alla BC. Dovendo adunque essere AD a DB, come AF ad FC (444), ed essendosi supposto, che AD sia a DB, come AE ad EC; sarà AE ad EC, come AF ad FC (406); e pertanto componendo sarà ancora AC ad EC, come AC ad FC (421). Onde, avendo la AC la stessa ragione alla EC, che alla FC, dovrebbero essere eguali le due EC, FC (408), il che non può aver luogo. *Fig.* 110.

447. Ma qualunque sia il numero delle rette, che tiransi in un angolo parallele alla sua base, sempre li lati dell' angolo dovranno essere divisi proporzionalmente da queste rette. Tirinsi perciò nell' angolo BAC due rette parallele alla sua base BC, e siano DE, FG, le quali incontrinsi col lato AB ne' punti D ed F, e col lato AC ne' punti E, e G. Io dico, che le parti del primo lato AD, DF, FB siano in ordinata ragione colle parti dell' altro *Fig.* 111.

lato AE, EG, GC, dimodochè sarà, come AD a DF, così AE ad EG, e come DF ad FB, così EG a GC.

448. Per dimostrarlo, tirisi per lo punto E la retta EHI parallela al lato AB, che s' incontri colla FG nel punto H, e colla BC nel punto I. Poichè dunque nell' angolo CEI sta tirata la GH parallela alla sua base CI, sarà EH ad HI, come EG a GC (444). Ma, per gli parallelogrammi DH, FI, sono eguali così le due EH, DF, come le due HI, FB (143). Dunque sarà ancora, come DF ad FB, così EG a GC; e per tanto, conforme per l'altro angolo FAG, alla di cui base FG sta tirata la parallela DE, dee essere altresì AD a DF, come AE ad EG, così le tre AD, DF, FB saranno in ordinata ragione coll'altre tre AE, EG, GC.

449. Ancora di ciò può dimostrarsi il converso, anzi con dimostrazione positiva, e non già negativa, cioè, che se due, o più rette dividano proporzionalmente li lati di un' angolo, ciascuna di esse debba essere parallela al-
Fig. la base. Li lati perciò AB, AC
111. dell' angolo BAC siano divisi proporzionalmente dalle due rette DE, FG. Io dico, che tanto l' una, quanto l' altra sia parallela alla base BC. Poichè

chè si vuole, che AD sia a DF, come AE ad EG; sarà componendo, come AF a DF, così AG ad EG (421). Ma si vuole ancora, che DF sia ad FB, come EG a GC. Dunque ordinando sarà, come AF ad FB, così AG a GC (429).

450. Quindi, per essere li lati AB, AC dell'angolo BAC divisi dalla retta FG proporzionalmente ne' punti F, e G, dovrà essere la GF parallela alla sua base BC (446). Ma, essendo AD a DF, come AE ad EG, ancora nell'angolo FAG l'altra retta DE divide proporzionalmente li lati AF, AG ne' punti D, ed E. Dunque, dovendo essere la DE parallela alla FG, saranno parallele ancora le due DE, BC (89).

451. Intorno all'angolo può dimostrarsi un'altro teorema, con cui similmente si hanno rette proporzionali; e si è, che se un'angolo qualsivoglia dividasi in due parti eguali per una retta, questa incontrandosi colla base la dividerà nella stessa ragione, in cui sono li lati. Sia perciò l'angolo BAC, *Fig.*
il quale dividasi in due parti eguali per 112.
la AD, che s'incontri colla base BC nel punto D. Io dico, che la porzione BD sia all'altra DC, come il lato AB al lato AC. Per dimostrarlo, tirisi per lo punto C la retta CE parallela alla

 DA,

DA, che s' incontri col lato B A prolungato nel punto E.

452. Essendo adunque parallele le due DA, CE, sarà così l'angolo BAD eguale all'angolo AEC (87), come l'angolo CAD eguale all'angolo ACE (86). Onde, conforme sono eguali li due angoli BAD, CAD, così saranno eguali ancora gl' altri due AEC, ACE. Quindi, facendosi eguali le due A C, AE (107), sarà BA ad AC, come la stessa BA ad AE (407). Ma, per essere la DA parallela alla CE, BA sta ad AE, come BD a DC. Dunque sarà ancora, come BD a DC, così BA ad AC; e pertanto la base dell' angolo BC sarà divisa dalla A D nella ragione de' lati AB, AC.

453. Il converso di questo teorema similmente ha luogo, cioè, che se dal vertice di un' angolo tirisi una retta in modo, che divida la base nella ragion de' lati, la stessa retta dividerà l'angolo in parti eguali. Perciò dal vertice
Fig. 112. A dell' angolo BAC tirisi la A D in modo, che incontrandosi colla base BC nel punto D faccia, che la porzione BD sia all' altra DC, come il lato AB al lato AC. Io dico, che la stessa AD dividerà l' angolo BAC per metà, dimodochè saranno eguali tra di loro li due angoli BAD, CAD.

454. Per dimostrarlo, tirisi quì ancora la CE parallela alla DA, che incontrisi col lato BA prolungato nel punto E. Essendo adunque la DA parallela alla CE, sarà BA ad AE, come BD a DC (444). Ma si vuole, che BD sia a DC, come BA ad AC. Dunque BA sarà ad AE, come la stessa BA ad AC (406); e per tanto, facendosi eguali le due AE, AC (408), saranno eguali parimente li due angoli ACE, AEC (104). Or, per le stesse parallele DA, CE, dee essere così l'angolo ACE eguale all'angolo CAD (86), come l'angolo AEC eguale all'angolo BAD (87). Dunque saranno eguali ancora li due angoli CAD, BAD; ed in conseguenza tutto l'angolo BAC sarà diviso per metà dalla AD.

455. Per venire ora alle proporzioni, che possono aversi colli lati de' triangoli, debbonsi dimostrare quattro teoremi. Il primo si è, che se due triangoli siano equiangoli, debbano essere proporzionali li lati, che sono intorno agl' angoli eguali, e quelli lati essere omologi, cioè corrispondersi nella proporzione come antecedenti, e come conseguenti, che sono opposti ad angoli eguali. Siano perciò equiangoli li due *Fig.* triangoli ABC, DCE, dimodochè sia 113. l'angolo BAC eguale all'angolo CDE,

 l'an-l'angolo ABC eguale all'angolo DCE, ed il rimanente BCA eguale al rimanente CED.

456. Dee dimostrarsi adunque, che colli lati di questi due triangoli si abbiano tre proporzioni, di cui la prima si è, che AB sia a BC, come DC a CE; la seconda, che BC sia a CA, come CE ad ED; e la terza, che CA sia ad AB, come ED a DC, colle quali proporzioni non solo saranno proporzionali li lati, che sono intorno agl' angoli eguali, ma quelli lati saranno altresì omologi, che sono opposti ad angoli eguali.

457. Per dimostrarlo, situinsi li due triangoli in modo, che li due lati BC, CE formino una retta continuata; indi distendansi gl' altri due BA, ED per fino a che s' incontrino tra di loro nel punto F. Siccome adunque, per l' uguaglianza delli due angoli ABC, DCE, debbono essere parallele le due FB, DC (81); così per l' uguaglianza degl' altri due ACB, CED, saranno parallele l' altre due FE, AC; e per tanto, essendo CF parallelogrammo, saranno eguali, così le due AF, DC, come l' altre due DF, AC.

458. Or, poichè nell' angolo BFE sta tirata la AC parallela alla sua base FE, sarà AB ad AF, ovvero DC, come

BC

BC a CE (444); e pertanto permutando farà AB a BC, come DC a CE (419), che è la prima proporzione. Per la stessa ragione, ritrovandosi nell' altro angolo BEF tirata la DC parallela alla sua base FB, dovrà essere BC a CE, come FD ovvero AC a DE; ed in conseguenza permutando BC farà a CA, come CE ad ED, che è la seconda proporzione. Finalmente, essendo le tre AB, BC, CA in ordinata ragione coll' altre tre DC, CE, ED, dovrà essere ordinando AB a CA, come DC ad ED (429); e pertanto invertendo CA farà ad AB, come ED a DC (417), che è la terza proporzione.

459. Il secondo teorema è il converso del precedente, cioè, che se due triangoli abbiano li lati proporzionali, li medesimi debbano essere equiangoli, e quegl' angoli farsi eguali, che sono opposti a lati omologi. Siano perciò li *Fig.* due triangoli ABC, DEF, li quali ab- 114. biano li lati proporzionali, dimodochè sia, come AB a BC, così DE ad EF, e come BC a CA, così EF ad FD. Io dico, che questi due triangoli siano equiangoli, e che quegl' angoli facciansi eguali, che sono opposti a'lati omologi.

460. Per dimostrarlo, su 'l lato EF

del secondo triangolo, facciasi così l'angolo FEG eguale all' angolo ABC, come l' angolo EFG eguale all' angolo BCA; ed incontrandosi le due EG, FG nel punto G, saranno eguali ancora li due angoli BAC, EGF. Essendo adunque equiangoli li due triangoli ABC, GEF, sarà primieramente AB a BC, come GE ad EF (455). Ma si vuole, che AB sia a BC, come DE ad EF. Dunque sarà ancora, come GE ad EF, così DE alla stessa EF (406); e per tanto le due GE, DE saranno tra di loro eguali (408).

461. Per gli stessi triangoli equiangoli ABC, GEF sarà in oltre BC a CA, come EF ad FG. Onde, volendosi, che BC sia a CA, come EF ad FD; sarà ancora, come EF ad FG, così la stessa EF ad FD; e per tanto saranno eguali parimente le due FG, FD. Quindi, avendo li due triangoli GEF, DEF li lati eguali ai lati, ciascuno a ciascuno, saranno eguali eziandio li loro angoli, opposti a' lati eguali (126); ed in conseguenza il triangolo ABC, come equiangolo col triangolo GEF, sarà equiangolo ancora coll' altro DEF, e quegl' angoli saranno eguali, che sono opposti a' lati omologi.

462. Il terzo teorema si è, che se due

due triangoli abbiano due lati proporzionali a due lati, ed eguali altresì gl' angoli contenuti da questi lati; li medesimi debbano essere equiangoli, e farsi eguali quegl' angoli, che sono opposti a' lati omologi. Siano perciò li *Fig.*
due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati AB, AC proporzionali ai lati DE, DF, ed abbiano ancora l'angolo BAC eguale all' angolo EDF, che sono contenuti da detti lati. Io dico, che debbano essere eguali parimente, tanto gl' angoli ACB, DFE opposti ai lati omologi AB, DE, quanto gl' angoli ABC, DEF opposti agl' altri lati omologi AC, DF. 115.

463. Per dimostrarlo, facciasi su 'l lato DF, così l' angolo FDG eguale all' angolo EDF, ovvero BAC, come l' angolo DFG eguale all' angolo ACB (43). Incontrandosi adunque le due DG, FG nel punto G, sarà l' angolo DGF eziandio eguale all' angolo ABC; e pertanto, essendo equiangoli li due triangoli DGF, ABC, sarà DG a DF, come AB ad AC (455). Ma si vuole, che AB sia ad AC, come DE a DF. Dunque sarà ancora DG a DF, così DE alla stessa DF (406). Quindi, facendosi eguali le due DG, DE (408), saranno perfettamente eguali li due triangoli DGF, DEF; ed in conseguenza

il triangolo ABC, come equiangolo col primo di essi DGF, sarà equiangolo ancora coll' altro DEF.

464. Il quarto, ed ultimo teorema si è, che se due triangoli abbiano due lati proporzionali a due lati, e degl'angoli opposti ai lati omologi due siano eguali, e due altri della stessa specie, cioè o ambidue acuti, o ambidue ottusi; li medesimi debbano essere equiangoli, e farsi eguali così li due angoli della stessa specie, come gl' altri
Fig. due rimanenti. Siano perciò li due tri-
116. angoli ABC, DEF, li quali abbiano li lati AB, AC proporzionali ai lati DE, DF, e degl' angoli opposti a questi lati li due ABC, DEF siano eguali, e gl' altri due ACB, DFE siano della stessa specie. Io dico, che debbano essere eguali ancora, tanto questi due angoli, quanto gl' altri due rimanenti BAC, EDF.

465. Se non vogliasi concedere, che li due angoli BAC, EDF siano eguali, sia il primo di essi BAC maggiore dell' altro EDF. Facendosi adunque l'angolo BAG eguale all' angolo EDF, saranno equiangoli li due triangoli ABG, DEF; e pertanto AB sarà ad AG, come DE a DF (455). Quindi, essendosi supposto, che AB sia ad AC, come DE a DF; sarà altresì AB ad AC;

AC, come la stessa AB ad AG (406); ed in conseguenza, facendosi eguali le due AC, AG (408), saranno eguali ancora li due angoli AGC, ACG (104); con che eziandio l'angolo AGC sarà della stessa specie coll'angolo DFE, ovvero col suo eguale AGB. Ma ciò non può aver luogo, per essere li due angoli AGC, AGB insieme eguali a due retti (60). Dunque non è egli vero, che l'angolo BAC sia maggiore dell' angolo EDF; e per tanto così essi, come gl'altri due ACB, DFE saranno tra di loro eguali.

466. Del rimanente, se un triangolo sia rettangolo, e dall'angolo retto si abbassi sull'ipotenusa la perpendicolare, s'incontreranno in esso sei proporzioni, di cui tre sono discrete, e tre altre continue; e ciò per la ragione, che la perpendicolare abbassata divide il triangolo in due altri triangoli rettangoli, equiangoli così tra di loro, come coll'intero triangolo. In fatti, *Fig.*
se ABC sia un triangolo rettangolo in 117.
A, e da quest'angolo si abbassi sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD; chiaro si è, che così li due triangoli rettangoli ABC, ABD, come li due ABC, ACD abbiano un'angolo acuto comune. Onde, dovendo tanto questi, quanto quelli essere equiangoli, saran-

no equiangoli ancora li due ABD, ACD.

467. Dall' essere dunque equiangoli li due triangoli ABD, ACD ricavansi tre proporzioni, e sono I, che AB sia ad AD, come AC a CD; II, che AC sia ad AD, come AB a BD; e III, che BD sia ad AD, come AD a CD. Onde, siccome colle prime due può stabilirsi il seguente teorema, cioè, che ciascuno dei due lati sia alla perpendicolare abbassata, come l' altro lato alla porzione dell' ipotenusa contigua a quest' altro lato; così colla terza si avrà quest' altro teorema, che la perpendicolare abbassata sia mezza proporzionale tra le due porzioni dell' ipotenusa.

468. Dall'esser poi l'intero triangolo ABC equiangolo con ciascuno dei due ABD, ACD deduconsi tre altre proporzioni, e sono I, che BC sia ad AB, come AB a BD; II, che BC sia ad AC, come AC a CD; e III, che BC sia ad AB, come AC ad AD. Onde, siccome le prime due riduconsi al seguente teorema, cioè, che ciascuno dei due lati sia mezzo proporzionale tra l' ipotenusa, e la porzione di essa contigua allo stesso lato; così colla terza si avrà quest' altro teorema, che l' ipotenusa sia ad uno dei due lati, come

come l' altro lato alla perpendicolare abbassata sulla stessa ipotenusa.

§. XXX.

Della risoluzione di alcuni problemi intorno alle rette proporzionali.

469. RIsolveremo ora alcuni problemi intorno alle rette proporzionali, di cui spesso in appresso dovrà farsi uso. Ed in primo luogo faremo vedere, come date tre rette possa ritrovarsi la quarta proporzionale, cioè una retta, che formi con quelle tre proporzione discreta. Siano dunque AB, BC, AD le tre rette date. Situinsi le *Fig.*
prime due AB, BC in modo, che formino una retta continuata; indi al punto A adattisi la terza AD, che faccia colla AC un' angolo qualsivoglia; congiungasi di poi la BD, a cui tirisi per lo punto C la parallela CE (93), che s' incontri colla AD prolungata nel punto E; ed io dico, che la DE sia la quarta proporzionale ricercata: il che è chiaro; poichè essendo la BD parallela alla CE, che è base dell' angolo CAE, dovrà essere AB a BC, come AD a DE (444). 118.

470. Faremo vedere in secondo luogo, come date due rette possa ritrovarsi

varsi la terza proporzionale, cioè una terza retta, che faccia con quelle due proporzione continua. Siano perciò AB, BC le due rette date, le quali congiungansi in modo, che formino insieme una retta continuata. Tirisi dal
Fig. punto A un'altra retta, come AE,
118. che faccia colla AB un'angolo qualsivoglia; indi taglisi da quest'altra retta la porzione AD eguale alla seconda retta data BC; congiungasi in appresso la BD, a cui tirisi per lo punto C la parallela CE, che s'inconrri colla AE nel punto E; ed io dico, che la DE sia la terza proporzionale ricercata: il che similmente è chiaro; poichè, dovendo essere AB a BC, come AD a DE, ed essendo eguali le due AD, BC, sarà ancora AB a BC, come la stessa BC a DE.

471. Faremo vedere in terzo luogo, come date due rette possa ritrovarsi la mezza proporzionale, cioè un'altra retta, che posta in mezzo alle due date faccia con quelle proporzione
Fig. continua. Siano perciò AB, BC le due
119. rette date, le quali situinsi in modo, che formino insieme una retta continuata. Dividasi la AC in due parti eguali nel punto D; indi col centro D, e coll' intervallo della DA, ovvero DC descrivasi sulla stessa AC il mezzo

cer-

cerchio AEC; alzisi di poi dal punto B sulla medesima AC la perpendicolare BE, che s' incontri colla circonferenza del mezzo cerchio nel punto E; ed io dico, che la BE sia la mezza proporzionale ricercata.

472. Per dimostrarlo, congiungansi le due AE, CE. E poichè l'angolo AEC, come situato nel mezzo cerchio, è retto (336), sarà il triangolo ACE rettangolo in E. Ma la BE è una perpendicolare abbassata sull'ipotenusa AC dall' angolo retto. Dunque, dovendo ella essere mezza proporzionale tra le due porzioni dell' ipotenusa AB, BC (467), si avrà con essa la mezza proporzionale ricercata, la quale potrebbe ritrovarsi ancora in un' altro modo, cioè con far uso dell' altra proprietà del triangolo rettangolo, di essere ciascuno de' suoi lati mezzo proporzionale tra l'ipotenusa, e la porzione contigua allo stesso lato.

473. Notisi quì intanto, che se bene sia determinato il problema, di ritrovare una retta, che posta in mezzo a due altre rette date formi con esse una proporzione continua; nientedimeno, se si dovessero ritrovare due rette, che situate in mezzo a due altre rette date formino con queste una proporzione discreta, il problema sarebbe indetermi-

minato, per essere infinite le rette, che soddisfar possono alla sua dimanda: come in fatti, se A, e B siano le due rette date, e prendasi ad arbitrio la retta C per la prima delle due, che si cercano, si avrà l'altra retta, con ritrovare la quarta proporzionale dopo le tre C, A, B (469); poichè supposto, che questa sia D, sarà C ad A, come B a D; e pertanto invertendo A sarà a C, come D a B (417).

474. Ed in vero, con ritrovare tra due rette date la mezza proporzionale, non si fa altra cosa, se non che tra l' infinite rette, che situate in mezzo alle due date formano con esse proporzione discreta, scegliere quelle due, che sono eguali tra di loro, dimodochè la stessa uguaglianza rende determinato il problema della mezza proporzionale. Onde, se le due rette, che si dimandano, dovessero adempiere qualche altra condizione apposta nel problema, come per ragion di esempio di essere la loro differenza, o la loro somma eguale ad un'altra retta data, riceverebbe senza dubbio il problema la sua determinazione.

475. Faremo vedere perciò in quarto luogo, come possano ritrovarsi due rette, di cui sia data la differenza, e che situate in mezzo a due altre ret-

te date formino con esse proporzione discreta. Siano adunque A, e B le due rette date, e sia DE la differenza delle due, che si dimandano. Ritrovisi la mezza proporzionale tra le due rette date A, e B, che sia C (471); indi distendasi la DE talmente per fino al punto F, che il rettangolo delle due DF, EF sia eguale al quadrato della mezza proporzionale ritrovata C (223); ed io dico, che le stesse due DF, EF, differenti tra di loro per la DE, siano le due rette ricercate. *Fig.* 120.

476. Per dimostrarlo, descrivasi sulla DE il mezzo cerchio DGE, a cui tirisi dal punto F la tangente FG, e congiungansi le due DG, EG. Dovendo adunque essere il rettangolo delle due DF, EF eguale al quadrato della tangente FG (353), saranno eguali tra di loro la retta C, e la tangente FG; e per tanto la retta A sarà alla FG, come la stessa FG alla retta B. Ma per essere l' angolo FGE eguale all'angolo GDE (338), sono equiangoli li due triangoli FGD, FEG, ed in conseguenza la FG sta alla DF, come la EF alla stessa FG (455). Dunque, essendo le tre rette A, FG, DF in perturbata ragione coll' altre tre EF, FG, B, sarà perturbando A a DF, come EF a B (429).

477. Faremo vedere in quinto luogo, come possano ritrovarsi due rette, di cui sia data la somma, e che situate in mezzo a due altre rette date formino con esse proporzione discreta.
Fig. Siano perciò A, e B le due rette date,
121. e sia DE la somma delle due, che si dimandano. Ritrovisi tra le due rette date A, e B la mezza proporzionale, che sia C (471); indi dividasi la DE talmente nel punto F, che il rettangolo delle due DF, EF sia eguale al quadrato della mezza proporzionale ritrovata C (225); ed io dico, che le stesse due DF, EF, la di cui somma è la DE, siano le due rette ricercate.

478. Per dimostrarlo, descrivasi sulla DE il mezzo cerchio DGE, ed alzata su di essa la perpendicolare FG, che s' incontri colla circonferenza del mezzo cerchio nel punto G, congiungansi le due DG, EG. Dovendo adunque essere per lo triangolo DEG rettangolo in E, il rettangolo delle due DF, EF eguale al quadrato della FG, saranno le due C, ed FG eguali tra di loro; e per tanto la retta A sarà alla FG, come la stessa FG alla retta B. Ma per lo stesso triangolo rettangolo la FG sta alla DF, come la EF alla medesima FG. Dunque essendo le tre rette A, FG, DF in perturbata ragione

ne

ne coll'altre tre EF, FG, B; sarà perturbando A a DF, come EF a B (429).

479. Or si è avvertito altrove (226), non potersi una data retta dividere talmente, che il rettangolo delle due sue porzioni sia eguale al quadrato di un'altra retta data, se quest'altra retta data, non sia o minore, o pure eguale alla metà della prima. Onde ancora il proposto problema non potrà risolversi, se la mezza proporzionale C, che cade tra le due rette date A, e B, non sia minore, o pure eguale alla metà della DE, cioè della somma delle due, che si dimandano. E poichè nel caso di esserle eguale, si fanno eguali tra di loro le due rette ricercate; perciò ricaderà il problema in quello della mezza proporzionale.

480. Del rimanente si è stimato di risolvere li due riferiti problemi per la ragione, che così ad essi, come a quello della mezza proporzionale riduconsi tutti gl'altri problemi geometrici, che dagl'antichi Geometri chiamavansi problemi piani. Ed egli è da notarsi, che essendo proporzionali quattro rette, come A, B, D, E le due estreme A, ed E diconsi essere reciproche colle due di mezzo B, e D, in quanto che, paragonandosi quelle con queste, formansi due

due ragioni, di cui una è reciproca dell' altra; e la proprietà delle rette reciproche si, è di avere una stessa mezza proporzionale.

481. In fatti, se C sia la mezza proporzionale, che cade tra le due B, e D, questa stessa sarà mezza proporzionale eziandio tra le due A ed E. Imperocchè, essendo B a C, come C a D, ed essendo altresì A a B, come D ad E; saranno le tre A, B, C in perturbata ragione coll' altre tre C, D, E; ed in conseguenza perturbando sarà B a C, come C a D (429). Al contrario poi, se la stessa C sia mezza proporzionale, tanto tra le due A, e D, quanto tra le due B, e D; potrà dimostrarsi in una maniera consimile, che le prime due A, ed E siano reciproche coll' altre due B, e D.

482. Ma per venire ad altri problemi utili in questa scienza, faremo vedere in sesto luogo, come possa dividersi talmente una retta data, che la medesima colle due sue porzioni formi
Fig. proporzione continua. Sia perciò AB
122. la retta data, la quale dividasi nel punto C in modo, che il rettangolo della tutta AB nella porzione minore BC sia eguale al quadrato della porzione maggiore AC (227). Io dico, che con una tal divisione debba essere, come la

tutta

tutta A B alla porzione maggiore A C, così questa stessa A C all' altra minore B C.

483. Per dimostrarlo, descrivasi sulla porzione maggiore AC il mezzo cerchio ADC, a cui tirisi dal punto B la tangente BD, e congiunganssi le due AD, CD. Essendo adunque per ragion della tangente BD l' angolo BDC eguale all' angolo CAD (338), saranno equiangoli li due triangoli ABD, DBC; e pertanto AB sarà a BD, come BD a BC (455). Ma, per essere il rettangolo delle due AB, BC eguale al quadrato della tangente BD (353), questa tangente si fa eguale alla porzione maggiore AC, il di cui quadrato similmente è eguale a quel rettangolo. Dunque la tutta AB sarà alla porzione maggiore AC, come questa stessa AC all' altra minore BC.

484. Qualora dividesi una retta talmente, che la tutta sia alla porzione maggiore, come questa stessa porzione all' altra minore; la retta dicesi divisa in estrema, e media ragione. Ma, conforme si ha una tal divisione, con dividere la retta in modo, che il rettangolo della tutta nella porzione minore sia eguale al quadrato dell' altra maggiore; così egli è facile il dimostrare, che al contrario, essendo divisa

la

la retta in estrema, e media ragione, questo rettangolo, e questo quadrato debbano essere eguali.

Fig. 122. 485. Sia perciò la AB divisa in estrema e media ragione nel punto C, e sulla porzione maggiore AC descrivasi il mezzo cerchio ADC, a cui tirisi dal punto B la tangente BD, e congiungansi le due AD, CD. Facendosi adunque equiangoli li due triangoli ABD, DBC, sarà AB a BD, come BD a BC (455); e pertanto, essendo mezza proporzionale tra le due AB, BC non meno la BD, che la AC, saranno eguali le due AC, BD. Ma, per essere la BD tangente, il rettangolo delle due AB, BC è eguale al quadrato della BD (353). Dunque lo stesso rettangolo sarà eguale parimente al quadrato della AC.

486. Se una retta, come AB, sia divisa in estrema, e media ragione nel punto C, potrà dividersi colla stessa legge qualsisia altra retta DE, con fare, che la DF sia quarta proporzionale dopo le tre AB, AC, DE. In fatti, essendo
Fig. 123. DE a DF, come AB ad AC, sarà dividendo (424) EF a DF, come BC ad AC, o pure come AC ad AB. Ma, con invertere li termini della prima proporzione, AC sta ad AB, come DF a DE (417). Dunque sarà EF a DF,

a DF, come DF a DE (406); e pertanto la DE sarà divisa in estrema, e media ragione nel punto F.

487. Quindi, se due rette, come AB, DE siano divise in estrema, e media ragione ne' punti C, ed F, le medesime saranno divise ancora proporzionalmente negli stessi punti. In fatti, se AB non sia ad AC, come DE a DF, facciasi, che AC sia ad AB, come DE a DG (469), la quale DG sia maggiore della DF. Dovendo adunque la DE esser divisa in estrema, e media ragione ancora nel punto G (486), sarà non solo DE a DF, come DF ad EF, ma eziandio DE a DG, come DG ad EG. Onde, conforme DE a DF ha maggior ragione, che DE a DG (407); così ancora DF ad EF avrà maggior ragione, che DG ad EG (406), il che non può essere; poichè la ragione di DF ad EF, come minore della ragione di DF ad EG, dee essere molto minore della ragione di DG ad EG. *Fig.* 123.

488. Faremo vedere finalmente, come possa dividersi una data retta in modo, che le parti di essa siano proporzionali alle parti di un' altra retta divisa. Sia perciò AB la retta divisa nelle parti AC, CD, DB, e sia AE l'altra retta data, che deesi dividere. *Fig.* 124.

Si-

Situinſi le due rette AB, AE talmente, che contengano un' angolo qualſivoglia BAE. Indi, congiunta la BE, tirinſi per gli punti C, e D le rette CF, DG parallele alla BE, che s' incontrino colla AE ne' punti F, e G; e per quel tanto è ſtato di ſopra (447) dimoſtrato, le parti AF, FG, GB della AE ſaranno proporzionali alle parti AC, CD, DB dell' altra AB.

489. Or ſe le parti AC, CD, DB della AB ſiano eguali, dovranno eſſere eguali ancora le parti AF, FG, GE dell' altra AE; onde niente ſarà più facile, quanto di dividere una data retta in un dato numero di parti
Fig. eguali. Sia perciò AE la data retta,
124. la quale debbaſi dividere a cagion di eſempio in tre parti eguali. Tiriſi dal punto A un' altra retta AB, che contenga colla AE un' angolo qualſivoglia BAE. Indi, preſa su di eſſa ad arbitrio la porzione AC, facciaſi eguale a queſta porzione, così l'altra CD, come la terza DB. Congiungaſi di poi la BE, a cui per gli punti C, e D tirinſi le parallele CF, DG; e le tre parti AF, FG, GE, in cui rimane diviſa la AE da queſte parallele, ſaranno eguali tra di loro.

490. Se poi la AE ſia di picciola lunghezza, ed all' incontro il numero delle

delle parti eguali, in cui ella dee dividersi, sia così grande, che non possano segnarsi in essa con distinzione; si potranno avere le sue parti eguali in quest' altro modo. Tirisi similmente la *Fig.*
AB, che faccia colla AE un' angolo 125.
qualsivoglia; indi diasi alla AB lunghezza tale, che possa prendersi su di essa senza confusione il ricercato numero di parti eguali; tirinsi di poi per gli termini delle parti prese altrettante rette parallele alla AE, che si terminino alla BE; e per gli triangoli equiangoli, che formano queste parallele colle due AB, BE, chiaro si è, che delle parti eguali, in cui dee dividersi la AE, ne contenga una la prima parallela prossima al punto B, due la seconda, tre la terza, e così dell' altre.

491. Or con queste due construzioni potrà formarsi la scala, di cui si ha bisogno per la misura delle rette. Debbasi perciò dividere, primieramente la lunghezza del nostro palmo in 10 parti eguali, che saranno le sue decime parti; indi ciascuna decima in altre 10 parti eguali, che saranno le sue centesime; e finalmente ciascuna centesima in 10 altre parti eguali, che saranno le sue millesime. Colla prima construzione adunque sulla retta, corrispondente alla

lunghezza del palmo, potranno ſegnarſi ſenza confuſione, così le decime parti dello ſteſſo palmo, come le ſue centeſime; ma per includervi ancora le milleſime con egual diſtinzione, potrà farſi uſo della ſeconda conſtruzione, ed ecco come.

Fig. 126. 492. Sia la AB una delle decime parti del palmo, ſuddiviſa in 10 parti eguali, che ſono le ſue centeſime. Deſcrivaſi ſulla AB il quadrato ABCD, e traſportaſi la diviſione della AB in ciaſcuna delle due AD, DC; congiunganſi di poi con rette obblique li punti della diviſione fatta nella AB cogl' altri della diviſione fatta nella DC; e le parallele tirate alla AB per gli punti della diviſione della AD, con terminarſi a quelle rette obblique, ci daranno con ordine le centeſime, inſieme colle milleſime: dimodochè la terza parallela per ragion di eſempio numerata dalla DC, terminandoſi alla quinta obbliqua numerata dalla AD, ſarà una retta di quattro centeſime, e tre milleſime.

493. Un conſimile artificio impiegaſi per avere preſſo a poco, così li minuti primi nelli quadranti terreſtri, come li minuti ſecondi negl' altri celeſti. Per dimoſtrarlo, ſuppongaſi, che (Fig. 127.) li due archi concentrici BC, DE, rac-

racchiusi tra li due raggi AB, AC, siano così piccioli, che possano riguardarsi come rette parallele; ed in eguali distanze descrivansi per ragion di esempio tra di essi altri cinque archi eziandio concentrici. Se adunque considerinsi le porzioni di quest'altri archi comprese tra la BD, e l'obbliqua BE, chiaro si è, che delle 6 parti dell'arco BC, ne contenga una la porzione del primo, 2 la porzione del secondo, 3 la porzione del terzo, 4 la porzione del quarto, e 5 la porzione del quinto.

494. Essendo così, se in un quadrante terrestre l'arco BC sia di un grado, colle riferite porzioni degl'altri cinque archi frapposti tra li due BC, DE si avranno le parti dello stesso arco di 10, 20, 30, 40, 50 minuti. E così ancora, se in un quadrante celeste l'arco BC sia di un minuto, colle stesse porzioni si avranno le parti dello stesso arco di 10, 20, 30, 40, 50 minuti secondi: dimodochè, se nella lamina di ottone, con cui formasi il quadrante tanto terrestre, quanto celeste si potessero segnare in eguali distanze altri 60 quadranti concentrici col principale, si avrebbero col riferito artificio nel quadrante terrestre tutti li 60 minuti di ciascuno grado, e nel

 qua-

quadrante celeste tutti li 60 minuti secondi di ciascuno minuto primo.

495. Intanto nè la larghezza della lamina permette di potersi segnare in essa con distanze eguali altri 60 quadranti concentrici col quadrante principale, nè potendosi fare, tornerebbe conto il farlo; perchè lo stesso loro eccessivo numero farebbe perdere molto tempo in distinguere tra di essi, quale luogo occupa quel quadrante, a cui rapportasi la porzione, della quale si ha bisogno. Onde basta segnarne un numero ragionevole, come di 6, o al più di 10; poichè se bene con essi non si abbiano tutte le 60 parti eguali, in cui suddividesi, così il grado, come il minuto, nientedimeno coll'occhio stesso potranno aversi presso a poco le parti mancanti.

§.XXXI.

§. XXXI.

Della ragione, in cui sono, così li triangoli, come li parallelogrammi, e di nuovo della loro uguaglianza.

494. LA ragione, in cui sono così due triangoli, come due parallelogrammi, deesi ripetere dalle loro basi, e dalle loro altezze; ed il teorema generale si è, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi siano in ragion composta di quella delle loro basi, e dell' altra delle loro altezze. La verità di questo teorema generale può dedursi dalla misura stessa di tali figure. Imperocchè, siccome per avere le loro ampiezze debbonsi moltiplicare le basi per l' altezze (265); così è stato avvertito altrove (411), che essendo espressi con numeri li termini di due ragioni, queste compongonsi insieme colla moltiplicazione dei loro antecedenti, e dei loro conseguenti.

497. Da quel teorema generale poi ne discendono due altri speciali, cioè, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi debbano essere nella semplice ragione delle basi, essendo eguali l' altezze; ed al contrario nella

ſemplice ragione dell' altezze, eſſendo eguali le baſi. E la verità di queſt'altri due teoremi ſpeciali può dedurſi da ciò, che ſiccome con moltiplicare un numero per l' unità non alteraſi il ſuo valore, così nè pure riceve cambiamento alcuno la quantità di una ragione, quante volte queſta ſi compone con un' altra ragione di uguaglianza, la di cui quantità è l' unità (404).

498. Giova intanto dimoſtrare la verità di tutti tre li riferiti teoremi nel modo, che comunemente ſi pratica. Onde, per incominciare dalli triangoli, dimoſtreremo in primo luogo, che eſſendo eguali l' altezze di due triangoli, la loro ragione ſia eguale a
Fig. quella delle loro baſi. Siano perciò li
128. due triangoli A B C, A B D, li quali per eſſere ſituati colle loro baſi B C, BD ſulla ſteſſa retta CD, e per avere lo ſteſſo vertice A, debbono avere altresì la ſteſſa altezza. Io dico, che queſti due triangoli ſiano nella ſemplice ragione delle loro baſi, dimodochè il triangolo ABC ſarà al triangolo A B D, come la baſe del primo B C alla baſe del ſecondo B D.

499. Per dimoſtrarlo, concepiſcanſi diviſe le due baſi B C, B D in parti eguali ad un' aliquota loro comune, qualunque ella ſia; e ſe dalli punti della di-

divisione intendansi altresì tirate rette al punto A, comune vertice dei due triangoli, chiaro si è, che questi ancora rimaneranno divisi per mezzo di quelle rette in piccioli triangoli tra di loro eguali. Onde, non solo ciascuno di questi piccioli triangoli sarà parte aliquota ancora dei due ABC, ABD; ma in quante parti sono divise le due BC, BD, in altrettanti piccioli triangoli saranno divisi altresì li due ABC, ABD.

400. Quindi, se le moltitudini delle parti eguali contenute nel triangolo ABC, e nella sua base BC dividansi almeno col pensiero per le moltitudini dell' altre parti eguali, che contengonsi nell' altro triangolo ABD, e nell' altra base BD; saranno eguali li quozienti di queste due divisioni. Ma questi tali quozienti sono le quantità delle due ragioni, di cui si tratta, cioè del triangolo ABC al triangolo ABD, e della base BC alla base BD (402). Dunque, dovendo essere eguali parimente queste due ragioni, il triangolo ABC sarà al triangolo ABD, come la base BC alla base BD.

501. Dimostreremo in secondo luogo, che al contrario essendo eguali le basi di due triangoli, la loro ragione sia eguale a quella delle loro altezze. *Fig.*
Siano perciò li due triangoli ABC, 129.

DEF, sulle di cui basi BC, EF si abbassino dagl' angoli verticali le perpendicolari AG, DH, che saranno le loro altezze. Pongasi, che le basi BC, EF siano eguali; ed io dico, che li due triangoli ABC, DEF siano nella semplice ragione dell' altezze, dimodochè il triangolo ABC sarà al triangolo DEF, come l' altezza del primo AG all' altezza del secondo DH.

502. Per dimostrarlo, taglinsi dalle basi prolungate le porzioni GM, HN eguali alle stesse basi BC, EF, e congiungansi le due AM, DN. Adunque, se negl' altri due triangoli AGM, DHN prendansi per basi le due AG, DH, saranno eguali le loro altezze GM, HN; e per tanto il triangolo AGM sarà al triangolo DHN, come AG a DH (498). Ma sono eguali tra di loro, tanto li due triangoli ABC, AGM, quanto gl' altri due DEF, DHN, per essere eguali, così le loro basi, come le loro altezze. Dunque ancora il triangolo ABC sarà al triangolo DEF, come AG a DH.

503. Dimostreremo finalmente, che se siano disuguali tanto le basi, quanto l' altezze di due triangoli, la loro ragione sia composta da quella delle basi,
Fig. e da quella dell' altezze. Siano perciò
130. li due triangoli ABC, DEF, sulle di

cui

cui basi BC, EF si abbassino dagl' angoli verticali le perpendicolari AG, DH, che saranno le loro altezze. Pongasi, che siano disuguali, tanto le basi BC, EF, quanto l'altezze AG, DH; ed io dico, che il triangolo ABC sia al triangolo DEF in ragion composta della base BC alla base EF, e dell' altezza AG all' altezza DH.

504. Per dimostrarlo, taglisi dall' altezza maggiore DH la porzione HI eguale all' altra minore AG, e congiunganſi le due EI, FI. Poichè dunque sono eguali l'altezze AG, IH dei due triangoli ABC, IEF, sarà il triangolo ABC al triangolo IEF, come la base BC alla base EF (498). Al contrario poi, avendo gl' altri due triangoli IEF, DEF la stessa base EF, sarà il triangolo IEF al triangolo DEF, come l'altezza IH, ovvero AG all'altezza DH (501).

515. Quindi la ragione, che si compone da quella del triangolo ABC al triangolo IEF, e da quella del triangolo IEF al triangolo DEF, sarà eguale all' altra composta da quella della base BC alla base EF, e da quella dell' altezza AG all' altezza DH. Ma il triangolo ABC sta al triangolo DEF in ragion composta del triangolo ABC al triangolo IEF, e del triangolo IEF

al triangolo DEF (412). Dunque gli stessi due triangoli ABC, DEF saranno ancora in ragion composta della base BC alla base EF, e dell' altezza AG all' altezza DH.

506. A questi tre teoremi può aggiungersene un quarto, il quale però rapportasi ai soli triangoli, che ritrovansi avere un' angolo eguale ad un' angolo; e si è, che questi tali triangoli siano, non solo in ragion composta delle loro basi, e delle loro altezze, ma eziandio in ragion composta dei lati, che sono intorno agl' angoli
Fig. eguali. Siano perciò li due triangoli
130. ABC, DEF, li quali abbiano l' angolo ABC eguale all' angolo DEF. Io dico, che questi due triangoli siano ancora in ragion composta del lato AB al lato DE, e del lato BC al lato EF.

507. Prendansi per basi dei due triangoli li lati BC, EF; e l' altezze di essi saranno le perpendicolari AG, DH, abbassate sugli stessi lati dagl' angoli verticali; onde il triangolo ABC sarà al triangolo DEF in ragion composta del lato BC al lato EF, e della perpendicolare AG alla perpendicolare DH (503). Ma, per essere equiangoli li due triangoli ABG, DEH, la AG sta alla DH, come l' altro lato AB

all'

all'altro lato DE (455). Dunque gli stessi due triangoli saranno ancora in ragion composta del lato BC al lato EF, e del lato AB al lato DE.

508. Or in una maniera consimile possono dimostrarsi tutti quattro li riferiti teoremi eziandio per rapporto ai parallelogrammi; ma per essere il triangolo la metà del parallelogrammo, con cui ha la stessa base, e la stessa altezza (171), potranno dimostrarsi più facilmente per mezzo di due triangoli, che abbiano con li due parallelogrammi eguali basi, ed eguali altezze; poichè, dovendo essere li due parallelogrammi nella stessa ragione, in cui sono li due triangoli (439), chiaro si è, che quanto si è dimostrato dei due triangoli, debba aver luogo altresì nelli due parallelogrammi.

509. Due parallelogrammi adunque a simiglianza di due triangoli saranno nella semplice ragione delle basi, essendo eguali l' altezze; ed al contrario nella semplice ragione dell' altezze, essendo eguali le basi. Se poi siano disuguali, tanto le basi, quanto l'altezze, saranno li due parallelogrammi in ragion composta delle loro basi, e delle loro altezze. Ed in fine, se li due parallelogrammi abbiano un' angolo eguale ad un' angolo, li medesimi saranno

altresì in ragion composta dei lati, che sono intorno agl' angoli eguali.

510. Da ciò intanto, che così due triangoli, come due parallelogrammi generalmente debbano essere in ragion composta delle basi, e dell' altezze, può dedursi, che li medesimi non possano essere nella semplice ragione delle basi, se non siano eguali l'altezze; siccome al contrario, che non possano essere nella semplice ragione dell'altezze, se non siano eguali le basi. Ed in fatti se una ragione sia composta da due altre ragioni, non può ella essere eguale ad una delle sue componenti, se l'altra componente non sia ragion di uguaglianza.

511. Se poi riflettasi a quel tanto fu avvertito di sopra (413), cioè, che una ragione composta da due altre ragioni debba essere di uguaglianza, sempre quando una delle due componenti è reciproca dell' altra, potrà dedursi ancora dallo stesso teorema generale, che tanto due triangoli, quanto due parallelogrammi debbano essere eguali, quantevolte le loro basi sono nella reciproca ragione delle loro altezze.

512. Anzi, conforme è stato dimostrato (506), che li triangoli, e li parallelogrammi, che hanno un' angolo eguale ad un' angolo, siano ancora in ragion

ragion composta de' lati, che sono intorno agl' angoli eguali; così da questo teorema potrà dedursi parimente, che due triangoli, o due parallelogrammi, li quali hanno un' angolo eguale ad un' angolo, debbano essere eguali, sempre quando li lati intorno agl' angoli eguali sono reciprocamente proporzionali.

513. Ma per dimostrare in altra guisa questi due teoremi dell'uguaglianza, siano li due triangoli ABC, DEF, in cui le basi BC, EF siano nella reciproca ragione dell' altezze AG, DH, cosicchè sia BC ad EF, come DH ad AG. Io dico, che questi due triangoli debbano essere eguali. Per dimostrarlo, formisi il terzo triangolo IKL, la di cui base KL sia eguale alla EF, e l'altezza IM eguale alla AG. *Fig.* 131.

514. Conforme adunque il triangolo ABC dee essere al triangolo IKL, come BC a KL ovvero EF (498); così il triangolo DEF sarà al triangolo IKL, come DH ad IM ovvero AG (501). Onde, volendosi che BC sia ad EF, come DH ad AG, sarà ancora il triangolo ABC al triangolo IKL, come il triangolo DEF allo stesso triangolo IKL (406); e per tanto li due triangoli ABC, DEF, serbando col terzo IKL,

IKL la stessa ragione, saranno tra di loro eguali (408).

Fig. 132. 515. Abbiano di poi li due triangoli ABC, DCE l'angolo ACB eguale all'angolo DCE, e li lati intorno a quest'angoli reciprocamente proporzionali, cosicchè sia BC a CE, come DC ad AC. Io dico, che ancora questi due triangoli debbano essere eguali. Per dimostrarlo, situinsi li due triangoli in modo, che li due lati BC, CE formino una retta continuata; e per essere eguali li due angoli verticali ACB, DCE, ancora gli altri due lati AC, CD staranno a dirittura (*63*).

516. Se adunque congiungasi la AE, cosicchè si abbia il terzo triangolo ACE, conforme il triangolo ABC dee essere al triangolo ACE, come BC a CE (498), così ancora il triangolo DCE sarà al triangolo ACE, come DC ad AC. Onde, volendosi, che BC sia a CE, come DC ad AC, sarà ancora il triangolo ABC al triangolo ACE, come il triangolo DCE allo stesso triangolo ACE (406); e per tanto li due triangoli ABC, DEC, serbando col terzo ACE la stessa ragione, saranno tra di loro eguali (408).

517. Di questi due teoremi hanno luogo ancora li conversi, cioè I, che essendo eguali due triangoli, le basi deb-

debbano essere nella reciproca ragione dell'altezze; e II, che essendo due triangoli eguali, ed avendo un'angolo eguale ad un' angolo, li lati intorno a quest' angoli debbano essere reciprocamente proporzionali: come in fatti una ragione composta da due altre ragioni non può essere di uguaglianza, se una delle componenti non sia reciproca dell' altra; ma con dimostrazioni contrarie alle precedenti possono comprovarsi nel seguente modo.

518. Siano primieramente eguali li due triangoli ABC, DEF. Io dico, che le loro basi BC, EF siano nella reciproca ragione dell'altezze AG, DH. Imperocchè, formato di nuovo il terzo triangolo IKL, la di cui base KL sia eguale alla EF, e l' altezza IM eguale alla AG; sarà il triangolo ABC al triangolo IKL, come BC a KL ovvero EF; ed il triangolo DEF al triangolo IKL, come DH ad IM, ovvero AG. Ma, volendosi eguali li due triangoli ABC, DEF, il primo di essi ABC dee essere al terzo triangolo IKL come l' altro DEF allo stesso IKL (407). Dunque ancora BC sarà ad EF, come DH ad AG. *Fig.* 131.

519. Pongasi di poi, che li due triangoli ABC, DEC non solo siano eguali, ma abbiano altresì l' angolo *Fig.* 132.

ACB

Fig. ACB eguale all' angolo DCE . Io di-
132. co, che li lati intorno a quest' angoli eguali debbano essere reciprocamente proporzionali . Imperocchè, situati di nuovo questi due triangoli in modo, che formino una retta continuata, così li due lati BC, CE, come gl' altri due AC, CD, e congiunta la AE; per la loro uguaglianza sarà il triangolo ABC al triangolo ACE, come il triangolo DEC allo stesso triangolo ACE (407) . Ma li primi due sono nella ragione di BC a CE, e gl' altri due nella ragione di DC ad AC (498). Dunque sarà ancora, BC a CE, come DC ad AC.

520. In una maniera consimile possono dimostrarsi li quattro riferiti teoremi eziandio ne' parallelogrammi; ma basterà dedurli da ciò, che li parallelogrammi sono nella stessa ragione, in cui sono li triangoli, che hanno con essi le stesse basi, e le stesse altezze. E per avvertirlo una volta per sempre, conforme dee aversi il parallelogrammo, come un raddoppiato triangolo; così tutto ciò, che compete ai triangoli per rapporto alle loro ampiezze, o siano superficie, dovrà aver luogo ancora ne' parallelogrammi.

521. Del rimanente per quanto alla ragione, in cui sono l' altre figure ret-

rettilinee, potrà di essa giudicarsi per mezzo de' triangoli, a cui riduconsi le stesse figure. Ma se le figure siano regolari, conforme ciascuna di esse è eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale al suo perimetro, e per altezza la perpendicolare abbassata dal centro della figura sopra uno de' suoi lati (254), così dovranno quelle essere in ragion composta dei loro perimetri, e delle riferite loro perpendicolari. Onde saranno nella semplice ragione de' perimetri, essendo eguali le perpendicolari; nella semplice ragione delle perpendicolari, essendo eguali li perimetri; ed in ragion di uguaglianza, se li perimetri siano nella reciproca ragione delle perpendicolari.

§. XXXII.

Di una proprietà molto rilevante delle rette proporzionali.

522. NElle rette proporzionali incontrasi una proprietà molto rilevante, la quale ricavasi da quel tanto è stato poc' anzi dimostrato intorno all' uguaglianza de' parallelogrammi. Ella adunque si è, che essendo quattro rette proporzionali, il rettangolo delle due estreme sia eguale al rettan-

Fig. 133. rettangolo delle due di mezzo. Ed in fatti, se AB, CD, DE, BF siano le quattro rette proporzionali, e formisi così il rettangolo AF colle due estreme AB, BF, come il rettangolo CE colle due di mezzo CD, DE, si avranno con essi due parallelogrammi, in cui non solo sono eguali li due angoli ABF, CDE, ma li lati intorno a quest' angoli sono ancora reciprocamente proporzionali. Onde perciò, che è stato dimostrato, li due rettangoli AF, CE dovranno essere eguali.

523. Ma la conversa di questa proprietà similmente ha luogo, cioè, che se si abbiano quattro rette, ed il rettangolo delle due estreme sia eguale al rettangolo delle due di mezzo, le quattro rette debbano essere proporzionali.

Fig. 133. Siano perciò le quattro rette AB, CD, DE, BF, ed il rettangolo AF delle due estreme AB, BF sia eguale al rettangolo CE delle due di mezzo. Io dico, che queste quattro rette debbano essere proporzionali. In fatti colli due rettangoli AF, CE si hanno due parallelogrammi, che non solo sono eguali, ma hanno ancora l'angolo ABF eguale all'angolo CDE. Dunque, dovendo essere li lati intorno a quest'angoli reciprocamente proporzionali, sarà AB a CD, come DE a BF.

524.

524. Quantunque poi nella proporzione continua vegganſi tre ſole rette, nientedimeno, ſecondo è ſtato avvertito (416), quella di mezzo dee ripeterſi, e fare le veci di conſeguente nella prima ragione, e di antecedente nell' altra. Onde, perchè il rettangolo di due rette eguali è lo ſteſſo, che il quadrato di una di eſſe; chiaro ſi è, che eſſendo tre rette continuamente proporzionali, il rettangolo delle due eſtreme debba eſſere eguale al quadrato di quella di mezzo: come al contrario, ſe ſi abbiano tre rette, ed il rettangolo delle due eſtreme ſia eguale al quadrato di quella di mezzo, le tre rette dovranno eſſere continuamente proporzionali.

525. Attenta queſta proprietà delle rette proporzionali, vedeſi chiaramente come debba ritrovarſi un numero, che ſia mezzo proporzionale tra due altri numeri dati, cioè con moltiplicare inſieme li due dati numeri, e con eſtrarre dal prodotto la radice quadrata. Così, ſe 2, e 8 ſiano li due numeri dati, ſarà 16 il loro prodotto; ed eſſendo 4 la radice quadrata di 16, ſarà 4 il mezzo proporzionale, che cade tra li due 2, e 8. E così ancora, ſe li due dati numeri ſiano 3, e 12, per eſſere 6 la radice quadrata del loro prodotto 36, ſarà 6 il mezzo proporzionale, che cade

de tra li due 3, e 12.

526. Colla ſteſſa proprietà delle rette proporzionali può evitarſi la difficoltà, che s'incontra in diſporre le rette, che ritrovanſi eſſere tra di loro in perturbata ragione, per dedurne la conſeguenza, che le prime paragonate coll' ultime ſiano nella ſteſſa ragione. Così, ſe A ſia a B, come E ad F, e B ſia a C, come D ad E; primieramente debbonſi diſporre almeno mentalmente queſte ſei rette in modo, che le tre A, B, C ſiano da un lato, e le tre altre D, E, F dall' altro lato; ed indi dedurne la conſeguenza, che A ſia a C, come D ad F.

527. Ma con formare gl'eguali rettangoli delle rette proporzionali, ſi giunge con ſicurezza alla ſteſſa conſeguenza, ſenza eſſervi biſogno di diſpoſizione alcuna. In fatti, eſſendo A a B, come E ad F, ſarà il rettangolo delle due A, ed F eguale al rettangolo dell' altre due B, ed E; e così ancora, eſſendo B a C, come D ad E, ſarà il rettangolo delle due B, ed E eguale al rettangolo dell' altre due C, e D. Onde, dovendo eſſere eguali tra di loro il rettangolo delle due A, ed F, ed il rettangolo dell' altre due C, e D, ſarà A a C, come D ad F.

528. Ed in queſto modo, ſenza ricor-

correre al modo di argomentare perturbando, può dimostrarsi facilmente quel tanto fu avvertito di sopra (482), cioè, che essendo due rette reciproche con due altre rette, debba cadere la stessa mezza proporzionale, così tra le prime, come tra le seconde. In fatti, se le due A ed E siano reciproche colle due B e D; sarà A a B, come D ad E (480), e per tanto il rettangolo delle due A, ed E sarà eguale al rettangolo dell'altre due B, e D. Ma posto, che C sia mezza proporzionale tra le due B, e D, dee essere il suo quadrato eguale al rettangolo delle due B, e D. Dunque, dovendo essere lo stesso quadrato eguale ancora al rettangolo delle due A, ed E, la stessa C sarà mezza proporzionale parimente tra quest'altre due A, ed E.

529. Intanto, se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che ancora alle rette, che sono in perturbata ragione con altrettante rette, può darsi la stessa disposizione di quelle, che sono tra di loro in ragione ordinata, e ricavarsi da esse la stessa conseguenza. In fatti, se A sia a B, come E ad F, sarà A a B nella reciproca ragione di F ad E (418); e così ancora, se B sia a C, come D ad E, sarà B a C nella reciproca ragione di E a D. Onde le

tre

tre rette A, B, C saranno in ordinata ragione reciproca coll' altre tre F, E, D; e pertanto, dovendo essere ordinando A a C similmente nella reciproca ragione di F a D, sarà A a C, come D ad F.

530. Ma per ritornare alla proprietà delle rette proporzionali, per mezzo di essa, niente ora sarà più facile, quanto di dimostrare, che intersegandosi due rette dentro di un cerchio, siano eguali li rettangoli fatti dalle loro porzioni. Siano perciò AC, BD le
Fig. due rette, che dentro del cerchio ABC
134. intersegansi nel punto E. Se adunque congiunganfi l' altre due AD, BC, saranno eguali tra di loro, così li due angoli ADB, ACB, come gl'altri due DAC, DBC (333). Quindi, facendosi equiangoli li due triangoli AED, DEC, sarà AE a DE, come BE a CE (498); e pertanto, essendo proporzionali le quattro rette AE, DE, BE, CE, sarà il rettangolo delle due estreme AE, CE eguale al rettangolo delle due di mezzo BE, DE.

531. In una maniera consimile può dimostrarsi ancora, che incontrandosi due rette fuori del cerchio, siano eguali li rettangoli fatti dalle stesse rette nelle loro porzioni, che rimangono fuori del cerchio. Siano perciò AE, BE le due

due rette, che fuori del cerchio ABC Fig. 135.
incontransi nel punto E. Se adunque congiunganſi l'altre due AD, BC, saranno eguali li due angoli CAD, CBD (333). Onde, facendoſi equiangoli li due triangoli ADE, BCE, sarà AE a DE, come BE a CE (498); e per tanto il rettangolo delle due estreme AE, CE sarà eguale al rettangolo delle due di mezzo BE, DE.

532. In questa guisa può dimostrarsi finalmente, che incontrandosi fuori del cerchio una secante, ed una tangente, il rettangolo fatto da tutta la secante nella porzione, che di essa rimane fuori del cerchio sia eguale al quadrato della tangente. Imperocchè, se AE sia la Fig. 136.
secante, e BE la tangente, che incontransi fuori del cerchio ABC nel punto E; congiunte le due AB, CB, sarà l'angolo CBE eguale all'angolo CAB (338). Onde, facendosi equiangoli li due triangoli ABE, BCE, sarà AE a BE, come BE a CE (498); e per tanto, essendo le tre rette AE, BE, CE continuamente proporzionali, sarà il rettangolo delle due estreme AE, CE eguale al quadrato di quella di mezzo BE.

533. Dalla proprietà delle rette proporzionali possono dedursi parimente tutte l'uguaglianze, che hanno luogo nel trian-

Fig. 137. triangolo rettangolo. Sia perciò il triangolo ABC rettangolo in A, e dall' angolo retto si abbassi sull' ipotenusa BC la perpendicolare AD. Siccome adunque, per essere li due triangoli ABC, DBA equiangoli, BC sta ad AB, come AB a BD; così per gl' altri due triangoli ABC, DAC similmente equiangoli, BC starà ad AC, come AC a CD. Onde dovrà essere il quadrato del lato AB eguale al rettangolo dell' ipotenusa BC nella porzione BD, ed il quadrato dell' altro lato AC eguale al rettangolo della stessa ipotenusa BC nell' altra porzione CD; dal che ne segue, che il quadrato dell'ipotenusa BC sia eguale ai quadrati delli due lati AB, AC (176).

534. Essendo poi equiangoli li due triangoli BDA, ADC, dovrà essere BD ad AD, come la stessa AD a CD; onde il quadrato della perpendicolare abbassata AD si farà eguale al rettangolo delle due porzioni dell' ipotenusa BD, CD. E finalmente, conforme dall' essere equiangoli li due triangoli BAD, ADC ne segue, che BC sia ad AB, come AC ad AD; così da questo stesso potrà dedursi, che il rettangolo fatto dall' ipotenusa BC nella perpendicolare AD sia eguale al rettangolo dei due lati AB, AC.

535.

535. Ma perchè veggasi con nuovi teoremi il vantaggio, che ricavasi dalla proprietà delle rette proporzionali, dimostreremo in primo luogo, che se due tangenti, tirate all'estremità di un diametro del cerchio, s' incontrino con una terza tangente, il loro rettangolo sia eguale al quadrato del raggio. Sia *Fig.* perciò il cerchio BFC, che abbia il 138. punto A per centro, e la BC per diametro. Tirinsi all' estremità di questo diametro le due tangenti BD, CE, che s' incontrino colla terza tangente DE ne' punti D, ed E. Io dico, che il rettangolo delle due tangenti BD, CE sia eguale al quadrato del raggio AC.

536. Per dimostrarlo, congiungasi così la AD, come la AE. Se adunque F sia il punto del contatto della terza tangente DE, saranno eguali tanto le due BD, DF quanto le due CE, EF (357); onde li due angoli BDF, CEF saranno divisi per metà dalle due rette AD, AE. Quindi, essendo gli stessi angoli insieme eguali a due retti (142), saranno le loro metà BDA, CEA eguali ad un retto. Ma li due BDA, BAD similmente sono eguali ad un retto (102). Dunque, facendosi l'angolo BAD eguale all' angolo CEA, saranno equiangoli li due triangoli ABD,

ECA; e per tanto, dovendo essere BD a BA, ovvero AC, come AC a CE (455), sarà il rettangolo delle due tangenti BD, CE eguale al quadrato del raggio AC.

537. Notisi quì intanto, che essendo eguali, così le due BD, DF, come le due CE, EF, ancora il rettangolo fatto dalle due porzioni DF, EF della terza tangente DE dovrà essere eguale al quadrato del raggio. Ma ciò similmente può dimostrarsi colla proprietà delle rette proporzionali. Imperocchè, se congiungasi la AF, questa come tirata dal centro al punto del contatto, sarà perpendicolare sulla tangente DE. Onde, essendo eguali li due angoli DAF, AEF, saranno equiangoli li due triangoli DFA, AFE; e pertanto, dovendo essere DF ad AF, come la stessa AF ad EF (455), sarà il rettangolo delle due porzioni DF, EF della tangente DE eguale al quadrato del raggio AF.

538. Dimostreremo in secondo luogo, che se dentro di un cerchio iscrivasi un quadrilatero, il rettangolo delle due sue diagonali sia eguale ai due rettangoli fatti dalli suoi lati opposti.
Fig. Sia perciò il cerchio ABC, dentro di
139. cui iscrivasi il quadrilatero ABCD. Io dico, che se tirinsi in questo quadrilatero

tero le due diagonali AC, BD, il loro rettangolo ſarà eguale a due rettangoli, uno fatto dalli due lati oppoſti AB, CD, e l' altro dagl' altri due BC, AD. Per dimoſtrarlo, facciaſi l' angolo ADE eguale all' angolo CDB.

539. Eſſendo adunque equiangoli li due triangoli DAE, DBC, ſarà AD ad AE, come BD a BC (455); ed in conſeguenza il rettangolo delle due BD, AE ſarà eguale al rettangolo dell'altre due BC, AD. E così ancora, eſſendo equiangoli gl' altri due triangoli DBA, DCE, ſarà BD ad AB, come CD a CE; e pertanto il rettangolo delle due BD, CE ſarà eguale al rettangolo dell' altre due AB, CD. Quindi li due rettangoli, uno della BD nella AE, e l' altro della ſteſſa BD nella CE, ſaranno inſieme eguali a due altri rettangoli, uno della BC nella AD, e l' altro della AB nella CD. Onde, per eſſere li primi due eguali al ſolo rettangolo della BD nella AC (172), dovrà conchiuderſi, che il rettangolo delle due diagonali ſia eguale ai due rettangoli fatti dalli lati oppoſti.

540. Dimoſtreremo finalmente, che ſe per uno degl' angoli di un parallelogrammo rettangolo tiriſi una retta in modo, che s' incontri colli due lati oppoſti in due punti, egualmente diſtanti

da quello, in cui interseganſi le due diagonali, ſi abbiano cogli ſteſſi lati, e colle porzioni ad eſſi aggiunte quattro rette continuamente proporzionali.

Fig. 140. Sia perciò il parallelogrammo rettangolo ABCD, e per l'angolo C tiriſi la retta EF in modo, che incontrandoſi colli due lati oppoſti AB, AD ne' punti E, ed F, ſiano queſti punti egualmente diſtanti dal punto G, in cui interseganſi le due diagonali AC, BD. Io dico, che le quattro rette AB, DF, BE, AD ſiano continuamente proporzionali.

541. Per dimoſtrarlo, ſi abbaſſino dal punto G ſulli lati AB, AD le perpendicolari GH, GI, che divideranno per metà gli ſteſſi lati. E poichè il rettangolo delle due AE, BE inſieme col quadrato della BH è eguale al quadrato della HE (191); coll' aggiunta del comune quadrato della GH, ſarà il rettangolo delle due AE, BE inſieme col quadrato della BG eguale al quadrato della GE. Ma, per la ſteſſa ragione, il rettangolo delle due AF, DF inſieme col quadrato della DG è eguale al quadrato della GF. Dunque, per eſſere eguali, così li quadrati delle due BG, DG, come li quadrati dell'altre due GE, GF, ſarà il rettangolo delle due AE, BE eguale parimente al

al rettangolo dell'altre due A F, D F.

542. Quindi, attenta l'uguaglianza di questi due rettangoli, sarà A E ad AF, come DF a BE. Ma, per essere li due triangoli D C F, B E C equiangoli col triangolo AEF, dee essere nella ragione di A E ad AF, tanto D C o sia AB a DF, come BE a BC ovvero AD (455). Dunque, facendosi eguali tra di loro le tre ragioni di AB a D F, di B E ad A D, e di D F a BE, sarà AB a DF, come DF a BE, e DF a BE, come BE ad AD; e per tanto le quattro rette AB, DF, BE, AD saranno continuamente proporzionali.

§. XXXIII.

Della simiglianza delle figure rettilinee.

543. DUe figure rettiline della stessa specie diconsi essere simili tra di loro, qualora ritrovansi avere gl' angoli eguali agl' angoli, ciascuno a ciascuno, e proporzionali li lati, che sono intorno agl' angoli eguali. Ma, se bene per la simiglianza delle figure richiedansi due condizioni, cioè l' uguaglianza degl' angoli, e la proporzionalità de' lati intorno agl' angoli eguali;

 nien-

nientedimeno, trattandosi de' triangoli, basta, che in essi s' incontri una delle due condizioni, per essersi dimostrato, che due triangoli, essendo equiangoli, debbano avere li lati intorno agli angoli eguali ancora proporzionali (455), ed al contrario, che avendo li lati proporzionali debbano essere parimente equiangoli (459).

544. La simiglianza intanto de' triangoli può conoscersi altresì in due altre maniere, primieramente con vedere, se abbiano due lati proporzionali a due lati, ed eguali gl'angoli contenuti da questi lati; ed in secondo luogo, con osservare, se abbiano due lati proporzionali a due lati, e degl' angoli opposti a questi lati due siano eguali, e due della stessa specie: per essersi dimostrato, che così nel primo (462), come nel secondo caso (464) li triangoli debbano essere equiangoli, e farsi in conseguenza proporzionali tutti tre li loro lati.

545. Se due parallelogrammi abbiano un' angolo comune, e siano situati intorno alla stessa diagonale, non v'ha dubbio, che debbano essere simili; poichè, siccome l'angolo comune fa, che gl' altri angoli siano ancora eguali; così la diagonale comune farà, che li due triangoli, in cui rimane diviso uno di essi,

siano

ſiano equiangoli colli due dell' altro; ed in conſeguenza, che li due parallelogrammi abbiano ancora li lati intorno agl' angoli eguali proporzionali. Ma al contrario, ſe li due parallelogrammi ſiano ſimili, ed abbiano un' angolo comune, dovranno eſſere ancora intorno alla ſteſſa diagonale.

546. Per dimoſtrarlo, ſiano BD, EG due parallelogrammi ſimili, che abbiano l' angolo A comune; e ſe ſia poſſibile, la diagonale del primo AC paſſi non già per F, ma per qualſiſia altro punto H del lato EF. Tirata adunque per queſto punto H la HI parallela alla EA, li due parallelogrammi BD, EI, come ſituati intorno alla ſteſſa diagonale AHC, ſaranno ſimili; e per tanto AB ſarà a BC, come AE ad EH. Ma, per la ſimiglianza dei due BD, EG, dee eſſere AB a BC, come AE ad EF. Dunque AE ſarà ad EH, come la ſteſſa AE ad EF (406), il che non può ſuſſiſtere (408). *Fig.* 141.

547. Eſſendo eguali in qualſiſia figura regolare, così li lati, come gl'angoli; chiaro ſi è, che le figure regolari della ſteſſa ſpecie ſiano tutte ſimili. Ma, ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà, che li triangoli iſoſceli, in cui divideſi una di eſſe per le rette tirate agl' angoli dal ſuo centro, ſiano

ſimili ancora colli triangoli iſoſceli dell' altre. Dal che ne ſegue, che li loro perimetri ſiano nella ragione, non ſolo di due dei loro lati, ma eziandio delle perpendicolari abbaſſate dalli loro centri ſugli ſteſſi lati.

548. Notiſi quì intanto, che ancora l'altre figure rettilinee ſimili poſſono dividerſi talmente in triangoli, che quelli di una di eſſe ſiano ſimili con
Fig. quelli dell' altre. Siano perciò li due
142. pentagoni ſimili ABCDE, FGHIL, in cui gl'angoli eguali, e li lati proporzionali ſerbino l'ordine delle lettere, con cui ſi ſono diſegnati. Prendanſi in eſſi due angoli eguali, come ABC, FGH, da cui tirinſi agl'angoli oppoſti le rette BD, BE, GI, GL. Io dico, che li tre triangoli BCD, BDE, BEA del primo poligono ſiano eziandio ſimili colli tre triangoli GHI, GIL, GLF dell' altro poligono.

549. In fatti, eſſendo eguali li due angoli BCD, GHI, ed eſſendo BC a CD, come GH a GI, ſaranno ſimili li primi due triangoli BCD, GHI (544). Ma colla loro ſimiglianza, non ſolo ſi fanno eguali, così li due angoli BDC, GIH, come gl'altri due BDE, GIL, ma dee eſſere altresì BD a CD, come GI ad HI. Dunque, eſſendo CD a DE, come HI ad IL, ſarà ordinando

do BD a DE, come GI ad IL (429), e per tanto ancora gl'altri due triangoli BDE, GIL saranno simili. Ed in una maniera consimile si dimostrerà, che li rimanenti triangoli BEA, GLF siano parimente simili.

550. Or è proprietà di tutte le figure simili, di essere tra di esse nella duplicata ragione de' loro lati omologi. Per dimostrarla, siano primieramente simili li due triangoli ABC, DEF, dimodochè gl'angoli in B, ed E siano eguali, ed AB sia a BC, come DE ad EF. Per l'uguaglianza adunque di quelli due angoli, il triangolo ABC sarà al triangolo DEF in ragion composta di AB a DE, e di BC ad EF (506). Ma, essendo AB a BC, come DE ad EF, permutando dee essere ancora AB a DE, come BC ad EF (419). Dunque, essendo eguali le due ragioni componenti di AB a DE, e di BC ad EF, la ragion composta sarà duplicata di ciascuna di esse (414); e per tanto li due triangoli simili saranno nella duplicata ragione così dei lati omologi AB, DE, come degl'altri due BC, EF. *Fig.* 143.

551. Può dimostrarsi questo stesso in un'altro modo, ed ecco come. Ritrovisi la terza proporzionale dopo le due BC, EF, che sia BG (470), e

M 5 con-

congiungasi la AG. Essendo adunque AB a BC, come DE ad EF, sarà permutando AB a DE, come BC ad EF (419). Ma BC sta ad EF, come EF a BG. Dunque ancora AB sarà a DE, come EF a BG (406). Quindi, facendosi eguali li due triangoli DEF, ABG (515), sarà il triangolo ABC al triangolo DEF, come lo stesso triangolo ABC al triangolo ABG (407). Ma questi due triangoli sono nella ragione di BC a BG, la quale ragione, per essere le tre BC, EF, BG continuamente proporzionali, è duplicata della ragione di BC ad EF (415). Dunque ancora li due triangoli ABC, DEF saranno tra di loro in questa stessa duplicata ragione.

Fig. 552. Siano in appresso li due poli-
142. goni simili ABCDE, FGHIL. Prendansi in essi due angoli eguali, come ABC, FGH, da cui tirinsi agl' angoli opposti le rette BD, BE, GI, GL; e secondo è stato dimostrato (545), li triangoli del primo BCD, BDE, BEA sono simili colli triangoli dell' altro GHI, GIL, GLF. Onde, essendo nella duplicata ragione di BD a GI tanto li due BCD, GHI, quanto li due BDE, GIL (550); sarà il triangolo BCD al triangolo GHI, come il triangolo BDE al triangolo GIL. E così an-

ancora, essendo nella duplicata ragione di BE a GL, non meno li due BDE, GIL, che gl' altri due BEA, GLF; sarà il triangolo BDE al triangolo GIL, come il triangolo BEA al triangolo GLF.

553. Li triangoli adunque BCD, BDE, BEA del primo poligono sono nella stessa ragione colli triangoli GHI, GIL, GLF del secondo poligono. Dunque la somma dei primi, o sia il poligono ABCDE, sarà alla somma degl' altri, ovvero al poligono FGHIL, in quella medesima ragione (436); e per tanto il poligono ABCDE sarà al poligono FGHIL, come il primo triangolo BCD al primo triangolo GHI. Ma questi due triangoli, per essere simili, sono nella duplicata ragione dei loro lati omologi BC, GH. Dunque nella duplicata ragione di questi stessi lati saranno eziandio li due poligoni.

554. Da ciò intanto possono dedursi molte conseguenze, di cui la prima si è, che siccome li quadrati, per essere figure simili, sono eziandio nella duplicata ragione delle rette, sulle quali sono descritti; così potrà dirsi altresì, che due figure simili siano, come li quadrati dei loro lati omologi. Ma se vogliasi esprimere con semplici rette, così la ragione duplicata di detti lati, co-

me la ragione dei loro quadrati, non dovrà farsi altra cosa, se non che ritrovare la terza proporzionale dopo gli stessi lati; perchè in questo modo le due figure simili saranno tra di loro, come il primo lato alla terza proporzionale ritrovata (415).

555. La seconda conseguenza si è, che se sopra li lati di un triangolo rettangolo descrivansi figure simili, quella descritta sull' ipotenusa sia eguale alle due descritte sopra gl' altri due lati. In fatti queste tali figure sono nella stessa ragione, che serbano tra di essi li quadrati dei lati, su di cui sono descritte (554). Onde, conforme il quadrato dell' ipotenusa è eguale ai quadrati degl' altri due lati; così la figura descritta sull' ipotenusa similmente sarà eguale alle figure descritte sopra gl' altri due lati.

556. La terza conseguenza si è, che se si abbiano quattro rette proproporzionali, e descrivansi figure simili, tanto sulle due prime, quanto sull' altre due; ancora queste figure siano proporzionali. Imperocchè, siccome le prime due figure sono nella duplicata ragione della prima retta alla seconda, così l' altre due saranno nella duplicata ragione della terza retta alla quarta. Ma, per essere le quattro rette

te proporzionali, ſono eguali le ragioni della prima alla ſeconda, e della terza alla quarta. Dunque, dovendo eſſere parimente eguali le loro ragioni duplicate (414), le quattro figure ſaranno eziandio proporzionali.

557. La quarta, ed ultima conſeguenza ſi è, che ſe ſi abbiano quattro rette, e ſiano proporzionali le figure ſimili deſcritte, tanto ſulle prime due, quanto ſull' altre due, ancora le quattro rette debbano eſſere proporzionali. Imperocchè, attenta la proporzionalità delle quattro figure, la ragion duplicata della prima retta alla ſeconda ſarà eguale alla ragion duplicata della terza retta alla quarta. Onde, dovendo eſſere parimente eguali le loro ragioni ſemplici (414), le quattro rette ſaranno proporzionali.

558. Niente poi è egli più facile, *Fig.*
quanto di deſcrivere ſopra una data 144.
retta, come AB, una figura, che ſia ſimile ad un' altra figura data FGHIL. Dividaſi perciò la figura data in triangoli per mezzo delle diagonali FH, FI; indi, ſuppoſto, che la AB debba eſſere omologa col lato FG, facciaſi su di eſſa, così l' angolo ABC eguale all'angolo FGH, come l'angolo BAC eguale all'angolo GFH; ed incontrandoſi le due AC, BC nel punto C, ſaranno

no già ſimili li due triangoli ABC, FGH.

559. Facciaſi in appreſſo ſulla AC, così l'angolo CAD eguale all'angolo HFI, come l'angolo ACD eguale all'angolo FHI; e con incontrarſi le due AD, CD nel punto D, ſaranno ſimili ancora li due triangoli ACD, FHI. Facciaſi finalmente ſulla AD, così l'angolo DAE eguale all'angolo IFL, come l'angolo ADE eguale all'angolo FIL; e con incontrarſi le due AE, DE nel punto E, ſaranno ſimili parimente li due triangoli ADE, FIL. Onde le due figure ABCDE, FGHIL, come compoſte con ordine da triangoli ſimili, ſaranno eziandio ſimili tra di loro.

Fig. 560. Se poi vogliaſi, che la nuova
144. figura non ſolo ſia ſimile alla figura data FGHIL, ma abbia ancora colla medeſima data ragione; in tal caſo biſognerà, che la AB, su di cui ella dee deſcriverſi, abbia una determinata lunghezza. Onde, ſe la data ragione ſia quella della retta M alla retta N, primieramente dovrà ritrovarſi tra queſte due rette la mezza proporzionale, che ſia O (416), ed indi dare alla AB lunghezza tale, che ſia quarta proporzionale dopo le tre O, M, ed FG; poichè, dovendo eſſere le due figure nella

la duplicata ragione di AB ad FG, o pure di M ad O, saranno nella semplice ragione di M ad N (415).

561. Finalmente, se vogliasi, che la nuova figura (415) non solo sia simile alla data FGHIL, ma eguale altresì ad un' altra figura data, come K; tutta via dovrà darsi alla AB una determinata lunghezza, ma per definirla, fa duopo primieramente ridurre a quadrati le due figure date: come in fatti, se M sia il lato del quadrato eguale alla figura K, ed O il lato del quadrato eguale all' altra figura FGHIL, dovrà darsi alla AB lunghezza tale, che sia quarta proporzionale dopo le tre O, M, ed FG; e ciò per la ragione, che dovendo essere le due figure, come li quadrati delle due AB, FG, o pure delle due M, ed O, conforme la figura FGHIL è eguale al quadrato della O, così ancora l' altra ABCDE sarà eguale al quadrato della M, ed in conseguenza alla figura K. *Fig.* 144.

562. Del rimanente egli è facile ad intendersi, che le figure simili ad una terza siano simili ancora tra di loro. Imperocchè, siccome per essere ciascuna delle due equiangola con quella terza, debbono essere equiangole eziandio tra esso loro; così, essendo proporzionali colli lati di quella terza, tanto

tanto li lati della prima, quanto li lati della seconda, dovranno essere proporzionali tra di loro ancora li lati delle due figure. Onde li due parallelogrammi, che formansi intorno alla diagonale di un terzo parallelogrammo nella maniera altrove spiegata (147), per essere ciascuno di essi simile al terzo parallelogrammo, saranno tra di essi parimente simili.

§. XXXIV.

Del cerchio considerato come poligono regolare, e delle conseguenze, che se ne ritraggono.

563. PEr dimostrare altre proprietà del cerchio di maggior conseguenza delle precedenti, lo considereremo ora sotto altra forma, cioè come poligono regolare, in cui il numero de'lati sia maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi. Ed in vero, potendosi situare nel cerchio poligoni regolari, così per via d'iscrizione, come per via di circonscrizione; chiaro si è, che quanto più aumentasi il numero dei loro lati, tanto maggiormente si accostano al cerchio, e meno da esso differiscono. Onde, se intendasi, così nel poligono iscritto, come nell' altro circon-

conscritto aumentato a tal segno il numero de' lati, che facciasi maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi; non v' ha dubbio, che ambidue li poligoni si confonderanno, tanto tra di loro, quanto collo stesso cerchio.

564. Considerandosi il cerchio sotto tal forma, ne segue, che se bene la sua circonferenza sia linea curva, nientedimeno potrà ella riguardarsi come composta da rette infinitamente picciole, che contengano angoli talmente ottusi, che li loro supplimenti a due retti siano di una picciolezza ancora infinita. Onde, non essendo altro la sua tangente, se non che una di quelle picciole rette prolungata, non solo l'angolo del contatto dovrà essere minore di ogn'angolo acuto rettilineo, ma la retta, che tirasi dal centro al luogo del contatto, dovrà essere altresì perpendicolare sulla tangente.

565. Nè poi è da temersi, che con riguardarsi la circonferenza del cerchio in questa guisa, riceva alterazione la proprietà sua essenziale, di essere eguali le rette, che su di essa tiransi dal centro; poichè essendo di una picciolezza infinita le rette, che la compongono, l' altre rette, che tiransi dal centro sopra ciascuna di esse, saranno così poco distanti dalla perpendicolare abbassata

sulla

sulla medesima dallo stesso centro, che senza nota di errore potranno aversi come eguali, così tra di loro, come colla stessa perpendicolare.

566. Potendosi adunque riguardare il cerchio, come un poligono regolare, in cui il numero de' lati sia maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi; chiaro si è, che a guisa di ogn' altro poligono regolare debba egli essere eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale alla sua circonferenza, e per altezza il raggio. Dal che ne segue, che per avere la capacità di un cerchio non debba farsi altra cosa, se non che moltiplicare la metà della circonferenza per lo raggio, o pure, che è lo stesso, moltiplicare l' intera circonferenza per la metà del raggio.

567. Per poco intanto, che vogliasi riflettere, s' intenderà facilmente, che non solo la figura regolare, ma ogn'altra figura rettilinea circonscritta intorno al cerchio, sia similmente eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale al suo perimetro, e per altezza il raggio del cerchio. Onde, attenta la ragione, in cui sono li triangoli, che hanno la stessa altezza, potrà stabilirsi il seguente teorema, cioè, che il cerchio sia a qualsivoglia figura rettilinea circonscritta intorno ad esso, come

come la circonferenza del cerchio al perimetro della figura; dal che ne segue, che il cerchio sia al quadrato del suo diametro, come la quarta parte della circonferenza allo stesso diametro.

568. Non potendosi poi porre in dubbio, che li poligoni regolari, colli quali confondonsi cerchi diversi, siano della stessa specie, ed in conseguenza simili; potranno da ciò dedursi due teoremi intorno alla ragione, in cui sono, così le circonferenze di due cerchi, come gli stessi cerchi. Il primo si è, che le circonferenze di due cerchi, siano come li loro raggi, o pure come li loro diametri. L' altro si è, che gli cerchi stessi siano nella duplicata ragione, ed in conseguenza come li quadrati delli loro raggi, ovvero diametri.

569. Quindi, se vogliasi un cerchio, la di cui circonferenza sia eguale, o alla somma delle circonferenze di due altri cerchi dati, o pure alla loro differenza; si dovrà egli descrivere con un raggio, che uguagli, o la somma, o la differenza de' raggi degl' altri due dati. Ma se il cerchio stesso debba essere eguale, o alla somma di due altri cerchi dati, o pure alla loro differenza; in tal caso il suo raggio dovrà essere di lunghezza tale, che il suo quadrato sia eguale, o alla somma, o alla differen-

renza de' quadrati fatti dalli raggi dei due cerchi dati.

570. Volendosi intanto un cerchio, la di cui circonferenza sia in data ragione colla circonferenza di un' altro cerchio dato, bisognerà descriverlo con un raggio, che sia al raggio del dato cerchio in quella ragione; onde per mezzo di una quarta proporzionale si determinerà la lunghezza del suo raggio. Ma se poi il cerchio stesso debba essere in data ragione con un'altro dato cerchio; in tal caso il quadrato del suo raggio dovrà essere al quadrato fatto dal raggio del cerchio dato in quella ragione; e perciò si avrà bisogno di una mezza proporzionale per la determinazione del suo raggio.

571. Qual ragione abbia il diametro del cerchio alla sua circonferenza, tutta via è ignoto a' Geometri, e forse non potrà mai sapersi; ma niente vieta di definire li limiti, tra li quali ella si ritrova. In fatti, se situinsi nel cerchio due figure regolari della stessa specie, di cui una sia iscritta, e l'altra circonscritta; non v' ha dubbio, che la circonferenza sia maggiore del perimetro della prima, e minore del perimetro della seconda. Onde, siccome con questi due perimetri si hanno li limiti ricercati, così con aumentarsi il nu-

numero de' lati delle due figure, potrà farsi in modo, che gli stessi limiti sempre più si avvicinino tra di loro.

572. Per dimostrarlo per mezzo del calcolo, debbonsi prima risolvere due problemi, di cui il primo dee apprenderci, come essendo noto il lato di una figura regolare iscritta dentro del cerchio, possa determinarsi il lato dell' altra similmente iscritta, in cui il numero de' lati ritrovasi raddoppiato; ed il secondo, come essendo noto il lato di una figura regolare iscritta dentro del cerchio, possa determinarsi il lato della circonscritta, che sia della stessa specie coll' iscritta. Sia perciò B C il *Fig.* lato della figura regolare iscritta dentro 145. del cerchio B C D, e se su di esso si abbassi dal centro A la perpendicolare AE, che s' incontri coll' arco sostenuto da quel lato nel punto F, e congiungansi le due B F, C F; chiaro si è, che ciascuna di queste due sia il lato dell' altra figura similmente iscritta, in cui il numero de' lati ritrovasi raddoppiato.

573. Or essendo noto il lato B C, sarà nota ancora la sua metà B E; e pertanto, se dal quadrato del raggio AB tolgasi il quadrato della BE, colla radice quadrata del residuo si avrà la AE, la quale tolta dal raggio AF, ren-

renderà nota l'altra sua porzione EF; e se in appresso il quadrato di quest'altra porzione EF aggiungasi al quadrato della BE, colla radice quadrata della somma si avrà l'altro lato BF, che si dimanda. Onde con quest'artificio, se il diametro del cerchio esprimasi coll' unità, e sia BC il lato dell' esagono regolare, conforme è '5 il valore tanto del raggio, quanto del lato BC, così si ritroverà essere '25881 il valore dell' altro lato BF, che rapportasi al dodecagono, o sia alla figura regolare di 12 lati.

574. Se poi vogliasi gradatamente continuare lo stesso artificio, si ritroverà essere '13053 il valore del lato, che rapportasi alla figura regolare di 24 lati, '06541 il valore del lato, che appartiene alla figura regolare di 48, e '03277 il valore del lato spettante alla figura regolare di 96. Onde, se li riferiti lati prendansi tante volte, quanti sono li lati delle figure, a cui rapportansi, conforme è 3 il valore del perimetro dell' esagono regolare iscritto, così saranno 3'1072, 3'1326, 3'1394, 3'1411 li valori degl' interi perimetri dell' altre quattro figure regolari iscritte.

Fig. 145. 575. Per passare ora all' altro problema, posto di nuovo, che BC sia il lato della figura regolare iscritta dentro del

del cerchio, se al punto F tirisi la tangente GH, che s' incontri colli due raggi AB, AC prolungati ne' punti G, ed H; sarà questa GH il lato della figura regolare circonscritta, che sia della stessa specie coll' iscritta; onde, se ritrovisi il valore della AE, e per mezzo della regola aurea facciasi, come il valore della AE al valore del lato BC, così il valore del raggio AF ad un quarto proporzionale; chiaro si è, che con esso si avrà il valore del lato GH, che si dimanda: dimodochè, se il diametro esprimasi di nuovo per l' unità, e la BC sia il lato dell' esagono regolare iscritto, si ritroverà essere '57735 il valore del lato, che rapportasi all'esagono regolare circonscritto.

576. Quindi, con andare innanzi gradatamente. si ritroverà essere '2679 il valore del lato, che rapportasi al dodecagono regolare circonscritto, '13165 il valore del lato, che appartiene alla figura regolare circonscritta di 24 lati, '06555 il valore del lato spettante alla figura regolare circonscritta di 48, e '03274 il valore del lato, che compete alla figura regolare circonscritta di 96. Onde, se li riferiti lati prendansi tante volte, quanti sono li lati delle figure, a cui rapportansi, saranno 3'4641, 3'2153, 3'1551, 3'1467,

3'1425

3'1425 li valori degl'interi perimetri, delle ſteſſe cinque figure regolari circonſcritte.

577. Premeſſe tali coſe, egli è facile ora il dimoſtrare per mezzo del calcolo, che con figure regolari della ſteſſa ſpecie iſcritte, e circonſcritte nel cerchio, non ſolo poſſano averſi li limiti, tra li quali ſi racchiude la ragione del diametro alla circonferenza, ma che queſti limiti, con aumentarſi il numero de' lati di quelle figure, ſempre più tra di loro ſi avvicinino. In fatti, ſe le due figure regolari ſiano eſagoni, ed eſprimaſi il diametro del cerchio coll'unità, ſaranno 3, e 3'4641 li loro perimetri; onde il diametro alla circonferenza ſarà in minor ragione di 1 a 3, ed in maggior ragione di 1 a 3'4641.

578. Ma ſe poi le due figure regolari ſiano dodecagoni, eſſendo 3'1072, e 3'2153 li valori dei loro perimetri, ſarà il diametro alla circonferenza in minor ragione di 1 a 3'1072, ed in maggiore di 1 a 3'2153. E così andando più innanzi ſi ritroverà, che la ſteſſa ragione del diametro alla circonferenza, eſſendo le due figure regolari di 24 lati, ſia minore di 1 a 3'1326, e maggiore di 1 a 3'1551; che eſſendo di 48, ſia minore di 1 a 3'1394, e maggiore di 1 a 3'1467; e finalmente che eſſen-

essendo di 96 sia minore di 1 a 3'1411, e maggiore di 1 a 3'1435.

579. Per essere li due ultimi limiti molto vicini, non occorre andare più avanti; onde, tenendosi conto di ambidue, potrà dirsi, che il diametro sia alla circonferenza presso a poco, come 1 a 3'143, ovvero come 1000 a 3143. Di questo stesso artificio si avvalse ancora Archimede, ed avendo fatto il calcolo con numeri più piccioli, ritrovò per mezzo delle stesse figure, che il diametro alla circonferenza sia in minor ragione di 71 a 223, ed in maggior ragione di 7 a 22. E poichè ella si avvicina più a questa seconda, che alla prima, perciò comunemente nella pratica si fa uso della ragione di 7 a 22, maggiormente, che ritrovasi espressa con numeri molto piccioli.

580. Avvalendoci adunque ancora noi di una tal ragione, non sarà ora difficile di ritrovare, così la circonferenza del cerchio, essendo dato il suo diametro, come al contrario il diametro, essendo data la sua circonferenza. In fatti, se il diametro del cerchio sia di 4 palmi, e facciasi come 7 a 22, così 4 ad un quarto proporzionale, sarà la sua circonferenza presso a poco di palmi 12'5714. Al contrario poi, se la circonferenza del cerchio sia di

15 palmi, e facciasi come 22 a 7, così 15 ad un quarto proporzionale, sarà al di presso il suo diametro di palmi 4'773.

581. Secondo poi è stato avvertito (566), la capacità del cerchio si ha con moltiplicare, o la metà della circonferenza per lo raggio, o pure la circonferenza intera per la metà del raggio. Ma potrà ella aversi ancora col solo diametro; poichè, essendo il cerchio al quadrato circonscritto intorno ad esso, che è il quadrato del suo diametro, come la quarta parte della circonferenza allo stesso diametro (567), cioè come 11 a 14: se facciasi, come 14 ed 11, così il quadrato del diametro ad un quarto proporzionale, con questo si avrà la capacità del cerchio: dimodochè, essendo il diametro del cerchio di 4 palmi, sarà la sua capacità di 12'5714 palmi quadrati.

582. Intanto, se dopo essersi determinata la capacità del cerchio, cavisi la radice quadrata dal numero dei palmi quadrati, che in essa si contengono, si avrà con questa radice il lato del quadrato eguale al cerchio, che è il celebre problema della sua quadratura, il quale lato sarà in conseguenza mezzo proporzionale, così tra la metà della circonferenza, e l' intero raggio, come tra

tra l' intera circonferenza, e la metà del raggio. Essendo adunque di 12'5714 palmi quadrati la capacità del cerchio, il di cui diametro è di 4 palmi, ed essendo 3'545 la radice quadrata di 12'5714, sarà il lato del quadrato eguale al cerchio di 3'545 palmi.

§. XXXV.

Dei settori, e porzioni del cerchio, come ancora delle lunette, e corone circolari.

583. RImangono a determinarsi le varie porzioni del cerchio, che sono le sole figure mistilinee, di cui trattasi nella Geometria elementare; ma per la loro determinazione deesi prima far vedere, come debba determinarsi quello spazio circolare, che racchiuso tra due raggi chiamasi settore. Ed in vero, considerandolo come porzione di quel poligono regolare, con cui il cerchio si confonde; chiaro si è, che per essere risecato con rette tirate dal centro, egli ancora sia eguale ad un triangolo, che ha per base una retta eguale all' arco, che lo termina, e per altezza il raggio; onde si avrà la sua misura similmente, con moltiplicare, o la metà dell' arco per

lo raggio, o pure l'arco intero per la metà del raggio.

584. Per quanto poi all' arco del settore, sapendosi il numero de' suoi gradi, e minuti, può determinarsi la sua lunghezza, primieramente con definire l'intera circonferenza del cerchio, ed indi col dire, se 360 gradi danno l'intera circonferenza, che darà il numero de' gradi, e minuti contenuti nell' arco, che si dimanda? poichè col quarto proporzionale, che si ritroverà per mezzo della regola aurea, si avrà la lunghezza, dell' arcola quale lunghezza moltiplicata per la metà del raggio ci darà il settore sostenuto dall'arco.

585. Così, se il diametro del cerchio sia di 4 palmi, sarà la sua circonferenza di palmi 12'5714; onde, se l' arco sia di 30 gradi, e 15 minuti, e per agevolare il calcolo riducansi a minuti, così li 30 gradi dell' arco, come li 360 dell' intera circonferenza, dovrà dirsi, se 21600 minuti danno 12'5714, che daranno 1815 minuti? E poichè il quarto proporzionale, che ritrovasi colla regola aurea, è 1'0563, sarà per tanto la lunghezza dell' arco di 1'0563 palmi, la quale lunghezza moltiplicata per la metà del raggio, che è di un solo palmo, farà, che il settore soste-

nuto

nuto da quell'arco ſia di 1'0563 palmi quadrati.

586. Colla miſura del ſettore potrà ora miſurarſi qualſiſia porzione di cerchio. Sia perciò il cerchio BCDE, che abbia per ſuo centro il punto A; e per mezzo della retta BD, che non paſſa per lo centro, dividaſi nelle due porzioni BCD, BED, di cui la prima è minore del mezzo cerchio, e la ſeconda al contrario maggiore. Se adunque ai due punti B, e D tirinſi li raggi AB, AD, chiaro ſi è, che la porzione minore BCD ſia la differenza tra il ſettore ABCD, ed il triangolo ABD. Onde, ſe miſuriſi così il ſettore, come il triangolo, colla loro differenza ſi avrà la ſuperficie della porzione minore BCD. *Fig.* *146.*

587. Per quanto poi alla porzione maggiore BED, la ſua ſuperficie potrà averſi, con togliere dal cerchio la porzione minore BCD; ma ſe ſi miſuri l'altro ſettore ABED, e ad eſſo aggiungaſi lo ſteſſo triangolo ABD, colla loro ſomma ſi avrà eziandio la ſua ſuperficie. E poichè, abbaſſandoſi ſul raggio AD la perpendicolare BF, ſi ha il triangolo ABD, con moltiplicare la BF per la metà del raggio AB; vedeſi chiaramente, che conforme la differenza tra l'arco BCD, e la BF

moltiplicata per la metà del raggio dee darci la superficie della porzione minore, così la somma dello stesso arco BCD, e della stessa BF moltiplicata per la metà del raggio dovrà darci la superficie della porzione maggiore.

588. Colle porzioni di cerchio sogliono construirsi alcune figure curvilinee, che chiamansi lunette circolari; e formansi propriamente con due porzioni, risecate per mezzo di rette eguali da due diversi cerchi, siccome
Fig. sono le due ABCD, EFGH. Vedesi
147. intanto, che conforme la prima ABCD, convessa da ambedue le parti, è eguale alla somma delle due porzioni ABC, ADC; così al contrario l'altra EFGH, che da un lato è convessa, dall' altro concava, sia eguale alla differenza delle due porzioni EFG, EHG. Onde, con misurare le due porzioni di cerchio, che formano la lunetta, e con prenderne, o la somma, o pure la differenza, si avrà la superficie della stessa lunetta.

589. Tra le lunette della seconda specie se ne incontrano alcune, che indipendentemente dal cerchio possono mi-
Fig. surarsi con esattezza. In fatti, se ABC
148. sia un triangolo rettangolo in A, e sull' ipotenusa BC descrivasi il mezzo cerchio BDEC, per essere retto l'angolo

golo situato nel mezzo cerchio, la sua circonferenza dovrà passare per lo punto A. Onde, se sulli lati AB, AC descrivansi due altri mezzi cerchi AFB, AGC, si avranno con tutti tre le due lunette ADBF, AECG. Or io dico, che queste due lunette insieme siano eguali al triangolo rettangolo ABC.

590. Per intenderne la ragione, giova riflettere, che li tre mezzi cerchi, non altrimente che li cerchi interi, sono come li quadrati dei loro diametri. Quindi, siccome il quadrato dell' ipotenusa BC è eguale ai quadrati dei due lati AB, AC; così il mezzo cerchio BDEC descritto sull' ipotenusa sarà eziandio eguale ai due AFB, AGC descritti sulli due lati. Onde, toltone quel tanto hanno di comune, saranno le due lunette ADBF, AECG insieme similmente eguali al triangolo rettangolo ABC.

591. Se li due lati AB, AC del triangolo rettangolo ABC siano eguali, chiaro si è, che saranno eguali ancora le due lunette ADBF, AECG. Onde, perchè, abbassata dall' angolo retto A sull' ipotenusa BC la perpendicolare AH, sono eziandio eguali li due triangoli rettangoli AHB, AHC, in cui quel primo ABC rimane diviso; ne segue da ciò, che ciascuna delle due lunette

sia eguale ad uno dei due triangoli: il che può dimostrarsi ancora in altra guisa, ed ecco come.

592. Poichè voglionsi eguali li due lati AB, AC del triangolo rettangolo ABC, sarà il quadrato dell' ipotenusa BC doppio del quadrato fatto dal lato AB. Ma il mezzo cerchio BDEC sta al mezzo cerchio AFB, come il quadrato dell' ipotenusa BC al quadrato del lato AB. Dunque ancora il mezzo cerchio BDEC sarà doppio del mezzo cerchio AFB; e per tanto, facendosi il quadrante HADB eguale a questo secondo mezzo cerchio, se tolgasi da essi quel tanto hanno di comune, rimanerà la lunetta ADBE eguale al triangolo AHB; e della stessa maniera potrà dimostrarsi, che l' altra lunetta AECG sia eguale all' altro triangolo AHC.

593. Alle lunette possono aggiungersi le corone circolari, che formansi colle circonferenze di due cerchi concentrici; e quantunque possa aversi ciascuna di esse, con determinare le capacità dei due cerchi, e con sottrarre la minore dalla maggiore; nientedimeno si avrà più facilmente, con moltiplicare la differenza dei due raggi per la somma dimezzata delle due circonferenze, che la contengono; il che potrà dimostrarsi facilmente, con formare su gli stessi

ſteſſi raggi li due triangoli, a cui ſono eguali li due cerchi; poichè ſi vedrà con ogni chiarezza, che la differenza di queſti due triangoli ſia un trapezio, che miſuraſi, con moltiplicare la differenza dei due raggi per la differenza dimezzata delle due rette, che per la formazione dei due triangoli debbonſi fare eguali alle due circonferenze.

594. Per ritornare ai ſettori, che più importano, conforme ciaſcuno di eſſi è eguale ad un triangolo, che ha per baſe una retta eguale all' arco, che lo ſoſtiene, e per altezza il raggio del cerchio, a cui appartiene il ſettore; così per mezzo di queſti triangoli potrà giudicarſi, come ſono due ſettori tra di loro. Giova intanto per maggior chiarezza diſtinguere due caſi, di cui il primo ſi è, quando li due ſettori prendonſi, o in un' iſteſſo cerchio, o pure in cerchi eguali; ed il ſecondo, quando ſi prendono in cerchi diſuguali.

595. Adunque, prendendoſi li due ſettori, o in un medeſimo cerchio, o in cerchi eguali, chiaro ſi è, che la loro ragione ſia la ſteſſa con quella degl'archi, che li ſoſtengono, dimodochè dovranno eſſere eguali, quando ſono ſoſtenuti da archi eguali. Ma ſe poi ſi prendano in cerchi diſuguali, li due ſettori ſaranno in ragion compoſta de-

gl' archi, e delli raggi. Onde, conforme essendo eguali gl' archi sono nella semplice ragione de' raggi; così se mai gl' archi siano nella reciproca ragione de' raggi, li due settori dovranno essere eguali.

596. Possono due settori paragonarsi ancora cogl' angoli, che essi stessi contengono, tanto se siano eguali li cerchi, in cui si prendono, quanto se siano disuguali; ma per intendere, quale sia la loro ragione, bisogna prima investigare, come siano due archi per rapporto agl' angoli, che situati ne' loro centri insistono sopra di essi. Ed in vero già fu avvertito (65), che in una stessa linea circolare l' arco, e l' angolo ricevono eguali aumenti; ed in conseguenza, che gl' archi siano nella semplice ragione degl' angoli; ma, se gl' archi prendansi in circonferenze diverse, che siano disuguali, in tal caso la ragione degl' archi sarà composta dalle due degl' angoli, e dei raggi.

Fig. 597. Siano perciò li due cerchi dis-
149. uguali BCD, FGH, ai di cui centri A, ed E situinsi due angoli, come BAC, FEG, che insistano su gl' archi BC, FG. Io dico, che l' arco BC sia all' arco FG in ragion composta dell' angolo BAC all' angolo FEG, e del raggio AB al raggio EF. In fatti, se col cen-

centro E, e col raggio AB descrivasi il terzo cerchio KIL, la di cui circonferenza seghi li lati dell' angolo FEG ne' punti K, ed I; l' arco BC sarà all' arco FG in ragion composta dell'arco BC all' arco KI e dell' arco KI all' arco FG. Ma li primi due archi BC, KI sono, come gl' angoli BAC, FEG (65); e gl' altri due KI, FG sono, come l' intere loro circonferenze (69), o pure come li raggi EK, EF. Dunque, essendo il raggio EK eguale al raggio AB, sarà l' arco BC all' arco FG in ragion composta dell' angolo BAC all' angolo EFG, e del raggio AB al raggio EF.

598. Da ciò ora ne segue, che se bene due settori presi in un medesimo cerchio, o in cerchi eguali, come proporzionali agl' archi, su di cui si appoggiano (595), siano nella semplice ragione degl' angoli, che in essi si contengono; nientedimeno due settori presi in cerchi disuguali debbano essere in ragion composta della semplice degl' angoli, e della duplicata de' raggi. Prendansi perciò nelli due cerchi disuguali BCD, FGH li due settori ABC, EFG. Io dico, che il settore ABC sia al settore EFG in ragion composta dell' angolo BAC all' angolo FEG, e del quadrato *Fig. 149.*

del raggio AB al quadrato del raggio EF.

599. In fatti li due settori ABC, EFG, a simiglianza dei loro triangoli eguali, sono in ragion composta dell'arco BC all'arco FG, e del raggio AB al raggio EF. Ma si è dimostrato (596), che l'arco BC sia all'arco FG in ragion composta dell'angolo BAC all'angolo FEG, e del raggio AB al raggio EF. Dunque gli stessi due settori ABC, EFG dovranno essere ancora in ragion composta dell'angolo BAC all'angolo FEG, e del quadrato del raggio AB al quadrato del raggio EF; dimodochè saranno nella semplice ragione degl'angoli BAC, FEG, quante volte sono eguali li due raggi AB, EF, ed eguali in conseguenza li cerchi, in cui si sono presi li due settori.

600. Niente vieta, che due settori presi in cerchi disuguali siano simili; e ciò avviene, quante volte sono eguali gl'angoli, che in essi si contengono; poichè colla loro uguaglianza li due settori vengono ad essere nella stessa ragione colli due cerchi. In fatti il set-
Fig. 149. tore ABC sta al cerchio BCD, come l'angolo BAC alla somma di quattro retti; e similmente il settore EFG sta al cerchio FGH, come l'angolo FEG alla somma di quattro retti. Onde, qua-

qualora sono eguali li due angoli BAC, FEG, sarà il settore ABC al cerchio BCD, come il settore EFG al cerchio FGH. Ed essendo così, chiaro si è, che li settori simili, attenta l'uguaglianza dei loro angoli, siano nella sola duplicata ragione dei loro raggi.

601. Questo stesso intanto può dedursi ancora dall' altro teorema generale (595), che li due settori ABC, EFG, presi in cerchi disuguali, siano in ragion composta dell' arco BC all' arco FG, e del raggio AB al raggio EF. Imperocchè, facendosi eguali li due angoli BAC, FEG, li due archi BC, FG, che li misurano, conteneranno un' istesso numero di gradi, e minuti; ed in conseguenza saranno nella stessa ragione, tanto colle loro intere circonferenze BCD, FGH, quanto colli loro raggi AB, EF. Onde, essendo la ragione dei due archi BC, FG eguale alla ragione dei due raggi AB, EF; la ragione, che da esse si compone, sarà duplicata così dell' una come dell' altra.

602. Del rimanente, se congiunganſi le rette BC, FG, chiaro si è, che facendosi simili li due settori ABC EFG, debbano essere simili altresì, così li due triangoli BAC, FEG, che in essi si racchiudono, come le rimanenti porzioni, che tagliano dai due cer-

cerchi le rette BC, FG. Dal che ne segue, che siccome all'ora sono simili due porzioni, tagliate da due diversi cerchi, quantevolte li loro archi contengono un' istesso numero di gradi, e minuti; così le stesse porzioni siano nella duplicata ragione, non solo dei raggi, ma ancora delle rette, che le sostengono.

§. XXXVI.

Dell' indole de' problemi geometrici, e del modo di risolverli.

603. Conchiuderemo questi Elementi della Geometria piana con alcune riflessioni, tanto sull' indole de' problemi geometrici, come sul metodo da tenersi nella loro risoluzione. Ed in primo luogo, qualora vien proposto un qualche problema geometrico, giova servirsi del metodo analitico, cioè di supporre già fatto quel tanto si dimanda, e percorrere le conseguenze, che se ne ritraggono; poichè se mai se ne incontri alcuna, che possa eseguirsi, da essa dovrà ripetersi la risoluzione del problema, e se ne formerà la dimostrazione, con invertere il raziocinio tenuto nell' analisi.

604. Per illustrarlo con qualche esem-

sempio facile, debbasi sulla data retta AB descrivere un triangolo, che sia equilatero. Supposto, che ABC sia il triangolo ricercato, per la sua indole saranno eguali, così le due AB, AC, come le due AB, BC; e per tanto il punto C sarà situato nell' intersegamento di due archi circolari descritti colli punti A, e B come centri, e coll' intervallo della retta data AB. Onde, potendosi descrivere questi due archi circolari, se essi descrivansi effettivamente, col loro intersegamento si avrà il punto C; ed in conseguenza, congiunte le due AC, BC per mezzo dell'indole degli stessi archi si dimostrerà, che il triangolo ABC sia equilatero. *Fig.* 150.

605. Or nell' esame delle conseguenze, che ritrar si possono dal supporre già fatto, quel tanto nel problema si dimanda, siccome debbonsi avere presenti le proprietà delle figure, che risultano dallo stesso problema; così il più delle volte si avrà bisogno delle construzioni già note, come di dividere per metà una qualche retta, o un qualche angolo; di alzare, o abbassare una perpendicolare sopra una qualche retta da un qualche punto; e di altre consimili. Ed appunto in questo dee rilucere l' industria del Geometra, cioè nel vedere con un colpo d' occhio, di quali pro-

proprietà, e di quali construzioni debba far uso, per giungere alla conseguenza, che si desidera.

Fig. 151. 606. Così, se col lato dato AB debbasi descrivere un triangolo isoscele, in cui ciascuno degl' angoli sopra la base sia doppio dell'angolo verticale; supposto, che BAC sia un tal triangolo, potrà dividersi l'angolo ACB in due parti eguali per la retta CD; poichè, incontrandosi questa retta col lato AB nel punto D, si vedrà subito, che non solo siano eguali le due AD, CD per la condizione apposta nel problema; ma altresì, che l'angolo CDB, come eguale ai due insieme DAC, ACD, sia eguale all'angolo DBC; ed in conseguenza, che siano eguali ancora le due BC, CD. E poichè vedesi in oltre, che li due triangoli ABC, CBD siano equiangoli, e per tanto che AB sia a BC, come BC a BD (455), o pure che AB sia ad AD, come AD a BD; si ricaverà da ciò, che il lato AC sia diviso in estrema, e media ragione nel punto D (484), la qual divisione si sa, come debba eseguirsi (482).

607. Quindi si risolverà il proposto problema, primieramente con dividere il lato AB in estrema, e media ragione nel punto D talmente, che AD sia la porzione maggiore, e BD la minore;

re; ed indi con descrivere colli punti A, e B come centri, e cogl' intervalli delle due AB, AD due archi circolari, che s' intersegnino nel punto C; poichè, congiunte le due AC, BC, sarà ABC il triangolo ricercato: come in fatti, essendo eguali le due AD, BC, sarà AB a BC, come BC a BD; e per tanto, facendosi equiangoli li due triangoli ABC, CDB (462), saranno eguali non solo li due angoli CBD, CDB, ma ancora le due CD, BC; onde, facendosi eguali altresì, così le due CD, AD, come li due angoli DAC, DCA, sarà tanto l' angolo CDB, come il suo eguale CBD doppio del solo angolo DAC.

608. Notisi quì di passaggio, che dello stesso metodo può farsi uso ancora, per dimostrare li nuovi teoremi, che possono proporsi, cioè con supporli veri, e con vedere, se ricavasi da essi qualche verità conosciuta. Così, se sia *Fig.* proposto il seguente teorema, cioè che 152. il raggio AB del cerchio BCD iscritto dentro del triangolo EFG sia eguale alla metà della differenza tra uno de' suoi lati, come FG, e la somma degl' altri due EF, EG; potrà supporsi, che egli sia vero. E poichè, per essere eguali così le due BF, CF, come le due DG, BG (357), la riferita differenza è eguale

le all'altre due CE, DE, che similmente sono eguali; dovranno essere eguali tanto le due AC, CE, quanto le due AD, DE; ed in conseguenza la AE dovrà dividere per metà l'angolo BED. Onde, perchè con questa legge dee egli essere diviso, per iscriversi il cerchio dentro del triangolo (360), dovrà conchiudersi, che il proposto teorema sia effettivamente vero.

609. Ma per ritornare ai problemi, noteremo in secondo luogo, che questi possono essere di tre specie, cioè determinati, indeterminati, e più che determinati. Dicesi un problema essere determinato, quando si sono apposte in esso tutte le condizioni per la determinazione di quel tanto si dimanda, onde si è, che sia definito il numero delle diverse soluzioni, di cui è egli capace. Dicesi al contrario essere indeterminato, quando manca nel problema qualche condizione, per la di cui mancanza rendesi egli capace d'infinite soluzioni diverse. E finalmente dicesi essere più che determinato, quando si appone in esso qualche condizione di più, a cui se vogliasi attendere, il più delle volte sarebbe il problema impossibile.

610. Per schiarire maggiormente l' in-

indole di tutte tre queste specie di problemi, già si sa, che rimane determinato il triangolo rettangolo, con esser data l'ipotenusa insieme con uno de' suoi lati; onde, se nel problema della sua formazione si apponesse un'altra condizione, come per ragion di esempio, che il lato dato sia in data ragione coll'altro lato, il problema sarebbe più che determinato; poichè la nuova condizione apposta niente conferirebbe alla sua soluzione, e volendosi tener conto di essa, potrebbe il problema essere impossibile, siccome in effetto lo dee essere, quante volte l'altro lato colle prime due condizioni facciasi di tal lunghezza, che il lato dato non possa serbare con esso la data ragione.

611. Al contrario poi, se per la formazione del triangolo rettangolo si dasse la sola ipotenusa, e si togliesse l'altra condizione di esser dato ancora uno de' suoi lati; il problema sarebbe indeterminato, e capace in conseguenza d'infinite soluzioni diverse: siccome in effetto, se sull'ipotenusa data come diametro si descrivesse un mezzo cerchio, e si tirassero rette agl'estremi della stessa ipotenusa da qualsisia punto della circonferenza di quel mezzo cerchio, si formerebbero sulla data ipotenusa infiniti triangoli rettangoli, e ciascu-

scuno di essi adempirebbe l'unica condizione apposta nel problema.

612. Essendo così, sarà senza dubbio determinato un problema, quante volte le condizioni in esso apposte sono sufficienti per la determinazione di quel tanto si dimanda, senza esservene alcuna superflua; ma può avvenire tal volta, che le condizioni apposte, tuttochè necessarie per la soluzione del problema, non possano combinarsi insieme; onde si è, che nè pure il problema possa risolversi, se non si modifichi una di esse. Così, per potersi con tre rette date formare un triangolo, bisogna, che due di esse unite insieme siano maggiori della rimanente, comunque si prendano (96). E così ancora per potersi dividere una data retta in modo, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra retta data, fa duopo, che quest' altra retta non sia maggiore della metà della prima (226).

613. Ma ciò, che nel problema determinato deesi specialmente avvertire, si è, che quantunque le condizioni in esso apposte siano bastanti per la determinazione di quel tanto si cerca, pure però il problema può essere capace non già di infinite, ma di due, o più soluzioni diverse, siccome si è veduto nel pro-

problema di formare un triangolo, di cui ſiano dati due lati inſieme coll' angolo oppoſto ad uno di eſſi; poichè colle ſteſſe condizioni, e colla medeſima conſtruzione ſi formarono due triangoli, differenti tra di loro per l' angolo oppoſto all' altro lato, che era ottuſo in uno di eſſi, ed acuto nell' altro (137).

614. Le diverſe ſoluzioni intanto, di cui è capace tal volta un qualche problema determinato, derivano ſpeſſe fiate, non già dalla varia forma, che poſſa avere quel tanto in eſſo ſi dimanda, ma dalla varia ſua poſizione. Così il problema di tirare la tangente ad un dato cerchio da un punto dato fuori di eſſo, può ricevere due ſoluzioni diverſe, non perchè la tangente poſſa avere due diverſe lunghezze, ma perchè a riguardo della retta, che congiunge il centro del cerchio col punto dato, può ella tirarſi così da un lato, come dall' altro. E così ancora il problema di deſcrivere il triangolo equilatero ſopra una retta data, rendeſi capace di due diverſe ſoluzioni per la doppia poſizione, che può ricevere il triangolo per rapporto alla retta data.

615. Or ſe bene il fine principale de' Geometri ſia la riſoluzione de' problemi determinati, nientedimeno li mez-

zi, per conseguire la loro construzione, vengono ad essi somministrati dagl'altri indeterminati. Perciò noteremo in terzo luogo, che siccome un problema indeterminato può ricevere infinite soluzioni diverse; così egli ci somministra infiniti punti, valevoli ad adempire le sue condizioni; e alla sede di essi, che chiamasi luogo geometrico, si dee ricorrere, qualora coll' aggiunta di un' altra condizione il problema rendesi determinato; onde si è, che la construzione de' problemi determinati non possa conseguirsi, senza la preventiva conoscenza de' luoghi geometrici.

Fig. 153. *616.* Per dare un saggio dei luoghi geometrici, sia data di posizione la retta AB terminata al punto A, e debbasi fuori di essa ritrovare il punto M, da cui abbassata sulla AB la perpendicolare MN, sia AN ad MN in data ragione. Taglisi dalla AB una porzione ad arbitrio, che sia AC; indi alzata su di essa la perpendicolare CD di lunghezza tale, che AC sia a CD in quella data ragione (469), congiungasi la AD. Or ovunque prendasi in questa retta AD il punto M, chiaro si è, che per gli triangoli equiangoli ANM, ACD, sempre sarà AN ad MN, come AC a CD (455). Onde, essendo la AD sede degl' infiniti punti, con cui

può

può risolversi il problema proposto, sarà ella un luogo geometrico.

617. Sia data in oltre, così di posizione, come di lunghezza la retta AB; ed alzata su di essa dal punto A la perpendicolare AC, debbasi ritrovare fuori della medesima il punto M in modo, che congiunte le rette AM, BM, sia l'angolo CAM eguale all'angolo ABM. Poichè, per la condizione apposta nel problema, li due angoli ABM, BAM debbono essere insieme eguali all'angolo retto BAC; sarà retto l'angolo AMB contenuto dalle due AM, BM. Onde, se sulla retta AB come diametro descrivasi un cerchio, ovunque prendasi nella sua circonferenza il punto M, sempre sarà l'angolo ABM eguale all'angolo CAM; e pertanto, essendo la riferita circonferenza sede degl' infiniti punti, con cui può risolversi il proposto problema indeterminato, essa ancora sarà un luogo geometrico. *Fig.* 154.

618. Niente vieta, che sia superficie il luogo geometrico, a cui ci conduce un qualche problema indeterminato, anzi può essere talvolta ancora un solido. Così, se nel triangolo equilatero ABC sia abbassata sul lato BC la perpendicolare AD dall'angolo opposto, e debbasi dentro di esso ritrovare il punto *Fig.* 155.

to

to M in modo, che le tre perpendicolari MN, MO, MR abbassate da esso sulli tre lati AB, AC, BC siano insieme eguali alla AD; chiaro si è, che ogni punto del triangolo sia bastante a risolvere un tal problema indeterminato; onde il luogo geometrico, ove egli ci conduce, sarà la superficie dello stesso triangolo.

619. Li luoghi geometrici intanto, a cui dobbiamo ricorrere nella construzione de' problemi determinati, sono quelli, che ci conducono ad una qualche linea, retta o curva che ella sia, di cui perciò bisogna saperne le proprietà almeno principali; ma per intendere, come con questi luoghi ottengasi la construzione di qualsisia problema determinato, noteremo finalmente, che tutto lo studio del Geometra riducesi alla scelta di due luoghi, che contengano separatamente le condizioni del problema, di cui si tratta; poichè, descrivendosi le linee, a cui ci conducono li due luoghi, col loro intersegamento si avrà il punto, che nel problema si dimanda; siccome in effetto, essendo egli comune ad ambidue li luoghi, in esso debbono riunirsi le condizioni, così dell'uno, come dell'altro.

620. Così, se fuori della retta AB terminata al punto A debbasi ritrovare il

il punto M, da cui abbassata sulla AB la perpendicolare MN, siano le due AN, MN, non solo in data ragione, ma eguali ancora insieme ad un' altra retta data EF; dei due luoghi da sceglierſi uno si avrà colla prima condizione, di dover essere le due AN, MN in data ragione; e l' altro coll' altra condizione, di dover essere le medesime insieme eguali alla EF. Quindi, siccome facendosi, che una porzione qualsisia AC della AB sia alla perpendicolare CD in quella data ragione, ci conduce il primo luogo alla retta AD (*616*); così, se prendasi sulla stessa AB la porzione AG eguale alla EF, e sulla CD la porzione CH eguale alla CG, ci condurrà il secondo luogo all' altra retta GH; onde coll' intersegamento delle due AD, GH si avrà il punto ricercato. *Fig.* 153.

621. Similmente, se fuori della retta AB, data così di lunghezza, come di posizione, debbasi ritrovare il punto M in modo, che sia retto l' angolo contenuto dalle due AM, BM, e che la perpendicolare MN, abbassata da esso sulla AB, sia eguale ad un' altra data retta EF; dei due luoghi da sceglierſi uno si avrà colla prima condizione, di dover essere retto l' angolo AMB; e l' altro coll' altra condizione, di do- *Fig.* 154.

ver essere la perpendicolare MN eguale alla EF. Onde, siccome il primo luogo ci conduce alla circonferenza del cerchio descritto sulla AB, come diametro; così, se alzisi sulla stessa AB la perpendicolare AC, da cui taglisi la porzione AD eguale alla EF, ci condurrà il secondo alla retta DG parallelà alla AB; e per tanto coll'intersegamento di questa retta con quella circonferenza di cerchio si avrà il punto ricercato.

622. Questo secondo esempio ci fa intendere, donde derivi, che un problema determinato possa essere capace talvolta di due, o più soluzioni diverse, cioè dal potersi le due linee, di cui si fa uso nella sua construzione, intersegare in due, o più punti: come in fatti, per intersegarsi la DG colla circonferenza del cerchio in due punti, il problema rendesi capace di due diverse soluzioni. Ma lo stesso esempio pone ancora in chiaro, che un problema determinato non possa tal volta risolversi, se non si accordino insieme le condizioni in esso apposte: siccome in effetto, per potersi la DG incontrare colla riferita circonferenza, fa duopo, che la EF, ovvero AD non sia maggiore della metà dell' altra AB.

§.XXXVII.

§. XXXVII.

Della risoluzione de' problemi, che sono piani di lor natura.

623. GL' antichi Geometri distinguevano li problemi determinati in tre classi, cioè in piani, solidi, e lineari. Chiamavano problemi piani quelli, che possono construirsi colla linea retta, e colla linea circolare. Chiamavano all' incontro problemi solidi quegl' altri, che per la loro construzione richiedono almeno una di quelle curve, che tirando la loro origine dal solido, chiamato cono, appellansi sezioni coniche. Ed in fine chiamavano problemi lineari tutti gl' altri, che per potersi construire, hanno bisogno di linee curve d' indole più composta, non solo della linea circolare, ma delle stesse sezioni coniche.

624. Poichè dunque nella Geometria piana trattasi soltanto della linea retta, e della linea circolare; quindi si è, che appartiene ad essa la sola risoluzione de' problemi, che sono piani di lor natura; e la prima riflessione da farsi intorno a questi problemi si è, che alcuni di essi possono construirsi coll' intersegamento di due linee rette, li

quali, come più semplici, chiameremo problemi del primo genere; ed altri coll' intersegamento, o di una linea retta, e di una linea circolare, o pure di due linee circolari, li quali, per essere d'indole più composta, chiameremo problemi del secondo genere.

625. Li problemi del primo genere non sono capaci, se non che di una sola soluzione, nè mai può avvenire, che siano impossibili; e ciò per la ragione, che due rette debbono sempre intersegarsi tra di loro, ed il loro intersegamento non può farsi, se non che in un sol punto. E quantunque le due rette, che impieganſi nella construzione del problema, siano tal volta parallele; pure però possono considerarsi come rette, che incontransi in un punto, infinitamente distante dalla loro origine, e che contengono un'angolo minore di ogn' angolo, che possa assegnarsi; donde avviene, che li due interiori alla stessa parte, che forma con esse una terza retta, siano insieme eguali a due retti.

626. Al contrario poi li problemi del secondo genere sono sempre capaci di due soluzioni diverse, le quali siccome possono talvolta riunirsi insieme, così possono ancora non sussistere, e fare in conseguenza, che il problema sia impossibile. Dipende ciò dall' indole della

della linea circolare, che intersegasi in due punti, così colla linea retta, come con un'altra linea circolare; li quali punti d' intersegamento, conforme riunisconsi insieme, qualora le riferite linee incontransi per via di contatto, così possono altresì interamente svanire. Ed ecco per qual ragione dee farsi distinzione tra li problemi piani del primo genere, e gl' altri del secondo.

627. Affinchè abbiasi un criterio indubitato, per discernere, se un problema piano sia del primo, o del secondo genere, giova riflettere, che siccome ogni problema riducesi alla ricerca di un punto, che soddisfi a tutte le sue condizioni; così dee esservi una retta, che ci conduca a quel punto, e di cui s'ignori la lunghezza; onde potrà dedursi il criterio, che si desidera, da quel tanto deesi fare per la determinazione di questa retta. Adunque, se per determinarla, debbasi ritrovare una terza, o quarta proporzionale dopo due, o tre rette date, il problema sarà del primo genere. Ma, se per la sua determinazione si abbia bisogno di ritrovare, o una mezza proporzionale tra due rette date, o due rette, che siano reciproche con due altre date rette, e di cui ne sia data, o la somma, o la differenza; in tal caso il problema sarà del secondo genere.

628. Per dimostrare intanto, che ne' problemi piani nelle solo quattro riferite maniere debba determinarsi la retta, di cui si tratta, si vuol riflettere, che siccome la Geometria piana, nel paragonare le rette tra esso loro, non passa più oltre delli loro rettangoli, e delli loro quadrati; così nella ricerca della lunghezza di quella retta quattro soli casi possono aver luogo; e sono, o che sia dato il rettangolo della stessa retta in un' altra data, o che sia dato il suo quadrato, o che sia data la somma di quel rettangolo e di questo quadrato, o finalmente che sia data la loro differenza. Onde basterà dimostrare, che a questi quattro casi rapportansi le quattro riferite maniere di determinare la lunghezza della divisata retta.

Fig. 156. 629. Sia perciò AB la retta, di cui deesi definire la lunghezza, e pongasi primieramente, che il rettangolo della AB nell' altra data CD sia eguale al rettangolo delle due similmente date EF, GH. Poichè dunque sono eguali questi due rettangoli, sarà CD ad EF, come GH ad AB (523); onde, con ritrovare la quarta proporzionale dopo le tre rette date CD, EF, GH, si avrà la lunghezza della AB. E siccome può avvenire, che le due EF, GH siano eguali, ed in conseguenza, che il rettangolo della

della AB nella CD sia eguale al quadrato della EF; così, dovendo essere CD ad EF, come EF ad AB (524), si avrà la AB, con ritrovare la terza proporzionale dopo le due date CD, EF.

630. Egli è vero, che il rettangolo della AB nell' altra data CD può essere tal volta eguale alla somma, o differenza di due altri rettangoli dati. Ma, quando ciò avviene, primieramente si ridurranno ad un solo rettangolo li due dati, ed indi colla quarta proporzionale dopo la CD, e li due lati di questo solo rettangolo, si determinerà la AB. E per quanto alla riduzione, di cui si ha bisogno, basterà fare in modo, che li due dati rettangoli abbiano un lato comune; il che potrà farsi, con ritrovare una quarta proporzionale dopo un lato di uno di essi, e li due lati dell' altro. Nè altrimente dovrà farsi, se il rettangolo della AB nella AC sia eguale alla somma, o differenza, sia di due quadrati dati, sia di un dato rettangolo e di un dato quadrato.

631. Pongasi in secondo luogo, che il quadrato della AB sia eguale al rettangolo delle due rette date EF, GH; e poichè per questa loro uguaglianza dee essere EF ad AB, come AB a GH (524), chiaro si è, che si avrà la AB, *Fig. 156.*

con ritrovare la mezza proporzionale tra le due rette date EF, GH. E quantunque possa avvenire, che il quadrato della AB facciasi talvolta eguale alla somma o differenza, sia di due dati quadrati, sia di un dato rettangolo e di un dato quadrato; nientedimeno colla riduzione poc' anzi accennata sempre dovrà determinarsi la AB, con ritrovare la mezza proporzionale tra due rette date; il che dee intendersi ancora per gli due casi, che seguono, per non replicare sempre lo stesso.

Fig. 156. 632. Pongasi in terzo luogo, che la somma del quadrato della AB, e del rettangolo della stessa AB nell'altra data CD sia eguale al rettangolo delle due similmente date EF, GH. Poichè dunque quel quadrato, e quel rettangolo insieme sono eguali al solo rettangolo della AB nella somma delle due AB, CD (174); ancora questo rettangolo sarà eguale al rettangolo delle due EF, GH. Onde, dovendo essere AB ad EF, come GH alla somma delle due AB, CD (523); chiaro si è, che si determinerà la AB, con ritrovare due rette, che siano reciproche colle due date EF, GH, e che differiscano tra di loro per l'altra retta similmente data CD.

633. Pongasi finalmente, che la differenza tra il quadrato della AB, ed il ret-

rettangolo della stessa AB nell'altra data CD sia eguale al rettangolo delle due similmente date EF, GH. Poichè dunque la differenza tra quel quadrato, e quel rettangolo è eguale al solo rettangolo della AB nella differenza delle due AB, CD (174); ancora questo rettangolo sarà eguale al rettangolo delle due EF, GH. Onde; dovendo essere AB ad EF, come GH alla differenza delle due AB, CD (523); chiaro si è, che si determinerà la AB, con ritrovare due rette, che siano reciproche colle due date EF, GH, e di cui o la differenza, o la somma sia eguale all' altra retta similmente data CD. *Fig.* 156.

634. In quest' ultimo caso intanto deesi avvertire, che la differenza tra le due AB, CD può derivare, o dall' essere la AB maggiore della CD, o al contrario dall' essere la CD maggiore della AB; e quindi si è, che la CD possa essere, così la differenza, come la somma delle due rette reciproche, che debbonsi ritrovare. Ed è da notarsi altresì, che siccome, essendo la CD somma delle due rette reciproche, bisogna, che la mezza proporzionale tra le due EF, GH non sia maggiore della metà della CD (479); così la stessa condizione dovrà ritrovarsi nel problema, che

riducesi alla ricerca di quelle due rette reciproche, affinchè egli possa risolversi.

635. Essendo così, rimane ora dimostrato, che li problemi piani del primo genere riducansi ai due, di ritrovare una terza, o quarta proporzionale dopo due, o tre rette date; e che gl' altri del secondo genere debbansi ripetere dagl' altri due, di ritrovare, o una mezza proporzionale tra due rette date, ò pure due rette, che siano reciproche con due altre date, e di cui ne sia data, o la differenza, ovvero la somma. E quantunque molti problemi piani, così del primo, come del secondo genere, risolvansi talvolta, con ridurgli ad altri problemi, differenti dalli quattro riferiti; nientedimeno, se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che quegl'altri problemi riduconsi ad uno dei quattro divisati.

636. Così può aversi tal volta la soluzione di un problema del primo genere, con dividere una data retta in data ragione; ma questa stessa divisione riducesi alla ricerca di una retta, che sia quarta proporzionale dopo tre altre rette date. Ed in fatti, se AB sia la retta da dividersi, e la data ragione sia quella di DE ad EF; tagliandosi dalla AB la porzione BC, che sia quarta proporzionale dopo le tre DF, EF, AB,

Fig. 157.

AB, si avrà col punto C la divisione ricercata; e la ragione è chiara, poichè essendo AB a BC, come DF ad EF, sarà dividendo (424) AC a BC, come DE ad EF.

637. Similmente può aversi talvolta la soluzione di un problema piano del secondo genere, con dividere una data retta in estrema, e media ragione; ma questa stessa divisione riducesi alla ricerca di due rette, che siano reciproche con due altre eguali, e di cui ne sia data la differenza. Ed in fatti, se AB *Fig.*
sia la retta da dividersi in estrema, e 158.
media ragione; e ritrovate le due AD, BD, che differenti tra di loro per la AB, siano reciproche con due altre eguali alla stessa AB, taglisi dalla AB la porzione BC eguale alla BD, si avrà col punto C la divisione ricercata; poichè essendo AD ad AB, come AB a BD, sarà convertendo (426) come BD ovvero BC ad AB, così AC a BC.

638. Del rimanente li problemi piani del secondo genere possono con maggior compendio ridursi alla sola ricerca di una mezza proporzionale tra due rette date. In fatti, se riflettasi al modo, con cui ritrovansi due rette, che siano reciproche con due altre rette date, e di cui ne sia data, o la differenza, o pure la somma; si vedrà, che

non si fa altra cosa, se non che ritrovare un quadrato, che sia eguale alla somma, o differenza di due altri quadrati dati. Onde, secondo l' avvertimento poc'anzi fatto (630), se per mezzo di una terza proporzionale uno dei due quadrati dati riducasi ad un rettangolo, di cui un lato sia quello dell'altro quadrato, si avrà il terzo quadrato, con ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date; anzi, se egli debba essere eguale alla differenza delli due dati, basterà ritrovare la mezza proporzionale tra la somma delli loro lati, e la differenza degli stessi lati.

§. XXXVIII.

Della stessa risoluzione de' problemi piani illustrata con esempj.

639. PEr illustrare con varj esempj ciò, che è stato detto generalmente intorno alla risoluzione de' problemi piani, debbasi in primo luogo sulla retta data AB formare un triangolo isoscele, che sia eguale all'altro
Fig. triangolo dato EFG. Pongasi, che
159. ABC sia il triangolo isoscele, che si dimanda; e sulla base di esso AB si abbassi dall'angolo verticale C la perpendicolare CD, che la dividerà per metà nel

nel punto D. Volendosi adunque, che li due triangoli ABC, EFG siano eguali, le loro basi AB, EF saranno nella reciproca ragione delle loro altezze (517); onde, se GH sia perpendicolare sull' altra EF, si ritroverà il vertice C del triangolo ricercato, con dividere la data AB per metà nel punto D, e con alzare su di essa la perpendicolare DC di lunghezza tale, che sia quarta proporzionale dopo le tre rette date AB, EF, GH.

640. Debbasi in secondo luogo dentro del triangolo ABC inscrivere un quadrato, che con uno de' suoi lati si appoggi sulla base di quello BC. Pongasi, che DEFG sia il quadrato, che si dimanda, e si abbassi sulla base BC la perpendicolare AH, che s' incontri colla DE nel punto I. Essendo adunque equiangoli li due triangoli ADE, ABC, sarà AD ad AB, come DE a BC (455). Ma, per gl'altri due triangoli ADI, ABH similmente equiangoli, AI sta ad AH, come AD ad AB. Dunque sarà AI ad AH, come DE ovvero IH a BC; e per tanto conforme permutando (419) AI sta ad IH, come AH a BC, così componendo (423) sarà AI ad AH, così AH alla somma delle due AH, BC. Onde si risolverà il problema proposto, con abbassa- *Fig. 160.*

baſſare ſulla baſe del triangolo BC la perpendicolare AH, e con tagliare da eſſa la porzione AI, che ſia terza proporzionale dopo la ſomma delle due AH, BC, e la ſola AH.

641. Debbaſi in terzo luogo deſcrivere un cerchio, che avendo per ſue tangenti li lati del dato angolo BAC, paſſi
Fig. ancora per un dato punto D. Pongaſi
161. che BCD ſia il cerchio, che ſi dimanda; e dividaſi l' angolo BAC in due parti eguali per la retta AE. Le due adunque AB, AC, come tangenti del cerchio, debbono eſſere eguali (357); onde, dovendo la AE paſſare per lo centro del cerchio, ſe su di eſſa ſi abbaſſi la perpendicolare DE, e facciànſi eguali le due DE, EF, sarà F un'altro punto del cerchio (303). Ma, prolungata la ſteſſa DF per ſino a che s' incontri colla AB nel punto G, dee eſſere il rettangolo delle due DG, FG eguale al quadrato della GB (353), dalla quale uguaglianza ricavaſi, che DG ſia a GB, come GB ad FG (524). Dunque ſi avrà il terzo punto B, che determina il cerchio, con tagliare dalla AG la porzione GB, che ſia mezza proporzionale tra le due date DG, FG.

Fig. 642. Debbaſi in quarto luogo nella
162. circonferenza del dato cerchio ABC ritrovare il punto A, da cui tirate agli altri

altri due D, ed E dati di posizione le rette AD, AE, che s' incontrino colla stessa circonferenza ne' punti B, e C, siano parallele le due BC, DE. Tirisi al punto B la tangente BF; e per gli triangoli equiangoli ADE, FDB, sarà AD a DE, come DF a BD; e pertanto sarà il rettangolo delle due AD, BD eguale al rettangolo dell'altre due DE, DF. Ma, tirata al cerchio dal punto dato D la tangente DG, il primo di questi due rettangoli si fa eguale al quadrato della DG. Dunque, dovendo essere eguale a questo quadrato ancora l'altro rettangolo, sarà DE a DG, come DG a DF; onde si risolverà il problema, con tagliare dalla DE la porzione DF, che sia terza proporzionale dopo le due date DE, DG, e con fare, che la FB sia tangente del cerchio.

643. Notisi quì intanto, che se bene per la risoluzione del proposto problema debbasi tagliare dalla DE la porzione DF, che sia terza proporzionale dopo le due date DE, DG; nientedimeno, siccome in appresso per la determinazione del punto B deesi tirare la FB in modo, che sia tangente del cerchio; così con questa tangente si viene a ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date; onde si è, che il problema debba riputarsi del secondo, e non

e non già del primo genere : come in fatti , se per lo centro del cerchio H tirisi la FI , che s' incontri colla sua circonferenza ne' punti I , e K , saranno date le due FI , FK ; e dovendo essere il quadrato della FB eguale al loro rettangolo, sarà la FB mezza proporzionale tra le stesse due FI , FK ; al che dee aggiungersi , che potendosi tirare la tangente FB , così dall' una , come dall' altra parte della FH , il problema sarà capace di due soluzioni diverse .

Fig. 644. Debbasi in quinto luogo dal
163. punto D dato fuori, o dentro del trian-
164. golo ABC tirare la DF in modo , che incontrandosi colli due lati AB , AC ne' punti E , ed F , faccia , che li due triangoli ABC, AEF siano in data ragione . Pongasi , che la data ragione sia di AC ad AG ; e poichè , congiunta la AG , debbono essere in questa stessa ragione , così li due triangoli ABC , AEF , come li due ABC , ABG , sarà il triangolo AEF eguale al triangolo ABG ; onde , dovendo essere AB ad AE , come AF ad AG , sarà il rettangolo delle due AB , AG eguale al rettangolo dell' altre due AE , AF . Ma , tirata la DH parallela alla BA , e fatta la AI quarta proporzionale dopo le tre DH , AB , AG , il rettangolo delle

le due AB, AG si fa eguale al rettangolo delle due AI, DH. Dunque ancora il rettangolo di queste due AI, DH sarà eguale al rettangolo dell' altre due AE, AF.

645. Per l' uguaglianza intanto di questi due rettangoli dee essere A I ad AF, come AE a DH. Onde, essendo A E a D H, come A F ad H F; sarà AI ad AF, come AF ad HF; ed in conseguenza dividendo sarà altresì A I ad FI, come AF ad AH. Riducesi adunque il problema alla ricerca delle due AF, FI, che siano reciproche colle due date AI, AH, e di cui la differenza, o la somma sia eguale alla stessa A I. Ed essendo così, il problema potrà sempre risolversi, quante volte la differenza di quelle due AF, FI dee essere eguale alla AI; ma non già, quando la AI dee essere eguale alla loro somma, poichè in questo caso fa duopo, che la metà della A I non sia minore della mezza proporzionale, che cade tra le due AI, AH.

646. Debbasi in sesto luogo sulla *Fig.* data retta B C descrivere il triangolo *165.* ABC, in cui insieme coll' angolo acuto B A C sia data la somma de' quadrati delli due lati AB, AC, che lo contengono. Suppongasi, che il triangolo ricercato siasi già descritto. Essendo adun-

dunque data la BC, sarà dato ancora il suo quadrato; e per tanto sarà data parimente la differenza tra questo quadrato, e la somma delli due fatti dalli lati AB, AC. Ma, abbassata su 'l lato AC dall' angolo opposto B la perpendicolare BD, questa differenza è eguale al doppio del rettangolo fatto dalle due AC, AD (209). Dunque eziandio questo rettangolo sarà dato; ed in conseguenza, se ad esso pongasi eguale il quadrato della BH, sarà data altresì la retta BH.

647. Or, se dividasi la BC per metà nel punto E, e da questo punto si abbassi sul lato AC l' altra perpendicolare EF; chiaro si è, che ancora la CD sarà divisa per metà nel punto F. Onde, siccome il rettangolo delle due AC, AD, o pure il quadrato della BH insieme col quadrato della DF dee essere eguale al quadrato della AF (191); così, coll' aggiunta del comune quadrato della EF, saranno li quadrati delle due BH, DE, o pure delle due BH, BE eguali al quadrato della EA; e per tanto la determinazione della EA si ridurrà alla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma di due altri quadrati dati.

648. Ma egli è da notarsi, che se bene la EA possa sempre determinarsi,

pure

pure attento l'uso, che dee farsi di essa, il problema potrà essere tal volta impossibile. In fatti il vertice A del triangolo, che si dimanda, dee ritrovarsi nella porzione di cerchio descritta sulla BC in modo, che sia capace dell' angolo acuto dato. Onde, siccome egli dovrà aversi coll' incontro con questa porzione di un' arco circolare, descritto col punto E come centro, e coll' intervallo della EA; così, se la EA ritrovisi maggiore della perpendicolare elevata dal punto E sulla BC per fino alla stessa porzione, l' arco circolare non potrà con quella incontrarsi, ed in conseguenza il problema sarà impossibile.

649. Se poi il dato angolo BAC, che debbono contenere li due lati AB, AC, in vece di essere acuto, sia ottuso; in tal caso, facendosi uso della stessa analisi, si ritroverà, che il quadrato della EA sia eguale, non già alla somma, ma alla differenza delli quadrati fatti dalle due BH, BE. Onde in questo caso potrà essere il problema impossibile per due capi, sì perchè può avvenire, che la EA affatto non possa determinarsi; come ancora perchè, potendosi determinare, può ella ritrovarsi talvolta minore della perpendicolare alzata dal punto E sulla BC per fino alla por- *Fig. 166.*

porzione di cerchio, che deesi descrivere sulla stessa BC.

650. Debbasi finalmente dall'angolo D del dato quadrato, o pure rombo ABCD tirare la DE in modo, che incontrandosi colli due lati opposti AB, BC ne' punti E, ed F, sia la porzione EF compresa tra di essi eguale ad una data retta. Suppongasi il problema già risoluto; e congiunta la diagonale BD, prendasi su di essa la BG eguale alla retta data, ed in conseguenza eguale alla EF. Adunque, se tirisi la GH parallela alla DA, sarà BD a BA, come BG, ovvero EF a BH; e pertanto il rettangolo delle due BA, EF sarà eguale al rettangolo dell'altre due BD, BH. Ma, per essere EB a BA, come EF ad FD, il rettangolo delle due BA, EF è eguale ancora al rettangolo delle due EB, FD. Dunque, facendosi il rettangolo delle due BD, BH eguale al rettangolo delle due EB, FD, sarà BD ad EB, come FD a BH.

Fig. 167. 651. Or, se facciasi l'angolo DFI eguale all'angolo DBE, sarà BD ad EB, come FD ad FI; e pertanto, essendo FD a BH, come la stessa FD ad FI, le due BH, FI saranno eguali tra di loro. Onde, se mai potesse aversi il punto I, si risolverebbe il proble-

blema proposto per mezzo di un cerchio descritto con quel punto come centro , e coll' intervallo della retta data BH ; poichè , con intersegarsi la circonferenza di questo cerchio col lato BC, si avrebbe il punto F, per cui dee condursi la retta D E , che si dimanda ; anzi , perchè la stessa circonferenza intersegasi col lato B C eziandio dall' altra parte del punto B , si avrebbero del proposto problema due soluzioni diverse.

652. Per la determinazione intanto di quel punto I , giova riflettere , che essendo l' angolo ABC diviso per metà dalla diagonale B D , l' angolo E B I , come eguale all'angolo ABD , dee essere eguale altresì all' angolo DBF ; onde , coll' aggiunta del comune EBF, facendosi eguali ancora li due IBF , DBE, ed essendo per construzione l' angolo DFI eguale all' angolo DBE , saranno eguali parimente li due D F I , I B F . Quindi li due triangoli FDI , BFI saranno equiangoli ; e per tanto DI sarà ad FI , come FI a BI . Ma si è dimostrata la F I eguale alla B H . Dunque sarà ancora DI a BH , come BH a BI; e perciò il punto I dovrà determinarsi colla ricerca delle due D I , B I , che avendo per loro differenza la data BD, siano reciproche con altre due , di cui ciascuna sia eguale all' altra data B H .

653.

Fig. 653. Per quanto a quest'ultimo pro-
168. blema, merita di essere avvertito, che se ABCD sia quadrato, e sulla DE alzisi la perpendicolare EG, che s'incontri col lato DC prolungato nel punto G, possa egli risolversi ancora con determinare la DG; poichè descrivendosi su di essa come diametro il mezzo cerchio, e prolungandosi il lato AB per sino a che s'incontri colla sua circonferenza, si avrà con questo incontro il punto E, a cui dee tirarsi la retta, che si dimanda; anzi, perchè il lato AB dee incontrarsi colla circonferenza di quel mezzo cerchio in due punti diversi, situati da ambedue le parti del punto B; eziandio con risolvere il problema in questa guisa, si vedrà, che egli sia capace di due soluzioni diverse.

654. Prendasi perciò sul lato DA la retta, a cui dee essere eguale la EF, e sia DH; indi, abbassata sulla DG la perpendicolare EI, congiunganfi le due CH, FG. Poichè dunque sono equiangoli li due triangoli DFC, EGI, e li lati di essi DC, EI sono eguali, saranno eguali ancora gl'altri due DF, EG; e pertanto essendo la DH eguale altresì alla EF, saranno li quadrati delle due DH, DF eguali ai quadrati dell'altre due EF, EG. Ma li primi due quadrati sono eguali ai quadrati delle

delle tre DH, DC, CF, o pure ai quadrati delle due CH, CF; e gli altri due quadrati sono eguali al quadrato della FG, o pure ai quadrati delle due CG, CF. Dunque li quadrati delle due CH, CF saranno eguali ai quadrati delle due CG, CF; e pertanto, siccome tolto da essi il comune quadrato della CF, rimane il quadrato della CH eguale al quadrato della CG, così saranno eguali parimente le due CH, CG.

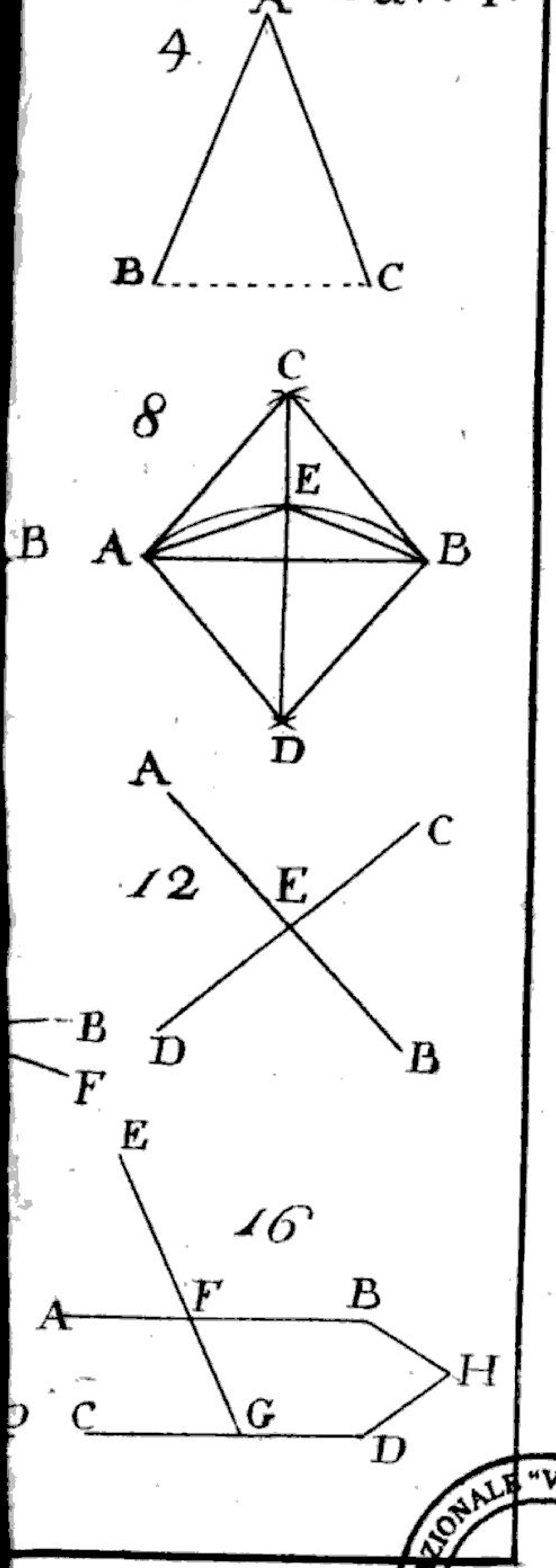
655. Determinasi adunque la DG, con fare, che la porzione di essa CG sia eguale alla CH, dimodochè con quest' altra soluzione riducesi il problema alla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma di due altri quadrati dati; a cui per altro, secondo l'avvertimento fatto (*636*), potrebbe ridursi eziandio colla prima soluzione; poichè, siccome divisa la DB in due parti eguali *Fig.*
nel punto K, si fa il quadrato della *167.*
KI eguale al rettangolo delle due DI, BI insieme col quadrato della BK; così, per essere il rettangolo delle due DI, BI eguale al quadrato della FI, o sia BH, sarà il quadrato della KI eguale ai quadrati delle due rette date BH, BK.

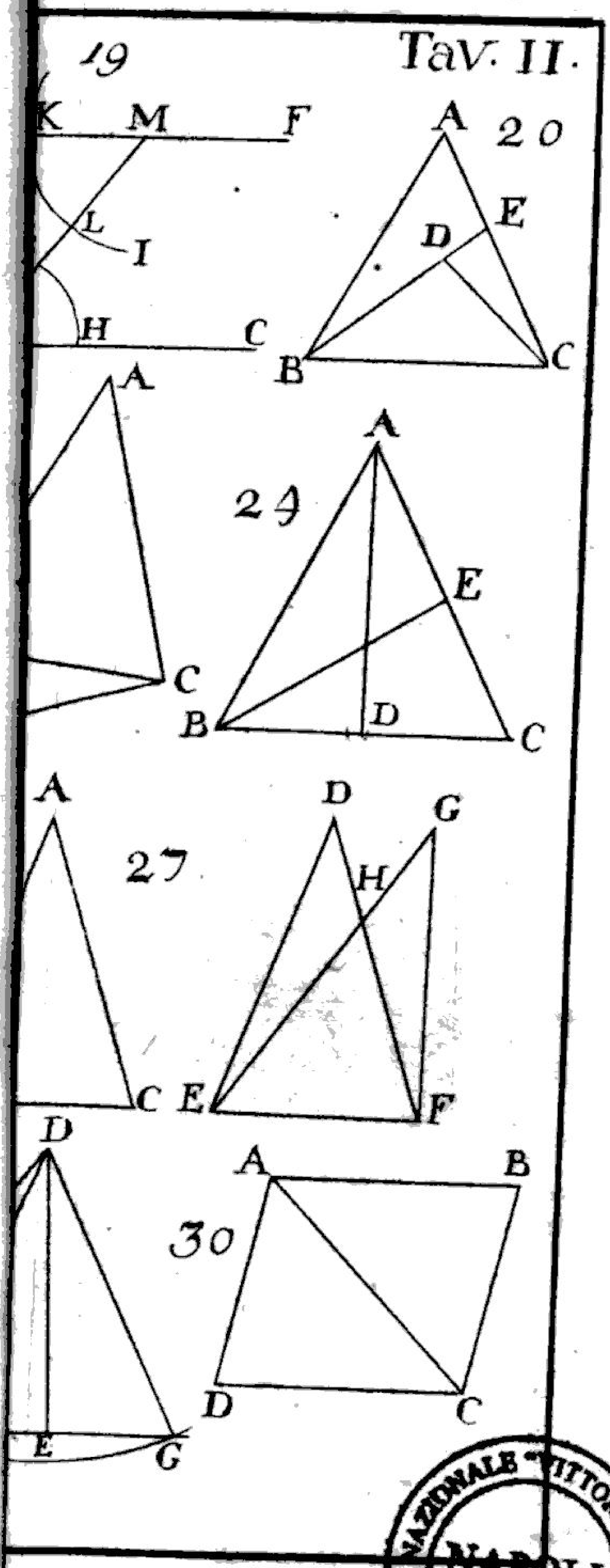
656. Del rimanente gli stessi esempj addotti possono esserci di avvertimento, to, che per venire a capo della soluzione di un qualche problema, debbasi tener conto, non solo delli dati espressi nello stesso problema, ma eziandio degl' altri, che da quelli derivar si possono; onde si è, che si debbano tener presenti li varj teoremi dimostrati in questi Elementi per la ragione, che per mezzo di essi debbono dedursi li nuovi dati. E da ciò ancora avviene, che un problema, il quale a prima faccia sembra difficile, si possa tal volta risolvere, con dividere per metà una data retta, o un dato angolo; con tirare per un dato punto una retta parallela, o perpendicolare ad un' altra retta data; e con altre construzioni consimili; per cui la soluzione del problema rendesi nello stesso tempo semplice, ed elegante.

Fine del primo libro.

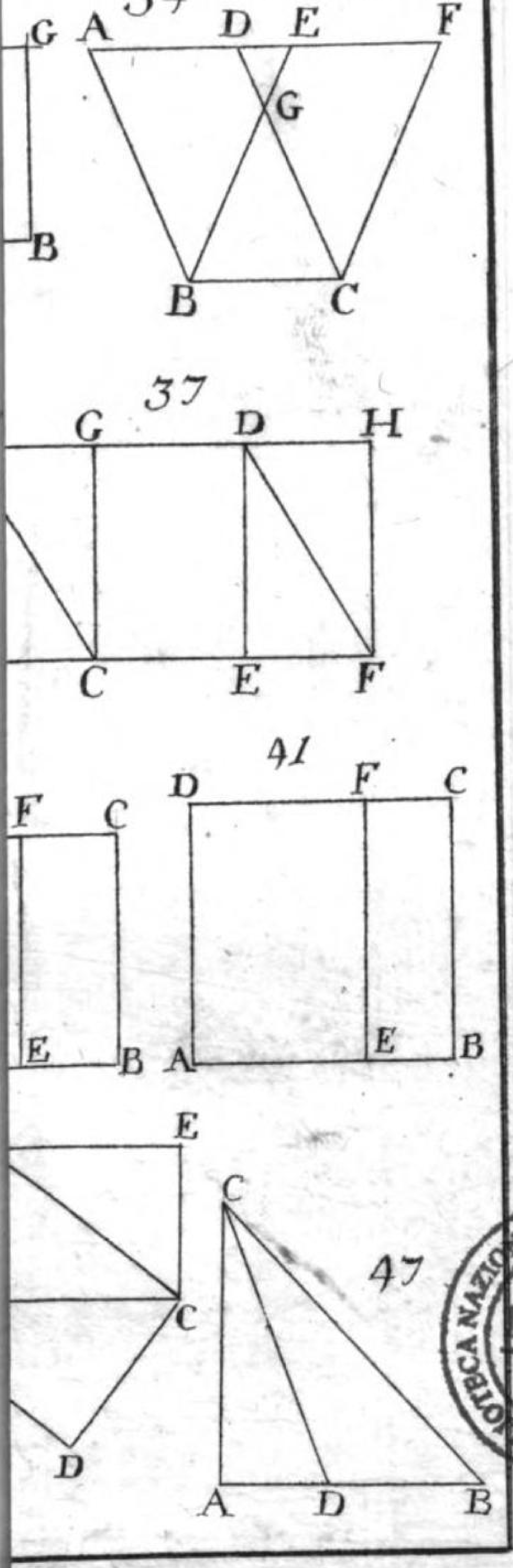
IN-

Tav. I.

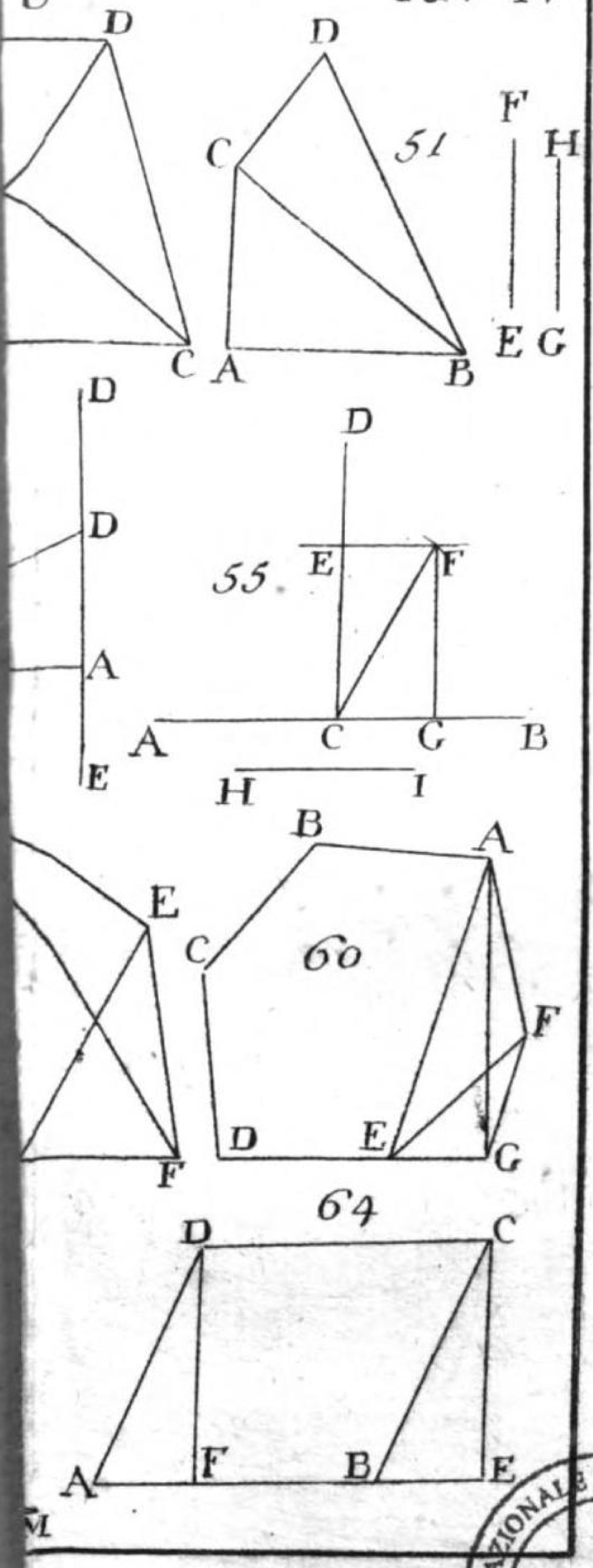



Tav. II.
19
K
M
F
L
I
H
C
20
A
E
D
B
C
A
C
24
A
E
B
D
C
A
27
C
E
D
G
H
F
D
E
G
30
A
B
D
C

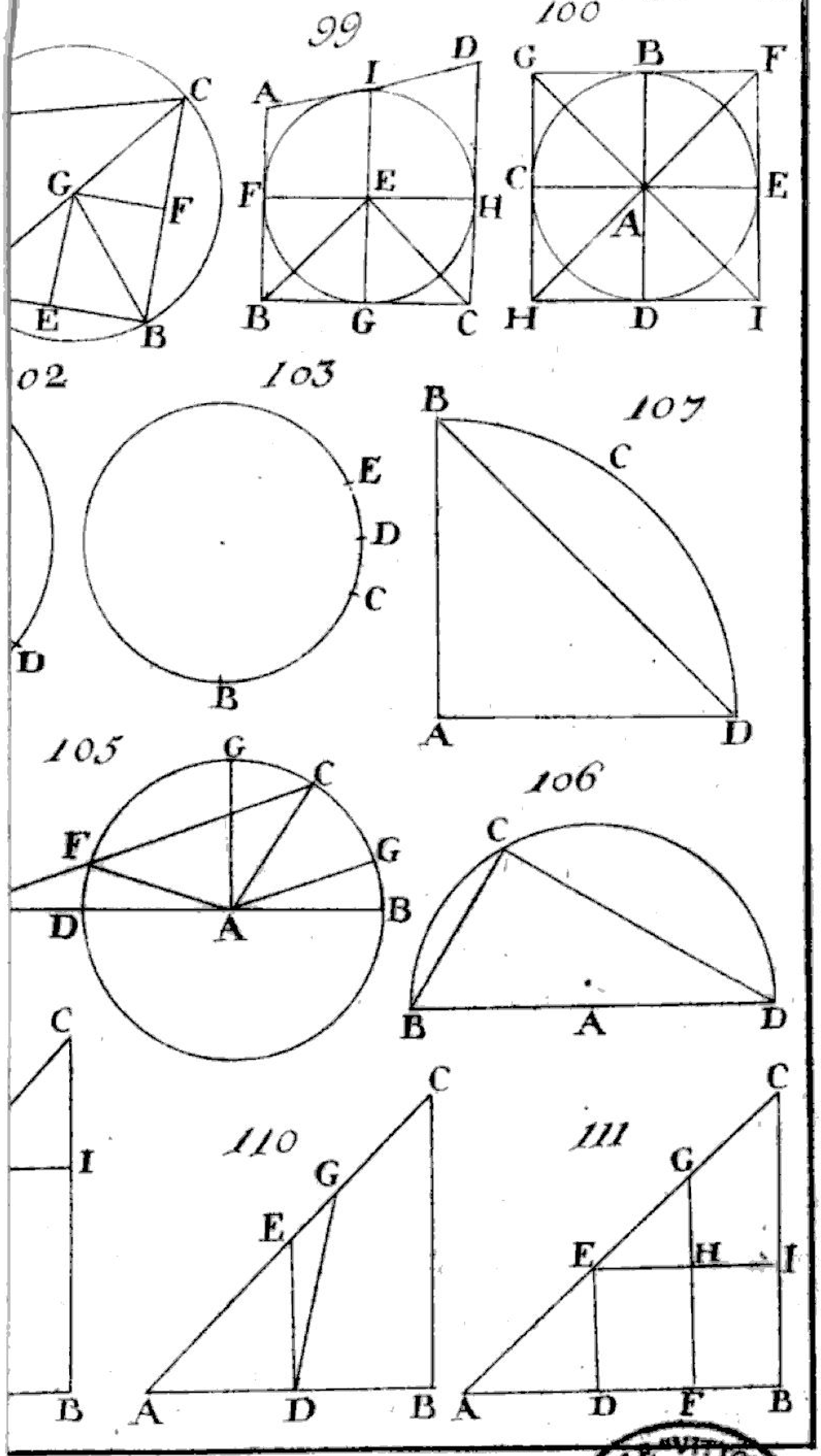
Tav. III.



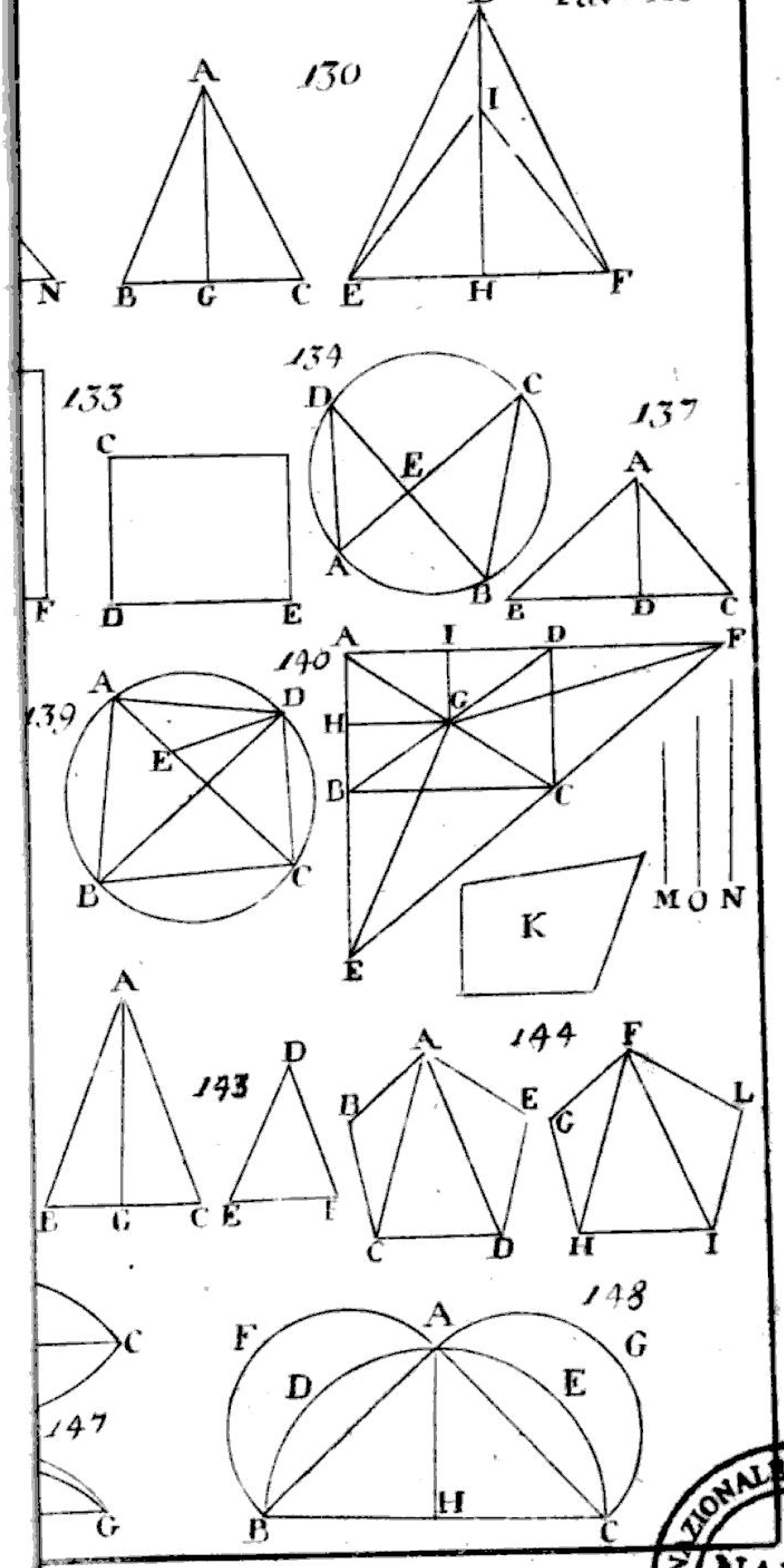
Tav. IV.



Tav. VII



Tav. IX



Intiero con dieci tavole verificato
adì 30. Setto.e 1838. [illegible]