DISCORSO
INTORNO
AGLI EQUILIBRJ
DI
VINCENZO ANGIULLI

Dottor di Filosofia, Accademico dell'Istituto delle Scienze di Bologna, Accademico Clementino nella stessa Città, e Professore di Matematica nella Real Accademia della Nunziatella di Napoli.

IN NAPOLI MDCCLXX.
NELLA STAMPERIA SIMONIANA.
Con licenza de' Superiori.

GVIDI

A SUA ECCELLENZA
IL SIGNOR MARCHESE

D. BERNARDO TANUCCI

CAVALIERE DELL' INSIGNE REAL ORDINE DI S. GENNARO, CONSIGLIERE E PRIMO SECRETARIO DI STATO DI S.M.SICILIANA, DEL RIPARTIMENTO DI STATO, DEGLI AFFARI ESTERI, CASA REALE, SITI REALI, SUO GENTILUOMO DI CAMERA, E SOPRAINTENDENTE GENERALE DELLE POSTE.

QUest' Operetta è il primo parto della mia mente, che vede la pubblica luce, e questa a V.E. io consacro. Altri dedica i suoi libri colla mira di promuovere la sua fortuna, li dedica altri per conciliar loro e credito, e stima; ma io dedico questo a V. E. per secondare i sentimenti del cuore. Il vostro generoso animo mi ha ricolmato di benefizj fin da' miei teneri anni, e i grati sentimenti, che per essi ho sempre nutriti nel cuore, cerco oggi manifestare al pubblico con questo picciolo dono. E' picciolo certamente il dono a fronte della grandezza de' benefizj, ma se riguardo me stesso, e le mie forze, è tutto quello, che per me può donarsi. I Numi gradiscono egualmente un Ecatombe, che un' agnella, misurando il dono non dalla sua grandezza, ma dall' animo del donatore. Benchè o grande, o picciolo, che egli siasi, ciò, che ardisco presentarvi, non è mio, ma a Voi di pieno diritto s' appartiene. S' appartiene a

Voi,

Voi, perchè avendo Voi col Vostro Patrocinio protette sempre le belle arti, e le scienze per vederle collocate nel più sublime, e luminoso grado, ragion vuole, che ogni qualunque opera ad esse appartenente non comparisca al pubblico, se non portando in fronte il Vostro glorioso Nome. S' appartiene a Voi. perchè facendo Voi colle Vostre vigilanti cure la nostra felicità, vi si deve ogni atto di rispetto, e di ossequio. A Voi in fine s' appartiene, perchè essendo tutte le cognizioni, che ho aquistate (se pure in me avvene alcuna) un effetto de' Vostri benefizj, questi appunto richiamano a se come loro prodotto, e fan Vostra interamente l' opera, che ora mi dò l' onore presentarvi. Gradite intanto, se non altro, questi almeno sinceri sentimenti di gratitudine, e degnatevi accogliere nel

Vo-

Vostro patrocinio l' operetta non meno, che l' autore di essa, il quale in V. E. ammira, e rispetta il sublime grado, che sostenete, la vastità delle Vostre cognizioni, e 'l maggior sostegno, e decoro delle scienze.

Di V. E.

Napoli 15. Febbrajo 1770.

Umiliss. e Obbligatiss. Servitore
Vincenzo Angiulli.

INDICE
DE' CAPITOLI.

ERRORI. CORREZIONI.

Pag.	11 v.	19	muovere	muoversi
	12	2	descrittti	, e descritti
	23	25	dall' azion	dell' azion
	27	9	cadente	cedente
	53	2	Antichi	degli Antichi
	70	21	paralle	parallele
	76	12	detto detto	detto
	79	6	darebbero	dovrebbero
	91	15	che che	che
	107	1	modo	moto
	ibid.	23	impellante	impellente
	111	27	contricine	convicine
	151	13	$= - \frac{z^2 - a^2}{z - \quad 2z}$	$= z - \frac{z^2 - a^2}{2z}$
	152	16	ascissa PC	ascissa AP
	157	27	IBfT	ABfP

DISCORSO
INTORNO
AGLI EQUILIBRJ.

CAPITOLO I.

Della vera, e giusta idea della potenza, e della dilei azione.

I.

POichè ogni Filosofo, o Geometra, a cui non altro sia a cuore, che l'amor della verità, cercar deve nelle sue dimostrazioni evidenza, e chiarezza, e proccurar perciò di sfuggir sempre, per quanto mai è possibile, ogni maniera di parlare, che ambiguità possa indurre, necessaria cosa ella si è, che ogni ragionamento abbia principio dalle definizioni, onde capir ben si possa che sia ciò, su cui specialmente cade il discorso. Quindi dovendosi per noi trattar degli equilibrj, e perciò parlar sempre di potenze, e di azioni, di potenze, uopo è, anzi abbisogna, che prima di ogni altra cosa che per potenza intender debbasi, e che per azion di potenza, distintamente s'esponga. Per lo che premetter conviene la vera, e giusta idea dell'inerzia, la quale benchè servir debba di face a tutta la meccanica, nulla di meno appresso molti, per altro rispettabili autori, non si trova con quella chiarezza esposta, nè con quella esattezza, che è necessaria per preservarci dagli errori, e dagli equivoci qualora ragionar si voglia delle potenze, e delle diloro azioni.

II.

Essendo ogni corpo di sua natura indifferente a prendere qualunque stato, o di quiete, o di moto, con velocità, o maggiore, o minore, e per qualsivoglia direzione, qualora in un corpo accade cangiamento di stato, è necessario, che v'intervenga una causa valevole a indurre il cangiamento stesso, e che ad esso sia proporzionale. Questa facoltà residente nel corpo, per cui non si permette, che in esso alcun cangiamento di stato s'induca senza l'intervento d'una causa al cangiamento proporzionale, è quella per l'appunto, che chiamasi inerzia; la qual facoltà, come ognun vede, cerca sempre conservar nel corpo lo stato, in cui ritrovasi, non resistendo positivamente alle forze, che tentano indurvi

durvi cangiamento, come alcuni han falsamente creduto, ma obbligando piuttosto, per così dire, le forze stesse ad impiegare per un dato cangiamento una energia al cangiamento stesso proporzionale. Sicchè qualsivoglia forza applicata liberamente ad un corpo, v'indurrà sempre mutazione di stato, non opponendosi in ciò l'inerzia, ma soltanto in virtù dell' inerzia sarà ella costretta ad impiegare una energia proporzionale alla mutazione, che v' induce. Quindi è derivata quella tanto celebre legge Newtoniana, *che ogni corpo persevera nello stato suo, o di quiete, o di moto, uniformamente, e per la medesima direzione, fin a tanto che dalle forze impressegli costretto non venga a cangiarlo*. Lo che così essendo, è manifesto, che per far passar un corpo dallo stato di quiete allo stato di moto, o dallo stato di moto allo stato di quiete, o finalmente dallo stato di moto allo stato di un' altro moto di maggior, o minor velocità, in una parola per far a un corpo cangiar lo stato, in cui si ritrova, richiedesi, che una qualche forza v' intervenga. Le forze, che possono ciò fare, oltre quelle degli animali, sono, per quanto si è fin' ora conosciuto, la gravità, l'attrazione, la forza elastica, la forza elettrica, ed altre simili, che o da queste derivano, o ad esse possono agevolmente ridursi.

III.

Ma benchè ogni volta, che in un corpo accade cangiamento di ſtato, v' intervenga qualcuna delle ſopranomate forze, non ſempre però al contrario qualora a un corpo è applicata qualcuna delle forze già dette, nel corpo ſteſſo cangiamento di ſtato s' induce. Così per eſempio in un corpo grave, che da un filo pende ſoſpeſo, quantunque vi riſegga la gravità, niun cangiamento di ſtato s'oſſerva; ſimilmente niun cangiamento di ſtato s' oſſerva in un elaſtro chiuſo tra due oſtacoli invincibili, benchè in eſſo vi ſia la forza d' elaſticità. Quindi conobbero i Meccanici doverſi nelle forze varj ſtati diſtinguere, e così nacque la celebre diſtinzione fra la potenza, e l'azion della potenza, alla qual diſtinzione la meccanica deve gran parte de' ſuoi grandiſſimi progreſſi.

IV.

La gloria d' aver in meccanica introdotta queſta sì utile diſtinzione deveſi tutta al Galileo, ornamento, e decoro dell' Italia. Poichè il Galileo prima di tutti fece diſtinzione tra la gravità, e la forza di percuſſione; e per gravità non altro egli intendeva, che quella, che noi chiamiamo potenza, e per forza di percuſſione quella, che per noi azion di potenza s' appella, come agevolmente te può ſcorgerſi dal celebre libro *de vi percuſſionis* di Gio: Alfonſo Borelli.

V.

Per nome di potenza dunque non altro intendiamo, che la pura, e ſemplice preſſione, o ſia quello sforzo, che fa la gravità, o altra forza contro qualche oſtacolo invincibile, come è per l'appunto quello, che fa una palla di piombo contro d'una tavola immobile, oppure contro la mano, che la ſoſtiene. Non è poſſibile dar idea più chiara della potenza; poichè eſſendo queſta una idea ſemplice, in cui non poſſono più coſe diſtinguerſi, non può ſecondo i buoni precetti di logica ſottometterſi ad un eſatta definizione. La potenza poi conſiderata come ſemplice potenza, o ſia come pura preſſione, e quella, che dopo di Leibinitzio da' Meccanici ſi chiama *forza morta*.

VI.

Conſiſtendo dunque lo ſtato della potenza nella ſemplice preſſione contro l' oſtacolo invincibile, i meccanici per loro metodo s' imaginarono la potenza dar al corpo un impulſo, il quale però appena nato, foſſe dall' invincibile oſtacolo diſtrutto, e così ſecondo il metodo de' Matematici ſi rappreſentarono la forza morta ſotto l' idea d' un impulſo infinitamente picciolo, cioè minore di qualunque dato. Onde evidente cosa ella è, che le potenze come semplici potenze non han luogo ne' movimenti de' corpi, ma han luogo soltanto negli equilibrj.

VII.

Sicchè se una palla, a cagion d' esempio di piombo, starà collocata sopra di una tavola immobile, la gravità, che in essa risiede, sarà forza soltanto premente, e perciò forza morta. Ma se si rimoverà l' ostacolo, cioè la tavola sottoposta, nella palla s' indurrà tosto cangiamento di stato, e in tal caso la gravità si dice entrar in azione, e l'azione della gravità sarà la vera causa della mutazione di stato, che nella palla stessa s' induce.

VIII.

Ma perchè i meccanici più chiara idea formar potessero dell' azion della potenza, siccome s' aveano rappresentata la potenza sotto l' idea d' un impulso, che nel procinto del suo nascere resta per l'invincibile ostacolo estinto, e distrutto, così, rimosso l'ostacolo invincibile, concepirono tutti gl' impulsi, che la potenza agendo dà al corpo, conservarsi nel corpo medesimo, e quindi s'avvisarono l'azione della potenza altro non essere, che la somma di tutti gl' impulsi accumulati, e conservati nel corpo. Quel tanto poi d'energia, che per l'al'azion della potenza si genera nel corpo, per cui nel corpo stesso accade il cangiamento di stato, e quella, che da' Meccanici vien chiamata *forza viva*.

IX.

Stabilite così le cose, per picciola riflessione, che voglia farsi, egli è facile a vedersi quanto ragionevolmente Galileo, e con esso Torricelli, e Borelli abbian tra la potenza, e la dilei azione stabilita quella proporzione stessa, che passa tra il finito, e l'infinito. Imperocchè s'egli è vero, come si è detto, che la potenza considerar si deve come un impulso minore di qualunque dato, e che l'azion della potenza è la somma di tutti gl' impulsi comunicati al corpo, e nel corpo stesso conservati, quella dovrà certamente esser la proporzione tra la potenza, e l'azion della potenza, che passa tra una quantità infinitesima, ed una quantità finita, che è l'istessa, che quella, che passa tra una quantità finita, ed una quantità infinita. E in vero se la potenza come semplice potenza, o sia come forza morta, non è valevole d'indurre in un corpo cangiamento di stato, e se ogni cangiamento di stato ne' corpi inducesi dall'azion della potenza, tra la potenza, e la di lei azione non altra proporzione dovrà passare, che quella, che passa tra il cangiamento di stato *zero* (come parlar sogliono i Matematici), e un un determinato cangiamento di ſtato, val' a dir quella, che paſſa tra il finito, e l'infinito.

X.

Con maggior eſattezza però ſembra parlar Jacopo Ermanno nella diſſertazione *de menſura virium vivarum* inſerita nel primo tomo degli atti dell' Accademia di Pietroburgo, nella quale tra la potenza, e l'azion della potenza ſtabiliſce quella ſteſſa proporzione, che tra di loro hanno le quantità eterogenee. Imperocchè impropriamente la potenza in riguardo della ſua azione può dirſi nulla, o infiniteſima, ma piuttoſto dir ſi deve eſſer eſſe quantità di genere diverſo, come di diverſo genere ſono la linea, e la ſuperficie.

XI.

Per dilucidare, e metter in miglior viſta le coſe fin ora dette, ſia (*Fig.*1.) AB una linea retta, a cui inſiſta perpendicolarmente nel punto A la retta CA; fin ora niun' altra coſa comprendeſi, che la retta CA poſta a perpendicolo ſulla retta AB. Scorra ora la retta CA per ſopra la retta AB in maniera, che ſi mantenga ſempre parallela a ſe ſteſſa; oltre la retta CA comincia a comprenderſi ancora il ſuo fluſſo, per cui ſi genera la ſuperficie rettangola CABD, la quale non è ſolamente proporzionale alla retta linea AC,

ma

ma è proporzionale altresì al flusso, per cui vien generata. Alla linea retta AC dee paragonarsi la semplice potenza premente, al flusso della linea stessa l'azione della potenza, e la mutazion dello stato indotta nel corpo alla superficie rettangola CABD. E siccome prima che la retta AC scorresse per sopra la BA niente altro si potea concepire, che la sola retta AC, così ancora pria d'entrar la potenza in azione altro non può concepirsi, che la semplice pressione; siccome poi quando la linea AC scorre per sopra la linea AB si concepisce oltre la linea AC anche il suo flusso, così rimosso ogni ostacolo, oltre la semplice potenza si concepisce qualche altra cosa di più, cioè l'azione della potenza stessa; e siccome finalmente dal flusso della linea AC concepiamo nascere la superficie rettangola CABD, così dall'azione della potenza dobbiam concepire che nasca la mutazion dello stato, che accade nel corpo. Questa meravigliosa comparazione, che mette in chiaro quanto fin'ora per noi si è detto, e del chiarissimo P. Riccati (*a*), da cui l'abbiam presa.

XII.

Dalle cose dunque fin ora divisate chiarissimamente apparisce doversi far distinzione

(a) Dialogo delle forze vive giornata 1.

ne tra la potenza, e l'azion della potenza, e stabilir tra esse quella medesima proporzione, che passa tra il finito, e l'infinito, oppure, per parlar con esattezza maggiore, quella, che tra di loro hanno le quantità eterogenee.

XIII.

La forza, da cui un corpo vien sollecitato a movimento, può dipendere, o da un principio intrinseco al corpo, o da un principio estrinseco, che spinga il corpo stesso verso di qualche luogo, o finalmente da un principio attivo collocato in un punto fisso, che agendo in distanza ne' corpi, li attrae, o rispinge. Ma nelle matematiche contemplazioni, poichè, riducendosi la cosa sempre alla stessa, poco importa se dall'un principio piuttosto, che dall'altro la causa voglia ripetersi, considereremo perciò i movimenti de' corpi riferirsi a un punto fisso, da cui diffondasi intorno intorno una virtù, che generi ne' corpi, che incontra, una forza capace, se impedimento non v' abbia, di farli avvicinare, o allontanare dal punto stesso. Questo punto è quello, che per noi si chiamerà *centro della potenza*. Sicchè per centro della potenza non altro intendiamo, che quel punto fisso, in cui si concepisce collocata la potenza, che un qualche corpo sollecita a movimento, sforzandosi, o di tirarlo verso il punto stesso, o dal punto stesso rimoverlo.

Nel

Nel primo caso la forza si dice *Attraente*, nell' altro caso si dice *Ripulsiva*.

XIV.

La linea retta titata dal centro della potenza al centro del corpo, che dalla potenza stessa è sollecitato al moto, si chiama *direzion della potenza*.

XV.

Spazio d' accesso diciamo quello, per cui il mobile s' avvicina al centro della potenza, *spazio poi di recesso* quello, per cui il mobile dal centro della potenza s' allontana.

XVI.

Benchè queste definizioni sian da se chiarissime, nulla di meno per meglio dilucidarle, sia (*Fig.* 2.) il punto D sollecitato da tre potenze, che supponghiamo collocate ne' punti A, B, C; sono questi que' punti, che chiamansi centri delle potenze. Dalli punti A, B, C al punto D si menino le rette AD, BD, CD, e queste son quelle, che si dicono direzioni delle potenze. Finalmente suppongasi muovere il punto D, cosichè venga in *d* descrivendo lo spazio Dd per la direzione AD; egli è manifesto, che il punto D s' allontana dal

dal centro della potenza A per lo ſpazio D*d*, deſcritti colli centri B, e C, e cogl' intervalli B*d*, C*d* gli archi *d*G, *d*F, che tagliano le direzioni BD, CD in G, ed F, è manifeſto ancora, che il punto D s' avvicina al centro della potenza B per lo ſpazio DG, e al centro della potenza C per lo ſpazio DF; D*d* ſi chiama ſpazio di receſſo dal centro della potenza A, DG ſpazio d' acceſſo al centro della potenza B, e DF ſimilmente ſpazio d' acceſſo al centro della potenza C.

CAPITOLO II.

Della vera cauſa dell' equilibrio.

XVII.

STabilita la vera idea della potenza, e della di lei azione, entriamo ora a rintracciare qual ſia la vera cauſa, per cui due, o più potenze coſtituiſcon tra loro equilibrio. Gli antichi meccanici nel ricercare qual dell' equilibrio la vera cauſa ſi foſſe, poichè ebbero dalla ſperienza conoſciuto, che le potenze, benchè uguali, non ſempre trovanſi in equilibrio coſtituite, e che ſpeſſo trovanſi coſtituite in equilibrio, benchè ſiano diſuguali, ottimamente, e con ſomma ragione con-

conclusero non doversi la vera causa dell'equilibrio riporre nell'eguaglianza delle potenze. Ma perchè troppo evidente cosa loro sembrava, che dipender dovesse l'equilibrio da una qualche eguaglianza, la quale mancando, il moto debba tosto seguire, e conoscendo altresì, che senza le potenze non potrebbesi aver equilibrio alcuno, saggiamente ancora stabilirono, che la causa dell'equilibrio ripor si dovesse nell'eguaglianza di quantità, le quali quantunque non siano le potenze stesse, alle potenze però in qualche maniera appartengano. E questa sorta di quantità, qualunque ella si fosse, dagli antichi chiamata venne *momento*. Ma poichè sperimentando conobbero tra le potenze applicate ad una verga rigida, vertibile intorno a un punto fisso, o vogliam dir fulcro, aversi equilibrio, qualora i prodotti delle potenze moltiplicate per le diloro rispettive distanze dal fulcro, e dall'una parte, e dall'altra del fulcro stesso eguali fossero tra di loro, e al contrario nascer moto qualora i prodotti stessi fossero disuguali, stabilirono il momento altro non essere, che il prodotto della potenza moltiplicata per la distanza dal fulcro. E in tal maniera gli antichi introdussero il momento della potenza in meccanica, e credettero essersi per essi assegnata la vera causa dell'equilibrio.

XVIII.

Volendosi però delle cose dar giusto, e retto giudizio, convien dire gli antichi coll' esposto raziocinio non aver in modo alcuno assegnata la vera causa dell' equilibrio, ma aver soltanto introdotto in meccanica un nuovo nome. Imperocchè avendo essi detto, che la causa dell' equilibrio consiste nell'eguaglianza de' momenti, e non avendo giammai spiegato questi momenti che siano, non han certamente assegnata la vera causa dell' equilibrio, ma han soltanto in meccanica un nuovo nome introdotto. Nè credasi essersi dagli antichi a bastanza spiegato che sia momento coll' aver detto, che il momento è il prodotto della potenza moltiplicata per la distanza dal fulcro. Poichè il momento deve essere una quantità, che alla potenza intrinsecamente appartiene, e 'l prodotto della potenza moltiplicata per la distanza dal fulcro, non vedesi come alla potenza intrinsecamente appartenga, non essendo la distanza della potenza dal fulcro, che una pura condizione, e circostanza estrinseca della potenza stessa. Oltre a ciò non avendosi in tutti gli equilibrj quel fulcro, da cui debbon prendersi le distanze delle potenze equilibrate, i momenti in moltissimi equilibrj mancherebbono, e si avrebbono per conseguente gli equilibrj senza la causa dagli antichi assegnata. Sicchè col dire gli Antichi, che

che la causa degli equilibrj consiste nell'eguaglianza de' momenti, non altro sembran aver detto, che l'equilibrio dipende dall' eguaglianza di quelle quantità, dall' eguaglianza delle quali l'equilibrio dipende.

XIX.

Non però così addiviene a noi, che volendo stabilir la vera causa dell'equilibrio discorriamo in tal maniera: E' cosa evidente, e alla natura dell' equilibrio sommamente conforme, che l'equilibrio dipenda da una qualche uguaglianza, la quale mancando, il moto debba tosto seguire. Questa uguaglianza non può ammettersi tra le potenze; perchè le potenze quantunque uguali, non sempre trovansi in equilibrio, ne sempre segue moto, benchè le potenze siano disuguali. Deve dunque la detta uguaglianza ammettersi tra altre quantità, le quali benchè non siano le potenze stesse, devono però alle potenze in qualche maniera appartenere, giacchè alle potenze l'equilibrio appartiene. Ma non vi sono altre quantità, che alle potenze appartengano, che le diloro azioni. Dunque non potendosi costituir la causa dell'equilibrio nell'eguaglianza delle potenze, altro a dir non resta, che l'equilibrio dipenda dall' eguaglianza delle azioni delle potenze stesse. Stabiliamo perciò, che le potenze s' equilibrano, perchè trovansi in tali circostanze costituite, che se agissero, ro, le diloro azioni farebbono uguali, e contrarie; poichè così l' azione d' una potenza impedendo, che l' azione dell' altra produca l'effetto, non feguirà effetto alcuno, e le potenze refteranno in equilibrio. L' equilibrio dunque nafce da ciò, che le azioni delle potenze, che equilibrar fi devono, fe nafceffero, farebbono uguali, e contrarie; e perciò l' uguaglianza, e la contrarietà delle azioni delle potenze è la vera caufa dell' equilibrio.

XX.

Ciò benchè fia evidentiffimo, fembra non di meno ad alcuni così ftrano, che vien riputato affatto un paradoffo. Imperocchè l' equilibrio non è altro, che lo ftato delle potenze, in cui quefte vicendevolmente s' impedifcono in maniera, che non poffa nafcer moto in modo alcuno. Dunque l' equilibrio efigge, che non vi fia moto, e per confeguenza cangiamento di ftato, ed azion di potenza. Come dunque è poffibile capire, che la vera caufa dell' equilibrio confifta nell' eguaglianza, e contrarietà delle azioni delle potenze, fe l' equilibrio fteffo richiede, che azione alcuna non v' intervenga?

XXI.

Per toglier di mezzo un tal dubbio, che forfe nafcer potrebbe a taluno a prima vifta, sta, e per evitare ogni equivoco, egli è d' avvertirsi, che le azioni delle potenze non debbonsi riputar cause dell' equilibrio nello stretto, e rigoroso senso, siccome neppure l' equilibrio nello stretto, e rigoroso senso dee riputarsi effetto delle azioni. L'equilibrio non è altro, che l' impedimento de' moti, cioè degli effetti delle azioni delle potenze, a cui non è meraviglia se corrisponde l'impedimento delle cause, cioè delle azioni stesse. Le azioni intanto diconsi cause dell' equilibrio, in quantoche essendo esse impedite, nasce l' impedimento ne' diloro effetti, cioè ne' moti; e quest' impedimento di moti è per l' appunto quello, che chiamasi comunemente equilibrio, il quale durerà fin' a tanto, che dura fra le azioni l' impedimento. E qual meraviglia può dunque nascere nel sentire, che l'impedimento delle cause produca impedimento negli effetti? Meraviglia sarebbe se effetti positivi nascessero da cause impedite, ovvero se cause non impedite non produceßero gli effetti. Or perchè l'eguaglianza, e la contrarietà delle azioni fa sì, che le azioni stesse s' impediscano scambievolmente a produrre i suoi effetti, perciò nell' eguaglianza, e contrarietà delle azioni delle potenze diciamo consistere la vera causa dell' equilibrio.

XXII.

Sicche per conoscere ne' varj casi se debba aversi, o nò l' equilibrio fra le potenze, ze, bisogna vedere nelle circostanze, nelle quali trovansi le potenze costituite, s' egli è possibile, o nò, che nasca moto. Perciò suppongasi, che le potenze nelle circostanze, nelle quali son poste, comincino ad agire, e si osservi, se nel procinto del nascere le azioni siano uguali, o disuguali tra loro; se si ritroverà, che esse sono uguali, potrà assolutamente concludersi esser' impossibile il moto, e per conseguenza doversi aver l' equilibrio; ma se al contrario si troverà, che son disuguali, poichè la minore non può impedir la maggiore interamente a produrre l' effetto, potrà argumentarsi non dover succedere l' equilibrio tra le potenze, ma dover nascer moto dalla parte di quella potenza, che trovasi far' azione maggiore. Quindi stabiliamo un principio, cioè un criterio generale per conoscere quando tra le potenze succeder debba l' equilibrio, ed egli è quello, che si contiene nel seguente teorema: *Le potenze saranno in equilibrio qualora trovansi in tali circostanze costituite, che se nascesse un moto infinitesimo, le diloro infinitesime azioni sarebbon' uguali, e contrarie*. E un tal principio deve aver luogo in tutti gli equilibrj, di qualunque specie essi si siano, come quello, che dalla vera indole, e natura degli equilibrj stessi immediatamente deriva.

XXIII.

XXIII.

Ma il principio esposto non solamente somministra un metodo generale, ed esatto per esaminar gli equilibrj di qualsivoglia genere, e in qualsivoglia caso, ma mostra eziandio il vero metodo, con cui in natura gli equilibrj stessi si producono. Poichè in tutti gli equilibrj le potenze nell' atto d'equilibrarsi comincíono veramente ad agire, ma perchè le azioni nel procinto stesso del loro nascimento si ritrovano uguali, e contrarie, s'impedisce tosto ogni moto, e resta il tutto in equilibrio. Ciò perchè più chiaramente apparisca, prendo una palla grave, la colloco tra due piani inclinati, ed interrogo: tosto che la palla è tra i due piani collocata, resta ella forse in equilibrio? Nò certamente; ma la gravità comincerà in essa ad agire per farla discendere; quindi i piani inclinati verranno compressi; or questi piani, non dandosi in natura corpi perfettamente duri, come ad evidenza Giovan Bernoulli (a), e con esso tutti i Leibinitziani han dimostrato, saranno, o molli, o elastici, se molli, cederanno alle compressioni della palla, e perciò la palla si vedrà discendere; se elastici, per la compression della palla s'ecciterà ne' piani già detti l'ela-

(a) Tom. 3. chapitre 1. du discours sur les loix de la communication du mouvement.

fticità, la di cui azione è contraria all'azione della gravità della palla fteffa. Ma perchè le azioni, e della gravità della palla, e dell' elafticità de' piani nel procinto del loro nafcimento fono uguali tra loro, l' una effendo interamente all' altra d' impedimento nel produrre l' effetto, non feguirà effetto alcuno, e la palla refterà tra i due piani inclinati ritenuta immobilmente in equilibrio. Sicchè nel produrfi gli equilibrj v' intervengono le minime azioni, le quali ritrovandofi uguali, e contrarie, s' impedifcono fcambievolmente, e fan sì, che le potenze reftino equilibrate.

CAPITOLO III.

Della vera mifura dell' azion della potenza.

XXIV.

IL principio, che nel precedente capitolo ricavato abbiamo dalla natura, ed indole degli equilibrj, farebbe affatto inutile, fe non fi definiffe qual effer debba la vera mifura dell' azion della potenza. L' azion della potenza in due maniere folamente credefi da' Meccanici, che poffa mifurarfi, cioè, o per la potenza moltiplicata pel tempo, per cui la potenza fteffa agifce nel corpo, oppure per

per la potenza moltiplicata per lo ſpazio, per cui la potenza agendo nel corpo, lo fa avvicinar al ſuo centro, o da eſſo lo fa allontanare. E in fatti l' azione della potenza, come abbiam di ſopra avviſato (a), altro non è, che la ſomma degl' impulſi comunicati dalla potenza al corpo, e nel corpo ſteſſo conſervati. Or queſt' impulſi ſembra che non poſſano in altra maniera concepirſi replicati nel corpo, che, o in ciaſcun elemento di tempo, o in ciaſcun elemento di ſpazio; nel primo caſo la ſomma degl'impulſi, o ſia l' azion della potenza rieſce proporzionale al tempo, nell' altro caſo rieſce proporzionale allo ſpazio. Dunque l' azion della potenza in due maniere ſoltanto può miſurarſi, o per la potenza moltiplicata pel tempo dell' azione, oppure per la potenza moltiplicata per lo ſpazio, per cui la potenza agendo traſporta il corpo, facendolo avvicinar al ſuo centro, o da eſſo facendolo allontanare.

XXV.

Se l' azion della potenza debba pel tempo miſurarſi piuttoſto, che per lo ſpazio, queſto è quello, di cui tra i Carteſiani, e i Leibinitziani fortemente ſi diſputa. Poichè la celebre controverſia delle forze vive, che conſiſte nel definire ſe queſte miſurar ſi debbano per la

(a) Cap. I. §. 8.

la massa moltiplicata per la velocità, oppure per la massa moltiplicata per lo quadrato della velocità stessa, riducesi a quest' altra quistione, cioè se l' azion della potenza debba esser proporzionale al tempo piuttosto, o allo spazio. Imperochè dalle cose di sopra divisate apparisce, che agendo la potenza nel corpo, a cui è applicata, genera in esso la forza viva, e che questa nel corpo produce il cangiamento di stato. Sicchè la forza viva considerar si deve come effetto dell' azion della potenza, e come causa del cangiamento di stato, che nel corpo s' induce; e poichè in questo caso si tratta di cause intere, e totali, e di effetti parimenti interi, e totali, avrà luogo l' assioma Ontologico, che *le cause debbano essere proporzionali agli effetti, e gli effetti proporzionali alle cause*. Quindi nascono due metodi da poter misurare la forza viva, cioè, o con misurare il di lei effetto, ch' è il cangiamento di stato indotto nel corpo, o con misurar la di lei causa, che è l'azione della potenza. Se dunque vogliamo all' ultimo degli accennati metodi attenerci, tutta la quistione della vera misura delle forze vive si ridurrà alla quistione della vera misura dell' azioni delle forze morte. Intanto essendo già certo per le note leggi del Galileo, che la potenza moltiplicata pel tempo è proporzionale alla massa moltiplicata per la semplice velocità, e la potenza moltiplicata per lo spazio proporzionale alla massa moltiplicata

ta

ta per lo quadrato della velocità, egli è manifesto, che se si dimostrerà l' azion della potenza doversi misurare per la potenza moltiplicata pel tempo, sarà dimostrato altresì doversi misurar la forza viva per la massa moltiplicata per la velocità semplice, e così sarà vera la sentenza de' Cartesiani; ma se si dimostrerà, che l' azion della potenza misurar devesi per la potenza moltiplicata per lo spazio, sarà vera la sentenza de' Leibinitziani, e la forza viva dovrà misurarsi per la massa moltiplicata per lo quadrato della velocità. Sicchè tutta la quistione della vera misura delle forze vive riducesi a definire se debba l' azion della potenza misurarsi pel tempo piuttosto, o per lo spazio.

XXVI.

Per definir ciò rivolgiamoci alle cose dette nel capitolo precedente intorno alla natura, ed indole dell' equilibrio. La natura dell'equilibrio richiede, che qualora due, o più potenze trovansi equilibrate, supponendosi un moto infinitesimo, le infinitesime azioni, che in tal moto nascono, sian tra loro uguali, e contrarie. Quella dunque esser deve la vera misura dall' azion della potenza, che è capace di salvare negli equilibrj la predetta uguaglianza. Vediam perciò se quest' uguaglianza si salva misurando l' azion della potenza per la potenza moltiplicata pel tempo, come vogliono i Carteſiani, o miſurandola per la potenza moltiplicata per lo ſpazio, come i Leibinitziani pretendono.

XXVII.

Se in qualſivoglia equilibrio ſi concepirà un moto infiniteſimo, egli è manifeſto, che tutte le potenze ſi moveranno per lo ſteſſo tempicello, e perciò le di loro azioni infiniteſime ſaranno contemporanee. Sicchè ſe l'azion della potenza miſurar ſi doveſſe per la potenza moltiplicata pel tempo ſecondo il metodo de' Carteſiani, in qualſivoglia equilibrio, fatto un moto infiniteſimo, le azioni infiniteſime delle potenze ſarebbero tra di loro come le potenze ſteſſe. Ma le potenze negli equilibrj non ſon ſempre uguali; dunque neppure uguali ſaranno le di loro minime azioni; lo che è aſſolutamente contrario alla vera natura dell'equilibrio, la quale richiede, che ſtando le potenze equilibrate, le di loro azioni nel procinto di naſcere ſian uguali, e contrarie. Sicchè miſurando l'azion della potenza per la potenza moltiplicata pel tempo, non ſi può ſalvare l'eguaglianza delle azioni dall'equilibrio richieſta. Similmente la detta uguaglianza non può ſalvarſi col miſurar l'azione per la potenza moltiplicata per qualſivoglia funzione del tempo. Poichè eſſendo negli equilibrj i tempi delle minime azioni uguali tra di loro, uguali tra di loro anche ſaranfaranno i quadrati, i cubi, o altre funzioni qualunque de' tempi ftefli. Onde comunque vogliafi mifurare l' azione pel tempo, fempre negli equilibrj, fatto un moto infinitefimo, le minime azioni trovanfi proporzionali alle potenze, e perciò non fi falva giammai l'eguaglianza tra le azioni fteffe, ficcome la natura, e l' indole dell' equilibrio richiede.

XXVIII.

Non potendofi dunque l'azion della potenza mifurare per la potenza moltiplicata pel tempo, uopo è rivolgerfi allo fpazio. In tutti gli equilibrj conofciuti fi trova vero, come fi vedrà ne' feguenti capitoli, che facendofi un moto infinitefimo, le potenze fono in ragion reciproca de' di loro rifpettivi fpazietti d' acceffo, o di riceffo dal centro delle potenze fteffe; ch' è quanto dire, che in tutti gli equilibrj conofciuti, facendofi un moto infinitefimo, i prodotti delle potenze moltiplicate per gli refpettivi fpazietti d' acceffo, o di riceffo, e dall' una parte, e dall' altra fon fempre uguali tra loro. Sicchè fe l' azione della potenza fi mifurerà per la potenza moltiplicata per lo fpazio, per cui la potenza agendo trafporta il corpo, facendolo avvicinare al fuo centro, o dal fuo centro facendolo allontanare, fi falverà negli equilibrj l' eguaglianza tra le minime azioni delle potenze, ficcome la natura degli equilibrj

brj ſteſſi richiede. Ma quella dev' eſſere la vera miſura dell' azione della potenza, ch' è capace di ſalvar negli equilibrj una tal egguaglianza. Dunque l' azione della potenza dee veracemente miſurarſi per la potenza moltiplicata per lo ſpazio ſecondo il metodo de' Leibinitziani.

XXIX.

Quindi ſembra poterſi con tutta ſicurezza conchiudere eſſere ſtati i Leibinitziani più fortunati de' Carteſiani nella celebre controverſia della vera miſura delle forze vive. Poichè riducendoſi, come ſi è detto, la quiſtione della vera miſura delle forze vive a quella della vera miſura dell' azion della potenza, ed eſſendoſi già ad evidenza dalla natura dell' equilibrio dimoſtrato, che deve l' azion della potenza miſurarſi per lo ſpazio, non già pel tempo, è manifeſto, che la forza viva, che è l' effetto dell' azion della potenza, miſurar deveſi per la maſſa moltiplicata per lo quadrato della velocità, non già, come i Carteſiani pretendono, per la maſſa moltiplicata per la velocità ſemplice.

XXX.

E queſta maniera, con cui ſi è dimoſtrata a favor de' Leibinitziani la vera miſura dell' azione della potenza, è quella, che decide aſſolusolutamente la lite senza restar luogo a quistioni, togliendo a' Cartesiani quelle armi, colle quali son sempre stati soliti far fronte, e resistere ai Leibinitziani. Poichè a tutti i più validi argomenti, che per difesa della propria sentenza per i Leibinitziani recati si sono, o presi dall' uguaglianza delle fosse, che palle uguali dall'altezze reciproche ai loro pesi cadendo formano nella materia cadente, o ricavati dalla celebre teoria degli elastri di Giovanni Bernoulli, o presi dalle Leggi della Dinamica, o da altro principio dedotti, i Cartesiani si son sempre opposti col dire, che da essi non si avea riguardo alcuno del tempo, in cui si producono gli effetti, ma che se il tempo ancora si fosse, come conviene, introdotto, gli argomenti stessi de' Leibinitziani rivolti si sarebbero in lor favore. E benchè il dottissimo P. Riccati con somma chiarezza nel dialogo delle forze vive dimostri volersi a torto da' Cartesiani introdurre il tempo, restando non di meno molti sospetti da' Cartesiani stessi eccitati, per tutti gli argomenti già detti la causa resterebbe ancor dubbia interamente. Ma nell' argomento ricavato dalla natura, ed indole dell' equilibrio, poichè gli elementi del tempo son sempre uguali tra loro, comunque questo s' introduca per la misura dell' azion della potenza, non salverà giammai l' eguaglianza, che tra le azioni la natura negli equilibrj richiede, come si salva ricorrendo allo spazio.

XXXI.

XXXI.

Poichè dunque l' azion della potenza deve misurarsi per la potenza moltiplicata per lo spazio, per cui la potenza agendo nel corpo, lo fa avvicinare al suo centro, o dal suo centro lo fa allontanare, è manifesto, che il teorema ricavato dalla natura dell' equilibrio, ed esposto nel §. 22., sarà l'istesso che il teorema seguente: *Le potenze sono in equilibrio, qualora trovansi in tali circostanze costituite, che facendosi un moto infinitesimo, onde alcune potenze si avvicinino al suo centro, alcune altre dal suo centro s' allontanino, la somma de' prodotti positivi delle potenze moltiplicate per gli rispettivi spazietti d' accesso, o di recesso, sia uguale alla somma de' simili prodotti negativi*. Questo teorema per noi si chiamerà sempre *principio delle azioni*, il quale non sembra punto differire dal teorema di Giovanni Bernoulli, che nel terzo tomo delle dilui opere nel Cap. 3. *du discours sur le mouvement* proposto si trova in tal maniera: *Deux agens sont en equilibre lorsque leurs forces absolues sont en raison reciproque de leurs vitesses virtuelles; soit, que les forces, qui agissent l' une sur l' autre soient en mouvement, ou en repos*. Spiega egli stesso nella definizione terza del citato Capitolo, che intender voglia per velocità virtuale, dicendo: *j' appelle vitesses virtuelles celles,*

qui

qui deux, ou pluſeurs forces miſes en equilibre acquirent, quand on leur imprime un petit mouvement; ou ſi ces forces ſont deja en mouvement, la viteſſe virtuelle eſt l'element de viteſſe deja acquiſe dans un tems infinitement petit ſuivant ſa direction. Quindi eſſendo la velocità virtuale, come facilmente può vederſi, proporzionale allo ſpazietto d' acceſſo, o di receſſo dal centro della potenza, egli è chiariſſimo, che il teorema Bernoulliano non è punto differente dal noſtro, che dalla natura, ed indole dell' equilibrio con eſatto raziocinio abbiam ricavato, e abbiam detto da noi chiamarſi principio delle azioni.

XXXII.

Queſto principio, che prima di tutti fu adoperato dal noſtro Galileo, indi da Carteſio, Borelli, ed altri ſublimi meccanici, poichè dalla natura dell' equilibrio immediatamente deriva, ſarà dotato della ſomma evidenza, e dovrà aver luogo in tutti gli equilibrj, di qualunque ſpecie eſſi ſi ſiano. Ciò per noi ſi farà veder verificato ne' ſeguenti capitoli, ne' quali faremo in primo luogo vedere come gli altri principj ſtatici, de' quali ſi è fatto uſo per eſaminar gli equilibrj, dal principio delle azioni agevolmente deduconſi; in ſecondo luogo dimoſtreremo col principio delle azioni tutte le note leggi d' equilibrio nelle mac-

macchine ſemplici; indi col principio ſteſſo dimoſtreremo ancora le note leggi d' equilibrio ne' fluidi, e finalmente eſporremo un metodo, con cui per mezzo del principio delle azioni trattar ſi poſſono i problemi delle curve d' equilibrio.

CAPITOLO IV.

Del principio della Leva, di cui ſi valſero gli antichi per eſaminar gli equilibrj, e della maniera di dedurlo dal principio delle azioni.

XXXIII.

PRincipio Statico altro non è, che una regola, o criterio, col quale poſſiamo ne' varj caſi conoſcere, ſe debba averſi, o nò l' equilibrio. Il primo principio, che per eſaminar gli equilibrj ſi preſentò alla mente de' meccanici, può dirſi *principio dell' indifferenza*, che ſi contiene nel ſeguente teorema: *Qualora le potenze ſono uguali, e coſtituite ritrovanſi nelle medeſime circoſtanze, ſtaranno in equilibrio;* perchè, come ottimamente avverte Archimede, non v' ha ragion ſufficiente, per cui debba il moto naſcere da una parte piuttoſto, che dall' altra. Così, a cagion

gion d' eſempio, una bilancia di braccia uguali, e caricata egualmente dall' una parte, e dall' altra, ſtarà in equilibrio. In equilibrio (*Fig.* 2.) parimenti ſtaranno le tre potenze uguali AD, BD, CD al punto D in maniera applicate, che le di loro direzioni faccian gli angoli uguali ADB, BDC, CDA.

XXXIV.

Queſto principio, benchè di metafiſica evidenza dotato, è riſtretto però in limiti troppo anguſti, e poca utilità può certamente arrecare nelle meccaniche ricerche, adattar non potendoſi, che al ſempliciſſimo caſo, nel quale ſi hanno, e potenze uguali, e coſtituite nelle medeſime circoſtanze. Ciò conoſcendo gli Antichi meccanici, a rintracciar cominciarono qualche altro più fecondo principio, che non ſolamente al caſo ſemplice delle potenze uguali poſte nelle medeſime circoſtanze, ma ai caſi altresì, ne' quali le potenze ſono diſuguali, e in diverſe circoſtanze coſtituite, egualmente adattar ſi poteſſe. Preſero perciò a conſiderare una verga rigida vertibile intorno a un punto fiſſo, o vogliam dir fulcro, ed eſaminando da quali diſtanze dal fulcro biſognava ſoſpendere i peſi diſuguali, perchè nella verga già detta l' equilibrio ſi aveſſe, dopo varie ricerche ſtabilirono al fine la ſeguente legge: *S' avrà equilibrio, qualora i peſi comunque diſuguali ſoſpeſi ſaranno in diſtan-*

ſtanze dal fulcro, che ſerban tra di loro la ragion reciproca de' peſi ſteſſi; e queſta legge è quella, che chiamaſi *principio della Leva*, oppure *principio degli Antichi*.

XXXV.

La verità di un tal principio viene molto ben dimoſtrata, e poſta fuor di quiſtione dalla ſola ſperienza, la quale dimoſtra altresì verificarſi l' eſpoſta legge non ſolamente ſe le potenze applicate alla Leva ſon due, ma ſe ſon più ancora, e non ſolo quando le direzioni delle potenze ſon parallele tra di loro, come per l' appunto ſono le direzioni de'corpi gravi, ma anche quando le direzioni delle potenze han tra di loro qualunque poſizione; coſicchè o le direzioni delle potenze applicate ad una verga rigida vertibile intorno a un punto fiſſo, ſian parallele, o nò, purchè le potenze ſtaranno tra di loro in ragion reciproca delle diſtanze dal fulcro, s' avrà nella verga ſteſſa l' equilibrio. S' avverta però doverſi le diſtanze prendere per mezzo di linee rette, che dal fulcro ſulle direzioni delle potenze perpendicolarmente ſi menano.

XXXVI.

Poichè dunque il principio degli Antichi non è, che dalla ſola ſperienza dimoſtrato, ſarà egli un principio ſperimentale, cioè non d' al-d' altra evidenza fornito, che della fisica. Ma di questa sorta d' evidenza i meccanici non contenti, niun mezzo lasciarono intentato, perchè il principio della Leva dimostrato restasse colle sole metafisiche, e geometriche verità. Una metafisica dimostrazione del principio della Leva fu data prima di tutti da Aristotile, che può vedersi riferita, e confutata appresso il P. Dechales (*a*). Dopo di Aristotile Archimede (*b*) per dimostrar' il principio della Leva colla somma evidenza, cercò dedurlo colle sole Geometriche, e metafisiche verità dal principio dell' indifferenza. La dimostrazione d'Archimede, che parimenti riferita, e confutata ritrovasi appreso il P. Dechales (*c*), venne approvata da Stevino, Galileo, e Torricelli, i quali esponendola in altra maniera, credettero liberarla da varie difficultà, a cui sembrava loro soggetta. Per dedurre il principio della Leva da quello dell' Indifferenza colle sole verità geometriche, De la Hire ancora, Cristiano Ugenio, ed altri dottissimi uomini ne diedero varie dimostrazioni, dalle quali altro non apparisce, che gl' inutili sforzi fatti da' meccanici per rendere il principio della Leva della somma evidenza fornito.

(a) *Lib.1. prop.1. Mechanices.*
(b) *Lib. 6. æquiponderantium.*
(c) *Lib.1. prop.2. Mechanices.*

XXXVII.

Troppo ci trarrebbe lungi dal nostro sentiere il prender ad esaminar minutamente, e confutare tutte le predette artificiose dimostrazioni. Avverto soltanto generalmente, che in esse supponesi sempre, che due, o più corpi equilibrati intorno a un punto, premano il punto stesso con una forza uguale all' aggregato di tutti i pesi; la qual supposizione quantunque sembri molto simile al vero, nulladimeno non può tra le metafisiche verità annoverarsi; giacchè se da qualcuno in dubbio rivocasi, altra strada non resta per dimostrarla, che ricorrere alla sperienza. Sicchè resta fuor d' ogni dubbio esser il principio degli Antichi un principio semplicemente sperimentale, cioè di fisica evidenza soltanto dotato.

XXXVIII.

Notato ciò intorno alla certezza del principio degli Antichi, uopo è, che della secondità di esso vengasi brevemente a parlare. Diciamo perciò, che quantunque questo principio sia più secondo, e più esteso del principio dell' indifferenza, non è però secondo a segno, che possa a tutti gli equilibrj applicarsi. Poichè richiedendo il principio degli Antichi, che vi sia un fulcro, intorno a cui si farebbe il moto, se l' equilibrio si turbasse,

basse, è manifesto, che non ad altri casi potrà egli adattarsi, che a quelli, ne' quali si ha il detto fulcro, non già a quelli, ne' quali il detto fulcro non si ha in modo alcuno. Quindi negli equilibrj de' fluidi non essendovi, nè potendosi concepir fulcro alcuno, il principio degli Antichi non avrà affatto luogo, nè vi è stato perciò fin' ora meccanico, il quale s' abbia ideato voler col principio degli Antichi esaminar gli equilibrj de' fluidi; similmente il principio stesso non può applicarsi ad esaminar le curve d' equilibrio, non potendosi in queste ritrovar punto alcuno, che come centro di moto, o fulcro possa riguardarsi; anzi il principio già detto è insufficiente ancora per istabilire le leggi dell' equilibrio in tutte le macchine semplici; benchè gli equilibrj in queste non con altro principio sogliano esaminarsi da parecchi meccanici, che col principio degli Antichi. Ma a mio parere col principio degli Antichi potran ben' esaminarsi, e determinarsi le leggi dell' equilibrjo nella Leva, nell'asse nella ruota, e nella carrucola stabile, nelle quali macchine si ha certamente il centro di rotazione, ma non già nella carrucola mobile, nel piano inclinato, nel cuneo, e nella vite, nelle quali non può in modo alcuno aversi quel punto, che debba come fulcro riguardarsi.

XXXIX.

E in fatti coloro, che del principio degli Antichi si valgono per istabilir le leggi dell'equilibrio nella carrucola mobile, trattar sogliono la cosa in tal maniera: Sia (*Fig*.3.) B D una carrucola mobile circondata da una fune ABDE, fermata con un chiodo nell' estremità A, e tirata da una potenza applicata all' altra estremità E ; il peso penda dal centro della carrucola C per la verticale direzione C F. Quando la potenza applicata in E tira all' in sù la carrucola, questa nel principio del moto s' aggira intorno al punto B, cioè intorno al punto, in cui la fune AB è tangente della carrucola stessa. Questo punto perciò, potrà riguardarsi come fulcro, e la retta B G D come una Leva, a cui sia applicato il peso nel punto G, e la potenza nel punto D per la direzione DE. Dunque ci siam ridotti alla Leva ; si menino perciò dal punto B le perpendicolari B H, B G sulle direzioni della potenza, e del peso, e s' avrà l' equilibrio, qualora la potenza starà al peso come B G : B H.

XL.

Ma chi è, che non vede altro dall' esposto raziocinio non potersi rigorosamente dedurre, che la carrucola posta tra la potenza, e'l e 'l peso, che abbian tra di loro la proporzione di B G : B H, non muoverassi aggirandosi intorno al punto B, non già che la carrucola stessa starà assolutamente in equilibrio? Poichè quando dimostrar si vuole l' equilibrio in un dato caso, bisogna dimostrare non poter nascere qualsivoglia moto per qualunque direzione. Sicchè per poter giustamente concludere dall' esposto raziocinio, che la carrucola rimarrà in equilibrio quando la potenza sta al peso come B G : B H, dovrebbe esser certo, che altro moto nella detta carrucola non possa nascere, che quello, che si fa intorno al punto B. Lo che non essendo così chiaro, che non lasci luogo a sospetti, bisogna perciò dire non potersi col principio degli Antichi stabilir cosa alcuna intorno all' equilibrio della carrucola mobile.

XLI.

Quindi non può non recar meraviglia, come essendo una tal cosa non molto difficile a comprendersi, vi siano stati in questi nostri tempi, e tuttavia vi siano meccanici, che col principio della Leva stabiliscano le leggi dell' equilibrio nella carrucola mobile; e tanto più, che avea già Cartesio avvertito, che per istabilir le leggi dell' equilibrio nella carrucola, non potea adoperarsi il principio della Leva, dicendo nel secondo tomo delle lettere nella lettera 24: *C' est une chose ridicule* *que de vouloir employer la raison du Levier dans la Poulie.*

XLII.

Ne sembra egli più ragionevole il voler applicare il principio della Leva al piano inclinato, che il volerlo applicare alla carrucola mobile. Sia (*Fig.* 4.) la sfera L X posta sopra il piano inclinato M K, cosicchè lo tocchi nel punto L. Se la sfera si supporrà omogenea, il centro di gravità sarà il punto E, che è il centro stesso della sfera; in questo punto perciò può concepirsi raccolta tutta la gravità, la di cui direzione, come è noto, è la verticale E I. La potenza, che deve ritener la sfera equilibrata sul piano inclinato, sia P, applicata alla sfera stessa in qualsivoglia punto F, e per qualsivoglia direzione F P. Coloro, che applicar pretendono il principio della Leva al piano inclinato, ragionano in tal guisa: Se la sfera sul piano si movesse, dovrebbe certamente aggirarsi intorno al punto del contatto L, il quale perciò può come fulcro, o centro di moto riguardarsi. Sicchè si prolunghi la direzione FP fin' a tanto, che incontri il raggio L E, prolungato, se occorre, in B, e sarà L E B una Leva, in cui il fulcro è L, la potenza è applicata in B per la direzione B P, e 'l peso in E per la verticale direzione E G. Ecco dunque la cosa ridotta alla Leva; onde menannando dal punto L le perpendicolari LG, LF sulle direzioni EG, FP del peso, e della potenza, s' avrà l' equilibrio, qualora la potenza P starà alla gravità della sfera come LG: LF.

LXIII.

Egli però fa di mestieri esser poco esperto nella dottrina degli equilibrj, per non comprendere, che troppo malamente, anzi senza alcun fondamento, dall' addotto raziocinio deducesi, che se la potenza starà al peso come LG: LF, la sfera sul piano inclinato resterà affatto in equilibrio. Poichè per picciola riflession, che voglia farsi, si vede subito altro non potersi dall' esposto raziocinio rigorosamente dedurre, che qualora la potenza starà al peso della sfera LX, come LG: LF, non dovrà succedere moto alcuno intorno al punto L, cioè che la sfera non potrà discendere di moto rotante, non già, che la sfera resterà affatto equilibrata sul piano; potendo molto ben addivenire, che una sfera discenda per un piano inclinato di moto radente, benchè discender non possa di moto rotante. Il moto si dice rotante, qualora una sfera si muove in maniera, che vadano i suoi punti applicandosi successivamente alli punti del piano, sopra cui viaggia, in quello stesso modo per l' appunto, che sogliamo concepir mouversi la circonferenza del cerchio generatore della cicloide. Che se poi la sfera si muove in maniera, che venga sempre dal piano toccata nel medesimo punto, il moto si dice radente. Distinte così le cose, egli è più della luce del mezzo dì manifesto, che avendosi nel moto rotante un punto fisso, intorno a cui si fa il moto, potrà col principio degli Antichi determinarsi, come si è veduto nel precedente §., quando un tal moto debba esser impedito; ma nel moto radente, poichè tutti i punti della sfera si muovono con moto sempre parallelo, non vi sarà punto alcuno, che possa riguardarsi come fulcro, e per conseguenza col principio della Leva intorno a tal moto non si potrà stabilir cosa alcuna. Ma quando dimostrar si vuole l' equilibrio, bisogna dimostrar' impedito ogni qualunque moto. Dunque non potendosi col principio della Leva dimostrar' impedito ogni qualunque moto in una sfera collocata sopra di un piano inclinato, non si potrà col principio stesso determinare quando una sfera costituita sopra un piano inclinato restar debba in equilibrio.

XLIV.

Abbiamo finora supposto, che il corpo collocato sopra il piano inclinato fosse sferico; ma se supporremo il detto corpo di qualunque altra figura regolare, o irregolare, cosicchè discendendo pel piano inclinato, abbia un un moto, o ſoltanto radente, o compoſto di radente, e rotante, molto meno col principio della Leva potrebbeſi determinare quando un tal corpo ſtarà ſul piano equilibrato; non eſſendovi, nè potendoſi finger' alcun punto, che poſſa come centro di moto riguardarſi. Quindi di nuovo è manifeſto non poterſi in modo alcuno col principio degli Antichi ſtabilir la teoria de' corpi equilibrati ſopra de' piani inclinati.

XLV.

Tutti coloro, che trattano la Statica col principio degli Antichi, riducono il cuneo, e la vite al piano inclinato. Eſſendoſi dunque dimoſtrato, che non può il principio degli Antichi applicarſi al piano inclinato per determinar le leggi dell' equilibrio, reſta dimoſtrato altresì, che non può il principio ſteſſo applicarſi a determinar le leggi dell' equilibrio nel cuneo, e nella vite. D' onde chiaramente appariſce, che il principio degli Antichi non ſolamente non può adoperarſi ne' fluidi, e nelle curve d' equilibrio, ma neppure in tutte le macchine ſemplici; onde di qual fecondità egli ſia può agevolmente argumentarſi.

XLVI.

Se egli è vero, come pur' è veriſſimo, che il il principio delle azioni è il vero principio della natura, tutti gli altri principj per mezzo di esso devono potersi dimostrare. Il principio degli Antichi, del quale abbiam fin'ora parlato, può certamente per mezzo di quello delle azioni agevolmente dimostrarsi in tal maniera. Sia (*Fig.* 5.) ACB una verga rigida vertibile intorno al punto fisso C; ne' punti A, B della verga già detta siano applicate le potenze Z, X per le direzioni AZ, BX, le quali, e rispetto alla verga, e rispetto a se stesse abbiano qualunque posizione. Dal fulcro C sulle direzioni AZ, BX si menino le perpendicolari CM, CN. Dico dal principio delle azioni dedursi, che qualora nella verga ABC si ha l'equilibrio, la potenza Z sta alla potenza X come CN : CM, cioè, che vale l' equazione Z. CM = X. CN.

DIMOSTRAZIONE.

I centri delle potenze Z, X sian i punti Z, X. Si concepisca ora nella verga ACB nascer un moto infinitesimo, cosicchè i punti A, B descrivendo gli archetti A*a*, B*b* vengano in *a*, *b*. Dal punto *b* al punto X si tiri la retta *b*X, e dal punto *a* al punto Z la retta *a*Z; indi col centro Z, e coll' intervallo *a*Z intendasi descritto l'archetto *a*F, che incontri la AZ in F, e similmente col centro X, e coll' intervallo XB s' intenda descritto l' archetto BG, che tagli la *b*X in in G. Fatto ciò, è manifeſto eſſer AF lo ſpazietto d' acceſſo al centro della potenza Z, e bG lo ſpazietto di receſſo dal centro della potenza X. Il principio dunque delle azioni richiede, che avendoſi nella verga ACB l' equilibrio, ſia la potenza Z alla potenza X come $bG : AF$, o ſia in ragion compoſta di $\left\{\begin{array}{l} bG : Bb \\ bB : Aa \\ Aa : AF \end{array}\right.$. Ora eſſendo gli angoli CBb, XBG, per la dottrina degl' infiniteſimi, retti, e perciò uguali, toltone l' angolo comune EBG, quei, che reſtano bBG, EBX ſaranno uguali tra di loro; ſono anche uguali tra di loro gli angoli CNB, bGB, perchè retti. Dunque i triangoli bGB, CNB ſono ſimili tra di loro. Simili tra loro ſono per la ſteſſa ragione anche i triangoli MCA, FAa, come ſimili altresì ſono i ſettori ACa, BCb. Quindi vagliono le ſeguenti proporzioni $bG : bB :: CN : CB$. Ma abbiam veduto,

$$bB : Aa :: CB : CA$$
$$Aa : AF :: CA : CM$$

che qualora ſi ha l' equilibrio, deve la potenza Z ſtar alla potenza X in ragion compoſta di $\left\{\begin{array}{l} bG : bB \\ bB : Aa \\ Aa : AF \end{array}\right.$. Dunque avendoſi l' equilibrio deve eſſere ancora la potenza Z alla potenza X in ragion compoſta di $\left\{\begin{array}{l} CN : CB \\ CB : CA, \\ CA : CM \end{array}\right.$

o ſia

o sia Z : X :: CN : CM; onde moltiplicando gli estremi, e i medj, valerà l'equazione Z.CM = X.CN. Che è quel, che bisognava dimostrare.

XLVII.

Quindi è manifesto non esser altro il principio degli Antichi, che il principio stesso delle azioni applicato ad un caso particolare, cioè all' equilibrio delle potenze applicate ad una verga rigida vertibile intorno a un punto fisso.

CAPITOLO V.

Del principio dell' equivalenza, e della maniera di dedurlo tanto dal principio degli Antichi, quanto da quello delle azioni.

XLVIII.

POichè il principio, di cui si valsero gli Antichi nell' esaminar gli equilibrj per gli accennati difetti si conobbe troppo sterile, era d' uopo certamente, che altri principj si rintracciassero più fecondi, e più estesi del principio della Leva, di cui abbiamo fin'ora parlato. A ciò dunque seriamente pensando i Mec-

Meccanici, varj altri principj nacquero, l'origine de' quali non deve da altri più rimoti tempi ripeterſi, che da quelli del Galileo, e del Carteſio. Fra tutti queſti il primo, che ſi ritrovaſſe, o almeno il primo, che foſſe applicato a ſcoprir le leggi degli equilibrj, e a riſolvere le più ſublimi quiſtioni meccaniche, fu quello, che ſi chiama principio dell' equivalenza, il quale ſi contiene in queſto ſempliciſſimo teorema: *Se due potenze unitamente ſollecitanti un corpo vengano eſpreſſe per i lati di un parallelogrammo, ad eſſe quella equivale, che per la diagonale del parallelogrammo ſteſſo ſi eſprime*. Così ſe le potenze, che unitamente ſollecitano un corpo foſſero (*Fig. 6.*) i lati AC, AB del parallelogrammo ACDB, quella, che ad eſſe equivale, è la diagonale del parallelogrammo ſteſſo AD.

XLIX.

Il Newton, il Varignon, l' Ermanno, ed altri, che le veſtigie di queſti han ſeguitate, dimoſtrano un tal principio per mezzo de' moti, che nel medeſimo corpo le potenze laterali AC, AB agendo indurrebbono, e ciò nella ſeguente maniera: ſe il corpo tirato dalla ſola potenza CA percorreſſe in un dato tempicello lo ſpazietto AF, indi tirato dalla ſola potenza AB, nel medeſimo tempicello percorreſſe lo ſpazietto AQ, queſti ſpazietti AF, AQ, come è noto per le leggi del Galileo, saranno tra di loro come le potenze stesse, cioè come i lati AC, AB: Se dunque il corpo stesso sarà unitamente tirato dalle potenze AC, AB, nel medesimo tempo non si troverà nè nel punto F, nè nel punto Q, ma dovrà ritrovarsi nel punto G, che è il punto del concorso delle due rette QG, FG parallele rispettivamente ai lati del parallelogrammo AC, AB, il qual punto, come è noto dalla Geometria, sarà collocato nella diagonale AD del parallelogrammo stesso ACDB. Sicchè il corpo tirato unitamente dalle potenze AC, AB percorrerà nella diagonale AD lo spazietto AG nel tempicello stesso, che tirato dalla sola potenza AC percorrerebbe lo spazietto AF, oppure tirato dalla sola potenza AB, lo spazietto AQ. Ma per le leggi stesse del Galileo il corpo A perchè possa scorrere lo spazietto AG deve esser mosso da una potenza espressa per AD. Dunque le potenze AC, AB unitamente producono l'istesso effetto, che produrrebbe la sola potenza AD; onde la potenza AD equivale alle due AB, AC. Che è quel, che bisognava dimostrare.

L.

Questa dimostrazione però a ragione vien riputata poco esatta; poichè in primo luogo in essa si fa uso delle leggi del Galileo, le quali certamente dimostrar non si possono senza aver prima stabilite le leggi dell' equilibrio; onde

onde si commette, come suol dirsi, una petizione di principio. In secondo luogo supponesi, che le potenze AC, AB tanto separamente, quanto unitamente sollecitano un corpo al moto dell'istessa maniera; la qual supposizione non è chiara a segno, che possa per vera assumersi senza pruova; nè dee stimarsi lieve impresa il volerla provare. E benchè varj dottissimi Autori ricorsi siano ad ingegnosi artificj per liberare l'addotta dimostrazione da ogni difetto, cogli artificj però i difetti si sono nascosti, non tolti.

LI.

Ma Daniel Bernoulli senza supporre le leggi del moto, e senza ricorrere ad alcun artificio nel primo tomo degli Atti dell' Accademia di Pietroburgo ha dimostrato il principio dell' equivalenza colle sole geometriche, e metafisiche verità; e questa dimostrazione perchè intrigata di moltissimi calcoli, è stata in varie proposizioni ridotta a forma più semplice dal chiarissimo P. Riccati nel quinto tomo degli Atti della Accademia di Bologna, così che per intenderla basta soltanto sapere i primi elementi d' Euclide; onde intorno alla certezza del principio dell' equivalenza altro a desiderar non resta, avendo egli già ricevuta una dimostrazione facile nel tempo stesso, e della somma evidenza. Le dimostrazioni di Bernoulli, e Riccati possono ne' citati luoghi ve-

vederſi. Noi intanto, perchè appariſca come i principj ſtatici l'un dall' altro dipendono, dedurremo primieramente il principio dell' equivalenza da quello degli Antichi; per lo che premettiamo il ſegunte

LEMMA.

LII.

Sia CABD un parallelogrammo qualunque, la cui diagonale ſia DA. Si prenda un punto qualunque M eſiſtente nel medeſimo piano del parallelogrammo; e da eſſo tanto ſu i lati AC, AB, quanto ſulla diagonale DA ſi menino le perpendicolari MP, MQ, MS. Dico, che val ſempre la ſeguente equazione $AB.MQ + AC.MP = DA.MS$.

DIMOSTRAZIONE.

Si prolunghino le rette MS, BA fino a tanto che s' incontrino in N, e ſi menino dalli punti B, C le rette BO, CU perpendicolarmente ſulla diagonale, le quali per la natura del parallelogrammo ſono uguali tra loro, come uguali altresì tra loro ſono tante le rette DU, AO, quante le rette DO, AU. Ciò fatto, poichè i triangoli CAU, XMP ſono ſimili tra loro, perchè ſimili ad un iſteſſo triangolo ASX, ſarà $CA : AU :: XM : MP$, e perciò $CA.MP = AU.XM$. Similmilmente i triangoli A O B, M N Q perchè ſimili ad un iſteſſo triangolo S N A, ſono ſimili tra di loro, e perciò BA : AO : : NM : MQ, e BA . MQ = AO . NM. Ma AO . NM = AO . MS + AO . SN. Dunque BA, MQ = AO . MS + AO . SN. Quindi eſſendo BO = CU, ſarà CU : OA : : NS : SA, e CU . SA = OA . NS. Ma è CU . SA = AU . SX, eſſendo, per la ſimiglianza de' triangoli CUA, ASX, CU : UA : : SX : SA. Dunque AO . NS = UA . SX. Perlocchè eſſendo BA . MQ = AO . MS + AO . SN, ſarà ancora BA . MQ = DU . MS + UA . SX. Si è inoltre dimoſtrato CA . MP = UA . MX. Dunque CA . MP + BA . MQ = UA . MX + UA . SX + DU . MS; la qual' equazione può anche ſcriverſi in queſta maniera CA . MP + BA . MQ = DU . MS + UA . MS, cioè CA . MP + BA . MQ = DA . MS. Che è quel, che biſogna dimoſtrare.

LIII.

Ciò premeſſo, ſian tre potenze AC, AB, AD applicate al punto A, delle quali due ſiano eſpreſſe per i lati AC, AB, la terza poi per la diagonale del parallelogrammo CABD. Dico pel principio degli Antichi, che la potenza diagonale AD ſtarà in equibrio colle due laterali AC, AB.

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi il punto A collocato nel piano C D B A mobile. Se nel piano stesso si prenderà un altro punto qualunque M, e da esso si meneranno le rette M P, M Q, M S perpendicolari rispettivamente ai lati A C, A B, e alla diagonale A D, sarà pel lemma dimostrato $CA.MP+BA.MQ=DA.MS$. Sicchè se riguarderemo M come fulcro, la somma de' prodotti delle potenze laterali moltiplicate per le rispettive loro distanze dal fulcro è uguale al prodotto della potenza diagonale moltiplicata per la sua distanza dal fulcro stesso. Ma quando vi è questa condizione per lo principio degli Antichi si deve aver l' equilibrio. Dunque posto che si sia fatto fulcro nel punto M, la potenza espressa per la diagonale A D farà equilibrio colle potenze espresse per i lati A C, A B dell' istesso parallelogrammo A C D B, e perciò il piano A C D B resterà immobile. E perchè l' equazione $CA.MP+BA.MQ=DA.MS$ si verifica sempre, dovunque prendasi nel predetto piano il punto M, perciò le tre potenze A C, A B, A D staranno in equilibrio, qualunque si finga esser il fulcro nel piano C A B D esteso anche all' infinito. Sicchè il piano già detto non potrà rotare intorno ad alcun punto benchè supposto in infinita distanza; e per conseguenza non può neppur muo-

versi

versi col moto progressivo, nè col moto composto di progressivo, e rotatorio. Ma altro moto non può concepirsi poter nascere nel piano in virtù delle tre porenze A C, A B, A D in esso esistenti, che o il rotario intorno a un punto del medesimo piano, o il progressivo secondo la direzione di qualche retta esistente nel piano stesso, o finalmente il composto de' due già detti. Dunque il piano assolutamente non si muoverà in virtù delle tre potenze A C, A D, A B, e per conseguenza le tre potenze A C, A D, A B staranno assolutamente equilibrate senza alcuna dipendenza dal fulcro. Ch' è quel, che bisognava dimostrare.

LIV.

L'equilibrio delle tre potenze A C, A B, A D perchè indipendente dal fulcro, si chiama equilibrio perfetto. Poichè due sorte di equilibrj i Meccanici distinguono, una sorta è di quelli, che si dicono perfetti, l'altra è di quelli, che si dicono non perfetti. L'equilibrio perfetto è quello, che non si turba in modo alcuno, benchè si muti per quanto si voglia il fulcro, o anche se il fulcro si tolga affatto di mezzo; e quando si ha questo equilibrio, il fulcro, benchè vi sia, non sostiene però pressione alcuna. Che se poi mutandosi il fulcro in qualche maniera, o togliendolo affatto di mezzo, l' equilibrio si turbi, l'equilibrio stesso si dirà non perfetto, e 'l fulcro

cro in questo caso sostiene pressione.

LV.

Siccome dal principio degli Antichi abbiam dedotto quello dell' equivalenza, così dal principio dell' equivalenza potrà dedursi quello degli Antichi. Quindi potrebbe forse ad alcuno nascer sospetto, che il principio degli Antichi acquistar possa oltre la certezza fisica anche quella, che ha l' istesso principio dell'equivalenza, ch' è quanto dire una certezza metafisica. Bisogna però distinguer due casi, cioè il caso, in cui nella leva si hanno tre potenze applicate allo stesso punto, e 'l caso, in cui nella leva le tre potenze sono applicate a punti diversi. Nel primo caso non v'ha dubbio alcuno, che il principio degli Antichi riceva da quello dell' equivalenza la stessa certezza, di cui questo è dotato, deducendosi, come si è veduto, dal principio dell' equivalenza colle sole geometriche verità; ma nell' altro caso non potendosi il principio degli Antichi da quello dell' equivalenza dedurre senza l' ajuto di qualche altro principio sperimentale, esso per tal deduzione non farà acquisto alcuno intorno alla sua certezza, ma resterà qual' era prima di fisica evidenza soltanto fornito.

LVI.

Il principio, di cui si ha di bisogno per dedurre

durre dal principio dell' equivalenza quello Antichi, egli è il seguente: *Non si turba l'equilibrio in modo alcuno col trasportar le potenze da un punto a un altro qualunque, che collocato sia nelle direzioni rispettive delle potenze stesse*. Poichè richiedendo il principio dell' equivalenza, che le potenze costituenti l' equilibrio siano applicate allo stesso punto, dovendo due esser espresse per i lati, e la terza per la diagonale dello stesso parallelogrammo, qualora il principio della leva, nel caso, che le potenze siano a diversi punti della leva stessa applicate, vogliasi da quello dell' equivalenza dedurre, egli fa di mestieri far sì, che le potenze già dette si trovino applicate allo stesso punto. Lo che si otterrà certamente per mezzo del principio ora esposto; ma egli è questo un principio sperimentale, perchè dalla sola sperienza dimostrato.

LVII.

Posto ciò la dimostrazione del principio degli Antichi per mezzo di quello dell' equivalenza si farà in tal maniera: sia (*Fig.* 7.) A B una verga rigida vertibile intorno al punto C; ad essa siano applicate ne' punti A, B due potenze per le direzioni A D, B E. Queste direzioni si prolunghino fin' a tanto, che s' intersechino nel punto F, dal quale al fulcro C si meni la retta F C. Sarà certamente F C la direzione della potenza, che sostiene il fulcro

cro C. Che se ciò si nega, la direzione della potenza, che sostiene il fulcro C, sia non C F, ma un'altra qualunque C K, che vada ad incontrare la direzione della potenza B E in K. Poichè supponiamo il caso dell'equilibrio, le tre potenze, le di cui direzioni sono B F, C K, A F staranno equilibrate tra loro, e perciò il piano A F B supposto mobile, resterà immobile in virtù delle tre potenze già dette. Tanto la potenza che sostiene il fulcro C, quanto quella, che è alla verga applicata in B per la direzione B F, s'intendano applicate per le medesime direzioni al punto K, e la direzione dell'equivalente ad esse supponghiamo essere K Q, che vada ad intersegare la direzione della potenza A D in L. Egli è manifesto, che le potenze, le di cui direzioni sono A F, L K, staranno tra loro in equilibrio, ed in virtù di esse sole il piano A F B starà ancora immobile. Queste due potenze s'intendano per le medesime direzioni applicate al punto L, e la direzione dell'equivalente ad esse sia L R. Ma il piano era tenuto in equilibrio dalle sole due potenze applicate al punto L per le direzioni L F, L K; dunque sarà tenuto eziandio in equilibrio dalla loro equivalente, cioè dalla sola potenza applicata al piano stesso per la direzione L R. Lo che è manifestamente assurdo, e contrario a ciò, che nel §. II. abbiam detto. Ma un tal assurdo dovrà sempre seguire fin' a tanto, che la direzione della potenza, che sostiene il

cro

fulcro C, non si dica essere CF. Dunque veracemente CF è la direzione della potenza, che il fulcro C sostiene.

Essendo CF la direzione della potenza, che sostiene il fulcro C, per determinare la proporzione, che nel caso dell' equilibrio passar deve tra le potenze applicate alli punti della verga A, B per le direzioni AF, BF, nella retta CF, anche prolungata, se si vuole, si prenda un punto qualunque I, e da esso si tirino le rette IG, IH parallele rispettivamente alle AF, BF, onde si formi il parallelogrammo FGIH. Pel principio dell' equivalenza le potenze applicate alli punti della verga A, B, e quella, che sostiene il fulcro C saranno tra di loro come le rette FH, FG FI. Sicchè nel caso dell' equilibrio la potenza applicata in A deve star alla potenza applicata in B come FH : FG. Ma FH : FG sta come il seno dell' angolo BFC al seno dell' angolo CFA, e menando dal punto C sulle direzioni delle potenze AF, BF le perpendicolari CM, CN, il seno dell' angolo BFC sta al seno dell' angolo CFA come CN : CM. Dunque la potenza applicata alla verga in A per la direzione AD starà alla potenza applicata alla verga stessa in B per la direzione BE come CN : CM; cioè le potenze applicate alla verga in A, e B per le direzioni AD, BE nel caso dell' equilibrio son tra di loro in ragion reciproca delle distanze dal fulcro. Che è ciò, che bisognava dimostrare.

 LVIII.

LVIII.

E' chiaro dunque, che per dimoſtrare il principio degli Antichi per mezzo del principio dell'equivalenza, toltone il caſo, in cui ſi hanno tre potenze alla leva applicate nel medeſimo punto, biſogna ſempre ricorrere ad un principio ſperimentale, il quale fa sì, che il principio dell' equivalenza non poſſa nel principio degli Antichi trasfondere tutta quella certezza, della quale egli è dotato; onde il principio degli Antichi col dedurſi da quello dell' equivalenza non reſta, che qual' era prima di fiſica evidenza ſoltanto fornito.

LIX.

Ed ecco come il principio dell'equivalenza dal principio degli Antichi facilmente deduceſi; ma non con minor facilità il principio ſteſſo può dedurſi da quello delle azioni, dimoſtrato che ſarà il ſeguente.

L E M M A.

Sia (*Fig.* 8.) A C B D un parallelogrammo qualunque, la cui diagonale ſia A B. Si prenda un punto qualunque R al punto A infinitamente vicino; e dalli punti C, B, D al punto R tirate le rette C R, B R, D R, coi centri C, B, D, e cogl'intervalli C A, B A, D A ſi si descrivano gli archetti Ao, Ap, Aq, che incontrano le rette CR, BR, DR ne' punti o, p, q. Dico, che val sempre la sequente equazione $CA . Ro + DA . Rq = BA . Rp$.

DIMOSTRAZIONE.

Dalli punti C, D si menino le rette CM, DN perpendicolari alla retta BR, e l' archetto Ao intendasi descritto fin' a tanto che incontri la retta BR nel punto g. Essendo simili i triangoli tRq, NRD, sarà $NR : DR :: Rq : Rt$, e quindi moltiplicando gli estremi, e i medj, sarà $NR . Rt = DR . Rq$. Così ancora essendo simili i triangoli Rog, CMR, sarà $CR : MR :: Rg : Ro$, e perciò $CR . Ro = MR . Rg = MR . Rt + MR . tg$. In oltre stà $pt : pg$ in ragion composta di $\begin{cases} pt : pA \\ pA : pg \end{cases}$. Ma per la simiglianza de' triangoli tpA, qtR è $pt : pA :: tq : tR :: DN : NR$, e per la simiglianza de' triangoli Apg, oRg è $pA : pg :: oR : og :: MR : MC$. Dunque starà similmente $pt : pg$ nella ragion composta di $\begin{cases} DN : NR \\ MR : MC \end{cases}$, o sia di $\begin{cases} DN : NR \\ MR : DN \end{cases}$, giacchè le rette MC, DN non differiscono, che d' una quantità infinitesima (*a*). Dall' ultima analogia dunque abbiamo $pt : pg :: MR : NR$, e componendo $pt : tg :: MR:$

(a) *Geom. infinitesimorum P. Saladini lib. 1. prop. 9.*

:: MR : MR + NR; e quindi sarà MR . tg = MR . pt + NR . pt. Onde nell' equazione ritrovata di sopra CR . Ro = MR . Rt + MR . tg, sostituito in luogo di MR . tg il suo valore, sarà CR . Ro = MR . Rt + MR . pt + NR . pt; e se a questa equazione s' aggiugnerà l' altra di sopra ritrovata DR . Rq = NR . Rt, s' avrà come è chiaro

$$CR.Ro + DR.Rq = \begin{cases} MR.Rt + MR.pt \\ NR.Rt + NR.pt \end{cases}.$$

Ma è MR + NR = BR, ed Rt + tp = Rp. Dunque sarà finalmente CR . Ro + DR . Rq = BR . Rp, oppure CA . Ro + DA . Rq = BA . Rp. Che è quel, che bisognava dimostrare.

LX.

Ciò dimostrato, siano applicate al punto A tre potenze, delle quali due, e in quanto alla quantità, e in quanto alla direzione rappresentate siano dai lati AC, AD del parallelogrammo ACBD, la terza poi, e in quanto alla direzione, e in quanto alla quantità sia espressa dalla diagonale del parallelogrammo stesso AB. Dico per lo principio delle azioni, che la potenza diagonale AB fa equilibrio colle due laterali AC, AD.

DIMOSTAZIONE.

Suppongasi nascer' un moto infinitesimo, per cui il punto A si trasferisca in R. Dalli punti C, B, D al punto R tirate le rette CR, BR, DR, descrivansi coi centri C, B, D, e cogl' intervalli CA, BA, DA gli archetti A*o*, A*p*, A*q*, che incontrino le rette CR, BR, DR ne' punti *o*, *p*, *q*. Se la potenza CA s' intenda collocata in C, la potenza AB in B, e la potenza AD in D, saranno C,B,D i centri delle potenze AC, AB, AD ed R*o*, R*p*, R*q* saranno gli spazietti d' accesso, o di recesso dai centri stessi delle potenze C, B, D. Ma per lo lemma dimostrato è $CA . Ro + DA . Rq = BA . Rp$. Dunque il prodotto della potenza AB moltiplicata pel suo spazietto d'accesso, o di recesso, è uguale alla somma de' prodotti di ciascuna delle potenze AC, AB moltiplicata similmente per lo rispettivo suo spazietto di recesso, o d' accesso. Ma quando ciò si verifica, il principio delle azioni richiede, che s' abbia equilibrio tra le potenze. Dunque le potenze AC, AB, AD applicate al medesimo punto A fan' equilibrio tra loro, e perciò la potenza diagonale AB equivale alle due laterali AC, AD. Che è quel, che bisognava dimostrare.

LXI.

LXI.

Perchè intorno a ciò niun dubbio rimanga, avvertasi, che può a taluno nascer per caso sospetto, se giustamente, o nò possa il punto B come centro della potenza AB riguardarsi. Imperocchè qualora si dice, che nel parallelogrammo CABD la potenza diagonale AB fa equilibrio colle due laterali AC, AD, dee la cosa prendersi in questo senso, che prolungata BA, verso F, e presa AF = AB, la potenza AF faccia equilibrio colle due AC, AD, essendo necessario, che tra le potenze laterali, e la potenza diagonale vi sia qualche contrarietà. Dunque sembra doversi piuttosto F, o altro punto della retta AF, riguardar come centro della potenza diagonale, non già il punto B, che trovasi dall' altra parte del punto A collocato. Ma se si farà avvertenza, che le potenze riguardar si possono, e come traenti, e come impellenti, si vedrà subito, che la cosa riducesi sempre alla stessa, o che si consideri F, o che si consideri B come centro della potenza diagonale; cioè considerandosi le potenze laterali come traenti, se il centro della potenza diagonale vuol concepirsi collocato in F, deve la potenza stessa considerarsi come traente, altrimenti cospirerebbe colle due laterali AC, AD, colle quali perciò non potrebbe far' equilibrio; ma se vuol considerarsi B come centro della po-

potenza diagonale, questa considerar si deve come impellente, altrimenti sarebbe colle laterali AC, AD cospirante, nè perciò potrebbe giammai con esse equilibrarsi.

LXII.

Dal principio dell' equivalenza, di cui abbiam finora parlato, son derivati due altri principj, che prendono il nome di composizione, e risoluzion delle forze. Il principio della composizione si è, che *qualora si hanno due forze espresse per i lati di un parallelogrammo, ad esse può sicuramente sostituirsi quella, che per la diagonale del parallelogrammo stesso s' esprime;* il principio poi della risoluzione è il teorema inverso, cioè, che *ad una forza espressa per una data linea se ne possono sostituir due, che espresse siano per i lati di un parallelogrammo, di cui la data linea sia diagonale.*

LXIII.

Varie utilissime avvertenze verrebbon da farsi non meno intorno alla maniera di adoperare il principio dell' equivalenza, della quale ha con somma dottrina trattato il P. Riccati ne' suoi opuscoli (*a*), che intorno al metodo della composizione, e risoluzion delle forze,

(a) *Tom.* 1. *Opus. Opus.* 1.

ze, del quale ancora elegantemente ha parlato l' istesso P. Riccati nel dialogo delle forze vive (*a*). Ma non è il nostro scopo di trattare, e mettere in chiaro tutta la teoria dell' equivalenza delle potenze, perciò dopo aver brevemente fatte alcune annotazioni darem fine a questo capitolo.

LXIV.

E' dunque in primo luogo da notarsi esser' il principio dell' equivalenza un principio sommamente fecondo. Con esso si è cominciata, con esso si è portata innanzi, e con esso si è perfezionata la meccanica, cosicchè non v' è principio, a cui la meccanica debba tanto, quanto al principio dell' equivalenza, che è stato fonte perenne delle più nobili, ed eccellenti scoperte, e delle più importanti verità. Il Galileo, il Cartesio, e tutti gli altri più sublimi meccanici, che dopo di essi son fioriti, di questo principio han fatto uso per risolvere le più sublimi questioni. Sopra di questo principio, come sopra saldo fondamento il Varignon ha edificata l' intera sua meccanica, in cui ha trattati gli equilibrj, non meno de' solidi, che de' fluidi, ed ha risoluti i più difficili problemi col solo principio dell' equivalenza. Le curve d' equilibrio, come sono le catenarie, le velarie, ed altre simili, delle

(a) Giornata 7. ed 8.

delle quali han trattato l' Ermanno, i Bernoulli, l' Euler, ed altri insigni matematici, non si sono con altro principio esaminate, che con quello dell' equivalenza. Onde manifestamente apparisce, che il principio dell' equivalenza non solamente è fornito della somma certezza per essere stato già dimostrato colle sole metafisiche, e geometriche verità, ma è anche sommamente secondo, ed esteso.

LXV.

Si noti in secondo luogo, che facendosi comparazione tra il principio dell' equivalenza, e quello delle azioni, debbon amendue stimarsi egualmente secondi, ed estesi, con questa sola differenza, che in alcuni casi con maggior facilità, ed eleganza si adopra il principio dell' equivalenza, in altri casi poi riesce più comodo, ed opportuno l' adoperare il principio delle azioni.

LXVI.

E' finalmente con attenzion da notarsi, che il metodo della composizione, e risoluzion delle forze non è il vero metodo della natura, ma è un metodo, che si han formato i Geometri per la più facile, e spedita soluzione de' loro problemi. La natura nelle sue operazioni non va' giammai a comporre, e risolvere le forze, ma adopra sempre azioni, le quali

quali essendo uguali, e contrarie, fan sì, che si producano gli equilibrj. Sicchè il vero metodo della natura è il principio delle azioni; E a retto intendere il principio dell' equivalenza è il principio stesso delle azioni applicato ad alcune proprietà del parallelogrammo, e 'l metodo della composizione, e risoluzione delle forze è un metodo utile per la facile, e spedita soluzion de' problemi, ma esistente soltanto nella mente de' Geometri.

CAPITOLO VI.

Delle leggi d'equilibrio in tutte le macchine semplici dimostrate col principio delle azioni.

LXVII.

LE macchine sono alcuni strumenti, de' quali si valgono gli uomini ne' loro bisogni, o per elevare, e muovere grossissimi pesi, o per vincere grandissime resistenze con picciolissima forza. Le macchine semplici generalmente son sei, cioè la *Leva*, *l'Asse nella ruota*, *la Carrucola*, il *Piano inclinato*, il *Cuneo*, e la *Vite*. A queste alcuni aggiungono la *Bilancia*, e la *Statera Romana*, e il Varignon v' ha aggiunta ancora un' altra macchina da esso medesimo detta *Funicularia*.
Ma

Mà perchè la Bilancia, e la Statera non differiscono in menoma parte dalla Leva, e la macchina Funicularia del Varignon è l' istessa, che l' asse nella ruota, perciò dovendo noi stabilire le leggi dell' equilibrio nelle macchine semplici, non considereremo, che le sole sei di sopra numerate.

LXVIII.

Da due, o più macchine semplici si costruiscono poi le macchine composte, la natura, e l' indole delle quali può agevolmente capirsi, stabilite che siano le leggi nelle macchine semplici, le quali particolarmente per noi di considerar si propone nel presente capitolo.

LXIX.

La Leva non è altro, che una verga rigida vertibile intorno a un punto, che suol chiamarsi *fulcro*, e noi chiameremo ancora *punto d' appoggio*, destinata a sostenere de' grandissimi pesi, oppure ad elevarli a picciola altezza. Considereremo la leva come una linea matematica perfettamente rigida, e spogliata di ogni gravità, perchè la natura di essa possa più comodamente esaminarsi.

LXX.

Delle potenze, che costituiscono l' equilibrio nella Leva, una suol essere la forza dell' uomo, l'altra poi è il peso da sostenersi. Quindi nella leva tre cose vengono da distinguersi, il peso da sostenersi, la potenza, che lo sostiene, e 'l punto d' appoggio, dalla varia disposizione delle quali nascono le diverse specie di Leve. Poichè se il punto d' appoggio sarà collocato fra il peso da sostenersi, e la potenza, che lo sostiene, la Leva si dirà di prima specie; se poi il peso da sostenersi sarà collocato tra la potenza, che lo sostiene, e 'l punto d' appoggio, la leva si dirà di seconda specie, se finalmente la potenza, che sostiene il peso collocata si trova tra il punto d' appoggio, e 'l peso stesso, la leva sarà di terza specie. E poichè il peso, la potenza, che lo sostiene, e il punto d' appoggio non possono ricevere altra disposizione dalle tre già dette diversa, ne segue, che le specie di leve a tre debbonsi generalmente ridurre.

LXXI.

In qualsivoglia specie di leva si ha l' equilibrio tra il peso, e la potenza, che il peso stesso sostiene, qualora, e questa, e quello son tra di loro nella ragion reciproca delle distanze dal fulcro.

Sia una leva qualunque, o di prima specie (*Fig.* 9.) come ACB, o di seconda specie (*Fig.* 10.), come CAB, o finalmente di terza specie (*Fig.* 11.), come CBA, collolocata, o in sito orizzontale, o in qualsivoglia altra posizione. Il fulcro, o punto d'appoggio, sia C, il peso P, che penda dal punto A per la verticale direzione AP, e la potenza X, che il peso stesso dee sostenere, sia applicata al punto B per una direzione qualunque BX. Dal fulcro C sulle direzioni, e della potenza, e del peso, prolungate, se fa di bisogno, si menino le perpendicolari CN, CM. Dico, che s'avrà l'equilibrio, qualora la potenza X starà al peso P come CM: CN.

DIMOSTRAZIONE.

Concepiscasi nascer nella Leva un moto infinitesimo, cosicchè i punti A, e B descrivendo gli archetti infinitamente piccioli Aa, Bb, vengano in a, b. Se riguarderemo X, e P come centri della potenza X, e del peso P, tirate le rette Xb, Pa, e coi centri X, P, e cogl' intervalli XB, Pa descritti gli archetti BG, aF, che taglino le rette Xb, PA in G, ed F, egli è manifesto, che sarà bG lo spazietto di recesso dal centro della potenza X, ed AF lo spazietto d'accesso al centro del peso P. Onde pel principio delle azioni s'avrà nella leva l'equilibrio qualora il peso starà alla potenza come bG : AF, oppure in ragion composta di $\begin{cases} bG : Bb \\ Bb : Aa \\ Aa : AF \end{cases}$. Ora

 es-

essendo per la Geometria degl' infinitesimi retto tanto l' angolo C B *b*, quanto l' angolo X B G, saranno questi uguali tra di loro, e perciò togliendo di mezzo l' angolo comune E B G, quei, che restano C B N, G B *b* saranno anche uguali; ma sono uguali altresì gli angoli C N *b*, B G *b*, perchè retti. Dunque i triangoli C N B, B G *b*, avendo due angoli uguali a due ciascuno, a ciascuno, saranno simili tra di loro. In oltre i due angoli C A M, C A P presi insieme sono uguali a due retti; se dunque si torrà di mezzo l' angolo retto CA*a*, resteranno i due CAM, F A *a* presi insieme uguali a un retto. Ma nel triangolo A F *a*, che può riguardarsi come rettilineo, essendo l' angolo A F *a* retto, i due F A *a*, A *a* F presi insieme sono anche uguali ad un retto. Dunque i due angoli FA*a*, A*a*F presi insieme sono uguali alli due CAM, PA*a* anche presi insieme; togliendo perciò di mezzo l'angolo comune F A *a*, resterà l'angolo C A M uguale all' angolo A *a* F. Dunque i triangoli C A M, A *a* F, essendo uguali anche gli angoli C M A, A F *a*, perchè retti, sono simili tra di loro; come simili altresì tra loro sono i settori C B *b*, C A *a*. Quindi valgono le seguenti analogie *b* G: B *b* :: CN: CB.

B*b*: A*a* :: CB: CA

A*a*: AF:: CA: CM

Ma si è dimostrato, che allora s' ha l' equilibrio quando il peso P sta alla potenza X in in ragion compoſta di $\left\{\begin{array}{l} bG : Bb \\ Bb : Aa \\ Aa : AF \end{array}\right.$; ſoſtituendo dunque in luogo di queſte ragioni le loro ſimili, allora parimenti s' avrà l' equilibrio, quando il peſo P ſtarà alla potenza X in ragion compoſta di $\left\{\begin{array}{l} CN : CB \\ CB : CA \\ CA : CM \end{array}\right.$, cioè come CN : CM. Che è quel, che biſognava dimoſtrare.

LXXII.

Prima di paſſare all' altre macchine è neceſſario in queſto luogo parlar brevemente del *centro d' equilibrio*, o, come ſuol anche dirſi, *centro di gravità*. Archimede, Pappo, Stevino, Valliſio, e quaſi tutti coloro, che han trattato dell' equilibrio de' peſi, le dicui direzioni ſi prendono per parallele tra loro, han ſuppoſto eſſervi in ciaſcun corpo grave quel punto, che chiamaſi centro di gravità, o d' equilibrio. Queſto punto deve eſſer dotato di due proprietà ; la prima richiede, che ſoſpendendoſi il corpo da quel punto, debba ſtar' in equilibrio ; la ſeconda vuole, che in quel punto poſſa concepirſi raccolta tutta la gravità delle parti componenti il corpo. Ma che vi ſia queſto punto dotato delle due già dette proprietà, e che queſto punto sia coſtante, e fiſſo, coſicchè mutata comunque la posizione del corpo, esso rispetto al corpo non si muti in modo alcuno, non è così certo, ed evidente, che non abbia bisogno di dimostrazione. Intorno a ciò può leggersi il P. Riccati (*a*), e il P. Boscovik (*b*); il primo de' quali dimostra aversi il centro d'equilibrio non solamente nell' ipotesi della gravità costante, ma nell' ipotesi ancora della gravità variabile secondo qualunque legge, purchè le direzioni delle potenze sian tra loro parallele; ma se le direzioni delle potenze non son parallele tra loro, ma tendono a un qualche punto, dimostra mutarsi il centro d' equilibrio secondo la varia posizione de' corpi, nè potersi in questo punto concepir raccolta tutta la loro gravità, eccetuata soltanto l' ipotesi, che la gravità cresca secondo la ragione delle distanze dal centro; nella qual' ipotesi fa egli vedere, che tutte le cose succedono della stessa maniera, che nell'ipotesi delle potenze paralle, anzi che il centro d'equilibrio è affatto l' istesso.

LXXIII.

Alla verga (*Fig. 7.*) rigida A B sian applicate due potenze AD, BE, alle quali debbasi

(a) *Tom. 1. Opusc. Opusc. 1., & Tom. 2. part. 3. Accad. Bononiensis.*

(b) *Dissert. de centro gravitatis, & de centro magnitudinis, atque in Theor. philos. naturalis.*

basi ritrovare l'equivalente. Le direzioni AD, BE si prolunghino fin' a tanto, che s'incontrino nel punto F, e in questo punto si trasferiscano le potenze, prendendo nelle loro rispettive direzioni FH = AD, ed FG = BE; poichè, come si è avvertito di sopra nel §. 56., niente importa per l' equilibrio, che le potenze stiano ne' luoghi AD, BE, o ne' luoghi FH, FG. Si facci ora il parallelogrammo FGIH, e si tiri la diagonale IF, la quale, come è noto pel principio dell' equivalenza, rappresenterà la quantità, e la direzione della potenza equivalente. Questa diagonale si prolunghi fin' a tanto che incontri la verga AB in C. E' manifesto, che la potenza IF trasferita in CP, ed applicata alla verga in C equivalerà alle due AD, BE.

LXXIV.

Se dal punto C si meneranno le rette CM, CN perpendicolarmente sulle direzioni delle potenze AD, BE, saranno le potenze AD, BE in ragion reciproca delle perpendicolari CM : CN. Imperocchè sta FH : FG :: Sen. GFI : Sen. HFI :: Sen. CFB : Sen. CFA. Ma è FH = AD, FG = BE. Dunque è ancora AD : BE :: Sen. CFB : Sen. CFA. E' in oltre Sen. CFB : Sen. CFA :: CN. CM. Dunque sarà finalmente AD : BE :: CN : CM. Quindi se la verga A B si sospenderà dal punto C, le potenze A D, B E staranno in equilibrio.

LXXV.

Se le direzioni delle potenze applicate alla verga A B fossero parallele tra loro, andrebbero ad incontrarsi in un punto infinitamente distante; e perciò in tal caso l' equivalente I F sarà parallela alle potenze A D, B E, e uguale alla loro somma, se le potenze A D, B E sono amendue dirette per la stessa parte, oppure uguale alla loro differenza, se son dirette per parti contrarie. Nel primo caso, cioè quando le potenze A D, B E son dirette per la stessa parte, il punto C cade fra i punti A, e B, nell' altro caso poi, cioè quando le potenze A D, B E son dirette per parti contrarie, il punto C cade fuori de' punti B, ed A, or all' una, or all' altra parte secondo le varie circostanze.

LXXVI.

Dopo tutto ciò non può non esser manifestissimo, che due potenze parallele hanno il centro d' equilibrio, cioè un punto intorno a cui si equilibrano tra loro, e in cui possono amendue concepirsi raccolte; poichè col concepir raccolte nel punto C amendue le potenze parallele applicate alla verga A B, non si fa altro, come è chiaro, che alle due potentenze parallele sostituire l' equivalente uguale alla loro somma.

LXXVII.

Quel che si è detto di due potenze parallele applicate a due punti d' una verga rigida, dicasi ancora di due pesi; poichè le direzioni de' pesi possono senza dubbio prendersi per parallele. Sicchè (*Fig.* 12.) se da' punti A, B della verga AB penderanno due pesi P, R, questi avranno certamente nella verga AB un punto intorno a cui s' equilibrano, e in cui può concepirsi raccolta tutta la loro gravità. Che poi questo punto sia fisso, e costante, in qualunque maniera si sospendino i pesi, purchè non mutino la rispettiva posizione tra loro, può dimostrarsi in tal maniera: sia C un punto, che divida la verga AB in ragion reciproca de' pesi P, R. Sarà senza dubbio C il centro d'equilibrio. Perlocchè starà P : R : : CB : CA. Si muova AB, e dal sito orizzontale passi in qualunque altro sito *ab*. Poichè le direzioni de' pesi son parallele tra loro, i triangoli DC*a*, EC*b* saranno simili, e perciò C*b* : C*a* : : CE : CD, oppure CB : CA : : CE : CD. Ma è P : R : : CB : CA. Dunque sarà ancora P : R : : CE : CD; cioè i pesi P, R in ragion reciproca delle distanze dal punto C, intorno a cui perciò i pesi stessi staranno in equilibrio. Similmente in qualunque altro sito si costituirà la verga AB, AB, purchè i pesi ſtiano ſempre alla verga ſteſſa applicati ne' punti A, e B, si dimoſtrerà l'equilibrio intorno al punto C. Quel, che si è dimoſtrato di due pesi ſoli, può dimoſtrarsi ancora di tre, quattro, anzi d'infiniti pesi applicati o a un corpo, o a una ſuperficie, o a una linea, e ciò colla ſeguente progreſſione.

LXXVIII.

Siano più pesi (*Fig.* 13.) A, B, D, ec. applicati a qualsivoglia corpo rigido; dal centro di gravità del peſo A a quello del peſo B si tiri la retta AB, che si divida in C in ragion reciproca de' pesi A, B; ſarà C il centro comune di gravità de' peſi A, B. La gravità dunque de' peſi A, B s'intenda tutta raccolta nel punto C, e dal punto C al centro di gravità del peſo D ſi tiri la retta CD, che ſi divida in E in ragion reciproca di A + B : D; è manifeſto, che i peſi A, B, D ſtanno in equilibrio intorno al punto E, e che nel punto ſteſſo E può concepirſi raccolta tutta la di loro gravità. Onde potendoſi queſta ſorta di raziocinio eſtendere a qualſivoglia numero di peſi, anche infinito, è baſtantemente chiaro, che in tal maniera i peſi, di qualſivoglia numero eſſi ſiano, poſſono ſempre ridurſi a due, e perciò quel, che ſi è detto nel §. precedente, cioè, che i peſi, hanno il centro di gravità coſtante, vale non ſolo quando do i pesi son due, ma anche quando sono di qualunque altro numero.

LXXIX.

Potrebbe per caso sospettarsi se il centro di gravità di un corpo, o di un sistema di corpi, sia un solo; e il sospetto può nascer da ciò, che il centro di gravità de' tre pesi A, B, D può determinarsi ancora ritrovando prima il centro di gravità G de' corpi D, B, indi supposto, che la gravità di amendue questi pesi sia tutta raccolta nel punto G, ritrovando quello della somma de' due pesi D, B, e del peso A. Onde fin' a tanto, che non si dimostrerà, che il centro di gravità de' tre corpi A, B, D, è sempre quello stesso punto E, in qualunque maniera esso voglia determinarsi, resterà sempre in dubbio se il centro di gravità de' tre corpi già detti sia un solo. Se i pesi, de' quali vuol determinarsi il centro di gravità, si moltiplicano, si moltiplicano ancora i metodi per fare una tal determinazione; ma che tutti questi metodi ci menino a determinar sempre l' istesso punto, non può per certo assumersi senza dimostrazione. Questa dimostrazione può leggersi appresso il P. Boscovik ne' luoghi di sopra citati. Del resto anche con una meccanica ragione può dimostrarsi impossibile, che in un medesimo corpo, o in un medesimo sistema di corpi vi siano più centri di gravità; poichè se un corpo

sospe-

ſoſpeſo per un punto ſta in eqnilibrio, non è poſſibile, che ſtia in equilibrio anche quando è ſoſpeſo per un altro punto qualunque.

LXXX.

Dopo aver dimoſtrato, che i corpi gravi, e generalmente tutte le potenze parallele hanno un centro d' equilibrio coſtante, uopo è indicar brevemente il metodo, con cui il detto centro può determinarſi. Non vi è chi non vede la coſa eſſer affatto immune di difficoltà, ſe i peſi, de' quali vuol determinarſi il centro di gravità, ſono di numero finito; poichè in tal caſo può il centro già detto detto determinarſi con quel progreſſo ſteſſo, con cui nel §. 78. ſi è dimoſtrato coſtante. Tutta la difficoltà conſiſte nel determinar il centro di gravità nel caſo, che i peſi ſiano di numero infinito, come ſe a ciaſcun punto o di una linea, o di una ſuperficie, o di un corpo foſſe attaccato un peſo. Due metodi intorno a ciò ſi trovano adoperati dagli autori; il primo è ſintetico, e di eſſo ſi ſon ſerviti Varignon (*a*), Ermanno (*b*), ed altri molti; l' altro è analitico, ed è d' invenzione di Gio: Battiſta Clairaut (*c*), dottiſſimo uomo, e verſatiſſimo nelle coſe geometriche. Eſporremo

(a) Accad. Reg. Pariſ. 1714.
(b) Phoronomia.
(c) Accad. Reg. Pariſ. 1731.

remo l'uno, e l'altro colla maggior possibile brevità.

LXXXI.

Siano (*Fig.* 14.) H, M, R, ec. pesi di qualunque numero applicati a qualsivoglia corpo rigido, le direzioni de' quali sono parallele tra loro, perchè perpendicolari all'orizzonte. Dico, che tirato un piano qualunque QS, e menate sopra di esso dalli punti H, M, R, ec. le perpendicolari HQ, MF, RS, e dal punto L, ch'è il centro comune di gravità, la perpendicolare LD, vaglia sempre la seguente equazione $H . HQ + M . MF + R . RS$, ec. $= \overline{H + M + R + \text{ec.}}\, LD$.

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo prima due pesi solamente H, ed M. Si tiri la retta HM, e si divida in N in ragion reciproca de' pesi H, M. Dal centro di gravità N si meni sul piano QS la perpendicolare NP, e dalli punti H, N si tirino HG, NK al piano stesso parallele. Saranno i triangoli HNG, NMK simili tra di loro, e perciò $NM : NH :: MK : NG$. Ma è $H : M :: NM : NH$. Dunque sarà ancora $H ; M :: MK : NG$, o sia $H : M :: FM - NP : NP - HQ$, e moltiplicati gli estremi, e i medj, sarà $H . NP - H . HQ = M . MF - M . NP$; per lo che aggiugnendo all'uno, e all'altro membro dell'equaziozione prima $H.HQ$, indi $M.NP$, avremo $H.NP + M.NP = M.MF + H.HQ$; o sia $\overline{H+M}.NP = M.MF + H.HQ$.

La gravità de' pesi H, M si concepisca raccolta tutta nel centro N. Si tiri NR, e si divida in L in ragion reciproca di $H + M : R$, e dal punto L sul piano QS si meni la perpendicolare LD; in oltre dalli punti R, L si tirino le rette RX, LE parallele al piano stesso. Saranno i triangoli NLE, LRX simili tra loro, e perciò $LR : LN :: LX : NE$, e quindi $H + M : R :: LX : NE$, o sia $H + M : R :: LD - RS : NP - LD$. Perlochè moltiplicati gli estremi, e i medj, sarà $\overline{H+M}.NP - \overline{H+M}.LD = R.LD - R.RS$, o sia $\overline{H+M}.NP + R.RS = R.LD + \overline{H+M}.LD$. Ma si è già dimostrato $\overline{H+M}.NP = H.HQ + M.MF$. Dunque $H.HQ + M.MF + R.RS = \overline{H+M+R}.LD$. E andando innanzi coll' istesso progresso sarà sempre, come è chiaro $H.HQ + M.MF + R.RS + \text{ec.} = \overline{H+M+R+\text{ec.}}.LD$. Che è quel, che bisognava dimostrare.

LXXXII.

Non è molto difficile a comprendersi, che una tal dimostrazione vale ancora quando le rette AQ, MF, RS, ec. non son perpendicolari al piano QS, purchè siano parallele

trà

tra loro. Lo che è ben da avvertirsi, perchè spessissime volte giova per la determinazione del centro di gravità.

LXXXIII.

E' da avvertirsi similmente, che se alcuni de' pesi fossero situati dall' altra parte del piano QS, le loro distanze dal piano stesso darebbero prendersi come negative. In oltre se la distanza del centro di gravità sarà positiva, sarà il centro stesso situato dalla parte delle distanze positive; sarà poi situato dalla parte delle distanze negative, se la distanza di esso dal piano stesso sarà negativa. Perlochè se il piano QS passerà pel centro di gravità, la distanza di questo dal piano stesso sarà nulla, cioè $= o$, e perciò è necessario, che in tal caso la somma de' prodotti positivi di ciascun peso moltiplicato per la sua distanza dal piano QS sia uguale alla somma de' simili prodotti negativi.

LXXXIV.

Perchè apparisca l' uso del teorema dimostrato ciascun peso si metta $= m$, la distanza di esso dal piano dato $= n$; onde la somma de' prodotti di ciascun peso moltiplicato per la sua distanza dal piano dato sia $= \int mn$, e la distanza del comune centro di gravità dal piano stesso si metta $= u$; sarà pel teorema dimostrastrato $\int m\,u = u \cdot \int m$, e perciò $u = \frac{\int m\,u}{\int m}$, che è la formola generale ricercata per la determinazione del centro di gravità.

LXXXV.

Dovendosi ora esporre il metodo di Clairaut seguiteremo la maniera, che ha tenuta in esporlo il P. Riccati per ridurlo a maggior simplicità, e compendio. Ad una linea, o ad una superficie, o ad un corpo rigido qualunque siano applicate quante potenze parallele si vogliano, le quali siano rappresentate (*Fig.* 15.) per A B C, e il centro d' equilibrio di esse sia H; altre simili potenze siano rappresentate per C B $b\,c$, e il di loro centro d' equilibrio costante sia G; di tutte poi il centro comune d' equilibrio sia h. I tre punti H, h, G si troverranno in una medesima linea retta H G. Dalli punti già detti sopra qualsivoglia data linea retta si menino le perpendicolari H I, $h\,i$, G L. E' manifesto essere H h : h G : : C B $b\,c$: A B C. Ma è H h : h G : : I i : i L. Dunque ancora I i : i L : : C B $b\,c$: A B C.

LXXXVI.

Posto ciò, i pesi, o le potenze parallele, sian designate, come sopra per A B C, e sia A B un asse qualunque del corpo, o della superficie, o della linea, a cui le potenze già dette

dette sono applicate. Questo asse intendasi accresciuto di un infinitesimo elemento B b, a cui corrispondano le potenze designate per C B b c. Il centro d' equilibrio delle potenze A C B sia H, quello delle potenze C B b c sia G, e il centro comune di tutte sia h. Da questi punti H, h, G si menino sull' asse A C le perpendicolari H I, h i, G L. Le potenze espresse per A B C si mettano $= \int m$; le potenze espresse per C B b c, le quali non sono altro, che il differenziale delle prime, si mettano $= m$, e sia in oltre A B $= n$, A I $= u$; onde sarà I $i = du$, e B I $= n - u$. Per quel, che si è detto nel §. precedente è A B C: C B b c : : L i = B I : I i, cioè $\int m : m :: n - u : du$, e perciò $du . \int m = mn - um$, o sia $du . \int m + um = mn$; onde integrando sarà $u \int m = \int mn$, e quindi $u = \frac{\int mn}{\int m}$, che è quella stessa formola, che si è sinteticamente dimostrata, ed esposta nel §. 84.

LXXXVII.

E quì ancora è d' avvertirsi, che per una tal dimostrazione non è necessario, che le rette H I, h i, G L, C B, c b siano perpendicolari alla retta A B, ma basta solo, che siano parallele tra loro.

LXXXVIII.

Dopo tutto ciò non è difficile ricavar il metodo generale, con cui può determinarsi il luogo preciso del centro di gravità di qualunque corpo; poichè per far ciò non altro richiedesi, che determinar la distanza del centro stesso da' tre piani dati di posizione, cioè da un piano orizzontale, e da due verticali; lo che si otterrà certamente coll' ajuto della formola $x = \frac{\int m n}{\int m}$ dimostrata già in due maniere diverse, cioè colla sintesi, e coll'analisi. Se sarà noto, che il centro di gravità, che si cerca, è collocato in un dato piano, allora per ritrovarlo, basta determinare la distanza di esso da due piani solamente; lo che richiede due operazioni. E se sarà noto in oltre, che il centro di gravità ricercato si ritrova in una linea retta, per la determinazione del luogo preciso di esso basta determinar la sua distanza da un piano solo; lo che importa una sola operazione.

LXXXIX.

E con tal metodo può senza dubbio determinarsi il centro di gravità in qualunque linea, in qualunque superficie, e in qualunque solido; lo che non può certamente ottenersi, che per mezzo del calcolo integrale. Indipen-

den-

dentemente però da questo metodo Archimede, Luca Valerio, Guldino, ed altri con alcuni artificj geometrici han determinato il centro di gravità in moltissime linee, in moltissime superficie, ed in moltissimi solidi, come può anche vedersi appresso il P. De Chales ne' libri 5, 6, 7, della Statica, i quali si raggirano tutti intorno a questa dottrina.

XC.

Trattandosi del centro di gravità non è da tacersi la celebre regola del Guldino. Se una quantità qualunque si farà rotare intorno a un centro, o intorno a un asse, per la regola del Guldino la quantità rotante moltiplicata per la via, che descrive il suo centro di gravità, sarà uguale alla quantità, che si genera nella rotazione. Così a cagion d' esempio una linea retta, che gira intorno ad una sua estremità, genera, come è noto, coll' altra estremità un cerchio; per determinar l' area di questo cerchio, secondo la regola del Guldino, bisogna moltiplicare la linea rotante per la via del suo centro di gravità; essendo dunque il centro di gravità della linea quel punto, che la divide in due parti uguali, la via da esso descritta nella rotazione della linea intorno ad una sua estremità sarà uguale alla metà della periferia del cerchio descritto dall' altra estremità della linea stessa. Dunque l' area ricercata sarà uguale ad un rettangolo, che ha per base la metà della periferia, e per altezza il raggio del cerchio; lo che è noto ancora per altri principj. Intorno a questa regola è degno d' esser letto il secondo opuscolo del primo tomo degli opuscoli del P. Riccati, nel quale si vede dimostrato quali precauzioni bisogna adoperare, e in quali limiti deve la detta regola contenersi, perchè non ne meni in errori; poichè se la linea, o la superficie rotante, prolungata ancora, se bigna, non passa per lo centro, o per l' asse di rotazione, la regola del Guldino, se non si corrigge nella maniera, che mostra il P. Riccati, condurrà senza dubbio in qualche paralogismo. La regola del Guldino poi oltre gli usi, che ha in meccanica, è utilissima ancora per rettificar le curve, quadrar le aree, compianar le superficie, e cubar i solidi, legganfi perciò le istituzioni Analitiche del P. Riccati, e del P. Saladini, date non ha molto alla luce, e stampate in Bologna.

XCI.

Lasciando ora il centro di gravità, passiamo alla seconda macchina semplice, che abbiam detto chiamarsi asse nella ruota. Nell' elevar i pesi per mezzo della leva questo gravissimo incomodo incontrasi, che, elevato il peso a picciola altezza, la leva si rende subito inutile, e per elevarlo ad altezza maggiore richiedesi una nuova leva, e un nuovo punto to d'appoggio. A un tal incomodo penſarono i meccanici riparare coll' unire inſieme un numero infinito di leve, in maniera diſpoſte, che l' una ſuccedendo all' altra continuamente, poteſſero elevar i peſi a qualſivoglia altezza, e così nacque quella macchina, che chiamaſi aſſe nella ruota, e che componeſi in tal maniera. Col ſemidiametro (*Fig.16.*) C A ſi formi la ruota A B, nel di cui mezzo s'inſeriſca, e s'affigga un cilindro, che abbia il raggio C D minore del raggio C A; per lo centro comune del cilindro, e della ruota ſi facci paſſar un aſſe di ferro, intorno a cui poſſa la ruota coll' anneſſo cilindro liberamente aggirarſi; queſt' aſſe finalmente colle ſue eſtremità ſi collochi immobilmente ſopra fermi ſoſtegni, e così s' avrà coſtruito l' aſſe nella ruota, cioè una macchina utiliſſima per traſportar peſi per qualunque tratto, o per elevarli a qualſivoglia altezza. Poichè ſe il peſo da muoverſi ſi legherà all' eſtremità di una fune, l' altra eſtremità della quale ſia al cilindro della macchina fortemente attaccata, ed indi per mezzo di una potenza, applicata alla ſuperficie curva della ruota, ſi farà girar la macchina intorno al ſuo aſſe, la fune ravvolgendoſi al cilindro obbligherà il peſo ad avvicinarſi ad eſſo continuamente. Onde ſe la macchina ſi collocherà in alto coll'aſſe poſto in ſituazione orizzontale, il peſo potrà elevarſi a qualunque altezza; ſe poi la macchina ſi collocherà ſul ſuolo coll' aſſe verticale, il peso potrà orizzontalmente trasportarsi per qualsivoglia tratto di spazio.

XCII.

Nell'asse nella ruota allora si ha l'equilibrio, quando la potenza sta al peso in ragion composta del raggio del cilindro al raggio della ruota, e del seno totale al seno dell' angolo, che il raggio della ruota stessa fa colla direzione della potenza.

Sia D F G l'asse nella ruota, il peso sia P, che penda dal punto D. del cilindro D G F, ed R sia la potenza applicata ad un punto qualunque B della ruota per qualsivoglia direzione B R. Dal centro C si menino i raggi C D, C B. Dico allora in questa macchina aversi l'equilibrio tra la potenza, e il peso, quando quella sta a questo in ragion composta di C F : C B, e del seno totale al seno dell' angolo C B R.

DIMOSTRAZIONE.

Facciasi un moto infinitesimo, per lo quale il raggio CB venga in Cb, e il raggio C D in Cd. Egli è manifesto, che lo spazietto d'accesso al centro del peso P è Dd = GF. Dal punto R al punto b si menii la retta Rb, e, fatto centro in R, coll'intervallo R B descrivasi l'archetto B H, che seghi la retta Rb nel punto H. E' manifesto ancora, che

bH

bH è lo ſpazietto di receſſo dal centro della potenza R. Sicchè per averſi l' equilibrio il principio delle azioni richiede, che la potenza R ſtia al peſo P come $GF : bH$, oppure in ragion compoſta di $\begin{cases} GF : Bb \\ Bb : bH \end{cases}$. Ma per la ſomiglianza de' ſettori GCF, BCb, ſta $GF : Bb :: CF : CB$, e per la notiſſima proprietà de' triangoli $Bb : bH$ come il ſeno totale al ſeno dell' angolo HBb, che è uguale all' angolo CBR. Dunque perchè s' abbia l' equilibrio deve la potenza R ſtar al peſo P in ragion compoſta di $CF : CB$, e del ſeno totale al ſeno dell' angolo CBR. Che è quel, che biſognava dimoſtrare.

XCIII.

Se la direzione della potenza non ſegherà la ruota, ma la toccherà nel punto B, come è la direzione 2 R B, l'angolo C B 2 R facendoſi retto, la ragione del ſeno totale al ſeno dell' angolo, che il raggio della ruota fa colla direzione della potenza, ſarà ragion d' egualianza; onde in tal caſo per averſi l' equilibrio baſta ſoltanto, che la potenza ſtia al peſo nella ſemplice ragione di $CF : CB$, cioè come il raggio del cilindro al raggio della ruota. Le quali coſe combinano affatto con quel, che dell'aſſe nella ruota da altri con diverſi principj ſi dimoſtra.

XCIV.

Quindi è manifesto, che per ritrarre da questa macchina il massimo vantaggio, bisogna applicar ad essa la potenza in maniera, che sia tangente della ruota. Poichè applicando la potenza in tal maniera alla macchina, per elevare il medesimo peso deve impiegarsi la minima forza; lo che essendo da se chiarissimo non ha bisogno di ulterior dilucidazione.

XCV.

Dopo l'asse nella ruota abbiamo tra le macchine semplici numerata ancor la carrucola, della quale perciò ora prendiamo a trattare. La carrucola altro non è, che una ruota vertibile intorno a un asse, la quale ha nella sua curva superficie un incavo capace di ricevere una fune, che intorno ad essa ravvolgesi. In due maniere può adoperarsi questa macchina, o facendo rimaner l' asse immobilmente sempre nel medesimo luogo, o facendolo muovere, e mutar luogo unitamente alla ruota, che intorno ad esso s' aggira. Nel primo caso ad una estremità della fune s' attacca il peso da elevarsi, all'altra estremità s'applica la potenza, che elevar deve il peso stesso; nell' altro caso una estremità della fune si fissa immobilmente con un chiodo, e all'altra estremità s' applica la potenza, che muover deve il

peso

peso, il quale si fa pendere dall'asse della carrucola. Quando la carrucola ha l'asse immobile, si dice *carrucola stabile*; quando poi ha l'asse, che si muove, si dice *carrucola mobile*. Dovendosi dunque nella carrucola determinar le leggi dell'equilibrio, cioè le proporzioni, che nel caso dell'equilibrio passar debbono tra la potenza, e il peso, bisogna determinarle tanto riguardo alla carrucola stabile, quanto riguardo alla carrucola mobile.

XCVI.

Nella carrucola stabile perchè s'abbia l'equilibrio richiedesi tra la potenza, e il peso la ragion d'eguaglianza.

Sia (*Fig.* 17.) A B una carrucola stabile, che abbia intorno a se la fune E A B D, alla di cui estremità D sia attaccato il peso P, all'altra estremità E sia applicata la potenza, che il peso stesso sostiene. Dico, che per aversi l'equilibrio in questa macchina bisogna, che la potenza applicata in E sia al peso P affatto uguale.

DIMOSTRAZIONE.

Si facci un moto infinitesimo secondo la direzione della potenza applicata in E, cosichè l'estremità E della fune giunga in G, mentre l'altra estremità D giugnerà in H. Egli è troppo manifesto, che è E G lo spazietto d'ac-

acceſſo al centro della potenza, e DH lo ſpazietto di receſſo dal centro del peſo. Sicchè acciò s' abbia l' equilibrio tra la potenza, e il peſo, convien, che quella ſtia a queſto come DH : EG. Ma è DH = EG; poichè ſupponendoſi, che la fune non patiſca alcuna diſtrazione, ma che reſti ſempre della ſteſſa lunghezza, ſarà la lunghezza DAE uguale alla lunghezza HAG; onde, tolta di mezzo la porzione comune HAE, reſteranno DH, EG uguali tra di loro. Dunque nella carrucola ſtabile perchè s' abbia l' equilibrio, richiedeſi, che la potenza ſia uguale al peſo. Che è quel, che biſognava dimoſtrare.

XCVII.

Niente toglie alla verità di queſta propoſizione l' eſperienza, la quale ci fa vedere elevarſi un peſo, per eſempio un vaſe pieno di acqua eſtrarſi da un pozzo più facilmente per mezzo di una carrucola ſtabile, come ſuol farſi comunemente, che ſe ſi voleſſe tirar all' insù direttamente ſenza di eſſa; poichè elevandoſi il peſo per mezzo della carrucola ſtabile, benchè debba impiegarſi una forza alquanto maggiore del peſo ſteſſo, eſercitando però l' uomo la ſua forza all' ingiù, vien ajutato dalla gravità del petto, e delle braccia. Ma volendoſi elevar il peſo ſenza l' ajuto di queſta macchina, l' uomo deve eſercitar la ſua forza all' insù, per lo che se li oppone la gravità

vità del petto, e delle braccia; onde deve egli impiegare una forza musculare uguale alla somma del peso da elevarsi, e della gravità delle proprie braccia, e del proprio petto.

XCVIII.

Quindi è manifesto, che quantunque per mezzo della carrucola stabile non si ritragga alcun vantaggio per riguardo alle forze, si ritrae però vantaggio sommo per riguardo alle direzioni delle forze stesse. Poichè possiamo per mezzo delle carrucole stabili mutar le direzioni delle forze a piacimento; lo che non dee riputarsi di poca utilità.

XCIX.

Quando si tratta solamente dell' equilibrio della carrucola, che è il nostro unico scopo, le carrucole stabili, o grandi, o picciole che che siano, sono tutte egualmente utili; ma quando si tratta poi di elevare, e muover pesi per mezzo di questa macchina, allora convien dire esser le carrucole più utili, quanto più grande è la ruota rispetto all'asse, intorno a cui si aggira. Poichè nel moto della carrucola tra la ruota, e l'asse nasce un certo fregamento, la di cui resistenza quanto più è grande il raggio della ruota in riguardo a quello dell'asse, più facilmente si supera. Benchè la carrucola essendo molto grande può riuscir incomoda

per

per un'altra cagione; imperocchè quanto più è grande la ruota, tanto maggior è il contatto, e per conseguente la resistenza della coesione, e del fregamento tra la ruota, e la fune; in oltre quanto più è grande la ruota, tanto maggior quantità di materia contiene; onde per muoverla richiedesi maggior forza. Sicchè in costruir la carrucola bisogna contenersi fra certi limiti, da stabilirsi secondo le varie circostanze. Ma non dobbiam noi quì trattenerci a mostrar la maniera di usar le macchine, della quale ci riserbiamo ad altro più opportuno tempo trattare. Lasciando perciò la carrucola stabile, prendiamo a considerare la carrucola mobile.

C.

Nella carrucola mobile, posto, che le funi siano parallele tra loro, allora si ha l'equilibrio, quando la potenza uguaglia la metà del peso.

Sia (*Fig.* 18.) A una carrucola mobile, P sia il peso, che pende dal centro di essa, e un'estremità della fune C F G D sia attaccata ad un chiodo immobile in C, e nell'altra estremità D sia applicata la potenza, da cui per mezzo di questa macchina deve essere sostenuto il peso P. Dico, che supponendosi parallele le funi F C, G D, allora s'avrà l'equilibrio tra la potenza, e il peso, quando quella sta a questo come 1 : 2.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi nella carrucola nascer un moto infinitesimo, onde il centro della carrucola A venga in E. Sarà, come è chiaro, A E lo spazietto di recesso dal centro del peso P. Ma tirate per lo punto A, e per lo punto E le due rette orizzontale F G, M N, le quali saranno anche parallele tra di loro, egli è evidente, che per far giungnere il punto A in E, la fune deve scortarsi di tanto, quanta è la lunghezza delle due porzioni F M, N G prese insieme. Dunque lo spazietto di accesso al centro della potenza applicata in D sarà M F + N G. Sicchè per aversi l'equilibrio, il principio delle azioni richiede, che la potenza stia al peso come A E : M F + N G. Ma perchè le funi F C, G D suppongonsi parallele, A E è la metà di M F + N G. Dunque nella carrucola mobile, nel caso, che le funi sian parallele tra di loro, acciò s' abbia l'equilibrio, deve la potenza star al peso come 1 : 2; cioè deve la potenza uguagliare la metà del peso; che è quel, che bisognava dimostrare.

CI.

Ma se nella carrucola mobile le funi non saranno parallele, per aversi l'equilibrio tra la potenza, e il peso, bisogna, che questo stia a quella come il seno dell'angolo, che fanno le le funi, prolungate, se occorre, al seno della metà dell' angolo stesso.

Sia dunque una carrucola (*Fig.* 19. *e* 20.) mobile, dal cui centro P penda il peso da sostenersi dalla potenza applicata all' estremità della fune R. Le funi A F, R E non sian parallele tra di loro, ma prolungate s' intersehino formando l' angolo B. Dico, che per aversi in questo caso l' equilibrio, deve la potenza stare al peso come *sen.* $\frac{B}{2}$: *sen.* B.

DIMOSTRAZIONE.

Si facci un moto infinitesimo, per cui il punto R della fune giunga in *r*, mentre il centro della carrucola P giugne in *p*. Sarà R *r* lo spazietto di accesso al centro della potenza, e P *p* lo spazietto di recesso dal centro del peso; perciò s' avrà l' equilibrio, se la potenza starà al peso come P *p* : R *r*. Ora supponendosi, che la fune non patisca alcuna distrazione, sarà $AK + KQG + GR + Rr = AF + FO''E + ER$; e dividendo per 2 l' uno, e l' altro membro di questa equazione, sarà $QG + GR + \frac{Rr}{2} = O''E + ER$. Ma essendo l' angolo G R M infinitesimo, tirata dal punto *p* per lo punto del contatto G la retta *p* G, che prolungata incontri la fune E R in M, sarà la differenza delle due rette R G, R M

RM infinitesima del secondo ordine (*a*). Onde dall'equazione $QG + GR + \frac{Rr}{2} = O'E + ER$ tolti i termini GR, MR, la differenza fra $QG + \frac{Rr}{2}$, ed $O'E + EM$ sarà anche infinitesima d'ordine secondo. In oltre dallo stesso punto p si meni la retta pN perpendicolare ad ER. Per l'eguaglianza degli angoli BPE, BpN, sarà $O'E = QO$; onde $QO + EM$ non sarà differente da $QG + \frac{Rr}{2}$ che di una quantità infinitesima di secondo ordine; sottratta dunque e dall'una, e dall'altra la comune QG, resteranno anche colla stessa differenza le quantità $GO + EM$, $\frac{Rr}{2}$. Ma GO non differisce da MN, che di una quantità infinitesima di secondo ordine, come dalle citate proposizioni della Geometria del P. Saladini può agevolmente dedursi. Dunque la differenza fra le quantità $MN + EM$, $\frac{Rr}{2}$ cioè fra le quantità EN, $\frac{Rr}{2}$, almeno è infinitesima di secondo ordine. Ma EN, $\frac{Rr}{2}$ sono quantità infinitesime d'ordine primo. Dunque senza alcuna difficultà potranno prendersi come uguali; e perciò sarà $EN = \frac{Rr}{2}$ oppure $2EN = Rr$.

Ciò

(a) Geom. infinit. P. Saladini Prop. 9. lib. 1. & Prop. 1. lib. 2.

Ciò posto, per la simiglianza de' triangoli pNB, PEB sta $EN : Pp :: BE : BP$. Ma, tirata la retta EF, che seghi PB in X, per la simiglianza de' triangoli PEB, PXE sta $BE : BP :: EX = \frac{FE}{2} : EP$. Dunque sarà ancora $EN : Pp :: \frac{FE}{2} : EP$, e duplicando gli antecedenti, $2EN : Pp :: FE : EP$. Ma si è dimostrato, che per aversi l'equilibrio fa di mestieri, che la potenza stia al peso come $Pp : Rr$, o sia, per quel, che si è poco fa dimostrato, come $Pp : 2EN$. Sicchè per aversi l'equilibrio bisogna ancora, che la potenza stia al peso come $EP : FE$, o sia come il seno dell' angolo $PEE = \frac{B}{2}$ al seno dell' angolo FPE uguale al seno dell'angolo B. Che è quel, che bisognava dimostrare.

CII.

La proposizione dimostrata nel §.100. è una conseguenza di questa, che abbiam dimostrata nel paragrafo precedente. Poichè si è nel paragrafo precedente dimostrato, che allora si ha l'equilibrio nella carrucola mobile quando la potenza sta al peso come *sen.* $\frac{B}{2}$: *sen.* B, o sia come il raggio FP alla corda FE della carrucola stessa. Ma quando le funi son parallele tra loro, la corda FE passa per lo centro della carrucola, e perciò diventa diame-

tro

tro. Dunque quando le funi sono tra loro parallele per aversi l'equilibrio nella carrucola mobile, deve la potenza star al peso come il raggio al diametro della carrucola. Ma il raggio sta al diametro come 1 : 2. Dunque nella carrucola mobile, posto che le funi siano parallele tra loro, acciò s' abbia l' equilibrio tra la potenza, e il peso, bisogna, che quella stia a questo come 1 : 2; che è quel, che nel §. 100 si è dimostrato.

CIII.

Il raggio PE in un caso solo può esser uguale alla metà della corda FE, cioè quando la corda FE passa per lo centro P, e diventa diametro; lo che succede soltanto quando le funi sono parallele tra loro. In tutti gli altri casi il raggio è sempre maggiore della metà della corda, e tanto maggiore, quanto maggiore è l' angolo B, o sia quanto più le funi si discostano dal parallelismo. Onde quanto più le funi si discostano dal parallelismo, tanto maggiore della metà del peso deve essere la potenza, che si richiede per l' equilibrio. Se l' angolo B fosse di 120 gradi, lo che succede quando la corda FE sottende a un arco di gradi 60, il raggio sarebbe affatto uguale alla corda, e perciò nell' equilibrio della macchina la potenza dovrebbe esser affatto uguale al peso. Che se l' angolo B fosse anche maggiore di 120 gradi, cioè se la corda F E ſottendeſſe a un arco minore di gradi 60, la potenza dovrebbe eſſer anche maggior del peſo, perchè s' aveſſe l'equilibrio. Onde è manifeſto, che allora nella carrucola mobile richiedeſi la minima potenza per averſi l' equilibrio, quando le funi ſono parallele tra di loro; e perciò per ritrarre da queſta macchina il maſſimo vantaggio, biſogna proccurare d' adoprarla in maniera, che le funi ſiano ſempre tra loro parallele.

CIV.

Paſſiamo ora alla quarta macchina ſemplice, che è il piano inclinato, la di cui teoria ſenza alcun artificio, come altri han fatto ricorrendo alle proprietà della leva, col ſolo principio delle azioni agevolmente, e con eſattezza può ſtabilirſi. Serve, come a tutti è noto, il piano inclinato per ſoſtenere, ed elevare groſſiſſimi peſi; e non è egli altro, che una ſuperficie piana inclinata all' orizzonte, come ſarebbe (*Fig.* 21.) A B. L' angolo B A C, che il piano inclinato fa coll' orizzonte, ſi dice *angolo d' inclinazione*; la retta, che da qualſivoglia punto del piano inclinato ſull' orizzonte perpendicolarmente ſi mena, qual' è la retta B C, ſi chiama *altezza del piano inclinato*; finalmente la retta orizzontale compreſa tra il piano inclinato, e la ſua altezza, qual è la retta A C, ſi dice *baſe del piano inclinato*.

CV.

CV.

In un corpo qualunque costituito sopra di un piano inclinato perchè s' abbia l' equilibrio, è necessario, che la potenza, da cui il corpo è sostenuto, e la gravità del corpo stesso sian tra di loro in ragion reciproca de' coseni degli angoli, che le direzioni e di quella, e di questa fanno col piano inclinato.

Sia A B un piano inclinato, sopra di cui sia collocato il corpo P sostenuto da una potenza ed esso applicata per qualsivoglia direzione P D, che tagli il piano stesso inclinato dovunque, per esempio in E, e facci con esso l'angolo P E A. La direzione della gravità del corpo P è la verticale P A, che col piano inclinato fa l' angolo P A E. Dico, che il corpo P allora starà in equilibrio, quando la potenza, che lo sostiene, starà alla gravità di esso come il coseno dell' angolo P A E al coseno dell' angolo P E A.

DIMOSTRAZIONE.

Facciasi un moto infinitesimo, cosichè il centro del corpo P venga in p. Dal punto p si meni la retta p G parallela alla direzione della gravità, la quale retta p G tagli il piano inclinato in F, e col centro D, e coll'intervallo Dp si descriva l' archetto P I, che incontri la direzione della potenza nel punto I.

Fatto ciò, egli è manifesto, che, riguardando D come centro della potenza, il suo spazietto d'accesso al centro è P I, ed è chiaro ancora, che lo spazietto di recesso dal centro del peso è $pG - pF = FG$. Perchè dunque si abbia in questo caso l'equilibrio, richiedesi secondo il principio delle azioni, che la potenza stia al peso come F G : P I. Ma prendendosi $Pp = AF$ per seno totale, è F G coseno dell' angolo A F G, che la direzione del peso fa col piano inclinato, ed I P coseno dell'angolo I Pp, che per lo parallelismo delle rette Pp, A F è uguale all'angolo P E A fatto dalla direzione della potenza col piano inclinato stesso. Dunque perchè nel corpo P costituito sopra il piano inclinato A B si abbia l'equilibrio, convien, che la potenza stia al peso come il coseno dell' angolo P A E al coseno dell' angolo P E A. Che è quel, che bisognava dimostrare.

CVI.

La dimostrazione è affatto l' istessa anche nel caso, in cui la direzione della potenza sega il piano inclinato in un punto qualunque posto al di sotto del punto A.

CVII.

Se la direzione della potenza fosse parallela al piano inclinato, andrebbe ad incontrare il piano stesso in un punto infinitamente distante, e l'angolo, che con esso farebbe, saria infinitesimo, il di cui coseno perciò sarebbe uguale al seno totale. Onde in questo caso per aversi l'equilibrio converrebbe, che la potenza stasse al peso in quella stessa ragione, che il seno dell'angolo P A B ha al seno totale. Ma il seno dell'angolo P A B sta al seno totale come B C : A B. Dunque nel caso, che la direzione della potenza sia parallela al piano inclinato, per aversi l'equilibrio deve la potenza star al peso come l'altezza alla lunghezza del piano inclinato stesso, sopra di cui il peso è collocato.

CVIII.

Che se la direzione della potenza fosse orizzontale, cioè parallela alla base A C del piano inclinato, l'angolo, che con questo la direzione stessa farebbe, saria uguale all'angolo d'inclinazione B A C. Sicchè in quest'altro caso per aversi l'equilibrio saria necessario, che la potenza stasse al peso come il coseno dell'angolo A F G al coseno dell'angolo F A G, o sia, presa A B per seno totale, come B C :

CA; che è quanto dire come l' altezza alla base del piano inclinato.

CIX.

E' d' avvertirsi però, che quanto si è dimostrato dell' equilibrio di un corpo costituito sopra di un piano inclinato vale soltanto quando lo spazietto P *p* è parallelo al piano A B; lo che addiviene in tutti i moti radenti de' corpi posti sopra i piani inclinati, e nel moto rotante della sfera, posto, che la potenza sia applicata al centro di essa. Ma negli altri casi de' moti rotanti nè la legge, nè la dimostrazione vale; nè può in questi casi determinarsi alcuna legge generale, dipendendo essa dalla varia costruzione, e figura del corpo. Anzi può darsi anche il caso, in cui in un corpo costituito sopra di un piano inclinato non possa con una sola potenza impedirsi ogni qualunque moto. E ciò basta per quel, che riguarda il piano inclinato; poichè il nostro scopo principale non è formare un' intera, e perfetta statica, ma soltanto di far vedere come le leggi d' equilibrio in tutte le macchine semplici possono stabilirsi col principio delle azioni. Perciò senz' altra dimora passiam subito alla quinta macchina semplice, che è il cuneo.

CX.

CX.

Ogni corpo, che avendo la base di qualche larghezza va a finire in punta, o in taglio, si dice *cuneo*. Cunei perciò sono i coltelli, le scuri, ed altri consimili strumenti, che si adoprano per fendere, aprire, e separare i corpi. La base del cuneo suol anche chiamarsi *dorso*, e la retta, che dalla punta, o dal taglio sul dorso perpendicolarmente si mena, dicesi *lunghezza del cuneo*. Volendosi dunque fendere, o aprir qualche corpo col cuneo, s'introduca la sua punta, o taglio tra le parti del corpo stesso; indi premendo, o percuotendo sul dorso, il cuneo si spinga tra le parti, le quali perciò saranno obbligate ad allontanarsi l' una dall' altra, e così il corpo resterà aperto, e fesso.

CXI.

Sicchè le potenze, fra le quali dee cercarsi l'equilibrio in questa macchina, sono la resistenza, che nasce dalla separazione delle parti del corpo, che si fende, e la forza, che applicata al dorso tenta di superare la resistenza già detta. Per determinare la proporzione, che nel caso dell' equilibrio passar deve tra la potenza applicata al dorso del cuneo, e la resistenza delle parti da separarsi, alcuni seguitando Aristotile han preteso ridurre il cuneo ad una doppia leva di prima ſpecie, altri con Guidobaldo han proccurato ridurlo a una doppia leva di ſeconda ſpecie, ed altri finalmente con Pappo han creduto ridursi ad un piano inclinato. Ma le opinioni di coſtoro, perchè falſe, ed inſuſſiſtenti, vengano a ragione confutate dal P. De Chales (a). Noi però ſenza ricorrere ad alcun' artificio, col ſolo principio delle azioni per l'equilibrio del cuneo ſtabiliamo la ſeguente legge.

CXII.

Nel cuneo ſi ha l'equilibrio tra la potenza e la reſiſtenza delle parti da ſepararſi, qualora quella ſta a queſta in ragion composta de dorſo alla lunghezza del cuneo, e del ſeno totale al ſeno dell'angolo, che la direzione della potenza fa col dorſo ſteſſo.

Sia (*Fig.* 22.) C B G un cuneo qualunqne il di cui dorſo ſia A C, e la lunghezza A B La potenza X ſia applicata al dorſo del cuneo in D per qualſivoglia direzione X D. Dico, che per averſi l'equilibrio tra la potenza X, e la reſiſtenza delle parti da ſepararſi, convien, che quella ſtia a queſta in ragion compoſta di C G : A B, e del ſeno totale al ſeno dell'angolo X D G, che la direzione della potenza X D fa col dorſo del cuneo.

D.

(a) *Mechanices lib. 6. de cuneo.*

DIMOSTRAZIONE.

Le parti, che debbono ſepararſi col cuneo ſiano P M R, Q N S. La reſiſtenza, che queſte parti oppongono al cuneo, che tra eſſe ſi ſpinge, naſce dalla diloro ſcambievole attrazione, la dicui direzione ſarà la retta M N, che va ad unire i centri delle parti ſteſſe, e che per chiarezza maggiore ſupponeſi perpendicolare alla lunghezza del cuneo B A. Si faccia ora un moto infiniteſimo, per cui il cuneo percorrendo lo ſpazietto B *b* venga nella poſizione *c b g*, e per conſeguenza le parti da ſepararſi P M R, Q N S paſſino in *p m r*, *q n s*. Egli è manifeſto, che le parti P M R, Q N S s'allontaneranno l' una dall'altra per la quantità $Mm + Nn$. Onde $Mm + Nn$ ſarà lo ſpazietto di receſſo dal centro dell' attrazione delle parti da ſepararſi. Ora dal punto X al punto *d* ſi tiri la retta X *d*, *e*, fatto centro X, coll' intervallo X D ſi deſcriva l' archetto D E, che tagli la X *d* in E, e ſarà, come è chiaro, E *d* lo ſpazietto di receſſo dal centro X della potenza applicata al dorſo del cuneo. Sicchè ſecondo il principio delle azioni, perchè ſi abbia l'equilibrio richiedeſi, che la potenza applicata al dorſo del cuneo ſtia alla reſiſtenza delle parti da ſepararſi come $Mm + Nn : Ed$, oppure in ragion compoſta di $\begin{cases} Mm + Nn : Dd. \\ Dd : Ed \end{cases}$ Per lo punto B ſi

tiri

tiri la retta F H perpendicolare alla lunghezza del cuneo B A, e per conseguenza parallela ad M N. Essendo, come è chiaro, $Mm = BF$, $Nn = BH$, e $Dd = Aa = Bb$, sarà $Mm + Nn : Dd :: BF + BH = FH : Bb :: cg : ab :: CG : AB$. E' in oltre per la notissima proprietà del triangolo $Dd : Ed$ come il seno totale al seno dell'angolo EDd, che è uguale all'angolo X D A. Sicchè per aversi l'equilibrio bisogna, che la potenza applicata al dorso del cuneo stia alla resistenza, che oppongono le parti da superarsi, in ragion composta di $CG : AB$, e del seno totale al seno dell' angolo X D A, che la direzione della potenza fa col dorso del cuneo. Che è quel, che bisognava dimostrare.

CXIII.

Se la potenza fosse al cuneo applicata per direzione perpendicolare al dorso, la ragione del seno totale al seno dell'angolo X D A sarebbe ragion d' eguaglianza; onde per aversi l' equilibrio in questo caso tra la potenza, e la resistenza delle parti da separarsi, basterebbe, che quella stasse a questa nella semplice ragione di $CG : AB$, cioè come il dorso alla lunghezza del cuneo.

CXIV.

Poichè, come dalla dimostrazione apparisce, tan-

tanto lo ſpazietto, per cui, fatto il modo infiniteſimo, ſi muove il punto, al quale la potenza è applicata nel dorſo del cuneo, quanto lo ſpazietto, per cui le parti da ſepararſi ſi allontanano dal centro della loro attrazione ſono ſpazietti di receſſo, potrebbe ad alcuno naſcer per caſo ſoſpetto, che i prodotti dell' attrazione delle parti da ſepararſi, e della potenza applicata al dorſo del cuneo moltiplicate per i loro reſpettivi ſpazietti di receſſo, quantunque ſiano uguali, non ſiano però affetti da ſegni diverſi, cioè non ſia uno negativo riſpetto all' altro; condizione dal principio delle azioni neceſſariamente richieſta. Avvertaſi perciò, che quantunque i predetti ſpazietti ſiano amendue negativi, perchè amendue di receſſo, la potenza però applicata al dorſo del cuneo è negativa in riguardo all'attrazion delle parti, che debbono ſepararſi. Poichè acciò il cuneo poſſa ſpingerſi tra le parti del corpo, che ſi vuol fendere, egli fa di meſtieri conſiderar la potenza al dorſo del cuneo ſteſſo applicata come forza ripulſiva, ed impellante, ed ella è coſa troppo manifeſta, che la forza ripulſiva in riguardo alla forza attraente debba come negativa conſiderarſi.

CXV.

Ecco già applicato il principio delle azioni alla determinazione delle leggi d'equilibrio nella leva, nell'aſſe, nella ruota, nelle carrucole, le, nel piano inclinato, e nel cuneo. Altro ora a far non resta per dar compimento a questo capitolo, che applicare il principio stesso a determinar le leggi dell' equilibrio nella vite. Pria di far ciò stimo opportuno, anzi necessario mostrar brevemente come dee concepirsi, che nasca questa macchina, per quindi meglio capire tutto ciò, che di essa verremo or ora a stabilire. Sia perciò (*Fig.* 23.) A O M N L un cilindro qualunque, la dicui base sia A O M Q. Il diametro A M di questa base intendasi prolungato a piacimento in R, e dal punto L al punto R si meni la retta L R, onde formerassi il triangolo M R L. Se questo triangolo si ravvolgerà intorno al cilindro A Q M N L, il lato L R descriverà nella superficie cilindrica la curva, che forma le spire della vite.

CXVI.

Concepita la cosa in tal maniera, siano A B, C H, K L, le spire formate nella superficie cilindrica dal ravvolgimento del triangolo M R L, come abbiam detto. Dalli punti B, H, L si menino le rette B S, H T parallele al lato M R, e si prolunghino findove incontrino il lato L R in S, e T. Finalmente per gli punti S, T si conducano le rette S U, T Z parallele al lato M L del cilindro, le quali incontrino in U, Z le rette M R, B S. Fatto ciò, è manifesto primieramente,

mente, che l'angolo B A M, o qualunque degli angoli H C B, L K H, ec., cioè l'angolo, che le ſpire fanno colla baſe del cilindro, ſia uguale all' angolo R, o a qualſivoglia degli angoli Z S T, H T L, che uguali ſono all' angolo ſteſſo R. E' manifeſto in ſecondo luogo, che ciaſcuna delle rette U R, Z S, H T ſia uguale alla periferia della baſe del cilindro A O M Q. E finalmente è manifeſto, che ciaſcuna delle ſpire A B, C H, K L ſia uguale a ciaſcuna delle rette R S, S T, T L, le quali ſono tra loro uguali.

CXVII.

Ciò premeſſo, ſia una vite qualunque, le di cui ſpire A B, C H ec. faccian coll'orizzonte, oppure colla baſe del cilindro A O M Q, che ſuppongaſi orizzontale, un' angolo qualunque B A M. P ſia un corpo collocato ſulle ſpire, alla di cui gravità paragonar conviene la reſiſtenza, che naſce dalla compreſſione. La potenza, che deve ſoſtener queſto corpo ſia X, al corpo ſteſſo applicata per la direzione P X. che taglia la ſpira C H in E, e fa con eſſa un qualunque angolo P E C. Dico, che per averſi in queſta macchina l' equilibrio tra la potenza, e il peſo, è neceſſario, che quella ſtia a queſto come il ſeno dell'angolo, che le ſpire fanno coll' orizzonte, al coſeno dell' angolo P E C, che le ſpire ſteſſe fanno colla direzione della potenza, che il peſo ſteſſo ſoſtiene.

DIMOSTRAZIONE.

Secondo il ſolito noſtro metodo, facciaſi un moto infiniteſimo, per cui il centro del peſo P giunga in *p*. Si meni dal punto P la verticale PD, che incontri la ſpira in D, e dal punto D ſi tiri l'orizzontale DG, che incontri la verticale *p*G in G. Egli è baſtantemente manifeſto, che *p*G — *p*F = FG ſarà lo ſpazietto di receſſo dal centro del peſo P. In oltre col centro X, e coll'intervallo X*p* ſi deſcriva l'archetto *p*I, che ſeghi la PX in I. E' chiaro parimenti, che ſarà PI lo ſpazietto d'acceſſo al centro della potenza X; onde per lo principio, di cui ci ſerviamo, s'avrà l'equilibrio tra la potenza X, e il peſo P, qualora quella ſtarà a queſto, come FG : PI. Ma preſa P*p* = DF per ſeno totale, è PI coſeno dell'angolo *p*PI uguale all'angolo PEC, ed FG ſeno dell'angolo FDG uguale all'angolo HCB. Dunque perchè l'equilibrio ſucceda, conviene, che la potenza ſtia al peſo come il ſeno dell'angolo HCB, che le ſpire fanno coll'orizzonte, al coſeno dell'angolo PEC, che le ſpire ſteſſe fanno colla direzione della potenza X. Ch'è quel che biſognava dimoſtrare.

CXVIII.

Se la direzione della potenza foſſe parallela alle

alle spire, l'angolo, che queste fan con quella, sarebbe infinitesimo, il di cui coseno è uguale al seno totale; onde per aversi l'equilibrio in questo caso, dovrebbe la potenza star al peso come il seno dell'angolo B C H, o sia dell'angolo Z S T, al seno totale. Ma se in oltre si supporrà retto il cilindro, onde sia retto ancora l'angolo S Z T, il seno dell'angolo Z S T sta al seno totale come ZT : TS. Dunque perchè si abbia l'equilibrio deve la potenza star al peso come Z T : T S, cioè come la distanza, che passa tra due spire convicine alla lunghezza di una spira sola.

CXIX.

Che se la direzione della potenza fosse orizzontale, cioè parallela alla base A M del cilindro A O M N L, l'angolo, che con essa le spire farebbero, saria uguale all'angolo B C H. Onde per aversi in quest' altro caso l'equilibrio, converrebbe, che la potenza stasse al peso come il seno al coseno dell'angolo B C H, o sia dell'angolo Z S T, che a quello è uguale. Ma supponendosi retto il cilindro A O M N L, e per conseguenza retto l'angolo S Z T, e presa T S per seno totale, il seno dell'angolo Z S T è T Z, e il suo coseno Z S. Dunque per aversi l'equilibrio dovrà la potenza star al peso come S Z : Z T, cioè come la periferia della base del cilindro alla distanza, che passa tra due spire contricine. Le quali cose com-

combinano affatto con quel, che con diversi principj si è dagli altri dimostrato intorno alla vite.

CAPITOLO VII.

Delle Leggi dell' equilibrio de' fluidi, proveniente dal proprio peso, dimostrate col principio delle azioni.

CXX.

Fluido si chiama un aggregato di minimi corpicciuoli, i quali separatamente presi son così piccioli, che non possano da' nostri sensi comprendersi, e costituiti, e formati in maniera, che cedendo ad ogni minima forza loro impressa, facilissimamente tra loro stessi si muovano.

CXXI.

La scienza, che tratta dell' equilibrio de' fluidi, si dice *Idrostatica*.

CXXII.

Pria di venir a stabilir le leggi dell' Idrostatica, convien avvertire, che suol farsi da' Fisici distinzione tra *umido*, *liquido*, e *fluido*.

do. Umido dicesi quel corpo, che è fluido, ma che in oltre eccita in noi la sensazione dell' umore; tale è l' acqua, e 'l vino. Chiamasi Liquido quel fluido, il quale stando in equilibrio si compone a livella; liquidi perciò sono l' acqua, il latte, il mercurio, i metalli liquefatti, ed altri fluidi di questo genere. Fluido poi assolutamente detto, è un nome generale, che comprende anche que' fluidi, che non sono nè umidi, nè liquidi, qual sarebbe l' aria, il fuoco, ed altri simili, i quali non eccitano in noi sensazione alcuna di umidità, e piuttosto che comporsi a livella, cercano dilatarsi. Del resto per noi fluido, e liquido saranno termini sinonimi; poichè non volendo noi ne' fluidi esaminare, che gli equilibrj provenienti dal loro peso, non considereremo in essi, che la sola gravità, e non considerando ne' fluidi, che la loro sola gravità, tutti i fluidi saranno liquidi, cioè tutti si comporranno a livella; lo che potrà intendersi agevolmente dalla proposizione, che prendiamo a dimostrare.

CXXIII.

Le superficie de' piccioli tratti de' fluidi gravi costituiti in equilibrio, sono orizzontali.

Sia (*Fig.* 24.) NPRQ un vaso pieno di fluido grave posto in equilibrio, a cagion d'esempio, pieno d' acqua stagnante. Dico, che

che la superficie AB di questo fluido sarà orizzontale cioè perpendicolare alla direzione della gravità.

DIMOSTRAZIONE.

Si collochi nel fluido un tubo infinitamente stretto CEFD per direzione verticale; similmente in altro luogo del fluido stesso si collochi anche per direzione verticale un' altro tubo GIKH simile in tutto al primo. Questi due tubi poi si congiungano per mezzo di un terzo tubo LFIM, che li renda comunicanti, e che li tagli ad angoli retti, cioè che sia orizzontale. Essendo questo tubo comunicante ripieno di fluido omogeneo, essendo la gravità proporzionale alla quantità del fluido stesso, ed essendo in oltre i tubi CEFD, GIKH egualmente larghi, e simili in tutto tra loro per supposizione, è manifesto per lo principio dell' Indifferenza, che il fluido, perchè stia in equilibrio, deve in amendue i tubi CEFD, GIKH elevarsi egualmente sopra il tubo orizzontale LFIM, e perciò le due superficiette CD, GH saranno egualmente distanti dall' orizzonte. Lo che potendosi dimostrare di tutte le altre parti infinitesime della superficie AB, ne segue, che l' intera superficie AB sarà sempre equidistante dall' orizzonte, e per conseguenza all' orizzonte stesso parallela, e perciò orizzontale. Che è quel, che bisognava dimostrare.

CXXIV.

CXXIV.

Perchè l'addotta dimoſtrazione reſti libera da ogni difficoltà, varie coſe conviene avvertire; e primieramente ſi è in eſſa aſſunto come vero eſſer la gravità del fluido alla quantità del fluido ſteſſo proporzionale; locchè è certamente veriſſimo nel caſo noſtro, che ſupponiamo la ſuperficie del fluido infinitamente picciola in riguardo a quella della terra. Poichè in ogni altro caſo può ſoſpettarſi, che rotando la terra intorno al proprio aſſe, vengano le forze centrifughe ad alterare la predetta proporzione. Ma nella noſtra ſuppoſizione la forza centrifuga non può indurre alterazione alcuna, perchè quantunque vi ſia, ella però è l'iſteſſa in tutto il tratto del fluido, per eſſer la ſuperficie di queſto in riguardo a quella della terra infinitamente picciola, ſiccome abbiamo ſuppoſto.

CXXV.

E' in ſecondo luogo da notarſi quel, che nella dimoſtrazione ſi è detto, cioè, che ſupponendoſi i tubi CEFD, GIKH egualmente larghi, e ſimili in tutto tra loro, è manifeſto per lo principio dell'Indifferenza, che equilibrandoſi il fluido in eſſi contenuto, debba in amendue elevarſi alla medeſima altezza ſopra l'orizzonte; la qual coſa per noi è evidentiſſima. Se però ad alcuno non ſembrerà così evidente, come a noi ſembra, potremo dimoſtrarla col principio delle azioni in tal maniera: Suppoſti, come ſopra, i tubi CEFD, GIKH egualmente larghi, e in oltre di figura o cilindrica, o priſmatica, ſi facci nel fluido un moto infiniteſimo, per cui la ſuperficietta CD diſcenda fin' a *cd*. Egli è chiaro, che nel tempo ſteſſo ſi eleverà la ſuperficietta GH fin' a *gh*, coſichè la quantità di fluido ricevuta nello ſpazietto G H*hg* ſia uguale a quella, che ſi conteneva nello ſpazietto C*cd*D. Dunque gli ſpazietti C*cd*D, G H*hg* ſono uguali tra loro. Ma è lo ſpazietto $CcdD = CD \cdot Dd$, e lo ſpazietto $GHhg = GH \cdot Hh$. Dunque ſarà $CD \cdot Dd = GH \cdot Hh$. E' in oltre per ſuppoſizione $CD = GH$. Dunque ſarà ancora $Dd = Hh$; D*d*, come è manifeſto, è lo ſpazietto d' acceſſo della gravità del fluido contenuto nel tubo CEFD, ed H*h* lo ſpazietto di receſſo della gravità del fluido contenuto nel tubo GIKH. Dunque perchè tra queſte due gravità s' abbia l' equilibrio, deve ſecondo il principio delle azioni la prima ſtar' alla ſeconda come $Hh : Dd$. Ma è $Hh = Dd$. Dunque perchè s' abbia l'equilibrio, la gravità del fluido contenuto nel tubo CEFD deve eſſer uguale alla gravità del fluido, che ſi contiene nel tubo GIKH. In oltre ſupponendoſi il fluido omogeneo, la gravità del fluido contenuto nel tubo CEFD

è =

è $=$ CD.CE, e quella del fluido contenuto nel tubo GIKH $=$ GH.HK. Sicchè per averſi l'equilibrio, convien, che ſia CD.CE $=$ GH.HK. Ma è CD $=$ GH. Dunque nel caſo dell'equilibrio ſarà ancora CE $=$ HK, cioè le altezze del fluido ſopra l'orizzonte in amendue i tubi ſaranno uguali. Che è quel, che biſognava dimoſtrare.

CXXVI.

S'avverta finalmente, che non deve far'alcuna difficultà il ſupporre, che accada l'iſteſſo alle ſuperficiette CD, GH, o vi ſia il tubo comunicante, o non vi ſia; perchè quando non vi è queſto tubo, il fluido convicino fà le veci di eſſo. Onde reſta fuor d'ogni dubbio, che le ſuperficie de' piccioli tratti de' fluidi ſtagnanti ſono orizzontali, cioè perpendicolari alle direzioni della gravità.

CXXVII.

Il peſo de' corpi riferito al loro volume, ſi dice *gravità ſpecifica*; cioè ſe due, o più corpi avendo l'iſteſſo volume, hanno ancora l'iſteſſo peſo, ſi dicono eſſere della ſteſſa gravità ſpecifica; ſe poi due, o più corpi, benchè abbiano l'iſteſſo volume, han però peſo diverſo, ſi dicono eſſere di gravità ſpecifica diverſa, e quello ſi dice eſſere di gravità ſpecifica maggiore, che ſotto l'iſteſſo volume contiene maggior peso; quello poi, che sotto l'istesso volume contiene minor peso, si dice essere di gravità specifica minore.

CXXVIII.

Poichè sotto qualunque volume quel, che è corporeo, e che costituisce la densità, è grave, la densità, e la gravità specifica saranno sempre nella medesima ragione; onde se un corpo è due volte più denso di un altro, la gravità specifica di quello sarà doppia della gravità specifica di questo.

CXXIX.

Quanto maggior quantità di materia si contiene sotto lo stesso volume, cioè quanto più densi sono i corpi, tanto maggiore sarà il lor peso; dunque i corpi, che hanno volumi uguali, hanno i pesi proporzionali alla densità. In oltre se i corpi saranno egualmente densi, quel, che ha maggior volume, avrà ancora maggior peso, e al contrario quel, che ha minor volume, avrà altresì peso minore; dunque se le densità de' corpi saranno uguali, i loro pesi saranno nella ragion de' volumi. Finalmente se i corpi avranno pesi uguali, quel corpo, che è più denso, avrà minor volume, e al contrario quel corpo, che è meno denso, avrà volume maggiore; sicchè se i pesi de' corpi saranno uguali, le loro densità sa-faranno ai volumi reciprocamente proporzionali. Quindi raccogliesi, che supponendosi disuguali e i pesi, e le densità, e i volumi, saranno 1. I pesi in ragion composta della diretta delle densità, e della diretta de' volumi.

2. Le densità in ragion composta della diretta de' pesi, e della reciproca de' volumi.

3. I volumi in ragion composta della diretta de'pesi, e della reciproca delle densità.

CXXX.

Le pressioni, che soffrono i fondi orizzontali de'vasi ripieni di fluidi, sono tra diloro in ragion composta delle grandezze de'fondi, delle altezze, alle quali i fluidi arrivano ne'vasi, e delle gravità specifiche de' fluidi stessi, che ne'vasi contengonsi.

Siano (*Fig.* 25.) A B C D, S T U Π due vasi di qualsivoglia figura regolare, o irregolare, inclinati comunque all' orizzonte, e ripieni di fluidi, il primo fin' alla livella K L, l'altro fin' alla livella Λ Φ. Da qualsivoglia punto G della superficie del fluido contenuto nel vase A B C D sul fondo orizzontale A B si meni la perpendicolare G H, e da qualsivoglia punto Y della superficie del fluido contenuto nell'altro vase S T U Π si meni similmente sul fondo orizzontale S T la perpendicolare Y Ω; rappresenteranno queste rette G H, Y Ω le altezze, alle quali ne' vasi A B C D, S T U Π arrivano i fluidi, che in essi si contengono. Finalmente la gravità specifica del fluido contenuto nel vaso A B C D stia alla gravità specifica del fluido contenuto nell'altro vaso S T U Π come $m : n$. Dico, che le pressioni de' fluidi contro i fondi orizzontali A B, S T sono tra di loro in ragion composta de' fondi A B, S T, delle altezze de' fluidi G H, Y Ω, e delle diloro gravità specifiche m, n

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi il fondo A B non esser' attaccato ai lati del vaso A B C D, ma esser mobile, e sostenuto contro la pressione del fluido da una potenza P per la direzione F H direttamente contraria alla direzione della pressione stessa, cosichè la pressione del fluido contro il fondo A B, e la potenza P, che il fondo stesso contro di essa sostiene, siano affatto uguali tra loro. Ora secondo il solito nostro metodo suppongasi, che nasca un moto infinitesimo per la direzione della potenza P, per lo qual moto il fondo A B venga nella posizione $a\,b$ ad esso infinitamente vicina, e parallela. E' manifesto in primo luogo, che mentre il fondo A B s'abbassa fin' ad $a\,b$, la superficie del fluido K L s'abbasserà fin'alla livella M N in maniera, che la quantità di fluido, che è andata ad occupare lo spazietto A $a\,b$ B sia esattamente uguale a quella, che nello

nello ſpazietto K M N L contenevaſi. E' manifeſto in oltre, che nel moto infiniteſimo già detto ſi moverà tutto il fluido contenuto nel vaſo, e con tal' ordine, che mentre ſi riempie di fluido lo ſpazietto A a b B, quella porzion di fluido, che occupava lo ſpazietto K M N L vada ad occupare lo ſpazietto M O P N, e quella, che occupava lo ſpazietto M O P N paſſi ad occupare lo ſpazietto O Q R P, e così ſucceſſivamente in appreſſo. Sicchè ciaſcuno de'ſpazietti ſolidi K M N L, M O P N, O Q R P, ec., è uguale allo ſpazietto A a b B. Ma chiamando il fondo A B $= a$, ed H $h = du$, lo ſpazietto A a b B è $= adu$. Dunque anche $= adu$ ſarà ciaſcuno de' ſpazietti K M N L, M O P N, O Q R P, ec.. Ma la gravità aſſoluta ſtà in ragion compoſta della denſità, o ſia gravità ſpecifica, e del volume. Dunque la gravità aſſoluta, o ſia il peſo di ciaſcuna porzione di fluido contenuta ne' ſpazietti K M N L, M O P N, O Q R P, ec., è $= m.\,adu$. In oltre nel moto infiniteſimo, che abbiam ſuppoſto farſi, la gravità di ciaſcuna porzione di fluido K M N L, M P O L, O Q P R, ec., ſi è avvicinata al ſuo centro per lo ſpazietto dx, che è l' elemento dell' altezza del fluido G H $= x$, e la potenza P ſi è ſimilmente avvicinata al ſuo centro per lo ſpazietto H $h = du$. Dunque il prodotto della gravità aſſoluta di ciaſcuna porzione di fluido K M N L, M O P N, O Q R P, ec., moltiplicata per lo ſuo ſpazietto d' acceſſo al cen-

tro

tro, è $= m.adu.dx$, e'l prodotto della potenza P moltiplicata per lo ſpazietto d'acceſſo al ſuo centro, è $= P.du$. Ma la potenza P ſtà in equilibrio colla gravità di tutto il fluido, cioè colla ſomma delle gravità di ciaſcuna delle porzioni K M N L, M O P N, O Q R P, ec. Dunque pel principio delle azioni deve eſſere $P.du = \int m.adu.dx$. Ma adu è quantità coſtante; dunque l'equazion ritrovata può anche ſcriverſi in tal maniera $P.du = madu.\int dx$, la quale diviſa per du diventa $P = ma.\int dx$, cioè $P = max$. Ma alla potenza P è uguale la preſſione del fluido contro il fondo A B. Dunque la preſſione del fluido contro il fondo A B è $= amx$. Facendo l'iſteſſo raziocinio ſi troverà, che la preſſione del fluido contenuto nel vaſo S T U Π contro il fondo S T, chiamando il fondo ſteſſo $= b$, e l'altezza del fluido Y Ω $= z$, è $= nbz$. Sicchè la preſſione del fluido contenuto nel vaſo A B C D contro il fondo A B ſta alla preſſione del fluido contenuto nel vaſa S T U Π contro il fondo S T come max: nbz, cioè in ragion compoſta di $\begin{cases} a : b \\ x : z \\ m : n \end{cases}$, che è quanto dire in ragion compoſta delle grandezze de' fondi A B, S T, delle altezze de' fluidi G H, Y Ω, e delle gravità ſpecifiche de' fluidi ſteſſi. Che è quel, che biſognava dimoſtrare.

CXXXI.

Perchè l' esposta dimostrazione sia esatta, bisogna supporre la potenza P applicata al centro d'equilibrio del fondo premuto dal fluido, che sostiene. Imperocchè se la potenza P non si supporrà applicata al centro d'equilibrio del fondo premuto dal fluido, che si contiene nel vase, il moto del fondo stesso potrebbe non esser parallelo, e non essendo parallelo il moto del fondo, la dimostrazione sarebbe certamente paralogistica.

CXXXII.

Potrebbe quindi per caso talun opporre, che non sapendo noi prima della dimostrazione come i fluidi premono i fondi de'vasi, non sapremo conseguentemente trovare il centro d'equilibrio ne' fondi stessi, e perciò non potremo sapere qual sia quel punto del fondo, a cui conviene applicare la potenza P, perchè possa con esattezza farsi la dimostrazione della legge, colla quale i fluidi contenuti ne' vasi premono i fondi orizzontali de'vasi stessi. Ciò però poco importa; poichè essendo tutti i punti del fondo premuti dal fluido per direzioni parallele tra loro, perchè premuti dalla gravità del fluido, che si contiene nel vaso, sappiamo certamente, che tutte queste pressioni hanno un centro d' equilibrio costante, come

come è noto dalla teoria del centro d'equilibrio esposta nel precedente capitolo. A questo punto dunque, qualunque egli siasi, s'intenda applicata la potenza P, ed in tal maniera non potrà nel fondo altro moto supporsi, che il parallelo; onde la dimostrazione sarà esatta, ed immune da ogni qualunque paralogismo.

CXXXIII.

Se i vasi ABCD, STUΠ ripieni fossero di fluidi dello stesso genere, la ragione di $m:n$ sarebbe ragion d' eguaglianza, e perciò in tal caso la pressione, che soffre il fondo AB, starebbe a quella, che soffre il fondo ST, in ragion composta di $\left\{\begin{matrix} a:b \\ x:z \end{matrix}\right.$ cioè in ragion composta delle grandezze de' fondi stessi AB, TS, e delle altezze GH, YΩ de' fluidi, de' quali sono i vasi ripieni.

CXXXIV.

Quel, che si è dimostrato delle pressioni de' fluidi contro i fondi orizzontali de' vasi, vale ancora per le sezioni orizzontali designate ne' fluidi. Onde se nel medesimo fluido si faranno varie sezioni orizzontali, le pressioni in esse saranno in ragion composta delle loro grandezze, e delle loro distanze dalla superficie del fluido. Se poi si paragoneranno le pressioni nelle sezioni orizzontali fatte in fluidi diversi,

sa-

saranno esse in ragion composta delle grandezze delle sezioni stesse, delle distanze di queste dalle superficie de'fluidi, e delle gravità specifiche de' fluidi medesimi, ne' quali sono le sezioni designate.

CXXXV.

Se i fondi de' vasi non fossero orizzontali, ma inclinati comunque all'orizzonte, come è il fondo B I, purchè si supporranno infinitesimi, potrà collo stesso metodo determinarsi la pressione, che essi soffrono. Imperocchè applicata la potenza P al centro d' equilibrio del fondo, il moto del fondo stesso non potrà essere, che parallelo; il quale supposto per lo spazietto $Ee = du$, sarà P. du l' azione della potenza P; il solidetto costante poi non sarà $a\,d\,u$, come nel caso de'fondi orizzontali, ma sarà $a\,d\,z$, chiamando $d\,z$ la distanza E Δ delle due posizioni del fondo B I, $b\,i$. Quindi ricavasi $\frac{a\,m\,d\,z}{d\,u} =$ P. Ma stà $d\,u : d\,z$ come il seno totale al seno dell' angolo $Ee\Delta =$ G E B, val a dire al seno dell' angolo, che la verticale fa colla posizione del fondo, e mettendo questo angolo $= \Phi$, e'l seno totale, o sia il raggio $= r$, stà $d\,u : d\,z :: r : Sen.\,\Phi$. Dunque sarà ancora P $= \frac{a\,m\,x.\ sen:\,\Phi.}{r}$ Determinata poi la pressione, che soffre qualunque elemento infinitesimo del fondo, potrà ritrotrovarsi la pressione totale del fondo stesso in qualunque posizione, mediante la teoria del centro d'equilibrio.

CXXXIV.

Se un fluido qualunque si verserà in un sifone, posto che sarà in equilibrio, si troverà nell'un braccio, e nell'altro elevato alla medesima altezza.

Sia (*Fig.* 26.) A B C E F un sifone qualunque; se in un braccio di esso A C D B si verserà una quantità di fluido omogeneo, questo discenderà nel braccio A B C D, e salirà nell'altro braccio C D E F fino a una certa altezza, alla quale quando è giunto non si ferma, ma mutando direzione discenderà nel braccio C D E F, e si eleverà nel braccio C D B A fino a una certa altezza, alla quale giunto, tornerà di nuovo a discendere nel braccio C D B A, ed a salire nel braccio C D E F, e così replicherà più volte queste oscillazioni, non altrimenti, che un pendolo. Ma dopo aver in tal maniera oscillato per qualche tempo, si mette finalmente in equilibrio. Dico dunque, che posto che sarà in equilibrio il fluido versato nel sifone, nell'un braccio, e nell'altro del sifone stesso si troverà elevato alla medesima altezza; cioè, tirata per lo punto infimo C del sifone la retta orizzontale T U, e menate sopra di essa dai punti G, Q della superficie del fluido le perpendicolari G T, QU

QU, dico, che queste saranno uguali tra di loro.

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi nascere nel fluido un moto infinitesimo, per cui la sua superficie GH si abbassi fin ad IK; è manifesto, che nel tempo stesso si eleverà nell'altro braccio la superficie PQ fin ad RS in maniera, che la quantità del fluido ricevuta nello spazietto PQSR sia esattamente uguale a quella, che prima di farsi il moto infinitesimo occupava lo spazietto GIKH. Ma quella porzione di fluido, che occupava lo spazietto GIKH, fatto il moto infinitesimo, è passata ad occupare lo spazietto ILMK, e quella poi, che occupava lo spazietto ILMK è passata ad occupare lo spazietto LNOM, e così procedendo innanzi. Dunque tutte le infinitesime porzioni di fluido contenute ne' spazietti ILMK, LNOM, ec., essendo ciascuna di esse uguale alla porzione, che fatto il moto infinitesimo, è andata ad occupare lo spazietto PQRS, oppure a quella, che prima che il moto infinitesimo si facesse, occupava lo spazietto GIKH, saranno in quanto al volume uguali tra di loro. Se dunque lo spazietto solido GIKH si metterà $= y\,du$, qualunque dell' infinitesime porzioni di fluido ILMK, LNOM, ec. in quanto al volume sarà $= y\,du$. Ma trattandosi sempre del medesimo flui-

fluido, la gravità delle porzioni già dette deve essere proporzionale al loro volume. Dunque anche la gravità di qualunque dell' infinitesime porzioni di fluido ILMK, LNOM, ec. sarà $= y\,du$. In oltre nel moto infinitesimo, che abbiam supposto farsi la gravità di ciascuna porzione $y\,du$ nel braccio A B C D, chiamata la verticale G T $= x$, s'avvicina al suo centro per dx, che è l'elemento della verticale G T, nell' altro braccio poi D C F E, chiamando Q U $= z$, dal suo centro s'allontana per dz. Dunque stando il fluido in equilibrio, deve essere secondo il principio delle azioni $\int y\,du \,.\, dx = \int y\,du \,.\, dz$. Ma $y\,du$ è quantità costante; dunque deve essere $y\,du. \int dx = y\,du. \int dz$, o sia $\int dx = \int dz$, cioè $x = z$; che è quanto dire, che stando il fluido in equilibrio debbon le perpendicolari G T, Q U esser eguali tra di loro. Che è ciò, che bisognava dimostrare.

CXXXVII.

Sia (*Fig.* 27.) ΑΦΤΩΠ un sifone qualunque. In esso per l' apertura ΑΦ si versi una quantità di fluido omogeneo; questo, secondo il precedente teorema, equilibrandosi si comporrà nell' un braccio, e nell' altro alla medesima livella, che suppongasi essere A B C D. Se ora sopra questo fluido così equilibrato si verserà per la medesima apertura Α Φ un'altra quantità di fluido di genere diverso dal pri-

primo, egli è manifesto, che nel fluido versato prima nel sifone si turberà l' equilibrio, che la sua superficie A B si abbasserà, e che s' innalzerà l' altra superficie C D, fin a tanto che l' equilibrio si restituisca di nuovo. Dico dunque, che, restituito l' equilibrio, A B si troverà depressa fin ad E G, e C D elevata fin a P S in maniera, che, prolungata E G in H, sia la gravità specifica del fluido versato prima nel sifone alla gravità specifica del fluido versato dopo come G K : F P, cioè in ragion reciproca delle altezze de' due diversi fluidi sopra la livella E H.

DIMOSTRAZIONE.

Il fluido versato prima nel sifone si chiami Q, e il fluido versato dopo si chiami R. Il fluido contenuto sotto la livella E H s' equilibra da se solo, come dal teorema precedente è manifesto. Resta dunque da dimostrare, che per aversi l'equilibrio tra i fluidi di diverso genere Q,R contenuti sopra la livella E H, esser debba la gravità specifica del fluido Q alla gravità specifica del fluido R come G K : F P. Suppongasi perciò nascer un moto infinitesimo, per cui la superficie I K del fluido R discenda fin ad *i k*; per questo moto infinitesimo si muoverà tutta la massa del fluido contenuto nel sifone, e con tal' ordine, che nel tempo stesso, nel quale il fluido contenuto nello spazietto I ik K passa ad occupare lo spazietto prossimo i Q R k, quello, che nello spazietto i Q R k si contiene, passi ad occupare lo spazietto prossimo Q U Y R, e così procedendo innanzi; sicchè le porzioni del fluido R contenute ne' spazietti I ik K, i Q R k, Q U Y R, ec. in quanto al volume sono uguali tra di loro. In oltre mentre la superficie I K discende fin ad ik, la superficie P S del fluido Q sale nell'altro braccio fin a ps in maniera, che la quantità del fluido Q ricevuta nello spazietto P ps S sia in quanto al volume esattamente uguale alla quantità del fluido R, che si conteneva nello spazietto I ik K; ma la quantità del fluido, che è passata ad occupare lo spazietto P ps S è quella, che si conteneva nello spazietto prossimo P N O S, e quella poi, che si riceve nello spazietto P N O S è quella, che si conteneva nello spazietto prossimo N L M O, e così procedendo innanzi; dunque le porzioni del fluido Q contenute ne' spazietti P N O S, N L M O, ec. in quanto al volume sono uguali tra di loro, ed uguali a ciascuna delle porzioni del fluido R contenute ne' spazietti I ik K, i Q R k, Q U Y R, ec. Per lo che se lo spazietto solido I ik K si metterà $= y\,du$, sarà anche $y\,du$ l'espressione, non solo del volume di qualunque porzione del fluido R contenuta ne' spazietti I ik K, i Q R k, Q U Y R, ec., ma del volume ancora di qualunque porzione del fluido Q contenuta ne' spazietti P N O S, N L M O, ec., e sa-e sarà perciò, come è chiaro $y\,d\,u$ una quantità costante.

Posto ciò, i pesi, o sia le gravità assolute sono tra di loro in ragion composta delle densità, e de' volumi. Dunque, chiamata la gravità specifica del fluido R $= m$, e quella del fluido Q $= n$, la gravità assoluta di qualunque porzione $y\,d\,u$ del fluido R sarà $= m.\,y\,d\,u$, e la gravità assoluta di qualunque porzione $y\,d\,u$ del fluido Q sarà $= n.\,y\,d\,u$. In oltre nel moto infinitesimo, che abbiam supposto farsi nel fluido contenuto nel sifone, il peso di ciascuna porzione $y\,d\,u$ del fluido R, chiamata GK $= x$, si è avvicinato al suo centro per lo spazietto $d\,x$, il peso poi di qualunque porzione $y\,d\,u$ del fluido Q contenuto sopra la livella EH, chiamata FP $= z$, si è dal suo centro allontanato per lo spazietto $d\,z$. Perchè dunque tra il fluido R, e il fluido Q contenuto sopra la livella EH s'abbia l'equilibrio, deve essere secondo il nostro principio $\int y\,d\,u.\,m.\,d\,x = \int y\,d\,u.\,n.\,d\,z$. Ma $y\,d\,u$ è quantità costante. Dunque l'equazione ritrovata, che esprime la condizion necessaria per l'equilibrio, può scriversi in quest'altra maniera $y\,d\,u.\int m\,d\,x = y\,d\,u.\int n\,d\,z$, la quale se si dividerà per $y\,d\,u$, sarà $\int m\,d\,x = \int n\,d\,z$, cioè $m\,x = n\,z$. Dunque avendosi l'equilibrio, convien, che sia $m\,x = n\,z$, cioè $m : n :: z : x$, che è quanto dire la gravità specifica del fluido R alla gravità specifica del fluido Q come GK : FP, cioè in ragion reciciproca delle altezze de' fluidi R, Q sopra la livella EH. Che è quel, che bisognava dimostrare.

CXXXVIII.

Se la gravità specifica del fluido Q sarà maggiore della gravità specifica del fluido R, la superficie IK del fluido R si troverà più alta della livella, in cui si trova la superficie PS del fluido Q. Ma se al contrario la gravità specifica del fluido Q sarà minore di quella del fluido R, la superficie IK del fluido R si troverà più bassa della livella, in cui la superficie del fluido Q è situata.

CXXXIX.

Ed ecco già dimostrate le leggi dell' equilibrio de' fluidi, paragonando tra di loro tanto i fluidi dell' istesso genere, quanto i fluidi di genere diverso; restan' ora da dimostrarsi le leggi dell' equilibrio de' solidi immersi ne' fluidi, o che ne' fluidi galleggiano; che è quello appunto, che ora per noi si prende a trattare.

CXL.

Immerso un solido interamente in un fluido, tre casi possono darsi, o che il solido sia dell'istessa gravità specifica del fluido, in cui è immerso, o che sia di gravità specifica maggiore,

giore, o che finalmente sia di gravità specifica minore del fluido stesso. Dico dunque, che nel primo caso dovunque il solido si lascerà liberamente, ivi resterà equilibrato, ed immobile, negli altri due casi poi lasciato liberamente, non si equilibra, ma che essendo di maggior gravità specifica del fluido, discenderà sempre finchè non arriva a toccar il fondo, essendo poi di gravità specifica minore, salirà sempre, ed andrà sul fluido a galleggiare.

DIMOSTRAZIONE.

Sia (*Fig.* 28.) A B C D un vase ripieno di fluido fin alla livella E F. In questo fluido s' immerga il solido I L P K, per la di cui parte superiore I K s' intenda tirata una sezione orizzontale G I K H, e per la parte inferiore L P un' altra sezione orizzontale Ω L P Z. Egli è manifesto, che tanto il fluido contenuto sotto la sezione Ω Z, quanto quello, che si contiene sopra la sezione G H non entran nell' equilibrio del solido I L P K, ma quello, che col solido I L P K può far equilibrio, e il fluido contenuto tra le sezioni G H, Ω Z, che il solido stesso lateralmente circonda. Notato ciò, suppongasi un moto infinitesimo, per cui il solido verticalmente ascenda, e venga colla superficie I K in *i k*. Egli è evidente, che in questo moto infinitesimo il fluido, che il solido circonda, discenderà, e che la sezione G I K H passerà in g R S h, cosichè la quantità del fluido, che si conteneva nello spazietto G R S H sia uguale alla porzion del solido i R S k, che ora si trova sopra la sezione g R S h. Ma nel moto infinitesimo già fatto quella porzion di fluido, che si conteneva nello spazietto GRSH è passata ad occupare lo spazietto g O T h, e quella, che occupava lo spazietto g O T h è passata ad occupare lo spazietto Λ Q U Φ, e così procendendo innanzi. Dunque le porzioni infinitesime componenti il fluido, che lateralmente circonda il solido, le quali si contengono ne' spazietti G R S H, g O T h, Λ Q U Φ, ec. sono di volume uguali tra di loro, ed uguali alla porzione infinitesima del solido i R S k. Ma se la distanza tra le due sezioni G H, Ω Z si metterà $= x$, e 'l volume del solido $= ax$, la sua porzione i R S k sarà $= adx$. Dunque anche $= adx$ sarà il volume di ciascuna infinitesima porzione del fluido, che lateralmente circonda il solido, uguale alla porzione del solido stesso i R S k. In oltre la gravità assoluta sta in ragion composta del volume, e della densità. Dunque mettendo la gravità specifica del fluido $= m$, e quella del solido $= n$, sarà la gravità assoluta del solido $= ax.n$, e la gravità assoluta di ciascuna porzione adx del fluido, che il solido stesso circonda, $= m.adx$. Ma nel moto infinitesimo già fatto la gravità del solido s'allontana dal suo centro per lo spazietto to dx, e la gravità di ciascuna porzione adx del fluido, che circonda il solido, s' avvicina similmente al suo centro per lo spazietto dx. Dunque perchè succeda l' equilibrio, secondo il nostro principio, deve essere $\int m . adx . dx = n . ax . dx$. Ma adx è quantità costante, come è chiaro; dunque l' equazione può scriversi anche in tal maniera $adx . \int m dx = nax . dx$, cioè $max . dx = nax . dx$. Or questa equazione supponendosi $m = n$ si verifica, e supponendosi o $m > n$, o $m < n$ non si verifica. Dunque se la gravità specifica del solido sarà uguale alla gravità specifica del fluido, dovunque il solido si collocherà immerso interamente nel fluido, ivi resterà equilibrato; ma se la gravità specifica del solido sarà o maggiore o minore di quella del fluido, il solido nel fluido interamente immerso non si equilibrerà giammai; ma, perchè essendo $m > n$, il primo membro dell' equazione vien maggiore del secondo, ed essendo $m < n$, vien il secondo maggior del primo, perciò se la gravità specifica del solido sarà maggiore di quella del fluido, il moto del solido dovrà essere per la direzione della propria gravità, e in conseguenza dovrà discender al fondo, se poi la gravità specifica del solido sarà di quella del fluido minore, il moto del solido dovrà succedere per la direzione contraria, e perciò il solido dovrà salire, ed andare a galleggiare sul fluido. Che è ciò, che bisognava dimostrare.

CXLI.

Nel caſo, che è $m < n$, cioè, che la gravità ſpecifica del ſolido è maggiore di quella del fluido, in cui è immerſo, la gravità ſpecifica del ſolido s' intenda diviſa in due parti R, *r*, una delle quali R sia uguale ad *m*, cioè alla gravità ſpecifica del fluido, l'altra *r* sia l' eceſſo della gravità ſpecifica del ſolido ſopra quella del fluido. Dal teorema dimoſtrato è chiaro, che ſe il ſolido foſſe ſoltanto dotato della gravità ſpecifica R, egli immerſo interamente nel fluido, ſtarebbe in equilibrio; ſe dunque non iſtà in equilibrio, ma diſcende, diſcende certamente per l'altra parte *r* della ſua ſpecifica gravità cioè per l'eceſſo della ſua ſpecifica gravità ſopra quella del fluido. Coll'iſteſſo raziocinio nel caſo che è $m > n$, cioè la gravità ſpecifica del fluido maggiore di quella del ſolido immerſo, si può dimoſtrare, che il ſolido ſalendo è ſpinto da una forza uguale all'eceſſo della gravità ſpecifica del fluido ſopra quella del ſolido.

CXLII.

Un ſolido immerſo interamente in un fluido di gravità ſpecifica maggiore, non può ſtar in equilibrio ſecondo il teorema precedente, ma dovrà ſalire, ed uſcir dal fluido; uſcirà però fin' a tanto, che vi reſti nel fluido immerſa

mersa una parte tale, che stia all'intero solido come la gravità specifica del solido stesso a quella del fluido.

Sia (*Fig.* 29.) A B C D un vase pieno di fluido fin'alla livella E F. Se in esso s'immergerà interamente il solido P Q S R di minor gravità specifica del fluido stesso, verrà egli spinto all'insù, ne si metterà in equilibrio, se non quando è uscito tanto fuori del fluido, che la parte immersa stia a tutto il solido come la gravità specifica del solido a quella del fluido.

DIMOSTRAZIONE.

Per la parte infima del solido si tiri la sezione orizontale T U. Egli è manifesto, che il fluido, che sopra questa sezione si contiene, e circonda lateralmente il solido, è quello, che fa equilibrio col solido stesso; l'altezza di questo fluido, cioè la distanza tra la sezione T U, e la superficie E F, si metta $= x$; in oltre la parte del solido immersa nel fluido si metta $= ax$, e l'intero volume del solido stesso $= by$. Posto ciò, si facci un moto infinitesimo, per cui il solido esca alquanto dal fluido; nel medesimo tempo la superficie del fluido s'abbasserà in maniera fin' ad ef, che la quantità del fluido, che si conteneva nello spazietto E I K F, sia esattamente uguale alla porzion del solido, che è uscita fuori del fluido; ma la porzion del solido, che è uscita

fuori

fuori del fluido è $= adx$; dunque anche $=$ adx sarà la quantità del fluido, che contenevasi nello spazietto E I K F. In oltre nel moto infinitesimo, che abbiam supposto farsi, la quantità del fluido, che contenevasi nello spazietto E I K F è passata ad occupare lo spazietto e L S f, e quella, che si conteneva nello spazietto e L S f, è passata ad occupare lo spazietto Λ R' O Ω, e così procedendo innanzi; sicchè ciascuna delle infinitesime porzioni del fluido esistente sopra la sezione T U contenute ne' spazietti E I K F, e L S f, Λ R' O Ω, ec. è di volume uguale alla porzione del solido adx. Quindi, se metteremo la gravità specifica del solido $= m$, e quella del fluido $= n$, la gravità assoluta del solido sarà $= by.m$, e quella di ciascuna porzione adx del fluido sarà $= n.adx$. Ma la gravità del solido nel moto infinitesimo già fatto si è dal suo centro allontanata per lo spazietto $= dx$, e la gravità di ciascuna porzione adx del fluido si è similmente al suo centro avvicinata per lo spazietto dx. Dunque, perchè s'abbia l'equilibrio deve, essere $mby.dx = Sn. adx.dx$. Ma adx è quantità costante. Dunque l' equazione ritrovata può anche scriversi in tal maniera $mby.dx = adx.\int ndx$; la quale divisa per dx, è $mby = a\int ndx$, o sia $mby = anx$. Sicchè per aversi l'equilibrio deve essere $nax = mby$, cioè $ax : by :: m : n$, cioè la parte del solido immersa nel fluido all'intero solido, come la gravità specifica

cifica del ſolido a quella del fluido. Che è ciò, che biſognava dimoſtrare.

Ed ecco gia che col ſolo principio delle azioni ſi ſono ſtabilite, e dimoſtrate tutte le leggi fondamentali dell' Idroſtatica; Che era lo ſcopo principale di queſto capitolo.

CAPITOLO VIII.

Del metodo, con cui trattar ſi poſſono le curve d' equilibrio col principio delle azioni.

CXLIV.

FRa le più belle teorie, che, ſcoperto il calcolo degl'infiniteſimi, nacquero nel ſecolo paſſato, celebre è quella delle curve d'equilibrio. Tutti gli Autori, che di eſſe han trattato, per eſaminarne la natura, e le proprietà, han ſempre fatto uſo del principio della compoſizione, e riſoluzion delle forze, col quale in vero è incredibile con quanta facilità, ed eleganza ſi riſolvono i problemi di queſto genere. Non è però, che eſſi riſolver non ſi poſſano, ſe non colla ſteſſa facilità, con egual eleganza almeno, anche col principio delle azioni, che è il vero, e general principio della natura, dal quale tutti gli altri come dal proprio fonte derivano. Queſto per l' appunto è quello , che si vedrà dimostrato in questo capitolo, con cui darem fine all'intrapreso ragionamento.

CLXV.

Fra tutte le curve d'equilibrio prenderemo di mira quelle, che diconsi catenarie, e fra queste quella, che chiamasi catenaria comune, cioè quella, che in tutta la sua lunghezza supponesi esser egualmente grave; poichè dalla maniera, con cui per mezzo del principio delle azioni tratteremo questa specie di catenarie, potrà intendersi agevolmente qual metodo debba tenersi per trattare col principio stesso ogni altra qualunque curva d'equilibrio.

CLXVI.

Sia perciò (*Fig.* 30.) A G B F C una curva catenaria qualunque riferita all' asse, che riguardi o la parte concava, come è A C, o la parte convessa, come è I K; le ordinate siano $= u$, le ascisse $= x$. In questa curva ora concepiscasi nascer un moto infinitesimo, per cui essa lasciando il sito A G B F C, passi ad un altro sito qualunque A D B E C. Egli è manifesto, che in questo moto infinitesimo le ordinate u, che rappresentano le distanze degli elementi della curva dalla linea A C, oppure dalla linea I K, in alcuni luoghi crescono, in alcuni altri decrecrescono di una infinitesima quantità; giacchè nel moto infinitesimo già detto alcuni elementi della curva s'avvicinano per uno spazio infinitesimo alla linea A C, ovvero alla linea I K, alcuni altri dalla linea stessa per uno spazio infinitesimo s'allontanano. Quantunque però i predetti incrementi, e decrementi infinitesimi alle ordinate u s' appartengano, nulladimeno son diversi da quelli, che sogliono chiamarsi du, e che rappresentano le differenze tra le ordinate u infinitamente tra loro vicine. Per evitar dunque ogni confusione ed equivoco, metteremo questi tali incrementi, e decrementi delle $u = d\omega$. Il principio delle azioni richiede, che in tutti gli equilibrj, fatto un moto infinitesimo, la somma de' prodotti di ciascuna potenza moltiplicata per lo rispettivo suo spazietto d' accesso, o di recesso fatti da una parte debba esser uguale alla somma de' simili prodotti fatti dalla parte contraria. Ma la cateneria è curva d' equilibrio. Dunque, chiamato l' elemento di questa curva $= ds$, la gravità $= g$, onde il peso dell'elemento ds sia $= g\,ds$, e supposto l'asse A C, oppure I K orizzontale, deve essere la somma de' prodotti $g\,ds \,.\, d\omega$ positivi uguale alla somma de' simili prodotti $g\,ds \,.\, d\omega$ negativi; e per conseguenza $\int g\,ds \,.\, d\omega$, che contiene tanto i prodotti $g\,ds \,.\, d\omega$ positivi, quanto i prodotti $g\,ds \,.\, d\omega$ negativi, deve essere $= o$; onde la quantità, di cui $\int g\,ds \,.\, d\omega$ è differenziale sarà una quantità rappresenſentante un maſſimo, o un minimo. Quindi ſe nelle varie ipoteſi, che far ſi poſſono intorno alla gravità degli elementi della catenaria, ſi determinerà qual ſia quella quantità, di cui $\int g\, d s . d \omega$ è differenziale, e una tal quantità differenziata ſi metterà $= o$, s'avrà ſenza dubbio l'equazione di quella catenaria, che ſi vuole.

CLXVII.

Per dare di quanto ſi è detto un' eſempio prendiamo a conſiderare la cataneria comune, che ſuppongaſi eſſere A G B F C. Poichè in queſta catenaria la gravità in tutti gli elementi $d s$ è l' iſteſſa, potrà nella formola differenziale $\int g\, d s . d \omega$ torſi di mezzo il g; onde per ritrovare l'equazione della catenaria comune, dovrà determinarſi la quantità di cui non $S g\, d s . d \omega$, ma $\int d s . d \omega$ ſia differentiale. Perciò la catenaria (*Fig.* 30. *e* 31.) A G B F C ſi ſtenda, e ſi riduca in una linea retta L H, in maniera però, che agl' iſteſſi punti della catenaria così eſteſa reſtino applicate le medeſime ordinate u. In tal maniera, è manifeſto, che ſi formerà un' altra curva H N K O L, nella quale facendo gli archi della catenaria le veci di aſciſſe, ed eſſendo le ordinate quelle ſteſſe u della catenaria A G B F C, ſarà l' area H N K O L $= \int u\, d s$. Ora, fatto nella catenaria A G B F C, un moto infiniteſimo, per cui paſſi in A D B E C, e ſtendendo queſta curva A D B E C, e riducendo-

la

la in una linea retta LH in maniera, che ne' medesimi punti restino applicate le stesse ordinate, s' avrà la curva HPKML, le di cui ordinate differiscono da quelle della curva HNKOL della quantità $d\omega$, come manifestamente apparisce. Si menino le due ordinate SN, TQ infinitamente tra loro vicine, le quali incontrino la curva HPKML ne' punti P, R, e la curva HNKOL ne' punti N, Q, e sarà PNQR il differentiale dell' elemento dell' area SNQT $= u\,ds$. Ma PNQR, potendosi considerare come un parallelogrammo, calata dal punto P la retta PU perpendicolare alla TQ, è $=$ PN. PU $= ds.d\omega$. Dunque $ds.d\omega$ è il differentiale dell'elemento $u\,ds$ dell'area HNKOL $= \int u\,ds$, e per conseguenza $\int ds.d\omega$ è il differenziale di $\int u\,ds$. Ma abbiam già veduto esser $\int ds.d\omega = o$. Dunque la quantità $\int u\,ds$ deve essere, o un massimo, o un minimo, cioè un massimo, se la catenaria AGBFC si riferirà all' asse AC, che riguarda la parte concava, un minimo poi, se si riferirà all' asse IK, che riguarda la parte convessa della catenaria stessa.

CXLVIII.

La catenaria comune dunque è di tale natura, che fra tutte le curve della stessa lunghezza, e che terminano in due medesimi punti, ha la quantità $\int u\,ds$ massima, o mi-

minima. Sicchè per ritrovare l' equazione della catenaria comune, bisogna risolvere il seguente problema: *Fra tutte le curve della stessa lunghezza, e che terminano in due medesimi punti, ritrovar quella, in cui* $\int u\,ds$ *sia massima, o minima*. Si mettano perciò le ascisse $= x$, le ordinate $= u$, onde sia $ds = \sqrt{dx^2 + du^2}$, ed $s = \int \sqrt{dx^2 + du^2}$; e poichè le curve suppongonsi tutte della stessa lunghezza, sarà $\int \sqrt{du^2 + dx^2}$ la proprietà comune. In oltre se è vero, come si è dimostrato, che $\int u\,ds$ è massima, o minima, fatta nella curva un' infinitesima mutazione, la quantità $\int u\,ds$ deve restar invariata. Suppongasi ora dx costante, e $du = p\,dx$, il differenziale della comune proprietà $\int \sqrt{dx^2 + d^2}$, esprimendo nn' l' incremento, o decremento dell' u per l' infinitesima mutazione fatta nella curva, sarà $nn'.\, D\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, e il differenziale della proprietà di massimo, o minimo, cioè della quantità $\int u\,ds$, sarà $= nn'.\, dx\sqrt{1+p^2} - D\frac{up}{\sqrt{1+p^2}}$. Quindi s' avrà l' equazione $nn'.\, D\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = nn'.\, dx\sqrt{1+p^2} - D\frac{up}{\sqrt{1+p^2}}$, la quale moltiplicata per p, ed integrata, diventa $\frac{u}{\sqrt{1+p^2}} = a - \frac{b}{\sqrt{1+p^2}}$, in cui a è la quantità costante d' aggiugnersi nell' integrazione, e b è un' altra costante arbitraria qualunque. Facendo ora in questa equa-

equazione le operazioni opportune, e mettendo in luogo di p il suo valore $\frac{du}{dx}$, s'avrà $dx = \frac{adu}{\sqrt{(b+u)^2 - a^2}}$, e mettendo $b+u = y$, sarà finalmente $dx = \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$, che è per l'appunto la ricercata equazione della catenaria comune. Le quali cose non posson esser oscure, per coloro almeno, che han letto il celebre libro di Leonardo Euler, che ha per titolo: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes*.

CXLIX.

Per ripruova di ciò, cioè, che $dx = \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ sia l'equazione della catenaria comune, andremo a rintracciare l'equazione stessa per mezzo del principio dell'equivalenza. Sia perciò (*Fig.* 32.) dai punti A, e C sospesa per le sue estremità la corda ABC, che suppongasi spogliata affatto di gravità. Si carichi ora questa corda con attaccare a quanti punti si voglia di essa de' pesi K, I, H, ec. Per la gravità di questi pesi la corda formerà un poligono di tanti angoli, quanti sono i pesi stessi, e ciascun lato di esso acquisterà un certo grado di tensione, che si determinerà in appresso. Per ciascun angolo del poligono si menino le rette linee verticali DL, EM, FO, ec., le quali rappresenteranno le direzioni de' pesi K, I, H, ec. Sicchè nel punto K abbiamo tre potenze costituite in equilibrio, cioè la tensione del lato AK per la direzione KA, la tensione del lato KI per la direzione KI, e la gravità del peso K per la verticale direzione KL; onde, prolungata AK in M, e fatto il parallelogrammo KLMI, sarà (per lo principio dell'equivalenza) la tensione del lato AK alla tensione del lato KI come KM : KI, cioè come il seno dell'angolo KIM, o sia dell'angolo KIE, al seno dell'angolo KMI = AKD. Se dunque la tensione del lato AK si metterà = T, e la tensione del lato KI = t, sarà T : t : : *sen.* KIE : *sen.* AKD, e moltiplicando gli estremi, e i medj, sarà T . *sen.* AKD = t . *sen.* KIE. Similmente nel punto I abbiamo anche tre potenze costituite in equilibrio, cioè la tensione del lato KI per la direzione IK, la tensione del lato IH per la direzione IH, e 'l peso I per la direzione verticale IN; onde, prolungata KI in O, e fatto il parallelogrammo INOH, sarà la tensione del lato KI alla tensione del lato IH come IO : IH, cioè come il seno dell'angolo IHO, o sia dell'angolo IHF, al seno dell'angolo IOH = KIE. La tensione del lato KI si è già posta = t, se dunque si metterà = p la tensione del lato IH, sarà t : p : : *sen.* IHF : *sen.* KIE, e moltiplicando gli estremi, e i medj, sarà t . *sen.* KIE = p . *sen.* IHF.

Ma

Ma si è dimostrato *t*. *sen*. KIE = T. *sen*. AKD. Dunque sarà ancora *p*. *sen*. IHF = T. *sen*. AKD. Se si andrà innanzi collo stesso raziocinio, si ritroverà sempre, che il prodotto della tensione di qualsivoglia lato moltiplicata pel seno dell' angolo, che il lato stesso fa colla verticale, è uguale al prodotto, che nasce moltiplicando la tensione di qualunque altro lato pel seno dell' angolo, che colla verticale fa il lato stesso. Dunque il prodotto della tensione di qualunque lato del poligono AKHP ec. moltiplicata pel seno dell' angolo, che il lato stesso fa colla linea verticale, è una quantità costante. E ciò val sempre, ancorchè i pesi K, I, H, ec., attaccati in varj punti della corda ABC siano di numero infiniti, e perciò i lati del poligono AKHP ec. infinitesimi. Ma quando i pesi K, I, H, ec. sono di numero infiniti, e i lati del poligono AK, KI, ec. infinitesimi, allora si ha il caso della catenaria. Dunque anche nella catenaria il prodotto della tensione di qualunque elemento di essa moltiplicata pel seno dell'angolo, che l' elemento stesso fa con una linea verticale, è un prodotto costante. E questa proprietà ricavata col principio dell'equivalenza dalla natura stessa della catenaria, è quella, che guidar ne deve a rintracciare la dilei equazione.

CL.

In tutto questo raziocinio i pesi K, I, H, ec. non si sono supposti uguali. Dunque la proprietà, che abbiam ritrovata, conviene a tutte le sorte di catenarie, cioè tanto a quelle catenarie, che hanno in tutti gli elementi la stessa gravità, quanto a quelle, ne'di cui elementi la gravità è diversa secondo qualunque proporzione. Perlochè coll'ajuto d'una tal proprietà potrebbesi ritrovar l'equazione della catenaria, e nell'ipotesi, che la gravità in tutti gli elementi sia l'istessa, e nell'ipotesi, che in tutti gli elementi la gravità sia diversa. Noi ritroveremo l'equazione solamente nell'ipotesi, che la gravità in tutti gli elementi della catenaria sia l'istessa, giacchè per noi non si è proposto, che di considerare la catenaria comune.

CLI.

Sia dunque (*Fig*. 33.) KBL una curva catenaria nell'ipotesi, che la gravità sia l'istessa in tutti gli elementi. Si tiri una qualunque linea orizzontale DR, e in questa, stabilito il punto A come principio delle ascisse, si prenda una ascissa qualunque AP, e si metta $= x$, a cui corrisponda ad angolo retto l'ordinata $Pf = u$. Infinitamente vicina a questa si tiri un'altra ordinata Rn, e menata la mf

pa-

parallela ad RA, farà $mf = RP = dx$, $mn = du$, ed $nf = \sqrt{dx^2+du^2}$. Se al punto n della curva si tirera la tangente ng, che incontra l'ordinata Pf nel punto g, farà $fg = \frac{ddu}{2}$, come è noto dalla Geometria degl'infinitesimi. Stabilite così le cose, supponendosi la gravità in ciascun elemento della curva esser costante, potrà mettersi $= a$, e farà perciò $a\sqrt{dx^2+du^2}$ la gravità dell' elemento nf. Ora la tensione dell'elemento stesso nf si metta $= t$, e farà per lo principio dell' equivalenza $t : a\sqrt{dx^2+du^2} :: nf : fg$, o sia come $\sqrt{dx^2+du^2} : \frac{ddu}{2}$, e perciò $t = 2a. \frac{dx^2+du^2}{ddu}$. Ma per l' esposta proprietà della catenaria il prodotto della tensione dell' elemento nf moltiplicata per lo seno dell'angolo nfq, che l' elemento stesso fa colla linea verticale Pg, deve essere una quantità costante. Dunque posto l' angolo $nfq = \Phi$, farà $2a. \frac{dx^2+du^2}{ddu}$. *Sen.* Φ uguale a una costante, per esempio, $= c^3$. In oltre sia r un raggio qualunque di cerchio, farà per la trigonometria *sen.* $\Phi : r :: nq : nf$, cioè *sen.* $\Phi : r :: dx : \sqrt{dx^2+du^2}$, e perciò *sen.* $\Phi = \frac{rdx}{\sqrt{dx^2+du^2}}$. Perlochè nell'equazione ritrovata $2a. \frac{dx^2+du^2}{ddu}$. *Sen.* $\Phi = c^3$, posto in luogo di *sen.* Φ il suo valore $\frac{rdx}{\sqrt{dx^2+du^2}}$

farà $2a \cdot \frac{dx^2 + du^2}{ddu} \cdot \frac{rdx}{\sqrt{dx^2 + du^2}} = c^3$, o sia $2ardx = \frac{c^3 ddu}{\sqrt{dx^2 + du^2}}$, che è l' equazione della catenaria comune data per differenziali di secondo ordine.

CLII.

Per ridurre ora questa equazione ne' differenziali del primo ordine, l' uno, e l' altro membro di essa si moltiplichi per du, e così nascerà l'equazione $2ardxdu = \frac{c^3 duddu}{\sqrt{dx^2 + du^2}}$ la quale, presa dx per costante, può attualmente integrarsi. Integrando dunque s' avrà $2aurdx + 2arfdx = c^3\sqrt{dx^2 + du^2}$ (il termine $2arfdx$ è la costante da aggiugnersi nell' integrazione) o sia $\overline{u+f} \cdot 2ardx = c^3\sqrt{dx^2 + du^2}$. Se si metterà $u + f = y$, s' avrà $2arydx = c^3\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e quadrando $4a^2r^2y^2dx^2 = c^6dx^2 + c^6dy$; onde si ricava $dx = \frac{c^3dy}{\sqrt{4a^2r^2y^2 - c^6}}$; c, ed r sono quantità costanti da prendersi ad arbitrio; perlochè, posta $c = a$, ed $r = \frac{1}{2}a$, nascerà finalmente $dx = \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$, che è l'equazione della catenaria comune data per gli primi differenziali, ed è quella stessa, che abbiamo ritrovata di sopra per mezzo del principio delle azioni.

CLIII.

CLIII.

Questa equazione, come manifestamente apparisce, non può algebraicamente integrarsi. Dunque la catenaria comune, cioè quella catenaria, che in tutti gli elementi supponesi aver la stessa gravità, è curva trascendente. Non è dunque parabola, come avvisò Galileo (a); poichè la parabola, come è a tutti noto, è una curva algebraica.

CLIV.

Per integrar ora trascendentemente l'equazione della catenaria comune $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ ritrovata con due diversi principj, si metta $\sqrt{y^2 - a^2} = z - y$; onde s'avrà $y = \frac{z^2 + a^2}{2z}$ $\sqrt{y^2 - a^2} = z - y = z - \frac{z^2 - a^2}{2z} = \frac{z^2 - a^2}{2z}$, e $dy = \frac{z^2 - a^2}{2z^2} . dz$. Se dunque nell'equazione $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ in vece di dy, e $\sqrt{y^2 - a^2}$ metteremo i loro valori dati per z, sarà $dx = \frac{a . \frac{z^2 - a^2}{2z^2} . dz}{\frac{z^2 - a^2}{2z}}$, o sia $dx = \frac{a\,dz}{z}$ la qual' equazione, come è manifesto, appartiene alla Logistica. Per lo che integrando fa-

(a) Dialogo 2. p. 85.

farà $x = lz$ nella Logaritmica, di cui tanto la fottotangente, quanto il protonumero è $= a$. E in questa integrazione non deve aggiugnersi alcuna costante, purchè il principio delle ascisse della Logaritmica, e 'l principio delle ascisse della catenaria si stabiliscano in un istesso punto, cioè in quel punto, in cui è $la = o$.

CLV.

Quindi coll' ajuto della Logaritmica la catenaria comune potrà senza gran difficoltà costituirsi. Poichè dal punto A, che abbiamo stabilito per principio d'ascisse nella catenaria, si elevi la retta A B perpendicolare alla retta D R, e presa A B $= a$ per sottotangente, e protonumero, si descriva la logaritmica E B C. Si prenda ora qualunque ascissa P C $= x$; a questa certamente corrisponderà nella Logaritmica l' ordinata P C $= z$; poichè abbiam ritrovato $x = lz$ nella Logaritmica, di cui tanto la sottotangente, quanto il protonumero è $= a$. Abbiam ritrovato in oltre $y = \frac{z^2 + a^2}{2z}$. Per ritrovar dunque nella catenaria l' ordinata y corrispondente all' ascissa x, dall'altra parte della sottotangente si prenda l' ordinata D E dalla sottotangente A B egualmente distante che l' ordinata P C. Per la natura della Logaritmica è P C : A B : :
AB

A B: D E, e perciò D E $= \frac{\overline{AB}^2}{PC} = \frac{a^2}{z}$. Ma la quantità $\frac{z^2 + a^2}{2z}$ è media aritmetica frà z, ed $\frac{a^2}{z}$. Dunque y, cioè l'ordinata, che nella catenaria corrifponde all' afciffa x, è media aritmetica fra P C, D E, cioè fra le ordinanate della Logaritmica dalla fottotangente A B egualmente diftanti. Fra le ordinate dunque P C, D E fi ritrovi la media aritmetica, e fia A S; per lo punto S fi tiri la retta orizzontale F f, la quale fegando le ordinate P C, D E, prolungate anche, fe bifogna, darà nell'interfezioni due punti della catenaria F, f, de'quali uno corrifponde all'afciffa x pofitiva, l'altro all' afciffa x negativa. Ed ecco come per mezzo della Logaritmica può per infiniti punti defcriverfi la catenaria comune.

CLVI.

Poichè alla fteffa x pofitiva, e negativa corrifponde la fteffa y pofitiva, come il calcolo ne dimoftra, è manifefto effer la catenaria comune una curva fimile dall'una, e dall' altra parte della fottotangente A B, la quale perciò prolungata verfo S rapprefenterà l' affe della cateneria fteffa.

CLVII.

In oltre effendo la media aritmetica fra due

due quantità sempre maggiore della media geometrica fra le quantità stesse, egli è chiaro, che in qualunque determinazione della variabile x non sarà giammai A S, o sia y minore di A B. Quando è $x = o$, allora tanto l'ordinata della Logaritmica P C, quanto l'ordinata D E sarà $=$ A B, e per conseguenza A S, o sia y, diventerà anche $=$ A B. Ma A S, o sia y, non può esser minore di A B. Dunque B è il punto infimo della catenaria.

CLVIII.

Ciò per altro potea dimostrarsi ancora in tal maniera: Poichè la catenaria L B K è una curva convessa verso la linea delle ascisse D R, quello sarà senza dubbio il punto infimo di essa, in cui è $dy = o$, cioè quello, in cui il differenziale dy di positivo diventa negativo, o viceversa. Ma, posto $dy = o$, l'equazione $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ diventa $dx\sqrt{y^2 - a^2} = o$, dalla quale si ricava $y = a$. Dunque dove y è $= a$, ivi è $dy = o$, e perciò dove è $y = a$, ivi si avrà l'infimo punto della catenaria. Che è ciò, che bisognava dimostrare.

CLIX.

Passiamo ora a rettificare la catenaria, di cui si tratta. Chiamato s l'arco di qualunque curva, a cui appartenga l'ascissa x, e l'ordinata

nata y, sarà $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ la formola generale delle rettificazioni delle curve. Per venire alla rettificazione della nostra catenaria, bisogna nella formola generale in luogo di dx^2 mettere il suo valore $\frac{a^2 dy^2}{y^2 - a^2}$ ricavato dall'equazione della catenaria stessa $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. Fatta una tal sostituzione, s'avrà $s = \int \sqrt{\frac{a^2 dy^2}{y^2 - a^2} + dy^2}$ $= \sqrt{y^2 - a^2}$. Vediamo se al ritrovato integrale $\sqrt{y^2 - a^2}$ debba aggiugnersi alcuna costante. E' certo per le cose fin' ora divisate, che l'arco della centenaria diventa $= o$ quando è $y = a$. Dunque quando è $y = a$, deve essere $\sqrt{y^2 - a^2} = o$. Ma ponendo $y = a$, è realmente $\sqrt{y^2 - a^2} = o$. Dunque all' integrale $\sqrt{y^2 - a^2}$ non dee farsi alcuna addizion di costante, e per conseguenza l' arco della catenaria è assolutamente $= \sqrt{y^2 - a^2}$.

CLX.

Quindi se nella catenaria si cerca la rettificazione dell' arco Bf, fatto centro nel punto B, e coll' intervallo uguale all' ordinata corrispondente Pf, descritto il cerchio, che seghi la linea delle ascisse D R in H, sarà A H uguale all' arco della catenaria Bf. Poichè tanto Bf, quanto A H è $= \sqrt{y^2 - a^2}$.

CLXI.

CLXI.

Avendo già rettificata la catenaría, rivolgiamoci ora a quadrarla. Chiamata x l'ascissa, ed y l'ordinata di qualsivoglia curva, sarà $\int y\,dx$ la formola generale delle quadrature. Se in questa formola generale in luogo di dx si metterà il suo valore $\frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$ ricavato dall' equazione della catenaria, si farà passaggio alla quadratura della catenaria stessa. Fatta una tale sostituzione, la formola generale si converte in questa $\int\frac{a\,y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$, la quale integrata attualmente è $= a\sqrt{y^2-a^2}$. Nè a questo integrale $a\sqrt{y^2-a^2}$ deve aggiugnersi alcuna costante. Poichè se si prenderà il principio delle aree dall' ordinata A B, che è la sottotangente della Logaritmica, è bastantemente manifesto, che l' area della catenaria deve essere $= o$, quando è $x = o$, o sia quando è $y = a$. Dunque quando è $y = a$, l' integrale $a\sqrt{y^2-a^2}$ deve essere $= o$. Ma realmente ponendo $y = a$ diventa $a\sqrt{y^2-a^2} = o$. Dunque all' integrale $a\sqrt{y^2-a^2}$ non dee farsi alcuna aggiunzion di costante, e perciò l' area della catenaria è assolutamente $= a\sqrt{y^2-a^2}$.

CLXII.

Sicchè se dovesse quadrarsi l' area A B f P, a cui a cui appartiene l'arco Bf, l'ascissa AP, e l'ordinata Pf, col centro B, e coll'intervallo uguale all'ordinata Pf si descriva un cerchio, che tagli la linea delle ascisse nel punto H, e sarà l'area ABfP uguale al rettangolo HA . AB, o sia uguale a due triangoli HAB. Poichè, come è manifesto, tanto il doppio triangolo HAB, quanto l'area ABfP è $= a\sqrt{y^2-a^2}$.

CLXIII.

Essendo a una quantità costante, le aree della catenaria, che si son ritrovate $= a.\sqrt{y^2-a^2}$, saranno nella ragione di $\sqrt{y^2-a^2}$. Ma $\sqrt{y^2-a^2}$ esprime gli archi della catenaria stessa. Dunque nella catenaria comune le aree sono tra loro nella ragione degli archi corrispondenti.

CLXIV.

Quel, che si è detto fin'ora della quadratura della catenaria, riguarda le aree esterne, per quello poi, che riguarda le aree interne, si chiami IB, o sia l'altezza della catenaria $=b$; onde essendo AB$=a$, sarà AI $= a+b$. E' manifesto inoltre, che qualunque area interna IBfT è uguale alla differenza, che passa tra il rettangolo IAPT, e la corrispondente area esterna ABfP. Ma il rettangolo IAPT è $=$ IA . AP $= \overline{a+b}.x$, e l'area esterna IBfT $= a\sqrt{y^2-a^2}$. Dunque qualsivovoglia area interna I B f T, che cominci dall' asse B I, è $= \overline{a+b} \cdot x - a\sqrt{y^2-a^2} = bx - a \cdot \overline{\sqrt{y^2-a^2} - x}$, cioè uguale alla differenza, che passa tra il rettangolo fatto dall' altezza della catenaria, e dalla corrispondente ascissa, e 'l rettangolo fatto dalla sottotangente logaritmica, e dalla differenza, che passa tra l' arco, e l' ascissa della catenaria, la qual differenza, per quel, che si è detto di sopra, è $=$ P H.

CLXV.

Non è da impiegarsi gran tempo per determinare la tangente, la sottotangente, la normale, la sottonormale, e 'l raggio osculatore. Poichè agevolmente dall' eqnazion della catenaria ritrovasi la tangente $= \frac{xy}{a}$

la sottotangente $= \frac{xs}{a}$

la normale $= \frac{xy}{s}$

la sottonormale $= \frac{xa}{s}$

il raggio osculatore $= \frac{y^2}{2a}$

nelle quali formole s esprime l' arco della catenaria, che si è dimostrato $= \sqrt{y^2-a^2}$.

CLXVI.

Del centro di gravità piuttosto sembra, che debba impiegarsi qualche tempo a differire. Poi-

Poichè si è già di sopra dimostrato essere la catenaria comune una curva simile dall' una, e dall' altra parte della retta AI, è bastantemente manifesto, che il centro di gravità di essa deve nella retta stessa AI ritrovarsi. Quindi per determinare il centro di gravità della curva, di cui si tratta, non altro dee farsi, che rintracciare qual sia la distanza di questo centro da un dato piano orizzontale, per esempio dalla linea delle ascisse DR. Per far ciò bisogna richiamar alla memoria quel, che si è detto nel capitolo VI. trattandosi del centro di gravità, cioè, che la distanza del comune centro di gravità di più corpi da un dato piano è uguale alla somma de' prodotti, che nascono moltiplicando ciascun corpo per la rispettiva distanza del suo centro di gravità dal piano dato, divisa per la somma de' corpi stessi; cosicchè chiamando ciascun corpo $= m$, la distanza del centro di gravità di esso dal dato piano $= n$, e la distanza del centro comune di gravità di tutti i corpi dal piano stesso $= u$, sia $u = \frac{\int m n}{\int m}$.

CLXVII.

Passando ora alle curve, mettiamo le ascisse $= x$, le ordinate $= y$, e qualunque elemento della curva $= ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Per determinare la distanza del centro di gravità di una curva qualunque dalla linea delle ascisse se la formola generale sarà $u = \frac{\int g y d s}{\int g d s}$, in cui g denota la gravità, la quale però può torsi di mezzo dalla formola, qualora la gravità si suppone l'istessa in tutti gli elementi, siccome nel caso nostro supponiamo. Tolto dunque di mezzo il g, la formola si contrae a quest'altra $u = \frac{\int y d s}{\int d s}$, e perciò la distanza del centro di gravità della catenaria comune dalla linea delle ascisse D R, oppure L K, è $= \frac{\int y d s}{\int d s}$.

CLXVIII.

Essendosi già dimostrato nel §. 167, che nella catenaria comune $\int y d s$ rappresenta un massimo, o un minimo, anche un massimo, o un minimo rappresenterà $\frac{\int y d s}{\int d s}$, se $\int d s$ si supporrà costante. Quindi fra tutte le curve della stessa lunghezza, e che terminano in due stessi punti, la catenaria è quella, in cui la distanza del centro di gravità dall' asse è massima, o minima, cioè massima se l' asse riguarda la parte concava, minima poi, se l' asse riguarda la parte convessa della medesima catenaria.

CLXIX.

In oltre se le curve, che hanno l' istessa lunghezza, e terminano in due medesimi punti, si faranno rotare intorno all'asse, il centro di di gravità della catenaria, perchè all'asse stesso sommamente vicino, o da esso sommamente distante, descriverà la via massima, o minima. Ma per la regola del Guldino la quantità rotante moltiplicata per la via del centro di gravità dà la quantità, che si genera nella rotazione. Dunque essendo la quantità rotante, cioè il perimetro, costantemente l' istesso in tutte le curve, siccome supponesi, è manifesto, che la superficie, che la catenaria rotando intorno all' asse genera, è la massima, o la minima di tutte le altre; cioè la massima, se la catenaria si riferirà all'asse KL, la minima poi se la catenaria stessa si riferirà all' asse DR.

CLXX.

Per determinar ora precisamente la distanza del centro di gravità della catenaria dall' asse DR, nella formola $u = \frac{\int y\,ds}{\int ds} = \frac{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int\sqrt{dx^2+dy^2}}$

in luogo di dx^2 si metta il suo valore $\frac{a^2\,dy^2}{y^2-a^2}$ ricavato dall'equazione $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$ della catenaria stessa, ed avremo $u = \frac{\int y\sqrt{\frac{a^2dy^2+dy^2}{y^2-a^2}}}{\int\sqrt{\frac{a^2dy^2+dy^2}{y^2-a^2}}}$ $= \frac{\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}}{\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}}$. Di questa formola il denominatore può attualmente integrarsi; poichè è $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \sqrt{y^2-a^2}$; nè in questa integrazione si ricerca alcuna addizion di costante; esprimendo realmente $\sqrt{y^2-a^2}$ la somma di tutti gli elementi della catenaria, come nel rettificare la catenaria stessa si è di sopra veduto.

CLXXI.

Per integrar ora attualmente il numeratore $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}$ della formola $\frac{\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}}{\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}}}$, si metta $\sqrt{y^2-a^2} = z-y$, cosicchè si abbia $y = \frac{z^2+a^2}{2z}$, $y^2 = \overline{\frac{z^2+a^2}{4z^2}}^2$, $dy = \frac{z^2-a^2}{2z^2}.dz$, e $\sqrt{y^2-a^2} = \frac{z^2-a^2}{2z}$. Fatte le necessarie sostituzioni, sarà $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2-a^2}} = \int \frac{\overline{\frac{z^2-a^2}{4z^2}}^2 . \frac{z^2-a^2}{2z^2}.dz}{\frac{z^2-a^2}{2z}}$

$= \int \overline{\frac{z^2+a^2}{4z^3}}^2 .dz = \int \frac{z^4+2a^2z^2+a^4}{4z^3}.dz$

$= \int \frac{zdz}{4} + \frac{a^4dz}{4z^3} + \frac{a^2dz}{2z} = \frac{z^2}{8} - \frac{a^4}{8z^2} + \frac{a}{2}lz$ nella logaritmica, di cui tanto la sottotangente, quan-

quanto il protonumero è $= a$. Nè in queſta integrazione deve aggiugnerſi alcuna coſtante. Poichè eſprimendo $\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$ la ſomma de' prodotti, che naſcono moltiplicando ciaſcun elemento della curva per la riſpettiva ordinata, è manifeſto baſtantemente dover eſſere $\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = o$, quando è $y = a$. Dunque l' integrale $\frac{z^2}{8} - \frac{a^4}{8z^2} + \frac{a}{2} \cdot l z$ deve eſſere $= o$, quando è $\frac{z^2 + a^2}{2z} = a$, o ſia quando è $z = a$. Ma, poſta $z = a$, è realmente $\frac{z^2}{8} - \frac{a^4}{8z^2} + \frac{a}{2} \cdot l z = o$. Dunque al ritrovato integrale $\frac{z^2}{8} - \frac{a^4}{8z^2} + \frac{a}{2} \cdot l z$ non deve aggiugnerſi alcuna coſtante.

Poichè dunque (ſuppoſta $\sqrt{y^2 - a^2} = z - y$) è $\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{z^2}{8} - \frac{a^4}{8z^2} + \frac{a}{2} \cdot l z$, e $\int \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{z^2 - a^2}{2z}$, ſarà $u = \frac{\frac{z^2}{8} - \frac{a^4}{8z^2} + \frac{a}{2} \cdot l z}{\frac{z^2 - a^2}{2z}}$

$$= \frac{z^4 - a^4 + 4az^2 lz}{4z \cdot \overline{z^2 - a^2}} = \frac{\overline{z^2 - a^2} \cdot \overline{z^2 + a^2} + 4az^2 lz}{4z \cdot \overline{z^2 - a^2}} =$$

$\frac{z^2 + a^2}{4z} + \frac{a z l z}{z^2 - a^2} = \frac{z^2 + a^2}{2 \cdot 2z} + \frac{\frac{1}{2} a l z}{\frac{z^2 - a^2}{2z}}$. Ma abbiam ve-

 duto

duto essere $\frac{z^2+a^2}{2z}=y$, $\frac{z^2-a^2}{2z}=\sqrt{y^2-a^2}$, e per la costruzione della catenaria $x=lz$ nella logaritmica, di cui tanto la sottotangente, quanto il protonumero è $=a$. Dunque fatte, come conviene, le sostituzioni, sarà finalmente u, cioè la distanza del centro di gravità della catenaria del piano D R $=\frac{y}{2}+\frac{ax}{2\sqrt{y^2-a^2}}$, il qual valore come debba costruirsi, è da se manifestamente chiaro.

CLXXII.

Se dunque si cercherà il centro di gravità del perimetro della catenaria (*Fig.* 34.) K B L, a cui s' appartiene l' ascissa A E, e l' ordinata E L, può procedersi in tal maniera. L' ordinata L E si divida in F in due parti uguali, e per lo punto F tirata la retta orizzontale M F, questa si promulghi in Q fin a tanto che sarà M Q uguale al perimetro K B L. Si prolunghi ancora M T in H fin a tanto che sarà M H $=$ A B, e si meni la retta H Q. Tirata finalmente dal punto F la retta F O parallela ad H Q, la quale seghi M H in O, sarà O il ricercato centro di gravità. Poichè essendo M Q $=2\sqrt{y^2-a^2}$, M H $=$ A B $=a$, ed M F $=$ A E $=x$, sarà M O $=\frac{ax}{2\sqrt{y^2-a^2}}$; poichè per la nota proprietà del triangolo è M Q : M F : : M H : M O. E' in in oltre A M $=$ E F $= \frac{y}{2}$. Dunque ſarà A O $= \frac{y}{2} + \frac{ax}{2\sqrt{y^2 - a^2}}$. Che è quel, che biſognava dimoſtrare.

CLXXIII.

Tutto ciò appartiene al centro di gravità del perimetro della catenaria. Per ritrovar ora il centro di gravità dell' area della catenaria ſteſſa, la coſa può trattarſi in tal maniera. L'elemento dell'area è $= \frac{ay\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}$. Il centro di gravità di queſt' elemento è diſtante dalla linea delle aſciſſe per la quantità $\frac{y}{2}$. Dunque la diſtanza del centro di gravità di tutta l'area dalla linea ſteſſa delle aſciſſe è $= \frac{\int \frac{ay^2\,dy}{2\sqrt{y^2 - a^2}}}{\int \frac{ay\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}}$ ſenza aggiunzione di alcuna coſtante; lo che è chiariſſimo per le coſe dette di ſopra. Ma la diſtanza del centro di gravità del perimetro dalla linea già detta è, come abbiamo veduto, $= \frac{\int \frac{ay^2\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}}{\int \frac{ay\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}}$

Dunque paragonando tra loro queſte due formole, la diſtanza del centro di gravità del

pe-

perimetro della catenaria dalla linea delle asciſſe è doppia della diſtanza del centro di gravità dell'area dalla linea ſteſſa. Eſſendoſi dunque ritrovato il centro di gravità del perimetro della catenaria eſſer il punto O, diviſa A O in due parti uguali in S, ſarà S il centro di gravità dell' area della ſteſſa catenaria.

CLXXIV.

Il punto S, come è manifeſto, è il centro di gravità dell' area eſterna K P E L B. Ma eſſendo il centro di gravità dello ſpazio rettangolo K P E L il punto M, che divide in due parti uguali la A T, ſe ſi farà come l'area interna K B L all'area eſterna K P E L B, così M S ad M R, ſi ritroverà il punto R, che è il centro di gravità dell' area interna K B L. La ragione di ciò è così chiara, e manifeſta per la natura ſteſſa del centro di gravità, che ſarebbe affatto inutile volerlo di vantaggio dilucidare.

CLXXV.

Per la perfetta teoria del problema della catenaria comune altro a far non reſta, che moſtrar il metodo, col quale può deſcriverſi la catenaria ſteſſa, o dato il perimetro, e la ſaetta (cioè l'altezza), o dato il perimetro, e la ſotteſa (cioè la baſe), o finalmente data la baſe, e l'altezza. In tutti queſti caſi è neceſcessario determinare la quantità a, cioè la sottotangente Logaritmatica, senza la quale la descrizione della catenaria non potrebbe in alcun modo ottenersi.

CLXXIV.

Nel primo caso la quantità a si determina facilmente; poichè essendo $s = \sqrt{y^2 - a^2}$, se si metterà $s = b$, e l'altezza $= c$, sarà $y = a + c$; onde deducesi $a = \frac{b^2 - c^2}{2c}$.

CLXXVII.

Negli altri due casi però la predetta determinazione apporta non picciola difficoltà, nè giammai, per quanti autori abbia letto, ho ritrovato trattato quest'articolo. Nulla dimeno ho proccurato ottenere la determinazione predetta per mezzo dell'intersezione delle curve, ed è il tutto succeduto felicemente, secondo il desiderio. Poichè essendo $dx = \frac{adz}{z}$ per l'equazione della curva, sarà $dx = \frac{cadz}{cz}$, ed $x = \frac{a}{c} lz + A$ nella Logaritmica, di cui tanto la sottotangente, quanto il protonumero è $= c$. Ma, fatta $x = o$, diventa y, e similmente $z = a$, come si è di sopra veduto. Dunque in questo caso sarà $A = -\frac{a}{c} l a$ nella logaritmica, che ha e la sotto-totangente, e il protonumero $= c$. Quindi $x = \frac{a}{c}\, l z a - l a = \frac{a}{c}\, l\, \frac{cz}{a}$. Poichè la base, e'l perimetro si suppongono dati, si metta $x = c$, e'l perimetro della curva $= b$, sarà, come è manifesto, $cc = a\, l \frac{c}{a}.\ \overline{\sqrt{b^2 + a^2} + b}$; similmente essendo $z - b = \sqrt{b^2 + a^2}$, sarà $zz - 2bz = a^2$; le quali due equazioni per mezzo delle interſezioni delle curve ci conducono direttamente a determinare la quantità a.

CLXXVIII.

Coll'isteſſo raziocinio, quando è data la base, e l'altezza della catenaria, chiamata l'altezza $= m$, ed $x = c$, si ritrovano l'equazioni $cc = a\, l \frac{c}{a} \overline{\sqrt{2ma + m^2} + a + m}$, e $x^2 \begin{smallmatrix} -2za \\ -2mz \end{smallmatrix} + a^2 = o$, le quali ci conducono similmente alla determinazione della quantità a per mezzo dell'interſezioni delle curve.

IL FINE.

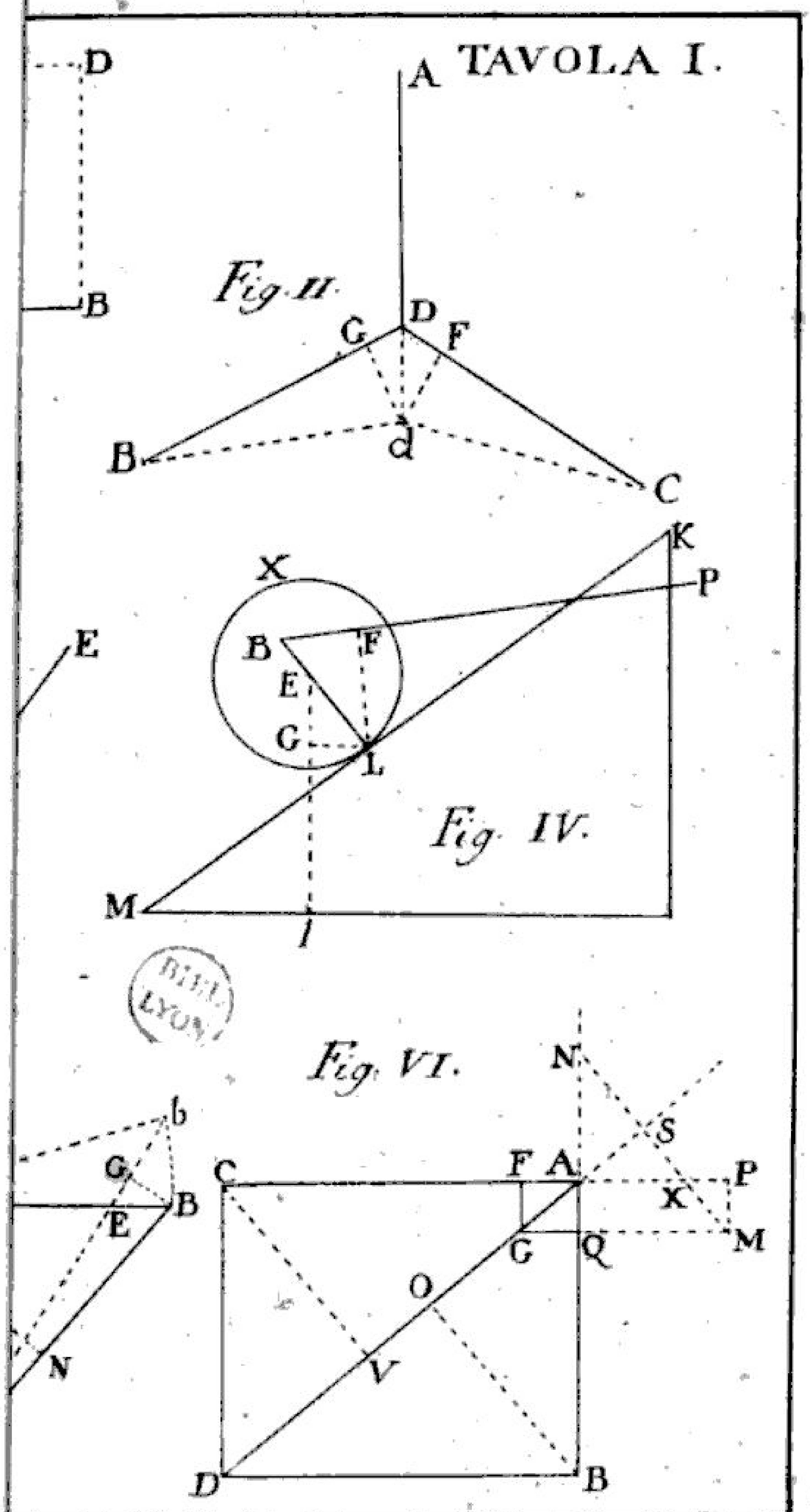


TAVOLA I.
Fig. II.
Fig. IV.
Fig. VI.

TAVOLA II.

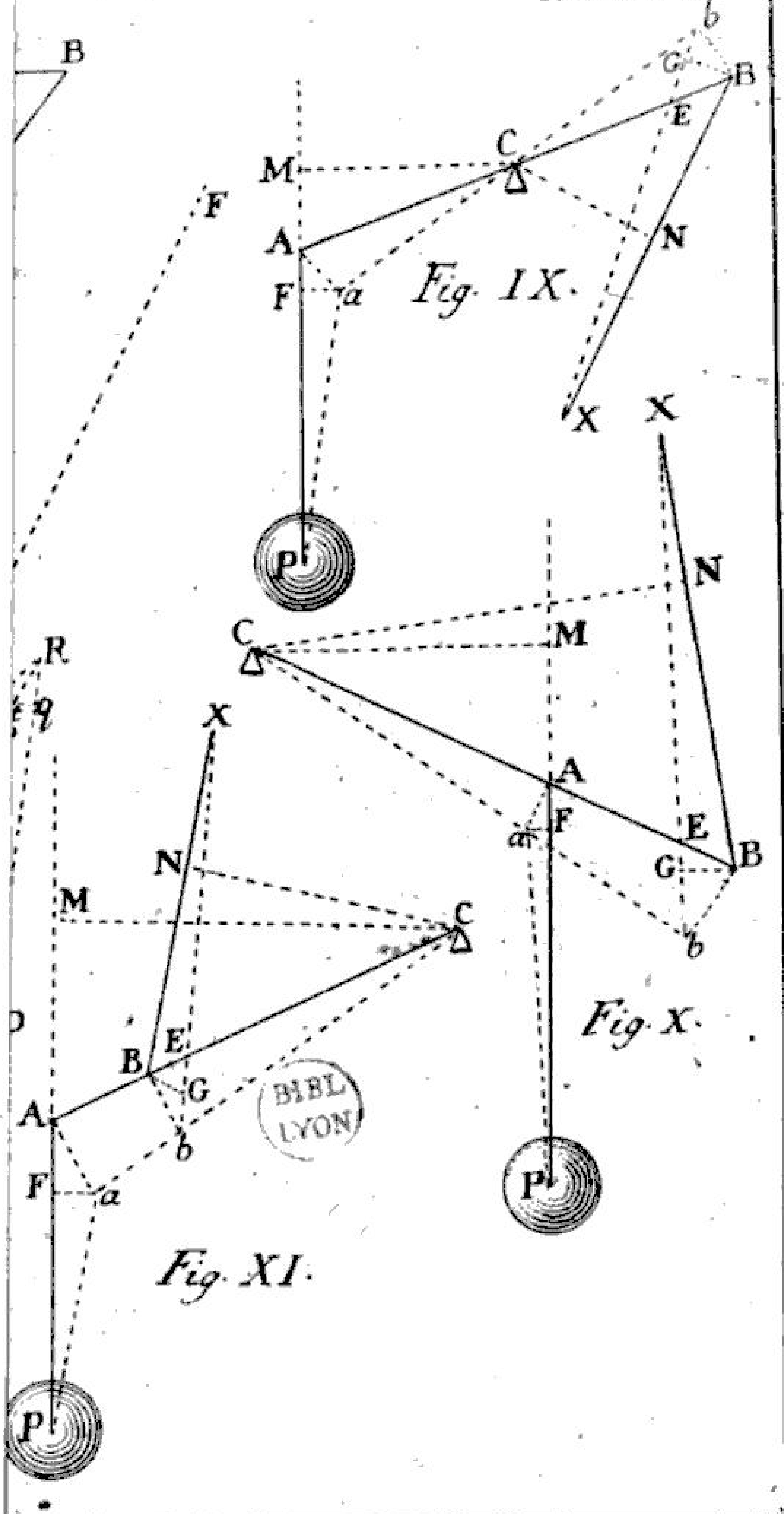


Fig. IX.

Fig. X.

Fig. XI.

TAVOLA III.

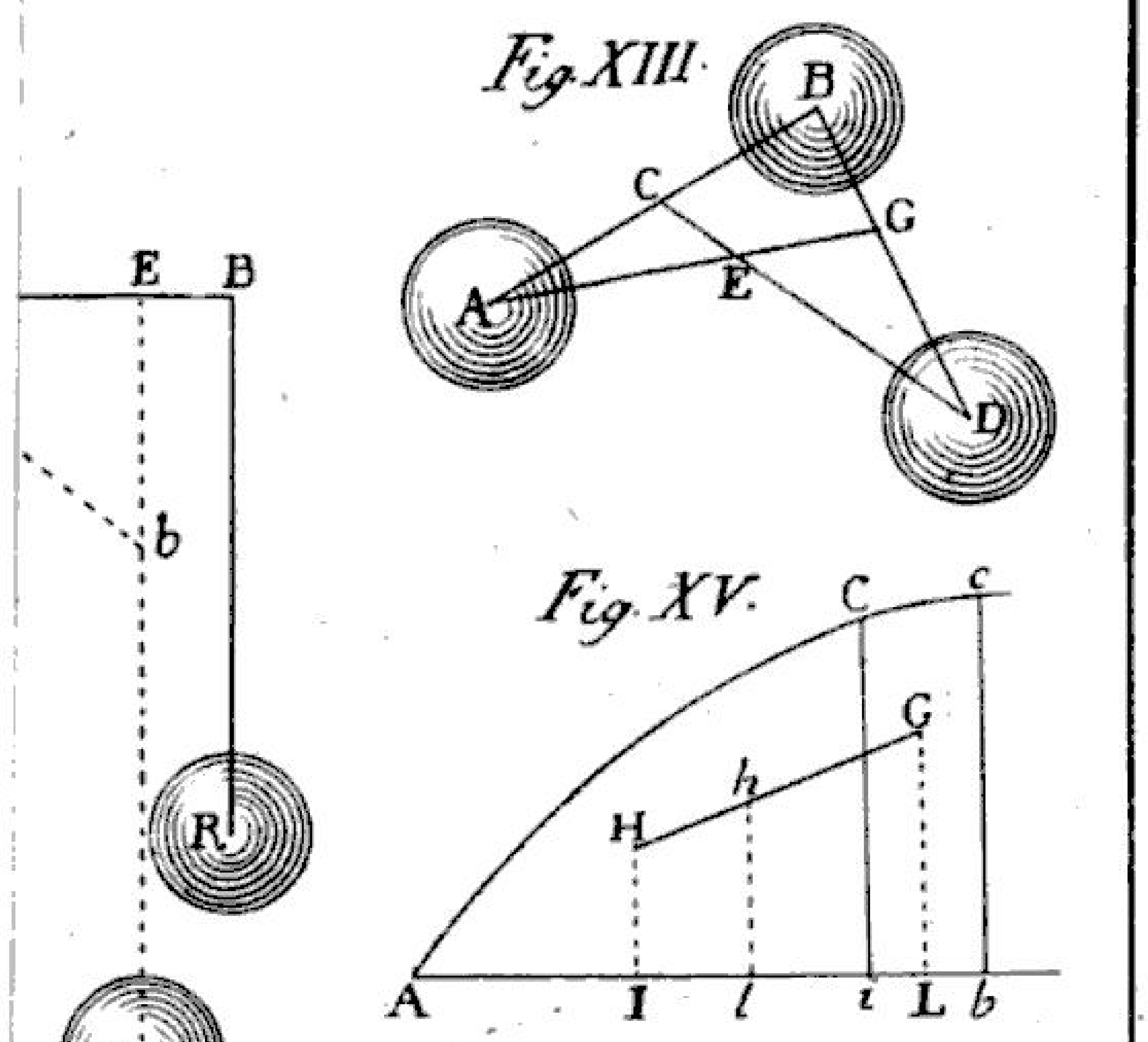


TAVOLA IV.

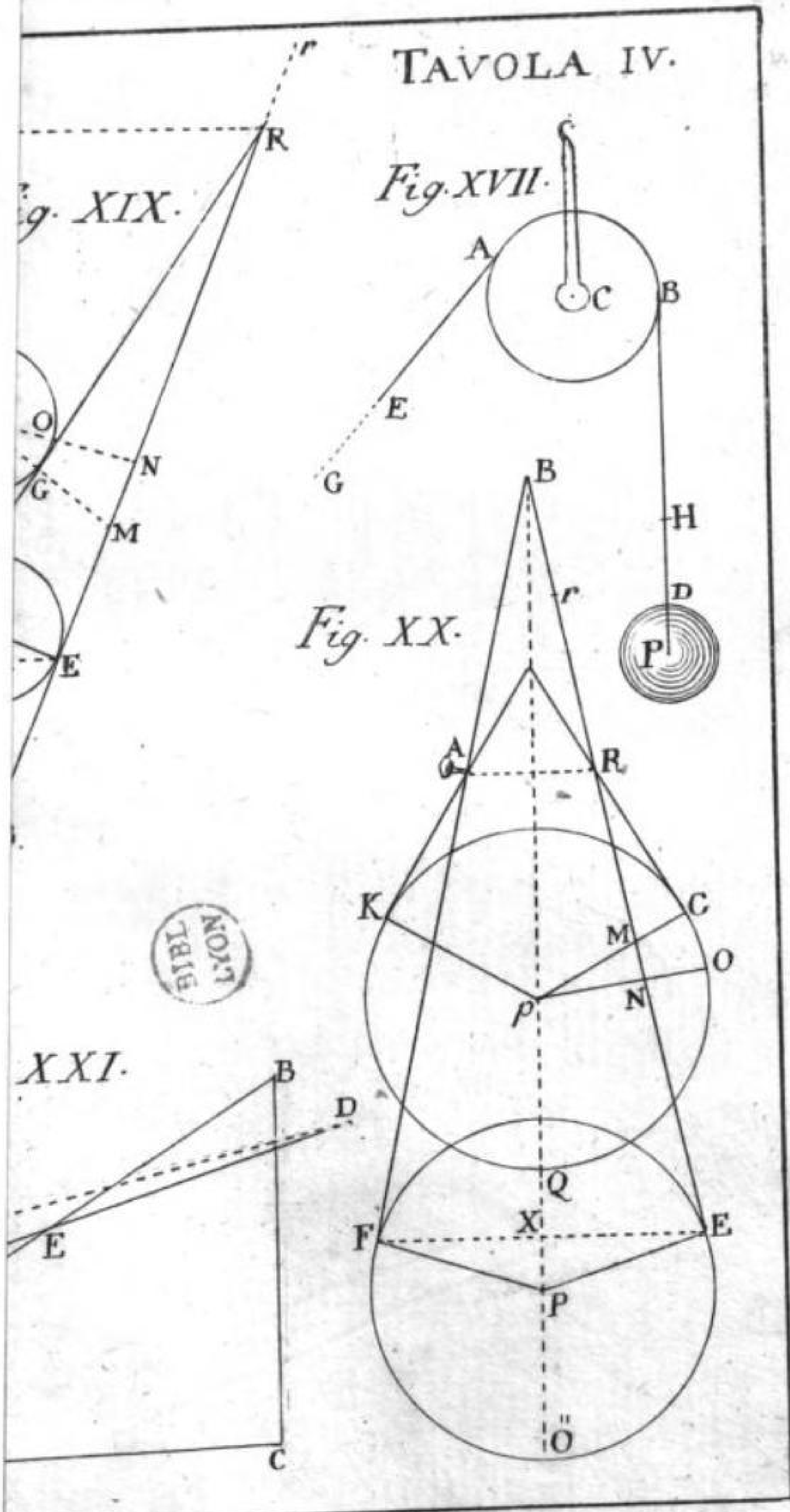


TAVOLA V.

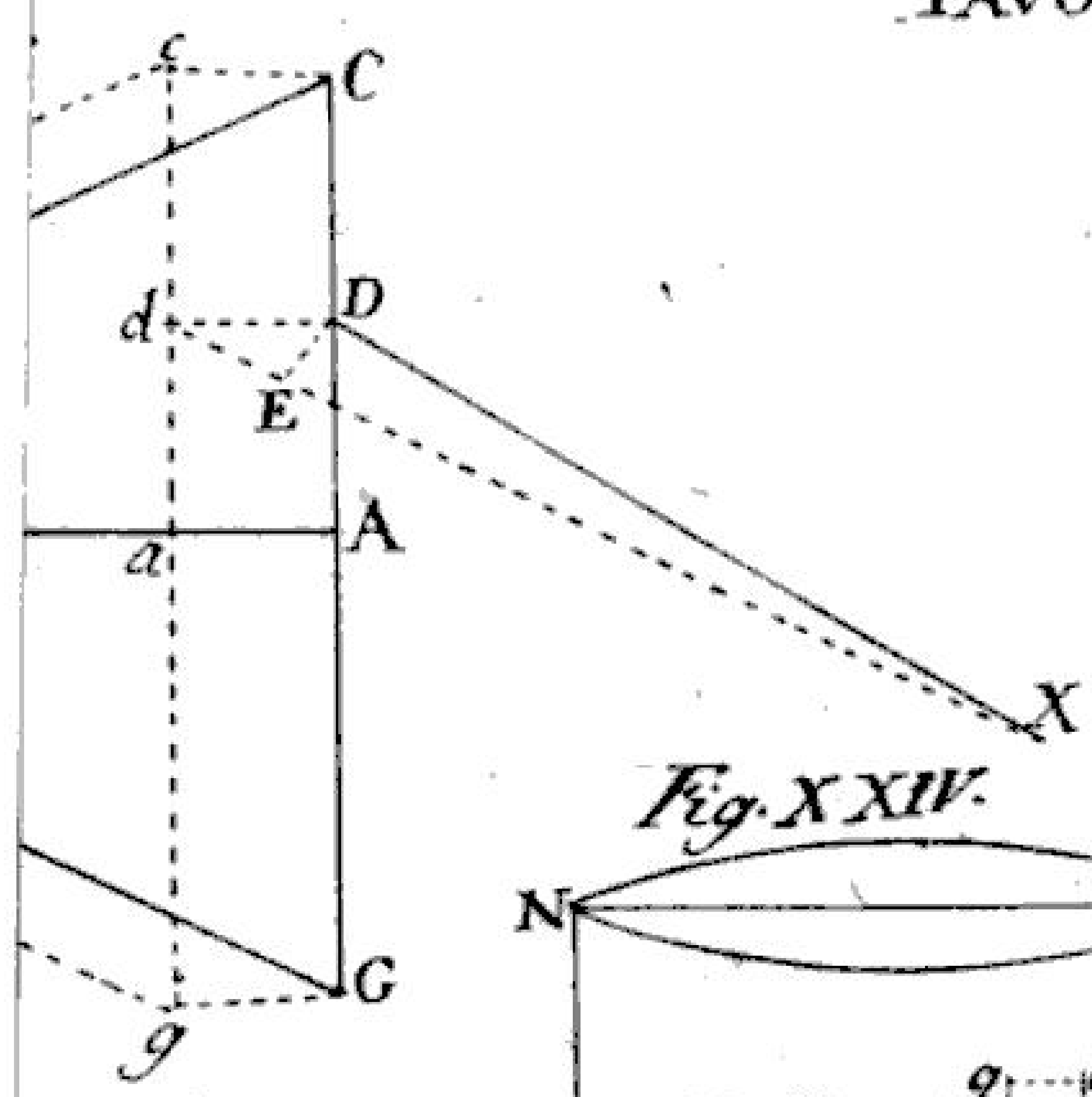


Fig. XXIV.

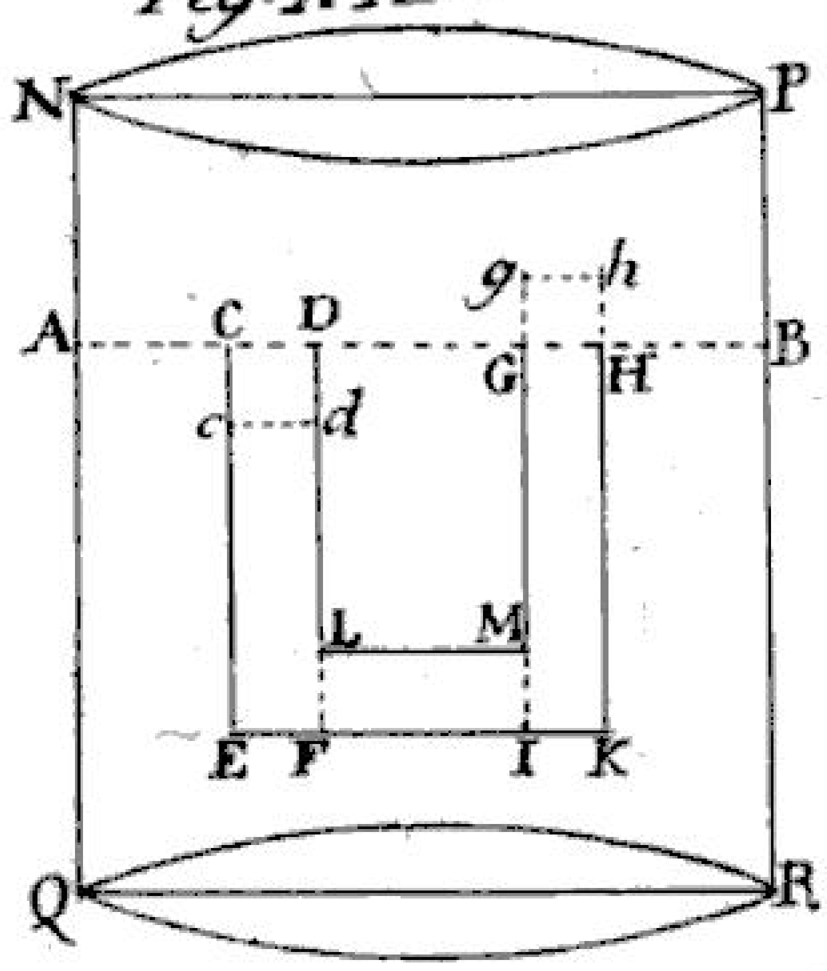
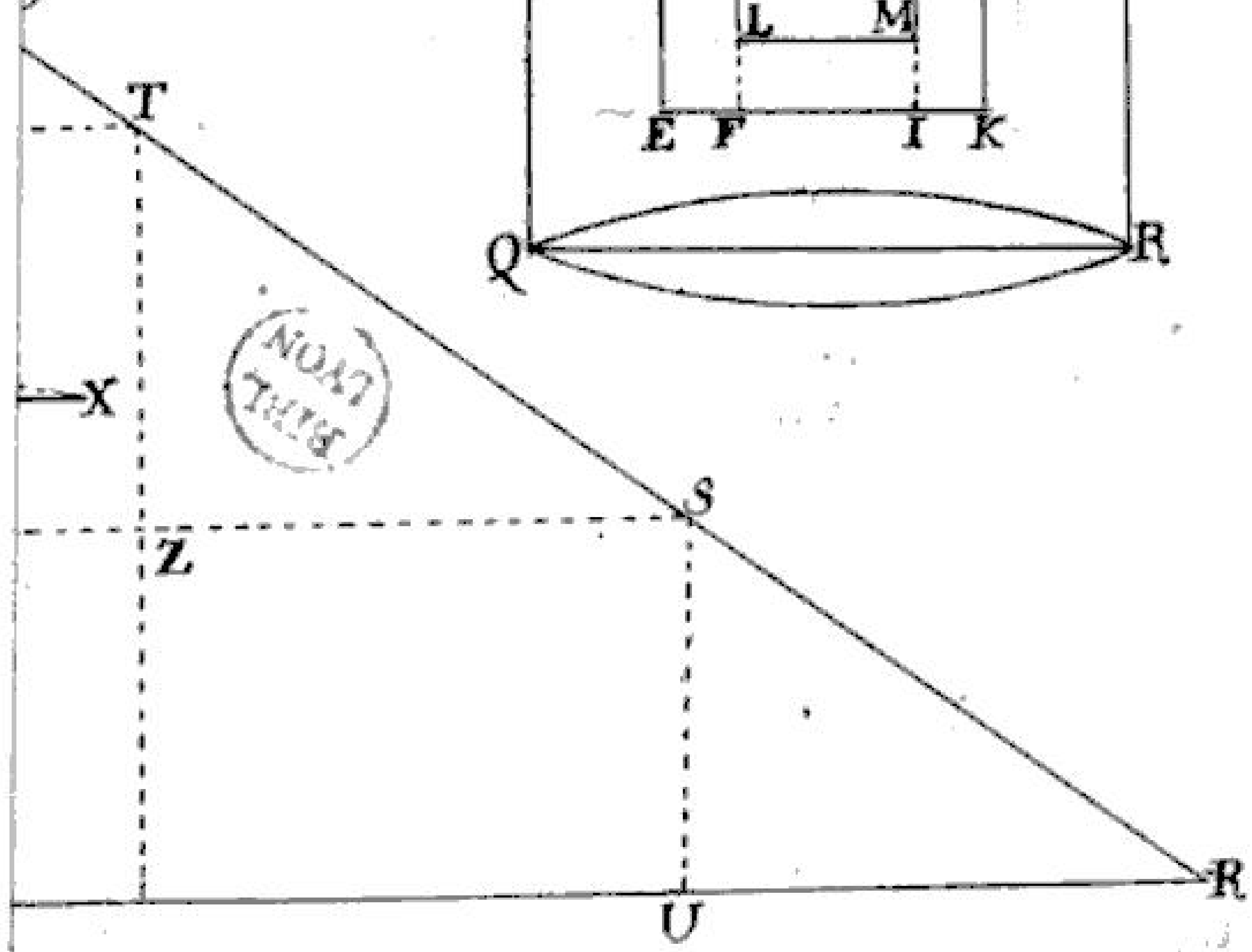


Fig. XXIII.



g. XXV.

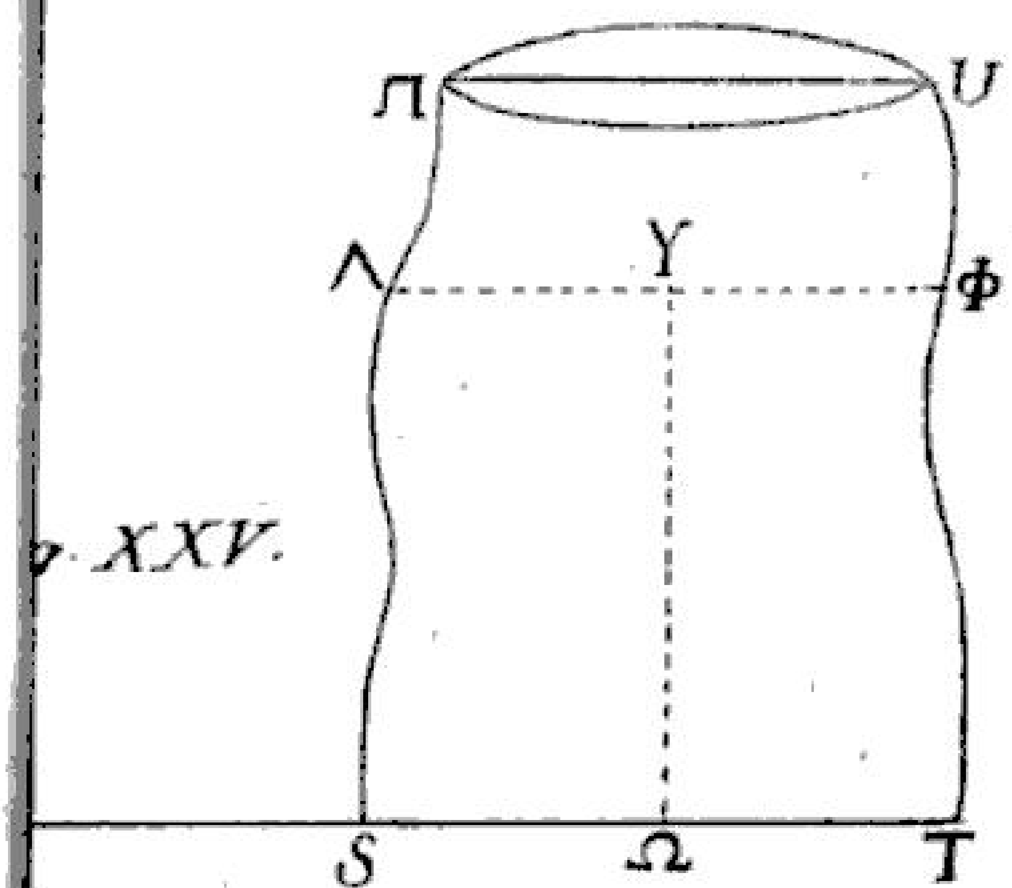


Fig. XXVI.

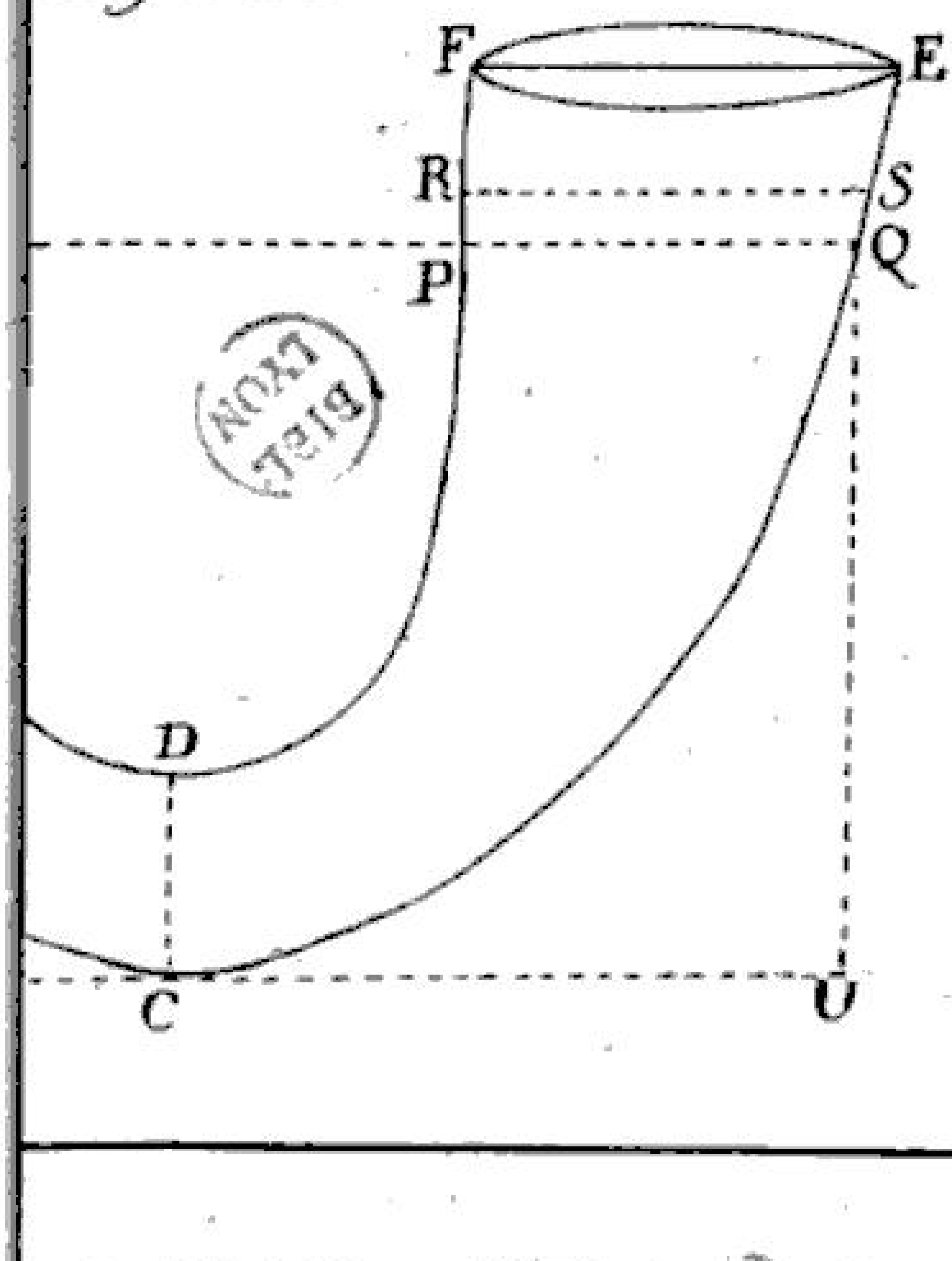
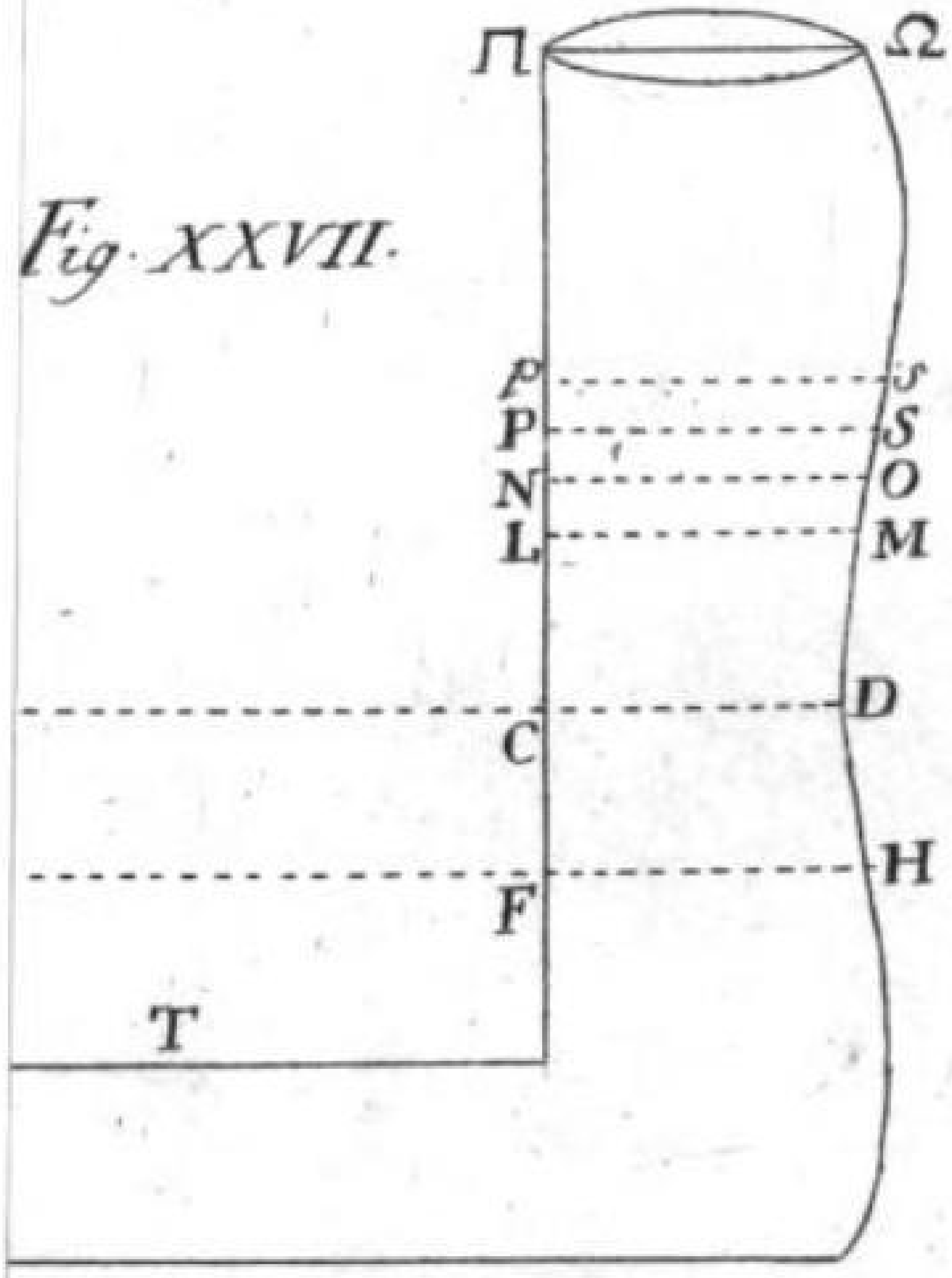


Fig. XXVII.



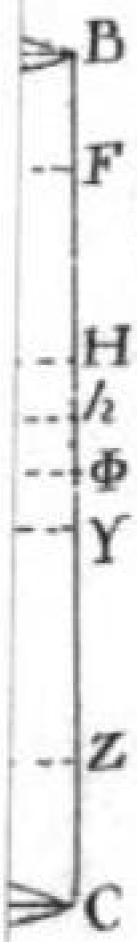


Fig. XXIX.

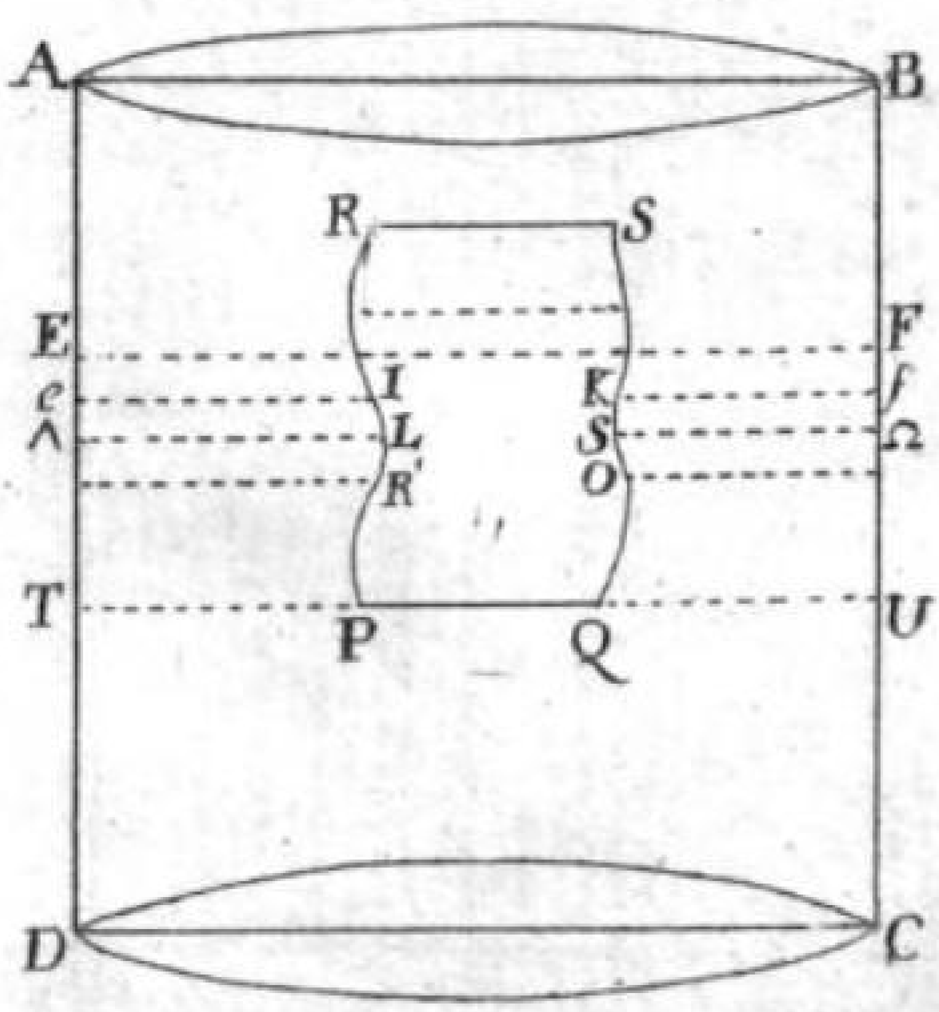


TAVOLA VIII

Fig. XXXI

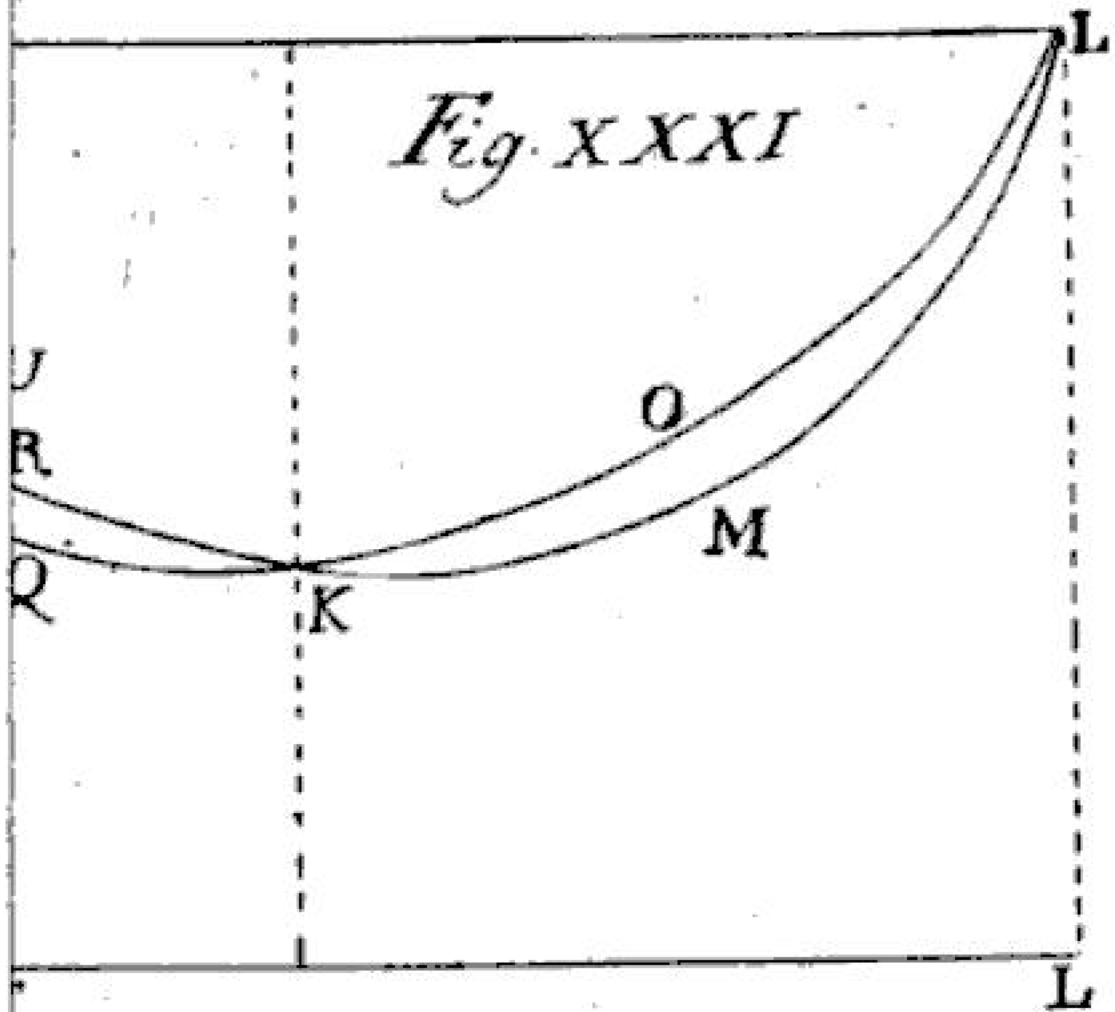
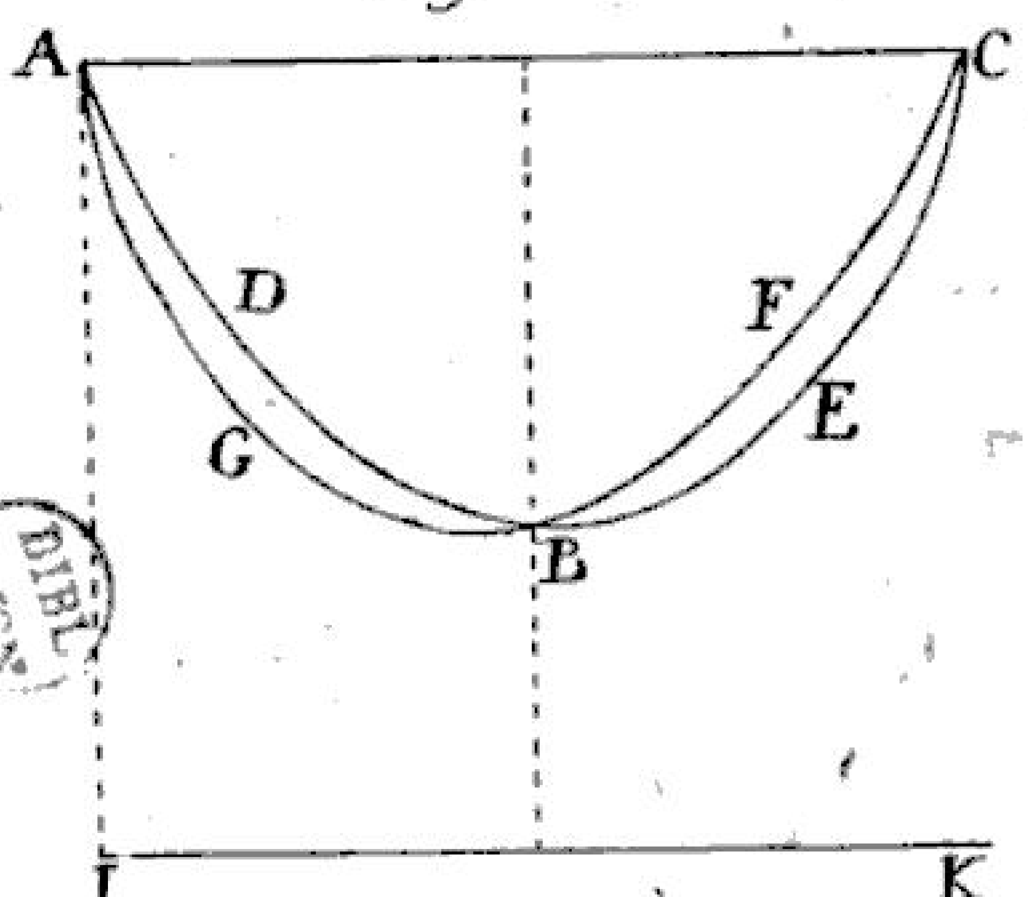
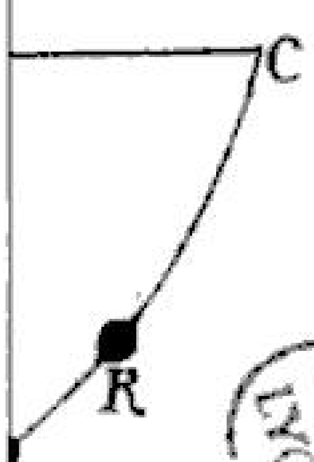


Fig. XXX



XXII.



XXXIII

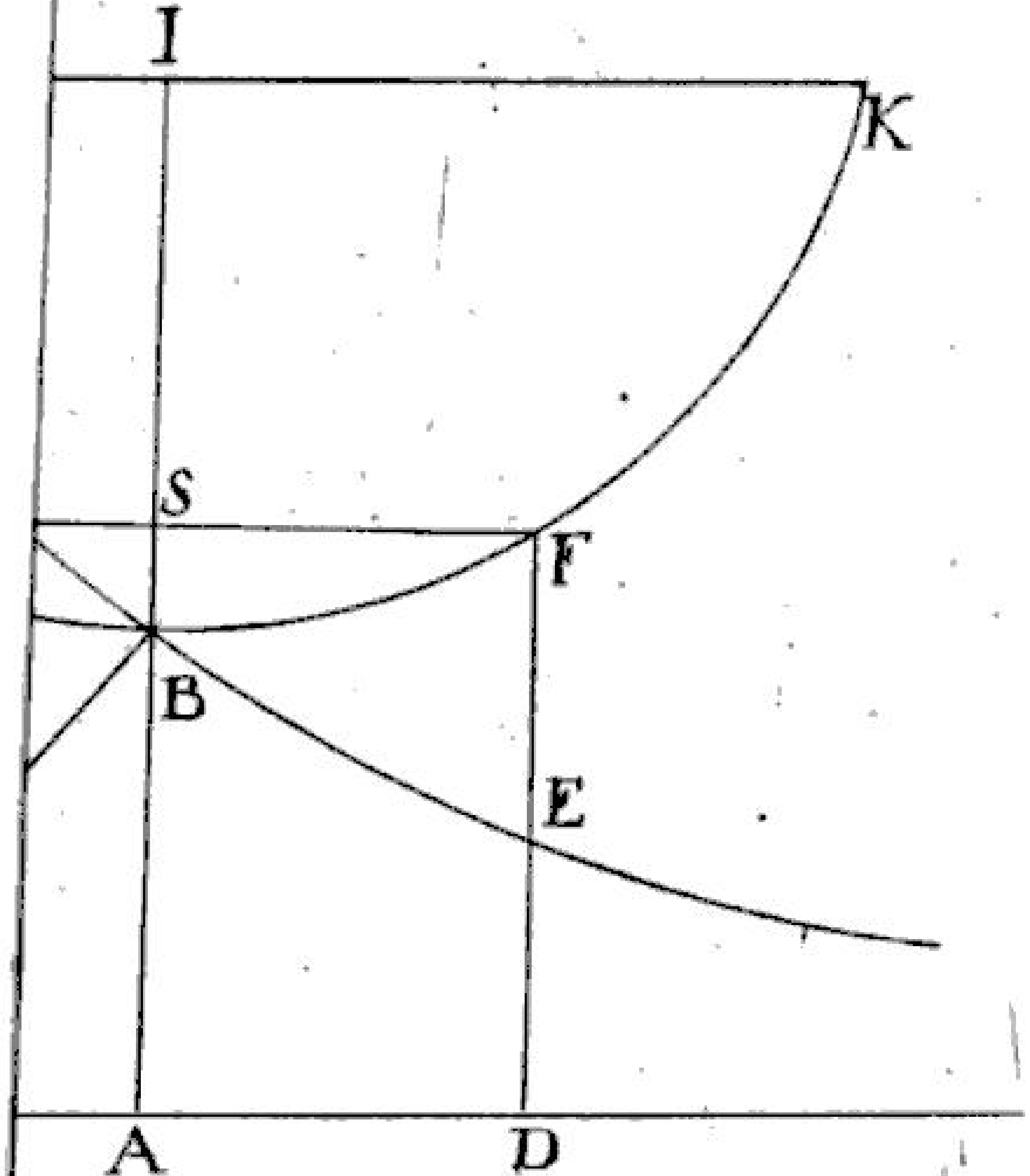


Fig. XXXIV.

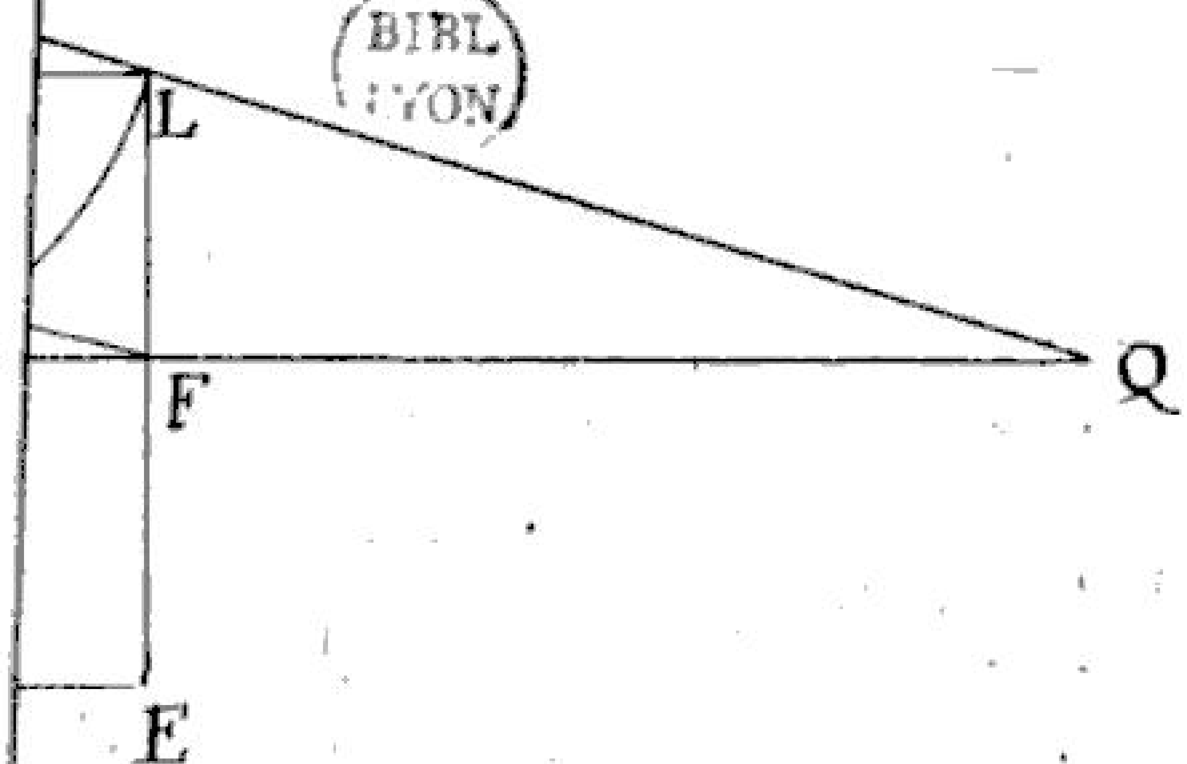


TAVOLA V.

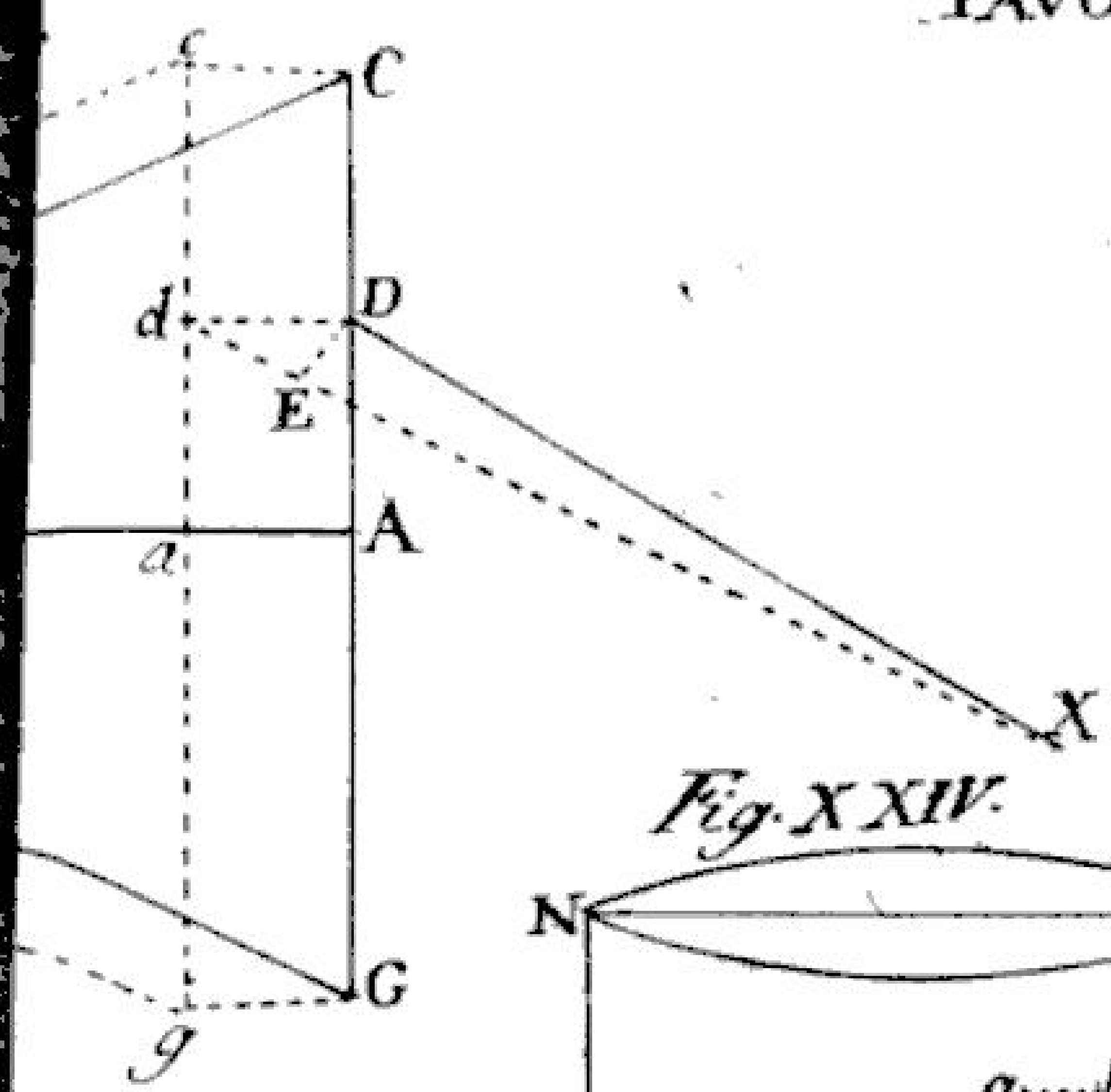


Fig. XXIV.

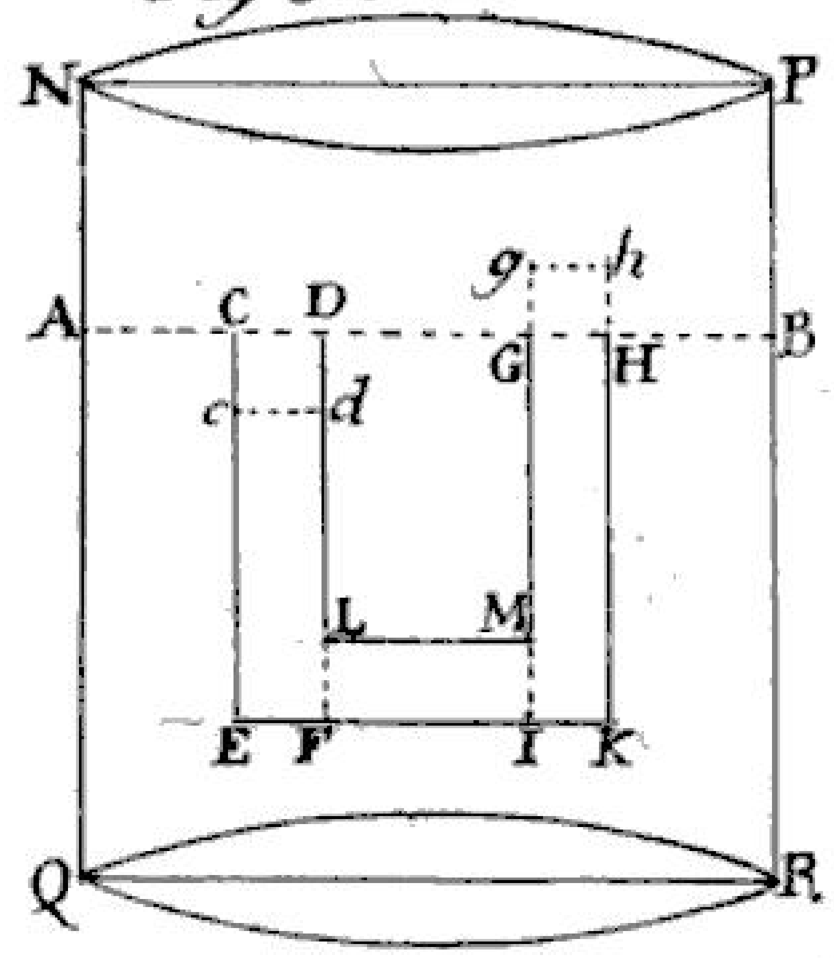


Fig. XXIII.

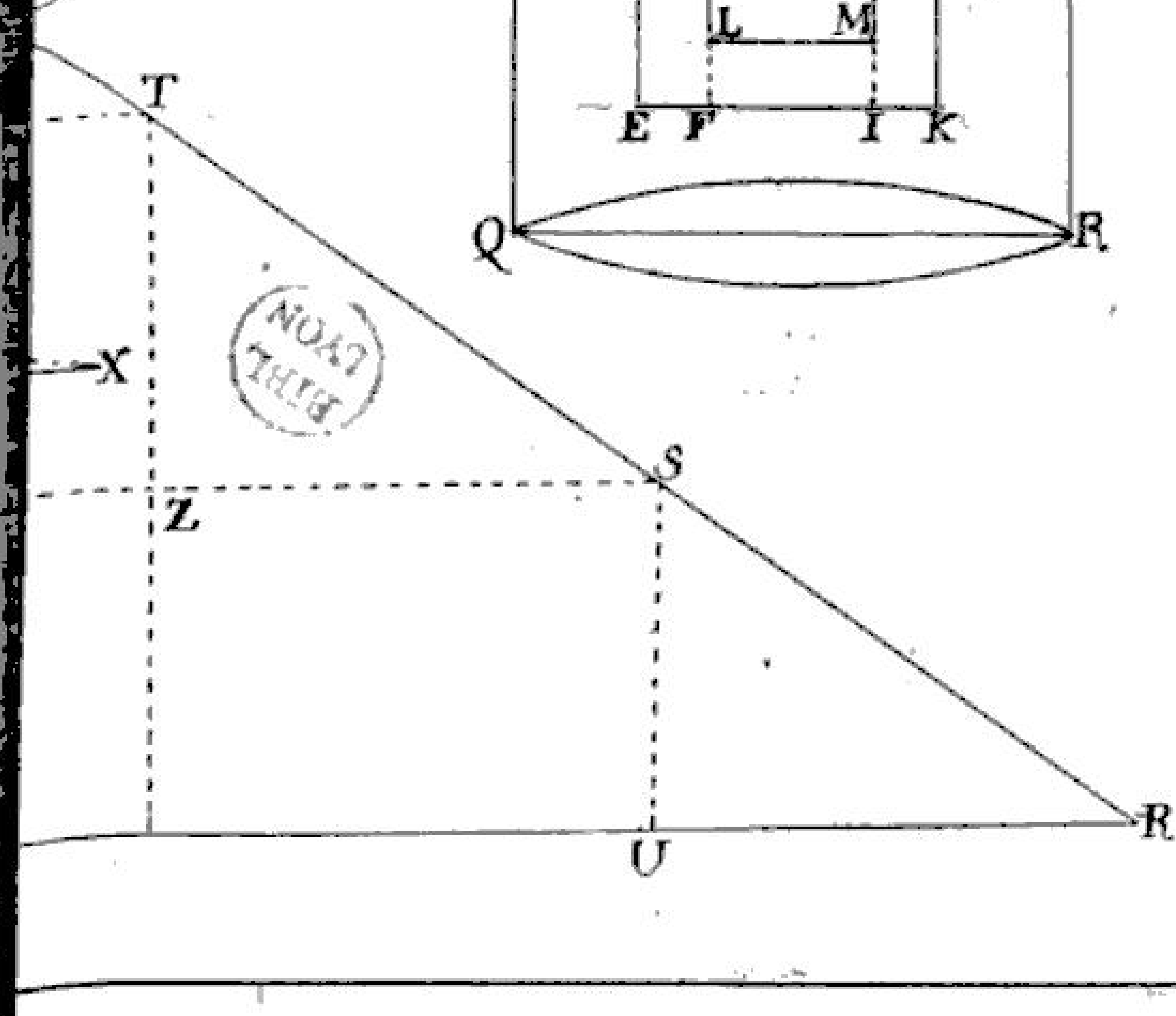


TAVOLA VI.

Fig. XXV.

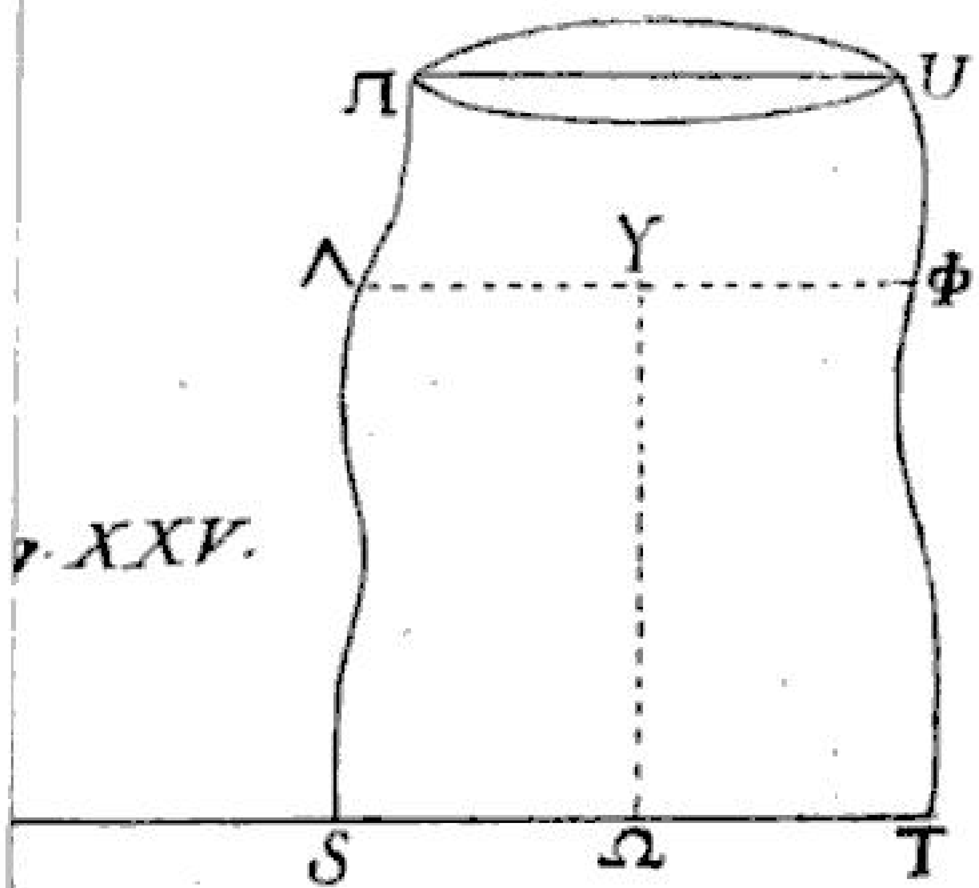
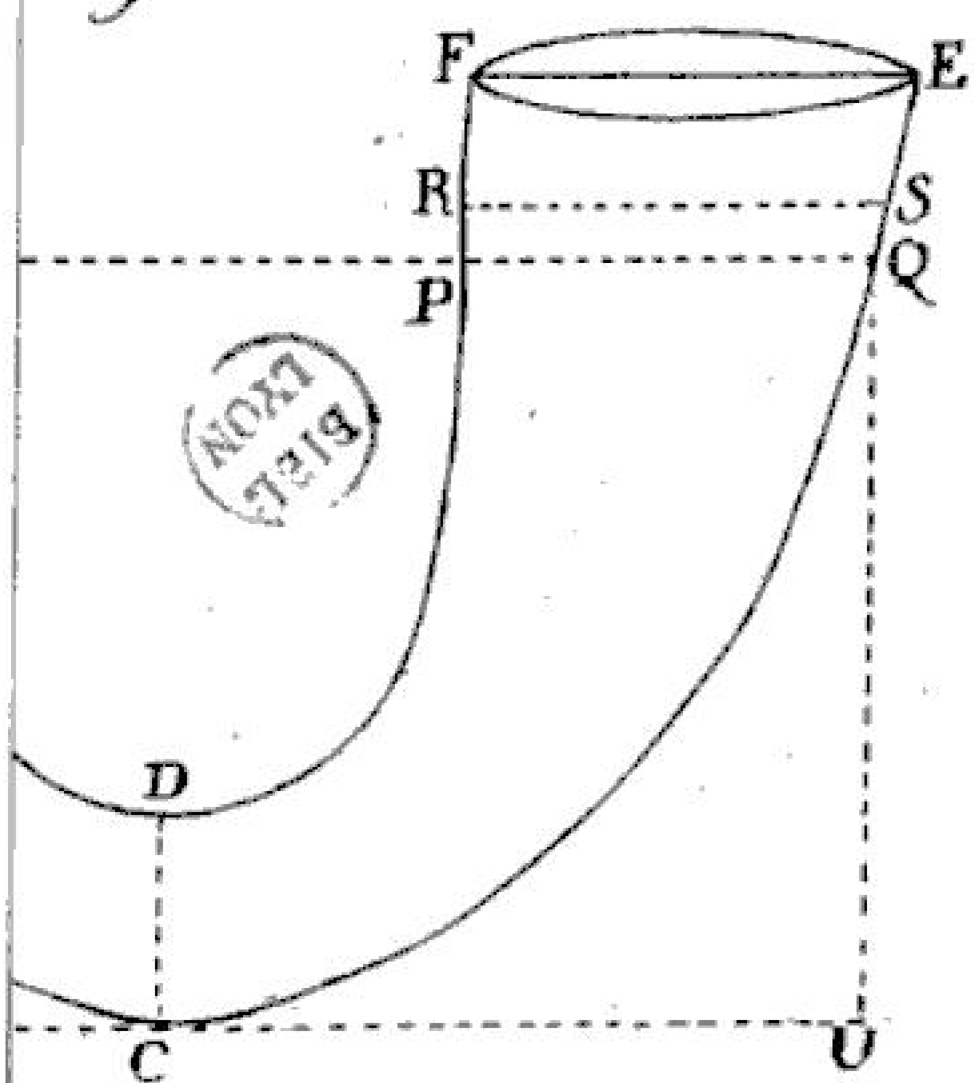


Fig. XXVI.



perimetro della catenaria dalla linea delle ascisse è doppia della distanza del centro di gravità dell'area dalla linea stessa. Essendosi dunque ritrovato il centro di gravità del perimetro della catenaria esser il punto O, divisa A O in due parti uguali in S, sarà S il centro di gravità dell' area della stessa catenaria.

CLXXIV.

Il punto S, come è manifesto, è il centro di gravità dell' area esterna K P E L B. Ma essendo il centro di gravità dello spazio rettangolo K P E L il punto M, che divide in due parti uguali la A T, se si farà come l'area interna K B L all'area esterna K P E L B, così M S ad M R, si ritroverà il punto R, che è il centro di gravità dell' area interna K B L. La ragione di ciò è così chiara, e manifesta per la natura stessa del centro di gravità, che sarebbe affatto inutile volerlo di vantaggio dilucidare.

CLXXV.

Per la perfetta teoria del problema della catenaria comune altro a far non resta, che mostrar il metodo, col quale può descriversi la catenaria stessa, o dato il perimetro, e la saetta (cioè l'altezza), o dato il perimetro, e la sottesa (cioè la base), o finalmente data la base, e l'altezza. In tutti questi casi è necessario

ceſſario determinare la quantità a, cioè la ſottotangente Logaritmatica, ſenza la quale la deſcrizione della catenaria non potrebbe in alcun modo ottenerſi.

CLXXIV.

Nel primo caſo la quantità a ſi determina facilmente; poichè eſſendo $s = \sqrt{y^2 - a^2}$, ſe ſi metterà $s = b$, e l'altezza $= c$, ſarà $y = a + c$; onde deduceſi $a = \frac{b^2 - c^2}{2c}$.

CLXXVII.

Negli altri due caſi però la predetta determinazione apporta non picciola difficoltà, nè giammai, per quanti autori abbia letto, ho ritrovato trattato queſt'articolo. Nulla dimeno ho procurato ottenere la determinazione predetta per mezzo dell'interſezione delle curve, ed è il tutto ſucceduto felicemente ſecondo il deſiderio. Poichè eſſendo $dx = \frac{a\,dz}{z}$ per l'equazione della curva, ſarà $dx = \frac{c\,a\,dz}{c\,z}$, ed $x = \frac{a}{c} l\,z + A$ nella Logaritmica, di cui tanto la ſottotangente, quanto il protonumero è $= c$. Ma, fatta $x = o$, diventa y, e ſimilmente $z = a$, come ſi è di ſopra veduto. Dunque in queſto caſo ſarà $A = -\frac{a}{c} l\,a$ nella logaritmica, che ha e la ſot-

to-

totangente, e il protonumero $= c$. Quindi $x = \frac{a}{c}\,\overline{lza - la} = \frac{a}{c}\,l\,\frac{cz}{a}$. Poichè la baſe, e'l perimetro ſi ſuppongono dati, ſi metta $x = c$, e'l perimetro della curva $= b$, ſarà, come è manifeſto, $cc = a\,l\,\frac{c}{a}\cdot\overline{\sqrt{b^2+a^2}+b}$; ſimilmente eſſendo $z - b = \sqrt{b^2+a^2}$, ſarà $zz - 2bz = a^2$; le quali due equazioni per mezzo delle interſezioni delle curve ci conducono direttamente a determinare la quantità a.

CLXXVIII.

Coll'iſteſſo raziocinio, quando è data la baſe, e l'altezza della catenaria, chiamata l'altezza $= m$, ed $x = c$, ſi ritrovano l'equazioni $cc = a\,l\,\frac{c}{a}\,\overline{\sqrt{2ma+m^2}+a+m}$, e $x^2 \begin{matrix}-2za\\-2mz\end{matrix} + a^2 = o$, le quali ci conducono ſimilmente alla determinazione della quantità a per mezzo dell'interſezioni delle curve.

I L F I N E.

TAVOLA I.

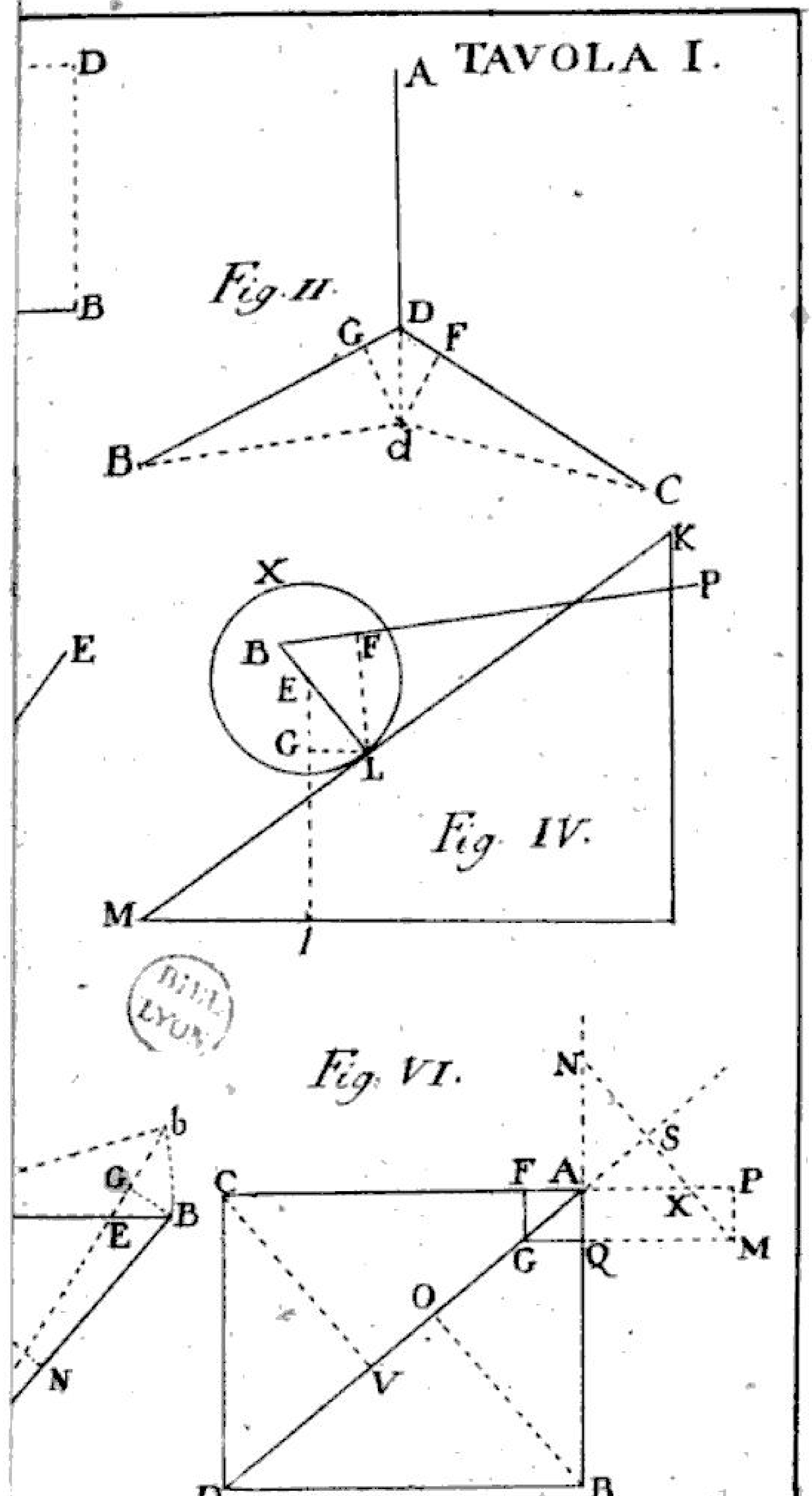


Fig. II.
A
D
G
F
B
d
C
Fig. IV.
X
B
F
E
G
L
K
P
M
I
Fig. VI.
N
S
F
A
P
C
X
G
Q
M
O
V
D
B
b
G
E
N

TAVOLA II.

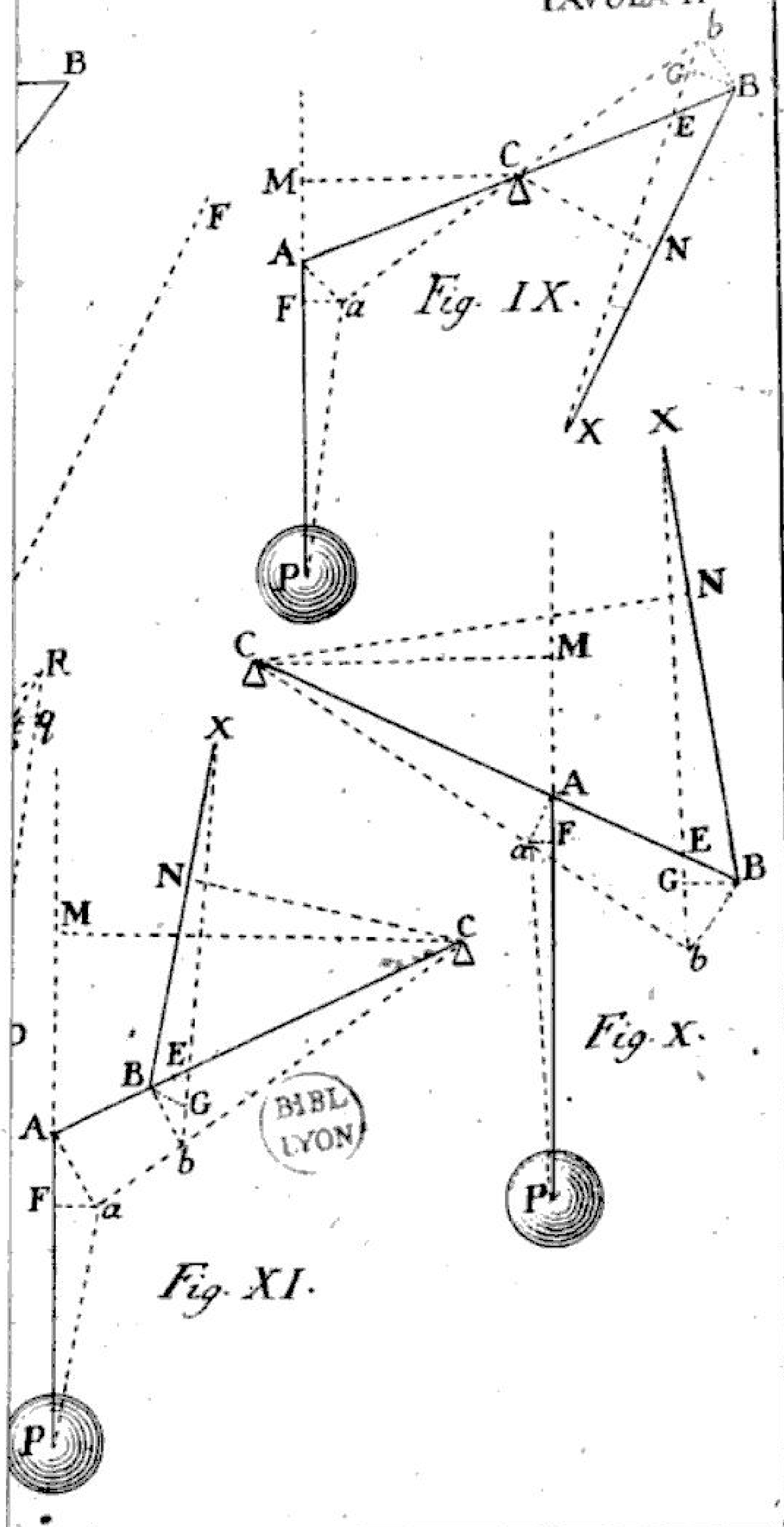


Fig. IX.

Fig. X.

Fig. XI.

TAVOLA III.

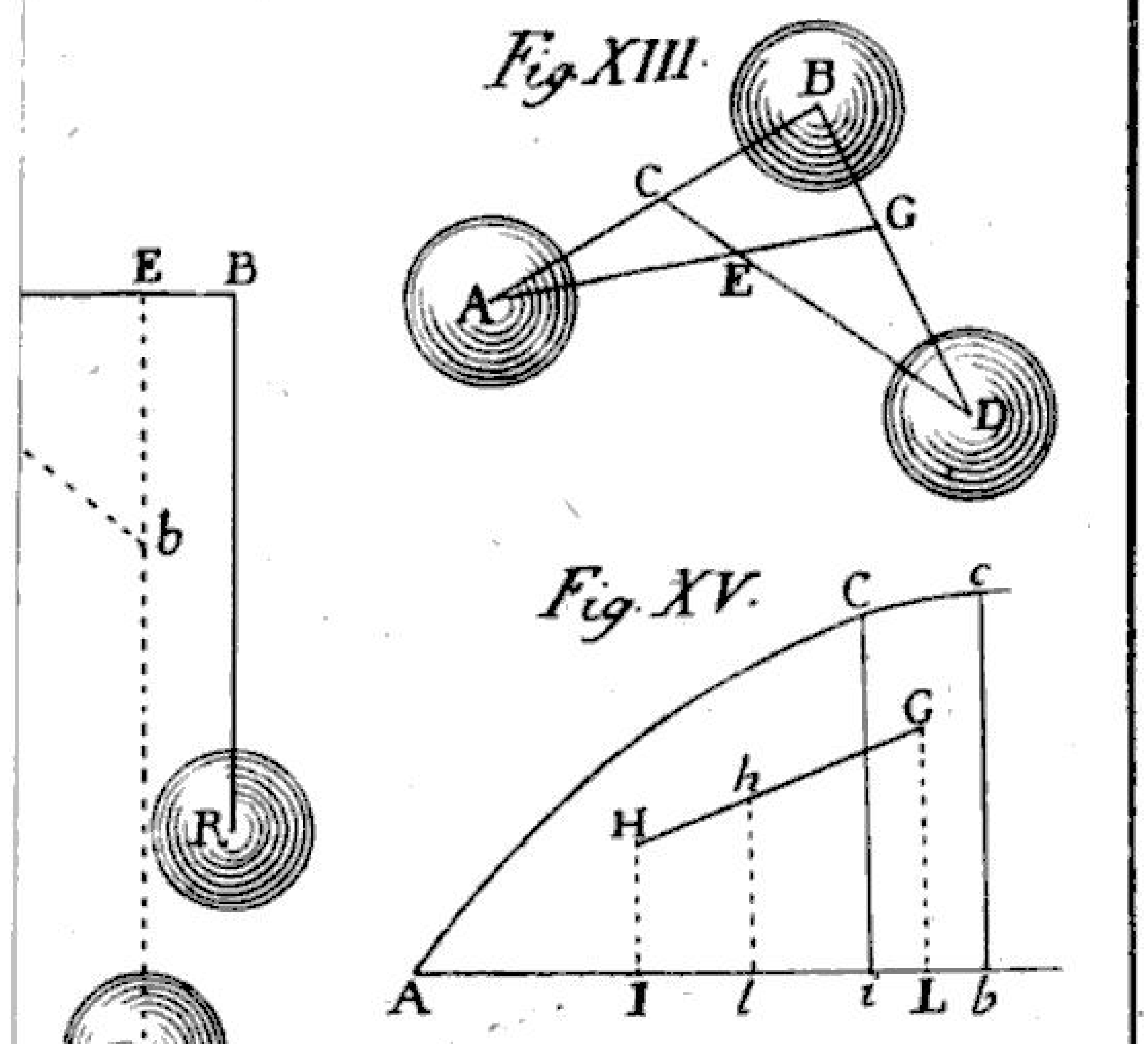


Fig. XIII.
Fig. XV.
Fig. XVI.
A B C D E G
A C c G H h I l i L b
A B C D E H b d 2R R P
E B b R S

TAVOLA IV.

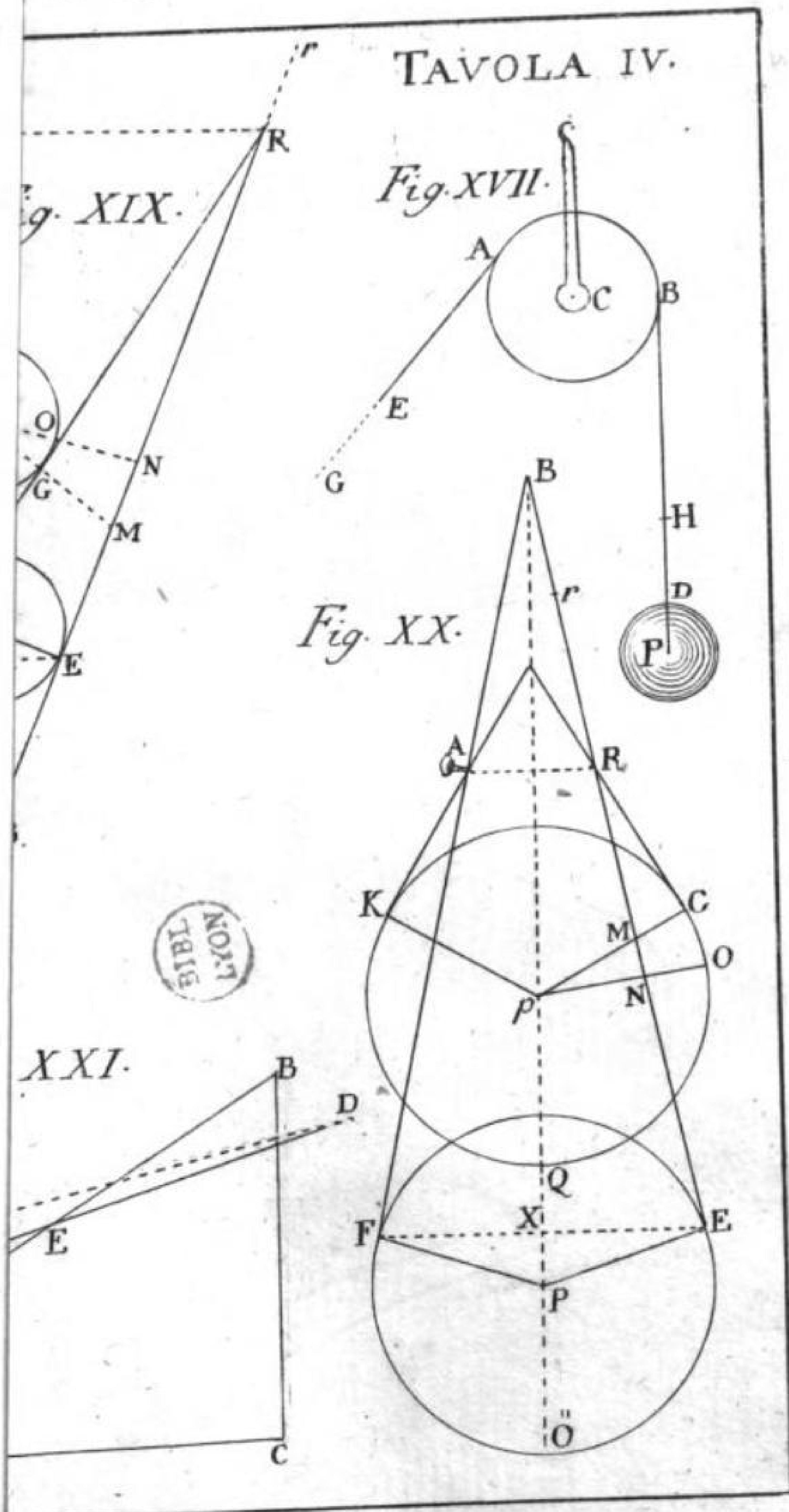


TAVOLA V.

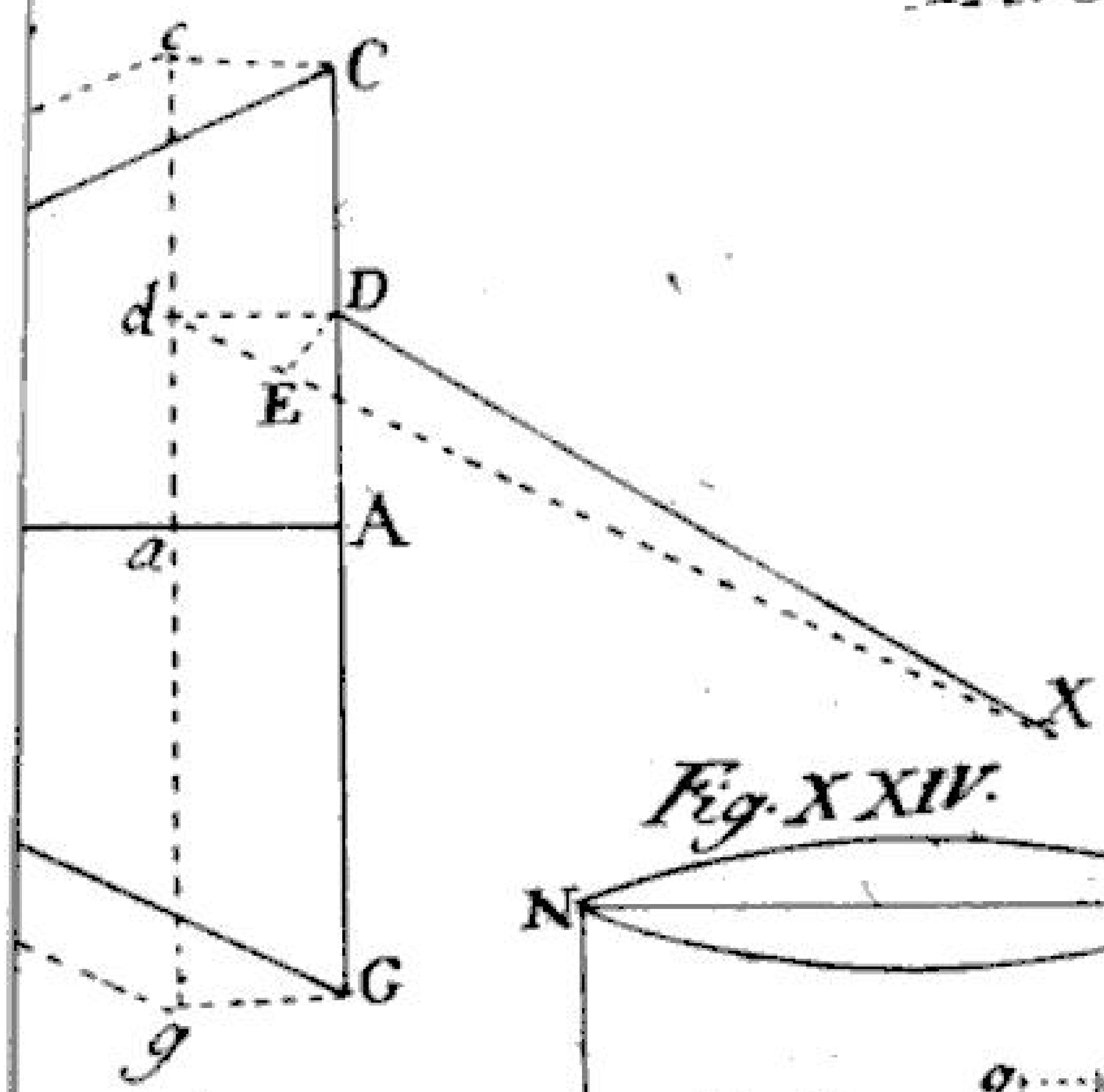


Fig. XXIV.

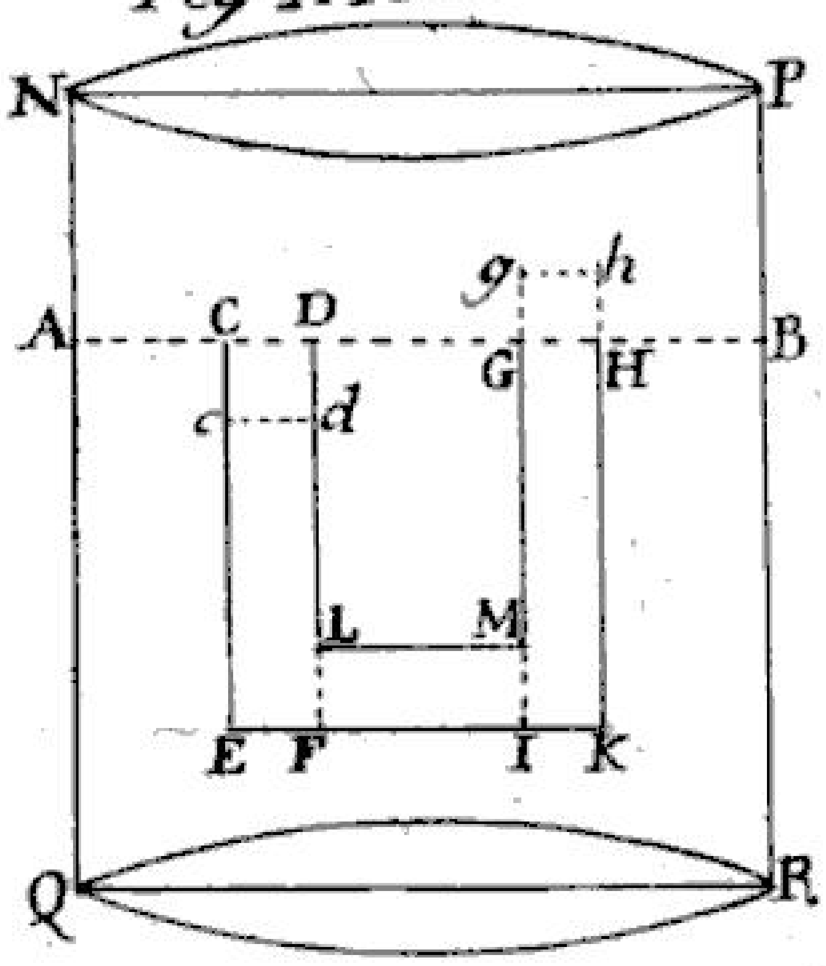


Fig. XXIII.

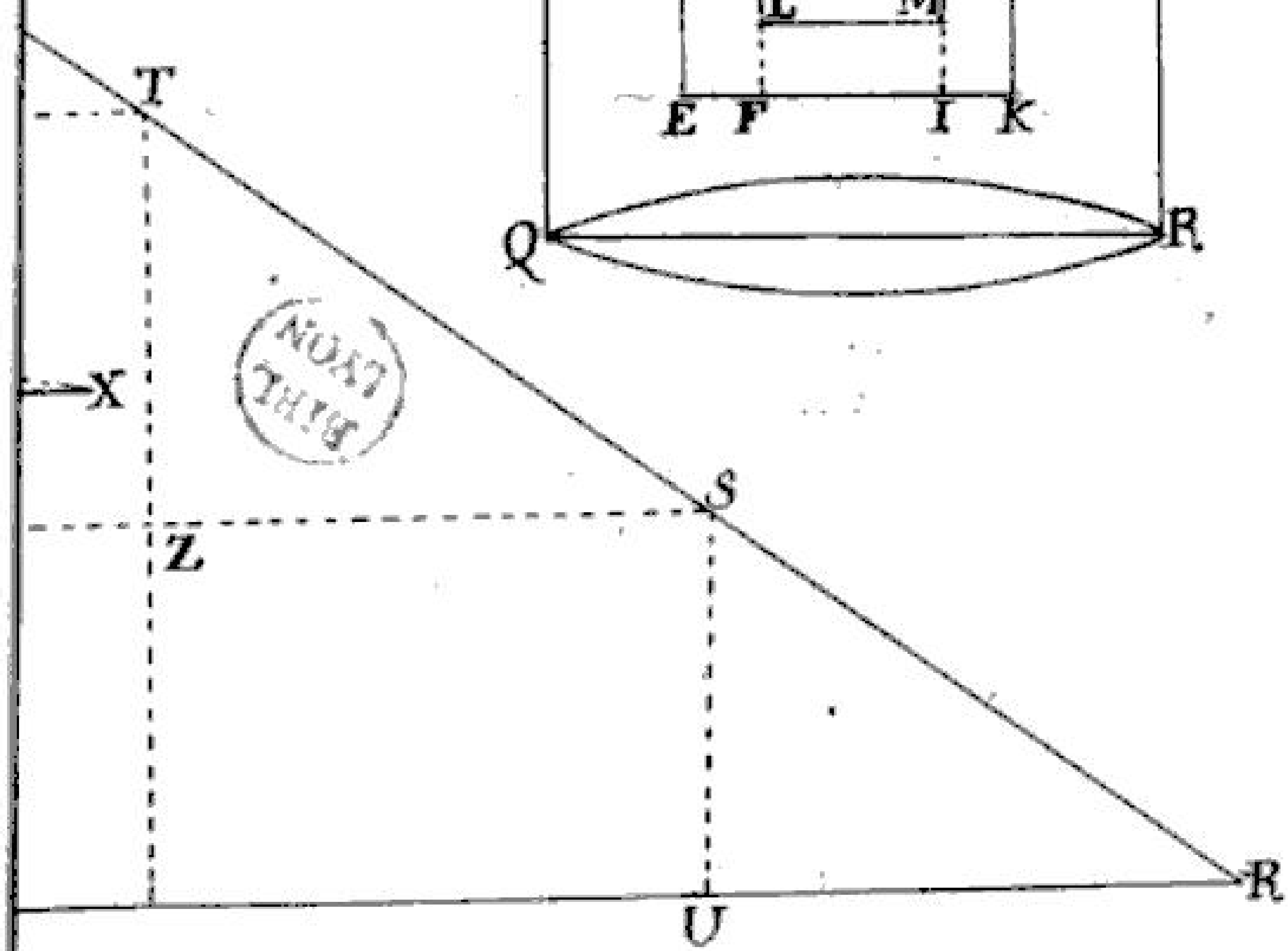


TAVOLA VI.

g. XXV.

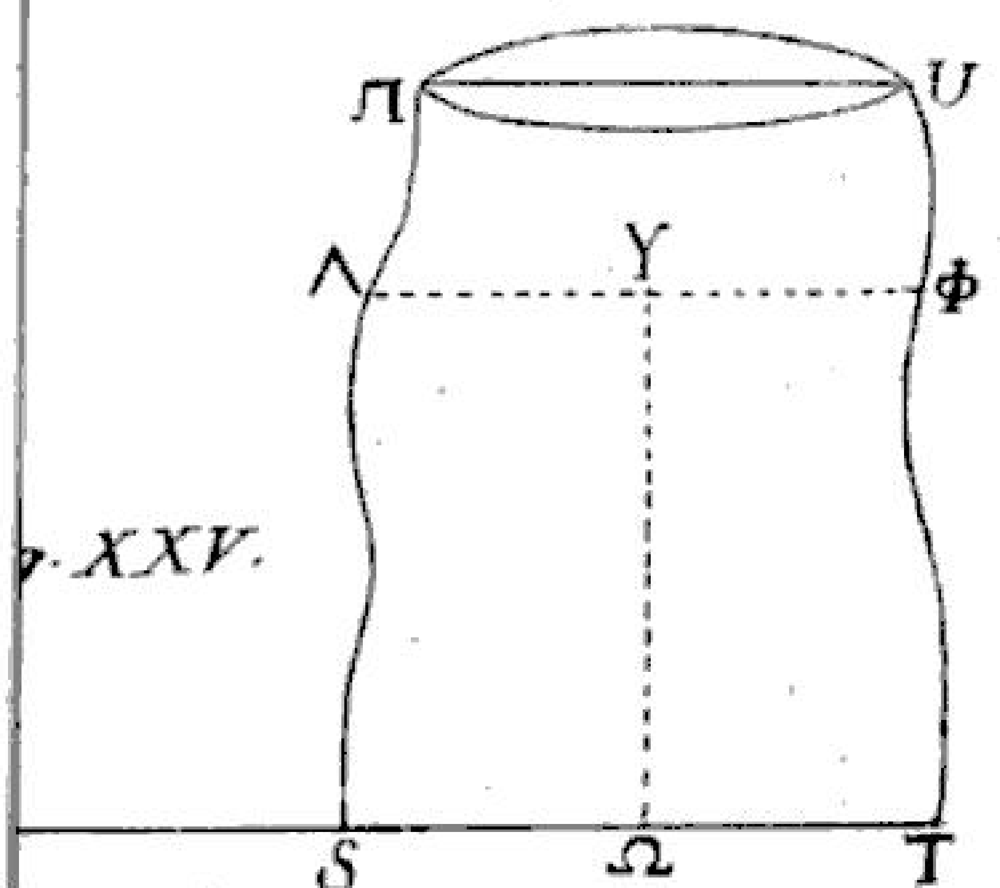


Fig. XXVI.

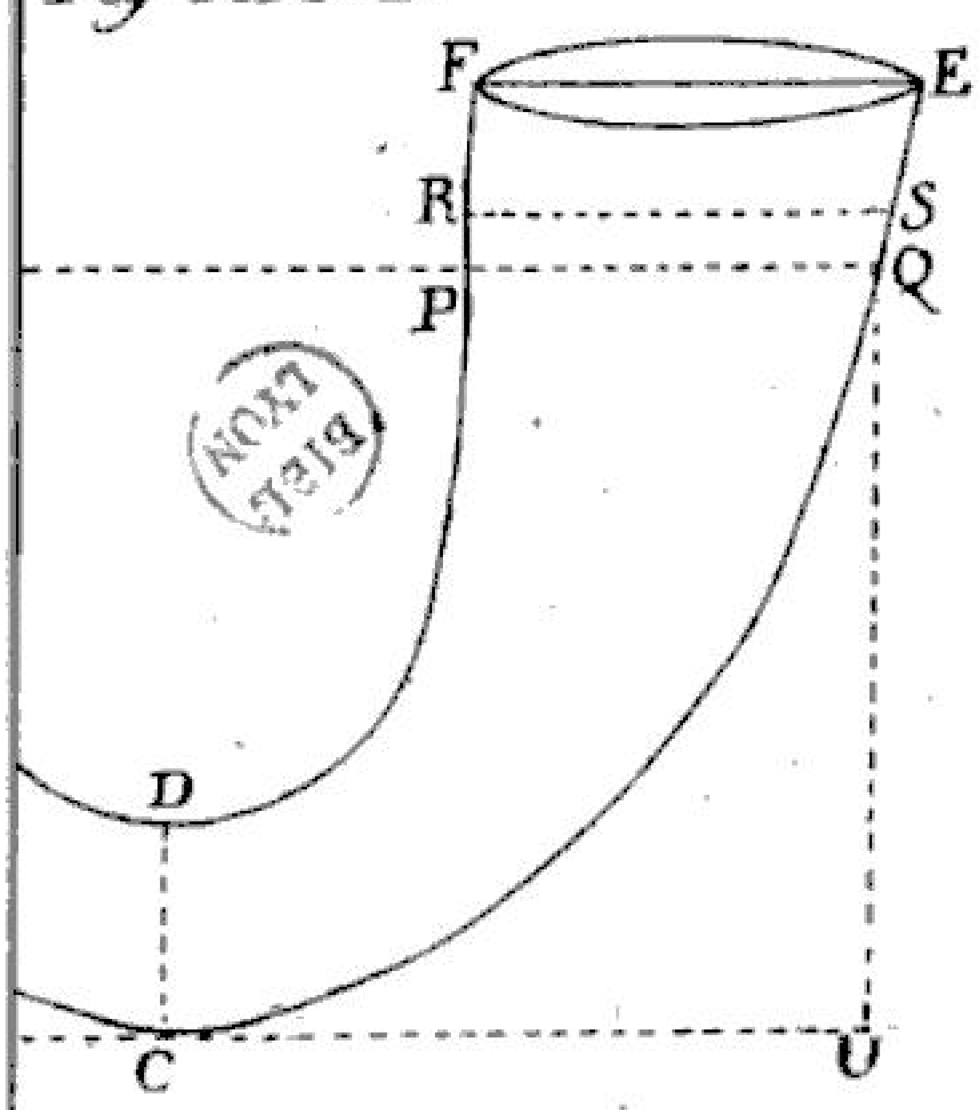


TAVOLA VII.

Fig. XXVII.

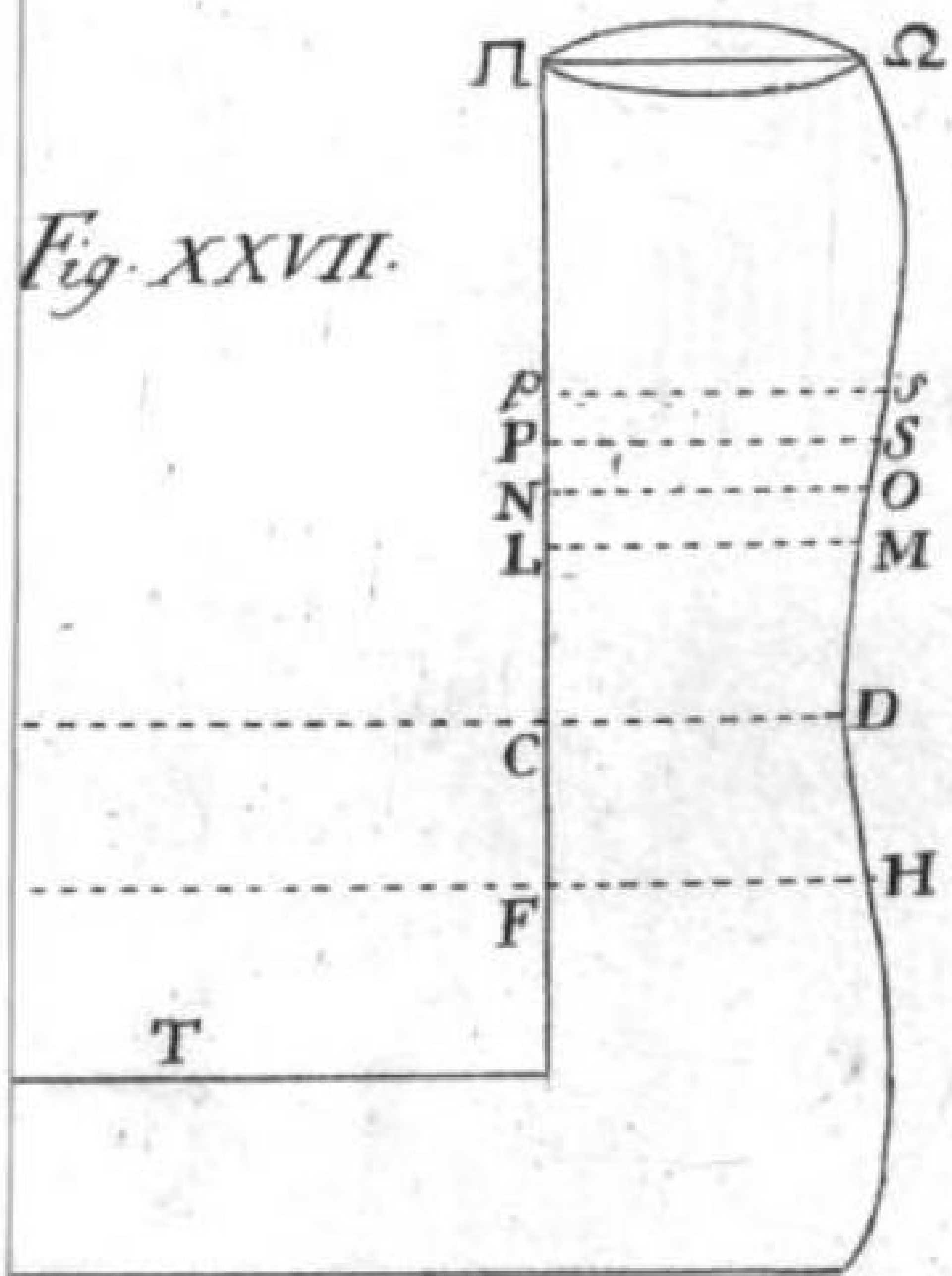


Fig. XXIX.

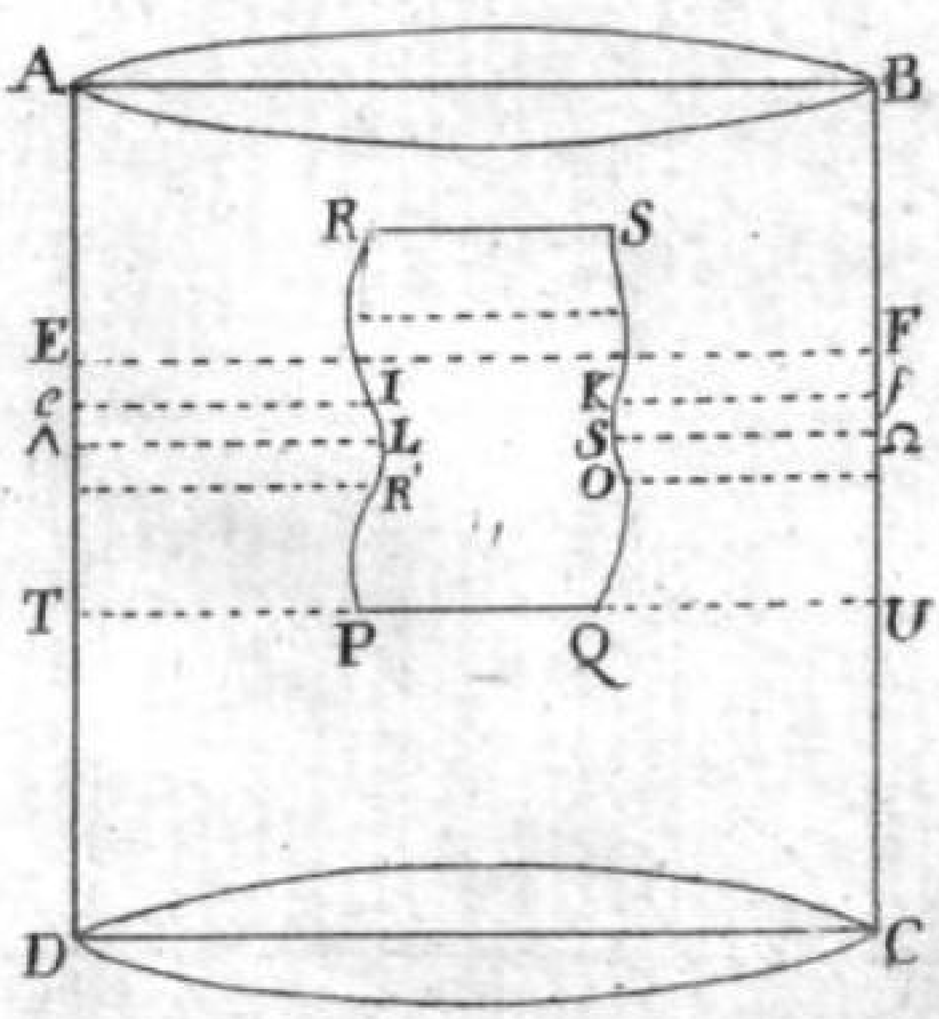


TAVOLA VIII

Fig. XXXI

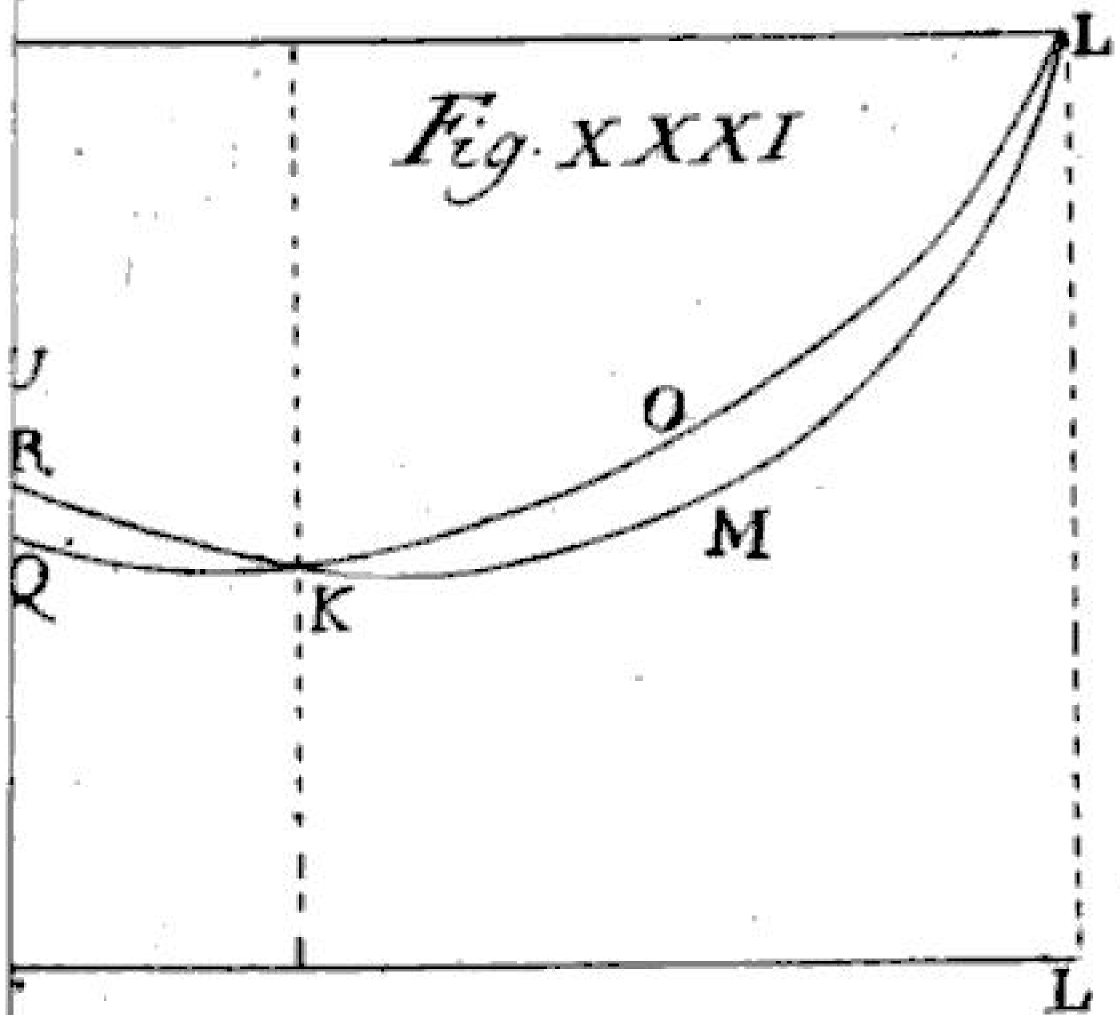
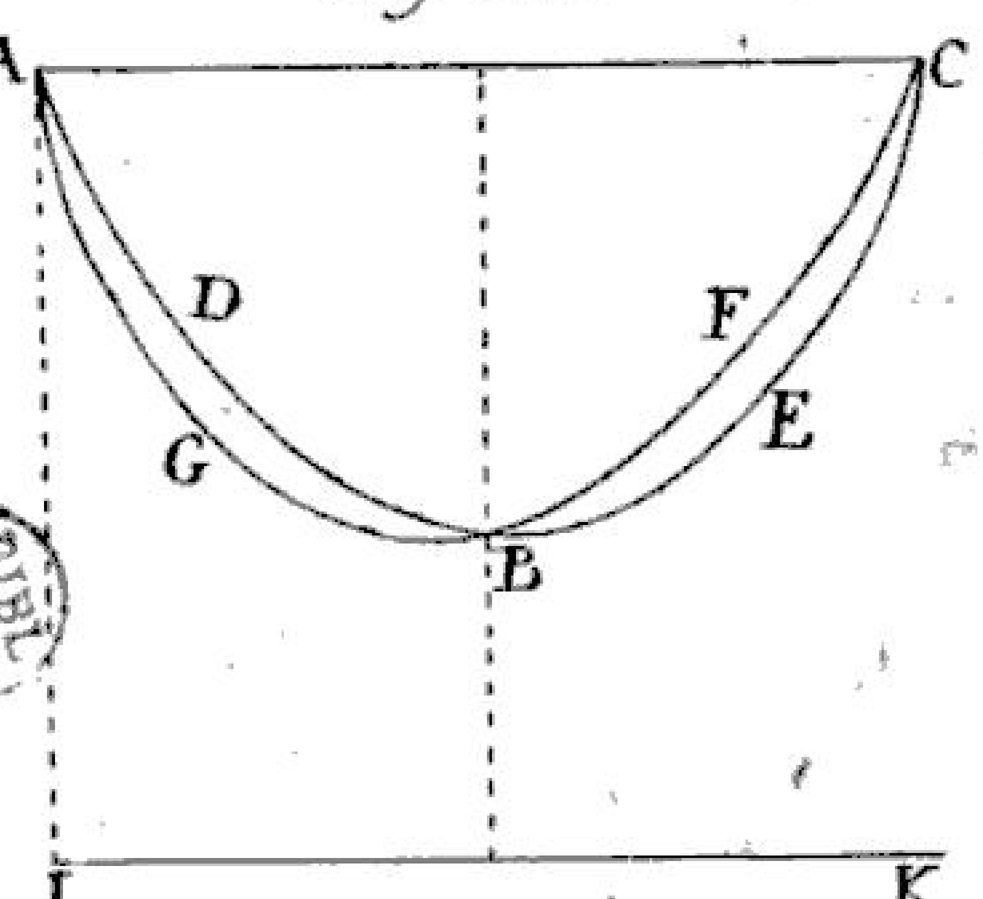
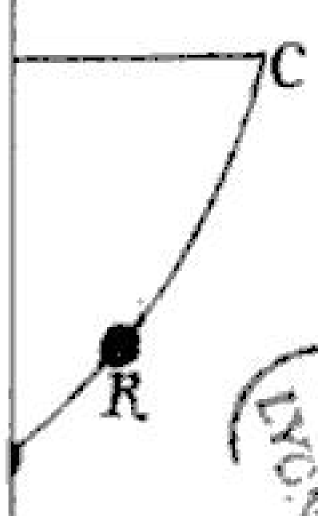


Fig. XXX.



XXII.



XXXIII

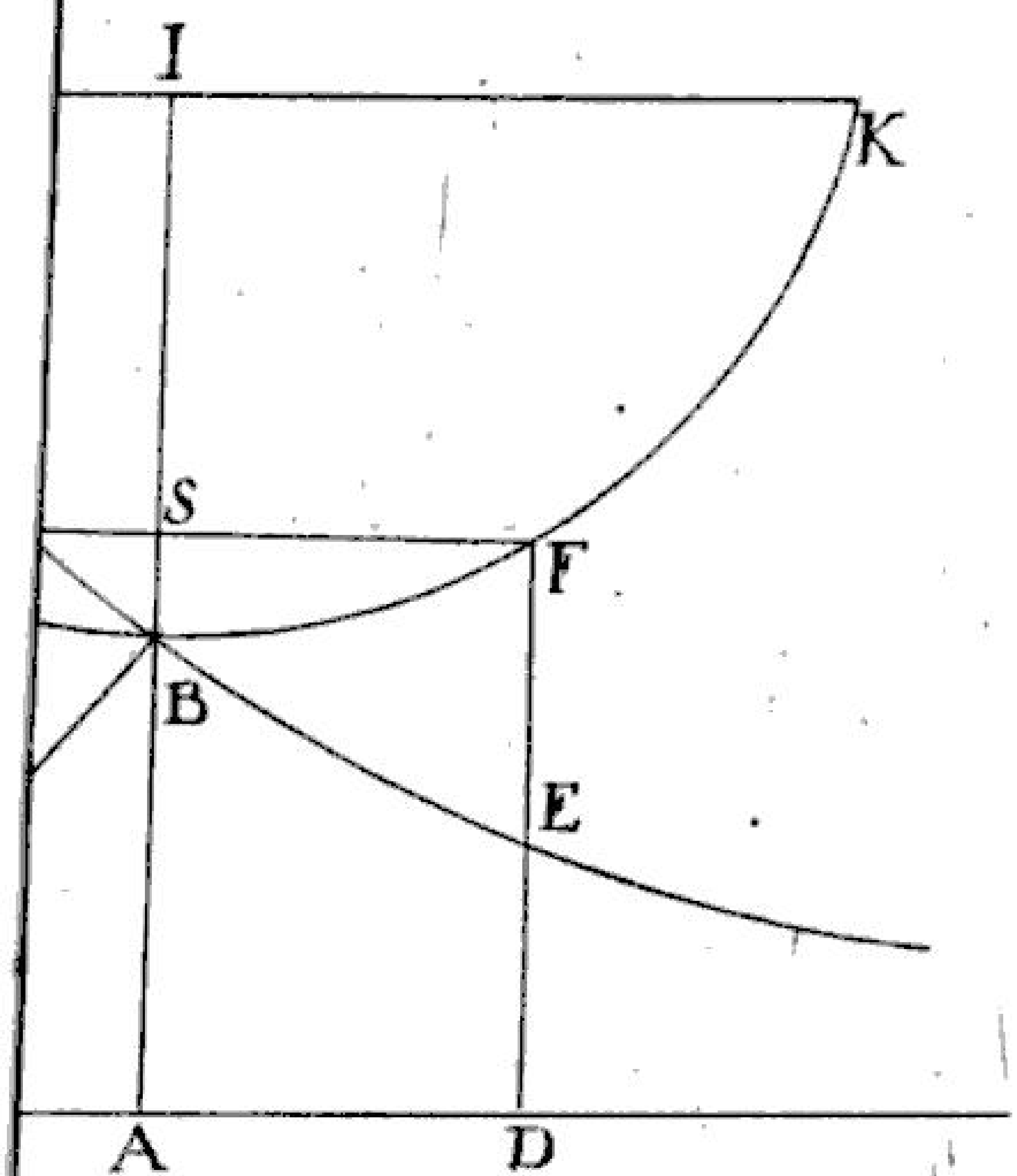


Fig. XXXIV.