INSTITUTIONES ANALYTICÆ

earumque usus in Geometria

CUM APPENDICE

DE CONSTRUCTIONE PROBLEMATUM SOLIDORUM

AUCTORE

PAULINO A S. JOSEPHO LUCENSI

Cler. Reg. Scholarum Piarum & in Archigymn. Romano Eloquentiæ Professore.

ROMÆ, MDCCXXXVIII.

TYPIS JOANNIS ZEMPEL PROPE MONTEM JORDANUM.

SUPERIORUM FACULTATE.

CANDIDÆ ATQUE INGENUÆ

MATHEMATUM

STUDIOSÆ JUVENTUTI

Has de Analysi Institutiones

Præceptis breves, at exemplis uberrimas,

De summorum Analystarum penu depromptas,

Et qua licuit in luce positas,

Auctor libens ultroque

D. D. D.

AD LECTOREM.

MIraberis fortasse Eloquentiæ professorem de ALGEBRA scribere, cum illa amænitates, elegantiam & dicendi copiam amet, hæc sicca, austera & tota ad severitatem composita esse videatur. At mirare potius, me his temporibus de Algebra ipsa scribere, in quibus tot præclara de illa extant clarissimorum virorum volumina; quibus quicquam addere, arrogantiæ, quicquam demere, temeritatis est. Hoc quidem me, ut verum fatear, diu ancipitem habuit, diuque prohibuit, quominus publici juris facerem, quæ meo tantum privato studio selegeram. At vero cum animadverterem magna illa Ana-

Analyticæ artis Autographa, quæ nobis incomparabiles viri Vieta, Cartesius, Wallisius, Newtonus, Reinau, ac Wolfius denique tradiderunt, ægre in omnium manibus posse versari, cum ob exemplorum paucitatem & pretium, tum ob multam ea percipiendi difficultatem, quæ in his subtiliora de Mathematicis & Physicis continentur; illa mihi potius conscripta esse videbantur viris jam in calculi scientia exercitatis, quam tyronibus, qui faciliora, tum etiam pauciora petunt: quamobrem his saltem hunc libellum non inutilem fore judicavi. Itaque id perpetuo præ oculis habens, me non viris doctis aliquid de Analysi novum promere, sed juventutem a primis ejusdem disciplinæ rudimentis instituendam suscepisse, quæ scilicet ultra communem Arithmeticam, Euclidis elementa, & pauca Archimedis theoremata progressa non esset: in id totus incubui, ut quæ minus dilucide ab aliis essent explicata, aut ad tyronum captum haud satis apta viderentur, ea magis explanarem, magisque ordinate disponerem. Idcirco etiam minima, quæ ad id conferrent, consectatus sum: quorum defectus sæpe solet ab incepto cursu discentes non sine multo temporis dispendio retardare. Neque enim juvenes omnes summo ingenio & acriori

mentis

mentis vi donatos cogitare debemus. Sunt complures mediocri intellectu præditi, quibus tamen ad ejusmodi studia, unde eorum mens mirum in modum perfici ac roborari valeat, iter omnino intercludi non debet. Adde plerosque aliis quoque disciplinis addictos haud posse diem integrum in calculo & Mathematicis meditationibus ponere. Quid si illis divinatione opus sit, ut auctoris mentem assequantur, diuque subobscuri vel ambigui sermonis sensum speculari cogantur? Quo quidem nihil est ab omni Mathesi magis alienum: in cujus laudibus Geometræ omnes perspicuitati & evidentiæ primas deferunt. Quocirca videant quam longe a proposito aberrent qui his de rebus obscure ac perplexe loquentes, se tamen in juventutis usum scribere profitentur. Pugnare (pace eorum dicam) secum ipsi videntur, dum scientiam alioqui reconditam obscuritate verborum & ambagibus infuscant, quam potissimum susceperant illustrandam. At vero cum *in scientiis addiscendis*, ut magnus Newtonus (*a*) inquit, *exempla magis, quam præcepta prosint*, in iis tradendis brevitate quam maxima potui, usus sum: omissis idcirco demon-

(*a*) Arithm. Univ. edit. 3. p. 179.

demonſtrationibus, ſicubi eas minus neceſſarias putaverim. Exempla vero congeſſi plurima, quæ facilitate non minus ac elegantia ceteris antecellerent, ex quibus non pauca clariſſimis Mathematicis, quos paulo ante nominavi, tum aliis quoque accepta refero; quorum nomina, præſertim ſi pulcherrimæ alicujus methodi auctores extiterint, in Scholiis appoſui, ut una ſimul tyrones in hiſtoria Mathematica erudiantur, tum etiam ut debita unicuique laus tribuatur. *Eſt enim benignum*, uti nos Plinius (*a*) admonet, *& plenum ingenui pudoris fateri, per quos profeceris*. Ceterum quicquid ſit de facilitate ac brevitate methodi a nobis ſuſceptæ, illud ſibi ſtudioſi juvenes perſuadeant, neminem triduo vel quatriduo fieri Algebriſtam; neque inter ambulandum & oſcitanter poſſe calculi ſcientiam obtineri. Non emitur profecto tam vili diſciplina illa, quam ſummi ingenii & ſubtilitatis vir Cardanus (*b*) *Artem Magnam*, quam *univerſæ Matheſeos clavim* Ougthredus (*c*), quam denique Wolfius (*d*) *apicem totius humanæ eruditionis* appellat. An ludus tibi

(*a*) In præfat. hiſt. Natur. (*b*) Oper. Vol. 4. pag. 221.
(*c*) Clavis Mathem. Oxonii an. 1631. & 1693. (*d*) In præfat. ad Ele men. Analyſ.

tibi videtur paucis lineis posse difficillima quæque in omni naturali scientia problemata solvere, ac Geometrice componere? Enim vero sedulo insistas oportet in iis maxime accurate calculandis, quæ quatuor, aut quinque prioribus hujus libri capitibus comprehenduntur. Ubi ex his vadis emerseris, omnia fere tibi plana occurrent, præsertim si quempiam viæ ducem habeas: quod si neminem (quod sæpe usuvenit) at tute ipse tibi ductor sis & magister; macte animo, μελέτη τὸ πᾶν, inquit Periander. Quem tibi offero libellum diligenter evolve, nec pigeat calamo excipere & ad calculum revocare sigillatim, quæ inibi traduntur: cito progressus in hoc studio non pœnitendos experiere.

JOANNES FELIX
A VIRGINE PRÆSENTATA
Cler. Reg. Pauperum Matris Dei Scholar. Piarum
PRÆPOSITUS GENERALIS.

Cum librum, cui titulus Institutiones Analyticæ earumque usus in Geometria, Auctore P. Paulino a S. Josepho Lucensi Cler. Reg. Scholarum Piarum, duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, approbaverint, ac studiosæ juventuti perutilem existimaverint; ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. In quorum fidem præsentibus hisce nostro Sigillo munitis subscripsimus. Datum Romæ in Ædibus nostris S. Pantaleonis Scholarum Piarum die IX. Septembris Anni 1737.

Jo: Felix a Virg. Præsent. Præp. Gener.

Jo: Baptista a S. Maria Magd. Secret.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

Ph. Episc. Pisauren. Vicesg.

AP-

APPROBATIO.

Legi diligenter, ut mihi demandatum fuit a Reverendissimo Patre Fr. Joanne Benedicto Zuanelli Sacri Palatii Magistro librum, cui titulus INSTITUTIONES ANALYTICÆ EARUMQUE USUS IN GEOMETRIA, in quo nihil reperi seu contra fidem, seu contra bonos mores: immo fateor in eo omnia præcipua Algebræ elementa concinne, dilucide & copiose tractari. Quare dignissimum puto publici juris fieri, ut hanc doctrinam, ad ceteras scientias adeo necessariam, quicunque assequi voluerit, celerrime & facillime consequatur. Romæ die 8. Septembris 1737.

Franciscus Xaverius Brunetti.

IMPRIMATUR.

Fr. Joannes Benedictus Zuanelli Sac. Pal. Apost. Mag. Ord. Prædicatorum.

INDEX
CAPITUM ET PROPOSITIONUM

CAPUT I.
De Calculo Integrorum.

CAPUT II.
De Calculo Fractorum.

PRO-

CAPUT III.

De Calculo Exponentiali.

CAPUT IV.

De Calculo Radicali.

PRO-

CAPUT V.

De Æquationibus simplicibus.

CAPUT VI.

De Æquationibus Compositis.

CAPUT VII.

De Resolutione Æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

CA-

CAPUT IX.

De Æquationibus Cubicis.

CA-

CAPUT X.

De Æquationibus Biquadraticis & aliis altiorum graduum.

CAPUT XI.

De limitibus radicum earumque approximatione.

CAPUT XII.

De Geometrica constructione Æquationum.

APPENDIX

De Constructione problematum solidorum.

INSTI-

INSTITUTIONES ANALYTICÆ.

DEFINITIONES

I. ALGEBRA, ſeu ANALYSIS SPECIOSA, quæ a quibuſdam MATHESIS UNIVERSALIS dicitur, eſt Methodus reſolvendi problemata circa quantitatem.

II. *Quantum* dicitur omne id, quod augeri & minui poteſt, ut numerus, linea, ſuperficies, corpus, tempus, motus, velocitas &c.

III. Quantitates Analyticæ exprimuntur per Alphabeti literas, ſed hoc diſcrimine: literæ priores a, b, c, d &c. adhibentur ad exprimendas quantitates *cognitas*, ſeu *datas*; poſtremæ vero x, z, y, v ad *incognitas*, & *quæſitas*.

IV. Conducit etiam memoriæ quantitates tam cognitas,

gnitas, quam incognitas designare per primam literam rei, quam significant, ut numerum per n, summam per s, tempus per t, velocitatem per v, circuli radium per r, tangentem per t, &c.

V. Multiplicia, vel submultiplicia quantitatum exprimi solent indeterminate & in genere per literas m, n, r, ut mx, ny, rz; prout m, n, r numeros integros, vel fractos designant. In particulari vero & in specie, exprimuntur per numeros integros, vel fractos, ut $2x$, $3z$, $4y$, significant duplum, triplum, quadruplum quantitatum x, z, y. Quemadmodum $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{4}c$, vel etiam $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{4}$ significant partem aliquotam quantitatum a, b, c; hoc est dimidium a, tertiam partem b, quartam partem c.

VI. Quanta, quibus præmittitur signum Plus $+$, *affirmativa*, *ac positiva* dicuntur. Quæ vero præferunt signum Minus $-$, *negativa*, seu *privativa*. Quæ autem principio posita sunt & omni signo carent, habentur pro affirmativis & quasi signo $+$ affecta.

VII. Quantitates Analyticæ, quæ signis $+$ & $-$ non sunt connexæ, dicuntur *simplices*, *monomiæ & incomplexæ*, ut ab, abc, $\frac{ab}{c}$. Contra vero $a+b$, $ab-bb$, $ac+m-r$, dicuntur *compositæ*, *complexæ*, seu *polynomiæ*; & si duobus terminis constant, ut $a+b$, vel $ab-bb$, *binomiæ*; si tribus, ut $ac+m-r$, *trinomiæ* & sic deinceps, appellantur.

VIII. Nota *Æqualitatis* est $=$, ita ut $a=b$, vel $x=6$ significet a & b esse æquales, item valorem x esse 6.

IX. Sed $a>b$ indicat a *majorem* esse, quam b. Contra $a<b$ denotat a *minorem* esse quam b.

X. Pro-

X. Proportionalitas Geometrica, ſeu quatuor terminorum Geometrice proportionalium ratio exprimitur per quatuor puncta hoc modo $a . b :: c . d$, nempe a eſt ad b, ut c ad d. Proportionalitas vero Arithmetica exprimitur per tria puncta hoc pacto $a . b \cdot\!\cdot\!\cdot c . d$, nimirum eadem eſt differentia inter a & b, quæ inter c & d.

XI. Numeri, qui quantitates analyticas præcedunt, ut $2x$, $3y$, & in trinomio $aa + 2b - 4c$ numeri 2 & 4, dicuntur *Coefficientes*. Ubi nullus eſt numerus, ſemper pro coefficiente intelligitur unitas. Sic ab intelligitur $1ab$, & $2a - b$ intelligitur $2a - 1b$.

CAPUT I.

De Calculo Integrorum.

PROPOSITIO I.

Quantitates ſimplices addere.

I. SI quantitates addendæ eiſdem literis ſint expreſſæ, ſufficit numeros præfixos addere & numerorum ſummam eidem literæ præfigere. Sic ut addam a ad a, ſcribo $2a$; ut addam b ad $2b$, ſcribo $3b$ &c.

II. Si vero literæ ſint diverſæ, additio fit ſigno $+$. Sic $a + b$ exprimit ſummam quantitatum a & b. Ecce exempla.

a	a	c	$\frac{1}{2}\ b$
$2a$	b	d	$2\ c$
a	a	e	$3\ x$
$4a$	$2a+b$	$c+d+e$	$\frac{1}{2}b+2c+3x$

SCHOLIUM. *Ordo literarum non attenditur. Summa* 2a + b *idem valet ac*, b + 2a. *Sicuti* 10 + 5 *idem valet ac*, 5 + 10, *nempe* 15.

PROPOSITIO II.

Quantitates ſimplices ſubtrahere.

I. SI quantitates iiſdem literis ſint expreſſæ, ſubtrahuntur numeri præfixi & reſiduum eidem literæ præponitur. Ut ſubtraham $2a$ ex $5a$, ſcribo pro reſiduo $3a$. Similiter ſublato b ex $2b$, remanet b. Item ſublato x ab x, remanet 0, ſeu nihil.

II. Si quantitates diverſis literis expreſſæ fuerint, ſubtractio fit ſigno — Ut ſubtraham a ex b, ſcribo $b - a$. Similiter ſublatis $2a$ ex $3y$, reſiduum erit $3y - 2a$. Exempla.

$5a$	$5b$	a	$3c$
$3a$	$2b$	b	$4z$
$2a$	$3b$	$a-b$	$3c-4z$

SCHOL. *Intelligenti prima Arithmeticæ communis elementa nulla difficultas eſſe poteſt de duabus præcedentibus propo-*

propositionibus. Nam si ponatur $a = 5$, *erit summa* $4a = 5 + 5 + 5 + 5$, *hoc est* $4a = 20$, *ut in primo exemplo. Si ponatur* $a = 10$ *&* $b = 4$, *erit summa* $2a + b = 20 + 4$, *hoc est* 24, *ut in secundo exemplo. Similiter si ponatur* $a = 10$ *& subtrahenda sint* $3a$ *ex* $5a$, *nempe* 30 *ex* 50, *residuum erit* $2a = 20$. *Tandem si ponatur* $a = 20$ *&* $b = 15$, *erit* $a - b = 20 - 15$, *hoc est* 5, *ut ex primo & tertio subtractionis exemplo habetur.*

PROPOSITIO III.

Quantitates simplices multiplicare.

I. Multiplicatio fit per simplicem literarum conjunctionem, nullo interposito signo. Sic *ab*, vel *ba* (ordo literarum non attenditur) significat productum *a* in *b*, vel *b* in *a*; unde si ponatur $a = 5$ & $b = 6$, erit $ab = 30$.

II. Quantitates multiplicandæ *a* & *b* dicuntur *factores* & *ab factum*. Si factoribus præfixi sint numeri, hi inter se multiplicentur, ut in communi Arithmetica, eorumque productum præmittatur facto literarum. Ecce exempla.

ab	ac	$2cd$	$\frac{1}{2}afg$
c	b	$3a$	$\frac{1}{3}cm$
abc	abc	$6acd$	$\frac{1}{6}acfgm$

SCHOL. *Multiplicatio aliquando indicatur per Crucem, quam S. Andreæ vulgo vocant. Sic* $a \times b$ *indicat factum* a *in* b, a *in* b, *seu* ab. *Ceterum cum in omni multiplicatione sit unitas ad factorem unum, ut alter ad productum, erit productum quarta proportionalis, hoc est* 1 . a :: b . ab, *proinde optime exprimitur per* ab.

PROPOSITIO IV.

Quantitates simplices dividere.

I. Regula est, ex dividendo dele divisorem & habebis quotum. Sic ad dividendum *ab* per *a*, deleto *a* ex dividendo, restat *b* quotus.

II. Si adsint coefficientes, hos seorsim divides, ut in vulgari Arithmetica. Sic dividendo $6ab$ per $3b$, quotus erit $2a$; & $\frac{4ax}{2x} = 2a$.

III. Quod si dividendus & divisor nullam habeant literam communem, tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut $\frac{ab}{c}$, $\frac{ax}{n}$, $\frac{2a}{3c}$ &c.

SCHOL. *Divisio dissolvit id, quod fuit multiplicatione compositum, proinde divisor per quotientem multiplicatus restituit ipsum dividendum. Nam multiplicato quoto* b *per divisorem* a, *restituitur dividendum* ab. *Atque hinc apparet, cur in divisione deleto divisore ex quantitate dividenda, habeatur quotus. Nam quotus & divisor sunt duo factores, qui producunt* ab, *& eliso divisore* a, *remanet alter ex factoribus pro quoto, nempe* b.

LEM-

LEMMA.

Quantitates complexas ad ſimpliciores expreſſiones reducere.

I. SI quantitates iiſdem literis notatæ habent idem ſignum +, aut —, addantur earum coefficientes & præponatur ſummæ idem ſignum. Sit reducenda ad ſimpliciorem expreſſionem quantitas $x + 3ab + 2x + 2ab$, additis coefficientibus terminorum ſimilium, reducitur ad $3x + 5ab$. Simili ratione quantitas $y + 2xy — 2d + xy — d$, erit $y + 3xy — 3d$.

II. Cum vero quantitates iiſdem literis expreſſæ habent ſigna diverſa, ſubducendus eſt minor coefficiens a majori, & reſiduo præponendum ſignum majoris. Sit quantitas $4ac + bc — 3bc$, ſubducto $+ bc$ ex $3bc$, & prapoſito ſigno — quantitatis majoris, erit per reductionem $4ac — 2bc$. Pariter $3ax — 2ax + 4b — 3b$, erit $ax + b$.

PROPOSITIO V.

Quantitates compoſitas addere.

I. SI quantitates eiſdem literis notatæ habent idem ſignum +, aut —, adduntur ſimul, illo eodem præfixo ſigno.

— a

$-a+3b$	$a-x$	$\frac{1}{2}cb+2b-3$
$-a+2b$	$3a-2x$	$\frac{1}{2}cb+3b-4$
$-2a+5b$	$4a-3x$	$cb+5b-7$

II. Quod si eisdem literis notatæ habent diversa signa, minor quantitas a majori subtrahitur, & residuo apponitur signum majoris.

$3a+5b$	$a+d$	$ab-2ac-5$
$2a-2b$	$a-4d$	$ab+6ac+2$
$5a+3b$	$2a-3d$	$2ab+4ac-3$

Coroll. *Hinc patet, quod ad addendum* 3a + 5b *ad* 2a — 2b, *ut in primo exemplo, scribi possit una quantitas post aliam, nempe* 3a + 5b + 2a — 2b *&* *deinde reduci* per Lem. *ad simpliciorem expressionem; habebitur enim eodem modo* 5a + 3b *&* *sic de aliis*.

PROPOSITIO VI.

Quantitates compositas subtrahere.

Quantitas subducenda additur, mutatis signis, quantitati, ex qua subduci debet. Subducenda sit ex quantitate $x+b-c$ quantitas $a+y-d+1$, erit differentia, seu residuum $x+b-c-a-y+d-1$. Similiter in exemplis, quæ sequuntur, intelligantur mutata signa in quantitate subtrahenda, erit facile habere residuum.

$3a + 2b$	$2x - b$	$4c - 3x - 2$
$a + 5b$	$x - 3b$	$2c - 2x + 5$
$2a - 3b$	$x + 2b$	$2c - x - 7$

COROLL. *Patet ſubtractionem quantitatum compoſitarum degenerare in additionem. Nam ad ſubtrahendum ex* $3a + 2b$ *quantitatem* $a + 5b$, *mutatis ſignis in* $a + 5b$, *erit* $-a - 5b$. *Habemus ergo* $3a + 2b - a - 5b$, *quæ* per Lem. *ad ſimpliciorem expreſſionem redacta dant reſiduum* $2a - 3b$, *ut in primo exemplo. Habeat enim quis aureos* 100, *debeat autem alteri aureos* $100 + 50$; *mutatis ſignis in ſumma ſubducenda, habebit ille aureos* $+ 100 - 100 - 50$, *hoc eſt* $- 50$ *aureos de ære alieno.*

PROPOSITIO VII.

Quantitates complexas multiplicare.

DUcantur ſinguli unius quantitatis complexæ termini in ſingulos alterius terminos eo modo, quo factum eſt in multiplicatione ſimplicium; quod commode fit incipiendo a ſiniſtra & pergendo ad dexteram.

Pro ſignis hæc regula obſervetur, *eadem ſigna* faciunt $+$, *diverſa* autem $-$

Multiplicanda ſint inter ſe A & B, dico factum eſſe E, reſultans ex factis C & D ſimul additis. Nam primus terminus a quantitatis B multiplicans ſingulos terminos quantitatis A producit C; & ſecundus terminus $-x$ quantitatis ejuſdem B multiplicans pariter ſingulos terminos quantitatis A, producit D, ergo si facta C & D addantur *per Prop.* v. obtinebitur factum E. Quod &c.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{ll} A. & a + b - c \\ B. & a - x \\ \hline C. & aa + ab - ac \\ D. & -ax - bx + cx \\ \hline E. & aa + ab - ac - ax - bx + cx \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{l} 2a - 3bc + 1 \\ 3a - 2b \\ \hline 6aa - 9abc + 3a \\ -4ab + 6bbc - 2b \\ \hline 6aa - 9abc + 3a - 4ab + 6bbc - 2b \end{array}$$

EXEMPL. III.

$$\begin{array}{l} x + ax - 2b + 3 \\ x - \frac{1}{2}a + 2b \\ \hline xx + axx - 2bx + 3x \\ -\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab - \frac{3}{2}a \\ +2bx + 2abx - 4bb + 6b \\ \hline xx + axx + 3x - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}aax + ab \\ -\frac{3}{2}a + 2abx - 4bb + 6b. \end{array}$$

De-

Demonstr. signorum regula. Omnis multiplicatio fit per numeros. Nam quantitatis per quantitatem multiplicatio non est nisi iterata ejusdem quantitatis additio; & per multiplicationis productum aliud non exprimitur, nisi quoties sumpta fuerit aliqua quantitas: sic productum $6a$, quod oritur ex 3 in $2a$, exprimit bis ter, seu sexies a esse sumptum; proinde ducendo $+ 2a$ in $+ 3$, oritur $6a$, de quo nemini dubium est.

At vero ducendo $+$ *in* $-$, *vel* $-$ *in* $+$, *oritur* $-$. Nam multiplicare per numerum negativum est tollere, seu negare positivum; sicuti multiplicare per numerum positivum est aliquid ponere. Itaque ducendo $+ 3a$ in $- 2$, fit $- 6a$, quia bis ter, seu sexies negatur quantitas positiva a. Quod erat secundum.

Denique $-$ *in* $-$ *dat* $+$. Nam in hoc casu quantitas negativa per numerum pariter negativum tollitur & aliquid ponitur. Sicuti tollere debitum est ipsum solvere ponendo aliquid; unde ducendo $- 3a$ in $- 2$, fit $+ 6a$, quia dum quantitas negativa bis ter negatur, bis ter aliquid ponitur. Ergo &c.

Vel sic, $-$ *in* $-$ *dat* $+$. Nam multiplicando quantitatem negativam per aliam negativam v. g. $- 3a \times - 2b$, illa toties subtrahitur, quot sunt in altera unitates. Negatio enim subtractionem importat, sicuti affirmatio additionem. Hæc autem subtractio cum sit subtractio quantitatis negativæ, signum negativum mutari debet in affirmativum *per Prop.* VI. proinde residuum subtractionis (seu productum multiplicationis) erit affirmativum. Sic $- 3a$ in $- 2b$ dat $+ 6ab$. Nam quantitas $- 3a$ bis subtrahi debet, quot scilicet sunt unitates in altera quantitate negativa $-2b$; & mutato ſigno negativo in affirmativum, habetur $+6ab$ multiplicationis productum.

SCHOL. I. *Hanc doctrinam ſi quis nunc penitus non percipiat, parum refert, percipiet poſtea. Interim ultra progrediatur.*

SCHOL. II. *Multiplicatio compoſitarum quantitatum exprimitur quoque aliquando per ſignum* $\times$, *ducta ſupra factores compoſitos linea ſic*, $\overline{a+b-c}\times\overline{a-x}$. *Vel factores ipſi includuntur parentheſi, ut inſigni calculi commodo excogitavit Leibnitius, quo Analyſtæ recentiores utuntur, nempe* $(a+b-c)(a-x$. *Similiter* $(a+b-c)x$, *deſignat productum* $ax+bx-cx$.

PROPOSITIO VIII.

Quantitates complexas dividere.

Hic etiam eadem ſigna ponunt $+$, diverſa $-$ Neque refert utrum a ſiniſtra, an vero a dextera initium ducas. Operatio eodem modo peragitur ac in vulgari Arithmetica. Exempla rem declarant. Dividendum eſt polynomium *A* per polynomium *B*, dico quotum eſſe *C*.

EXEMPLUM I.

$$
\begin{array}{lll|l}
B.\ a+b) & A. & an+bn-ar-br+a+b & C \\
 & & -an-bn+ar+br-a-b & +n \\
\hline
 & & 0 \qquad 0 \qquad 0 & -r \\
 & & & +1
\end{array}
$$

Divido

Divido an per a & pono ad dexteram in C quotum $+ n$, qui habetur *per Prop.* IV. Per hunc multiplico divisorem $a + b$, ejusque productum $an + bn$ (mutátis signis *per Prop.* VI.) subduco ex dividendo A & fit o. Deinde eodem modo per a divido $- ar$, & pono in C quotum $- r$ inventum *per Prop.* IV. per quem multiplicato divisore $a + b$, oritur productum $- ar - br$ subducendum (mutatis signis) ex dividendo $- ar - br$ & habetur o. Demum dividendo a per a, quotus est 1, per quem multiplico divisorem $a + b$, & productum $a + b$ (mutatis signis) subtraho ex dividendo, & nihil remanet. Quotus ergo C est $n - r + 1$, per quem si multiplicetur divisor $a + b$, restituitur dividendum A.

EXEMPLUM II.

Dividendum est polynomium B per polynomium C, dico quotum esse D.

$$
\begin{array}{lll|l}
C. \ 3a - 1) & B. & 6aa + 3ab + 13a - b - 5 & D \\
 & & -6aa \qquad\quad + 2a & +2a \\
 & & \overline{\quad 0 \quad} \qquad\quad \overline{+15a} & +b \\
 & & & +5 \\
\hline
\text{Resid. } E. & & +3ab + 15a - b - 5 & \\
 & & -3ab \qquad\quad + b & \\
 & & \overline{\quad 0 \quad} \qquad \overline{\ 0\ } & \\
\hline
\text{Resid. } F. & & +15a - 5 & \\
 & & -15a + 5 & \\
 & & \overline{\qquad 0 \qquad} &
\end{array}
$$

Divi-

Dividendo $6aa$ per $3a$ oritur quotus $2a$ *per Propos.* IV. quem pono in D, & per hunc multiplicans divisorem C $3a - 1$, habeo productum $6aa - 2a$, subducendum (mutatis signis) ex dividendo; quo facto, habetur residuum E. Divido igitur $3ab$ per $3a$, quotus est b ponendus in D, per quem multiplicato divisore C, oritur productum $3ab - b$, subtrahendum (mutatis signis) ex dividendo, seu residuo E: quo facto, habetur residuum $F + 15a - 5$ loco dividendi. Diviso itaque $15a$ per $3a$, fit quotus 5, per quem multiplicato divisore C, & producto $15a - 5$ subtracto ex residuo F, nihil remanet. Est ergo quotus D $2a + b + 5$, per quem si multiplicetur divisor C, oritur polynomium B.

EXEMPLUM III.

Dividenda sit quantitas A per quantitatem B, dico quotum esse C.

$$
\begin{array}{llrl|l}
B.\ x - 2\ ) & A. & & xxx + 4x - 17 & C \\
 & & & xxx - 2xx & + xx \\
 & & & \overline{\quad 0 \quad} & + 2x \\
 & & & & + 8 \\
\text{Resid.} & D. & & + 2xx + 4x - 17 & \\
 & & & - 2xx + 4x & \\
\text{Resid.} & E. & & 0 + 8x - 17 & \\
 & & & - 8x + 16 & \\
 & & & \overline{\quad 0 - 1 \quad} &
\end{array}
$$

Est ergo quotus C. $\quad xx + 2x + 8 - \frac{1}{x-2}$

COROLL.

COROLL. *Si facta divisione aliquid remanet, illud ponitur post quotientem cum signo* +, *vel* —, *quo afficitur, ut in hoc tertio exemplo* $-\frac{1}{x-2}$ *supponendo illi divisorem, ut fit in communi Arithmetica.*

SCHOL. I. *Liberum est sumere ex divisore composito, quam libuerit, literam ad dividendum; quæ tamen semel assumpta semper adhibetur, nec mutari potest. Sic in primo exemplo pro litera* a *sumi potuisset litera* b. *In secundo exemplo loco* 3a, *assumi poterat in divisorem quantitas* — 1, *semper enim idem quotus obtinetur.*

SCHOL. II. *Sæpe numeri, qui præcedunt terminos dividendi, aut divisoris, impediunt, quo minus fieri possit divisio. Tunc divisio exprimitur per modum fractionis, ut si dividenda sit* $3ab + c$ *per* $2a - c$, *erit quotus* $\frac{3ab + c}{2a - c}$. *Idem fit cum dividendus, & divisor nullam habent literam communem; ut* $\frac{ad - ac}{d - r}$, *item* $\frac{dx - dc}{a + x}$ &c.

SCHOL. III. *Aliquando etiam divisio quantitatum compositarum fit includendo divisorem & dividendum parenthesi, & inter illos apponendo duo puncta; ut* $(a + b) : c$ *indicat* $a + b$ *divisum esse per* c. *Similiter* $(2ax - ab) : (a - c)$ *designat polynomium* $2ax - ab$ *divisum esse per polynomium* $a - c$; *quod summo Leibnitii ingenio pariter debemus.*

PRO-

PROPOSITIO IX.

Datæ quantitatis divisores omnes invenire.

I. Esto numerus 150, cujus singuli divisores quæruntur. Divide illum per 2 & quotum 75 pone sub ipso numero dividendo, ut in *A*, divisorem autem 2 in *B*. Deinde quia quotus 75 dividi non potest per 2 sine residuo, divide illum per 3 & pone quotum 25 in *A*, divisorem autem in *B*. Postea quotum 25 (cum adæquate dividi nequeat per 3) divide per 5 & quotum pone in *A*, divisorem in *B*. Demum quotus 5 divisus per 5, dat quotum 1, ponendum in *A*, posito divisore 5 in *B*. Habentur jam omnes divisores simplices dati numeri, hoc est 2, 3, 5, 5.

Ut habeantur divisores compositi, multiplica primum divisorem 2 per secundum 3, & pone productum 6 ad dexteram ejusdem secundi divisoris 3. Deinde duo primi divisores & productum 6 multiplicentur per tertium divisorem 5, & producta 10, 15, 30 ponantur ad dexteram ipsius divisoris 5. Demum multiplicentur per quartum divisorem 5 omnes numeri jam inventi, & habebis 25, 50, 75, 150, qui juxta ipsum ultimum divisorem apponuntur, ut infra patet. Ex compositis idem bis non ponitur.

A	*B*
150	2.
75	3. 6.
25	5. 10. 15. 30.
5	5. 25. 50. 75. 150.
1	

II.

II. Quæruntur omnes diviſores numeri M 120. Diſpone, ut in ſuperiori exemplo factum eſt, omnes diviſores ſimplices infra N, & omnes quotos ſub dato numero infra M. Deinde duc primum diviſorem in ſecundum & productum pone ad latus ſecundi diviſoris. Poſtea duo primi diviſores & productum modo inventum ducantur in tertium diviſorem, & ſingula producta, unum poſt aliud, ponantur ad latus ipſius tertii diviſoris, & ſic deinceps operando inveniuntur omnes dati numeri diviſores, ut infra apparet.

M	N							
120	2.							
60	2.	4.						
30	2.	8.						
15	3.	6.	12.	24.				
5	5.	10.	20.	40.	15.	30.	60.	120.
1								

III. Sit quantitas $aabcd$, cujus omnes diviſores quæruntur. Inveniantur primo omnes diviſores ſimplices a, a, b, c, d, qui ponantur infra B, ſinguli autem quoti infra A. Deinde ducendo diviſorem primum in ſecundum, habetur productum aa, quod ponitur ad latus ſecundi diviſoris a. Similiter ducendo tertium diviſorem b in omnes quantitates ſupra exiſtentes, habentur producta ab, & aab, quæ ſcribuntur ad latus ipſius diviſoris b, & ſic deinceps proſequendo habentur omnes diviſores quæſiti, ut infra.

A	B
$aabcd$	a.
$abcd$	a. aa.
bcd	b. ab. aab.
cd	c. ac. aac. bc. abc. $aabc$.
d	d. ad. aad. bd. abd. $aabd$. dc.
1	acd. $aacd$. bcd. $abcd$. $aabcd$.

IV. Quæruntur omnes divisores quantitatis $2aabb - 4ac$. Dividatur primo per 2, deinde diviso quoto $abb - 2ac$ per a, remanet quotus indivisibilis $bb - 2c$. Sunt ergo divisores primi 2, a, & $bb - 2c$, quibus multiplicatis ordine jam supra explicato, habentur omnes divisores, scilicet

$2abb - 4ac$	2.
$abb - 2ac$	a. $2a$.
$bb - 2c$	$bb - 2c$. $2bb - 4c$. $abb - 2ac$.
1	$2abb - 4ac$.

CoROLL. *Hinc patet, quotum indivisibilem, ut in hoc tertio exemplo* bb — 2c, *reponi debere inter divisores. Nam quælibet quantitas suimet divisor est.*

SCHOL. I. *Divisoribus primis, ut supra, inventis, si singulos binos, ternos, quaternos &c. inter se ducas, habebis cum Newtono omnes divisores compositos. Sic numeri* 60 *divisores primi sunt* per hanc Prop. 2. 2. 3. 5. *Ex binis compositi sunt*, 4. 6. 10. 15; *ex ternis*, 12. 20. 30; *ex quaternis*, 60; *qui omnes conficiunt summam divisorum* 12.

SCHOL. II. *Quod si inquiratur tantum summa divisorum dati numeri. ex. gr. quot divisores habeat numerus* 60;

inven-

inventis divisoribus primis, ut supra, sub singulis eorum ponitur 2, si sint inæquales: sub binis æqualibus ponitur 3; sub ternis æqualibus, 4 & sic deinceps, eorumque productum dat summam omnium divisorum.

Divisores primi numeri 60 sunt 2.2.3.5

Pone sub illis numeros, nempe 3×2×2

Quorum productum 12 dat summam quæsitam. Similiter primi divisores numeri 2310 sunt 2.3.5.7.11

Sub singulis, quia sunt inæquales, pono 2, 2×2×2×2×2

quorum productum 32 dat summam omnium divisorum numeri 2310. Ratio deducitur ex 1. Schol.

CAPUT II.

De Calculo Fractorum.

OMNIA fere peraguntur ut in communi Arithmetica. Ne qua tamen tyroni difficultas in hoc calculi genere suboriatur, quæ præcipua sunt, & ad præsentem usum magis faciunt, breviter illustrabimus; adjecta in fine appendice de Calculo Decimali.

AXIOMATA.

1. INtegra quantitas in fractionem degenerat, si loco denominatoris ponatur unitas, ut $\frac{ab}{1}$, $\frac{a+b}{1}$ &c.

2. Integrum in fractionem dati denominatoris convertitur, si multiplicetur per denominatorem datum &

producto supponatur ipsemet denominator, ut si a reducenda sit ad fractionem denominatoris b, erit $\frac{ab}{b}$. Item x reducenda ad fractionem dati denominatoris $a+b$, erit $\frac{ax+bx}{a+b}$.

3. Multiplicatis, aut divisis per eamdem quantitatem tam numeratore, quam denominatore fractionis, fractio valorem non mutat. Sic multiplicando $\frac{a}{b}$ per c fit $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$. Item dividendo $\frac{bb}{bc}$ per b, fit $\frac{b}{c}$; & $\frac{ax+bx}{a+b}$ divisa per $a+b$, fit $\frac{x}{1}$.

4. Ut multiplicetur fractio per suum denominatorem, satis est delere ipsum denominatorem. Sic ad multiplicandum $\frac{ax}{c}$ per c, satis est scribere ax. Similiter $\frac{bc}{a-b}$ multiplicatum per $a-b$ erit bc; & $\frac{a}{2x}$ multiplicatum per $2x$, erit a; nam $\frac{2ax}{2x}=a$ *per* 3. *Axioma*.

PROPOSITIO I.

Integrum cum fractione ad unam fractionem reducere.

Sit quantitas $a+\frac{bc}{n}$ reducenda ad unam fractionem.

Mul-

Multiplicetur quantitas integra a per denominatorem fractionis n, fiet fractio quæsita $\frac{an + bc}{n}$. Eadem ratione $\frac{aa}{c} - b$ erit $\frac{aa - bc}{c}$. Ratio patet *ex* 2. *Axiom.*

PROPOSITIO II.

Fractiones ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Sit fractio $\frac{aab}{ac}$ reducenda ad simpliciorem. Dividatur tam numerator, quam denominator per divisorem communem, nempe per a; nam quoti hinc inde orti dant fractionem simpliciorem & priori æqualem *per* 3. *Axioma*, scilicet $\frac{ab}{c}$. Eadem ratione $\frac{2abc}{8acd}$ erit $\frac{1b}{4d}$.

II. Quod si communis divisor non ita facile in oculos incurrat, ut in quantitatibus valde compositis contingere solet; tunc inveniantur *per Prop.* IX. *Cap.* I. omnes tam numeratoris, quam denominatoris divisores, ex quibus ille pro communi divisore seligatur, qui fuerit numeratori & denominatori communis. Sit fractio reducenda $\frac{aac + abc}{aa - bb}$, omnes quidem numeratoris divisores sunt a, c, $a + b$; denominatoris autem sunt $a - b$ & $a + b$. Divisor ergo utrique communis $a + b$ est divisor quæsitus, per quem dividendo utrumque terminum datæ fractionis $\frac{aac + abc}{aa - bb}$, fit $\frac{ac}{a - b}$.

Eadem

Eadem ratione $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ fit $\frac{aa}{d}$, dividendo per $c - d$ diviſorem communem inventum ut ſupra *per Prop.* IX. *Cap.* I.

SCHOL. *Alias regulas inveniendi diviſorem communem, utpote difficiliores, afferre, non putamus eſſe hujus loci.*

PROPOSITIO III.

Fractiones ad eandem denominationem reducere.

I. Sint duæ fractiones reducendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ducantur duo termini fractionis primæ in denominatorem alterius, nempe $\frac{a}{b}$ in d, & duo termini fractionis ſecundæ $\frac{c}{d}$ in b denominatorem primæ, ſeu (quod idem eſt) multiplicentur per crucem, ut numeri fracti; fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ ejuſdem nominis & æquales prioribus ex 3. *Axiom.*

II. Sint reducendæ plures; ducantur ambo termini cujuſque fractionis in productum, quod ex ceterarum fractionum denominatoribus reſultat, fient fractiones quæſitæ. Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ duc terminos primæ $\frac{b}{a}$ in df, deinde terminos ſecundæ $\frac{c}{d}$ in bf, item terminos tertiæ $\frac{e}{f}$ in bd, habebis $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{ebd}{bdf}$. Ratio ſequitur ex eodem 3. *Axiom.*

COROLL.

COROLL. *Quando denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius fractionis, tunc illæ fractiones ad idem nomen satis commode reducuntur multiplicando per illum quotum numeratorem & denominatorem fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducendæ* $\frac{ab}{cd}$ *&* $\frac{ef}{c}$ *quia denominator* c *dividit exacte denominatorem* cd, *multiplico per quotum* d *utrumque terminum fractionis* $\frac{ef}{c}$, *& fiunt* $\frac{ab}{cd}$ *&* $\frac{edf}{cd}$ *ejusdem nominis. Ut si reducendæ sint* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{3}{4}$, *quia* 4 *dividit exacte* 8, *multiplicando per quotum* 2 *terminum utrumque fractionis* $\frac{3}{4}$, *erunt* $\frac{5}{8}$ *&* $\frac{6}{8}$ *ejusdem nominis, ut patet.*

PROPOSITIO IV.

Additio & subtractio fractionum.

I. ADdendæ sint fractiones $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, summa erit $\frac{a+b}{c}$ Eadem ratione $\frac{ad}{a+b}$ & $\frac{cf}{a+b}$ simul additæ conficiunt summam $\frac{ad+cf}{a+b}$.

Si fuerint diversæ denominationis, ut $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; reducantur ad eamdem *per Prop.* III. fient $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{cb}{bd}$ earumque summa $\frac{ad+cb}{bd}$.

II.

II. Quod si addenda sint integra cum fractis $a + \frac{ab}{c}$ & $b - \frac{ac}{b}$, addi possunt integra integris $a + b$ & fractiones fractionibus $\frac{ab}{c}$ & $- \frac{ac}{b}$ (quæ prius ad eamdem denominationem reducendæ sunt *per Propos.* III.) eritque summa quæsita $a + b + \frac{abb - acc}{bc}$.

III. Vel possunt integra ad fractionem sibi annexam reduci *per Prop.* I. nempe $\frac{ac + ab}{c}$ & $\frac{bb - ac}{b}$, quæ redacta ad eamdem denominationem *per Propos.* III. erunt $\frac{abc + abb}{bc}$ & $\frac{bbc - acc}{bc}$, earumque summa $\frac{abc + abb + bbc - acc}{bc}$.

IV. Si vero subtrahenda sit $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{b}$, differentia erit $\frac{c - a}{b}$. Si sint diversæ denominationis, semper ad eamdem prius reduci debent. Sic ut $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{d}$ subtrahi possit, reducuntur ad eamdem denominationem *per Prop.* III. eritque differentia quæsita $\frac{bc - ad}{bd}$.

V. Quod si ex integra quantitate x subduci debeat fractio $\frac{aa - ab}{a + b}$; reducta prius x ad fractionem ejusdem denominatoris per 2. *Axioma*, habetur $\frac{ax + bx}{a + b}$, ex qua sub-

ſubducta $\frac{aa - ab}{a + b}$, erit reſiduum $\frac{ax + bx - aa + ab}{a + b}$.

Similiter ſi ſubtrahenda ſit $b + \frac{cc}{b + d}$ ex $a + b$, redacta prima quantitate ad unam fractionem *per Prop.* I. & altera ad fractionem ejuſdem nominis cum prima *per Axioma* 2. erit reſiduum $\frac{ab + ad - cc}{b + d}$ hoc eſt $a - \frac{cc}{b + d}$ *per Prop.* VIII. *Cap.* I.

SCHOL. *Cum numerator fractionis pluribus conſtat terminis, juvat aliquando fractionem illam in plures dividere. Sic* $\frac{ab - cd + dd}{a - b}$ *dividi poteſt in* $\frac{ab}{a-b}, \frac{-cd}{a-b}, \frac{+dd}{a-b}$. *Hoc autem præſertim fit, ubi aliqui termini numeratoris ſunt per denominatorem diviſibiles, alii vero non. Sit enim* $\frac{aa - 3ab - bb}{a + b}$ *dividatur in* $\frac{aa - bb}{a + b}$ & $\frac{-3ab}{a + b}$, *quia vero* $\frac{aa - bb}{a + b} = a - b$ per Prop. VIII. Cap. I. *erit fractio propoſita* $a - b - \frac{3ab}{a + b}$.

PROPOSITIO V.

Fractiones multiplicare.

I. Sint multiplicandæ duæ fractiones $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, ducantur inter ſe numeratores, & denominatores pariter inter se, fiet productum quæsitum $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione fractio $\frac{a-b}{c}$ multiplicata per $\frac{ab}{x}$ producit $\frac{aab-abb}{cx}$.

II. Si multiplicanda sit fractio $\frac{a}{b}$ per integrum c, satis est numeratorem in integrum ducere, eritque productum $\frac{ac}{b}$. Nam integro supponitur unitas, & illud ad fractionem esse redactum, nempe $\frac{c}{1}$ *per* 1. *Axiom.*

III. Vel dividatur (siquidem exacte fieri possit) denominator fracti per integrum, habebitur productum. Sit $\frac{a}{bc}$ multiplicanda per c, divido bc per c, quotus $\frac{a}{b}$ dat productum quæsitum; nam $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, ut patet. Eadem ratione sit multiplicanda $\frac{ab-cd}{ac-ad}$ per $c-d$, divido $ac - ad$ per $c-d$, quotus est a, ergo productum quæsitum erit $\frac{ab-cd}{a}$.

IV. Si multiplicanda sit $a+\frac{aa}{b}$ per $b-\frac{cc}{d}$, reducantur integra ad fractiones sibi annexas *per Prop.* 1. nempe $\frac{ab+aa}{b}$ & $\frac{bd-cc}{d}$, eritque earum productum $\frac{\overline{ab+aa} \times \overline{bd-cc}}{bd}$ hoc est $\frac{abbd+aabd-abcc-aacc}{bd}$

seu

ſeu $ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd}$ *per Schol. Prop. præc.*

V. Fieri etiam poteſt multiplicatio, non reductis integris in fractiones, ducendo $a \times b$ & habetur ab, deinde $\frac{aa}{b} \times b$, & oritur $\frac{aab}{b}$, ut ſequitur.

$$\begin{array}{l} a + \frac{aa}{b} \\ b - \frac{cc}{d} \\ \hline ab + \frac{aab}{b} \\ \quad - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd} \\ \hline ab + aa - \frac{acc}{d} - \frac{aacc}{bd} \end{array}$$ ut ſupra.

COROLL. *Si fractio multiplicetur per ſuum denominatorem, productum eſt ipſius numerator. Sic* $\frac{aa}{a+b} \times a+b$ *dat* aa per 4. Axioma.

SCHOL. *Factum ex integro in fractum, ut* $\frac{ax}{b}$, *quod oritur ex* $\frac{a}{b} \times x$; *vel* $\frac{2ac}{3}$, *quod oritur ex* $\frac{2}{3} \times ac$, *exprimi etiam poteſt ſeorſum hoc pacto* $\frac{a}{b}x$ & $\frac{2}{3}ac$, *quod notetur.*

PROPOSITIO VI.

Fractiones dividere.

I. Ut dividatur $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, eliſo communi denominatore, divide a per c, erit quotus $\frac{a}{c}$. Eadem ratione $\frac{1aab}{2c}$ diviſo per $\frac{2ad}{3c}$, quotus erit $\frac{3ab}{4d}$. Nam in diviſione fractionum omnia fiunt, ut in multiplicatione, inverſo tamen denominatore minutiæ dividentis; proinde dividendo $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{b}$, inverſo diviſore, factaque multiplicatione, quam docuimus in *præc. Prop.*, erit quotus $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, ut in primo exemplo.

II. Si denominatores diverſi fuerint, eſt eadem omnino regula. Sic $\frac{a}{b}$ diviſa per $\frac{c}{d}$ dat quotum $\frac{ad}{bc}$. Pari ratione $\frac{a-b}{c+d}$ diviſa per $\frac{n}{a}$ dat quotum $\frac{aa-ab}{nc+nd}$.

III. Si fractio $\frac{ac}{b}$ dividenda ſit per integrum c, divide [ſi fieri poteſt, ut in hoc exemplo] numeratorem ac per c, quotus quæſitus erit $\frac{a}{b}$. Similiter $\frac{ad-cd}{a-b}$ dividenda ſit per $a-c$, divido $ad-cd$ per ipſum $a-c$ unde habetur d, & quotus quæſitus erit $\frac{d}{a-b}$.

IV.

IV. Vel ſi numerator fractionis dividendæ diviſibilis non eſt, multiplicetur denominator ejuſdem fractionis per integrum. Sit $\frac{ac}{b}$ dividenda per d, quia ac non eſt diviſibilis per d, multiplico per ipſum d denominatorem, & habetur quotus quæſitus $\frac{ac}{bd}$. Eadem ratione $\frac{ad - cd}{a - b}$ dividenda per $a + b$, dat quotum $\frac{ad - cd}{aa - bb}$ multiplicando ſcilicet $a - b \times a + b$. Ratio patet, ſi diviſori integro ſubintelligatur unitas, nempe $\frac{a - b}{1}$ *per* 1. *Ax.* quo inverſo, fit multiplicatio, & producitur quotus, ut ſupra.

V. Si dividi oporteat $a + \frac{aa}{b}$ per $b - \frac{cc}{d}$, reducantur integri ad fractos ſibi adhærentes per *Prop.* 1. deinde $\frac{ab + aa}{b}$ dividatur per $\frac{bd - cc}{d}$, invertendo diviſorem & multiplicando modo ſupra explicato, erit quotus $\frac{abd + aad}{bbd - bcc}$.

SCHOL. *Si fractiones dividendæ ſint valde compoſitæ, juvabit ad majorem facilitatem eas, antequam fiat diviſio, ad terminos ſimpliciores reducere* per Prop. 11. hujus.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Polynomium cum fractionibus dividere.

I. SIt polynomium A cum fractionibus sibi annexis, quod dividendum sit per polynomium B pariter cum fractionibus, dico quotientem esse $Q = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$.

$$A.\quad \frac{1}{3}axx - \frac{1}{2}bxx + \frac{2}{3}abx - \frac{1}{8}aax + \frac{3}{16}abx - \frac{1}{4}aab$$
$$\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$B.\quad \frac{1}{2}ax - \frac{3}{4}bx + ab$$
$$Q.\quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a$$

Nam dividendo $\frac{1}{3}axx$ per $\frac{1}{2}ax$, quotus erit $\frac{2}{3}x$ *per Prop. præc.* quem pono in Q, & statim deletur $\frac{1}{3}axx$ supponendo illi zerum. Per quotum inventum multiplico divisoris B residuum, hoc est $-\frac{3}{4}bx + ab$; & primo quidem $-\frac{3}{4}bx \times \frac{2}{3}x = -\frac{6}{12}bxx = -\frac{1}{2}bxx$, quod (mutato signo) subtrahitur ex $-\frac{1}{2}bxx$, cui proinde suppono zerum. Deinde $\frac{2}{3}x \times ab = \frac{2}{3}abx$, quod pariter subtrahitur ex $\frac{2}{3}abx$, supposito zero.

Rursus per eumdem divisorem $\frac{1}{2}ax$ divido $-\frac{1}{8}aax$ quotus erit $-\frac{1}{4}a$ *per Prop. præc.* quem pono in Q; & statim deleto $-\frac{1}{8}aax$ per zerum illi suppositum, multiplico per ipsum quotum residuum divisoris B, eritque primo $-\frac{1}{4}a \times -\frac{3}{4}bx = \frac{3}{16}abx$, secundo $-\frac{1}{4}a \times ab = -\frac{1}{4}aab$; quæ facta, mutatis signis, subtrahuntur ex divi-

dividendo, ſupponendo illi zerum, & nihil remanet; proinde habetur quotus $Q = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}a = \frac{8x - 3a}{12}$ *per Prop.* III. & IV. hujus.

II. Sit dividendum polynomium C per polynomium D. dico quotum eſſe $Q = \frac{1}{3}x - \frac{b}{c}$

$$C.\quad \frac{x^3}{6b} + \frac{axx}{12b} - \frac{xx}{2c} - \frac{ax}{4c} - \frac{1}{3}cx + b$$
$$\quad\;\; 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad 0$$

$$D.\quad \frac{xx}{2b} + \frac{ax}{4b} - c$$

$$Q.\quad \frac{1}{3}x - \frac{b}{c}$$

Nam dividendo ($\frac{x^3}{6b}$ hoc eſt $\frac{xxx}{6b}$) per $\frac{xx}{2b}$ quotus erit *per Prop. præc.* $\frac{1}{3}x$, quem pono in Q, & ſtatim deleto $\frac{x^3}{6b}$ (apponendo illi zerum) multiplico reſiduum diviſoris D, nempe $+\frac{ax}{4b} - c$, eritque $\frac{1}{3}x \times \frac{ax}{4b} = \frac{axx}{12b}$ & $\frac{1}{3}x \times -c = \frac{1}{3}cx$, quæ facta ſubtraho ex dividendo, ſupponendo zerum.

Rurſus per eumdem diviſorem $\frac{xx}{2b}$ divido $-\frac{xx}{2c}$, & oritur

tur quotus $-\frac{b}{c}$, quem pono in Q; & deleto $-\frac{xx}{2c}$ (ſuppoſito illi zero) multiplico per ipſum quotum reſiduum diviſoris $\frac{ax}{4b}-c$ & duo facta $\frac{ax}{4b}\times-\frac{b}{c}=-\frac{ax}{4c}$ & $-c\times-\frac{b}{c}=+b$ ſubtraho ex dividendo, cumque nihil remaneat, patet quotum eſſe $\frac{1}{3}x-\frac{b}{c}=\frac{cx-3b}{3c}$ *per Prop.* 3. & 4. *hujus*.

Schol. *Pro pleniori hujus ſecundi exempli & ſequentis Propoſ. intelligentia ſciant tyrones* x^2, *vel* x^3, x^4 *&c. idem eſſe ac* xx, *vel* xxx, $xxxx$ *&c. hoc eſt quantitatem* x *elevatam ad quadratum, ad cubum, quadrato quadratum &c. prout infra explicabitur Cap.* 3. *At compendii cauſa pro* xx, xxx, *ſcribitur* x^2, x^3 *&c.*

PROPOSITIO VIII.

Valorem fractionis, cujus denominator eſt terminus compoſitus, per infinitos terminos deſignare.

Diviſa ſit quantitas $aa-bb+c$ per $a+b$, quotus erit $a-b$ & remanet c, hoc eſt fractio $\frac{c}{a+b}$ *per Propoſ.* VIII. *Cap.* I. Cujus fractionis valor per infinitos terminos deſignari poteſt hoc pacto.

Dividatur c per a, erit quotus $\frac{c}{a}$ *per Prop.* VI. *hujus*,

quem

quem duc in divisorem $a+b$, & factum $\frac{ac+bc}{a}$ seu $c+\frac{bc}{a}$ *per Schol. Prop.* IV. *hujus* subtrahe (mutatis signis) ex dividendo c, residuum erit $-\frac{bc}{a}$ *per Prop.* IV. *hujus*.

Deinde hoc residuum $-\frac{bc}{a}$ divide per eumdem divisorem a, quotus erit $-\frac{bc}{aa}$ *per Prop.* VI. hujus, quem duc in divisorem $a+b$, & factum $-\frac{abc-bbc}{aa}$, seu $-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa}$ subtrahe (mutatis signis) ex dividendi residuo $-\frac{bc}{a}$, remanet $+\frac{bbc}{aa}$.

Rursus hoc residuum dividatur per a, & quotus $\frac{bbc}{a^3}$ ducatur in $a+b$, erit factum $\frac{abbc+b^3c}{a^3}$, seu $\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3c}{a^3}$ subtrahendum (mutatis signis) ex residuo $+\frac{bbc}{aa}$, & relinquitur $-\frac{b^3c}{a^3}$, & sic deinceps.

Unde apparet ratio divisionem continuandi per infinitos terminos, qui sunt proportionales, & seriem Geometricam constituunt, nempe

$$\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{b^2c}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}\ \&c. = \frac{c}{a+b}.$$

COROLL. *Si fiat* a = 2, b = 1, *&* c = 1, *ita ut*

$\frac{c}{a+b} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$, *& hi valores substituantur in terminis serici jam inventis, aut fractio* $\frac{1}{2+1}$ *eodem pacto dividatur, quo divisa fuit fractio* $\frac{c}{a+b}$, *oritur series Geometrica* $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ *&c. Similiter si fiat* $a = 3$, $b = 1$ *&* $c = 1$, *nempe* $\frac{c}{b+a} = \frac{1}{3+1}$, *oritur series* $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ *&c. Quæ quidem series terminorum Geometrice decrescentium, ut patet, exprimere valent quotum quam proxime verum datæ fractionis, modo talis fractionis numerator sit unitas.*

COROLL. II. *Series fractionum hujusmodi continuo decrescentium, quæ ad verum valorem semper magis accedunt, dicuntur* convergentes. *Quod si termini continuo crescant, tunc a vero valore continuo recedunt, ac* divergentes *appellantur. Ut si ponatur* $a = 1$, $b = 2$ *&* $c = 1$, *hoc est* $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+2}$ *fit series divergens* $1 - 2 + 4 - 8 + 16$ *&c. quæ a valore fractionis* $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ *tanto magis recedit, quanto magis continuatur; ut rem consideranti patet.*

SCHOL. I. *Hanc doctrinam, quam tanquam inutilem Cruzas in sua Algebra* Cap. XIV. num. 40. *taxavit, plurimi fecerunt Cl. Viri* Leibnitius [a], Jac. Bernullus [b], Guido Grandus [c], Wolfius [d] & alii.

SCHOL.

(a) Acta Erudit. Lipſ. an. 1682 & 1683. (b) De Ser. infinit. pag. m. 267.
(c) Theor. Hugen. pag. 126. (d) Elem. Analy. Cap. I. Prob. 7.

SCHOL. II. *Cum fractiones Decimales in omni fere Matheſi magni ſint uſus, eaſque nobis in approximatione radicum* Cap. XI. *adhibere mens ſit, brevem de illis notitiam in ſequenti Appendice ſubiicimus.*

APPENDIX

De fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO I.

FRactiones Decimales ſunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur menſura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea diviſa in 10 æquales partes, ſingulæ deinde hæ partes in alias 10 partes, atque hæ ſingulæ rurſus in alias decem; & ſic deinceps, quantum quiſque velit; Oriuntur ex hac diviſione partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ, centeſimæ milleſimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ*, *ſecundæ*, *tertiæ*, *quartæ &c.* iiſque diſtinguendis apponuntur virgulæ, integris autem cifra 0. Sic fractio decimalis, $\overset{0}{5}.\ \overset{\mathrm{I}}{8}\ \overset{\mathrm{II}}{6}\ \overset{\mathrm{III}}{4}\ \overset{\mathrm{IV}}{2}$ ſignificat quinque integra, octo primas, ſex ſecundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed ſatis eſt virgulam ultimam apponere, & integra puncto diſtinguere, ut $5.864\overset{\mathrm{IV}}{2}$. Quæ quidem fractio idem valet ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$ ſeu $\frac{58642}{10000}$. At commodi gratia decimales ſcribuntur inſtar integrorum, omiſſo denominatore, modo ſupra explicato, nempe $5.864\overset{\mathrm{IV}}{2}$.

Coroll. I. *Hinc sequitur virgulas illas, sive apices decimales, qui numeris apponuntur, esse loco denominatorum; ut in decimali* $5.8^{\mathrm{I}}6^{\mathrm{II}}4^{\mathrm{III}}$, *apex unus importat denominatorem* 10, *duo apices denominatorem* 100, *tres denominatorem* 1000 *&c. hoc est* $\frac{8}{10}$ $\frac{6}{100}$ $\frac{4}{1000}$.

Coroll. II. *Hinc facile decimales ad eamdem denominationem reducuntur, addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut si decimalis* 3.5^{I} *reducenda sit ad secundas, ad tertias vel quartas &c. scribitur* 3.50^{II}, 3.500^{III}, 3.5000^{IV}. *Valor enim non mutatur, nam* $5^{\mathrm{I}} = 50^{\mathrm{II}}$, $5^{\mathrm{II}} = 50^{\mathrm{III}}$ *&c.*

Coroll. III. *Si integro cifræ quotcumque cum virgulis addantur, ejus valor idem manet; ut si ad* 3 *addas* 000^{III}, *ut fiat* 3.000^{III}, *non mutatur integri valor. Nam tres unitates idem valent, ac tres partes millesimæ, nempe* $3 = \frac{3000}{1000}$, *seu* 3.000^{III}.

Schol. *Ubi nullum præcedit integrum, ut in decimalibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$ *tunc loco integri ponitur zero, nempe* 0.8, 0.24, 0.725, *quæ æquivalent præcedentibus* $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$ *&c.*

DE-

DEFINITIO II.

FRactionum decimalium notæ dicuntur eſſe ejuſdem ordinis, ſeu gradus, quarum iidem ſunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0.5679, & 0.045, notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejuſdem gradus, quia utrique reſpondet idem denominator, ſcilicet $\frac{6}{100}$ & $\frac{4}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique reſpondet idem apex, qui ſtat loco denominatoris *per Corol.* 1.

DEFINITIO III.

PRogreſſio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v. g. partes milleſimæ, ſed partes decimæ, aut centeſimæ nullæ ſunt; ut $4.\overset{\mathrm{I}}{2}\,\overset{\mathrm{IV}}{5}$, ubi partes centeſimæ, & milleſimæ deſunt, quæ quidem cifris interpoſitis ſupplentur: ſic eadem decimalis, interpoſitis duabus cifris, erit $4.200\overset{\mathrm{IV}}{5}$. Similiter $3.\overset{\mathrm{II}}{5}\,\overset{\mathrm{V}}{7}$, fiet $3.0500\overset{\mathrm{V}}{7}$. Eadem ratione $\frac{5}{1000}$ ſcribitur $0.00\overset{\mathrm{III}}{5}$, & $3 + \frac{45}{10000}$ ſcribitur $3.004\overset{\mathrm{IV}}{5}$. Semper enim valor eſt idem, ut in *Corol.* 2. *&* 3. fuit explicatum.

PRO-

PROPOSITIO I.

Decimales addere, & subtrahere.

FRactiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur, ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant *per Defin.* 2.; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua *per Defin.* 3. deinde additio & subtractio fiat, ut in communi Arithmetica additio & subtractio integrorum.

ADDITIONIS EXEMPLA.

A. $3.24\overset{\text{III}}{5}$	$5.\overset{\text{I}}{2}\overset{\text{III}}{7} = 5.20\overset{\text{III}}{7}$
B. $7.3\overset{\text{II}}{9}$	$6.\overset{\text{I}}{4}\overset{\text{II}}{5} = 6.4\overset{\text{II}}{5}$
C. $10.63\overset{\text{III}}{5}$	Summa $11.65\overset{\text{III}}{7}$

COROLL. *Patet ratio ex dictis: nam si decimales* A *&* B *fiant ejusdem denominationis* per Coroll. 2. *erunt* per Coroll. 1. $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$ proinde $A + B = \frac{3245}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10635}{1000} = C.\ 10.63\overset{\text{III}}{5}$ *per Defin.* 1.

SUB-

SUBTRACTIONIS EXEMPLA.

A. 4.572^{III}	$7.4^{\text{I}}2^{\text{III}} = 7.402^{\text{III}}$
B. 1.29^{II}	$3^{\text{II}}5^{\text{III}} = 0.035^{\text{III}}$
C. 3.282^{III}	differentia 7.367^{III}

COROLL. *Ratio est eadem ac additionis: Nam si decimales* A *&* B *ad eamdem denominationem reducantur per* Coroll. 2. *erunt per* Coroll. 1. $A = \frac{4572}{1000}$ *&* $B = \frac{1290}{1000}$ hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{1290}{1000} = \frac{3282}{1000} = C.\ 2.282^{\text{III}}$ *per Defin.* 1.

SCHOL. *Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimalis subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex* 8 *integris tres centesimas, hoc est* 0.03^{II}, *adduntur ad* 8 *duo zeri, ut fiat* 8.00^{II} *eritque residuum* 7.97^{II}, *ut patet*.

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

FRactiones decimales multiplicantur ut integra in communi Arithmetica, nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum deci-

decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera finiftram verfus.

EXEMPLA.

I.	4.05^{II}	II.	0.745^{III}	III.	0.000356^{VI}
	3.2^{I}		42^{II}		0.0048^{IV}
	810		1490		2848
	1215		2980		1424
	12.960^{III}		0.31290^{V}		0.00000017088^{X}

COROLL. *Operandi modus ex dictis facile demonftratur. Nam in primo exemplo* $4.05^{\text{II}} = \frac{405}{100}$ *&* $3.2^{\text{I}} = \frac{32}{10}$ *per* Defin. 1. *Ex communi autem Arithmetica* $\frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{12960}{1000} = 12.960^{\text{III}}$ per Defin. 1. & Coroll. 1. *quod eft ejufdem exempli primi productum.*

COROLL. II. *Patet etiam ex primo exemplo tres tantum notas decimales in facto abfcindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad finiftram zeri, quot defunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.*

COROLL.

COROLL. III. *Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta; ut si multiplicari oporteat* $\overset{\text{I}}{4}\,\overset{\text{III}}{5}$ *per* $3.\overset{\text{II}}{2}$ *primo progressio interpositis zeris fiat integra per* Defin. 3. *hoc est fiat* $\overset{\text{I}}{4}\,\overset{\text{III}}{5} = 40\overset{\text{III}}{5}$, *&* $3.\overset{\text{II}}{2} = 3.0\overset{\text{II}}{2}$, *deinde multiplicando* $40\overset{\text{III}}{5} \times 3.0\overset{\text{II}}{2}$ *habetur productum* $1.2231\overset{\text{V}}{0}$.

SCHOL. *Si factorum unus sit numerus integer sine ullo sibi decimali annexo, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima nota dextrorsus.*

PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

FIat divisio, ut in integris fieri solet; utque notæ decimales in quoto distinguantur, subtrahe numerum apicum, quos habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cifræ, ut in III. exemplo.

EXEMPLA.

I. $\overset{\text{II}}{3}\,)\,0.1356\overset{\text{V}}{3} \mid 4.52\overset{\text{III}}{1}$

II. $5.2\overset{\text{II}}{4}\,)\,18.86\overset{\text{III}}{4} \mid 3.\overset{\text{I}}{6}$

3144

$—00$

III. $27.58\overset{III}{9})\,0\,35\overset{III}{4}\ldots\ \big|\ 0.0128\overset{V}{3}$

$$
\begin{array}{r}
27589\\
\hline
-78110\\
55178\\
\hline
229320\\
220712\\
\hline
-86080\\
82767\\
\hline
3313\ \&c.
\end{array}
$$

COROLL. *Operandi ratio clara est. Nam in primo exemplo* per Defin. 1. *habetur* $\overset{II}{3} = \frac{3}{100}$ & $0.1356\overset{V}{3} = \frac{13563}{100000}$, *proinde dividendo numeratorem per numeratorem & denominatorem per denominatorem ac si essent numeri integri, habetur nova fractio* $\frac{4521}{1000} = 4.52\overset{II}{1}$. per Defin. 1. *nempe quotus in primo exemplo inventus.*

SCHOL. *Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per* Defin. 3. *deinde instituatur divisio, ut supra dictum est.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Fractionem quamcunque in partes decimales reducere.

SIt data fractio $\frac{3}{5}$ reducenda in partes v. g. millesimas; Fiat $5 . 3 :: 1000 . x$, erit per regulam proportionum $x = \frac{3000}{5} = 600$, unde apparet $\frac{3}{5} = \frac{600}{1000} = 0.60\overset{\prime\prime\prime}{0}$ *per Defin.* 1.

Similiter fractio $\frac{3}{7}$ reducenda sit in partes centesimas millesimas, hoc est in 100000. Operandum ut supra, & invenietur $\frac{3}{7} > 0.42857$, sed < 0.42858, defectu existente minori quam $\frac{1}{100000}$. Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

SCHOL. *Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radicis quæsitæ. Ratio autem operationis per se manifesta est.*

PROPOSITIO V.

Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur quot uncias unius pedis Romani conficiant particulæ decimales $\overset{\prime\prime\prime}{750}$. Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem *per Defin.* 1. particulæ $\overset{\text{III}}{750} = \frac{750}{1000}$. Fiat jam 1000. 750 : : 12. x., erit per regulam proportionum $x = \frac{9000}{1000} = 9$. Habentur ergo $\frac{9}{12}$, proinde $\overset{\text{III}}{750} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, seu $\frac{3}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scutati Romani, quod in asses 100 dividitur, contineant decimales particulæ $\overset{\text{IV}}{5610}$. Cum *per Defin.* 1. sint $\overset{\text{IV}}{5610} = \frac{5610}{10000}$, si fiat 10000. 5610 : : 100. x. erit per regulam proportionum $x = \frac{561000}{10000} = 56 + \frac{1}{10}$. Continent ergo asses $56 + \frac{1}{10}$, hoc est asses 56, & unius quadrantis Romani semissem. Ratio per se patet.

SCHOL. Simon Stevinus (a), *decimalium auctor ingeniosissimus, eas loco fractionum vulgarium adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo, cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici* Tacquetus (b), Præstetus (c), Reyneau (d), Wolfius (e) & alii *hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabantur.*

CA-

(a) Oeuvres Mathemat. in f. pag. m. 206. (b) Arith. pract. l.2. Cap.9.
(c) Elemens des Mathemat. Tom.1. l.9. (d) Science du Calcul.
(e) Elem. Matheseos edit. 2. Tom.1. Cap.9.

CAPUT III.

De Calculo Exponentiali.

DEFINITIONES.

I. SI quantitas ex. gr. a ſeipſam multiplicet, ex dictis *Propoſ.* 3. *Cap.* 1. fit aa, quod etiam exprimitur per a^2, & dicitur *quadratum*, ſeu *ſecunda poteſtas*. Cujus radix, ſeu latus eſt ipſa a, quæ prima etiam poteſtas dicitur. Si aa multiplicetur per idem latus a, oritur aaa, ſeu a^3, nempe *cubus*, aut *tertia poteſtas*. Si aaa rurſus per a multiplicetur, oritur $aaaa$, ſeu a^4, nempe *quadrato quadratum*, aut *quarta poteſtas*, & ſic in infinitum. Atque hinc habetur ſeries continue proportionalium a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 &c.

II. Numerus poteſtati adſcriptus dicitur *Index*, ſeu *Exponens* illius poteſtatis. Exponit enim quo dimenſionis gradu gaudeat talis poteſtas, & indicat locum, quem occupare debet in ſerie proportionalium. Ut index 4 indicat quatuor dimenſiones ipſius a, & quartum illi locum competere in ordine proportionalium illius ſeriei.

III. Literæ m, n, r, s indicant exponentem potentiæ indeterminatæ, ut a^m, a^n, a^r, quæ poſſunt determinari ad quamlibet potentiam, tertiam, quartam, quintam &c.

IV. Series poteſtatum conſtituit progreſſionem geometricam, quæ procedit in ratione unitatis ad radicem. Exponentes verò progreſſionem Arithmeticam naturalem numerorum 1, 2, 3, 4, 5 &c.

V.

V. Poteſtas, cujus exponens eſt numerus fractus, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ &c. deſignat radicem ejus poteſtatis, quæ indicatur a denominatore fractionis; nempe $a^{\frac{1}{2}}$ radicem ſecundam, $a^{\frac{1}{3}}$ radicem tertiam, ſeu cubicam &c. unde oritur alia ſeries $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{1}{5}}$, $a^{\frac{1}{6}}$ &c. poteſtatum, quæ dicuntur *imperfectæ*; & idem revera ſignificant ac $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a}$ &c. quæ ſigna dicuntur *Radicalia*.

VI. Poteſtas, cujus exponens eſt cum ſigno negativo, ut a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} &c. ſignificat unitatem diviſam per talem poteſtatem, ut a^{-1} idem eſt ac $\frac{1}{a}$; a^{-2} idem ac $\frac{1}{aa}$, a^{-3} ſignificat $\frac{1}{aaa}$ &c. Nam ſi fuerit ex. gr. $\frac{aa}{aaaa}$, eliſo aa tam in numeratore, quam in denominatore, habetur 1, (nam $\frac{aa}{aa} = 1$) & remanet $\frac{1}{aa}$, quod æquivalet ipſi a^{-2}. Atque hinc oritur ſeries poteſtatum, quæ dicuntur negativæ, ut a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5} &c. huic æqualis $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$ &c.

VII. Zero, ſeu nihilum dicitur exponens unitatis, itaut a^0 ſignificet idem ac unitatem. Nam poſita progreſſione geometrica ab 1 incipiente, nempe 1, 2, 4, 8, 16 &c. erit $a^0 = 1$, $a^1 = 2$, $a^2 = 4$, $a^3 = 8$, $a^4 = 16$ &c.

COROLL.

COROLL. *Calculus poteſtatum, de quo agimus in hoc capite, fit per* Exponentes *ipſarum; proinde* Calculus Exponentialis *nuncupatur: qui ob poteſtates imperfectas* Defin. 5. *explicatas, extractionem quoque radicum complectitur.*

SCHOL. I. *Nota magnum eſſe diſcrimen inter* 2a *&* aa, *ſeu* a^2. *Nam* 2a *ſignificat duplum ejuſdem* a, *ſeu* $a+a$; *at vero* a^2 *ſignificat ſecundam poteſtatem ipſius* a. *Hinc poſita* $a=3$, *erit* $2a=6$, *at vero* $a^2=9$.

SCHOL. II. *Etſi nullum exiſtat in natura ſolidum, quod pluribus quam tribus dimenſionibus conſtet, in Algebra tamen alia atque alia concipiuntur ſolida; quorum dimenſionum numerus in infinitum extenditur, ut ſuperiora exempla docent. Uſus autem eſt frequentiſſimus in ſeriebus Geometricis & generatim in doctrina Curvarum.*

PROPOSITIO I.

Potentiam quamcumque per aliam ejuſdem radicis multiplicare, aut dividere.

I. ADDE ſimul exponentes, habebis factum.

a^2	$a^{\frac{1}{2}}$	a^{-2}	x^m	y^m
a^3	$a^{\frac{1}{3}}$	a	x^m	y^n
a^5	$a^{\frac{5}{6}}$	a^{-1}	x^{2m}	y^{m+n}

II. Pro diviſione ſubtrahe exponentem potentiæ dividentis ab exponente potentię dividendę, habebis quotum.

a^5

$$\begin{array}{ccccc} a^5 & a^{\frac{1}{2}} & a^2 & y^{m+n} & x^{2n} \\ a^2 & a^{\frac{1}{3}} & a^{-3} & y^n & x^r \\ \hline a^3 & a^{\frac{1}{6}} & a^5 & y^m & x^{2n-r} \end{array}$$

Demonstratio $a^2 = aa$, & $a^3 = aaa$ *ex Def.* 1. sed factum ex aa in aaa, si per extensum scriberetur, esset $aaaaa$, ergo $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$. Similiter $a^{-2} = \frac{1}{aa}$ *per Defin.* 6., & $a^1 = \frac{a}{1}$ *per Ax.* 1. *Cap.* 2. Sed $\frac{1}{aa} \times \frac{a}{1} = \frac{a}{aa}$, *Prop.* 5. *Cap.* 2. & $\frac{a}{aa} = \frac{1}{a} = a^{-1}$. Ergo multiplicando a^{-2} per a, factum erit a^{-1}. Quod &c.

Simili ratione a^5 divisum per $a^2 = \frac{a^5}{a^2}$ hoc est, si per extensum fractio scribatur, $= \frac{aaaaa}{aa}$; & ablatis hinc inde aa, residuum est $aaa = a^3$; ergo ut dividatur a^5 per a^2, quotus erit $a^{5-2} = a^3$. Pariter dividere a^2 per a^{-3} idem est ac dividere $\frac{aa}{1}$ per $\frac{1}{a^3}$; sed $\frac{aa}{1}$ divisum per $\frac{1}{a^3} = \frac{aa \times a^3}{1}$ *per Prop.* 6. *Cap.* 2. ergo dividendo a^2 per a^{-3} provenit quotus a^5. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO II.

Poteſtatem quamcunque ad aliam dati exponentis elevare.

EXponens poteſtatis ducatur in exponentem datum, factum erit exponens poteſtatis quæſitæ. Sit elevanda a^2 ad potentiam tertiam; ductis inter ſe exponontibus 2 & 3, habebis poteſtatem quæſitam a^6. Similiter ſit elevanda poteſtas y^2 ad poteſtatem 6; multiplicatis exponentibus 2 & 6, habebis y^{12} pro poteſtate ſexta quæſita. Si elevanda ſit x^n ad m, habebis x^{mn}. Quod ſi x^n elevanda ſit ad ſecundam, tertiam, quartam &c. poteſtatem ſcribitur x^{2n}, x^{3n}, x^{4n} &c.

Demonſtratio patet *ex Def.* 1. Nam perſpicuum eſt $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2\times 3} = a^6$, ſic etiam $x^{n\times 2} = x^{2n}$, & $x^{n\times 3} = x^{3n}$ &c.

CoROLL. *Eodem modo elevantur ad poteſtatem dati exponentis quantitates, quæ conſtant facto duarum, vel plurium quantitatum. Sic ſi* ab *elevetur ad poteſtatem ſecundam, erit* a^2b^2, *vel* $\overline{ab}^2$. *Poteſtas tertia quantitatis* $a^2b^1c^3$ *erit* $a^6b^3c^9$. *Nam* $a^{2\times 3}b^{1\times 3}c^{3\times 3} = a^6b^3c^9$. *Poteſtas* m *quantitatis* abcd *erit* $\overline{abcd}^m$.

SCHOL. *Poteſtates diſſimiles adduntur, ſubtrahuntur, multiplicantur &c. ut ceteræ quantitates. Sint enim duæ*

 pote-

potestates a^m & b^n, *earum summa erit* $a^m + b^n$, *differentia* $a^m - b^n$, *factum* $a^m b^n$, *quotus* $\frac{a^m}{b^n}$.

PROPOSITIO III.

Binomium ad quamcunque potentiam elevare.

I. Sit binomium $a + b$ elevandum ad potentiam v. g. sextam. Scribatur in primo termino prima radicis pars evecta ad potestatem quæsitam, ut hic, ad 6, quæ erit a^6. In secundo termino scribatur eadem a evecta ad potentiam unitate minorem & ducta in alteram radicis partem b quæ erit $a^5 b$. In tertio scribatur eadem radix a evecta ad potestatem rursus unitate minorem ducta in quadratum alterius partis radicis, nempe in b^2, quæ erit $a^4 b^2$; & sic deinceps, minuendo unitate in quolibet termino potestatem primæ partis radicis, & contra augendo unitate potestatem secundæ partis radicis, donec veniatur ad terminum, in quo prima pars radicis unica tantum dimensione constat, qui erit terminus penultimus, & in ultimo reperiatur secunda radicis pars evecta ad eandem potestatem quæsitam. Erit igitur potestas 6ª dati binomii $a + b$.

$$a^6 . a^5 b^1 . a^4 b^2 . a^3 b^3 . a^2 b^4 . ab^5 . b^6 .$$

II. Pro faciliori autem methodo fieri solent ex duabus dati binomii literis duæ progressiones Geometricæ, quarum altera a potentia quæsita incipiens, descendat usque ad unitatem, altera vicissim ab unitate ascendat usque ad eandem potentiam, & multiplicatis ordine terminis

minis unius progreſſionis per terminos alterius, habetur dati binomii potentia quæſita. Quæritur potentia ſexta ipſius $a+b$

Series I.	$a.^6$	$a.^5$	$a.^4$	$a.^3$	$a.^2$	$a.^1$	1.
Series II.	1.	$b.^1$	$b.^2$	$b.^3$	$b.^4$	$b.^5$	$b.^6$

Potentia VI. $a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b.^6$

III. Coefficientes potentiarum, quos Ougtrhedus *uncias* vocat, ſic reperiuntur. Exponens primi termini dat unciam ſecundi termini, ut in ſuperiori exemplo 6 erit uncia ſecundi termini a^5b. Pro uncia tertii termini, duc unciam modo inventam ſecundi termini, nempe 6, in exponentem 5, quem habet prima pars radicis in eodem ſecundo termino, & productum 30 divide per 2, quotus 15 eſt uncia tertii termini. Deinde duc hanc ipſam unciam 15 in exponentem 4, quem habet in tertio termino radicis prima pars, nempe a^4, & productum 60 divide per 3 quotus dat unciam quarti termini, & ſic deinceps. Itaque potentia ſexta binomii $a+b$ cum unciis ſuis erit

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

IV. Alii vero pro ejuſmodi unciis inveniendis duas Geometricas progreſſiones numerorum componunt, ita ut ex terminis ſibi ordine reſpondentibus fiat fractio, & multiplicando numeratores inter ſe & denominatores pariter inter ſe, habentur numeri unciales quæſiti. Ecce exemplum pro eadem potentia ſexta.

Series I.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
Series II.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Hinc $\frac{6}{1} = 6$ eſt uncia ſecundi termini.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{30}{2} = 15.$ uncia tertii termini.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{120}{6} = 20.$ uncia quarti.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{2} = 15.$ uncia quinti.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{1} = 6.$ uncia ſexti.

$\frac{6}{1} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = 1.$ uncia ultimi.

Hac methodo repertæ ſunt unciæ potentiarum binomii $a + b$, ut ex ſequenti exemplo apparet.

1.æ $a + b$

2.dæ $a^2 + 2ab + b^2$

3.æ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4.æ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5.æ $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

6.æ $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

SCHOL. I. *Si binomium ſit poſitivum, omnia ſigna ſunt affirmativa, ut patet ex ſuperiori exemplo. Si vero ſecunda binomii pars ſit negativa, ut* a—b; *termini, in quibus radix* —b *evecta erit ad poteſtatem imparem*, 1, 3, 5 *&c. afficiendi ſunt ſigno* —, *reliqui omnes ſigno* +. *Sic poteſtas tertia binomii* a — b *in ſuperiori exemplo fieret* $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *ob exponentes impares* b^1, b^3.

SCHOL. II. *Si numerus aliquis ſive integer, ſive fractus præcedat alterutrum, vel utrumque binomii terminum, ex. gr. ſi elevari debeat ad tertiam potentiam* a—2b, *elevetur primo binomium ipſum* a + b *ad tertiam potentiam,*

quod

quod secundum methodum superius allatam erit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. *Deinde numerus* 2, *qui afficit* b, *elevetur ad eandem potentiam, ad quam in singulis terminis elevata existit quantitas* b, *erit pro secundo termino* $= 2$, *pro tertio* $= 4$, *pro ultimo* $= 8$. *Duc postea hos numeros, seu potestates in coefficientes terminorum, in quibus* b *æquali potestate gaudet, habebis* $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$, *pro tertia potestate quæsita binomii* $a + 2b$. *Similiter si elevanda sit ad quartam potestatem* $2ax + b$, *erit* $16a^4x^4 + 32a^3bx^3 + 24a^2b^2x^2 + 8ab^3x + b^4$.

SCHOL. III. *Aliquando juvat binomium ad datam potestatem elevare scribendo ad ejus dexteram exponentem potestatis quæsitæ, ducta desuper linea. Sic ut elevetur* $a+b$ *ad quadratum, scribitur* $\overline{a+b}^{\,2}$; *ut ad cubum*, $\overline{a+b}^{\,3}$, *& in genere ad quamcunque potestatem indeterminatam* m, *scribitur* $\overline{a+b}^{\,m}$.

COROLL. I. *Hinc sequitur, ut potestas hoc modo efformata ad aliam potestatem dati exponentis elevetur, satis esse exponentem unius ducere in exponentem alterius. Elevanda sit* $\overline{a+b}^{\,2}$ *ad tertiam potestatem scribitur* $\overline{a+b}^{\,2\times 3} = \overline{a+b}^{\,6}$. *Similiter elevanda sit* $\overline{a+b}^{\,m}$ *ad potestatem* n, *scribitur* $\overline{a+b}^{\,mn}$.

COROLL. II. *Item sequitur, ut duæ potestates ejusdem quantitatis inter se multiplicentur, sufficere earum exponentes simul addere. Sic* $\overline{a+b}^{\,2} \times \overline{a+b}^{\,3}$ *erit* $\overline{a+b}^{\,2+3}$

$= a$

$= \overline{a+b}^5$. *Similiter* $\overline{a-b}^m \times \overline{a-b}^n = \overline{a-b}^{m+n}$. *Contra vero ut dividantur, satis est exponentem dividentis ab exponente dividendi subtrahere. Sit* $\overline{a-x}^{5-2} = \overline{a-x}^3$, *significat potentiam* $\overline{a-x}^5$ *divisam per potentiam* $\overline{a-x}^2$. *Item* $\overline{a+b}^{m-n}$ *est quotus resultans ex divisione* $\overline{a+b}^m$ *per* $\overline{a+b}^n$.

PROPOSITIO IV.

Canonem generalem pro quolibet binomio, aut polynomio ad potestatem quamcunque elevando assignare.

Sit binomium $p+q$ elevandum ad quamlibet potestatem indeterminatam m. Fiant duæ progressiones Geometricæ sequentes:

I.	p^m.	p^{m-1}.	p^{m-2}.	p^{m-3}.	p^{m-4}.	&c.
II.	1.	q^1.	q^2.	q^3.	q^4.	&c.

Quibus inter se ductis, habetur formula, seu Canon generalis $p^m + p^{m-1}q + p^{m-2}q^2 + p^{m-3}q^3 + p^{m-4}q^4$ &c. Ut inveniantur coefficientes, seu unciæ, fiant aliæ duæ series Geometricæ, nempe

I.	m.	$m-1$.	$m-2$.	$m-3$.	$m-4$.	&c.
II.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.

Fiat

Fiat fractio, & multiplicatis terminis, ut in *Prop. praec.* erit $\frac{m}{1}$ uncia secundi termini: $\frac{m.\overline{m-1}}{1.2}$ uncia tertii termini: $\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}$ uncia quarti termini &c. quibus suo loco in superiori Canone generali dispositis, habetur formula generalis pro quocunque binomio, aut polynomio ad quamlibet potestatem elevando, nempe $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4} q^4$ &c.

Patet exponentem m continuo decrescere, proinde ubi fit $=0$, ibi erit ultimus terminus potentiae quaesitae. Nam fiat ex. gr. $m=3$, in quarto Canonis termino erit $p^{m-3} = p^{3-3} = p^0 = 1$.

Sit igitur elevandum ad tertiam potestatem binomium $2ax + bb$. Supponatur $2ax = p$, $+bb = q$ & $m=3$. Loco ipsorum p, q, m substituantur eorum valores, nempe $2ax$, $+bb$ & 3; adhibitaque formula generali, erit $p^m = 8a^3x^3$, $mp^{m-1}q = 12a^2b^2x^2$, $m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = 6ab^4x$, demum $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = b^6$. Est igitur tertia potestas quaesita $8a^3x^3 + 12a^2b^2x^2 + 6ab^4x + b^6$.

Sit secundo trinomium $a+b-c$ elevandum ad quartam potestatem. Suppono $a=p$, $+b-c=q$, $m=4$ factaque, ut modo docuimus, debita valorum substitutione, ne, erit quarta potestas quæsita $a^4+4a^3b-4a^3c+6a^2b^2$ $-12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3-12ab^2c+12abc^2-4ac^3+b^4$ $-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4$.

PROPOSITIO V.

Ex potestatibus radicem extrahere.

I. UT extrahatur radix ex potestate data, dividatur exponens potestatis per exponentem radicis quæsitæ, quotus erit quæsita radix. Quæritur radix secunda potestatis a^3, diviso exponente 3 per 2, habetur radix quæsita $a^{\frac{3}{2}}$. Similiter radix tertia ejusdem potestatis erit $a^{\frac{3}{3}}=a^1$. Item radix quinta potestatis a^7 erit $a^{\frac{7}{5}}$, seu $a^{1+\frac{2}{5}}$ & generaliter $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$; eademque ratione $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$.

II. Si radix sit extrahenda ex facto plurium quantitatum, ut a^6b^2c, eodem modo operandum. Nam divisis exponentibus ejusdem a^6b^2c per exponentem radicis quæsitæ, habetur radix. Erit ergo ipsius a^6b^2c radix secunda $a^{\frac{6}{2}}b^{\frac{2}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, hoc est $a^3b\,c^{\frac{1}{2}}$, ita ut $\sqrt{a^6b^2c}=a^3bc^{\frac{1}{2}}$. Sic $\sqrt{ab}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, seu $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$.

Ratio deducitur ex ipsa potestatum compositione. Nam sicuti una potestas ad aliam elevatur multiplicando earum exponentes *per Prop.* II. *hujus*; sic ut radix extrahatur, contrario modo agitur, dividendo scilicet exponentem potentiæ per exponentem radicis quæsitæ.

SCHOL.

SCHOL. *Sed juvabit tyronem sequentes expressiones, quæ apud auctores non raro occurrunt, hic adnotare.* $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, *seu* $a^1b^{\frac{1}{2}}$; *nam* a *est radix ipsius* a^2 & $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$. *Pariter* $\sqrt{a^3b} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^1a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$, *ubi patet quantitatem partim esse rationalem, partim irrationalem. Item* $\sqrt{a^3b^3} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} = ab\sqrt{ab}$. *Hæc pauca ceteris dignoscendis facem præferunt.*

SCHOL. II. *Hanc novam radices exprimendi rationem excogitavit* Newtonus [a] *magno calculi commodo. Nam sic quantitates irrationales ad formam rationalium reducuntur & eodem modo pertractantur, de quo in Cap. sequenti.*

PROPOSITIO VI.

Radicem quadratam ex quantitatibus compositis extrahere.

Methodus extrahendi radices ex compositis quantitatibus non differt ab ea, qua in vulgari Arithmetica uti solemus. Sed claritatis gratia, sit quantitas A, cujus radix quadrata quæritur. Extrahe primum ex a^2 radicem a, quam pone detrorsum in B & sinistrorsum in C, ejusque quadratum a^2 subtrahe ex a^2, remanet o. Duplica deinde inventam radicem a, quam pone in D, & per $2a$ divide $+ 2ab$ datæ quantitatis residuum, habebis quotum b, quem adde in B priori radicis termino,

H

(a) Epist. ad Oldenburg. apud Wallisium Tom. III. pag. 622.

mino, & ſiniſtrorſum in D, habebis $2a+b$, quo ducto in radicem b, fit $2ab+bb$, mutatiſque ſignis, ſubtrahe ex quantitate A, remanet o.

Rurſus duplicata radice $a+b$, habebis in E $2a+2b$ diviſorem, per quem divide quantitatem $2ac$, quotus erit c, quo addito tam in B, quam in E, multiplica per hanc radicem c modo inventam totam quantitatem E, & productum $2ac+2bc+cc$ ſubtrahe, mutatis ſignis, ex quantitate reſidua ipſius A, nihil remanet. Proinde

$$\sqrt{aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc}=a+b+c.$$

$$\begin{array}{ll|l|c}
 & & A\quad a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+cc & B \\
C & a & -a^2-2ab-b^2-2ac-2bc-cc & a+b+c \\
D & 2a+b & \overline{\qquad\qquad}\ \ \overline{\qquad\qquad}\ \ \overline{\qquad\qquad\qquad} & \\
E & 2a+2b+c & \quad o \qquad\quad o \qquad\qquad o & \\
\end{array}$$

Sit rurſus extrahenda radix quadrata ex quantitate M. Operare ut ſupra, invenies radicem $x+b-1$, ut in N.

$$\begin{array}{r|l|c}
 & \qquad\qquad\qquad M & \\
 & x^2+2bx-2x+b^2-2b+1 & N \\
x & -x^2-2bx\qquad\ \ -b^2 & x+b-1 \\
2x+b & \overline{\quad}\ \ \overline{\qquad}\qquad\ \ \overline{\qquad} & \\
2x+2b-1 & \ \ o\quad\ \ o\qquad\quad\ \ o & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{Reſid.} & -2x-2b+1 \\
 & +2x+2b-1 \\
\hline
 & \quad o\qquad o \\
\end{array}$$

Co-

COROLL. *Patet ex compositione potestatum, tum etiam ex earum resolutione, in omni quadrato quantitatis compositæ contineri quadrata partium quantitatum peculiarium, ex quibus constat radix, ut in primo exemplo* a^2, b^2, c^2, *unde radix est* $a + b + c$; *& ulterius contineri duplum rectanguli earundem partium, hoc est* 2ab, 2ac, 2bc.

SCHOL. *Si ex data quantitate radix quadrata extrahi nequit, designatur ipsa radix, præfigendo quantitati propositæ signum radicale* $\surd$. *Sic ad extrahendam radicem secundam ex* $aa+bb$, *scribitur* $\surd\overline{aa+bb}$; *& hinc oriuntur quantitates radicales, de quibus in sequenti Capite.*

PROPOSITIO VII.

Ex quantitate composita radicem cubicam extrahere.

I. SIt quantitas *A*, cujus radix cubica inquiritur.

1. Radix cubica extracta ex a^3, quæ est a, ponatur dextrorsum in *B*, ejusque cubus a^3 subtrahatur ex primo termino quantitatis *A*.

2. Triplica radicem a, & ejus quadratum, ut factum vides in C. & per hoc ipsum quadrati triplum $3aa$ divide secundum terminum quantitatis *A*, nempe $3aab$, habebis quotum b pro altera radicis parte ponenda in *B*.

3. Multiplica ipsum b primo per $3aa$, secundo ejus quadratum bb per $3a$, tertio ejus cubum b^3 per unitatem, & tria producta $3aab$, $3abb$, b^3, quæ vides in *D*, subtrahe, mutatis signis, ex residuo quantitatis *A*; nihil remanet. Radix ergo cubica quæsita est $a + b$.

$$\begin{array}{ll|l|l} & & A \quad a^3+3aab+3ab^2+b^3 & B \\ C & 3aa+3a & -a^3-3aab-3ab^2-b^3 & a+b \\ & \left\{\begin{array}{l} 3aab \\ 3abb \\ b^3 \end{array}\right. & \overline{\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad} & \end{array}$$

D

II. Sit extrahenda radix cubica ex quantitate F.

1. Inventam radicem cubicam primi termini, quæ eſt $2a$, pone in G, ejuſque cubum $8a^3$ ſubtrahe ex ipſo primo termino, remanet 0.

2. Radix inventa, ejuſque quadratum triplicetur, ut in H; & per hujuſmodi triplum, nempe per $12a^2$, dividatur ſecundus terminus quantitatis F, nempe $-36a^2$, quotus -3 dat alteram radicis partem ponendam in G.

3. Hanc primo duc in $12a^2$, deinde ejus quadratum duc in $6a$, demum ejus cubum in unitatem, habes tria producta in M, ſubtrahenda (mutatis ſignis) ex quantitate reſidua ipſius F, & nihil remanet. Eſt ergo radix quæſita $2a-3$.

$$\begin{array}{ll|l|l} & & F \quad 8a^3-36a^2+54a-27 & G \\ H & 12a^2+6a & -8a^3+36a^2-54a+27 & 2a-3 \\ M & \left\{\begin{array}{l} -36a^2 \\ +54a \\ -27 \end{array}\right. & \overline{\quad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad} & \end{array}$$

COROLL. *Latere non poteſt methodi hujus ratio niſi eos, qui cuborum geneſin prorſus ignorant. Patet enim cubum ex binomio ex. gr. efformatum conſtare cubis utriuſque quantitatis, & ulterius triplo quadrati primæ in ſecundam & viciſſim ſecundæ in primam quantitatem ducti, ut in primo exemplo conſtat cubis* a^3, b^3, *tum etiam* $3a^2b$, & $3b^2a$. *Signa autem, quibus cubi illi ſunt affecti, produnt*

ſigna

signa eorum radicis, ut in secundo exemplo cubus -27 *indicat radicem negativam* -3.

SCHOL. I. *Quod si ex data quantitate radix extrahi non possit modo prædicto, ex. gr. ex* $aa-bb$, *indicatur signo radicali cubico, nempe* $\sqrt[3]{aa-bb}$, *quod de aliis quibuscumque radicibus dictum intelligatur.*

SCHOL. II. *Fractionum radices habentur, si separatim ex numeratore & denominatore eodem modo extrahantur. Juvabit tamen tyronem ad expressiones sequentes animum advertere. Radix quadrata quantitatis* $\frac{xx+2ax+aa}{bb}$ *erit* $\frac{x+a}{b}$. *Similiter* $\frac{aa}{bc}$ *erit* $\frac{a}{\sqrt{bc}}$. *Radix cubica quantitatis* $\frac{a^3}{b^3c^3}$ *erit* $\frac{a}{bc}$. *Item* $\frac{a}{\sqrt[3]{dm}}$ *est radix pariter cubica quantitatis* $\frac{a^3}{dm}$.

SCHOL. III. *Si fractio, ex qua radix extrahenda est, integro adhæreat, tunc primo integrum ad fractionem ejusdem nominis reducatur* per Prop. 1. Cap. 2. *Deinde extrahatur, si fieri possit, radix quæsita ex numeratore & denominatore. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate* $6+\frac{1}{4}$, *facta reductione* per Prop. cit. *habetur* $\frac{25}{4}$, *cujus radix est* $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$. *Similiter sit quantitas* $\frac{c^2-4c}{4}+1$, *facta reductione* per Prop. cit. *oritur* $\frac{c^2-4c+4}{4}$, *cujus radix* $=\frac{c-2}{2}$ per Prop. 6. hujus.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Radices quascumque extrahendi methodum generalem assignare.

Consideretur, quantitas, ex qua radix eruenda est, uti quantitas elevanda ad eam potestatem, cujus radix inquiritur. Exponens pro radice quadrata *ex Defin.* 5. erit $= \frac{1}{2}$, pro cubica $= \frac{1}{3}$, pro quadrato quadrata $= \frac{1}{4}$. Exemplis nonnullis res fiet clarissima.

I. Sit extrahenda radix quadrata ex quantitate $a^2 + 2ab - 2ac + b^2 - 2bc + cc$. Ex formula generali *Prop.* 4. hujus $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2$ &c. sumantur duo priores termini [nam alii sunt inutiles, cum radices extrahendæ sunt rationales] & ponatur $a^2 = p$, $+ 2ab - 2ac$ &c. $= q$, & (quia agitur de radice quadrata) erit $m = \frac{1}{2}$, ideoque primus terminus radicis $= p^m = a^{2 \times \frac{1}{2}} = a$. Secundus erit $mp^{m-1}q = \frac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}} q$, hoc est $\frac{1}{2} a^{-1} \times \overline{2ab - 2ac}$, nempe $\frac{1}{2} a^{-1} \times 2ab = a^{-1+1} = a^0 b = 1b$. Similiter $\frac{1}{2} a^{-1} \times -2ac = -a^{-1+1} c = -a^0 c = -1c$; ideoque radix quæsita est $a + b - c$. Neque enim ulterius est progrediendum ubi m fit $= 0$, proinde cum hic habeatur $a^0 b$, & $-a^0 c$, habentur duo ultimi radicis termini.

II. Quæritur radix cubica quantitatis $a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$. Pone $a^3 = p$, & $- 3a^2 b + 3ab^2 - b^3 = q$, erit

[ob

[ob radicem cubicam] $m = \frac{1}{3}$. Positis igitur valoribus p & q in duobus formulæ generalis terminis, $p^m + mp^{m-1}q$, habebis $p^m = a^{3 \times \frac{1}{3}} = a$ pro primo radicis termino. Deinde $mp^{m-1}q = \frac{1}{3} a^{3 \times -\frac{2}{3}}$, hoc est $\frac{1}{3} a^{-2} q = \frac{1}{3} a^{-2} \times -3a^2 b = -a^{-2+2} b = -a^0 b = 1b$. Atque hic sistendum, ut supra monuimus. Radix ergo cubica est $a-b$.

III. Quæritur radix quadratoquadrata quantitatis $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$. Pone $a^4 = p$, & $-4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = q$, erit $m = \frac{1}{4}$ ob radicem quadrato quadratam. Positis jam valoribus in duobus formulæ generalis terminis, habebis pro primo termino radicis $p^m = a^{4 \times \frac{1}{4}} = a^1$. Pro secundo $mp^{m-1}q$, $= \frac{1}{4} a^{4 \times -\frac{3}{4}}$, hoc est $\frac{1}{4} a^{-3} q = \frac{1}{4} a^{-3} \times -4a^3 b$; unde oritur productum $-a^0 b$, ex quo admonemur haberi jam secundum radicis terminum b, nec esse ulterius progrediendum. Est ergo radix quæsita $a-b$.

SCHOL. *Cum valor exponentis* m *nullibi occurrit* $= 0$, *tunc radix datæ quantitatis erit irrationalis, & extractio radicis continuari poterit in infinitum, seu per infinitos terminos; id quod* approximatio radicum *dicitur, de qua in Prop. sequenti.*

PRO-

PROPOSITIO IX.

Extractionem radicum per infinitos terminos continuare.

I. Extrahenda sit ex quantitate $a^2 - b^2$ radix, ex. gr. quadrata, per terminos infinitos $A.\ B.\ C.\ D.$ &c. Adhibeantur formulæ generalis tot termini, per quot continuatam vis extractionem radicis, nempe $p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3$ &c. pone $p = a^2$, $q = -b^2$, & [ob radicem quadratam] $m = \frac{1}{2}$, erit

$A (= p^m = a^{2 \times \frac{1}{2}}) = a^1$.

$B (= mp^{m-1}q = \frac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}}$, hoc est $\frac{1}{2} a^{-1} q = -\frac{b^2}{2a}$.

$C (= m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2} q^2 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4}$, hoc est $-\frac{1}{8} a^{2 \times -\frac{3}{2}}$, hoc est $-\frac{1}{8} a^3 q^2) = -\frac{b^4}{8a^3}$.

$D (= m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4} \times -\frac{1}{2}$, hoc est $\frac{1}{16} a^{2 \times -\frac{5}{2}}$, hoc est $\frac{1}{16} a^{-5} q^3) = -\frac{b^6}{16a^5}$.

Et sic deinceps in infinitum. Est ergo radix quæsita

$$A + B + C + D \text{ \&c.} = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} - \frac{7b^{10}}{256a^9} \text{ \&c.}$$

II.

II. At pro hac formula, qua utitur *Cl. Guisneus* [a] atque alii, adhibere præstat formulam Newtonianam magis quidem expeditam, & molestiæ fractionum minus obnoxiam videlicet, $P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ$ &c. in qua P significat primum terminum quantitatis illius, cujus radix investigatur. Q reliquos terminos divisos per primum; $\frac{m}{n}$ indicem dimensionis, seu radicis quæsitæ. Termini jam inventi exprimuntur literis A, B, C, D &c. nempe A exprimit primum radicis terminum $= P^{\frac{m}{n}}$; B, secundum $= \frac{m}{n} AQ$; C, tertium $= \frac{m-n}{2n} BQ$ & sic deinceps. Sed ecce exemplum.

Extrahenda sit radix secunda ex quantitate $\sqrt{c^2 + x^2}$ seu $\overline{c^2 + x^2}^{\frac{1}{2}}$ *per Prop. 5. hujus*; dico radicem esse $= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c}$ &c. Nam erit in hoc casu

$P = c^2$, $Q = \frac{x^2}{c^2}$, $m = 1$, $n = 2$, proinde habetur

$$A \left(= P^{\frac{m}{n}} = c^{2 \times \frac{1}{2}} \right) = c.$$

$$B \left(= \frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} c \times \frac{x^2}{c^2} \right) = \frac{x^2}{2c}.$$

I C

(a) Application de l'Algeb. a la Geometrie, edit. 2. Paris pag. xxx.

$C(=\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{1}{4}\times\frac{x^2}{2c}\times\frac{x^2}{c^2})=-\frac{x^4}{8c^3}$.

$D(=\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{1}{2}\times-\frac{x^4}{8c^3}\times\frac{x^2}{c^2})$ $\frac{x^6}{16c^5}$.

$E(=\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{5}{8}\times\frac{x^6}{16c^5}\times\frac{x^2}{c^2})=-\frac{5x^8}{128c^7}$.

Radix ergo quæsita $=A+B+C+D$ &c. $=c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}$ &c.

Similiter extrahenda sit radix tertia ex quantitate $\sqrt{a^3-b^3}$, seu $\overline{a^3-b^3}^{\frac{1}{3}}$ per *Prop. cit.* Procedendo eadem methodo, erit $P=a^3$, $Q=-\frac{b^3}{a^3}$, $m=1$, $n=3$, proinde

$A(=P\frac{m}{n}=a^3\times\frac{1}{3}=)\,a^1$.

$B(=\frac{m}{n}AQ)=-\frac{b^3}{3a^2}$.

$C(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{b^6}{9a^5}$.

$D(=\frac{m-2n}{n3}CQ)=-\frac{5b^9}{81a^8}$.

$E(=\frac{m-3n}{4n}DQ)=-\frac{10b^{12}}{243a^{11}}$.

Est

Est ergo radix quæsita $= A + B + C + D + E$ &c. $= a - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} - \frac{5b^9}{81a^8} - \frac{10b^{12}}{243a^{11}}$ &c.

SCHOL. I. *Hac formula uti quoque possumus in divisione fractionis per terminos infinitos. Sit dividenda* $\frac{1}{a+b}$ [*hoc est* $\overline{a+b}^{-1}$ per Def. 6.] *Pone* $P = a$, $Q = \frac{b}{a}$, $m = -1$, $n = 1$, *erit* $A \left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = a^{-\frac{1}{1}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$B\left(= \frac{m}{n} AQ\right) = -1 \times \frac{1}{a} \times \frac{b}{a} = -\frac{b}{a^2}.$$

$$C\left(= \frac{m-n}{2n} BQ\right) = -1 \times -\frac{b}{a^2} \times \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^3} \text{ \&c.}$$

$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3}$ *&c. ut in* Prop. 8. Cap. 2.

SCHOL. II. *Patet jam ex duplici fonte oriri series infinitas terminorum proportionalium, scilicet ex divisione & extractione radicum. Primo modo quæsitæ fuerunt* a Nicolao Mercatore Holsato (a); *secundo a* Newtono (b). *Earum usus est ad obtinendam radicum approximationem, ut vidimus; ad inveniendas areas & longitudines Curvarum, ad Solidorum superficies dimetiendas, aliaque magni momenti circa curvas Mechanicas expedienda. Nos aliquem ipsarum usum in resolutione æquationum experiemur.*

(a) Logarithmo-tecnia Londini 1668. Acta Erudit. Lips. ann. 1695.
(b) Epist. ad D. Oldenburgium ann. 1676. in Tom. 3. Operum Wallisii. Analy. per quantit. series &c. in Tom. Philosophiæ Natur. Amstælod. ann. 1723.

CAPUT IV.

De Calculo Radicali.

DEFINITIONES.

I. QUANTITAS ſive numerica, ſive literalis, ex qua radix extrahi non poteſt, ſeu quæ non eſt potentia niſi imperfecta, dicitur quantitas ſurda & irrationalis; & a ſigno $\surd$, quod *Radicale* dicitur, *Radicalis* denominatur, ut $\sqrt[2]{5}$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a-b}$.

II. Signa radicalia præfixos habent exponentes ejus potentiæ, cujus radicem deſignant. Ubi nullus eſt exponens, pro radice ſecundæ potentiæ accipitur, ut $\sqrt{a}$ indicat radicem ſecundam quantitatis a. At $\sqrt[3]{a-b}$ ſignificat radicem tertiam, ſeu cubicam quantitatis $a-b$.

III. Si radicale ſignum præcedat numerus, aut quantitas literalis, ut $2\sqrt{3}$, $a\sqrt{b}$ &c. quantitas, quæ præcedit, dicitur eſſe *extra ſignum*, nempe 2 & a. A quibuſdam vero quantitates illæ vocantur *Coefficientes*. Cum quantitas nulla præcedit, ibi ſemper intelligitur unitas, ut $1\sqrt{2}$, $1\sqrt{a}$ &c.

IV. Ut quantitas extra ſignum ſub ſigno radicali poni valeat, elevari prius debet ad illam ipſam poteſtatem, quam indicat exponens ſigni radicalis, & multiplicari per quantitatem ſub ſigno radicali exiſtentem. Sic $2\sqrt{3}$ fiet

$\sqrt{12}$

$\sqrt{12}$. Item $a\sqrt{b-c}$, erit $\sqrt{a^2b-a^2c}$. Demum $a\sqrt[m]{bc}$, erit $\sqrt[m]{a^m bc}$.

V. Quantitas negativa ſub ſigno radicali, cujus exponens eſt numerus par, dicitur radix *imaginaria*, ſeu impoſſibilis, ut $\sqrt[2]{-a}$, $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$; ſimiliter $\sqrt[2]{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$ &c. nam impoſſibile eſt quadratum negativum. Sive enim multiplicetur $+a$ per $+a$, vel $-a$ per $-a$, ſemper oritur quantitas poſitiva $+aa$ ex dictis in *Prop.* 3. *Cap.* 1.

VI. Duæ quantitates radicales dicuntur *commenſurabiles* inter ſe, ſeu *communicantes*, cum ad ſimplicem expreſſionem redactæ, habent ſub ſigno radicali quantitatem eandem, ut $3\sqrt{5}$ & $2\sqrt{5}$; pariter $b\sqrt{a-b}$ & & $c\sqrt{a-b}$. Nam exprimi poteſt ratio, quam inter ſe habent; eſt enim $3\sqrt{5} \,.\, 2\sqrt{5} :: 3 \,.\, 2$. Item $b\sqrt{a-b} \,.\, c\sqrt{a-b} :: b \,.\, c$, ut patet.

VII. Si radicale ſignum quodcunque comprehendat ſub ſe aliam quantitatem radicalem, ut $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, vel $\sqrt{a-b\sqrt{c}}$, radix *univerſalis* dicitur; & denominatur a ſigno, quod totam illam quantitatem, linea ſuperducta, ſeu vinculo, complectitur. Sic $\sqrt[3]{2+3\sqrt{5}}$ dicitur radix univerſalis cubica: hoc eſt ex quantitate $2+3\sqrt{5}$ radicem

cem cubicam esse extrahendam eo pacto, quo inferius docebitur.

PROPOSITIO I.

Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem reducere.

I. Reducendæ sint radicales $\sqrt[2]{a}$ & $\sqrt[3]{b}$ ad eandem denominationem. Erit ex *Defin.* 5. *Cap.* 3. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$, redactisque fractionibus ex communi Arithmetica ad eandem denominationem, fiunt $a^{\frac{3}{6}}$ & $b^{\frac{2}{6}}$; proinde a elevari debet ad tertiam potestatem & b ad secundam, ut indicant novi numeratores fractionum. Signis autem radicalibus præfigendus exponens 6, communis scilicet ipsarum fractionum denominator. Erunt ergo $\sqrt[6]{a^3}$ & $\sqrt[6]{b^2}$.

II. Similiter reducendæ sint $\sqrt[2]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ ad eandem denominationem. Quia $\sqrt[2]{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ & $\sqrt[6]{20} = 20^{\frac{1}{6}}$ *per Defin. cit.* redactis fractionibus $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{6}$ ad idem nomen, habentur $\frac{6}{12}$ & $\frac{2}{12}$, quibus ad minores terminos reductis, dividendo per 2, habentur $\frac{3}{6}$ & $\frac{1}{6}$; unde patet 2 ad tertiam potestatem esse elevandum & 20 ad primam; erunt ergo $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{20}$.

SCHOL. *Cum duarum fractionum, quæ ad eandem denominationem reduci debent, denominator est præcise divisibi-*

sibilis per denominatorem alterius, multiplicatur per quotum talis divisionis tam numerator, quam denominator minutiæ dividentis, & habentur in terminis simplicissimis fractiones ejusdem denominationis, ut dictum est in Coroll. Prop. 3. Cap. 2. *Reducendæ sint duæ fractiones* $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$, *diviso 4 per 2, multiplico per quotum 2 tam numeratorem, quam denominatorem minutiæ ipsius* $\frac{1}{2}$, *habetur* $\frac{2}{4}$, *fractio scilicet ejusdem nominis cum altera. Similiter reducendæ sint ad idem signum* $\sqrt[2]{c}$ *&* $\sqrt[6]{a}$, *quia exponens 6 præcise divisibilis est per exponentem 2, multiplico per quotum 3 tam exponentem 2, quam quantitatem sub signo existentem, eam elevando ad potentiam tertiam, eritque* $\sqrt[6]{c^3}$ *ejusdem nominis ac* $\sqrt[6]{a}$.

PROPOSITIO II.

Radicales ad simpliciorem expressionem reducere.

I. Dividatur quantitas sub signo existens per potestatem ejusdem gradus, seu ejusdem exponentis, quem præfert signum radicale, & relicto quoto sub signo, radix potestatis, per quam facta fuit divisio, ponatur extra signum: hoc est extrahatur a quantitate radicali id, quod est rationale, & ponatur extra signum. Sit $\sqrt{aac+aab}$, divide per a^2, & quoto $c+b$ sub signo relicto, pone extra signum radicem potestatis dividentis, nempe a, erit radicalis ad simpliciorem expressionem redacta $a\sqrt{c+b} = \sqrt{aac+aab}$.

Sit

Sit pariter $\sqrt[3]{54}$ reducenda ad simpliciorem expressionem. Divide 54 per cubum 27, & relicto quoto 2 sub signo, pone extra signum radicem ejusdem cubi, nempe 3, erit $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{8a^3b}$ erit $2a\sqrt[3]{b}$, & $\sqrt[n]{ab^n}$ erit $b\sqrt[n]{a}$.

II. Quod si quantitas radicalis sit valde composita, ita ut ex sola terminorum inspectione non innotescat, an per maximam ejusdem gradus potestatem sit divisibilis, quærantur *per Prop. 9. Cap. 1.* omnes illius divisores: ex illis necessario apparebit, an sit potestas requisita. Quæritur ex. gr. an $\sqrt[3]{120}$ sit reducibilis ad simpliciorem expressionem. Inter ejus divisores apparet 8, qui est tertia potestas requisita. Divide ergo 120 per 8, & relicto quoto 15 sub signo, habebis $2\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{120}$. Item si $\sqrt[4]{48}$ reducenda sit ad simpliciorem, erit $2\sqrt[4]{3}$, nam inter divisores numeri 48, est 16, qui est potestas quarta quæsita, ac ter dividit ipsum 48.

Coroll. I. *Pro faciliori praxi, divide quantitatem radicalem sub signo existentem per 2, per 3, per 4 &c. successive, & examina, an quoti illi sint potestas quæsita. Quod facile agnosces si ex illis radicem extrahas. Sit* $\sqrt{392}$, *divide* 392 *per* 2, *quotus* 196 *est quadratum ex radice* 14, *per quod si dividas* 392, *habebis* 2, *proinde* $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$. *Similiter sit reducenda* $\sqrt[3]{192}$, *divide per* 3, *quotus* 64 *dat* *cu-*

cubum ex latere 4, per quem cubum dividendo 192, *habebis* 3; *ideoque* $\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{3}$, *& sic de aliis*.

COROLL. II. *Ex hac propositione dignoscitur, an duæ radicales ejusdem gradus sint inter se commensurabiles, aut communicantes. Nam si scire velim an* $\sqrt{8}$ *&* $\sqrt{18}$ *sint communicantes, reduco illas ad simpliciorem expressionem* $2\sqrt{2}$ *&* $3\sqrt{2}$, *quæ* ex Def. 6. hujus *erunt inter se, ut* 2 *ad* 3. *Ita* $\sqrt{50}$ *&* $\sqrt{18}$ *redactæ, fiunt* $5\sqrt{2}$ *&* $3\sqrt{2}$; *erit ergo* $\sqrt{50} . \sqrt{18} :: 5 . 3$.

PROPOSITIO III.

Quantitates radicales addere, aut unam ex altera subtrahere.

I. Radicales addendæ, aut subtrahendæ reducantur, si fieri potest, ad simpliciorem expressionem *per Prop. antec.* Si communicantes sint, quantitates rationales extra signum addantur, vel subtrahantur, ut fieri solet in quantitatibus rationalibus, & earum summa, aut differentia præponitur signo radicali. Sint addendæ quantitates $\sqrt{50}$ & $\sqrt{18}$, quæ redactæ *per Prop. cit.* sunt $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$, additis quantitatibus extra signum 5 & 3, earum summa erit $8\sqrt{2}$. Subtrahenda sit $\sqrt{18}$ ex $\sqrt{50}$, hoc est $3\sqrt{2}$ ex $5\sqrt{2}$ *per Prop. antec.* subtrahe 3 ex 5, residuum erit $2\sqrt{2}$.

II. Quod si quantitates addendæ, aut subtrahendæ non sint communicantes, sed incommensurabiles, summa fit per signum +, subtractio per signum — Sic duarum

$\sqrt{2}$ & $\sqrt{5}$ ſumma erit $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; differentia vero $\sqrt{2} - \sqrt{5}$. Similiter duarum $\sqrt{a+b}$ & $\sqrt{a-b}$ ſumma erit $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$; differentia autem $\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}$.

III. Quod ſi radicales addendæ, vel ſubtrahendæ ſint compoſitæ, eadem ratione operandum, ut exempla ſequentia indicant.

ADDITIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{5} + \sqrt{6} \\ \hline 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} \end{array}$$

SUBTRACTIONIS COMPOSITÆ EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 3\sqrt{7} \\ 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{6} + 5\sqrt{7} \\ \hline 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 12\sqrt{6} - 8\sqrt{7} \end{array}$$

PROPOSITIO IV.

Quantitates radicales multiplicare.

I. SI quantitates multiplicandæ ſint communicantes, multiplica primo inter ſe quantitates extra ſignum, earumque productum deinde multiplica per quantitatem ſub

ſub ſigno radicali exiſtentem. Sint multiplicandæ inter ſe $3\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$. Duc primo inter ſe 3 & 5, eorumque factum 15 duc in 2 ſub ſigno exiſtentem, habebis productum 30. Oritur enim quantitas rationalis.

Sint pariter inter ſe multiplicandæ $\sqrt{x^4 + x^2a^2}$ & $\sqrt{x^2a^2 + a^4}$, quæ ad ſimpliciores terminos redactæ per *Prop.2. hujus*, ſunt $x\sqrt{x^2 + a^2}$ & $a\sqrt{x^2 + a^2}$, proinde commenſurabiles & communicantes per *Def. 6.* Productum itaque ax multiplica per quantitatem ſub ſigno exiſtentem $xx + aa$ perinde ac forent quantitates rationales, habebis productum rationale $ax^3 + a^3x$.

II. Quod ſi quantitates multiplicandæ non ſint communicantes, ſed irrationales, ducantur inter ſe quantitates ſub ſigno, & producto præfigatur ſignum radicale commune. Sic $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$, $\sqrt{a} \times \sqrt{bc} = \sqrt{abc}$, item $\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b} = \sqrt{a^2 - b^2}$.

III. Si radicalis per rationalem, aut rationalis per radicalem ſit multiplicanda (idem enim eſt) ex. gr. $\sqrt{a+b} \times c + d$. Reducatur primo rationalis $c+d$ ad idem ſignum radicale, eam ſcilicet elevando ad poteſtatem ejuſdem gradus, ita ut fiat $\sqrt{c^2 + 2cd + d^2}$. Multiplicetur deinde $c^2 + 2cd + d^2$ per $a+b$, perinde ac eſſent quantitates rationales, erit productum quæſitum $\sqrt{ac^2 + 2acd + ad^2 + bc^2 + 2bcd + bd^2}$, quod etiam exprimi poterat hoc modo $\overline{c+d}\sqrt{\overline{a+b}}$. Multiplicando pariter $3\sqrt[n]{5}$ per 2, aut per $\frac{1}{2}$, productum erit $6\sqrt[n]{5}$, aut $\frac{3}{2}\sqrt[n]{5}$.

IV. Si quantitates multiplicandæ compositæ sint ex radicalibus, vel ex radicalibus simul & rationalibus, ducantur singuli termini unius per singulos alterius secundum regulas radicalium simplicium superius explicatas, servata consueta signorum + & — ratione. Exempla rem satis declarant.

$$
\text{I.}\quad
\begin{array}{r}
\sqrt{5}+\sqrt{3} \\
\sqrt{5}-\sqrt{3} \\
\hline
5+\sqrt{15} \qquad \\
-\sqrt{15}-3 \\
\hline
5-3=2
\end{array}
\qquad\qquad
\text{II.}\quad
\begin{array}{r}
3+2\sqrt{5} \\
5-3\sqrt{5} \\
\hline
15+10\sqrt{5} \qquad \\
-9\sqrt{5}-30 \\
\hline
+\sqrt{5}-15
\end{array}
$$

$$
\text{III.}\quad
\begin{array}{r}
2a+\sqrt{\overline{a+x}} \\
b-\sqrt{\overline{a+x}} \\
\hline
2ab+b\sqrt{\overline{a+x}} \qquad\qquad \\
-2a\sqrt{\overline{a+x}}-a+x \\
\hline
2ab+b\sqrt{\overline{a+x}}-2a\sqrt{\overline{a+x}}-a+x
\end{array}
$$

Ra-

Ratio multiplicandi quantitates radicales ita generatim demonſtratur. Sit multiplicanda $\sqrt{3}$ per $\sqrt{2}$, dico productum eſſe $\sqrt{6}$. Nam ex definitione multiplicationis ita debet eſſe unitas ad multiplicantem ($\sqrt{2}$), ut multiplicandus ($\sqrt{3}$) ad productum, quod voco P; erit ergo $1 . \sqrt{2} :: \sqrt{3} . P$. & in eadem ratione erunt eorum quadrata nempe $1 . 2 :: 3 . P^2$, ſed $1 . 2 :: 3 . 6$, ergo $P^2 = 6$, & $P = \sqrt{6}$. Quod erat &c.

COROLL. I. *Quod ſi binomium radicale quadraticum multiplicetur per ſeipſum, mutato tamen in alterutro factore ſigno + in —, vel contra — in +, oritur monomium rationale, ut in primo exemplo* $\sqrt{5} + \sqrt{3} \times \sqrt{5} - \sqrt{3}$ *producit quantitatem rationalem 2. & hoc dicitur binomium multiplicari* per ſui Contrarium, *de quo inferius*.

COROLL. II. *Si trinomium radicale, ex. gr.* $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$ *multiplicetur per ſeipſum, mutato aliquo ex ſignis ut per* $\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$, *oritur binomium partim radicale, partim rationale, ut* $3 + \sqrt{48}$, *quod per* Coroll. 1. *ad monomium omnino rationale facile reducitur*.

PROPOSITIO V.

Quantitates radicales dividere.

I. SI diviſor & dividendus ſint communicantes, ſatis eſt dividere quantitates extra ſignum; quotus eſt quantitas rationalis. Sic ad dividendum $6\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, diviſo 6 per 3, quotus eſt 2. Similiter $4\sqrt{2}$ diviſo ſo per $2\sqrt{2}$, habetur quotus 2. Eadem ratione $a\sqrt{a+b}$ diviſo per $b\sqrt{a+b}$, habetur pro quoto $\frac{a}{b}$.

Quod ſic demonſtratur. Ponantur ſub ſigno quantitates 6 & 3: erit $6\sqrt{3}=\sqrt{108}$ & $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$. Dividatur jam $\sqrt{108}$ per $\sqrt{27}$, hoc eſt 108 per 27, quotus eſt $\sqrt{4}=2$. Quod &c. Similiter poſitis ſub ſigno a & b, erit $a\sqrt{a+b}=\sqrt{a^3+a^2b}$, & $b\sqrt{a+b}=\sqrt{ab^2+b^3}$, & dividendo $\sqrt{a^3+a^2b}$ per $\sqrt{ab^2+b^3}$ (hoc eſt a^3+a^2b per ab^2+b^3, ut fit in rationalibus,) erit quotus $\frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{bb}}=\frac{a}{b}$. Quod &c.

II. Si diviſor & dividendus non fuerint communicantes, dividantur ſeorſim quantitates extra ſignum & ſeorſim, quæ ſub ſigno exiſtunt. Sic ad dividendum $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a}$ habetur quotus $3\sqrt{b}$. Item dividendo $\sqrt{6}$ per $2\sqrt{3}$, quotus erit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Demum $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$ dat quotum $\sqrt{5}$.

III. Quod ſi dividenda ſit quantitas radicalis per rationalem, vel e contrario: ſemper quantitas rationalis ad radicalem reducatur, eam ſcilicet elevando ad poteſtatem ejuſdem gradus, & ponendo illam ſub ſigno radicali. Ut ſi dividenda ſit a per $\sqrt[3]{ab}$, elevetur a ad tertiam poteſtatem ita ut fiat $\sqrt[3]{a^3}$, quæ diviſa per $\sqrt[3]{ab}$ dabit quotum $\frac{\sqrt[3]{aa}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{aa}{b}}$, *per Schol.* 1. *hujus Propoſ.*

Ratio

Ratio dividendi radices ita generatim demonstratur. Dividenda sit radicalis $\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$, dico quotum esse $\sqrt{5}$. Nam ex communi divisionis definitione, divisor ad dividendum est, ut unitas ad quotum, quem voco Q; hoc est, $\sqrt{3} . \sqrt{15} :: 1 . Q$; & in eadem ratione sunt eorum quadrata, $3 . 15 :: 1 . Q^2$. Sed $3 . 15 :: 1 . 5$, ut patet; proinde $Q^2 = 5$ & $Q = \sqrt{5}$. Quod erat &c.

SCHOL. I. *Si radicalium divisio exprimatur per modum fractionis (quod non raro fit) tunc signum radicale vel seorsim numeratori, & seorsim denominatori præponitur, ut superiora exempla docent; vel toti fractioni, scilicet* $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}$ &c.

SCHOL. II. *Si ex denominatore tantum, vel ex solo numeratore extrahi possit radix, utique extrahitur, sed alteri signum radicale præfigitur. Sit* $\frac{\sqrt{axx}}{\sqrt{ab}}$ *facta divisione, erit* $\frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{b}}$ *extractaque ex numeratore radice, fit* $\frac{x}{\sqrt{b}}$. *Similiter ex* $\sqrt{\frac{cb}{a^2b}}$ *facta divisione, oritur* $\sqrt{\frac{c}{a^2}}$ *& extracta ex denominatore radice, habetur* $\frac{\sqrt{c}}{a}$.

PROPOSITIO VI.

Radicales compositas dividere.

I. Dividenda sit radicalis composita $\sqrt{15} + \sqrt{21} - \sqrt{27}$ per $\sqrt{3}$. Dividantur singula trinomii membra per $\sqrt{3}$, ut radicales simplices *per Prop. præc.* erit quo-

quotus $\sqrt{5}+\sqrt{7}-3$. Eadem ratione dividendo per $\sqrt{5}$ radicalem $\sqrt{20}-\sqrt{10}+\sqrt{15}$, erit quotiens $2-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

II. Quod si dividendum sit binomium A ex rationali quantitate & radicali compositum per aliud binomium simile B, divisa quantitate rationali 8 per rationalem 2, habetur quotus C, per quem multiplicando totum divisorem B, productum $8+4\sqrt{1}$ subducitur (mutatis signis) ex dividendo A & nihil remanet. Idem fit in secundo exemplo.

$$\begin{array}{llll} & B & A & C \\ \text{Exempl. I.} & 2+\sqrt{1}\,) & 8+4\sqrt{1} & (+4 \\ & & 8+4\sqrt{1} & \\ \hline & & 0 \quad 0 & \\ \text{Exempl. II.} & -1+\sqrt{-\tfrac{3}{4}}\,) & 2-2\sqrt{-\tfrac{3}{4}} & (-2 \\ & & 2-2\sqrt{-\tfrac{3}{4}} & \\ \hline & & 0 \quad 0 & \end{array}$$

III. At si divisor sit binomium radicale ex. gr. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, per quod dividenda sit quantitas $\sqrt{18}$; tunc binomium illud reducatur ad monomium rationale *per Corol.* 1. *Prop.* 4. *hujus*, multiplicando illud per sui contrarium $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, habebitur novus divisor $5-2=3$. Deinde per idem contrarium $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ multiplicetur quoque quantitas dividenda, nempe $\sqrt{18}$, ut inter ipsam & divisorem maneat idem valor, qui antea, *per* Ax. 2. *Cap.* 2. Exemplo res fit manifesta.

Di-

Divisor $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ | Dividen. $+\sqrt{18}$

$$\begin{array}{l} \sqrt{5}+\sqrt{2} \\ \hline 5-\sqrt{10} \\ \quad +\sqrt{10}-2 \\ \hline 5-2=3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{5}+\sqrt{2} \\ \hline 3)\ \sqrt{90}+6 \end{array}$$

Quotus $\frac{1}{3}\sqrt{90}+2$

Ratio clara est, si ex divisore & dividendo fiat fractio, & tam numerator quam denominator multiplicentur per eandem quantitatem. Sit enim dividenda radicalis quantitas *A* per trinomium radicale *B*; fiat fractio, nempe

$$\frac{A \quad \sqrt{5}}{B \quad \sqrt{3}+\sqrt{1}+\sqrt{2}}$$

Multiplicato utroque fractionis termino per denominatorem *B* (uno tantum signo mutato), oritur nova fractio æqualis priori *per Ax.* 2. *Cap.* 2. hoc est

$$\frac{C \quad \sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}{D \quad 2+\sqrt{12}}$$

Multiplicetur pariter uterque terminus hujus novæ fractionis per denominatorem *D* (mutato signo), oritur nova fractio priori æqualis *per Ax. cit.*, in qua divisor est quantitas rationalis, scilicet

$$\frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-\sqrt{180}-\sqrt{60}+\sqrt{120}}{-8}$$

Factaque actu divisione, erit quotus

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{15}-\tfrac{1}{4}\sqrt{5}+\tfrac{1}{4}\sqrt{10}+\tfrac{1}{8}\sqrt{180}+\tfrac{1}{8}\sqrt{60}-\tfrac{1}{8}\sqrt{120}.$$

L Item

Item, ut dividatur $a-b$ per $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, fit fractio $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, cujus termini per $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ multiplicati dant

$$\frac{\overline{a-b}\times\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b}$$: fiat divisio, erit quotus $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

SCHOL. I. *Si divisor sit binomium, aut trinomium constans radicalibus cubicis, aut altiorum potestatum, haec regula non sufficit. Tunc invenienda est aliqua quantitas, quae* divisor contrarius *dicitur, per quam si tale binomium, aut trinomium multiplicetur, fiat rationale. En methodus generalis inveniendi ejusmodi* divisores contrarios. *Quantitates sub signo radicali existentes, mutato aliquo signo, eleventur ad potestatem, cujus exponens sit unitate minor exponente radicali, neglectisque coefficientibus, habetur quantitas quaesita. Sit binomium* $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$, *elevetur* $a-b$ (*mutato scilicet signo*) *ad potestatem secundam, quae neglectis coefficientibus, erit* a^2-ab+b^2, *eaque posita sub signis radicalibus dati binomii, habetur* divisor contrarius $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$.

Similiter sit datum binomium $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$, *elevetur* $a-b$ *ad tertiam potestatem & abjiciantur coefficientes, oritur qantitas* $a^3-a^2b+ab^2-b^3$, *quà sub signis radicalibus binomii posita, habetur* divisor contrarius $\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}$; *& sic de aliis.*

SCHOL. II.

SCHOL. II. *Ceterum hujusmodi divisiones radicalium compositorum, ut monet* Cl. Wolfius (a), *aut vix, aut per raro occurrunt. Sed quia ejus methodus, quam* Nicolao Tartaleæ (b) *debemus, est non inelegans, haud erat omnino negligenda.*

PROPOSITIO VII.

Radicales ad datam potestatem elevare.

I. REgula est: quantitates sub signis existentes ad datam potestatem attolluntur *per Propos.* 2, *vel* 3. *Cap.* 3. radicali signo minime variato. Sit radicalis $\sqrt[3]{a}$ elevata ad quadratum erit $\sqrt[3]{a^2}$. Radicalis $\sqrt[2]{b}$ elevata ad cubum dat $\sqrt[2]{b^3}$. Item $\sqrt[2]{3}$ elevata ad quartam potestatem fit $\sqrt[2]{81}$.

Ratio est, quia ex communi lege multiplicationis radicalium, $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2}$. Similiter $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{b^3}$ *per Prop.* 4. *hujus*.

II. Si adsit quantitas extra signum, illa quoque ad datam potestatem elevatur *per Prop.* 2, *vel* 3. *Cap.* 3. Sic

(a) Elemen. Analy. edit. 2. Probl. 13. schol. 1. (b) De Num. & mensuris par. 2, l. 5. Cap. 4.

radicalis $a\sqrt[3]{c}$ ad quadratum elevata, erit $a^2\sqrt[3]{c^2}$. Nam $a\sqrt[3]{c} \times a\sqrt[3]{c} = a^2\sqrt[3]{c^2}$. Eadem ratione $2\sqrt[2]{a}$ ad cubum evecta erit $8\sqrt[2]{a^3}$. Nam $2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} \times 2\sqrt[2]{a} = 8\sqrt[2]{a^3}$ *per Prop.4. hujus*.

III. Si radicales ad datam potestatem elevandæ sint complexæ, elevantur ad illam eadem omnino ratione, qua elevantur quantitates rationales; hoc est, si elevandæ sint ad quadratum, sumi debent quadrata partium, & duplum ejus, quod oritur ex mutua earundem partium multiplicatione *per Coroll. Prop.6. Cap.3*. Si ad cubum, sumi debent cubi partium, triplum ejus, quod oritur multiplicando quadratum primæ per secundam & triplum ejus, quod oritur multiplicando vicissim quadratum secundæ per primam *per Prop.7. Cap.3*. Atque ita deinceps. Sic radicalis $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$, ut ad secundam potestatem elevetur, fiant per primam partem *Prop. hujus* quadrata partium, nempe $\sqrt[3]{a^2}$ & $\sqrt[3]{c^2}$ earumque factum duplum $2\sqrt[3]{ac}$, proinde erit $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}$. Similiter $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ad secundam potestatem evecta erit $a - 2\sqrt{ab} + b$. Si vero $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ elevanda sit ad cubum, fiant primo per primam partem *Prop. hujus* cubi ex $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$, nempe $\sqrt{a^3}$ & $\sqrt{b^3}$; sumatur triplum ex multiplicatione quadrati primæ radicalis, nempe a, in secundam hoc est $3a\sqrt{b}$, & vicissim triplum quadrati secundæ, nempe b, ducti in primam, hoc est $3b\sqrt{a}$, iisque additis, erit $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$. Eadem ratione

$\sqrt{3}$

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ad cubum evecta, erit $\sqrt{27} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + \sqrt{8}$.

SCHOL. I. *Cum radicales simplices considerari possint ut potentiæ imperfectæ* per Defin. 5. Cap. 3. *elevari possunt ad quamcunque datam potestatem, sumendo duplum, triplum, quadruplum &c. earum exponentium, si ad secundam, ad tertiam, vel quartam potestatem elevandæ sint.*

Nam sit $\sqrt[2]{a}$ *ad tertiam potestatem elevanda*, per Defin. cit. *est* $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ *& sumendo triplum hujus exponentis, erit* $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$. *Hoc autem sequitur* ex Prop. 1. Cap. 3. *Nam* $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

SCHOL. II. *Si radicalis elevanda sit ad potestatem, cujus exponens idem sit cum exponente ejusdem radicalis, oritur quantitas rationalis. Proinde satis est delere signum radicale. Nam* $\sqrt[2]{3} \times \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{9} = 3$. *Sic etiam* $\sqrt[3]{2}$ *ad cubum evecta erit* 2. *Nam* $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$. *Quod etiam* ex Schol. 1. *infertur. Nam* $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, *proinde* $a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a$. *Pariter* $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$, *quæ ad tertiam potestatem evecta sit* $c^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = c^{\frac{3}{3}} = c$.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Ex simplici radicali radicem extrahere.

I. Extrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt{a}$, quia *per Def. 5. Cap. 3.* $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, dividatur per exponentem radicis quæsitæ exponens ipsius $a^{\frac{1}{2}}$, erit radix quadrata quæsita $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

Similiter extrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt[3]{a}$, quia *per Defin. cit.* $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, dividendo per exponentem radicis quæsitæ exponentem ejusdem $a^{\frac{1}{3}}$, erit radix quæsita $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

II. Demum quæritur radix cubica quantitatis $\sqrt{a}$, quia $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ si dividatur per exponentem radicis quæsitæ 3, erit radix cubica $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

COROLL. *Hinc patet, ad extrahendas ejusmodi radices satis esse multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem radicis quæsitæ. Sic radix quinta quantitatis* $\sqrt[2]{2}$ *erit* $\sqrt[10]{2}$. *Vel etiam exprimi potest sic* $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{2}}$ &c.

PROPOSITIO IX.

Ex binomio radicem quadratam extrahere.

I. Extrahenda ſit radix quadrata ex binomio dato $7 + \sqrt{48}$. Primo auferatur quadratum minoris termini ex quadrato majoris, hoc eſt 48 ex 49 quadrato, quod fit ex termino rationali 7. Secundo extrahatur ex differentia horum quadratorum (quæ hic eſt 1) radix quadrata, nempe 1, quam adde termino rationali, habebis 8, & ab eodem ſubtrahe, habebis 6. Summæ hujus & differentiæ ſemiſſes, hoc eſt 4 & 3 dant radicem quadratam dati binomii, nempe $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$, ſeu $2 + \sqrt{3}$.

Similiter quæritur radix quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$. Differentia quadratorum eſt 4, ejus radix quadrata 2. Hanc adde termino rationali, habebis 10: ſubtrahe ab eodem, habebis 6. Semiſſes ipſorum 10 & 6 dant radicem quæſitam $\sqrt{5 - \sqrt{3}}$.

II. Sit pariter extrahenda radix quadrata ex binomio $a+b-2\sqrt{ab}$: ex quadrato $a^2+2ab+b^2$ primi termini aufer $4ab$ quadratum ſecundi termini $-2\sqrt{ab}$, erit differentia $a^2-2ab+b^2$, cujus radix quadrata eſt $a-b$. Hanc adde termino rationali $a+b$, ſumma erit $2a$: ſubtrahe ex eodem termino, differentia erit $2b$. Horum ſemiſſes a & b dant radicem quæſitam $\sqrt{a - \sqrt{b}}$.

Ex hoc tertio exemplo facile eruitur demonſtratio. Nam ſi binomium $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ elevetur ad ſecundam poteſtateſtatem habetur $a + b - 2\sqrt{ab}$, ubi apparent duo termini, alter rationalis, continens ſummam radicum $a+b$, alter irrationalis continens duplum facti earundem radicum. Ex quadrato autem $a^2 + 2ab + b^2$, quod fit ex termino rationali, ſi auferatur quadratum ſecundi termini, nempe $4ab$, reſiduum $a^2 - 2ab + b^2$ eſt pariter quadratum, cujus radix quadrata $a - b$ eſt differentia quadratorum a & b. Hæc igitur differentia $a - b$ addita ad eorum ſummam $a + b$ dat $2a$, duplum ſcilicet quadrati ex $\sqrt{a}$; eademque differentia $a - b$ ſubducta ex eorum ſumma $a + b$ relinquit $2b$, duplum quadrati alterius membri $\sqrt{b}$; proinde horum ſemiſſes a & b dant terminos radicis quæſitæ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

COROLL. *Hinc infertur tria requiri, ut radix quadrata extrahi poſſit ex dato binomio. Primo binomium conſtare non poteſt ſolis radicalibus, ſed uno membro rationali & altero radicali. Nam ſive fiat quadratum ex duobus terminis radicalibus, ut* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, *ſive ex rationali & radicali ut* $3 + \sqrt{5}$; *ſemper oritur binomium continens terminum rationalem & alterum radicalem. Secundo terminus rationalis, ſeu quadratum illius ſemper debet eſſe majus termino radicali, qui ab eo debet ſubtrahi. Tertio differentia quadratorum, quæ fiunt ex termino rationali & radicali, debet eſſe quadratum. Hæc omnia ex allatis exemplis ſatis patent.*

SCHOL. *De radice cubica, aliiſque altioris gradus ex dato binomio, aut polynomio extrahendis, commodiori loco agemus. Ceterum ſi radix quadratà defectu earum conditionum extrahi nequeat ex dato binomio, tunc ejus binomii radix exprimitur ſigno radicali, quod utrunque binomii terminum comprehendit. Sic radix quadrata binomii*

1 +

$1+\sqrt{3}$ erit $\sqrt{1+\sqrt{3}}$. Idem dicendum de cubica, aliisque altioribus radicibus si extrahi nequeant. Tunc enim radix cubica binomii $2-\sqrt{7}$ erit $\sqrt[3]{2-\sqrt[2]{7}}$ &c. quæ quidem radices ita connexæ, dicuntur radices universales, *de quibus inferius.*

PROPOSITIO X.

Ex binomio, aut polynomio radicem quadratam per formulam Newtonianam extrahere.

I. Designet A majorem dati binomii partem, B vero partem minorem; erit ex Newtono in *Arithmetica Universali* $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}$ quadratum majoris partis quæsitæ radicis, & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}$ quadratum partis minoris, quæ cum majori annectenda est cum signo ipsius B.

Extrahenda sit radix ex binomio $5+\sqrt{24}$: ponatur $A=5$, & $B=\sqrt{24}$, erit $\sqrt{AA-BB}=1$, proinde $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{5+1}{2}$ hoc est 3, quadratum majoris partis radicis; & $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{5-1}{2}=2$, quadra-

M tum

tum partis minoris. Horum radices dant radicem quæsitam $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

II. Sit polynomium $10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$, seu in terminis simplicioribus $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$ *per Prop. 2. hujus*. Intelligatur divisum in duo binomia; & ponatur $10+2\sqrt{6}=A$ & $2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=B$, erit $\sqrt{AA-BB}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ *per Prop. cit.* Nam si quadratum secundi termini $2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$, quod in terminis simplicioribus est $100+40\sqrt{6}$, auferatur ex quadrato primi termini $10+2\sqrt{6}$, quod pariter in terminis simplicioribus est $124+40\sqrt{6}$, residuum erit 24, hoc est $2\sqrt{6}$ *per Prop. cit.* Addatur ergo hoc residuum $2\sqrt{6}$ ad primum terminum $10+2\sqrt{6}$, erit $\frac{A+\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{10+4\sqrt{6}}{2}=5+2\sqrt{6}$. Ex hoc autem binomio si ex prima parte *hujus Propos.* eruatur radix, habebitur $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Auferatur jam residuum ipsum $2\sqrt{6}$ ex primo termino $10+2\sqrt{6}$, erit $\frac{A-\sqrt{AA-BB}}{2}=\frac{10}{2}=5$, cujus radix quadrata, hoc est $\sqrt{5}$, si priori jam inventæ addatur, erit polynomii propositi radix quæsita $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Demonstratio hujus methodi eadem est, ac superioris, ut consideranti patet.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Radicales universales ad idem nomen & ad simpliciorem expressionem reducere.

I. REducuntur ad idem nomen radicales universales eodem modo, quo aliæ radicales, ut in *Prop.* 1. *hujus*. Sed claritatis gratia reducendæ sint ad eandem denominationem $\sqrt[2]{b+\sqrt[2]{cd}}$ & $\sqrt[3]{a-\sqrt[3]{bc}}$. Fractiones radicalium exponentiales $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ reducantur ad idem nomen, ut fit in communi Arithmetica, erunt novi exponentes $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$ qui docent signum radicale commune esse $\sqrt[6]{\ }$, & quantitatem $b+\sqrt[2]{cd}$ elevandam esse ad tertiam potestatem; quantitatem vero $a-\sqrt[3]{bc}$ ad secundam. Facta itaque operatione, habentur aliæ duæ radicales universales æquales prioribus & ejusdem nominis, nempe $\sqrt[6]{b^3+3bcd+\overline{3b^2+cd}\times\sqrt{cd}}$ & $\sqrt[6]{a^2-2a\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{b^2c^2}}$

Radicales autem illæ, quæ sub signo universali $\sqrt[6]{\ }$ comprehenduntur, hoc est $\sqrt[2]{cd}$, $\sqrt[3]{bc}$ & $\sqrt[3]{b^2c^2}$, reduci facile possunt ad idem signum $\sqrt[6]{\ }$ *per Schol. Prop.* 1. *hujus*: erunt $\sqrt[2]{cd}=\sqrt[6]{c^3d^3}$, $\sqrt[3]{bc}=\sqrt[6]{b^2c^2}$, & $\sqrt[3]{b^2c^2}=\sqrt[6]{b^4c^4}$.

II. Reducenda sit ad simpliciorem expressionem radicalis universalis ex. gr. $\sqrt{a^2b+a^2c\sqrt{d}}$. Dividatur a^2b

$+ a^2c$ per a^2; & relicto quoto sub signo universali, ponatur a extra signum, fiet $a\sqrt{b+c\sqrt{d}}$ ad terminos simpliciores redacta.

Similiter sit radicalis universalis $\sqrt[2]{b^2c+\sqrt{b^4c^2d}}$ reducenda ad simpliciorem. Reducatur primo $\sqrt{b^4c^2d}$ dividendo per b^4c^2, fiet $b^2c\sqrt{d}$, quæ si reponatur sub signo universali, erit $\sqrt[2]{b^2c+b^2c\sqrt{d}}$: hac demum ad simpliciorem redacta, eam scilicet dividendo per b^2, habebitur $b\sqrt{c+c\sqrt{d}}$, id quod quærebatur. Si fuerit $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$, erit eadem ratione $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Similiter $\sqrt{9\sqrt{12}}$, fiet $3\sqrt{2\sqrt{3}}$.

Corol. I. *Si habeatur radicalis universalis* a $\sqrt[2]{b+c\sqrt{d}}$ *& ponenda sit sub signo universali quantitas* a, *multiplicari debet per secundam potestatem ipsius* a, *nempe per* a^2, *tota quantitas* b + c; *unde oritur* $\sqrt{a^2b+a^2c\sqrt{d}}$. *Quod si iterum quantitas* a^2c *ponenda esset sub secundo signo, elevanda hæc esset pariter ad secundam potestatem, & tunc haberetur* $\sqrt{a^2b+\sqrt{a^4c^2d}}$. *Hinc luculenter apparet ratio explicatæ reductionis.*

Coroll. II. *Hoc totum convenit tam radicalibus universalibus, quæ habent idem signum radicale* $\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{b}}$, *quam iis, quarum exponens est diversum, ut* $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$, *habita*

bita tamen ratione eorum, quæ dicta sunt in Propos. 2. hujus *de reductionibus*.

PROPOSITIO XII.

Radicalium universalium calculus.

I. UT addantur, vel subtrahantur, reduci semper debent ad idem nomen & ad simpliciorem expressionem, si fieri possit, *per Propos. antec.* Deinde per signa + & — habetur additio, vel subtractio, ut in ceteris radicalibus. Sint addenda $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ & $2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$, summa erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}+2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$; residuum erit $3\sqrt{a+b\sqrt{c}}-2\sqrt{bc+\sqrt{d}}$.

II. Quod si radicales habeant sub signis quantitates easdem, adduntur, vel subtrahuntur earum coefficientes. Sic $\sqrt{8+\sqrt{96}}$ & $\sqrt{18+\sqrt{6}}$ (quæ sunt $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$ & $3\sqrt{2+\sqrt{6}}$ *per Propos. ant.*) summa erit $5\sqrt{2+\sqrt{6}}$; residuum vero (subtrahendo primam ex secunda) erit $1\sqrt{2+\sqrt{6}}$.

III. Sint multiplicanda $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, deleto signo universali, multiplicantur mutuo quantitates, & facto præfigitur signum radicale universale.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{l} 3+\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{2} \\ \hline 6+2\sqrt{5} \\ \quad +3\sqrt{2}+\sqrt{10} \\ \hline \sqrt{6+2\sqrt{5}+3\sqrt{2}+\sqrt{10}} \end{array}$$

Ex-

EXEMPL. II.

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}$$
$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

$$\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}$$
$$+\tfrac{1}{2}q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}+\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q^2-\tfrac{1}{27}p^3+q\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

III. Dividenda ſit $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, deleto ſigno univerſali, multiplicatur per quantitatem contrariam tam diviſor, quam dividendus, ut docuimus *Propoſ.* 6. *hujus*. Fiet novus diviſor $=1$, & dividendus $\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}}$. Ecce exemplum

$$\begin{array}{l|l}
\text{Diviſor}\quad 2+\sqrt{3} & 3+\sqrt{5} \\
\qquad\qquad 2-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \\
\hline
4+2\sqrt{3} & 6+2\sqrt{5} \\
\quad -2\sqrt{3}-3 & \quad -3\sqrt{3}-\sqrt{15} \\
\hline
4-3=1 & \sqrt[2]{6+2\sqrt{5}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}=
\end{array}$$

Quantitas dividen. $\sqrt[2]{\sqrt{6}+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}}$

SCHOL.

SCHOL. *Ceterum hujusmodi calculus mirum si occurrat. Interea tamen tyrones in eodem exerceri non erit inutile.*

PROPOSITIO XIII.

Radicum, quæ imaginariæ dicuntur, calculum expedire.

I. RAdices imaginariæ ad idem signum radicale & ad simpliciorem expressionem, si fieri id possit, reducuntur; tum etiam adduntur & ad invicem subtrahuntur iisdem omnino regulis, quas pro ceteris radicalibus tradidimus, ideoque iis non immoramur.

II. Si vero multiplicandæ sint, & ambæ habeant sub signo eandem quantitatem, observetur, an signa radicalia præferant idem signum $+$, aut $-$, an vero diversum. Nam in primo casu productum erit reale negativum, in secundo reale positivum. Ecce exempla

$$+1\sqrt{-a}\times+1\sqrt{-a}=+1\times-a=-a$$
$$-1\sqrt{-a}\times-1\sqrt{-a}=+1\times-a=-a$$
$$+1\sqrt{-a}\times-1\sqrt{-a}=-1\times-a=+a$$

Idem omnino fit, etiamsi desit unitas, quæ semper intelligitur adesse tanquam radicalium coefficiens, si nullum aliud adsit coefficiens, scilicet

$$+\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}=+\times-a=-a$$
$$-\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=+\times-a=-a,$$
$$+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-a}=-\times-a=+a$$

Ra-

Ratio horum eſt, quia quod oritur ex $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, ſemper eſt $-a$, utpote quadratum negativum. Sed hoc ipſum productum negativum duci debet ulterius in ſignum illud +, aut —, quo ſigna radicalia afficiuntur: proinde ex communi lege multiplicationis ducendo $-a$ in +, habetur $-a$, ut in primo & ſecundo exemplo, & in utroque caſu reſtituitur quantitas realis negativa $-a$. At vero ducendo $-a$ in — oritur quantitas poſitiva $+a$, ut in tertio exemplo.

III. Si vero quantitas ſub ſigno non eſt eadem, aut ſi multiplicanda ſit radix imaginaria per realem; ut tollatur omne æquivocum, præſtat factum exprimere per ſignum multiplicationis ×. Multiplicanda ſit $a\sqrt{-a}$ per $-\sqrt{-b}$, productum erit $-a\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$, non autem $-a\sqrt{+ab}$. Per multiplicationem enim radicalium imaginariarum non oritur quantitas realis negativa, niſi cum ipſa radix imaginaria elevatur ad poteſtatem, cujus exponens ſit idem cum exponente ſigni radicalis. Sic $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ producit quantitatem realem negativam $-a$, ut ſupra explicavimus. In aliis vero caſibus habetur quantitas imaginaria; ut ſi multiplicetur $\sqrt[2]{-b}$ per $\sqrt[2]{b}$, productum, quod oritur $\sqrt[2]{-b^2}$, continet radicem imaginariam, ita ut ſi ponere velis b extra ſignum, neceſſario exprimi debeat $b\sqrt{-1}$; ut nimirum ſervetur ratio radicis imaginariæ; nec ipſa quantitas imaginaria b con-

confundatur cum quantitatibus realibus. Proinde ad evitandam confusionem, quæ dari facile posset, præstat multiplicationem peragere signo $\times$. Ecce exempla,

$$+a\sqrt{a}\times-\sqrt{-b}=-a\sqrt{a}\times\sqrt{-b}$$
$$+2\sqrt{3}\times-1\sqrt{-5}=-2\sqrt{3}\times\sqrt{-5}$$
$$+3\sqrt{-c}\times-2=-6\sqrt{-c}$$

IV. Simili ratione expedit divisionem per modum fractionis exprimere ad confusionem evitandam. Dividendo $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, quotus erit $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. Item dividendo $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-5}$, erit quotus $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$. Sic $\frac{c}{\sqrt{-a}}$ & $\frac{\sqrt{-n}}{\sqrt{m}}$ significant quantitatem realem divisam per imaginariam, & imaginariam divisam per realem, ut patet.

V. Quod si eadem quantitas imaginaria tam in numeratore, quam in denominatore reperitur, ex communi lege divisionis utrinque deletur. Sic dividendo $a\sqrt{-d}$ per $b\sqrt{-d}$, scribatur $\frac{a\sqrt{-d}}{b\sqrt{-d}}$, quotus erit $\frac{a}{b}$. Item si dividatur $-b$ per $\sqrt{-b}$, prodit quotus $\sqrt{-b}$. Nam si fiat $-b=\sqrt{-b}\times\sqrt{-b}$, erit $\frac{\sqrt{-b}\times\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}$ $=\sqrt{-b}$, quotus quæsitus. Dividendo autem $\sqrt{-b}$ per

$-b$, erit diviſo $\dfrac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}} = \dfrac{1}{\sqrt{-b}}$ quotus. Similiter quotus ex quantitate $a\sqrt{-bb}$ diviſa per $-bb$, erit $\dfrac{a\sqrt{-bb}}{\sqrt{-bb} \times \sqrt{-bb}} = \dfrac{a}{\sqrt{-bb}}$. Tandem dividendo $+\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, erit quotus -1. Nam $\dfrac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}} = \dfrac{+1}{-1} = -1$.

SCHOL. *Quidam non obſcuri nominis Algebriſtæ docent productum ex multiplicatione duarum quantitatum imaginariarum, aut quotum ex diviſione illarum, eſſe quantitatem veram & realem. Sic multiplicando v. g.* $\sqrt{-3}$ *per* $\sqrt{-2}$ *oriri* $\sqrt{6}$, *non autem* $\sqrt{-6}$. *Similiter dividendo* $\sqrt{-6}$ *per* $\sqrt{-2}$ *oriri quotum realem* $\sqrt{3}$, *non autem* $\sqrt{-3}$. *Proinde libere aſſerunt hallucinatum fuiſſe* Jac. Ozananum (a) *qui contrarium docuit. At quicquid illi dicant*, Ozananum *ſequitur* Cl. Wolfius (b) *Mathematicus noſtri temporis celebratiſſimus, qui contendit in multiplicatione quantitatum imaginariarum ſignum negativum non eſſe mutandum, ſed facto perinde ac factoribus præfigi debere ſemper ſignum* $-$. Alias enim, *inquit*, factores imaginarii efficerent factum reale, quod eſt abſurdum. *Quamobrem vult ſignorum regulam obſervari tantum reſpectu ra-*

(a) Nouveaux Elemens liv. 1. sect. 4. (b) Elementa Analy. edit. 2. cap. 2. pag. m. 315.

radicum, minime vera respectu quantitatum sub signo radicali existentium. Placet hic unum, vel alterum ipsius exemplum multiplicationis afferre.

EXEMPL. I.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

EXEMPL. II.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -45+6\sqrt{-15} \\ -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ \hline -45+6\sqrt{-15}-6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

COROLL. *Ex allatis exemplis satis liquet, quantitates imaginarias complexas eodem modo multiplicari, ac ceteras radicales complexas. Exercitationis tamen gratia nonnulla adducimus tam multiplicationis, quam divisionis complexæ exempla, in quibus quantitates imaginariæ realibus adhærent.* A *est quantitas multiplicanda:* B *multiplicans;* P *vero productum.*

EXEMPL. I.

A. $\sqrt{a} - 2\sqrt{-b}$

B. $\sqrt{c} + 3\sqrt{-b}$

$$\sqrt{ac} - 2\sqrt{c}\sqrt{-b}$$

$$+3\sqrt{a}\sqrt{-b} - 6\times -b = +6b$$

P. $\sqrt{ac} - 2\sqrt{c}\sqrt{-b} + 3\sqrt{a}\sqrt{-b} + 6b$

EXEMPL. II.

A. $2 + \sqrt{-5}$

B. $3 - \sqrt{-2}$

$$6 + 3\sqrt{-5}$$

$$-2\sqrt{-2} - \sqrt{-2}\times\sqrt{-5}$$

P. $6 + 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} - \sqrt{-2}\times\sqrt{-5}$

Divisionis exempla, in quibus *A* significat dividendum: *D* divisorem, *Q* quotum; zeri autem quantitates ex actuali divisione deletas.

EXEMPL. I.

A.

$$x^2 - ax - x\sqrt{-b} + x\sqrt{-c} - a\sqrt{-c} - \sqrt{-b}\times\sqrt{-c}$$

o o o o o o o

D. $x + \sqrt{-c}$

Q. $x - a - \sqrt{-b}$

Ex-

EXEMPL. II.

$$A.\quad 9\underset{0}{\sqrt{\ }}-30-6\underset{0}{\sqrt{\ }}-10+6\underset{0}{\sqrt{\ }}-18-4\underset{0}{\sqrt{\ }}-6$$

$$D.\quad 3\sqrt{\ }-5+2\sqrt{\ }-3$$

$$Q.\quad 3\sqrt{\ }-6-2\sqrt{\ }-2$$

CAPUT V.

De Æquationibus simplicibus.

DEFINITIONES.

I. Æ*Quatio* est comparatio duarum quantitatum, quæ signo æqualitatis junguntur, ut $x = a$, $xx + 2ax = ab$ &c.

II. Quantitates, quæ præcedunt, & quæ consequuntur æqualitatis signum, ut x & a in prima æquatione, item $xx + 2ax$ & ab in secunda, dicuntur *membra æquationis*.

III. Æquatio dicitur *simplex*, seu *primi gradus*, ubi quantitas incognita sit unius dimensionis, ut $x = a + b + c$: dicitur *quadratica*, seu *secundi gradus*, si ad duas dimensiones assurgit, ut $xx = ab$: *cubica*, seu *tertii gradus* cum ad tres dimensiones, ut $x^3 = a^2 + b^2$; & generatim dicitur æquatio *quarti*, *quinti*, *sexti gradus &c.* si potestas incognitæ ad tales dimensiones ascendat: $x^n = a - b$ dicitur æquatio indeterminata, quæ determinabitur, si fiat $n = 2$, $= 3$, $= 4$ &c.

IV.

IV. Æquatio dicitur *affecta*, cum incognitæ poteſtas diverſos habet dimenſionis gradus, ut $x^2 + ax = ab$, $x^3 - ax^2 + bx = cd$ &c. unde dicuntur affectæ quadraticæ, affectæ cubicæ &c. Dicitur autem *pura*, cum incognitæ poteſtas eandem ſervat ubique dimenſionem, ut $ax + bx = cd$, $xx - bxx = cdd$, $x^3 = abc$ &c.

V. Radix æquationis eſt valor incognitæ, quæ æquationem ingreditur; ut in æquatione $x = a + b$, radix eſt $a + b$: nam x tanti valet, quanti aggregatum $a + b$. Similiter in æquatione $x^2 = a - c$, extracta utrinque radice quadrata, radix æquationis, ſeu valor incognitæ x, eſt $\sqrt{a - c}$.

VI. Si valor incognitæ fuerit poſitivus, ut $x = 3$, radix dicitur *vera*. Si negativus, ut $x = -50$, radix dicitur *negativa*, ſeu ut Carteſius vocat, *falſa*. Utraque tamen realis eſt. Nam ſi alteri debeam aureos 50, & non habeam, revera aſſeritur, me habere -50. Quod ſi incognitæ valor exprimatur per radicem quadratam negativam; ut $x = \sqrt{-a^2}$, radix dicitur *imaginaria* & impoſſibilis. Nequit enim dari tale quadratum: nam ſicuti $+a \times +a$ dat $+a^2$, ita $-a \times -a$ dat $+a^2$.

AXIOMATA.

1. Non tollitur æqualitas, ſi unus, aut quot placuerit, termini de uno æquationis membro ad alterum, mutatis ſignis, transferantur. Ut ſi $x + 2 = 5$, non tollitur æqualitas, ſi fiat $x = 5 - 2$.

2. Non tollitur æqualitas, ſi utrique æquationis membro

bro addatur, aut subtrahatur quantitas æqualis. Vel si per eandem, aut æqualem quantitatem multiplicentur, aut dividantur ambo æquationis membra. Nam sit $x = 3$, multiplicando per 3, erit $3x = 9$; aut dividendo per 3 erit $\frac{1}{3}x = 1$.

3. Nam tollitur æqualitas, si utrunque membrum elevetur ad eandem potestatem; vel utrinque eadem radix extrahatur. Sit enim $y = ab$, erit $y^n = \overline{ab}^n$. Contra vero si $y^2 = a - b$, extracta radice utrinque, erit $y = \sqrt{a-b}$.

4. Non tollitur æqualitas, si in alterutro æquationis membro, loco unius quantitatis, sive complexæ, sive incomplexæ, ponatur alia quantitas æqualis. Ut si $x^2 = ay + by$ & ponatur $d = a + b$, erit $x^2 = dy$. Hoc dicitur *substituere*, quod in Analysi magnum & perpetuum usum habet, ut deinceps videbitur.

PROPOSITIO I.

Explicantur regulæ reductionis Æquationum.

OMnis æquatio continere solet quantitates notas cum incognitis permixtas secundum propositi problematis conditiones. Debent itaque quantitates illæ tandiu versari & immutari, donec æquatio illa simplicissimam formam obtineat, quæ sit velut ultima conclusio, ad quam tota problematis difficultas reducatur, eaque dicitur *æquatio finalis*. Hoc autem præstant sequentes regulæ.

*Reg.*ᵃ 1.ᵃ Æquatio reducitur ad pauciores terminos trans-

transferendo terminos illius ex una parte in aliam ſub ſigno contrario: nam *per Ax.*1. remanet æqualitas. Sit $x - 3 = 12$, erit per tranſpoſitionem $x = 12 + 3$, hoc eſt $x = 15$. Similiter ſi $x - b = a$, erit $x = a + b$. Patet ratio ex 2. *Ax.*, nam additur utrinque $+ 3$, & in ſecundo exemplo additur $+ b$.

Eadem ratione ſi fuerit $x + 3 = 5$, erit per tranſpoſitionem $x = 5 - 3$, hoc eſt $x = 2$. Item $x + b = a$, erit $x = a - b$. Patet ratio ex 2. *Axiom.* Nam ſubtrahitur utrinque $- 3$; & in ſecundo exemplo ſubtrahitur $- b$. Hæc tranſpoſitio vulgo *Antithesis* dicitur.

*Reg.*ª 2.ª Si ſint fractiones, æquatio reducitur per multiplicationem, hoc eſt multiplicando terminos omnes per denominatores fractionum, ducendo ſcilicet omnes denominatores, unum poſt alium, in totam æquationem; ſeu, quod idem eſt, ducendo ſemel productum omnium denominatorum in æquationem, & deinde fractiones ad ſimplices terminos reducendo. Sit æquatio $\frac{abx}{c} + dx = \frac{bcd}{a}$ multiplicetur primo tota æquatio per c, deinde per a; vel ſemel per ac, & habetur $\frac{aabcd}{c} + acdx = \frac{abccd}{a}$, quæ, redactis terminis *per Propoſ.* 2. *Cap.* 2., erit $aabd + acdx = bccd$. Regula hæc patet ex 2. *Ax.* Multiplicatur enim tota æquatio per æqualia. Nam ſublato denominatore, fractio multiplicata intelligitur *per Ax.*4. *Cap.*2.

*Reg.*ª 3.ª Reductio fit dividendo utrunque membrum per eandem quantitatem, ut ſi fuerit $3x = 12$, dividendo per 3, erit $x = 4$ æquatio priori æqualis *per Ax.*2. Simimiliter sit $ax + bx = ac$, dividendo per $a + b$, erit $x = \frac{ac}{a+b}$. Demum $axx + fxx = gb$, erit $xx = \frac{gb}{a+f}$.

*Reg.*ª 4.ª Reducitur æquatio per elevationem terminorum ad aliquam potestatem, cum quantitas incognita signo radicali implicatur. Ut si fuerit $\sqrt{xx - aa} + b = c$, relinquatur ex una parte æquationis quantitas signo radicali affecta, ita ut sit $\sqrt{xx - aa} = c - b$, tum utraque pars æquationis elevetur ad quadratum, erit $xx - aa = c^2 - 2cb + b^2$. Similiter si fuerit æquatio $m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$, elevato utroque membro ad quadratum, habetur

$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$; factaque reductione,

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

Ponatur seorsim in altero membro quantitas radicalis, quæ remanet, erit

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

& rursus elevato utroque membro ad quadratum, evanescit quantitas radicalis; & habetur *per Lem. Cap.* 1.

$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0$.

Patet ex 3. *Ax.* Hoc vulgo dicitur, *Asymmetriam* tollere.

*Reg.*ª 5.ª Reducitur æquatio, cum ex utroque ejus membro extrahitur radix; ut si fuerit $xx = 16$, extracta utriusque radice, erit $x = 4$. Similiter æquatio $xx = a^2 - 2ab + b^2$, extracta radice fit $x = a - b$. Demum $x^3 = 125$, radice cubica extracta, fit $x = 5$. Sequitur ex 3. *Axiom.*

*Reg.*ª *6.*ª Reducitur æquatio, seu plures æquationes ad unam; substituendo valorem unius incognitæ loco ipsius. Ut sit æquatio $x - y = d$, sit autem $a - x$ valor incognitæ y, qui substitui debet loco ipsius y: facta substitutione & variato signo ob $-y$, habetur æquatio $x - a + x = d$, hoc est *per Reg.* 1. $2x = a + d$, & *per Reg.* 3. $x = \frac{a+d}{2}$. Eadem ratione sit æquatio $x^2 + y^2 = d^2$, & $a - x$ valor ipsius y, qui ut substituatur loco $+y^2$, fiat quadratum ex $a - x$, nempe $a^2 - 2ax + x^2$: quo posito loco ipsius y^2, erit æquatio $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = d^2$; seu $2x^2 - 2ax = d^2 - a^2$, & $x^2 - ax = \frac{d^2 - a^2}{2}$ *per Reg.* 1. & 3.

Coroll. I. *Ex Reg.* 1. *tria sequuntur valde utilia: primo relinquendo incognitam in una æquationis parte, & transferendo omnes alias quantitates in partem alteram, habetur valor illius incognitæ. Sic æquatio* x + y = 100 *per transpositionem fiet* x = 100 − y, *&* 100 − y *dicitur valor incognitæ* x.

Coroll. II. *Insuper quantitates negativæ fieri possunt positivæ, & e contrario; transferendo scilicet illas in partem oppositam sub signo contrario. Sic ut in æquatione* a − x = b + c, *incognita* x *fiat positiva, & haberi possit ejus valor, facta transpositione quantitatum in alteram partem sub signo contrario, erit* a − b − c = x.

Coroll. III. *Cum in utroque membro occurrit eadem quantitas sub eodem signo, deleri potest utrinque, & æquatio simplicior fit, ut si fuerit* xx + ab − c = d − c + ab, *æquatio reducitur ad* xx = d.

Schol.

SCHOL. *In reducendis æquationibus, illud primo curandum, ut omnes incognitæ, cujuscunque sint gradus, in uno eodemque æquationis membro consistant, in altero quantitates cognitæ, id quod per regulas jam traditas obtinetur.*

PROPOSITIO II.

Plures simplices æquationes ad unam reducere.

I. Sint reducendæ ad unam duæ æquationes simplices $x + y = a$ & $x - y = b$.

Addantur simul, summa erit $2x = a + b$. Vel subtrahatur secunda ex prima, habetur $2y = a - b$. Patet. ex 2. *Axiom.*

II. Sint tres æquationes ad unam reducendæ

I.	$x + y = a$
II.	$x + z = b$
III.	$y + z = c$

In prima æquatione sumatur valor incognitæ y *per Corol.* 1. *Prop. ant.* ita ut habeatur $y = a - x$, & in secunda valor incognitæ z, erit $z = b - x$; Deinde hi duo valores substituuntur in tertia æquatione loco y & z *per Reg.* 6. habebitur $a - x + b - x = c$; & facta reductione, erit $a + b - c = 2x$ *per Reg.* 1., seu $x = \frac{a + b - c}{2}$ *per Reg.* 3.

III. Sint plures æquationes ad unicam reducendæ, nempe *A*, *B*, *C*, *D*.

A.	$x+y+z=a$	*E.*	$x=a-y-z$
B.	$x+y+v=b$		
C.	$x+z+v=c$		
D.	$y+z+v=d$		

F.	$a-z+v=b$	*H.*	$z=a+v-b$
G.	$a-y+v=c$	*M.*	$y=a+v-c$

$$\text{N.}\quad 2a+3v-b-c=d$$

$$\textit{hoc est}\quad v=\frac{b+c+d-2a}{3}$$

Sumatur ab æquatione *A* valor quantitatis x, qui *per Cor.* 1. *Prop.ant.* erit *E*: quo posito in æquationibus *B* & *C*, oriuntur duæ æquationes ejusdem valoris *F* & *G*. Sumatur deinde ex æquatione *F* valor incognitæ z, oritur æquatio *H*. Similiter ex æquatione *G* sumpto valore incognitæ y, habetur æquatio *M*. Hi duo valores ponantur in æquatione *D*, oritur æquatio *N*, in qua non est nisi unica incognita v, cujus valor $\frac{b+c+d-2a}{3}$ si substituatur in æquationibus *H* & *M* loco quantitatis v, statim innotescunt z & y, quorum valor si tandem ponatur in æquatione *E*, nota erit quoque incognita x. Quod &c.

COROLL. *Ut hæc reductio fieri possit, necesse est, ut eadem incognita in pluribus æquationibus reperiatur, ut ex allatis exemplis manifestum est.*

IV. Quod si non omnes incognitæ sint unius dimensionis, ut in æquationibus *A* & *B*, quæ sequuntur,

A. $xyy=bc$, *B.* $xx+yy=by-ax$ in

in quibus una tantum incognita x est unius dimensionis; tunc quæritur valor hujus, & in alia æquatione substituitur hac ratione:

Quia $xyy = bc$, erit $x = \frac{bc}{yy}$ *per Reg.* 3. & $xx = \frac{b^2c^2}{y^4}$ *per Ax.* 3. Item $ax = \frac{abc}{yy}$ *per Ax.* 2. His valoribus in æquatione B substitutis *per Ax.*4. habetur

$$\frac{b^2c^2}{y^4} + yy = by - \frac{abc}{yy}$$

Et multiplicando omnes terminos per y^4, ut fractiones exterminentur, oritur æquatio, in qua unica tantum incognita,

$$b^2c^2 + y^6 = by^5 - abcy^2$$

Sch. Prop. 1. $\quad y^6 - by^5 + abcy^2 = -b^2c^2$

PROPOSITIO III.

Theoremata nonnulla explicantur, quæ æquationibus conficiendis inserviunt.

Theor. 1. IN proportione Arithmetica trium terminorum a, $a+1$, $a+2$, summa termini primi & tertii æquatur duplo secundi, nempe $a+a+2$ [hoc est $2a+2$] $= 2a+2$. Item in numeris Arithmetice proportionalibus 7, 5, 3, erit $7+3=10$.

COROLL. I. *Semissis aggregati ex primo & tertio dat terminum secundum. Sic* $\frac{2a+2}{2} = a+1$. *Item* $\frac{7+3}{2} = 5$.

COROLL. II. *Datis duobus mediis quatuor continue propor-*

portionalium Arithmetice, ut a, x, *facile innotescit primus, quem voco* y. *Nam si retrocedendo fiat* x . a ∴ a . y, *erit* per Theor. $x + y = 2a$ *&* $y = 2a - x$. *Eadem ratione innotescit etiam quartus, quem item voco* y. *Nam si fiat* a . x ∴ x . y, *erit* per Theor. $a + y = 2x$, *&* $y = 2x - a$. *Sunt ergo* $2a - x$, a, x, $2x - a$ *quatuor termini continue proportionales Arithmetice. Quod nota ex* Newtono [a].

Theor. 2. In proportione Arithmetica quatuor terminorum, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum mediorum; ut si fuerint $a . a + 1 :: a + 2 . a + 3$. erit $2a + 3 = 2a + 3$. Sic etiam in numeris Arithmetice proportionalibus 2 . 5 ∴ 15, 18, erit $2 + 18 = 15 + 5$.

Theor. 3. Quantitatum duarum inæqualium major est aggregatum ex semisumma & semidifferentia earundem. Minor vero est differentia inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum. Sic diviso 12 in partes inæquales 8 & 4, quarum semidifferentia est 2, major erit $6 + 2$; minor $6 - 2$.

COROLL. *Si ponatur summa* $= 2a$ *& differentia* $= 2y$, *erit pars major* $a + y$, *minor* $a - y$. *At si semisumma ponatur* x *& semidifferentia* y, *quantitas major erit* $x + y$, *minor* $x - y$. *Quod notetur.*

Theor. 4. In proportione Geometrica quatuor terminorum, factum ex duobus extremis æquatur facto ex duobus mediis; hoc est si $a . b :: c . d$, erit $ad = bc$. *Est Propos.* 16. *l.* 6. *Eucl.*

COROLL. I. *Hinc semper quartus terminus proportionalis exprimi potest per factum secundi & tertii divisum per primum. Sit enim* a . b :: c . d, *erit ex* hoc Theor. $bc = ad$ *& di-*

(a) Arithm. Universſ. Probl. Geom. XIV.

& *dividendo utrunque per* a, *erit* $\frac{bc}{a} = d$ *proinde* a . b : : c . $\frac{bc}{a}$.

COROLL. II. *Hinc quoque certo scire possumus, an quatuor termini sint proportionales, observando, an productum ex duobus extremis æquale sit producto ex duobus mediis. Nam termini proportionales varie disponi & permutari possunt secundum varios argumentandi modos, quos in toto fere lib.5. Euclides docuit. Ut si supponatur* a . b : : c . d, *erit* permutando a . c : : b . d; & invertendo c . a : : d . b & componendo c + a . a : : d + b . b, & *sic ulterius; nihilominus in omnibus his permutationibus hoc Theorema verum esse debet.*

Theor. 5. In proportione Geometrica continua trium terminorum factum primi termini æquatur quadrato secundi. Nam cum ex hypothesi *a . b : : b . c*, erit *per Theor.*4. $ac = bb$.

COROLL. I. *Datis primo & tertio termino*, a & c, *habetur medius proportionalis* $= \sqrt{ac}$. *Nam in tribus continue proportionalibus* a, b, c, *cum sit* $ac = bb$, *extracta secunda radice, erit* $\sqrt{ac} = b$. *Et generatim factum duarum quantitatum est medium proportionale inter quadrata illarum.*

COROLL. II. *Datis autem primo & secundo termino trium Geometrice proportionalium, habetur tertius, si fiat ex secundo quadratum & dividatur per primum. Nam sit tertius* = f, *erunt ex hypothesi* a, b, f *continue proportionales, per hoc* Theor.5. $af = bb$ & *dividendo per* a, *erit* $f = \frac{bb}{a}$. *Hac ratione inveniri possunt infiniti termini Geometrice proportionales.*

Co-

COROLL. III. *Denique in proportione continua Geometrica quadratum primi termini est ad quadratum secundi ut primus terminus est ad tertium. Quod evidens est ex proportione continua* $1, a, a^2$; *tum etiam* ex Propos. 20. l. 6. Euclidis.

Theor. 6. Si quatuor termini Geometrice proportionales sint, erunt quoque proportionales ad quamcunque illi dignitatem eleventur. Sit $a . b :: c . d$, erit quoque $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$. Item $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$. Demum $a^n . b^n :: c^n . d^n$. Sequitur *ex Propos.* 13. *l.* 8. *Eucl.* vel etiam potest numeris illustrari.

COROLL. *Terminorum proportionalium radices sunt pariter proportionales, Nam si* $a^n . b^n :: c^n . d^n$. *erit quoque* $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} . \sqrt[n]{d}$.

SCHOL. I. *Progressio Arithmetica terminorum quorumcunque*, b, d, f, g, h, *&c. exprimi solet per iteratam differentiæ additionem. Sit inter primum & secundum terminum* b *&* d *differentia* c, *erit progressio* $b . b + c . b + 2c . b + 3c . b + 4c$ *&c. Quod si progressio sit descendens, ita ut primus terminus* b *secundum superet excessu* c; *tunc exprimitur per iteratam differentiæ subtractionem, nempe* $b . b - c . b - 2c . c - 3c . b - 4c$ *&c.*

SCHOL. II *Axiomata, reductionis regulæ & theoremata superius allata sunt fundamenta æquationum instituendarum; neque sine illis resolvi possunt, ut mox videbimus. Eadem minute citare non solent Analystæ, unde sæpe tyronibus obscuritas. Nos in gratiam eorum in duabus sequentibus propositionibus id faciemus, quod deinde magna ex parte omittetur; siquidem memoriæ hæreant, cum eorum usus in Analysi perpetuus sit.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Quæstionem datam ad æquationem redigere.

DEsignentur quantitates incognitæ per ultimas Alphabeti literas x, z, y, ut distinguantur a cognitis & datis, quæ literis prioribus a, b, c, d exprimi solent, ut diximus *Defin.* 3. ad *Cap.* 1. (quanquam & ipsæ priores literæ a, b, c &c. aliquando pro incognitis & indeterminatis usurpentur, ut inferius in *Probl.* 6. factum videbitur). Expendantur deinde singulæ quæstionis conditiones & relationes, quæ dantur inter cognitas & incognitas, seu quæsitas quantitates; & ex utrisque simul tot formentur æquationes, quot sunt incognitæ assumptæ. Sed hæc usu magis, quam verbis addiscuntur. Ecce tibi plura exempla.

1. Invenire duos numeros, quorum summa est 100 & differentia 30.

Numerus major quæsitus sit $= x$, minor $= y$, summa $= 100$, differentia $= 30$. Ex conditione problematis oriuntur duæ æquationes, nempe

$$x + y = 100, \ \& \ x - y = 30$$

Vel in terminis generalibus: numerorum quæsitorum summa sit $= a$, differentia $= b$, erunt duæ æquationes

$$x + y = a, \ \& \ x - y = b$$

2. Invenire duos numeros tales, ut triplum primi superet secundum excessu $= a$, secundus vero superet primum excessu $= b$.

Sit primus quæsitorum $= x$, alter $= y$, oriuntur duæ æquationes

$$3x = y + a, \ \& \ y = x + b$$

3. Invenire duos numeros, qui ſint in ratione 1 ad 5, ſed ſi minori addas 2 & majori 3, ſint inratione 1 ad 2. Pone minorem $= x$, & majorem $= y$, erunt duæ æquationes,

I.	$x \,.\, y :: 1 \,.\, 5$	II.	$x+2 \,.\, y+3 :: 1 \,.\, 2$
Theor. 4.	$y = 5x$	*Theor.* 4.	$2x+4 = y+3$

Ponatur in ſecunda loco y, ejus valor ex æquatione prima inventus, hoc eſt $5x$, erit

Ax. 4. $\quad 2x + 4 = 5x + 3$

Sch. Prop. 1. $\quad 4 - 3 = 5x - 2x$

Reg. 3. $\quad 1 = 3x$

$\frac{1}{3} = x$, & $y \; (= 5x) = \frac{5}{3}$

Adde ad $\frac{1}{3}$ numerum 2, & ad $\frac{5}{3}$ numerum 3, erit $x = \frac{7}{3}$ & $y = \frac{14}{3}$, & problema omnino reſolutum.

4. Numerum invenire, a quo ſi auferatur f, deinde g, numeri reſidui ſint in proportione m ad n.

Sit numerus quæſitus $= x$, erit per conditionem problematis

$$x - f \,.\, x - g :: m \,.\, n.$$

Theor. 4. $\quad mx - mg = nx - nf$

Sch. Prop. 1. $\quad mx - nx = mg - nf$

Reg. 3. $\quad x = \dfrac{mg - nf}{m - n}$

Sit $f = 15$, $g = 20$, $m = 6$, $n = 1$, erit $x = \frac{105}{5} = 21$. Ex quo ſi auferas 15 & 20, habebis $6 \,.\, 1 :: 6 \,.\, 1$.

Vel ſit $f = 3$, $g = 5$, $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{7}{1} = 7$. ex quo ſi auferas 3 & 5, habebis $4 \,.\, 2 :: 2 \,.\, 1$.

5. In-

5. Invenire quadratum, cui si addatur 6, fiat sui lateris quintuplum.

Sit latus quadrati quæsiti x, erit per conditionem problematis

$$xx + 6 = 5x$$

6. Invenire cubum, cui si ter addatur ejus radix & ter auferatur quadratum radicis ejusdem, æqualis sit unitati. Sit latus cubi quæsiti x, erit per conditionem problematis.

$$x^3 - 3x^2 + 3x = 1.$$

SCHOL I. *Quo pauciores adhibentur incognitæ, eo facilius & expeditius problema solvitur. Ut si quærantur duæ quantitates, quarum una sit tripla alterius; si una denominetur* x, *præstat alteram denominare* 3x, *quam aliam incognitam* y *inducere. Similiter si invenire oporteat tres continue proportionales* x, z, y, *præstat duas tantum incognitas assumere, cum pro tertia sumi possit* $\frac{zz}{x}$ per Corol. 2. Theor. 5.

SCHOL. II. *Ceterum curent tyrones æquationes recte instituere. Nam ex earum efformatione facilis, aut difficilis fieri solet quæstionum propositarum solutio: proinde nos multa exempla congessimus, plura quoque mox allaturi.*

PROBL. I.

Interrogatus Socrates, quænam esset hora, respondit: horæ a media nocte elapsæ ad horas residuas usque ad meridiem, se habent ut 2 ad 3: quæritur quænam esset hora.

Sint horæ elapſæ $= x$, erunt reſiduæ uſque ad meridiem $= 12 - x$. Habetur ergo æquatio

$$x \,.\, 12 - x :: 2 \,.\, 3 \,.$$

Theor. 4.	$3x = 24 - 2x$
Reg. 1.	$5x = 24$
Reg. 3.	$x = \frac{24}{5}$

Erant ergo horæ $4\frac{4}{5}$, hoc eſt hora quarta matutina cum min. 48.

Vel in terminis generalibus: ſint horæ elapſæ a media nocte $= x$, horæ autem a media nocte ad meridiem $= a$, erit reſiduum ad meridiem uſque $= a - x$; proportio vero horarum præteritarum ad reſiduas ſit ut n ad m, erit æquatio

$$x \,.\, a - x :: n \,.\, m \,.$$

Theor. 4.	$mx = na - nx$
Sch. Prop. 1.	$mx + nx = na$
Reg. 3.	$x = \frac{na}{m+n}$

Sit $n = 2$, $m = 3$ & $a = 12$, erit $x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} =$ hor. 4 min 48.

Vel ſit $n = 5$, $m = 1$, $a = 12$, erit $x = \frac{60}{6} = 10$. Fuit ergo hora decima matutina.

PRO-

PROBL. II.

Canis leporem inſequitur, eorumque diſtantia eſt paſſuum 100; velocitas autem canis ad velocitatem leporis eſt ut 3 ad 2: quæritur ad quot paſſus canis leporem aſſequetur.

DUm canis percurrit ſpatium 100, quod voco a, lepus interea ſpatium aliquod tranſcurrit $= x$, erit ergo ſpatium a cane percurrendum $= a + x$, proinde habetur æquatio

$$a + x . x :: 3 . 2$$

Vel in terminis generalibus:

$$a + x . x :: m . n$$

Theor. 4. $mx = an + nx$

Sch. Prop. 1. $mx - nx = an$

Reg. 3. $x = \frac{an}{m - n}$

Poſito igitur $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, erit $x = 200$, & $a + x = 300$. Aſſequetur ergo poſt paſſus 300.

SCHOL. *Hoc idem problema proponit F. Lucas Pacciolus* (a) *e Burgo Sancti Sepulcri, ſed confuſe & per ambages, quod illi Nic. Tartalea* (b) *& Hieron. Cardanus* (c) *duriter exprobrant.*

PRO-

(a) Summa de Arithm. & Geomet. proport. an. 1523. (b) Tom. 2. lib. 1. cap. 15. quæſt. 21. [c] Lib. unic. de quæſt. Arithm. cap. 66.

PROBL. III.

Lucilius in alenda familia quotannis impendit tritici modios 60, reliquos seminat. Contigit, ut singulis tribus annis sextuplum ex messe colligeret, unde factus decuplo ditior in re frumentaria, quam antea fuerat: quæritur, quot tritici modios primo haberet.

Pone primo habuisse modios $= x$, modios autem 60 pro annuo familiæ alimento esse $= a$, messem ex semine quotannis sextuplam $= m$; erunt modii, detractis familiæ alimentis, $= x - a$, qui si multiplicentur per m, dant primi anni messem $= mx - am$.

Secundo anno detrahe rursus a pro alimentis familiæ, erit residuum $mx - am - a$; & multiplicando per m, habetur secundi anni messis $= m^2x - am^2 - am$.

Tertio anno, detractis similiter alimentis $= a$, erit residuum $m^2x - am^2 - am - a$; & multiplicando per m, obtinetur fructus tertii anni $= m^3x - am^3 - am^2 - am$.

Hæc autem quantitas ex conditione problematis debet esse decupla modiorum, quos primo habuit, proinde erit æquatio

$$m^3x - am^3 - am^2 - am = 10x$$

Schol. Prop. 1. $\quad m^3x - 10x = am^3 + am^2 + am$

Reg. 3. $\quad x = \dfrac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$

Substituantur jam pro literis, earumque potestatibus determinati earum valores, innotescet valor ipsius x. Nam posito

posito $a = 60$ & $m = 6$, erit $m^3 = 216$, $m^2 = 36$, $am^3 = 12960$, $am^2 = 2160$, $am = 360$; hinc $\frac{am^3 + am^2 + am}{m^3 - 10}$ $\frac{15480}{206} = 75\frac{15}{103} = x$. Habuit ergo primo modios $75 + \frac{15}{103}$ unius modii.

PROBL. IV.

Metellus duos filios testamento reliquit hæredes hac ratione, ut major natu accipiat aureos 100 & quartam partem ejus, quod restat de tota hæreditate; minor vero accipiat aureos 50 & dimidium ejus, quod remansit de hæreditate, detractis prius & portione sui fratris & aureis illis 50. Divisione facta, apparuit, utrunque filium esse ex æquo hæredem: quæritur quanta fuerit hæreditas, & quæ filiorum portio.

Pone hæreditatem fuisse $= x$, aureos $100 = a$; erit residuum totius hæreditatis $x - a$ & ejus quarta pars $\frac{x-a}{4}$. Majoris igitur portio $= a + \frac{x-a}{4}$.

Pone secundo aureos $50 = b$, erit filii minoris portio $= b + \frac{x - a - b - \frac{x+a}{4}}{2}$. Sed portiones inventæ fuerunt æquales, hinc

a

$$a + \frac{x-a}{4} = b + \frac{x-a-b-\frac{x+a}{4}}{2}$$

Et multiplicando primo per 2, deinde per 4, erit

$$2a + \frac{2x-2a}{4} = 2b + x - a - b - \frac{x+a}{4}$$

$$8a + 2x - 2a = 8b + 4x - 4a - 4b - x + a$$

Lem.Cap. 1. $6a + 2x = 4b + 3x - 3a$

Reg. 1. $x = 9a - 4b$

Cum ſit $a = 100$, $b = 50$, erit hæreditas x $(= 9a - 4b)$ $= 700$, & valore $(9a - 4b)$ in ſuperiori æquatione poſito, innoteſcit utriuſque filii portio $= 250$.

PROBL. V.

Tres mercatores, inita ſocietate, lucrati ſunt ſummam quandam aureorum. Hoc unum conſtat, primum cum ſecundo accepiſſe ſummam aureorum a, *&* *eundem primum cum tertio aureos* b; *ſecundum vero cum tertio aureos* c: *quæritur, quantum fuerit lucrum ſingulorum.*

SInt tres ſocii x, z, y, ſummæ vero a, b, c; erit per conditionem Probl.

$x + z = a$	$z = a - x$
$x + y = b$	$y = b - x$
$z + y = c$	

Fiat

Fiat reductio, ut *in Prop.* 2. docuimus, & quantitatis x valor $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)$ ponatur in duabus æquationibus $z=a-x$, & $y=b-x$, innotescet lucrum singulorum, nempe

$$x=\frac{a+b-c}{2}$$

$$z=\frac{a-b+c}{2}$$

$$y=\frac{b-a+c}{2}$$

Sit $a=100$, $b=120$, $c=160$, erit $x=30$, $z=70$, $y=90$.

COROLL. *Patet singulas alternas summas excedere debere summam quamlibet tertiam, alias valor prodiret negativus. Sic in prima æquatione* a + b > c, *in secunda* a + c > b *&c.*

Idem Problema aliter. Sint tres æquationes, ut prius,

$$x+z=a$$
$$x+y=b$$
$$z+y=c$$

Addantur simul *per Propos.* 2. *hujus*, erit nova æquatio

$$2x+2z+2y=a+b+c$$

Divid. per 2. $\quad x+z+y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$

Ex hac æquatione subtrahe *per Prop. cit.* tres æquationes priores sigillatim, innotescet valor x, z, y.

$$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$

Subtr. $$z+y=c$$

$$x=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c$$

$$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$

Subtr. $$x+y=b$$

$$z=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}b$$

$$x+z+y=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c$$

Subtr. $$x+z=a$$

$$y=\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a$$

Posito, ut supra, $a=100$, $b=120$, $c=160$, iterum prodit $x=30$, $z=70$, $y=90$.

PROBL. VI.

Lucius ad ædificandam domum lapides, calcem & sabulum comparaverat. Mutato deinde consilio, ea omnia tribus emptoribus A, B & C vendidit, nempe

A. emit 2. currus lapidum, 3. currus calcis, 7. currus sabuli — *Juliis* 34

B. emit 3. currus lapidum, 4. currus calcis, 12. currus sabuli — *Juliis* 46

C

C. emit 4. currus lapidum } 1. currus calcis } *Juliis* 42 13. currus sabuli }

Quæritur singularum ejusmodi rerum pretium.

Pone pretium lapidum pro singulis curribus $= a$, pro singulis curribus calcis $= b$, & pro curribus sabuli $= c$; erunt ergo 2 currus lapidum $= 2a$: currus 3 calcis $= 3b$ & 7 currus sabuli $= 7c$, (quantitates a, b, c hic sumuntur pro incognitis & indeterminatis, ut monuimus *in Prop.* 4. *hujus*) habentur ergo æquationes

$$A. \quad 2a + 3b + 7c = 34$$

$$B. \quad 3a + 4b + 12c = 46$$

$$C. \quad 4a + 1b + 13c = 42$$

Ex prima æquatione A habetur *per Sch. Prop.* 1.

$$2a = -3b - 7c + 34$$

$$\textit{Reg.3.} \quad a = -\tfrac{3}{2}b - \tfrac{7}{2}c + 17$$

Hoc valore in secunda æquatione B posito *per Ax.* 4. *hujus* erit

$$-\tfrac{9}{2}b - \tfrac{21}{2}c + 51 + 4b + 12c = 46$$

$$\textit{Lem. Cap.1.} \quad -\tfrac{1}{2}b + \tfrac{3}{2}c + 51 = 46$$

$$\textit{Subtr.} \qquad 51 \quad 51$$

$$-\tfrac{1}{2}b + \tfrac{3}{2}c = -5$$

$$\textit{Reg.1.} \quad -\tfrac{1}{2}b = -\tfrac{3}{2}c - 5$$

$$\textit{Reg.2.} \quad -b = -3c - 10$$

$$\textit{Reg.1.} \quad b = 3c + 10$$

$$\textit{Adde} \quad +\tfrac{1}{2}b = \tfrac{3}{2}c + 5$$

$$\tfrac{3}{2}b = \tfrac{9}{2}c + 15$$

Q2 Sed

Sed inventa fuit $a = -\frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c + 17$, proinde si in hac æquatione pro $-\frac{3}{2}b$ ponatur ejus valor $(\frac{9}{2}c + 15)$, erit *per 4. Ax. hujus*

$$a = -\frac{9}{2}c - 15 - \frac{7}{2}c + 17$$

Lem. cit. $a = -8c + 2$

Substituantur jam in tertia æquatione C valores inventi a & b, obtinebitur æquatio

$$-32c + 8 + 3c + 10 + 13c = 42$$

Lem. cit. $-16c = 24$

Reg. 3. $c = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}$

Sunt autem $a = -8c + 2$, & $b = 3c + 10$. Substituto igitur valore ejusdem c, determinantur a & b, scilicet

$$a = 12 + 2 = 14$$
$$b = -\frac{9}{2} + 10 = 5\frac{1}{2}$$

Proinde lapides pro singulis curribus venduntur juliis 14. calcis currus quilibet juliis $5\frac{1}{2}$. Currus autem sabuli ob valorem negativum ($c = -1\frac{1}{2}$) nihil venditur; imo ipse sabuli dominus solvit julium $1\frac{1}{2}$ emptoribus illis pro unoquoque sabuli curru e domo amovendo.

SCHOL. I. *Hoc probl. a Hieronymo Cardano* [a] *paucis verbis propositum, visum est nobis non inelegans & tyronibus in calculo exercendis opportunum.*

SCHOL. II. *Poterant hæc problemata abstracte, & in terminis generalibus proponi, ut plerique faciunt. Sed quia specialia & particularibus circumstantiis deducta phantasiam magis juvant, & juvenes cum statim ab initio artis, alioquin difficilis, usum aliquem specialem agnoscunt, ad ulteriora alacriores fiunt, ea sic afferre satius duximus.* SCH.

(a) Lib. unic. de quæst. Arithm. cap. 66.

SCHOL. III. *Si ex problematis propositi conditionibus haberi non possint tot æquationes, quot incognitæ fuerunt assumptæ, problema dicitur* indeterminatum, *quia non unam, sed plures obtinere potest solutiones, & tunc una ex incognitis ad arbitrium sumitur. Ut si quærantur duo numeri, quorum factum æquale sit numero dato, v.g.* 12. *Sint illi* x, *&* y; *per conditionem problematis una tantum haberi potest æquatio, nempe* $xy = 12$; *unde* $y = \frac{12}{x}$. *Sumatur ad arbitrium* $x = 2$, *erit* $y = \frac{12}{2} = 6$. *Si sumatur* $x = 3$, *erit* $y = \frac{12}{3} = 4$. *Si* $x = 4$, *erit* $y = 3$ *&c. Hujus generis sunt problemata, quæ sequuntur.*

PROBLEMATA INDETERMINATA.

PROBL. I.

Duos numeros invenire, quorum summa sit ad eorum differentiam in quacunque data ratione.

SIt quæsitorum unus $= x$, alter $= y$, & ratio data sit a ad b, erit per conditionem probl.

$$x + y . x - y :: a . b$$

Theor. 4. $$ax - ay = bx + by$$

Schol. Prop. 1. $$ax - bx = ay + by$$

Divid. per $a - b$ $$x = \frac{ay + by}{a - b}$$

Sit

Sit $a = 3$, $b = 1$, & ſumatur ad arbitrium $y = 2$, erit $x = \frac{6+2}{2} = 4$, proinde $4 + 2 . 4 - 2 :: 3 . 1$.

Sit $a = 4$, $b = 3$, & ſumatur, ſi libet $y = 5$, erit $x = \frac{20+15}{1} = 35$. Hinc $35 + 5 . 35 - 5 :: 4 . 3$.

PROBL. II.

Duos numeros invenire, quorum ſumma ſit ad ſummam quadratorum, quæ ex ipſis fiunt, in ratione data.

Sit unus numerus quæſitus $= x$, alter $= xy$, & ratio data ſit a ad b, erit ex conditione problematis

$$x + xy : xx + xxyy :: a . b$$

Theor. 4. $$bx + bxy = axx + axxyy$$

$$b + by = ax - axyy$$

*Reg.*3.
*Reg.*3. $$x = \frac{b + by}{a + ayy}$$

Sit $a = 3$, $b = 1$, & ſumatur ad libitum $y = 2$, erit $x = \frac{1+2}{3+12} = \frac{1}{5}$, proinde $x + xy = \frac{3}{5}$, & $xx + xxyy = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, ideoque $\frac{3}{5} . \frac{1}{5} :: 3 . 1$.

Sit $a = 2$, $b = 1$, & ſumatur $y = 3$, erit $x = \frac{1+3}{2+18} = \frac{4}{20}$

$\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $x + xy = \frac{4}{5}$ & $xx + xxyy = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, proinde habetur $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} :: 2 \cdot 1$.

COROLL. I. *Eodem modo resolvitur problema, si quærantur duo numeri, quorum summa sit ad differentiam quadratorum ex ipsis in quacunque ratione data* a *ad* b. *Vel duo numeri, quorum differentia sit ad differentiam quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, in ratione data* a *ad* b. *Vel duo numeri quorum differentia sit ad summam quadratorum ex ipsis, ut* a *ad* b. *Quos omnes casus Diophantus Alexandrinus* (a) *accurate resolvit*.

COROLL. II. *Nota pro altero numero quæsitorum non sumi simpliciter* x, *vel* y, *sed* xy, *ut scilicet tota æquatio multiplicata per* x *existat, & inde haberi possit divisor communis, ut facta divisione, quadrata illa ad quantitatem unius dimensionis reducantur; quod quidem pro similibus casibus est advertendum*.

PROBL. III

Datum numerum quadratum in alia duo quadrata dividere.

Sit latus dati quadrati $= a$, latus quæsiti $= x$, & alterius quæsiti $= y$, erit $a^2 = x^2 + y^2$. Quia vero latus a majus est alterutro latere x, vel y seorsim accepto, fieri poterit $a - x = y$, vel sumpto ad libitum v, fieri poterit

$a -$

(a) Arithmetic. lib. 1 & 2. cum Bacheto, & de Fermat.

$a - vx = y$, vel etiam $vx - a = y$; tunc enim superior æquatio $a^2 = x^2 + y^2$ in sequentem transformabitur, substituto, loco y^2, ejus valore.

$$a^2 = x^2 + v^2x - 2avx + a^2$$

$$v^2x + x = 2av$$

Divid. per $v^2 + 1$ $\qquad x = \frac{2av}{v^2 + 1}$

Hoc valore ipsius x posito in æquatione $vx - a = y$, habetur $y = \frac{avv - a}{v^2 + 1}$.

Sit $a = 10$, assumpto ad libitum $v = 3$, erit $x = \frac{60}{10} = 6$, & $y = \frac{80}{10} = 8$. Fiant quadrata, erit $100 = 36 + 64$.

Sit $a = 12$, & ad libitum $v = 2$, erit $x = \frac{48}{5}$, & $y = \frac{36}{5}$. Fiant quadrata, reducendo 12 ad fractionem ejusdem nominis, hoc est ad $\frac{60}{5}$, erit (deleto communi denominatore 25) $3600 = 2304 + 1296$.

PROBL. IV.

Datum numerum in duos secare, quorum factum sit quadratum.

Sit numerus datus $= 2a$, partium vero, in quas dividi debet, differentia sit $= 2y$, erit *per Theor.* 3. pars major $a+y$, minor autem $a-y$ earumque factum $aa-yy$, quod ex conditione problematis debet esse quadratum. Pro cujus latere, sumpto v ad libitum, fiat $a = vy$, seu $vy - a$, erit

aa

$$aa - yy = v^2y^2 - 2avy + a^2$$

Factaque reductione *per Lem. Cap.* 1. habetur

$$v^2y^2 + y^2 = 2avy$$

Divid. per y $\quad v^2y + y = 2av$

Tum per $v^2 + 1$

$$y = \frac{2av}{v^2 + 1}$$

Sit $2a = 20$, ſumatur ad arbitrium $v = 3$, erit $y = \frac{60}{10} = 6$, proinde $a + y = 16$, & $a - y = 4$, unde $aa - yy = 100 - 36 = 64 = 4 \times 16$.

Sit $2a = 30$, ſumpto $v = 2$, erit $y = \frac{60}{5} = 12$, proinde $a + y = 27$, $a - y = 3$, & $aa - yy = 81$.

SCHOL. *Quantitas* u *eſt quidem arbitraria, ſed talis ſumi debet, ut* y *ſemper maneat minor quam* a, *cujus differentia eſſe ſupponitur.*

PROBL. V.

Quadratum invenire, quod ſive addito, ſive dempto quocunque ſuæ radicis multiplici, ſubmultiplici, ſuperparticulari, & quavis alia proportionis ſpecie, ſemper ſit quadratum.

SIt quæſiti quadrati latus $= x$, & radicis addendæ, aut detrahendæ multiplum $= m$, erit $x^2 + mx$ quadratum una cum multiplo ſuæ radicis, cui quadratum æquale quæritur. Pro cujus latere, ſumpto ad libitum v, fiat $v - x$, erit ex conditione Probl.

$$x^2 + mx = vv - 2vx + xx$$

Schol. Prop. 1. $2vx + mx = vv$

Reg. 3. $x = \frac{vv}{2v + m}$

Sit $m = 2$, & sumatur ad libitum $v = 5$, erit $x = \frac{25}{12}$, hinc $x^2 + mx = \frac{625}{144} + \frac{50}{12} = \frac{1225}{144}$, cujus $\surd = \frac{35}{12}$.
Sit $m = 3$, & ad libitum $v = 4$, erit $x = \frac{16}{11}$, & $x^2 + mx = \frac{256}{121} + \frac{48}{11} = \frac{784}{121}$ cujus $\surd = \frac{28}{11}$.

Quod si data radicis proportio non addi, sed subtrahi debeat a suo quadrato, tunc invenietur $x = \frac{v^2}{2v - m}$, ut calculum ineunti palam est.

Sit enim, ut supra, $m = 3$, $v = 4$, erit $x = \frac{16}{5}$, & $x^2 - mx = \frac{256}{25} - \frac{48}{5} = \frac{16}{25}$, cujus $\surd = \frac{4}{5}$.
Sit demum $m = 4$, $v = 5$, erit $x = \frac{25}{6}$ & $x^2 - mx = \frac{625}{36} - \frac{100}{6} = \frac{25}{36}$, cujus $\surd = \frac{5}{6}$.

SCHOL. *In hoc problema satis elegans casu incidit, ut ipse asserit, P. Augustinus Thomas a S. Josepho* (a) *Schol. Piarum Geometra & Astronomus in Germania clarissimus. Pro quo, suppressa analysi, canonem tradidit universalem* $\frac{a^4 + 2a^2m^2}{4a^3 - 4am^2} + m^4 =$ *radici quadrati quæsiti*; *ubi* m *denotat proportionem cujuscunque speciei*; a *sumitur ad libitum, modo major sit quam* m. *At canon a nobis traditus longe simplicior est, ut patet.*

PRO-

(a) Sylloge Epist. Mathem. Pragæ an. 1715.

PROBL. VI.

Tres numeros invenire, quorum tum ſumma tum bini quadratum efficiant.

Sint numeri quæſiti x, y, z; primi autem quadrati $x+y+z$ latus ſit r; ſecundi quadrati $x+y$ latus ſit s; tertii $x+z$ ſit t, & quarti $y+z$ ſit v, erunt quatuor æquationes

$$1.^a \qquad x+y+z=rr$$
$$2.^a \qquad x+y=ss$$
$$3.^a \qquad x+z=tt$$
$$4.^a \qquad y+z=vv$$

Ex prima & ſecunda æquatione habentur duo valores ipſius x, *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. nempe

$$x=rr-y-z, \ \& \ x=ss-y$$
$$rr-y-z=ss-y$$

Ax. 2. $\qquad rr-z=ss$

Coroll. cit. $\qquad z=rr-ss$

Ex tertia æquatione habetur $x=tt-z$ *per Coroll. cit.* poſitoque loco z ejus valore modo invento, habetur *per Ax.* 4.

$$x=tt-rr+tt$$

Cumque habeatur ex ſecunda æquatione $x=ss-y$, duæ æquationes æquales erunt, ſcilicet

$$tt - rr + ss = ss - y$$

Ax. 2. $$tt - rr = -y$$

Ax. 1. & *Cor.* 2. *Prop.* 1. $$y = rr - tt$$

Positis autem in quarta æquatione $y + z = vv$, valoribus y & z jam inventis, erit *per Ax.* 4.

$$rr - tt + rr - ss = vv$$

$$2rr - tt - ss = vv$$

Fiat $r - m = t$, erit $rr - 2rm + m^2 = tt$. Item fiat $r - n = s$, erit $rr - 2rn + n^2 = ss$; & his valoribus in superiori æquatione substitutis loco $- tt - ss$, oritur æquatio

$$2rr - rr + 2rm - m^2 - rr + 2rn - n^2 = vv$$

Lem. Cap. 1. $$2rm + 2rn - m^2 - n^2 = vv$$

Ax. 1. $$2rm + 2rn = vv + m^2 + n^2$$

Reg. 3. $$r = \frac{vv + m^2 + n^2}{2m + 2n}$$

m, n, v sunt ad libitum.

Sit $m = 1$, $n = 2$, $v = 7$, erit $r = \frac{54}{6} = 9$; hinc $r - m = t = 9 - 1 = 8$, & $r - n = s = 9 - 2 = 7$.

Proinde $x = 32$, $y = 17$, $z = 32$ | $x + y + z = 81$, $x + y = 49$, $x + z = 64$, $y + z = 49$

Sit $m = 2$, $n = 4$, $v = 8$, erit $r = \frac{84}{12} = 7$, & $r - m = t = 5$, $r - n = s = 3$; adeoque

$x =$

$$x = -15 \quad y = 24 \quad z = 40 \qquad \begin{array}{r} x+y+z=49 \\ x+y=9 \\ x+z=25 \\ y+z=64 \end{array}$$

SCHOL. *Problemata indeterminata qui plura cupit, Diophantum adeat, qui in numeris infinita fere proponit, unde* Analysis Diophantea *nomen accepit. Horum solutionem recentiores alia via per analysim speciosam indagarunt, Billy* (a) *præsertim*, Ozanam (b), *&* Prestetus (c). *Hæc quidem determinatis difficiliora tyroni evadunt. Negligenda tamen non sunt, cum in doctrina curvarum usum habeant plurimum, ut nos opportune* Wolfius (d) *admonet. Quæ nos hic pauca selegimus ad ceterorum intelligentiam, siquidem probe percepta fuerint, satis erunt.*

CAPUT VI.

De Æquationibus compositis.

HActenus de æquationibus *simplicibus*. Nunc ad *compositas*, quæ pluribus constant dimensionum gradibus, transitum facimus. Quarum naturam, & proprietates præcipuas hoc loco breviter explicabimus.

PRO-

(a) Diophant. redivivus. (b) Nouveaux elem. d'Algeb. l.3. (c) Nouveaux elements des Mathematiq. T. 2. (d) Elem. analy. edit. 2. Cap. 2. §. 249.

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum compositarum genesis.

Assumantur nonnullæ æquationes simplices, quæ radices positivas, vel negativas contineant, & æquentur nihilo. Deinde ad invicem multiplicentur, orientur æquationes compositæ tot graduum, quot assumptæ fuerint radices.

$$\text{Sit} \quad x = a, \text{ seu } x - a = 0$$
$$x = b \qquad x - b = 0$$

Multiplicentur inter se hæ duæ æquationes simplices, oritur

$$\begin{array}{l} x^2 - ax + ab = 0 \\ - bx \end{array}$$

Sit deinde $x = c$, seu $x - c = 0$, & per hanc multiplicetur æquatio jam inventa, erit æquatio composita tertii gradus

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx \\ - bx^2 + acx - abc = 0 \\ - cx^2 + bcx \end{array}$$

Eadem ratione sit $x = 2$, seu $x - 2 = 0$

$$x = -3, \text{ seu } x + 3 = 0$$
$$x = 4, \text{ seu } x - 4 = 0$$

Multiplicentur ad invicem hæ tres æquationes simplices, fit æquatio tertii gradus

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$$

Quæ

Quæ quidem si ulterius multiplicetur per aliam æquationem simplicem $x+1=0$, fit æquatio quarti gradus, nempe

$$x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$$

COROLL. I. *Ex hac æquationum genesi primo deducitur, in qualibet æquatione tot dari radices, quot incognita primi termini dimensiones habet, seu quot habet exponens unitates; nempe duas in quadratica, tres in cubica &c.*

II. *Infertur, quantitatem cognitam secundi termini continere summam omnium radicum sub signo contrario, hoc est radices positivas cum signo —, negativas cum signo +. Quantitatem cognitam tertii termini exhibere productum ex singulis binis radicibus sub signo proprio. Cognitam quarti productum ex singulis ternis radicibus sub signo contrario, & sic deinceps. Terminum vero ultimum (quem homogeneum comparationis vocant) esse factum omnium radicum. Hæc omnia in prima & secunda æquatione oculis patent.*

III. *In omni æquatione tot dari radices positivas, seu veras, quot sunt mutationes signorum de + in —, & de — in +; tot vero negativas, seu falsas, quot successiones signorum eorundem + +, vel — —. Sic in æquatione* $x^2-5x+6=0$, *quia duplex est mutatio signorum + —, & — +, duplex est radix positiva nempe* $x=2$, & $x=3$. *In æquatione vero* $x^2+3x-4=0$, *quia una est signorum eorundem successio + +, & una mutatio + —; una radix est negativa, nempe* $x=-4$, *& altera positiva* $x=1$. *Si vero omnia signa sint positiva, radices omnes sunt falsæ, ut æquatio* $x^2+5x+6=0$, *cujus radices sunt* $x=-2$, & $x=-3$.

IV.

IV. *Si radices veræ sint falsis æquales, secundus terminus æquationis evanescit, & fit æqualis zero. Sit* $x = 2$, $x = 3$, *&* $x = -5$. *Fiat æquatio, ut supra docuimus, oritur* $x^3 * - 19x + 30 = 0$, *in qua secundus terminus deficit. Si radices veræ superant falsas, secundus terminus æquationis est cum signo* $-$. *Sit radix vera* $x = 5$ *major quam falsa* $x = -2$, *erit æquatio* $x^2 - 3x - 10 = 0$, *in qua* -3 *denotat excessum radicis veræ* $+5$ *supra falsam* -2. *Si denique radices falsæ majores sunt quam veræ, secundus terminus æquationis est cum signo* $+$. *Sit radix falsa* $x = -5$, *vera autem sit* $x = 2$, *erit æquatio* $x^2 + 3x - 10 = 0$, *in qua* $+3$ *exprimit excessum radicis falsæ* -5 *supra veram* $+2$.

SCHOL. I. *Duplici ratione cognoscitur, quantitatem aliquam positivam, aut negativam esse radicem æquationis. Primo si fiat binomium constans incognita & illa quantitate cum signo* $-$, *si sit quantitas positiva; vel cum signo* $+$, *si sit negativa, & per ipsum exacte, & sine ullo residuo æquatio sit divisibilis. Sic quia æquatio superior,* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *divisibilis est exacte per* $x - 2$, *seu per* $x + 3$, *vel per* $x - 4$, *deducitur* -2, $+3$, -4 *esse radices ejusdem æquationis: cum æquationes oriantur ex multiplicatione, & divisio sit multiplicationi contraria. Secundo si substituendo in æquatione, loco incognitæ, quantitatem cum signo* $+$ *si est positiva, aut cum signo* $-$ *si est negativa, & omnia producta per signa contraria sese destruant, erit illa quantitas radix æquationis. Sit eadem æquatio* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$. *Substituatur loco incognitæ* x, *ubique ejus valor* $+2$; *erit* $8 - 12 - 20 + 24 = 0$. *Substituatur rursus loco ejusdem incognitæ* x *valor* -3, *erit* -27

$-27 + 30 + 24 = 0$. *Demum substituto valore* $+4$, *erit* $64 - 48 - 40 + 24 = 0$.

Similiter in æquatione $x^2 \begin{matrix} -ax \\ +bx \end{matrix} - ab = 0$. *Radices sunt* $+a$, $-b$, *substituantur hi valores loco incognitæ* x, *erit* $a^2 - a^2 + ab - ab = 0$. *Item* $b^2 - b^2 + ab - ab = 0$.

SCHOL. II. *Præter radices rationales positivas, aut negativas, de quibus hactenus locuti sumus, dantur etiam in æquationibus radices irrationales, & incommensurabiles tam positivæ, quam negativæ. Sic æquatio* $x^2 - 6x + 4 = 0$ *habet duas radices irrationales* $3 + \sqrt{5}$, & $3 - \sqrt{5}$.

SCHOL III. *Præter radices reales rationales, & irrationales jam allatas, æquatio aliquando continet radices imaginarias, & impossibiles. Nam cum nonnullæ quæstiones casus impossibiles involvant, ut si quæratur in circulo dato applicari rectam, quæ diametro circuli major sit, necesse est radix illi casui respondeat impossibilis. Sic æquatio* $x^2 - 2x + 7 = 0$ *continet duas radices imaginarias* $1 + \sqrt{-6}$ & $1 - \sqrt{-6}$, *quæ in æquationibus sunt semper numero pares.*

SCHOL. IV. *Regula, quam ex Cartesio docuimus* in Corol. 3. *pro dignoscendis ex permutatione, aut successione signorum radicibus veris ac falsis, non valet pro æquationibus, quæ radicibus imaginariis constant. Nam superior æquatio* $x^2 - 2x + 7 = 0$ *ex signorum permutatione continere videtur duas radices veras; quod tamen est falsum. Multiplicetur enim per* $x + 3 = 0$, *ut præter duas veras, aliam quoque falsam contineat: oritur* $x^3 + 1x^2 + 1x + 21 = 0$, *in qua dispositio signorum ex præcit. regula indicat, omnes radices esse falsas. Non erant ergo in æquatione duæ radices veræ, quales apparebant, sed imaginariæ* $1 + \sqrt{-6}$, & $1 - \sqrt{-6}$. *Proinde hic regula fallit.*

PROPOSITIO II.

Æquationem quamcunque ordinare.

I. Ponantur in uno æquationis membro omnes incognitæ ita, ut primo loco statuatur incognita maximæ potestatis, quæ dicitur *primus* æquationis terminus: secundo loco incognita potestatis uno gradu inferioris, quæ dicitur *secundus* terminus æquationis, deinde omnes aliæ incognitæ gradatim decrescentes, quæ constituunt *tertium*, *quartum*, *quintum &c.* terminum æquationis. In altero æquationis membro ponantur omnes termini, qui ex cognitis quantitatibus componuntur.

Sit æquatio inventa $bx^2 + x^3 = bx - ab + cd$

erit *ordinata* $x^3 + bx^2 - bx = cd - ab$

Item sit æquatio $by^3 - dy + y^4 = abc + cy + mf$

erit *ordinata* $y^4 + by^3 - cy - dy = abc + mf$

II. Si terminus maximæ potestatis multiplicatus existat per aliam quantitatem, sive literariam, sive numericam, dividi debet per illam, ut simplex evadat. Sit $3x^2 + 6ax = ab$, dividendo per 3 totam æquationem, erit $x^2 + 2ax = \frac{1}{3}ab$. Eadem ratione si sit æquatio $ax^2 - 2ax = abc$, dividendo per a, fit $x^2 - 2x = bc$.

III. Si terminus maximæ potestatis afficitur signo $-$ fieri debet per terminorum transpositionem positivus. Sic in æquatione $ax - x^2 = ab - cf$, facta terminorum transpositione, erit $x^2 - ax = cf - ab$.

IV. Omnes illi termini, in quibus incognita eandem habet dimensionem, statuantur unus infra alium; idemque fiat de quantitatibus cognitis, si plures sint, ut x^3

$$x^3 + ax^2 - bx \atop - bx^2 + cx = abc$$

Quantitates $ax^2 - bx^2$ ſtant ambæ loco ſecundi termini, & $- bx + cx$ loco tertii termini. Similiter in æquatione

$$x^2 - ax = ac - bc + mf \atop - bx$$

Quantitates $ac - bc + mf$ unicum terminum conſtituunt.

COROLL. I. *Hinc habetur modus revocandi quamcunque æquationem compoſitam ad ſimplicem. Si enim in ſuperiori prima æquatione ponatur* $a - b = p$, *erit* $ax^2 - bx^2 = px^2$. *Item ponendo* $- b + c = q$, *erit* $- bx + cx = qx$, *demum ponendo* $abc = r$, *eadem æquatio transformabitur in hanc ſimpliciſſimam* $x^3 + px^2 + qx = r$. *Similiter in ſuperiori ſecunda æquatione fiat* $- a - b = - p$, *erit* $- ax - bx = - px$; *fiat* $ac - bc + mf = q$, *ea in hanc transformabitur* $x^2 - px = q$. *Quod quidem quanti ſit uſus, ex inferius dicendis ſatis conſtabit.*

COROLL. II. *Præſtat non raro omnes æquationis terminos ad unam partem transferre, ita ut omnes quantitates nihilo fiant æquales. Sic æquatio* $x^2 - px = q$ *fiet* $x^2 - px - q = 0$. *Item* $x^3 - ax^2 + bx = a^2b^2$, *erit* $x^3 - ax^2 + bx - a^2b^2 = 0$. *Quod artificium Algebræ, ut videbimus, valde commodum, Thomæ Harrioto* (a) *Anglo tribuitur.*

COROLL. III. *Si quis terminus in æquatione deſit, ut ſecundus, tertius, quartus &c. Notatur termini, aut terminorum (ſi plures deſint) defectus aſteriſmo, ut æquatio* $x^3 * + ax - a^3 = 0$, *quæ ſecundo termino caret. Pariter* $x^4 * - cx^2 * + a^2bc = 0$ *caret terminis ſecundo & quarto. Tunc autem minime variatur ſequentium terminorum ordo,*

S 2 aut

(a) Artis Analyt. praxis Londini 1631.

aut conditio. Sed ax *v.g. in prima æquatione manet terminus æquationis tertius; & in secunda* $+a^2bc$ *tenet locum æquationis quintum, licet absint duo termini; & sic de aliis.*

PROPOSITIO III.

Radices veras in falsas, & falsas in veras commutare.

MUtentur in æquatione signa terminorum parium, ea nempe, quæ præcedunt terminos secundum, quartum, sextum &c. radices veræ degenerabunt in falsas, & vicissim falsæ in veras. Sit æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ ex *anteced. Propos.* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3. Variatis autem terminorum parium signis, fit $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$, quæ quidem habet easdem cum priore radices; sed duas falsas -2, -4, & unam veram $+3$.

Demonstratio. Substituatur in eadem æquatione loco incognitæ x una ex radicibus, seu valoribus -2, tota æquatio evanescit, nempe $-8 + 12 + 20 - 24 = 0$. Substituatur deinde -4, iterum æquatio evanescit, nam -64, $+48 + 40 - 24 = 0$. Idem fiat cum radice vera $+3$, erit $27 + 27 - 30 - 24 = 0$, ergo *per Schol. 1. Propos. 1. hujus* -2, -4, $+3$, sunt radices illius æquationis. Quod &c.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Radices augere, vel minuere data quantitate.

I. Sit æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, quæ *ex Propos.* 1. *hujus* habet duas radices veras $+2$, $+4$, & unam falsam -3, augere volo ejus radices quantitate data $= 3$.

Fiat $x + 3 = y$, erit $x = y - 3$. Substituatur hic valor in æquatione loco ipsius x, erit

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3 & = y^3 - 9y^2 & + 27y & - 27 \\ -3x^2 & -3y^2 & + 18y & - 27 \\ -10x & & - 10y & + 30 \\ +24 & & & + 24 \\ \hline \text{Summa} & y^3 - 12y^2 & + 35y & + * = 0 \end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices ternario auctas, nempe $+5$, $+7$, $+0$ (nam $-3+3=0$) quæ quidem prius erant $+2+4-3$. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, ex. gr. $+5$, fiet $125 - 300 + 175 = 0$, ergo *per Schol.* 1. *Prop.* 1. $+5$ est radix ejusdem æquationis.

II. Minuenda sit eadem æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ numero binario. Fiat $x - 2 = y$, erit $x = y + 2$. Substituatur in eadem æquatione hic valor loco ipsius x, erit

x^3

$$\begin{array}{l|r}
x^3 & = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 \\
-3x^2 & -3y^2 - 12y - 12 \\
-10x & -10y - 20 \\
+24 & +24 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 + 3y^2 - 10y + * = 0
\end{array}$$

Hæc nova æquatio habet singulas radices binario minutas, nempe 0, -5, $+2$, quæ prius erant $+2$, -3, $+4$. Substituatur enim quælibet ex his in æquatione, v. g. -5, erit $-125 + 75 + 50 = 0$, ergo *per Sch.* 1. *Prop.* 1. radix -5 est radix ejusdem æquationis.

COROLL. I. *Augendo radices æquationis, singulæ radices veræ augentur. Contra vero falsæ minuuntur. Nam si ad radicem falsam* -4 *addatur* $+3$, *minuitur & fit* -1. *Imo aliquando falsæ in veras transeunt, ut si ad falsam* -4 *addas* $+5$, *fit radix vera* $+1$. *Quod evidens est.*

COROLL. II. *Minuendo radices æquationis, radices falsæ augentur. Nam si ex radice falsa* -3 *subtrahitur quantitas* $+2$, *fit* -5, *ut patet. At veræ minuuntur, imo & aliquando fiunt falsæ, ut si ex radice* $+3$ *auferas* $+5$, *fiet* -2, *radix scilicet falsa.*

SCHOL. *Augendo radices æquationis habetur methodus convertendi radices falsas in veras, nec propterea veræ fiunt falsæ; quod docuit Cartesius* (a), *& patet ex* Coroll. 1.

PRO-

[a] Geometriæ lib. 3. edit. 3. pag. in. 74.

PROPOSITIO V.

Ex data æquatione secundum terminum tollere.

I. SI secundus terminus datæ æquationis afficitur signo $+$, augeantur radices quantitate cognita secundi termini divisa per exponentem æquationis. Si afficitur signo $-$ minuantur radices eadem quantitate; in utroque casu habebitur nova æquatio secundo termino carens.

Sit æquatio $x^2 + 6x - 16 = 0$, ex qua secundus terminus tolli debet.

Divisa quantitate cognita secundi termini 6 per exponentem 2, quotus 3 est quantitas, qua augeri debent (ob signum $+$) radices æquationis.

Fiat ergo ut in *Prop. antec.* $x + 3 = y$, erit $x = y - 3$, quo valore substituto in æquatione, loco ipsius x, erit

$$\left.\begin{array}{r} x^2 \\ +6x \\ -16 \end{array}\right| \begin{array}{r} = y^2 - 6y + 9 \\ + 6y - 18 \\ - 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^2 \ * \ - 25 = 0$$

Est ergo $y = 5$, proinde $x\ (= y - 3)$ erit $5 - 3 = 2$.

II. Sit secundo æquatio $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, in qua evanescere debeat secundus terminus.

Divisa quantitate cognita secundi termini per exponentem 3, habetur quantitas $\frac{p}{3}$, qua minui debent (ob signum $-$) radices datæ æquationis. Fiat

Fiat ergo $x - \frac{p}{3} = y$, erit $x = y + \frac{p}{3}$; factaque substitutione hujus valoris, habetur nova æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{r|l} x^3 & = y^3 + py^2 + \frac{1}{3}p^2y + \frac{1}{27}p^3 \\ -px^2 & \qquad - py^2 - \frac{2}{3}p^2y - \frac{1}{9}p^3 \\ +qx & \qquad\qquad\qquad + qy + \frac{1}{3}pq \\ +r & \qquad\qquad\qquad\qquad + r \\ \hline \text{Summa} & y^3 \ * \ - \frac{1}{3}p^2y + qy - \frac{2}{27}p^3 + \frac{1}{3}pq + r = 0 \end{array}$$

III. Quid vero si secundus terminus ex æquatione tollendus utroque signo + & — afficitur?

Sit æquatio $\begin{array}{l} x^2 - ax - ab = 0 \\ \quad + bx \end{array}$, ex qua tolli debet secundus terminus. Divisa quantitate cognita $-a + b$ per exponentem 2, habetur $\frac{-a + b}{2}$, seu $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Fiat $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = y$, erit $x = y + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, factaque hujus valoris substitutione, habetur æquatio secundo termino carens

$$\begin{array}{r|l} x^2 & = y^2 + ay - by + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 \\ \begin{array}{l} -a \\ +b \end{array} x & \qquad - ay + by - \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{2}b^2 \\ -ab & \qquad\qquad\qquad\qquad - ab \\ \hline \text{Summa} & y^2 \quad * \quad - \frac{1}{4}a^2 - ab - \frac{1}{4}b^2 = 0 \end{array}$$

De-

Demonstratur. *Per Coroll.* 1. & 2. *Prop. antec.* radices veræ ac falsæ ita augeri possunt ac minui, ut fiant æquales nullitati, seu zero. Sic in primo exemplo æquatio $x^2 + 6x - 16 = 0$ habet duas radices, unam falsam -8, alteram veram $+2$, proinde augendo numero ternario utranque, prima erit $-8+3=-5$, altera verò $+2+3=5$, proinde $-5+5=0$.

Similiter sit æquatio $x^2 - 4x - 12 = 0$; ut tollatur secundus terminus, minui debent ejus radices numero binario. Una ipsius radix vera est $+6$, altera falsa -2, proinde utranque minuendo, erit prima $+6-2=4$, altera $-2-2=-4$, hinc $+4-4=0$. Qua ratione autem regula sic augendi vel minuendi radices, sit inventa, patebit ex sequenti *Prop. ejusque Schol.* 1.

SCHOL. *In omni æquatione terminus secundus qui deficit, supponi potest affectus utroque signo* + *&* —; *Sic æquatio* $x^3 * - ax + b^3 = 0$ *supponitur* $x^3 \pm - ax + b^3 = 0$ *proinde facta comparatione cum termino, qui præcedit, nempe cum* $+x^3$, *habetur & permutatio & successio signorum, hoc est* + — *&* + +. *Quod pariter accidit, facta comparatione cum termino, qui consequitur, nempe cum* $-ax$. *Nam similiter habetur* + — *&* — —; *ideoque in utroque casu indicatur una radix vera, & altera falsa* per Cor. 3. Prop. 1. hujus.

PROPOSITIO VI.

Ex æquatione terminum tertium tollere.

I. Sit æquatio $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, ex qua tertius terminus sit auferendus.

Inveniri debet quantitas, qua radices datæ æquationis ſic augeantur, aut minuantur, ut tertius terminus evaneſcat, quod quidem per analyſim obtinetur hoc artificio.

Sit quantitas quæſita $= z$, fiat $x + z = y$, erit $x = y - z$; ſubſtituto hoc valore ipſius x in data æquatione, erit

$$\left.\begin{array}{r} x^3 \\ -px^2 \\ +qx \\ -r \end{array}\right| \begin{array}{rrrr} = y^3 - 3zyy & + 3z^2y & - z^3 \\ -pyy & + 2pzy & - pz^2 \\ & + qy & - qz \\ & & - r \end{array}$$

Cum igitur tertius terminus debeat evaneſcere, fiat æqualis zero, ſcilicet

$$3z^2y + 2pzy + qy = 0$$

Divid. per y $\quad 3z^2 + 2pz = -q$

Tum per 3 $\quad z^2 + \frac{2}{3}pz = -\frac{1}{3}q$

Occurrit æquatio ſecundi gradus reſolvenda, ut docebitur infra *Prop.* 1. *Cap.* 8. quæ ab hac non dependet. Addatur ſcilicet utrinque quadratum ex dimidio coefficientis ſecundi termini, nempe $\frac{1}{9}pp$, erit

$$z^2 + \frac{2}{3}pz + \frac{1}{9}pp = \frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q$$

Extr. Rad. $\quad z + \frac{1}{3}p = \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$

$$z = -\frac{1}{3}p + \sqrt{\frac{1}{9}pp - \frac{1}{3}q}$$

Sed

Sed $x=y-z$, ergo $x=y+\frac{1}{3}p-\sqrt{\frac{1}{9}pp-\frac{1}{3}q}$. Quo valore in data æquatione ſubſtituto, fiet æquatio termino tertio carens.

Sit enim æquatio $x^3-4x^2+4x-6=0$, erit $-4=-p$, $+4=q$, & $-6=-r$, hinc $y+\frac{1}{3}p-\sqrt{\frac{1}{9}pp-\frac{1}{3}q}=y+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=y+\frac{2}{3}$. Eſt ergo $x=y+\frac{2}{3}$, ideoque erit

$$\begin{array}{r|rrrr}
x^3 & =y^3 & +2y^2 & +\frac{4}{3}y & +\frac{8}{27} \\
-4x^2 & & -4y^2 & -\frac{16}{3}y & -\frac{16}{9} \\
+4x & & & +4y & +\frac{8}{3} \\
-6 & & & & -6 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 & -2y^2 & * & -\frac{120}{27}=0
\end{array}$$

Similiter ſit æquatio data $x^3-3x^2+3x-4=0$, erit $-3=-p$, $+3=q$, $-4=-r$, proinde $y+\frac{1}{3}p-\sqrt{\frac{1}{9}pp-\frac{1}{3}q}=y+1$. Fiat cum hoc valore nova æquatio, nempe

$$\begin{array}{r|rrrr}
x^3 & =y^3 & +3y^2 & +3y & +1 \\
-3x^2 & & -3y^2 & -6y & -3 \\
+3x & & & +3y & +3 \\
-4 & & & & -4 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 & * & * & -3=0
\end{array}$$

Habetur ergo æquatio termino tertio carens, in qua $y=\sqrt[3]{3}$.

SCHOL. *Hoc eodem artificio inventa est regula tollendi ex æquationibus terminum secundum, quam in* Prop. ant. *docuimus. Nam si ex æquatione generali superiori secundus terminus supponatur æqualis zero, erit* $-3zyy+pyy=0$, *proinde* $3z=p$, & $z=\frac{p}{3}$; *unde patet, quantitatem addendam, vel subtrahendam radici datæ æquationis esse quantitatem cognitam secundi termini divisam per exponentem primi termini.*

SCHOL. II. *Eadem plane ratione tolli possunt ex æquationibus termini* quartus, quintus, sextus &c. *Sed quia pro quarto tollendo æquatio tertii gradus, pro quinto æquatio quarti gradus, pro sexto æquatio quinti gradus occurrit, ideo non est hujus loci ulterius progredi.*

PROPOSITIO VII.

Æquationem, in qua termini aliqui desunt, complere.

I. AUgeatur radix æquationis datæ quantitate aliqua *per Prop.*4. exurget æquatio completa.

Sit æquatio complenda $x^3-19x-30=0$, in qua deest secundus terminus. Fiat *per Prop. cit.* $x+1=y$, erit $x=y-1$. Substituatur hic valor loco x in data æquatione, erit

$$\begin{array}{r|rrrr}
x^3 & =y^3-3y^2+ & 3y & -1 \\
-19x & & -19y & +19 \\
-30 & & & -30 \\
\hline
 & y^3-3y^2 & -16y & -12 & =0
\end{array}$$

Ha-

Habetur ergo æquatio completa cum ſecundo termino; in qua $y = x + 1$.

II. Sit æquatio incompleta $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$, in qua tertius terminus deficit. Fiat, ut ſupra, $x + 1 = y$, erit $x = y - 1$, & facta ſubſtitutione hujus valoris loco ipſius x, erit

$$\begin{array}{r|r} x^3 & = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -3x^2 & -3y^2 + 6y - 3 \\ +2 & +2 \\ \hline & y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0 \end{array}$$

En integra æquatio, in qua pariter $y = x + 1$.

Ratio eſt, quia ſecundus terminus v. g. deficit in æquatione, cum radices veræ æquantur falſis *per Cor*. 3. *Prop*. 1. ergo ſi una ex veris augeatur, integra æquatio reſtituitur.

PROPOSITIO VIII.

Æquationis radices per datam quantitatem multiplicare.

I. Est æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ multiplicandæ ſunt per datam quantitatem $= c$.

Fiat $cx = y$, erit $x = y : c$ (duo puncta (:) ſunt diviſionis ſignum *ex Schol*. 3. *Prop*. 8. *Cap*. 1.) Subſtituatur ubique hic valor in data æquatione loco ipſius x, erit nova æquatio

$$\frac{y^3}{c^3} - \frac{ay^2}{c^2} - \frac{b^2y}{c} + abb = 0$$

Et

Et multiplicatis ſingulis terminis per c^3, factaque reductione, habetur

$$y^3 - acy^2 - bbc^2y + abbc^3 = 0$$

Cujus radices ſunt $+ac$, $+bc$, $-bc$.

II. Similiter eſt æquatio $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ cujus radices $+1$, $+2$, $+3$, multiplicari debent per quantitatem $= 2$.

Fiat $2x = y$, erit $x = y : 2$, & hoc valore ſubſtituto in data æquatione loco ipſius x, oritur

$$\frac{y^3}{8} - \frac{6y^2}{4} + \frac{11y}{2} - 6 = 0$$

Multiplicentur omnes termini per cubum 8, factaque reductione, erit nova æquatio

$$y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0$$

Cujus radices ſunt $+2$, $+4$, $+6$.

Coroll. *Ex utroque exemplo ſatis apparet, ad multiplicandam æquationem per datam quantitatem, ſatis eſſe eam multiplicare per progreſſionem Geometricam, cujus terminus primus ſit* 1, *terminus ſecundus ſit denominator rationis &c. Nam multiplicandæ ſint radices ejuſdem prioris æquationis per* c, *aſſumpta alia incognita* y *loco ipſius* x *erit, ut prius,*

$$\begin{array}{cccc} y^3 - & ay^2 - & b^2y + & abb = 0 \\ 1. & c. & c^2. & c^3. \\ \hline y^3 - & acy^2 - & b^2c^2y + & abbc^3 = 0 \end{array}$$

Similiter multiplicandæ sint per 2 radices secundæ æquationis, assumpta y *loco ipsius* x, *& multiplicata æquatione per progressionem Geometricam, erit ut prius.*

$$\begin{array}{cccc} y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \\ 1. \quad 2. \quad 4. \quad 8. \\ \hline y^3 - 12y^2 + 44y - 48 = 0 \end{array}$$

PROPOSITIO IX.

Radices æquationis dividere per datam quantitatem.

I. SIT æquatio $x^3 - ax^2 - b^2x + abb = 0$, cujus radices $+a$, $+b$, $-b$ dividere oporteat per quantitatem $= c$.

Fiat $\frac{x}{c} = y$, erit $x = cy$, & substituto hoc valore in data æquatione, erit

$$c^3y^3 - ac^2y^2 - b^2cy + abb = 0$$

Dividantur singuli termini per c^3, habetur

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

Cujus radices sunt $+\frac{a}{c}$, $+\frac{b}{c}$ $-\frac{b}{c}$.

COROLL. *Hinc apparet, ad dividendam æquationem per datam quantitatem, satis esse eam dividere per progressionem* Geo-

Geometricam, cujus primus terminus sit 1 *, secundus terminus sit denominator rationis. Nam assumpta nova incognita* y *, & progressione Geometrica* 1 . c . c^2. c^3 *&c. erit æquatio, ut prius, divisa per* c *, nempe*

$$y^3 - ay^2 - b^2y + abb = 0$$
$$1. \quad c. \quad c^2. \quad c^3.$$

$$y^3 - \frac{ay^2}{c} - \frac{b^2y}{c^2} + \frac{abb}{c^3} = 0$$

II. Eadem ratione dividenda sit per 3 æquatio numerica superior $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, cujus radices sunt $+1$, $+2$, $+3$. Dividatur æquatio (assumpta incognita y) per progressionem Geometricam 1 , 3 , 9 &c. nempe

$$y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0$$
$$1. \quad 3. \quad 9. \quad 27.$$

$$y^3 - 2y^2 + \frac{11y}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

Habetur nova æquatio, cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. Nam harum qualibet substituta in æquatione loco ipsius y, tota æquatio evanescit, proinde sunt radices quæsitæ *per Schol.* 1. *Prop.* 1. *hujus*.

SCHOL. *Ut æquationum radices augeantur, minuantur, multiplicentur, aut dividantur ea ratione, quam docuimus, plane non opus est, ut illæ sint cognitæ, imo a Cartesio, & aliis tanquam prorsus incognitæ supponuntur. Nos tamen consulto, illustrandæ rei gratia, ut jam cognitas usurpavimus.*

PRO-

PROPOSITIO X.

Æquationem a fractionibus liberare.

I. MUltiplicetur radix æquationis per factum omnium denominatorum fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Sit æquatio data $x^3 - \frac{ax^2}{b} + \frac{aax}{c} + \frac{a^3}{d} = 0$.

Multiplicetur per factum omnium denominatorum bcd radix æquationis; hoc est fiat $bcdx = y$, erit $x = y : bcd$, factaque hujus valoris substitutione in data æquatione, oritur

$$\frac{y^3}{b^3c^3d^3} - \frac{ay^2}{b^3c^2d^2} + \frac{aay}{bc^2d} + \frac{a^3}{d} = 0.$$

Multiplicentur singuli termini per $b^3c^3d^3$, habetur æquatio sine fractionibus

$$y^3 - acdy^2 + a^2b^2cd^2y + a^3b^3c^3d^2 = 0.$$

II. Similiter sit æquatio $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 24 = 0$. Multiplicetur radix æquationis per factum ex denominatoribus, hoc est per 10, nempe per progressionem Geometricam 1. 10 &c. *per Corol. Prop. 6. hujus.*

$$x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{5}x - 24 = 0$$

$$1. \quad 10. \quad 100. \quad 1000$$

$$y^3 - 5y^2 + 20y - 24000 = 0$$

In qua quidem æquatione $y = 10x$, proinde erit $x = \frac{y}{10}$.

III. Demum sit æquatio $x^3 * \frac{2}{3}x - \frac{81}{27} = 0$. Quia quantitas 3 metitur utrunque denominatorem, multiplicetur radix æquationis per 3 modo explicato, nempe

$$\begin{array}{cccc} x^3 & * & \frac{2}{3}x & -\frac{81}{27} = 0 \\ 1. & 3. & 9. & 27. \\ \hline y^3 & * & 6y & -81 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione habetur $y = 3x$, proinde dividi debent per 3 singulæ radices hujus, ut habeantur radices æquationis datæ, quod semper advertendum.

PROPOSITIO XI.

Æquationem a radicalibus liberare.

ID non eadem via semper assequimur; ideoque plura exempla rem illustrabunt.

I. Sit æquatio $x^3 * -5x + \sqrt{2} = 0$. Fiat $x : \sqrt{2} = y$, erit $x = y\sqrt{2}$, & hoc valore in data æquatione substituto, erit

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 2y^3\sqrt{2} \\ -5x = & -5y\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} = & +\sqrt{2} \\ \hline \text{Summa} & 2y^3\sqrt{2} - 5y\sqrt{2} + \sqrt{2} \end{array}$$

Et divisis omnibus terminis per $\sqrt{2}$, fit æquatio sine radicalibus.

$$2y^3 - 5y + 1 = 0$$

II.

II. Quandoque fit progressio Geometrica ex radicalibus, per quam tota æquatio multiplicata ab irrationalibus liberatur. Ecce exemplum

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 5abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2 = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2}. \quad 2. \quad \sqrt{8}. \quad 4$$

$$y^4 + 4ay^3 + 10aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0$$

Radices autem hujus æquationis dividendæ erunt per $\sqrt{2}$, ut habeantur radices æquationis datæ. Nam $y = x\sqrt{2}$.

III. Sæpe etiam tota æquatio dividitur per radicalium progressionem Geometricam

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1. \quad \sqrt[3]{2}. \quad \sqrt[3]{4}. \quad 2.$$

$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione est $y = x : \sqrt[3]{2}$.

IV. Æquatio a radicalibus liberatur supponendo terminos radicales æquales literis ad libitum assumptis, quæ singulatim in uno æquationis membro collocantur, & tota æquatio elevatur ad potentiam ab exponente radicis indicatam. Sit æquatio

$$x^3 * - x\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$$

Fiat $\sqrt{a} = p$, & $\sqrt{b} = q$, æquatio in hanc transformatur

$$x^3 * - px + q = 0$$

Ponatur px seorsim in uno æquationis membro, nempe $px = x^3 + q$, & (ob $\sqrt{a} = p$) tota æquatio elevetur ad secundam potestatem, *per Reg.4. Cap.5.* erit

$$p^2x^2 = x^6 + 2qx^3 + q^2$$

Deinde ponatur $2qx^3$ in uno æquationis membro, hoc est $2qx^3 = p^2x^2 - x^6 - q^2$, & iterum utrunque membrum ad secundam potestatem elevetur ob $\sqrt{b} = q$; *per Reg.cit.* erit

$$4q^2x^6 = p^4x^4 - 2p^2x^8 + x^{12} - 2p^2q^2x^2 + 2q^2x^6 + q^4$$

hoc est $x^{12} - 2p^2x^8 - 2q^2x^6 + p^4x^4 - 2p^2q^2x^2 + q^4 = 0$

Quod si fiat $x^2 = y$, deprimi poterit ad æquationem sexti gradus, scilicet

$$y^6 - 2p^2y^4 - 2q^2y^3 + p^4y^2 - 2p^2q^2y + q^4 = 0$$

Demum in hac ultima æquatione loco p^2, p^4, q^2, q^4, substituantur eorum valores, nempe a, a^2, b, b^2 obtinebitur æquatio a radicalibus expedita

$$y^6 - 2ay^4 - 2by^3 + a^2y^2 - 2aby + b^2 = 0$$

COROLL. *Si radicales sint cubicæ, æquationis membra ad tertiam potestatem elevantur.*

PROPOSITIO XII.

Æquationem datam in aliam commutare, in qua quantitas cognita cujuscunque termini, vel etiam terminus ultimus fiat datæ quantitati æqualis.

I. INveniri debet quantitas, per quam ita multiplicentur æquationis datæ radices, ut quantitas cognita in aliam datam commutetur. Sit

Sit æquatio $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, quantitas data $= a$, quæsita sit $= z$.

Fiat $x = \frac{y}{z}$, & hic valor ponatur in data æquatione loco ipsius x, assumpta nova incognita y, erit

$$y^3 - pzy^2 + qz^2y - rz^3 = 0$$

1. Fieri debeat quantitas cognita secundi termini $p = a$: si supponatur $pz = a$, erit $z = \frac{a}{p}$.

2. Quantitas cognita tertii termini q fieri debeat æqualis datæ quantitati a, erit $qz^2 = a$, proinde $z^2 = \frac{a}{q}$, atque hinc $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$.

3. Pari modo fieri debeat ultimus terminus $rz^3 = a$, erit $z^3 = \frac{a}{r}$, ideoque $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$.

Jam si multiplicetur secundus terminus cujuscunque æquationis per valorem inventum ipsius z, tertius terminus per quadratum, quartus per cubum ejusdem valoris, & sic deinceps, habebitur æquatio quæsita. Tyronum gratia res exemplis illustratur.

Sit æquatio $x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$, quæritur loco ipsius alia, in qua coefficiens secundi termini 3 sit $= 2$. Erit ergo $p = 3$, $a = 2$; & cum sit ex dictis $z = \frac{a}{p}$, erit $z = \frac{2}{3}$, proinde si per hunc valorem multiplicentur radices hujus

æqua-

æquationis, assumpta nova incognita y, ut moris est, habebitur

$$x^3 - 3x^2 + 18x - 54 = 0$$
$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27}$$

$$y^3 - 2y^2 + 8y - 16 = 0$$

II. Sit æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, cujus loco quæritur alia, in qua quantitas cognita tertii termini sit 4. Erit $q = 9$, $a = 4$.

Quia vero $z = \sqrt{\frac{a}{q}}$ ex dictis superius, erit $z = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, per hanc igitur quantitatem multiplicandæ sunt æquationis radices, nova incognita y assumpta, hoc est

$$x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$$
$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{8}{27}$$

$$y^2 - 8y + 4y - 8 = 0$$

III. Sit pro tertio casu eadem æquatio $x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$, quæ in aliam commutanda, cujus terminus ultimus sit $= 1$.

Erit $r = 27$, $a = 1$: quia vero ex annotatis superius $z = \sqrt[3]{\frac{a}{r}}$, erit $z = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, per quam quidem quantitatem multiplicari debent radices datæ æquationis, ut factum vides, & nova incognita y surrogari.

x^3

$$x^3 - 12x^2 + 9x - 27 = 0$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27}$$

$$y^3 - 4y^2 + y - 1 = 0$$

COROLL. *Nemo non videt, hujus propositionis mysterium in eo esse, ut per Analysim inveniatur incognitæ illius z assumptæ quantitas, per quam multiplicatis datæ cujuscunque æquationis radicibus, alia nova oritur æquatio, in qua terminorum coefficientes, sive etiam ultimus terminus, sunt datæ quantitati æquales.*

PROPOSITIO XIII.

Invenire maximum duarum æquationum divisorem communem.

I. MAjor æquatio, ea nempe, quæ altioris gradus incognitam continet (si sint æqualis gradus utravis per aliam) dividatur per minorem, omnino ut fit in aliis quantitatibus compositis *per Prop.* 8. *Cap.* 1. & neglecto quoto, continuetur divisio, donec incognita in residuo fiat minoris dimensionis, quam in divisore. Tunc enim divisor ipse dividatur per illud residuum, neglecto quoto; & sic semper, donec nihil ex divisione remaneat. Nam talis divisor erit maximus divisor communis, qui quæritur, per quem æquationes illæ datæ sunt divisibiles. Exemplis res illustratur.

Sint duæ æquationes $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6 = 0$, &

$-12x^2+30x-18=0$, quarum maximus diviſor communis quæritur.

Cum utraque ſit multiplicata per 3, dividi poterit per 3, ut termini minores fiant; erunt $x^3-4x^2+5x-2=0$, & $-4x+10x-6=0$, imo hæc adhuc dividi poteſt per 2, unde fit $-2x^2+5x-3=0$.

Quia vero dividendo primum terminum x^3 per $-2x$, quotus eſt $\frac{x^3}{-2x^2}=\frac{x}{-2}$, hinc apparet, æquationem illam actu dividi non poſſe, quin prius multiplicetur per denominatorem -2. Quo facto, habetur $-2x^3+8x^2-10x+4=0$. Hæc autem diviſa per $-2x^2+5x-3$ (neglecto quoto) dat reſiduum $+3x^2-7x+4$.

Continuetur diviſio, & quia dividendo $3x^2$ per $2x^2$, quotus eſt $=\frac{3}{-2}$, ſignum eſt, æquationem dividendam prius multiplicari debere per denominatorem -2, unde fit $-6x^2+14x-8=0$; factaque diviſione, habetur reſiduum $-x+1$, ſeu $x-1=0$, per quod dividendo quantitatem ipſam, quæ hactenus fuit diviſor, ſcilicet $-2x^2+5x-3$, nihil remanet. Eſt ergo $x-1$ maximus diviſor communis duarum datarum æquationum, qui tamen multiplicari debet per eandem quantitatem, per quam primo æquatio utraque communiter fuit diviſa, eritque $3x-3=0$.

II. Sint duæ æquationes $x^3-16x^2+61x-66=0$, & $x^3+3x^2-34x+48=0$, quarum maxima communis menſura quæritur. Dividatur prima per ſecundam, & neglecto quoto 1, per reſiduum $-19x^2+95x-114$

(quod

(quod, ut ſimplicius evadat, dividitur per -19, fitque x^2-5x+6) dividatur ſecunda æquatio data: neglecto quoto x, habetur reſiduum $8x^2-40x+48$, quod diviſum per 8, dabit x^2-5x+6. Hoc autem cum ſit idem ac ſuperius reſiduum, ſi fiat diviſio, nihil remanet. Sunt ergo datæ æquationes diviſibiles per x^2-5x+6 maximum earum diviſorem communem.

III. Sint duæ æquationes $x^4-4ax^3+11a^2x^2-20a^3x+12a^4=0$, & $x^4-3ax^3+12a^2x^2-16a^3x+24a^4=0$. Dividatur prima per ſecundam habetur 1 pro quoto: quo neglecto, remanet $-ax^3-a^2x^2-4a^3x-12a^4$, quo diviſo per $-a$, habetur primum reſiduum $x^3+ax^2+4a^2x+12a^3$.

Per hoc primum reſiduum dividatur ſecunda æquatio data, habetur quotus $x-4a$: quo neglecto, remanet $12a^2x^2-12a^3x+72a^4$, atque hoc diviſo per $12a^2$, habetur ſecundum reſiduum $x^2-ax+6a^2$. Per hoc ſecundum reſiduum dividatur primum, nihil remanet. Maximus ergo diviſor communis eſt $x^2-ax+6a^2$.

COROLL. I. *Ex primo exemplo conſtat, communem diviſorem inventum tunc ſolum eſſe multiplicandum per quantitatem, per quam diviſa fuit æquatio, cum non una tantum, ſed utraque æquatio per communem quantitatem diviſa fuerit. Sic* x — 1 *multiplicatur quidem per* 3, *per quem diviſa fuerat utraque æquatio, non autem per* 2, *per quem una tantum æquatio fuit diviſa.*

COROLL. II. *Reperto communi duarum æquationum diviſore, habentur pariter earum radices, & problematis reſolutio. Nam diviſoris communis radices ſunt eædem ac radices earundem æquationum. Sic in ſecundo exemplo diviſor*

 com-

communis, seu æquatio $x^2 - 5x + 6 = 0$ *habet radices* 3 *&* 2, per Schol. 1. Prop. 1. hujus, *quas datarum æquationum easdem esse facile intelligitur.*

SCHOL. I. *Si æquationes fuerint plures, quam duæ, reperto communi divisore inter primam & secundam, inveniri deinde eodem modo debet divisor communis inter tertiam æquationem & divisorem communem jam inventum. Sed hoc perraro accidit.*

SCHOL. II *Hanc regulam eandem esse ac regulam communis Arithmeticæ, qua invenitur maxima communis mensura, seu divisor inter duos numeros datos, iisdemque principiis inniti, nemo non videt.*

PROPOSITIO XIV.

Duarum æquationum divisorem communem alia ratione investigare.

I. SInt duæ æquationes *Propos. præc.* quarum divisor communis quæritur, nempe *A* & *B*

$$A \quad x^4 - 4ax^3 + 11a^2x^2 - 20a^3x + 12a^4 = 0$$

$$B \quad x^4 - 3ax^3 + 12a^2x^2 - 16a^3x + 24a^4 = 0$$

Sumatur ex *A* primi termini valor *per Corol.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 5. *erit* $x^4 = 4ax^3 - 11a^2x^2 + 20a^3x - 12a^2$, qui surrogetur in æquatione *B* loco x^4, habebitur, facta terminorum inutilium reductione, æquatio

$$\textit{Div. per } a) \quad ax^3 + a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0$$

$$C \quad x^3 = - ax^2 - 4a^2x - 12a^3 = 0$$

Valor ipsius x^3 ex hac æquatione *C* sumptus ponatur in æqua-

æquatione *A* non solum loco secundi termini $-4ax^3$, sed etiam loco primi x^4 [multiplicando $-ax^2-4a^2x-12a^3 \times x$, ut fiat $=x^4$] erit primo $x^4=-ax^3-4a^2x^2-12a^3x$; surrogato deinde valore ejusdem x^3 tam pro $-ax^3$ hujus æquationis, quam pro $-4ax^3$ æquationis *A* (hoc est pro $-5ax^3$) scilicet $5a^2x^2+20a^3x+60a^4$, æquatio prima transformatur in sequentem

$$\begin{array}{r|lllll}
x^4 & = & -4a^2x^2 & -12a^3x & & \\
-5ax^3 & & +5a^2x^2 & +20a^3x & +60a^4 & \\
11a^2x^2+20a^3x & & +11a^2x^2 & -20a^3x & & \\
+12a^4 & & & & +12a^4 & \\
\hline
\end{array}$$

Summa $\quad 12a^2x^2-12a^3x+72a^4=0$

Divid. per $12a^2$) $\quad x^2-ax+6a^2=0$

Sumatur ex hac postrema æquatione valor primi termini, erit *per Coroll. cit.* $x^2=ax-6a^2$, qui surrogetur ubique in tertia æquatione, etiam pro primo termino [ducendo $ax-6a^2 \times x$, ut fiat ad x^3 æqualis] factaque terminorum substitutione, invenitur

$$6a^2x-6a^2x+12a^3-12a^3=0$$

Cumque termini omnes per signa contraria sese destruant, signum est, æquationem $x^2-ax-6a^2=0$, ex qua terminorum contrarietas ista derivatur, esse communem divisorem maximum datarum æquationum, qualem prorsus in secundo exemplo *Prop. præc.* invenimus.

II. Quæritur divisor communis duarum æquationum, quæ sequuntur *M* & *N*.

$$M \quad x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14\tfrac{1}{2}x + 5 = 0$$

$$N \quad x^3 + 4x^2 + 8x + 8 = 0$$

Sumatur ex secunda valor primi termini *per Coroll.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 5. nempe

$$x^3 = -4x^2 - 8x - 8$$

Quo posito in prima æquatione (multiplicando illum per x, ut fiat ad x^4 æqualis) habetur $2x^2 + 6\frac{1}{2}x + 5 = 0$, & multiplicando per 2 ad fractionem eliminandam, erit $4x^2 + 13x + 10 = 0$. Hac divisa per 4, oritur æquatio R

$$R \quad x^2 + \frac{13x + 10}{4} = 0$$

Valor hujus x^2 ex hac æquatione R desumptus *per Cor. cit.* [hoc est $\frac{-13x - 10}{4}$] surrogetur in secunda æquatione N modo jam explicato, invenitur $\frac{49x + 98}{16} = 0$, & dividendo per $\frac{49}{16}$, habetur quotus $x + 2 = 0$, adeoque $x = -2$.

Ponatur demum hic valor in æquatione tertia R, provenit

$$4 - \frac{26 + 10}{4} = 0, \text{ hoc est } \frac{-26 + 26}{4} = 0$$

Proinde arguitur $x + 2 = 0$, unde ista terminorum oritur oppositio, esse datarum æquationum divisorem communem quæsitum.

SCHOL. *Hoc problema sane ingeniosum, quod* Joh. Huddenius (a) Belga, *vir subtilissimus excogitavit, usum quoque*

(a) V. in fine Geometr. Renati des Cartes edit. 3. an. 1683.

que habet ad inveniendum communem divisorem duarum quarumcunque quantitatum. Nibil enim obstat, quin illæ considerari possint instar duarum æquationum, & æquari nibilo: imo in illis sumi potest ad libitum, pro incognita quæcunque litera, quæ in utraque earum reperiatur. Sic in duabus sequentibus quantitatibus, vel æquationibus $d^3 - ad^2 + 2a^2b - 2abd = 0$ & $d^4 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$ *sumi potest ad libitum pro incognita* d, a, *vel* b; *& procedendo eo ordine, quem nos in duobus exemplis sequuti sumus, invenietur communis earum divisor* $d - a$, *siquidem* d *pro incognita fuerit assumpta.*

CAPUT VII.

De Resolutione Æquationum compositarum, quæ radices rationales habent.

PROPOSITIO I.

Æquationis datæ radices rationales, si quæ sint, invenire.

I. INveniantur omnes ultimi termini divisores *per Proposit. 9. Cap. 1.* ex quibus una cum incognita fiant totidem æquationes simplices, & per illas sigillatim dividatur æquatio: nam quæ exacte & sine ullo residuo æquationem datam dividet, erit radix rationalis quæsita.

Sit æquatio $x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0$. Divisores ultimi mi termini *per Prop. cit.* sunt 1, 2, 4, 8. Quia vero ex mutatione signorum dignoscitur *per Coroll.* 3. *Propos.* 1. *Cap.* 6. radices omnes esse veras, proinde æquationes simplices, per quas tentari debet divisio, erunt omnes cum signo —, nempe $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 8 = 0$. Divisio autem frustra tentatur per $x - 1$, & per $x - 2$, quare nec $+ 1$, nec $+ 2$ possunt esse radices quæsitæ. Succedit autem divisio sine ullo residuo per $x - 4$, nempe

$$
\begin{array}{r|l}
x - 4)\; x^3 - 9xx + 22x - 8 = 0 & x^2 \\
x^3 - 4xx & -5x \\
\hline
0 - 5xx + 22x & +2 \\
- 5xx + 20x & \\
\hline
0 + 2x - 8 & \\
+ 2x - 8 & \\
\hline
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Est ergo $+ 4$ una ex radicibus quæsitis, & ex hac divisione oritur æquatio secundi gradus, nempe $xx - 5x + 2 = 0$. Cujus radices ut inveniantur, tentanda non est divisio per $x - 1 = 0$, aut per $x - 2 = 0$. Nam cum per has quantitates tota æquatio ex dictis divisibilis non fuerit, neque una ejusdem pars divisibilis erit.

Tentetur itaque divisio per $x - 4 = 0$, & per $x - 8 = 0$: sed cum neque per hos divisores divisio exacte succecedat, ſignum eſt, alias duas radices non eſſe rationales. Quæ tamen obtineri poterunt *per Prop.* 1. *&* 3. *Cap.* 8., eritque altera $= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$, per quam ſi dividatur eadem æquatio ſecundi gradus $xx - 5x + 2 = 0$, emerget tertia radix quæſita $= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

II. Sit alia æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, cujus radices rationales inquiruntur.

Diviſores ultimi termini *per Prop.* 9. *Cap.* 1. ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Ex ſignis autem æquationis propoſitæ *per Coroll.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. patet radices fore duas quidem veras & unam falſam, proinde æquationes ſimplices, per quas tentari debet diviſio, erunt tam cum ſigno + quam cum ſigno —, hoc eſt $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x + 3 = 0$ &c. Diviſio autem fruſtra tentatur per $x - 1$, & per $x + 1$. Sed exacte ſuccedit per $x - 2$, per $x + 3$, & per $x - 4$. Sunt ergo radices quæſitæ $+2$, -3, $+4$, ut computanti ſit evidens.

III. Demum ſit æquatio $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, cujus radices rationales quæruntur.

Ex ſignis æquationis apparet *per Cor.* 3. *Prop.* 1. *Cap.* 6. radices tres eſſe veras, & unam falſam. Inveniantur omnes diviſores ultimi termini *per Prop.* 9. *Cap.* 1. Cum diviſio exacte fieri non poſſit per $x - 1$, neque per $x + 1$, ſuccedat autem ſine ullo reſiduo per $x - 2$, erit $+2$ una ex radicibus veris.

Ex diviſione hujuſmodi oritur æquatio $x^3 - 2x^2 - 23x - 60 = 0$, quæ fruſtra dividitur per $x - 2$, vel per $x + 2$, ſuccedit tamen exacta diviſio per $x - 3$. Habetur ergo

+3

$+3$ radix vera, & ex divisione oritur æquatio secundi gradus $x^2 + 1x - 20 = 0$. Cujus unam radicem esse veram, alteram falsam ex signis satis apparet. Dividatur itaque per $x - 4$, divisio succedit sine residuo, & quotus est $+5$, proinde aliæ duæ radices habentur $+4$, -5 una vera, altera falsa.

SCHOL. *Æquationis divisionem per tot divisores tentare si cui res molesta sit, sequenti methodo uti poterit, quæ divisores illos ad pauciores reducit. Ceterum si nullus sit divisor, qui datam æquationem exacte & sine ullo residuo dividere possit, signum est, nullam dari radicem rationalem, quod notetur.*

PROPOSITIO II.

Radices rationales propius investigare.

I. Sit æquatio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, cujus radices rationales quærimus. Inveniantur *per Prop.* 9. *Cap.* 1. divisores ultimi termini, nempe 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Deinde æquationis datæ radices minuantur unitate *per Prop.* 4. *Cap.* 6. hoc est fiat $x - 1 = y$, ideoque erit $x = y + 1$, unde

$$\begin{array}{r|rrrr}
x^3 & = y^3 + 3y^2 & + 3y & + 1 \\
-9x^2 & -9y^2 & -18y & -9 \\
+26x & & +26y & +26 \\
-24 & & & -24 \\
\hline
\text{Summa} & y^3 - 6y^2 & + 11y & - 6 = 0
\end{array}$$

Di-

Diviſores ultimi termini hujus ſecundæ æquationis ſunt 1, 2, 3, 6. Cum autem radices hujus deficiant unitate, a radicibus datæ æquationis, hæ, addita unitate, fient æquales prioribus, hoc eſt

$$1+1=2$$
$$2+1=3$$
$$3+1=4$$
$$6+1=7$$

Ex omnibus itaque diviſoribus ultimi termini primæ æquationis, nempe 24, illi tantum ſeligantur, qui cum his convenire, & utrique æquationi communes eſſe reperiuntur, ſcilicet 2, 3, 4, nam 7 non reperitur inter diviſores primæ æquationis. Ecce tibi tres tantum diviſores, ſeu melius tres radices (pauciores enim eſſe non poſſunt *per Cor.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 6.) datæ æquationis.

II. Quod ſi æquatio data radices habeat partim veras, partim falſas, diviſores ultimi termini æquationis transformatæ & augeri & minui debent ea quantitate, qua minuta fuit radix æquationis propoſitæ, ut detegantur radices tam veræ, quam falſæ. Exemplo res fit clariſſima.

Sit æquatio $x^4 * -15x^2+10x+24=0$, quæ duas habet radices veras $+2$, $+3$, & duas falſas -4, -1, quæ tamen ſupponuntur non cognitæ. Minuatur æquatio unitate *per Prop.* 4. *Cap.* 6. hoc eſt, fiat $x-1=y$, erit $x=y+1$, proinde

$$\begin{array}{r|r} x^4 & = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\ -15x^2 & -15y^2 - 30y - 15 \\ +10x & +10y + 10 \\ +24 & +24 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Summa} \quad y^4 + 4y^3 - 9y^2 + 6y + 20 = 0$$

Radices veræ hujus æquationis deficiunt unitate a radicibus veris æquationis datæ *per Cor.2. Prop.4. Cap.6.* Contra vero radices falſæ erunt unitate majores. Itaque diviſores ultimi termini 20 (inter quos quæſitæ radices latent) ſi augeantur unitate, fient æquales radicibus veris datæ æquationis. Contra vero ſi minuantur unitate, fient æquales radicibus falſis ipſius æquationis datæ. Diviſores ultimi termini ſunt 1, 2, 4, 5, 10, 20 *per Prop.9. Cap.1.* qui unitate aucti ſunt 2, 3, 5, 6, 11, 21. Conferantur cum diviſoribus ultimi termini æquationis datæ, hoc eſt 24; nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, tres tantum utrique æquationi communes inveniuntur, ſcilicet 2, 3, 6. Ex quibus duo ſunt radices veræ quæſitæ, nempe 2 & 3. Minuti vero unitate ſunt 0, 1, 3, 4, 9, 19, qui ſi conferantur cum diviſoribus æquationis datæ, nempe cum 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, inveniuntur tres tantum cum his convenire, ſcilicet 1, 3, 4, ex quibus habentur duæ radices falſæ quæſitæ -1, -4.

COROLL. *Redactis hoc pacto ad pauciſſimos ultimi termini diviſoribus, facile inveniuntur radices rationales, vel dividendo per illos datam æquationem, ut in propoſitione antecedenti factum eſt; vel illos ſubſtituendo in æquatione*

tione proposita loco incognitæ, ut docuimus in Schol. 1. Propos. 1. Cap. 6. *Ratio autem hujus methodi fundatur* in Coroll. 1. & 2. Prop. 4. Cap. 9.

SCHOL. *Hujus inventi laudem* Jacobo a Waessenaer *Ultrajectino egregio Geometræ* Franciscus a Schooten [a] *acceptam refert*.

PROPOSITIO III.

Idem problema in æquationibus literalibus.

Sit æquatio ex literis composita, cujus radices rationales inquiruntur,

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 - abx + abd = 0 \\ \quad\; + bx^2 + adx \\ \quad\; - dx^2 - bdx \end{array}$$

I. Cum singulæ radices appareant in secundo termino sub signo contrario *per Cor.* 2. *Prop.* 1. *Cap.* 6. tentari debet divisio per $x - a = 0$, per $x + b = 0$, quæ cum exacte, & sine ullo residuo succedat, patet radices datæ æquationis esse $+a$, $-b$, $+d$.

II. Quod si æquatio sit magis composita, fiat æquatio ex singulis terminis, in quibus sunt eædem literæ, & supponantur æquales zero *per Coroll.* 2. *Prop.* 2. *Cap.* 6. ut sic obtineri possit incognitæ valor. Exemplo res fit clarior. Sit data æquatio

(a) Comment. in lib. III. Geometr. Cartes. p. m. 307.

$$\begin{array}{l} x^3 - 2ax^2 + a^2x - abb = 0 \\ \quad\; - bx^2 + abx - b^3 \\ \qquad\qquad + bbx \end{array}$$

Fiat æquatio ex omnibus terminis, in quibus reperitur quantitas bb, & ſupponatur æqualis zero, ideſt $bbx - abb - b^3 = 0$. Hæc dividatur per bb, quotus $x - a - b = 0$ eſt diviſor, per quem ſi dividas æquationem datam, nihil remanet, proinde $a + b$ eſt una ex illius radicibus; & ex diviſione oritur æquatio ſecundi gradus $x^2 - ax + bb = 0$, cujus radices facile erit invenire *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8.

III. Sit demum æquatio, cujus radices rationales quæruntur

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad\; - bx^3 + acx^2 - adbx \\ \quad\; - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad\; - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\qquad + bdx^2 \\ \qquad\qquad + cdx^2 \end{array}$$

Fiat æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur quantitas abd, eos ſupponendo æquales zero, nempe $- abdx + abcd = 0$, erit $abdx = abcd$, & $x = c$.

Dividatur æquatio propoſita per $x - c = 0$, nihil remanet, proinde $+ c$ eſt una ex illius radicibus. Diviſa autem ipſamet data æquatione per $x - c = 0$, oritur æquatio tertii gradus, quæ ſequitur,

x^3

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abd = 0 \\ \quad - bx^2 + adx \\ \quad - dx^2 + bdx \end{array}$$

Fiat iterum æquatio ex omnibus illis terminis, in quibus reperitur ad, eos ſupponendo æquales zero, hoc eſt $adx - abd = 0$, erit $x = b$; & cum diviſio, quæ tentatur per $x - b = 0$, exacte ſuccedat, habetur ſecunda radix datæ æquationis, eademque ratione reliquæ duæ obtineri poſſunt.

PROPOSITIO IV.

Alia methodus æquationes compoſitas reſolvendi.

INveniendæ ſunt radices æquationis propoſitæ, nempe

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\quad + bdx^2 \\ \qquad\quad + cdx^2 \end{array}$$

Primo dividatur æquatio in duas æquationes, quarum altera contineat omnes terminos, in quibus quantitas c reperitur, altera reliquos, erit

$$1.^a \quad \begin{aligned} -cx^3 &+ acx^2 - abcx + abcd = 0 \\ &+ bcx^2 - acdx \\ &+ cdx^2 - bcdx \end{aligned}$$

$$2.^a \quad \begin{aligned} x^4 - dx^3 &+ abx^2 - abdx = 0 \\ -bx^3 &+ adx^2 \\ -dx^3 &+ bdx^2 \end{aligned}$$

Patet, primam dividi posse per quantitatem c, secundam per x: quo facto, habetur

$$1.^a \quad \begin{aligned} -x^3 &+ ax^2 - abx + abd = 0 \\ &+ bx^2 - adx \\ &+ dx^2 - bdx \end{aligned}$$

$$2.^a \quad \begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abd = 0 \\ -bx^2 &+ adx \\ -dx^2 &+ bdx \end{aligned}$$

Harum prima per secundam exacte dividitur, ut patet, & quotus est -1; unde apparet, haberi ex hac secunda æquatione divisorem exactum primæ. Per hanc si æquatio proposita dividatur, habebitur $x - c = 0$, una scilicet ex radicibus quæsitis. Restat autem æquatio ipsa ad gradum inferiorem depressa, scilicet

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abd = 0 \\ -bx^2 &+ adx \\ -dx^2 &+ bdx \end{aligned}$$

Hæc

Hæc similiter dividatur in duas alias æquationes, in quarum una sint termini, in quibus quantitas b reperitur, in alia reliqui, erit

$$1.^a \quad \begin{array}{l} -bx^2 + abx - abd = 0 \\ \qquad\quad + bdx \end{array}$$

$$2.^a \quad \begin{array}{l} x^3 - ax^2 + adx = 0 \\ \quad\; - dx^2 \end{array}$$

Dividatur prima per b, secunda per x; erit

$$1.^a \quad \begin{array}{l} -x^2 + ax - ad = 0 \\ \qquad\; + dx \end{array}$$

$$2.^a \quad \begin{array}{l} x^2 - ax + ad = 0 \\ \quad\; - dx \end{array}$$

Quarum prima per secundam exacte dividitur: nam quotus est -1, & nihil remanet. Per hanc secundam igitur dividatur superior tertii gradus, habebitur $x - b$ pro secunda vera radice datæ æquationis; & remanet æquatio secundi gradus, videlicet

$$\begin{array}{l} x^2 - ax + ad = \\ \quad\; - dx \end{array}$$

Quæ similiter divisibilis est in alias duas, nimirum

$$-ax + ad = 0, \;\&\; x^2 - dx = 0$$

Harum una divisa per a, altera per x, habentur $-x + d = 0$, & $x - d = 0$; ex quibus prima cum sit exacte divisibisibilis per secundam (nam quotus est -1, & nihil remanet) dividi per hanc poterit æquatio superior secundi gradus, nempe

$$\begin{aligned} x^2 - ax &+ ad = 0 \\ &- dx \end{aligned}$$

atque erit $x-d$ tertia radix quæsita: quarta autem $x-a$, facta divisione, habetur ex quoto.

Coroll. I. *Vel ex hoc uno exemplo apparet, methodum in eo esse: 1.° Ut æquatio proposita in duas dividatur æquationes, quarum quælibet contineat terminos iisdem fere literis conflatos. 2.° Ut dividendo per quantitatem, quæ in illis communiter reperitur, earum æquationum terminos, ad inferiorem gradum æquationes illæ deprimantur. 3.° Ut observetur, an una æquatio per alteram sit exacte & sine ullo residuo divisibilis: nam tunc illa erit communis mensura, hoc est dividere poterit non solum illam æquationis partem, sed etiam totam æquationem datam, & aliquam ex illius radicibus exhibere. Ratio est, quia quantitas, quæ exacte dividit partes, etiam totum dividat necesse est. Ceterum æquatio proposita dividi poterat in duas alias alio, vel alio modo, ac a nobis factum est, ut consideranti patebit.*

Coroll. II. *Quod si non omnes æquationis datæ radices hac ratione inveniri possint, indicio est, reliquas esse irrationales, de quibus inferius.*

PRO-

PROPOSITIO V.

Æquationes compositas, in quibus duæ, vel plures sunt radices æquales, resolvere.

I. SI data æquatio duas æquales radices habere supponitur, multiplicetur per quamcunque progressionem Arithmeticam, hoc est primus terminus æquationis per primum terminum progressionis, secundus terminus per secundum &c. & productum, quod inde fit, erit $= 0$, sicuti æquatio ipsa data supponitur $= 0$. Deinde inveniatur æquationum duarum, datæ & productæ, communis divisor *per Prop.* 13. *Cap.* 6. per quem divisa ipsamet æquatio data, quoties opus sit, exhibebit radices æquales. Sit æquatio

$$\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\ 3 \quad\;\; 2 \quad\;\; 1 \quad\;\; 0 \\ \hline 3x^3 - 10x^2 + 8x = 0 \end{array}$$

Hæc divisa per x fit uno gradu inferior, nempe

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

Divisor autem communis hujus & datæ æquationis est $x - 2 = 0$ *per Prop.* 13. *Cap.* 6. per quem data æquatio bis divisa dat radices 2, 2, 1.

II. Poterat autem eadem æquatio per progressionem Arithmeticam alio, vel alio modo multiplicari, scilicet

$$\begin{array}{l} x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \\ 0 \quad\;\; 1 \quad\;\; 2 \quad\;\; 3 \\ \hline 0 - 5x^2 + 16x - 12 = 0 \end{array}$$

Hujus enim & propoſitæ æquationis communis diviſor eſt, ut antea, $x - 2 = 0$

III. Similiter ſi ſecundum terminum auferre libeat, ita progreſſio Arithmetica diſponitur.

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -5x^2 & +8x & -4 & =0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \\ \hline x^3 & * & -8x & +8 & =0 \end{array}$$

Cujus quidem æquationis & datæ communis diviſor ſemper reperitur $x - 2 = 0$.

IV. Si æquatio data tres habeat radices æquales, bis multiplicentur ejus termini per terminos progreſſionis Arithmeticæ, ut ſupra: ſi habeat quatuor radices æquales, ter multiplicentur: ſi quinque radices æquales, quater &c. Sit æquatio, quæ tres radices æquales habere ſupponitur.

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & * & -6x^2 & +8x & -3 & =0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline 0 & * & -12x^2 & +24x & -12 & =0 \\ & & 0 & 1 & 2 & \\ \hline & & 0 & +24x & -24 & =0 \end{array}$$

Communis diviſor eſt $x - 1$; per quem ſi ter dividatur æquatio propoſita, quotus dabit tres radices æquales $+1$, $+1$, $+1$. Quarta vero (cum in æquatione ſecundus terminus deſit) erit -3 *per Coroll. 4. Prop. 1. Cap. 6.*

Demonſtr. Per progreſſionem Arithmeticam æquatio data

data in aliam convertitur, quæ continet easdem radices æquales una minus. Nam, ut superiora exempla docent, ea potissimum progressio assumitur, quæ vel incipit a zero, vel desinit in zerum, ut æquatio, quæ inde producitur, fiat uno gradu inferior, ideoque radicum numerus decrescit, fitque una radice minor. Per iteratas autem ejusmodi multiplicationes ad eam æquationem devenitur, in qua una tantum æqualium radicum continetur: proinde si hujus & propositæ æquationis communis divisor inveniatur, ille æqualium radicum unam dabit.

COROLL. I. *Manifestum est, hac ratione tolli posse ex æquatione data terminum quem quis voluerit, collocando sub eo zerum, ut allata exempla docent.*

COROLL. II. *Si communis divisor nullo modo reperiri possit, tunc infertur radices æquales esse irrationales; quæ non sunt hujus loci.*

SCHOL. I. *Communis divisor non est necesse, ut inveniatur inter æquationem datam & æquationem ex Arithmetica progressione productam, ut in primo exemplo factum ut: sed commodius aliquando sumitur inter duas æquationes productas, ut inter* $3x^2 - 10x + 8 = 0$, *&* $-5x^2 + 16x - 12 = 0$, *quæ habentur in eodem primo exemplo, quarum divisor communis est* $x - 2$, *ut prius.*

SCHOL. II. *Pulcherrimum hoc problema, quod Johanni Huddenio* (a) *Belgæ acerrimi ingenii viro debemus, quanti sit usus in Geometria sublimiori pro ducendis Tangentibus, pro determinandis quæstionibus de Maximis & Minimis aliisque pluribus, satis intelliget, qui ad eam gradum faciet.*

 CA-

(a) De reductione æquat. Reg. x. in fine Geom. Cartes. pag. m. 433.

CAPUT VIII.

De Æquationibus Quadraticis.

SI æquationum radices inveniri nequeant per ea, quæ in Capite præcedenti explicavimus, signum erit, radices irrationales, vel etiam imaginarias in illis contineri, aliaque via resolutionem illarum esse ineundam. Proinde regulas peculiares pro æquationibus ejusmodi trademus, a *quadraticis* incipiendo; quæ si fractionibus, aut radicalibus implicentur, prius ab illis expediri debent per ea, quæ docuimus *in Prop.*2. 8. *&* 9. *Cap.*6.

PROPOSITIO I.

Æquationes secundi gradus, seu quadraticas resolvere.

I. SI æquatio *quadratica* sit pura, ut $x^2 = ab$, extracta hinc inde secunda radice, habetur valor quæsitus, nempe $x = \sqrt{ab}$. Eadem ratione si $x^2 = 14400$, extracta pariter radice, erit $x = \sqrt{14400}$; & si per communem Arithmeticam actu radix extrahatur, habetur $x = 120$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x^2 + ax = b^2$, regula hæc erit: ex dimidio coefficientis secundi termini, nempe ex $\frac{1}{2}a$, fiat quadratum $\frac{1}{4}aa$, quod utrique membro æquationis addatur, ut potentia fiat completa, unde radix secunda extrahi possit. Ecce exemplum. Sit æquatio data

x^2

$$x^2 + ax = bb$$

$$\textit{Adde} \quad \tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2$$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = bb + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\textit{Extr. rad.} \quad x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{bb + \tfrac{1}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{bb + \tfrac{1}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Sit aliud exemplum, $x^2 - 3ax = b^2$. Fiat ex dimidio coefficientis $\frac{3}{2}a$ quadratum $\frac{9}{4}a^2$, quod utrinque addatur, erit

$$x^2 - 3ax = b^2$$

$$\textit{Adde} \quad \tfrac{9}{4}a^2 \quad \tfrac{9}{4}a^2$$

$$x^2 - 3ax + \tfrac{9}{4}a^2 = b^2 + \tfrac{9}{4}a^2$$

$$\textit{Extr. rad.} \quad x - \tfrac{3}{2}a = \sqrt{b^2 + \tfrac{9}{4}a^2}$$

$$x = \sqrt{b^2 + \tfrac{9}{4}a^2} + \tfrac{3}{2}a$$

Demonstratio ex ipsa potentiæ secundæ genesi emanat. Nam in binomio ad potentiam secundam elevato quantitas secundi termini est duplum facti ex utraque binomiæ radicis parte. Cum igitur habeatur (in primo exemplo) x pars una, erit $\frac{1}{2}a$ pars altera radicis, ex qua potentia secunda completur.

COROLL. *Hinc patet, in ejusmodi æquationibus radicem secundam obtineri, accipiendo summam, vel differentiam radicum primi & tertii termini potentiæ completæ. Accipitur summa, cum omnes termini sunt positivi, ut* x + ½ a *in primo exemplo; differentia vero, si secundus terminus sit negativus, ut* x — $\frac{3}{2}$ a *in secundo exemplo.*

SCHOL.

SCHOL. I. *Æquationes affectæ secundi gradus resolvuntur etiam facillime, sublato secundo termino* per Prop. 5. Cap. 6. *Sit enim eadem æquatio resolvenda* $x^2 - 3ax = b^2$, *seu* $x^2 - 3ax - b^2 = 0$. *Ut tollatur secundus terminus, fiat* $x = y + \frac{3}{2}a$, *erit*

$$\begin{array}{r|l} x^2 & = y^2 + 3ay + \frac{9}{4}a^2 \\ -3ax & \quad\quad - 3ay - \frac{9}{2}a^2 \\ -\ b^2 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad - b^2 \\ \hline & y^2 \quad * \quad - \frac{9}{4}a^2 - b^2 = 0 \end{array}$$

Est ergo $y^2 = \frac{9}{4}a^2 + b^2$, *& extracta radice*, $y = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$. *Ponatur hic valor loco* y *in æquatione* $x = y + \frac{3}{2}a$, *erit* $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$ *omnino ut prius*.

SCHOL. II. *Omnis æquatio quadratica duas habet radices, alteram affirmativam, negativam alteram. Nam quadratum quodlibet, v. g.* 25, *tam oritur ex* 5×5, *quam ex* -5×-5. *Proinde si fuerit æquatio* $x^2 = ab$, *valor erit* $x = \pm\sqrt{ab}$, *hoc est valor ipsius* x *tam habetur per radicem positivam* $+\sqrt{ab}$, *quam per negativam* $-\sqrt{ab}$. *Sic etiam in exemplo superiori* Schol. 1. *radix positiva est* $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^2}$, *negativa vero* $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + b^3}$. *Quod adeo certum est, ut si alterutra ponatur in æquatione data loco* x, *termini omnes evanescunt, proinde utraque est vera radix* per Schol. 1. Prop. 1. Cap. 6. *Brevitatis autem gratia utrunque signum apponunt, unum sub alio* $\pm$. *Quod pro iis, quæ dicenda sunt, notetur*.

PRO-

PROPOSITIO II.

Æquationes secundi gradus alia ratione expenduntur.

SIt æquatio generalis $x^2 + 2px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes secundi gradus, ita ut $+ 2p$ repræsentet coefficientem secundi termini cum suo signo, & $+ q$ ultimum terminum cum suo pariter signo, ut explicavimus *in Corol.* 1. *Prop.* 2. *Cap.* 6. Summa radicum ejusdem æquationis sit $= 2f$, earumque differentia $= 2g$, erit radix major $f + g$, minor $f - g$ *per Theor.* 3. *Prop.* 3. *Cap.* 5. Cumque utraque sit unus valor ipsius incognitæ x, erit $x = f + g$, & $x = f - g$. Fiant igitur (mutatis signis) æquationes simplices $x - f - g = 0$, & $x - f + g = 0$, ex quarum multiplicatione oritur æquatio $x^2 - 2fx + ff - gg = 0$

Quæ ex suppositione æqualitatis radicum, erit æqualis æquationi $x^2 + 2px + q = 0$. Fiat ergo terminorum comparatio (neglecto primo utriusque termino) erit $-2f = 2p$, unde habetur $f = -p$. Item $ff - gg = q$, seu $gg = ff - q$, & ponendo p^2 loco ff, erit $gg = p^2 - q$, extractaque radice, habetur $g = \sqrt{p^2 - q}$.

Determinato ita valore ipsarum f & g, erit radix major $f + g = -p + \sqrt{p^2 - q}$, minor vero $f - g = -p - \sqrt{p^2 - q}$.

Coroll. *Hinc habentur quatuor illæ formulæ generales pro æquatione quacunque secundi gradus resolvenda, de quibus in sequenti Propositione.*

PRO-

PROPOSITIO III.

Æquationes ſecundi gradus per formulas generales reſolvere.

I. ÆQuationes ſecundi gradus affectæ quatuor modis ratione ſignorum variari poſſunt, ideoque quatuor formulis generalibus exprimi ſolent, in quibus $2p$ ſemper denotat quantitatem cognitam ſecundi termini, q vero quantitatem cognitam tertii, videlicet

$$\text{I.}\quad x^2 - 2px - q = 0$$
$$\text{II.}\quad x^2 + 2px - q = 0$$
$$\text{III.}\quad x^2 + 2px + q = 0$$
$$\text{IV.}\quad x^2 - 2px + q = 0$$

II. Reperto valore incognitæ x *per Prop. antec.* habentur ſequentes formulæ generales cum duplici ſigno $\pm$ ob duplicem radicem affirmativam, & negativam ex dictis *in Schol.* 2. *Prop.* 1. *hujus*

$$\text{I.}\quad x = p \pm \sqrt{p^2 + q}$$
$$\text{II.}\quad x = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$$
$$\text{III.}\quad x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$
$$\text{IV.}\quad x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

1. Propoſita ſit igitur æquatio ſecundi gradus reſolvenda $x^2 - 10x - 6 = 0$.

Ex ſignis ſtatim apparet, hanc æquationem pertinere ad ad primam formulam, $x^2 - 2px - q = 0$. Comparentur mutuo termini, erit $2p = 10$ & $p = 5$. Item $q = 6$. Eſt autem radix primæ formulæ generalis $x = p + \sqrt{p^2 + q}$, in qua ſi ponantur loco p & q earum valores, erit $x = 5 + \sqrt{25 + 6}$, ſeu $x = 5 + \sqrt{31}$. Altera ejuſdem formulæ radix $x = p - \sqrt{p^2 + q}$, hoc eſt $x = 5 - \sqrt{31}$.

2. Sit æquatio $x^2 + 1x - 2 = 0$, quæ, ut ex ſignis liquet, pertinet ad ſecundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$. Fiat comparatio terminorum, erit $2p = 1$, unde $p = \frac{1}{2}$, & $q = 2$. Radix formulæ ſecundæ eſt $x = -p + \sqrt{p^2 + q}$, ideoque poſitis, loco p & q, earum valoribus, habetur $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$, ſeu $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 1$. Altera radix ejuſdem formulæ eſt $x = -p - \sqrt{p^2 + q}$, proinde $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -2$.

3. Sit æquatio $x^2 + 4x + 6 = 0$ pertinens ad tertiam formulam, ut ex ſignis patet, nempe ad $x^2 + 2px + q = 0$. Comparando terminos utriuſque, erit $2p = 4$ & $p = 2$, item $q = 6$. Radix autem generalis ejuſdem formulæ eſt $x = -p + \sqrt{p^2 - p}$, ſubſtitutis in ea valoribus p & q, erit $= -2 + \sqrt{4 - 6}$, ſeu $x = -2 + \sqrt{-2}$. Altera radix erit $x = -2 - \sqrt{-2}$. Hinc apparet propoſitæ æquationis radices eſſe imaginarias.

4. Sit æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, quæ ad quartam formulam ſpectat propter ſignorum ſimilitudinem, nempe ad $x^2 - 2px + q = 0$. Facta terminorum comparatione, erit $2p = 6$ & $p = 3$, item $q = 8$, quibus valoribus p & q poſitis in formula radicis generalis $x = p + \sqrt{p^2 - q}$,

erit una radix $x = 3 + \sqrt{9 - 8}$, seu $x = 3 + \sqrt{1}$, altera vero $x = 3 - \sqrt{1}$; vel una $x = 4$, altera $x = 2$: ambæ sunt positivæ.

COROLL. *Contingit non semel, ut tertiæ & quartæ formulæ radices sint imaginariæ, cum scilicet* q *major est, quam* p^2, *ut supra in tertio exemplo, quod solutioni problematum nihil obstat. Idem quoque accidit, si in æquatione desit secundus terminus, tertius autem sit cum signo* $+$, *ut* $x^2 + q = 0$. *Nam una radix erit* $x = -\sqrt{-q}$, *altera* $x = +\sqrt{-q}$, *proinde ambæ imaginariæ*.

PROPOSITIO IV.

Æquationes derivativas secundi gradus resolvere.

I. ÆQuationes tribus tantum terminis constantes, quarum primus ad quatuor, ad sex, & ad altiores quoque dimensiones ascendit, & in quibus exponentes terminorum incognitorum habent inter se & zero eandem differentiam, hoc est sunt in eadem proportione Arithmetica, ut 4, 2, 0, vel 6, 3, 0 &c. dicuntur æquationes *derivativæ secundi gradus*, & resolvuntur similiter ac ipsæmet secundi gradus æquationes, ut quæ afferuntur exempla docent.

Sit æquatio $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$. Pone $x^2 = y$ erit $x^4 = y^2$, unde oritur $y^2 - 6y - 4 = 0$, quæ si resolvatur per primam formulam generalem *Prop. antec.* habetur $y = 3 + \sqrt{13}$. Quia

Quia vero posita fuit $x^2 = y$, erit $x = \sqrt{y}$, adeoque $x = \sqrt{3 + \sqrt{13}}$. Utque obtineatur valor ipsius x, debet extrahi radix ex binomio $3 + \sqrt{13}$ *per Prop.9. Cap.4.*

II. Sit æquatio $x^6 + 4x^3 - 12 = 0$, pone $x^3 = y$, erit $x^6 = y^2$, unde oritur $y^2 + 4y - 12 = 0$. Quæ si resolvatur per formulas generales *Prop. ant.*, cum ratione signorum pertineat ad secundam formulam, erit valor ipsius $y = -2 + \sqrt{16}$, seu $y = 2$. At vero cum posita fuerit $x^3 = y$, erit $x = \sqrt[3]{y}$, hoc est $x = \sqrt[3]{2}$, & $x^3 = \sqrt[3]{8} = 2$.

Hæc omnia ex solutione problematum, quæ sequuntur, clarius elucescent.

PROBL. I.

Invenire quadratum, cui si addatur ejus radix, fiat æquale unitati.

Sit quæsiti quadrati latus $= x$, erit per conditionem problematis æquatio

$$xx + x = 1$$

per Prop.1. adde $\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}$

$$xx + x + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$

Extr. rad. $\qquad x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}} - \tfrac{1}{2}$$

$$xx = \tfrac{5}{4} - \surd\tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}$$

$$\text{adde} \quad x = + \surd\tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2}$$

$$xx + x = \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{4} = 1$$

PROBL. II.

Duos numeros invenire, quorum summa a summa quadratorum, quæ ex ipsis fiunt, subtracta, relinquit 78. Addita vero ad eorum factum, efficit 39.

Sit numerorum quæsitorum summa $= 2x$, eorumque differentia $= 2y$, erit major $= x + y$, minor $= x - y$ *per Coroll. Theor. 3. Cap. 5.* Sit vero $b = 39$, erit $2b = 78$.

Si fiant quadrata, & ex eorum summa $2x^2 + 2y^2$ auferatur summa numerorum $2x$, erit per primam problematis conditionem æquatio

$$2x^2 + 2y^2 - 2x = 2b$$

Div. per 2) $$x^2 + y^2 - x = b$$

Quod si ad factum eorundem numerorum $x^2 - y^2$ addatur eorum summa $2x$, oritur ex secunda problematis conditione æquatio altera

$$x^2 - y^2 + 2x = b$$

Prop. 2. Cap. 5. $$x^2 + y^2 - x = b$$

$$2x^2 + 1x = 2b$$

Div. per 2) $$x^2 + \tfrac{1}{2}x - b = 0$$

Hæc

Hæc autem finalis æquatio pertinet ad secundam formulam generalem *Propos.* 3. *hujus*, ex qua habetur radix $x = -p + \sqrt{p^2 + q} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 39} = -\frac{1}{4} + \frac{25}{4} = 6$. Nam $p = \frac{1}{4}$, & $q = b = 39$.

Valor autem ipsius y innotescit ex prima æquatione, $x^2 + y^2 - x = b$, ex qua $y^2 = b - x^2 + x$; proinde substituto valore modo invento pro x & x^2, habetur $y^2 = 39 - 36 + 6 = 9$, unde $y = 3$ & $x + y = 9$, $x - y = 3$.

SCHOL. *Clavius* (a) *putavit hoc problema, quod ipse ænigma vocat, difficillimum; pro cujus solutione ipsemet Geometriæ opem implorat, contenditque illud sine Geometria vix, aut nullo modo solvi posse. Quod quidem de Algebra* Numerosa, *quæ id temporis obtinebat, fortasse verum. Ceterum quam facile nunc* per Speciosam *a summis viris* Vieta, & Cartesio *inductam hujusmodi problema sine Geometria resolvatur, jam vidimus. Atque hinc apparet quanta sit hujus supra illam utilitas & præstantia.*

PROBL. III.

Invenire tres numeros in proportione Arithmetica, quorum primus si multiplicetur per 1, secundus per 2 & tertius per 3, producta sint æqualia numero dato 30. Quadrata vero quæ ex ipsis numeris fiunt, æqualia sint numero 66.

POne numerum datum $30 = a$, $66 = b$, & tres numeri quæsiti vocentur A, B, C. Sit primus quæsitorum $A = x$, tertius $C = y$, eorum summa $x + y$ si bifariam

(a) V. Algeb. Cap. XXXI. Ænigma 58. p. m. 343.

riam dividatur, dabit *per Coroll. Theor. 1. Cap. 5.* numerum ſecundum $B = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$.
Sunt autem ex prima problematis conditione

$$\begin{array}{llll} A & x \times 1 & = & x \\ B & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \times 2 & = & x + y \\ C & y \times 3 & = & 3y \end{array}$$

$$A + B + C = 2x + 4y = a$$

Proinde $2x = a - 4y$

$$x = \frac{1}{2}a - 2y\ (= A)$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}a - y$$

Poſitoque hoc valore in quantitate $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\ (= B)$ erit $B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y$

Sunt ergo tres numeri quæſiti

$$A = \frac{1}{2}a - 2y$$

$$B = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}y$$

$$C = y$$

Eorumque quadrata erunt

$$AA = 4y^2 - 2ay + \frac{1}{4}aa$$

$$BB = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}ay + \frac{1}{16}aa$$

$$CC = yy$$

Summa $= 5\frac{1}{4}y^2 - 2\frac{1}{4}ay + \frac{5}{16}aa = b$

$$21y^2 - 9ay + 1\frac{1}{4}aa = 4b$$

Divid. per 21 $y^2 - \frac{3}{7}ay + \frac{5}{84}aa = \frac{4}{21}b$

Et

Et substitutis loco a & b numeris datis, erit

$$y^2 - 12\tfrac{6}{7}y + 53\tfrac{4}{7} = 12\tfrac{4}{7}$$

Subtr. $\qquad 53\tfrac{4}{7} \qquad 53\tfrac{4}{7}$

$$y^2 - 12\tfrac{6}{7}y = -41$$

Hinc *per Prop.* 1. *vel* 3. *hujus* invenietur $y = 7$, proinde innotescent reliqui

$$A = \tfrac{1}{2}a - 2y = 1$$
$$B = \tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}y = 4$$
$$C = y = 7$$

PROBL. IV.

Datum numerum 26 in tres partes continuo proportionales Geometrice dividere, ut quadratum mediæ æquetur duplo facti mediæ & minimæ, & præterea sextuplo ejusdem minimæ.

Pone numerum datum dividendum $26 = a$, & sit trium proportionalium minima $= x$, media $= y$, erit maxima $= a - x - y$. Cum autem factum maximæ & minimæ sit æquale quadrato mediæ *per Theor.* 5. *Cap.* 5. erit

$$ax - xx - xy = y^2$$

Sed ex conditione problematis $y^2 = 2xy + 6x$, ergo

$$ax - xx - xy = 2xy + 6x$$

Divid. per x. $\qquad a - x - y = 2y + 6$

Hinc

Hinc habentur tres partes proportionales

$$\begin{array}{rl} & 2y+6 \\ & +y \\ & +x \\ \hline \text{Summa} & 3y+x+6=a \\ & 3y=a-x-6 \\ \textit{Divid. per } 3. & y=\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{3}x-2 \end{array}$$

Ponatur brevitatis causa loco a numerus datus 26, erit

$$y=-\tfrac{1}{3}x+6\tfrac{2}{3}.$$
$$y^2=\tfrac{1}{9}x^2-4\tfrac{4}{9}x+44\tfrac{4}{9}$$

Cui æqualis supponitur $2yx+6x$. Substituto proinde in hac quantitate pro $2y$ ejus valore, oritur æquatio

$$\begin{array}{rl} & -\tfrac{2}{3}x^2+19\tfrac{1}{3}x=\tfrac{1}{9}x^2-4\tfrac{4}{9}x+44\tfrac{4}{9} \\ \textit{Subtr.} & \tfrac{1}{9}x^2-4\tfrac{4}{9}x \quad \tfrac{1}{9}x^2-4\tfrac{4}{9}x \\ \hline & -\tfrac{7}{9}x^2+23\tfrac{7}{9}x=44\tfrac{4}{9} \end{array}$$

Multiplic. per 9. $\quad -7x^2+214x=400$

Divid. per -7. $\quad x^2-30\tfrac{4}{7}=-57\tfrac{1}{7}$

Hinc *per Prop.* 1. *vel* 3. *hujus* innotescet $x=2$, $y\ (=-\tfrac{1}{3}x+6\tfrac{2}{3})=6$, & pars maxima $=18$. Quæ simul conficiunt numerum 26.

PRO-

PROBL. V.

Datis duobus numeris, duos alios invenire, inter quos datorum alter sit Geometrice, alter Arithmetice proportionalis.

Sit ex datis numeris alter $= a$, alter $= b$: quæsitorum primus $= x$, secundus $= y$, erit per primam problematis conditionem

$$x . a :: a . y$$

Theor. 4. Cap. 5. $\quad xy = aa$, & $x = \frac{aa}{y}$

Similiter per secundam problematis conditionem erit

$$x . b \cdot\!\cdot\; b . y$$

Theor. 1. Cap. cit. $\quad x + y = 2b$, *hinc* $x = 2b - y$

Et $\left(ob\ x = \frac{aa}{y}\right)$ $\quad \frac{aa}{y} = 2b - y$

Multipl. per y $\quad aa = 2by - yy$

Sch. Prop. 1. Cap. 6. $\quad yy - 2by = - aa$

Prop. 1. hujus $\quad$ *adde* $\quad b^2 \quad b^2$

$$yy - 2by + b^2 = b^2 - aa$$

Extra rad. $\quad y - b = \sqrt{b^2 - a^2}$

$$y = b + \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$x\ (= 2b - y) = b - \sqrt{b^2 - a^2}$$

Sit

Sit $a=3$, $b=5$, erit $y=5+\sqrt{25-9}=5+4=9$, & $x=5-\sqrt{25-9}=5-4=1$ Inventi ſunt ergo 1 & 9, inter quos datorum alter 3 mediat Geometrice, alter 5 Arithmetice.

Sit $a=4$, $b=5$, erit $y=8$, $x=2$, habentur ergo 2 & 8, inter quos unus datorum 4 eſt medius Geometrice proportionalis, alter 5 eſt medius Arithmetice.

PROBL. VI.

Duo mercatores ſocietatem ineunt. Primus ſummam neſcio quam poſuit, & manſit in ſocietate menſes 12. Alter poſuit aureos 30, quos in ſocietate reliquit menſibus 17. Invenerunt lucrum eſſe aureorum $18\frac{3}{4}$. Primus pro pecunia in ſortem collata una cum lucro habuit aureos 26. Quæritur quantum ipſemet primus poſuerit.

Esto ſumma a primo poſita $=x$, tempus, ſeu menſes $12=a$: ſumma alterius $30=b$, menſes $17=c$; erit ſumma primi cum ſuo tempore $=ax$, ſumma alterius cum tempore $=bc$, & utriuſque ſumma $=ax+bc$: lucrum ex ſocietate factum ſit $=d$. Sors autem primi cum lucro eſt $26=f$. Ut innoteſcat lucrum primi, fiat

Cor. 1. *Theor.* 4. *Cap.* 4. $ax+bc \,.\, d :: ax \,.\, \frac{adx}{ax+bc}$

Cui ſi addatur pecunia ab ipſo in ſortem collata, nempe x, habetur æquatio

$$x+\frac{adx}{ax+bc}=f$$

Et

Et ad tollendas fractiones multiplicando per $ax + bc$, habetur

$$axx + bcx + adx = afx + bcf$$

Sch. Prop.2. Cap.6.

$$axx + bcx = bcf + adx - afx$$

Positis autem numeris determinatis loco a, b, c & f, erit

$$12x^2 + 423x = 13260$$

Divid per 12.

$$x^2 + 35\tfrac{1}{4}x = 1105$$

Hinc *per Prop. 1. vel 3. hujus* invenitur $x = 20$ pro pecunia a mercatore primo posita.

SCHOL. *Hoc problema fuit Florentiæ publice propositum an.* 1653. *Cumque diu insolutum remansisset, ubi ad notitiam* Caroli Rinaldini *illud venit, fuit ab eodem statim resolutum, ut ipse testatur in Arte Analytica Mathematum pag.*526. *Expedita tamen magis hæc nostra solutio est.*

PROBLEMATA GEOMETRICA

PROBL. I.

Datis in triangulo rectangulo perpendiculari AB, *&* *aggregato hypothenusæ ac basis* AC + BC, *hypothenusam & reliquum latus invenire.* Fig. 1.

SIt perpendicularis $AB = a$, aggregatum hypothenusæ ac basis $AC + BC = b$, & $AC = x$; erit $BC = b - x$, proinde *per* 47. *l.* 1. *Eucl.*

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$

$$b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b} = AC$$

$$BC\ (= b - x) = \frac{b^2 - a^2}{2b}$$

SCHOL. *Ex æquatione ultima problematum erui possunt regulæ Arithmeticæ, quarum aliquas ad ceterarum exemplum hic subiicimus.*

Regula Arithmetica 1. Summa quadratorum perpendicularis (a^2) & aggregati hypothenusæ ac basis (b^2) dividatur per duplum ejus aggregati ($2b$) quotus dabit hypothenusam AC.

Regula Arithmetica 2. Ex quadrato aggregati hypothenusæ & basis (b^2) subtrahe quadratum perpendicularis (a^2), & residuum ($b^2 - a^2$) divide per duplum ejusdem aggregati ($2b$) quotus dabit basim BC.

PROBL. II.

Datis in triangulo rectangulo basi BC *&* *aggregato hypothenusæ & perpendicularis* AC + AB, *hypothenusam & perpendicularem invenire.* Fig. 1.

Sit basis $BC = a$, aggregatum hypothenusæ & perpendicularis $AC + AB = b$, hypothenusa vero $AC = x$, erit

erit $AB = b - x$, *&* *per* 47. *l.* 1. *Eucl.* habetur in terminis analyticis

$$x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + a^2$$

$$b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2$$

$$x = \frac{b^2 + a^2}{2b} = AC$$

Et $AB (= b - x) = \frac{a^2 - b^2}{2b}$

Regula Arithmetica. Summa quadratorum basis & aggregati hypothenusæ & perpendicularis $(a^2 + b^2)$ divisa per duplum ejusdem aggregati $(2b)$ dat hypothenusam AC. Differentia vero eorundem quadratorum $(b^2 - a^2)$ divisa per duplum ejusdem aggregati $(2b)$ dat perpendicularem AB.

COROLL. *Tam ex primo quam ex secundo problemate habetur regula inveniendi in numeris infinita triangula rectangula, quorum latera per numeros integros, & rationales exprimantur. Habentur enim tria latera* $BC = a$, $AC = \frac{a^2 + b^2}{2b}$, *&* $AB = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, *quibus ad eandem denominationem redactis (multiplicando* $a \times 2b$*), & deleto communi denominatore, erunt* $BC = 2ab$, $AC = a^2 + b^2$, *&* $AB = b^2 - a^2$.

Sumantur itaque ad arbitrium pro a & b duo quicunque numeri. Sit $a = 1$, $b = 2$, erit $2ab = 4$, $a^2 + b^2 = 5$, $b^2 - a^2 = 3$. Latera ergo trianguli rectanguli quæsita sunt 3, 4, 5.

Sit

Sit $a = 5$, $b = 7$, erit $2ab = 70$, $a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74$, & $b^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$. Sunt ergo latera quæsita, 24, 70, 74; & sic de aliis infinitis.

PROBL. III.

In triangulo quocunque ABC *datis uno angulo* BAC, *latere* AC *adjacente*, & *reliquorum laterum* AB + BC *summa*, *latus* AB *invenire*. Fig. 2.

Ex puncto C ad latus quæsitum AB demittatur perpendicularis CD. In triangulo rectangulo ADC ob datum angulum DAC & hypothenusam AC, dantur etiam latera AD, & CD *per Probl. 2. Trigonom. Tacquet.* Ex data itaque laterum $AB + BC$ summa auferatur latus AD jam notum, relinquetur summa $BD + BC$ pariter nota. Quæritur latus BD.

Sit laterum $BD + BC$ summa data $= c$, latus $CD = b$, latus quæsitum $BD = x$, erit $BC = c - x$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ *per Prop. 47. l. 1. Eucl.* hoc est

$$x^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$$

$$2cx = c^2 - b^2$$

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2c} = BD$$

Regula Arithmetica. Inventis per Trigonometriam lateribus AD & CD, si quadratum lateris CD (b^2) auferas a qua-

quadrato aggregati laterum $BD + BC (c^2)$, & residuum $(c^2 - b^2)$ dividas per duplum ejusdem aggregati laterum $(2c)$ dabitur latus BD, quod additum lateri jam invento AD, dat latus quæsitum AB.

SCHOL. *Hinc patet, Trigonometriam quoque opem suam Algebræ conferre. Nam sine illa longiori sane calculo opus fuisset. Hoc problemate* Guil. Whiston [a] *utitur ad calculum Planetarum Geometricum supputandum. At prolixiori circuitu hanc ipsam æquationem assequitur.*

PROBL. IV.

Datis tribus cujuscunque trianguli lateribus, superficiem invenire. Fig. 3.

PRoducatur, si opus sit, latus BC in D, in quod cadit a vertice A perpendicularis AD. Ponatur autem $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = x$, & $CD = y$, erit $BD = c + y$.

Jam habetur *per Prop. 47. l. 1. Eucl.*

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 \qquad \Big| \qquad \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 \dot{-} \overline{BD}^2$$

$$x^2 = b^2 - y^2 \qquad \Big| \qquad x^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$$

Proinde $b^2 - y^2 = a^2 - c^2 - 2cy - y^2$

$$2cy = a^2 - b^2 - c^2$$

$$y = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

Hinc

(a) Prælect. Astronom. Lem. VI. pag. 272, Londini 1707.

Hinc $y^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}$

Subſtituto valore y^2 in ſuperiori prima æqnatione, & extracta deinde radice, oritur

$$AD = \sqrt{\left(b^2 - \frac{a^4 - 2ab^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + b^4 + c^4}{4c^2}\right)}$$

$$\textit{hoc eſt } AD = \sqrt{\left(\frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}\right)}$$

Quod ſi altitudo AD multiplicetur per dimidium baſis $BC\ (= \frac{1}{2}c)$ hoc eſt per $\frac{1}{4}cc$ (ob ſignum radicale *ex Propoſ.*4. *Cap.*4.) erit ſuperficies quæſita

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{8}a^2b^2 + \tfrac{1}{8}a^2c^2 + \tfrac{1}{8}b^2c^2 - \tfrac{1}{16}a^4 - \tfrac{1}{16}b^4 - \tfrac{1}{16}c^4\right)}$$

Regula Arithmetica ad Geometriam practicam valde utilis, quam auctores communiter tradunt, eſt hujuſmodi: ex laterum ſemiſumma ſubtrahantur ſingula latera, ut habeantur tres differentiæ, quæ inter ſe multiplicentur, earumque productum ducatur in ipſam ſemiſummam laterum: nam hujus producti radix quadrata erit area trianguli quæſita.

Vel ſic: primo multiplicetur ſemiſumma laterum per differentiam unius lateris, & fiat productum A. Secundo multiplicentur inter ſe differentiæ reliquorum duorum laterum, & fiat productum B. Tertio duo illa producta A & B invicem multiplicentur, & extrahatur inde radix quadrata, quæ dabit ſuperficiem trianguli quæſitam.

Sc-

Semisumma later.	$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$
Differ. unius lat.	$-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$
Productum A	$-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{4}c^2$
Differ. duor. lat.	$-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a$
	$+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a$
Productum B	$-\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{4}a^2$

Ductis invicem productis $A \times B$, oritur omnino ut supra

$$\frac{1}{8}a^2b^2+\frac{1}{8}b^2c^2+\frac{1}{8}a^2c^2-\frac{1}{16}a^4-\frac{1}{16}b^4-\frac{1}{16}c^4$$

Cujus radix quadrata dat quæsitam trianguli superficiem.

Sit $a=15$, $b=13$, $c=14$, erit summa laterum $=42$ & semisumma $=21$. Differentiæ inter hanc & latera sunt 8, 7, 6, quarum productum $=336$ si multiplicetur per semisummam 21 dat 7056. Cujus radix quadrata 84 dat trianguli superficiem quæsitam.

SCHOL. I. *Verum quo pacto ex superiori æquatione* $\sqrt{(\frac{1}{8}a^2b^2+\frac{1}{8}a^2c^2\ \&c.)}$ *regula hæc Arithmetica eruatur, non illico apparet. Sed advertatur, tres quantitates* a, b, c, *quæ invicem simul multiplicantur, & nusquam ternæ in producto reperiuntur, necessario elidi debere per signa negativa & alternatim opposita; tertium autem productum oriri ex omnibus illis positive sumptis, scilicet*

$$\frac{-a+b+c}{2}\times\frac{a-b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}\times\frac{a+b+c}{2}$$

Ex harum enim multiplicatione habetur productum supra

pra inventum. Cujus coefficientes fracti oriuntur ex eo, quod singulæ summæ divisæ sint per $\frac{1}{2}$, *ut evidens est.*

SCHOL. II. *Porro egregii hujus problematis, teste Adriano Metio* (a), *auctor est Theon Alexandrinus, magnus Geometra & Astronomus. Dn. de la Hire* (b) *tanti fecit, ut illud Academiæ regiæ Parisiensi faciliori solutione concinnatum proposuerit.*

PROBL. V.

In dato semicirculo ducta perpendiculari DE *ad diametrum* AC, *ducere ab extremitate diametri rectam* AB, *ita ut pars intercepta* FB *æqualis sit semidiametro* AO, *vel* CO. Fig. IV.

Esto factum, ductisque BG parallela perpendiculari DE, & recta BC, sit diameter $AC = a$, $AE = b$, $AB = x$, erit $AF = x - \frac{1}{2}a$, cum supponatur $FB = AO$, vel $CO = \frac{1}{2}a$.

Ob triangula BAG & EAF similia erit $AF \,.\, AE :: AB \,.\, AG$, & in terminis analyticis

$$x - \tfrac{1}{2}a \,.\, b :: x \,.\, \frac{bx}{x - \frac{1}{2}a} \left(= \frac{2bx}{2x - a}\right) = AG$$

Similiter ob triangula ABC & BAG similia erit *per Coroll. Prop.8. l.6. Eucl. ex Tacquet.*

CA

(a) Geometr. Pract. par. 2. cap. III. num.4. (b) Memoires de l' Acad. des sciences an. 1700. & Acta Erudit. Lipsiæ an.1704.

$$CA \,.\, AB :: AB \,.\, AG$$

$$a \,.\, x :: x \,.\, \frac{2bx}{2x-a}$$

Multipl. per $2x-a$ $\quad x^2 = \frac{2abx}{2x-a}$

$$2x^3 - ax^2 = 2abx$$

Divid. per $2x$) $\quad x^2 - \frac{1}{2}ax = ab$

Prop. 1. $\quad$ adde $\frac{1}{16}a^2 \quad \frac{1}{16}a^2$

$$x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{16}a^2 + ab$$

Extr. rad. $\quad x - \frac{1}{4}a = \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$

$$x = \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}$$

Innotescit ergo quantitas chordæ quæsitæ *AB*, quæ ducenda est a puncto *A*, ut imperatur. Etenim si ponatur $a = 4$ & $b = 1$, erit $x \left(= \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}a^2 + ab}\right) = 1 + \sqrt{5}$, ideoque ipsa chorda $AB = 1 + \sqrt{5}$.

Aliter (*Fig.* 5.) Completo circulo, producatur *DE* in *F*, & sit diameter $AB = a$, $AE = b$, $DE = c$, $CG = AM$, vel $BM = \frac{1}{2}a$, $AC = x$, erit $AG = x - \frac{1}{2}a$.

Cum *DF* secta sit bifariam in *E per Prop.* 3. *l.* 3. *Eucl.*, & non bifariam in *G*, erit $\overline{DE}^2 = DG \times GF + \overline{GE}^2$ *per Prop.* 5. *l.* 2. sed $DG \times GF = AG \times GC$ *per Prop.* 35. *l.* 3.

& $\overline{GE}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$ *per Prop.* 47. *l.* 1. ergo $\overline{DE}^2 = AG \times GC + \overline{AG}^2 - \overline{AE}^2$, hoc est in terminis analyticis

$$c^2 = x^2 - \tfrac{1}{2} ax - b^2$$
$$x^2 - \tfrac{1}{2} ax = b^2 + c^2$$

Quæ quidem æquatio resolvitur *per Prop.* 1. *hujus*, & habetur $x = \frac{1}{4} a + \sqrt{\frac{1}{16} a^2 + b^2 + c^2}$, quæ a superiori non differt. Nam posita $AB\,(a) = 4$, & $AE\,(b) = 1$, erit $EB = 3$: proinde $DE\,(c) = \sqrt{3}$, cum sit media proportionalis inter AE & EB *per Cor. Prop.* 13. *l.*6. *Eucl.* Erit ergo $c^2 = 3$, adeoque $\sqrt{\frac{1}{16} a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{5}$, & $x = 1 + \sqrt{5}$; atque hinc chorda $AC = 1 + \sqrt{5}$, ut prius.

PROBL. VI.

Datis in circuli diametro AB *duobus punctis* D, *&* E *a centro* C *æquidistantibus, invenire in peripheria punctum* F, *a quo ductæ* FD, FC, *&* FE *sint in continua proportione Geometrica*. Fig. 6.

Esto F punctum quæsitum, a quo demittatur perpendicularis FG. Sit $DC = CE = a$, $AD = EB = b$, $FC = CA$, vel $CB = r$, $DG = x$, erit $AG = b - x$, & $GB = 2a + b + x$.

$$AG \times GB = 2ab + b^2 - 2ax - x^2 = \overline{FG}^2$$

Adde $\overline{GD}^2 = x^2$

Prop.47. l.1. $\overline{FD}^2 = 2ab + b^2 - 2ax$

At $GE = 2a + x$, & $\overline{GE}^2 = 4a^2 + 4ax + x^2$

Adde $\overline{FG}^2 = 2ab + b^2 - 2ax - x^2$

Propos. cit. $\overline{FE}^2 = 4a^2 + 2ab + b^2 + 2ax$

Sunt autem ex conditione problematis FG, FC, & FD in continua proportione Geometrica, ergo etiam eorum quadrata *per Theor.6. Cap.5.*, nempe $\overline{FE}^2$, $\overline{FC}^2$, $\overline{FD}^2$, & in terminis analyticis

$$4a^4 + 2ab + b^2 + 2ax \,.\, r^2 :: r^2 \,.\, 2ba + b^2 - 2ax$$

Fiant porro facilioris calculi gratia quantitates notæ $4a^4 + 2ab + b^2 = m$, & $2ba + b^2 = n$, erit

$$m + 2ax \,.\, r^2 :: r^2 \,.\, n - 2ax$$

Th.4. Cap.5. $mn + 2anx - 2amx - 4a^2x^2 = r^4$

Sch. Prop.1. Cap.5. $4a^2x^2 + 2amx - 2anx = mn - r^4$

Div. per $4a^2$) $x^2 + \frac{m-n}{2a} \times x = \frac{mn - r^4}{4a^2}$

Fiat $\frac{m-n}{2a} = 2p$, & $\frac{mn - r^4}{4a^2} = q$, erit *per Cor. Prop. 2. Cap. 6.* æquatio

x^2

$$x^2 + 2px - q = 0$$

Quæ quidem *per Prop.* 3. *hujus* facile resolvitur, eritque nota quantitas *DG*, seu punctum *G*, ex quo elevata perpendiculari *GF*, obtinetur in peripheria punctum quæsitum.

Schol. *Problemata Geometrica fere omnia constructionem Geometricam admittunt. Nos hoc loco Arithmeticas tantum regulas deduxisse contenti Geometricam constructionem ad caput ultimum referre statuimus, ne tyrones rerum multitudine & varietate perturbentur.*

CAPUT IX.

De Æquationibus Cubicis.

Quo calculus facilior evadat, supponitur jam secundus terminus ab æquatione sublatus: item fractiones & termini radicales, ut in *Prop.* 2. 8. & 9. *Cap.* 6. docuimus.

Omnes æquationes Cubicæ, sublato secundo termino, ad aliquam sequentium formularum reducuntur *per Coroll.* 1. *Prop.* 2. *Cap.* 6.

$$x^3 - px + q = 0$$
$$x^3 - px - q = 0$$
$$x^3 + px - q = 0$$
$$x^3 + px + q = 0$$

PRO-

PROPOSITIO I.

Explicatur æquationum Cubicarum genesis.

I. Sit æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, repræsentans omnes æquationes cubicas secundo termino carentes, quæ, ut ex signis apparet, duas habent radices positivas, & tertiam negativam duabus illis positivis æqualem, alias secundus terminus non evanesceret *per Coroll.*4. *Prop.*1. *Cap.*6.

Sint igitur duæ radices positivæ $f - g$, & $f + g$ erit earum summa $= 2f$, earumque differentia $= - 2g$, & radix negativa $= - 2f$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x - f + g = 0$, $x - f - g = 0$, & $x + 2 = 0$; ex quarum facto oritur æquatio tertii gradus indeterminata *A*, tres radices reales continens, duas quidem positivas, & tertiam negativam earum summæ æqualem, scilicet:

$$A. \quad \begin{array}{l} x^3 - 3ffx + 2f^3 = 0 \\ \qquad\; - ggx - 2ggf \end{array}$$

Comparentur hujus termini cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px + q = 0$, cui ex hypothesi æquatur, fiunt duæ æquationes.

$$1.^a \quad 3ff + gg = p, \; hinc \; ff + \tfrac{1}{3}gg = \tfrac{1}{3}p$$
$$2.^a \quad 2f^3 - 2ggf = q, \; hinc \; f^3 - ggf = \tfrac{1}{2}q$$

II. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$, repræsentans omnes æquationes cubicas, in quibus (ut signa in-

indicant) sunt duæ radices negativæ, & una positiva earum summæ æqualis, alias secundus terminus non evanuisset *per Coroll.*4. *Prop.*1. *Cap.*6.

Sint igitur radices negativæ $-f+g$, & $-f-g$: earum summa $=-2f$ dat radicem positivam illis æqualem, earumque differentia erit $=-2g$. Fiant (mutatis signis) æquationes simplices $x+f-g=0$, $x+f+g=0$, & $x-2f=0$, ex quarum facto oritur æquatio indeterminata B, continens tres radices reales, duas negativas, & tertiam positivam, scilicet

$$B \quad \begin{array}{l} x^3-3ffx-2f^3=0 \\ \quad\;\; -ggx+2ggf \end{array}$$

Cujus terminis comparatis cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3-px-q=0$, cui æqualis supponitur, fiunt duæ æquationes

1.ª $-3ff-gg=-p$, *hinc* $ff+\frac{1}{3}gg=\frac{1}{3}p$

2.ª $-2f^3+2ggf=-q$, *hinc* $-f^3+ggf=-\frac{1}{2}q$

Ex utraque æquatione A & B, in quibus f supponitur major, quam g (alias $f-g$ non esset radix positiva, nec $-f+g$ esset radix negativa, ut fuit suppositum) nonnulla inferuntur., ex quorum notitia maxime pendet æquationum cubicarum resolutio, scilicet

1. Si duæ radices (sive positivæ, sive negativæ illæ sint) æquales existant, tunc cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini est æqualis quadrato ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{4}qq$.

Nam in hoc casu in duabus æquationibus simplicibus $x-f+g=0$ & $x-f-g=0$, earum differentia seu

seu quantitas $2g$ fit nulla, hoc est $2g = 0$, proinde in æquatione A (idem fit in æquatione B) evanescit quantitas $-ggx + 2ggf$, & remanet $x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0$. Comparentur hi termini residui cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 - px + q = 0$, oriuntur duæ æquationes; prima $-3ff = -p$, seu $ff = \frac{1}{3}p$, secunda $-2f^3 = +q$, seu $f^3 = -\frac{1}{2}q$. Harum prima elevetur ad cubum, & ad quadratum altera: erunt $f^6 = \frac{1}{27}p^3$ & $f^6 = \frac{1}{4}qq$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

2. Si cubus idem ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major fuerit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est si $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, tunc tres radices reales erunt inæquales.

Nam comparatis terminis æquationis A cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, habentur æquationes illæ duæ, prima $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$, secunda $f^3 - ggf = \frac{1}{2}q$, & elevando primam ad cubum, oritur

$$f^6 + 2ggf^4 + \frac{1}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$$

Elevando autem secundam ad quadratum, habetur

$$f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{1}{4}qq$$

Si hæc ex illa auferatur, erit residuum

$$3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$$

Jam vero quia ex dictis f major est quam g, erit quoque $3ggf^4$ major quam $\frac{2}{3}g^4ff$ [nam divisa utraque per $ggff$, quotus $3ff$ major erit quam $\frac{2}{3}gg$] ideoque cum in superiori æquatione $3ggf^4 - \frac{2}{3}g^4ff + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$ unum membrum sit positivum, erit quoque alterum membrum, nempe $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$, ergo $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

3. Si idem cubus fuerit minor quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, tunc æquatio duas radices imaginarias continebit. Nam si omnes reales essent, fieret ex dictis $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, vel $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

Hæc omnia vera existunt, quacunque alia formula generali assumpta, si pari ratione procedatur.

COROLL. *Ubi non adsunt radices imaginariæ, sed omnes sunt reales, tertius terminus semper apparet cum signo —, nempe —* p. *Si duæ radices sint positivæ, ultimus terminus, erit cum signo* + q. *Si negativæ, erit* — q. *Quæ omnia ex utraque generali æquatione inferuntur.*

PROPOSITIO II.

In æquationibus cubicis an duæ radices sint æquales, & quænam sint, explorare.

I. Sit data æquatio $x^3 - 12x + 16 = 0$. Patet *per Propos. 1. ejusque Coroll.* haberi tres radices reales, duas quidem positivas & tertiam negativam: quæritur an duæ illæ positivæ sint æquales. Fiat comparatio terminorum cum terminis formulæ generalis $x^3 - px + q = 0$, erit

$$\begin{array}{r|l} p = 12 & q = 16 \\ \frac{1}{27}p^3 = 64 & \frac{1}{4}qq = 64 \end{array}$$

Habentur ergo *per Prop. præc.* duæ radices æquales.

II. Ut una ex illis inveniatur, dividatur triplum ultimi termini per duplum coefficientis tertii termini, quotus dabit

bit

bit radicem quæsitam, hoc est $\frac{3q}{2p} = \frac{48}{24} = 2$. Tertia itaque radix erit -4, earum summæ æqualis *per Coroll.* 4. *Prop.* 1. *Cap.* 6.

Demonstratur. Nam ex *Propos. præc.* cum radices sunt æquales, tunc in æquationibus simplicibus $x - f + g = 0$ & $x - f - g = 0$ fit $g = 0$; hinc facta ex illis multiplicatione, & comparatis terminis æquationis, quæ inde oritur, cum terminis formulæ generalis, ut in *Prop. cit.* factum est, æquatio illa $3ff + gg = p$ fiet $3ff = p$; atque hinc $ff = \frac{1}{3}p$. Similiter $2f^3 - 2ggf = q$, fit $2f^3 = q$, unde oritur $f^3 = \frac{1}{2}q$ Dividatur jam hæc æquatio per illam, hoc est primum membrum per primum & secundum per secundum membrum, erit $f^3 : ff = \frac{1}{2}q : \frac{1}{3}p$, unde $f = \frac{3q}{2p}$, quæ quidem æquatio allatam regulam nobis exhibet.

PROPOSITIO III.

In æquationibus Cubicis an radix aliqua sit rationalis, & quænam sit, explorare.

I. Sit æquatio generalis $x^3 - px + q = 0$, quæ tres radices reales habet, duas quidem positivas, & tertiam duabus illis æqualem negativam, *per Coroll. Prop.* 1. *hujus*. Quæritur primo, an radix illa negativa, alterutra positiva major, sit rationalis.

Subtrahatur quantitas p ex quadrato proxime majori, & per residuum dividatur q. Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, erit ipse idem radix rationalis

 quæsi-

quæsita. Si vero successive nullum reperiatur quadratum majus p, quod hunc præstet effectum, signum est, radicem illam esse irrationalem.

Sit exemplum $x^3 - 39x + 70 = 0$ (facta comparatione cum terminis formulæ generalis) erit $p = 39$, $q = 70$. Quadratum proxime majus quam p est $= 49$, ex quo subtracto p, erit $49 - 39 = 10$: per hoc residuum dividatur $q = 70$, quotus 7, æqualis radici quadrati assumpti dat radicem rationalem negativam quæsitam.

Explorandum deinde sit, an aliqua ex radicibus positivis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus quam p, quod subtrahatur ex ipso p, & per residuum dividatur q. Si quotus fuerit radix ejusdem quadrati assumpti, ille dabit radicem rationalem quæsitam. Si vero nullum successive quadratum reperiatur minus ipso p, quod hunc præstet effectum, signum est, radices illas esse irrationales.

Sit eadem æquatio, quæ prius, $x^3 - 39x + 70 = 0$ cum sit $p = 39$, $q = 70$, quadratum proxime minus p erit $= 36$, quod subtractum ex p, erit $39 - 36 = 3$, & dividendo per hoc residuum quantitatem $q = 70$, quotus $= 23\frac{1}{3}$ non est radix assumpti quadrati.

Sumatur quadratum adhuc minus, nempe 25, quod subtractum ex p, erit $39 - 25 = 14$, per quod residuum dividendo $q = 70$, habetur quotus $= 5$, æqualis radici quadrati assumpti, qui dat unam ex radicibus positivis rationalem, nempe 5.

II. Sit æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$, quam ex *Prop.* I. *hujus*, *ejusque Coroll.* liquet habere tres radices reales, duas quidem negativas & tertiam positivam illis æqua-

æqualem, proinde alterutra negativa majorem. Quæritur, an radix illa positiva sit rationalis. Regula est eadem.

Sit exemplum $x^3 - 13x - 12 = 0$, erit $p = 13$, & $q = 12$. Quadratum proxime majus quam p est $= 16$, ex quo subtrahatur p, erit $16 - 13 = 3$, & dividendo per hoc residuum $q = 12$ habetur quotus, qui est æqualis lateri quadrati assumpti, proinde radix rationalis quæsita $= 4$.

Quæritur deinde, an aliqua ex radicibus negativis sit rationalis. Sumatur quadratum proxime minus quam p, hoc est 9, quod ex ipso subtrahe, erit $13 - 9 = 4$, per quod residuum diviso $q = 12$, habetur quotus æqualis lateri quadrati assumpti, & radix rationalis quæsita, nempe -3.

Sit aliud exemplum $x^3 - 8x - 8 = 0$, cujus radix positiva (alterutra negativa major, utpote illis æqualis) quæritur, an sit rationalis. Comparatis terminis cum formula generali, erit $p = 8$, $q = 8$, & quadratum proxime majus quam p erit $= 9$, hinc $9 - 8 = 1$, per hoc residuum diviso $q = 8$, habetur 8: qui sane quotus non est radix quadrati assumpti, sed major. Sumatur aliud quadratum successive majus quam p, nempe 16, erit $16 - 8 = 8$ per quod dividendo $q = 8$, habetur 1, quotus scilicet minor radice quadrati assumpti. Quod cum pariter succedat sumendo aliud & aliud successive quadratum majus quam p, signum est, radicem realem positivam esse irrationalem.

Exploretur jam an aliqua ex duabus negativis sit rationalis. Cum sit $p = 8$, $q = 8$, quadratum proxime minus quam p est $= 4$, & $8 - 4 = 4$, per quod residuum diviso $q = 8$ habetur 2 radix quidem quadrati assumpti, & radix rationalis quæsita $= -2$.

Demon-

Demonstrat. Positis duabus radicibus positivis (ut in *Prop.* 1. *hujus*) $f+g$ & $f-g$, earum summa $2f$ dat radicem negativam illis æqualem, ejusque quadratum $=4ff$, ex quo subtrahatur $3ff+gg$ $(=p)$, residuum est $4ff-3ff-gg$, hoc est $ff-gg$; per quod residuum si dividatur $2f^3-2ggf$ $(=q)$ remanet $2f$, radix scilicet quadrati $4ff$ & æquationis; unde patet ratio regulæ pro prima parte.

Pro altera parte fiat ex aliqua radice, sive positiva $f-g$, sive negativa $-f+g$ quadratum $ff-2gf+gg$, quod subtrahatur ex $3ff+gg$ $(=p)$, residuum erit $2ff+2gf$, per quod dividendo $2f^3-2ggf$ $(=q)$, quotus dat $f-g$ radicem scilicet quadrati & æquationis; unde patet ratio secundæ partis problematis.

COROLL. I. *Inventa una ex radicibus rationalibus, sive illa positiva, sive negativa sit, dividitur per illam æquatio, quæ fit secundi gradus, & aliæ duæ radices facile innotescunt* per Propos. 1. & 3. Cap. 8.

COROLL. II. *Quod si data æquatio omnes radices reales habeat (ut in hac Propositione fuit suppositum), ex quibus nulla rationalis esse reperiatur, tunc æquatio resolvi nullo modo potest per Analysim, cum tres ejusmodi radices reales irrationales exprimi nulla ratione possint, adeo ut dicatur casus* irreductibilis & deploratus; *proinde opus est confugere ad Geometriam, quæ radices illas exacte per lineas exprimit: quemadmodum ipsa quadrati latus diametro incommensurabile, eorumque proportionem per lineas exhibet, quod numeris explicari non potest.*

PRO-

PROPOSITIO IV.

Æquationes cubicas, quæ duas radices imaginarias & realem rationalem continent, expedire.

I. ÆQuationes cubicas ſecundo termino carentes tunc duas radices imaginarias continere certum eſt:

1. Cum tertius terminus afficitur quidem ſigno —, ſed $\frac{1}{27}p^3$ minus eſt quam $\frac{1}{4}qq$, *ut in Prop.* 1 *hujus* dictum eſt, & tunc æquatio generalis erit $x^3 - px \pm q = 0$.

2. Cum tertius terminus ſigno + afficitur, in quo caſu formula generalis eſt $x^3 + px \pm q = 0$.

3. Demum cum æquatio ſecundo & tertio termino caret, ut $x^3 \pm q = 0$, tunc autem radix realis ſemper erit $x = \sqrt[3]{\pm q}$.

Ad reſolvendas æquationes ejuſmodi quæritur primum radix realis æquationis propoſitæ, quæ erit vel poſitiva, vel negativa, ſemper æqualis ſummæ duarum radicum imaginariarum, alias ſecundus terminus tolli non potuiſſet. Ipſa vero radix realis poteſt eſſe rationalis & irrationalis. An ſit rationalis ita detegitur.

Sumatur quadratum minus, vel majus quam p, cui addatur $\pm p$; hoc eſt ſi in data æquatione ſit $-p$, addatur $-p$, ſi vero ſit $+p$, addatur $+p$; & per hanc ſummam dividatur q. Si diviſio dat quotum, qui ſit radix quadrati aſſumpti, habetur radix rationalis quæſita, ut in primo & ſecundo exemplo ſequenti; alias eſt irrationalis, ut in tertio exemplo.

Data

Data ſit æquatio $x^3 - 1x + 6 = 0$, quæ comparari debet cum formula generali $x^3 - px + q = 0$. Cum autem $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{27}$ minor ſit quam $\frac{1}{4}qq = 9$, jam manifeſtum eſt, duas radices imaginarias in ea deliteſcere. Sumatur quadratum 4, cui addatur $-p = -1$, & per hanc ſummam $4 - 1 = 3$ dividatur $-q = -6$, quotus, qui eſt latus quadrati aſſumpti, dat radicem realem rationalem negativam -2.

Radices imaginariæ habentur *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8., nempe $1 + \sqrt{-2}$, & $1 - \sqrt{-2}$. Nam data æquatio ſi dividatur per radicem rationalem inventam, deprimitur ad ſecundum gradum, ut patet.

II. Data ſit æquatio $x^3 + 27x - 28 = 0$, quæ convenit cum formula generali $x^3 + px - q = 0$; & ſignum $+p$ indicat duas radices imaginarias in ea contineri: quæritur radix rationalis ejuſdem. Sumatur quadratum 1, cui addatur $p = 27$, & per hanc ſummam $1 + 27 = 28$ dividatur $q = 28$: quotus 1, cum ſit latus quadrati aſſumpti, dat radicem rationalem quæſitam.

Radices vero imaginariæ (depreſſa æquatione ad ſecundum gradum) habentur *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8. $-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, & $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 28}$, negativæ quidem, ut æquationis datæ ſigna indicant, proinde radix realis neceſſario poſitiva eſt.

III. Sit æquatio $x^3 - 6x - 16 = 0$, quæ convenit cum formula generali $x^3 - px - q = 0$, & quia $\frac{1}{27}p^3 = 8$ minus eſt quam $\frac{1}{4}qq = 64$, ſignum eſt, haberi duas radices imaginarias. Videndum, an radix realis ſit rationalis. Sumatur quadratum 4, cui addatur $-p = -6$, & per ſum-

summam $4-6=-2$ diviso $-q=-16$, habetur $+8$, quod quidem non est latus quadrati assumpti. Sumatur aliud successive quadratum, nempe 9, cui addatur $-p=-6$, & per summam hanc $9-6=3$ dividatur $-q=-16$. Sed hoc cum fieri non possit exacte & sine residuo, sumatur successive aliud quadratum majus, nempe 16, quod additum ad $-p=-6$, summa fit 10, per quam pariter non est divisibilis sine residuo quantitas $q=16$. Et cum aliud & aliud quadratum frustra ad hunc effectum assumatur, signum est, radicem realem esse irrationalem, alia sane methodo inferius inveniendam.

Demonstratio fere eadem est ac præc. Proposit. Nam si supponantur duæ radices imaginariæ negativæ $-f+\sqrt{-3gg}$, & $-f-\sqrt{-3gg}$, ex quibus fiant æquationes simplices $x+f-\sqrt{-3gg}=0$ & $x+f+\sqrt{-3gg}=0$, earum summa $2f$ dabit radicem realem positivam, quæ ob secundum terminum, quo æquatio caret, illis debet esse æqualis. Habetur itaque $x-2f=0$. Multiplicentur tres hujusmodi æquationes, oritur æquatio

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx &- 2f^3 = 0 \\ +3ggx &- 6ggf \end{aligned}$$

Et facta comparatione cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px - q = 0$, erit

$$-3ff+3gg=\pm p, \ \& \ -2f^3-6ggf=-q$$

Quod si radices imaginariæ positivæ fuerint, scilicet $f+\sqrt{-3gg}$, & $f-\sqrt{-3gg}$, tunc radix realis earum summæ æqualis ob secundum terminum, qui deest, necessario erit negativa, nempe $-2f$, factaque, ut supra, multiplicatione trium æquationum simplicium, oritur

$$\begin{aligned} x^3 - 3ffx &+ 2f^3 = 0 \\ + 3ggx &+ 6ggf \end{aligned}$$

Comparatis hujus terminis cum terminis formulæ generalis $x^3 \pm px + q = 0$, habetur

$$-3ff + 3gg = \pm p, \ \& \ 2f^3 + 6ggf = q$$

Proinde si $4ff$ (quadrato radicis realis $\pm 2f$) addatur $-3ff + 3gg = \pm p$, summa erit $4ff - 3ff + 3gg$, hoc est $ff + 3gg$, per quam si dividatur $-2f^3 - 6ggf = -q$ in primo casu; vel $2f^3 + 6ggf = q$ in secundo casu, quotus dabit radicem realem quæsitam $\pm 2f$.

PROPOSITIO V.

Æquationes Cubicas, in quibus una saltem radix est rationalis, brevius expedire.

I. Sit æquatio data $x^3 + 12x = 427$, cujus una radix rationalis inquiritur.

Quia incognitæ cubus minor est cubo cognitæ, hoc est $x^3 < 427$, nam $x^3 = 427 - 12x$; sumatur radix cubica ipsius 427 proxime minor, nempe 7, ejusque cubus 343 subtrahatur ex ipsa quantitate cognita 427, subtracto ex altera parte incognitæ cubo x^3. Ex residuo $12x = 84$ habetur $x = 7$, radix æquationis, utpote assumptæ radici cubicæ æqualis, nempe

$$x^3 + 12x = 427$$

Subtr. $\quad x^3 \qquad 343$

$$+ 12x = 84$$

Div. per 12 $\quad x = 7$

II. Sit æquatio propoſita $x^3 - 12x = 1584$: cum ſit $x^3 > 1584$, nam $x^3 = 1584 + 12x$; ſumatur radix cubica proxime major ipſius 1584, nempe 12, ejuſque cubus 1728 ſubtrahatur ex ipſo 1584, ſubtracto pariter incognitæ cubo x^3, habetur radix quæſita 12 aſſumptæ radici æqualis

$$x^3 - 12x = 1584$$

Subtr. $\quad x^3 \qquad 1728$

$$- 12x = -144$$

$$x = 12$$

III. Sit æquatio $x^3 + 27x = 28$, ut in præced. Prop. Facile cognoſcitur cubum x^3 minorem eſſe cubo ipſius 28: nam $x^3 = 28 - 27x$. Radix cubica proxime minor ejuſdem 28 eſt 3, ejuſque cubus 27, qui ſubductus a 28 relinquit 1: proinde fieret $x = \frac{1}{27}$, qui non eſt valor quæſitus, ut patet. Sumpta radice cubica adhuc minori, nempe 2, factaque cubi ſubtractione, idem ſequitur inconveniens: haberetur enim $x = \frac{20}{27}$. Sumatur itaque pro radice cubica ipſius 28 unitas, ejuſque cubo 1 ſubtracto ex eodem 28, habetur $x = 1$ radix quæſita. Ecce exemplum:

$$x^3 + 27x = 28$$

Subtr. $\quad x^3 \qquad 1$

$$+ 27x = 27$$

Div. per 27 $\quad x = \frac{27}{27} = 1$

Coroll. *Patet ratio, cur in hoc tertio exemplo radix cubica proxime minor ad rem non fuerit: ſed multo minor, imo omnium minima apte fuerit aſſumpta. Nam cubus incognitæ* x^3 *minimam habet rationem ad quantitatem* 28. *Adduntur enim illi* $27x$, *ut habeatur æquatio.* Hoc *pro ſimilibus caſibus advertatur.*

Schol. *Æquationes cubicæ, de quibus hactenus egimus in quibus ſcilicet una, vel altera radix rationalis inventa fuit, poterant certe reſolvi per ea, quæ diximus in* Cap. 7. *ſed quis non videt hanc viam eſſe breviorem, cum opus non ſit plures ultimi termini diviſores tentare, pluresque diviſiones peragere? ſentiant aliud qui volunt.*

PROPOSITIO VI.

Æquationes cubicas, quæ duas imaginarias & realem irrationalem continent, expedire.

I. SIt æquatio $x^3 - px \pm q = 0$, in qua duas radices imaginarias & realem, ſed non rationalem contineri jam conſtet *per Prop.* 4. & 5. *hujus*, inveniri debet ipſa radix irrationalis.

1. Subtrahatur $\frac{1}{27}p^3$ ex $\frac{1}{4}qq$, & ex residuo extrahatur radix quadrata, cui additur dimidium ultimi termini cum signo $+$, si habeatur in æquatione $-q$; cum signo $-$, si habeatur $+q$. Et ex hac summa extracta radice cubica, habetur prima pars radicis realis irrationalis quæsitæ

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$$

2. Dividatur quantitas p per triplum primæ partis radicis jam inventæ, quotus dabit alteram radicis partem priori addendam, scilicet

$$\frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Formula proinde generalis quæsitæ radicis est hujusmodi

$$x=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}}$$

II. Sit data æquatio $x^3-6x-16=0$, in qua per *Prop. præc.* radix realis est irrationalis: facta terminorum comparatione cum formula generali, erit $p=6$, & $q=16$, proinde $\frac{1}{27}p^3=8$, & $\frac{1}{4}qq=64$; hinc $\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3=64-8=56$.
Hujus residui radix quadrata, nempe $\sqrt{56}$, addatur ad $\frac{1}{2}q=8$, & ex hac summa extrahatur radix cubica, erit prima pars radicis irrationalis quæsitæ $\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}$. Et dividendo $p=6$ per triplum hujus primæ partis, obtinetur altera pars radicis, videlicet

6

$\frac{6}{3\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}}$. Tota itaque radix erit

$$x = \sqrt[3]{8+\sqrt{56}} + \frac{2}{\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}}$$

III. Si æquatio data ſit $x^3 + px \pm q = 0$, in qua tertius terminus eſt cum ſigno $+$, eadem eſt regula, ſi duo excipias. Primo $\frac{1}{27}p^3$ & $\frac{1}{4}qq$ addi debent, non ſubtrahi. Secundo radicis inventæ partes non ſunt addendæ, ſed ſecunda ex prima ſubtrahitur, ideoque formula generalis erit

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

Sit exemplum $x^3 + 3x - 26 = 0$, facta comparatione cum ſuperiori formula generali, erit $p=3$ & $q=26$, proinde $\frac{1}{27}p^3 = 1$, & $\frac{1}{4}qq = 169$. Hinc $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3 = 170$, & $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{170}$, quæ radix addatur ad $\frac{1}{2}q = 13$, & ex ſumma extrahatur radix cubica, erit $\sqrt[3]{13+\sqrt{170}}$ prima pars radicis, & dividendo per hujus triplum quantitatem $p=3$, habetur ſecunda pars ſubtrahenda ex prima; proinde tota radix erit

$$x = \sqrt[3]{13+\sqrt{170}} - \frac{1}{\sqrt[3]{13+\sqrt{170}}}$$

Demonſtratur. Fiat, ut in demonſtratione *Propoſ*. 4. æquatio ex duabus radicibus imaginariis & alia reali, quæ earum ſummæ erit æqualis, ut ſæpe dictum: habebitur, ut ſu-

supra, $-3ff+3gg=\pm p$; unde $ff-gg=\mp\frac{1}{3}p$, & elevando utrunque membrum ad tertiam potestatem habetur $f^6-3ggf^4+3g^4ff-g^6=\mp\frac{1}{27}p^3$.

Similiter quia $2f^3+6ggf=q$, deducitur $f^3+3ggf=\frac{1}{2}q$, & quadrando utrunque membrum, oritur $f^6+6ggf^4+9g^4ff=\frac{1}{4}qq$. Jam si ex hac æquatione subtrahatur prior illa cubica, residuum erit $9ggf^4+6g^4ff+g^6=\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3$; & extracta radice quadrata, habetur $3gff+g^3=\sqrt{\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3}$. Addatur deinde huic æquationi æquatio $f^3+3ggf=\frac{1}{2}q$, fit summa $f^3+3ggf+3gff+g^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3}$: ex qua si radix cubica extrahatur, prodit $f+g=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3}}$.
Dividendo autem æquationem $ff-gg=\mp\frac{1}{3}p$ per æquationem modo inventam, hoc est primum membrum per primum & secundum per secundum, prodit $f-g=$

$$\frac{\mp\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3}}}$$

Quæ duæ æquationes simul junctæ dant radicem realem quæsitam, nempe

$$2f=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3}}\pm\frac{\mp\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq\pm\frac{1}{27}p^3}}}$$

COROLL. *Ratio signorum* $\pm$, *vel* $\mp$, *facile intelligitur ex dictis supra* ad num. 3. hujus. *Ponitur* $\pm$, *ubi signum accipitur positivum: invertitur sic* $\mp$, *ubi negativum.*

SCHOL. I. *Per radicem irrationalem inventam dividi debet æquatio, & ad secundum gradum deprimi, ut radices imaginariæ innotescant. Quo id commodius fiat, substitua-*

tuatur loco ejusdem radicis irrationalis quantitas rationalis. Sit v. g. æquationis $x^3 - px - q = 0$ *radix irrationalis inventa* $\sqrt{3}$, *fiat* $\sqrt{3} = m$, *& dividendo per* $x - m$ *datam æquationem, oritur æquatio secundi gradus* $x^2 + mx + m^2 - q = 0$, *quæ duas radices imaginarias continet, facile inveniendas* per Prop. 1. & 3. Cap. 8. *Residuum autem illud* $m^3 - mp - q$, *quod ex hac divisione habetur, negligitur tanquam zero, seu nihil. Hoc recte fieri hinc patet, quod si substituas loco ipsius* m *incognitam* x, *cujus valorem repræsentat, termini æquationis datæ restituuntur.*

SCHOL. II. *Hactenus dicta sufficerent ad plenam æquationum cubicarum notitiam. Sed æquum non est Cardani regulas prorsus omittere, quas Cartesius, Newtonus, Wolfius & fere omnes recentiores celebrarunt. Earum inventionem Scipioni Ferreo Bononiensi Cardanus tribuit. Audiunt vulgo Cardani regulæ, quod fortasse ipse omnium primus publicaverit.*

PROPOSITIO VII.

Formulas generales, seu regulas Cardani dictas invenire.

I. SIt æquatio generalis $x^3 - px - q = 0$. Fiat $x = f + g$ (fieri debet $f - g$, ubi habetur $+ px$) erit

$$x^3 = f^3 + 3ffg + 3ggf + g^3$$

Est autem $3ffg + 3ggf = 3fg \times \overline{f+g}$, & ex hypothesi $x = f + g$, proinde $3fg \times \overline{f+g} = 3fgx$, adeoque $3fgx = 3ffg + 3ggf$, unde x^3

$$x^3 = f^3 + 3fgx + g^3$$
$$x^3 - 3fgx - f^3 - g^3 = 0$$

Comparando jam hujus æquationis terminos cum terminis æquationis generalis assumptæ, oriuntur duæ æquationes (duo puncta (:) divisionem significant) scilicet

1.ª $3fg = p$ $g = \frac{1}{3}p : f$ $g^3 = \frac{1}{27}p^3 : f^3$	2.ª $f^3 + g^3 = q$

Et substituendo in secunda æquatione valorem ipsius g^3, erit

Mult. per f^3 $\quad f^3 + \frac{1}{27}p^3 : f^3 = q$

$$f^6 + \frac{1}{27}p^3 = qf^3$$

Sch. Prop. 1. *Cap.* 5. $\quad f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27}p^3$

Hæc autem æquatio utpote derivativa secundi gradus facile resolvitur *per Prop.* 4. *Cap.* 8. hoc pacto

$$f^6 - qf^3 = -\frac{1}{27}p^3$$
$$\frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq$$

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4}qq = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$$

Extr. rad. $\quad f^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$

$$f^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad. Cub. $\quad f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$

 Erat

Erat autem $f^3 + g^3 = q$, proinde $g^3 = q - f^3$; substituendo igitur loco f^3 ejus valorem, habetur

$$g^3 = \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}$$

Extr. rad. Cubica $\quad g = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$

Atque hinc $x\,(= f + g) = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$
$+ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$

Quæ quidem est formula generalis radicis pro æquatione $x^3 - px - q = 0$.

Coroll. *Si æquatio habeat* $+q$, *ut* $x^3 - px + q = 0$, *tunc in formula generali radicis habetur* $-\tfrac{1}{2}q$. *In ceteris nihil differt, nempe* $x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$
$+ \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}$

II. Sit æquatio generalis $x^3 + px - q = 0$, fiat $x = f - g$ (ob $+px$), erit

$$x^3 = f^3 - 3ffg + 3ggf - g^3$$
$$-3ffg + 3ggf = -3fg \times \overline{f - g}$$

Sed ex hypothesi $x = f - g$, ergo $-3fg \times \overline{f - g} = -3fgx$. Proinde surrogatis in superiori æquatione, $-3fgx$ pro $-3ffg + 3ggf$, habetur

$$x^3 = f^3 - 3fgx - g^3$$
$$x^3 + 3fgx - f^3 + g^3 = 0$$

Com-

Comparatis terminis hujus cum terminis æquationis generalis assumptæ $x^3 + px - q = 0$, habentur duæ æquationes

1.ª $3fg = p$	2.ª $g^3 - f^3 = -q$
$g = \frac{1}{3} p : f$	
$g^3 = \frac{1}{27} p^3 : f^3$	

Ponatur in secunda valor ipsius g^3, erit

Mult. per f^3 $$\frac{1}{27} p^3 : f^3 - f^3 = -q$$

$$\frac{1}{27} p^3 - f^6 = -qf^3$$

Sch. Pr. 1. Cap. 5. $$f^6 - qf^3 = \frac{1}{27} p^3$$

Ex hac æquatione derivativa secundi gradus facile extrahitur radix *per Prop.* 4. *Cap.* 8. nam addendo utrinque $\frac{1}{4} qq$, habetur

$$f^6 - qf^3 + \frac{1}{4} qq = \frac{1}{4} qq + \frac{1}{17} p^3$$

Extr. rad. $$f^3 - \frac{1}{2} q = \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$$

$$f^3 = \frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$$

Extr. rad. Cub. $$f = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$$

Erat autem $g^3 - f^3 = -q$, proinde $g^3 = -q + f^3$, & surrogato valore ipsius f^3, oritur

$$g^3 = -\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$$

Extr. rad. Cubica $$g = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q + \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$$

Atque hinc $x\,(=f-g)=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$
$-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$

COROLL. II. *Quod si in æquatione fuerit* $+q$, *ut* $x^3+px+q=0$; *tunc in formula generali prima pars radicis habet* $-\tfrac{1}{2}q$, *eritque* $x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$
$-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$

PROPOSITIO VIII.

Æquationes cubicas per formulas generales Cardani resolvere.

OMnes æquationes Cubicæ, ut in principio hujus capitis annotavimus, ad quatuor sequentes formulas reducuntur.

I. $x^3-px-q=0$

II. $x^3-px+q=0$

III. $x^3+px-q=0$

IV. $x^3+px+q=0$

Singulis autem singulæ respondent formulæ generales radicis Cubicæ earundem, quas ex Cardani methodo *in præc. Propos.* invenimus, scilicet

I. $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}$

II. $\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3}}$

III.

III. $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$

IV. $\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$

Harum formularum uſum celebratiſſimum exempla, quæ ſequuntur, ſatis oſtendent.

I. Sit data æquatio $x^3-15x-4=0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3-px-q=0$, erit $p=15$, $\tfrac{1}{3}p=5$, & $\tfrac{1}{27}p^3=125$. Item $q=4$, $\tfrac{1}{2}q=2$, & $\tfrac{1}{4}qq=4$. Hinc $\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}=\sqrt{4-125}=\sqrt{-121}$, & $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ prima pars radicis. Similiter $\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}=\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ dat alteram partem. Unde habetur $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

Quod ſi ex binomio Cubico $2+\sqrt{-121}$, & $2-\sqrt{-121}$ radix extrahatur per methodum inferius tradendam, erit una pars radicis $2+\sqrt{-1}$, altera $2-\sqrt{-1}$, ideoque $x=4$.

Diviſa autem æquatio data per radicem jam inventam, hoc eſt per $x-4$, deprimitur ad æquationem ſecundi gradus, ejuſque radices reliquæ facile eruuntur *per Propoſ.* 1. & 3. *Cap.* 8.

II. Sit data æquatio $x^3+3x-6=0$. Fiat comparatio cum formula generali $x^3+px-q=0$, erit $p=3$, $\tfrac{1}{3}p=1$, & $\tfrac{1}{27}p^3=1$. Item $q=6$, $\tfrac{1}{2}q=3$, $\tfrac{1}{4}qq=9$,

pro-

proinde $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}=\sqrt{9+1}$, & $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ $=\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}$; atque $x=\sqrt[3]{3+\sqrt{10}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{10}}$.

III. Sit data æquatio $x^3-1x+6=0$. Facta terminorum comparatione, erit $p=1$, $\frac{1}{3}p=\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{27}p^3=\frac{1}{27}$. Item $q=6$, $\frac{1}{2}q=3$, $\frac{1}{4}qq=9$. Hinc $\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ $=\sqrt{9-\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{242}{27}}$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}=$ $\sqrt[3]{-3-\sqrt{\frac{242}{27}}}$ dat primam radicis partem. At vero $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}=\sqrt[3]{-3+\sqrt{\frac{242}{27}}}$ dat alteram; proinde $x=\sqrt[3]{-3-\sqrt{\frac{242}{27}}}+\sqrt[3]{-3+\sqrt{\frac{242}{27}}}=$ (radice cubica ex utroque membro extracta *per Prop.* 10. *hujus*) $-1-\sqrt{\frac{2}{3}}, -1+\sqrt{\frac{2}{3}}=-2$.

PROPOSITIO IX.

Idem problema brevius absolvitur.

Sit æquatio generalis cubicas omnes repræsentans, quæ secundo termino carent, $x^3+px+q=0$. Fiat $x=a+b$ (a & b sunt indeterminatæ) erit

$x^3=[a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=]\ a^3+3ab\times\overline{a+b}+b^3$

hoc est, $a^3+3abx+b^3+px+q=0$.

Fiant duæ æquationes, quarum altera contineat quantitates radicales, altera rationales, & utraque æquetur zero.

1.ª $3abx+px=0$ 2.ª $a^3+b^3+q=0$

hinc

hinc $b = -\frac{p}{3a}$, & $b^3 = -\frac{p^3}{27a^3}$. Hoc valore poſito in ſecunda æquatione, oritur

$$a^3 - \frac{p^3}{27a^3} + q = 0$$

Mult. per a^3

$$a^6 + qa^3 = \frac{p^3}{27}$$

Et reſoluta hac æquatione derivativa ſecundi gradus, addendo utrinque $\frac{1}{4}qq$, *per Prop.*4. *Cap.*8. habetur

$$a^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}$$

$$a = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

Erat autem $b = -\frac{p}{3a}$, proinde ſecunda pars radicis (ob $x = a + b$) obtinebitur dividendo $-p$ per triplum primæ partis radicis inventæ, hoc eſt per $3a$, eritque $x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$

I. Sit æquatio $x^3 - 7x - 6 = 0$, erit $p = -7$, & $\frac{p^3}{27} = -\frac{343}{27}$. At $q = -6$, & $\frac{1}{4}qq = 9$, hinc invenitur $x = \sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\tfrac{100}{27}}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{3 \pm \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}}$

II. Sit æquatio $x^3 - 6x + 8 = 0$: comparatis terminis cum terminis formulæ generalis, erit $p = -6$ & $\frac{1}{27}p^3$

$p^3 = -8$: item $q = 8$ & $\frac{1}{4} qq = 16$. Hinc habetur

$$x = \sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt[3]{-4 \pm \sqrt{8}}}.$$

Coroll. *Hæ formulæ radicis generales conveniunt, ut patet, cum formulis, quas* in Prop. 6. hujus *alia via tradidimus. Sunt hæ quidem multo simpliciores illis, quas in superiori* Prop. 7. *explicavimus, cum hæ unicam radicis extractionem, illæ duas requirant. Ceterum ubi in æquatione tres radices reales existunt, & nulla earum est rationalis, ut in æquatione* $x^3 - 3x + q = 0$ (*quæ anguli trisectionem importat*) *hoc est in casu irreductibili, de quo diximus* in Coroll. 2. Prop. 3. hujus, *utræque formulæ sunt inutiles. Nam radices illæ per ejusmodi formulas exprimi nullo modo possunt: quod fere omnes rei Analyticæ scriptores admonent.*

Schol. *Si in æquatione aliqua radix rationalis existat, ut in æquatione supra allata contigit, ejusmodi formulas inutiles tunc esse censeo, cum talis æquatio via brevissima resolvi possit* per Prop. 4. vel 5. hujus; *& absurdi genus sit, radicem rationalem per terminos radicales, imo etiam per radices imaginarias inquirere. Quod si æquatio duas radices imaginarias continet & unam realem irrationalem, tunc hujusmodi formulæ opportune adhibentur.*

PROPOSITIO X.

Ex binomio Cubico radicem extrahere.

I. Extrahenda sit radix cubica ex binomio $20 + \sqrt{392}$. Reducatur pars radicalis $\sqrt{392}$ ad simpliciorem expressionem *per Prop. 2. Cap. 4.*, fiet $14\sqrt{2}$. Cer-

Certum est, binomiæ radicis partem unam fore $\sqrt{2}$, vel hujus multiplum (ut in secundo exemplo) per numerum rationalem exprimendum, quem voco m. Nam si $\sqrt{2}$ non ingrederetur radicem, neque cubum ingrederetur, ut manifestum est.

Ponatur itaque binomii cubici $20 + 14\sqrt{2}$ pars rationalis $20 = a$, irrationalis autem $14\sqrt{2} = m\sqrt{c}$, erit tota radix $a + m\sqrt{c}$, ex qua (a, c, m sunt indeterminatæ) fiat cubus

$$a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3mmac + m^3c\sqrt{c}$$

Cujus pars rationalis est $a^3 + 3mmac$; pars irrationalis $3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c}$. Quia vero $\sqrt{c} = \sqrt{2}$, erit

$$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{2} + m^3 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

Posito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{2}$, habetur

$$3a^2 + 2 = 14$$
$$3a^2 = 12$$
$$a^2 = 4$$
$$a = 2$$

Valore autem ipsius a in altera radicis parte substituto, erit

$$a^3 + 3mmac = 8 + 12 = 20 .$$

Quod quidem cum hypothesi optime convenit, proinde radix cubica $a + m\sqrt{c} = 2 + \sqrt{2}$.

II. Sit extrahenda radix cubica ex binomio $\sqrt{18252} - 135$. Reducatur *per Prop.* 2. *Cap.* 4. ad simplicem expressionem, fiet $78\sqrt{3} - 135$.

Ponatur radix esse $m\sqrt{c} - a$ (hoc est $78\sqrt{3} = m\sqrt{c}$ & $-135 = -a$) & fiat cubus

$$m^3c\sqrt{c} - 3m^2ac + 3a^2m\sqrt{c} - a^3$$

Cum sit $\sqrt{3} = \sqrt{c}$, pars irrationalis erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 3a^2m\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, erit

$$3 + 3a^2 = 78$$

$$3a^2 = 75$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

Quo valore surrogato in altera radicis parte, habetur

$$-a^3 - 3m^2ac = -125 - 45 = -170$$

Quod cum hypothesi minime convenit, deberet enim esse -135; proinde signum est m sumptum esse justo minorem.

Ponatur $m = 2$, adeoque $m\sqrt{c} = 2\sqrt{3}$, erit

$$m^3c\sqrt{c} + 3a^2m\sqrt{c} = 24\sqrt{3} + 6a^2\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$$

Div. per $\sqrt{3}$) $\quad 24 + 6a^2 = 78$

$$6a^2 = 54$$

$$a^2 = 9, \text{ hinc } a = 3$$

Proinde pars rationalis $-a^3 - 3m^2ac = -27 - 108 = -135$. Quod quia cum hypothesi recte convenit, infertur, radicem cubicam $m\sqrt{c} - a = 2\sqrt{3} - 3$.

III. Sit binomium $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, cujus radix cubica quæ-

quæritur. Habetur *per Propos.* 2. *Cap.* 4. $\sqrt{-\frac{100}{27}} = \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$. Hinc ponatur $3 + \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}} = a + m\sqrt{c}$ radici, ex qua fiat Cubus

$$a^3 + 3a^2m\sqrt{c} + 3am^2c + m^3c\sqrt{c}$$

Et quia $\sqrt{c} = \sqrt{-\frac{4}{3}}$, pars radicalis erit

$$3a^2m\sqrt{c} + m^3c\sqrt{c} = 3a^2m\sqrt{-\frac{4}{3}} + m^3 \times -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$$

Posito $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{-\frac{4}{3}}$, oritur

$$3a^2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \quad \& \ 3a^2 = \frac{9}{3}$$

$$a^2 = \frac{9}{9}, \quad \& \ a = \pm 1$$

Quo valore substituto, habetur pars rationalis

$$a^3 + 3m^2ac = -1 + 4 = 3$$

Quod convenit cum hypothesi, unde radix quæsita $a + m\sqrt{c} = 1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$

IV. Extrahenda sit radix cubica ex binomio, cujus utraque pars est irrationalis $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, quod *per Prop.* 2. *Cap.* 4. fit $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$.

Ponatur prima pars radicis $9\sqrt{3} = m\sqrt{c}$, secunda vero $11\sqrt{2} = n\sqrt{d}$, adeoque tota radix erit $m\sqrt{c} + n\sqrt{d}$, & cubus ex illa factus

$$m^3c\sqrt{c} + 3m^2nc\sqrt{d} + 3mn^2d\sqrt{c} + n^3d\sqrt{d}$$

Atque hinc ob $m\sqrt{c} = 9\sqrt{3}$, erit una pars

$$m^3c\sqrt{c} + 3mn^2d\sqrt{c} = 3m^3\sqrt{3} + 6mn^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

Posito autem $m = 1$, & dividendo per $\sqrt{3}$, habetur

$$3 + 6n^2 = 9, \ \& \ 6n^2 = 6$$

$$\textit{hinc} \ n = 1$$

Gg 2 Ideo-

Ideoque hoc valore in altero membro substituto, erit

$$3m^2nc\sqrt{d}+n^3d\sqrt{d}=9\sqrt{2}+2\sqrt{2}=11\sqrt{2}$$

Quod sane cum hypothesi convenit, unde radix cubica quæsita $m\sqrt{c}+n\sqrt{d}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

COROLL. I. *Cum substituto valore provenit numerus numero rationali major (ut in secundo exemplo pro — 135 proveniebat — 170) signum est, valorem ipsius* m *sumptum esse justo minorem, adeoque sumendum alium illo majorem. Sin autem pro — 135 provenisset numerus minor, tunc esset indicium* m *sumptum esse justo majorem; proinde si in primo casu fuit* m = 1, *& in secundo* m = 2, *sumi debet intermedium, hoc est* m = 1 $\frac{1}{2}$. *Quo facto, si res nec bene succedat, signum est, binomii radicem, qualis quæritur, non haberi. Ceterum valor ipsius* m *semper debet esse vel numerus integer, vel saltem integri dimidius.*

COROLL. II. *Si* m *non est pars aliquota quantitatis, quæ signo radicali præfigitur, radix cubica non obtinetur, quod advertatur.*

SCHOL. I. *Præclara hæc methodus est* Jo: Wallisii (a), *quæ, ut ipse ait, est ceteris longe simplicior. Nam quæ primum* a Francisco Schotenio (b), *deinde* a Jacobo Ozanam (c) *aliisque inde scriptoribus tradita est regula, prolixior est, & plures exigit cautiones. Quæ autem traditur* a Wolfio (d) *per analysim, non modo prolixior est, sed æquationis cubicæ solutionem involvit, cujus radix non ita facile occurrit; imo illa, nisi sit rationalis, inveniri non potest.*

Ex

(a) Algebra Cap. 47. Oper. Tom. 2. (b) Comment. Geometr. Cartes. edit. 3. pag. m. 389. (c) Novueaux Elemens d'Algeb. Cap. 5. Probl. VIII. (d) Elementa Analys. edit. 3. Probl. 169.

Ex hac vero methodo cito certi sumus, an radix quaesita ex binomio dato extrahi possit.

SCHOL. II. *Pro facili & expedito examine radicis ex binomio cubico inventae, satis erit investigare ejus partem rationalem tantum: quod fit addendo cubum partis rationalis ad triplum ejusdem partis multiplicatae per quadratum partis alterius. Sic ex binomio* $78\sqrt{3}-135$ *fit radix inventa* $2\sqrt{3}-3$. *Adde cubum partis rationalis* -3, *scilicet* -27, *ad triplum ejusdem partis* -9 *multiplicatae per quadratum partis alterius* 12, *nempe ad* -108, *summa dat* -135: *quod quia convenit cum parte rationali binomii dati, constat* $2\sqrt{3}-3$ *esse veram radicem. Ceterum radix cubica per superiorem* Wallisii *methodum inventa hoc examine probari non indiget, cum de ipsa aliunde certi simus.*

SCHOL. III. *Quod si e binomio cubico radix extrahi nullo modo possit, & aequationis datae radices per Cardani regulas expressae valde implicatae appareant, tunc praestat, ut Franciscus Schootenius* (a) *opportune admonet, aequationem illam ex sola sua constitutione innuere, quam ipsam confuse per easdem Cardani formulas exprimere. Sic data aequatione* $x^3=8x+24$, *ejus naturam facilius concipies, si dicas, radicem hujus aequationis* x *talem esse, ut si multiplicetur per* 8, *& insuper addantur* 24, *aequalis sit futura suo cubo* x^3; *quam si eandem per Cardani formulam primam hoc modo exprimas* $x=\sqrt[3]{12+\sqrt{125\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{12+\sqrt{125\frac{1}{27}}}$. *Et sic de aliis.*

PRO-

(a) Comment. in lib. 3. Geom. Cartes.

PROBLEMATA CUBICA.

PROBL. I.

Data summa duorum cuborum & differentia laterum, latera ipsa invenire.

Sit summa cuborum $= 2a$, latera $= 2x$, quorum differentia sit $= 2b$, erit latus majus $x + b$, minus $x - b$ *per Theor. 3. Cap. 5.* Cubi vero ex ipsis dant æquationem, quæ sequitur

$$2x^3 + 6b^2x = 2a$$

Div. per 2. $$x^3 + 3b^2x = a$$

$$x^3 + 3b^2x - a = 0$$

Si fiat $a = 14$, $b = 1$, erit æquatio determinata

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

Quæ resolvitur *per Propos. 4. hujus*. Nam assumendo quadratum 4, erit $4 + 3 = 7$, per quem dividendo 14, quotus 2, (radix quadrati assumpti) dat radicem æquationis quæsitam. Erit ergo unum latus $x + b = 2 + 1$, alterum $x - b = 2 - 1$.

Brevius resolvitur *per Prop. 5. hujus*. Nam sumpta radice cubica proxime minori ipsius 14, nempe 2, fit cubus 8, & facta hinc inde utriusque cubi subtractione, habetur statim $x = 2$

$$\begin{array}{lrcr} & x^3 + 3x & = & 14 \\ \textit{Subtr.} & x^3 & & 8 \\ \hline & + 3x & = & 6 \\ & x & = & 2 \end{array}$$

PRO-

PROBL. II.

Data ſumma duorum cuborum & rectangulo ſub lateribus, invenire ipſa cuborum latera.

SIt Cuborum ſumma $= 2a$, rectangulum ex lateribus $= 2b$, latus unum quæſitum $= x$, & alterum $= y$, erit $x^3 + y^3 = 2a$, & $xy = 2b$; *hinc* $y = \frac{2b}{x}$, & $y^3 = \frac{8b^3}{x^3}$ Et ſubſtituto in prima æquatione loco y^3 ejus valore, habetur

Mult. per x^3 $\qquad x^3 + \frac{8b^3}{x^3} = 2a$

$$x^6 + 8b^3 = 2ax^3$$
$$x^6 - 2ax^3 = -8b^3$$

Quæ cum ſit derivativa ſecundi gradus, ſi fiat $x^3 = z$, erit *per Prop.*4. *Cap.*8. æquatio

$$z^2 - 2az = -8b^3$$

Si ſupponatur $2a = 72$, & $2b = 8$, æquatio convertitur in ſequentem

$$z^2 - 72z = -512$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\quad$ *adde* $\quad 1296 \qquad 1296$

$$z^2 - 72z + 1296 = 784$$

Extr. rad. $\qquad z^2 - 72z + 1296 = 784$

$$z - 36 = \sqrt{784} \ (= 28)$$
$$z = 36 + 28 = 64$$

Sed

Sed posita fuit $x^3 = z$, ergo $x = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{64} = 4$. Est ergo $x = 4$, & $y\left(= \frac{2b}{x}\right) = \frac{8}{4} = 2$.

PROBL. III.

Invenire tres numeros Arithmetice proportionales, quorum differentia & solidum ab illis factum sunt data.

SIt trium proportionalium quæsitorum differentia data $= d$, solidum $= s$, & numerorum quæsitorum primus $= x$, erit secundus $= x + d$, tertius $= x + 2d$ *per Schol. Prop. 3. Cap. 5.*, & solidum ab illis factum

$$x^3 + 3dx^2 + 2ddx = s$$

Auferatur secundus terminus *per Prop. 5. Cap. 6.* facto $x = y - d$, oritur æquatio secundo termino carens

$$y^3 * - ddy = s$$

Proinde si supponatur $d = 3$, & $s = 28$, æquatio eadem erit

$$y^3 * - 9y = 28$$

$$y^3 - 9y - 28 = 0$$

Hæc autem facile resolvitur *per Prop. 6. hujus*. Fiat enim $p = 9$, $q = 28$; ex formula generali $x^3 - px \pm q = 0$ invenitur $y = \sqrt[3]{14 + \sqrt{169}} + \frac{3}{\sqrt[3]{14 + \sqrt{169}}}$. Ex hoc binomio cubico extracta radice *per Prop. 10. hujus*, habetur

tur $y = 2 + \sqrt{1} + \frac{3}{2 + \sqrt{1}}$, factaque reductione, hoc est multiplicando primam partem per denominatorem alterius, & addendo illi $\frac{1}{3}p$, seu (in hoc exemplo) 3, habetur $\frac{8 + 4\sqrt{1}}{2 + \sqrt{1}}$. Fiat actu divisio *per Prop.6.Cap.4.* erit quotus 4. Est ergo $y = 4$; sed posita fuit $x = y - d$, unde erit $x = 4 - 3 = 1$. Sunt ergo numeri proportionales quæsiti 1, 4, 7, quorum solidum $= 28$.

COROLL. *Poterat quoque Problema resolvi* per Prop.4. vel 5. hujus, *cum unam radicem rationalem habeat, ut patet: imo &* per Propos. 1. Cap. 7. *cum habeatur 4 unus ex ultimi termini divisoribus, positoque* $y = 4$, *tota æquatio evanescat. Malui tamen* per Propos.6.hujus *illud resolvere, ut tyrones discant radices ex binomio Cubico extractas reducere, & alia, in quibus difficultatem quandoque solent experiri.*

PROBL. IV.

Datis duabus rectis, alteram earum ita dividere, ut quadratum indivisæ ad quadratum segmenti divisæ eam rationem habeat, quam segmentum idem ad segmentum reliquum.

Sint rectæ a & b, segmentum unum rectæ b esto x, erit alterum $b - x$. Est autem ex conditione probl.

$$a^2 . x^2 :: x . b - x$$

*Theor.*4. *Cap.*5. $\quad x^3 = a^2 b - a^2 x$

*Cor.*2.*Prop.*2. *Cap.*6. $\quad x^3 + a^2 x - a^2 b = 0$

 Po-

Ponatur $a = 1$, $b = 10$, erit æquatio determinata

$$x^3 + 1x - 10 = 0$$

Quæ quidem facile resolvitur *per Prop.4. vel 5. hujus*, ex quibus innotescit $x = 2$.

Quod si ponatur $a = 3$, $b = 2$, ita ut æquatio fiat

$$x^3 + 9x - 18 = 0$$

Tunc ad Cardani formulas est confugiendum. Erit itaque $p = 9$, $\frac{1}{3}p = 3$, $\frac{1}{27}p^3 = 27$. Item $q = 18$, $\frac{1}{2}q = 9$, & $\frac{1}{4}qq = 81$. Proinde $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{81 + 27} = \sqrt{108} = 3\sqrt{12}$, & radix æquationis $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{9 + 3\sqrt{12}} - \sqrt[3]{-9 + 3\sqrt{12}}$

PROBL. V.

Datis duabus rectis, alteram earum ita producere, ut alterius quadratum ad quadratum partis productæ eandem rationem habeat, quam pars producta ad totam rectam.

Sint rectæ datæ a & b, & producatur b, cujus pars producta sit x, tota recta erit $b + x$, & ex conditione probl.

$$a^2 . x^2 :: x . b + x$$

Theor.4. Cap.5. $x^3 = a^2 b + a^2 x$

Cor.2. Prop.2. Cap.6. $x^3 - a^2 x - a^2 b = 0$

Sit $a = 2$, $b = 12$, æquatio fiet

$$x^3 - 4x - 48 = 0$$

Cu-

Cujus resolutio facile obtinetur *per Prop.* 4. *vel* 5. *hujus*, ex quibus innotescit $x = 4$, unde $b + x = 16$. Quod si ponatur $a = 2$, $b = 5$, fiet æquatio, quæ nonnisi per Cardani regulas expeditur, nempe

$$x^3 - 4x - 20 = 0$$

Erit igitur $p = 4$, $\frac{1}{3} p = \frac{4}{3}$, & $\frac{1}{27} p^3 = \frac{64}{27}$. Item $q = 20$, $\frac{1}{2} q = 10$, $\frac{1}{4} qq = 100$. Hinc invenitur

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{\tfrac{2636}{27}}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{\tfrac{2636}{27}}}$$

Hujus autem binomii cubici radix (siquidem extrahi possit) obtinebitur *per Prop.* 10. *hujus*.

PROBL. VI.

Invenire triangulum ABC, *cujus tria latera* AB, AC, BC *&* *perpendiculum* DC *sunt in Arithmetica proportione*. Fig. 7.

Ponatur perpendiculum $CD = x$, differentia laterum trianguli $= d$, erit $BC = x + d$, $AC = x + 2d$, & $AB = x + 3d$ *per Schol.* 1. *Prop.* 3. *Cap.* 5. Est autem $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$ *per Prop.* 47. *l.* 1. *Eucl.* erunt proinde $AD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2}$, & $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}$; adeoque $AD = \sqrt{4dx + 4d^2}$, & $BD = \sqrt{2dx + d^2}$, proinde tota AB $(= x + 3d) = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$.

Fiat calculi commodo $x + 3d = m$, erit

$$m = \sqrt{4dx + 4d^2} + \sqrt{2dx + d^2}$$

$$m - \sqrt{4dx + 4d^2} = \sqrt{2dx + d^2}$$

Elevetur utrunque membrum ad quadratum, ut radicales exterminentur *per Reg.*4. *Prop.*1. *Cap.*5. erit

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 4dx + 4d^2 = 2dx + d^2$$

$$m^2 - 2m\sqrt{4dx + 4d^2} + 2dx + 3d^2 = 0$$

$$m^2 + 2dx + 3d^2 = 2m\sqrt{4dx + 4d^2}$$

Elevato rursus ad quadratum utroque hujus æquationis membro, & facta terminorum reductione *per Lem. Cap.*1. habetur

$m^4 - 12dxm^2 - 10d^2m^2 + 4d^2x^2 + 12d^3x + 9d^4 = 0$

Substitutis autem valoribus loco m^4 & m^2, factaque reductione *per Lem. cit.* invenitur tandem æquatio

$$x^3 - 24d^2x - 48d^3 = 0$$

Quæ quidem est eadem, quam innuit Newtonus (a) in hoc eleganti problemate, cujus ipse auctor est. Resolvitur autem ultimo *per Propos.* 8. *vel* 9. *hujus*. Nam fiat $d = 1$, $p = 24$, $\frac{1}{3}p = 8$, & $\frac{1}{27}p^3 = 512$: item $q = 48$, $\frac{1}{2}q = 24$ & $\frac{1}{4}qq = 576$, invenitur per Cardani formulas $x = \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$.

CA-

(a) Arithm. Univers. Probl. Geom. XIV. Londini an. 1722.

CAPUT X.

De Æquationibus Biquadraticis & aliis altiorum graduum.

SEcundus terminus, radicales & fractiones supponuntur, si forte adsint, ab æquatione sublatæ *per Prop.* 2. 8. & 9. *Cap.* 7.

PROPOSITIO I.

Æquationes biquadraticas ad cubicas reducere.

SIt æquatio generalis repræsentans omnes æquationes quarti gradus secundo termino carentes

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Cum hæc concipi possit veluti orta ex duabus æquationibus secundi gradus, nempe

$$x^2 + yx + f = 0 \text{ , \& } x^2 - yx + g = 0$$

Fiat ex earum multiplicatione æquatio æqualis priori $x^4 + px + qx + r = 0$, secundo termino carens (ob terminos $+ yx$ & $- yx$ contrario signo affectos) nimirum

$$\begin{array}{llll} x^4 & + fx^2 & - fyx & + fg = 0 \\ & + gx^2 & + gyx & \\ & - y^2x^2 & & \end{array}$$

Comparentur æquationis utriusque termini, erunt tres æquationes:

$$f+g-y^2=p\,,\ gy-fy=q\,,\ \&\ fg=r$$

Ex quibus efformari debet alia, in qua non occurrat alia incognita præter y, quæ in utraque componente est secundi termini coefficiens.

Hinc quia $f+g-y^2=p$, erit quoque $f+g=p+y^2$, & multiplicando omnes terminos per y, fit

$$fy+gy=py+y^3$$

Sed habetur ex secunda æquatione $gy-fy=q$; ergo hæ duæ æquationes simul additæ efficiunt $2gy=py+y^3+q$ Si subtrahantur vero, fiunt $2fy=py+y^3-q$; unde eruuntur ipsarum f, & g valores, scilicet

$$g=\frac{py+y^3+q}{2y}\,,\ f=\frac{py+y^3-q}{2y}$$

$$fg=\frac{py+y^3-q}{2y}\times\frac{py+y^3+q}{2y}$$

$$fg=\frac{p^2y^2+2py^4+y^6-q^2}{4y^2}$$

Mult. per $4y^2$

$$4fgy^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$$

Erat autem $fg=r$, proinde si utrunque membrum hujus æquationis multiplicetur per $4y^2$, erit $4fgy^2=4ry^2$, ideoque

$$4ry^2=p^2y^2+2py^4+y^6-q^2$$

$$\begin{array}{l} y^6+2py^4+p^2y^2-q^2=0 \\ \qquad\qquad\ -4ry^2 \end{array}$$

Hæc

Hæc æquatio, licet sexti gradus esse appareat, habetur tanquam cubica, cum omnes incognitæ termini sint divisibiles per 2; & dicitur *Cubica derivata*, cui innititur æquationum omnium quarti gradus resolutio, ut planum fiet.

Coroll. I. *Cum æquatio hæc* Cubica derivata *sit generalis, utpote orta ex æquatione illa generali* $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, *quæ æquationes omnes quarti gradus repræsentare supponitur, hinc est, quod data quarti gradus æquatione speciali, poterit statim haberi ejus Cubica derivata, substituendo in cubica generali loco* p, q *&* r *valores æquationis particularis datæ. Sit data æquatio* $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$, *erit* $p = -4$, $q = -8$, *&* $r = 35$. *Positis his valoribus in cubica generali, habetur cubica derivata particularis* $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$. *Similiter sit data æquatio* $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, *erit* $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$. *Unde Cubica derivata erit* $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$. *Quæ quidem semper considerari poterit ut simpliciter cubica, & tanquam mere cubica resolvi. Nam si ponatur* $y^2 = z$, *fiet* $z^3 - 34z^2 + 313z - 400 = 0$ *& ob* $z = y^2$, *erit* $\sqrt{z} = y$.

Coroll. II. *Si in duabus illis componentibus* $x^2 + yx + f = 0$, *&* $x^2 - yx + g = 0$ *ponatur valor duarum indeterminatarum* f *&* g per hanc Propos. *inventus, oriuntur duæ æquationes*

$$x^2 + xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

$$x^2 - xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$$

Quæ

Quæ quidem, cognito valore y, *fiunt omnino cognitæ, & determinatæ, ut patet.*

SCHOL. I. *Si in data æquatione particulari habeatur* $+p$, *tunc in utraque harum duarum ponitur* $+\frac{1}{2}p$. *Contra vero in utraque ponitur* $-\frac{1}{2}p$, *si æquatio particularis data habeat* $-p$.

SCHOL. II. *Si in data æquatione habeatur* $+q$, *tunc in una duarum, in qua scilicet habetur* $+yx$, *ponitur* $-\frac{q}{2y}$. *In altera, in qua est* $-yx$, *ponitur* $+\frac{q}{2y}$. *Contra vero si in data æquatione habeatur* $-q$, *ponendum est* $-\frac{q}{2y}$ *in illa, in qua habetur* $-yx$, *&* $+\frac{q}{2y}$ *in altera, ubi reperitur* $+yx$.

PROPOSITIO II.

Æquationes quarti gradus resolvere.

I. ÆQuatio data reducatur ad cubicam *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* & ex cubica derivata extrahatur radix *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. si sit rationalis, vel *per Propos.* 8. *aut* 9. si sit irrationalis. Radicis hujus cubicæ valor, tum etiam valores p & q æquationis datæ ponantur in duabus illis indeterminatis secundi gradus, quæ habentur *in Coroll.* 2. *Prop. præc.*, facile erit obtinere quatuor æquationis datæ radices, quemadmodum exempla rem illustrabunt.

I.

I. Sit æquatio, qua Cartesius (a) ipse utitur, $x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0$, erit (facta comparatione cum formula generali $x^4 + px^2 + qx + r = 0$) $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$, ejusque cubica derivata $y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* Inveniatur valor y *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 9. tollendo prius secundum terminum. Vel brevius reperiri potest dividendo æquationem ipsam per aliquod quadratum, quod inter divisores ultimi termini existat, ex. gr. per $yy - 16$. Sic enim divisio exacte succedit; unde $yy = 16$, & $y = 4$.

Hoc valore una cum valoribus p & q posito in duabus æquationibus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$, & $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0$, habentur duæ æquationes secundi gradus $x^2 + 4x + 2 = 0$, & $x^2 - 4x - 3 = 0$ *per Coroll.* 2. *Prop. præc.* in quibus apparent signa + & —, ut docuimus in *Schol.* 1. & 2. *Prop. cit.* earumque resolutio obtinetur *per Prop.* 1. & 3. *Cap.* 8. Radices enim prioris ambæ negativæ sunt $-2 + \sqrt{2}$, & $-2 - \sqrt{2}$; alterius vero affirmativæ $2 + \sqrt{7}$, & $2 - \sqrt{7}$.

II. Sit æquatio $x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$: comparatis terminis cum formula generali, erit $p = -12$, $q = 12$, & $r = -3$; ejusque cubica derivata $y^6 - 24y^4 + 156y^2 - 144 = 0$ *per Coroll.* 1. *Prop. præc.* Cujus radix invenitur *per Prop.* 4. *vel* 5. *Cap.* 6. Vel brevius dividendo æquationem per aliquem ultimi termini divisorem v. g. per $yy - 12$, per quem divisio exacte succedit. Est ergo $yy = 12$, & $y = 2\sqrt{3}$.

(a) Geometr. lib. III. edit. 3. pag. m. 80.

Ponatur hic valor simul & valores p & q in duabus indeterminatis secundi gradus, ut factum est supra in primo exemplo, erunt duæ secundi gradus æquationes $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, & $x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ *per Coroll. 2. & Schol. 1. & 2. Prop. præc.* Quarum radices facile obtinentur *per Prop. 1. Cap. 8.* addendo utrique quadratum quantitatis cognitæ secundi termini divisæ per 2, nempe addendo $+3$ (Nam $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, cujus quadratum $= 3$) Prioris ergo radices sunt $\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3}$, & $-\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3}$. Posterioris vero sunt $\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ & $-\sqrt{3+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$.

III. Sit æquatio $x^4 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$. Comparatis terminis cum formulæ generalis terminis, erit $p = -6$, $q = 12$ & $r = -10$, & ejus cubica derivata $y^6 - 12y^4 + 76y^2 - 144 = 0$, seu $z^3 - 12z^2 + 76z - 144 = 0$ *per Coroll. 1. Prop. præc.* Hæc autem cum nullum divisorem admittat, indicio est, non habere valorem rationalem. Inveniatur ergo valor ejusdem *per Prop. 8. Cap. 9.* Sed prius auferatur ab æquatione secundus terminus hoc pacto. Fiat $z - 4 = v$, erit $z = v + 4$, factaque potestatum substitutione, habetur transformata secundo termino carens, scilicet

$$\begin{array}{r|rrrr}
z^3 & = v^3 & + 12v^2 & + 48v & + 64 \\
-12z^2 & & -12v^2 & -96v & -192 \\
+76z & & & +76v & +304 \\
-144 & & & & -144 \\
\hline
\text{Summa} & v^3 & * & +28v & +32 = 0
\end{array}$$

Ex

Ex hac æquatione (convenit enim cum formula $x^3 + px + q = 0$) eruitur valor *v per Prop.*8. *Cap.*9. nempe

$$v = \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{7168}{27}}} - \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{7168}{27}}}$$

Sed posita fuit $z - 4 = v$, proinde erit

$$z = 4 + \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{7168}{27}}} - \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{7168}{27}}}$$

Erat autem $y^2 = z$, unde $y = \sqrt{z}$, atque hinc

$$y = 2 + \sqrt{\sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{7168}{27}}} - \sqrt[3]{-16 + \sqrt{\tfrac{7168}{27}}}}$$

Hoc valore ipsius y simul cum valoribus p & q surrogatis in duabus illis æquationibus secundi gradus, ut in primo & secundo exemplo factum est, hæ determinantur *per Coroll.*2. *Prop. præc.* & quatuor, quæ inde eruuntur, radices dant radices æquationis propositæ. Hoc autem cum calculum valde prolixum & permolestum exigat, necesse non erit ultra pergere: nam problemata, quæ ab æquationibus hujus generis dependent, ad Solidorum Geometriam amandantur.

COROLL. *Valor incognitæ* y *ex cubica derivata inventus vel rationalis est, ut in primo exemplo; vel radices quadraticas continet, ut in secundo; vel denique est irrationalis radicales cubicas involvens, ut in tertio. In primo & secundo casu æquatio quarti gradus dicitur* plana *& in duas secundi gradus divisibilis est, ut vidimus. In tertio casu æquatio vere & proprie quarti gradus dicitur, & a nonnullis* affectionem cubicam *continere. Problema autem, ad quod solvendum ordinatur, dicitur* solidum, *quod non per regu-*

lam & circinum, sed per aliquam sectionem Conicam, cujus ope radices exhibentur, construi solummodo potest.

SCHOL. I. *Cum cubica derivata tres radices reales & irrationales continet, adeoque irreducibilis est* per Coroll. Prop. 7. Cap. 9., *tunc æquatio quarti gradus ex eodem capite resolvi non potest.*

SCHOL. II. *Nec solvi similiter poterit si quatuor ejus radices fuerint omnes imaginariæ. Nam in hoc casu problema contradictionem involvere evidens est, cum nulla radix realis ad illud resolvendum valeat assignari. Sic æquatio* $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$, *quæ oritur ex duabus secundi gradus* $x^2 - 4x + 5 = 0$, & $x^2 + 4x + 7 = 0$, *invenitur habere quatuor radices imaginarias* $x = -2 \pm \sqrt{-1}$, & $x = -2 \pm \sqrt{-3}$. *Dignoscitur autem omnes radices imaginarias habere, si in illius cubica eodem signo + vel — secundus & tertius terminus pariter afficiantur. Neque etiam resolvi poterit æquatio quarti gradus, si radices omnes habeat reales. Tunc enim æquatio cubica, quæ ex ea derivatur, omnes radices reales habebit, proinde expediri non poterit ex dictis* in Schol. 1. hujus.

SCHOL. III. *Itaque æquationes biquadraticæ in eo tantum casu resolvi possunt, cum duas radices reales & duas imaginarias continent. Tunc enim ejus cubica una radice reali & duabus imaginariis constabit; adeoque tam ipsa cubica, quam biquadratica solutionem admittent. Hæc omnia plana erunt, si assumptis quatuor radicibus aut imaginariis, aut realibus, vel duabus realibus & duabus imaginariis, fiant de more æquationes biquadraticæ, & advertatur ad ea, quæ summatim in his Scholiis annotavimus. Nobis tantum otii non suppetit, ut singulos casus exemplis illustremus.*

PRO-

PROPOSITIO III.

Æquationem biquadraticam puram, vel secundo & quarto termino carentem solvere.

I. Sit æquatio biquadratica pura $x^4 = q$, vel $x^4 = -q$, extrahatur primo radix quadrata, erit $x^2 = \sqrt{q}$, vel $x^2 = \sqrt{-q}$. Deinde iterum extrahatur eadem radix, & habebitur $x = \sqrt{\sqrt{q}}$, vel $x = \sqrt{\sqrt{-q}}$. Sit ex. gr. $x^4 = 50$, erit $x^2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, extractaque rursus radice, erit $x = \sqrt{5\sqrt{2}}$.

II. Si in æquatione biquadratica præter secundum terminum, desit etiam quartus (sæpe fit, ut auferendo secundum terminum quartus quoque evanescat) ut $x^4 - 6x^2 - 4 = 0$, facile erit eam resolvere ut derivativam secundi gradus *per Prop.* 4. *Cap.* 8.

SCHOL. *Raphael Bombelli* (a) *Bononiensis anno* 1579. *æquationes biquadraticas resolvendi methodum in sua Algebra tradidit, sed a Ludovico Ferrariensi eam accepisse ferunt. Quicquid sit, Italorum hominum ingenium & gloria fuit hucusque progredi* (b). *Post Vietam Cartesius nova sua methodo mirum quantum illam illustraverit, quem deinde secuti sunt ducem quotquot de Analysi scripserunt. Ceterum majores nostri ultra æquationes biquadraticas non sunt progressi, summam rei difficultatem prospicientes. Recentiores aliqui generalem æquationes quascunque resolvendi methodum sese invenisse jactitarunt; non advertentes fortasse methodum inutilem eam jure censeri, quæ immensum*

(a) Algebra lib. 2. pag. 353. Wallisii Algeb. cap. 1v. pag. 229. (b) Histoire de l'Acad. Royale des scien. an. 1705. pag. m. 103.

ſum (quod ipſi fatentur) & inexplicabilem fere calculum poſtulat. Nos duntaxat de reductione æquationum quarti, quinti & ſexti gradus paulo poſt agemus: quæ ſi reducibiles ſint, facile poſſunt per ea, quæ de cubicis & biquadraticis diximus, reſolvi. Sin autem reduci non poterunt, ſaltem conſtabit, problema, ad quod illæ ordinantur, eſſe ſolidum, & nonniſi per ſectiones Conicas reſolvendum.

PROBLEMATA QUARTI GRADUS.

PROBL. I.

Numerum datum in duos ita dividere, ut eorum quadrata inter ſe multiplicata producant numerum æqualem numero dato c.

Esto numerus datus dividendus $= 2a$, & partium differentia $= 2x$, erit pars major $a + x$, minor vero $a - x$ *per Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5.* Et ex conditione problematis habetur

$$\overline{a + x}^2 \times \overline{a - x}^2 = c$$

$$x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = c$$

Brevitatis gratia, ut quantitates a & c determinentur, pono $2a = 14$, & $c = 2304$; erit æquatio, & quidem derivativa ſecundi gradus, facile reſolvenda *per Pr. 4. Cap. 8.*

$$x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$$

$$x^4 - 98x^2 = -97$$

adde $\qquad 2401 \qquad\qquad 2401$

$$x^4 - 98x^2 + 2401 = 2304$$

Extr.

Extr. rad. $x^2 - 49 = \pm \sqrt{2304} = \pm 48$

$$x^2 = 49 - 48 = \sqrt{1}$$

$$x = 1$$

Unde $a + x = 8$, & $a - x = 6$, quorum quadratis invicem multiplicatis æquatur $c = 2304$.

PROBL. II.

Invenire quatuor numeros in continua proportione Arithmetica, qui inter ſe multiplicati faciant numerum a.

POne numerum datum $a = 100$, & terminorum differentiam $= d$. Sit primus terminus x, erit ſecundus $x + d$, tertius $x + 2d$, & quartus $x + 3d$ *per Schol.* 1. *Propoſ.* 3. *Cap.* 5. quibus invicem multiplicatis, habetur æquatio

$$x^4 + 6dx^3 + 11d^2x^2 + 6d^3x - 100 = 0$$

Inventis autem *per Prop.* 9. *Cap.* 1. ultimi termini diviſoribus 1, 2, 4, 5 &c. tentetur diviſio per $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 4$ &c. quæ non ſuccedit ſine reſiduo. Tollatur ſecundus terminus æquationis *per Prop.* 5. *Cap.* 7. Quamobrem fiat $x = z - \frac{3}{2}d$, æquatio transformabitur in ſequentem derivativam ſecundi gradus; quæ ſecundo & tertio termino caret, nempe

$$z^4 * - \frac{5}{2}d^2z^2 * + \frac{9}{16}d^4 - 100 = 0$$

Pro-

Proinde si ponatur $d = 1$, erit

$$z^4 - \tfrac{5}{2}z^2 = 99\tfrac{7}{16}$$

adde $\qquad \tfrac{25}{16} \qquad \tfrac{25}{16}$

$$z^4 - \tfrac{5}{2}z^2 + \tfrac{25}{16} = 101$$

Extr. rad.

$$z^2 - \tfrac{5}{4} = \sqrt{101}$$

$$z^2 = \tfrac{5}{4} + \sqrt{101}$$

Extr. rad.

$$z = \sqrt{\tfrac{5}{4} + \sqrt{101}}$$

Sed posita fuit $x = z - \frac{3}{2}d$, erit ergo primus terminus quæsitus $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{3}{2}$, secundus $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} - \frac{1}{2}$, tertius $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{1}{2}$, quartus $x = \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}} + \frac{3}{2}$. Factum ex primo & quarto est $-1 + \sqrt{101}$, factum vero ex secundo & tertio est $+1 + \sqrt{101}$, atque hinc $\overline{-1 + \sqrt{101}} \times \overline{+1 + \sqrt{101}} = 100$.

PROBL. III.

In rectangulo datis areæ & diametri aggregato, & differentia laterum, invenire latera, diametrum, & aream. Fig. 8.

Sit areæ & diametri summa $= a$, differentia laterum $= 2d$, quæsitorum eorundem laterum summa $= 2x$, erit latus minus $AB = x - d$, majus vero $BG = x + d$ *per Theor. 3. Prop. 3. Cap. 5.* & ex eorum facto innotescit re-

rectanguli BD area $= x^2 - d^2$, quæ si auferatur ex summa data $= a$, prodit diameter $AC = a - x^2 + d^2$.

Cum igitur sit $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ *per Prop.* 47. *lib.* 1. *Eucl.*, erit in terminis analyticis

$$\overline{a - x^2 + d^2}^2 = \overline{x + d}^2 + \overline{x - d}^2$$

$$a^2 - 2ax^2 + 2ad^2 + x^4 - 2d^2x^2 + d^4 = 2x^2 + 2d^2$$

$$x^4 - 2d^2x^2 = 2d^2 - 2ad^2 - d^4 - a^2$$

Sch. Prop. 1. $\quad -2ax^2$

Cap. 5. $\quad -2x^2$

Et si ponatur $a = 58$, $d = 1$, æquatio determinabitur, nempe

$$x^4 - 120x^2 = -3479$$

Prop. 4. *Cap.* 8. $\quad 3600 \quad 3600$

$$x^4 - 120x^2 + 3600 = 121$$

$$x^2 = 60 = \pm\sqrt{121}$$

Extr. rad. $\quad x^2 = 60 - 11 = 49$

Extr. rad. $\quad x = 7$

Erit ergo latus minus $x - d = 6$, majus $x + d = 8$, & area rectanguli $= 48$, quæ detracta ex aggregato areæ & diametri a $(= 58)$ relinquit diametrum $= 10$, ut evidens est.

P R O B L. IV.

Data summa laterum trianguli, dataque ratione summæ quadratorum, quæ fiunt a lateribus, ad aream ejusdem trianguli, reperire latera. Fig. 9.

Pone summam laterum datam $= 2a$, atque hinc sume basim $AB = b$, erit aggregatum reliquorum $AC + CB = 2a - b$. Esto ex illis unum $AC = x$, erit aliud $2a - b - x$. Ratio vero summæ quadratorum ad trianguli aream ponatur ut m ad n, sive 8 ad 1.

Ut inveniatur trianguli ipsius area, subtrahe ex semisumma laterum $= a$ singula trianguli ejusdem latera, erunt tres differentiæ $a - b$, $a - x$, $-a + b + x$, ex quarum facto obtinetur trianguli area per ea, quæ diximus in *Probl.* 4. ~~*Cap.* 8, nempe~~

$\sqrt{-a^4 + 2a^3b + 2a^3x - 3a^2bx - a^2x^2 - a^2b^2 + ab^2x + abx^2}$, quam voco g.

Summa vero quadratorum ex lateribus ejusdem trianguli erit

$2x^2 + 2bx - 4ax + 2b^2 - 4ab + 4a^2$, quam voco f.

Est autem ex conditione problematis

$$f \,.\, g :: m \,.\, n$$

Th. 6. *Prop.* 3. *Cap.* 5. $f^2 \,.\, g^2 :: m^2 \,.\, n^2$

Theor. 4. *Prop. cit.* $f^2 \times n^2 = g^2 \times m^2$

Positis proinde valoribus m^2, n^2, f^2 & g^2, factaque de more reductione, oritur æquatio

x^4

$$\begin{array}{llllll} x^4 & +4ax^3 & +20a^2x^2 & +44a^2bx & -40a^3b & =0 \\ & +6bx^3 & -18abx^2 & -16ab^2x & +24a^2b^2 & \\ & & +3b^2x^2 & +2b^3x & -4ab^3 & \\ & & & -32a^3x & +20a^4 & \\ & & & & +b^4 & \end{array}$$

Jam si ponatur $a = 6$, & $b = 3$, prodit eadem æquatio determinata $x^4 + 42x^3 + 423x^2 - 2970 + 7209 = 0$

Hæc autem cum per nullum binomium dividi possit sine residuo, quærenda est ejus solutio (sublato secundo termino) *per Propos. 2. hujus*, ut innotescat latus $x = AC$, quo cognito, reliqua nota fiunt.

DEFINITIONES.

1. OMnis æquatio composita *reducibilis* dicitur, quæ per æquationes inferioris gradus exacte dividi, & ad inferiorem gradum deprimi potest. Sic æquatio quinti gradus, quæ dividi potest exacte per duas æquationes inferiores, alteram secundi & alteram tertii gradus, dicitur *Reducibilis*.

2. Æquatio composita, quæ per nullam æquationem inferioris gradus est divisibilis, dicitur *Irreducibilis*. Ut æquatio sexti gradus, quæ nec per duas æquationes, unam secundi, alteram quarti gradus, nec item per duas tertii gradus dividi exacte potest, dicitur *Irreducibilis*.

SCHOL. *Reductio, de qua hic agimus, eo tendit, ut dignoscatur an data æquatio deprimi possit ad gradum inferiorem; quod fiet, si illa sit exacte divisibilis in alias æqua-*

tiones inferioris gradus. Sic ex. gr. æquatio quinti gradus deprimitur ad unam cubicam & alteram secundi gradus, si exacte valeat in illas duas dividi. Sine hac doctrina haud satis distingueretur natura æquationum & problematum, unde ipsæ æquationes oriuntur. Nam problemata inferioris gradus facile confunderentur cum iis, quæ sunt superioris ordinis, & horum instar resolverentur, quod est absurdum. Utimur autem methodo generali & pulcherrima; digna sane, cui tyrones satis diligenter incumbant.

PROPOSITIO IV.

An Æquatio biquadratica reducibilis sit, explorare.

Sit æquatio quarti gradus indeterminata & generalis omnes alias repræsentans $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, quæritur an dividi possit exacte in duas alias secundi gradus, & quænam illæ sint.

Concipiatur illa orta ex duabus indeterminatis secundi gradus $x^2+fx+g=0$, & $x^2+hx+i=0$, quæ si invicem multiplicentur, oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{array}{l} x^4+fx^3+gx^2+ghx+ig=0 \\ \quad\;\; +hx^3+fhx^2+ifx \\ \qquad\qquad\;\; +ix^2 \end{array}$$

Comparentur termini utriusque æquationis, & fiant æquationes particulares:

1.ª $f+h=p$, 2.ª $g+fh+i=q$, 3.ª $gh+if=r$, 4.ª $ig=s$ Suma-

Sumatur ex 1ª valor h, erit $h = p - f$, & ex 4ª valor $i = \frac{s}{g}$, qui duo valores ſubſtituantur in 3ª æquatione loco h & i; fiet $pg - fg + \frac{fs}{g} = r$, & multiplicando per g, erit $pgg - fgg + fs = rg$, hoc eſt $fs - fgg = rg - pgg$; unde habetur $f = \frac{rg - pgg}{s - gg}$.

Cujus valor, ut plane innoteſcat, innoteſcere debet g. Eſt autem ex quarta æquatione $ig = s$; proinde g eſt unus ex diviſoribus ultimi termini cogniti s, quo cum ſigno $+$ vel $-$ dividi poteſt exacte ultimus terminus s. Tentandi ſunt igitur ſub utroque ſigno $\pm$ ſinguli diviſores, ut docuimus *Prop.* 1. *Cap.* 7. Sed exemplo res illuſtrabitur.

I. Sit æquatio data $x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$ erit $p = -4$, $q = -10$, $r = -28$, $s = -8$. Ut inveniatur quantitas g, tentandi ſunt omnes diviſores ultimi termini -8 ſub utroque ſigno, nempe ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Ponatur primo eſſe $g = 1$, erit ex ſuperiori formula $f = \frac{-28 + 4}{-8 - 1} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$. Item $h = -4 - \frac{8}{3} = -\frac{20}{3}$, & $i = -8$. His autem valoribus poſitis in duabus indeterminatis $x^2 + fx + g = 0$, & $x^2 + hx + 1 = 0$, fiunt $x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$, & $x^2 - \frac{20}{3}x - 8 = 0$, per quas ſi dividatur æquatio data $x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 8 = 0$, diviſio exacte non ſuccedit. Non eſt igitur $g = 1$, ut fuit ſuppoſitum.

Neque item diviſio ſuccedit, ſi ponatur $g = -1$, vel $g = +2$, vel $g = -2$, bene tamen ſi ponatur $g = 4$; tunc

tunc enim erit $f=2$, $h=-6$, & $i=-2$. Quibus valoribus in duabus illis æquationibus secundi gradus substitutis, habentur $x^2+2x+4=0$, & $x^2-6x-2=0$, per quas æquatio data exacte dividitur, ejusque radices ex resolutione duarum illarum secundi gradus facile obtinentur *per Prop.* 2. *Cap.* 8. nempe $x=-1\pm\sqrt{-3}$, & $x=3\pm\sqrt{11}$.

II. Sit æquatio $x^4-x^3-5x^2+12x-6=0$, ea ipsa, quam Newtonus in Arithm. Univers. etiam per *Divisores surdos* resolvit. Concipiatur orta ex duabus illis indeterminatis secundi gradus $x^2+fx+g=0$, & $x^2+hx+i=0$. Inventum jam fuit supra $f=\frac{rg-pgg}{s-gg}$, $h=p-f$, $i=\frac{s}{g}$. Comparatis autem æquationis datæ terminis cum formula generali, habetur $p=-1$, $q=-5$, $r=12$, $s=-6$; & ultimi termini (-6) divisores, ex quibus g (ob $ig=s$) est unus, sunt 1, 2, 3, 6, qui ponantur singulatim in superiori formula loco g cum signo $\pm$. Et cum frustra adhibeantur ± 1, ± 2, pono ipsum $g=3$; unde

$$f\left(=\frac{rg-pgg}{s-gg}\right)=\frac{36+9}{-6-9}=\frac{45}{-15}=-3\text{: Item } h$$

$$\left(=p-f\right)=-1+3=2\text{, \& } i\left(=\frac{s}{g}\right)=\frac{-6}{3}=-2.$$

Per hos valores determinatis duabus secundi gradus æquationibus, habetur $x^2-3x+3=0$, & $x^2+2x-2=0$, quæ æquationem datam exacte dividunt, earumque radices $x=1\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}}$, & $x=-1\pm\sqrt{3}$ quatuor æquationis datæ radices exhibent.

Co-

COROLL. *Substitutis ipsarum* f, g, h, & i, *valoribus in duabus illis secundi gradus æquationibus, si æquatio data per neutram possit exacte dividi, signum est, eam esse irreducibilem. Tunc autem ejus solutio quærenda est* per Prop. 2. hujus, *cum ex natura sua biquadratica sit: quemadmodum cubicas quæ deprimi nequeunt ad gradum inferiorem, per Cardani regulas solvimus.*

PROPOSITIO V.

An Æquatio quinti gradus reducibilis sit, inquirere.

Sit æquatio generalis repræsentans omnes quinti gradus æquationes $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, quæritur an exacte dividi possit in alias duas inferioris gradus, alteram scilicet secundi, alteram tertii gradus, & quænam sint tales æquationes. Supponantur illæ duæ æquationes esse $x^2 + fx + g = 0$, & $x^3 + hx^2 + ix + l = 0$, ex quarum facto habetur æquatio priori ex hypothesi æqualis, nempe

$$\begin{aligned} x^5 + fx^4 + ix^3 + lx^2 + flx + gl &= 0 \\ + hx^4 + gx^3 + ghx^2 + gix & \\ + fhx^3 + fix^2 & \end{aligned}$$

Comparentur termini, habentur quinque æquationes 1.^{a} $f + h = p$, 2.^{a} $i + g + fh = q$, 3.^{a} $l + gh + fi = r$, 4.^{a} $fl + gi = s$, & 5.^{a} $gl = t$.

Ex prima æquatione habetur $h = p - f$, & ex 2.^{a} $h = \frac{q - i - g}{f}$; erit ergo $p - f = \frac{q - i - g}{f}$, & multiplicando per f, oritur $pf - ff = q - i - g$. Ex

Ex hac æquatione sumatur valor i, erit $i = ff - pf + q - g$, & ex 4ª valor alter ipsius i, nempe $i = \frac{s - fl}{g}$, & in hac substituto valore l, qui ex æquatione 5ª desumitur (hoc est $l = \frac{t}{g}$) erit $i = \frac{s}{g} - \frac{ft}{gg}$, proinde oritur

$ff - pf + q - g = \frac{s}{g} - \frac{ft}{gg}$, & ordinando æquationem respectu ad incognitam f, habetur æquatio secundi gradus

$$\begin{array}{l} ff - pf + q = 0 \\ \quad + \frac{tf}{gg} - g \\ \qquad\quad - \frac{s}{g} \end{array}$$

Ex qua ut obtineatur valor ipsius f, determinari prius debet quantitas g, quæ habetur ut cognita, cum sit unus ex divisoribus ultimi termini æquationis datæ: nam ex quinta æquatione $gl = t$. Ponatur ergo $g = 1$. Sed claritatis gratia ecce exemplum.

Sit data æquatio $x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$, erit $p = -4$, $q = 6$, $r = -8$, $s = 5$, $t = -1$. Positis valoribus p, q, s, t, in illa æquatione secundi gradus cum valore g, fiet illa $ff + 3f = 0$, unde $f = -3$. Ponantur hi valores $f = -3$, & $g = 1$ in æquatione $x^2 + fx + g = 0$, oritur $x^2 - 3x + 1 = 0$, per quam dividi debet æquatio superior data $x^5 - 4x^4 + 6x^3$ &c. quæ divisio exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 1x^2 + 2x - 1 = 0$

$=0$, quæ quidem amplius divisibilis non est. Habentur ergo duæ æquationes quæsitæ, & æquationem datam esse reducibilem concluditur. Radices æquationis secundi gradus habentur *per Prop.* 1., *&* 3. *Cap.* 8. Cubicæ vero *per Propos.* 8. *vel* 9. *Cap.* 9.

COROLL. *Substitutis singulis ultimi termini divisoribus* $+1, -1$ *in æquatione* $x^2+fx+g=0$, *si per hanc æquatio data exacte dividi minime potuisset, signum erat, illam esse irreducibilem, & solidum quinque dimensionum problema proprie constituere, cujus latera per Curvas inveniri debent.*

PROPOSITIO VI.

An æquatio sexti gradus sit reducibilis examinare.

SIt æquatio generalis repræsentans omnes alias sexti gradus æquationes $x^6+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+v=0$, quæritur an divisibilis sit in alias duas inferioris gradus, & quænam illæ sint.

I. Supponatur esse altera quarti gradus $x^4+fx^3+gx^2+hx+i=0$, altera secundi gradus $x^2+mx+n=0$. Ex quarum facto oritur æquatio priori æqualis, nempe

$$\begin{array}{llllll} x^6+fx^5 & +gx^4 & +hx^3 & +ix^2 & +imx & +in=0 \\ \quad +mx^5 & +fmx^4 & +gmx^3 & +hmx^2 & +hnx & \\ & +nx^4 & +fnx^3 & +gnx^2 & & \end{array}$$

Unde facta terminorum utriusque æquationis comparatione, habentur sex æquationes. 1.ª $f+m=p$, 2.ª $g+fm+n$

$+n=q$, 3^a $h+gm+fn=r$, 4^a $i+hm+gn=s$, 5^a $im+hn=t$, 6^a $in=v$.

Sumatur ex prima valor f, nempe $f=p-m$, quo in secunda æquatione posito, oritur $g+pm-mm+n=q$, unde eruitur valor $g=q-pm+mm-n$. Cum autem habeatur in sexta $in=v$, erit $i=\frac{v}{n}$, quo valore posito in quinta æquatione, habetur $\frac{mv}{n}+hn=t$, ex qua eruitur valor h, nempe $h=\frac{t}{n}-\frac{mv}{nn}$. Jam valor ipsarum g, h, i ponatur in quarta æquatione, oritur $\frac{v}{n}+\frac{tm}{n}-\frac{m^2v}{nn}+qn-pmn+m^2n-nn=s$. Duæ fractiones $\frac{v}{n}+\frac{tm}{n}$ reducantur ad idem nomen cum alia $\frac{-m^2v}{nn}$, fiet æquatio $\frac{vn+tmn-m^2v}{nn}+qn-pmn+m^2n-nn=s$, & multiplicando omnes terminos per nn, ut fractio evanescat, fit $vn+tmn-m^2v+qn^3-pmn^3+m^2n^3-n^4=snn$, hoc est

$$m^2n^3-m^2v=pmn^3-tmn-vn-qn^3+n^4+sn^2.$$

Dividendo autem utrunque æquationis membrum per n^3-v, & ordinando æquationem secundi gradus in ordine ad incognitam m, habetur

m^2

$$\begin{array}{l} m^2 - pn^3m + vn = 0 \\ \quad + tnm + qn^3 \\ \qquad\quad - n^4 \\ \qquad\quad - sn^2 \\ \hline \qquad n^3 - v \end{array}$$

Est autem quantitas n unus ex divisoribus ultimi termini æquationis, nam ex sexta æquatione habetur $in = v$. Itaque divisores singuli, quibus æquari potest n, cum signis $+$ & $-$ substituendi sunt successive in superiori æquatione una cum valoribus p, q, t, s, v ad obtinendum valorem ipsius m. Sed claritatis gratia,

Sit æquatio data $x^6 - 13x^5 + 45x^4 - 71x^3 + 57x^2 - 16x + 2 = 0$, erit $p = -13$, $q = 45$, $r = -71$, $s = 57$, $t = -16$, $v = 2$. Ponatur $n = 2$. Æquatio superior secundi gradus fit $m^2 + 12m + 20 = 0$, unde *per Propos.* 1. *Cap.* 8. habetur valor ipsius $m = -2$, substituendus in æquatione assumpta $x^2 + mx + n = 0$ una cum valore n, quæ proinde fit $x^2 - 2x + 2 = 0$. Per hanc tentari debet divisio æquationis datæ $x^6 - 13x^5 + 45x^4$ &c. quæ quidem exacte dividitur, & in quoto habetur æquatio altera quarti gradus $x^4 - 11x^3 + 21x^2 = 7x + 1 = 0$, quæ amplius divisibilis non est. Æquatio autem $x^2 - 2x + 2 = 0$ exhibet duas radices $x = 1 \pm \sqrt{-1}$ *per Prop.* 1. *Cap.* 8. reliquæ habentur *per Pr.* 2. *hujus*, aut per Curvas si biquadratica solutionem non admittat.

II. Quod si, his peractis, æquatio data sexti gradus dividi non potuisset per æquationem secundi gradus, ut

 su-

ſupra, inventam, videndum eſt an illa ex duabus tertii gradus fuerit compoſita, ideoque in duas tertii gradus ſit diviſibilis. Sit igitur una ex his $x^3+fx^2+gx+h=0$, altera $x^3+mx^2+nx+l=0$, ex quarum facto oritur

$$\begin{array}{l} x^6+fx^5+gx^4+hx^3+hmx^2+hnx+hl=0 \\ \quad +mx^5+fmx^4+gmx^3+gnx^2+glx \\ \quad\quad +nx^4+fnx^3+flx^2 \\ \quad\quad\quad +lx^3 \end{array}$$

Quæ ex hypotheſi eſt æqualis æquationi generali repræſentanti omnes ſexti gradus æquationes, ſcilicet

$$x^6+px^5+qx^4+rx^3+sx^2+tx+v=0$$

Facta igitur terminorum comparatione habentur ſex æquationes, 1.ª $f+m=p$, 2.ª $g+fm+n=q$, 3.ª $h+gm+fn+l=r$, 4.ª $hm+gn+fl=s$, 5.ª $hn+gl=t$, 6.ª $hl=v$.

Cum ex prima deducatur $f=p-m$, multiplicando per m, erit $fm=pm-m^2$. Ponatur in ſecunda æquatione loco fm ejus valor, fiet $g+pm-m^2+n=q$, hoc eſt $g=q-pm+m^2-n$, ſeu $m^2-pm-n+q=g$: quæ quidem æquatio ſi ducatur in l, erit $m^2l-pml-nl+ql=gl$; ſed ex quinta $gl=t-hn$, erit ergo $m^2l-pml-nl+ql=t-hn$. Utraque ducatur in l, oritur $m^2ll-pmll-nll+qll=tl-hnl$. Cum autem ex ſexta ſit $hl=v$, ſubſtituto hoc valore, habetur $m^2ll-pmll-nll+qll=tl-vn$, ſeu $m^2ll-pmll+qll-tl=nll-vn$, unde eruitur valor $n=\dfrac{m^2ll-pmll+qll-tl}{ll-v}$.

In-

Inveniri debet jam alter ipsius n valor hac ratione. Ducatur æquatio tertia $h + gm + fn + l = r$ in l, oritur $hl + gml + fnl + ll = rl$; cumque ex sexta habeatur $hl = v$, substituto hoc valore, erit $v + gml + fnl + ll = rl$, seu $gml = rl - v - fnl - ll$. Habetur autem ex secunda æquatione $g = q - fm - n$, quæ si multiplicetur per ml, oritur $gml = qml - fm^2 l - mnl$; hinc $rl - v - fnl - ll = qml - fm^2 l - mnl$. Ponatur loco f ejus valor ex prima æquatione desumptus, erit $rl - v - pnl + mnl - ll = qml - pm^2 l + m^3 l - mnl$, seu $2mnl - pnl = m^3 l - pm^2 l + qml + ll - rl + v$, atque hinc tandem obtinebitur $n = \dfrac{m^3 l - pm^2 l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$.

Ex duobus ejusdem n valoribus inventis deducitur

$$\frac{m^2 ll - pmll + qll - tl}{ll - v} = \frac{m^3 l - pm^2 l + qml + ll - rl + v}{2ml - pl}$$

Factaque invicem multiplicatione, & ordinata æquatione tertii gradus, ad quem ascendit indeterminata m, erit

$$m^3 - \frac{\begin{array}{l} 2pl^3 m^2 - 2tl^2 m - pql^3 \\ - vplm^2 + p^2 l^3 m + ptl^2 \\ \quad + ql^3 m - l^4 \\ \quad + vqlm + rl^3 \\ \qquad - vrl \\ \qquad + vv \end{array}}{l^3 + vl} = 0$$

Quæ-

Quæritur modo valor ipsius m; sed prius determinari debet l, qui est unus ex divisoribus ultimi termini datæ æquationis. Nam $bl = v$ ex sexta æquatione. Utque id omne clarius intelligatur,

Sit æquatio $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$. Erit $p = -8$, $q = 13$, $r = -23$, $s = 10$, $t = -7$, $v = -12$, cujus divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 12, *per Prop. 9. Cap. 1.* Ponatur igitur $l = 1$, & singulis valoribus p, q, r, t, l in superiori æquatione substitutis, invenitur æquatio ipsa $m^3 + \frac{80m^2 + 65m - 4}{11} = 0$.

Hæc ut a fractione liberetur *per Prop. 10. Cap. 6.* fiat $m = \frac{y}{11}$, oritur $y^3 + 80y^2 + 715y - 484 = 0$, quæ quidem si dividatur per binomium $y + 11$, hoc est per unum ex divisoribus ultimi termini inventum *per Pr. 1. vel 2. Cap. 7.* divisio fit sine residuo, proinde innotescit $y = -11$, *per Sch. 1. Prop. 1. Cap. 6.* atque hinc $m = \frac{y}{11} = \frac{-11}{11} = -1$. Hoc valore ipsius m una cum valoribus p, q, t, l, positis in æquatione $n = \frac{m^2ll - pmll + ql - tl}{ll - v}$, fit $n = \frac{13}{13} = 1$.

Determinatis ergo jam valoribus m, n, l, determinata quoque existit æquatio assumpta $x^3 + mx^2 + nx + l = 0$, quæ fit $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$, per quam fieri debet divisio æquationis datæ $x^6 - 8x^5 + 13x^4 - 23x^3 + 10x^2 - 7x - 12 = 0$, quæ quidem exacte succedit, & habetur in quoto $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, quæ amplius non est divisivisibilis. Patet ergo æquationem datam reducibilem esse in duas tertii gradus $x^3 - 7x^2 + 5x - 12 = 0$, & $x^3 - 1x^2 + 1x + 1 = 0$. Quarum radices per Cardani regulas *ex Prop.* 8. *Cap.* 9. obtineri facile possunt.

COROLL. *Si æquationis divisio haud successisset, substituendi erant successive loco* l *singuli divisores ipsius* $v = -12$. *At si divisoribus his frustra tentatis, divisio fieri non possit, æquatio erit revera sexti gradus & irreducibilis.*

SCHOL. *Plerique de his reductionibus agunt, ubi compositarum æquationum radices rationales inquirunt, ad quas proprie pertinent. At differre huc nobis placuit, quod tyrones sine prævia resolutione æquationum eas haud satis percipere valeant, ut ex reductionibus æquationum quinti & sexti gradus supra allatis evidens sit.*

CAPUT XI.

De limitibus radicum, earumque approximatione.

PROPOSITIO I.

Radicum limites invenire.

INveniri debent per Analysim duæ quantitates, inter quas radix æquationis continetur, quæ *limites* dicuntur, hoc pacto:

I. Sit æquatio $x^2 + px - q = 0$, erit $x^2 + px = q$, & sublato ex uno membro x^2, remanet $px < q$, atque hinc $x < q : p$. Duo puncta (:) sunt nota divisionis.

Si-

Similiter quia $x^2 + px = q$, sublato ex una parte px, erit $q > x^2$, & $\sqrt{q} > x$. Multiplicando autem per x, erit $x\sqrt{q} > x^2$, & addendo utrinque px, habetur $x\sqrt{q} + px > x^2 + px$; sed $x^2 + px = q$, proinde erit quoque $x\sqrt{q} + px > q$; atque hinc habetur $x > \dfrac{q}{p + \sqrt{q}}$. Sunt ergo limites quæsiti $q : p$, & $q : (p + \sqrt{q})$ unde propositæ æquationis radix minor est $q : p$, & major $q : p + \sqrt{q}$.

Sit exemplum $x^2 + 4x - 12 = 0$, erit $p = 4$, $q = 12$, unde $q : p = 12 : 4 = 3$; & $q : (p + \sqrt{q}) = 12 : 4 + 3 = 12 : 7 = 1\frac{5}{7}$. Sunt ergo limites quæsiti 3, & $1\frac{5}{7}$ proinde radix nequit esse major quam 3, nec minor quam $1\frac{5}{7}$. Equidem si tentetur divisio per $x + 2$, minime succedit; bene tamen succedit exacte per $x - 2$, & habetur in quoto altera æquationis radix $x + 6$. Unde vel hoc uno exemplo patet, beneficio limitum nos multo labore liberari, cum ex omnibus ultimi termini divisoribus duo tantum tentandi fuerint $x + 2$, & $x - 2$. *Vide Coroll. 2. hujus.*

II. Sit $x^2 - px + q = 0$, erit $x^2 + q = px$, proinde $x^2 < px$, & dividendo per x, $x < p$. Similiter quia $x^2 + q = px$, erit $q < px$, & $q : p < x$. Sunt ergo limites quæsiti p, & $q : p$, ita ut radix minor sit quantitate cognita p, sed major quam $q : p$.

Sit exemplum $x^2 - 3x + 3 = 0$, erit $p = 3$, & $q = 3$, cujus limites sunt $p = 3$, & $q : p = 3 : 3 = 1$. Radix ergo non erit major quam 3, nec minor unitate, nempe $x = 1\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$. *Vide Coroll. 3. hujus.*

III. Sit $x^2 - px - q = 0$, erit $x^2 = px + q$, proinde $x^2 > q$, ideoque $x > \sqrt{q}$, & multiplicando utrinque per

$\sqrt{q}$

$\sqrt{q}$, habetur $x\sqrt{q} > q$. Jam si in æquatione $x^2 = px + q$ loco ipsius q ponatur $x\sqrt{q}$, erit $x^2 < px + x\sqrt{q}$, & dividendo per x, erit $x < p + \sqrt{q}$.

Pariter quia $x^2 = px + q$, erit $x^2 > px$, & dividendo per x, erit $x > p$, & multiplicando utrinque per p, erit $px > pp$; sed $x^2 = px + q$, ergo $x^2 > pp + q$, & extrahendo utrinque radicem secundam, habetur $x > \sqrt{pp+q}$.
Sunt ergo limites quæsiti $p + \sqrt{q}$, & $\sqrt{p^2 + q}$, hoc est radix debet esse minor quam $p + \sqrt{q}$, sed major quam $\sqrt{pp+q}$.

IV. Sit æquatio cubica secundo termino carens $x^3 - qx + r = 0$, erit $x^3 = qx - r$, unde $x^3 < qx$, & dividendo per x, $x^2 < q$; ideoque $x < \sqrt{q}$. Similiter cum sit ex hypothesi $x^3 - qx + r = 0$, erit $x^3 + r = qx$, atque hinc $qx > r$, & $x > r : q$.
Sunt ergo limites quæsiti $\sqrt{q}$, & $r : q$, ita ut radix æquationis nequeat esse major $\sqrt{q}$, nec minor $r : q$.

Sit exemplum $x^3 - 19x + 30 = 0$, erit $q = 19$, $r = 30$, unde $\sqrt{q} = 4$, & $r : q = \frac{30}{19} = 1\frac{1}{2}$ circiter. Tentanda est ergo divisio per $x + 2$, vel $x - 2$, vel $x + 3$, aut $x - 3$, & quidem exacte succedit per $x - 2$, & habetur in quoto æquatio secundi gradus $x^2 + 2x - 15 = 0$, cujus una radix est $+3$, altera -5 *per Prop.* 1. *vel* 3. *Cap.* 8.

V. Sit æquatio cubica $x^3 + qx - r = 0$, erit $x^3 + qx = r$; & subtrahendo ex una tantum parte x^3, erit $qx < r$; dividendo autem per q, habetur $x < r : q$ pro primo limite.

Similiter quia $x^3 + qx = r$, sublato ex una tantum parte qx, erit $x^3 < r$, & $x < \sqrt[3]{r}$, & elevando ad secundam potentiam utrunque membrum, erit $xx < \sqrt[3]{r^2}$, & multiplicando per x, erit $x^3 < x\sqrt[3]{r^2}$. Hoc autem valore in æquatione data substituto, habetur $qx + x\sqrt[3]{r^2} > r$, proinde $x > \frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$ dat alterum limitem quæsitum.

Radix igitur minor est $r : q$, sed major $\frac{r}{q + \sqrt[3]{r^2}}$

VI. Sit æquatio quarti gradus $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, erit $x^4 - px^2 = qx + r$, proinde $x^4 > px^2$, alias in hac ipsa æquatione $qx + r$ non esset quantitas positiva. Est ergo $x^2 > p$, & $x > \sqrt{p}$.

Similiter quia $x^4 - px^2 - qx = r$, si dividatur primum membrum per x, erit $x^3 - px - q < r$, pariterque $x^3 - px < r + q$. Dividatur primum membrum per x, erit multo magis $x^2 - p < r + q$, item $x^2 < r + q + p$, & extracta radice, habetur $x < \sqrt{r + q + p}$. Sunt ergo limites $\sqrt{p}$, & $\sqrt{r + q + p}$.

Sit exemplum $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$, erit $p = 8$, $q = 4$, $r = 3$; hinc $\sqrt{p} = 2$, & $\sqrt{r + q + p} = 1 + 2 + 2 = 5$. Est ergo radix inter limites 2 & 5, nempe 3.

COROLL. I. *Eadem ratione inveniri possunt limites pro iisdem æquationibus etiamsi nullo termino careant; tum etiam pro æquationibus altiorum graduum, quemadmodum egregie fecit Florimundus de Beaune* (a), *cui tam præclarum inventum, teste Erasmo Bartolino, debemus acceptum.*

COROLL.

(a) V. Introduct. ad Geometriam Cartes. Amstelodami an. 1683. pag. 63.

COROLL. II. *In limitibus designandis numeri integri sufficiunt; ideoque fractiones tuto negligi possunt, præsertim in extractione radicum. Item ex radicalibus, quæ in formulis limitum apparent, satis est radicem extrahere proxime minorem, neglectis fractionibus, ut limes sit quantitas a fractionibus immunis & rationalis.*

COROLL. III. *Quanquam in æquatione generali quantitates* p, q, r *&c. denotent quantitates negativas, in speciali tamen æquatione quantitates omnes tanquam positivæ accipiuntur, ut exempla superiora satis docent.*

PROPOSITIO II.

Radicum limites pro quacunque æquatione methodo Newtoniana indagare.

I. MUltiplicentur singuli datæ æquationis termini per numerum dimensionum, quas in illis habet incognita, hoc est per progressionem Arithmeticam naturalem descendentem, ita ut ultimus terminus sit zero, & factum dividatur per radicem æquationis. Deinde æquatio, quæ oritur uno gradu inferior, multiplicetur per aliam similem progressionem Arithmeticam, & hoc factum similiter dividatur per radicem æquationis; quod quidem toties fiet, donec occurrat æquatio simplex linearis.

Sit æquatio A,	$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$
Progr.	$3. \quad 2. \quad 1. \quad 0.$
Div. per x	$3x^2 - 2x^2 - 14x = 0$

$$B, \quad 3x^2 - 2x - 14 = 0$$

Progr. 2. 1. 0.

Div. per x

$$6x^2 - 2x = 0$$
$$6x - 2 = 0$$
$$C, \quad 3x = 1$$

Æquationes A, B, C dicuntur æquationes limitum. Jam vero ad indagandum limitem, intra quem continentur radices positivæ datæ æquationis, hæc est regula: in æquationibus A, B, & C loco incognitæ x ponitur quilibet numerus 1, vel 2, vel 3 &c. incipiendo ab unitate: nam numerus, qui in singulis æquationibus summam positivam efficit, dat limitem quæsitum. Sic in superiori exemplo ponendo 1 loco x, in æquatione C, $3x - 1 = 2$, prodit summa positiva, sed in æquatione B, $3x^2 - 2x - 14 = -13$ prodit negativa. Idem sequitur ponendo 2, & 3 loco x. Quare infertur limitem his numeris fore majorem. Pono igitur 4, & prodeunt numeri omnes positivi scilicet

$$3x - 1 = 11.$$
$$3x^2 - 2x - 14 = 16$$
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 16$$

Omnes hi numeri positivi indicant numerum 4 esse limitem, quem nulla potest radicum positivarum transcendere. Et quidem dividendo superiorem æquationem per $x - 3$, divisio exacte & sine residuo succedit, adeoque habetur una ex radicibus positivis ejusdem æquationis $+3$.

II.

II. Pro inveniendo limite, quem maxima radicum negativarum non transcendit, examinandum est simili ratione, quinam numerus negativus positus loco x in iisdem tribus æquationibus A, B, & C efficiat summam positivam in æquationibus illis, quæ habent dimensiones numero pares, summam vero negativam in æquationibus dimensionum numero imparium. In superiori exemplo frustra tentantur -1, -2, -3, -4: sed posito -5 loco x, prodit summa negativa in æquationibus numero imparium dimensionum, positiva vero in æquationibus dimensionum numero parium; proinde -5 est limes, quem radix negativa non trascendit, videlicet

$$3x - 1 = -14$$
$$3x^2 - 2x - 14 = +71$$
$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = -6$$

Itaque si superior æquatio data $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ dividatur per $x + 4$, divisio exacte succedit, unde habetur radix negativa -4.

III. Pro obtinendo radicum negativarum limite adhiberi possunt etiam numeri affirmativi, modo mutentur signa terminorum parium in æquationibus limitum, quod in sequenti exemplo factum videbis, tunc enim radices falsæ fiunt veræ *per Prop.3. Cap.6.* ideoque assumi possunt numeri affirmativi.

Sit æquatio $x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$, facta eadem operatione, ut supra, habentur æquationes limitum, scilicet

$$5x - 1 = 0$$
$$10x^2 - 4x - 7 = 0$$
$$10x^3 - 6x^2 - 21x + 1 = 0$$
$$5x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 4 = 0$$
$$x^5 - 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x - 4 = 0$$

In quibus si loco x substituantur 1, vel 2, vel 3, non ubique prodit summa positiva; substituendo autem 4, summa oritur in singulis positiva, proinde 4 est major, quam radicum positivarum maxima non transgreditur.

Ad inveniendum limitem, quem radicum negativarum maxima non excedit, mutatis terminorum parium signis, adhibentur eodem modo numeri affirmativi. Itaque ponendo in singulis æquationibus loco x numerum 2, prodit ubique summa affirmativa. In æquatione tamen $x^5 + 1x^4 - 7x^3 + 1x^2 + 4x + 4 = 0$, prodit zero, quod indicat numerum 2 non modo esse limitem quæsitum, sed etiam unam ex radicibus ejusdem æquationis, quæ proinde facit, ut omnia producta se mutuo destruant *per Sch.* 1. *Propos.* 1. *Cap.* 6. En limitum æquationes cum signis mutatis.

$$5x + 1 = 11$$
$$10x^2 + 4x - 7 = 41$$
$$10x^3 + 6x^2 - 21x - 1 = 61$$
$$5x^4 + 4x^3 - 21x^2 - 2x + 4 = 28$$
$$x^5 + 1x^4 - 7x^3 - 1x^2 + 4x + 4 = 0$$

Habentur ergo limites 4, & -2, inter quos radices omnes æquationis datæ continentur. *Ra-*

Ratio methodi hujus eſt, quia in æquatione radicem poſitivam habente omnis numerus poſitivus loco incognitæ x ſubſtitutus vel eſt æqualis ipſi radici, & ſic æquatio illa tota evaneſcit *per Sch.* 1. *Prop.* 1. *Cap.* 6., vel eſt major, & tunc efficit omnia illa producta poſitiva eſſe; vel eſt ipſa radice minor, & in hoc caſu aliquod ex illis productis negativum apparet. Sit brevitatis gratia æquatio ſecundi gradus A, $x^2 + 3x - 10 = 0$, cujus radices ſunt 2 & -5; ex ſuperiori canone limitum æquatio erit B, $2x + 3 = 0$. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum poſitivum 3 radice ipſa poſitiva 2 majorem; erit A, $9 + 9 - 10 = 8$, & B, $6 + 3 = 9$; ideoque 3 eſt limes æquationis quæſitus. Quod ſi ponatur 1 eadem radice poſitiva 2 minor, erit A, $1 + 3 - 10 = -6$, & B, $2 + 3 = 5$: quod regulæ repugnat, ut patet, cum productum unum ſit negativum. Proinde 1 nequit eſſe datæ æquationis limes.

Similiter in eadem æquatione radix negativa eſt -5. Pono in utraque æquatione A & B loco x numerum negativum -6 radice ipſa negativa majorem; quo quidem ſubſtituto, erit A, $36 - 18 - 10 = 8$; at B, $-12 + 3 = -9$, quod cum regula optime convenit. At ſi ponatur -4, numerus ſcilicet radice ipſa negativa minor, tunc facta ſubſtitutione in iiſdem æquationibus A & B, prodit A, $16 - 12 - 10 = -8$, at B, $-8 + 3 = -5$ quod regulæ adverſatur; cum æquatio A, quæ paris dimenſionis eſt, producta poſitiva debeat efficere. Igitur ex hujuſmodi productis affirmativis & negativis limites æquationum recte inferuntur.

COROLL. *Inventis limitibus, non solum minimo labore inveniuntur radices rationales, si quæ sunt, quas alioquin per ultimi termini divisores inquirere valde laboriosum est; sed etiam in cognitionem devenimus, an æquatio proposita radices surdas habeat. Nam si illa per nullum numerum intra limites constitutum exacte dividi possit, signum est, ipsam non alias nisi surdas radices habere. Sic æquationis* $x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0$, *quam Cl. auctor affert in Arithm. Univers. radices consistunt inter limites* 2 *&* -3; *unde tentandi sunt solummodo divisores* $1, -1$ *&* -2, *qui inter eos limites continentur, ut dignoscatur an talis æquatio per eos dividi exacte possit, adeoque radices rationales habeat. At quantus labor, si ad hanc rem sub utroque signo* $\pm$ *omnes ultimi termini* 120 *divisores tentandi sint?*

PROPOSITIO III.

Æquationum radices prope veras per approximationem extrahere.

I. Sit æquatio data $x^3 - 12x - 12 = 0$. Inveniantur limites *per Prop. 1. vel 2. hujus*, qui sunt 4 & 3; proinde radix, cum sit media inter 4 & 3, est incommensurabilis, quæ tamen inveniri poterit prope vera hac methodo.

Sumatur semidifferentia inter duos limites 4 & 3, nempe $\frac{1}{2}$, quæ addatur limiti minori, ita ut fiat $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, & dividatur æquatio data per $x - \frac{7}{2}$, residuum est cum signo $-$, hoc est $-11\frac{1}{8}$. Proinde sumatur iterum semidifferenferentia inter limitem majorem 4 & $\frac{7}{2}$, quæ eſt $\frac{1}{4}$, & addatur ad $\frac{7}{2}$, fiet $= \frac{15}{4}$. Dividatur æquatio data per $x - \frac{15}{4}$, reſiduum adhuc eſt negativum, nempe $- \frac{17}{64}$. Itaque rurſus ſumatur ſemidifferentia inter limitem majorem 4 & $\frac{15}{4}$, nempe $\frac{1}{8}$, quæ addatur ad $\frac{15}{4}$, fit $= \frac{31}{8}$. Dividatur per $x - \frac{31}{8}$ æquatio data, reſiduum adhuc eſt negativum, nempe $- \frac{161}{512}$. Igitur ſemidifferentia inter majorem limitem 4 & $\frac{31}{8}$, quæ eſt $\frac{1}{16}$, addenda eſt ad $\frac{31}{8}$, ut fiat $= \frac{63}{16}$, factaque diviſione æquationis datæ per $x - \frac{63}{16}$, habetur reſiduum poſitivum $+ 1 \frac{3263}{4046}$, proinde $\frac{63}{16}$ eſt limes, qui radicem jam tranſcendit, adeoque propinquiores quæſitæ radicis limites ſunt $\frac{63}{16}$ & $\frac{31}{8}$, hoc eſt $\frac{56}{16}$ & $\frac{62}{16}$; & radix ipſa media eſt inter $3 \frac{15}{16}$ & $3 \frac{14}{16}$; ideoque differentia non eſt niſi $\frac{1}{16}$.

II. Si radix adhuc propinquior deſideretur, continuari poteſt eodem modo approximatio. Nam in ſuperiori exemplo cum ex additione ſemidifferentiæ $\frac{1}{16}$ facta ad $\frac{31}{8}$ innoteſcat provenire reſiduum poſitivum $+ 1 \frac{3263}{4096}$, addi poteſt ad $\frac{31}{8}$ dimidium tantum ejuſdem ſemidifferentiæ $\frac{1}{16}$, nempe $\frac{1}{32}$, ut fiat $= \frac{125}{32}$, factaque diviſione æquationis datæ per $x - \frac{125}{32}$, provenit reſiduum pariter poſitivum $+ \frac{23909}{32768}$. Habentur igitur duo limites quæſitæ radicis adhuc propinquiores, nempe $\frac{31}{8}$ & $\frac{125}{32}$, hoc eſt $\frac{124}{32}$ & $\frac{125}{32}$; proinde radix eſt inter $3 \frac{28}{32}$ & $3 \frac{29}{32}$, ita ut differentia tantum ſit $\frac{1}{32}$. Hac ratione continuari poteſt approximatio quantum quis voluerit.

Coroll. *Radix ergo datæ æquationis prope vera in decimalibus notis erit inter* 3 . 87500 *&* 3 . 90625, *& differen-*

ferentia $\frac{2125}{100000}$, *quod quidem obtinetur addendo ad numeratores fractionum quinque zeros & dividendo per* 32.

SCHOL. *Pro æquationibus quadraticis radicis approximatio habetur ex communi Arithmetica addendo ad residuum tot cyfrarum paria quot libuerit; hinc* $\sqrt{13} = 3.6055$, *ter additis* 00. *Orontius Finæus id primus docuit.*

PROPOSITIO IV.

Aliæ approximandi rationes expediuntur.

SIt eadem æquatio $x^3 - 12x - 12 = 0$, cujus una radix sit minor 4, sed major 3, ut in præcedenti propositione dictum est. Ponatur esse $x = 3 + y$, & hoc valore in æquatione posito, oritur

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 27 + 27y + 9y^2 + y^3 \\ -12x & = & -36 - 12y \\ -12 & = & -12 \\ \hline & & -21 + 15y + 9y^2 + y^3 \end{array}$$

Quia vero y hoc loco denotat fractionem, quæ additur ad 3, ut fiat ad veram radicem approximatio, & fractionum potentiæ continuo decrescunt, hinc tuto negliguntur $+ 9y^2 + y^3$, quod etiam in sequentibus observabitur.

Est igitur $15y = 21$, hoc est $y = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1.\overset{1}{4}$ (reducendo $\frac{7}{5}$ ad fractiones decimales facilioris calculi gratia) est ergo $y = 1.\overset{1}{4}$. Ponatur jam $x = 3 + 1.\overset{1}{4} + y$, hoc est $x = 4.\overset{1}{4} + y$, & hoc valore in æquatione substituto, erit

x^3

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 & = & 85.184 + 58.08y \ldots. \\
-12x & = & -52.800 - 12.00y \\
-12 & = & -12. \\
\hline
 & & +20.384 + 46.08y \ldots.
\end{array}
$$

Hinc habetur $46.0\overset{\text{II}}{8}y = -20.38\overset{\text{III}}{4}$, hoc est $y = -\frac{20.38\overset{\text{III}}{4}}{46.0\overset{\text{II}}{8}} = -\overset{\text{I}}{4}$. Sed si hujus residuo divisionis addantur duæ, aut tres cyfræ ob majorem approximationem, erit quotus $-442\overset{\text{IV}}{3}$, subtrahendus (ob signum $-$) ex $x = 4.\overset{\text{I}}{4}$. hoc est ex $4.400\overset{\text{IV}}{0}$, eritque residuum $3.957\overset{\text{IV}}{7}$ radix æquationis magis magisque approximans.

Quod si rursus ponatur $x = 3.9577 + y$, & pari ratione operatio eadem continuetur, multo major fiet ad veram radicem approximatio. Sed hoc ad methodi intelligentiam satis.

COROLL. I. *Hinc facile eruuntur approximandi formulæ, quæ ad hanc rem afferri solent. Sit enim, ut supra, æquatio* $-21 + 15y = 0$. *Si fiat* $p = -21$, *&* $q = 15$, *erit* $qy = -p$ *proinde* $y = -p:q$, *hoc est* $y = \frac{21}{15} = 1.\overset{\text{I}}{4}$, *omnino ut superius.*

COROLL. II. *Vel cum Hallejo* [a] *sit eadem æquatio* $-21 + 15y + 9y^2 = 0$, *& fiat* $p = -21$, $q = 15$ *&* $r = 9$, *erit* $ry^2 + qy = -p$, *& dividendo per* $q + ry$, *habetur* $y = -p:(q + ry)$. *Sed ex* Coroll. 1. *est* $y =$

(a) In Transact. Anglican. n. 210.

— p : q , *ergo* $y = -p : (q - pr : q)$ *proinde* $y = 21 : (15 + \frac{189}{15}) = 21 : (15 + \frac{63}{5}) = 21 : (\frac{138}{5})$, *hoc est* $y = \frac{105}{138}$, *& dividendo per* 3, *erit* $y = \frac{35}{46}$; *quæ fractio si ad decimales reducatur* per Propos. 4. Append. *erit* $y = \overset{v}{76869}$. *Hic valor si addatur ad* 3 *limitem æquationis, ita ut fiat* $x = 3 + \overset{v}{76869}$, *& continuetur eodem modo operatio, invenitur ex eadem Halleii formula radix prope vera, vel quæ a vera minimum dissentiet.*

SCHOL. *Approximandi regulæ hactenus explicatæ sunt tantum pro æquationibus numericis.*

PROPOSITIO V.

Radices prope veras in æquationibus litteralibus indagare.

SIt data æquatio secundi gradus $x^2 - 2nx - r^2 = 0$, cujus radix *per Propos.* 1. *vel* 3. *Cap.* 8. erit $x = n + \sqrt{r^2 + n^2}$, seu $x = n + \overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}}$ *per Defin.* 5. *Cap.* 3. Quæritur valor approximatus potentiæ imperfectæ $\overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}}$, quod quidem duplici methodo obtineri potest.

I. Ex $r^2 + n^2$ extrahatur radix secunda, habebitur *per Propos.* 9. *Cap.* 3. valor quæsitus per seriem infinitam terminorum, nempe $r + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^4}{8r^3} + \frac{n^6}{16r^5}$ &c. $= \overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r^2 + n^2}$,

Et si fiat $n = 1$, erit $r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

II.

II. Supponatur $z = \overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}}$, erit $zz = r^2 + n^2$, & $zz - r^2 - n^2 = 0$.

Ponatur deinde z æqualis ſeriei infinitæ terminorum, quorum exponentes progreſſionem Arithmeticam, ipſi vero Geometricam ſervent, & multiplicati exiſtant per litteras a, b, c, d &c. quæ hoc loco tanquam indeterminatæ conſiderantur. Hi autem termini proportionales conflantur ex quantitate aliqua cognita datæ æquationis, ut n in hoc exemplo, nempe

Sit $z = an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6 +$ &c. (primus terminus $an^0 = a$, nam $n^0 = 1$, quod ſemper advertatur) elevetur ad ſecundam potentiam utrunque hujus æquationis membrum, & ponatur in ſuperiori æquatione $zz - r^2 - n^2 = 0$ loco zz ejus valor, erit

$$\begin{array}{r|l} zz = & a^2 + 2abn^2 + bbn^4 + 2adn^6 \text{ \&c.} \\ & \qquad\qquad\qquad + 2acn^4 + 2bcn^6 \text{ \&c.} \\ -n^2 & \qquad\quad -n^2 \\ -r^2 & -r^2 \end{array}$$

Jam ſinguli termini æquentur zero, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipſarum a, b, c, d, &c.

Erit 1.ª $a^2 = r^2$, atque hinc $a = r$.

2.ª $2ab = 1$, & poſito r loco a, erit $2rb = 1$, ſeu $b = \frac{1}{2r}$.

3.ª

3.^{a} $2ac = -bb$, & substitutis valoribus b & a, erit $2rc = -\frac{1}{4rr} = c = -\frac{1}{8r^3}$.

4.^{a} $2ad = -2bc$, hoc est $ad = -bc$, & positis valoribus a, b, c, habetur $d = \frac{1}{16r^5}$ &c.

Surrogentur hi valores in serie assumpta $an^0 + bn^2 + cn^4 + dn^6$ &c. erit $r + \frac{1}{2r} n^2 - \frac{1}{8r^3} n^4 + \frac{1}{16r^5} n^6$ &c. Quod si ponatur $n = 1$, erit valor quæsitus ipsius $\overline{r^2 + n^2}^{\frac{1}{2}} = r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c. ut supra.

Est ergo radix propositæ æquationis $x = 1 + r + \frac{1}{2r} - \frac{1}{8r^3} + \frac{1}{16r^5}$ &c.

SCHOL. *Poterat series efformari ex altera quantitate cognita* r, *ita ut fieret* $z = ar^0 + br^2 + cr^4$ &c. *si* r *minor fuisset quam* n. *Nam series, ut ad verum valorem magis accedat, debet esse* convergens. *Quod ut fiat, necesse est numerator fractionis denominatore sit minor* per Coroll. 2. Prop. 6. Cap. 2. *unde in hoc casu quantitas* n *fieret in seriei terminis denominator. Hoc semper erit in ejusmodi seriebus efformandis observandum.*

PROPOSITIO VI.

Idem problema alio modo resolvitur.

I. SIt eadem $x^2 - 2nx - r^2 = 0$, cujus radix per approximationem quæritur. Sup-

Supponatur statim valor incognitæ x æqualis seriei indeterminatæ quorumcunque terminorum, nempe

Sit $x = an^{\circ} + bn^{1} + cn^{2} + dn^{3} + en^{4}$ &c. Quantitates a, b, c &c. sunt indeterminatæ, & $n^{\circ} = 1$, unde $an^{\circ} = a$.

Elevetur series ad singulos gradus, quos habet x in data æquatione, ita ut æquatio transformetur in aliam indeterminatam, scilicet

$$\begin{array}{r|l}
x^2 & = a^2 + 2abn + 2acn^2 + 2adn^3 + 2aen^4 \text{ \&c.} \\
 & \qquad\qquad\qquad + bbn^2 + 2bcn^3 + 2bdn^4 \text{ \&c.} \\
-2nx & \qquad\quad - 2an - 2bn^2 - 2cn^3 + ccn^4 \text{ \&c.} \\
-r^2 & -r^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2dn^4 \text{ \&c.}
\end{array}$$

Jam singuli termini æquentur zero, ut determinetur valor ipsarum a, b, c, d &c. ex æquationibus particularibus, quæ sequuntur.

1.ª $a^2 - r^2 = 0$, atque hinc $a^2 = r^2$, & $a = r$.

2.ª $2ab - 2a = 0$, & posito r loco a, erit $rb = r$, hoc est $b = 1$.

3.ª $2ac + bb - 2b = 0$, & $2ac + bb = 2b$, in qua positis valoribus a, & b, habetur $2rc + 1 = 2$, atque hinc $c = \frac{1}{2r}$.

4.ª $2ad + 2bc - 2c = 0$, & $ad + bc = c$, in eaque substitutis valoribus ipsarum a, b, c, erit $d = 0$.

5.ª $2ae + 2bd + cc - 2d = 0$, & abiectis (ob $d = 0$) terminis $2bd - 2d$, remanet $2ae = -cc$, unde eruitur $e = -\frac{1}{8r^3}$.

His

His valoribus ſurrogatis in ſerie $a+bn+cn^2+dn^3$ &c. oritur ſeries determinata $r+n+\frac{1}{2r}n^2-\frac{1}{8r^3}n^4-\frac{1}{32r^5}n^6$ &c. ac poſito $n=1$, erit $x=r+1+\frac{1}{2r}-\frac{1}{8r^3}-\frac{1}{32r^5}$ &c. Ex his pauciſſimis terminis patet, hanc ſeriem magis, quam duas ſuperiores, eſſe convergentem.

II. Sit æquatio cubica
$$\begin{array}{l} x^3 + bbx - 2b^3 = 0 \\ \qquad\;\; + abx - \;\, a^3 \end{array}$$

Fiat ſeries ex quantitate cognita omnium minima, quæ ſit a, multiplicata per indeterminatas f, g, h, i &c. & eidem æqualis ponatur incognita x, erit $x=fa^0+ga^1+ha^2+ia^3+la^5$ &c. quæ ſeries elevetur ad omnes gradus, quos habet x in æquatione data, erit

$$\begin{array}{l|l}
x^3 = & f^3+3ffga+3fgga^2+g^3a^3+3fhha^4\text{\&c.} \\
 & \qquad\qquad\quad +3ffha^2+3ffia^3+3ggha^4\text{\&c.} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +6fgha^3+3ffla^4\text{\&c.} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +6fgia^4\text{\&c.} \\
+bbx & +bbf+bbga+bbha^2+bbia^3+bbla^4\text{\&c.} \\
+abx & \qquad\quad +bfa+bga^2+bha^3+bia^4\text{\&c.} \\
-2b^3 & -2b^3 \\
-a^3 & \qquad\qquad\qquad -a^3
\end{array}$$

Fiant ſinguli termini zero æquales, ut habeantur totidem æquationes particulares ad determinandum valorem ipſarum f, g, h, i &c.

1.ª $f^3 + fbb - 2b^3 = 0$, quæ si dividatur per $f - b$, divisio exacte succedit, proinde b est radix vera ejusdem æquationis, *per Schol.* 1. *Propos.* 1. *Cap.* 6. eritque $f = b$.
2.ª $3ffg + bbg + bf = 0$, & $3ffg + bbg = -bf$, & posito b loco f, habetur $g = -\frac{1}{4}$. Nam $g = -\frac{bb}{4bb} = -\frac{1}{4}$.
3.ª $3ffh + bbh = -bg - 3fgg$, in qua posito valore ipsarum f & g, invenitur $h = \frac{1}{64b}$.
4.ª $3ffi + bbi = -bh - g^3 - 6fgh + 1$, & substitutis valoribus jam inventis loco f, g, h, habetur $i = \frac{131}{512b^2}$.
5.ª $3ffl + bbl = -bi - 6fgi - 3ggh - 3fhh$, ex qua eodem modo eruitur valor $l = \frac{509}{16384b^3}$.

Porro his valoribus substitutis in serie $fa^0 + ga + ha^2 + ia^3$ &c. habetur $x = b - \frac{1}{4}a + \frac{1}{64b}a^2 + \frac{131}{512b^2}a^3 + \frac{509}{16384b^3}a^4$ &c. Et posito $a = 1$, erit $x = b - \frac{1}{4} + \frac{1}{64b} + \frac{131}{512b^2} + \frac{509}{16384b^3}$ &c.

SCHOL. I. *Si æquatio data duas incognitas* x *&* y *contineat, ut sæpe in Geometria composita contingit, tunc termini seriem componentes desumuntur ex incognita, quæ minor est, ut series convergens fiat, quemadmodum* in Schol. Prop. præc. *dictum est. Ut si* x *major quam* y, *fiat series* x =

 ay°

$ay^0 + by^1 + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5$ *&c. Cetera peraguntur, ut supra. At plura his addere non est hujus loci.*

SCHOL. II. *Cum series infinitæ primo a Mercatore Holsato* per divisiones, *secundo a Cl. Newtono* per radicum extractiones *quæsitæ fuerint, ut in* Schol. 2. Propos. 9. Cap. 3. *innuimus; demum celeberrimus Leibnitius* (a) *ad eas pervenit* per suppositionem ipsius seriei quæsitæ tanquam inventæ; *ita ut coefficientes terminorum ejusdem seriei postea determinentur, ut series ipsa determinata fiat: quæ sane methodus commodior est longeque ceteris universalior, cum hæc non modo in calculo communi, sed etiam in Differentiali & Integrali usum habere possit plurimum. Nos facile & ad discentium intelligentiam aptum specimen in hac Propositione duntaxat exhibuimus.*

CAPUT XII.

De Geometrica Constructione Æquationum.

GEometricam æquationum constructionem aggredimur. Intelligent hinc tyrones ingentem Analyseos in Geometria usum. Intelligent qua ratione Euclides, Apollonius, magnus Archimedes aliique veteres Geometræ, quæ per Analysin problemata subtiliter invenerant, ea deinde, suppresso calculo, composuerint ac synthetice demonstraverint. Horum vestigiis insistentes *Simplices* tantum & *Quadraticas Æquationes* in hoc capite

(a) Acta Erudit. Lipsiæ an. 1693.

te construimus. Nam quæ altioris sunt gradus, Curvarum doctrinam ad constructionem requirunt. Præmittimus autem his quantitates Analyticas Geometrice exprimendi rationem, cum id tyronibus soleat negotium facessere.

PORISMA I.

Fractiones in terminos proportionales resolvere.

FRactiones Analyticæ, quibus incognita æqualis existit, in terminos proportionales resolvuntur variis quidem modis.

I. Sit $x = \frac{ab}{c}$, erit $c . a :: b . x$, nimirum est x quarta proportionalis *per Prop.* 12. *lib.* 6. *Eucl.*

II. Sit $x = \frac{aa - bb}{c - d}$, quia $a + b \times a - b = aa - bb$, erit $c - d . a + b :: a - b . x$. *per Propos. cit.*

III. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n}$. Inveniatur $\frac{ab}{c} = n$, & $\frac{adc}{n} = m$, *per Propos. cit.*; erit $x = n + m$.

IV. Sit $x = \frac{ab + cd}{m + n}$, quia nulla litera in numeratore bis habetur, fiat $a . d :: c$. ad quartam proportionalem $= r$, erit $ar = cd$ *per Propos.* 16. *lib.* 6. *Eucl.* proinde æquatio mutatur in hanc $\frac{ab + ar}{m + n}$, in qua reperitur bis a, adeoque sic resolvitur $m + n . b + r :: a . x$.

 V. Sit

V. Sit $x = \frac{aabc}{ddf}$, fiat primo $d . a :: a$. ad quartam proportionalem $= m$, erit $aa = dm$, proinde ponendo dm loco aa, erit $x = \frac{dmbc}{ddf}$, ſeu $x = \frac{mbc}{df}$. Secundo fiat $d . m :: b$ ad quartam proportionalem $= n$, erit $dn = mb$; unde ſurrogando dn loco ipſius mb, erit $x = \frac{dnc}{df}$, ſeu $x = \frac{nc}{f}$, itaque habetur $f . n :: c . x$, ut ſupra *num.* 1. aut ſi fiat $f . n :: c . l$, erit $x = l$, cum ſit $\frac{nc}{f} = l$, ut patet.

COROLL. *Hinc facile invenitur recta æqualis pluribus fractionibus datis. Nam ſit* $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{n} + \frac{cn}{f}$ *&c. ſi reperiatur, ut ſuperius factum eſt*, per Propoſ. 12. l. 6. $\frac{ab}{c} = n$, $\frac{adc}{n} = m$, *&* $\frac{cn}{f} = l$, *erit* $x = n + m + l$, *nempe* $x =$ *rectæ lineæ compoſitæ ex rectis* n, m, l *&c.*

PORISMA II.

Summam, differentiam quadratorum, & radicum extractiones Geometrice exprimere. Fig. 10.

I. SIt triangulum ABC rectangulum in B, cujus hypothenuſa ſit $AC = a$, unum latus $AB = b$, & alterum $BC = c$, quia $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ *per* 47. *l.* 1. *Eucl.* erit

erit $aa = bb + cc$, & $AC\ (a) = \sqrt{bb + cc}$. Similiter quia $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$, erit $bb = aa - cc$, & $AB\ (b) = \sqrt{aa - cc}$. Item $cc = aa - bb$, & $BC\ (c) = \sqrt{aa - bb}$.

II. Quod si demittatur perpendiculum BD, ita ut basis segmentum sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & ob angulum rectum in D, erit $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 = cc - xx$, unde $BD = \sqrt{cc - xx}$. Similiter quia $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = bb - aa + 2ax - xx$, erit $BD = \sqrt{bb - aa + 2ax - xx}$.

III. Similiter (*Fig.* 11.) si in semicirculo ABC ducantur duæ quælibet chordæ AB & BC, erit angulus ABC rectus *per* 20. *l.*3. *Eucl.* Hinc posita diametro $AC = a$, $AB = b$, & $BC = c$, habentur eædem omnino quantitates, quæ supra. Erit enim $AC\ (a) = \sqrt{bb + cc}$. Item $AB\ (b) = \sqrt{aa - cc}$, & $BC\ (c) = \sqrt{aa - bb}$.

IV. Demisso autem ex quovis circuli puncto perpendiculo $BD = y$, sit $DC = x$, erit $AD = a - x$, & *per Coroll. Propos.* 17. *l.*6. *Eucl. ex Tacquet* $\overline{BD}^2 = AD \times DC$, hoc est $yy = ax - xx$, unde $BD\ (y) = \sqrt{ax - xx}$. Vel sit $ED = x$, $DB = y$, & CE, vel $BE = a$, erit $\overline{BD}^2 = \overline{EB}^2 - \overline{ED}^2$, hoc est $yy = aa - xx$, & $BD\ (y) = \sqrt{aa - xx}$.

COROLL. I. *Ex his patet quomodo exprimi possit Geometrice*

trice hæc, aut alia similis quantitas Analytica, $\frac{r}{n}\sqrt{bb+cc}$.

Nam inveniatur ut supra, $a=\sqrt{bb+cc}$, *fiet* $\frac{r}{n}\sqrt{bb+cc}$ $=\frac{ar}{n}$, *quæ quantitas si* per Porif. 1. *in analogiam resolvatur*, *haberi potest* $\frac{ar}{n}=l$, *unde* $\frac{r}{n}\sqrt{bb+cc}=l$.

COROLL. II. *Patet quo pacto media proportionalis per quantitatem radicalem designata*, *Geometrice sit exprimenda*. *Nam* (Fig. 11.) *si fiat* $AD=a$ *&* $DC=b$, *& ducatur* BD *perpendicularis ad diametrum* AC, *erit* $DB=\sqrt{ab}$ per Cor. Prop. 17. l. 6. Eucl. ex Tacquet.

COROLL. III. *Patet demum qua ratione dato plano* $=ab$ *reperiatur quadratum illi æquale* cc. *Nam sit*, *ut prius* $AD=a$, $DC=b$, *& ducatur in circulo ad diametrum* AC *perpendicularis* $DB=c$, *erit* $\overline{DB}^2=AD\times DC$ per Coroll. cit. *hoc est* $cc=ab$. *Contra vero dato quadrato* cc, *& alterutro plani* bd *latere*, *facile est invenire ipsum planum*.

PORISMA III.

Æquationes secundi gradus Geometrice construere.

QUatuor formulis comprehendi solent omnes secundi gradus æquationes, earumque radices ob duplicem valorem affirmativum, & negativum duplici signo afficiuntur $\pm$ ut sæpe diximus, scilicet

For-

	Formulæ	*Radices*
1.	$x^2 = ax + bb$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
2.	$x^2 = -ax + bb$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
3.	$x^2 = ax - bb$	$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$
4.	$x^2 = -ax - bb$	$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$

I. Pro prima formula conſtruenda [*Fig.* 12.] fiat triangulum ABC rectangulum in B, cujus latus $BC = b$, & $AB = \frac{1}{2}a$, erit *per Poriſ.* 2. baſis $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Centro igitur A & intervallo AB fiat circulus ABE, & producatur AC in D, erit recta $CD = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, ut patet.

Vel ſic [*Fig.* 13.] fiat $AB = \frac{1}{2}a$, & perpendicularis $BC = b$; tum centro A cum intervallo baſis AC fiat ſemicirculus DCE, in quo producatur AB hinc inde ad peripheriam, erit $DB = x$.

Nam $DB = AB + AD$ vel AC, ſed $AB = \frac{1}{2}a$, & $AC = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ergo $DB = x = \frac{1}{2}a + \sqrt{aa\frac{1}{4} + bb}$.

II. Pro ſecunda formula conſtructio eſt eadem: nam in *Fig.* 12. (non producta AC in D) erit $CE = x$. Nam $CE = CA - AE$, ſeu AB: ſed $AB = \frac{1}{2}a$, & $CA = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, ergo $CE = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

Vel in *Fig.* 13. $EB = AE$, (vel AC) $- AB$, proinde $EB = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a = x$.

III. Pro tertia formula conſtruenda (*Fig.* 14.), quæ quidem duas habet radices poſitivas, ut ſignorum diſpoſitio docet *per Prop.* 1. *Cap.* 6. ſit in ſemicirculo AEB diameter

meter $AB = a$, erit semidiameter AC, vel CB, vel $CE = \frac{1}{2} a$. Elevetur ex puncto B perpendicularis $BF = b$, & ducatur diametro AB parallela EF, quæ secabit circulum in E. Tum ex puncto E ducta ED ad diametrum perpendiculari, erit $AD = x$.

Nam $AD = AC + CD$; sed $AC = \frac{1}{2} a$, & $CD = \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$, ergo $AD = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb} = x$.

Erit autem DB altera radix positiva. Nam $DB = BC - CD$, proinde $DB = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb} = x$.

IV. Formula autem quarta, cujus constructio est omnino eadem, ambas radices habet negativas, ut ex signorum dispositione dignoscitur *per Prop.* 1. *Cap.* 6. quarum prima erit $-AD = -AC - CD$, hoc est $-\frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb} = x$. Altera vero $-DB = -CB + CD$, hoc est $-\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb} = x$.

SCHOL. I. *Ceterum ad absolutam problematis resolutionem una radix & quidem positiva sufficit. Proinde Cartesius de radicibus negativis construendis solicitus nunquam fuit. Recentiores tamen singulas construunt, ut & nos in tertia & quarta formula. Pro prima autem formula radix negativa* (Fig. 13.) *erit* EB. *Nam* $EB = -AE$, (*seu* $-AC$) $+ AB$; *proinde* $EB = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb} = x$. *Pro secunda formula radix negativa erit* $-DB$. *Nam* $-DB = -BA - AD$, (*seu* $-AC$) *hoc est* $= -\frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb} = x$. *Hinc apparet constructionem esse eandem, sed radices negativas ad partem oppositam esse desumendas; hoc est si radix positiva* DB *desumpta fuit ex* B *versus* D, *e contrario radix negativa* BE *desumi debet ex* B *versus* E: *quæ regula in Geometricis constructionibus semper observatur.*

Sc.

SCHOL. II. *Si in tertia vel quarta formula* BF$(=b)$ *major ſit, quam* CB $(=\frac{1}{2}a)$ *fieri non poterit, ut parallela* EF *circulum ſecet, & in hoc caſu problema erit impoſſibile. Ratio eſt, quia ubi* $b > \frac{1}{2}a$, *erit quoque* $bb > \frac{1}{4}aa$, *ideoque* $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ *ſit quantitas imaginaria, & problema contradictionem involvere ſignum eſt. Quod ſi* BF $=$ CB, *hoc eſt* $b = \frac{1}{2}a$, *tunc parallela* EF *non ſecat circulum, ſed illum tangit in puncto, ex quo ſi ducatur perpendicularis* ED, *hæc in centro conſiſtit, & recta* CD *evaneſcit, proinde* $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bb} = 0$. *Hæc ex ipſa constructione patent.*

SCHOL. III. *Ut obtineantur æquationes ſupra allatæ, vel aliæ ſimiles, propoſito problemate, delineatur figura, in qua problema ipſum quaſi ſolutum ponitur, ducendo in ea lineas perpendiculares, parallelas, angulos æquales, circulos, triangula ſimilia, vel rectangula, aliaſque figuras, quarum notæ relationes & proprietates Algebraicas æquationes nobis exhibent. Quæ quidem plenius docent problemata, quæ ſequuntur, fere omnia ab Euclide, Archimede, aliiſque ſummis Geometris de induſtria accepta: cum in his primo verſari ex uſu diſcentium eſſe putaverim.*

PROBL. I.

Datam rectam AB *ſectam utcunque in* C *ita producere in* E, *ut rectangulum* AEB *ſit æquale quadrato* CE.

FActum jam ſit, (*Fig.* 15.) & eſto data $AB = a$, $CB = b$, quæſita $BE = x$, erit tota $AE = a + x$, & ex conditione problematis $AE \times EB = \overline{CE}^2$, hoc eſt

$$ax + xx = b^2 + 2bx + xx$$

$$ax = b^2 + 2bx$$

$$ax - 2bx = b^2$$

Div. per $a - 2b$ $$x = \frac{b^2}{a - 2b}$$

Qua æquatione in terminos proportionales resoluta *per Porif.* 1. habetur $a - 2b . b :: b . x$. Est ergo $BE = x$ tertia proportionalis, unde oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio (*Fig.* 16.) Sumatur in AB pars $CD = CB$, erit $DB = 2b$, & $AD = a - 2b$. Fiat $AD (a - 2b) . DC (b) :: DC$, vel $CB (b) . BE (x)$ tertiam proportionalem quæsitam.

Demonstr. Cum ex construct. sit $AD . DC$, vel $CB :: CB . BE$, erit componendo *per Prop.* 18. *l.* 5. $AC . DC$, vel $CB :: CE . BE$. Est autem ut AC antecedens ad CB consequentem, ita CE antecedens ad BE consequentem, ergo AE summa antecedentium erit ad CE summam consequentium, ut CE una antecedentium ad BE unam consequentium *per Prop.* 12. *l.* 5. ergo rectangulum sub extremis $AE \times BE$, nempe AF, erit æquale quadrato sub mediis $CE \times CE$, idest CH *per Prop.* 17. *l.* 6. Quod erat &c.

SCHOL. *Hinc apparet methodus, aut alia huic affinis, quam Euclides, Archimedes, Apollonius aliique veteres in suis problematibus investigandis, construendis ac demonstrandis tenuerunt.*

PRO-

PROBL. II.

In dato triangulo ABC *quadratum inscribere.* Fig. 17.

Esto factum, & quadratum inscriptum sit $EDFG$. Ducatur perpendicularis AH, quæ ob triangulum datum erit pariter data. Sit $BC = a$, $AH = b$, & HL seu $FG = x$, erit $AL = b - x$. Jam ob triangula similia BAC, & FAG erit $AH\,(b) . BC\,(a) :: AL\,(b - x) . FG\,(x)$ proinde

$$bx = ab - ax$$

$$bx + ax = ab$$

Divid. per $a + b$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Resoluta æquatione in terminos proportionales, habetur $a + b . a :: b . x$ *per Poris.* 1. unde patet quæsitam $LH = x$ esse quartam proportionalem. Hinc oritur constructio, quæ sequitur.

Constructio. Producta BC indefinite, fiat $HM = BC$, & $MN = AH$, erit $HM + MN = a + b$. Jungatur AN, cui ex puncto M parallela ducatur LM, quæ secabit AH in puncto quæsito L.

Demonstr. Ob parallelas AN & LM triangula AHN, & LHM sunt similia, proinde MN, seu $AH . AL :: HM$, seu $BC . LH$. Item ob triangula similia BAC & FAG est $AH . AL :: BC . FG$; ergo $AH . AL :: BC . LH$, ideoque BC ad duas FG & LH eandem rationem habet, quæ idcirco ſunt æquales *per Propoſ. 9. l. 5.* Eſt ergo *EDFG* quadratum. Quod &c.

COROLL. *Tam ex hoc, quam ex præc. problemate apparet, fractiones, quibus quantitas incognita in æquatione finali æquatur, in terminos proportionales eſſe reſolvendas, ut in* Poriſ. 1. *docuimus.*

PROBL. III.

In quadrilatero ABDE *circulo inſcripto rectanguli, quod fit ex diagonalibus* AD × EB *ad rectangula, quæ fiunt ex lateribus oppoſitis* AE × BD, *&* AB × DE, *rationem invenire.* Fig. 18.

Ducatur *DF* faciens angulum *EDF* æqualem angulo *ADB*, erunt triangula *ADB* & *EDF* ſimilia, cum etiam anguli *DAB* & *BED* ſint æquales, utpote eidem arcui *BD* inſiſtentes, proinde *AD . DE :: AB . EF*; & ſi ponatur $AD = a$, $DE = b$, $AB = c$, & $EF = x$, erit $a . b :: c . x$. ideoque $ax = bc$.

Similiter triangula *ADE*, & *BDF* ſunt æquiangula & ſimilia. Nam ſi æqualibus ex conſtructione angulis *EDF*, & *ADB* addatur communis *ADF*, erit $ADE = BDF$. Item $DAE = DBF$, cum eidem arcui *DE* inſiſtant & hinc *BF . AE :: BD . AD*. Jam ſi ponatur tota $BE = f$, erit $BF = f - x$. Sit $AE = d$ & $BD = e$, erit $f - x . d :: e . a$; ideoque $af - ax = ed$. Addatur huic æquationi altera $ax = bc$, erit $af = ed + bc$; unde patet rectangulum, quod fit ex diagonalibus $AD \times BE = af$, æquari duobus rectangulis, quæ fiunt ex lateribus oppoſitis $AE \times BD = ed$, & $AB \times DE = bc$ ſimul ſumptis. De-

Demonstr. Ob triangula similia ADB & EDF est AD. DE :: AB. EF; *ergo per* 16. *l.* 6. $AD \times EF = DE \times AB$. Item ob triangula similia ADE & BDF est BF. AE :: BD. AD; ergo *per Prop. cit.* $AD \times BF = AE \times BD$. Sed $AD \times BF$ & $AD \times EF = AD \times EB$ totam *per* 1. *l.* 2. ergo $AD \times EB = DE \times AB + AE \times BD$. Quod erat &c.

SCHOL. *Præclarum hinc oritur Ptolomæi* (a) *theorema*; In quadrilatero inscripto in circulo rectangulum sub diagonalibus æquale est rectangulis, quæ a lateribus oppositis fiunt. *Quod quidem magnum habet in Trigonometria usum*.

PROBL. IV.

Datam rectam AB *media & extrema ratione secare*. Fig. 19.

SEcta sit AB in puncto C, ut imperatur; & sit ipsa $AB = a$, $AC = x$, erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis cum tota AB debeat esse ad majus segmentum AC, ut AC ad segmentum minus CB, erit $a . x :: x . a - x$. hinc

$$xx = aa - ax$$

$$xx + ax = aa$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\quad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Extra rad. $\quad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$ *Constr.*

(a) Almagesti lib. 1. Cap. 9.

Construct. A rectæ AB puncto B elevetur perpendicularis $BD = \frac{1}{2} a$; ductaque AD, secetur $ED = DB$ ($= \frac{1}{2} a$). Facto deinde centro in A cum intervallo AE secetur $AC = AE$, erit C punctum quæsitum.

Demonstr. Triangulum ABD est rectangulum in B, ergo $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = aa + \frac{1}{4} aa = \frac{5}{4} a^2$; unde $AD = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$. Est autem $DE = DB = \frac{1}{2} a$; ergo $AE = AD - DE = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{1}{2} a = AC$.

Insuper $CB = a - x$, erit $= \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{5}{2} a^2}$. Sunt autem $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} - \frac{1}{2} a$, & $CB = \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$ tales inter se, ut rectangulum sub extremis $AB \times CB$ sit æquale quadrato mediæ AC, hoc est $\frac{3}{2} a^2 - a \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = \frac{3}{2} a^2 - a \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$, hinc AB, AC & CB sunt continuo proportionales *per* 17. *l.*6. proinde AB secta est in C media & extrema ratione.

Coroll. I. *Hinc facile eruitur synthetica demonstratio. Nam si data* AB *secetur in* C, *ita ut rectangulum* AB × CB *sit æquale quadrato* AC, *ut docet* Prop. 11. l. 2. *erit* AB . AC : : AC . CB per 17. lib. 6. *ergo* AB *secta est in* C *secundum mediam & extremam rationem* per Defin. 3. l. 6.

Schol. *Certum est quadratum* $x^2 + ax + \frac{1}{4} a^2$ *posse oriri tam ex radice positiva* $x + \frac{1}{2} a$, *quam ex negativa* $- x - \frac{1}{2} a$. *In primo casu habetur radix positiva, quam supra construximus* $x = - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$; *in secundo radix negativa & æqualis nihilo* $x = - \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$, *quæ tamen construi potest hac ratione:*

Supposita superiori constructione, producatur BA *versus* F, *& fiat* $AF = DB = \frac{1}{2} a$, *&* $FG = AD = \sqrt{\frac{5}{4} a^2}$, *erit tota* $AG = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = - x$, *&* GB ($= a - x$) $=$

$\frac{3}{2}$ a

$\frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. *Sunt porro tres continue proportionales* BA $= a$, AG $= \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, *&* GB $= \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$. *Nam* BA $\times$ GB $= \overline{AG}^2$, *cum utrinque oriatur* $\frac{3}{2}a^2 + a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

COROLL. II. *In constructione radicum negativarum quantitates cognitæ signo — affectæ desumi debent ad partem oppositam radicum positivarum;* *quod in* Schol. 1. Porif. 3. *fuit prænotatum, & ex hac constructione apparet.*

PROBL. V.

Datam rectam AB *inæqualiter ita secare in* C, *ut quadrata totius* AB, *& minoris segmenti* BC *sint tripla quadrati, quod fit a segmento majori* AC. Fig. eadem.

SIt $AB = a$, $AC = x$, erit $CB = a - x$, & per conditionem problematis

$$a^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 3x^2$$
$$2a^2 - 2ax = 2x^2$$
$$x^2 + ax = a^2$$

Prop. 1. *Cap.* 8. $\qquad \frac{1}{4}a^2 \quad \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

Extr. rad. $\qquad x + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$

$$x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$$

Quæ quidem æquatio cum sit eadem ac superioris problematis, indicio est rectam *AB* secandam esse media & extrema ratione, ut duo quadrata $\overline{AB}^2$ & $\overline{BC}^2$ sint tripla quadrati $\overline{AC}^2$. Facta igitur eadem constructione, sectaque AB in C media & extrema ratione, erunt tres continue proportionales $AB = a$, $AC = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$, & $BC = \frac{3}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$; atque hinc quadrata $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3\overline{AC}^2$, hoc est $\frac{9}{2}a^2 - 3a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

COROLL. *Hinc oritur Theorema* 4. *l.* 13. *Euclidis*: Si recta linea media & extrema ratione secta fuerit, totius & minoris portionis utraque simul quadrata tripla sunt quadrati ejus, quod a majori fit portione. *Cujus demonstratio ex superiori æquatione & constructione sponte sua sequitur*.

PROBL. VI.

A dato puncto E *rectam ducere, quæ datum circulum tangat*. Fig. 20.

Punctum E positione datur, circulus vero $ABGD$ positione & magnitudine; proinde ducta AE, dantur AD & DE. Sit ergo $AD = a$, $DE = b$ & $EG = x$; producta autem AD in B, erit tota $BE = 2a + b$, & $BE \times ED = \overline{EG}^2$ *per* 36. *l.* 3. *Eucl.* hinc habetur æquatio

$$2ab + b^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{b^2 + 2ab}$$

Constr. Centrum circuli A & punctum datum connectanctantur recta AE, super qua describatur semicirculus AEG, in quo ducantur chordæ AG & EG.

Demonstr. Angulus AGE in semicirculo rectus est *per Prop.* 31. *l.* 3. ergo $\overline{AE}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{EG}^2$ *per* 47. *l.* 1. hoc est $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + x^2$, seu $x^2 = 2ab + b^2$, proinde $x = \sqrt{2ab + b^2} = EG$.

Verum demonstratio synthetica unico verbo potest absolvi. Nam angulus AGE in semicirculo est rectus; ergo EG circulum tangit in G *per* 16. *lib.* 3. Quod erat &c.

PROBL. VII.

Dato circulo invenire latus trianguli æquilateri in eodem circulo inscribendi. Fig. 21.

SIt $AB = x$ latus trianguli quæsiti, & ducatur chorda BC æqualis semidiametro $AD = a$, quæ erit latus hexagoni *per* 15. *lib.* 4. *Eucl.* Ponatur $AC = 2a$. Ob angulum ABC in semicirculo rectum $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, hoc est

$$xx + a^2 = 4a^2$$
$$xx = 3a^2$$
$$x = \sqrt{3a^2}$$

Est ergo latus trianguli æquilateri medium proportionale inter circuli, cui inscribitur, radium, ejusque triplum, nempe inter a & $3a$. Hinc si ponatur $a = 1$, erit trianguli æquilateri latus ad radium ut $\sqrt{3}$ ad 1.

Constructio tamen facilior est, quæ vulgo traditur. (*Fig.* 22.) Super diametro *AB* describatur triangulum æquilaterum *ABC*, & ducatur *CD*, erit *CD* latus quæsitum. Nam in triangulo rectangulo *CDB* erit $CB = 2a$ $DB = a$, & $CD = x$, unde $x = \sqrt{3aa}$.

COROLL. *Hinc infertur non omnes concinniores constructiones Geometricas ex calculo Analytico derivari, nec proinde eidem semper esse inhærendum, cum in solutione problematum Geometricorum elegantiora quandoque media operantis ingenium, quam talis determinata æquatio suppeditet, quæ quidem respicit problema illud solitarie sumptum & ab omnibus aliis independens, ut* Cl. Wolfius *observat, & ex hoc ipso problemate intelligi potest: quod quidem multis aliis modis eleganter & a superiori æquatione independenter construitur.*

SCHOL. *Ex penultima æquatione habetur egregium theorema, quod est Prop.* 12. *lib.* 13. *Euclidis*: Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, quadratum ex trianguli latere triplum est ejus, quod fit ex circuli semidiametro. *Nam si ponatur* $AB = b$, $BC = a$, *&* $AC = 2a$, *erit* $b^2 = 3a^2$, *ut* 3 *ad* 1. Fig. 21.

PROBL. VIII.

Rationem invenire, quam pentagoni latus habet ad hexagoni & decagoni simul sumpta latera in eodem circulo inscriptorum. Fig. 23.

SIt *AC* latus pentagoni, divisoque bifariam arcu *AC* in *B*, chorda *AB*, seu *BC* erit latus decagoni; & circuli

culi radius AF, vel FC latus hexagoni, ut patet. Ducatur FD perpendiculariter ſuper AB, quam bifariam ſecabit in D *per* 3. *l.*3. & ducatur EB. Duo triangula ACF, ECF ſunt æquiangula & ſimilia; nam præter angulum communem C, angulus $CFE = FAC$: eſt enim arcus BC gr.36. & BD gr.18. ergo totus DC, nempe angulus CFE, gr.54. Similiter cum in trigono iſoſcele AFC angulus ad centrum ſit gr.72, erunt ſinguli ad baſim gr.54. proinde $FAC = CFE$.

Sit $AF = a$, $AC = b$, $EC = x$, erit $AE = b - x$, & $AB = c$. Ratione triangulorum ſimilium ACF, ECF eſt $AC . AF :: AF . EC$, hoc eſt $b . a :: a . x$, hinc $bx = aa$. Deinde triangulum iſoſcele AEB ſimile eſt triangulo iſoſceli ABC. Habent enim angulum A communem, proinde omnes alios æquales, ut patet. Sunt ergo proportionales $AE . AB :: AB . AC$, hoc eſt $b - x . c :: c . b$, unde $bb - bx = cc$. Addatur huic altera æquatio, habetur $bb = aa + cc$, hoc eſt latus pentagoni regularis poteſt latera hexagoni & decagoni eidem circulo inſcriptorum, ut in *Prop.*10. *lib.*13. propoſuit Euclides.

PROBL. IX.

Dato quadrato ABCD, *ex angulo* A *ducere rectam* AE, *ut pars* FE *intercepta inter latus* BC *&* DC *continuatum ſit æqualis datæ rectæ* M. Fig.24.

Sit factum, & ſit AB vel $BC = a$, $FE = M = b$, $BF = x$, erit $CF = a - x$.

Triangula ECF, ABF ſunt æquiangula & ſimilia, erit ergo $CF \,.\, FE :: FB \,.\, AF$, hoc est $a - x \,.\, b :: x \,.\, \frac{bx}{a-x} = AF$. Sed ob triangulum ABF in B rectangulum $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, ergo $\frac{b^2x^2}{a^2 - 2ax + xx} = a^2 + x^2$, factaque multiplicatione, & legitima reductione, habetur $x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - b^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$.

Tentandum hic esset, an biquadratica hæc æquatio ad inferiorem gradum deprimi possit per ea, quæ docuimus in *Prop.*4.*Cap.*10. quemadmodum Cartesius (a) fecit, qui ad duas secundi gradus reduxit. Sed præstat explorare, an alia simplicior æquatio inveniri possit hoc pacto.

Ex puncto E demittatur EG perpendicularis ad AE, quæ lateri producto AB occurrat in G. Ducta perpendiculari EH, facile erit ostendere EG æqualem esse AF: cum triangula EHG & ABF sint rectangula, similia *per Prop.*8. *lib.*6. & etiam æqualia; & $EH = CB = AB$, proinde EG & AF latera homologa & æqualia.

Sit ergo AB, vel $BC = a$, $FE = M = b$, $AF = EG = y$, & $BG = x$, erit $AE = y + b$, & $AG = a + x$. Tum ob triangula similia ABF & AEG, erit $AB \,.\, AF :: AE \,.\, AG$, hoc est $a \,.\, y :: y + b \,.\, a + x$; unde habetur $aa + ax = yy + by$. Deinde ob triangulum AEG rectangulum in E, $\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$, hoc est $a^2 + 2ax + x^2 = 2y^2 + 2by + bb$. In hac secunda æquatione ponatur pro $y^2 + by$ ejus valor ex prima inventus $aa + ax$, habebitur $aa + 2ax + x^2 = 2a^2 + 2ax + b^2$, quæ reducitur ad simplicissimam secun-

(a) Geometr. lib. 3. p. m. 83.

ſecundi gradus $xx = aa + bb$, atque $x = \sqrt{aa + bb} = BG$.

Conſtr. (*Fig.* 25.) Producatur quadrati latus AD in O, ita ut AO ſit æqualis rectæ datæ M, erit $\overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AO}^2$ (ob triangulum rectangulum OAB) $= aa + bb$, & $BO = \sqrt{aa + bb} = x$. Producatur ergo latus AB in G, ita ut BG ſit æqualis BO, & ſuper AG diametro deſcribatur ſemicirculus AEG, qui ſecabit quadrati latus DC productum in E, & conjungatur AE, erit EF recta quæſita.

SCHOL. *Hæc conſtructio eadem eſt, quæ a Pappo fuit allata, & a Carteſio indicatur, tum ad uſum reductionis æquationum oſtendendum, tum ad docendum nos plurimum intereſſe unam vel aliam quantitatem incognitam aſſumere. Sive enim pro incognita aſſumatur* BF, *ſive* FC, *vel* AF *aut* CE, *ſemper oritur æquatio biquadratica. Sumpta autem* BG, *prodit æquatio ſimpliciſſima ſecundi gradus, ut vidimus. Jure igitur in hoc ipſo problemate ſolvendo poſt Carteſium recentiores Analyſtæ fere omnes ingenium ſuum exercuerunt, apud quos illud paſſim invenias.*

PROBL. X.

Circulum invenire datæ ſuperficiei conicæ æqualem.
Fig. 26.

SIt circuli quæſiti radius $= x$, & ratio radii ad peripheriam ſit $r.p$. Si fiat $r.p :: x.\frac{px}{r}$, erit $\frac{px}{r}$ periphe-

ria

ria circuli; & inde innotescit area circuli $= \frac{px^2}{2r}$ *per Coroll.* 1. *Prop.* 5. *Archim. ex Tacquet.*

Sit coni dati latus $= a$, peripheria circuli basis ejusdem $= p$, erit superficies conica $= \frac{1}{2}ap$ *per Coroll.* 1. *Prop.* 13. *ex Archim. cit.* Erit ergo ex hypothesi $\frac{px^2}{2r} = \frac{1}{2}ap$, & multiplicando per $2r$

$$px^2 = arp$$
$$x^2 = ar$$
$$x = \sqrt{ar}$$

COROLL. *Hinc oritur Archimedis theorema*: Circulus, cujus radius est medius proportionalis inter coni recti latus & radium basis conicæ, æqualis est superficiei conicæ. *Est ejusdem Prop.* 13. *de Sphæ. & Cylin.*

Demonstr. (*Fig.* 26 & 27.) Sit conus rectus datus R. Fiat circulus MLN, cujus radius OL sit medius proportionalis inter coni latus AB & conicæ basis radium BC: hoc est ponatur radius OL medius proportionalis inter AB & BC; erit *per Prop.* 7. *Archim. cit.* peripheria BED ad peripheriam MLN ut BC ad OL, sive ut OL ad AB: proinde rectangulum sub prima, nempe peripheria BED & quarta AB, sive ejus dimidium [nempe triangulum, cujus basis est peripheria BED & quarta BC altitudo] æquatur rectangulo sub secunda, seu peripheria MLN & tertia OL, seu triangulo sub eadem secunda MLN & tertia OL, quod est ejusdem rectanguli dimidium. Sed triangulum, cujus basis est peripheria BED, & altitudo

AB

AB æquatur dati coni ſuperficiei *per Coroll.* 1. *Prop.* 13. *ex Archim. cit.* & triangulum ſub peripheria *MLN* & tertia *OL* æquatur circulo *OLM per Prop.* 5. *ex Archim. cit.* ergo habetur circulus æqualis conicæ ſuperficiei quæſitus. Quod &c.

PROBL. XI.

Dato cono recto ABC, *circulum invenire æqualem ſuperficiei conicæ* BDCE *planis parallelis* BC *&* DE *interceptæ*. Fig. 28.

SEctus ſit conus per axem triangulo *ABC*, erunt rectæ *BC* & *DE* parallelæ *per Prop.* 16. *l.* 11. *Eucl.* cum ſint ſectiones communes ejuſdem trianguli cum planis parallelis *BHC* & *DEL*. Sit coni latus $AB = l$, $AD = m$, erit $BD = l - m$: item eſto *BF* radius circuli baſis $= r$, *DG* radius circuli paralleli $= s$, & circuli quæſiti radius $= x$. Ob triangula ſimilia *ABC* & *ADE* eſt $AB . BF :: AD . DG$, hoc eſt $l . m :: r . s$, atque hinc $ls = mr$, & $ls - mr = 0$.

Superficies autem conica *ABC* æquatur circulo (*per Theor. præc.*) cujus radius $= \sqrt{lr}$, ſeu cujus radii quadratum $= lr$: item ſuperficies conica *ADE* æquatur circulo, cujus radius $= \sqrt{ms}$, ſeu cujus radii quadratum $= ms$; erit ergo radius circuli quæſiti, ſive ejus quadratum

$$x^2 = lr - ms$$
$$x = \sqrt{lr - ms}$$

Coroll. *Si ſuperior æquatio* $x^2 = lr - ms$ *in proportionem*

tionem resolvatur, *erit* $l - m . x :: x . r + s$. *Nam* $\overline{l - m} \times \overline{r + s} = lr + ls - mr - ms$. *Inventum autem fuit supra* $ls - mr = 0$, *proinde* $\overline{l - m} \times \overline{r + s} = lr - ms$; *atque hinc oritur theorema Archimedis*, *quod est Propos.* 15. *de Sphær. & Cylin.* Circulus habens radium proportione medium inter interceptam parallelis planis *BC* & *DE* partem lateris *DB* ($= l - m$) & summam radiorum *BF* + *DG* ($= r + s$) circulorum, qui sunt in planis parallelis, æquatur superficiei conicæ *BDCE* parallelis planis interceptæ.

PROBL. XII.

Dato cylindro sphæram æqualem invenire.
Fig. 29. & 30.

Supponatur factum, & sphæra *M* sit æqualis cylindro *ABCD*. Concipiatur sphæræ *M* circumscriptus cylindrus *EFGH*, habens tam latus *FH*, quam diametrum basis *HG*, utrunque æquale diametro sphæræ *LN*; erit cylindrus *EFGH* sphæræ circumscriptus ejusdem sesquialter, hoc est $= \frac{3}{2}$ sphæræ *per Prop.*45. *Archim ex Tacquet*. Proinde si fiat $PC = \frac{3}{2} DC$, erit cylindrus $BP = \frac{3}{2}$ cylindri *BD per Prop.*14. *l.*12. & æqualis cylindro circumscripto *EFGH*, cum sphæra & cylindrus *BD* ex hypothesi sint æquales

Sit jam cylindri dati diameter $BC = a$, altitudo $DC = b$, erit altitudo $PC = \frac{3}{2} b$. Sit autem sphæræ diameter *LN*, vel $FH = x$.

In

In cylindris æqualibus BP & FG erit basis BCK ad basim GHZ (vel quadrata diametrorum earundem $\overline{BC}^2$, $\overline{GH}^2$ *per Prop.2. l.12.*) ut reciproce altitudo FH ad altitudinem PC, hoc est

$$a^2 . x^2 :: x . \tfrac{3}{2} b$$
$$x^3 = \tfrac{3}{2} a^2 b$$
$$x = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2} a^2 b}$$

Ex quo patet problema esse solidum, & ad ejus solutionem duas medias proportionales esse inveniendas inter a & $\frac{3}{2} b$; nempe $a . x :: \frac{x^2}{a} . \frac{x^3}{a^2}$. Nam ex quadratis diametrorum a^2 & x^2 habentur tres continue proportionales $a : x : \frac{x^2}{a}$ *per Prop.20. l.6. Eucl.*, ex superiori autem æquatione $x^3 = \frac{3}{2} a^2 b$ eruitur $\frac{x^3}{a^2} = \frac{3}{2} b$ dividendo per a^2, proinde sunt continue proportionales $a . x :: \frac{x^2}{a} . \frac{3}{2} b$.

Schol. *Egregium hoc Archimedis problema, quod ipse statim initio* lib.2. de Sph. & Cyl. *Analytico fere modo proposuit, illud deinde componit per duas medias proportionales, quod & nos eodem modo, sed aliquanto brevius absolvemus.*

Demonstr. Sit $CD = \frac{2}{3} CP$, erit cylindrus $BD = \frac{2}{3} BP$ cylindri. Tum inter BC & CP inveniantur duæ mediæ proportionales LN & R per modum aliquem mechanicum ex allatis a P. Tacquet ad *Prop.13. lib.6. Eucl.* Dico LN esse diametrum sphæræ æqualis cylindro dato BD. Nam ſphæræ M concipiatur circumſcriptus cylindrus $EFGH$, cujus baſis diameter & altitudo ſint æquales diametro ſphæræ LN, vel EG, erit eadem ſphæra $= \frac{2}{3}$ cylindri circumſcripti $EFGH$ *per Prop.* 32. *Archim. ex Tacquet.* Idem autem cylindrus circumſcriptus æquatur cylindro BP. Nam cum ſint quatuor continue proportionales BC, LN, R, CP, erit viciſſim $BC . R :: LN . CP$ *per* 16. *l.* 5. *Eucl.* Sed $BC . LN :: \overline{BC}^2 . \overline{LN}^2$ *per* 2. *lib.* 12. *Eucl.* ergo erit BC ad LN, baſis ad baſim, ut LN vel EG altitudo cylindri GF ad CP altitudinem cylindri BP; ergo hi duo cylindri æquantur *per* 15. *lib.* 12. *Eucl.* proinde etiam ſphæra M & cylindrus BD æquabuntur, cum ambo ſint $= \frac{2}{3}$ æqualium cylindrorum BP, GF. Quod &c.

APPENDIX

De conſtructione problematum ſolidorum.

Cum toties in hoc tractatu de reſolutione problematum ſolidorum per curvas obtinenda mentio facta ſit, abs re non erit hoc loco de illa breve aliquod ſpecimen exhibere. Cum autem nulla ſit methodus, quantum ego opinor, Carteſiana brevior, aut facilior, quæ nimirum circulum duntaxat & parabolam adhibet, hanc ipſam ex Cl. Halleii ([a]) annotatis explicare conabimur, præmiſſis, quæ ad rei intelligentiam viam ſternunt. Hæc autem methodus ſecundum terminum ex æquatione ſublatum petit. DE-

(a) In Tranſact. Anglicanis n. 183. pag. 335.

DEFINITIONES.

I. *Curva Algebraica* illa dicitur, quæ per æquationem Algebraicam definiri potest; vel illa, in qua per lineas rectas explicari potest ratio, quam singula curvæ puncta ad axem, vel diametros dicunt. Sic in circulo *AMB* (*Fig.* 31) ex quovis diametri puncto *P* ducta perpendiculari *PM*, ponatur $AB = a$ & $AP = x$, erit $BP = a - x$; sit $PM = y$, erit $\overline{MP}^2 = AP \times PB$ *per Pr.* 35. *lib.* 3. *Eucl.*, hoc est $yy = ax - xx$; & cum talis æquatio, seu circuli proprietas semper eadem reperiatur ex quocunque diametri puncto ducatur perpendicularis *PM*, dicitur *æquatio circuli*, & ipse circulus *curva Algebraica*, licet ob summam in ejus descriptione facilitatem tanquam figura plana consideretur. Perpendicularis *PM* dicitur *semiordinata* seu *applicata* ad axem, vel ad diametrum *AB*; portio vero diametri *AP* dicitur *abscissa*. Utraque quantitas dicitur *variabilis*, quia utraque crescit & decrescit, adeoque exprimi solent per x & y. *Semidiameter* vero circuli, & in parabola aliisque curvis *latus rectum*, seu *parameter*, dicuntur quantitates *constantes*: nam aliis crescentibus, vel decrescentibus, ipsæ eædem manent.

II. *Parabola* est curva Algebraica (*Fig.* 32.) in qua semiordinatæ quadratum æquatur facto ex abscissa in parametrum. Sit parabola *BAC*, cujus vertex punctum *A*, recta *AD* indefinite producta *axis*, *AL latus rectum*, seu *parameter*: perpendiculares ad axem *PM*, *pm*, dicuntur *semiordinatæ*; *AM*, vel *Am abscissæ*. Quælibet vero recta *ON*, vel *PQ* axi *AD* parallela dicitur *Parabolæ diameter*.

Ponatur ſemiordinata $PM = x$, & abſciſſa $AM = y$, parameter $AL = a$; cum *ex Prop.* 11. *lib.* 1. *Conic. Apollonii* ſit $\overline{MP}^2 = AM \times AL$, erit $xx = ay$: quæ quidem eſt proprietas & natura parabolæ, quæ per talem æquationem Algebraicam deſignatur.

COROLL. I. *Eſt ergo* $x = \sqrt{ay}$, *hoc eſt ſemiordinata* MP *eſt media proportionalis inter parametrum* AL *&* *abſciſſam* AM. *Nam* $a . x :: x . y$, *unde* $x = \sqrt{ay}$.

COROLL. II. *Similiter cum ſit* $xx = ay$, *erit* $a = \frac{xx}{y}$; *unde infertur parametrum* AL (a) *eſſe tertiam proportionalem ad abſciſſam* AM (y) *&* *ſemiordinatam* MP (x). *Nam ſunt in continua proportione* y, x, $\frac{x^2}{y}$ *ut patet*; *ſed* $a = \frac{xx}{y}$, *parameter igitur eſt tertia proportionalis. Hinc datis in parabola ſemiordinata* PM *&* *abſciſſa* AM, *habetur latus rectum, ſeu parameter* AL, *quod evidens eſt.*

PORISMA I.

Parabolam in plano deſcribere. Fig. 33.

SInt in eodem plano duæ rectæ *AZ* & *BX* indefinite productæ, & ad angulos rectos ſibi invicem occurrentes in *A*. Sumatur in *AZ* parametri longitudo *AD*, & in *BX* axis *AB*. Tum ex puncto *D* ducatur *DE* axi *AB* parallela. Poſtea ſumantur aliæ duæ rectæ *AR* & *CT*, quarum prior *AR* circa punctum fixum *A* revolvatur, altera

tera vero *CT*, ſervato ſemper ad axim *AB*, vel ad diametrum *DE* ſitu parallelo, progrediatur in recta *AZ*: quæ rectæ tamen ſic moveantur, ut jugiter ſit $DF = AC$. Nam ſi notentur puncta interſectionum duarum illarum rectarum *AR* & *CT*, prodibit curva quæſita, quam dico eſſe parabolam.

Demonſtr. Ex aliquo curvæ puncto *M* ducatur recta *MP* parallela rectæ *AD* & ad axem *AB* ordinata, erit $MP = AC$, & $CM = AP$ *per Prop.*44. *l.* 1. *Eucl.* Jam vero ob triangula ſimilia *FAD* & *MAC* eſt $AD . DF$ (ſeu *AC* ex conſtructione) :: $AC . CM$, ſeu *AP*. Habetur ergo *AC*, ſeu *PM* ($= x$) media proportionalis inter *AD* parametrum ($= a$) & abſciſſam *AP* ($= y$), proinde $x^2 = ay$, ideoque curva *AFL* eſt parabola *ex Defin.*2. *hujus*.

SCHOL. *Ad praxim loco rectarum* AR *&* CT, *quas modo explicato moveri concipimus, apponi ſolent duæ regulæ mobiles, quarum prima circa clavum in* A *fixum revolvatur, altera in ſitu ad axem parallelo progreditur, ex quarum mutua interſectione habentur puncta pro deſcriptione parabolæ ut* Fig.34. *ſatis oſtendit.*

PORISMA II.

Parabolam in plano alia ratione deſcribere. Fig.35.

PArabolæ parameter *AL* producatur indefinite in *N*, & ex puncto *A*, quod erit parabolæ vertex, eleveetur perpendicularis indefinita *AO*. Deinde ſumptis in *NL* centris quotcunque pro arbitrio (circino tamen uſque ad *L* aperto) fiant arcus rectam *AO* interſecantes in punctis

M,

M, *M*, *M*, tum etiam rectam *AN* in punctis *P*, *P*, *P*. Patet quamlibet ex his *AM* esse mediam proportionalem inter datam parametrum *AL* & abscissas *AP*, *AP*, *AP* *per Coroll. Prop.* 13. *l.* 6. *Eucl. ex Tacquet.* Igitur positis pro parametro *AL* & *AQ* pro axe parabolæ describendæ, si abscissæ *AP*, *AP*, *AP* transferantur in axem *AQ* in punctis 1, 2, 3 &c. & ex iisdem punctis ducantur ad axem *AQ* normales 1*N*, 2*N*, 3*N* &c. quæ æquales sint ipsi *AM*, *AM*, *AM* &c. curva per extrema harum perpendicularium transiens erit parabola *BAC*. Quæ quidem parabolæ descriptio ceteris longe tutior esse censetur, cum mechanicis instrumentis, quæ plerunque vitio laborant, minus sit obnoxia. Innititur autem *Coroll.* 1. *post Defin.* 2. ut patet.

PROPOSITIO I.

Explicatur constructionis Cartesianæ methodus.

Fig. 36.

1. DEscribatur parabola *OAN per Porism.* 1. *aut* 2. cujus vertex *A* & axis *AQ*, parameter autem *AL* ponatur $a = 1$, & transferatur parametri dimidium $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ ex vertice *A* in *C*.

2. Ex puncto *C* secetur $CD = \frac{1}{2}p$ in ipso axe deorsum, si in æquatione habeatur $-p$; vel sursum retrogrediendo versus *A*, si fuerit $+p$, & producendo (si opus sit) axem ad partes ipsius *A*. Quod si punctum $p = 0$, hoc est si æquatio tertio termino careat, tunc *CD* non ducitur.

3. Ex puncto *D* (vel ex *C*, si desit *CD*) erigatur ad axem

axem perpendicularis $ED = \frac{1}{2}q$ dextrorſum quidem, ſi fuerit in æquatione $-q$ (ut in hac figura) at ſiniſtrorſum ſi fuerit $+q$, erit EA radius circuli deſcribendi.

4. Centro E cum intervallo AE deſcribatur circulus, qui parabolam ſecat in punctis O, B, N, ex quibus ducta ad axem perpendicula OP, BC & FN dant radices æquationis quæſitas; hoc eſt, quæ ſunt ad axis dexteram (ut FN) ſemper ſunt veræ, quæ vero ad ſiniſtram ut BC, & OP ſunt falſæ: hæ ſimul ſumptæ radicem veram FN æquare debent, cum æquatio cubica ſecundo termino careat, ut ſupponitur. At quæ ſequuntur exempla rem clare oſtendunt.

PROPOSITIO II.

Æquationum cubicarum conſtructio exemplis illuſtratur. Fig. 37.

I. SIt data æquatio $x^3 - 3x - 1 = 0$, vel $x^3 - px - q = 0$, erit $-p = -3$, & $-q = -1$. Deſcribatur parabola *per Poriſ.* 1. *vel* 2. OAN, cujus parameter AL ſit $= a = 1$, vertex A & axis AQ. Sumatur $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$, & CD $(= \frac{1}{2}p) = \frac{3}{2}$. Deinde elevetur ex puncto D perpendicularis ED $(= \frac{1}{2}q) = \frac{1}{2}$ dextrorſus quidem ob $-q$; & centro E cum intervallo EA deſcribatur circulus OAN, qui ſecabit parabolam in punctis O, B & N, ex quibus ducta perpendicula OP, BC & FN habentur æquationis datæ radices, duæ quidem falſæ OP & BC ad ſiniſtram axis, & tertia FN vera ad dexteram, quæ duabus prioribus æquatur.

De-

Demonstr. Sit $FN = x$, ut supponitur: abscissa $AF = y$, & parameter $AL = 1$. Erit ex natura parabolæ $\overline{FN}^2 = AF \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde $AF = x^2$.

Insuper AD ($= AC + CD$) $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$. Hinc DF ($= AF - AD$) $= x^2 - 2$, & $DE = \frac{1}{2}$, ideoque NM ($= FN - FM$, seu DE) $= x - \frac{1}{2}$. In triangulo rectangulo AED est $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 4 + \frac{1}{4}$. Item in triangulo rectangulo EMN est $\overline{EN}^2 = \overline{EM}^2$ (seu $\overline{DF}^2$) $+ \overline{MN}^2 = x^4 - 3x^2 - 1x + 4 + \frac{1}{4}$, proinde ex radiorum AE & EN æqualitate habetur æquatio.

$$4 + \tfrac{1}{4} = x^4 - 3x^2 - 1x + 4 + \tfrac{1}{4}$$
$$x^4 - 3x^2 - 1x = 0$$
$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Quod si sumatur aliqua ex radicibus falsis v.g. $OP = -x$, eadem sequitur demonstratio. Nam sit abscissa $AP = y$, semiordinata $OP = -x$, parameter $AL = 1$, erit ex natura parabolæ $\overline{OP}^2 = AP \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde $AP = x^2$. Deinde $PT = DE = \frac{1}{2}$, hinc OT ($= OP + PT$) $= -x + \frac{1}{2}$, & $AD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, proinde $DP =$ ($DA - AP$) $= 2 - x^2$.

Jam in triangulo rectangulo OTE est $\overline{EO}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{ET}^2$ (seu $\overline{DP}^2$) $= x^4 - 3x^2 - 1x + 4 + \frac{1}{4}$. Item in triangulo rectangulo ADE est $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 4 + \frac{1}{4}$, adeoque

que ob radiorum EO & EA æqualitatem erit æquatio

$$x^4 - 3x^2 - 1x + 4 + \tfrac{1}{4} = 4 + \tfrac{1}{4}$$
$$x^4 - 3x^2 - 1x = 0$$
$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

II. Sit æquatio construenda $x^3 + px - q = 0$, seu $x^3 + 3x - 6 = 0$. Descripta parabola (*Fig.* 38.) NAM, cujus axis AO, vertex A. Assumpta parametro $= 1$, secetur $AC = \frac{1}{2}$, & sumatur $CD\ (= \frac{1}{2}p) = \frac{3}{2}$ supra punctum A, cum adsit in æquatione $+p$. Elevata deinde perpendiculari ad axem $ED\ (= \frac{1}{2}q) = 3$, dextrorsum ob $-q$, fiat centrum in E, & intervallo EA describatur circulus EAM, qui parabolam secat in unico puncto M, ex quo ducta normalis PM ad axem dat radicem veram PM.

Coroll. *Ubi circulus parabolam non secat (ut in hoc casu) nisi in unico puncto, signum est alias duas æquationis datæ radices esse imaginarias. Quod optime convenit cum iis, quæ diximus in* Prop. 4. Cap. 9. *nimirum duas radices imaginarias haberi, si in æquatione fuerit* $+$ p.

III. Construenda sit æquatio $x^3 + px + q = 0$, seu $x^3 + 1x + 1 = 0$. Describatur parabola (*Fig.* 39.) cujus parameter $= 1$, vertex A, axis AR. Secetur $AC = \frac{1}{2}$ & a puncto C versus A sumatur $CD = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$. Punctum D cadit præcise in A, & ex puncto A, vel D ducatur perpendicularis $AE = \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}$ sinistrorsus ob $+q$, factoque centro in E cum intervallo EA, fiat circulus EAF secans parabolam in F, ex qua intersectione ducta ad axem normali FM, habetur radix falsa FC (cum sit ad axis sinistram) & aliæ duæ imaginariæ ex *super. Coroll.*

Demonstr. Sit parameter $AL = 1$, abscissa $AC = y$, & applicata FC ex hypothesi $= -x$, erit ex natura parabolæ $\overline{FC}^2 = AC \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde AC seu EN (quæ ex centro E ducitur ad FC perpendicularis) $= x^2$, & ED seu $NC = \frac{1}{2}$; ideoque $FN = (FC - CN) = -x - \frac{1}{2}$. Jam igitur in triangulo rectangulo ENF est $\overline{EF}^2 = \overline{EN}^2 + \overline{FN}^2$, hoc est

$$\frac{1}{4} = x^4 + x^2 + 1x + \frac{1}{4}$$
$$x^4 + x^2 + 1x = 0$$
$$x^3 + x + 1 = 0$$

SCHOL. *Si circulus parabolam tangit, duæ intersectiones coincidunt perinde ac illam in duobus punctis perexiguo ac fere nullo intervallo distantibus secaret, & sectiones illæ in puncto contactus coirent; adeoque tunc æquatio duas habet radices æquales. Quod si eam nec tangit, nec secat, radices omnes sunt impossibiles.*

PROPOSITIO III.

Æquationes biquadraticas construere. Fig. 40.

DEscripta parabola cum parametro, vertice & axe omnino ut *in præc. Prop.* factum est, debet insuper pro æquatione biquadratica construenda augeri, vel minui circuli describendi radius AE; hoc est si in æquatione fuerit $-r$, additur; si fuerit $+r$, subtrahitur ex quadrato radii AE rectangulum ar factum ex parametro a & ex ex data quantitate r. Nam circuli hujus intersectiones cum parabola dant quæsitas æquationis radices, veras quidem semper ad axis dexteram, falsas ad sinistram. Res fiet exemplis clarissima.

I. Construenda sit æquatio $x^4 - qx - r = 0$, quæ præter secundum etiam tertio termino caret. Descripta parabola FAG, cujus latus rectum $AL = a = 1$, vertex A, axis AN, ex puncto C dextrorsum (ob $-q$) elevetur normalis $CE = \frac{1}{2} q$. Circuli describendi radius AE augeri debet ob $-r$ rectangulo ar. Igitur producatur AE hinc inde indefinite, & AB secetur æqualis parametro $AL = a$, $AS = r$. Tum descripto super BS semicirculo BDS, & ex puncto A elevata perpendiculari AD ad diametrum BS, erit $\overline{AD}^2 = BA \times AS = ar$, ductaque ED, erit $\overline{ED}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2$. Habetur ergo DE circuli describendi radius quæsitus auctus rectangulo ar; factoque centro E cum intervallo ED fiat circulus DRG, qui parabolam secabit in punctis R & G, ex quibus ducta ad axem perpendicula RM & NG dant radices æquationis propositæ, NG veram utpote ad axis dexteram, & MR falsam ad sinistram. Ducatur ex puncto E perpendicularis EQ.

Demonstr. Sit $NG = x$, & abscissa $AN = y$. $\overline{AD}^2 = AB \times AS = ar$, unde $AD = \sqrt{ar}$. $QG = CE - NG = \frac{1}{2} q - x$; & ex natura parabolæ $\overline{NG}^2 = NA \times a$, nempe $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{xx}{a} = AN$. Similiter EQ ($= AN - AC$) $= \frac{xx}{a} - \frac{1}{2} a$.

 Jam

Jam in triangulo rectangulo ECA est $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$. Item in triangulo rectangulo EQG est $\overline{EG}^2 = \overline{QG}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{x^4}{a^2} - qx + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$. Tandem in triangulo EAD est $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa + ar$. Igitur ob æqualitatem radiorum ED & EG erit

$$ar = \frac{x^4}{a^2} - qx$$

$$x^4 - a^2qx = a^3r$$

(ob $a = 1$) $$x^4 - qx = r$$

$$x^4 - qx - r = 0$$

Idem demonstrari potest assumpta radice negativa $RM = -x$.

II. Sit (*Fig.* 41) construenda æquatio $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, seu $x^4 - px^2 + qx + r = 0$, erit $p = 5$, $q = 2$ & $r = \frac{5}{2}$. Describatur parabola, cujus latus rectum $a = 1$, vertex A & axis AD, in quo secetur $AC = \frac{1}{2}$ & $CD = \frac{1}{2}p$. Tum sinistrorsum ob $+q$ elevetur perpendicularis ad axem $DE = \frac{1}{2}q$. Liquet ex dictis minuendum esse ob $+r$ circuli describendi radium rectangulo ar. Proinde producta utrinque AE indefinite, secetur $AB = a$ & $AH = r$: tum super diametro BH describatur semicirculus HMB, & ex puncto A elevetur perpendicularis AM. Similiter super AE describatur semicirculus ANE, in quo ducatur chorda AM; seu (quod idem est) secetur arcus AN posito circino in A cum intervallo AM.

Igitur

Igitur intervallum EN erit radius quæsitus circuli centro E describendi. Nam $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2$ in triangulo rectangulo ENA, & $\overline{AN}^2 (= \overline{AM}^2) = BA \times AE = ar$. Itaque descripto sic circulo, parabola intersecatur in punctis G, F, P & Q, ex quibus demissæ ad axem normales Gc, FR, OP & CQ, habentur quatuor æquationis datæ radices, duæ quidem ad axis dexteram veræ & duæ falsæ ad sinistram.

Demonstr. Sumatur quælibet radix v. g. $OP = x$, & sit abscissa $AO = y$, erit ex natura parabolæ $\overline{OP}^2 = AO \times a$, hoc est $x^2 = ay$, atque hinc $y = \frac{x^2}{a} = AO$. Deinde $\overline{AM}^2$ seu $\overline{AN}^2 = BA \times AH = ar$, unde $AN = \sqrt{ar}$; & in triangulo rectangulo ENA [ductis rectis EN & AN] erit $\overline{EN}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AN}^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}q^2 - ar$.

Similiter quia $PK = x + \frac{1}{2}q$, & OD seu $EK = AO - AC - CD = \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}p$, in triangulo rectangulo EKP erit $\overline{EP}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{PK}^2 = \frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}p^2 + qx + \frac{1}{4}q^2$. Igitur propter radiorum EP & EN æqualitatem habetur æquatio

$$\frac{x^4}{a^2} - \frac{px^2}{a} + qx = -ar$$

$$x^4 - apx^2 + a^2qx + a^3r = 0$$

Hinc

Hinc posito $a = 1$, & surrogatis valoribus p, q & r, erit $x^4 - 5x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$, qualis proposita fuit.

COROLL. *Constructiones æquationum tertii & quarti gradus fere omnino conveniunt. In hoc tamen differunt, quod in cubicis circulus transit per parabolæ verticem, non autem in biquadraticis.*

SCHOL. I. *Præclara hæc Cartesii methodus id incommodi nonnullis habere visa est, quod secundum æquationis terminum, si adsit, tolli jubeat. Huic molestiæ* Thomas *Bakerus* (a) *Anglus occurri posse animadvertit, si loco axis parabolæ, uti Cartesius fecit, adhiberetur aliqua parabolæ ipsius diameter, ad quam ducerentur ex intersectionibus parabolæ & circuli ea perpendicula, quæ ut vidimus, dant radices quæsitas.* Hac regula, *quam a ratione tradita circuli centrum determinandi*, Centralem *vocat, æquationes omnes cubicas & biquadraticas quomodolibet affectas & completas sine ulla prævia reductione construere docet. At vero tot illa nodis intricata est, & tot cautionibus de signis + & — obnoxia, ut remoto libro, vix possit quis omnes memoria retinere, ut Cl.* Hallejus (b) *testatur, qui multis annotationibus ei plurimum lucis attulit; quemadmodum deinde Christophorus Sturmius* (c) *&* Wolfius (d) *fecerunt, apud quos videant, qui volunt.*

SCHOL. II. *Sicuti parabolam & circulum mutuo intersecari vidimus, & inde obtineri datarum tertii & quarti gradus æquationum radices, ita circulus cum ellipsi, vel hyperbole, aut duæ quælibet ex iisdem Conicis sectionibus pari ratione combinari possunt ad problemata cujuscunque gradus*

(a) Clavis Geometrica Cathol. Londini 1684. (b) Transf. Anglic. n. 188. p. 335. an. 1687. (c) Mathes. enucl. pag. 349. (d) Construct. æquat. Probl. 254.

gradus construenda, quemadmodum Dn. de la Hire [a] *& Marchio* [b] *Hospitalis egregie fecerunt. Nos duas medias continue proportionales ex duarum parabolarum intersectione mox inveniemus. Menechmus id primus docuit.*

PROBL. I.

Inter datas a *&* q *duas medias proportionales invenire*. Fig.42.

I. SIt prior quæsita $= x$, erunt quatuor continue proportionales $a . x . \frac{x^2}{a} . \frac{x^3}{a^2}$, proinde $\frac{x^3}{a^2} = q$, & $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$.

Vel sic: sit prior quæsita $= x$, altera $= y$. Quoniam ex hypothesi $a . x . y . q$ sunt continue proportionales, erit $a^2 . x^2 :: x . q$ *per Coroll. Prop.*20. *lib.*6. *Eucl.* adeoque $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut prius.

Pro constructione descripta parabola *FAP*, cujus parameter $a = 1$, vertex *A* & axis *AQ*, secetur $AC = \frac{1}{2}$, & ex puncto *C* elevetur normalis $CE = \frac{1}{2} q$ dextrorsum quidem ob $- q$. Tum centro *E* cum intervallo *AE* describatur circulus *EAP* parabolam secans in puncto *P*, erit applicata *PM* radix quæsita $= x$.

Demonstratio a ceteris non differt, ductis recta *EP* & perpendiculo *EN*.

Coroll. *Hinc habetur modus inveniendi inter duas datas tot medias proportionales, quot volueris. Sint datæ* a *&*

(a) Sections Coniques liv.9. & 10. (b) Construct. des æquat. Analyt.

& q, *& quæsitarum prima* $= x$. *Continuetur progressio Geometrica* $a . x . \frac{x^2}{a} . \frac{x^3}{a^2} . \frac{x^4}{a^3} . \frac{x^5}{a^4} . \frac{x^6}{a^5}$ *&c. & numerus terminorum, qui binario superat quæsitarum proportionalium numerum, fiat æqualis alteri quantitati datæ* q. *Sic ut habeantur tres mediæ proportionales, fiat* $\frac{x^4}{a^3} = q$, *unde erit* $x^4 = a^3q$. *Item si quærantur quatuor proportione mediæ, fiat* $\frac{x^5}{a^4} = q$, *erit* $x^5 = a^4q$ *& sic de ceteris.*

II. Sint, ut prius, datæ a & q, inter quas inveniendæ sint duæ mediæ proportionales x & y; erit $a . x :: x . y$, unde $ay = x^2$. Similiter $x . y :: y . q$, adeoque $qx = y^2$, quæ duæ æquationes parabolæ naturam exprimunt *ex Defin.* 2. *hujus*. Ex prima habetur $y = \frac{x^2}{a}$; quo valore posito in secunda, oritur $qx = \frac{x^4}{a^2}$, atque hinc $x^3 = aaq$, seu $x^3 - aaq = 0$, ut *in præc. Propos.*

Pro construct. (*Fig.* 43.) secent se ad angulos rectos in A duæ rectæ DB & EC. Secetur $AB = a$ datarum priori, & $AC = q$ alteri datæ. Tum super axe AD cum parametro AB describatur parabola AMP. Item super axe AE cum parametro CA describatur parabola AMN; & ex punctis intersectionum ducantur ad suos axes semiordinatæ MP, & MN, erunt AN & AP duæ mediæ proportionales quæsitæ, hoc est $AB . AN :: AN . AP :: AP . AC$.

Demonstr. Sit AN ($= PM$) $= x$, & AP ($= MN$) $= y$

$= y$, æquatio ad parabolam AMP est $\overline{PM}^2 = AP \times AB$, hoc est $x^2 = ay$. Eadem ratione æquatio ad parabolam MAN est $\overline{MN}^2 = AN \times AC$, hoc est $x^2 = qx$. Cum igitur ex priori habeatur $a . x :: x . y$, ex altera vero $x . y :: y . q$, evidens est in continua esse ratione $a . x . y . q$, nempe $AB . AN . AP . AC$. Quod &c.

COROLL. *Ex inventione duarum proportione mediarum sequitur celebratissima cubi duplicatio, quæ tandiu veterum Geometrarum mentem exercuit. Sint enim in continua proportione* a . x . y . q, *seu* (*positis* a = 1 *&* q = 2) 1 . x . y . 2. *habebit prima* 1 *ad quartam* 2 *rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima* 1 *ad secundam* x per Defin. 10. lib. 5. Eucl. *Sed cubus ex prima* 1 *ad cubum ex secunda* x *habet pariter rationem triplicatam ejus, quam habet eadem prima* 1 *ad secundam* x, *hoc est quam habet* 1 *ad* 2 per Prop. 33. lib. 11. Eucl. *ergo cubus ex secunda* x *duplus est cubi dati* 1.

SCHOL. D. *Guido Grandus* (a) *celeberrimus in Academia Pisana Matheseos Professor Mesolabium expeditissimum pro inventione duarum mediarum inter duas datas publicavit Florentiæ anno* 1728., *cujus ope non modo duplicatio cubi, sed anguli quoque trisectio, divisio sphæræ in partes datæ rationis, & omne prorsus problema solidum potest facillime solvi.*

(a) Flores Geometrici in Appendice.

PROBL. II.

Datum angulum AED, *vel arcum* ABCD *in tres æquales partes dividere*. Fig. 44.

Supponatur divisio jam facta in punctis B & C, erit chorda $AB = BC = CD$. Ducantur radii EA, EB, EC & ED, tum chorda AD; at BN sit parallela radio CE.

Triangula AEB, BEC & CED sunt æqualia, isoscelia & similia, quod evidens est. Item triangula EAB & BAR similia sunt: nam præter angulum ABR communem, angulus quoque ad centrum AEB æquatur angulo BAD ad circumferentiam *per Pr.20.l.3.Eucl.* unde EB seu $EA . AB :: AB . BR$; & cum triangulum AEB sit isoscele, erit quoque BAR isoscele, proinde $AB = AR$. Idem omnino demonstrari potest de triangulo DEC respectu trianguli CMD, quod pariter est isoscele, unde $CD = MD$.

Jam in isoscele BAR anguli ABR & ARB ad basim æquantur, itaque angulus CBE ($= ABR$) $= BRA$, seu MRE ad verticem, ideoque BC & RM sunt parallelæ. At vero triangula ABR & BRN sunt æquiangula: nam, præter angulum communem BRN, angulus quoque NBR $=$ (ob parallelas BN, CM) $CEB = BEA = BAR$, & tertius $ABR = BNR$ tertio. Cum autem triangulum ABR sit isoscele, erit quoque NBR isoscele; hinc $BN = BR$; & ob triangulorum similitudinem, AR seu $AB . BR :: BR . RN$. Erat autem $EA . AB :: AB . BR$; sunt ergo in continua ratione $EA . AB . BR . RN$.

Sit jam radius $EA = 1$, chorda $AB = x$, erunt quatuor

tuor termini continuo proportionales $1 . x . x^2 . x^3$. At quia in isoscele BAR est $AB = AR$, item in isoscele CDM est $CD = MD$, in parallelogrammo autem NC est $BC = NM$, sequitur chordam AD (quam voco q), addita NR, æqualem esse tribus rectis AB, BC & CD; hoc est $AD + NR = AB + BC + CD$, proinde $q + x^3 = 3x$. Habetur ergo æquatio $x^3 - 3x + q = 0$.

Constr. Describatur parabola (*Fig.*45.) MAN, cujus parameter AL sit $a = 1$, vertex A & axis AQ, in quo secentur $AC = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$ & $CD\ (= \frac{1}{2}p) = \frac{3}{2}$. Tum ex puncto D elevetur normalis ad axem $DE = \frac{1}{2}q$ ad sinistrum axis latus ob $+q$. Factoque centro E cum intervallo EA fiat circulus $EANM$, secans parabolam in punctis P, N & M; ex quibus ad axem applicata PT est æqualis chordæ quæsitæ $AB = BC = CD$. At RN est radix æqualis chordæ AF, quæ tripartito dividit alterum arcum AFD. Tertia MQ est radix falsa duabus PT & RN veris æqualis.

Demonst. Sit abscissa $AT = y$ & semiordinata $TP = x$, parameter $AL = 1$; erit ex natura parabolæ $\overline{TP}^2 = AT \times AL$, hoc est $x^2 = 1y$, unde $AT = x^2$. Est autem $AD = AC + CD = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$; & in triangulo rectangulo AED est $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2 = 4 + \frac{1}{4}qq$.

Deinde $DT\ (= EG) = DA - AT = 2 - x^2$, & $GP = GT$ (seu ED) $+ TP = \frac{1}{2}q + x$, proinde in triangulo rectangulo EGP est $\overline{EP}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{GP}^2 = 4 - 4x^2 + x^4 + x^2 + qx + \frac{1}{4}qq$, adeoque ob radiorum EP & AE æqualitatem oritur æquatio

$$4+\tfrac{1}{4}qq = x^4 - 3x^2 + qx + 4 + \tfrac{1}{4}qq$$

$$x^4 - 3x^2 + qx = 0$$

$$x^3 - 3x + q = 0$$

COROLL. *Hinc liquet oleum & operam perdere Geometriæ tyrones, dum anguli trisectioni per lineam rectam & circulum inveniendæ insudant, cum sit problema solidum.*

PROBL. III.

In æquationibus cubicis usus præc. problematis peculiaris ostenditur.

SIt æquatio cubica $x^3 - px - q = 0$, in qua cubus ex triente quantitatis cognitæ tertii termini major sit quadrato ex semisse ultimi termini, hoc est $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, tunc erunt tres radices reales & inæquales *per Prop.* 1. *num.* 2. *Cap.* 9., quæ quidem per Algebram obtineri non possunt, & occurrit casus ille *irreducibilis* de quo diximus *in Corol.* 2. *Prop.* 3. *Cap.* 9. Adhibitis enim Cardani formulis, æquationis radix, quæ realis esse debet, per quantitates imaginarias exprimitur, quod est absurdum. At vero per subtensas arcuum, seu per anguli trisectionem æquationis ejusdem radices opportune designantur modo nunc explicando. *Fig.* 44.

Radio $AE = \sqrt{\frac{1}{3}p}$, qui sit proportione medius inter quantitatis cognitæ p trientem & unitatem (*Vide Schol. Probl.* 7. *Cap.* 12.) describatur circulus ADF, in quo ducatur chorda $AD = \frac{3q}{p}$, (fit enim $\frac{1}{3}p \,.\, 1 :: q \,.\, \frac{3q}{p}$) quæ

nem-

nempe ſit ad datam quantitatem q, ut 1 ad $\frac{1}{3}p$. Deinde ſupponatur diviſus arcus $ABCD$ in tres æquales partes AB, BC, CD *per Probl. præc.* ita ut AB, vel BC, aut CD ſit $= -x$: patet enim ex ſignis in data æquatione haberi duas radices falſas & unam veram. Cum triangula AEB, BAR & RBN ſimilia ſint, erit AE $(\sqrt{\frac{1}{3}p})$. AB $(-x)$ :: AB $(-x)$. BR $\left(\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}\right)$ :: BR $\left(\frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{3}p}}\right)$. RN $\left(\frac{x^4}{-\frac{1}{3}px}\right) = -\frac{x^3}{\frac{1}{3}p}$. Eſt autem recta $AD + NR = AB + BC + CD$, ut *in præc. Probl.* vidimus, proinde $\frac{3q}{p} - \frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = -3x$, atque hinc $\frac{x^3}{\frac{1}{3}p} = 3x + \frac{3q}{p}$, hoc eſt $x^3 = px + q$, ſeu $x^3 - px - q = 0$.

Deſcripta igitur parabola OAN (*Fig.* 37.) *per Poriſ.* 1. *aut* 2. tum etiam circulo ENO, qui eam ſecat in punctis O, B, N, ſi ex his applicentur ad axem rectæ BC, OP & FN, prodibunt radices æquationis datæ, nimirum BC æqualis chordæ $AB = -x$, OP æqualis chordæ $AF = -x$, & $FN = x$; quæ quidem eſt vera & duabus prioribus (ad ſiniſtram poſitis) falſis æqualis. Itaque caſus in Algebra *irreducibilis* ex Geometria per anguli triſectionem facile ſolvitur.

SCHOL. *Albertus Girardus* (a) *hanc methodum, cujus eſt auctor, fuſe demonſtrat. Rem egregie contraxit Nic. de Martino* (b) *Neapoli Regius Mathematum profeſſor, quem videant qui cupiunt. Appendicis enim ſuſceptæ limites nos longius evagari non ſinunt.* PRO-

(a) Invention Nouvelle en l'Algebre an. 1629. Vid. Fr. a Schooten in Append. de Cubic. æquat. reſolut. (b) Nova Algeb. Elem. lib. 2. Cap. 7. num. VI.

PBOBL. IV.

Quæstionem Pappi resolvere.

Pappus Alexandrinus initio *lib.7. Collect. Mathemat.* mentionem facit de problemate quodam perplexo, ac difficili, cujus solutionem neque Euclides, neque Apollonius invenerant. Hanc vero Cartesius (a) novo Analyseos præsidio post quinque, aut sex hebdomadas extricavit, ibique Geometriæ suæ initia auspicatus est, ubi veteres terminum sibi statuerant. Infinitos autem casus quæstio illa complectitur: ex quibus nos unum vel alterum ex facilioribus, quique per circulum & parabolam construi possint, expendemus, ne tyrones tam famosæ quæstionis notitia diutius lateat. En igitur qualis a Cartesio (b) luculenter exponitur, quæ a Pappo tantum fuerat verbis subobscuris indicata.

Datis positione tribus, quatuorve, aut pluribus rectis lineis, quæritur primo punctum, a quo totidem aliæ rectæ lineæ singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum sub duabus contentum datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum datarum, si sint quatuor; aut si quinque sint, ut parallelepipedum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data. Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat

(a) Epist. 71. Tom. 2. (b) Geometr. lib. 1. pag. m. 10.

beat rationem ad parallelepipedum ſub tribus reliquis comprehenſum &c. Atque ita porro quæſtionem hanc ad omnem alium linearum numerum extendere licet.

I. Datæ ſint (*Fig.46.*) quinque rectæ inter ſe parallelæ *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, quæritur punctum *C*, ex quo ſi ad quinque rectas datas ducantur *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *CF*, quæ cum prioribus faciant angulum datum gr. 80, parallelepipedum ſub $CA \times CD \times CE$ ſit ad parallelepipedum ſub $CB \times CF$ & recta data $2a$, ut 2 ad 1.

Eſto factum, & quia datis parallelis datur quoque earum diſtantia, ſeu rectæ *AB*, *BD*, *DE*, ſint hæ ſingulæ $= a$, $EF = \frac{1}{2}a$ & $CB = x$, erit $CA = x + a$, $CD = x - a$, $CE = x - 2a$, $CF = x - \frac{5}{2}a$. Atque hinc erit ex conditione problematis

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 . 2ax^2 - 5a^2x :: 2 . 1$$
$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = 4ax^2 - 5a^2x$$
$$x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 2a^3 = 0$$

Hæc autem æquatio cum per nullum binomium dividi poſſit, tolli debet ſecundus terminus, ut per parabolam & circulum conſtrui poſſit. Fiat igitur $x - 2a = y$, erit $x = y + 2a$, factaque terminorum ſubſtitutione, oritur æquatio ſecundo termino carens *per Prop.5. Cap.6.*

$$y^3 * - 3a^2y + 4a^3 = 0$$

Hinc ex formula generali $y^3 - px + q = 0$, erit $-3a^2 = -p$, $4a^3 = q$, deſcriptaque parabola cum parametro $a = 1$, tum etiam circulo omnino ut *in Prop.1. hujus* factum eſt, invenietur y, cui ſi addantur $2a$ innoteſcet punctum x $(= y + 2a) = BC$. Ducta jam *Cc* ceteris

teris Aa, Bb &c. parallela, ex quovis puncto ejusdem ducantur rectæ datas parallelas in angulo dato secantes, solvitur quæstio.

II. Datæ sint (*Fig.*47.) positione septem parallelæ, quarum sit æqualis distantia $= a$, quæ faciant quemcunque angulum cum recta AG: quæritur punctum M, ita ut solidum $MC \times MA \times ME \times MG = MD \times MB \times MF \times 4a$. Sit $MD = x$, erit $MC = x + a$, $MB = x + 2a$, $MA = x + 3a$, $ME = MD - DE = x - a$, $MF = FE + ED - DM = 2a - x$, $MG = GD - DM = 3a - x$. Atque hinc oritur æquatio

$$-x^4 + 10a^2x^2 - 9a^4 = 16a^3x - 4ax^3$$

$$x^4 - 4ax^3 - 10a^2x^2 + 16a^3x + 9a^4 = 0$$

Quæ quidem cum per nullum binomium dividi possit, auferri debet secundus terminus, ut per parabolam & circulum construatur. Itaque sumatur $x - a = y$, erit $x = y + a$, & *per Prop.5. Cap.6.* oritur æquatio secundo termino carens

$$y^4 * - 16a^2y^2 - 12a^3y + 12a^4 = 0$$

Et comparatis hujus terminis cum formula generali, erit $-16a^2 = -p$, $-12a^3 = -q$, $+12a^4 = r$. Proinde facile construitur *per Prop.3. hujus*, & invenitur y, cui si addatur $+a$, innotescet punctum quæsitum $x\ (= y + a)$, a quo ducta Mm ceteris Aa, Bb, Cc &c. parallela, ex quocunque illius puncto ducatur recta parallelas Aa, Bb, Cc &c. secans in angulo dato, erit problema solutum.

F I N I S.

Ex Typographia Jo: Zempel apud Montem Jordanum.

Pag.	lin.	ERRATA.	CORRIGE.
57	19	detrorſum	dextrorſum
111	14	primi termini	primi & tertii termini
217	1	diviſio	diviſo
312	19	*Prop. 45. Arch.*	*Prop. 32. Arch.*
328	14	*in præc. Propoſ.*	*in præc. parte Propoſ.*

Tab III.