naro Pirone
e il Pad.ᵉ di questo Libro.

# NUOVI ELEMENTI
DELLA
# GEOMETRIA PIANA

# NUOVI ELEMENTI
DELLA
# GEOMETRIA PIANA

*Composti per uso della*

REAL' ACCADEMIA MILITARE

*Dal Primario Professore della medesima*

NICCOLÒ DE MARTINO.





IN NAPOLI
Presso PIETRO PALOMBO
M. DCC. XLVI.

*Con permissione Reale.*

ALL' INVITTISSIMO ED AUGUSTISSIMO

PRINCIPE

# CARLO DI BORBONE

*Re delle due Sicilie, e di Gerusalemme, Infante di Spagna, &c.*



SIGNORE

LA Real' Accademia, che ad esempio de' Chiari Vostri Maggiori con saggio e maturo consiglio avete eretta in questa Capitale per gli Officiali e Cadetti della Vo-

Vostra Truppa, siccome hà il gran vantaggio di esser sotto il Vostro immediato Real Patrocinio, così a ragione promette di se l'esito il più felice; perciocche non ad altri, che alla MAESTA' VOSTRA dee rendersi conto, e di ciò che in essa s'insegna, e del frutto che dalla stessa ricavasi. Io, che per mera Vostra Real Munificenza ho l'onore di esserne Professore Primario, sono ancora nell' obbligo di pubblicare per mezzo delle stampe i Trattati, che l'alto Vostro elevato Intendimento ha stimato più proprj per uso di quella. Il perche avendo condotto a fine il Primo di essi, che contiene gli Elementi della Geometria Piana, lo presento alla MAESTA' VOSTRA, non perche meritevole egli sia di portare in fronte il Vostro glorioso augustissimo Nome, ma affinche veggiate, come Io mi sia guidato nella struttura di quello, e sù qual piede abbia in pensiero di distendere gli altri, che seguir lo debbono. Se la sorte mi sia così propizia, che incontri egli la Vostra Real'approvazione, dovrò compiacermi di aver adempiuto

piuto il mio dovere, e sarò sicuro altresì, che il Vostro giudizio servirà di regola ad ogn' altro discreto e giusto Censore. Ma poicche molto lungi si estende il Vostro fino Real discernimento, non ardisco di avanzare tantoltre i miei voti, ma debbo essere contento, se gradirete almeno lo studio, che ho posto in eseguire con ogni sollecitudine i venerati Vostri Comandamenti. Del rimanente siccome niente è più a cuore alla MAESTA' VOSTRA, quanto la felicità de' Popoli, che anno la sorte di essere sotto il Vostro giusto e pio Dominio; così essendovi pur troppo noto, che buona parte di quella ricavasi dalla Cultura dell' Animo, Io non dubito di vedere un dì presso di Noi inalzate le Scienze a segno tale, ove mai per l'addietro vedute si sono. Ma tanto più ho motivo di dover ciò sperare a riguardo delle Matematiche, per la ferma persuasione in cui siete, che da quelle dipendono, e gli eventi più felici nell' Operazioni della Guerra, e le Arti più necessarie all' uso della Vita Civile. Onde prostrato al Vostro Real Soglio, con

pre-

pregarvi dal Cielo ogni prospero avvenimento, mi dico con il più umile e profondo rispetto

Di V. M.

*Il più fedele, ed ossequioso Suddito*
Niccolò di Martino.

# AL DISCRETO
# LETTORE.

Qual fine mi abbia spinto a dare alla luce per mezzo delle stampe questi nuovi Elementi della Geometria piana, bastantemente ò discreto Lettore potrai comprenderlo dall' uso, che debbo farne. Ma tuttocche essi siano stati da me composti per agevolare lo studio di questa scienza a Giovani Militari, non perciò dei darti a credere, che l' argomento non siasi trattato a fondo, e che non si sia osservato quel rigore, che la scienza stessa richiede. Non v' ha dubbio, che il costume d' insegnare la Geometria a coloro, che professano il nobil mestiere dell' Armi, si è di non distendersi molto nelle teorie, e di non essere nelle dimostrazioni così rigido, e scrupuloso. Ma poicche pratticasi con essi loro tal metodo per la brevità del tempo, che vogliono impiegare a questo studio; ho creduto potergli compiacere, non già con dimezzare la scienza, e snervarla di quella forza, che ad essa è naturale, ma soltanto con dare altro aspetto alle cose medesime. Ed in vero non per altra ragione riesce alla Gioventù lungo e penoso lo studio de' primi sei libri di Euclide, che contengono gli Elementi della Geometria piana, se non se per la varietà delle materie, che si veggono in essi mescolate insieme, e per non comprendersi così chiaramente l' attacco, che anno le proposizioni

zioni

*zioni tra loro. Quindi ho stimato poterne facilitare l'intelligenza a chicchesia, con formare de' medesimi un sistema compiuto, e con ridurre la scienza ad alcuni capi generali, sotto cui andassero comprese le proposizioni attinenti allo stesso argomento: le quali perciò ho voluto più tosto ligare insieme con discorso continuato, che disgiungerle e dismembrarle colli vulgati titoli de' problemi, teoremi, lemmi, e corollarj. Ma nè pure dei darti a credere, che per venire a capo di un tal disegno, mi sia convenuto discostarmi molto dal metodo di Euclide; anzi posso assicurarti, che ritroverai in questi Elementi un Commentario perpetuo de' suoi medesimi libri. In effetto Io incomincio dalle teorie più semplici della Geometria piana, e siccome per esse intendo quelle stesse, che si contengono ne' primi quattro libri di Euclide; così in primo luogo tratto della teoria delle linee, in secondo luogo della teoria de' triangoli e parallelogrammi, in terzo luogo della teoria de' quadrati e rettangoli, in quarto luogo della teoria del cerchio, ed in quinto luogo della teoria delle figure regolari. Passo di poi alle teorie più composte della medesima scienza, le quali sono l'argomento del quinto, e sesto libro di Euclide; e doppo aver spiegata in generale la dottrina delle proporzioni, fò l'applicazione di essa primieramente alle linee rette, indi alle figure rettilinee, e finalmente al cerchio medesimo. Egli è vero, che la serie delle proposizioni vedesi tal volta cambiata; ma siccome mi è convenuto far ciò, per unire insieme le proposizioni, che collimano ad un'istesso scopo, così ho posto tutto lo studio di ritenerne le dimostra-*

*ſtrazioni per quanto foſſe poſſibile ; onde ſi è , che almeno per queſto verſo ravviſerai Euclide in queſti nuovi Elementi . Spezialmente per quanto tocca alle propoſizioni del primo ſuo libro , non ſolo ſi è dato ad eſſe altro ordine , ma molte delle medeſime ſi ſono enunciate ancora diverſamente ; e ciò perche la teoria delle linee andaſſe diſgiunta da quella de' triangoli , e parallelogrammi , con cui da Euclide era ſtata accopiata ; e per queſto ſteſſo motivo eziandio in alcuna delle loro dimoſtrazioni ſi è fatta qualche mutazione , e ſi è ricavata dalla nozione ſteſſa della linea retta la vulgata proprietà del triangolo , che due lati uniti inſieme ſiano ſempre maggiori del terzo . Il più notabile cambiamento però vedeſi nella dottrina delle proporzioni , perciocchè ho voluto più toſto dedurla dalle vere nozioni della ragione , e della proporzione , che riccorrere alla proprietà degli egualmente moltiplici , di cui Euclide ſi avvale ; e quantunque queſto medeſimo ſia ſtato tentato ancora da altri , nientedimeno il metodo , che io ho tenuto nello ſtabilimento di una tal dottrina , è affatto ſingolare . Del rimanente in queſti nuovi Elementi non ſolo non ſi è tralaſciata alcuna delle propoſizioni di Euclide , ma ſe ne incontrano molte altre egualmente utili , e neceſſarie ; onde ſi è , che la teoria delle figure regolari , e la dottrina delle proporzioni applicata alle figure rettilinee , ed al cerchio medeſimo , veggonſi notabilmente aumentate . Ma ciò , che Io ſtimo dover rendere grata al pubblico queſta mia fatica , ſi è l' ultimo capitolo , in cui Io ſpiego il metodo , che dee tenerſi per riſolvere i problemi attinenti alla Geometria piana ;*

*poic-*

*poicche poco, o niente dee crederſi taluno avanzato in queſta ſcienza, quando non ſia egli capace di riſolvere da per ſe ſteſso un problema geometrico, che venga ad eſſo propoſto. Fò ivi adunque vedere, che i problemi piani debbono eſſere diviſi in due generi; e per quanto ai primi, dimoſtro, che eſſi ſi riſolvono, o con ritrovarſi una retta, che ſia in data ragione con un' altra data, o pure con ritrovarſene due, che ſiano tra loro in data ragione, e delle quali ne ſia data o la ſomma, o la differenza. Per quanto poi alli ſecondi, riduco la loro riſoluzione, ò alla ricerca di una retta, che ſia mezza proporzionale tra due rette date, o pure alla ricerca di due rette, che uguagliando colla loro ſomma, o colla loro differenza una data retta ſiano reciproche con due altre date. Ma non contento di ciò, ho voluto ancora iſpiegare a fondo l'artifizio, che impiegano i Geometri nella riſoluzione de' loro problemi; e perciò doppo aver data un' idea de' luoghi geometrici, minutamente e con varj eſempj ho poſto in chiaro, come ſi riſolvono i problemi per mezzo di eſſi. Eccoti in breve eſpoſto, o benigno* Lettore, *il metodo da me tenuto nella compoſizione di queſti nuovi Elementi della Geometria piana, e nel mentre che Io mi accingo a darti altri conſimili della Geometria ſolida, procura dal canto tuo raccogliere tutto il frutto, che Io ti deſidero, dalla lettura di eſſi, e vivi felice.*

ELE-

# ELEMENTI DELLA GEOMETRIA PIANA

## INTRODUZIONE.

SIccome le ſcienze, le quali anno per objetto le varie ſpezie della quantità, tutte generalmente ſi appellano Matematiche; così quella fra loro, che contempla l'eſtenſione del corpo, ovvero la quantità eſteſa in lunghezza, larghezza, e profondità, ſpezialmente ſi chiama Geometria: qual dinominazione è derivata dal primo uſo, che fecero di eſſa gli Egizzj in miſurare l'eſtenſione de' loro campi, i cui limiti erano rimoſſi da loro ſiti colla inondazione del fiume Nilo.

2. Le tre dimenſioni della quantità eſteſa di lor natura vanno ſempre congiunte inſieme, nè mai è poſſibile di rinvenirle diſcompagnate, l'una dall'altre. Ma niente proibiſce di conſiderarle ancora ſeparatamente, e diſtinguere tre ſpezie di quella tal quantità: cioè la linea, che abbia una ſola dimenſione; la ſuperficie, che ne abbia due; ed il corpo ovvero ſolido, che tutte tre unitamente le racchiuda.

3. La dimenſione della linea ſi appella ſempre lunghezza; e delle due della ſuperficie una diceſi lunghezza, e l'altra larghezza. Quindi il nome di profondità è impiegato ſolamente a diſegnare una delle tre dimenſioni del corpo; e perciò la nozione della linea vien ripoſta comunemen-

te in avere sola lunghezza ; quella della superficie in aver lunghezza , e larghezza ; ed in fine quella del corpo in aver lunghezza, larghezza , e profondità.

4. Conforme con considerare separatamente le dimensioni della quantità estesa, oltre al corpo abbiamo la linea, e la superficie; così con togliere dalla linea le parti di mezzo , e contemplarne i soli termini, avremo finalmente i punti : li quali perciò sono riguardati come segni della quantità estesa privi di ogni dimensione , e capaci semplicemente di sito, ovvero posizione.

5. Ma siccome i punti sono i termini della linea, così non dee porsi in dubbio , che le linee siano i termini della superficie , e le superficie i termini del corpo . Quindi la nozione generale del termine geometrico si è di avere una dimensione meno della quantità terminata ; e perciò il corpo non potrà mai fare le veci di termine , per non potersi concepire quantità estesa, che abbia più di tre dimensioni.

6. Essendo il punto privo di ogni dimensione , egli è chiaro, che col di lui moto debba nascere la linea. Ma chiara cosa ancora si è, che col moto laterale della linea debba prodursi la superficie, e col moto laterale della superficie debba generarsi il corpo. Onde si potrà riguardare il punto come principio , ed origine di tutte tre le spezie della quantità estesa.

7. Intanto nè i punti debbono aversi come parti della linea, nè le linee come parti della superficie , nè le superficie come parti del corpo . Imperocchè è proprio della parte di essere della stessa indole col tutto , a cui si rapporta ; e perciò parti della linea saranno altre linee più picciole, parti della superficie saranno altre superficie di minor ampiezza, e parti finalmente del corpo saranno altri corpi di mole minore.

8. Per le tre spezie della quantità estesa sembra doversi dividere la Geometria in tre parti ; ed in una ragionare delle linee , nell' altra delle super-

ſuperficie, e nella terza de'corpi. Ma egli è difficile di oſſervare con eſattezza un tal ordine per la ragione, che di molte ſuperficie non puo trattarſi agiatamente, ſenza l'anticipata conoſcenza de'corpi, a' quali come termini ſi rapportano.

9. Quindi il metodo più confacente per inſegnare queſta ſcienza ſi è di dividerla in piana, e ſolida: intendendo per piana quella parte di eſſa, in cui ſi tratta di tutto ciò, che puo concepirſi, ſenz'aver preſente ſolido alcuno; ed al contrario per ſolida l'altra parte della medeſima, in cui ſi ragiona così de'ſolidi, come di ogn'altra coſa, che preſuppone la loro eſiſtenza.

10. Tratteremo adunque in primo luogo della Geometria piana, come quella, che non ſolo è più ſemplice, ma dee ancora ſervirci di guida per la ſolida, che è più compoſta. E poicche così l'una, come l'altra ſi appoggia ad alcuni principj ovvero aſſiomi, i quali comuni ſono a tutte le ſpezie della quantità; non ſarà mal fatto di enumerarli quì brievemente, per averli preſenti, quante volte biſogna di quelli far uſo.

11. Il primo dunque ſi è, che le quantità eguali ad una terza, debbano eſſer eguali ancora tra loro. E da queſto ſi deduce, che eguali parimente eſſer debbano, così le quantità, che ſono duple, triple, o quadruple di una terza; come le altre, che ſono la metà, la terza parte, o la quarta parte di una ſteſſa quantità.

12. Il ſecondo ſi è, che ſe di due quantità eguali una ſia maggiore o minore di una terza, l'altra debba eſſer di quella ſteſſa ancora maggiore o minore. E quindi ſi deducono due coſe. I, che ſe di due quantità diſuguali la minore ſia maggiore di una terza, l'altra tanto più ne debba eſſere maggiore. E II, che ſe di due quantità diſuguali la maggiore ſia minore di una terza, l'altra tanto più ne debba eſſere minore.

13. Il terzo ſi è, che le quantità eguali coll'aggiunta, o detrazione di altre ſimilmente eguali conſervino la loro uguaglianza. Dal che con ogni

chiarezza puo dedursi, che le quantità disuguali con aumentarsi, o minorarsi di altre eguali, debbano rimanere disuguali come prima: cioè maggiore quella, che era maggiore; e minore quella, che era minore.

14. Il quarto, ed ultimo si è, che ogni quantità divisa in due, o più parti debba essere eguale a tutte quelle parti unite insieme. E da ciò con evidenza si deduce, che la stessa quantità debba essere maggiore di ciascuna delle sue parti. E poicche quella tale quantità per rapporto alle sue parti chiamasi tutto, perciò si stabilisce comunemente come cosa indubitata, che il tutto sia maggiore della parte.

15. A questi quattro assiomi aggiugneremo il quinto, il quale però è comune alle sole tre spezie della quantità estesa; e si è, che quelle quantità, le quali possono talmente adattarsi tra loro, che l'una si combaci coll'altra, sieno tra esse eguali. Ma non perciò sarà sempre vero il converso, cioè che le quantità eguali debbano combaciarsi tra loro, quantevolte insieme si adattano.

# LIBRO I.

## *Delle Teorie più semplici della Geometria piana.*

16. PEr bene intendere qual sia propriamente l' objetto della Geometria piana, conviene prima sapere, che la linea puo essere di due spezie, cioè retta, e curva. Si appella linea retta quella, che giace egualmente tra i suoi punti. Per lo contrario dicesi linea curva quella, che piegando verso un qualche lato non serba egual posizione tra i punti, che la terminano.

17. Una simil divisione dee farsi ancora della superficie. Imperocche, o ella è tale, che giacendo egualmente tra i suoi termini concede per tutta la sua ampiezza posizione alla linea retta, e chia-

chiamasi superficie piana; o per lo contrario piegando verso un qualche lato non permette di potervisi da per tutto adattare la linea retta, e si appella superficie curva.

18. Or le superficie piane, quantevolte da per tutto si ritrovano terminate da linee, figure piane spezialmente si appellano. Ed intorno a queste tali figure si aggira propriamente la Geometria piana, considerando quelle tra esse, che più spesso vengono in uso, e ponendo a calcolo così le linee, che le terminano, come ogn'altra cosa, che alle medesime si appartiene.

## CAPITOLO I.

### *Della Teoria delle linee.*

19. PEr agevolarci il cammino alla considerazione delle figure piane, premetteremo la teoria delle linee, che sono i termini di tali figure. E poicche tra le infinite spezie, che possono darsi della linea curva, noi dobbiamo limitarci in questi Elementi a quella sola, per cui si termina il cerchio; perciò prima di ogn'altra cosa è necessario dare una nozione ben chiara, così della linea retta, come della linea circolare.

### §. I.

### *Della nozione della linea retta.*

20. LA linea retta, secondo la definizione data di sopra (16), è quella, che giace egualmente tra i punti, che la terminano. Quindi non si dura fatica in comprendere, che ella debba essere la più corta di tutte le linee, che anno i medesimi termini; ed in conseguenza che da un punto ad un'altro non possa tirarsi, se non se una sola linea retta.

21. Dipende adunque la posizione della retta da due soli punti; e perciò quantevolte questi so-

no dati, dee ſtimarſi data ancora la retta, che gli uniſce inſieme. Il problema intanto di tirare la retta da un punto ad un'altro, dee concederſi come coſa facile ad eſeguirſi; ſiccome nè pure dee negarſi l'altro di prolungare ad arbitrio una retta data.

22. Dipendendo la poſizione della retta da due ſoli punti, egli è chiaro, che due rette, le quali anno due punti comuni, debbano formare una retta continuata. E quindi avviene, che nè l'interſegamento di due rette poſſa farſi in più di un punto, nè una ſuperficie piana poſſa terminarſi da due ſole rette.

23. Additando poſcia la retta il più corto cammino, che poſſa farſi da un punto ad un'altro, chiara coſa ancora ſi è, che la diſtanza di due punti debba miſurarſi per la retta, che gli uniſce inſieme. Onde il problema di definire la diſtanza di due dati punti non ad altro ſi riduce, ſe non ſe a determinare la lunghezza della retta, che congiunge l'uno coll'altro.

24. Ma dall'eſſer la retta la più corta di tutte le linee, che anno i medeſimi termini, ſi raccoglie altresì, che ſe da un'iſteſſo punto, co-
Fig. 1. me A, partono due rette AB, AC, che non ſieno a dirittura, queſte inſieme debbano eſſere maggiori della terza BC, che uniſce gli altri loro termini. Imperocche ſiccome la BC è una retta tirata dal punto B al punto C, così la BAC compoſta dalle due AB, AC dee averſi come un'altra linea menata tra i medeſimi punti. Onde dovendo eſſer la prima più corta della ſeconda, per neceſſità le due AB, AC inſieme ſaranno maggiori della ſola BC.

25. E quindi ora con facilità poſſono dimoſtrarſi due teoremi. Il primo ſi è, che ſe preſo
Fig 2. tra le rette AB, AC un'altro punto D, congiunganſi l'altre due BD, CD, ancora di queſte inſieme debbano eſſere maggiori le due AB, AC. Imperocche, prolungata la BD per ſino al punto E, ſaranno le due AB, AE maggiori della ſola

BE

BE (24). Onde, apposta la comune CE, saranno le due AB, AC maggiori ancora delle due BE, CE (13). Ma della stessa maniera si dimostra, che le due BE, CE sieno maggiori delle due BD, CD. Dunque le prime due AB, AC saranno molto più maggiori dell'altre due BD, CD (12).

26. Il secondo si è, che se da due punti, come A, e B, tirate le due rette AC, BC, che convengano tra loro nel punto C, se ne vogliano tirare verso la stessa parte due altre eguali alle prime, ciascuna a ciascuna, queste debbano convenire insieme nel medesimo punto C. Se è possibile, tirisi la AD eguale alla AC, e la BD eguale alla BC, e convengano tra loro nel punto D. E poicchè le due AE, CE insieme sono maggiori della sola AC, o pure della sua eguale AD (24); tolta la comune AE, sarà la CE maggiore ancora della DE (13); ed apposta l'altra comune BE, sarà la BC, o pure la sua eguale BD maggiore similmente delle due BE, DE. Ma questo è falso, per essere le due BE, DE maggiori della sola BD (24). Dunque l'incontro delle rette AD, BD dee farsi nel medesimo punto C. Fig. 3.

## §. II.

### *Della nozione della linea circolare.*

27. Conforme la nozione della linea retta si è di avere tutti i punti egualmente situati tra i suoi termini; così quella della linea circolare consiste in avere tutti i punti egualmente distanti da un punto dato, che si appella suo centro. Onde perche la distanza di due punti dee misurarsi per la retta, che gli unisce insieme (23); sarà proprio della linea circolare di esser eguali tutte le rette, che dal centro ad essa si tirano.

28. Si genera la linea circolare colla rivoluzione di una retta, fatta intorno ad uno de' suoi termini fisso, ed immobile sino a che ritorni al suo primo luogo. Imperocche la curva

ſegnata sul piano coll'altro termine mobile avrà tutti i ſuoi punti egualmente diſtanti da quello, che rimane ſtabile; ed in conſeguenza ſarà la linea circolare (27). Intanto la deſcrizione di queſta linea dee accordarſi come coſa facile ad eſeguirſi; e perciò, quando il biſogno lo richiede, la deſcriveremo liberamente con qualſivoglia centro, e qualſivoglia intervallo.

29. E quindi ora in primo luogo, dati due punti, come A, e B, potremo ritrovarne un terzo tanto diſtante da ciaſcuno di quelli, quanto i medeſimi diſtano tra loro. Deſcrivanſi due linee circolari, una col centro A e l' intervallo AB, l'altra col centro B e l'intervallo BA; ed il loro interſegamento ne darà il terzo punto C, che ſi dimanda. Imperocche, congiunte le rette AB, AC, BC, ſarà per la nozione della linea circolare ciaſcuna delle due AC, BC eguale alla AB (27); e perciò il punto C ſarà tanto diſtante da ciaſcuno delli due A, e B, quanto queſti diſtano tra loro.

Fig. 4.

30. In ſecondo luogo ad un dato punto, come A, potremo adattare una retta, che ſia eguale all' altra data BC. Ritroviſi il punto D tanto diſtante dalli due A, e B, quanto queſti diſtano tra loro (29). Indi col centro B, e l'intervallo BC deſcrivaſi la linea circolare CE, che s'interſeghi colla retta DB prolungata nel punto E. Finalmente col centro D, e l'intervallo DE deſcrivaſi l' altra linea circolare EF, che s'interſeghi coll' altra retta DA ſimilmente prolungata nel punto F; e ſarà AF la retta, che ſi dimanda. Imperocche, eſſendo eguali tra loro, così le due DF, DE, come le altre due DA, DB; ſarà ancora la rimanente AF eguale alla rimanente BE (13). Ma la BE è eguale alla BC. Dunque ſimilmente le due AF, BC ſaranno tra loro eguali (11).

Fig. 5.

31. In terzo luogo, date due rette diſuguali AB, CD, potremo dalla maggiore di eſſe AB tagliare una porzione eguale all'altra minore CD.

Fig. 6.

Adat-

Adattisi al punto A la retta AE eguale alla CD (30); e descritta col centro A, e l'intervallo AE la linea circolare EF, che s'intersechi colla AB nel punto F, sarà AF la porzione, che si dimanda. Imperocchè per la nozione della linea circolare (27) le due AF, AE sono egali tra loro. Ma per la costruzione la retta AE è eguale alla retta CD. Dunque ancora le due AF, CD saranno tra loro eguali (11).

32. Finalmente, dati due punti, come A, e B, potremo ritrovarne un terzo distante da quelli per dati intervalli. Dalla retta AB prolungata taglisi, così la porzione AC eguale all'intervallo dal punto A, come la porzione BD eguale all' intervallo dal punto B (31). Descrivansi poscia due linee circolari, una col centro A e l'intervallo AC, l'altra col centro B e l'intervallo BD; ed il loro intersegamento ne darà il terzo punto E, che si dimanda. Imperocchè, congiunte le rette AE, BE, saranno per la nozione della linea circolare eguali tra loro, così le due AC, AE, come le due BD, BE (27). Ma per la costruzione le due AC, BD sono eguali agl'intervalli dati. Dunque alli medesimi intervalli saranno eguali ancora l'altre due AE, BE (11).

33. Quantevolte il terzo punto E non dee stare a dirittura cogli altri due A, e B, egli è chiaro (24), che per essere il problema solubile, debbano le tre rette AB, AC, BD esser di tal lunghezza, che due di esse unite insieme sieno sempre maggiori della terza. Ma chiara cosa ancora si è, che il medesimo problema sia molto più generale del primo, e che lo racchiuda sotto di se, come caso speziale; conforme in effetto dalla di lui soluzione si raccoglie la soluzione di quello, supponendo, che ciascuna delle due AC, BD sia eguale alla retta AB, che unisce insieme i punti dati A, e B.

§. III.

## §. III.

*Degli angoli formati colle rette, che s'incontrano.*

34. DUe rette, che ſopra un piano s' incontrano, ſenza che l' una ſia a dirittura coll' altra, per neceſſità debbono eſſere tra loro inclinate. Queſta ſcambievole loro inclinazione chiamaſi angolo: il quale perciò dee ſtimarſi maggiore, o minore, non già per la maggiore, o minore lunghezza delle rette, che lo contengono; ma bensì per la loro apertura maggiore, o minore.

35. Egli è vero, che puo formarſi l' angolo, non ſolo da due rette, ma da due curve ancora, e talvolta da due linee, delle quali una ſia retta, e l' altra curva; come in effetto divideſi l'angolo in rettilineo, curvilineo, e miſtilineo. Ma dovendo noi in queſti Elementi trattare del ſolo rettilineo, impiegheremo la voce di angolo a diſegnare ſemplicemente quello, che è formato da linee rette.

36. Lati di un'angolo ſi appellano le rette ſteſſe, che lo contengono; e ſiccome diceſi vertice il punto, in cui i lati s' incontrano, così ſarà dato il nome di baſe a quell' altra retta, che uniſce gli altri termini di detti lati. Così, per rapporto all'angolo BAC, ſi chiameranno lati le due rette AB, AC, che comprendono dett' angolo, vertice il punto A, e baſe la retta BC, che congiunge inſieme gli altri termini de'due lati. Fig. 8.

37. Quantevolte i lati di un'angolo ſono eguali alli lati di un' altro, ciaſcuno a ciaſcuno, ſi potrà così per mezzo delle baſi giudicare dell' uguaglianza degli angoli, come al contrario per mezzo degli angoli giudicare dell' uguaglianza delle baſi. Per dimoſtrarlo, ſieno i due angoli BAC, EDF, i quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, ed il lato AC eguale al lato DF. Fig. 9.

38. Pongaſi primieramente, che l'angolo BAC

ſia

sia eguale all'angolo EDF. Io dico, che ancora la base BC sarà eguale alla base EF. Imperocche, adattando col pensiero l'angolo BAC talmente sopra l'altro EDF, che il punto A cada sul punto D, ed il lato AB sul lato DE; per l'uguaglianza degli angoli caderà ancora il lato AC sul lato DF. Onde, essendo i lati AB, AC eguali alli lati DE, DF, ciascuno a ciascuno; caderanno altresì i due punti B, e C sopra i due punti E, ed F; e pertanto, combaciandosi le due basi BC, EF, saranno le medesime tra loro eguali (15).

39. Pongasi in secondo luogo, che la base BC sia eguale alla base EF. Io dico, che ancora l'angolo BAC sarà eguale all'angolo EDF. Imperocche, adattando col pensiero l'angolo BAC talmente sopra l'altro EDF, che il punto B cada sul punto E, e la base BC sulla base EF; per l'uguaglianza di dette basi caderà ancora il punto C sul punto F. Onde, essendo i lati AB, AC eguali alli lati DE, DF, ciascuno a ciascuno; caderà altresì il punto A sul punto D (26); e pertanto, combaciandosi i due angoli BAC, EDF, i medesimi saranno tra loro eguali (15).

40. E quindi, dato l'angolo BAC, e data la retta DE col punto in essa D, potremo a questo punto colla data retta formare un'altro angolo, che sia eguale al dato BAC. Tirisi nell'angolo BAC la base BC; e tagliata la porzione DE eguale al lato AB (31), ritrovisi il punto F distante dalli due D, ed E per intervalli eguali alle rette AC, BC (32). Congiunganſi finalmente le due DF, EF; e sarà EDF l'angolo, che si dimanda. Imperocche, essendo non solo i due lati AB, AC eguali alli due lati DE, DF, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base BC eguale alla base EF; per necessità i due angoli BAC, EDF saranno tra loro eguali (39). Fig. 9.

41. Potremo ancora, dato un'angolo, come BAC, dividerlo in due parti eguali. Prendasi nel lato AB un punto ad arbitrio B; e tagliata dall'altro lato la porzione AC eguale alla AB (31), Fig. 10.

ritro-

ritrovisi il punto D così distante dalli due B, e C, come questi distano tra loro (29). Congiungasi finalmente la retta AD, e questa dividerà l'angolo dato in due parti eguali. Imperocchè, tirate l'altre due BD, CD, saranno non solo i due lati AB, AD eguali alli due lati AC, AD, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base BD eguale alla base CD. Onde per necessità i due angoli BAD, CAD saranno tra loro eguali (39).

42. Potremo finalmente, data una retta, come
Fig.11. AB, dividerla in due parti eguali. Ritrovisi il punto C così distante dalli due A, e B, come questi distano tra loro (29); e congiunganfi le rette CA, CB. Dividasi poscia l'angolo ACB in due parti eguali per la retta CD (41); e questa retta dividerà ancora la data AB egualmente nel punto D. Imperocchè, siccome i due angoli ACD, BCD sono tra loro eguali, così anno i due lati CA, CD eguali alli due lati CB, CD, ciascuno a ciascuno. Onde, dovendo ancora avere la base AD eguale alla base BD (38), sarà la retta AB divisa in due parti eguali nel punto D.

43. Ma essendo i due lati di un'angolo eguali alli due lati dell'altro, ciascuno a ciascuno, si potrà parimente così per mezzo delle basi giudicare della disuguaglianza degli angoli, come per mezzo degli angoli giudicare della disuguaglianza delle
Fig.12. basi. Per dimostrarlo, sieno di nuovo i due angoli BAC, EDF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, ed il lato AC eguale al lato DF.

44. Pongasi primieramente, che l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF. Io dico, che ancora la base BC sarà maggiore della base EF. Formisi l'angolo EDG eguale all'angolo BAC (40); e tagliata la porzione DG eguale alla DF, ovvero AC (31), congiungasi la retta EG, che s'incontri colla DF nel punto H. E poicchè le due DH, HG sono maggiori della sola DG, o pure della sua eguale DF (24); tolta la comune DH, ed apposta in vece di essa l'altra EH, sarà la EG

mag-

maggiore ancora delle due EH, HF (13), ed in conseguenza molto più maggiore della sola EF (12). Ma per l'uguaglianza degli angoli EDG, BAC la EG è eguale alla BC (38). Dunque ancora la BC sarà maggiore della EF (12).

45. Pongasi in secondo luogo, che la base BC sia maggiore della base EF. Io dico, che ancora l'angolo BAC sarà maggiore dell'angolo EDF. Imperocche, se fosse altramente, dovrebbe l'angolo BAC essere, o eguale all'angolo EDF, o minore di quello. Ma nè l'uno, nè l'altro puo aver luogo; poicche nel primo caso sarebbe la base BC eguale alla base EF (38); e nel secondo sarebbe la base BC minore della base EF (44), quali cose sono contro l'ipotesi. Dunque, supposta la base BC maggiore della base EF, per necessità l'angolo BAC dee essere ancora maggiore dell'angolo EDF.

## §. IV.

### *Della perpendicolare, e dell' obliqua; e degli angoli, che formano.*

46. L'Incontro di due rette puo farsi in due maniere, cioè perpendicolarmente, ed obliquamente. Dicesi una retta incontrarsi perpendicolarmente con un'altra retta, quando forma con quella angoli dall' una, e l'altra parte eguali. Per lo contrario si dice incontrarvisi obliquamente, quando i medesimi angoli formati da ambedue le parti sono tra loro disuguali.

47. Ciascuno degli angoli eguali formati dalla perpendicolare chiamasi retto; all'incontro delli due disuguali formati dall'obliqua il maggiore si appella ottuso, ed il minore acuto. Onde retto sarà quello, che ne ha un'altro eguale dall'altra parte; ottuso quello, che ne ha un'altro minore; ed acuto finalmente quello, che ne ha un'altro maggiore.

48. Essendo la posizione della perpendicolare sem-

sempre la stessa, egli è chiaro, che tutti gli angoli retti debbano essere tra loro eguali; ma non è così degli ottusi, e degli acuti per la ragione che la posizione dell' obliqua puo variare all' infinito. Intanto ogni ottuso sarà sempre maggiore del retto; e per lo contrario ogni acuto sarà sempre minore del retto.

49. Sia ora la retta AB, e debbasi dal punto C
Fig.13. assegnato in essa alzare sulla medesima una perpendicolare. Fatte eguali le due CA, CB (31), ritrovisi il punto D così distante dalli due A, e B, come questi distano tra loro (29). Congiungasi la retta CD; ed io dico, che questa sia la perpendicolare, che si dimanda. La ragione è chiara. Poicche, essendo non solo i due lati CA, CD eguali alli due lati CB, CD, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base AD eguale alla base BD; per necessità i due angoli ACD, BCD, formati per la CD dall'una, e l'altra parte dovranno essere tra loro eguali (39); e pertanto la retta CD sarà perpendicolare sull'altra AB (46).

50. Che se poi sulla retta AB debbasi abbassare
Fig.14. la perpendicolare dal punto C dato fuori di essa; prendasi dall' altra parte della retta AB un punto D ad arbitrio; e descritta col centro C, e l'intervallo CD la linea circolare DAB, che seghi la stessa AB nelli punti A, e B, dividasi la porzione AB egualmente nel punto E (42); congiungasi finalmente la retta CE, ed io dico, che questa sia la perpendicolare, che si dimanda. Poicche i due angoli AEC, BEC debbono essere similmente eguali tra loro, per avere non solo i due lati AE, CE eguali alli due lati BE, CE, ciascuno a ciascuno, ma eguali ancora le basi CA, CB, come rette tirate dal centro alla linea circolare.

51. Del rimanente, siccome una retta, quando s' incontra perpendicolarmente con un'altra retta, forma con quella dall' una, e l' altra parte angoli retti; così, incontrandola obliquamente, dee formarli tali, che uniti insieme sieno eguali a due
Fig.15. retti. Per dimostrarlo, sia AB la retta, che in-

con-

contra obliquamente nel punto B l'altra CD; ed alzata ſu queſta la perpendicolare BE (49), egli è chiaro, che di quanto l'ottuſo ABC eccede il retto EBC, per altrettanto l'acuto ABD manca dal retto EBD. Onde i due angoli ABC, ABD formati dall'obliqua ſaranno inſieme eguali alli due retti EBC, EBD.

52. E quindi ſi deduce in primo luogo, che ſe dal punto B termine della retta AB ſi tirino a parti contrarie l'altre due BC, BD, che facciano colla prima gli angoli ABC, ABD eguali a due retti; queſt'altre due debbano formare una retta continuata. Imperocchè, ſe mai la BC giaceſſe a dirittura con un'altra, come BE, dovrebbero eſſere eguali a due retti i due angoli ABC, ABE (51), con che ſarebbero i due ABC, ABD eguali agli altri due ABC, ABE; e tolto il comune ABC, rimarrebbe l'angolo ABD eguale all'angolo ABE, cioè il tutto eguale alla parte, il che non può eſſere (14). Fig. 16.

53. Si deduce in ſecondo luogo, che ſe le due rette AB, CD s'interſeghino tra loro nel punto E, debbano eſſere eguali, così i due angoli verticali AEC, BED, come gli altri due AED, BEC. Imperocchè, eſſendo eguali a due retti, tanto i due angoli AEC, AED, quanto i due BED, AED (51); ſaranno i primi due AEC, AED eguali agli altri due BED, AED (11); e pertanto tolto il comune AED, rimarrà l'angolo AEC eguale all'angolo BED. E così ancora, eſſendo eguali a due retti, tanto i due AED, AEC, quanto i due BEC, AEC; ſaranno quelli eguali a queſti; ed in conſeguenza, tolto il comune AEC, rimarrà l'angolo AED eguale all'angolo BEC. Fig. 17.

54. Si deduce finalmente, che ſe da un punto E della retta AB tirinſi a parti contrarie l'altre due EC, ED, le quali formino colla prima gli angoli verticali AEC, BED eguali tra loro; queſt'altre due debbano eſſere una retta continuata. Imperocchè, eſſendo l'angolo AEC eguale all'angolo Fig. 17.

lo BED, coll' aggiunta del comune BEC saranno ancora i due AEC, BEC eguali agli altri due BED, BEC (13). Ma i primi due AEC, BEC sono eguali a due retti (51). Dunque saranno eguali parimente a due retti gli altri due BED, BEC; e pertanto le due EC, ED staranno tra loro a dirittura (52).

## §. V.

### *Delle rette parallele, ovvero equidistanti.*

55. Alle rette, che s' incontrano, e formano angoli, si oppongono quelle, che chiamansi parallele, ovvero equidistanti, per essere talmente situate sopra un medesimo piano, che prolungate all' infinito dall' una, e l'altra parte non mai tra loro s'incontrano. E si è dato a quest' altre rette il nome di parallele, ovvero equidistanti; poicche, secondo sarà dimostrato da quì a poco, serbano tra loro sempre la medesima distanza.

56. La teoria delle rette parallele dipende da questo teorema, cioè, che se di un' angolo qual-
Fig. 18. sivoglia, come BAC, si prolunghi la base BC a dirittura verso D, si formerà l' angolo esteriore ACD maggiore dell' angolo BAC. Per dimostrarlo, dividasi il lato AC in due parti eguali nel punto E (42); indi prolungata la retta BE verso F, e tagliata la porzione EF eguale alla BE (31), si congiunga la retta CF. E poicche l'angolo AEB è eguale all' angolo CEF (53), ed i medesimi anno i due lati AE, BE eguali alli due lati CE, EF, ciascuno a ciascuno; sarà la base AB eguale ancora alla base CF (38). Quindi saranno eguali parimente i due angoli ECF, BAE (39); e pertanto l'angolo ACD, come maggiore dell' angolo ECF, sarà maggiore ancora dell'angolo BAE (12).

57. Premesso questo teorema, non sarà ora cosa difficile, il dimostrare la teoria delle paralle-
Fig. 19. le. Ed in primo luogo due rette, come AB, CD, saranno parallele tra loro, se tirata su di esse la ter-

terza EF ſieno eguali gli angoli alterni AEF, EFD. Se è poſſibile, vadaſi la retta CD prolungata ad incontrare coll'altra AB nel punto G. E poicche dell'angolo EFG la baſe GE ſta prolungata verſo A; ſarà l'angolo AEF maggiore dell'angolo EFG (56). Ma queſti due angoli per ipoteſi ſono tra loro eguali. Dunque non è egli vero, che le due rette AB, CD prolungate s'incontrano; e perciò ſaranno parallele (55).

58. In ſecondo luogo le ſteſſe rette AB, CD ſaranno tra loro parallele, ſe tirata su di eſſe la terza EFG ſia l'angolo eſteriore CFG eguale all'interiore, ed oppoſto AEF. Imperocchè, interſegandoſi tra loro nel punto F le due rette CD, EG, dee eſſere l'angolo CFG eguale all'angolo EFD (53). Ma per ipoteſi l'angolo CFG è eguale all'angolo AEF. Dunque ancora i due angoli AEF, EFD ſaranno tra loro eguali (11); i quali, eſſendo alterni, faranno, che le rette AB, CD ſieno parallele (57). Fig. 20.

59. Finalmente le medeſime rette AB, CD ſaranno tra loro parallele, ſe tirata su di eſſe la terza EF ſieno inſieme eguali a due retti i due angoli interiori BEF, EFD ſituati alla medeſima parte. Imperocchè per la retta EF, che s'incontra coll'altra AB, i due angoli BEF, AEF debbono eſſere inſieme eguali a due retti (51). Ma per ipoteſi ſono eguali ancora a due retti i due angoli BEF, EFD. Dunque i primi due BEF, AEF ſaranno eguali agli altri due BEF, EFD (11); e pertanto, tolto il comune BEF, rimarrà l'angolo AEF eguale all'angolo EFD (13); i quali come alterni faranno, che le rette AB, CD ſieno tra loro parallele (57). Fig. 20.

60. Or ſe ſi riflette, che la retta, la quale paſſa per un dato punto, in una ſola poſizione può eſſere parallela ad un'altra retta data; volentieri ci ſi accorderà, che ſempre quando i due angoli interiori BEF, EFD inſieme ſono minori di due retti, le rette AB, CD debbano incontrarſi prolungate verſo quella parte, in cui detti angoli ſi ritrovano,

trovano. Ed ammesso questo principio, potremo facilmente dimostrare le converse delle tre proposizioni precedenti. Perciò sieno le due rette AB,
Fig.20. CD parallele tra loro, e tirisi sopra di esse la terza EFG.

61. Io dico primieramente, che gli angoli alterni AEF, EFD debbano essere eguali. Se è possibile, sieno disuguali, e sia l'angolo AEF maggiore dell' angolo EFD. Dunque, apposto il comune BEF, saranno ancora i due AEF, BEF maggiori delli due BEF, EFD (13). Ma i primi due AEF, BEF sono eguali a due retti (51). Dunque gli altri due BEF, EFD saranno minori di due retti; e perciò le due rette AB, CD non saranno parallele tra loro (60), secondo è stato supposto.

62. Io dico in secondo luogo, che l' angolo esteriore CFG debba essere eguale all'interiore, ed opposto AEF. Imperocchè, intersegandosi tra loro nel punto F le due rette CD, EG, dee essere l' angolo CFG eguale all' angolo EFD (53). Ma l' angolo AEF è stato dimostrato eguale al medesimo angolo EFD (61). Dunque ancora l' angolo CFG sarà eguale all'angolo AEF (11).

63. Io dico finalmente, che i due angoli interiori BEF, EFD situati alla medesima parte debbano essere insieme eguali a due retti. Imperocchè, essendosi dimostrato l'angolo AEF eguale all' angolo EFD (61); coll'aggiunta del comune BEF saranno i due AEF, BEF eguali agli altri due BEF, EFD (13). Ma i primi due AEF, BEF sono eguali a due retti (51). Dunque eguali ancora a due retti saranno gli altri due BEF, EFD.

64. E quindi ora possiamo dimostrare un' altra
Fig.21. proprietà delle rette parallele; e si è, che se le due AB, CD sono parallele alla terza EF, le medesime debbano essere parallele ancora tra loro. Tirisi sopra di esse l'altra retta GHI, che le seghi tutte tre nelli punti G, H, I. E poicche le due AB, EF sono parallele, sarà l'angolo AGH eguale all'angolo HIF (61). E similmente, essendo

paral-

parallele le due CD, EF, sarà l'angolo GHD eguale all'angolo HIF (62). Quindi eguali ancora saranno i due angoli AGH, GHD (11); i quali come alterni faranno, che le rette AB, CD sieno tra loro parallele (57).

65. Che se poi per un dato punto, come A, debbasi tirare una retta, che sia parallela all'altra data BC; prendasi in questa BC un punto D ad arbitrio, e congiunta la retta AD facciasi l'angolo DAE eguale all'angolo ADC (40); prolunghisi poscia la retta EA verso F, e sarà EF la parallela, che si dimanda: qual cosa è chiara; poicche siccome per la costruzione i due angoli DAE, ADC sono eguali, così per esser questi alterni le due rette EF, BC necessariamente debbono essere tra loro parallele (57). Fig. 22.

66. Del rimanente, che le rette parallele serbano tra loro sempre la medesima distanza, deducesi da questo teorema, cioè, che se AB, CD sono porzioni eguali di due rette parallele, le rette AC, BD, che le congiungono verso le medesime parti, debbano essere tra loro eguali. Per dimostrarlo, congiungasi la retta BC. E poicche le due AB, CD sono parallele, saranno i due angoli ABC, BCD tra loro eguali (61). Ed avendo questi angoli i due lati AB, BC eguali alli due lati CD, BC, ciascuno a ciascuno; avranno similmente la base AC eguale alla base BD (38). Fig. 23.

67. Ma egli è facile il dimostrare, che le medesime rette AC, BD, le quali congiungono le porzioni eguali AB, CD delle due parallele, debbano essere parallele ancora tra loro. Imperocchè, considerando i due angoli ACB, DBC, ritroveremo in questi non solo i due lati AC, BC eguali alli due lati BD, BC, ciascuno a ciascuno, ma altresì la base AB eguale alla base CD. Dunque sarà l'angolo ACB eguale all'angolo DBC (39); i quali come alterni faranno, che le rette AC, BD sieno tra loro parallele (57).

## CAPITOLO II.

### *Della Teoria de' triangoli, e de' parallelogrammi.*

68. PRemessa la teoria delle linee, passeremo ora a quella delle figure piane, che sono il principale objetto della Geometria piana. E siccome queste tali figure per ragion de' loro termini, che possono essere, o linee rette, o linee curve, o rette e curve mischiate insieme, si dividono generalmente in rettilinee, curvilinee, e mistilinee; così le rettilinee, riconoscendo per loro lati le rette, che le terminano, si distinguono spezialmente in trilatere, quadrilatere, e multilatere. Incominciieremo adunque dalle trilatere, chiamate ancora triangoli, sì per essere le più semplici, come altresì perche in esse si risolvono tutte l'altre figure rettilinee.

### §. I.

### *Delle principali proprietà del triangolo.*

69. ESsendo il triangolo una figura piana terminata da tre rette, che si appellano
Fig.23. suoi lati; egli è chiaro, che se ABC sia una tale figura, due delli tre lati uniti insieme, come a cagion di esempio li due AB, AC, debbano essere sempre maggiori del rimanente BC (24). E se dalli termini B, e C di questo lato BC si tirino due altre rette BD, CD, che si vadano ad incontrare tra loro nel punto D, esistente dentro del triangolo; chiara cosa ancora si è, che gli stessi due lati AB, AC debbano essere maggiori similmente dell'altre due rette BD, CD (25).

70. Ma, tralasciate queste affezioni, che alla teoria delle rette propriamente si appartengono, stabiliremo per prima proprietà del triangolo, che l'angolo esteriore, formato col prolungamento di uno de' suoi lati, sia eguale alli due interiori, ed op-

posti

posti uniti insieme. Perciò sia il triangolo ABC, e prolungato il lato BC verso D, tirisi per il punto C la retta CE parallela all'altro lato BA (65). E poicche le due BA, CE sono parallele, sarà così l'angolo ACE eguale all'angolo BAC (61), come l'angolo ECD eguale all'angolo ABC (62); e pertanto tutto l'angolo esteriore ACD sarà eguale alli due interiori, ed opposti BAC, ABC uniti insieme (13). Ed essendo così, l'istesso angolo esteriore sarà maggiore di ciascuno delli due interiori, ed opposti. Fig.24.

71. La seconda proprietà del triangolo si è, che tutti tre i suoi angoli uniti insieme sieno sempre eguali a due retti. Per dimostrarla, sia il triangolo ABC, e si distenda uno de' suoi lati BC a dirittura verso D. Sarà dunque l'angolo esteriore ACD eguale alli due interiori, ed opposti BAC, ABC uniti insieme (70); con che, apposto il comune ACB, saranno i due ACB, ACD eguali alli tre insieme ACB, BAC, ABC (13). Ma i due ACB, ACD sono eguali a due retti (51). Dunque eguali ancora a due retti saranno i tre angoli ACB, BAC, ABC. Ed essendo così, due angoli del triangolo insieme saranno sempre minori di due retti. Fig.24.

72. La terza proprietà del triangolo si è, che a' lati eguali debbano essere opposti angoli similmente eguali. Perciò sia il triangolo ABC, in cui li lati AB, AC sieno tra loro eguali. Dividasi il terzo lato BC in due parti eguali nel punto D (42), e si congiunga la retta AD. I due angoli adunque ACD, ABD avranno li due lati AC, CD eguali alli due lati AB, BD, ciascuno a ciascuno. Ma anno ancora la base AD comune. Dunque sarà l'angolo ACD eguale all'angolo ABD (39); e pertanto siccome sono eguali i lati AB, AC, così saranno eguali parimente gli angoli, che ad essi stanno opposti. Fig.25.

73. La quarta proprietà del triangolo si è, che per lo contrario agli angoli eguali debbano essere opposti lati similmente eguali. Per intenderne la ra-

Fig.26. gione, sia il triangolo ABC, in cui ponganſi eguali tra loro i due angoli ACB, ABC. E ſe i lati oppoſti ad eſſi AB, AC non ſono eguali, biſognerà, che uno di loro ſia maggiore dell'altro. Sia adunque AB il lato maggiore, da cui taglisi la porzione AD eguale all'altro minore AC (31), e congiungaſi la retta CD. E poicche nel triangolo ADC i due lati AD, AC ſono eguali; ſarà l'angolo ACD eguale all'angolo ADC (72); con che l'angolo ACB, come maggiore dell'angolo ACD, ſarà maggiore ancora dell'angolo ADC (12). Ma per lo triangolo BCD, il cui lato BD ſta prolungato in A, l'angolo ADC è maggiore dell'angolo ABC (70). Dunque ſarà l'angolo ACB molto più maggiore dell'angolo ABC (12); qual coſa eſſendo contro l'ipoteſi, dobbiam conchiudere, che i due lati AB, AC ſieno tra loro eguali.

74. La quinta proprietà del triangolo ſi è, che al lato maggiore dee eſſer oppoſto ancora l'angolo maggiore. Così nel triangolo ABC ſuppoſto, che Fig.27. il lato AB ſia maggiore del lato AC, dovrà eſſere l'angolo ACB maggiore altresì dell'angolo ABC. Si ricava ciò dalla dimoſtrazione della proprietà precedente renduta poſitiva. Imperocchè, tagliata dal lato maggiore AB la porzione AD eguale all'altro minore AC (31), e congiunta la retta CD; ſi avrà il triangolo ADC fornito di due lati eguali AD, AC. Dunque ſarà l'angolo ACD eguale all'angolo ADC (72); ed in conſeguenza l'angolo ACB, come maggiore dell'angolo ACD, ſarà maggiore ancora dell'angolo ADC (12). Ma per lo triangolo BCD, il cui lato BD ſta prolungato in A, l'angolo ADC è maggiore dell'angolo ABC (70). Dunque ſarà l'angolo ACB molto più maggiore dell'angolo ABC (12).

75. La ſeſta, ed ultima proprietà del triangolo ſi è, che per lo contrario all'angolo maggiore dee eſſer oppoſto ancora il lato maggiore. Come nel Fig.27. triangolo ABC ſuppoſto, che l'angolo ACB ſia maggiore dall'angolo ABC, dovrà eſſere il lato AB maggiore altresì del lato AC. Imperocchè ſe foſſe

fosse altramente, dovrebbe il lato AB essere, o eguale al lato AC, o minore di quello. Ma nè l'uno, nè l'altro puo aver luogo; poicche nel primo caso sarebbe l'angolo ACB eguale all'angolo ABC (72), e nel secondo sarebbe l'angolo ACB minore dell'angolo ABC (74), quali cose sono contro l'ipotesi. Dunque nella supposizione, che l'angolo ACB sia maggiore dell'angolo ABC, per necessità il lato AB dee essere ancora maggiore del lato AC.

76. A queste proprietà ne aggiungeremo un'altra, non così principale, come ciascuna di esse; e si è, che siccome i lati AB, AC sono maggiori delle rette BD, CD tirate dalli loro termini dentro del triangolo, così l'angolo BDC compreso da queste rette sia maggiore dell'angolo BAC contenuto da quelli lati. Per dimostrarlo, prolunghisi la retta BD per fino a che s'incontri col lato AC nel punto E. E poicche nel triangolo CDE il lato ED sta prolungato verso B, sarà l'angolo BDC maggiore dell'angolo BEC (70). Ma per l'altro triangolo ABE, il cui lato AE sta prolungato verso C, l'angolo BEC è maggiore dell'angolo BAC. Dunque sarà l'angolo BDC molto più maggiore dell'angolo BAC (12). Fig. 23.

## §. II.

### *Delle varie spezie del triangolo.*

77. IL triangolo per rapporto alli lati si divide in equilatero, isoscele, e scaleno. Chiamasi triangolo equilatero quello, che ha tutti tre i lati eguali. Chiamasi triangolo isoscele quello, che ne ha due solamente eguali. E finalmente chiamasi triangolo scaleno quello, in cui tutti tre i lati sono disuguali. Ma per quanto all' isoscele, siccome si appella sua base il terzo lato disuguale, così puo egli essere ancora di due spezie: cioè, o di forma tale, che abbia la base minore di ciascuno delli due lati eguali; o configu-

rato talmente, che per lo contrario abbia la base maggiore.

78. Or essendosi dimostrato, che a' lati eguali debbano essere opposti angoli ancora eguali (72), e che al lato maggiore debba opporsi angolo parimente maggiore (74); egli è facile ad intendersi, quali sieno le proprietà delli riferiti triangoli. In primo luogo l'equilatero, siccome ha tutti tre i lati eguali, così dee avere ancora tutti tre gli angoli eguali. In secondo luogo l'isoscele, conforme ha due lati solamente eguali, così dee avere i soli angoli sopra la base altresì eguali. E finalmente nel scaleno, per la disuguaglianza di tutti tre i lati, non solo debbono essere tutti tre gli angoli parimente disuguali, ma ancora al lato massimo dee essere opposto l'angolo massimo, al lato mezzano l'angolo mezzano, ed al lato minimo l'angolo minimo.

79. Le converse di queste proprietà similmente anno luogo, per la ragione, che ad angoli eguali debbono essere opposti lati ancora eguali (73), e che ad angolo maggiore dee essere opposto lato eziandio maggiore (75). Sicche il triangolo, che ha tutti tre gli angoli eguali, dee essere equilatero; quello poi, che ha due angoli solamente eguali, dee essere isoscele, che avrà per base quel lato, sopra cui detti angoli si ritrovano; e quello finalmente, che ha tutti tre gli angoli disuguali, dee essere scaleno, in cui all'angolo massimo sarà opposto il lato massimo, all'angolo mezzano il lato mezzano, e all'angolo minimo il lato minimo.

80. Se sopra una data retta, come AB, si voglia formare un triangolo equilatero; egli è chiaro, che riducesi il problema a determinare un terzo punto C, così distante dalli due A, e B, come questi distano tra loro. Onde, essendo stato dimostrato di sopra (29), come possa determinarsi tal punto, non dovrà esservi difficoltà in descrivere detto triangolo. Ma nè pure ve ne dee essere, se sopra la stessa retta AB debba formarsi un triangolo, di cui gli altri due lati sieno di qua-

Fig. 28. Fig. 29. 30. 31.

qualunque altra data lunghezza, ed in conseguenza o isoscele, o scaleno; poicche riducesi quest'altro problema a determinare un terzo punto C distante dalli due A, e B per intervalli eguali alle rette, le quali dinotano le lunghezze degli altri due lati; il che similmente è stato dimostrato di sopra (32) come debba eseguirsi.

81. Il triangolo si divide ancora per rapporto agli angoli in rettangolo, ottusangolo, ed acutangolo. Si chiama triangolo rettangolo quello, che ha un'angolo retto. Si chiama triangolo ottusangolo quello, che ha un'angolo ottuso. E finalmente si chiama triangolo acutangolo quello, in cui tutti tre gli angoli sono acuti. Nè dee sembrarci strano, che la dinominazione di questo ultimo debba ricavarsi dall'essere tutti tre gli angoli acuti. Imperocche, essendo stato dimostrato, che tutti tre gli angoli d'ogni triangolo sieno insieme eguali a due retti (71); egli è chiaro, che così nel rettangolo, come nell'ottusangolo gli altri due angoli debbano essere acuti. Onde per l'acutangolo non rimane altro caso, se non se quando tutti tre gli angoli sono acuti.

82. Ma da questo stesso egli è facile ad intendersi, che nè il rettangolo, nè l'ottusangolo puo essere mai equilatero, per la ragione, che in ciascuno de' detti triangoli siccome non mai possono essere tutti tre gli angoli eguali, così non mai puo darsi uguaglianza tra tutti tre i lati. Sicche tanto il rettangolo, quanto l'ottusangolo sarà sempre o isoscele, o scaleno; e solamente l'acutangolo potrà essere ancora equilatero. Del rimanente, se sopra una data retta debbasi formare un triangolo, di cui tutti tre gli angoli sieno dati: siccome il problema per esser solubile richiede, che i tre angoli dati insieme sieno eguali a due retti (71): così niuna cosa sarà più facile, quanto la di lui soluzione, per essersi fatto vedere di sopra (40), come ad un punto di una retta data possa formarsi colla medesima un'angolo, che sia eguale ad un'altro angolo dato.

§. III.

## §. III.

### *Della perfetta uguaglianza de' triangoli.*

83. Il triangolo considerato come figura piana dee stimarsi eguale ad un'altro triangolo, quantevolte le loro superficie sono tra di esse eguali. Ma ciò non basta, per dirsi tra loro perfettamente eguali; poicche per la perfetta uguaglianza di due triangoli si richiede ancora, che i lati dell'uno sieno eguali alli lati dell'altro, ciascuno a ciascuno, ed inoltre che a' lati eguali sieno opposti angoli parimente eguali. Or perche la conoscenza di questi tali triangoli puo essere di qualche uso per le cose, che dovremo dimostrare in appresso; non sarà mal fatto, far vedere in questo luogo quali sono i principali mezzi per poterla conseguire.

84. Ed in primo luogo due triangoli saranno perfettamente tra loro eguali, quantevolte i lati dell'uno sono eguali alli lati dell'altro, ciascuno a
Fig.32. ciascuno. Per dimostrarlo, sieno i due triangoli ABC, DEF, i quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, ed il lato BC eguale al lato EF. Adattisi col pensiero l'uno sopra l'altro talmente, che il punto B cada sul punto E, ed il lato BC sul lato EF. Per l'uguaglianza adunque di questi lati caderà ancora il punto C sul punto F; ed essendo gli altri due lati dell'uno AB, AC eguali agli altri due lati dell'altro DE, DF, ciascuno a ciascuno, caderà altresì il punto A sul punto D (26). Quindi si combacieranno tra loro, così le superficie di essi triangoli, come gli angoli opposti a'lati eguali; e perciò i due triangoli ABC, DEF saranno perfettamente tra loro eguali (15).

85. In secondo luogo vi sarà perfetta uguaglianza tra due triangoli, quantevolte gli angoli dell'uno sono eguali agli angoli dell'altro, ciascuno a ciascuno, e di più un lato è eguale ad un lato, che

che debbono esser opposti ad angoli eguali. Perciò sieno i due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano l'angolo BAC eguale all'angolo EDF, l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB eguale all'angolo DFE; ed abbiano ancora il lato BC eguale al lato EF, li quali lati sono opposti ad angoli eguali. Adattisi col pensiero l'uno sopra l'altro talmente, che il punto B cada sul punto E, ed il lato BC sul lato EF. Per l'uguaglianza adunque di questi lati caderà ancora il punto C sul punto F; ed essendo i due angoli ABC, ACB eguali agli altri due DEF, DFE, ciascuno a ciascuno, caderà similmente così il lato AB sul lato DE, come il lato AC sul lato DF. Quindi, cadendo ancora il punto A sul punto D, si combacieranno tra loro, tanto le superficie de'detti triangoli, quanto gli altri loro lati; e pertanto i due triangoli ABC, DEF saranno perfettamente eguali tra loro (15). Fig. 32.

86. Non essendosi fatto uso nella dimostrazione di questo teorema dell'ugualianza delli due angoli BAC, EDF; egli è chiaro, che non sia ella necessaria per giudicare della perfetta uguaglianza delli due triangoli, anzi più tosto che si debba raccogliere dalla dimostrazione medesima. Ma quantunque a ben considerare si potrebbe da quella prescindere, tuttavolta si è aggiunta all'altre condizioni del teorema, poicche essendo stato dimostrato, che tutti tre gli angoli d'ogni triangolo uniti insieme debbano essere eguali a due retti (72), non potranno due triangoli avere due angoli eguali a due angoli, senza essere eguali ancora i rimanenti. Oltreche si è stimato convenevole di supporre eguali tutti gli angoli, per fare del teorema un solo caso, e non partirlo in due, secondoche i lati, che si suppongono eguali, sono o opposti, o adjacenti ad angoli eguali.

87. In terzo luogo due triangoli saranno perfettamente tra loro eguali, quantevolte due lati dell'uno sono eguali a due lati dell'altro, ciascuno a ciascuno, e sono eguali ancora gli angoli contenuti

tenuti da'detti lati. Per dimostrarlo, sieno i due
Fig. 32. triangoli ABC, DEF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, e l'angolo BAC eguale all'angolo EDF. Adattisi col pensiero l'uno sopra l'altro talmente, che il punto A cada sul punto D, ed il lato AB sul lato DE. Per l'uguaglianza adunque degli angoli BAC, EDF caderà ancora il lato AC sul lato DF; ed essendo i due lati AB, AC eguali alli due lati DE, DF ciascuno a ciascuno, caderà altresì tanto il punto B sul punto E, quanto il punto C sul punto F. Quindi si combacieranno tra loro, così le superficie de'detti triangoli, come i rimanenti lati, e li rimanenti angoli; e perciò i due triangoli ABC, DEF saranno perfettamente eguali tra loro (15).

88. Finalmente vi sarà perfetta uguaglianza tra due triangoli, quantevolte due lati dell'uno sono eguali a due lati dell'altro, ciascuno a ciascuno; e degli angoli opposti a'detti lati due sono eguali tra loro, e due altri della stessa spezie, cioè o acuti, o ottusi. Perciò sieno i due triangoli ABC,
Fig. 33. DEF, li quali abbiano il lato AB eguale al lato DE, il lato AC eguale al lato DF, l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB dell'istessa spezie coll'angolo DFE. E se possiamo dimostrare, che gli angoli BAC, EDF contenuti dalli lati eguali sieno eguali tra loro; ricaderemo nel teorema precedente, ed in conseguenza i due triangoli ABC, DEF saranno perfettamente eguali. Or l'uguaglianza delli due angoli BAC, EDF puo raccogliersi con dimostrazione negativa nella maniera, che segue.

89. Se è possibile, i due angoli BAC, EDF sieno tra loro disuguali, e sia l'angolo BAC maggiore dell'altro EDF. Si faccia l'angolo BAG eguale all'angolo EDF (40); ed essendo per ipotesi l'angolo ABG eguale all'angolo DEF, sarà il terzo AGB similmente eguale al terzo DFE (72). Quindi per l'uguaglianza delli lati AB, DE saranno i due triangoli ABG, DEF perfettamente

tra

tra loro eguali (85); e perciò il lato AG sarà eguale al lato DF, o pure al suo eguale AC; onde l'angolo ACG sarà similmente eguale all'angolo AGC (73). Ma per supposizione l'angolo ACG è della stessa spezie coll'angolo DFE, o pure col suo eguale AGB. Dunque i due angoli AGC, AGB saranno ancora della stessa spezie; e pertanto eguali insieme, o a due acuti, o a due ottusi, qual cosa non puo essere (51).

## §. IV.

### *Delle proprietà, così assolute, come relative del parallelogrammo.*

90. DOpo i triangoli seguono le figure quadrilatere, chiamate ancora quadrangole, delle quali due ne sono le spezie principali, cioè il parallelogrammo, ed il trapezio. Chiamasi parallelogrammo quella figura quadrilatera, che ha i lati opposti paralleli. Per lo contrario si appella trapezio quell'altra, in cui una tal affezione o affatto non si ritrova, o pure ha luogo in due soli lati opposti. Or quantunque così le quadrilatere, come le rimanenti figure rettilinee, che sono infinite, si possono porre a calcolo, con risolverle in triangoli; pure de'parallelogrammi giova averne nota la teoria, sì perche essi spesso vengono in uso, come ancora perche i medesimi conducono non poco a farci conoscere altre proprietà di quelli stessi triangoli, ne'quali debbonsi risolvere l'altre figure rettilinee.

91. Nel parallelogrammo adunque sono eguali tra loro così i lati, come gli angoli opposti; e se in esso tirisi la diagonale, cioè una retta da un'angolo all'altro opposto, i triangoli, ne'quali resta egli diviso, sono ancora tra loro eguali. Per dimostrarlo, sia il parallelogrammo ABCD, in cui Fig. 34. tirisi la diagonale AC. E poicche sono parallele, così le due AB, DC, come le due AD, BC (90); sarà tanto l'angolo BAC eguale all'angolo ACD,

quan-

quanto l'angolo DAC eguale all' angolo ACB (61); conche tutto l'angolo BAD sarà eguale a tutto l'angolo BCD (13); e dell'istessa maniera si dimostrerà, che ancora l'angolo ABC sia eguale all'angolo ADC. Quindi i due triangoli ABC, CDA, avendo gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e il lato AC comune, che sta opposto a' angoli eguali, saranno perfettamente eguali tra loro (85); e avranno in conseguenza non solo eguali le superficie, ma ancora il lato AB eguale al lato DC, e l'altro BC eguale all'altro AD.

92. Oltre a queste proprietà ne ha egli il parallelogrammo un'altra, la quale per bene intendersi, sia di nuovo il parallelogrammo ABCD, e per il punto E preso ad arbitrio nella sua diagonale AC tirinsi le rette FG, HI parallele alli lati opposti (65). Egli è chiaro, che con queste rette rimane diviso il parallelogrammo in altri quattro; de' quali siccome i due AFEH, CGEI sono situati intorno alla sua diagonale, così gli altri due BGEH, DFEI debbono aversi come supplementi di quelli. Or consiste l'altra proprietà in esser eguali tra loro questi supplementi. E la ragione è chiara; poicche, dividendosi il parallelogrammo dalla sua diagonale in triangoli eguali (91), saranno i tre triangoli ABC, AHE, CGE eguali agli altri tre ADC, AFE, CIE, ciascuno a ciascuno; e pertanto togliendo così dal triangolo ABC gli altri due AHE, CGE, come dal triangolo ADC gli altri due AFE, CIE, rimarrà il supplemento BGEH eguale al supplemento DFEI (13).

Fig. 34.

93. Or dall'uguaglianza, che dee esservi tra i lati opposti del parallelogrammo, egli è facile a dedurne, che i parallelogrammi situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele debbano essere tra loro eguali. Perciò sieno ABCD, EBCF questi tali parallelogrammi. E poicche alla BC è eguale ciascuna delle due AD, EF; saranno queste due AD, EF eguali tra loro (11); e pertanto coll' aggiunta della comune DE saranno eguali ancora le

Fig. 35.

due

due AE, DF. Ma sono eguali similmente tanto le due AB, DC, quanto le due BE, CF. Dunque i due triangoli ABE, DCF saranno perfettamente eguali tra loro (84); e pertanto siccome tolto il comune DGE rimane il trapezio ABGD eguale al trapezio EGCF, così apposto l'altro comune BGC sarà il parallelogrammo ABCD eguale al parallelogrammo EBCF (13).

94. Ma essendo così, saranno eguali ancora tra loro i parallelogrammi situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele. Per dimostrarlo, sieno i due parallelogrammi ABCD, EFGH, li quali abbiano la base BC eguale alla base FG, e sieno situati tra le stesse parallele AH, BG. Congiungansi le due AF, DG. E poicchè alla stessa BC è eguale tanto la AD, quanto la FG; saranno le due AD, FG tra loro eguali (11). Ma le medesime AD, FG sono porzioni di rette parallele. Dunque parallele altresì saranno le due AF, DG (67); e perciò la figura quadrilatera AFGD sarà similmente parallelogrammo (90). Or a questo parallelogrammo dee essere eguale, così il parallelogrammo ABCD, come il parallelogrammo EFGH (93). Dunque i due parallelogrammi ABCD, EFGH saranno similmente tra loro eguali (11). Fig. 36.

95. Dividendosi poscia il parallelogrammo dalla sua diagonale in due triangoli eguali, si potranno queste stesse proprietà dimostrare ancora per rapporto alli triangoli. Quindi, se due triangoli sono situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, i medesimi debbono essere tra loro eguali. Imperocchè sieno ABC, DBC questi tali triangoli, e tirinsi le rette BE, CF parallele alle due CA, BD (65), le quali s'incontrino colla AD prolungata dall'una, e l'altra parte ne' punti E, ed F. Saranno dunque eguali i due parallelogrammi ACBE, DBCF (93). Ma i triangoli ABC, DBC sono le metà di questi parallelogrammi. Dunque ancora i due triangoli ABC, DBC saranno tra loro eguali (11). Fig. 37.

96. Similmente eguali tra loro esser debbono i trian-

triangoli situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele. Per dimostrarlo sieno i due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano la base BC eguale alla base EF, e sieno situati tra le stesse parallele
Fig. 38. AD, BF. Tirinsi le rette BG, FH parallele alle due CA, ED, (65) che s'incontrino colla AD prolungata dall'una, e l'altra parte nelli punti G, e H. E per ciò, che è stato dimostrato (94), sarà il parallelogrammo ACBG eguale al parallelogrammo DEFH. Ma i triangoli ABC, DEF sono le metà di questi parallelogrammi. Dunque ancora i due triangoli ABC, DEF saranno tra loro eguali.

97. Ma eziandio le converse di queste proprietà anno luogo così ne' parallelogrammi, come ne' triangoli; poicche tanto l'une, quanto l'altre figure, qualora sono tra loro eguali, e stanno situate verso la medesima parte, o sopra una stessa base, o sopra basi eguali, debbono essere tra le stesse parallele. E per quanto tocca alla dimostrazione, ella è così facile, che basterà darne un saggio in un sol caso, per poterla estendere a tutti gli altri. Sieno adunque i due triangoli eguali ABC,
Fig. 39. DBC, li quali sieno situati verso la medesima parte sopra la stessa base BC. E se le due AD, BC non sono parallele, sia un'altra come AE parallela alla BC (65); con che congiunta la CE, sarà il triangolo EBC eguale al triangolo ABC (95). Ma per ipotesi il triangolo ABC è eguale al triangolo DBC. Dunque i due triangoli DBC, EBC saranno ancora tra loro eguali (11), il che non può essere (14).

98. Del rimanente se un triangolo, ed un parallelogrammo sieno situati sopra una stessa base, e tra le stesse parallele, dovrà essere il parallelogrammo doppio del triangolo. Per comprenderne
Fig. 40. la ragione, sia ABCD il parallelogrammo, ed EBC il triangolo, li quali abbiano la stessa base BC, e sieno situati tra le stesse parallele AE, BC. Tirisi nel parallelogrammo la diagonale AC. E poicche questa lo divide in due triangoli eguali (91), sarà il parallelogrammo ABCD doppio del triangolo

golo ABC. Ma il triangolo ABC è eguale al triangolo EBC (95). Dunque l'istesso parallelogrammo ABCD sarà doppio ancora del triangolo EBC.

## §. V.

### *Della formazione de' parallelogrammi eguali a figure rettilinee date.*

99. NIente è più facile, quanto il formare parallelogrammi, di cui così li lati, come gli angoli sieno dati; ma talvolta si ha bisogno de' parallelogrammi, che forniti di un dato lato, e di un dato angolo sieno eguali ad altre figure rettilinee date; onde giova il far vedere, come possono formarsi questi tali parallelogrammi. E per andare con ordine, primieramente supporremo, che la figura rettilinea data sia un triangolo; indi ci studieremo di estendere il problema ad ogni altra figura, che sia terminata da un numero maggiore de' lati.

100. Sia dato adunque il triangolo ABC, e debbasi in primo luogo formare un parallelogrammo, che dotato di un dato angolo sia eguale al triangolo dato. Taglisi la BC in due egualmente nel punto D (42); e facciasi l'angolo CDE eguale all'angolo dato (40). Tirinsi di poi per i punti A, e C le rette AF, CF parallele alle due BC, DE (65); e sarà CDEF il parallelogrammo, che si dimanda. Per dimostrarlo, congiungasi la retta AD. E poicche i due triangoli ABD, ADC sono situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele; saranno i medesimi eguali tra loro (96); e perciò tutto il triangolo ABC sarà doppio del solo ADC. Ma ancora il parallelogrammo CDEF è doppio del triangolo ADC (98). Dunque il parallelogrammo CDEF, ed il triangolo ABC saranno tra loro eguali (11). Fig. 41.

101. Debbasi in secondo luogo formare un parallelogrammo, che sia eguale al triangolo ABC, Fig. 42.

ed abbia così un lato, come un'angolo dato. Formisi il parallelogrammo DEFG, che sia eguale al triangolo ABC, ed abbia l'angolo EFG eguale al dato (100); e tagliata dalla GF prolungata la porzione FH eguale al dato lato (31), tirisi per il punto H la retta IL parallela alla EF, ovvero DG (65), che si vada ad incontrare colla DE nel punto I. Congiungasi poscia la retta IF, che s'incontri colla DG nel punto M; e tirata per questo punto la retta MNL parallela alla DI, che convenga colle due EF, IH ne'punti N, ed L, sarà HFNL il parallelogrammo, che si dimanda. Imperocchè, siccome il di lui lato FH uguaglia il dato, così il di lui angolo HFN, come eguale all'angolo EFG (53), sarà similmente eguale al dato; e per essere egli eguale all'altro parallelogrammo DEFG (92), sarà eguale ancora al triangolo dato ABC (11).

102. In vece del triangolo sia data ora qualunque altra figura rettilinea, come la quadrilatera
Fig. 43. ABCD; e debbasi primieramente formare un parallelogrammo, che fornito di un dato angolo sia eguale alla figura data. Colla retta AC dividasi la figura in due triangoli, e formisi il parallelogrammo EFGH, che sia eguale al triangolo ABC, ed abbia l'angolo EFG eguale al dato (100). Facciasi di poi l'altro parallelogrammo HGIL, che avendo la HG per uno de'suoi lati sia eguale all'altro triangolo ACD, ed abbia l'angolo HGI similmente eguale al dato (101). E qualora si potesse dimostrare, che la figura EFIL, nata dalli due parallelogrammi formati, sia ancora parallelogrammo; chiara cosa sarebbe, questo essere il parallelogrammo, che si dimanda.

103. Or egli è evidente, che la dimostrazione di ciò dipende dal far vedere, che così le due FG, GI, come le altre due EH, HL formino rette continuate: qual cosa è facile a pruovarsi. Imperocchè, essendo ciascuno delli due angoli EFG, HGI eguale all'angolo dato; sarà l'angolo EFG eguale all'angolo HGI (11); ed apposto il comune

ne HGF, saranno ancora i due EFG, HGF eguali agli altri due HGI, HGF (13). Ma per le parallele EF, HG i primi due EFG, HGF sono eguali a due retti (63). Dunque similmente eguali a due retti saranno gli altri due HGI, HGF; e pertanto le due FG, GI staranno a dirittura (52). E poicche gli angoli EHG, HLI, come eguali agli angoli EFG, HGI (91), sono tra loro eguali; si pruoverà dell'istessa maniera, essere ancora a dirittura le due EH, HL.

104. Che se poi debbasi formare un parallelogrammo, il quale sia eguale alla figura ABCD, ed abbia così un lato, come un'angolo dato; si risolverà il problema nello stesso modo, che è stato egli risoluto poc'anzi per rapporto al triangolo (101). Formisi il parallelogrammo EFGH, che sia eguale alla figura ABCD, ed abbia l'angolo FGH eguale al dato (102); e tagliata dalla HG prolungata la porzione GI eguale al dato lato (31), tirisi per il punto I la retta LM parallela alla FG, ovvero EH (65), che si vada ad incontrare colla EF nel punto L. Congiungasi poscia la retta LG, che s'incontri colla EH nel punto N; e tirata per questo punto la retta NOM parallela alla EL, che convenga colle due FG, LI ne' punti O, ed M, sarà IGOM il parallelogrammo, che si dimanda. Ed egli è chiaro, la dimostrazione essere la medesima. Fig. 44.

105. Del rimanente se la figura rettilinea data non fosse quadrilatera, ma contenesse un maggior numero de' lati; pure con dividerla in triangoli potrebbe formarsi un parallelogrammo, che fosse a quella eguale, ed avesse un'angolo eguale ad un dato; bastando alli due di già formati aggiungerne colla stessa legge del secondo tanti altri, quanti triangoli di più vi sono nella figura data. E formato questo tale parallelogrammo, si potrebbe altresì col di lui mezzo formarne poscia un'altro, che non solo fosse eguale alla data figura, ma avesse così un lato, come un'angolo eguale ad un dato. E quindi di già incomincia a vedersi la ve-

rità di quel tanto fu di sopra avvertito (90), cioè che le altre figure rettilinee possono mettersi a calcolo con risolverle in tanti triangoli.

106. Or con trasformare in parallelogrammi le figure rettilinee, non solo più agevolmente cadono elle sotto gli occhi; ma, date due delle medesime, sarà egli facile il determinarne così la somma, come la differenza. Perciò sieno A, e B le
Fig. 45. due figure rettilinee date. Formisi primieramente il parallelogrammo CDEF, che sia eguale ad una di quelle A, ed abbia in D un'angolo qualsivoglia (102). Indi sopra la retta EF formisi l'altro parallelogrammo EFGH, che sia eguale all'altra B, ed abbia in E un'angolo tale, che i tre punti D, E, H si ritrovino sopra una medesima retta (104). E secondoche questi due parallelogrammi sono situati, o l'uno dopo l'altro, o l'uno sopra l'altro; egli è chiaro, che il terzo parallelogrammo CDHG debba essere, o la somma, o la differenza delle due figure date A, e B. E con una tal costruzione potrà darsi a questo terzo parallelogrammo, ed un lato, ed un'angolo qualsivoglia.

## CAPITOLO III.

### *Della teoria de' rettangoli, e de' quadrati.*

107. Li parallelogrammi tutti possono essere di due spezie; poicche o i loro angoli sono retti, o per lo contrario due di essi sono ottusi, ed altri due acuti. Ma così gli uni, come gli altri, potendo avere o tutti quattro i lati eguali, o solamente eguali i lati opposti, si dividono ancora in due altre spezie; e siccome rombo, e romboide si appellano le due delli secondi, così quadrato, e rettangolo chiamansi le due delli primi. Or conforme tra le figure quadrilatere meritano particolar considerazione i parallelogrammi; così tra questi debbono essere più da presso contemplati coloro, che anno gli angoli retti; e perciò argomento del presente capi-

pitolo sarà la teoria di sì fatti parallelogrammi.

## §. I.

### *Della nozione così del rettangolo, come del quadrato.*

108. SEmpre quando in un parallelogrammo vi è un'angolo retto, per necessità tutti gli altri debbono essere retti; poicchè, siccome gli opposti sono eguali tra loro (91), così li due adjacenti ad un'istesso lato sono insieme eguali a due retti (63). Ma per la medesima ragione nel parallelogrammo, che non ha angoli retti, due degli opposti debbono essere ottusi, e due altri acuti. Onde non dee porsi in dubbio, che due sieno le classi di tutti i parallelogrammi: cioè una di quelli, che anno gli angoli retti; e l'altra di coloro, che ne anno due ottusi, e due acuti. E poicchè niente è più facile, quanto il formare parallelogrammi, de'quali tutti quattro i lati sieno eguali; perciò nè pure dee mettersi in forse, che i parallelogrammi di ciascuna classe possono avere e soltanto i lati opposti eguali, ed eguali ancora tutti quattro i lati.

109. Or il parallelogrammo, che cogli angoli retti ha soltanto i lati opposti eguali, secondo si è avvertito poc'anzi (107), spezialmente chiamasi rettangolo; e restando egli determinato colla sola lunghezza delli due lati, che sono intorno ad uno degli angoli retti, lo diremo fatto, o contenuto dalli due riferiti lati. Il che non puo dirsi del romboide, ovvero del parallelogrammo obliquangolo, che ha ancora eguali solamente i lati opposti; poicchè la determinazione di esso dipende non solo dalla lunghezza delli due lati, che sono intorno ad uno delli suoi angoli, ma altresì dalla quantità stessa dell'angolo, che per essere ottuso, o acuto puo variare all'infinito; come in effetto con due lati dati possono formarsi non uno, ma infiniti romboidi.

110. Se dunque ſieno date due rette, come AB,
Fig.46. CD; il rettangolo, che puo farſi con queſte rette come lati, per eſſere ſempre lo ſteſſo, ſarà ancora dato. E ſi formerà egli effettivamente con alzare ſopra una di eſſe AB la perpendicolare AE dal punto A (49), che dovrà farſi eguale all'altra CD (31); e con tirare per i punti E, e B le rette EF, BF parallele alle due AB, AE (65), che s'incontrino tra loro nel punto F. Ma poicche col formare tutti i rettangoli, de' quali puo averſi biſogno nel trattare di queſto argomento, verrebbero tal volta le figure ad eſſere molto compoſte, ed intrigate; perciò giova l'aſſuefarſi ad averli preſenti, con indicare ſemplicemente le rette, che come lati debbono contenerli.

111. Il parallelogrammo poi, che cogli angoli retti ha tutti quattro i lati eguali, giuſta l'avvertimento fatto di ſopra (107) ſpezialmente appellaſi quadrato; e reſtando egli determinato colla ſola lunghezza di uno delli lati, lo diremo formato, o deſcritto da detto lato. Il che non puo dirſi del rombo, ovvero del parallelogrammo obliquangolo, che ha ſimilmente tutti quattro i lati eguali; poicche la ſua determinazione dipende non ſolo dalla lunghezza di uno delli quattro lati, ma ancora dalla quantità di uno degli angoli, che per eſſere ottuſo, o acuto puo variare all'infinito; come in effetto con un medeſimo lato ſi poſſono formare non uno, ma infiniti rombi.

112. Se dunque ſia data una retta, come AB, il quadrato, che puo farſi con queſta retta come
Fig.47. lato, per eſſere ſempre lo ſteſſo, ſarà ancora dato. E ſi deſcriverà egli effettivamente, con alzare dal punto A ſopra la data AB la perpendicolare AC (49), che dovrà farſi eguale alla ſteſſa AB (31); e con tirare per i punti C, e B le rette CD, BD parallele alle due AB, AC (65) che s'incontrino tra loro nel punto D. Ma per non rendere le figure molto compoſte, ed intrigate colla deſcrizione di tutti i quadrati, che poſſono biſognare; ancora per eſſi è neceſſario di aſſuefarſi

si ad averli presenti, con indicare soltanto le rette, dalle quali come lati si debbono descrivere.

113. Essendo dato il quadrato, che si descrive da una retta data, egli è chiaro, che i quadrati descritti da rette eguali, debbano essere similmente eguali. Ma chiara cosa ancora si è, che i quadrati eguali debbano essere descritti da rette, che eziandio sieno tra loro eguali. Qual cosa in vero non sempre ha luogo ne' rettangoli. Poicche se bene quando due rette sono eguali a due altre rette, ciascuna a ciascuna, il rettangolo contenuto dalle prime debba essere eguale al rettangolo contenuto dalle seconde; tuttavolta per quello, che sarà dimostrato altrove, possono due rettangoli essere eguali tra loro, senza che i lati dell'uno, sieno eguali alli lati dell'altro, ciascuno a ciascuno.

114. Egli è proprio ancora del quadrato, di essere similmente quadrati i parallelogrammi, che sono intorno alla sua diagonale. Perciò sia il quadrato Fig. 48. ABCD, e per il punto E preso nella sua diagonale AC tirinsi le rette FG, HI parallele alli lati opposti (65). Ed essendo nel triangolo ABC eguali i due lati AB, BC, saranno eguali ancora li due angoli BCA, BAC (72). Ma per le parallele BC, FG all'angolo BCA è eguale l'angolo FEA (62). Dunque eguali altresì saranno i due angoli FEA, BAC (11); e pertanto nel triangolo AFE saranno eguali parimente i due lati AF, FE (73); dal che egli è facile il dedurne, che il parallelogrammo AFEH sia quadrato. E dell'istessa maniera si dimostrerà, che sia quadrato ancora l'altro parallelogrammo CGEI.

## §. II.

### *Delle composizioni più semplici del rettangolo, e del quadrato.*

115. Niente più conferisce alla ricerca delle verità geometriche, quanto lo aver presenti le varie composizioni del rettangolo, e del

quadrato, quando i loro lati sono divisi in parti.
Fig.49. Onde per renderle note, sia il rettangolo ABCD, contenuto dalli due lati AB, BC. Dividasi il lato BC in due parti ad arbitrio nel punto E, per cui tirisi la retta EF parallela all' altro lato AB (65). Ed egli è chiaro, che da questa parallela resterà diviso il rettangolo proposto ABCD in due altri rettangoli ABEF, DCEF. Or di questi siccome il primo è contenuto dalle due AB, BE; così per essere la AB eguale alla EF (90) sarà il secondo contenuto dalle due AB, CE. E perciò potrà stabilirsi come teorema generale, che se vi sono due rette, una divisa in parti, e l'altra indivisa, il rettangolo contenuto da tali rette debba essere eguale alli rettangoli, che si fanno dalla retta indivisa nelle parti dell'altra divisa.

116. Egli è vero, che per stabilire la verità di questo teorema si è supposto il lato BC diviso in due sole parti; ma ben si vede, che la medesima dimostrazione ha luogo eziandio, quando è maggiore il numero delle parti, nelle quali si voglia suppor diviso detto lato. Oltreche se mai la parte CE sia di nuovo divisa in G, con risolvere il rettangolo fatto dalle due AB, CE giusta il caso di già esaminato, si dimostrerà, che il rettangolo fatto dall'indivisa AB nell'altra divisa BC sia eguale alli tre rettangoli fatti dalla stessa AB nelle parti della divisa BE, EG, GC. Ed in questa maniera potrà dimostrarsi altresì, che se vi sono due rette divise in parti, il rettangolo contenuto da tali rette debba essere eguale alli rettangoli, che si fanno da tutte le parti dell'una in tutte le parti dell'altra.

117. Ma considerando il teorema stabilito secondo il suo caso più semplice, potremo da quello stesso dedurne due altri. Fingasi in primo luo-
Fig.50. go, che il lato indiviso AB del proposto rettangolo sia eguale alla CE, che è una delle parti del lato diviso BC. Ed in tal caso egli è chiaro, che siccome il rettangolo ABCD è contenuto dalla tutta BC, e dalla parte CE; così degli altri due

ABEF,

ABEF, DCEF il primo è fatto dalle parti BE, CE, ed il secondo non differisce dal quadrato descritto dalla parte CE. Onde avremo quest' altro teorema, cioè, che se una retta sia divisa in due parti, il rettangolo fatto dalla tutta, e da una parte debba essere eguale al rettangolo di ambedue le parti, ed al quadrato della parte predetta.

118. Fingasi in secondo luogo, che il lato indiviso AB del proposto rettangolo sia eguale all' altro lato diviso BC. Ed in quest' altro caso siccome con ogni chiarezza si vede, che il rettangolo ABCD non differisce dal quadrato descritto dalla tutta BC; così chiara cosa ancora si è, che degli altri due rettangoli ABEF, DCEF il primo è fatto dalla tutta BC nella parte BE, ed il secondo è contenuto dalla stessa tutta BC nell' altra parte CE. Onde alli due teoremi precedenti potremo aggiungere ancora quest' altro, cioè, che se una retta sia divisa in due parti, il quadrato fatto dalla tutta debba essere eguale alli due rettangoli contenuti dalla stessa tutta, e dalle sue parti. Fig. 51.

119. E quindi potremo dimostrare inoltre, che se una retta sia divisa in due parti, il quadrato fatto dalla tutta debba essere eguale alli quadrati delle parti, e a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime parti. Imperocchè il quadrato della Fig. 51.
tutta BC dee essere eguale a due rettangoli, uno de' quali sia fatto dalla tutta BC nella parte BE, l' altro dalla tutta BC nella parte CE (118). Ma di questi due rettangoli il primo è eguale al rettangolo delle parti BE, CE insieme col quadrato della parte BE; ed il secondo è eguale al rettangolo delle stesse parti BE, CE insieme col quadrato della parte CE (117). Dunque il quadrato della tutta BC sarà eguale alli quadrati delle parti BE, CE, e a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime parti.

120. Potremo ancora dimostrare, che se una retta sia divisa in due parti, i quadrati della tutta, e di una delle parti debbano essere eguali a due vol-

volte il rettangolo fatto dalla tutta nella detta parte insieme col quadrato dell'altra parte. Imperocchè, essendo il quadrato della tutta BC eguale alli quadrati delle parti BE, CE, e a due volte il rettangolo delle medesime parti (119); coll' aggiunta del comune quadrato della parte BE, saranno i due quadrati della tutta BC, e della parte BE eguali a due volte il quadrato della parte BE, a due volte il rettangolo delle parti BE, CE, ed al quadrato della parte CE (13). Ma due volte il quadrato della parte BE, e due volte il rettangolo delle parti BE, CE fanno due volte il rettangolo della tutta BC nella parte BE (117). Dunque i due quadrati della tutta BC, e della parte BE saranno eguali a due volte il rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte, ed al quadrato dell'altra parte CE.

Fig. 51.

121. Potremo finalmente dimostrare, che se una retta sia divisa in due parti il quadrato della tutta, e di una parte unite insieme debba essere eguale a quattro volte il rettangolo della stessa tutta nella stessa parte insieme col quadrato dell'altra parte. Imperocchè se CE sia la retta divisa nelle parti CG, EG, ed alla medesima si aggiunga a dirittura l'altra BE eguale alla parte EG; sarà il quadrato della BC eguale alli quadrati delle due CE, EG, ed a due volte il rettangolo contenuto dalle medesime (119). Ma i quadrati delle due CE, EG sono eguali a due volte il rettangolo fatto dalle stesse, ed al quadrato dell'altra parte CG, (120). Dunque il quadrato della BC, cioè della tutta CE, e della parte EG unite insieme sarà eguale a quattro volte il rettangolo fatto dalla stessa tutta nella stessa parte, ed al quadrato dell'altra parte CG.

Fig. 51.

§. III.

## §. III.

### *Di altre composizioni più implicate del rettangolo, e del quadrato.*

122. Oltre alle precedenti vi sono altre composizioni più implicate del rettangolo, e del quadrato, le quali per essere ancora rilevanti non debbono passarsi sotto silenzio. Ed in primo luogo, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C, ed in due parti disuguali nel punto D; sarà il rettangolo delle parti disuguali AD, DB insieme col quadrato della porzione di mezzo CD eguale al quadrato della metà BC. Imperocchè, essendo il rettangolo delle due AD, DB eguale alli rettangoli della AC ovvero BC nella DB, e della CD nella DB (115); sarà il rettangolo delle medesime AD, DB insieme col quadrato della CD eguale alli rettangoli della BC nella DB, e della CD nella DB insieme coll'istesso quadrato della CD (13). Ma il rettangolo della CD nella DB insieme col quadrato della CD è eguale al rettangolo della BC nella CD (117), il quale aggiunto all'altro rettangolo della BC nella DB forma il quadrato della BC (118). Dunque il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CD sarà eguale al quadrato della BC. Fig. 52.

123. Poiche dunque il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della CD è eguale al quadrato della BC; egli è chiaro, che togliendo il comune quadrato della CD, dovrà essere il solo rettangolo delle medesime AD, DB eguale alla differenza delli quadrati, che si fanno dalle due BC, CD (13). Or siccome la DB è eguale alla differenza di queste due BC, CD; così essendo la AC eguale alla BC, coll'aggiunta della comune CD sarà la AD eguale alla somma delle stesse BC, CD (13). Onde potrà stabilirsi generalmente, che la differenza di due qualisisieno qua-

dra-

drati debba essere eguale al rettangolo, che si fa dalla somma de' loro lati nella differenza de' medesimi lati.

Fig. 53. 124. In secondo luogo, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C, ed alla medesima sia aggiunta a dirittura un'altra BD, sarà il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della metà BC eguale al quadrato della retta CD, cioè della metà, e dell'aggiunta unite insieme. Imperocchè, essendo il rettangolo delle due AD, DB eguale alli rettangoli della AC ovvero BC nella DB, e della CD nella DB (115); sarà il rettangolo delle medesime AD, DB insieme col quadrato della BC eguale alli rettangoli della BC nella DB, e della CD nella DB insieme coll'istesso quadrato della BC (13). Ma il rettangolo della BC nella DB insieme col quadrato della BC è eguale al rettangolo della CD nella BC (117), il quale aggiunto all'altro rettangolo della CD nella DB forma il quadrato della CD (118). Dunque sarà il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della BC eguale al quadrato della CD.

125. Poicche dunque il rettangolo delle due AD, DB insieme col quadrato della BC è eguale al quadrato della CD; egli è chiaro, che togliendo il comune quadrato della BC, dovrà essere il solo rettangolo delle medesime AD, DB eguale alla differenza delli quadrati, che si fanno dalle due CD, BC (13). Or quì ancora siccome la DB è eguale alla differenza di queste due CD, BC; così essendo la AC eguale alla BC, coll'aggiunta della comune CD sarà la AD eguale alla somma delle stesse CD, BC (13). Onde di nuovo vedesi la verità di quel tanto è stato avvertito poc' anzi (123), cioè, che la differenza di due qualisisieno quadrati debba essere eguale al rettangolo, che si fa dalla somma de' loro lati nella differenza de' medesimi lati.

126. In terzo luogo, se una retta come AB sia
Fig. 52. divisa in due parti eguali nel punto C, e in due par-

parti disuguali nel punto D, saranno i quadrati delle parti disuguali AD, DB eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalla metà BC, e dalla porzione di mezzo CD. Imperocchè, essendo questi due quadrati eguali a due volte il rettangolo della BC nella CD, ed al quadrato della DB (120); sarà il loro doppio eguale a quattro volte il rettangolo della BC nella CD, e a due volte il quadrato della DB. Ma quattro volte il rettangolo della BC nella CD insieme con un solo quadrato della DB è eguale al quadrato delle due insieme BC, CD, o pure della sola AD (121). Dunque i quadrati delle due AD, DB saranno eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalle altre due BC, CD.

127. Finalmente, se una retta come AB sia divisa in due parti eguali nel punto C, ed alla medesima sia aggiunta a dirittura un' altra BD, Fig. 53. saranno li quadrati delle due AD, DB eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalla metà BC, e dalla metà insieme coll' aggiunta, cioè dalla CD. Imperocchè, essendo questi due quadrati eguali a due volte il rettangolo della BC nella CD, ed al quadrato della DB (120); sarà il loro doppio eguale a quattro volte il rettangolo della BC nella CD, e a due volte il quadrato della DB. Ma quattro volte il rettangolo della BC nella CD insieme con un solo quadrato della DB è eguale al quadrato delle due insieme BC, CD, o pure della sola AD (121). Dunque i quadrati delle due AD, DB saranno eguali al doppio delli quadrati, che si fanno dalle altre due BC, CD.

128. Con ciascuno di questi teoremi egli è facile ad intendersi, che la somma de' quadrati descritti da due rette debba essere eguale al doppio di due altri quadrati, de' quali uno sia fatto dalla metà della somma di quelle rette, e l' altro dalla metà della loro differenza. Imperocchè, siccome in vigore delli detti teoremi li quadrati delle due AD, DB sono eguali al doppio delli quadrati delle altre due BC, CD; così chiara cosa ancora

si è,

si è, che ovunque sia situato il punto D nella retta AB, sempre delle due BC, CD una debba essere eguale alla mettà della somma delle prime AD, DB, e l'altra eguale alla metà della loro differenza.

## §. IV.

### *Delli quadrati descritti dalli lati di un triangolo.*

129. INtorno allì quadrati, che si descrivono dalli lati di un triangolo, abbiamo ancora teoremi di sommo rilievo per la ricerca delle verità geometriche. Sicche, se il triangolo sia rettangolo, il quadrato descritto dal lato opposto all'angolo retto, chiamato ipotenusa, dovrà essere eguale alli quadrati degli altri due lati. Per dimostrarlo, sia il triangolo ABC rettangolo in A.
Fig.54. Descrivansi sopra i suoi lati li tre quadrati BCDE, ABFG, ACHI (112); e tirata la retta AL parallela alla BE (65), congiunganli le due AE, CF. Poicche dunque, per li due angoli BAC, BAG eguali a due retti, le due AC, AG stanno a dirittura (52); sarà il quadrato ABFG così doppio del triangolo BCF, come è il rettangolo BELM doppio del triangolo BEA (98). Ma per gli angoli retti FBA, CBE, e per lo comune ABC essendo eguali i due angoli FBC, ABE, li due triangoli BCF, BEA debbono essere tra loro eguali (87), poiche anno ancora intorno a quelli angoli li due lati BC, BF eguali alli due lati BE, BA, ciascuno a ciascuno. Dunque ancora il quadrato ABFG sarà eguale al rettangolo BELM (11). E dimostrandosi dell'istessa maniera l'altro quadrato ACHI eguale all'altro rettangolo CDLM; saranno i due quadrati ABFG, ACHI insieme eguali al solo quadrato BCDE (13).

130. Che se poi il triangolo ABC sia ottusangolo in A, prolungato uno de' lati, che sono in-
Fig.55. torno all'angolo ottuso, come il lato BA, a dirit-

rittura verſo D, ed abbaſſata su di eſſo la perpendicolare CD dall' angolo oppoſto (50); ſarà il quadrato del lato BC, che ſi oppone all'angolo ottuſo, maggiore delli quadrati degli altri due lati BA, AC in due volte il rettangolo fatto dalle due BA, AD. Imperocchè, eſſendo il quadrato della tutta BD eguale alli quadrati delle parti BA, AD, e a due volte il rettangolo delle medeſime parti (129); coll' aggiunta del comune quadrato della CD, ſaranno i quadrati delle due BD, CD eguali alli quadrati delle tre BA, AD, CD, e a due volte il rettangolo delle due BA, AD (13). Ma per l'angolo retto, che ſta in D, li quadrati delle due BD, CD ſono eguali al quadrato della BC (129); e per la ſteſſa ragione li quadrati delle due AD, CD ſono eguali al quadrato della AC. Dunque ſarà il quadrato del lato BC oppoſto all' angolo ottuſo eguale alli quadrati degli altri due lati BA, AC, e a due volte il rettangolo delle due BA, AD.

131. Finalmente ſe il triangolo ABC abbia in A un' angolo acuto, abbaſſata ſopra uno de' lati, che lo contengono, come sul lato BA, la perpendicolare CD dall'angolo oppoſto; ſarà il quadrato del lato BC, che ſi oppone all'angolo acuto, minore delli quadrati degli altri due lati BA, AC in due volte il rettangolo fatto dalle due BA, AD. Imperocchè, eſſendo li quadrati della tutta BA, e della parte AD eguali a due volte il rettangolo delle medeſime, ed al quadrato dell'altra parte BD (120); coll' aggiunta del comune quadrato della CD ſaranno i quadrati delle tre BA, AD, CD eguali a due volte il rettangolo delle due BA, AD, ed alli quadrati dell'altre due BD, CD. Ma per gli angoli retti, che ſtanno in D, i quadrati delle due AD, CD ſono eguali al quadrato della AC; e li quadrati dell'altre due BD, CD ſono eguali al quadrato della BC (129). Dunque li quadrati delli due lati BA, AC, che contengono l'angolo acuto, ſaranno eguali a due volte il rettangolo delle due BA, AD, ed al quadrato del Fig. 56.

lato

lato BC opposto all'angolo acuto.

132. E quindi ora con facilità si possono dimostrare i conversi di tutte tre questi teoremi, cioè,
Fig. 57. che l'angolo in A del triangolo ABC debba essere retto quante volte il quadrato del lato opposto BC è eguale alli quadrati degli altri due lati BA, AC, debba essere ottuso quando è maggiore, e debba finalmente essere acuto quando è minore. Imperocchè se mai nel caso dell'uguaglianza l'angolo in A non fosse retto, dovrebbe egli essere o ottuso, o acuto. Ma nè l'uno, nè l'altro puo essere; poicche con porsi ottuso sarebbe il quadrato del lato BC maggiore delli quadrati degli altri due lati BA, AC (130); e con porsi acuto sarebbe minore (131), quali cose sono contro l'ipotesi. Adunque nel caso dell' uguaglianza per necessità l'angolo in A dee essere retto. Ed egli è chiaro, che della stessa maniera si possono eziandio dimostrare gli altri due casi.

133. Ma quantevolte il quadrato del lato BC è
Fig. 57. eguale alli quadrati degli altri due lati, puo dimostrarsi con facilità ancora positivamente, che l'angolo in A debba essere retto. Inalzisi per questo effetto sul lato AC la perpendicolare AD (49); e fatta la medesima eguale all'altro lato BA (31), congiungasi la CD. Poicche dunque sono eguali le due BA, AD; saranno eguali altresì i loro quadrati (113); onde coll'aggiunta del comune quadrato della AC, saranno i quadrati delle due BA, AC eguali ancora alli quadrati delle altre due AD, AC. Ma per l'ipotesi li primi due quadrati sono eguali al quadrato della BC, e per lo triangolo CAD rettangolo in A gli altri due quadrati sono eguali al quadrato della CD (129). Dunque il quadrato della BC sarà similmente eguale al quadrato della CD (11); e pertanto essendo eguali le due BC, CD (113), saranno i triangoli ABC, ADC perfettamente eguali tra loro (84); con che l'angolo BAC dovendo essere eguale all'angolo CAD, per necessità sarà egli retto.

134. Del rimanente dalle cose dimostrate egli è fa-

è facile a dedurne, che in ogni parallelogrammo, come ABCD, li quadrati delle due diagonali AC, BD debbano insieme essere eguali alli quadrati delli quattro lati AB, BC, CD, AD. Imperocchè, abbassate le perpendicolari AE, BF sopra i lati opposti BC, AD (50), si avrà l'altro parallelogrammo AEBF; e pertanto, essendo eguali così le due AD, BC, come le due BE, AF (91), sarà il rettangolo della BC nella BE eguale al rettangolo della AD nella AF (113). Ma il quadrato della diagonale AC è minore delli quadrati de'lati AB, BC nel doppio del primo rettangolo (131); ed il quadrato della diagonale BD è maggiore delli quadrati de'lati AB, AD, ovvero CD, AD nel doppio del secondo (130). Dunque per esser tra loro eguali l'eccesso, ed il difetto saranno i quadrati delle due diagonali AC, BD insieme eguali alli quadrati delli quattro lati AB, BC, CD, AD. Fig. 58.

## §. V.

### *Della soluzione di alcuni problemi attinenti all' istesso argomento.*

135. PEr mezzo di alcuni teoremi, che sono stati dimostrati in questo capitolo, possono ora risolversi molti problemi, attinenti all'argomento, di cui si tratta. E per incominciare dalli più facili, si puo in primo luogo, dati due quadrati, ritrovarne un terzo, che sia eguale alla somma delli due dati. Perciò sieno AB, BC li lati delli due dati quadrati. Inalzisi dal punto A sul lato AB la perpendicolare AD (49), la quale facciasi eguale all' altro lato BC (31). Congiungasi poscia la retta BD, e sarà il quadrato di questa retta eguale alla somma delli due quadrati dati. Imperocchè, essendo eguali le due AD, BC, saranno i loro quadrati similmente eguali (113); onde coll'aggiunta del comune quadrato della AB, saranno li quadrati delle due AB, Fig. 59.

AD eguali ancora alli quadrati delle altre due AB, BC (13). Ma il quadrato della BD è eguale alli quadrati delle due AB, AD (129). Dunque il medesimo quadrato della BD sarà eguale ancora alli quadrati delle due rette date AB, BC (11).

136. In secondo luogo, dati due quadrati disuguali, puo ritrovarsene un terzo eguale alla differenza delli due dati. Perciò sieno di nuovo AB,
Fig.60. BC li lati delli due quadrati dati, e sia AB il lato del quadrato minore, e BC il lato del quadrato maggiore. Si alzi dal punto A sul lato AB la perpendicolare AD (49); e descrivasi col centro B, e coll'intervallo BC la linea circolare CD, che s'incontri colla AD nel punto D. Ed io dico, che il quadrato della AD sarà quello, che si dimanda. Per dimostrarlo, congiungasi la BD. E poicche le due BC, BD sono eguali, saranno eguali altresì i loro quadrati (113). Ma il quadrato della BD è eguale alli quadrati delle due AB, AD (129). Dunque alli medesimi quadrati delle due AB, AD sarà eguale ancora il quadrato della BC (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della AB, sarà la differenza delli quadrati descritti dalle due AB, BC eguale al solo quadrato della AD (13).

137. In terzo luogo una retta data, come AB,
Fig.61. puo prolungarsi talmente, che il rettangolo fatto dalla medesima così prolungata nella porzione aggiunta sia eguale al quadrato della sola retta data. Dividasi la AB in due parti eguali nel punto C (42), e ritrovisi un quadrato, che sia eguale alla somma di quelli fatti dalle due AB, BC (135). Prolunghisi la AB talmente per fino al punto D, che la porzione CD sia eguale al lato del quadrato ritrovato (31); e sarà il rettangolo delle due AD, BD eguale al quadrato della retta data AB. Imperocchè, essendo la AB divisa in due parti eguali nel punto C, sarà il rettangolo delle due AD, BD insieme col quadrato della BC eguale al quadrato della CD (124). Ma per la costruzione il quadrato della CD è eguale alli quadrati

del-

delle due AB, BC. Dunque ſarà il rettangolo delle due AD, BD inſieme col quadrato della BC eguale alli quadrati delle due AB, BC (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della BC, rimarrà il rettangolo delle due AD, BD eguale al quadrato della retta AB (13).

138. In quarto luogo una data retta, come AB, puo dividerſi talmente, che il rettangolo della tutta, e di una delle ſue parti ſia eguale al quadrato dell'altra parte. Si prolunghi la retta data AB per fino al punto D in modo, che il rettangolo delle due AD, BD ſia eguale al quadrato della AB (137). Taglisi di poi dalla medeſima AB la porzione BE eguale alla BD (31); e ſarà il rettangolo della tutta AB nella parte AE eguale al quadrato dell'altra parte BE. Imperocchè, ſiccome il quadrato della AB è eguale alli rettangoli della ſteſſa AB nelle parti AE, BE (118), così il rettangolo delle due AD, BD è eguale al rettangolo della AB nella BD ovvero BE, ed al quadrato della BD o ſia BE (117). Ma per coſtruzione il quadrato della AB, ed il rettangolo delle due AD, BD ſono eguali tra loro. Dunque li rettangoli della AB nelle parti AE, BE ancora ſaranno eguali al rettangolo della AB nella BE, ed al quadrato della BE (11); e pertanto, tolto il comune rettangolo della AB nella BE, rimarrà il rettangolo della tutta AB nella parte AE eguale al quadrato dell'altra parte BE. Fig. 61.

139. Finalmente puo ritrovarſi un quadrato, che ſia eguale ad un dato rettangolo. Perciò ſieno AE, EB li lati del rettangolo dato, li quali ponganſi tra loro a dirittura, e dividaſi la tutta AB in due parti eguali nel punto C (42). Ritroviſi di poi un quadrato, che ſia eguale alla differenza delli due fatti dalle rette BC, CE (136); e ſe EF ſia il lato di queſto quadrato, ſarà il rettangolo delle due AE, EB eguale al quadrato della EF. Imperocchè, eſſendo la retta AB diviſa in due parti eguali nel punto C, ſarà il rettangolo delle due AE, EB eguale alla differenza del- Fig. 62.

li quadrati fatti dalle altre due BC, CE (123). Ma per costruzione a questa stessa differenza de' quadrati è eguale ancora il quadrato della EF. Dunque il rettangolo delle due AE, EB, ed il quadrato della EF saranno eguali tra loro (11).

140. Or essendosi fatto vedere di sopra (102), che data qualunque figura rettilinea, possa formarsi un parallelogrammo, che sia eguale alla data figura, ed abbia un'angolo eguale ad un'angolo dato; egli è chiaro, potersi sempre formare un rettangolo, che sia eguale a qualsivoglia figura rettilinea data. Quindi il problema della quadratura delle figure rettilinee, cioè di ritrovare quadrati, che sieno ad esse eguali, non dee farci difficoltà alcuna; poicche basterà formare un rettangolo eguale alla figura rettilinea data, ed indi per mezzo del problema precedente (139) ritrovare un quadrato, che sia eguale al rettangolo di già formato. E con farsi uso delli due primi problemi (135.136) si vede ancora, potersi collo stesso artifizio ritrovare un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due figure rettilinee date.

## CAPITOLO IV.

### *Della teoria del cerchio.*

141. QUantunque la teoria delle figure rettilinee non siasi ancora condotta a fine, pure tuttavolta ci conviene far passaggio alla teoria del cerchio; poicche ciò, che rimane a dirsi intorno a quella, riguarda soltanto le figure regolari, le quali siccome debbono essere spezialmente considerate per la proprietà, che elle anno, non meno di potersi situare nel cerchio per via d'iscrizione, e circonscrizione, che di dar sito al cerchio medesimo per le stesse strade, così non possono essere poste a calcolo senza l'anticipata conoscenza delle varie affezioni del cerchio. Argomento adunque del presente capitolo sarà la teo-

teoria della figura circolare, la quale ſenza dubbio dee averſi come la più perfetta tra tutte le figure piane, che ſi poſſono immaginare.

## §. I.

### *Della nozione del cerchio, e della determinazione del di lui centro.*

142. SIccome ſi chiama cerchio la figura piana terminata dalla linea circolare, così queſta linea conſiderata come termine del cerchio ſi appella ancora ſua circonferenza. E poicchè il diſtintivo di ciaſcuna figura piana dee dedurſi dall'indole del ſuo termine; perciò quello del cerchio ſarà di eſſere eguali tutte le rette, che dal centro cadono ſulla circonferenza (27). Queſte rette ſi appellano raggi del cerchio; e ſe ciaſcuna di eſſe ſi prolunghi di là dal centro per ſino a che s'incontri di nuovo colla circonferenza nella parte oppoſta, la medeſima tutta intera ſarà chiamata diametro del cerchio.

143. Quindi diametro del cerchio ſarà ogni retta, che paſſando per lo centro ſi termina dall'una, e l'altra parte della circonferenza. Ed egli è chiaro, che le due parti, nelle quali il cerchio ſi divide dal diametro, debbano eſſere tra di eſſe eguali, per la ragione, che piegandoſi l'una sull'altra debbono combaciarſi tra loro, atteſa l'uguaglianza delle rette, che cadono dal centro sulla circonferenza; e perciò ciaſcuna di dette parti, per eſſere la metà della figura intera, comunemente ſi appella ſemicerchio. Che ſe poi tiriſi dentro del cerchio un'altra retta, la quale non paſſando per lo centro ſi termini ancora dall'una, e l'altra parte della circonferenza; ſiccome da eſſa rimane diviſo il cerchio in due parti diſuguali, così ciaſcuna di queſte parti chiamaſi generalmente porzione del cerchio.

144. Nè dee porſi in dubbio, che ogni altra retta, la quale uniſce inſieme due punti della cir-

conferenza, cada dentro del cerchio, e lo divida sempre in due parti disuguali. Imperocchè, se B, e C sono i punti presi nella circonferenza, e BC la retta, che li congiunge; tirati dal centro A li raggi AB, AC, per l'uguaglianza di questi sarà l'angolo ACB eguale all'angolo ABC (72). Ma, preso nella BC un'altro punto D, e tirata la AD, per lo triangolo BAD, il cui lato BD sta prolungato in C, esser dee l'angolo ADC maggiore dell'angolo ABC (70). Adunque l'istesso angolo ADC sarà maggiore ancora dell'altro ACB (12); e perciò la AC sarà maggiore altresì della AD (75). Quindi, non potendo giungere la AD per fino alla circonferenza, caderà il punto D dentro del cerchio; e per la medesima ragione l'istesso avverrà a tutti gli altri punti della retta BC.

Fig. 63.

145. Or se dato un cerchio, come ABC, vogliasi di esso ritrovare il centro, prendansi nella sua circonferenza due punti ad arbitrio A, e B; e divisa la retta AB, che li congiunge, in due parti eguali nel punto D (42), inalzisi da questo punto sulla stessa AB la perpendicolare DC (49), la quale s'incontri colla circonferenza ne' punti C, ed E; dividasi finalmente la CE in due parti eguali in F, e questo punto F sarà il centro, che si dimanda. Se è possibile, sia il centro del cerchio fuori della CE, e sia il punto G. Congiunte adunque le rette AG, DG, BG, li due angoli ADG, BDG avranno non solo li lati AD, DG eguali alli lati BD, DG, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base AG eguale alla base BG; con che li medesimi saranno tra loro eguali (39), ed in conseguenza retti (47). Ma retti sono ancora gli angoli ADC, BDC, come fatti dalla perpendicolare DC. Dunque ciascuno delli due ADG, BDG sarà eguale a ciascuno degli altri due ADC, BDC (48); il che non può essere (14). Quindi il centro del cerchio dee essere nella CE; e perciò sarà il punto F, che la divide egualmente.

Fig. 64.

146. Ma siccome la retta CE, segando l'altra AB in due parti eguali, e ad angoli retti nel pun-

to

to D, dee paſſare per lo centro del cerchio F; così per lo contrario poſto, che ella ſola paſſi per lo centro, poſſono intorno ad eſſa dimoſtrarſi due coſe; I, che dividendo l'altra AB ad angoli retti, debba dividerla ancora in due parti eguali; e II, che dividendola in due parti eguali, debba dividerla eziandio ad angoli retti. Pongaſi primieramente, che la AB ſia diviſa dalla CE ad angoli retti; e conforme per l'uguaglianza de' raggi AF, BF ſono eguali gli angoli DBF, DAF (72), così per eſſere retti li due FDB, FDA ancora queſti ſono eguali tra loro (48). Quindi ſaranno eguali altresì gli altri due BFD, AFD (71), li quali avendo li lati BF, FD eguali alli lati AF, FD, ciaſcuno a ciaſcuno, avranno ancora la baſe BD eguale alla baſe AD (38). Pongaſi in ſecondo luogo, che la AB ſia diviſa dall'altra CE in due parti eguali; ed avendo li due angoli ADF, BDF non ſolo li lati AD, DF eguali alli lati BD, DF, ciaſcuno a ciaſcuno, ma eziandio la baſe AF eguale alla baſe BF, dovranno i medeſimi eſſere eguali (39), ed in conſeguenza retti (47). Fig. 65.

147. Ed eſſendo così, potremo inoltre dimoſtrare, che ſe dentro del cerchio s'interſeghino due rette, come AB, CD, nel punto E, che non ſia il centro del cerchio, non poſſa ciaſcuna di eſſe eſſere diviſa in due parti eguali. Se è poſſibile, così l'una, come l'altra ſia diviſa egualmente nel punto E. Ritroviſi il centro del cerchio F (145), e congiungaſi la retta FE. Poicchè dunque la FE paſſa per lo centro, e ſega l'altra AB, che non vi paſſa, in due parti eguali nel punto E; la ſegherà ancora ad angoli retti (146); e perciò l'angolo FEA ſarà retto. Ma per la ſteſſa ragione dee eſſere retto ancora l'angolo FEC. Dunque li due angoli FEA, FEC ſaranno tra loro eguali (48); qual coſa non potendo eſſere (14), non ſarà egli vero, che ciaſcuna delle due AB, CD ſia diviſa egualmente nel punto E. Fig. 66.

148. Potremo eziandio dimoſtrare, che ſe da un punto preſo dentro del cerchio, come A, cadono Fig. 67.

sulla sua circonferenza tre rette eguali AB, AC, AD, forzosamente quel punto debba essere il centro del cerchio. Congiunganfi le due BC, CD; e divise le medesime in due parti eguali ne' punti E, ed F (42), congiunganfi le altre due AE, AF. Poicche dunque li due angoli AEB, AEC anno non solo li lati AE, EB eguali alli lati AE, EC, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base AB eguale alla base AC; saranno li medesimi eguali tra loro (39), ed in conseguenza retti (47); onde la AE, tagliando l'altra BC in due parti eguali, e ad angoli retti nel punto E, dovrà passare per lo centro del cerchio (146). Ma per la stessa ragione eziandio la AF dee passare per lo stesso centro. Dunque il centro del cerchio sarà situato in ciascuna delle due AE, AF; e perciò dovrà essere il punto A, che è il solo, in cui quelle rette s'incontrano.

149. E quindi non solo del cerchio intero, ma di qualunque sua porzione potrà determinarsi il
Fig. 68. centro. Sia ABC la porzione del cerchio data.
69. 70. Congiungasi la AC, la quale dividasi in due parti eguali nel punto D (42). Alzisi da questo punto sulla stessa AC la perpendicolare DB (49), e congiungasi l'altra AB. Se dunque li due angoli ABD, BAD sono eguali tra loro, sarà D il centro, che si dimanda; poicche, siccome per la costruzione sono eguali le due AD, CD, così per l'uguaglianza di quelli angoli saranno eguali ancora le altre due AD, BD (73); onde essendo eguali le tre AD, BD, CD, per necessità sarà D il centro della porzione (148). Che se poi li due angoli ABD, BAD non sono eguali, facciasi l'angolo BAE eguale all'angolo ABD (40), ed in questo caso il centro, che si dimanda, sarà il punto E, in cui la AE s'incontra colla BD; poicche, siccome per l'uguaglianza degli angoli BAE, ABD sono eguali le due BE, AE (73), così per l'uguaglianza degli angoli ADE, CDE sono eguali altresì le altre due AE, CE (38); con che essendo le tre AE, BE, CE eguali tra loro, dovrà esse-

essere E il centro della porzione (148).

## §. II.

### *Dell'ordine, che serbano le rette tirate alla circonferenza del cerchio.*

150. Siccome per la nozione del cerchio debbono essere eguali tutte le rette, che dal centro cadono sulla circonferenza; così giova il dimostrare, quale ordine serbino tra loro le rette, che da ogni altro punto, che non sia il centro, si tirano alla stessa circonferenza. Ma intorno a questo argomento debbonsi distinguere due casi; de' quali il primo si è, quando il punto, da cui partono le rette, si prende dentro del cerchio; e l'altro, quando l'istesso punto si prende fuori. Sia perciò il cerchio ABCD, che abbia per suo centro il punto E; e preso primieramente dentro Fig. 71. di esso un'altro qualsivoglia punto F, tirinsi da questo punto alla circonferenza le rette FA, FB, FC, FD.

151. Io dico in primo luogo, che la massima di tutte debba essere la FA, che passa per lo centro E; e la minima l'altra FD, che giace con quella a dirittura. Imperocchè, congiunte le rette EB, EC, saranno le due FE, EB insieme maggiori della FB (24). Ma, essendo la EA eguale alla EB, coll'aggiunta della comune FE sarà la FA eguale alle due FE, EB (13). Dunque ancora la FA sarà maggiore della FB (12); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FA sia maggiore di ogni altra retta, sarà la medesima FA la massima di tutte. In oltre la ED, come eguale alla EC, è minore delle due EF, FC. Dunque, tolta la comune EF, sarà la FD minore ancora della FC (13); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FD sia minore di ogni altra retta, sarà la medesima FD la minima di tutte.

152. Io dico in secondo luogo, che dell'altre rette FB, FC la FB più vicina alla massima deb-

ba

ba essere maggiore della FC, che ne sta più lontana; e di più che ciascuna di esse debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Imperocchè, essendo l'angolo FEB maggiore dell'angolo FEC, ed avendo questi stessi angoli li lati FE, EB eguali alli lati FE, EC, ciascuno a ciascuno; sarà la base FB maggiore ancora della base FC (44). Ed inoltre, perche fatto l'angolo FEG eguale all' angolo FEB (40), questi medesimi angoli si ritrovano avere li lati FE, EG eguali alli lati FE, EB, ciascuno a ciascuno; sarà altresì la base FG eguale alla base FB (38); e dell'istessa maniera con farsi l'angolo FEH eguale all'angolo FEC si dimostrerà essere la FH eguale all'altra FC.

153. Prendasi poscia il punto F fuori del cer-
Fig.72. chio; e se le rette FA, FB, FC cadono sulla circonferenza concava, io dico I, che la massima di tutte sia la FA, che passa per lo centro E; II, che dell'altre FB, FC la FB più vicina alla massima debba essere maggiore della FC, che ne sta più lontana; e III, che ciascuna di queste debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Imperocchè, congiunte le rette EB, EC, saranno le due FE, EB maggiori della FB (24). Ma, essendo la EA eguale alla EB, coll'aggiunta della comune FE sarà la FA eguale alle due FE, EB (13). Dunque ancora la FA sarà maggiore della FB (12); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FA sia maggiore di ogni altra retta, sarà la medesima FA la massima di tutte. Essendo poscia l'angolo FEB maggiore dell'angolo FEC, ed avendo questi stessi angoli li lati FE, EB eguali alli lati FE, EC, ciascuno a ciascuno; sara la base FB maggiore ancora della base FC (44). E finalmente, fatti gli angoli FEG, FEH eguali agli altri due FEB, FEC, ciascuno a ciascuno (40), sarà tanto la FG eguale alla FB, quanto la FH eguale alla FC (38).

Fig.73. 154. Che se poi le rette FB, FC, FD, le quali partono dal punto F, cadono sulla circonferenza convessa, io dico I, che la minima di tutte sia la

FD,

FD, che prolungata passa per lo centro E; II, che dell'altre FC, FB la FC più vicina alla minima debba essere minore della FB, che ne sta più lontana; e III, che ciascuna di queste debba averne un'altra eguale dall'altra parte. Imperocchè, tirate dal centro E le rette EB, EC, sarà la FE minore delle due FB, EB insieme (24); con che, tolte le eguali ED, EB, sarà la FD minore ancora della FB (13); e dimostrandosi della stessa maniera, che la FD sia minore di ogni altra retta, sarà la medesima FD la minima di tutte. Essendo poscia l'angolo FEC minore dell' angolo FEB, ed avendo questi stessi angoli li lati FE, EC eguali alli lati FE, EB, ciascuno a ciascuno, sarà la base FC minore ancora della base FB (44). E finalmente, fatti gli angoli FEG, FEH eguali agli altri due FEB, FEC, ciascuno a ciascuno (40), sarà tanto la FG eguale alla FB, quanto la FH eguale alla FC (38).

155. Del rimanente possono tirarsi rette alla circonferenza del cerchio, senza che partano da un medesimo punto; e qualora queste rette si terminano dall'una, e l'altra parte della circonferenza, ancora esse serbano tra loro un certo ordine; il quale però per bene intendersi, giova prima l' avvertire, che siccome la distanza tra due punti si misura per la retta, che li congiunge insieme (23), così la distanza tra un punto, ed una retta debba misurarsi per la perpendicolare abbassata sulla retta dal punto medesimo. E la ragion si è, perche siccome la retta è la più corta di tutte le linee, che anno gli stessi termini; così la perpendicolare abbassata da un dato punto sopra una retta data è la più corta di tutte le rette, che dall'istesso punto cadono sulla stessa retta: qual cosa si ricava facilmente dal teorema di sopra dimostrato (75), cioè, che in ogni triangolo ad angolo maggiore debba essere opposto lato parimente maggiore.

156. Ciò avvertito, dimostreremo in primo

luo-

luogo, che se due rette adattate dentro del cerchio sono egualmente distanti dal suo centro, debbano le medesime essere tra loro eguali.
Fig.74. Perciò sia il cerchio ABC, che abbia per centro il punto E, e dentro di esso adattinsi le due rette AB, CD, le quali sieno egualmente distanti dal centro E. Abbassate adunque su di esse le perpendicolari EF, EG (50), saranno queste eguali trà loro (155), ed in conseguenza eguali altresì saranno li quadrati fatti dalle medesime (113). E poicche, congiunte le due AE, CE, ancora queste sono eguali; sarà il quadrato della AE similmente eguale al quadrato della CE. Ma il quadrato della AE è eguale alli quadrati delle due AF, EF; ed il quadrato della CE è eguale alli quadrati delle due CG, EG (129). Dunque ancora li quadrati delle due AE, EF saranno eguali alli quadrati delle altre due CG, EG (11); e per tanto, tolti li quadrati fatti dalla EF, e dalla EG, che sono eguali, rimarrà il quadrato della AF eziandio eguale al quadrato della CG (13); con che le due AF, CG saranno tra loro eguali. Ma queste sono le metà delle rette AB, CD, che sono divise egualmente dalle perpendicolari EF, EG (146). Dunque ancora le rette AB, CD saranno tra loro eguali (11).

157. Dimostreremo in secondo luogo, che se due rette adattate dentro del cerchio sono eguali tra loro, debbano le medesime essere egualmente distanti dal centro. Perciò sia di nuovo il
Fig.74. cerchio ABC, che abbia per centro il punto E, ed adattinsi dentro di esso le due rette eguali AB, CD. E poicche queste rette sono divise egualmente dalle perpendicolari EF, EG abbassate su di esse (146); saranno le loro metà AF, CG ancora eguali (11), ed in conseguenza il quadrato della AF sarà similmente eguale al quadrato della CG (113). Ma li quadrati delle due AF, EF sono eguali alli quadrati delle due CG, EG; per essere li primi eguali al quadrato della AE, e li se-

secondi eguali al quadrato della CE (129). Dunque, tolti li quadrati fatti dalla AF, e dalla CG, che sono eguali, rimarrà il quadrato della EF eguale al quadrato della EG (13); con che le due EF, EG saranno tra loro eguali. Ma queste misurano le distanze delle rette AB, CD dal centro E (155). Dunque le rette AB, CD saranno egualmente distanti dal centro.

158. Dimostreremo finalmente, che adattandosi nel cerchio molte rette, la massima di tutte debba essere il diametro, ovvero quella, che passa per lo centro; e che dell'altre la più vicina al centro debba essere maggiore della più lontana. Perciò sia il cerchio ABC, che abbia per centro il punto G, ed adattinsi dentro di esso le tre rette AB, CD, EF, delle quali siccome la AB passa per lo centro, così la CD sia più vicina al centro dell'altra EF. Congiunte adunque le rette CG, DG, saranno queste due insieme maggiori della CD (4). Ma, essendo eguali così le due AG, CG, come le due BG, DG, dee essere la AB eguale alle due CG, DG (13). Dunque ancora la AB sarà maggiore della CD (12); e dimostrandosi della stessa maniera, che la AB sia maggiore di ogni altra retta, sarà la medesima AB la massima di tutte. Abbassandosi poscia sull'altre due CD, EF le perpendicolari GH, GI (50), in vigor della ipotesi dee essere la GH minore della GI; con che tagliandosi da questa la porzione GL eguale alla GH (31), e tirandosi per lo punto L la retta MN parallela alla EF (65), saranno le due CD, MN eguali tra loro (156). Ma per l'angolo MGN maggiore dell'angolo EGF la MN è maggiore della EF (44). Dunque ancora la CD sarà maggiore della EF (12). Fig. 75.

§. III.

## §. III.

### *Dell'incontro così di due cerchi, come del cerchio, e della retta.*

159. DUe cerchi possono incontrarsi tra loro in due maniere, cioè o segandosi, o pure toccandosi. Si dicono due cerchi segarsi, quando s'incontrano talmente, che una porzione dell' uno cada dentro di una porzione dell' altro. Per lo contrario si dicono toccarsi, quando il loro incontro si fa con legge tale, che uno di essi cada interamente o dentro, o fuori dell'altro. Quindi i cerchi, che si toccano, possono ancora toccarsi in due modi diversi, cioè o al di dentro, o al di fuori. Imperocchè, siccome quando uno cade interamente dentro dell'altro, si dicono toccarsi al di dentro; così al contrario quando uno cade interamente fuori dell' altro, si dicono al di fuori toccarsi tra loro.

160. Or siccome i cerchi, che si toccano al di fuori, non possono avere l'istesso centro; così egli è facile a dimostrare, che nè pure debbano averlo tanto quelli, che si toccano al di dentro, quan-
Fig.76. to coloro, che s'intersegano. Perciò sieno primieramente li due cerchi ABC, ADE, li quali si tocchino al di dentro nel punto A; e se è possibile, abbiano l'istesso centro, che sia F. Congiunta adunque la FA, e tirata l'altra FBD, che s'incontri colle circonferenze ne'punti B, e D; sarà alla stessa FA eguale tanto la FB, quanto la FD; con che le due FB, FD saranno tra loro eguali (11), il che non puo essere (14). E dell'istessa maniera si dimostrerà, che intersegandosi li due cerchi ABC,
Fig.77. ADE, nè pure essi possono avere un medesimo centro.

161. E quindi per gli cerchi, che s'intersegano, agevol cosa è il dimostrare, che il loro intersegamento debba farsi in due soli punti. Sieno
Fig.78. li due cerchi ACDE, BCDE, li quali, se sia possibile,

bile, s'interseghino tra loro ne'tre punti C, D, E. Ritrovisi il centro del cerchio ACDE (145), e sia il punto F. Congiunte adunque le rette FC, FD, FE, bisognerà, che queste come tirate dal centro alla circonferenza sieno tra loro eguali. Onde, perche dentro dell'altro cerchio BCDE si è preso il punto F, da cui cadono sulla sua circonferenza tre rette eguali FC, FD, FE; sarà l'istesso punto F centro ancora dell'altro cerchio BCDE (148). Ma li cerchi, che s'intersegano, non possono avere un medesimo centro (160). Dunque non è egli vero, che l'intersegamento de' due cerchi ACDE, BCDE possa farsi in tre punti, e pertanto si farà in due punti solamente.

162. Per gli cerchi poi, che si toccano, si conoscerà, come debba farsi il loro contratto, dopo essersi dimostrato intorno ad essi questo teorema, cioè, che la retta, la quale unisce i loro centri, debba passare per lo luogo del contratto. Perciò Fig. 79. sieno li due cerchi AB, AC, li quali si tocchino primieramente al di dentro in un qualche luogo, come A; e posto, che D sia il centro del primo, ed E il centro del secondo, congiunganfi questi centri per la retta DE, la quale, se è possibile, non passi per lo luogo del contatto, ma seghi le circonferenze nelli due punti B, e C. Tirate adunque le rette AD, AE, saranno le due AD, DE insieme maggiori della AE, o pure della sua eguale CE (24). Ma, essendo la AD eguale alla BD, coll'aggiunta della comune DE le due AD, DE insieme sono eguali alla BE (13). Dunque ancora la BE sarà maggiore della CE (12), il che non puo essere (14).

163. Non molto diversa sarà la dimostrazione, se Fig. 80. li due cerchi AB, AC si tocchino al di fuori nel luogo A. Imperocchè ancora negativamente si farà vedere, che la retta, per cui si congiungono i loro centri, debba passare per lo luogo del contatto. In effetto posto di nuovo, che D sia il centro del primo, ed E il centro del secondo, congiunganfi questi centri per la retta DE, la quale,

se

se è possibile, non passi per lo luogo del contatto, ma seghi le circonferenze nelli due punti B, e C. Tirate adunque le rette AD, AE, saranno queste insieme maggiori della DE (24). Onde, tolte le eguali AD, BD, rimarrà la AE maggiore ancora della BE (13). Ma la AE è eguale alla CE. Dunque similmente la CE sarà maggiore della BE (12), il che non puo essere (14).

164. Dimostrato questo teorema, egli è facile ora a far vedere, che il contatto de'due cerchi debba farsi in un sol punto, sia che quelli si tocchino al di dentro, sia che si tocchino al di fuori. Perciò
Fig.81. sieno AB, AC questi tali cerchi, li quali si tocchino primieramente al di dentro nel punto A. Posto adunque, che D sia il centro del primo, ed E il centro del secondo, dovrà la retta DE passare per il punto A (162), e sarà la DA minore di ogni altra retta, che puo tirarsi dal punto D alla circonferenza AC (151). Ma le altre rette, che dall'istesso punto D cadono sulla circonferenza AB, sono eguali alla DA. Dunque niuna di queste altre rette potrà giungere per sino alla circonferenza AC; e pertanto li due cerchi AB, AC si toccheranno semplicemente nel punto A.

165. In una maniera non dissimile si dimostrerà ancora, che se li due cerchi AB, AC si toc-
Fig.82. chino al di fuori nel punto A, non possano i medesimi toccarsi altrove. Imperocchè, posto di nuovo, che D sia il centro del primo cerchio, ed E il centro del secondo, dovrà la retta DE passare per lo punto A (163), e sarà la DA minore di ogni altra retta, che puo tirarsi dal punto D alla conrenza AC (154). Ma le altre rette, che dall'istesso punto D cadono sulla circonferenza AB, sono eguali alla DA. Dunque niuna di queste altre rette potrà giungere per sino alla circonferenza AC; ed in conseguenza li due cerchi AB, AC si toccheranno semplicemente nel punto A.

166. Similmente una retta puo incontrarsi col cerchio in due maniere, cioè o segandolo, o pure toccandolo. Si dice una retta essere secante del

del cerchio, quando s'incontra con quello talmente, che prolungata cada dentro del medesimo, e ne tagli qualche porzione. Ed egli è facile ad intendersi, che l'intersegamento di una retta col cerchio debba farsi in due soli punti; poicche volendosi sopra una data retta da un punto preso fuori di essa tirare rette eguali, non possono tirarsene se non se due, per la ragione, che se mai se ne potessero tirare tre, quella di mezzo sarebbe colla data retta angoli tali dall'una, e l'altra parte, che uniti insieme sarebbero minori di due retti, il che non puo essere (51).

167. Per lo contrario poi si dice una retta essere tangente del cerchio, quando lo incontra con legge tale, che prolungata cada tutta fuori di quello. Ed egli è facile il dimostrare, che tale debba essere la perpendicolare alzata sul diametro del cerchio dalla sua estremità. Imperocchè, Fig. 83. posto, che ABC sia il cerchio, e che AE sia la retta alzata perpendicolarmente sul diametro AC dal suo termine A; se dal centro D ad un'altro punto F di questa perpendicolare tirisi la retta DF, saranno li due angoli DAF, DFA insieme minori di due retti (71); e perciò l'angolo DAF come retto sarà maggiore dell'altro DFA. Quindi ancora la DF sarà maggiore della DA (75), ed in conseguenza il punto F starà fuori del cerchio. Ma la stessa dimostrazione puo applicarsi ad ogni altro punto della retta AE. Dunque la AE caderà tutta fuori del cerchio, e pertanto sarà sua tangente.

168. Ma agevol cosa è ancora il dimostrare, che essendo una retta tangente del cerchio, quella, che unisce il centro col punto del contatto, debba essere perpendicolare sulla tangente. Perciò Fig. 83. sia la retta AE tangente del cerchio ABC, e dal centro D al punto del contatto A tirisi l'altra DA. E se mai questa non è perpendicolare sulla tangente AE, sia tale l'altra DF. Essendo adunque li due angoli DAF, DFA insieme minori di due retti (71), sarà l'angolo DFA come retto

maggiore dell'altro DAF. Quindi ancora la DA sarà maggiore della DF (75); e per tanto non potendo la DF giungere per fino alla circonferenza, starà il punto F dentro del cerchio; con che la AE non sarà tangente, ma secante (166). Ed essendo ciò contro l'ipotesi, dobbiam conchiudere, che la DA sia perpendicolare sulla tangente AE.

169. E quindi si potrà eziandio dimostrare, che essendo una retta tangente del cerchio, la perpendicolare alzata su di essa dal punto del contatto debba passare per lo centro del cerchio. Perciò sia
Fig. 83. di nuovo la retta AE tangente del cerchio ABC, su di cui inalzisi dal punto del contatto A la perpendicolare AC. E se mai questa non passa per lo centro del cerchio, sia detto centro il punto G situato fuori della AC. Congiunta adunque la retta GA, sarà quest'altra ancora perpendicolare sulla tangente AE (168); e per tanto li due angoli CAE, GAE come retti saranno tra loro eguali (48). Ma questo non può essere (14). Dunque non è egli vero, che il centro del cerchio ritrovasi fuori della retta AC; e perciò la AC passerà per detto centro.

170. Si potrà finalmente dimostrare, che ad un medesimo punto del cerchio non possa tirarsi, se non che una sola tangente. Imperocchè, se mai al
Fig. 84. punto A del cerchio ABC si potessero tirare due tangenti, come AE, AF; congiunto il centro D col punto del contatto A per la retta DA, dovrebbe essere retto così l'angolo DAE, come l'angolo DAF (168); e pertanto li due angoli DAE, DAF sarebbero eguali tra loro (48), il che non può essere (14). Posto adunque, che la retta AE sia tangente del cerchio, ogni altra retta tirata dal punto del contatto A bisognerà, che sia secante. Come in effetto se AF sia quest'altra retta, su di cui si abbassi la perpendicolare DG (50); sarà l'angolo DGA maggiore dell'angolo DAG; e per tanto, dovendo essere la DA maggiore ancora della DG (75), caderà il punto G dentro del cerchio, ed in conseguenza la DF sarà secante (166).

171. Del

171. Del rimanente, ſiccome dovendoſi ad un dato punto del cerchio tirare la tangente, baſterà alzare la perpendicolare sul diametro tirato a quel punto (167); così per tirare la tangente ad un dato cerchio da un punto dato fuori di eſſo, potrà farſi uſo della ſeguente coſtruzione. Sia AB il dato cerchio, e C il punto dato fuori. Ritroviſi il centro del cerchio, che ſia D (145); e congiungaſi la CD, che ſeghi il cerchio nel punto A. S'inalzi di poi ſopra la ſteſſa CD la perpendicolare AE (49), che s'incontri coll'altro cerchio deſcritto col centro D, e coll'intervallo DC nel punto E. E tirata la DE, che seghi il cerchio AB nel punto B, sarà CB la tangente, che ſi dimanda. Imperocchè, avendo li due triangoli ADE, BDC intorno al comune angolo A li due lati DA, DE eguali alli due lati DB, DC, ciaſcuno a ciaſcuno; ſaranno li medeſimi perfettamente eguali tra loro (87), ed in conſeguenza ſarà l'angolo DAE eguale all'angolo DBC. Ma per la coſtruzione l'angolo DAE è retto. Dunque ſarà retto ancora l'angolo DBC; e per tanto la CB ſarà tangente del cerchio AB (167). Fig. 85.

## §. IV.

### *Degli angoli ſituati così nel centro, come nella circonferenza del cerchio.*

172. UN'angolo diceſi ſituato nel centro del cerchio, quando egli ha per ſuo vertice il centro medeſimo; ma ſe vertice dell'angolo ſia un punto della circonferenza, in tal caſo l'angolo ſi dirà ſituato nella circonferenza del cerchio. Così l'uno, come l'altro angolo colli ſuoi lati dee ſempre appoggiarſi ſopra una qualche porzione della circonferenza, che chiamaſi arco. E qualora l'angolo ſta ſituato nella circonferenza medeſima, ſi dirà egli eſſere propriamente in quella porzione del cerchio, che ha per ſuo termine il rimanente di quell'arco, su di cui l'angolo ſi

appoggia. Così nel cerchio ABC, il cui centro è
Fig.86. il punto D, l'angolo BDC si dirà essere nel centro, e l'angolo BAC nella circonferenza; e conforme amendue si appoggiano sull'arco BC, così il secondo di essi propriamente dicesi essere nella porzione del cerchio terminata dal rimanente arco BAC.

173. Or intorno a questi angoli il primo teorema, che bisogna dimostrare, si è, che appoggiandosi ambidue su di un medesimo arco, debba l'angolo al centro essere doppio dell' angolo alla circonferenza. Per dimostrarlo, congiungasi la retta AD, e prolunghisi a dirittura verso E. Essendo dunque eguali le due AD, BD; saranno eguali ancora gli angoli opposti DBA, DAB (72); e per tanto amendue insieme saranno doppii del solo DAB. Ma per lo triangolo ADB, il cui lato AD sta prolungato in E, l'angolo BDE è eguale alli due angoli DBA, DAB uniti insieme (70). Dunque ancora l' angolo BDE sarà doppio dell' angolo DAB. E dimostrandosi dell' istessa maniera, che l' angolo CDE sia parimente doppio dell' angolo DAC; sarà tutto l' angolo BDC situato nel centro doppio di tutto l' angolo BAC situato nella circonferenza.

Fig.87. 174. Egli è vero, che l'angolo BAC puo essere situato così obliquamente per rapporto all'altro BDC, che prolungandosi la AD verso E cada questa fuori dell' angolo BDC. Ma ancora in questo caso la dimostrazione è quasi la medesima. Imperocchè, siccome ciascuno delli due angoli BDE, CDE dee essere doppio di ciascuno degli altri due DAB, DAC; così con toglierli tanto l' angolo CDE dall' angolo BDE, quanto l' angolo DAC dall' angolo DAB, rimarrà di nuovo l' angolo BDC situato nel centro doppio dell' angolo BAC situato nella circonferenza. Onde, qualunque sia la posizione delli due angoli, purche amendue si appoggino su di un medesimo arco, sarà sempre l' angolo al centro doppio dell' angolo alla circonferenza.

175. E quindi si vede in primo luogo, che gli

a n-angoli situati in una medesima porzione del cerchio debbano tutti essere tra loro eguali. Sia perciò il cerchio ABC, che abbia per centro il punto D, e nella medesima sua porzione BAEC sieno situati li due angoli BAC, BEC. Congiungansi le rette DB, DC; ed essendo l'angolo BDC doppio così dell'angolo BAC, come dell'angolo BEC (173), per necessità li due angoli BAC, BEC saranno tra loro eguali (11). Egli è vero, che le due DB, DC possono tal volta, o stare a dirittura, o formare angolo verso la porzione medesima; ma tirandosi ad arbitrio la terza DF, puo farsi uso delli due angoli BDF, CDF, li quali siccome insieme debbono essere doppii di ciascuno delli due BAC, BEC, così faranno, che questi altri sieno sempre tra loro eguali (11). Fig.88.

176. Si vede in secondo luogo, che in un quadrilatero iscritto nel cerchio gli angoli opposti insieme debbano essere eguali a due retti. Imperocchè, se ABC sia il cerchio, ed ABCD il quadrilatero iscritto nel medesimo; tirate le diagonali AC, BD, sarà tanto l'angolo BAC eguale all'angolo BDC, quanto l'angolo DAC eguale all'angolo DBC (175); con che sarà tutto l'angolo BAD eguale alli due BDC, DBC; ed apposto il comune BCD saranno li due BAD, BCD eguali alli tre BDC, DBC, BCD (13). Ma questi tre insieme, come attinenti ad un' istesso triangolo, sono eguali a due retti (71). Dunque eguali ancora a due retti saranno li due BAD, BCD; e dell' istessa maniera si dimostrerà essere similmente eguali a due retti gli altri due ABC, ADC. Fig.89.

177. Conforme poi l'angolo situato in una data porzione del cerchio dee essere da per tutto sempre lo stesso (175), così sarà egli retto quando la porzione è semicerchio, sarà acuto quando la porzione è maggiore del semicerchio, e sarà finalmente ottuso quando per lo contrario la porzione è minore del semicerchio. Perciò sia il cerchio ABC diviso in due semicerchi dal diametro BC. E siccome l'angolo BAC sta situato nel semicerchio, Fig.90.

così l'angolo ABC ritrovasi in una porzione maggiore del semicerchio, e l'angolo AEC in una porzione minore. Dal centro D tirisi una retta ad arbitrio, che sia DF; e li due angoli BDF, CDF insieme saranno doppii dell'angolo BAC (173). Onde siccome quelli insieme sono eguali a due retti (51), così l'angolo BAC dovrà essere retto. Ma li due BAC, ABC insieme sono minori di due retti (71). Dunque l'altro ABC sarà minore del retto, ed in conseguenza acuto. Ed in fine, poicchè li due ABC, AEC insieme sono eguali a due retti (176); sarà il terzo AEC maggiore del retto, e per tanto ottuso.

178. Essendo così, potrà in oltre dimostrarsi, che se una retta tocchi il cerchio, e dal punto del contatto se ne tiri un'altra, che seghi l'istesso cerchio in due porzioni; gli angoli fatti dalla secante colla tangente debbano essere eguali a quelli, che alternatamente gli corrispondono nelle dette porzioni. Perciò sia il cerchio ABC, che abbia per sua tangente nel punto A la retta EF. Tirisi da quel Fig. 91. punto un'altra retta, che seghi il cerchio; e sia primieramente la AC, che passa per lo centro D. E dovendo questa retta essere perpendicolare sulla EF (168), saranno retti li due angoli CAE, CAF. Ma retti sono ancora gl'angoli situati nelle due porzioni formate per la AC, per essere semicerchio ciascuna delle dette porzioni (177). Dunque in questo caso non dee porsi in dubbio, che gli angoli CAE, CAF fatti dalla secante AC colla tangente EF sieno eguali a quelli, che alternatamente gli corrispondono nelle due porzioni del cerchio.

179. Che se poi la secante del cerchio tirata dal punto del contatto A sia un'altra qualsivoglia retta AB, si dimostreranno li due angoli BAE, BAF fatti dalla secante AB colla tangente EF eguali a quelli, che gli corrispondono alternatamente nelle due porzioni ACB, AGB nella seguente maniera. Congiungasi la BC. E poicchè l'angolo ABC come esistente nel semicerchio è retto (177); saranno li due BAC, BCA insieme ancora egua-

li ad un retto (71). Quindi, essendo retto l'angolo CAE, sarà questo solo eguale alli due BAC, BCA; e per tanto, tolto il comune BAC, rimarrà l'angolo BAE eguale all'angolo BCA (13). Inoltre, poicchè sono eguali a due retti, così li due BAE, BAF (51), come li due BCA, BGA (176); saranno li due BAE, BAF eguali alli due BCA, BGA (11). Ma l'angolo BAE di già è stato dimostrato eguale all'angolo BCA. Dunque ancora l'altro BAF sarà eguale all'altro BGA.

180. E quindi, siccome con dimostrazione negativa egli è facile a pruovarsi, che essendo gli angoli BAE, BAF eguali agli altri due BCA, BGA, ciascuno a ciascuno, debba essere la EF tangente del cerchio; così si potrà facilmente da un dato cerchio tagliare una porzione, che sia capace di un'angolo eguale ad un'altro angolo dato. Imperocchè, se ABC sia il cerchio dato, e ad un punto di esso A tirisi la tangente AD (171), facendosi l'angolo DAB eguale all'angolo dato (40), sarà BCA la porzione, che si dimanda. Per dimostrarlo, pongasi in detta porzione un'angolo, che sia ACB. E poicchè la retta AD è tangente del cerchio, e dal punto del contatto A si è tirata l'altra AB, che sega il cerchio in due porzioni; sarà l'angolo DAB fatto dalla tangente, e dalla secante eguale all'angolo ACB, che sta nella porzione opposta del cerchio (178). Ma per la costruzione l'angolo DAB è eguale all'angolo dato. Dunque all'istesso angolo dato sarà eguale ancora l'angolo ACB (11). Fig. 92.

181. Si potrà parimente sopra di una data retta, come AB, descrivere una porzione di cerchio, che sia capace di un'angolo eguale ad un'altro angolo dato. Dividasi la AB in due parti eguali nel punto C (42); ed essendo retto l'angolo dato, egli è chiaro, che il semicerchio descritto col centro C, e l'intervallo CA, ovvero CB debba essere la porzione, che si dimanda, per la ragione, che l'angolo situato nel semicerchio dee essere retto (177). Che se poi l'angolo dato Fig. 93. 94. 95.

non sia retto, facciasi l'angolo BAD eguale all' angolo dato (40), ed alzate sopra le due AB, AD le perpendicolari CE, AE (49), che s'incontrino tra loro nel punto E, sarà questo il centro della porzione, che si dimanda. Imperocche, essendo eguali li due angoli ACE, BCE, ed avendo i medesimi angoli li lati AC, CE eguali alli lati BC, CE, ciascuno a ciascuno; saranno eguali ancora le loro basi AE, BE (38); e per tanto il cerchio, che descrivesi col centro E, e l'intervallo EA, passerà ancora per lo punto B. Ma la AD come perpendicolare sul diametro AG è tangente di questo cerchio (167). Dunque l'angolo situato nella porzione AFB sarà eguale all' angolo BAD, (178), ed in conseguenza eguale ancora all'angolo dato (11).

182. Per estendere più oltre la teoria degli angoli situati così ne' centri, come nelle circonferenze de' cerchi, notisi, che sicome due porzioni de' cerchi, che sono capaci di angoli eguali, si diranno da quì innanzi simili tra loro, così le porzioni simili situate su di una medesima retta debbono essere ancora eguali. Per dimostrarlo, sieno
Fig. 96. ACB, ADB le due porzioni simili situate sopra l'istessa retta AB; e se è possibile, cada l'una dentro dell'altra. Tirisi dal punto A una retta qualsivoglia ACD, che s'incontri cogli archi, che terminano dette porzioni, ne' punti C, e D; e congiunganši le altre due BC, BD. Adunque per essere simili le due porzioni ACB, ADB, sarà l'angolo ACB situato nella prima eguale all'angolo ADB situato nella seconda. Ma questo è falso, poiche nel triangolo BDC stando il lato DC prolungato in A dee essere l'angolo ACB maggiore dell'angolo ADB (70). Dunque non è egli vero, che delle due porzioni ACB, ADB una cada dentro dell'altra; e per tanto dovendosi quelle porzioni combaciare, saranno le medesime tra loro eguali (15).

183. Ma eguali altresì debbono essere le porzioni simili situate sopra rette eguali. Perciò sieno le due

due rette eguali AB, CD, ſopra le quali ſieno ſituate le due porzioni ſimili AEB, CFD. Adattiſi col penſiero l'una ſopra l'altra in modo tale, che il punto A cada sul punto C, e la retta AB sulla retta CD. Eſſendo adunque eguali le due AB, CD, caderà ancora il punto B sul punto D; ed in conſeguenza le due porzioni ſi ritroveranno ſituate ſopra una medeſima retta. Ma di già è ſtato dimoſtrato, che le porzioni ſimili ſituate ſopra una ſteſſa retta debbano combaciarſi, ed eſſere eguali ancora tra loro (182). Dunque la porzione AEB ſi combacierà colla porzione CFD, e per tanto ſaranno tra loro eguali. Del rimanente la ragione, per cui ſi chiamano ſimili quelle porzioni de' cerchi, che ſono capaci di angoli eguali, dipende da quel tanto, che intorno a dette porzioni ſarà altrove dimoſtrato. Fig. 97.

184. Notiſi ancora, che ſiccome l'ampiezza di un cerchio dipende dalla lunghezza del raggio, con cui egli ſi deſcrive; così dato il raggio del cerchio dee eſſere dato altresì il cerchio medeſimo. Quindi i cerchi deſcritti con eguali raggi debbono eſſere ancora eguali tra loro; ſiccome per lo contrario li cerchi eguali debbono eſſere deſcritti con raggi parimente eguali. Ma egli è chiaro, che eſſendo i cerchi eguali, debbano eſſere eguali altresì le loro circonferenze; poicche l'uguaglianza de' cerchi andando accompagnata coll' uguaglianza de' raggi, per neceſſità le circonferenze de' due cerchi eguali debbono combaciarſi tra loro, quante volte ſi adattano inſieme in modo tale, che il centro dell'una cada sul centro dell'altra. E quantunque ſia vero ancora, che le circonferenze eguali debbano appartenere a' cerchi eziandio eguali tra loro; tutta volta una tal verità non è così facile a ricavarſi dalla ſola nozione del cerchio; e per non eſſervi ora di eſſa biſogno, la medeſima ſarà altrove da noi dimoſtrata.

185. Avvertite tali coſe, dimoſtreremo ora, che angoli eguali ſituati nelli centri, o nelle circonferenze de' cerchi eguali, debbano appoggiarſi su ar-

Fig. 98. archi parimente eguali. Perciò sieno li due cerchi eguali ABC, DEF, li quali abbiano per loro centri li punti G, ed H. Ponganfi in questi centri li due angoli eguali BGC, EHF; e per essere gli altri BAC, EDF situati nelle circonferenze le loro metà (173), saranno essi ancora tra loro eguali (11); con che le due porzioni BAC, EDF saranno simili (182). Congiunganfi poscia le rette BC, EF. E poicche li due angoli BGC, EHF non solo sono eguali, ma per l'ugualianza de' cerchi anno ancora li lati GB, GC eguali alli lati HE, HF, ciascuno a ciascuno; saranno le loro basi BC, EF similmente eguali (38). Quindi eguali altresì saranno le porzioni simili BAC, EDF situate su di esse (183); ed in conseguenza essendo eguali così le circonferenze intere, come gli archi, che terminano quelle porzioni, sarà il rimanente arco BC eguale ancora al rimanente arco EF (13).

186. Ma essendo così, potrà dimostrarsi eziandio il converso di un tal teorema, cioè, che quante volte due angoli situati nelli centri, o nelle circonferenze de' due cerchi eguali si appoggiano su archi eguali, debbano i medesimi essere parimente tra loro eguali. Perciò sieno di nuovo

Fig. 98. li due cerchi eguali ABC, DEF, li quali abbiano per loro centri li punti G, ed H; e per lo contrario sieno presentemente eguali tra loro li due archi BC, EF, sopra li quali si appoggiano così gli angoli BGC, EHF situati ne' centri, come gli angoli BAC, EDF situati nelle circonferenze. Se è possibile, sieno disuguali li due angoli BGC, EHF, e sia l'angolo BGC maggiore dell' angolo EHF. Fatto adunque l'angolo BGI eguale all' angolo EHF (40), sarà l'arco BI eguale all' arco EF (185). Ma per ipotesi ancora l'arco BC è eguale all' arco EF. Dunque li due archi BC, BI saranno tra loro eguali (11); qual cosa non potendo essere (14), non sarà egli vero, che l'angolo BGC sia maggiore dell' angolo EHF; e per tanto questi due angoli saranno tra loro egua-

li;

li; e come loro metà saranno eguali altresì gli altri due BAC, EDF (11).

187. Con questi due teoremi se ne possono ancora dimostrare due altri; de' quali il primo si è, che essendo eguali le rette adattate dentro de' cerchi eguali, debbano essere eguali altresì gli archi tagliati da dette rette; ed il secondo si è, che per lo contrario essendo eguali gli archi presi nelle circonferenze de' cerchi eguali, debbano essere eguali eziandio le rette, che tagliano detti archi. Sieno adunque li due cerchi eguali ABC, DEF, dentro de' quali si adattino primieramente le due rette eguali BC, EF; e tirate dalli loro centri G, ed H le rette GB, GC, HE, HF, avranno li due angoli BGC, EHF non solo li lati GB, GC eguali alli lati HE, HF, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base BC eguale alla base EF; onde, dovendo l'angolo BGC essere eguale all'angolo EHF (39), sarà l'arco BC eguale similmente all'arco EF (185). Ponganssi di poi eguali tra loro questi due archi BC, EF; ed in questo caso dovranno essere eguali altresì li due angoli BGC, EHF (186), li quali avendo li lati GB, GC eguali alli lati HE, HF, ciascuno a ciascuno, avranno ancora la base BC eguale alla base EF (38). Fig. 98.

188. E quindi non sarà egli difficile, dato un' arco qualsivoglia, dividerlo in due parti eguali. Sia perciò ABC l'arco dato. Congiunganssi li suoi termini A, e C per la retta AC, la quale dividasi in due parti eguali nel punto D (42). Alzisi di poi da questo punto sulla stessa AC la perpendicolare DB (49), la quale s'incontri coll'arco dato nel punto B; ed io dico, che li due archi BA, BC sieno tra loro eguali. Per dimostrarlo, tirinsi le rette AB, CB. E poicche li due angoli ADB, CDB non solo sono eguali, ma anno ancora li lati AD, DB eguali alli lati CD, DB, ciascuno a ciascuno; saranno le loro basi AB, CB eziandio tra loro eguali (38). Ma ne' cerchi eguali, e tanto maggiormente in un medesimo cerchio le rette Fig. 99.

egua-

eguali, che vi si adattano dentro, debbono tagliare archi parimente eguali (187). Dunque gli archi BA, BC tagliati per le rette eguali AB, CB saranno tra loro eguali; e pertanto l'arco ABC sarà diviso per metà nel punto B.

## §. V.

### *Della proprietà la più rilevante del cerchio.*

189. Compiremo la teoria del cerchio con dimostrare di esso la proprietà la più rilevante, e si è, che abbassata da un punto della circonferenza la perpendicolare sul diametro, debba il quadrato di questa perpendicolare essere eguale al rettangolo fatto dalle porzioni del diametro.
Fig. 100. Perciò sia il cerchio ABC, di cui centro ne sia il punto D, e diametro la retta BC; e si abbassi su questo diametro da un punto A della circonferenza la perpendicolare AE. Congiunta adunque la DA, saranno eguali le due DB, DA; ed in conseguenza i loro quadrati saranno similmente tra loro eguali (113). Ma per lo triangolo AED rettangolo in E, il quadrato della DA è eguale alli quadrati delle due AE, DE (129); e per essere la BC divisa egualmente nel punto D, il quadrato della DB è eguale al rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DE (122). Dunque ancora li quadrati delle due AE, DE saranno eguali al rettangolo della BE nella CE, ed al quadrato della DE (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della DE, rimarrà il quadrato della perpendicolare AE eguale al rettangolo fatto dalle porzioni del diametro BE, CE (13).

190. Or questa proprietà compete talmente al cerchio, che per lo contrario, se il quadrato della perpendicolare AE sia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni BE, CE, il punto A dovrà essere situato nella circonferenza del cerchio, che ha per suo diametro la retta BC. Per dimostrarlo, dividasi la BC in due parti eguali nel punto

D, e

D, e congiungasi la DA. Essendo adunque il quadrato della AE eguale al rettangolo delle due BE, CE; coll'aggiunta del quadrato fatto dalla DE, saranno li quadrati delle due AE, DE eguali al rettangolo della BE nella CE, ed al quadrato della DE (13). Ma per lo triangolo AED rettangolo in E, li quadrati delle due AE, DE sono eguali al quadrato della DA (129); e per essere la BC divisa egualmente nel punto D, il rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DE è eguale al quadrato della DB (122). Dunque il quadrato della DA, ed il quadrato della DB saranno tra loro eguali (11); e pertanto, dovendo essere eguali ancora le due DA, DB (113), il cerchio, che descrivesi col centro D, e l'intervallo DB, passerà per il punto A.

191. Notisi intanto, che se la perpendicolare AE, abbassata sul diametro del cerchio BC, si prolunghi più oltre per fino a che s'incontri di nuovo colla circonferenza nel punto F, sarà la tutta AF divisa egualmente nel punto E (146). Quindi il quadrato della AE non sarà diverso dal rettangolo fatto dalle due AE, FE; e pertanto la medesima proprietà potrà enunciarsi ancora in quest'altra maniera, cioè, che se una retta adattata dentro del cerchio sia divisa da un diametro ad angoli retti, il rettangolo contenuto dalle porzioni della retta debba essere eguale al rettangolo fatto dalle porzioni del diametro. Ma considerata per questo verso la riferita proprietà del cerchio, si potrà la medesima estendere più oltre; come in effetto ella ha luogo, e quando la retta adattata dentro del cerchio dividesi da un diametro ad angoli obliqui, e quando la divisione di essa si fa da altra retta, che non sia diametro.

192. Per dimostrarlo, sia primieramente la AF divisa dal diametro BC ad angoli obliqui nel punto E; ed abbassata dal centro D sulla stessa AF la perpendicolare DG (50), congiungasi la DA. Poiche dunque la AF dee essere divisa egualmente nel punto G (146); sarà il rettangolo delle due Fig. 101.

AE,

AE, FE insieme col quadrato della GE eguale al quadrato della AG (122); ed in conseguenza coll' aggiunta del comune quadrato della DG, sarà il rettangolo delle medesime AE, FE insieme colli quadrati fatti dalle due EG, DG eguale alli quadrati delle altre due AG, DG (13). Ma per l'angolo retto DGA li quadrati delle due EG, DG sono eguali al quadrato della DE; e li quadrati delle altre due AG, DG sono eguali al quadrato della DA, ovvero DB (129), il quale quadrato della DB è eguale ancora al rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DE (122). Dunque il rettangolo delle due AE, FE insieme col quadrato della DE sarà eguale al rettangolo delle altre due AE, CE insieme coll'istesso quadrato della DE (11); e pertanto, tolto questo comune quadrato, sarà il solo rettangolo delle due AE, FE eguale al solo rettangolo delle altre due BE, CE (13).

Fig.102. 193. Sia in secondo luogo la AF divisa dall'altra BC, che non passi per lo centro D, ed in conseguenza che non sia diametro. Congiungasi la DE, la quale si prolunghi per fino a che s'incontri colla circonferenza ne' punti G, ed H. E poicche la AF è divisa dal diametro GH nel punto E, sarà il rettangolo delle due AE, FE eguale al rettangolo delle altre due GE, HE (19). Ma per essere l'altra BC divisa dall'istesso diametro GH nel medesimo punto E, ancora il rettangolo delle due BE, CE dee essere eguale al rettangolo delle altre due GE, HE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle porzioni AE, FE della retta AF, e l'altro contenuto dalle porzioni BE, CE della retta BC, saranno tra loro eguali (11). Ed essendo così, la proprietà del cerchio, di cui si tratta, dovrà enunciarsi generalmente in questa maniera, cioè, che se due rette s'interseghino dentro del cerchio, il rettangolo fatto dalle porzioni dell'una sarà eguale al rettangolo fatto dalle porzioni dell'altra.

194. Ma l'istesso ha luogo eziandio quando le ret-

rette s'intersegano tra loro fuori del cerchio. Perciò sieno le due rette AF, BC, le quali s'incontrino fuori del cerchio nel punto E; e pongasi Fig.103.
primieramente, che una di esse BC sia diametro del cerchio. Si abbassi dal centro D sull'altra AF la perpendicolare DG (50); e congiungasi la DF. Poicche dunque la AF dee essere divisa egualmente nel punto G (146), sarà il rettangolo delle due AE, FE insieme col quadrato della FG eguale al quadrato della EG (124); ed in conseguenza coll' aggiunta del comune quadrato della DG, sarà il rettangolo delle medesime AE, FE insieme colli quadrati fatti dalle due FG, DG eguale alli quadrati delle altre due EG, DG (13). Ma per l'angolo retto DGE li quadrati delle due FG, DG sono eguali al quadrato della DF, ovvero DC; e li quadrati delle altre due EG, DG sono eguali al quadrato della DE (129), il quale quadrato della DE è eguale al rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DC (124). Dunque il rettangolo delle due AE, FE insieme col quadrato della DC sarà eguale al rettangolo delle due BE, CE insieme coll'istesso quadrato della DC (11); e pertanto, tolto questo comune quadrato, sarà il solo rettangolo delle due AE, FE eguale al solo rettangolo delle due BE, CE (13).

195. Pongasi dipoi, che niuna delle due AF, BC Fig.104.
passi per lo centro del cerchio D; e congiunta la DE, vadasi questa ad incontrare colla circonferenza nelli punti G ed H. Poicche dunque la AF s'incontra col diametro GH fuori del cerchio nel punto E; sarà il rettangolo delle due AE, FE eguale al rettangolo delle altre due GE, HE (194). Ma per incontrarsi l'altra BC coll'istesso diametro GH nel medesimo punto E, ancora il rettangolo delle due BE, CE dee essere eguale al rettangolo delle altre due GE, HE. Dunque li due rettangoli, uno fatto dalle due AE, FE, e l'altro fatto dalle due BE, CE, saranno tra loro eguali (11); ed in conseguenza non solo quando le rette s'intersegano dentro del cerchio, ma ancora quan-

do

do s' incontrano fuori di esso, il rettangolo fatto dalle porzioni dell' una dovrà essere eguale al rettangolo fatto dalle porzioni dell'altra.

196. Qualora intanto le rette s'incontrano fuori del cerchio; potrebbe avvenire, che una di esse fosse tangente, e l'altra secante del cerchio; ed in tal caso il rettangolo fatto dalle porzioni della secante dovrà essere eguale al quadrato della tangente.
Fig.105. Per dimostrarlo, sia AE tangente del cerchio, e BC secante, le quali s'incontrino tra loro nel punto E; e pongasi primieramente, che la BC passi per lo centro D. Congiunta adunque la DA, sarà retto l' angolo DAE (168); ed in conseguenza il quadrato della DE sarà eguale alli quadrati delle due DA, AE (129). Ma per essere la BC divisa egualmente nel punto D, l'istesso quadrato della DE è eguale ancora al rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DC, ovvero DA (124). Dunque il rettangolo delle due BE, CE insieme col quadrato della DA sarà eguale alli quadrati delle altre due DA, AE (11); e pertanto, tolto il comune quadrato della DA, rimarrà il rettangolo delle due BE, CE eguale al quadrato della AE (13).

197. Pongasi in secondo luogo, che la secante
Fig.106. BC non passi per lo centro del cerchio D; ed egli è facile a dimostrarsi, che ancora in questo caso il rettangolo delle due BE, CE debba essere eguale al quadrato della tangente AE. Congiungasi per questo effetto la DE, la quale vadasi ad incontrare colla circonferenza del cerchio nelli punti G, ed H. Poicche dunque le due BC, GH s' incontrano tra loro fuori del cerchio nel punto E, sarà il rettangolo delle porzioni della prima BE, CE eguale al rettangolo delle porzioni della seconda GE, HE (194). Ma passando la GH per lo centro del cerchio, il rettangolo fatto dalle sue porzioni GE, HE dee essere eguale al quadrato della tangente AE (196*). Dunque ancora il rettangolo contenuto dalle due BE, CE sarà eguale al quadrato della tangente AE (11).

198. Ma

198. Ma siccome, quando la AE è tangente, e la BE è secante del cerchio, il rettangolo delle porzioni della secante BE, CE dee essere eguale al quadrato della tangente AE; così per lo contrario, essendo il rettangolo delle due BE, CE eguale al quadrato della AE, dovrà essere questa AE tangente del cerchio. Per dimostrarlo, tirisi dal punto E la tangente al cerchio EF (171), e congiunganfi le rette DA, DE, DF. Essendo adunque EF tangente del cerchio, sarà il rettangolo delle due BE, CE eguale al quadrato della tangente EF (196). Ma per ipotesi il rettangolo delle due BE, CE è eguale al quadrato della AE. Dunque il quadrato della AE, ed il quadrato della EF saranno tra loro eguali (11); ed in conseguenza eguali altresì saranno le due AE, EF (113). Quindi li due angoli DAE, DFE, avendo non solo li lati DA, AE eguali alli lati DF, EF, ciascuno a ciascuno, ma ancora la base DE comune, saranno tra loro eguali (39). Onde, siccome per la tangente EF è retto l'angolo DFE (168), così sarà retto ancora l'altro DAE; e pertanto la AE sarà similmente tangente del cerchio (167). Fig. 106.

199. E quindi si vede, che le tangenti tirate al cerchio da un medesimo punto, siccome sono le due EA, EF, debbano essere tra loro eguali; qual cosa puo dimostrarsi ancora per mezzo della sola proprietà del triangolo rettangolo in questa maniera. Congiunganfi le rette DA, DE, DF; e per essere le due EA, EF tangenti del cerchio, sarà retto tanto l'angolo DAE, quanto l'angolo DFE (168); onde il quadrato della stessa DE sarà eguale così alli quadrati delle due DA, EA come alli quadrati delle due DF, EF (129). Quindi li quadrati delle due DA, EA saranno eguali alli quadrati delle due DF, EF (11); e pertanto, tolti li quadrati eguali fatti dalla DA, e dalla DF, rimarrà il quadrato della EA eguale al quadrato della EF (13); onde le tangenti EA, EF saranno tra loro eguali (113). Fig. 106.

200. Del rimanente dall'essere eguali le tangen-

ti tirate al cerchio da un medesimo punto facildrilamente puo dedursi, che se li quattro lati di un quadrilatero tocchino il cerchio, le somme degli opposti debbano essere tra loro eguali. Perciò sia ABCD
Fig. 107. questo tale quadrilatero, i di cui quattro lati AB, BC, CD, DA tocchino il cerchio nelli punti E, F, G, H. Essendo adunque eguali così le due AE, AH, come le due BE, BF; sarà la tutta AB eguale alle due AH, BF insieme (13). E similmente, essendo eguali tanto le due CG, CF, quanto le due DG, DH; sarà la tutta CD eguale alle due CF, DH insieme. Con che la somma delli due lati AB, CD sarà eguale alla somma delle quattro AH, BF, CF, DH, ovvero alla somma degli altri due lati BC, DA.

## CAPITOLO V.

### *Della teoria delle figure regolari.*

201. Dimostrata la teoria del cerchio, non sarà difficile ora l'intendere quel tanto ci rimane a dire intorno alle figure rettilinee, che chiamansi regolari. E poicche l'esame di queste tali figure non si limita alle sole trilatere, e quadrilatere, ma dee estendersi ancora a molte di quelle, che generalmente sono state chiamate multilatere; perciò non sarà mal fatto di additare prima i nomi, colli quali sogliono distinguersi tra loro queste altre figure. Avvertiremo adunque, che siccome la figura dicesi trigono ovvero triangolo quando è terminata da tre lati, e quadrigono ovvero quadrangolo quando è terminata da quattro; così se i lati, che la terminano, siano cinque si appella pentagano, se sei esagono, se sette settagono, se otto ottogono, se nove nonogono, se dieci decagono, e così all'infinito.

§. I.

## §. I.

### *Della nozione delle figure regolari.*

202. UNa figura rettilinea dicesi regolare, quando sono eguali tra loro così i lati, che la terminano, come gli angoli contenuti da detti lati; e perciò la sua nozione vien riposta nell' essere insiememente equilatera, ed equiangola. Ma quantunque l'una, e l'altra condizione insieme rendano regolare qualsivoglia figura rettilinea; nientedimeno, trattandosi del triangolo, basterà assicurarsi, che vi sia una delle dette condizioni; poicche unitamente con quella vi dovrà essere ancora l'altra, per esser stato dimostrato, che tanto il triangolo equilatero debba essere similmente equiangolo (78), quanto il triangolo equiangolo debba essere ancora equilatero (79).

203. Or dall'esposta nozione delle figure regolari egli è facile a ricavarne, che se gli angoli di ciascuna di esse siano divisi in due parti eguali per altrettante rette, l'incontro di queste rette debba farsi in un medesimo punto. Perciò sia la figura regolare ABCDEF, i di cui angoli ABC, BCD dividansi in due parti eguali per le rette BG, CG, le quali s'incontrino tra loro nel punto G; e congiunganси le altre rette DG, EG, FG, AG. Essendo adunque l'angolo BCG eguale all' angolo DCG, ed essendo ancora li due lati BC, CG eguali alli due lati DC, CG, ciascuno a ciascuno; saranno li due triangoli BGC, DGC perfettamente tra loro eguali (87); e pertanto sarà l'angolo CBG eguale all'angolo CDG. Quindi per l'uguaglianza delli due angoli ABC, CDE, siccome CBG è la metà dell'angolo ABC, così CDG sarà ancora la metà dell'angolo CDE. Ed avendo luogo la stessa dimostrazione da per tutto, eziandio li rimanenti angoli della figura proposta saranno divisi per metà dalle altre rette DG, EG, FG, AG. Fig.108.

 204. Ma

204. Ma ſiccome le rette, le quali dividono per metà gli angoli di una figura regolare, s'incontrano tutte in un'iſteſſo punto; così non sarà difficile il dimoſtrare, che le medeſime rette debbano tutte eſſere tra loro eguali. Imperocchè, eſſendo eguali gli angoli della figura regolare
Fig.108. ABCDEF, saranno eguali altresì le metà, nelle quali i medeſimi reſtano diviſi dalle rette AG, BG, CG, DG, EG, FG (11). Quindi nelli triangoli AGB, BGC, CGD, DGE, EGF, FGA gli angoli, che ſono ſopra le baſi di eſſi AB, BC, CD, DE, EF, FA, saranno tra loro eguali; ed in conſeguenza, dovendo eſſere eguali altresì i lati, che ſi oppongono a detti angoli (73), saranno eguali le rette AG, BG, CG, DG, EG, FG, che dividono egualmente gli angoli della figura regolare.

205. Poicchè dunque ſono eguali le rette AG, BG, CG, DG, EG, FG, che dividono per metà gli angoli della figura regolare ABCDEF; potrà riguardarſi il punto G, in cui quelle rette s'incontrano, come centro della figura medeſima. Ed in effetto da quì innanzi chiameremo centro di una figura regolare quel punto, da cui tutte le rette tirate alli vertici degli angoli della ſteſſa figura ſono tra loro eguali. E ſiccome ogni figura regolare dee eſſere dotata di sì fatto centro, così per quel tanto è ſtato dimoſtrato poco prima (203) potrà il medeſimo ritrovarſi per mezzo dell'incontro di due rette, che dividono egualmente due angoli della figura propoſta.

206. Eguali altresì saranno le perpendicolari, che dal centro di una figura regolare ſi abbaſſano ſopra i lati della medeſima. Per dimoſtrarlo, ſia di
Fig.108 nuovo la figura regolare ABCDEF, che abbia per ſuo centro il punto G, da cui ſi abbaſſino ſopra i lati della figura le perpendicolari GH, GI, GL, GM, GN, GO (50). E poicchè l'angolo ABC è diviſo egualmente dalla retta BG, saranno gli angoli del triangolo BGH eguali agli angoli del triangolo BGI, ciaſcuno a ciaſcuno. Ma gli ſteſſi trian-

goli

goli anno ancora il lato GB comune, che ſta oppoſto ad angoli eguali. Dunque, dovendo i medeſimi eſſere perfettamente eguali tra loro (85), saranno eguali le due perpendicolari GH, GI; e dell'iſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che ſieno eguali ancora le rimanenti.

207. Per quanto a queſte perpendicolari, elle dividono ancora egualmente li lati, sulli quali cadono. Imperocchè, eſſendo eguali non ſolo gli angoli BAF, ABC, ma ancora le loro metà BAG, ABG; ſaranno gli angoli del triangolo AGH, eguali agli angoli del triangolo BGH, ciaſcuno a ciaſcuno. Ma gli ſteſſi triangoli anno parimente non ſolo il lato GA eguale al lato GB, ma comune altresì il lato GH, li quali lati ſtanno oppoſti ad angoli eguali. Dunque, dovendo i medeſimi eſſere perfettamente tra loro eguali (85), ſaranno ancora eguali li due rimanenti lati AH, BH; e pertanto il lato della figura AB ſarà diviſo egualmente dalla ſua perpendicolare GH; ed avendo luogo l'iſteſſa dimoſtrazione da per tutto, ancora gli altri lati ſaranno diviſi per metà dalle loro perpendicolari.

208. E quindi, data una figura regolare, potrà determinarſi il ſuo centro, non ſolo coll'incontro delle rette, che dividono egualmente due delli ſuoi angoli; ma ancora coll'incontro di quelle, che dividono per metà, e ad angoli retti due delli ſuoi lati. Imperocchè per le coſe fin' ora dimoſtrate ſi vede chiaramente, che il punto, che ſi determina coll'uno, e l'altro incontro, debba eſſere talmente ſituato nella figura data, che ſieno eguali tra loro, tanto le rette, le quali da detto punto ſi tirano alli vertici degli angoli della figura, quanto le perpendicolari, che dal medeſimo punto ſi abbaſſano sulli lati della ſteſſa figura.

209. Del rimanente, per dimoſtrare un' altra proprietà ſingolare delle figure regolari, notiſi in queſto luogo, che ſiccome gli angoli di ogni triangolo uniti inſieme ſono eguali a due retti (71), così gli angoli di qualunque figura rettilinea preſi

unitamente debbano essere eguali a tanti retti, quanti ne addita il doppio del numero de' lati minorato di quattro: dimodoche dovranno essere eguali a quattro retti essendo la figura quadrangolo, a sei retti essendo pentagono, a otto retti essendo esagono, a dieci retti essendo settagono, a dodici retti essendo ottogono, a quattordici retti essendo nonogono, a sedici retti essendo decagono, e così all'infinito.

210. Nè è cosa difficile ad intenderne la ragione. Imperocchè ogni figura rettilinea con rette tirate da un'angolo agli angoli opposti dividesi in tanti triangoli, quanti ne addita il numero de' lati scemato di due. Ma gli angoli di ciascuno triangolo sono insieme eguali a due retti (71). Dunque gli angoli di tutti i triangoli, ne' quali è divisa la figura, saranno eguali a tanti retti, quanti ne disegna il doppio del numero de'lati scemato di quattro; ed in conseguenza, perche gli angoli della figura risultano dagli angoli di quelli triangoli, ad altrettanti retti saranno eguali ancora gli angoli della figura medesima.

211. Or da ciò egli è chiaro, che, data la spezie della figura rettilinea, debba essere data ancora la somma delli suoi angoli; dimodoche, essendovi due figure rettilinee della medesima spezie, la somma degli angoli dell'una dovrà essere eguale alla somma degli angoli dell'altra. E poicche nelle figure regolari così li lati, come gli angoli sono eguali tra loro (202); chiara cosa ancora si è, che, data la spezie della figura regolare, debba essere dato parimente ciascuno delli suoi angoli: di maniera che, essendovi due figure regolari della medesima spezie, gli angoli dell'una dovranno essere eguali agli angoli dell'altra, ciascuno a ciascuno.

212. Ed essendo così, la proprietà singolare di ciascuna figura regolare, che ci rimane a dimostrare, sarà, che dato uno de' suoi lati, debba essere data ancora la figura medesima: dimodoche, essendo eguali li lati di due figure regolari della stessa spezie, dovranno le figure medesime essere pari-

parimente tra loro eguali. E la ragione è chiara; poicche per essere eguali così li lati, come gli angoli di dette figure, ciascuno a ciascuno, potranno le stesse talmente adattarsi tra loro, che l'una si combaci coll'altra; onde venendosi a combaciare, forzosamente quelle dovranno essere tra loro eguali (15).

## §. II.

### *Della situazione del cerchio nelle figure regolari.*

213. Il cerchio dicesi situato in una figura rettilinea qualsivoglia, quantevolte la sua circonferenza o passa per tutti i vertici degli angoli della figura, o tocca tutti i lati della medesima. Quindi una tal situazione può farsi in due maniere, cioè o per via di circonscrizione, o per via d'iscrizione. Quantevolte la circonferenza passa per tutti i vertici degli angoli della figura, in tal caso dicesi il cerchio circonscritto intorno a quella; ma se poi la circonferenza toccasse i lati tutti della figura, allora si direbbe il cerchio iscritto dentro di essa.

214. Or non è da porsi in dubbio, che essendo la figura regolare, possa in essa situarsi il cerchio così per via di circonscrizione, come per via d'iscrizione. Imperocchè, ritrovato il centro della figura (208), saranno eguali tanto le rette, che da quello si tirano alli vertici degli angoli della figura (204), quanto le perpendicolari, che dal medesimo centro si abbassano sulli lati della stessa figura (206). Onde, siccome il cerchio, che si descrive coll'intervallo di una di quelle rette, passerà per gli riferiti vertici, e sarà circonscritto intorno alla figura; così l'altro, che descrivesi coll' intervallo di una di queste perpendicolari, toccherà i lati della figura (167), e sarà iscritto dentro di essa.

215. Quindi, facendo uso delle due maniere stabilite di sopra (208) per determinare il centro di

una figura regolare, potremo altresì in due modi diversi risolvere il problema, di cui si tratta. Sia
Fig. 108. perciò la figura regolare ABCDEF; e delli due modi il primo consiste in dividere li due angoli ABC, BCD egualmente per le rette BG, CG (41), ed in abbassare dal punto G, in cui queste s'incontrano, la perpendicolare GH sul lato AB (50); e l'altro in dividere egualmente ne'punti H, ed I li due lati AB, BC (42), ed inalzare da questi punti su gli stessi lati le perpendicolari HG, IG (49), che s'incontrino tra loro nel punto G. Imperocchè in amendue i modi li cerchi, che si descrivono col centro G, e cogl'intervalli GB, GH, saranno quelli, che si dimandano.

216. Intanto, se la figura data sia quadrato, co-
Fig. 109. me è la figura ABCD, ciascuno delli due modi può ricevere qualche variazione, e rendersi ancora più semplice. Imperocchè, per quanto al primo, basterà tirare le diagonali AC, BD, e dal punto G, in cui quelle s'intersegano, abbassare sul lato AB la perpendicolare GH (50); per la ragione, che con dette diagonali vengono a dividersi egualmente tutti gli angoli del quadrato. Per quanto poi al secondo basterà segare egualmente ne'punti H, I, L, M tutti quattro i lati (42), e congiungere i punti opposti per le rette HL, IM, che s'incontrino nel punto G; e ciò perche dette rette vengono ad essere perpendicolari sulli lati, alli quali corrispondono.

217. Del rimanente è così proprio delle figure regolari di potersi in ciascuna di esse situare il cerchio tanto per via di circonscrizione, quanto per via d'iscrizione, che a riserba del solo triangolo niuna altra figura rettilinea si scorge tale, che non essendo regolare possa sempre concedere al cerchio una tal situazione. Ed affinche non vi sia dubbio intorno a ciò, che diciamo, prima faremo vedere, che, dato qualunque triangolo, si possa sempre così intorno ad esso, come dentro del medesimo descrivere il cerchio; ed indi dimostreremo, che, data ogni altra figura rettilinea, necessa-

ria-

riamente si richiedano certe condizioni per potersi risolvere l'istesso problema.

218. Sia dato adunque un triangolo qualsivoglia ABC, e vogliasi in primo luogo circonscrivere intorno ad esso il cerchio. Dividansi li due lati AB, BC egualmente ne' punti D, ed E (42); indi da questi punti su gli stessi lati s'inalzino le perpendicolari DF, EF (49), che s'incontrino tra loro nel punto F; e congiunganfi finalmente le rette FA, FB, FC. Poicche dunque li due angoli ADF, BDF sono eguali, ed anno li lati AD, DF eguali alli lati BD, DF, ciascuno a ciascuno; saranno le loro basi FA, FB ancora eguali (38). Ma per la stessa ragione debbono essere eguali eziandio le due FB, FC. Dunque le tre rette FA, FB, FC saranno tra loro eguali; e per tanto il cerchio, che descrivesi col centro F, e coll' intervallo FA, dovendo passare ancora per gli punti B, e C, sarà egli circonscritto intorno al triangolo dato. Fig. 110.

219. Vogliasi in secondo luogo dentro del medesimo triangolo ABC iscrivere il cerchio. Dividansi li due angoli BAC, ABC egualmente per le rette AD, BD (41); e dal punto D, in cui queste s'incontrano, si abbassino sulli lati AB, BC, AC le perpendicolari DE, DF, DG (50). Poicche dunque li due triangoli ADE, ADG anno non solo gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, ma comune ancora il lato AD, che stà opposto ad angoli eguali; saranno i medesimi perfettamente eguali tra loro (85), ed in conseguenza saranno eguali le due DE, DG. Ma per la stessa ragione debbono essere eguali eziandio le due DE, DF. Dunque le tre perpendicolari DE, DF, DG saranno tra loro eguali; e per tanto il cerchio, che descrivesi col centro D, e coll' intervallo DE, dovendo non solo passare per gli punti F, e G, ma toccare ancora li lati AB, BC, AC (167), sarà egli iscritto dentro del triangolo dato. Fig. 111.

220. Or per quanto al quadrilatero ovvero quadrangolo, per potersi intorno ad esso circonscrivere

re

re il cerchio, è necessario, che gli angoli opposti uniti insieme siano eguali a' due retti (176); e per potersi dentro del medesimo iscrivere il cerchio, si richiede, che le somme de' lati opposti siano tra loro eguali (200). Quindi per ogni altro quadrilatero, o sia quadrangolo il problema dee aversi come impossibile. Imperocchè, se mai egli fosse capace di soluzione, si potrebbe così dentro del cerchio situare un quadrilatero, senza che li suoi angoli opposti fossero eguali a due retti, come intorno al cerchio adattare un quadrilatero, senza che fossero eguali le somme delli suoi lati opposti; quali cose non possono aver luogo.

221. Ma per intendere l'intima ragione della impossibilità del problema, quante volte mancano nel quadrilatero le riferite condizioni, notisi primieramente, che, dato il quadrilatero ABCD, di già viene ad essere dato il cerchio, che passa per gli soli tre punti A, B, C, per la ragione, che il centro di tal cerchio non puo ritrovarsi, se non se nell' incontro delle due rette EG, FG, che segano egualmente, e ad angoli retti li due lati AB, BC (218). Onde, affinche possa passare il medesimo cerchio per lo quarto punto D, è necessario, che questo quarto punto sia situato nella direzione della sua circonferenza. Ed avendo egli una tal situazione, qualora li due angoli ABC, ADC sono insieme eguali a due retti (176); per necessità dee avere il quadrilatero sì fatta condizione, per potersi intorno ad esso circonscrivere il cerchio. Fig.112.

222. Notisi ancora, che, dato il quadrilatero ABCD, di già viene ad essere dato il cerchio, che tocca li soli tre lati AB, BC, CD, per la ragione, che il centro di tal cerchio non puo ritrovarsi, se non se nell' incontro delle due rette BE, CE, che dividono egualmente li due angoli ABC, BCD (219). Onde, affinche il medesimo cerchio possa toccare ancora il quarto lato AD, è necessario che questo quarto lato sia in una situazione tale, che possa egli divenire tangente del cerchio sudetto. Ed avendo egli una tal situazione, qualora la somma Fig.113.

ma

ma delli due lati AD, BC è eguale alla somma degli altri due AB, CD (200); per necessità dee esservi nel quadrilatero sì fatta condizione, per potersi dentro di esso iscrivere il cerchio.

223. Con questi principj non sarà ora difficile l'investigare, quali condizioni siano necessarie per ogni altra figura rettilinea, affinche il problema, di cui si tratta, sia capace di soluzione. Perciò sia il pentagono ABCDF, e trattandosi di circonscrivere il cerchio intorno ad esso, siccome egli resta determinato colli soli tre punti A, B, C (218), così passerà per gli altri due D, ed E, se tirate le rette AD, BD siano eguali a due retti tanto li due angoli ABC, ADC, quanto gli altri due ABD, AED (176). Trattandosi poscia d' iscrivere il cerchio dentro dell'istesso pentagono, ancora questo rimane determinato con toccare li soli tre lati AB, BC, CD (219). Onde toccherà eziandio gli altri due DE, AE, se incontrandosi il lato BA col lato DE in F, ed il lato CD col lato AE in G, sia così la somma delli due BC, DF eguale alla somma delli due BF, CD, come la somma delli due BC, AG eguale alla somma delli due AB, CG (200). Fig. 114.

## § III.

### *Della situazione delle figure regolari nel cerchio.*

224. Conforme nelle figure regolari puo sempre situarsi il cerchio, e per via d'iscrizione, e per via di circonscrizione; così per lo contrario ancora egli il cerchio in amendue le maniere concede sempre situazione alle figure regolari. Dicesi adunque una figura qualsivoglia iscritta dentro del cerchio, quando i vertici degli angoli della figura si ritrovano nella circonferenza del cerchio. Al contrario dicesi una figura circonscritta intorno al cerchio, quando li lati della figura toccano la circonferenza del cerchio. Or dobbiamo presentemente far vedere, come, dato

dato il cerchio, si possono così dentro di esso, come intorno al medesimo descrivere le figure regolari.

225. Ed in primo luogo, quante volte è iscritta dentro del cerchio una qualche figura regolare, non sarà cosa difficile circonscriverne un'altra della stessa spezie intorno al medesimo cerchio. Perciò sia il cerchio ACE, dentro del quale sia iscritta la figura regolare ABCDE. Tirinsi alli punti A, B, C, D, E le tangenti FG, GH, HI, IL, LF (171), le quali s'incontrino tra loro nelli punti G, H, I, L, F. E siccome la figura FGHIL contenuta da queste tangenti è della stessa spezie coll'altra ABCDE, così sarà ella regolare, cioè avrà li lati, e gli angoli eguali, ed a cagion de' suoi lati, che per la costruzione medesima toccano la circonferenza del cerchio, sarà ancora circonscritta intono al cerchio dato.

Fig. 115.

226. Per dimostrarlo, ritrovisi il centro del cerchio M (145), da cui tirinsi così le rette MA, MB, MC, MD, ME, come le altre MF, MG, MH, MI, ML. Poicche dunque in ogni quadrilatero gli angoli uniti insieme sono eguali a quattro retti (209), e quelli che formano li raggi colle tangenti sono retti (168); saranno eguali a due retti così li due AGB, AMB, come li due BHC, BMC; con che li due AGB, AMB saranno eguali agli altri due BHC, BMC (11). Ma, essendo eguali le rette AB, BC, debbono essere eguali ancora tanto gli archi AB, BC (187), quanto gli angoli AMB, BMC (186). Dunque eziandio li due angoli AGB, BHC saranno tra loro eguali (13). E dimostrandosi della stessa maniera eguali ancora li rimanenti angoli della figura, di già sarà ella equiangola.

227. In oltre, essendo eguali così le due AG, BG (199), come le due AM, BM, sarà l'angolo AGM eguale all'angolo BGM (39); ed in conseguenza tutto l'angolo AGB sarà diviso egualmente per la retta MG. Ma per la stessa ragione ancora gli altri angoli debbono essere divisi egualmente per le

ret-

rette MH, MI, ML, MF. Dunque, ſiccome ſono ſtati dimoſtrati eguali tra loro detti angoli, così ſaranno eguali altresì le loro metà (11). Quindi li triangoli FMG, GMH, HMI, IML, LMF ſaranno perfettamente eguali (85); e con ciò ſaranno eguali ancora li lati FG, GH, HI, IL, LF. Onde la figura FGHIL circonſcritta intorno al cerchio non ſolo ſarà equiangola, ma ancora equilatera; e per tanto ſarà ella figura regolare.

228. Eſſendo così, baſterà per lo problema, di cui ſi tratta, far vedere, come s'iſcrivono dentro del cerchio le figure regolari; ed ancora in queſto caſo giova l'avvertire, che la figura iſcritta dentro del cerchio, ſempre quando è equilatera, per neceſſità dee eſſere eziandio equiangola. Per dimoſtrarlo, ſia ABCDE una figura equilatera iſcritta dentro del cerchio ACE; ed eſſendo eguali le rette AB, BC, CD, DE, EA, ſaranno eguali ancora gli archi tagliati dalla circonferenza per dette rette (187). Onde, perche l'arco CD è eguale all'arco AB; coll'aggiunta del comune DEA ſarà ancora l'arco CDEA eguale all'arco DEAB (13). Ma gli angoli ABC, BCD, che ſono nella circonferenza, ſi appoggiano ſopra queſti archi. Dunque ſimilmente l'angolo ABC ſarà eguale all'angolo BCD (186). E poicche la ſteſſa dimoſtrazione ha luogo da per tutto, ſarà la figura ABCDE non ſolo equilatera, ma ancora equiangola. Fig. 115.

229. Quindi l'iſteſſo problema della iſcrizione delle figure regolari dentro del cerchio riduceſi a conciliare alle figure da iſcriverſi la ſola uguaglianza de' lati. E poicche queſta va ſempre accompagnata coll'uguaglianza degli archi ſoſtenuti da detti lati (187); ſi avrà la medeſima con dividerſi la circonferenza in tante parti eguali, quanti ſono i lati della figura, che deeſi iſcrivere dentro del cerchio. E perciò trattandoſi del triangolo equilatero, ſi dovrà dividere la circonferenza in tre parti eguali; ſiccome biſognerà, che ſi divida in quattro parti eguali, trattandoſi del quadrato; in cinque parti eguali, trattandoſi del pentagono equilatero, e così all'infinito.

230. Per

230. Per incominciare adunque dal triangolo
Fig.116. equilatero, sia ABC il cerchio, dentro di cui egli debba iscriversi. Se ne formi uno sopra una retta qualsivoglia, e sia DEF (80); indi tirata la retta GH, che tocchi il cerchio in un qualche punto punto A (171), facciasi così l'angolo GAB eguale all'angolo DFE, come l'angolo HAC eguale all'angolo DEF (40). E siccome, incontrandosi le due AB, AC colla circonferenza ne'punti B, e C, resterà divisa la medesima in tre parti eguali; così congiunta la BC, sarà ABC il triangolo, che si dimanda. Imperocchè gli angoli ACB, ABC, come eguali alli due GAB, HAC (178), saranno eguali ancora agli altri due DFE, DEF (11); con che il terzo BAC sarà eziandio eguale al terzo EDF (71). Onde, essendo il triangolo ABC equiangolo col triangolo DEF, saranno li tre suoi angoli eguali tra loro; ed in conseguenza così la circonferenza sarà divisa in tre parti eguali, come egli il triangolo sarà tale, quale si dimanda.

231. Col medesimo artifizio egli è chiaro potersi iscrivere dentro del cerchio un triangolo, che sia equiangolo con qualunque altro triangolo dato. E se mai un tal triangolo si volesse circonscrivere intorno al cerchio, nè pure sarebbe cosa diffi-
Fig.117. cile a farsi. Perciò sia ABC il cerchio, e DEF il triangolo. Prolunghisi il lato EF dall'una, e l'altra parte ne' punti G, ed H; indi ritrovato il centro del cerchio I (145), e tirato un raggio qualsivoglia IA, facciasi così l'angolo AIB eguale all'angolo DEG, come l'angolo AIC eguale all'angolo DFH (40). Tirinsi poscia alli punti A, B, C le tangenti LM, MN, NL (171), che s'incontrino tra loro ne' punti L, M, N; e sarà NLM il triangolo, che si dimanda. Imperocchè li due angoli AIB, AMB, come eguali a due retti (209), debbono essere eguali agli altri due DEG, DEF (51); onde, essendosi fatto l'angolo AIB eguale all'angolo DEG, sarà ancora l'altro AMB eguale all'altro DEF (13). Ma per la stessa ragione eziandio l'angolo ALC dee essere eguale all'angolo DFE.

Dun-

Dunque sarà il terzo BNC eguale al terzo EDF (71); e per tanto li due triangoli NML, DEF saranno tra loro equiangoli.

232. Per quanto poi al quadrato, per cui dee dividersi la circonferenza del cerchio in quattro parti eguali, il problema è facile a risolversi. Sia perciò ABCD il cerchio, dentro di cui dee iscriversi il quadrato. Ritrovisi il suo centro (145), che sia il punto E; e tirato per esso un diametro qualsivoglia AC, si alzi su questo diametro dal medesimo centro la perpendicolare EB (49), che s'incontri colla circonferenza ne' punti B, e D. Li due diametri adunque AC, BD, che s'intersegano tra loro ad angoli retti, divideranno la circonferenza in quattro parti eguali; e congiunte le rette AB, BC, CD, DA, sarà ABCD il quadrato, che si dimanda. E la ragione è chiara; poicche, essendo eguali gli angoli AEB, BEC, CED, DEA, che stanno situati nel centro, per necessità dovranno essere eguali ancora gli archi AB, BC, CD, DA, sulli quali quegli angoli si appoggiano (185). Fig.118.

233. Non è così facile il problema, quando si tratta d'iscrivere dentro del cerchio un pentagono regolare; poicche per la di lui soluzione si ha bisogno di un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli sopra la base doppio dell'angolo verticale; e perciò prima è necessario di far vedere, come possa formarsi un tal triangolo. Sia adunque AB una retta qualsivoglia, la quale dividasi talmente in C, che il rettangolo della tutta AB nella parte BC sia eguale al quadrato dell'altra parte AC (138); e formato il triangolo isoscele ABD, che abbia la base BD eguale alla AC (80), sarà queste il triangolo, che si cerca. Per dimostrarlo, congiungasi la CD, ed intorno al triangolo ACD circonscrivasi il cerchio (218). Essendo adunque il rettangolo delle due AB, BC eguale al quadrato della AC, ovvero BD; sarà questa BD tangente del cerchio (198). Onde dovendo essere l'angolo BDC eguale all'angolo CAD (178), coll' Fig.119.

aggiun-

aggiunta del comune ADC sarà l'angolo ADB, ovvero ABD eguale alli due insieme CAD, ADC, o pure al solo BCD (70). Quindi saranno eguali così le due CD, BD (73), come le due CD, AC; ed in conseguenza, essendo l'angolo CAD eguale all'angolo ADC (72), sarà tutto l'angolo ADB doppio dell'angolo CAD.

234. Formato il triangolo isoscele ABD, che abbia ciascuno degli angoli sopra la base BD doppio dell'angolo verticale BAD; sarà ora agevol cosa dividere la circonferenza in cinque parti eguali, ed iscrivere dentro del cerchio un pentagono regolare. Sia perciò EGI il cerchio, dentro di cui iscrivasi il triangolo EGH equiangolo col triangolo ABD (231). Sarà adunque così l'angolo EGH, come l'angolo EHG doppio dell'angolo GEH; e per tanto, divisi quegli angoli egualmente per le rette GI, HF (40), saranno li cinque angoli EHF, FHG, GEH, HGI, IGE eguali tra loro. Onde, essendo questi angoli situati nella circonferenza, saranno eguali parimente gli archi EF, FG, GH, HI, IE, sulli quali essi si appoggiano (185); ed in conseguenza, congiunte le rette EF, FG, HI, IE, sarà EFGHI il pentagono, che si dimanda.

## §. IV.

### *Del modo di estendere più oltre la iscrizione delle figure regolari.*

235. PEr mezzo delle tre figure regolari, che sono state iscritte dentro del cerchio, cioè del triangolo, del quadrato, e del pentagono, egli è facile ora di estendere il problema molto più oltre. E per comprenderne la maniera, giova il ricordarsi, che per iscrivere dentro del cerchio una figura regolare non altro debba farsi, se non se dividere la circonferenza in tante parti eguali, quanti sono i lati della figura, che dee iscriversi (229). Essendosi adunque fatto vedere di sopra (188), che ogni qualunque arco possa divi-

dersi

dersi per metà; facendo uso di una tal divisione potremo coll'ajuto delle mentovate figure regolari, se non tutte le rimanenti, almeno moltissime altre iscrivere dentro del cerchio.

236. Ed in primo luogo di già col triangolo equilatero resta divisa la circonferenza del cerchio in tre archi eguali. Dunque, dividendosi per metà ciascuno di quegli archi, resterà ella divisa in sei; colla divisione eguale di questi altri archi, rimarrà divisa in dodici; e così all'infinito. Onde coll'ajuto del triangolo equilatero potrà iscriversi dentro del cerchio prima l'esagono regolare, indi il dodecagono regolare, e successivamente tutte le altre figure regolari, delle quali il numero de' lati va sempre a farsi doppio. Ma collo stesso artifizio, servendoci del quadrato, potremo iscrivere dentro del cerchio non solo l'ottogono, ma ogni altra figura regolare, di cui il numero de' lati cresce nel doppio. Ed in fine, avvalendoci del pentagono regolare, estenderemo il problema così al decagono, come a qualsivoglia altra figura regolare, in cui si va duplicando il numero de' lati.

237. Intanto per l'esagono regolare, se bene possa egli iscriversi dentro del cerchio con dividere per metà gli archi sostenuti dalli lati del triangolo equilatero; nientedimeno più facilmente si risolverà il problema nella maniera, che segue. Sia ACE il cerchio, che abbia per suo centro il punto G. Prendasi nella circonferenza un punto A ad arbitrio; e descrivasi un'altro cerchio col centro A, e coll'intervallo AG, il quale seghi il cerchio dato ACE nelli punti B, ed F. Congiungansi poscia le rette BG, AG, FG, che s'incontrino colla circonferenza dalla parte opposta ne' punti E, D, C. Ed io dico, che per queste rette sarà divisa la stessa circonferenza in sei parti eguali; ed in conseguenza che, congiunte le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA, sarà ABCDEF l'esagono regolare, che si dimanda. Fig.120.

238. Nè è cosa difficile ad intenderne la ragione. Imperocchè, essendo per la costruzione me-

desima equilateri li due triangoli ABG, AFG, e dovendo essere eguali a due retti tutti tre gli angoli di ogni triangolo (71); sarà ciascuno delli due AGB, AGF eguale alli due terzi di un retto. Onde tale sarà ancora così l'angolo BGC, che è loro supplimento a due retti (51), come ciascuno degli altri tre CGD, DGE, EGF, che sono eguali alli tre primi (53). Quindi tutti sei questi angoli saranno tra loro eguali (11), li quali come situati nel centro del cerchio dovranno appoggiarsi su archi eguali (185). Con che l'intiera circonferenza sarà divisa in sei parti eguali; e pertanto la figura ABCDEF sarà un'esagono regolare.

239. Or se un arco, conforme egli si divide per metà, potesse ancora segarsi in tre parti eguali, chiara cosa sarebbe, che coll'ajuto delle stesse tre prime figure regolari si potrebbero iscrivere dentro del cerchio tutte le altre, delle quali il numero de'lati si va avanzando nel triplo. Ma per lo trisegamento dell' arco si richiede una Geometria più sublime, e superiore alla ordinaria, siccome è quella, di cui presentemente si tratta. Quindi a riguardo di queste altre figure regolari il problema è impossibile secondo la Geometria ordinaria, e soltanto dee eccettuarsi il caso del quindecagono regolare; poicchè se bene per esso debba segarsi in tre parti eguali ciascuno degli archi sostenuti dalli lati del pentagono regolare, tutta volta il trisegamento di questi tali archi è cosa facile ad ottenersi.

240. Perciò sia ABC il cerchio, dentro di cui Fig.121. dee iscriversi il quindecagono regolare. Iscrivasi dentro di esso, così il triangolo equilatero (230), come il pentagono regolare (234), e sia AC uno de' lati del primo, ed AB uno de' lati del secondo. Adunque delle quindici parti eguali, nelle quali dee dividersi la circonferenza del cerchio, ne conterrà cinque l'arco AC, e tre l'arco AB. Quindi le contenute nell'arco BC saranno due; e perciò, dividendosi questo arco BC egualmente nel punto D (188), sarà l'arco BD, o CD la quindicesima

par-

parte della circonferenza intera. Onde, trasportandosi la sua lunghezza successivamente sulla circonferenza medesima, non solo sarà questa divisa in quindici parti eguali, quante ne bisognano per la iscrizione della figura, di cui si tratta, ma ancora l'arco AB sostenuto dal lato del pentagono regolare sarà diviso in tre parti eguali.

241. Non potendosi colla Geometria ordinaria dividere un'arco in tre parti eguali, non sarà mal fatto di additare quì un modo meccanico per potersi eseguire una tal divisione. Sia adunque il cerchio ABCD, che abbia per centro il punto E; e debba dividersi in tre parti eguali un'arco qualsivoglia di esso AB. Aggirisi intorno al punto B la retta BF; e ritrovisi per essa una posizione tale, che incontrandosi col diametro AD nel punto F, sia la porzione CF compresa tra la circonferenza, ed il diametro, eguale al raggio CE. Tirisi poscia per lo centro E la retta EG parallela alla BF (65); e diviso l'angolo BEG egualmente per la retta EH (41), sarà l'arco AB secato in tre parti eguali ne' punti G, ed H. Fig. 122.

242. Imperocchè, essendo eguali così le due BE, CE, come le due CE, CF; saranno eguali altresì tanto gli angoli ECB, EBC, quanto gli angoli DFC, DEC (72). Quindi l'angolo ECB, o sia EBC, come eguale alli due DFC, DEC (70), sarà doppio del solo DFC; e per tanto l'angolo AEB, che è eguale alli due insieme EBC, DFC, sarà triplo dell'istesso angolo DFC. Ma per le parallele BF, EG l'angolo DFC è eguale all'angolo AEG (62). Dunque l'angolo AEB sarà ancora triplo dell'angolo AEG; ed in conseguenza dovendo dell'istesso AEG essere doppio l'angolo GEB, che è stato diviso egualmente per la retta GH, saranno li tre AEG, GEH, HEB eguali tra loro; con che eguali eziandio saranno gli archi AG, GH, HB, sulli quali quegli angoli si appoggiano (185).

243. Più oltre si estenderebbe il problema della iscrizione delle figure regolari dentro del cerchio, se un'arco potesse dividersi in tante parti eguali,

quante ne disegnano i numeri primi; poicchè con tali divisioni, avvalendoci sempre delle prime tre figure regolari, ci sarebbe permesso d'iscrivere dentro del cerchio eziandio quelle figure, delle quali il numero de' lati cresce nel quintuplo, nel settuplo, nell' undecuplo, e così all'infinito. Ma colla Geometria ordinaria siccome non è divisibile un'arco in tre parti eguali, così molto meno puo egli dividersi in cinque, in sette, in undici, ed in ogni altra multitudine di parti eguali, che sia espressa da numero primo più alto.

244. Egli è vero, che non ostante l'immensa estensione, che potrebbe darsi al problema, pure restarebbero ad iscriversi quelle altre figure regolari, che anno tanti lati, quanti ne additano i numeri primi superiori al cinque. Ma, sempre quando potesse dividersi un'arco in qualunque numero di parti eguali, ancora queste altre figure si potrebbero iscrivere dentro del cerchio; poicchè con pratticarsi la divisione corrispondente al numero de' lati della figura colle due metà della circonferenza, e con prenderfi a due a due le parti divise, pure la circonferenza intera si ritroverebbe partita in tanti archi eguali, quanti sono i lati della figura da iscriversi.

245. Per la iscrizione di quelle figure regolari, delle quali il numero de' lati è impare, conferisce non poco l'estendere più oltre quel problema, di cui ci siamo serviti per la iscrizione del pentagono regolare (233), e formare un triangolo isoscele, in cui ciascuno degli angoli sopra la base sia triplo, quadruplo, quintuplo, o come si voglia multiplice dell'angolo verticale. Imperocchè con applicarsi dentro del cerchio questo tale triangolo, e con dividersi gli angoli sopra la base in tante parti eguali, per quanto essi sono multiplici dell'angolo verticale, resterà divisa la circonferenza intera in un numero impare de' archi eguali, e con ciò si iscriverà dentro del cerchio la figura regolare, che dee avere un'egual numero de' lati. Ma il promo-

vere

vere più oltre quel tale problema, ancora appartiene alla Geometria superiore.

## §. V.

### *Delle affezioni proprie di alcune figure regolari.*

246. PEr non tralasciare cosa alcuna degna da sapersi intorno alle figure regolari, dimostreremo ora certe affezioni, che sono proprie di alcune di esse. E per incominciare dalle più facili, noteremo in primo luogo intorno all'esagono regolare, che il suo lato sia eguale al raggio del cerchio, in cui è egli iscritto. Deducesi ciò chiaramente dalla sua iscrizzione medesima (237), ma puo dimostrarsi ancora nella maniera, che segue. Iscrivasi dentro del cerchio il triangolo equilatero ABC (230), e si abbassi sul lato BC la perpendicolare AE (50), la quale, attesa la perfetta uguaglianza delli due triangoli ABE, ACE (85), lo dividerà ancora egualmente, ed in conseguenza passerà per lo centro del cerchio D (146). Quindi, congiunti i raggi DB, DC, saranno eguali i due angoli BDE, CDE (39); e per tanto, prolungata la AE per fino alla circonferenza, saranno eguali ancora li due archi BF, CF (185); con che il lato dell'esagono regolare sarà la retta BF, che sostiene la metà dell'arco BFC. Ma il triangolo DBF, come equiangolo col triangolo ABC, è ancora equilatero. Dunque il lato dell'esagono regolare BF sarà eguale al raggio DB. Fig. 123.

247. Noteremo in secondo luogo intorno al triangolo regolare, che il quadrato del suo lato sia triplo del quadrato fatto dal raggio del cerchio, in cui è egli iscritto. Per dimostrarlo, ripiglisi la stessa figura, in cui restino le cose nella medesima maniera. Ed essendo regolare, o sia equilatero non solo il triangolo ABC, ma ancora l'altro DBF; saranno li due triangoli BED, BEF perfettamente tra loro eguali (85); e perciò il raggio DF sarà diviso egualmente dalla perpendicolare BE; on- Fig. 123.

de il suo quadrato, come eguale alli rettangoli della tutta DF nelle parti DE, EF (118), sarà doppio del rettangolo fatto dalle due DF, DE, o pure dalle due AD, DE. Ma il quadrato della AB, cioè del lato del triangolo regolare iscritto dentro del cerchio, è eguale alli quadrati delli raggi AD, DB insieme con due volte il rettangolo fatto dalle due AD, DE (130). Dunque il medesimo quadrato sarà eguale a tre volte il quadrato del raggio, ed in conseguenza sarà triplo del quadrato dello stesso raggio.

248. Noteremo in terzo luogo intorno al quadrangolo regolare, che il quadrato del suo lato sia doppio del quadrato fatto dal raggio del cerchio,
Fig.118. in cui è egli iscritto. Sia perciò ABCD il quadrangolo regolare iscritto dentro del cerchio; e congiunte le diagonali AC, BD, s'intersegheranno queste tra loro ad angoli retti nel centro del cerchio E (232). Quindi, essendo il triangolo AEB rettangolo in E, sarà il quadrato del lato AB eguale alli quadrati delli due raggi AE, BE (129); e per tanto il quadrato dello stesso lato AB sarà doppio del quadrato fatto dal solo raggio AE. Ma giova ancora l'avvertire, che abbassata dal centro E sul lato AB la perpendicolare EF (50), debba questa essere eguale alla metà del medesimo lato AB, per la ragione, che dividendosi l'angolo AEB egualmente dalla EF, li due angoli AEF, EAF debbono esser tra loro eguali.

249. Noteremo in quarto luogo intorno al decagono regolare, che tolto il suo lato dal raggio del cerchio, in cui è egli iscritto, sia il quadrato del medesimo lato eguale al rettangolo fatto dal raggio nella porzione rimanente. Per dimostrarlo,
Fig.124. siano AB, BC, CD, DE, EF li cinque lati del decagono regolare, che si ritrovano situati nel semicerchio ACF. E siccome, tirati i raggi BG, CG, DG, EG, debbono essere eguali li cinque angoli AGB, BGC, CGD, DGE, EGF (186), così sarà l'angolo BGF quadruplo del solo AGB. Ma l'angolo BGF è eguale alli due insieme ABG,
BAG

BAG (70). Dunque essendo questi trà loro eguali (72), sarà ciascuno di essi doppio dell' angolo AGB. Quindi, diviso l'angolo ABG egualmente per la BH (41), saranno eguali così li due GBH, HGB, come li due BAH, BHA; onde dovendo essere eguali le tre rette GH, BH, AB, sarà GH la porzione del raggio GA, che uguaglia il lato AB del decagono regolare. Ma per l'uguaglianza degli angoli ABH, BGH, il lato AB dee essere tangente del cerchio circonscritto intorno al triangolo GBH (180). Dunque il quadrato dello stesso lato AB sarà eguale al rettangolo del raggio GA nella sua porzione rimanente AH (196).

250. Noteremo in quinto luogo intorno allo stesso decagono regolare, che aggiunto il suo lato al raggio del cerchio, in cui è egli iscritto, sia il quadrato del raggio eguale al rettangolo, che si fa dalla somma del raggio, e del lato nel lato medesimo. Per dimostrarlo, sia AB il raggio del cerchio, e BC il lato del decagono aggiunto al raggio. Tagliata adunque dal medesimo raggio la porzione BD eguale alla BC (31), sarà il rettangolo del raggio AB nella porzione rimanente AD eguale al quadrato della BC (249); con che, apposto il comune rettangolo dello stesso raggio AB nella porzione BD, o sia BC, saranno ancora li rettangoli del raggio AB nelle porzioni BD, AD eguali al rettangolo delle due AB, BC, ed al quadrato della BC (13). Ma li rettangoli del raggio AB nelle porzioni BD, AD sono eguali al quadrato del raggio AB (118); ed il rettangolo delle due AB, BC insieme col quadrato della BC è eguale al rettangolo della AC nella BC (117). Dunque il quadrato del raggio AB, ed il rettangolo della AC nella BC saranno tra loro eguali (11). Fig. 125.

251. Noteremo finalmente intorno al pentagono regolare, che il quadrato del suo lato sia eguale al quadrato del raggio insieme col quadrato del lato del decagono regolare. Perciò siano AB, BC, GD, DE, EF li cinque archi sostenuti nel semi- Fig. 126.

 cer-

cerchio ACF da cinque lati di un tal decagono; e divisi li due AB, DE egualmente ne' punti H, ed I (18?), sarà l'angolo CGH eguale all'angolo CGI (186). Ma l'angolo CGI, come metà dell'angolo CGF, è eguale all'angolo CAG. Dunque ancora l'angolo CGH sarà eguale all'angolo CAG (11); e per tanto dovendo essere il raggio CG tangente del cerchio circonscritto intorno al triangolo ALG (180), sarà il suo quadrato eguale al rettangolo delle due AC, CL (196). Or per l'uguaglianza degli angoli ABL, BCA il lato del decagono AB è tangente del cerchio circonscritto intorno al triangolo BCL; ed in conseguenza il quadrato di detto lato è eguale al rettangolo delle due AC, AL. Dunque li quadrati del raggio CG, e del lato del decagono AB, come eguali alli rettangoli della tutta AC nelle parti CL, AL, saranno eguali al quadrato del lato del pentagono AC.

252. E quindi, per le divisate figure regolari, egli è facile, dato il raggio del cerchio, in cui esse debbono essere iscritte, determinare i loro lati.
Fig. 127. Sia perciò AB il raggio dato. Alzisi primieramente sopra di esso la perpendicolare BC (49), che si faccia al medesimo eguale (31); e siccome l'istesso raggio AB è il lato dell'esagono (246), così sarà AC il lato del quadrangolo (248). Alzisi di poi sopra la AC l'altra perpendicolare CD eguale similmente al raggio AB; e sarà AD il lato del triangolo (247). Dividasi poscia l'istesso raggio AB talmente in E, che il rettangolo delle due AB, AE sia eguale al quadrato della BE (138); e sarà BE il lato del decagono (249). Finalmente congiungansi li punti C, ed E per la retta CE; e sarà questa CE il lato del pentagono (251). Nè dee passarsi sotto silenzio, che con prolungarsi il raggio AB talmente per fino al punto F, che il rettangolo delle due AF, BF sia eguale al quadrato del raggio AB (137); sarà ancora BF il lato del decagono (250), e CF quello del pentagono (251).

253. Or determinati i lati delle mentovate figure regolari per rapporto al raggio del cerchio, in

in cui le medesime debbono essere iscritte, basterà per la loro iscrizione andare adattando successivamente dentro del cerchio li lati sudetti, senza darsi la pena di dividere l'intera circonferenza in tante parti eguali, quanti sono i lati della figura da iscriversi. E per quanto tocca al problema di adattare dentro di un dato cerchio una retta, che sia eguale ad un'altra retta data, non sarà difficile cosa il risolverlo. Imperocchè, posto, che ABC sia il dato cerchio, e DE la retta data, con tagliarsi dal diametro AC la porzione AF eguale alla DE (31), e con descriversi col centro A, e coll'intervallo AF l'altro cerchio FBG, che seghi il dato nel punto B, sarà AB la retta, che si dimanda. Ma dalla costruzione medesima, e da quel tanto è stato dimostrato di sopra (158), egli è chiaro, che per essere il problema solubile, la retta data DE non dee essere maggiore del diametro del cerchio dato. Fig.128.

# L I B R O II.

## *Delle Teorie più composte della Geometria piana.*

254. NEl libro precedente sono state da noi dimostrate le teorie più semplici della Geometria piana; passeremo ora alle altre più composte, siccome sono quelle, che dalla dottrina delle proporzioni dipendono. Una tal dottrina, per essere comune a tutte le spezie della quantità, non solo ha luogo nella Geometria così piana, come solida, ma si estende ancora a tutte le altre scienze mamatiche. Intanto, non essendo ragionevole di suppòrla quì nota, prima tratteremo di essa in generale, indi con applicarla alle linee rette, alle figure rettilinee, ed al cerchio medesimo, dimostreremo quelle teorie, che debbono essere l'argomento di questo secondo libro.

255. La ragione, per cui la dottrina delle proporzioni è comune a tutte le spezie della quantità, dipende dalla proprietà, che a tutte compete, di

po-

poterſi dividere in parti così eguali, come diſuguali. Ma giova quì l'avvertire, che di qualunque ſpezie ſia la quantità, la ſua diviſione in parti ſi eſtende all'infinito, ſenza eſſervi mai termine, per cui poſſa arreſtarſi. Imperocchè, diviſa la quantità data in alcune parti, ancora queſte riterranno l'indole del loro tutto, e ſaranno diviſibili in altre parti; e per la ſteſſa ragione potendoſi queſte altre eziandio dividere, non mai giungerà la diviſione della quantità data a ſegno tale, che non poſſa andare più oltre.

256. Egli è vero, che una diviſione ſenza limiti non può effettivamente eſeguirſi; ma non eſſendovi ripugnanza nel concepirla, almeno col penſiero potrà ella aſcriverſi alla quantità, come ſtata foſſe di già eſeguita. E perciò così nel trattare della dottrina delle proporzioni in generale, come nell'applicarla alle varie ſpezie della quantità eſteſa, che ſi conſiderano nella Geometria piana, non ci faremo ſcrupolo di ſupporre tal volta diviſa la quantità in una multitudine così grande de' parti eguali, che ella ſia maggiore di ogni qualunque numero, che poſſa aſſegnarſi.

157. Supponendoſi in tanto così minutamente diviſa la quantità, egli non è da porſi in dubbio, che ciaſcuna delle ſue particelle ſia così picciola per rapporto alla quantità intera, che poſſa ella traſcurarſi, ſenza che riceva diminuzione alcuna la quantità medeſima. E poicchè col farſi uſo di queſto principio moltiſſime verità geometriche ſi dimoſtrano con una ſomma ſemplicità; lo adopreremo noi tal volta da quì innanzi, ed aſſumeremo come eguali quelle quantità, le quali differiſcono tra loro per una differenza così picciola, che ſia minore di ogni particella, che poſſa in eſſe aſſegnarſi.

CA-

# CAPITOLO I.

## *Della dottrina delle proporzioni in generale.*

258. SIccome le quantità possono essere di varie spezie, così chiameremo omogenee quelle fra di esse, che ad una medesima spezie si rapportano. Si distinguono queste tali quantità per la proprietà, che elle anno di essere tra loro o eguali, o disuguali; giacchè per quanto a quelle, che sono di spezie diversa, e che possono dirsi eterogenee, conforme non sono tra di esse eguali, così nè pure debbono riguardarsi come disuguali. Ma alle medesime quantità omogenee compete ancora un' altra proprietà, e si è di potersi paragonare tra loro per via della continenza. E poicche da questa affezione è derivata la considerazione così della ragione, che dee essere trà due quantità omogenee, come della proporzione, che due di qualunque spezie possono formare con altre due ad esse omogenee; perciò prima di ogni altra cosa è necessario, che nella dilucidazione di una tal affezione alquanto ci distendiamo.

## §. I.

### *Della comparazione delle quantità omogenee per via della continenza.*

259. LA continenza, per cui diciamo essere paragonabili trà loro due qualsisiano quantità omogenee, consiste in ciò, che tra gl' infiniti numeri intieri, o rotti, che possono darsi, debba sempre esservene uno, il quale dimostri, quanto delle due quantità l' una contiene l' altra. Ed in primo luogo, quante volte le due quantità sono tra di esse eguali, non è da porsi in dubbio, che una tal comparazione debba tra loro aver luogo; poicche per l' uguaglianza medesima chiaramente si vede, che ciascuna delle due quantità contiene l' al-

l'altra giustamente una volta. Più tosto adunque dee esaminarsi il caso, quando le due quantità omogenee sono disuguali, ed in conseguenza tali, che la minore di esse debba riguardarsi come parte della maggiore.

260. Ma per questo caso notisi primieramente, che la parte a riguardo del tutto può essere di due spezie, cioè o aliquota, o aliquanta. Si chiama parte aliquota, quando replicata più volte compone giustamente il tutto, a cui si rapporta. Per lo contrario si appella parte aliquanta, quando colla sua reiterata posizione forma una quantità maggiore, o minore del tutto, a cui si riferisce. Così a riguardo della linea di dieci palmi dee dirsi parte aliquota quella di due, per la ragione, che replicata cinque volte diventa ancora essa di dieci palmi; ma l'altra di tre palmi dovrà chiamarsi sua parte aliquanta, come quella, che presa tre volte diviene di nove, e presa quattro volte diviene di dodici palmi.

261. Siccome poi una quantità, la quale è parte aliquota di due altre, dicesi essere parte aliquota loro comune; così se due quantità siano talmente parti aliquote di altre due, che per la formazione di esse debbano ripetersi un' istesso numero di volte, in tal caso si diranno essere loro parti aliquote simili. Così la linea di due palmi è parte aliquota comune di quella di otto, e di quella di dieci; ma se vi sono due linee, una di due palmi, e l'altra di tre, queste a riguardo delle altre due, che sono di otto, e di dodici palmi, saranno parti aliquote simili; poicchè, siccome quella di due palmi dee prendersi quattro volte per formare quella di otto, così l'altra di tre palmi dee essere presa ancora quattro volte per formare l'altra di dodici.

262. In oltre, conforme la parte, che replicata più volte compone giustamente il tutto, a cui si riferisce, dicesi essere sua parte aliquota; così il tutto a riguardo di quella parte si dirà essere suo multiplice. E quindi, siccome multiplice comune

mune di due quantità dee essere una terza quantità, di cui ciascuna di quelle sia parte aliquota; così multiplici simili, o pure egualmente multiplici di due quantità dovranno essere due altre quantità, delle quali quelle due siano parti aliquote simili. E secondo queste definizioni se vi sono due linee, una di due palmi, e l'altra di tre, sarà loro multiplice comune quella di dodici, e multiplici simili, ovvero egualmente multiplici le altre due di otto, e di dodici palmi.

263. Quantevolte di due quantità omogenee disuguali una è parte aliquota dell'altra, egli è facile ad intendersi, che le medesime siano paragonabili tra loro per via della continenza. Poicche, siccome la minore è tanto parte della maggiore quante sono le volte, che ella dee replicarsi per comporla; così la maggiore sarà tanto multiplice della minore, quanto è il numero di quelle medesime volte. Così nella ipotesi, che la minore replicata tre volte formi la maggiore, si dirà, che la minore sia la terza parte della maggiore, e la maggiore il triplo della minore. E così ancora supponendo, che la minore replicata cinque volte formi la maggiore, diremo, che la minore sia la quinta parte della maggiore, e la maggiore il quintuplo della minore.

264. La difficoltà s'incontra, quando di due quantità omogenee disuguali una è parte aliquanta dell'altra; e pure se queste anno una parte aliquota comune, non si dura fatica ad intendersi, che le medesime siano paragonabili tra loro per via della continenza. Fingiamo a cagion di esempio, che le due quantità siano le due linee A, e B, Fig. 129. delle quali la prima A sia di tre palmi, e la seconda B di cinque; di maniera che comune loro parte aliquota sia la terza linea C di un palmo solo. E poicche la A è il triplo della C, e la C è la quinta parte della B; dovrà dirsi della A, che ella sia il triplo della quinta parte della B, o pure che contenga tre quinte parti della B: E per la stessa ragione, essendo la B il quintuplo della

C, e

C, e la C la terza parte della A; dovrà dirsi della B, che ella sia il quintuplo della terza parte della A, o pure che contenga cinque terze parti della A.

265. Or se si voglia attentamente riflettere, due quantità, che sono omogenee, debbono sempre avere una parte aliquota comune. Imperocchè di già è stato avvertito, che ogni quantità almeno col pensiero può supporsi divisa in una multitudine innumerabile di parti eguali (256). Ma siccome ciascuna di queste particelle per la loro uguaglianza è parte aliquota della quantità divisa; così non è egli da porsi in dubbio, che la medesima particella sia eziandio parte aliquota di ogni altra quantità, che è omogenea colla stessa quantità divisa, per la ragione, che se mai colla sua posizione innumerabilmente reiterata non giungesse a formare con esattezza l'altra quantità, l'avanzo di questa sarebbe così picciolo, che senza sua diminuzione potrebbe essere trascurato (257); ed in conseguenza sempre quella tale particella sarebbe parte aliquota dell'altra quantità omogenea colla divisa.

266. Poicche dunque due quantità omogenee debbono sempre avere una qualche parte aliquota comune, saranno le medesime sempre paragonabili tra loro per via della continenza (264); ed il solo divario, che vi sarà, quantevolte per giungere a quella comune parte aliquota egli è necessario di ricorrere ad una multitudine innumerabile di parti eguali; consiste in ciò, che siccome non possono comprendersi le multitudini delle volte, che dee ripetersi la stessa parte per formare le due quantità, così nè pure potrà esprimersi il quanto della loro continenza. E quindi è nata la divisione delle quantità omogenee in commensurabili, ed incommensurabili; la quale per altro non dovrebbe aver luogo, se col nostro intendimento potessimo sempre giungere a concepire, quantevolte la comune parte aliquota di due quantità omogenee giustamente le misura.

267.

267. Del rimanente siccome la ragione, per cui due quantità omogenee, delle quali una è parte aliquanta dell'altra, sono sempre paragonabili tra loro per via della continenza, si è, perche tali quantità debbono sempre avere una parte aliquota comune, a cui si possono supporre eguali le parti, nelle quali esse sono divisibili; così da questo stesso fonte dee ripetersi ancora la ragione, per cui una comparazione consimile puo istituirsi eziandio così tra le quantità omogenee, che sono eguali, come tra quelle, delle quali una è parte aliquota dell'altra. Ed in effetto, potendosi riguardare qualsivoglia quantità come parte aliquota tanto di se stessa, quanto di ogni altra sua eguale; sarà a riguardo delle prime ciascuna delle due parte aliquota loro comune; ed a riguardo delle seconde potrà aversi come tale la quantità stessa minore.

## §. II.

### *Delle nozioni della ragione, e della proporzione.*

268. Siccome due quantità omogenee sono sempre paragonabili tra di esse per via della continenza, così si appella loro ragione la continenza stessa della seconda nella prima. Le quantità intanto, che paragonate tra loro, danno luogo alla ragione, sogliono considerarsi come suoi termini, delli quali il primo dicesi antecedente, ed il secondo conseguente. E poicche l'antecedente puo più, o meno contenere il conseguente, ancora la ragione dee avere la sua quantità, la quale dipende dalla comune parte aliquota delli suoi termini. Imperocche, partiti questi almeno col pensiero in parti, che siano a quella eguali, e diviso il numero delle parti dell'antecedente per lo numero delle parti del conseguente; ci additerà il quoziente di questa divisione, quanto l'antecedente contiene il conseguente; e perciò l'istesso quoziente sarà la quantità della ragione, che si dimanda.

269. La ragione intanto puo essere o di uguaglianza, o di disuguaglianza. Dicesi essere di uguaglianza; quando i suoi termini sono tra loro eguali. Per lo contrario si dice essere di disuguaglianza, quando i termini di essa sono disuguali; e secondo che l'antecedente è maggiore, o minore del conseguente, si dirà ancora la ragione, che sia di maggiore, o minore disuguaglianza. E poicche la quantità della ragione dee additarci, quanto l'antecedente contiene il conseguente (268); egli è facile ad intendersi, che ella debba essere eguale all'unità, quando la ragione è di uguaglianza; maggiore dell'unità, quando la ragione è di maggiore disuguaglianza; ed in fine minore dell'unità, quando per lo contrario la ragione è di minore disuguaglianza.

270. Possono ancora le ragioni paragonarsi tra di esse per mezzo delle loro quantità, che come numeri sono sempre omogenee; ed in virtù di questa comparazione siccome due ragioni debbono dirsi eguali, quando eguali sono le loro quantità, così sarà l'una maggiore o minore dell'altra, secondo che la quantità della prima è maggiore o minore della quantità della seconda. Spezialmente poi si dirà una ragione essere dupla, tripla, o quadrupla di un'altra ragione, quando la sua quantità è dupla, tripla, o quadrupla della quantità dell'altra; conforme per lo contrario si dirà una ragione essere la metà, la terza parte, o la quarta parte di un'altra ragione, quando la sua quantità è la metà, la terza parte, o la quarta parte della quantità dell'altra.

271. E quindi, giudicando sempre delle ragioni per le loro quantità, si vede in primo luogo, che le ragioni eguali ad una terza debbano essere eguali ancora tra loro. Si vede in secondo luogo, che eguali parimente esser debbono così le ragioni, che sono duple, triple, o quadruple di una terza; come le altre, che sono la metà, la terza parte, o la quarta parte di una stessa ragione. Si vede in terzo luogo, che se di due ragioni eguali una sia maggiore o minore di una terza, l'altra debba essere di quella stessa ancora maggiore o minore. Si

vede

vede finalmente, che essendo disuguali due ragioni, se la minore sia maggiore di una terza, l'altra tanto più ne debba essere maggiore; e se la maggiore sia minore di una terza, l'altra tanto più ne debba essere minore.

272. Mà intorno all' uguaglianza, e disuguaglianza di due ragioni abbiamo ancora altri teoremi, che per dedursi immediatamente dalla nozione stessa della ragione, possono più tosto aversi come assiomi. Ed in primo luogo siccome non è da porsi in dubbio, che due quantità eguali egualmente contengono una terza; così nè pure dee negarsi, che di due quantità disuguali la maggiore contenga una terza molto più, che la minore. Onde di già abbiamo due teoremi. I, che essendo eguali due quantità, eguali similmente esser debbano le ragioni, che quelle anno ad una terza. E II, che essendo disuguali due quantità, la maggiore ad una terza debba avere maggior ragione, che la minore.

273. In secondo luogo siccome egli è chiaro, che una terza quantità debba contenere egualmente ciascuna delle due eguali; così chiara cosa ancora si è, che qualora due quantità sono disuguali, una terza debba contenere molto più la minore, che la maggiore. Onde alli due teoremi precedenti potremo aggiungere questi altri due. I, che essendo eguali due quantità, una terza debba avere l'istessa ragione all'una, che all'altra. E II, che essendo disuguali due quantità, una terza debba avere maggior ragione alla minore, che alla maggiore.

274. In terzo luogo con dimostrazioni negative ritroveremo veri eziandio li conversi di tutti quattro i teoremi precedenti; e perciò oltre ad essi ne avremo ancora quattro altri. I, che le quantità, le quali anno ad una terza l'istessa ragione, siano eguali tra loro. II, che delle quantità, le quali anno ragione ad una terza, quella sia maggiore, a cui corrisponde ragione maggiore. III, che le quantità, alle quali una terza ha l'istessa

ragione, ſiano tra loro eguali. E IV, che delle quantità, alle quali ha ragione una terza, quella ſia minore, che ſomminiſtra a quella terza ragione maggiore.

275. Finalmente dovendo due quantità egualmente contenere così le loro parti aliquote ſimili, come i loro multiplici ſimili, potrà riporſi nella claſſe de' teoremi, che riguardano l'uguaglianza di due ragioni, ancora queſt'altro; cioè, che due quantità debbono avere eguali ragioni tanto alle loro parti aliquote ſimili, quanto alli loro multiplici ſimili. E poiche ogni quantità può eſſere riguardata, e come parte aliquota, e come multiplice di qualunque altra, che ſia ad eſſa eguale; in virtù di un tal teorema dovranno eſſere eguali ancora le ragioni, che anno due quantità alle loro eguali.

276. Or ſempre quando ſono eguali due ragioni, la loro uguaglianza chiamaſi proporzione, e gli antecedenti di eſſe ſi dicono eſſere proporzionali alli loro conſeguenti. Quindi per la proporzione non è neceſſario, che tutti quattro i termini ſiano omogenei, ma baſterà che ſiano tali a due a due; e perciò due linee potranno formare proporzione non ſolo con due altre linee, ma ancora con due ſuperficie, o pure con due corpi o ſolidi. Anzi queſto è il gran vantaggio, che dalle proporzioni ſi raccoglie, cioè, che per mezzo di eſſe colle ragioni delle quantità più ſemplici ſi additano le ragioni delle altre più compoſte. Intanto in ogni proporzione così li due antecedenti, come li due conſeguenti ſi dicono eſſere tra loro omologi, in quanto che ſi corriſpondono tra di eſſi nelle due ragioni eguali, che formano la proporzione.

277. Poiche dunque la proporzione conſiſte nell'uguaglianza di due ragioni, per neceſſità gli antecedenti di eſſa dovranno egualmente contenere i loro conſeguenti; e perciò quelli per rapporto a queſti saranno inſiememente o maggiori, o minori, o eguali. L'uguaglianza intanto di due

ra-

ragioni dipende dall' uguaglianza delle loro quantità (270). Onde, attesa la maniera come si determina la quantità di ogni ragione (268), non vi sarà mezzo più sicuro per la conoscenza delle quantità proporzionali, se non se di vedere, se possa darsi tale parte aliquota della prima e della seconda, e tale ancora della terza e della quarta, che le medesime siano eziandio parti aliquote simili tanto della prima e della terza, quanto della seconda e della quarta.

278. Quante volte la proporzione ritrovasi trà quantità, che sono tutte tra loro omogenee, ella può stare ancora in tre soli termini; e ciò avviene, quando quello di mezzo fa le veci di conseguente nella prima ragione, e le veci di antecedente nella seconda. Così essendo omogenee le tre quantità A, B, C, ed essendo la ragione di A a B eguale alla ragione di B a C; chiaramente si vede, che con esse sole regge la proporzione, poicchè quella di mezzo B si prende due volte. Una tal proporzione chiamasi continua a differenza della discreta, la quale sussiste in quattro termini distinti. E qualora si ha una serie di molte quantità omogenee continuamente proporzionali, sì fatta serie spezialmente si chiama progressione. Fig. 130.

## §. III.

### *Della nozione della ragione, che dicesi composta.*

279. Le quantità delle ragioni, come numeri intieri o rotti, si possono e multiplicare, e dividere tra loro. Quindi se mai la quantità di una ragione si ritrovi essere il prodotto delle quantità di due, o più altre ragioni, in tal caso quella tale ragione si dirà essere composta ovvero prodotta da queste altre ragioni, le quali in conseguenza saranno riguardate come componenti di quella. Così avvalendoci delle quantità numeriche, la ragione di 20 a 2, che ha per sua quantità 10, dee dirsi

composta dalle ragioni di 8 a 4, e di 15 a 3, le di cui quantità sono 2, e 5. E così ancora la ragione di 48 a 2 dovrà dirsi composta dalle ragioni di 12 a 6, di 15 a 5, e di 40 a 10, per essere 24 la quantità di quella, e 2, 3, e 4 le quantità di queste altre.

280. L' uso della ragion composta nella dottrina delle proporzioni non può a bastanza commendarsi, onde giova anticipatamente averne nota la teoría. Ed in primo luogo se vi sono due ragioni composte, e le componenti dell' una siano eguali alle componenti dell' altra, ciascuna a ciascuna; egli non è da porsi in dubbio, che eguali similmente esser debbano le stesse ragioni composte. Ma non perciò sarà sempre vero il converso, cioè, che essendo eguali le ragioni composte, debbano essere eguali le loro ragioni componenti; poicche siccome li numeri, che producono un' altro, non sono sempre gli stessi, così le componenti di una ragione composta possono non essere sempre le medesime.

281. In secondo luogo se vi sono due ragioni composte, e ciascuna delle componenti della prima sia maggiore, o minore di ciascuna delle componenti dell' altra; nè pure potrà negarsi, che la prima ragione composta debba essere similmente maggiore, o minore della seconda. E poicche l' istesso dee avvenire, se essendo le altre componenti tra loro eguali, soltanto una della prima sia maggiore, o minore di una della seconda; si potrà quindi facilmente dedurre, che se vi sono due ragioni, delle quali ciascuna sia composta da due altre, e siano eguali tra di esse così le composte, come due delle componenti, ancora le altre due ragioni, che concorrono alla composizione di quelle, debbano essere tra loro eguali.

282. Ma per dimostrare intorno alla ragion composta altri teoremi molto più rilevanti, notisi primieramente, che non solo due quantità omogenee, ma ancora tre, anzi quante si vogliano, debbano sempre avere una parte aliquota comune.

ne. Per comprenderne la ragione, siano A, B, C le tre quantità omogenee, e sia D la comune parte aliquota delle due prime A, e B. Adunque o la stessa D è similmente parte aliquota della terza C, e di già tutte tre ne avranno una comune; o ella non è tale, e quella, che è comune parte aliquota delle due D, e C, dovendo misurare giustamente le due A, e B, che sono multiplici di D, sarà parte aliquota comune delle tre A, B, C. Fig. 131.

283. Notisi ancora, che se presi tre numeri ad arbitrio, dividasi così il primo per lo secondo, come il secondo per lo terzo, il prodotto de' quozienti, che si avranno, sarà quello, che risulta dalla divisione del primo per lo terzo. Vedesi ciò chiaramente cogli esempj medesimi; poicchè essendo 40, 10, e 5 li tre numeri, saranno 4, e 2 li quozienti del primo diviso per lo secondo, e del secondo diviso per lo terzo, li quali multiplicati insieme producono 8, che è il quoziente del primo diviso per lo terzo. Ma disegnandosi i quozienti per mezzo di due frazioni, delle quali numeratori ne siano li dividendi, e denominatori li divisori; egli è facile ad intenderne la ragione, e formare di tal verità una dimostrazione generale.

284. Avvertite tali cose, dimostreremo ora, che se vi sono tre quantità omogenee, la ragione della prima alla terza debba esser composta dalle ragioni della prima alla seconda, e della seconda alla terza. Perciò sieno A, B, C le tre quantità omogenee; e siccome esse debbono avere una parte aliquota comune (282), così concepiscansi divise in parti, che siano a quella eguali; con che avremo tre numeri, uno per le parti di A, l'altro per le parti di B, ed il terzo per le parti di C; onde il quoziente del primo diviso per lo terzo sarà il prodotto de' quozienti del primo diviso per lo secondo, e del secondo diviso per lo terzo (283). Ma quel quoziente è la quantità della ragione di A a C, e questi altri due sono le quantità delle ragioni di Fig. 132.

A a B, e di B a C (268). Dunque la ragione di A a C sarà composta dalla ragione di A a B, e dalla ragione di B a C (279).

285. Quindi essendo quattro le quantità omogenee, potrà dimostrarsi ancora, che la ragione della prima alla quarta debba essere composta dalle ragioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, e della terza alla quarta. Perciò siano
Fig. 131. A, B, C, D le quattro quantità omogenee; e considerate le tre A, C, D, sarà la ragione di A a D composta da due sole, cioè da quella di A a C, e dall'altra di C a D (284). Ma per le tre quantità A, B, C la ragione di A a C si compone dalla ragione di A a B, e dalla ragione di B a C. Dunque la ragione di A a D sarà composta da tre ragioni, cioè dalla ragione di A a B, dalla ragione di B a C, e dalla ragione di C a D. E poicchè dell' istessa maniera puo andarsi sempre più oltre, sarà vero generalmente, che in una serie di quantità omogenee la ragione della prima all' ultima sia composta dalle ragioni, che risultano paragonandosi ciascuno termine della serie col suo sussegnente.

286. Siccome niente vieta, che le ragioni componenti siano tra loro eguali; così quando ciò avviene, la ragione composta si dirà essere tanto multiplicata di ciascuna di esse, quanto è il numero delle medesime; cioè duplicata, quando sono due, triplicata, quando sono tre; quadruplicata, quando sono quattro; e così all'infinito. Quindi nè la duplicata dee confondersi colla dupla, nè la triplicata colla tripla, nè la quadruplicata colla quadrupla. Imperocchè una ragione dicesi dupla, tripla, o quadrupla di un'altra, quando la sua quantità è dupla, tripla, o quadrupla della quantità dell'altra (271). Ma per potersi dire, che una ragione sia duplicata, triplicata, o quadruplicata di un'altra ragione, egli è necessario che la quantità di quella si produca con multiplicarsi la quantità di questa una, due, o tre volte per se medesima.

287. Or egli è facile a dimostrarsi, che in una pro-

proporzione continua la prima quantità alla terza ſia in ragione duplicata, così della prima alla ſeconda, come della ſeconda alla terza. Imperocchè, ſe A, B, C ſono le tre quantità continuamente proporzionali, ſarà la ragione di A a C composta dalla ragione di A a B, e dalla ragione di B a C (284). Ma per la ſuppoſta proporzione queſte due ragioni ſono eguali tra loro (278). Dunque la ragione di A a C ſarà duplicata di ciaſcuna di eſſe (286). Che ſe poi le quantità continuamente proporzionali foſſero quattro, in tal caſo con ſimile ragionamento ſi pruovarebbe, che la ragione della prima alla quarta ſia triplicata e della ragione della prima alla ſeconda, e della ragione della ſeconda alla terza, e della ragione della terza alla quarta. Ed egli è chiaro poterſi eſtendere la ſteſſa teoria a qualſivoglia numero di quantità continuamente proporzionali. Fig. 130.

288. Del rimanente egli non è da porſi in dubbio, che eſſendo eguali due ragioni, debbano eſſere eguali ancora le loro duplicate, triplicate, o quadruplicate; e che per lo contrario eſſendo queſte eguali, debba altresì tra quelle eſſervi ugualianza. E quindi facilmente può dimoſtrarſi, che la mezza proporzionale tra due quantità date debba eſſere ancora data. Pongaſi perciò, che così C, come B ſia mezza proporzionale tra le due A e D. Sarà adunque la ragione di A a D duplicata tanto della ragione di A a C, quanto della ragione di A a B (287). Con che dovendo eſſere queſte due ragioni eguali, ſarà ancora C eguale a B (274). Ma qualunque ſia il numero delle mezze proporzionali, che ſi vogliono frapporre tra due quantità date; con dimoſtrazione non diſſimile ſi farà vedere, che ancora quelle debbano eſſere date. Fig. 131.

## §. IV.

*Delle affezioni comuni ad ogni proporzione.*

289. DAlle cose fin quì esposte possono con facilità dedursi le affezioni, così comuni ad ogni proporzione, come proprie di quelle, che anno tutti i termini omogenei. Ed in primo luogo ogni proporzione, con invertere i termini di essa, e fare antecedenti i conseguenti e conseguenti gli antecedenti, dee eziandio sussistere. Per dimostrarlo, notisi primieramente, che siccome tra due quantità si possono considerare due ragioni, cioè una della prima alla seconda, e l'altra della seconda alla prima; così la quantità di una di queste ragioni sarà sempre il contrapposto della quantità dell'altra ragione. In effetto se delle due quantità la prima sia il duplo, o triplo della seconda, questa della prima ne sarà la metà, o la terza parte; se la prima contenga cinque terze parti, o sette quinte parti della seconda, questa per lo contrario conterrà tre quinte parti, o cinque settime parti della seconda; e così all'infinito. E da ciò è derivato, che delle due ragioni, le quali possono considerarsi tra due quantità, l'una dicesi essere inversa dell'altra.

290. Da questa nozione della ragione inversa, che si appella ancora reciproca, con ogni chiarezza si vede, che quante volte sono eguali due ragioni, ancora le loro inverse debbano essere eguali. Ma essendo così, non sarà difficile il dimostrare, che una proporzione non debba alterarsi, con invertere i termini di essa, e fare antecedenti i conseguenti, e conseguenti gli antecedenti. Siano
Fig.131 adunque proporzionali le quattro quantità A, B, C, D. Io dico, che invertendo tali ancora debbano essere le quattro B, A, D, C. Imperocchè l'inversa della ragione di A a B è quella di B ad A; e l'inversa della ragione di C a D è quella di D a C. Ma essendo proporzionali le quattro quantità

tità A, B, C, D, la ragione di A a B è eguale alla ragione di C a D (276). Dunque ancora la ragione di B ad A sarà eguale alla ragione di D a C; e pertanto le quattro quantità B, A, D, C saranno similmente proporzionali.

291. In secondo luogo se gli antecedenti di una proporzione si aggiungano alli loro conseguenti, e le somme si comparino colli medesimi conseguenti, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AB a BC, così DE ad EF. Io dico, che componendo, ovvero congiungendo sarà ancora come AC a BC, così DF ad EF. Imperocchè siccome per la supposta proporzione le due AB, DE egualmente contengono le altre due BC, EF; così queste BC, EF ancora egualmente contengono se stesse, cioè a dire una volta. Ma AC contiene BC e di quanto AB contiene BC, e di quanto BC contiene se stessa; e similmente DF contiene EF e di quanto DE contiene EF, e di quanto EF contiene se medesima. Dunque ancora le due AC, DF egualmente conterranno le altre due BC, EF; e pertanto sarà come AC a BC, così DF ad EF. Fig.132.

292. In terzo luogo, se gli antecedenti di una proporzione aggiungansi alli loro conseguenti, e gli antecedenti stessi si comparino colle somme, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AB a BC, così DE ad EF. Io dico, che per una seconda spezie di composizione, ovvero congiunzione sarà ancora come AB ad AC, così DE a DF. Imperocchè essendo per ipotesi come AB a BC, così DE ad EF; sarà invertendo come BC ad AB, così EF a DE (290). Quindi per la composizione di già dimostrata sarà come AC ad AB, così DF a DE (291); ed in conseguenza invertendo di nuovo sarà come AB ad AC, così DE a DF. Fig.132.

293. In quarto luogo siccome ogni proporzione con invertere i termini di essa se mai vi sia bisogno, può sempre avere gli antecedenti maggiori delli conseguenti; così se questi si tolgano da quelli, ed i residui si comparino colli conseguenti medesimi, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò

co-

Fig.132. come AC a BC, così DF ad EF. Io dico, che dividendo, ovvero disgiugnendo sarà ancora come AB a BC, così DE ad EF. Se è possibile, abbia AB a BC maggior ragione che DE ad EF. Adunque AB conterrà BC più di quello, che DE contiene EF (270); ed in conseguenza perchè BC, ed EF egualmente contengono se stesse, ancora AC conterrà BC più di quello, che DF contiene EF; con che la ragione di AC a BC sarà maggiore della ragione di DF ad EF. Ma per la supposta proporzione queste due ragioni debbono essere eguali tra loro (276). Dunque non è egli vero, che AB a BC abbia maggior ragione, che DE ad EF; e dimostrandosi dell'istessa maniera, che nè pure abbia ragione minore, sarà come AB a BC, così DE ad EF.

294. In quinto luogo, se dagli antecedenti di una proporzione tolgansi li loro conseguenti, e gli
Fig.132. antecedenti stessi si comparino colli residui, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AC a BC, così DF ad EF. Io dico, che per una seconda spezie di divisione, a cui si è dato il nome di conversione, sarà ancora come AC ad AB, così DF a DE. Imperocchè, essendo per ipotesi come AC a BC, così DF ad EF; sarà per la divisione di già dimostrata come AB a BC, così DE ad EF (293). Quindi invertendo sarà come BC ad AB, così EF a DE (290); ed in conseguenza per la prima spezie di composizione sarà come AC ad AB, così DF a DE (291).

295. Per dimostrare altre affezioni di qualunque proporzione, notisi in questo luogo, che se le ragioni di più quantità siano eguali alle ragioni di altrettante quantità, si diranno le prime quantità essere in ragione ordinata colle seconde, quante volte le ragioni eguali delle une, e delle altre si corrispondono con ordine; per lo contrario si diranno essere in ragione perturbata, quando le stesse ragioni eguali si corrispondono per l'opposto.
Fig.133. Così essendo A, B, C, D le prime quantità, ed E, F, G, H le seconde; diremo, che le une colle

colle altre siano in ragione ordinata, quando si ha come A a B così E ad F, come B a C così F a G, come C a D così G ad H; e per lo contrario diremo, che siano in ragione perturbata; quando si ha come A a B così G ad H, come B a C così F a G, come C a D così E ad F.

296. Essendo così, egli è facile in sesto luogo a dimostrarsi, che se più quantità sono con altrettante o in ragione ordinata, o in ragione perturbata, debbano le prime colle ultime formare sempre una proporzione. Siano perciò le quattro quantità A, B, C, D in ordinata, o perturbata ragione colle altre quattro E, F, G, H. E siccome la ragione di A a D è composta dalle ragioni di A a B, di B a C, e di C a D; così la ragione di E ad H sarà composta dalle ragioni di E ad F, di F a G, e di G ad H (285). Ma le componenti dell' una sono eguali alle componenti dell' altra, ciascuna a ciascuna, con questo solo divario, che l' uguaglianza s' incontra con ordine nella ragione ordinata, e per l' opposto nella ragione perturbata (295). Dunque ancora la ragione di A a D sarà eguale alla ragione di E ad H (280); ed in conseguenza le quattro quantità A, D, E, H saranno proporzionali (276). Fig. 133.

297. Che se poi le quantità A, B, C, D sono solamente in ordinata ragione colle altre E, F, G, H, puo dimostrarsi in settimo luogo, che ancora le loro somme debbano colle ultime formare sempre una proporzione. Imperocchè essendo come A a B, così E ad F; sarà componendo come la somma delle due A e B a B così la somma delle due E ed F ad F (291). Ma B sta a C, come F a G. Dunque ordinando sarà come la somma delle due A e B a C, così la somma delle due E ed F a G (296). E poicche componendo di nuovo dee essere come la somma delle tre A, B, C a C, così la somma delle tre E, F, G a G, e C sta a D come G ad H; sarà di nuovo ordinando come la somma delle tre A, B, C a D così la somma delle tre E, F, G ad H; ed in con- Fig. 133.

conseguenza altra volta componendo come la somma delle quattro A, B, C, D a D, così la somma delle quattro E, F, G, H ad H.

298. In ottavo luogo se due quantità sono proporzionali agli antecedenti di una proporzione, e due altre alli conseguenti, ancora tra queste quantità vi sarà proporzione. Siano perciò A, B, C, D li quattro termini della proporzione; e pongasi, che le due E, e G siano le quantità proporzionali agli antecedenti A, e C; e le altre due F, ed H le quantità proporzionali alli conseguenti B, e D. Poicche dunque F sta a B, come H a D; sarà invertendo come B ad F, così D ad H (290). Ma E sta ad A, come G a C; ed A sta a B, come C a D. Dunque le quattro quantità E, A, B, F saranno in ordinata ragione colle altre quattro G, C, D, H (295); e perciò ordinando sarà come E ad F, così G ad H (296). Che se poi così le une, come le altre quantità siano proporzionali a medesimi termini, tanto più tra di esse dovrà esservi proporzione.

Fig. 133.

299. In nono luogo se a medesimi termini siano proporzionali così due quantità, come altre due, congiunte con ordine le une colle altre ancora le somme saranno proporzionali a quegli stessi termini. Siano perciò le due quantità G, ed H, alle quali siano proporzionali così le due AB, DE, come le due BC, EF. Io dico, che congiunta la AB colla BC, e la DE colla EF, ancora le somme AC, DF saranno proporzionali alle stesse G, ed H. Poicche agli stessi termini G, ed H sono proporzionali così le due AB, DE, come le due BC, EF; sarà come AB a BC, così DE ed EF (298); ed in conseguenza componendo sarà ancora come AC a BC, così DF ad EF (291). Ma per ipotesi BC sta a G, come EF ad H. Dunque le tre AC, BC, G saranno in ordinata ragione colle altre tre DF, EF, H (295); e perciò ordinando sarà come AC a G, così DF ad H (296).

Fig. 132.

300. Finalmente se a medesimi termini siano proporzionali così due quantità, come altre due, tolte

con

con ordine le une dalle altre, ancora le rimanenti saranno proporzionali a quegli stessi termini. Perciò fiano di nuovo le due quantità G, ed H, alle quali siano proporzionali tanto le due AC, DF, quanto le due AB, DE. Io dico, che tolta la AB dalla AC, e la DE dalla DF, ancora le rimanenti BC, EF saranno proporzionali alle stesse G, ed H. Poicchè agli stessi termini G, ed H sono proporzionali così le due AC, DF, come le due AB, DE; sarà come AC ad AB, così DF a DE (298): ed in conseguenza dividendo sarà come BC ad AB, così EF a DE (293). Ma per ipotesi AB sta a G, come DE ad H. Dunque le tre BC, AB, G saranno in ordinata ragione colle altre tre EF, DE, H (295); e perciò ordinando sarà come BC a G, così EF ad H (296). Fig.132.

## §. V.

### *Delle affezioni della proporzione, di cui tutti i termini sono omogenei.*

301. ALla proporzione, di cui tutti i termini sono omogenei, oltre alle proprietà precedenti ne competono ancora molte altre. E primieramente siccome è proprio delle quantità omogenee di essere tra loro o eguali, o disuguali; così in una tal proporzione li primi due termini a riguardo degli altri due debbono essere insiememente o eguali, o maggiori, o minori. Per dimostrarlo, siano proporzionali le quattro quantità omogenee A, B, C, D; e pongasi in primo luogo, che la prima A sia eguale alla terza C. Essendo adunque per la loro uguaglianza la ragione di A a B eguale alla ragione di C a B (272), saranno le due ragioni di C a B, e di C a D ancora tra loro eguali (271); e pertanto la seconda B dovrà essere parimente eguale alla quarta D (274). Pongasi in secondo luogo, che A sia maggiore di C; ed in questo caso essendo la ragione di A a B maggiore della ragione di C Fig.131.

a B,

a B, sarà ancora la ragione di C a D maggiore della ragione di C a B; con che eziandio B dovrà essere maggiore di D. Pongasi finalmente, che A sia minore di C, e secondo questa posizione essendo la ragione di C a B maggiore della ragione di A a B, sarà la ragione di C a B maggiore ancora della ragione di C a D; e pertanto similmente B dovrà essere minore di D.

302. Essendo così, può dimostrarsi ancora, che se quattro quantità omogenee sono proporzionali tra loro, la massima e la minima unite insieme debbano essere maggiori delle altre due. Siano perciò proporzionali le quattro quantità omoge-
Fig.134. nee AB, C, DE, F; e pongasi, che la prima AB sia la massima. Siccome dunque AB è maggiore di DE, così sarà C maggiore di F (301). Ma per essere la ragione di AB a C eguale alla ragione di DE ad F, non può AB essere maggiore di C, senza che ancora DE sia maggiore di F (277). Dunque la quarta F sarà la minima. Quindi se delle due AB, DE siano BG, EH le porzioni eguali alle loro minori C, ed F; sarà come AB a BG. Così DE ad EH; ed in conseguenza convertendo come AB ad AG, così DE a DH (294). Onde ancora AG sarà maggiore di DH; e coll' aggiunta tanto delle eguali BG e C, quanto delle altre eguali F ed EH, saranno le due AB ed F insieme similmente maggiori delle altre due DE, e C (13).

303. In oltre, siccome le quantità omogenee sono sempre paragonabili tra loro per via della continenza, così in una proporzione, che ha tutti quattro i termini omogenei, potrà paragonarsi per quel verso tanto l'antecedente coll' antecedente, quanto il conseguente col conseguente; ma permutati in questa maniera i termini, la propor-
Fig.131. zione tra di essi tuttavia dovrà sussistere. Per dimostrarlo, siano A, B, C, D quattro quantità omogenee; e pongasi, che A sia a B, come C a D. Io dico, che permutando sarà ancora come A a C, così B a D. Imperocchè conforme la ragio-
ne

ne di A a C si compone dalle ragioni di A a B, e di B a C; così la ragione di B a D si compone dalle ragioni di B a C, e di C a D (284). Onde essendo le componenti dell' una eguali alle componenti dell' altra, ciascuna a ciascuna, ancora la ragione di A a C sarà eguale alla ragione di C a D (280).

304. E quindi egli è facile a dimostrare, che se le parti di una quantità sono in data ragione colle parti di un' altra, ancora le quantità medesime debbano esse tra loro nella stessa ragione. Siano perciò AC, DF due quantità omogenee, delle quali la prima AC sia divisa nelle parti AB, BC, e la seconda DF nelle parti DE, EF; e sia in oltre come la parte AB alla parte DE, così l'altra BC all' altra EF. Io dico, che la tutta AC alla tutta DF sia ancora, come la parte AB alla parte DE, o pure come l'altra BC all' altra EF. Imperocchè, essendo come AB a DE, così BC ad EF; sarà permutando come AB a BC, così DE ad EF (303). Ma componendo dee essere come AC a BC, così DF ad EF (291). Dunque permutando di nuovo sarà come AC a DF, così BC ad EF. Fig.132.

305. Facilmente ancora puo dimostrarsi, che se in una data ragione siano tra loro così due quantità, come due parti di esse, eziandio le parti rimanenti debbano essere nella stessa ragione. Perciò siano di nuovo le due quantità omogenee AC, DF, delle quali la prima AC sia divisa nelle parti AB, BC, e la seconda DF nelle parti DE, EF; e sia in oltre come la tutta AC alla tutta DF, così la parte BC alla parte EF. Io dico, che ancora la rimanente AB alla rimanente DE debba essere, come la tutta AC alla tutta DF, o pure come la parte BC alla parte EF. Imperocchè, essendo come AC a DF, così BC ad EF; sarà permutando come AC a BC, così DF ad EF (303). Ma dividendo dee essere come AB a BC, così DE ad EF (293). Dunque permutando di nuovo sarà come AB a DE, così BC ad EF. Fig.132.

306. No-

306. Notisi intanto in questo luogo, che questi due teoremi spettanti alla proporzione, che ha tutti quattro i termini tra loro omogenei, sono differenti dalli due ultimi, dimostrati di sopra per ogni proporzione, solamente per la diversa maniera, con cui sono stati esposti. Imperocchè, siccome in quelli si trattava di quattro quantità, che a due a due fossero proporzionali a quantità date, e capaci o di unirsi insieme, o di sottrarsi l'une dall'altre; così in questi si considerano quattro quantità, che a due a due siano in data ragione, e capaci di essere o unite insieme, o l'une dall'altre sottratte. Ma se attentamente si riflette, appunto da questa diversa espressione deriva, che le quantità in questi esser debbano sempre tutte omogenee, ed in quelli possano essere ancora tali solamente a due a due.

307. Quindi non sarà mal fatto per la proporzione, di cui presentemente si tratta, di enunciare diversamente ancora un'altro de' teoremi dimostrati di sopra per ogni proporzione; e si è, che se più quantità omogenee paragonate con altrettante, ciascuna con ciascuna, siano con quelle in data ragione, eziandio le somme dell'une, e dell'altre debbano essere nella stessa ragione. Siano perciò le quattro quantità omogenee A, B, C, D, ciascuna delle quali sia in data ragione colla corrispondente delle altre quattro E, F, G, H. Io dico, che la somma di quelle alla somma di queste debba essere ancora nella stessa ragione. Imperocchè, essendo A ad E, come B ad F, come C a G, come D ad H; avremo permutando come A a B, così E ad F; come B a C, così F a G; e come C a D, così G ad H (303). Quindi essendo le quattro A, B, C, D in ordinata ragione colle altre quattro E, F, G, H; sarà come la somma di quelle a D, così la somma di queste ad H (297); ed in conseguenza permutando di nuovo la somma delle quattro A, B, C, D sarà alla somma delle altre quattro E, F, G, H, come D ad H, cioè nella medesima data ragione.

Fig. 133.

CA-

# CAPITOLO II.

## *Della dottrina delle proporzioni applicata alle linee rette.*

308. DImostrata la dottrina delle proporzioni in generale, passeremo ora ad applicarla alle varie spezie della quantità estesa, che si considerano nella Geometria piana, e con ciò ad ispiegare le teorie più composte di questa scienza. Incominceremo adunque dalle linee rette, le quali siccome tra tutte le quantità estese sono le più semplici, così per la stessa loro semplicità sono le più proprie per additarci le ragioni delle altre, che anno un'indole più composta. E poicche le linee rette vengono in considerazione o per gli angoli, che formano, o per le figure stesse, delle quali sono termini; perciò in applicare ad esse la dottrina delle proporzioni, le riguarderemo principalmente, o come lati di un qualche angolo, o come lati de'triangoli, ne'quali possono risolversi tutte le altre figure rettilinee.

### §. I.

### *Delle ragioni eguali, che possono aversi colli lati, e la base di un'angolo.*

309. FOndamento di queltanto sarà dimostrato in questo capitolo è il teorema, che segue; cioè, che se di un'angolo qualsivoglia dividasi un lato in parti eguali, e per i punti della divisione tirinsi rette parallele alla base dell'angolo, ancora l'altro lato debba essere diviso in altrettante parti eguali per queste rette parallele. Sia perciò l'angolo BAC; e diviso il lato AB nelle Fig. 135 parti eguali AD, DE, EB, tirinsi per i punti D, ed E le rette DF, EG parallele alla base BC, che s'incontrino coll'altro lato AC ne'punti F, e G. Tirandosi adunque per questi punti le altre rette

FH, GI parallele al lato AB, saranno eguali così le due DE, FH, come le due EB, GI (91) con che le tre AD, FH, GI saranno tra loro eguali (11). Ma per le parallele tirate li triangoli ADF, FHG, GIC sono equiangoli (62). Dunque dovendo gli stessi triangoli essere perfettamente eguali (85), ancora le tre AF, FG, GC saranno tra di esse eguali. E quantunque la dimostrazione siasi fatta per lo lato AB diviso in tre parti eguali; nientedimeno egli è chiaro, che la stessa debba aver luogo per ogni altra divisione, che si voglia fare.

310. Or da questo teorema egli è facile a dedurne, che dividendosi i lati di un'angolo per una retta parallela alla base, debbano i medesimi esser divisi proporzionalmente, tanto che la ragione delle parti di uno sarà eguale alla ragione delle
Fig. 136. parti dell'altro. Perciò sia l'angolo BAC, ed alla sua base BC tirisi ad arbitrio la parallela DE, che seghi li due lati AB, AC ne' punti D, ed E. E siccome le due AD, DB debbono avere una parte aliquota comune (265), così concepiscansi divise in parti, che siano a quella eguali; e dalli punti della divisione intendansi ancora tirate rette parallele alla base BC, le quali dovendo dividere in altrettante parti eguali eziandio le due AE, EC (309) faranno, che ancora queste restino divise in parti, eguali ad un'aliquota loro comune. Ma le comuni aliquote, colle quali vengono fatte le due divisioni, sono aliquote simili tanto delle due AD, AE, quanto delle due DB, EC. Dunque sarà come AD a DB, così AE ad EC (277); e pertanto li lati AB, AC saranno divisi proporzionalmente ne' punti D, ed E.

311. E quindi con dimostrazione negativa possiamo ancora pruovare la conversa di una tal proposizione; cioè, che essendo li due lati di un'angolo divisi proporzionalmente da una retta, debba questa retta essere parallela alla base dell'angolo.
Fig. 136. Pongasi adunque, che li lati AB, AC siano talmente divisi ne' punti D, ed E, che sia come AD

a DB,

a DB, così AE ad EC; e se le due DE, BC non sono parallele tra loro, tirisi per lo punto D la retta DF parallela alla BC (65), che s'incontri coll'altro lato AC nel punto F. E poicche li due lati dell'angolo AB, AC sono divisi dalla retta DF parallela alla base BC; sarà come AD a DB così AF ad FC (310). Ma per ipotesi AD sta a DB, come AE ad EC. Dunque sarà ancora come AF ad FC, così AE ad EC (271). Onde dovendo essere componendo come AC ad FC, così AC ad EC (291); averà AC la stessa ragione ad FC, che ad EC. Con che le due FC, EC saranno tra loro eguali (274); il che non può essere (14).

312. Possiamo altresì dimostrare, che se li lati di un'angolo si dividano per molte rette parallele alla base, la divisione di essi debba sempre farsi proporzionalmente, tanto che le ragioni delle parti di uno saranno sempre eguali alle ragioni delle corrispondenti parti dell'altro. Sia perciò l'angolo BAC, alla di cui base BC tirinsi ad arbitrio due rette parallele DE, FG, che s'incontrino col lato AB ne'punti D ed F, e col lato AC ne' punti E e G. Facciasi, che la EI tirata per lo punto E sia ancora parallela al lato AB (65); e convenga la medesima colle due FG, BC ne' punti H, ed I. Saranno adunque eguali tra loro così le due DF, EH, come le due FB, HI (91); e perciò sarà come DF ad FB, così EH ad HI (272). Ma per l'angolo CEI, in cui sta tirata la retta GH parallela alla base CI, come sta EH ad HI, così sta EG a GC (310). Dunque sarà ancora come DF ad FB, così EG a GC (271). E per le parallele DE, FG essendo altresì come AD a DF, così AE ad EG; saranno li lati AB, AC divisi proporzionalmente per le due DE, FG. Fig. 137.

313. Il converso di ciò eziandio potrà dimostrarsi; cioè, che se i due lati di un'angolo sono divisi proporzionalmente in molte parti, le rette, che congiungono con ordine i punti delle loro divisioni, debbano essere parallele alla base dell'angolo. Perciò pongasi ora, che le tre parti AD, DF, Fig. 137

FB del lato AB abbiano tra loro le stesse ragioni, che anno tra di esse le parti AE, EG, GC dell' altro lato AC. Essendo adunque come AD a DF, così AE ad EG, e come DF ad FB, così EG a GC; saranno le tre AD, DF, FB in ordinata ragione colle altre tre AE, EG, GC (295); onde sarà come AB somma di quelle ad FB, così AC somma di queste a GC (297). E poicchè dividendo esser dee come AF ad FB, così AG a GC (293); sarà FG parallela a BC (311). Ma essendo come AD a DF, così AE ad EG; la DE è parallela ad FG. Dunque le due DE, BC saranno ancora parallele tra loro (64).

314. Possiamo in oltre dimostrare, che la retta, per cui si divide un'angolo in due parti eguali, debba dividere la base dell'angolo nella ragione de' lati. Sia perciò l'angolo BAC, il quale dividasi
Fig. 138. in due parti eguali per la retta AD, che s'incontri colla base BC dell'istesso angolo nel punto D. Io dico, che le parti BD, DC, nelle quali resta divisa la base, siano tra loro nella ragione de' lati AB, AC. Tirisi per lo punto C la retta CF parallela alla DA (65), la quale convenga col lato BA prolungato nel punto E; e sarà così l'angolo BAD eguale all'angolo AEC (62), come l'angolo CAD eguale all'angolo ACE (61). Onde conforme per ipotesi sono eguali li due angoli BAD, CAD; così eguali ancora saranno gli altri due AEC, ACE (11). Quindi dovendo essere eguali altresì li due lati AC, AE (73); sarà come AB ad AC, così AB ad AE (273). Ma per l'angolo CBE, in cui sta tirata la retta DA parallela alla base CE, come sta BD a CD, così sta AB ad AE (310). Dunque sarà ancora come BD a CD, così AB ad AC (271).

315. Possiamo finalmente dimostrare, che per lo contrario se la base di un'angolo sia divisa nella ragione de' lati per una retta tirata dal vertice, debba l'istessa retta dividere l'angolo in due parti eguali. Perciò sia di nuovo l'angolo BAC, la di cui
Fig. 138. base BC sia talmente divisa in D dalla retta AD tira-

tirata dal vertice, che ſia come BD a CD, così AB ad AC. Io dico, che la ſteſſa AD debba dividere per metà l'angolo BAC. Tiriſi ſimilmente per lo punto C la retta CE parallela alla DA (65), che s'incontri col lato BA prolungato nel punto E. E poicche nell'angolo CBE ſta tirata la retta DA parallela alla baſe CE; ſarà come AB ad AE, così BD a CD (310). Ma per ſuppoſizione BD ſta a CD, come AB ad AC. Dunque ſarà ancora come AB ad AC, così AB ad AE (271); e pertanto le due AC, AE ſaranno tra loro eguali (274). Quindi eguali altresì ſaranno li due angoli AEC, ACE (72). Onde perche per le parallele DA, CE l'angolo AEC è eguale all' angolo BAD (62), e l'angolo ACE è eguale all' angolo CAD (61); ſaranno li due BAD, CAD parimente eguali tra loro (11).

## §. II.

### *Delle ragioni eguali, che poſſono averſi colli lati di due triangoli.*

316. Conſidereremo ora le rette come lati de' triangoli, e perciò dovremo dimoſtrare, quali ſono quelli triangoli, nelli quali le ragioni de' lati ſono tra loro eguali. Tali adunque debbono eſſere tutti coloro, che ſono equiangoli, cioè a dire, che anno gli angoli eguali agli angoli, ciaſcuno a ciaſcuno; poiche li lati eſiſtenti intorno alli loro angoli eguali avranno tra di eſſi la ſteſſa ragione, tanto che formeranno ſempre una proporzione, ed omologi ſaranno quelli lati, che ſtanno oppoſti ad angoli eguali. Perciò ſiano li due triangoli ABC, DCE, li quali abbiano l'angolo ABC eguale all'angolo DCE, l'angolo ACB eguale all' angolo DEC, ed il terzo BAC eguale al terzo CDE. Io dico, che ſarà I, come AB a BC, così DC a CE; II, come BC a CA, così CE ad ED; e III, come CA ad AB, così ED a DC. Fig. 139

Fig.132. come AC a BC, così DF ad EF. Io dico, che dividendo, ovvero disgiugnendo sarà ancora come AB a BC, così DE ad EF. Se è possibile, abbia AB a BC maggior ragione che DE ad EF. Adunque AB conterrà BC più di quello, che DE contiene EF (270); ed in conseguenza perche BC, ed EF egualmente contengono se stesse, ancora AC conterrà BC più di quello, che DF contiene EF; con che la ragione di AC a BC sarà maggiore della ragione di DF ad EF. Ma per la supposta proporzione queste due ragioni debbono essere eguali tra loro (276). Dunque non è egli vero, che AB a BC abbia maggior ragione, che DE ad EF; e dimostrandosi dell' istessa maniera, che nè pure abbia ragione minore, sarà come AB a BC, così DE ad EF.

294. In quinto luogo, se dagli antecedenti di una proporzione tolgansi li loro conseguenti, e gli
Fig.132. antecedenti stessi si comparino colli residui, sussisterà ancora la proporzione. Sia perciò come AC a BC, così DF ad EF. Io dico, che per una seconda spezie di divisione, a cui si è dato il nome di conversione, sarà ancora come AC ad AB, così DF a DE. Imperocchè, essendo per ipotesi come AC a BC, così DF ad EF; sara per la divisione di già dimostrata come AB a BC, così DE ad EF (293). Quindi invertendo sarà come BC ad AB, così EF a DE (290); ed in conseguenza per la prima spezie di composizione sarà come AC ad AB, così DF a DE (291).

295. Per dimostrare altre affezioni di qualunque proporzione, notisi in questo luogo, che se le ragioni di più quantità siano eguali alle ragioni di altrettante quantità, si diranno le prime quantità essere in ragione ordinata colle seconde, quante volte le ragioni eguali delle une, e delle altre si corrispondono con ordine; per lo contrario si diranno essere in ragione perturbata, quando le stesse ragioni eguali si corrispondono per l'opposto.
Fig.133. Così essendo A, B, C, D le prime quantità, ed E, F, G, H le seconde; diremo, che le une colle

colle altre ſiano in ragione ordinata, quando ſi ha come A a B così E ad F, come B a C così F a G, come C a D così G ad H; e per lo contrario diremo, che ſiano in ragione perturbata; quando ſi ha come A a B così G ad H, come B a C così F a G, come C a D così E ad F.

296. Eſſendo così, egli è facile in ſeſto luogo a dimoſtrarſi, che ſe più quantità ſono con altrettante o in ragione ordinata, o in ragione perturbata, debbano le prime colle ultime formare ſempre una proporzione. Siano perciò le quattro quantità A, B, C, D in ordinata, o perturbata ragione colle altre quattro E, F, G, H. E ſiccome la ragione di A a D è compoſta dalle ragioni di A a B, di B a C, e di C a D; così la ragione di E ad H ſarà compoſta dalle ragioni di E ad F, di F a G, e di G ad H (285). Ma le componenti dell'una ſono eguali alle componenti dell'altra, ciaſcuna a ciaſcuna, con queſto ſolo divario, che l'uguaglianza s'incontra con ordine nella ragione ordinata, e per l'oppoſto nella ragione perturbata (295). Dunque ancora la ragione di A a D ſarà eguale alla ragione di E ad H (280); ed in conſeguenza le quattro quantità A, D, E, H ſaranno proporzionali (276). Fig. 133.

297. Che ſe poi le quantità A, B, C, D ſono ſolamente in ordinata ragione colle altre E, F, G, H, puo dimoſtrarſi in ſettimo luogo, che ancora le loro ſomme debbano colle ultime formare ſempre una proporzione. Imperocchè eſſendo come A a B, così E ad F; ſarà componendo come la ſomma delle due A e B a B così la ſomma delle due E ed F ad F (291). Ma B ſta a C, come F a G. Dunque ordinando ſarà come la ſomma delle due A e B a C, così la ſomma delle due E ed F a G (296). E poicchè componendo di nuovo dee eſſere come la ſomma delle tre A, B, C a C, così la ſomma delle tre E, F, G a G, e C ſta a D come G ad H; ſarà di nuovo ordinando come la ſomma delle tre A, B, C a D così la ſomma delle tre E, F, G ad H; ed in con- Fig. 133.

conseguenza altra volta componendo come la somma delle quattro A, B, C, D a D, così la somma delle quattro E, F, G, H ad H.

298. In ottavo luogo se due quantità sono proporzionali agli antecedenti di una proporzione, e due altre alli conseguenti, ancora tra queste quantità vi sarà proporzione. Siano perciò A, B, C, D li quattro termini della proporzione; e pongasi, che le due E, e G siano le quantità proporzionali agli antecedenti A, e C; e le altre due F, ed H le quantità proporzionali alli conseguenti B, e D. Poicchè dunque F sta a B, come H a D; sarà invertendo come B ad F, così D ad H (290). Ma E sta ad A, come G a C; ed A sta a B, come C a D. Dunque le quattro quantità E, A, B, F saranno in ordinata ragione colle altre quattro G, C, D, H (295); e perciò ordinando sarà come E ad F, così G ad H (296). Che se poi così le une, come le altre quantità siano proporzionali a medesimi termini, tanto più tra di esse dovrà esservi proporzione.

Fig.133.

299. In nono luogo se a medesimi termini siano proporzionali così due quantità, come altre due, congiunte con ordine le une colle altre ancora le somme saranno proporzionali a quegli stessi termini. Siano perciò le due quantità G, ed H, alle quali siano proporzionali così le due AB, DE, come le due BC, EF. Io dico, che congiunta la AB colla BC, e la DE colla EF, ancora le somme AC, DF saranno proporzionali alle stesse G, ed H. Poicchè agli stessi termini G, ed H sono proporzionali così le due AB, DE, come le due BC, EF; sarà come AB a BC, così DE ed EF (298); ed in conseguenza componendo sarà ancora come AC a BC, così DF ad EF (291). Ma per ipotesi BC sta a G, come EF ad H. Dunque le tre AC, BC, G saranno in ordinata ragione colle altre tre DF, EF, H (295); e perciò ordinando sarà come AC a G, così DF ad H (296).

Fig.132.

300. Finalmente se a medesimi termini siano proporzionali così due quantità, come altre due, tolte

con

con ordine le une dalle altre, ancora le rimanenti saranno proporzionali a quegli stessi termini. Perciò Fig.132.
siano di nuovo le due quantità G, ed H, alle quali siano proporzionali tanto le due AC, DF, quanto le due AB, DE. Io dico, che tolta la AB dalla AC, e la DE dalla DF, ancora le rimanenti BC, EF saranno proporzionali alle stesse G, ed H. Poicchè agli stessi termini G, ed H sono proporzionali così le due AC, DF, come le due AB, DE; sarà come AC ad AB, così DF a DE (298): ed in conseguenza dividendo sarà come BC ad AB, così EF a DE (293). Ma per ipotesi AB sta a G, come DE ad H. Dunque le tre BC, AB, G saranno in ordinata ragione colle altre tre EF, DE, H (295); e perciò ordinando sarà come BC a G, così EF ad H (296).

## §. V.

*Delle affezioni della proporzione, di cui tutti i termini sono omogenei.*

301. ALla proporzione, di cui tutti i termini sono omogenei, oltre alle proprietà precedenti ne competono ancora molte altre. E primieramente siccome è proprio delle quantità omogenee di essere tra loro o eguali, o disuguali; così in una tal proporzione li primi due termini a riguardo degli altri due debbono essere insiememente o eguali, o maggiori, o minori. Per dimostrarlo, siano proporzionali le quattro quantità omogenee A, B, C, D; e pongasi in primo luogo, che la prima A sia eguale alla terza C. Essendo adunque per la loro uguaglianza la ragione di Fig.131.
A a B eguale alla ragione di C a B (272), saranno le due ragioni di C a B, e di C a D ancora tra loro eguali (271); e pertanto la seconda B dovrà essere parimente eguale alla quarta D (274). Pongasi in secondo luogo, che A sia maggiore di C; ed in questo caso essendo la ragione di A a B maggiore della ragione di C

a B,

a B, sarà ancora la ragione di C a D maggiore della ragione di C a B; con che eziandio B dovrà essere maggiore di D. Pongasi finalmente, che A sia minore di C, e secondo questa posizione essendo la ragione di C a B maggiore della ragione di A a B, sarà la ragione di C a B maggiore ancora della ragione di C a D; e pertanto similmente B dovrà essere minore di D.

302. Essendo così, può dimostrarsi ancora, che se quattro quantità omogenee sono proporzionali tra loro, la massima e la minima unite insieme debbano essere maggiori delle altre due. Siano perciò proporzionali le quattro quantità omoge-
Fig. 134. nee AB, C, DE, F; e pongasi, che la prima AB sia la massima. Siccome dunque AB è maggiore di DE, così sarà C maggiore di F (301). Ma per essere la ragione di AB a C eguale alla ragione di DE ad F, non può AB essere maggiore di C, senza che ancora DE sia maggiore di F (277). Dunque la quarta F sarà la minima. Quindi se delle due AB, DE siano BG, EH le porzioni eguali alle loro minori C, ed F; sarà come AB a BG. Così DE ad EH; ed in conseguenza convertendo come AB ad AG, così DE a DH (294). Onde ancora AG sarà maggiore di DH; e coll'aggiunta tanto delle eguali BG e C, quanto delle altre eguali F ed EH, saranno le due AB ed F insieme similmente maggiori delle altre due DE, e C (13).

303. In oltre, siccome le quantità omogenee sono sempre paragonabili tra loro per via della continenza, così in una proporzione, che ha tutti quattro i termini omogenei, potrà paragonarsi per quel verso tanto l'antecedente coll'antecedente, quanto il conseguente col conseguente; ma permutati in questa maniera i termini, la proporzione tra di essi tuttavia dovrà sussistere. Per di-
Fig. 131. mostrarlo, siano A, B, C, D quattro quantità omogenee; e pongasi, che A sia a B, come C a D. Io dico, che permutando sarà ancora come A a C, così B a D. Imperocchè conforme la ragione

ne di A a C si compone dalle ragioni di A a B, e di B a C; così la ragione di B a D si compone dalle ragioni di B a C, e di C a D (284). Onde essendo le componenti dell'una eguali alle componenti dell'altra, ciascuna a ciascuna, ancora la ragione di A a C sarà eguale alla ragione di C a D (280).

304. E quindi egli è facile a dimostrare, che se le parti di una quantità sono in data ragione colle parti di un'altra, ancora le quantità medesime debbano esse tra loro nella stessa ragione. Siano perciò AC, DF due quantità omogenee, delle quali la prima AC sia divisa nelle parti AB, BC, e la seconda DF nelle parti DE, EF; e sia in oltre come la parte AB alla parte DE, così l'altra BC all'altra EF. Io dico, che la tutta AC alla tutta DF sia ancora, come la parte AB alla parte DE, o pure come l'altra BC all'altra EF. Imperocchè, essendo come AB a DE, così BC ad EF; sarà permutando come AB a BC, così DE ad EF (303). Ma componendo dee essere come AC a BC, così DF ad EF (291). Dunque permutando di nuovo sarà come AC a DF, così BC ad EF. Fig.132.

305. Facilmente ancora puo dimostrarsi, che se in una data ragione siano tra loro così due quantità, come due parti di esse, eziandio le parti rimanenti debbano essere nella stessa ragione. Perciò siano di nuovo le due quantità omogenee AC, DF, delle quali la prima AC sia divisa nelle parti AB, BC, e la seconda DF nelle parti DE, EF; e sia in oltre come la tutta AC alla tutta DF, così la parte BC alla parte EF. Io dico, che ancora la rimanente AB alla rimanente DE debba essere, come la tutta AC alla tutta DF, o pure come la parte BC alla parte EF. Imperocchè, essendo come AC a DF, così BC ad EF; sarà permutando come AC a BC, così DF ad EF (303). Ma dividendo dee essere come AB a BC, così DE ad EF (293). Dunque permutando di nuovo sarà come AB a DE, così BC ad EF. Fig.132.

306. No-

306. Notisi intanto in questo luogo, che questi due teoremi spettanti alla proporzione, che ha tutti quattro i termini tra loro omogenei, sono differenti dalli due ultimi, dimostrati di sopra per ogni proporzione, solamente per la diversa maniera, con cui sono stati esposti. Imperocchè, siccome in quelli si trattava di quattro quantità, che a due a due fossero proporzionali a quantità date, e capaci o di unirsi insieme, o di sottrarsi l'une dall'altre; così in questi si considerano quattro quantità, che a due a due siano in data ragione, e capaci di essere o unite insieme, o l'une dall'altre sottratte. Ma se attentamente si riflette, appunto da questa diversa espressione deriva, che le quantità in questi esser debbano sempre tutte omogenee, ed in quelli possano essere ancora tali solamente a due a due.

307. Quindi non sarà mal fatto per la proporzione, di cui presentemente si tratta, di enunciare diversamente ancora un'altro de' teoremi dimostrati di sopra per ogni proporzione; e si è, che se più quantità omogenee paragonate con altrettante, ciascuna con ciascuna, siano con quelle in data ragione, eziandio le somme dell'une, e dell'altre
Fig.133. debbano essere nella stessa ragione. Siano perciò le quattro quantità omogenee A, B, C, D, ciascuna delle quali sia in data ragione colla corrispondente delle altre quattro E, F, G, H. Io dico, che la somma di quelle alla somma di queste debba essere ancora nella stessa ragione. Imperocchè, essendo A ad E, come B ad F, come C a G, come D ad H; avremo permutando come A a B, così E ad F; come B a C, così F a G; e come C a D, così G ad H (303). Quindi essendo le quattro A, B, C, D in ordinata ragione colle altre quattro E, F, G, H; sarà come la somma di quelle a D, così la somma di queste ad H (297); ed in conseguenza permutando di nuovo la somma delle quattro A, B, C, D sarà alla somma delle altre quattro E, F, G, H, come D ad H, cioè nella medesima data ragione.

CA-

## CAPITOLO II.

### *Della dottrina delle proporzioni applicata alle linee rette.*

308. DImoſtrata la dottrina delle proporzioni in generale, paſſeremo ora ad applicarla alle varie ſpezie della quantità eſteſa, che ſi conſiderano nella Geometria piana, e con ciò ad iſpiegare le teorie più compoſte di queſta ſcienza. Incominceremo adunque dalle linee rette, le quali ſiccome tra tutte le quantità eſteſe ſono le più ſemplici, così per la ſteſſa loro ſemplicità ſono le più proprie per additarci le ragioni delle altre, che anno un'indole più compoſta. E poicche le linee rette vengono in conſiderazione o per gli angoli, che formano, o per le figure ſteſſe, delle quali ſono termini; perciò in applicare ad eſſe la dottrina delle proporzioni, le riguarderemo principalmente, o come lati di un qualche angolo, o come lati de'triangoli, ne'quali poſſono riſolverſi tutte le altre figure rettilinee.

### §. I.

### *Delle ragioni eguali, che poſſono averſi colli lati, e la baſe di un' angolo.*

309. FOndamento di queltanto ſarà dimoſtrato in queſto capitolo è il teorema, che ſegue; cioè, che ſe di un'angolo qualſivoglia dividaſi un lato in parti eguali, e per i punti della diviſione tirinſi rette parallele alla baſe dell'angolo, ancora l'altro lato debba eſſere diviſo in altrettante parti eguali per queſte rette parallele. Sia Fig. 135
perciò l'angolo BAC; e diviſo il lato AB nelle parti eguali AD, DE, EB, tirinſi per i punti D, ed E le rette DF, EG parallele alla baſe BC, che s'incontrino coll'altro lato AC ne' punti F, e G. Tirandoſi adunque per queſti punti le altre rette

FH, GI parallele al lato AB, saranno eguali così le due DE, FH, come le due EB, GI (91) con che le tre AD, FH, GI saranno tra loro eguali (11). Ma per le parallele tirate li triangoli ADF, FHG, GIC sono equiangoli (62). Dunque dovendo gli stessi triangoli essere perfettamente eguali (85), ancora le tre AF, FG, GC saranno tra di esse eguali. E quantunque la dimostrazione siasi fatta per lo lato AB diviso in tre parti eguali; nientedimeno egli è chiaro, che la stessa debba aver luogo per ogni altra divisione, che si voglia fare.

310. Or da questo teorema egli è facile a dedurne, che dividendosi i lati di un'angolo per una retta parallela alla base, debbano i medesimi esser divisi proporzionalmente, tanto che la ragione delle parti di uno sarà eguale alla ragione delle
Fig.136. parti dell'altro. Perciò sia l'angolo BAC, ed alla sua base BC tirisi ad arbitrio la parallela DE, che seghi li due lati AB, AC ne' punti D, ed E. E siccome le due AD, DB debbono avere una parte aliquota comune (265), così concepiscansi divise in parti, che siano a quella eguali; e dalli punti della divisione intendansi ancora tirate rette parallele alla base BC, le quali dovendo dividere in altrettante parti eguali eziandio le due AE, EC (309) faranno, che ancora queste restino divise in parti, eguali ad un'aliquota loro comune. Ma le comuni aliquote, colle quali vengono fatte le due divisioni, sono aliquote simili tanto delle due AD, AE, quanto delle due DB, EC. Dunque sarà come AD a DB, così AE ad EC (277); e pertanto li lati AB, AC saranno divisi proporzionalmente ne' punti D, ed E.

311. E quindi con dimostrazione negativa possiamo ancora pruovare la conversa di una tal proposizione; cioè, che essendo li due lati di un'angolo divisi proporzionalmente da una retta, debba questa retta essere parallela alla base dell'angolo.
Fig.136. Pongasi adunque, che li lati AB, AC siano talmente divisi ne' punti D, ed E, che sia come AD

a DB,

a DB, così AE ad EC; e se le due DE, BC non sono parallele tra loro, tirisi per lo punto D la retta DF parallela alla BC (65), che s'incontri coll'altro lato AC nel punto F. E poicchè li due lati dell'angolo AB, AC sono divisi dalla retta DF parallela alla base BC; sarà come AD a DB così AF ad FC (310). Ma per ipotesi AD sta a DB, come AE ad EC. Dunque sarà ancora come AF ad FC, così AE ad EC (271). Onde dovendo essere componendo come AC ad FC, così AC ad EC (291); averà AC la stessa ragione ad FC, che ad EC. Con che le due FC, EC saranno tra loro eguali (274); il che non può essere (14).

312. Possiamo altresì dimostrare, che se li lati di un'angolo si dividano per molte rette parallele alla base, la divisione di essi debba sempre farsi proporzionalmente, tanto che le ragioni delle parti di uno saranno sempre eguali alle ragioni delle corrispondenti parti dell'altro. Sia perciò l'angolo BAC, alla di cui base BC tirinsi ad arbitrio due rette parallele DE, FG, che s'incontrino col lato AB ne' punti D ed F, e col lato AC ne' punti E e G. Facciasi, che la EI tirata per lo punto E sia ancora parallela al lato AB (65); e convenga la medesima colle due FG, BC ne' punti H, ed I. Saranno adunque eguali tra loro così le due DF, EH, come le due FB, HI (91); e perciò sarà come DF ad FB, così EH ad HI (272). Ma per l'angolo CEI, in cui sta tirata la retta GH parallela alla base CI, come sta EH ad HI, così sta EG a GC (310). Dunque sarà ancora come DF ad FB, così EG a GC (271). E per le parallele DE, FG essendo altresì come AD a DF, così AE ad EG; saranno li lati AB, AC divisi proporzionalmente per le due DE, FG. Fig.137.

313. Il converso di ciò eziandio potrà dimostrarsi; cioè, che se i due lati di un'angolo sono divisi proporzionalmente in molte parti, le rette, che congiungono con ordine i punti delle loro divisioni, debbano essere parallele alla base dell'angolo. Perciò pongasi ora, che le tre parti AD, DF, Fig.137

FB del lato AB abbiano tra loro le stesse ragioni, che anno tra di esse le parti AE, EG, GC dell' altro lato AC. Essendo adunque come AD a DF, così AE ad EG, e come DF ad FB, così EG a GC; saranno le tre AD, DF, FB in ordinata ragione colle altre tre AE, EG, GC (295); onde sarà come AB somma di quelle ad FB, così AC somma di queste a GC (297). E poicchè dividendo esser dee come AF ad FB, così AG a GC (293); sarà FG parallela a BC (311). Ma essendo come AD a DF, così AE ad EG; la DE è parallela ad FG. Dunque le due DE, BC saranno ancora parallele tra loro (64).

314. Possiamo in oltre dimostrare, che la retta, per cui si divide un'angolo in due parti eguali, debba dividere la base dell'angolo nella ragione de' lati. Sia perciò l'angolo BAC, il quale dividasi
Fig.138. in due parti eguali per la retta AD, che s'incontri colla base BC dell'istesso angolo nel punto D. Io dico, che le parti BD, DC, nelle quali resta divisa la base, siano tra loro nella ragione de' lati AB, AC. Tirisi per lo punto C la retta CF parallela alla DA (65), la quale convenga col lato BA prolungato nel punto E; e sarà così l'angolo BAD eguale all'angolo AEC (62), come l'angolo CAD eguale all'angolo ACE (61). Onde conforme per ipotesi sono eguali li due angoli BAD, CAD; così eguali ancora saranno gli altri due AEC, ACE (11). Quindi dovendo essere eguali altresì li due lati AC, AE (73); sarà come AB ad AC, così AB ad AE (273). Ma per l'angolo CBE, in cui sta tirata la retta DA parallela alla base CE, come sta BD a CD, così sta AB ad AE (310). Dunque sarà ancora come BD a CD, così AB ad AC (271).

315. Possiamo finalmente dimostrare, che per lo contrario se la base di un'angolo sia divisa nella ragione de' lati per una retta tirata dal vertice, debba l'istessa retta dividere l'angolo in due parti
Fig.138. eguali. Perciò sia di nuovo l'angolo BAC, la di cui base BC sia talmente divisa in D dalla retta AD

tira-

tirata dal vertice, che sia come BD a CD, così AB ad AC. Io dico, che la stessa AD debba dividere per metà l'angolo BAC. Tirisi similmente per lo punto C la retta CE parallela alla DA (65), che s'incontri col lato BA prolungato nel punto E. E poicche nell'angolo CBE sta tirata la retta DA parallela alla base CE; sarà come AB ad AE, così BD a CD (310). Ma per supposizione BD sta a CD, come AB ad AC. Dunque sarà ancora come AB ad AC, così AB ad AE (271); e pertanto le due AC, AE saranno tra loro eguali (274). Quindi eguali altresì saranno li due angoli AEC, ACE (72). Onde perche per le parallele DA, CE l'angolo AEC è eguale all'angolo BAD (62), e l'angolo ACE è eguale all'angolo CAD (61); saranno li due BAD, CAD parimente eguali tra loro (11).

## §. II.

### *Delle ragioni eguali, che possono aversi colli lati di due triangoli.*

316. Considereremo ora le rette come lati de' triangoli, e perciò dovremo dimostrare, quali sono quelli triangoli, nelli quali le ragioni de' lati sono tra loro eguali. Tali adunque debbono essere tutti coloro, che sono equiangoli, cioè a dire, che anno gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno; poiche li lati esistenti intorno alli loro angoli eguali avranno tra di essi la stessa ragione, tanto che formeranno sempre una proporzione, ed omologi saranno quelli lati, che stanno opposti ad angoli eguali. Perciò siano li due triangoli ABC, DCE, li quali abbiano l'angolo ABC eguale all'angolo DCE, l'angolo ACB eguale all'angolo DEC, ed il terzo BAC eguale al terzo CDE. Io dico, che sarà I, come AB a BC, così DC a CE; II, come BC a CA, così CE ad ED; e III, come CA ad AB, così ED a DC. Fig. 139

 317. Per

317. Per dimostrarlo, dispongansi li due triangoli ABC, DCE talmente, che li due lati BC, CE siano tra loro a dirittura. Ed essendo l'angolo ACB eguale all'angolo DEC, coll'aggiunta del comune ABC saranno li due ABC, ACB ancora eguali alli due ABC, DEC (13); e pertanto a guisa di quelli eziandio questi saranno minori di due retti (71). Quindi le due BA, ED prolungate verso la parte, in cui sono detti angoli, si dovranno incontrare tra di esse in un qualche punto, come F (60); e per l'uguaglianza così degli angoli ABC, DCE, come degli angoli ACB, DEC saranno parallele tanto le due BF, CD, quanto le due CA, EF (58). Onde essendo ACDF un parallelogrammo, saranno tra loro eguali, così le due CA, DF, come le altre due FA, DC (91).

318. Poicche adunque nell'angolo FBE sta tirata la retta AC parallela alla sua base FE; sarà come AB ad FA ovvero DC, così BC a CE (310); onde permutando sarà come AB a BC, così DC a CE (303). Ed ancora perche nell'angolo BEF sta tirata la retta CD parallela alla base di esso BF; sarà come CE a BC, così ED a DF ovvero CA. Con che siccome invertendo dee essere come BC a CE, così CA ad ED (290); così permutando sarà come BC a CA, così CE ad ED. Quindi essendo le tre AB, BC, CA in ordinata ragione colle altre tre DC, CE, ED (295); sarà ordinando come AB a CA, così DC ad ED (296); ed in conseguenza invertendo sarà come CA ad AB, così ED a DC.

319. Ma da questo medesimo egli è facile a dedurne il contrario; cioè, che li triangoli, nelli quali le ragioni de'lati sono tra loro eguali, debbano essere equiangoli, ed avere eguali quegli angoli, che stanno opposti alli lati omologi. Siano perciò li due
Fig. 140. triangoli ABC, DEF, nelli quali sia come AB a BC così DE ad EF; e come BC a CA, così EF ad FD. Facciasi tanto l'angolo CBG eguale all'angolo FED, quanto l'angolo BCG eguale all'angolo EFD

EFD (40). Ed essendo equiangoli li due triangoli GBC, DEF; sarà come GB a BC, così DE ad EF; e come BC a CG, così EF ad FD (316). Ma per ipotesi ancora AB sta a BC, come DE ad EF; ed eziandio BC sta a CA, come EF ad FD. Dunque sarà come AB a BC, così GB a BC; e come BC a CA, così BC a CG (271). Quindi dovendo essere eguali tanto le due AB, GB, quanto le due CA, CG (274); saranno li due triangoli ABC, GBC perfettamente eguali (84); ed in conseguenza sarà così l'angolo CBA eguale all'angolo CBG o sia FED, come l'angolo BCA eguale all'angolo BCG o sia EFD.

320. Puo dedursi in secondo luogo, che sempre quando due triangoli anno un'angolo eguale ad un'angolo, e li lati intorno a questi angoli nella stessa ragione; debbano essere eguali ancora gli altri angoli opposti alli lati omologi, ciascuno a ciascuno; ed in conseguenza eguali altresì le ragioni, che quegli stessi lati anno alli due rimanenti. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; e sia come AB ad AC, così DE ad DF. Facciasi tanto l'angolo BAG eguale all'angolo EDF ovvero BAC, quanto l'angolo ABG eguale all'angolo DEF (40). Ed essendo equiangoli li due triangoli ABG, DEF, sarà come AB ad AG, così DE a DF (316). Ma per ipotesi ancora AB sta ad AC, come DE a DF. Dunque sarà come AB ad AC, così AB ad AG (271); e pertanto essendo eguali le due AC, AG (274), saranno li due triangoli ABC, ABG perfettamente eguali (87). Quindi sarà così l'angolo ABC eguale all'angolo ABG o sia DEF, come l'angolo ACB eguale all'angolo AGB o sia DFE; ed in conseguenza sarà come AB a BC, così DE ad EF; e come AC a BC, così DF ad EF. Fig.141.

321. Puo dedursi in terzo luogo, che se due triangoli anno due angoli tra loro eguali, ed altri due della stessa spezie, cioè a dire o acuti, o ottusi, ed in

oltre li lati opposti a detti angoli nella stessa ragione; debbano essere eguali ancora così li rimanenti angoli, come quelli della stessa spezie; ed in conseguenza eguali altresì le ragioni, che quegli stessi lati anno alli due rimanenti. Siano perciò li
Fig.142. due triangoli ABC, DEF, li quali abbiano l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB della stessa spezie coll'angolo DFE; e sia in oltre come AB ad AC, così DE a DF. Adunque se non sono eguali li rimanenti angoli BAC, EDF, sia il primo maggiore del secondo, e facciasi l'angolo BAG eguale all'angolo EDF (40). Ed essendo equiangoli li due triangoli ABG, DEF; sarà come AB ad AG, così DE a DF (316). Ma per ipotesi ancora AB sta ad AC, come DE a DF. Dunque sarà come AB ad AC, così AB ad AG (271); e per tanto essendo eguali le due AC, AG (274), saranno eguali altresì li due angoli AGC, ACG (72). Quindi ancora l'angolo AGC sarà della stessa spezie coll'angolo DFE, o pure col suo eguale AGB; qual cosa non potendo aver luogo (51), non sarà egli vero, che l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo EDF. Con che dovendo essere tra loro eguali, non solo sarà l'angolo ACB similmente eguale all'angolo DFE, ma sarà eziandio come AB a BC, così DE ad EF; e come AC a BC, così DF ad EF.

322. Può dedursi finalmente, che nel triangolo rettangolo vi debbano essere tre proporzioni continue di linee rette, per la ragione, che la perpendicolare abbassata sulla sua ipotenusa dall'angolo retto dee dividerlo in due altri triangoli, equiangoli così tra di essi, come coll'istesso triangolo rettangolo. Sia perciò il triangolo rettangolo ABC,
Fig.143. e dall'angolo retto A si abbassi sull'ipotenusa BC la perpendicolare AD. Equiangoli adunque saranno in primo luogo li due triangoli ABC, DBA; poicchè siccome l'uno, e l'altro è rettangolo, così anno ancora in B un'angolo comune, e perciò dovranno avere il terzo ACB similmente eguale al terzo DAB. Equiangoli in secondo luogo saran-

no

no gli altri due ABC, DAC; per la ragione, che essendo amendue rettangoli, ed avendo in C un' angolo comune, dovranno avere il terzo ABC ancora eguale al terzo DAC. Finalmente equiangoli saranno li due triangoli DBA, DAC; poicche secondo si è veduto oltre agli angoli retti anno ancora tanto l'angolo ABD eguale all'angolo DAC, quanto l'angolo DAB eguale all'angolo ACD.

323. Or la prima proporzione continua, che s'incontra nel triangolo rettangolo ABC, sta tra le rette BC, AB, BD; poicche essendo equiangoli li due triangoli ABC, DBA, sarà come BC ad AB, così AB a BD (316). La seconda poi si ritrova tra le rette BC, AC, CD; per la ragione, che essendo equiangoli li due triangoli ABC, DAC, dovrà essere come BC ad AC, così AC a CD. Ed in fine la terza sussiste tra le rette BD, AD, CD; poicche per essere equiangoli li due triangoli DBA, DAC, sarà come BD ad AD, così AD a CD. Ma siccome apprendiamo con questa terza, che la perpendicolare abbassata dall'angolo retto sia mezza proporzionale tra le due porzioni di quel lato, che chiamasi ipotenusa; così le prime due ci danno a divedere, che ciascuno degli altri due lati sia mezzo proporzionale tra l'ipotenusa, e la porzione di essa adjacente a detto lato.

## §. III.

### *Della soluzione di alcuni problemi intorno alle rette proporzionali.*

324. INtorno alla proporzione delle rette possono proporsi molti problemi di non picciolo uso in questa scienza. E poicche la soluzione di essi dipende da alcuni delli teoremi precedenti; perciò non sarà mal fatto di soggiungerli in questo luogo, e di risolverli brevemente. Il primo adunque si è di tagliare da una data retta una parte aliquota qualsivoglia, ed in conseguen-

za

za di dividere l'istessa retta in un dato numero di parti eguali. Sia perciò AB la retta data, da cui
Fig. 144. se ne debba per ragion di esempio tagliare la terza parte. Facciasi al punto A un'angolo qualsivoglia BAC; indi presa nel lato AC una porzione ad arbitrio, che sia AD, taglinsi da DC prolungata se bisogna le altre due porzioni DE, EF, delle quali ciascuna sia eguale ad AD (31). Congiungasi poscia la retta FB. E tirata per lo punto D la retta DG parallela alla FB (65), che s'incontri colla data AB nel punto G; sarà AG la terza parte, che si dimanda. Imperocchè, essendosi nell'angolo BAF tirata la retta DG parallela alla sua base FB; sarà come AD a DF, così AG a GB (310). Ma componendo dee essere come AD ad AF, così AG ad AB (292). Dunque s... come AD è la terza parte di AF, così sarà AG la terza parte della data retta AB.

325. Il secondo si è di dividere una data retta proporzionalmente ad un'altra di già divisa, tantoche le parti di questa siano in ordinata ragione colle parti della retta data, che dee dividersi. Siano perciò due rette AB, AE, delle quali la prima
Fig. 145. AB sia indivisa, e la seconda AE sia divisa come si voglia nelle parti AC, CD, DE. Dispongansi queste due rette talmente, che avendo un comune termine A formino tra di esse un'angolo qualsivoglia BAE; indi congiunganſi gli altri loro termini B, ed E per la retta BE, a cui per gli punti C, e D tirinsi le parallele CF, DG (65), che s'incontrino colla retta AB nelli punti F, e G; ed io dico, che come sta divisa la AE nelli punti C e D, così sarà divisa la AB nelli punti F e G: ciò che è chiaro per la costruzione medesima. Imperocchè, essendosi nell'angolo BAE tirate le rette CF, DG parallele alla sua base BE; per necessità dovrà essere come AF ad FG, così AC a CD; e come FG a GB, così CD a DE (312).

326. Il terzo si è di ritrovare una retta, che sia quarta proporzionale in ordine a tre altre rette

date.

date. Perciò ſiano AB, BC, AD le tre rette date, delle quali le due prime AB, BC ponganſi a dirittura, di modo che formino una retta continuata AC, e la terza AD diſpongaſi talmente con queſta AC, che avendo un termine comune A facciano tra di eſſe un'angolo qualſivoglia CAD. Congiunganſi poſcia li due punti B, e D per la retta BD, a cui tiriſi per lo punto C la parallela CE (65), che s'incontri colla AD prolungata nel punto E; ed io dico, che DE ſarà la quarta proporzionale, che ſi dimanda. Imperocchè, eſſendo li due lati AC, AE dell'angolo CAE diviſi per la retta BD parallela alla ſua baſe CE, dovrà eſſere come AB a BC, così AD a DE (310); e pertanto in ordine alle tre rette date AB, BC, AD ſarà DE la quarta proporzionale. Fig. 146.

327. Il quarto ſi è di ritrovare una retta, che ſia terza proporzionale in ordine a due altre rette date; e la ſoluzione di queſto non è molto diverſa da quella del precedente. Siano per tale effetto AB, BC le due date rette, le quali ponganſi a dirittura, di maniera che formino inſieme una retta continuata. Tiriſi poſcia dal punto A un'altra retta AE, che faccia con AC un'angolo qualſivoglia; e da queſta AE tagliſi la porzione AD eguale alla ſeconda BC (31). Finalmente uniti i punti B, e D per la retta BD, ſi tiri per lo punto C l'altra CE ad eſſa parallela (65), che s'incontri colla AE nel punto E; ed io dico, che DE ſarà la terza proporzionale, che ſi dimanda. Imperocchè, eſſendo li due lati AC, AE dell'angolo CAE diviſi per la retta BD parallela alla ſua baſe CE, ſarà come AB a BC, così AD a DE (310). Ma per l'uguaglianza delle due AD, BC come ſta AD a DE, così ſta BC a DE (272). Dunque ſarà ancora come AB a BC, così BC a DE, (271); ed in conſeguenza in ordine alle due date AB, BC ſarà DE la terza proporzionale. Fig. 146.

328. Il quinto, ed ultimo ſi è di ritrovare tra due rette date una mezza proporzionale; ed affinchè ſi comprenda, come egli debba riſolverſi, ſiano AB,

BC le due rette date, delle quali se ne formi una
Fig. 147. retta continuata AC; e divisa la medesima in due parti eguali nel punto D (42), descrivasi con questo punto come centro, e coll'intervallo della DA ovvero DC il semicerchio AEC. Si alzi di poi dal punto B sulla stessa AC la perpendicolare BE (49), che s'incontri colla circonferenza del semicerchio nel punto E; ed io dico, che questa BE sia la mezza proporzionale, che si dimanda. Imperocchè, congiunte le rette AE, CE, l'angolo AEC come situato nel semicerchio sarà retto (177). Onde nel triangolo rettangolo EAC essendosi dall'angolo retto E abbassata sull'ipotenusa AC la perpendicolare BE, sarà questa mezza proporzionale tra le due AB, BC (323). E con questa occasione non sarà mal fatto di avvertire, che ogni perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza del cerchio sopra il suo diametro debba essere mezza proporzionale tra le due porzioni dell'istesso diametro.

329. Tra due rette date, siccome sempre può darsi una mezza proporzionale, così nè pure ripugna di darsene due; ma egli è impossibile di determinarle col solo cerchio, e solamente con una qualche costruzione meccanica potranno per ora aversi. La più semplice, e la più facile a prat- ticarsi è la seguente. Siano AB, BC le due rette
Fig. 148. date, le quali si dispongano talmente, che facciano insieme un'angolo retto. Prendansi poscia due squadre, cioè due altri angoli retti, le quali colli lati DE, GH si aggirino intorno alli punti A, e C in modo tale, che gli altri due lati di esse EF, HI si combacino sempre tra loro. E se si arrestino le medesime, quando sono giunte ad una posizione tale, che le due AB, *CB* prolungate passino per gli punti H, ed E; saranno BE, BH le due mezze proporzionali, che si dimandano. Imperocchè, essendo rettangoli li due triangoli AEH, EHC, ed essendo BE, BH perpendicolari sulle loro ipotenuse; sarà come AB a

BE,

BE, così BE a BH; e come BE a BH, così BH a BC (323).

330. Col cerchio intanto si possono geometricamente determinare tre mezze proporzionali tra due rette date. Imperocchè se A, ed E sieno le rette, si potrà tra di esse ritrovare una sola mezza (328). Onde se questa sia C, ed indi ritrovisi così la mezza tra A e C, come la mezza tra C ed E, le quali siano B e D; saranno B, C, D le tre mezze, che si dimandano. Imperocchè, formando le tre A, B, C una proporzione continua; sarà A a C in duplicata ragione di B a C (287). E similmente formando le altre tre C, D, E un' altra proporzione continua; sarà C ad E in duplicata ragione di C a D. Ma per essere proporzionali le tre A, C, E, la ragione di A a C è eguale alla ragione di C ad E (276). Dunque ancora le due ragioni di B a C, e di C a D, delle quali quelle sono duplicate, saranno tra loro eguali (288). Onde essendo come A a B, così B a C; come B a C, così C a D, come C a D, così D ad E; saranno le cinque A, B, C, D, E continuamente proporzionali. Fig.149.

## §. IV.

### *Delle rette reciproche, e delli loro problemi principali.*

331. QUantunque, date due rette, debba essere data ancora la mezza proporzionale, che tra di esse puo situarsi (288); niente di meno una stessa retta puo essere tale non solo tra due rette, ma tra infinite altre prese a due a due. In effetto se C sia la retta, che dee fare le veci di mezza proporzionale, siccome puo prendersi un' altra retta A ad arbitrio, così a riguardo delle due A, e C puo ritrovarsi la terza proporzionale E (327). Formando adunque le tre A, C, E una proporzione continua; sarà C mezza proporzionale tra le due A, ed E. Ma conforme A puo variarsi Fig.149.

riarsi all'infinito, così infinite variazioni potrà ricevere altresì l'altra E; con che la stessa C si ritroverà essere mezza proporzionale tra infinite rette prese a due a due.

332. Sempre quando la stessa retta, che è mezza proporzionale tra due, è tale ancora tra due altre, si diranno queste altre due essere reciproche colle due prime; e la loro proprietà sarà, che situandosi l'une in mezzo dell'altre, formeranno tutte quattro una proporzione. Per dimostrarlo, sia
Fig.149. la stessa C mezza proporzionale tanto tra le due A ed E, quanto tra le due B e D. Io dico, che situandosi queste in mezzo di quelle, sarà come A a B, così D ad E. Imperocchè essendo come B a C, così C a D; sarà invertendo come C a B, così D a C (290). Ma A sta a C, come C ad E. Dunque le tre rette A, C, B saranno in perturbata ragione colle altre tre D, C, E (295); ed in conseguenza perturbando sarà come A a B, così D ad E (296).

333. La conversa di questa proprietà dee ancora aver luogo, cioè, che se due rette situate in mezzo di due altre formino con queste una pro-
Fig.149. porzione, debbano così l'une, come l'altre avere una stessa mezza proporzionale, ed in conseguenza essere tra loro reciproche. Siano perciò proporzionali le quattro rette A, B, D, E; e sia C la mezza, che cade tra le due B, e D. Io dico, che la stessa C debba essere mezza ancora tra le due A, ed E. Imperocchè essendo proporzionali le quattro A, B, D, E; sarà come A a B, così D ad E. E similmente essendo proporzionali le tre B, C, D; sarà come B a C così C a D. Quindi le tre A, B, C saranno in perturbata ragione colle altre tre C, D, E (295). Onde dovendo essere perturbando come A a C, così C ad E (296); sarà C mezza proporzionale tra le due A ad E.

334. E quindi possiamo in oltre dimostrare, che se con due rette date siano reciproche non solo due altre rette, ma eziandio altre due, queste con quelle debbano essere similmente reciproche. Siano

no perciò colle medesime A, e B reciproche così Fig. 150.
le due C, e D, come le due E, ed F. Io dico, che ancora le due C, e D saranno reciproche colle altre due E, ed F. Poicchè C, e D sono reciproche con A, e B; sarà come C ad A, così B a D (332). E similmente essendo E, ed F reciproche con A, e B; sarà come E ad A, così B ad F. Quindi dovendo essere invertendo come A ad E, così F a B (290); saranno le tre C, A, E in perturbata ragione colle altre tre F, B, D (295). Ma perturbando dee essere come C ad E, così F a D (296). Dunque saranno le due C, e D reciproche colle altre due E, ed F (333).

335. Intorno alle rette reciproche due sono li problemi, che meritano aver luogo in questi Elementi. Il primo si è di ritrovare due rette, che siano reciproche con due altre date, ed unite insieme siano eguali ad una data retta. Per risolverlo, siano A, e B le due rette, colle quali debbono Fig. 151.
essere reciproche quelle, che si dimandano; e sia CD l'altra retta, a cui le medesime insieme debbono essere eguali. Descrivasi sopra CD come diametro il semicerchio CED; indi ritrovata la mezza proporzionale tra le due A, e B, che sia F (328), alzisi dal punto C sulla stessa CD la perpendicolare CG (49), la quale facciasi eguale ad F (31); tirisi poscia per fino alla circonferenza la retta GE parallela a CD (65); ed abbassata su questa l'altra perpendicolare EH (50), saranno le due CH, DH reciproche colle due date A, e B.

336. Imperocchè essendo retti li due angoli EHC, HCG, saranno le due EH, CG parallele tra loro (63). Ma per la costruzione parallele sono ancora le due CH, GE. Dunque CHEG sarà un parallelogrammo; ed in conseguenza sarà EH eguale a CG, o sia F (91). Quindi siccome EH è mezza proporzionale tra le due CH, DH (328), così mezza tra le stesse sarà ancora la sua eguale F; ed in conseguenza essendo una medesima retta mezza proporzionale tanto tra le due A,

e B,

e B, quanto tra le due CH, DH, saranno queste reciproche con quelle (332). E poicche per la proprietà del cerchio altrove da noi dimostrata (189) il quadrato della EH ovvero F è eguale al rettangolo delle due CH, DH; egli è chiaro potersi colla stessa costruzione dividere una data retta talmente, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra retta data.

337. Notisi intanto in questo luogo, che per essere solubile il problema proposto, egli è necessario, che la metà della retta, a cui insieme debbono essere eguali le due reciproche, che si dimandano, non sia minore della mezza proporzionale, che cade tra le altre due date; cioè, che la metà di CD non sia minore di F. Imperocchè le perpendicolari abbassate dalla circonferenza sul diametro CD, se si prolunghino per fino alla circonferenza opposta, saranno tutte divise egualmente da quel diametro (146). Onde siccome delle rette situate dentro del cerchio la massima è quella, che passa per lo centro (158); così delle riferite perpendicolari la massima sarà IL, che corrisponde al centro L; e perciò se mai IL, che è la metà di CD, sia minore di CG ovvero F, la parallela al diametro GE non potrà incontrarsi colla circonferenza del semicerchio; ed in conseguenza nepure il problema potrà risolversi.

338. L'altro problema si è di ritrovare due rette, che siano reciproche con due altre date, e differiscano tra loro per una data retta. Per risolverlo, siano di nuovo A, e B le due rette, Fig.152. colle quali debbono essere reciproche quelle, che si dimandano; e sia CD la retta, per cui le medesime debbono differire tra loro. Ritrovisi la mezza proporzionale tra le due rette date A, e B, la quale sia F (328); e prolunghisi la CD talmente per fino al punto H, che il rettangolo delle due CH, DH sia eguale al quadrato di F (137). Io dico, che queste medesime CH, DH, le quali differiscono tra loro per la retta data CD, saranno reciproche colle due date A, e B.

339. Per

339. Per dimostrarlo, descrivasi intorno alla retta CD un cerchio qualsivoglia CDF, a cui dal punto H tirisi la tangente HF (171). E poicche il quadrato di questa tangente è eguale al rettangolo delle due CH, DH (196); sarà la medesima HF eguale ad E, che per costruzione è mezza proporzionale tra le due A, e B, ed uguaglia col suo quadrato quello stesso rettangolo. Ma congiunte le rette CF, DF, l'angolo HFD contenuto dalla tangente HF, e dalla secante DF è eguale all'angolo FCD situato nell'opposta porzione del cerchio (178). Dunque per gli due triangoli equiangoli CHF, FHD dovendo essere come CH ad HF, così HF a DH (316); sarà la stessa HF mezza proporzionale ancora tra le due CH, DH; e pertanto queste due CH, DH dovranno essere reciproche colle due date A, e B (330).

340. Del rimanente giova quì l'avvertire, che siccome quando tre rette formano tra di esse una proporzione continua, quella di mezzo dee prendersi due volte; così qualora tra due rette date ritrovasi una mezza proporzionale, propriamente vengono ad aversi due altre rette, eguali tra loro, e reciproche colle due date. Quindi il problema di ritrovare una mezza proporzionale tra due date rette può riguardarsi come caso speziale del precedente. Imperocchè conforme in quello si dimandano due rette, che siano reciproche con due altre date, e differiscano tra loro per una data retta; così supponendosi quest' altra retta talmente picciola, che possa essere trascurata, diverranno eguali tra loro le due reciproche, che si dimandano: ed in conseguenza si ridurrà il problema a ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date.

## §. V.

### *Della divisione della retta in estrema, e media ragione.*

341. SE mai una retta fosse talmente divisa, che la stessa colle sue parti formasse una proporzione continua, di modo che fosse come la tutta alla parte maggiore, così la parte maggiore alla parte minore; in tal caso la divisione della retta si direbbe fatta in estrema, e media ragione, in quanto che la medesima colle sue parti conterrebbe così l'altro termine estremo, come quello di mezzo della proporzione continua. Or che possa aver luogo una tal divisione, egli è facile a dimostrarsi. Imperocchè, data la retta AB, di già puo ella dividersi talmente nel punto C, che il rettangolo della tutta AB nella parte AC sia eguale al quadrato dell'altra parte BC (138); ma da una tal divisione necessariamente ne segue, che AB sia a BC, come BC ad AC.

Fig.153.

342. Per dimostrarlo, descrivasi intorno alla retta BC un cerchio qualsivoglia BCD, a cui dal punto A tirisi la tangente AD (171). E poicchè il quadrato di questa tangente AD è eguale al rettangolo delle due AB, AC (196), il quale rettangolo per ipotesi è eguale al quadrato della BC; saranno li due quadrati di AD, e di BC tra loro eguali (11); e perciò la BC sarà ancora eguale alla tangente AD (113). Ma congiunte le due BD, CD, l'angolo ADC contenuto dalla tangente AD, e dalla secante CD è eguale all'angolo DBC situato nell'opposta porzione del cerchio (178). Dunque essendo equiangoli li due triangoli ADB, ACD, sarà come AB ad AD, così AD ad AC (316); ed in conseguenza per l'uguaglianza delle due AD, BC sarà ancora come AB a BC, così BC ad AC.

343. Ma siccome con dividersi la AB talmente in C, che il rettangolo delle due AB, AC sia egua-

eguale al quadrato di BC, si ha la divisione di essa in estrema, e media ragione; così il converso di ciò dee ancora aver luogo, cioè, che essendo la AB talmente divisa in C, che AB sia a BC, come BC ad AC, debba essere il rettangolo delle due AB, AC eguale al quadrato di BC. Perciò intorno alla BC descrivasi di nuovo un cerchio qualsivoglia BCD, a cui tirata similmente dal punto A la tangente AD (171), congiungansi le due BD, CD. Essendo adunque equiangoli li due triangoli ADB, ACD; sarà come AB ad AD, così AD ad AC (316). Onde per essere tanto AD, quanto BC mezza proporzionale tra le due AB, AC; sarà AD eguale a BC (288). Ma il rettangolo delle due AB, AC è eguale al quadrato della AD (196). Dunque l'istesso rettangolo di AB in AC sarà eguale ancora al quadrato dell'altra BC (11).

344. Poicche dunque la divisione della retta in estrema, e media ragione ricade nell'altra, con cui la stessa retta si divide talmente, che il rettangolo della tutta, e di una parte sia eguale al quadrato dell'altra parte; non solo potrà aversi la prima divisione per mezzo della seconda, ma i teoremi espressi con una delle due potranno essere enunciati ancora coll'altra. Quindi togliendosi dal raggio il lato del decagono regolare, siccome il rettangolo del raggio nella porzione rimanente è eguale al quadrato di detto lato (249), così egli il raggio resterà diviso in estrema, e media ragione. E similmente aggiungendosi al raggio il lato del decagono regolare, non solo il rettangolo della retta composta nel lato sudetto sarà eguale al quadrato del raggio (250), ma la retta medesima si ritroverà divisa in estrema, e media ragione colle due parti, che la compongono.

345. Dalla identità, che si scorge tra l'una, e l'altra divisione, possono dedursi ancora due belle proprietà della retta divisa in estrema, e media ragione; cioè che li quadrati della tutta, e della porzione minore siano eguali al triplo del quadrato della

porzione maggiore; e che il quadrato fatto dalla tutta, e dalla porzione minore insieme sia eguale al
Fig.153. quintuplo del quadrato dell'altra porzione. Sia perciò la AB talmente divisa in C, che AB sia a BC, come BC ad AC. Ed essendo il quadrato di BC eguale al rettangolo delle due AB, AC (343); sarà così il doppio del rettangolo eguale al doppio del quadrato, come il quadruplo del rettangolo eguale al quadruplo del quadrato (11). Ma li quadrati delle due AB, AC sono eguali a due volte il rettangolo delle medesime, insieme col quadrato di BC (120); ed il quadrato fatto dalle due insieme AB, AC è eguale a quattro volte il rettangolo fatto dalle stesse, insieme col quadrato di BC (121). Dunque li quadrati delle due AB, AC saranno eguali al triplo del quadrato di BC; ed il quadrato di esse insieme AB, AC sarà eguale al quintuplo del quadrato fatto dalla stessa BC.

346. Quantevolte è data la retta, che dee dividersi in estrema, e media ragione; egli è facile a dimostrarsi, che debbano essere date ancora le
Fig.154. porzioni, che derivano da una tal divisione. Sia perciò la AB talmente divisa in C, che sia come AB a BC, così BC ad AC. E se è possibile, sia ancora come AB a BD, così BD ad AD. Pongasi, che BC sia maggiore di BD. E siccome ad AC avrà maggior ragione BC, che BD (272); così BD avrà maggior ragione ad AC, che ad AD (273). Quindi BC ad AC avrà molto più maggior ragione, che BD ad AD (271). Ma per ipotesi BC sta ad AC, come AB a BC; e BD sta ad AD, come AB a BD. Dunque ancora AB a BC avrà maggior ragione, che AB a BD: qual cosa non puo essere; poicche essendo BC maggiore di BD, dee essere per lo contrario la ragione di AB a BD maggiore della ragione di AB a BC.

347. Quindi potrà in oltre dimostrarsi, che se due rette sono divise in estrema, e media ragione, debbano le medesime essere divise proporzio-
Fig.154. nalmente. Sia perciò divisa in estrema e media ragione tanto la AB nel punto C, quanto la EF nel

nel punto G; e siano BC, FG le due porzioni maggiori. Adunque se AC non sia a BC, come EG ad FG; facciasi, che AD sia a BD, come EG ad FG (325); e componendo sarà come AB a BD, così EF ad FG (291). Ma per ipotesi EF sta ad FG, come FG ad EG; e dall'essersi fatto, che AD sia a BD, come EG ad FG, ne segue invertendo, che BD sia ad AD, come FG ad EG (290). Dunque sarà ancora come AB a BD, così BD ad AD (271); e pertanto la stessa AB sarà divisa in estrema, e media ragione tanto nel punto C, quanto nel punto D, il che non può essere (346).

348. Del rimanente, essendo una retta divisa in estrema, e media ragione, con aggiungersi ad essa la porzione maggiore si avrà un'altra retta similmente divisa in estrema, e media ragione, di cui però l'aggiunta sarà la porzione minore, e la retta primitiva la porzione maggiore. Per dimostrarlo, dividasi la AB talmente in C, che sia come AB a BC, così BC ad AC; e prolunghisi la medesima per sino al punto D, di modo che siano eguali le due BD, BC. Adunque per l'ugualianza di queste due sarà ancora, come AB a BD, così BC ad AC. Onde conforme invertendo sarà BD ad AB, come AC a BC (290); così sarà componendo AD ad AB, come AB a BC, ovvero BD (291); e pertanto la tutta AD sarà divisa in estrema, e media ragione nel punto D, di cui minor porzione sarà l'aggiunta BD, e porzione maggiore la retta primitiva AB. Fig. 155.

## CAPITOLO III.

### *Della dottrina delle proporzioni applicata alle figure rettilinee.*

349. DOpo essersi applicata la dottrina delle proporzioni alle linee rette, l'ordine richiede, che si faccia l'applicazione di essa alle figure, che anno le rette stesse per loro termini,

cioè a dire alle figure, che chiamansi rettilinee. E poicche secondo l'avvertimento più volte fatto colla teoria de' triangoli egli è facile di porre a calcolo ogn' altra figura rettilinea; perciò buona parte di questanto dovrà dirsi intorno alla dottrina delle proporzioni applicata alle figure rettilinee, riguarderà i triangoli; alli quali tutta volta accoppieremo quasi sempre i parallelogrammi, sì perche questi a ben considerarsi sono triangoli raddoppiati, come ancora perche l'uso di essi nelle speculazioni geometriche non è meno frequente di quello de' triangoli.

## §. I.

### *Della ragione, in cui sono così i triangoli, come i parallelogrammi.*

350. TAnto nel triangolo, quanto nel parallelogrammo puo prendersi per base qualunque lato si voglia; ma determinata una volta la base, si chiamerà altezza del triangolo, e del parallelogrammo la perpendicolare, che si
Fig. 156. abbassa sulla base dall' angolo opposto. Così nel triangolo ABC, o pure nel parallelogrammo ABCD prendendosi per base il lato BC, dovrà chiamarsi altezza la perpendicolare AE, che cade su quella base dall'angolo opposto A. E secondo questa definizione siccome egli è chiaro, che due triangoli, o due parallelogrammi situati tra le stesse parallele debbano avere eguali altezze, quantevolte colle loro basi si appoggiano ad una delle due parallele; così chiara cosa ancora si è, che essendo eguali le altezze di due triangoli, o di due parallelogrammi, debbano questi potersi sempre situare tra due parallele.

351. Quantevolte due triangoli anno eguali altezze, la loro ragione dovrà essere eguale a quella delle basi. Per dimostrarlo, siano li due trian-
Fig. 157. goli ABC, ABD situati tra le medesime parallele, ed in conseguenza dotati di un' istessa altezza

per

per rapporto alle basi BC, BD. Io dico, che il triangolo ABC sia al triangolo ABD, come la base BC alla base BD. Poicche le due BC, BD debbono avere una parte aliquota comune (265), concepiscansi le medesime divise in parti, che siano a quella eguali. E se dalli punti della divisione intendansi ancora tirate rette al punto A, queste divideranno i due triangoli ABC, ABD in altrettanti triangoli più piccioli, che per essere situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele saranno eziandio tra loro eguali (96), Quindi ancora i due triangoli ABC, ABD saranno divisi in parti eguali ad un'aliquota loro comune. Ma le comuni aliquote, colle quali si sono fatte le divisioni delle basi, e delli triangoli, sono aliquote simili così del triangolo ABC e della base BC, come del triangolo ABD e della base BD. Dunque la ragione delli triangoli, e la ragione delle basi saranno tra loro eguali (277); e perciò il triangolo ABC sarà al triangolo ABD, come la base BC alla base BD.

352. Per lo contrario poi se due triangoli anno eguali basi, la loro ragione dovrà essere eguale a quella delle altezze. Siano perciò CD, EF, GH tre rette parallele, alle quali sia perpendicolare la retta IAB; e fatte eguali le due BC, BD, congiunganli le rette AC, AD, ID. Adunque li due triangoli ABC, IBD per rapporto alle altezze AB, IB avranno eguali basi; onde dovrà dimostrarsi, che il triangolo ABC sia al triangolo IBD, come l'altezza AB all'altezza IB. E poicche sono eguali li due triangoli ABC, ABD (96), sarà il triangolo ABC al triangolo IBD, come il triangolo ABD al triangolo IBD (273). Ma prendendosi AB, IB per basi delli due triangoli ABD, IBD, questi avranno la stessa altezza, ed in conseguenza sarà come il triangolo ABD al triangolo IBD, così AB ad IB (351). Dunque ancora il triangolo ABC sarà al triangolo IBD, come AB ad IB (271). Fig. 158.

353. Egli è vero, che li due triangoli ABC,

IBD, delli quali si è fatto uso per la dimostrazione di questo secondo teorema, anno per loro lati le altezze medesime AB, IB; ma dimostrato il teorema per rapporto a questi triangoli, egli è facile di estenderlo a tutti gli altri. Imperocchè siccome due altri triangoli, che situati sopra le basi BC, BD si terminano alle parallele EF, GH, sono eguali alli due ABC, IBD (95), così le altezze di essi saranno ancora eguali alle due AB, IB. Onde eziandio questi altri triangoli saranno tra di essi nella ragione delle loro altezze. E poicche ancora nella dimostrazione del primo teorema si è dato alli due triangoli un comune lato, ed un comune vertice; si potrà con una considerazione consimile estendere quel tale teorema a tutti gli altri triangoli.

354. Finalmente se due triangoli anno basi disuguali, ed altezze disuguali, la loro ragione dovrà essere composta da quella delle basi, e da quella delle altezze. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, DEF, delli quali siano disuguali così
Fig.159. le basi BC, EF, come le altezze AG, DH. Io dico, che il triangolo ABC sia al triangolo DEF in ragion composta di BC ad EF, e di AG a DH. Dall'altezza maggiore AG taglisi la porzione IG eguale alla minore DH (31), e congiungansi le due BI, CI. Adunque siccome il triangolo ABC dee essere al triangolo IBC, come AG ad IG ovvero DH (352); così il triangolo IBC sarà al triangolo DEF, come BC ad EF (351). Ma il triangolo ABC sta al triangolo DEF in ragion composta del triangolo ABC al triangolo IBC, e del triangolo IBC al triangolo DEF (284). Dunque la ragione del triangolo ABC al triangolo DEF sarà composta ancora da quella di AG a DH, e da quella di BC ad EF (280).

355. Alli tre riferiti teoremi possiamo ancora aggiungere quest'altro, cioè, che avendo due triangoli un'angolo eguale ad un'angolo, la loro ragione debba essere composta da quelle de' lati, che sono intorno agli angoli eguali. Perciò siano

ABC,

ABC, DEC li due triangoli, che anno l'angolo ACB eguale all'angolo DCE; e dispongansi li medesimi talmente, che i due lati AC, DC siano a dirittura. Per l'uguaglianza adunque di quegli angoli sarà ancora il lato BC a dirittura col lato EC (54). Onde congiunta la AE, sarà come il triangolo ABC al triangolo AEC, così BC ad EC; e come il triangolo AEC al triangolo DEC, così AC a DC (351). Ma il triangolo ABC sta al triangolo DEC in ragion composta del triangolo ABC al triangolo AEC, e del triangolo AEC al triangolo DEC (284). Dunque la ragione del triangolo ABC al triangolo DEC sarà composta ancora da quella di BC ad EC, e da quella di AC a DC (280). Fig.168.

356. Giova intanto l'avvertire, che questo quarto teorema non è, che un caso speziale del terzo, il quale si estende a tutti i triangoli; ed in effetto si puo egli dal terzo immediatamente dedurre in questa maniera. Prendansi per basi delli due triangoli ABC, DEC li due lati BC, EC; e le perpendicolari AF, DG abbassate su questi lati dagli angoli opposti saranno le altezze degli stessi triangoli. Quindi il triangolo ABC sarà al triangolo DEC in ragion composta di BC ad EC, e di AF a DG (354). Ma per l'uguaglianza degli angoli ACB, DCE li due triangoli ACF, DCG sono equiangoli; ed in conseguenza dovendo essere come AC ad AF, così DC a DG (316), sarà permutando come AC a DC, così AF a DG (303). Dunque il triangolo ABC al triangolo DEC sarà ancora in ragion composta di BC ad EC, e di AC a DC (280).

357. Essendo diviso ogni parallelogrammo dalla sua diagonale in due triangoli eguali (91); la ragione di due parallelogrammi sarà eguale a quella de'triangoli, che sono le loro metà (275). Onde ancora per rapporto alli parallelogrammi debbono aver luogo gli stessi teoremi, cioè I, che se due parallelogrammi anno eguali altezze, la loro ragione sia eguale a quella delle basi. II,

che

che per lo contrario se due parallelogrammi anno eguali basi, la loro ragione sia eguale a quella delle altezze. III, che se due parallelogrammi anno basi, ed altezze disuguali, la loro ragione sia composta da quella delle basi, e da quella delle altezze. E IV, che se due parallelogrammi sono equiangoli, la loro ragione sia composta da quelle de'lati.

358. Generalmente adunque così i triangoli, come i parallelogrammi debbono essere in ragion composta delle basi, e delle altezze. Quindi essendo i medesimi nella sola ragione delle basi, dovranno essere eguali le loro altezze; e per lo contrario essendo nella sola ragione delle altezze, dovranno essere eguali le loro basi. Imperocchè, siccome una ragione dicesi composta da due altre ragioni, quando la sua quantità si produce colla multiplicazione delle quantità delle ragioni componenti (279); così non puo una ragione composta essere eguale ad una delle due, che la compongono, se l'altra componente non abbia per sua quantità l'unità medesima. Ma essendo tale la quantità di essa, la ragione sarà di uguaglianza, ed in conseguenza i suoi termini saranno tra loro eguali (269).

359. Del rimanente se bene la ragione di due triangoli, o di due parallelogrammi generalmente sia composta da quella delle basi, e da quella delle altezze; egli è facile tutta volta di esprimerla con altra ragione, che sia semplice. Perciò
Fig. 159. siano BC, EF le basi delli due triangoli, o delli due parallelogrammi, ed AG, DH le loro altezze. Prendasi una retta I ad arbitrio, e ritrovisi la quarta proporzionale tanto in ordine alle tre BC, EF, I, che sia L, quanto in ordine alle tre AG, DH, L, che sia M (326). La ragione adunque di I ad M, come composta dalle due di I ad L, e di L ad M, che per costruzione sono eguali alle altre due di BC ad EF, e di AG a DH, sarà quella, che si dimanda. E dell'istessa maniera potrà ritrovarsi la ragione semplice, atta ad esprimere la composta delli due triangoli, o delli due

due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo.

## §. II.

### *Dell'uguaglianza di due triangoli, e di due parallelogrammi.*

360. ESsendo eguali così le basi, come le altezze di due triangoli, egli non è da porsi in dubbio, che gli stessi triangoli debbano essere tra loro eguali. Deducesi ciò chiaramente da queltanto è stato dimostrato intorno ad essi, cioè, che la loro ragione sia eguale a quella delle basi essendo eguali le altezze (351), ed eguale a quella delle altezze essendo eguali le basi (352). Ma poi una tal verità ricade in quella altrove da noi pruovata (96), cioè, che li triangoli situati sopra basi eguali, e tra le stesse parallele debbano essere tra loro eguali; per la ragione, che non possono due triangoli situarsi tra le medesime parallele, senzache abbiano ancora eguali altezze. Or se bene non vi sia uguaglianza tra' le basi, e tra le altezze di due triangoli; pure talvolta li due triangoli possono essere tra loro eguali.

361. Avviene ciò, quando la base, e l'altezza di uno di essi sono reciproche colla base, e coll' altezza dell'altro. Per dimostrarlo, siano i due Fig.159. triangoli ABC, DEF; ed abbassate sopra le basi BC, EF le perpendicolari AG, DH, sia come BC ad EF, così DH ad AG. Io dico, che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEF. Dall' altezza maggiore AG taglisi la porzione GI eguale alla minore DH, e congiungansi le due BI, CI. Siccome adunque il triangolo IBC dee essere al triangolo ABC, come GI ovvero DH ad AG (352); così il triangolo IBC sarà al triangolo DEF, come BC ad EF (351). Ma per ipotesi BC sta ad EF, come DH ad AG. Dunque sarà ancora come il triangolo IBC al triangolo ABC, così l'istesso triangolo IBC all'altro DEF (271);

(271); e pertanto li due triangoli ABC, DEF saranno tra loro eguali (274).

362. Ma facilmente puo dimostrarsi ancora il converso di un tal teorema, cioè, che essendo eguali due triangoli, la base e l'altezza di uno di essi debbano essere reciproche colla base e coll'altezza dell'altro. Perciò pongasi ora, che il triangolo
Fig. 159. ABC sia eguale al triangolo DEF; ed abbassate sopra le basi BC, EF le perpendicolari AG, DH (50), io dico, che sarà come BC ad EF, così DH ad AG. Taglisi similmente dall'altezza maggiore AG la porzione GI eguale alla minore DH (31) e congiunganfi le due BI, CI. Essendo adunque eguali li due triangoli ABC, DEF, avrà il terzo triangolo IBC la stessa ragione all'uno, che all'altro (273). Ma il triangolo IBC sta al triangolo DEF, come BC ad EF (351); ed il triangolo IBC sta al triangolo ABC, come GI ovvero DH ad AG (352). Dunque sarà ancora come BC ad EF, così DH ad AG (271).

363. Sono eguali eziandio tra loro due triangoli, quantevolte anno un'angolo eguale ad un'angolo, e'li lati intorno a questi angoli reciproca-
Fig. 160. camente proporzionali. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, DEC, nelli quali sia l'angolo ACB eguale all'angolo DCE, e sia ancora come BC ad EC, così DC ad AC. Dispongansi i medesimi talmente, che i due lati AC, DC siano a dirittura; e per l'uguaglianza degli angoli saranno ancora a dirittura li due BC, EC (54). Quindi congiunta la AE, sarà il triangolo ABC al triangolo AEC, come BC ad EC; ed il triangolo DEC al triangolo AEC, come DC ad AC (351). Ma per ipotesi BC sta a EC, come DC ad AC. Dunque sarà ancora come il triangolo ABC al triangolo AEC, così il triangolo DEC all'istesso triangolo AEC (271); e pertanto li due ABC, DEC saranno tra loro eguali (274).

364. Per lo contrario poi se due triangoli sono eguali, ed anno un'angolo eguale ad un'angolo, avranno li lati intorno a questi angoli reciproca-

men-

mente proporzionali. Perciò nelli due triangoli ABC, DEC restino come prima eguali li due angoli ACB, DCE, ma sia ora il triangolo ACB eguale al triangolo DEC. Io dico, che sarà come BC ad EC, così DC ad AC. Diasi alli triangoli la stessa situazione, tanto che siano a dirittura così li due lati AC, DC, come gli altri due BC, EC; e congiungasi la AE. Essendo adunque eguali li due triangoli ABC, DEC, saranno eguali altresì le ragioni, che i medesimi anno al terzo AEC (272). Ma il triangolo ABC sta al triangolo AEC, come BC ad EC; ed il triangolo DEC sta al triangolo AEC, come DC ad AC (351). Dunque sarà ancora come BC ad EC, così DC ad AC (271). Fig. 160.

365. Questi due teoremi sono casi speziali delli due precedenti; e perciò possono ancora da quelli dedursi nella maniera, che segue. Si abbassino sulle basi BC, EC le perpendicolari AF, DG (50); e per l'uguaglianza degli angoli ACB, DCE saranno equiangoli li due triangoli ACF, DCG. Onde dovendo essere come DC a DG, così AC ad AF (316); sarà permutando come DC ad AC, così DG ad AF (303). Quindi ponendosi in primo luogo, che BC sia ad EC, come DC ad AC; sarà ancora come BC ad EC, così DG ad AF (271); e pertanto li due triangoli ABC, DEC dovranno essere tra loro eguali (361). Ponendosi poscia, che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEC; sarà come BC ad EC, così DG ad AF (362); ed in conseguenza sarà ancora come BC ad EC, così DC ad AC (271). Fig. 160.

366. Tutti quattro i riferiti teoremi debbono aver luogo ancora per rapporto alli parallelogrammi, come quelli, che si dividono dalle loro diagonali in due triangoli eguali (91). Quindi siccome se la base, e l'altezza di un parallelogrammo sono reciproche colla base, e coll'altezza di un'altro, li due parallelogrammi saranno tra loro eguali; così per lo contrario essendo i medesimi eguali, dovranno la base, e l'altezza di uno di essi essere

reci-

reciproche colla base, e coll'altezza dell'altro. Ed in oltre, conforme se due parallelogrammi anno un'angolo eguale ad un'angolo, ed i lati intorno a questi angoli reciprocamente proporzionali; saranno tra loro eguali; così essendo i medesimi eguali, ed avendo un'angolo eguale ad un'angolo, dovranno avere i lati intorno à questi angoli reciprocamente proporzionali.

367. Per maggiormente dilucidare tutta questa teoria, noteremo in questo luogo, che una ragione composta da due altre ragioni in due maniere può essere di uguaglianza. La prima si è, quando è tale ciascuna delle due componenti; poicche dovendo essere l'unità medesima la quantità dell'una, e dell'altra (269), sarà eziandio l'unità la quantità della ragione composta, e pertanto ancora questa sarà di uguaglianza. L'altra si è, quando delle due ragioni componenti una è inversa ovvero reciproca dell'altra; poicche dovendo la quantità di una di esse essere il contrappolto della quantità dell'altra, si produrrà similmente l'unità colla loro multiplicazione, e perciò la ragione composta pure sarà di uguaglianza.

368. Or due triangoli, o due parallelogrammi generalmente sono tra di essi in ragion composta delle basi, e delle altezze (354. 357). Onde la loro ragione sarà di uguaglianza non solo quando è tale così la ragione delle basi, come quella delle altezze, ma ancora quando di queste due l'una è reciproca dell'altra; e perciò due triangoli, o due parallelogrammi dovranno essere tra loro eguali, quando la base, e l'altezza di uno di essi sono reciproche colla base, e coll'altezza dell'altro. L'egualità poi delli due triangoli, o delli due parallelogrammi fa, che la ragione composta dalle loro basi, e dalle loro altezze sia di uguaglianza; e pertanto non possono due triangoli, o due parallelogrammi essere tra loro eguali, senza che la base, e l'altezza di uno di essi siano reciproche colla base, e coll'altezza dell'altro.

369. Qualora poi due triangoli, o due parallelo-

lo-

logrammi anno un'angolo eguale ad un'angolo, la loro ragione si compone dalli lati, che sono intorno agli angoli eguali (355. 357). Onde sarà la medesima di uguaglianza non solo quando sono tali le ragioni de' lati sudetti, ma ancora quando di esse l'una è reciproca dell'altra; e perciò due triangoli, o due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo, dovranno essere tra loro eguali, quando intorno a questi angoli anno ancora i lati reciprocamente proporzionali. L'egualità poi delli due triangoli, o delli due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo, fa, che la ragione composta dalli lati esistenti intorno agli angoli eguali sia di uguaglianza; e pertanto due triangoli, o due parallelogrammi, che anno un'angolo eguale ad un'angolo, non possono essere tra loro eguali, senza che siano reciprocamente proporzionali li lati, li quali stanno intorno agli angoli eguali.

## §. III.

### *Di una proprietà singolare delle rette proporzionali.*

370. Dalla teoria precedente puo dedursi una proprietà molto singolare delle rette proporzionali, e si è, che il rettangolo delle estreme debba essere eguale al rettangolo di quelle di mezzo. Siano perciò le quattro rette A, B, C, D; e sia come A a B, così C a D. Facciasi così il rettangolo delle due A, e D come il rettangolo delle altre due B, e C (110), li quali in conseguenza saranno due parallelogrammi, che avranno un'angolo eguale ad un'angolo. Ma essendo per ipotesi come A a B, così C a D, li lati intorno agli angoli eguali vengono ad essere reciprocamente proporzionali. Dunque li medesimi parallelogrammi saranno tra loro eguali (366); e pertanto il rettangolo delle due A, e D sarà eguale al rettangolo delle altre due B, e C. Fig. 161.

371. Que-

371. Questa proprietà talmente appartiene alle rette proporzionali, che per lo contrario se vi sono quattro rette, ed il rettangolo delle estreme sia eguale al rettangolo di quelle di mezzo, le medesime dovranno essere proporzionali. Per dimostrarlo, siano le quattro rette A, B, C, D; e pongasi, che il rettangolo delle due A, e D sia eguale al rettangolo delle due B, e C. Facciansi questi rettangoli (110), li quali in conseguenza saranno due parallelogrammi, che avranno un'angolo eguale ad un'angolo. Ma per l'uguaglianza degli stessi parallelogrammi li lati intorno agli angoli eguali debbono essere reciprocamente proporzionali (366). Dunque sarà come A a B, così C a D.

Fig.161.

372. Egli è vero, che quando la proporzione è continua, ella sossiste in tre soli termini. Ma secondo è stato avvertito altrove (278), il termine di mezzo si prende due volte; onde la medesima proprietà dee aver luogo eziandio nelle rette, che formano una proporzione continua. Intanto, perchè il rettangolo fatto da due rette eguali non è differente dal quadrato di una di esse; egli è facile ad intendersi, che essendo tre rette continuamente proporzionali, il rettangolo delle estreme debba essere eguale al quadrato di quella di mezzo; e per lo contrario che se di tre rette il rettangolo delle estreme sia eguale al quadrato di quella di mezzo, le medesime debbano essere continuamente proporzionali.

373. Or di quanta importanza sia nelle speculazioni geometriche sì fatta proprietà, non può abbastanza ridirsi. Per mezzo di essa vedesi chiaramente, che essendo due rette reciproche con due altre, debbano i rettangoli dell'une, e dell'altre essere tra loro eguali; e per lo contrario, che essendo il rettangolo di due rette eguale al rettangolo di altre due, debbano queste con quelle essere reciproche. Vedesi ancora, che essendo una retta divisa in estrema, e media ragione, debba il rettangolo della tutta, e della parte minore es-

sere

ſere eguale al quadrato della parte maggiore; e per lo contrario che eſſendo il rettangolo della tutta, e di una parte eguale al quadrato dell'altra parte, debba la retta eſſere diviſa in eſtrema, e media ragione.

374. Dalla ſteſſa proprietà delle rette proporzionali puo dedurſi facilmente la verità di quel tanto fu dimoſtrato intorno al triangolo rettangolo (129), cioè che il quadrato del lato chiamato ipotenuſa ſia eguale alli quadrati degli altri due lati. Imperocchè, ſe ABC ſia il triangolo rettangolo, e dall'angolo retto A ſia abbaſſata sull'ipotenuſa BC la perpendicolare AD (50); ſarà come BC ad AB, così AB a BD; e come BC ad AC, così AC a CD (323). Onde ſarà tanto il rettangolo delle due BC, BD eguale al quadrato di AB, quanto il rettangolo delle due BC, CD eguale al quadrato di AC. Ma a quelli due rettangoli inſieme è eguale il quadrato dell'ipotenuſa BC (118). Dunque il quadrato della ſteſſa ipotenuſa BC ſarà eguale ancora alli quadrati degli altri due lati AB, AC. Fig. 162.

375. Dal medeſimo fonte puo ricavarſi ancora la proprietà del cerchio altrove da noi dimoſtrata (189), cioè che il quadrato della retta abbaſſata da un punto della circonferenza perpendicolarmente sul diametro ſia eguale al rettangolo fatto dalle due porzioni dell'iſteſſo diametro. Imperocchè, ſe BC ſia il diametro del cerchio, ed AD la perpendicolare abbaſſata su di eſſo da un punto A della circonferenza; congiunte le due AB, AC, ſarà retto l'angolo BAC (177). Onde perche la medeſima AD viene ad eſſere perpendicolare sull'ipotenuſa di un triangolo rettangolo; ſaranno le tre BD, AD, CD continuamente proporzionali (323); e pertanto il rettangolo delle eſtreme BD, CD ſarà eguale al quadrato di quella di mezzo AD. Fig. 162.

376. E ſiccome intorno al cerchio fu dimoſtrato ancora, che interſegandoſi due rette, o dentro, o fuori di eſſo, il rettangolo delle porzioni di una delle due

L ſia

sia eguale al rettangolo delle porzioni dell' altra (192. 194); così eziandio quest' altra affezione del cerchio puo dedursi dallo stesso principio. Siano per-
Fig. 163. 164. ciò AC, BD le due rette situate nel cerchio ABC, le quali s' incontrino tra di esse sia dentro, sia fuori nel punto E. E poicche congiunte le due AD, BC, sono eguali li due angoli DAC, DBC (175); sarà il triangolo AED equiangolo col triangolo BCE. Onde dovendo essere come AE a DE, così BE a CE (316); sarà il rettangolo delle due AE, CE eguale al rettangolo delle altre due BE, DE.

377. Quando le due rette s' incontrano fuori del cerchio, può avvenire, che una di esse sia tangente; ed in questo caso fu dimostrato, che il rettangolo delle due porzioni della secante sia eguale al quadrato della tangente (196). Ma ciò ancora ricavasi facilmente dalla proprietà delle rette pro-
Fig. 165. porzionali. Imperocchè, se BE sia la tangente del cerchio, ed AE la secante; congiunte le due AB, CB, sarà l' angolo CBE eguale all' angolo CAB (178). Quindi essendo equiangoli li due triangoli ABE, BCE, sarà come AE a BE, così BE a CE (316); e pertanto il rettangolo delle due AE, CE sarà eguale al quadrato della tangente BE.

378. Ma tralasciati questi esempj, dalli quali niente si ricava di nuovo, dimostreremo più tosto colla proprietà delle rette proporzionali un' altra affezione singolare del cerchio; e si è, che iscritto dentro di esso un quadrilatero, il rettangolo delle due diagonali sia eguale alli rettangoli delli
Fig. 166. lati opposti. Perciò dentro del cerchio ABC iscrivasi il quadrilatero ABCD, in cui tirate le diagonali AC, BD, facciasi l' angolo ADE eguale all' angolo CDB (40). Essendo adunque equiangoli così li due triangoli DBC, DAE, come li due DBA, DCE; sarà come BD a DC, così AD ad AE; e come BD ad AB, così CD a CE (316). Onde li due rettangoli di BC in AD, e di AB in CD saranno eguali agli altri due di BD in AE, e di BD in CE. Ma questi due sono eguali al solo rettangolo di BD in AC (115). Dunque al

me-

medesimo rettangolo di BD in AC saranno eguali ancora quelli due (11).

## §. IV.

*Della simiglianza delle figure rettilinee.*

377. DUe figure rettilinee, che sono di una medesima spezie, si dicono essere tra loro simili, quante volte hanno gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e proporzionali altresì i lati esistenti intorno agli angoli eguali. Così il pentagono ABCDE si dirà essere simile all'altro pentagono FGHIL, se essendo l'angolo A eguale all'angolo F, l'angolo B eguale all'angolo G, l'angolo C eguale all'angolo H, l'angolo D eguale all'angolo I, e l'angolo E eguale all'angolo L; sia ancora come AB a BC, così FG a GH; come BC a CD, così GH ad HI; come CD a DE, così HI ad IL; e come DE ad EA, così IL ad LF. Fig.167.

380. Trattandosi intanto della simiglianza di due triangoli, basterà assicurarsi, che vi sia una delle due riferite condizioni; poicche insieme con quella vi dovrà essere ancora l'altra; per essere stato dimostrato, che tanto nelli triangoli equiangoli debbano essere proporzionali i lati esistenti intorno agli angoli eguali (316); quanto nelli triangoli, che hanno i lati proporzionali, debbano essere eguali gli angoli, intorno a cui quelli lati sono situati (319). Onde così li triangoli, che si ritrovano essere equiangoli, come gli altri, nelli quali i lati si scorgono proporzionali, debbono subito senz'altro esame pronunciarsi simili tra loro.

381. Ma oltre a questi due, abbiamo ancora due altri mezzi per giudicare della simiglianza di due triangoli. Il primo si è, di vedere se li due triangoli abbiano un'angolo eguale ad un'angolo, e li lati intorno a questi angoli nella stessa ragione. L'altro si è d' investigare, se gli stessi due triangoli abbiano due angoli eguali, altri due della stessa spe-

 zie,

zie, e li lati opposti a detti angoli nella medesima ragione. Imperocchè, secondo è stato dimostrato di sopra, li due triangoli debbono essere equiangoli tanto nel primo caso (320), quanto nel secondo (321); onde in amendue li casi li medesimi saranno tra loro simili.

382. E quindi simili eziandio saranno due triangoli, se essendo due lati nella stessa ragione con due lati, e dandosi alli rimanenti un termine comune, siano paralleli li lati omologi. Per dimostrarlo, siano li due triangoli ABC, DCE, nelli quali pongasi, che li due lati AB, AC siano
Fig.168. nella stessa ragione colli due DC, DE; e dato alli rimanenti BC, CE il comune termine C, siano ancora paralleli così li due AB, DC, come li due AC, DE. Per queste parallele adunque sarà allo stesso angolo ACD eguale tanto l'angolo BAC, quanto l'angolo CDE (61). Onde dovendo essere eguali tra loro questi due angoli (11), avranno li due triangoli un' angolo eguale ad un angolo, e li lati intorno a questi angoli nella stessa ragione: e perciò li medesimi triangoli saranno tra di essi simili (381).

383. Con questa occasione notisi in questo luogo, che sempre quando in due triangoli due lati sono nella stessa ragione con due lati, e dato alli rimanenti un comune termine sono paralleli li lati omologi, li rimanenti lati debbono essere tra loro a dirittura. La ragione è chiara. Imperocchè, posto di nuovo, che ABC, DCE siano que-
Fig.168. sti tali triangoli; di già per quel tanto è stato dimostrato debbono essere simili (382). Onde dovendo essere l' angolo ACB eguale all' angolo DEC, ed essendo l'angolo ACD eguale all'angolo CDE; sarà tutto l'angolo DCB eguale alli due DEC, CDE (13). Quindi coll'aggiunta del comune DCE, saranno li due DCB, DCE eguali alli tre angoli del triangolo DCE; e perciò dovendo essere quelli due insieme eguali a due retti (71), saranno li due lati BC, CE tra loro a dirittura (52).

384. Per quanto poi alli parallelogrammi, se essi hanno

hanno un'angolo comune, e sono situati intorno ad una stessa diagonale, debbono essere tra loro simili. Per dimostrarlo, siano li due parallelogrammi ABCD, AEFG, li quali forniti del comune angolo A siano situati intorno alla medesima diagonale AC. Dovendo adunque essere parallele così le due BC, EF, come le due CD, FG; chiaro si è, che li due parallelogrammi siano equiangoli. Ma per le stesse parallele sono ancora equiangoli tanto li due triangoli ABC, AEF, quanto gli altri due ACD, AFG. Dunque dovendo essere come AB a BC, così AE ad EF, e come CD ad AD, così FG ad AG (316); gli stessi due parallelogrammi avranno ancora i lati proporzionali, ed in conseguenza saranno simili. Fig. 169.

385. Il converso di ciò dee ancora aver luogo, cioè, che essendo due parallelogrammi simili, ed avendo un'angolo comune, debbano essere situati intorno ad una stessa diagonale. Perciò li due parallelogrammi ABCD, AEFG, che hanno il comune angolo A, ponganli ora tra loro simili; e per la loro simiglianza non solo sarà l'angolo ABC eguale all'angolo AEF, ma sarà ancora come AB a BC, così AE ad EF. Quindi congiunte le due diagonali AC, AF, saranno equiangoli li due triangoli ABC, AEF (320); con che dovendo essere l'angolo BAC eguale all'angolo EAF, formeranno le due diagonali una medesima retta; e per tanto li due parallelogrammi saranno situati intorno ad una stessa diagonale. Fig. 169.

386. Essendo così, possiamo eziandio dimostrare, che di tutti i parallelogrammi situati sopra una data retta, e mancanti dalla medesima per altri parallelogrammi tra loro simili, il massimo sia quello, che sta situato sulla metà. Sia perciò AB la retta data, su di cui siano situati li due parallelogrammi ACDE, ALIG mancanti dalla stessa retta per gli altri due BCDF, BLIH tra di essi simili. Io dico, che essendo AC la metà della retta AB, il parallelogrammo ACDE debba essere maggiore dell'altro ALIG. Per dimostrarlo, Fig. 170. 171.

tirisi la diagonale BD, la quale per la simiglianza delli due parallelogrammi BCDF, BLIH passerà per lo punto I; e facciasi, che convengano tra loro così le due CD, GH, come le due IL, EF.

387. Pongasi primieramente, che AL sia maggiore di AC; ed essendo eguali le due DE, DF, Fig.170. sarà il parallelogrammo DG eguale ancora all'altro parallelogrammo DH (94). Ma li due CI, IF sono eziandio tra loro eguali (92). Dunque siccome DH è maggiore di IF, così ancora DG sarà maggiore di CI; ed in conseguenza coll'aggiunta del comune CG, sarà il parallelogrammo ACDE similmente maggiore del parallelogrammo ALIG. Pongasi in secondo luogo, che AL Fig.171. sia minore di AC; ed essendo eguali così li due parallelogrammi DL, DH, come li due DH, DG; saranno eguali ancora li due DL, DG. Onde dovendo essere DL maggiore di IE; coll'aggiunta del comune LE sarà il parallelogrammo ACDE eziandio maggiore del parallelogrammo ALIG.

388. Generalmente poi le figure poligone simili debbono dividersi in triangoli non solo eguali Fig.167. di numero, ma simili ancora tra loro. Per dimostrarlo, siano ABCDE, FGHIL queste tali figure, le quali dividansi in triangoli per mezzo di rette tirate dagli angoli eguali A, ed F agli altri opposti. E poicchè per la simiglianza delle figure l'angolo B è eguale all'angolo G, e li lati intorno a questi angoli sono nella stessa ragione; li due triangoli ABC, FGH saranno equiangoli (320), ed in conseguenza simili (381). Quindi dovendo essere AC a BC, come FH a GH, ed essendo BC a CD, come GH ad HI; sarà ordinando come AC a CD, così FH ad HI (296); e pertanto eziandio li due triangoli ACD, FHI saranno simili. E dell'istessa maniera si dimostreranno simili parimente gli altri due rimanenti triangoli.

389. Per lo contrario le figure poligone, nate dall' ordinata unione de' triangoli simili, debbono

essere

essere eziandio simili. Per comprenderne la ragione, alli due triangoli simili ABC, FGH aggiunganli con ordine gli altri due ancora simili ACD, AHI. Fig. 167.
E poicchè tanto in quelli, quanto in questi sono eguali così gli angoli, come le ragioni de' lati; ancora li due quadrilateri ABCD, FGHI saranno equiangoli, ed avranno proporzionali li lati intorno agli angoli eguali. Aggiunganli poscia a questi due quadrilateri eziandio con ordine gli altri due triangoli simili ADE, FIL; e li pentagoni ABCDE, FGHIL, che si avranno coll' aggiunta di essi, per la medesima ragione ancora saranno forniti delle stesse due condizioni. E poicchè coll' aggiunta di quanti si vogliano altri triangoli simili dee sempre avvenire lo stesso, perciò le figure poligone, che si producono in sì fatta guisa, saranno sempre simili tra loro.

390. E quindi ora egli è facile di descrivere sopra una data retta una figura rettilinea, che sia simile ad un' altra figura rettilinea data. Sia perciò AB la data retta, ed FGHIL la data figura rettilinea. Dividasi questa figura per mezzo delle rette FH, FI in triangoli. E posto, che la retta AB debba essere omologa col lato FG, facciasi così l'angolo ABC eguale all' angolo FGH, come l' angolo BAC eguale all'angolo GFH (40); tanto che li due triangoli ABC, FGH siano equiangoli, ed in conseguenza simili. Facciasi ancora tanto l'angolo ACD eguale all' angolo FHI, quanto l' angolo CAD eguale all'angolo HFI; e saranno simili altresì li due triangoli ACD, FHI. Facciasi finalmente così l'angolo ADE eguale all' angolo FIL, come l'angolo DAE eguale all'angolo IFL; e simili eziandio saranno li due triangoli ADE, FIL. Onde le due figure ABCDE, FGHIL, come nate dall'unione ordinata de' triangoli simili, saranno parimente simili tra loro (389). Fig. 167.

391. Del rimanente dalla nozione stessa delle figure simili vedesi chiaramente, che le figure simili ad una terza siano simili ancora tra loro. Imperocchè, siccome due figure non possono essere

 equian-

equiangole con una terza, se non siano equiangole eziandio tra di esse; così le ragioni delli lati di due figure non possono essere eguali alle ragioni delli lati di un' altra, se non siano parimente tra loro eguali. Vedesi ancora, che le figure regolari di una medesima spezie siano tutte simili tra di esse. Poicchè conforme per rapportarsi ad una stessa spezie debbono avere gli angoli eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno (212); così per essere in ciascuna figura eguali li lati, le ragioni di questi in amendue le figure sono di uguaglianza (269), ed in conseguenza tra di esse eguali.

## §. V

### *Della ragione, in cui sono le figure rettilinee simili.*

392. La ragione, in cui sono le figure rettilinee simili, merita di essere spezialmente considerata, sì perchè è alquanto diversa da quella dell' altre, come ancora perche l' uso di essa nelle ricerche geometriche è molto frequente. Ed in primo luogo egli è facile il dimostrare, che li triangoli simili debbano essere in duplicata ragione delli loro lati omologi. Siano perciò ABC, DEF li
Fig. 172. due triangoli simili, li quali abbiano l' angolo A eguale all' angolo D, l' angolo B eguale all' angolo E, e l' angolo C eguale all' angolo F. Li lati adunque AB, BC saranno nella stessa ragione colli lati DE, EF. Onde dovendo essere come AB a BC, così DE ad EF; sarà permutando come AB a DE, così BC ad EF (303). Ma per l' uguaglianza degli angoli B, ed E il triangolo ABC sta al triangolo DEF in ragion composta di AB a DE, e di BC ad EF (355). Dunque essendo queste due ragioni eguali, sarà la ragione degli stessi triangoli duplicata di ciascuna di esse (280); e perciò li triangoli simili saranno in duplicata ragione delli loro lati omologi.

393. Quindi può dimostrarsi in secondo luogo, che

che li triangoli simili, nelli quali si dividono due figure poligone simili, debbano essere tra loro proporzionali. Perciò siano ABCDE, FGHIL le due figure poligone simili; e pongasi, che il triangolo ABC sia simile al triangolo FGH, il triangolo ACD simile al triangolo AHI, ed il triangolo ADE simile al triangolo AIL. Essendo adunque nella duplicata ragione delli lati omologi AC, FH tanto li due triangoli ABC, FGH, quanto li due ACD, FHI (392); sarà il triangolo ABC al triangolo FGH, come il triangolo ACD al triangolo FHI. E similmente essendo nella duplicata ragione delli lati omologi AD, FI così li due triangoli ACD, FHI, come li due ADE, FIL; sarà come il triangolo ACD al triangolo FHI, così il triangolo ADE al triangolo FIL. Onde li tre triangoli ABC, ACD, ADE della figura ABCDE saranno proporzionali alli tre triangoli FGH, FHI, FIL dell' altra figura FGHIL. Fig. 167.

394. Ed essendo così, puo dimostrarsi finalmente, che ancora le figure poligone simili debbano essere in duplicata ragione delli loro lati omologi. Perciò siano di nuovo ABCDE, FGHIL le due figure poligone simili, le quali dividansi in triangoli eziandio simili tra loro. E per quel tanto è stato dimostrato (393), li triangoli ABC, ACD, ADE della figura ABCDE saranno proporzionali alli triangoli FGH, FHI, FIL dell' altra figura FGHIL. Quindi la somma degli uni alla somma degli altri sarà ancora nella stessa ragione (307); ed in conseguenza la figura ABCDE somma delli primi sarà alla figura FGHIL somma delli secondi, come il triangolo ABC al triangolo FGH. Ma questi triangoli come simili, sono in duplicata ragione delli lati omologi AB, FG (392). Dunque nella stessa duplicata ragione saranno ancora le due figure poligone simili (271). Fig. 167.

395. Or da ciò, che tutte le figure simili siano in duplicata ragione de' lati omologi, possono dimostrarsi ancora tre altri teoremi. Il primo si è, che essendo quattro rette proporzionali, e descrivendosi

figu-

figure simili tanto sopra la prima e la seconda quanto sopra la terza e la quarta, ancora queste figure siano proporzionali. Imperocchè per la proporzionalità delle rette, essendo la ragione della prima alla seconda eguale alla ragione della terza alla quarta; saranno eguali altresì le loro duplicate (288). Ma per la simiglianza delle figure descritte, le prime due sono in duplicata ragione della prima alla seconda retta, e le altre due sono in duplicata ragione della terza alla quarta retta (394). Dunque ancora la ragione delle prime due figure sarà eguale alla ragione delle altre due; e perciò tutte quattro saranno tra loro proporzionali.

396. L'altro si è, che se vi sono quattro rette, e descritte figure simili tanto sopra la prima e la seconda, quanto sopra la terza e la quarta, siano proporzionali queste figure, ancora le quattro rette debbano essere proporzionali. Imperocchè per la proporzionalità delle figure la ragione delle prime due è eguale alla ragione delle altre due. Ma per la simiglianza delle medesime le prime due sono in duplicata ragione della prima alla seconda retta, e le altre due sono in duplicata ragione della terza alla quarta retta (394). Dunque dovendo essere eguali queste due ragioni duplicate, saranno eguali altresì le loro semplici (288); e pertanto le quattro rette saranno proporzionali.

397. Il terzo ed ultimo si è, che descrivendosi tre figure simili sopra li lati del triangolo rettangolo, la descritta sull'ipotenusa debba essere eguale alle due descritte sopra gli altri due lati. Sia
Fig.173. perciò il triangolo ABC rettangolo in A, e sopra li suoi lati intendansi descritti così tre quadrati, come tre altri poligoni simili. Saranno adunque così gli uni, come gli altri in duplicata ragione delli lati medesimi (394); e perciò li poligoni descritti sopra li lati AB, AC saranno al poligono descritto sull'ipotenusa BC, come sono li quadrati di quegli stessi lati AB, AC al quadrato della medesima ipotenusa BC. Ma tra li quadrati delli lati

AB,

AB, AC, ed il quadrato dell'ipotenusa BC vi è ragione di uguaglianza (129). Dunque di uguaglianza sarà ancora la ragione, che vi è trà li poligoni descritti sulli medesimi lati, ed il poligono descritto sulla stessa ipotenusa.

398. Del rimanente siccome tra tutte le figure rettilinee le più semplici a concepirsi sono li quadrati; così niente e più frequente presso li Geometri, quanto di esprimere la ragione di due figure simili per mezzo della ragione, che hanno li quadrati delli loro lati omologi. Onde supposto, che AB, FG siano li lati omologi delle due figure simili ABCDE, FGHIL, si dirà, che la figura ABCDE sia alla figura FGHIL, come il quadrato di AB al quadrato di FG. Intanto se in ordine alle due AB, FG ritrovisi la terza proporzionale, che sia FM (326); sarà ancora la figura ABCDE alla figura FGHIL, come AB ad FM. Poicche conforme le due figure per la loro simiglianza sono in duplicata ragione delli lati omologi AB, FG (394); così per essere proporzionali le tre rette AB, FG, FM, eziandio AB ad FM sarà in duplicata ragione di AB ad FG (287). Fig.167.

399. Essendo così, niente sarà più facile, quanto di descrivere una figura, a cui un'altra data non solo sia simile, ma abbia ancora data ragione. Pongasi perciò, che ABCDE sia la figura data, e che la data ragione sia di AB ad FM. Ritrovisi tra le due AB, FM la mezza proporzionale, che sia FG (327); e descritta sopra questa FG la figura FGHIL simile alla data ABCDE (390), sarà la medesima FGHIL la figura, che si dimanda. Imperocchè, siccome ella per la costruzione medesima è simile alla figura data ABCDE; così per essere FM terza proporzionale in ordine alli lati omologi AB, FG delle due figure, sarà la figura ABCDE alla figura FGHIL, come AB ad FM (398). Fig.167.

400. Che se poi date due figure, come A, e B, se ne voglia una terza, che sia simile alla prima, Fig.174.

ed

ed eguale alla seconda; in tal caso descrivasi primieramente sul lato GD della prima figura il parallelogrammo CE, che sia eguale alla medesima (104); indi sul lato DE descrivasi l'altro parallelogrammo EF, che sia eguale alla seconda figura, e che abbia l'altro lato DF a dirittura con CD (103); ritrovisi poscia tra le due CD, DF la mezza proporzionale, che sia GH (326); e descrivendosi sopra questa CH la figura I simile ad A (390), sarà la stessa eguale ancora all'altra B. Imperocchè le due figure A, ed I, come simili, sono nella ragione di CD a DF (398), cioè del parallelogrammo CE al parallelogrammo EF (356), o pure della figura A alla figura B. Onde avendo la figura A l'istessa ragione ad I, che a B; saranno le due I, e B tra loro eguali (274).

401. E quindi ora potranno facilmente risolversi due altri problemi. Il primo si è di descrivere sopra una retta data un parallelogrammo, eguale ad una data figura, e mancante dalla stessa retta per un'altro parallelogrammo, simile ad un dato. Sia
Fig. 170. perciò AB la data retta, P la data figura, e Q il parallelogrammo dato. Dividasi la AB egualmente in C (42), e sulla metà BC descrivasi il parallelogrammo CF simile al dato Q (390). E siccome il problema sarà risoluto, se l'adjacente CE sia eguale alla figura P; così essendo altrimente, non potrà egli risolversi, se non sia CE maggiore di P (386). Ritrovisi adunque l'eccesso, con cui CE supera P, e sia R (106); e descritto il parallelogrammo MN, che sia eguale ad R, e simile a CF (400), sarà AI il parallelogrammo, che si dimanda.

402. Imperocchè li due CF, MN, come simili, debbono essere intorno alla stessa diagonale (385). Onde, compita la figura, saranno simili ancora li due CF, HL (384); e perciò AI sarà mancante dalla retta AB per un parallelogrammo simile a CF, ovvero Q. In oltre, essendo CH eguale a CG (94), IF eguale a CI (92), ed MN eguale ad R; sarà CF ovvero CE eguale ad AI, ed R insie-

insieme. Ma essendo R l'eccesso, con cui CE supera P, l'istesso CE è eguale ancora a P, ed R insieme. Dunque AI, ed R insieme saranno eguali a P, ed R insieme; e per tanto, tolto il comune R, sarà AI eguale a P.

401. L'altro problema si è di descrivere sopra una data retta un parallelogrammo, che sia eguale ad una data figura, ed ecceda la stessa retta per un'altro parallelogrammo, simile ad un dato. Fig.175.
Per risolverlo, sia di nuovo AB la data retta, P la data figura, e Q il parallelogrammo dato. Dividasi la AB egualmente in C (42); e descritto sulla metà BC il parallelogrammo CF simile al dato Q (390), ritrovisi la somma di CF, e P, che sia R (106). Descrivasi poscia il parallelogrammo MN, che sia eguale ad R, e simile a CF (400); e sarà AI il parallelogrammo, che si dimanda.

404. Imperocchè li due CF, MN, come simili, debbono essere intorno alla stessa diagonale DI (385). Onde, compita la figura, saranno simili ancora così li due MN, HL (384), come li due HL, CF (391); e perciò AI eccederà la retta AB per un parallelogrammo simile a CF, ovvero Q. In oltre, essendo CH eguale a CG (94), e BN eguale a CH (92); sarà MN eguale ad AI insieme con CF. Ma l'istesso MN, come eguale ad R, è eguale ancora a P insieme con CF. Dunque AI, e CF insieme saranno eguali a P, e CF insieme; e pertanto, tolto il comune CF, sarà AI eguale a P.

## CAPITOLO IV.

### *Della dottrina delle proporzioni applicata al cerchio.*

405. Finalmente applicheremo la dottrina delle proporzioni alla figura circolare, che è l'unica tra le figure curvilinee considerata da noi in questi Elementi. Ma una tal applicazione riescirebbe o molto scarsa, o molto penosa, se continuas-

tinuassimo a riguardare il cerchio sotto la sua forma consueta. Quindi faremo vedere in questo capitolo, potersi egli considerare ancora come un poligono regolare, di cui il numero de' lati sia maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi. Ed in questa maniera oltre alli teoremi, che con facilità si deducono dalla sua forma ordinaria, agevole cosa sarà di dimostrarne altri molti, che forze sono li più eleganti, e li più profittevoli. Distingueremo in tanto gli uni dagli altri, e daremo a quelli il primo luogo, che possono dimostrarsi, senza punto alterare la nozione comune del cerchio.

## §. I.

*Della ragione, in cui sono gli archi, ed i settori circolari.*

406. CONforme arco si appella qualunque porzione della circonferenza del cerchio, così dicesi settore lo spazio circolare contenuto da due raggi, e dall'arco corrispondente. Quindi
Fig.176. se dal centro A del cerchio BCDE tirinsi così li due raggi AB, AC, come gli altri due AD, AE; non meno lo spazio circolare BAC, che l'altro DAE dovrà dirsi settore; ed egli è facile il dimostrare, che essendo eguali li due archi BC, DE, debbano essere eguali similmente li due settori ABC, ADE terminati da quegli archi. Imperocchè con adattarsi l'uno sull'altro talmente, che il raggio AB cada sul raggio AD; per l'uguaglianza delle rette tirate dal centro alla circonferenza, caderà ancora l'arco BC sull' arco DE. Onde essendo eguali questi due archi, caderà altresì tanto il punto C sul punto E, quanto il raggio AC sul raggio AE; e pertanto combaciandosi li due settori ABC, DEF, saranno i medesimi tra loro eguali.

407. Generalmente poi due settori di un medesimo cerchio debbono essere tra loro, come gli archi,

archi, per cui si terminano, dimodoche il settore ABC sarà al settore ACD, come l'arco BC all'arco CD. Per dimostrarlo, concepiscansi i due archi BC, CD divisi in parti, che siano eguali all'aliquota comune, che debbono avere (265); e se dalli punti della divisione intendansi tirate rette al centro A, queste divideranno i due settori ABC, ACD in altrettanti settori più piccioli, che per essere terminati da archetti eguali saranno eziandio eguali tra loro (406). Onde ancora i due settori ABC, ACD saranno divisi in parti, eguali ad un'aliquota loro comune. Ma queste comuni aliquote degli archi, e delli settori sono aliquote simili così dell' arco BC e del settore ABC, come dell'arco CD e del settore ACD. Dunque la ragione degli archi, e la ragione delli settori saranno tra di esse eguali (277); e pertanto il settore ABC sarà al settore ACD, come l'arco BC all'arco CD. Fig. 176.

408. Non solo i settori, ma ancora gli angoli situati nel centro del cerchio sono, come gli archi, sulli quali si appoggiano. Siano perciò BAC, CAD due angoli situati nel centro A del cerchio BCD. Io dico, che l'arco BC sia all'arco CD, come l'angolo BAC all'angolo CAD. Per dimostrarlo, concepiscansi di nuovo li due archi BC, CD divisi in parti, eguali all'aliquota comune, che debbono avere (265); e se dalli punti della divisione s' intendano tirate rette al centro A, queste divideranno i due angoli BAC, CAD in altrettanti angoli più piccioli, che per essere situati nel centro, e sostenuti da archetti eguali saranno eziandio eguali tra loro (185). Onde ancora li due angoli BAC, CAD saranno divisi in parti, eguali ad un'aliquota loro comune. Ma queste comuni aliquote degli archi, e degli angoli sono aliquote simili così dell'arco BC e dell'angolo BAC, come dell'arco CD e dell'angolo CAD. Dunque la ragione degli archi, e la ragione degli angoli saranno tra di esse eguali (277); e pertanto l'arco BC sarà all'arco CD, come l' angolo BAC all'angolo CAD. Fig. 176.

409.

409. Eziandio gli angoli situati nella circonferenza del cerchio debbono essere, come gli archi, sulli quali si appoggiano. Perciò prendasi nella circonferenza BED un punto F ad arbitrio, e congiungansi
Fig. 176. le rette BF, CF, DF. Io dico, che l'arco BC sia all' arco CD, come l'angolo BFC all'angolo CFD. Potrebbe ciò pruovarsi con dimostrazione non diversa dalle due precedenti, per dover essere eguali ancora gli angoli situati nella circonferenza, quantevolte sono sostenuti da archi eguali (185); ma più brevemente dimostreremo una tal verità nella maniera seguente. Poicche sulli medesimi archi BC, CD si appoggiano tanto gli angoli BAC, CAD situati nel centro, quanto gli angoli BFC, CFD situati nella circonferenza; saranno quelli doppii di questi (173); e perciò l'angolo BAC sarà all' angolo CAD, come l'angolo BFC all'angolo CFD (275). Ma di già è stato dimostrato, che l' arco BC sia all'arco CD, come l'angolo BAC all'angolo CAD (408). Dunque sarà ancora come l'arco BC all' arco CD, così l'angolo BFC all' angolo CFD (271).

410. Da questi due teoremi possiamo dedurne due altri. Il primo si è, che ogni angolo situato nel centro debba essere al quadruplo di un retto, come l' arco, che lo sostiene, alla circonferenza
Fig. 176. intera. Sia perciò BAC l'angolo situato nel centro. E supposto, che l' altro CAD sia retto; sarà l'arco CD, su cui quest'altro si appoggia, la quarta parte dell'intera circonferenza (232). Onde l'angolo CAD al suo quadruplo avrà la stessa ragione, che l'arco CD all'intera circonferenza. Ma l' angolo BAC sta all' angolo CAD, come l' arco BC all' arco CD (408). Dunque ordinando sarà come l'angolo BAC al quadruplo del retto CAD, così l'arco BC alla circonferenza intera (296).

411. L'altro si è, che ogni angolo situato nella circonferenza debba essere al doppio di un retto, come l' arco, che lo sostiene, alla circonferenza intera. Per dimostrarlo, sia BFC l'angolo situato
Fig. 177. nella circonferenza. E supposto, che l'altro CAD sia retto, sarà questo situato nel semicerchio (177); e per-

e perciò l'arco CD, su cui si appoggia, sarà la metà dell'intera circonferenza; con che l'angolo CFD sarà al suo doppio, come l'arco CD all'intera circonferenza (275). Ma l'angolo BFC sta all'angolo CFD, come l'arco BC all'arco CD (409). Dunque ordinando sarà come l'angolo BFC al doppio del retto CAD, così l'arco BC alla circonferenza intera (296).

412. Essendo così possiamo in oltre dimostrare, che se nelli centri, o nelle circonferenze di due cerchi diversi siano situati due angoli eguali, gli archi, che li sostengono, debbano essere come le circonferenze intere. Siano perciò ABC, DEF li due cerchi diversi, e li due angoli eguali situati nelli loro centri siano BGC, EHF. Essendo adunque eguali li due angoli BGC, EHF; ciascuno di essi al quadruplo di un retto avrà l'istessa ragione (273). Ma l'angolo BGC sta al quadruplo di un retto, come l'arco BC all'intera circonferenza ABC (410); e similmente l'angolo EHF sta al quadruplo di un retto, come l'arco EF all'intera circonferenza DEF. Dunque sarà ancora come l'arco BC alla circonferenza ABC, così l'arco EF alla circonferenza DEF (271); ed in conseguenza permutando l'arco BC sarà all'arco EF, come la circonferenza ABC alla circonferenza DEF (303). Fig.178.

413. Dell'istessa maniera potrà farsi la dimostrazione, se li due angoli eguali siano situati nelle circonferenze delli due cerchi. Imperocchè, supposto, che BAC, EDF siano questi tali angoli, per la loro uguaglianza avrà ciascuno di essi al doppio di un retto la stessa ragione (273). Ma l'angolo BAC sta al doppio di un retto, come l'arco BC all'intera circonferenza ABC (411); e similmente l'angolo EDF sta al doppio di un retto, come l'arco EF all'intera circonferenza DEF. Dunque sarà ancora come l'arco BC alla circonferenza ABC, così l'arco EF alla circonferenza DEF (271); ed in conseguenza permutando sarà come l'arco BC all'arco EF, così la circonferenza ABC alla circonferenza DEF (303). Oltre che dovendo questa

proporzione aver luogo, quando sono eguali gli angoli BGC, EHF situati nelli centri (412); per necessità dovrà ella sussistere ancora, essendo eguali gli altri BAC, EDF situati nelle circonferenze; poicche non puo darsi uguaglianza tra questi, senza che vi sia ancora tra quelli (172).

414. Finalmente possiamo dimostrare, che situandosi nelli centri di due cerchi diversi due angoli eguali, li settori racchiusi sotto questi angoli debbano essere come li cerchi interi. Siano perciò
Fig. 178. BGC, EHF li due angoli eguali situati nelli centri G, ed H delli due cerchi diversi ABC, DEF. E poicche il settore GBC sta al settore rimanente GCAB, come l'arco BC all'arco rimanente CAB (407); sarà componendo come il settore GBC al cerchio intero, così l'arco BC alla circonferenza intera (292). E similmente poicche il settore HEF sta al settore rimanente HFDE, come l'arco EF all'arco rimanente FDE; sarà componendo, come il settore HEF al cerchio intero, così l'arco EF alla circonferenza intera. Ma per l'uguaglianza degli angoli BGC, EHF gli archi BC, EF sono proporzionali alle loro circonferenze (412). Dunque ancora li settori GBC, HEF saranno proporzionali alli loro cerchi (271); ed in conseguenza permutando la ragione delli settori, e la ragione delli cerchi saranno tra loro eguali (303).

## §. II.

### *Degli archi circolari paragonati colle rette, che li determinano.*

415. Quantunque sia stato dimostrato, che archi eguali debbano essere sostenuti da rette eguali; tuttavolta si aumenta l'arco in maggior ragione della retta, che lo sostiene. Per dare di ciò
Fig. 179. un'esempio molto sensibile, prendansi nella circonferenza BCDE li tre archi eguali BC, CD, DE, tanto che siano eguali ancora le rette, da cui quegli archi vengono sostenuti. L'arco adunque BCD è

dop-

doppio dell'arco BC; ma essendo la retta BD minore delle due BC, CD unite insieme (24), sarà la medesima minore del doppio della sola BC. Similmente l'arco BDE è triplo dell'arco BC; ma la retta BE come minore delle due BD, DE, è molto più minore delle tre BC, CD, DE; onde la stessa BE sarà minore ancora del triplo della sola BC.

416. Giova intanto dimostrare generalmente una tal verità; e perciò prendansi nella circonferenza BCDE due archi ad arbitrio BC, CD, delli quali il primo BC pongasi maggiore dell'altro CD. Io dico, che la ragione dell'arco BC all'arco CD sia maggiore della ragione, che anno le rette, da cui detti archi vengono sostenuti. Congiungansi queste rette, e dividasi l'angolo BCD contenuto da esse egualmente per la retta CE (41), che s'incontri colla BD in F, e colla circonferenza opposta in E. Essendo adunque eguali li due angoli BCE, DCE; saranno eguali ancora tanto gli archi BE, DE, sulli quali essi si appoggiano (185), quanto le rette BE, DE, che sostengono detti archi (187). Onde abbassata sulla BD la perpendicolare EG (50), saranno eguali ancora le due BG DG (85); ed in conseguenza facendosi GH eguale a GF (31), saranno eguali altresì così le rimanenti BH, DF (13), come le due EH, EF (38); con che ancora gli angoli BEH, DEF saranno tra loro eguali (39). Fig. 189.

417. Descrivasi poscia col centro E, e coll'intervallo EF un'arco circolare. E siccome per l'uguaglianza delle due EF, EH passerà egli per lo punto H; così per essere la ED maggiore di EF, s'incontrerà il medesimo colla ED in un qualche punto, come I. Quindi il settore EFH sarà maggiore del triangolo FEH, ed il settore EFI sarà minore del triangolo FED. Onde siccome al settore EFI avrà maggior ragione il settore EFH, che il triangolo FEH (272); così il triangolo FEH avrà maggior ragione al settore EFI, che al triangolo FED (273); e perciò la ragione del

settore EFH al settore EFI sarà molto più maggiore, che la ragione del triangolo FEH al triangolo FED (271). Ma il settore EFH sta al settore EFI, come l'arco FH all'arco FI (407), o pure come l'angolo CEH all'angolo CED (408); ed il triangolo FEH sta al triangolo FED, come FH ad FD (351). Dunque la ragione dell'angolo CEH all'angolo CED sarà eziandio maggiore della ragione di FH ad FD; ed in conseguenza l'angolo CEH conterrà l'angolo CED più di quello, che FH contiene FD.

418. Or essendo eguali tanto gli angoli BEH, CED, quanto le rette BH, FD; egli non è da porsi in dubbio, che l'angolo BEH, e la retta BH egualmente contengano l'angolo CED, e la retta FD. Onde essendosi dimostrato, che l'angolo CEH contenga l'angolo CED più di quello, che FH contiene FD; nè pure potrà negarsi, che ancora l'angolo CEB debba contenere l'angolo CED più di quello, che BF contiene FD. Quindi la ragione dell'angolo CEB all'angolo CED sarà maggiore della ragione di BF ad FD. Ma per essere li due angoli CEB, CED situati nella circonferenza del cerchio BCDE, la loro ragione è eguale a quella delli due archi BC, CD, sulli quali si appoggiano (409); e per essere l'angolo BCD diviso egualmente per la retta CF, la ragione delle rette BF, FD è eguale a quella delle altre due BC, CD (314). Dunque la ragione dell'arco BC all'arco CD sarà similmenre maggiore della ragione della retta BC alla retta CD (271).

419. Le rette, che sostengono gli archi circolari, comunemente corde degli stessi archi si appellano. E quantunque per ciò, che è stato dimostrato, altra sia la ragione delle corde, ed altra quella degli archi; egli è chiaro però, che colla determinazione delle corde, debbano rimanere determinati ancora gli archi, alli quali quelle corde si rapportano. Nè dee farci difficoltà, che ogni corda sostiene insiememente due archi, li quali quasi sempre sono disuguali, cioè uno minore della

metà

metà della circonferenza, e l'altro maggiore; sì perchè le corde si rapportano propriamente agli archi, che non eccedono la metà della circonferenza; come ancora perchè determinati questi archi, ancora gli altri, che sono supplimenti di essi alla circonferenza intera, ricevono la loro determinazione.

420. Gli archi intanto, che non eccedono il quadrante, ovvero la quarta parte della circonferenza, possono determinarsi ancora con altre rette, che si appellano loro seni. Così posto, che BC, BD siano due archi non maggiori del quadrante, potrà aversi la determinazione di essi per mezzo delle perpendicolari CE, DF abbassate dalli loro termini C, e D sul raggio AB tirato all'altro termine B. Queste perpendicolari CE, DF si dicono essere seni delli due archi BC, BD. E poicchè prolungate le medesime persino a che s'incontrino colla circonferenza opposta ne' punti G, ed H, restano divisi egualmente dal raggio AB così li due archi CBG, DBH, come le loro corde CG, DH; chiaro quindi si rende, che il seno di ogni arco sia la metà della corda, che sostiene l'arco doppio. Fig. 181.

421. Ed essendo così, facilmente possiamo dimostrare, che l'arco si aumenta ancora in maggior ragione del suo seno. Pongasi perciò, che l'arco BC sia maggiore dell'arco BD. Io dico, che la ragione delli due archi BC, BD sia maggiore della ragione delli loro seni CE, DF. Imperocchè, essendo divisi egualmente dal raggio AB, così gli archi CBG, DBH, come le corde CG, DH; sarà come l'arco BC all'arco BD, così l'arco CBG all'arco DBH; e come il seno CE al seno DF, così la corda CG alla corda DH (275). Ma di già è stato dimostrato, che l'arco CBG all'arco DBH abbia maggior ragione, che la corda CG alla corda DH (416). Dunque ancora l'arco BC all'arco BD avrà maggior ragione, che il seno CE al seno DF (271). Fig. 181.

422. Gli stessi archi, che non eccedono il quadrante, possono determinarsi altresì per mezzo delle

Fig.182. le loro tangenti. Così supposto di nuovo, che BC, BD siano due archi non maggiori del quadrante, ed alzata sul raggio AB la perpendicolare BE, che s'incontri cogli altri due raggi AC, AD prolungati nelli punti E, ed F; si diranno essere le due BE, BF tangenti delli due archi BC, BD; e qualora sono determinate queste tangenti, chiara cosa si è, che ancora gli archi, alli quali si rapportano, debbano ricevere la loro determinazione. Ma per quanto alla tangente, dee ella aumentarsi in maggior ragione dell' arco: di modo che, essendo l' arco BC maggiore dell' arco BD, dovrà essere la ragione delle tangenti BE, BF maggiore di quella degli archi BC, BD, alli quali quelle tangenti si rapportano.

423. Per dimostrarlo, descrivasi col centro A, e coll' intervallo AF l'altro arco circolare GFH, il quale s' incontri con AB nel punto G, e con AE nel punto H. Essendo adunque il triangolo FAE maggiore del settore AFH, avrà il triangolo FAE maggior ragione al triangolo BAF, che il settore AFH all' istesso triangolo BAF (272). Ma per essere il triangolo BAF minore del settore AGF, il settore AFH ha maggior ragione al triangolo BAF, che all' altro settore AGF (273). Dunque la ragione del triangolo FAE al triangolo BAF sarà molto più maggiore, che la ragione del settore AFH al settore AGF (271); e perciò il triangolo FAE conterrà il triangolo BAF più di quello, che il settore AFH contiene il settore AGF.

424. Quindi perchè ogni quantità contiene se stessa una volta, ancora il triangolo BAE conterrà il triangolo BAF più di quello, che il settore AGH contiene il settore AGF; ed in conseguenza la ragione del triangolo BAE al triangolo BAF sarà maggiore della ragione del settore AGH al settore AGF. Ma il triangolo BAE sta al triangolo BAF, come BE a BF (351); ed il settore AGH sta al settore AGF, come l' arco GH all' arco GF (407), o pure come l'angolo GAH all'angolo GAF (408), o finalmente come l' arco BC

all'

all' arco BD. Dunque la ragione della tangente BE alla tangente BF sarà similmente maggiore della ragione dell'arco BC all'arco BD (271).

425. Del rimanente notisi in questo luogo, che così li seni, come le tangenti ricevono tutto il loro aumento, quante volte l'arco giunge ad essere quadrante; e quindi si è, che tali rette debbano rapportarsi propriamente ad archi non maggiori di quello. Possono in tanto le medesime rette considerarsi ancora per rapporto ad archi maggiori del quadrante; le quali però non saranno diverse da quelle, che sono seni, e tangenti degli altri archi minori, residui di quelli maggiori. In effetto, posto che BCF sia la metà della circonferenza disugualmente divisa in C, non solo la stessa CD sarà seno di amendue gli archi BC, FC, ma ancora la tangente FG dell' arco maggiore FC sarà eguale alla tangente BE dell' altro minore BC. Onde per gli archi maggiori del quadrante è necessario avvertire, che ciascuno di essi si aumenta in maggior ragione tanto del suo seno, quanto della sua tangente. Fig.181.

426. Notisi ancora, che quante volte l' arco BC diviene quadrante, a tal segno si aumenta la sua tangente BE, che giunge ad essere infinita. La ragione è chiara; poicchè facendosi l'arco BC quadrante, l'angolo BAC dee esser retto (232); onde essendo retto similmente l'angolo ABE (168); saranno parallele le due BE, AC (63); e pertanto il loro incontro, con cui resta determinata la lunghezza della tangente, si discosterà infinitamente dalla retta AB. Per quanto poi al seno CD, diventando l' arco BC quadrante, egli dee cadere sul centro A, ed in conseguenza farsi eguale al raggio medesimo. Quindi il raggio, come seno del quadrante, sarà maggiore di ogn' altro seno; e per questa ragione si appella comunemente seno massimo, o seno totale.

## §. III.

### *Della risoluzione de' problemi, che riguardano i lati, e gli angoli del triangolo.*

427. Siccome nel cerchio gli archi non sono nella ragione delle loro corde, così nel triangolo nè pure gli angoli sono nella ragione
Fig. 183. de' lati opposti. Per dimostrarlo, sia il triangolo ABC, in cui pongasi l' angolo ABC maggiore dell' angolo ACB. Io dico, che la ragione degli angoli ABC, ACB sia maggiore di quella, che hanno i lati opposti AC, AB. Imperocchè descritto il cerchio intorno al triangolo (218), sarà l' angolo ABC all' angolo ACB, come l' arco AC all'arco AB (409). Onde siccome per ipotesi l'angolo ABC è maggiore dell' angolo ACB, così l' arco AC sarà ancora maggiore dell' arco AB. Quindi la ragione degli archi AC, AB sarà maggiore della ragione, che hanno le loro corde (416); e pertanto ancora l' angolo ABC all' angolo ACB avrà maggior ragione, che il lato AC al lato AB (271).

428. Non essendo gli angoli del triangolo nella ragione de' lati opposti, ben si vede, che non senza qualche artifizio debbonsi risolvere i problemi, che riguardano i lati, e gli angoli del triangolo. Dipende un tal' artifizio dal teorema di sopra dimostrato (408), cioè, che gli angoli situati nel centro di un cerchio siano come gli archi, sulli quali si appoggiano. Imperocchè in virtù di questo teorema potrà ripetersi la quantità di un' angolo dall'arco circolare, che col vertice dell' angolo come centro, e con un dato intervallo descrivesi tra li suoi lati. Onde siccome gli stessi seni, e le stesse tangenti, con cui si determinano gli archi circolari, possono essere impiegati altresì per la determinazione degli angoli; così con farsi uso di tali rette potrà aversi la risoluzione delli riferiti problemi.

Fig. 184. 429. Posto adunque, che BAC sia un' angolo qual-

qualsivoglia, ci verrà additata la quantità di esso dall'arco BC descritto tra li suoi lati col centro A, e coll' intervallo AB di una data lunghezza. E conforme le due CD, BE sono seno, e tangente dell'arco BC; così le medesime saranno riguardate altresì come seno, e tangente dell' angolo BAC, e serviranno a determinare tanto l' uno, quanto l'altro. Quindi essendo retto l'angolo, che corrisponde al quadrante (232); dovranno essere acuti coloro, che corrispondono ad archi minori del quadrante, ed ottusi quegli altri, che corrispondono ad archi maggiori. Onde li seni, e le tangenti degli angoli ottusi saranno quelle stesse rette, che sono seni, e tangenti degli angoli acuti, che formano due retti con quegli ottusi (425).

430. Or nel triangolo rettangolo vedesi chiaramente, che prendendosi per raggio l' ipotenusa, debba farsi ciascuno lato seno dell' angolo opposto; e prendendosi per raggio uno delli due lati, che sono intorno all'angolo retto, debba farsi l' altro lato tangente dell'angolo opposto. Così nel triangolo ADC, rettangolo in D, sta preso per raggio l' ipotenusa AC, ed il lato CD ritrovasi essere seno dell' angolo opposto CAD; nel triangolo poi ABE, similmente rettangolo in B, sta preso per raggio il lato AB, e l' altro lato BE ritrovasi essere tangente dell' angolo opposto BAE. Quindi nell' istesso triangolo rettangolo debbono aver luogo tre proporzioni; poicchè I. l' ipotenusa a ciascuno lato dee essere, come il raggio al seno dell' angolo opposto, II. li due lati debbono essere tra loro, come li seni degli angoli opposti, e III. uno delli due lati dee essere all'altro lato, come il raggio alla tangente dell'angolo adjacente al primo lato, ed opposto al secondo. Fig.184.

431. Con queste tre proporzioni agevole cosa si è, risolvere i problemi, che riguardano il triangolo rettangolo. Sia perciò ABC questo tale triangolo, il quale abbia in A l' angolo retto. Ed in primo luogo, dati gli altri due angoli B, e C coll'ipotenusa BC, debbansi determinare li due lati AB, AC. Poicchè Fig.185.

chè

chè sono dati gli angoli B, e C; saranno dati ancora i seni, per mezzo de' quali essi si determinano. Quindi facendosi primieramente, come il raggio al seno dell' angolo B, così l' ipotenusa BC ad una quarta proporzionale; si avrà la lunghezza del lato AC. E facendosi ancora, come il raggio al seno dell' angolo C, così l' ipotenusa BC ad un'altra quarta proporzionale, si avrà la lunghezza dell'altro lato AB.

Fig.185. 432. In secondo luogo, dati gli altri due angoli B, e C col lato AB, debbasi determinare l'ipotenusa BC coll' altro lato AC. Poicchè sono dati gli angoli B, e C; saranno dati altresì li seni, per mezzo de' quali essi si determinano. Onde facendosi primieramente, come il seno dell' angolo C al raggio, così il lato AB ad una quarta proporzionale; si avrà la lunghezza dell' ipotenusa BC. E facendosi ancora, come il seno dell' angolo C al seno dell' angolo B, così il lato AB ad una quarta proporzionale; si avrà la lunghezza dell' altro lato AC. Ma il lato AC può determinarsi eziandio per mezzo della tangente dell' angolo B, che similmente è data; poicchè facendosi, come il raggio alla tangente dell' angolo B, così il lato AB ad una quarta proporzionale, si avrà l' altro lato AC.

Fig.185. 433. In terzo luogo, data l' ipotenusa BC col lato AB, debbansi determinare gli altri due angoli B, e C coll' altro lato AC. Facciasi come l' ipotenusa BC al lato AB, così il raggio ad una quarta proporzionale; e siccome questa dee essere il seno dell' angolo C, così per mezzo di essa resterà determinato l' angolo medesimo, colla di cui determinazione si avrà ancora quella dell' angolo B, per la ragione, che li due B, e C insieme debbono essere eguali ad un retto (71). Facciasi poscia come il raggio al seno dell' angolo B, così l' ipotenusa BC ad una quarta proporzionale; o pure come il raggio alla tangente dell' angolo B, così il lato AB ad una quarta proporzionale; o finalmente, come il seno dell' angolo C al seno dell'

an-

angolo B, così il lato AB ad una quarta proporzionale; ed in tutti tre li casi si avrà l' altro lato AC.

434. Finalmente dati li due lati AB, AC, debbansi determinare gli altri due angoli B, e C coll' ipotenusa BC. Facciasi come il lato AB al lato AC, così il raggio ad una quarta proporzionale. E poicchè questa dee essere la tangente dell' angolo B, resterà determinato per mezzo di essa il medesimo angolo, colla di cui determinazione si avrà ancora quella dell' angolo C, che è il supplimento ad un retto dell' angolo B. Facciasi poscia, come il seno dell' angolo B al raggio, così il lato AC ad una quarta proporzionale; o pure come il seno dell' angolo C al raggio, così il lato AB ad una quarta proporzionale; ed in amendue li casi si avrà la lunghezza dell' ipotenusa BC. Fig. 182.

435. Per quanto poi alli problemi, che riguardano il triangolo obliquangolo; la soluzione di essi dipende da tre teoremi. Il primo si è, che in ogni triangolo li lati debbano essere tra loro, come li seni degli angoli opposti. Per dimostrarlo, sia il triangolo ABC, intorno a cui descrivasi il cerchio, Fig. 183. che abbia per centro il punto D. Abbassate adunque da questo centro sulli lati AB, BC, CA le perpendicolari DE, DF, DG, e prolungate le medesime per fino alla circonferenza; saranno divisi egualmente da dette perpendicolari così li lati del triangolo (146), come gli archi sostenuti da detti lati (185); e pertanto le metà degli stessi lati AE, BF, CG saranno seni degli angoli ADE, BDF, CDG. Ma questi angoli, come metà degli altri ADB, BDC, CDA, sono eguali agli angoli ACB, BAC, CBA (173). Dunque le medesime metà AE, BF, CG saranno seni ancora degli angoli ACB, BAC, CBA; ed in conseguenza li lati AB, BC, CA, come proporzionali a quelle metà (275), saranno come li seni degli angoli opposti.

436. L' altro si è, che in ogni triangolo la somma di due lati disuguali debba essere alla loro differenza, come la tangente della dimezzata somma

ma degli angoli opposti alla tangente della dimezzata loro differenza. Per dimostrarlo, siano nel
Fig.168. triangolo ABC disuguali li due lati AB, BC; e prolungato uno di essi AB talmente in D, che sia BD eguale a BC, facciasi così BE perpendicolare sulla CD, come BF parallela ad AC. E poicchè CD resta divisa egualmente in E; prendendosi EG eguale ad EF, sarà la rimanente DG eguale ancora alla rimanente CF. Onde tirata GH parallela alla stessa AC, sarà DH similmente eguale ad AB; e pertanto sarà AD la somma delli due lati AB, BC, e BH la loro differenza. E poicchè per la BE resta diviso ancora egualmente, così l' angolo CBD somma delli due BAC, BCA, come l' angolo FBG differenza delli medesimi; sarà l' angolo CBE la somma di quelli dimezzata, e l' angolo FBE la dimezzata loro differenza. Ma con prendersi BE per raggio, si fanno CE, FE tangenti di questi angoli, le quali sono nella ragione delle due CD, FG (275), o pure delle due AD, BH (312). Dunque la somma delli due lati AB, BC sarà alla loro differenza, come la tangente della somma dimezzata degli angoli opposti alla tangente della dimezzata loro differenza.

437. Il terzo, ed ultimo si è, che abbassata sul lato massimo di un triangolo scaleno la perpendicolare dall' angolo opposto, la somma, e la differenza delle due porzioni, nelle quali resta egli diviso, siano reciproche colla somma, e colla diffe-
Fig.187. renza degli altri due lati. Sia perciò il triangolo scaleno ABC, ed abbassata sul lato massimo BC la perpendicolare AD, descrivasi col centro A, e coll' intervallo del lato minimo AB il cerchio BEFG, che s' incontri col lato BC nel punto E, e coll' altro CA prolungato nelli punti F, e G. Essendo adunque il rettangolo delle due BC, CE eguale al rettangolo delle altre due CG, CF (194); saranno quelle reciproche con queste (373). Ma delle due BC, CE, la prima BC è la somma delle due porzioni BD, CD, e la seconda CE è la loro differenza; e delle altre due CG, CF la prima CG è la som-

somma delli due lati AB, AC, e la seconda CF è la loro differenza. Dunque la somma, e la differenza delle due porzioni BD, CD saranno reciproche colla somma, e colla differenza delli due lati AB, AC.

438. Or in virtù del primo di questi teoremi, siccome dati gli angoli del triangolo ABC restano determinate colli loro seni, che similmente debbono essere dati, le ragioni de' lati opposti; così con darsi insieme cogli angoli un lato AB, possono determinarsi facilmente gli altri due BC, CA. Poicche facendosi primieramente come il seno dell' angolo C al seno dell' angolo A, così AB ad una quarta proporzionale; si avrà il lato BC. E facendosi ancora come il seno dell' angolo C al seno dell' angolo B, così il lato AB ad un' altra quarta proporzionale, si avrà l' altro lato CA. Ma coll' istesso teorema, dati li due lati AB, BC coll' angolo C opposto ad uno di essi, possono determinarsi altresì gli altri due angoli A, e B col terzo lato CA. Poicche facendosi come AB a BC, così il seno dell' angolo C ad una quarta proporzionale; sarà questa il seno dell' angolo A, per mezzo di cui siccome resta determinato l' angolo medesimo, così colla determinazione di esso si avrà eziandio quella e del terzo angolo B, che forma due retti cogli altri due (71), e del terzo lato CA opposto all' angolo B. Fig. 185.

439. Col secondo teorema poi, dati li due lati disuguali AB, BC del triangolo ABC, e dato l' angolo compreso da detti lati, potranno determinarsi gli altri due angoli opposti agli stessi lati, insieme col rimanente lato AC. Imperocche dovendo gli altri due angoli formare due retti col dato (71); sarà data così la somma di essi dimezzata, come la tangente di una tal somma. Onde facendosi come la somma delli lati AB, BC alla loro differenza, così la riferita tangente ad una quarta proporzionale; si avrà ancora la tangente della differenza dimezzata delli medesimi angoli, per mezzo della quale siccome resta determinata l' istessa dimezzata Fig. 186.

ta

ta differenza, così con aggiungersi questa alla dimezzata somma si avrà l'angolo maggiore, e con togliersi da quella stessa si avrà l' angolo minore. E determinati gli altri due angoli opposti alli lati dati AB, BC, agevole cosa sarà di determinare ancora il terzo lato AC, opposto all'angolo dato B.

Fig.187. 440. Alla perfine col terzo teorema, dati li lati del triangolo ABC, possono determinarsi gli angoli del medesimo. Imperocche abbassata sul lato massimo BC la perpendicolare AD dall'angolo opposto, sarà l'istesso lato BC la somma delle due porzioni BD, CD. Onde facendosi come il lato BC alla somma degli altri due AB, AC, così la loro differenza ad una quarta proporzionale; si avrà ancora la differenza delle due porzioni BD, CD. Quindi con esser nota la somma, e la differenza di tali porzioni, non sarà egli difficile di venire in cognizione di ciascuna di esse; e colla determinazione delle medesime in ciascuno delli due triangoli rettangoli ADB, ADC sarà data l' ipotenusa insieme con uno delli due lati; e perciò con determinarsi gli angoli di questi triangoli, si avranno quelli del triangolo ABC.

441. Del rimanente il raggio, con cui debbonsi determinare li seni, e le tangenti degli angoli nella risoluzione delli riferiti problemi, puo essere preso di qualunque data lunghezza; poicche se bene tali rette ricevano cambiamento con cambiarsi il raggio, tutta volta le ragioni così di esse al raggio, come delle medesime tra loro, delle quali
Fig.184. si ha bisogno per detta risoluzione, rimangono sempre le stesse. Sia perciò BAC un'angolo qualsivoglia, e con due diversi intervalli descrivansi tra li suoi lati li due archi circolari BC, FG. Siccome adunque per rapporto al raggio AB, ovvero AC dee essere CD il seno dell' angolo, e BE la tangente; così per rapporto all' altro raggio AF, ovvero AG, sarà GH il seno, ed FI la tangente. Ma essendo equiangoli così li due triangoli ACD, AGH, come gli altri due ABE, AFI;

AFI; sarà come AC a CD, così AG a GH; e come AB a BE, così AF ad FI (316). Onde tanto li due diversi seni CD, GH, quanto le due diverse tangenti BE, FI saranno proporzionali alli loro raggi.

## §. IV.

*Del cerchio considerato come poligono regolare, e delli teoremi, che se ne ricavano.*

442. PEr dimostrare altri teoremi intorno alla dottrina delle proporzioni applicata al cerchio, faremo ora vedere, che egli il cerchio possa considerarsi ancora sotto altro aspetto, cioè come poligono regolare, in cui il numero de' lati sia maggiore di ogni qualunque numero, che possa assegnarsi. Ed in vero se bene la linea retta, e la linea curva siano di un' indole affatto opposta; tuttavolta quelle minime particelle, che debbono risultare dalla loro illimitata divisione, e che sono infinitamente picciole per rapporto ad esse, possono aversi così nell'una, che nell'altra, come tante picciole rette; e tutto il divario tra la retta, e la curva potrà ripetersi da ciò, che tali particelle nella retta stanno a dirittura, e traviano per angoli infinitamente piccioli nella curva.

443. Non solo adunque la circonferenza del cerchio, ma ogn' altra curva puo considerarsi come perimetro di un poligono, in cui i lati sono infinitamente piccioli, e mancano di essere tra loro a dirittura per angoli di una picciolezza ancora infinita. Nè da ciò puo dedursi, che ogni curva debba essere da per tutto di egual curvatura. Imperocchè se bene i suoi lati siano infinitamente piccioli, e tali siano ancora gli angoli, per cui l' uno travia dall'altro; niente di meno non ostante questa infinita picciolezza così gli uni, come gli altri ritengono ciò, che è proprio di ogni quantità. Onde potendo essere tra di essi differenti, possono altresì colla loro varietà conciliare alle

varie

varie parti della curva varia curvatura ; come in effetto da questo stesso fonte deriva altresì l' infinita diversità, che tra le medesime curve si ravvisa.

444. Or che debba essere regolare quel poligono, che col suo perimetro costituisce la circonferenza del cerchio, bastantemente lo addita la egual curvatura, che ella da per tutto ritiene. Ma per comprovarlo con argomento più efficace, dimostreremo prima il seguente teorema, cioè, che nelli poligoni regolari della stessa spezie li perimetri debbano essere come le perpendicolari
Fig.188. abbassate dalli loro centri su due lati di essi. Perciò siano ABCD, EFGH li due poligoni regolari della stessa spezie; e dalli loro centri I, ed L siano abbassate sulli lati AB, EF le perpendicolari IM, LN. Io dico, che il perimetro del poligono ABCD sia al perimetro dell'altro poligono EFGH, come IM ad LN.

445. Poicchè li due poligoni sono della stessa spezie; sarà l'angolo ABC eguale all'angolo EFG (211). Onde essendo questi angoli divisi per metà dalle rette IB, LF (203); sarà ancora l'angolo ABI eguale all'angolo EFL; ed in conseguenza li due triangoli IBM, LFN saranno equiangoli. Quindi dovendo essere come IM a BM, così LN ad FN (316); sarà permutando come IM ad LN, così BM ad FN (303). Ma li due lati AB, EF sono divisi egualmente dalle perpendicolari IM, LN (207); e pertanto BM sta ad FN, come AB ad EF (275). Dunque sarà ancora come IM ad LN, così AB ad EF (271). E poicchè sono eguali tra loro così li lati AB, BC, CD, DA, come li lati EF, FG, GH, HE; saranno quelli a questi in data ragione. Onde dovendo essere le loro somme, che formano li perimetri delli due poligoni, come AB ad EF (307); sarà il perimetro del poligono ABCD al perimetro dell' altro poligono EFGH, come IM ad LN (271).

446. Dimostrato questo teorema, sia ora il cer-
Fig.189. chio BCD, dentro di cui iscrivasi un poligono rego-

regolare, come BCDE; e divisi gli archi sostenuti dalli suoi lati egualmente ne' punti F, G, H, I (188), tirinsi a questi punti le tangenti LM, MN, NO, OL (171). Essendo adunque eguali gli archi FG, GH, HI, IF; sarà regolare altresì il poligono LMNO formato da quelle tangenti, e circonscritto intorno al cerchio (225). Ma questo altro poligono LMNO è ancora della stessa spezie col primo BCDE. Dunque per quel tanto è stato dimostrato (444), i loro perimetri saranno, come le perpendicolari abbassate sulli lati LM, BC dal centro del cerchio A, che è centro comune degli stessi poligoni. E poicchè, tirato il raggio AF, che s'incontri con BC in P, sono AF, AP queste tali perpendicolari; sarà il perimetro del poligono LMNO al perimetro dell'altro poligono BCDE, come AF ad AP, o pure come AB ad AP.

447. Or egli è facile il dimostrare, che la ragione di AB ad AP debba farsi di uguaglianza, quante volte il numero de'lati di ciascuno poligono è maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi. Imperocchè restando divisa la circonferenza del cerchio dalli lati del poligono iscritto in un consimile numero di archi eguali, sarà l'arco BFC, sostenuto da uno di detti lati, infinitamente picciolo per rapporto alla circonferenza intera; onde per rapporto al quadruplo di un retto, tale ancora sarà l'angolo BAC, che si appoggia sull'arco BFC (410); ed in conseguenza l'angolo BAF, come metà dell'angolo BAC, sarà eziandio di una picciolezza infinita per rapporto al doppio di un retto (275). Quindi nel triangolo BAP dovranno aversi come eguali a due retti li due soli APB, ABP (357); e pertanto essendo retto l'angolo APB, sarà retto ancora l'altro APB; con che le due AB, AP, come opposte ad angoli eguali, saranno similmente eguali tra loro (73).

448. Ma siccome la ragione di AB ad AP dee farsi di uguaglianza, quante volte il numero de'

 lati

lati di ciascuno poligono è maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi; così per essere li perimetri delli due poligoni nella ragione di AB ad AP, dovrà farsi ancora tale la ragione di quelli perimetri. E poicchè ciò non puo avvenire in altra guisa, se non con approssimarsi talmente l' uno all' altro perimetro, che svanisca ogni intervallo, che possa tra di essi considerarsi; per necessità li due perimetri dovranno combaciarsi tra loro. Quindi la circonferenza del cerchio, che giace racchiusa tra quegli stessi perimetri, verrà a confondersi con ciascuno di essi. Onde non solo ella dovrà riguardarsi come perimetro di un poligono regolare, in cui il numero de' lati sia maggiore di ogni numero, che possa assegnarsi; ma ancora il cerchio medesimo non sarà differente da un tal poligono.

449. Per venire ora alli teoremi, che possono dimostrarsi con riguardare il cerchio sotto tal forma, notisi primieramente, che se del poligono regolare LMNO circonscritto intorno al cerchio distendasi un lato OL verso Q, e facciasi OQ eguale al suo perimetro, sarà il poligono LMNO eguale al triangolo AOQ. Imperocchè, essendo eguali le altezze AF, AG, AH, AI delli triangoli ALM, AMN, ANO, AOL; saranno questi tra loro, come le basi LM, MN, NO, OL (351). Onde il poligono LMNO somma de' triangoli sarà al solo triangolo AOL, come OQ somma delle basi alla sola base OL (397). Ma OQ sta ad OL, come il triangolo AOQ al triangolo AOL (351). Dunque sarà ancora come il poligono LMNO al triangolo AOL, così il triangolo AOQ all' istesso triangolo AOL (271); e pertanto il poligono LMNO, ed il triangolo AOQ saranno tra loro eguali (274).

Fig. 189.

450. Essendo così, dimostreremo in primo luogo, che ogni cerchio debba essere eguale ad un triangolo, che ha per base la sua circonferenza, e per altezza il suo raggio. Imperocchè qualunque sia il numero de' lati del poligono regolare LMNO

LMNO circonſcritto intorno al cerchio BCD, Fig.189.
ſempre un tal poligono dovrà eſſere eguale al triangolo AOQ, che ha per baſe il ſuo perimetro, e per altezza il raggio del cerchio (449). Ma quante volte il numero de' lati del poligono regolare LMNO è maggiore di ogni numero, che poſſa aſſegnarſi, di già è ſtato dimoſtrato, che la circonferenza del cerchio BCD debba confonderſi col ſuo perimetro, ed egli il cerchio non debba eſſere differente dal poligono medeſimo (448). Dunque ancora il cerchio BCD dovrà eſſere eguale ad un triangolo, che ha per baſe la ſua circonferenza, e per altezza il ſuo raggio.

451. Dimoſtreremo in ſecondo luogo, che ogni cerchio ſia al quadrato circonſcritto intorno ad eſſo, come la circonferenza al quadruplo del diametro. Sia perciò il cerchio BCD, attorno di cui circonſcrivaſi il quadrato FGHI. E ſiccome il Fig.190.
cerchio BCD è eguale ad un triangolo, che ha per baſe la ſua circonferenza, e per altezza il ſuo raggio (450); così il quadrato circonſcritto FGHI ſarà eguale ad un'altro triangolo, che ha per baſe il ſuo perimetro, o ſia il quadruplo del diametro, e per altezza l'iſteſſo raggio (549). Onde il cerchio BCD, ed il quadrato FGHI ſaranno tra di eſſi, come i riferiti due triangoli (275). Ma queſti triangoli per la comune altezza, che ſi ritrovano avere, ſono tra loro nella ragione delle baſi, cioè a dire della circonferenza al quadruplo del diametro (351). Dunque il cerchio BCD, ed il quadrato circonſcritto FGHI ſaranno ancora nella ſteſſa ragione.

452. Dimoſtreremo in terzo luogo, che ogni cerchio ſia al quadrato iſcritto dentro di eſſo, come la circonferenza al doppio del diametro. Per- Fig.190.
ciò pongaſi di nuovo, che FGHI ſia il quadrato circonſcritto intorno al cerchio BCD; e congiunte le rette BC, CD, DE, EB, ſarà BCDE il quadrato iſcritto dentro del medeſimo. Ma per le parallele FI, BD, GH tanto il parallelogrammo FBDI è doppio del triangolo EBD, quanto l'altro pa-

rallelogrammo GBDH è doppio dell' altro triangolo CBD (93). Dunque sarà il quadrato circonscritto FGHI doppio ancora del quadrato iscritto BCDE. Onde siccome il cerchio BCD sta al quadrato circonscritto FGHI, come la circonferenza al quadruplo del diametro (451); così l'istesso cerchio BCD sarà al quadrato iscritto BCDE, come la stessa circonferenza al doppio del diametro.

453. Dimostreremo in quarto luogo, che due cerchi debbano essere tra di essi in ragion composta delle loro circonferenze, e delli loro raggi. Siano perciò li due cerchi BCD, EFG, descritti intorno al comune centro A; e tirate le tangenti
Fig.191. BH, EI a due punti di essi B, ed E, concepiscansi queste tangenti eguali alle loro circonferenze. Essendo adunque li due cerchi BCD, EFG eguali alli due triangoli ABH, AEI (450); sarà il cerchio BCD al cerchio EFG, come il triangolo ABH al triangolo AEI (275). Ma la ragione di questi triangoli si compone da quella delle basi BH, EI, e da quella delle altezze AB, AE (354). Dunque nella stessa ragion composta saranno ancora li due cerchi BCD, EFG (271); e pertanto si comporrà la ragione di essi da quella delle loro circonferenze, e da quella delli loro raggi.

454. Dimostreremo in quinto luogo, che ogni settore debba essere eguale ad un triangolo, che ha per base l'arco, da cui si termina il settore, e per altezza il raggio del medesimo arco. Prendasi perciò nel cerchio BCD un settore qualsivoglia ABC; e tirata al punto B la tangente BH, con-
Fig.191. cepiscasi, che tanto BH sia eguale alla circonferenza intera, quanto la porzione BL sia eguale all'arco BC. Adunque l'intera circonferenza sarà all'arco BC, come BH a BL (275). Ma l'intera circonferenza sta all'arco BC, come il cerchio BCD al settore ABC (407); e BH sta a BL, come il triangolo ABH al triangolo ABL (351). Dunque sarà ancora come il cerchio BCD al settore ABC, così il triangolo ABH al triangolo ABL (271); e pertanto siccome il cerchio BCD

è eguaè eguale al triangolo ABH(450), così sarà il settore ABC eguale all'altro triangolo ABL (302).

455. Dimostreremo in sesto luogo, che un' arco circolare, come BC, sia al suo seno CN, come il settore ABC al triangolo ABC; e che l' istesso arco BC sia alla sua tangente BO, come il settore ABC al triangolo ABO. Imperocchè, posto di nuovo, che la tangente BL sia eguale all'arco BC, sarà il settore ABC eguale al triangolo ABL (454). Ma BL sta a CN, come il triangolo ABL al triangolo ABC; e BL sta a BO, come il triangolo ABL al triangolo ABO (351). Dunque sarà ancora l' arco BC al suo seno CN, come il settore ABC al triangolo ABC; e l' arco BC alla sua tangente BO, come il settore ABC al triangolo ABO. Ed essendo così, egli è chiaro, che l' arco BC sia minore del suo seno CN, e maggiore della sua tangente BO. Fig.192.

456. Dimostreremo in settimo luogo, che due settori presi in due diversi cerchi debbano essere tra di essi in ragion composta degli archi, da cui sono terminati, e delli raggi de' loro cerchi. Siano perciò li due cerchi BCD, EFG descritti intorno al comune centro A; e prendansi in essi li due settori ABC, AEF. Tirinsi alli due punti B, ed E le tangenti BL, EM, le quali concepiscansi eguali alli due archi BC, EF. Ed essendo li due settori ABC, AEF eguali alli due triangoli ABL, AEM (454); sarà il settore ABC al settore AEF, come il triangolo ABL al triangolo AEM (275). Ma la ragione di questi triangoli si compone da quella delle basi BL, EM, e da quella delle altezze AB, AE (354). Dunque nella stessa ragion composta saranno ancora li due settori ABC, AEF (271); e pertanto si comporrà la ragione di essi da quella degli archi BC, EF, e da quella delli raggi AB, AE. Fig.191.

457. Dimostreremo finalmente, che essendo tra loro eguali li due settori ABC, AEF, siano gli archi BC, EF reciprocamente proporzionali alli raggi AB, AE; e per lo contrario, che essendo gli ar- Fig.191.

chi BC, EF nella reciproca ragione delli raggi AB, AE, siano eguali li due settori ABC, AEF. Imperocchè la ragione delli due settori ABC, AEF si compone da quella degli archi BC, EF, e da quella delli raggi AB, AE (456). Dunque essendo eguali li due settori, questa ragion composta dovrà essere di uguaglianza; ed in conseguenza delle due componenti una sarà reciproca dell' altra (367). Per lo contrario poi essendo la ragione degli archi BC, EF reciproca della ragione, in cui sono li raggi AB, AE, si comporrà da queste due ragioni insieme una ragione di uguaglianza. Onde essendo li due settori ABC, AEF in questa ragion composta, li medesimi saranno tra loro eguali.

## §. V.

### *Della simiglianza de' cerchi, e delli teoremi, che da essa si ricavano.*

458. DAlla nuova forma, che si è data al cerchio, oltre alli precedenti possono dedursi ancora altri teoremi; ma per essi è necessario prima avvertire, che quantunque due cerchi diversi debbano confondersi con poligoni regolari ancora diversi, tutta volta la spezie delli poligoni dee essere sempre la stessa. Siano per-
Fig. 193. ciò BCD, EFG due cerchi diversi, descritti intorno al comune centro A; e posto, che la picciola retta BC sia il lato del poligono regolare, con cui si confonde il cerchio BCD, congiungansi li raggi AB, AC, li quali si distendino per fino alla circonferenza dell' altro cerchio EFG. Essendo adunque gli archetti BC, EF proporzionali alle circonferenze intere (412); saranno i medesimi parti aliquote simili delle stesse circonferenze; e pertanto li due poligoni regolari, che dentro delli cerchi BCD, EFG hanno per loro lati le picciole rette BC, EF, saranno della stessa spezie.

459. E poicchè sono eguali tra loro così le due

AB,

AB, AC, come le due BE, CF; farà come AB a BE, così AC a CF (275); onde le due BC, EF faranno tra loro parallele (311). Quindi abbassata su una di esse BC la perpendicolare AH, e prolungata la medesima persino a che s' incontri coll'altra EF in I; farà ancora AI perpendicolare sull'altra EF (62); e pertanto essendo equiangoli li due triangoli ABH, AEI, farà come AB ad AH, così AE ad AI (316). Ma per confondersi il cerchio BCD col poligono regolare, che ha per lato la picciola retta BC, la ragione di AB ad AH dee essere di uguaglianza (447). Dunque di uguaglianza farà ancora la ragione di AE ad AI; ed in conseguenza eziandio il cerchio EFG dovrà confondersi col poligono regolare, che ha per lato la picciola retta EF (448).

460. Or da ciò, che due cerchi debbansi confondere con poligoni regolari della stessa spezie, egli è facile ad intendersi, che siccome questi tali poligoni sono simili tra loro, così simili parimente esser debbano gli stessi cerchi, che con quelli si confondono. Ma con questa simiglianza possono dimostrarsi presentemente due altri teoremi, cioè I, che le circonferenze di due cerchi siano nella stessa ragione colli loro raggi; e II, che li cerchi medesimi siano in duplicata ragione degli stessi raggi. Anzi col primo di questi teoremi resterà comprovata altresì la verità di queltanto fu avanzato di sopra (184); cioè, che siccome essendo eguali li raggi, sono eguali ancora le loro circonferenze; così per lo contrario essendo eguali le circonferenze, eziandio i raggi di esse debbano essere tra loro eguali.

461. Adunque per quanto al primo teorema, pongasi di nuovo, che BC, EF siano i lati delli due poligoni, colli quali si confondono i due cerchi BCD, EFG. Ed essendo questi poligoni simili tra loro; saranno li lati di uno di essi proporzionali alli lati dell'altro. Onde le loro somme, che sono i perimetri delli due poligoni, o pure le circonferenze delli due cerchi, saranno come li soli Fig. 193.

lati BC, EF (307). Ma per gli triangoli equiangoli ABC, AEF, li lati BC, EF sono come li raggi AB, AE. Dunque ancora le circonferenze delli due cerchi saranno, come li raggi. Per quanto poi al secondo teorema, di già è stato dimostrato, che la ragione di due cerchi si compone da quella delle loro circonferenze, e da quella delli loro raggi (453). Dunque essendo le circonferenze, come li raggi, sarà la ragione degli stessi cerchi duplicata della sola de' raggi (386).

462. Non solo due cerchi diversi, ma eziandio due settori di essi, racchiusi sotto angoli eguali, debbono essere simili tra loro. Siano perciò li due
Fig. 194. cerchi ABC, DEF, nelli di cui centri G, ed H ponganſi li due angoli eguali AGB, DHE. E poicchè questi cerchi si confondono con poligoni regolari della stessa spezie; saranno i lati, che formano le loro circonferenze, eguali di numero. Ma per l'uguaglianza degli angoli AGB, DHE, gli archi AB, DE sono nella stessa ragione con quelle circonferenze (412). Dunque ancora i lati, che formano detti archi, saranno eguali di numero. Quindi la figura contenuta dalli raggi GA, GB, e dalli lati dell'arco AB sarà simile alla figura, che li raggi HD, HE contengono colli lati dell' arco DE; ed in conseguenza confondendosi i due settori GAB, HDE con queste tali figure, ancora essi saranno tra loro simili.

463. Intorno a questi due settori simili possono dimostrarsi gli stessi due teoremi, cioè I, che gli archi, per cui si terminano, siano nella stessa ragione colli loro raggi; e II, che i settori medesimi siano in duplicata ragione delli stessi raggi. Imperocchè per l'uguaglianza degli angoli AGB, DHE gli due archi AB, DE debbono essere, come
Fig. 194. le circonferenze intere (412). Onde siccome queste circonferenze sono, come li raggi GA, HD; così nella stessa ragione saranno ancora gli archi AB, DE. In oltre di già è stato dimostrato, che li due settori GAB, HDE sono in ragion composta degli archi AB, DE, e delli raggi GA, HD (456).

Dun-

Dunque essendo queste due ragioni tra loro eguali, saranno i medesimi settori in duplicata ragione delli soli raggi (380).

464. Essendo simili i due settori GAB, HDE, saranno simili ancora gli altri due rimanenti settori GBCA, HEFD. E la ragione è chiara; poicchè con essere eguali di numero i lati, che formano li due archi AB, DE, eziandio gli archi rimanenti BCA, EFD debbono essere formati da lati eguali di numero. Ma per la stessa ragione, congiunte le rette AB, DE, saranno simili parimente non meno le due porzioni terminate dagli archi AB, DE, che le altre due terminate dagli archi rimanenti BCA, EFD. E poicchè gli angoli situati così nell'une, come nell' altre porzioni debbono essere tra loro eguali; vedesi ora la ragione, che c' indusse a chiamare simili quelle porzioni circolari, nelle quali possono situarsi angoli eguali (183). Fig.194.

465. Per quanto a queste porzioni simili, siccome non puo porsi in dubbio, che gli archi, per cui si terminano, siano nella stessa ragione colli loro raggi; così facilmente puo dimostrarsi, che le porzioni medesime siano in duplicata ragione degli stessi raggi. Imperocchè, essendo simili tanto li due settori GAB, HDE, quanto li due triangoli AGB, DHE; saranno così gli uni, come gli altri in duplicata ragione delli raggi GA, HD. Ma le porzioni terminate dagli archi AB, DE sono gli eccessi, con cui i settori superano i triangoli. Dunque ancora dette porzioni saranno nella stessa duplicata ragione (305). E per essere i cerchi interi nella medesima duplicata ragione; dovrà ella aver luogo parimente tra le altre porzioni terminate dagli archi rimanenti BCA, EFD. Fig.194.

466. Ma le porzioni simili sono ancora in duplicata ragione delle rette, che le sostengono. Imperocchè per essere equiangoli li due triangoli AGB, DHE, saranno li raggi GA, HD nella stessa ragione colle rette AB, DE, che sostengono Fig.194.

gono le porzioni simili. Ma di già è stato dimostrato, che queste porzioni sono in duplicata ragione delli raggi GA, HD (465). Dunque le medesime porzioni saranno parimente in duplicata ragione delle rette AB, DE. Per gli mezzi cerchi poi, che eziandio sono porzioni simili, la cosa è fuor di ogni dubbio; poicchè essendo essi sostenuti dalli diametri, che sono doppii delli raggi, chiaramente si vede, che i medesimi debbano essere tra loro in duplicata ragione delle rette, che li sostengono.

467. E quindi ora la proprietà del triangolo rettangolo dee estendersi altresì a tutte quest' altre figure simili. Essendo adunque ABC un triangolo rettangolo in A, sarà primieramente il cerchio descritto col raggio BC eguale agli altri due cerchi descritti colli raggi AB, AC; sarà in secondo luogo un settore descritto col raggio BC eguale agli altri due settori simili descritti colli raggi AB, AC; sarà finalmente una porzione circolare descritta sull' ipotenusa BC eguale alle altre due porzioni simili descritte sulli lati AB, AC. E poicchè questa terza uguaglianza dee aver luogo ancora, quando le porzioni simili, che si descrivono, sono mezzi cerchi; avremo con essa due lunule circolari, che unite insieme saranno eguali allo stesso triangolo ABC.

Fig. 195.

468. La ragione è chiara; poicchè il mezzo cerchio, che descrivesi sull' ipotenusa BC, dee passare per lo punto A, in cui ritrovasi l' angolo retto (177). Onde essendo egli eguale agli altri due mezzi cerchi, descritti sulli lati AB, AC; con togliersi le communi due porzioni tagliate da esso per gli lati AB, AC, rimarrà il triangolo ABC eguale alle due lunule circolari. Qualora intanto li due lati AB, AC sono tra loro eguali, saranno le stesse lunule eguali ancora tra di esse; ed abbassata sull' ipotenusa BC la perpendicolare AD, saranno eguali altresì li due triangoli rettangoli ADB, ADC, nelli quali resta diviso per quella perpendicolare il triangolo ABC. Onde in

questo

questo caso ciascuna delle due lunule sarà eguale a ciascuno delli due triangoli.

469. Or se bene possa darsi una lunula circolare eguale ad un triangolo; non perciò, data ogni lunula, può determinarsi un triangolo, o altra figura rettilinea, che sia alla medesima eguale. Ma l'istessa difficoltà s'incontra ancora, se si voglia determinare con figure rettilinee, o il cerchio intero, o qualche suo settore, o in fine qualche sua porzione; poicchè per quanto siasi travagliato intorno a questi problemi, non mai si è potuto venire a capo della risoluzione di essi. Tutti intanto sarebbero risoluti, se fosse a noi nota la vera ragione, che ha il raggio del cerchio alla sua circonferenza. Imperocchè con questa ragione potrebbe determinarsi la lunghezza così dell' intera circonferenza, come di ogn'altro arco circolare; colla di cui determinazione agevole cosa sarebbe per mezzo de' teoremi dimostrati in questo capitolo, di risolvere tutti i riferiti problemi.

470. Ma eziandio il problema, che riguarda la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, si è ritrovato superiore ad ogni nostra conoscenza; e tutti i mezzi impiegati per la soluzione di esso appena sono stati bastanti a determinare i limiti, tra li quali ritrovasi quella ragione. Quali siano questi limiti, e come debbansi investigare; sarà spiegato nella Geometria prattica, ove dee farsi uso di quanto è stato dimostrato in questi Elementi. Però con essi talmente si determina per via di approssimazione la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, che, per quanto appartiene alla prattica, non sembra doversi desiderare davantaggio. Onde con farsi uso di una tal ragione, poco distante dalla vera, eziandio i divisati problemi potranno risolversi per via di approssimazione, senza molto discostarsi dalle vere loro soluzioni.

471. Il problema intanto, in cui si dimanda la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio, si riguarda come spettante alla rettificazione del cerchio; poicchè per mezzo di esso siccome può determi-

narsi

narsi la lunghezza non meno della circonferenza intera, che di ogn'altro arco circolare, così possono ritrovarsi similmente rette, che siano eguali alle medesime curve. Gli altri poi, in cui si dimandano spazii circolari, si riguardano come spettanti alla quadratura del cerchio; per la ragione, che siccome ciascuno spazio dee determinarsi con figure rettilinee, così tra queste spezialmente si è scelto il quadrato, che più facilmente cade sotto il nostro intendimento. E poicchè la soluzione di questi altri problemi non dee farci difficoltà veruna, supposta nota la ragione del raggio alla circonferenza del cerchio; quindi si è, che la quadratura del cerchio si considera come conseguenza della sua rettificazione.

472. Del rimanente intorno agli angoli situati nelli centri, o nelle circonferenze di due cerchi diversi, può ora dimostrarsi il seguente teorema, cioè, che la loro ragione sia composta dalla diretta degli archi, sulli quali si appoggiano, e dalla reciproca de' raggi degli stessi archi. Siano
Fig. 196. perciò li due cerchi diversi ABC, DEF, nelli di cui centri G, ed H ponganfi li due angoli disuguali BGC, EHF. Gli altri due adunque BAC, EBF situati nelle circonferenze, come metà di quelli, saranno ancora disuguali. Or bisogna dimostrare, che la ragione così degli uni, come degli altri sia composta dalla diretta degli archi BC, EF, e dalla reciproca delli raggi GB, HE, cioè a dire, che tanto li due BGC, EHF, quanto gli altri due BAC, EDF siano in ragion composta dell' arco BC all' arco EF, e del raggio HE al raggio GB.

473. Dal raggio maggiore HE taglisi la porzione HI eguale all' altro minore GB (31); indi coll' istesso centro H, e coll' intervallo HI descrivasi l' altro arco IL, che s' incontri con HF in L. Essendo adunque gli archi BC, IL descritti con eguali intervalli; sarà l' angolo BGC all' angolo EHF, come l' arco BC all' arco IL (408). Ma l' arco BC all' arco IL sta in ragion composta

dell'

dell' arco BC all' arco EF, e dell' arco EF all' arco IL (284). Dunque in questa stessa ragion composta sarà ancora l' angolo BGC all' angolo EHF (271); ed in conseguenza essendo l' arco BF all' arco IL, come il raggio HE al raggio HI, ovvero GB (463), sarà l' angolo BGC all'angolo EHF in ragion composta dell' arco BC all' arco EF, e del raggio HE al raggio GB; la quale eziandio dovrà aver luogo tra gli angoli BAC, EDF, per essere questi nella medesima ragione colli loro doppii BGC, EHF (275).

474. Per quanto poi agli archi, sulli quali si appoggiano gli angoli, la loro ragione dee essere composta e dalla diretta degli angoli, e dalla diretta de' raggi. Per dimostrarlo, facciasi nel centro G l' angolo CGM eguale all'angolo EHF (41). Fig. 196.
E per l' uguaglianza di questi angoli sarà primieramente come l' arco BC all' arco CM, così l'angolo BGC all' angolo EHF (408); e sarà ancora come l' arco CM all' arco EF, così il raggio GB al raggio HE (463). Ma l' arco BC sta all' arco EF in ragion composta dell' arco BC all'arco CM, e dell' arco CM all' arco EF (284). Dunque la ragione dell' arco BC all' arco EF si comporrà ancora da quella dell' angolo BGC all'angolo EHF, e da quella del raggio GB al raggio HE (280). Ed essendo li due angoli BGC, EHF nella stessa ragione cogli altri due BAC, EDF (275); sarà altresi l' arco BC all' arco EF in ragion composta dell' angolo BAC all' angolo EDF, e del raggio GB al raggio HF.

## CAPITOLO V.

### *Delli problemi attinenti alla Geometria piana, e del modo di risolverli.*

475. CON essersi applicata la dottrina delle proporzioni a tutte le spezie della quantità estesa, che si considerano nella Geometria piana; potrebbe porsi fine a questi Elementi, dive-

diventati per altro baſtantemente pingui, e copioſi. Ma rimane a trattarſi di un' altra teoria egualmente utile, e neceſſaria; cioè del metodo, che dee tenerſi in riſolvere tutti gli altri problemi, che alla Geometria piana ſi appartengono. Imperocchè ſe bene la ſoluzione di ciaſcuno di eſſi debba ripeterſi da quelli medeſimi, che ſono ſtati propoſti, e riſoluti in queſti Elementi; nientedimeno ſenza un qualche metodo non ſarà coſa così facile rinvenirne la coſtruzione, e teſſere il raggionamento proprio per dimoſtrarla. Conviene adunque, che gli ſtudioſi di queſta ſcienza non ignorino tal metodo, e ſappiano altresì diſtinguere i problemi, che colla Geometria piana poſſono riſolverſi.

## §. I.

### *Del metodo da tenerſi nella riſoluzione de' problemi geometrici.*

476. IL metodo da tenerſi in riſolvere qualunque problema geometrico ſi è di ſupporre già fatto queltanto in eſſo ſi dimanda, e di eſaminare le conſeguenze, che da una tal ſuppoſizione diſcendono. Imperocchè ſe mai tra queſte ſe ne incontra alcuna, che poſſa aver luogo, e ſia noto a noi, come ella debba eſeguirſi, da eſſa dovrà ripeterſi la ſoluzione del problema propoſto; e ſi avrà la dimoſtrazione della coſtruzione, che ne riſulta, con inverterſi il raggionamento, per mezzo di cui ſi è giunto a quella conſeguenza. Così volendoſi ſulla retta AB deſcrivere un triangolo equilatero, ſi conſideri tal triangolo come già deſcritto; e ſuppoſto, che egli ſia il triangolo ABC, Fig. 197. ſaranno eguali così le due AB, AC, come le due AB, BC; ed in conſeguenza il punto C ſarà ſituato nell'interſegamento delli due cerchi deſcritti colli centri A, e B, e coll'intervallo della ſteſſa AB. Onde potendoſi deſcrivere queſti due cerchi, ſi ritroverà il punto C coll' interſegamento di eſſi, e colla loro natura ſi dimoſtrerà, che

il

il triangolo ABC sia equilatero.

477. Per investigare le conseguenze, che possono dedursi dalla supposta risoluzione del problema, è necessario il più delle volte avvalersi di una, o più delle costruzioni già note. Debbasi per ragion di esempio dividere il triangolo ABC per una retta parallela al lato BC in data ragione, cioè in quella di FG a GH. Pongasi, che DE sia la parallela, che si dimanda. Ed essendo il triangolo ADE al rimanente trapezio DBCE, come FG a GH; sarà componendo, come il triangolo ADE al triangolo ABC, così FG ad FH (292). Ma per essere simili li due triangoli ADE, ABC, la loro ragione è duplicata di quella, in cui sono li lati omologi AD, AB (393); e con farsi, che FI sia mezza proporzionale fra le due FG, FH, ancora FG ad FH sta in duplicata ragione di FG ad FI (287). Dunque sarà come AD ad AB, così FG ad FI; e pertanto potendo aver luogo questa proporzione, da essa medesima dovrà ripetersi la soluzione del problema proposto. Fig. 198.

478. Quindi si risolverà il problema, di cui si tratta, nella maniera seguente. Facciasi, che FI sia mezza proporzionale tra le due FG, FH (328); indi in ordine alle tre FI, FG, AB ritrovisi la quarta proporzionale, che sia AD (326); tirisi poscia per lo punto D la retta DE parallela a BC (65); ed io dico, che il triangolo ABC resti diviso dalla medesima nella ragione di FG a GH. Imperocchè, per essere simili li due triangoli ADE, ABC, sarà la loro ragione duplicata di quella, che hanno i lati omologi AD, AB (392); e per essere proporzionali le tre rette FG, FI, FH, sarà FG ad FH in duplicata ragione di FG ad FI (287). Ma per la costruzione AD sta ad AB, come FG ad FI. Dunque sarà come il triangolo ADE al triangolo ABC, così FG ad FH (271); ed in conseguenza dividendo sarà ancora, come il triangolo ADE al rimanente trapezio DBCF, così FG a GH (294).

479. Debbasi ancora nel cerchio ABCD tirare Fig. 199.

una

una tangente, che incontrandosi coll'altre due AE, CF, faccia, che le porzioni di queste siano in data ragione, cioè in quella di GH ad HI. Suppongasi già tirata detta tangente, e sia EBF. Sarà adunque come AE a CF, così GH ad HI. Ed essendo eguali tanto le due AE, BE, quanto le due CF, BF (199); sarà ancora come BE a BF, così GH a GI. Ma, abbassate sulla retta AC le perpendicolari BL, EM, FN (50), dee essere come BE a BF, così LM ad LN (312); e per farsi equiangoli li due triangoli AEM, CFN, dee essere ancora come AE a CF, così AM a CN (316). Dunque così le due LM, LN, come le due AM, CN saranno nella ragione di GH ad HI; e pertanto nella stessà ragione di GH ad HI saranno ancora le composte da quelle AL, CL (304).

480. Or per essersi giunto ad una conseguenza, che puo aver luogo, si risolverà il problema nella maniera, che segue. Dividasi la retta AC talmente nel punto L, che AL sia a CL, come GH ad HI (325); ed alzata sulla stessa AC la perpendicolare LB, che s' incontri colla circonferenza nel punto B, tirisi a questo punto la tangente EBF. Io dico, che AE sarà a CF, come GH ad HI. Imperocchè essendo eguali tanto le due AE, BE, quanto le due CF, BF; sarà AE a CF, come BE a BF. Onde, abbassate le altre perpendicolari EM, FN, saranno nella ragione di AE a CF non solo le due AM, CN, ma ancora le altre due LM, LN; e pertanto ancora AL a CL sarà nella stessa ragione di AE a CF (304). Ma per la costruzione AL sta a CL, come GH ad HI. Dunque la ragione di AE a CF, e la ragione di GH ad HI saranno tra loro eguali (271).

481. Debbasi inoltre col lato AB descrivere un triangolo isoscele, in cui ciascuno degli angoli sopra la base sia doppio dell' angolo verticale. Sia ABC un tal triangolo, dimodocchè tanto l'angolo ABC, quanto l' angolo ACB sia doppio dell' angolo BAC. Dividasi uno degli angoli doppii, come ACB, egualmente per la retta CD (41).

Fig. 200.

Ed

Ed essendo eguali li due DAC, DCA; sarà l'angolo CDB, che è eguale ad essi insieme (70), ancora doppio dell'angolo BAC; onde eziandio eguali saranno li due CDB, CBD. Quindi eguali saranno così le rette BC, CD, come le rette CD, AD (71); e perciò la base del triangolo BC sarà eguale ad AD. E poicchè per l'uguaglianza degli angoli BCD, DAC la base BC dee essere tangente del cerchio descritto intorno al triangolo ADC (180); sarà il rettangolo delle due AB, DB eguale al quadrato di BC (196). Onde dovendo essere l'istesso rettangolo eguale ancora al quadrato di AD; sarà la retta AB talmente divisa in D, che il rettangolo della tutta, e di una porzione sarà eguale al quadrato dell'altra porzione.

482. Potendo adunque aver luogo una tal divisione, per mezzo di essa dovrà risolversi il problema proposto; e perciò la sua soluzione sarà la seguente. Dividasi il lato AB talmente in D, che il rettangolo di AB in DB sia eguale al quadrato di AD (138); facciasi poscia, che la base del triangolo isoscele sia la retta BC eguale ad AD; ed io dico, che così l'angolo ABC, come l'angolo ACB sia doppio dell'angolo verticale BAC. Imperocchè, essendo BC eguale ad AD, sarà il rettangolo di AB in DB eguale ancora al quadrato di BC. Onde, congiunta CD, dovrà essere BC tangente del cerchio descritto intorno al triangolo ACD (198); e pertanto l'angolo BCD sarà eguale all'angolo DAC (179). Quindi l'angolo CDB, come eguale alli due DAC, ACD, sarà eguale all'angolo ACB, o ABC; ed in conseguenza essendo eguali le due BC, CD (73), sarà ancora AD eguale a CD. Onde, facendosi l'angolo ACD eguale all'angolo DAC (72), sarà tutto l'angolo ACB, o ABC doppio dell'angolo BAC.

483. Debbasi finalmente nel triangolo BAC dall'angolo A al lato opposto BC tirare una retta, il di cui quadrato sia al rettangolo fatto dalle porzioni di detto lato, come GH ad HI. Suppongasi il problema di già risoluto, e sia AD la retta, Fig. 201.

che si dimanda. Adunque il quadrato di AD sarà al rettangolo di BD in CD, come GH ad HI. E poicchè, descritto il cerchio intorno al triangolo (218), e prolungata la retta AD persino a che s' incontri colla circonferenza nel punto E, dee essere il rettangolo di BD in CD eguale al rettangolo di AD in DE (193); sarà il quadrato di AD a quest'altro rettangolo ancora, come GH ad HI (273); ed in conseguenza: per la comune altezza AD, le loro basi AD, DE saranno similmente, come GH ad HI (367). Ma tirata EF parallela a DB, che s'incontri con AB in F, viene ad essere AD a DE, come AB a BF (310). Dunque eziandio AB a BF sarà nella stessa ragione di GH ad HI (271); e pertanto potendo aver luogo questa proporzione, da essa dovrà dedursi la soluzione del problema proposto.

484. Distendasi adunque il lato AB persino ad F, e facciasi, che BF sia quarta proporzionale in ordine alle tre GH, HI, AB (326); tirisi poscia la retta FE parallela a BC, che s'incontri col cerchio descritto intorno al triangolo ABC nel punto E; ed io dico, che congiunta la retta AE, che seghi il lato BC in D, sarà il quadrato di AD al rettangolo di BD in CD, come GH ad HI. Imperocchè essendo il rettangolo di BD in CD eguale al rettangolo di AD in DE (193); avrà il quadrato di AD l' istessa ragione all' uno, che all' altro rettangolo (273). Onde siccome, per la comune altezza AD, il quadrato di AD sta al rettangolo di AD in DE, come AD a DE (357), o pure come AB a BF (310); così l'istesso quadrato di AD sarà al rettangolo di BD in CD similmente come AB a BF (271). Ma per la costruzione AB sta a BF, come GH ad HI. Dunque nella medesima ragione di GH ad HI sarà ancora il quadrato di AD al rettangolo di BD in CD.

485. Per quanto a questo problema, non sarà
Fig. 202. inutile qui l'avvertire, che egli puo avere un'altro caso, e si è, quando la retta AB, che in esso si dimanda, dee essere tirata fuori del triangolo

lo dato ABC. Intanto, perche ancora in questo caso ella dee incontrarsi col cerchio descritto intorno allo stesso triangolo in un qualche punto, come E; pure il rettangolo di BD in CD sarà eguale al rettangolo di AD in DE (194). Onde con supporsi risoluto il problema, e con tirarsi EF parallela a BC, che s'incontri con AB in F, eziandio sarà come AB a BF, così GH ad HI. Quindi si avrà la soluzione di quest'altro caso, con tagliarsi da AB la porzione BF, che sia quarta proporzionale in ordine alle tre GH, HI, AB, e con tirarsi FE parallela a CB, che seghi il cerchio descritto intorno al triangolo nel punto E; poicchè la retta AD tirata per questo punto si ritroverà essere di lunghezza tale, che il suo quadrato sarà al rettangolo delle due BD, CD, come GH ad HI.

## §. II.

### *Della risoluzione de' problemi piani, e primieramente di quelli del primo genere.*

486. Spiegato il metodo, che dee tenersi per risolvere qualunque problema geometrico, tratteremo ora più spezialmente della risoluzione di coloro, che come attinenti alla Geometria piana, comunemente piani si appellano. Qualora adunque un problema è piano di sua natura, egli non è da porsi in dubbio, che con supporsi fatto quel tanto in esso si dimanda, debba sempre giungersi ad una conseguenza non solo possibile, ma eseguita ancora in questi Elementi; poicche tutto il nostro studio è stato di racchiudere in essi, così i principali teoremi della Geometria piana, come i problemi fondamentali della medesima. Onde per lo contrario sempre quando dalla supposta risoluzione di un qualche problema non puo dedursi una delle conseguenze già note, dovrà ciò esserci di argomento, che quel tale problema sia di altra indole,

è per tanto che non possa egli risolversi colla so-la Geometria piana.

487. Ma poiche moltissimi sono i problemi, che sono stati proposti, e risoluti in questi Elementi; perciò egli è da sapersi, che a quelli spezialmente possono ridursi tutti gli altri attinenti alla Geometria piana, che riguardano le rette proporzionali. Quindi per la varietà di coloro, alli quali si riducono, possono i medesimi problemi essere di due generi. Imperocchè o essi si risolvono, sia con ritrovarsi una retta, che sia in data ragione con un' altra data, sia con dividersi una retta data in data ragione; e questi tali problemi, come più semplici, saranno del primo genere. O per la loro risoluzione è necessario avvalersi, sia di una retta, che sia mezza proporzionale tra due rette date, sia di due rette, che siano reciproche con due altre date, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza; e quest' altri, come più composti, saranno del secondo genere.

488. Per incominciare adunque da quelli del primo genere, essi si risolvono con uno di questi due, cioè o con ritrovarsi una retta, che sia in data ragione con un altra data, o con dividersi una retta data in data ragione. Ma siccome egli è chiaro, che il primo delli due riferiti problemi riducesi alla ricerca, sia di una quarta proporzionale in ordine a tre rette date (326), sia di una terza in ordine a due sole date (327); così chiara cosa ancora si è, che l'altro sia caso speziale di quello, in cui si tratta di dividere una data retta proporzionalmente ad un'altra di già
Fig.203. divisa (325). Imperocche, posto, che AB sia la retta da dividersi, e che la data ragione sia di AC a CD; con farsi di queste due rette una retta continuata, e con dividersi la data AB proporzionalmente all' altra AD, si avrà quel tanto si cerca: dimodocche l'intera soluzione del problema si otterrà, con unirsi le due AB, AD talmente, che formino un'angolo qualsivoglia, e
con

con tirarſi per lo punto C la retta CE parallela all' altra DB.

489. Ma conforme il riferito problema riduceſi a ritrovare due rette, che ſiano in data ragione tra loro, e che unite inſieme ſiano uguali ad un' altra data; così a ſimiglianza di eſſo può proporſene un' altro, e ſi è di ritrovare due rette, che ſiano tra di eſſe in data ragione, e che differiſcano tra loro per un' altra data. La ſoluzione intanto di queſt' altro problema è quaſi la medeſima. Imperocchè poſto di nuovo, che AB ſia la retta, per cui debbono differire le due, che ſi cercano, e che la data ragione ſia di AC a CD; baſterà, che la retta minore CD ſi adatti ſopra l'altra maggiore AC in guiſa tale, che il punto D ſi ritrovi tra li due A, e C; perchè con unirſi le due AB, AC talmente, che formino un' angolo qualſivoglia, e con tirarſi per lo punto C la retta CE parallela all' altra DB, ſi avranno le due rette AE, BE, che ſi dimandano. Fig. 204.

490. Queſt' altro problema ancora può eſſere di uſo per la ſoluzione de' problemi piani del primo genere; e perciò quando ſi tratta di riſolvere queſti tali problemi, biſogna propriamente averne preſenti tre, de' quali il primo ſi è di ritrovare una retta, che ſia in data ragione con un' altra retta data; il ſecondo ſi è di ritrovare due rette, che ſiano in data ragione tra loro, e che unite inſieme ſiano eguali ad un' altra data; ed il terzo, ed ultimo ſi è di ritrovare due rette, che ſiano tra di eſſe in data ragione, e che differiſcano tra loro per una retta data. Qualora adunque un problema geometrico può ridurſi ad uno di queſti tre, egli dee averſi come problema piano del primo genere; e per lo contrario eſſendo egli tale di ſua natura, dovrà ſempre riſolverſi con uno delli tre riferiti problemi, tanto vero, che ſarebbe errore graviſſimo, volerlo riſolvere con altro problema, che ſia d'indole più compoſta.

491. Per dare qualche eſempio de' problemi piani del

del primo genere, debbasi primieramente sulla retta data AB formare un triangolo isoscele, che sia eguale all' altro triangolo dato DEF. Suppongasi il problema di già risoluto, e sia ABC il triangolo isoscele, che si dimanda. Abbassata adunque sulla base di esso AB la perpendiculare CG, per l'uguaglianza delli lati AC, BC saranno eguali ancora le due AG, BG (84). Ma per l'uguaglianza delli due triangoli ABC, DEF, le basi di essi AB, DE debbono essere in reciproca ragione delle loro altezze (362). Dunque posto, che FH sia perpendicolare sull' altra DE, sarà come AB a DE, così FH a CG. Quindi si ritroverà il vertice C del triangolo, che si dimanda, primieramente con dividersi la data AB egualmente nel punto G, ed indi con alzarsi su di essa la perpendicolare GC di lunghezza tale, che sia come GC ad FH, così DE ad AB. Onde riducendosi il problema a ritrovare una retta, che sia in data ragione con un' altra data, dovrà egli riguardarsi come problema piano del primo genere.

Fig.205.

Fig.206. 492. Debbasi in secondo luogo dentro del triangolo ABC iscrivere un quadrato, che si appoggi con uno de' suoi lati sulla base di quello BC. Sia DEFG il quadrato, che si dimanda. Ed essendo parallele le due DE, BC; saranno equiangoli li due triangoli ADE, ABC, e pertanto sarà come AD ad AB, così DE a BC (316). Ma abbassata sulla base BC la perpendicolare AH, che s' incontri con DE in I, sono equiangoli ancora li due triangoli ADI, ABH; ed in conseguenza AD stà ad AB, come AI ad AH. Dunque sarà come AI ad AH, così DE a BC; ed essendo eguali le due DE, IH, sarà eziandio come AI ad AH, così IH a BC; onde permutando sarà come AI ad IH, così AH à BC. Quindi si risolverà il problema proposto, con dividersi AH talmente in I, che sia come AI ad IH, così AH à BC; e perciò riducendosi la di lui risoluzione a ritrovare due rette, che siano tra loro in data ragione, e che unite insieme uguaglino un'

altra

altra data, dovrà egli aversi come problema piano del primo genere.

493. Debbasi finalmente dal punto A dato fuori dell'angolo CBD tirare una retta, che incontrandosi colli lati di quello BC, BD serbi data ragione colla sua porzione, compresa dentro del medesimo angolo. Sia ACD la retta, che si dimanda; e pongasi, che la ragione della tutta AD alla parte CD sia eguale a quella di F a G. Tirisi per lo punto A la retta AE parallela al lato BC, che s'incontri coll'altro lato BD prolungato nel punto E. Ed essendo equiangoli li due triangoli AED, CBD, sarà come AD a CD, così ED a BD (316). Ma si vuole, che AD sia a CD, come F a G, Dunque sara ancora come F a G, così ED a BD (271). Quindi si risolverà il problema proposto con prolungarsi EB talmente in D, che sia come ED a BD, così F a G; e pertanto riducendosi la di lui soluzione a ritrovare due rette, che siano tra loro in data ragione, e che differiscano per un'altra data, dovrà egli riguardarsi come problema piano del primo genere. Fig. 207.

494. Del rimanente i problemi piani del primo genere si potrebbero con maggior compendio ridurre alla sola ricerca di una retta, che sia in data ragione con un'altra data; per la ragione, che con questo problema egli è facile di risolvere gli altri due, ne' quali si tratta di ritrovare due rette, che siano tra loro in data ragione, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza. In effetto posto, che AB sia la somma, o la differenza delle due rette AE, BE, che si dimandano, e che la loro ragione sia eguale a quella di AC, a CD; sarà come AE a BE, così AC a CD; e perciò componendo, o dividendo sarà ancora come AB a BE, così AD a CD. Quindi si avrà la BE, che è una delle due rette, che si cercano, con ritrovarsi la quarta proporzionale in ordine alle tre date AD, CD, AB; e con prendersi poscia la differenza, o la somma delle due AB, BE, si avrà l'altra AE. Fig. 203. 204.

495. Ma sebene con questa riduzione par, che si renda più compendiosa la risoluzione de' problemi piani del primo genere; non istimiamo per tanto doversene far uso, poicche quello stesso artifizio, che impiegasi per la ricerca di una retta, che sia in data ragione con un'altra data, dee pratticarsi ancora per ritrovarne due, che siano tra di esse in data ragione, e delle quali ne sia data, o la somma, o la differenza. Più tosto giova quì l'avvertire, che quantunque un problema piano del primo genere possa talvolta risolversi con costruzione molto più semplice, cioè o con tagliarsi da una retta maggiore una porzione eguale ad un'altra minore, o con dividersi una data retta in due parti eguali, o finalmente con tirarsi per un dato punto una perpendicolare, o una parallela ad una retta data; niente di meno, quando si voglia attentamente riflettere, queste tali costruzioni almeno a riguardo del problema, in cui s'impiegano, ricadono in quelle, delle quali propriamente si dovrebbe far uso.

Fig. 208. 496. Debbasi per ragion di esempio dal punto D dato in un lato del triangolo ABC tirare la retta DEF, che incontrandosi cogli altri due lati ne' punti E, ed F, faccia eguali li due triangoli BDE, CFE. Egli non è da porsi in dubbio, che con tirarsi BF parallela a DC si abbia la soluzione del proposto problema; poiche facendosi eguali li due triangoli DBC, CFD, faranno eguali ancora li due BDE, CFE, che rimangono con togliersi da quelli il comune CED. Ma siccome con questa costruzione non si fa altra cosa, che ritrovare una quarta proporzionale in ordine alle tre rette date AD, DB, AC; così egli è facile il dimostrare, che il riferito problema di sua natura alla ricerca di quella ci conduce. Imperocche dovendo essere eguali li due triangoli BDE, CFE; coll'aggiunta del comune CED saranno eziandio eguali li due DBC, CFD; e perciò il triangolo ACD avrà l'istessa ragione all'uno, che all'altro. Ma il triangolo

ACD

ACD sta al triangolo DBC, come AD a DB (351); e similmente il triangolo ACD sta al triangolo CFD, come AC a CF. Dunque sarà come AD a DB, così AC a CF.

497. Debbasi ancora nella retta AB ritrovare il punto C, da cui tirate le rette CD, CE agli altri due punti D, ed E dati di posizione, siano eguali gli angoli ACD, BCE. Egli è chiaro, che abbassandosi sulla retta AB la perpendicolare DA, e tagliandosi da essa prolungata la porzione AF eguale a DA, si abbia coll' intersegamento delle due AB, EF il punto C, che si dimanda; poicche facendosi eguali li due angoli ACD, ACF, ed essendo l'angolo ACF eguale all'angolo BCE, saranno eguali ancora li due ACD, BCE. Intanto, abbassata l'altra perpendicolare EB, vedesi chiaramente, che con quella tale costruzione rimane divisa la retta AB nella ragione di AF o sia DA ad EB; e qualora voglia farsi matura riflessione, non altro di sua natura richiede il problema per potersi risolvere. Imperocche, dovendo essere eguali li due angoli ACD, BCE, saranno li due triangoli ADC, BEC tra loro equiangoli. Onde essendo come DA ad AC, così EB a BC; sarà permutando come DA ad EB, così AC a BC. Fig. 209.

## §. III.

### *Della risoluzione de' problemi piani del secondo genere.*

498. Siccome i problemi piani del primo genere si riducono, o a ritrovare una retta, che sia in data ragione con un'altra data, o a ritrovarne due, che siano tra loro in data ragione, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza; così quelli del secondo genere si possono sempre risolvere, o con ritrovarsi una retta, che sia mezza proporzionale tra due rette date, o con ritrovarsene due, che siano reciproche

che

che con due altre date, e che o colla loro somma, o colla loro differenza uguaglino una terza data. Onde siccome le costruzioni, che s' impiegano per la determinazione di queste rette, sono più composte di quelle, che si pratticano per determinare le prime; così non è egli da porsi in dubbio, che l'indole de' problemi piani del secondo genere sia più composta di quella, che anno i problemi del primo.

499. Per illustrare questi problemi con qualche esempio, debbasi in primo luogo descrivere un cerchio, che avendo per sue tangenti li due lati dell' angolo BAC passi ancora per un dato punto D.
Fig.210. Suppongasi il problema di già risoluto, e sia BCD il cerchio, che si dimanda. Essendo adunque le due AB, AC tangenti del cerchio, dovrà passare per lo di lui centro la retta AE, che divide egualmente l'angolo BAC (199). Onde abbassata su di essa la perpendicolare DEF, e fatta EF eguale a DE; sarà il punto F nella circonferenza del medesimo cerchio (146). Ma incontrandosi la stessa DF colla tangente AB nel punto G, dee essere il rettangolo delle due DG, FG eguale al quadrato di BG (196). Dunque sarà come DG a BG, così BG ad FG (371); e perciò si ritroverà il terzo punto B, che determina il cerchio, con tagliarsi da GA la porzione GB, che sia mezza proporzionale tra le due DG, FG. Onde riducendosi il proposto problema a ritrovare una mezza proporzionale tra due rette date, dovrà egli riguardarsi come problema piano del secondo genere.

500. Debbasi in secondo luogo per lo punto D
Fig.211. 212. dato dentro, o fuori del triangolo ABC tirare la retta EF, la quale incontrandosi colli lati AB, AC faccia, che li due triangoli ABC, AEF siano tra loro in data ragione. Pongasi, che la data ragione sia di AC ad AG; e fatta DH parallela ad AB, taglisi da AC la porzione AI, che sia ad AG, come AB a DH. Essendo adunque nella ragione di AC ad AG, tanto li due triangoli

goli ABC, AEF, quanto li due ABC, ABG; sarà il triangolo AEF eguale al triangolo ABG, ed in conseguenza sarà come AG ad AF, così AE ad AB (362). Quindi essendo per costruzione come AI ad AG, così AB a DH; sarà perturbando come AI ad AF, così AE a DH. Ma AE sta a DH, come AF ad HF. Dunque sarà ancora come AI ad AF, così AF ad HF; e perciò dividendo sarà come AI ad FI, così AF ad AH. Le due adunque AF, FI, che colla loro somma, o differenza uguagliano la data AI, sono reciproche colle due date AH, AI. Onde riducendosi il problema alla ricerca di due rette, che siano reciproche con altre due, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza; dovrà egli considerarsi come problema piano del secondo genere.

501. Debbasi finalmente dal dato punto A tirare la retta ABC, che incontrandosi colli lati dell' angolo dato BDC faccia il triangolo BCD eguale all' altro dato EFG. Tirisi AH parallela a BD, che s' incontri con CD in H; ed abbassate sulle rette CH, FG le perpendicolari BI, AL, EM facciasi, che DN sia ad FG, come EM ad AL. Essendo adunque eguali li due triangoli BCD, EFG, sarà come FG a CD, così BI ad EM (362). Ma per costruzione DN sta ad FG, come EM ad AL. Dunque sarà perturbando come DN a CD, così BI ad AL. Quindi essendo BI ad AL, come BC ad AC, o pure come CD a CH (316); sarà ancora come DN a CD, così CD a CH; ed in conseguenza dividendo sarà come DN a CN, così CD a DH. Le due adunque CD, CN, che colla loro differenza uguagliano la data DN, sono reciproche coll'altre due date DN, DH. Onde riducendosi il problema a ritrovare due rette, che avendo una data differenza siano reciproche con due altre date; dovrà egli aversi come problema piano del secondo genere. Fig.213.

502. Notisi in questo luogo, che le due rette

date,

date, colle quali debbono essere reciproche l'altre due, che per la risoluzione del problema necessitano, possono talvolta essere eguali tra loro. Debbasi perciò dall'angolo D del quadrato ABCD tirare la retta DEF, che incontrandosi colli due lati AB, BC, faccia, che la porzione EF sia di data lunghezza. Congiungasi la diagonale DB, da cui tagliata la porzione BG eguale ad EF, tirisi GH parallela a DA, e formisi l'angolo DEI eguale all'angolo DBF. Essendo adunque equiangoli li due triangoli DEI, DBF; sarà come DE ad EI, così DB a BF (316). Ma per le parallele AD, BE si ha ancora come EF, o sia BG a DE, così BF ad AB (310). Dunque perturbando sarà come BG ad EI, così DB ad AB; ed in conseguenza essendo DB ad AB, come BG a BH, saranno le due EI, BH tra loro eguali. Onde se mai fosse noto il punto I, potrebbe risolversi il problema proposto per mezzo di un cerchio descritto con quel punto come centro, e coll' intervallo della retta data BH.

Fig. 214.

503. Or per la determinazione di quel punto I, giova riflettere, che essendo eguali tanto li due angoli ABD, FBI, quanto li due ABD, CBD, debba essere l' angolo FBI eguale all' angolo CBD. Quindi coll'aggiunta del comune CBF, saranno eguali ancora li due angoli CBI, DBF; e pertanto essendosi fatto l' angolo DEI eguale all'angolo DBF, sarà l' istesso angolo DEI eguale similmente all' angolo CBI. Ma per l' ugualianza di questi angoli si fanno equiangoli li due triangoli DEI, EBI; ed in conseguenza DI sta ad EI, come EI a BI (316). Dunque, essendosi dimostrata EI eguale a BH, sarà ancora come DI a BH, così BH a BI; e perciò il punto I dovrà determinarsi colla ricerca di due rette, che avendo per loro differenza la data DB, siano reciproche con altre due, delle quali ciascuna sia eguale all'altra data BH.

504. Del rimanente sebene talvolta un problema piano del secondo genere possa risolversi con co-

costruzione più semplice; nientedimeno, se si voglia attentamente riflettere, sempre si ritroverà, che la sua soluzione riducesi ad uno delli riferiti problemi. Debbasi per ragion di esempio nella circonferenza del cerchio ABC determinare il punto A, da cui tirate le rette AD, AE agli altri due D, ed E dati di posizione, che s' incontrino colla stessa circonferenza ne' punti B, e C, sia BC parallela a DE. Tirisi al punto B la tangente BF, ed essendo l'angolo CBF eguale all'angolo BAC (178), sarà l'altro DBF eguale all'altro ACB, o sia AED; onde sarà come DE a DA, così DB a DF (316). E poicchè tirata l'altra tangente DG, si ha ancora come DA a DG, così DG a DB; sarà perturbando come DE a DG, così DG a DF; e perciò si risolverà il proposto problema con farsi DF terza proporzionale in ordine alle due date DE, DG, e con tirarsi la tangente FB. Ma poicchè tirata per lo centro del cerchio la retta FHI, sono date le due FH, FI, tra le quali FB è mezza proporzionale; vedesi chiaramente, che la riferita costruzione tuttocche semplice riducesi alla ricerca di una mezza proporzionale tra due rette date. Fig.215.

505. Debbasi similmente nel perimetro del semicerchio ACB determinare il punto C, per cui tirata la tangente DE, che s' incontri coll' altre due AD, BE ne' punti D, ed E, sia DE eguale alla retta data FG. Si abbassi sul diametro AB la perpendicolare CH, e dal punto C al centro I tirisi la retta CI. Essendo adunque retto l'angolo DCI (168), saranno li due DCH, CIH tra loro eguali; onde nella ragione di CI a CH dovrà essere così CD ad AH, come CE a BH; e pertanto sarà ancora come DE, o sia FG ad AB, così CI a CH. Quindi si risolverà il proposto problema con prendersi sopra di AD la porzione AL, che sia quarta proporzionale in ordine alle tre date FG, AB, CI, e con tirarsi LC parallela ad AB. Ma poicchè con una tal costruzione effettivamente vengonsi a ritrovare le due rette Fig.216.

te AH, BH, che uguagliando insieme la data AP, sono reciproche con altre due, delle quali ciascuna è eguale ad AL; perciò la genuina soluzione del problema proposto riducesi propriamente alla ricerca di tali rette reciproche.

Fig.217. 506. Debbasi infine dall'angolo D del quadrato ABCD di nuovo tirare la retta DEF, la quale incontrandosi colli due lati AB, BC faccia, che la porzione EF sia eguale alla data DG. Si alzi sopra di DF la perpendicolare FH, che s'incontri con DC in H; e tirata FI parallela a BC, congiungasi EH. Essendo adunque equiangoli li due triangoli DCE, FIH, ed essendo CD eguale ad FI, sarà DE eguale ancora ad FH; e pertanto li quadrati delle due DG, DE, o pure delle tre DG, DC, CE, o infine delle due CG, CE saranno eguali alli quadrati dell'altre due EF, FH, o pure al solo quadrato di EH, o finalmente alli quadrati delle due CH, CE. Onde, tolto il comune quadrato di CE, rimarrà il quadrato di CG eguale al quadrato di CH; ed in conseguenza le due CG, CH saranno tra loro eguali. Quindi si risolverà il proposto problema, con farsi CH eguale a CG, e con descriversi sopra di DH come diametro il semicerchio DFH. Ma egli è facile a dimostrarsi, che con questa costruzione pure vengono a ritrovarsi due rette, che uguagliando colla loro differenza una data retta siano reciproche con due altre date.

507. Taglisi perciò da CH la porzione CL eguale a CD; e per la retta DL, che rimane divisa egualmente in C, sarà il rettangolo delle due DH, LH insieme col quadrato di CL o sia CD eguale al quadrato di CH (124). Ma il quadrato di CH, come eguale a quello di CG, è eguale alli quadrati delle due CD, DG. Dunque sarà il rettangolo di DH in LH insieme col quadrato di CD eguale alli quadrati delle due CD, DG. Quindi, tolto il comune quadrato di CD, rimarrà il rettangolo di DH in LH eguale al solo quadrato di DG; e pertanto dovendo es-

fere

fere come DH a DG, così DG ad LH (372), saranno le due DH, LH non solo differenti tra loro per la data DL, ma reciproche ancora con altre due, delle quali ciascuna è eguale a DG. Del rimanente a questa nuova soluzione del proposto problema dee preferirsi l'altra data di sopra; poichè con essa si risolve il problema semplicemente nell' ipotesi, che la figura ABCD sia un quadrato; quandocche l'altra ha luogo eziandio se la figura ABCD fosse un rombo.

508. Quest' ultimo esempio ci da motivo di avvertire in questo luogo, che il problema delle rette reciproche puo risolversi colla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri quadrati dati. Per dimostrarlo pongasi primieramente, che le due rette AC, BC differenti tra loro per la data AB, siano reciproche coll'altre due date D, ed E. Dividasi AB egualmente nel punto F, e facciasi, che G sia mezza proporzionale tra le due D, ed E. Poichè dunque il rettangolo di queste due dee essere eguale tanto al rettangolo di AC in BC, quanto al quadrato di G; sarà il rettangolo di AC in BC eguale al quadrato di G; e per tanto coll' aggiunta del comune quadrato di BF, sarà il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di BF eguale alli quadrati delle due BF, e G. Ma il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di BF è eguale al quadrato di CF (124). Dunque ancora il quadrato di CF sarà eguale alli quadrati delle due BF, e G. Onde si avranno le due rette AC, BC, che differenti tra loro per AB siano reciproche coll'altre due D, ed E, se divisa la AB egualmente in F, e ritrovata tra le due D, ed E la mezza proporzionale G, facciasi, che il quadrato di CF sia eguale alla somma delli quadrati descritti dalle due BF, e G. Fig. 218.

509. Pongasi in secondo luogo, che le due rette AC, BC, reciproche colle due altre D, ed E, uguaglino insieme la data AB. Dividasi ancora la tutta AB egualmente in F, e facciasi simil- Fig. 219.

men-

mente, che G sia mezza proporzionale tra le due D, ed E. E poicche il rettangolo di queste due dee essere eguale così al rettangolo di AC in BC, come al quadrato di G, sarà il rettangolo di AC in BC eguale al quadrato di G; e per tanto coll' aggiunta del comune quadrato di CF, sarà il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di CF eguale alli quadrati delle due CF, e G. Ma il rettangolo di AC in BC insieme col quadrato di CF è eguale al quadrato di BF (122). Dunque sarà ancora il quadrato di BF eguali alli quadrati descritti dalle due CF, e G; ed in conseguenza il quadrato di CF sarà l'eccesso, con cui il quadrato di BF supera il quadrato di G. Onde si avranno le due rette AC, BC, che eguali insieme ad AB siano reciproche coll'altre due D, ed E, se divisa la AB egualmente in F, e ritrovata tra le due D, ed E la mezza proporzionale G, facciasi, che il quadrato di CF sia eguale all'eccesso, con cui il quadrato di AB supera il quadrato di G.

510. Ma se voglia farsi matura riflessione, l'artifizio altrove da noi tenuto per ritrovare due rette, che siano reciproche con due altre date, e delle quali ne sia data, o la somma, o la differenza, appunto riducesi alla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri quadrati dati. Onde questi due problemi non debbono aversi come differenti tra loro; e perciò potrà l'uno sostituirsi in vece dell'altro. Quello
Fig. 218. 219. in tanto delle rette reciproche può risolversi ancora in un'altra maniera, cioè con descriversi sulla data AB il parallelogrammo rettangolo AH, che eguale all'altro contenuto dalle due D, ed E sia eccedente, o mancante a riguardo della stessa retta per lo terzo BH simile ad un quadrato qualsivoglia (401. 403). Imperocche dovendo essere BH ancora quadrato, saranno eguali le due BC, CH; ed in conseguenza essendo il rettangolo di AC in BC eziandio eguale al rettangolo di C in E, saranno le due AC, BC reciproche coll'altre due D, ed E.

§. IV.

## §. IV.

### *Della natura de' luoghi geometrici, e delle varie loro differenze.*

511. PEr non tralasciare cosa alcuna intorno all'argomento, di cui si tratta, daremo ora qualche idea de' luoghi geometrici, senza de' quali non mai puo intendersi a fondo l'artifizio, di cui si servono i Geometri per risolvere i loro problemi. Ed in primo luogo dalle cose fin'ora dette bastantemente puo raccogliersi, che la soluzione di qualunque problema geometrico riducesi a determinare la posizione di un qualche punto. Ma, siccome questo punto dee essere determinato per mezzo delle condizioni apposte nel problema medesimo; così per lo difetto di qualche condizione avviene tal volta, che non si abbia l'intera sua determinazione. E poiche quando questo accade, infiniti sono i punti, colli quali puo risolversi il problema, di cui si tratta; perciò la serie di essi, che può incontrarsi, o in una linea, o in una superficie, o finalmente in un solido, si appella luogo geometrico.

512. Sia dato per ragion di esempio nella retta AB il punto A, e vogliasi fuori di quella retta ritrovare il punto M, da cui abbassata sulla medesima la perpendicolare MN, sia AN ad MN in data ragione. Taglisi da AB una porzione ad arbitrio, che sia AC, ed alzisi dal punto C la perpendicolare CD di lunghezza tale, che sia AC a CD in quella data ragione. Congiungasi poscia la retta AD, la quale prolunghisi dall'una, e l'altra parte verso E, ed F. E poicche ogni punto di essa è bastante a risolvere il problema proposto; perciò la medesima, come serie degl'infiniti punti, colli quali puo risolversi il riferito problema, si appella luogo geometrico. Similmente, se dati i due punti A, e B debbasi ritrovare il terzo M, dimodocche unite le rette AM, BM sia ret- Fig.220. Fig.221.

 to

to l'angolo AMB; infiniti saranno i punti proprj per un tal quesito. E siccome quelli s'incontrano tutti nella circonferenza del cerchio descritto sulla retta AB come diametro; così questa circonferenza, come serie delli suddetti punti, chiamasi luogo geometrico.

513. Amendue questi luoghi ci conducono ad una linea; ma vi possono essere altri luoghi, li quali di lor natura ci portino, o ad una qualche superficie, o pure ad un qualche solido. Siano perciò A, B, C tre punti egualmente
Fig.222. distanti tra loro, e debbasi ritrovare il quarto M, da cui abbassate le perpendicolari MN, MO, MR sulle rette AB, BC, AC, sia la somma di esse eguale ad AD, che da uno di detti punti cade perpendicolarmente sulla retta opposta. Prendasi il punto M ad arbitrio dentro del triangolo ABC. E poicchè li tre triangoli AMB, BMC, AMC sono come le altezze MN, MO, MR (352); sarà l'intero triangolo ABC al solo BMC, come la somma di esse MN, MO, MR alla sola MO. Ma il triangolo ABC sta al triangolo MBC, come AD ad MO. Dunque le tre insieme MN, MO, MR saranno eguali ad AD. Quindi tutti i punti situati dentro del triangolo ABC sono bastanti a risolvere il problema proposto; e perciò il luogo geometrico corrispondente ad un tal problema sarà la superficie di quel triangolo.

514. Conforme quando il luogo geometrico ci conduce ad una linea, può questa essere e retta, e curva; così conducendoci egli ad una superficie, la medesima potrà essere non solo piana, ma curva similmente. Non essendosi intanto trattato in questi Elementi delle superficie curve, non possiamo quì dare esempio alcuno de' luoghi geometrici, che ci conducono a tali superficie. E per la stessa ragione, non essendosi in essi ragionato de' solidi, nè pure potrà darsi esempio de' luoghi geometrici, che ci portano ad un qualche solido. Onde basterà per ora lo aver avvertito, che i

luo-

luoghi geometrici possono essere di tre generi, e che di essi altri ci menano ad una linea, altri ad una superficie, ed altri finalmente ad un solido.

515. Ma quantunque i luoghi geometrici siano di tre generi, tuttavolta per la risoluzione de' problemi basta la sola teoria di coloro, che alla linea ci conducono; e quindi si è, che sotto tal nome comunemente essi soli s' intendono. Riducesi la loro teoria ad investigare l' indole della linea, che forma il luogo, ed a far vedere, come ella possa determinarsi; ma per potersi ciò fare, debbono esserci prima note, così le principali proprietà, per cui le linee tra loro si distinguono, come le più semplici loro determinazioni. Onde perchè tali cose sono note a noi per ora, solamente a riguardo della linea retta, e della linea circolare; perciò di quelli soli luoghi tratteremo presentemente, che a queste linee ci conducono, li quali come attinenti alla Geometria piana, luoghi piani spezialmente si appellano.

516. Per l' investigazione, e costruzione de' luoghi piani potremo avvalerci di quello stesso metodo, che si è proposto di sopra per risolvere qualunque problema geometrico, maggiormente che secondo è stato avvertito, nasce il luogo dalla risoluzione di un problema, che per lo difetto di qualche condizione è indeterminato di sua natura. Proposto adunque un tal problema, suppongasi già fatto queltanto in esso si dimanda. E se doppo essersi percorse tutte le condizioni nel medesimo apposte, ritrovasi a riguardo di quel punto, a cui il problema si riduce, una proprietà, che sia comune a tutti i punti della retta, o della linea circolare; dovrà ciò esserci di argomento, che il problema proposto sia indeterminato, e che il luogo ad esso corrispondente sia una linea retta, o una linea circolare, la quale resterà determinata con quella stessa proprietà, a cui si è giunto colla supposta risoluzione del problema.

517. Debbasi primieramente ritrovare il punto M, da cui tirate agli altri due A, e B dati di Fig.223.

posizione le rette MA, MB, siano queste tra loro eguali. Congiungasi la retta AB, sopra di cui alzisi la perpendicolare AC, e compiscasi il rettangolo ANMO. Essendo adunque eguali le due MA, MB, saranno eguali ancora le altre due AO, BO (84); e pertanto AO, o sia MN sarà la metà della tutta AB. Quindi per questa metà dovrà essere il punto M distante dalla perpendicolare AC. E poicchè questa proprietà compete ad ogni punto della retta, che tirasi per lo punto O parallela ad AC; perciò il proposto problema sarà indeterminato di sua natura; e siccome il luogo, che li corrisponde, è una linea retta, così si determinerà questa retta, con dividersi la data AB egualmente nel punto O, e con tirarsi per questo punto la retta DE, che sia parallela ad AC, o pure perpendicolare alla stessa AB.

518. Debbasi in secondo luogo dentro del triangolo ABC ritrovare il punto M, per cui tirata la retta NO parallela al lato BC, che s'incontri cogli altri due AB, AC ne' punti N, ed O, sia MO ad MN in data ragione. Dividasi in questa stessa ragione il lato BC nel punto D. Ed essendo come DC a DB, così MO ad MN; sarà componendo come BC a DB, così NO ad MN. Ma per essere li due triangoli ABC, ANO tra loro equiangoli, AB sta a BC, come AN ad NO (316). Dunque sarà ordinando come AB a DB, così AN ad MN; ed in conseguenza competendo questa proprietà a tutti i punti della retta AE, che dal punto A tirasi per lo punto D, sarà il proposto problema indeterminato di sua natura, ed il suo luogo sarà la stessa retta AE, la quale si determina, con dividersi il lato BC talmente in D, che sia DC a DB nella stessa ragione di MO ad MN.

Fig. 224.

519. Debbasi in terzo luogo dentro dell'angolo BAC ritrovare il punto M, da cui abbassate le perpendicolari MN, MO sulli lati AB, AC, siano le medesime tra loro in data ragione. Prendasi nel lato AB ad arbitrio il punto B, su di cui alzisi l'al-

Fig. 225.

l'altra perpendicolare BC; e s'incontrino le due MN, BC coll'altro lato AC ne' punti R, e C. Essendo adunque equiangoli li due triangoli MOR, ABC, sarà come MO ad MR, così AB ad AC. Onde con farsi, che la ragione di MN ad MO sia eguale alla ragione di AD ad AB; sarà ordinando come MN ad MR, così AD ad AC. Quindi il problema proposto, ricadendo nel precedente, sarà indeterminato di sua natura; e pertanto il suo luogo sarà una linea retta, la quale si determinerà con dividersi la perpendicolare BC talmente in E, che sia BE a CE, come AD ad AC, e con tirarsi per lo punto E la retta AF, che sarà il luogo cercato.

520. Debbasi in quarto luogo rittrovare il punto M, da cui tirate agli altri due A, e B dati di posizione le rette MA, MB, siano queste tra loro in data ragione. Congiungasi la retta AB, la quale dividasi talmente in C, che sia AC a BC in quella stessa ragione. Ed essendo MA ad MB, come AC a BC, sarà l'angolo AMB diviso egualmente per la retta MC (315); onde con farsi l'angolo CMD eguale all'angolo acuto MCD, non solo saranno eguali le due MD, CD, ma sarà ancora l'angolo BMD eguale all'angolo CAM. Quindi essendo equiangoli li due triangoli AMD, MBD, sarà come MA ad MD o sia CD, così MB a BD; e pertanto dovendo essere permutando come MA ad MB, così CD a BD, sarà data ancora la ragione delle due CD, BD; con che il punto D sarà similmente dato. Ma la posizione del punto M richiede, che siano eguali le due MD, CD; e questa proprietà compete ad ogni punto della linea circolare, che descrivesi col centro C, e coll'intervallo CD. Dunque il proposto problema sarà indeterminato di sua natura, e la riferita linea circolare sarà il luogo, che li corrisponde. Fig. 226.

521. Debbasi in quinto luogo ritrovare il punto M, da cui abbassata sulla retta data AB la perpendicolare MN, sia la differenza tra il quadra- Fig. 227. 228.

to di questa perpendicolare, ed il rettangolo di AN in BN eguale al quadrato dell' altra data EF. Dividasi la AB egualmente in C, e pongasi primieramente, che il quadrato di MN sia maggiore del rettangolo di AN in BN. Essendo adun-
Fig. 227. que il quadrato di MN eguale al rettangolo di AN in BN insieme col quadrato di EF; coll'aggiunta del comune quadrato di CN, sarà il quadrato di CM eguale alli quadrati delle due CA, EF. Ma alzata sopra di AB la perpendicolare AD eguale ad EF, ancora il quadrato di CD è eguale alli quadrati delle due CA, EF. Dunque sarà il quadrato di CM eguale al quadrato di CD, ed in conseguenza le due CM, CD saranno tra loro eguali. Onde, perche questa proprietà compete ad ogni punto della linea circolare descritta col centro C, e coll' intervallo CD; sarà il proposto problema di sua natura indeterminato, ed il suo luogo sarà la riferita linea circolare.

Fig. 228. 522. Pongasi poscia, che il quadrato di MN sia minore del rettangolo di AN in BN. Ed essendo li quadrati delle due MN, EF eguali al rettangolo di AN in BN; coll' aggiunta del comune quadrato di CN, saranno li quadrati delle due CM, EF eguali al quadrato di AC; onde l'eccesso, con cui il quadrato di AC supera il quadrato di EF, sarà eguale al quadrato di CM. Ma, descritto sopra di AC come diametro il semicerchio ADC, e adattata dentro di esso la retta AD eguale ad EF, quel medesimo eccesso è eguale ancora al quadrato di CD. Dunque sarà il quadrato di CM eguale al quadrato di CD, ed in conseguenza le due CM, CD saranno tra loro eguali. Quindi, perche questa proprietà compete ad ogni punto della linea circolare descritta col centro C, e coll' intervallo CD; sarà il problema proposto ancora per rapporto a quest' altro caso indeterminato di sua natura, e la suddetta linea circolare sarà il luogo, che li corrisponde.

Fig. 229. 523. Debbasi finalmente ritrovare il punto M, da cui tirate agli altre due A, e B dati di posi-

zio-

zione le rette MA, MB, sia data la somma de' loro quadrati. Pongasi, che detta somma sia doppia del quadrato fatto da EF; e divisa la retta AB egualmente in C, si abbassi su di essa la perpendicolare MN. Essendo adunque li quadrati delle due AN, BN doppii delli quadrati dell'altre due AC, CN (126); saranno li quadrati delle tre AC, CN, MN, o pure li quadrati delle due AC, CM eguali al quadrato di EF; con che l'eccesso, con cui il quadrato di EF supera il quadrato di AC, sarà eguale al quadrato di CM. Ma, alzata sulla stessa retta AB l'altra perpendicolare CD, ed applicata nell'angolo ACD la retta AD eguale ad EF, quel medesimo eccesso è eguale ancora al quadrato di CD. Dunque sarà il quadrato di CM eguale al quadrato di CD, e pertanto le due CM, CD saranno tra loro eguali. Onde il proposto problema sarà indeterminato di sua natura, ed il luogo, che li corrisponde, sarà la linea circolare descritta col centro C, e coll'intervallo CD.

524. Notisi in questo luogo, che se in vece della somma fosse data la differenza de' quadrati fatti dalle due MA, MB, il problema sarebbe ancora indeterminato, il quale però ci condurebbe ad una retta perpendicolare sulla data AB. Pongasi perciò, che la riferita differenza sia eguale al quadrato di EF. Ed essendo la medesima eguale alla differenza de' quadrati fatti dall' altre due AN, BN; sarà ancora quest' altra differenza eguale al quadrato di EF. Ma presa CO eguale a CN, dee essere quest' altra differenza eguale al rettangolo di AB in NO (123). Dunque il rettangolo di AB in NO, ed il quadrato di EF saranno tra loro eguali; ed in conseguenza sarà come AB ad EF, così EF ad NO (372). Quindi essendo date le due AB, EF, sarà data ancora così la tutta NO, come la sua metà CN; e pertanto il luogo del punto M sarà la retta ND alzata perpendicolarmente dal punto dato N sull' altra AB. Fig. 230.

## §. V.

### *Dell' uso de' luoghi geometrici nella risoluzione de' problemi.*

525. Data un' idea, così de' luoghi geometrici in generale, come di quelli, che spezialmente chiamansi piani; non sarà difficile ora l'intendere a fondo l'artifizio, che impiegano i Geometri nella risoluzione de' loro problemi. Perciò egli è da notarsi, che siccome nasce il luogo, quante volte si toglie dal problema alcuna delle condizioni, che lo determinano; così con toglierseñe ora una, ed ora un'altra, possono sempre rinvenirsi due luoghi, che separatamente contengano le condizioni di quello. Quindi, con descriversi questi luoghi, chiara cosa si è, che nel loro incontro debbano ritrovarsi riunite insieme le stesse condizioni; e pertanto con quel medesimo incontro si avrà il punto, a cui riduceési la risoluzione del problema proposto.

Fig.231. 526. Debbasi per ragion di esempio ritrovare il punto M, da cui abbassate le perpendicolari MN, MO, MR sulli lati del triangolo ABC, siano queste tra loro in data ragione. Cerchisi primieramente detto punto colla sola ragione delle due MN, MO, che cadono sulli lati dell'angolo ABC; e potendo egli avere infinite posizioni, determinisi il luogo di ciascuna di esse (519), e sia la retta BD. Cerchisi poscia l'istesso punto colla sola ragione delle due MO, MR, che cadono sulli lati dell'altro angolo BCA; e determinisi parimente la retta CE, che sia il luogo dell' infinite sue posizioni. Notisi finalmente il punto M, in cui le due rette BD, CE tra loro s'incontrano; e questo sarà il punto, che si dimanda. Poicchè, essendo egli situato in ciascuna di quelle rette, per necessità dovrà esser data così la ragione delle due MN, MO, come la ragione dell'altre due MO, MR.

525.

527. Debbasi ancora ritrovare il punto M, da Fig.232.
cui tirate agli altri due A, e B dati di posizione le rette MA, MB, sia data così la loro ragione, come la differenza de' loro quadrati. Cerchisi primieramente detto punto colla sola ragione, in cui debbono essere le due MA, MB; ed essendo egli capace d'infinite posizioni, ritrovisi la linea circolare CD, che sia il luogo di ciascuna di esse (520). Cerchisi poscia l'istesso punto colla sola differenza, che dee esservi tra li quadrati delle medesime MA, MB; e sia la retta EF il luogo delle infinite posizioni, che egli puo avere (524). Notisi finalmente il punto M, in cui la retta EF s'incontra colla linea circolare; e ritrovandosi egli in ciascuna di queste linee, sarà data, così la ragione delle due MA, MB, come la differenza de' loro quadrati; onde l'istesso punto M sarà quello, che si dimanda.

528. Qualora adunque si tratta di risolvere qualche problema, tutta l'arte riducesi a ritrovare due luoghi geometrici, che separatamente contengano le condizioni nel medesimo apposte; ma affinche la soluzione del problema sia semplice, ed elegante, debbono sciegliersi ancora que' luoghi, che più facilmente possono costruirsi; e perciò giova percorrere le conseguenze, che dalle condizioni del problema discendono; poicche avviene ben spesso, che si abbiano luoghi più semplici più tosto colle loro conseguenze, che colle condizioni medesime. Così per ritrovare il punto M, da cui tirate agli altri due A, e B dati Fig.233.
di posizione le rette MA, MB, sia data così la loro ragione, come la somma de' loro quadrati; potrebbe farsi uso delli due luoghi, alli quali ci conducono la data ragione delle due MA, MB, e la data somma de' loro quadrati; ma possono aversi luoghi più semplici nella maniera, che segue.

529. Pongasi, che li quadrati delle due MA, MB insieme siano eguali al quadrato di CD; ed alzata su di questa la perpendicolare DE, pongasi an-

si ancora, che MA sia ad MB, come CD a DE. Congiungasi poscia la retta CE, su di cui facciasi cadere finalmente l'altra perpendicolare DF. Essendo adunque equiangoli li due triangoli CFD, CDE, saranno le due CF, DF nella stessa ragione di CD a DE (316); ed essendo il triangolo CFD rettangolo in F, saranno li quadrati delle medesime CF, DF eguali al quadrato di CD (129). Ma queste stesse condizioni debbono avere ancora le due MA, MB. Dunque sarà MA eguale a CF, ed MB eguale a DF; e per tanto i luoghi più semplici per determinare il punto M saranno le due linee circolari descritte colli centri A e B, e con intervalli eguali alle due CF, DF.

530. Ma per altra ragione non dobbiamo sempre appigliarci a que'luoghi, che ci somministrano a prima vista le condizioni del problema; e si è, perchè non sempre essi si confanno coll'indole del problema medesimo. Debbasi per ragion
Fig. 234. di esempio sulla retta data AB formare il triangolo AMB, in cui sia data così la ragione de' lati MA, MB, come la somma de' medesimi. Le condizioni di questo problema naturalmente ci conducono a due luoghi, de' quali uno ricavasi dalla data ragione de' lati MA, MB, l'altro dalla data somma di essi. Ma se bene il primo di questi luoghi sia una linea circolare (520), l'altro tutta volta è una curva più composta, la quale affatto non si richiede per la soluzione del problema, di cui si tratta. Onde per avere luoghi confacenti alla sua indole, per necessità deesi ricorrere alle conseguenze, che da quelle stesse condizioni si deducono.

531. Pongasi perciò, che CD sia la somma delli due lati MA, MB. E dividendosi la medesima CD talmente in E, che sia CE a DE nella stessa ragione, in cui debbono essere li due lati MA, MB; sarà MA eguale a CE, ed MB eguale a DE. Con che i luoghi proprj per ritrovare il punto M saranno le due linee circolari descritte colli centri A e B, e con intervalli eguali

alle

alle due CE, DE. L'istesso avviene, se sulla retta data AB vogliasi formare un triangolo, in cui sia data così la ragione de' lati MA, MB, come la differenza de' medesimi. Imperocchè il luogo, che deducesi dalla data differenza di detti lati, è una curva molto più composta della linea circolare: quandochè, essendo CD la data differenza, e prolungandosi la medesima talmente in E, che sia CE a DE nella stessa ragione di MA ad MB, può aversi il punto M colle due linee circolari, che si descrivono colli centri A e B, e con intervalli eguali alle due CE, DE. Fig. 235.

532. Ed in vero, dovendosi risolvere qualche problema, sarebbe errore gravissimo servirsi de' luoghi superiori alla sua indole. Quindi il primo studio dee riporsi nella ricerca de' luoghi, che si confacciano col problema medesimo; siccome per gli problemi piani sono quelli, che ci conducono alla linea retta, ed alla linea circolare. Fra li luoghi poi adattati alla natura del problema, debbono essere preferiti coloro, che più facilmente possono costruirsi, per la ragione, che quanto più facile è la loro costruzione, tanto sarà più semplice ed elegante la soluzione del problema medesimo. E quindi si è, che nè pure per gli luoghi dobbiamo contentarci di quelle costruzioni, che a prima faccia ci si presentano; ma bisogna, che si rifletta intorno alla natura di essi, e che si percorrano le conseguenze, che ne discendono, per vedere se con queste conseguenze possono aversi degli stessi luoghi costruzioni più semplici.

533. Esempio di ciò può esserci il problema di sopra proposto (526), in cui trattasi di ritrovare il punto M, donde abbassate le perpendicolari MN, MO, MR sulli lati del triangolo ABC, siano queste tra loro in data ragione. Imperocchè li luoghi confacenti all'indole di questo problema sono le rette BD, CE, delle quali una si determina colla ragione delle due MN, MO, e l'altra colla ragione dell'altre due MO, MR. Ma poichè la natura di esse richiede, che ancora l'al- Fig. 231.

tre

tre perpendicolari abbassate dagli altri loro punti sulli medesimi lati serbino le stesse ragioni; si potranno le medesime con costruzione assai semplice definire nella seguente maniera. Si alzino sopra li lati AB, BC, AC da tre punti presi ad arbitrio le perpendicolari FP, GQ, HS, che siano tra loro in quella data ragione; si tirino poscia per gli loro estremi le rette PI, IL, SL parallele alli medesimi lati; e le due BD, CE tirate per gli punti I ed L, ne' quali quelle s' incontrano, saranno le rette, che si dimandano.

534. Egli è ancora da notarsi, che se mai il punto, a cui riducesi il problema, che dee risolversi, sia in un luogo già dato, la legge della simplicità richiede, che nella soluzione del problema facciasi uso di detto luogo. Debbasi per ragion di esempio dal punto dato A tirare la retta ABC, dimodocche la porzione di essa BC compresa dentro del dato cerchio BCD sia eguale ad un' altra retta data. Poicche questo problema riducesi a determinare nella circonferenza del cerchio dato il punto B, per cui passa la retta, che si dimanda; dovrà essere la stessa circonferenza uno de' luoghi, che debbono essere impiegati per la sua soluzione. E per quanto all'altro, si ritroverà egli facilmente, se divisa la BG egualmente in E, e tirata al cerchio la tangente AD, alzisi su di questa la perpendicolare DF eguale a BE. Imperocchè siccome con una tal costruzione si fanno eguali le due AE, AF; così con tagliarsi da AF la porzione FG eguale a DF, sarà AB eguale ancora ad AG; e pertanto l'altro luogo sarà la linea circolare, che descrivesi col centro A, e coll'intervallo AG.

Fig. 236.

535. Debbasi ancora dal dato punto A tirare la retta ABC, la quale incontrandosi colla circonferenza del cerchio dato BCD ne' punti B, e C faccia, che le due AB, AC siano tra loro in data ragione. Poicche quest' altro problema ancora riducesi a ritrovare nella circonferenza del dato cerchio il punto B, per cui passa la retta, che si di-

Fig. 237.

ſi dimanda; dovrà parimente eſſere la ſteſſa circonferenza uno de' luoghi da impiegarſi nella ſoluzione di eſſo. Per quanto poi all'altro, ſi ritroverà egli facilmente, ſe tirata al cerchio la tangente AD, pongaſi che AE ſia ad AD nella ſteſſa ragione di AB ad AC, e facciaſi che AF ſia mezza proporzionale tra le due AE, AD. Imperocchè eſſendo in proporzione continua così le tre AB, AD, AC, come le tre AE, AF, AD; ſarà tanto AB ad AC in duplicata ragione di AB ad AD, quanto AE ad AD in duplicata ragione di AF ad AD (287); e perciò eſſendo AB ad AC, come AE ad AD, ſarà ancora come AB ad AD, così AF alla ſteſſa AD; con che dovendo eſſere eguali le due AB, AF, ſarà la linea circolare, che deſcriveſi col centro A, e coll' intervallo AF, l'altro luogo, che ſi dimanda.

536. Del rimanente un problema geometrico tuttocchè determinato può ricevere tal volta varie ſoluzioni, locchè avviene, quando i luoghi, per mezzo de' quali egli ſi riſolve, s'incontrano tra loro in più di un punto. Quindi ancora per queſto verſo dee farſi diſtinzione tra i problemi piani del primo genere, e quelli del ſecondo. Imperocchè dovendoſi i primi riſolvere con due rette, le quali s'incontrano in un ſol punto, non potranno eſſi ammettere, ſe non che una ſola ſoluzione. All'incontro i ſecondi, richiedendo di lor natura o due linee circolari, o una retta ed una linea circolare, le quali regolarmente s'incontrano in due punti, ſaranno capaci di due ſoluzioni diverſe. Ma egli è da notarſi, che ſiccome queſte due diverſe ſoluzioni ſi riuniſcono in una ſola, quando le linee, colle quali ſi determinano, s'incontrano tra loro toccandoſi; così amendue poſſono ſvanire, e darci a divedere, che il problema ſia impoſſibile, qualora le ſteſſe linee affatto fra di eſſe non s'incontrano.

537. Egli è vero, che le due rette, colle quali ſi riſolve un problema del primo genere, poſſono tal

tal volta farsi parallele; ma non perciò svanisce interamente la sua soluzione, per la ragione, che le parallele possono considerarsi come rette, le quali s'incontrano tra di esse in una distanza infinita.
Fig.238. Debbasi per ragion di esempio prolungare la retta data AB per fino in C, dimodocche AC a BC sia in data ragione. Egli è chiaro, che alzate su di essa le perpendicolari AD, BE, che siano tra loro in quella stessa ragione, ritrovasi il punto, che si dimanda, coll'incontro delle due AB, DE. Queste intanto diventano parallele, quantevolte la data ragione è di uguaglianza; ma supponendosi, che il loro incontro si faccia in un punto C infinitamente distante dalli due A, e B, pure il problema rimane risoluto; poicche per l'infinita lunghezza delle due AC, BC puo trascurarsi a riguardo di esse la data AB; ed in conseguenza le medesime AC, BC saranno tra loro in ragione di uguaglianza.

538. Ma per altra ragione ancora puo avvenire, che un problema geometrico sia capace di várie soluzioni; e si è, perche uno de' luoghi, che per esso s'impiegano, puo avere tal volta doppia posizione. Debbasi perciò sulla data base AB formare un triangolo, in cui sia data così l'altezza,
Fig.239. come la ragione degli altri due lati. Descrivasi primieramente la linea circolare CD, la quale sia di tal natura, che le rette tirate da ciascuno de' suoi punti agli altri due A, e B dati di posizione siano in quella data ragione; indi dalla perpendicolare AE alzata sulla retta AB taglisi la porzione AF eguale alla data altezza; tirisi finalmente per lo punto F la retta FG parallela alla stessa AB; ed egli è chiaro, che incontrandosi questa parallela colla descritta linea circolare, si avrà la soluzione del problema proposto. Ma poicche con farsi AF eguale all'altezza data, si ritrovano nello stesso tempo due punti F, sarà doppia la posizione della parallela FG; e per tanto il problema sarà capace di quattro soluzioni diverse.

539. Questo medesimo può illustrarsi ancora con quel

quel problema, in cui dato il quadrato ABCD Fig. 240.
trattasi di tirare dal punto D la retta DEF, la quale incontrandosi colli due lati AB, BC ne' punti E ed F faccia, che la porzione EF sia eguale alla data DG. Imperocchè secondo fu dimostrato di sopra (506), si avrà la soluzione di esso con tagliarsi dal lato DC prolungato la porzione CH eguale a CG, e con descriversi sopra DH, come diametro un semicerchio, che s'incontri col lato AB. Ma poicchè con farsi CH eguale a CG si anno nel medesimo tempo due punti H, saranno due i semicerchi, che possono descriversi; e perciò potendosi così l'uno, come l'altro incontrare col lato AB in due punti diversi, saranno non due, ma quattro le diverse soluzioni, che potrà ricevere l'istesso problema.

540. Ciò, che si è notato intorno alla doppia posizione di un luogo, puo avvenire ancora in un problema piano del primo genere; onde per questo verso niente osta, che possa egli avere due soluzioni diverse. Siano dati per ragion di esempio in una retta due punti A, e B, e debbasi nella me- Fig. 241.
desima ritrovare il terzo C, dimodo che AC a BC sia in data ragione. Si alzino sulla retta data le perpendicolari AD, BE; e presa in una di esse la porzione AD ad arbitrio, taglisi dall'altra la porzione BE di lunghezza tale, che le due AD, BE siano tra loro in quella data ragione. Egli è chiaro, che coll'incontro delle due rette AB, DE si abbia il punto C, che si dimanda. Ma poicchè, con tagliarsi quella tale porzione AE, vengono ad aversi nello stesso tempo due punti E, sarà doppia la posizione della retta DE; e perciò il problema proposto tuttocchè del primo genere sarà capace di due soluzioni diverse.

541. Egli è però da notarsi, che dee farsi differenza tra le diverse soluzioni, che derivano dalla moltiplicità de' punti, ne' quali i due luoghi s'incontrano, e tra quelle, che risultano dalla doppia posizione di uno degli stessi luoghi. Imperocchè le prime, per aversi con una stessa costruzione,

ne, non mai possono separarsi, ma di lor natura vanno sempre congiunte insieme; all'incontro le seconde, perche dipendono da costruzioni diverse, non anno tra loro unione così stretta, ed in conseguenza possono essere separate. In effetto queste seconde debbono essere considerate come casi diversi del problema, di cui si tratta; in quanto che nella costruzione di esse bisogna cambiarsi la posizione di qualche linea. E con questa occasione non sarà inutile quì l'avvertire, che siccome a riguardo di un istesso teorema si distinguono varj casi, per gli varj cambiamenti, che debbono farsi nella sua dimostrazione; così per rapporto ad un medesimo problema la varietà de'casi dee ripetersi dalle varie mutazioni, che può ricevere la sua costruzione.

I L F I N E.

IN-

# INDICE

## De' Capitoli, e de' Paragrafi, Che si contengono in questi Elementi.

### LIBRO I.

*Delle Teorie più semplici della Geometria piana.*



Q §.V.

## LIBRO II.

### *Delle Teorie più composte della Geometria piana.*



§.I.

IL FINE DELL' INDICE.

AG-

# AGGIUNTE, E CAMBIAMENTI

## *da farsi in questi Elementi.*

I. IL problema proposto nell' articolo 137 puo renderſi più generale. Trattaſi in eſſo di prolungare la data AB talmente in D, che il rettangolo delle due AD, BD ſia eguale al quadrato della ſteſſa AB. Ma puo egli riſolverſi ancora nel caſo, che l'iſteſſo rettangolo debba eſſere eguale al quadrato di qualunque retta data. Poiche diviſa la AB egualmente in C (42), e ritrovato un quadrato, che ſia eguale alli due fatti dalla BC, e dall' altra data (135), baſterà, che ſi tagli la porzione CD eguale al lato di queſto quadrato (31). E per quanto alla dimoſtrazione, vedeſi chiaramente, che ella rimane la medeſima. Biſogna intanto renderlo così generale, per la ragione, che in queſto ſenſo dee eſſere impiegato nella ſoluzione di quello propoſto altrove (338), in cui trattaſi di ritrovare due rette, le quali differenti tra loro per una data retta, ſiano reciproche con due altre date. Fig. 61.

II. Ad eſempio del riferito problema può ivi proporſene un'altro, e ſi è di dividere la data AB talmente in E, che il rettangolo delle due AE, BE ſia eguale al quadrato di un'altra data, non maggiore della metà di AB. Per riſolverlo, dividaſi la AB egualmente in C (42); e ritrovato un quadrato, che ſia eguale all' eccesso, con cui il quadrato di BC ſupera il quadrato dell' altra data (136), tagliſi la porzione CE eguale al lato del quadrato ritrovato (31). Io dico, che il punto E ſia quello, che ſi dimanda. Imperocche, ſiccome per la coſtruzione il quadrato di BC dee eſſere eguale al quadrato di CE, ed a quello dell' altra data; così eſſendo la AB diviſa egualmente in C, e diſugualmente in E, ſarà l'iſteſſo quadrato di BC eguale ancora al rettangolo delle due AE, BE inſieme col quadrato di CE (122); e pertanto il rettangolo di AE in BE, ed il quadrato dell' altra data ſaranno tra loro eguali. Fig. 61.

III.

III. Di questo problema puo farsi uso nella soluzione di quell' altro, proposto in altro luogo (335), in cui trattasi di ritrovare due rette, le quali essendo insieme eguali ad una data retta, siano reciproche con due altre date. Per dimostrarlo, pongasi, come ivi, che A, e B siano le due rette, colle quali debbono essere reciproche quelle, che si dimandano; e che CD sia l'altra retta, a cui le medesime insieme debbono essere eguali. Ritrovisi la mezza proporzionale tra le due A, e B, che sia F (328); e dividasi la CD talmente in H, che il rettangolo delle due CH, DH sia eguale al quadrato di F. Io dico, che le medesime CH, DH saranno reciproche colle due date A, e B. Imperocche, essendo il rettangolo di CH in DH eguale al quadrato di F, sarà F mezza proporzionale tra le due CH, DH (372). Ma la stessa F è mezza proporzionale ancora tra le due A, e B. Dunque quelle con queste saranno reciproche (333).

Fig. 151.

IV. Egli è vero, che colla ricerca di due rette, che essendo insieme eguali ad una data retta, siano reciproche con due altre date, si è fatto vedere ancora, come una retta data possa dividersi talmente, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra data (336). Ma appunto per non essersi posto nel suo luogo questo secondo problema, si è dovuto risolvere il primo con artifizio tale, che fosse valevole a darci tutto ad un tempo la soluzione così dell'uno, come dell'altro. Giova intanto, che si separino tra loro questi due problemi, e che si deduchi l'uno dall'altro; sì perche in questa maniera formasi idea più distinta del divario, che vi è nell'invenzione delle rette reciproche, quando è data la loro somma, e quando è data la loro differenza; come ancora perche così vedesi più chiaramente la verità di quel tanto è stato altrove avvertito (510), cioè che il problema delle rette reciproche riducesi alla ricerca di un quadrato, che sia eguale alla somma, o alla differenza di due altri quadrati dati.

V.

V. Ma qualora si risolve separatamente il problema, in cui si tratta di dividere una data retta in modo tale, che il rettangolo delle sue parti sia eguale al quadrato di un'altra data, bisogna farsi notare, che affinche egli sia solubile, debba l'altra data non essere maggiore della metà di quella, che dee dividersi: ciocche ricavasi facilmente da quel teorema, che essendo una retta divisa in parti uguali, ed in parti disuguali, il rettangolo delle parti disuguali insieme col quadrato della porzione compresa tra l'una, e l'altra divisione debba essere eguale al quadrato della metà (122). E ritrovandosi fatto un tal avvertimento, egli è facile poscia a comprendersi, che per potersi avere due rette, le quali essendo insieme eguali ad una data retta siano reciproche con due altre date, sia necessario, che la metà di quella data retta non sia minore della mezza proporzionale, che cade tra l'altre due date (337).

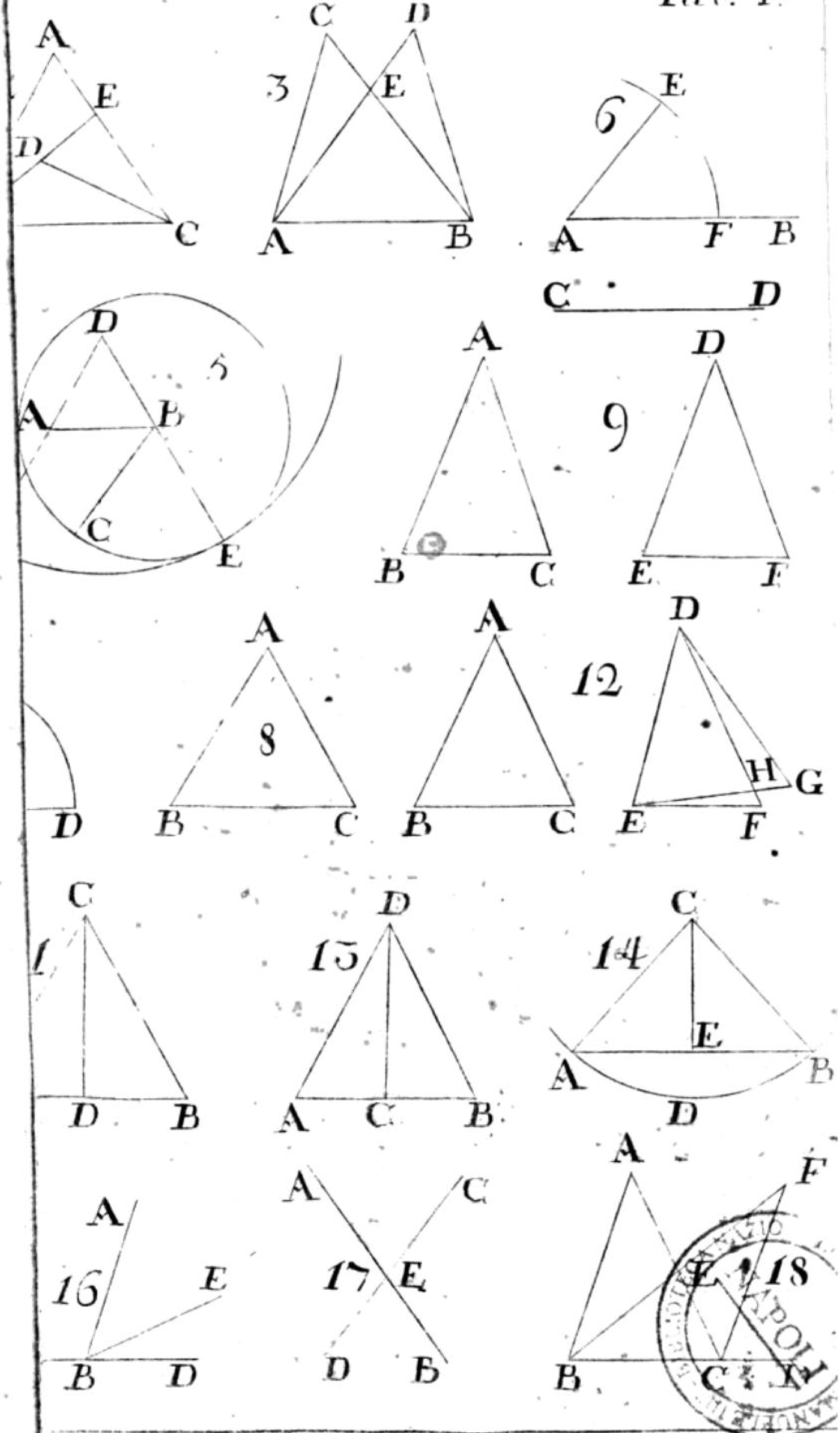
VI. Doppo essersi dimostrato nell' articolo 325, come debba dividersi una data retta proporzionalmente ad un'altra di già divisa, puo farsi vedere in quel medesimo luogo, come con un tal problema possono ritrovarsi due rette, che essendo insieme eguali ad una retta data, siano tra loro in data ragione; ed ivi ancora puo farsi notare il cambiamento da farsi nella costruzione, qualora si vogliono due rette, che essendo differenti tra loro per una retta data, siano tra di esse similmente in data ragione. Imperocche se bene e l'uno, e l'altro sia stato da noi altrove eseguito (488.489), tutta volta il proprio lor luogo è dopo il citato articolo, maggiormente che la preventiva conoscenza di tali problemi necessariamente si richiede per potersi risolvere tutti gli altri problemi piani del primo genere, li quali secondo si è detto (490) riduconsi, o a ritrovare una retta, che sia in data ragione con un'altra data; o pure a ritrovarne due, che siano in data ragione tra loro, e delle quali ne sia data o la somma, o la differenza.

VII. Si è fatto vedere nell' articolo 540, donde avviene, che essendo dati in una retta due punti

Fig.241. ti A, e B, e volendosi nella medesima il terzo C, di cui la posizione sia tale, che le due AC, BC siano tra loro in data ragione, il problema riceva due casi diversi. Ma l'istessa considerazione
Fig.242. puo farsi ancora a riguardo del problema, in cui il rettangolo delle due AC, BC dee essere eguale al quadrato di un'altra data. Pongasi perciò, che quest'altra data sia la perpendicolare AD; ed alzata dal punto B l'altra perpendicolare, taglisi da essa la porzione BE eguale ad AD. Congiungasi poscia la retta DE, che s'incontri col cerchio descritto sul diametro AB nel punto F; ed egli è chiaro, che la retta FC alzata perpendicolarmente su quella DE debba darci il punto C, che si dimanda. Or quì ancora con farsi BE eguale ad AD, vengono ad aversi due punti E. Onde essendo doppia la posizione della retta DE, due ancora saranno i casi di quest'altro problema, e ciascuno di essi potrà ricevere altresì due soluzioni diverse.

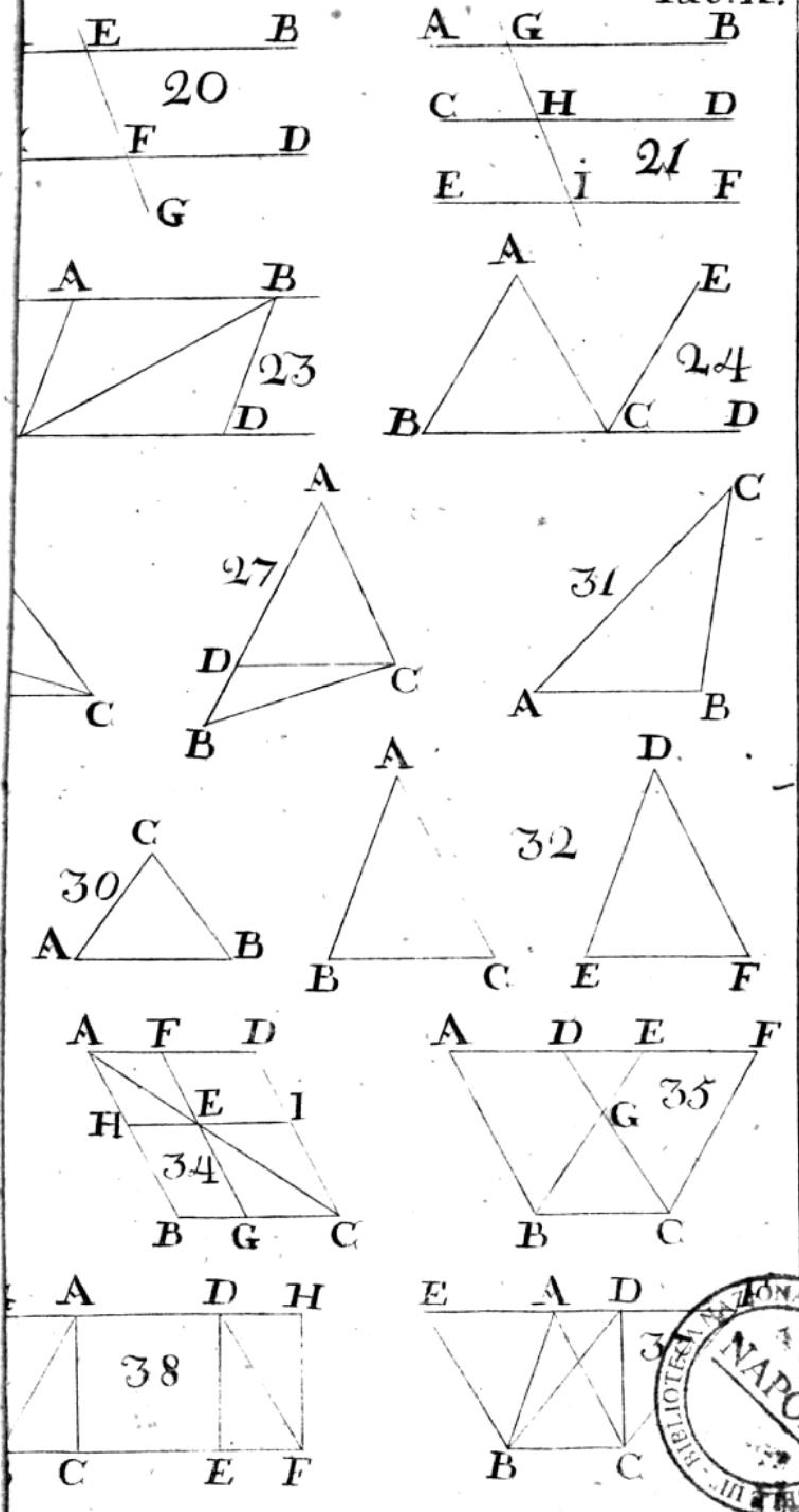
VIII. Io non posso rendere avvertito il Lettore degli errori, che forse sono incorsi nell'impressione di questi Elementi; perocche non ho avuto tempo bastante per rileggerli con quella attenzione, che si richiedeva per farmi accorto di essi. Ne ho notati intanto due intorno alla citazione delle figure, li quali tanto più debbono essere corretti, poicche possono recare qualche difficoltà ad un Lettore poco attento. Il primo riguarda la figura citata negli articoli 69, e 76, la quale dee essere 2, e non già la 23. L'altro concerne le figure citate negli articoli 422, e 425, le quali tuttocche diverse tra di esse sono segnate col medesimo numero 182; onde per distinguersi l'una dall'altra, ho procurato, che nell'incisione di esse vi si aggiungessero ancora i numeri Romani I, e II, dimodocche fosse notata col numero I la figura dell'articolo 422, e col numero II quella dell'articolo 425.

Tav. 1.

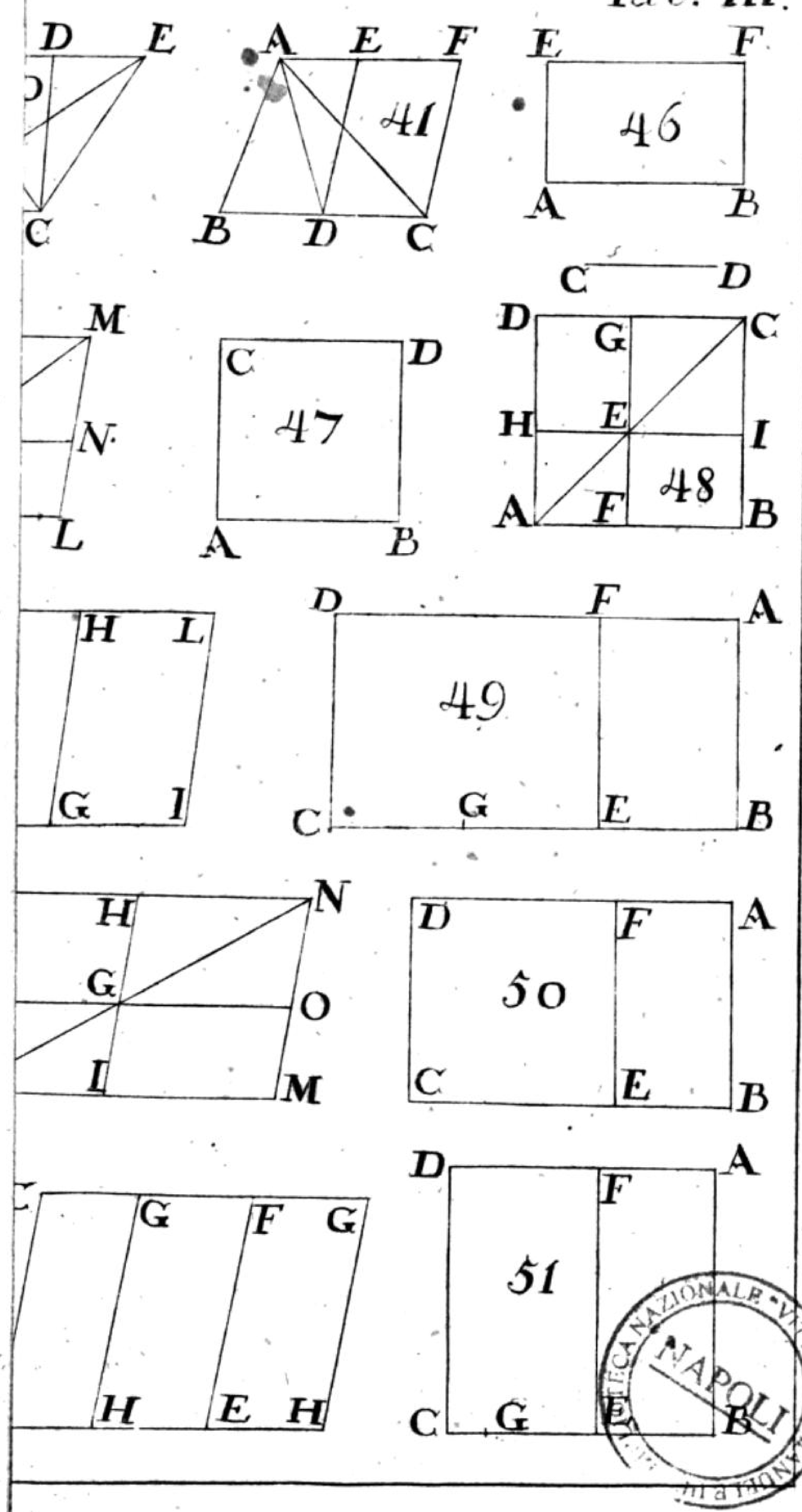


A E D C
3 C D E A B
6 E A F B C D
5 D A B C E
A B C
9 D E F
D
8 A B C
A B C
12 D H G E F
C D B
13 D A C B
14 C E A B D
16 A E B D
17 A C E D B
18 A F E B C

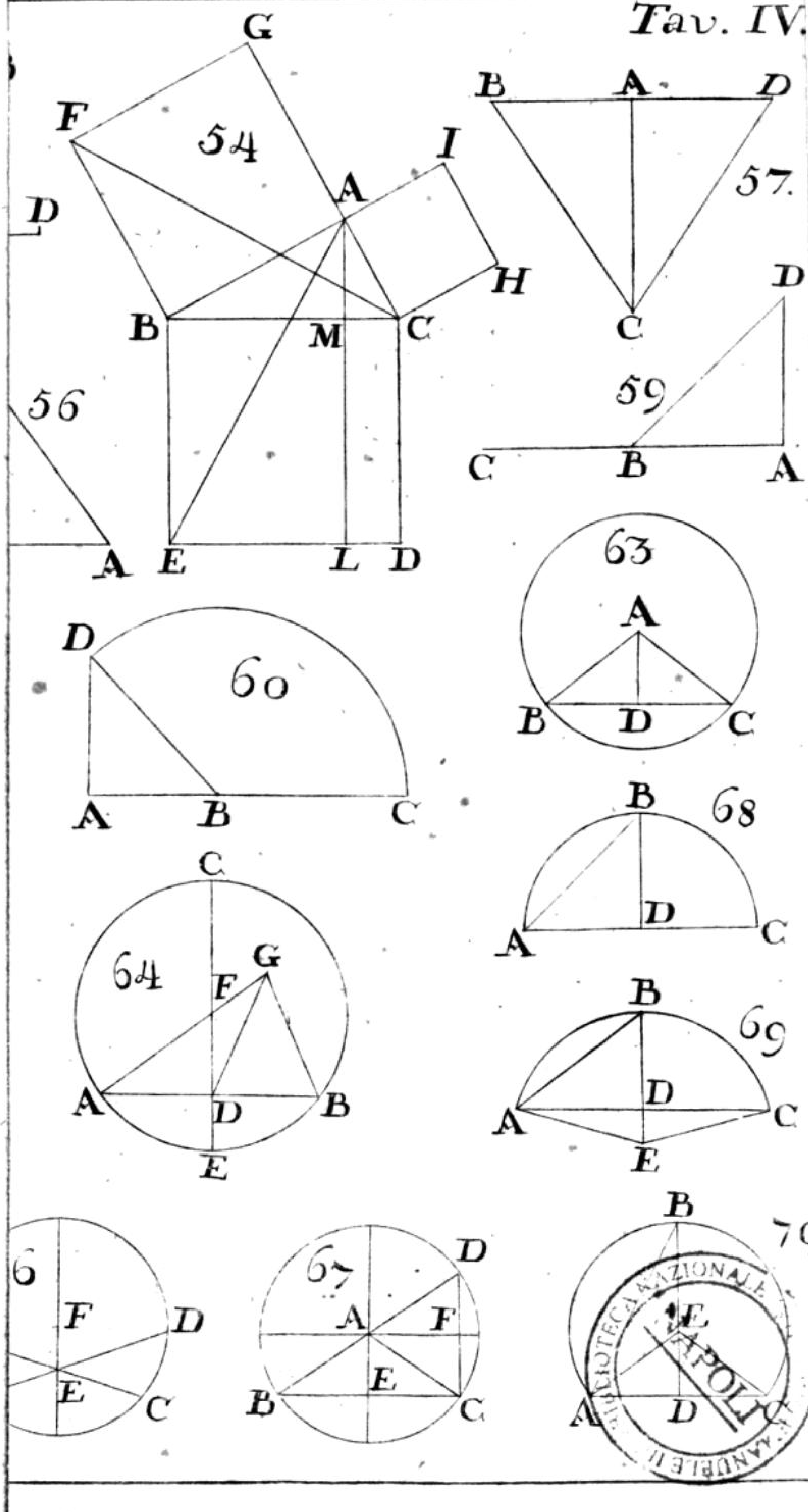
Tav. II.


E B
20
F D
G
A G B
C H D
21
E I F
A B
23
D
A
E
24
B C D
A
27
D C
B
C
C
31
A B
C
30
A B
A
B C
D
32
E F
A F D
E I
H
34
B G C
A D E F
35
G
B C
A D H
38
C E F
E A D
B C

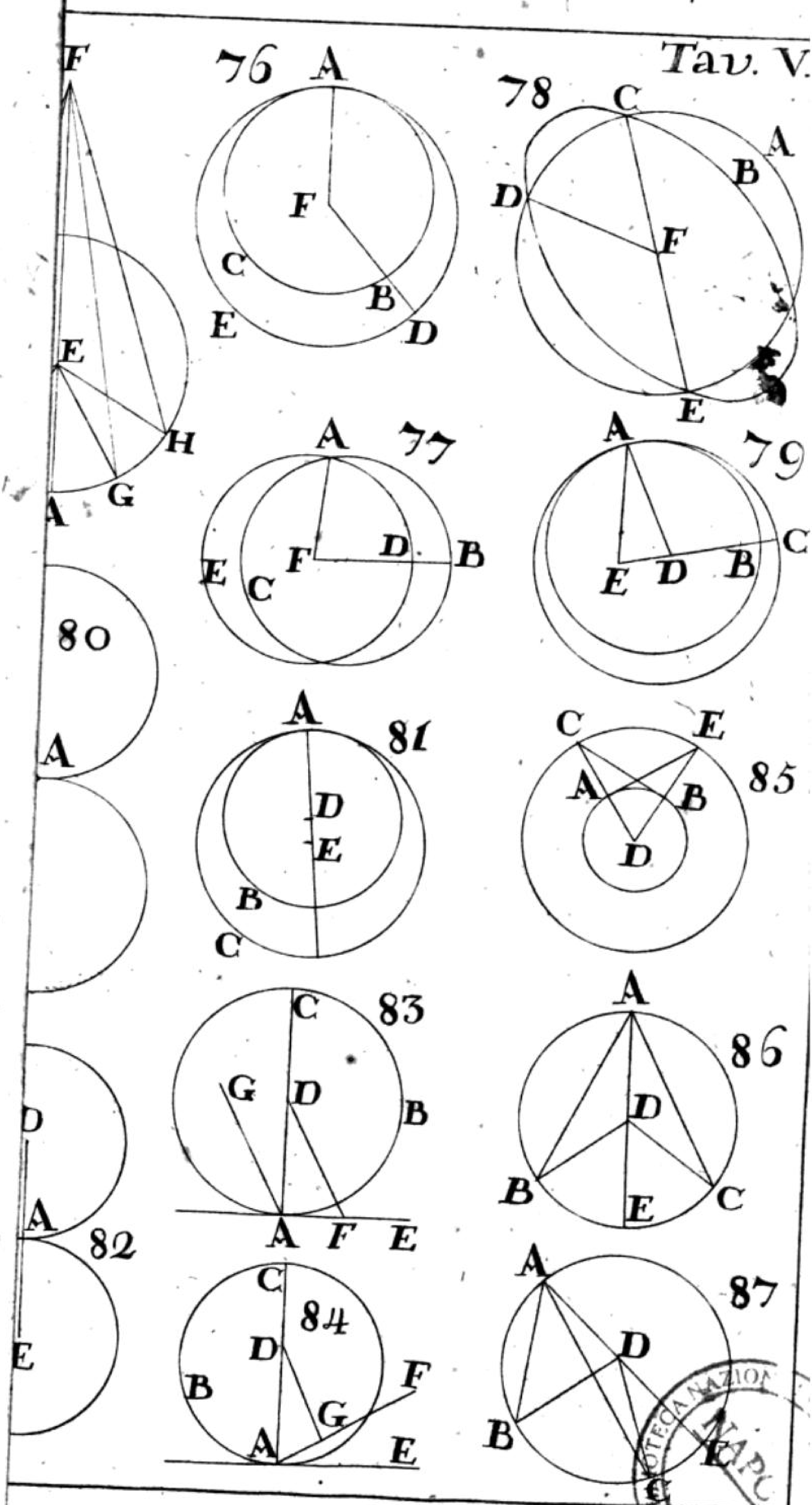
Tav. III.



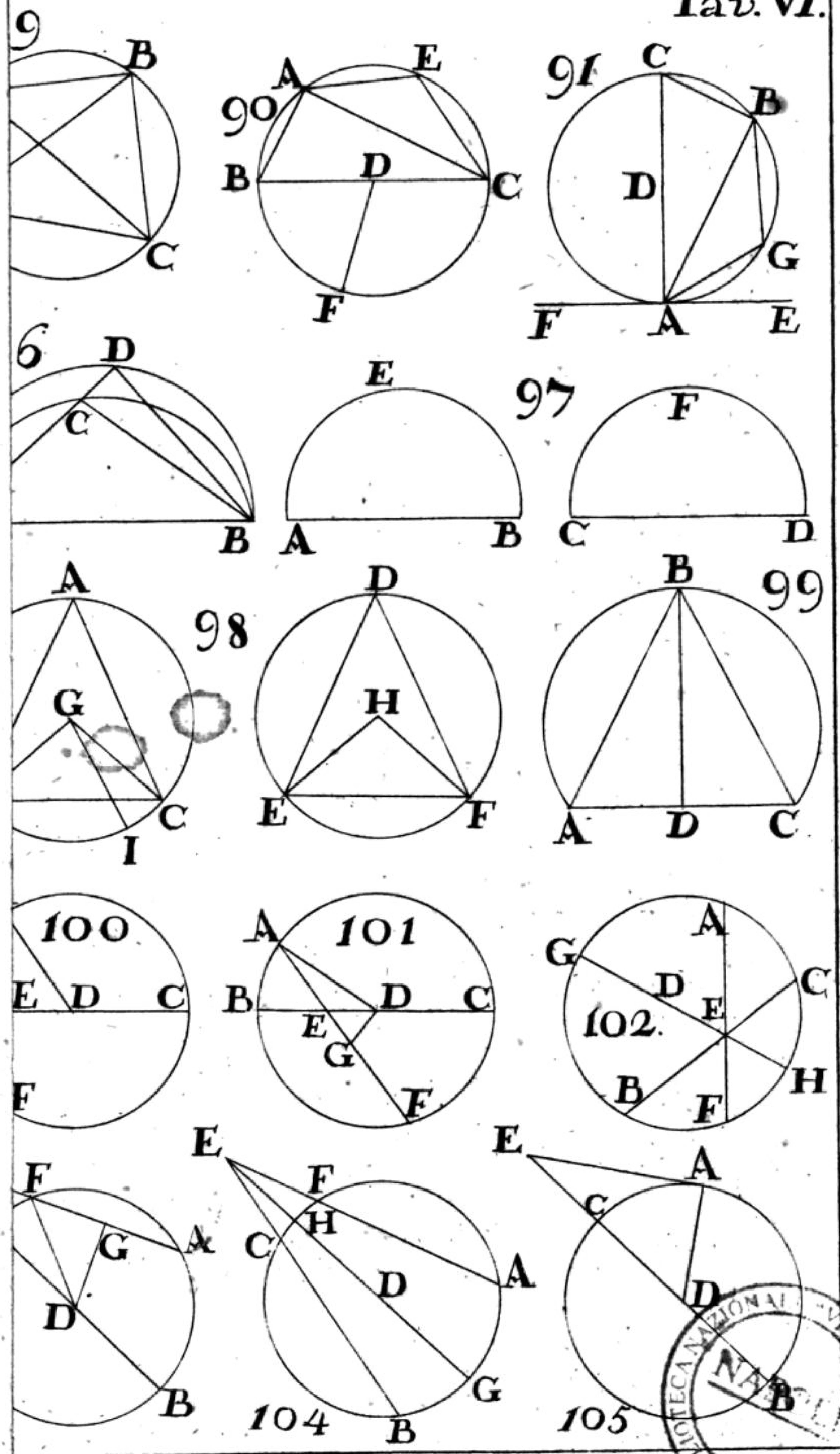
Tav. IV.

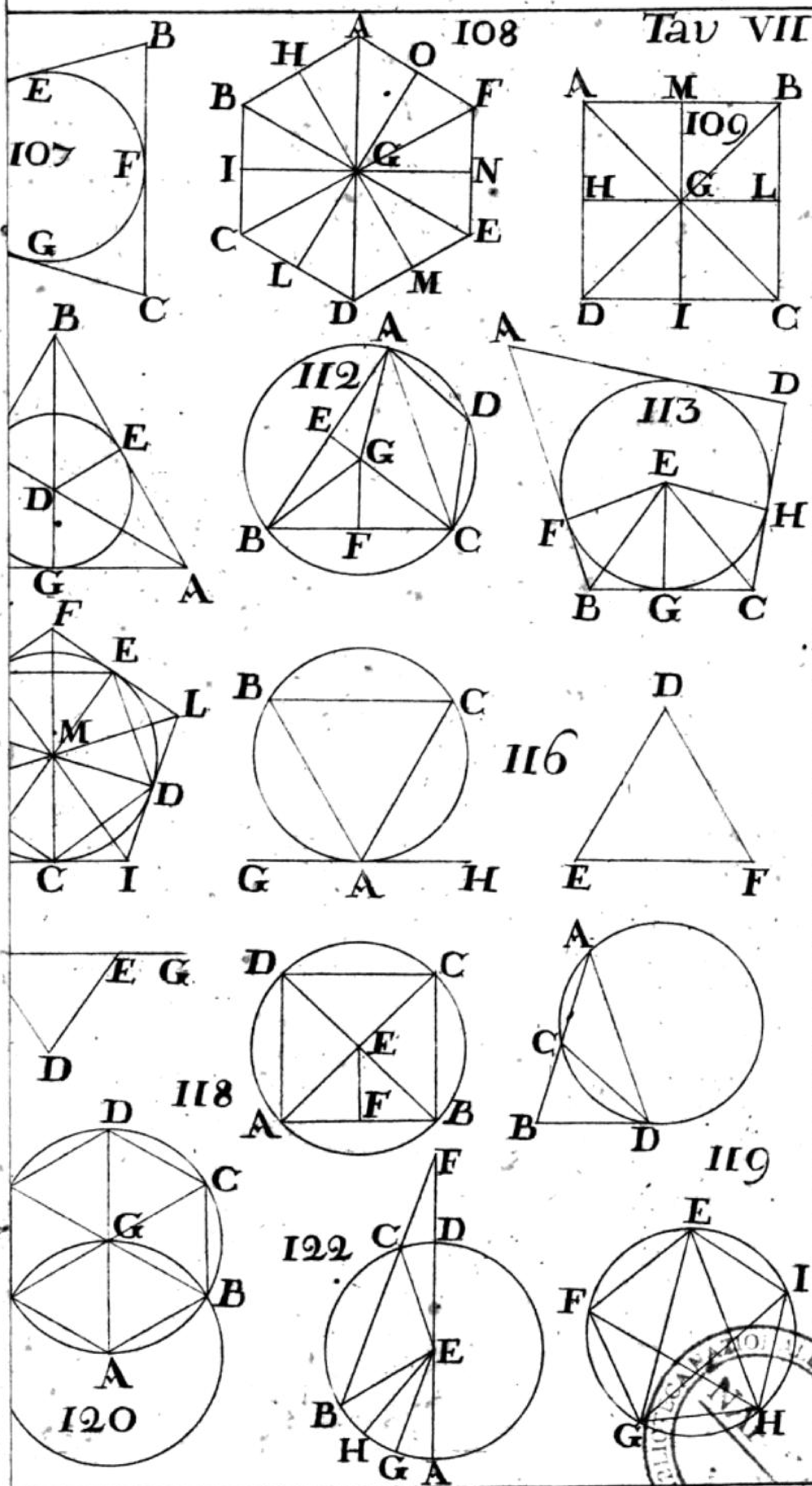


Tav. V.

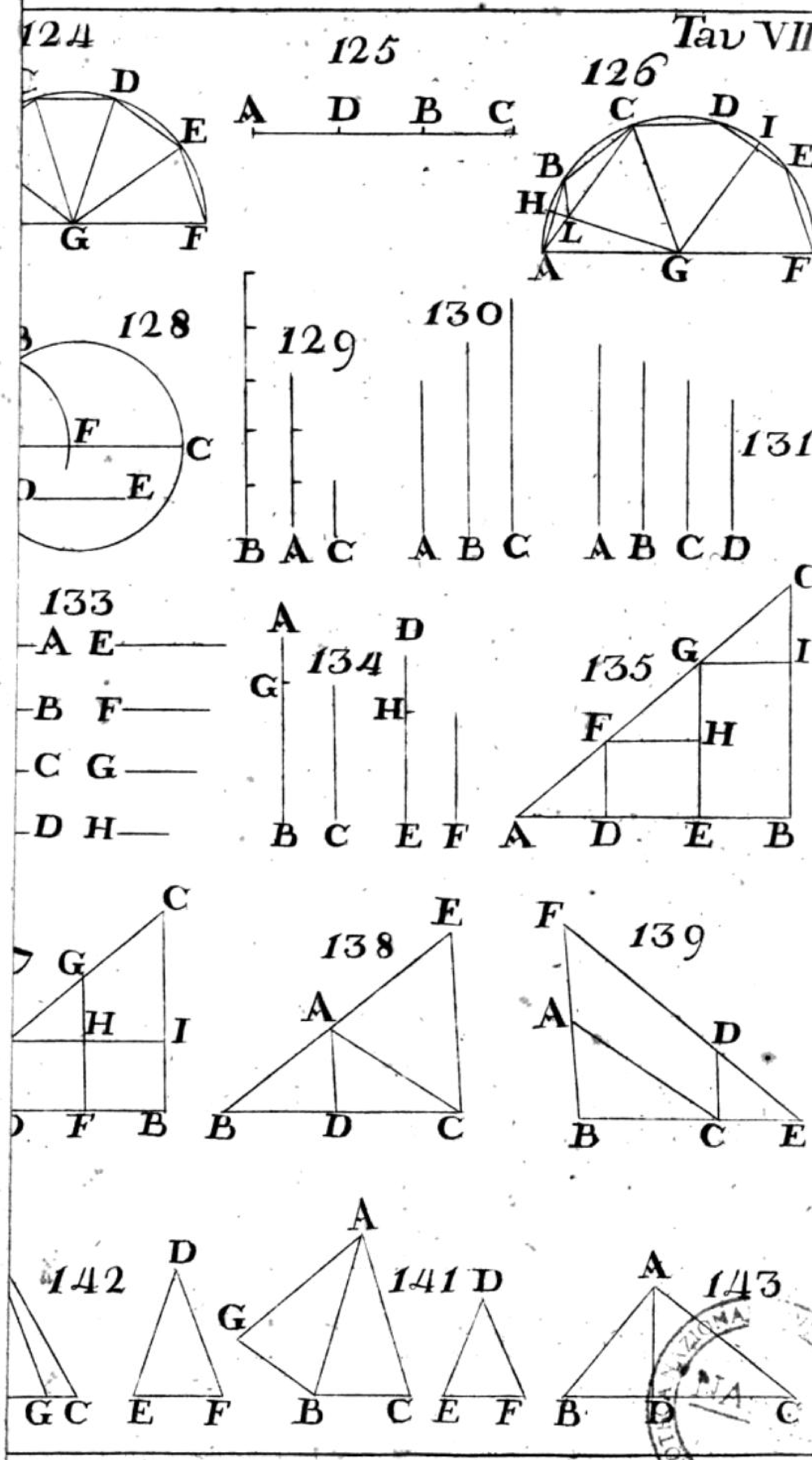


Tav. VI.

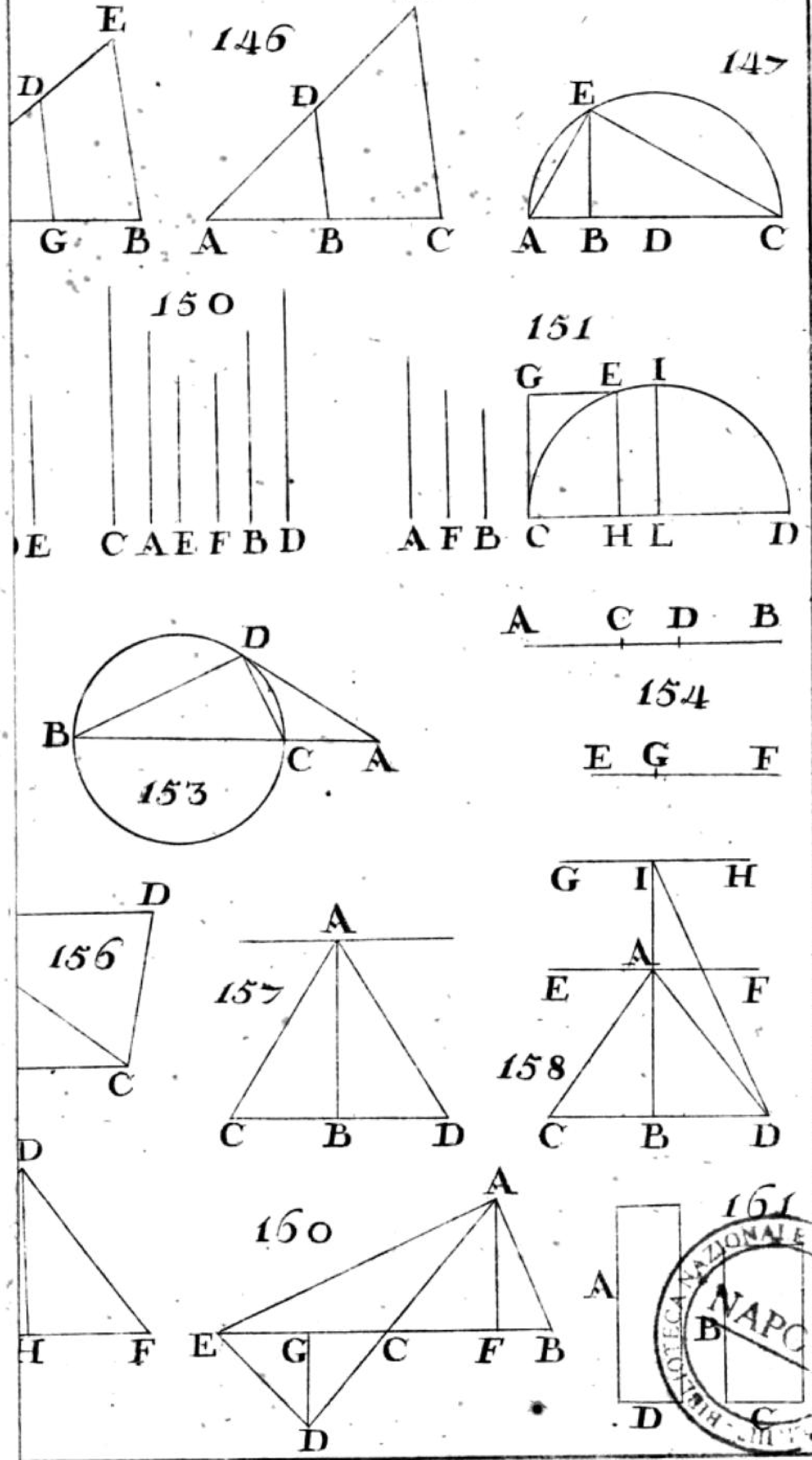



Tav VII
107
108
109
112
113
116
118
119
120
122

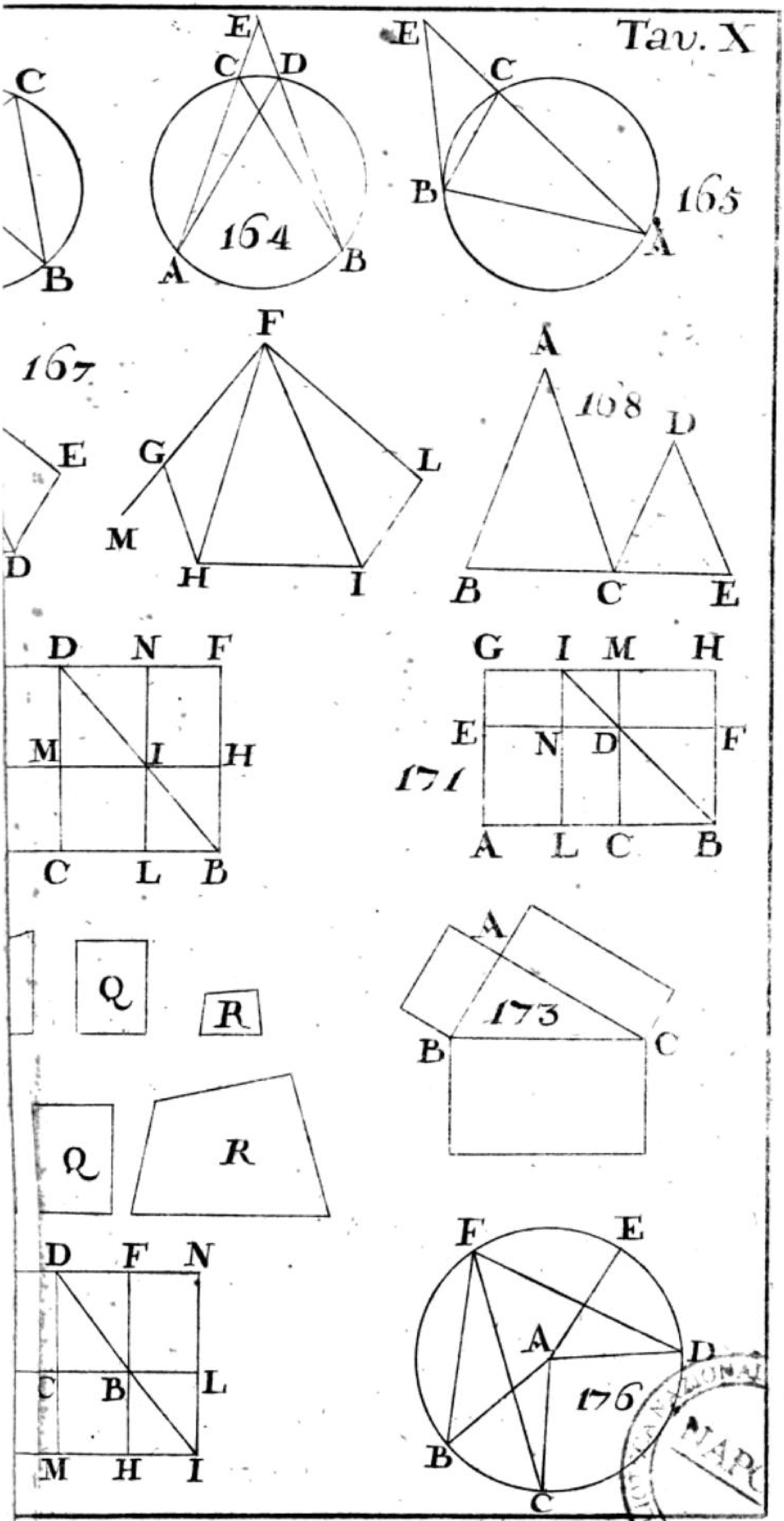
Tav VIII

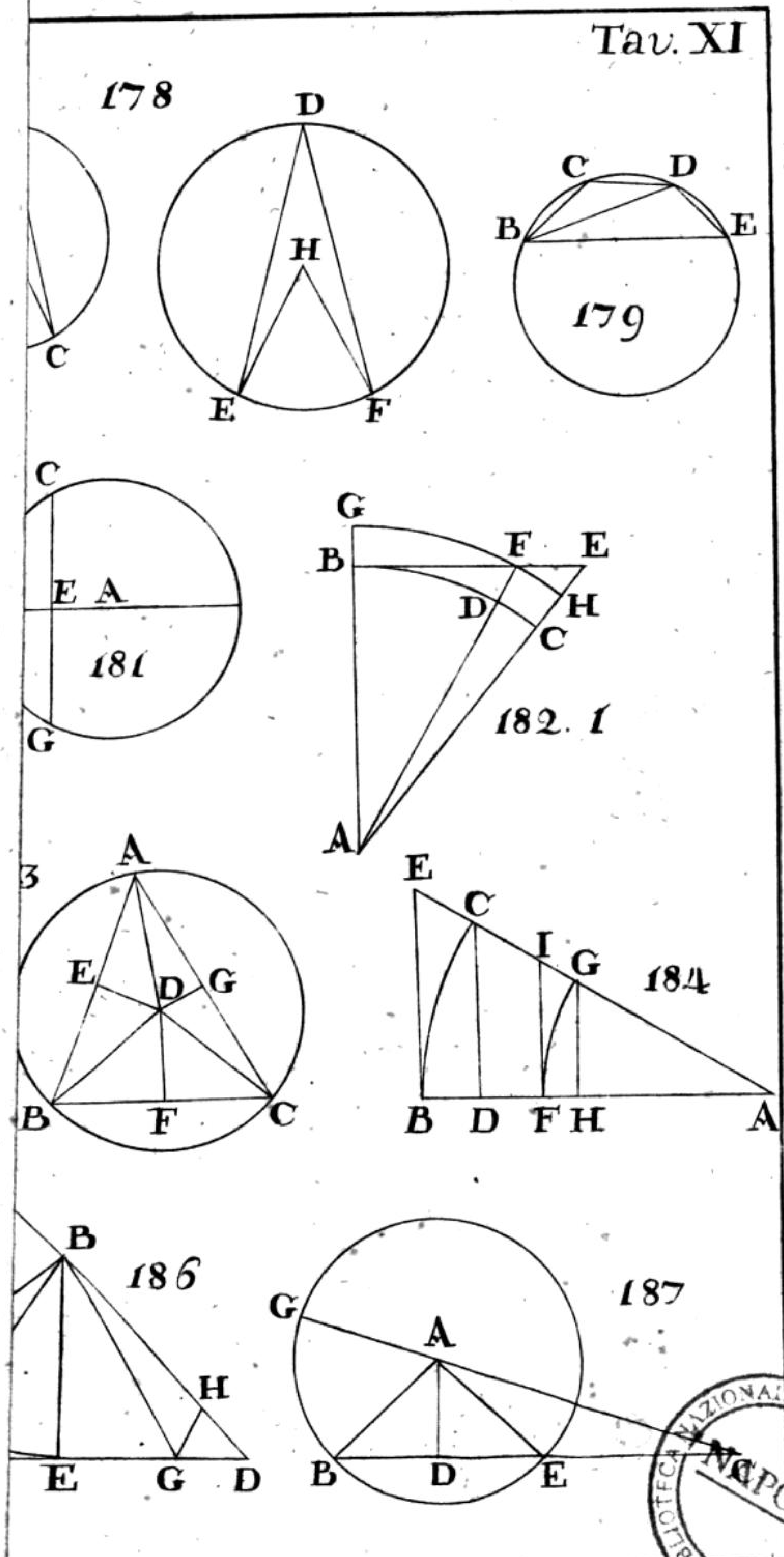

124
C D E G F
125
A D B C
126
C D I E B H L A G F
128
B F C D E
129
B A C
130
A B C
131
A B C D
133
A E B F C G D H
134
A G D H B C E F
135
C G I F H A D E B
C G H I D F B
138
E A B D C
139
F A D B C E
142
D G C E F
A G B C
141
D E F
A
143
B D C

Tav. IX

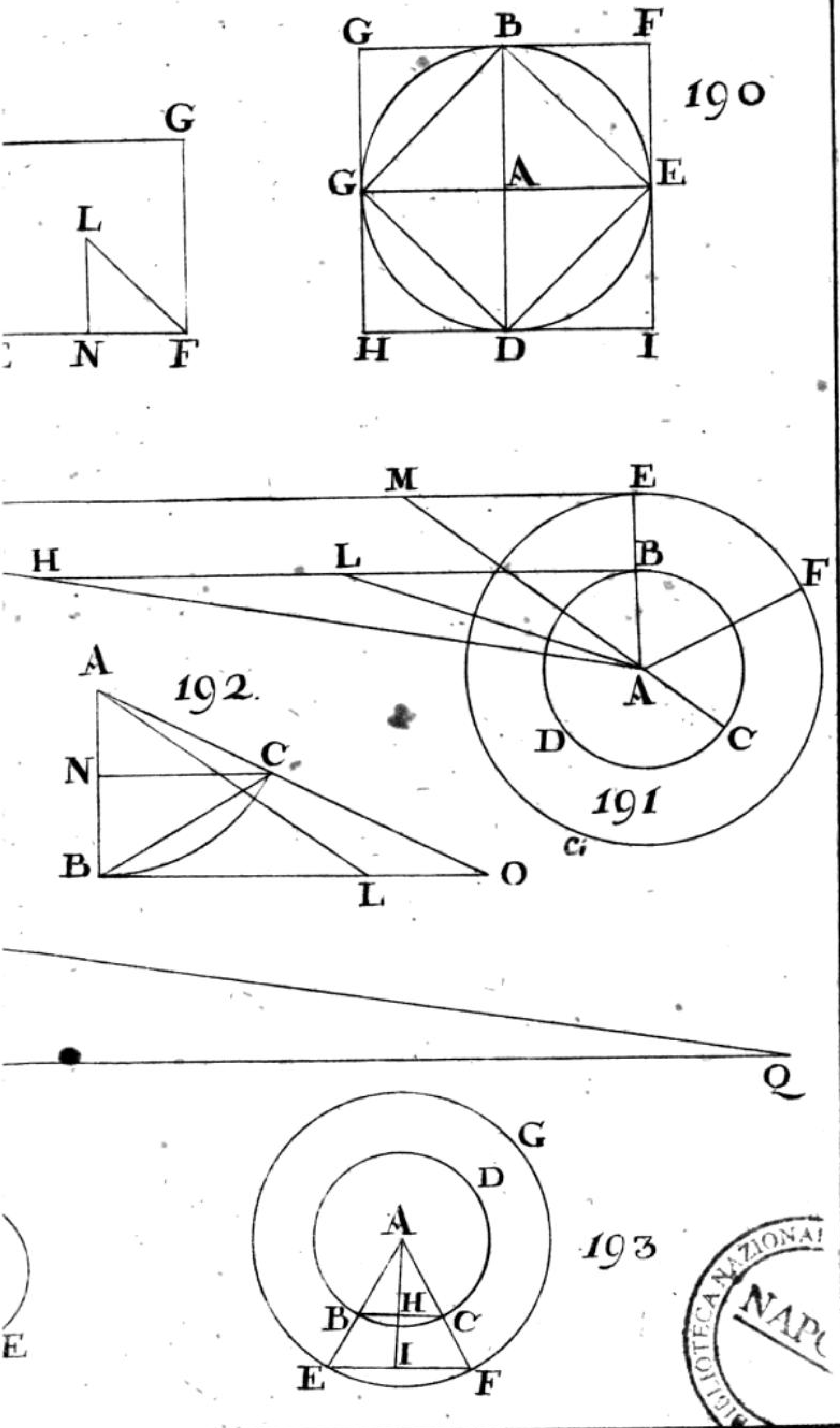


Tav. X

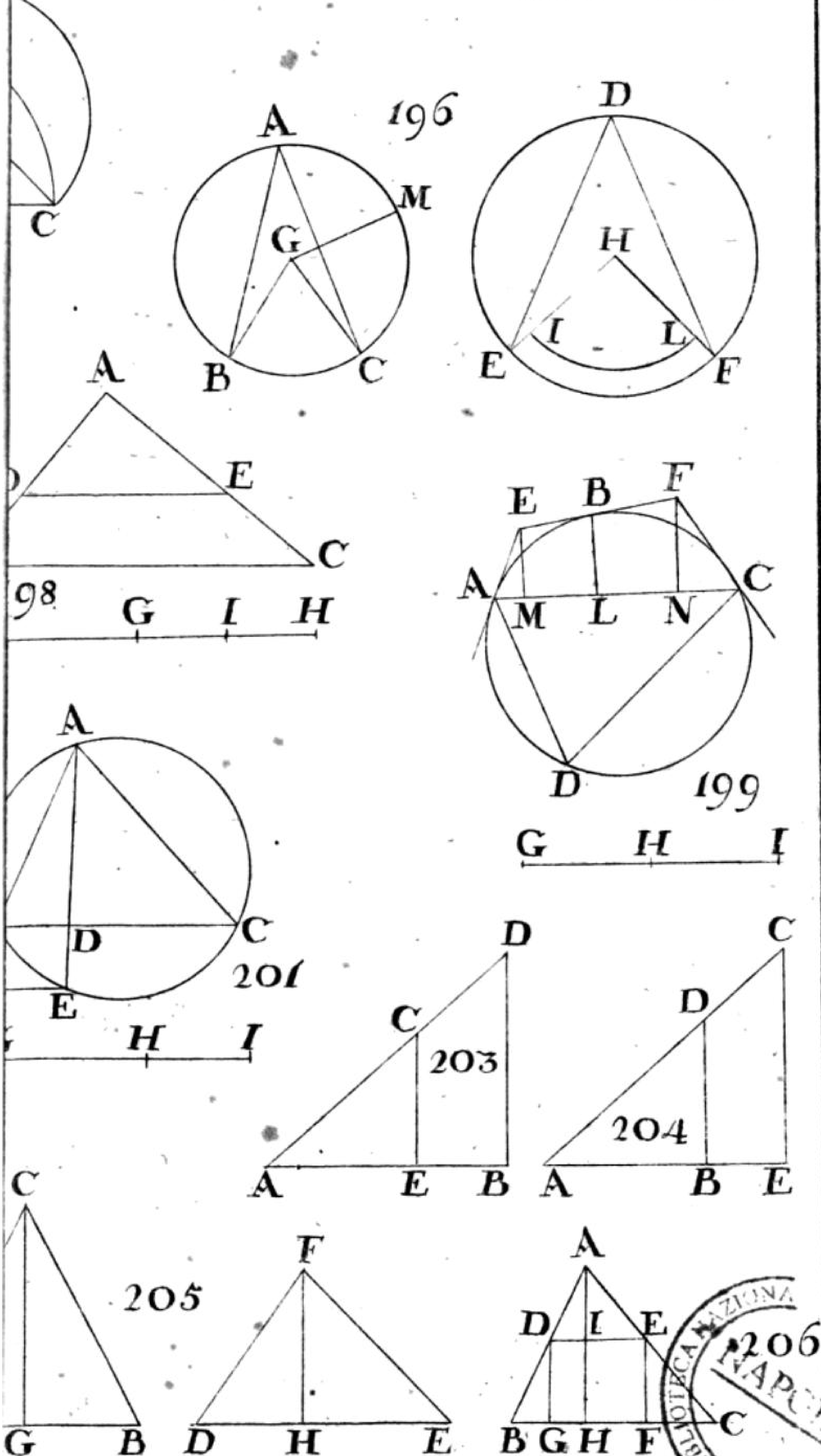



Tav. XI
178
D
H
C
E
F
C
D
B
E
179
C
E A
181
G
G
B
F
E
D
H
C
182. 1
A
3
A
E
D
G
B
F
C
E
C
I
G
184
B
D
F
H
A
B
186
H
E
G
D
187
G
A
B
D
E

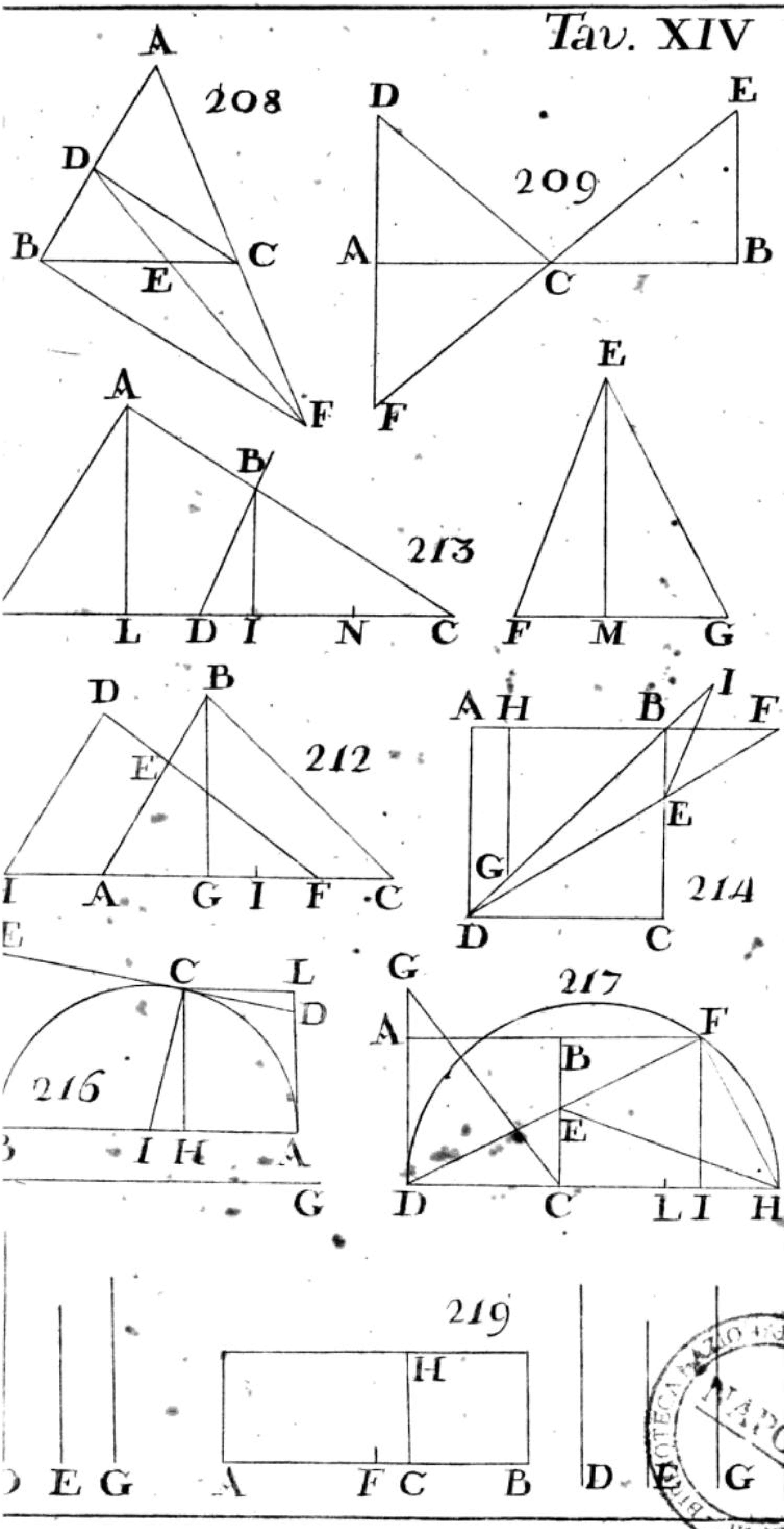
Tav. XII

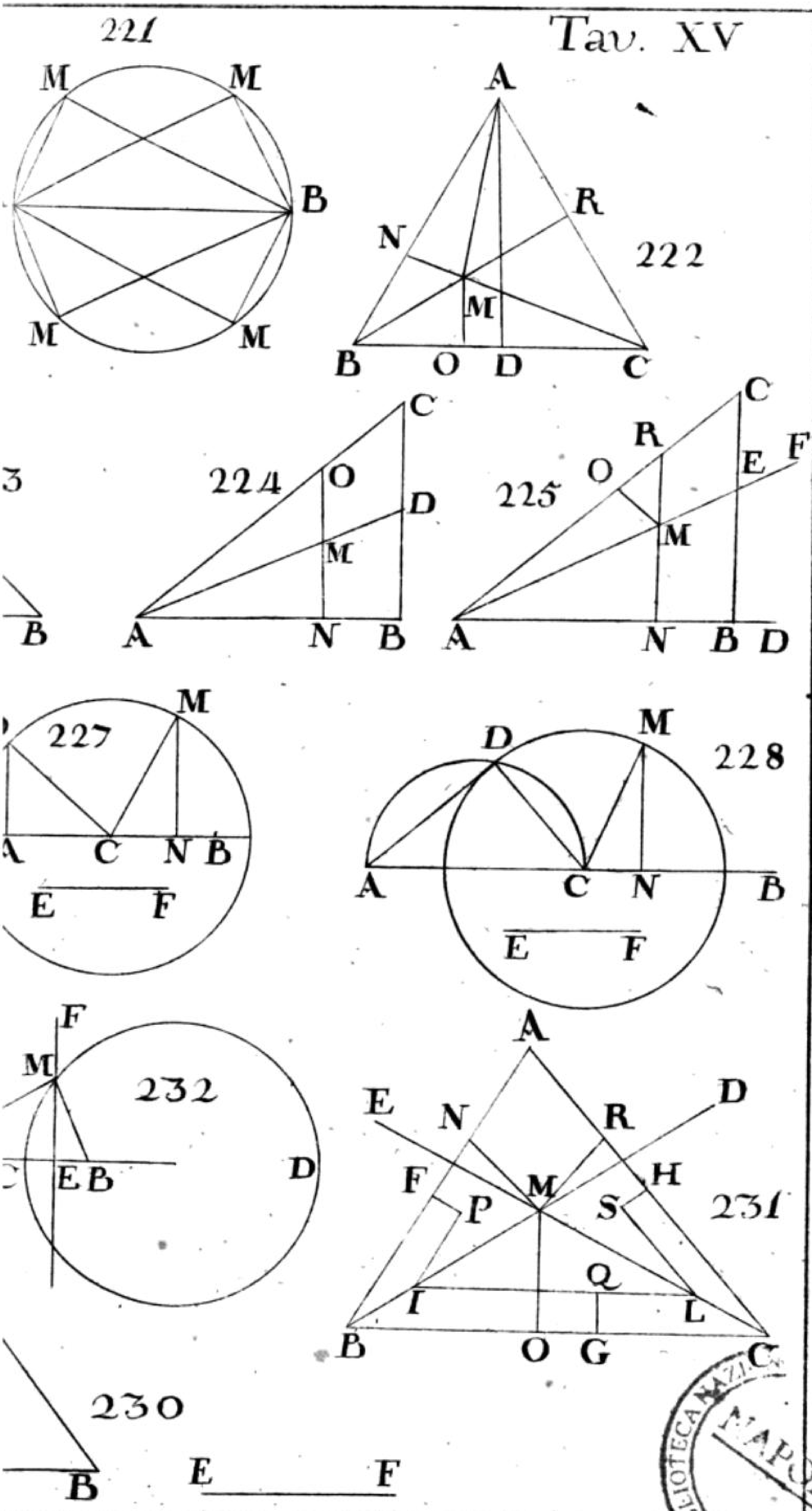

190
191
192.
193
G B F
G A E
H D I
L N F G
M E H L B F A D C
A N C B L O
Q
A G D B H C I E F

Tav. XIII



Tav. XIV


208
A D B C E F
209
D E A B C F
213
A B L D I N C
E F M G
212
D B E I A G I F C
A H B I F E G D C
214
E C L D B I H A G
216
G A F B E D C L I H
217
219
H
D E G A F C B D E G


Tav. XV
221
M M B M M
222
A N R M B O D C
3
B
224
C O D M A N B
225
C R F O E M A N B D
227
M C A N B E F
228
D M A C N B E F
232
F M E B D
231
A E N R D F M H P S Q I L B O G C
230
B E F

Tav. XVI