VOLTIMETRIA
RETTA
OVVERO
MISURA DELLE VOLTE
DI
VINCENZO LAMBERTI
INGEGNERE NAPOLITANO

DEDICATA

A S. E. IL MARCHESE SIGNOR
D. ANGELO
CAVALCANTI
SPETTABILE LUOGOTENENTE DELLA REGIA CAMERA DELLA SUMMARIA.

PRESSO DONATO CAMPO.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ECCELLENZA.

LA presente mia Operetta, che ho l'onore di presentare a V. E., quantunque io spero, che per aver ridotti in facil modo alla pratica, e al frequente, e necessario uso di misurar le Volte gli astrusi, e a

alta ſtima; ed univerſale ammi-
razione ove ſi vede ſalita? la-
ſcio ſtare l' antica nobiltà del
ſangue, e i parentati illuſtri,
che la rendono anche più rag-
guardevole: poichè nó ſono que-
ſti i pregi, a' quali ella deve la
ſua grandezza, e noi l'ottimo
Magiſtrato, e'l Principe il vi-
gilante, e fedel Miniſtro. Laſcio
pure tante altre Cariche da lei
ſoſtenute con grandiſſima lode,
e per le quali il ſuo nome ſarà
ſempre caro, e riverito da ognu-
no; perchè offenderei la ſua mo-
deſtia, e con eſſa ne ſoffrirebbe
il Pubblico comodo, intrattenen-
dola inutilmente. E ſol mi ri-
duco al primo mio preſuppoſi-
to d'implorare per me, e pel
mio libro quella ſua forte e na-
turale inclinazione, che per na-
tura e per elezion la porta a

Del Rever. D. Carlo Jervolino.

SONETTO.

MAi non saran nel cieco obblio sepolte
Nè d'alcun vento mai saranno sparte
Queste in cui tu descrivi, egregie carte
Architetto gentil, tutte le VOLTE

Da chi, come da te furon disciolte
Le più intrigate Tesi a render l'arte
Facile, e chiara insiem in ogni parte?
Chi le sue leggi ha, come tu, raccolte?

In ciò col tuo valor tanto t'innalzi
Che 'l Dedaleo valor ben ci somiglia,
Se non anche più in là varchi, e trabalzi.

Quinc' invidia non mai, non mai sua figlia
La torva gelosia fia, che t'incalzi;
Ma dietro ti verrà sol meraviglia.

Del Dottor Colombano Cappelli.

SONETTO.

NOn nafce l'Uom per fe, per gl' altri nafce,
Nafce alla Patria, all' Univerfo intero,
E la Spada, il Saper, l'Opre, il Penfiero,
Tutto a lor prò, benchè recaffe ambafce.

Foll' è però, chi fommo genio pafce
Di farfi un nome, e gloriofo, e altero;
E di Virtù fcorrendo afpro fentiero
A grande Onor fenza giovar rinafce.

Se quefto è ver; quale fi debba intanto,
LAMBERTI, all' oprar tuo lode condegna;
Giacchè giovare il Mond' oggi è tuo Vanto?

Ti bafta folo udir, che ogn' un s' impegna
A dir, che il LIBRO è neceffario tanto,
Ch' altri non diffe già, quel ch' e' ne infegna.

INDICE

DE' CAPITOLI.

Adm.

Adm. Rev. Dominus D. Salvator Rugerius S. Th. P. revideat, & in scriptis referat. Datum die 22. Novembris 1773.

F. X. Episc. Venafran. Vic. Gen.
J. Sparanus Can. Dep.

EMINENTISS. PRINCEPS.

QUantum in Mathematicis disciplinis ingenium subegerit licet ætate florens præclarissimus Vincentius Lamberti, quammaxime prodit Architectonicum hoc, quod in publicum emittit volumen inscriptum *Voltimetria Retta*. Ibi sane fornicum, testudinum, aliarumque concamerati operis fabricationum theoriam prosequutus, earum genesim, superficiem, soliditatem accuratis demonstrationibus perspicue aperit. Nullus heic locus iis relinquitur, quæ vel Catholicæ Fidei, vel morum honestati adversentur. Librum igitur ingenti usui rerum hujusmodi studiosis futurum edi posse censeo, dummodo tua, Card. Amplissime, auctoritas accedat. Neapoli Pridie Kal. Decembr. 1773.

Emin. Tuæ.

Addictiss. atque obsequentiss.
Salvator Rogerius.

Adm. Rev. D. Joseph Marzuccus, in hac Regia Universitate Professor Primar. revideat, & in scriptis referat. Datum Neapoli die 10. mensis Junii 1773.
NIC EPISC. PUT. CAP. MAJ.

S. R. M.

SIGNORE.

PEr obbedire al rispettabilissimo ordine di V. M. ho letto il libro intitolato *Voltimetria Retta di Vincenzo Lamberti*, ove niente ho trovato, che si opponga al diritto della Sovranità, anzi ho ammirato l'acuto ingegno dell'Autore nell'uso delle Matematiche, per arricchire di sode, ed eleganti dimostrazioni quella parte di Architettura, che abbraccia la misura di varie specie di Volte. Onde se parrà a V. M., può darsi alle stampe. Napoli li 17. Ottobre 1773. *D. Giuseppe Marzucco.*

Die 15. mensis Decembris 1773. Neap.

Viso Rescripto Suæ Regalis Majestatis sub die 4. currentis mensis, & anni, ac relatione Reverendi D. Joseph Marzucci, de commissione Rev. Regii Capp. Majoris, ordine præfatæ Regalis Majestatis.

Regalis Camera S. Claræ providet, decernit, atque mandat, quod imprimatur cum inserta forma præsentis supplicis libelli, ac approbationis dicti Revisoris; verum in publicatione servetur Regia Pragmatica. Hoc suum.

VARGAS MACCIUCCA. SALOMONIUS.

VIDIT FISCUS REG. CORONÆ.

Ill. Marchio Citus Præs. S. R. C., & cæteri Illustres Aularum Præfecti tempore subscriptionis impediti. *Registr. fol.*

Carulli. Athanasius.

PREFAZIONE.

Commendabile è stato sempre mai quello innato desìo negli uomini di creare, ed inventar cose, affin di arricchire la Republica delle lettere di quelle Cognizioni, di cui ne sono state per lo passato prive. Tali sono le invenzioni della Poesia, de' Romansi, delle Satire, delle Commedie, delle Tragedie, e d'altre scienze, le quali hanno avuto per obbietto la virtù, questi sono stati li mezzi più onesti, ed utili, che li saggi Filosofi hanno pensato per spargere nel Popolo le massime salutari. La introduzione delle belle arti, come sono la Scoltura, l'Architettura, la Pittura, rendono le Regioni magnifiche, e piacevoli. Ma la inventiva della più nobile scienza denominata la Mattematica, riguardando questa la semplice, e pura verità, è stata stimata la più perfetta scienza di tutte l'altre dagli uomini ritrovate. Ed essendo di tutte le scienze speculative, la più ampia, e degna per la certezza, e fermezza del modo di dimostrare, perciò avanzando di gran lunga le altre, è la più eloquente, ed eccellente di esse. Questa Scienza ha istruito i Popoli d'uno esatto raziocinare; è stato lo scopo della divisione, e suddivisione de' poderi; ha provveduto alle diversificazioni delle cose naturali; ha somministrato macchine per la misura de' tempi, de' luo-

luoghi, e de' pesi, affin di togliere gl' inganni nel Commercio Civile; ha scoverto le cagioni degli effetti, che accadono in natura; e finalmente ha imitata la natura coll' arte. Essendo la Geometria il fonte della Matematica, meritamente Platone, chiamato il Divino pose al dì fuori della sua Accademia Geometriæ ignarus nullus ingrediatur; *ed Alcinoo Filosofo Platonico disse nelli suoi addottrinamenti* futurum Philosophum non debere esse geometriæ ignarum. *Sicchè dunque la Matematica è una scienza superiore a tutte le altre, ed alle belle arti, e senza cognizione di essa, uno chiamar non si può sapiente.*

Varj, e diversi Filosofi sono stati gl' inventori delle Mattematiche scienze, tra' quali, come vuole Proclo, i Fenici sono stati li primi fabbri dell' Aritmetica, per li loro continui Commercj, e mercature; indi fu da Pittagora maravigliosamente ampliata, come anco dagli Arabi, Egizzj, e Greci, fu con varj problemi, e Teoremi parimente illustrata. La Geometria inoltre ebbe origine dagli antichi Filosofi Egizziani, li quali vedendo continuamente i termini de' loro poderi distrutti dalle inondazioni del Fiume Nilo, gittarono i primi fondamenti di questa scienza, cercando mezzi di assicurarsi esattamente qual fosse il sito, la estensione, e la figura de' loro averi, come riferisce Servio ad Eccl. III. RADIO, id est, virga philosophorum, qua Geometræ lineas

neas indicant. Inventa autem hæc est ars tempore, quo Nilus plus æquo crescens confudit terminos possessionum, ad quos innovandos adhibiti sunt philosophi, qui lineis diviserunt agros: inde Geometria dicitur. *I principj di una sì nobile scienza dai Popoli Egizziani si conservavano a guisa di cosa sacra, e di Oracoli, ed a niun altro era lecito sapersi, se non a Principi, e Sacerdoti, del che ce ne fa piena testimonianza Arist. lib. 1. Metaph. Cap. 1., così dicendoci;* Circa Aegyptum Mathematicæ artes constitutæ sunt: illic enim gens Sacerdotum vacare permissa est. *Indi si distese la Geometria a misurare le cose celesti, dandosi i principj di tutta l'Astronomia, come anco della Prospettiva, Cosmografia, Meccanica, e di molte altre scienze, che da essa come da propria radice dipendono. Questa da Egitto si trasportò nella Grecia da Talete Milesio, ove molti acutissimi Filosofi l'ampliarono con inventare sempre più nuove utilità per gli uomini, tra' quali fu Pittagora, Anassagora, Ippocrate, Platone, Oenopide, Briso, Antifo, Teodoro, Teeteto, Aristarco, Eratostene, Archita, Euclide, Sereno, Ipsicle, Archimede, Apollonio, ed infiniti altri, di modo che crescendo di mano in mano, si è ridotta ne' nostri tempi a grandissima perfezione.*

In tutte le parti le Matematiche scienze sono state con sommo ingegno illustrate da tanti valenti uomini, che hanno impiegato tutto il di loro sapere a pensare nuovi principj, e si-

stemi, avendo facilitato il modo alla Republica letteraria per iscoprire sempre nuove cose. Alcune parti della Matematica sono state, e sono necessarie a' Popoli per conservare la società, ed il Commercio; altre sono utili per aver adornato i Popoli di tante idee magnifiche, e decorose, e resa ornata la immaginazione degli uomini; ed altre parti finalmente hanno applicato gli stessi uomini a tutte quelle conoscenze, che fortificano la ragione, e che assuefanno lo spirito all' attenzione, al discernimento, ed alla giustezza, alla proporzione, al Calcolo de' movimenti celesti, a rimontare a' principj per discendere alle conseguenze, e di vedere la stretta unione, che hanno le verità l' una coll' altra.

Molti dotti nelle Mattematiche scienze si sono applicati a dar fuori un trattato di Voltimetria, o sia misura delle Volte, considerando di quanta necessità, egli sia, sì per sapere di che peso siano le Volte, che coprono gli edificj, per dargli quella grossezza ne' piedi dritti, che possa resistere alli continui sforzi di esse; sì per conoscere di quanti materiali ella vien composta; come ancora per evitare le involontarie frodi, che giornalmente si fanno, o al Padrone, o al Fabbro, essendovi legge di doverle apprezzare a proporzion della di loro solidità; Ma invano hanno impiegato le loro fatighe, ed hanno consumato il tempo, di modo che posso dire con S. Matteo xI. 25. Abscondisti hæc a sapientibus, & prudentibus, & revelasti ea Parvulis.

Per

Per Volta s' intende quella Coperta di stanze, o altri edificj fatta di muraglia. Tre sorte di Volte vi erano, e si chiamavano dagli antichi Testudo, Fornix, & Concha. Testudo, *era una Volta a forma di emisfero, che copriva un edificio rotondo, la etimologia di una tal parola, Varrone la fa venire* a testa, quod testa tectum. *E Nonio dice* Testudines sunt loca in ædificiis camerata, ad similitudinem aquatilium testudinum, quæ duris tergoribus sunt, & incurvis, *e Virgilio*

Tum foribus Divæ media te-studine templi

Fornix, *era una Volta semicilindrica, e copriva con la sua cavità un edificio lungo, vien detta* Fornix a forando. *Ed alla fine* Concha, *era una Volta la quale formava una quarta parte della sfera, e copriva gli edificj semicircolari.*

Essendosi ne' tempi presenti avanzate le idee, e le invenzioni, si sono cresciute le forme delle Volte, a proporzione delle figure delle piante degli edificj, sopra delle quali vengono formate; e le denominazioni di esse sono le seguenti; Volta a botte, *ch' è quella istessa che dagli antichi veniva detta* Fornix; Volta poliedrica, *la quale copre un edificio di pianta poligona;* Volta a Gavetta, *o sia* Schifo, *la quale copre una pianta quadrilatera;* Volta a vela *senza reguglio, e col reguglio, copre questa una pianta quadrilatera,* Volta a Crociera col reguglio, *e senza;* Volta a lunetta senza reguglio e col reguglio, *queste si formano in tutte le Volte, al-*

allorchè si devono aprir lumi nelle di loro incosciature, Volte a Cupola, *queste coprono edificj, le piante de' quali sono di figura circolare, o ellittica;* Volta a mezze Scudelle, *è quella che copre un edificio di pianta semicircolare, o semiellittica; e finalmente* Fescine *vengono dette quelle fabbriche a lunule, che sono framezzate tra gli archi, che sostengono la Cupola. Di tutte queste sorti di Volte ne ho esposto la di loro generazione, e la teoria della di loro solidità, e superficie.*

Ho stimato dividere la presente opera in Capitoli, in ciascun de' quali ho trattato la teorìa della superficie, e delle varie specie della formazione. Nella fine poi di ogni Capitolo vi ho esposto la prattica per trovare la superficie, e la solidità di quella, ed è trattata in esso con somma brevità. Sicchè ne' metodi esposti vi si trova la esattezza, e la brevità, cosa la quale non va sempre unita. Si avverte, che le citazioni che si trovano degli elementi di Geometrìa, tutte corrispondono all' opera latina stampata per la gioventù dal celebre Matematico D. Vito Caravelli, le di cui opere si sono sparse colla fama per tutto il Mondo, e gli addottrinamenti del quale per quanto posso, come suo più infimo discepolo, seguo. Per la generazione di alcune Volte ho dovuto inventar Teorie di alcuni nuovi solidi; uno de' quali l' ho denominato Ellittoide, ed ha per proprietà, che qualunque sezione si fa in esso, è Ellissi, e nel-

la

la teoria di un tal solido si fa vedere come trovasi la superficie di un Cono ellittico, l' altro l' ho chiamato poliedro quadriforme ellittico.

Questa presente Opera l' ho scritta per li veri Professori, li quali devono esser dotati di tutti i principj teorici, cioè di Geometria, Aritmetica, Algebra, sezioni Coniche, Trigonometria, ed altro, perchè senza la cognizione di queste cose, è indubitato che non saprebbero alcuna cosa intorno alla facoltà, che professano; e perciò nemmeno intenderebbero alcuna cosa delle Teorie, che io ho scritto. Perciò ne ho formata la pratica ancora, sì a favore di quelli, che sono privi delle suddette facoltà; come per quelli che non si vogliono applicare a vederne le Teorie; della qual pratica ne ho formato un indice separato.

E comechè vi è statuto in questo Regno registrato nel libro delle Prammatiche sotto il titolo de Magistris artium, *nel quale si prescrive, che negli apprezzi, si deve considerare la Canna di una fabbrica della misura di palmi otto di lunghezza, ed altrettanto di larghezza, e la grossezza dev' essere di palmi due; perciò dopo essersi conosciuto di quanti palmi cubici vien composta una Volta, questi si devono dividere per due, ed il quoziente esprimerà la superficie, o sia la base del solido della Volta, ridotta a fabbrica della grossezza di palmi due, secondo il detto statuto.*

In questa Opera ho trattato delle sole Volte ret-

te, cioè di quelle che sono situate orizontalmente sopra la superficie terrestre; Spero al Signore Iddio, dandomi il suo divino ajuto, di cavar fuori un' altra Opera nonmeno utile, che necessaria come questa; ed è la Voltimetria Scalena, nella quale tratterò di tutte le consimili Volte, situate obbliquamente sopra la superficie terrestre, come ancora le azzioni di dette Volte contro i piedi dritti dove poggiano, con facile regola prattica per determinare la grossezza di essi; E finalmente tratterò delle spinte delle terre correggendo i principj dati da Monsieur de Belidor, dandovi un metodo breve, e prattico per poter formar muri a poter resistere agli urti de' terrapieni.

Quantunque da tutti li Professori si sono fino a questo tempo con diversi metodi calcolate le Volte, per non esservi stato, chi avesse trattato del modo di conoscere le di loro solidità, e superficie; perciò ho voluto scrivere su di tal materia per far cosa grata al pubblico, sperando di ricevere da tutti, ed in particolare dagli amici, e Maestri quel compatimento, che puole avere un discepolo sfornito; pur tuttavia ora senza alcun dubbio se ne saprà il valor di ciascuna di esse, con quelli metodi esposti nella presente Opera. Prego solamente quelli che vorranno censurare di ricordarsi di Ovidio.

Si desunt vires, tamen est laudanda voluntas.

DEL-

DELLA MISURA DELLE VOLTE RETTE.

CAP. I.

Delle varie specie di Volte a botte, e delle di loro solidità.

DEFINIZIONI.

I. SI chiamerà Volta retta, quella formata sopra piedi dritti di eguale altezza sopra l'orizzonte.

II. Volta a botte è quella, che vien formata da un parallelepipedo semicilindrico vuoto, e rappresenta colla sua interna cavità, quasi una botte divisa per lungo, e perciò volgarmente così vien chiamata.

III. Corda, o sottesa della Volta a botte, è quella retta, che unisce gli estremi del curvo.

IV. Sesto della Volta, è quella retta, che forma angoli retti colla corda, e divide in due parti eguali la curvità di essa.

Da ciò nasce la divisione della Volta a botte in tre specie I. se il sesto è eguale alla metà della corda; si dirà volta a botte di giusto sesto. II. Se il Sesto è minore della la metà della corda; si dirà di sesto depresso. III. finalmente se è maggiore; si dirà di soprasesto.

V. Per grossezza della cima s'intende, la grossezza della fabbrica da sopra il curvo, come la KL. Tav. I. Fig. I.

VI. Ellissi si chiama una figura piana, nata dalla sezione obbliqua di un cono retto.

VII. Ordinate si dicono, quelle rette, che sono divise dal diametro della figura in due parti eguali.

VIII. Si chiamerà anima della Volta, il vuoto, che occupa tutto il concavo di qualunque Volta.

TEOREMA I.

Il parallelepipedo circonscritto ad un semicilindro, sta al solido del parallelepipedo semicilindro cavo, nella ragione di 14., a 3.

Tav. I. Fig. I. Sia il semicilindro AKBE, e circonscritto ad esso gli sia il parallelepipedo ACDBE. Dico, che il parallelepipedeo ACDBE, stia al solido semicilindro cavo, ACDBEFI, nella raggione di 14: 3.

Il quadrato circonscritto al cerchio, sta al cerchio medesimo, come 14: 11. (a); Onde an-

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*

ancora le loro mettà sono nella stessa ragione, e perciò il rettangolo ACDB, sta al semicerchio AKB, come 14: 11. Ma il parallelepipedo ACDBE, ed il semicilindro AKBE, avendo la stessa altezza BE, sono in ragion delle basi (*a*); Dunque il parallelepipedo ACDBE, sta al semicilindro AKBE, come 14: 11.; e convertendo (*b*) si averà il parallelepipedo ACDBE, al solido semicilindro cavo ACDBEFI, come 14: 3. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Da ciò, che si è dimostrato si rileva un metodo facilissimo, ed esatto per poter calcolare la solidità di qualunqpe Volta a botte di giusto sesto, essendo data la corda, il sesto, la lunghezza, e la grossezza alla cima, devesi.

I. Multiplicare la corda, per il sesto, e per la lunghezza, e si noti il prodotto.

II. Dopo si due numeri costanti 14, 3, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale; al quale vi si unisce il prodotto della corda, lunghezza, e grossezza alla cima, e la somma sarà la solidità di detta volta in quelle parti cubbe eguali all' aliquota commune.

Sia,

(a) *Prop. 69. de Sphær., & Cyl. Caravelli.*
(b) *Def. 15. lib. 5.*

Sia, per esempio, la corda AB = 10, sarà il sesto OK = 5; e sia la lunghezza BE = 20; e la grossezza della cima KL = 1. Il prodotto di AB, per OK, e BE, cioè il parallelepipedo ACDBE, sarà 1000; Indi si facci, come 14, a 3, Così 1000, al quarto proporzionale $214\frac{2}{7}$, e questo è il solido parallelepipedo cavo AKBDCE, al quale bisogna aggiungerci il parallelepipedo CG ch' è 200., e tutto il solido semicilindro cavo AKBEGH, sarà $414\frac{2}{7}$, che sarà la solidità di detta volta.

DELLA ELLISSI.

TEOREMA II.

In ogni Ellissi, i quadrati delle ordinate applicate sopra l' asse minore, sono come gli rettangoli fatti dalle porzioni dello stesso asse prese da due vertici, e corrispondenti a dette ordinate.

Tav. I. Fig. 2. p. 1. SIa ADBC, una Ellissi, e CD, sia l'asse minore, ed AB, il maggiore. Dico, che i quadrati formati sopra le ordinate EG, FH, siano come gli corrispondenti rettangoli DGC, DHC.

Per lo punto E, si tiri EK, parallela a CD. Per la proprietà della Ellissi il ret-

tan-

tangolo di BO, in OA, o sia il quadrato di BO, sta al quadrato di OD, come il rettangolo di BK, in KA, al quadrato di EK (a); Ma il quadrato di EK, è il medesimo di quello fatto sopra OG; Dunque si averà

$$\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \text{rett. } BKA : \overline{OG}^2,$$

e permutando $\overline{BO}^2 : \text{rett. } BKA = \overline{OD}^2 : \overline{OG}^2$,

e convertendo

$$\overline{BO}^2 : \overline{BO}^2 - \text{rett. } BKA = \overline{OD}^2 : \overline{OD}^2 - \overline{OG}^2,$$

e permutando

$$\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{BO}^2 - \text{rett. } BKA : \overline{OD}^2 - \overline{OG}^2;$$

ma $\overline{BO}^2 - \text{rett. } BKA = \overline{OK}^2 = \overline{GE}^2$ (b),

ed $\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2 = \text{rett. } DGC$; (c)

Dunque $\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{EG}^2 : \text{rett. } DGC$.

Della istessa maniera si può dimostrare, che

$$\overline{BO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{FH}^2 : \text{rett. } DHC,$$

Dunque $\overline{EG}^2 : \text{rett. } DGC = \overline{FH}^2 : \text{rett. } DHC$;

e permutando

$$\overline{EG}^2 : \overline{FH}^2 = \text{rett. } DGC : \text{rett. } DHC:$$

Ciocchè doveasi dimostrare.

TEO-

(a) *Prop. 6. tract. sect. con. Guid. Grand.*
(b) *Corol. 1. prop. 5. lib. 2.*
(c) *Prop. 5. lib. 2.*

TEOREMA III.

Se un ſemicerchio, ed una ſemielliſſi hanno uno ſteſſo diametro, il ſemicerchio, ſta alla ſemielliſſi, come il diametro commune, all' altro diametro della ſemielliſſi; ovvero come gli ſemidiametri.

Tav. I. Fig. 3. n. 1., e 2. Abbia il ſemicerchio ACB, e la ſemielliſſi ADB, uno ſteſſo diametro AB. Dico, che il ſemicerchio ACB, ſta alla ſemielliſſi ADB, come OB : OD.

Si concepiſca tirata l'ordinata co, infinitamente vicina alla Ordinata CO. Per la proprietà del cerchio il quadrato fatto da CO, è eguale al rettangolo AOB; e $\overline{co}^2$ = rett. AoB; Onde ſi averà.

$$\overline{CO}^2 : \overline{co}^2 = \text{rett. } AOB : \text{rett. } AoB;$$

Ma per la proprietà della Elliſſi, ſiccome ſi è dimoſtrato nel Teorema precedente

$$\overline{OD}^2 : \overline{od}^2 = \text{rett. } AOB : \text{rett. } AoB;$$

Dunque $\overline{CO}^2 : \overline{co}^2 = \overline{OD}^2 : \overline{od}^2$, e

$$CO : co = OD : od \ (a)$$

E queſto ha luogo da pertutto, cioè da qualunque punto della circonferenza ACB, ab-

(a) *Prop. 22. lib. 6.*

abbassando l'ordinata al diametro. Sicchè tutte le ordinate nel semicerchio applicate sopra il diametro AB, sono in ordinata ragione colle corrispondenti ordinate nella semiellissi ADB; Ma quando più grandezze sono proporzionali, la somma degli antecedenti, sta alla somma de' conseguenti, come uno antecedente, al suo conseguente (*a*)? Dunque la somma delle ordinate nel semicerchio, che è l' istesso semicerchio ACB, sta alla somma delle infinite ordinate nella semiellissi, ovvero alla istessa semiellissi ADB, come CO, ovvero OB: OD. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato, che $\overline{CO}^2 : \overline{co}^2 = \overline{OD}^2 : \overline{od}^2$; e CO: co = OD: od; Sicchè dunque se un cerchio, ed una semiellissi hanno un diametro di commune, gli quadrati delle ordinate del cerchio, sono proporzionali agli quadrati delle ordinate della Ellissi; e proporzionali ancora sono le semplici ordinate.

COROLLARIO II.

Essendo OB, ed OD, mettà degli assi della Ellissi, si averà ancora, come il

(a) *Prop.* 12. *lib.* 5.

il semicerchio, ovvero il cerchio, il di cui diametro è uno degli assi, alla semiellissi, oppure alla Ellissi totale, così l' asse AB, che è commune col diametro del cerchio, all' altro asse 2OD.

COROLLARIO III.

Essendosi dimostrato, che le ordinate del cerchio applicate al diametro, siano proporzionali alle ordinate della Ellissi applicate sopra l' istesso diametro, ne segue con eguale raziocinio, che il semisegmento circolare GAI, stia al semisegmento Ellittico HAI, come GI : HI.; ovvero come CO : DO; e tutto il segmento circolare, starà a tutto il segmento corrispondente della Ellissi, come CO, oppure BO : DO.

COROLLARIO IV.

Gli triangoli GOI, HOI, avendo la stessa base IO, sono in ragione delle altezze GI, HI (*a*); ma in questa stessa ragione sono gli segmenti corrispondenti;
Dunque GAI : HAI = GOI : HOI;
e GAI + GOI : HAI + HOI = GOI : HOI (*b*);
Ma GOI : HOI = GI : HI. Dunque il set-

(a) *Schol.* 1. *prop.* 1. *lib.* 1.
(b) *Prop.* 12. *lib.* 6.

ſettore circolare AGO, ſta al ſettore Ellittico AHO, come GI : HI, ovvero come OB: OD; oppure come il diametro AB, dèl cerchio, all' aſſe 2OD.

COROLLARIO V.

Eſſendo AGO : AHO = BO : DO;
ma BO : DO = ACB : ADB. (*a*);
dunque AGO : AHO = ACB : ADB.

Sicchè dunque il ſettore AGO, del cerchio, ſta al ſettore AHO, della Elliſſi, come il ſemicerchio ACB, ovvero il cerchio totale, alla ſemielliſſi ADB, oppure alla intiera Elleſſi. Ma gli ſegmenti, ſiccome ſi è dimoſtrato ſono nella ſteſſa ragione di BO : DO. Dunque ancora gli ſegmenti, ſono nella ſteſſa ragione del circolo, e della Elliſſi.

COROLLARIO VI.

Eſſendo gli ſegmenti proporzionali col circolo, e colla Elliſſi; che hanno un diametro di commune; Perciò il ſemigmento CAO, o ſia quarta parte del cerchio, ſtarà a DAO, come il ſemigmento GAI, ſta al ſemigmento AHI, e permutando CAO : GAI = DAO : HAI, e dividendo CGIO : GAI = DHIO : HAI, e permutando CGIO : DHIO = GAI : HAI;

(a) *Teor.* 3.

Ma $GAI : HAI = BO : DO$;

Dunque $CGIO : DHIO = BO : DO$;

oppure come il circolo, il di cui diametro è AB, alla Elliſſi. Sicchè dunque qualunque porzione di cerchio, ſta alla ſua corriſponden-te nella Elliſſi, come il cerchio totale, alla intiera Elliſſi.

COROLLARIO VII.

Tav. 1. Fig. 5. Dicaſi il ſegmento circolare DBX, S; ed Fbu, s; come ancora il ſegmento Ellittico GBR, chiamaſi SE; ſi averà

$$S : SE = DC : GC$$

Moltiplicando per DC

$$S : SE = \overline{DC}^2 : DC \times GC$$

ovvero a $DC \times FE$, eſſendo GC, eguale ad FE; e permutando

$$S : \overline{DC}^2 = SE : DC \times FE;$$

Ma $S : s = \overline{DC}^2 : \overline{FE}^2$ (a)

e permutando $S : \overline{DC}^2 = s : \overline{FE}^2$;

Dunque $SE : DC \times FE = s : \overline{FE}^2$,

e permutando $SE : s = DC \times FE : \overline{FE}^2$

dividendo per FE

Si averà $SE : s = DC : FE$;

ovvero come $eG : eF$.

Sicchè dunque il ſegmento Ellittico interſecato to

(a) *Corol. 2 prop. 5 circ. dim: Caravelli.*

to da una retta parallela all'asse minore, sta al segmento circolare corrispondente nel cerchio, il di cui diametro è l'asse minore, come eG : eF, ovvero come l'asse maggiore, all'asse minore, oppure come la Ellissi totale, al cerchio; e nella stessa ragione saranno gli settori corrispondenti nella Ellissi, e nel cerchio, che ha per diametro l'asse minore.

TEOREMA IV.

Il rettangolo circonscritto alla Ellissi, fatto dall' asse maggiore, e minore, sta alla Ellissi, come 14: 11.

Sia AF, il rettangolo circonscritto alla semillessi ADB. Dico, che il rettangolo AF sta alla semiellissi ADB, come 14: 11. *Tav. 1. Fig. 3. n. 1. 2.*

Sopra l'asse AB, come diametro si facci il semicerchio ACB, e si prolunghi il semiasse OD, fintantocchè incontra la linea circolare nel punto G, e per esso tirisi la CE, parallela ad AB, che incontra la BF, nel punto E; sarà il rettangolo AE, mettà del quadrato circonscritto al cerchio, il di cui diametro è AB. In oltre il semicerchio ACB, sta alla semiellissi ADB, come CO : DO (*a*). Ma CO : DO = rett. AE : rett. AF (*b*).

 On-

(a) *Teor, 3.*
(b) *Schol. 1. prop. 1. lib. 6.*

Onde ACB : ADB = rett. AE : rett. AF; e permutando, ed invertendo, si averà

rett. AE : ACB = rett. AF : ADB;

ma il rettangolo AE, sta al semicerchio ACB, come 14: 11. (a); Dunque ancora il rettangolo AF, starà alla semiellissi ADB, come 14: 11; e per conseguenza il rettangolo fatto dall'asse maggiore, e minore, sta alla Ellissi, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da ciò si è dimostrato se ne deduce, che qualunque Ellissi sta a qualunque cerchio, come il rettangolo circonscritto alla Ellissi, al quadrato circonscritto al cerchio, e nella stessa ragione saranno gli corrispondenti segmenti, e settori.

COROLLARIO II.

Il rettangolo AF, sta alla semiellissi ADB, nella ragione di 14: 11. Convertendo, si averà, che il rettangolo AF, sta allo spazio ADBFK, come 14: 3; e comecchè gli solidi avendo la istessa altezza, sono in ragion delle basi, così il parallelepipedo, la di cui base è AF, starà ad perallelepepedo cilindro Ellittico cavo, la di cui base e lo spazio AD-

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*

ADBFK, avendo la istessa altezza, come 14: 3.

AVVERTIMENTO. I.

Essendosi dimostrato, che il rettangolo circonscritto ad una Ellissi, sta alla Ellissi nella ragione di 14: 11; e questo avendo luogo in tutte l'Ellissi, gli di cui assi sono ad angoli retti, si rileva da ciò, che l' Ellissi saranno nella ragione de rettangoli circonscritti. E siccome questi rettangoli si fanno eguali, semprequando le basi, e le altezze sono uguali, così l'Ellissi si faranno uguali, quando gli assi conjugati sono eguali, e così ancora saranno in ragion degli assi minori, quando gli assi maggiori sono uguali; ed al contrario saranno nella ragione degli assi maggiori, quando gli minori sono eguali; e se sono gli uni, e gli altri disuguali, saranno l' Ellissi in ragion composta degli assi maggiori, e degli assi minori. Egli è da notarsi ancora, che possono essere eguali le due Ellissi, avendo gli assi maggiori, e minori diseguali, ma devono essere gli assi maggiori reciprocamente proporzionali alli minori.

E comecchè due rettangoli per esser simili devono avere gli lati attorno ad un angolo proporzionali, così si diranno simili due Ellissi, quando gli assi maggiori, sono proporzionali agli assi minori. E finalmente siccome gli rettangoli simili, sono nella duplicata ragione de lati omologi, così ancora due Elliſſi ſimili, ſono nella duplicata raggione, o degli aſſi maggiori, ovvero de minori.

AVVERTIMENTO II.

Tav. I. Fig. 3. n. 1. 2. Da quel che ſi è dimoſtrato nel Corollario II. del Teorema precedente ſi rileva il metodo di calcolare la ſeconda, e terza ſpecie di Volta a botte; cioè, ſe il ſeſto DO (*n.* 1.) è minore della mettà della corda AB, allora la cavità di detta volta è un cilindro Ellittico diviſo per mettà da un piano, che paſſa per l' aſſe maggiore della Elliſſi, che gli ſerve di baſe, ſe all' incontro queſto piano paſſa per l' aſſe minore, e divide per lungo il detto cilindro, la di cui mettà forma la cavità di detta volta, come oſſervaſi al *n.* 2, sarà la terza ſpecie di volta a botte, il di cui ſeſto DO, è maggiore della mettà della ſutteſa AB. In tutti li tre caſi, per avere il valore della ſolidità di ciaſcuna di eſſe, è neceſſario l' eſſer cognita, la corda, il ſeſto, la lunghezza, e la groſſezza della cima; Indi deveſi.

I. Moltiplicare la corda, per il ſeſto, e per la lunghezza, ed il prodotto ſi noti.

II. Dopo li due numeri coſtanti 14, 3, ed il detto prodotto, ſi ritrovi un quarto proporzionale; al quale vi ſi uniſca il prodotto della corda, lunghezza, e groſſezza alla cima, e la e la somma sarà la solidità di detta volta in quelle parti cube eguali all' aliquota commune.

Sia per ragion di esempio, una volta a botte di sesto depresso da calcolarsi la di cui suttesa AB = 30, il sesto DO = 10, e sia la lunghezza BC = 45, e la grossezza della cima DL = $1\frac{1}{2}$. Il solido AFC, sarà 13500; Indi si facci, come 14, a 3, così 13500., al quarto proporzionale $2892\frac{6}{7}$, al quale aggiontovi il solido KG, che è 2025, la somma $4917,\frac{6}{7}$, sarà il valore della solidità di detta volta, Tav. I. Fig. 4.

TEOREMA V.

Sia AKBL, un cerchio descritto sopra l'asse maggiore AB, della Ellissi AIBP, ed aIbP sia un altro cerchio descritto sopra l'asse minore IP, della stessa Ellissi, nel quale vi sia adattata l'ordinata FE, sopra il diametro ab, e dal centro H, al punto F, tirisi la retta HF, e si prolunghi finocchè incontra la linea circolare AKBL, nel punto D, dal quale si abbassi l'ordinata DC, al diametro AB, che interseca la Ellissi nel punto G. Dico, che unendosi il punto G, col punto F, per mezzo della retta FG, questa sarà parallela all' asse maggiore AB. Tav. I. Fig. 5.

Essendo EF, CD, ordinate al diametro AB, queste saranno parallele tra loro, per la proprietà delle ordinate applicate sopra il diametro del cerchio, e perciò

HD : DC = HF : FE (*a*),

e permutando HD : HF = DC : FE :

ma HD : HF = HK : HI, per essere raggi dello stesso cerchio; Dunque

HK : HI = DC : EF;

ma HK : HI = DC : GC (*b*)

Sicchè dunque DC : GC = DC : EF; e pertanto GC, sarà eguale ad EF (*c*); e queste sono parallele. Onde le altre due FG, EC; che le uniscano saranno eguali, e parallele tra loro (*d*). Ciocchè doveasi dimostrare

COROLLARIO

Sicchè se nella Ellissi AIBP, tirisi la retta gG, parallela all' asse maggiore AB, ed interseca la Ellissi negli punti g, G, ed il cerchio descritto sopra l' asse minore, ne punti f, F; e tirandosi la HF, che prolungata incontra la linea circolare descritta sopra l' asse maggiore nel punto D; sarà la retta DC, che passa per lo punto G, ordinata sopra l'asse maggiore, e per conseguenza parallela ad EF.

TEO-

(a) *Prop.* 2. *lib.* 6.
(b) *Teor.* 3.
(c) *Prop.* 9. *lib.* 5.
(d) *Prop.* 33. *lib.* 1.

TEOREMA VI.

SE fF, sia un lato del quadrato inscritto nel circolo aIbP, servendoci della stessa ipotesi data, e tirando la HF, fintantochè incontra la linea circolare nel punto D, descritta sopra l'asse maggiore AB, come diametro, questa prolungata incontrarà la tangente KN, tirata parallela ad AB, nel punto N, e tirandosi la retta DC, che passa per lo punto G, e perfezionandosi le quadrilatere figure MN, dD, OQ, cG. Dico I°. che MN, dD, siano quadrati; II°. che il rettangolo cG, sia simile al rettangola OQ; III°. che il quadrato MN, stia al quadrato dD, come il rettangolo OQ, al rettangolo cG. *Tav. I. Fig. 5.*

I. Essendo hF, quadrato sarà He = eF; ma essendo KN, parallela ad HB, e per conseguenza parallela ad eF; sarà HK : KN = He : eF, e per conseguenza KN, sarà eguale ad HK, ovvero ad HB, essendo raggi dello stesso cerchio. Sicchè dunque essendo le due KN, HB, eguali, e parallele, saranno le altre due NB, KH, eguali, e parallale (*a*). Della stessa maniera si dimostra, che HL, sia eguale, e parallela a BT, e ad AM, e che AH, sia eguale, e parallela, ad ML, e ad UK, e così andando avanti. Onde la figura MUNT, sarà un parallelogrammo equilatero; ed essendo

(a) *Prop. 33. lib. 1.*

do l'angolo HKN, retto; sarà retto ancora l'angolo KNB (*a*): Dunque la figura MTNU, sarà quadrato. Inoltre essendo gli due cerchi AKBL, aIbP, concentrici, gli raggi HF, Hf, Hh, Hu, tirati dal centro agli angoli del quadrato hF, questi prolungati segnaranno nel cerchio AKBL, gli punti y, D, X, d, gli quali uniti colle rette yD, DX, Xd, dy, sarà la figura dyDX, quadrato, e ciò è chiaro. Ciocchè in primo luogo si dovea dimostrare.

II. Per il Corollario del Teorema precedente la DC, che passa per lo punto G, è perpendicolare all'asse AB, ed è parallela ad EF, onde l'angolo FGC, sarà retto per essere eguale all'angolo eFE; ed essendo prolungata in R, sarà tutta GR, parallela ad Fu, così ancora la gc, sarà parallela ad fh; onde la figura cG, sarà rettangola. In oltre essendo Di, parallela ad Fe, si averà, che

HD : Di = HF : Fe (*b*);

Ma HD = HB; Di = Ge; ed HF = HI, ch'è eguale a BQ; ed Fe = eH = GC; Dunque HB, ovvero PS : Ge = BQ : GC ovvero PS : pR = BS : CR e gli loro dupli anche saranno proporzionali, e perciò OS : cR = SQ : GR, e permutando OS : SQ = cR : GR; e per conseguenza gli due rettangoli OQ, cG, sa-

(a) *Prop.* 29. *lib.* 1.
(b) *Prop.* 2. *lib.* 6.

faranno fimili tra loro (*a*). Ciocchè in fecondo luogo doveafi dimoftrare.

III. Effendo NB parallela a DC, nel triangolo NHB. fi averà, che HB : HC = BN : DC; ed effendo il rettangolo OQ, fimile al rettangolo cG, ed effendo gli lati del primo, paralleli agli lati del fecondo, la diagonale OQ del primo, pafferà per gli vertici degli angoli, c, G del fecondo. E perciò farà HBQ, triangolo; ed effendo GC, parallela a BQ, fi averà, che HB : HC = BQ : GC;

Onde BN : DC = BQ : GC (*b*)

e gli loro dupli anche faranno proporzionali, e perciò NT : DX = QS : GR,

e farà $\overline{NT}^2 : \overline{DX}^2 = \overline{QS}^2 : \overline{GR}^2$ (*c*);

ma $\overline{QS}^2 : \overline{GR}^2 :$ = rett. OQ : rett. cG (*d*).

Sicchè dunque il quadrato MN, fta al quadrato dD, come il rettangolo OQ, al rettangolo cG. Ciocchè doveafi in terzo luogo dimoftrare.

COROLLARIO

Effendo il quadrato MN, circonfcritto al cerchio AKBL doppio del quadrato infcritto dD, farà il rettangolo OQ, circonfcritto alla El-

(a) *Def.* 1. *lib.* 6.
(b) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(c) *Prop.* 22. *lib.* 6.
(d) *Prop.* 20. *lib.* 6.

Ellissi, doppio del rettangolo cG, inscritto nella medesima Ellissi. Qual rettangolo cG, siccome si è descritto si dirà in appresso inscritto nella Ellissi.

AVVERTIMENTO.

Sicchè essendo il quadrato MN, doppio del quadrato dD, ed il rettangolo OQ, doppio del rettangolo cG; e siccome le Ellissi sono, come i rettangoli circonscritti, così ancora le Ellissi saranno tra loro, come i rettangoli inscritti; E qualunque Ellissi, starà a qualunque cerchio, come il rettangolo inscritto in essa, al quadrato inscritto in esso.

TEOREMA VII.

Il cerchio il di cui diametro è medio proporzionale tra l' asse maggiore, e minore, sarà eguale alla Ellissi.

Tav. 1. *Fig.* 2. *v.* 1. 2. SIa il cerchio LQM, il diametro del quale LM, sia medio proporzionale tra AB, CD. Dico, che il cerchio LQM, sia eguale alla Ellissi ADBC.

Essendo AB, LM, CD, continuamente proporzionali sarà $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2 = AB : CD$ [*a*]; ma

(a) *Def.* 7. *lib.* 6.

ma AB, ſta a CD, come il cerchio il di cui diametro è AB, alla Elliſſi ADBC [a]; ed $\overline{AB}^2 : \overline{LM}^2$, come il cerchio il di cui diametro è AB, al cerchio LQM [b], Dunque il cerchio il di cui diametro è AB, ſta al cerchio LQM, come il medeſimo cerchio, che ha per diametro AB, alla Elliſſi ADBC, e pertanto il cerchio LQM, ſarà eguale alla Elliſſi ADBC [c]. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AVVERTIMENTO

Da ciò ſi rileva un altro metodo da poter calcolare una volta a botte di ſeſto depreſſo, ovvero di ſopraſſeſto; ritrovando una media proporzionale, tra la corda, ed il doppio ſeſto, e queſta ſarà il diametro del cerchio eguale alla Elliſſi, che forma la ſua ſezzione, la cavità di detta volta, e ritrovando il valore del ſemicerchio, il quale ſi toglie dal rettangolo fatto dalla corda, e dal ſeſto, l'eccesſo ſi moltiplica per la lunghezza di detta volta, ed al prodotto, vi ſi aggiunga il ſolido della groſſezza alla cima; la ſomma ſarà il valore della ſolidità di eſſa.

TEO-

(a) *Teor.* 3.
(b) *Prop.* 1. *lib.* 12.
(c) *Prop.* 9. *lib.* 5.

TEOREMA VIII.

SE la prima quantità A, sta alla seconda B, come la stessa B, sta alla terza C; e la quarta D, sta alla quinta E, come la stessa E, sta alla sesta F, e la prima A, sta alla terza C, come la quarta D, sta alla sesta F. Dico che la prima A, starà alla seconda B, come la quarta D, alla quinta E.

Essendo A,B,C, continuamente proporzionali $A : C = \overline{A}^2 : \overline{B}^2$; così ancora $D : F = \overline{D}^2 : \overline{E}^2$; ma $A : C = D : F$; dunque $\overline{A}^2 : \overline{B}^2 = \overline{D}^2 : \overline{E}^2$; ed A starà a B, come D, sta ad E [*a*].Ciocchè doveasi dimostrare.

PROBLEMA I.

Tav. 1. Fig. 3. n. 1. 2. *Dato un settore Ellittico, ritrovare un settore circolare ad esso eguale,*

Fig. 2. n. 2. SIa dato il settore Ellittico AHO. Ritrovare un settore circolare ad esso eguale.

Si facci il circolo LQM, eguale alla Ellissi ADB [*b*], e tra GI, ed HI, si trovi una media proporzionale LS, la quale si ponghi ad angolo retto con il diametro LM, e proprio nel punto L; e per lo punto S, tirisi la

(a) *Prop. 22. lib. 6.*
(b) *Teor. 7.*

la parallela SQ, ad LM, che incontra la periferia nel punto Q, e dal punto Q, ſi abbaſſi la QR, perpendicolare ad LM, e tiriſi la PQ. Dico, che LQP, ſia eguale ad AHO.

Per coſtruzione $GI : QR = QR : HI$,
e $CO : LP = LP : DO$ (a)
ma $GI : HI = CO : DO$ [b]
Dunque $GI : QR = CO : LP$ [c],
Ma $CO = GO$; ed $LP = QP$; Onde ancora
$GI : QR = GO : QP$,
e permutando $GI : GO = QR : QP$.

Sicchè il triangolo IGO, è ſimile al triangolo RQP [d]; e per conſeguenza l'angolo GOA, è eguale all'angolo QPL, ed il ſettore GOA, è ſimile al ſettore, QPL; e perciò il ſettore GOA, ſta al ſettore QPL, come $\overline{GO}^2 : \overline{PQ}^2$ [e], ovvero come il ſemicerchio ACB, al ſemicerchio LQM [f], e permutando, ſi averà che il ſettore GOA, ſtia al ſemicerchio ACB, come il ſettore QPL, al ſemicerchio LQM; Ma il ſettore GOA, ſta al ſemicerchio ACB, come il ſettore AHO, alla ſemielliſſi ADB [g] dunque; il

(a) *Teor.* 7.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3.
(c) *Teor.* 8.
(d) *Prop.* 7. *lib.* 6.
(e) *Corol. Prop.* 5. *de circ. dim. Caravellì*
(f) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(g) *Corol.* 4. *Teor.* 3.

il settore AHO, sta alla semiellissi ADB, come il settore QPL, al semicerchio LQM, ma la semiellissi ADB, è uguale al semicerchio LQM [a], dunque il settore AHO, sarà anche eguale al settore LQP. Ciocchè doveasi fare, e dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo l'angolo GOA, eguale all' angolo QPL, sarà il semisegmento AGI, simile al semisegmento LQR; E perciò il semisegmento AGI sta al semisegmento LQR, come $\overline{GO}^2$: $\overline{PQ}^2$ [b], ovvero come il semicerchio ACB, al semicerchio LQM, e permutando si averà, che il semisegmento AGI, sta al semicerchio ACB, come il semisegmento LQR, al semicerchio LQM, ma il semisegmento AGI, sta al semicerchio ACB, come il semisegmento AHI, alla semiellissi ADB [c]; dunque il semisegmento AHI, sta alla semiellissi ADB, come il semisegmento LQR, al semicerchio LQM; Ma la semiellissi ADB, è eguale al semicerchio LQM; Dunque ancora il semisegmento AHI, sarà eguale al semisegmento LQR.

AV-

(a) *Teor.* 7.
(b) *Corol.* 2. *Prop.* 5. *de circ. dim. Caravelli.*
(c) *Corol.* 5. *Teor.* 3

AVVERTIMENTO.

Se le volte a botte fussero costrutte a segmenti circolari, ovvero Ellittici, in tal caso da quello si è dimostrato è facile averne il di loro valore. Con dedurne dal rettangolo, che ha per base la corda dell'arco del segmento, e per altezza il sesto, il segmento medesimo, ed il residuo sarà la base del parallelepipedo segmento Cilindrico Cavo, che multiplicato per la lunghezza, si averà il suo valore; al quale aggiuntovi il solido parallelepipedo, che ha per base il rettangolo fatto dalla corda, e dalla lunghezza, e per altezza la grossezza della cima; la somma sarà il valore della solidità di una tal volta.

Per avere il segmento Ellittico è di bisogno ritrovare l'asse maggiore, e l'asse minore della Ellissi totale, acciò si possa trovare il cerchio eguale a detta Ellissi, ed indi calcolarne il segmento eguale al segmento Ellittico; e per ritrovare l'asse maggiore, e minore di una Ellissi, si propone il seguente.

PROBLEMA II.

Date due ordinate in una porzione Ellittica, la suttesa della quale sia parallela ad uno degli assi, ritrovare l' asse maggiore, e l' asse minore.

Tav. I. Fig. 6. SIano date le due ordinate EF, LD, nella porzione Ellittica CBD; ritrovare l' asse maggiore, e l' asse minore.

Dopo le due BE, EF, si trovi una terza proporzionale, e sia EH; Indi dopo le due BL, LD, si trovi un'altra terza proporzionale, e sia LI, e dal punto H, al punto I, tirisi la HI, e si prolunghi fintantochè incontra la porzione BL, dell' asse, nel punto A; Dico I°. che AB, sia uno degli assi conjugati. Si divide inoltre la BA, in due parti eguali nel punto O, e si facci la retta X, media proporzionale tra BL, ed LA, ed in ordine alle tre X, LD, BO, si ritrovi la quarta proporzionale OM. Dico II°., che MO, sia la mettà dell' altro asse.

I. Essendo BE, EF, EH, continuamente proporzionali, sarà $\overline{EF}^2 = \text{rett. } BEH$; Così ancora $\overline{LD}^2 = \text{rett. } BLI$, onde sarà

$$\overline{EF}^2 : \overline{LD}^2 = BE \times EH : BL \times LI;$$

ma

ma $EH : LI = EA : LA$ (a);

dunque $\overline{EF}^2 : \overline{LD}^2 = BE \times EA : BL \times LA$; Sicchè per la proprietà delle ordinate applicate sopra uno degli assi della Ellissi; BA, sarà uno degli assi conjugati, Ciocchè in primo luogo doveasi fare, e dimostrare.

II. Per costruzione $X : LD = BO : OM$

Onde $\overline{X}^2 : \overline{LD}^2 = \overline{BO}^2 : OM^2$ [b]

ma $\overline{X}^2 =$ rett. BLA, e $\overline{BO}^2 =$ rett. BOA;

Dunque rett. BLA : $\overline{LD}^2 =$ rett. BOA : $\overline{OM}^2$. Ma questa è proprietà della Ellissi; Sicchè dunque la OM, è mettà dell'altro asse. Ciocchè in secondo luogo doveasi trovare e dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per maggiormente rischiarire una tal teoria. Siano date, per esempio, le due ordinate EF, LD, della porzione Ellittica CBD, cioè $EF = 4$; $LD = 6$; e date le ascisse corrispondenti, cioè $BE = 2$; $BL = 4$. Sarà $EH = 8$, terza proporzionale in ordine alle due BE, EF; Indi si facci, come $BL : LD = LD : LI$, che sarà eguale a 9. E finalmente per primo termine di un altra pro-

 por-

(a) *Prop. 2. lib. 6.*
(b) *Prop. 22. lib. 6.*

porzione si facci HK = 1, eccesso di EH sopra LI, per secondo KI, eccesso di BL, sopra BE, e per terzo EH, al quarto proporzionale EA = 16, al quale aggiuntovi BE = 3, si averà l' asse AB = 18.

Inoltre, tra BL, LA, si ritrovi la media proporzionale X, la quale sarà 7. 48; e si facci, come X: LD = BO: OM = 7. 351, ed il suo duplo 14. 702, sarà l'altro asse.

AVVERTIMENTO II.

Per ritrovare ora il valore di una volta a botte, essendo la sua cavità un segmento Ellittico, basta ritrovare lo spazio di detto segmento il quale si averà, o per il Corol. V. Teor. III. oppure per il Corol. Probl. I. Quali maniere, dipendono dal conoscere prima l'asse maggiore, e l'asse minore; ed indi ad aver cognizione dello spazio di un segmento circolare, il quale per il detto Corol. V. sta al segmento Ellittico, nella ragione delle ordinate del circolo, e della Ellissi, e per il citato Corollario del Problema, eguale al segmento Ellittico. Quale spazio di segmento di cerchio è facile rinvenirlo; perchè o vi sono tanti dati, quanti vi bisognano per conoscerne il suo valore, secondo Archimede ne suoi Teoremi ha esposto; ovvero, chi si diletta del calcolo trigonometrico, essendo cognita la suttesa, ed il sesto, o sia saetta, potrà saperne il suo valore, siccome in appresso si dirà.

AV.

AVVERTIMENTO. III.

Ed acciocchè non rimanga indeterminata una tal teoria, esporrò il modo come poterſi ſegnare l'aſſe maggiore, e l' aſſe minore in una Elliſſi, nella quale ſia incognito anche il centro. Si tirino dentro la Elliſſi data due rette, le quali ſiano parallele tra loro, e coll' incontro del perimetro della Elliſſi, ſi formeranno gli eſtremi di dette due rette; ſi dividano le dette due rette in due parti eguali, ed unendoci a queſti punti delle diviſioni una terza retta, queſta ſi prolunghi dall' una, e l'altra parte, fintantocchè giunga ad incontrare il perimetro di detta Elliſſi, ed il punto, che divide in due parti eguali la detta retta farà il centro della detta Elliſſi; E fattoſi centro in un tal punto, e con qualunqne intervallo deſcrivendoſi un cerchio il quale deve colla ſua periferia interſecarſi col perimetro della Elliſſi, e s' interſecarà in quattro punti, ſi dividano gli archi circolari framezzati da detti punti d' interſezzioni, in due parti eguali, ed unendoſi gli punti, che dividono gli archi oppoſti in due parti eguali per mezzo delle rette, queſti ſaranno gli aſſi conjugati, la ragion è chiara, per la proprietà della Elliſſi.

TEOREMA IX.

Tav. I. Fig. 7. SE ſopra le due rette AB, GH, ſi formano li due triangoli equilateri AEB, GLH, e colli medeſimi intervalli AB, GH, ſi deſcrivano ſopra gli lati AE, EB; GL, LH; gli archi AE, EB; GL, LH. Dico; che tutto lo ſpazio AEB, ſta a tutto lo ſpazio GLH, come il triangolo AEB, al triangolo GLH.

Eſſendo gli due triangoli AEB, GLH, equilateri, ſaranno ſimili tra loro, onde eſſendo l'angolo EAB, eguale all'angolo LGH, ſarà il ſettore EAB, ſimile al ſettore LGH, ed il ſegmento EB, ſimile al ſegmento LH; e così ancora ſarà il ſettore ABE ſimile al ſettore GHL e perciò il ſettore ABE ſtarà al ſettore GHL, come $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$ [a]; ma $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$, come il ſegmento EB, al ſegmento LH; dunque il ſettore ABE, ſta al ſettore GHL, come il ſegmento EB, al ſegmento LH, e permutando il ſettore ABE, ſtarà al ſegmento EB, come il ſettore GHL, al ſegmento LH, e componendo, e permutando tutto lo ſpazio AEB, ſtarà a tutto lo ſpazio GLH, come il ſegmento EB, al ſegmento LH, ovvero come $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$; ma $\overline{AB}^2 : \overline{GH}^2$, come il triangolo AEB,

(a) *Corol. Prop. 5. de circ. dim. Caravelli*

AEB, al triangolo GLH [a]; Dunque lo ſpazio AEB, ſta allo ſpazio GLH; come il triangolo AEB, al triangolo GLH. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

COROLLARIO I.

Il triangolo AEB, ſta al triangolo GLH, come il rettangolo ABCD, al rettangolo GHIK, avendo la ſteſſa baſe, e la medeſima altezza con gli detti triangoli. Dunque ancora lo ſpazio AEB, ſtarà allo ſpazio GLH, come il rettangolo ABCD, al rettangolo GHIK.

COROLLARIO II.

Il rettangolo ABCD, ſta al rettangolo GHIK, come tutto lo ſpazio AEB, a tutto lo ſpazio GLH, e permutando il rettangolo ABCD, ſta allo ſpazio AEB, come il rettangolo GHIK, allo ſpazio GHI, e convertendo il rettangolo ABCD, ſtarà allo ſpazio AEBCD, come il rettangolo GHIK, allo ſpazio GLHIK.

COROLLARIO III.

Se ſopra gli detti ſpazii AEBCD, GLHIK, come baſi ſi eriggono gli ſolidi AEBCDN,

(a) *Prop. 19. lib. 6.*

GLHIKO; questi averanno eguali ragioni con gli parallelepipedi ACN, GIO [a]. Ed il parallelepipedo ACN starà al solido parallelepipedo cavo AEBCDN, come il parallelepipedo GIO, al solido parallelepipedo cavo GLHIKO.

COROLLARIO IV.

Il parallelepipedo ACN, avendo eguale altezza, col solido parallelepipedo cavo AEBCDN, questi saranno nella ragione delle basi AC, ed ADEBC. Sicchè dunque conoscendosi la ragione del rettangolo AC, allo spazio ADEBC, si può, con una regola del tre venire in cognizione del valore del solido parallelepipedo cavo ADEBCN, ritrovando un quarto proporzionale, dopo gli due numeri costanti, che esprimono la ragione delle basi AC; ADEBC, e del parallelepipedo, nel quale vi sia cavata una simil figura; ed il detto quarto proporzionale sarà il solido ADEBCN.

AVVERTIMENTO I.

Per calcolare il solido di una volta a botdescritta da una simil figura, denominata alla Gotica; fà d'uopo prima ritrovare la ragione costante tra il rettangolo AC, e lo spa-

(a) *Prop.* 32. *lib.* 11.

ſpazio ADEBC, acciò trovandoſi un quarto proporzionale, dopo la detta ragione, ed il parallelepipedo AQ, ſi averà, coll' aggiunta del parallelepipedo DP, il ſolido di qualunque volta di ſimil natura.

Poſto il diametro del cerchio 2000, ſarà il raggio AB = 1000; e la circonferenza di eſſo 6282 [a]; la ſeſta parte di eſſa, ch'è l'arco AE, ſarà 1047, la quale moltiplicata per la mettà di AB, ch'è 500; il prodotto 523500. ſarà il ſettore ABE [b] dal quale dedottone il triangolo AEB, eſſendo l' altezza EF = 866. parti di AB, reſterà il ſegmento EB = 90500; aggiuntovi a queſto, il detto ſettore, ſi averà lo ſpazio totale AEB = 514000; Ma il rettangolo AC = 866000. Dunque il rettangolo AC, ſta allo ſpazio AEB, come 866000, a 514000, ovvero come 866 : 514; oppure come 433, a 257, e convertendo ſi averà, che il rettangolo AC, ſta allo ſpazio ADEBC, come 433 : 176. Sicchè dunque ancora il parallelepipedo ADCBN, ſta al ſolido parallelepido ADEBCN, come 433 : 176 [c].

AV-

(a) *Prop. 6. de circ. dim. Caravelli*
(b) *Porp. 15. de circ. dim Caravelli*
(a) *Corol. 4. Teor. 9.*

AVVERTIMENTO II.

Data una Volta Gotica, che copre un vuoto rettangolare, ed abbia la suttesa AB = 30, e sia il sesto EF = 26, per essere l' altezza del triangolo equilatero, e la lunghezza BN = 40, e la grossezza alla cima ER = $1\frac{1}{2}$; per trovar la sua solidità fa d' uopo prima calcolare il paralleledipedo ACQ, ch' è 31200; Indi fare come 433, a 176, così 31200, al quarto proporzionale $12681\frac{3}{4}$, che sarà il solido ADEBCN, al quale aggiuntovi il parallelepipedo DQP, che ha per altezza la grossezza della cima, e la somma $14481\frac{3}{4}$, sarà il solido parallepipedo cavo ADEBCN, valore della solidità della volta Gotica.

AVVERTIMENTO III.

Essendosi nel Teorema I. dimostrato, che
Tav.1. Fig.1. il rettangolo ABCD, sta al semicerchio AKB, come 14 : 11. E nel Teorema IV. che il rettangolo ABFK, stia alla semiellissi ADB, come 14 : 11. Si puole conoscere il giusto
Tav.1. Fig.3. n.1.2. valore di una fabbrica di figura circolare, o Ellittica, e che abbia le due faccie parallele, come sarebbero le quinte, o siano tompagni delle descritte volte a botte; essendo data la suttesa, il sesto, e la grossezza della fabbrica; si averà il suo valore, formando la seguente analogìa, come 14, ad 11, così il rettangolo

lo fatto dalla ſutteſa, e dal ſeſto al quarto proporzionale, e queſto moltiplicato per la groſſezza, ſi averà il prodotto, che ſarà il valore della ſolidità di detta quinta o tompagno.

Se ſia poi tompagno di volta Gotica, allora ſiccome ſi è detto nell' Avvertimento I. Teor. IX. il rettangolo ABCD, ſta allo ſpazio totale AEB, come 433: 257; ed oprando della ſteſſa maniera detta nel tompagno di Volta a botte circolare, o Ellittica, mutando ſolamente la ragione in quella di 433: 257, ſi averà il ſuo giuſto valore. *Tav. 1. Fig. 7.*

C A P. II.

Della superficie concava della Volta a botte

DEFINIZIONI.

I. PEr superficie concava della Volta a botte s' intende la superficie del semicilindro, che forma la cavità di detta Volta.

II. Si dice superficie di Volta a botte di giusto sesto quella, la di cui curvità è il semicerchio AKB (*Fig.* 1.). Si dice Ellittica l' ADB [*Fig.* 3. *n.* 1. 2.]; E Gotica finalmente AEB (*Fig.* 7.)

TEOREMA I.

Tav. 1. *Fig.* 1. SIa AD, un rettangolo circonscritto al semicerchio AKB. Dico, che la somma de' tré lati AC, CD, DB, sta al perimetro del semicerchio AKB, come 14: 11.

Secondo Archimede ha dimostrato ne' suoi Teoremi; il diametro del cerchio, sta alla sua circonferenza, come 7: 22; Ma AC+CD+DB = 2 AB; ed essendo AB, secondo Archimede 7., sarà 2 AB = 14, e la semiperiferia AKB = 11. Dunque la somma di AC, CD, DB, starà alla semicirconferenza AKB, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Da quelche si è dimostrato nel Teorema precedente, si rileva il metodo di avere il valore della superficie concava di una Volta a botte di giusto sesto, essendo cognita la suttesa, il sesto, e la lunghezza. Trovando un quarto proporzionale, dopo la ragion costante di 14 : 11, e la dupla suttesa, questo moltiplicandolo per la lunghezza, il prodotto sarà il valore della superficie.

Sia, per esempio, AB = 10, sarà OK = 5; e la lunghezza BE = 20; Si formi la seguente analogìa, come 14, ad 11, così 20. al quarto proporzionale, $15\frac{5}{7}$, il quale moltiplicandolo per la lunghezza BE, ch' è 20; il prodotto $314\frac{2}{7}$ sarà la superficie, che si va cercando.

AVVERTIMENTO II.

Se si andasse cercando la superficie della quinta AKB, di detta volta; in tal caso trovando un quarto proporzionale, dopo 14, 11, ed il rettangolo fatto dalla suttesa AB, per il sesto OK, si averà il valore delle dette superficie (*a*).

AV-

(*a*) *Teo. 1, Cap. 1.*

AVVERTIMENTO III.

Se il perimetro di detta Volta, fusse una porzione minore del semicerchio, e si desiderasse il valore della superficie concava di essa, allora fa d' uopo prima trovare il perimetro della detta porzione, acciò moltiplicandolo ancor per la lunghezza di essa volta, si averà la desiderata superficie.

Tav. I. Fig. 8. Col calcolo trigonometrico è facile trovare il valore del perimetro dell' arco ACB, essendo data la suttesa AB, ed il sesto CD; facendo prima, come CD: DB = DB: DE, e coll' aggiunta di CD, si averà CE, diametro del cerchio del continuato arco ACB, ed essendo cognita nel triangolo rettangolo ADO, l' AD, mettà della suttesa, e l' AO raggio si verrà in cognizione dell' angolo AOC, e per conseguenza gli gradi, che contiene l'arco AC, ovvero il suo duplo; ed indi formando la seguente analogia, come il numero 360. gradi di tutta la circonferenza, agli gradi, che contiene l'arco ACB, così la detta circonferenza [la quale sarà cognita, per essersi trovato il diametro] al quarto proporzionale, il quale sarà il valore del detto arco ACB, che moltiplicandolo per la lunghezza della Volta, si averà il valore della superficie concava della detta volta a botte.

Per trovare poi la superficie del segmento ACB, che sarebbe il tompagno di detta Volta.

De-

Devesi moltiplicare il detto arco ACB, per la mettà del raggio CO, e si averà il settore AOB [a], dal quale dedottone il triangolo AOB, avendo per base l' AB, suttesa, e per altezza la OD, eccesso del raggio sopra il sesto ed il residuo sarà il segmento ACB.

AVVERTIMENTO IV.

Posto il diametro AD = 1000; il lato AB, del quadrato inscritto nel cercrchio ABDE, sarà presso a poco 707; Ma il diametro del cerchio, sta alla sua circonferenza come 1000: 3141; Siccome ha dimostrato saviamente il celebre Matematico, Signor D. Vito Caravelli ne' Teoremi di Archimede; Dunque il lato del quadrato inscritto nel cerchio sta alla periferia di esso, come 707: 3141; Onde ancora il lato del quadrato inscritto nel cerchio, sta al quadrante AB, come 707: 785.25, ovvero come 70700: 78525., o pure come 2828: 3141. Sicchè dunque anche il perimetro del quadrato inscritto nel cerchio, sta alla circonferenza del medesimo cerchio come 2828: 3141. *Tav. I. Fig. 9.*

T E O R E M A II.

Se nella Ellissi ADB, si tiri la tangente GN, la quale si vada ad unire coll' asse AB, pro- *Tav. II. Fig. II. n. 1. 2.*

(a) *Prop. 5. de circ. dim. Caravelli.*

prolungato nel punto G, e dal punto del contatto N, si abbassi la perpendicolare NO, sopra l'asse AB; e sopra l' AB, come diametro si descriva il semicerchio ACB, e la sua circonferenza s'incontrarà con la perpendicolare ON, nel punto M. Dico che unendosi il punto G, col punto M, per mezzo della retta GM, questa sarà tangente del semicerchio ACB.

Dal punto M, al centro P, tirisi la retta MP. Per la proprietà della tangente nella Ellissi, si averà, che il quadrato di AP, sia eguale al rettangolo di GP, in PO [a]. Ma essendo PM = PA sarà il quadrato di PM, eguale al rettangolo di GP, in PO; e si averà GP: PM = PM : PO; Onde il triangolo GMP, è simile al triangolo MOP [b]; e l' angolo GMP, come eguale all'angolo MOP, sarà retto. Dunque la GM, sarà tangente nel semicerchio ACB [c]. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Sicchè dunque se una tangente di un cerchio formato sopra l' asse maggiore, o asse minore di una Ellissi, si prolunga fino ad incontrare il diametro disteso, e dal punto del con-

(a) *Corol 3 prop.4.tract.5.sect.con.Joseph.Orlando*
(b) *Prop.6.lib.6.*
(c) *Prop.18.lib.3.*

contatto sopra il diametro si abbassi la perpendicolare, la quale interseca la linea Ellittica, se da questo punto d' interseżzione, al punto dell'incontro della tangente, e del diametro, si tiri una retta, questa sarà tangente della Ellissi.

AVVERTIMENTO.

Da ciò è facile risolvere il Problema di tirare una tangente nella Ellissi, da qualsivoglia punto, o nel perimetro, o fuori del perimetro. Descrivendo prima il semicerchio ACB (*n.* 1.) sopra l' asse maggiore AB, se il punto per lo quale si voglia tirare la tangente sia N, in tal caso da esso si abbassi la perpendicolare NO, e questa si prolunghi fino ad incontrare la semiperiferia nel punto M, per lo punto M, si tiri la retta MG, tangente nel semicerchio (*a*), la quale si unisca col diametro AB, nel punto G, e dal punto G, al punto N, si tiri la retta GN, questa sarà tangente nella Ellissi, la ragione è chiara per quello che si è dimostrato. E se il punto è dato al di fuori della Ellissi, e propio nel prolungamento dell' asse maggiore AB, e sia G, per questo tirisi la GM, tangente del semicerchio nel punto M, dal quale si abbassi la perpendicolare MO, che interseca la li-

(*a*) *Prop.16.lib.3.*

linea Ellittica nel punto N, e tirandosi la GN, questa sarà tangente della Ellissi.

LEMMA,

Tav. I. Fig. 10. Sia MBFN, una Ellissi qualunque, e coll' asse maggiore MF, come diametro si descriva il cerchio MDFO, si tiri indi il diametro OD, ad angoli retti col diametro MF; si divida il quadrante DF, in due parti eguali nel punto L, e dal punto L, si abbassi la perpendicolare LH, che taglia la Ellissi nel punto I; per lo punto L, si tiri la retta EG, tangente del cerchio nel punto L, la quale si vada ad unire colli due descritti diametri prolungati ne' punti E, G. Si unisca indi il punto G, col punto I, per mezzo della retta GI, e si prolunga finocchè si unisca colla retta AE, nel punto C; sarà GC, tangente della Ellissi nel punto I (a), e finalmente dal punto F, alli punti D, B, si tirino le rette FD, FB. Dico, che la tangente GC, della Ellissi FBMN, sia parallela al lato BF, del rombo inscritto in essa.

Nel triangolo EGA, la retta HL, è parallela ad AE, onde sarà EC : CA = LI : IH (b), e componendo EA : CA = LH : IH.

ma

(a) *Corol. Teor* 2. *Cap.* 2.

(b) *Corol.* 2. *Teor.* 4. *lib.* 6.

ma LH : IH = DA : AB (*a*)
Dunque EA : CA = DA : AB,
e permutando EA : DA = CA : AB;
ma EA : DA = AG : AF (*b*)
Dunque CA : AB = AG : AF

Ma quando due lati di un triangolo sono divisi in parti proporzionali, le rette che unisco- no gli punti delle divisioni, sono parallele al terzo lato (*c*). Dunque la retta BF, sarà parallela alla tangente GC. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo GE, parallela ad FD, si averà che
AG : GE = AF : FD (*d*)
e permutando AG : AF = GE : FD
Inoltre essendosi dimostrata FB, parallela a GC, si averà ancora, che
AG : GC = AF : FB
e permutando AG : AF = GC : FB;
Ma AG : AF = GE : FD.
Dunque GE : FD = GC : FB,
e permutando GE : GC = FD : FB;
Ma GE : GC = GL : GI (*e*).

 Dun-

(a) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. 1.*
(b) *Prop. 2. lib. 6.*
(c) *Prop. 2. lib 6.*
(d) *Prop. 4. lib. 6.*
(e) *Corol. 2. prop. 2. lib. 6.*

Dunque FD : FB = GL : GI

Chepperciò le tangenti GL, GI, tirate nelli semiquadranti del cerchio FDMO, e della Ellissi FBMN, sono come FD, lato del quadrato inscritto nel cerchio, ad FB, lato del rombo inscritto nella Ellissi.

TEOREMA III.

Tav. II. Fig. 11. n. 1.

Il perimetro di qualunque Ellissi, sta alla periferia del cerchio, il di cui diametro è l' asse maggiore, o minore della detta Ellissi, come il lato del rombo inscritto nella Ellissi, al lato del quadrato inscritto nel cerchio.

Sia ADB, una semiellissi, ed ACB, semicerchio, il diametro AB, del quale sia asse maggiore, o minore della detta semiellissi; dal centro P, s' innalzi ad angoli retti la PC, e si prolunga fintantochè giunge a dividere in quadranti la semiellissi, ed il semicerchio, ne punti D, e C; si unifcono gli punti A, e C; A, e D, per mezzo delle rette AC, AD, sarà AC, lato del quadrato inscritto nel cerchio, ed AD, lato del rombo inscritto nella Ellissi. Dico, che il perimetro della Ellissi ADB, stia alla periferia del cerchio ACB come AD, ad AC.

Si divida il quadrante AC, in due parti egua-

eguali nel punto M (*a*), e dal punto M, si abbassi la perpendicolare MO, che taglia il quadrante Ellittico nel punto N, per lo punto M, tirisi la retta MG, tangente del circolo nel punto M (*b*), la quale si prolunga finocchè si unisce col diametro AB, prolungato nel punto G; dal punto G, al punto N, tirisi la retta GN, la quale sarrà tangente nella Ellissi nel punto N (*c*). Si concepisca la mo, infinitamente vicina alla MO, e parallela; gli archetti Mm, Nn confondendosi colle porzioni delle tangenti, si potranno pigliare come lineette: Onde si averà, che l' archetto Mm, stia all'archetto Nn, come MG: NG (*d*); Ma MG: NG = AC: AD, per lo Corollario del Lemma precedente. Dunque l'archetto Mm, sta all' archetto Nn, come AC: AD. Inoltre essendo l'archetto Nn, il medio del quadrante Ellittico AD, ed essendo la parte ND, meno curva della parte NA, perciò concependosi diviso tutto il quadrante circolare AMC, nelle parti tutte eguali ad Mm, e per li punti delle divisioni si concepiscano tirate altrettante rette parallele a CP, queste divideranno il quadrante Ellittico ANP, in ugual numero di parti, e

 fa-

(*a*) *Prop.* 30. *lib.* 3.
(*b*) *Corol.* 2. *prop.* 16. *lib.* 3.
(*c*) *Corol. Teor.* 2. *Cap.* 2.
(*d*) *Corol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.

saranno gli archetti nella parte meno curva ND, maggiori degli archetti nella parte NA; poichè gli gradi nella parte meno curva della Ellissi, sono maggiori degli gradi nella parte più curva, siccome molti Autori han dimostrato, e dottamente il celebre Matematico P. D. Gio: Maria della Torre nella sua Fisica Italiana stampata in Napoli nel 1748. Part. II. Cap. I. §. 11. E siccome il quadrante Ellittico AND, è una curva continuata, ed essendo la parte nel punto N, più curva di quella nel punto D, così gli archetti nella parte ND, si faranno maggiori quanto più sono distanti dal punto N; e l'ultimo archetto accosto al punto D, sara il massimo relativamente all'archetto Nn, e si farà eguale al suo corrispondente nel cerchio; ed essendo la parte nel punto A, più curva di quella nel punto N, l'archetto accosto al punto A, sarà il minimo relativamente all'archetto Nn, ed essendo di egual numero le divisioni tanto nell'arco ND, quanto nell'arco NA, e gli archetti progressivamente dal punto N; verso D, si fanno maggiori di Nn, nel tempo medesimo, che gli altri nell'arco NA, si fanno minori andando da N, in A; Sicchè dunque l'ultimo archetto accosto al punto A, sarà tanto minore dello archetto Nn, quanto l'ultimo archetto accosto al punto D, sarà maggiore dello stesso archetto Nn. Essendo gli archetti corrispondenti nel quadrante circolare

AC,

AC, tutti eguali tra loro; le ragioni degli archetti nella porzione MC, agli archetti nella porzione DN, saranno tanto minori della ragione di Mn : Nn, quanto le ragioni degli archetti nella porzione MA, agli archetti nella porzione NA, saranno maggiori della stessa ragione di Mm : Nn; Onde componendo, e compensando il difetto delle prime, coll' eccesso delle seconde, si averà che la somma degli archetti nel quadrante circolare AC, alla somma degli archetti nel quadrante Ellittico AD, starà come Mm: Nn, ovvero come AC: AD. Sicchè dunque la periferia del cerchio ACB, sta al perimetro della Ellissi ADB, essendo quadrupli de quadranti, anche nella ragione di AC: AD. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendo AC, la quarta parte del perimetro del quadrato inscritto nel cerchio, il di cui diametro è AB; ed AD, quarta parte del perimetro del rombo inscritto nella Ellissi; Onde la periferia del cerchio, il diametro del quale è uno degli assi conjugati, sta al perimetro della Ellissi, come il perimetro del quadrato inscritto nel cerchio, al perimetro del rombo inscritto nella Ellissi.

COROLLARIO II.

Essendosi dimostrato, che il perimetro di un cerchio, che ha per diametro uno degli assi conjugati di una Ellissi, sta al perimetro della stessa Ellissi, come il lato del quadrato inscritto nel cerchio, al lato del rombo inscritto nella Ellissi, permutando, ed invertendo, il lato del quadrato, starà alla periferia del cerchio, come il lato del rombo, al perimetro della Ellissi; ovvero il perimetro del quadrato, starà alla periferia, come il perimetro del rombo, al perimetro della Ellissi; Ma il perimetro del quadrato, sta alla periferia del cerchio, come 2828: 3141 (a). Dunque ancora il perimetro del rombo inscritto in una Ellissi, sta al perimetro della Ellissi come 2828: 3141.

COROLLARIO III.

Il perimetro di qualunque Ellissi, stando al perimetro del rombo inscritto in essa, come 3141: 2828. Sicchè dunque gli perimetri delle Ellissi, sono tra loro, come gli pemetri de rombi inscritti in esse, ovvero come gli lati di detti rombi.

CO-

(a) *Avvert.* 4. *Teor.* 1. *Cap.* 2.

COROLLARIO IV.

Stando il perimetro di ogni Ellissi, al perimetro del rombo inscritto in essa, come 3141 : 2828, si averà, che nella stessa ragione sarà il semiperimetro di una Ellissi, al semiperimetro del rombo inscritto in essa; e del quadrante, al lato del rombo. Sicchè dunque gli perimetri di due Ellissi, sono tra loro come gli perimetri de rombi inscritti in esse, ovvero come gli lati de' stessi rombi.

COROLLARIO V.

Siano le due Ellissi ABCD, abcd, simili tra loro gli assi conjugati delle quali siano AC, BD, ac, bd; si uniscono gli punti A, B; a, b, per mezzo delle rette AB, ab; Essendo simili le due Ellissi si averà; che AO : OB = ao : ob (a), ed essendo gli angoli AOB, aob, eguali perchè retti, perciò gli due triangoli AOB, aob, saranno simili [b]; Onde si averà, che AB : AO = ab : ao, e permutando AB : ab = AO : ao; Ma AB : ab, come il perimetro della Ellissi ABCD, al perimetro della Ellissi abcd; Dunque AO : ao, ovvero AC : ac, come il pe- *Tav. IV. Fig. 37.*

(a) *Avvert.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(b) *Prop. 6. lib. 6.*

perimetro della ellissi ABCD, al perimetro della ellissi abcd. Sicchè dunque gli perimetri di due ellissi simili, sono tra loro come gli assi maggiori, ovvero come gli assi minori, essendo questi proporzionali con quelli.

COROLLARIO VI.

Nelle due ellissi simili ABCD, abcd, gli due triangoli AOB, aob, siccome si è dimostrato, sono simili, e perciò starà

$$AO : OB = ao : ob$$

Componendo $AO + OB : OB = ao + ob : ob$
e permutando $AO + OB : ao + ob = OB : ob$;
Ma $OB : ob = AB : ab$, essendo simili gli due triangoli, dunque

$$AO + OB : ao + ob = AB : ab;$$

Ma AB, sta ad ab, come il perimetro della ellissi ABCD, al perimetro della ellissi abcd. Sicchè dunque gli perimetri dell'ellissi simili, sono ancora tra di loro; come la somma degli semiassi conjugati, ovvero come la somma degli assi conjugati.

AVVERTIMENTO.

Dovendosi calcolare una superficie di una Volta a botte ellittica, essendo cognita la suttesa, il sesto, e la lunghezza; Primo si deve estraere la radice dalla somma de' quadrati della metà della suttesa, e dell'intiero sesto

ſeſto, indi trovando un quarto proporzionale dopo li due numeri coſtanti 2828, 3141, e la dupla radice, ſi averà il perimetro della curvità di detta volta, il quale multiplicandolo per la lunghezza, il prodotto ſarà la ſuperficie di detta volta.

Sia per eſempio AB = 20; il ſeſto PD = $7\frac{1}{2}$; e la lunghezza ſia 30. L'AP, mettà della ſutteſa ſarà 10; Onde AD, radice della ſomma de' quadrati fatti ſopra AP, PD, ſarà $12\frac{1}{2}$. Indi dopo li due numeri coſtanti 2828, 3141, e la dupla radice che è 25, ſi trovi il quarto proporzionale 27 $\frac{2169}{2828}$, e queſto ſarà il perimetro della ſemiellíſſi ADB, che moltiplicandolo per la lunghezza 30, il prodotto 833 $\frac{13}{1414}$ ſarà la ſuperficie di detta volta. Tav. II. Fig. 11. n. 1.

Per liberare un tal calcolo dall'eſtrazzioni di radice, è neceſſario prender la miſura della ſutteſa della mettà della volta, la quale ſarebbe AD, e di tal modo ſi verrebbe ad abbreviar la operazione; trovando un quarto proporzionale dopo li due numeri coſtanti 2828, 3141, e la dupla ſutteſa, e queſto ſarà il perimetro, il quale moltiplicandolo per la lunghezza, ſi averà la ſuperficie.

TEO-

TEOREMA IV.

Tav. I. Fig. 7. SIa il rettangolo ABCD, circonſcritto all' arco Gotico AEB. Dico, che la ſomma degli tre lati AD, DC, CB, ſtia al perimetro curvo AEB, come 1366 : 1047. Si tirino le due rette EA, EB, ſarà AEB, un triangolo equilatero (a), e perciò l'arco AE, ſarà di gradi 60. Onde, poſto il diametro 1000., la circonferenza ſarà 3141 (b), ed eſſendo l'arco AE, ſeſta parte della circonferenza, ſarà 523. 5; ed il ſuo duplo, 1047, ſarà la ſomma degli due archi AE, EB. Ciò poſto, eſſendo AB, raggio del cerchio, la ſeſta parte della circonferenza del quale è AE; perciò ſarà AB, che è eguale a DC = 500, e la EF, come perpendicolare del triangolo equilatero, ſarà 433; Onde la ſomma di AD, DC, CB; Cioè di AB, e del doppio ſeſto EF, ſarà 1366; ma il perimetro AEB, è uguale a 1047. Dunque la ſomma de' tre lati AD, DC, CB, ſta al perimetro AEB, come 1366 : 1047. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AV-

(a) *Teor. 9. Cap. 1.*
(b) *Prop. 6. de circ. dim. Caravelli.*

AVVERTIMENTO.

Dovendosi misurare la superficie di una Volta a botte di figura Gotica, essendo cognita la sottesa, il sesto, e la lunghezza; basta ritrovare un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 1366, 1047, e la somma della suttesa col duplo sesto, e questo moltiplicarlo per la lunghezza, ed il prodotto sarà la superficie, che si va cercando.

Sia, per esempio, la suttesa AB = 30; il sesto EF, sarà 26; e la lunghezza BN = 40; la somma degli tre lati AD, DC, CB, è uguale 82. Onde facendo, come 1366, a 1047, così 82, a $62 \frac{581}{683}$, il quale moltiplicato per la lunghezza 40, il prodotto $2514 \frac{18}{683}$, sarà la superficie della Volta Gotica, che si andava cercando.

CAP.

CAP. III.

Delle varie specie de' Poliedri, e delle principali loro affezioni.

DEFINIZIONI.

Tav. II. Fig. 12. I. SE attorno alla base circolare ABCD, dell' Emisfero BID, vi si circonscrive un poligono qualunque EHGF, e si concepiscano le tangenti EH, HG, GF, FE, sollevate dalla loro situazione, radendo la superficie dell' emisfero, fintantocchè giungono nel medesimo tempo nel punto I, vertice di esso Emisfero. Il solido EHGFI, descritto da moti di dette tangenti, si chiamerà in appresso *Semipoliedro*.

II. Si denominarà *Semipoliedro esterno*, allora quando la base di esso è un poligono circonscritto alla base dell' Emisfero.

III. Si dice all'opposto *Semipoliedro interno*, allora quando la sua base è inscritta alla base dell' Emisfero; e la sua generazione si è, che siccome nel semipoliedro esterno, il moto de' suoi lati si fa sempre tangente all' Emisfero; nello interno all'incontro, il moto de' lati si fa sempre parallelo, e gli estremi di essi devono toccare la superficie interna dell' Emisfero. Se s' intende fatto il medesimo nell'altra mettà della sfera, tutto il solido si dirà *Poliedro*.

IV.

IV. Se nel circolo AFBH, s'intende inscritto il poligono AEFBGH, e sopra le diagonali AB, HF, EG, s'intendono ad angoli retti elevate le semiellissi AIB, HIF, EIG, le quali s'intersecano nel punto I, gli assi maggiori siano AB, HF, EG; e con moti eguali, e paralleli, gli lati AE, EF, FB, si concepiscano scorrere per gli archi Ellittici AI, EI, FI, il solido, la di cui superficie è generata da detti moti, facendo il medesimo dall' altra parte, si dirà *Poliedro Ellittico*. Tav. II. Fig. 15. n. 1.

V. La retta, che unisce il punto I, col centro K, si dirà *raggio del Poliedro*, la IL, che unisce l'altro punto del poliedro, si chiamarà *asse*; il punto I, *vertice*; e la base EFBGHA, *sezione massima*.

TEOREMA I.

Se il mezzo poliedro, si divide per un piano parallelo alla sezione massima. La sezione sarà una figura simile alla massima.

SI divida il semipoliedro EFGHI, per il piano LMNO, parallelo alla sezione massima, EFGH. Dico, che la figura LMNO, sia simile ad EFGH. Tav. II. Fig. 12.

Per gli punti P, ed S, si tirino le rette PQ, SQ, parallele alle rette BK, CK. Per

la

la natura di detto ſolido, la figura LMNO, ſarà circonſcritta al cerchio PR; e gli archi BPI, CSI, gli quali paſſano per li punti del contatto de' lati, che terminano le figure, ſaranno quadranti; e per tanto gli archi BC, PS, che ſono framezzati a detti quadranti, ſaranno ſimili tra di loro, e perciò ſarà l'angolo BKC, eguale all'angolo PQS. Ma nelli quadrilinei BKCH, PQSO, gli angoli dell'uno, ſono eguali agli angoli dell'altro, e gli angoli nelli contatti ſono eguali per eſſer retti; dunque ſarà l'angolo BHC, della figura EFGH, eguale all'angolo POS, della figura LMNO, della ſteſſa maniera ſi dimoſtra di tutti gli altri; Onde la figura LMNO, ſarà equiangola colla figura EFGH. Ciò poſto, tirandoſi le due OQ, HK, queſte divideranno gli angoli, tanto alli centri, quanto gli angoli POS, BHC, in due parti eguali (*a*). Onde gli due triangoli OPQ, HBK, ſaranno equiangoli, e perciò

$$OP : PQ = HB : BK \ (b),$$

e permutando $OP : HB = PQ : BK$;

Ma eſſendo gli due triangoli QPL, BKE, equiangoli, ſarà $PQ : BK = PL : BE$;

Dnnque $OP : HB = PL : BE$,

e permutando $OP : PL = HB : BE$,

e componendo $OL : PL = HE : BE$

e per-

(a) *Corol. prop.* 13. *lib.* 4.
(b) *Prop.* 4. *lib.* 6.

e permutando OL : HE = PL : BE,
ovvero come PQ : BK.
Della ſteſſa maniera ſi dimoſtra, che LM, ſta ad EF, come il raggio PQ, al raggio BK; Dunque OL : HE = LM : EF,
e permutando OL : LM = HE : EF;
E perciò le due figure HEFG, OLMN, ſaranno ſimili tra di loro (*a*). Ciocchè biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

Eſſendoſi dimoſtrato, che ciaſcuno de' lati della figura LMNO, ſtia a ciaſcuno de' lati della figura EFGH, come PQ : BK; Onde la ſomma di tutti gli antecedenti LM, MN, NO, OL, cioè il perimetro della ſezione LMNO, ſtarà alla ſomma di tutti gli conſeguenti EF, FG GH, HE, cioè al perimetro della ſezione EFGH, anche come PQ : BK (*b*). ſicche dunque gli perimetri delle ſezioni, ſono come gli raggi de cerchi inſcritti a dette ſezioni.

COROLLARIO II.

La ſezione LMNO, ſiccome ſi è dimoſtrato è ſimile alla maſſima EFGH; Onde

E LMNO

(a) *Def.* 1. *lib.* 6.
(b) *Prop.* 12. *lib.* 5.

$$LMNO : EFGH = \overline{OL}^2 : \overline{HE}^2 \text{ (a)}$$

ovvero come $\overline{PQ}^2 \ \overline{BK}^2$.

Ma $\overline{PQ}^2 : \overline{BK}^2$, come il cerchio BADQ; al cerchio PSR (*b*); Dunque le sezioni de' poliedri, sono come gli circoli inscritti in esse.

L E M M A.

Tav. I. Fig. 13. Sia AmK, un triangolo rettangolo nel punto m, dal quale si abbassi la mn, perpendicolare alla ipotenusa AK, e si tiri la PQ, parallela ad mn, Dico, che Km : mn = Pm : Qn

Essendo gli due triangoli Amn, mKn, simili tra loro, per essere ciascuno di essi simile col totale, perciò si averà.

Am : An = mK : mn;

ma Am : An = Pm : Qn (*c*);

Dunque Km : mn = Pm : Qn.

Ciocchè doveasi dimostrare.

TEO-

(a) *Prop.* 20. *lib.* 6.
(b) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(c) *Corol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.

TEOREMA II.

La superficie del semipoliedro è uguale alla superficie del prisma, che ha la stessa base e la medesima altezza col semipoliedro.

Sia EFGHI, il semipoliedro. Dico, che la sua superficie sia eguale a quella del prisma, che ha per base EFGH, e per altezza KI. *Tav. II. Fig. 12.*

Si concepisca una sezione, la quale passi per mn, e sia parallela, ed infinitamente vicina alla LMNO, la quale sarà parallela alla base EFGH; essendo le due sezioni infinitamente vicine, l'archetto mP, si confonderà colla tangente nel punto M, tirata; e perciò mP, si potrà prendere per una retta. Ciò posto, formando l'archetto mP, una corona nel poliedro, la sua superficie si averà moltiplicando l'archetto mP, per la somma dimezzata delli perimetri delle due sezioni mn, PQ; ma essendo le dette due sezioni infinitamente vicine, la somma dimezzata de' perimetri di esse, non differisce da quella della sezione mn; Onde il valore di detta corona si averà moltiplicando l'archetto mP, per il perimetro della sezione mn. Inoltre, per lo lemma precedente, tirando la Km, si averà, che Km, ovvero KB, che gli è uguale, come

 me

me raggi del quadrante, ſta ad mn, come mP, a Qn; ma KB, ſta ad mn, come il perimetro EFGH, al perimetro della ſezione mn (a); dunque il perimetro EFGH, ſta al perimetro della ſezione mn, come mP: Qn; e pertanto il prodotto del perimetro della ſezione mn, per l'archetto mP, ſarà eguale al prodotto del perimetro della baſe EFGH, per Qn (b); Ma ſiccome ſi è detto, che il prodotto del perimetro della ſezione mn, per l'archetto mP, ſia eguale alla corona del ſemipoliedro tramezzata alle due ſezioni infinitamente vicine, e queſto avendo luogo da per tutto; ſicchè ſe ſi concepiſce il ſemipoliedro diviſo in queſte corone infinitamente picciole, e dovendo eſſere la ſomma di tutte queſte corone eguale alla ſuperficie del ſemipoliedro; perciò il prodotto del perimetro della baſe EFGH, per la ſomma delle porzioni in IK, eguali a Qn, e corriſpondenti agli enunciati archetti, ſarà eguale alla ſuperficie del ſemipoliedro; ma il prodotto del perimetro della baſe EFGH, per l'altezza IK, è la ſuperficie del priſma, che ha per baſe la figura EFGH, e per altezza la IK; baſe, ed altezza del ſemipoliedro. Sicchè dunque la ſuperficie del ſemipoliedro è eguale a quella

(a) *Corol.* 1. *Teor.* 1. *Cap.* 3.
(b) *Prop.* 16. *lib.* 6.

la del prisma, che ha la stessa base, e la medesima altezza. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Quel che si è dimostrato del semepoliedro ha luogo ancora nel poliedro totale, essendo questo duplo di quello. E perciò la superficie del poliedro è eguale a quella del prisma, la di cui base è la sezione massima, e l' altezza l' asse del poliedro.

COROLLARIO II.

Col medesimo raziocinio usato nel Teorema precedente, si dimostra, che la superficie di una porzione di poliedro LMNOI, è eguale alla superficie del prisma, che ha per base la sezione massima EFGH, e per altezza IQ. Sicchè la superficie del semipoliedro, sta alla superficie della porzione LMNOI, come la superficie del prisma, che ha per base la sezione massima, e per altezza il raggio, alla superficie del prisma, che ha la medesima base, e per altezza la IQ, altezza del segmento, ovvero come il raggio IK, alla porzione dell' asse IQ.

COROLLARIO III.

Sicchè dunque un poliedro totale dividendosi per piani paralleli alla sezione massima, le superficie de' segmenti saranno tra loro nella ragione delle porzioni dell'asse corrispondenti a dette sezioni; E col totale, sono come le rispettive porzioni dell'asse, allo intero asse.

COROLLARIO IV.

La sezione massima EFGH, sta alla superficie del prisma, che ha per base la EG, e per altezza la IK, che è eguale a BK, come la IK, alla mettà di IK; poichè la superficie della sezione massima EG; si ha moltiplicando il perimetro EFGH, per la mettà di BK, ovvero per la mettà di IK; e la superficie del prisma si ha moltiplicando l'istesso perimetro EFGH, per la IK; ma la superficie del prisma è eguale alla superficie del semipoliedro. Sicchè dunque la sezione massima EFGH, sta alla superficie del semipoliedro, come la mettà di IK, ad IK, ovvero come 1 : 2. Che perciò la superficie del semipoliedro è dupla della sua base, e la superficie totale del poliedro è quadrupla della sezione massima:

AVVERTIMENTO.

Essendo la superficie del poliedro eguale alla superficie del prisma, che ha per base la sefezione maſſima, e per altezza l'aſſe del poliedro, ed eſſendo queſta eguale ad un rettangolo, che ha per baſe il perimetro della ſezione maſſima, e per altezza, l'altezza del priſma, o ſia l'aſſe; così tutte le proprietà, che ai rettangoli ſi ſono dimoſtrate, alle ſuperficie de' poliedri anche competono. Ed infatti ſe due poliedri hanno gli perimetri delle ſezioni maſſime eguali, e gli aſſi eguali, le ſuperficie ſaranno eguali; ed al contrario ſaranno in ragion de' perimetri delle ſezioni maſſime, ſe gli aſſi ſono eguali; ed in ragion degli aſſi, ſe li perimetri ſono eguali. Come ancora ſe ſono gli uni, e gli altri diſuguali, ſaranno in ragion compoſta de' perimetri delle ſezioni maſſime, e degli aſſi. E finalmente ſaranno di ſuperficie eguali, ſe gli detti perimetri ſono nella reciproca ragione degli aſſi. E ſi diranno di ſuperficie ſimili, allorchè gli aſſi ſono proporzionali alli perimetri delle ſezioni maſſime ſimili.

TEOREMA III.

Tav. II. Fig. 12. *Il prisma, che ha per base la sezione massima di un semipoliedro, e per altezza il raggio di esso, sta al semipoliedro nella ragione di 3 : 2 :*

Sia EFGHI, un semipoliedro. Dico, che il prisma, che ha per base la sezione massima EFGH, e per altezza la KI, sta al semipoliedro EFGHI; Come 3 : 2.

Si concepisca la superficie del semipoliedro EFGHI, divisa in un numero infinito di corone, mercè le sezioni parallele a quella massima, e queste corone s' intendano per altri piani verticali divise in un altro numero infinito. E dal centro K, agli angoli di questi infiniti piani concepiscansi tirate rette, queste divideranno il semipoliedro in tante piramidi, quant' è 'l numero de' piani, nel quale è diviso il semipoliedro; e come queste hanno la medesima altezza, che è il raggio IK, così la somma di esse si averà moltiplicando la somma delle basi, che formano la superficie del semipoliedro, per la terza parte di IK, ovvero multiplicando la dupla sezione massima EFGH (*a*), per $\frac{1}{3}$ BK; ma

(a) *Coroll. 4. Teor. 2. Cap. 3.*

ma la piramide, che ha per base la sezione massima EFGH, e per altezza la KI, si ha con moltiplicare la sezione massima EFGH, per la terza parte di IK, ovvero BK; e la somma di dette piramidi formano il semipoliedro. Dunque il semipoliedro EFGHI, sta alla piramide, che ha per base la sezione massima EFGH, e per altezza la IK, come 2: 1; ma il prisma, e la piramide, che hanno la stessa base, e la medesima altezza sono nella ragione di 3: 1. (a); Dunque *ex æquo*, il prisma, che ha per base la sezione massima di un semipoliedro, sta al semipolidero nella ragione di 3: 2. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato, che la solidità del prisma, che ha per base la sezione massima del semipoliedro, e per altezza il raggio, stia al semipoliedro, come 3: 2. Onde convertendo, il prisma sudetto, starà allo stesso prisma semipoliedro cavo, come 3: 1.

COROLLARIO II.

Da quelche si è dimostrato nel Teorema precedente, egli è facile ad avere il valore di

(a) *Prop. 7. lib. 12.*

di un ſegmento di poliedro la di cui ſezione ſia LMNO, parallela alla ſezione maſſima EFGH, moltiplicando la ſuperficie di eſſo ſegmento (la quale ſi averà moltiplicando il perimetro della ſezione maſſima EFGH, per IQ), per la terza parte del raggio IK, ed il prodotto ſarà il ſettore del poliedro, dal quale dedottane la piramide, che ha per baſe la ſezione LMNO, e per altezza la QK, ed il reſiduo ſarà il valore della ſolidità del ſegmento LMNOI.

COROLLARIO III.

Eſſendo il priſma, la di cui baſe è EFGH, e l'altezza IK, al ſemipoliedro EFGHI, come 3 : 2; ed il detto priſma, al cilindro, che ha per baſe il cerchio BADC, e la ſteſſa altezza IK, come la baſe EFGH, al cerchio BADC (*a*), ed il cilindro, che ha per baſe il cerchio BD, ſta allo Emisfero, come 3 : 2 (*b*); Dunque *ex æquo* il ſemipoliedro EFGHI, ſta all' Emisfero BADCI, come la baſe EFGH, al cerchio BADC, ovvero come il perimetro dell' uno, alla periferia del all' altro.

CO-

(a) *Prop. 69. de Sphæ. & Cyl. Caravelli.*
(b) *Corol. prop. 68. de Sphæ. & Cyl. Caravelli.*

COROLLARIO IV.

Il valore del settore poliedrico LMNOK, si ha multiplicando la superficie del segmento LMNOI, per la terza parte di IK; ed il valore dal settore sferico, il di cui segmento è tagliato dal piano LMNO, si ha con moltiplicare la superficie del segmento sferico per $\frac{1}{3}$ IK (*a*). Onde il settore poliedrico, sta al settore sferico nella ragione delle superficie de' segmenti; Ma le superficie de' segmenti sono, come la figura EFGH, al circolo BADC (*b*), e la figura EFGH, sta al cerchio BADC, come la sezione LMNO, al cerchio PSR, inscritto in essa (*c*); Dunque il settore poliedrico LMNOK, sta al settore sferico PSRK, come la sezione LMNO, al cerchio inscritto in essa.

COROLLARIO V.

La piramide LMNOK, stà al cono PSRK, come la sezione LMNO, al cerchio PSR; Onde il settore poliedrico LMNOK, sta al, settore sferico PSRK, come la piramide LMNOK, al cono PSRK; e convertendo il

(a) *Prop.* 38. *de Sphæ.*, *& Cyl. Caravelli.*
(b) *Corol.* 2. *Teor.* 2. *Cap.* 3.
(c) *Corol.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 3.

il ſettore poliedrico, ſta al ſettore sferico, come il ſegmento poliedrico LMNOI, al ſegmento sferico PSRI; Ma gli detti ſettori ſono come la ſezione LMNO, al circolo PSR; Dunque, il ſegmento poliedrico LMNOI, ſta al ſegmenro sferico PSRI, come la ſezione LMNO, al cerchio PSR; ovvero come le di loro ſezioni.

Eſſendoſi dimoſtrato, che tanto gli ſegmenti, quanto gli ſettori ſono nella ragione delle ſezioni, ma la ſezione LMNO, ſta al cerchio PSR, come la ſezione maſſima EFGH, al cerchio BADC (*a*); e la ſezione maſſima, ſta al cerchio inſcritto in eſſa, come il ſemipoliedro, all' Emisfero. Dunque tanto gli ſegmenti, quanto gli ſettori, ſono proporzionali col ſemipoliedro, e coll' Emisfero.

AVVERTIMENTO I.

Quel che ſi è dimoſtrato del rapporto del ſemipoliedro, all' Emisfero, e delle proprietà di eſſo, con gli priſmi, che hanno la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza; ha luogo ancora con gli totali poliedri, e sfere, eſſendo dupli di eſſi.

AV-

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 3.

AVVERTIMENTO II.

Essendosi fatto vedere, che il prisma avendo la medesima base, e la stessa altezza col poliedro, il prisma, sta al poliedro, come 3 : 2. Onde due poliedri saranno eguali, quante volte le basi, e le altezze sono eguali. E se le basi sono eguali, siccome gli prismi sono nella ragione delle altezze, in questa stessa ragione saranno gli poliedri; e se al contrario le altezze sono eguali saranno nella ragione delle basi; e se l' une, e le altre sono ineguali, saranno gli detti poliedri nella ragion composta delle basi, ed altezze. E saranno eguali due poliedri, se le basi sono reciproche colle altezze; e simili si diranno quando le basi sono simili, e sono proporzionali colle altezze, e perciò due poliedri simili saranno nelle triplicata ragione de' loro lati omologi.

AVVERTIMENTO III.

Nel Teorema II di questo Capitolo si è dimostrato, che la superficie del semipoliedro esterno, sia eguale alla superficie di un prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza. Onde per avere la sua superficie, basta sapere quella del prisma, la quale si ha moltiplicando il perimetro della sezione massima

sima per l'altezza. Per aver poi la superficie di un semipoliedro tronco, ovvero di una porzione di esso; bastarà moltiplicare il perimetro della sezione massima, per l'altezza corrispondente alla porzione.

TEOREMA IV.

Se il semipoliedro interno è diviso da un piano parallelo alla base, la sezione sarà una figura simile alla sezione massima.

Tav. II. Fig. 14. SIa il semipoliedro AEDFGI, generato al di dentro dell'Emisfero AIB, il quale sia diviso dal piano abcd. Dico, che la detta sezione sia simile alla massima CEFG.

Si tirino le rette ha, hb, HC, HE. Per la natura del detto solido, la figura abcd, sarà inscritta nel cerchio, corrispondente alla sezione dell'Emisfero, e comecchè CaI, EbI, DcI sono quadranti, ed intersecano gli cerchi nell' emisfero paralleli al cerchio massimo, quali cerchi essendo simili tra loro gli archi CE, ED, ab, bc, saranno simili ancora tra loro; perciò gli angoli, che si formano ne' loro respettivi centri dovendo essere eguali, saranno gli angoli della figura abcd, parimenti eguali agli angoli della figura CEDFG. Onde le dette figure saranno equiangole tra di loro. Ciò posto, essendo le due rette ah, bh, bh, parallele alle due CH, EH, sarà l'angolo ahb, eguale all'angolo CHE (*a*), ed essendo tanto le due rette ah, bh, quanto le due CH, EH, eguali, come raggi; perciò li due triangoli ahb, CHE, saranno equiangoli tra loro (*b*); e pertanto si averà, che

ab : bh = CE : EH,

e permutando ab : CE = bh : EH.

Così ancora negli altri due triangoli bhc, EHD, si averà bh : EH = bc : ED;

Dunque ab : CE = bc : ED,

e permutando ab : bc = CE : ED;

Della stessa maniera si può dimostrare di tutti gli altri lati; Onde la figura abcd, è simile alla figura EDFG (*c*). Ciocchè bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Si puole dedurre ancora da questo Teorema, queltanto si è dimostrato nel I., e II. Corollario del Teor. I., di questo Capitolo cioè I. che gli perimetri delle sezioni sono, come gli raggi de' cerchi circonscritti a dette sezioni. II., che le sezioni de' poliedri interni, sono come gli cerchi circonscritti a dette sezioni.

TEO-

(a) *Prop.* 10. *lib.* 11.
(b) *Prop.* 6. *lib.* 6.
(c) *Def.* 1. *lib.* 6.

TEOREMA V.

La superficie del semipoliedro interno è eguale alla superficie del prisma, che ha la stessa base, e la medesima altezza.

Tav. II. Fig. 14. Sia il semipoliedro interno CEDFGI. Dico, che la sua superficie sia eguale a quella del prisma, che ha la medesima base CEDFG, e la stessa altezza HI.

Si concepisca la stessa preparazione fatta nel Teorema II. Si averà ancora, che bH, ovvero EH: bh = mb: hn (*a*); Ma EH, sta a bh, come il perimetro EDFG, al perimetro abcd (*b*); Dunque il perimetro EDFG, sta al perimetro abcd, come mb, ad hn; e perciò il prodotto del perimetro EDFG, per hn, sarà eguale al prodotto del perimetro abcd, per l'archetto bm (*c*): ma questo, siccome si è detto nel citato Teorema II. di questo Capitolo, è eguale alla corona del poliedro, la di cui grossezza è l'arco mb, infinitamente picciolo, ed ha luogo in tutte le infinite corone, se in un tal numero si suppone diviso il semipoliedro. Dunque la somma di tut-

(a) *Lem. Teor. 2. Cap. 3.*
(b) *Avvert. precedente.*
(c) *Prop. 16. lib. 6.*

tutte queste corone, che è l'intera superficie del semipoliedro ABI, sarà eguale al prodotto del perimetro EDFG, per la somma delle porzioni in IH, corrispondenti alli archetti; ma questo prodotto è lo stesso, che la superficie del prisma, la base del quale è la sezione massima EDFG, e l'altezza HI. Dunque la superficie del semipoliedro interno è eguale alla superficie del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Da questo Teorema diggià dimostrato, se ne deducono tre conseguenze dimostrate, nelli Corollarj del Teorema II. di questo Capitolo. Ed infatti se si voglia riflettere su del dimostrato Teorema si conoscerà I. che anche la superficie del prisma, che ha per altezza l'asse del poliedro, e per base la sezione massima, sia eguale alla superficie del poliedro totale. II. che la superficie della porzione abcdl, sia eguale a quella del prisma, che ha per base la sezione massima, e per altezza, l'altezza hI, del segmento. III. finalmente, che le superficie de' segmenti siano tra loro, come le porzioni dell' asse a' detti segmenti corrispondenti.

TEOREMA VI.

Il prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col semipoliedro interno, sta al semipoliedro, nella ragione di 3; a 2.

Tav.II Fig.14. Concepiscasi l' emisfero AIB, circonscritto al semipoliedro EDFGI, e s' intenda lo emisfero diviso in un numero infinito di piani tutti paralleli alla sezione massima, gli quali saranno cerchi, e dentro di essi vi saranno inscritte infinite sezioni corrispondenti al semipoliedro; Ma il cerchio massimo ADBG, sta a ciascuno di essi, come la sezione massima EDFG, a ciascuna delle sezioni corrispondenti a detti cerchi (*a*). Onde la somma di tutti questi cerchi, vale a dire lo Emisfero AIB, sta alla somma di tutte le sezioni, o sia il semipoliedro EDFGI, come il cerchio massimo ADBG, alla sezione massima EDFG (*b*), ovvero come il cilindro, che ha per base il cerchio massimo ADBG, e per altezza HI, al prisma, che ha per base la sezione massima EDFG, e per altezza la stessa HI (*c*); e permutando il cilindro, che ha

(a) *Avvert. Teor.* 4. *Cap.* 3.
(b) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(c) *Porp.* 69. *de Spha.*, *& Cyl. Caravelli.*

ha per base il cerchio ADBG, e per altezza HI, sta allo Emisfero, come il prisma, che ha per base la sezione EDFG, e per altezza HI, al semipoliedro EDFGI; ma il cilindro, sta allo Emisfero AIB, come 3 : 2 (a); Dunque il prisma EDFGI, circonscritto al semipoliedro, sta al medesimo semipoliedro EDFGI, come 3 : 2. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Sicchè ancora il prisma, che ha per base la sezione massima, e per altezza l'asse del poliedro interno, sta al detto poliedro nella ragione di 3 : 2.

COROLLARIO II.

Siccome il prisma, che ha per base la sezione del semipoliedro interno, sta al semipoliedro, come 3 : 2; Così convertendo si averà, che il prisma circonscritto al semipoliedro, sta al prisma semipoliedro cavo nella ragione di 3 : 1.

AVVERTIMENTO

Le illazioni dedotte dal Teorema III. di

F 2 que-

(a) *Corol. prop. 68. de Sph., & Cyl. Caravelli.*

questo Capitolo, possonsi col medesimo raziocinio dedurre dal precedente Teorema, e sono. I. Che lo Emisfero, sta al semipoliedro interno, come il cerchio massimo, alla sezione massima. II. che il segmento sferico, sta al segmento del poliedro corrispondente, come la base del detto segmento, alla base del segmento del semipoliedro; ovvero come il cerchio massimo, alla sezione massima. III., che gli settori sono, come le sezioni corrispondenti nella sfera, e nel poliedro. IV. che tanto gli segmenti, quanto gli settori sono proporzionali colla sfera, e col poliedro, V., finalmente si averà il valore del settore di un poliedro interno, siccome si calcola il settore sferico, e così ancora de' segmenti.

TEOREMA VII.

Tav.H. Fig.15. n. 1. 2. SE il semipoliedro Ellittico AEFBGHI, sia secato dal piano QPRS; parallelo alla sezione massima. Dico, che la sezione QPRS, sia simile alla massima EFGH.

Essendo gli piani paralleli QPRS, AEFBGH, secati dagli piani verticali AQI, EPI, FRI, le communi sezioni QO, AK; PO, EK; OR, KF, saranno parallele *(a)*; e gli angoli IKA, IKE, IKF, saranno retti *(b)*, così an-

(a) *Prop. 16, lib. 11.*
(b) *Prop. 19. lib. 11.*

ancora saranno retti gli angoli IOQ, IOP, IOR (*a*). Ciò posto, sia IL, dupla di IK, che sarà uno degli assi conjugati; e per la proprietà della Ellissi, si averà

$$\overline{QO}^2 : AK^2 = \text{rett. } IOL : \overline{IK}^2;$$

e nella Ellissi IPE, si averà ancora

$$\overline{PO}^2 : \overline{EK}^2 = \text{rett. } IOL : \overline{IK}^2.$$

Onde $\overline{QO}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{EK}^2$ (*b*);

e $QO : AK = PO : EK$ (*c*);

ed essendo AK = EK, sarà QO = PO; Così ancora si potrà dimostrare di tutte le rette tirate dal punto O alli vertici degli angoli della sezione, che siano eguali tra loro; onde facendo centro nel punto O, coll' intervallo OQ, descrivendo un cerchio, questo passarà per li vertici degli angoli della figura QPRS, e questa sarà inscritta nel detto cerchio. Inoltre essendo le due rette QO, OP, parallele alle due AK, EK, perciò l'angolo QOP, sarà eguale all'angolo AKE (*d*), Così ancora gli angoli POR, EKF; ROS, FKB, saranno eguali, e per conseguenza saranno eguali ancora gli angoli OQP, KAE; OPQ, KEA; OPR, KEF. Sicchè dunque le figure QPRS, AEFBGH, saranno equiangole;

(a) *Prop.* 29. *lib.* 1.
(b) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(c) *Prop.* 22. *lib.* 6.
(d) *Prop.* 10. *lib.* 11.

gole; ed essendo gli triangoli QOP, AKE; POR, EKF equiangoli; perciò si averà

$$QP : PO = AE : EK \text{ (a)},$$

e permutando $QP : AE = PO : EK$;
ma $PO : EK = PR : EF$;
Dunque $QP : AE = PR : EF$,
e permutando $QP : PR = AE : EF$;
della stessa maniera si dimostra di tutti gli altri lati; Perciò la figura QPRS, è simile alla sezione massima AEFBCH (*b*), Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Essendo la sezione QPRS, simile alla sezione massima AEFBGH; sarà la sezione QPRS, alla sezione AEFBGH, come $\overline{QP}^2$, ad $\overline{AE}^2$ (*c*), ovvero come $\overline{QO}^2 : \overline{AK}^2$; oppure come il rettangolo di IO, in OL, al quadrato di IK, per la proprietà della Ellissi.

COROLLARIO II.

Essendo $QP : PR = AE : EF$,
permutando $QP : AE = PR : EF$;
Così ancora essendo $PR : RS = EF : FB$
permutando $PR : EF = RS : FB$;
Co-

(a) *Prop.* 4. *lib.* 6.
(b) *Def.* 1. *lib.* 6.
(c) *Prop.* 20. *lib.* 6.

Così andando avanti, si averà, che la somma di tutti gli lati della figura QPRS, stia alla somma di tutti gli lati della figura AEFBGH, come QP : AE (*a*); ovvero come QO : AK.

AVVERTIMENTO.

Sia CID un emisfero, che abbia per raggio IK, sarà CID, semicerchio, ed essendo il perimetro della figura QPRS, al perimetro della figura AEFBGH, come QO, ad AK; Ma mO: QO = CK : AK, (*b*) e permutando mO : CK = QO: AK; Dunque il perimetro della figura QPRS, sta al perimetro AEFBGH, come mO: CK, ovvero come la periferia del cerchio, il di cui raggio è mO, alla periferia del cerchio, il raggio del quale è CK (*c*); Sicchè dunque qualunque sezione che si fa nello Emisfero, si averà che la periferia del cerchio, stia al perimetro della sezione corrispondente nel semipoliedro Ellittico, come la periferia del cerchio di un'altra sezione, al perimetro della sezione corrispondente nel semipoliedro; E prendendosi le periferie degl'infiniti cerchi, che si possono dare nello Emisfero CID, per ele-

(a) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Gap.* 1.
(c) *Prop.* 4. *de circ. dim. Caravelli.*

menti della ſuperficie Emisferica, e gli perimetri delle infinite ſezioni corriſpondenti nel ſemipoliedro AIB, per elementi della ſuperficie del ſemipoliedro; Si averà che la ſomma delle infinite periferie, cioè la ſuperficie dello Emisfero CID, ſtia alla ſomma de' perimetri, cioè alla ſuperficie del ſemipoliedro AIB, come la periferia del cerchio, il di cui raggio è CK, al perimetro della ſezione maſſima AEFBGH, ovvero come la ſuperficie del cilindro, che ha per baſe il cerchio, il di cui raggio è CK, ed abbia per altezza KI, alla ſuperficie del priſma, che ha la ſteſſa altezza KI, e per baſe la ſezione maſſima AEFBGH (*a*); E permutando, ed invertendo la ſuperficie del cilindro, che ha per baſe il cerchio il di cui raggio è CK, e per altezza IK, ſta alla ſuperficie dello Emisfero CID, come la ſuperficie del priſma, che ha per baſe la ſezione maſſima AEFBGH, e per altezza IK, alla ſuperficie del ſemipoliedro AIB; Ma la ſuperficie del cilindro, che ha per baſe il cerchio, il di cui raggio è CK, e per altezza IK, è eguale alla ſuperficie dello Emisfero CID (*b*); Dunque la ſuperficie del priſma, che ha per baſe la ſezione maſſima del ſemipoliedro AIB, e per altezza la IK, ſarà eguale alla ſuperficie del ſemipoliedro. CO-

(a) *Corol.2. prop.11. de Sphæ. & Cyl.Caravelli.*
(b) *Prop. 49. de Sphæ:, & Cyl. Caravelli.*

COROLLARIO.

Col medeſimo raziocinio ſi può dimoſtrare, che la ſuperficie del ſegmento QIS, del ſemipoliedro AIB, ſia eguale alla ſuperficie del priſma, che ha per baſe la ſezione maſſima, e per altezza, la OI, altezza del ſegmento.

TEOREMA VIII.

Se il ſemipoliedro AEFBGHI, ſi ſeca per un piano parallelo alla ſezione maſſima, e ſi concepiſca, col raggio IK, deſcritta una mezza sfera, il piano ſecante paſſando per lo Emisfero, ſegnarà un cerchio. Dico, che la baſe. AEFBGH, ſtia al circolo maſſimo CD, dello Emisfero CID, come la ſezione QPRS, al circolo il di cui diametro è mn.

Per il Corollario I. del Teorema precedente, la figura QPRS, ſta alla figura AEFBGH, come il rettangolo di IO, in OL, al quadrato di IK; ma il rettangolo di IO, in OL, è eguale al quadrato di mO (*a*), come perpendicolare ſopra il diametro IL; Dunque la figura QPRS, ſta alla figura AEFBGH, come $\overline{mO}^2 : \overline{IK}^2$, ovvero come il cerchio, il

(a) *Prop.* 17. *lib.* 6.

il di cui diametro è mn, al cerchio, il di cui diametro è AB (*a*); Sicchè dunque la figura QPRS, sta alla sezione massima AEFBGH, come il cerchio, il di cui diametro è mn, al cerchio il di cui diametro è AB. Ciocchè doveasi dimostrare.

TEOREMA IX.

Il prisma circonscritto ad un semipoliedro Ellittico, sta al semipoliedro avendo la stessa base, e la medesima altezza, nella ragione di 3 : 2.

Concepiscasi nel semipoliedro Ellittico AEFBGHI, descritto lo Emisfero, che abbia per raggio la IK; e s'intenda diviso il semipoliedro in un numero infinito di piani tutti paralleli alla sezione massima AEFBGH; questi, oltre, che saranno elementi del detto semipoliedro AEFBGHI, segnaranno ancora nello Emisfero CID, altri tanti piani, gli quali saranno ancora elementi dello Emisfero; Ma le sezioni nel semipoliedro sono, come gli cerchi corrispondenti, e segnati nello Emisfero (*b*); Dunque la somma delle infinite sezioni nel semipoliedro AEFBGHI, ovvero il semipoliedro medesimo, come somma degli suoi

(a) *Prop. 2, lib. 12.*
(b) *Teor. precedente.*

ſuoi elementi, ſtarà alla ſomma di tutti gli cerchi ſegnati nello Emisfero, oppure allo Emisfero medeſimo CID, come la ſezione maſſima AEFBGH, al cerchio maſſimo, il diametro del quale è CD (*a*), ovvero come il priſma, che ha per baſe la ſezione maſſima AEFBGH, e per altezza IK, al cilindro, che ha per baſe il cerchio CD e per altezza la ſteſſa IK (*b*); e permutando, ed invertendo, il priſma, che ha per baſe la ſezione maſſima AEFBGH, e per altezza IK, ſta al ſemipoliedro AEFBGHI, come il cilindro, la di cui baſe è il cerchio CD, e l'altezza IK, allo Emisfero CID; ma il cilindro ſta allo Emisfero nella ragione di 3 : 2 (*c*); Dunque ancora il priſma circonſcritto al ſemipoliedro, ſta al ſemipoliedro, come 3 : 2. Giocchè doveaſi dimoſtrare;

COROLLARIO

Il priſma circonſcritto al ſemipoliedro, ſtando al ſemipoliedro nella ragione di 3 : 2; convertendo il priſma ſtarà al priſma ſemipoliedro cavo, come 3 : 1.

AV-

(a) *Prop. 12. lib. 5.*
(b) *Prop. 69. de ſpha:, & Cyl. Caravelli.*
(c) *Corol. prop. 68. de ſpha:, & Cyl. Caravelli.*

AVVERTIMENTO I.

Da quel tanto è ſtato dimoſtrato nel precedente Teorema, ſe ne deduce; I°. che il ſegmento QIS, del poliedro, ſta al ſegmento mln, della sfera, come la ſezione QS, alla ſezione circolare mn. II°. E comecchè la ſezione QS, ſta alla ſezione circolare mn, come la ſezione maſſima AB, al cerchio maſſimo CD, e la ſezione maſſima, ſta al cerchio maſſimo, come il ſemipoliedro AEFBGHI, ovvero il ſuo totale, allo Emisfero CID, ovvero alla intiera sfera; Perciò gli ſegmenti poliedrici, ſtanno agli ſegmenti sferici, nella ragione de' totali. III°. E gli ſettori ſono nella ſteſſa ragione.

Quel tanto ſi è dimoſtrato ne' ſemipoliedri per rapporto a' priſmi, che hanno la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza, ed al paragon delle sfere, che hanno per diametro l'aſſe del poliedro, ha luogo ancora colli totali poliedri, e sfere eſſendo queſti dupli di quelli.

AVVERTIMENTO II.

Eſſendoſi dimoſtrato, che gli ſemipoliedri tanto circonſcritti, ed inſcritti nella sfera, quanto quelli Ellittici, ſtanno alli priſmi, che hanno la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza, come 2 : 3. Ne ſegue, che gli priſmi aven-

avendo la ſteſſa baſe, ed altezza, con gli ſemipoliedri, ſaranno quelli proporzionali con queſti; E come ſi fanno eguali gli ſemipoliedri, avendo baſi, ed altezze eguali; Così ſaranno in ragion delle baſi, ſe le altezze ſono eguali; ed al contrario ſaranno nella ragione delle altezze, quando le baſi ſono eguali; e ſe le altezze, e le baſi ſono diſuguali, ſaranno nella ragion compoſta delle baſi, e delle altezze; poichè in tali ragioni ſono gli priſmi. E finalmente tuttocciò è ſtato dimoſtrato ne' priſmi, averà luogo ancora ne' poliedri.

AVVERTIMENTO III.

Se un ſemipoliedro fuſſe generato da archi circolari in alcuni lati, e nell'altri da Ellittici, gli quali andaſſero a terminare in un ſol punto, queſto ſemipoliedro, ſtarà al priſma, che ha la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza, come 2 : 3. Poicchè dal vertice del detto ſemipoliedro abbaſſando la perpendicolare IK, su la baſe EFGH, e dal punto K, *Tav.II.* alli punti E, F, G, H, tirandoſi le rette *Fig.12.* KE, KF, KG, KH, e tra queſte rette, e la perpendicolare IK, concepiſcanſi paſſare altritanti piani, il ſemipoliedro EFGHI, reſtarà diviſo verticalmente in tante porzioni, quanto è il numero de' lati della ſezione maſſima; e di queſte parti ſupponiamo, che le

due

due porzioni EKHI, FKGI, ſiano di ſemipoliedro circonſcritti, o inſcritto nella sfera, e le altre due EKFI, GKHI, ſiano porzioni di ſemipoliedro Ellittico, ma ciaſcuna di dette porzioni, ſta al priſma triangolare, avendo la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza con detta porzione, come 2 : 3. Dunque la ſomma di dette porzioni, o ſia il ſemipoliedro miſto, ſtarà al priſma, chc ha la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza, come 2 : 3.

Col medeſimo raziocinio ſi averà la cognizione del valore della ſuperficie del ſemipoliedro miſto, moltiplicando il perimetro della baſe per l'altezza di eſſo; vale a dire, che ſarà eguale alla ſuperficie del priſma, che ha la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza col ſemipoliedro.

AVVERTIMENTO IV.

Giova quì dare il modo, come poſſa conoſcerſi di qual natura ſia un ſemipoliedro
Tav.II. **dato. I. Se il raggio KI, è eguale alla met-**
Fig.12. **tà della retta tirata nel mezzo de' lati oppoſti, come ſarebbe la BD, eſſendo il numero de' lati paro, in tal caſo il ſemipoliedro è circonſcritto alla sfera, poichè BPI, ſi fa quadrante del circolo; e ſe il numero de' lati è imparo, allora queſto raggio ſi farà eguale ad una delle porzioni delle perpendicolari abbaſſate da due angoli della ſezione maſſima,**

ma, sopra due lati opposti a detti angoli, presa dalla intersezione di dette perpendicolari, e corrispondente ad uno di detti lati.

II. Se il raggio HI, si fa eguale alla retta EH, tirata dallo estremo di detto raggio, ad un angolo della sezione massima, allora il semipoliedro è inscritto nella sfera. *Tav.II. Fig.14.*

III. Se il raggio KI, è minore di KE, retta tirata dallo estremo di detto raggio, all'angolo della sezione massima, ed alla metà di ciascun lato, in tal caso il semipoliedro è Ellittico, ed il semiasse minore delle Ellissi, sarà il raggio. *Tav.II. Fig.15. n. 1.*

IV. Finalmente se il raggio KI, è maggiore della riferita retta, tirata dallo estremo K, all'angolo della sezione massima, il semipoliedro sarà Ellittico, ed il semiasse maggiore delle Ellissi, sarà il raggio del semipoliedro. *Tav.II. Fig.15. n. 2.*

Di tutti questi, solo il primo ha la sua superficie totale quadrupla della sezione massima, e gli altri la loro superficie è eguale a quella del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col poliedro.

AVVERTIMENTO V.

Da tutto ciò che si è dimostrato si rileva il metodo per avere il valore della solidità di qualunque Volta poliedrica; e perciò devesi trovare un quarto proporzionale dopo li due nu-

numeri costanti 3, 1, e la solidità del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza con la detta volta, e questo sarà la solidità di essa, alla quale devesi aggiungere il solido della grossezza alla cima.

Se poi si voglia sapere la sua superficie basta moltiplicare il perimetro della base per l'altezza di detta Volta.

CAP.

C A P. IV.

Della solidità delle varie specie di Volte a Gavetta, o Schifo.

DEFINIZIONI.

I. Sia la figura ABCD, rettangolare, e sopra gli quattro lati s' intendano innalzati gli archi RI, SK; NK, OL; VL, TM; QM, PI, sopra de' quali si concepiscano moversi gli quattro lati del detto rettangolo, fintantocchè giungano nella fine di detti archi, e nel mezzo vi sia il piano rettangolare IKLM, il solido, che ha per superficie concava, quella del moto già descritto de' quattro lati, ed il piano di mezzo, e per superficie piana il rettangolo abcd, una con gli rettangoli d'attorno Ab, Bc, Cd, dA, si chiamerà *Volta a Gavetta*; ha presa una tal denominazione per essere simile alle scudelle di legname, nelle quali gli forzati mettono le loro vivande che così vengon dette; e perchè si rassomiglia ad un battello, o sia Schifo, perciò altri l'han chiamata *a Schifo*. *Tav.II. Fig.16.*

II. La KF, si chiamerà *sesto* della Volta; e grossezza della cima, la grossezza della fabbrica soprapposta.

III. Per *incosciatura* s' intende il solido racchiuchiuſo dalla ſuperficie curva, e dalla piana del prolungamento de' lati del rettangolo, come ſarebbe KBbCcL.

IV. Si dirà volta a Gavetta circolare, allora quando gli archi RI, SK ſono quadranti

V. Se gli archi RI, SK ſono ellittici, ſi dirà Volta a Gavetta ellittica.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale, per avere il valore della ſolidità di qualunque Volta a Gavetta circolare.

Sia data la lunghezza AB, la larghezza BC, il ſeſto EI, della Volta a Gavetta AC; trovare la formola generale per avere il valore della ſolidità di eſſa.

Sia $AB = a$; $BC = b$; $EI = EP = AR = ER = BN = c$

ſarà $IK = AB - AR - SB = a - 2c$,

e ſarà $LK = BC - BN - OC = b - 2c$.

Il parallelepipedo FM, ſarà uguale ad $EF \times FG \times EI = (a - 2c)(b - 2c)c = abc - 2bc^2 - 2ac^2 + 4c^3 = A$

Il quadrante $IER = \frac{11}{14}(\overline{IE}^2) = \frac{11}{14}c^2$,

e $2IER = 2IPE = \frac{11}{7}c^2$;

ed $IERSFK + THMLVG = \frac{11}{7}c^2(a - 2c) = \frac{11}{7}(ac^2 - 2c^3)$ $IPEHMQ + KFNGOL = \frac{11}{7}c^2(b - 2c) = \frac{11}{7}(bc^2 - 2c^3)$, Onde $2IERSFK + 2IPEHMQ = \frac{11}{7}(ac^2 + bc^2 - 4c^3) = B$.

Inol-

Inoltre sarà la quarta parte AREPI, del semipoliedro, formato dalle sezioni, che nella figura osservansi $= PR \times \frac{2}{3} IE =$
$c^2 \times \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} c^3$ (a);
e $4 AREPI = \frac{8}{3} c^3 = C$;
Onde $A + B + C = abc - 2ac^2 - 2bc^2 + 4c^3 + \frac{11}{7}(ac^2 + bc^2 - 4c^3) + \frac{8}{3} c^3 = \frac{21 abc - 9ac^2 - 9bc^2 + 8c^3}{21} = c\left(ab - \frac{3ac - 3bc}{7} + \frac{8c^2}{21}\right)$

Che sarà l'anima della Volta a Gavetta AC. Ed il solido della volta senza la grossezza della cima sarà $= abc - c\left(ab - \frac{3ac - 3bc}{7} + \frac{8c^2}{21}\right) = \frac{c^2}{21}(9a + 9b - 8c)$. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di una Volta a Gavetta circolare, devesi.

I. prendere nove volte la somma della lunghezza, e larghezza di essa, e da detta somma se ne deve togliere otto volte il sesto, ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 21., il quadrato del sesto, ed il detto residuo, si trovi un quarto proporzionale; al quale aggiuntovi il

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 3.

il solido della fabbrica della grossezza alla cima, il quale si ha moltiplicando la lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza alla cima; la somma sarà la solidità di detta Volta.

Sia, per esempio, la lunghezza $a = 18$; la larghezza $b = 16$; il sesto $c = 6$; e la grossezza alla cima sia 1. La somma della lunghezza, e larghezza nove volte presa, sarà 306, da questa se ne tolga l'ottuplo sesto, ch'è 48, ed il residuo 258, si noti. Indi si facci, come il numero costante 21, al quadrato del sesto, ch'è 36, così il detto residuo 258, al quarto proporzionale $442\frac{2}{7}$, che saranno le incosciature di detta Volta; alle quali aggiuntovi il solido fatto dalla lunghezza, e larghezza di detta volta, per la grossezza della cima, ch'è 288; la somma $730\frac{2}{7}$; sarà la solidità di detta Volta.

COROLLARIO.

Se la lunghezza a, si farà eguale alla larghezza b, di manieracchè la Volta divenisse quadrata, in tal caso, si prenderà dieciotto volte uno de' suoi lati, poicchè la somma della lunghezza, e della larghezza è la stessa della dupla di una di esse.

AVVERTIMENTO II.

Se la larghezza PE, della incosciatura di detta Volta a Gavetta non fusse eguale al sesto EI, allora la sua solidità non si averà facendo uso della regola diggià detta. Perciò è necessario ora ritrovare un' altra generale formola, la quale ci porta al rinvenimento del valore della solidità di detta Volta. Sia per tanto $AB = a$; $BC = b$; $IE = d$; $AR = SB = RE = BN = c$.

Sarà $IK = AB - AR - SB = a - 2c$.

ed $LK = BC - BN - OC = b - 2c$.

Onde sarà il parallelepipedo $FM = (a - 2c)(b - 2c)\, d = abd - 2bcd - 2acd + 4c^2d = A$

Il quadrante Ellittico $IER = \frac{11}{14}\, IE \times ER = \frac{11}{14}\, dc$ (a) e $2IER = 2IPE = \frac{11}{7}\, dc$;

ed $IERSFK + HMTVGL = \frac{11}{7}\, dc\,(a - 2c) = \frac{11}{7} . (acd - 2dc^2)$

ed $IPEHMQ + KFNOLG = \frac{11}{7}\, dc\,(b - 2c) = \frac{11}{7}\,(bcd - 2dc^2)$.

Onde $2IERSFK + 2IPEHMQ = \frac{11}{7}\,(acd + bcd - 4dc^2 = B$.

Inoltre sarà la quarta parte APERI, del semipoliedro Ellittico $= PR \times \frac{2}{3}\, IE = c^2 \times \frac{2}{3}\, d = \frac{2}{3}\, c^2d$ (b)

e $4APERI = \frac{8}{3}\, c^2d = C$

G 3 Sic-

(a) *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(b) *Teor.* 9. *Cap.* 3.

Sicchè l'anima della Volta a Gavetta, sarà

$$A + B + C = abd - 2bcd - 2acd + 4c^2d + \frac{11}{7}(acd + bcd - 4c^2d) + \frac{8}{3}c^2d = \frac{21abd - 9acd - 9bcd + 8c^2d}{21} = d\left(ab - \frac{3ac - 3bc}{7} + \frac{8c^2}{21}.\right)$$

Ma il parallelepipedo fatto da AB, per BC, per $Cy = abd$.

Dunque la solidità della Volta senza la grossezza della cima, sarà

$$abd - d\left(ab - \frac{3ac - 3bc}{7} + \frac{8c^2}{21}\right) = \frac{cd}{21}(9a + 9b - 8c).$$

Sicchè dunque per avere il valore di una Volta a Gavetta, le incosciature della quale siano Ellittiche, devesi.

I. Prendere nove volte la somma della lunghezza, e larghezza di essa, e da detta somma se ne deve togliere otto volte il sesto; ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 21, il rettangolo fatto dal sesto, e dalla larghezza di detta incosciatura, ed il detto residuo, si trovi un quarto proporzionale; al quale aggiuntovi il solido della fabbrica della grossezza alla cima, il quale si ha moltiplicando la lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza alla cima, la somma sarà la solidità di detta Volta.

Sia,

Sia, per eſempio, $a = 30$; $b = 24$; $d = 6$; $c = 8$, ſi farà come il numero coſtante 21, alla ſomma della lunghezza, e larghezza preſa nove volte, meno otto volte il ſeſto d, che ſarà 438., così il rettangolo del ſeſto, e della larghezza della incoſciatura, ch'è 48, al quarto proporzionale $1001\frac{1}{7}$, al quale aggiuntovi il ſolido della groſſezza alla cima, ch'è 720; la ſumma $1721\frac{1}{7}$, ſarà il valore della ſolidità di detta Volta.

CAP. V.

Della superficie della Volta a Gavetta.

DEFINIZIONE.

Tav. II. *Fig.* 16. PEr superficie della volta a Gavetta, s'intende, la superficie che descrive il moto de' quattro lati AB, BC, CD, DA, del rettangolo ABCD, sopra gli quadranti RI, SK; NK, OL; VL, TM; QM, PI, o circolari, o Ellittici, ed il rettangolo di mezzo IKLM.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a Gavetta, le incosciature della quale siano quadranti circolari, essendo data la lunghezza, la larghezza, ed il sesto.

SIa AB $= a$; BC $= b$; EI $=$ EP $=$ AR $=$ ER $=$ BN $= c$;
sarà IK $=$ AB $-$ AR $-$ SB $= a - 2c$,
ed LK $=$ BC $-$ BN $-$ OC $= b - 2c$;
Ma essendo il diametro di qualunque cerchio, alla sua periferia, come 7 : 22; siccome ha dimostrato il celebre Archimede, perciò il rag-

raggio ſtarà alla ſemiperiferia nella ſteſſa ragione; Onde ſarà $2RI = \frac{22}{7} IE = \frac{22}{7} c$;
e $2IRSK = \frac{22}{7} c(a - 2c)$,
e $2KNOL = \frac{22}{7} c(b - 2c)$
Sicchè $2IRSK + 2KNOL = \frac{22}{7} c(a + b - 4c) = A$
Inoltre la ſuperficie di $4ARIP = 8c \times c = 8c^2$ (a) $= B$;
Ed il rettangolo $IMLK = (a - 2c)(b - 2c) = ab - 2bc - 2ac + 4c^2 = C$
Sicchè dunque la ſuperficie totale di detta Volta ſarà $A + B + C = \frac{22}{7} c(a + b - 4c) + 8c^2 + ab - 2bc - 2ac + 4c^2 = ab + \frac{4c}{7}(2a + 2b - c)$; Ciocchè ſi andava cercando.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della ſuperficie di una Volta a Gavetta, le incoſciature della quale ſono quadranti circolari, deveſi.

I. Dalla ſomma della lunghezza, e larghezza due volte preſa, ſottraere il ſeſto, ed il reſiduo ſi noti.

II. Dopo il numero coſtante 7, il detto reſiduo, ed il quadruplo del ſeſto, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti.

III. Finalmente ſi ſommi il quarto proporzionale ritrovato col rettangolo, o ſia prodot-

(a) *Teor. 2. Cap. 3.*

dotto della lunghezza, per la larghezza di detta Volta, e la somma sarà la superficie di detta Volta.

Sia, per esempio, la lunghezza $a = 18$; la larghezza $b = 16$; il sesto $c = 6$; la dupla summa della lunghezza, e della larghezza sarà 68, dalla quale dedottone il sesto 6, il residuo sarà 62; Indi dopo il numero costante 7, il residuo 62, ed il quadruplo del sesto, ch'è 24, si trovi un quarto proporzionale $212\frac{4}{7}$, ed a questo aggiuntovi il rettangolo fatto dalla lunghezza, per la larghezza ch'è 288, la somma $500\frac{4}{7}$, sarà il valore della detta superficie.

COROLLARO.

Se la lunghezza si farà eguale alla larghezza, allora la volta sarà quadrata, e facendosi $b = a$, la equazione si ridurrà ad $a^2 + \frac{4c}{7}(4a - c)$, e la superficie si averà.

I. Se dal quadruplo di uno de' suoi lati, se ne toglie il sesto, ed il residuo si noti.

II. Dopo il numero costante 7, il residuo notato, ed il quadruplo sesto, si trovi un quarto proporzionale.

III. Finalmente si aggiunga al detto quarto proporzionale, il quadrato del lato di detta Volta, e la somma sarà il valore della superficie.

AV-

AVVERTIMENTO II.

Se la larghezza PE, della incosciatura di detta Volta a Gavetta non fusse eguale al sesto EI, in tal caso le incosciature saranno Ellittiche; e perciò ponendo PE $=$ AR $=$ RE $= d$;
IE $= c$; AB $= a$; BC $= b$;
Sarà IK $=$ AB $-$ AR $-$ SB $= a-2d$
ed LK $=$ BC $-$ BN $-$ OC $= b-2d$
Onde sarà la suttesa RI $= \sqrt{c^2+d^2} = e$
Il quadrante Ellittico RI, sarà eguale $\frac{3141}{2828}$
RI $= \frac{3141}{2828}\, e$ (a)
e sarà il duplo quadrante Ellittico RI $= \frac{3141}{1414}\, e$;
e la superficie di 2IRSK $= \frac{3141}{1414}\, e\,(a-2d)$
Così ancora 2KNOL $= \frac{3141}{1414}\, e\,(b-2d)$
Onde 2IRSK $+$ 2KNOL $= \frac{3141}{1414}\, e\,(a+b-4d) =$ A
La superficie di 4ARIP $= 8c \times d = 8cd$ (b) $=$ B
Ed il rettangolo IMLK $= (a-2d)\,(b-2d) = ab - 2bd - 2ad + 4d^2 =$ C
Onde tutta la superficie di detta Volta sarà A $+$ B $+$ C $= \frac{3141}{1414}\, e\,(a+b-4d) + 8cd + ab - 2bd - 2ad + 4d^2 = ab + \frac{3141}{1414}\, e\,(a+b-4d) + d\,(8c+4d-2b-2a)$.

Sic-

(a) *Cotol. 4. Teor. 3. Cap. 2.*
(b) *Avvert. Teor. 7. Cap. 3.*

Sicchè dunque per avere il valore della ſuperficie di una Volta a Gavetta, le incoſciature della quale ſiano Eliittiche, deveſi.

I. moltiplicare il numero coſtante 3141, per la ſutteſa della incoſciatura, ed il prodotto ſi noti.

II. Dalla ſomma della lunghezza, e larghezza di detta Volta, ſe ne tolga quattro volte la larghezza delle incoſciature, ed il reſiduo ſi noti.

III. Dopo il numero coſtante 1414, il detto prodotto, ed il reſiduo notato, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti.

IV. Dalla ſomma di otto volte il ſeſto, e quattro volte la larghezza delle incoſciature, ſe ne tolga la doppia ſumma della lunghezza, e larghezza di detta Volta; ed il reſiduo ſi moltiplichi per la larghezza delle dette incoſciature, ed il prodotto ſi noti.

V. Finalmente ſi moltiplichi la lunghezza, per la larghezza di detta Volta, ed al prodotto vi ſi aggiunga il detto quarto proporzionale, ed il prodotto notato nel *n. IV.*, e la ſomma ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta.

Sia per eſempio la lunghezza $a = 12$; la larghezza $b = 11$; la larghezza delle incoſciature $d = 5$; il ſeſto $c = 3\frac{3}{4}$; ſarà la ſutteſa delle incoſciature $e = 6\frac{1}{4}$; Il prodotto del numero coſtante 3141, per la detta ſutteſa ſarà $19631\frac{1}{4}$; il reſiduo della ſomma della lun-

ghez-

ghezza, e larghezza di detta Volta, meno la quadrupla larghezza delle incosciature, sarà 3. Indi dopo il numero costante 1414, il prodotto $19631\frac{1}{4}$, ed il residuo 3, si trovi il quarto proporzionale $41\frac{13}{20}$, e si noti. Il residuo dell'ottuplo sesto, più la quadrupla larghezza delle incosciature, dedottane la dupla somma della lunghezza, e larghezza di detta Volta, che è 4; ed il prodotto di questo residuo per la larghezza delle incosciature sarà 20. Finalmente il prodotto della lunghezza, e larghezza di detta Volta si è 132, che unito al notato quarto proporzionale $41\frac{13}{20}$, ed al detto prodotto 20; la somma $193\frac{13}{20}$; sarà il valore della superficie di detta Volta.

AVVERTIMENTO III.

Tre casi diversi possono accadere nel fare la detta operazione. I. Se la somma dell'ottuplo sesto, più la quadrupla larghezza delle incosciature, è maggiore della dupla somma della lunghezza, e larghezza, ed in tal caso l'ultimo termine della equazione viene positivo, e l'operazione si fa siccome si è detto nell'avvertimento precedente. II. Se la somma dell'ottuplo sesto, più la quadrupla larghezza delle incosciature, è eguale alla dupla somma della lunghezza, e larghezza, ed allora la equazione si ridurrà ad $ab + \frac{3141}{1414}e$

$(a +$

$(a+b-4d)+d$; e pertanto al quarto proporzionale vi ſi aggiunga il prodotto della larghezza, e lunghezza di detta Volta, e vi ſi uniſca ancora la larghezza delle incoſciature, e la ſomma ſarà il valore della ſuperficie. III. Finalmente, ſe la ſomma dell' ottuplo ſeſto, più la quadrupla larghezza delle incoſciature, ſarà minore della dupla ſomma della lunghezza, e larghezza della Volta, in tal caſo dalla dupla ſomma della lunghezza, e larghezza di detta Volta, ſe ne tolga la ſomma dell' ottuplo ſeſto, più la quadrupla larghezza delle incoſciature, ed il reſiduo ſi moltiplichi per la larghezza delle incoſciature; e comecchè l' ultimo termine $d(8c+4d-2b-2a)$, nella equazione ſi ritrova eſpreſſo per poſitivo, diverrà in tal caſo, negativo; e perciò dalla ſomma del detto quarto proporzionale, ed il prodotto della lunghezza, e larghezza, ſe ne deve togliere il deſcritto prodotto, ed il reſiduo ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta.

CAP.

CAP. VI.

Della solidità delle varie Volte a vela senza reguglio.

DEFINIZIONI.

I. PEr *Volta a vela* s' intende un solido cavo sostenuto da quattro archi, e con la sua cavità copre un edificio; ha presa una tale denominazione dal gonfiamento delle vele mercè l' urto del vento, e stando frenate ne' quattro angoli, formano una cavità nel mezzo.

II. Se gli quattro archi, che sostengono la detta Volta sono semicircolari, la Volta si chiamerà a vela sferica, se sono Ellittici si dirà a vela sferoidale.

Da ciò ne viene la divisione di quante spese puole essere una Volta a vela. I. Se gli archi, che sostengono la detta Volta sono semicircolari, ed in tal caso la detta Volta deve coprire un edificio di pianta quadrata. II. puole essere anche quadrata, e gli archi, che sostengono la detta Volta siano Ellittici. III. Puole essere formata sopra un rettangolo, ed avere gli due archi formati sopra gli lati minori Ellittici, e gli altri due sopra gli lati maggiori semicircolari. IV. Al contrario puole essere rettangolare la detta Volta, e gli archi sopra gli lati maggiori Ellittici

tici, e quelli ſopra gli lati minori ſemicircolari. V. Puole eſſere formata ſopra una pianta quadrata, e gli archi formati ſopra gli lati poſſono eſſere Ellittici, e gli aſſi minori delli quali ſiano gli detti lati. VI. Finalmente puole eſſere formata ſopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la ſoſtengono ſiano Ellittici di qualunque natura. Di tutte queſte ſe ne farà vedere la di loro generazione, e ſi rapportaranno a quella sferica, per averne la di loro ſolidità.

III. La lunghezza, e larghezza di detta Volta ſono le ſotteſe de due archi, che formano angolo; il *ſeſto* è quello ſteſſo di ciaſcuno degli archi; ed il *reguglio*, ſi chiamerà l'altezza della curvità da ſopra la cima degli archi.

IV. Se una Volta a vela è ſenza reguglio, allora ſi dirà *Volta a vela tronca*.

PROBLEMA.

Trovare la ragion, che paſſa tra il parallelepipedo circonſcritto ad una Volta a vela sferica tronca, e la detta Volta.

Tav. II. Fig. 17. Sia dato lo Emisfero RQP, la baſe della quale ſia il circolo maſſimo NPQR, nel quale vi ſja inſcritto il quadrato NQ, e ſopra gli lati NP, PQ, QR, RN, ſi concecepiscano alzati quattro piani, questi tagliaranno dallo Emisfero, gli quattro semisegmenti NMPS, PnQK, QXRT, RLNI, e comecchè le sezioni de' detti semisegmenti sono semicerchi eguali, perciò se si concepisce per gli punti S, K, T, I, passare un piano, questo tagliarà dallo Emisfero il segmento IBK, il quale sarà duplo di ciascuno de' detti semisegmenti, la porzione dello Emisfero dedottine gli detti semisegmenti, e segmento sarà l'anima della Volta a vela tronca sferica, o sia senza reguglio. Voglio pertanto trovare la ragione, che passa tra il parallelepipedo, la base del quale è il quadrato NQ, e l'altezza Oy, ed il solido parallelepido meno la detta anima della Volta.

Sia NP $=$ PQ $= a$; sarà NQ $=$ Ln $= \sqrt{2a^2}$;

ed nK $= \dfrac{\sqrt{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}}{2}$; aS $=$ uK $=$ Oy $=$ Oa $=$ OV $= \dfrac{a}{2}$

Sarà ancora OP $=$ ON $=$ OL $= \dfrac{\sqrt{2a^2}}{2}$;

ed LV $=$ By $=$ LO $-$ OV $= \dfrac{\sqrt{2a^2}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2a^2} - a}{2}$.

Sarà il cerchio il di cui diametro è NQ $=$ $\frac{22}{7}\sqrt{2a^2}\times\frac{\sqrt{2a^2}}{4} = \frac{11}{7}a^2$.

E lo Emisfero LBn $= \frac{11}{7}a^2\times\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2a^2}}{2} =$ $\frac{11}{21}\sqrt{2a^6} = \frac{11}{21}.a^3\sqrt{2}$.

Inoltre il cerchio, che ha per raggio Kn $=$ $\frac{11}{14}\times 4\,\overline{\mathrm{Kn}}^2 = \frac{22}{7}\left(\frac{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11}{14}$ $(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}) = \frac{11}{7}(2a^2 - a^2\sqrt{2})$

Le quattro superficie de' semisegmenti laterali NMPS, PnQK, QXRT, RLNI $= \frac{11}{7}(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}) = \frac{22}{7}(2a^2 - a^2\sqrt{2})$;

E gli quattro semisettori corrispondenti NMPSO, PnQKO, QXRTO, RLNIO $= \frac{11}{21}$ $(2a^3\sqrt{2} - 2a^3) = \frac{22}{21}(a^3\sqrt{2} - a^3$;

Il semicerchio PKQ $= \frac{11}{28}a^2$;

Ed il semicono PKQO $= \frac{11}{168}a^3$.

Onde gli quattro semiconi corrispondenti agli semisettori saranno $= \frac{11}{42}a^3$;

E perciò la solidità de' quattro semisegmenti sarà $= \frac{22}{21}(a^3\sqrt{2} - a^3) - \frac{11}{42}a^3 = \frac{44a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$ aggiuntovi il segmento IBK $=$ $\frac{44a^3\sqrt{2} - 55a^3}{84}$.

Si averà la fomma de' detti quattro femifegmenti, e del fegmento IBK $= \frac{44a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42} + \frac{44a^3\sqrt{2} - 55a^3}{84} = \frac{132a^3\sqrt{2} - 165a^3}{84}$

Ma lo Emisfero LBn $= \frac{11}{21} a^3\sqrt{2}$.

Dunque lo Emisfero LBn, meno gli detti quattro femifegmenti laterali, ed il fegmento IBK, farà $= \frac{11}{21} a^3\sqrt{2} - \frac{132a^3\sqrt{2} + 165a^3}{84}$

$= \frac{165a^3 - 88a^3\sqrt{2}}{84}$ Inoltre il parallelepipedo, che ha la medefima bafe, e la fteffa altezza col detto folido farà eguale ad $\overline{NP}^2 \times Oy = a^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}$ Ed il detto parallelepipedo, meno il detto Emisfero tronco farà $\frac{a^3}{2} - \frac{165a^3 + 88a^3\sqrt{2}}{84}$

$= \frac{88a^3\sqrt{2} - 123a^3}{84}$.

Sicchè dunque il detto parallelepipedo, fta al medefimo parallelepipedo meno l'anima della Volta, vale a dire, alla folidità di effa Volta, nella ragione di $\frac{a^3}{2} : \frac{88a^3\sqrt{2} - 123a^3}{84}$;

ovvero come $42a^3$, ad $88a^3\sqrt{2} - 123a^3$; e e togliendone l' a^3, da tutti gli termini, si averà la medesima ragione, espressa in $42 : 88\sqrt{2} - 123$; che è eguale a quella di $5250 : 179$. prendendo per radice di 2. il numero 1. 414. Che è quello, che si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Dovendosi perciò calcolare una Volta a vela tronca, o sia senza reguglio, di prima specie, essendo dato uno de' lati del quadrato sopra del quale è formata la detta Volta devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza, cioè fare il quadrato del dato lato, e moltiplicarlo per il sesto, ed il prodotto si noti.

II. Si trovi un quarto proporzionale, dopo li due numeri costanti 5250, 179, ed il detto prodotto, e si noti.

III. Finalmente si sommi il detto quarto proporzionale, col prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza della cima; la somma sarà il valore della solidità di detta Volta.

Sia, per esempio, NP = 20, ed essendo di prima specie, sarà PQ = 20; ed il sesto aS = 10; e la grossezza della cima sia 1.; il parallelepido, che ha per base NQ, e per altezza Oy, il quale si ha moltiplicando il quadtato di 20, per 10, sarà 4000; Indi do-

dopo li due numeri costanti 5250, 179, ed il detto prodotto 4000, si trovi il quarto proporzionale $136\frac{8}{21}$, a questo aggiuntovi il parallelepipedo, che ha la medesima base con detta Volta, ed ha per altezza la grossezza della cima, il quale sarà 400; la somma $536\frac{8}{21}$. sarà la solidità di detta Volta.

Della solidità dello sferoide depresso.

DEFINIZIONE.

Se la Ellissi ACBD, si facci girare attorno all' asse minore AB, fisso, ed immobile, fintantocchè giunge nel medesimo luogo d'onde si è partita, il solido generato da una tale rivoluzione, si chiamerà *sferoide depresso*. Tav.II. Fig.18.

AVVERTIMENTO.

Il diametro maggiore CD, colla rivoluzione della Ellissi ACBD, attorno all'asse minore AB, descriverà un circolo, il di cui raggio è OD, metà di CD; E' facile il comprendere, che ogni altra ordinata all'asse minore AB, parallela ad OD, descriverà ancora un cerchio, il di cui raggio è la stessa ordinata. Da ciò ne segue, che tutte le sezioni, che si fanno nello sferoide depresso, le quali siano perpendicolari alla Ellissi generatrice, e le communi loro sezioni siano le ordinate parallele all'asse maggiore, saranno circoli; e questi saranno concentrici tra loro, poicchè gli centri di essi si troveranno nell' asse minore AB.

TEOREMA I.

Le sezioni fatte nello sferoide depresso, le quali intersecandosi colla Ellissi generatrice, le communi loro sezioni non siano parallele all' asse maggiore, le dette sezioni saranno Ellissi.

Tav. II Fig. 18. S'Interseca lo sferoide depresso ACBD, per il piano FGEH, qualunque, eccetto di quelli espressi nell' avvertimento precedente. Dico, che la figura FGEH, sia Ellissi.

Per l'asse AB, si faccino passare gli due piani ACBD, AIBK (gli quali attento alla generazione di detto solido, saranno Ellissi) questi s'intersecano colla sezione EGFH, e le communi loro sezioni saranno le linee GH, LN; Così ancora questi piani segnaranno, colle loro sezioni, nel circolo CEDI, le linee CD, IK, FE. Essendo le due figure ACBD, AIBK, Ellissi, per la proprietà di esse, si averà

$$\overline{AO}^2 : \overline{GP}^2 = \overline{OD}^2 : \text{rett. } CPD,$$

e permutando $\overline{AO}^2 : \overline{OD}^2 = \overline{GP}^2 : \text{rett. } CPD.$

Co-

Così ancora si averà $\overline{AO}^2 : \overline{OK}^2$, ovvero $\overline{DO}^2$, come raggio dello stesso cerchio CEDI, Così $\overline{ML}^2$: rett. IMK; Onde

$$\overline{GP}^2 : \text{rett. CPD} = \overline{ML}^2 : \text{rett. IMK} \; (a),$$

Ma rett. CPD = rett. FPE; e rett. IMK = rett. FME (*b*);

Dunque $\overline{GP}^2$: rett. FPE = $\overline{ML}^2$: rett. FME, e permutando

$$\overline{GP}^2 : \overline{ML}^2 = \text{rett. FPE} : \text{rett. FME},$$

della stessa maniera si può dimostrare di ogni altra ordinata applicata sopra EF, ed essendo questa una proprietà della Ellissi; perciò la sezione FGEH, sarà Ellissi. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo FGEH, una Ellissi, si averà per sua proprietà, che

$$\overline{GP}^2 : \overline{LM}^2 = \overline{PE}^2 : \text{rett. FME},$$

e permutando

$$\overline{GP}^2 : \overline{PE}^2 = \overline{LM}^2 : \text{rett. FME};$$

Così ancora

$$\overline{AO}^2 : \overline{OK}^2 = \overline{LM}^2 : \text{rett. IMK},$$ ovvero al suo eguale rett. FME;

 Sic-

(a) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(b) *Prop.* 35. *lib.* 3.

Sicchè dunque $\overline{GP}^2 : \overline{PE}^2 = \overline{AO}^2 : \overline{OK}^2$ (*a*),
e $GP : PE = AO : OK$ (*b*);
e per conseguenza la Ellissi FGEH, sarà simile alla Ellissi AIBK, ovvero ad ACBD (*c*).

TEOREMA II.

Se gli due coni ABC, FBG, che hanno la stessa altezza OB, siano intersecati da un piano parallelo alla base AC. Dico, che il cono tronco ADEC, stia al cono tronco FHIG, come $\overline{OC}^2 . \overline{OG}^2$.

Tav. II. Fig. 19.

Il cono ABC, sta al cono FBG, come il cerchio AC, al cerchio FG (*d*), ovvero come $\overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$ (*e*). Della stessa maniera, il cono DBE, sta al cono HBI, come $\overline{PE}^2 : \overline{PI}^2$.

Inoltre $BP : PE = BO : OC$;
permutando $BP : BO = PE : OC$;
Così ancora $BP : BO = PI : OG$;
Onde $PE : OC = PI : OG$, (*f*)
e permutando $PE : PI = OC : OG$,
e si averà ancora $\overline{PE}^2 : \overline{PI}^2 = \overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$ (*g*)

On-

(a) *Prop.* 9. *lib.* 5.
(b) *Prop.* 22. *lib.* 6.
(c) *Avvert.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(d) *Prop.* 11. *lib.* 12.
(e) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(f) *Prop.* 11. *lib.* 5.
(g) *Prop.* 22. *lib.* 6.

Onde anche il cono ABC, ſta al cono FBG, come il cono DBE, al cono HBI, e permutando il cono ABC, ſta al cono DBE, come il cono FBG, al cono HBI; e dividendo, il cono tronco ADEC, ſtarà al cono DBE, come il cono tronco FHIG, al cono HBI, e permutando, il cono tronco ADEC, ſta al cono tronco FHIG, come il cono DBE, al cono HBI. Ma il cono DBE, ſta al cono HBI, come $\overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$. Dunque il cono tronco ADEC, ſta al cono tronco FHIG, come $\overline{OC}^2 : \overline{OG}^2$. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

TEOREMA III.

La ſolidità dello sferoide depreſſo, ſta alla ſolidità della sfera, il di cui diametro è l'aſſe minore dello sferoide, come il quadrato dell' aſſe maggiore, al quadrato dell' aſſe minore.

Sia ACBD, lo sferoide depreſſo, ed AEBF, la sfera, che ha per diametro l'aſſe minore AB. Dico, che lo eferoide ACBD, ſtia alla sfera AEBF, come $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$. *Tav. II. Fig. 20.*

Si prolunghi l'aſſe minore BA, verſo G, e per lo punto G, qualunque nel detto prolungamento, tiriſi la GL, tangente nel circocolo AEBF (a), e dal punto del contatto L, si abbassi la perpendicolare LI, sopra l'asse prolungato; Indi la LI, si prolunghi verso H, e K, che interseca la Ellissi ACBD, negli punti H, e K, dal punto G, al punto H, tirisi la GH, la quale sarà tangente della Ellissi ACBD (b).

Si unisca il punto G, con li punti K, ed M, per mezzo delle rette GK, GM; e concepiscasi la hn, infinitamente vicina alla HK; ed essendo queste infinitamente vicine, gli archetti Hh, LI, Mm, Kn, si confonderanno colle porzioni delle tangenti GH, GL, GM, GN, e perciò gli detti archetti si potranno prendere come rette; Sicchè colla rivoluzione della Ellissi ACBD, e del cerchio AEBF, attorno all'asse AB, fisso, ed immobile; gli piccioli archetti, considerati come rette, una colle loro rispettive ordinate abbassate dagli estremi di essi descriveranno gli coni tronchi hHKn, lLMm, nel mentre che la Ellissi, ed il cerchio descrivono lo sferoide depresso, e la sfera.

Cio posto $ho : lo = CO : EO$ (c),

sarà ancora $\overline{ho}^2 : \overline{lo}^2 = \overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$ (d)

Ma $\overline{ho}^2 : \overline{lo}^2$, come il cono tronco hHKn, al

---

(a) *Prop.* 17. *lib.* 3.
(b) *Teor* 2. *Cap.* 2.
(c) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(d) *Prop.* 22. *lib.* 6.

cono tronco lLMm (*a*); Dunque il cono tronco hHKn, ſta al cono tronco lLMm, come $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$. Inoltre ſe intendeſi tutto lo sferoide diviſo per queſti piani infinitamente vicini l' uno, all'altro, ſempre ſi averà, che il cono tronco, che ſi genera nello sferoide colla ſua rivoluzione, ſtia al cono tronco, che gli corriſponde nella sfera, come $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$; Sicchè dunque la ſomma di tutti gli coni tronchi generati nello sferoide, ch'è lo ſteſſo sferoide, ſtarà alla ſomma di tutti gli coni tronchi corriſpondenti nella sfera, cioè alla sfera ſteſſa, come il quadrato del ſemiaſſe CO, maggiore, al quadrato di EO, ovvero AO, ſemiaſſe minore. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

COROLLARIO I.

Col medeſimo raziocinio ſi dimoſtra, che il ſegmento HAK, dello sferoide, ſta al ſegmento sferico LAM, come il quadrato del ſemiaſſe maggiore CO, al quadrato del ſemiaſſe minore AO; ovvero come l' intero sferoide alla intera sfera.

CO-

(a) *Teor. precedente.*

COROLLARIO II.

Così ancora lo sferoide ACBD, ſta alla sfera AEBF, come gli equimultiplici de' ſegmenti corriſpondenti nello sferoide, e nella sfera.

COROLLARIO III.

Eſsendoſi dimoſtrato, che il ſegmento HAK, dello sferoide, ſta al ſegmento sferico LAM, come; $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2$; ma $\overline{CO}^2 : \overline{EO}^2 = \overline{HI}^2 : \overline{LI}^2$ (a), dunque il ſegmento sferoidico HAK, ſta al ſegmento sferico LAM, come $\overline{HI}^2 : \overline{LI}^2$, ovvero come $\overline{KH}^2 : \overline{LM}^2$.

COROLLARIO IV.

Eſſendo il cono HOK, al cono LOM, come il cerchio il di cui raggio è HI, al cerchio il di cui raggio è LI (b) ovvero come $\overline{HI}^2$, ad $\overline{LI}^2$ (c), oppure come $\overline{CO}^2 : \overline{AO}^2$; ma in queſta ſteſſa ragione è il ſegmento HAK, al ſegmento LAM, dunque il cono HOK, ſta al cono

(a) *Corol. I. Teor. 3. Cap. 1.*
(b) *Prop. 11. lib. 12.*
(c) *Prop. 2. lib. 12.*

no LOM; come il ſegmento HAK, al ſegmento LAM; permutando, e componendo, il ſettore OHAK, dello sferoide, ſta al ſettore OLAM, della sfera, come il ſegmento HAK, al ſegmento LAM, ovvero come lo sferoide ACBD, alla sfera AB. Sicchè il ſettore sferoidico, ſta al ſettore sferico corriſpondente, come lo sferoide, alla sfera, oppure come il quadrato dell' aſſe maggiore, al quadrato dell' aſſe minore.

AVVERTIMENTO I.

Si deſcriva il circolo AKB, col raggio AH, mettà dell' aſſe maggiore AB, della Elliſſi AIBP, ed il circolo albP, col raggio, della mettà dell' aſſe minore, e facendoſi girare gli detti due cerchi, e la Elliſſi, attorno all' aſſe minore IP, fiſſo, ed immobile, gli due cerchi deſcriveranno due sfere, e la Elliſſi uno sferoide depreſſo. Ciò poſto nel circolo minore albP, s' intende inſcritto il quadrato fN, ſi uniſcano indi gli punti H, ed F, per mezzo della retta HF, e queſta prolungata incontrerà l'altra linea circolare nel punto D, e per eſſo tiriſi la DL, parallela ad FN, e come queſta è lato del quadrato inſcritto nel cerchio albP, così la DL, ſarà lato del quadrato inſcritto nel cerchio AKB, e con queſto lato compiſcaſi il quadrato hL; Indi ſi prolungano gli lati fF, *Tav. III. Fig. 21.*

iN,

iN, dall' una, e l' altra parte, e comecchè questi sono paralleli all' asse maggiore AB, andaranno ad incontrare gli punti, C, M, m, g (*a*) e sarà la figura gCMm, un rettangolo inscritto nella Ellissi AIBP. Posto ciò, s' intendono alzate sopra le rette gC, mM, DL, hl, FN, fi, altritanti piani tutti perpendicolari alla Ellissi AIBP; quello che passa per DL, nella sfera AKB, segnarà un circolo, e nello sferoide AIBP, una Ellissi (*b*), l' asse maggiore della quale sarà DL; e l' asse minore CM; e la mettà Cc, dell' asse minore sarà ordinata della Ellissi generatrice (*c*), quale Ellissi nata dalla detta sezione sarà simile alla totale (*d*). Concepiscasi ora diviso il segmento sferico FbN, in un numero di piani infinitamente vicini l' uno, all' altro, e paralleli tra loro, e dal centro H, agli estremi degli diametri di queste sezioni, si tirino altrettante rette, le quali prolungate interseçano la sfera AKB, e per tali punti d' interfezioni s' intendono tirati altri piani tutti paralleli a quelli di prima, verrà il segmento sferoidico CBM, diviso in egual numero infinito di piani; di quello, ch' è diviso il segmento sferico FbN, quali pia-

(a) *Teor.* 5. *Cap.* 1.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 6.
(c) *Coroll. Teor.* 5. *Cap.* 1.
(d) *Coroll. Teor.* 1. *Cap.* 6.

piani segnaranno nello sferoide tante Ellissi simili, e comecchè queste sono come gli quadrati degli assi maggiori (*a*), o siano le suttese, che segnano le dette sezioni nel segmento DBL, così gli cerchi, che segnano le prime sezioni nel segmento FbN, sono come gli quadrtai de' diametri (*b*); Ma ciascuna di quelle ellissi nel segmento sferoidico CBM, sta al suo cerchio corrispondente nel segmento sferico FbN, come il semiasse maggiore Dc, al semiasse minore FE (*c*), ovvero Cc, e siccome le ordinate nel cerchio AKB sopra il diametro AB sono proporzionali alle ordinate nella Ellissi AIB (*d*), così gli detti cerchi si faranno proporzionali alle dette Ellissi. Dunque la somma di tutte le Ellissi segnate dalle infinite sezioni fatte nel segmento sferoidico CBM, sta alla somma di tutti gli cerchi segnati dalle infinite sezioni fatte nel segmento sferico FbN, e corrispondenti alle prime sezioni, come la somma degli infiniti quadrati degli assi maggiori, o siano semisuttese del segmento DBL, alla somma degli infiniti quadrati de' diametri de' cerchi segnati nel segmento FbN, ma ciascuno de' primi quadrati, sta a cia-

(a) *Avvert.1.Teor 4.Cap.1.*
(b) *Prop.2.lib.12.*
(c) *Teor 3.Cap.1.*
(d) *Corol.1.Teor.3.Cap.1.*

ciascuno de' secondi quadrati, come $\overline{HD}^2 : \overline{HF}^2$, ovvero come $\overline{HK}^2$, ad $\overline{HI}^2$, oppure come lo sferoide AIBP, alla sfera aIbP (*a*); Dunque la somma di tutte l'Ellissi segnate dalle infinite sezioni fatte nel segmento sferoidico CBM, sta alla somma di tutti gli cerchi segnati dalle infinite sezioni fatte nel segmento sferico FbN, corrispondente alle prime, come lo sferoide AIBP, alla sfera aIbP, e prendendosi le dette sezioni per elementi del segmento sferoidico CBM, e dello sferico FbN si averà in conseguenza, che la somma di esse sarà il segmento sferoidico, ed il segmento sferico; e perciò il segmento sferoidico CBM, sta a quello sferico FbN, come lo sferoide totale AIBP, alla sfera aIbP.

AVVERTIMENTO II.

Tav. III. Fig. 22. Se lo sferoide depresso si seca per un piano, il quale passa per l'asse maggiore della Ellissi generatrice, e gli sia perpendicolare l'asse minore; la detta sezione per la natura di detto solido sarà il cerchio AKBG, ed il detto piano taglierà la sfera, il di cui diametro è l'asse minore della Ellissi generatrice in due parti eguali, e la sezione segnarà il circolo ahbl, il quale sarà base dello Emisfero aIb; ed il cerchio AKBG, sarà base dello semisferoide depresso AIB, se dentro gli due cerchi

(a) *Teor. 3. Cap. 6.*

chi AKBG, lehi, s' inſcrivono gli due quadrati GDKQ, lehi, e ſopra di eſſi s' innalzano gli due parallelepipedi DP, eR, gli quali abbiano per altezza la No, mettà di eh, lato del quadrato inſcritto nel circolo maſſimo della sfera, che ha per diametro l' aſſe minore della Elliſſi generatrice. Siccome il parallelepipedo eR, taglia dell' Emisfero alb, il ſegmento fIE, il quale è duplo di ciaſcuno de' ſemiſegmenti laterali (*a*), così il parallelepipedo DP, taglia dallo ſemisferoide depreſſo AIB, il ſegmento glC, e gli quattro ſemiſegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO; ed il ſolido ſemisferoide depreſſo, meno il detto ſegmento, e quattro ſemiſegmenti, ſarà l' anima della Volta a vela di ſeconda ſpecie; la pianta della quale ſarà il quadrato DQ, e ſopra li quattro lati GD, DK, KQ, QG, vi ſaranno erette le quattro ſemielliſſi GgD, DMK, KCQ, QOG (*b*).

(a) *Probl. Cap. 6.*
(b) *Teor. I. Cap. 6.*

TEOREMA IV.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela tronca di seconda specie, sta al solido parallelepipedo cavo la detta anima, nella ragione di

5250 ∴ 179.

Tav. III. Fig. 22. Sia AIB, un semisferoide depresso, tagliato da un piano, che passa per l' asse maggiore; e sia aIb, l' Emisfero, il di cui diametro sia l' asse minore della Ellissi generatrice; e ne' circoli AKBG, ahbl, basi del semisferoide, e dell' Emisfero vi siano inscritti gli quadrati DKQG, ehil, sopra de' quali vi siano innalzati gli parallelepipedi DP, eR, li quali abbiano per altezza la metà del lato del quadrato inscritto nel circolo, ch' è base dell' Emisfero; il parallelepipedo DP, taglierà dal semisferoide AIB, il segmento gIC, e li quattro semisegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO (*a*); Ciò posto, il segmento gIC, sferoidico, sta al segmento sferico fIF, come lo sferoide totale, alla intiera sfera (*b*), ovvero come lo semisferoide AIB, all' Emisfero aIb; ed il semisegmento GADg, sferoidico, sta al semisegmento sferico

co

(a) *Avvert. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Corol. I. Teor. 3. Cap. 6.*

co laef, come lo ſemisferoide AIB, all' Emisfero alb (*a*); Onde la ſomma de' quattro ſemiſegmenti sferoidici GADg, DSKM, KBQC, QTGO, più il ſegmento gIC, ſta alla ſomma de' quattro ſemiſegmenti sferici corriſpondenti, più il ſegmento fIF, come lo ſemisferoide AIB, all' Emisfero alb (*b*); e permutando, ed invertendo, lo ſemisferoide AIB, ſtarà alli quattro ſemiſegmenti sferoidici, più il ſegmento gIC, come lo Emisfero alb, alli quattro ſemiſegmenti sferici, più il ſegmento fIF; e convertendo, lo ſemisferoide AIB, ſtarà allo ſemisferoide meno gli detti quattro ſemiſegmenti, e ſegmento, cioè al ſolido GDKQOgMC, come lo Emisfero alb, all' Emisfero meno gli detti quattro ſemiſegmenti, e ſegmento, cioè al ſolido lehimfoF; e permutando, lo ſemisferoide, ſta all' Emisfero, come il ſolido GDKQOgMC, al ſolido lehimfoF; ma lo ſemisferoide AIB, ſta all' Emisfero alb come $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (*c*); ovvero come DKQG, ad ehil, eſſendo quelli dupli di queſti; e DQ : ei, come il parallelepipedo DP, al parallelepipedo eR (*d*); dunque il ſolido parallelepipedo DP, ſta al parallelepipedo eR, come il ſolido GDKQOg-

(a) *Avvert. I. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Corol. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(c) *Teor. 3. Cap. 6.*
(d) *Teor. per lem. del Teor. 33. lib. 11.*

TEOREMA IV.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela tronca di seconda specie, sta al solido parallelepipedo cavo la detta anima, nella ragione di

5250 : 179.

Tav. III. Fig. 22. Sia AIB, un semisferoide depresso, tagliato da un piano, che passa per l' asse maggiore; e sia aIb, l' Emisfero, il di cui diametro sia l' asse minore della Ellissi generatrice; e ne' circoli AKBG, ahbl, basi del semisferoide, e dell' Emisfero vi siano inscritti gli quadrati DKQG, ehil, sopra de' quali vi siano innalzati gli parallelepipedi DP, eR, li quali abbiano per altezza la metà del lato del quadrato inscritto nel circolo, ch'è base dell' Emisfero; il parallelepipedo DP, taglierà dal semisferoide AIB, il segmento gIC, e li quattro semisegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO (*a*); Ciò posto, il segmento gIC, sferoidico, sta al segmento sferico fIF, come lo sferoide totale, alla intiera sfera (*b*), ovvero come lo semisferoide AIB, all' Emisfero aIb; ed il semisegmento GADg, sferoidico, sta al semisegmento sferi-

co

(a) *Avvert. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Corol. I. Teor. 3. Cap. 6.*

co laef, come lo ſemisferoide AIB, all' Emisfero alb (a); Onde la ſomma de' quattro ſemiſegmenti sferoidici GADg, DSKM, KBQC, QTGO, più il ſegmento gIC, ſta alla ſomma de' quattro ſemiſegmenti sferici corriſpondenti, più il ſegmento fIF, come lo ſemisferoide AIB, all' Emisfero aIb (b); e permutando, ed invertendo, lo ſemisferoide AIB, ſtarà alli quattro ſemiſegmenti sferoidici, più il ſegmento gIC, come lo Emisfero aIb, alli quattro ſemiſegmenti sferici, più il ſegmento fIF; e convertendo, lo ſemisferoide AIB, ſtarà allo ſemisferoide meno gli detti quattro ſemiſegmenti, e ſegmento, cioè al ſolido GDKQOgMC, come lo Emisfero aIb, all' Emisfero meno gli detti quattro ſemiſegmenti, e ſegmento, cioè al ſolido lehimfoF; e permutando, lo ſemisferoide, ſta all' Emisfero, come il ſolido GDKQOgMC, al ſolido lehimfoF; ma lo ſemisferoide AIB, ſta all' Emisfero aIb come $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (c); ovvero come DKQG, ad ehil, eſſendo quelli dupli di queſti; e DQ : ei, come il parallelepipedo DP, al parallelepipedo eR (d); dunque il ſolido parallelepipedo DP, ſta al parallelepipedo eR, come il ſolido GDKQOgMC,

 MC,

(a) *Avvert. I. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Corol. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(c) *Teor. 3. Cap. 6.*
(d) *Teor. per lem. del Teor. 33. lib. 11.*

MC, al ſolido lehimfoF; e permutando, il parallelepipedo DP, ſta al ſolido GDKQOg-MC, come il parallelepipedo eR, al ſolido lehimfoF, e convertendo, il parallelepipedo DP, ſtarà al medeſimo parallelepipedo meno il ſolido GDKQOgMC, o ſia meno l'anima della Volta, come il parallelepipedo eR, allo ſteſſo parallelepipedo meno l'anima della Volta sferica; ma il parallelepipedo eR, ſta al ſolido feohFiml, come 5250: 179 (a). Dunque il parallelepipedo DP, ſta alla ſolidità della Volta a vela ſenza reguglio di ſeconda ſpecie gDMKCQOG, come 5250: 179. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della ſolidità di una Volta a vela ſenza reguglio di ſeconda ſpecie, la pianta della quale ſia quadrata, e gli archi ſopra gli lati del detto quadrato ſiano Ellittici, deveſi tenere lo ſteſſo metodo detto nella Volta sferica, poſto nell'avvertimento del problema di queſto Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

Tav. III. Fig. 22. Si è dimoſtrato nel Teorema precedente, che il parallelepipedo DP, ſta al ſolido GD-KQ-

(a) *Propl. Cap. 6.*

KQOgMC, come il parallelepipedo eR, al solido lehimfoF; Onde anche gli loro dupli saranno proporzionali, e si averà, che il duplo parallelepipedo DP, stia allo intiero sferoide depresso, meno gli sei segmenti, che il detto parallelepipedo taglia, come il cubo formato sopra il lato eh, del quadrato inscritto nel circolo massimo della sfera, il di cui diametro è l'asse minore della Ellissi generatrice, alla sfera meno gli sei segmenti, che il detto cubo taglia. Ciò posto, intendesi ora interfecato il detto sferoide depresso per un piano, che passa per l'asse minore, la sezione sarà la Ellissi APBI, la quale sarà eguale alla Ellissi generatrice del detto sferoide depresso, e li due parallelepipedi mG, iR, li quali sono eguali a quelli detti nel Teorema precedente, tagliaranno lo semisferoide, e lo Emisfero, in segmenti proporzionali allo sferoide, ed alla sfera; ed in semisegmenti, li quali saranno eguali tra loro; e con quelli sferici, proporzionali collo detto sferoide, e colla descritta sfera. Perciò facendo uso dello stesso raziocinio detto nel Teorema precedente, si averà, che il parallelepipedo mG, starà allo semisferoide depresso dedottine li quattro semisegmenti, e lo intiero segmento verso il polo, come il parallelepipedo, iR, allo Emisfero meno li quattro semisegmenti, e segmento corrispondente a quello del semisferoide; Onde convertendo, si Tav. III. Fig. 11.

 averà,

avrà, che il parallelepipedo mG, ſta al medeſimo parallelepipedo meno il ſemisferoide tronco, come il parallelepipedo iR, allo ſteſſo parallelepipedo meno lo Emieſero tronco; ma il parallelepipedo iR, ſta al parallelepipedo meno lo Emisfero tronco, come 5250: 179 (a); Dunque il parallelepipedo mG, ſta allo ſteſſo parallelepipedo meno il ſemisferoide tronco, come 5250: 179. Ma queſta ſezione fatta nello sferoide depreſſo per un piano, che paſſa per l'aſſe maggiore, e gli ſia perpendicolare l' aſſe minore, darà un' altra Volta a vela ſenza reguglio di terza ſpecie, la quale ſarà formata ſopra il rettangolo mC, e gli archi eretti ſopra gli lati maggiori di detto rettangolo, mM, gC, ſaranno ſemicerchi, e gli altri archi formati ſopra gli lati minori gm, CM, ſaranno ſemielliſſi, gli aſſi minori delle quali, ſaranno li ſteſſi lati gm, CM, e gli ſemiaſſi maggiori, le mettà de' detti lati maggiori gC, mM. Sicchè dunque per avere il valore di una Volta a vela ſenza reguglio di terza ſpecie, deveſi fare la ſteſſa operazione di quella, per avere la ſolidità della Volta di prima ſpecie deſcritta nell' avvertimento del problema di queſto Capitolo.

Del-

(a) *Probl. Cap. 6.*

Della solidità dello sferoide lungo.

TEOREMA V.

SIa ADB, una semielliſſi, il di cui aſſe maggiore ſia AB, e ſopra di eſſo deſcriveſi il ſemicerchio ACB; e concepiſcaſi tanto la ſemielliſſi, quanto il ſemicerchio girare attorno l'aſſe maggiore AB; dalla ſemielliſſi ſi generarà uno sferoide; e dal ſemicerchio una sfera. Dico, che la sfera, ſtarà allo sferoide, come il quadrato dell' aſſe maggiore, ch'è diametro della sfera, al quadrato dell' aſſe minore, ovvero come gli quadrati degli ſemiaſſi. *Tav. II. Fig. 11. n. 1.*

Per lo punto G, qualunque preſo nel prolungamento dell' aſſe maggiore AB, ſi tiri una tangente al ſemicerchio ACB (*a*), e ſia GM, e dal punto del contatto M, ſi abbaſſi l'ordinata MO, all' aſſe maggiore AB, che ſeca la ſemielliſſi ADB, nel punto N, ſi uniſca poi il punto G, col punto N, per mezzo della retta GN, queſta ſarà tangente della ſemielliſſi ADB (*b*). Indi concepiſcaſi tirata l'altra ordinata mo, infinitamente vicina alla MO; ed eſſendo gli archetti Mm, Nn, infinitamente piccioli, queſti ſi confon-

(a) *Prop. 17. lib. 3.*
(b) *Teor. 2. Cap. 2.*

deranno colle porzioni delle tangenti GM, GN, e perciò si potranno prendere per lineole rette; Onde colla rivoluzione del semicerchio, e della semiellissi attorno all' asse maggiore AB, fisso, ed immobile, quello descriverà una sfera, e questa uno sferoide, e gli due archetti presi per linee rette Mm, Nn, formaranno due coni tronchi; se intendesi diviso tanto la sfera, quanto lo sferoide, nell' infinito numero di questi coni tronchi, questi saranno elementi della sfera, e dello sferoide; Onde la somma corrispondente alla sfera, sarà la solidità di essa, e quella nello sferoide, sarà la di lui solidità; Ma ciascuno cono tronco nello sferoide, sta al cono tronco corrispondente nella sfera, come $\overline{MO}^2 : \overline{NO}^2$ (*a*), ovvero come $\overline{CP}^2 : \overline{DP}^2$; e la somma de' primi, starà alla somma de' secondi, come uno de' primi, al suo corrispondente negli secondi (*b*), ovvero come $\overline{CP}^2 : \overline{DP}^2$. Dunque ancora la sfera, che ha per diametro l' asse maggiore AB, come somma degl' infiniti primi coni tronchi, sta allo sferoide, la semiellissi generatrice del quale è ADB, ed è somma degl' infiniti secondi coni tronchi, come $\overline{CP}^2 : \overline{DP}^2$, ovvero come

(a) *Teor. 2. Cap. 6.*
(b) *Prop. 12. lib. 5.*

me $\overline{AP}^2 : \overline{DP}^2$. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da ciò ne segue, che qualunque segmento della sfera diviso per un piano perpendicolare alla Ellissi generatrice, e parellelo all'asse minore, sta al segmento corrispondente nello sferoide, come il quadrato di DP, al quadrato di AP, ovvero come la sfera, allo sferoide.

COROLLARIO II.

SUpponeasi il cerchio AKBL, la Ellissi AIBP, ed il cerchio aIbP, girare attorno all'asse maggiore AB, fisso, ed immobile, gli due cerchi formeranno due sfere, e la Ellissi uno sferoide lungo. Chiamasi la sfera il di cui diametro è AB, asse maggiore dello sferoide, S; la sfera il diametro della quale sia l'asse minore IP, dicasi s; e lo sferoide generato dalla Ellissi AIBP, denominasi Sf. Si averà per il Teorema precedente, che *Tav. I. Fig. 5.*

$$S : Sf = \overline{AB}^2 : \overline{IP}^2$$

Moltiplicando per $\quad AB$

Si averà, che $\quad S : Sf = \overline{AB}^3 : \overline{IP}^2 \times AB$;

ma $\quad S : s = \overline{AB}^3 : \overline{IP}^3$ (a);

Dun-

(a) *Prop. 18. lib. 12.*

Dunque ordinando Sf: s $= \overline{IP}^2 A\times B : \overline{IP}^3$
e dividendo per IP.

Si averà, che Sf: s $= IP\times AB : \overline{IP}^2$.

Sicchè dunque lo sferoide, sta alla sfera il di cui diametro è l' asse minore del detto sferoide, come il rettangolo fatto dall' asse maggiore, e l' asse minore di esso sferoide, al quadrato circonscritto al circolo massimo della detta sfera; e comecchè l' enunciato rettangolo, sta al detto quadrato, come l' asse maggiore, all' asse minore. Dunque lo sferoide, sta alla sfera, che ha per diametro l' asse minore, come l' asse maggiore, all' asse minore dello stesso sferoide.

COROLLARIO III.

Tav.I. Fig.5. Per il Corollario I, il segmento yAd, sferico, sta al segmento sferoidico gAc, come $\overline{AB}^2 : \overline{IP}^2$, e moltiplicando l' uno, e l' altro termine della seconda ragione per AB, si averà, che

seg: yAd : seg: gAc $= \overline{AB}^3 : \overline{IP}^2\times AB$;
ma seg: yAd : seg: fah $= \overline{AB}^3 : \overline{IP}^3$ (*a*)
essendo simili tra loro
Dunque ordinando

seg: gAc : seg: fah $= \overline{PI}^2\times AB : \overline{IP}^3$;

e di-

(a) *Corol. I. prop. 63. de Sphær., & Cyl. Caravelli.*

e dividendo l'uno, e l'altro termine per IP;
Si avrà seg: gAç : seg: fah $=$ IP$\times$AB : $\overline{IP}^2$.
Sicchè dunque il segmento sferoidico, sta al segmento corrispondente nella sfera il di cui diametro sia l'asse minore dello sferoide, come il rettangolo fatto dall'asse maggiore, e dall'asse minore del detto sferoide, al quadrato circonscritto al circolo massimo della detta sfera, ovvero come lo sferoide totale, alla intiera sfera.

COROLLARIO IV.

Essendosi dimostrato, che tanto lo sferoide generato dalla rivoluzione della Ellissi AIBP, stia alla sfera, il diametro della quale sia l'asse minore del detto sferoide, quanto il segmento sferoidico, al suo corrispondente nella detta sfera, stia come il rettangolo fatto dall'asse maggiore, e minore del detto sferoide, al quadrato circonscritto al cerchio massimo della detta sfera; ma il rettangolo cG, inscritto nella Ellissi generatrice è la mettà del rettangolo fatto dall'asse maggiore, e minore (*a*), ed il quadrato hF; inscritto nel circolo massimo della sfera, che ha per diametro l'asse minore, è la mettà del quadrato circonscritto. Dunque lo sferoide generato colla rivoluzione della Ellissi AIBP, sta alla

(a) *Corol. Teor. 6. Cap. 1.*

la sfera generata colla rivoluzione del cerchio aIbP, come il rettangolo çG, al quadrato hF; ed in questa stessa ragione saranno gli segmenti sferoidici a quelli sferici corrispondenti. Onde ancora lo semisferoide, sta allo Emisfero, come il rettangolo inscritto nella Ellissi generatrice, al quadrato inscritto nel circolo, il diametro del quale è l'asse minore.

AVVERTIMENTO.

Tav. II. Fig. 23. Sia DMCe, il rettangolo inscritto nella Ellissi AIBP, generatrice dello sferoide, quale rettangolo si ha prolungando gli due lati mn, iN, del quadrato in, inscritto nel circolo, il diametro del quale è l'asse minore della detta Ellissi; sopra il rettangolo Me, ed il quadrato in, s'intendono innalzati gli due parallelepipedi MO, iL, li quali abbiano per altezza commune, la mettà del lato del quadrato in, e comecchè il perallelepipedo iL, taglia dallo Emisfero quattro semisegmenti, ed il segmento dfbg, il quale è duplo di ciascuno de' detti semisegmenti, così ancora il parallelepipedo MO, taglierà dal semisferoide, quattro semisegmenti, gli quali saranno eguali tra loro, per essere nella stessa ragione con quelli sferici, di quella che ha lo sferoide, alla sfera, generati dalla detta Ellissi, e dal detto cerchio, siccome si è dimostraſtrato, e tagliarà ancora il detto parallelepipedo MO, il ſegmento, la baſe del quale è la Elliſſi abcd, il quale ſarà duplo di ciaſcuno de' detti ſemiſegmenti. Il ſolido ſemiſferoide tronco aMbCcedDa, cioè dedottine li quattro ſemiſegmenti, ed il ſegmento verticale, ſarà l' anima della Volta a vela tronca di quarta ſpecie, la quale ſarà formata ſopra il rettangolo DMCe, e ſopra gli lati minori DM, Ce, vi ſaranno innalzati gli archi DaM, Cce, li quali ſaranno ſemicircolari, e ſopra li lati maggiori vi ſaranno erette le ſemielliſſi MbC, Dde, che per la natura, e generazione del detto sferoide ſaranno tali gli detti archi; Siccome ha dimoſtrato Guarino Guarino nello Euclide ſuo.

TEOREMA VI.

Il parallelepipedo MO, ſta al medeſimo parallelepipedo meno l'anima della Volta a vela ſenza reguglio di quarta ſpecie, cioè alle quattro piramidi miſtilinee aMb, bCc, ced, dDa, nella ragione di 5250: 179. *Tav. II. Fig. 23.*

Lo ſemiſferoide generato colla rivoluzione della elliſſi AIBP, ſta allo emisfero generato colla rivoluzione del cerchio mnNi, come il rettangolo MCeD, al quadrato iNnm (a); Inoltre il ſemiſegmento sferoidico MPCb, ſta al ſemiſegmento sferico iPNb, come lo ſemisferoide, allo Emi-

(a) *Corol. 4. Teor. 5. Cap. 6.*

Emisfero (*a*); ed il semisferoide, sta allo Emisfero, come gli equimultiplici de' segmenti (*b*); ma gli equimultiplici nello sferoide sono, li quattro semisegmenti MPCb, CBec, eIDd, DAMa, ed il segmento, che ha per base la Ellissi abcd, e nello Emisfero, li quattro semisegmenti, che hanno per base li quattro semicerchi ibN, Ngn, ndm, mfi, ed il segmento, che ha per base il cerchio dfbg. Dunque lo semisferoide, sta allo Emisfero, come gli detti quattro semisegmenti, e segmento sferoidici, alli descritti quattro semisegmenti, e segmento sferici, e permutando, lo semisferoide, sta alli quattro semisegmenti, e segmento sferoidici, come la sfera, alli quatttro semisegmenti, e segmento sferici; e convertendo, lo semisferoide, starà allo detto semisferoide meno li quattro semisegmenti, e segmento sferoidici, cioè alla detta anima di Volta a vela senza reguglio di quarta specie, come lo Emisfero, allo stesso Emisfero meno li quattro semisegmenti, e segmento sferici, cioè all'anima della Volta a vela senza reguglio di prima specie; e permutando, lo semisferoide, sta allo Emisfero, come l'anima della Volta a vela senza reguglio di quarta specie, all'anima della Volta a vela senza reguglio di prima specie;
Ma

(a) *Corol.* 3. *Teor.* 5. *Cap.* 6.
(b) *Corol.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 6.

Ma lo semisferoide, sta allo Emisfero, come il rettangolo MCeD, al quadrato iNnm; ed il rettangolo Me, sta al quadrato Nm, come il parallelepipedo MO, al parallelepipedo iL (a); Dunque il parallelepipedo MO, sta al parallelepipedo iL, come l' anima della Volta a vela senza reguglio di quarta specie, all'anima della Volta a vela senza reguglio di prima specie, e permutando, il parallelepipedo MO, sta all'anima della Volta a vela senza reguglio di quarta specie, come il parallelepipedo iL, all' anima della Volta sferica, e convertendo, il parallelepipedo MO, sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di quarta specie, come il parallelepipedo iL, alla solidità della Volta sferica senza reguglio; ma il parallelepipedo iL, sta alla solidità della Volta sferica senza reguglio, come 5250: 179 (b); Dunque ancora il parallelepipedo MO, starà alla solidità della Volta a vela senza reguglio di quarta specie, come 5250: 179. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela senza reguglio di quarta specie, la

(a) *Prop. 32. lib. 11.*
(b) *Probl. Cap.° 6.*

la quale sarà covertura di un edificio di pianta rettangolare, e sopra li quattro lati vi saranno eretti li quattro archi, che sostengono la detta Volta, cioè sopra li lati minori, li archi saranno semicircolari, e sopra li lati maggiori saranno semiellittici, devesi fare la stessa operazione detta nell' avvertimento del problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

Tav. II. Fig. 23. Essendosi dimostrato nel Teorema precedente, che il parallelepipedo MO, sta allo semisferoide tronco aMbCcedDa, come il parallelepipedo iL, allo Emisfero tronco ibNgndmfi, li loro dupli saranno proporzionali; Onde il duplo parallelepipedo MO, starà allo sferoide tronco, come il duplo parallelepipedo iL, o sia il cubo formato sopra il lato iN, del quadrato inscritto nel cerchio, il di cui diametro è l' asse minore, alla sfera tronca. Ora se intendesi diviso lo sferoide per un piano, il quale passi per l' asse minore, e ad esso li sia perpendicolare l' asse maggiore, questo piano siccome divide il cubo, e la sfera in due parti eguali, così divide ancora il parallelepipedo, e lo sferoide in due parti eguali, e da questa sezione si genera la quinta specie della Volta a vela senza reguglio, la quale sarà formata sopra il quadrato
Tav. III. Fig. 24. bdfe, e sopra li quattro lati bd, df, fe, eb, fa-

saranno eretti quattro archi, li quali saranno quattro semiellissi bCd, dDf, fAe, eBb, gli assi minori delle quali, saranno gli detti lati del quadrato; E perciò si averà ancora, che il parallelepipedo bQ, starà allo semisferoide tronco BbCdDfAeB, o sia all'anima della Volta a vela senza reguglio di quinta specie, come il parallelepipedo ba, allo Emisfero tronco, o sia all'anima della Volta sferica, essendo questi mettà de' totali, siccome si è detto; e convertendo, il parallelepipedo bQ, sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di quinta specie, come il parallelepipedo ba, alla solidità della Volta a vela sferica senza reguglio; ma il parallelepido ba, sta alla solidità della Volta a vela sferica, come 5250: 179 (a); Dunque il parallelepipedo bQ, sta alla solidità della Volta a vela senza reguglio di quinta specie, come 5250: 179. Sicchè dunque essendo dato il lato del quadrato, sopra del quale è formata la detta Volta, ed essendo dato il sesto, e la grossezza della cima, si potrà avere il suo valore della solidità, facendo uso della regola descritta nell' avvertimento del problema di questo Capitolo.

(a) *Probl. Cap. 6.*

Della solidità dello Ellittoide.

DEFINIZIONE.

Tav. III. Fig. 25. Sia ABCD, una Ellissi, e sopra l'asse minore BD, s' intenda eretta un' altra Ellissi BEDF, la quale abbia uno de' suoi assi commune coll' asse della prima Ellissi. Se per gl' infiniti punti della Ellissi ABCD, si faccino passare infinite Ellissi, le quali siano simili alla BEDF, e parallele. Il solido composto dall' aggregato di tutte queste Ellissi, si chiamarà *Ellittoide*.

Egli è chiaro, che nello Ellittoide vi saranno tre assi, cioè uno commune alle due Ellissi generatrici di detto solido, e sarà BD, e gli altri due saranno delle Ellissi medesime, cioè AC, ed EF; e comecchè questi assi sono disuguali tra loro, perciò si dirà asse maggiore quello, che è maggiore degli altri due, e minore quello, ch' è minore degli altri due rimanenti.

AVVERTIMENTO.

Dalla formazione di un tal solido è facile il comprendere, che qualunque sezione, che si fa in esso deve essere una Ellissi.

TEO-

TEOREMA VII.

Lo Ellittoide, ſta alla sfera, che ha per diametro l'aſſe minore dello Ellittoide, come il rettangolo circonſcritto alla Elliſſi, ſezione di detto Ellittoide per l'aſſe maggiore, al quadrato circonſcritto al cerchio maſſimo della detta sfera.

SIa ABCD, una ſezione dello Ellittoide, la quale paſſi per l'aſſe minore BD; e ſia AECF, la ſezione, che paſſa per l'aſſe maggiore EF. Dico, che lo Ellittoide, ſta alla sfera, che ha per diametro l'aſſe minore BD, come il rettangolo di EF, in AC, al quadrato di BD. *Tav. III. Fig. 25.*

S'Intende diviſo lo Ellittoide in un numero infinito di piani, tutti paralleli ad AECF, e ſiccome nello Ellittoide queſti piani ſegnaranno altrettante Elliſſi, così nella sfera notarà l'infinito numero di cerchi; e prendendoſi gli primi come elementi dello Ellittoide, gli ſecondi ſaranno elementi della sfera. Ma ciaſcuna di quelle Elliſſi, cioè MNm, ſta a ciaſcuno de' cerchi gih, come il rettangolo di No, in Mm, al quadrato di gh (*a*); ovvero come il rettangolo di Nn, in nm, al quadrato di nh; Ma Nn, ſta ad EO, come in : IO (*b*); ed mn, ſta a CO, come nh : OH. Dunque ancora la Elliſſi MNmo, ſta al cerchio gih, come il rettangolo di EO, in OC, al quadrato di OH, ovvero come il rettangolo di EF, in AC, al quadrato di GH. E queſto ha luogo in tutte le Elliſſi, elementi del detto Ellittoide, ed in tutti gli cerchi corriſpondenti, li quali ſono elementi della detta sfera; Dunque la ſomma di tutte le Elliſſi, ſta alla ſomma di tutti gli cerchi, come il rettangolo di EF, in AC, al quadrato di BD: ma la ſomma di dette Elliſſi ſarà lo Ellittoide, e la ſomma degli detti cerchi ſarà la sfera; Dunque lo Ellittoide, ſta alla sfera, che ha per diametro l'aſſe minore, come il rettangolo di EF, in AC, circonſcritto alla Elliſſi AECF, al quadrato di BD, circonſcritto al circolo maſſimo della sfera, che ha per diametro l'aſſe minore. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

COROLLARIO I.

Da quelche ſi è dimoſtrato, ſe ne deduce, che il ſegmento MBm, dello Ellittoide, ſta al

(a) *Avvert. Teor. 6. Cap.* 1.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.

al ſegmento sferico gBh, come il rettangolo circonſcritto alla Elliſſi AECF, al quadrato circonſcritto al cerchio maſſimo della sfera, che ha per diametro l' aſſe minore; ovvero come lo Ellittoide, alla sfera.

COROLLARIO II.

Ed eſſendo il rettangolo inſcritto nella Elliſſi, la mettà del rettangolo ad eſſa circonſcritto (*a*), ed il quadrato inſcritto nel cerchio la mettà del quadrato circonſcritto; Dunque ancora lo Ellittoide, ſtarà alla sfera, che ha per diametro l'aſſe minore, come il rettangolo inſcritto nella Elliſſi AECF, al quadrato inſcritto nel circolo maſſimo della detta sfera; e nella ſteſſa ragione ſaranno gli ſegmenti.

COROLLARIO III.

Chiamaſi S, la sfera, il diametro della quale ſia l' aſſe maggiore EF, dello Ellittoide; e la sfera BGDH, dicaſi s, il diametro della quale ſia l' aſſe minore BD; e lo Ellittoide ABCDEF, denominaſi EL; Si averà per lo Teorema precedente, che

 EL:

(a) *Corol. Teor. 6. Cap. 1.*

$EL : s = EF \times AC ; \overline{BD}^2$;

Moltiplicando per BD

Si averà, che $EL : s = EF \times AC \times BD : \overline{BD}^3$,

e permutando $EL : EF \times AC \times BD = s : \overline{BD}^3$.

Inoltre $s : S = \overline{BD}^3 : \overline{EF}^3$ (*a*),

permutando $s : \overline{BD}^3 = S : \overline{EF}^3$;

ma $s : \overline{BD}^3 = EL : EF \times AC \times BD$;

Dunque $EL : EF \times AC \times BD = S : \overline{EF}^3$,

E permutando $EL : S = EF \times AC \times BD : \overline{EF}^3$

dividendo per EF.

si averà, che $EL : S = AC \times BD : \overline{EF}^2$.

Sicchè dunque lo Ellittoide, sta alla sfera, il di cui diametro è l'asse maggiore, come il rettangolo fatto dall'asse medio, e minore, al quadrato dell'asse maggiore.

COROLLARIO IV.

Tav.II. Fig.26. Sia AKBL, un cerchio il di cui diametro AB, sia l'asse maggiore di un Ellittoide, la sezione del quale sia la Ellissi 'aKbL; e doep, sia un cerchio il di cui diametro sia l'asse minore del detto Ellittoide, e l'asse medio sarà ab. Il segmento sferico yKD, della sfera generata colla rivoluzione del cerchio AKBL, chiamasi S; il segmento, mon del-

(a) *Prop.* 18. *lib.* 12.

della sfera generata colla rivoluzione del cerchio doep, denominasi s; ed il segmento gKG, dello Ellittoide dicasi S.EL; intersecati siano gli detti segmenti nella maniera, che osservasi nella figura 26. Si averà, che il segmento sferico yKD, sta al segmento gKG, dello Ellittoide aKbL, come la sfera AKBL, allo Ellittoide; Ma la detta sfera, sta allo Ellittoide, come $\overline{AB}^2 : ab \times de$ (*a*).

Dunque $S : S.EL = \overline{AB}^2 : ab \times de$
Moltiplicando per AB
si averà, che $S : S.EL = \overline{AB}^3 : ab \times de \times AB$,
e permutando $S : \overline{AB}^3 = S.EL : ab \times de \times AB$;
Ma $S : s = \overline{AB}^3 : \overline{de}^3$ (*b*),
permutando $S : \overline{AB}^3 = s : \overline{de}^3$;
Dunque $s : \overline{de}^3 = S.EL : ab \times de \times AB$,
e permutando $s : S.EL = \overline{de}^3 : ab \times de \times AB$
dividendo per de,
Si averà, che $s : S.EL = \overline{de}^2 : ab \times AB$
Sicchè dunque gli segmenti dello Ellittoide, li quali nascono da sezioni parallele all' asse minore, staranno alli segmenti corrispondenti della sfera, il di cui diametro è l' asse minore, come il rettangolo fatto dall' asse maggiore, e medio, al quadrato dell' asse minore, ovvero co-

(a) *Corol. precedente*.
(b) *Prop. 18. lib. 12.*

come lo Ellittoide totale, alla intiera sfera; oppure come il rettangolo inscritto nella Elliſſi, sezione che paſſa per l'aſſe maggiore, alla quale gli ſia perpendicolare l' aſſe minore, al quadrato inſcritto nel circolo maſſimo, che ha per diametro l' aſſe minore.

COROLLARIO V.

Col medeſimo raziocinio ſi può dimoſtrare, che qualunque porzione di sfera, ſtia alla ſua corriſpondente nello ellittoide, come il quadrato circonſcritto al cerchio maſſimo, al rettangolo circonſcritto alla detta elliſſi, ovvero come il rettangolo fatto dal diametro, e dal raggio del cerhio maſſimo, alla mettà del rettangolo circonſcritto alla detta elliſſi.

AVVERTIMENTO.

Tav. III. Fig. 27. Se s' intende lo Ellittoide diviſo per un piano, che paſſa per l' aſſe maggiore AB, e l' aſſe minore ſia perpendicolare al detto piano; la ſezione ſia la Elliſſi AgBh; e la ſezione della sfera, il di cui diametro è l' aſſe minore, ſia il cerchio QTSR, dentro del quale ſi concepiſca inſcritto il quadrato TR; e nella Elliſſi AgBh, vi ſia inſcritto il rettangolo GEFH, e s' intendono innalzati due parallelepipedi ſopra il quadrato TR, ed il rettangolo EH, gli quali abbiano per altezza commumune la mettà del lato del quadrato inscritto nel cerchio QTSR; siccome il parallelepipedo innalzato sopra il quadrato TR, taglia dallo Emisfero quattro semisegmenti eguali tra loro, ed un segmento verticale, il quale è duplo di ciascuno de' detti semisegmenti; così ancora il parallelepipedo eretto sopra il rettangolo EH, taglierà dallo Ellittoide quattro semisegmenti eguali, ed il segmento verticale, il quale sarà duplo di ciascuno de' detti semisegmenti; per essere questi, a quelli, come lo Ellittoide, alla sfera, siccome si è dimostrato ne' Corollarii precedenti. Il solido Ellittoide tronco MENFOHPGM, sarà l' anima della sesta specie di Volta a vela senza reguglio; la quale sarà di pianta rettangolare, e gli quattro archi, che sostengono la detta Volta saranno Ellittici.

TEOREMA VIII.

Il parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza coll' anima della Volta di sesta specie, sta al parallelepipedo medesimo dedottane la detta anima di Volta, o sia alla solidità di detta Volta di sesta specie, come
5250: 179.

Tav. III. Fig. 27. LI quattro semisegmenti GME, ENF, FOH, HPG, dello Ellittoide, stanno alli quattro semisegmenti sferici QoT, TqS, SrR, RpQ, come lo semiellittoide, all' Emisfero (*a*); ed il segmento verticale PMNO, dello Ellittoide, sta al segmento sferico verticale poqr, anche come lo semiellittoide, all' Emisfero. Onde la somma de' quattro semisegmenti dello semiellittoide, più il segmento verticale, sta alla somma de' quattro semisegmenti sferici, più il segmento verticale, come lo semiellittoide, all' Emisfero; e permutando, ed invertendo, si averà, che lo semiellittoide, starà alli detti quattro semisegmenti, e segmento verticale dello Ellittoide, come l' Emisfero, alli quattro semisegmenti sferici, più il segmento verti-ca-

(a) *Corol. 1. Teor. 7. Cap. 6.*

cale, e convertendo, lo ſemiellittoide ſtarà, al detto ſemiellittoide meno gli detti quattro ſemiſegmenti, e ſegmento verticale dello Ellittoide, come l'Emisfero, allo detto Emisfero, meno li quattro ſemiſegmenti sferici, e ſegmento verticale; Ma il detto ſemiellittoide dedottine gli detti quattro ſemiſegmenti, e ſegmento verticale, è l' anima della Volta a vela di ſeſta ſpecie MENFOHPGM; e l'Emisfero toltine gli detti quattro ſemiſegmenti sferici, e ſegmento verticale, è l'anima della Volta a vela sferica oTqSrRpQo; Dunque lo ſemiellittoide, ſta all' anima della Volta MENFOHPGM, come l' Emisfero, all'anima della Volta sferica oTqSrRpQo; e permutando, lo ſemiellittoide, ſta allo Emisfero come l' anima della Volta di ſeſta ſpecie, all' anima della Volta sferica; ma lo ſemiellittoide, ſta all' Emisfero come il rettangolo GEFH, al quadrato QTSR (*a*); ſed il rettangolo GEFH, ſta al quadrato QTSR, come il parallelepipedo EC, al parallelepipedo Tm (*b*); Dunque il parallelepipedo EC, ſta al parallelepipedo Tm, come l'anima MENFOHPGM, della Volta di ſeſta ſpecie, all'anima oTqSrRpQo, della Volta a Vela sferica; e permutando, il parallelepipedo EC, ſta alla detta anima di Volta di ſeſta ſpecie, co-

(a) *Corol. 2. Teor. 7. Cap. 6.*
(b) *Prop. 32. lib. 11.*

come il parallepipedo Tm, all' anima di Volta sferica; e convertendo, il parallelepipedo EC, ſta al detto parallelepipedo, dedottane la detta anima di Volta di ſeſta ſpecie, cioè alla ſua ſolidità MEaNFbOHCPGdM, come il parallelepipedo Tm, alla ſolidità della Volta sferica; ma il parallelepipedo Tm, ſta alla ſolidità della Volta a vela sferica: come 5250: 179 (a); Dunque il parallelepipedo EC, ſta alla ſolidità della Volta a vela ſenza reguglio di ſeſta ſpecie, come 5250: 179. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da ciò ſi è dimoſtrato, ſi rileva il metodo di conoſcere il valore della ſolidità della Volta a vela ſenza reguglio di ſeſta ſpecie, facendo uſo della ſteſſa regola detta nelle altre.

AVVERTIMENTO I.

Il detto Ellittoide è capaee di due altre ſezioni, cioè per un piano, che paſſa per l' aſſe medio gh, al quale gli ſia perpendicolare l' aſſe maggiore AB; e per un piano, che paſſa per l' aſſe minore YL, al quale gli ſia perpendicolare l' aſſe medio gh; e da queſte ſezioni ne naſceranno due altre ſpecie di Vol-

(a) *Prob. Cap. 6.*

Volta a vela ſenza reguglio, le quali ſaranno di pianta rettangolare, e ſopra gli quattro lati del detto rettangolo ſaranno erette quattro ſemiellissi ſimili a quelle, delle quali il detto ſolido vien generato; e la ſolidità di dette Volta ſi averà della ſteſſa maniera delle altre.

AVVERTIMENTO II.

SIcchè dunque qualunque Volta a vela ſenza reguglio, di qualſivoglia ſpecie ſia, ſi potrà avere il valore della ſua ſolidità, eſſendo cognita la lunghezza, la larghezza, il ſeſto degli archi, che la ſoſtengono, e la groſſezza della cima, facendo la ſeguente regola, cioè.

I. Si moltiplica la lunghezza, per la larghezza, e per il ſeſto, ed il prodotto ſi noti.

II. Ritrovaſi un quarto proporzionale, dopo gli due numeri coſtanti 5250, 179, ed il detto prodotto, e ſi noti.

III. Finalmente ſi uniſca il detto quarto proporzionale, col prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la groſſezza della cima; la ſomma ſarà il valore della ſolidità di detta Volta, in parti cubiche dell'aliquota commune.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che in qualunque specie di Volta a vela senza reguglio, il solido che ha la medesima base, e la stessa altezza con detta volta, sta alle piramidi mistilinee, come 5250: 179; ed essendo le dette piramidi, le incosciature di dette Volte; Dunque il solido parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza colla Volta a vela senza reguglio, sta alle quattro incosciature di essa, come 5250: 179.

CAP.

CAP. VII.

Della superficie delle varie specie di Volta a vela senza reguglio.

DEFINIZIONE.

Per superficie di Volta a vela senza reguglio s' intende la superficie concava di detta Volta.

PROBLEMA I.

Trovare la ragion, che passa tra la superficie laterale di un parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza con la Volta a vela sferica, e la superficie di detta Volta.

SIa la Volta sferica INSPKQTRI; trovare la ragione, che passa tra la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza, aS, mettà del lato del quadrato, e la superficie di detta Volta. *Tav. II. Fig. 17.*

Sia NP = PQ = a; sarà NQ = Ln = $\sqrt{2a^2}$; ed nK = $\frac{\sqrt{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}}{2}$;

ed

ed aS $=$ uK $=$ Oy $=$ Oa $=$ OV $= \frac{a}{2}$;

sarà ancora OP $=$ ON $=$ OL $= \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$;

ed LV $=$ By $=$ LO $-$ OV $= \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$

$- \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2a^2} - a}{2}$ Onde la superficie dello

Emisfero sarà $= \frac{22}{7} \sqrt{2a^2} \times \frac{\sqrt{2a^2}}{2} =$

$\frac{22}{7} a^2$.

Le quattro superficie de' semisegmenti laterali NMPS, PnQK, QXRT, RLNI, siccome si è detto nel problema Capitolo VI. sono eguali a $\frac{22}{7}$ $(2a^2 - a^2\sqrt{2}$ e la superficie del segmento ISKFB $= \frac{11}{7}$ $(2a^2 - a^2\sqrt{2})$; Onde la somma de' detti quattro semisegmenti, e segmento ISKTB $= \frac{33}{7}$ $(2a^2 - a^2\sqrt{2})$ sicchè la superficie dello Emisfero tronco, o sia dello Emisfero dedottine le superficie de' detti quattro semisegmenti, ed il detto segmento, vale a dire la somma delle superficie de' quattro triangoli sferici INS, SPK, KQT, TRI $= \frac{22}{7}$ a^2 $- \frac{33}{7}$ $(2a^2 + a^2\sqrt{2}) = \frac{33}{7}$ $a^2\sqrt{2} - \frac{44}{7} a^2$.

aggiuntovi il cerchio ISKT $= \frac{11}{14} a^2$

Si

Si averà la superficie della Volta a vela senza reguglio di prima specie NISPKQTRI $= \frac{33}{7} a^2\sqrt{2} - \frac{44}{7} a^2 + \frac{11}{14} a^2 = \frac{66}{14} a^2\sqrt{2} - \frac{88}{14} a^2 + \frac{11}{14} a^2 = \frac{66}{14} a^2\sqrt{2} - \frac{77}{14} a^2$.

La superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza

$$aS = 4a \times \frac{a}{2} = \frac{4a^2}{2} = 2a^2;$$

Sicchè dunque la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza aS, sta alla superficie della Volta sferica senza reguglio, come $2a^2 : \frac{66}{14} a^2\sqrt{2} - \frac{77}{14} a^2$; ovvero come $28a^2 : 66a^2\sqrt{2} - 77a^2$; e dividendo tutti gli termini per a^2; si averà, che la superficie laterale del parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza con la Volta a vela sferica, stia alla superficie di detta Volta, come $28 : 66\sqrt{2} - 77$, ovvero come $28 : 16.324$; oppure come $28000 : 16324$; ch' è lo stesso di $1000 : 583$. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie della Volta a vela sferica senza reguglio, o sia di prima specie, essendo cognita la lunghezza, la larghezza, ed il sesto, devesi.

I. Summare la dupla lunghezza, e la dupla larghezza, e questa moltiplicarla per il se-

sesto, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale; questo sarà la superficie di detta Volta.

Sia, per esempio, una Volta a vela sferica senza reguglio, la di cui larghezza NP, sia 20, ed essendo sferica sarà PQ = 20; ed il sesto aS = 10; la somma de' quattro lati NP, PQ, QR, RN, sarà 80, la quale moltiplicata per il sesto 10, il prodotto sarà 800; Indi dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto 800, trovisi un quarto proporzionale $466\frac{2}{5}$, questo sarà il valore della superficie della data Volta a vela sferica senza reguglio.

Della superficie dello sferoide depresso.

TEOREMA I.

Tav. II. Fig. 19.

SE il Cono ABC, sia diviso dal piano DE parallelo alla base. Dico, che la superficie del Cono ABC, stia alla superficie del Cono DBE, come le sezioni di essi, che passano per l'asse, cioè come il triangolo ABC, al triangolo DBE.

La superficie del cono ABC, sta alla superperficie del cono DBE, come $\overline{AC}^2 : \overline{DE}^2$ (*a*); ma $\overline{AC}^2 : \overline{DE}^2$, come il triangolo ABC, al triangolo DBE (*b*), essendo simili; Dunque la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono DBE, come il triangolo ABC, al triangolo DBE. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo la superficie del cono ABC, alla superficie del cono DBE, come il triangolo ABC, al triangolo DBE, convertendo si averà la superficie del cono ABC, alla superficie del cono tronco ADEC, come il triangolo ABC, al trapezio ADEC.

TEOREMA II.

Sia FBG, un'altro cono, che abbia l'asse BO, di commune col cono ABC, e sia diviso dal piano DE, parallelo alla base AC. Dico, che la superficie del cono ABC, stia alla superficie del cono FBG, come la superficie del cono tronco ADEC, alla superficie del cono tronco FHIG.

La superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono DBE, come il triangolo

(a) *Corol. 2. prop. 4 de sphæ. & Cyl. Caravelli.*
(b) *Prop. 19. lib. 6.*

ABC, al triangolo DBE (*a*); e della ſteſſa maniera, la ſuperficie del cono FBG, ſta alla ſuperficie del cono HBI, come il triangolo FBG, al triangolo HBI. Inoltre il triangolo ABC, ſta al triangolo FBG, come AC : FG (*b*), ed il triangolo DBE, ſta al triangolo HBI, come DE : HI; Ma

AC : DE = BO : BP; per le
parallele DE, AC; ed
FG : HI = BO : BP;
Dunque AC : DE = FG : HI, e per conſeguenza il triangolo ABC, ſta al triangolo DBE, come il triangolo FBG, al triangolo HBI. Sicchè dunque anche la ſuperficie del cono ABC, ſtarà alla ſuperficie del cono DBE, come la ſuperficie del cono FBG, alla ſuperficie del cono HBI (*c*); e convertendo, la ſuperficie del cono ABC, ſta alla ſuperficie del cono tronco ADEC; come la ſuperficie del cono FBG, alla ſuperficie del cono tronco FHIG; e permutando, la ſuperficie del cono ABC, ſta alla ſuperficie del cono FBG, come la ſuperficie del cono tronco ADEC, alla ſuperficie del cono tronco FHIG. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

CO-

(a) *Teor. precedente.*
(b) *Prop. 1. lib. 6.*
(c) *Prop. 11. lib. 5.*

COROLLARIO.

Essendo la superficie del cono ABC, alla superficie del cono tronco ADEC, come il triangolo ABC, al trapezio ADEC (a); e la superficie del cono FBG, alla superficie del cono tronco FHIG, come il triangolo FBG, al trapezio FHIG. Dunque permutando, ed ordinando, la superficie del cono tronco ADEC, sta alla superficie del cono tronco FHIG, come il trapezio ADEC, al trapezio FHIG.

TEOREMA III.

La superficie dello sferoide depresso, sta alla superficie della sfera, che ha per diametro l' asse minore, come l' asse maggiore, all' asse minore.

Sia ACBD, una Ellissi, il di cui asse minore sia AB, ed AEBF, sia un cerchio, che abbia per diametro l' asse minore AB, e sia HG, una tangente della Ellissi, la quale si vada ad unire coll' asse minore prolungato nel punto G; e dal punto H, si abbassi la ordinata HI, all' asse AB, la quale s' interseca *Tav. II. Fig. 2.*

 col-

(a) *Corol. Teor. I. Cap. 7.*

colla circonferenza del cerchio nel punto L; e tirandosi la GL, questa sarà tangente del cerchio AEBF (a); Si concepisca un'altra ordinata ho, infinitamente vicina alla HI; ed essendo le due GH, GL, tangenti della Ellissi, e del cerchio, gli piccioli archetti Hh, Ll, si confonderanno con le lineette Hh, Ll, porzioni delle tangenti, e perciò si potranno prendere per linee infinitamente picciole. Indi s'intende tanto la Ellissi, quanto il cerchio girare attorno all'asse minore AB, fisso, ed immobile, fintantocchè giungono nel medesimo luogo d'onde son partite; la Ellissi con una tal rivoluzione generarà uno sferoide depresso, il cerchio una sfera, e le lineette Hh, Ll, due coni tronchi; ma la superficie del cono tronco HhnK, sta alla superficie del cono tronco LlmM, come il trapezio HhnK, al trapezio LlmM (b); e gli trapezj HhnK, LlmM, non differiscono dagli rettangoli fatti da hn, in Hh, e da lm, in Ll, essendo le ordinate infinitamente vicine tra loro; Onde il trapezio HhnK, sta al trapezio LlmM, come hn, ad lm, ovvero come ho: lo, oppure come CO: EO (c); Sicchè dunque la superficie del cono tronco HhnK, sta alla superficie del cono tronco LlmM, co-

(a) *Teor. 2. Cap. 2.*
(b) *Corol. Teor. precedente.*
(c) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. I.*

come CO: EO. Ciò posto, se tutto lo sferoide ACBD, sia diviso da infiniti piani, la sua superficie sarà composta da infinite corone coniche, e la sfera AEBF, sarà ancora composta da altrettante corone coniche; e comecchè ciascuna delle prime, sta a ciascuna corrispondente delle seconde, come CO: EO; Così la somma delle prime, che formano la intiera superficie dello sferoide, sta alla somma delle seconde, che formano la intiera superficie della sfera, come CO: EO (*a*), ovvero come CD: AB. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Da ciò si è dimostrato si rileva, che la superficie di un segmento HAK, dello sferoide, sta alla superficie del segmento LAM, della sfera, come il segmento Ellittico HAK, al segmento circolare LAM; poicchè la somma delle corone coniche nel segmento sferoidico, sta alla somma delle corone coniche nel segmento sferico, come la somma de' trapezj, de' quali componesi il segmento HAK, alla somma de' trapezj, di cui componesi il segmento LAM; ma il segmento HAK, sta al segmento LAM, come CD, ad AB (*b*); ed in questa stessa ragione sarà la superficie del

L 4 seg-

(a) *Prop.* 12. *lib.* 5.
(b) *Corol.* 3. *Teor.* 3. *Cap.* 1.

ſegmento ſferoidico HAK, a quella del ſegmento sferico LAM.

COROLLARIO II.

La ſuperficie dello sferoide depreſſo, ſtando alla ſuperficie della sfera, che ha per diametro l' aſſe minore AB, come l' aſſe maggiore CD, all' aſſe minore AB; ma CD: AB, come il ſegmento ſferoidico HAK, al ſegmento sferico LAM; Sicchè dunque il ſegmento ſferoidico HAK, ſta al ſegmento sferico LAM, interſecati per piani paralleli all' aſſe maggiore, come la ſuperficie dello sferoide totale, alla ſuperficie totale della sfera.

COROLLARIO III.

Tav.II. Fig.26. Chiamaſi S, la ſuperficie della sfera, il diametro della quale ſia l' aſſe maggiore KL, di uno sferoide depreſſo; ed s, la ſuperficie della sfera, il di cui diametro ſia l' aſſe minore ab, dello ſteſſo sferoide; e la ſuperficie del detto sferoide denominaſi S. sf. Si averà per lo Teorema precedente.

$$s : S.\,sf = ab : KL$$

Moltiplicando per ab

Si averà $s : S.\,sf = \overline{ab}^2 : ab \times KL,$

e permutando $s : \overline{ab}^2 = S.\,sf : ab \times KL;$

ma

ma $s : S = \overline{ab}^2 : \overline{KL}^2$ (a),

e permutando $s : \overline{ab}^2 = S : \overline{KL}^2$;

Dunque $S : \overline{KL}^2 = S.\,sf : ab \times KL$,

e permutando $S : S.\,sf = \overline{KL}^2 : ab \times KL$,
dividendo per KL

Si averà $S : S.\,sf = KL : ab$.

Sicchè dunque la superficie della sfera, che ha per diametro l'asse maggiore di uno sferoide depresso, sta alla superficie del detto sferoide, come l'asse maggiore, all'asse minore del sferoide.

COROLLARIO IV.

Dicasi S, la superficie del segmento sferico yKD, della sfera il di cui diametro sia l'asse maggiore KL, dello sferoide depresso; ed s, la superficie del segmento fIF, della sfera, il diametro della quale sia l'asse minore ab; così ancora dicasi S. sf, la superficie del segmento sferoidico depresso gKG; riducendo la sfera il di cui diametro è l'asse maggiore, e lo sferoide ne' loro elementi, e facendo lo stesso raziocinio detto nel Teorema precedente, si averà

$$S : S.\,sf = KL : ab$$

Mol-

(a) *Corol. 2. prop. 24. Theor. Archimedis, Andrea Tacqnet.*

Moltiplicando per KL.

Si averà $S : S.\ sf = \overline{KL}^2 : ab \times KL :$

e permutando $S : \overline{KL}^2 = S.\ sf : ab \times KL .$

Inoltre $S : s = \overline{KL}^2 : \overline{ab}^2$ (*a*),

e permutando $S : \overline{KL}^2 = s : \overline{ab}^2 ;$

mà $S : \overline{KL}^2 = S.\ sf : ab \times KL ;$

Dunque $s : \overline{ab}^2 = S.\ sf : ab \times KL$,

e permutando $s : S.\ sf = \overline{ab}^2 : ab \times KL$

dividendo per ab

Si averà $s : S.\ sf = ab : KL$

Sicchè dunque la superficie del segmento sferoidico depresso, interſecato da un piano parallelo all'asse minore, sta al segmento corrispondente della sfera, il diametro della quale è l'asse minore del detto sferoide, come l'asse maggiore, all'asse minore del detto sferoide depresso, ovvero come la superficie dello sferoide, a quella della sfera.

COROLLARIO V.

Tav.II. Fig.20. Essendo la superficie dello sferoide, alla superficie della sfera il di cui diametro è l'asse minore, come CD: AB, ovvero come la Ellissi ACBD, al cerchio AEBF (*b*), permu-

(a) *Prop. 50. de Sphæ. & Cyl. Caravelli.*
(b) *Teor. 3. Cap. 1.*

mutando, si averà, che la superficie dello sferoide, sta alla Ellissi ACBD, come la superficie della detta sfera, al circolo massimo AEBF; ma la superficie della sfera è quadrupla del cerchio massimo (a); dunque la superficie dello sferoide depresso è quadrupla della Ellissi generatrice.

AVVERTIMENTO.

Per trovare una sfera, che abbia la sua superficie eguale a quella di uno sferoide depresso, basta ritrovare una media proporzionale tra l'asse maggiore, e l'asse minore, e questa sarà diametro della sfera, che si va cercando; poicchè il circolo avendo per diametro questa media proporzionale è eguale alla Ellissi generatrice dello sferoide depresso (b); dunque anche li loro quadrupli saranno eguali, e per conseguenza la superficie dello sferoide depresso sarà eguale alla superficie della sfera, che ha per diametro la media proporzionale tra gli assi conjugati.

PRO-

(a) *Prop. 36. de sphæ:, & Cyl. Caravelli.*
(b) *Teor. 7. Cap. 1.*

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per conoscere il valore della superficie di qualunque Volta a vela senza reguglio di seconda specie.

Tav. III. Fig.22. ESsendo la superficie del semisferoide depresso, alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come il semiasse maggiore, al semiasse minore (*a*), o sia di DH: eH; ma DH : eH = DL : eN (*b*) dunque la superficie del semisferoide AIB, sta alla superficie del detto Emisfero, come DL : eN; Inoltre la superficie del semisegmento sferoidico DSKM, sta alla superficie del semisegmento sferico eoh, come l' asse maggiore, all' asse minore (*c*), ovvero come DL : eN; ed in questa istessa ragione è la superficie del segmento verticale sferoidico OgMCI, a quella del segmento sferico mfoF (*d*); Onde la somma delle superficie de' quattro semisegmenti sferoidici, che tagliano gli piani passando per li quattro lati del quadrato DQ, più la superficie del segmento sferoidico verticale OgMCI, starà alla somma

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 7.
(b) *Schol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.
(c) *Corol.* 4. *Teor.* 3. *Cap.* 7.
(d) *Corol.* I. *Teor.* 8. *Cap.* 7.

ma delle ſuperficie de' quattro ſemiſegmenti sferici corriſpondenti, più la ſuperficie del ſegmento sferico verticale, come DL : eN; Sicchè dunque la ſuperficie del ſemisferoide depreſſo, ſta alla ſuperficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' aſſe minore, come la ſomma delle ſuperficie de' detti quattro ſemiſegmenti, più il ſegmento verticale dello sferoide, alla detta ſomma di ſuperficie de' ſemiſegmenti sferici, e ſegmento verticale; e permutando, e convertendo la ſuperficie dello ſemisferoide, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici gDM, MKC, CQO, OGg, come la ſuperficie dell' Emisfero, alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferici corriſpondenti feo, ohF, Fim, mlf; e permutando, la ſuperficie del ſemisferoide, ſta alla ſuperficie dello Emisfero, come la detta ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, alla ſomma delle ſuperficie de' detti quattro triangoli sferici; ma la ſuperficie del ſemisferoide, ſta alla ſuperficie dell' Emisfero, come DL, ad eN, ovvero come la ſomma de' quattro lati del quadrato DQ, alla ſomma de' quattro lati del quadrato ei, opppure come il rettangolo, che ha per baſe la ſomma de' quattro lati del quadrato DQ, e per altezza QP, o ſia la ſuperficie laterale del parallelepipedo DP, alla ſuperficie laterale del parallelepipedo eR, avendo eguali altezze; dunque la ſuperficie laterale del parallelepipedo DP, ſta alla

alla ſuperficie laterale del parallelepipedo eR, come la ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferici, e permutando, la ſuperficie laterale del parallelepipedo DP, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, come la ſuperficie laterale del parallelepipedo eR, alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferici corriſpondenti; ma la ſuperficie laterale del parallelepipedo eR, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferici, come $2a^2 : \frac{33}{7} a^2 \sqrt{2} - \frac{44}{7} a^2$, ſiccome rilevaſi dal Problema I. di queſto Capitolo ovvero come $14a^2 : 33a^2\sqrt{2} - 44a^2$; e dividendo tutti gli termini di detta ragione per a^2; ſi averà, che la ſuperficie laterale del parallelepipedo eR, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferici, come $14 : 33\sqrt{2} - 44$, ovvero, come $14 : 2662$; oppure come $14000 : 2662$; o ſia come $7000 : 1331$; Sicchè dunque la ſuperficie laterale del parallelepipedo DP, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, come $7000 : 1331$. Ciocchè doveaſi cercare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della ſuperficie di una Volta a vela ſenza reguglio di ſeconda ſpecie, deveſi.

I. Mol-

I. Moltiplicare il perimetro del quadrato, che gli ſerve di baſe, per il ſeſto di detta Volta, ed il prodotto ſi noti.

II. Si trovi un quarto proporzionale dopo li due numeri coſtanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e ſi noti; queſto ſarà la ſumma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici.

III. Dopo li due numeri coſtanti 14, 11, ed il quadrato, che gli ſerve di baſe, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti; e queſto ſarà il cerchio OgMC.

IV. Finalmente ſi uniſcano gli detti due quarti proporzionali, e la di loro ſomma ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta.

Sia data una Volta a vela di ſeconda ſpecie, della quale ſe ne voglia ſapere il valore della ſua ſuperficie, eſſendo cognito il lato del quadrato, che gli ſerve di baſe, e ſia 15, ed il ſeſto ſia 5; il prodotto della ſomma de' quattro lati, per il ſeſto, ſarà 300. Dopo li due numerl coſtanti 7000, 1331, ed il detto prodotto 300, ſi trovi il quarto proporzionale $57\frac{3}{70}$, e queſto ſarà la ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici. Indi dopo li due numeri coſtanti 14, 11, ed il quadrato di 15, ſi trovi un'altro quarto proporzionale, che ſarà $176\frac{11}{14}$. Finalmante ſi uniſcano gli detti due quarti proporzionali, e la di di loro summa $233\frac{10}{35}$, sarà il valore della superficie della detta Volta.

TEOREMA IV.

La superficie della Volta sferica inscritta nella Volta a vela senza reguglio di terza specie, sta alla superficie di essa Volta, nella ragione della larghezza di detta Volta, alla di lei lunghezza.

Tav. III. Fig. 21. Sia iNFf, la base della Volta sferica inscritta nella Volta di terza specie. Dico, che la superficie della Volta sferica, sta alla superficie della Volta di terza specie, come mg : mM.

La superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, come la superficie de' semisegmenti, che sono tagliati dalli piani eM, gG, alla superficie de' semisegmenti corrispondenti nella sfera, che ha per diametro l' asse minore (*a*); e permutando, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie de' detti semisegmenti, come la superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, alla superficie de' detti semisegmenti sferici. Così ancora la superficie dello semisferoide, sta alla superficie de' semisegmenti,

---

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 7.

ti, che ſono tagliati dalli piani ge, MG, e del ſegmento tagliato da Ge, come la ſuperficie dell' Emiſfero, che ha per diametro l' aſſe minore, alli ſemiſegmenti sferici corriſpondenti (*a*). Onde la ſuperficie del ſemisferoide, ſta alla ſuperficie de' quattro ſemiſegmenti, che li quattro piani del parallelepipedo. mG, taglia, più il ſegmento verticale, come la ſuperficie dell' Emiſfero, alla ſuperficie de' quattro ſemiſegmenti, più il ſegmento verticale corriſpondente; e convertendo, la ſuperficie del ſemisferoide, ſta alla ſuperficie del detto ſemisferoide, meno la ſuperficie de' detti ſemiſegmenti, e ſegmento, cioè alli quattro triangoli sferoidici, come la ſuperficie dell' Emiſfero, alla ſuperficie de' quattro triangoli sferici; e permutando, la ſuperficie del ſemisferoide, ſta alla ſuperficie dell' Emiſfero, come la ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, a quella de' quattro triangoli sferici; ma la ſuperficie del ſemisferoide, ſta alla ſuperficie dell' Emiſfero, come l' aſſe maggiore, all' aſſe minore (*b*), ovvero come mQ: iQ (*c*); Dunque la ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, ſta alla ſuperficie de' quattro triangoli sferici, come mQ, ad iQ. Ciò poſto, la Elliſſi verticale 1, 2, ſta al cerchio verticale

(a) *Corol. 4. Teor. 3. Cap. 7.*
(b) *Teor. 3. Cap. 7.*
(c) *Corol. 1. Teor. 3. Cap. 7.*

3, 4, come l'asse maggiore di detta Ellissi, all'asse minore (a), ovvero come mQ : iQ, oppure come la superficie de' quattro triangoli sferoidici, alla superficie de' quattro triangoli sferici; e permutando, e componendo, la superficie della Volta a vela di terza specie, sta alla superficie de' quattro triangoli sferoidici, come la superficie della Volta sferica, alla superficie de' quattro triangoli sferici, e permutando, la superficie della Volta a vela di terza specie, sta alla superficie della Volta sferica, come la superficie de' quattro triangoli sferoidici, alla superficie de' quattro triangoli sferici, ovvero come mQ : iQ, oppure come li loro dupli mM, ad iN, ovvero if. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio di terza specie, la quale sarà formata sopra un rettangolo, e gli archi eretti sopra li lati maggiori saranno semicerchi, e quelli sopra li lati minori semiellissi; devesi.

I. Moltiplicare la somma di quattro volte la larghezza mg, per la mettà di essa, per avere la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica, ed il prodotto si noti. II.

(a) *Teor. 3. Cap.° 1.*

II. Dopo li due numeri coſtanti 1000, 583. ed il detto prodotto, ſi trovi un quarto proporzionale, queſto ſarà la ſuperficie della volta sferica (*a*).

III. Finalmente dopo la larghezza, la lunghezza, e la detta ſuperficie di Volta sferica, ſi rrovi un quarto proporzionale, queſto ſarà la ſuperficie della Volta di terza ſpecie.

Sia, per eſempio, data una Volta a vela di terza ſpecie, e ſia la larghezza 10, la lunghezza 24; ſi moltiplica la quadrupla larghezza 10, ch' è 40. per la mettà di detta larghezza ch'è 5, ed il prodotto 200. ſi noti; ſi faccia come li due numeri coſtanti 1000. a 583, così il detto prodotto 200, al quarto proporzionale $116\frac{3}{5}$, e ſi noti; Indi dopo la larghezza 10, la lunghezza 24, ed il detto quarto proporzionale $116\frac{3}{5}$; ſi trovi il quarto proporzionale $279\frac{21}{25}$, queſto ſarà la ſuperficie di detta Volta.

(a) *Avvert. Probl. 1. Cap. 7.*

Della superficie dello sferoide lungo.

TEOREMA V.

La superficie della sfera, che ha per diametro l'asse maggiore di uno sferoide, sta alla superficie dello sferoide lungo, nella ragione dell'asse maggiore, all' asse minore.

Tav. II. Fig. 16. Sia AKBL, un cerchio, ch' abbia per diametro l'asse maggiore KL, della Ellissi aKbL; e tanto il detto cerchio, quanto la Ellissi si faccino girare attorno l'asse maggiore KL, la Ellissi generarà uno sferoide lungo, nel tempo stesso, che il cerchio formerà una sfera, Dico, che la superficie della sfera che ha per diametro l'asse KL, sta alla superficie dello sferoide, come KL : ab.

La dimostrazione è la stessa di quella fatte nel Teorema III. di questo Capitolo.

COROLLARII.

Da ciò se ne deducono le istesse illazioni nel detto Teorema dimostrate, facendo uso delli stessi raziocinii, e sono le seguenti.

I. Che la superficie di un segmento sferico, sta alla superficie di un segmento sferoidico corrispondenti, intersecati da un piano pa-

parallelo all' asse minore, al qual piano gli sia perpendicolare l'asse maggiore come l'asse maggiore, all' asse minore, ovvero come la superficie sferica, alla superficie sferoidica.

II. Che la superficie della sfera, che ha per diametro l'asse minore, sta alla superficie dello sferoide lungo, come l'asse minore, all'asse maggiore; e nella stessa ragione saranno le superficie de' segmenti, e de' settori.

III. Che la superficie di un segmento di uno sferoide lungo, sta alla superficie del segmento sferico corrispondente nella sfera, che ha per diametro l'asse maggiore, quali segmenti siano intersecati da' piani paralleli all' asse maggiore, ed a questi gli sia perpendicolare l'asse minore, come l'asse minore, all' asse maggiore, ovvero come la superficie dello sferoide, a quella della sfera.

IV. Che la superficie dello sferoide lungo sia quadrupla della superficie della Ellissi generatrice.

V. Sicchè dunque la superficie di uno sferoide depresso sarà eguale alla superficie di uno sferoide lungo, essendo tanto l' uno, quanto l' altro generato da una istessa Ellissi.

TEOREMA VI.

La superficie della Volta sferica inscritta nella Volta a vela senza reguglio di quarta specie, sta alla superficie di essa Volta, nella ragione della larghezza di essa Volta, alla sua lunghezza.

Tav. II. Fig. 23. SIa aMbCcedDa, la Volta a vela di quarta specie, e sia fibNgndmf, la Volta sferica, la quale sarà formata sopra un quadrato del lato minore del rettangolo, che è base della Volta di quarta specie. Dico, che la superficie di detta Volta sferica, sta alla superficie della Volta diggià enunciata di quarta specie, come DM: MC.

La superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come l' asse maggiore, all' asse minore (*a*), ed in questa istessa ragione saranno gli semisegmenti, li piani secanti de' quali sono DaM, ecC (*b*); e gli semisegmenti MPCb, DIed, ed il segmento il piano secante, del quale sia abcd (*c*), con li semiseg-

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 5. *Cap.* 7.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 5. *Cap.* 7.
(c) *Corol.* 3. *Teor.* 5. *Cap.* 7.

ſegmenti, e ſegmento corriſpondenti nella sfera; Onde la ſuperficie dello ſemisferoide lungo, ſta alla ſuperficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' aſſe minore, come la ſuperficie de' quattro ſemiſegmenti, e ſegmento dello sferoide, alla ſuperficie de' quattro ſemiſegmenti, e ſegmento corriſpondenti nella sfera; e permutando, e convertendo, la ſuperficie dello ſemisferoide, ſta alla ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici aMb, bCc, ced, dDa, come la ſuperficie dell' Emisfero, alla ſuperficie de' quattro triangoli sferici fib, bNg, gnd, dmf; e permutando, la ſuperficie dello ſemisferoide, ſta alla ſuperficie dell' Emisfero, come la ſuperficie de' detti quattro triangoli sferoidici, alla ſuperficie de' deſcritti quattro triangoli sferici; Ma la ſuperficie dello ſemisferoide ſta, a quella della sfera, il diametro della quale è l' aſſe minore, come l' aſſe maggiore, all' aſſe minore (*a*), ovvero come MC : iN, oppure come la Elliſſi abcd, al cerchio fbgd (*b*); Dunque la ſuperficie della Elliſſi abcd, ſta alla ſuperficie del cerchio fbgd, come la ſuperficie de' detti quattro triangoli sferoidici, alla ſuperficie de' deſcritti quattro triangoli sferici; e permutando, e componendo, la ſuperficie della Volta a vela di quarta ſpecie, ſta alla ſuperficie della Volta

(a) *Corol. 2. Teor. 5. Cap. 7.*
(b) *Teor. 3. Cap. 1.*

a vela sferica, come la Ellissi abcd, al cerchio fbgd, ovvero come MC : iN; Sicchè dunque la superficie della Volta a vela sferica inscritta nella Volta a vela senza reguglio di quarta specie, sta alla superficie di essa Volta di quarta specie, come la larghezza, alla lunghezza di detta Volta. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio, la quale sia formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi eretti sopra li lati minori siano circolari, e quelli formati sopra li lati maggiori siano Ellittici, quale Volta dicesi di quarta specie; devesi fare quello stesso, che nell' Avvertimento Teor. IV. di questo Capitolo si è detto, cioè.

I. Moltiplicare la quadrupla larghezza di essa Volta, per la mettà di detta larghezza, per avere la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica, ed il prodotto si noti.

II. Si trovi, dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto, un quarto proporzionale, questo sarà la superficie della Volta sferica, e si noti.

III. Finalmente si trovi un'altro quarto proporzionale, dopo la larghezza, la lunghezza za di detta Volta data, e la notata ſuperficie della Volta sferica; queſto ſarà la ſuperficie della Volta di quarta ſpecie.

TEOREMA VII.

La ſuperficie laterale di un parallelepipedo circonſcritto ad una Volta a Vela ſenza reguglio di quinta ſpecie, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici, o ſia delle quattro incoſciature di detta Volta, nella ragione di 7000 : 1331.

SIa il parallelepipedo bQ, circonſcritto alla Volta a vela di quinta ſpecie eBbCdDfAe. Dico, che la ſuperficie laterale di detto parallelepipedo bQ, ſta alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici BbC, CdD, DfA, AeB, come 7000 : 1331. *Tav. III. Fig. 24.*

Facendo lo ſteſſo raziocinio de' Teoremi precedenti ſi averà, che la ſuperficie dello ſemisferoide, ſtarà alla ſuperficie dell' Emisfero, il di cui diametro è l' aſſe minore, come la ſomma della ſuperficie de' quattro deſcritti triangoli sferoidici, alla ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferici; Ma la ſuperficie dello ſemisferoide, ſta alla ſuperficie dell'

dell' Emisfero, come l' asse maggiore, all' asse minore (*a*), ovvero come fQ : fa (*b*); oppure come la superficie laterale del parallelepipedo bQ, alla superficie laterale del parallelepipedo ba; Dunque la somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici BbC, CdD, DfA, AeB, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, come la superficie laterale del parallelepipedo bQ, alla superficie laterale del parallelepipedo ba, e permutando, ed invertendo, la superficie laterale del parallelepipedo bQ, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferoidici, come la superficie laterale del parallelepipedo ba, alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, ma la superficie laterale del parallelepipedo ba, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici come 7000 : 1331. (*c*); Dunque la superficie laterale del parallelepipedo bQ, circonscritto alla Volta a vela di quinta specie, sta alla superficie delle incosciature di detta Volta come 7000 : 1331. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio, la quale sia forma-

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 5. *Cap.* 7.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Probl.* 2. *Cap.* 7.

mata ſopra una pianta quadrata, e gli archi, che la ſoſtengono ſiano ſemiellittici, e gli aſſi minori ſiano li lati del detto quadrato; qual Volta diceſi di quinta ſpecie, deveſi fare quello ſteſſo detto nell' Avvertimento Probl. II. di queſto Capitolo, cioè.

I. Moltiplicare il perimetro del quadrato, che gli ſerve di baſe, per il ſeſto di detta Volta, ed il prodotto ſi noti.

II. Trovare un quarto proporzionale dopo li due numeri coſtanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e ſi noti, queſto quarto proporzionale ſarà la ſomma delle ſuperficie de' quattro triangoli sferoidici.

III. Trovare inoltre un' altro quarto proparzionale dopo li due numeri coſtanti 14, 11, ed il quadrato che gli ſerve di baſe, e ſi noti; e queſto ſarà il circolo ABCD.

IV. Finalmente ſi uniſcano gli detti due quarti proporzionali, e la di loro ſomma ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta.

Della ſuperficie dello Ellitoide.

DEFINIZIONI.

I. Sia AKCM, una Elliſſi, il di cui aſſe maggiore ſia AC, ed il minore KM, e ſia il punto B, elevato da ſopra detta Elliſſi, dal quale ſi tiri una retta a qualunque punto del perimetro di detta Elliſſi, e s' intenda la detta Tav. III. Fig. 28.

ta

ta retta girare attorno a detto perimetro con uno estremo; e coll' altro fisso, ed immobile nel punto B, fintantocchè giunga nel medesimo luogo d'onde si è partita, il solido racchiuso da questa superficie AKCMB, si chiamerà *Cono Ellittico*; la Ellissi KCMA, sarà la sua *base*; ed il punto B, il *vertice*.

II. La retta BO, che unisce il vertice, col centro della Ellissi, che gli serve di base si dirà *asse*; se questo è perpendicolare alla base si chiamerà, *Cono retto*, e s'è obbliquo si dirà, *Cono Scaleno*.

AVVERTIMENTO.

Dalla generazione di questo solido è facile il comprendere, che tirandosi una retta dal vertice B, a qualunque punto del perimetro della base, giacerà questa nella superficie di detto cono, dal che si rileva, che qualunque sezione fatta nel detto cono, la quale passi per il vertice B, sia un triangolo; delle altre poi quelle, che sono parallele alla base, saranno della stessa natura della base. Una tal verità ben si comprenderà dal seguente.

TEO-

TEOREMA VIII.

Se un cono Ellittico s' interseca per un piano parallelo alla base, la sezione sarà una Ellissi, è questa sarà simile a quella della base.

SIa ABC, un cono Ellittico, e sia intersecato dal piano FLGN, parallelo alla sua base. Dico I. che la figura FLGN, sia Ellissi; II. che detto Ellissi secante sia simile a quella della base AKCM. *Tav.* III. *Fig.* 28.

I. Si concepisca un' altro cono circolare, base del quale sia il cerchio DKEM, il diametro del quale sia l' asse minore KM, della Ellissi AKCM, ed abbia la commune altezza col cono Ellittico; s' intersechino li detti due coni, per due piani, li quali passino per il vertice B, e siano OBC, pBc, li quali per l' avvertimento precedente saranno triangoli, s' intersecaranno con li due piani paralleli AKCM, FLCN, e le di loro communi sezioni oG, OC; ag, pc, saranno parallele (*a*), Onde si averà, che

Bo: oG = BO: OC, (*b*)

e per-

(a) *Prop.* 16. *lib.* 11.
(b) *Prop.* 4. *lib.* 6.

e permutando $Bo : BO = oG\ OC$
Della stessa maniera si averà, che
$$Ba : Bp = ag : pc ;$$
Ma $Ba : Bp = Bo : BO ;$
Dunque $oG : OC = ag : pc ;$
Ma alla stessa ragione di $Bo : BO$, gli è eguale tanto la ragione di $oI : OE$, quanto la ragione di $ai : pe$, essendo sezioni nel cono circolare; Dunque
$$oG : OC = oI : OE,$$
ed $ag : pc = ai : pe$
e permutando le dette due proporzioni, si averà che $oG : oI = OC : OE$
ed $ag : ai = pc : pe$
Ma $OC : OE = pc : pe$ (*a*);
Dunque $oG : oI = ag : ai ;$
ed essendo questa proprietà della Ellissi, perciò la figura FLGN, sarà Ellissi. Ciocchè in primo luogo doveasi dimostrare.

II. S' intenda ora il detto cono intersecato dal piano KBM, il quale passi per l' asse BO, e sia perpendicolare al triangolo ABC; il detto piano secante KBM sarà un triangolo, e si averà ancora, che
$$Bo : BO = oL : OK,$$
e $Bo : BO = oG : OC ;$
Onde $oL : OK = oG : OC$
e gli loro dupli anche saranno proporzionali, cioè $LN : KM = FG : AC,$

e per

(a) *Corol.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.

e per conseguenza le due Ellissi FLGN, AKCM, saranno simili tra loro (*a*). Ciocchè in secondo luogo doveasi dimostrare.

TEOREMA IX.

Se un cono Ellittico retto sia intersecato da un piano parallelo alla sua base, la superficie dello intiero cono, stia alla superficie della porzione secata, come la somma de' triangoli innalzati sopra gli assi conjugati dell' Ellissi, che gli servono di base.

Sia intersecato il cono ABC, dal piano ac, parallelo alla base AC, la sezione arcs, sarà una Ellissi simile ad ARCS (*b*), Dico, che la superficie del cono Ellittico ABC, stia alla superficie conica della porzione aBc, come la somma delli due triangoli ABC, RBS, alla somma delli due trinngoli aBc, rBs. Tav. III. Fig. 2.

Si concepisca il cono ABC, diviso in un numero infinito di piani tutti paralleli alla base ARCS, questi piani segneranno nel cono un numero infinito di Ellissi, le quali saranno

(a) *Avvert.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(b) *Teor. precedente.*

no simili tra loro, e le communi sezioni di quest' infiniti piani con li triangoli ABC, RBS saranno infinite rette parallele, ad AC, RS, le quali saranno assi maggiori, ed assi minori delle infinite Ellissi nelle quali è diviso il detto cono, e comecchè il perimetro di una Ellissi, sta al perimetro dell' altra, essendo simili, come la somma dell' asse maggiore, e dell' asse minore della prima; alla somma dell' asse maggiore, e minore della seconda (*a*), perciò la somma di tutti li perimetri delle Ellissi, nelle quali è diviso il cono ABC, sta alla somma di tutti li perimetri delle Ellissi, nelle quali è diviso il cono aBc, come la somma degli assi maggiori, e minori, che sono le infinite sezioni ne' triangoli ABC, RBS, alla somma degli assi maggiori, e minori, che sono le corrispondenti sezioni ne' triangoli aBc, rBs; ma prendendosi questi infiniti perimetri di Ellissi per elementi delle superficie de' coni ABC, abc, e gl' infiniti assi maggiori, e minori corrispondenti essendo elementi de' triangoli ABC, RBS; aBc, rBs. Si averà, che le di loro somme saranno le superficie di essi; Sicchè dunque la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono aBc, come la somma de' due triangoli ABC, RBS, alla somma de' due triangoli aBc, rBs. Ciocchè doveasi dimostrare.

CO-

(a) *Corol. 6. Tor. 4. Cap. 2.*

COROLLARIO.

Essendo la superficie del cono ABC, alla superficie del cono aBc, come la somma de' due triangoli ABC, RBS, alla somma de' due triangoli aBc, rBs, convertendo si averà, che la superficie del cono ABC, sta alla superficie del cono tronco AacC, come gli triangoli ABC, RBS, alli due trapezii AacC, RrsS.

LEMMA I.

Se la quantità A, sta alla quantità B, come C, sta a D, e la quinta E, stia alla seconda B, come la sesta F, alla quarta D. Dico, che la somma della prima A, e la quinta E, cioè A+E, stia alla dupla della seconda B, cioè 2B, come la somma della terza, e sesta, cioè C+F, alla dupla della quarta, cioè 2D. Tav. III. Fig. 30.

Essendo per ipotesi $A : B = C : D$,
ed $E : B = F : D$;
permutando le dette due proporzioni si averà $A : C = B : D$;
ed $E : F = B : D$;
Sicchè $A : C = E : F$ (a);
e permutando $A : E = C : F$,

N e com-

(a) *Prop.* 11. *lib.* 5.

e componendo $A+E : E = C+F : F$,
e permutando $A+E : C+F = E : F$;
ma $E : F = B : D$.
ovvero come $2B : 2D$;
Dunque $A+E : C+F = 2B : 2D$,
e permutando $A+E : 2B = C+F : 2D$.
Ciocchè doveasi dimostrare.

LEMMA II.

Tav. III. Fig. 30. Se la prima quantità A, stia alla seconda B, nella stessa ragione, che la terza C, sta alla quarta D, e la quinta E, stia alla sesta F, come la settima G, alla ottava H, e le prima A, stia alla seconda B, come la quinta E, alla sesta F; e la terza C, stia alla quarta D, come la settima G, alla ottava H. Dico che la prima A, starà alla quinta E, come la terza C, alla settima G.

Concepiscansi a, c, aliquote simili di B, D, le quali saranno aliquote simili degli antecedenti A, C; come ancora b, d, siano aliquote simili di F, H, le quali saranno aliquote simili degli antecedenti E, G, e la c, d, siano di tali condizioni, che misurino la A, ed E. Ed essendo per ipotesi $A : B = C : D$, la a, misurerà tante volte l'A, quante volte la c, misura C, ed essendo $E : F = G : H$, la b, misurerà tante volte la E, quante volte la d, misura la G; Ma $A : B = E : F$, e $C : D = G : H$; Onde la

a, mia, misurerà tante volte la A, quante volte la b, misura E, e così ancora la c', misurerà tante volte la C, quante volte la d, misura la G. Sicchè la c, misurerà tante volte la A, quante volte la d, misura la G; ma essendo c, d, aliquote simili di C, e G ed aliquote simili di A, ed E; Dunque A : E = C : G (*a*). Ciocchè doveasi dimostrare.

TEOREMA X.

Sia ABC, un cono Ellittico, e DBE, un cono circolare, la base del quale sia il cerchio DQEP, qualunque, ed abbiano l' asse OB, di commune, e siano intersecati dal piano arcs. Dico, che la superficie del cono Ellittico tronco AacC, sta alla superficie del cono circolare tronco DdeE, come la somma de' due trapezii AacC, RrsS, al duplo trapezio DdeE. *Tav. III. Fig. 29.*

La superficie del cono DBE, sta alla superficie del cono dBe, come il triangolo DBE, al triangolo dBe (*b*); ovvero come la somma de' due triangoli DBE, PBQ, alla somma de' due triangoli dBe, pBq, per essere questi dupli di quelli, e convertendo, la superficie del cono DBE, sta alla superficie del

 cono

(a) *Def. 6. lib. 5.*
(b) *Teor. 1. Cap. 7.*

cono tronco DdeE, come li due triangoli DBE, PBQ, alli due trapezii DdeE PpqQ, Ciò posto, nel triangolo ABO, si averà che

AO: ao = DO: do (*a*)

Onde ancora li loro dupli saranno proporzionali, e perciò AC: ac = DE: de, e permutando AC: DE = ac: de;

Ma AC: DE, come il triangolo ABC, al triangolo DBE; ed ac: de, come il triangolo aBc, al triangolo dBe (*b*); dunque il triangolo ABC, sta al triangolo DBE, come il triangolo ABc, al triangolo dBe; della stessa maniera si dimostra, che il triangolo RBS, sta al triangolo PBQ, come il triangolo rBs, al triangolo pBq; Ma siccome si è detto AC: DE = ac: de, e della stessa maniera ancora si può dimostrare, che RS: PQ = rs: pq;

ed essendo le due Ellissi ARCS, arcs, simili tra loro si averà AC: RS = ac: rs (*c*);

Dunque AC+RS: 2DE = ac+rs: 2de (*d*) per essere PQ = DE, e pq = do: onde anche la somma de' due triangoli ABC, RBS, sta alla somma de' due triangoli DBE, PBQ, o sia al duplo triangolo DBE, come la somma de' due triangoli aBc, rBs, al duplo triangolo-

(a) *Coroll.2. prop. 4. lib.6.*
(b) *Prop. 1. lib. 6.*
(c) *Avvert. I. Teor. 4. Cap. 1.*
(d) *Lemma I. di questo Teor.*

golo dBe; e permutando, e convertendo, la ſomma de' due triangoli ABC, RBS, ſta alla ſomma de' due trapezii AacC, RrsS, come il duplo triangolo DBE, al duplo trapezio DdeE; ma la ſomma de' due triangoli ABC, RBS, ſta alla ſomma de' due tapezii AacC, RrsS, come la ſuperficie del cono Ellittico ABC, alla ſuperficie del cono tronco AacC (*a*); e la ſomma de' due triangoli DBE, PBQ, cioè il duplo triangolo DBE, ſta al duplo trapezio DdeE, come la ſuperficie del cono circolare DBE, alla ſuperficie del cono tronco DdeE (*b*); Dunque la ſuperficie del cono Ellittico ABC, ſta alla ſuperficie del cono tronco AacC, come la ſuperficie del cono circolare DBE, alla ſuperficie del cono tronco DdeE; e convertendo la ſuperficie del cono Ellittico ABC, ſta alla ſuperficie del cono aBc, come la ſuperficie del cono circolare DBE, alla ſuperficie del cono dBe.

Inoltre la ſuperficie del cono Ellittico ABC, ſta alla ſuperficie del cono aBc, come la ſomma de' due triangoli ABC, RBS, alla ſomma de' due triangoli aBc, rBs (*c*), e la ſuperficie del cono circolare DBE, ſtando alla ſuperficie del cono dBe, come il duplo triangolo DBE, al duplo triangolo dBe (*d*); e la ſu-

 per-

(a) *Corol. Teor.* 9. *Cap.* 7.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 7.
(c) *Teor.* 9. *Cap.* 7.
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 7.

perficie del cono Ellittico ABC, ſtando alla ſuperficie del cono aBc, come la ſupe.ficie del cono circolare DBE, alla ſuperficie del cono dBe, e finalmente la ſomma de' due triangoli ABC, RBS, ſtando alla ſomma de' due triangoli aBc, rBs, come il duplo triangolo DBE, al dnplo triangolo dBe, ſiccome ſi è detto; Onde per lo Lemma II. di queſto Teorema ſi averà, che la ſuperficie del cono Ellittico ABC, ſtia alla ſuperficie del cono circolare DBE, come la ſomma de' due triangoli ABC, RBS, al duplo triangolo DBE. Ma ſiccome ſi è dimoſtrato, la ſomma de' due triangoli ABC, RBS, ſta alla ſomma de' due trapezii AacC, RrsS, come la ſuperficie del cono Ellittico ABC, alla ſuperficie del cono tronco AacC; ed il duplo triangolo DBE, ſta al duplo trapezio DdeE, come la ſuperficie del cono circolare DBE, alla ſuperficie del cono tronco DdeE; Sicchè dunque eſſendo gli antecedenti di queſte due analogie proporzionali, li conſeguenti anche ſaranno proporzionali, e perciò la ſuperficie del cono Ellittico tronco AacC, ſtarà alla ſuperficie del cono circolare tronco DdeE, come la ſomma de' due trapezii AacC, RrsS, al duplo trapezio DdeE. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AVVERTIMENTO I.

Essendosi dimostrato che la superficie di un cono Ellittico, stia alla superficie di un cono circolare, avendo la stessa altezza, come la somma de' due tiangoli innalzati sopra l' asse maggiore, e minore, al duplo triangolo eretto sopra il diametro del cerchio, ch' è base del cono circolare, ovvero come la somma dell' asse maggiore, e minore della Ellissi ch' è base del detto cono, al duplo diametro del cerchio base del detto cono circolare; si potrà avere il valore di una superficie di un dato cono Ellittico, essendo data l' altezza, l' asse maggiore, e l' asse minore della base; con ritrovare un quarto proporzionale dopo un diametro qualunque, la semisumma dell' asse maggiore, e minore, e la superficie del cono circolare, ch' abbia per base un cerchio del supposto diametro, e per asse quello istesso del cono Ellittico, e l' enunciato quarto proporzionale sarà la superficie del cono Ellittico.

AVVERTIMENTO II.

Si puole avere il valore della superficie di un cono Ellittico di un' altra maniera, la quale dipenderà dalla seguente Teoria. Suppongasi inscritto nella Ellissi ARCS, che è base del cono Ellittico ABC, il rombo *Tav. III. Fig. 29.*

ARCS, e ſopra di un tal rombo concepiſcaſi eretta una piramide, la quale abbia un comune vertice col riferito cono. Intendaſi ora diviſo il detto cono da un numero infinito di piani tutti paralleli alla baſe; nella ſuperficie conica ſi ſegnaranno infinite Ellíſſi, e nella piramide infiniti rombi, li quali ſaranno inſcritti in ciaſcuna Ellíſſi corriſpondente; e comecchè ciaſcun perimetro di rombo ſta, a ciaſcun perimetro di Ellíſſi corriſpondente, come 2828: 3141. (*a*); Così la ſomma de' perimerri di tutti gli rompi ſta alla ſomma de' perimetri di tutte le Ellíſſi, anche come 2828: 3141; ma la ſomma di tutti gli infiniti perimetri de' rombi, che compongono la piramide è eguale alla ſuperficie della piramide, e gli infiniti perimetri delle Ellíſſi, che compongono il cono, formano la ſuperficie conica, per eſſere quelli elementi della ſuperficie della piramide, e queſti elementi della ſuperficie del cono Ellittico; dunque la ſuperficie della piramide, la baſe della quale ſia rombo, e ſia inſcritto nel cono Ellittico, ſta alla ſuperficie dello ſteſſo cono, come 2828: 3141. Onde eſſendo cognita la ſupeficie di una tal piramide, ſi averà la ſuperficie del riferito cono, ritrovando un quarto proporzionale dopo li due numeri coſtanti 2828, 3141, e la detta ſuperficie di piramide.

TEO-

(a) *Corol.* 4. *Teor.* 3. *cap.* 2.

TEOREMA XI.

La superficie dell' Ellittoide, sta alla superficie della sfera il di cui diametro è l' asse minore, come la somma dell' asse maggiore, e dell' asse medio dello Ellittoide, al duplo asse minore.

Sia ADBCH, un semiellittoide, l' asse maggiore del quale sia AB, l' asse medio CD, ed il semiasse minore sia OH, e sia inoltre EGFeH, uno emisfero, che abbia per raggio il semiasse minore OH, dello stesso Ellittoide. Dico, che la superficie del semiellittoide ADBCH, sta alla superficie dello Emisfero EGFeH, come la somma di AB, CD, alla dupla EF. *Tav. III. Fig. 31.*

Suppongasi diviso il detto semiellittoide ADBCH, da due piani verticali, li quali passino per l' asse maggiore, e medio, e s' intersechino nel semiasse minore, le sezioni saranno le due semiellissi AHB, CHD, e nello Emisfero EGFeH, si segnaranno colli descritti piani li due semicerchi EHF, e HG; s' intenda ora diviso il detto semiellitoide per il piano IKLM, parallelo al piano ADBC, le communi sezioni colli enunciati piani verticali, nelle due semiellissi saranno le due rette IL, MK, e nelli due semicerchi le due in, om. Indi per

lo

lo punto i, tirisi la retta iN, tangente al semicerchio EHF, la quale si vada ad unire col raggio OH, prolungato nel punto N, e si unifcono li punti N, ed I, per mezzo della retta NI, questa sarà tangente nella femiellissi AHB (a); lo stesso facciasi dall' altra parte, cioè tirando le due rette Nn, NL, e siccome la retta Nn, è tangente del semicerchio, così la NL, sarà tangente della femiellissi. Ma se da qualunque punto della periferia del cerchio imno, al punto N, si tirino delle rette, queste saranno sempre tangenti agli semicerchi, che intersecano lo Emisfero per piani verticali, poicchè la prima di queste, siccome si è dimostrato è tangente al semicerchio, ed essendo il punto N, nella istessa posizione a tutti gli infiniti semicerchi, che possano intersecare lo Emisfero, e li detti semicerchi essendo tutti eguali, per tal ragione tutte le rette saranno tangenti de' detti semicerchi. Dunque tutte le rette, che si tirano dal punto N, al perimetro della Ellissi IKLM saranno tangenti alle semiellissi secanti verticalmente il detto semiellittoide.

Se s' intende ora secata la porzione IKLMH, dello semiellittoide, da un piano parallelo, ed infinitamente vicino al piano IKLM, gli archetti Ib, Kc, Ld, Mf, si confonderanno con

(a) *Teor.* 2. *Cap.* 2.

con le porzioni delle descritte tangenti, e per conseguenza si potranno prendere per linee rette. Onde la corona IKLMbcdf, sarà un cono tronco Ellittico, e la corona corrispondente sarà un cono tronco circolare, che perciò la corona conica Ellittica IKLMbcdf, sta alla corona conica corrispondente nella sfera, come la somma delli due trapezii ILdb, MKcf, al duplo trapezio corrispondente nella corona sferica (*a*); Sicchè se si concepisce il semiellittoide ADBCH, diviso in un numero di piani infinitamente vicini l'uno, all'altro, sempre si averà, che la superficie della corona Ellittoidica, stia alla superficie delll a corona sferica corrispondente, come la somma de' due trapezii corrispondenti, dal duplo trazio nella sfera: Onde le somme di esse anche saranno proporzionali; ma la somma delle corone Ellittoidiche formano la superficie del semellittoide ADBCH, e la somma delle corone sferiche formano la superficie dell' Emisfero ECFeH, così ancora le somme de' primi trapezii sono le due semiellissi AHB, CHD, e la somma de' dupli trapezii secondi, si è il duplo semicerhio EHF; dunque la superficie dello semiellittoide ADBCH, sta alla superficie dello Emisfero EGFeH, come la somma delle due semiellissi AHB, CHD, al duplo semicerchio EHF; Ma la semiellissi AHB, sta

(a) *Teor.* 10. *Cap.* 7.

sta al semicerchio EHF, come AB : EF (*a*), e la semiellissi CHD, sta al semicerchio eHG, che è eguale ad EHF, come CD ; ad eG, ovvero EF ; Sicchè dunque la superficie del semiellittoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore dell' Ellittoide, come la somma dell' asse maggiore, e medio, al duplo asse minore. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARII.

Col medesimo raziocinio usato nelli Corollarii del Teorema III. di questo Capitolo, si possono dimostrare li seguenti.

I. Che la superficie di un segmento Ellittoidico intersecato da un piano parallelo all'asse maggiore, ed all'asse medio, stia alla superficie del segmento sferico corrispondente di una sfera, che ha per diametro l' asse minore, come la somma dell' asse maggiore, e medio, al duplo asse minore.

II. Che la superficie della sfera, che ha per diametro l' asse maggiore di uno Ellittoide, sta alla superficie dello stesso Ellittoide, come il duplo asse maggiore, alla somma dell' asse medio, e minore.

III. E finalmente, che la superficie di un segmento di uno Ellittoide intersecato da un piano

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 1.

piano parallelo all' asse maggiore, e minore, sta alla superficie del segmento corrispondente della sfera, che ha per diametro l'asse minore come la somma dell' asse maggiore, e medio, al duplo asse minore, e così ancora de' segmenti intersecati de' piani paralleli all' asse medio, e minore; E per conseguenza la superficie di qualunque segmento Ellittoidico, sta alla superficie del segmento della sfera corrispondente che ha per diametro l' asse minore, come la superficie dello Ellittoide, a quella della sfera.

TEOREMA XII.

La superficie laterale di un parallelepipedo circonscritto ad una Volta a vela senza reguglio di sesta specie, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli Ellittoidici, o sia alla somma delle superficie delle quattro incosciature di detta Volta, nella ragione di 7000: 1331.

Sia EFHGb, un parallelepipedo circoscritto alla volta a vela senza reguglio di sesta specie. Dico, che la superficie laterale di detto parallelepipedo, stia alla somma delle snperficie de' quattro triangoli Ellittoidici MEN, NFO, OHP, PGM, come 7000: 1331. *Tav. III. Fig.27.*

Facendo lo stesso raziocinio usato ne' Teore-

re-

remi precedenti, si averà, che la somma delle superficie de' quattro triangoli Ellittoidici MEN, NFO, OHP, PGM, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici corrispondenti oTq, qSr, rRp, pQo, come la somma di GE, EF, alla somma di QT, TS, ovvero come li loro dupli, cioè come il perimetro del rettangolo GEFH, al perimetro del quadrato QTSR, oppure come la superficie laterale del parallelepipedo EC, alla superficie laterale del parallelepipedo Tm; e permutando, ed invertendo, la superficie laterale del parallelepipedo EC, sta alla somma delle superficie de' detti quattro triangoli ellittoidici, come la superficie laterale del parallelepipedo Tm, alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici corrispondenti; Ma la superficie laterale del parallelepipedo Tm, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli sferici, come 7000 : 1331 (*a*); dunque la superficie laterale del parallelepipedo EC, sta alla somma delle superficie de' quattro triangoli Ellittoidici, o sia alla superficie delle incosciature della Volta a vela di sesta specie, come 7000 : 1331. Ciocchè doveasi dimostrare.

AV-

(a) *Probl.* 2. *Cap.* 7.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela senza reguglio di sesta specie, la quale sarà formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi che sostengano detta Volta saranno semiellissi, devesi,

I. moltiplicare il perimetro del rettangolo, che gli serve di base a detta Volta, per il sesto, ed il prodotto si noti.

II. Si trovi un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e si noti; e questo sarà la somma delle superficie delle quattro incosciature.

III. Si trovi inoltre dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il prodotto della lunghezza, e larghezza di detta Volta, ch' è il rettangolo abCd, un quarto proporzionale, e questo sarà la Ellissi MNOP.

IV. Finalmente si uniscano li detti due quarti proporzionali, e la di loro somma sarà il valore della superficie della Volta a vela senza reguglio di sesta specie.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualunque Volta a vela senza reguglio, devesi prima conoscere di quale spe-

specie sia : a tre classi si sono ridotte le dette Volte in questo Capitolo, ed a ciascuna di esse se gli è fatta una operazione diversa; cioè se è della prima specie la detta Volta, la quale sarà formata sopra un quadrato, e sopra li quattro lati di detto quadrato vi saranno eretti quattro semicerhi, si averà il valore della detta superficie, facendo la seguente operazione.

I. Devesi moltiplicare il perimetro del quadrato, che gli serve di base per il sesto ed il prodotto si noti.

II. devesi trovare un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto, ed il quarto proporzionale sarà il valore della superficie di detta Volta; siccome si è detto nell'Avvert. Probl. I. di questo Capitolo.

La seconda Classe abbraccia la seconda, la quinta, e la sesta specie, cioè se la Volta è formata sopra un quadrato, e sopra li suoi lati vi siano erette quattro semiellissi per lungo a detti lati; ovvero sia formata sopra un quadrato, e sopra li lati di esso vi siano erette quattro semiellissi per corto, ovvero sia formata sopra un rettangolo, e sopra li lati di esso vi siano erette quattro semiellissi di qualunque natura. Vale a dire, che la seconda classe di dette Volte, abbraccia quelle, le quali sono sostenute da quattro archi ellittici, e per

per avere il valore di ciascuna di esse, devesi.

I. Moltiplicare il perimetro della base di detta Volta, per il sesto di essa, ed il prodotto si noti.

II. Trovare un quarto proporzionale, dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto, e si noti.

III. Inoltre dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il prodotto della lunghezza, e larghezza di detta Volta si trovi un altro quarto proporzionale e si noti.

IV. Finalmente si uniscano gli detti due quarti proporzionali, la di loro somma sarà il valore della superficiè della detta Volta, siccome si è detto nel Probl. II. nell' Avvert. Teor. VII., e nell' Avvert. Teor. XI. di questo Capitolo.

La terza Classe finalmente di dette Volte, abbraccia la terza, e la quarta specie, cioè se è formata sopra un rettangolo, e sopra due lati di detto rettangolo vi siano eretti due semicerchi, e sopra gli altri due lati vi siano erette due semiellissi; ed in tal caso devesi.

I. Moltiplicare la quadrupla larghezza per la mettà di essa, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1000, 583, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti

III. Finalmente deveſi trovare un altro quarto proporzionale, dopo la larghezza, la lunghezza, ed il detto quarto proporzionale notato, queſto ſarà il valore della ſuperficie della detta Volta a vela ſenza reguglio; Siccome ſi è detto nell' Avvert. Teor. IV., e nell' Avvertimento Teor. VI. di queſto Capitolo.

CAP.

CAP. VIII.

Della solidità delle varie specie della Volta a vela col reguglio.

AVVERTIMENTO,

Nel Capitolo VI. si è data la definizione di una tale Volta; ed in esso si è fatto vedere da quali solidi vengono generate le varie specie delle Volte a vela; e comecchè in detto Capitolo si è trattato delle varie specie di dette Volte a vela senza reguglio, così ora in questo si tratterà delle istesse specie di Volte a vela col reguglio.

PROBLEMA.

Trovare le ragion, che passa tra il parallelepipedo circonscritto ad una Volta a vela sferica col reguglio, e la solidità di detta Volta.

S'Intenda la stessa preparazione fatta nel Problema del Cap. VI. colla variazione solamente, che sia l' Emisfero intersecato dalli quattro piani laterali del parallelepipedo innalzato sopra il quadrato NPQR, ed il detto parallelepipedo abbia per altezza il raggio *Tav. II. Fig. 17.*

 OB;

OB, sarà l'anima della Volta a vela sferica col reguglio, l'Emisfero meno li quattro semisegmenti NMPS, PnQK, QXRT, RLNI. Voglio intanto trovare la ragion, che passa tra il parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza la OB; ed il detto parallelepipedo meno l'anima della Volta a vela sferica col reguglio, INSPKQTRIB. Sia NP $=$ PQ $= a$; sarà NQ $=$ Ln $= \sqrt{2a^2}$; ed nK $= \dfrac{\sqrt{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}}{2}$; aS $=$ uK $=$ Oa $=$ OV $= \dfrac{a}{2}$

sarà ancora OP $=$ ON $=$ OL $=$ OB $= \dfrac{\sqrt{2a^2}}{2}$; ed LV $=$ LO $-$ OV $= \dfrac{\sqrt{2a^2}}{2} -$

$\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2a^2} - a}{2}$ sarà il cerchio il di cui diametro è NQ $= \dfrac{22}{7}\sqrt{2a^2} \times \dfrac{\sqrt{2a^2}}{4} =$

$\dfrac{11}{7}a^2$.

E l'Emisfero LBn $= \dfrac{11}{7}a^2 \times \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{2a^2}}{2} = \dfrac{22}{42}$

$\sqrt{2a^6} = \dfrac{11}{21}a^3\sqrt{2}$

Inoltre il cerchio, che ha per raggio Kn $=$

$\dfrac{22}{84} \times 4\,\overline{\text{Kn}}^2 = \dfrac{22}{7}\left(\dfrac{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{22}{14}$

$(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}) = \dfrac{11}{7}(2a^2 - a^2\sqrt{2})$

Le quattro superficie de' semisegmenti laterali

li NMPS, PnQK, QXRT, RLNI $= \frac{11}{7}(4a^2 - 2a^2\sqrt{2}) = \frac{22}{7}(2a^2 - a^2\sqrt{2})$;
E li quattro semisettori corrispondenti NMPSO, PnQKO; QXRTO, RLNIO $= \frac{11}{21}(2a^3\sqrt{2} - 2a^3) = \frac{22}{21}(a^3\sqrt{2} - a^3)$;
Il semicerchio PKQ $= \frac{11}{28}a^2$;
Ed il semicono PKQO $= \frac{11}{168}a^3$.
Onde li quattro semiconi corrispondenti agli semisetttori saranno $\frac{11}{42}a^3$;
E perciò la solidità de' quattro semisegmenti sarà $= \frac{22}{21}(a^3\sqrt{2} - a^3) - \frac{11}{42}a^3 = \frac{44a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$; Ma lo Emisfero LBn $= \frac{11}{21}a^3\sqrt{2}$; Dunque l' Emisfero LBn meno gli detti quattro semisegmenti, o sia l' anima della Volta, sarà $= \frac{11}{21}a^3\sqrt{2} - \frac{44a^3\sqrt{2} + 55a^3}{42} = \frac{55a^3 - 22a^3\sqrt{2}}{42}$.

Inoltre il parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza OB $= \overline{NP}^2 \times OB = \frac{a^2\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Ed il detto parallelepipedo, meno la detta anima di Volta, sarà $\frac{a^3\sqrt{2}}{2} - \frac{55a^3 + 22a^3\sqrt{2}}{42}$

$= \frac{21a^3\sqrt{2} - 55a^3 + 22a^3\sqrt{2}}{42} = \frac{43a^3}{\sqrt{}}$

$\frac{\sqrt{2} - 55a^3}{42}$. Onde il detto parallelepipedo, sta al solido parallelepipedo meno l'anima della Volta, o sia alla solidità della Volta a vela col reguglio di prima specie, come $\frac{a^3\sqrt{2}}{2} : \frac{43a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$, ovvero come $\frac{21a^3\sqrt{2}}{42} : \frac{43a^3\sqrt{2} - 55a^3}{42}$, oppure come $21a^3\sqrt{2} : 43a^3\sqrt{2} - 55a^3$, e dividendo tutti gli termini di detta ragione per a^3, si averà, che il parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di prima specie, sta alla solidità di detta Volta, come $21\sqrt{2} : 43\sqrt{2} - 55$, ovvero come 29. 694: 5. 802, oppure come 29694 : 5802, e riducendo la detta ragione a minimi termini; si averà, che il parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela, sferica, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967. Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela col reguglio di prima specie devesi.

I.Mol-

I. Moltiplicare la larghezza, per la lunghezza; e per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 4949, 967, ed il detto prodotto devesi trovare un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente il detto quarto proporzionale si unisca col prodotto della lunghezza, e larghezza, e grossezza alla cima, la somma sarà la solidità di detta Volta, in quelle parti cubiche, ch'è l' aliquota commune.

Sia data per esempio una Volta a vela sferica col reguglio, la larghezza della quale NP, sia 20, ed essendo sferica sarà PQ = 20. il sesto aS = 10; ed il reguglio By = $4\frac{1}{4}$; e la grossezza alla cima sia 1. Il prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la somma del sesto, e reguglio sarà 5700, che sarà il parallelepipedo circonscritto alla detta Volta. Indi dopo li due numeri costanti 4949, 967, ed il detto prodotto 5700, si trovi il quarto proporzionali, che sarà $1113\frac{3663}{4949}$, a questo vi si aggiunga il prodotto della lunghezza, e larghezza, per la grossezza della cima, che sarà 400; la somma $1513\frac{3663}{4949}$ sarà il valore della solidità di detta Volta. *Tav. II. Fig. 17.*

TEOREMA I.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla solidità di detta Volta nella ragione di 4949 : 967.

Tav. III. Fig. 22.

SI consideri la figura col segmento verticale, si averà, che lo semisferoide depresso sta alli quattro semisegmenti DSKM, NBQC, QTGO, GADg; come lo Emisfero alli quattro semisegmenti corrispondenti sferici (*a*), e convertendo, lo semisferoide, sta all' anima della Volta di seconda specie, come lo Emisfero, all' anima della Volta di prima specie, e permutando, lo semiferoide, sta all' Emisfero, come l' anima della Volta di seconda specie, all' anima della Volta sferica; Ma lo semisferoide, sta all' Emisfero, come il quadrato di AB, al quadrato fatto da ab (*b*), ovvero come il quadrato DQ, al quadrato ei; ed il quadrato DQ, sta al quadrato ei, come il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta di seconda specie, al parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica, perchè hanno eguali altezze; Dunque il parallelepipedo circonscitto all' anima della Volta

ta

(a) *Corol. 2. Teor. 3. Cap. 6.*
(b) *Teor. 4. Cap. 6.*

ta di seconda specie, sta al parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica, come l'anima della Volta di seconda specie, all' anima della Volta sferica, e permutando, e convertendo il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla solidità di detta Volta, come il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica, alla solidità di detta Volta; ma il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica sta, alla solidità di essa, come *4949 : 967* (*a*); Dunque il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta di seconda specie; sta alla solidità di essa, nella ragione di *4949 : 967*. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità della Volta a vela di seconda specie col reguglio, devesi fare la stessa operazione di quella detta nell' Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO II.

Si è dimostrato nell' Avvertimento II. Teor. IV. Cap. VI. che intersecando lo sferoide depresso per un piano, che passa per l'asse minore, dallo semisferoide colla intersezio-

(a) *Prob. precedente.*

ſezione dello enunciato parallelepipedo ſi averà la Volta a vela ſenza reguglio di terza ſpecie; così ora interſecandoſi lo ſteſſo sferoide per un piano che paſſa per l' aſſe minore al qual piano gli ſia perpendicolare l' aſſe maggiore; la mettà del parallelepipedo, il quale averà per altezza il ſemiaſſe maggiore taglierà dallo ſemisferoide la Volta a vela col reguglio di terza ſpecie, e per dimoſtrare che il parallelepipedo circonſcritto alla detta Volta, ſtia alla ſolidità di eſſa, nella ſteſſa ragione del parallelepipedo circonſcitto alla Volta sferica, alla ſua ſolidità, è neceſſario premettere il ſeguente.

L E M M A.

Tav. I. Fig. 5. Sia MTNV, un quadrato circonſcitto al cerchio AKBL, ed il quadrato dXDy, gli ſia inſcritto, ed al cerchio aIbP, gli ſia circonſcrirto il quadrato qr, ed inſcritto il quadrato hF; ſi prolunghino li due lati oppoſti de' due quadrati inſcritti ne' cerchi, fintatocchè incontrano gli altri lati de' quadrati circonſcritti a detti cerchi. Dico che il rettangolo Wm, ſta al rettangolo WD, come il rettangolo px, al rettangolo pF.

Nel triangolo DHC, la FE, è parallela a DC, Onde HD: HC = HF: HE (a); Ma

(a) *Corol.* 2. *prop.* 2. *lib.* 6.

Ma	HD = HB; ed HF = Hb;
Dunque	HB : HC = Hb : HE,
e dividendo	BC : HC = bE : HE,
e permutando	BC : bE = HC : HE;
ma	HC : HE = DC : FE;
dunque	BC : bE = DC : FE
ovvero come	DX : Fu;

Sicchè gli due rettangoli Xm, ux, saranno simili tra loro (*a*); e perciò il rettangolo Xm, starà al rettangolo ux, come $\overline{DX}^2$: $\overline{Fu}^2$ (*b*), ovvero come il rettangolo WD, al rettangolo pF, essendo questi metà de' quadrati fatti da DX, e Fu, e permutando il rettangolo Xm, sta al rettangolo WD, come il rettangolo ux, al rettangolo pF, e componendo il rettangolo Wm, sta al rettangolo WD, come il rettangolo px, al rettangolo pF. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il rettangolo Wm, sta al rettangolo WD, come il rettangolo px, al rettangolo pF, onde permutando, il rettangolo Wm, sta al rettangolo px, come il rettangolo WD, al rettangolo pF.

Teo-

(a) *Def. 1. lib. 6.*
(b) *Prop. 20. lib. 6.*

TEOREMA II.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta di terza specie, sta alla solidità di detta Volta come

4949 : 967.

Tav. III. Fig. 21. LO semisferoide, sta alli quattro semisegmenti, che il parallelepipedo mG, taglia dal detto semisferoide, come lo Emisfero, che ha per diametro l'asse maggiore, alli quattro semisegmenti, che il parallerepipedo iR, taglia dal detto Emisfero (*a*); Onde convertendo: lo semisferoide, sta allo semisferoide, meno li quattro detti semisegmenti sferoidici, o sia all' anima della Volta a vela col reguglio di terza specie, come lo Emisfero, all'anima della Volta a vela col reguglio di prima specie; e permutando, lo semisferoide, sta all' Emisfero, come l' anima della Volta di terza specie, all' anima della Volta sferica; Ma lo semisferoide sta all'Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come il quadrato dell' asse maggiore, al quadrato

Tav. IV. Fig. 32. dell' asse minore (*b*), ovvero come $\overline{mM}^2$: $\overline{iN}^2$ (*c*) oppure come il rettangolo mA, al

(a) Avvert. 2 Teor. 4. Cap. 6.
(b) Teor. 3. Cap. 6.
(c) Corol. 1. Teor. 3. Cap. 1.

al rettangolo ia, essendo questi mettà de' detti quadrati; ma il rettangolo mA, sta al rettangolo ia, come il rettangolo mB, al rettangolo ib *(a)*, ed il rettangolo mB, sta al rettangolo ib, come il parallelepipedo gB, al parallelepipedo fb, avendo una stessa altezza; Dunque il parallelepipedo gB, sta al parallelepipedo fb, come l' anima della Volta a vela col reguglio di terza specie, all'anima della Volta a vela sferica col reguglio, e permutando, e convertendo, il parallelepipedo gB, sta alla solidità della Volta a vela col reguglio di terza specie, come il parallelepipedo fb, alla solidità della Volta sferica; ma il parallelepipedo fb, sta alla solidità della Volta sferica, come 4949 : 967 *(b)*; Dunque il parallelepipedo gB, circonscritto all'anima della Volta a vela di terza specie col reguglio, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità di una Volta a vela col reguglio di terza specie, devesi fare la stessa operazione di quella descritta nell'Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

TEO-

(a) *Lemma precedente.*
(b) *Probl. Cap. 8.*

TEOREMA III.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di quarta specie, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967.

Tav. II. Fig. 23

SUpponganſi li parallelepipedi MO, iL, eretti ſopra il rettangolo Me, e ſopra il quadrato in, avere per altezza commune il ſemiaſſe QI, queſti taglieranno dallo ſemisferoide, e dall' Emisfero quattro ſemiſegmenti laterali; e comecchè queſti ſono proporzionali collo ſemisferoide, e coll' Emisfero, ſiccome ſi è detto nel Teorema VI. Capitolo VI., così convertendo le ragioni, ſi averà, che lo ſemisferoide, ſta all' Emisfero, che ha per diametro l'aſſe minore, come l' anima della Volta di quarta ſpecie, all' anima della Volta sferica. Ma lo ſemisferoide, ſta all' Emisfero, come il rettangolo MCeD, al quadrato iNnm (*a*), ovvero come il parallelepipedo, che ha per baſe il rettangolo Me, e per altezza il ſemiaſſe minore QI, al parallelepipedo, che ha per baſe il quadrato in, e per altezza la ſteſſa QI; Dunque permutando, il pa-

(a) *Corol. 4. Teor. 5. Cap. 6.*

parallelepipedo, che ha per base il rettangolo Me, e per altezza QI, o sia il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta di quarta specie, sta alla detta anima di Volta, come il parallelepipedo, che ha per base il quadrato in, e per altezza QI, o sia il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica, alla stessa anima di Volta, e convertendo, il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta di quarta specie, sta alla solidità di detta Volta, come il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica, alla solidità di essa; ma il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta a vela sferica col reguglio, sta alla solidità di essa come 4949 : 967 (*a*); Dunque il parallelepipedo circonscritto all'anima della Volta a vela col reguglio di quarta specie, sta alla solidità di essa Volta nella ragione di 4949 : 967. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità della Volta a vela col reguglio di quarta specie, devesi fare la stessa operazione di quella descritta nell' Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

Teo-

(a) *Probl. Cap.* 8.

TEOREMA IV.

Il parallelepipedo circonſcritto all' anima della Volta a vela col reguglio di quinta ſpecie, ſta alla ſolidità di detta Volta, nella ragione di

4949 : 967.

Tav. III. Fig. 24. SUppongaſi il parallelepipedo bQ, avere per altezza il ſemiaſſe maggiore dello sferoide lungo, ed il parallelepipedo ba, avere per altezza il ſemiaſſe minore dello ſteſſo sferoide e facendo lo ſteſſo raziocinio dell' Avvertimento II. Teorema VI. Cap. VI. Si averà, che il parallelepipedo circonſcritto all' anima della Volta di quinta ſpecie, ſta alla ſua ſolidità come il parallelepipedo circonſcritto all' ânima della Volta a vela sferica, alla di lei ſolidità, ma il parallelepipedo circonſcritto all' anima della Volta sferica, ſta alla ſolidità di eſſa come *4949* : *967* (*a*); Dunque il parallelepipedo circonſcritto all' anima della Volta a vela col reguglio di quinta ſpecie, ſta alla ſolidità di detta Volta, come *4949* : *967*. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AV-

(a) *Probl. Cap.* 8.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della solidità d'una Volta a vela col reguglio di quinta specie, devesi fare la stessa operazione detta nell'Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

TEOREMA V.

Il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla solidità di detta Volta nella ragione di 4949: 967.

SUppongasi il parallelepipedo EC, avere per altezza il semiasse minore LY, ed il parallelepipedo Tm, avere la stessa altezza, e siccome questo è circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio, così quello sarà circonscritto all'anima della Volta a vela col reguglio di sesta specie, e facendo il medesimo raziocinio detto nel Teor. VIII. Cap. VI. si averà che il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla sua solidità come, il parellelepipedo circonscritto all'anima della Volta sferica col reguglio, alla sua solidità; ma il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta sferica col reguglio, sta alla sua solidi- *Tav. III. Fig. 27.*

tà come 4949 : 967 (a): Dunque il parallelepipedo circonscritto all' anima della Volta col reguglio di sesta specie, sta alla solidità di detta Volta, come 4949 : 967. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di detta Volta a vela col reguglio di sesta specie, si deve fare la stessa operazione di quella descritta nell' Avvertimento del Problema di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO. II.

La detta Volta a vela col reguglio di sesta specie vien generata da sezioni fatte nello Ellittoide, siccome si è detto in quella senza reguglio nell' Avvertimento del Teor. VII. Cap. VI., e comecchè il detto Ellittoide puole avere infinite variazioni, a proporzione dell' Ellissi generatrici, e ciascuno di essi solidi è capace di due altre sezioni, cioè una che passi per l' asse medio, e gli sia perpendicolare l' asse maggiore, e l' altra per l' asse mininore, alla quale gli sia perpendicolare l' asse medio; così la descritta Volta a vela col re-

(a) *Probl. Cap.* 8.

reguglio di festa specie è capace d'infinite variazioni, a seconda della generazione del detto solido, e delle di lui sezioni, e tutte queste Volte saranno della stessa natura della diggià descritta. Sicchè dunque per avere il valore di qualunque Volta a vela col reguglio, e di qualunque specie essa sia, essendo data la lunghezza, la larghezza, il festo, il reguglio, e la grossezza alla cima, devesi.

I. Moltiplicare la larghezza, per la lunghezza, e per la somma del festo, e del reguglio, ed il prodotto si noti...

II. Dopo li due numeri costanti 4949, 967, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente il detto quarto proporzionale si unisca col prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza della cima, la somma sarà la solidità di detta Volta a vela col reguglio, in quelle parti cubiche, di cui è l'aliquota commune.

AVVERTIMENTO. III.

Oltre delle descritte Volte a vela col reguglio, ve ne può essere un'altra, la quale sarà formata sopra una pianta rettangolare, e sopra li quattro lati del rettangolo saranno eretti quattro semicerchi. Vien generata una tal Volta dall'intersezione de' piani di un parallelepipedo eretto sopra un rettangolo inscritto nel cerchio massimo di una sfera, ed abbia per altezza il raggio della sfera. Sia NPQR, un rettangolo inscritto nel cerchio LMnX, e sopra li quattro lati OP, PQ, QR, RN, si concepiscano innalzati quattro piani, questi taglieranno dall' Emisfero LBn, li quattro semisegmenti NMPS, PnQK, QXRT, RLNI, le basi de' quali saranno gli semicerchi, che saranno innalzati sopra li quattro lati del detto rettangolo, Il solido NSPKQTRIB, sarà l'anima della Volta a vela col reguglio della quale s'intende trovare una formola generale per avere il valore della sua solidità. Perciò sia

Tav. IV. Fig. 33.

$$NP = a;\ PQ = b;\ aS = \frac{1}{2}\,a = \frac{a}{2}$$

e sarà $uK = \frac{b}{2}$.

ed $NQ = Ln = \sqrt{a^2+b^2} = c$; ed $OL = \frac{c}{2}$

sarà $LV = un = On - Ou = \frac{c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c-a}{2}$,

ed $Ma = OM - Oa = \frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c-b}{2}$.

$nK = \frac{\sqrt{c^2 - ac}}{2}$; ed $MS = \frac{\sqrt{c^2 - bc}}{2}$

sarà

sarà il cerchio, che ha per raggio $nK = \frac{11}{14} \times$

$4\overline{nK}^2 = \frac{11}{14} (2c^2 - 2ac = \frac{11}{7} (c^2 - ac)$

Onde le due superficie de' semisegmenti PnQK, NLRI, saranno eguali ad $\frac{11}{7} (c^2 - ac)$ (a)

E li due semisettori corrispondenti saranno $= \frac{11}{42} (c^3 - ac^2)$. Il cerchio, che ha per diametro PQ, sarà $= \frac{11}{14} b^2$, e saranno gli due semiconi PKQO, NIRO $= \frac{11}{14} b^2 \times \frac{1}{3} \frac{a}{2}$

$= \frac{11}{84} b^2 a$

Onde saranno li due semisegmenti PnQK, NLRI $= \frac{11}{42} (c^3 - ac^2) - \frac{11}{84} b^2 a = A$.

Inoltre il cerchio, che ha per raggio MS, sarà $\frac{11}{14} \times 4\overline{MS}^2 = \frac{11}{14} (2c^2 - 2bc) \frac{11}{7} (c^2 - bc)$

e saranno le superficie de' due semisegmenti NMPS, RXQT $= \frac{11}{7} (c^2 - bc)$

e li due semisettori corrispondenti saranno $=$

$\frac{11}{7} (c^2 - bc) \frac{1}{3} \frac{c}{2} = \frac{11}{42} (c^3 - bc^2)$.

Il cerchio, che ha per diametro NP, sarà $= \frac{11}{14} a^2$; e saranno li due semiconi NSPO, QTRO $= \frac{11}{14} a^2 \times \frac{1}{3} \frac{b}{2} = \frac{11}{84} a^2 b$

(a) *Prop. 62. de Sphæ. et Cyl. Caravelli.*

onde ſaranno li due ſemiſegmenti NMPS, QTRX $= \frac{11}{14}(c^3 - bc^2) - \frac{11}{84}a^2b = B$

Sicchè dunque la ſolidità de' quattro deſcritti ſemiſegmenti ſarà

$$A + B = \frac{11}{42}(c^3 - ac^2) + \frac{11}{42}(c^3 - bc^2) - \frac{11}{84}b^2a - \frac{11}{84}a^2b = \frac{22}{84}(c^3 - ac^2) + \frac{22}{84}(c^3 - bc^2) - \frac{11}{84}b^2a - \frac{11}{84}a^2b = \frac{44c^3 - 22ac^2 - 22bc^2 - 11b^2a - 11a^2b}{84}.$$

L'Emisfero LBn $= \frac{11}{21}c^2 \times \frac{c}{2} = \frac{11}{42}c^3$

Onde l' anima della Volta diggià deſcritta, cioè NSPKQTRIB

$$= \frac{11}{42}c^3 - \frac{44c^3 + 22ac^2 + 22bc^2 + 11b^2a + 11a^2b}{84} = \frac{22c^3 - 44c^3 + 22ac^2 + 22bc^2 + 11b^2a + 11a^2b}{84} = \frac{2ac^2 + 22bc^2 + 11b^2a + 11a^2b - 22c^3}{84} = \frac{(22c^2 + 11ab)(a + b) - 22c^3}{84} = \frac{11}{84}(2c^2 + ab)(a + b) - \frac{11}{42}c^3.$$

Sicchè dunque per avere il valore della ſolidità della deſcritta Volta a vela col reguglio, eſſendo data la lunghezza, la larghezza la diagonale, e la groſſezza alla cima, deveſi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezghezza, e per la somma del sesto maggiore, reguglio, e grossezza alla cima, ed il prodotto si noti.

II. Si unisca il duplo de' quadrati fatti sopra la langhezza e larghezza, con il prodotto della lunghezza per la larghezza: e la somma si noti.

III. Si moltiplichi la notata somma, per la somma della lunghezza, e larghezza, ed il prodotto si noti.

IV. Dopo li due numeri costanti 84, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Dopo li due numeri costanti 42, 11, ed il cubo fatto dalla diagonale, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

VI. Indi dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo si noti.

VII. Finalmente dal primo prodotto notato nel n. I. se ne tolga il detto residuo, e lo eccesso sarà la solidità della descritta Volta a vela.

Sia, per esempio, la lunghezza 20. la larghezza 15, la diagonale sarà 25, e sia grossa alla cima 1, il sesto maggiore sarà 10. il primo prodotto sarà 4050; La somma detta nel n. II. sarà 1550. Il prodottto notato nel n. I I. sarà 54250. Il primo quarto proportionale sarà $7104\frac{1}{6}$. Inoltre il cubo fatto dalla diagonale si è 15625, ed il secondo quarto proporzionale sarà $4092\frac{11}{42}$. Lo eccesso de' detti due quarti proporzionali sarà $3011\frac{19}{21}$, questo sarà l'anima di detta volta, che detraendolo dal primo prodotto 4050, il residuo $1038\frac{2}{21}$, sarà il valore della solidità della descritta Volta a vela col reguglio.

CAP.

CAP. IX.

Della superficie delle varie specie di Volta a vela col reguglio.

AVVERTIMENTO IV.

Essendo eguale il numero delle specie delle Volte a vela col reguglio di quelle senza reguglio, ci serviremo perciò delle stesse figure, supponendo sempre esservi il segmento verticale di dette Volte.

PROBLEMA I.

Trovare la ragion che passa tra la superficie laterale di un parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza con la Volta a vela sferica col reguglio, e la superficie di detta Volta.

Sia l' anima della Volta sferica col reguglio NPQRB, trovare la ragion che passa tra la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza OB, e la snperficie di della Volta. *Tav. II. Fig. 17.*

Sia NP = PQ = a; sarà NQ = Ln = $\sqrt{2a^2}$;

aS

$aS = uK = Oa = Ou = \frac{a}{2}$;

sarà ancora $OP = ON = OL = \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$,

ed $LV = un = On - Ou = \frac{\sqrt{2a^2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2a^2} - a}{2}$,

ed $nK = \frac{\sqrt{4a^2 - 2a^2\sqrt{2}}}{2}$.

Onde la superficie dello Emisfero sarà $= \frac{22}{7}$ $\sqrt{2a^2} \times \frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{22}{7} a^2$.

Le superficie de' quattro semisegmenti laterali NMPS, PnQK, QXRT, RLNI, siccome si è detto nel Probl. Cap. VI. $= \frac{22}{7}(2a^2 - a^2\sqrt{2})$ Sicchè la superficie dell' Emisfero tronco, o sia dell' Emisfero dedottine le superficie de' detti quattro semisegmenti $= \frac{22}{7}a^2 - \frac{22}{7}(2a^2 + a^2\sqrt{2}) = \frac{22a^2\sqrt{2} - 32a^2}{7}$

Ma la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per altezza $OB = 4a \times \frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{4a^2\sqrt{2}}{2}$;

Sicchè dunque la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato NQ, e per e per altezza OB sta alla superficie della Volta sferica col reguglio, come $\frac{4a^2\sqrt{2}}{2}$: $\frac{22a^2\sqrt{2}-22a^2}{7}$ ovvero come $28a^2\sqrt{2}$: $44a^2\sqrt{2}-44a^2$; e dividendo tutti gli termini per a^2; si averà che la superficie laterale del parallelepipedo che ha la medesima base, e la stessa altezza con la Volta a vela sferica col reguglio, stia alla superficie di detta Volta come $28\sqrt{2}$:. $44\sqrt{2}-44$, ovvero come 39. 592: 18. 216, oppure come 39592 : 18216, e riducendola a minimi termini sarà di 4949: 2277. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie d'una Volta sferica col regugio, essendo noto il lato del quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, e l'altezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare il perimetro del quadrato, sopra del quale è formata la detta Volta, per l'altezza di essa, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, il quale sarà il valore della superficie di detta Volta.

Sia, per esempio, una Volta a vela sferica ca col reguglio, la di cui larghezza NP = 10, ed essendo sferica sarà PQ = 10; ed aS = 5; ed OB = $7\frac{7}{100}$; la somma de' quattro lati NP, PQ, QR, RN, sarà 40, la quale moltiplicata per OB, il prodotto sarà $282\frac{4}{5}$. Indi trovisi dopo li due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto $282\frac{4}{5}$ il quarto proporzionale $130\frac{11}{100}$ questo sarà il valore della superficie nella Volta a vela sferica col reguglio.

PROBLEMA II.

Trovare la ragion, che passa tra il quadrato NQ, che è base della Volta a vela sferica col reguglio, e la soperficie di detta Volta.

Fig. 17. Si è detto nel problema precedente, che la superficie della Volta a vela sferica col reguglio, o sia la superficie dell' Emisfero tronco sia $\frac{22a^2\sqrt{2}-22a^2}{7}$.

Ma la superficie del quadrato NQ = a^2 Dunque la supeficie del quadrato NQ, sta alla superficie della Volta sferica col reguglio nella ragione di $a^2 : \frac{22a^2\sqrt{2}-22a^2}{7}$, ovvero come $7a^2 : 22a^2\sqrt{2}-22a^2$; e dividendo tutti gli

gli termini per a^2; Si averà, che il quadrato NQ, sta alla superficie della Volta a vela sferica col reguglio, come $7 : 22\sqrt{2}-22$, ovvero vome $7 : 9.108$, oppure $7000 : 9108$, che cale a dire come $1750 : 2277$. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela sferica col reguglio, si puole usare questa altra regola, cioè.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1750, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della detta superficie, siccome infatti adattando la detta operazione nel caso proposto nell'Avvertimento del Problema I. si averà lo stesso valore per la superficie di detta Volta.

TEOREMA I.

La superficie laterale di un parallelepipedo, che ha la stessa base, e la medesima altezza con la Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla superficie, di detta Volta come 4949 : 2277.

Tav. III. Fig. 22. SUpponghasi il parallelepipedo DP, avere per altezza il semiasse minore HI, questo taglierà solamente gli semisegmenti GADg, DSKM, KBQC, QTGO; così ancora suppongasi del parallelepipedo eR, il quale si farà circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio. La superficie dello semisferoide depresso, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore come l' asse maggiore, all' asse minore (*a*); ovvero come DH : eH, oppure come DL : eN (*b*); Ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dello Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come le superficie de' semisegmenti sferoidici GADg, DSKM, KBQC, QTGO, alle superficie de' semisegmenti sferici corrispondenti, (*c*), e permutando, e conver-

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 7.
(b) *Schol.* 1. *Teor.* 2. *lib.* 6.
(c) *Corol.* 4. *Teor.* 3. *Cap.* 7.

vertendo, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dello detto semisferoide meno le superficie de' detti semisegmenti, cioè alla superficie della Volta a vela col reguglio di seconda specie, come la superficie dell' Emisfero, alla superficie della Volta a vela sferica; Dunque permutando, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l'asse minore, come la superficie della Volta a vela col reguglio di seconda specie, alla superficie della Volta a vela col reguglio di prima specie: Ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie del detto Emisfero, come DL : eN, ovvero come la somma de' quattro lati DK, KQ, QG, GD, alla somma de' quattro lati eh, hi, il, le, oppure come la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base DQ, e per altezza HI, alla superficie laterale del parallepipedo, che ha per base il quadrato ei, e per altezza HI, avendo eguali altezze: Dunque permutando, la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla superficie di detta Volta, come la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica col reguglio, alla superficie di detta Volta, ma la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta sferica col reguglio, sta alla superficie di detta Volta,

co-

come 4949 : 2277. (*a*); Dunque la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di seconda specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2277. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore d' una Volta a vela sferica col reguglio di seconda specie, essendo cognito il lato del quadrato, sopra del quale essa è formata, ed essendo noto il sesto, ed il reguglio, devesi.

I. Moltiplicare la somma de' quattro lati del quadrato, che gli serve di base, per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 4949 : 2277, ed il detto prodotto trovasi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta Volta.

TEO-

(a) *Probl.* 1. *Cap.* 9.

TEOREMA II.

La superficie della base della Volta a vela col reguglio di terza specie, sta alla superficie di detta Volta: come 1750 : 2277.

SUppongasi non tagliati li segmenti verticali tanto nello semisferoide, quanto nello Emisfero. Per lo Teorema IV. Cap. VII. la superficie dello semisferoide, sta alle superficie de' semisegmenti tagliati da' piani eretti sopra gli lati del rettangolo mMCg, li quali siano perpendicolari al detto rettangolo, come la superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, alle superficie de' semisegmenti, sferici corrispondenti; e convertendo, e permutando, la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come la superficie del detto semisferoide meno le superficie de' detti semisegmenti, o sia la supeficie della Volta a vela col reguglio di terza specie, alla superficie di detto Emisfero meno le superficie de' semisegmenti sferici, o sia la superficie della Volta a vela sferica; Ma la superficie dello semisferoide, sta alla superficie dello Emisfero, che ha per diametro l' asse minore come l' asse maggiore, al- *Tav. III. Fig. 21.*

Q l' as-l'asse minore (*a*), ovvero come mM, ad iN (*b*), oppure come il rettangolo mMCg, al quadrato iNFf, dunque il rettangolo mC, sta al quadrato iF, come la superficie della Volta a vela col reguglio di terza specie alla superficie della Volta a vela sferica; e permutando il rettangolo mC, che è base della Volta a vela col reguglio di terza specie, sta alla superficie di detta Volta, come il quadrato iF, sta alla superficie della Volta a vela sferica: Ma il quadrato iF, sta alla superficie della Volta a vela sferica, come 1750 : 2277 (*c*) : Dunque la base della Volta a vela col reguglio di terza specie, sta alla superficie di detta Volta anche come 1750: 2277. Ciocchè si dovea dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della superficie di una Volta a vela col reguglio di terza specie essendo cognita la lunghezza, e la larghezza devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, e la larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1750, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 7.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Probl.* 2. *Cap.* 9.

to proporzionale, questo sarà il valore della superficie della detta Volta.

TEOREMA III.

La superficie della base della Volta a vela col reguglio di quarta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 1750. 2277.

LA dimostrazione è la stessa del Teorema precedente adattandola alla figura 23.

AVVERTIMENTO

Per avere il valore della superficie della Volta a vela col reguglio di quarta specie, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza per la larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1750,2277. ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della detta Volta.

TEOREMA IV.

La superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2277.

Tav. III. Fig. 24. SUpponghasi non tagliati gli segmenti verticali tanto nello sferoide, quanto nell' Emisfero, e concepiscansi li parallelepipedi innalzati sopra il quadrato bf, avere per altezze, quelle istesse dello semisferoide, e dell' Emisfero; quello che ha per altezza, l' altezza medesima dello semisferoide diviso per l' asse minore sarà circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, e quello, che ha per altezza, l' altezza medesima dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, sarà circonscritto alla Volta a vela sferica col reguglio. Onde facendo lo stesso raziocinio di quello nel Teorema I. del corrente Capitolo, si averà, che la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di quinta specie, sta alla superficie di detta Volta, come la superficie del parallelepipedo cisconscritto alla Volta a vela sferica col reguglio, alla superficie di detta Volta: Ma la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Vol-

Volta a vela sferica, ſta alla ſuperficie di detta Volta, come 4949 : 2277. (a): Dunque la ſuperficie laterale del parallelepipedo circonſcritto alla Volta a vela col reguglio di quinta ſpecie, ſta alla ſuperficie di detta Volta, come 4949 : 2277. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè per avere il valore di una Volta a vela di quinta ſpecie col reguglio, eſſendo noto il lato del quadrato, ſopra del quale eſſa è formata, ed eſſendo cognito il ſeſto, ed il reguglio, deveſi.

I. Moltiplicare la ſomma de' quatto lati di eſſo quadrato, ch'è baſe di detta Volta, per la ſomma del ſeſto, e del reguglio, ed il prodotto ſi noti.

II. Dopo li due numeri coſtanti 4949, 2277, ed il detto prodotto ſi trovi un quarto proporzionale, queſto ſarà il valore di detta Volta.

(a) *Probl.* 1. *Cap.* 9.

TEOREMA V.

La superficie laterale di un parallelepipedo circoscritto ad una Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla superficie di detta Volta, nella ragione di

4949 : 2277.

Tav. III. Fig. 27. SUpponganfi gli parallelepipedi EC, TM, avere per altezza comune la YL, ch' è femiaffe minore. La fuperficie dello femiellittoide, fta alla fuperficie dell' Emisfero, come le fuperficie de' femifegmenti GgEM, EBFN, FhHO, HAGP, alle fuperficie de' femifegmenti sferici corrifpondenti (*a*), e permutando, e convertendo, la fuperficie dello femiellittoide, fta alla fuperficie del detto femiellittoide meno le fuperficie de' detti femifegmenti Ellittoidici, o fia la fuperficie della Volta a vela col reguglio di fefta fpecie, come la fuperficie dell' Emisfero, alla fuperficie della Volta a vela sferica col reguglio; e permutando, la fuperficie dello femillittoide, fta alla fuperficie dell' Emisfero, che ha per diametro l' affe minore, come la fuperficie della Volta a vela di fefta fpecie, alla fuperficie della Volta a vela sferica: Ma la fuperficie dello femiellittoide, fta alla fuperficie dell'

(a) *Corol.* 3. *Teor.* 10. *Cap.* 7.

dell' Emisfero, che ha per diametro l' asse minore, come la somma dell' asse maggiore, e dell' asse medio, al duplo asse minore, (*a*), ovvero come la somma di GE, EF, alla somma QT, TS: Dunque la somma di GE, EF, o sia il perimetro del rettangolo EH, sta al perimetro del quadrato TR, come la superficie della Volta a vela di sesta specie, alla superficie della Volta sferica. Ma il perimetro del rettangolo EH, sta al perimetro del quadrato TR, come la superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il rettangolo EH, e per altezza LY, alla superficie laterale del parallelepipedo, che ha per base il quadrato TR, e per altezza la stessa LY, e questi sono li parallelepipedi circonscritti alla Volta di sesta specie, ed alla sferica: Dunque la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela di sesta specie, sta alla superficie laterale di un parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica; come la superficie di detta Volta a vela di sesta specie, alla superficie della Volta a vela sferica, e permutando la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela di sesta specie, sta alla superficie di detta Volta, come la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica,

 alla

(a) *Teor. II. Cap. 7.*

alla superficie di essa Volta a vela: Ma la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela sferica, sta alla superficie di detta Volta, come 4949: 2277. (a). Dunque la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto alla Volta a vela col reguglio di sesta specie, sta alla superficie di detta Volta, come 4949 : 2277. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè per avere il valore della superficie di una Volta a vela col reguglio di sesta specie, essendo cognita la lunghezza, la larghezza, il sesto, ed il reguglio devesi.

I. Moltiplicare la somma della lunghezza, e larghezza, per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale; questo sarà il valore della superficie della Volta di sesta specie.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualunque specie di Volta a vela col

(a) *Probl.* 1. *Cap.* 9.

col reguglio, è necessario prima conoscere di quale specie ella sia; a due classe si son ridotte in questo Capitolo; cioè se una tale Volta è di prima, seconda, quinta, o sesta specie, vale a dire che sia formata sopra un quadrato, e sopra gli lati di esso vi siano eretti semicerchi, o semiellissi, ovvero sia formata sopra un rettangolo, e sopra gli lati vi siano erette semiellissi, e queste sono abbracciate dalla prima classe, e per avere il valore della superficie di ciascuna di esse, devesi.

I. Moltiplicare il perimetro della base della Volta, per la somma del sesto, e reguglio, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 4949, 2277, ed il detto prodotto, trovisi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta, che si va cercando siccome si è detto nell' Avvert. Probl. I.; Avvertim. Teor. I.; Avvertim. Teor. IV., Avvert. Teor. V. di questo Capitolo.

La seconda Classe poi abbraccia quelle Volte, che sono formate sopra rettangoli, e sopra due de' lati del detto rettangolo vi siano eretti due semicerchi, e sopra gli altri due lati, due semiellissi; per averne il valore della superficie di ciascuna di esse, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1750,

2277,

2277, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta, che si và cercando, siccome si è detto negli Avvertimenti de Teor. II., e III., di questo Capitolo.

AVVERTIMENTO III.

Eccetto delle descritte Volte a vela col reguglio, se ne puole formare un'altra, siccome si è detto nell' Avvert. III. Teor. V. Capitolo VIII. nel quale si è fatto vedere come si trovi la sua solidità: Ora è necessario per terminar questo Capitolo trovare una formola generale per avere il valore della superficie di essa.

Tav. IV. *Fig.* 33. Facciasi uso della stessa preparazione fatta in detto Avvertimento; saranno le superficie de' semisegmenti NMPS, QXRT $= \frac{11}{7}(c^2 - bc)$

E le superficie de' due semisegmenti PnQK, KLRI $= \frac{11}{7}(c^2 - ac)$

Onde le superficie de' quattro descritti semisegmenti saranno $= \frac{11}{7}(c^2 - bc) + \frac{11}{7}(c^2 - ac)$
$= \frac{22}{7}c^2 - \frac{11}{7}bc - \frac{11}{7}ac$;

Ma la superficie dello Emisfero è uguale ad $\frac{11}{7}c^2$;

Dunque la superficie della Volta a vela della natura detta nel detto Avvert. III. Teor. V. Capitolo VIII. sarà $= \frac{11}{7}c^2 - \frac{22}{7}c^2 + \frac{11}{7}bc +$

$\frac{11}{7}$

$\frac{11}{7} ac = \frac{11}{7} c(a+b) - \frac{11}{7} c^2$.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una tal sorte di Volta a vela col reguglio, devesi.

I. Moltiplicare la diagonale del rettangolo sopra del quale è formata la detta Volta, per il numero costante 11, ed il prodotto si noti.

II. Dopo il numero costante 7, il detto prodotto, e la somma della lunghezza, e larghezza si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo li due numeri costanti 7, 11, ed il quadrato della detta diagonale, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo sarà il valore della superficie di detta Volta. Siccome infatti facendo una tale operazione nel proposto esempio nell' Avvert. III. Teor. V. Cap. VIII., la superficie sarà $392\frac{43}{50}$:

CAP.

CAP. X.

Della solidità delle varie specie di Volta a Crociera senza reguglio.

DEFINIZIONI.

Tav. IV. Fig. 34. I. V*Olta a crociera* è quel solido, che vien sostenuto sopra quattro archi, e diagonalmente vi sono li spigoli, e copre una pianta quadrangolare.

II. Se dalle cime di due archi opposti si tiri una retta, se questa si combacerà col curvo di detto solido, allora si dirà *Volta a crociera senza reguglio*; Ma se la interfezione de' spigoli oltre passarà la detta retta, si chiamarà *Volta a crociera col reguglio*.

AVVERTIMENTO.

Vien generato un tal solido dall' incontro di due parallelepipedi cilindri cavi, li quali con la di loro interna cavità formano la superficie curva del detto solido, e della detta Volta a crociera. Sia il parallelepipedo semicilindro Cavo LAMBERTI, il quale s' interfechi coll' altro semicilindro cavo MHTPBLQR, il solido LAMHTIRQLN, sarà la solidità della detta Volta a crociera.

Dalla generazione di detta Volta a crociera ra ſenza reguglio, ſe ne deduce, che di tre ſpecie puole eſſere una tale Volta. I. Quando gli archi formati ſopra li quattro lati del quadrangolo ſi fanno ſemicircolari, ed in queſto caſo il quadrangolo ſarà equilatero, e li due ſemicilindri, che s'interſecano, ſono ſemicircolari. II. Quando gli archi formati ſopra due lati ſi fanno ſemicircolari, e gli altri due ſaranno ſemiellittici, ed allora il quadrangolo non ſarà equilatero, e li due ſemicilindri, uno ſarà ſemicircolare, e l'altro ſemiellittico. III. Finalmente quando li quattro archi, che ſoſtengono la Volta ſi fanno ſemiellittici, ed allora il quadrangolo puole eſſere equilatero, e non equilatero, e li due ſemicilindri ſaranno ſemiellittici.

TEOREMA.

Il parallelepipedo circonſcritto all'anima di qualunque ſpecie di Volta a crociera ſenza reguglio, ſta alla ſolidità di detta Volta, come 21 : 2.

SIa il parallelepipedo ſemicilindro cavo LAMBERTI, interſecato col parallelepipedo ſemicilindro cavo MHTPBLQR. Dico, che il parallepipedo LP, ſtia alla ſolidità della Volta a crociera, come 21 : 2. *Tav.* IV. *Fig.* 34.

Il parallelepipedo LP, ſta al ſemicilindro

LA-

LAMTIR, come 14 : 11 (a), e lo ſteſſo parallelepipedo LP, ſta al ſemicilindro MHTRQL, come 14 : 11 : Onde il parallelepipedo LP, ſta alli detti due ſemicilindri, come 14 : 22. Ma il ſemipoliedro LMTRN, è, $\frac{2}{3}$ del parallelepipedo LP (b), di qualunque natura ſia; e da' detti due ſemicilindri deducendone il detto ſemipoliedro, il quale ſarà $9\frac{1}{3}$, eſſendo commune all' uno, ed all' altro ſemicilindro. Dunque ſi averà il parallelepipedo LP, alli detti due ſemicilindri meno il detto ſemipoliedro, o ſia all' anima della Volta a crociera ſenza reguglio, come 14 : $12\frac{2}{3}$, ovvero come 42 : 38, oppure come 21 : 19; Sicchè convertendo, il parallepipedo circonſcritto all' anima della Volta a crociera, ſta alla ſolidità di detta Volta, come 21 : 2. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della ſolidità di qualunque Volta a crociera ſenza reguglio di qualunque ſpecie ella ſia, eſſendo nota la lunghezza, la larghezza, il ſeſto, e la groſſezza alla cima, deveſi.

I. Moltiplicare la lunghezza per la larghez-

(a) *Teor.* 1. *Cap.* 1.
(b) *Avvert.* 3. *Teor.* 9. *Cap.* 3.

ghezza, e per il sesto, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 21, 2, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Si unisca al detto quarto proporzionale, il prodotto della lunghezza, per la larghezza, e per la grossezza della cima, la somma sarà il valore della solidità di detta Volta a crociera.

Sia, per esempio, la lunghezza MT, di una Volta a crociera $=$ 20; la larghezza LM $=$ 18; il sesto AE $=$ HG $=$ 6; e sia grossa alla cima 1. Il parallelepipedo LP, sarà 2160, ed il quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 21, 2, ed il prodotto 2160, sarà $205\frac{5}{7}$, al quale aggiuntovi il solido parallelepipedo, che ha per base il rettangolo EP, e per altezza la grossezza della cima, il quale sarà 360, la somma $565\frac{5}{7}$, sarà il valore della solidità di detta Volta a crociera data.

CA-

CAP. XI.

Della superficie delle varie specie di Volta a crociera senza reguglio.

DEFINIZIONE.

PEr superficie di Volta a crociera senza reguglio, s'intende la superficie convessa di due qualsivogliano semicilindri, che s'incrocicchiano: Siano gli due semicilindri LAMTIR, MHTRQL, incrocicchiati, la superficie della detta Volta a crociera, sarà la somma delle superficie de' quattro triangoli cilindrici LAMN, MHTN, TIRN, RQLN; vale a dire, che la superficie della Volta a crociera è uguale alla somma delle superficie de' semicilindri, che la formano, meno la superficie del semipoliedro LMTRN.

PRO-

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera di prima specie cioè che abbia li quattro archi, che la sostengono semicircolari.

Sia MT $=$ LM $= a$; AE $=$ HG $= \frac{a}{2}$ Tav. IV. Fig. 34.
la superficie del semicilindro LAMTIR, sarà $= \frac{11}{14} (2a)\, a\, (a) = \frac{11}{7}\, a^2 = A$
E la superficie del semicilindro MHTRQL; essendo eguale a quella di LAMTIR, sarà ancora $= \frac{11}{7}\, a^2 = B$
La superficie la semipoliedro LMTRN, sarà $2a^2$ (b) $= C$
Onde la superficie della Volta a crociera senza reguglio di prima specie, sarà per la definizione precedente $A+B-C = \frac{22}{7}a^2 - 2a^2 = \frac{22}{7}\, a^2 - \frac{14}{7}\, a^2 = \frac{8}{7}\, a^2$. Ciocchè si andava cercando.

(a) *Teor. 1. Cap. 2.*
(b) *Corol. 4. Teor. 2. Cap. 3.*

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della ſuperficie di una Volta a crociera ſenza reguglio di prima ſpecie, cioè che ſia formata ſopra una pianta quadrata, e gli archi che la ſoſtengono ſiano ſemicircolari, deveſi.

I. Moltiplicare uno de' ſuoi lati per ſe medeſimo, ed il propotto ſi noti.

II. Dopo li due numeri coſtanti 7, 8, ed il detto prodotto, ſi trovi un quarto proporzionale, e queſto ſarà il valore della ſuperficie di una tale Volta.

Sia, per eſempio, MT = LM = 20, ſarà AE = HG = 10; il quadrato MTRL, ſarà 400; Indi facciaſi, come 7, ad 8, così 400. al quarto proporzionale $457\frac{1}{7}$, e queſto ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta a crociera di prima ſpecie ſenza reguglio.

PRO.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di seconda specie; cioè, che abbia gli archi che la sostengono due semicircolari, e due semiellittici.

Sia LM $= a$; MT $= b$; ed essendo l'arco LAM, semicircolare sarà AE $=$ HG $\frac{a}{2}$. e sia la corda HM, del semiarco HM, eguale a c. (Tav. IV. Fig. 34.)

La superficie del semicilindro LMTIR $= \frac{22}{14}(2a)b = \frac{11}{7}ab =$ A (a)

La superficie del semicilindro Ellittico MHT RQL $= \frac{3141}{2828}(2c)a = \frac{3141}{1414}ac =$ B (b)

La superficie del semipoliedro LMTRN $= (2a+2b)\frac{a}{2} = a^2+ab =$ C (c)

Onde la superficie di detta Volta secondo la definizione di questo Capitolo sarà $\frac{A+B-C}{R\ \ 2} = \frac{11}{7}$

(a) *Avvert.* 1. *Teor.* 1. *Cap.* 2.
(b) *Avvert.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 2.
(c) *Avvert.* 3. *Teore.* 9. *Cap.* 3.

$= \frac{11}{7} ab + \frac{3141}{1414} ac - a^2 - ab = \frac{4}{7} ab + \frac{3141}{1414} ac - a^2$.

Ciocchè ſi andava cercando,

AVVERTIMENTO.

Per avere il valore della ſuperficie di una Volta a crociera ſenza reguglio di ſeconda ſpecie, cioè che ſia formata ſopra una pianta rettangolare, e ſopra due lati di eſſi vi ſiano eretti due ſemicerchi, e ſopra gli altri due lati due ſemiellifſi deveſi.

I. Dopo li due numeri coſtanti 7, 4, ed il prodotto della lunghezza per la larghezza, trovare un quarto proporzionale, e ſi noti.

II. Dopo li due numeri coſtanti 1414, 3141, ed il prodotto del diametro del ſemicerchio per la corda del ſemiarco Ellittico, ſi trovi un altro quarto proporzionale, e ſi noti.

III. Finalmente dalla ſomma de' due deſcritti quarti proporzionali, ſe ne tolga il quadrato formato ſopra il diametro del ſemicerchio, ed il reſiduo ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta.

Sia, per eſempio, $a = 8$; $b = 6$; ſarà la corda del ſemiarco Ellittico, ch'è $c = 5$; poichè AE = GH, ſarà 4, e GM = 3; ſi facci come 7, a 4, così il prodotto della lunghezza per la larghezza, ch'è 48, al quarto proporzionale $27\frac{3}{7}$, e ſi noti. Indi dopo li due nu-

numeri costanti 1414, 3141, ed il prodotto del diametro del semicerchio, per la corda del semiarco Ellittico, ch' è 40, si trovi il quartò proporzionale $88\frac{604}{707}$. Si uniscano li quarti proporzionali, e dalla loro somma $116\frac{208}{707}$ se ne tolga il quadrato del detto diametro, ch' è 64, il residuo $52\frac{200}{707}$, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera di terza specie.

PROBLEMA III.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di terza specie; cioè, che sia formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono siano semielittici.

Sia LM $= a$; MT $= b$; e sia HM $= c$ ed AM $= d$; Così ancora AE $=$ HG $= e$ Tav. IV. Fig. 34.
La superficie del semicilindro Ellittico LAMTIR $= \frac{3141}{2828}(2d)b = \frac{3141}{1414}db =$ A (a)
La superficie del semicilindro MHTRQL $= \frac{3141}{2828}(2c)a = \frac{3141}{1414}ac =$ B

(a) *Avvert. 1. Teor. 3. Cap. 2.*

La superficie del semipoliedro LMTRN $= (2a + 2b)e = 2ae + 2be = C$ (a).
Onde la superficie di detta Volta secondo la definizione di detto Capitolo sarà $A + B - C = \frac{3141}{1414} db + \frac{3141}{1414} ac - 2ae - 2be = \frac{3141}{1414} db + \frac{3141}{1414} ac - 2e(a+b)$. Ciocchè si dovea trovare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della superficie di una Volta a crociera senza reguglio di terza specie, la quale sarà formata sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono siano semiellittici, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, e le corde delle mettà degli archi innalzati sopra la lunghezza, e larghezza, devesi.

I. Dopo li due numeri costanti 1414, 3141. e la somma de' due prodotti, uno fatto dalla lunghezza per la corda della mettà dell'arco innalzato sopra la larghezza, e l'altro fatto dalla larghezza per la corda della mettà dell'arco innalzato sopra la lunghezza, trovasi un quarto proporzionale e si noti.

II. Dal descritto quarto proporzionale se ne tolga il prodotto del duplo sesto, per la somma della lunghezza, e larghezza, il residuo sarà il valore della superficie di detta Vol-

(a) *Avvert.* 3. *Teore.* 9. *Cap.* 3.

Volta a crociera senza reguglio di terza specie.

Sia, per esempio, la lunghezza $b = 12\frac{2}{3}$; la larghezza $a = 8$; il sesto $e = 3$; la suttesa d, sarà 5; e la suttesa c, presso a poco sarà 7. Il prodotto della lunghezza per la sottesa della mettà dell' arco innalzato sopra la larghezza, sarà $63\frac{1}{3}$; ed il prodotto della larghezza per la suttesa dell' arco innalzato sopra la lunghezza sarà 56, la di loro somma sarà $119\frac{1}{3}$. Trovisi un quarto proporzionale dopo li due numeri costanti 1414, 3141, e la detta somma $119\frac{1}{3}$, che sarà $265\frac{58}{707}$, da questo se ne tolga il prodotto del duplo sesto, per la somma della lunghezza, che sarà 124; il residuo $141\frac{58}{707}$, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera di terza specie.

AVVERTIMENTO II.

Se la lunghezza, si farà eguale alla larghezza di modo tale che la detta Volta coprirà un edificio di pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono anche saranno semiellittici, in tal caso divenendo $a = b$; e $c = d$; la equazione del Problema precedente si ridurrà a $\frac{3141}{707} ac - 4ae$, e per avere il valore della superficie di una tale Volta devesi,

I. Dodo li due numeri costanti 707, 3141,

 ed

ed il prodotto del lato del quadrato, ſopra del quale è formata la detta Volta, per la ſutteſa della mettà di uno de' quattro archi, che la ſoſtengono, trovare un quarto proporzionale, e ſi noti.

II. Dal detto quarto proporzionale, ſe ne tolga il quadruplo prodotto del lato del quadrato, per il ſeſto, il reſiduo ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta a crociera di terza ſpecie formata ſopra una pianta quadrata.

CA-

C A P. XII.

Della solidità, e della superficie de' Poliedri quadriformi generati da Zone sferoidiche.

DEFINIZIONI.

I. Sia BFCI, un settore della Ellissi LFMH, *Tav. IV. Fig. 35.* ed AEBI, un settore della Ellissi NEOG. S'intenda ora girare il settore BFCI, attorno al punto I, fisso, ed immobile, ed il punto F, medio dell'arco BFC, per la direzione del semicircolo FKH, fintantochè giunga nella situazione del settore opposto AHDI; nel tempo medesimo, che s' intende fare la descritta rivoluzione, si concepisca la stessa rivoluzione fare al settore, AEBI, attorno allo stesso punto I, fisso, ed immobile, ma la direzione del punto E, medio dell'arco AEB, sia per lo semicerchio EKG, il quale s'intersecarà col primo semicerchio ad angoli retti, e la commune sezione sarà IK, Il solido AHDGCFBEK, generato da tali rivoluzioni, si chiamerà *semipoliedro quadriforme*; se le dette rivoluzioni si fanno per li circoli intieri, allora il solido si dirà *poliedro quadriforme*.

II. La figura AEBFCGDH, si denominarà

narà *sezione massima*, o sia *base* del semipoliedro.

III. La KI, si dirà *semiasse* del poliedro, ovvero *asse* del semipoliedro.

IV. Il punto K, si dirà *vertice* del semipoliedro.

V. Se gli semicerchi FKH, EKG, saranno semiellissi, ed attorno a questo si genera un tal solido, in tal caso, si chiamerà *semipoliedro Ellittoidico*.

VI. Due archi, di Ellissi simili, si dicono *simili*, allora quando comprendono angoli eguali, e detti angoli devono avere i loro vertici nella mettà dell'archi, e gli lati devono passare per gli estremi dei detti archi.

TEOREMA I.

Tav. IV. Fig. 36. SE lo sferoide ABCD, si divide per il piano EF, parallelo alla sezione massima AKC. Dico, che la sezione EIFm, sia una Ellissi simile ad AKC.

Per l'asse minore BD, si facci passare il piano BKDm, il quale sia perpendicolare alla Ellissi ABCD, e per la generazione dello sferoide lungo il piano BKDm, sarà un cerchio. Essendo HC, FG, ordinate al diametro BD; si averà, che

$$\overline{HC}^2 : \overline{FG}^2 = \text{rett. } DHB : \text{rett. } DGB (a);$$

Ma

(a) *Teor.* 2. *Cap.* 1.

Ma il rettangolo fatto da DH, in HB, è uguale al quadrato di HK, ed il rettangolo fatto da DG, in GB, è uguale al quadrato di GI (*a*). Dunque

$$\overline{HG} : \overline{FG}^2 = \overline{HK}^2 : \overline{GI}^2$$

ovvero $HC : FG = HK : GI$ (*b*)

Sicchè avendo le due Ellissi EIFm, AKC, gli assi conjugati proporzionali saranno simili tra loro (*c*). Ciocchè doveasi dimostrare.

L E M M A.

Abbia il segmento EBF, la corda EF, parallela all' asse maggiore AC, della Ellissi ABCD, e sia l' angolo EBF, formato col vertice nella mettà di detto segmento. Dico che l' asse minore BD, divide in due parti eguali l' angolo EBF. *Tav. IV. Fig. 37.*

Essendo $\overline{CO}^2 : \overline{FI}^2 =$ rett. DOB : rett. DIB (*d*)

così ancora $\overline{AO}^2 : \overline{EI}^2 =$ rett. DOB : rett. DIB;

Onde $\overline{CO}^2 : \overline{FI}^2 = \overline{AO}^2 : \overline{EI}^2$;

e $CO ; FI = AO : EI$ (*e*);

Ma CO, è uguale ad AO; dunque FI, sarà eguale ad EI; ed essendo BI, comune agli due

(a) *Corol. 1. prop. 14. lib. 2.*
(b) *Prop. 22. lib. 6.*
(c) *Avvert. 1. Teor. 4. Cap. 1.*
(d) *Teor. 2. Cap 1.*
(e) *Prop. 22. lib. 6.*

due triangoli EBI, FBI, e questi avendo gli angoli EIB, FIB, eguali, come retti; Onde sarà l' angolo EBI, eguale all' angolo IBF (*a*). Ciocchè doveasi dimostrare.

TEOREMA II.

Tav. IV. Fig. 37. SIano li due segmenti EBF, ebf, simili, delle due Ellissi simili ABCD, abcd. Dico, che il segmento EBF, sta al segmento ebf, come $\overline{EF}^2 : \overline{ef}^2$, essendo le corde EF, ef parallele agli assi maggiori.

Nelli punti O, o, delle intersezioni degli assi conjugati AC, BD; ac, bd; si faccino centri, e coll' intervallo delli semiassi minori si descrivano gli due cerchi BGDH, bgdh, li quali saranno intersecati dalle corde EF, ef, degli archi ellittici; dalli punti B, b, alli punti E, G, H, F, e, g, h, f, si tirino le rette BE, BG, BH, BF, be, bg, bh, bf. Essendo l' angolo EBF, eguale all' angolo ebf (*b*); ed essendo l' angolo EBI, eguale all' angolo FBI, come ancora l'angolo ebi, eguale all'angolo fbi (*c*); sarà l' angolo EBI, eguale all' angolo ebi, e l' angolo EIB, come retto, è uguale all' angolo eib: Onde il terzo sarà eguale al terzo, e per-

(a) *Prop. 4. lib. 1.*
(b) *Def 6 Cap. 12.*
(c) *Lemma precedente.*

e perciò li due triangoli EBI, ebi, saranno equiangoli, e sarà

EI : IB = ei : ib (*a*)

e permutando EI : ei = IB : ib;
ma attento alla generazione dell' Ellissi, ed essendo simili tra loro, si averà

EI : ei = GI : gi;

Dunque GI : gi = IB : ib,
e permutando GI : IB = gi : ib;
Ma l'angolo GIB, come retto, è uguale all' angolo gib; dunque li due triangoli GIB, gib, saranno equiangoli (*b*); e perciò gli angoli GBI, gbi, saranno eguali; Onde anche gli loro dupli GBH, gbh, saranno equali, ed in conseguenza gli due segmenti circolari GBH, gbh, saranno simili tra loro (*c*). Inoltre il segmento GBH, sta al segmento EBF, come GI : EI (*d*), della stessa maniera il segmento gbh, sta al segmento ebf, come gi : ei; ma si è dimostrato, che

GI : EI = gi : ei;

Dunque il segmento GBH, sta al segmento EBF, come il segmento gbh, al segmento ebf; e permutando, il segmento GBH, sta al segmento gbh, come il segmento EBF al segmento ebf; ma il segmento GBH, sta al segmen-

(a) *Prop. 4. lib. 6.*
(b) *Prop. 6. lib. 6.*
(c) *Def. 9. lib. 3.*
(d) *Corol. 3. Teor. 3. Cap. 1.*

mento gbh, come $\overline{GH}^2 : \overline{gh}^2$ (*a*); Dunque ancora il segmento EBF, starà al segmento ebf, come $\overline{GH}^2 : \overline{gh}^2$, ovvero come $\overline{EF}^2 : \overline{ef}^2$, essendo le corde degli uni, e degli altri proporzionali. Ciocchè bisognava dimostrare.

TEOREMA III.

In una Ellissi se una retta seca due altre rette parallele, gli rettangoli fatti dalle di loro parti saranno proporzionali tra loro.

Tav. IV. Fig. 38. NElla Ellissi ABCD, s' intersechi la retta MN, colle due rette BD, EF, le quali siano parallele tra loro. Dico, che il rettangolo fatto da BO in OD, stia al rettangolo fatto da Ee, in eF, come il rettangolo fatto da MO in ON, al rettangolo fatto da Me, in eN.

Si faccino passare per le rette EF, DB, gli due piani GH, IK, paralleli tra loro, di maniera che siano sezioni circolari del cono ILK, dal quale è nata la Ellissi ABCD; e per il vertice L, e la retta MN, si facci passare il piano MLd; il quale segnarà nelli due cerchi GH, IK, le due rette ab, cd, le

(a) *Corol. 2. prop. 5. de circ. dim. Caravelli.*

le quali saranno parallele tra loro (*a*). Nel circolo IK, s' intersecano le due rette BD, cd, nel punto O, sarà rett. BOD = rett. cOd (*b*); così ancora nel cerchio GH, sarà rett. EeF = rett. aeb. Onde rett. BOD : rett. EeF = rett. cOd : rett. aeb;

ovvero come (cO : ae
(Od : eb (*c*)

Ma cO : ae = MO : Me (*d*)
ed Od : eb = NO : Ne;
Dunque rett. BOD : rett. EeF = (MO : Me
(NO : Ne;

Ma la ragion composta di MO : Me, e di NO : Ne, e la stessa del rettangolo MON, al rettangolo MeN. Sicchè dunque rett. BOD : rett. EeF = rett. MON : rett. MeN. Ciocchè bisognava dimostrare.

TEO-

(a) *Prop.* 16. *lib.* 11.
(b) *Prop.* 35. *lib.* 3.
(c) *Corol. prop.* 23. *lib.* 6.
(d) *Schol.* 1. *prop.* 2. *lib.* 6.

TEOREMA IV.

Qualunque sezione fatta nello sferoide, la quale sia obbliqua all' asse sarà una Ellissi.

Tav.IV. Fig.39. SIa la sezione obbliqua EMND, fatta nello sferoide AC. Dico, che la sezione EMNO, sia una semiellissi.

Nella retta ED, si prendono due punti ad arbitrio H, I, per li quali si tirino le rette eG, bF, le quali siano parallele tra loro, e perpendicolari all'asse maggiore, e per queste rette si faccino passare li due piani eMG, bNF, li quali siano perpendicolari al piano soggetto AC; e questi attento alla generazione dello sferoide saranno semicerchi. Essendo li piani eMG, bNF, EMND, perpendicolari al piano AC, le communi sezioni HM, IN, saranno perpendicolari al piano AC (*a*), e per conseguenza alle rette eG, bF (*b*). Ciò posto per il Teorema precedente il rettangolo fatto da eH, in HG, sta al rettangolo fatto da bI, in IF, come il rettangolo fatto da EH, in HD, al rettangolo fatto da EI, in ID; Ma il rettangolo fatto da

(a) *Prop.*19.*lib.*11.
(b) *Def.*3.*lib.*11.

da eH, in HG, è eguale al quadrato di HM (*a*), e così ancora il rettangolo fatto da bI, in IF, è eguale al quadrato di IN; Dunque

$\overline{HM}^2 : \overline{IN}^2 =$ rett. EHD : rett. EID; Ma questa è proprietà della Ellissi; Dunque la sezione obbliqua EMND, fatta in un semisferoide, è semiellissi, Ciocchè bisognava dimostrare.

TEOREMA V.

Qualunque sezione, che si fa nel poliedro quadriforme parallela alla sezione massima, è una figura simile alla detta sezione massima.

SIa il semipoliedro quadriforme ABCDK, segato dal piano acde, parallelo alla sezione massima ABCD. Dico, che la sezione acde, sia simile alla massima ABCD. *Tav. IV. Fig. 35.*

Si tirino le diagonali DB, AC, e si concepiscano innalzati sopra le rette DB, AC, FH, EG, gli piani DKB, AKC, FKH, EKG; le sezioni DKB, AKC, le quali saranno communi alli due semisferoidi LKM, OKN, saranno due semiellissi (*b*); e perciò dalla formazione del semipoliedro quadriforme, ne nascerà dalla figura ADCB, inscritta nella

S

(a) *Corol. 1. prop. 14. lib. 12.*
(b) *Teor. precedente.*

la ſezione maſſima, un ſemipoliedro Ellittico. Onde la ſezione acde, fatta nel ſemipoliedro Ellittico, ſarà una figura ſimile al quadrilatero ADCB, o ſia ſezione maſſima (*a*). Ciò poſto dalli punti H, b, alli, punti A, D, ed a, c, ſi tirino le rette HA, HD; ba, bc; Ed eſſendo le due rette HA, HD, che ſi uniſcono nel punto H, parallele alle due rette ba, bc, che ſi uniſcano nel punto b, ſarà l'angolo AHD, eguale all'angolo abc (*b*): Onde ſarà il ſegmento AHD, ſimile al ſegmento abc, eſſendo la ſezione, la quale paſſa per acde, nello ſemisferoide LKM, una Elliſſi ſimile ad LHMF (*c*), Della ſteſſa maniera ſi può dimoſtrare di tutti gli altri ſegmenti cd, de, ea, li quali ſaranno ſimili a DC, CB, BA, dunque la ſezione acde, ſarà ſimile alla maſſima ADCB, nel poliedro quadriforme. Ciocchè biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

Eſſendo la figura quadrilatera ADCB, ſimile alla figura quadrilatera acde, ſarà la figura ADCB, alla figura acde, come $\overline{AD}^2 : \overline{ac}^2$ (*d*); Ma $\overline{AD}^2 : \overline{ac}^2$, come il ſegmento AHD, al

(a) *Teor.7 Cap.3.*
(b) *Prop.10.lib.11.*
(c) *Teor.1.Cap.12.*
(d) *Prop.20.lib.6.*

al ſegmento abc (*a*); Dunque il ſegmento AHD, ſta al ſegmento abc, come la figura quadrilatera ADCB, alla figura quadrilatera acde; della ſteſſa maniera ſi dimoſtra di tutti gli altri ſegmenti, che ſono nella ſteſſa ragione delle figure quadrilatere: Onde li quattro ſegmenti AD, DC, CB, BA, ſtanno alli quattro ſegmenti ac, cd, de, ea, come il quadrilatero ADCB, al quadrilatero acde; e permutando, e componendo, la ſezione maſſima ADCB, del ſemipoliedro quadriforme, ſta alla ſezione acde, fatta nello ſteſſo poliedro, come il quadrilatero ADCB, al quadrilatero acde. Sicchè dunque qualunque ſezione che ſi fa nel ſemipoliedro quadriforme parallela alla ſezione maſſima, ſta alla ſezione del ſemipoliedro ellittico inſcritto in detto ſemipoliedro quadriforme, come la ſezione maſſima del ſemipoliedro quadriforme, alla ſezione maſſima corriſpondente nel ſemipoliedro Ellittico inſcritto.

AVVERTIMENTO.

Se ſi concepiſca il ſemipoliedro qnadriforme, ADCBK, diviſo in uno infinito numero di piani, li quali ſiano tutti paralleli alla ſezione maſſima, tutte le ſezioni, ſiccome ſi è dimoſtrato, ſono ſimili tra loro, e queſte

S 2

(a) *Teor.2.Cap.12.*

ste sono tra di loro, come le sezioni corrispondenti nel semipoliedro ellittico inscritto nel semipoliedro quadriforme. Onde sarà la somma di tutte le infinite sezioni nel semipoliedro quadriforme, alla somma delle corrispondenti sezioni nel semipoliedro ellittico, come la sezione massima AHDGCFBE, alla sezione massima ADCB, del semipoliedro ellittico, e prendendosi le une, e le altre sezioni per elementi del semipoliedro quadriforme, ed ellittico, le di loro somme saranno le solidità di essi, e perciò la solidità del semipoliedro quadriforme, sta alla solidità del semipoliedro ellittico, come la sezione massima AHDGCFBE, alla sezione massima ADCB; Ma la solidità del semipoliedro ellittico, si ha moltiplicando la sezione massima ADCB, per li due terzi dell'altezza IK (*a*); Dunque il semipoliedro quadriforme si averà moltiplicando la sezione massima AHDGCFBE, per li due terzi dell'altezza IK.

TEO-

(a) *Teor.9.Cap.3.*

TEOREMA VI.

Li perimetri di due archi simili, di Ellissi simili, sono nella ragione delle loro suttese.

SIano simili li due archi EBF, ebf, delle due Ellissi simili ABCD, abcd, ed abbiano le loro suttese parallele all' assi maggiori. Dico, che il perimetro dell' arco EBF, stia al perimetro dell'arco ebf, come EF, ef. Tav. IV. Fig. 37.

Si concepiscano li due semiassi OB, ob, diviso in un numero eguale di parti quanto più picciole si possono, e per li punti delle divisioni s' intendono tirate altrettante rette parallele alli assi maggiori, queste divideranno le semiellissi ABC, abc, in uno istesso egual numero di trapezii, prendendosi le parti de' perimetri delle dette semiellissi intercette alle parallele per lineole rette, suppongasi nella semiellissi ABC, il trapezio ACFE, formato dalle due parallele AG, EF, e dalle due porzioni AE, CF, del perimetro della semiellissi, e l' altro trapezio corrispondente nelle semiellissi abcd, sia acfe, si uniscano li punti B, E; b, e; per mezzo delle rette BE, be, essendo le due Ellissi ABCD, abcd, simili tra loro, sarà

$$AO : ao = OB : ob \ (a);$$

S 3 Ma

(a) *Avvert. 1. Teor. 4. Cap. 1.*

Ma OB : ob = OI : oi (*a*)
essendo OI, oi, aliquote simili di OB, ob.
Dunque AO : ao = OI : oi.
Ciò posto AO : LO = EI : GI (*b*)
Così ancora ao : lo = ei : gi;
Ma AO : LO = ao : lo, essendo le due LO, lo, eguali ad OB, ob.
Dunque EI : GI = ei : gi,
e permutando EI : ei = GI : gi.
Inoltre avendo li due triangoli GOI, goi gli angoli GIO, gio, eguali come retti, e GO : OI = go : oi, per essere OI : oi aliquote simili di GO, go, saranno li detti triangoli simili tra loro (*c*), perciò
GI : IO = gi : io.
e permutando GI : gi = IO : io;
Ma si è dimostrato che
EI : ei = GI : gi.
Dunque EI : ei = IO : io
Sicchè li due trapezii AEIO, aeio, saranno simili tra loro, Onde AE : IO = ae : io
Della stessa maniera si dimostra in tutti gli altri trapezii, che le porzioni de' perimetri intercette tra le parallele, siano proporzionali colle porzioni de' semiassi OB, ob, intercette tra le parallele, e corrispondenti alle pri-

(a) *Prop.* 15. *lib.* 5.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Prop.* 7. *lib.* 6.

prime. Essendo dunque li due segmenti EBF, ebf simili, saranno gli angoli EBI, ebi, eguali (*a*), e gli angoli EIB, eib, sono eguali, perchè retti; Onde li due triangoli EBI, ebi, sono simili, e perciò EI : ei = IB : ib; Ma IB, ed ib, sono le somme delle parti delli semiassi OB, ob, intercette tra le parallele, e queste sono, siccome si è dimostrato, proporzionali con le corrispondenti ne' perimetri EB, eb; sarà IB : ib, come la somma delle dette porzioni, che compongono il segmento EB, alla somma delle altre porzioni, che compongono il segmento eb. Dunque la porzione di perimetro EB, sta alla porzione di perimetro eb, come EI : ei; Ma gli loro dupli anche sono proporzionali. Sicchè dunque il perimetro del segmento EBF, sta al perimetro del segmento ebf, come EF:ef. Ciocchè doveasi dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Da ciò si è dimostrato si deduce, che la superficie di un semipoliedro quadriforme sia eguale al prodotto del perimetro della sezione massima per la sua altezza. Poichè se si concepisce diviso il semipoliedro quadriforme ABCD, in un numero infinito di piani tutti paralleli alla sezione massima, siccome è il piano acde, si avrà, cha la somma de' peri- *Tav. IV. Fig. 35.*

(a) *Def. 6. Cap. 12.*

metri de' quattro ſegmenti AHD, DGC, CFB, BEA, ſtia alla ſomma delle quattro ſutteſe AD, DC, CB, BA, come la ſomma de' perimetri de' quattro ſegmenti ac, cd, de, ea, alla ſomma delle quattro ſutteſe corriſpondenti (*a*), eſſendo gli archi ſudetti ſimili tra loro (*b*), e queſto avendo luogo a tutte le ſezioni, che ſi fanno nel detto ſemipoliedro, e prendendoſi queſte ſezioni per elementi della ſuperficie del ſemipoliedro quadriforme, e del ſemipoliedro ellittico, ſi avrà, che la ſomma delle infinite ſezioni fatte nel ſemipoliedro quadriforme AHDGCFBEK, o ſia la ſua ſuperficie, ſtia alla ſomma delle infinite ſezioni corriſpondenti nel ſemipoliedro ellittico ADCBK, o ſia la ſua ſuperficie, come il perimetro della ſezione maſſima AHDGCFBE, del ſemipoliedro quadriforme, al perimetro della ſezione maſſima ADCB, del ſemipoliedro ellittico; Ma la ſuperficie del ſemipoliedro ellittico, ſi ha moltiplicando il perimetro della ſezione maſſima per l'altezza IK (*c*); Dunque la ſuperficie del ſemipoliedro quadriforme ſi avrà ancora moltiplicando il perimetro della ſezione maſſima di eſſo, per l'altezza IK.

AV-

(a) *Teor. precedente.*
(b) *Teor. 5. Cap. 12.*
(c) *Avvert. Teor. 7. Cap. 3.*

AVVERTIMENTO II.

Puole nascere un semipoliedro quadriforme dall' intersezione di due semisferoidi, ovvero di un semisferoide, e di un semiellittoide, e da due semiellittoidi, quali solidi debbono avere un asse di commune, il quale formarà l'altezza del semipoliedro; e la solidità di ciascuno de' detti semipoliedri si avrà, moltiplicando la sezione massima, per li due terzi della sua altezza. E così ancora il prodotto del perimetro della sezione massima di un semipoliedro della specie detta di sopra, per la sua altezza, sarà la superficie di esso: una tal verità è chiara, poicchè adattando la simile dimostrazione, si verrà in cognizione di essa; Ma per adattare una tal dimostrazione alli due solidi detti di sopra è necessario far vedere ancora, che la sezione obbliqua di uno Ellittoide, sia Ellissi. Sia EMND, una sezione obbliqua di un semiellittoide, sarà la detta sezione una semiellissi. Si faccino passare li due piani eMG, bNF, li quali siano paralleli tra loro, e perpendicolari al piano AbCF, questi per la generazione dello Ellittoide saranno semiellissi (*a*); siano li detti piani paralleli al piano, che passa per l'altri due assi dello Ellittoide. Dal punto H, si ab- *Tav. IV. Fig. 39.*

(a) *Def. Teor. 7. Cap. 6.*

ſi abbaſſi la retta Ha, perpendicolare a bF, e per lo punto a, ſi tiri la retta ad, parallela ad IN, eſſendo le due ſemielliſſi bNF, eMG, ſimili tra loro, le ordinate ad, HM, divideranno le dette ſemielliſſi in ſemiſegmenti ſimili, e perciò

$$ad : HM = ab : He$$

Così ancora $ad : HM = aF : HG$

Onde $\overline{ad}^2 : \overline{HM}^2 = ab \times aF : He \times HG$

e permutando il quadrato di ad, ſta al rettangolo di ba, in aF, come il quadrato di HM, al rettangolo di eH, in HG; Ma il quadrato di ad, ſta al rettangolo di ba, in aF, come $\overline{IN}^2$: rett. bIF: Dunque $\overline{HM}^2$: rett. eHG = $\overline{IN}^2$: rett. bIF, e permutando $\overline{HM}^2 : \overline{IN}^2$ = rett. eHG : rett. bIF; Ma rett. eHG : rett. bIF = rett. EHD: rett. EID (*a*); Dunque il rettangolo DIE, ſta al rettangolo DHE, come $\overline{IN}^2 : \overline{HM}^2$, ma queſta è proprietà della Elliſſi; Dunque la ſezione EMND, obbliqua ad uno Ellittoide, ſarà una Elliſſi.

CAP.

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 12.

CAP. XIII.

Della solidità delle varie specie di Volta a crociera col reguglio.

DEFINIZIONE.

S'Intersecano li due semisferoidi LaM, NaP, *Tav. IV. Fig. 41.* li quali abbiano gli assi conjugati eguali, e si uniscono li punti A, B, C, D, per mezzo delle rette AB, BC, CD, DA, e da queste rette s'intendono innalzati quattro piani perpendicolari al piano soggetto ABCD, questi tagliaranno li quattro semisegmenti, AFBN, BHCM, CQDP, DIAL; Il solido rimanente AFBHCQDIa, sarà l'anima della Volta a crociera col reguglio. Dalla generazione di detta Volta, si ricava, che a quattro specie si riduce la formazione di essa.

I. Quando vien formata sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano semicircolari, ed una tale Volta nasce dall' interseziome di due semisferoidi eguali, per lungo divisi, ed abbiano gli assi conjugati eguali, siccome vedesi in pianta figura 43. n. 1.

II. Quando vien fatta sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono, due siano semicircolari, e due altri semiellittici, ed una simile Volta nasce dall' interse-

zio-

zione di uno ſemisferoide, e di un ſemiellittoide per lungo diviſi, li quali abbiano un ſemiaſſe di commune, e devono eſſere di tal condizione, che gli archi innalzati ſopra li lati del rettangolo, li quali ſono ſezioni nel ſemisferoide, e nel ſemiellittoide, ſiano eguali: Siccome oſſervaſi in pianta fig. 43. n. 2.

III. Quando è coſtrutta ſopra una pianta quadrata, e gli archi che la ſoſtengano ſiano ſemielliſſi, naſce la detta Volta dalla interſezione di due ſemiellittoidi eguali, li quali abbiano gli aſſi eguali: ſiccome vedeſi in pianta fig. 43. n. 3.

IV. Finalmente quando copre una pianta rettangolare, e gli archi, che la ſoſtengono ſiano ſemielliſſi, e queſta naſce dall' interſezione di due ſemiellittoidi ineguali, li quali abbiano un comune ſemiaſſe, e devono eſſere di tal natura, che la ſezioni fatte da' piani che paſſano per li lati del rettangolo, le quali ſono ſemielliſſi, devono avere altezze eguali, ſiccome oſſervaſi in pianta fig. 43. n. 4.

TEOREMA I.

Tav. IV. Fig. 40. Sia diviſa la sfera CADB, nelli due ſegmenti ACB, ADB, dal piano AB, al quale gli ſia perpendicolare il diametro: e ſi facci come ED, altezza del ſegmento ADB, al raggio OD, così l' altezza CE, del ſegmento ACB, al quarto proporzionale FC: Dico, che il cono AFB, che ha per altezza FE, sia eguale al segmento sferico ACB.

Si sechi la sfera, ed il cono per un piano che passa per il diametro CD. Nella sfera la sezione sarà il circolo massimo ACBD, e nelli coni AFB, ACB, li due triangoli AFB, ACB. Ed essendo CD perpendicolare al piano AB, sarà l' angolo CEA, retto (*a*), e perciò eguale all' angolo CAD (*b*). Sicchè

CA : AE = CD : DA (*c*).

Ma CD : DA = DA : DA

Sarà CD : DE = $\overline{CD}^2 : \overline{DE}^2$ (*d*)

oppure = $\overline{CA}^2 : \overline{AE}^2$

Inoltre CE : ED = FC : CO,

Componendo sarà CD : DE = FO : CO (*e*)

Onde sarà FO : CO = $\overline{CA}^2 : \overline{AE}^2$ ovvero come il cerchio, il di cui raggio è CA, al cerchio AB (*f*); Sicchè il cono, che ha per base il cerchio AB, e per altezza FO, sarà eguale al cono, che ha per base il cerchio descritto col raggio AC, e per altezza CO (*g*); Ma questo cono è eguale al settore sferico ACBO; (*h*); Dunque il cono, che ha

---

(a) *Def.* 3. *lib.* 11.
(b) *Prop.* 31. *lib.* 3.
(c) *Prop.* 4. *lib.* 6.
(d) *Def.* 7. *lib.* 6.
(e) *Prop* 18. *lib.* 5.
(f) *Prop.* 2. *lib.* 12.
(g) *Prop.* 15. *lib.* 12.
(h) *Corol. prop.* 57. *de sphæ.*, & *Cyl. Caravelli.*

ha ber base il cerchio AB, e per altezza FO, sarà eguale al settore sferico ACBO aggiuntovi di commune il cono AOB, sarà il cono AFB, eguale al segmento sferico ACB. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Essendo ED: OD = CE: FC, componendo sarà ED+OD: ED = CE + FC: CE; Ma CE + FC, o sia FE, sta a CE, come il cono AFB, al cono ACB (*a*); ed il cono AFB, si è dimostrato eguale al segmento sferico ACB. Sicchè dunque il segmento sferico ACB, sta al cono massimo inscritto in esso, come la somma di ED, altezza del l' altro segmento, e raggio OD, alla stessa ED.

TEOREMA II.

Tav.II. Fig.26. Nello sferoide aKbL, il segmento gKG, sta al cono massimo gKG, inscritto in esso, come la somma di cL, altezza dell' altro segmento, e del semiasse OL, alla stessa cL.

Si concepisca descritta una sfera col raggio OL, semiasse di detto sferoide, sarà il segmento sferico yKD, al segmento sferoidico gKG, come $\overline{KL}^2 : \overline{ab}^2$ (*b*), ovvero come $\overline{yD}^2 : \overline{gG}^2$ (*c*); ma $\overline{yD}^2 : \overline{gG}^2$, come il cerchio, il

(a) *Prop.* 13. *lib.* 12.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 5. *cap.* 6.
(c) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.

il di cui diametro è yD, al cerchio descritto col diametro gG (a), ed il cerchio descritto col diametro yD, sta al cerchio descritto col diametro gG, come il cono yKD, al cono gKG (b); Dunque il segmento sferico yKD, sta al segmento sferoidico gKG, come il cono yKD, al cono gKG, e permutando, il segmento sferico yKD, sta al cono yKD, come il segmento sferoidico gKG; al cono gKG ma il segmento sferico yKD, sta al cono yKD, inscritto in esso, come Lc + OL : Lc (c); Dunque ancora il segmento sferoidico gKG, sta al cono gKG, inscritto in esso, come Lc + LO, somma dell'altezza dell' altro segmento, e semiasse, ad Lc, altezza dell' altro segmento. Ciocchè bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

Una tal verità ha luogo non solo nel segmento sferoidico tagliato da un piano parallelo all' asse minore, siccome si è dimostrato, ma ancora in qualunque segmento del detto sferoide, ed in qualunque segmento di Ellittoide. Sia il segmento EBF, di un Ellittoide, il quale abbia l' asse minore BD, l' asse medio AC, e l' asse maggiore suppongasi innalzato dal centro O, il quale sia perpendicolare alla Ellissi ABCD, e sia GBH, il corris- *Tav. IV. Fig. 37.*

(a) *Prop. 2. lib. 12.*
(b) *Prop. 11. lib. 12.*
(c) *Corol. Teor. precedente.*

rispondente segmento sferico; sarà il segmento EBF, al segmento GBH, come AC, moltiplicato per l'asse maggiore, al quadrato di BD (*a*); ovvero come il rettangolo di EF, nell'asse maggiore della Ellissi, che passa per EF, la quale sarà base del detto segmento Ellittoidico, al quadrato di GH (*b*); ma il detto rettangolo, sta al detto quadrato di GH, come la Ellissi, la quale passa per EF, o sia la base del segmento EBF, dello Ellittoide, al cerchio, che ha per diametro GH (*c*); Dunque il segmento EBF, sta al segmento GBH, come la base del segmento primo, alla base del segmento secondo, ovvero come il cono EBF, al cono GBH (*d*): e permutando, il segmento EBF, sta al cono EBF, come il segmento sferico GBH, al cono GBH; ma il segmento GBH, sta al cono GBH, come ID+OD : ID; Sicchè dunque il segmento EBF, dello Ellittoide, sta al cono Ellittico EBF, come ID+OD : ID, della stessa maniera si dimostra del segmento di uno sferoide diviso per un piano, la di cui sezione sarà Ellissi, poichè questo segmento, la base del quale, è Ellissi, sta al segmento sferico corrispondente, come il rettangolo circon-

(a) *Corol.* 1. *Teor.* 7. *Cap.* 6.
(b) *Corol.* 1. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(c) *Corol.* 1. *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(d) *Prop.* 11. *lib.* 12.

conſcritto alla baſe del detto ſegmento, al quadrato circonſcritto alla baſe del ſegmento sferico (a); ovvero come l' altezza dell' altro ſegmento, più il ſemiaſſe, alla ſteſſa altezza del detto ſegmento. Sicchè dunque qualunque ſegmento, o di sferoide, o di Ellittoide, ſta al cono maſſimo inſcritto nel detto ſegmento, come la ſomma dell' altezza dell' altro ſegmento, ed il ſemiaſſe, alla ſteſſa altezza dell' altro ſegmento.

AVVERTIMENTO II.

Si noti, che di qualunque ſegmento di elliſſi, ſi averà il ſuo valore preſſo a poco, prendendo li due terzi del rettangolo fatto dalla baſe, e dall' altezza di eſſo ſegmento.

PROBLEMA

Trovare una formola generale per avere il valore della ſolidità di qualunque Volta a crociera col reguglio.

Sia il ſolido AFBHCQDIa, l' anima di una Volta a crociera di quarta ſpecie, cioè che ſia generata dall' interſezione di due ſemiellittoidi diſuguali, li quali abbiano il ſemiaſſe aO, di commune, e perciò la figura ABCD, ſarà rettangolo, e li quattro archi *Tav. IV. Fig. 41.*

T AFB,

(a) *Corol. 3. Teor. 5. Cap. 6.*

AFB, BHC, CQD, DIA, che sostengono la detta Volta saranno semiellissi. Sia pertanto AB $= a$, BC $= d$, EF $=$ HG $= e$; sarà BG $=$ Fb $= \frac{d}{2}$; e BE $=$ Hb $= \frac{a}{2}$; ab $= b$, sarà aO $= e + b$; e $\frac{2}{3}$ aO $= \frac{2e+2b}{3}$; e l'asse comune essendo 2aO, sarà $2e+2b$; e 'l medesimo asse meno b, sarà $2e+b$, il quale moltiplicandolo per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall'ascissa ab, nella restante porzione del medesimo asse; e sia $\sqrt{2eb+b^2} = c$. Indi si facci, come

$$c : \frac{d}{2} = e+b, \text{ al quarto proporzionale,}$$

che sarà $\frac{de+db}{2c} =$ NO $=$ PO (a)

così ancora si facci, come

$$c : \frac{a}{2} = e+b, \text{ al quarto proporzionale,}$$

che sarà $\frac{ae+ab}{2c} =$ MO $=$ LO.

sarà NE $= \frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2}$; ed MG $= \frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2}$;

(a) *Probl.* 2. *Cap.* 1.

$-\frac{a}{2}$; Ed il segmento ANB $= \frac{2}{3} a \left(\frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2}\right) = \frac{ade+adb}{3c} - \frac{ad}{3}$ (a), e saranno gli due segmenti ANB $+$ CPD $= \frac{2ade+2adb}{3c} - \frac{2ad}{3}$.

Inoltre il segmento BMC $= \frac{2}{3} d \left(\frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2}\right) = \frac{ade+adb}{3c} - \frac{ad}{3}$, e saranno gli due segmenti BMC $+$ ALD $= \frac{2ade+2adb}{3c} - \frac{2ad}{3}$:

Onde ANB $+$ CPD $+$ BMC $+$ ALD $= \frac{4ade+4adb}{3c} - \frac{4ad}{3}$ aggiuntovi il rettangolo ABCD $= ad$, la somma $\frac{4ade+4adb}{3c} - \frac{ad}{3}$, sarà la base del semipoliedro quadriforme, la quale moltiplicandola per $\frac{2}{3}$ aO, si averà la sua solidità $= \frac{8ade^2 + 16adbe + 8adb^2}{9c} - \frac{2ade - 2adb}{9}$ (b) $=$ A.

T 2 Ciò

(a) *Avvert.* 2. *Teor.* 2. *Cap.* 13.
(b) *Avvert.* 2. *Teor.* 6. *Cap.* 12.

Ciò posto, il cono ANB $= \frac{11}{14}\ 2ae \times \frac{1}{3}$ $\left(\frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2}\right) = \frac{11ade^2 + 11adbe}{42c} - \frac{11ade}{42}$

EP $=$ 2NO $-$ NE $= \frac{de+db}{2c} + \frac{d}{2}$;

ed EP $+$ OP $= \frac{de+db}{c} + \frac{d}{2}$

Sicchè facendo, come

$\frac{de+db}{2c} + \frac{d}{2} : \frac{de+db}{c} + \frac{d}{2} = \frac{11ade^2}{42c}$ $+ \frac{11adbe}{42c} - \frac{11ade}{42}$ al quarto proporzionale, che sarà $\frac{22ade^3 + 44adbe^2 + 22adb^2e + 11ade^2c}{42ce + 42cb + 42c^2}$ $+ \frac{11adbec - 22ade^2 - 22adeb - 11adec}{42e + 42b + 42c} =$ B, questo sarà il corrispondente segmento (a), ovvero li due semisegmenti AFBN, CQDP. Inoltre il cono BMC $= \frac{11}{14}\ 2de \times \frac{1}{3} \left(\frac{ae+ab}{2c}\right.$ $\left. - \frac{a}{2}\right) = \frac{11ade^2 + 11adeb}{42c} - \frac{11ade}{42}$.

ed LG $=$ 2MO $-$ MG $= \frac{ae+ab}{2c} + \frac{a}{2}$,

ed

(a) *Avvert.* 1. *Teor.* 2. *Cap.* 13.

ed $LG + LO = \frac{ae+ab}{c} + \frac{a}{2}$.

E facendo, come $\frac{ae+ab}{2c} + \frac{a}{2} : \frac{ae+ab}{c} + \frac{a}{2} = \frac{11ade^2+11adeb}{42c} - \frac{11ade}{42}$, al quarto proporzionale, che sarà

$$\frac{22ade^3+44adbe^2+22adb^2e+11ade^2c+11adbec}{42ce+42cb+42c^2} - \frac{22ade^2-22adeb-11adec}{42e+42b+42c} = C,$$

questo sarà il segmento corrispondente, ovvero li due semisegmenti BHCM, AIDL.

Sicchè saranno li quattro semisegmenti AFBN + CQDP + BHCM + AIDL $= B + C = \frac{22ade^3+44adbe^2+22adb^2e+11ade^2c+11adbec}{21ce+21cb+21c^2} - \frac{22ade^2-22adeb-11adec}{21e+21b+21c} = E$.

Onde l' anima della Volta a crociera col reguglio di quarta specie, sarà $A - E = \frac{8ade^2+16adbe+8adb^2}{9c} + \frac{22ade^2+22adeb+11adec}{21e+21b+21c} - \frac{22ade^3-44adbe^2-22adb^2e-11ade^2c-11adbec}{21ce+21cb+21c^2}$

$$-\frac{2ade - 2adb}{9} = \frac{8ad}{9c}\left(e^2 + 2be + b^2\right) + \frac{11ad}{21(e+b+c)}\left(2e^2 + 2eb + ec\right) - \frac{11ad}{21c\,(e+b+c)}\left(2e^3 + 4e^2b + 2b^2e + e^2c + bec\right) - \frac{2ad}{9}\left(e+b\right) = \frac{8ad}{9c}\left(e+b\right)^2 + \frac{11ad}{21(e+b+c)}\left(2e + 2b + c\right)e - \frac{11ad}{21c\,(e+b+c)}\left(e+b\right) \cdot \left(2e+2b+c\right)e - \frac{2ad}{9}\left(e+b\right).$$

Ciocchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità di qualunque Volta a crociera col reguglio di qualsivoglia specie, essendo cognita la lunghezza, la larghezza, il sesto, il reguglio, e la grossezza alla cima, devesi.

I. Dalla somma del duplo rettangolo fatto dal sesto, e dal reguglio, più il quadrato del reguglio, estraerne la radice quadrata, che sarà il valore di c, e si noti.

II. Dopo nove volte la detta radice, otto volte il prodotto della lunghezza, e larghezza, ed il quadrato fatto dalla somma del sesto, e reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo ventuno volte la somma della det-

detta radice, sesto, e reguglio, undici volte il prodotto della lunghezza, e larghezza, ed il prodotto della somma del duplo sesto, duplo reguglio, e la detta radice, moltiplicata per il sesto, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

IV. Si moltiplichi la somma del sesto, e del reguglio, per la somma del duplo sesto, il duplo reguglio, e la detta radice, ed il prodotto si moltiplichi per il sesto, ed il prodotto si noti.

V. Dopo il prodotto di ventuno volte la detta radice, per la somma del sesto, reguglio, e detta radice, undici volte il rettangolo fatto dalla lunghezza, e larghezza, ed il prodotto notato nel n: IV, si trovi un'altro quarto proporzionale, e si noti.

VI. Dopo il numero costante 9, il duplo rettangolo fatto dalla lunghezza, e larghezza, e la somma del sesto, e reguglio si trovi un'altro quarto proporzionale, e si noti.

VII. Dalla somma de due primi quarti proporzionali, se ne tolga la somma degli altri due, ed il residuo sarà l' anima di detta Volta.

VIII. Finalmente dal prodotto della lunghezza, per la larghezza, per la somma del sesto, reguglio, e grossezza alla cima se ne tolga la detta anima, il residuo sarà la solidità di detta Volta a Crociera col reguglio.

Sia, per esempio, $a = 20$, $d = 30$, $e = 8$,

$b=1$, e sia grossa alla cima 1. La radice quadrata detta nel n: I. sarà 4. 12. Dopo li tre numeri 37.08, 4800, 81, detti nel n: II. si trovi il quarto proporzionale 10485. 43, e si noti. Dopo li tre numeri 275. 52, 6600, 176. 96, detti nel n: III. si trovi il quarto proporzionale 4239. 02, e si noti. Il prodotto detto nel n: IV. sarà 1592. 64. Dopo li tre numeri 1135. 14, 6600, 1592. 64, detti nel n: V. si trovi il quarto proporzionale 9260. 02, e si noti. Dopo li tre numeri 9, 1200, 9, detti nel n: VI. si trovi il quarto proporzionale 1200. Dalla somma de due primi quarti proporzionali, se ne tolga la somma degli altri due, il residuo 4264. 43, sarà l'anima di detta Volta. Dal prodotto della lunghezza, per la larghezza, per la somma del sesto, reguglio, e grossezza alla cima, ch'è 6000, se ne tolga la detta anima, il residuo 1735. 57, sarà la Solidità di detta Volta a Crociera col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

Tav. IV. Fig. 41. Si noti, che dalla descritta formola si rileva che li quattro segmenti ellittici ANB, BMC, CPD, DLA, formati sopra li lati di detta Volta, sono eguali; ed eguali ancora sono gli semisegmenti sferoidici, ed ellittoidici, le basi de' quali sono gli detti segmenti ellittici. E ciò accade ancora intersecandosi due semisferoidi; un un semisferoide, ed un semiellittoide; e due semiellettoidi, di quella condizione detta nella definizione del presente Capitolo.

AVVERTIMENTO III.

Quantunque la formola trovata, la quale ci porta al conoscimento del valore della solidità delle varie specie di Volte a Crociera col reguglio, sia una approssimazione, per essersi presa l'aria del segmento di una ellissi li due terzi del rettangolo fatto dalla corda, e saetta di detto segmento; pur tutta via si potrebbe indagare il vero valore della detta solidità, con intrigarci nella detta formola il calcolo trigonometrico, supponendo divisa la Volta nelle sue quattro lunette, e ritrovando una porzione di sfera, la quale abbia per diametro l' asse commune, e sia corrispondente alla detta lunetta (e per ritrovar ciò vi bisogna il detto calcolo trigonometrico) indi trovando un quarto proporzionale dopo il quadrato dell' asse minore, il quadrato dell' asse maggiore, e le solidità delle quattro porzioni sferiche corrispondenti alle dette quattro lunette, questo sarebbe la solidità di detta Volta, essendo generata da intersezioni di semisferoidi, ma se poi vien generata da intersezioni di semisferoide, e di semiellittoide, in tal caso la solidità della lunetta sferoidica, si ha siccome si è detto; e quella dello Ellittoide, si ha ſi ha trovando un quarto proporzionale dopo il quadrato dell' aſſe minore, il rettangolo fatto dall' aſſe maggiore, e medio, e la porzion di sfera corriſpondente a detta lunetta, queſto ſarebbe la ſua ſolidità. Ma ciò ſarebbe di molto imbarazzo, e vi biſognarebbe moltiſſimo tempo per venire in cognizione della detta ſolidità, ed a poco divario ſi ridurrebbe dalla detta eſattezza, alla deſcritta formola.

AVVERTIMENTO. IV.

A favor della brevità, che in ſimili calcoli deveſi adoprare, avendo eſaminato la natura di detti ſolidi, ed avendone fatti varj calcoli di tutte le quattro ſpecie deſcritte di detta Volta, mi è riuſcito trovare, che il parallelepipedo, il quale ha per baſe la figura, ſopra della quale è coſtrutta la Volta a crociera, e per altezza la ſomma del ſeſto, e reguglio, ſtia alla ſolidità di detta Volta, come 950: 199. Sicchè per avere il valore della ſolidità di qualunque Volta a crociera col reguglio, di qualſivoglia ſpecie ſia data, deveſi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza, e per la ſomma del ſeſto, e reguglio, ed il prodotto ſi noti.

II. Dopo li due numeri coſtanti 950, 199, ed il detto prodotto, troviſi un quarto proporzionale, e ſi noti.

III.

III. Finalmente al prodotto della lunghezza, larghezza, e grossezza alla cima, vi si aggiunga il detto quarto proporzionale, la somma sarà il valore della solidità di detta Volta a crociera col reguglio.

AVVERTIMENTO V.

Soglionsi da' Fabri, nel costruire simili Volte a crociera col reguglio per evitare il fastidio nel far le forme con le crociere, farle prima a vela, ed indi ci aggiungono gli spighetti diagonalmente, e le convertiscono a crociere. Queste avendo la natura delle Volte a Vela, devonsi della stessa maniera calcolare, come si è detto nel Cap. VIII. e la ricacciatura de' detti spighetti se li darà da parte. Perciò si veggono alcune Volte a crociere, che in vece di essere elevate, o piane nel mezzo, sono più basse nel mezzo, di quello che sono nelli vertici degli archi che le sostengono, queste tali Volte sono state costrutte sopra l' anima di Volta a Vela senza reguglio, ed indi convertite a crociera con aggiungerci li spighetti, questi facendo grossezza nel mezzo vengono a ribassarsi; tali sorte di Volte devonsi calcolare come fussero a vela senza reguglio.

CAP.

CAP. XIV.

Della superficie delle varie, specie di Volte a crociera col reguglio.

TEOREMA I.

Se due segmenti in un medesimo cerchio sono eguali, le superficie sferiche corrispondenti a detti segmenti saranno eguali tra loro.

Tav.V. Fig.42. SIano li due segmenti AFB, BEC, nel medesimo cerchio, eguali tra loro. Dico, che formandosi dal cerchio ACI, la sfera, le superficie corrispondenti a detti segmenti siano eguali tra loro.

Essendo li due segmenti AFB, BEC, eguali tra loro, saranno simili ancora, e perciò gli archi AB, BC, saranno eguali, onde anche le rette AB, BC, saranno eguali (*a*), e le loro mettà BG, BH, saranno anche eguali; ed essendo EO, eguale ad FO, sarà EG, eguale ad FH: Sicchè negli due triangoli BGE, BHF, li due lati dell'uno, sono eguali alli due lati dell'altro, e gli angoli EGB, FHB,

(a) *Prop. 29. lib.3.*

FHB, come retti (*a*) sono eguali, saranno le basi BE, BF, anche eguali (*b*). Ciò posto, essendo BE, eguale a BF, sarà il circolo descritto col raggio BE, eguale al circolo descritto col raggio BF; ma il primo circolo è eguale alla superficie del segmento sferico BEC, ed il secondo è eguale alla superficie del segmento sferico BFA (*c*): dunque la superficie del segmento sferico BEC, sarà eguale alla superficie del segmento sferico BFA, Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato AB, eguale a BC; ed EG, eguale ad FH, sarà ancora OG, eguale ad OH. Onde li due triangoli AOB, BOC, saranno eguali tra loro, aggiuntovi gli segmenti AFB, BEC, che sono eguali, saranno gli settori AFBO, BECO, eguali ancora. Sicchè dunque da ciò se ne deducono le seguenti illazioni.

I. Se in un cerchio vi sono due segmenti eguali, gli settori saranno eguali.

II. Se due settori in un cerchio, sono eguali, le superficie de triangoli sferici, corrispondenti a' detti settori, generati con archi

---

(a) *Prop.3.lib.3.*
(b) *Prop.4.lib.1.*
(c) *Prop.62.de sphæ, et Cyl. Caravelli.*

chi di cerchi massimi, saranno eguali.

III. Finalmente gli triangoli sferici corrispondenti alli triangoli AOB, BOC, saranno ancora eguali.

AVVERTIMENTO. I.

Tav.V. Fig.43. n. 1. S' intersechino due semisferoidi lunghi, e le basi di essi siano le due ellissi ABCD, EFGH, ed abbiano li detti semisferoidi, gli assi minori eguali, così ancora gli assi maggiori. La superficie del settore sferoidico, corrispondente al settore ellittico OKCL, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente al settore circolare ObFa, come OC : OF (*a*), ovvero come il settore Ellittico OKGL, al settore circolare ObFa (*b*). Inoltre la superficie del segmento sferoidico, corrispondente alla superficie del segmento Ellittico KCL, sta alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bFa, come OC: OF, ovvero come il segmento KCL, al segmento bFa. Della stessa maniera, la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al settore ellittico OLEM, sta alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al settore circolare OeDf, come il settore ellittico OLEM, al

(a) *Corol.2.Teor.5.Cap.7.*
(b) *Corol.7.Teor.3.Cap.1.*

al ſettore circolare OeDf, e la ſuperficie del ſegmento sferoidico, corriſpondente al ſegmento ellittico LEM, ſta alla ſuperficie del ſegmento sferico, corriſpondente al ſegmento circolare eDf, come il ſegmento ellittico LEM, al ſegmento circolare eDf; Ma eſſendo il ſegmento KCL, eguale al ſegmento LEM (*a*), ſaranno gli ſegmenti circolari bFa, eDf, anche eguali tra loro, ed eſſendo gli ſegmenti circolari eguali, ſaranno gli ſettori anche eguali (*b*): Onde tanto gli ſettori circolari ObFa, OeDF, quanto gli ſettori ellittici OKCL, OLEM, ſaranno eguali; E pertanto la ſuperficie del triangolo sferoidico, corriſpondente al ſettore Ellittico OKCL, ſarà eguale alla ſuperficie del triangolo sferoidico, corriſpondente al ſettore ellittico OLEM, e la ſuperficie del ſegmento sferoidico, corriſpondente al ſegmento ellittico KCL, ſarà eguale alla ſuperficie del ſegmento sferoidico, corriſpondente al ſegmento ellittico LEM, per eſſere quelli sferici corriſpondenti eguali (*c*). Sicchè dunque ſe da' primi ſe ne tolgono gli ſecondi, ſi averà, che la ſuperficie del triangolo sferoidico corriſpondente al triangolo LOK, ſia eguale alla ſu-

(a) *Avvert. 2. probl. Cap. 13.*
(b) *Corol. Teor. precedente.*
(c) *Teor. precedente.*

superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo LOM.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al settore ellittico OKCL, stia al triangolo sferico, corrispondente al settore circolare ObFa, come OC : OF, ovvero come la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico KCL, alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bFa, e permutando la superficie del triangolo sferoidico, sta alla superficie del segmento, come la superficie del triangolo sferico, alla superficie del segmento; e dividendo la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, sta alla superficie del segmento sferoidico, come la superficie del triangolo sferico corrispondente al triangolo bOa, alla superficie del segmento sferico, e permutando la superficie del detto triangolo sferoidico, sta alla superficie del detto triangolo sferico, come la superficie del segmento sferoidico, alla superficie del segmento sferico, ovvero come OC : OF, (*a*), o come cK : cb, oppure come il triangolo KOL, al triangolo

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 5. *Cap.* 7.

angolo bOa (*a*). Sicchè dunque la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, sta alla supeficie del triangolo sferico corrispondente al triangolo bOa, come il triangolo KOL, al triangolo bOa.

AVVERTIMENTO II.

S' intersechi il semisferoide, il quale abbia *Tav.V. Fig.43. n. 2.* per base la Ellissi ABCD, col semiellittoide, la base del quale sia la Ellissi EFGH, ed abbia tanto il detto semisferoide, quanto il semiellittoide un commune asse minore, e le sezioni nate da piani, che passano per le rette KL, LM, MI, IK, abbiano eguali altezze. S' intende descritto il cerchio DmB, col raggio OD, il quale sarà eguale al semiasse minore, ch' è commune allo semisferoide, ed allo semiellittoide, essendo la ellissi ABCD, base dello semisferoide. Si uniscano li punti b, ed a; f, ed e, per mezzo delle rette ba, fe; e dal centro O, alli punti, b, K, e, L, M, f, si tirino le rette, Ob, OK, Oe &c. La superficie del triangolo sferoidico corrispondente al settore ellittico OKCL, sta alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al settore circolare Obqa, come OC: Oq (*b*), ovvero come il settore ellit-

V

(a) *Schol.1.prop.1.lib.6.*
(b) *Corol.2.Teor.5.Cap.7.*

littico OKCL, al settore circolare Obqa (*a*); e per la stessa ragione la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittiro KCL, sta alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bqa, come il segmento ellittico KCL al segmento circolare bqa. E la superficie dello semisferoide, sta alla superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico LCK, come la superficie emisferica del cerchio, che ha per diametro BD, alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare bqa. Inoltre la superficie dello semiellittoide EFGH, sta alla superficie dell' emisfero, che ha per diametro BD, come la superficie del segmento ellittoidico, corrispondente al segmento ellittico LEM, alla superficie del segmento sferico, corrispondente al segmento circolare hDg (*b*). Ma li segmenti ellittici LCK, LEM, sono eguali (*c*), e saranno ancora eguali li segmenti circolari corrispondenti bqa, hDg, ed essendo la superficie de' segmenti sferici, corrispondenti a detti segmenti circolari, eguali (*d*). Dunque la superficie del segmento sferoidico, corrispondente al segmento ellittico LCK

(a) *Corol.* 7. *Teor.* 3. *Cap.* 1.
(b) *Corol.* 3. *Teor.* 10 *Cap.* 7.
(c) *Avvert.* 2. *probl.* *Cap.* 13.
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 14.

LCK, sarà eguale alla superficie del segmento Ellittoidico, corrispondente al segmento ellittico LEM. Per la stessa ragione la superficie del triangolo sferoidico corrispondente al settore ellittico OLCK, sarà eguale alla superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al settore ellittico OLEM, e se da questi ne togliamo le superficie de' detti segmenti, resterà la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, eguale alla superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM.

COROLLARIO.

Essendo il triangolo KLO, eguale al triangolo OLM (*a*), ed il triangolo Oba, eguale al triangolo Ohg (*b*), ed essendo la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, eguale alla superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, e la superficie del triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOa, eguale alla superficie del triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg. E stando la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, alla superficie del triangolo sferico corrispodente al triangolo bOa,

(a) *Prop. 37. lib. 1.*
(b) *Corol. Teor. 1. Cap. 14.*

come il triangolo KOL, al triangolo bOa (a); ſtarà ancora la ſuperficie del triangolo ellittoidico, corriſpondente al triangolo MOL, alla ſuperficie del triangolo ſferico, corriſpondente al triangolo hOg, come il triangolo MOL, al triangolo gOh.

AVVERTIMENTO III.

S' interſechino due ſemiellittoidi eguali, lì quali abbiano le baſi ABCD, EFGH, perfettamente eguali, ed abbiano il ſemiaſſe minore eguale, ſi deſcriva il cerchio mnp, col
Tav.V. Fig.43. n. 3. raggio Op, eguale al detto ſemiaſſe. E dal centro O, alli punti K, L, M, I, ſi tirino le rette OK, OL, OM, OI. Indi ſi facci centro O, e coll' intervallo OF, ſi deſcriva il cerchio FBHD, il quale colla ſua periferia paſſerà per li punti B, H, D, per eſſere le baſi de' detti ſemiellittoidi perfettamente eguali, e s' interſecarà colle rette IK, KL, LM, MI, nelli punri b, e, a, i; ſi tirino le rette Ob, Oe, Oa, Oi, le quali incontraranno la periferia del cerchio ne' punti d, h, f, g, e ſi uniſcano gli detti punti per mezzo delle rette df, gh, il ſegmento circolare daf, ſarà corriſpondente al ſegmento ellittico KCL, ed il ſegmento gmh, ſarà corriſpondente al ſegmento LEM. Eſſendo il ſegmento Ellittico

(a) *Corol. Avvert.* 1. *Cap.* 14.

co KCL, eguale al segmento Ellittico LEM (*a*), sarà il segmento circolare dnf, eguale al segmento circolare hmg; Onde il triangolo dOf, sarà eguale al triangolo hOg (*b*); Ma il triangolo KLO, è eguale al triangolo OLM (*c*); Onde il triangolo KOL, sta al triangolo dOf, come il triangolo LOM, al triangolo hOg; Ma il triangolo KLO, sta al triangolo dOf, come il triangolo Ellittoidico, corrispondente al triangolo KLO, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo dOf (*d*), ed il triangolo LOM, sta al triangolo hOg, come il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Dunque il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KLO, sta al triangolo sferico, corrispondente al triangolo dOf, come il triangolo Ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Ma il triangolo sferico, corrispondente al triangolo dOf, è eguale al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg (*e*); Sicchè dunque ancora il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KLO, sarà eguale all' altro triangolo el-

(a) *Avvert.* 2. *probl. Cap.* 13.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.
(c) *Prop.* 37. *lib.* 1.
(d) *Corol. Avvert.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 14.
(e) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.

littoidico, corrispondente al triangolo LOM.

AVVERTIMENTO IV.

S'interfechino finalmente due femiellittoidi,
Tav.V. Fig.43. n. 4. li quali abbiano gli assi maggiori, e medii disuguali, e gli assi minori siano eguali, ovvero due qualsivogliano assi siano ineguali, ed il terzo sia di commune, e le basi di essi siano l'ellissi ABCD, EFGH, come ancora le sezioni nate, da' piani, che passano per le rette ML, LK, KI, IM, abbiano eguali altezze. Si descriva il cerchio mnp, col raggio Op, eguale al semiasse minore, ch'è commune alli due semiellittoidi. Indi si descrivano due altri cerchi, uno che abbia per diametro l'asse minore BD, della Ellissi ABCD, il quale sarà asse medio del semiellittoide corrispondente a detta ellissi, e l'altro col diametro FH, asse minore della Ellissi EFGH, il quale sarà asse medio del semiellittoide, corrispondente a detta ellissi, quali due cerchi con le loro periferie incontrano le rette IK, KL, LM, MI, nelli punti c, a, e, i; Si uniscano questi punti per mezzo delle rette ca, ei. Dal centro O, alli punti c, K, e, L, a, M, i, si tirino lo rette Oc, OK, Oe, OL etc. e finalmente si uniscano li punti b, ed f; h, g, per mezzo delle rette bf, hg; saranno gli segmenti circolari bnf, hmg, corrispondenti alli segmenti Ellittici KCL, LEM,

LEM, eguali tra loro, per essere quelli ellittici eguali (*a*): e perciò il triangolo bOf, sarà eguale al triangolo hOg (*b*); Ma il triangolo KOL, è eguale al triangolo LOM (*c*); Onde il triangolo KOL, sta al trianglo bOf, come il triangolo LOM, al triangolo hOg; Ma il triangolo KOL, sta al triangolo bOf, come il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KOL, al triangolo sferico corrispondente al triangolo bOf (*d*); ed il triangolo LOM, sta al triangolo hOg, come il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Dunque il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KOL, sta al triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOf, come il triangolo ellittoidico corrispondente al triangolo LOM, al triangolo sferico, corrispondente al triangolo hOg; Ma il triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOf, è eguale al triangolo sferico corrispondente al triangolo hOg (*e*); Dunque il triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo KOL, sarà eguale al triangolo ellittoi-

(a) *Avvert.* 2. *probl. Cap.* 13.
(b) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.
(c) *Prop.* 37. *lib.* 1.
(d) *Corol. Auuert.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 14.
(e) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 14.

dico, corrispondente al triangolo LOM.

COROLLARIO.

Da tutto ciò si è dimostrato nelli quattro Avvertimenti precedenti se ne deduce, che la superficie di qualunque Volta a crociera col reguglio è quadrupla di ciascuno de' quattro triangoli sferoidici, o ellittoidici, da' quali essa è formata.

TEOREMA II.

Tav.V. Fig.44. SIa ABC, uno emisfero la base del quale sia il cerchio ADC; e sia ABD, un triangolo sferico: si unisca il centro E, col punto D, per mezzo della retta ED. Dico, che il triangolo sferico ABD, sia duplo del settore AED.

Si concepisca l'archetto DF, il quale misuri esattamente tanto la periferia del cerchio ADC, quanto l' arco AD, si unisca indi il punto F, col punto E, per mezzo della retta FE, e si facci passare tra li punti B, ed F, il quadrante BF. S' intenda divisa la periferia del cerchio ADC, nelle parti eguali all'arco FD, e dal centro E, alli punti delle divisioni si tirino li raggi, e dal polo B, alli detti punti di divisioni si faccino passare li quadranti. Essendo la periferia del cerchio ADC, divisa in parti eguali ad FD, sarà tut-

tutto il cerchio diviso nello stesso numero di settori eguali ad FED, e la superficie dello emisfero ABC, sarà divisa nello stesso numero di parti eguali al triangoletto sferico FBD; nella medesima forma sarà diviso il settore AED, ed il triangolo sferico ABD; sicchè la superficie dello emisfero ABC, sta al cerchio ADC, come la superficie dal triangolo sferico ABD, al settore AED (a); Ma la superficie dello emisfero è dupla del cerchio massimo (b); Dunque la superficie del triangolo sferico ABD, sarà dupla del settore AED. Ciocchè bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Per avere il valore del settore AED, devesi moltiplicare l' arco AD, per la mettà del raggio AE (c); Sicchè dunque per avere il valore della superficie del triangolo sferico ADB, devesi moltiplicare l' arco AD, per il raggio BE.

TEO-

(a) *Def. 6. lib. 5.*
(b) *Prop. 36. de sphæ., & Cyl. Caravelli.*
(c) *Prop. 5. de circ. dim. Caravelli.*

TEOREMA III.

In ogni elliſſi il ſemiaſſe maggiore, ſta al ſemiaſſe minore, come la ſaetta di un ſegmento ellittico, alla ſaetta del ſegmento circolare corriſpondente.

Tav. I. Fig. 5. Sia AIBP, una elliſſi qualſivoglia, ed aIbP, il cerchio, che ha per diametro l' aſſe minore IP, e ſia GBR, un ſegmento qualſivoglia interſecato dalla retta GR, perpendicolare all' aſſe maggiore AB; per lo punto G, ſi tiri la retta Ge, parallela all' aſſe maggiore AB, che incontra la linea circolare aIbP, nel punto F, per lo punto F, ſi tiri la retta Fu, parallela a GR, il ſegmento Fbu, ſarà corriſpondente al ſegmento ellittico GBR. Dico, che il ſemiaſſe maggiore HB, ſtia al ſemiaſſe minore Hb, come la ſaetta CB, alla ſaetta Eb.

Per la natura della Eliſſi

$$HB : Hb = eG : eF \quad (a)$$

ed eſſendo $eG = HC$; ed $eF = HE$

ſi averà, che $HB : Hb = HC : HE$;

ma permutando $HB : HC = Hb : HE$;

onde convertendo $HB : BC = Hb : bE$

e permutando $HB : Hb = BC : bE$;

Sicchè dunque il ſemiaſſe maggiore, ſta al ſemiaſ-

(a) *Corol. 1. Teor. 4. Cap. 1.*

miasse minore, come la saetta del segmento ellittico, alla saetta del segmento circolare, corrispondente, nel cerchio, che ha per diametro l' asse minore. Ciocchè si dovea dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che HB : Hb = BC : bE
permutando HB : BC = Hb : bE,
e convertendo HB : HC = Hb : HE.
Sicchè dunque il semiasse maggiore di una ellissi, sta allo stesso semiasse, meno la saetta di un segmento, come il raggio del cerchio, che ha per diametro l' asse minore, allo stesso raggio, meno la saetta del segmento circolare, corrispondente al detto segmento ellittico.

AVVERTIMENTO I.

Sia ABDI, un cerchio qualunque: e posto il diametro AD, 1000, sarà la semicirconferenza 1570. 5, siccome si è detto nell' Avvertimento IV. Teor. I. Cap. II., ma la somma del diametro, e del raggio, presa la prima come suttesa del semicerchio, e la seconda come saetta, sarà 1500; Dunque la semicirconferenza di un cerchio è maggiore della somma della suttesa, e saetta di detto semicerchio. Supposgasi l' arco KBg, di gradi 140. *Tav.V. Fig.42.*

La

La suttesa Kg, come dupla del seno del semiangolo gOB, sarà 939, la saetta BL, come seno verso dello stesso angolo, sarà 329; onde la somma della suttesa, e saetta dell'arco 140, sarà 1268; Ma l'arco KBg, si è 1221; Dunque la somma della suttesa, e saetta dell'arco 140, è maggiore dell'arco medesimo, e la differenza si è 49, e così andando avanti, si vedrà che quanto più l'arco è minore, la differenza della somma della suttesa, e saetta sarà maggiore dell'arco medesimo. Sicchè la semicirconferenza è maggiore della somma della suttesa, e saetta del semicerchio; la somma della suttesa, e saetta all'incontro degli archi al di sotto de' gradi 140, si fa maggiore degli archi medesimi; Onde vi deve essere un arco, il quale abbia la suttesa, e saetta unita insieme, che gli sia eguale, e questo sarà l'arco di gradi 161, poicchè la suttesa di esso è 986, la saetta è 418, la di loro somma sarà 1404; l'arco di gradi 161, si è 1404. Sicchè dunque in qualunque cerchio sempre quando si ha un arco, il quale si accosta al grado 161, si puole prendere per il suo perimetro la somma della suttesa, e saetta di esso arco.

AV-

AVVERTIMENTO II.

S'interfechino le due ellissi ABCD, EFGH, le quali siano perfettamenre eguali; col commune centro O, e coll'intervallo del semiasse OB, che è eguale ad OH, si descriva il cerchio HBFD, si unifcano indi li punti I, K, L, M, per mezzo delle rette IK, KL, LM, MI, queste incontraranno la circonferenza del cerchio nelli punti b, ed a, li quali si unifcano per mezzo della retta ba, e si unisca ancora il punto e, col punto f, per mezzo della retta ef. Nella ellissi ABCD, si averà, che Tav.V. Fig.43. n. 1.

CO: FO = Ld: ad

così ancora nella ellissi EFGH, si averà; che

EO: DO = Lh: eh

Ma essendo l'ellissi perfettamente eguali sarà il semiasse maggiore CO, della prima, eguale al semiasse maggiore EO, della seconda; ed FO, è eguale a DO, per essere raggi del medesimo cerchio, onde Lh, sarà eguale ad Ld, ed essendo l'angolo DOF, retto, sarà la figura LdOh, un quadrato, e quadrato sarà ancora la figura MLKI. Essendo Lh, che è eguale ad ag, eguale ad Ld; ma Ld, è maggiore di ad; dunque ag, sarà maggiore di ad, e per conseguenza ab, sarà maggiore di ai, che sono dupli de' primi; Onde essendo bai, semicerchio, sarà l'arco aFb, maggiore de' gradi

90,

90, e si accostarà alli gradi 161, detto nell' avvertimento precedente, perciò per il valore dell' arco aFb, si puole prendere la somma della suttesa ab, e della saetta gF. Della stessa maniera si può dimostrare negli altri tre casi descritti nel n. 2. 3. 4. della fig. 43. nei quali gli archi si accostaranno più al grado 161. Sicchè dunque in tutti gli quattro casi delle intersezioni di semisferoidi, e de semiellittoidi, per il valore degli archi circolari, corrispondenti alli archi ellittici, che sono tagliati dal quadrato, o dal rettangolo IMLK, si puole prendere la somma della suttesa, e della saetta di esso arco.

AVVERTIMENTO III.

Tav. V. Fig. 43. n. 1. Da quelche si è dimostrato nel principio del precedente avvertimento, si rileva il modo di poter inscrivere in qualunque Elissi un quadrato. Sia data la Ellissi ABCD, inscrivere dentro di essa un quadrato. Si tirino gli assi conjugati AC, BD, e col centro O, e coll' intervallo del semiasse minore OB, si descriva il cerchio BHDF, si dividono gli quadranti BF, FD, DH, HB, in due parti eguali, e dal centro O, ad un punto di dette divisioni si tiri una retta, e questa si prolunga fintantocchè giunga ad incontrare il perimetro della ellissi nel punto K; indi si facci centro nel punto O, e coll' in-

intervallo OK, si descriva un cerchio questo colla sua periferia s'intersecarà col perimetro della ellissi nelli punti K, L, M, I, si uniscono questi punti per mezzo delle rette KL, LM, MI, IK, la figura KLMI, sarà quadrato. Per costruzione l'angolo KOF, è semiretto, e tale ancora è l'angolo LOF, onde l'angolo KOL, è retto; ma OK, è eguale ad OL, per essere raggi dello stesso cerchio; onde gli angoli OKL, OLK, saranno semiretti, della stessa maniera si dimostra, che l'angolo OKI, sia semiretto, e così di tutti gl'altri; onde gli angoli MLK, LKI, KIM, IML, saranno retti, e per conseguenza la figura KLMI, sarà rettangola. Nelli due triangoli KOL, LOM si averà, che li due lati del primo, sono eguali alli due lati del secondo, come raggi dello stesso cerchio, l'angolo compreso dalli due lati del primo è eguale all'angolo contenuto dalli due lati del secondo, per essere retti, dunque la base KL, sarà eguale alla base ML (*a*); così ancora si dimostra, che ML, sia eguale ad MI, e ad IK; onde la figura KLMI, sarà ancora equilatera, e per conseguenza sarà quadrato (*b*).

PRO-

(a) *Prop.* 4. *lib.* I.
(b) *Def.* 30. *lib.* I.

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di prima specie.

Tav. V. Fig. 43. n. 1. Sia ML $=$ LK $= a$; sarà il sesto Md $=$ Lh $= \frac{a}{2}$. il reguglio sia $= b$; sarà il sesto più il reguglio ch' è DO $= \frac{a}{2} + b$, e l' asse commune essendo 2DO, sarà $a+2b$; e 'l medesimo asse meno b, sarà $a+b$, il quale moltiplicandolo per b, si averà $ab+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall' ascissa, nella restante porzione del medesimo asse, e sia $\sqrt{ab+b^2}$ $= c$, $=$ da $=$ Og $=$ Or. Siccome si è detto nel problema Cap. XIII. Indi si facci, come $c : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + b$, al quarto proporzionale, che sarà $\frac{a^2 + 2ab}{4c} =$ OC $=$ OE (a); e sarà Ed $=$ Ch $=$ CO $-$ Oh $= \frac{a^2+2ab}{4c} - \frac{a}{2}$; fe $=$ ML $= a$; sarà ancora

(a) *Probl. 2. Cap. 1.*

ra OD $= \frac{a+2b}{2}$. Si facci, come OE : OD $=$ Ed; al quarto proporzionale, che darà Dr (a); che secondo gli caratteri algebraici, la detta proporzione farà

$$\frac{a^2+2ab}{4c} : \frac{a+2b}{2} = \frac{a^2+2ab}{4c} - \frac{a}{2} : \frac{a^2+4ab+4b^2-2ac-4bc}{2a+4b} = Dr = \frac{a+2b}{2} - c$$

farà l'arco f De $= a + \frac{a+2b}{2} - c = \frac{3a+2b-c}{2}$ (b)

Onde farà il triangolo sferico corrispondente al settore Of De $= \left(\frac{3a+2b}{2} - c\right)\left(\frac{a+2b}{2}\right)$

$$= \frac{3a^2+8ab-4b^2}{4} - \frac{ac-2bc}{2} \text{ (c) } = A$$

Inoltre il perimetro del semicerchio, che ha per diametro HF $= \frac{11}{14}$ (HF $+$ 2DO) (d) $= \frac{11}{14}(2a+4b) = \frac{11a+22b}{7}$

La superficie del semisegmento sferico f De, farà

(a) *Teor 3. Cap. 14.*
(b) *Avvert 2. Teor. 3. Cap. 14.*
(c) *Corol. Teor 2. Cap. 14.*
(d) *Teor. 1. Cap. 2.*

farà $\left(\frac{a+2b}{2} - c\right) \times \left(\frac{11a+22b}{7}\right)$ (a) $=$

$\frac{11a^2+44ab+44b^2}{14} - \frac{11ac-22bc}{7} = B$

Onde il triangolo sferico, corrispondente al triangolo fOe, farà $A - B = \frac{3a^2+8ab+4b^2}{4} -$

$\frac{ac-2bc}{2} - \frac{11a^2-44ab-44b^2}{14} + \frac{11ac+22bc}{7}$

$= \frac{15ac+30bc}{14} - \frac{a^2-32ab-60b^2}{28}$.

Essendo Or $= c$, farà il triangolo fOe $= \frac{ac}{2}$,

ed il triangolo MOL $= \frac{a^2}{4}$.

Ma la superficie del triangolo sferoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente al triangolo sferoidico, al triangolo corrispondente al triangolo sferico (b), Dunque facendo, come

$\frac{ac}{2} : \frac{a^2}{4} = \frac{15ac+30bc}{14} - \frac{a^2-32ab-60b^2}{28}$, al

quar-

(a) *Prop. 49. de sphæ: & Cyl. Garavelli*
(b) *Corol. Avvert. 1. Teor. 1. Cap. 14.*

quarto proporzionale $\frac{15a^2 + 30ab}{28} - \frac{a^3 - 32a^2b - 60ab^2}{56c} = \frac{15a}{28}(a+2b) - \frac{a}{56c}[(a+2b)(a+30b)]$, che sarà la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo MOL, ed il quadruplo di questa equazione, che sarà

$$\frac{15a}{7}(a+2b) - \frac{a}{14c}[(a+2b)(a+30b)],$$

darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio, di prima specie (a). Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di prima specie, cioè che sia formata sopra di una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano semicircolari, essendo dato il lato di detto quadrato, ed il reguglio, devesi.

I. Dalla somma del rettangolo fatto dal lato del quadrato, sopra del quale è formatà la detta Volta, e dal reguglio, più il quadrato del reguglio, estraerne la radice quadrata, e

 si

(a) *Corol. Avvert. 4. Teor. 1. Cap. 14.*

ſi noti, che ſarà il valore di c.

II. Dopo il numero coſtante 7, quindici volte il lato del quadrato che gli ſerve di baſe, e la ſomma del detto lato di quadrato, più il duplo reguglio, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti.

III. Dopo quattordeci volte la detta radice, il lato del quadrato, ed il prodotto della ſomma del lato del quadrato, più il duplo reguglio, nella ſomma del lato del quadrato, più trenta volte il reguglio, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti.

IV. Finalmente dal primo quarto proporzionale, ſe ne tolga il ſecondo, ed il reſiduo ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta.

Sia, per eſempio, $a = 15$; $b = 1$; ſarà $c = 4$. Indi ſi facci, come il numero coſtante 7, a quindeci volte il lato del quadrato, 225, così la ſomma del detto lato di quadrato, più il duplo reguglio, 17, al quarto proporzionale $546\frac{3}{7}$; e ſi noti. Si facci inoltre, come quattordeci volte la detta radice, ch' è 56, al lato del quadrato ch' è 15, così il prodotto della ſomma del lato del quadrato, più il duplo reguglio, nella ſomma del lato del quadrato, più trenta volte il reguglio qual prodotto ſarà 765., al quarto proporzionale $204\frac{51}{56}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale ſe ne tolga il ſecondo, il reſiduo $341\frac{29}{56}$, ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta a crociera col reguglio di prima ſpecie.

PRO-

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della supecficie di una Volta a crociera col reguglio di seconda specie.

Sia LK $= a$; ML $= d$; sia il sesto Ln $= \frac{a}{2}$; ed il reguglio sia $= b =$ Dt. Sarà il sesto, più il reguglio, che è DO $= \frac{a}{2} + b$; Tav.V. Fig.43. n. 2.

e l'asse commune essendo 2DO, sarà $a + 2b$; e'l medesimo asse, meno b, sarà $a + b$, che moltiplicandolo per b, si averà $ab + b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall'ascissa, nella restante porzione del medesimo asse; Onde sarà $\sqrt{ab + b^2} =$ Ou; e sia $\sqrt{ab + b^2} = c$ Indi si facci, come

$c : \frac{d}{2} = \frac{a}{2} + b$, al quarto proporzionale, che

sarà $\frac{ad + 2db}{4c} =$ CO (a)

Così ancora si facci, come

$c : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} + b$, al quarto proporzionale, che

(a) *Probl. 2. Cap. 1.*

sarà $\frac{a^2+2ab}{4c} = EO$;

Onde sarà $Cn = \frac{ad+2db}{4c} - \frac{d}{2}$

La somma del sesto, e reguglio, ch'è $OD = Oq = \frac{a+2b}{2}$. Si facci, come OC, a Cn, così Oq, al quarto proporzionale, che darà qu (a), che secondo gli caratteri algebraici, la detta proporzione, sarà

$\frac{ad+2db}{4c} : \frac{ad+2db}{4c} - \frac{d}{2} = \frac{a+2b}{2} : \frac{a^2+}{}$

$\frac{4ab+4b^2-2ac-4bc}{2a+4b} = \frac{a+2b}{2} - c = qu$

Sarà l'arco $bqa = a + \frac{a+2b}{2} - c = \frac{3a+2b}{2}$ $- c$ (b)

Onde sarà il triangolo sferico, corrispondente al settore $Obqa = \left(\frac{3a+2b}{2} - c\right)\left(\frac{a+2b}{2}\right)$

$= \frac{3a^2+8ab+4b^2}{4} - \frac{ac-2bc}{2}$ (c) $= A$

Inoltre il perimetro del semicerchio, che ha per diametro mq sarà $\frac{11}{14}$ (mn + 2On) (d) $=$ $\frac{11}{14}$

(a) *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(b) *Avvert.* 2. *Teor.* 3. *Cap.* 14.
(c) *Corol. Teor.* 2. *Cap.* 14.
(d) *Teor.* 1. *Cap.* 2.

$\frac{11}{14}(2a+4b) = \frac{11a+22b}{7}$

La superficie del semisegmento sferico aqbi sarà $\left(\frac{a+2b}{2}-c\right)\left(\frac{11a+22b}{7}\right)$ (a) $=$

$\frac{11a^2+44ab+44b^2}{14} - \frac{11ac-22bc}{7} = B$

Onde il triangolo sferico, corrispondente al triangolo bOa, sarà $A - B = \frac{3a^2+8ab+4b^2}{4}$

$- \frac{ac-2bc}{2} - \frac{11a^2-44ab-44b^2}{14} + \frac{11ac}{7}$

$+ \frac{22bc}{7} = \frac{15ac+30bc}{14} - \frac{a^2-32ab-60b^2}{28}.$

Essendo Ou $= c$, sarà il triangolo bOa $= \frac{ac}{2}$,

ed il triangolo KOL $= \frac{ad}{4}$.

Ma la ellissi ABCD, è base del semisferoide, e la superficie del triangolo sferoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente al triangolo sferoidico, al triangolo corrispondente al triangolo sferico (*b*); Dunque facendo come

X 4 ac:

(a) *Prop. 49. de sphe., & Cyl. Caravelli.*
(b) *Corol. Avvert. 1. Teor. I. Cap. 14.*

$\frac{ac}{2} : \frac{ad}{4} = \frac{15ac + 30bc}{14} - \frac{a^2 - 32ab - 60b^2}{28}$, al quarto proporzionale $\frac{15ad + 30bd}{28} - \frac{a^2d - 32abd - 60b^2d}{56c} = \frac{15d}{28}(a+2b) - \frac{d}{56c}((a+2b)(a+30b))$, che sarà la superficie del triangolo sferoidico, corrispondente al triangolo KOL, ed il quadruplo di questa equazione, che sarà $\frac{15d}{7}(a+2b) - \frac{d}{14c}((a+2b)(a+30b))$, darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di seconda specie (a). Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a crociera, col reguglio di seconda specie, cioè che sia formata la detta Volta sopra una pianta rettangolare, e gli archi, che la sostengono due siano semicircolari, e due semiellittici, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, ed il reguglio, devesi.

I. Dalla somma del rettangolo fatto dal diametro del semicerchio, nel reguglio, più il

(a) *Corol. Avvert. 4. Teor. I. Cap. 14.*

il quadrato del reguglio medeſimo, eſtraerne la radice quadrata, che ſarà il valore di c, e ſi noti.

II. Dopo il numero coſtante 7, quindeci volte l'aſſe della ſemielliſſi, e la ſomma del diametro del ſemicerchio, più il duplo reguglio, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti.

III. Dopo quattordeci volte la detta radice, la corda dell'arco ellittico, ed il prodotto della ſomma del diametro dell'arco ſemicircolare, più il duplo reguglio, moltìplicata per la ſomma del detto diametro dell' arco ſemicircolare, più trenta volte il medeſimo reguglio, ſi trovi un'altro quarto proporzionale, e ſi noti.

IV. Finalmente la differenza de' deſcritti due quarti proporzionali, ſarà il valore della ſuperficie di detta Volta a crociera col reguglio di ſeconda ſpecie.

Sia, per eſempio, $d = 20$; $a = 15$; ſarà il ſeſto $= 7\frac{1}{2}$; ſia $b = 1$; ſarà $c = 4$. Indi ſi facci, come il numero coſtante 7, a quindeci volte la corda dell'arco ellittico, ch'è 300, così la ſomma del diametro dell'arco ſemicircolare, più il duplo reguglio, ch'è 17, al quarto proporzionale $728\frac{4}{7}$, e ſi noti. Inoltre ſi facci, come quattordeci volte la detta radice, ch'è 56, alla corda dell'arco ellittico, ch'è 20, così la ſomma del diametro dell'arco ſemicircolare, più il duplo reguglioguglio, moltiplicata per la somma del detto diametro dell'arco semicircolare, più trenta volte il detto reguglio, ch'è 765, al quarto proporzionale 273 $\frac{3}{14}$. Finalmente la differenza de' detti quarti proporzionali, ch' è 455 $\frac{5}{14}$, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera col reguglio di seconda specie.

PROBLEMA III.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di terza specie.

Tav.V. Fig.43 n.3. SIa LK $=$ LM $= a$; il sesto sia $= e$ il reguglio $= b$

Sarà Lt $=$ Lq $=$ Ot $= \frac{a}{2}$; e sarà il sesto, più il reguglio, ch'è Om $= e+b$; e l' asse commune alli due ellittoidi essendo 2Om, sarà $2e+b$; e'l medesimo asse, meno b, sarà $2e+b$; che moltiplicando per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall'ascissa, nella restante porzione del medesimo asse; Onde sarà $\sqrt{2eb+b^2} =$ Os; e sia $\sqrt{2eb+b^2} = c$;

Ciò

Ciò posto $OD : Or = OE : Ot$ [a].
Ma $OD = Oi$, come raggi dello stesso cerchio
Dunque $Oi : Or = OE : Ot$;
Ma $Oi : Or = Og$, ovvero $Om : Os$ (b)
Dunque $Om : Os = OE : Ot$,
ed invertendo $Os : Om = Ot : OE$
Sicchè facendosi, come
$e : e + b = \frac{a}{2}$, al quarto proporzionale, che sarà
$\frac{ae + ab}{2c} = CO = EO$ (c),
Onde $Cg = Et = \frac{ae + ab}{2c} - \frac{a}{2}$; ed $ie = ML = a$
Si facci inoltre, come $OE : OM = Et$, al quarto proporzionale, che darà ms (d), che secondo gli caratteri algebraici, la proporzione sarà $\frac{ae + ab}{2c} : e+b = \frac{ae+ab}{2c} - \frac{a}{2} : e^2 +$
$\frac{2be+b^2 - ec - bc}{e+b} = e+b - c = ms$.
Ciò posto nel triangolo rOe, la sh, è parallela ad re, onde si averà, che
$Oh : hs = Oe : er$,
ed invertendo $hs : Oh = er : Oe$
ovvero $= ML : HF$, essendo questi du-

(a) *Corol. Teor. 3. Cap. 14.*
(b) *Prop. 2. lib. 6.*
(c) *Probl. 2. Cap. 1.*
(d) *Teor. 3. Cap. 14.*

dupli di quelli ; Ma hs, è il ſeſto ; Oh, è eguale alla ſomma del ſeſto, e reguglio. Sicchè dunque facendo, come il ſeſto, alla ſomma del ſeſto, e reguglio, così ML, al quarto proporzionale, queſto darà il valore di HF, che ſecondo l' eſpreſſione algebraica la detta proporzione ſarà $e : e+b = a : \frac{ae+ab}{e} =$ HF, Onde Sarà OH $=$ Oi $= \frac{ae+ab}{2e}$.

Indi nel triangolo iOe, la gh, e parallela ad ie; ſicchè facendo come Oi : ie = Og al quarto proporzionale, queſto darà il valore di gh, che ſecondo l' eſpreſſione algebraica la detta proporzione ſarà
$\frac{ae+ab}{2e} : a = e+b : 2e = $ gh.

Sarà l' arco gmh $= 2e+e+b-c = 3e+b-c$ (a) Onde ſarà il triangolo sferico corriſpondente al ſettore gOhm $= (3e+b-c)(e+b) =$ $3e^2+4eb+b^2-ec-bc$ (b) $=$ A
Inoltre il perimetro del ſemicerchio, che ha per diametro mp $= \frac{11}{14}$ (mp $+$ 2mo) (c) $= \frac{11}{14}$ $(4e+4b) = \frac{22e+22b}{7}$ La ſuperficie del ſemiſegmento sferico gmh, ſarà $\left(\frac{22e+22b}{7}\right)$ (e+

(a) *Avvert. 2. Teor. 3. Cap. 14.*
(b) *Corol. Teor. 2. Cap. 14.*
(c) *Teor. 1. Cap. 2.*

$$(e+b-c) = \frac{22e^2+44eb+22b^2-22ec-22bc}{7}$$ (a) $= B$.

Sicchè dunque il triangolo sferico, corrispondente al triangolo gOh sarà $A - B = 3e^2 + 4eb + b^2 - ec - bc - \frac{22e^2 - 44eb - 22b^2 + 22ec + 22bc}{7} = \frac{15ec + 15bc - e^2 - 16eb - 15b^2}{7}$.

Essendo $Os = Om - ms = e+b - e - b+c = c$.

Il triangolo gOh, sarà $\frac{c}{2} \times 2e = ec$;

e sarà il triangolo $MOL = \frac{a^2}{4}$;

Ma la superficie del triangolo ellittoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente, al triangolo ellittoidico, al triangolo corrispondente al triangolo sferico (b); Dunque facendo come

$ec : \frac{a^2}{4} = \frac{15ec + 15bc - e^2 - 16eb - 15b^2}{7}$, al quarto proporzionale $\frac{15a^2ec + a^2bc - a^2e^2 - 16a^2eb - 15a^2b^2}{28ec} = \frac{15a^2e + 15a^2b}{28e} - \frac{a^2e^2 - 16a^2eb}{28ec} - 15$

(a) *Prop. 49. de sphæ., & Cyl. Caravelli*
(b) *Corol. Avvert. 2. Teor. I. Cap. 14.*

$$-\frac{15a^2b^2}{} = \frac{15a^2}{28e}(e+b) - \frac{a^2}{28ec}((e+b)(e+15b))$$, che sarà la superficie del triangolo ellittoidico, corrispondente al triangolo MOL, ed il quadruplo di questa equazione, che sarà $\frac{15a^2}{7e}(e+b) - \frac{a^2}{7ec}((e+b)(c+15b))$, darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di terza specie (*a*). Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di terza specie, cioè, che sia formata sopra una pianta quadrata, e gli archi, che la sostengono siano ellittici, essendo dato il lato del quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, il sesto, ed il reguglio, devesi.

I. Dalla somma del duplo rettangolo fatto dal sesto, e dal reguglio, più il quadrato del reguglio, estraerne la radice quadrata, che sarà il valore di c, e si noti.

II. Dopo sette volte il sesto, quindeci volte il quadrato sopra del quale è formata la detta Volta, e la somma del sesto, e reguglio si trovi un quarto proporzionale, e si noti. III.

(a) *Corol. Avvert. 4. Teor. 1. Cap. 14.*

III. Dopo ſette volte il rettangolo fatto dal ſeſto, e dalla detta radice, il quadrato ſopra del quale è coſtrutta la detta Volta, ed il prodotto della ſomma del ſeſto, e reguglio, per la ſomma del ſeſto, e quindeci volte il reguglio, ſi trovi un quarto proporzionale, e ſi noti.

IV. Finalmente la differenza de' detti quarti proporzionali, sarà il valore della ſuperficie di detta Volta a crociera col reguglio di terza ſpecie.

Sia, per eſempio, $a = 15$, il ſeſto $e = 4$; il reguglio $b = 1$; ſarà la radice $c = 3$. Si facci, come ſette volte il ſeſto, ch'è 28, a quindeci volte il quadrato, ſopra del quale è formata da detta volta, ch'è 3375, così la ſomma del ſeſto, e reguglio, ch'è 5, al quarto proporzionale $602\frac{19}{28}$ e ſi noti. Indi ſi facci, come ſette volte il prodotto fatto dal ſeſto, e la detta radice, ch'è 84, al quadrato ſopra del quale è formata la detta Volta, ch'è 225, così il prodotto della ſomma del ſeſto, e reguglio, nella ſomma del ſeſto più quindeci volte il detto reguglio, ch'è 95, al quarto proporzionale $254\frac{31}{84}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale, ſe ne tolga il ſecondo; ed il reſiduo $348\frac{3}{14}$, ſarà il valore della ſuperficie della Volta a crociera col reguglio di terza ſpecie.

PRO.

PROBLEMA IV.

Trovare una formola generale, per avere il valore della superficie di una Volta a crociera col reguglio di quarta specie.

Tav.V. Fig.43. n. 4.

SIa LK = a; LM = d; il sesto sia e; ed il reguglio, b; sarà il sesto più il reguglio, ch'è On = $e+b$: e l' asse commune alli due ellittoidi essendo 2Om, sarà $2e+2b$, e 'l medesimo asse, meno b, sarà $2e+b$; che moltiplicandolo per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall' ascissa, nella restante porzione del medesimo asse; e sia $\sqrt{2eb+b^2}$ = c, che in appresso si farà vedere eguale ad Ou.

Ciò posto Od: Ox = OC: Oq (a)

Ma Od = Oc, come raggi dello stesso cerchio

Dunque Oc: Ox = OC: Oq;

Ma Oc: Ox = Ob, ovvero On: Ou (b)

Dunque On: Ou = OC: Oq,

ed invertendo Ou: On = Oq: OC

Sicchè facendosi, come

c : $e+b$ = $\frac{d}{2}$, al quarto proporzionale, che

sarà

(a) *Corol. Teor. 3. Cap. 14.*

(b) *Prop. 2. lib. 6.*

sarà $\frac{de+db}{2c} = OC$ (a)

Onde sarà $Cq = \frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2}$.

Si faccia inoltre, come $OC : Cq = On$, al quarto proporzionale, che darà nu (b), che secondo gli caratteri algebraici la proporzione sarà $\frac{de+db}{2c} : e+b = \frac{de+db}{2c} - \frac{d}{2} : \frac{e^2+2eb+b^2}{e+b}$ $\underline{-ec-bc} = e+b-c = nu$.

Ciò posto, nel triangolo cOx, la bu, è parallela alla cx, onde si averà, che

$$Ob : bu = Oc, cx,$$

ed invertendo $bu : Ob = cx : Oc$

ovvero $= LK : BD$, essendo questi dupli di quelli; Ma bu, è il sesto; Ob, è eguale alla somma del sesto, e reguglio, sicchè dunque facendo, come il sesto, alla somma del sesto, e reguglio, così LK, al quarto proporzionale, questo darà il valore di BD, che secondo la espressione algebraica la detta proporzione sarà

$e ; e+b = a : \frac{ae+ab}{e} = BD = Pd$;

Onde $Od = Oa = \frac{ae+ab}{2e}$

Y In-

(a) *Probl.* 2. *Cap.* 1.
(b) *Teor.* 3. *Cap.* 14.

Indi nel triangolo aOc, la bf, è parallela a ca; ficchè facendo, come Oa : ac = Of, al quarto proporzionale, quefto darà il valore di fb, che fecondo l'efpreffione algebraica la detta proporzione, farà

$$\frac{ae+ab}{2e} : a = e+b : 2e = \text{bf}.$$

Sarà l'arco fnb $= 2e+e+b-c = 3e+b-c$ (a)
Onde farà il triangolo sferico, corrifpondente al fettore Obnf $= (3e+b-c)(e+b) = 3e^2 + 4eb+b^2 - ec - bc$ [b] $=$ A
Inoltre il perimetro del femicerchio, che ha per diametro mp $= \frac{11}{14}$ (mp $+$ 2On) (c) $= \frac{22e+22b}{7}$;

Sarà la fuperficie del femifegmento sferico corrifpontente al fegmento circolare bnf $= \left(\frac{22e+22b}{7}\right)(e+b-c) = \frac{22e^2+44eb+22b^2}{7}$ $\frac{-22ec-22bc}{}$ [d] $=$ B.

Sicchè dunque il triangolo sferico, corrifpondente al triangolo bOf, farà A $-$ B $= 3e^2 + 4eb + b^2 - ec - bc - \frac{22e^2-44eb-22b^2+22ec}{7}$

$+22$

(a) *Avvert. 2. Teor. 3. Cap. 14.*
(b) *Corol. Teor. 2. Cap. 14.*
(c) *Teor. 1. Cap. 2.*
(d) *Prop. 49. de fpha., & Cyl. Caravelli.*

$+ 22bc = 15ec + 15bc - e^2 - 16eb - 15b^2$
$\overline{7}$

Essendo Ou $=$ On $-$ nu $= e + b - e - b + e = c$

Sarà il triangolo bOf $= \frac{c}{2} \times 2e = ec$,

ed il triangolo LOK $= \frac{ad}{4}$.

Ma la superficie del triangolo ellittoidico, sta alla superficie del triangolo sferico corrispondente, come il triangolo corrispondente al triangolo ellittoidico, al triangolo corispondente al triangolo sferico (a), dunque facendo, come $ec : \frac{ad}{4} = \frac{15ec + 15bc - e^2 - 16eb - 15b^2}{7}$, al quarto proporzionele $\frac{15ade + 15adb -}{28e}$

$\frac{ade^2 - 16adbe - 15adb^2}{28ec} = \frac{15ad(e+b)}{28e} - \frac{ad}{28ec}$ $\left((e+b)(e+15b)\right)$, che sarà la superficie del triangolo ellittico, corrispondente al triangolo KOL, ed il quadruplo di questa equazione, che sarà $\frac{15ad}{7e}(e+b) - \frac{ad}{7ec}$ $\left((e+b)(e+15b)\right)$ darà il valore della superficie della Volta a crociera col reguglio di quarta specie [b]. Ciocchè si dovea cercare.

(a) *Corol. Avvert.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 14.
(b) *Corol. Avvert.* 4. *Teor.* 1. *Cap.* 14.

AVVERTIMENTO I.

La descritta formola è generale per qualunque Volta a crociera, di qualsivoglia specie sia; Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualsivoglia Volta a crociera, e di qualunque specie sia, essendo data la lunghezza, la larghezza, il sesto, ed il reguglio, devesi.

I. Dalla somma del duplo rettangolo fatto dal sesto, e reguglio, più il quadrato del medesimo reguglio, estraerne la radice quadrata, che sarà il valore di c, e si noti.

II. Dopo sette volte il sesto, quindeci volte il prodotto fatto dalla lunghezza, e larghezza, e la somma del sesto, e reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo sette volte il prodotto fatto dal sesto, e dalla detta radice, il prodotto fatto dalla lunghezza, e larghezza, ed il prodotto della somma del sesto, e reguglio, nella somma del sesto, più quindeci volte il reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente la differenza de' detti due quarti proporzionali, sarà il valore della superficie di qualunque Volta a crociera col reguglio.

Sia, per esempio, $a = 15$; $d = 20$; il sesto $e = 4$; il reguglio $b = 1$; sarà la radice

$c = 3$,

$c = 3$. Indi si facci, come sette volte il sesto, ch'è 28, a quindeci volte il rettangolo fatto dalla lunghezza, e larghezza, ch'è 4500; Così la somma del sesto, e reguglio, ch'è 5, al quarto proporzionale $803\frac{4}{7}$, e si noti. Si facci inoltre, come il prodotto del sesto, e radice, sette volte preso, ch'è 84, al prodotto della lunghezza, e larghezza, ch'è 300; Così la somma del sesto, e reguglio, moltiplicata per la somma del sesto, e quindeci volte il reguglio, ch'è 95, al quarto proporzionale $339\frac{2}{7}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, ed il residuo $464\frac{2}{7}$, sarà il valore della superficie della detta Volta à crociera col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

Per avere con più speditezza il valore della superficie di una Volta a crociera di qualunque specie ella sia, liberando il calcolo di essa dall' estrazioni della radice quadrata, il che porta tempo in appurarla, e si potranno incontrare numeri da non potersi esattamente estraerne la vera radice. Si è conosciuto mercè varj calcoli fatti su gli appurati, detti negli avvertimenti precedenti, che la superficie di una delle quattro lunette, dalle quali vien formata la Volta a crociera, stia alla mettà del prodotto del perimetro dell' arco, che sostiene detta lunetta, per il perimetro dell'arco, che principia dall' incrocicchiamento de' spighetti, e termina nel vertice dell'arco, che sostiene detta lunetta nella ragione di 19: 20. Sicchè per avere il detto valore di superficie di Volta a crociera, devesi.

Tav. IV. Fig.41. I. Trovare il perimetro di uno degli archi, che sostengono la detta Volta a crociera, e sia AFB, il quale se è semicerchio si averà, siccome si è detto nel Teor. I. Cap. II.; e se è ellittico si prenderà la suttesa BF, del semiarco di esso, ed il suo perimetro si averà, siccome si è detto nel Corol. V. Teor. III. Cap. II., qual perimetro si noti.

II. Il detto perimetro si moltiplichi per il perimetro dell' arco ellittico Fa, il quale forma la lunghezza di detta lunetta, e si prenderà combaciando la cordella nel giro di detto arco; e la mettà di detto prodotto si noti.

III. Finalmente dopo li due numeri costanti 20, 19, e la detta mettà di prodotto, si trovi un quarto proporzionale, il quadruplo di detto quarto proporzionale, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera, per essere la detta superficie quadrupla di una delle lunette, siccome si è detto nel Corollario Avvert. IV. Teor. I. Cap. XIV.

Sia, per esempio, il lato AB, di una Volta a crociera di prima specie 15; Siccome si è detto nell' Avvertimento del Probl. I. di questo Capitolo; il sesto EF, sarà $7\frac{1}{2}$, ed il re-

reguglio ab = 1. Sarà il perimetro dell' arco AFB = 23. 55. Inoltre l' arco ellittico Fa, sarà 7. 63. Il prodotto del perimetro dell' arco AFB, nel detto perimetro dell' arco ellittico Fa, sarà 179. 6865; la mettà del quale sarà 89. 8432. Indi dopo li due numeri costanti 20, 19, e la detta mettà di prodotto, si trovi il quarto proporzionale 85. 351, il quadruplo di esso, ch' è 341. 404, sarà il valore della superficie di detta Volta a crociera col reguglio, quale prattica concorda con quello detto nell' Avvertimento del Probl. I. di questo Capitolo.

CAP. XV.

Della solidità dell' anima della Lunetta senza reguglio.

DEFINIZIONI.

I. PEr *Lunetta* s' intende, quel vuoto di fabbrica, che si fa nelle incosciature delle Volte, allorchè in dette incosciature vi si vogliano ricacciare de' lumi.

II. Si dice *corda* della Lunetta, quella retta, che unisce gli estremi del curvo ne' piedi dritti della Volta.

III. Per *sesto* s' intende la saetta del detto curvo.

IV. *Lunghezza* della Lunetta si è la retta, che unisce l' estremo del sesto da sopra il curvo, e la punta della detta Lunetta.

V. Se questa retta si combace con detta lunghezza, si dirà *Lunetta senza reguglio*, nel caso contrario, si chiamerà *Lunetta col reguglio*.

TEOREMA I.

Tav.V. Fig.45. SIa ABCD, un cilindro, e sia AGB, una sezione, la quale passi per il diametro AB, della base AEB, del detto cilindro, dal centro F, s' innalzi la retta FE, perpendidicolare al diametro, e si prolunga fino ad incontrare la circonferenza nel punto E; dal punto E, s' innalzi la perpendicolare EG, alla base AEB, la quale incontra la sezione nel punto G, si unisca il punto G, col punto F, per mezzo della retta GF. Dico, che la superficie della porzione cilindrica GAE, la quale si chiamerà semiunghietta Cilindrica, sia eguale al prodotto del raggio AF, nella retta GE.

Si concepiscano li due piani NOM, nom, quali siano infinitamente vicini, e siano paralleli al piano GFE. Essendo le due rette NO, MO, parallele alle due rette GF, FE, sarà l' angolo NOM, eguale all' angolo GFE, [a], e l'angolo NMO, è eguale all' angolo GEF, come retti; dunque gli due triangoli NOM, GFE, saranno simili tra loro, e perciò

EF : OM = GE : NM [b]

Ma EF = FM, come raggi dello stesso cerchio; Dunque FM : OM = GE : NM. Inoltre supponiamo per lo punto M, tirata una tangente, la quale si vada ad unire col diametro BA, prolungato, si averà un triangolo rettangolo nel punto M, e dal punto m, infinitamente vicino al punto M, sarà abbassata la mo; Onde

FM:

(a) *Prop. 10. lib. 11.*
(b) *Prop. 4. lib. 6.*

FM : OM = Mm : Oo [a]

Sicchè Mm : Oo = GE : NM ;

e perciò il prodotto di Mm, in NM, sarà eguale al prodotto di Oo, in GE [b]; Ma essendo NM, infinitamente vicina ad nm, il prodotto di Mm, in NM, sarà eguale al picciolo trapezio NMmn; Dunque il prodotto della parte Oo, del raggio, in GE, sarà eguale al picciolo trapezio NMmn. Se si concepisce ora tutta la semiunghietta GAE, divisa in un numero infinito di questi piccioli trapezj, ogn'uno di essi sarà eguale al prodotto di GE, nella parte del raggio, corrisdondente a detti trapezj. Sicchè dunque la somma di essi, cioè la superficie della semiunghietta cilindrica GAE, sarà eguale al prodotto di GE, nel raggio AF. Ciocchè si dovea dimostrare.

COROLLARIO I.

Onde la superficie della intiera unghietta cilindrica AGBE, sarà eguale al prodotto di EG, nel diametro AB.

COROLLARIO II.

La superficie della semiunghietta GAE, si ha

(a) *Lemma Teor. 2. Cap. 3.*
(b) *Prop. 16. lib. 6.*

si ha moltiplicando la GE, per AF, ovvero FE, il triangolo GFE, essendo rettangolo in E, si ha moltiplicando GE, per $\frac{1}{2}$ FE. Onde la superficie della semiunghietta GAE, sta al triangolo GFE, come il prodotto di GE, per il raggio AF, ovvero FE, al prodotto di GE, per la mettà di FE, ovvero come 2 : 1; Sicchè dunque la superficie della semiunghietta GAE, sarà eguale al duplo triangolo GFE.

COROLLARIO III.

Da ciò si è dimostrato si rileva, che la superficie della intiera unghietta Cilindrica AGBE, sarà eguale al quadruplo triangolo GFE.

TEOREMA II.

LA solidità della semiunghietta AGEF, è eguale ad una piramide, che ha per base la superficie di detta semiunghietta, e per altezza il raggio AF, della base del cilindro ABCD. *Tav. V. Fig. 45.*

Suppongasi la stessa preparazione fatta nel Teorema precedente; Concepiscasi indi divisa la superficie della semiunghietta AGE, in un numero infinito di piccioli trapezj, e tirandosi dal centro F, agli angoli de' detti trapezj delle rette, restarà la semiunghietta

AG-

AGFE, divisa in un numero infinito di piramidi, le quali averanno per altezza ogn'una di esse il raggio del cerchio AEB, base del cilindro. Ma la solidità di detta semiunghietta AGEF, è eguale alla somma delle dette infinite piramidi, nelle quali è divisa la detta semiunghietta, e la solidità della somma delle dette piramidi, è eguale ad una piramide, che ha per base la somma delle basi delle dette infinite piramidi, cioè la superficie della semiunghietta AGE, e per altezza il raggio AF. Dunque la solidità della semiunghietta AGEF, è eguale ad una piramide, che ha per base la superficie della detta semiunghietta AGE, e per altezza il raggio AF. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO I.

Onde la solidità della intiera unghietta AGBE, sarà eguale ad una piramide; che ha per base, la superficie della detta unghietta, e per altezza il raggio AF.

COROLLARIO II.

La solidità della semiunghietta AGEF, è eguale alla piramide, che ha per base la superficie della detta semiunghietta, e per altezza il raggio AF; ma la superficie della detta semiunghietta è eguale al duplo triangolo lo GFE [a]; dunque la ſolidità della detta ſemiunghietta sarà eguale alla dupla piramide, che ha per baſe il triangolo GFE, e per altezza il raggio AF. Ma il priſma, che ha per baſe il triangolo GFE, e per altezza AF, ſta alla piramide, che ha la ſteſſa baſe, e la medeſima altezza, come 3 : 1 [b]; ed il detto priſma, ſta alla detta dupla piramide, come 3 : 2; Dunque il priſma, che ha per baſe il triangolo GFE, e per altezza il raggio AF, ſtarà alla ſolidità della ſemiunghietta AGEF, nella ragione di 3 : 2. e per conſeguenza il prodotto del triangolo GFE, per li due terzi di AF, ſarà il valore della ſolidità di detta ſemiunghietta.

COROLLARIO III.

Sicchè dunque la ſolidità del priſma, che ha per baſe il triangolo GFE, e per altezza il diametro AB, ſtarà alla ſolidità della intiera unghietta AGBE, nella ragione di 3 : 2.

AVVERTIMENTO I.

Eſſendo la ſuperficie della ſemiunghietta dupla del triangolo, che gli ſerve di baſe, ſicchè due ſemiunghiette, le quali hanno gli trian-

(a) *Corol.* 2. *Teor.* 1. *Cap.* 15.
(b) *Prop.* 7. *lib.* 12.

triangoli che gli servono di base, eguali, averanno le superficie uguali; e comecchè due triangoli sono nella ragione delle basi, se le altezze sono eguali, e sono in ragione delle altezze se le basi sono eguali, così le superficie di due semiunghiette saranno in ragione delle loro altezze, se gli sesti sono eguali, ed al contrario saranno in ragione de' loro sesti, se le altezze sono eguali; e finalmente le superficie di due semiunghiette saranno in ragion composta de' sesti, e delle altezze, se questi sono disuguali.

In quanto poi alle loro solidità, siccome gli prismi, che hanno la stessa base, e la medesima altezza colle semiunghiette, stanno alle dette semiunghiette nella ragione di 3 : 2, Così, se gli prismi sono eguali, saranno eguali ancora le semiunghiette, e comecchè gli prismi che hanno eguali basi, sono nella ragione delle loro altezze, e così al contrario; Così ancora saranno le semiunghiette, e tuttocciò, che si è dimostrato ne' prismi si puole dimostrare nelle semiunghiette.

AVVERTIMENTO II.

Se si voglia attentamente riflettere, si anderà a conoscere, che ogni semiunghietta sarà una porzione di semipoliedro, ed infatti la superficie del semipoliedro è dupla della sua ba-

base (*a*), così ancora la superficie della semiunghietta è dupla del triangolo, che gli serve di base. La solidità del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza col semipoliedro sta al semipoliedro, nella ragione di 3 : 2 (*b*); così ancora la solidità del prisma, che ha per base il triangolo GFE, e per altezza AF, sta alla semiunghietta, nella ragione di 3 : 2.

AVVERTIMENTO III.

Se il cilindro ABCD, ha la base AEB, ellittica la semiunghietta AGE, sarà ellittica; e comecchè la superficie del semipoliedro ellittico, è eguale al rettangolo fatto dal perimetro della sezione massima, nell' altezza del detto semipoliedro [*c*]; così, essendo la semiunghietta ellittica AGE, parte del detto semipoliedro, la sua superficie sarà eguale al rettangolo fatto da GE, altezza della semiunghietta, in AF. E siccome il prisma, che ha la medesima base e la stessa altezza col semipoliedro ellittico, sta al semipoliedro ellittico, come 3 : 2 (*d*), così il prisma, che ha per base il triangolo GEF, e per altezza

za

(a) *Corol.* 4. *Teor.* 2. *Cap.* 3.
(b) *Teor.* 3. *Cap.* 3.
(c) *Avvert. Teor.* 7. *Cap.* 3.
(d) *Teor.* 9. *Cap.* 3.

za AF, ſta alla ſemiunghietta ellitica AGFE, come 3 : 2.

AVVERTIMENTO IV.

Tav.V. Fig.46. Si genera la lunetta ſenza reguglio, ſe da un ſemicilindro ſe ne tolgano due ſemiunghiette ed una porzione di ſemipoliedro; ſia il cilindro ACFE, e ſi concepiſcano in eſſo le due unghiette DEIA, DFIC, ſe dal ſemicilindro ABCFDE, ſe ne tolgano le due ſemiunghiette DGEA, DGFC, e la porzione GCAD, la quale ſarà una porzione di un ſemipoliedro il ſolido ACDB, ſarà il vuoto, o ſia l' anima della lunetta ſenza reguglio. Se la baſe del detto cilindro è circolare, la lunetta ſi dirà circolare, e ſe ſarà ellittica ſi chiamerà lunetta ellittica.

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della ſolidità dell' anima della lunetta circolare.

Tav.V. Fig.46. Sia ABCFDE, un ſemicilindro circolare, il quale ſia diviſo dalle due ſemiunghiette DGEA, DGFC, ſiccome ſi è detto nell' avvertimento precedente, il ſolido ACDB, cioè il detto ſemicilindro, meno le dette due ſemiunghiette, e porzione di ſemipoliedro ſarà rà la lunetta circolare senza reguglio. Sia pertanto $AC = a$; sarà $AH = BH = \frac{a}{2}$; e sia la lunghezza $BD = b$.

Sarà la solidità del semicilindro $ABCFDE = \frac{11}{14} AC \times BH \times BD$ [a] $= \frac{11}{14} a \times \frac{a}{2} \times b = \frac{11a^2b}{28} = A$. La solidità della semiunghietta DGEA, sarà eguale al prodotto del triangolo AGE, per li $\frac{2}{3}$ di DG (b) $= \frac{ab}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2b}{12}$.

Ed essendo la semiunghietta DGEA, eguale alla semiunghietta DGFC [c], sarà ancora la semiunghietta $DGFC = \frac{a^2b}{12}$.

Onde la somma di esse sarà $\frac{a^2b}{6} = B$.

Inoltre la porzione del semipoliedro, che ha per base il triangolo AGC, e per altezza DG, sarà $\frac{ab}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{a}{2}$ [d] $= \frac{a^2b}{6} = C$.

Z Sic-

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Corol. 2. Teor. 2. Cap. 15.*
(c) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 15.*
(d) *Teor. 3. Cap. 3.*

Sicchè la solidità dell' anima della lunetta ACBD, sarà A — B — C [a] $= \frac{11a^2b}{28} - \frac{a^2b}{6} - \frac{a^2b}{6} = \frac{33a^2b}{84} - \frac{28a^2b}{84} = \frac{5a^2b}{84} = \frac{5}{84}[a^2b]$. Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità dell' anima della lunetta senza reguglio che abbia l'arco semicircolare, essendo data la suttesa, e l' altezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare il quadrato della suttesa, o sia diametro, per l' altezza della lunetta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 84, 5, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà la solidità dell'anima della lunetta circolare senza reguglio.

PRO-

(a) *Avvert.* 4. *Teor.* 2. *Cap.* 15.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità della lunetta ellittica senza reguglio.

Sia il cilindro ACFE, ellittico, e concepiscasi la stessa preparazione fatta nel problema precedente. Sia perciò AC $= a$; BH $= c$; BD $= b$. Sarà la superficie della semiellissi ABC $= \frac{11}{14}$ AC $\times$ BH [a] $= \frac{11}{14} ac$. *Tav.V. Fig.46.*

Onde il semicilindro ellittico ABCFDE $= \frac{11}{14} ac \times b = \frac{11acb}{14} =$ A.

La solidità della semiunghietta DGEA $= \frac{ab}{4} \times \frac{2}{3} c$ [b] $= \frac{abc}{6}$.

Ed essendo la semiunghietta DGEA, eguale alla semiunghietta DGFC (c), sarà ancora la semiunghietta DGFC $= \frac{abc}{6}$.

Onde la somma di esse, sarà $\frac{abc}{3} =$ B

Z 2 Inol-

(a) *Teor.* 4. *Cap.* 1.
(b) *Avvert.* 3. *Teor.* 2. *Cap.* 15.
(c) *Avvert.* 1. *Teor.* 2. *Cap.* 15.

Inoltre la porzione del semipoliedro ellittico, che ha per base il triangolo AGC, e per altezza DG, sarà $\frac{ab}{2} \times \frac{2}{3} c$ (a) $= \frac{abc}{3} = C$

Sicchè la solidità dell' anima della lunetta ACBD, sarà $A - B - C$ (b) $= \frac{11acb}{14} - \frac{abc}{3} - \frac{abc}{3} = \frac{33acb}{42} - \frac{28abc}{42} = \frac{5abc}{42} = \frac{5}{42}(abc)$. Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità di una lunetta ellittica senza reguglio, essendo data la suttesa, il sesto, e la lunghezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare il sesto, per la suttesa, e per la lunghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 42, 5, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della solidità dell'anima della lunetta ellittica senza reguglio.

AV-

(a) *Teor. 9. Cap. 3.*
(b) *Avvert. 4. Teor. 2. Cap. 15.*

AVVERTIMENTO II.

Si noti, che questa ultima formola è generale, e pertanto si puole avere ancora la solidità dell' anima della lunetta circolare senza reguglio, facendo uso della stessa regola detta nell' avvertimento precedente.

C A P. XVI.

Della superficie delle Lunette senza reguglio.

DEFINIZIONE.

Per superficie della Lunetta, s' intende la superficie del semicilindro, meno le superficie delle due semiunghiette.

PROBLEMA I.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una Lunetta circolare senza reguglio.

Tav. V. Fig. 46 Sia AC $= a$; BD $= b$; sarà AH $=$ BH $= \frac{a}{2}$;

la semicirconferenza ABC $= \frac{11}{14}$ (AC+2BH) (a) $= \frac{11}{14}(2a)$,

e la superficie del semicilindro ABCFDE $= \frac{11}{14}.(2a)\, b = \frac{11ab}{7} =$ A.

Inol-

(a) Teor. 1. Cap. 2.

Inoltre la superficie della semiunghietta DGEA, essendo eguale al duplo triangolo AGE (a), sarà $\frac{ab}{2}$;

ed essendo il triangolo AGE, eguale al triangolo CGF, sarà la superficie della semiunghietta DGEA, eguale alla superficie della semiunghietta DGFC (b), e perciò la superficie della semiunghietta DGFC, sarà $\frac{ab}{2}$

Onde la somma delle dette due semiunghiette sarà $ab = B$

Sicchè la superficie della lunetta ABCD, secondo la definizione, sarà $A - B = \frac{11}{7} ab - ab$ $= \frac{11ab}{7} - \frac{7ab}{7} = \frac{4ab}{7} = \frac{4}{7}(ab)$. Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una lunetta circolare senza reguglio, essendo cognita la suttesa, e la lunghezza, devesi.

I. Moltiplicare la suttesa, per la lunghezza di detta lunetta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 7, 4,

 ed

(a) *Corol. 2. Teor. 1. Cap. 15.*

(b) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 16.*

ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della detta lunetta.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie di una lunetta ellittica senza reguglio.

Tav. V. Fig. 46. SUpponghasi il semicerchio ABC, essere una semiellissi; e sia AC $= a$; BH $= c$; BD $= b$; ed AB $= d$.

Sarà il perimetro della semiellissi ABC $=$ $\frac{3141}{2828}$ $(2d)$ [a] $=$ $\frac{3141d}{1414}$;

e la superficie del semicilindro ABCFDE, sarà $\frac{3141d}{1414} \times b = \frac{3141bd}{1414} = A$.

Inoltre la superficie della semiunghietta DGEA, sarà $b \times c = bc$ (b),

ed essendo la semiunghietta DGEA, eguale alla semiunghietta DGFC, avendo AE $=$ FC, e l'altezza DG, di commune, sarà ancora la superficie della semiunghietta DGFC $= bc$.

Onde la somma delle dette due semiunghiette sarà $2bc = B$.

Sic-

(a) *Corol.* 4. *Teor.* 3. *Cap.* 2.
(b) *Avvert.* 3. *Teor.* 2. *Cap.* 15.

Sicchè dunque la superficie della lunetta ABCD, secondo la definizione, sarà $A - B = \frac{3141\,bd}{1414} - 2bc = \frac{3141}{1414}(bd) - 2bc$. Ciocchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO.

Onde per avere il valore della superficie di una lunetta ellittica senza reguglio, essendo data la suttesa del semiarco, ovvero della semiellissi, il sesto e la lunghezza di detta lunetta, devesi.

I. Moltiplicare la suttesa del detto semiarco, per la lunghezza della lunetta, ed il prodotto, si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 1414, 3141, ed il detto prodotto, trovisi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Finalmente dal detto quarto proporzionale se ne tolga, il duplo prodotto del sesto, per la lunghezza, ed il residuo sarà il valore della superficie di detta lunetta senza reguglio.

CAP. XVII.

Della solidità delle lunette col reguglio.

AVVERTIMENTO.

Dividonsi le lunette col reguglio in circolari, ed in ellittiche; se l' arco che forma la lunetta è circolare, si chiamarà lunetta circolare; e così all' opposto, se è ellittico. Nasce la lunetta col reguglio dalle sezioni semiunghiate che si fa in una quarta parte di sferoidico, ovvero ellittoidico; dalla prima si genera la lunetta circolare, e dalla seconda la ellittica. Suppongasi divisa la Volta a crociera col reguglio in quattro parti diagonalmente, e da una delle quattro parti se ne tolga la porzione di poliedro, che ha per base il triangolo, che è base della quarta parte di detta Volta, e per altezza la somma del sesto, e reguglio, il residuo sarà la solidità della lunetta col reguglio.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità dell' anima di qualunque lunetta col reguglio.

Tav. V. Fig. 47

Sia OBMCa, una porzione di un semielittoide, divisa di tal maniera, che la OM, OM, la quale divide ad angoli retti la BC, sia un semiasse dello ellittoide; la aO, sia un altro semiasse, e la BC, sia parallela al terzo asse; Dividasi la detta porzione per il piano BHC, che passi per BC, e sia perpendicolare ad OBMC, se dalla porzione OBHCa, del semiellittoide, se ne tolga la porzione semipoliedrica OBCa; il solido aBHC, sarà l'anima della lunetta ellittica, siccome si è detto nell'avvertimento precedente; per aO, ed OM, si facci passare il piano aOM, il quale sarà un quadrante di ellissi, questo s'intersecarà con BHC, e la commune sezione HG, sarà il sesto della lunetta, indi per lo punto H, si tiri la Hb, parallela ad OM, la quale incontrarà la Oa, nel punto b, sarà la ba, il reguglio di detta lunetta. Sia pertanto la lunghezza di detta lunetta OG $= a$; la corda BC $= d$; il sesto HG $= e$; ed il reguglio ab $= b$; sarà Hb $= a$; e BG $= \frac{d}{2}$;

ed aO $= e + b$; e $\frac{2}{3}$ aO $= \frac{2e+2b}{3}$; ed essendo l'asse, 2aO; sarà il detto asse $2e+2b$; e'l medesimo asse meno ab, sarà $2e+b$, il quale moltiplicandolo per b, si averà $2eb+b^2$, che sarà il rettangolo fatto dall'ascissa ab, nella restante porzione del medesimo asse, e sia $\sqrt{2eb+b^2} = c$. Indi facciasi, come c:

$a =$

$a = e + b$, al quarto proporzionale, che sarà $\frac{ae + ab}{c} = \text{MO}$ (a);

Sarà MG $= \frac{ae + ab}{c} - a$;

ed il segmento BMC $= \frac{2}{3}d\left(\frac{ae + ab}{c} - a\right)$ (b) $= \frac{2ade + 2adb}{3c} - \frac{2ad}{3}$, aggiuntovi il triangolo BOC $= \frac{ad}{2}$, la somma $\frac{2ade + 2adb}{3c} - \frac{ad}{6}$, sarà la base OBMC, della porzione del semipoliedro quadriforme, la quale moltiplicandola per $\frac{2}{3}$aO, si averà la sua solidità $= \frac{4ade^2 + 8adeb + 4adb^2}{9c} - \frac{ade - adb}{9}$ (c) $=$ A. Ciò posto, il cono che ha per base la ellissi BHC, terminata, e per altezza la GM, sarà $\frac{11}{14}\ 2de \times \frac{1}{3}\left(\frac{ae + ab}{c} - a\right) =$

$\frac{11ade^2 + 11adeb}{21c} - \frac{11ade}{21}$.

Inoltre l' altezza dell' altro segmento sarà 2MO

(a) *Probl.* 2. *Cap.* 1.
(b) *Avvert.* 2. *Teor.* 2. *Cap.* 13.
(c) *Avvert.* 2. *Teor.* 6. *Cap.* 12.

$2MO - MG = \frac{ae+ab}{c} + a,$

e la stessa altezza più il semiasse, sarà $\frac{2ae+2ab}{c} + a$. Sicchè facendo, come

$\frac{ae+ab}{c} + a : \frac{2ae+2ab}{c} + a = \frac{11ade^2+11adeb}{21c} - \frac{11ade}{21}$, al quarto proporzionale

$\frac{22ade^3+44ade^2b+22adeb^2+11ade^2c+11adebc}{21ec+21bc+21c^2} - \frac{22ade^2-22adeb-11adec}{21e+21b+21c}$, questo sarà il

segmento ellittoidico, corrispondente al segmento ellittico BMC [a]; e la mettà di esso, che è

$\frac{22ade^3+44ade^2b+22adeb^2+11ade^2c+11adebc}{42ec+42bc+42c^2} - \frac{22ade^2-22adeb-11adec}{42e+42b+42c} = B$, sarà il

semisegmento ellittoidico BHCM.

Inoltre la porzione OBCa, del semipoliedro, sarà $\frac{ad}{2}\left(\frac{2e+2b}{3}\right) = \frac{ade+adb}{3}$ [b] $= C$

Sicchè dunque la solidità dell'anima della lunet-

(a) *Avvert. 1. Teor. 2. Cap. 13.*
(b) *Teor. 9. Cap. 3.*

netta aBHC, siccome si è detto nell' Avvertimento precedente, sarà $A - B - C =$

$$\frac{4ade^2 + 8adeb + 4adb^2}{9c} - \frac{ade - adb}{9} - \frac{22ade^3 - 44ade^2b - 22adeb^2 - 11ade^2c - 11adebc}{42ec + 42bc + 42c^2} + \frac{22ade^2 + 22adeb + 11adec}{42e + 42b + 42c} - \frac{ade - adb}{3} =$$

$$\frac{4ade^2 + 8adeb + 4adb^2}{9c} + \frac{22ade^2 + 22adeb + 11adec}{42e + 42b + 42c} - \frac{22ade^3 - 44ade^2b - 22adeb^2 - 11ade^2c - 11adebc}{42ec + 42bc + 42c^2} - \frac{4ade - 4adb}{9} = \frac{4ad}{9c}(e+b)^2 + \frac{11ad}{42(e+b+c)}(2e+2b+c)e - \frac{11ad}{42c(e+b+c)}(2e^2 + 4eb + 2b^2 + ec + bc)e - \frac{4ad}{9}(e+b).$$

Ciocchè si dovea cercare.

AVVERTIMENTO I.

Per avere il valore della solidità dell' anima della lunetta di qualunque specie col reguglio, essendo data la corda, il sesto, il reguglio, e la lunghezza di essa, devesi.

I. Dal duplo prodotto fatto dal sesto, e reguglio, più il quadrato del medesimo reguglio, estraerne la radice quadrata, e si averà il valore di c, e si noti.

II. Dopo nove volte la detta radice; quat-

quattro volte il rettangolo fatto dalla corda, e dalla lunghezza; ed il quadrato della somma del sesto, e reguglio, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo quarantadue volte la somma del sesto, reguglio, e la detta radice; undeci volte il prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza; ed il prodotto della somma del duplo sesto, duplo reguglio, e la detta radice, per il medesimo sesto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Dopo il prodotto di quarantadue volte la detta radice, moltiplicata per la somma del sesto, reguglio, e radice; undeci volte il prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza; ed il prodotto del sesto, per la somma del duplo quadrato del sesto, più il quadruplo prodotto fatto dal sesto, e reguglio, più il duplo quadrato del reguglio, più il prodotto fatto dal sesto più il reguglio, per la detta radice quadrata, trovisi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Dopo il numero costante 9, il quadruplo rettangolo fatto dalla corda, e dalla lunghezza, e la somma del sesto, e reguglio, si trovi un altro quarto proporzionale, e si noti.

VI. Finalmente dalla somma de' due primi quarti proporzionali, se ne tolga la somma de' due secondi, il residuo sarà il valore della solidità dell'anima della lunetta col reuglio.

Sia, per esempio, la corda $a = 10$; il sesto $e = 8$; il reguglio $b = 1$; la lunghezza $d = 30$. Sarà la radice quadrata, ch'è il valore di $c = 4. 12$. Indi facciasi, come nove volte la detta radice, ch'è 37. 08, al quadruplo prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza, ch'è 1200, così il quadrato della somma del sesto, e reguglio, ch'è 81, al quarto proporzionale 2621. 35, e si noti. Facciasi poscia, come quarantadue volte la somma del sesto, reguglio, e radice, ch'è 551. 04, ad undeci volte il prodotto fatto dalla corda nella lunghezza, ch'è 3300, così il prodotto del sesto per la somma del duplo sesto, duplo reguglio, e la detta radice, ch'è 176. 96, al quarto proporzionale 1059. 75. Inoltre si facci, come il prodotto di quarantadue volte la detta radice moltiplicata per la somma del sesto, reguglio, e radice, ch'è 2270. 28. ad undeci volte il prodotto fatto dalla corda nella lunghezza, ch'è 3300, così il prodotto del sesto, per la somma del duplo quadrato del sesto, più il quadruplo prodotto fatto del sesto, e reguglio, più il duplo quadrato del reguglio, più il prodotto fatto dalla radice, nella somma del sesto, e reguglio, qual prodotto si è 1592. 64, al quarto proporzionale 2315. e si noti. E facciasi, come il numero costante 9, al quadruplo prodotto fatto dalla corda, e dalla lunghezza, ch'è 1200, così la somma del sesto,

sto, e reguglio, ch'è 9, al quarto proporzionale 1200. Finalmente dalla somma de' due primi quarti proporzionali, ch'è 3681. 1, se ne tolga la somma de' due secondi, che è 3515, il residuo 166. 1, sarà il valore della solidità dell'anima della detta lunetta col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

Nell' Avvertimento IV. del Problema del Capitolo XIII. si è detto, che il parellelepipedo, il quale ha la medesima base, e la stessa altezza coll'anima della Volta a crociera, sta alla solidità di detta Volta, nella ragione di 950: 199. Essendo la porzione ellittoidica OBHCa, la quarta parte di una Volta a crociera col reguglio, si averà che il prisma il quale ha per base il triangolo BOC, e per altezza la Oa, somma del sesto, e reguglio, stia alla solidità di detta quarta parte di Volta a crociera col reguglio, come 950: 199, convertendo si averà che il detto prisma, stia alla quarta parte dell'anima della Volta a crociera, cioè alla porzione ellittoidica OBHCa, come 950: 751; Ma il prisma, che ha per base il triangolo BOC, e per altezza aO, sta alla porzione poliedrica OBCa, come 3: 2 (*a*), e posto il det- *Tav.V. Fig.47*

(a) *Teor. 9. Cap. 3.*

detto prisma 950, sarà la detta porzione poliedrica $633\frac{1}{2}$; Onde il medesimo prisma, sta alla porzione ellittoidica OBHCa, meno la porzione poliedrica OBCa, come $950 : 117\frac{2}{3}$, ovvero come 2850: 353. Sicchè dunque per la totale prattica, per avere il valore della solidità di qualunque lunetta col reguglio, essendo nota la corda, il sesto, il reguglio, e la lunghezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare la mettà della corda, per la lunghezza, e per la somma del sesto, e reguglio, e si averà col prodotto, il prisma, e si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 2850, 353, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della solidità dell'anima della lunetta col reguglio di qualunque specie sia.

Ed infatti adattando il detto metodo prattico nel proposto caso nell'Avvertimento precedente si averà la solidità dell'anima della lunetta col reguglio, la quale sarà 167. 2, e la differenza sarà di una unità, la quale si puole omettere, per la facilità, e brevità di calcolare.

CAP.

C A P. XVIII.

Della superficie della Lunetta col reguglio.

AVVERTIMENTO I.

LA superficie della lunetta col reguglio, e quella istessa della superficie di una delle quattro lunette, che compongono la Volta a crociera col reguglio. Sicchè ponendosi la corda BC $=a$; il sesto GH $=e$; il reguglio ab $=b$; e la lunghezza OG $=d$; e facendosi lo stesso calcolo algebraico di quello fatto nel Probl. IV. Cap. XIV. l' ultima equazione, che porta il valore della superficie della detta lunetta col reguglio, sarà $\frac{15ad}{14e}(e+b)-$ *Tav.V. Fig.47.*

$\frac{ad}{14ec}((e+b)(e+15b))$. Sichè dunque per avere il valore della superficie di qualunque lunetta col reguglio, essendo data la corda, il sesto, il reguglio, e la lunghezza di essa, devesi.

I. Dalla somma del duplo prodotto fatto dal sesto, e reguglio; più il quadrato del medesimo reguglio, estraerne la radice quadrata, siccome si è detto nell' Avvert. I. Probl. IV. Cap. XIV. che sarà il valore di c, e si noti.

dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, il residuo 116. 07. sarà il valore della superficie di detta lunetta col reguglio.

AVVERTIMENTO II.

Par avere con più facilità il valore della superficie di una lunetta col reguglio, essendo nota la suttesa, il sesto, ed il perimetro dell' arco ellittico, il quale forma la lunghezza di detta lunetta, devesi fare la stessa operazione detta nell' Avvert. II. Probl. IV. Cap. XIV. cioè.

I. Devesi trovare il perimetro dell' arco, del quale è data la suttesa, e questo moltiplicarlo per il perimetro dell' arco ellittico, lunghezza di detta lunetta, e la mettà del prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 20, 19, e la detta mettà di prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta lunetta col reguglio.

CAP. XIX.

Della solidità delle varie specie di Volta a Cupola.

DEFINIZIONI.

I. Si dice *Volta a Cupola*, quella che copre un edificio circolare, o ellittico.

II. Si dirà *Cupola sferica*, quando la Volta che copre un edificio circolare sarà un' emisfero.

III. Si dirà *Cupola sferoidica*, o *ellittoidica*, allora quando la Volta sarà un semisferoide, ovvero un semiellittoide.

IV. *Asse* della Volta a Cupola si è l'altezza di essa.

V. *Base* della cupola, è quella figura la covertura della quale è la detta Cupola.

Da ciò ne nasce la generazione delle varie specie di dette Volte a Cupola. I. Se la base è circolare, e l'asse della Cupola, e la mettà del diametro di detta base, allora la Cupola è uno emisfero. II. Se la base è circolare, e l'asse è minore della mettà del diametro della base, allora la Cupola è un semisferoide depresso, intersecato da un piano che passa per l'asse maggiore, al quale gli sia perpendicolare l'asse minore. III. Se la base è ellittica, e l'asse di essa è la mettà dell' asse

asse maggiore della base, allora la Cupola è un semisferoide depresso intersecato da un piano, che passa per l'asse minore, al quale gli sia perpendicolare l'asse maggiore. IV. se la base è circolare, e l'asse è maggiore della mettà del diametro della base, allora la Cupola è un semisferoide lungo, intersecato da un piano, che passa per l'asse minore, al quale gli sia perpendicolare l'asse maggiore. V. Se la base è ellittica, e l'asse della Cupola è eguale al semiasse minore della base, allora la detta Cupola è un semisferoide lungo intersecato da un piano, che passa per l'asse maggiore, al quale gli sia perpendicolare l'asse minore. VI. Finalmente se la base è ellittica, e l'asse della Cupola, è disuguale con gli semiassi della base, allora la detta Cupola è un semiellittoide.

Oltre delle descritte Cupole, vi sono le Volte, che coprono gli edificj di più lati, e queste si denominano *Volte a Cupola poligone*; E queste saranno semipoliedri, e si distinguono in sferiche, ed ellittiche, siccome si son divisi gli detti semipoliedri, allorchè di essi si è parlato nel Cap. III.

TEOREMA I.

La solidità del cubo circonscritto ad una sfera, sta alla solidità di detta sfera, nella ragione di 21 : 11.

Tav. V. Fig. 48. Sia ABC, il cubo circonscritto alla sfera HIKL. Dico, che la solidità del cubo ABC, stia alla solidità della sfera HIKL, come 21 : 11.

S' intenda circonscritto attorno alla sfera HIKL, il cilindro DEFG, il quale averà la stessa altezza col cubo ABC; ed il cerchio DE, base del detto cilindro, sarà inscritto nel quadrato AR, base del cubo. La solidità del cubo ABC, sta alla solidità del cilindro DEFG, come il quadrato AR, al cerchio DE, perchè hanno eguali altezze; ma il quadrato AR, sta al cerchio DE, come 14 : 11; (*a*) Dunque il cubo ABC, sta al cilindro DEFG, come 14 : 11; Ma il cilindro DEFG, sta alla sfera HIKL, come 3 : 2 (*b*), e posto il cilindro 11, la sfera sarà $7\frac{1}{3}$; Dunque *ex æquo* il cubo ABC, starà alla sfera HIKL, come 14 : $7\frac{1}{3}$, ovvero come 42 : 22, oppure come 21 : 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

CO-

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Corol. prop. 68. de sphæ., & Cyl. Caravelli.*

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il cubo circonscritto alla sfera, stia alla sfera, nella ragione di 21 : 11; Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò il parallelepipedo MNC, circonscritto allo emisfero LHI, sta allo detto emisfero, come 21 : 11.

AVVERTIMENTO.

Le Volte a cupola si costruiscono di maniera, che la parte esterna prende la stessa figura di quella interna, e comecchè la grossezza della fabbrica nella cima si fa minore della grossezza nel piede, perciò la figura esterna di detta Volta sferica, non sarà uno emisfero, ma prenderà la figura della seconda specie delle Volte a cupola, onde trattando di quella si farà vedere, come si puole avere il valore della solidità di detta Volta sferica; Ma se la figura esterna fusse ancora uno emisfero per avere il valore della solidità di una simile Volta a cupola, devesi.

I. Moltiplicare il quadrato, il lato del quale sia il diametro del cerchio esteriore, per l'asse di detta cupola più la grossezza della cima, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 21, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III.

III. Si moltiplica il quadrato, il lato del quale sia il diametro del cerchio interno, base di detta colpa, per l'asse di essa, ed il prodotto si noti.

IV. Dopo li due numeri costanti 21, 11, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Finalmente la differenza de' detti quarti proporzionali sarà il valore della solidità di detta Volta a cupola.

Sia, per esempio, il diametro della base di una Volta a cupola di prima specie 20, l'asse di essa sarà 10, e sia la grossezza nel piede 3, e quella nella cima lo stesso 3. Il prodotto del quadrato, il lato del quale sarà 26, che è diametro del cerchio esteriore, per la somma dell'asse, e grossezza alla cima, che è 13, sarà 8788; Facciasi come 21, ad 11, così il detto prodotto 8788, al quarto proporzionale $4603\frac{5}{11}$, e si noti, Il prodotto poi del quadrato, il lato del quale è 20, diametro del cerchio interno, per l'asse di essa, che è 10., sarà 4000. Indi facciasi come 21, ad 11, così il detto prodotto 4000, al quarto proporzionale $2095\frac{5}{21}$. Finalmente dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, il residuo 2508, sarà il valore della solidità di detta Volta a cupola.

TEO-

TEOREMA II.

Il parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide depresso, sta alla solidità di detto sferoide nella ragione di

21 : 11.

Sia ABC, un parallelepipedo circonscritto allo sferoide depresso abcd. Dico, che il parallelepipedo ABC, stia allo sferoide depresso abcd, come 21 : 11. *Tav. VI. Fig. 49.*

Si concepisca la sfera agch, la quale abbia per diametro l'asse minore ac, del detto sferoide, e sia FGH, il cubo circonscritto alla detta sfera, il quale averà la stessa altezza col parallelepipedo ABC. La solidità dello sferoide depresso abcd, sta alla solidità della sfera agch, il diametro della quale è l'asse minore, come il quadrato dell'asse maggiore db, al quadrato dell'asse minore ac (*a*); Ma il quadrato dell'asse maggiore, si è il quadrato ABRP, ed il quadrato dell'asse minore, si è il quadrato FGIK; Dunque lo sferoide depresso abcd, sta alla sfera agch, come il quadrato ABRP, al quadrato FGIK; Ma il quadrato ABRP, sta al quadrato FGIK, come il parallelepidedo ABC, al cubo FGH

(a) *Teor. 3. Cap. 6.*

FGH (*a*); Dunque la sferoide depreſſo abcd, ſta alla sfera agch, come il parallelepipedo ABC, al cubo FGH, permutando, ed invertendo il parallelepipedo ABC, ſta allo sferoide depreſſo abcd, come il cubo FGH, alla sfera agch; ma il cubo FGH, ſta alla sfera agch, come 21 : 11 (*b*) Dunque il parallelepipedo ABC, ſta allo sferoide depreſſo abcd, come 21 : 11. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

COROLLARIO.

Eſſendoſi dimoſtrato, che il parallellepipedo circonſcritto allo sferoide depreſſo, ſtia allo ſteſſo sferoide, come 21 : 11, Onde anche le loro mettà ſaranno nella ſteſſa ragione, e perciò il parallelepipedo circonſcritto ad un ſemisferoide depreſſo, ſta allo ſteſſo ſemisferoide, come 21 : 11.

AVVERTIMENTO I.

Lo sferoide depreſſo è capace di due ſezioni per formare le Volte a Cupola, cioè una che paſſa per l'aſſe maggiore, alla quale gli ſia perpendicolare l'aſſe minore, ſiccome è il piano debf, ed eſſendo queſto un cerchio, ſarà

(a) *Prop.* 32. *lib.* 11.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 19.

rà lo ſemisferoide dab, l'anima della ſeconda ſpecie di Volta a Cupola; l'altra ſezione allorchè paſſa per l'aſſe minore, alla quale gli ſia perpendicolare l'aſſe maggiore, ſiccome è la ſezione aecf, ed eſſendo queſta una ellisſi, ed Ob, eſſendo eguale ad Oe, ſi averà col ſemisferoide abc, la terza ſpecie di Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Coſtruendoſi le Volte a Cupola con differenti groſſezze di fabbrica, cioè che la groſſezza della fabbrica nella cima, ſia minore di quella nel piede di eſſa, perciò la figura eſterna della Volta a Cupola di prima ſpecie, ſarà un ſemisferoide interſecato per un piano, il quale paſſi per l'aſſe maggiore, e gli ſia perpendicolare l'aſſe minore, che vale a dire, la detta figura eſterna della Volta a Cupola di prima ſpecie, ſarà la Volta a Cupola di ſeconda ſpecie. La Volta a Cupola di ſeconda ſpecie, averà la figura eſterna di ſimile natura. La Volta a Cupola di terza ſpecie, puole avere per figura eſterna tanto un ſemisferoide lungo interſecato per un piano, che paſſi per l'aſſe maggiore, e gli ſia perpendicolare l'aſſe minore, quanto un ſemiellittoide, ſempre il valore della ſolidità di dette Volte ſi averà ſecondo il metodo detto nell'Avvertimento Teorema I. del corrente Capitolo.

TEO-

TEOREMA III.

Il parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide lungo, sta alla solidità di detto sferoide, nella ragione di 21 : 11.

Tav. VI. Fig. 50.

Sia il parallelepipedo FGH, circonscritto allo sferoide lungo abcd. Dico, che il parallelepipedo FGH, sta allo sferoide abcd, come 21 : 11.

Si concepisca descritta la sfera ebQd, la quale abbia per diametro l'asse maggiore db, dello sferoide, e sia ABC, il cubo circonscritto ad essa. Essendo abcd, sferoide lungo, sarà GIHK, quadrato, ed il cubo ABC, ed il parallelepipedo FGH, averanno per commune altezza l'asse maggiore db, dello sferoide. La solidità della sfera ebQd, sta alla solidità dello sferoide abcd, come il quadrato dell'asse maggiore db, al quadrato dell'asse minore ac (*a*); Ma il quadrato dell'asse maggiore si è BRCP, ed il quadrato dell'asse minore si è GIHK; Dunque la sfera ebQd, sta allo sferoide abcd, come il quadrato BRCP, al quadrato GIHK; ma il quadrato BRCP, sta al quadrato GIHK, come il cubo ABC, al

(a) *Teor. 5. Cap. 6.*

al parallelepido FGH (*a*); Dunque la sfera ebQd, sta allo sferoide abcd, come il cubo ABC, al parallelepipedo FGH, e permutando, ed invertendo il cubo ABC, sta alla sfera ebQd, come il parallelepipedo FGH, allo sferoide abcd; ma il cubo ABC, sta alla sfera ebQd, come 21 : 11 (*b*); Dunque il parallelepipedo FGH, sta allo sferoide abcd, come 21 : 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il parallelepipedo circonscritto allo sferoide, sta allo sferoide medesimo, come 21 : 11; onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò il parallelepipedo circonscritto al semisferoide lungo, sta allo stesso semisferoide nella medesima ragione di 21 : 11.

AVVERTIMENTO.

Lo sferoide lungo è capace di due sezioni per avere l'anima delle Volte a cupola, una per l'asse minore ac, ed essendo la sezione agch, un cerchio, ed essendo Cb, maggiore di Ca, il semisferoide abc, sarà la quarta specie di Volta a cupola; l'altra per un piano,

(a) *Prop.* 32. *lib.* 11.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 19.

no, che passa per l'asse maggiore db, al quale gli sia perpendicolare l'asse minore, ed essendo la sezione dgbh, una ellissi; ed essendo Ca, eguale a Cg, semiasse della detta Ellissi, sarà lo semisferoide dab, la quinta specie di Volta a Cupola; ed in tutti gli due casi sempre il parallelepipedo circonscritto a ciascuna di dette Volte a Cupola, sta alla solidità dell' anima di essa come 21: 11.

TEOREMA IV.

Il parallelepipedo circonscritto ad uno ellittoide, sta alla solidità di detto ellittoide nella ragione di 21: 11.

Tav. IV. Fig. 51. Sia ABC, il parallelepipedo circonscritto allo ellittoide abcd. Dico, che il parallelepipedo ABC, sta alla solidità dello ellittoide, come 21: 11.

Si concepisca la sfera fbed, la quale abbia per diametro l'asse minore bd, del detto ellittoide, e sia FGH, il cubo circonscritto a detta sfera, il quale averà la stessa altezza col parallelepipedo ABC. La solidità dello ellittoide abcd, sta alla solidità della sfera fbed, come il rettangolo circonscritto alla ellissi, sezione nello ellittoide, che si fa per l'asse maggiore, e medio, al quadrato circonscritto al cerchio massimo della sfe-

ra

ra (*a*); ma il detto rettangolo si è MN, ovvero il rettangolo ABRP, ed il detto quadrato si è FGIK; Dunque lo ellittoide, abcd, sta alla sfera fbed, come il rettangolo ABRP, al quadrato FGIK, ma il rettangolo ABRP, sta al quadrato FGIK, come il parallelepipedo ABC, al cubo FGH (*b*); Dunque lo ellittoide abcd, sta alla sfera fbed, come il parallelepipedo ABC, al cubo FGH; e permutando, ed invertendo il parallelepipedo ABC, sta allo ellittoide abcd, come il cubo FGH, alla sfera fbed; ma il cubo FGH, sta alla sfera fbed, come 21 : 11 (*c*); Dunque il parallelepipedo ABC, sta allo ellittoide abcd, come 21 : 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che il parallelepipedo circonscritto allo ellittoide, sta al medesimo ellittoide, come 21 : 11; Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò il parallelepipedo circonscritto ad un semiellittoide, sta allo stesso semiellittoide, nella medesima ragione di 21 : 11.

(a) *Teor.* 7. *Cap.* 6.
(b) *Prop.* 32. *lib.* 11.
(c) *Teor.* 1. *Cap.* 19.

AVVERTIMENTO I.

Avendo lo ellittoide tre assi differenti, perciò lo semiellittoide di qualunque maniera sia diviso, passando la sezione per due de' suoi assi, e gli sia perpendicolare il terzo, il detto semiellittoide sarà la sesta specie di Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità di qualunque Volta a Cupola, di qualsivoglia specie ella sia, essendo data la lunghezza, e larghezza della base dell'anima di detta Volta, l'altezza di essa, la grossezza al piede, e quella alla cima, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza unita colle due grossezze nel piede, per la larghezza unita alle dette due grossezze, e per la somma dell'altezza più la grossezza alla cima, cioè calcolare il parallelepipedo circonscritto alla figura esterna, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 21, 11, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Si moltiplica indi la lunghezza, la larghezza, e l'altezza dell'anima di detta Volta a Cupola, ed il prodotto si noti.

IV. Dopo li due numeri costanti 21, 11, ed ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

V. Finalmente dal primo quarto proporzionale se ne tolga il secondo, il residuo sarà il valore della solidità della Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO III.

Nel genere delle Volte a Cupola descritte, si annoverano ancora quelle, che communemente vengono nominate a mezze scudelle, ovvero a Conche, e queste sono della stessa natura di quelle a cupola, differiscono soltanto, che siccome quelle coprono un edificio circolare, ovvero ellittico, queste a conca all' incontro coprono la fine di un tempio, la quale sia o semicircolare, o semiellittica; e comecchè queste tali sorte di Volte sono le mettà delle descritte Volte a cupola, perciò anche il parallelepipedo che ha per base il rettangolo circonscritto al semicerchio, ovvero alla semiellissi, e per altezza, l'altezza della conca sta alla solidità dell' anima di detta Volta nella ragione di 21: 11. Sicchè dunque per avere la solidità di tali sorte di Volte devesi prima riflettere, se la grossezza della fabbrica forma la parte convessa nell' esterno, in tal caso la solidità di essa si averà siccome si è detto in quella a cupola nell' Avvertimento precedente; Ma se la grossezza della fabbrica sale in quadro, allora dalla soſidità dell' intiero contenuto di fabbrica ſe ne tolga l'anima di detta conca, la ſolidità della quale ſi averà ſiccome ſi è detto.

AVVERTIMENTO IV.

Si formano le Volte a cupola ſopra piante di figura poligona, e queſte tali ſorte di Volte a cupola, ſi dicono poligone, e comecchè ogn' una di eſſe viene ad eſſere un ſemipoliedro, ſemipoliedro cavo, perciò per avere la ſolidità di eſſe, deveſi dal ſemipoliedro eſterno, toglierne quello interno, ed il reſiduo ſarà la ſolidità della Volta a cupola poligona; per avere la ſolidità del ſemipoliedro di qualunque ſpecie egli ſia, vedeſi nel Cap. III. in dove di eſſi ſi è parlato.

AVVERTIMENTO V.

Anche di queſte ſorte di Volte a Cupola poligona, ſi formano le Volte a conca, le quali ſi chiamaranno volte a conca poligone; e comecchè queſte ſono mettà di ſemipoliedri, onde la ſolidità di eſſe ſi averà, ſe la fabbrica eſterna forma la ſteſſa figura dell' interna, dalli due terzi del priſma che ha la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza della figura eſterna, ſe ne tolga gli due terzi del priſma che ha la medeſima baſe, e la ſteſſa altezza della figura interna; ma ſe la fabbrica eſter-

na

na salisse a piombo, in tal caso dall'intiero solido di fabbrica, se ne tolga l'anima della Volta a conca poligona, la quale sarà eguale alli due terzi del prisma che ha la medesima base, e la stessa altezza con detta Volta a conca di qualunque specie ella sia, siccome si è dimostrato nel Cap. III.

AVVERTIMENTO VI.

Tutte le descritte Volte à Cupola servono per coprire gli tempj; alle volte accade, che volendosi fabricare un tempio di figura poligona, il lato della quale sia determinato, per sapere il raggio del cerchio, nel quale devesi inscrivere una tal figura, senza del qual cerchio non si puole formare la detta figura, ho formata la seguente tavola, nella quale si vede il rapporto, che ha il raggio del cerchio con li lati delle figure ordinate inscritte in esso, del triangolo fino alla figura del numero di [illegible]. lati. Ho stimato dividere il raggio in parti 10000000, siccome è diviso nella trigonometria, il lato di ciascuna delle figure conterrà porzione di dette parti, siccome osservasi nella presente tavola.

numero de' lati	Parti che si contengono da ciascuno de' lati, posto il raggio 10000000.		
		18	3472963
		19	3291891
		20	3128689
		21	2980845
		22	2846296
		23	2723332
3	17320508	24	2610533
4	14142135	25	2506664
5	11755705	26	2410733
6	10000000	27	2321858
7	8677674	28	2239289
8	7653668	29	2162380
9	6840402	30	2090569
10	6180339	31	2023366
11	5634651	32	1960341
12	5176380	33	1901120
13	4786313	34	1845367
14	4450418	35	1792786
15	4158233	36	1743114
16	3907806	37	1696118
17	3674990	38	1651586

39	1609331	60	1046719
40	1569181	61	1029575
41	1530985	62	1012983
42	1494601	63	996917
43	1459908	64	981353
44	1426783	65	966275
45	1395129	66	951638
46	1364848	67	937445
47	1335852	68	923669
48	1308062	69	910291
49	1281404	70	897296
50	1255810	71	884666
51	1231218	72	872387
52	1207569	73	860444
53	1184812	74	848824
54	1162896	75	837513
55	1141776	76	826499
56	1121408	77	815771
57	1101755	78	805318
58	1082778	79	795130
59	1064443	80	785796

L'uso della descritta tavola si è, che se vogliasi descrivere un cerchio, nel quale vi si de-ſi deve inſcrivere una figura ordinata, il lato della quale ſia determinato, ſi averà il valore del raggio, facendo, come le parti, che contiene il lato di detta figura nella detta tavola deſcritto, alle parti che contiene il raggio, ch' è 10000000, così il dato lato, al quarto proporzionale, e queſto ſarà il valore del raggio. Si deve, per eſempio, ritrovare un raggio per deſcrivere un cerchio, nel quale vi ſi poſſa inſcrivere un decagono il lato del quale ſia palmi 20; ſi trovi nella deſcritta tavola il lato del decagono eſſere parti 6180339, onde ſi facci, come 6180339, a 10000000, così il dato lato 20, al quarto proporzionale 32. 36, queſto ſarà il raggio del detto cerchio.

CAP.

C A P. XX.

Della superficie delle varie specie di Volte a Cupola.

T E O R E M A I.

La superficie laterale del cubo circonscritto alla sfera, sta alla superficie sferica, come 14: 11.

SIa il cubo ABC, circonscritto alla sfera LHIK. Dico, che la superficie laterale del cubo ABC, stia alla superficie della sfera LHIK, come 14: 11. *Tav.V. Fig.48.*

La superficie laterale del cubo ABC, è quadrupla del quadrato AS, per essere la detta superficie quattro quadrati, ovvero quadrupla del quadrato MN; la superficie della sfera LHIK, è quadrupla del cerchio massimo LPIQ (*a*). Sicchè la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie sferica LHIK, come il quadrato MN, al cerchio LPIQ; Ma il quadrato MN, sta al cerchio LPIQ, come 14: 11 (*b*); Dunque la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie della sfera LHIK, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

CO-

(a) *Prop. 36. de sphæ., & Cyl. Caravelli.*
(b) *Prop. 14. dr circ. dim. Caravelli.*

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del cubo circonscritto alla sfera, stia alla superficie sferica, come 14: 11. Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno emisfero, stà alla superficie dell' emisfero medesimo, come 14:11.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della superficie di una Volta a Cupola di prima specie, cioè che sia un emisfero, devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo diametro, del cerchio, che gli serve di base, per l' altezza di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta a Cupola di prima specie.

Sia, per esempio, una Volta a Cupola di prima specie, il diametro della base della quale, sia 20, e l'altezza di essa deve essere 10. Il prodotto del quadruplo diametro, per l' altezza sarà 800. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 800, al quarto proporzionale $628\frac{4}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di prima specie.

TEO-

TEOREMA II.

La superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide depresso, la base del quale sia il quadrato circonscritto al cerchio, sezione per l'asse maggiore, sta alla superficie dello sferoide depresso, nella ragione di 14: 11.

SIa ABC, il parallelepipedo circonscritto allo sferoide depresso abcd. Dico, che la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello sferoide depresso abcd, come 14: 11. *Tav. VI. Fig.49.*

Si concepisca la sfera agch, la quale abbia per diametro l'asse minore ac, del detto sferoide, e sia FGH, il cubo circonscritto ad essa, il quale averà la stessa altezza col parallelepipedo ABC. La superficie dello sferoide abcd, sta alla superficie della sfera agch, come l'asse maggiore db, all'asse minore ac (*a*), ovvero come AB, ad FG; oppure come il perimetro del quadrato AR, al perimetro del quadrato FI, essendo questi quadrupli di quelli; ma il perimetro del quadrato AR, sta al perimetro del quadrato FI, come la superficie laterale del parallelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, avendo

(a) *Teor. 3. Cap. 7.*

do l'uno, e l'altro commune altezza; Dunque la ſuperficie dello sferoide abcd, ſta alla ſuperficie della sfera agch, come la ſuperficie laterale del parallelepipedo ABC, alla ſuperficie laterale del cubo FGH, e permutando, ed invertendo, la ſuperficie laterale del parallelepipedo ABC, ſta alla ſuperficie dello sferoide abcd, come la ſuperficie laterale del cubo FGH, alla ſupercfiie della sfera agch; ma la ſuperficie laterale del cubo FGH, ſta alla ſuperficie della sfera agch, come 14: 11 [a]; Dunque ancora la ſuperficie laterale del parallelepipedo ABC, ſta alla ſuperficie dello sferoide abcd, come 14: 11. Ciocchè doveaſi dimoſtrare.

COROLLARIO.

Eſſendoſi dimoſtrato, che la ſuperficie laterale del parallelepipedo ABC, ſta alla ſuperficie dello sferoide abcd, come 14: 11; Onde anche le loro mettà ſaranno nella ſteſſa ragione, e perciò la mettà della ſuperficie laterale del parallelepipedo ABC, ſta alla ſuperficie dello ſemisferoide, come 14: 11.

AVVERTIMENTO I.

Generandoſi la ſeconda ſpecie di Volta a Cu-

(a) *Teor.* 1. *Cap.* 20.

Cupola dalla sezione, che si fa in uno sferoide depresso per un piano, il quale passi per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore, siccome è il circolo debf, sarà lo semisferide dab, l'anima di detta Volta a Cupola, e comecchè nel Corol. Teor. precedende, si è dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo MC, stia alla superficie delle semisferoide dab, come 14: 11, perciò per avere il valore della superficie di una Volta a Cupola di seconda specie, essendo dato il diametro del cerchio, che gli serve di base, e data l'altezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo diametro, per l'altezza di detta Volta, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di seconda specie.

Sia, per esempio, il diametro del cerchio, che gli serve di base 20, l'altezza di essa 6; il prodotto del quadruplo diametro, per l'altezza sarà 480. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 480, al quarto proporzionale $377\frac{1}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Si genera all' incontro la terza specie di Volta a Cupola, dalla sezione di uno sferoi-

de

de depresso, la quale passa per l'asse minore, e gli sia perpendicolare l'asse maggiore, siccome è l'ellissi aecf, sarà lo semisferoide abc, l'anima della terza specie di Volta a Cupola. E comecchè nel Coroll. Teor. precedente si è dimostrato che la mettà della superficie laterale del parallelepipedo ABC, stia alla superficie, dello semisferoide abc, come 14: 11, e la mettà della superficie laterale del parallelepipedo ABC, si è la somma de' rettangoli DS, BC, RE, perciò per avere il valore della superficie di una Volta a Cupola di terza specie, essendo dato l'asse maggiore, e l'asse minore della ellissi, che gli serve di base, e l'altezza di detta Volta, la quale dovrà essere la mettà dell'asse maggiore, devesi.

I. Moltiplicare il duplo asse meggiore, per l'asse minore, della ellissi, che gli serve di base, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della Volta a Cupola di terza specie.

Sia, per esempio, l'asse maggiore 20, l'asse minore 12, della ellissi, ch'è base di una Volta a Cupola di terza specie, l'altezza di essa dovrà essere 10; il prodotto del duplo asse maggiore, per l'asse minore sarà 480. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 480, al quarto proporzionale $377\frac{1}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di terza specie. TEO-

TEOREMA III.

La superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide lungo, l'altezza del quale sia l'asse maggiore, sta alla superficie dello stesso sferoide lungo nella ragione di 14: 11.

SIa il parallelepipedo FGH, circonscritto alle sferoide lungo abcd. Dico, che la superficie laterale del perallelepipedo FGH, per lungo preso, stia alla superficie dello sferoide abcd, come 14: 11. *Tav. VI. Fig.* 50.

Si concepisca la sfera ebQd, la quale abbia per diametro l'asse maggiore db, e sia ABC, il cubo circonscritto ad essa, il quale averà la stessa altezza del parallelepipedo FGH. Essendo la superficie della sfera ebQd, alla superficie dello sferoide abcd, come l'asse maggiore db, all'asse minore ac (*a*), ovvero come BP, a GK, oppure come il perimetro del quadrato BRCP, al perimetro del quadrato GIHK; ma il perimetro del quadrato BRCP, sta al perimetro del quadrato GIHK, come la superficie laterale del cubo ABC, alla superficie laterale del parallelepipedo FGH, avendo l'uno, e l'altro una commune altezza; Dunque la superficie della sfera ebQd, sta alla su-

(a) *Teor.* 5. *Cap.* 7.

superficie dello sferoide abcd, come la superficie laterale del cubo ABC, alla superficie laterale del parallelepipedo FGH; e permutando, ed invertendo la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie della sfera ebQd, come la superficie laterale del parallelepipedo FGH, alla superficie dello sferoide abcd; Ma la superficie laterale del cubo ABC, sta alla superficie della sfera, come 14: 11 (*a*); Dunque la superficie laterale del parallelepipedo FGH, sta alla superficie dello sferoide abcd, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto allo sferoide, stia alla superficie dello stesso sferoide, come 14: 11. Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la mettà della superficie laterale del parallelepipedo circonscritto ad uno sferoide lungo, starà alla superficie del semisferoide, come 14: 11.

AVVERTIMENTO I.

Generandosi la quarta specie di Volta a Cupola, dalla sezione che si fa in uno sferoide lungo, per l'asse minore alla quale gli sia

(a) *Teor.* 1. *Cap.* 20.

sia perpendicolare l'asse maggiore, ed essendo questa sezione il cerchio agch, sarà il semisferoide abc, la quarta specie di Volta a Cupola; e comecchè nel Corol. Teor. precedente si è dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo HGD, essendo questa la mettà della superficie laterale del parallelepipedo FGH, sta alla superficie del semisferoide abc, come 14: 11; perciò per avere il valore della superficie della Volta a Cupola di quarta specie, essendo dato il diametro del cerchio, che gli serve di base, e l'altezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo diametro del cerchio, che gli serve di base, per l'altezza di essa, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Volta a Cupola di quarta specie.

Sia, per esempio, data una Volta a Cupola di quarta specie, il diametro del cerchio, che gli serve di base sia 20, e l'altezza sia 15; il prodotto del quadruplo diametro per l'altezza sarà 1200. Indi facciasi, come 14, ad 11, così 1200, al quarto proporzionale $942\frac{6}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Si genera la quinta specie di Volta a Cupola dalla sezione, che si fa in uno sferoide lungo, per un piano il quale passa per l'asse maggiore, e gli sia perpendicolare l'asse minore, siccome è l'ellissi dgbh, sarà il semisferoide dab, l'anima della quinta specie di Volta a Cupola; e comecchè nel Corol. del Teor. precedente si è dimostrato, che la mettà della superficie laterale del parallelepipedo FGH, sta alla superficie dello semisferoide dab, come 14: 11, e la mettà della superficie laterale del detto parallelepipedo FGH, si è il quadruplo rettangolo DK; perciò per avere il valore della superficie della quinta specie di Volta a Cupola, essendo dati l'asse maggiore, e l'asse minore della ellissi, che gli serve di base, e l'altezza di detta Volta, la quale sarà eguale al semiasse minore della ellissi, che gli serve di base, devesi.

I. Moltiplicare il quadruplo asse minore della ellissi, che gli serve di base, per il semiasse maggiore della stessa ellissi, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto, si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola di quinta specie.

Sia, per esempio, data una Volta a Cupola la di quinta ſpecie l'aſſe maggiore della elliſſi che gli ſerve di baſe ſia 30, e l'aſſe minore 24, l'altezza di detta Volta ſarà 12. Il prodotto del quadruplo aſſe minore, per il ſemiaſſe maggiore ſarà 1440. Indi facciaſi, come 14, ad 11, così 1440, al quarto proporzionale $1131\frac{3}{7}$, queſto ſarà il valore della ſuperficie della data Volta a Cupola.

TEOREMA IV.

La ſuperficie laterale del parallelepipedo circoſcritto ad uno ellittoide, ſta alla ſuperficie dello ſteſſo ellittoide, nella ragione di 14: 11.

Sia ABC, il parallelepipedo circonſcritto allo ellittoide abcd, il quale abbia per altezza l'aſſe minore bd. Dico, che la ſuperficie laterale del parallelepipedo ABC, ſta alla ſuperficie dello ellittoide abcd, come 14: 11. *Tav. VI. Fig. 51.*

Si concepiſca la sfera bedf, la quale abbia per diametro l'aſſe minore, e ſia FGH, il cubo circonſcritto ad eſſa, il quale averà per altezza l'aſſe minore bd, commune col parallelepipedo ABC; l'aſſe medio ſia gh, e l'aſſe maggiore ac. La ſuperficie dello ellittoide abcd, ſta alla ſuperficie della sfera bedf, come la ſomma dell'aſſe maggiore, e minore della elliſſi, ſezione la quale paſſa per l'aſſe maggiore, e medio, al duplo l'asse minore [a]; ovvero come la somma di ac, e gh, al duplo asse minore bd; oppure come il perimetro del rettangolo ABRP, al perimetro del quadrato FGIK, essendo questi dupli di quelli; Ma il perimetro del rettangolo ABRP, sta al perimetro del quadrato FGIK, come la superficie laterale del parallelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, avendo eguali altezza; Dunque la superficie dello ellittoide abcd, sta alla superficie della sfera bedf, come la superficie laterale del parallelepipedo ABC, alla superficie laterale del cubo FGH, e permutando, ed invertendo, la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello ellittoide abcd, come la superficie laterale del cubo FGH, alla superficie della sfera bedf; ma la superficie laterale del cubo FGH, sta alla superficie della sfera bedf, come 14: 11 (b); Dunque ancora la superficie laterale del parallelepipedo ABC, sta alla superficie dello ellittoide abcd, come 14: 11. Ciocchè doveasi dimostrare.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che la superficie laterale del parallelepipedo circonscritto allo ellit-

---

(a) *Teor.* 11. *Cap.* 7.
(b) *Teor.* 1. *Cap.* 20.

littoide, il quale ha per altezza l'asse minore, stia alla superficie dello stesso ellittoide, come 14: 11. Onde anche le loro mettà saranno nella stessa ragione, e perciò la mettà della superficie laterale del parallelepipedo circonscritto allo ellittoide, cioè il prodotto della summa dell' asse maggiore, e medio, per il semiasse minore, stia alla superficie del semiellittoide, come 14: 11.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè dunque per avere la superficie della sesta specie di Volta a Cupola, essendo date le tre dimensioni di essa, devesi.

I. Moltiplicare la somma dell' asse maggiore, e medio, per l'asse minore, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 14, 11, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della sesta specie di Volta a Cupola.

Sia data, per esempio, una Volta a Cupola di sesta specie, la quale sia lunga 30, larga 22, ed alta 14; l'asse maggiore del semiellittoide sarà 30, l'asse medio sarà 28, ed il minore 22. Onde il prodotto della summa dell' asse maggiore, e medio, per il semiasse minore, sarà 1276. Indi facciasi, come 14, ad 11; così 1276, al quarto proporzionale

1002 $\frac{4}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Volta a Cupola.

AVVERTIMENTO II.

Per avere il valore della superficie esterna delle Volte a Cupola, devesi prima riflettere di quale specie ella sia, ed indi si averà il suo valore facendo uso delle regole dette in ciascuna delle descritte specie; cioè se la figura esteriore fusse l' anima di una Volta di terza specie, si averà la superficie esterna facendo uso della regola descritta nell' Avvert. II. Teor. II.. del Corrente Capitolo, e così ancora se fusse di altra specie.

AVVERTIMENTO III.

Per avere poi il valore della superficie interna, ovvero esterna di una Volta a Conca, siccome queste tali sorte di Volte sono le mettà delle descritte Volte a Cupola, così si averà il valore della superficie, conoscendo prima di quale specie sia, ed adattando quella regola espressa in ciascuna delle dette specie, ponendoci l'altra mettà, e calcolandola come fusse una Volta a Cupola, prendendone la mettà, sarà il valore della superficie di detta Volta a conca, o interna, o esterna, secondo quale di essa si vuole.

Sia data, per esempio, una Volta a conca, ca, la quale sia di larghezza 24, di fondato 15, e di altezza 12; ponendosi l'altra mettà dall'altra parte, diverrà una Volta a Cupola di lunghezza 30, di larghezza 24, e di altezza 12, la quale sarà di quinta specie; e comecchè la superficie di detta Volta, siccome si è detto nell'Avvert. II. Teor. III. del corrente Capitolo si è $1131\frac{3}{7}$, perciò la mettà di essa, che è $565\frac{5}{7}$ sarà il valore della superficie di detta mezza scudella, o sia Volta a conca.

AVVERTIMENTO IV.

Per avere il valore della superficie di qualunque Volta a Cupola poligona, si moltiplica il perimetro della figura, che gli serve di base per l'altezza di detta Volta, ed il prodotto sarà la superficie di essa; la ragione si è, che siccome queste Volte a Cupola sono semipoliedri di qualunque specie eglino siano, sempre le di loro superficie, sono eguali a quelle del prisma, che hanno la medesima base, e la stessa altezza.

Di una tal natura di Volte si formano ancora delle Volte a conca, la superficie di ciascuna di esse, si averà moltiplicando il perimetro, che racchiude la detta Volta a conca, il quale viene ad essere semiperimetro della base del semipoliedro, perfezzionandosi la detta Volta a conca, per l'altezza di essa; per essere la Volta a conca mettà del semipoliedro, ovvero mettà della Volta a Cupola poligona.

CAP. XXI.

Della solidità delle varie specie di Fescine.

DEFINIZIONI.

Tav. VI. Fig. 52. I. PEr *Fescina* s' intende quella fabbrica fatta nelli quattro angoli di una pianta quadrata, o rettangola, allorchè sopra detta pianta, vi si deve eriggere una fabbrica circolare, o ellittica.

Sia ABCD, un quadrato inscritto nel cerchio abcd, il quale sia sezione massima di uno emisfero, sopra del qual quadrato si alzi il parallelepipedo ABN, il quale abbia per altezza la mettà del lato AB, del detto quadrato, questo parallelepipedo taglierà dall' emisfero quattro semisegmenti laterali, ed un segmento verticale, il solido della piramide mistilinea FOHB, si chiamerà *Fescina* della cupola.

II. Se la *Fescina* è terminata ne' laterali da archi semicircolari, come sono AFB, BHC, si chiamarà *Fescina sferica*. Se gli detti archi uno è semicircolare, e l' altro semiellittico, ovvero tutti due sono semiellittici, allora la Fescina si denominarà *ellittica*.

Tav. VI. Fig. 53. III. Se la Fescina non termina in un punto, allora si dirà *Fescina tronca*, siccome è la Fescina BRFEDC.

IV.

IV. *Lunghezza*, e *larghezza* della Fescina si diranno le due rette FO, OH, e *l'altezza* la retta OB.

AVVERTIMENTO.

Dalla generazione di detto solido è facile il comprendere, che ciascuna Fescina sia eguale ad una delle quattro incosciature della Volta a vela senza reguglio. Ma il parallelepipedo, che ha la medesima base, e la stessa altezza colle quattro incosciature della Volta a vela, senza reguglio, sta alla solidità delle dette quattro incosciature, come 5250: 179 (a). *Tav. VI. Fig.* 52.
Dunque il parallelepipedo ABN, sta alla somma delle quattro Fescine FOHB, HNKC, KRMD, MSFA, come 5250: 179; Onde la quarta parte del parallelepipedo, sta ad una Fescina, nella stessa ragione; perciò il parallelepipedo EBGQO, sta alla Fescina FOHB, come 5250: 179. Sicchè dunque per avere il valore della solidità della Fescina di qualunque specie ella sia, o sferica, o ellittica, essendo data la lunghezza, la larghezza, e l'altezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare la lunghezza, per la larghezza, e per l'altezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 5250, 179, ed il detto prodotto, si trovi un quarto

(a) *Corol. Avvert. Teor. 8. Cap. 6.*

to proporzionale, questo sarà il valore della solidità di qualunque specie di Fescina.

Sia data, per esempio, una Fescina sferica, ed essendo tale tutte tre le dimensioni si fanno eguali, e sia una di queste dimensioni 15; il prodotto della lunghezza, larghezza, ed altezza, sarà il cubo di 15, il quale sarà 3375. Indi facciasi come 5250, a 179, così 3375, al quarto proporzionale $115\frac{3}{4}$, questo sarà il valore della solidità di detta Fescina sferica.

PROBLEMA.

Trovare una formola generale per avere il valore della solidità di una fescina sferica tronca.

Tav. VI. Fig. 53. SIa SDIT, un quadrato, il quale interseca il cerchio NLn, sezione massima di uno Emisfero, nelli punti A, C, E, H, K, &c., e si concepisca sopra detto quadrato innalzato il parallelepipedo SDM, il quale abbia per altezza la BP, mettà della corda AC, questo parallelepipedo tagliarà dall' emisfero quattro semisegmenti laterali, ed un segmento verticale BFfb, il solido BRFEDC, sarà la fescina tronca. Si vuole pertanto trovare una formola generale per avere la solidità di detta Fescina tronca.

Sia perciò il raggio ON $= a$; sarà il diametro nN $= 2a$; e sia PC $=$ EG $=$

BP

BP $=$ FG $= b$; e così CD $=$ DE $= c$. Sarà OP $=$ GD $= b+c$; Onde sarà PN $= a - b - c$.

Il cerchio, che ha per diametro nN, sarà $\frac{11}{14}$ nN^2 (*a*) $= \frac{11}{14} \times 4a^2 = \frac{22}{7} a^2$; e la superficie dell' emisfero sarà il duplo di detto cerchio, ch'è $\frac{44}{7} a^2$ (*b*) la quale moltiplicandola per $\frac{1}{3} a$, il prodotto $\frac{44}{21} a^3$, sarà la solidità di detto emisfero (*c*) la quarta parte di essa aNL, sarà $\frac{11}{21} a^3 = A$.

Inoltre essendo Oa $= a$; OQ $= b$; eBQ $=$ GD $= b+c$; la periferia del cerchio, che ha per raggio ON sarà $\frac{44}{7} a$ (*d*); la quale moltiplicandola per aQ $= a - b$, il prodotto $\frac{44a^2 - 44ab}{7}$, sarà la superficie del segmento bfFBa (*e*); e moltiplicandola per $\frac{1}{3} a$, il prodotto $\frac{44a^3 - 44a^2b}{21}$, sarà il settore sferico, corrispondente a detto segmento (*f*). Il cerchio all' incontro, che ha per raggio BQ, sarà $\frac{11}{14} \times 4\overline{BQ}^2 = \frac{11}{14} (2b+2c)^2 = \frac{22b^2 + 44bc + 22c^2}{7}$, che moltiplicando per $\frac{1}{3}$ OQ

(a) *Prop. 14. de circ. dim. Caravelli.*
(b) *Prop. 36. de sphæ. & Cyl. Caravelli.*
(c) *Prop. 56. de sphæ. & Cyl. Caravelli.*
(d) *Teor. 1. Cap. 2.*
(e) *Prop. 49. de sphæ., & Cyl. Caravelli.*
(f) *Prop. 57. de sphæ, & Cyl. Caravelli.*

$QO = \frac{b}{3}$, il prodotto $\frac{22b^3 + 44b^2c + 22c^2b}{21}$, sarà il cono, che ha per base il cerchio BFfb, e per altezza QO. Onde la solidità del segmento bfFBa sarà $\frac{44a^3 - 44a^2b - 22b^3 - 44b^2c - 22c^2b}{21}$, e la sua quarta parte BaFQ, sarà $\frac{22a^3 - 22a^2b - 11b^3 - 22b^2c - 11c^2b}{42}$ $=$ B. Ciò posto, essendo $nP = nN - PN$ $= 2a - a + b + c = a + b + c$, ed $nP + nO = 2a + b + c$; e sarà $AC = 2b$ Sicchè sarà il cerchio, che ha per diametro $AC = \frac{11}{14} \overline{AC}^2 = \frac{11}{14} \times 4b^2 = \frac{22}{7} b^2$; il quale moltiplicandolo per $\frac{1}{3}$ PN, il prodotto $\frac{22ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{21}$, sarà il cono, che ha per base il cerchio, il diametro del quale sia AC, ed abbia per altezza PN. Indi facciasi come $a+b+c : 2a+b+c = \frac{22ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{21}$, al quarto proporzionale $\frac{44ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{21}$, il quale sarà il segmento sferico corrispondente al segmento ANC (*a*).

On-

(a) *Corol. Teor.* 1. *Cap.* 13.

Onde il segmento, che saranno le due porzioni BNC, FLE, sarà $\frac{22ab^2 - 11b^3 - 11b^2c}{21} = C$ sicchè dunque la porzione sferica OPCEGFQB, sarà $A - B - C = \frac{11}{21}a^3 - \frac{22a^3 + 22a^2b + 11b^3 + 22b^2c + 11c^2b}{42} - \frac{22ab^2 - 11b^3 - 11b^2c}{21} = \frac{22a^3 - 22a^3 + 22a^2b + 11b^3 + 22b^2c + 11c^2b}{42} - \frac{44ab^2 - 22b^3 - 22b^2c}{42} = \frac{22a^2b + 33b^3 + 44b^2c + 11c^2b}{42} - \frac{22ab^2}{21} = \frac{11b}{42}(2a^2 + 3b^2 + 4bc + c^2) - \frac{11b}{21}(2ab)$. Ciocchè doveasi cercare.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della solidità di una Fescina tronca, essendo nota l'altezza di essa, la larghezza DC, del piede, ed il raggio ON, il quale si averà prendendo la mettà della diagonale AK, devesi.

I. Unire il duplo quadrato del raggio; più il triplo quadrato dell' altezza; più il quadruplo prodotto fatto dall' altezza, e dalla larghezza del piede; più il quadrato della medesima larghezza, e la somma si noti.

II.

II. Dopo il numero costante 42, undeci volte l'altezza, e la detta somma, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

III. Dopo il numero costante 21, undeci volte l'altezza, ed il duplo prodotto fatto dal raggio, e dall' altezza, si trovi un quarto proporzionale, e si noti.

IV. Finalmente la differenza de' detti quarti proporzionali sarà il valore della solidità della Fescina tronca.

Sia data, per esempio, una Fescina la di cui altezza b, sia 12; il raggio $a = 20$, e la larghezza del piede $c = 3$. Si unisca il duplo quadrato del raggio, che sarà 800; più il triplo quadrato dell' altezza, che sarà 432; più il quadruplo prodotto fatto dall' altezza, e dalla larghezza del piede, che sarà 144, più il quadrato della stessa larghezza, che sarà 9; la somma 1385. si noti. Dopo il numero costante 42; undeci volte l'altezza, che sarà 132, e la detta somma 1385, si trovi il quarto proporzionale $4352\frac{6}{7}$. Inoltre dopo il numero costante 21, undeci volte l'altezza, che sarà 132, ed il duplo rettangolo fatto dal raggio, e dalla altezza, che sarà 480, si trovi il quarto proporzionale $3017\frac{6}{7}$. Indi dal primo quarto proporzionale, se ne tolga il secondo, il residuo $1335\frac{5}{7}$, sarà il valore della solidità di detta Fescina tronca.

CAP.

C A P. XXII.

Della superficie delle varie specie di Fescine.

AVVERTIMENTO.

SI è distinta la Fescina in sferica, ed ellittica, e si è fatto vedere nel Capitolo precedente, che ciascuna di esse sia eguale ad una delle quattro incasciature della Volta a vela senza reguglio; Onde per avere la superficie della Fescina sferica è necessario ritrovare la ragion, che passa tra la superficie de' due rettangoli che circondano la detta Fescina, e la superficie di essa.

PROBLEMA I.

Trovare la ragion che passa tra la somma de' due rettangoli FEBO, OBGH, e la superficie FHB, della Fescina. *Tav. VI. Fig. 52.*

Sia AB $= a$; sarà la somma della superficie de' quattro triangoli sferici FHB, HKC, KMD, MFA $= \frac{33}{7} a^2 \sqrt{2} - \frac{44}{7} a^2$ (a); Onde la superficie del solo triangolo sferico FHB, ovvero della Fescina sferica, sarà $\frac{33}{28} a^2 \sqrt{2} - \frac{11}{7} a^2$. Inoltre la somma delle superficie de' rettangoli FEBO, OBGH, sarà a^2.

(a) *Probl. 1. Cap. 7.*

$\frac{a^2}{2}$. Sicchè la somma della superficie de' rettangoli FEBO, OBGH, sta alla superficie FHB, della Fescina, come $\frac{a^2}{2} : \frac{33}{28} a^2 \sqrt{2} - \frac{11}{7} a^2$, ovvero come $14 a^2 : 33 a^2 \sqrt{2} - 44 a^2$; e dividendo tutti gli termini per a^2; si averà, che la somma delle superficie de' due rettangoli, che racchiudono la Fescina, stia alla superficie di detta Fescina, come $14 : 33 \sqrt{2} - 44$, ovvero come $14 : 2.662$, oppure come $14000 : 2662$, ch'è lo stesso di $7000 : 1331$. Ciocchè si andava cercando.

AVVERTIMENTO I.

Sicchè per avere il valore della superficie di una Fescina sferica, essendo data la larghezza di essa, devesi.

I. Moltiplicare la dupla larghezza, per l'altezza, la quale sarà eguale alla detta larghezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie di detta Fescina.

Sia data, per esempio, una Fescina, la larghezza della quale sia 15, tale sarà la lunghezza, e l'altezza. Il prodotto della dupla larghezza, per l'altezza sarà 450. Indi facciasi, come 7000, a 1331, così 450, al quar-

quarto proporzionale $85 \frac{70}{140}$, questo sarà il valore della superficie di detta Fescina.

Avvertimento II.

Per avere il valore della superficie delle Fescine ellittiche, devesi fare la stessa operazione di quella sferica, poichè gli rettangoli, che racchiudono le Fescine sferiche, della sfera inscritta ad uno sferoide, o ad uno ellittoide, stanno agli rettangoli, che racchiudono le Fescine ellittiche corrispondenti, nella stessa ragione della superficie della Fescina sferica, a quella ellittica corrispondente, siccome si è dimostrato nello intiero Cap. VII. Sicchè dunque per avere il valore della superficie di qualunque Fescina, o sferica, o ellittica, di qualsivoglia specie siano, essendo data la lunghezza, larghezza, e l'altezza, devesi.

I. Moltiplicare la somma della lunghezza, e larghezza di essa, per l'altezza, ed il prodotto si noti.

II. Dopo li due numeri costanti 7000, 1331, ed il detto prodotto si trovi un quarto proporzionale, questo sarà il valore della superficie della Fescina di qualunque specie ella sia.

PROBLEMA II.

Trovare una formola generale per avere il valore della superficie della Fescina tronca sferica.

Tav. VI. Fig. 53.

S' Intenda fatta la stessa preparazione di quella del Problema Cap. XXI; sarà la superficie dell' emisfero $= \frac{44}{7} a^2$, siccome si è detto nell' enunciato problema; Onde il triangolo sferico NaL, ch'è la quarta parte dell' emisfero, sarà $\frac{11}{7} a^2 = A$.

La superficie del segmento verticale BFfba, siccome si è detto nel citato problema, si è $\frac{44 a^2 - 44 ab}{7}$, onde la sua quarta parte, che è il triangolo sferico BaF, sarà $\frac{11 a^2 - 11 ab}{7} = B$.

Inoltre la periferia del cerchio, che ha per raggio ON, sarà $\frac{44}{7} a$, per il detto problema, onde la semiperiferia sarà $\frac{22}{7} a$, la quale moltiplicandola per PN, il prodotto $\frac{22a^2 - 22ab - 22ac}{7} = C$, sarà la superficie del semisegmento ABCN (a), ovvero sarà la somma delle superficie delle due porzioni BNC,

(a) *Prop.* 49. *de sphae.*, *&* *Cyl. Caravelli.*

BNC, FEL, delli ſemiſegmenti.

Sicchè la ſuperficie BFEC, della Feſcina tronca, ſarà $A - B - C = \frac{11}{7}a^2 -$

$$\frac{11a^2 + 11ab}{7} - \frac{22a^2 + 22ab + 22ac}{7} =$$

$$\frac{33ab + 22ac - 22a^2}{7} = \frac{11a(3b + 2c - 2a)}{7}.$$

Ciocchè ſi andava cercando.

AVVERTIMENTO.

Sicchè dunque per avere il valore della ſuperficie di una Feſcina tronca, eſſendo data l'altezza, il raggio, o ſia la mettà della diagonale, e la larghezza nel piede, deveſi.

I. Sommare la tripla altezza, e la dupla larghezza del piede, e da queſta, ſe ne deve togliere il duplo raggio, o ſia la diagonale, ed il reſiduo ſi noti.

II. Dopo il numero coſtante 7, undeci volte il detto raggio, ed il detto reſiduo, ſi trovi un quarto proporzionale, queſto ſarà il valore della ſuperficie della Feſcina tronca.

Sia data, per eſempio, una Feſcina l'altezza della quale ſia 12; il raggio 20, e la larghezza del piede 3. La ſomma della tripla altezza, e la dupla larghezza del piede, ſarà 42, da queſta ſe ne tolga il duplo raggio, ch'è 40, il reſiduo ſarà 2. Indi facciaſi, come 7, ad undeci volte il detto raggio ch'è ch'è 220, così il detto residuo 2, al quarto proporzionale $63\frac{6}{7}$, questo sarà il valore della superficie di detta Fescina tronca.

IL FINE.

INDICE

Delle cose prattiche.

Della solidità della Volta a botte.

Della superficie della Volta a botte.

Della Volta Poliedrica.

Della ſolidità della Volta a Gavetta.

Della ſuperficie della Volta a Gavetta.

Della ſolidità della Volta a vela ſenza reguglio.

Della

Della solidità della Volta a crociera col reguglio.

Della superficie della Volta a crociera col reguglio.

Della ſolidità dell' anima della Lunetta ſenza reguglio.

Della ſuperficie delle Lunette ſenza reguglio.

Della ſolidità delle Lunette col reguglio.

Della superficie della Lunetta col reguglio.

Della solidità della Volta a Cupola.

Della superficie della Volta a Cupola.

Modo

Della solidità delle Fescine.

Della superficie delle Fescine.

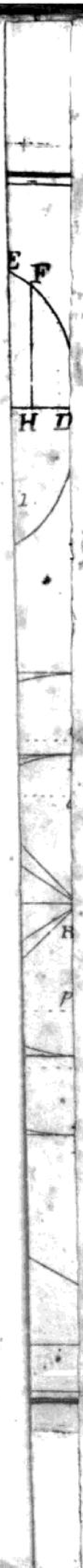
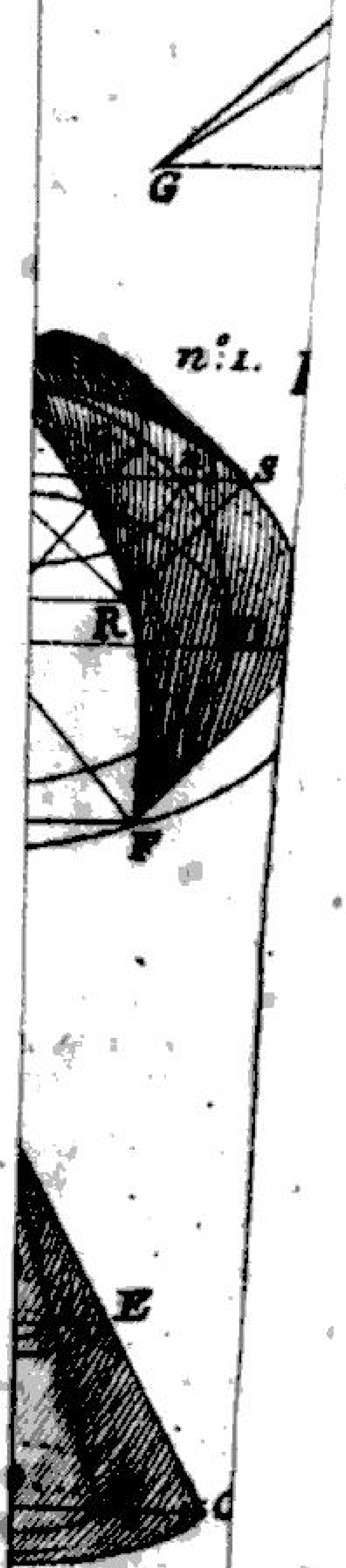
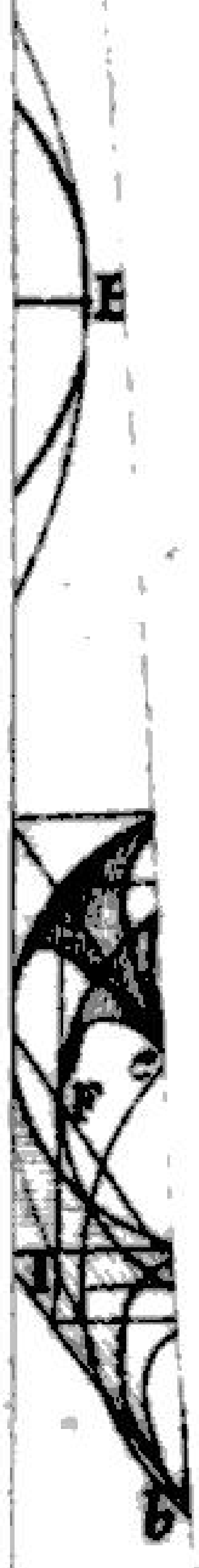

E
F
H
D
R
P

Fig. 11.





Tav. V.

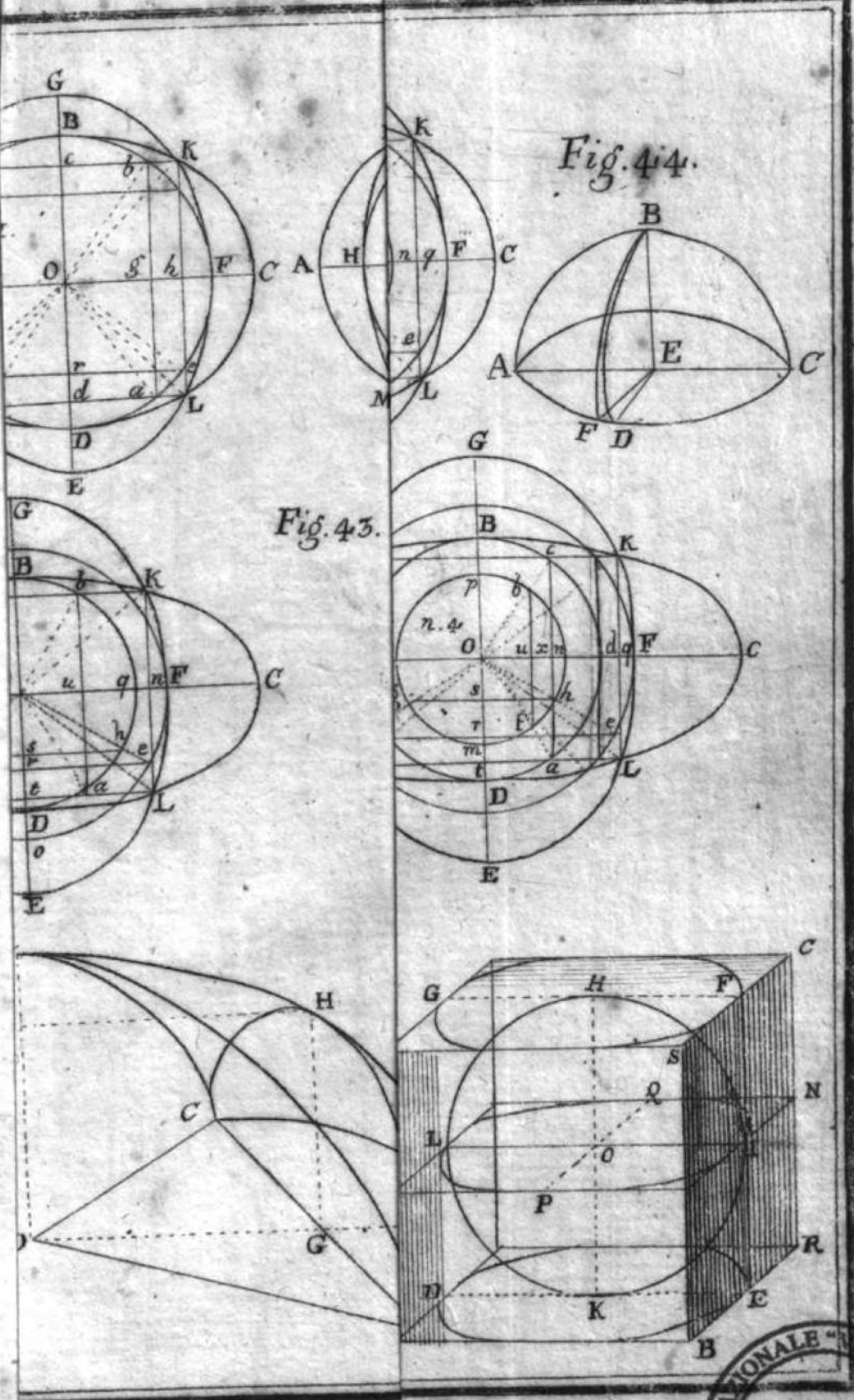


Fig. 44.

Fig. 43.

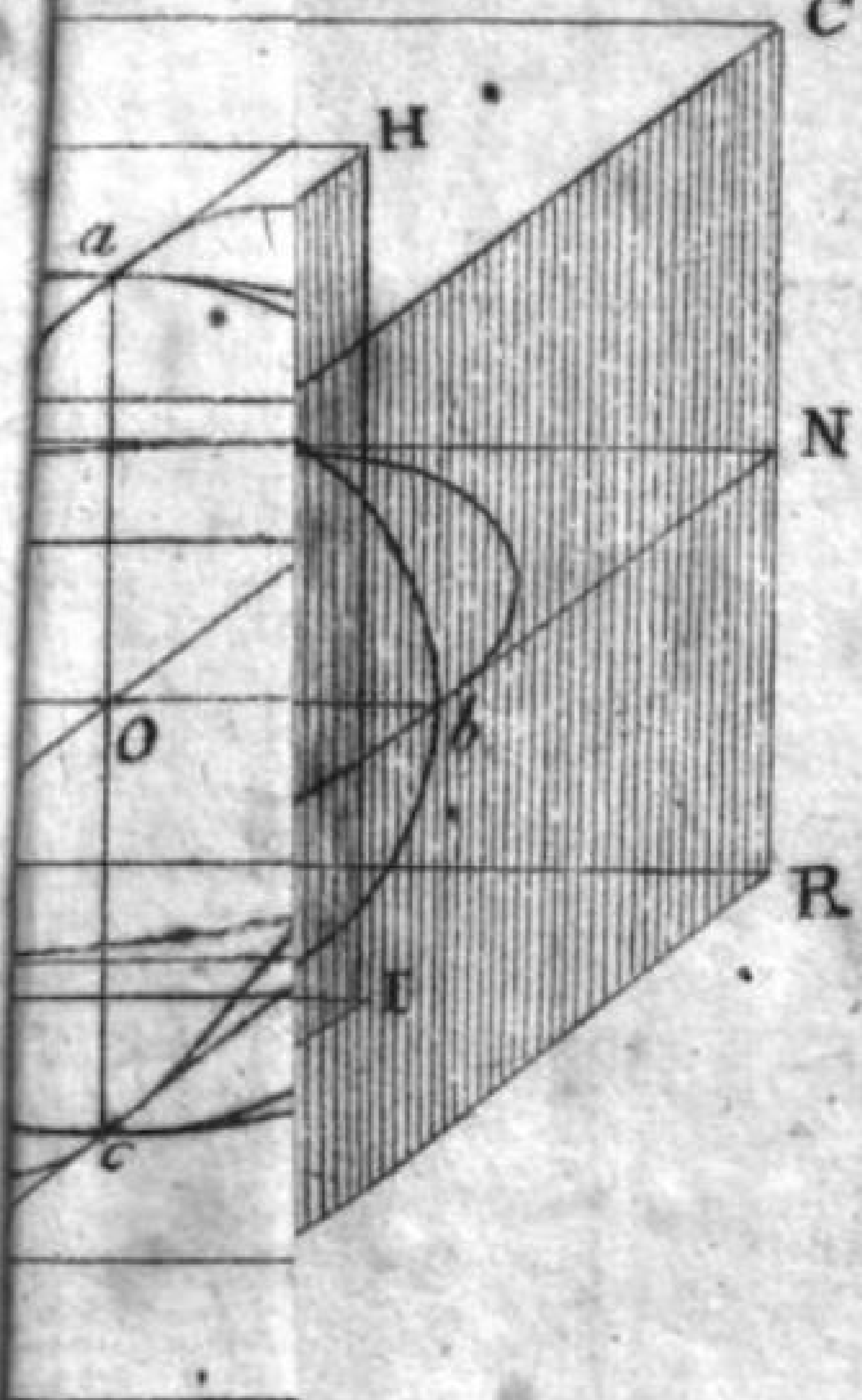
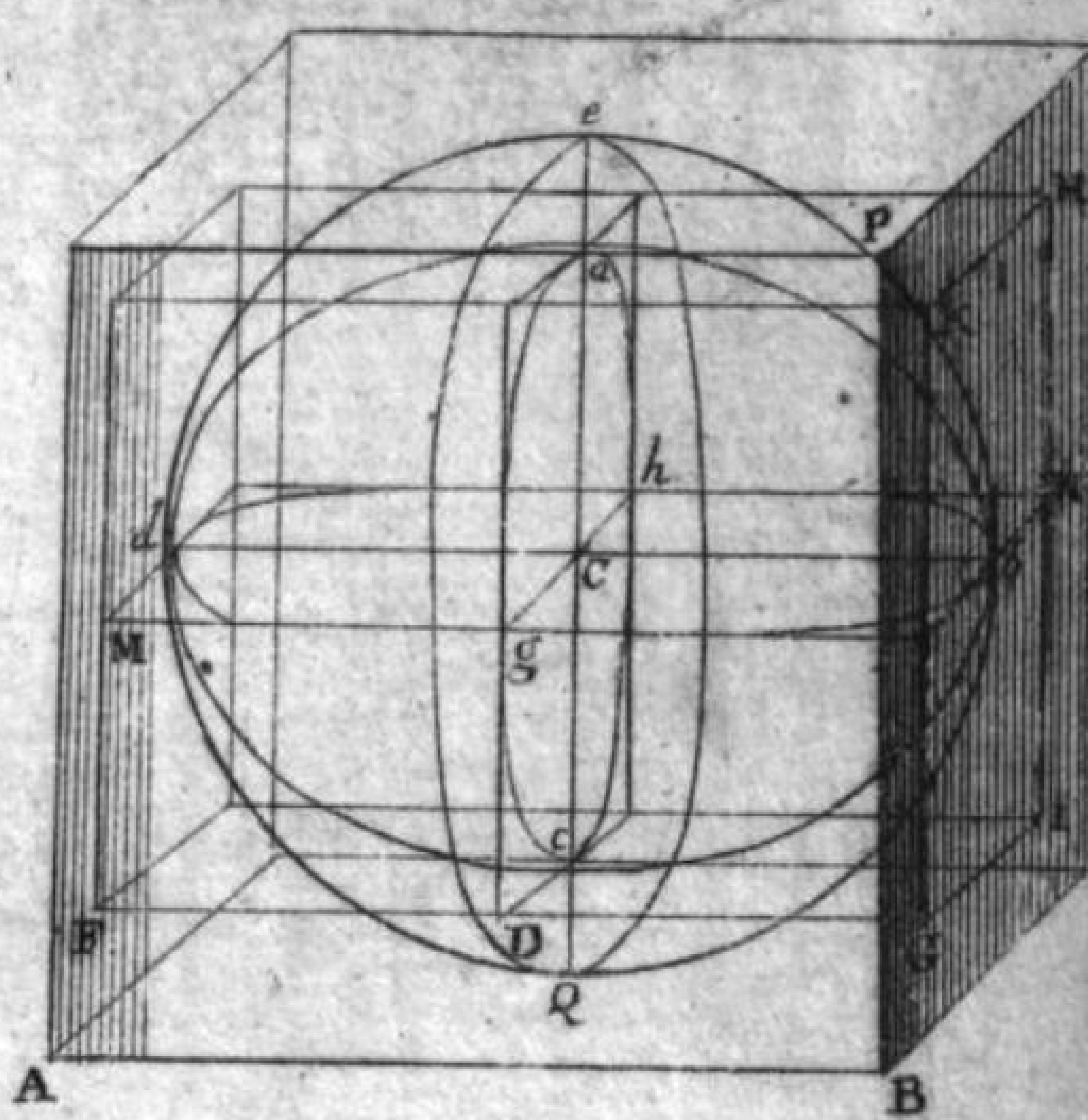


Fig: 50.



F

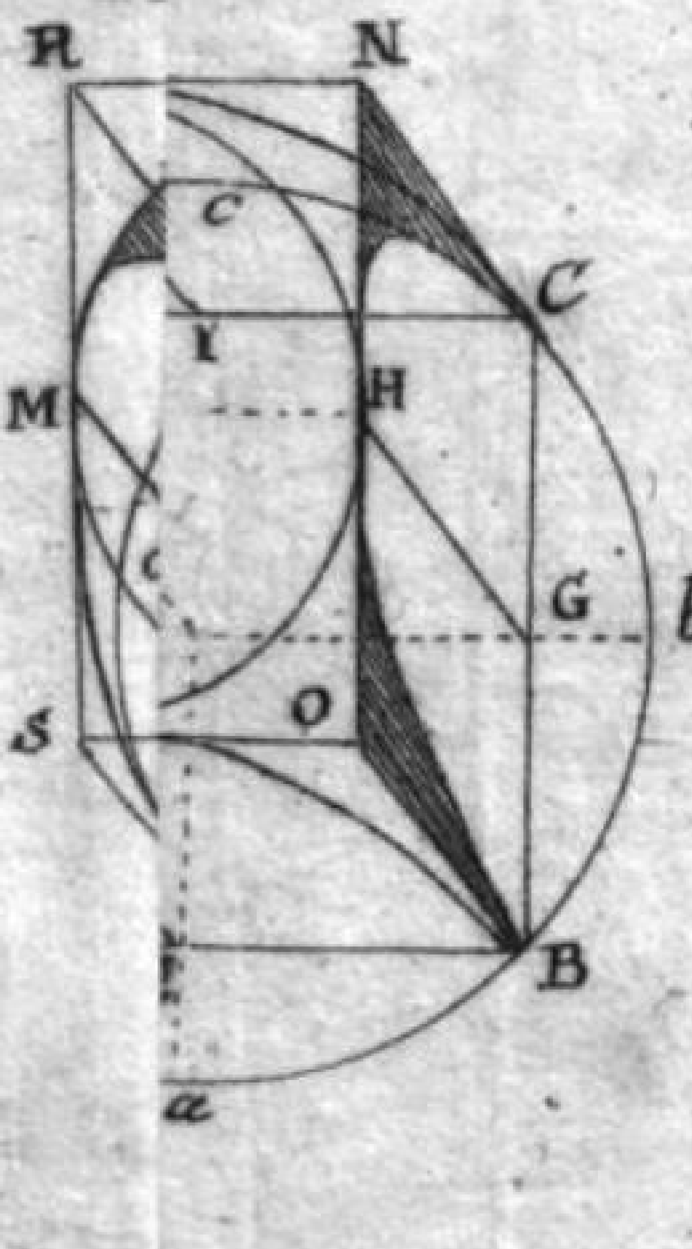


Fig: 53.