



9.9.507

A



INSTITUTIONES <sup>BT</sup>  
ARITHMETICÆ

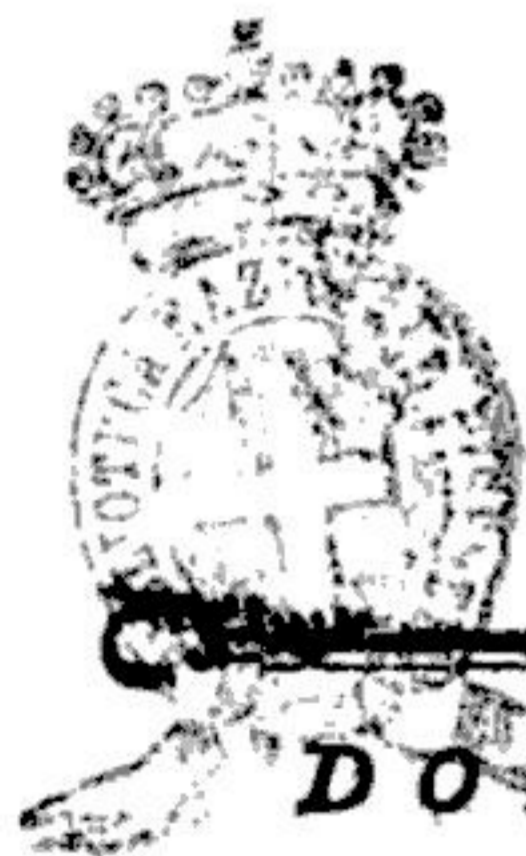
PAULINI A S. JOSEPHO

LUCENSIS

Cler. Reg. Schol. Piar. & in Archigymnasio  
Romano Eloquentiæ Professoris;

QUIBUS ACCEDIT

PRAEÆON CHRONOLOGICARUM  
APPENDIX.



DOMINICUS TERRES  
EDIDIT

APUD VINCENTIUM URSINUM

NEAPOLI

MDCCLXXVIII.

*Superiorum Auctoritate ac Privilegio.*

Il primo punto è che  
il secondo punto è che  
il terzo punto è che  
il quarto punto è che  
il quinto punto è che

Il sesto punto è che  
il settimo punto è che  
l'ottavo punto è che  
il nono punto è che  
il decimo punto è che

# AD LECTOREM.

3



*P*auci sunt, qui de Arithmetica recte judicent. Ea plerisque vilescit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expensique tabulas conficiunt, artem esse putent. At longe aliter de illa viri sapientes judicarunt. Plato quidem in Epinomide affirmat, sine Arithmetica neque ullam scientiam, neque ipsam hominum societatem posse consistere. Aristoteles autem existimabat, tam proprium esse hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Augustinus, qui frequentissime suis in libris, præsertim vero de Doctrina Christiana, præclare de Arithmetica loquitur, multisque exemplis ostendit, ob numerorum inscitiam, plurima in sacris litteris ignorari? In eadem prorsus sententia fuerunt D. Hieronymus, ut ex lib. 2. contra Jovinianum, aliisque ex locis palam est; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui Divum Basilium præceptorem suum summis laudibus celebrat, quod is numerorum scientia ad

4  
sacræ Scripturæ intelligentiam, aliasque  
disciplinas sibi viam munivisset. Illud cer-  
te negari non potest, ab iis, qui Arith-  
meticæ studia contemnunt, Geometriæ quo-  
que, ac veræ Physicæ studia, hoc est di-  
sciplinarum omnium succum & sanguinem,  
contemni omnino oportere: cum fieri non  
possit, ut hæc, quæ mirabili quodam or-  
dine ac numerorum proportionem inter se  
cobærent, sine scientia numerorum intelli-  
gantur. Quis enim sine calculis compre-  
hendat motus quantitatem ac leges, qua-  
drata temporum, triplicatas corporum simi-  
lium rationes, resistendi vires, sonorum  
velocitates, liquidorum æquilibria, ac sex-  
centa alia, quibus non intellectis, natura-  
lem omnem scientiam eum latere necesse  
est? Itaque non immerito Plato in lib. 7.  
de Repub. Arithmetica vocat vestibulum  
scientiarum, quod scilicet numerorum tra-  
ctatione speculationibus difficilioribus ani-  
mus assuescit, & ad reliquos scientiæ sa-  
tus excipiendos mirum in modum præpara-  
tur. Imo ex ipsa numerandi vi faustum  
ad ceteras disciplinas progressum augura-  
tur. Homines, inquit, natura Arithme-  
tici ad omnes doctrinas acuti videntur.  
Hinc



Hinc est, quod multi in omnimemoria vi-  
ri doctissimi in ordinandis illustrandisque  
Arithmeticae elementis desudarunt, quod  
eorum utilitatem summamque necessitatem  
probe nossent. Ex præclaris eorum inven-  
tis ego triginta & amplius ab hinc an-  
nis ea decerpsi in usum studiosæ Juventu-  
tis Collegii Nazareni, quæ magis ad Ju-  
venum ingenium apta, & ad Matheseos  
studia necessaria esse judicavi. Semper enim  
illis viginti & uno annis, quibus nobiles  
ejusdem Collegii adolescentes in Mathema-  
ticis disciplinis institui, Arithmeticae stu-  
dium præmisi, cujus ope tum II., tum  
V. & VI. Elementorum Euclidis proposi-  
tiones facile ab illis percipi experientia  
comperi, contra vero Arithmetica destitu-  
tos in ipsis diu multoque labore versari.  
Cum autem decursu temporis in ea scri-  
pta per manus tradita multa menda, ut fie-  
ri solet, irrepsissent, multoque labore, ac  
tempore in illis transcribendis opus esset,  
res non inutilis visa est, illa typis emit-  
tere; eaque occasione adjecta est doctrina  
de natura atque usu Logarithmorum; tum  
etiam nonnulla alia, quæ ad quæstiones  
aliquot Arithmeticae practicæ pertinent,

quæ sane in vita civili haud semel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præcepti brevitatem, & exemplorum copia satis claræ esse videntur, accedunt quoque demonstrationes, quales in hujus scientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propositionem citare, aut supponere, opportunum visum est. Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam & vulgarem putavi: demonstrationes autem adhibere ex Euclidis elementis VII. VIII., & IX., vel etiam ab Analyseos speciosæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti nostræ rem immaturam. An vero in medio constiterim, sapientum esto judicium.

---

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE  
Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Schol. Piar.

PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUM librum, cui titulus *Institutiones Arithmetice &c.* a P. Paulino a S. Joseph Assistente Generali Scholarum Piarum duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, atque approbaverint; ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus nostris Scholarum Piarum apud Sanctum Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

JOSEPH AB ANG. CUSTODE PRÆP. GEN.

Laurentius a S. Hyacinto Secret.



# INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

---

## DEFINITIONES.

- I. **A**RITHMETICA est scientia numerorum, cujus partes sunt quatuor : *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*.
- II. *Unitas* est denominatio, per quam aliqua res dicitur una.
- III. *Numerus* est unitatum multitudo, proinde unitas non est numerus, sed numeri principium, sicuti punctum est principium lineæ.
- IV. *Numeri simplices* sunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. His additur cifra 0, quæ per se nihil significat, sed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.
- V. *Numeri compositi* sunt numeri majores denario, incluso ipso denario, scilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.
- VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor

metitur majorem, hoc est cum minor aliquoties sumptus majori æqualis fit; seu cum major minorem aliquoties præcise continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2 sexies sumptus æqualis fit ipsi 12; seu quia 12 sexies præcise continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri est, quæ numerum metitur, *pars aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4 dicuntur pars aliquota numeri 12; at vero 5 pars aliquanta ipsius, quia aliquoties sumpta vel ipsum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter se primi* sunt, quos nulla communis mensura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* est habitudo, seu ratio quædam unius numeri ad alterum, secundum quod unus alterius est multiplex, vel pars, seu partes; sic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, seu semissis, 3 ad 9 rationem tertix partis &c.

X. *Numeri homogenei* sunt illi, quorum unitates eandem rem significant.

XI. *Numeri heterogenei*, seu *denominati* sunt, qui variis nominibus denominantur, hoc est res diversas significant, ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri alii* sunt *integri*, alii *fracti*, qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, seu unitatis, de quibus in Cap. III.

Schol. *Has notas Arithmeticas, antiquis prorsus incognitas, in Hispaniam Mauri deportarunt; inde in Galliam, aliisque Europæ gentes induxit seculo X. Gerbertus Monachus Aureliacensis, vir doctus, qui postea fuit Pontifex Silvestri II. nomine.*

---

# C A P U T I.

## *De Calculo Integrorum.*

### PROPOSITIO I.

#### *Dati numeri valorem exprimere.*

I. Sit exprimendus numerus datus  $A$ . Dividatur in periodos, secernendo virgula ternas quascunque figuras, incipiendo a dextera; divisus erit numerus  $A$  in tres periodos, seu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas: sed prima dextrorsum continet unitates, decades, & centenas simpliciter; secunda vero continet unitates, decades, & centenas millium; tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

$A$  394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo sinistrorsum, & progrediendo versus dexteram sic: trecenti nonaginta quatuor milliones, octingenta septuaginta quinque millia, quadringenta sexaginta duo. Similiter numerus  $B$  divisus, ut superius dictum est, dicit centum viginti quatuor milliones, & duo millia.

$B$  124, 002, 000.

Demum numerus  $C$  exprimit milliones 100.

$C$  100, 000, 000.

II. Pro numeris prolixioribus exprimendis ita pro-  
ce-

cedes . 1. Datus numerus eodem modo per virgulas distribuatur in membra , ut superius factum est . 2. Super notam primam dextrorsum ponatur una cifra 0 , intermissisque quinque figuris , supra notam septimo loco positam ponatur unitas 1 . Item post quinque iterum notas scribatur 2 , atque ita deinceps , relin-ctis semper quinque notis , scribatur 3 , 4 , 5 &c . Quodlibet membrum continet sex notas , ( præter primum ad sinistram , quod aliquando continere potest 2 , 3 , 4 , aut 5 notas ) . Exprimentæ sunt igitur simul sex illæ notæ ; prolataque integra periodo , toties repetenda est vox hæc *millio* , quot sunt unitates , quæ continentur supra primam notam talis periodi . Virgulæ autem appositæ *millia* significant , ut exemplis sequentibus *D* , & *E* facile intelligitur .

$$D \quad \overset{2}{52}, \overset{1}{329}, \overset{0}{189}, \overset{0}{602}, \overset{0}{800}.$$

Quinquaginta duo milliones millionum , tercentum viginti novem millia , centum octoginta novem mil-  
liones , sexcenta duo millia , octingenta .

$$E \quad \overset{3}{45}, \overset{2}{928}, \overset{1}{634}, \overset{0}{426}, \overset{0}{350}, \overset{0}{872}, \overset{0}{385}, \overset{0}{173}$$

Quadraginta quinque millia , nongenti viginti octo  
milliones millionum millionum , sexcenta triginta qua-  
tuor millia , quadringenti viginti sex milliones millio-  
num , trecenta quinquaginta millia , octingenti septua-  
ginta duo milliones , trecenta octoginta quinque mil-  
lia ac centum septuaginta tres .

Schol. I. Si cui molestum sit iterare toties vocem  
illam millionum , utatur hoc compendio : Ubi pronun-  
cianda est vox millionum bis , dicat bilionum : uti ter ,  
dicat trilionum : ubi quater , quadrilionum &c . adeo-  
que

que superius exemplum efferi potest sic : quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo triliones, sexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti sex biliones, trecenta quinquaginta millia &c.

Schol. II. Præter valorem simplicem, quem singulæ notæ Arithmeticae habent proprium, alium insuper habent ratione loci, quem occupant: qui valor procedit in proportione subdecupla. Itaque nota primo loco, a dextris incipiendo, posita significat unitates, secundo loco posita significat tot decades, quot unitates habet; tertio loco tot centenae, quarto loco millia, quinto loco dena millia, sexto loco centena millia &c. Id tyrones bene intelligant necesse est. Ecce exemplum:

1	3	4	6	5	9	2.	
							2. duo.
							9 0. nonaginta.
							5 0 0. quingenta.
							6 0 0 0. sex millia.
							4 0 0 0 0. quadraginta millia.
							3 0 0 0 0 0. trecenta millia.
							1 0 0 0 0 0 0. decies centena millia, seu millio.

---

1 3 4 6 5 9 2.

## PROPOSITIO II.

### *De Additione Integrorum.*

I. *Additio* est plurimorum numerorum in unam summam collectio. Numeri addendi vocantur *dati*; numerus, qui ex additione conflatur, dicitur *summa*, seu *aggregatum*. Additio procedit a dextra in sinistram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem sibi respondeant.

2. Duæ

2. Ducta linea, numeros sub eadem columna positos in unum collige; & si novem non excedant, subscribe quotquot sunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, subscribe id, quod remanet supra decades, & adde sequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

*Sit exemplum*: Quæritur quot anni elapsi sint ab orbe condito usque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo tom. 2. lib. 13. de *Doctrina Temporum* numerantur,

	DCBA
Ab Adamo ad finem diluvii anni	1 6 5 6
A fine diluvii ad Christum	2 3 2 7
A Christo ad annum 1742	1 7 4 2

---

Summa 5 7 2 5

Nam primo unitates 2, 7, 6, in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanent 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reservo 1 pro sequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5 in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, sunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ *C* cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro sequenti columna *D*.

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ scribo infra lineam, & habetur summa quæsitæ 5725.

*Sit aliud exemplum*. Addendæ sunt in unam summam plures accepti, vel expensi summæ *A*, *B*, *C*.

*A*



<i>A</i> 104	<i>B</i> 7245	<i>C</i> 235
741	3280	7348
892	834	9532
1380	1273	780
<b>E Sum.</b> 3117	<b>Sum.</b> 12632	<b>Sum.</b> 17895

Peracta operatione, habetur summa *E* 3117; ubi patet, cifras 0 in additione nihil addere, nam 0, 2, 1, 4 faciunt 7.

II. Præter usitatum additionis explicatæ modum, est alter, in quo operatio procedit a sinistra versus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur, sed tota summa statim infra lineam describitur. Ad dendi sint numeri *A*, *B*, *C*.

	<b>F G H I</b>
<i>A</i>	1 9 6 6
<i>B</i>	7 3 4 5
<i>C</i>	9 2 8 9
<i>D</i>	1 7 4 8 0
<i>E</i>	1 1 2
	<b>X 1 8 6 0 0</b>

1. Incipiens a sinistra, quæ hic millia significat, dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 faciunt 17, quem totum scribo sub ipsa columna millium *F*.

2. Colligo centena secundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate sub linea, sed 1 sub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notantur decades 18 sua columna *H*, & unitates 20 sub columna *I*.

3. Ducta linea, altera fit additio ordinum *D* & *E*, & habetur summa quæsitæ *X*. *De.*

*Demonstr.* Additionis ratio manifesta est ex *Axiom.* 9. *lib. 1. Eucl.* nempe totum æquale esse omnibus suis partibus simul sumptis. Tot enim sunt unitates, decades, centena, ac millia existunt in summis singulis datis *A, B, C*. Nam si colligantur unitates sub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc est decades 2, proinde ponitur 0, & reservantur 2 illæ decades ad propriam sedem decadum *H*. Similiter decades collectæ sub columna *H* sunt 18, quæ additis duabus prioribus, faciunt 20, hoc est centena 2, adeoque ponitur 0, & reservantur 2 ad sequentem seriem. Sub columna tertia *G* sunt 14 centena, quibus si addantur 2 præcedentia, sunt 16. Ponitur itaque 6, & reservatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ *F* sunt 17, quæ cum præcedenti 1 sunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in summa *X* contineri, quot omnino continentur in numeris datis *A, B, C*, Quod totum patet ad oculum, scilicet

	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	
<i>A</i>	1	9	6	6	
<i>B</i>	7	3	4	5	
<i>C</i>	9	2	8	9	
<hr style="border-top: 1px solid black;"/>					
<i>Unitates</i>			20		20
<i>Decades</i>		18			180
<i>Centena</i>	14				1400
<i>Millena</i>	17				17000
<hr style="border-top: 1px solid black;"/>					
	<i>X</i>	1	8	6	00
		<i>X</i>	1	8	600

PRO-

## PROPOSITIO III.

*Additionem examinare.*

Multiplici ratione fieri potest examen.

1. Eandem additionem repete, sed ordine mutato, ut si prius ab imo sursum processeris, deinde a summo deorsum descendas: nam si utraque summa inventa eadem fuerit, probabile est, nullum errorem irrepsisse.

2. A numeris addendis abjicitur 9 quoties potest, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & residuum notatur in angulo crucis: Abjctisque deinde 9 ex summa  $A$ , ponitur residuum in altero angulo; quæ residua si fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet sequenti exemplo:

$$\begin{array}{r}
 4824 \\
 5721 \\
 3402 \\
 \hline
 A13947
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6 \quad | \\
 \hline
 \quad | \quad 6
 \end{array}$$

Hoc examen male audit, ut fallax, nam si pro summa  $A$  alia longe major ponatur 19347, iisdem numeris ordine mutato constans, aut si eidem summae  $A$  addas quocunque volueris cifras 0, semper remanet, abjctis novenariis, idem residuum 6. Ceterum ob summam ejus facilitatem non est rejiciendum.

3. Fit abjciendo omnes numeros septenarios e qualibet summa particulari  $A, B, C$ , & ponendo seorsim residuum ut in  $E$ . Abjctisque deinde 7 ex utraque summa  $M$ , &  $N$ , si residua in utroque angulo crucis posita æqualia sint, res bene processit.

Est

Est autem discrimen inter hoc, & superius examen. Numerus 9 abjicitur per additionem numeri ad numerum, ex. gr. ut abjiciam 9 ex 134, sufficit addere simul 4 cum 3 & 1, & habetur statim novenarii residuum 8. At si abjicere velis 7 ex eodem 134, procedendum est per decades, abjiciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & residuum est 1.

$$\begin{array}{r}
 A \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 B \ 7 \ 2 \ 0 \ 1 \\
 C \ 3 \ 4 \ 5 \ 8 \\
 \hline
 M \ 1 \ 4 \ 1 \ 1 \ 5
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 E \ 5 \\
 \phantom{E} \ 5 \\
 \phantom{E} \ 0 \\
 \hline
 N \ 1 \ 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \phantom{E} \ 3 \\
 \hline
 \phantom{E} \ 3
 \end{array}$$

Hoc quoque examen aliquando fallit, sed raro. Ratio autem utriusque examinis desumitur ex *Axiom.* 3. *lib. 1. Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, residua sunt æqualia.

## PROPOSITIO IV.

### *De subtractione Integrorum.*

*Subtractio* est inventio excessus, quo numerus major superat minorem. En praxis.

1. Collocetur numerus minor sub majori, a quo debet subtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis respondeant, ut de additione dictum est *Prop. 2.*

2. Ducta linea, & dextrorsum incipiendo, auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, scribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, po-  
na-

natur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate minuitur, vel (idem enim est) subsequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum si numerus inferior sit superiori numero æqualis, ponitur infra lineam 0; vel linea —, si id contingat in fine operationis.

*Sit exemplum.* Debet quis alteri aureorum summam *A*, non habet nisi aureorum summam *B* solvendam, quærit quantum de ære alieno superfit.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 1 \ 9 \ 2 \ 5 \\
 B \quad 1 \ 3 \ 8 \ 2 \\
 \hline
 C \quad - \ 5 \ 4 \ 3
 \end{array}$$

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ scribe infra lineam. Deinde 8 subduci non potest ex 2, intellige decadem additam ipsi 2, fiet 12, ex quo aufer 8, remanent 4, scribenda infra lineam. At subsequens numerus superior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde subductis 4 ex 9, residuum est 5, quod scribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1, nihil remanet, scribe lineam. Debet igitur adhuc aureos 543, cum talis sit excessus numeri majoris *A* supra minorem *B*.

Similiter subduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur excessus, seu residuum *X*.

$$\begin{array}{r}
 M \quad 6 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 7 \\
 N \quad \quad 3 \ 1 \ 9 \ 5 \ 7 \ 6 \ 8 \ 4 \\
 \hline
 X \quad 5 \ 8 \ 8 \ 0 \ 5 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3
 \end{array}$$

Aufer 4 ex 7, residuum est 3. Item 8 ex 12, residuum est 4. Pariter 7 ex 10, residuum est 3. Similiter 8 ex 10, residuum est 2, tum 6 ex 11, residuum est 5.

siduum est 5, & 10 ex 10, residuum est 0 &c.

*Examen subtractionis* generatim fit addendo residuum  $X$  numero minori subtracto  $N$ . Nam si erratum non sit, restituitur major numerus  $M$ , ut patet.

*Examen* fieri quoque potest per abjectionem novenarii. Nam abjecto novenario ex  $A$ , quantum abjici potest, residuum est 8. Deinde abjecto novenario ex numeris  $B$  &  $C$ , æqualibus ipsi  $A$ , residuum pariter est 8.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \\
 B \quad \quad 5 \quad 2 \quad 1 \\
 \hline
 C \quad 5 \quad 9 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 8 \quad | \\
 \hline
 \quad \quad | \\
 \quad \quad \quad 8
 \end{array}$$

*Demonstr.* subtractionis per se patet. Nam ex *Defin.* subtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem; proinde excessus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent esse in  $B$ , &  $C$  simul, quot sunt in  $A$ . Sed subducendo 1 ex 4, ponitur residuum 3. Sunt ergo tot unitates in  $B$ , &  $C$  simul, quot sunt in  $A$ , nempe 4. Similiter subducendo decades 2 ex decadibus 3, ponitur 1 in residuo. Igitur decades  $B$  &  $C$  æquales sunt decadibus in  $A$  contentis, nempe 3, & sic deinceps. Est ergo æqualitas inter  $A$ , &  $B$  una cum  $C$ . Quod &c.

## PROPOSITIO V.

### *De Multiplicatione Integrorum.*

*Multiplicatio* est ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum est inventio

tio

tio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus  $A$  12 multiplicatus per  $B$  3 producit numerum  $C$  36, qui ter continet  $A$ , sicuti  $B$  ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem esse compendiosam additionem; idem enim est multiplicare  $A$  per  $B$ , ac toties addere ipsum  $A$ , quot sunt in  $B$  unitates.

Numeri  $A$  &  $B$  dicuntur *multiplicatores*, seu *factores*, numerus  $C$  *productum*, seu *factum*. Vulgo tamen qui minor est, & inferius scribitur, dicitur multiplicator, seu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si multiplicator unica figura constet (ut in primo sequenti exemplo) illa ducatur sigillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facto a dextera versus sinistram; & quot productum continet decades, tot reserventur unitates sequenti producto adjiciendæ, & scribatur infra lineam id, quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus constet figuris, tunc singulæ seorsim ducantur in singulas numeri multiplicandi figuras, sed producta ita infra lineam scribantur, ut productum secundæ ponatur directe sub ipsa secunda figura, productum tertiæ figuræ sub tertia, & sic deinceps, cum hæc producta importent decades, centena &c.

3. Ducta linea, singula producta particularia in unam summam colligantur, ut habeatur integrum productum quæsitum.

*Sit exemplum* 1. Vendendi sunt agni  $A$  juliis 5 in singula capita, quæritur pretium  $C$ .

*A* 1 2 7 6. *multiplicandus.*  
5. *multiplicans.*

---

*C* 6 3 8 0. *productum.*

Primo 6 quinquies sumptus facit 30, pono 0, & sequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Deinde 7. quinquies sumptus facit 35 : addo 3, fiunt 38, scribo infra lineam 8, & reservo 3. Tum 2 quinquies sumptus facit 10, addo 3, fiunt 13, scribo infra lineam 3, & servo 1. Demum 1 quinquies sumptus facit 5, addo 1 præcedentem, & scribo 6.

*Exemplum 2.* Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere supponitur.

*Dies* 3 6 5  
*Hora* 2 4

---

1 4 6 0  
7 3 0

---

*Hora* 8 7 6 0

*Exemplum 3.* Ærarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quæritur aureorum summa.

*Opp.* 8 2 4  
*Aur.* 1 0 2

---

1 6 4 8  
8 2 4 0

---

*Aur.* 8 4 0 4 8

Coroll. Hinc patet, quod si in multiplicatore occur-



currit cifra 0, ponitur in producto cifra ( vel plures, si sint ) deinde statim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum.

Schol. I. Cifre initiales ante operationem refecantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot sunt. Pariter si multiplicandus sit numerus per 10, vel 100 e vel 1000 &c. satis est addere multiplicando ad dexteram tot cifras, quot continentur in multiplicatore, sine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrunque patet exemplis A & B.

A	136	0	B	15724
		200		1000
	272	000		15724000

Schol. II. Multiplicatio fit etiam per factores numeri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem est multiplicare 30 per 24, ac 30 per 4 & 6 hoc est 30 per 4, ejusque productum per 6.

Schol. III. Multiplicatio fit etiam per tabulam, quæ ab ejus auctore Pythagora vocatur Pythagorica ( fig. 1. ). En usus: si scire velis productum ex. gr. ex 3 in 8, quære 3 in columna AC, & 8 in fronte AB, invenes in communi concursu productum 24. Sic de ceteris. Ratio est, quia columna prima incipit ab unitate, & descendendo crescit usque ad 9. Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. semper usque ad 9 progredientes. Prima crescit sola unitate, secunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus 8, qui crescit numero octonario, habet in tertia sede numerum 8 ter sumptum, scilicet 24. Idem numerus 8 habet in quinta sede 40, hoc est 8 quinquies sumptum, & sic de ceteris.

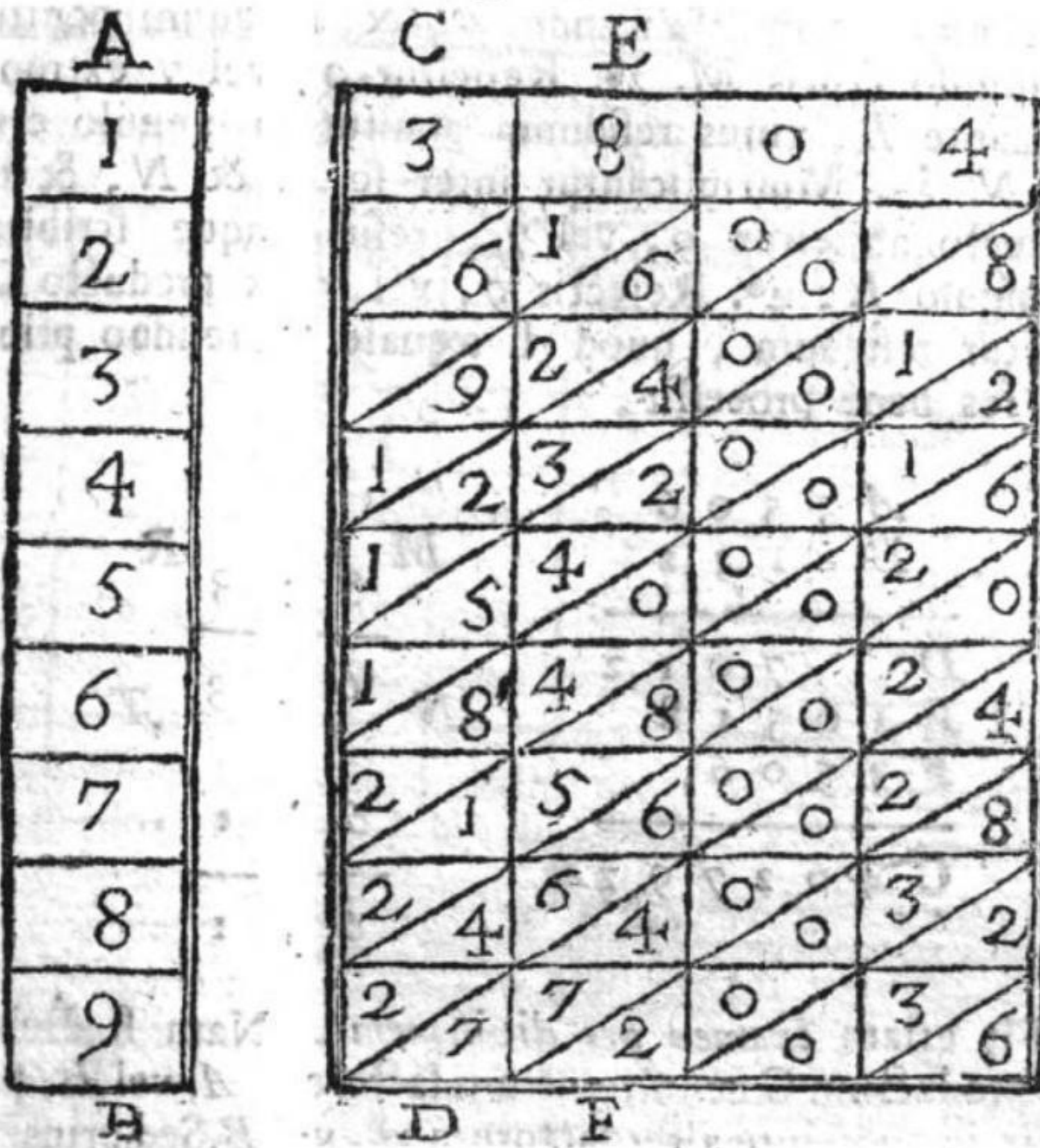
Fig. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C  
 Schol. IV. *Tabulam Pythagoricam in plures tabellas oblongas mobiles dissecuit Jo: Neperus Scotus, quibus mirabili artificio multiplicationis, & divisionis compendium exhibetur. En constructio: Fiant ex aere, vel ligno, aliave materia solida decem vel undecim tabellæ, seu parallelepipeda, ut sunt CD, EF (Fig. 2.); quorum longitudo dividatur in 9 quadrata equalia; hisque per diametrum divisis (excepto uno AB, cui inscribuntur simpliciter numeri naturales 1, 2, 3, 4 &c. usque ad novem inclusive, qui exponentes vocantur) habentur totidem triangula equalia, quibus inscribendi sunt numeri ex singulis columnis ejusdem Tabulæ Pythagoricæ; ita tamen ut in uno parallelepipedo quadrata superiora habeant numeros 1, 2, 3, 4. In secundo numeros 2, 3, 4, 5. In tertio 3, 4, 5, 6, & sic successive. Sic enim poterit idem numerus, si opus sit, iterate haberi, ex gr. 555. In uno, vel altero parallelepipedo ponuntur ubique cifrae. Ecce autem usus.*

Esto

Fig. 2.



Est multiplicandus 3804. per 69. Jungantur simul quatuor parallelepipeda, quae in vertice referant numerum datum 3804 ( ut in figura ) praefixo ad levam parallelepipedo AB exponentem, ex quo habentur numeri multiplicatoris 6 & 9. Jam singula facta numeri 9 in 3804 exhibentur in triangulis, & rhombis directe ad ipsum 9 appositis, facto initio a triangulo inferiore dextrorsum, & addendo numeros in rhombis positos, nempe 34236. Eodem modo habentur facta numeri 6 per 3804, nempe 22824, quae addita, ut superius num. 2. dictum est, dant productum integrum 262476.

B 4

Mul-

*Multiplicationis examen* fieri potest per abjectionem novenarii, aut septenarii. Nam 10. abjicitur 9, vel 7 ex numero multiplicando *A*, & residuum ponitur in angulo crucis *M*. 20. Rejicitur 9, vel 7 ex multiplicante *B*, cujus residuum ponitur in angulo crucis *N*. 30. Multiplicantur inter se *M* & *N*, & ex producto abjicitur 9, vel 7, residuumque scribitur in angulo *R*. 40. Rejctis 9, vel 7 ex producto *C*, habetur residuum, quod si æquale sit residuo priori *R*, res bene processit.

<i>A</i>	3	5	0	6	
<i>B</i>	1	3	2		
<i>D</i>		7	0	1	2
<i>E</i>	1	0	5	1	8
<i>F</i>	3	5	0	6	
<i>C</i>	4	6	2	7	9

<i>M</i>	5		3	<i>R</i>
<i>N</i>	6		3	<i>T</i>
	6		1	
	6		1	

Fit etiam *examen per divisionem*. Nam si dividatur productum *C* per alterutrum factorem *A*, vel *B*, prodibit in quotiente alter factorum *A*, vel *B*. Sed prius intelligendum, quid sit divisio, de qua in sequenti *Propos.*

*Demonstr.* Cum multiplicatio sit compendiosa additio, ut dictum est, multiplicatio numeri *A* per notam ultimam numeri *B*, nempe per 2, est addere ipsum numerum *A* bis, unde producitur *D* 7012, in quo tot sunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in *A* bis sumpto. Similiter multiplicatio ejusdem numeri *A* per secundam notam numeri *B*, nempe per 3, qui significat 30, est additio ipsius *A* sumpti trigesies, unde productum *E* tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in *A* tri-

*A* trigiesies sumpto. Demum productum *F* habetur ex multiplicatione numeri *A* per 1, hoc est per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in *F*, quot continentur *A*, si centies sumatur. Igitur tres numeri *D*, *E*, *F*, seu productum integrum *C*, tot continet unitates, decades &c. quot continentur in *A* centum trigiesies, & bis sumpto. Quod erat &c.

## PROPOSITIO VI.

### *De Divisione Integrorum.*

*Divisio* est inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet divisorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per suas unitates, quoties divisor continetur in dividendo. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, sive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet divisorem 3.

I. Sit divisor numerus simplex 5, per quem dividendus est numerus datus 1580455. Ponatur divisor sinistrorsum seorsim post lineam, ut in *M*.

$$\begin{array}{r} \text{Divisor } M \ 5 \ ) \ 1580455. \text{ dividendus.} \\ \phantom{Divisor } \quad \quad \quad 316091. \text{ quotus.} \end{array}$$

Et procedendo a sinistra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, subscribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continentur in subsequenti numero 8, continetur semel, & remanent 3. Scribe 1 sub ipso 8, tum adde decades tres sequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus divisus per 5, habetur quotus 6, quem pone sub 0. Postea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur 0 in quo-

quoto, & adde quatuor decades subsequenti numero 5, sunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem subscribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæsitus est 316091. Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a colonna*.

Fieri etiam potest hæc divisio præsidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in præc. *Propos.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; divisor vero in latere *AC*, & quotus in fronte *AB*. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & divisore 5 in latere *AC*, invenitur in fronte *AB* quotus 8. Quod si dati numeri 40 divisor fuerit 8, invenietur in fronte quotus 5; & sic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præcise non reperitur, ut si dividendus sit 50 per 6; sumitur numerus proxime minor, cui directe respondet divisor 6 in latere existens, nempe 48, & in fronte occurrit 8, qui erit quotus quæsitus.

*Examen* hujusce divisionis fit multiplicando quotum per divisorem. Si erratum non sit, restituitur idem numerus, qui fuit divisus, ut patet.

II. Quod si divisor sit numerus compositus, pluribus constans figuris, alia via procedendum. Dividendus sit numerus datus *A* per *B*.

$$\begin{array}{r}
 B \ 45 \ ) \quad A \ 186730 \\
 \quad \quad \quad 180 \\
 \hline
 C \ 4149 \ ) \quad \quad \quad 67 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 45 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 223 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 180 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 430 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 405 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 25
 \end{array}$$

1. Accipe ex dividendo  $A$  tot figuras sinistrorsum, quot sunt in divisore  $B$ . Vel accipe tot figuras ex numero dato  $A$ , quot per divisorem  $B$  dividi possint; ut in hoc exemplo 186, easque secerne puncto. Erit 186 primum divisionis membrum.

2. Vide, quoties divisor  $B$  contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoscere haud facile est, vide quoties prima divisoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum sequenti figura 6 faciunt 26, in quo secunda divisoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert si pluries contineatur) totus ergo divisor 45 contineatur quater in toto divisionis membro 186, proinde pone 4 in  $C$ .

3. Per quotum  $C$  multiplica totum divisorem  $B$  45, & productum 180 subscribe ipsi 186, a quo illud subtrahere per *Propos.* iv. remanent 6.

4. Ad hoc residuum 6 junge dextrorsum subsequentem dividendi figuram 7, erit 67 secundum divisionis membrum; eademque omnino operatio instituenda est, quam breviter in gratiam tyronum prosequar, scilicet

Que-

Quære quoties divisor 45 contineatur in 67, patet contineri semel, scribe ergo in  $C$  1, per quem multiplica totum divisorem  $B$ , & productum 45 subscribe ipsi 67, factaque subtractione, habetur residuum 22.

Ad hoc residuum 22 adijunge sequentem dividendi figuram 3, fiet tertium divisionis membrum 223. Circa quod rursus eadem operatio repetenda est.

Proinde vide quoties divisor 45 contineatur in 223: seu quoties prima figura 4 contineatur in 22; patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum sequenti figura 3 faciunt 23. Sed secunda divisoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitate (vel etiam pluribus, si opus sit) & reponitur 4 in  $C$ ; per quem multiplicato divisore  $B$ , habetur productum 180, quod subscribe ipsi 223, ab eoque subtrahe, remanent 43.

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum divisionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda est. Vide igitur quoties 4 contineatur in 43, dic contineri tantum novies (nam nullus quotus ponitur in  $C$  major, quam 9) remanent 7, quæ cum cifra faciunt 70, in quo pariter altera divisoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando divisorem 45 per 9 habetur productum 405, quod subtrahendum est ab ipso 430, & residuum divisionis est 25. Quotus ergo quæsitus  $C$  est 4149, & remanent 15.

Coroll. Ex præcedenti exemplo tria sunt colligenda. 1. Si secunda, tertia, aut quarta divisoris nota toties contineri non possit in secunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejusdem divisoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum una, vel pluribus unitatibus esse minuendum. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem nove-

na-



nario, etiamsi divisor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum tot figuris constare, quot sunt divisionis membra.

*Sit aliud exemplum.* Dividere oporteat numerum datum  $M$  per numerum  $N$ .

$$N \ 178 \ ) \quad M \ 73394475$$

$$\underline{716}$$

$$R \ 410025 \ ) \quad \leftarrow \ 179$$

$$\underline{179}$$

$$000 \ 447$$

$$\underline{358}$$

$$\leftarrow \ 895$$

$$\underline{895}$$

$$000$$

1. Sacerne puncto ex dividendo  $M$  tres figuras 733, quot sunt in divisore  $N$ , erit primum divisionis membrum 733. Jam prima divisoris nota continetur in prima dividendi nota septies, sed cum secunda, & tertia divisoris nota contineri non possint in secunda, & tertia nota dividendi pluries, quam quater, minuitur 7 tribus unitatibus, & ponitur in  $R$  quotus 4.

2. Duc divisorem  $N$  in 4, & productum 716 subscribe ipsi 733, a quo subtrahendum est, remanent 17. Adde ex dividendo subsequenter figuram 9, faciunt 179, eritque secundum divisionis membrum, in quo patet, divisorem contineri semel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando divisorem, habetur productum 179, subducendum ex ipso 179, adeoque remanet 0.

3. Divisor contineri non potest in duabus subsequen-

quentibus dividendi figuris 44 , pone ergo in quoto totidem cifras , & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo , nempe 7 , quæ faciunt 447 , in quibus divisor continetur bis . Pone igitur in quoto 2 , & cetera prosequere , ut supra . Erit quotus R 4100125 sine ullo residuo .

Schol. I. *Quod remanet post singulas subtractiones , nunquam potest esse æquale , aut majus divisore , alias fuit erratum . Assumptus enim fuit quotus justo minor . Contra vero si productum ex quoto in divisorem majus sit residuo divisionis , ex quo fieri debet subtractio , ita ut subtractio fieri non possit , signum est , quotum assumptum esse justo majorem , ac proinde esse minuendum . Utrumque casum tyrones diligenter advertant .*

Schol. II. *Si absoluta divisione , aliquid remanet , ut in primo exemplo contigit , residuum illud ponitur supra lineam , & sub eodem ponitur divisor , atque hinc oriuntur fractiones , de quibus in Capite III .*

Schol. III. *Qui sunt in hac dividendi praxi peritiores , producta ex singulis quotis in divisorem non subscribunt , sed illa memoria retinentes , statim subtrahunt ex membro divisionis , & notant residuum . Sit dividendus numerus A per B , quotus 2 ductus in divisorem 43 , nempe 86 , non subscribitur ipsi 87 , sed immediate mente subtrahitur , notaturque sub eodem 87 residuum 1 . Sic etiam invento divisore 3 , ductoque in 3 , & in 4 ( divisoris notas ) producta 9 , & 12 non subscribuntur sub 146 , sed subtrahuntur statim , ac notatur primo 7 , deinde 1 , hoc est residuum 17 , sub ipso 146 . Quod compendium valde juvat .*

$$\begin{array}{r} B \ 4 \ 3 \\ \hline 2 \ 0 \ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A \ 8 \ 7 \ 4 \ 6 \\ - \ 1 \ 4 \ 6 \\ \hline 1 \ 7 \end{array}$$

Schol. IV. Si divisor habeat in fine unam, vel plures cifras, ut 120, 300, 4000 &c. abscinduntur ab illo cifra, totidemque figura a dividendo dextrorsum; deinde fit, ut moris est, divisio cum reliquis figuris: sed absoluta operatione, figura ex dividendo abscissa ponuntur supra lineam, infra quam ponitur divisor integre sumptus cum cifris. Ut si dividendus sit 635 per 200. Abscinde duas cifras ex 200, & duas figuras dextrorsum ex dividendo 635, diviso deinde 6 per 2, habetur quotus  $3 \frac{3}{2} \frac{5}{0}$ . Quod si prima divisoris nota fuerit 1, & reliqua omnes cifra, ut 10, 100, 1000 &c. confecta erit divisio, si ad dexteram dividendi abscindas totidem figuras, quot sunt in divisore cifra, nam unitas non dividit. Proinde dividendo 145690 per 10000, quotus erit  $14 \frac{5}{1} \frac{6}{0} \frac{9}{0} \frac{0}{0}$ ; dividendo per 1000, quotus erit  $145 \frac{6}{1} \frac{9}{0} \frac{0}{0}$  &c.

Schol. V. Est alius non inelegans dividendi modus, quem Itali vulgo vocant, partire per ripiego; qui tunc solum adhiberi potest, cum divisor potest resolvi in suos factores. Sit dividendus numerus 15460 per 45, quia divisor 45 resolvi potest in suos factores 5 & 9, ex quibus componitur, divido primo per 5, quotus est 3092: divido deinde quotum 3092 per 9, oritur quotus quaesitus  $343 \frac{5}{9}$ . Similiter dividendus sit 13463 per 36, qui 36 componitur ex 4 & 9, divide per 4 numerum datum, quotus erit  $3365 \frac{3}{4}$ , hunc divide per 9, quotus erit  $373 \frac{8}{9}$ . Ut ex duabus illis fractionibus fiat unica fractio, duc residuum 8 in divisorem 4, & producto adde residuum primum 3, fit 35. Duc deinde 4 in 9 fit 36, erit fractio  $\frac{35}{36}$ , unde

373  $\frac{3}{5}$  quotus quæsitus. Ratio hujus suo loco innotescet.

Examen divisionis fit per multiplicationem. Nam multiplicando divisorem per quotum, restituitur numerus dividendus, modo illi addatur, si quid ex divisione remansit.

Vel fit examen per abjectionem 9, vel 7. Nam rejectis primo 9, vel 7 tum ex divisore, tum ex quoto; residua 8 & 4 notantur in angulo crucis sinistro *A* & *B*, & ducuntur inter se, deinde producti residuum 5, abjectis 9 vel 7, ponitur in vertice ipsius crucis, cui quidem additur residuum divisionis factæ, ablatisque ex hac summa 9, vel 7, quod remanet, ut hic 0, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet esse id quod restat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7, & notatur in *E*. Patet sequenti exemplo.

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \hline
 130
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4563 \\
 106 \\
 \hline
 13
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 A8 \quad \overset{5}{|} \quad 0C \\
 \hline
 B4 \quad | \quad 0E
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 0 \quad | \quad 6 \\
 \hline
 4 \quad | \quad 6
 \end{array}$$

*Demonstr.* Ex praxi a nobis tradita tot notis constare debet quotus, quot sunt membra divisionis, ut in *Coroll. n. 3.* dictum est. Sed singulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties singula divisionis membra divisorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum divisionis 186 continet quater divisorem 45, sicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita ducitur 45 in 4, & productum 180 (divisoris 45 quadruplum) subtrahitur ex membro divisionis 186, ergo patet, divisionis membrum 186 quater continere divisorem, sicuti quotus 4 totidem uni-

unitates continet, alias subtrahi non posset. Remanet quidem, facta subtractione, numerus senarius, sed hic sequenti figuræ 7 jungitur pro secundo divisionis membro, ut dictum est. Pari ratione idem ostenditur de singulis ipsius quoti notis; unde sequitur, integrum quotum 4149 toties unitatem continere, quoties dividendum 186730 continet divisorem 45, adeo ut quotus 4149 æque multiplex sit unitatis, ac dividendum æque multiplex est divisoris, & supersint 25.

## P R O P O S I T I O VII.

*De divisione integrorum per numeros divisoris multiplices.*

Methodus dividendi numerum per numeros divisoris multiplices adhiberi potissimum solet, cum numerus dividendus est valde prolixus.

*Sit exemplum.* Ex doctrina Tychonis Sol motu diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum Italicorum 2140011712, quaeritur quot milliaria conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24 in minuta, multiplicando illas per 60, erit divisor, per quem dividi debet numerus milliariorum *A*, 1440, seu 144, (ablata ab ipso cifra, & ex dividendo *A* ultima nota dextrorsum 2) qui ponatur ad dexteram dividendi, ut in *B*, & notetur punctum sub tertia ipsius dividendi nota 4, cum divisor *B* semel contineatur in 214, ut in *prac. Propos.* dictum est. Tum scribantur sub ipso divisore *B* singuli multiplices 288, 432, 576 &c. cum notis appositis, 1, 2, 3, 4 &c. ut in exemplo.

Quia divisor *B* continetur semel in 214, scribatur 1 in quoto *C*, subtractoque divisore ipso ex 214, remanent 70, additaque sequenti figura dividendi, sunt

C

sunt

fiunt 700. Tunc observetur qualis ex multiplicibus sub  $B$  existentibus sit proxime minor, quam 700, patet illum esse 576. Pone igitur in quoto notam illi appositam 4, & subtrahe ipsum 576 ex residuo 700, remanent 124, quibus addita figura sequenti, habetur 1240. Iterum observa, qualis multiplex sit proxime minor ipso 1240; reperitur 1152, cui appositae est nota 8, hanc pone in quoto  $C$ , & illum subtrahe ex residuo 1240, residuum est 88, & sic deinceps, donec exhauriantur omnes dividendi figurae. Sic enim nullo fere labore invenitur quotus 148119, cum residuo  $\frac{3}{4}\frac{5}{4}\frac{3}{0}$ , quod quartam fere milliarii partem importat, ut in *Cap. sequ.* explicabitur. Sol igitur unico horae minuto conficit milliaria Italica 1486119.

$C$	$A$	$B$
148.....)	2140011712	144   1
	144	288   2
	<hr style="width: 100px; margin: 0;"/>	432   3
	-- 700	576   4
	576	720   5
	<hr style="width: 100px; margin: 0;"/>	864   6
	1240	1008   7
	1152	1152   8
	<hr style="width: 100px; margin: 0;"/>	1296   9
	-- 88.....	

Schol. I. Est etiam facilissima divisio per tabellas Neperianas, de quibus dictum est in Schol. 4. Propos. v. quae ex hac Propos. sequitur. Nam esto dividendus numerus  $A$  142188 per  $B$  578. Apponantur tres tabellae, quae in vertice referant divisorem 578, praefixa illis tabella numerorum exponentium 1, 2, 3, 4, &c. (vid. tabellam  $AB$  fig. 2.) Tum determinantur puncto in numero dividendo tot notae, quot divisibiles sunt per



36 DE CALCULO DENOMINATORUM  
dividendo adjicitur, ut in Prop. VI, dictum est, Ce-  
terum si quis in hac dividendi praxi sit aliquanto  
exercitatus, divisiones etiam prolixas citissime expediet,  
eritque minus obnoxius erroribus; qui inter dividendum  
ex incuria, vel hallucinatione nascuntur.

---

## C A P U T II.

### *De Calculo Denominatorum.*

**R**egulæ vulgaris Arithmeticæ hætenus traditæ  
applicari jam debent numeris *denominatis*, hoc  
est numeris diversarum specierum. Quod quidem dif-  
ficile non erit, si dignoscatur valor unius speciei re-  
spectu alterius; nimirum quot partes minoris speciei  
majorem speciem constituent. Sic ut addantur, vel  
subtrahantur dies, horæ, ac minuta, necesse est sci-  
re minuta temporis 60. unam horam, horas autem  
24 diem unum efficere. Idem de monetis, ponderi-  
bus, ac mensuris valet: quæ licet pro diversitate  
Provinciarum, imo & Urbium variæ sint, modus  
tamen eas calculandi est ubique proportionaliter idem;  
adeo ut si quis unius loci monetas, pondera ac men-  
suras addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere  
noverit, ad alterius quoque regionis calculum easdem  
regulas applicare facile poterit.

## P R O P O S I T I O I.

### *De Additione numerorum denominatorum.*

I. *Exemplum sit de vulgari moneta Romana, quam  
componunt scuta, asses, & quadrantes; hoc est qua-  
drantes 5 assem 1, & asses 100 scutum 1, quod de-  
cem*



cem denariis argenteis, seu juliis constat.

Disponantur species similes sub similibus; ac primo quidem loco dextrorsum species minimæ, tum ordine majores usque ad maximam; ut in hoc exemplo collocentur primo quadrantes, secundo asses; tertio scuta; & si qua species intermedia desit, vacuus ejus locus repleatur cifra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, fiunt 8, quibus continetur assis 1, remanent 3, quæ scribe infra lineam. Adde deinde assen 1 ad sequentem seriem assium, nempe ad 5, 0, 8, 5 fiunt 19 asses. Scribe 9 infra lineam, & pro decade una adde 1 ad assium decades 1, 2, 9, 3, sunt decades 16, hoc est asses 160; reserva itaque decades 10, (centenarium nempe 1) pro sequenti specie, & scribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena scutorum eo modo, quo factum est in *Propos. 2. Cap. 1.* cum sint numeri homogenei, prodibit summa scutorum 5099, asses 69, quadr. 3.

<i>Scut.</i>	<i>Ass.</i>	<i>Quadr.</i>
2 3 0.	3 5.	0.
5 7 2.	9 8.	3.
7 8 4.	2 0.	4.
3 5 1 2.	1 5.	1.

Summa      5 0 9 9.    6 9.    3.

II. Libra in Urbe constat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ sint ergo

<i>Lib.</i>	<i>Unc.</i>	<i>Den.</i>
3 8.	1 0.	2 3.
7 0.	1 1.	1 6.
3 5 2.	0 5.	2 2.

Summa      4 6 2.    0 4.    1 3.

C 3

Ha-

38 DE CALCULO DENOMINATORUM

Habentur libræ 462, unc. 4, den. 13. Nam denarii 22, 16, 23 additi faciunt 61, in quibus bis continetur 24, hoc est uncia 2, quæ sequenti columnæ addendæ sunt, & remanent denarii 13, quos scribe infra lineam. Similiter uncia 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, sequenti columnæ addendas, & remanent uncia 4, quæ pariter scribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *Propos. 2. Cap. 1.*, & habentur libræ 462, unc. 4, den. 13.

III. Addendi sunt pedes Parisienses, pollices, & lineæ. Pes autem Parisiensis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo

	<i>Pedes</i>	<i>Poll.</i>	<i>Lin.</i>
	1 2 8.	1 0.	9.
	3 2 0.	1 1.	2.
	5 7 2.	0 8.	7.
	1 0 2 2.	0 6.	6.
Summa			

Quod quidem manifestum est: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc est pollicem 1, qui reservatur sequenti columnæ addendus, & scribitur infra lineam residuum 6. Deinde pollices 8, 11, 10 cum 1 præcedenti faciunt 30, qui bis continent 12, hoc est pedes 2 sequenti columnæ addendos, & scribitur infra lineam residuum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam sequentem, continuatur additio, ut in *Propos. 2. Cap. 1.* cum sint numeri homogenei.

*Examen* fieri potest sic: completa superioris exempli additione, duo lineam sub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter solum ordinem *A*, qui relin-

qui-

quitur: habebis alterum aggregatum  $C$ , quod deficit ab aggregato primo  $B$ , defectu numerorum ordinis  $A$ . Si ergo aggregato  $C$  addas numeros  $A$ , habebis aggregatum  $D$  æquale aggregato primo  $B$ ; alias fuit erratum. Hoc examen usurpari quoque potest pro numeris homogeneis, ut patet.

	Ped.	Poll.	Lin.
$A$	1 2 8.	1 0.	9.
	3 2 0.	1 1.	2.
	5 7 2.	0 8.	7.
$B$	1 0 2 2.	0 6.	6.
$C$	8 9 3.	0 7.	9.
$D$	1 0 2 2.	0 6.	6.

## PROPOSITIO II.

### *De subtractione numerorum denominatorum.*

Disponantur species similes sub similibus, ut in *prac. Propos.* dictum est, & numerus minor, seu subtrahendus, collocetur sub majori, a quo debet subtrahi.

Quoties inferior numerus a superiori subduci nequit, utpote illo major, toties numero superiori addatur unum integrum sequentis speciei, ut fiat major subtrahendo. Deinde numerus speciei, ex qua sum-

C 4

ptum

40 DE CALCULO DENOMINATORUM.  
 ptum fuit illud integrum, unitate minuatur. Quod  
 exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* subtrahenda sit pecunia  
 expensa *B*. Quia quadrantes 4 subtrahi nequeunt ex  
 quadrantibus 3, sumo 1 ex assibus 28, hoc est qua-  
 drantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex qui-  
 bus subductis 4, remanent 4 infra lineam scribendi.  
 Deinde minuendo unitate asses 28, vel augendo uni-  
 tate (idem enim est) asses 36, ita ut prima figu-  
 ra 6 fiat 7, subducitur 7 a superiori numero 8, &  
 scribitur infra lineam residuum 1. Rursus quia 3  
 subtrahi nequit ex 2, sumo 1 ex scutis, ut ad 2  
 addantur 10, ac fiat 12, ex quo subtractis 3, resi-  
 duum, quod scribitur infra lineam, est 9. Minuitur  
 deinde 8, vel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum  
 continuatur subtractio, ut in *Prop. 4. Cap. 1.*, &  
 habetur residuum *C* scut. 140, ass. 91, quadr. 4.

	<i>Scut.</i>	<i>Ass.</i>	<i>Quadr.</i>
<i>A</i>	1 9 8.	2 8.	3.
<i>B</i>	5 7.	3 6.	4.
<hr style="border-top: 1px solid black;"/>			
<i>C</i>	1 4 0.	9 1.	4.

II. Subtrahendus sit numerus *N* ex numero *M*,  
 scilicet

	<i>Dies.</i>	<i>Horæ.</i>	<i>Min.</i>
<i>M</i>	2 1.	1 4.	5 3.
<i>N</i>	1 0.	1 3.	5 7.
<hr style="border-top: 1px solid black;"/>			
<i>Q</i>	1 1.	0 0.	5 6.
	2 1.	1 4.	5 3.

Cum

Cum minuta 57 subtrahi nequeant ex minutis 53, desumitur unum integrum ex sequenti specie, nempe hora 1, seu minuta 60, quæ addita minutis 53 faciunt min. 113, ex quibus subtractis 57, scribitur infra lineam residuum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta subtractione, nullum est residuum, & scribitur 0. Demum subductis 10 ex 21 residuum est 11, est ergo numerus quæsitus *Q* dies 11 min. 56.

*Examen* fit addendo residuum *Q* numero minori *N*, nam facta additione, ut in *Propos. præc.* dictum est, restituitur major numerus *M*, si erratum non fuerit.

### PROPOSITIO III.

#### *De multiplicatione numerorum denominatorum.*

Primo reducantur omnes species ad minimam, ut si multiplicandæ sint libræ, solidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde species reductæ multiplicentur, ut moris est, per *Propos. 5. Cap. 1.* Productum vero reducitur ad majorem speciem per divisionem.

I. *Sic exemplum.* Plancus expendit singulis diebus libras 5, solidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, seu diebus 365 expendet. Cum denarii 12 solidum unum, solidi vero 20 libram constituent, duc libras 5 in 20, & producto adde 15, habebis solidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1388; qui multiplicandi sunt per dies 365, fitque per *Propos. 5. Cap. 1.* productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis Solidos 42218, & denarios 4; Utque solidi ad libras reducantur, divide illos per 20, erunt libræ 2110 & solidi 18. Itaque Plancus uno  
an-



## PROPOSITIO IV.

*De divisione numerorum denominatorum.*

Tam divisoris, quam dividendi species reducantur ad minimam, ut factum est in *præc. Propos.* Tum fiat divisio per *Propos. 6. Cap. 1.*

I. Emit quis serici ulnas 60, pal. 6, unc. 10, expenditque scuta Romana 292, asses 10, quæritur quanti steterit ulna. Duc ulnas 60 in 8, ut fiant palmi; & adde producto 6, erunt palmi 486. Hos duc in 12, ut fiant uncia, additisque unciis 10, erunt uncia 5842. Reducantur pariter scuta ad asses, & addantur asses 10, fient asses 29210. Itaque dividantur per *Propos. 6. Cap. 1.* asses 29210 per 5842, quotus est 5: hoc est uncia quælibet valet assibus 5, proinde uncia 12, seu palmus, valet assibus 60, adeoque palmi 8, sive ulna, valet assibus 480, hoc est scut. 4, assibus 80.

II. Fingamus lunam distare ab aliqua fixa gr. 45, min. 30, sec. 25, quæritur quanto tempore stellam illam luna assequetur. Ex Tab. Alfonsinis luna motu suo diurno conficit gr. 13, min. 10, sec. 35. Proinde dividendi sunt gradus 45, min. 30, sec. 25 per gradus 13, min. 10, sec. 35, ut habeatur appulsus lunæ ad fixam.

Primo duc gr. 45. in 60, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rursus in 60, & adde producto 25, habebis sec. 163825, numerus scilicet dividendus. Eodem pacto invenietur divisor, nempe min. sec. 47435. Tum facta divisione per *Propos. 6. Cap. 1.* habetur quotus 3, hoc est dies 3, & remanent  $\frac{2}{4} \frac{1}{7} \frac{5}{4} \frac{2}{3} \frac{0}{5}$  partes scilicet unius diei, ex qua fractione eruuntur horæ 10, min. 53 circiter, modo explicando in *Propos. 4. Cap. 3.* Luna igitur ad stel-

44. DE CALCULO DENOMINATORUM  
stellam perveniet diebus 3, horis 10, min. 53.

*Examen divisionis fit per multiplicationem.*

Nam si in exemplo primo multiplicaveris per *Propos. præc.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per scut. 4, ass. 80, hoc est uncias 5842 per asses 480, fiet productum 2804160, quod divisum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto scut. 292. 10. Similiter in secundo exemplo ducto divisore 47435 in quotum 3, additoque ad productum residuo 21520, restituitur numerus, qui fuit divisus 163825.

---

## C A P U T III.

*De Calculo Fractorum.*

### D E F I N I T I O N E S.

**N**umerus fractus, qui & *fractio*, vel *minutia* dicitur, est pars, seu partes alicujus numeri integri in plures æquales partes divisi. Ut si totum aliquid dividatur in tres partes æquales, & ex illis quispiam duas partes obtineat, dicitur habere duas tertias partes, scilicet  $\frac{2}{3}$ , quæ fractionem efficiunt.

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui scribitur supra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quæ de illo toto diviso habentur: alter qui scribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, seu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit divisum, nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet,

$\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{7}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{1}{2}$   $\frac{1}{6}$  &c.

Quæ fractiones sic pronunciantur, *una dimidia*,  
*una*



una tertia, duæ septimæ, quatuor nonæ, undecim vigesimæ &c. intelligitur pars, seu partes.

Si numerator æqualis sit denominatori, minutia æqualis est uni integro. Sic  $\frac{3}{3}$  æquivalent uni integro in tres partes æquales diviso. Adsunt enim omnes partes illius integri, adeoque  $\frac{3}{3}$  sunt 1. Item  $\frac{5}{5}$ ,  $\frac{6}{6}$ ,  $\frac{8}{8}$  &c. significant 1. Hinc patet, unitatem esse illud totum divisum in partes tertias, quintas, sextas &c.

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic  $\frac{4}{3}$  plus sunt quam unum integrum in tres partes divisum, sed important 1, & insuper  $\frac{1}{3}$ . Similiter  $\frac{16}{3}$  significant tria integra, & adhuc  $\frac{1}{3}$ .

II. *Minutia minutia* est pars alterius minutia, ut si fractionis  $\frac{3}{4}$  sumatur dimidia pars, nempe  $\frac{1}{2}$ , erit hæc minutia minutia, quæ a majori distingui solet per interpositam lineam. Sic  $\frac{1}{2} | \frac{3}{4}$  significat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in posterum signis, quæ sequuntur.

= *Signum equalitatis*. Sic  $a = b$  significat duas quantitates  $a$  &  $b$  esse æquales.

+ *Plus*. *Signum additionis*. Ut  $a + b$  significat summam duarum quantitarum  $a$ , &  $b$ . Sic  $3 + 5$  significat summam 8, & exprimitur  $3 + 5 = 8$ .

— *Minus*. *Signum subtractionis*. Ut  $a - b$  significat  $a$  minus  $b$ ; hoc est  $a$  quantitate  $a$  subtractam esse quantitate  $b$ . Sic  $5 - 3 = 2$ .

× *Signum multiplicationis*. Sic  $a \times b$  significat  $a$  multiplicatum in  $b$ , vel per  $b$ . Ut  $3 \times 5 = 15$ .

:: *Signum proportionum equalium*. Sic  $a . b :: c . d$  denotat eandem esse proportionem inter  $a$  &  $b$ , quæ est inter  $c$  &  $d$ . Ut  $2 . 4 :: 3 . 6$ . Item  $1 . 3 :: 9 . 27$ . &c.

∴ *Signum proportionis continuæ*. Sic  $\therefore a , b , c$ , denotat  $a$  esse ad  $b$ , sicuti  $b$  ad  $c$ . Ut  $2 , 4 , 8$ .

AXIO-

## A X I O M A T A .

I. Unitas se habet ad fractionem, ut denominator ad numeratorem. Sic  $1. \frac{2}{3} :: 3. 2$ . Unitas enim ex dictis est totum divisum, quod se habet, ad partem, (quæ est fractio) ut fractionis denominator (qui est totum, quod fuit divisum) ad sui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad suos numeratores eandem rationem, sunt inter se æquales, & valent omnino idem. Sic  $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$  &c. sunt fractiones æquales, idemque significant. Quod ex primo *Axiom.*, tum etiam per se patet. Nam singulæ hæ fractiones unius integri medietatem important. Hinc fractionum valor non ex magnitudine numerorum, quibus exprimitur, sed æstimari debet ex proportione majori, vel minori, quam numerator habet ad suum denominatorem; proinde major est  $\frac{1}{2}$ , quam  $\frac{1}{10}$ , vel  $\frac{1}{100}$  &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam denominator per eundem numerum multiplicantur, aut dividuntur, valorem non mutant. Sic multiplicando  $\frac{2}{3}$  per 5 oritur  $\frac{10}{15}$ , quæ idem valet ex 2. *Axiom.* Pariter dividendo  $\frac{10}{15}$  per 5, fit  $\frac{2}{3}$  ejusdem valoris cum  $\frac{10}{15}$ . Item divisus  $\frac{3}{9}$  per 3, fit  $\frac{1}{3}$ , quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

Schol. Multum interest, ut tyrones hætenus dicta bene intelligant, prius quam ad fractionum regulas addiscendas procedant, alioquin difficilia illis, & valde obscura erunt, quæ sequuntur.

PRO.

## PROPOSITIO I.

*Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.*

Mensura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & sine residuo dividit; seu numerus, qui aliquoties sumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur mensura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum septies sumptus adæquat. Dicitur autem mensura maxima numerus, per quem solum duo numeri reducuntur ad numeros primos, seu minimos.

I. Dati sint duo numeri  $A$  &  $B$ , quorum mensura communis maxima quaeritur. Dividatur major  $A$  per minorem  $B$ , & neglecto quoto, notetur residuum  $C$ : deinde  $B$  dividatur per residuum  $C$ , tum residuum  $C$  per residuum  $D$ , & sic deinceps nulla habita exponentium ratione, donec tandem divisor occurrat  $F$ , qui præcedentem exacte dividat sine ullo residuo; hic erit maxima communis mensura quaesita.

<i>Exempl. 1.</i>	$A$	2	3	4	<i>Exempl. 2.</i>	4	3	8
	$B$	1	4	4		1	0	2
	$C$		9	0			3	0
	$D$		5	4			1	2
	$E$		3	6				6
	$F$		1	8				0
				0				

II. Quod si post omnem divisionem remanet 1, signum est, nullam reperiri posse communem mensuram inter numeros datos, eosque esse inter se primos.

Da.

Dati sint numeri  $M$  &  $N$ , divide majorem  $M$  per  $N$ , & neglecto quoto, nota residuum  $R$ , ac sic deinceps prosequere; occurrit demum 1, adeoque numeri dati  $M$  &  $N$  sunt inter se primi.

<i>Exempl. 1.</i>	$M$	1	3	4	<i>Exempl. 2.</i>	2	6	9
	$N$		4	9		1	4	7
	$R$		3	6		1	2	2
	$S$		1	3			2	5
				1			2	2
				3				3
				1				1

*Demonstr.* per se manifesta est. Nam per continuam illam numeri minoris a majori subtractionem (divisio enim est compendiosa subtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel aliquantam numerorum datorum. In primo casu pars illa aliquota erit maxima communis mensura duorum numerorum; in secundo casu evidens est, nullum alium numerum, præter unitatem, metiri posse numeros datos, adeoque sunt inter se primi (per *Defin.* 8.)

*Schol. Nota*, quemlibet numerum se ipsum semel metiri; proinde dari potest mensura communis maxima inter duos numeros, quorum alter simplex sit, seu primus, & alter compositus. Sic 7 est maxima communis mensura inter 7 & 21. Nam utroque diviso per 7, habetur 1 & 3. Item 5 & 75 divisi per 5, faciunt 1 & 15, adeoque 5 est maxima communis mensura; & sic de aliis.

## P R O P O S I T I O II.

*Fractiones ad minimos terminos reducere.*

Fraçtio dicitur ad minimos terminos reduci, cum  
alia

alia illi æqualis, nempe valoris ejusdem, minimis tamen terminis expressa reperitur.

I. Data sit fractio  $\frac{1}{2} \frac{6}{9} \frac{0}{8}$  ad minimos terminos reducenda, quæratur maxima communis mensura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propos. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejusdem valoris, & minimis terminis expressa  $\frac{2}{3} \frac{0}{8}$  per *Axiom. 3.*

II. Sit minutia data  $\frac{4}{9} \frac{0}{8}$  reducenda ad minimos terminos. Inveniatur maxima communis mensura inter 96, & 60, per *Propos. præc.* erit 12, per quem diviso utroque datæ fractionis termino, habetur nova fractio  $\frac{1}{3}$  minimis terminis expressa. Hæc praxis vulgo dicitur *schisfare i rotti*.

*Demonstratio patet ex 3. Axiom.*

### PROPOSITIO III.

*Fractiones ad idem nomen reducere.*

Fractiones reducere ad idem nomen, est efficere, ut fractiones diversorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, sed idem valeant, quod prius.

I. Sint duæ fractiones *A* & *B* ad commune nomen reducendæ. Duc inter se ad invicem denominatores  $5 \times 4$ , &  $4 \times 5$ , erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, seu decussatim, numeratorem unius minutia per denominatorem alterius, hoc est  $2 \times 4$ , &  $3 \times 5$ , erunt novi numeratoribus 8 & 15, qui directe collocandi sunt sub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in sequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ fractiones *C* & *D* ejusdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejusdem per 3. *Axiom.*

D

Nam

Nam termini fractionis *A* multiplicantur per eundem numerum, hoc est per 4 denominatorem fractionis *B*, unde oritur fractio *C* priori æqualis per *Axiom. cit.* Similiter termini fractionis *B* multiplicantur per 5 denominatorem fractionis *A*, & oritur fractio *D* priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones *C* & *D* idem valent ac duæ priores.

$$\begin{array}{l} A \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \\ C \frac{2}{3} \frac{3}{4} \end{array} \quad \begin{array}{l} B \\ D \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

II. Quod si reducendæ sint ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut *A, B, C* &c. duc omnes denominatores inter se  $3 \times 4 \times 5$  fiet *F* communis denominator 60, qui divisibilis est per singulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem 60 per 3 denominatorem fractionis *A*, quotus est 20, tertia scilicet denominatoris pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipsius 60, adeoque  $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$  per *Axiom. 2.*

Similiter diviso 60 communi denominatore per denominatorem 4 fractionis *B*, habetur 15 quarta pars ipsius 60. Duc 15 in 3 habebis 45, tres quartas partes ejusdem 60, adeoque  $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$  per *Ax. 2.* Eadem ratione invenitur  $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ . Proinde fractiones datæ *A, B, C* æquales sunt fractionibus *M, N, R*; quod per se manifestum est.

$$\begin{array}{l} A \ B \ C \\ \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = 60 \ F \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M \ N \ R \\ \frac{40}{60} \ \frac{45}{60} \ \frac{12}{60} \end{array}$$

Co.

Coroll. Ex hac Propos. innotescit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum sit major. Nam si reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ sit major. Sic in superiori exemplo fractio *B* est ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis *N*.

Schol. Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc due illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducendæ ad idem nomen fractiones  $\frac{2}{3}$  &  $\frac{7}{15}$ , quia 3 dividit exacte 15, multiplica per quotum 5 terminos fractionis  $\frac{2}{3}$ , oritur  $\frac{10}{15}$  ejusdem nominis cum alia fractione. Quod est valde commodum in calculis Algebraicis, ut in nostris Instit. Analyt. annotavimus.

## PROPOSITIO IV.

*Fractionem ad aliam dati nominis & ejusdem valoris revocare.*

I. Data sit fractio  $\frac{2}{3}$ , quæ revocari debeat in aliam, cujus denominator datus sit 60. Duc numeratorem  $2 \times 60$ , & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutiarum quæsitæ  $\frac{40}{60}$ , quæ quidem est ejusdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3, 2 :: 40. ut patet.

Data sit fractio  $\frac{2}{4} \frac{1}{7} \frac{5}{4} \frac{2}{3} \frac{0}{5}$ , quæ significet unius diei partes, ut in *Propos.* 4. *Cap.* 2. reducenda ad horas. Duc  $21520 \times 24$ , & productum divide per denominatorem 47435, quotus dat horas 10. & remanet  $\frac{4}{4} \frac{2}{4} \frac{1}{4} \frac{3}{3} \frac{0}{5}$  partes unius horæ. Quæ ut ad minuta reducantur, duc  $42130 \times 60$ , & productum divide per eundem denominatorem, quotus dabit mi-

D 2 nuta

data prima 53, & remanent  $\frac{1}{4} \frac{3}{7} \frac{4}{4} \frac{5}{3}$  partes unius minuti primi. Ut invenias secunda, duc 13745  $\times$  69, & dividendo per 4745, quotus dabit min. secunda 17. Luna igitur ad stellam pervenit diebus 3. hor. 10. min. 53. sec. 17.

II. Quod si datae fractionis denominator non exacte dividit productum, ut si  $\frac{2}{3}$  reduci debeant ad fractum, cujus denominator est 8, productum 16, quod oritur ex  $2 \times 8$ , non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 supra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex residuo, nempe  $\frac{1}{8}$ , quae erit fractionis fractio, & facit hunc sensum, duae tertiae in octavas redactae dant quinque octavas, & unam tertiam unius octavae, scilicet  $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \Big| \frac{1}{8}$ . Quod autem  $\frac{2}{3}$  idem valeant ac  $\frac{5}{8} + \frac{1}{3} \Big| \frac{1}{8}$  patet. Nam  $\frac{2}{3} \Big| \frac{1}{8} =$  per Prop. 7. hujus; proinde  $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{2}{24} =$  (per Ax. 3.)  $\frac{1}{2} \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{2}{2} \frac{6}{4} = \frac{2}{3}$  per Prop. 2. hujus.

Schol. Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut si scire velis quid valeant  $\frac{3}{5}$  unius scuti Romani in juliiis, vel assibus. Quia 10 julii, aut asses 100 efficiunt scutum Romanum 1, duc numeratorem 3 in 10, aut in 100, & productum divide per denominatorem 5, erunt in primo casu  $\frac{6}{10}$ , in secundo  $\frac{60}{100}$ , hoc est julii sex, aut asses 60. Item dantur  $\frac{3}{7}$  unius pedis, scire volo quot pollices haec fractio importet. Quia 12 pedem 1 efficiunt, duco  $3 \times 12$ , & productum 36 divide per 7, quotus dat 5, unde habentur  $\frac{5}{7}$  hoc est pollices 5, & remanet  $\frac{1}{7}$ . Quod si iterum supponas pollicem dividi in 12 lineas, facile erit explorare, quid importet una septima pars unius pollicis. Haec praxis vulgo dicitur *variantare i Rotti*.



## PROPOSITIO V.

*Fractiones ad integra revocare.*

I. Cum numerator denominatore suo major est, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic  $\frac{12}{3}$  divisæ per 3 dant integra 4. Item  $\frac{60}{12}$  divisæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod si denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex residuo minutia. Proinde  $\frac{17}{3}$  divisæ per 3 dant integra 5  $\frac{2}{3}$ . Similiter  $\frac{23}{7}$  divisæ per 7 dant 3  $\frac{2}{7}$ .

Schol. Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias speciei altioris. Sic asses 350 si dividantur per 100, reducuntur ad scuta Romana 3  $\frac{50}{100}$ , seu 3  $\frac{1}{2}$ . Pariter minuta 120 divisæ per 60, dant horas 2. Patet divisores istos 100, & 60 esse denominatores minutiarum, per quos eorum numeratores dividuntur per hanc Propositionem.

## PROPOSITIO VI.

*Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.*

Si datus integer v. gr. 3. reducendus in fractum, cujus denominator sit 7. Multiplica integrum ipsum 3 per denominatorem datum 7, & producto subscribe ipsum denominatorem 7, erit fractio quaesita  $\frac{21}{7}$ . Similiter unitas reducenda sit in fractum, cuius denominator sit 5, erit  $\frac{5}{5} = 1$  ex dictis Definit. I. Cap. hujus.

Schol. I. Si integro cuilibet supponatur unitas, fit fractio; vel quasi fractio integro æquivalens; ut  $\frac{6}{2} =$   
D 3 6,

54 DE CALCULO FRACTORUM  
 $6, \frac{8}{1} = 8$  &c. quod pro multiplicatione, & divisione fractionum annotetur.

Schol. II. Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias inferioris speciei. Sint scuta Romana 55 reducenda ad asses, multiplica  $55 \times 100$ , habebis asses 5500. Item milliaria Romana 50 convertenda sint in passus, quia passus 1000 milliaria 1 efficiunt, duc  $50 \times 1000$ , fient passus 50000. Patet in his exemplis numeros illos 100, & 1000 esse denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri 55, & 50, ut fiant fractiones  $\frac{5500}{100}$ ,  $\frac{50000}{1000}$  juxta hanc Propos.

## PROPOSITIO VII.

*Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.*

Duæ, vel plures fractiones fractionum ad unam simplicem fractionem reducuntur hoc pacto. Multiplica singulos numeratores inter se, & singulos pariter denominatores inter se, duo producta minutiam efficient æqualem omnibus illis minutiis minutiarum datis. Sit minutia minutiarum  $\frac{1}{4}$  )  $\frac{2}{3}$  ) hoc est una quarta pars duarum tertiarum ad simplicem minutiam reducenda; duc inter se numeratores  $1 \times 2$ , & denominatores  $4 \times 3$ , erit nova quæsitæ minutia  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ . Similiter reducendæ sint ad simplicem minutiam minutiarum  $\frac{2}{4}$  )  $\frac{3}{3}$  )  $\frac{3}{5}$ , multiplicatis inter se  $3 \times 2 \times 3$ ; item  $4 \times 3 \times 5$ , habetur nova minutia omnibus illis æqualis  $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$  per Prop. 2. hujus.

*Demonstr.* sensibili aliquo exemplo res manifesta erit. Ponamus hanc ipsam minutiam minutiarum  $\frac{1}{4}$  )  $\frac{2}{3}$  )  $\frac{3}{5}$  desumptam fuisse ex uno scuto Romano, quod decem Juliis constat; dico hanc minutiam minutiarum continere  $\frac{3}{10}$  unius scuti nempe tres Julios.

lios. Nam  $\frac{3}{4}$  unius scuti continent sex julios, cum julii duo sint  $\frac{1}{2}$  unius scuti. At  $\frac{2}{3}$  sex juliorum sunt quatuor julii, ut patet, &  $\frac{3}{4}$  quatuor juliorum sunt tres julii. Ergo evidens est, minutiam minutiarum  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$  continere  $\frac{3}{8}$  nempe tres julios.

Id facile illustrari potest dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam si quæretur dimidium unius tertiæ partis ejusdem lineæ, patet illam esse partem sextam totius. Divisis enim bifariam singulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea divisa in sex partes æquales; proinde  $\frac{1}{2}$  unius tertiæ facit  $\frac{1}{3}$ . Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos auditur *infilzare i Rotti*.

## PROPOSITIO VIII.

### *Fractiones addere.*

I. Si fractiones addendæ sint ejusdem nominis adde simul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem subscribe. Sint addendæ  $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$  additis numeratoribus  $1 \times 2 \times 3 \times 6 = 14$ , fit fractionum summa  $\frac{1+2+3+6}{7} = 2$  per Prop. 5. hujus.

II. Si fractiones addendæ sint diversi nominis, reduc ad idem nomen per Prop. 3. & operare, ut dictum est.

III. Quod si addendi sunt integri cum fractis, adde seorsim integros, & seorsim fractos; ut si ad  $4 \frac{2}{3}$  addendi sint  $3 \frac{1}{3}$ , fiet summa  $7 \frac{3}{3}$ . Res per se patet.

## PROPOSITIO IX.

*Fractiones subtrahere.*

I. Si minutiae sunt ejusdem nominis, minor earum ex majori subducitur, & residuo subscribitur communis denominator. Sic  $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$ . Item  $\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$ .

II. Si diversi sint nominis, reducantur ad idem nomen per *Prop. 3.*, & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris subtrahenda sit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejusdem nominis cum data fractione per *Propos. 6.*, & cetera fiant, ut supra. Subtrahere oporteat  $\frac{2}{3}$  ex 4, reduc 4 ad tertias, erunt  $\frac{12}{3}$ . Deinde  $\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{2}{3}$  per *Propos. 5.* Similiter subtrahenda sint  $2\frac{1}{4}$  ex  $5\frac{1}{2}$ , hoc est  $\frac{9}{4}$  ex  $\frac{11}{2}$ : reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propos. 3.* erunt  $\frac{9}{4}$ , &  $\frac{9}{4}$ , adeoque  $\frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{0}{4} = 0$ , per *Propos. 6.*

Schol. Ut minutiae addi, vel subtrahi possint, semper idem nomen habere debent, quod notetur.

## PROPOSITIO X.

*Fractiones multiplicare.*

I. Si multiplicanda est fractio per fractionem, duc inter se numeratores, itemque denominatores inter se, res erit confecta. Multiplicanda sit fractio  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$  ductis  $2 \times 3$ , &  $3 \times 5$ , habetur productum quaesitum  $\frac{6}{15}$ . Sic  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$  per *Propos. 2.*

II. Quod si multiplicandus sit integer per fractum, vel fractus per integrum, semper integro suppose unitatem, ut fiat quasi fractio; deinde operare ut supra. Sit multiplicanda  $\frac{3}{4} \times 7$ , supposita integro uni-

unitate, erit  $\frac{2}{3} \times \frac{7}{1}$ , proinde productum  $\frac{14}{3}$ .

III. Si vero alter multiplicantium sit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejusdem fracti; ut si multiplicari oportet  $2 \frac{1}{2}$  per 6, fiat  $\frac{5}{2} \times \frac{6}{1}$ ; erit productum  $\frac{30}{2}$ . Similiter si uterque multiplicator sit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejusdem nominis cum minutia sibi adhaerente: ut sint multiplicanda  $3 \frac{1}{7} \times 5 \frac{2}{3}$ , reducantur ad fractos, erunt  $\frac{22}{7} \times \frac{16}{3} = \frac{352}{21} = 16 \frac{16}{21}$  per *Propos. 5.*

*Demonstr.* Ex regula tradita multiplicare fractum *A* per fractum *B* est producere fractum *C*, qui toties contineatur in fracto *B*, quoties fractus *A* continetur in unitate. Nam sicuti fractus *C* continetur bis in fracto *B*, ita fractus *A* bis continetur in unitate, ut patet; ergo ex definitione multiplicationis fractus *C* est productum fracti *A* multiplicati per fractum *B*.

$$A \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} B = \frac{3}{10} C$$

*Coroll.* Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis *C* sit minus, quam factores *A* & *B*. Nam cum unitas sit ad *A* ut *B* ad *C* ex *Defin.* multiplicationis per *Prop. 5. Cap. 1.*; & unitas major sit quam *A*, etiam *B* major erit quam *C*, proinde *C* minor.

*Schol. I.* Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per divisionem, dividendo scilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutiae (moda divisibiles sint sine residuo); Sint enim multiplicanda  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{10}$ , divide 9 per 3, & 10 per 2, fit  $\frac{3}{5}$  productum quaesitum. Idem enim producitur, ac si more consueto multiplicentur. Nam  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$  per *Prop. 2.*

*Schol.*

Schol. II. Si integrum cum minutia ducendum sit in integrum, quod exacte divisibile sit per denominatorem minutie, ut si ducendum sit  $38 \frac{2}{3} \times 18$ , practici primo resolvunt integrum in fractum, fitque 116, deinde diviso 18 per denominatorem 3, habetur quotus 6, per quem multiplicant ipsum 116, & habetur productum quæsitum 696. Ratio per se patet.

Schol. III. Si vero integrum ducendum sit in minutiam, ut  $32000 \times \frac{6}{5}$ , practici prius dividunt 32000 per 5, deinde quotum 6400 ducunt in 6.

## PROPOSITIO XI.

### Fractiones dividere.

I. Si termini divisoris exacte dividant terminos dividendi, fractus, qui inde oritur, erit quotus. Ut si dividenda sit minutia  $\frac{4}{9}$  per  $\frac{2}{3}$ , divisus 4 per 2, & 9 per 3, quotus erit  $\frac{2}{3}$ . Similiter si denominator sit communis, satis erit dividere numeratorem per numeratorem, deleto denominatore; sic dividendo  $\frac{6}{7}$  per  $\frac{2}{7}$ , quotus erit 3; & dividendo  $\frac{7}{8}$  per  $\frac{3}{8}$ , quotus erit  $2 \frac{1}{3}$ . Item dividendo  $\frac{5}{6}$  per  $\frac{2}{3}$ , deleto communi denominatore, quotus erit  $\frac{5}{2}$ .

II. Quod si termini divisoris non exacte dividant terminos dividendi, aut denominator non sit communis, tunc inverte divisorem, ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris, deinde duc tam numeratores inter se, quam denominatores inter se, productum erit quotus quæsitus. Dividenda sit minutia  $\frac{2}{3}$  per  $\frac{3}{2}$ , inverso divisore, erit  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$  quotus quæsitus. Ita si dividere oporteat  $\frac{5}{8}$  per  $\frac{1}{4}$ , hoc est, si dicatur,  $\frac{5}{8}$  unius scuti Romani dat  $\frac{5}{8}$  unius ulnæ, quot ulnas dabit scutum unum: divisus (inverso divisore)  $\frac{5}{8}$  per

CAP. III. PROP. XI.

per  $\frac{1}{4}$ , quotus dat ulnas  $2 \frac{1}{2}$ . Nam  $\frac{4}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{35} = 2 \frac{1}{2}$  per *Prop. 5. hujus.*

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, satis est multiplicare denominatorem fracti per ipsum integrum. Sit dividendus  $\frac{1}{5}$  per 2, duc  $5 \times 2$ , quotus erit  $\frac{2}{5}$ . Item  $\frac{1}{5}$  divisus per 5, dat quotum  $\frac{1}{25}$ . Nam semper integro supponitur unitas.

IV. Cum divisor, aut dividendus, vel uterque est integer cum minutia, reducendus est integer ad minutiam sibi adjunctam, ut fiat unica minutia, & operatio instituenda est, ut supra. Sint dividenda  $24 \frac{1}{5}$  per  $\frac{2}{3}$ , fiunt  $\frac{124}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{372}{10} = 37 \frac{2}{5}$  per *Propos. 5.* Similiter sint dividenda  $15 \frac{1}{5}$  per  $12 \frac{1}{2}$ , fiunt  $\frac{76}{5} \times \frac{2}{25} = \frac{152}{125} = 1 \frac{27}{125}$ .

*Demonstr.* Dividere fractum *A* per fractum *B* est invenire quotum *C*, ad quem ita sit unitas, sicuti divisor *B* ad dividendum *A* ex divisionis definitione ad *Prop. 6. Cap. 1.* Sed unitas est ad fractum *C*, ut divisor *B* ad dividendum *A*. Unitas enim est ad *C*, ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom. 1.* Fractus autem *B* est ad fractum *A*, ut 3 ad 4: nam reductis ad idem nomen *A* & *B* per *Prop. 3.* oriuntur fracti æquales *M* & *N*, qui ob communem denominatorem se habent ut 3 ad 4; ergo unitas est ad *C*, ut *B* ad *A*; proinde *C* est quotus quæsitus. Quod &c.

$$\begin{array}{ccc}
 B & A & C \\
 \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \\
 \\ 
 M & N & | \quad 1. \frac{4}{5} : : 3. 4 \\
 \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & 
 \end{array}$$

Coroll. Hinc patet ratio, cur in divisione minutiarum quotus sit major numero ipso, qui dividitur; quod quidem accidit, cum divisor minor est  
uni-

unitate . Nam cum divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando divisor ad unitatem, ut dividendus ad quotum, adeoque si divisor minor est unitate, etiam dividendus debet esse minor quoto.

Schol. Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut  $634\frac{2}{3}$  per 5, practici dividunt integrum per integrum, nempe 634 per 5, nulla habita ratione fractionis, ut inveniant quotum 126. Tum si quid remanet (ut hic 4) illud reducunt ad fractionem per Prop. 6., hoc est  $\frac{4}{3}$ , quam addunt ad fractum  $\frac{2}{3}$ , fitque summa  $\frac{14}{3}$  per Prop. 8., quæ quidem summa divisa per 5 dat quotum  $\frac{14}{15}$  per hanc Propos. n. 3., unde quotus quaesitus est  $126\frac{14}{15}$ .

## C A P U T IV.

### De Fractionibus Decimalibus.

#### D E F I N I T I O I.

**F**Ractiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in decem æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias decem partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit; oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *prima*, *secunda*, *tertia*, *quarta* &c. iisque distinguendis apponuntur vir-



virgulæ , integris autem cifra 0 . Sic fractio decimalis , 50 . 8' 6" 4''' 2'''' significat quinque integra, octo primas , sex secundas , quatuor tertias, duas quartas . Sed fatis est virgulam ultimam apponere , & integra puncto distinguere , ut 5 . 8 6 4 2'''' . Quæ quidem fractio idem valet ac  $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$  , seu  $\frac{58642}{10000}$  . At commodi gratia decimales scribuntur instar integrorum , omisso denominatore , modo supra explicato nempe 5 . 8 6 4 2'''' .

Corol. I. Hinc sequitur virgulas illas , sive apices decimales , qui numeris opponuntur , esse loco denominatorum ; ut in decimali 5 . 8' 6" 4''' , apex unus importat denominatorum 10 , duo apices denominatorem 100 , tres denominatorem 1000 &c. hoc est  $\frac{8}{10} \frac{6}{100} \frac{4}{1000}$  .

Corol. II. Itaque decimales ad eandem denominationem facile reducuntur ; addendo tot zéros virgulis decimalibus affectos , quod opus fuerit ; ut si decimalis 3 . 5' reducenda sit ad secundas , ad tertias , vel quartas &c. Scribitur 3 . 5 0'' , 3 . 500''' , 3 5000'''' . Valor enim non mutatur , nam 5' = 50'' , 5'' = 50''' &c. ut julii quinque sunt asses 50 .

Coroll. III. Si integro cifræ quotcunque cum virgulis addantur , ejus valor idem manet ; ut si ad 3 addas 0 0 0'' , ut fiat 3 . 0 0 0'' , non mutatur integri valor . Significat enim , ut prius , tres unitates , non autem unitates 3000 ; nam  $\frac{3000}{1000} = 3$  .

Schol. Ubi nullum præcedit integrum , ut in decimalibus  $\frac{8}{10}$  ,  $\frac{24}{100}$  ,  $\frac{725}{1000}$  tunc loco integri ponitur zéro , nempe 0 . 8 , 0 . 24 , 0 . 725 , quæ æquivalent præcedentibus  $\frac{8}{10}$   $\frac{24}{100}$  &c.

## DEFINITIO II.

Fractio num decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis , seu gradus , quarum iidem sunt denomina-

tores, vel iidem apices. Sic in decimalibus  $0.5679$ , &  $0.045$ , notæ  $6$  &  $4$ , item  $7$  &  $5$  dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet  $\frac{6}{1000}$ , &  $\frac{4}{1000}$ , idem  $\frac{7}{10000}$  &  $\frac{5}{10000}$ . Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Coroll. 1.*

### DEFINITIO III.

Progressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes millesimæ, sed partes decimæ, aut centesimæ nullæ sunt; ut  $4\ 2' 5''$ , ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cifris interpositis suppleantur: sic eadem decimalis, interpositis duabus cifris, erit  $4.2005''$ . Similiter  $3.5'' 7'''$ , fiet  $3.05007'''$ . Eadem ratione  $\frac{3}{1000}$  scribitur  $0.005''$ , &  $3 \times \frac{45}{10000}$  scribitur  $3.0045''$ . Semper enim valor est idem; ut in *Coroll. 2. & 3.* fuit explicatum.

### PROPOSITIO I.

*Decimales addere, & subtrahere.*

Fractiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant *per Defin. 2.*; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua *per Defin. 3.*: deinde additio, & subtractio fiat, ut in *Propos. 2. & 4. Cap. 1.*

*Ad.*

*Additionis exempla.*

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 A \ 3. \ 2 \ 4 \ 5'' \\
 B \ 7. \ 3 \ 9'' \\
 \hline
 C \ 10. \ 6 \ 3 \ 5''
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 6. \ 2' \ 7''' = 5. \ 2 \ 0 \ 7''' \\
 6. \ 4' \ 5'' = 6. \ 4. \ 5'' \\
 \hline
 \text{Summa } 11. \ 6 \ 5 \ 7'''
 \end{array}
 \end{array}$$

Ratio horum patet ex dictis; nam si decimales  $A$  &  $B$  fiant ejusdem denominationis per Corol. 2. erunt per Cor. 1.  $A = \frac{3245}{10000}$  &  $B = \frac{7390}{10000}$  proinde  $A + B = \frac{3245}{10000} + \frac{7390}{10000} = \frac{10635}{10000} = C \ 10. \ 6 \ 3 \ 5''$  per Defin. 1.

*Subtractionis exempla.*

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 A \ 4. \ 5 \ 7 \ 2''' \\
 B \ 1. \ 2 \ 9'' \\
 \hline
 C \ 3. \ 2 \ 8 \ 2'''
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 7. \ 4' \ 2''' = 7. \ 4 \ 0 \ 2''' \\
 3'' \ 5''' = 0. \ 0 \ 3 \ 5''' \\
 \hline
 \text{differentia } 7 \ 3 \ 6 \ 7'''
 \end{array}
 \end{array}$$

Ratio plane est eadem ac additionis: nam si decimales  $A$  &  $B$  ad eandem denominationem reducantur per Cor. 2. erunt per Cor. 1.  $A = \frac{4572}{10000}$  &  $B = \frac{1290}{10000}$ ; hinc  $A - B = \frac{4572}{10000} - \frac{1290}{10000} = \frac{3282}{10000} = C. \ 3. \ 282'''$  per Defin. 1.

Schol. Ut ex Integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimalis subtrahenda. Sit ad subtrahendum ex 8 integris tres centesimas, hoc est  $0. \ 0. \ 3''$ , adduntur ad 8 duo zeri, ut fiat  $8. \ 0 \ 0''$ , eritque residuum  $7. \ 9. \ 7''$ , ut patet.

PRO.

## PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

Fractiones decimales multiplicantur ut integra per Prop. 5. Cap. 1. , nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera sinistram versus.

Exempla.

$\begin{array}{r} \text{I. } 4.05'' \\ \quad 32'' \\ \hline 810 \\ 1215 \\ \hline 12.960'' \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{II. } 07.45'' \\ \quad 42'' \\ \hline 1490 \\ 2980 \\ \hline 0.31290'' \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{III. } 0.0000356''' \\ \quad 0.00048''' \\ \hline \quad \quad 2848 \\ \quad \quad 1424 \\ \hline 0.00000017088x \end{array}$
---	---	--

Operandi modus ex dictis facile demonstratur. Nam in primo exemplo  $4.05'' = \frac{405}{100}$  &  $32'' = \frac{32}{100}$  per Defin. 1. Est autem per Propos. 10. cap. 3.  $\frac{32}{100} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{10000} = 12.960''$  per Defin. 1. & Coroll. 1. quod est ejusdem exempli primi productum.

Ex eodem primo exemplo manifestum est, tres tantum notas decimales in facto abscindi; quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad sinistram zeri, quot defunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.

Schol.

CAP. IV. PROP. II.

63

Schol. I. Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta; ut si multiplicari oporteat  $4' 5''$  per  $3. 2''$ , primo progressio interpositis zeris fiat integra per Definit. 3., hoc est fiat  $4' 5'' = 405''$ , &  $3. 2'' = 3. 0 2''$ , deinde multiplicando  $405'' \times 3. 0 2''$  habetur productum  $1.22310''''$ .

Schol. II. Si factorum unus sit numerus integer sine ullo decimali, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus. Sic  $3 \times 4. 25'' = 12. 75''$ .

PROPOSITIO III.

*Decimales dividere.*

Fiat divisio, ut in integris fieri solet per Propos. 6. cap. 1.; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahatur numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notatum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cifræ, ut in tertio exemplo.

E

Exem.

## Exempla .

$$\begin{array}{r}
 \text{I.} \quad 3'' \quad 0.13563'''' \quad | \quad 4.521'' \\
 \text{II.} \quad 5.24'' \quad 18.864'' \quad | \quad 3.6'' \\
 \quad \quad \quad 3144 \\
 \quad \quad \quad \underline{\quad 00} \\
 \text{III.} \quad 27.589'' \quad 0.354 \dots \quad | \quad 0.01283'''' \\
 \quad \quad \quad 27589 \\
 \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\
 \quad \quad \quad 78110 \\
 \quad \quad \quad 55178 \\
 \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\
 \quad \quad \quad 229320 \\
 \quad \quad \quad 220712 \\
 \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\
 \quad \quad \quad 86080 \\
 \quad \quad \quad 82767 \\
 \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\
 \quad \quad \quad 3313 \text{ \&c.}
 \end{array}$$

Operandi ratio clara est . Nam in primo exemplo per *Defin.* 1. habetur  $3'' = \frac{3}{100}$  &  $0.13563'''' = \frac{13563}{100000}$ , proinde dividendo numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem ac si essent numeri integri, habetur nova fractio  $\frac{4521}{100} = 4.521''$  per *Defin.* 1. nempe quotus in primo exemplo inventus.

Schol. Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per *Defin.* 3. deinde instituaturs divisio, ut supra dictum est.

PRO.

## PROPOSITIO IV.

*Integrum, vel fractum in partes decimales  
reducere.*

I. Esto reducendus in partes v. g. decimas numerus 6. Ducatur 6 in 10, & producto subscribatur denominator 10, erit  $\frac{60}{10}$ , seu 6 0' per *Defin. 1.* Similiter 28 ad centesimas reductus erit  $\frac{2800}{100}$ , seu 28.00".

II. Reducenda sit fractio ex. gr.  $\frac{3}{5}$  in partes millesimas; ducatur numerator 3 in 1000, & productum dividatur per denominatorem 5, erit  $\frac{3000}{5} = 600$ , unde apparet  $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.600$ " per *Defin. cit.*

Similiter fractio  $\frac{3}{7}$  reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur  $\frac{3}{7} > 0.42857$ , sed  $< 0.42858$ , defectu existente minori quam  $\frac{1}{100000}$ . Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

Schol. *Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsitæ. Ratio autem operationis habetur ex regula proportionum, de qua inferius. Nam in secundo exemplo est 5. 3 : : 1000. 600. & sic de aliis.*

## PROPOSITIO V.

*Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere .*

Quæritur quot uncias unius pedis Romani conficiant particulae decimales 750". Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet, particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem per *Defin. 1.* particulae 750" =  $\frac{750}{1000}$ . Ducantur igitur particulae decimales 750 in 12, & productum dividatur per 1000; erit  $\frac{9000}{1000} = 9$ ; habentur ergo  $\frac{9}{12}$ , proinde 750" =  $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ . Igitur particulae datæ conficiunt novem uncias, seu  $\frac{3}{4}$  unius pedis Romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scuti Romani, quod in asses 100 dividitur, continent decimales particulae 5610". Cum per *Defin. 1.* sint 5610" =  $\frac{5610}{10000}$ , si ducantur 5610 in 100, & productum dividatur per 10000, erit  $\frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1000}{10000}$ . Continent ergo asses 56 +  $\frac{1}{10}$ , hoc est asses 56, & unius quadrantis Romani semissem. Ratio innititur regulæ proportionum, de qua inferius.

Schol. I. *Simon Stevinus, decimalium auctor ingeniosissimus, eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commoda, cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus, Præsterus, Reyneau, Wolfius, & alii hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.*

Schol. II. *Ceterum fractiones decimales in omni fere Matheſi magni sunt usus, maxime vero in approximatione radicum in Algebra. Proinde Analyticis nostris Institutionibus hæc ipsa de calculo Decimali notitia fuit tanquam appendix adjecta.*

CA.



## CAPUT V.

## De extractione Radicum.

SI numerus quicumque ducatur in se ipsum, ut  $3 \times 3$  producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicit ad quadratum Geometricum. Item si ducas  $4 \times 4$  oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in se ductis planum illud, seu quadratum oritur, dicuntur *latus* quadrati, seu *radix*, & exprimuntur hoc signo  $\sqrt{\quad}$ , quod signum *radicale* vocant.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repræsentant corpus æqualiter longum, latum, & profundum, quod a Geometris denominatur *cubus*, & numeri illi 3 & 4, dicuntur *radix*, seu *latus* cuborum 27, & 64.

Quod si cubus ipse per suam radicem multiplicetur, ut  $27 \times 3$ , oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum  $81 \times 3$ , oritur *quadrato-cubus*, & sic deinceps. Hæc producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, seu *potestates*; nempe vocant radicem *dignitatem*, seu *potestatem primam*: quadratum *secundam*, cubum *tertiam*, quadrato-quadratum *quartam*, quadrato-cubum *quintam* &c. quas etiam literis sic exprimunt,  $a^1 a^2 a^3 a^4 a^5$  &c.

## DEFINITIO. I

Extractio igitur radice quadratæ, vel cubicæ &c. (seu secundæ, tertiæ, vel quartæ potestatis &c.) est inventio illius numeri, qui semel, bis, ter, vel plu-

E 3

pla-

pluries in se ductus illam potestatem genuit, adeoque ab ipsa potestate denominatur radix secunda, tertia, quarta &c.

Si numerus datus centenarium non excedit, & sit quadratus, ejus radix habetur ex tabella, quæ sequitur; ut si quæraturs radix quadrati 64, ejus radix invenitur 8. Quod si numerus non sit quadratus, ut ex. gr. 50, sumenda est ex eadem tabella radix proxime minor, hoc est 7, quæ in se ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

1	1	1
2	4	9
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Schol. I. Nota, quadratum majus superare quadratum proxime minus duplo radicis quadrati minoris plus unitate. Sic 16 majus est quadrato 9 duplo radicis 3 + 1, hoc est 7. Item 36 superat 25 duplo radicis 5 + 1, nempe 11.

Schol. II. Similiter cubus major ex. gr. 64 superat cubum proxime minorem 27 triplo radicis cubi minoris ducto in radicem majoris cubi plus unitate, nempe  $9 \times 4 + 1 = 37$ , & sic de aliis.



per a divisione figura notata puncto ) & quotum inventum 3 appone tum radici in *B*, tum divisori in *C*, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes numeros in *C* positos, & productum 249 subscribe numero 266; a quo facta subtractione remanent 17.

6. Adde huic residuo sequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rursus institue: nimirum duplica totam radicem *B*, habebis 86, quem pone in *D* pro divisore numeri 172 (exclusa figura ultima) quotus erit 2, quem appone tum radici in *B*, tum divisori in *D*, & per ipsam radicem 2 multiplica numeros omnes in *D* 862. Deinde productum 1724 subscribe ipsi numero 1724, a quo debet subtrahi; cumque nihil remaneat, signum est, datum numerum esse vere quadratum.

*Sit aliud exemplum.* Extrahenda est radix quadrata ex dato numero *M* 6015625.

1. Dividatur in membra per puncta, incipiendo dextrorsum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad sinistram continet unam figuram nempe 6. Hujus radix proxime minor est 2, quam pone in *N* dextrorsus, ejusque quadratum subtrahe ex primo membro 6, remanent 2, quibus adde duas figuras sequentis membri nempe 01, fient 201.

$$\begin{array}{r}
 M \quad 6015625 \quad (N \\
 \quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad 2452 \\
 \hline
 R \quad 44) \quad 201 \\
 \quad \quad \quad 176 \\
 Q \quad 485) \quad -2556 \\
 \quad \quad \quad 2425 \\
 \hline
 S \quad 3902) \quad -13125 \\
 \quad \quad \quad \quad 9804 \\
 \hline
 \end{array}$$

2. Duplica radicem 2, & per ejus duplum 4, quod pone sinistrorsum in R, divide 201 (relicta semper ultima figura notata puncto) quotus est 5, qui reponi deberet tum in N, tum in R, & per ipsum multiplicari numeri in R, nempe 45, sed quia  $45 \times 5$  producit 225, quod subtrahi nequit ex numero 201, ut patet, proinde quotus 5 minuitur unitate, & ponitur tam in N, quam in R quotus 4, qui ductus in 44 producit 176, quod subtractum ex 201 relinquit 25.

3. Adde huic residuo duas sequentes figuras 56, efficiunt 2556. Repetenda est eadem operatio toties, quot restant membra in dato numero. Nimirum duplicanda est radix 24, & per ejus duplum 48, quod ponitur sinistrorsum in Q, dividenda sunt 255 (relicta ultima figura) quotus 5 est nova radicis figura, quae ponitur in N, tum etiam in Q, & per ipsam multiplicando omnes figuras in Q existentes, habetur productum 2425 subtrahendum ex 2556, factaque subtractione, habetur residuum 131. Cui adde ultimas duas figuras 25, & operare ut supra, invenies ultimam radicis figuram 2, quam pone in N & S,

74     DE EXTRACTIONE RADICUM  
ac cetera prosequere, ut sæpius dictum est.

Est igitur radix quæsitæ  $N$  2452, & remanent 3321, adeoque numerus datus non est revera quadratus.

Corol. Hinc patet, radicem inventam per divisionem unitate esse minuendam, si productum, quod fit ex multiplicatione, majus sit numero, a quo subtrahi debet; ut in secunda figura radicis inventæ factum est: quod quidem notetur.

Schol. I. Quando divisor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cifra, seu zero, ut si extrahenda sit radix quadrata ex 3714. Quia sublato ex primo membro 37 quadrato 36 radicis inventæ 6, remanet 1, cui si addatur sequens figura 1 fit 11, (nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis) qui numerus dividi nequit per duplum radicis 6, nempe 12; in hoc casu ponitur in radice cifra 0, eritque radix 60, & habetur residuum 114, cui adduntur statim (si sint) aliæ duæ figuræ dati numeri.

Schol. II. Si numerus datus non est quadratus, sed remanet residuum, ut in allato exemplo residuum 114; tunc fit ex residuo fractio, in qua residuum ipsum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radicis inventæ. Si vero residuum sit majus ipsa radice, tunc duplo radicis inventæ additur unitas. Sic in eodem exemplo, quia residuum 114 majus est tota radice 60, addita unitate ad duplum ipsius radicis, erit fractio  $\frac{114}{120}$ , ac tota radix  $60 + \frac{114}{120}$  ex Sch. I. pag. 70.

Schol. III. Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam 2, vel 3, vel 7, vel 8, vel cifram unam; sed necesse est, ut sit una ex his 1, 4, 5, 6, 9, 00, quibus constant numeri simplices quadrati.

Schol. IV. Extractio radicis quadrata non est aliud nisi

nisi quedam divisionis species, ut ex ipsa operatione manifestum est; hoc tamen discrimine, quod in divisione communi divisor est numerus datus, in hac vero debet inquiri divisor, & quidem per plures partes, quæ sunt ipsa radix. Proinde multiplicando radicem per se ipsam, v. g. in primo exemplo  $432 \times 432$ , restituitur numerus quadratus 186624, ut fieri solet in divisione communi, ducendo quotum per divisorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando scilicet per se ipsam radicem inventam, & addendo residuum, si forte sit.

*Demonstr.* pendet a Prop. 4. lib. 2. Eucl. Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex  $432 \times 432$ , continet primo quadrata partium 4, 3, 2. Secundo, bis rectangulum  $4 \times 3$ . Tertio, bis rectangulum ex  $43 \times 2$ , seu rectangulum ex duplo ipsius 43, nempe  $86 \times 2$ ; quod patet ad oculum, nempe:

$$\begin{array}{r}
 1\ 6\ .\ .\ .\ . \\
 1\ 2\ .\ .\ . \\
 1\ 2,9\ .\ . \\
 \quad 8\ 6\ . \\
 \quad 8\ 6,4 \\
 \hline
 1\ 8\ 6\ 6\ 2\ 4
 \end{array}$$

Ex speciosa tamen id longe clarius apparet, si loco numerorum 4, 3, 2, sumantur literæ  $a + b + c$ ; ut in nostris *Instit. Analyt.*

## PROPOSITIO II.

*Radicem quadratam per Approximationem  
inquirere.*

Extracta radice quadrata, si quid remanet, signum  
est,

est, talem numerum non esse revera quadratum, necque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi possit. Quamvis autem vera radix sit impossibilis, potest tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magisque approximari, ita ut excessus, vel defectus a vera radice sit minimus. En praxis.

Adde numero, qui remanet post extractionem radicis, vel numero ipsi, a quo extracta fuit radix, tot cifarum paria, quot volueris, nempe 00, seu 0000, 000000 &c. & ex numero residuo una cum prædictis cifris extrahe radicem secundam, ut moris est. Aufer deinde ex radice tot figuras (a dextera incipiendo) quot fuerunt paria cifarum additarum. Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem unâ cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablatæ, denominator vero unitas cum tot cifris, quot paria fuerunt addita.

*Sit exemplum.* Extrahenda est radix ex numero 12, patet radicem esse 3, & remanere 3. Adde ipsi 12 tria cifarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero secunda radice per *Propos. 1. huius* invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cifarum paria addita, erit radix  $3 \frac{464}{1000}$  vera quidem minor, sed propinquior, & exactior, quam radix primo inventa.

*Schol. I.* Si numero, ex quo radix secunda extrahitur, minutia adhareat, reducitur minutia in partes centesimas, & extrahitur radix. Extrahenda sit radix ex  $6\frac{1}{4}$ , reduc fractionem in centesimas per *Prop. 4. Cap. 3.* erit fractio  $\frac{250}{100}$ , cui adde 6, fit  $\frac{625}{100}$ , cujus radix quadrata erit  $2\frac{3}{10}$ .

*Schol. II.* Quod si denominator minutie, qua integro adheret, sit numerus quadratus, poterit numerus integer ad unam cum ipso minutiam reduci, & inde extrahi radix. Sic in superiori exemplo  $6\frac{1}{4}$  fiet  $\frac{25}{4}$ , extractaque seorsim ratio ex denominatore, tum ex nu-



meratore radice, habetur  $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ , ut antea. Unde patet modus extrahendi radicem quadratam ex meris fractionibus, quæ numeris quadratis constant.

Schol. III. Si vero denominator fractionis, ex qua radix erui debet, non sit numerus quadratus, ut si data sit fractio  $\frac{4}{7}$ ; tunc multiplicato numeratore per denominatorem, extrahitur ex facto radix, cui supponitur ipsemet denominator. Erit igitur datæ fractionis radix  $\frac{2}{7}$ . Ratio est, quia  $\frac{4}{7} \times 7 = \frac{28}{7}$  per Ax. 3. Cap. 3. Æqualium autem fractionum æqualis est radix, proinde  $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{7}$ .

Schol. IV. Fractio non quadrata fieri potest quadrata per divisionem, vel multiplicationem. Sic  $\frac{1}{2} \frac{2}{7}$  divisa per 3 fit  $\frac{4}{9}$  per Ax. 3. Similiter  $\frac{2}{8} \times 2$  fit  $\frac{4}{6}$  per idem Ax. Ex quibus habetur radix quadrata, ut patet. Ceterum tam pro integris, quam pro fractis radix maxime propinqua haberi potest per Logarithmos, in quibus inferius.

### PROPOSITIO III.

*Ex dato numero radicem cubicam extrahere.*

1. Divide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorsum, ita ut singula membra contineant tres figuras excepto primo membro, quod aliquando duas, vel unam tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radicis inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri sinistrorsum, si sit numerus cubicus; si minus, sume radicem cubi proxime minoris in tabella superius posita, quæ in hoc exemplo est 2, quam pone ad dexteram, ut in *B*.

3. Ex hac radice fiat cubus 8, quem subtrahe ex primo membro 12, & residuum 4 scribe infra lineam, ut in *C*.

4. Ad

4. Ad hunc residuum adde unam sequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radice inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radice figura, quam pone in *B*.

5. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui subtrahi debet ex utroque membro numeri *A*. Cumque nihil remaneat signum est, numerum datum esse revera cubum.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 12,167 \qquad \qquad \qquad (B \\
 \quad \quad \quad 8 \qquad \qquad \qquad \quad 23 \\
 \hline
 12) C 41
 \end{array}$$

Hæc operatio toties repeti debet, quot sunt membra numeri dati, ut in sequenti exemplo erit manifestum.

*Sit aliud exemplum.* Esto numerus *M* 11390625, cujus radix cubica quæritur.

1. Radix cubica primi membri 11 est 2, quam pone in *N*, ejusque cubum 8 subtrahe ex 11, remanet 3, quem scribe infra lineam in *R*.

2. Adde residuo *R* sequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radice inventæ 2, hoc est per 12, quotus 2 erit secunda figura radice, quam pone in *N*.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero *S* 11390, nempe ex duobus membris numeri dati *M*, remanent 742, ut in *T*.

4. Ad hoc residuum *T* addatur ex tertio membro numeri *M* figura 6, fiet 7426, qui divisus per triplum quadrati radice inventæ 22, hoc est per 1452, dat quotum 5, qui ponatur in *N*, eritque tertia radice figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe

pe



Schol. I. Cum aliquid remanet, signum est, numerum datum non esse cubicum, ac proinde radicem inventam non esse numeri dati, sed maximi cubi in eo contenti. Residuum exprimitur per fractionem hoc pacto: residuum ipsum ponitur supra lineam loco numeratoris; pro denominatore autem sumitur differentia inter cubum datum, & cubum proxime majorem minus unitate. Sit exemplum, extracta radice cubica ex numero 46, habetur radix 3, & residuum 19, quod erit fractionis numerator; differentia autem inter cubum 27 ex radice 3, & cubum proxime majorem 64 ex radice 4, est  $36 + 1$  per Schol. 2. ad Defn. Auferatur unitas, remanent 36 pro denominatore fractionis. Est ergo radix cubica numeri dati  $3 + \frac{19}{36}$ .

Schol. II. Si quis propinquiorem radicem, & quae vera insensibiliter differat, cupit, addat aliquot cisarum ternarios ad ipsum numerum datum, & prosequatur radicis extractionem. Deinde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figurae, quot cisarum ternarii fuerunt adjecti; reliquae enim figurae dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipsae figurae rejectae, denominator vero unitas cum tot cistris, quot ternarii cisarum fuerunt additi, eo sepe modo, quo de radice quadrata diximus.

Schol. III. Ceterum tam cubica, quam aliae superiorum potestatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur; maxime per formulas Newtonianas, quae generales sunt, & ad omnem radices extrahendam valde faciles, & expeditae. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.

Examen habetur ter ducendo in semet radicem cubicam inventam, & addendo illi residuum, si quod fuit. Restituitur enim cubus, seu numerus datus, si erratum non sit,

PRO-



$$M 1.728' ( 1. 2' N \quad | \quad R 26. 2 \ 1 \ 4'' \ 4'''' \\ S 26. 2 \ 1 \ 4 \ 400'''' (0.64'' T$$

*Demonstr.* similis est præcedenti, Nam si fiat cubus ex unitate cum aliquot cifrarum ternariis, ut 1000, 1000000 &c. unitas ipsa cum cifrarum triente erit radix cubica, nempe 10, 100 &c. proinde prima radice cubicæ nota afficitur triente maximi apicis, cum apices sint loco denominatorum, ut dictum est per *Coroll. supra citatum*.

### PROPOSITIO V.

*Questiones aliquot resolvuntur per radice quadratæ, vel cubicæ extractionem.*

1. Dux exercitus habet strenuos milites 1326, quos omnes in acie quadrata ad prælium ordinare vult, quæritur, quot milites in fronte, seu latere stabunt, & quot futuri sint ejus agminis ordines.

Ex dato numero 1326 extrahatur radix quadrata per *Prop. 1. hujus*, quæ erit 36. cum residuo 30. Constabunt igitur singuli ordines militibus 36, eruntque ordines pariter 36. Remanent autem milites 30. Proinde ut ipsi quoque in acie disponantur, augeri debet quadrati latus unitate, ita ut singuli ordines habeant milites 37. Itaque duplicetur radix 36, fit 72, additaque unitate habetur 73, numerus scilicet militum addendorum ad quadratum lateris 36. Sed 30 jam supererant, ergo 43 tantum erunt addendi ad numerum 1326, ut fiat 1369, numerus quadratus, cujus radix 37. Hoc patet ex *Schol. 1. hujus*.

2. Est turris alta pedes 100, quæ in ambitu habet fossam latitudinis pedum 40, fabricanda est scala, quæ ab ulteriore ripa pertingat ad cacumen turris,

ris, quæritur ejus longitudo.

Fiant quadrata numerorum 100, & 40, quæ simul addantur, fit summa 11600. Hinc extrahe radicem quadratam, erit scalæ fabricandæ longitudo pedum  $107 + \frac{151}{215}$  per Prop. 1. & Schol. 2. ejusdem.

3. Volo fieri circulum duplum, triplum, quadruplum &c. alterius circuli dati, seu cujus nota est diameter in aliqua mensura.

Sit diameter circuli dati pollicum 6, lin. 5, & quærat circulus ejus duplus. Reducantur pollices ad lineas, eos multiplicando per 12, & addendo producto lineas 5, fient lineæ 77, quarum duplum est 154, qui numeri inter se multiplicentur, & ex producto 11858 eruatur radix quadrata, quæ invenitur  $108 + \frac{97}{108}$  per Propos. 1. Circuli ergo dupli diameter erit linearum  $108 + \frac{97}{108}$ , hoc est pollicum  $9 + \frac{97}{108}$  unius lineæ.

Schol. Quod de circulo dictum est, extenditur quoque ad quodlibet Polygonum regulare, nempe Quadratum, Pentagonum, Exagonum &c. si eorum duplum, triplum, quadruplum inveniri oporteat, dato uno ipsorum latere. Sed hæc ad Geometriam pertinent, & a Prop. 20. 1. 6. Eucl. derivantur.

4. Fabricanda est cisterna cubica, quæ contineat aquæ pedes cubicos 68921, quæritur quanta futura sit ejus latitudo, longitudo, ac profundum.

Ex numero 68921 extrahatur radix cubica, quæ per Propos. 3. hujus dat pedes 41, unde innotescunt omnes ipsius cisternæ dimensiones.

5. Data diametro globi ferrei, lapidei, vel plumbei, qui libram unam ponderat, quæritur diameter pro globo ejusdem materiæ librarum 2, 3, 5 &c.

Diameter data intelligatur divisa in partes 100, erit ejus cubus 1000000. Tum ex ejusdem cubi duplo, triplo, quadruplo &c. nempe 2000000, 3000000, 4000000 &c. radix cubica extracta per Propos. cit.

dabit diametrum quæsitam globi librarum 2, 3, 4 &c. Seu, cubus diametri datæ ducatur in pondus, seu in numerum librarum globi, cujus diameter quæritur, & extrahatur ex producto radix. Invenienda sit diameter globi plumbei librarum 8; cubus 1000000  $\times 8 = 8000000$ , cujus radix cubica 2000 dat diametrum quæsitam. Hæc est *regula calibræ*, cujus ope ex data diametro globi unius libræ diametri reliquorum globorum ejusdem materiæ determinantur; & hinc quoque innotescit tormenti bellici cavitas, seu diameter.

6. Depopulante sævissima lue Athenas, consultus fuit Apollo Delius, quo pacto illa cessaret; respondit, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Hinc ortum est celebratissimum de duplicatione cubi problema.

Fuerit igitur ejus cubi latus palmorum 12, cujus duplum 24. Fiat ex 12 quadratum, quod multiplicetur per 24, erit  $12 \times 12 = 144 \times 24 = 3456$ . Extrahatur hinc radix cubica, quæ dat palmos 15  $\frac{1}{2}$  ( $= \frac{31}{2}$ ). Igitur ara illa cubica fabricari debet ex latere palmorum 15 cum fractionibus, proinde problema erit practice, non autem Geometricè solutum, quod ab oraculo petebatur. Ratio hujus, & præcedentis pendet ex *Prop. 18. l. 12. Eucl.*, & *Prop. 12. Cap. 6. sequentis*, quæ hujus loci non sunt. Sed hæc pauca sufficiant ad indicandum usum extractionis radicum, qui in universa fere Mathesi inimmensum patet.



## CAPUT VI.

*De Regulis Arithmeticis.*

**R**egulæ Arithmeticæ sunt quatuor. 1. Est regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Positionis, vel falsi. Prima est omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla sunt, de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

## DEFINITIONES.

I. *Ratio, sive proportio* est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo. Ut si comparetur 12 ad 4, intelligitur 12 continere ter 4, & habere rationem tripli: alter terminus dicitur *antecedens*, alter *consequens*.

II. Duæ rationes dicuntur *similes, eadem, vel æquales* (quod idem est) cum antecedens unius toties continet suum consequentem, quoties antecedens alterius continet suum consequentem. Vel cum antecedens unius toties continetur in suo consequenti, quoties antecedens alterius continetur in suo consequenti. Sic 12. 4 :: 3. 1. sunt rationes similes, vel eadem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent suos consequentes 4 & 1, & 4. 12 :: 1. 3. dicuntur similes, quia 4 & 1 ter continentur in suis consequentibus 12 & 3.

III. Quatuor illi termini, seu quantitates eandem rationem habentes, ut 12. 4 :: 3. 1. dicuntur *Proportionales*. Et si termini medii bis sumantur, ita ut eadem quantitas semel sit consequens respectu præ-

cedentis, & semel antecedens respectu consequentis, ut 2, 4, 8, in quibus 4 bis sumitur, dicuntur *continue Proportionales*. Si vero nullus terminus bis accipitur, ut 10. 5 :: 2. 1, dicuntur termini *discre- tim proportionales*.

## L E M M A T A.

I. Si quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale est facto ex secundo, & tertio. Est *Propos. 19. lib. 7. Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5. 20 :: = 16.

Sicuti  $5 \times 16$  dant = 80

Ita etiam  $20 \times 4$  dant = 80.

II. Si datis quatuor numeris, primus se habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, factum ex primo, & secundo æquale erit facto ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 est eadem proportio dupla, quæ est inter 8 & 4, erit  $6. 3 :: 8. 4$ ; ergo *ex lem. 1.*  $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$ ; ergo factum ex primo, & secundo æquatur facto ex tertio, & quarto.

III. Si factum dividatur per unum ex suis factoribus prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v. g. 24, quod ortum sit ex  $4 \times 6$ , si dividatur per 6 oritur 4.

## P R O P O S I T I O I.

### *De Regula Proportionum.*

*Regula Proportionum*, quam ob præstantiam & im- mensam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum igno- tum proportionalem, qui nimirum habeat eandem  
pres

proportionem ad tertium numerum datum, quam secundus habet ad primum; ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quartum. En praxis.

I. Disponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæstionem habet annexam, statuatur tertio loco; ille vero ex duobus aliis, qui cum hoc est homogeneus, hoc est qui eandem rem significat ac terminus tertio loco positus, primo loco ponatur.

II. Multiplica tertium per secundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæsitum. Res tribus exemplis illustratur.

1. Ulnæ panni 2 stant scutis 9, quot scutis stabunt ulnæ 12 ejusdem panni? terminus qui habet annexam quæstionem, sunt ulnæ 12: hic statuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, scilicet

$$Ulnæ 3. scut. 9 :: ulnæ 12. scut. ....$$

Duc  $12 \times 9$ , & productum 108 divide per 3, quotus 36 dat quartum proportionalem quæsitum. Nam, ut patet

$$3. 9 :: 12. 36.$$

2. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet operario quotidie solvisse tantum asses 10. Quot scuta Romana singulis diebus expendit?

*Si oper. 1. asses 10, quid oper. 180000?*

Multiplicatis  $180000 \times 10$ , producitur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto pro-

F 4

portionali asses 180000. Hos divide per 100 ( re-  
fectis duabus cifris ) fiunt scuta Romana singulis die-  
bus solvenda 18000.

3. Fixarum motus ex Ricciolio & Flamsteedio sin-  
gulis 100 annis procedit gr. 1. 23'. 20", quot anni  
requiruntur ad totum cœli ambitum, seu gr. 360  
percurrere? Primo gr. 1. 23'. 20" reducantur ad  
minuta secunda per multiplicationem, scilicet  $1 \times$   
 $60 + 23 = 83 \times 60 = 4980 + 20$  fiunt 5000.  
Similiter gr. 360  $\times 60 \times 60$  fiunt 1296000. Dic  
jam, si minuta secunda 5000 dant annos 100, quot  
annos dabunt minuta secunda 1296000? Invenientur  
per regulam auream anni 25920, qui nimirum an-  
num Platonicum conficient.

$$5000. 100 :: 1296000. 25920.$$

Coroll. Ex hoc exemplo manifestum est, terminos  
proportionales regulæ aureæ, antequam regula ipsa  
instituat, in homogeneos esse reducendos, si forte  
numeris heterogeneis constant. Sic si dicatur, libræ  
5 unc. 3 veneunt scutis 4, & assibus 50, quot scu-  
tis stabunt libræ 12? Libræ reducendæ sunt ad un-  
cias in primo & tertio termino, & scuta ad asses,  
& tres termini proportionales erunt uncia 63, ass.  
450, unc. 144.

Schol. Cum integris adherent fracti, prius integri  
reducuntur ad fractos, integris autem, quibus nulla  
est fractio, supponitur unitas; deinde regula proportio-  
num fit, ut dictum est. Si dicatur, hora  $1 \frac{1}{4}$  fluunt  
ex aliquo canali libræ 15 aquæ, quot libræ fluent ho-  
ris  $2 \frac{1}{3}$ ? Termini proportionales redacti erunt  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1 \frac{1}{4}}{1}$ ,  
 $\frac{2 \frac{1}{3}}{1}$ . Tum operando juxta præcepta tradita in Prop.  
10. & 11. Cap. 3. invenies aquæ libras  $26 \frac{2}{3}$ .

Demonst. clare infertur ex lemm. 1. & 3. Nam  
cum in regula proportionum supponantur dati tres nu-

numeri proportionales, & quartus, qui est ignotus, dari possit; factum ex secundo, & tertio æquale erit (*per lem. 1.*) factum ex primo, & quarto, qui est ignotus. Proinde si factum ex secundo, & tertio dividatur per primum, innotescet quartus terminus (*per lem. 3.*); ergo patet ratio, cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per secundum terminum, & factum dividi per primum.

*Examen* regulæ proportionum omnium expeditissimum habetur multiplicando primum terminum per quartum, & secundum per tertium. Nam si producta sint æqualia, res bene processit. Ratio patet *ex lem. 1.*

## PROPOSITIO II.

### *De regula proportionum Composita.*

Regula proportionum *Composita* dicitur, cum præter tres terminos in *Propos. præc.* explicatos, alii quoque minus principales accedant, qui significant tempus, lucrum, damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur, ut fiant tres solum termini. Exempla rem declarabunt.

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10. aureos 50; quaeritur quot aureos solvere debeant juvenes 12 diebus 30? Tres principales termini sunt juvenes 4, aurei 50, & juvenes 12. Ad juvenes 4 spectant dies 10, & ad juvenes 12 dies 30. Duc itaque  $4 \times 10$ , &  $12 \times 30$ , habentur duo termini compositi 40, & 360. Dic ergo

*Si 40 dant aur. 50, quid 360?*

Multiplicando  $360 \times 50$ , & productum dividendo per 40, ut in *præc. Propos.* factum est, in.

invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis transvectæ Romani per miliaria 300 poscunt scuta 40; quæritur expensa pro transvehendis libris 400 ejusdem mercis per miliaria 500? Tres termini principales sunt libræ 200, scuta 40, & libræ 400. Minus principales sunt miliaria 300, & 500; qui si multiplicentur per suos terminos principales, fient tres termini pro regula trium instituenda, nimirum

$$6000. 40 :: 200000. 133\frac{1}{3}.$$

Schol. I. *Regula proportionum composita est regula simplex proportionum repetita; unde etiam regula Dupli dicitur, quia duplicem quæstionem involvit. Proinde resolvi etiam potest in duas regulas simplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quæritur quartus proportionalis; in altera vero ponuntur circumstantiæ, seu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus. Sic in superiori exemplo dic, si libræ 200 exigunt scuta 40, quid libræ 400? Quartus proportionalis est 80, ut patet. Dic secundo si miliaria 300 dant 80, quid miliaria 500? Invenitur quartus proportionalis, ut supra, 133  $\frac{1}{3}$ .*

Schol. II. *Hæc regula dicitur etiam del Cinque, quia terminos quinque notos supponit. Examen fit ut in præc. Propos.*

### PROPOSITIO III.

#### *De Regula proportionum Inversa.*

In regulis proportionum cum simplici, tum composita jam explicatis, ita se habet primus terminus ad secundum, sicuti tertius ad quartum, ut exempla  
alla-

allata satis monstrant, proinde ex *Propos. 14. lib. 5. Eucl.* si primus terminus major, vel minor est tertio, etiam secundus major, vel minor esse debet quarto, ut consideranti patet. Solet autem nonnunquam accidere ex ipsa natura quæstionis, ut quanto major, vel minor primus terminus est tertio, tanto major, vel minor reciprocè esse debeat terminus quartus secundo. In hoc casu regula proportionum dicitur *inversa*, quia scilicet terminorum ordo invertitur. Hærent hic tirones primo, non bene dignoscentes, utra regula sit adhibenda. Sed quæ sequuntur exempla, rem satis illustrent.

1. Messores 20 segetem aliquam metunt diebus 4, quæritur quot diebus illam metere possint messores 10? Patet major tempore, adeo ut quanto major est terminus primus tertio, tanto major quoque debeat esse quartus incognitus secundo. Nam

$$\begin{array}{l} \text{Mess. dies} \quad \text{Mess. dies} \\ 20. 4 :: 10. 8. \end{array}$$

2. In obsessa Urbe ali possunt milites 1500 mensibus 3, quæritur quot milites ali poterunt mensibus 6? Certe minor numerus. Proinde quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor quartus erit secundo, scilicet.

$$\begin{array}{l} \text{Mens. Mil.} \quad \text{Mens. Mil.} \\ 3. 1500 :: 6. 750. \end{array}$$

3. Ex panno habente latitudinem palmorum 3 requiruntur mihi pro vestimentis ulnæ 10, quæritur quot ulnæ requirantur ex alio panno, qui latitudinem habet palmorum 4. Certum est, pauciores requiri, adeoque quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor erit quartus secundo, nempe

lat.

$$\begin{array}{cccc} \text{lat. pal. uln.} & \text{lat. pal.} & \text{uln.} & \\ 3. & 10 & :: & 4. & 7\frac{1}{2}. \end{array}$$

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inversa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per secundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis  $20 \times 4$ , productum 80 dividatur per 20, habetur quartus proportionalis 8.

*Demonstr.* sequitur ex 2. & 3. *lemm.* Nam in regula proportionis inversa cum se habeat primus terminus ad tertium, ut reciproce, quartus ad secundum, erit ex 1. *lemm.* productum ex primo & secundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem, quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus scilicet tertio loco positus, ergo si per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & secundo, prodibit ex *lemm.* 3. quartus proportionalis quæsitus.

*Examen* itaque regulæ inversæ fit brevissime, multiplicando primum terminum in secundum, & tertium in quartum. Nam si producta sint æqualia, res bene peracta est.

*Schol. I. Arithmetici, in quibus Tacquet, assignant dignoscenda hujus regulæ indicium hujusmodi. Cum proponitur aliqua res diversa a quatuor terminis quæstionis, tunc proportio erit reciproca, seu inversa. Sic in primo exemplo proponitur seges metenda, quæ est res omnino diversa a quatuor terminis proportionalibus. In secundo exemplo proponitur annona, quæ est res diversa a quatuor terminis ejusdem quæstionis. Similiter in tertio vestis conficienda, quæ proponitur, est quid diversum a terminis in quæstione datis. Hoc dictum sit in gratiam tironum. Ceterum ex ipsa quæstionis natura facile dijudicari potest, utrum proportio directa sit, an inversa,*

*Schol.*



Schol. II. Si terminus, qui annexam habet questionem, ponatur primo loco, secundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inversa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo messorum 10 se habent ad messorum 20, ut dies 4, ad dies 8, proinde ducendo  $20 \times 4$ , & dividendo productum 80 per primum terminum 10, habetur quartus proportionalis, ut in Propos. 1. hujus. Similiter in secundo exemplo menses 6 ad menses 3 ita se habent, ut milites 1500 ad milites 750, adeoque producto ex  $3 \times 1500$  diviso per primum terminum 6, oritur quartus proportionalis 750, ut antea.

Schol. III. Regulam inversam compositam ultro omitimus, quod rixones haud parum solet confundere, & in rebus Geometricis, vel etiam in hominum commercio vix unquam occurrat.

## PROPOSITIO IV.

*Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.*

I. Cum in regula directa primus terminus præcise continet secundum, vel (quod idem est) præcise continetur in secundo, tunc reduci potest proportio ad minimos per Prop. 2. Cap. 3., & regulæ praxis brevissima evadit. Sit exemplum, lib. 4 valent scuta 12, quid libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos 1 & 3, dic si 1 dat 3, quid 9? & ducendo  $3 \times 9$ , habetur quartus proportionalis 27, quia unitas non dividit.

Pro regula inversa in primo exemplo Prop. 3. Si messorum 20 exigunt dies 4, quid messorum 10? Quia 20 ad 10 se habere debet reciproce, ut quartus terminus ad secundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic si 2 dat 4, quid 1? ducisque  $2 \times 4$ , habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad

II. Ad evitandum divisionis prolixioris tædium, dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in secundum: vel dividatur secundus per primum, & quotus ducatur in tertium; in utroque enim casu operatio fit brevior. Ut si leucæ 25 dant miliaria Italica 60, quid leucæ 100? Divisis 100 per 25, duc quotum  $4 \times 60$ , erit 240 quartus proportionalis quæsitus. Vel diviso 60 per 25, quotus  $2\frac{2}{5}$  ducatur in 100, productum  $\frac{2200}{5}$ , seu 240, erit quartus proportionalis quæsitus.

III. Regula proportionum confici potest per solam divisionem, nimirum dividendo primum terminum per secundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2 gradus circuli maximi terræ continent miliaria Italica 120, gradus 360 quot miliaria continebunt? Diviso primo termino per secundum, habetur  $\frac{2}{120}$  hoc est  $\frac{1}{60}$ ; per hunc divide 360. quotus  $\frac{360}{1}$  dat miliaria Italica quæsitæ.

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur  $12\frac{1}{2}$  dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales sine fractionibus 25, 4, & 40. Si afficiant solum secundum terminum, ut 6 dant  $20\frac{1}{3}$ , quid 10? Satis est multiplicare per eundem denominatorem 3 primum & secundum terminum, erunt termini proportionales 18, 61, & 10. Similiter si fractiones ejusdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut si dicatur  $3\frac{2}{5}$  dant 20, quid  $10\frac{3}{5}$ ? Multiplicatis iisdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula sine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Si termini sibi respondentes sint minutæ ejusdem nominis, ut  $\frac{2}{3}$  dat 20, quid  $\frac{1}{3}$ ? Deletis denominatoribus erunt termini proportionales 2, 20, 1. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, satis patet.

Schol. *Hæc, aliaque similia compendia dicuntur Italica,*

lica, vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia usum habeant frequentiore.

## PROPOSITIO V.

### *De Regula Societatis.*

Regula, quæ docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturæ societatem ineuntes frequenter adhiberi solet.

Sint mercatores *A*, *B*, *C*, qui societate inita, lucrati sunt aureos 800. *A* posuit in sortem communem aureos 100, *B* aureos 160, *C* vero 240: quaeritur quantum quisque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam summam singulorum pecuniam, nempe aureos 500. Deinde instituaturs toties regula proportionum, quot sunt singulorum pecuniæ, ita ut primus terminus semper statuatur summa pecuniæ collatæ, secundus lucrum aureorum 800, tertius vero uniuscujusque pecunia *A*, *B*, *C*.

Dic ergo si 500 dat 800, quid 100? 160  
 quid 160? 256  
 quid 240? 384

---

800

Patet lucrum *A* fuisse aureorum 160, lucrum *B* 256, & *C* 384, quæ simul efficiunt summam lucri, adeoque statim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotiatione, quam pecunia alterius, tunc uniuscujusque pecunia multiplicari debet per suum tempus. Cetera peragenda, ut supra.

*Sit exemplum.* *A* posuit in sortem communem aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, *C* vero aureos

reos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500, quaeritur singulorum lucrum. Duc  $50 \times 2$ ,  $100 \times 3$ , &  $200 \times 1$ , producta dant summam 600: quae erit primus terminus proportionum: secundus lucrum comparatum aureorum 500; tertius vero pecunia singulorum per suum tempus multiplicata.

Dic ergo si 600 dant 500, quid 100?  $83 \frac{1}{3}$   
 quid 300? 250  
 quid 200?  $166 \frac{2}{3}$

---

500

Est igitur lucrum ipsius *A* aureorum  $83 \frac{1}{3}$ . Lucrum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum  $166 \frac{2}{3}$ , quae addita faciunt aureorum summam 500.

III. Quod si singulorum pecunia aequalis fuit, tempus autem inaequale: nam *A* reliquit in societate pecuniam suam mensibus 7, *B* vero mensibus 6, *C* denique mensibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam summam menses, faciunt 25, eritque hic primus regulae terminus; secundus erit lucrum; tertius menses singulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, secundi 240, tertii 480.

*Si menses aur. quid menses*

25. 1000 :: 7? 280

6? 240

12? 480

---

1000.

Coroll. Hinc apparet modos dividendi pecuniam v. g. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino suo servierunt, quorum primus ser-

serviverit annis 7, secundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ similes quæstiones ex hac regula facile solvuntur, quæ non est, nisi regula proportionum sæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum est, intelligi eodem modo debet de damno, si societati prospere cesserit, ac damnum in singulos sit dividendum habita ratione pecuniarum, & temporis.

PROPOSITIO VI.

*De Regula Alligationis.*

Cum variæ res diversi pretii inter se alligantur, seu miscentur, ut varii liquores, merces, metalla &c. atque inde pretium partibus mixti respondens inquiritur: seu, cum pretio quodam medio proposito, quæritur, quantum ex singulis mercibus, aut liquoribus misceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi possint, in utroque casu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla satis superque innotescet.

I. Conflanda est statua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera posuit, alterum quod in singulas libras stat scutis 30, alterum vero scutis 25. Ex priore posuit libras 120, ex posteriore libras 180. Quæritur quot scutis stabit in singulas libras ejusmodi statua?

$$\begin{array}{r}
 \text{Duc libras } 120 \times 30 \text{ fit } 3600 \\
 \quad \quad 180 \times 25 \quad \quad 4500 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 8100.
 \end{array}$$

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300, quotus 27 indicat unius libræ pretium. Nam si lib. 300 valent scut. 8100, quid lib. lib.

G

lib. 1. ? Ex regula aurea habentur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, mensura 1 primi generis stat juliiis 24, secundi generis mensura 1 valet juliiis 35. Si quis non habeat nisi julios 33, & mensuram unam ex utroque vino mixtam petat, quæritur ex utroque quantum debeat accipere.

1. Pone unum pretium statutum sub altero 24 & 35, & ad sinistram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia statuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, sed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 (hoc est 9) ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur juxta pretium minus 24, ut in sequenti exemplo factum vides.

2. Colligantur differentiæ in unam summam, ut hic 11, & instituaturs regula trium toties, quot sunt differentiæ, nempe bis in hoc exemplo; ita ut summa differentiarum 11 occupet primum locum, mensura vero 1 secundum locum, & una ex differentiis tertium. Tum dic, si 11 dat 1, quid 2? Rursus, si 11 dat 1, quid 9? Invenies ex potiori vino accipiendas esse  $\frac{2}{11}$  unius mensuræ, ex altero vero  $\frac{9}{11}$ , quæ simul sumptæ faciunt  $\frac{11}{11}$ , hoc est mensuram unam quæsitam.

	<i>Pretia Differ.</i>			
33	{	24	{	2
	{	35	{	9
		Summa 11		

Si 11 dat 1, quid 2?  $\frac{2}{11}$

quid 9?  $\frac{9}{11}$

---

$\frac{11}{11}$

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia statuta proponuntur, ita tamen ut saltem unum sit majus, alterum vero minus pretio arbitrario; tunc plures fieri debent alligationes, quod exemplo satis vulgari explicatur.

Libra 1 Garyophili valet juliiis 3. Piperis libra, juliiis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gra-

gratia sint  $A, B, C, D$ . Pretium vero medium sic  $M$  Quæritur, quantum quis debeat ex singulis accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo disponantur ordinatim pretia, ut in exemplo sequenti. Secundo alligentur inter se duo pretia  $A$  &  $D$ , hoc est comparentur ambo cum pretio  $M$ , ut inveniantur differentiarum excessus, & defectus, nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta  $A$  &  $D$  modo superius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia  $B$  &  $D$  (idem pretium alligari potest pluries) differentiarum excessus est 2, defectus autem est 3, quæ ponantur alternatim juxta  $B$  &  $D$ . Similiter alligentur  $C$ , & rursus  $D$ , differentiarum sunt 2 & 1, quæ pariter statuantur alternatim juxta  $C$  &  $D$ .

3. Colligantur omnes illarum differentiarum in unam summam, quæ hic est 14. Deinde dic, si 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit  $\frac{2}{14}$ , seu  $\frac{1}{7}$ ; quod toties iteretur, quot sunt pretia data  $A, B, C, D$ , adeo ut tres differentiarum 4, 3, 1, quæ appositæ sunt ipsi  $D$ , addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

		<i>Pretia Differ.</i>	
$M$	7	$\left( \begin{array}{l} A \ 3 \\ B \ 4 \\ C \ 6 \\ D \ 9 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 2. \\ 2. \\ 2. \\ 4. \ 3. \ 1. \end{array} \right)$
			Summa 14

Si 14 dat lib. 1. quid	2 ?	$\frac{2}{14}$
	2 ?	$\frac{2}{14}$
	2 ?	$\frac{2}{14}$
	8 ?	$\frac{8}{14}$
		Summa $\frac{14}{14} = 1.$

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo  $\frac{14}{14} = 1.$

G 2

De-

*Demonstr.* Summa differentiarum, quibus pretia statuta differunt per excessum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem, quam habent singulæ differentiæ seorsim sumptæ ad singulas partes mixti seorsim sumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot sunt differentiæ, quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compensari queat per excessum alterius pretii. Quod &c.

Corol. I. Ex superiori exemplo manifestum est, unumquodque pretium saltem semel alligari debere, idemque pretium posse pluries assumi, ut factum est cum pretio *D*.

Corol. II. Alligationes hujusmodi fieri possunt variis modis, siquidem pretium medium semper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diversa autem alligatione, diversa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto posita, ut patet.

## PROPOSITIO VII.

### *De regula simplicis Positionis, seu falsi.*

Ea regula *falsi* dicitur, quæ ex positione numeri plerumque falsi docet verum numerum invenire, qui quæstioni satisfaciat. Dicitur *simplicis Positionis*, si simplex ponatur numerus, ut in hac Propos. fiet; duplicis vero, si duo numeri assumantur, ut in *Prop. seq.*

Regula simplicis Positionis in tribus consistit, nempe

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad solvendam quæstionem, qui dicitur *Positio*.

2. Examinatur ille numerus, an talis sit, qualis exquiritur.

3. Instituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius testamento mandavit, aureos centum  
di



distribui in tres fratris sui filios  $A$ ,  $B$ ,  $C$  hac lege, ut  $A$  habeat partem duplam  $B$ , &  $B$  partem triplam ipsius  $C$ . Quæritur quantum singuli debeant accipere.

Pone  $A$  habere aureos 6, habeat  $B$  aureos 3,  $C$  vero 1. Examina, an tres illæ partes 6, 3, 1 simul efficiant 100 (nam si 100 efficerent, problema esset absolutum) sed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falsa positione provenit, ut hic 10: secundo loco statuitur numerus primo assumptus, seu Positio, ut hic 6; tertio loco numerus datus in quæstione, hoc est 100, invenies 60. Itaque  $A$  habeat 60 aureos,  $B$  30,  $C$  vero 10, quorum summa est 100, scilicet

$$10. 6 :: 100. 60.$$

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, respondit, aureorum meorum  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$  faciunt summam 470. Quæritur ea summa? Pater hic quærit numerum, cujus partes  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$  simul sumptæ efficiant 470. Ad evitandas fractiones assume numerum, qui contineat partes in quæstione expressas. Esto hic 60, cujus  $\frac{1}{3} = 20$ ,  $\frac{1}{4} = 15$ ,  $\frac{1}{5} = 12$ , quæ partes additæ faciunt 47. Debebant autem efficere 470. Institue regulam proportionum, dispositis terminis modo superius explicato, nimirum

$$47. 60 :: 470. 600.$$

Habebat ergo Cajus aureos 600, quorum  $\frac{1}{3} = 200$ ,  $\frac{1}{4} = 150$ ,  $\frac{1}{5} = 120$ , quæ partes simul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima singulis horis molit tritici modios 7, secunda 6, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici

G 3

mo-

modii 360, omnibus illis molis simul adhibitis.

Pone requiri horas 5, hoc tempore prima mola conficit modios 35, secunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes sunt modii 100, debebant autem esse 360. Instituatur ergo regula proportionis: si modii 100 poscunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

$$100. 5 :: 360. 18.$$

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, secunda 108, tertia 72, quarta 54, qui simul additi efficiunt modios 360.

*Demonst.* Ut se habet (in primo exemplo) 10 ad 6 + 3 + 1 simul sumptos in falsa positione, ita se habet in vera positione 100 ad 60 + 30 + 10 simul sumptos. Proinde regula stat in hoc ut numerus falsus 10, productus per numerum falsum 6, ita se habeat per regulam auream ad ipsum numerum falsum 6, sicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

## PROPOSITIO VIII.

### *De Regula duplicis Positionis.*

Regula *duplicis Positionis* non unum, sed duos supponit numeros, ut in *Propos. prec.* dictum est, solvitque plures quæstiones, quæ per unam positionem resolvi nequeunt. Omnes tamen quæstiones, quæ per unam positionem solvuntur, etiam per duas solvi possunt. Quando autem duplici positione opus sit, indicabitur inferius in *Schol.* En regulæ ordo.

1. Pone pro numero quæsito quemcunque numerum, qui dicitur *Positio*, & cum eo procede juxta tenorem quæstionis; cui si non satisfaciat, errorem ( hoc

( hoc est excessum, vel defectum, quo positio aberrat a numero quæsito ) subscribe eidem positioni, cum signo +, vel —, quorum unum plus, sive excessum, alterum minus, seu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priore major, vel minor, cum quo similiter examinetur quæstio proposita, cui si non satisfaciat, errorem pariter ei positioni subscribe cum signis +, vel —. Cum ambo errores sunt per excessum, vel ambo per defectum, dicuntur *similes*. Cum autem unus est per excessum, alter per defectum, hoc est cum signis diversis + & —, dicuntur errores *dissimiles*.

3. Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem positionis secundæ, & vicissim positio secunda in errorem primæ positionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæsitus.

4. Si errores sunt dissimiles, productorum summa dividitur per summam errorum, quotus dat quæsitum.

I. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrati sunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*; *C* tantundem quantum *B*, & insuper 10, quæritur lucrum singulorum.

Pone lucrum *A* fuisse 4, lucrum *B* erit 9, *C* vero 19. Adde simul 4, 9, 19, fiunt 32, at debebant esse 47, est ergo error, seu defectus in 15.

Rursus pone lucrum *A* fuisse 7, erit lucrum *B* 12, *C* vero 22, qui simul faciunt 41, quæ summa deficit a vera 47 per defectum 6.

Cum itaque duo errores similes sint ( nempe ambo per defectum ) duc positionem 4 in errorem secundæ positionis, hoc est in 6, & positionem 7 in errorem 15; fiunt duo producta 24 & 105, quorum differentia est 81, quem divide per differentiam unius erroris ab alio, idest per 9, ( subtrahendo errorem 6 ex alio errore 15 ) quotus 9 dat numerum quæsitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum 9, *B* vero 14, & *C* 24, quorum summa est 47.

G 4

Pe-

$$\begin{array}{l} \text{Posit. } 4, \text{ Err. } = 15 \\ \text{Posit. } 7, \text{ Err. } = 6 \end{array} \left( \begin{array}{l} \\ 9. \text{ diff.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{Prod. } 4 \times 6 = 24 \\ \quad 7 \times 15 = 105 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Differ. } 81.$$

II. Si utraque positio sit excedens, praxis est omnino eadem. Ponamus enim lucrum  $A$  fuisse 12, erit lucrum  $B$  17, & lucrum  $C$  27, quorum summa est 56, excedens numerum datum 47 per errorem 9.

Pone iterum 11 pro lucro  $A$ , erit lucrum  $B$  16, & lucrum  $C$  26, quorum summa 53 adhuc peccat per excessum 6. Cum igitur errores similes sint (nempe per excessum) duc positionem 12 in errorem 6 alterius positionis, & positionem 11 in errorem 9. Tum subtrahe productum minus 72 ex majori producto 99, & residuum 27 divide per differentiam errorum 9 & 6, hoc est per 3, quotus 9 dat numerum quaesitum, ut prius.

$$\begin{array}{l} \text{Posit. } 12, \text{ Err. } + 9 \\ \text{Posit. } 11, \text{ Err. } + 6 \end{array} \left( \begin{array}{l} \\ 3. \text{ diff.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{Prod. } 6 \times 12 = 72 \\ \quad 9 \times 11 = 99 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Differ. } 27$$

III. Quod si una positio sit excedens, altera deficiens, summa productorum dividitur per summam errorum, ut dictum est supra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum  $A$  fuisse 5, lucrum  $B$  erit 10, & lu-

**CAP. VI. PROP. VIII.** 105

lucrum C 20, quorum summa 35 deficit a summa data 47 per defectum 12; sumendus est igitur numerus major.

Pone lucrum A 11, B vero 16, & C 26, summa omnium 53 excedit veram summam 47 in 6. Ducatur jam positio prima 5 in errorem 6, & vicissim positio 11 in errorem 12. Deinde quia errores sunt dissimiles, addantur duo producta 30 & 132, eorumque summa 162 dividatur per summam errorum 18, quotus 9 dat rursus numerum quaesitum, ut antea.

$$\begin{array}{l} \text{Posit. } 5, \text{ Err. } -12 ( \\ \text{Posit. } 11, \text{ Err. } +6 ( \end{array} \quad 18 \text{ summa}$$

$$\begin{array}{l} \text{Prod. } 5 \times 6 = 30 \\ \quad 11 \times 12 = 132 \\ \hline \end{array}$$

Summa 162

*Sit aliud exemplum.* Interrogatus Pythagoras de numero suorum discipulorum, respondit, eorum dimidium dare operam Geometriæ, quartam partem Philosophiæ, septimam partem servare silentium; insuper tres alios se habere instituendos. Quæritur eorum discipulorum numerus.

Ponatur discipulos habuisse 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, septima pars 8, quorum summa est 50: his addantur illi 3, fiunt 53, deberent esse 56; est error per defectum 3, quem nota juxta ipsam positionem 56.

Rursus ponatur discipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, septima 16, quæ simul efficiunt 100, additisque 3, fiunt discipuli 103. Est ergo iterum per defectum 9, quem nota ad positionem 112.

Jam

Jam due positionem primam 56 in errorem secundæ positionis, hoc est in 9, & vicissim positionem secundam 112 in alterius positionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores similes sint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam errorum 6; quotus 28 dat numerum quaesitum discipulorum. Nam ejus dimidium est 14, quarta pars 7, septima 4, quæ simul faciunt 25, additisque 3, habetur numerus 28.

$$\begin{array}{l} \text{Posit. } 56, \text{ Err. } -3 \\ \text{Posit. } 112, \text{ Err. } -9 \end{array} \left( \begin{array}{l} 6 \text{ diff.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \text{Prod. } 56 \times 9 = 504 \\ 112 \times 3 = 336 \\ \hline \end{array}$$

*Differ. 168.*

Postremo sunt tres numeri ignoti  $a, b, c$ , qui sumpti bini dant summam, ut sequitur

$$a + b = 50$$

$$b + c = 70$$

$$a + c = 60$$

Quæritur singulorum valor. Pone  $a = 16$ , erit  $b = 34$ , ergo  $c = 36$ , proinde  $a + c = 16 + 36$ , hoc est 52. Sed esse debebat 60; ergo positio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque  $a = 18$ , erit  $b = 32$ , ergo  $c = 38$ , adeoque  $a + c = 18 + 38$ , hoc est = 56, sed debebat esse 60; est ergo rursus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut supra; reperietur  $a = 20$ , proinde  $b = 30$ ,  $c = 40$ , unde  $a + c = 20 + 40$ , seu 60, quod quaerebatur.

Schol. Indicium autem quando quaestio proposita solvi  
non

non possit per unam positionem, sed duplicem omnino requirat, est cum quaestioni aliquis determinatus numerus additus est, qui una cum numero ad libitum posito debet assumi. Sic in primo exemplo numeri illi determinati 5, & 10, qui adduntur numero ad libitum posito, indicio sunt duplici positione opus esse. In secundo autem exemplo numerus ille determinatus discipulorum 3 non importat duplicem positionem, quia non afficit partes aliquotas  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{7}$  numeri quaesiti, unde quaestio illa etiam per simplicem positionem solvi potest. Queritur enim numerus, ex quo si auferantur  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{7}$  residuum sit 3. Ponatur idem numerus 56, qui prius, erit  $56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = 6$ , quod residuum debebat esse 3. Dicatur ergo si residuum 6 provenit ex 56, unde 3? Prodibit quartus proportionalis 28, qui quaestionem solvit, ut antea.

## PROPOSITIO IX.

*Aurificis furtum in corona Hieronis regis detegere.*

Vitruvius lib. 9. Cap. 3. refert, ab Archimede deprehensam fuisse fraudem, quam artifex auream Hieronis regis coronam, admixta argenti portione, adulteraverat; sed quo praecise artificio id egerit, non satis constat. Duas tamen massas fecisse dicitur, alteram ex auro pro ejusdem ponderis cum corona, alteram ex argento item puro ponderis ejusdem: tum haec tria in vas aqua plenum seorsim immittens, aquam inde effluentem sedulo exploravit, atque hinc quantum argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur coronae pondus fuisse lib. 12. item auri, & argenti massas; & dum corona in vas aqua plenum demitteretur, effluxisse aquae libras  $7\frac{4}{7}$ , dum autem immergeretur auri massa, effluxisse aquae  
li.

libras  $7 \frac{1}{5}$ , immersa demum argenti massa, effluxisse aquæ libras  $10 \frac{4}{5}$ . Jam ex regula duplicis positionis ponatur, in ea corona fuisse auri lib. 9, erant ergo argenti lib. 3. Itaque per regulam proportionum dic, si puri auri lib. 12 dant aquæ libras  $7 \frac{1}{5}$ , quid lib. 9? invenies lib.  $5 \frac{2}{5}$ . Item, si puri argenti lib. 12 dant aquæ lib.  $10 \frac{4}{5}$ , quid lib. 3? proveniunt lib.  $2 \frac{7}{10}$ . Adde simul libras  $5 \frac{2}{5}$ , &  $2 \frac{7}{10}$ , habentur aquæ lib.  $8 \frac{1}{10}$ , debebant autem esse lib.  $7 \frac{4}{5}$ ; est ergo error per excessum  $\frac{3}{10}$ , qui notetur cum signo + una cum positione assumpta 9.

Ponatur secundo in eadem corona fuisse auri lib. 8, ergo ex argento erant lib. 4. Dic igitur per regulam auream, si auri puri lib. 12 dant aquæ lib.  $7 \frac{1}{5}$ , quid lib. 8? inveniuntur lib.  $4 \frac{4}{5}$ . Similiter, si argenti puri lib. 12 dant aquæ lib.  $10 \frac{4}{5}$ , quid lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib.  $3 \frac{3}{5}$ . Adde simul lib.  $4 \frac{4}{5}$ , &  $3 \frac{3}{5}$ , fit summa librarum aquæ  $8 \frac{2}{5}$ , debebant autem esse lib.  $7 \frac{4}{5}$ . Peccatum est igitur rursus per excessum  $\frac{3}{5}$ , seu  $\frac{6}{10}$ , qui notetur cum + juxta positionem 8, ut sequitur

$$\begin{array}{l} \text{Posit. } 9, \text{ Err. } + \frac{3}{10} \left( \frac{3}{10} \text{ differ.} \right. \\ \text{Posit. } 8, \text{ Err. } + \frac{6}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Prod. } 9 \times \frac{5}{10} = \frac{45}{10} \\ \quad 8 \times \frac{3}{10} = \frac{24}{10} \end{array}$$

$$\text{Differ. } \frac{30}{10} = 3$$

Ductis jam  $9 \times \frac{6}{10}$ , &  $8 \times \frac{3}{10}$  habentur  $\frac{54}{10}$ , &  $\frac{24}{10}$ ; quorum differentiam  $\frac{30}{10}$ , seu 3, divide per differentiam errorum, hoc est per  $\frac{3}{10}$ , quotus  $\frac{30}{3}$ , seu 10, dat auri libras quæsitas. Erant ergo immixtae 2 argenti libræ.

Ut fiat examen dic, si auri lib. 12 dant aquæ lib.  $7 \frac{1}{5}$ , quid lib. 10? invenies lib. 6. Item si argen-



genti lib. 12 dant aquæ lib.  $10\frac{4}{5}$ , quid lib. 2? invenies lib.  $1\frac{4}{5}$ . Adde igitur 6, &  $1\frac{4}{5}$ , summa librarum  $7\frac{4}{5}$  dat tantum aquæ, quantum, dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. Sed nota non opus fuisse Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujusmodi facere velit, conficere auri, vel argenti massas ejusdem ponderis cum corona; sed satis esse aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis assumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aquæ effluentis quantitatem proportio.

Schol. II. Per regulam duplicis positionis alie plures quæstiones pulcherrimæ solvi possunt, quæ tamen longe facilius, & universali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propositionis hujus simplex, ac genuina demonstratio; ut videre est apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis ann. 1704 edit. Paris. pag. 358. Demonstrationes autem aliunde petitæ prolixæ sunt admodum, & implicatæ, quas proinde nos prætermittimus.

## PROPOSITIO X.

*Datis duobus numeris tertium proportionalem invenire.*

Duc secundum in seipsum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quæsitus. Dati sint 2 & 8, quibus tertius proportionalis inquiritur. Ducatur  $8 \times 8$ , & productum 64 dividatur per 2, quotus 32 est numerus quæsitus. Sic 2, 8, 32, sunt in eadem proportione subquadrupla. Ratio patet ex 1. lem.

Schol. Si numeri dati sint inter se primi, hoc est unus non sit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, sed fractus. Sic datis 2 & 5 in-

5 invenitur per hanc Prop. tertius proportionalis  $\frac{2}{3}$ , hoc est  $12 \frac{1}{2}$ .

## PROPOSITIO XI.

*Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.*

Medius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita se habet ad alterum datum, sicut alter datorum ad ipsum; ita ut numeri dati sint extremi, & ipse medius; qui bis sumitur, semel ut consequens respectu primi, & semel ut antecedens respectu alterius.

Dati sint numeri 4 & 16, & inter quos medius proportionalis quaeritur. Duc illos inter se, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic  $4 \times 16 = 64$ , cujus radix quadrata est 8 per Propos. 2. Cap. 5. Sunt igitur 4, 8, 16 continue proportionales, nam  $4 \cdot 8 :: 8 \cdot 16$ . Ratio patet ex 1. lem.

Schol. I. Si productum ex numeris datis non sit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non possit sine residuo; tunc medius proportionalis inveniri nullo modo potest. Nam dati numeri sint v. g. 2 & 5, radix quadrata per Prop. cit. & Schol. 2. erit  $3 \frac{1}{6}$ . Adeoque erunt in continua proportione 2,  $3 \frac{1}{6}$ , 5, quod est falsum, nam si reducantur ad idem nomen, erunt  $\frac{12}{6}$ ,  $\frac{19}{6}$ ,  $\frac{30}{6}$ , seu 12, 19, 30, qui nullo modo sunt proportionales, ut patet.

Schol. II. Cum omne quadratum intelligi possit multiplicatum esse per unitatem, hinc omnis radix quadrata erit media proportionalis inter unitatem, & ipsum quadratum. Sic 25, radix quadrata numeri 625, est media proportionalis inter 1 & 625, proinde 1, 25, 625

625 sunt in eadem ratione continua . Num 1 . 25 ::  
25 . 625 .

## PROPOSITIO XII.

*Inter duos numeros datos duos medios propor-  
tionales invenire .*

Quadratum unius extremi ducatur in alterum ex-  
tremum , & ex producto extrahatur radix cubica per  
*Prop. 3. Cap. 5.* , quæ erit duorum mediõrum pro-  
portionalium prior . Deinde quadratum alterius extre-  
mi ducatur in alterum extremum , & ex producto  
pariter extrahatur radix cubica , quæ erit duorum  
mediõrum proportionalium posterior .

Dati sint numeri 2 & 16 , quos inter invenire  
oporteat duos medios proportionales . Quadra mino-  
rem numerum 2 , ejusque quadratum 4 duc in 16 ,  
fiunt 64 , cujus radix cubica 4 erit prior duorum  
proportionalium . Similiter quadratum alterius nume-  
ri 16 , nempe 256 , duc in 2 , fiunt 512 , cujus ra-  
dix cubica 8 erit duorum proportionalium posterior ;  
proinde 2 , 4 , 8 , 16 sunt in continua proportione ,  
ut patet , cum sit 2 ad 4 , ut 4 ad 8 , & 4 ad 8 ,  
ut 8 ad 16 .

Schol. Si ad numerum datum , & primum medium  
proportionalem inventum , queratur tertius proportionalis  
per Propos. 10. hujus ; vel si inter medium proportio-  
nalem inventum , & alterum numerum datum invenia-  
tur medius proportionalis per Propos. 11. hujus ; in  
utroque casu obtinebitur secundus duorum mediõrum pro-  
portionalium quæsitus . Ceterum si numeri dati sint ta-  
les , ut inde radix cubica obtineri non possit sine fra-  
ctionibus , tunc medii proportionales inveniri nequeunt ,  
ut de uno medio proportionali dictum est in Schol. 1.  
Propos. præc.

PRO-

## PROPOSITIO XIII.

*Quæstiones aliquot practicæ expediuntur.*

Etsi quæstiones fere omnes, quæ sequuntur, ex regulis proportionum jam explicatis facile resolvi possint; quia tamen eas ordinare, atque expedire tironibus negotium facessit, adeoque Arithmetici practici peculiare de his tractatus instituerunt, proinde nos præcipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipsa praxi operandi etiam methodus innotescat.

1. Marcellus debet Titio scuta Romana 3432. Cedit illi domum, quæ locari solet annuis scutis  $53\frac{2}{3}$ , possidendam, donec debitum sit omnino solutum, quæritur quot annis eam Titius possidebit.

Dividantur sc. 3432 per sc.  $53\frac{2}{3}$  (reductis integris cum fractione ad fractionem ejusdem nominis) invenientur anni 63, menses 11, dies 12, quod per se manifestum est.

2. Impendit Paulus scuta Romana 415. 35 in libras 385 mercis cujusdam coemendas, unde lucrari cupit scuta 50. 50, quæritur quanti singulas libras vendere debeat.

Addantur simul emtæ mercis pretium, & lucrum inde faciendum, nempe  $415.35 + 50.50 = 466.85$ , quæ quidem summa dividatur per numerum librarum 385, quotus dat unius libræ pretium, scilicet sc. 1. 21.

3. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis 8400; quærit quantum ex singulis 100 lucratus sit?

Dic per regulam proportionum si 8400 sunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex singulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel sic, subtrahe 8400 ex 9072, differentia, seu lu-

lucrum est aureorum 672. Dic ergo, si 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea.

*Examen* fit, si dicas, 100 fiunt 108, quid 8400? invenies 9072.

4. *Figamus* ab eodem Lucilio solvendam esse pensionem scutorum 500 annis quinque, hoc est scuta 100 singulis annis; quam ille emit parata pecunia, solutis statim scutis 400. Quæritur, quantum lucri ex singulis 100 percipiat.

Dic per regulam auream, si scuta 400 fiunt 500, seu per *Prop. 4. hujus*, si 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex singulis 100 habet lucrum scutorum 25.

*Examen* erit, si dicas, 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

Schol. I. *Quæstiones* hujus generis pertinent ad regulas lucri, seu simplicis meriti, ut vocant.

5. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus solvendo, hoc est singulis annis aureos 220. Paratus tamen est statim aureos 660 creditori solvere, si quidem 10 ex singulis 100 sibi relaxet. Quæritur, quot aureos solvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 200 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot scilicet anni sunt) dic si 110 fiunt 100, vel (per *Prop. 4. hujus*) si 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rursus dic, si 11 fiunt 10, quid 200? invenies  $181 \frac{9}{11}$ . Demum, si 11 dant 10, quid  $181 \frac{9}{11}$ ? proveniunt  $165 \frac{3}{121}$ . Addantur simul 200,  $181 \frac{9}{11}$ ,  $165 \frac{3}{121}$ . Erit summa  $547 \frac{13}{121}$ . Accipiet ergo Sempronius tantum aureos  $547 \frac{13}{121}$ .

Schol. II. *Nota* in hac aliisque hujus generis quæstionibus dici non posse, si 100 fiunt 90, quid 220? Sed necessario addi debere lucrum ipsum 10 ad 100. Nam nihil aliud proponitur relaxandum, nisi lucrum; proinde lucrum ipsum additur ad sortem, seu 100,

H

ut

ut habeatur 110, primus regulæ aureæ terminus.

6. Eadem ratione si quis ad tres annos domum conduxerit cum annua pensione scutorum 300; domino autem ejus domus omnem statim summam in antecessum solvat ea conditione, ut sibi scuta 5 pro singulis 100 compenset: dices, si 105 fiunt 100, seu (dividendo 105, & 100 per 5) si 21 fiunt 20, quid 300? invenies  $285\frac{5}{7}$ . Rursus, si 21 fiunt 20, quid  $285\frac{5}{7}$ ? fiunt  $272\frac{1}{4}\frac{6}{7}$ . Demum si 21 dant 20, quid  $272\frac{1}{4}\frac{6}{7}$ ? proveniunt  $259\frac{4}{30}\frac{6}{8}\frac{7}{7}$ . Horum summa  $816\frac{9}{100}$  (reductis fractionibus in partes centesimas) in antecessum domus illius domino solvenda est.

Quod si aurei illi 660 a Fabio triennio post solvendi sint; tunc additis, ut supra 10 ad 100, dic si 110 fiunt 100, seu, per Prop. 4. hujus, si 11 fiunt 10, quid 660? erunt 600. Rursus, si 11 fiunt 10, quid 600? invenies  $545\frac{5}{11}$ . Demum, si 11 fiunt 10, quid  $545\frac{5}{11}$ ? Fiunt  $495\frac{10}{12}\frac{5}{1}$ ; & hi solum Sempronio solvendi sunt.

Vel brevius, duc 660 in  $10 \times 10 \times 10 = 1000$ , & productum 660000, divide per  $11 \times 11 \times 11 = 1331$ , quotus dat  $495\frac{10}{12}\frac{5}{1}$ , ut antea.

Schol. III. Hæc praxis vulgo dicitur, scontare a capo d' anno.

7. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex scenore auctio sortis. Nihil fuit a Cajo solutum toto triennio. Quæritur, quantum ipse pro sorte, atque usuræ usura sceneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110; deinde per regulam auream dic, si aurei 100 fiunt 110, seu si 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc est 500 pro sorte, pro usura vero primi anni 50. Rursus pro secundo anno dic, si 10 fiunt 11, quid 550? fiunt 605. Demum si 10 dant 11, quid 605? Invenies summam  
a Ca.

2. Cajo solvendam aureos  $665 \frac{1}{2}$ .

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc est in  $11 \times 11 \times 11 = 1331$ , & productum 665500, divide per 1000, nimirum per  $10 \times 10 \times 10 = 1000$ , quotus dat  $665 \frac{1}{2}$ , ut antea.

Coroll. Hinc liquet, sortem datam, nempe aureos 500, & summas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, &  $665 \frac{1}{2}$  esse terminos continue proportionales, cum omnes sint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11, proinde inter sortem datam, & ultimi termini summam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus scenoris fuerunt anni uno minus. Hoc ipsum de præcedenti quæstione debet intelligi.

Schol. IV. Praxis hujusmodi, quæ apud Latinos anatocismus, sive usura usuræ, & a nonnullis usura Judaica dicitur, est a lege vetita, Ab Italis vocari solet meritum meriti, seu meritare a capo d' anno. Hac vero regula utimur, ubi fundus ex annuis fructibus continuo augeri, ac multiplicari debet.

8. Terentius debet Gellio pro usura primi anni summam fortis & scenoris simul scuta 4608, pro quarto autem anno scuta 6561; quæritur, quanta fuerit fors, quantumque scenus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, per Prop. 12. hujus: duc scilicet minorem 4608. in se, fit quadratum 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504. Hinc autem extrahatur radix cubica, per Prop. 3. Cap. 5. prodibit 5184, quæ erit duarum proportionalium minor, per Prop. 12. cit. Solvet igitur secundo anno pro sorte, ac scenore scuta 5184: atque hinc deducitur fortis quæsitæ quantitas. Nam ex præc. Corol. fortis summa, & reliquæ omnes, sunt inter se in proportione continua; proinde secundi anni summa 5184 se habet ad summam 4608 primi anni,

sicuti hæc ad sortem quæsitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quæraturs tertius proportionalis per *Propos. 10. hujus*, erit fors quæsitæ 4096. Hanc vero subtrahæ ex summa data sortis & scenoris primi anni, nempe ex 4608, innotescet ejusdem sortis usura, scutorum scilicet 512, seu  $12\frac{1}{2}$  ex singulis 100. Nam dic, si scuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies  $112\frac{1}{2}$ , hoc ex  $12\frac{1}{2}$  ex singulis centenis.

## C A P U T VII.

*De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, eorumque regulis.*

**P**rogressio est complurium terminorum eadem ratione procedentium series. Si excessus, vel defectus, quo termini illi procedunt, sit æqualis, ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. qui binario crescunt, vel 15, 12, 9, 6, 3, &c. qui ternario crescunt, tunc oritur *progressio Arithmetica*. Si vero termini sint in continua ratione Geometrica proportionales eo modo, quo in præcedenti capite explicatum est, tunc habetur *progressio Geometrica*. De utraque hic breviter agemus.

Datur etiam proportio Harmonica, seu Musica, in qua tres termini ita ordinantur, ut eadem sit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentia medii & minimi. Tales sunt numeri 3, 4, 6. Nam inter 6 & 3 est proportio dupla, sicuti dupla est proportio differentia inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1, scilicet  $6.3 :: 6 - 4.4 - 3$ .

Regulæ progressionum hujusmodi consistunt in hoc,  
ut



ut eorum terminorum series compendiose , & sine prolixæ calculationis tædio in unam summam colligantur .

L E M M A T A .

I. In progressione Arithmetica terminorum quorumcunque , summa duorum extremorum æquatur summæ duorum terminorum , qui ab extremis æqualiter distant. Sint

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Erit  $1 + 11 = 3 + 9$ . Item  $1 + 11 = 5 + 7$ .

II. In progressione Arithmetica terminorum imparium summa extremorum , vel duorum terminorum æqualiter distantium , dupla est termini medii .

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.$$

In hac progressione septem terminorum summa  $1 + 13 = 7 + 7$ , seu 14 . Item  $3 + 11 = 14$ , pariter  $5 + 9 = 14$ .

III. In omni progressione Arithmetica quilibet terminus continet primum , hoc est minimum terminum , & toties excessum , seu differentiam una minus , quot sunt termini post primum usque ad ipsum inclusive . Sint

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

Terminus quartus progressionis 7 continet , ut patet , minimum terminum 1 , & ter differentiam 2. Pariter 9 , terminus quintus progressionis , continet 1 , & quater differentiam ipsam 2 . Ita quoque 11 , terminus progressionis sextus , continet 1 , & quinque differentiam 2 , ut patet .

H 3

Co-

Coroll. Hinc habetur maximus progressionis terminus, si differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præc. progressionem, si differentia 2 ducatur in 5 ( numerum terminorum unitate minutum ) & producto addatur minimus terminus 1, habetur maximus terminus 11.

### PROPOSITIO I.

*Datis minimo ac maximo progressionis Arithmeticæ terminis, & terminorum numero, invenire summam.*

Regula hæc est: summa minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit summam totius progressionis.

*Sic exemplum.* Quæritur summa omnium campanæ pulsuum alicujus horologii, quod ab 1 hora usque ad 2 inclusive, det pulsus pro horis juxta naturalem numerorum seriem 1, 2, 3, 4, 5 &c., ita ut pro hora 7 septies, pro hora 10 decies, pro 12 duodecies pulset. Minimus terminus est 1, & maximus 12; horum summa 13 ducatur in 6, ( dimidium terminorum ) productum 78 dat omnes campanæ horariæ pulsus pro horis 12. Cujus duplum dat pulsus horarios integri unius diei.

Ratio deducitur *ex lemm. 1.* Nam cum summa extremorum æqualis sit duobus quibusque terminis æqualiter distantibus, rectangulum factum ex summa primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, necessario æquale erit summæ totius progressionis. Multiplicatio enim est idem ac compendiosa additio *ex dictis Prop. 5. Cap. 1.*

Coroll. Hinc intertur, summam progressionis Arithmeticæ pariter haberi. 1. Si dimidium summæ  
inaæ

maximi ac minimi termini ducatur in numerum terminorum . 2. Si summa maximi & minimi ducatur in numerum terminorum ; & productum per 2 dividatur . 3. Quia vero in progressionem terminorum imparium numerus medius æquatur dimidio summæ maximi ac minimi *ex lemm. 2.* hinc sequitur , haberi progressionis summam , si numerus medius ducatur in numerum terminorum imparium .

## PROPOSITIO II.

*Datis terminis maximo , & minimo , necnon & numero terminorum , differentiam invenire .*

A Maximo termino aufer minimum , & residuum divide per numerum terminorum unitate minutum , quotus dabit differentiam quæsitam .

In præc. exemplo campanæ horariæ a maximo termino 12 aufer minimum 1 , & residuum 11 divide per numerum terminorum unitate minutum , nempe 11 ; quorus 1 dat differentiam quæsitam .

Ratio desumitur *ex lemm. 3.* Nam 12 continet minimum terminum 1 , & præterea toties continet differentiam , quot sunt post terminum 1 usque ad ipsum inclusive 12 termini , qui nimirum sunt 11 : proinde , ablato minimo termino , residuum continet toties differentiam , quot sunt progressionis termini minus uno ; adeoque diviso residuo per numerum terminorum unitate minutum habetur differentia .

## PROPOSITIO III.

*Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.*

Duc differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & productio adde minimum terminum, summa dabit maximum.

*Sit exemplum.* Dux exercitus distribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40 strenuos milites, qui primi arcem occuparunt; hoc pacto, ut ultimo, qui mœnia superavit, dentur aurei 100, penultimo 130, antepenultimo 160, & sic deinceps: quæritur, quantum retulerit pecuniæ primus. Patet minimum terminum esse 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & productio 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium scilicet primi militis. Ratio patet *ex lemm. 3., ejusque Coroll.*

## PROPOSITIO IV.

*Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.*

A maximo aufer minimum, & residuum divide per differentiam, quotus unitate auctus dat numerum terminorum.

*Sit exemplum.* Ernta est multitudo librorum hac conventionem, ut minimus liber stet juliiis 2, secundus juliiis 4, tertius 6 &c., ultimi vero libri pretium fuit juliorum 400, quæritur librorum numerus. Aufer minimum 2 a maximo 400, & residuum 398 divide per differentiam 2, quotus 199 unitate auctus, hoc est 200, est numerus terminorum, seu librorum, qui quæritur. Si-

Similiter artifex de opere perficiendo convenit hoc pacto, ut primo die solvantur sibi asses 20, secundo die asses 25, tertio asses 30, & sic deinceps. Ultimo die, quo opus absolvit, accepit asses 165, quaeritur quot dies operi insumpserit. Aufer terminum minimum 20 a maximo 165, & residuum 145 divide per differentiam 5, quotus est 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propositionis desumitur ex lemma. 3., ut manifestum est.

## PROPOSITIO V.

### *De Numeris Polygonis.*

*Numeri Polygoni* sunt summæ progressionum Arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie Triangulares, si differentia progressionis sit 1: Quadrati, si differentia sit 2: Pentagoni, si 3: Hexagoni, si 4: Heptagoni, si 5 &c. *A*

fortiuntur autem hæc nomina a figuris Geometricis in quas disponi possunt per puncta unitatibus respondentia, ut ex *B* . . . . . *C*

Triangulari *ABC* patet.

<i>Progr. Arithm.</i>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
<i>Num. Triangulares.</i>	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.
<i>Progr. Arithm.</i>	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.
<i>Num. Quadrati.</i>	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.
<i>Progr. Arithm.</i>	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.
<i>Num. Pentagoni.</i>	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.
<i>Progr. Arithm.</i>	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.
<i>Num. Hexagoni.</i>	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.

*Latus Polygoni* est numerus terminorum progressionis

nis Arithmeticae, qui summantur, quod quidem totum continet unitates, quot numerus ipse polygonus terminos. Sic latus  $BC$  polygoni triangularis  $ABC$  continet unitates 4, & polygonus numerus 10 summam quatuor terminorum  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ .

*Numerus angulorum* est, qui indicat quot angulos, seu latera habeat talis in specie polygonus, ex quorum numero determinatur. Sic numerus angulorum in Triangularibus est 3, in Terragonis 4, in Pentagonis 5 &c. Numerus vero angulorum superat semper duplici unitate differentiam progressionis generatricis, quod notetur. Ex his facile est solvere problemata, quae sequuntur.

1. Dato latere, & numero angulorum numerum polygonum invenire. Nam esto datum latus 4, & angulorum numerus 3. Jam patet, addendos esse quatuor terminos, cum latus datum unitates quatuor contineat progressionis Arithmeticae, cujus differentia est 1. Nam angulorum numerus  $3 - 2$ , dat differentiam 1. Erunt ergo termini addendi  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , qui erit numerus triangularis quaesitus. Sit exemplum, disponere volo in viridario aliquot flores, sive arbores, in forma triangulari, ita ut in uno latere sint arbores 4, quaeritur eorum numerus: patet 10. requiri.

2. Dato numero polygono, & angulorum numero, polygoni latus invenire. Sit polygonus datus 51, & angulorum numerus 5. Ex dictis constat differentiam seriei generatricis esse 3, adeoque polygonum datum 51 esse Pentagonum, cui in prima serie numerorum naturalium respondet latus 6. Quod manifestum est, si ejusdem seriei, cujus differentia est 3, termini 6 summantur.

Schol. Si addantur simul numeri polygoni, nempe Triangulares, aut Quadrati, aut Pentagoni &c. summa dat numeros Pyramidales, qui si oriantur ex addi-

ditione *Triangularium*, vocantur *Pyramidales Triangulares*. Si ex additione *quadratorum*, *Pyramidales Quadrati*. Sic si addas simul *Hexagonos* 1, 6, 15, 28, 45, 66 &c. invenies *numeros Pyramidales Hexagonos* 1, 7, 22, 50, 95, 161 &c. & sic de aliis.

*De progressionibus Geometricis.*

L E M M A IV.

In omni *progressione Geometrica* si terminus quilibet in se ducatur, & productum dividatur per terminum primum *progressionis*, quotus distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse terminus.

In *progressione A* terminus 8 tertio loco positus, qui duobus locis distat a primo, ducatur in se, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 distabit a primo termino locis duplo pluribus, seu quatuor. Nam terminus 32 est tertius *proportionalis* ad duos terminos 2, & 8, per *Propos. 10. Cap. 6.* proinde 32 toties continet 8 ( hoc est bis terminum intermedium 16 ) quoties 8 continet primum 2, nempe

$$A \quad 2, 4, 8, 16, 32, \text{\&c.}$$

$$0. \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4.$$

bis terminum intermedium 4; adeoque cum 32 tantundem distet ab ipso 8, quantum 8 a termino primo 2 ( duobus scilicet locis ) distabit ipse 32 a primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

Coroll. Hinc sequitur, quod si cuilibet *progressioni Geometricæ* subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio a cifra, quilibet *progressionis terminus*, qui producitur per alium in se  
du

ductum, & divisum a primo, habeat sub se notam duplo majorem, quam terminus a quo producitur. Sic in superiori exemplo terminus 32 habet sub se notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes*, vel *indices* progressionis dicuntur, indicant, quantum quisque terminus distet a primo: Locum autem, seu numerum terminorum progressionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index est 4, est quintus in progressionem terminus: Quod notetur.

## L E M M A V.

In omni progressionem geometrica si duo quilibet termini in se ducantur, & productum dividatur per primum terminum progressionis, quotus dabit terminum tot locis distantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum simul additi.

In Progressione Geometrica *B* subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum est in *prac. Coroll.* & duo quilibet termini 10 & 40, quorum indices simul additi dant 4, ducantur inter se, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus est 80, cujus index pariter est 4, adeoque quatuor locis distat a primo termino per *Coroll. cit.*

*B* 5, 10, 20, 40, 80, 160 &c.

0. 1. 2. 3. 4. 5.

*Coroll.* Hinc ad inveniendum quemlibet progressionis datae terminum, v. g. sextum, multiplicari debent inter se duo termini, eorumque productum dividi per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quaesitus. Sic ad inveniendum sextum progressionis *B* terminum, ductis inter se 20 & 40 (quorum

in-



indices additi dant 5 ) & producto diviso per 5, quotus 160 erit sextus progressionis terminus, ut patet.

## PROPOSITIO VI.

*Datis minimo & maximo progressionis Geometricæ terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire.*

A maximo termino aufer minimum, & residuum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum summam.

*Sit exemplum.* Venditur equus eximiae pulchritudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in soleis ferreis figendis adhiberi solent, solvatur pro primo clavo 1 assis, pro secundo clavo 2 asses, pro tertio 4, & sic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat asses 2147483648. Quæritur assium omnium solvendorum summa.

Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & residuum divide per denominatorem 2 unitate multatum, nempe per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac residuum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progressionis summa 4294967295: qui asses si dividantur per 100, erit pretium illius equi scutorum 42949672, & asses 95, *per Schol. Prop. 5. Cap. 3.*

Ratio deducitur *ex Prop. 34. lib. 9. Eucl.* Nam in omni finita progressionem Geometricam, ut denominator unitate multatus est ad unitatem, ita maximi & minimi differentia ( seu maximus terminus, dempto minimo ) est ad totam progressionis summam, minus ipsomet maximo termino; ut si fuerit progressio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81,

2432

243, erit denominator 3 unitate multatus, seu 2 ad 1, sicuti  $243 - 3$ , seu 240, ad totam progressionis summam, dempto maximo termino, hoc est ad  $3 + 9 + 27 + 81 = 120$ ; proinde diviso 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progressionis summa 363.

Schol. I. Progressionis duplæ ab unitate incipientis brevius habetur summa, si duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum 2147483648, ac deme unitatem, residuum dabit summam totius progressionis 4294967295, ut antea. Ratio per se manifesta est, quia denominator unitate multatus est unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc casu idem est, ac illum bis sumere, seu duplicare.

Schol. II. Ex progressionem duplæ ab 1 incipiente 1, 2, 4, 8, 16 &c. habentur numeri, qui dicuntur Perfecti, qui scilicet omnibus suis partibus aliquoties æquales sunt, ut 6, 28, 496 &c. hoc pacto: adduntur ordinatim progressionis duplæ termini, donec eorum summa sit numerus primus, ut  $1 + 2 = 3$ ,  $1 + 2 + 4 = 7$ ,  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ . Tum numerus primus 3, vel 7, vel 31 ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic  $3 \times 2 = 6$ ,  $7 \times 4 = 28$ ,  $31 \times 16 = 496$ . Et sic de aliis, qui pauci sunt, sicuti in natura aliæ res, quæ perfectæ dicuntur. Nam intra decem est 6, intra centum est 28, intra mille est 496, intra dena millia 8128. Omnes aut senario, aut octonario terminantur.

### PROPOSITIO VII.

*Datis aliquot progressionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.*

Dati sunt aliqui termini Geometricæ progressionis  
A,

*A*, & inveniendus sit ejusdem terminus v. g. vigesimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quaesiti, per *Coroll. lemm. 4.* Subscribe terminis datis numeros naturales ab unitate, facto initio a cifra, per *Cor. cit.*, & duc 80, qui in progressionem quintum locum occupat, & distat a primo locis 4, in se ipsum, ejusque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse 80, hoc est locis 8 per *lemm. 4.*

Eadem ratione duc 1280 in se ipsum, & productum divide per 5, quotus 327680, distabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc est 16 per *lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quaesiti 19 differat per defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index sit 4, hoc est per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigesimus quaesitus.

Nam cum ex constructione terminus 2621440 sit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices sunt 16 & 3, seu 19, & divisus sit per primum terminum 5, distabit tot locis a primo termino, quot unitates habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 per *lemm. 5.*, hoc est locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progressionem vigesimus per *Coroll. lemm. 4.* Quod erat &c.

*Coroll.* Patet idem esse, quaerere datae progressionis terminum 20, ac terminum exponentis, seu indicis 19, unitate minoris termino quaesito.

### PROPOSITIO VIII.

*Afferuntur nonnullae Progressionis Geometricae quaestiones.*

- I. Quaeritur, quantum framenti ex uno tritici gra-



3. Scheramus Indiæ rex proposuit Sessæ Dahir Indo, qui latrunculorum ludum a se inventum illi exposuerat, ut in præmium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola positum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64 perventum fuisset. Levissima regi primum visa res est: sed facto computo ab Arithmeticis inventum est, neque in ejus regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551615. Hoc patet ex dictis per Prop. 6. & 7. hujus.

Schol. I. Hanc doctrinam qui perceperit, haud mirabitur id, quod sacra historia narrat de multitudine filiorum Israel, qui egressi sunt de Ægypto. Cum enim eo profecti essent non plures, quam 70, ita multiplicati sunt, ut post annos 120, inde exierint ad sexies centena millia bellatorum hominum, præter pueros, senes, ac mulieres.

Schol. II. Admiranda Geometricæ progressionis duplæ ab 1 incipientis usque ad terminos 124 inclusive incrementa, quot scilicet scalarum gradibus Romæ ad templum Aracalitanum ascenditur, prosecutus est integro libro Romæ edito an. 1652. Fr. Ludovicus Paris de Monte Fano Min. Observ., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut nescias, utrum magis Geometricæ progressionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.

Schol. III. De progressionem Geometricam infinitam per infinitos terminos descendente non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici studium transcendat, & per Analysin ea longe facilius explicetur.

## PROPOSITIO IX.

*Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.*

Combinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo  
I rerum

rerum numero, v. gr. octo alphabeti literis, quæritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter se combinari possint; hoc est quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illis fieri.

I. Datae sint igitur octo res, seu literæ  $a, b, c, d, e, f, g, h$ , scire volo omnes binorum combinationes. Instituantur duæ progressionis Arithmeticæ naturales descendentes, subducta unitate a numeris 8 & 2, tot scilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariæ dicitur) continet unitates, ut in  $A$  &  $B$  factum

$A$	$B$
8	8
7	7
6	6
5	5
4	4
3	3
2	2
1	1
0	0

est. Ducantur deinde inter se 8 & 7; & productum 56 dividatur per productum 2  $\times$  1, hoc est per 2, quotus 28 dat quæsitam binorum multitudinem.

Hoc patet ex sequenti 3 literarum combinatione.

$ab$	$ac$	$ad$	$ae$	$af$	$ag$	$ah$
$bc$	$bd$	$be$	$bf$	$bg$	$bh$	
$cd$	$ce$	$cf$	$cg$	$ch$		
$de$	$df$	$dg$	$dh$			
$ef$	$eg$	$eh$				
$fg$	$fh$					
$gh$						

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iisdem & literis haberi possint. Instituantur, ut supra factum est, duæ progressionis Arithmeticæ descendentes  $C$  &  $D$ , & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerum ternorum, qui petitur.

$C$	$D$
3	8
2	7
1	6
0	5
0	4
0	3
0	2
0	1
0	0

Coroll. Eadem methodo inveniuntur omnes quater-

ternarii, quaternarii, quaternarii &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellarum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum sortito extrahantur, binarii *per hanc Propos.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quaternarii 43949268: unde difficillima in hujusmodi ludis divinandi ratio satis apparet.

PROPOSITIO X.

*Ex dato rerum numero permutationes omnes  
possibiles invenire.*

Permutatio distinguitur a combinatione in hoc, quod combinatio, dato rerum numero, ostendit quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii &c. ex eo rerum numero fieri possint, ut ex *Prop. præc.* manifestum est. Permutatio vero docet, quoties datae illae quantitates permutari queant, ita ut semper omnes accipiantur, variato solum ordine. En regula

Sumantur tot numeri in serie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot sunt res datae, v. g. quinque literae, *a, b, c, d, e*, productum ex terminis seriei naturalis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quaesitus, ut in *A & B* patet. Nam si dentur duae tantum literae *a, b*, possunt bis permutari, si quaelibet semel primum locum vel secundum occupet, *a b, b a*. Si vero dentur tres *a, b, c*, permutari possunt sexies. Quaelibet enim occupare potest semel unum locum, & reliquae duae, ut modo dictum est, bis permutari. Nam cum *c* tenet ultimum locum, possunt duae reliquae *a, b*, mutari bis, ac proinde habentur duo diversi ordines *abc, bac*.

<i>A</i>	<i>B</i>
1	<i>a</i>
2	<i>b</i>
3	<i>c</i>
4	<i>d</i>
5	<i>e</i>
—	
120	

Rur-

I 2

Rursus  $b$  occupante ultimum locum, permutari possunt bis duæ  $a, c$ ; & sic duo novi exurgunt ordines  $acb, cab$ . Denique si  $a$  teneat ultimum locum, reliquæ duæ  $c, b$  bis permutari queunt, unde rursus alii duo habentur ordines  $bca, cba$ . En simul omnes trium literarum  $a, b, c$  permutationes.

$$abc, acb, bca,$$

$$bac, cab, cba,$$

Eodem discursu ostenditur literas quatuor  $a, b, c, d$ , permutationes 24 admittere, literas quinque  $a, b, c, d, e$ , permutationes 120 &c.

Corol. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

*Tot tibi sunt Virgo dotes, quot sydera Cælo.*

oëto verbis constans, subire posse permutationes 40320, non tamen semper metri ratione servata.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, seu quot modis, variato ordine disponi possint alicujus vocabuli literæ, ut *Rama*; cujus anagrammata sunt *Amor, Mora, Maro, Ramo, Armo*, &c. quæ olim ex depravato ejus ætatis gustu literatores in deliciis habebant.

## PROPOSITIO XI.

*Proponuntur aliqua Permutationum problemata.*

1. Sunt Convictores 12, qui communi mensa utuntur, & quotidie singuli accumbendi locum variant, quæritur, quot annis absolvetur isthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12 progressionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. invenietur per *Propos. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas si divides  
per



per dies 365 habebis annorum summam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia necessaria erunt ad omnes ejusmodi permutationes scribendas, etiamsi mille scriptores existant, qui quotidie paginas 40 scribant, & unaquæque contineat permutationes 50.

Inveniatur per *Propos. præc.* permutationum summa ex literis 24, quæ ex Tacquet est 620, 448, 401, 733, 239, 49, 360, 000. Duc  $40 \times 50 \times 1000$ , productum 2000000 dat numerum permutationum singulis diebus scribendum, quem duc in dies 365, & per productum divide prædictam permutationum summam, quotus dabit numerum annorum quæsitum.

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, seu chori sunt 9: quilibet chorus continet 6666 legiones, & legio quælibet Angelos 6666, proinde omnium Angelorum numerus est 399, 920, 004; quæritur quot fieri possint Angelorum permutationes, seu quot modis ordinem inter se variare queant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

## PROPOSITIO XII.

*Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.*

1. Ducatur primus Arithmetice proportionalis datus in secundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet secundus Harmonicus.

3. Denique secundus Arithmeticus in tertium datus tertium Harmonicum producet.

*Sit exempl.* Proportio Arithmetica 2, 3, 4, efficit

I 3

134 DE PROGRESS. GEOMETRICIS  
cit Harmonicam . . . . . 6, 8, 12.

Similiter proportio Arithmetica 3, 7, 11, efficit  
Harmonicam . . . . . 21, 33, 77.

### PROPOSITIO XIII.

*Datis duobus numeris tertium Harmonico  
proportionalem invenire.*

Duc primum numerum datum in secundum, & productum divide per duplum primi minutum secundo, hoc est per differentiam dupli primi a secundo, quotus erit tertius harmonice proportionalis.

Dati sint 3 & 4, quaeritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc  $3 \times 4$ , & productum 12 divide per  $6 - 4$ , hoc est per 2, quotus 6 dat numerum quaesitum. Similiter dati sint 6 & 8, quaeritur tertius harmonicus. Duc  $6 \times 8$ , & productum 48 divide per  $12 - 8$ , seu 4, quotus 12 est tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

Quod si primi termini duplum sit aequale, vel minus secundo termino, tunc tertius harmonice proportionalis inveniri non poterit; ut si dentur, 3 & 6, vel 2 & 6.

### PROPOSITIO XIV.

*Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice  
proportionales, quotientes erunt in  
Harmonica proportione.*

Datus sit numerus ex. gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1, 2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos esse in proportione harmonica manifestum est. Nam

60.

$$\begin{array}{l}
 60 \cdot 20 :: 60 \text{ — } 30 \cdot 30 \text{ — } 20. \\
 30 \cdot 15 :: 30 \text{ — } 20 \cdot 20 \text{ — } 15. \\
 20 \cdot 12 :: 20 \text{ — } 15 \cdot 15 \text{ — } 12. \\
 15 \cdot 10 :: 15 \text{ — } 12 \cdot 12 \text{ — } 10.
 \end{array}$$

Hinc patet haberi progressionem terminorum harmonice proportionalium.

Schol. I. Harum trium propositionum demonstrationes ad *Analysin speciosam* remittimus, unde facillime eruantur, quæ alioquin per viam *syntheticam* sunt operosæ.

Schol. II. Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, seu Musicam constituere dicantur, est nimirum, quia consonantias Musicas constituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus 3, 4, 6 inter 6 & 4 est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente, seu Quinta dicitur. Item inter 4 & 3 est proportio sesquitercia, constituens consonantiam, quam Diatesseron, seu Quartam vocant. Deinde inter extremos 6 & 3 habetur proportio dupla, quæ Diapason, seu Octavam consonantiam efficit.

Schol. III. Datur etiam proportio Contr-harmonica, quæ habetur cum datis tribus terminis, differentia primi, & secundi est ad differentiam secundi & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic 3, 5, 6 sunt numeri contrharmonice proportionales: nam 2, differentia primi & secundi termini, est ad 1, differentiam secundi & tertii, ut 6 ad 3. Item 12, 10, 6 sunt contrharmonice proportionales; nam 2. 4 :: 6. 12. Hæc dicta sunt in gratiam eorum, qui musicam amant, aut instrumentis Musicis student, ut hinc numerorum scientiam sibi maxime necessariam intelligant.

## C A P U T VIII.

*De Logarithmis, eorumque natura, atque usu.*

CUM triangulorum resolutio, quæ per sinus, tangentibus, & secantes habetur, absolvi debeat per regulam Proportionum, in qua multiplicatio, & divisio, ob numeros septem, vel octo characteribus constantes, multum laboris, & tædii importare solet; hinc est, quod Joannes Neperus Scotus, vir numquam satis laudandus, alios numeros pro sinibus, tangentibus, & secantibus excogitavit, & ann. 1620 promulgavit, quorum ope sola additio præstat omne id, quod præstare solebat multiplicatio, & subtractio idem efficit, quod divisio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & usum hic brevissime explicamus.

## L E M M A T A.

I. In progressionem Arithmetica quatuor terminorum summa duorum extremorum æquatur mediorum summæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit  $4 + 1 = 2 + 3$ .

Coroll. Hinc ut habeatur quartus Arithmetice proportionalis, ex summa secundi, & tertii termini aufertur terminus primus, residuum dat quartum Arithmetice proportionalem quæsitum.

II. In progressionem Arithmetica trium terminorum, summa duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati sint 2, 5, 8, erit  $2 + 8 = 10$ .

Coroll. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habeatur tertius, ex duplo secundi aufertur primus. Sic  $10 - 2 = 8$ .

Co-

Corol. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, si accipiatur eorum summæ semissis. Sint dati 2 & 8, eorum summæ semissis 5 est medius Arithmetice proportionalis, ut patet.

PROPOSITIO I.

*De natura Log-morum, eorumque inventione.*

Log-mi sunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, seu respondentis numeris Geometricæ proportionalibus: vel sunt numeri, qui Arithmetice, ubi ii, quorum isti sunt Log-mi, Geometricam servant proportionem. Ut si concipiatur series quæcunque numerorum Geometricæ proportionalium, ut in *A*, cui respondeat alia series numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui crescant ut in *B* & *C*, vel decrescant, ut in *D*; omnes hi numeri *B*, *C*, *D*, dicuntur Log-mi numerorum in *A* existentium.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>M</i>	<i>N</i>
1	1	3	100	1	0.00000000
2	2	5	90	10	1.00000000
4	3	7	80	100	2.00000000
8	4	9	70	1000	3.00000000
16	5	11	60	10000	4.00000000
32	6	13	50	100000	5.00000000
64	7	15	40	1000000	6.00000000
128	8	17	30	10000000	7.00000000
256	9	19	20	100000000	8.00000000
512	10	21	10	1000000000	9.00000000
1024	11	23	0	10000000000	10.00000000

Quamvis autem Log-morum species possit assumi ad

ad libitum, ut diximus, præstantissima tamen, & commodissima est illa, quæ cifram, seu 0 ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliquibus cifris, nempe 8, vel septem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progressionem Arithmetica procedentibus, seu Log-mis illæ cifræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de sinu toto respectu sinuum, tangentium, & secantium, utque calculus facilius evadat.

Coroll. I. Ex eo quod Log-mus unitatis sit 0, sequitur Log-mum numeri, qui sit minor unitate, ut sunt fractiones, minorem esse quam 0, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & designatur nota —.

Coroll. II. Omnes Log-mi numerorum ab 1 ad 10 exclusive habent 0 pro prima nota: qui sunt inter 10, & 100 habent pro primo numero 1; qui vero sunt inter 100, & 1000 habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & sic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5, &c. dicuntur *characteristici*, sive *indicativi*: nam indicant quot figuris constat numerus absolutus, cujus sunt Log-mus, & puncto ab aliis separantur.

Coroll. III. Characteristica semper unitate minor est numero figurarum numeri absoluti. Hinc dato quovis numero absoluto v. g. 82050 quinque figurarum, statim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteristica, & sic de aliis.

## PROPOSITIO II.

*Si Log-mus unitatis sit 0, erit Log-mus facti equalis aggregato ex Log-mis factorum.*

Sit factum 24, cujus factores sunt 4 & 6, erunt qua-

quatuor termini Geometricè proportionales, *ex Defin. multiplicat.*,  $1 \cdot 4 :: 6 \cdot 24$ , eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, *ex Prop. 1.* Sed Log-mi extremorum 1, 24, æquantur Log-mis 4, 6, *per lemm. 1.* Log-mus unitatis ex hypothesi est 0; ergo si Log-mus unitatis sit 0, Log-mus facti æquatur summæ ex Log-mis efficientium 4 & 6. Quod &c.

Coroll. I. Hinc sequitur, Log-mum numeri compositi plani, seu solidi æqualem esse aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel solidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur summæ Log-morum 3 & 24, aut 6 & 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus consurgit numerus 72.

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum esse Log-mi ejus radicis, & Log-mum cubi triplum Log-mi suæ radicis: nam factores quadrati, & cubi sunt idem numerus bis, vel tertius sumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuscunque  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$  &c. divides per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4 &c. habebis Log-mum radicis ejusdem dignitatis. Contra si Log-mum datæ radicis multiplices per exponentem alicujus dignitatis, habebis Log-mum ejusdem dignitatis. Sic  $x^3 = 8$ , ejusque Log-mus ex tabulis 0.9030900: divide per exponentem 3 hunc Log-mum, quotus 0.3010300 erit Log-mus respondens radici 2; si vero Log-mum 0.3010300 multiplices per exponentem 3, habebis 0.9030900 Log-mum dignitatis  $x^3$ , seu cubi 8.

### PROPOSITIO III.

*Si Log-mus unitatis est 0, differentia Log-morum ducrum numerorum æquatur Log-mi quoti eorundem numerorum.*

Sint duo numeri 24 & 6, & differentia eorum  
Log.

Log-morum sit  $0.6020600$ , dico hanc esse Log-mum quoti eorundem, nempe  $4$ . Nam cum sit divisor ad dividendum, ex *Defin. divis.*, ut unitas ad quotum, erunt quatuor termini Geometricè proportionales  $6. 24 :: 1. 4$ , eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo, per *lem. 1. hujus*, Log mi numerorum  $24$ , &  $1$  æquantur Log-mis extremorum  $4$  &  $6$ ; sed ex hypothese Log-mus unitatis est  $0$ , ergo si ex Log-mo numeri  $24$  auferatur Log-mus divisoris  $6$ , Log-mus residuus, seu differentia Log-morum  $24$  &  $6$ , erit æqualis Log-mo quoti, nempe  $0.6020600$ , qui respondet numero  $4$ , nempe quoto. Quod &c.

Coroll. Hinc habetur summam Log-morum divisoris, & quoti æqualem esse Log-mo dividendi.

#### PROPOSITIO IV.

*Numeri cujuscunque Log-mum invenire.*

Inveniendus sit Log-mus numeri  $7$ . Statuatur progressio Geometrica  $1, 10, 100, 1000$  &c. & assumantur Log-mi his terminis respondentes  $0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000$  &c. eo modo, quo dictum est in *Propos. 1. hujus*. Deinde unitatem  $A$ , & denarium  $B$  auge tot cifris, quot placuerit, ut  $7, 8, 9$  &c. (hic cifræ  $6$  adduntur) & inter  $A$  &  $B$  inveniatur medius proportionalis Geometricus  $C$ , per *Propos. 11. Cap. 6. Arithm.* erit hic minor numero septenario, qui etiam intelligi debet auctus tot cifris, quot aucta fuit unitas, nempe sex. Inveniatur ergo inter  $C$  minorem, &  $B$  majorem alius Geometricè proportionalis  $D$  per *Prop. cit.*, qui pariter cum sit minor, quam  $7.0000000$ ,

poterit inter ipsum $D$	$A$	$1.0000000$	$0.0000000$
minorem, & $B$ ma-	$C$	$3.162278$	$0.5000000$
jorem inveniri medius	$B$	$10.0000000$	$1.0000000$
Geometricè propor-			

tic.



C	3.162278	0.5000000	M	6.994015	0.8447266
D	5.623413	0.7500000	O	6.997936	0.8449707
B	10.000000	1.0000000	N	6.001883	0.8452148
D	5.623413	0.7500000	O	6.997936	0.8449707
E	7.498942	0.8750000	P	6.999915	0.8450928
B	10.000000	1.0000000	N	7.001883	0.8452148
D	5.623413	0.7500000	P	6.999915	0.8450928
F	6.493816	0.8125000	Q	7.000899	0.8451538
E	7.498942	0.8750000	N	7.001883	0.8452148
F	6.493816	0.8125000	P	6.999915	0.8450928
G	6.978306	0.8437500	R	7.000407	0.8451233
E	7.498942	0.8750000	Q	7.000899	0.8451538
G	6.978306	0.8437500	P	6.999915	0.8450928
H	7.233942	0.8593750	S	7.000161	0.8451080
E	7.498942	0.8750000	R	7.000407	0.8451233
G	6.978306	0.8437500	P	6.999915	0.8450928
I	7.104974	0.8515625	T	7.000038	0.8451004
H	7.233942	0.8593750	S	7.000161	0.8451080
G	6.978306	0.8437500	P	6.999915	0.8450928
K	7.041355	0.8476562	V	6.999977	0.8450966
I	7.104974	0.8515625	T	7.000038	0.8451004
G	6.978306	0.8437500	V	6.999977	0.8450966
L	7.009760	0.8457031	X	6.000007	0.8450985
K	7.041355	0.8476562	T	7.000038	0.8451004
G	6.978306	0.8437500	V	6.999977	0.8450966
M	6.994015	0.8447266	Y	6.999992	0.8450975
L	7.009760	0.8457031	X	6.000007	0.8450985
M	6.994015	0.8447266	Y	6.999992	0.8450975
N	7.001883	0.8452148	Z	7.000000	0.8450980
L	7.009760	0.8457031	X	7.000007	0.8450985

tionalis  $E$ , nempe 7.498942, qui major est ipso 7.000000; ideoque inter ipsum  $E$ , & proxime minorem  $D$  inveniatur medius Geometrice proportionalis  $F$ , qui minor est ipso  $E$ ; proinde inter  $F$  &  $E$  inveniri potest medius  $G$ , qui adhuc minor est ipso  $E$ . Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem inveniuntur medii Geometrice proportionales  $H, I, K, L, M, N$ , &c. donec tandem occurrat medius proportionalis  $Z = 7.000000$ , qui nullo penitus excessu, vel defectu differt ab ipso numero septenario.

Deinde sicuti inter  $A$  &  $B$  inventus fuit medius Geometrice proportionalis  $C$ , sic inter eorum Log-mos inveniatur medius Arithmetice proportionalis *per Coroll. 2. lemm. 2.* nempe 0.500000. Erit hic Log-mus ipsius numeri  $C$ . Eodem modo reperiri debent omnes alii Log-mi medii Geometrice proportionalibus  $D, E, F, G$  &c. respondentes: quo facto, habebis Log-mum numeri dati 7, nimirum 0.8450980.

Coroll. Hac methodo inveniuntur Log-mi numerorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c. Suppetunt tamen modi, quibus tantus labor immittitur. Nam invento Log-mo numeri v. g. 6. si hunc divides, semissis dat Log-mum numeri 3, *per Coroll. 2. & 3. Propos. 2. hujus*. Item invento Log-mo numeri 6, habetur Log-mus numeri 2, nam si divides 6 per 3, quotus est 2; subtracto igitur Log-mo numeri 6, residuum dat Log-mum quoti 2, *per Prop. 3. hujus*. Pariter subtrahendo Log-mum numeri 2 modo inventum a Log-mo numeri 10, habetur Log-mus quoti 5, *per Prop. 3. cit.*, & sic proportionaliter de aliis.

Coroll. Inventis Log-mis numerorum primorum, facile habentur Log-mi numerorum compositorum. Nam si Log-mum binarii duples, triples, quadruples &c. habebis Log-mos totius seriei 2, 4, 8, 16,

32,

32, &c. si idem facias cum Log-mo ternarii, habebis seriem Log-morum pro numeris 3, 9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compositus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi supponuntur jam cogniti; si addas eorum Log-mos, habebis Log-mos omnium numerorum per Prop. 2. hujus. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-mum, præter characteristicam, ut vides in *A* & *B*.

<i>A</i>			<i>B</i>	
1	0.0000000		3	0.4771212
10	1.0000000		30	1.4771212
100	2.0000000		300	2.4771212
1000	3.0000000		3000	3.4771212

Schol. Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, seu absolutis ab 1 usque ad 20000, & a 90000 usque ad 100000 primus construxit Henricus Bregius Anglus in Academia Oxoniensi ex consilio Jo. Neperi primi horum inventoris, Lacunam inter 20000 & 90000 mox implevit Adrianus Ulaeq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab 1 usque ad 10000.

PROPOSITIO V.

*Multiplicare duos numeros, qui minores sint quam 10000.*

Sint multiplicandi inter se duo numeri 144, & 64, quorum Log-mi ex tabulis 2. 1583625, & 1. 8061800, quæritur factum. Adde simul duos Log-mos inventos, summa dabit Log-mum 3. 9645425, cui in tabulis respondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144; & 64.

*De-*

*Demonst. patet ex Prop. 2. hujus.*

*Schol. Si summa duorum Logarithmorum superet 4.0000000, qui est maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus.*

### PROPOSITIO VI.

*Numerum integrum minorem, quam 10000 per alium dividere.*

Sit numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis est 3.8645425. Divisor sit 64, cujus Log-mus est 1.8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi subtrahere Log-mum divisoris, Log-mus residuus, nempe 2.1583625, in tabulis quæsitus dat quotum 144.

*Demonst. patet ex Prop. 3. hujus.*

*Schol. Cum Log-mus ille residuus non invenitur in tabulis præcise, signum est, quoto minutiam aliquam adherere, quæ quanta sit, reperietur, ut mox docebimus.*

### PROPOSITIO VII.

*Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.*

Sint dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus secundi addatur Log-mo tertii, & a summa subtrahatur Log-mus primi, Log-mus residuus dat in tabulis numerum quæsitum.

*Demonst. patet ex lemm. 1.*

PRO-

## PROPOSITIO VIII.

Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, sed numerum 10, 000 000 non excedentibus.

Sit numerus datus 923754, cujus Log-mus quaeritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex residuis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cifris, quot sunt ipsæ figuræ residuæ, nempe  $\frac{54}{1000}$ .

2. Log-mus jam inventus subtrahatur a Log-mo proxime sequenti, nempe a Log-mo numeri 9238.

Num. 9238, Log. 3.9655779

Num. 9237, Log. 3.9655309

Diff. Log. ——— 470

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Log-morum 470 ad quartum proportionalem 253  $\frac{80}{1000}$ .

4. Adde 253 ( fractio negligi potest ) Log-mo primum invento, fiet Log-mus 3.9655562.

5. Tandem characteristica tot unitatibus augeatur, quot sunt cifræ in divisore ( ut hic 2 ) erit Log-mus quaesitus 5.9655562.

*Demonstr.* Certum est, quod si numerus 9237 cresceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis est differentia duorum Log-morum se integra unitate superantium: sed crescit tantum  $\frac{54}{1000}$ , nam divisus per 100, quotus est 9237  $\frac{54}{1000}$ ; ergo per regulam proportionum, inqui-

K

ren-

readum est, quantum augeri debeat Log mus ejusdem numeri 9237 ratione earum partium  $\frac{34}{100}$ , quæ quidem minus sunt, quam integra unitas, seu  $\frac{100}{100}$ . Instituta itaque regula proportionum, invenitur Log-mum primo inventum, nempe 3.9655309, augendum esse partibus 253, fitque Logarithmus 3.9655562 pro numero 9237  $\frac{34}{100}$ .

Demum characteristica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cifrae fuerunt in divisore (ut hinc 2) ob divisorem 100. Nam numerus datus cum divisus sit per 100, est numerus quotus: sed per Coroll. Prop. 3. hujus, summa Log-morum divisoris & quoti æqualis est Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Log-mus dividendi 923754, addi debet Log-mo quoti 3.9655562 Log-mus divisoris 100, nempe 2.0000000, quod, ut compendiosius fiat, satis est augere characteristicam duabus unitatibus, ut patet.

Coroll. I. Si daretur numerus major, quam 10,000,000 (quod in praxi vix contingit) hæc regula non sufficeret. Nam crescentibus numeris absolutis, differentia Logarithmorum decrescunt, ita ut tandem evanescant, & fiant omnino æquales ipsi Logarithmi. Sic numeri 2656385774, & 2656385775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log-mum 9.4242911, ut ex tabulis majoribus Briggii apparet. Ideoque institui non posset regula proportionum, cum desit differentia Log-morum.

Coroll. II. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log-mi supputati ad denarii Log-mum 1.0000000, ut in tabulis communibus factum est, sunt inter se æquales. Quapropter si daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, sufficeret pro ejus Log-mo sumere Log-mum primarum decem figurarum, quod notasse valde utile erit.

Schol. Si numerus datus dividi potest per quoscunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam  
10000,

10000, summa Log-morum divisoris & quoti dat Log-mum numeri dati. Sit numerus datus 12456, divide per 3. fit 4152, adde simul Log-mum numeri 3, nempe 0.4771212, & Log-mum numeri 4152, nempe 3.6182573, summa 4.0953785 dat Log-mum dati numeri.

Similiter sit numerus datus 98796, divide per 2 fit 49398, & hunc iterum per 2 fit 24699, & hunc per 3 fit 8233, qui minor est quam 10000; adde simul Log-mos omnium divisorum 2, 2, 3, seu (idem enim est) per Cor. 1. Prop. 2. hujus, sume Log-mum numeri solidi compositi ex 2, 2, 3, idest 12, qui est 1.0791812, cui adde Logarithmum ultimi quoti, nempe 8233, qui est 3.9155581: summa 4.9947393 est Log-mus dati numeri 98796.

## PROPOSITIO IX.

Data fractionis Log-mum invenire.

1. Subtrahe Log-mum numeratoris e Log-mo denominatoris, & residuo Log-mo præpone signum subtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis  $\frac{2}{5}$ .

$$\text{Log. 5.} = 0.6989700$$

$$\text{Log. 2.} = 0.3010300$$

---


$$\text{Log. } \frac{2}{5} = -0.3979400$$

2. Si fractionis datae numerator sit major denominatore, ut  $\frac{9}{5}$  subtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; residuum dat Log-mum quaesitum.

$$\text{Log. 9.} = 0.9542425$$

$$\text{Log. 5.} = 0.6989700$$

---


$$\text{Log. } \frac{9}{5} = 0.2552725$$

K 2

3. Si

3. Si vero fractio data integris adhæreat, integra reducantur in unam fractionem, & eodem modo habebitur Log-mus, ut  $3\frac{2}{7}$  fiant  $\frac{23}{7}$ , erit

$$\text{Log. } 23 = 1.3617278$$

$$\text{Log. } 7 = 0.8450980$$

---


$$\text{Log. } 3\frac{2}{7} = 0.5166298$$

Similiter quæritur Log-mus numeri  $354\frac{3}{4}$ , reduc numerum datum ad fractionem, erit  $\frac{1419}{4}$ , & aufer Log-mum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Logarithmus quæsitus.

$$\text{Log. } 1419 = 3.1519824$$

$$\text{Log. } 4 = 0.6020600$$

---


$$\text{Log. } \frac{1419}{4} = 2.5499224$$

Ratio regulæ est, quia cum fractio sit quotus proveniens ex divisione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti est æqualis, per Prop. 3. hujus, differentia Log-morum divisoris & dividendi, idest numeratoris & denominatoris, ideoque ubi numerator minor est denominatore, ac proinde per eum dividi non potest, Log-mus major e minori subtrahendus est: quo in casu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis signum negativum —. Quod &c.

Log-mus integri cum fracto potest etiam haberi sic. Sit numerus datus  $3560\frac{3}{4}$ , sume differentiam Log-morum numeri 3560, & numeri Log-mus est 3.5514500; secundi numeri est 3.5515720, differentia erit 1220. Dic jam per regulam proportionum, ut 4 ad 3, ita 1220 ad 915. Adde 915 ad Log-mum numeri 3560, nempe 3.5514500, habebis Logarithmum integri cum fractione, sc. 3.5515415. Quod &c. PRO.



## PROPOSITIO X.

*Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non existit, invenire numerum ei respondentem.*

Si Characteristica dati Log-mi sit 0, vel 1, vel 2, mutetur in 3, & quærat<sup>r</sup> inter 1000, & 10000 Log-mus, qui sit proxime minor Log-mo dato, habebitur numerus quæsitus, tot fractiones decimales adjunctas habens, quot unitates Characteristicæ accesserunt.

Sic datus Log-mus 1. 9201662, qui non reperitur exacte in tabulis, Characteristica 1 fiat 3, erit 3. 9201662. Quære hunc inter 1000, & 10000, invenies numerum 8320 respondentem Log-mo 3. 9201233, qui est proxime minor Log-mo dato, ut patet. Numerus ergo quæsitus erit  $83 \frac{20}{1000}$ , ob duas videlicet unitates, quibus aucta fuit Characteristica.

Si Log-mus datus habeat Characteristicam 3, & non reperiatur accurate in tabulis, ut Log-mus 3. 5163954, erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 respondentem Logarithmo 3. 5162709, qui est proxime minor Log-mo dato.
2. Subtrahæ hunc Log-mum a proxime sequenti 3. 5164031, & fiet differentia prima 1322.
3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipsomet Log-mo dato, erit secunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad secundam 1245, ita denominator futuræ fractionis ad libitum assumptus 100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94, erit ergo numerus quæsitus Log-mi dati  $3282 \frac{94}{1000}$ .

*Demonstr.* Eodem fere modo, quo *Prop. 8. hujus.*

K 3

Nam

Nam differentia Log-morum prima est differentia unitatis, quæ ita se habet ad differentiam secundam, Log-mi scilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Logarithmorum differentia sunt minores, ac proinde, quæ capienda est pars proportionalis, ibi exactior habetur.

Schol. Ubi tamen in minimis scrupulosi non sumus, ad praxim satis est sumere numerum respondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejusmodi negligere.

### PROPOSITIO XI.

*Dato Logarithmo defectivo, numerum ei respondentem invenire.*

Sit datus Log-mus defectivus — 0.2218488, quæritur fractio, quæ ei respondeat.

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel 1000, vel 10000 e cujus Log-mo 2.00000000, vel 3.00000000, vel 4.00000000 subtrahe datum Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum respondentem Log-mo residuo 2.7781512, qui dat 600 pro numeratore quæsitæ fractionis; habes ergo  $\frac{600}{1000}$ , seu  $\frac{3}{5}$ .

$$\begin{array}{r} \text{Log. num. } 1000. = 3.00000000 \\ \text{Log. def.} = - 0.2218488 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{r} \text{Log. res.} = 2.7781512, \text{ qui dat} \\ 600. \text{ Est ergo } \frac{600}{1000}, \text{ seu } \frac{3}{5}. \end{array}$$

Similiter sit Log-mus defectivus — 0.3679767, quem subtrahe ex 4.0000000, residuum 3.6320233 in

151

CAP. VIII. PROP. XI.

in tabulis quæsitum dat 4285, pro numeratore fractionis. Habes ergo  $\frac{4285}{10000}$ .

$$\text{Log. num. } 10000 = 4.0000000$$

$$\text{Log. def.} = -0.3679767$$

$$\text{Log. resid.} = 3.6320233, \text{ qui dat } 4285 \text{ proxime. Est ergo } \frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}.$$

*Demonstr. ut Propos. 9.*

P R O P O S I T I O XII.

*Dato Log-mo excedente Log-num 4.00000000 numerum ei congruum invenire.*

1. A dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut scilicet residuum sit proxime minus Log-mo 4.00000000, qui est tabularum maximus.

2. Quærat ex tabulis numerus conveniens huic residuo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus ablatu fuit a Log-mo dato, factum est numerus quæsitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7.8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc est 4.00000000, relinquetur Log-mus 3.8372413, cui ex tabulis respondet numerus 6874 cum fractione  $\frac{5032}{10000}$ , per Prop. 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæsitus 68745032.

$$\text{Log. } 7.8372413$$

$$\text{Log. } 4.0000000$$

$$\text{Log. } 3.8372413, \text{ qui dat } 6874 \frac{5032}{10000}$$

*Duc in 10000, fit 68745032.*

K 4

Si

Similiter fit datus Log-mus 8. 2718416, ex quo aufer Logarithmum 4. 0000000; remanet 4. 2718416, qui adhuc major est, quam 4. 0000000. E residuo igitur Log-mo 4. 2718416 rursus aufer 1. 0000000, remanet 3. 2718416, cui ex tabulis respondet numerus 1870, quem multiplica per 10000, & ulterius per 10, factum 187000000 erit numerus quæsitus.

*Demonstr.* Subducere Log-mum numeri 10, 100, 1000 &c. a Log-mo dato, est idem ac numerum quæsitum dividere, per 10, vel 100, vel 1000 &c. erit ergo divisor 10, vel 100 &c. ad dividendum, quem voco *Z*, ut unitas ad quotum; ergo per *Prop. 3. hujus*, differentia Log-morum divisoris, & dividendi, (hoc est in secundo exemplo Log-mus 3. 2718416) æquatur Log mo quoti, cui ex tabulis respondet numerus 1870. Cum igitur sint proportionalia 100000 ad *Z*, ita 1 ad 1870; duo extrema ad invicem multiplicata æqualia sunt mediis per *Propos. 16. lib. 6. Eucl.*, idest  $Z = 187000000$ . Quod &c.

*Schol.* Cum residuum ex divisione superat dimidium divisoris, additur quoto unitas. Sic in priori exemplo pro quoto 5031, sumitur 5032. Nam divisus 3180000 per 632 remanet 408. Quod pro hujusmodi calculis nota. Quæ sequuntur, Trigonometriæ doctrinam supponunt.

## PROPOSITIO XIII.

*Dati cujuscunque Sinus Log-mum invenire.*

Ut Log-mi Sinuum accuratiores inveniantur, supponitur Sinus constructos fuisse ad radium saltem 10000000000, & tribus deinde ultimis notis multatos, quales sunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic Sinus ex. gr. grad. 5. supputatus ad Sinum

num totum 10000000000 est 871557427, qui in tabulis multatus reperitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet considerari debeat tanquam numerus aliquis absolutus, & vulgaris, Log-mi Sinuum quorumcunque habentur per *Propos. 8. hujus*. Sed ut facilius, & accuratior quoque sit eorum inventio, necesse erit ad manum habere majorem Log-morum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri potest, notas ascendant.

Log-mi autem Sinuum respicere debent Sinus ipsos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, respectu scilicet ad sinum totum 10000000000. Sinus itaque ex gr. grad. 5, qui in tabulis Ulacq est 871557, habet pro suo Log-mo 8.9402960.

Pariter grad. 61. 50' Sinus est 8815782, Log-mus vero 9.9452609. Ex Characteristica enim, quæ semper unitate minor esse debet numero figurarum ipsius sinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit sinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus grad. 23, qui supputatus ad Sinum totum 10000000000 est 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Log-morum numerus, qui respondeat quinque notis ad sinistram, cujus Log-mus est 4.5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop. 8.*, inventa differentia Log-morum numeri 39073, & 39074 proxime sequentis, quæ est 111; dic ut 100000 ad 111, ita notæ residuæ dati Sinus 11284 ad quartum proportionalem, nempe 12, qui si addatur Log-mo jam invento 4.5918768, prodit Log-mus quæsitus, hoc est 9.5918780, mutata Characteristica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus; atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

Coroll. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10.0000000, ex quo si Log-mus aliquis auferatur, residuum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut si  
ex

ex ipſo Sinu toto 10.0000000 auferatur Log-mus Sinus grad.23, nempe 9.5918780, reſiduum 0.4081220 dicitur complementum Arithmeticum ejuſdem Sinus, quo utemur inferius.

### P R O P O S I T I O X I V.

*Invenire Log-mum Tangentium, & Secantium  
dati arcus.*

Tangentium, & Secantium Log-mi inveniri poſſunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, ſed compendioſius habentur ſic.

1. Sume Log-mum Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A ſumma aufer Log-mum complementi ejuſdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, reſiduus erit Log-mus Tangentis quaſitus. Inveniendus ſit Log-mus Tangentis grad. 23.

*Adde Log. ſin. 23. = 9.5918780*  
*Log. ſin. tot. = 10.0000000*

Summa 19.5918780  
*Log. complem. 9.9640261*

Tangen. Log. 9.6278519

*Demonſt.* patet ex *Probl 6. Trigonometriæ Tacquet*, in qua oſtenſum fuit, ita ſe habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejuſdem arcus, ut Sinus totus ad Tangentem quaſitam: quæ ut inveniatur, adduntur ſecundus & tertius terminus, & a ſumma ſubtrahitur primus *per Prop. 7. hujus*.

2. At vero pro inveniendis Secantibus dati arcus, duplari debet Log-mus Sinus totius, & ex duplo auferri Sinus complementi ejuſdem arcus, nam reſiduum dabit Log-mum Secantis quaſitæ. Sit exemplum.

plum . Quæritur Log-mus Secantis pro dato arcu grad. 23.

$$\text{Log. sin. tot.} = 10.0000000$$

2

---


$$\text{Ejus duplum} = 20.0000000$$

$$\text{Log. sin. compl.} = 9.9640261$$


---

$$\text{Secan. Log.} = 10.0359739$$

*Demonst. ex Probl. 6. cit. deducitur .* Nam sunt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæsitæ, ut ibi ostenditur. Ut ergo habeatur tertius Arithmetice proportionalis, illis respondens, hoc est Log-mus Secantis, ex duplo secundi termini aufertur primus, *per Cor. 1. lemm. 2.*

*Coroll. I.* Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus, Tangentis, vel Secantis, signum est, illum præter minuta prima, continere etiam secunda, quæ si quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop. 10.* pro invenendis fractionibus. Quod si ea diligentia opus non sit, satis erit sumere gradus cum minutis primis, quæ Log-mo proxime minori respondet.

*Coroll. II.* In Tab. Ulacq Log-mi Sinuum non habent Characteristicam majorem, quam 9. Proinde si, calculo absoluto, ex Log-morum additione resultet Characteristica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a sinistris abjicitur, fitque Characteristica 0, 2, 5 &c.

*Coroll. III.* Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45 minores sunt. A gradibus vero 45 usque ad 90 Log-morum Tangentes non habent Characteristicam majorem 13. Idcirco si, post additionem factam; Characteristica duabus constet figuris, tunc vel secunda figura excedit 3, & in hoc casu

casu abjicitur prima, sive sit unitas, sive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima, ut in *B* patet.

<i>A</i>		<i>B</i>
Tang. Log. 24. 6040812		Tang. Log. 21. 2162581
fit 4. 6040812		fit 11. 2162581

Schol. I. Regula Trium etiam per solam Log-morum additionem potest absolvi, si sumatur prioris termini complementum Arithmeticum, per Cor. Prop. 13., & ad duos reliquos addatur. Dati sint tres numeri proportionales 4, 60, 25, quæritur quartus. Prioris numeri 4 complementum Arithmeticum est 9. 3979400, addatur ad Log-mos duorum numerorum 60 & 25, summa dabit Log-mum quæsitum.

Num. 4. Compl. Arithm. 9. 3979400		
	Num. 60 Log. 1. 7781512	
	Num. 25 Log. 1. 3979400	
Summa 12. 5740312		

Fit (per Cor. 2.) 2. 5740312, dat in Tab. 375.

Schol. II. Si Sinus totus sit primus, vel unus ex terminis regulæ Trium, potest omitti: nam in primo casu est 0; & in secundo addit unitatem mox delendam.

Schol. III. Log-mi Sinuum vocantur absolute Log-mi, sed Log-mi Tangentium peculiari nomine Mesologarithmi, & Log-mi Secantium Tomologarithmi. In tabulis inveniri non solent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui possunt, ut vidimus, vel quia sine ipsis calculus bene potest institui. Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus secundus, & ab aliis Cosinus. Tangens & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans secunda, vel Cotangens, & Cosecans: que nomina si ignorentur, auctores Trigonometrici difficile intelliguntur.

Schol. IV. Log-morum usus patet in omnem fere  
Ma-



*Mathesin . Nos pauca hic Problemata delibabimus . Plura videri possunt apud Ulacq , Cavalerium , & alios .*

P R O B L . I .

*Dati numeri quadratum , vel cubum per Log-mos invenire .*

1. Datus sit numerus v. g. 18 , cujus quadratum quaeritur . Duplica numeri dati Log-mum , summa dabit Log-mum quadrati quaesiti .

Num. 18 , Log. 1. 2552725  
 1. 2552725

---

Summa 2. 5105450 , dat in Tab. quadr. 324.

2. Pro inveniendo ejuldem numeri 18 cubo , sume ter , seu multiplica per 3. Log-mum ipsius numeri , productum dabit Log-mum cubi quaesiti .

Num. 18 , Log. 1. 2552725 /  
 3

---

3. 7658175 , dat in Tab. cubum 5832

Coroll. Hinc apparet ratio , cur ad extrahendam ex quocunque dato numero radicem quadratam , vel cubicam , accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata , aut tertia pars pro radice cubica ; cum quadratum ex Log-mo bis sumpto , cubus vero ex Log-mo ter sumpto prodeat . Item quarta , quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis .

P R O B L . II .

*Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios proportionales .*

1. Inveniendus sit medius proportionalis inter 20 , &

& 320. Adde eorum Log-mos, dimidiæ summæ Log-mus dat medium proportionalem quæsitum 80.

Num. 20, Log. 1. 3010300

Num. 320, Log. 2. 5051500

Summa Log. 3. 8061800

Dimid. Log. 1. 9030900, dat in Tab. 80.

Est autem  $\therefore$  20, 80, 320.

2. Inveniendi sint inter duos numeros datos duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii proportionales; regula generalis est: aufer Log-mum numeri minoris ex Log-mo numeri majoris, & hujus residui tertiam partem, si duo medii quærantur; vel quartam, si tres; vel quintam, si quatuor, adde Log-mo numeri minoris, nam summæ Log-mus dabit in Tab. medium proportionalem, qui proxime consequitur numerum datum minorem.

3. Ut habeantur medii proportionales reliqui, adde summæ præcedenti eandem tertiam, vel quartam, vel quintam Log-mi partem, summa dabit in Tab. reliquos medios proportionales quæsitos, ut exempla, quæ sequuntur, rem satis illustrent. Signa + & — additionem, & subtractionem indicant. Q vero Log-mum quoti addendum.

4. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

Num. 120, Log. 2. 0791812

Num. 15, Log. — 1. 1760913

Resid. 0. 9030899

Divid. per 3, dat Q. 0. 3010299

Num. 15, Log. + 1. 1760913

Summa Log. 1. 4771212, dat in Tab. 30

Q. Log. + 0. 3010299

Summa Log. 1. 7781511, dat in Tab. 60

Sunt ergo  $\therefore$  15, 30, 60, 120, ut patet.

5. Quæ-

5. Quærentur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

Num. 1620, Log. 3. 2095150

Num. 20, Log. — 1. 3010300

Resid. 1. 9084850

Divid. per 4, dat Q. 0. 4771212

Adde num. 20, Log. + 1. 3010300

Summæ Log. 1. 7781512, dat in Tab. 60

Q. Log. + 0. 4771212

Summæ Log. 2. 2552724, dat in Tab. 180

Q. Log. + 0. 4771212

Summæ Log. 2. 7323936, dat in Tab. 540

Sunt ergo in continua proportione  $\therefore$  20, 60, 180, 540, 1620.

Schol. Hæc sane pulcherrima Log-morum praxis ob sui facilitatem & brevitatem mihi tanti esse videtur, ut propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiscendam esse putem. Unum aliquem ejus usum ex innumeris, qui offerri possent, indicabimus in sequenti Probl. num. 5.

### P R O B L. III.

Questiones aliquot Arithmeticae per Log-mos expediuntur.

1. Dantur scenori scuta 500, & ex singulis 100 lucrum est scutorum 5, quæritur quot annis ea fors duplicabitur,

Ex Log-mo numeri 100 subtrahe Log-mum nume-

meri 3, Log-mus residuus in Tab. dat annos quæ-  
sitos.

Num. 100, Log. 2. 0000000

Num. 5, Log. 0. 6989700

Log. resid. 1. 3010300, dat in Tab. 20

Quod quidem manifestum est: nam si scuta 100  
anno 1 dant 5, scuta 500 annis 20 dant 500 per  
regulam proportionum compositam ex *Prop. 2. Cap.*  
*6. Arith.*

Coroll. Si tempus, quo fors illa duplicatur, ut  
supra inventum divides per 2, per 4, vel 5 &c.  
habebis tempus, quo fortis ejusdem dimidium, seu  
quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo  
annos 30 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requi-  
ritur ad lucranda ejusdem fortis quartam partem,  
hoc est scuta 125, ut patet.

2. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum  
10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat  
singulis annis, fiat ex fœnore auctio fortis. Nihil  
fuit solutum toto triennio. Quæritur quantum debeat,  
ut propositum fuit in *Propos. 13. Arithm. num. 5.*

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio fortis ad  
sortem una cum fœnore  $\frac{110}{100}$ , seu  $\frac{11}{10}$ . Auferatur  
numeri 10 Log-mus 1. 0000000 ex numeri 11 +  
Log-mo 1.0413927, residuum, seu Log-mus 0.0413927  
erit ratio fortis ad sortem una cum fœnore unius  
anni. Sumatur ergo hujus residui Log-mus toties,  
quot sunt anni (ut hic ter) eique addatur fortis  
500 Log-mus 2.6989700; summæ Log-mus 2.8231481  
in Tab. quæsitus dabit pro sorte & usura ejus trien-  
nii aureos 665 cum dimidio circiter ut in *Propos. cit.*  
fuit inventum.

Num.

Num.  $\frac{1}{100}$  Log. 1. 0413927

0. Log. 1. 0000000

Resid. Log. 0. 0413927

Anni 3 3

Log. 0. 1241781

Sortis 500 Log. 2. 6989700

Summa Log. 2. 8231481, dat 665  $\frac{1265}{10000}$ .

3. Pupilli alicujus bona, quæ æstimata fuerunt scutorum 1600, accepit Hortensius pacto augendi quotannis sortem ex fructibus ad rationem scutorum 5 in singula centena. Retinuit illa annis 6, mensibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum scuta 100 fiant 105, erit proportio sortis ad sortem una cum fœnore  $\frac{105}{100}$ , seu (dividendo per 5)  $\frac{21}{20}$ . Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21. Log-mo 1. 3222193, residuum 0. 0211893 erit ratio sortis ad sortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 sumi debet sexies, seu duci in 6, fitque 0. 1271358.

Ut habeantur menses, ac dies, dividatur Log-mus ille residuus 0. 0211893 per 12, quotus 0. 0017657 dat Log-mum, quinquies sumendum pro 5 mensibus datis, nempe 0. 0088285. Hic deinde divisus per  $30 \frac{1}{2}$  dat Log-mum 0. 000579, qui sumendus est decies pro diebus 10, fitque 0. 0005790. Addatur his Log-mus 3. 2041200 pro sorte scutorum 1600, habetur ex horum summa Log-mus 3. 3406633, qui in Tab. quæritus dat numerum, seu scuta 2191 pupillo ipsi ab Hortensio debita.

L

Pro

## DE LOGARITHMIS

<i>Pro annis</i>	6	Log.	0. 1271358
<i>Pro mens.</i>	5	Log.	0. 0088285
<i>Pro diebus</i>	10	Log.	0. 0005790
<i>Pro sorte</i>	1600	Log.	3. 2041200

*Summa* 3. 3406633, *dat* 2191.

4. Fingamus eundem Hortensium debere alteri summam illam scut. 1600 solvendam post annos 6, menses 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, siquidem scuta 5 ex singulis 100 a creditore sibi relaxentur. Quæritur quantum debeat solvere.

Hæc quæstio eadem ratione solvitur, dummodo ex Log mo 3. 2041200 sortis 1600 auferatur summa Log morum pro annis 6, mensibus 5, diebus 10, ut supra inventa, nempe 0. 1365433. Nam residuus Log. mus 3. 0675767 in Tab. quæsitus dat summam solvendam scut. 1168.

<i>Pro annis</i>	6	Log.	0. 1271358
<i>Pro mens.</i>	5	Log.	0. 0088285
<i>Pro diebus</i>	10	Log.	0. 0005790

*Summa* — 0. 1365433

*Scut. 1600 Log. +* 3. 2041200

*Resid.* 3. 0675767, *dat* 1168.

5. Scuta 1000, quæ scenori data fuerant, restituantur post annos sex una cum annuis usurarum usuris, quæ simul cum sorte conficiunt summam scut. 1340; quæritur singulorum annorum usura cum ipsa sorte, & quanta fuerit ex singulis 100 usura.

Inveniantur inter duos numeros 1000 & 1340 tot medi proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) per *Probl. 2.* Dabunt illi summas quæsitæ, hoc est sortem una cum uniuscunq; anni usura. Ea totius operationis typus.

*Scu.*

CAP. VIII. PROBL. III.

163

Scuta 1340, Log. 3. 1271048  
 Scuta 1000, Log. — 3. 0000000

Resid. 0. 1271048

Divide per 6, dat Q. 0. 0211841

Log-mus sextæ partis, quem voco Q, addatur primum Log-mo sortis 1000, summa dabit Log-mum pro sorte, & usura primi anni A. Adde deinde huic summæ Log-mum ipsum Q, nova summa dabit Log-mum pro sorte & usura secundi anni B; & sic deinceps addendo præcedenti summæ Log-mum eundem Q, aggregatum dat Log-mum pro sorte & lucro annorum C, D, E &c.

Log.	3. 0000000	
Q. Log. +	0. 0211841	<u>          </u>
		<b>A</b>
Log.	3. 0211841	dat sc. 1050
Q. Log. +	0. 0211841	<u>          </u>
		<b>B</b>
Log.	3. 0423682	dat sc. 1102
Q. Log. +	0. 0211841	<u>          </u>
		<b>C</b>
Log.	3. 0635523	dat sc. 1157
Q. Log. +	0. 0211841	<u>          </u>
		<b>D</b>
Log.	3. 0847364	dat. sc. 1215
Q. Log. +	0. 0211841	<u>          </u>
		<b>E</b>
Log.	3. 1059205	dat sc. 1276
Q. Log. +	0. 0211841	<u>          </u>
		<b>F</b>
Log.	3. 1271046	dat sc. 1340

Inventa autem usura primi anni A una cum sorte, scutis scilicet 1050, statim innotescit quanta fuerit ex singulis 100 usura. Nam si 1000 fiunt 1050, scuta 100 per regulam proportionum fiunt

L 2

105,

105, adeoque usura fuit scut. 5 ex singulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur ex *Coroll. Prop. 13. Cap. 6. Arithm.*, & ex præc. *Probl.*

### P R O B L. IV.

*Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.*

1. *Experientia constat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli semirecti, seu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo semirecto æqualiter distantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales esse. Sit igitur experimento cognitum ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, explosum fuisse globum ad distantiam passuum 4000; quæritur, quanta futura sit distantia ( eadem pyrii pulveris quantitate ac vi servata ) ad datam elevationem gr. 30.*

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut sinus totus ad sinum anguli 30 duplicati, seu 60, ita passus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Schol. 1. & 2. Prop. 14.*

<i>Gr.</i>	60,	<i>Log.</i>	9.	9375306
<i>Pass.</i>	4000,	<i>Log.</i>	3.	6020600

Summa 13. 5395906

*Fit ( Cor. 2. Prop. 14 ) 3. 5395906, dat pass. 3464.*

2. *Quod si e converso data scopi distantia, ex. gr. passuum 1500, ad quem ictus est dirigendus, quærat in ipsomet tormento elevationis angulus; si t ut distantia maximi ictus, ex. gr. passuum 4000, ad elevationem gr. 45, ita distantia data passuum 1500 ad angulum elevationis quæsitæ. Itaque duplicato angulo 45, ut in primo calu factum est, erit per *Schol. 1. & 2. Prop. 14.**

*Pass.*



CAP. VIII. PROBL. IV.

165

Pass. 4000 Compl. Arithm. 6. 3979400  
 Pass. 1500 Log. 3. 1760913

---

Summa 9. 5740313, dat. gr. 22. 1'.

Schol. Quam singulari facilitate per Log-mos confici possint Tabulæ, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari possint, quæque ad utranque huius problematis partem maxime inserviant, facile est intelligere.

PROBL. V.

Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum invenire.

Statue in plano aliquo horizontali stylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipsum planum, qui divisus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Calendaria innotescit) metire umbram, quam projicit stylus; sitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum stylus continet 100. Erit per *Probl. 5. Tacquet Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad styli longitudinem 100, ita longitudo ipsius umbræ, prout est Sinus totus, ad longitudinem styli, prout est Tangens anguli altitudinis Solis, seu Æquatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 19', nempe per *Schol. 1. Q. 2. Prop. 14.*

Long. 89. Compl. Arithm. 8. 0506100  
 Long. 100. Log. 2. 0000000

---

Tangens 10. 0506100, dat. gr. 48. 19'.

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 41', est altitudo Poli Urbis Romæ quæsitæ, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inven-

ta est gr. 41. 54', seu gr. 42 proxime. Proinde Æquatoris altitudo Romæ est gr. 48.

Schol. I. Ceterum plures sunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per stellas elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam sit maxime necessarium, & Astronomiæ universæ sit veluti basis & fundamentum.

Schol. II. Ut habeantur altitudines meridianæ signorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Æquatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Astronomicis passim occurrunt. Sic declinatio Solis in principio signorum Borealium ♈ & ♉ est gr. 11. 30'. Hos adde ad Æquatoris altitudinem, quæ Romæ, ut diximus, est gr. 48, erit altitudo meridianæ Solis ♈ & ♉ initium ingressi gr. 59. 30'. Quod si altitudinem meridianam Solis quæras pro initio signorum Australium ♋ & ♌, subtrahere ab Æquatoris altitudine, nempe ex. gr. 48, eorum declinationem, quæ est gr. 20. 12', residuum dat gr. 27. 48'. pro altitudine meridianæ quæsitæ.

## P R O B L. VI.

*In linea meridianæ Zodiaci signa describere.*

Ducta in aliquo plano horizontali linea meridianæ, prout in elementis Sphæricis docetur, quam singulis diebus Sol per foramen exiguum transiens, in ipso meridiei momento tangat, describenda sint in illa Zodiaci signa, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoscendum tempus, quo Sol ea signa ingreditur, atque percurrit.

Metire altitudinem gnomonis, seu muri usque ad foramen illud, per quod Sol transit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet mensura. Tum inventis altitudinibus meridianis signorum Cœlestium, per Schol. 2. Probl. 5., habebis earum complementa, & complementorum ipsorum Mesolog. mos, seu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout est Sinus

totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis signi, seu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus distabit ab initio lineæ meridianæ signi cœlestis locus in ipsamet linea meridiana designandus.

*Sit exemplum.* Cinomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani iussu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Francisco Blanchino ejusdem Pontificis Prælato domestico constructus anno 1702, in quo quidem altitudo muri usque ad foramen, per quod transit radius Solaris, est unciarum 750 pedis regii Parisiensis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inserta est. Fingamus huic Zodiaci signa ♈ & ♎ (nam bina simul describuntur) esse a nobis inscribenda, seu querendum esse punctum, quod Sol tangit, ubi signa illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem signorum est gr. 27. 48', per Schol. 2. Probl. 5., eorumque complementum gr. 62. 12'. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10. 2779915. Fiat ergo ut altitudo muri, prout est Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10. 2779915, ita eadem muri altitudo, prout est unciarum 750 Log mus, ad Log-mum pro unciis quæsitis. Erit per Schol. 1. Prop. 14.

Complem. Tang. 10. 2779915  
 Unc. 750 Log. 2. 875063

Summa 13. 1530528

Fit ( Cor. 2. Prop. 14. ) 3. 1530528, dat unc. 1422

Distabunt igitur signa ♈ & ♎ a principio lineæ meridianæ unciis 1422 pedis ejusdem Parisiensis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci signorum in ipsa linea meridiana locus designabitur.

L 4 AP.

## A P P E N D I X

*Praxem Chronologicarum.*

**C**UM tempus ex Aristotele lib. 4. Physic. Cap. 11. sit numerus, seu mensura motus secundum prius & posterius, non erit abs re hic praxes aliquot Chronologicas subijcere, quæ a numeratione temporis, seu motuum Cœlestium Solis, & Lunæ maxime pendent, quas quidem non tam præclarum est scire, præsertim Ecclesiasticis viris, quam turpe nescire, id quod de Latina lingua inquit Cicero. Prænotandi igitur sunt primo termini aliquot Chronologici.

## D E F I N I T I O N E S.

1. *Cyclus*, seu *Periodus* est certus annorum numerus in orbem rediens. Tres præsertim sunt *Cycli* Solaris, Lunaris, & Indictionis.

2. *Cyclus Solaris* est intervallum annorum 28; quo evoluta, literæ Dominicales *A. B. C. D. E. F. G.* Calendario appositæ redeunt eodem ordine, quo antea, & ad easdem ferias.

3. *Cyclus Lunaris*, sive *aureus Numerus* est series annorum 19, qua completa, novilunia ad eundem diem regrediuntur. Dicitur *Numerus aureus*, quia Athenis in foro aureis literis quotannis inscribebatur ad novilunia indicanda.

4. *Indictio* est series annorum 15 in orbem rediens, post Constantini tempora, sive ab anno Christi 312, ut fama est, in usum recepta apud Græcos & Romanos; hoc discrimine, quod Indictio Romana a Kal. Januariis, Græca vero a Kal. Septemb. initium ducit.

5. *An.*

5. *Annus Julianus* a Julio Cæsare Dictatore dictus, qui Numæ regis annum emendavit, est dierum 365 hor. 6, quæ quidem horæ 6 singulis quatuor annis horas 24, seu diem solidum constituunt. Itaque annus Julianus, qui constat diebus 365, dicitur *communis*; qui vero diebus 366 singulis quadrienniis, *Bissextilis* dicitur, quod scilicet dies sextus ante Kal. Martias bis numeretur, seu intercaletur, unde dies, & annus *intercalares* vocantur.

6. *Annus Gregorianus* est annus Julianus a Gregorio XIII. Pontifice anno 1582. correctus, 10 diebus subductis. Differt a Juliano in hoc, quod post annum Christi 1600. e singulis annis centesimis, quæ omnes in Calendario Juliano bissextiles sunt, in Gregoriano tres primi, nempe 1700, 1800, & 1900 sunt communes, & solus quartus 2000 bissextilis erit.

7. *Epactæ* sunt dies undecim, qui addendi sunt ad annum lunarem, (qui constat diebus 354) ut adæquet annum solarem; qui est dierum 365, ut dictum est. Unde si hoc anno ex. gr. fuerit Epacta XI., sequenti anno erit XXII., sed tertio anno Epacta erit III. Nam quoties Epactæ hujusmodi additæ excedunt numerum 30, detrahitur numerus 30, & residuus numerus est Epacta illius anni. Si per additionem fiant 30, Epacta illius anni erit \*, seu nihil.

8. *Periodus Victoriana*, seu *Dionysiana* est series annorum 532 e Cyclo Solari 28 in Cyclum Lunarem 19 multiplicato contexta, qua peracta, iidem Cycli Solis & Lunæ iterum redeunt. Dicitur *Victoriana*, quod a Victore Aquitano anno Christi 457 instituta sit, vel *Dionysiana* a Dionysio quodam *Exiguo*, qui ad Ecclesiam Romanam cum Alexandrina circa celebrationem Paschatis conciliandam, illam adhibuit.

9. *Periodus Juliana* est series annorum 7980, quæ  
ex

ex Cyclorum Solis, Lunæ, & Indictionis multiplicatione oritur, sive est productum ex multiplicatione Periodi Victorianæ per Cyclum Indictionis, nempe annorum  $532 \times 15 = 5280$ ; in qua tres illi Cycli Solis, Lunæ, & Indictionis, qui in præfenti hoc anno conveniunt, in alio iterum non convenient, nisi post annos 7980 expletos. Dicitur Juliana, quod Julianis annis constet. Est Periodus omnium præstantissima, quæ incepit anno 710 ante Orbem conditum, & nondum est absoluta, a Josepho Scaligero excogitata.

10. *Epocha*, sive *Æra* est terminus, a quo anni numerantur. Sic *Æra Christiana*, qua nunc vulgo utimur, & vulgaris dicitur, numerat annos a Christi nativitate, seu potius ab ejus Circumcisione, hoc est a Kal. Januariis post orbem conditum annis 4004 juxta Cl. Usserii calculum.

Schol. I. *Loquimur hic de anno tam Solari, quam Lunari civili, qui ex integris diebus constant, non autem de anno Solari, aut Lunari Astronomico, qui præter dies, horas quoque & minuta prima, secunda, tertia &c. computat, quæ non sunt hujus loci.*

Schol. II. *Litera Dominicales ordine retrogrado procedunt, nempe G, F, E, D, C, B, A, ut si hoc anno litera dominicalis sit G proximo anno erit F, tertio E &c. usque ad A, quam G iterum sequitur. Ratio est, quia cum annus Julianus communis constet diebus 365, hoc est hebdomadibus 52, & præterea die 1, si prima Januarii dies designetur litera A, etiam ultima Decembris eadem litera A designabitur. Sit igitur tam primus, quam ultimus illius anni dies Dominicus, subsequens annus inchoabitur feria II, dies autem Dominicus hujus anni incidet in diem Januarii septimum; proinde litera Dominicalis non erit B, sed G. Tertius annus inchoabitur feria III, adeoque dies Dominicus cadet in diem 6 Januarii, & litera Dominicalis erit F, &*

## DEFINITIONES

171

*F, & sic de ceteris. Bissextilis autem annus duplici litera designatur eodemque ordine retrogrado, scilicet GF, FE, ED &c. ita ut non F, sed G priorum locum obtineat, & ad diem usque 23 Februarii usurpetur, altera vero F deinceps usque ad finem totius anni intercalaris.*

## P R A X I S I.

*An datus annus sit Bissextilis, vel quotus sit a Bissextili, invenire.*

Annun Christi datum divide per 4; si facta divisione, nihil remanet, ille annus Bissextilis est; si quis sit residuus, indicat, quotus annus sit a Bissextili. Sic annus, in quo hæc scribimus, 1748, quia divisus per 4, nihil remanet, est Bissextilis. Annus vero proximi Jubilæi 1750 erit secundus a Bissextili. Nam eo diviso per 4, remanent 2.

Coroll. Divisionis hujus quotus, residuo neglecto, indicat, quot effluxerint anni a Christo nato Bissextiles 437. Sed unitate mulctari debent propter annum 1700, qui Bissextilis non fuit ex dictis *Defin. 6.* Erunt ergo numerandi  $437 - 1 = 436$ .

## P R A X I S II.

*Cyclum Solarem anni dati invenire.*

Anno Christi proposito adde 9 (decimo namque hujus Cycli anno Christus natus est, adeoque jam novem erant expleti). Tum summa illa dividatur per 28, numerus ex divisione residuus erit Cyclus Solaris anni dati. Si ex divisione nihil remanet, erit Cyclus Solaris completus 28. Quotus autem indicat revolutiones hujus Cycli a Christi nativitate peractas.

clas. Esto hic annus 1748, cui adde 9, fit 1757, quem divide per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari currentis anni. Quotus autem 62 indicat totidem effluxisse a Christo nato Cyclos Solares.

### P R A X I S III.

*Aureum numerum dati anni invenire.*

Dato Christi anno adde unitatem (nam primo Æræ Christianæ anno aureus numerus fuit 2, adeoque unus jam erat absolutus) summam deinde divide per 19, residuum erit numerus aureus. Si nihil remanet, erit Cyclus completus, sive annus 19. Quotus vero indicat, quot Cycli Lunares hæctenus ab Æra Christiana fuerint. Quæritur numerus aureus currentis anni 1748. Adde 1, fit 1749, quem divide per 19, remanet 1 pro aureo numero quæsito. Sunt autem a Christo nato Cycli Lunares 92, ut divisionis quotus ostendit.

### P R A X I S IV.

*In quam hebdomadæ feriam incidat primus anni dati dies, invenire.*

Ad annum Christi præcedentem addantur Bissextilis elapsi, & a summa subtrahantur 10. Tum numerus residuus dividatur per 7, id quod restat ex divisione dat feriam quæsitam. Si nihil remanet, erit feria septima, seu Sabbatum. Scire cupio ex. gr. in quam feriam cadet primus dies anni 1800. En calculi typus

*An.*



*Annus preced.* 1 7 9 9  
*Bissex. per Cor.* 4 4 8

*Correct. Greg.* 2 2 4 7  
 — 1 0

7 2 2 3 7

$319\frac{4}{7}$  resid. 4. indicat Fer. 4.

Eadem ratione invenitur feria, in quam dato anno incidit propositus cujuscunque mensis dies. Quæritur ex. gr. in quam feriam inciderit dies 17 Augusti anni 1740, in quo electus fuit Pontifex Maximus Benedictus XIV. Ad annum præcedentem addantur tum Bissextiles, qui *per Coroll. Prax. 1.* sunt 433, tum dies elapsi a Kal. Januariis usque ad diem 16 Augusti 1740, nempe 229, fit summa 2401, ex qua ob correctionem Gregorianam subductis 10, & residuo diviso per 7, remanent 4. Fuit ergo Feria IV.

*Ann. preced.* 1 7 3 9  
*Bissextiles* 4 3 3  
*Dies elapsi* 2 2 9

*Corr. Gregor.* 2 4 0 1  
 — 1 0

7 2 3 9 1

$341\frac{1}{7}$  Res. 4. indicat Fer. IV.

PRA-

A P P E N D I X  
P R A X I S V.

*Literam Dominicalem dati anni invenire .*

Inveniatur Feria , qua annus propositus inchoatur per *Prax. præc.* , eamque subtrahere ex 9 , residuum dabit literam Dominicalem . Quæritur Litera Dominicalis pro anno proximi Jubilæi 1750 . Primus ejus dies per *Prax. præc.* incidet in Feriam V. , subtrahere 5 ex 9 , residuum 4 dat literam Dominicalem quarto loco positam , ordine literarum directo numerandam , nempe *D* . Similiter scire volo literam Dominicalem anni 1755 . Feria , in quam incidet primus ejus anni dies , erit per *Prax. præc.* Feria IV . Hanc subtrahere ex 9 ; residuum 5 dat literam Dominicalem *E* quinto loco positam .

Schol. *Alia sunt praxes pro litera Dominicali inveniendi , sed hæc a Blondello allata , est omnium brevissima , atque pulcherrima .*

P R A X I S VI.

*Dati anni Epactam invenire .*

Inveniatur aureus numerus anni propositi per *Prax. 3.* , qui multiplicetur per 11 , & ex producto auferantur dies 11 pro correctione Gregoriana , residuoque diviso per 30 , numerus , qui remanet , erit Epacta quæsitæ . Ex. gr. quæritur Epacta anni 1750 , cujus numerus aureus per *Prax. 3.* est 3 . Hunc duc in 11 fit 33 , ablatisque 11 , residuum est 22 , quod cum dividi nequeat per 30 , residuum ipsum 22 dat Epactam quæsitam . Anni autem currentis 1748 Epacta est \* seu zero . Nam aureus numerus est 1 , adeoque ex hac praxi  $1 \times 11 = 11 - 11 = 0$  .

Schol.

P R A X I S VI. 175

Schol. *Epactæ dati anni numerari incipiunt a Kal. Martiis ejusdem anni. Proinde Epacta hujus 1748 = 0 durabit toto Februario anni 1749.*

P R A X I S VII.

*Mense ac die datis, ætatem Lunæ invenire.*

Adde simul Epactam currentis anni, dies mensis elapsos, & numerum mensium a Martio inclusive, & ex summa subtracto, si fieri possit, 30, residuum dabit ætatem Lunæ. Scire volo ex. gr. ætatem Lunæ die 15 mensis Decembris hujus anni 1748. Cum ex dictis *in Prax. præc.* Epacta hoc anno sit = 0, addantur tantum dies 15, & numerus mensium a Martio inclusive, nempe 10, summa 25 (ex qua 30 subtrahi nequeunt) dat Lunæ ætatem quæsitam. Similiter scire cupio ætatem Lunæ die 4 Junii anni 1750. Epacta ejus anni per *Prax. 6.* est 22, cui adde dies 4 mensis Junii, & insuper 4 pro numero mensium a Martio inclusive, fit summa 30, ex qua si subtrahantur 30, nihil remanet; est ergo illo die Novilunium.

P R A X I S VIII.

*Datis Mense & anni Epacta Noviluniæ diem invenire.*

Addatur ad Epactam anni dati numerus mensium a Martio inclusive, & summa subtrahatur ex 30; vel si summa illa superat 30, subtrahatur ex 60, residuum indicabit diem Novilunium. Quæritur ex. gr. in quotam Martii diem incidet Novilunium anno 1749. Ad Epactam ejus anni, quæ est 11 per *Prax. 6.* adde numerum mensium, qui est 1, & sum-

summa 12 subtrahatur ex 30, residuum 18 indicat Martii Novilunium die 18 futurum. Similiter quaeritur Novilunium Decembris 1750. Ejus anni Epacta est 22 per *Prax. 6*, & numerus mensium a Martio inclusive 10. Horum summam 32 subtrahe ex 60, residuum 28 dat diem Novilunii.

Schol. I. *Quanquam autem aetas Lunae per Epactas precise definiri non possit, nunquam tamen solido die a vera Lunae aetate aberrat; proinde haec methodus satis tuto in vulgarem usum recepta est.*

Schol. II. *Novilunium Paschale continetur intra diem 8 Martii & 5 Aprilis inclusive, intra quos terminus, qui Pascholes audiuntur, reperiri debet.*

### P R A X I S IX.

*Dato Aerae Christianae anno Indictionem invenire.*

Anno Christi proposito adde 3, ( primus enim Aerae Christianae annus coepit Indictione quarta ) & aggregatum divide per 15, residuum ex divisione dat annum Indictionis. Si nihil remanet, erit Indictio 15. Sic ad hunc annum 1748 additis 3, fit summa 1751, quae divisa per 15, dat residuum 11 pro Indictione quaesita. Quotus autem 116 indicat Indictiones jam a Christo nato completas.

### P R A X I S X.

*Dato Aerae Christianae anno, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.*

Esto datus Christi annus praesens 1748, quaeritur annus Periodi Julianae, qui illi respondet. Anno dato 1748 adde 4713, summa 6461 dat annum quaesitum. Ratio est, quia primo Christi anno elapsi jam erant ejus periodi anni 4713. Co-

Coroll. Si datus quilibet Periodi Julianæ annus dividatur per 28, per 19, & per 15, residuum ex prima divisione erit Cyclus Solis, ex secunda Cyclus Lunæ, & ex tertia Cyclus Indictionis. Sic diviso anno currenti Periodi Julianæ 6461 per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari; per 19, remanent 1 pro Cyclo Lunari, sive aureo numero; per 15, remanent 11 pro Cyclo Indictionis.

P R A X I S XI.

*Dato anno ante Christi æram, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.*

Esto datus annus ante Christum natum 4004, cui Usserius, Pagius, Lancellottus, aliique Chronologi illustres Mundi initium tribuunt, quæritur, quotus ille fuerit in Periodo Juliana. Auferatur datus annus 4004 ab annis Periodi Julianæ 4714, in quibus ex dictis in *Prax. præc.* primus Christi annus contigit, residuum dabit annum Periodi Julianæ, qui primo Mundi anno respondet, nimirum 710. Res per se patet.

Coroll. Hinc est, quod dato quolibet Periodi Julianæ anno, facile innotescit, an ille sit ante, vel post Christi nativitatem. Nam si datus annus major sit anno 4714, erit annus Periodi Julianæ post Christum, si minor, erit ante Christum natum. Sic datis Periodi Julianæ annis 6461, ablatisque ab illis Periodi Julianæ annis 4713, remanet præsens æræ vulgaris annus 1748. Ablatis autem annis Periodi Julianæ 710 ab annis 4714, habentur anni 4004 ante Christi nativitatem.

*Datis Cyclis Solis, Lunæ, & Indictionis invenire  
annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.*

$$\text{Duc Cyclos datos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Solis} \quad \times 4845 \\ \text{Lunæ} \quad \times 4200 \\ \text{Indict.} \quad \times 6916 \end{array} \right.$$

Et summam productorum divide per 7980, residuus erit annus Periodi Julianæ, qui datis Cyclis responderet. Sit exemplum. Primus Christi annus habuit Cyclum Solis 10, Lunæ 2, & Indictionis 4, quæritur annus Periodi Julianæ, cui conveniunt

$$\text{Cycli} \left\{ \begin{array}{l} \text{Solis} \quad 10 \times 4845 = 48450 \\ \text{Lunæ} \quad 2 \times 4200 = 8400 \\ \text{Indict.} \quad 4 \times 6916 = 27664 \end{array} \right.$$

Summa 84514

Qua divisa per 7980, residuum 4714 dat annum Periodi Julianæ pro primo Christi anno.

Similiter hoc anno 1748 Cyclus Solis est 21, Lunæ 1, Indictionis 11, quæritur annus Periodi Julianæ.

$$\text{Duc} \left\{ \begin{array}{l} 21 \times 4845 = 101745 \\ 1 \times 4200 = 4200 \\ 11 \times 6916 = 76076 \end{array} \right.$$

Summa = 172021

Qua divisa per 7980, residuum 6461 dat annum Periodi Julianæ, qui ex Prax. 10. respondet huic anno 1748.

Schol. *Qua ratione numeri illi determinati 4845, 4200, & 6916, per quos dati Cycli multiplicari debent, inveniantur, non est hujus loci inquirere, cura methodo Analytica opus fit, quemadmodum ea usi sunt Franciscus a Schooten in Miscell., Præstetus T.2. lib. 7. Element. Mathem., Joannes Keill. lect. 29. de Cyclis, & alii.*

PRA-

*Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.*

Olympiadum Epocha apud historicos, præsertim vero Græcos, celeberrima semper fuit, cum Græci annos non nisi per Olympiades, unde anni Olympiaci dicti sunt, numerare solerent. Nam quadriennio quolibet vertente, seu quinto quovis redeunte anno, in Olympia Elidis Urbe ludos in honorem Herculis circa solstitium æstivum maximo populorum concursu celebrabant. Ludi autem hujusmodi ab Iphito Elidis rege sive primum instituti, sive instaurati sunt anno Per. Jul. 3938, & ante Christianam æram anno 776.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur annus Olympiacus, qui illi respondet. Si datus annus minor sit annis 3938, ex his auferatur; qui remanet, dabit annos, qui Olympiadum Epocham præcedunt. Sic annus Per. Jul. 3103, in quo juxta Petavium Moses natus est, quæritur quot annis ejus nativitas Olympiadum præcesserit institutionem. Subductis 3103 ex 3937, residuum 835 dat annos quæsitos.

Quod si datus sit Per. Jul. annus 4714, in quo incepit Christiana æra, ut sæpe dictum est, major scilicet annis 3938, hos ab illo subducito, residuum 777 dabit annos Olympiacos: qui si dividantur per 4, quotus dat Olympiades completas 194, & annum 1 Olympiadis ineuntis 195. Christus ergo natus est anno 1 ab Olympiade 194, sive anno primo Olympiadis 195.

Coroll. Dato æræ Christianæ anno, ex. gr. 1748, si illi addas annos 776, habebis annos Olympiacos, qui huic anno respondent, 2524; quibus divisus per 4, habentur Olympiades 631. Simili ratione annus proximi Jubilæi 1750 erit secundus Olympiadis 632.

## P R A X I S XIV.

*Dato anno Olympiaco, quotus ille in Periodo Juliana  
sit, invenire.*

Data sit Olympias 114, qua ineunte, Alexander M., ut historici referunt, diem obiit, quæritur quo-  
to Periodi Julianæ anno id contigerit. Multiplica  
Olympiades 113 elapsas per 4, & producto 452 ad-  
de unitatem, ob annum primum Olympiadis 114  
ineuntis, fit 453, cui Periodi Julianæ, in quo Ale-  
xander M. interiit.

Similiter Diodorus Siculus scribit, annum primum  
Olymp. 94 exeuntem, esse annum 780 post Trojæ  
excidium, scire volo, quotus ille esset Per. Jul. an-  
nus. Cum Trojanum excidium ex ejusdem Diodori  
Siculi, & Dionysii Halicarnassensis sententia accide-  
rit anno Per. Jul. 3530, addantur anni post Trojæ  
casum elapsi 780 ad annos ipsos 3530, summa 4310  
dabit annum Per. Jul., qui congruit cum anno 1  
Olymp. 94.

Coroll. I. Nota igitur, Trojæ excidium contigisse  
se anno Per. Jul. 3530, ita ut primus annus Epo-  
chæ Trojanæ fuerit Per. Jul. annus 3531.

Coroll. II. Si ex anno Per. Jul. 4714, æræ Chri-  
stianæ primo, auferas 4390, residuum 324 dat an-  
nos, quibus Alexandri M. mors præcessit Christi na-  
tivitatem. Sin ab eo auferas 3531, habebis annos  
Trojani excidij 1183 ante Christum natum. Quæ  
omnia ex Coroll. Prax. 11. plana sunt.

## P R A X I S XV.

*Dato anno Periodi Julianæ, annum U. C. ei con-  
gruentem invenire.*

Ex historia Romana satis patet, Romanos ab Ur-  
be condita annorum initium, eorumque seriem nu-  
me-



merare consueviffe; unde orta est celebratiffima U.C. Epocha. Quæ quidem duplex est, *Varroniana* a M. Varrone dicta, quæ ædificationem Urbis in annum tertium Olympiadisvi. exeuntem refert, cui refpondet annus Per. Jul. 3960, feu 3961 (cum Cal. Januariis fequentibus ea cœperit); Christianam vero Epocham antecedit annis 753, ita ut in annum U. C. 754 cadat primus Christi annus; & *Capitolina*, quæ a fastis Capitolinis collectis deducta fuit, & Urbem conditam in fequentem annum Per. Jul. 3962. rejicit. Sed Corn. Tacitus in fuis Annalibus, Cenforinus de die Natali, aliique viri docti, quorum fententiam fequitur, Epocham U. C. Varronianam Capitolinæ præferunt.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur quotus illi in Epochâ U. C. annus congruat. Si propofitus annus minor erit 3961, facta fubtractione, refiduum dabit annos ante Urbem conditam. Sic ab anno 3961 fubductis 710 (cui Per. Jul. anno Ufferius initium Mundi tribuit, ut dictum eft) refiduum 3251 dat Mundi annos ante U. C. Quod fi major fit annus 3961, facta fubtractione, refiduum dabit annos ab U. C. Sic fubductis 3961 ex 4714 (primo æræ Christianæ anno) refiduum 753 dat annos U. C., qui præcedunt Christi nativitatem, quæ ex fuperius dictis incidit in annum U. C. 754.

P R A X I S XVI.

*Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & æræ Christianæ annos ei congruentes invenire.*

Refert C. Plinius Nat. hiftor. lib. 8. c. 6. elephantos in Italia primum vifos Pyrrhi regis bello, anno Urbis quadringentefimo feptuagesimo fecundo; hinc

1. Quæritur, quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Ad U. C. annos ante dictos 472 addantur

anni 3960, qui U. C. Epocham præcesserunt ex dictis in *Prax. præc.*, aggregatum 4432 dat annum Per. Jul. quæsitum, ut patet.

2. Quæritur, in qua Olympiade, seu quoto anno Olympiaco illud acciderit. Ab anno Per. Jul. 4432, ut supra, invento, auferantur anni 3938, a quibus Olympiadum Epochæ inceptit, residuum 494 dat annos Olympiacos, quibus divisus per 4, habetur annus secundus Olympiadis 124 *per Prax. 13.*

3. Demum quæritur, in quotum annum ante, vel post Christum natum Pyrrhi bellum, seu elephantorum in Italiam adventus incidit. Ex anno Per. Jul. 4432 superius invento, facile intelligitur *per Coroll. Prax. 11.* id ante æram Christianam contigisse. Itaque idem Per. Jul. annus 4432 auferatur ab anno primo Christianæ æræ 4714, residuus 282 dabit annos, qui Christianam æram præcesserunt. Proinde elephantos Italia primum vidit anno Per. Jul. 4432, anno secundo ab Olympiade 123, post U. C. 472, ante æram Christianam annis 282.

Coroll. Dato U. C. anno, sive anno Per. Jul. qui ei congruit, facile intelligitur, quotus ille sit a Trojæ excidio annus. Subductis enim Trojæ Epochæ annis Per. Jul. 3530 (*per Cor. 1. Prax. 14.*) ab annis Per. Jul., qui in eadem Per. Jul. respondent U. C. annis, residuus erit annus quæsitus. Sit exemplum. Dato anno U. C. 537, in quo a Romanis clades maxima ad Trasimenum lacum accepta est, Flamini consulis temeritate; quæritur, quotus ille fuerit ab excidio Trojæ, seu Trojæ Epochæ annus. Inveniatur annus Per. Jul. congruens U. C. anno 537, qui *per partem 1. hujus Prax.* erit 4497; ex hoc subducto Trojæ Epochæ annos 3530 (*per Coroll. 1. Prax. 14.*) residuum dat annos, qui intercesserunt, 967.

PRA-

## P R A X I S XVII.

*Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, seu neomeniam Thoth, invenire.*

De æra Nabonassari crebra fit mentio tum apud veteres Astronomos Ptolomæum, Hipparchum & alios, tum etiam apud celebriores Chronologos: proinde a nobis ea hic omitti omnino non potest. Fuit Nabonassarus Chaldæorum Rex, a cujus regni Babylonii novam Epocham instituerunt, quam Ægyptii ab illis acceperunt. Exordium ejus cadit in Per. Jul. annum 3967, die 26. Febr. ante Christum natum 749.

Quia vero Nabonassari æra non annis Julianis, sed Ægyptiacis constat, de his primo eorumque initio agendum est. Annus Ægyptiacus dies 365 continet, neglectis 6 illis horis, quibus annus Julianus, præter dies 365, componitur. Unde fit ut, propter omissam quadriennio quolibet vertente diem intercalarem, initium anni Ægyptiaci (quod neomenia Thoth dicitur) retro abeat, & per totum annum Julianum vagetur, unum perpetuo anticipans diem; ut si hoc anno ex. g. neomenia Thoth incipiat. Calendis Januariis, post quatuor annos incipiet die 31 Decembris, & iterum post alios quatuor annos, die 30 Decembris, & sic deinceps; donec demum anno 1461 ad Calendas Jan. rursus redeat, expletis scilicet annis Julianis 1460, qui annos Ægyptiacos 1461 præcise continent.

In tota autem Período Juliana sunt quinque anni, qui spatio annorum 1460 invicem distant, in quibus tam primo Januarii die, quam ultimo Decembris neomenia Thoth contingit, nempe

1273, 2733, 4193, 5653, 7113

Dato igitur Per. Jul. anno, inveniri debeat, quoto die initium anni Ægyptiaci, seu Thoth incipiat.

M 4

Hæc

Hæc erit regula . Subducatur annus Per. Jul. ex uno ex superioribus numeris , qui sit proxime major dato , & residuum dividatur per 4 . Si quotus minor fuerit quam 59 , vel aliquid post divisionem supererit , addatur quoto unitas , dabit summa diem neomeniæ Thoth a Calendis Januariis in anno Juliano numerandum . Si a divisione nihil restat , & quotus est major 59 , ipse dabit diem , in quem incidet neomenia Thoth . Sit exemplum : Estο datus annus Per. Jul. 4714 , in quo Christi dies natalis illuxit , quæritur , in quoto illius anni die neomenia Thoth contigerit . Subductis annis 4714 a numero proxime majori 5653 , remanent 939 , quibus divisus per 4 , quotus dat 234 , & remanent 3 . Adde 1 ad ipsum quotum . Cœpit igitur Thoth die 235 a Calendis Januariis numerandum , hoc est die 23 Augusti . Similiter scire volo in quotum anni 1748 diem incidat initium anni Ægyptiaci , seu Thoth . Annus Per. Jul. , qui huic anno congruit , est 6461 *per Prax.* 11 . hunc subtrahe ex 7113 proxime majori , & residuum 652 divide per 4 , quotus dat 162 sine ullo residuo . Huic ( ob Correct. Gregorianam ) adde 11 , fit aggregatum 174 . Hoc igitur anno 1748 initium anni Ægyptiaci contigit die 23 Junii , diebus scilicet 174 a Cal. Januariis .

Demum datus sit Periodi Julianæ annus 3965 , in quo Tobias senior natus esse dicitur , & quærat̃ur ejus anni neomenia Thoth . Subducto 3965 ex 4193 , remanent 228 , quem numerum si divides per 4 , habebis 57 , & nihil remanet . Quia vero hic numerus minor est quam 59 , nempe quam dies ultimus Februarii , in quo additur bissextilis dies , ad 57 addenda est unitas , & habetur dies quinquagesimus octavus , in quem cadet neomenia Thoth , nempe dies 27 Februarii .

Schol. *Ex secundo exemplo patet , post Christi annum*

*num*

P R A X I S XVII. 185

*num 1582, ad neomenia Tboth diem in anno Juliano inventum addendos esse, ob Correct. Gregorianam, dies 10 usque ad annum 1700, & ab anno 1700 usque ad 1800 dies 11.*

P R A X I S XVIII.

*Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in æra Nabonassari sit, invenire.*

Observentur quinque sequentes anni Per. Jul. *A, B, C, D, E*; quorum primus initium dedit Epochæ Nabonassari, reliqui vero annos Nabonassareos singuli inchoant, ut in *Prax. præc.* explicavimus, eodemque intervallo annorum 1460 invicem distant

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
3967 <sup>1</sup>	4193 <sup>2</sup>	5653 <sup>3</sup>	7113 <sup>4</sup>	8573.

Dato igitur quovis Per. Jul. anno, videatur ad quodnam intervallum spectet, sive quonam numerorum *A, B, C* &c. sit proxime minor. Tum additis unitatibus, qui illi intervallo respondent, dematur ex aggregato primus terminus *A*, id quod remanet indicabit quotus sit annus in æra Nabonassari quæsitus. Esto annus Per. Jul. 4714, qui, ut sæpe diximus, fuit humanæ salutis exordium. Hic ad intervallum secundum pertinet, cum sit major *B*, minor *C*; adde igitur 2 ad 4714, & ex summa 4716 deme numerum 3967, residuum dat 749. Ergo Christus natus est Nabonassari anno 749.

Eadem ratione scire cupio, quotus Nabonassari annus sit ipse, qui labitur annus 1748. Cum hic ex *Prax. II* sit annus Per. Jul. 6461, major autem sit termino *C*, minor vero *D*, spectat ad intervallum 3. Adde ergo illi tres unitates, & ex summa

ma 6464 tolle terminum  $A$ , residuus numerus 2497 dat annum Nabonassareum, qui cum hoc anno æræ Christianæ 1748 congruit.

Ratio regulæ patet ex dictis. Nam quodlibet intervallum est annorum 1460. Anni autem Juliani 1460 continent annos Ægyptiacos 1461, & unumquodque intervallum annum unum auget; proinde Per. Jul. anni, qui ex annis Julianis constant, augeri debent tot unitatibus, quot sunt intervalla, ut inter ipsos & annos Ægyptiacos, seu Nabonassareos habeatur æquatio.

## P R A X I S XIX.

*Nabonassari annos in Per. Jul. annos convertere.*

Notentur sequentes numeri  $A, B, C, D, E$ , eorumque intervalla 1, 2, 3, 4, & videatur ad quod ex illis pertineat Nabonassari annus propositus, ab eoque tot demantur unitates, quot illi intervallo conveniunt. Tum residuo addantur anni 3967, qui initio æræ Nabonassari tribuuntur, summa erit annus Per. Jul. quæsitus.

$A.$	$B.$	$C.$	$D.$	$E.$
1 <sup>1</sup>	227 <sup>2</sup>	1688 <sup>3</sup>	3149 <sup>4</sup>	4610

*Sit exemplum.* Ptolemæus lib. 5. pag. 125. refert, Lunam defecisse anno quinto Nabopollassari, qui est 127 a Nabonassaro; quæritur, quoto Per. Jul. anno id acciderit. Cum annorum numerus 127 ad intervallum 1 spectet, utpote major  $A$ , minor vero  $B$ , auferatur ab eo 1, & residuo 126 addatur 3967, summa 4093 est annus Per. Jul. quæsitus.

Similiter quæritur, quotus sit in periodo Juliana annus Nabonassari 2497. Patet hunc numerum pertinere-

187

P R A X I S XIX.

tinere ad intervallum 3, cum sit proxime major C, minor vero D. Auferantur igitur ab eo tres unitates, & residuo 2494 addatur numerus 2967; summa 6461 est annus Per. Jul., qui congruit cum anno Nabonassareo dato 2497. Quod ex *Prax. præted.* satis apparet. Est autem hæc regula conversa præcedentis, ut patet.

P R A X I S XX.

*In anno Nabonassari feriam invenire.*

Restat, ut ferias in anno Nabonassareo investigemus, quod in hujusmodi annis supputandis, & cum aliis mutuo connectendis, sæpe fieri expedit.

Anno primo Nabonassari neomenia Thoth incidit in feriam IV., proinde si ad datum Nabonassari annum addas 3, & summam divides per 7, numerus reliquus dabit feriam, in quam cadit Neomenia Thoth. Si nihil remanet, erit Sabbatum. Hic annus 1748 ex dictis in *Prax.* 18. dat in æra Nabonassari annum 2497, si addantur 3, & summa 2500 dividatur per 7, remanet 1. Incidit ergo neomenia Thoth hujus anni in fer. I., hoc est in diem Dominicum 23. Junii, ut in *Prax.* 17. vidimus.

Atque hic finis esto Appendicis hujus Chronologicæ Idib. Decemb. anni Per. Jul. 6461, Olympiade 631, anno ab U. C. 2501., Nabonassari 2497, æræ Christianæ 1748, in honorem Dei Opt. Max. & studiosæ juventutis utilitatem.

F I N I S.

IN.

# I N D E X

## CAPITUM , ET PROPOSITIONUM.

Definitiones :	pag. 7.
<b>CAP. I. De Calculo Integrorum.</b>	
Prop. 1. <i>Dati numeri valorem exprimere.</i>	9
Prop. 2. <i>De additione Integrorum.</i>	11
Prop. 3. <i>Additionem examinare.</i>	15
Prop. 4. <i>De subtractione Integrorum.</i>	16
Prop. 5. <i>De multiplicatione Integrorum.</i>	18
Prop. 6. <i>De divisione Integrorum.</i>	25
Prop. 7. <i>De divis. Integr. per num. divis. multipl.</i>	33
<b>Cap. II. De Calculo Denominatorum.</b>	
Prop. 1. <i>De additione numerorum denominatorum.</i>	36
Prop. 2. <i>De subtractione numerorum denominatorum.</i>	39
Prop. 3. <i>De multiplicat. num. denominatorum.</i>	41
Prop. 4. <i>De divisione numerorum denominatorum.</i>	43
<b>Cap. III. De Calculo Fractorum.</b>	
Definitiones.	44
Axiomata.	46
Prop. 1. <i>Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.</i>	47
Prop. 2. <i>Fractioes ad minimos terminos reducere.</i>	48
Prop. 3. <i>Fractioes ad idem nomen reducere.</i>	49
Prop. 4. <i>Fractioes ad aliam dati nominis, &amp; ejusdem valoris revocare.</i>	51
Prop. 5. <i>Fractioes ad integra revocare.</i>	53
Prop. 6. <i>Num. integr. in minutiam dati nom. reduc.</i>	ibid.
Prop. 7. <i>Fract. fract. ad simplicem fract. reducere.</i>	54
Prop. 8. <i>Fractioes addere.</i>	55
Prop. 9. <i>Fractioes subtrahere.</i>	56
Prop. 10. <i>Fractioes multiplicare.</i>	ibid.
Prop. 11. <i>Fractioes dividere.</i>	58
<b>Cap. IV. De Fractionibus Decimalibus.</b>	
	<b>De-</b>



	189
<b>Definitiones.</b>	60
<b>Prop. 1.</b> Decimales addere, & subtrahere.	62
<b>Prop. 2.</b> Decimales multiplicare.	64
<b>Prop. 3.</b> Decimales dividere.	65
<b>Prop. 4.</b> Integrum, vel fractum in partes decim. reduc.	67
<b>Prop. 5.</b> Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.	68

**Cap. V. De extractione Radicum.**

<b>Definitio.</b>	69
<b>Prop. 1.</b> Ex dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.	71
<b>Prop. 2.</b> Radicem quadr. per approximat. inquirere.	75
<b>Prop. 3.</b> Ex dato num. radicem cubicam extrahere.	77
<b>Prop. 4.</b> Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.	81
<b>Prop. 5.</b> Quæstiones aliquot resolvuntur per radicis quadratæ, vel cubicæ extractionem.	82

**Cap. VI. de Regulis Arithmetiis.**

<b>Definitiones.</b>	85
<b>Lemmata.</b>	86
<b>Prop. 1.</b> De regula Proportionum.	ibid.
<b>Prop. 2.</b> De regula Proportionum composita.	89
<b>Prop. 3.</b> De regula Proportionum inversa.	90
<b>Prop. 4.</b> Explicantur nonnulla pro regulis Proportionum compendia.	93
<b>Prop. 5.</b> De regula Societatis.	95
<b>Prop. 6.</b> De regula Alligationis.	97
<b>Prop. 7.</b> De regula simplicis Positionis, seu falsi.	100
<b>Prop. 8.</b> De regula duplicis Positionis.	102
<b>Prop. 9.</b> Aurificis furtum in corona Hier. regis deteg.	107
<b>Prop. 10.</b> Datis duob. num. tertium proport. invenire.	109
<b>Prop. 11.</b> Inter duos num. datos medium proport. inv.	110
<b>Prop. 12.</b> Inter duos num. datos duos medios proport. inv.	111
<b>Prop. 13.</b> Quæstiones aliquot practicæ expediuntur.	112

**Cap. VII. De Progressionibus Arithmetiis, & Geometricis, earumque regulis.**

116  
**Lem.**

<b>Lemmata</b> ,	117
<b>Prop.1.</b> <i>Datis minimo ac maximo progressionis Arithmeticae terminis, &amp; terminorum numero, invenire summam.</i>	118
<b>Prop.2.</b> <i>Datis terminis maximo &amp; minimo, necnon &amp; numero terminorum, differentiam invenire.</i>	119
<b>Prop.3.</b> <i>Minimo termino, differentia, &amp; numero terminorum datis invenire maximum.</i>	120
<b>Prop.4.</b> <i>Minimo &amp; maximo, necnon &amp; differentia datis, numerum terminorum invenire.</i>	ibid.
<b>Prop.5.</b> <i>De numeris Polygonis.</i>	121
<b>De Progressionibus Geometricis.</b>	
<b>Lemmata.</b>	123
<b>Prop.6.</b> <i>Datis minimo &amp; maximo progressionis Geometricae terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire.</i>	125
<b>Prop.7.</b> <i>Datis aliquot progressionis Geometricae terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cogn., invenire.</i>	126
<b>Prop.8.</b> <i>Afferuntur nonnullae Progres. Geometr. quaest.</i>	127
<b>Prop.9.</b> <i>Ex dato rerum num. combinat. omnes inven.</i>	129
<b>Prop.10.</b> <i>Ex dato rerum numero permutationes omnes possibiles invenire.</i>	131
<b>Prop.11.</b> <i>Proponuntur aliqua permutation. problem.</i>	132
<b>Prop.12.</b> <i>Datis tribus numeris Arithmetice proportionabilibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.</i>	133
<b>Prop.13.</b> <i>Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.</i>	134
<b>Prop.14.</b> <i>Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proport., quotientes erunt in Harm. proport.</i>	ibid.
<b>Cap. VIII. De Logarithmis, eorumque natura, atque usu.</b>	
<b>Lemmata</b> ,	136
<b>Prop.1.</b> <i>De natura Log-morum, eorumque inventione.</i>	137
<b>Prop.2.</b> <i>Si Logarithmus unitatis sit 0, erit Log-mus facti aequalis aggregato ex Log-mis factorum.</i>	138
<b>Prop.3.</b> <i>Si Log-mus unitatis est 0, differentia Log-morum duor. num. aequatur log-mo quoti eorund. num.</i>	139
<b>Prop.</b>	

Prop. 4. Numeri cujuscunque Log-mum invenire .	140
Prop. 5. Multiplicare duos numeros , qui minores sint quam 10000.	143
Prop. 6. Numerum integrum minorem , quam 10000 per alium dividere .	144
Prop. 7. Datis tribus numeris , quartum proportionalem invenire .	ibid.
Prop. 8. Invenire Log-mum pro numeris majoribus , quam in canone continentur , sed numerum 10 , 000 , 000 non excedentibus .	145
Prop. 9. Datis fractionis Log-mum invenire .	147
Prop. 10. Dato Log-mo , qui in tabulis accurate non existit , invenire numerum ei respondentem .	149
Prop. 11. Dato Log-mo defectivo , numerum ei respondentem invenire .	150
Prop. 12. Dato Logarithmo excedente Logarithmum 4. 0000000 , numerum ei congruum invenire .	151
Prop. 13. Datis cujuscunque Sinus Log-mum invenire .	152
Prop. 14. Invenire Logarithmum Tangentium , & Secantium dati arcus .	154
Probl. 1. Datis num. quadr. , vel cubum per Logar. inv.	157
Probl. 2. Inter duos numeros datos invenire quotcumque medios proportionales .	ibid.
Probl. 3. Quaestiones aliquot Arithmeticae per Logarithmos expediuntur .	159
Probl. 4. Data tormenti bellici elevatione , distantiam ictus invenire , & e converso .	164
Probl. 5. Altitud. Poli tempore aequinoctiorum invenire .	165
Probl. 6. In linea meridiana Zodiaci signa describere .	166
<b>A P P E N D I X</b>	
<b>Praxewn Chronologicarum .</b>	
Definitiones .	168
Prax. 1. An datus annus sit Bissextilis , vel quotus sit a Bissextili , invenire .	171
Prax. 2. Cyclum Solarem anni dati invenire .	ibid.
Prax. 3. Aureum numerum dati anni invenire .	172
Prax. 4. In quam hebdomadae feriam incidat primus anni	

- anni dati dies, invenire.* 172
- Prax. 5. Literam Dominicalem dati anni invenire,* 174
- Prax. 6. Dati anni Epactam invenire.* *ibid.*
- Prax. 7. Mense ac die datis, ætatem Lunæ invenire.* 175
- Prax. 8. Datis mense & anni Epactæ, Novilunii diem invenire,* *ibid.*
- Prax. 9. Dato Æræ Christianæ anno Indictionem inv.* 176
- Prax. 10. Dato Æræ Christianæ anno, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.* *ibid.*
- Prax. 11. Dato anno ante Christi æram, quotus in Periodo Juliana ille sit, invenire.* 177
- Prax. 12. Datis Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.* 178
- Prax. 13. Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.* 179
- Prax. 14. Dato anno Olympiaca, quotus ille in Periodo Juliana sit, invenire.* 180
- Prax. 15. Dato anno Periodi Julianæ, annum U. C. ei congruentem invenire.* *ibid.*
- Prax. 16. Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympiadum, & æræ Christianæ annos ei congruentes invenire.* 181
- Prax. 17. Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, seu neomeniam Thoth, invenire.* 183
- Prax. 18. Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in Æra Nabonassari sit, invenire.* 185
- Prax. 19. Nabonassari annos in Per. Jul. annos convertere.* 186
- Prax. 20. In anno Nabonassari feriam invenire.* 187

464611

73





CB

