Digitalizzato da Google

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XII
G
96
NAPOLI

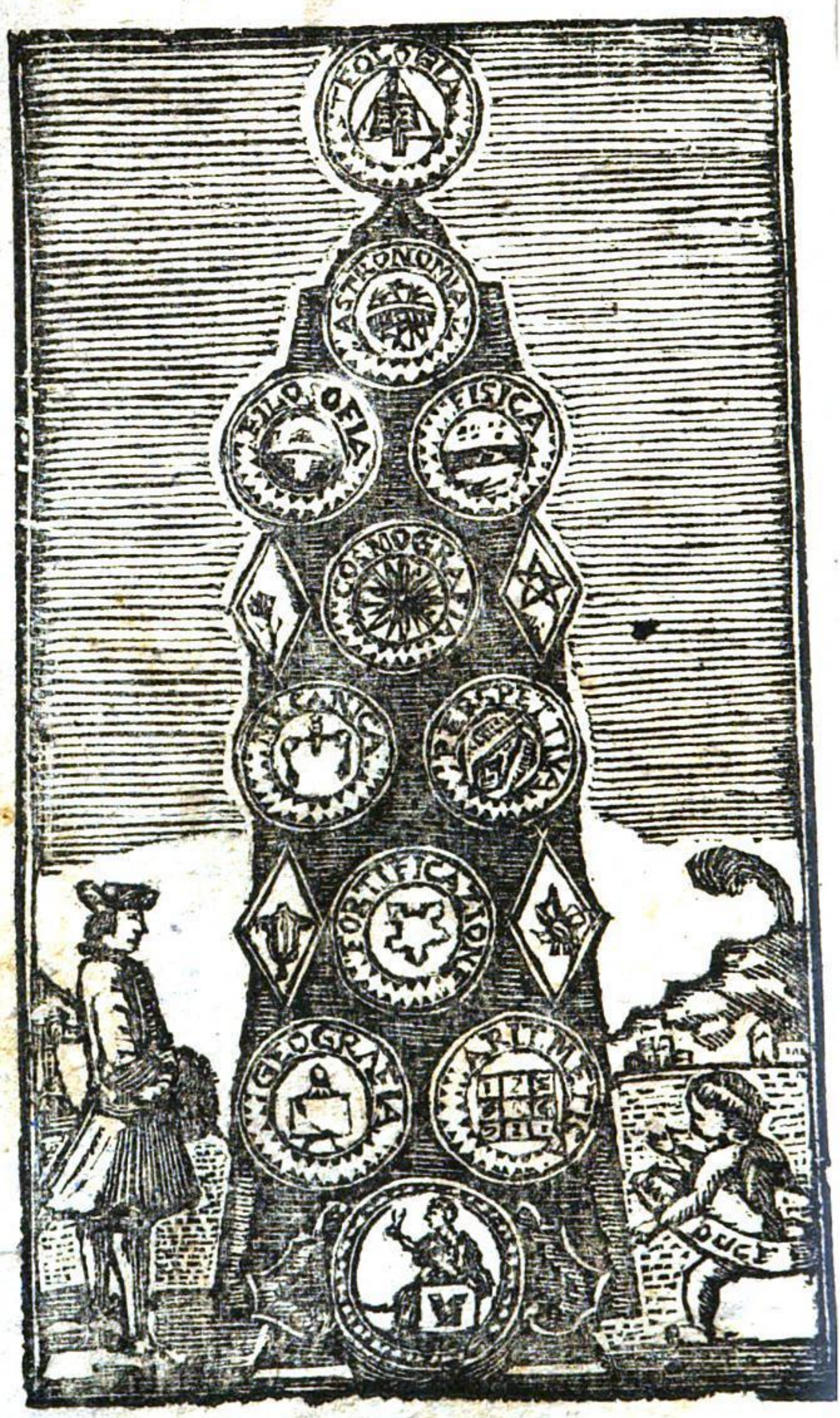
95

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google



Digitalizzato da Google

DEGLI ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA
PIANA
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE
E tradotti in Italiano, ed illustrati
DA
D. PIETRO DI MARTINO
LIBRI VI.



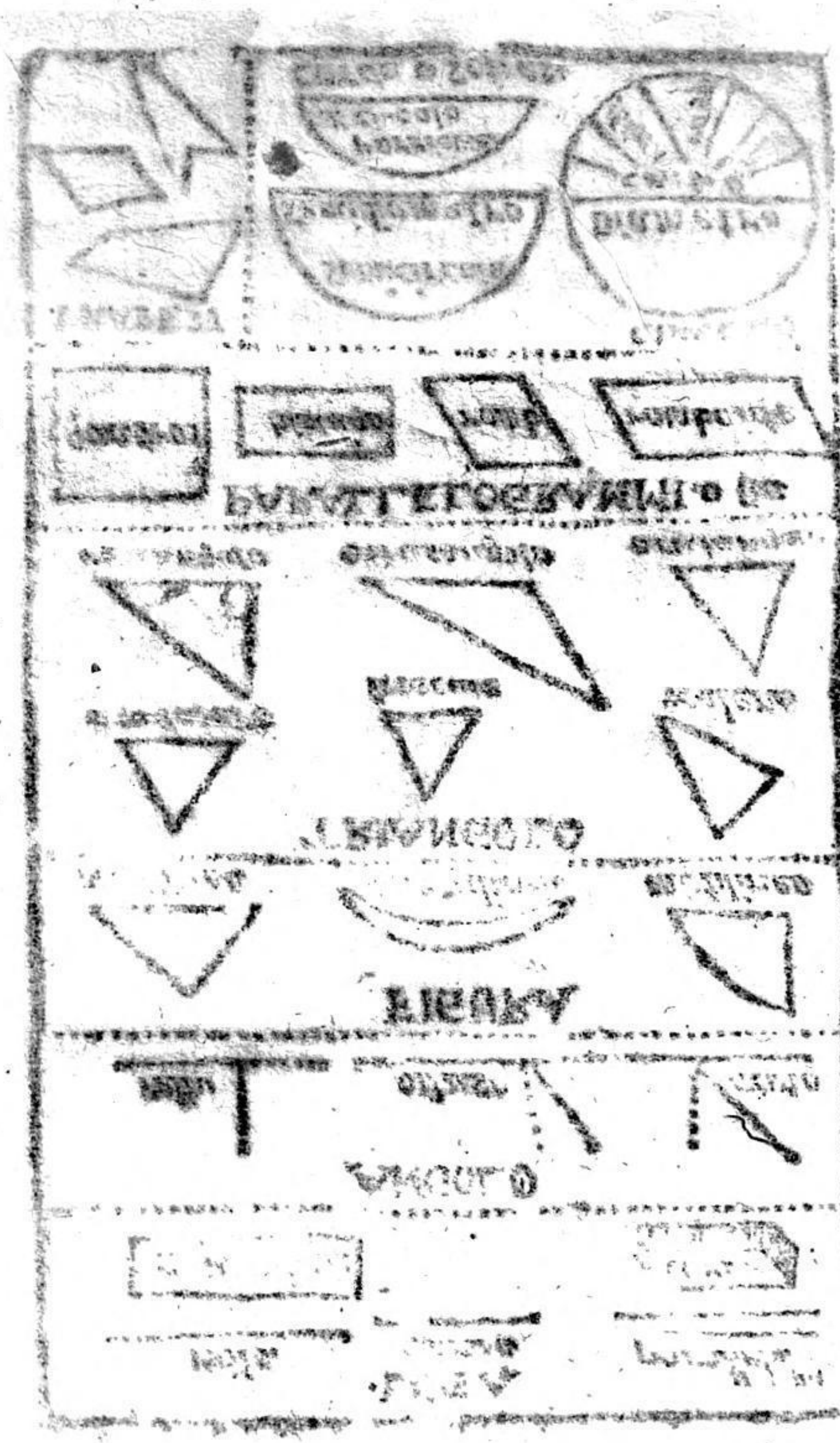


IN NAPOLI MDCCCI.
Nella Stamperia di Paolo Severino.
Con licenza de' Superiori.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google



LINEA

retta

curva

parallela

superficie

corpo

ANGOLO

retto

ottuso

acuto

FIGURA

rettilinea

curvilinea

mistilinea

TRIANGOLO

equilatero

isoscele

scaleno

rettangolo

ottusangolo

acutangolo

PARALLELOGRAMMI o ſia

quadrato

bislungo

romb

romboide

TRAPEZI

CIRCOLO

Semicircolo

Semidiametro

Diametro

centro

raggi

porzione di circolo

Corda o Sotese

Digitalizzato da Google

LIBRO PRIMO.

DEGLI ELEMENTI DELLA GEOMETRIA PIANA,

COMPOSTI

DA EUCLIDE MEGARESE.

PRIMA SORTA DI PRINCIPJ.

DEFINIZIONI.

I.

IL Punto è quello, il quale non ha nè grandezza, nè parti.

II.

La linea è una cosa lunga, senza essere larga.

III.

I termini della linea sono due punti.

IV.

La linea retta è quella, la quale si distende egualmente fra li suoi termini.

V.

La superficie è quella, che ha lunghezza, e larghezza solamente, e non ha profondità, ovvero crassezza.

Digitalizzato da Google

VI.

I termini della ſuperficie ſono le linee.

VII.

La ſuperficie piana è quella, che ſi diſtende egualmente fra li ſuoi termini.

SPIEGAZIONE.

IL *corpo, il quale è l'oggetto della Geometria può eſſere miſurato per tre verſi ſoli, e non più. Quindi ſi aſſegnano comunemente al corpo tre dimenſioni*, lunghezza, larghezza, e profondità, *ovvero* craſſezza. *Coteſte tre dimenſioni ſempre ſi ſono ritrovate, e ſi ritroveranno congiunte inſieme in tutti i corpi, non eſſendoſi giammai vedute nella natura coſe lunghe ſolamente, o lunghe, e larghe ſenza profondità. Pur tutta volta i Geometri non hanno dubitato di ſeparle, e diſgiungerle coſtituendone delle idee tutte nuove, ed ignote al volgo. In primo luogo adunque eſſendo ſtata da eſſi conſiderata la lunghezza a parte, ne nacque l'idea della* linea. *Dopo eſſendo ſtata conſiderata da' medeſimi la lunghezza, e la larghezza ſenza la profondità, ne nacque l'idea della ſuperficie. Quindi la ſuperficie ha biſogno di una ſola dimenſione, vale a dire della craſſezza per degenerare in corpo; ma la linea ne ha biſogno di due, le quali ſono la larghezza, e la craſſazza. Siccome poi la linea non è altro, che lunga, così ſi comprende di leggieri, che li ſuoi termini chiamati* punti *non anno nè grandezza, nè punti.*

Chi

Digitalizzato da Google

Chi dunque s'immaginerà nel corpo un segno indivisibile, e privo di parti, gli potrà dare con Euclide *il nome di* Punto. *Se poi s'ideerà coteſto ſegno muoverſi ſecondo qualſivoglia direzione, o gir laſciando una traccia, o ſtriſcia di ſe meteſimo, egli vedrà naſcere la linea, la quale ſarà* diritta, *ſe il punto non ſia giamai uſcito dalla ſua prima direzione, ma ſarà* curva, *ſe il punto ſia ito ſerpegiando, e cangiando direzione da tempo in tempo. Finalmente s'immaginerà la linea muoverſi per traverſo, egli vedrà naſcere la* Superficie, *la quale ſarà* piana, *ſe la linea non ſia giammai uſcita dalla ſua prima direzione, ma ſarà* curva, *ſe la linea ſia ita cangiando direzione da tempo in tempo. Intanto è quì da avvertirſi, che* Archimede Siracuſano, *ha definita la linea diritta così:* E' la più breve di tutte quelle che ſi diſtendono da un punto ad un'altro punto: *E che* Erone *ha definita la ſuperficie piana, dicendo* eſſere quella ſopra di cui ſi può per tutti i verſi adattare una linea retta.

VIII.

Angolo piano è l'inclinazione di due linee giacenti ſopra una ſuperficie piana le quali ſi uniſcono in un punto, e non ſono poſte a dirittura.

IX.

Se coteſte due linee, che formano l'angolo ſono diritte, dicaſi l'angolo rettilineo.

Digitalizzato da Google

SPIEGAZIONE.

TRe condizioni si richiedono per la formazione dell' angolo. I. Due linee giacenti in una superficie piana. II. Che queste due linee s' incontrino in un punto. III. Che incontrandosi non giacciano a dirittura. Quando queste tre condizioni si verifichino, si darà luogo all' angolo, il quale non è altro, che l' inclinazione scambievole delle due suddette linee. Siccome poi le due linee, che formano l' angolo possono essere entrambe rette, entrambe curve, è l' una retta, e l' altra curva, così l' angolo a non considerare altro, che le linee, dalle quali vien formato è, o rettilineo, *o* curvilineo, *o* mistilineo.

X.

Quando una linea diritta cade sopra un' altra linea diritta, e forma li due angoli di quà, e di là eguali fra di loro, la suddetta linea dicesi perpendicolare a quella, sopra la quale ella cade, e ciascuno de' suoi angoli chiamasi retto.

XI.

Ogni angolo maggiore del retto dicasi ottuso.

XII.

Ogni angolo minore del retto dicasi acuto.

SPIEGAZIONE.

UNa linea diritta può cadere sopra un' altra linea diritta in due maniere, e non più, cioè perpendicolarmente, *ed* obbliquamen-

Digitalizzato da Google

mente. *Quindi di due calute ſono conſiderate da' Geometri, cioè la* perpendicolare, *e l'* obbliqua. *Per diſtinguere una dall'altra fa duopo tenere quſta regola. In qualunque modo che una linea cada ſopra un'altra linea ſempre fa con eſſa due angoli, uno di quà, un'altro di là. Ove queſti due angoli ſiano eguali, la linea diceſi* perpendicolare: *ove ſiano diſeguali, diceſi* obbliqua. *Di più quando li due angoli ſono eguali, ciaſcuno di eſſi diceſi* retto; *laddove eſſendo diſeguali, il maggiore ſi chiama* ottuſo, *il minore ſi dice* acuto. *Quindi l'angolo rettilineo per ragione della* quantità, *ovvero* inclinazione *ſi diſtingue in* retto, ottuſo, *ed* acuto. *Non ſi vuol dunque confondere l'angolo retto col rettilineo; ma viceverſa ogni angolo retto è rettilineo inſieme; ma viceverſa ogni angolo rettilineo, non è ſempre retto; potendo eſſere ottuſo, ed acuto.*

Avvertaſi quì, che ſiccome il carattere della perpendicolare è di fare li due angoli di quà, e di là eguali fra di loro, così eſſa non può eſſere altro, che una; di fatto un pocolino, che ella ſi ſcoſti dalla ſua ſituazione, non reſta più perpendicolare, ma degenera in obliqua. Quindi l'angolo retto parimente è uno, nè è capace di più, o di meno; laddove gli angoli ottuſi, ed acuti ſono infiniti, quali più ottuſi, quali meno, quali più acuti, quali meno.

XIII.

Il Termine è il fine di qualche coſa.

Digitalizzato da Google

XIV.

La figura è uno spazio chiuso da un termine, ovvero da molti termini.

SPIEGAZIONE.

Il punto dunque tirasi termine *della linea, e la linea* termine *della superficie. Se vi sia uno spazio chiuso intorno intorno da molte linee, o da una linea sola, di così cotesto spazio* Figura. *Quindi l'angolo non merita il nome di figura, perchè non è chiuso intorno intorno. Del rimanente la figura sarà* curvilinea, *se le linee terminanti lo spazio siano curve, sarà* rettilinea, *se siano rette, e sarà* multilinea, *se alcune siano rette, altre curve.*

XV.

Il circolo è una figura piana curvilinea terminata da una sola linea, detta circonferenza, che tiene un punto in mezzo, d' onde tutte le linee cadenti intorno intorno alla circonferenza sono eguali.

XVI.

Cotesto punto vien detto centro, e le linee eguali sono chiamate raggi.

XVII.

Il diametro del circolo è una linea retta passata per lo centro, la quale giugne a toccare la circonferenza dall' una parte, e dall' altra.

XVIII.

Il semicircolo è una figura piana mistilinea terminata da mezza circonferenza, e dal diametro, che serve a lei di base.

XIX.

Digitalizzato da Google

XX.

La figura di circolo è una figura piana rettilinea contenuta da una porzione qualsivoglia di circonferenza, e da una linea retta, che le ferve di base. Dicasi questa linea corda, ovvero sottesa.

ADDIZIONE.

La circonferenza d'ogni circolo sia grande, sia piccolo, s'intende da' Geometri partita in 360. *parti eguali, le quali si chiamano* gradi: *ciascun grado d'intende compartito in* 60. minuti primi: *ciascun minuto primo in* 60. secondi: *ciascun secondo in* 60. terzi, *e così all'infinito: si distinguono coteste varie sorte di minuti per via di virgole* ', '', *così* 40. 30. 45. 32. *vale a dire* 40. *gradi*, 30. *minuti primi*, 45. *secondi*, *e* 32. *terzi*.

XX.

Figure rettilenee trilatere sono quelle, le quali sono terminate da tre linee rette. Queste figure si chiamano ancora Triangoli.

XXI.

Figure rettilinee quadrilatere sono quelle, le quali sono terminate da quattro linee rette.

XXII.

Figure rettilinee moltilatere sono quelle, le quali sono terminate da più di quattro linee rette.

XXIII.

Quando tutte le tre linee terminanti il trian-

Digitalizzato da Google

triangolo ſono eguali, dicaſi il triangolo equilatero.

XXIV.

Quando due ſole ſono eguali, e la terza è maggiore, o minore, dicaſi il triangolo iſoſcele.

XXV.

Quando tutte tre ſono diſeguali, il triangolo dicaſi ſcaleno.

XXVI.

Quando uno di tre angoli d'un triangolo ſia retto, dicaſi il triangolo rettangolo, ovvero ortogonio.

XXVII.

Ma quando un'angolo ſia ottuſo, dicaſi ottuſangolo, ovvero ambligonio.

XXVIII.

Finalmente quando tutti tre gli angoli ſono acuti, il triangolo dicaſi acutangolo, ovvero oſſigonio.

SPIEGAZIONE.

Siccome ne' triangoli vi ſono tre linee, e tre angoli, così vi ſono ſei forme diverſe di triangoli, tre delle quali naſcono dalla conſiderazione delle linee, e tre altre dalla conſiderazione degli angoli. Imperciocchè o tutte le tre linee ſono eguali, o due ſole ſono eguali, o tutte tre ſono diſeguali; e quindi tre forme di triangoli, equilatero, iſoſcele, *e* ſcaleno. *Inoltre o uno de' tre angoli è retto, o uno è ottuſo, o tutti tre ſono acuti; e quindi tre altre forme di triangoli,* rettangolo, ottuſangolo, *e* acutangolo. *Notiſi quì, che per chiamarſi un triangolo* rettangolo,

Digitalizzato da Google

golo, ovvero ottusangolo, basta che un angolo sia retto, ovvero ottuso; ma per dirsi acutangolo sia duopo, che tutti tre gli angoli siano acuti: di modo che un triangolo, il quale tiene due angoli acuti, ed uno retto ovvero ottuso, prende il nome dall' ottuso, e dal retto, e non già da due acuti.

XXIX.

Il Quadrato è una figura quadrilatera, che tiene tutti gli angoli retti, e tutte le linee eguali.

XXX.

Il Bislungo è una figura quadrilatera, che tiene tutti gli angoli retti, ma non ha tutte le linee eguali.

XXXI.

Il Rombo è una figura quadrilatera, che tiene tutte le quattro linee eguali, ma non già gli angoli retti.

XXXII.

Il Romboide è una figura quadrilatera, che nè tiene le quattro linee eguali, nè gli angoli retti; ma ha solamente i lati, e gli angoli opposti eguali.

XXXIII.

Ogni altra figura quadrilatera diversa dal quadrato, dal bislungo, dal rombo, e dal romboide, dicasi Trapezio.

SPIEGAZIONE.

Tutte le forme delle figure quadrilatere si riducono a cinque. Perchè supponendo primieramente, che tutti gli angoli siano retti: o tutti i lati sono eguali, e la figura quadrilatera sarà un quadrato, o sono

di-

diſeguali, e ſarà un bislungo. *Supponendo* po *, che gli angoli non ſiano retti; ſe i quattro lati ſono eguali, la figura quadrilatera ſarà un* rombo; *ſe i lati oppoſti ſolamente ſono eguali ſarà un* romboide. *Ogni altra figura quadrilatera diverſa dalle quattro ſuddette, ſarà* Trapezio.

XXXIV.

Linee rette parallele ſono due linee giacenti in una ſuperficie piana, le quali diſtese da ambe le parti all' infinito non s incontrano giammai. *Ovvero* ſono due linee giacenti in una ſuperficie piana, le quali portate innanzi quanto ci piaccia, ſempre mantengono l' iſteſſa diſtanza: *Per queſta ragione ſogliono ancora chiamarſi* egualmente diſtanti.

SPIEGAZIONE.

Due condizioni ſi richieggono, perchè due linee ſi chiamino parallele. *I. Che ſiano a giacere ſopra una ſuperficie piana: quindi due linee ſituate in diverſi piani non ſaranno giammai parallele. II. Che diſteſe da ambe le parti all' infinito non s' incontrino giammai: dico da ambe le parti; perchè due linee non parallele da una ſola parte s' uniſcono: dall' altra parte tanto è lontano, che ſi uniſcono, che più toſto ſi vanno più allargando.*

XXXVI.

Il Parallegrammo è una figura quadrilatera, che tiene i lati oppoſti paralleli.

Quin-

Digitalizzato da Google

Quindi tutte le figure quadrilatere dal trapezio in fuori ſono parellogrammi.

SECONDA SORTA DI PRINCIPJ.

DIMANDE.

I.

Si dimanda, che due punti ſi poſſono unire con una linea retta.

II.

Si dimanda inoltre, che una linea retta terminata poſſa portarſi tanto innanzi quanto biſogna.

III.

Si dimanda finalmente, che da un dato punto come centro, e con un dato raggio poſſa deſcriverſi una circonferenza di circolo.

TERZA SORTA DI PRINCIPJ.

ASSIOMI.

I.

Due coſe ſe ſono eguali ad una medeſima coſa, ſono eguali fra di loro. Ed una medeſima coſa ſe è maggiore, o minore dell' una di due coſe eguali ſarà eziandio maggiore, o minore dell' altra.

II.

Aggiugnendo coſe eguali a coſe eguali, ovvero aggiugnendo l' iſteſſa coſa a coſe eguali, le ſomme rieſcono eguali.

III.

Digitalizzato da Google

III.

Viceverſa da coſe eguali togliendo coſe eguali, ovvero l'iſteſſa coſa, gli avanzi rieſcono eguali.

IV.

A coſe ineguali aggiugnendo coſe eguali, ovvero l'iſteſſa coſa, le ſomme rimangono ineguali.

V.

Viceverſa da coſe ineguali togliendo coſe eguali, ovvero l'iſteſſa coſa, gli avanzi rieſcono ineguali.

VI.

Le coſe duple, triple, quadruple, dell' iſteſſa coſa ſono eguali.

VII.

Le coſe ſudduple, ſuttriple, ſuqquatruple dell'iſteſſa coſa ſono parimente eguali.

VIII.

Le coſe, le quali ſoprappoſte l'una all' altra combaciano a puntino ſenza ſuperarſi ſono eguali.

IX.

Il tutto è maggiore di ciaſcuna delle ſue parti; e tutte le parti riunite inſieme reſtituiſcono il tutto.

X.

Due linee rette, ſi tagliano in un ſolo punto ſenza più.

XI.

Due linee rette non poſſono chiudere ſpazio. *Quindi non hanno luogo tra le figure rettilinee le bilatere; ma le prime a doverſi conſiderare ſono le trilatere.*

XII.

Digitalizzato da Google

XII.

Tutti gli angoli retti ſono eguali.

XIII.

Se due linee rette giacenti in una ſuperficie piana ſono ſegate da una terza linea retta, e fiano li due angoli interiori dalla medeſima parte minori di due angoli retti, le dee linee non ſaranno parallele, ma portate innanzi verſo quella parte, dove gli angoli interiori ſono minori di due angoli retti, ſi verranno finalmente ad incontrare.

DE' PROBLEMI, E DE' TEOREMI.

EUclide *ha eſpoſti gli elementi della Geometria per via di* Propoſizioni, *alcune delle quali portano il titolo di* Problemi, *altre di* Teoremi: *Problema* è una propoſizione in cui ſi vuol fare qualche coſa. *Teorema* è una propoſizione in cui ſi vuol dimoſtrare qualche verità ignota.

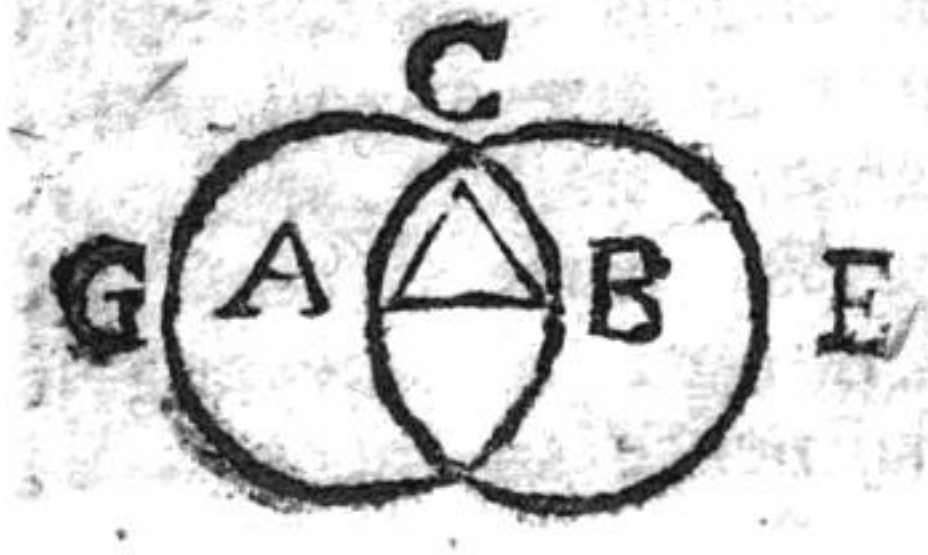
Così il Problema, come il Teorema hanno tre parti, con queſta differenza però, che tutte tre ſono eſſenziali al Problema; laddove una di eſſe può mancare al Teorema. Queſte parti ſono. I. Propoſizione. II. Coſtruzione. III. Dimoſtrazione, *delle quali la ſeconda talvolta è neceſſaria al Teorema, e talvolta nò.*

Digitalizzato da Google

PROP. I. PROBLEMA.

Sopra una data linea retta terminata descrivere un triangolo equilatero.

I.



Sia data la linea retta AB terminata ne' punti A, e B; fa duopo descriverci sopra un triangolo equilatero.

II.

Col centro A, e col raggio AB (1) descrivasi il circolo BCD.

Col centro B, e col raggio BA descrivasi (2) l' altro circolo ACE.

Dal punto C, dove le circonferenze de' due circoli già descritti si segano, si congiungano (3) le linee rette CA, CB. Io dico, che il triangolo ACB descritto sopra la data AB sia equilatero.

III.

Siccome dalla costruzione il punto A è il centro del circolo ACD, così le due linee AB, AC saranno (4) eguali. Similmente siccome dalla costruzione B è il centro del circolo ACE, così le linee AB, BC saranno (5) eguali. Laonde essendo così AC, come BC eguale alla medesima AB, saranno

(1) *Dim.* 3. (2) *Dim.* 3. (3) *Dim.* 1.
(4) *Def.* 15. (5) *Def.* 15.

Digitalizzato da Google

no (1) le due AC, BC eguali fra di loro. Il perchè il triangolo ACB sarà equilatero. Ciocchè doveva farsi.

PROP. II. PROBLEMA.

Adattare ad un punto dato una linea diritta eguale ad un altra linea data.

I.



Sia dato il punto A, e sia data inoltre la linea diritta BC, fa duopo adattare al punto A una linea retta eguale alla data BC.

II.

Si unisca (1) *i due punti A, e B colla retta AB.*

Sopra la quale si formi (3) *il triangolo equilatero ADB.*

I lati DA, DB si portino (4) *innanzi verso E, e verso F.*

Dal centro B, col raggio BC descrivasi (5) *il circolo CGH.*

Dal centro B, col raggio BC descrivasi (6) *il circolo GLK.* Io dico, che la linea retta AL adattata al punto A sia eguale alla data BC.

III.

---

(1) *Assio.* 1. (2) *Dim.* 1. (3) *Prop.* 1.
(4) *Dim.* 2. (5) *Dim.* 3. (6) *Dim.* 3.

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione D è il centro del circolo GLK, così le due linee DG, DL sono (1) eguali fra di loro. Ma per cagione del triangolo equilatero ADB le due linee DB, DA sono ancora eguali; dunque dalle due eguali DG, DL togliendo le due ancora eguali DB, DA, gli avanzi (2) BG, AL, saranno similmente eguali. Quindi essendo (3) la BC eguale alla BG, perchè il punto B dalla costruzione è il centro del circolo CGH, sarà così la BC, come la AL eguale alla medesima AG; laonde le due BC, AL saranno (4) eguali fra di loro. Ciocchè doveva farsi.

PROP. III. PROBLEMA.

Date due linee rette diseguali tagliare dalla maggiore una parte eguale alla minore.

I.



Siano date due linee rette diseguali AB maggiore, e CD minore, fa duopo tagliare dalla maggiore una parte eguale alla minore.

II.

Adattasi al dato punto A (5) la linea AE

Dal

(1) *Def.* 15. (2) *Assio.* 3. (3) *Def.* 15.
(4) *Assio.* 1. (5) *Prop.* 2.

Digitalizzato da Google

Dal centro A, col raggio AE descrivasi (1) *il circolo EFG*. Io dico, che la retta AF tagliata dalla maggiore a AB sia eguale alla minore CD.

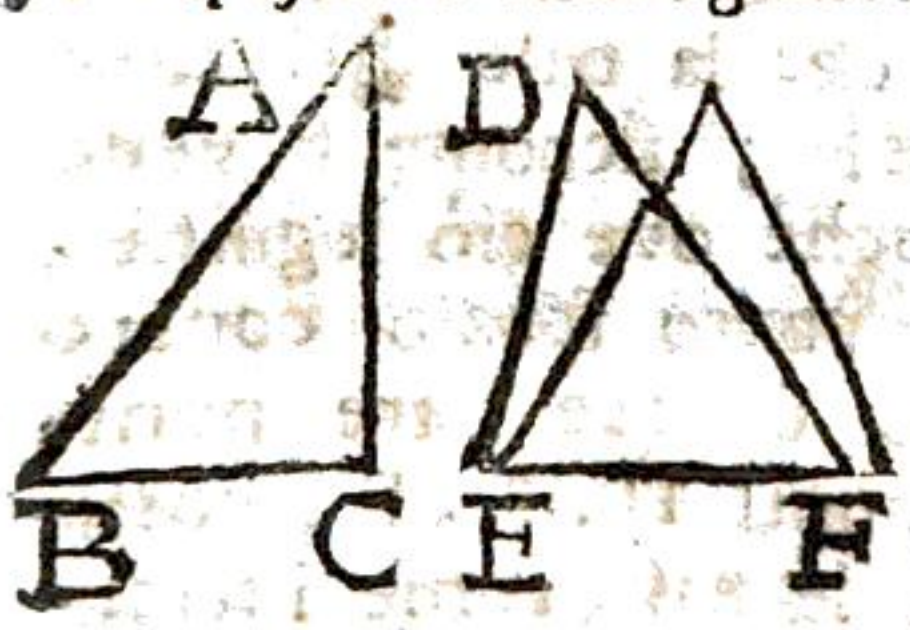
III.

Siccome dalla costruzione A è il centro del circolo EFG, così saranno (2) le due AE, AF eguali fra di loro. Ma dalla costruzione la AE è eguale parimente alla CD, dunque essendo ciascuna delle due AF, CD eguali alla medesima AE saranno (3) esse eguali fra di loro. Ciocchè doveva farsi.

PROP. IV. TEOREMA.

Se due triangoli hanno li due lati eguali a' due lati ciascuno a ciascuno, e gli angoli contenuti sotto questi lati ancora eguali: avranno la base eguale alla base, sarà il triangolo eguale al triangolo; e saranno gli altri due angoli eguali agli altri due angoli, ciascuno a ciascuno; e quelli propriamente, che sono sottoposti a lati eguali.

I.



Abbiano i due triangoli ABC, DEF i due lati AE, AC eguali a due lati DE, DF ciascuno a ciascuno: vale a dire AB eguale a DE, ed AC eguale a DF, ed abbiano di più i due angoli BAC EDF contenuti sotto

(1) *Dim.* 3. (2) *Def.* 15. (3) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

to i ſuddetti lati eguali fra di loro. Io dico, che la baſe BC ſarà eguale alla baſe EF; che il triangolo ABC ſarà eguale al triangolo DEF; e che gli altri due angoli ABC, ACB ſaranno eguali agli altri due angoli DEF, DFE ciaſcuno a ciaſcuno; cioè l'angolo ABC all'angolo DEF, e l'angolo ACB all'angolo DFE.

II.

Intendaſi il triangolo ABC accavallato al triangolo DEF, in modo che il punto A ſi unisca col punto D, ed il lato AB reſti diſteſo ſopra il lato DE. Perchè dalla ſuppoſizione l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF; ſiccome il lato AB ſi diſtende su 'l lato DE, così l'altro lato AC è forza, che ſi diſtenda ſu 'l lato DF. In oltre poichè dalla ſuppoſizione i due lati AB, AC ſono eguali a due lati DE, DF ciaſcuno a ciaſcuno: i due punti B, e C devono per neceſſità unirſi co' due punti E, ed F, quindi la baſe BC diſtenderaſſi ſulla baſe EF. Nè quì dica taluno, che la baſe BC cada ſopra o ſotto la baſe EF; ſiccome ſi vede nella figura. Imperciocchè ove ciò ſeguiſſe, due linee rette chiuderebbero ſpazio contro l'aſſioma XI. Cadendo dunque i tre punti A, B, C, ſopra i tre punti D, E, F, combaceranno inſieme così le baſi, come i triangoli, come gli angoli; laonde ſaranno eguali fra di loro (1): ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP.

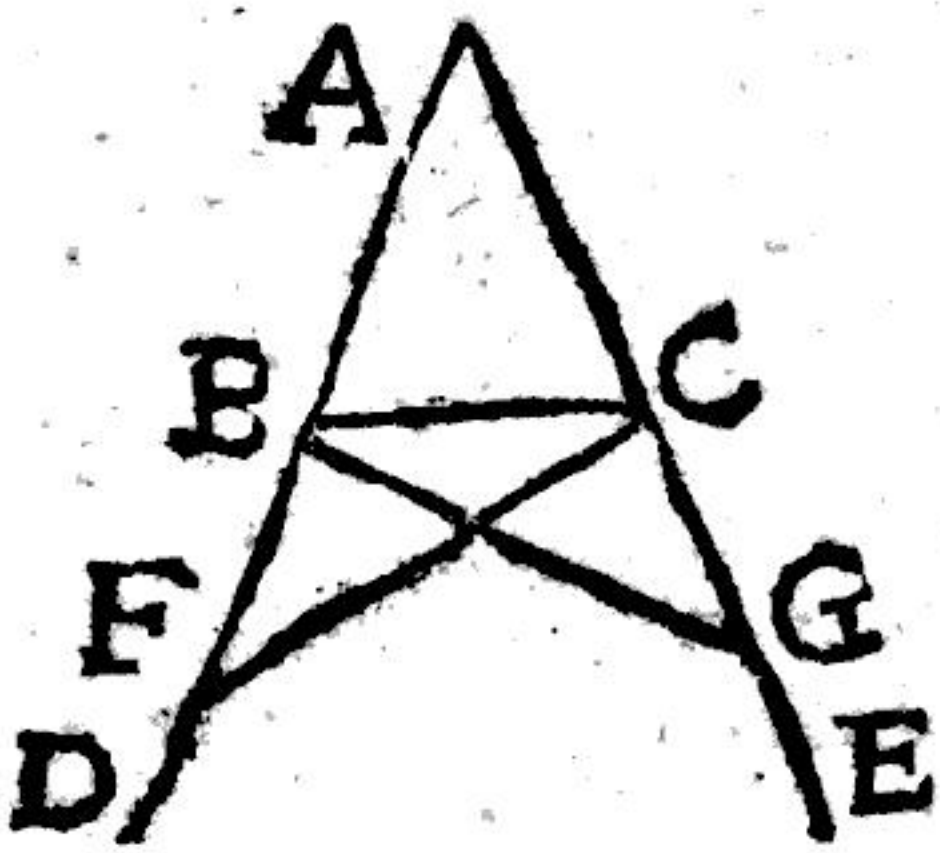
(1) Aſſio. 8.

Digitalizzato da Google

PROP. V. TEOREMA.

Se s' intendano i due lati eguali de' triangoli isosceli portati innanzi sotto la base; saranno li due angoli sotto la base eguali fra di loro, e gli angoli sopra la base ancora saranno eguali.

I.



Siano i due lati AB, AC del triangolo isoscele BAC distesi verso D, e verso E; io dico, che li due angoli DBC, ECB sotto la base BC sono eguali fra di loro; e che li due angoli ABC, ACB sopra l' istessa base BC sono parimente eguali.

II.

Prendasi ad arbitrio nella BD qualsivoglia punto F.

Dalla maggiore AE (1) tagliasi la parte AG eguale alla minore AF.

Si congiungano (2) i punti F, e C: G; e B colle linee rette FC, GB.

III.

Perchè dalla suppositione AB è eguale ad AC, e dalla costruzione AG è eguale ad AF,

B

(1) *Prop.* 3. (2) *Dim.* 1.

AF, saranno i due lati BA, AG del triangolo BAG eguali a' due lati CA, AF del triangolo CAF ciascuno a ciascuno; sicchè essendo l'angolo BAG contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all'angolo CAF contenuto sotto i lati del secondo triangolo: sarà (1) la base BG eguale alla base CF; l'angolo ABG eguale all'angolo ACF; e l'angolo AGB eguale all'angolo AFC.

Inoltre essendo dalla costruzione AG eguale ad AF, e dalla supposizione AC eguale ad AB sarà (2), l'avanzo CG eguale all'avanzo BF; ma si è dimostrata la BG eguale alla CF: dunque i due lati CG, GB del triangolo CGB saranno eguali a' due lati BF, FC del triangolo BFC ciascuno a ciascuno: quindi essendosi parimente dimostrato l'angolo CGB eguale all'angolo BFC, sarà (3) l'angolo GCB eguale all'angolo FBC; i quali angoli sono sotto la base del triangolo isoscele ABC; e l'angolo GBC sarà eguale all'angolo FCB: ma si è dimostrato tutto l'angolo ABG eguale all'angolo ACF; dunque togliendo dall'angolo ABG l'angolo GBC, e dall'angolo ACF, l'angolo FCB, l'avanzo ABC sarà eguale (4) all'avanzo ACB, i quali sono gli angoli sopra la base: ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

Siccome ne' triangoli l'elezione della base è ar-

---

(1) *Prop. ant.* (2) *Assio.* 3.
(3) *Prop. ant.* (4) *Assio.* 3.

Digitalizzato da Google

è arbitraria, così i triangoli equilateri si possono stimare tre volte come isosceli, prendendo successivamente ciascuna delle tre linee eguali per base. Quindi tutti gli angoli de' triangoli equilateri saranno eguali fra di loro. Ora poichè questa verità si deduce immediatamente dalla proposizione antecedente, ragionevolmente tiene luogo di Corollario ; *Imperciocchè i Geometri chiamano Corollario* una proposizione, che si deduce immediatamente da un' altra proposizione.

PROP. VI. TEOREMA.

Se due angoli d' un triangolo siano eguali fra di loro; ancora i lati sottoposti a detti angoli saranno eguali.



I.

Siano i due angoli ABC, ACB del triangolo ABC eguali fra di loro; io dico che i lati AB, AC sottoposti a' detti angoli siano parimente eguali.

II.

Se è possibile, sia il lato AB maggiore del lato AC.

Si tagli dunque dal maggiore BA la parte BD (1) *eguale al minore AC.*

Si unisca (2) *la DC.*

(1) *Prop.* 3. (2) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

III.

E perchè dalla costruzione BD è eguale a CA, e BC è comune; saranno i due lati DB, BC del triangolo DBC, eguali a due lati AC CB del triangolo ACB ciascuno a ciascuno; quindi essendo dalla suppossizione l'angolo DBC eguale all'angolo ACB sarà (1) il triangolo minore BDC eguale al triangolo maggiore ACB, il che è contrario all'assioma IX. Sicchè rimane vero il Teorema in quistione.

Due cose sono quì da avvertirsi, che questa proposizione è conversa della quinta, vale a dire, che la suppossizione della quinta è conseguenza nella sesta; e la conseguenza nella quinta è suppossizione della sesta, che la dimostrazione della suddetta proposizione sia negativa: di fatto non si sono già dimostrati positivamente li due lati AB, AC eguali fra di loro: ma si è fatto vedere, che ove potessero essere diseguali, saria la parte eguale al tutto.

COROLLARIO.

Se un triangolo ha tutti li tre angoli eguali, egli sarà equilatero.

PROP.

(1) Prop. 4.

PROP. VII. TEOREMA.

Se da' termini d' una linea retta ſiano tirate due linee rette, le quali ſi vadino ad unire in un punto: è impoſſibile, che dagl' iſteſſi termini, e dall' iſteſſa parte ſi poſſano tirare due altre linee rette eguali alle due prime, ciaſcuna a ciaſcuna, le quali ſi vadino ad unire in un punto diverſo dal punto ſuddetto.



I.

Da termini A, e B della linea retta AB s' intendano tirate due linee AC, BC, le' quali ſi uniſcano nel punto C. Io dico, che dagl' iſteſſi termini, e dall' iſteſſa parte non ſi poſſono tirare due altre linee eguali alle due già tirate AC, BC, ciaſcuna, a ciaſcuna, le quali ſi abbiano da unire in un punto diverſo dal punto C.

II.

Se mai ſia poſſibile; ſe ne poſſano tirare due altre, le quali ſiano AD, BD, in modo che AC ſia eguale ad AD, e BC ſia eguale a BD.

Si congiunga CD (1).

III.

Poichè ſi vuole, che AC, ſia eguale ad

(1) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

AD, il triangolo ACD sarà isoscele; il perchè (1) l'angolo ACD sarà eguale all'angolo ADC; laonde essendo l'angolo BDC maggiore (2) dell'angolo ADC; sarà l'istesso angolo BDC maggiore dell'angolo ACD (3), e per conseguente molto maggiore dell'angolo BCD: ma l'angolo BDC è eguale (4) all'angolo BCD; perchè si vuole, che BD sia eguale a BC: dunque i due angoli BDC, BCD, una volta sono diseguali, e un'altra volta eguali; ciocchè non potendo sossistere rimane vero il Teorema in questione.

COROLLARIO.

Da quì siegue, che se due triangoli sono costituiti sopra una medesima base, e hanno i due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno: li detti triangoli debbano cadere giustamente l'uno sull'altro.

PROP.

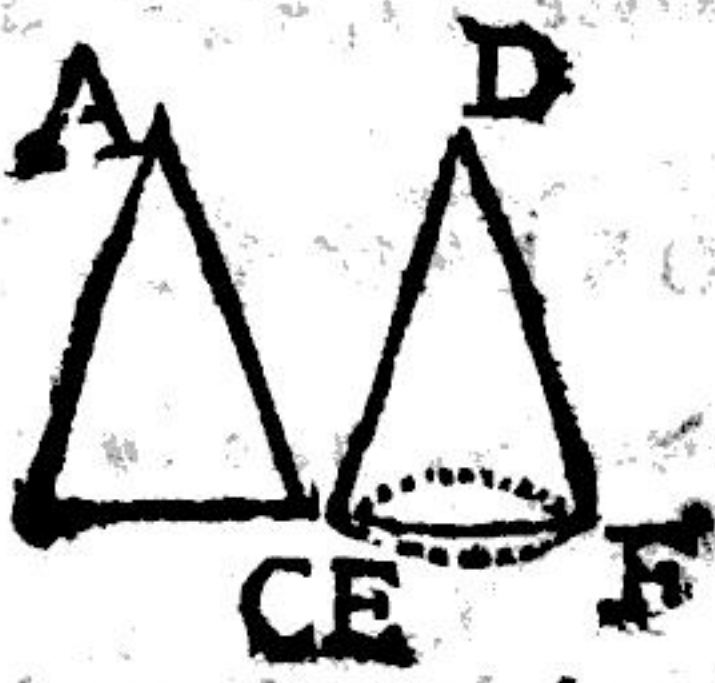
(1) Prop. 5. (2) Assio. 9.
(3) Assio. 1. (4) Prop. 5.

Digitalizzato da Google

PROP. VIII. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali a' due lati, ciascuno a ciascuno, la base eguale alla base: sarà l' angolo contenuto sotto i lati dell' uno eguale all' angolo contenuto sotto i lati dell' altro.

I.



Abbiano i due triangoli BAC, DEF, i due lati AB, AC eguali a' due lati DE, DF ciascuno a ciascuno, e la base BC eguale alla base EF; io dico che l' angolo BAC sia eguale all' angolo EDF.

II.

S' accavalli il triangolo ABC su 'l triangolo DEF, in modochè la base BC resti distesa sulla base EF, e li punti B, e C s' uniscano co' punti E, ed F.

E poichè dalla suppoſizione i due lati BA, AC, ſono eguali a due lati ED, e DF ciaſcuno a ciaſcuno; il punto A ſi anderà ad unire col punto D per lo Corollario della propoſizione antecedente. Laonde l' angolo BAC combacerà coll' angolo EDF; e quindi gli ſarà eguale (1): ciocchè doveva dimoſtrarſi.

(1) *Aſſio.* 8.

Digitalizzato da Google

ANNOTAZIONE.

La proposizione IV. ed VIII. si accordano in questo, che si suppone in entrambe i due lati essere eguali a' due lati ciascuno a ciascuno: discordano in ciò, che nella IV. dall' eguaglianza degli angoli contenuti sotto i lati eguali si deduce l' eguaglianza delle basi; e nell' VIII. viceversa dall' eguaglianza delle basi si deduce l' uguaglianza de' due angoli suddetti.

PROP. IX. PROBLEMA.

Dividere un angolo rettilineo dato in due parti eguali.

I.



Sia dato l' angolo rettilineo BAC; fa duopo dividerlo in due parti eguali.

II.

Prendasi nella AB qualsivoglia punto D.

Dalla maggiore AC tagliasi (1) *la AE eguale ad AD.*

Si congiunga la (2) *DE, e sopra a questa si formi il triangolo equilatero DFE* (3).

Si unisca (4) *AF.* Io dico, che l' angolo BAC

(1) *Prop.* 3.
(2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 1.
(4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

BAC rimane diviso in due parti eguali da questa linea retta AF.

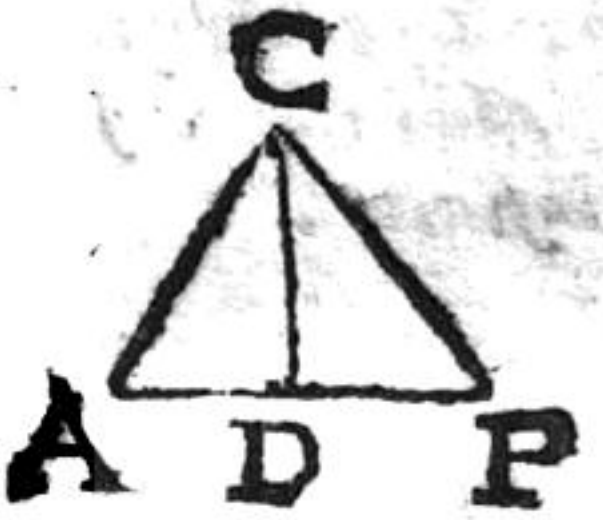
III.

Imperciocchè, siccome dalla costruzione la AD è eguale alla AE, e la AF, è comune; così i due lati DA, AF del triangolo DAF saranno eguali a due lati EA, AF del triangolo EAF ciascuno a ciascuno. Quindi essendo la base DF del primo triangolo eguale alla base FE dell'altro triangolo, poichè esse sono lati del triangolo DFE, il quale dalla costruzione è equilatero: sarà (1) l'angolo *DAF* contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all'angolo EAF contenuto sotto i lati dell'altro triangolo; ciocchè doveva farsi.

PROP. X. PROBLEMA.

Di una linea retta terminata data farne due parti eguali.

I.



Sia data la linea retta AB terminata ne' punti A, e B; fa duopo tagliarla in due parti eguali.

II.

Descrivasi (2) sopra la data AB il triangolo equilatero ACB.

L'angolo ACB si tagli (3) in due parti

(1) Pr. ant. (2) Prop. 1. (3) Pr. ant.

Digitalizzato da Google

eguali colla retta CD. Io dico, che questa linea retta CD divide la data AB in due parti eguali.

III.

Perchè dalla costruzione i lati CA, CB del triangolo equilatero ACB sono eguali, e CD è lato comune; saranno i due lati AC, CD del triangolo ACD eguali a due lati BC, CD del triangolo BCD ciascuno a ciascuno. Quindi essendo dalla costruzione l'angolo ACD contenuto sotto i lati del primo eguale all'angolo BCD contenuto sotto i lati dell'altro triangolo, sarà (1) la base AD eguale alla base DB: ciocchè doveva farsi.

Avvertimento comune alle due ultime proposizioni.

Diviso, che sia un angolo, o una linea in due parti eguali si può dividere ciascuna di esse in due altre parti eguali, e se ne avranno quattro: di più ciascuna delle quattro si può dividere in due parti eguali, e se ne averanno otto: e così all'infinito.



PROP.

(1) Prop. 4.

Digitalizzato da Google

PROP. XI. TEOREMA.

Da un punto dato in mezzo ad una linea retta innalzarvi sopra una linea perpendicolare.



I.

Sia data la linea retta AB, e in mezzo ad essa sia dato il punto C; fa duopo innalzare dal dato punto C una linea perpendicolare alla data AB.

II.

Prendasi nella AC un punto ad arbitrio come D.

Dalla maggiore CB tagliasi (1) *la parte CE eguale alla minore CD.*

Sopra la DE descrivasi (2) *il triangolo equilatero DFE.*

Si uniscono i punti (3) *F, e C colla linea retta FC.* Io dico, che questa sia perpendicolare sopra la data AB.

III.

Imperciocchè essendo dalla costruzione la DC eguale alla CE, e la CF comune, saranno i due lati CE, CD del triangolo CFD eguale a due lati CF, CE del triangolo CFE. Quindi essendo a cagione del triangolo equilatero DFE la base DF del

(1) *Prop. 3.* (2) *Prop. 1.* (3) *Dim. 1.*

Digitalizzato da Google

primo triangolo eguale alla base EF dell' altro triangolo; sarà (1) l'angolo FCD eguale all'angolo FCE. Facendo dunque la linea retta FC gli angoli di quà, e di là eguali fra di loro per la definizione x. sarà perpendicolare alla data AB. Ciocchè doveva farsi.

PROP. XII. PROBLEMA.

Da un punto dato fuori d'una linea farvi cadere sopra una perpendicolare.

I.



Sia dato il punto C fuori della linea AB; fa duopo dal punto dato C far cadere sopra la suddetta AB una linea perpendicolare.

II.

Prendasi dall'altra parte della linea AB per riguardo al dato punto C un punto qualsivoglia G.

Dal centro C. col raggio CG descrivasi (2) *il circolo EGF.*

La linea EF, la quale rimane racchiusa dentro del circolo tagliasi (3) *in due parti eguali nel punto H.*

Dal punto C. al punto H si congiunga (4) *la linea retta CH.* Io dico, che questa sia perpendicolare alla data AB.

III.

(1) *Prop.* 8.
(2) *Dim.* 3.
(3) *Prop.* 10.
(4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione la HE è eguale alla HF, e la HC è comune; così saranno i due lati HE, HC del triangolo EHC eguale a' due lati HF, HC del triangolo FHC ciascuno a ciascuno. Quindi essendo la base EC del primo triangolo eguale alla base FC dell' altro triangolo, perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza, sarà (1) l' angolo CHE eguale all' angolo CHF. Sicchè la linea CH sarà (2) perpendicolare alla data AB. Cioc-chè doveva farsi.

Ove il punto C, dato fuori dalla linea AB sia situato in modo, che riesca impossibile il far cadere da esso una perpendicolare sopra la suddetta AB, bisognerà per la seconda dimanda portare tanto innanzi la linea AB, quanto basti per poterci far cadere la perpendicolare.

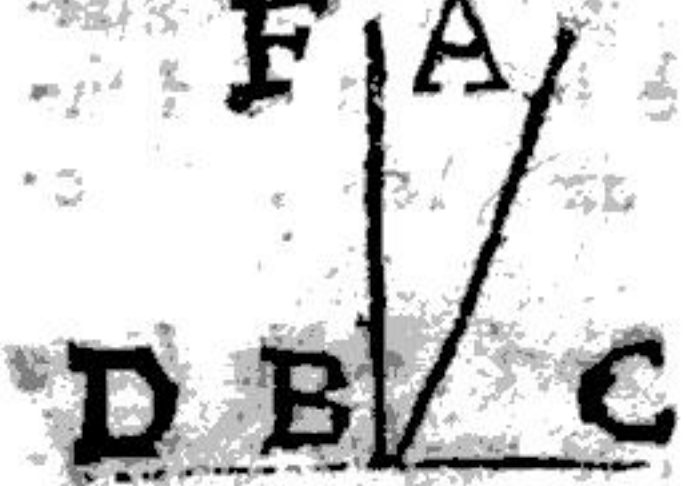
(1) *Prop.* 8. (2) *Def.* 10.

Digitalizzato da Google

PROP. XIII. ASSIOMA.

Una linea retta, la quale insiste sopra un'altra linea retta, forma li due angoli di quà, e di là, o retti, ovvero eguali a due retti.

SPIEGAZIONE.



Questa proposizione mi sembra tanto chiara, che io non dubito di metterla nel numero degli assiomi, comechè essa nel testo di Euclide *porti il titolo di* Teorema. *E' noto, che una linea retta può cadere sopra un'altra linea retta in due maniere* perpendicolarmente, *ed* obbliquamente. *Cadendoci perpendicolarmente li due angoli di quà, e di là saranno retti entrambi: cadendoci obbliquamente egli è il vero, che uno di essi sia ottuso, e l'altro acuto: tuttavolta, perchè di quanto l'ottuso sopravanza il retto, altrettanto ne manca l'acuto, compensandosi l'eccesso dell'uno col difetto dell'altro, rimane ne' due angoli il valore di due retti. Così calendo la EB perpendicolarmente sopra la DC, li due angoli EBD, EBC sono retti entrambi; ma cadendo la AB obliquamente sopra la DC, li due angoli ABD, ABC sono eguali a due retti. E quindi è facile a dedurne, che se due li-*

nee

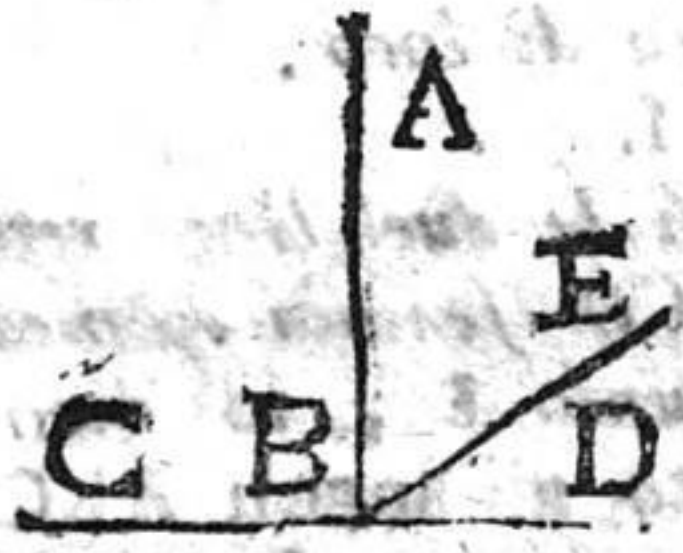
Digitalizzato da Google

nee rette ſi ſegano, i quattro angoli fatti intorno al punto del ſegamento, ſiano o retti, ovvero eguali a quattro angoli retti.

PROP. XIV. TEOREMA.

Se dal termine d'una linea retta data ſi tirino alle parti oppoſte due linee rette, le quali formino colla data li due angoli di quà, e di là, o retti, ovvero eguali a due retti; le due ſuddette linee giaceránno a dirittura, nè formeranno angolo.

I.



Dal termine B della linea retta AB ſiano tirate alle parti oppoſte due linee BC, BD, ma con tale legge, che li due angoli di quà, e di là ABC, ABD ſiano, o retti, ovvero eguali a due retti; Io dico, che le ſuddette linee BC, BD giaceranno a dirittura: vale a dire, che CBD ſia una ſola linea retta.

II.

Se è poſſibile, non ſia CBD una retta linea, ma CB porta innanzi, vada a continuarſi nella BE. Perchè la retta AB cade ſopra la retta CBE, ſaranno (1) li due angoli ABC, ABE eguali a due retti: ma dalla ſuppoſizione ancora li due angoli ABC, ABD

(1) *Prop. antec.*

Digitalizzato da Google

ABD sono eguali a due retti ; dunque le due angoli ABC , ABE saranno (1) eguali a due angoli ABC , ABD : Se ne levi via l' angolo comune ABC : rimarrà (2) l' avanzo ABE eguale all' avanzo ABD ; vale a dire la parte eguale al tutto ; ciocchè non potendo sostenere , ne siegue la verità del Teorema in questione .

PROP. XV. TEOREMA.

Se due linee rette si segano scambievolmente ; gli angoli opposti al vertice saranno eguali fra di loro .

I.



Seghinsi le due linee rette AB , CD scambievolmente nel punto E ; io dico, che tanto gli angoli AEC, BED , quanto gli angoli AED , BEC opposti al vertice E , sano eguali fra di loro .

II.

Siccome la retta AE cade sulla retta CD, così gli angoli di quà, e di là AED , AEC saranno (3) eguali a due retti . Parimente, siccome la retta DE cade sopra la retta AB, così gli angoli di quà , e di là DEB, DEA saranno (4) eguali a due retti . Quindi li due

(1) *Assio.* 1. (2) *Assio.* 3.
(3) *Prop.* 13. (4) *Prop.* 13.

Digitalizzato da Google

due primi angoli AED, AEC saranno (1) eguali a due secondi DEB, DEA: Se ne levi via l'angolo comune AED; rimarrà (2) l'avanzo AEC eguale all'avanzo BED. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo AED sia eguale all'angolo BEC; di modo che rimane vero il Teorema in questione.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se il lato BC *del triangolo* ABC *si distende verso* D; *si vedrà nascere fuori del triangolo l'angolo* ACD, *il quale dicesi esteriore, a differenza de' tre angoli* CAB ABC BCA, *li quali si chiamano* interiori. *Ora di questi tre angoli interiori l'angolo* A B, *che giace accanto all'esteriore dicesi* interiore adjacente, *il quale, se è retto, sarà eguale all'esteriore, se è ottuso, sarà maggiore dell'esteriore, se acuto, sarà minore dell'esteriore; di modo che può accadere, che l'esteriore sia o eguale, o minore, o maggiore dell'interiore adjacente. Gli altri due angoli interiori, si chiamano* interiori opposti.

(1) Assio. 5. (2) Assio. 3.

Digitalizzato da Google

PROP. XVI. TEOREMA.

In ogni triangolo, se si distende un lato qualsivoglia; l'angolo esteriore sarà sempre maggiore dell'uno e dell'altro angolo interiore opposto.



I.

Sia il triangolo ABC, il di cui lato BC si distenda verso D. Io dico, che l'angolo esteriore ACD è maggiore così dell'angolo CAB, come dell'angolo ABC, che sono li due interiori opposti.

II.

Taglisi AC (1) in parti eguali nel punto E.
Si unisca (2) BE.
Si distenda (3) BE verso F.
Si tagli EF (4) eguale a BE.
Si unisca (5) CF.

III.

Dalla costruzione AE è eguale ad EC, e BE è eguale ad EF; dunque i due lati AE, EB del triangolo AEB sono eguali a due lati CE, EF del triangolo CEF ciascuno a ciascuno: quindi essendo l'angolo AEB conte-

(1) *Prop.* 10. (2) *Dim.* 1. (3) *Dim.* 2.
(4) *Prop.* 3. (5) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

tenuto ſotto i lati del primo triangolo eguale (1) all'angolo CEF contenuto ſotto i lati del ſecondo triangolo; ſarà (2) l'angolo EAB eguale all'angolo ECF, i quali due angoli ſono ſottopoſti a' lati eguali. Ma l'angolo eſteriore ACD è maggiore (3) dell'angolo ECF; dunque l'iſteſſo angolo eſteriore ACD ſarà (4) maggiore dell'angolo EAB, ovvero CAB. Nell'iſteſſa maniera diſtendendo il lato AC verſo G ſi farà vedere per mezzo di due triangoli A B, F C, che l'angolo eſteriore BCG ſia maggiore dell'interiore oppoſto ABC; laonde ſiccome l'angolo ACD è eguale (5) all'angolo BCG, così ſarà il medeſimo angolo ACD maggiore (6) dell'angolo ABC; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP. XVII. TEOREMA.

Gli angoli di qualſivoglia triangolo preſi a due a due ſono ſempre minori di due retti.

I.



Sia il triangolo ABC; io dico, che li ſuoi tre angoli comparati a due a due, vale a dire ABC, e BCA; BCA, e CAB; CAB, ed ABC, ſono minori di due angoli retti.

II.

(1) *Prop. ant.* (2) *Prop.* 4. (3) *Aſſio.* 9.
(4) *Aſſio.* 1. (5) *Prop. ant.* (6) *Aſſio.* 1.

Digitalizzato da Google

II.

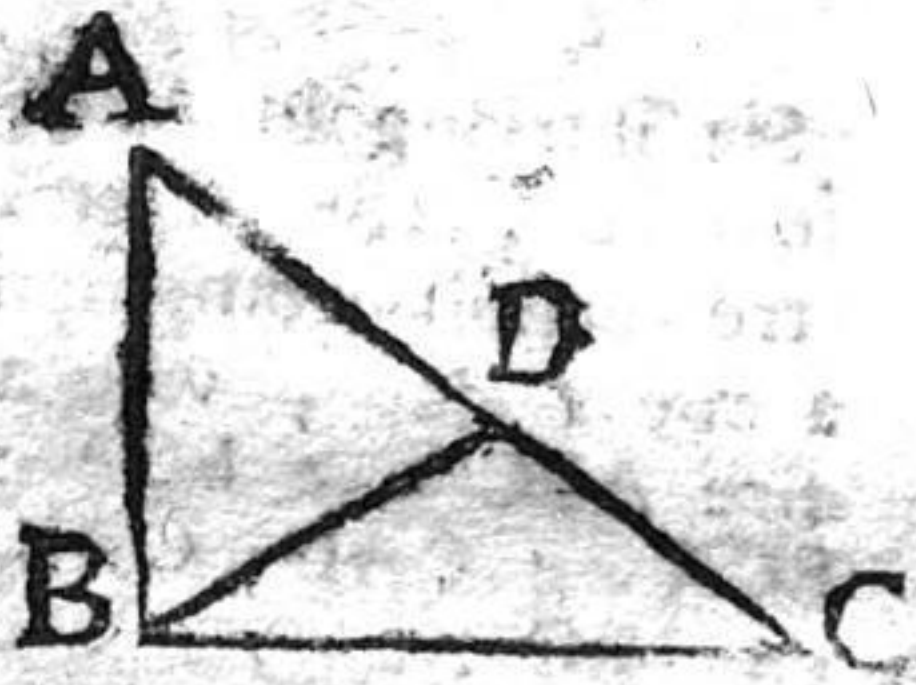
Si distenda (1) *il lato BC verso D.*

III.

Siccome l'angolo esteriore ACD è maggiore dell'angolo interiore opposto (2) ABC, così aggiugnendo ad essi l'istesso angolo ACB, riuscirà (3) la somma de' due angoli ACD, ACB maggiore della somma de' due angoli ABC, ACB. Quindi essendo li due angoli ACD, ACB eguali a due retti (4); saranno pe necessità gli altri due angoli ABC, ACB minori di due retti. Nell'istesso modo si mostrerà, che gli angoli BCA, CAB sono minori di due retti. Ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se li due lati d'un triangolo siano diseguali; gli angoli sopra la base saranno parimente diseguali, e quell'angolo sarà maggiore, il quale sta dirimpetto al lato maggiore.



I.

Nel triangolo ABC, sia il lato AC maggiore del lato AB; io dico, che gli angoli ABC, ACB sopra la base BC non sono eguali; ma che sia maggiore l'angolo ABC, il quale stà dirimpetto al lato maggiore AC. II.

(1) *Dim.* 2. (2) *Prop. ant.*
(3) *Assio.* 4. (4) *Prop.* 13.

Digitalizzato da Google

II.

Tagliſi (1) *dal lato maggiore AC la parte AD eguale al minore AB.*

Si uniſca (2) *BD.*

III.

Siccome il lato CD dal triangolo BCD è diſteſo verſo A, così ſarà (3) l' angolo eſteriore BDA maggiore dell' interiore oppoſto DCB: ma eſſendo dalla coſtruzione AD eguale ad AB, l' angolo ADB è eguale (4) all' angolo ABD; dunque ſarà l' angolo ABD maggiore (5) parimente dell' angolo DCB; e perciò l' angolo ABC ſarà molto maggiore dell' angolo DCB, ovvero ACB. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

Quindi ne' triangoli ſcaleni tutti li tre angoli ſono diſeguali, e quell' angolo il quale ſta dirimpetto al lato maggiore, ſarà il più grande di tutti gli altri.

PROP.

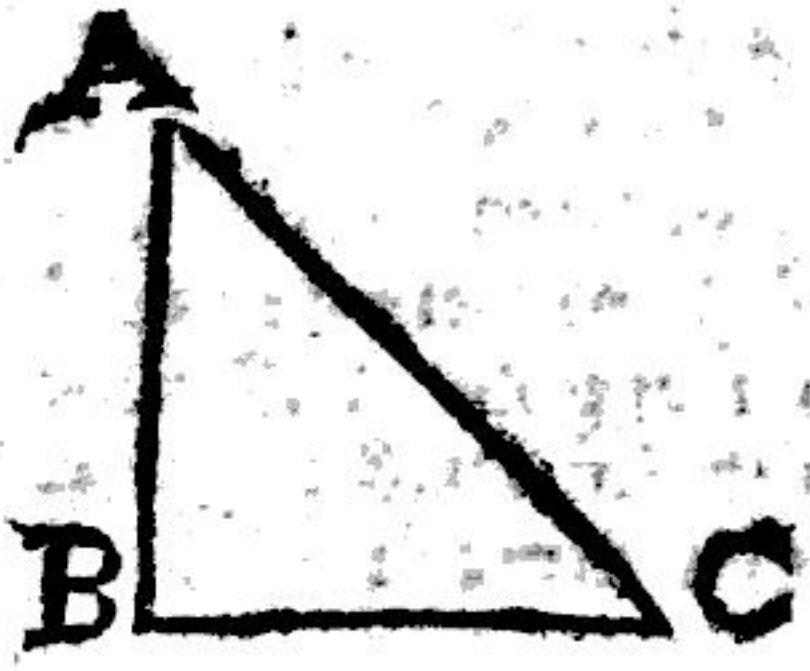
(1) *Prop.* 3. (2) *Dim.* 1. (3) *Prop.* 16.
(4) *Prop.* 5. (5) *Aſſio.* 4.

Digitalizzato da Google

PROP. XIX. TEOREMA.

Se gli angoli sopra la base di qualsivoglia triangolo siano diseguali; i lati sottoposti a questi angoli non saranno già eguali, ma quello lato sarà maggiore, il quale sta dirimpetto all' angolo maggiore.

I.



Nel triangolo ABC, che ha BC per base: sia l' angolo ABC maggiore dell'angolo ACB; io dico, che il lato AC, il quale sta dirimpetto all'angolo maggiore ABC è maggiore dell' altro lato AB.

II.

Imperciocchè non può essere il lato AB eguale al lato AC, poichè sarebbe (1) l'angolo ACB eguale all'angolo AB: contro la supposizione. Nemmeno può essere il lato AB maggiore del lato AC, poichè (2) sarà l'angolo ACB maggiore dell' angolo ABC, parimente contro la supposizione; di modo che il lato AC sia maggiore del lato AB.

COROLLARIO.

Quindi, se un triangolo ha tutti tre gli angoli diseguali, egli sarà scaleno, e quello lato

(1) *Prop.* 5. (2) *Prop. antec.*

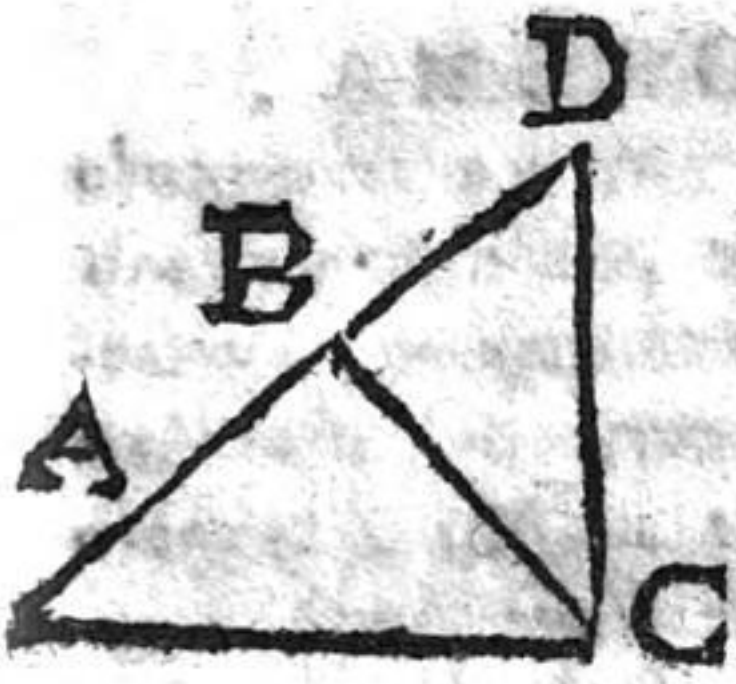
Digitalizzato da Google

lato sarà il maggiore, il quale sta dirimpetto all' angolo maggiore. Questa Proposizione è conversa dell' antecedente.

PROP. XX. TEOREMA.

I lati di qualsivoglia triangolo presi a due a due sono sempre maggiori del lato rimanente.

I.



Sia il triangolo CBA: Io dico, che i due lati BC, BA sono maggiori del lato rimanente CA; e che i due lati BC, CA sono maggiori di BA; e che finalmente i due lati CA, AB sono maggiori di CB.

II.

Distendasi (1) *AB verso D.*
Si tagli BD eguale (2) *a BC.*
Si unisca DC (3).

III.

Siccome dalla costruzione la BD è eguale alla BC; così sarà (4) l' angolo *DCB* eguale all'angolo CDB: ma l'angolo DCA è maggiore (5) dell'angolo DCB: dunque l'istesso angolo DCA sarà ancora (6) maggiore dell'angolo CDB, ovvero CDA.

Quin-

(1) *Dim.* 2. (2) *Prop.* 3. (3) *Dim.* 1.
(4) *Prop.* 3. (5) *Assio.* 9. (6) *Assio.* 1.

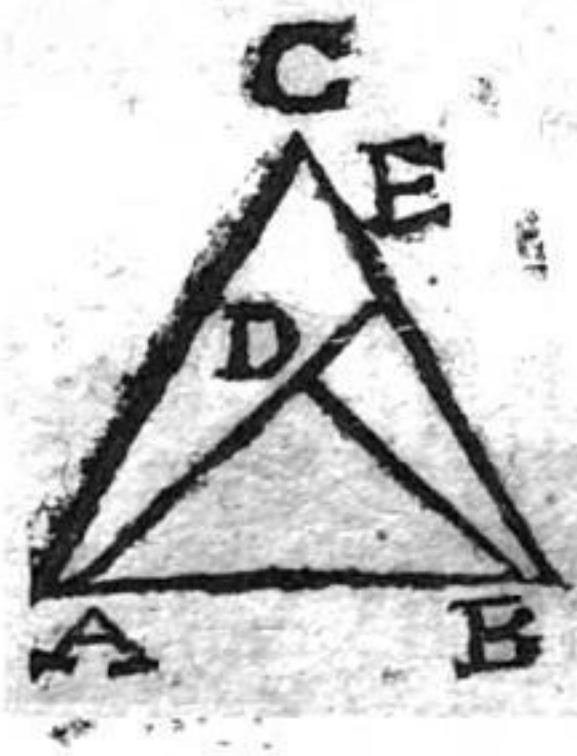
Digitalizzato da Google

Quindi essendo gli angoli sopra la base CD del triangolo ACD diseguali, saranno (1) i lati ad essi sottoposti ancora diseguali, e propriamente sarà AD maggiore di AC. Ma AD è eguale a due lati AB, BC; perchè dalla costruzione BD è eguale a BC: dunque i lati AB, BC saranno parimente maggiori (2) del lato rimanente CA: ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se da' termini della base di un triangolo si tirino due linee rette, le quali si vadano ad unire dentro il suddetto triangolo. Saranno le due linee insieme minori de' due latè del triangolo uniti insieme. Ma l' angolo contenuto sotto le medesime linee sarà maggiore dell' angolo contenuto sotto li due latè del triangolo.

I.



Da' termini A, e B della base AB del triangolo ACB *escano due linee AD, BD, le quali si vadano ad unire nel punto D, che sia dentro al triangolo ACB*. Io dico, che le due linee AD, DB insieme sono minori de' due lati AC, CB del triangolo ACB; ma che l' angolo ADB sia maggiore dell' angolo ACB.

II.

(1) *Prop.* 19. (2) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

II.

Si distenda AD (1) *fino al punto E.*

III.

Nel triangolo ACE i due lati AC, CE sono maggiori (2) del rimanente AE: il perchè aggiugnendo comunemente il lato EB; saranno i due lati AC, CB maggiori (3) de' due AE, EB. Inoltre i due lati DE, EB del triangolo DEB sono maggiori (4) del rimanente DB: dunque aggiugnendo comunemente il lato AD; saranno i due lati AE, EB (5) maggiori de' due AD, BD. Laonde essendosi dimostrati i due AC, CB maggiori de' due AE, EB; ne siegue che li detti lati AC, CB sono molto maggiori di AD, BD.

II. Nel triangolo ACE il lato CE è disteso verso B; quindi l'angolo esteriore (6) AEB è maggiore dell'interiore opposto ACE. Inoltre nel triangolo BED il lato ED è disteso verso A; quindi l'angolo esteriore (7) BDA è maggiore dell'angolo BED: ma si è già dimostrato l'angolo BED maggiore dell'angolo ECA, ovvero BCA; dunque l'angolo BDA sarà molto maggiore dell'angolo BCA; ciocchè doveva dimostrarsi.

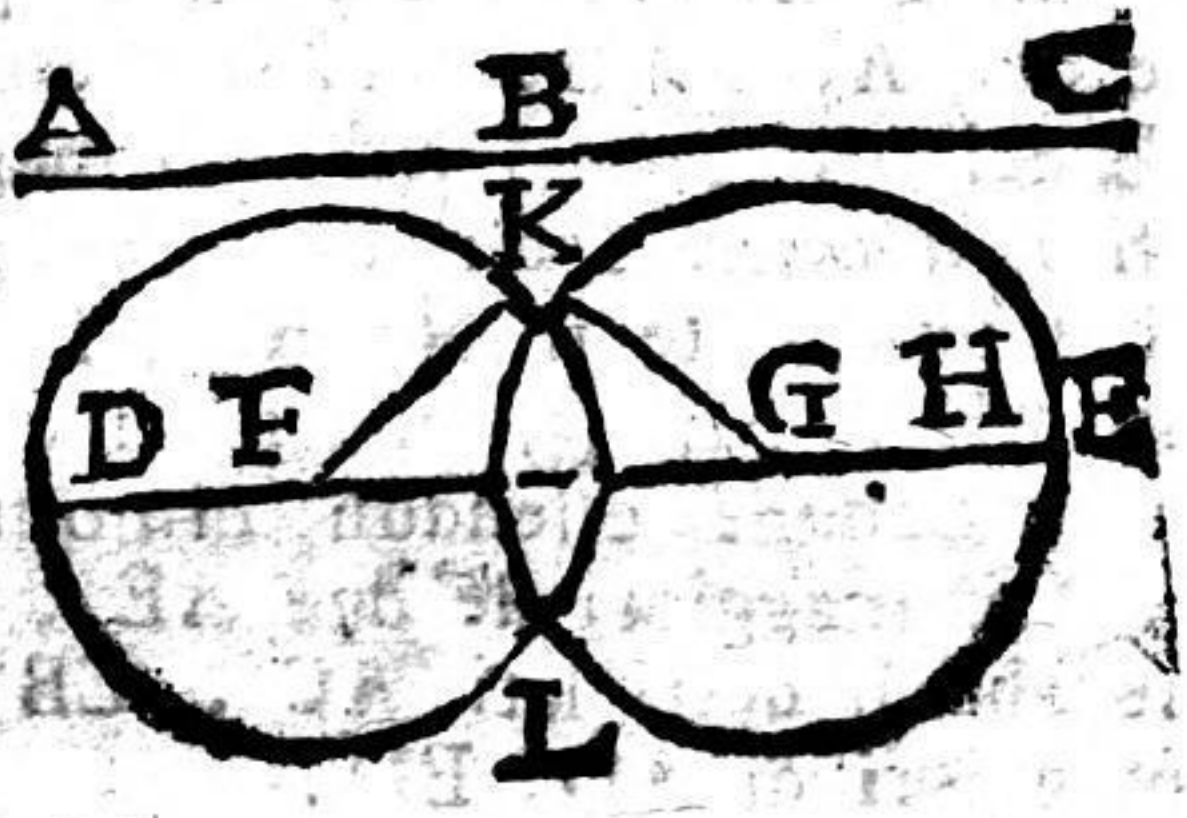
(1) *Dim.* 2. (2) *Prop.* 20. (3) *Assio.* 4.
(4) *Prop.* 20. (5) *Assio.* 4. (6) *Prop.* 16.
(7) *Prop.* 16.

Digitalizzato da Google

PROP. XXII. PROBLEMA.

Di tre linee rette date, formarne un triangolo.

I.



Siano date tre linee rette A, B, e C; fa duopo formarne un triangolo.

II.

Tirisi la linea diritta infinita DH.

Si taglino (1) *le parti DF, FG, GH, eguali rispettivamente alle date A B, e C.*

Da centri F, e G co' raggi FD, GH si descrivano (2) *li due circoli KD, KH.*

Si congiungano (3) *le due linee KF, KG* io dico, che il triangolo KFG abbia li suoi tre lati eguali, rispettivamente alle linee diritte date A B, e C.

III.

Siccome dalla costruzione F è il centro del

(1) *Prop.* 3. (2) *Dim.* 3. (3) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

del circolo DK, così sarà (1) DF eguale ad FK: ma dall'istessa costruzione DF è eguale ad A; dunque (2) sarà FK eguale ad A. Similmente, siccome dalla costruzione G è il centro del circolo HK, così sarà GH (3) eguale a GK; ma dall'istessa costruzione GH è eguale a C; dunque sarà (4) GK eguale a C; ma dalla costruzione è FG è eguale a B: dunque li tre lati KF, FG, GK del triangolo KFG sono eguali rispettivamente alle tre linee A, B, C: ciocchè doveva farsi.

ANNOTAZIONE.

Siccome in ogni triangolo i lati presi a due a due sono maggiori del rimanente, così acciò da tre linee rette date se ne possa comporre un triangolo, è duopo, che esse siano tali, che accoppiate a due a due siano maggiori della terza, altrimente il Problema riuscirebbe impossibile. Se le tre linee date sono eguali, il triangolo riuscirebbe equilatero, e la costruzione non sarìa diversa della costruzione della proposizione I.

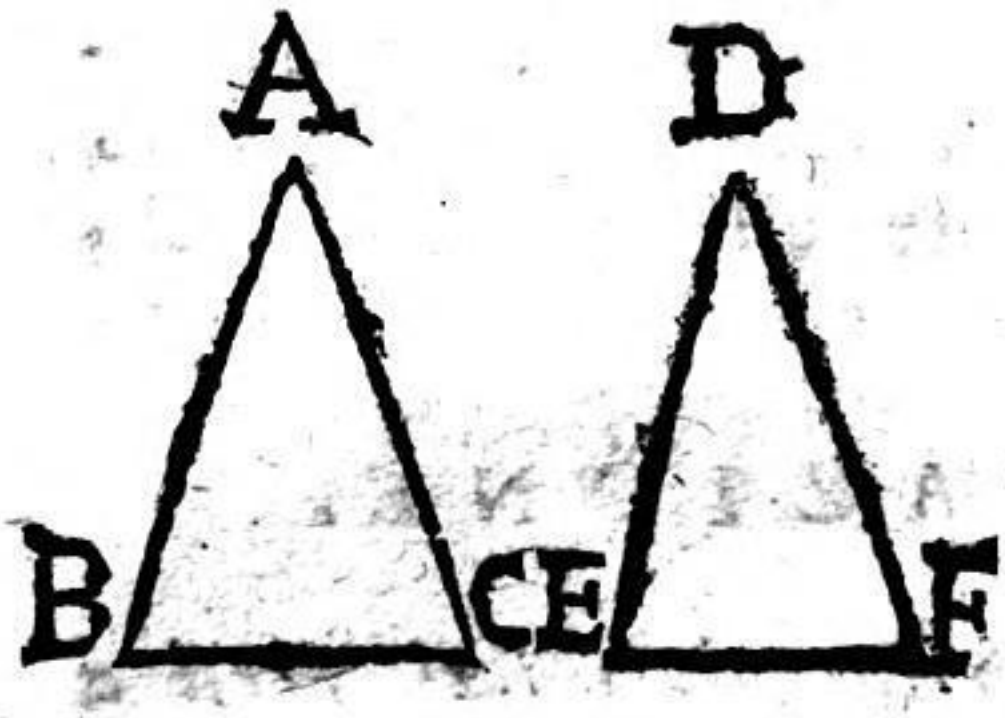
(1) *Def.* 15. (2) *Assio.* 1.
(3) *Def.* 15. (4) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIII. PROBLEMA.

Data una linea retta, ed in essa un punto; fa duopo adattare a questo punto una linea, la quale comprenda colla data un' angolo eguale ad un angolo dato.

I.



Sia data la linea retta AB, ed in essa sia dato il punto A: fa duopo adattare al punto A una linea la quale comprenda colla data AB un angolo eguale all' angolo dato EDF.

II.

Si prendano nelle due linee DE, DF due punti ad arbitrio E, ed F.

Si unisca EF (1).

Dalle tre linee DE, EF, FD, due delle quali sono maggiori (2) *della rimanente, se ne formi* (3) *il triangolo ABC in modo che AB sia eguale a DE: AC sia eguale a DF: e BC sia eguale ad EF.* Io dico, che l' angolo BAC sia eguale all' angolo EDF.

III.

Imperciocchè dalla costruzione i due lati BA, AC del triangolo BAC sono eguali a' BA,

---

(1) *Dim.* 1. (2) *Prop.* 2. (3) *Prop. ant.*

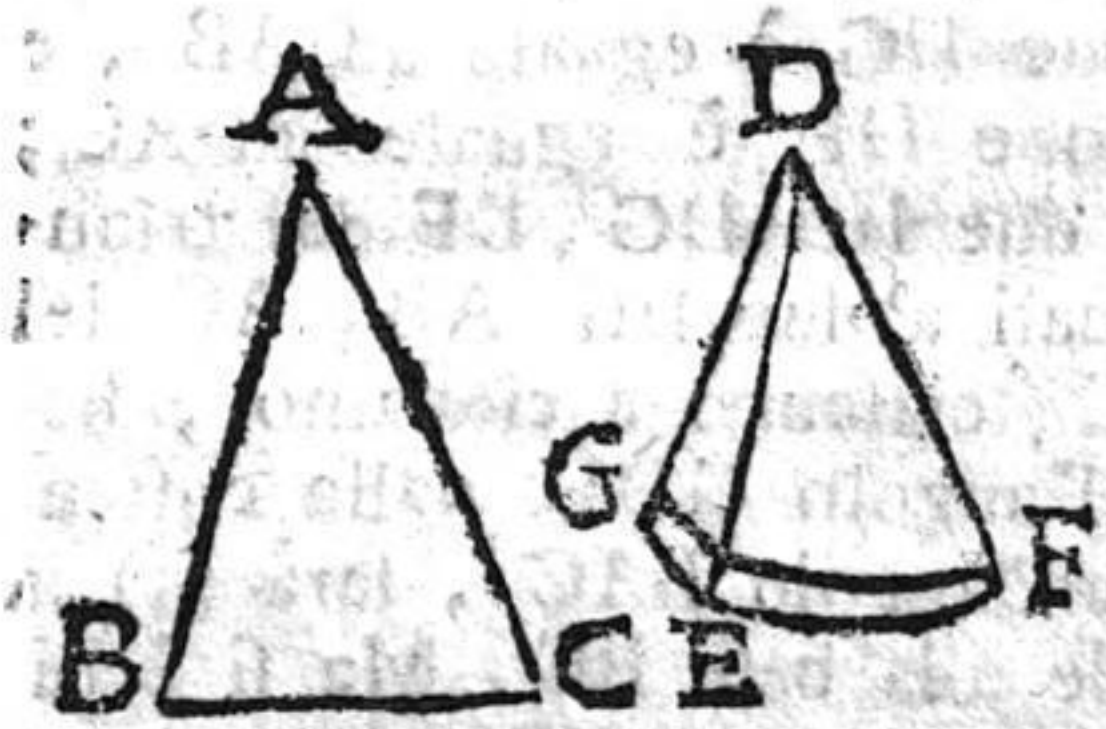
Digitalizzato da Google

due lati ED, DF del triangolo EDF, ciascuno a ciascuno, e la base BC è eguale alla base EF: il perchè sarà (1) l'angolo BAC eguale all'angolo EDF. Ciocchè doveva farsi.

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l'angolo contenuto sotto i lati d'uno di essi maggiori dell'angolo contenuto sotto i lati dell'altro: avranno le base maggiore della base.

I.



Abbiano i due triangoli ABC, DEF i due lati AB, AC eguali a' due lati DE, DF ciascuno a ciascuno; ma sia l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF: Io dico, che la base BC sia maggiore della base EF.

II.

Si faccia l'angolo FDG (2) eguale all'angolo CAB.

Tagliſi DG (3) eguale ad AB, ovvero a DE.

Si congiungano (4) GE, GF.

(1) *Prop.* 5. (2) *Prop.* 23.
(3) *Prop.* 3. (4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione DG è eguale a DE, così sarà (1) l'angolo DGE eguale all'angolo DEG, onde, siccome l'angolo FEG è maggiore dell'angolo (2) DFG; così sarà l'istesso angolo FEG (3) maggiore dell'angolo DGE; e per conseguente sarà molto maggiore dell'angolo FGE. Quindi nel triangolo FGE, essendo gli angoli FEG, FGE sopra la base GE diseguali, saranno i lati sottoposti a' detti angoli (4) diseguali, e propriamente sarà FG maggiore di FE. Ora, siccome dalla costruzione DG è eguale ad AB, e dalla supposizione DF è eguale ad AC; così saranno i due lati DG, DF del triangolo GDF eguali a' due lati AB, AC del triangolo BAC, ciascuno a ciascuno; sicchè, essendo l'angolo GDF dalla costruzione eguale all'angolo BAC, sarà (5) la base GF eguale alla base BC. Ma si è dimostrata GF maggiore di EF; dunque ancora BC sarà (6) maggiore di EF. Cioc-chè doveva dimostrarsi.

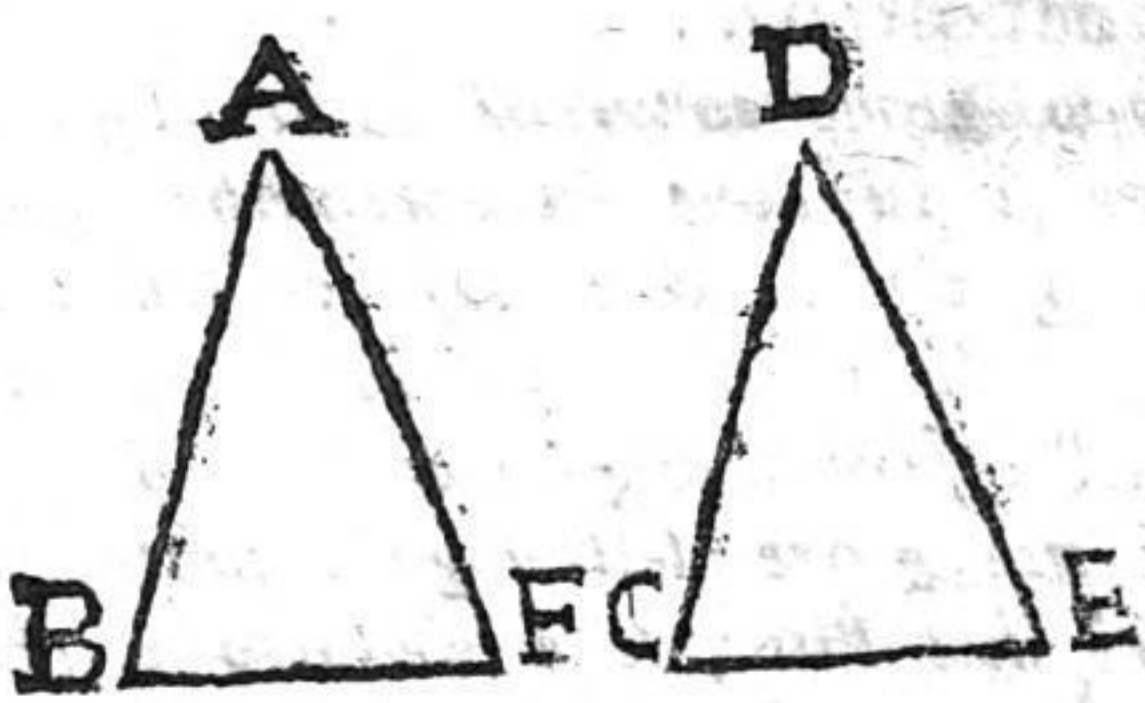
PROP.

(1) *Prop.* 5. (2) *Assio.* 9. (3) *Assio.* 1.
(4) *Prop.* 19. (5) *Prop.* 4. (6) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

PROP. XXV. PROBLEMA.

Se due triangoli hanno i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno. E la base maggiore della base; sarà l'angolo contenuto sotto i lati del primo triangolo maggiore dell'angolo contenuto sotto i lati dell'altro.



I.

Abbiano i due triangoli BAF, CDE i due lati AB, AF, eguali a due lati DC, DE ciascuno a ciascuno; ed abbiano inoltre la base BF maggiore della base CE; io dico che l'angolo BAF sia maggiore dell'angolo CDE.

II.

Se sia possibile, sia primieramente l'angolo BAF eguale all'angolo CDE. Quindi i due triangoli BAF, CDE avendo i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l'angolo contenuto sotto i lati del primo eguale all'angolo contenuto sotto i lati dell'altro; avranno (1) la base eguale alla base contro la supposizione. Sia in secondo luogo l'angolo BAF minore dell'angolo CDE;

(1) *Prop.* 4.

Digitalizzato da Google

Quindi i due triangoli avendo i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, e l' angolo contenuto sotto i lati del primo minore dell' angolo contenuto sotto i lati dell' altro, sarà la base BF minore (1) della base CE; il che parimente è contro la supposizione. Non potendo dunque essere la base BF nè eguale, nè minore della base ~~CE~~, rimane, che sia maggiore: ciocchè doveva dimostrarsi.

Questa proposizione conviene colla passata in questo, che si suppone in entrambe essere i due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, discorda però in questo, che nella passata dall' essere l' angolo contenuto sotto i due lati maggiore dell' angolo contenuto sotto gli altri due lati; si è dedotto, che la base sia maggiore della base, e quì viceversa dall' essere la base maggiore della base, si è dedotto, che l' angolo suddetto sia maggiore dell' angolo.

PROP.

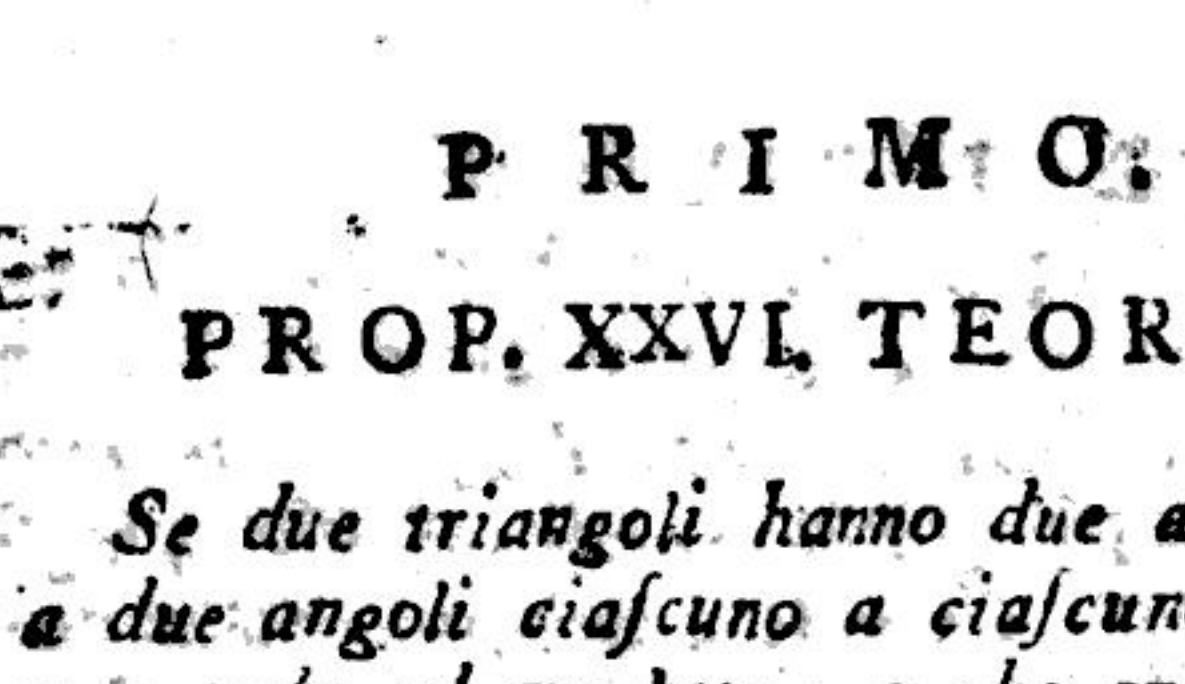
(1) *Prop. antec.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXVI. TEOREMA.

Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, o che questi lati eguali stiano accanto agli angoli eguali, o che stiano dirimpetto a due di essi, avranno l' altre cose eguali alle altre cose.

I.



Abbiano i due triangoli ABC, DEF due angoli ABC, ACB eguali a due angoli DEF, DFE ciascuno a ciascuno; ed abbiano inoltre, o il lato BC adjacente a due angoli ABC, ACB eguale al lato EF ancora adjacente agli altri due angoli DEF, DFE; ovvero il lato AB, che sta dirimpetto ad uno di essi ACB eguale al lato DE, che sta dirimpetto all'angolo corrispondente DFE; io dico, che il rimanente angolo BAC sia eguale all'angolo rimanente EDF; che gli altri due lati siano eguali agli altri due lati ciascuno a ciascuno; e che il triangolo ABC sia eguale al triangolo DEF.

II.

I. Mettendo in primo luogo, che il la-

to BC adjacente a' due angoli eguali ſia eguale al lato EF adjacente agli altri due angoli, *ſe il lato BA non è eguale al lato ED, ſi faccia* (1) *BG eguale ad ED, e ſi unisca GE* (2). Quindi, ſiccome dalla coſtruzione BG è eguale ad ED, e dalla ſuppoſizione BC è eguale ad EF, così ſaranno i due lati BG, BC del triangolo GBC eguali a' due lati ED, EF del triangolo DEF, ciaſcuno a ciaſcuno; il perchè eſſendo dalla ſuppoſizione l' angolo GBC eguale all' angolo DEF; ſarà (3) l' angolo GCB eguale all' angolo DFE: ma per la ſuppoſizione ancora l' angolo ACB è eguale all' angolo DFE; dunque ſarà l' angolo GCB minore, eguale all' angolo ACB maggiore; ciocchè non potendo ſoſſiſtere, ne ſiegue, che AB deve eſſere eguale ad ED. II. perchè i due triangoli BAC, EDF avendo i due lati BA, AC eguali a' due lati ED, EF ciaſcuno a ciaſcuno, e l' angolo ABC eguale all' angolo DEF; avranno (4) tutte le altre coſe eguali fra di loro.

II. Mettendo poi, che il lato AB, che ſta dirimpetto all' angolo ACB, ſia eguale al lato DE, che ſta dirimpetto all' angolo corriſpondente DFE, *ſe il lato BC non è eguale al lato EF, ſi faccia* (5) *BH eguale ad EF, e ſi unisca* (6) *AH*.

Quindi eſſendo, dalla ſuppoſizione AB eguale

(1) *Prop.* 3. (2) *Dim.* 1. (3) *Prop.* 4.
(4) *Prop.* 5. (5) *Prop.* 3. (6) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

guale a DE, e dalla costruzione BH eguale ad EF, saranno i due lati AB, BC del triangolo ABH eguali a' due lati DE. EF del triangolo DEF ciascuno a ciascuno; il perchè essendo dalla supposizione ancora l' angolo ABH eguale all'angolo DEF, sarà (1) l' angolo AHB eguale all'angolo DFE; ma dalla supposizione l' angolo ACB è similmente eguale all'angolo DFE; dunque sarà (2) l'angolo AHB esteriore eguale all' interiore opposto ACB; ciocchè non potendo sossistere (3), ne *liegue*, che BC sia eguale ad EF. Quindi i due triangoli ABC, DEF avendo i due lati AB, BC eguali a' due lati DE, EF, e l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, avranno (4) tutte le altre cose eguali da tutte le altre cose. Ciocchè doveva dimostrarsi.

Questa proposizione ha due parti, le quali io soscrivo quì separatamente per togliere ogni confusione. I. Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, ed il lato adjacente a' due primi angoli eguale al lato adjacente a' due secondi; avranno tutte le altre cose eguali alle altre cose; *di modo che paragonata questa proposizione colla IV. si scorge, che l' una è perfettamente conversa dell' altra.* II. Se due triangoli anno due angoli eguali a due angoli ciascuno a ciascuno, ed il la-

(1) *Prop.* 4. (2) *Assio.* 1.
(3) *Prop.* 16. (4) *Prop.* 4.

Digitalizzato da Google

to, che ſta dirimpetto all'uno de' due angoli eguale al lato, che ſta dirimpetto all' angolo corriſpondente; avranno tutte le altre coſe eguali.

Preparazione alle Propoſizioni ſeguenti.

Se due linee (1) *AB, CD ſono ſegate dalla terza EFG ſi vedranno naſcere otto angoli, quattro de' qnali ſono interiori, e quattro altri ſono eſteriori. Ora è da ſaperſi I. che due interiori AFG, EGD, ovvero BFG, FGC poſti uno di quà, e l'altro di là della linea ſegante ſi chiamano* alterni. *II. che li due interiori AFG, FGC, ovvero BFG, FGD ſi chiamano* interiori dalla medeſima parte. *III. che li due angoli EFA, FGC, ovvero EFB, EGD ſi chiamano* eſteriori, ed interiori dalla medeſima parte.

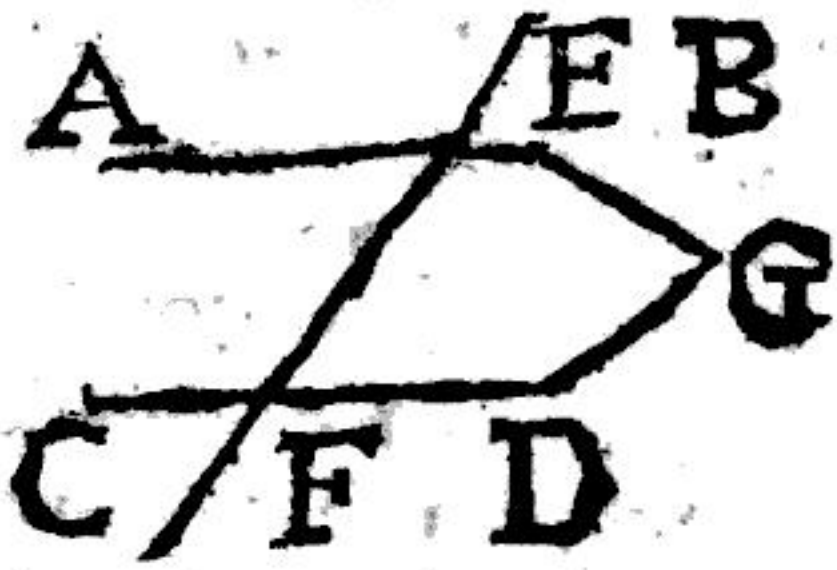
PROP.

(1) *Veggaſi la figura della prop.* 28.

Digitalizzato da Google

PROP. XXVII. TEOREMA.

Se due linee giacenti in una superficie piana siano segate da una terza linea, e siano gli angoli alterni eguali fra di loro, le suddette linee saranno parallele.



I.

Le due linee rette AB, CD siano segate dalla terza linea EF, e siano gli angoli alterni AEF, EFD eguali fra di loro; io dico, che le due suddette linee AB, CD siano parallele.

II.

Se sia possibile, non siano le linee AB, CD parallele, ma si vadano ad unire nel punto G, e costituiscano il triangolo EBGDF, il qual triangolo, come si vede, è forzato. Perchè il lato GBE di questo triangolo è distefo verso A, sarà (1) l'angolo esteriore AEF maggiore dell'interiore opposto EFD: il che non potendo sossistere, essendo contrario alla supposizione, la quale vuole, che l'angolo AEF sia eguale all'angolo EFD, ne siegue, che il Teorema in questione sia vero.

PROP.

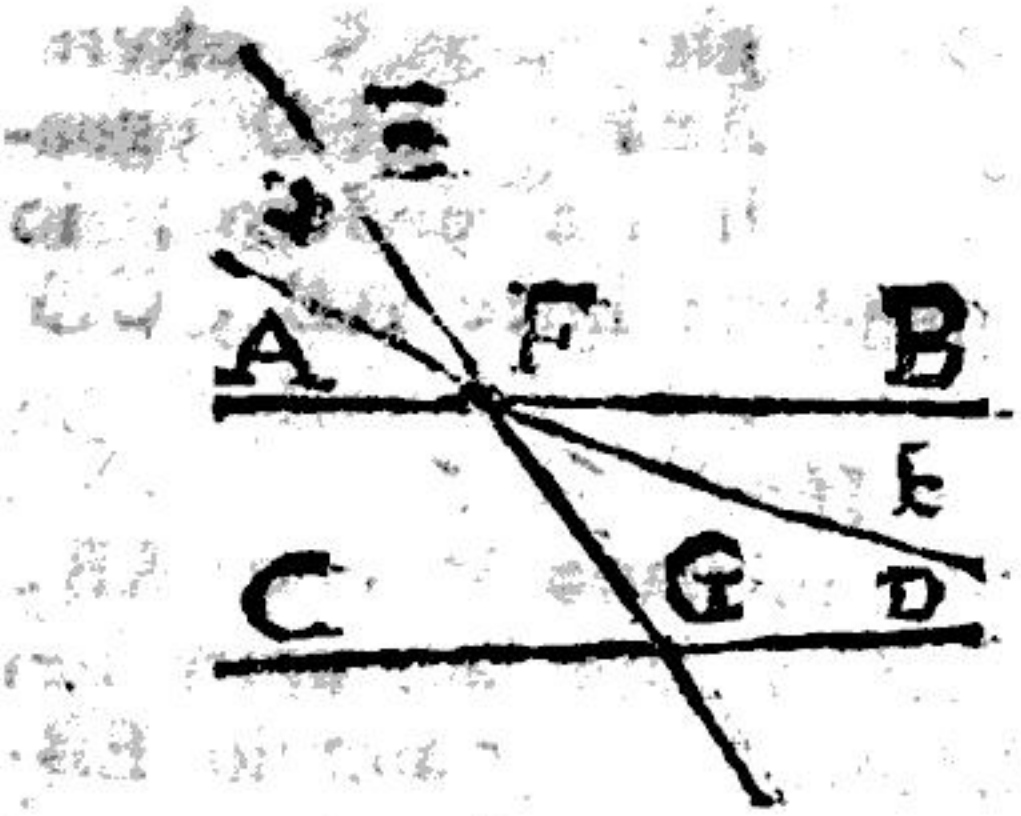
(1) *Prop.* 26.

Digitalizzato da Google

PROP. XXVIII. TEOREMA.

Se due linee rette giacenti sopra una superficie piana sono segate da una terza linea, e sia l'angolo esteriore uguale all'angolo interiore, ed opposto dalla medesima parte, le suddette linee saranno parallele; e se gl'interiori dalla medesima parte sono eguali a due retti, le medesime linee saranno ancora parallele.

I.



Le due linee rette AB, CD siano segate dalla terza EFG; io dico, che esse sono parallele, o che l'angolo esteriore EFB sia eguale all'interiore, ed opposto FGD dalla medesima parte; o che li due interiori dalla medesima parte BFG, FGD siano eguali a due retti.

II.

I. Perchè dalla supposizione l'angolo EFB è eguale all'angolo FGD, ed il medesimo angolo EFB è eguale all'angolo AFG (1); saranno li due angoli AFG, FGD eguali fra di

(1) *Prop.* 15.

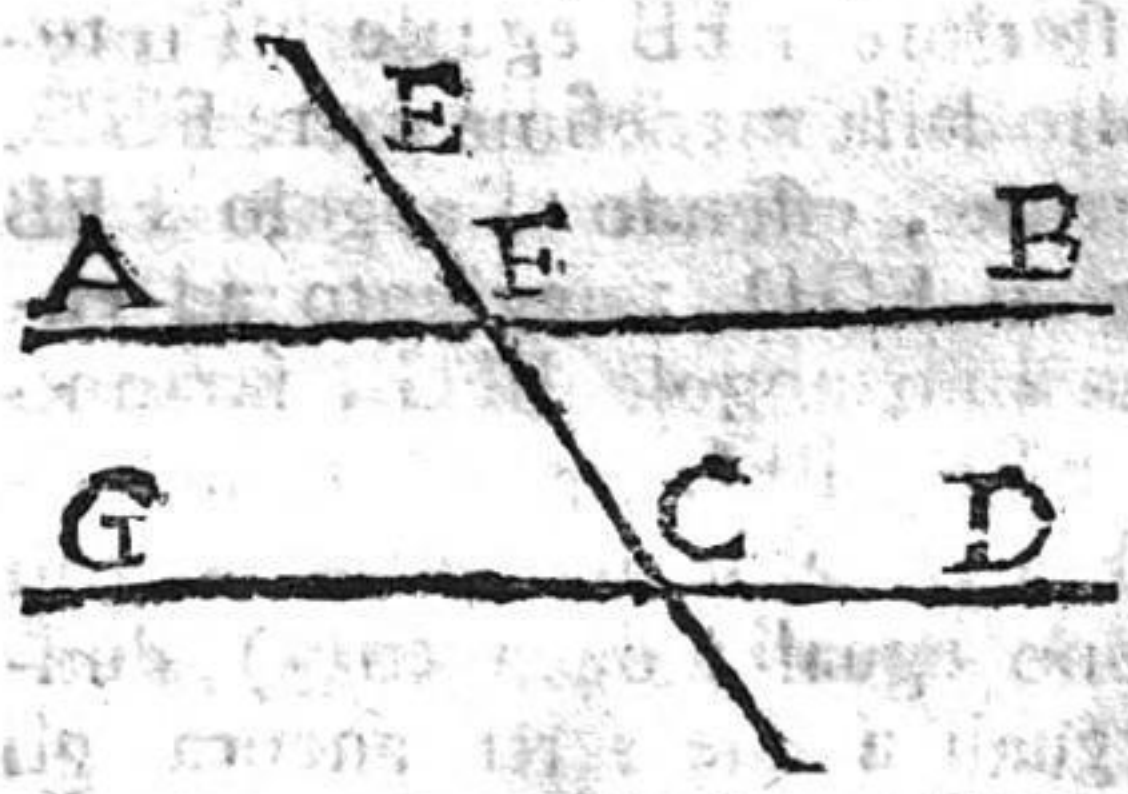
Digitalizzato da Google

di loro (1), ma sono alterni : dunque le linee AB, CD saranno (2) parallele.

II. Inoltre, perchè dalla suppoſizione li due angolo BFG, FGD sono eguali a due retti ; e sono ancora eguali a due retti gli angoli BFG, AFG (3) ; saranno li due angoli BFG, FGD eguali a due angoli BFG, AFG. Il perchè togliendone via il medesimo angolo BFG, rimarrà (4) l' angolo FGD eguale all'angolo AFG ; sicchè essendo essi alterni, le linee AB, CD saranno (5) parallele. Ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Se due linee paralliele sono segate da una terza linea, saranno gli angoli alterni eguali fra di loro, sarà l' angolo esteriore eguale all' anteriore, ed opposto dalla medesima parte ; saranno li due interiori dalla medesima parte eguali a due retti.



I. Le due linee parallele AB, CD sano segate dalla terza linea EFG. Io dico, che gli angoli alterni AFG, FGD sono eguali fra di loro : di più che l' an-

(1) *Assio.* 1. (2) *Prop. ant.* (3) *Prop.* 13.
(4) *Assio.* 3. (5) *Prop. ant.*

Digitalizzato da Google

l'angolo esteriore EFB è eguale all'interiore, ed opposto dalla medesima parte FGD; e finalmente, che li due interiori BFG, FGD dalla medesima parte sono eguali a due retti.

II.

I. Se sia possibile, non siano gli angoli alterni AFG, FGD eguali fra di loro, ma sia il primo maggiore del secondo. Aggiugnendo dunque ad essi il medesimo angolo BFG, saranno (1) li due angoli AFG, BFG maggiori degli angoli DGF, BFG; ma gli angoli AFG, BFG sono (2) eguali a due retti: dunque gli angoli DGF, BFG sono minori di due retti; laonde le due linee AB, CD portate innanzi si anderanno (3) ad unire, contro la supposizione.

II. Essendo dunque l'angolo AFG eguale all'angolo FGD, e di più essendo l'angolo EFB eguale (4) all'angolo AFG, sarà l'angolo esteriore EFB eguale all'interiore, ed opposto dalla medesima parte FGD.

III. Finalmente, essendo l'angolo EFB eguale all'angolo FGD; aggiunto ad entrambi il medesimo angolo BFG, saranno li due angoli EFB, BFG eguali a due angoli FGD, BFG; ma li due primi angoli EFB, BFG sono eguali a due retti (5); dunque saranno eguali a due retti ancora gli angoli FGD, BFG: ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

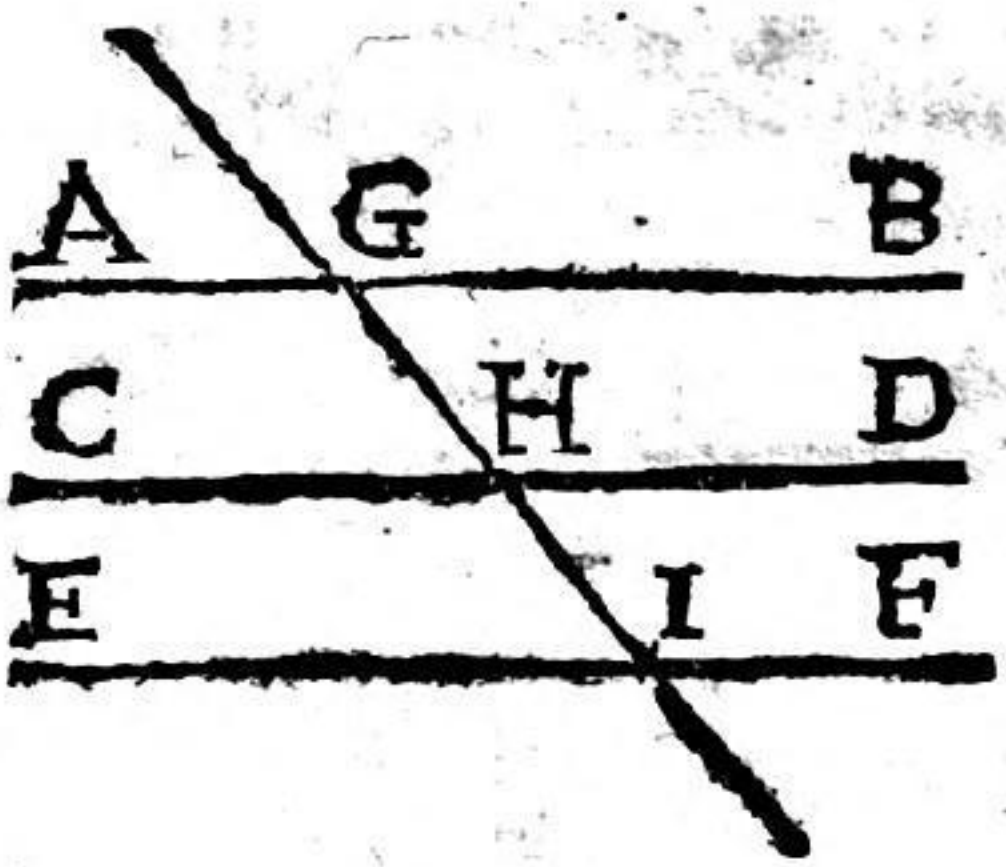
---

(1) *Asso.* 4. (2) *Prop.* 13. (3) *Asso.* 13.
(4) *Prop.* 15. (5) *Prop.* 13.

Digitalizzato da Google

PROP. XXX. TEOREMA.

Se due linee ſono parallele ad una terza, ſaranno parallele fra di loro.



I.

Siano le due linee AB, CD parallele alla terza EF: io dico, che eſſe ſaranno parallele fra di loro.

II.

Si tiri la linea GHI, la quale ſeghi tutte tre le ſuddette linee ne' punti G, H, e I.

III.

Perchè dalla ſuppoſizione la AB è parallela alla EF, ſaranno (1) gli angoli alterni AGH, HIF eguali fra di loro. Inoltre, perchè la retta CD è parallela ad EF, ſarà (2) l'angolo eſteriore, GHD eguale all' interiore, ed oppoſto dalla medeſima parte HIF. Quindi eſſendo così l'angolo AGH, come l'angolo GHD eguale al medeſimo angolo HIF, ſaranno i ſuddetti angoli (3) AGH, GHD eguali fra di loro. Ma ſono alterni: dunque le linee AB, CD ſono (4) pa-

(1) *Prop.* 29. (2) *Prop.* 29.
(3) *Aſſio.* 1. (4) *Aſſio.* 2.

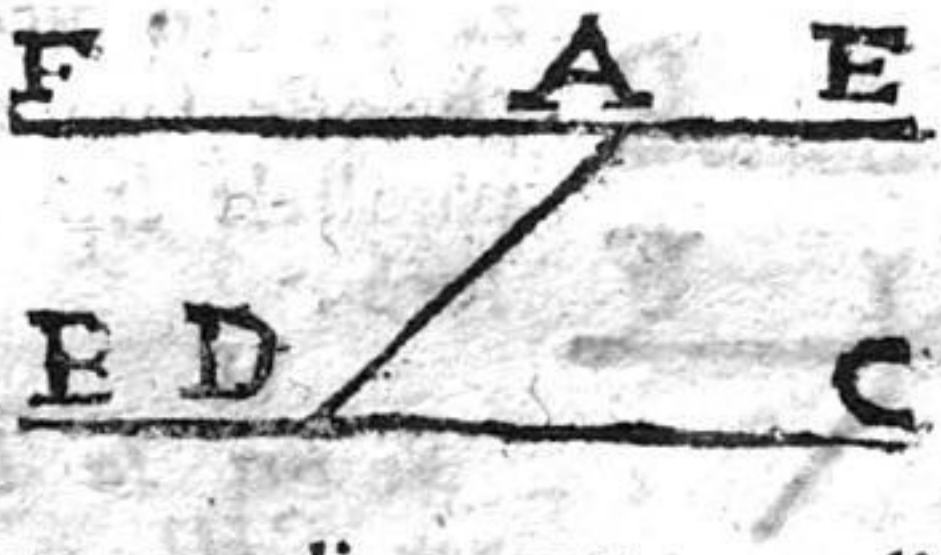
Digitalizzato da Google

parallele. Ciocchè si doveva dimostrare.

PROP. XXXI. TEOREMA.

Per un punto dato tirare una linea retta parallela ad un altra linea retta.

I.



Sia dato il punto A, e sia data parimente la linea BC, fa duopo per lo punto dato A tirare una linea retta parallela alla data BC.

II.

Si prenda nella BC il punto D ad arbitrio.
Si unisca la AD (1).
Si costituisca l'angolo DAE eguale (2) *all'angolo ADC.*
Si distenda FA (3) *verso E.* Io dico, che la retta FE sia parallela alla BC.

III.

Imperciocchè siccome dalla costruzione li due angoli alterni FAD; ADC sono eguali fra di loro, così le linee FE. BC. saranno (4) parallele.

PROP.

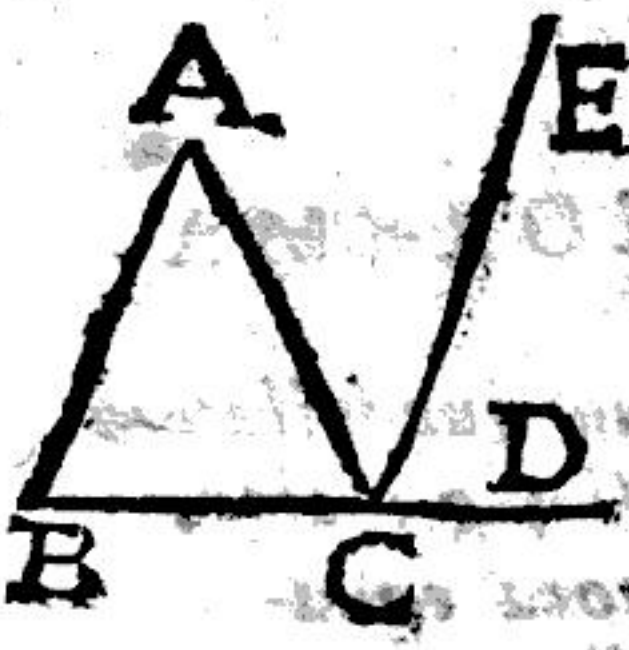
(1) *Dim.* 1. (2) *Prop.* 23.
(3) *Dim.* 2. (4) *Prop.* 27.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXII. TEOREMA.

Se uno de' lati d'un triangolo sia disteso oltre; sarà l'angolo esteriore eguale a due angoli interiori opposti. E tutti li tre angoli del triangolo saranno eguali a due retti.

I.



Il lato BC del triangolo ABC sia disteso verso D; io dico, che l'angolo esteriore ACD sia eguale a' due interiori opposti CBA, BAC; e che i tre angoli ABC, BCA, CAB del triangolo ABC sono eguali a due retti.

II.

Tirisi (1) *per lo punto C la retta CE parallela alla retta BA.*

III.

I. Perchè le due linee parallele CE, BA sono segate dalla terza CA, saranno gli angoli alterni (2) ACE CAB eguali fra di loro. Inoltre, perchè le due linee parallele BA, CE, sono segate dalla terza BD, sarà l'angolo esteriore ECD (3) eguale all'interiore opposto dalla medesima parte ABC: quindi aggiugnendo cose eguali a cose eguali, riuscirà tutto l'angolo esteriore ACD eguale a' due interiori opposti CBA, BAC. II.

---

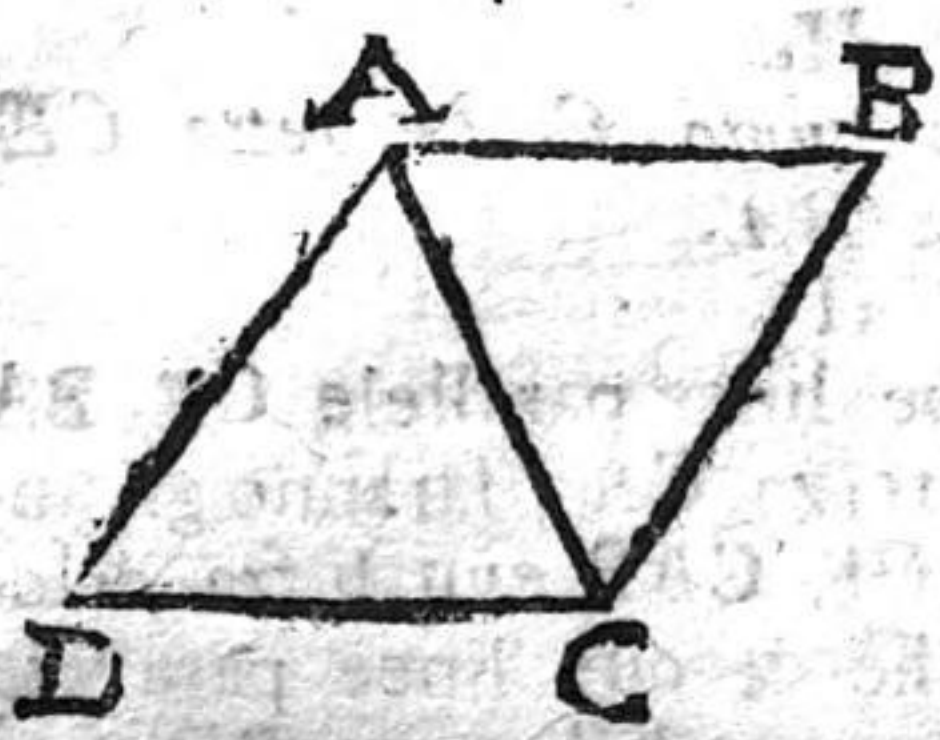
(1) *Prop. ant.* (2) *Prop.* 29. (3) *Prop.* 29.

Digitalizzato da Google

II. Essendo l'angolo ACD eguale a' due angoli CBA, BAC, sarà, aggiugnendo il medesimo angolo ACB, la somma de' due angoli ACD, ACB eguale a tre angoli CBA, BAC, ACB; ma li due angoli ACD, ACB sono eguali (1) a due retti; dunque li tre angoli CBA, BAC, ACB sono parimente eguali a due retti; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Se due lati opposti d'un quadrilatero sono eguali, e paralleli; gli altri due lati saranno ancora eguali, e paralleli.



I.

Siano i due lati opposti AB, DC del quadrilatero ABDC eguali, e paralleli; io dico, che gli altri due AD, BC sono parimente eguali, e paralleli.

II.

Si unisca (2) la linea AC.

III.

Siccome dalla supposizione la AB è eguale alla DC, e la AC è eguale alla CA; così

(1) *Prop.* 13. (2) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

così saranno i due lati BA, AC del triangolo ABC eguali a due lati DC, CA del triangolo DCA ciascuno a ciascuno: Il perchè essendo ancora l'angolo BAC eguale all'angolo ACD, perchè sono alterni delle parallele AB, DC; sarà (1) la base BC eguale alla base AD, e l'angolo ACB sarà eguale all'angolo CAD; ma questi angoli sono alterni delle linee BC, AD; dunque dette linee sono ancora parallele (2). Ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

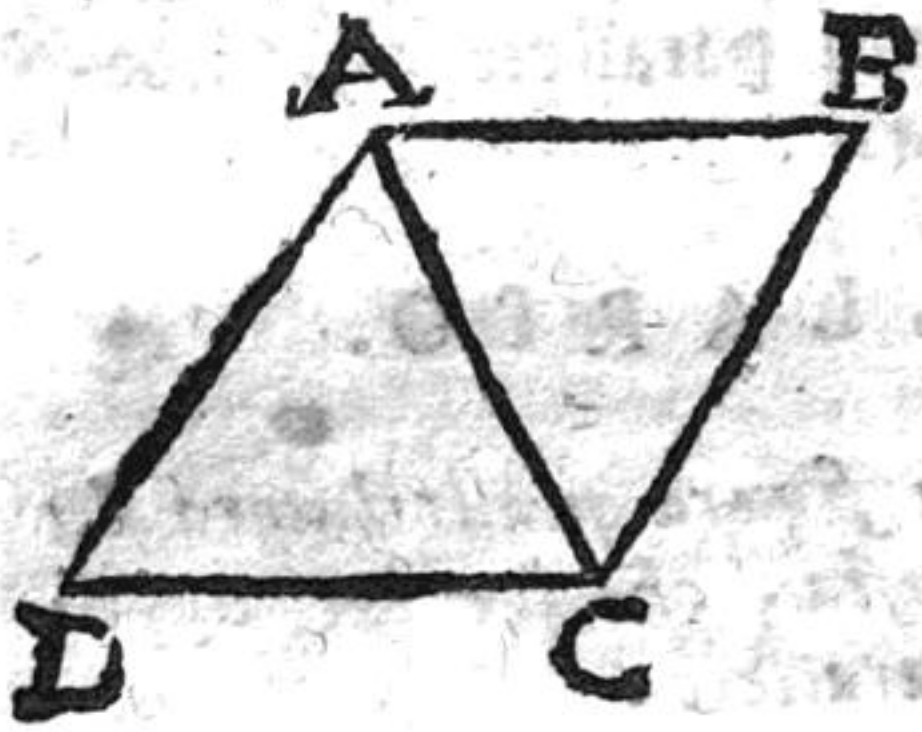
Quindi, acciò una figura quadrilatera sia ***parallelogramma, basta, che due lati opposti siano eguali, e paralleli.***

(1) *Prop.* 4. (2) *Prop.* 27.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

In ogni figura parallellogrammi i lati opposti sono eguali fra di loro. Gli angoli opposti sono parimente eguali. La diagonale divide il parallelogrammo in due triangoli eguali.



I.

Nel parallelogrammo ABCD; io dico, che i lati oppositi AB, e DC, AD, e BC sono eguali fra di loro: di più, che gli angoli oppositi DAB, e DCB; ADC, ed ABC sono eguali fra di loro. Finalmente, che la diagonale AC divide il parallelogrammo ABCD in due triangoli ADC, ABC eguali fra di loro.

II.

Siccome la AB è parallela alla DC, così gli angoli alterni BAC, ACD (1) sono eguali fra di loro. Inoltre, siccome la BC è parallela alla AD, così gli angoli alterni BCA, DAC sono (2) ancora eguali; quindi li due angoli BAC, BCA del triangolo BAC saranno eguali a' due angoli ACD, DAC del trian-

(1) *Prop.* 29. (2) *Prop.* 29.

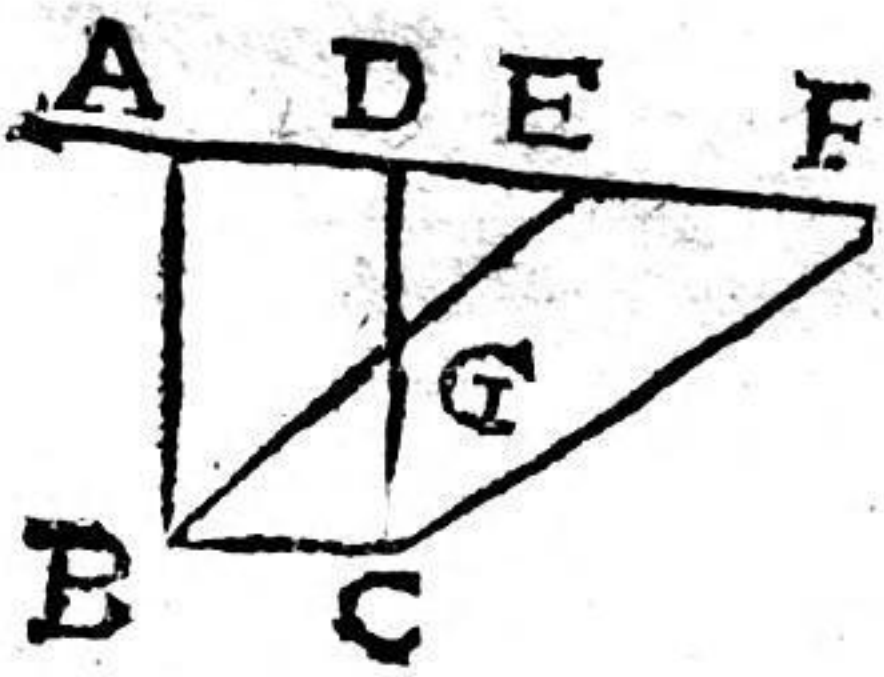
Digitalizzato da Google

triangolo DCA ciascuno a ciascuno: il perchè essendo di più il lato AC adjacenti a' due primi angoli eguale al lato CA adjacente agli altri due angoli; saranno (1) le altre cose eguali alle altre cose: vale a ire il lato AB eguale al lato DC, il lato BC eguale al lato AD; l'angolo ABC eguale all'angolo ADC; e finalmente il triangolo ABC eguale al triangolo CDA: ora essendosi già dimostrato l'angolo BAC eguale all'angolo ACD; e l'angolo DAC eguale all'angolo ACB, aggiugnendo cose eguali a cose eguali, riuscirà (2) l'angolo DAB eguale all'angolo DCB; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XXXV. TEOREMA.

Li parallelogrammi costituiti nella medesima base, e fra le medesime parallele, sono eguali fra di loro.

I.



Siano li due parallelogrammi ABCD, EBCF costituiti nella medesima base BC, e fra le medesime parallele AF, BG; io dico, che cotesti due parallelogrammi sono eguali fra di loro.

II.

(1) *Prop.* 26. (2) *Assio.* 2.

Digitalizzato da Google

Siccome la AD è eguale (1) alla BC, e la BC è eguale (2) alla EF ; così saranno le due AD, EF eguali fra di loro. Aggiugnendo dunque ad esse la medesima DE, sarà la AE eguale alla DF ; ma la AB è eguale (3) alla DC ; dunque li due lati AE, AB del triangolo BAE saranno eguali a' due lati DF, DC del triangolo DFC ciascuno a ciascuno ; quindi essendo per cagione delle linee parallele AB ; DC, l'angolo interiore BAE (4) eguale all'esteriore opposto dalla medesima parte CDF ; sarà (5) il triangolo ABE eguale al triangolo DCF. Togliendone dunque il medesimo triangolo DGE ; sarà (6) l'avanzo ABGD eguale all'avanzo EGCF : finalmente aggiugnendo il medesimo triangolo BGC (7) ; riuscirà tutto il parallelogrammo ABCD eguale al parallelogrammo EBCF. Ciocchè doveva dimostrarsi.

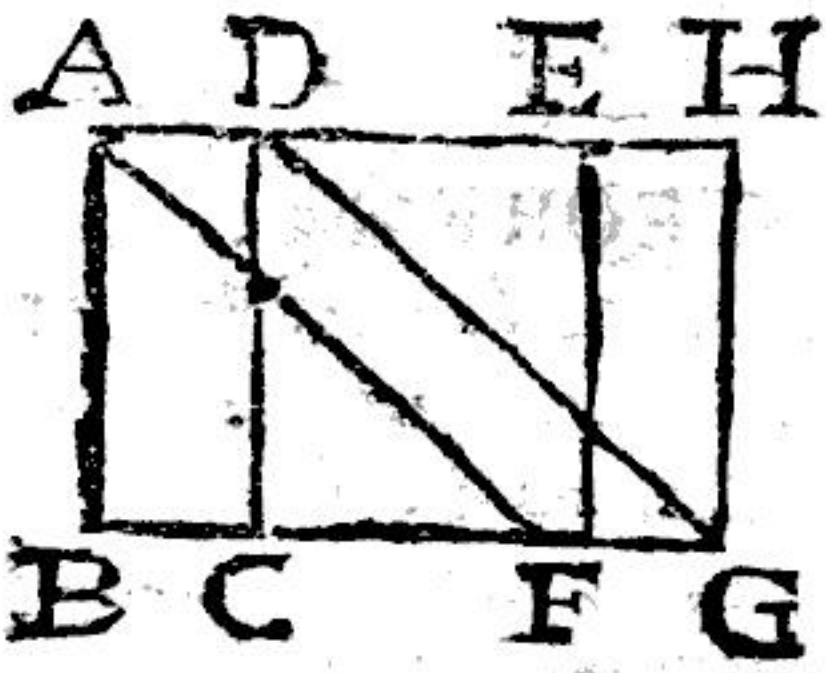
PROP.

(1) *Prop. ant.* (2) *Prop. ant.* (3) *Pr. ant.*
(4) *Prop.* 29. (5) *Prop.* 4. (6) *Ass.* 3.
(7) *Ass.* 2.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXVI. TEOREMA.

Li parallelogrammi costituiti sopra base eguali, e fra le medesime parallele sono eguali fra di loro.



I.

Li due parallelogrammi ABCD, EFGH siano costituiti sopra le due basi eguali BC, FG, e fra le medesime parallele BG, AH, io dico, che essi sono eguali fra di loro.

II.

Si uniscano (1) *le due AF, DG.*

III.

Perchè dalla supposizione la BC è eguale alla FG, e per cagione del parallelogrammo ABCD la AD è eguale (2) ancora a BC, saranno le due AD, FG eguali fra di loro: quindi nel quadrilatero AFGD essendo i due lati opposti AD, FG eguali, e paralleli, esso sarà (3) parallelogrammo. Poichè dunque li due parallelogrammi BADC, FADG sono costituiti sopra la medesima base AD, e fra le medesime paral-

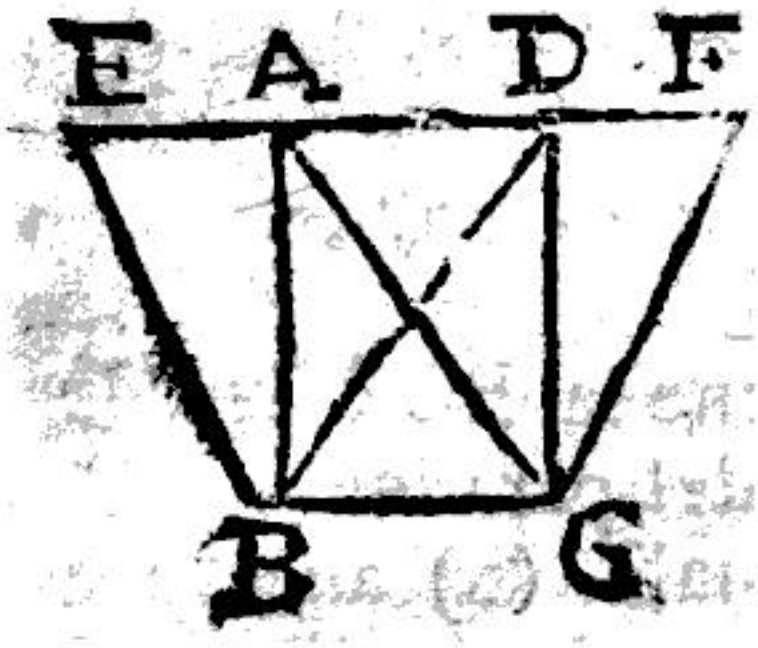
(1) *Dim.* 1. (2) *Prop.* 34.
(3) *Corol. della propos.* 33.

Digitalizzato da Google

lele BG, AD saranno i detti due parallelogrammi (1) eguali tra di loro. Similmente, perchè li due parallelogrammi AFDG, EFGH sono costituiti sopra la medesima base FG, e fra le medesime parallele FG, AH, essi saranno (2) eguali fra di loro. Quindi li due parallelogrammi ABCD, EFGH saranno (3) ancora eguali; ciocchè dovea dimostrarsi.

PROP. XXXVII. TEOREMA.

Li triangoli costituiti sopra la medesima base, e fra le medesime parallele sono eguali fra di loro.



I.

Li due triangoli ABC, DCB siano costituiti sopra la medesima base BC, e fra le medesime parallele AD, BC; io dico, che essi sono eguali fra di loro.

II.

Per li punti B, e C si tirino (4) le linee rette BE, CF parallele rispettivamente alle due AC, BD.

Si distenda (5) la AD dall'una parte, e dall'altra, finchè s'incontri colle paralliele suddette ne' punti E, ed F.

III.

(1) Prop. ant. (2) Prop. ant. (3) Assio. 1.
(4) Prop. 31. (5) Dim. 2.

Digitalizzato da Google

III.

Perchè li due parallelogrammi EBCA, DBCF ſono coſtituiti ſopra la medeſima baſe BC, e fra le medeſime parallele BC, EF ſaranno (1) eſſi eguali fra di loro: ma li triangoli ABC, DCB ſono riſpettivamente la metà (2) de parallelogrammi EBCA, DBCF; dunque ſaranno parimente eguali (3) i triangoli ABC, DCB; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP. XXXVIII. TEOREMA.

Li triangoli coſtituiti ſopra eguali baſi, e fra le medeſime parallele, ſono eguali fra di loro.



I.

Li due triangoli ABC, DEF ſiano coſtituiti ſopra le baſi eguali BC, EF, e fra le medeſime parallele BF, GH; io dico, che eſſi ſono eguali fra di loro.

II.

Si tirino (4) per li punti B, ed F le linee rette BG, FH parallele riſpettivamente alle due CA, ED.

III.

Perchè li due parallelogrammi GBCA, DEFH.

D 2

(1) *Prop.* 35.
(2) *Prop.* 34.
(3) *Aſſio.* 7.
(4) *Prop.* 31.

Digitalizzato da Google

DEFH ſono coſtituiti ſopra le baſi eguali BC, EF, e fra le medeſime parallele BF, GH, eſſi ſaranno (1) eguali fra di loro: ma li triangoli ABC, DEF ſono la metà (2) reſpettivamente de' parallelogrammi GBCA, DEFH; dunque ancora li triangoli ABC, DEF (3) ſono eguali: ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP. XXXIX. TEOREMA.

Li triangoli eguali coſtituiti ſopra la medeſima baſe, e dalla medeſima parte, ſono fra le medeſime parallele.



I.

Li triangoli eguali ABC, DCB ſiano coſtituiti ſopra l'iſteſſa baſe BC, e dalla medeſima parte; io dico, che la linea retta AD è parallela alla BC.

II.

Se mai è poſſibile, non ſia la AD parallela alla BC.

Per lo punto A dunque tirſi (4) *la AE parallela alla BC.*

Si congiunga (5) *la EC.*

III.

Perchè li due triangoli ABC, ECB ſono coſtituiti ſopra la medeſima baſe BC, e fra le

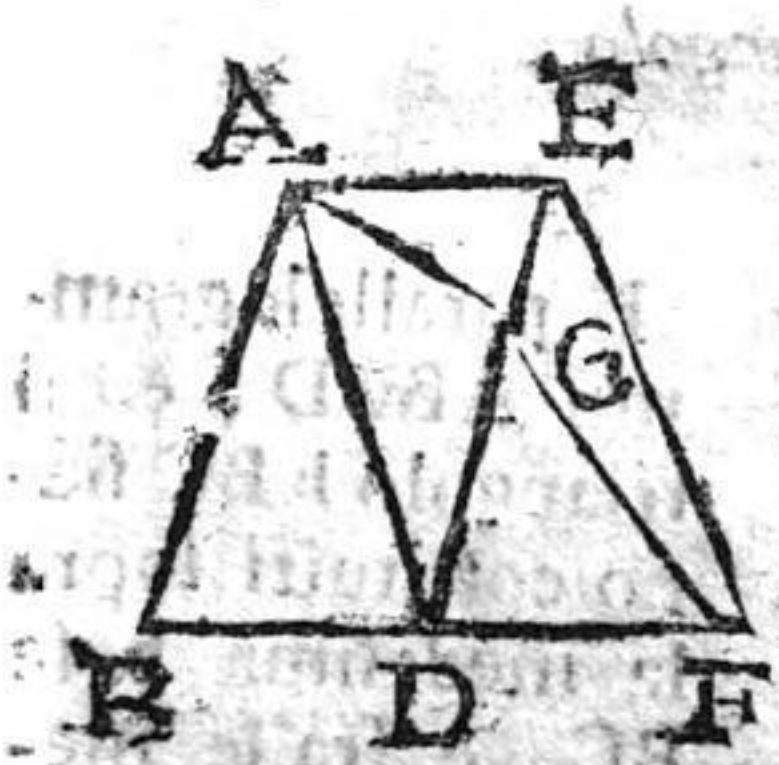
(1) *Prop.* 36. (2) *Prop.* 34. (3) *Aſſio.* 7.
(4) *Prop.* 31. (5) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

le medesime parallele ; essi saranno (1) eguali ; ma dalla suppositione il triangolo DCB è parimente eguale al triangolo ABC; dunque il triangolo minore ECB sarà eguale (2) al maggiore DCB ; ciocchè non potendo sossistere , ne siegue la verità del Teorema in questione .

PROP. XL. TEOREMA .

Li triangoli eguali costituiti sopra eguali basi , le quali giacciano a dirittura , e dalla medesima parte sono fra le medesime parallele .



I.

Li triangoli ABD , EDF eguali siano costituiti sopra le basi eguali BD , DF poste a dirittura , e dalla medesima parte ; io dico , che la linea AE sia parallela alla BF .

II.

Se mai è possibile , non sia la AE parallela alla BF .

Tirisi (3) *dunque per lo punto A la AG parallela alla BF .*

Si congiunga la GF (4) .

(1) *Prop.* 37. (2) *Assio.* 1.
(3) *Prop.* 31. (4) *Dim.* 1.

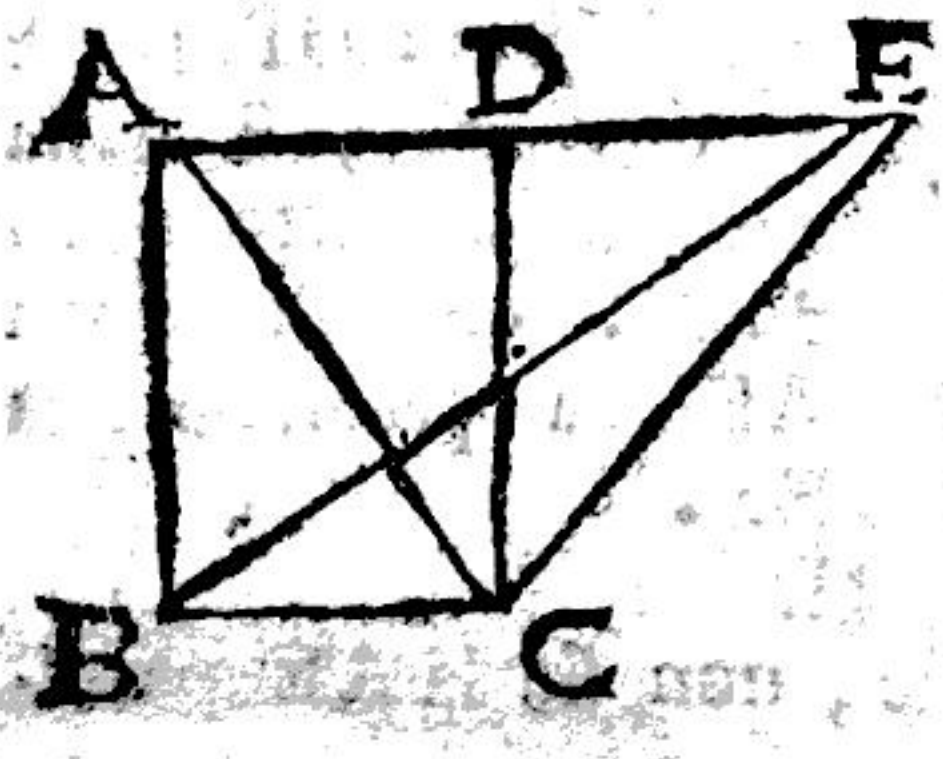
Digitalizzato da Google

III.

Perchè li due triangoli ABD, GDF fono coſtituiti ſopra le baſi eguali BD, DF, e fra le medeſime parallele AG, BF, eſſi ſaranno (1) eguali fra di loro. Ma dalla ſuppoſizione il triangolo EDF è parimente eguale al triangolo ABD; dunque il triangolo minore GDF ſarà eguale al maggiore EDF; ciocchè non potendo ſoſſiſtere, ne ſegue la verità del Teorema in queſtione.

PROP. XLI. TEOREMA.

Se un parallelogrammo, ed un triangolo ſono coſtituiti ſopra la medeſima baſe, e fra le medeſime parallele, il parallelogrammo ſarà doppio del triangolo.



I.

Il parallelogrammo ABCD, ed il triangolo EBC ſiano coſtituiti ſopra la medeſima baſe BC, e fra le medeſime parallele AE, BC; io dico, che il parallelogrammo ABCD è doppio del triangolo EBC.

II.

Si unisca (2) *la retta AC.*

III.

(1) *Prop.* 38. (2) *Dim.* 1.

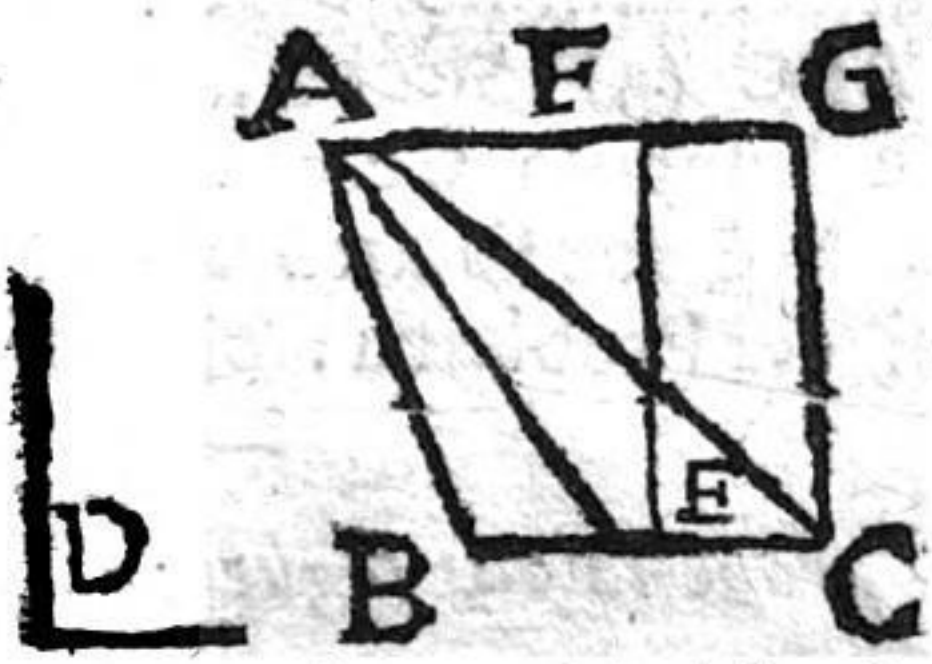
Digitalizzato da Google

III.

Perchè li due triangoli ABC, EBC ſono coſtituiti ſopra la medeſima baſe BC, e fra le medeſime parallele AE, BC, eſſi ſaranno (1) eguali fra di loro. Ma il parallelogrammo ABCD è (2) doppio del triangolo ABC; dunque il medeſimo parallelogrammo ABCD ſarà doppio (3) del triangolo EBC. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP. XLII. TEOREMA.

Coſtituire un parallelogrammo, il quale ſia eguale ad un triangolo dato, ed abbia un' angolo eguale ad un' angolo dato.



I.

Sia dato il triangolo ABC, e ſia dato l' angolo D; ſi deve coſtituire un parallelogrammo, che ſia eguale al triangolo ABC, ed abbia un'angolo eguale all' angolo dato D.

II.

Tagliſi (4) *la BC in parti eguali nel punto E.*

Si coſtituiſca (5) *al punto E l' angolo CEF eguale all' angolo dato D.*

(1) *Prop.* 37. (2) *Prop.* 34. (3) *Aſſio.* 1.
(4) *Prop.* 10. (5) *Prop.* 23.

Digitalizzato da Google

Per li punti C, ed A si tirino (1) *le linee rette CG, AG parallele respettivamente alle linee EF, BC*. Io dico, che il parallelogrammo FECG sia eguale al triangolo dato ABC, e tenga un'angolo eguale all'angolo dato D.

Congiungasi (2) *AE*.

III.

Poichè dalla costruzione le basi BE, EC sono eguali, saranno (3) eguali li due triangoli ABE, AEC costituiti sopra basi eguali, e fra le medesime parallele; e per conseguente il triangolo ABC sarà doppio del triangolo AEC: Ma il parallelogrammo FECG anche è doppio del triangolo AEC (4): dunque sarà il parallelogrammo FECG eguale al triangolo ABC (5). Sicchè, essendo dalla costruzione l'angolo CEF uguale all'angolo dato D, si è soddisfatto ad ambedue le condizioni del Problema: ciocchè doveva farsi.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se nella diagonale (6) *AC del parallelogrammo ABCD si prenda un punto E ad arbitrio, e si fanno per esso passare le linee HI, FG parallele respettivamente a' lati AD, AB del parallelogrammo ABCD si vedranno nascere quattro parallelogrammi AHEF, EGCI, HB-GE,*

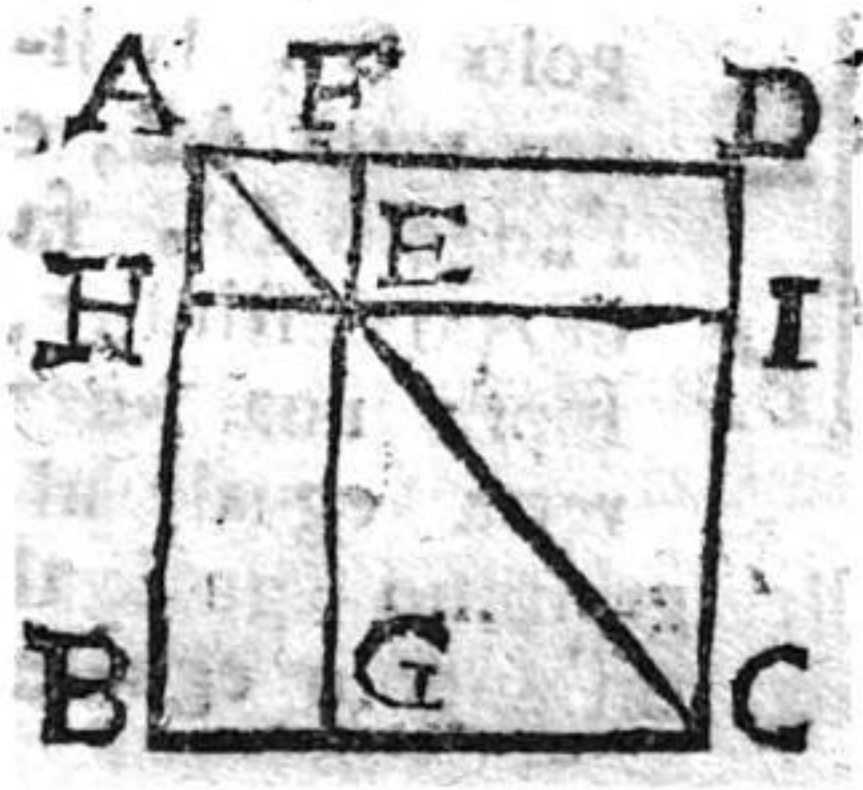
(1) *Prop.* 31. (2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 38. (4) *Prop. ant.*
(5) *Assio.* 6. (6) *Veggasi la figura a-*

Digitalizzato da Google

GE, ed FEID. Li due primi, perchè sono situati intorno alla diagonale, o sia diametro AC si chiamano parallelogrammi intorno al diametro. *Gli altri due si chiamano* supplementi, ovvero compimenti de' parallelogrammi, i quali sono intorno al diametro.

PROP. XLIII. TEOREMA.

In ogni parallelogrammo compartito i quattro parallelogrammi per mezzo del diametro, e delle due suddette parallele, li supplimenti de' parallelogrammi, i quali sono intorno al diametro sono eguali fra di loro.



I.

Sia il parallelogrammo ABCD compartito in quattro altri parallelogrammi per mezzo del diametro AC, e delle due linee parallele HI, FG. Io dico, che il supplemento HBEG sia eguale al supplemento FEDI.

II.

Imperciocchè il triangolo AHE è eguale (1) al triangolo AFE, siccome ancora il triangolo EGC è eguale al triangolo EIC: quindi la somma de' due triangoli AHE, FGC sarà (2) eguale alla somma de' due

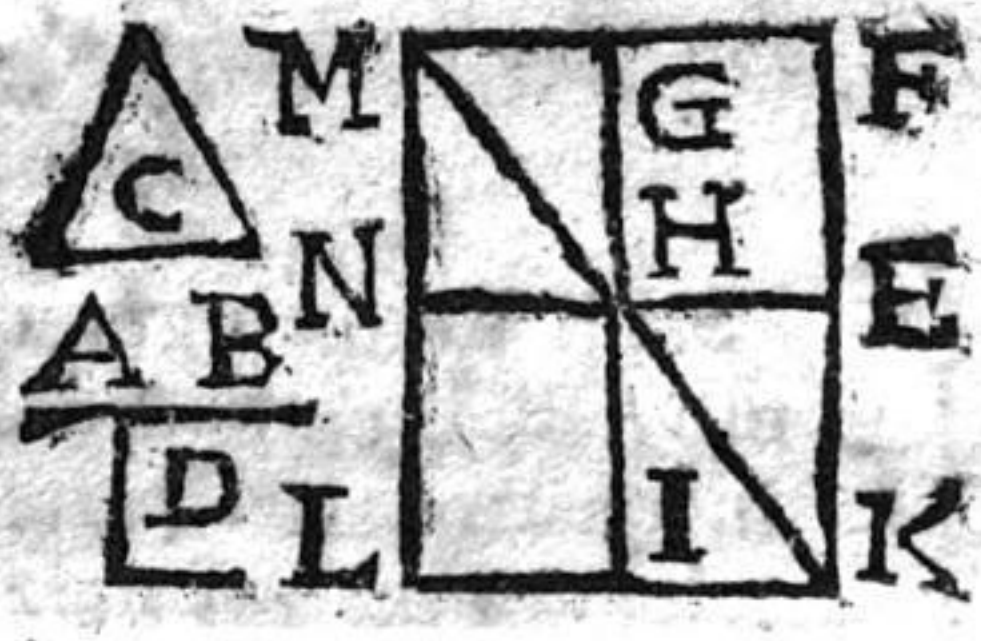
(1) *Prop.* 34. (2) *Assio.* 2.

Digitalizzato da Google

triangoli AFE., EIC. Ma tutto il triangolo ABC è eguale (1) al triangolo ADC; dunque il parallelogrammo, che avanza HBGE, sarà eguale (2) al parallelogrammo, che avanza FEID. Ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XLIV. PROBLEMA.

Costituire sopra una linea retta data un parallelogrammo, il quale sia eguale ad un triangolo dato, ed abbia un' angolo eguale ad un' angolo dato.



I.

Sia dato il triangolo C, la linea retta AB, e l'angolo D, fa duopo costituire, sopra una linea retta eguale alla data AB, un parallelogrammo eguale al triangolo C, che tenga un'angolo eguale all'angolo dato D.

II.

Si costituisca (3) il parallelogrammo GHIF eguale al triangolo C, che tenga l'angolo GHE eguale all'angolo dato D.

Si dimanda la GH fin' al punto I, in modocchè la parte HI sia eguale alla data AB (4).

Per lo punto I si tiri la linea LIK parallela

---

(1) Prop. 4.
(2) Assio. 3.
(3) Prop. 42.
(4) Prop. 3.

Digitalizzato da Google

lela all HE (1), *la quale vadaſi ad unire colla* FE *portata innanzi, nel punto* K.

Si uniſca la HK, *la quale ſi diſtenda fintantocchè vadaſi ad unire colla* GF, *portata innanzi nel punto* M.

Per lo punto M *ſi tiri la* (2) MNL *parallela a* GI, *ovvero ad* FK, *la quale s' incontri colle due* HE, IK *diſteſe oltre, quanto biſogna ne' punti* N, *ed* L. Io dico, che il parallelogrammo NLHI *ſia quello che ſi domanda.*

III.

Imperciocchè, primieramente la linea retta HI, ſopra la quale è coſtituito il parallelogrammo, dalla coſtruzione è eguale alla data AB. In ſecondo luogo il parallelogrammo NLHI è eguale al parallelogrammo GHEF; quindi, eſſendo il parallelogrammo GHEF eguale dalla coſtruzione al triangolo C, ſarà parimente il parallelogrammo NLIH eguale al triangolo C. Finalment l' angolo NHI è eguale (3) all' angolo GHE, ma l' angolo GHE dalla coſtruzione è eguale all' angolo D; dunque ſarà ancora l' angolo NHI eguale all' angolo dato D. Ciocchè doveva farſi.

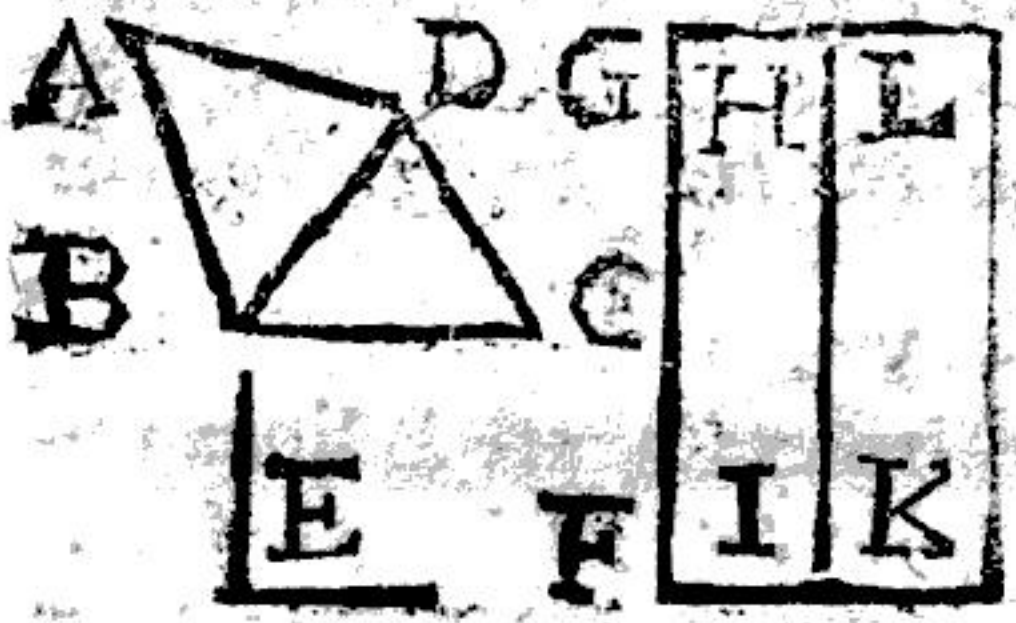
D 6 PROP.

(1) Prop. 31.
(2) Prop. 31.
(3) Prop. 15.

Digitalizzato da Google

PROP. XLV. PROBLEMA.

Costituire un parallelogrammo, il quale sia eguale ad una figura rettilinea data, e tenga un angolo eguale ad un'angolo dato.



I.

Sia data la figura rettilinea ABCD, e l'angolo rettilineo E; fa duopo costituire un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data, e che tenga un'angolo eguale all'angolo dato E.

II.

Risolvasi la figura rettilinea data in tanti triangoli, in quanti è capace di potere essere risoluta, come qui ne' due triangoli ABD, BDC.

Si costituisca il parallelogrammo (1) *GFHI eguale al triangolo ABD, il quale tenga l'angolo GFI eguale all'angolo dato E.*

Si costituisca (2) *sopra la linea retta HI il parallelogrammo HIKL eguale all'altro triangolo BDC, e che renga l'angolo HIK eguale all'istesso angolo dato F.* Io dico che la figura GFKL sia il parallelogrammo in questione.

III.

(1) *Prop.* 42.

(2) *Prop. antec.*

Digitalizzato da Google

III.

Perchè, così l'angolo GFI, come l'angolo HIK sono eguali al medesimo angolo E, saranno essi eguali fra di loro; quindi aggiuntovi il medesimo angolo FIH, saranno li due angoli GFI, FIH eguali a due angoli FIH, HIK; ma li due primi angoli, come interiori della medesima parte delle due linee parallele FG, HI sono (1) eguali a due retti; dunque anche gli angoli FIH, HIK sono eguali a due retti; e perciò le due linee FI, IK giacciono (2) a drittura. Quindi, siccome FI è parallela a GH; così sarà tutta la FK paralliela alla medesima GH; di modochè gli angoli alterni GHI, HIK riusciranno (3) eguali. Aggiuntovi il medesimo angolo IHL: saranno i due angoli GHI, IHL eguali a due angoli HIK IHL; ma questi due angoli, come interiori dalla medesima parte delle due parallele HL, IK sono eguali (4) a due retti; dunque ancora gli angoli GHI, IHL sono eguali a due retti; di modochè le due linee GH, HL è necessario, che giacciano a dirittura (5). Quindi, siccome la GH è parallela ad FK, così sarà tutta la GL parallela ad FK; ma ancora la GF è parallela (6) ad LK; perchè ciascuna di esse è parallela alla medesima HI; dunque la figura GFKL è un parallelogrammo, il quale:

---

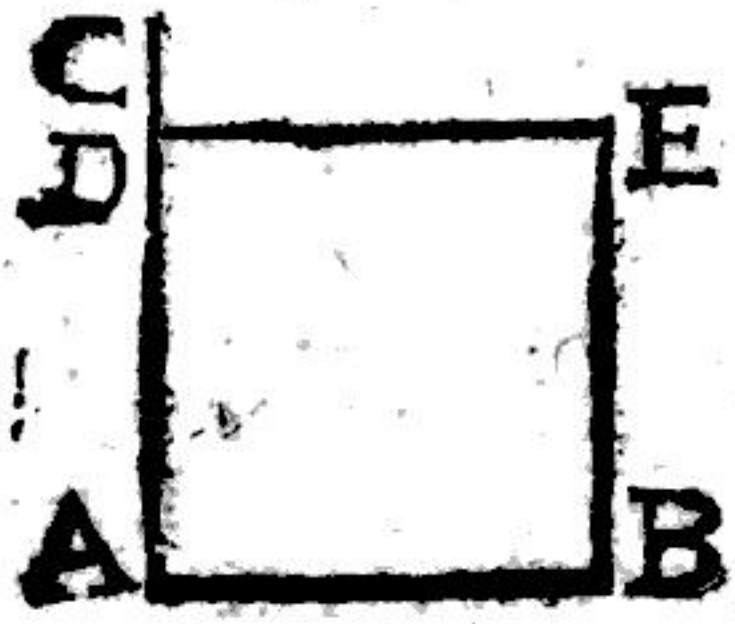
(1) *Prop.* 29.
(2) *Prop.* 14.
(3) *Prop.* 29.
(4) *Prop.* 29.
(5) *Prop.* 14.
(6) *Prop.* 30.

Digitalizzato da Google

le: come costa dalla costruzione è eguale alla figura rettilinea data ABCD, e tiene l' angolo GFK eguale all' angolo rettilineo dato E. Ciocchè doveva farsi.

PROP. XLVI. PROBLEMA.

Costituire un quadrato sopra una linea retta data.



I.

Sia data la linea retta AB, fa duopo sopra di essa costituire un quadrato.

II.

S' innalzi (1) *dal punto A la linea retta AC perpendicolare alla data AB.*

Si tagli (2) *AD eguale ad AB.*

Per li punti B, e D si tirino (3) *le due linee BE, DE parallele rispettivamente alle due AD, AB.* Io dico, che la figura parallelogramma ABDE sia un quadrato.

III.

Imperciocchè, essendo dalla costruzione AD eguale ad AB, e di più essendo per cagione del parallelogrammo ABDE (4) AD eguale a BE, ed AB eguale a DE, saranno tutti quattro i lati AB, BE, ED, DA eguali fra di loro. Inoltre essendo li due angoli BAD, ABE interiori delle due linee paral-

le-

(1) *Prop.* 11.
(2) *Prop.* 3.
(3) *Prop.* 31.
(4) *Prop.* 34.

Digitalizzato da Google

lele AD, BE eguali (1) a' due angoli retti, ſiccome dalla coſtruzzione l'angolo DAB è retto; così parimente ſarà retto l'angolo ABE: quindi gli altri due angoli BED, EDA, i quali ſono riſpettivamente eguali (2) agli angoli DAB, ABE ſaranno parimente retti: di modo che il parallelogrammo ABED, che tiene tutte i lati eguali, e tutti gli angoli retti ſarà quadrato. Ciocchè doveva farſi.

COROLLARIO.

Quindi ne ſiegue, che ogni parallelogrammo, il quale tiene un' angolo retto deve avere tutti gli altri tre angoli retti: che ſe due linee rette ſono eguali, li quadrati coſtituiti ſopra queſte linee rette ſono ancora eguali: che ſe due quadrati ſono eguali, i lati di quadrati ſiano parimente eguali. Il primo Corollario è chiaro dalla dimoſtrazione di queſta propoſizione. Gli altri due dalla coſtituzione della medeſima.

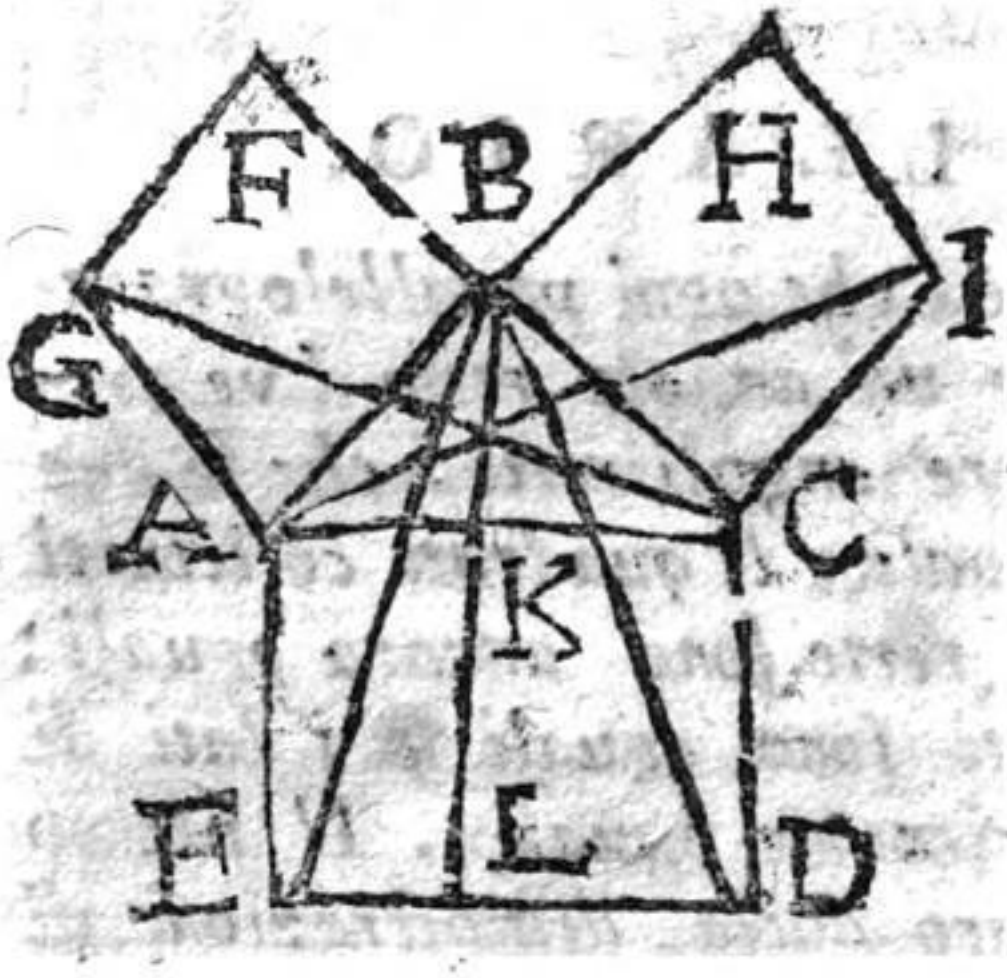
PROP.

(1) *Prop.* 29. (2) *Prop.* 34.

Digitalizzato da Google

PROP. XLVII. TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli il quadrato costituito sopra il lato, che sta dirimpetto all' angolo retto (il qual lato viene chiamato da' Greci Ipotenusa) è eguale a' due quadrati costituiti sopra li due lati, li quali comprendono l' angolo retto.



I.

Sia il triangolo A B C, in cui l' angolo A-BC sia retto; io dico, che il quadrato costituito sopra l' ipotenusa AC sia eguale a' quadrati costituiti sopra i due lati AB, BC, i quali comprendono l'angolo retto ABC.

II.

Si costituiscono (1) *sopra la ipotenusa AC, e sopra li due lati AB, BC li quadrati AEDC, ABFG, BCIH:*

Per lo punto B si tiri (2) *la linea retta BL parallela ad AE, ovvero CD.*

Si uniscono (3) *le linee rette BE, BD, GC, AI.*

III.

---

(1) *Prop. ant.* (2) *Prop.* 31.
(3) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione, l'angolo ABF è retto, e dalla suppositione l'angolo ABC è parimente retto; così li due angoli ABF, ABC saranno eguali a due retti; quindi le due linee rette BF BC giaceranno (1) a dirittura, di modochè, siccome la FB è parallela alla GA; così sarà tutta la FC parallela alla GA. Similmente, siccome dalla costruzione l'angolo, CBH è retto, e dalla suppositione è retto parimente l'angolo ABC; così saranno i due angoli ABC, CBH eguali a due retti; e quindi le linee AB, BH comporranno una sola linea retta (2), la quale sarà parallela alla CI.

Inoltre, siccome GA è eguale ad AB, perchè sono lati del quadrato ABFG, ed AC è eguale ad AE, perchè sono parimente lati del quadrato AEDC; così saranno i due lati GA, AC del triangolo GAC eguali a' due lati AB, AE del triangolo BAE: laonde, essendo l'angolo GAC eguale all'angolo BAE (imperciocchè questi due angoli nascono dall'aggiugnere il medesimo angolo BAC a' due angoli retti BAG, BAE) sarà parimente (3) il triangolo GAC eguale al triangolo BAE; quindi siccome il quadrato, o sia parallelogrammo ABFG è doppio (4) del triangolo CGA, e similmente il parallelogrammo AELK è doppio (5) del triangolo BAE,

(1) *Prop.* 14. (2) *Prop.* 14. (3) *Prop.* 4.
(4) *Prop.* 41. (5) *Prop.* 41.

Digitalizzato da Google

BAE, perchè ſono coſtituiti nell' iſteſſa baſe, e fra le medeſime parallele; così ſarà (1) il quadr to ABIG eguale al parallelogrammo AELK. Nell' iſteſſa maniera, ſiccome CI è eguale a CB, e CA è eguale a CD, perchè ſono lati de' quadrati BCIH, ACDE; così ſaranno i due lati IC, CA del triangolo ICA eguali a' due lati BC, CD del triangolo BCD; quindi, eſſendo l'angolo ICA eguale all' angolo ACD ſarà (2) il triangolo ICA eguale al triangolo BCD: ma il quadrato, ovvero parallelogrammo CIHB è doppio (3) del triangolo ICA, e ſimilmente il parallelogrammo CDKL è doppio del triangolo BCD: dunque ſarà il quadrato CIHB eguale al parallelogrammo CDLK (4). Sicchè, eſſendoſi già dimoſtrato, che il quadrato GABF ſia eguale al parallelogrammo AELK; ſaranno tutti due i quadrati inſieme eguali al quadrato AEDC; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

La ſcoperta di queſto Teorema ſi deve a Pittagora *da chi ha preſo il nome di* Teorema Pittagorico. *Diceſi, che* Pittagora *tanto ſi foſſe compiaciuto di queſta invenzione, che aveſſe fatto un ſacrificio di cento bovi agli Dei. Si può la verità del medeſimo comprovare per mezzo de' numeri, purchè però ſi ſappiano prima le due ſeguenti coſe. 1. Il quadrato d' un numero è il prodotto, che naſce*

(1) *Aſſio.* 6. (2) *Prop.* 4.
(3) *Prop.* 41. (4) *Aſſio.* 6.

Digitalizzato da Google

ſce dal moltiplicare il numero in ſe medeſimo; così 1. *è il quadrato di* 1. 4. *è il quadrato di* 2. 9 *è il quadrato di* 3. *&c. ſiccome ſi vede nella liſta ſeguente.*

Numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
Quadrati 1. 4. 9. 16. 25, 36. 49. 64. 81.

II. *Si forma il triangolo rettangolo in numeri nella maniera ſeguente: Prendanſi due numeri ad arbitrio, come* 3. *e* 4, *li quali noi chameremo* generatori, *e ſtabiliſcaſi per ipotenuſa la ſomma de' quadrati dè detti numeri generatori* 3, *e* 4; *la qual ſomma è* 25; *ſtabiliſcaſi per uno de' lati la differenza de' detti quadrati, la quale è* 7; *e finalmente ſi ſtabiliſca per l'altro lato il doppio del prodotto, che naſce dalla moltiplicazione de generatori* 3, *e* 4, *il qual doppio è* 24. *Quindi il triangolo rettangolo avrà* 7 *per un lato,* 24 *per l'altro lato, e* 25. *per ipotenuſa. Ora il quadrato di* 25 *è* 625, *e li quadrati* 7, *e* 24 *ſono reſpettivamente* 49, *e* 567, *la ſomma de' quali è* 625.

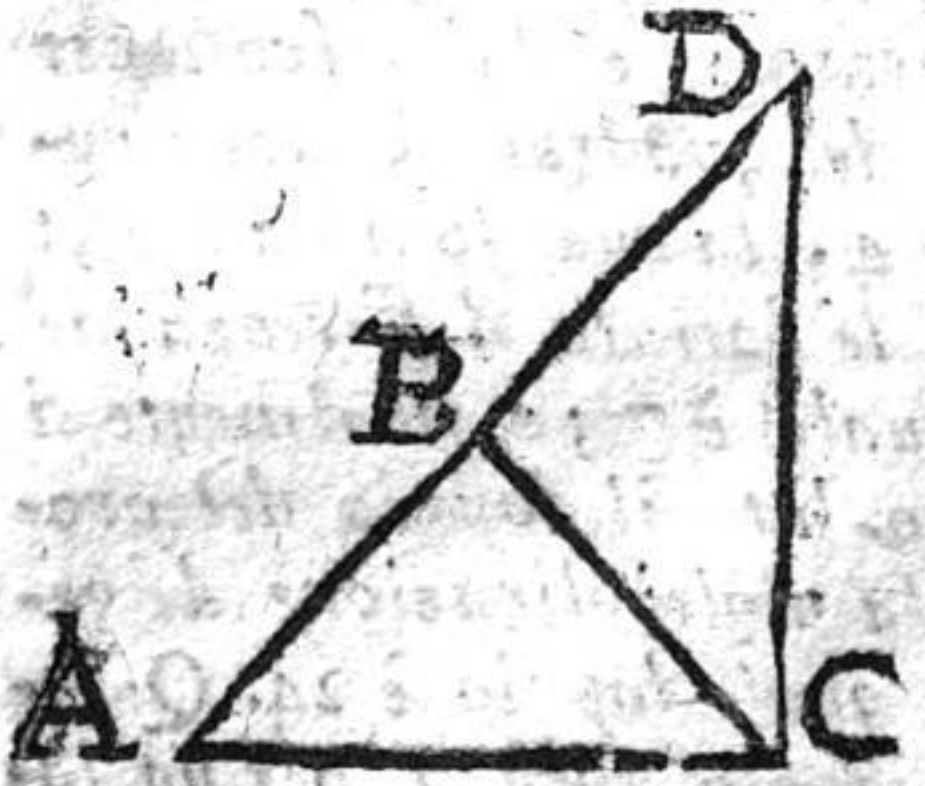
Se li generatori ſono 1, *e* 2 *ſi vedrà naſcere il famoſo triangolo rettangolo* 3, 4, *e* 5, *nel quale* 25, *il quale è il quadrato dell'ipotenuſa* 5 *è eguale a* 9, *e* 16 *uniti inſieme, che ſono i quadrati de' lati* 3 *e* 4.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XLVIII. TEOREMA.

Se il quadrato costituito sopra un lato d'un triango o sia eguale a' quadrati costituiti sopra gli altri due lati, l'angolo contenuto da questi due lati sarà retto.



I.

Nel triangolo ABC sia il quadrato costituito sopra il lato AC eguale a' due quadrati costituiti sopra li due lati AB, BC; io dico, che l'angolo ABC contenuto sotto i due sudetti lati sia retto.

II.

S'innalzi (1) *dal punto B la retta BD perpendicolare sopra la BC.*

Si tagli la BD (2) *eguale alla AB.*

Si unisca (3) *la DC.*

III.

Siccome la AB è eguale dalla costruzione alla BD, così sarà (4) il quadrato costituito sopra la AB eguale al quadrato costituito sopra la BD: aggiugnendo dunque comunemente l'istesso quadrato costituito sopra la BC;

---

(1) *Prop.* 11. (2) *Prop.* 3.
(3) *Dim.* 1. (4) *Corol.* 2. *della prop.* 46.

Digitalizzato da Google

BC; saranno i due quadrati costituiti sopra i lati AB, BC eguale a' due quadrati costituiti sopra i lati DB, BC; sicchè, essendo dalla supposizione il quadrato costituito sopra la AC eguale a' due quadrati costituiti sopra i due lati AB, BC; ed essendo similmente per ragione nell' angolo retto CBD il quadrato costituito sopra l' ipotenusa CD eguale (1) a' due quadrati costituiti sopra li lati DB, BC; sarà il quadrato costituito sopra il lato AC eguale al quadrato costituito sopra il lato CD; laonde la retta AC sarà (2) eguale alla retta CD. Quindi li due angoli ABC, DBC avendo li due lati AB BC eguali a' due lati DB, BC, ciascuno a ciascuno, e la base AC eguale alla base CD; sarà l' angolo (3) ABC eguale all' angolo DBC; ma l' angolo DBC è retto dalla costruzione; dunque l' angolo ABC sarà parimente retto; ciocchè doveva dimostrarsi.

Questa proposizione è converſa dall' antecedente.

LI.

(1) *Prop. ant.*

(2) *Corol. 3. della propol. 26.*

Digitalizzato da Google

LIBRO SECONDO.

DEFINIZIONI.

I.

OGni parallelogrammo rettangolo si deve intendere formato da' due lati, i quali comprendono l'angolo dato: de quali lati uno dicesi lunghezza, e l'altro dicesi larghezza.

SPIEGAZIONE.

Se due parallelogrammi rettangoli sono dell' istessa lunghezza, ma uno sia più largo dell' altro, non è da mettersi in dubbio, che il più largo contenga maggior superficie del meno largo; di modocchè per sapere le grandezze respettive di due parallelogrammi egualmente lunghi, fa duopo aver riguardo alle loro larghezze. Viceversa, se due parallelogrammi rettangoli sono egualmente larghi, ma uno sia più lungo dell' altro, il più lungo conterrà più superficie del più corto, e tanto maggior superficie conterrà, quanto egli è più lungo; di modochè per sapere le grandezze rispettive di due parallelogrammi rettangoli egualmente larghi, fa duopo aver riguardo alle loro larghezze. Quindi, essendo diseguali così le lunghezze, come le larghezze di due parallelogrammi rettangoli, le loro grandezze rispettive dipenderanno congiuntamente, e dalle lunghezze e dalle larghezze:

di

di modochè incomincia a capirsi ciocchè ha voluto intendere Euclide *con queste definizione*. Ogni parallelogrammo rettangolo si deve intendere formato da' due lati, li quali comprendono l' angolo retto. *Ma perchè meglio s' intenda il senso di questa definizione, dalla quale dipende l' intelligenza di tutto il libro II. fingiamo, che dovessi far capire ad altrui la vera grandezza d' un parallelogrammo rettangolo, per esempio del piano d' una galleria. Se io gli dico; il piano della galleria, di cui vi ragiono è lungo 30. palmi senza aggiunger altro; ciò non basta, perchè egli ne arrivi ad immaginare la vera grandezza: perchè gli è ingnota la larghezza del piano della galleria. L' istesso saria, se io gli dicessi la larghezza solamente del suddetto piano, o gli tacessi la lunghezza: ma dicendogli, che il piano della galleria ha 30. palmi di lunghezza, e 20. di larghezza, allora egli ne potrà formare giustissima idea, e potrà descriverlo ancora sopra una carta, non essendogli ignoti gli elementi, da' quali dipende la misura del piano: imperciocchè non avrà da fare altro, che tirare sopra la carta due linee, le quali comprendono un angolo retto, l' una delle quali sia di 30. palmi, e l' altra di 20., e far passare per li termini di coteste linee due parallele; mentre il parallelogrammo rettangolo, che quindi risulta rappresenterìa il piano della galleria.*

Quando dunque noi diremo per innanzi, che un parallelogramo rettangolo, ovvero semplicemente

Digitalizzato da Google

te un rettangolo *ſia formato da tali due li-*
nee, *non vorremo dire altro, ſe non una di queſte due linee ne rappreſenti la lunghezza, e l'altra la larghezza: ma trattandoſi de' quadrati, non è neceſſario il dire, che eſſi ſieno formati da due linee: ma baſterà, che ſi nomini una linea ſola: perchè ne' quadrati la lunghezza è eguale alla larghezza; onde, chi ne ſa la lunghezza, egli nell' iſteſſo tempo non può ignorarne la larghezza. D fatto Euclide ha inſegnato nel primo libro* (1) *il modo di deſcrivere un quadrato ſopra una linea data. Sicchè trattandoſi de' quadrati noi diremo, che eſſi ſieno formati da una linea ſola, la quale fa le veci, così di lunghezza, come di larghezza.*

Si vuol quì avvertire, che le lunghezze ſi miſurano per via di palmi lineari, e le ſuperficie per via di palmi quadrati: quindi, dicendoſi, che una torre ſia alta 100. palmi, ſi vuol ciò intendere di palmi lineari: ma dicendoſi, che il piano d' una ſtanza ſia di 900. palmi, ſi vorrà queſto intendere di palmi quadrati: vale a dire, che il piano della ſuddetta ſtanza poſſa rimanere compartito in 900. palmi quadrati.

Se un rettangolo ſia lungo 6. palmi, e largo 2., riſolvendo, così la lunghezza, come la larghezza del rettangolo ne' ſuoi palmi componenti e tirando tante linee parallele, egli è chiaro, che il rettangolo viene a contenere 18. palmi qua-

(1) *Prop. 46.*

Digitalizzato da Google

quadrati: quindi si avrà il numero di palmi quadrati contenuti nel suddetto rettangolo col moltiplicare il numero de' palmi lineari contenuti nella di lui lunghezza per lo numero di palmi contenuti nella sua larghezza, vale a dire moltiplicando il 6 per lo 3. Similmente, se un rettangolo sia lungo 10. palmi, e largo 8., egli conterrà 80. palmi quadrati, perchè moltiplicando il 10. per 8. ne nasce il numero 80. Quindi, siccome nel quadrato la lunghezza è eguale alla larghezza, così per avere i palmi quadrati della sua superficie, basterà moltiplicare in se medesimo il numero di palmi lineari, che si comprendano nella sua lunghezza: come se un quadrato sia 6. palmi lungo, egli comprenderà 36. palmi quadrati; e se sia lungo 8. palmi, egli comprenderà 64. palmi, quadrati.

A C B

Se la linea AB è divisa nel punto C, il rettangolo, che ha la AB per lunghezza, e la BC per larghezza si suol segnare, o AB, BC, ovvero ABC. Similmente il rettangolo, che ha AB per lunghezza, ed AC per larghezza si segna, o AB AC, ovvero più elegantemente BAC, ma dovendosi segnare il quadrato di AB; si farà così AB 2; e parimente AC 2 disegnerà il quadrato formato sopra la AC.

II.

Se a' due supplementi d'un parallelogrammo s'aggiunge uno di quei, che sono intorno il diametro, la figura, che quindi risulta dicesi gnomone.

Digitalizzato da Google

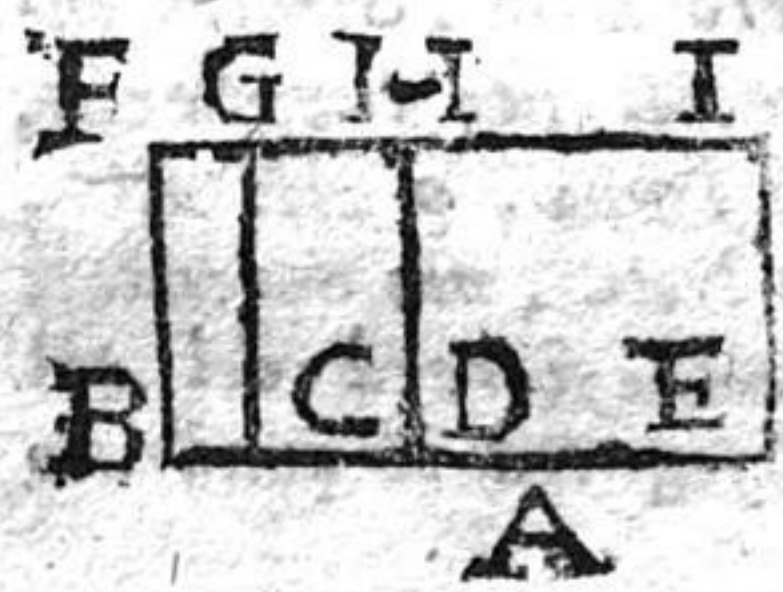
COROLLARIO.

Quindi aggiugnendo al gnomone l' altro parallelogrammo, che stà intorno il diametro, si viene a comporre l' intero parallelogrammo. Viceversa togliendo da tutto il parallelogrammo uno di quei, che sono intorno il diametro, sopravanza il gnomone.

PROP. I. TEOREMA.

Se vi sono due linee dirittе, l' una delle quali sia divisa in molte parti, e l' altra sia indivisa; sarà il rettangolo formato dalle due suddette linee eguali a tutti i rettangoli formati dalle parti della linea divisa, e dalla linea indivisa.

I.



Siano le due linee rette A, e BE, delle quali la seconda BE sia divisa in tre parti BC, CD, DE. Io dico, che il rettangolo formato dalle due linee A, e BE sia eguale a tre rettangoli, il primo formato da A, e BC; il secondo da A, e CD; ed il terzo da A, e DE.

II.

Digitalizzato da Google

II.

S' innalzi (1) *dal punto* B *ſopra la* BE *la perpendicolare* BF, *la quale ſi faccia eguale* (2) *alla data* A.

Per lo punto F *ſi tiri* (3) *la* FI *parallela alla* BE; *e per li punti* C, D, E *ſi tirino le linee rette* CG, DH, EI, *parallele alla* BF.

III.

Perchè dalla coſtruzione le tre figure BG, CH, DI ſono altretanti parallelogrammi rettangoli; ſaranno le tre linee rette BF, CG, BH eguali fra di loro (4). Quindi eſſendo dalla coſtruzione la BF eguale alla A, ſaranno ancora le altre due CG, DH eguali (5) ad A: il perchè il primo rettangolo BG, il quale è formato (6) da' lati BF, BC, ſarà ancora formato da lati A, e BC; e ſimilmente il ſecondo rettangolo CH ſarà formato da' lati A, e CD; ed il terzo rettangolo DI ſarà formato da' lati A, e DE, e finalmente tutto il rettangolo BI ſarà formato da' lati A, e BE; quindi eſſendo il rettangolo BI eguale (7) a' tre ſuddetti ret-

(1) *Pr.* 11. *I.* (2) *Prop.* 3. *I.*
(3) *Prop.* 31. *I.* (4) *Prop.* 34. *I.*
(5) *Aſſio.* 1. (6) *Def.* 1. *di queſto.*
(7) *Aſſio.* 9.

Digitalizzato da Google

tangoli, sarà il rettangolo formato da A, e BE eguale a tre rettangoli formati da A, e BC, da A, e CD, e da A, e DE. Ciocchè doveva dimostrarsi.

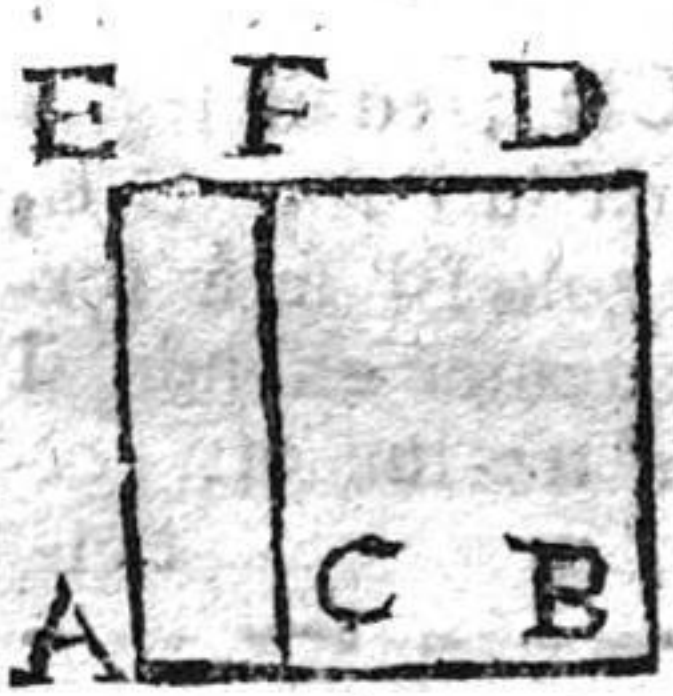
Le prime dieci proposizioni di questo libro, perchè si possono dimostrare per via di numeri: noi non trascuramo di farlo.

Sia A 10

BE 20	*A. BE* 200	*A. BC* ... 40
BC 4	*A. CD* 60	
CD 6	*A. DE*.....100	
DE 10	.....	
	208	

PROP. II. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; il quadrato formato da tutta la linea sarà eguale a due rettangoli formati da tutta la medesima linea, e dalle parti di essa.



I. Sia la linea AB divisa ad arbitrio nel punto C: io dico, che il quadrato formato da tutta la linea AB è eguale a due rettangoli, il primo de' quali è formato dall' istessa AB, e dalla parte AC: l' altro è formato parimente da AB, e dall' altra parte BC.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Si formi (1) *ſopra la retta AB il quadrato AD.*

Per lo punto C ſi tiri (2) *la retta CF parallela alle due AE, BD. in tal modo il quadrato BD rimane comparito ne' due rettangoli AF, CD.*

III.

Perchè il rettangolo AF è formato (3) da' lati AE, AC: eſſendo dalla coſtruzione AE eguale ad AB: il detto rettangolo ſarà parimente formato dalle due AB, AC. Similmente perchè l'altro rettangolo CD è formato (4) da' due lati FC, CB: eſſendo FC a cagione del parallelogrammo AF eguale (5) ad AE, ovvero ad AB; ſarà il detto rettangolo CD formato dalle due AB, BC. Quindi, perchè li due rettangoli AF, CD uniti inſieme compongono tutto il quadrato AD, il quale è formato da tutta la linea AB. ſarà il quadrato della ſuddetta linea AB eguale a due rettangoli, il primo formato da AB, e da AC, l'altro formato dall' iſteſſa AB, e da BC; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione co' numeri.

Sia AB ..... 10 *AB* 2 .... 100 *AB. AC* ... 30
AC ..... 3 *AB. BC* ... 70
CB ..... 7 ... ..
100

(1) *Prop.* 46. 1. (2) *Prop.* 31. I.
(3) *Def.* 1. *di queſto.* (4) *Def.* 1. *di queſto.*
(5) *Prop.* 34. I.

Digitalizzato da Google

PROP. III. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il rettangolo formato da tutta la linea divisa, e da una delle sue parti eguale al quadrato della medesima parte, insieme col rettangolo formato dalle due suddette parti.



I.

Sia la linea retta AB tagliata in qualunque modo nel punto C; io dico, che il rettangolo formato da tutta la linea AB, e dalla parte AC, sia eguale al quadrato della medesima parte BC, insieme col rettangolo formato dalle parti AC, CB.

II.

Si costituisca (1) *sopra la CB il quadrato CF.*

Si tiri per lo punto A la retta (2) *AE, Parallela alle due CD, BF.*

Si distenda (3) *FD fino al punto E.*

III.

Perchè il rettangolo AD è formato (4) da due lati AC, CD, che comprendono l'angolo retto ACD; essendo per ragione del quadrato CF il lato DC eguale al lato BC; sarà il detto rettangolo AD formato da AC, e CB,

(1) *Pr.* 46. I. (2) *Pr.* 31. I.
(3) *Dim.* 2. (4) *Def.* 1. *di questo.*

Digitalizzato da Google

e CB. In oltre essendo il rettangolo AF formato (1) da' due lati AB, BF, che sono intorno l'angolo retto ABF; siccome il lato BF per ragione del quadrato CF è eguale al lato BC; così sarà il detto rettangolo AF formato da AB, e BC. Quindi essendo il rettangolo AF eguale al quadrato CF, il quale è formato da CB, e dal rettangolo A): sarà il rettangolo formato da AB, e da BC eguale al quadrato formato da BC insieme col rettangolo formato dalle due AC, CB: ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB .... 10 AB. BC .... 60 CB2. ...36
BE .... 4 AC. CB 24
CB .... 6 ....
60

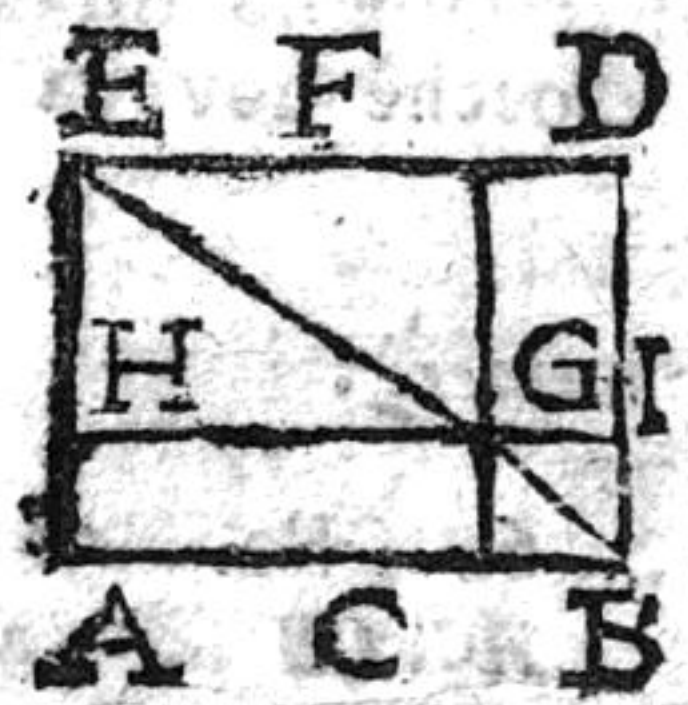
(1) *Def. 1. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. IV. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il quadrato formato da tutta la linea eguale a due quadrati formati dalle parti della medesima linea, insieme con altrettanti rettangoli formati dalle medesime due parti.

I.



Sia la linea retta AB fecata ad arbitrio nel punto C; io dico, che il quadrato di tutta la linea AB sia eguale a' due quadrati formati dalle parti AC, e CB, insieme co' due rettangoli entrambi formati dalle medesime parti AC, e CB.

II.

Formisi (1) *sopra la AB il quadrato ABDE.*

Congiungasi (2) *la diagonale BE.*

Si tiri per lo punto C (3) *la retta CGF parallela alle due AE, BD.*

Finalmente per lo punto G si faccia passare (4) *la retta HGI parallela agli altri due lati AB, ED del quadrato AD: in tal modo, tutto il quadrato rimane compartito in due supplementi, ed in due parallelogrammi intorno il diametro.*

III.

---

(1) *Prop.* 46. I. (2) *Dim.* I.
(3) *Prop.* 31. I. (4) *Prop.* 31. I.

Digitalizzato da Google

III.

Perchè le due linee AB, AE ſono lati del quadrato AD, ſaranno eſſe eguali fra di loro: quindi il rettangolo AB ſarà iſoſcele; e l'angolo ABE dovrà eſſere eguale (1) all' angolo AEB. Ma a cagione delle due linee paralelle AB, HI ſecate dalla terza EGB, l'angolo eſteriore HGE è eguale (2) all' angolo interiore oppoſto ABE; dunque ſarà parimente il medeſimo angolo HGE eguale (3) all' angolo HEG: il perchè li due lati HE, HG ſottopoſti a queſti due angoli eguali, ſaranno (4) parimente eguali: ma a cagione del parallelogrammo HF, i due lati HE, HG ſono (5) reſpettivamente eguali a' due lati oppoſti FG, FE; dunque tutt' i quattro lati EH, HG, FG, FE del paralelogrammo ſuddetto ſono eguali; ma tutti li quattro angoli ſono retti (6), perchè uno di eſſi HEF è retto; dunque il detto parallelogrammo HF ſarà un quadrato, il quale è formato dal lato HG, ovvero dal lato AC, che è eguale da HG (7).

Similmente a cagione delle due parallele, CF, AE ſecate dalla terza BGE, l'angolo eſteriore CGB è eguale (8) all' angolo interiore oppoſto AEB; quindi eſſendoſi dimoſtrato l'angolo AEB eguale all' angolo ABE

(1) *Prop.* 3. *I.* (2) *Prop.* 29 *I.*
(3) *Aſſio.* 1. (4) *Prop.* 6. *I.*
(5) *Prop.* 33 *I.* (6) *Coroll.* 1. *della Pr.* 46
(7) *Prop.* 34. *I.* (8) *Prop.* 29. *I.*

Digitalizzato da Google

faranno gli angoli CGB, CBG eguali fra di loro, e perciò i due lati CB, CG ſottopoſti a queſti angoli (1) ſaranno eguali. Dimodochè, eſſendo a cagione del parallelogrammo CI, i due lati CB, CG eguali riſpettivamente a' due lati oppoſti (2) IB, IG; ſaranno tutti quattro i lati CG, CB, IG, IB del ſuddetto parallelogrammo eguali fra di loro; ma tutti quattro i ſuoi angoli (3) ſono retti; perchè l'angolo CBI è retto; dunque il medeſimo parallelogrammo CI ſarà un quadrato, il quale è formato da CB: quindi, ſicome il rettangolo AG è formato (4) da' due lati AC, CG, i quali ſono intorno all'angolo retto AC, CG, così il detto rettangolo AG ſarà formato parimente da' due lati AC, CB, eſſendo CG eguale a CB: di modochè eſſendo il rettangolo AG, ſaranno tutti due inſieme eguali a due rettangoli formati entrambi da AC, e CB. Sicchè, poichè tutto il quadrato AI) è eguale a' due quadrati HF, CI, ed a' due rettangoli AG, GD: ſarà il quadrato formato da tutta la linea AB eguale a' due quadrati formati dalle parti di eſſa AC, CB inſieme con i due rettangoli formati dalle medeſime parti AC, CB: ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Di-

(1) *Prop.* 6. I. (2) *Prop.* 34. I.
(3) *Prop.* 42. (4) *Def.* 1. *di queſto.*
(5) *Prop.* 21. I.

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

Sa AB .... 10 AB2 .... 100 AC 2 36
AC ..... 6 CB 2 16
CB ..... 4 2 AC. CB 48
.....
100

COROLLARJ.

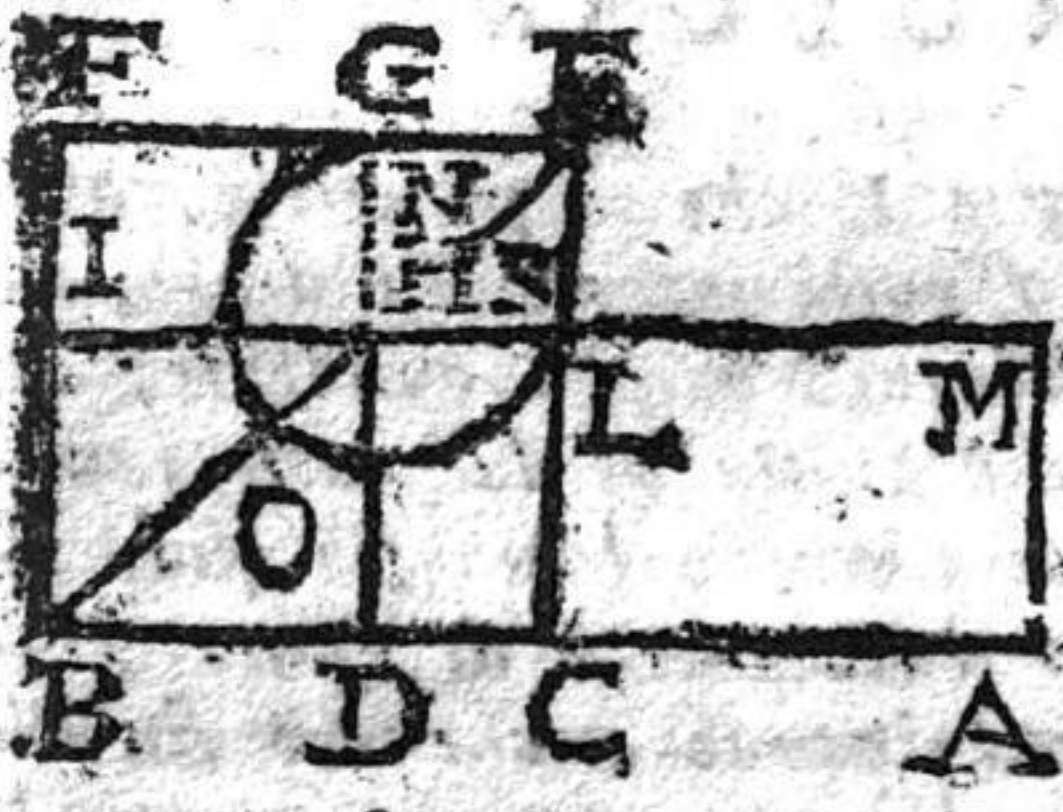
Quindi ne siegue I. che i parallelogrammi, i quali sono posti intorno la diagonale del quadrato, sono essi ancora quadrati. II. Che se una linea è secata in due parti eguali, il quadrato di tutta la linea sia quadruplo del quadrato della metà di essa. Imperciocchè, immaginando, che AB sia divisa in parti eguali nel punto C, tanto li due parallelogrammi HF, CI, che sono posti intorno la diagonale del quadrato, quanto li due supplementi AG, CD sono quadrati, e tutti riescono eguali fra di loro, di modochè tutti quattro insieme, li quali ricompongono il quadrato formato dalla AB sono quadrupli di ciascuno di essi. Così in numeri il quadrato di 8, che è 64 è quadruplo di 16, che è il quadrato di 4 metà del numero 8.

Digitalizzato da Google

PROP. V. TEOREMA.

Se una linea è diviſa. I. *in due parti eguali.* II. *in due parti diſeguali ad arbitrio: il rettangolo formato dalle parti diſeguali della linea inſieme col quadrato di quella parte della medeſima, che rimane interpoſta fra due ſegmenti ſarà eguale al quadrato della mettà della ſuddetta linea.*

I.



Sia la linea retta AB tagliata una volta in parti eguali nel punto C, ed un'altra volta in parti diſeguali nel punto D; io dico, che il rettangolo formato dalle parti diſeguali AD, DB inſieme col quadrato della linea DC interpoſta fra i due ſeguenti C, e D ſia eguale al quadrato formato dalla mettà CB.

II.

Si coſtituiſca (1) *ſopra la* BC *il quadrato* BCEF.

Si unisca la Diagonale BE (2).

Si tiri per lo punto D (3) *la retta* DHG *parallela a' due lati* BF, CE *del quadrato* CF.

Finalmente per li punti H, *ed* A *ſi tirino* (3) *le linee* IHM, AM *parallele reſpettive*

---

(1) *Prop.* 46. I. (2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 31. I. (4) *Aſſio.* 31. I.

Digitalizzato da Google

simente a due lati BC, CE del quadrato; di modochè si venga a formare la figura tale, quale si vede quì delineata. III.

Siccome dalla costruzione la figura BCEF è un quadrato, così saranno li due parallelogrammi DI, LG (1) altrettanti quadrati. Quindi, siccome il rettangolo DM è formato (2) dalle due linee AD, DH, così sarà parimente formato dalle due AD, BD. Ora si consideri, che essendo il supplemento HF eguale (3) al supplemento CH, sarà, aggiungendo ad entrambi l'istesso quadrato DI, il parallelogrammo DF eguale al parallelogrammo CI; ma questo parallelogrammo CI è eguale al parallelogrammo (4) CM, perchè sono costituiti sopra le basi eguali, BC, CA, e fra le medesime parallele IM, BA; dunque sarà ancora il parallelogrammo CM eguale al parallelogrammo DF; aggiugnendo di nuovo ad entrambi il medesimo pagallelogrammo CH: sarà il rettangolo DM, ovvero il rettangolo formato da AD, e da DB eguale al gnomone NOK. Finalmente, aggiungnendo, così al rettangolo, come al gnomone il quadrato HE, il quale è formato da HL; ovvero da DC, che è eguale (5) ad HL; sarà il rettangolo formato da AD, DB insieme col quadrato di DC eguale al gnomone NOK insieme col quadrato HE:

vale

---

(1) *Cor.* 1. *della pr.* 4. (2) *Def.* 1. *di questo.*
(3) *Prop.* 43. *I.* (4) *Prop.* 36. *I.*
(5) *Prop.* 34. *I.*

Digitalizzato da Google

vale a dire al quadrato CF, il quale è formato da BC; ciocchè doveva dimostrarsi.

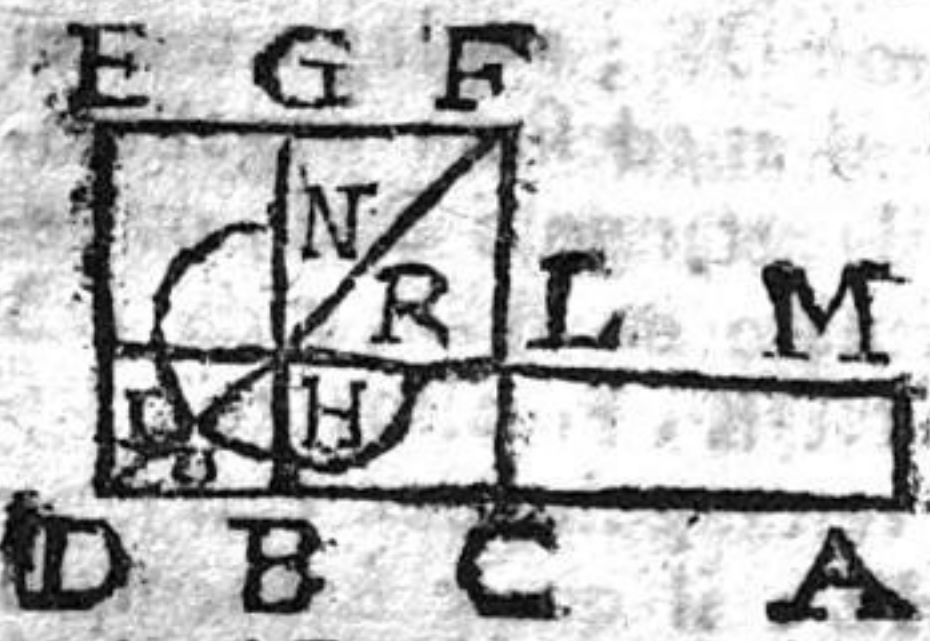
Dimostrazione co' numeri.

Sia *AB* ..... 10.

AC o CB ..... 5 *CB* 2 ... 25 *AD, DB* ... 21
BD ..... 3 *DC* 2 ... 4
DC ..... 2 .....
DA ..... 7 25.

PROP. VI. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti eguali: e le si aggiunga per diritto un altra linea retta ad arbitrio; farà il rettangolo formato dalla composta di tutta la linea, e dell' aggiunta, e dall' istessa aggiunta, insieme col quadrato della metà eguale al quadrato formato dalla composta della metà, e dell' aggiunta.



I.

Sia la linea retta AB secata in parti eguali nel punto C; e sia ad esso aggiunta per diritto la BD; io dico, che il rettangolo formato dalla AD composta da tutta AB, e dall' aggiunta BD, e dall' istessa aggiunta DB, insieme col quadrato della mettà BC sia eguale al quadrato della DC composta della mettà CB, e dall' aggiunta BD.

II.

Si costituisca (1) *sopra la DC il quadrato DCFE.*

Si

(1) *Prop. 46. l.*

Digitalizzato da Google

Si unisca (1) *la diagonale CF.*

Si tiri per lo punto B (2) *la retta BHG parallela a due lati DE, CF del quadrato CE.*

Per li punti H, ed A si tirino (3) *le rette IHM, AM parallele respettivamente a due lati DC, CF del quadrato CE.*

III.

Perchè dalla costruzione, e la figura DC-FE è un quadrato, saranno li due parallelogrammi BI, LG costituiti intorno alla diagonale del quadrato altretanti quadrati (4), quindi siccome il rettangolo AI è formato da due lati AD, DI, così sarà parimente formato (5) da due lati a AD, DB. Ora si consideri, che essendo i due parallelogrammi CH, AL eguali (6) fra di loro, perchè sono costituiti sopra le basi eguali BC, CA, e fra le medesime parallele BA, HM; ed essendo di più il parallelogrammo CH eguale (7) al parallelogrammo HE; sarà il parallelogrammo AL eguale al parallelogrammo HE: quindi aggiugnendo ad entrambi il medesimo parallelogrammo CI; sarà il rettangolo AI, vale a dire il rettangolo formato da AD, e da BD eguale al gnomone NOR: ed aggiugnendo in fine, così al rettangolo, come al gnomone il medesimo qua-

(1) *Dim.* 1. (2) *Prop.* 31. *I.*
(3) *Prop.* 31. *I.* (4) *Cor.* 1. *della pr.* 4.
(5) *Def.* 1. *di questo.* (6) *Prop.* 36. *I.*
(8) *Prop.* 43. *I.*

Digitalizzato da Google

qurdrato LG, il quale è formato da HL, ovvero da BC, ſarà il rettangolo formato da AD, e DB inſieme col quadrato di BC eguale al gnomone NOR inſieme col quadrato LG: vale a dire a tutto il quadrato CE, il quale è formato da DC; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione co' numeri.

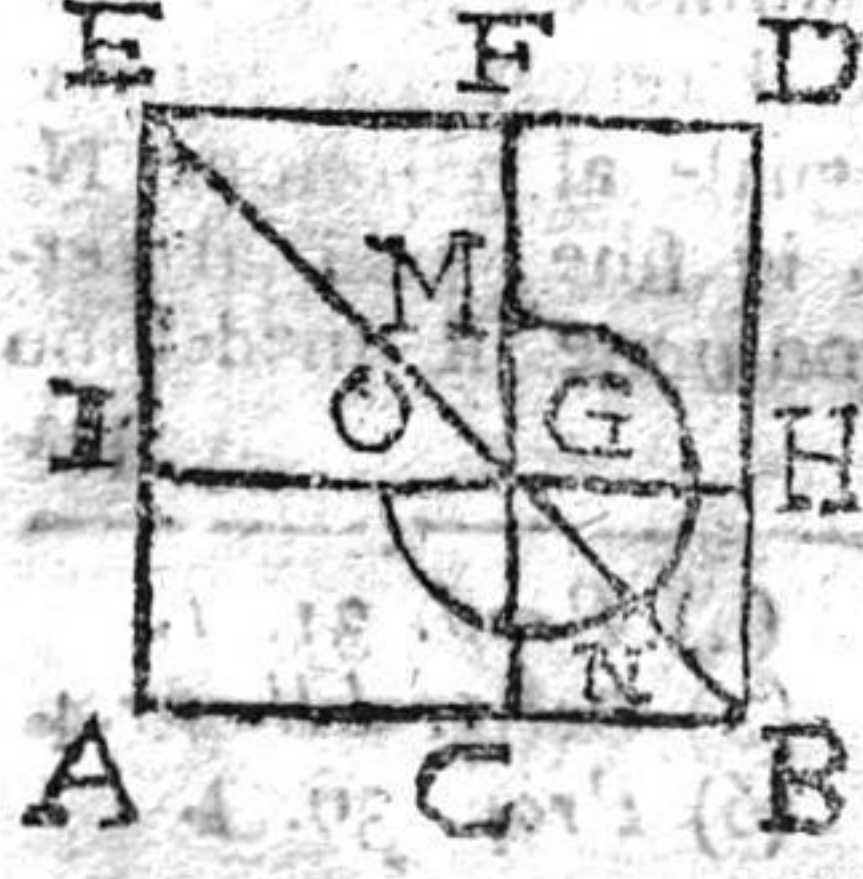
Sia AB....10

CB ....5 DC2 .... 49 AD; DB 24
BD ....2 BC2 ... 25
AD 12 .....
CD 7 49

PROP. VII. TEOREMA.

Se una linea retta è diviſa in due parti ad arbitrio: ſarà il quadrato di tutta la linea inſieme col quadrato di una delle ſue parti eguale a' due rettangoli, formati entrambi da tutta la linea, e dall' iſteſſa parte, inſieme col quadrato dell' altra parte.

I.



Sia la linea retta AB ſecata ad arbitrio nel punto C; io dico, che il quadrato di tutta la AB inſieme col quadrato della parte BC è eguale a' due rettangoli entrambi formati da tutta AB, e dalla parte BC inſieme col quadrato dell' altra parte AC.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Si costituisca (1) *sopra la AB il quadrato ABDE.*

Si unisca la diagonale BE (2).

Si tiri per lo punto C (3) *la retta CGF parallela a due lati AE, BD del quadrato ABDE.*

Per lo punto G si tiri (4) *la retta IGH parallela agli altri due lati AB, ED del quadrato ABDE.*

III.

Siccome li due supplementi CI, HF sono (5) eguali fra di loro, così aggiugnendo ad essi il medesimo parallelogrammo CH, sarà il rettangolo AH eguale al rettangolo CD; e tutti due insieme saranno doppj del rettangolo AH: ma tutti due insieme sono eguali al gnomone MNO, insieme col parallelogrammo CH, il quale è un quadrato (6) perchè sta intorno al diametro BE del quadrato AD; dunque il gnomone MNO insieme col quadrato CH sarà doppio del rettangolo AH; il perchè essendo questo rettangolo AH formato (7) da due lati AB, BH, ovvero da due lati AB, BC, perchè BC, e BH, sono eguali fra di loro: sarà il suddetto gnomone MNO insieme col quadrato CH eguale a due rettangoli entrambi formati da AB, e BC. Aggiungasi ad essi il medesimo quadrato IF, il quale è formato da IG, ovvero

---

(1) *Prop.* 43. *I.* (2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 31. *I.* (4) *Prop.* 31. I.
(5) *Prop.* 31. *I.* (6) *Cor.* 1. *della prop.* 5.
(7) *Def.* 1. *di questo.*

Digitalizzato da Google

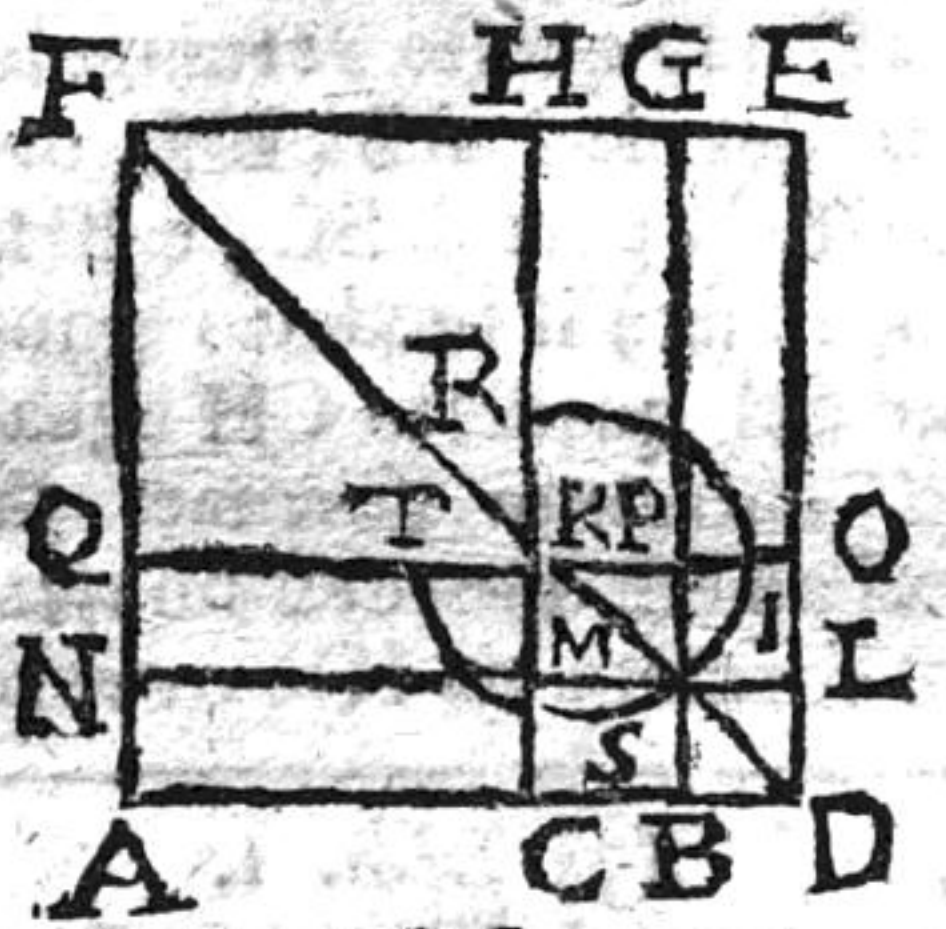
AC: sarà il gnomone MNO, insieme co' due quadrati CH, IF, vale a dire saranno i due quadrati AD, CH, i quali sono formati respettivamente da AB, e da BC eguali a due rettangoli formati da AB, e BC, intieme col quadrato di AC; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB	10	*AB2*	100	*2AB.CB*	80
AC	6	*CB2*	16	*AC2*	36
CB	4		116		116

PROP. VIII. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti ad arbitrio; sarà il quadrato formato dalla composta di tutta la retta, e di una delle sue parti, come se fosse una linea sola, eguale a quattro rettangoli formati da tutta la linea, e dalla medesima parte, insieme col quadrato dall' altra parte.



I.

Sia la retta AB divisa ad arbitrio nel punto C; la quale s'intenda distesa fin' al punto D, in modochè BD sia eguale a BC; io dico, che il quadrato formato dalla AD composta da tutta la AB, e dalla BC è eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC, **insieme col quadrato dell' altra parte AC.**

II.

Digitalizzato da Google

II.

Si costituisca (1) *sopra la AD il quadrato ADEF.*

Si unisca (2) *la diagonale FD.*

Per li punti B, e C si tirino (3) *le parallele BIG, CKH alle due DE, AF.*

Per li punti I, e K si facciano passare le parallele NIL, QKO, all' altre due AD, FE.

II.

Siccome dalla costruzione la figura ADEF è un quadrato, così (4) li parallelogrammi CIOK, CKHF situati intorno alla di lui diagonale saranno due quadrati. Di più, siccome la figura CO è un quadrato, ed il suo lato CD dalla costruzione è tagliato in parti eguali nel punto B; così saranno le quattro parti di esso (5) CI, BL, MO, IO quattro quadrati tutti eguali fra di loro, e tutto il quadrato CO sarà quadruplo del quadrato CL. Ora essendo CB eguale a BD, sarà ancora KP (6), a cagione de' due parallelogrammi CP, BO, eguali a PO; quindi li due parallelogrammi PH, OG costituiti sopra le basi KP, PO eguali, e fra le medesime parallele HB, KO saranno (7) eguali fra di loro. Di più essendo eguali li due quadrati CI, MP, sarà il lato CM (8) eguale al lato MK; e perciò li due parallelogram-

(1) *Prop.* 46. I. (2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 31. I. (4) *Cor. della pr.* 4.
(5) *Cor.* 2. *della pr.* 4. (6) *Prop.* 34. I.
(7) *Prop.* 36. I. (8) *Cor.* 3. *della pr.* 46. I.

Digitalizzato da Google

grammi CN, MQ costituiti sopra le basi eguali CM, MK, e fra le medesime parallele AQ, CK saranno eguali (1): quindi, essendo eguali li due parallelogrammi PH, MQ, perchè (2) sono supplementi del parallelogrammo NIGF: saranno tutti quattro OG, PH, MQ, CN eguali fra di loro, e tutti insieme saranno quadrupli del parallelogrammo CMNA; ma si è dimostrato, che il quadrato CO sia quedruplo del quadrato CI; dunque li quattro suddetti parallelogrammi insieme col quadrato CO, vale a dire il gnomone TIR sarà quadruplo del rettangolo BN, quale rettangolo essendo formato (3) da AB, e BI, ovvero da AB, e BC, ne siegoe, che il gnomone TIR sia eguale, a quattro rettangoli formati da AB, e BC: aggiugnendo dunque ad entrambi il medesimo quadrato QH, il quale è formato da QK, ovvero da AC; sarà il gnomone TIR insieme col quadrato QH, ovvero tutto il quadrato AE, il quale è formato da AD, vale a dire dalla composta di AB, e BC eguale a quattro rettangoli formati da AB, e BC insieme col quadrato di AC; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Sia AB ..... 8 *AD2 100 ... 2AB BC 64*
AC ..... 6 *AC2 .... 36*
CB, o DB 2
AD ... 10 100.

PROP

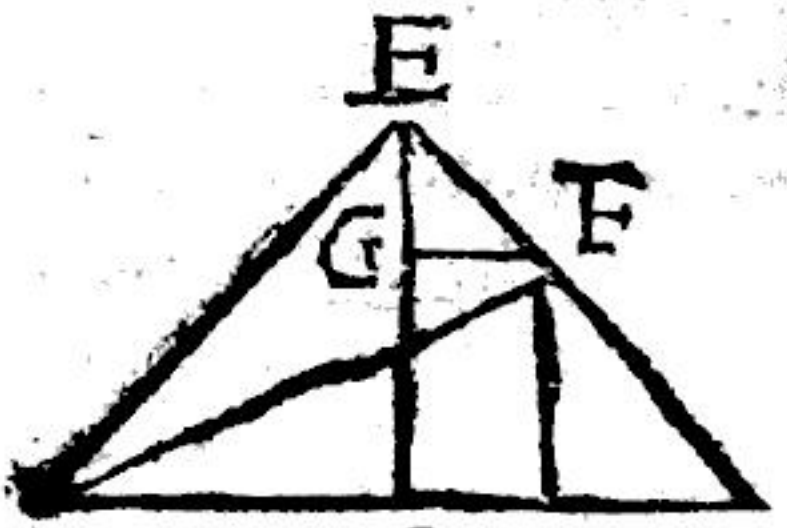
(1) *Pr.36.I.* (2) *Pr.43.I.* (3) *Def.1.di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. IX. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in parti eguali, ed in parti diseguali; saranno i due quadrati formati dalle parti diseguali doppj de' due quadrati formati, l'uno dalla metà, e l'altro da quella parte della linea, che rimane interposta fra due segamenti.

I.



Sia la linea retta AB, secata in due parti eguali nel punto C, ed in due parti diseguali nel punto D; io dico, che li due quadrati formati dalle parti diseguali AD, DB sono doppj di due quadrati, l'uno formato dalla metà AC, l'altro dalla parte CD, che rimane interposta fra due segamenti.

II.

S'inalzi (1) *dal punto C sopra la AB la perpendicolare CE, e facciasi* (2) *eguale ad AC, e per conseguente a CB.*

Si uniscano (3) *le due EA, EB.*

Dal punto D s'innalzi (4) *la perpendicolare DF sopra la medesima AB.*

Dal punto F si faccia cadere (5) *sopra la EC la perpendicolare FG.*

Si unisca la FA.

III.

(1) *Prop.* 11. *I.*
(2) *Prop.* 3. *I.*
(3) *Dim.* 1.
(4) *Prop.* 11. *I.*
(5) *Prop.* 12. *I.*

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione la EC è eguale, così alla AC, come alla CB, saranno perciò isosceli li due triangoli CEA, CEB, e gli angoli sopra le basi AE, EB saranno (1) eguali fra di loro; quindi avendo ogni triangolo i suoi tre angoli eguali (2) a due retti, e di più essendo dalla costruzione ciascuno de' due suddetti triangoli rettangoli, saranno li quattro angoli CEA, CAE, CBE, CEB eguali alla mettà d'un retto: laonde tutto l'angolo AEB sarà retto, ed il triangolo AEF sarà rettangolo in E. Inoltre nel triangolo EGF essendosi dimostrato l'angolo GEF eguale alla mettà d'un retto, e l'angolo EGF essendo dalla costruzione retto, sarà l'angolo rimanente (3) GFE eguale parimente alla mettà d'un retto, e perciò, siccome gli angoli GEF, GFE sono eguali fra di loro, così saranno (4) parimente eguali i due lati GE, GF. Similmente nel triangolo FDB, essendo stato l'angolo DBF mostrato eguale alla mettà d'un retto, e l'angolo FDB dalla costruzione essendo retto; sarà il rimanente angolo DFB eguale (5) alla mettà di un retto; quindi l'egualità degli angoli DBF, DFB richiede, che i lati (6) DF, DB siano eguali fra di loro: di modochè fin' ad ora rimangono dimostrate tre cose.

I. Che

(1) *Pr.* 5. *I.* (2) *Pr.* 32. *I.*
(3) *Pr.* 32. *I.* (4) *Pr.* 6. *I.*
(5) *Pr.* 32. *I.* (6) *Pr.* 6. *I.*

Digitalizzato da Google

I. Che il triangolo AEF ſia rettangolo nel punto E.

II. Che EG ſia eguale a GF.

III. Che DF ſia eguale a DB.

Tali coſe così premeſſe: poichè dalla coſtruzione CE è eguale a CA (1): ſarà il quadrato di CE eguale al quadrato di CA, e tutti due inſieme, li quali, a cagione dell'angolo retto in C ſono eguali (2) al quadrato dell'ipotenuſa AE, ſaranno doppj del quadrato di AC. Similmente, poichè EG è eguale a GF, ſarà il quadrato di EG eguale al quadrato di GF, e tutti due inſieme, le quali ſono eguali (3) al ſolo quadrato di EF ſaranno doppj del quadrato di GF, ovvero del quadrato di CI; quindi i due quadrati di AE, e di EF inſieme ſaranno doppj de' due quadrati di AC, e di CD; ma per ragione dell'angolo retto AEF, il quadrato dell'ipotenuſa AF (4) è eguale a' quadrati di AE, e di EF: dunque ſarà parimente il quadrato di AF doppio de' quadrati di AC, e di CD il perchè eſſendo, a cagione dell'angolo retto: ADE, il quadrato dell'ipotenuſa AF eguale (5) a' due quadrati di AD, e di DF, ovvero di AD, e DB: perchè DB è eguale a DF: ſaranno i quadrati di AD, e di BD doppj de' quadrati di AC e di CD; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Di-

---

(1) *Cor. 2. della pr. 46.*
(2) *Pr 47. I.*
(3) *Pr. 47. I.*
(4) *Pr. 47. I.*
(5) *Pr. 47. I.*

Digitalizzato da Google

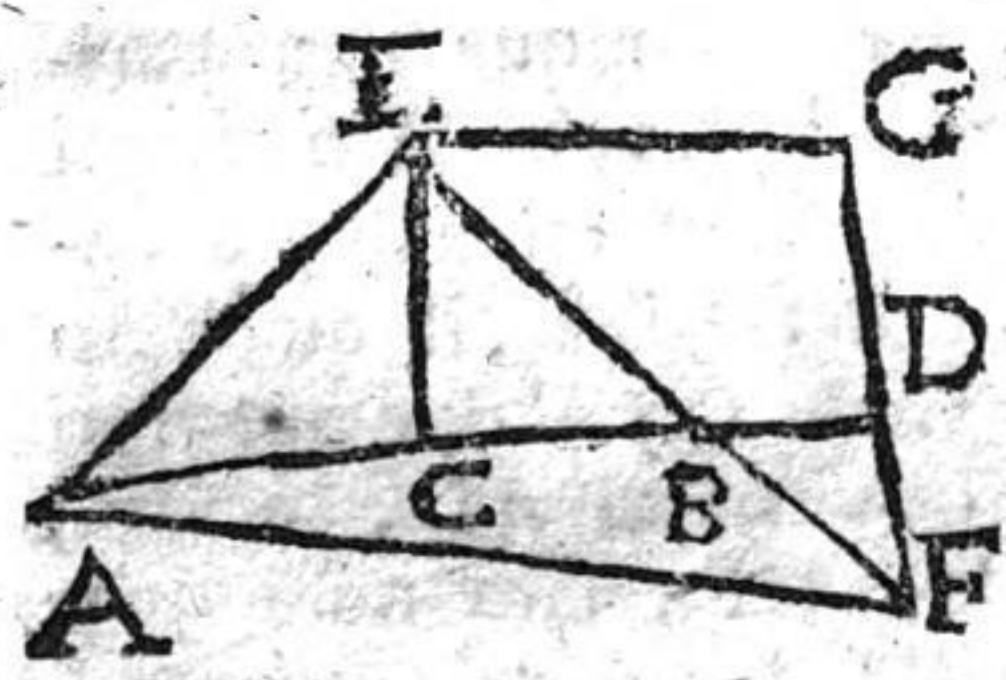
Dimostrazione co' numeri.

Sia AB 10

AD 5	*AD2* 49	*AC2* 25
CD 2	*DB* 9	*CD* 4
AD 7	.....	.....
DB 3	58	29
		29
		.....
		58

PROP. X. TEOREMA.

Se una linea retta è divisa in due parti eguali; e le sia aggiunta per diritto un' altra linea retta ad arbitrio; il quadrato formato dalla composta di tutta la linea, e dall' aggiunta, insieme col quadrato dell' aggiunta saranno doppj de' quadrati formati dalla metà, e dalla composta della metà, e dall' aggiunta.



I.

Sia la retta AB secata in parti eguali nel punto C, e sia ad essa aggiunta per diritto la BD; io *dico*, che il quadrato formato da AD composto da tutta la AB, e dall' aggiunta BD insieme col quadrato *dell'* aggiunta DB sono doppj del quadrato della mettà AC, e del quadrato di CD, composto dalla mettà CB, e dall' aggiunta BD.

II.

Digitalizzato da Google

II.

S'innalzi (1) *la perpendicolare CE sopra la AB e si faccia eguale* (2) *a CA, e per co seguente a CB.*

Si uniscano (3) *le due EA, e EB.*

Dal punto D s'innalzi (4) *sopra AD la perpendicolare DG, la quale distesa vada ad unire nel punto F colla EB distesa parimente verso F.*

Dal punto E si faccia cadere sopra la GF la perpendicolare (5) *EG.*

Si unisca la AF (6)

III.

Siccome dalla costruzione la EC è eguale, così alla AC, come alla BC, così i due triangoli CAE, CBE, saranno isosceli, e gli angoli sopra le basi AE, EB saranno (7) eguali. Quindi avendo ogni triangolo i loi tre angoli a due retti (8), e dipendo per costruzione ciascuno de due suddetti triangoli rettangolo, saranno i quattro angoli CAE, CEA, CEB, CBE eguali alla metà d'un angolo retto; laonde tutto l'angolo AEC sarà retto, ed il triangolo AEF sarà rettangolo in E. Inoltre nel triangolo BDF essendo per costruzione retto l'angolo BDF, e mezzo retto l'angolo DBF, per essere eguale (9) all'angolo CBE opposto al vertice,

F sarà

(1) *Prop.* 11. *I.* (2) *Prop.* 3. *I.*
(3) *Dim.* 1. (4) *Prop.* 11. *I.*
(5) *Prop.* 12. *I.* (6) *Dim.* 1.
(7) *Prop.* 5. *I.* (8) *Prop.* 23. *I.*
(9) *Prop.* 15. *I.*

Digitalizzato da Google

farà l'angolo rimanente (1) FB eguale alla mettà d'un retto; quindi l'eguaglianza degli angoli DBF, DFB richiede, che li due lati (2) DB, DF siano eguali. Similmente nel triangolo EGF essendo stato dimostrato, che l'angolo GFE sia eguale alla mettà d'un retto, ed essendo per costruzione l'angolo EGE retto, farà il rimanente angolo GEF eguale alla mettà d'un retto; quindi l'egualtà degli angoli GFE, GEF richiede, che li due lati GF, GE siano (3) eguali fra di loro.

Tali cose così premesse, poichè dalla costruzione CE è eguale a CA, sarà il quadrato di CE eguale al quadrato di CA, e tutti due insieme saranno doppj del quadrato CA; ma tutti due insieme sono eguali (4) al quadrato dell'ipotenusa AE; dunque il quadrato di AE sarà doppio del quadrato di AC: e perchè nell'istessa maniera si farà vedere, che il quadrato di EF sia doppio del quadrato di EG, vale a dire, del quadrato di CD, (5) ne siegue, che li due quadrati di AE, e di EF insieme sono doppj de' due quadrati di AC, e di CD insieme: ma a cagione dell'angolo retto in E il quadrato dell'ipotenusa (6) AF è eguale a' due quadrati di AE, e di EF; dunque sarà parimente il quadrato di AF doppio de' quadrati di AC, e di CD. Quindi essendo a cagione dell'angolo

(1) *Prop.* 32. *l.* (2) *Prop.* 6. *I*
(3) *Prop.* 6. *l.* (4) *Prop.* 47. *l.*
(5) *Prop.* 34. *l.* (6) *Prop.* 47. *l.*

Digitalizzato da Google

golo retto ADF il quadrato, di AF eguale a quadrati (1) di AD, e DF, ovvero di AD, e DB; perchè è stata dimostrata DB eguale a DF: saranno i quadrati di AD, e di DB doppj de' quadrati di AC, e di CD: ciocchè doveva dimostrarsi.

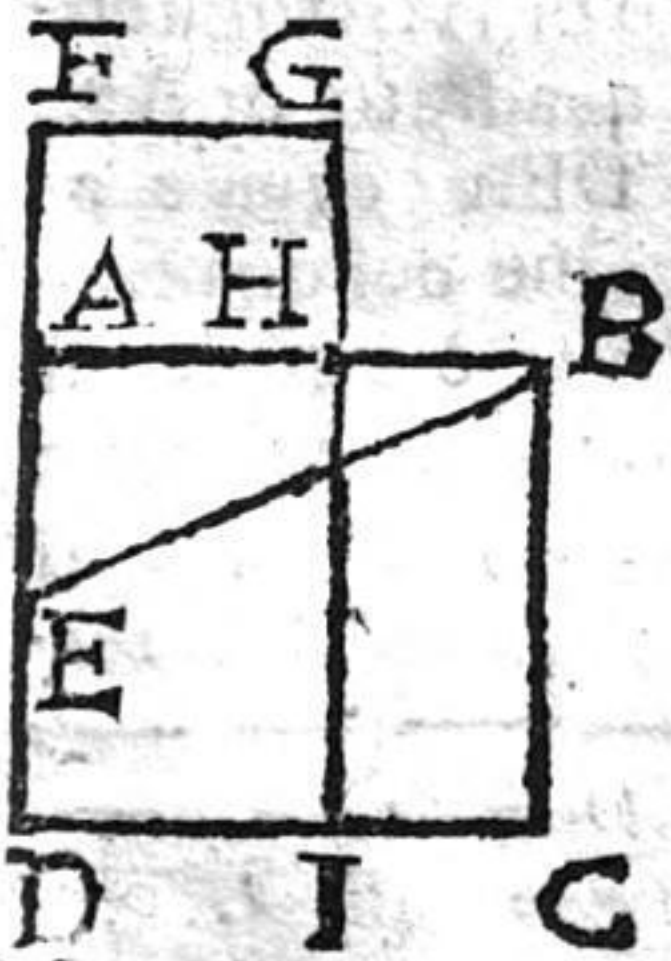
Dimostrazione co' numeri.

Sia AC, o CB 4	*AD2* 100	*AC2* 16
BD 2	*DB2* 4	*CD2* ... 36
AD 0	.....	.....
CD 7	104	52
		52
		.... ..
		104

Le proposizioni, che seguono non si possono dimostrare per la strada de' numeri.

PROP. XI. TEOREMA.

Dividere una linea retta data, in modochè il rettangolo formato da tutta la linea, e dalla parte minore di essa, sia eguale al quadrato della parte maggiore.



I.

Sia data la linea retta AB: fa duopo dividerla con tal legge nel punto H, che il rettangolo formato da tutta AB, e dalla parte minore BH sia eguale al quadrato dell' altra parte AH.

II.

Descrivasi (2) *sopra la AB il quadrato ABCD.*

(1) *Prop.* 47. I. (2) *Pr.* 46. I.

Digitalizzato da Google

Si tagli (1) *il lato AD in parti eguali nel punto E.*

Si unisca (2) *AB.*

Si distenda EA sino ad F, in modochè EF sia eguale (3) *ad EB.*

Descrivasi (4) *sopra AE il quadrato AG, e si distenda* (5) *GH sino ad I*: io dico, che il rettangolo formato da AB, e EH sia eguale al quadrato di AH.

III.

Siccome dalla costruzione la retta AD è divisa in parti eguali nel punto E, ed è stata ad essa aggiunta per diritto la parte AF, così sarà (6) il rettangolo DFA, insieme col quadrato di AE eguale al quadrato di EF, ovvero di EB, che dalla costruzione è eguale ad EF: ma a cagione dell'angolo retto, EAD il quadrato dell'ipotenusa EB è eguale (7) a' due quadrati di AE, AB; dunque sarà parimente il rettangolo DFA, insieme col quadrato di AE eguale al quadrato di AE, ed al quadrato di AB: togliendone dunque il medesimo quadrato di AE, rimarrà (8) il rettangolo DFA eguale al quadrato di AB: ma a cagione del quadrato AG, il rettangolo DFA è eguale al rettangolo DG, ed il quadrato di AB dalla costruzione è il quadrato AC; dunque il

ret-

---

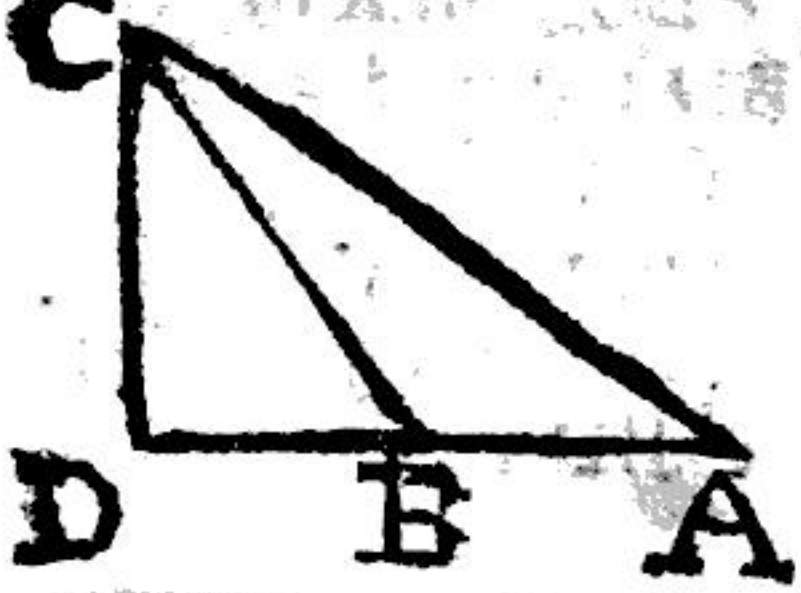
(1) *Prop.* 10. *I.* (2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 3. *I.* (4) *Prop.* 46. *I.*
(5) *Dim.* 2. (6) *Prop.* 6. *di quest.*
(7) *Prop.* 47. *I.* (7) *Assio.* 3.

Digitalizzato da Google

rettangolo DG sarà eguale al quadrato AC: togliendone il medesimo rettangolo *D*H, il quale è comune; rimarrà (1) il quadrato AG eguale al rettangolo CH, ma il quadrato AG è formato da AH, ed il rettangolo CH è formato da BH, e BC; ovvero da BH, ed AB; dunque il quadrato formato dalla parte maggiore AH è eguale al rettangolo formato dalla minore BH, e da tutta la AB: ciocchè doveva farsi.

PROP. XII. TEOREMA.

Ne' triangoli ottusangoli il quadrato formato dal lato, che sta dirimpetto all'angolo ottuso, tutto è maggiore de' quadrati degli altri due lati, i quali contengono l'angolo ottuso, quanto sono due rettangoli formati da uno d'due lati, che sta intorno all'angolo ottuso, e da quella porzione del medesimo (portato innanzi quanto bisogna), *che rimane interposta fra l'angolo ottuso, e la perpendicolare, che si fa cadere dall'angolo opposto.*



Sia il triangolo ottusangolo CBA, *il di cui lato BA, che sta intorno all'angolo ottuso in B si porti tanto innanzi, finchè possa sopra di esso cadere la perpendicolare*

(1) Assio. 3.

D dell' angolo opposto C. Io dico, che il quadrato del lato CA, che sta dirimpetto all' angolo ottuso CBA, tant' è maggiore de' quadrati degli altri due lati CB, BA, che contengono l' angolo ottuso, quanto è il valore di due rettangoli formati dal lato AB, che sta intorno all'angolo ottuso, e dalla parte di esso BD, che rimane interposta fra l' angolo ottuso B, e la perpendicolare CD.

II.

Perchè la retta AD è divisa nel punto B, sarà (1) il quadrato di AD eguale al quadrato di AB, al quadrato di BD, ed a due rettangoli formati da AB, e BD: aggiugnendo dunque ad essi il medesimo quadrato di DC; saranno i quadrati (2) di AD, e DC eguali a' quadrati di AB, e di BD, e di DC, insieme con due rettangoli formati da AB, e BD: ma il quadrato della sola ipotenusa (3) CA è eguale a' due quadrati di AD, e di DC; e similmente il quadrato dell' ipotenusa BC è eguale a' due quadrati di BD, DC; dunque il quadrato di AC sarà eguale a due quadrati di AB, e BC; insieme con due rettangoli di AB, BD: quindi sarà facile a conchiudere, che il quadrato di AC sia tanto maggiore de' quadrati di AB, e BC, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da AB, e BD.

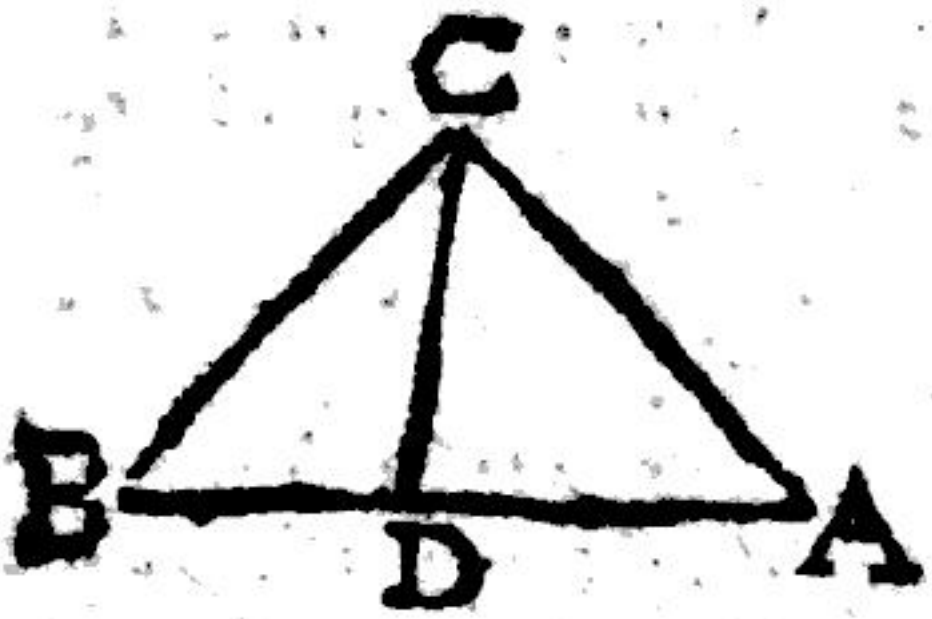
PROP.

(1) *Prop. 3. di questo.* (2) *Assio. 2.*
(3) *Prop. 47. 1.*

Digitalizzato da Google

PROP. XIII. TEOREMA.

Ne' trianguli acutangoli, il quadrato formato dal lato opposto all' angolo acuto, tanto è minore de' quadrati degli altri due lati, i quali comprendono l'istesso angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati entrambi da uno de' lati, i quali sono intorno l'angolo acuto, e da quella parte del medesimo lato, che rimane interposta fra l'angolo acuto, e la perpendicolare, che si fa cadere dall'angolo opposto sopra di esso.



I.

Sia il triangolo acutangolo ABC, nel quale dal punto C s' intenda cadere la perpendicolare CD sul lato AB, il quale sta intorno l'angolo acuto CAB: io dico, che il quadrato di CB, che sta dirimpetto all'angolo acuto, tanto è minore de' quadrati de' lati CA, AB, che comprendono l'istesso angolo acuto, quanto è il valore di due rettangoli formati dal lato BA, e dalla parte di esso AD, che rimane interposta fra l'angolo acuto A, e la perpendicolare CD.

II.

Perchè la retta AB è divisa nel punto

Digitalizzato da Google

ID, saranno (1) i due quadrati di AB, e di AD eguali a due rettangoli formati da BA, e da AD, insieme col quadrato di DB: aggiugnendo dunque ad essi il medesimo quadrato di DC; saranno (2) i tre quadrati di AB, di AD, e di DC eguali a due rettangoli di BA, e di AD, insieme co' due quadrati di DB, e DC: ma il solo quadrato dell' ipotenusa (3) AC è eguale a' due quadrati di AD, e di DC: siccome il solo quadrato dell'ipotenusa CB è eguale a' quadrati di DB DC: dunque saranno i due quadrati di AB, e di AC eguali a' due rettangoli formati da BA, e da AD, insieme col quadrato di BC; dal che facilmente si deduce, che il quadrato di BC, tanto è minore de' quadrati di AB, e di AC, quanto è il valore de' due rettangoli formati da BA, ed AD: ciocchè doveva dimostrarsi.

Si vuol quì avvertire, che questo Teorema è vero, non solamente ne triangoli acutangoli; ma eziandio negli ottusangoli, e ne' rettangoli; purchè si prenda il lato che sta dirimpetto ad uno de' due angoli acuti. Così nel triangolo ottusangolo CBA (4) si dimostrerà nell' istessa maniera, che il quadrato del lato CB, che sta dirimpetto all' angolo acuto CAB, tanto è minore de' quadra-

---

(1) *Pr. 7. di questo.* (2) *Assio. 2.*
(3) *Prop. 47. 1.*
(4) *Veggasi la figura 12. di questo.*

Digitalizzato da Google

drati de' due lati CA, AB, i quali contengono l'angolo acuto CAB, quanto è il valore di due rettangoli BAD. Ma, ficcome quando il triangolo CBA è rettangolo in B, il punto B si confonde col punto D, e per conseguente il rettangolo formato da BA, ed AD diventa eguale al quadrato di AD, così nel triangolo rettangolo CDA sarà il quadrato del lato CD, che sta dirimpetto all'angolo acuto A, tanto minore de' quadrati degli altri due lati CA, AD, che contengono l'angolo acuto CAD, quanto è il valore di due quadrati formati da AD.

PROP. XIV. PROBLEMA.

Formare un quadrato eguale ad una figura rettilinea data.



I.

Sia data la figura rettilinea A; fa duopo formare un quadrato, il quale sia eguale alla medesima figura rettilinea.

II.

Si descriva (1) il parallelogrammo BCD eguale alla figura rettilinea data, che abbia l'angolo BCD retto. Ciò fatto, se mai fia, che i due lati BC, CD, i quali so-

(1) Prop. 45. I.

sono intorno l'angolo retto siano eguali, il parallelogrammo rettangolo già descritto sarà un quadrato, e perciò si sarà soddisfatto al Problema.

Ma, se il lato BC, è maggiore del lato CD.

Distendasi il lato BC sino al punto E; in modocchè sia CE eguale (1) *a CD.*

Si tagli la retta BE in parti eguali al punto F (2).

Dal centro F, col raggio FB si descrive (3) *il mezzo circolo BGE.*

Si distenda (4) *la DC, sino al punto G.*

Io dico che il quadrato formato sopra la retta CG sia eguale alla figura rettilinea A.

III.

Imperciocchè essendo la retta BE divisa egualmente nel punto F, e disegualmente nel punto C, sarà il rettangolo (5) BCE, insieme col quadrato di FC. eguale al quadrato di FE, ovvero di EG: ma, a cagione dell'angolo retto FCG, il quadrato di FG è eguale a' due quadrati di FG, CG: dunque sarà parimente il rettangolo BCE, insieme col quadrato di FC, eguale a' due quadrati di FC, CG; ovvero, togliendone il medesimo quadrato di FC, il quale è comune, sarà il rettangolo BCE eguale al quadrato di CG; ma

(1) *Prop.* 3. *l.* (2) *Prop.* 10. *l.*
(3) *Dim.* 3. (4) *Dim.* 3.
(5) *Prop.* 3. *di questo.*

Digitalizzato da Google

ma il rettangolo BCID, essendo formato (1) da' lati BC, CD è eguale al rettangolo BCE, perchè dalla costruzione CE è eguale a CD: dunque sarà il rettangolo BCID: eguale al quadrato di CG; il perchè essendo dalla costruzione il rettilineo A eguale al rettangolo BCD; sarà il quadrato di CG eguale al rettilineo A: ciocchè doveva farsi.

Per mezzo di questa proposizione si può avere la misura di qualsivoglia figura rettilinea: imperciocchè non si ha da fare altro, che descrivere primieramente un quadrato eguale alla figura rettilinea data; dopo di che, se il lato del quadrato sia per esempio di 10 palmi, tutta la superficie della figura conterrà 100 palmi quadrati, poichè altrettanti ne contiene il quadrato descritto. Gli antichi Geometri, quando volevano spiegare il valore d' una figura, sempre procuravano di formarne un quadrato, perchè il quadrato è una figura, che si misura più facilmente di qualsivoglia altra figura. Quindi questo problema porta ordinariamente il titolo di quadratura delle figure rettilinee; *e è celebre appo i Geometri il problema della* quadratura del circolo, *nel qual problema si dimanda di* descrivere un quadrato eguale ad un circolo dato.

(1) *Def. 3. di questo.*

Digitalizzato da Google

LIBRO TERZO.

DEFINIZIONI.

I.

I Cerchi eguali ſono quelli, li quali hanno i diametri, ovvero i ſemidiametri eguali.

II.

Una linea diritta diceſi toccare il cerchio quando, *diciam così*, non fa altro, che baciarlo: *ovvero* quando l'incontra, in modochè eſſendo portata innanzi da ambe le parti non entra dentro ad eſſo.

III.

Due cerchi diconſi toccarſi ſcambievolmente, quando, *diciam così*, non fanno altro, che baciarſi; *ovvero*; quando s'incontrano in manierachè qualche porzione di uno non entra dentro all'altro.

Due cerchi poſſono toccarſi in due maniere, al di dentro, e al di fuori. *Diconſi due cerchi toccarſi* al di dentro, *allor quando toccandoſi, l'uno rimane tutto racchiuſo dentro l'altro. Diconſi poi toccarſi* al di fuori, *quando toccandoſi l'uno rimane tutto fuori dell'altro.*

IV.

Due linee dirette ſi dicono eſſere egualmente lontane dal centro, allorquando le due perpendicolari cadenti dal centro ſo-

pra

Digitalizzato da Google

pra le medesime sono eguali fra di loro.

V.

Ma quando le due suddette perpendicolari non sono eguali, non si diranno le due linee egualmente lontane dal centro; ma quella si dirà starne più lontana, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

SPIEGAZIONE.

Se vi sia sopra una superficie piana una linea diritta, ed un punto fuori essa, egli è chiaro, che la distanza del punto dalla linea diritta debba misurarsi dalla perpendicolare, che dal detto punto cade sulla medesima linea diritta. Quindi, se noi vorremo sapere, quanto sia la distanza d' una corda, o sottesa d' un circolo dal di lui centro, ci bisognerà far cadere dal centro sopra la sottesa una perpendicolare: che poi, quanto è la lunghezza di essa, altrettanta sarà la distanza della sottesa del centro. Ciò premesso, se vi sono dentro ad un cerchio due sottese, sopra le quali cadano le perpendicolari dal centro; esse si diranno essere egualmente lontane dal centro; ove le due suddette perpendicolari siano eguali fra di loro; laddove, essendo le perpendicolari diseguali, quella si dirà starne più lontana, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

VI.

L'angolo nella porzione è un' angolo mi-

mistilineo formato dalla base della porzione, e dalla sua circonferenza.

VII.

Angolo nella porzione è un angolo rettilineo formato da due linee rette tirate da qualsivoglia punto della circonferenza a' termini della base della porzione.

SPIEGAZIONE.

Nella definizione XIX. *del libro* I. *si disse, che la porzione del cerchio è una figura piana mistilinea contenuta da una parte qualsivoglia di circonferenza, e dalla linea retta, che le serve di base. Quindi in ogni porzione di cerchio vi sono due angoli mistilinei formati dalle base, e dalla circonferenza della porzione. Questi due angoli mistilinei sogliono chiamarsi da' Geometri* angoli della porzione. *Ma, se preso un punto ad arbitrio nella circonferenza della porzione s'intendono da esso tirate due linee rette all'estremità della base della suddetta porzione, si darà luogo ad un'angolo rettilineo avendo la punta nella circonferenza della porzione. Cotesto angolo suole chiamarsi* angolo nella porzione, *a differenza dell'altro, che dicesi* angolo della porzione. *Del rimanente siccome infiniti sono i punti, i quali si possono prendere nella circonferenza della porzione, così infiniti saranno gli angoli, che si possono formare dentro ad una medesima porzione; laddove*

Digitalizzato da Google

dove gli angoli della porzione non sono più di due. Finalmente, siccome la porzione di cerchio è di tre sorte; cioè, maggiore, minore, ed eguale ad un mezzo cerchio, così gli angoli della porzione, e nella porzione sono di tre sorte. I. Angoli della porzione, e nella porzione maggiore. II. Angoli della porzione, e nella porzione minore. III. Angoli del mezzo cerchio, e nel mezzo cerchio.

VIII.

Ogni angolo rettilineo, che ha la sua punta nel centro d'un cerchio, dicesi angolo al centro.

IX.

Ogni angolo rettilineo, che ha la punta nella circonferenza d'un cerchio, dicesi angolo alla circonferenza.

X.

Nell'uno, e nell'altro caso quella parte di circonferenza, la quale rimane interposta fra' due lati dell'angolo, dicesi base del medesimo; *cioè, nel primo caso* base dell'angolo al centro, *e nell'altro caso*, base dell'angolo alla circonferenza.

DELLA MISURA DELL'ANGOLO.

Se due linee rette sono perpendicolari, l'una all'altra, è noto, che intorno il punto comuni ed entrambe si costituiscono quattro angoli retti. Intendendo ora tutti questi quattro angoli retti essere compartiti in 360 angoletti eguali, si capirà facilmente, che

ad

Digitalizzato da Google

ad ogni angolo retto ne ſpettano 90; di modochè dando il nome di grado *a ciaſcuno di queſti angoletti eguali, noi diremo per innanzi, che l'angolo comprende 90 gradi, che l'ottuſo ne comprende più di 90 e meno di 180; e che l'acuto ne comprende meno di 90. Quindi, poichè i tre angoli d'ogni triangolo ſono eguali (1) a due retti, verrà a dire, che i tre angoli d'ogni triangolo ſono eguali a 180 gradi.*

Intendaſi preſentemente dal punto comune alle due perpendicolari come centro, e con qualſivoglia raggio; ſia grande, ſia piccolo, deſcritto (2) un cerchio intorno a' ſuddetti angoli retti. Egli è coſa chiara, che la di lui circonferenza rimarrà ancora eſſa compartita in 360 parti eguali di 360 angoletti diviſati (3), quindi, quante parti comprende qualſivoglia angolo ſia acuto, ſia ottuſo delle 360, nelle quali s'intendano compartiti li quattro angoli retti, altrettante parti conterrà la baſe del medeſimo angolo delle 360 nelle quali ſi divide tutta la circonferenza del cerchio; di modo che potraſſi dire, che quanti gradi contiene un'angolo, altrettanti gradi contiene la baſe di eſſo, intendendo per baſe quella parte di circonferenza, che rimane interpoſta

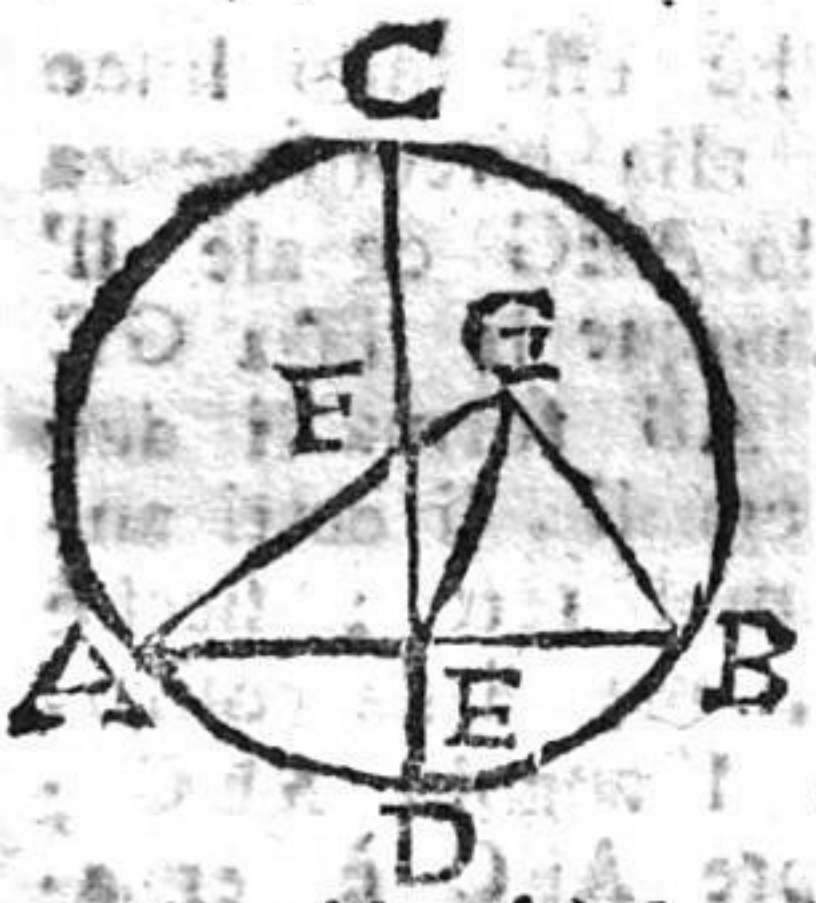
(1) *Prop.* 32. I.
(2) *Dim.* 3.
(3) *Veggaſi l'avvertimento della pr.* 26. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

sta fra' lati dell' angolo ; purchè però la circonferenza abbia per certo la punta dell' angolo : o viceversa quanti gradi contiene la base d' un angolo, altrettanti ne contiene l' angolo istesso . Il medesimo discorso ha luogo, se ciascuno de' suddetti 60 angoletti eguali s' intenda diviso in 60 particelle ancora eguali , che noi chiameremo minuti , e ciascun minuto s' intenda poi compartito in 60 secondi , e così all' infinito . Il perchè si potrà prendere per misura dell' angolo la base di esso : intendendo però di parlare dell' angolo al centro , e non già dell' angolo alla circonferenza.

PROP. I. PROBLEMA.

Trovare il centro d' un dato cerchio.



I.

Sia dato il cerchio ABC : fa duopo di esso ritrovare il centro.

II.

Si prendono nella circonferenza del cerchio due punti ad arbitrio A , e B.

Si unisca (1) *la AB.*

Si sechi per mezzo (2) *nel punto E.*

Dal

(1) *Dim.* I. (2) *Prop.* 10. I.

Digitalizzato da Google

Dal punto E s' innalzi (1) *la perpendicolare EF sopra la AB.*

Si distenda (2) *la detta perpendicolare, finchè giunga a toccare la circonferenza ne punti C, e D.*

Sechisi (3) *la CD per mezzo nel punto F*; io dico, che cotesto punto sia il centro del cerchio dato.

III.

Se mai è possibile, non sia F il centro del cerchio, ma sia il punto G, il quale però dovrà essere situato fuori della retta CFD; Si uniscano le linee rette (4) GA, GE, GB. Siccome dalla costruzione la AE è eguale alla EB, e la GE è comune; così saranno li due lati AE, EG del triangolo AEG eguali a due lati BE, EG del triangolo BEG, ciascuno a ciascuno; il perchè essendo di più la base AG eguale alla base GB, perchè esse sono linee cadenti dal centro G alla circonferenza ABC, sarà (5) l'angolo AEG eguale all' angolo BEG. Perchè dunque la linea GE cadente sopra la linea AB forma li due angoli di quà, e di là eguali, li detti angoli saranno (6) entrambi retti; sicchè l'angolo AEG è retto, ma dalla costruzione è ancora retto l'angolo AEC; dunque l'angolo minore AFC è eguale

(1) *Prop.* 11. *I.* (2) *Dim.* 2.
(3) *Prop.* 10. *I.* (4) *Dim.* 1.
(5) *Prop.* 8. (6) *Def.* 10. *I.*

Digitalizzato da Google

le (1) al maggiore AEG, ciocchè non potendo sossistere, si deve dire, che il punto F sia il centro richiesto: ciocchè doveva farsi.

COROLLARJ.

Quindi s' inferisce. I. *che se una linea retta tirata dal cerchio seca una sottesa dell' istesso cerchio per mezzo, e ad angoli retti, il centro del cerchio sia nella linea secante. Così il centro del cerchio ABC è situato nella linea CE, che seca la sottesa AB per mezzo, e ad angoli retti.* II. *Che se due cerchi* (2) *AFBG, AFBH si secano ne' punti A, e B, i quali siano congiunti dalla retta AB, i centri C, e D, e i due suddetti cerchi siano situati nella retta GEFH, che divide la sottesa comune AB per mezzo, e ad angoli retti.* III. *Che la linea retta, la quale unisce i centri C, e D de' due cerchi AEBG, AEBH, i quali si secano ne' punti A, e B, divida per mezzo la sottesa comune AB, e di più la divida ad angoli retti.*

PROP.

(1) *Assi.* 12. I. (2) FIG. B.

Digitalizzato da Google

PROP. II. TEOREMA.

Se nella circonferenza d' un cerchio si prendano due punti ad arbitrio: la linea retta, che li congiugne cadera tutta dentro al cerchio.



I.

Nella circonferenza del cerchio BCD si prendano due punti ad arbitrio B, e C; io dico, che la linea retta BC, che gli unisce cade dentro al cerchio.

II.

Ritrovisi (1) *il centro A del circolo BCD: Nella linea retta BC prendasi il punto B ad arbitrio.*

Si uniscano (2) *le linee AB, AE, AC;*

III.

Siccome dalla costruzione A è il centro del cerchio BCD, così saranno i due raggi AB, AC eguali fra di loro; il perchè il triangolo ABC sarà isoscele, e come tale avrà gli angoli sopra la base ABC, ACB eguali (3): ma l' angolo esteriore AEC del triangolo AEB è maggiore (4) dell' ango-

(1) *Prop. ant.* (2) *Dim. I.*
(3) *Prop. 5. L.* (4) *Prop. 16. L.*

Digitalizzato da Google

angolo interiore oppoſto ABE ; dunque il medeſimo angolo AEC , ſarà eziandio maggiore (1) dell' angolo ACE . Quindi nel triangolo AEC , eſſendo l' angolo ACE maggiore dell' angolo ACE , ſarà il lato AC maggiore (2) del lato AE . Ma il lato AC tocca la circonferenza : dunque il lato AE non ci arriva, non che la paſſa : e per tanto il punto E preſo ad arbitrio nella BC è dentro al cerchio . Ora , ſiccome l' iſteſſo và per tutti gli altri punti , così deve dirſi, che la retta BC cade tutta dentro al cerchio ; ciocchè doveva dimoſtrarſi .

PROP. III. TEOREMA.

Se una linea retta paſſante per lo centro ſeca un' altra linea retta , che non paſſa per lo centro per mezzo , la ſecherà ad angoli retti , e ſecandola ad angoli retti , la ſecherà per mezzo .



I.

Sia il cerchio BEGD , nel quale la retta DE paſſante per lo centro A ſechi la retta BG , la quale non paſſa per lo centro nel punto F . Io dico , che ſe la ſeca per mezzo , la ſecherà ad angoli retti ; e ſe-

can-

(1) *Ass.* 4. (2) *Prop.* 19. *L.*

Digitalizzato da Google

candola ad angoli retti la ſecherà per mezzo.

II.

Si unifcano (1) *i raggi AB, AG.*

III.

I. Siccome dalla ſuppoſizione la BF è eguale alla FG, e la FA è comune; così ſaranno i dué lati BF, FA del triangolo BFA eguale a' due lati GF, FA del triangolo GFA, ciaſcuno a ciaſcuno; quindi, eſſendo la baſe AB eguale alla baſe AG per eſſere linee cadenti dal centro alla circonferenza, ſarà (2) l'angolo BFA eguale all'angolo GFA; laonde l'uno, e l'altro ſarà (3) retto: di modocchè rimane vera la prima parte della propoſizione.

II. Paſſando ora all' altra parte; io dico, che ſiccome il triangolo ABG è iſoſcele, così l'angolo ABG ſarà eguale (4) all' angolo AGB; ma dalla ſuppoſizione l'angolo AFB è eguale all'angolo AFG: poic è l'uno, e l'altro è retto; dunque due angoli ABF, AFB del triangolo ABF ſono eguali a due angoli AGF, AFG del triangolo AGF, ciaſcuno a ciaſcuno; quindi eſſendo di più il lato AF, oppoſto ad uno degli angoli eguali comune ad entrambi i triangoli: ſarà (5) il lato BF eguale al lato FG; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

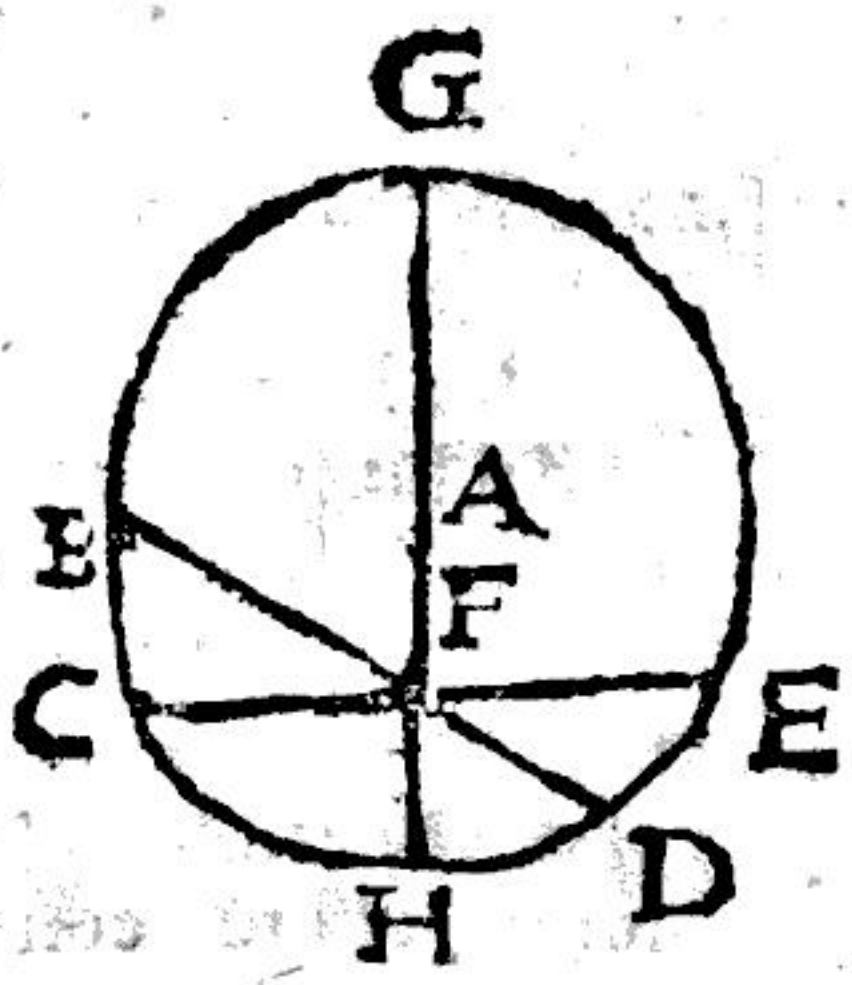
PROP.

(1) *Dim.* I.
(2) *Prop.* 8. I.
(3) *Def.* 10. I.
(4) *Prop.* 5. I.
(5) *Prop.* 62. I.

Digitalizzato da Google

PROP. IV. TEOREMA.

Se due linee retti non passanti per lo centro, si sechino dentro d' un cerchio, non si secheranno mai per mezzo.



I.

Nel cerchio BCDE le due linee rette BD, CE non passanti per lo centro A si sechino nel punto F; io dico, che non si potranno secare per mezzo.

II.

Se mai sia possibile rimangano entrambe secate per mezzo, di modo che sia CF eguale a FE, e BF eguale ad FD.

Dal centro A si unisca (1) *la AF.*

Si distenda dall' una parte e dall' altra fin' a' punti G, *ed* H (2).

III.

Perchè la linea GC passante per lo centro A seca per mezzo nel punto F, così la linea CE, come la linea BD, le quali non passano per lo centro, le secherà (3) ad angoli retti: quindi sarà così l' angolo AFD, come l'angolo AFE retto; e per-

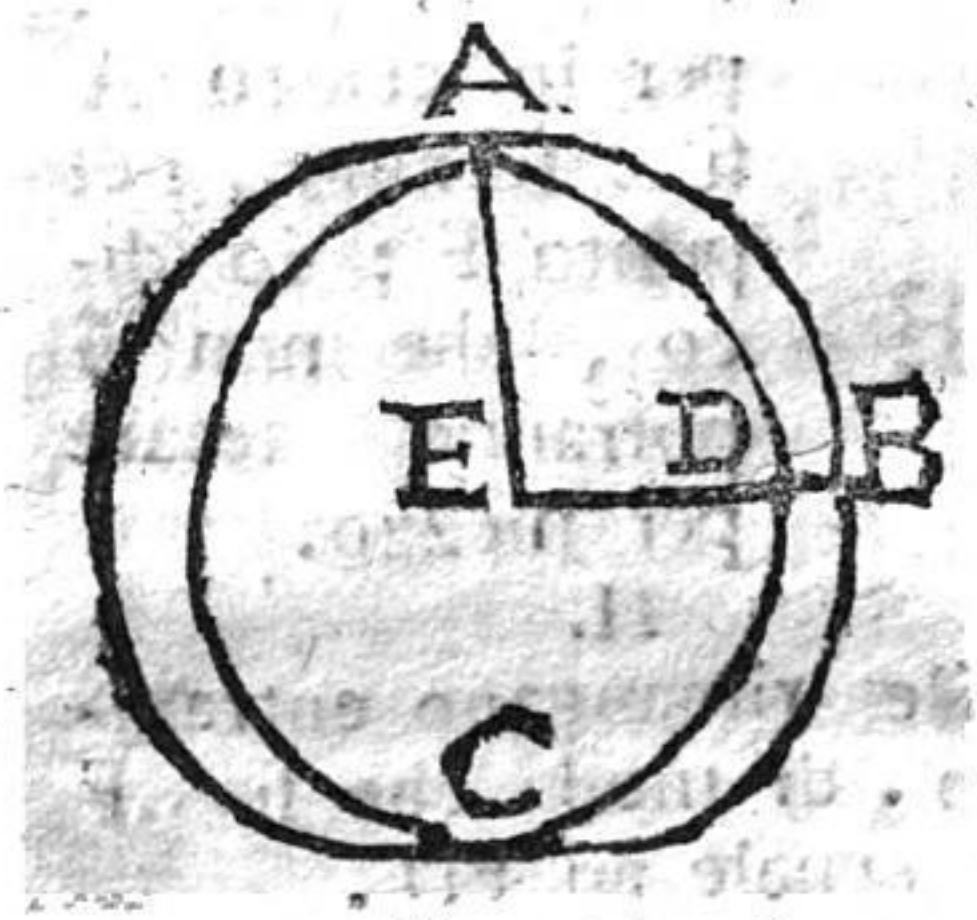
(1) *Dim.* 1. (2) *Dim.* 2. (3) *Pr. ante.*

Digitalizzato da Google

e perciò saranno eguali fra di loro (1) vale a dire, sarà la parte eguale al tutto; ciocchè non potendo sussistere, rimane vero il Teorema in questione.

PROP. V. TEOREMA.

Due cerchi, che si secano, non possono essere concentrici; vale a dire, non possono avere il medesimo centro.



I.

Sechinsi i due cerchi ABC, ALC, ne' punti A, e C; io dico, che essi non possono essere concentrici.

II.

Se è possibile, abbiano l' istesso centro, il quale sia il punto E.

Si congiunga (2) *la AE.*

Si tiri ad arbitrio la retta ADB, che seghi le circonferenze de' due cerchi ne' punti D, e B.

III.

Siccome E è il centro del cerchio ABC, così saranno le linee EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza eguali fra loro (3). Similmente, siccome E è il centro

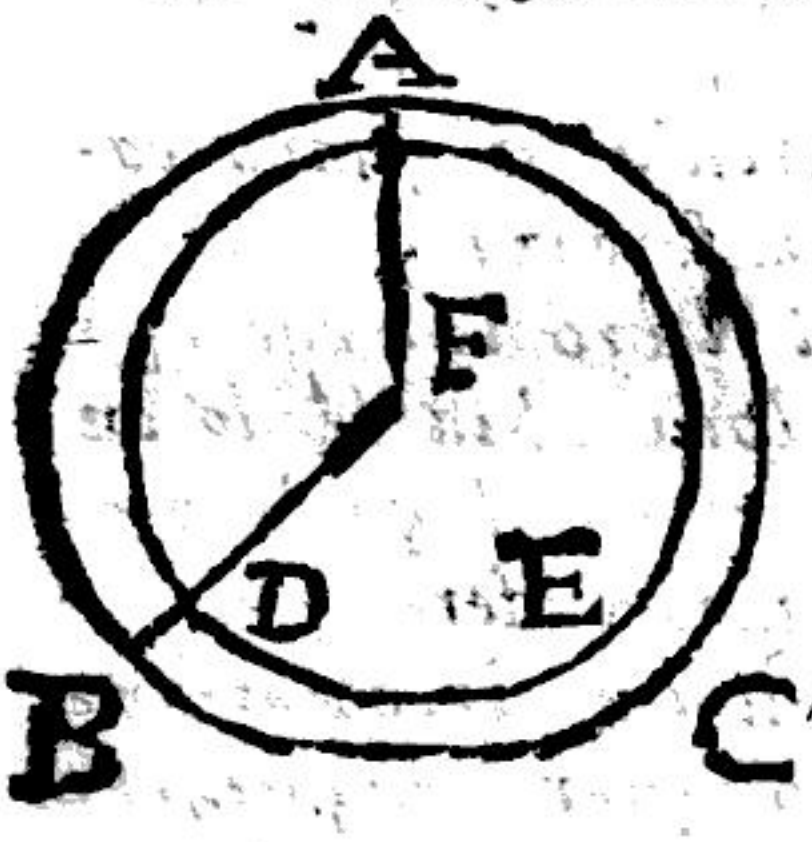
---

(1) *Assio.* 12. (2) *Dim.* 1. (3) *Def.* 15.

tro del cerchio ABC ; così le linee rette EA , ED cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali (1). Il perchè essendo le due ED , EB eguali alla medesima EA , saranno (2) eguali fra di loro ; vale a dire la parte sarà eguale al tutto ; cioc-chè non potendo sussistere , ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. VI. TEOREMA.

Due cerchi , che si toccano al di dentro , non possono essere concentrici .



I.

I due cerchi ABC , ADE tocchinsi al di dentro nel punto A ; io dico , che essi non possono essere concentrici.

II.

Se è possibile sia il punto F il centro dell'uno , e dell'altro cerchio.

Si unisca (3) *la FA .*

Si tiri la retta FDB, ad arbitrio , la quale fechi la circonferenza de due cerchi ne' punti D , e B .

III.

Siccome F è il centro del cerchio ABC , così le linee FA , FB cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali

(1) *Def.* 15. I. (2) *Assio.* 1. (3) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

fra di loro (1). Parimente, siccome F è il centro del cerchio ADE, così le linee FA, FD cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra loro (2). Quindi, essendo ciascuna delle due BF, DF eguale alla medesima AF, saranno (3) esse eguali fra di loro: vale a dire, sarà la parte eguale al tutto: ciocchè non potendo sussistere; resta stabilita la verità del Teorema in questione.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se dal centro d'un cerchio si fanno cadere più linee alla circonferenza, egli è chiaro dalla def. XV. *del libro* I., *che esse sono tutte eguali fra di loro. Ma se da un punto preso dentro al cerchio, il quale non sia il suo centro si facciano cadere più linee intorno intorno alla di lui circonferenza queste linee non potranno essere eguali fra di loro, ma alcune saranno più grandi, altre più picciole, e fra le più grandi ve ne sarà una, la quale sarà la massima, siccome fra le più picciole ve ne sarà una, che sarà la minima.* Euclide *dunque nella proposizione seguente, prende a determinare quale sia la massima delle suddette linee, quale la minima, e quali siano mezzanamente grandi.*

PROP.

(1) *Def.* 15. (2) *Def.* 15.
(3) *Asso.* 1.

Digitalizzato da Google

PROP. VII. PROBLEMA.

Se nel diametro d'un cerchio si prenda un punto, che non sia il suo centro, dal quale cadano alla di lui circonferenza intorno intorno più linee rette. La massima sarà quella, la quale passa per lo centro. La minima sarà la rimanente porzione del diametro. La più vicina a quella, che passa per lo centro, sarà sempre maggiore della più lontana. Dal suddetto punto non caleranno alla circonferenza del cerchio più di due linee rette eguali; una di quà, ed un altra di là della minima.



I.

Sia il cerchio ABCD, nel di cui diametro AD si prenda il punto F diverso dal centro E, dal quale cadano alla circonferenza del cerchio più linee rette, come FA, FB, FC, FD;

Io dico, dunque in primo luogo, che la FA, la quale passa per il centro E sia la massima, vale a dire, che ella sia maggiore di FB, e di qualunque altra linea, che dal punto F sia tirata alla circonfe-

Digitalizzato da Google

renza ABCD. Dico di più, che la FD, la quale è la parte rimanente del diametro sia la minima, vale a dire, che essa sia minore di FC, e di qualunque altra linea cadente dal punto F alla circonferenza ABCD. Dico in oltre, che EB, la quale più s'avvicina alla massima è maggiore di FC, che più le ne allontana; e finalmente io dico, che dal punto F due linee sole eguali si ponno tirare una di quà, ed un' altra di là della minima FD.

II.

Per dimostrare, che FA sia maggiore di FB, *s' intenda congiunta la* EB (1). Siccome le due EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali fra loro, così, aggiugnendo ad esse comunemente EF, sarà tutta la AF eguale alle due BE, EF unite insieme (2): ma le due BE, EF, unite insieme sono maggiori (3) di BF; dunque sarà parimente la AF maggiore (4) di EF.

II. Per dimostrare, che FD sia minore di FC, *fa duopo congiungere* (5) EC. Siccome nel triangolo EFC il lato EC è minore de' due lati EF, FC uniti insieme (6); così essendo il raggio EC eguale al raggio ED, sarà parimente ED minore

---

(1) *Dim.* 1. (2) *Assio.* 2.
(3) *Prop.* 20. I. (4) *Assio.* 1.
(5) *Dim.* 1. (6) *Pr.* 20.

Digitalizzato da Google

re delle due EF, FC: ficchè togliendone via la EF, la quale è comune, farà l'avanzo (1) FD minore dell'avanzo FC.

III. Per dimoſtrare poi che FB ſia maggiore di FC, diremo così. Eſſendo EB eguale ad EC, perchè ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza, ed EF eſſendo comune, ſaranno i due lati EB, EF del triangolo DEF eguali a' due lati EC, EF del triangolo CEF, ciaſcuno a ciaſcuno: quindi, eſſendo l'angolo BEF maggiore dell'angolo CEF, ſarà la baſe BF maggiore della baſe CF (2).

IV. Finalmente dimoſtreremo, che dal punto F due linee eguali ſolamente ſi poſſono tirare, una di quà ed un'altra di là della minima FD. *Facciaſi l'angolo DEG* (3) *eguale all'angolo DEC, e ſi unisca* (4) *FG*; Io dico, che le due FC, FG ſono eguali fra di loro. Imperciocchè, eſſendo il raggio EC eguale al raggio EG, e la EF eſſendo comune; ſaranno i due lati CE, EF del triangolo CEF eguali a due lati GE, EF, del triangolo GEF, ciaſcuno a ciaſcuno: quindi, eſſendo di più dalla coſtruzione l'angolo CEF eguale all'angolo GEF; ſarà la baſe FC eguale alla baſe FG: da che ſi vede, che dal punto F ſi poſſono far cadere, alla circonferenza del cerchio due linee egua-

(1) *Aſſio* 5. (2) *Prop.* 24. I.
(3) *Prop.* 23. I. (4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

renza ABCD. Dico di più, che la FD, la quale è la parte rimanente del diametro sia la minima, vale a dire, che essa sia minore di FC, e di qualunque altra linea cadente dal punto F alla circonferenza ABCD. Dico in oltre, che EB, la quale più s'avvicina alla massima è maggiore di FC, che più le ne allontana; e finalmente io dico, che dal punto F due linee sole eguali si ponno tirare una di quà, ed un' altra di là della minima FD.

II.

Per dimostrare, che FA sia maggiore di FB, *s' intenda congiunta la* EB (1). Siccome le due EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali fra loro, così, aggiuguendo ad esse comunemente EF, sarà tutta la AF eguale alle due BE, EF unite insieme (2): ma le due BE, EF, unite insieme sono maggiori (3) di BF; dunque sarà parimente la AF maggiore (4) di BF.

II. Per dimostrare, che FD sia minore di FC, *fa duopo congiungere* (5) EC. Siccome nel triangolo EFC il lato EC è minore de' due lati EF, FC uniti insieme (6); così essendo il raggio EC eguale al raggio ED, sarà parimente ED minore

(1) *Dim.* 1.
(2) *Assio.* 2.
(3) *Prop.* 20. I.
(4) *Assio.* 1.
(5) *Dim.* 1.
(6) *Pr.* 20.

fe delle due EF, FC: ficchè togliendone via la EF, la quale è comune, farà l'avanzo (1) FD minore dell'avanzo FC.

III. Per dimoſtrare poi che FB ſia maggiore di FC, diremo così. Eſſendo EB eguale ad EC, perchè ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza, ed EF eſſendo comune, ſaranno i due lati EB, EF del triangolo DEF eguali a' due lati EC, EF del triangolo CEF, ciaſcuno a ciaſcuno: quindi, eſſendo l'angolo BEF maggiore dell'angolo CEF, ſarà la baſe BF maggiore della baſe CF (2).

IV. Finalmente dimoſtreremo, che dal punto F due linee eguali ſolamente ſi poſſono tirare, una di quà ed un'altra di là della minima FD. *Facciaſi l'angolo DEG* (3) *eguale all'angolo DEC, e ſi unisca* (4) *FG*; Io dico, che le due FC, FG ſono eguali fra di loro. Imperciocchè, eſſendo il raggio EC eguale al raggio EG, e la EF eſſendo comune; faranno i due lati CE, EF del triangolo CEF eguali a due lati GE, EF, del triangolo GEF, ciaſcuno a ciaſcuno: quindi, eſſendo di più dalla coſtruzione l'angolo CEF eguale all'angolo GEF; ſarà la baſe FC eguale alla baſe FG: da che ſi vede, che dal punto F ſi poſſono far cadere, alla circonferenza del cerchio due linee egua-

(1) *Aſſio* 5. (2) *Prop.* 24. I.
(3) *Prop.* 23. I. (4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

li: ma io dico, che è impossibile di tirarne un' altra eguale a ciascuno delle due FC, FG: imperciocchè quest' altra, o s'avvicina più ad FA, e sarà maggiore così di FC, come di FG; o se ne allontana più; e sarà minore di esse, per quello, che si è dimostrato: di modochè rimangono stabilite tutte le parti del Teorema in questione.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che da un punto preso dentro d' un cerchio diverso dal di lui centro non si possono tirare alla circonferenza più di due linee eguali, ne siegue, che ove da un punto preso dentro d' un cerchio poresse cadere alla di lui circonferenza più di due linee eguali, quel punto debba essere il centro del cerchio.

PROP. VIII. TEOREMA.

Se fuori d' un cerchio si prende un punto, dal quale si facciano cadere tanto alla parte concava, quanto alla parte convessa della sua circonferenza più linee rette: di tutte quelle, che vanno a terminare alla parte concava. La massima è quella la quale passa per lo centro. Quella, che s' avvicina più alla massima è maggiore delle più lontane. Dal detto punto due sole linee eguali si possono tirare, una

Digitalizzato da Google

una di quà, ed un' altra di là della massima. Di tutte quelle poi, che s' arrestano alla parte convessa. La minima è quella, che portata innanzi passa per lo centro. Quella, che più s' avvicina alla minima è minore della più lontana. Finalmente dal suddetto punto due linee eguali si possono tirare, una di quà, ed un' altra di là della minima.

I.



Sia il cerchio FDBK, fuori del quale si prenda il punto A, donde si facciano cadere, così alla parte concava, come alla parte convessa della sua circonferenza più linee rette AHD, AGC, AFG, ALK, una delle quali passi per lo centro E. Io dico dunque, che fra queste, le quali vanno a terminarsi alla parte concava, la massima sia AB, la quale passa per lo centro E. Di più, che AC, la quale più s' avvicina alla massima è maggiore di AD, che più se ne allontana; e finalmente, che dal punto A due rette linee eguali si possano far cadere alla parte concava, una di quà, ed un' altra di là

Digitalizzato da Google

della massima. Di quelle poi, che s'arrestano alla parte convessa; io dico, che la massima sia AF, la quale distesa oltre, passa per lo centro E: di più, che AG, la quale più s'avvicina alla minima è minore di AH, che più se ne allontana, e finalmente, che dal punto A solamente due linee rette eguali si possono far cadere alla detta parte convessa, una di quà, ed un'altra di là della minima.

I. Per dimostrare tutte queste cose ordinatamente faremo vedere in primo luogo, che AB sia maggiore di AC. *Congiungasi* (1) EC. Perchè li due raggi EC, EB sono eguali fra loro, aggiugnendo ad entrambi la medesima linea retta AE, sarà (2) la somma delle AE, EC eguali a tutta la AB: ma la somma delle due AE, EC è maggiore (3) di AC; dunque sarà parimente la AB maggiore di AC.

II. Passeremo poi a dimostrare, che AC sia maggiore di AD. *Si congiunga* (4) ED. Siccome i due raggi EC, ED, sono eguali fra di loro, e la AE è comune; così saranno i lati AE, EC del triangolo AEC eguali a' lati AE, ED del triangolo AED, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo l'angolo AEC maggiore dell'angolo AED, sarà la base (5) AC maggiore della base AD. III.

---

(1) *Dim.* 1. (2) *Assiom.* 2.
(3) *Prop.* 20. I. (4) *Dim.* 1.
(5) *Prop.* 24. I.

Digitalizzato da Google

III. Dimoſtreremo finalmente, che dal punto A due linee rette ſole eguali ſi poſſono far cadere alla parte concava. *Facciaſi* (1) *l'angolo AEK eguale all'angolo AED. E poi ſi unisca EK* (2). Perchè i due raggi ED, EK ſono eguali fra di loro, e la AE è comune: ſaranno i due lati AE, ED del triangolo AED eguali a due lati AE, ED del triangolo AEK, ciaſcuno a ciaſcuno, quindi eſſendo dalla coſtruzione l'angolo AED eguale all'angolo AEK, ſarà la baſe AD eguale (3) alla baſe AK. Ora non ſi può immaginare un'altra linea retta eguale a queſte due: poichè eſſa, ſe più s'avvicina alla maſſima, ſarà maggiore, ſe più ſe ne allontana ſarà minore delle medeſime.

I. Paſſando ora alle linee rette, che s'arreſtano alla parte conveſſa della circonferenza, dimoſtremo primieramente, che la AF ſia la minima. *Si uniſcano le due* GE, HE. Perchè nel triangolo AGE, i due lati AG, GE ſono maggiori (4) del ſolo rimanente AE, togliendone via GE, ed FE, che ſono eguali fra loro, per eſſere raggi del cerchio, ſarà l'avanzo AG (5) maggiore dell'avanzo AF.

II. Dimoſtraremo inoltre, che AG ſia minore di AH. Perchè i due raggi EG,

(1) *Prop.* 23. I. (2) *Dim.* 1.
(3) *Prop.* 4. I. (4) *Prop.* 20. I.
(5) *Aſſio.* 5.

Digitalizzato da Google

EH sono eguali fra loro, ed EA è comune: saranno i due lati GE EA del triangolo GEA eguali a due lati HE, EA del triangolo HEA, ciascuno a ciascuno; quindi essendo l'angolo GEA minore dell'angolo HEA, sarà la base (1) AG minore della base AH.

III. Finalmente dimostraremo, che dal punto A due linee sole eguali si possono tirare alla parte convessa della circonferenza, una di quà, ed un'altra di là della minima. *Facciasi* (2) *l'angolo AEL eguale all'angolo AEH: ciò fatto, si unisca la retta AL* (3): siccome i due raggi EA, EL sono eguali fra loro, e la EA è comune; così saranno i due lati HE, EA del triangolo HEA eguali a due lati LE, EA del triangolo LEA, ciascuno a ciascuno; quindi, essendo dalla costruzione l'angolo HEA eguale all'angolo LEA, sarà la base AH eguale alla base AL. Ora non si può immaginare una terza linea retta eguale a coteste due; imperciocchè, se essa è più vicina alla minima AF sarà minore, se è più lontana dalla minima sarà maggiore delle due suddette linee; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

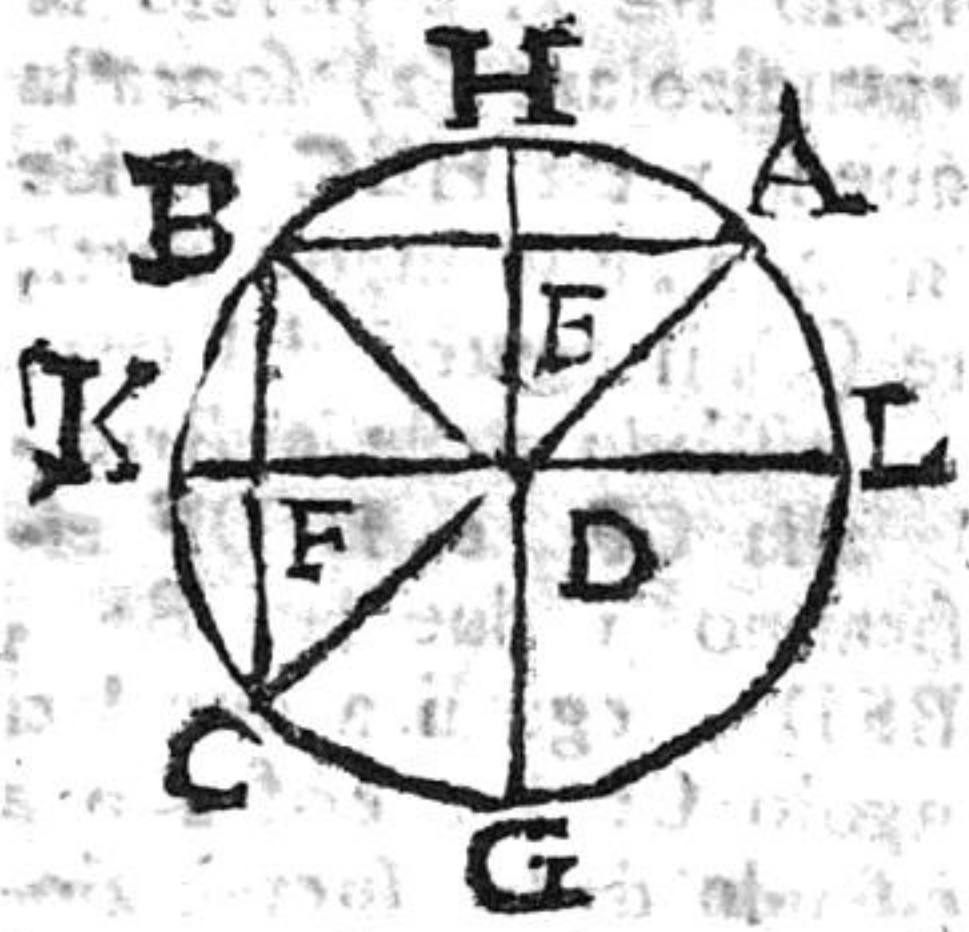
(1) *Prop.* 24. I.
(2) *Prop.* 23. I.
(3) *Dim.* 3.

Digitalizzato da Google

PROP. IX. PROBLEMA.

Si da un punto preso dentro la circonferenza d'un cerchio cadano alla detta circonferenza più di due linee rette eguali, il detto punto sarà centro del cerchio.

I.



Dentro al cerchio ABCG sia preso il punto D, dalle quali cadano alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali, cioè DA, DB, DC: io dico, che il punto D è centro del cerchio ABCG.

II.

Si congiungano (1) *le rette AB. BC.*

Ciascuno delle quali si secchi per mezzo (2) *ne' punti E, ed F.*

Si uniscano (3) *le rette DE, DF.*

Si distendano (4) *in H. e G. in K, ed L.*

(1) *Dim.* I. (2) *Prop.* 10. I.
(3) *Dim.* I. (4) *Dim.* 2.

Digitalizzato da Google

III.

Siccome dalla costruzione la AE è eguale alla BE, e la ED è comune ; così saranno i due lati AE, ED del triangolo AED eguali a due lati BE, ED del triangolo BED, ciascuno a ciascuno : quindi, essendo dalla suppofizione la base AD, eguale alla base BD ; sarà (1) l' angolo AED eguale all'angolo BED: e perciò la retta HEG sarà perpendicolare (2) sopra la BA. Secondo dunque la retta HEC divide la sottesa BA per mezzo, e ad angoli retti, essa deve contenere (3) il centro del cerchio. Similmente, essendo dalla costruzione la BF eguale alla CF, e la DF essendo comune ; saranno i due lati BF, FD del triangolo BFD, eguali a due lati CF, FD del triangolo CFD, ciascuno a ciascuno: quindi essendo dalla suppofizione la base BD eguale alla base CD, sarà l'angolo BFD eguale (4) all'angolo CFD: e perciò la retta KFL sarà perpendicolare (5) sopra la BC. Secondo dunque la retta KFL la sottesa BC per mezzo, e ad angoli retti, essa deve contenere (6) il centro del cerchio. Laonde, dovendosi il centro ritrovare, così nella retta HG, come nella retta KL, è forza, che sia il punto

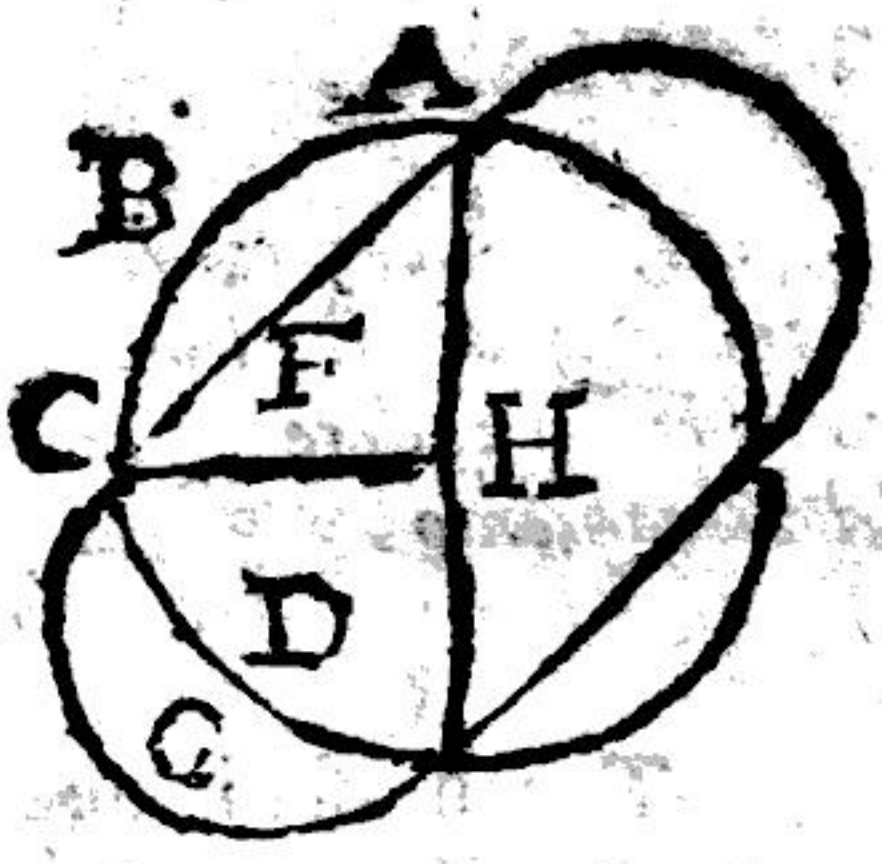
(1) *Prop.* 8. I. (2) *Def.* 10. I.
(3) *Cor.* 1. *della pr.* 1. (4) *Prop.* 8. I.
(5) *Def.* 10. (6) *Cor.* 2. *della pr.* 1.

Digitalizzato da Google

punto D, il quale solamente è comune all'una, ed all'altra; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. X. TEOREMA.

Un cerchio non seca un'altro cerchio in più di due punti.



I.

Siano i due cerchi ABCDE, AFCGE; io dico, che essi non si possono secare in più di due punti.

II.

Se mai è possibile, si sechino in tre punti.

quali siano A, C, E.

Si ritrovi il centro del cerchio ABCDE (1), *il quale sia H.*

Si uniscano (2) *HA, HC, HE.*

III.

Siccome dalla costruzione H è il centro del cerchio ABCDE; così le linee HA, HC, HE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra loro (3). Quindi, essendosi dentro al cerchio AFCGE

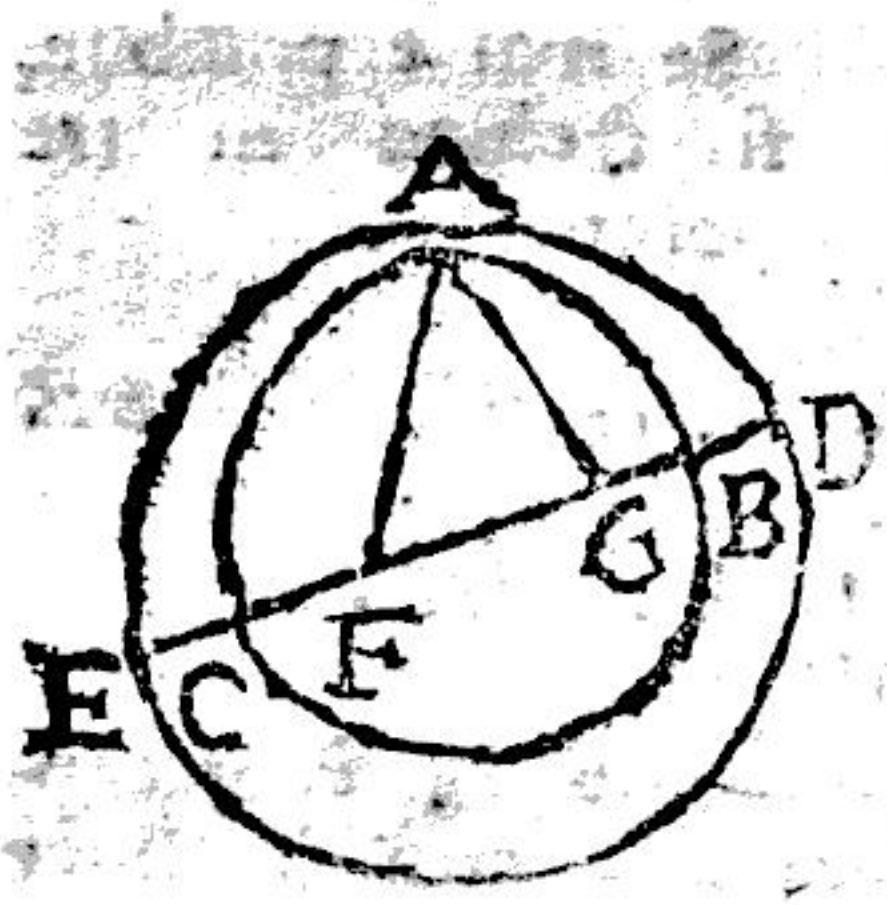
(1) *Pr. 1. di questo.* (2) *Dim. 1.*
(3) *Def. 15.*

Digitalizzato da Google

GE preso il punto H, dal quale cadono alla di lui circonferenza più di due linee rette eguali: esso sarà il centro (1) dell' istesso cerchio AFCGE: ma dalla costruzione è centro parimente del cerchio ABCDE: dunque due cerchi, che si secano hanno il medesmo centro; ciocchè non potendo sussistere (2), ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XI. TEOREMA.

La linea retta, che unisce i centri di due cerchi, che si toccano al di dentro, prolungata verrà a cadere nel punto del toccamento.



I.

Tocchinsi i due cerchi AED, ACB al di dentro nel punto A, io dico, che la linea, la quale congiugne i centri de' cerchi suddetti prolungata verrà a cadere nel punto del toccamento A.

II.

Si ritrovino (3) *i centri de' due cerchi, e sia*

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr. 5. di questo.*
(3) *Pr. 1. di questo.*

Digitalizzato da Google

e sia per esempio F il centro del cerchio esteriore, e G il centro del cerchio interiore.

Si unisca (1) *la* FG, *la quale, se mai è possibile, distesa dall' una parte, e dall' altra non vadi nel punto del toccamento A, ma più tosto ne' punti* D, *ed* E.

Si uniscano (2) *le due* AF, AG.

III.

Nel triangolo AGF i due lati AG, GF (3) sono maggiori del rimanente AF: ma AF è eguale ad FD (4): perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque saranno similmente le due AG, GF maggiori (5) di FD; il perchè togliendone via la FG, la quale è comune, rimarrà l'avanzo AG maggiore (6) dell'avanzo GD: ma essendo dalla costruzione G centro del circolo interiore, la GA è eguale alla GB (7), dunque sarà similmente la GB maggiore (8) della GD; vale a dire la parte maggiore del suo tutto: ciocchè non potendo sussistere, ne segue la verità del Teorema in questione.

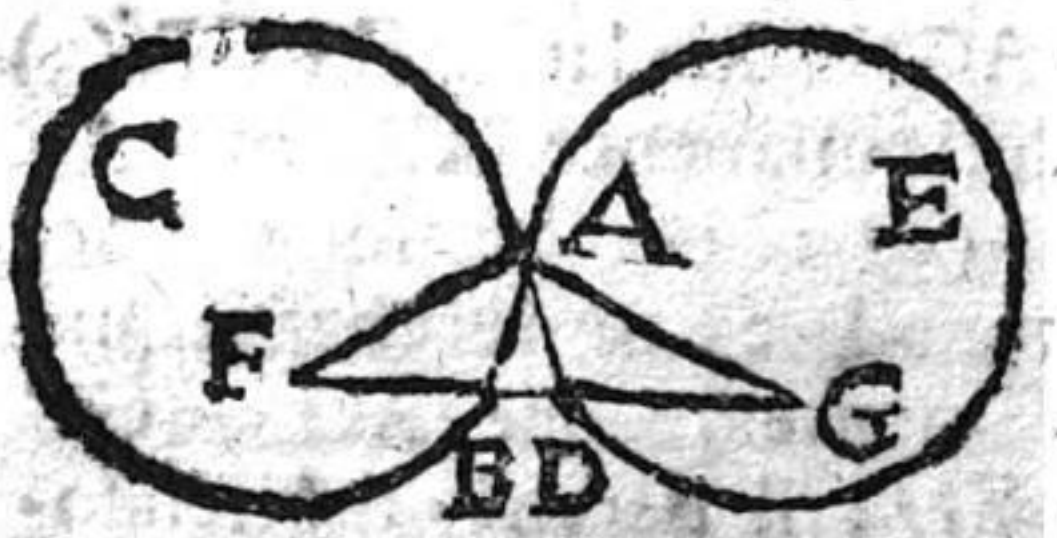
PROP.

(1) *Dim.* 1.
(2) *Dim.* 1.
(3) *Pr.* 20. I.
(4) *Def.* 1. 5. I.
(5) *Assio.* 1.
(6) *Assio.* 5.
(7) *Def.* 15.
(8) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

PROP. XII. TEOREMA.

La linea diritta, la quale unisce i centri di due cerchi, che si toccano al di fuori, passa per lo punto del toccamento.



I.

Tocchinsi i due cerchi ABC, ADE al di fuori nel punto A, io dico, che la linea retta, la quale unisce i loro centri deve passare per lo punto del toccamento A.

II.

Si ritrovino (1) *i centri de' due cerchi ABC, ADE, i quali siano F, G.*

Si unisca (2) *la FG, la quale, se mai è possibile, non passi per lo punto del toccamento A.*

Si uniscano (3) *le due AF, AG.*

III.

Siccome i punti F, e G sono respettivamente centri de' cerchi ABC, ADE; così sarà il raggio FA eguale al raggio FB, ed il raggio GA eguale al raggio GD: e perciò le due FA, AG, unite insie-

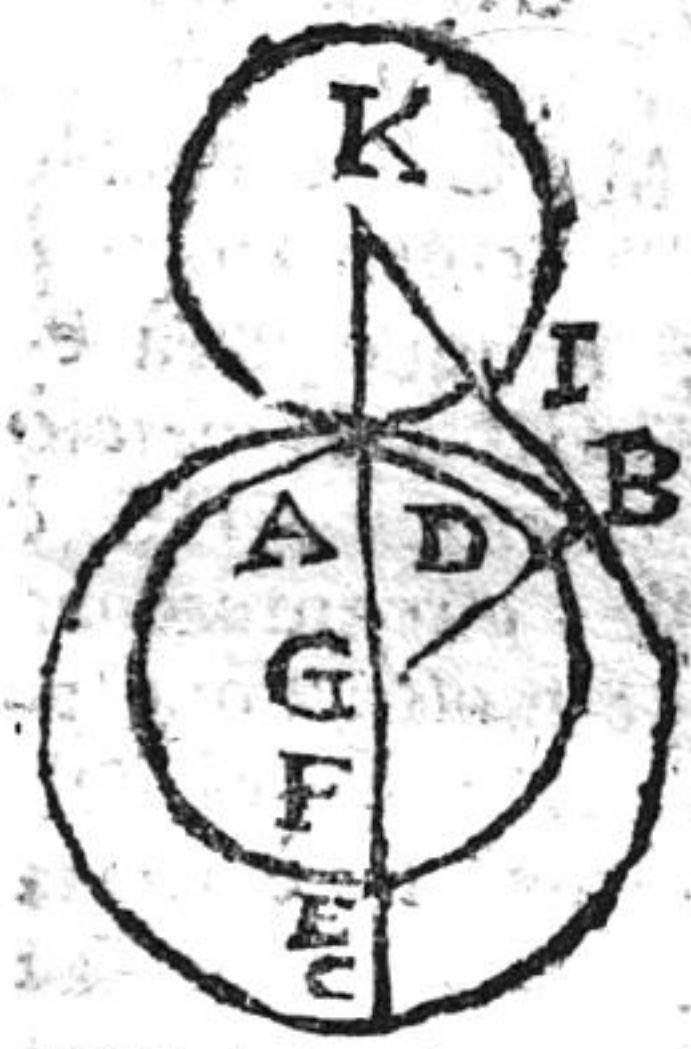
(1) *Pr. 1. di questo.* (2) *Dim. 1.*
(3) *Dim. 1.*

Digitalizzato da Google

sieme faranno eguali alle due FB, GD unite insieme: ma tutta FG è maggiore delle due FB, GD unite insieme (1); dunque sarà ancora la FG maggiore (2) delle due AF, AG: vale a dire nel triangolo AFG sarà il lato FG maggiore degli altri due FA, AG; ciocchè non potendo sossistere; ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XIII. TEOREMA.

Un cerchio, o che tocchi al di dentro, o che tocchi al di fuori un'altro cerchio, lo toccherà in un punto solo.



I.

Tocchinsi i due cerchi ABC, ALE al di dentro, ed i due cerchi ABC, AI al di fuori nel punto A, io dico, che essi si toccheranno in un punto solo, il quale è A.

II.

Supponendo primieramente, che i cerchi ABC, ADE si tocchino al di dentro.

Si

(1) *Assio.* 9. (2) *Assio.* 1.

Si trovino (1) *i loro centri, i quali sia-*
no G, e l F.

Si unisca (2) *la GF, la quale prolunga-*
ta verrà a cadere nel punto del toccamento
A (3).

Si tiri la retta GDB ad arbitrio.

Supponendo, poi che i cerchi ABC,
AI si tocchino al di fuori.

Si trovino (4) *ancora i loro centri K,*
ed F.

Si unisca (5) *KF, la quale passerà per lo*
punto (6) *del toccamento A.*

Si tiri ad arbitrio la retta KIB.

III.

I. Siccome nel diametro AC del cerchio ABC si è preso il punto G diverso dal centro F; così sarà (7) GC la massima, e GA sarà la minima; e perciò sarà GA minore di GB. Ma GA è eguale a GD (8); perchè G dalla costruzione è centro del circolo ADE; dunque sarà eziandio (9) GD minore di GB. E perciò il punto D della circonferenza ADE è diviso dal punto B della circonferenza ABC: ora la medesima dimostrazione avendo luogo ancora negli altri punti delle due circonferenze, poichè si è tirata ad

(1) *Pr.* 1. *di questo.* (2) *Dim.* 1.
(3) *Pr.* 1. *di questo.* (4) *Pr.* 1. *di questo.*
(5) *Dim.* 1. (6) *Pr. ant.*
(7) *Pr.* 7. *di questo.* (8) *Def.* 15. I.
(9) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

ad arbitrio la retta GDB, ne ſiegue, che li due cerchi ABC, BDE ſi toccano nel ſolo punto A.

II. Inoltre, perchè fuori del cerchio ABC ſi è preſo il punto K, dal quale ſi è tirata la linea KA, paſſante per lo centro, ſarà (1) KA la minima, vale a dire ſarà KA minore di KB; ma KA è eguale a KI (2) perchè ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque ſarà ſimilmente KI minore di KB (3), e perciò il punto I della circonferenza AI è diverſo dal punto B della circonferenza ABC; quindi l'iſteſſa dimoſtrazione avendo ancora luogo negli altri punti delle due circonferenze, poichè ſi è tirata ad arbitrio la retta AB; ne ſiegue, che i due cerchi ABC, AI ſi toccano nel ſolo punto A.

PROP.

(1) *Pr. 8. di queſto.* (2) *Def. 15. I.*
(3) *Aſſio. 1.*

Digitalizzato da Google

PROP. XIV. TEOREMA.

Nel cerchio le linee rette eguali ſono egualmente lontane dal centro. Quelle, che ſono egualmente lontane dal centro ſono eguali fra di loro.



I.

Nel cerchio ABCD, che ha per centro il punto F, ci ſiano due linee AB, DC. Io dico, che ſe queſte due linee ſono eguali, eſſe ſaranno egualmente lontane dal centro; e viceverſa, ſe ſono egualmente lontane dal centro, eſſe ſaranno eguali.

II.

Dal centro F ſi facciano cadere le perpendicolari FE, FG (1) ſopra le rette AB, DC.

Si uniſcano (2) le rette FA, FD.

III.

Perchè la retta FE paſſante per lo centro divide la retta AB, che non paſſa per lo centro ad angoli retti nel punto E, la dividerà (3) per mezzo nell' iſteſſo punto E,

(1) *Pr.* 12. *I.* (2) *Dim.* 3.
(3) *Pr.* 3. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

E, e perciò sarà AE eguale a BE, e per conseguente AB doppia di AE. Similmente, perchè la retta FG passante per lo centro divide la retta CD, che non passa per lo centro ad angoli retti nel punto G, la dividerà per mezzo nell'istesso punto G: e perciò sarà DG eguale a GC, e per conseguente DC doppia di DG.

Ciò permesso, supponendo I. che AB sia eguale a DC, sarà (1) la mettà AE eguale alla mettà DG, ed il quadrato di AE sarà eguale al quadrato di DG, siccome ancora sarà il quadrato del raggio AF eguale al quadrato del raggio DF. Ma a cagione dell'angolo retto AEF il quadrato dell'ipotenusa (2) AF è eguale a' quadrati de' lati AE, EF: e per la medesima ragione il quadrato dell'ipotenusa DF è eguale a' quadrati de' lati DG, GF: dunque saranno similmente i quadrati de' lati AE, EF eguali a' quadrati de' lati DG, GF: quindi essendosi dimostrato, che il quadrato AE sia eguale al quadrato di DG, sarà similmente il quadrato di EF eguale al quadrato di GF: e per conseguente sarà la EF eguale alla GF. Dal che ne siegue, che le linee rette AB, DC sono egualmente lontane dal centro (3).

Sup-

(1) *Assi.* 1. (2) *Pr.* 47. *I.*
(3) *Def.* 4. *di questo.*

Digitalizzato da Google

Supponendo II. che le due rette AB, CD siano egualmente lontane dal centro F, vale a dire, supponendo, che EF sia eguale a GF, sarà il quadrato di EF eguale al quadrato di GF; siccome il quadrato del raggio FA sarà eguale al quadrato del raggio FD. Ma il quadrato del raggio FA è eguale a' quadrati di EF, ed EA (1); ed il quadrato del raggio FD è eguale a' quadrati di FG, GD: dunque saranno i due quadrati FE, e di EA insieme eguali a' due quadrati di FG, e di GD insieme: quindi, essendo il quadrato di EF eguale al quadrato di FG, sarà il quadrato di EA eguale al quadrato di GD, e per conseguente la EA sarà eguale alla GD: ma la BA è doppia della EA, e la CD è doppia della GD; dunque sarà (3) la BA eguale alla CD: ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

(1) *Pr.* 47. I. (2) *Pr.* 47. I.
(3) *Assio.* 6.

Digitalizzato da Google

PROP. XV. TEOREMA.

Di tutte le linee tirate in un cerchio, la massima è il diametro; e quella, che sta più vicina al centro è maggiore di quella, che ne sta più lontana.

I.



Nel cerchio CDFE vi siano tre linee rette CD, AB, EF, delle quali la AB sia diametro, e la CD sia più vicina al centro G della EF; io dico primieramente, che AB è la massima, vale a dire è maggiore di CD, e di EF, e di qualsivoglia altra linea tirata nel cerchio. Dico di più, che la CD è maggiore della EF.

II.

Dal punto G, si facciano (1) *cadere le perpendicolari, GH, GK sopra le rette CD, EF: Quindi, poichè la linea retta EF si suppone più lontana dal centro G della linea retta CD, sarà* (2) *la GK maggiore della GH.*

Ta-

(1) *Prop.* 12. *I.* (2) *Def.* 5. *di questo.*

Digitalizzato da Google

Tagliſi dunque (1) *la* GL *eguale alla* GH.

Dal punto L *s' innalzi* (2) *la perpendicolare* LM *ſopra la* GK, *la quale ſi diſtenda* (3) *ſino al punto* N.

Si uniſcano (4) *le rette* GC, GD, GM, GE, GF.

III.

I. Siccome la GA è eguale alla GC, e la GB è eguale alla GD, perchè ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza, così ſarà tutta la AB eguale alle due GC, GD unite inſieme. Ma le due GC, GD unite inſieme ſono maggiori (5) di CD; dunque ancora AB ſarà maggiore (6) di CD.

II. Siccome dalla coſtruzione le perpendicolari CL, GH cadenti dal centro G ſopra le rette CD, MN ſono eguali fra di loro; così le medeſime rette CD, MN ſaranno (7) parimente eguali; ma MN è maggiore della EF (8), a cauſa che ſono eſſe baſi de' triangoli MGN, EGF, i quali hanno i lati MG, GN eguali a lati EG, GF, e l'angolo MGN contenuto ſotto i primi lati maggiore dell'angolo EGF contenuto ſotto gli altri due lati; dunque ſarà parimente la

CD

(1) *Pr.* 3. *I.*
(2) *Dim.* 11. *I.*
(3) *Dim.* 2.
(4) *Dim.* 1.
(5) *Prop.* 20. *I.*
(6) *Aſſio.* 1.
(7) *Pr. antec.*
(8) *Pr.* 24. *I.*

Digitalizzato da Google

CD maggiore (1) della EF.

PROP. XVI. TEOREMA.

I. *la linea retta, che insiste perpendicolarmente all' estremità del diametro d'un cerchio, cade tutta fuori di esso, vale a dire è tangente. II. nel luogo, che è fra la detta linea, e la circonferenza del cerchio non ci può cadere alcun' altra linea retta. III. l'angolo del mezzo cerchio è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo. IV. l'angolo formato dalla circonferenza del cerchio, e dalla tangente, il quale suole chiamarsi* angolo del contratto *è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo.*



II.

Sia il cerchio ABC intorno al centro D, ed al diametro AB; io dico primieramente, che la linea retta AE tirata dal punto A ad angoli retti sopra la AB cade tutta fuori del cerchio, e per conseguente è tangente. Inoltre, che nel luogo, che è fra la perpendicolare AE, e la circonferenza AC del cerchio non può cadervi altra linea retta. Di più, che l'angolo del mezzo

H cer-

(1) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

cerchio CAB è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo; e finalmente, che l'angolo mistilineo CAE formato dalla circonferenza del cerchio, e della perpendicolare, il quale angolo suole chiamarsi angolo *del contratto* sia minore d'ogni angolo acuto rettilineo.

III.

I Che la linea retta AE, cada tutta fuori del cerchio, si dimostra così. *Prendasi nella AE qualsivoglia punto F; e si unisca* (1) *la DF*. Per vicino che sia il punto F al punto A, sempre in tal modo si verrà a costituire il triangolo DAF, il quale è rettangolo in A dalla supposizione: laonde, essendo l'angolo DAF retto, sarà l'angolo DFA minore del retto (2); e per conseguente il lato DF sarà maggiore (3) del lato DA: ma il lato DA è eguale a DC; perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza: dunque sarà parimente DF maggiore di (4) DC: e perciò il punto F sarà più in là della circonferenza del circolo. Ora, poichè l'istessa dimostrazione và per tutti gli altri punti, poichè il punto F è stato preso ad arbitrio; ne siegue, che la perpendicolare AE cade tutta fuori del cerchio.

II. Che poi nel luogo fra la tangente AE, e la circonferenza del cerchio non pos-

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 17. *I.*
(3) *Pr.* 19. *I.* (4) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

poſſa cadervi altra linea retta, ſi dimoſtra così. Nell' angolo DAE *ſi tiri qualſivoglia retta AH*: per vicina che ella ſia alla tangente AE, vale a dire, per acuto, che ſia l'angolo HAE, ſempre l'angolo rimanente DAH ſarà minore del retto: *e perciò dal punto D ſi potrà* (1) *far cadere ſopra la retta AH la perpendicolare DH*. Poichè dunque nel triangolo DHA, l'angolo DHA è retto, e l'angolo DAH è acuto, ſarà il lato DA (2) maggiore del lato DH: ma DA è eguale a DC, perchè ſono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque ſarà DC maggiore di DH. Quindi il punto H della retta AH ſtarà dentro la circonferenza del cerchio; e per conſeguenza la retta AH deve eſſere entrata dentro.

III. Quindi l'angolo del mezzo cerchio CAB dovrà eſſere maggiore di ogni angolo acuto rettilineo: perciocchè, ſe vi fuſſe qualche angolo acuto rettilineo maggiore dell'angolo CAD, ne ſeguirebbe, che adattato uno de' lati di coteſto angolo ſopra il diametro AB a cominciare dal punto A, l'altro lato dovria cadere fra la circonferenza AC, e la tangente AE: ciocchè ſi è dimoſtrato impoſſibile.

IV. E finalmente l'angolo del contratto CAE deve eſſere minore d'ogni angolo acuto rettilineo. Perciocchè, ſe vi poteſ-

(1) *Pr.* 12. *I.* (2) *Pr.* 19. *I.*

Digitalizzato da Google

le essere un angolo acuto rettilineo minore dell'angolo EAC, ne seguirebbe, che disteso uno de' lati di cotesto angolo sopra la tangente AE, a cominciare dal punto A, l'altro lato dovria cadere fra la tangente AE, e la circonferenza AC; ciocchè si è dimostrato essere impossibile.

COROLLARIO.

Da quì è manifestato, che una linea retta sola può toccare il cerchio in un punto dato; e che ogni altra linea retta deve entrare dentro al cerchio: Che per tirare la tangente al punto A, fa duopo 1. *tirare il diametro ADB, e* 2. *dal punto A innalzare* (1) *la perpendicolare AE sopra il detto diametro AB.*

(1) *Pr.* 11. *I.*

Digitalizzato da Google

PROP. XVII. TEOREMA.

Da un punto dato fuori d'un cerchio tirare una linea, che tocchi il medesimo cerchio.



I.

Sia dato il punto A fuori del cerchio BC, fa duopo tirare dal punto A una linea, che tocca il detto cerchio BC.

II.

Si trovi il centro D (1) *del cerchio BC.*

Si unisca (2) *la AD.*

Dal centro D, col raggio AD descrivasi (3) *il cerchio AF.*

Dal punto B s'imalzi (4) *la BF perpendicolare sopra la AD.*

Si unisca (5) *la DF:*

Si unisca la AC: io dico, che questa tocca il cerchio nel punto C.

III.

Siccome D è centro de' cerchi BC, AF; così le linee rette DC, DB, e DA, DF cadenti dal centro alle circonferenze saranno eguali fra di loro: Quindi i due

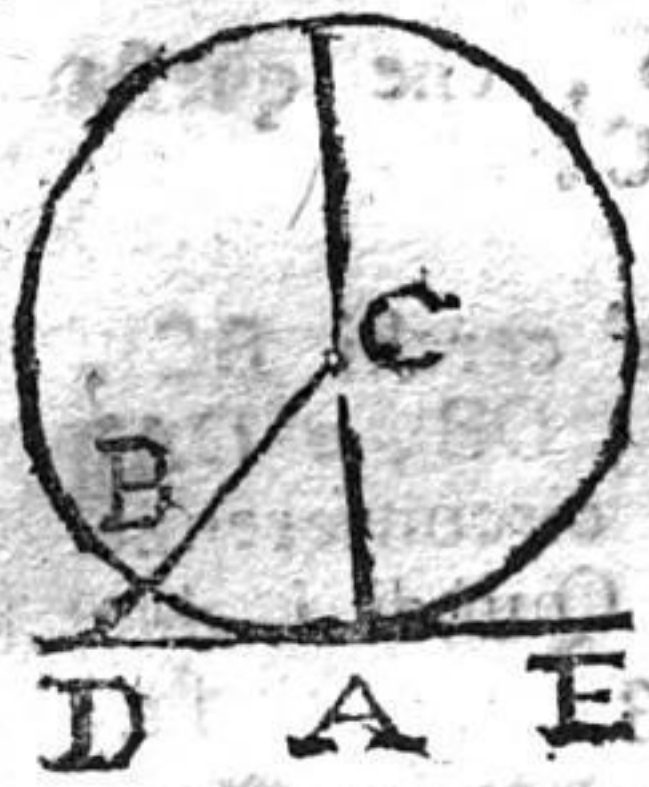
(1) *Pr.* 1. *di questo.* (2) *Dim.* 1.
(3) *Dim.* 3. (4) *Pr.* 11. *l.*
(5) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

lati DC, DA del triangolo CDA saranno eguali a due lati BD, DF del triangolo BDF, ciascuno a ciascuno: sicchè, essendo in oltre l'angolo CDA contenuto sotto i lati del primo triangolo eguale all'angolo BDF contenuto sotto i lati dell'altro triangolo, sarà (1) l'angolo DCA eguale all'angolo DBF: ma quest'angolo DBF dalla costruzione è retto: dunque l'angolo DCA sarà parimente retto; quindi instendo la retta CA perpendicolarmente all'estremità del raggio CA, essa toccherà (2) il cerchio BC nel punto C; ciocchè doveva farsi.

PROP. XVIII. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal centro al punto del toccamento si tira una linea retta, cotesta sarà perpendicolare alla tangente.



I.

La linea retta DE tocchi il cerchio AFB nel punto A, e dal centro C al punto A del toccamento s'intenda tirata la linea retta CA; io dico, che essa è perpendilare alla tangente DE.

II.

(1) *Pr.* 4. I.

(2) *Pr. ante.*

Digitalizzato da Google

II.

Se mai è possibile non sia la CA perpendicolare alla DE; ma sia più tosto la CBD.

Perchè nel triangolo CDA l'angolo CDA si vuole retto, sarà l'angolo CAD acuto; e perciò l'angolo CDA sarà maggiore dell'angolo CAD; il perchè il lato CA sarà maggiore (1) del lato CD; ma CA è eguale a CB, perchè sono linee cadenti dal centro alla circonferenza; dunque sarà parimente CB maggiore (2) di CD: vale a dire sarà maggiore del tutto, ciocchè non potendo sussistere, ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XIX. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal punto del toccamento s'innalza una perpendicolare alla tangente, nella perpendicolare si troverà il centro del cerchio.



I.

La linea retta DE tocchi il cerchio AB nel punto A, e dal punto A s'intenda innalzata la perpendicolare AB alla tangente DE; io dico, che in questa perpendicolare si ritrova il centro del cerchio.

(1) *Pr.* 19. *I.* (2) *Pr. ant.*

Digitalizzato da Google

II.

Se mai è possibile trovisi il centro del cerchio fuori della perpendicolare AB, come per esempio in F.

Si unisca (1) *la FA.*

III.

Perchè la FA unisce il centro del cerchio col punto del toccamento A, essa sarà perpendicolare alla tangente DE (2): quindi l'angolo FAE sarà retto: ma dalla suppositione è retto parimente l'angolo BAE; dunque l'angolo FAE minore sarà eguale al maggiore CAE (3): ciocchè non potendo sossistere; ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XX. PROBLEMA.

Nel cerchio l' angolo al centro è doppio dell' angolo alla circonferenza, purchè però l' uno, e l' altro abbiano l' istessa circonferenza per base.

I.



Nel cerchio ABC ci sia l' angolo al centro BDC, e l' angolo alla circonferenza BAC, l' uno, e l' altro de' quali abbia per base la circonferenza BC; io dico, che l' angolo BDC è doppio dell' angolo BAC.

II.

(1) *Dim.* 1.
(2) *Pr. ant.*
(3) *Assio.* 10.

Digitalizzato da Google

II.

Si unisca la retta AD (1), *la quale si distenda fin' al punto E* (2); *e sia in primo luogo il punto* E, *fra' punti B, e C.*

Perchè D è centro del cerchio ABC; sarà il raggio DA eguale al raggio DB; quindi l' angolo DAB sarà (3) eguale all' angolo DBA, e per conseguente tutti due insieme saranno doppj dell' angolo DAB: ma tutti due insieme sono eguali all' angolo esteriore BDE (4); dunque l' angolo esteriore BDE sarà doppio dell' angolo DAB. Nell' istessa maniera si dimostrerà, che l' angolo EDC sia doppio dell' angolo DAC: quindi tutto l' angolo al centro BDC sarà doppio dell' angolo alla circonferenza BAC.

Cada in secondo luogo il punto E più in là del punto B in riguardo al punto C; io dico parimente, che l' angolo al centro CDB sia doppio dell' angolo alla circonferenza CAB. Perchè il raggio DA è eguale al raggio DC, sarà l' angolo DAC eguale (5) all' angolo DCA; e tutti due insieme saranno doppj all' angolo DAC: il perchè essendo tutti due insieme eguali all' angolo esteriore CDE, (6) sarà l' angolo esteriore CDE doppio dell' angol DAC. Nell' istesso modo si dimostrerà,

(1) *Dim.* 1. (2) *Dim.* 2.
(3) *Pr.* 5. *I.* (4) *Pr.* 32. *I.*
(5) *Prop.* 5. *I.* (6) *Prop.* 32. *I.*

Digitalizzato da Google

che l' angolo BDE ſia doppio dell' angolo BAD, dal che ſi raccoglie, che l' angolo rimanente CDB ſia doppio dell' angolo rimanente CAB; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

ANNOTAZIONE.

Eſſendo l' angolo al centro BDC doppio dell' angolo alla circonferenza BAC, ne ſiegue, che ſe l' angolo al centro ſia eſempio di 80. ovvero di 100. gradi, l' angolo alla circonferenza debba eſſere di 40 gradi, ovvero di 50. gradi; quindi, poichè di quanti gradi è l' angolo al centro BDC, d' altrettanti è la ſua baſe BC, ſiccome tutta la baſe BC miſura l' angolo al centro BDC, così la metà dell' iſteſſa baſe BC miſurerà l' angolo alla circonferenza BAC.

Digitalizzato da Google

PROP. XXI. TEOREMA.

Gli angoli costituiti nella medesima porzione del cerchio sono eguali fra di loro.



I.

Sia il cerchio ABCDE, e nella medesima porzione AEDC ci siano gli angoli AEC, ADC: io dico, che essi sono eguali fra loro.

II.

Ritrovisi (1) *il centro F del cerchio ABCDE.*

Si uniscano le due FA, FC (2).

III.

Perchè l'angolo al centro AFC, e li due angoli alla circonferenza AEC, ADC hanno la medesima circonferenza ABC per base; sarà (3) l'angolo AFC doppio, così dell'angolo AEC, come dell'angolo ADC: quindi gli angoli AEC, ADC saranno (4) eguali fra di loro; ciocchè doveva dimostrarsi.

(1) *Pr.* 1. *di questo.* (2) *Dim.* 1.
(3) *Pr. ant.* (4) *Ass.* 7.

Digitalizzato da Google

PROP. XXII. TEOREMA.

Gli angoli oppoſti de' quadrilateri deſcritti ne' cerchi ſono eguali a due retti.



I.

Sia il cerchio ABCD, ed in eſſo il quadrilatero ABCD; io dico, che gli angoli oppoſti BAD, BCD, ſiccome ancora gli angoli ABC, ADC ſono eguali a due retti.

II.

Si uniſcano (1) *le rette AC, BD:*

III.

Perchè gli angoli BAC, BDC ſono nella medeſima porzione BADC, ſaranno (2) eguali fra di loro. Similmente, perchè gli angoli CAD, CBD ſono nella medeſima porzione CBAD, ſaranno (3) ancora eguali fra di loro; quindi aggiugnendo coſe eguali a coſe eguali, riuſcirà (4) tutto l'angolo BAD eguale a' due angoli BDC, CBD: aggiugnendo dunque di più comunemente, così agli angoli BDC, CBD, come all' angolo BAD il me-

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr. ant.*
(3) *Pr. ant.* (4) *Aſſiom.* 2.

Digitalizzato da Google

medesimo angolo BCD: saranno due angoli BAC, BCD eguali a' tre angoli BDC, CBD, BCD: ma questi tre angoli BDC, CBD, BCD sono eguali a due retti (1); dunque ancora li due angoli BAD, BCD saranno eguali a' due retti (2). Nell' istesso modo si dimostrerà, che gli angoli ABC, ADC eguali a' due retti; ciocchè doveva dimostrarsi.

Questa medesima verità si può dimostrare altrimenti così: s'angolo ADC, che sta alla circonferenza è misurato dalla metà dell'arco ABC, che gli serve di base. Similmente l'angolo ABC è misurato dalla metà dell'arco ADC, che gli serve di base; quindi tutti due gli angoli ADC, ABC saranno misurati dalla metà di tutta la circonferenza ABCD; e per conseguente i detti due angoli conterranno 180. *che fanno il valore di due angoli retti.*

Della somiglianza delle Porzioni:

DEFINIZIONE.

Due porzioni si chiamano simili, quando gli angoli nelle suddette due porzioni sono eguali fra di loro.

SPIE-

(1) Pr. 32. I. (2) Assio. 2.

Digitalizzato da Google

SPIEGAGIONE.

Quindi per assicurarsi, se le porzioni BAC, EDF *siano simili, fa duopo tener questa regola. Bisogna formare nelle porzioni* BAC, EDF *gli angoli* BAC, EDF. *Ove questi due angoli si ritrovano eguali, le due porzioni saranno simili. Nè quì opponga alcuno potersi in una medesima porzione formare infiniti angoli: poichè tutti questi infiniti angoli devono per necessità essere eguali* (1) *fra di loro.*

Avvertasi quì, che essendo la porzione BAC *simile alla porzione* EDF: *quanti gradi, e parti di gradi sono nella circonferenza* BAC; *altrettanti se ne conterranno nella circonferenza* EDF: *imperciocchè supponendosi simili porzioni* BAC, EEF, *sarà l'angolo* BAC *eguale all'angolo* EDF' *quindi, poichè la mettà dell'arco* BGC: *misura l'angolo* BAC, *siccome la mettà dell'arco* EHF *misura l'angolo* EDF; *quanti gradi, e parti di gradi contiene l'arco* BGC, *altrettanti ne conterrà l'arco* EHF; *sicchè fingendosi ogni circonferenza compartita in* 360 *gradi; ne siegue, che le circonferenze* BAC, EDF *conterranno un'egual numero de' gradi: di modochè le porzioni simili si possono definire altrimenti così.* Sono quelle, le di cui cir-

(1) *Pr.* 21. *di questo.*

Digitalizzato da Google

circonferenze contengono un egual numero di gradi. *Donde poi facilmente ſi raccoglie I.* che due porzioni ſimili del medeſimo cerchio, ovvero di cerchi eguali, ſono eguali fra di loro, *e II.* che due porzioni ſimili di cerchi diſeguali ſono ancora diſeguali, e che quella porzione è maggiore, la quale ſi riferiſce al cerchio maggiore.

PROP. XXIII. TEOREMA.

Sopra una medeſima linea retta non ſi poſſono dalla medeſima ~~parte~~ coſtituire due porzioni di cerchi, ſimili, e diſeguali.

I.



Sia la linea retta AB; io dico, che non ſi poſſono ſopra di eſſa coſtituire dalla medeſima parte due porzioni di cerchi ſimili, e diſeguali.

II.

Se mai è poſſibile, ſi coſtituiſcano ſopra la linea retta AB le due porzioni di cerchi ACB, ADB, le quali ſiano ſimili, e diſeguali.

Prendaſi nella porzione maggiore il punto D ad arbitrio.

Si

Si unisca le rette (1) *DCA, DB.*
Si unisca (2) *la CB.*

III.

Perchè si vuole, che la porzione ACB sia simile alla porzione ADB, sarà l'angolo ACB eguale (3) all' angolo ADB; ma l'angolo ACB, come angolo esteriore del triangolo BDC è maggiore del suddetto angolo ADB; dunque li due angoli ACB, ADB sono nell' istesso tempo eguali, e diseguali; ciocchè non potendo sossistere, ne siegue la verità del Teorema in questione.

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se le base di due porzioni di cerchi simili sono eguali, le porzioni medesime saranno parimente eguali.



I.

Siano le base AB, CD delle due porzioni di cerchi simili AEB, CFD eguali fra di loro. Io dico, che le medesime porzioni AEB, CFD saranno eguali.

IL

(1) *Dim.* 1. (2) *Dim.* 1.
(3) *Def. ant.*

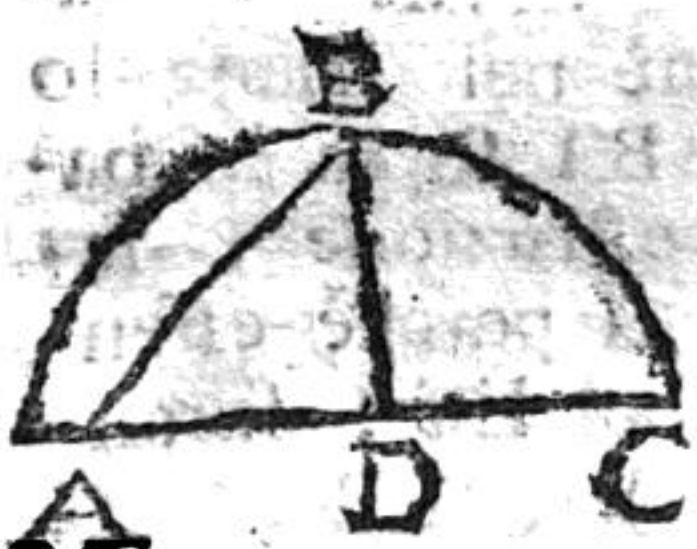
Digitalizzato da Google

II.

S' accavalli la porzione AEB sulla porzione CFD, in modochè la base AB rimanga distesa sulla base CD, e li punti A, e B si uniscano co' punti C, e D. Ciò fatto, o la porzione AEB s'unirà a puntino colla porzione EFD, ed in questo caso esse saranno eguali (1). O la porzione AEC caderà al di dentro, ovvero al di fuori dalla porzione CFD; ed allora sopra la medesima linea retta CD si saranno costituite due porzioni di cerchi simili, e diseguali: ciocchè ripugna alla porzione antecedente.

PROP. XXV. PROBLEMA.

Data una porzione di cerchio ritrovarne il centro, e poi terminarlo.



I.

Sia data la porzione del cerchio ABC: fa duopo ritrovarne prima il centro, e poi compirlo.

II.

Sechisi (2) la base AC della porzione data per mezzo nel punto D. S'in-

(1) Ass. 8. (2) Pr. 10. I.

Digitalizzato da Google

S' innalzi al punto D (1) *la retta DB perpendicolare alla baſe AC.*

Si uniſca (2) *la AB.*

Si coſtituiſca l' angolo BAB eguale (3) *all' angolo ABD.*

Si diſtenda BD fino al punto E (4). Io dico, che il punto E è centro della porzione ABC, e che per conſeguente per terminare il cerchio non ſi debba fare altro, ſe non dal centro A col raggio AE deſcrivere il di più della circonferenza, che manca.

III.

Siccome dalla coſtruzione la AD è eguale alla CD; e la DE è comune, così ſaranno li due lati AD, DE del triangolo ADE eguali a' due lati CD, DE del triangolo CDE, ciaſcuno a ciaſcuno: quindi, eſſendo l'angolo ADE eguale all' angolo CDE; perchè ciaſcuno di eſſi è retto; ſarà (5) la baſe AE eguale alla baſe CE: in oltre, perchè nel triangolo EBA gli angoli EAB; EBA ſopra la baſe AB ſono eguali dalla coſtruzione, ſarà (6) AE eguale ad EB; il perchè eſſendoſi dimoſtrata AE eguale ad EC; ſaranno (7) le tre linee rette EA, EB, EC eguali fra di loro; Perlochè il punto E dal

---

(1) *Pr.* 11. *I.*
(2) *Dim.* 1.
(3) *Pr.* 23. *I.*
(4) *Dim.* 2.
(5) *Pr.* 4. *I.*
(6) *Pr.* 6. *I.*
(7) *Aſſio.* 1.

Digitalizzato da Google

dal quale cadono alla circonferenza della porzione più di due linee rette eguali sarà centro (1) della suddetta porzione: ciocchè doveva farsi.

AVVERTIMENTO.

Se facendo l'angolo ABE eguale all'angolo ABE, la retta AE si confonde colla base della porzione: ciocchè avviene, allora quando l'altezza BD della porzione è eguale alla metà AD della sua base, la porzione allora sarà un mezzo cerchio, ed il punto D ne sarà il centro (2). *Ma, se la retta AE cade al di sotto della base AC, allora la porzione è minore d'un mezzo cerchio, ed il suo centro è fuori* (3). *Finalmente, se la retta AE cade al di sopra della base AC, in tal caso la porzione è maggiore d'un mezzo cerchio, ed il centro cade dentro alla suddetta porzione* (4).

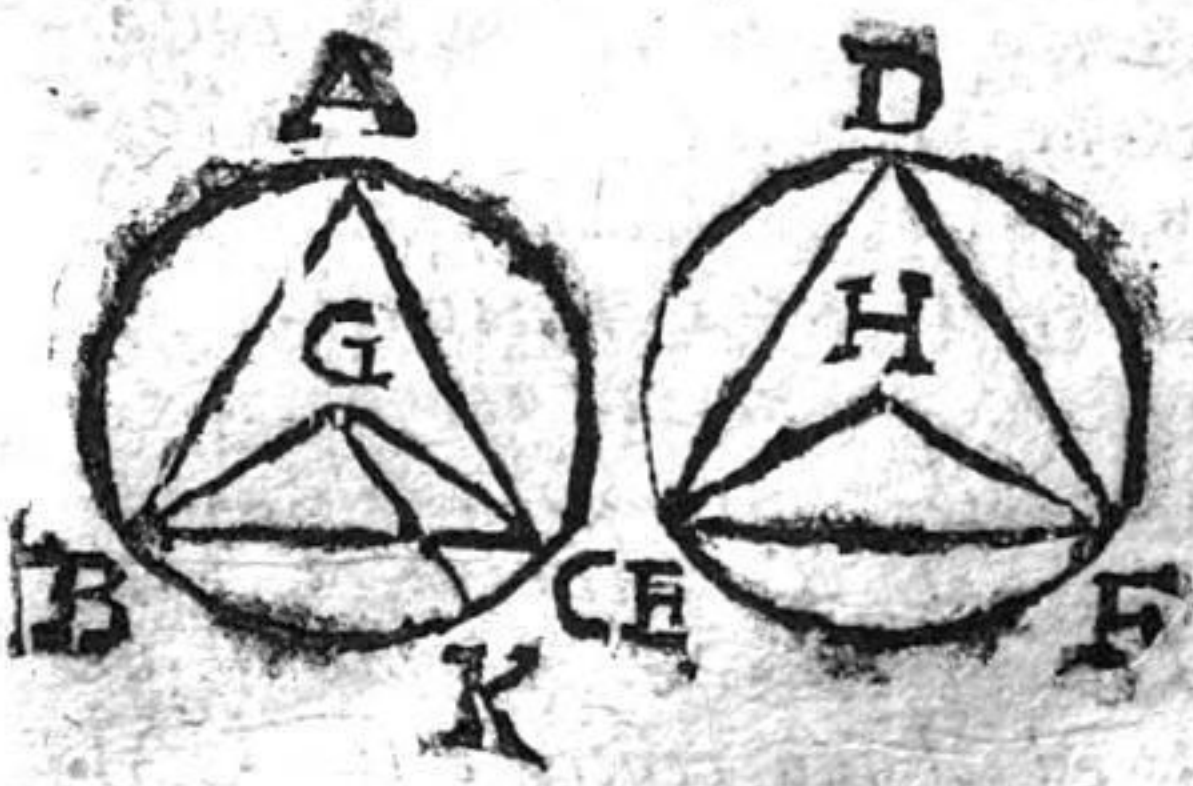
PROP.

(1) *Pr. 9. di questo.* (2) *Fig. 1.*
(3) *Fig. 2.* (4) *Fig. 3.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXVI. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali le baſe degli angoli eguali, così a' centri, come alle circonferenze ſono eguali fra di loro.



I.

Siano i due cerchi eguali ABC, DEF, a' centri de' quali ci ſiano due angoli eguali EGC, EHF, ed alle loro circonferenze due altri angoli parimente eguali BAC, EDF; dico, che le baſi, BC, EF, così degli angoli a' centri, come degli angoli alle circonferenze (nel ſuppoſto che eſſi ſono eguali), ſiano eguali fra di loro.

II.

Conjunganſi (1) *le rette* BC, EF.

III.

Perchè i cerchi BAC, EDF ſono eguali, ſaranno parimente i loro ſemidiametri eguali (2). Adunque i due lati BG GC,

(1) *Dim.* 1. (2) *Def.* 1. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

GC del triangolo BGC saranno eguali a' due lati EH, HF, del triangolo EHF, ciascuno a ciascuno. Quindi, supponendosi l'angolo BGC eguale all'angolo EHF: sarà la base (1) BC eguale alla base EF. Oltre a ciò, perchè l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF, sarà la porzione BAC simile (2) alla porzione EDF; il perchè essendosi dimostrate eguale le base delle suddette porzioni, saranno esse eguali fra di loro (3); e per conseguente la circonferenza BAC sarà eguale alla circonferenza EDF: ma tutta la circonferenza è eguale a tutta la circonferenza; dunque l'arco rimanente BC sarà eguale al rimanente arco EF: ciocchè doveva dimostrarsi.

AVVERTIMENTO.

Questa proposizione è parimente vera, nel supposto, che gli angoli eguali sono nel centro, ovvero nella circonferenza d'un medesimo cerchio, in vece di ritrovarli ne' centri, o nelle circonferenze di due cerchi eguali: di fatto la medesima dimostrazione ha luogo in quest'altro caso: quindi intendendo tutti i quattro angoli retti, che sono intorno il centro del cerchio compartiti in 100, 200, 300, 1000, 2000, *&c. angoletti*

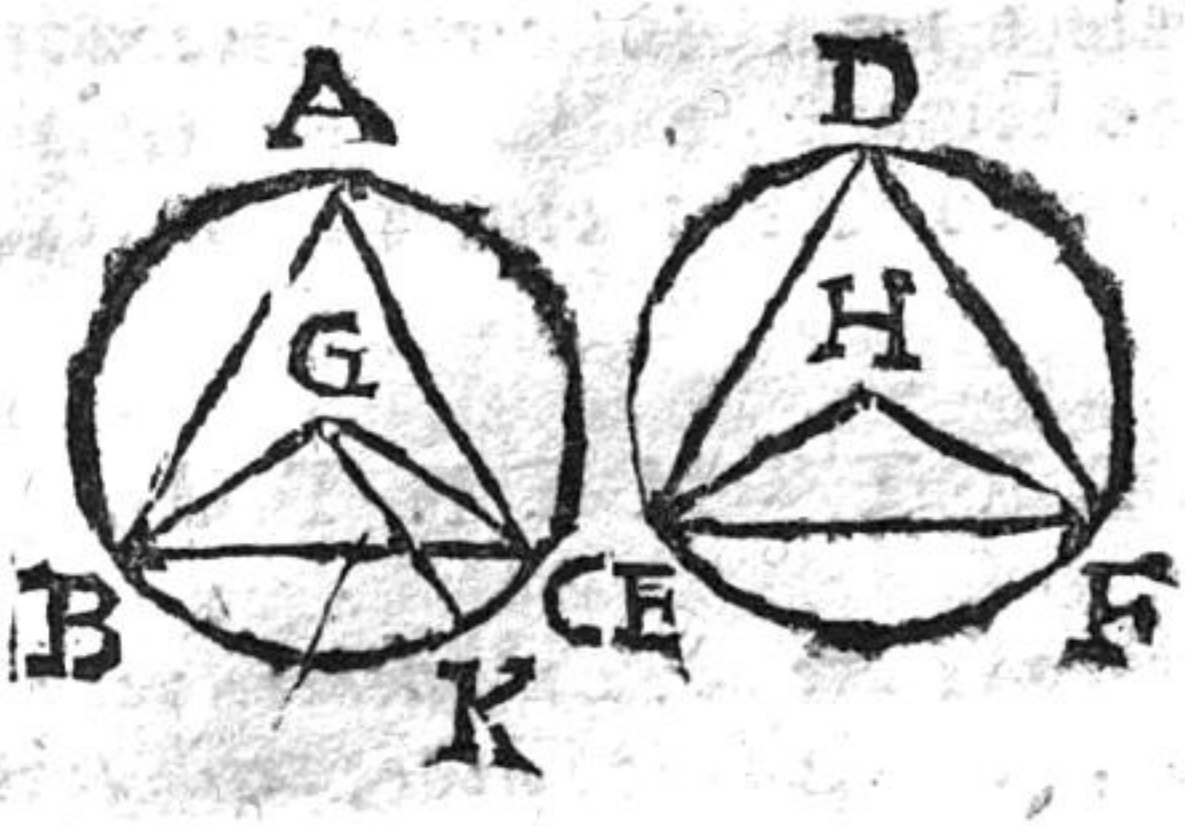
(1) *Pr.* 4. *I.* (2) *Def.* 11. *di questo.*
(3) *Pr.* 24. *di questo.*

Digitalizzato da Google

letti eguali; la circonferenza del detto cerchio rimarrà ancora compartita in 100, 200, 300, 1000, 2000, *&c. archetti eguali.*

PROP. XXVII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali, ſe le baſe degli angoli a centri, ovvero degli angoli alle circonferenze ſono eguali, gl' iſteſſi angoli ſaranno ancora eguali.



I.

Ne' cerchi eguali BAC, EDF, ſiano le baſe BC, EF degli angoli a' centri BGC, EHF; ovvero degli angoli alle circonferenze BAC, EDF, eguali fra di loro; io dico, che li ſuddetti angoli BGC, EHF, e BAC, EDF ſono eguali fra di loro.

II.

Se mai è poſſibile, non ſia l' angolo BGC eguale all' angolo EHF; ma ſia più tolto maggiore di eſſo. *Facciaſi dunque l' angolo BGK* (1) *eguale all' angolo DHF.*

III.

(1) *Pr.* 43. *I.*

Digitalizzato da Google

III.

Perchè dalla costruzione l'angolo al centro BGK è eguale all'angolo al centro EHF; sarà la base BK eguale (1) alla base EF: ma la base BC si suppone eguale alla base EF, dunque sarà l'arco minore BK eguale al maggiore BC; ciocchè non potendo sossistere, ne siegue, che l'angolo BGC sia eguale all'angolo EHF: quindi essendo l'angolo BGC doppio (1) dell'angolo BAC, e l'angolo EHG doppio dell'angolo EDF: sarà parimente l'angolo BAC eguale all'angolo EDF; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XXVIII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali le linee rette eguali secano le circonferenze in due parti tali, che la maggiore riesce eguale alla maggiore, e la minore eguale alla minore. Vedi la figura di sopra.

I.

NE'cerchi eguali ABC, DEF si siano due linee rette eguali BC, EF, le quali fechino le circonferenze nelle parti BAC, BC, ed EDF, EF; io dico, che la parte maggiore BAC riesce eguale alla parte maggiore EDF, e che la parte minore

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr. 20. di questo.*

Digitalizzato da Google

nore BC riesce eguale alla parte minore EF.

II.

Si ritrovino i centri de' due cerchi (1); *e siano G, ed H.*

Si uniscano (2) *le rette GB, GC, HE, HF.*

III.

Perchè i cerchi ABC, DEF si suppongono eguali, saranno i semidiametri loro eguali; e perciò li due lati, HE, HF del triangolo HEF, ciascuno a ciascuno. Quindi, essendo dalla suppositione la base BC eguale alla EF, sarà (3) l' angolo BGC al centro eguale all' angolo al centro EHF; dal che ne siegue, che l' arco BC sia eguale (4) all' arco EF: ma tutta la circonferenza ABC è eguale dalla suppositione a tutta la circonferenza DEF; dunque la rimanente BAC sarà eguale alla rimanente EDF; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

(1) *Pr. 1. di questo.* (2) *Dim. 1.*
(3) *Pr. 8. I.* (4) *Pr. 26. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXIX. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali sotto le eguali circonferenze sono poste linee rette eguali.

Vedi l'istessa figura di sopra.

I.

Siano i due cerchi eguali ABC, DEF, e si piglino in essi le circonferenze BAC : BC eguali respettivamente alle circonferenze EDF ; EF ; io dico, che la linea retta BC è eguale alla linea retta EF.

II.

Si trovino (1) *i centri G, ed H de' cerchi ABC, DEF.*

Si uniscano (2) *le rette GB, HC, HE, HF.*

III.

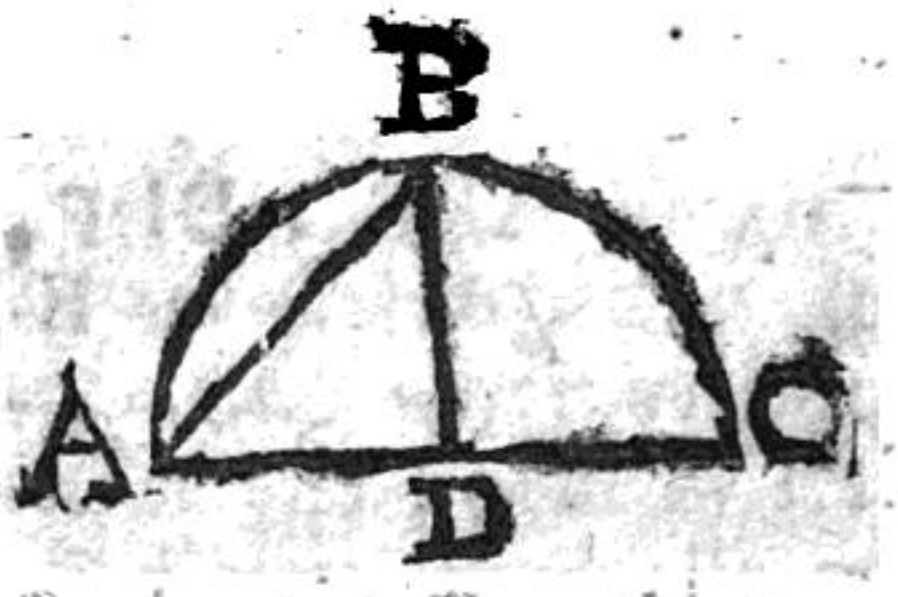
Perchè i cerchi ABC, DEF sono eguali dalla suppozizione ; saranno i due lati GB, GC del triangolo GBC eguali a' due lati HE, HF del triangolo HEF, ciascuno a ciascuno : quindi, essendo l' angolo al centro BGC eguale all' angolo al centro EHF (3) ; poichè le loro basi, BC, FE si suppongono eguali ; sarà la base BC eguale alla base EF (4) ; ciocchè doveva dimostrarsi.

(1) *Pr. 26. di questo.* (2) *Dim. 1.*
(3) *Pr. 27. di questo.* (4) *Dim. 1.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXX. PROBLEMA.

Di un' arco dato farne due parti eguali.



I.

Sia dato l'arco ABG ; fa duopo dividerlo per mezzo.

II.

Si unisca (1) *la retta AC.*

Si sechi per mezzo (2) *nel punto D.*

Dal punto D sopra la AC s'innalzi la perpendicolare DB (3).

Si tirino le rette AB, BC. Io dico, che l'arco dato ABC resta diviso per mezzo nel punto B.

III.

Imperciocchè, siccome dalla costruzione la AD è eguale alla CD, e la DB è comune: così saranno i due lati AD, DB del triangolo ADB, eguali a' due lati CD, DB del triangolo CDB ciascuno a ciascuno. Quindi, essendo di più l'angolo ADB eguale all'angolo CDB; perchè ciascuno di essi è retto dalla costruzione; sarà la base (4) AB eguale alla base BC; ma le linee rette eguali ne' cerchi eguali, e per conseguente nel medesimo cerchio se-

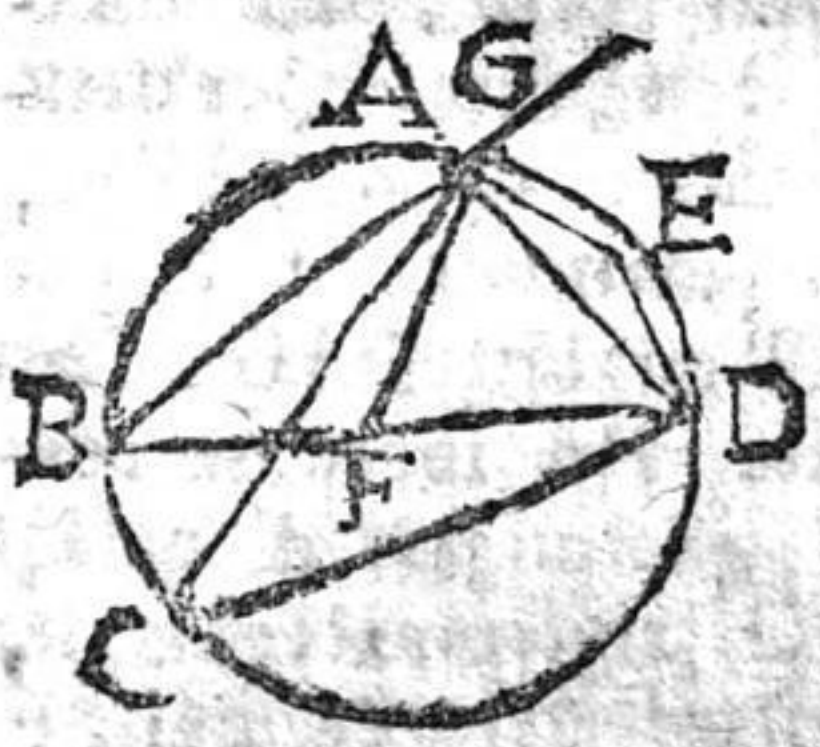
(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 10. I.
(3) *Prop.* 11. I. (4) *Prop.* 4. I.

Digitalizzato da Google

fecano le (1) circonferenze in parti eguali, la maggiore alla maggiore, e la minore alla minore; dunque farà l'arco AB eguale all'arco BC: ciocchè doveva farsi.

PROP. XXXI. TEOREMA.

Nel cerchio, l'angolo, che è nel mezzo cerchio è retto; quello, che è nella maggior porzione è minore del retto, vale a dire è ecuto: quello, che è nella minor porzione è maggiore del retto, vale a dire è ottuso: l'angolo della porzione maggiore è ottuso: l'angolo della porzione minore è acuto.



I.

Sia il cerchio ABCD, il di cui diametro sia BD, ed il centro F, nel quale s'intendano tirate le linee rette BA, AD, AE, ED, AC, CD. Io dico, che l'angolo BAD, il quale è nel mezzo cerchio BAD è retto; e l'angolo ACD, il quale è nella porzione minore AED è ottuso. Oltre a questo, io dico, che l'angolo della porzione maggiore DAB fatto dalla sottesa AD, e dalla circonferenza AB è maggiore del retto: e che l'angolo della porzione minore

(1) *Pr. 28. di questo.*

Digitalizzato da Google

)AE fatto ſimilmente dalla ſotteſa DA, e dalla circonferenza AE è minore del retto.

II.

Congiungaſi (1) *la AF.*
Si diſtenda la BA verſo G (2).

III.

I. Perchè F è centro del cerchio ABD, ſaranno le linee FB, FA, FD cadenti dal centro alla circonferenza eguali fra di loro. Quindi ſaranno iſoſceli i due triangoli BFA, AFD; e perciò ſarà l'angolo FBA eguale (3) all'angolo FAB; e l'angolo FDA eguale all'angolo FAD: e per conſeguente, aggiugnendo coſe eguali a coſe eguali, ſaranno i due angoli FBA, FDA eguali (4) all'angolo BAD; ma l'angolo eſteriore DAG è eguale (5) a'ſuddetti due angoli interiori oppoſti FBA, EDA; dunque ſarà parimente l'angolo BAD eguale (6) all'angolo DAG. Cadendo dunque la retta DA ſopra la retta BG, in modochè gli angoli di quà, e di là BAD, DAG rieſcono eguali, ſarà la DA perpendicolare (7) alla BG, e perciò l'angolo BAD ſarà retto.

II. Nel triangolo BAD, eſſendo retto l'angolo BAD; ſarà l'angolo ABD minore del retto, (8) vale a dire ſarà acuto: ma

(1) *Dim.* 1.
(2) *Dim.* 2.
(3) *Pr.* 5. *I.*
(4) *Aſſio.* 2.
(5) *Pr.* 23. *I.*
(6) *Aſſio.* 1.
(7) *Def.* 10. *I.*
(8) *Pr.* 1. *I.*

Digitalizzato da Google

ma l'angolo ACD è eguale all' angolo ABD (1), perchè sono nella medesima porzione ABCD; dunque l'angolo ACD sarà parimente acuto.

III. Nel quadrilatero ACDE gli angoli opposti ACD, AED sono eguali (2) a due retti, ma l'angolo ACD è acuto: dunque l'angolo AED sarà ottuso.

IV. Essendosi dimostrato l'angolo rettilineo DAB retto, sarà l'angolo mistilineo DAB, il quale abbraccia dentro di se il rettilineo ottuso (3).

V. Finalmente essendosi dimostrato retto l'angolo esteriore DAG; sarà l'angolo mistilineo DAE, il quale si contiene nell' angolo DAG minore del retto: ciocchè doveva dimostrarsi.

AVVERTIMENTO.

Si può la verità di questo Teorema dedurre ancora da ciò l'angolo alla circonferenza è misurato dalla metà della sua base. Imperciocchè, quando l'angolo è nel mezzo cerchio, egli ha per base mezza circonferenza, e per conseguente egli sarà retto. Quando l'angolo è nella porzione maggiore, egli ha per base meno di mezza circonferenza; il perchè la sua misura sarà minore d'una quarta parte di circonferenza, e per conseguente egli sarà acuto. Quando l'angolo è nella porzione minore, egli ha

(1) Pr. 22. di questo. (2) Pr. 22. di questo.
(3) Assio. 9.

Digitalizzato da Google

per baſe più di mezza circonferenza; il perchè la ſua miſura ſarà più di una quarta parte di circonferenza, e per conſeguente egli ſarà ottuſo.

PROP. XXXII. TEOREMA.

Se una linea retta tocca un cerchio, e dal punto del toccamento ſia tirata nel cerchio una linea retta ſecante; gli angoli, che ella fa colla tangente al ſuddetto punto del toccamento ſaranno eguali agli angoli coſtituiti nelle porzioni alterne del cerchio.

L.



La linea retta GF tocchi il cerchio ABCD nel punto *A*, *dal quale tiriſi nel ſuddetto cerchio la ſecante AD*, che comprenda colla tangente GF li due angoli GAD, FAD; io dico, che queſti due angoli agli angoli coſtituiti nelle porzioni alterne del cerchio; vale a dire *tirate le linee AE, ED, AB, BD*; io dico, che l'angolo GAD ſia eguale all'angolo AED, e che l'angolo FAD ſia eguale all'angolo ABD.

II.

S'innalzi dal punto A ſopra la GF (1) *la perpendicolare AC, la quale* (2) *paſſerà per lo centro del cerchio.*

Si

(1) *Pr.* 11. *I.* (2) *Pr.* 19. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

si unisca (1) *la* CD.

III.

I. Siccome la retta AC passante per lo centro del cerchio è diamentro, così la porzione CDA sarà mezzo cerchio; e perciò l'angolo CDA nel mezzo cerchio sarà retto (2). Quindi, perchè tutti li tre angoli CDA, DAC, ACD del triangolo CDA sono eguali due retti (3), saranno li soli due angoli DAC, ACD eguali ad un'angolo retto; vale a dire saranno eguali all'angolo CAF, il quale dalla costruzione è retto: se ne tolga via l'angolo DAC, il quale è comune; rimarrà l'angolo ACD eguale all'angolo DAF: ma l'angolo ACD è eguale all'angolo ABD (4), perchè sono nella medesima porzione di cerchio ABCD; dunque sarà parimente l'angolo DAF eguale (5) all'angolo ABD.

II. Nel quadrilatero BAED descritto nel cerchio li due angoli opposti ABD, AED sono eguali a due retti (6): ma gli angoli GAD, FAD ancora sono eguali a due retti (7); dunque saranno li due angoli ABD AED eguali a due angoli GAD, FAD. Se ne tolgano via gli angoli ABD, FAD,

(1) *Dim.* 1.
(2) *Pr. ant.*
(3) *Pr.* 32.
(4) *Pr.* 21. *di questo.*
(5) *Assio.* 1.
(6) *Pr.* 22. *di questo.*
(7) *Pr.* 13. *I.*

Digitalizzato da Google

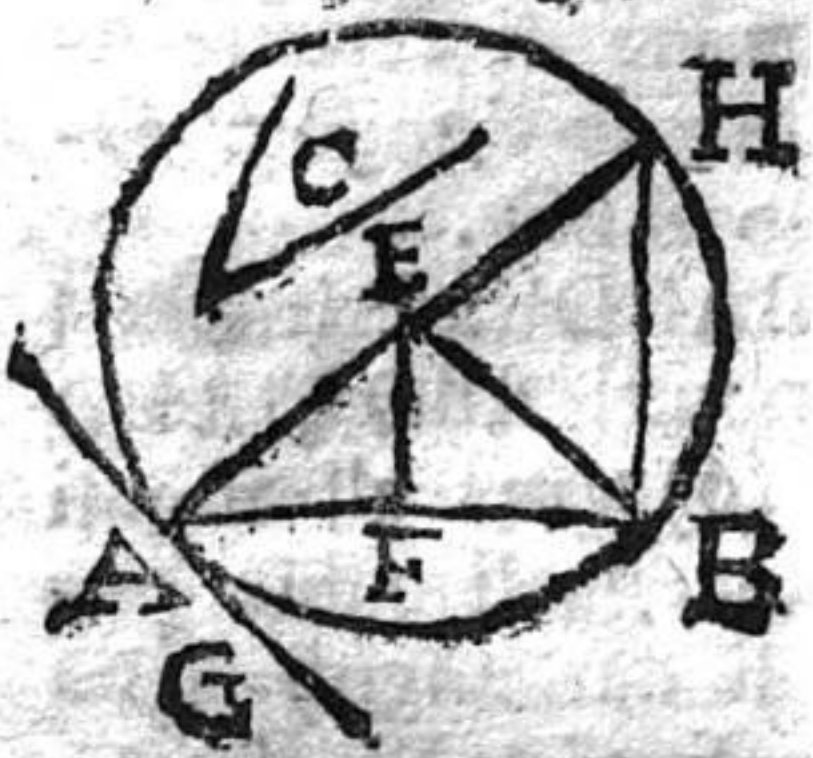
che si sono dimostrati eguali ; rimarrà (1) l'angolo GAD eguale all' angolo AED ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

Quindi, perchè l'angolo ABD è misurato dalla metà dell'arco AD, sarà ancora l'angolo DAF formato dalla tangente, e dalla secante misurato dalla metà dell'arco AD interposto fra la secante, e la tangente; così similmente l'angolo DAG sarà misurato dalla metà dell'arco DBA interposto fra la secante, e la tangente.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Sopra una linea retta data costituire una porzione di cerchio, che contenga un angolo eguale ad un angolo dato.



I.

Sia data la linea retta AB, e sia dato di più l'angolo rettilineo C; fa d'uopo descrivere sopra la retta data AB una porzione di cerchio, che contenga un angolo dato C.

II.

Si faccia (2) l'angolo BAD eguale all'angolo dato C.

Dal

(1) *Assio.* 3. (2) *Pr.* 32.

Digitalizzato da Google

Dal punto A s'innalzi (1) *la perpendicolare AH sopra la AD.*

Si tagli la AB per mezzo nel punto F (2).

Dal punto F s'innalzi la perpendicolare FE sopra la data AB (3).

Si congiunga (4) *la BE, la quale sarà eguale alla AE; perche li due triangoli AFE, BFE avendo li due lati AF, FE eguali a' due lati BF, FE ciascuno a ciascuno, e l'angolo AFE eguale all'angolo BFE, saranno per la proposizione IV. del primo libro le basi EA, EB eguali fra di loro. Per lo che se dal centro E col raggio EA si descrive un cerchio, egli dovrà passare per lo punto B:* io dico, dunque, che la porzione AHB descritta sopra la retta data AB comprende un'angolo eguale all'angolo dato C.

II.

Facciasi nella sudetta porzione l'angolo AHB. Perchè dalla costruzione la AD è tirata ad angoli retti dall'estremità del semidiametro AE sopra l'istesso semidiametro, sarà la AD tangente (5); quindi essendo la AD tangente, e la AB secante sarà l'angolo DAB formato dal tangente, e dalla secante eguale (6) all'angolo AHB, che è nella porzione alterna del cerchio; ma dalla costruzione l'angolo BAD è eguale

(1) *Pr.* 11. I. (2) *Pr.* 10. I.
(3) *Pr.* 11. I. (4) *Dim.* 1.
(5) *Pr.* 16. *di questo.* (6) *Pr.* 23. *di quest.*

Digitalizzato da Google

le all'angolo dato C ; dunque sarà ancora l'angolo AHB contenuto nella porzione descritta sopra la retta data AB eguale all'angolo dato C. Ciocchè doveva farsi.

Quì possono accadere tre casi secondo che l'angolo dato è acuto, retto, ovvero ottuso. I. *Quando l'angolo è acuto, la linea data AB rimane compresa fra la tangente AD, e la perpendicolare AE, quindi la porzione descritta sopra la AB sarà maggiore del mezzo cerchio.* II. *Quando l'angolo dato è retto, la perpendicolare AE si confonde colla data AB; e perciò la porzione descritta sopra la AB diventa mezzo cerchio.* III. *Quando l'angolo dato è ottuso la perpendicolare AE cade in mezzo alla tangente AD, e la data AB; di modo che allora la porzione, che si descrive sopra la AB è minore del mezzo cerchio. Tutto questo s'accorda assai bene colla proposizione* XXXI. *nella quale si è dimostrato.* I. Che l'angolo nel mezzo cerchio è retto. II. Che l'angolo nella porzione maggiore è acuto. III. Che l'angolo nella porzione minore è ottuso.

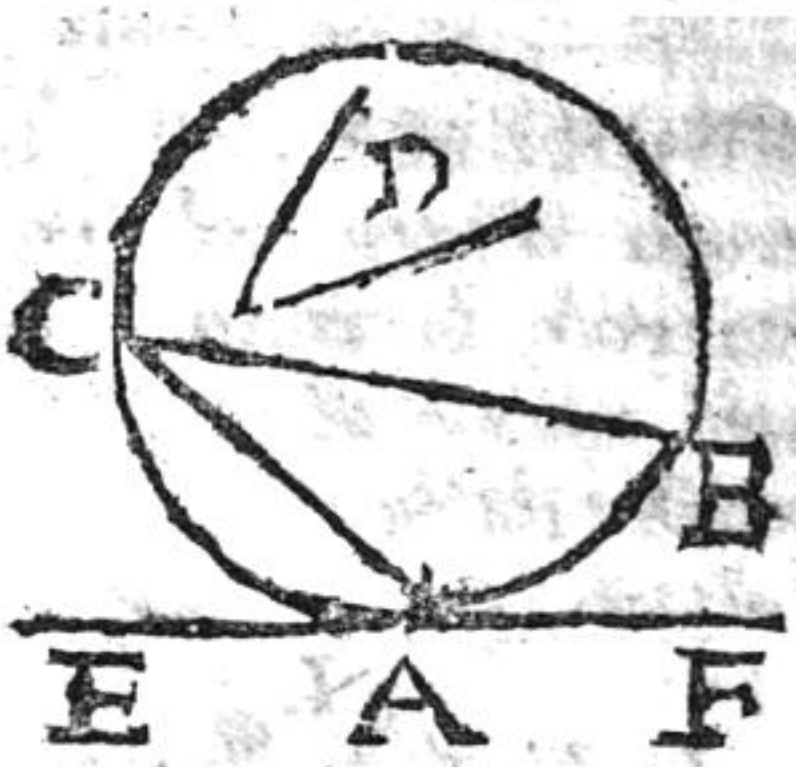
PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Tagliare da un cerchio dato una porzione, la quale comprenda un angolo eguale ad un angolo dato.

I.

Sia dato il cerchio ABC, e sia dato di più l'angolo rettilineo D: fa d'uopo tagliare dal cerchio dato una porzione, la qua-

Digitalizzato da Google



quale comprende un angolo eguale all' angolo dato D.

II.

Prendasi nella circonferenza del cerchio dato il punto A ad arbitrio.

Si tiri (1) *la retta EAF, che tocchi il cerchio dato nel punto A.*

Si faccia l'angolo EAC eguale all'angolo dato D (2). Io dico, che la porzione ABC tagliata dalla retta AC sia quella, che si cerca; vale a dire, fatto l'angolo ABC nella suddetta porzione: io dico, che esso sia eguale all'angolo dato D.

III.

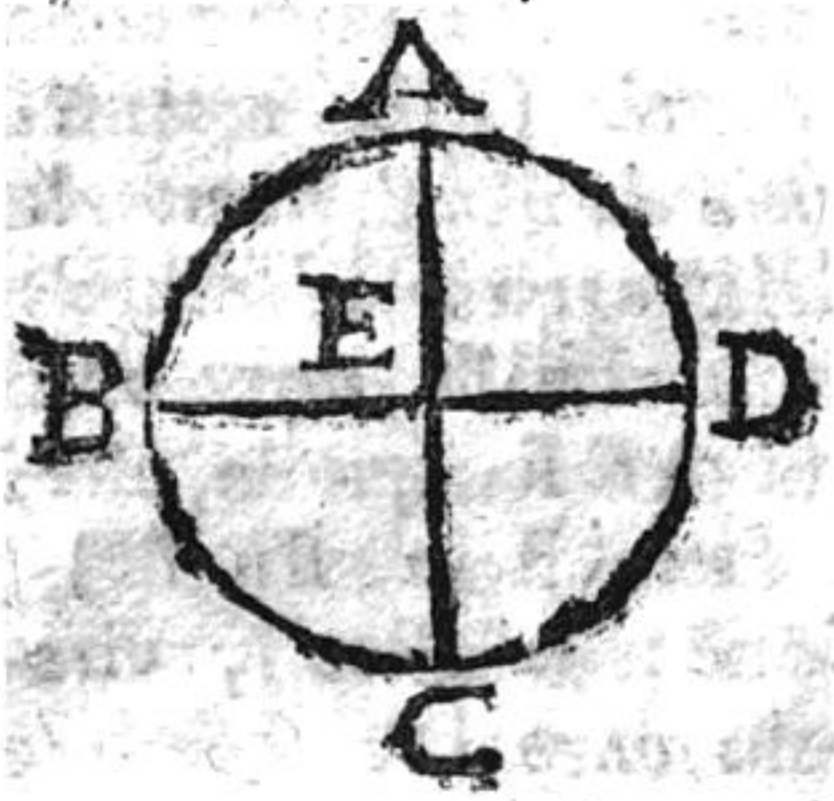
Imperciocchè, essendo EAF dalla costruzione tangente del cerchio, ed AC secante; sarà l'angolo EAC formato dalla tangente, e dalla secante eguale all'angolo ABC formato nella porzione alterna del cerchio (3): ma l'angolo EAC è eguale dalla costruzione all'angolo dato D; dunque sarà parimente l'angolo ABC eguale all'angolo dato D; ciocchè doveva farsi.

(1) *Cor. 2. della Prop. 16. di questo.*
(2) *Pr. 13. I.* (3) *Pr. 32. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXXV. TEOREMA.

Se due linee rette si secano dentro ad un cerchio, sarà il rettangolo formato dalle parti dell' una eguale al rettangolo formato dalle parti dell' altra.



I.

Sechinsi le due linee diritte AC, BD tirate nel cerchio ABCD nel punto F; io dico, che il rettangolo AEC formato dalle parti AE, ED della retta AC sia eguale al rettangolo BED formato dalle parti BE, ED della retta BD.

II.

Siccome può accadere, che le due linee AC, BD passino entrambi per lo centro.

Che una passi per lo centro, e l' altra nò.

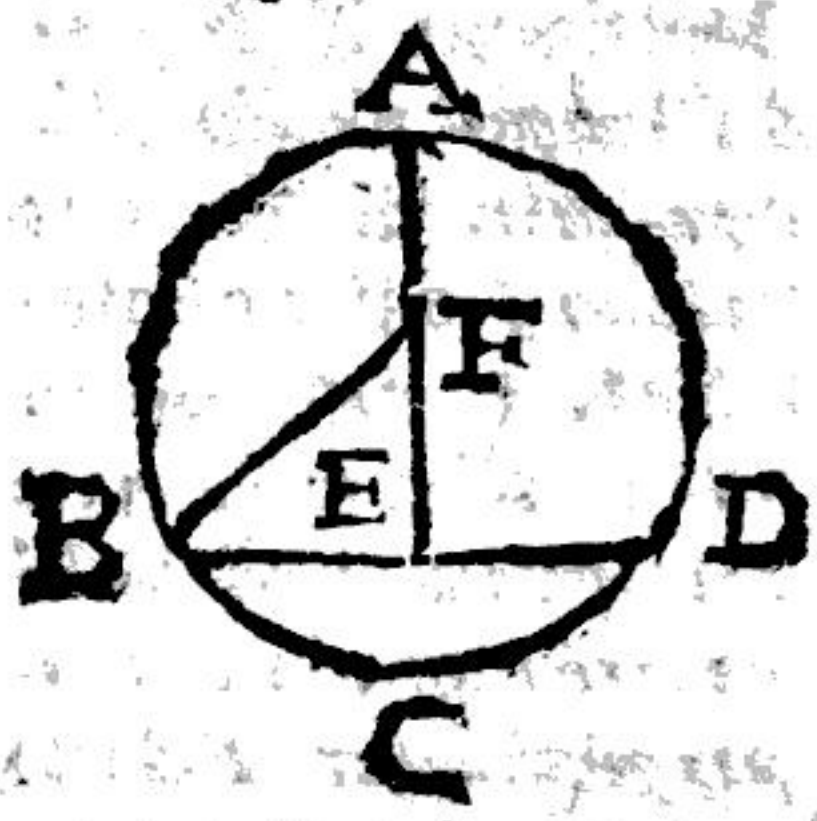
Che nè l' una, nè l' altra passi per lo centro; così io distinguo per maggior chiarezza la proposizione in tre casi.

III.

Supponendo, che ciascuna delle due linee AC, BD passi per lo centro E, che è il punto della loro interfezione, rimarrà ciascuna di esse secata per mezzo dal medesimo centro E: quindi il rettangolo AEC sarà eguale al quadrato di AE, sic-

Digitalizzato da Google

come il rettangolo BED degenererà nel quadrato di BE. Ma il quadrato di AE è eguale al quadrato di BE, perchè le linee EA, EB cadenti dal centro alla circonferenza ſono eguali fra di loro: dunque ſarà parimente il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED.



II. Supponendo poi, che la linea AC paſſi per lo centro F, e la linea BD non paſſi per lo centro. *Si uniſca la* BF (1); *e mettiamo primieramente, che la retta* BD *reſti diviſa per mezzo, e per conſeguente ad angoli retti* (2) *dalla* AC *paſſante per lo centro.* Siccome la retta AC è diviſa per mezzo nel punto F, ed è diviſa inegualmente nel punto E, così ſarà (3) il rettangolo AEC infieme col quadrato di FE eguale al quadrato di FC, ovvero al quadrato di FB: ma eſſendo il triangolo FEB rettangolo in E, il quadrato dell'ipotenuſa FB (4) è eguale a' quadrati de' lati FE, EB; dunque ſarà parimente il rettangolo AEC infieme col quadrato di FE eguale a' due quadrati di FE, e di EB: ſe ne tolga via il qua-

dra-

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 3. *di queſto.*
(3) *Pr.* 5. *II.* (4) *Pr.* 47. *I.*

Digitalizzato da Google

drato di FE, il quale è comune, e rimarrà (1) il rettangolo AEC eguale al quadrato di BE. Quindi essendo il quadrato di BE eguale al rettangolo BED, perchè la BD si suppone divisa per mezzo nel punto E; sarà ancora il rettangolo AEG eguale al rettangolo BED.

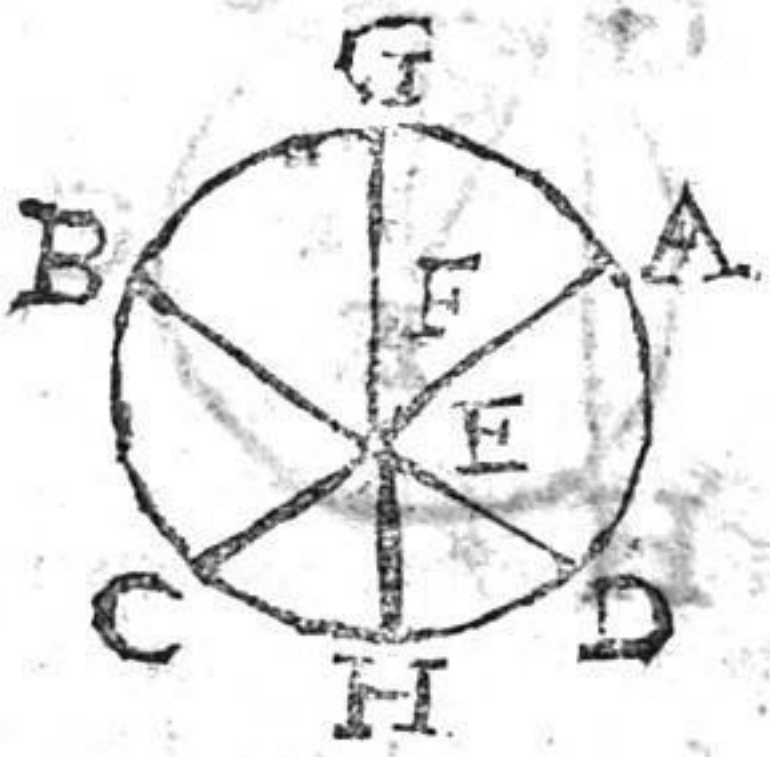


Mettiamo in secondo luogo, che la BD non resti divisa per mezzo, e per conseguente nemmeno ad angoli retti dalla AC. *Dal punto F si lasci cadere sopra la BD la perpendicolare FG* (2) *la quale passando per lo centro F, e dividendo la retta BD, che non passa per lo centro ad angoli retti, la dividerà per mezzo* (3). Siccome la retta AC è divisa per mezzo nel pento F, ed è divisa in parti diseguali nel punto E; così sarà (4) il rettangolo AEC insieme col quadrato di FE eguale al quadrato di FC, ovvero di FB; quindi essendo a cagione dell'angolo retto G il quadrato di FE eguale a' quadrati di FG, GE (5); ed il quadrato di FB eguale a' quadrati di FG, GB; sarà il rettangolo AEC insieme co' quadrati di FG, GE eguagua-

(1) *Assio.* 3. (2) *Pr.* 12. *I.*
(3) *Pr.* 3. *di questo.* (4) *Pr.* 5. II.
(5) *Pr.* 47. *I.*

Digitalizzato da Google

guale a' quadrati di FG, GB: ſe ne tolga via il quadrato di FC, il quale è comune, e rimarrà (1) il rettangolo AEC inſieme col quadrato di EG eguale al quadrato di GB. Inoltre perchè la retta BD è diviſa per mezzo nel punto G, e diſegualmente nel punto E ſarà (2) il rettangolo BED inſieme col quadrato di EG eguale al quadrato di GB: ma il rettangolo AEC inſieme col quadrato di GE è eguale al medeſimo quadrato di GB: dunque ſarà (3) il rettangolo AEC inſieme col quadrato di EG eguale al rettangolo BED inſieme col medeſimo quadrato pi EG, di modo che togliendone il quadrato di GE, il quale è comune, rimarrà il rettangolo AEC eguale al rettangolo BED.



III. Supponendo in fine, che le due rette AE, BD ſi ſechino fuori del centro F; *Si uniſca la retta EF* (4), *la quale ſi diſtenda dall' una parte, e dall' altra fino a' punti G, e l H* (5). Quindi perchè la retta GH paſſante per lo centro divide nel punto E le rette AC, BD, che non paſſano

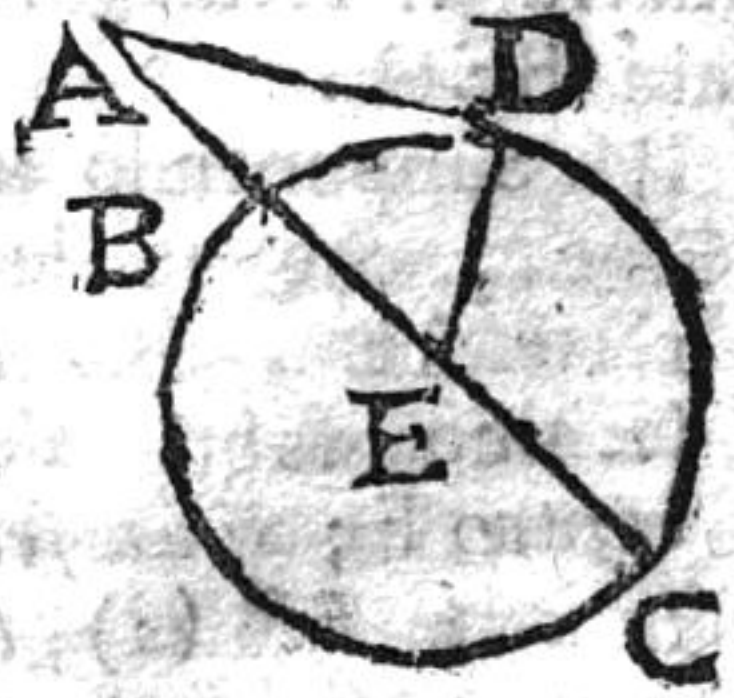
(1) *Aſſio.* 1.
(2) *Aſſio.* 3.
(3) *Pr.* 5. II.
(4) *Dim.* 1.
(5) *Dim.* 2.

Digitalizzato da Google

fano per lo centro, ſarà per lo caſo ora dimoſtrato, il rettangolo GEH eguale così al rettangolo AEC, come al rettangolo BED: il perchè i due rettangoli AEC, BED ſaranno eguali fra di loro; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP. XXXVI. TEOREMA.

Se da un punto preſo fuori d'un cerchio cadano nel cerchio due linee rette, una delle quali lo tocchi, e l'altra lo ſechi; il rettangolo formato da tutta la linea ſecante, e da quella parte di eſſa, che reſta compreſa fra il punto, e la circonferenza convеſſa, ſarà eguale al quadrato della tangente.





I.

Dal punto A preſo fuori del cerchio BCD cadano nel detto cerchio due linee ABC, AD, la prima delle quali lo ſechi ne' punti B, e C, e l'altra lo tocchi nel punto D: io dico, che il rettangolo CAB formato da tutta la ſecante CA, e dalla parte AB di eſſa; che reſta compreſa fra il punto A, e la circonferenza convеſſa ſia

Digitalizzato da Google

eguale al quadrato della tangente AD.

II.

Siccome può accadere. I. Che la secante ABC passi per lo centro E. II. Che la detta secante non passi per lo centro; così per maggior chiarezza io divido il Teorema in due casi.

I. Passi la secante ABC primieramente per lo centro E. *Si unisca* (1) *la ED*: siccome la BC è secata per mezzo nel punto E, e da essa è stata aggiunta per diritto la BA; così sarà (2) il rettangolo CAB, insieme col quadrato di BE eguale al quadrato di AE: ma il quadrato di AE (3) è eguale a' quadrati di AD, e di DE; perchè l'angolo ADE è retto, come quello, che è formato dalla tangente DA, e dal semidiametro DE (4); dunque sarà parimente il rettangolo CAB; insieme col quadrato di BE eguali a' quadrati di AD, di DE: se ne tolgano li quadrati di BE, e di DE, che sono eguali fra di loro, perchè le linee BE, DE cadenti dal centro alla circonferenza sono eguali: rimarrà (5) il rettangolo CAB eguale al quadrato di AD.

II. Passi in secondo luogo la secante ABC di là del centro E. *Si faccia sopra essa cadere la perpendicolare* EF (6); *Si uni-*

---

(1) *Dim.* 1.
(2) *Pr.* 6. 11.
(3) *Pr.* 47. 1.
(4) *Pr.* 8. *di questo*:
(5) *Assio.* 3.
(6) *Pr.* 12. 1.

Digitalizzato da Google

uniſcano le rette EB, EA, ED (1). E perchè la retta FE paſſante per lo centro E divide la retta BC, che non paſſa per lo centro ad angoli retti nel punto F, la dividerà (2) per mezzo; e per conſeguente ſarà (3) il rettangolo CAB, inſieme col quadrato di BF eguale al quadrato di AF, aggiugnendo dunque communemente il quadrato di FE, ſarà il rettangolo CAB, inſieme co' due quadrati di BF, e di FE eguale a' due quadrati di AF, e di FE: quindi, eſſendo a cagione dell'angolo retto in F, il quadrato BE eguale (4) a' quadrati di BF, e di FE; ed il quadrato di AE eguale a' quadrati di AE, e di FE; ſarà il rettangolo CAB, inſieme col quadrato di BE eguale al quadrato di AE; ma il quadrato dell'ipotenuſa AE è eguale (5) a' quadrati di AD, e di DE, perchè l'angolo ADE formato dalla tangente AD, e dal ſemidiametro DE è retto (6); dunque ſarà ancora il rettangolo CAB, inſieme col quadrato di DE eguale a' quadrati di AD, e di DE; ſe ne tolgono i quadrati de' raggi BE, DE, che ſono eguali fra di loro: rimarrà il rettangolo CAB eguale al quadrato di AD; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

COR.

(1) *Dim.* I.
(2) *Pr.* 3. *di queſto.*
(3) *Pr.* 6. II.
(4) *Pr.* 47. I.
(5) *Pr.* 47. I.
(6) *Pr.* 18. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

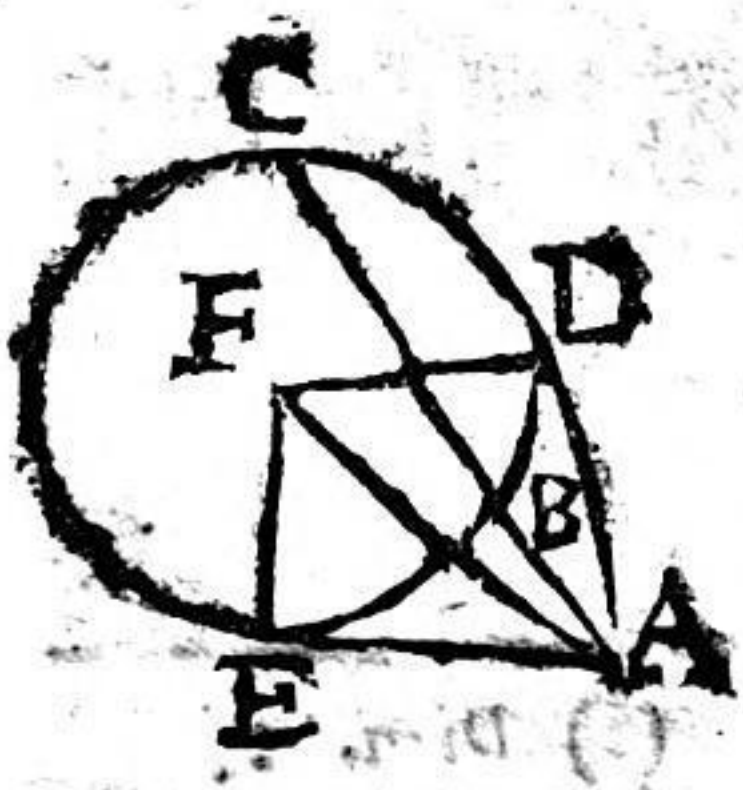
COROLLARIO.

Se dal punto A s'intende tirata un'altra ſecante AGH, ſarà ſimilmente il rettangolo HAG eguale al quadrato dalla tangente AD; quindi i rettangoli CAB, HAG ſaranno eguali fra di loro; ciocchè dà luogo al Teorema ſeguente. Se due linee HG, CB, ſi ſecano fuori del cerchio nel punto A; il rettangolo fatto dalle parti HA, AG dell'una è eguale al rettangolo fatto dalle parti CA, AB dell'altra.

PROP. XXXVII. TEOREMA.

Se da un punto preſo fuori d'un cerchio cadano al detto cerchio due linee, una delle quali lo ſechi, e l'altra gli ſia accanto; e ſia il rettangolo formato da tutta la ſecante, e da quella parte di eſſa, ch'è fuori del cerchio eguale al quadrato di quella, che gli ſta accanto, eſſa ſarà tangente.

I.



Dal punto A preſo fuori del cerchio EBD, AD, la prima delle quali lo ſechi ne' punti B, e C, e l'altra gli ſtia accanto ſenza ſaperſi, ſe lo ſechi, o ſe lo tocchi; e ſia il quadrato di AD eguale al rettangolo CAB,

Digitalizzato da Google

io dico, che la AD è tangente:

II.

Si ritrovi il centro F del cerchio EBD.
Si tiri dal punto A la tangente AE (1).
Si uniſcano le rette FD, FA, EF (2).

Siccome la AE è tangente dalla coſtruzione, e la AC è ſecante; così ſarà (3) il rettangolo CAB eguale al quadrato di AE: ma il quadrato di AD è eguale al verſo rettangolo CAB, dunque ſarà il quadrato di AE eguale (4) al quadrato di AD; e per conſeguente le rette AE, AD ſaranno eguali fra di loro: Quindi i due triangoli AEF, ADF, avendo i due lati AE, eguali a due lati AD, DF, e la baſe AF comune; avranno (5) l'angolo AEF eguale all'angolo ADF; ma l'angolo AEF formato dalla tangente AE, e dal raggio EF è retto (6); dunque l'angolo ADF ſarà parimente retto, e perciò la DA, inſiſtendo ad angoli retti all'eſtremità D del raggio DF ſarà tangente (7); ciocchè doveva dimoſtrarſi.

(1) *Pr.* 17. *di queſto.* (2) *Dim.* 1.
(3) *Pr. ant.* (4) *Aſſio.* 1.
(5) *Pr.* 8. 1. (6) *Pr.* 18. *di queſto.*
(7) *Pr.* 16. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

LIBRO QUARTO.

DEFINIZIONI.

I.

UNa figura rettilinea si dice essere descritta in un'altra figura rettilinea, quando ciascun angolo della figura descritta tocca ciascun lato di quella figura, nella quale essa è stata descritta.

II.

Viceversa una figura rettilinea si dice essere descritta intorno ad una figura rettilinea, quando ciascun lato della figura descritta tocca ciascun angolo di quella, intorno la quale essa è descritta.

III.

Una figura rettilinea si dice essere descritta in un cerchio, quando ciascun angolo della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio.

IV.

Viceversa una figura rettilinea si dice esser descritta intorno ad un cerchio, quando ciascun lato della figura descritta tocca la circonferenza del cerchio.

V.

Un cerchio si dice esser descritto in una figura rettilinea, quando la di lui circonferenza tocca ciascun lato della figura, nella quale egli è descritto.

VI.

Viceversa un cerchio si dice esser descritto intorno ad una figura rettilinea, quan-

Digitalizzato da Google

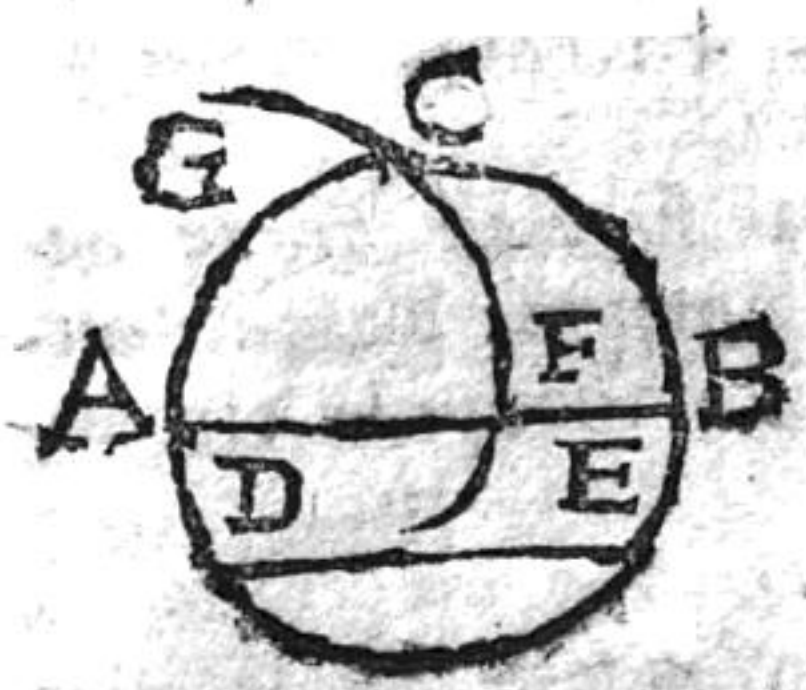
quando la circonferenza del cerchio tocca ciascun angolo della figura, intorno alla quale egli è descritto.

VII.

Una linea retta si dice adattata in un cerchio, quando le di lei estremità arrivano fino alla circonferenza del cerchio.

PROP. I. PROBLEMA.

In un cerchio dato adattare una linea retta eguale ad un' altra linea retta data.



I.

Sia dato il cerchio ACB, e sia dato inoltre la linea retta DE; fa duopo nel cerchio dato adattare una linea retta eguale alla detta DE.

II.

Si tiri (1) *il diametro AB.*

Si tagli AF eguale alla data DC (2).

Dal centro A, col raggio AB descrivasi il circolo FCG (3).

Si unisca la AC (4): io dico, che questa linea retta AC adattata nel cerchio dato sia eguale alla data DE.

III.

(1) *Pr.* 1. III.
(2) *Pr.* 3. I.
(3) *Dim.* 3.
(4) *Dim.* 3.

Digitalizzato da Google

III.

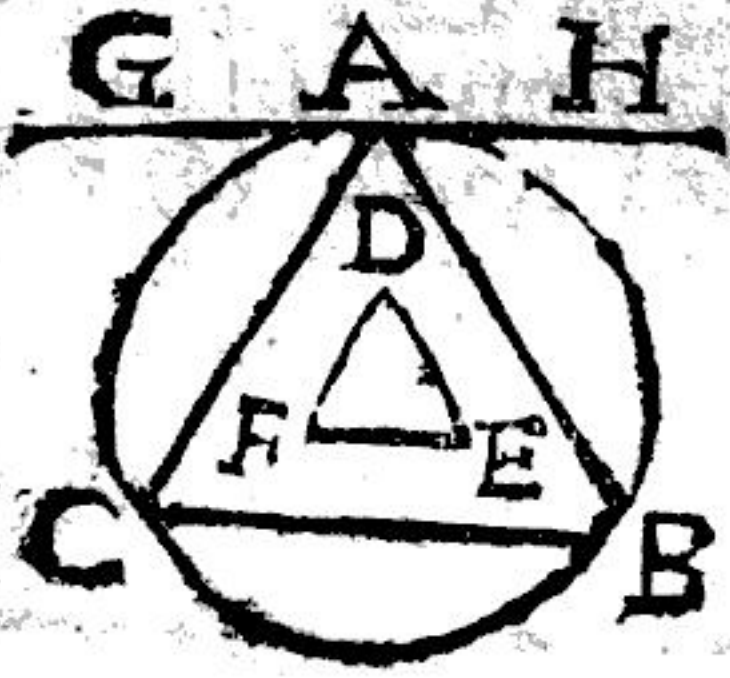
Siccome A dalla costruzione è centro del cerchio FCG, così le linee AF, AC cadendo dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro: ma dalla costruzione la AF è eguale alla DE; dunque sarà parimente la AC eguale (2) alla DE. Ciocchè doveva farsi.

AVVERTIMENTO.

Siccome di tutte le linee rette tirate nel cerchio, il diametro è la massima (3); *così, acciò possa risolversi questo Problema si richiede, che la linea retta data DE non sia maggiore del diametro AB; imperciocchè, se fosse maggiore dal suddetto diametro, sarìa impossibile adattarla nel dato cerchio. Se poi la data DF eguagliasse il diametro nel cerchio, il medesimo diametro soddisfarebbe alla questione.*

PROP. II. PROBLEMA.

In un cerchio dato descrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.



I.

Sia dato il cerchio ACB, e sia dato in oltre il triangolo DFE: fa duopo descrivere nel cerchio dato un triangolo equiangolo al triangolo

(1) *Dim.* 3.
(2) *Dim.* 3.
(3) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

golo dato DFE: vale a dire tale, che ciascuno de' suoi tre angoli sia eguale a ciascuno de' tre angoli del triangolo DFF.

II.

Prendasi nella circonferenza del cerchio dato il punto A ad arbitrio.

Si tiri la tangente GAH (1).

Si costituiscano al punto A gli angoli GAC, HAB eguali respettivamente agli angoli DEF, DFE (2).

Si congiunga la CB (3): io dico, che il triangolo ACB descritto nel cerchio dato sia equiangolo al triangolo dato DFE.

III.

Siccome dalla costruzione la retta GAH tocca il cerchio nel punto A, ed AC lo seca nell'istesso punto A, così sarà l'angolo GAC formato dalla tangente, e dalla secante eguale all'angolo ABC costituito nella porzione del cerchio (4); ma dalla costruzione l'angolo GAC è eguale all'angolo DEF; dunque sarà parimente l'angolo ABC eguale all'angolo DEF (5). Similmente l'angolo HAB formato dalla tangente e dalla secante, sarà eguale (6) all'angolo ACB costituito nella porzione alterna del cerchio; quindi, essendo dalla costruzione l'angolo HAB eguale all'angolo

---

(1) *Cor.* 1. *della pr.* 16. *III.*
(2) *Pr.* 31. *I.*
(3) *Dim.* 1.
(4) *Pr. III.*
(5) *Assio.* 3.
(6) *Pr.* 32. *III.*

Digitalizzato da Google

lo DFF: sarà parimente l'angolo ACB eguale (1) all'angolo DFE. Finalmente, perchè tanto li tre angoli del triangolo ACB, quanto li tre angoli del triangolo DFE sono eguali a due retti (2): saranno li tre angoli del triangolo ACB eguali a' tre del triangolo DFE: quindi, essendosi già dimostrati i due angoli in C, ed in B eguali a' due in F, ed in E, sarà il terzo in A eguale al terzo in D: ciocchè doveva farsi.

PROP. III. PROBLEMA.

Intorno ad un dato cerchio descrivere un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.



I.

Sia dato il cerchio ABC, e sia dato in oltre il triangolo DEF, fa duopo descrivere intorno al cerchio dato ABC un triangolo equiangolo al triangolo dato DEF.

II.

Si distenda (3) *il lato* EF *del triangolo* DEF *verso* G, *e verso* H.

Se tiri il raggio KA (4) *ad arbitrio.*

K Si

(1) *Assio.* 1. (2) *Pr.* 32. I.
(3) *Dim.* 2. (4) *Pr.* 1. III.

Digitalizzato da Google

Si costituiscono gli angoli AKC, AKB eguali respettivamente agli angoli esteriori DEG. LFH ( ).

Da' punti A, C, e B s'inalzino sopra i raggi AK, CK, BK le perpendicolari (2) *MAL, LCN, NBM, le quali costituiscano il triangolo NML*; io dico, che questo triangolo sia quello, che si dimanda.

III.

Imperciochè, primieramente il triangolo NML è descritto intorno al cerchio dato ABC: perchè li suoi lati NM, ML, LN toccano il detto cerchio per essere essi perpendicolari a' semidiametri BK AK, KC (3): che poi il medesimo triangolo NML sia equiangolo al triangolo DEF, si dimostra così. Li quattro angoli dalla figura quadrilatera ALCK sono eguali a quattro retti: poichè intendendo tirato il diametro KL, rimane essa compartita in due triangoli, ciascuno de' quali ha li suoi tre angoli eguali a due retti (4): ma dalla costruzione gli angoli KAL, KCL sono retti entrambi; dunque gli altri due angoli AKC, ALC sono eguali a due retti; il perchè, essendo parimente gli angoli DEF, DEG eguali a due retti (5), saranno li due angoli DEF, DEG eguali a due angoli AKC, ALC; ma dalla costruzione l'an-

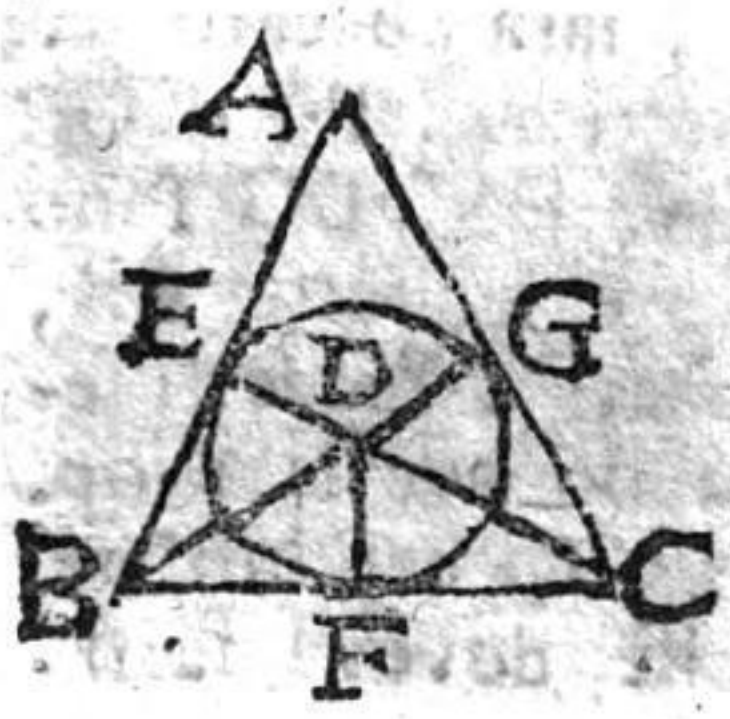
(1) *Pr.* 23. *I.* (2) *Pr.* 11. *I.*
(3) *Pr.* 16. *III.* (4) *Pr.* 32. *I.*
(5) *Pr.* 13. *I*

Digitalizzato da Google

angolo AKC è eguale all'angolo DEG; dunque l'angolo rimanente ALC sarà eguale all'angolo rimanente DEF. Nell'istessa maniera comparando li due angoli AKB, AMB co due angoli DFH; DFE, si dimostrerà, che l'angolo AMB sia eguale all'angolo DFE; quindi essendo tutti li tre angoli del triangolo NML eguali a tutti tre gli angoli del triangolo NML eguali a tutti tre gli angoli del triangolo DEF, ed essendosi di più dimostrati gli angoli in M, ed L eguali agli angoli in F, ed E; sarà l'angolo rimanente in N eguale all'angolo rimanente in D. Ciocchè doveva farsi.

PROP. IV. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un triangolo dato.



I.

Sia dato il triangolo ABC; fa duopo descrivere dentro di esso un cerchio.

II.

Sechinsi gli angoli ABC, BCA per mezzo (1) *colle linee rette BD, CD, le quali concorrono insieme nel punto D.*

Dal punto D si facciano cadere (2) *le perpendicolari DE, DF, DG, sopra li tre lati AB, BD, CA del triangolo dato.*

(1) *Prop.* 9. I. (2) *Pr.* 12. I.

Digitalizzato da Google

III.

Perchè dalla costruzione, l'angolo FBE è secato per mezzo colla retta BD, e di più dalla medesima costruzione le rette DF, DE sono perpendicolari sopra i lati BC, BA del triangolo dato ABC, i due triangoli DBF, DBE avranno i due angoli DBF, DFB eguali a' due angoli DBE, DEB, ciascuno a ciascuno; quindi i medesimi triangoli, avendo in oltre il lato DB comune; avranno (1) il lato DF eguale al lato DE; nell'istessa maniera paragonando il triandolo DFG col triangolo DGC, si dimostrerà, che DF sia eguale a DG; quindi le tre linee rette DE, DF, DG saranno eguali fra di loro; e perciò il cerchio descritto dal centro D, e col raggio DE passerà per li punti F, G; ma io dico di più, che egli, sarà toccato da' lati AB, BC, CA ne' punti E, F, e G: imperciocchè le linee DE, DF, DG sono semidiametri del cerchio, e le rette AB, BC, CA sono perpendicolari a' suddetti semidiametri; perciò dovranno per la prop. 16. del terzo libro toccare il cerchio ne' punti E, F, e G; ciocchè doveva farsi.

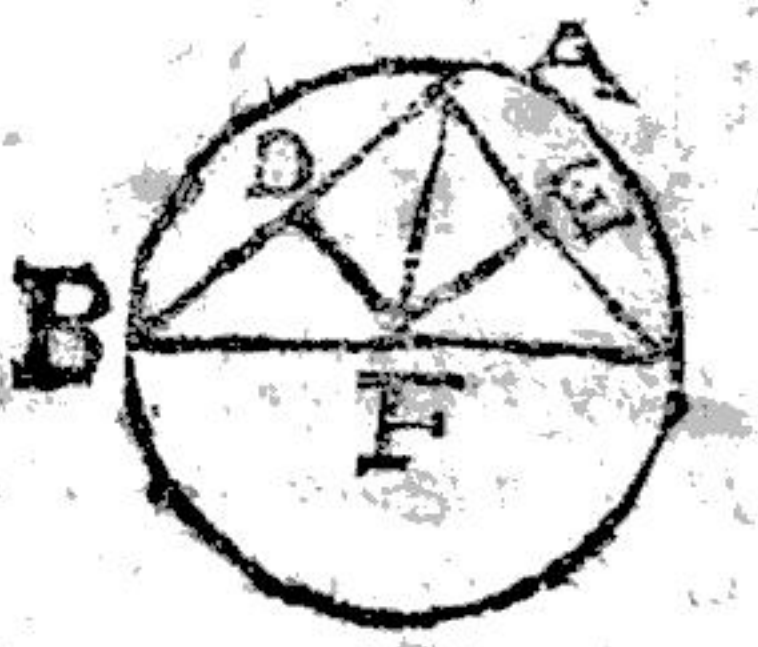
PROP.

(1) Pr. 26. 1.

Digitalizzato da Google

PROP. V. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un triangolo dato.



I.

Sia dato il triangolo ABC, fa duopo intorno ad esso descrivere un cerchio.

II.

Sechinsi i lati AB, AC per mezzo (1) *ne' punti D, ed E.*

S'innalzino da' punti D, ed E le perpendicolari (2) *DF, EF sopra li suddetti lati AB, AC, le quali concorranno nel punto F.*

Si congiungano (3) *le rette AF, BF, CF.*

III.

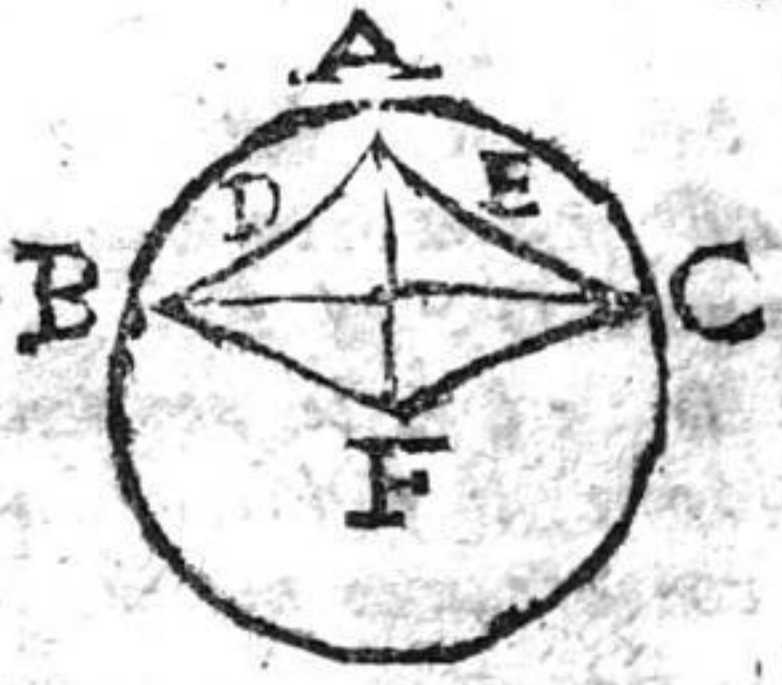
Siccome, dalla costruzione la AD è eguale alla BD, e la DF è comune: così saranno i due lati AD, DF del triangolo ADF eguali a due lati BD, DF del triangolo BDF, ciascuno a ciascuno; sicchè; essendo ancora l'angolo ADF eguale all'angolo BDF, perchè l'uno, e l'altro dalla costruzione è retto; sarà (4) la base AF eguale alla base BF. Nell'istessa maniera comparando li due triangoli, AFE, CFE insieme, si dimostrerà, che AF sia eguale

(1) *Pr.* 10. *l.*
(2) *Pr.* 11. *l.*
(3) *Dim.* 1.
(4) *Pr.* 4. *l.*

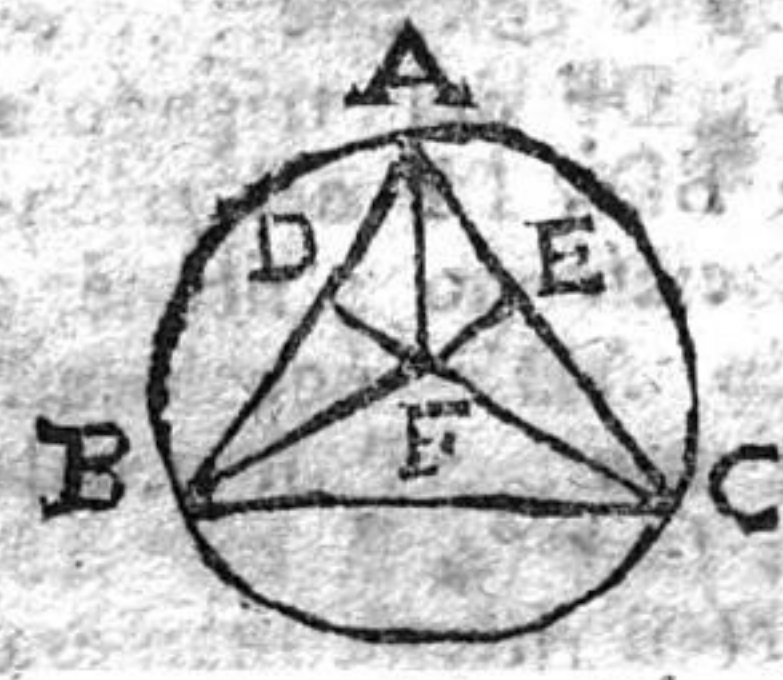
Digitalizzato da Google

le a CF; quindi, le tre rette AF, BF CG saranno eguali fra di loro; e perciò il cerchio descritto dal centro F, e col raggio FA passerà per li punti B, e C, e per conseguente sarà descritto intorno al triangolo dato ABC.

AVVERTIMENTO.



Avvertasi quì, che se l' angolo BAG è acuto il centro F cade dentro al triangolo dato ABC. Se è retto cade sulla base BC dell' istesso triangolo; ma se è ottuso cade sotto la base BC, e per conseguente fuori del triangolo ABC. Avvertasi in oltre, che col mezzo della costruzione di questa proposizione si può sempre descrivere un cerchio, che passi per tre punti dati A, B, C, purchè però i tre punti dati non si trovino in una linea retta: vale a dire, purchè congiungendo i suddetti tre punti con tre linee rette, si venga a formare un triangolo.

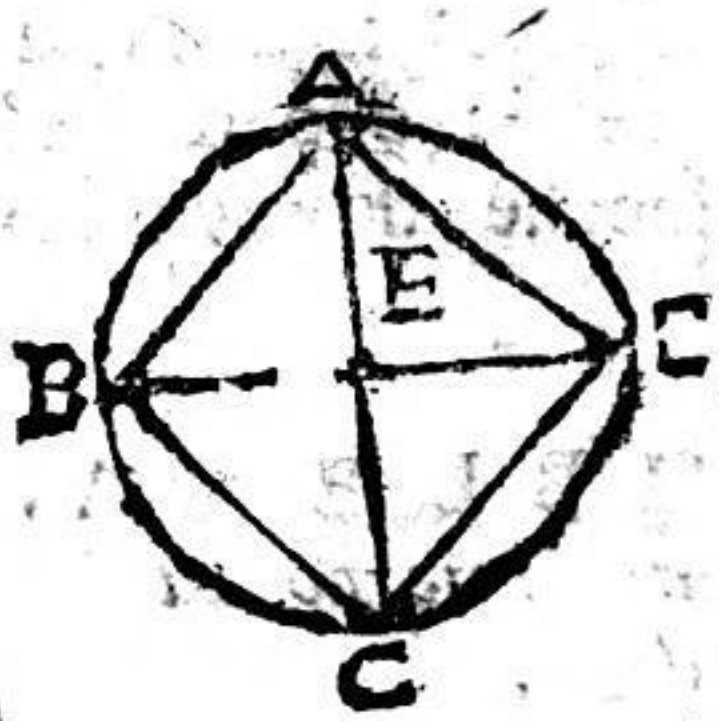


PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. VI. PROBLEMA.

Descrivere un quadrato in un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descrivere dentro di esso un quadrato.

II.

Si tirino i due diametri AC, BD, li quali si sechino ad angoli retti nel centro E.

Si congiungano (1) *le rette AB, BC, CD, DA.*

III.

Perchè i due lati BE, EA del triangolo BEA sono eguali a due lati DE, EA del triangolo DEA ciascuno a ciascuno, e l'angolo BEA è eguale all'angolo DEA sarà la base BA eguale (2) alla base DA. Nell'istessa maniera per mezzo de' triangoli DEA, DEC si dimostra, che la DA sia eguale alla DC, e poi per mezzo de' triangoli DEC, CEB; che la CD sia eguale alla CB: quindi li quattro lati AB, BC, CD, DA della figura quadrilatera ABCD saranno eguali fra di loro. In oltre perchè BD è diametro, sarà BAD un semicerchio, e BCD un'altro semicerchio; e per conseguente gli angoli BAD, BCD ne' semicerchi saranno retti (3). Similmen-

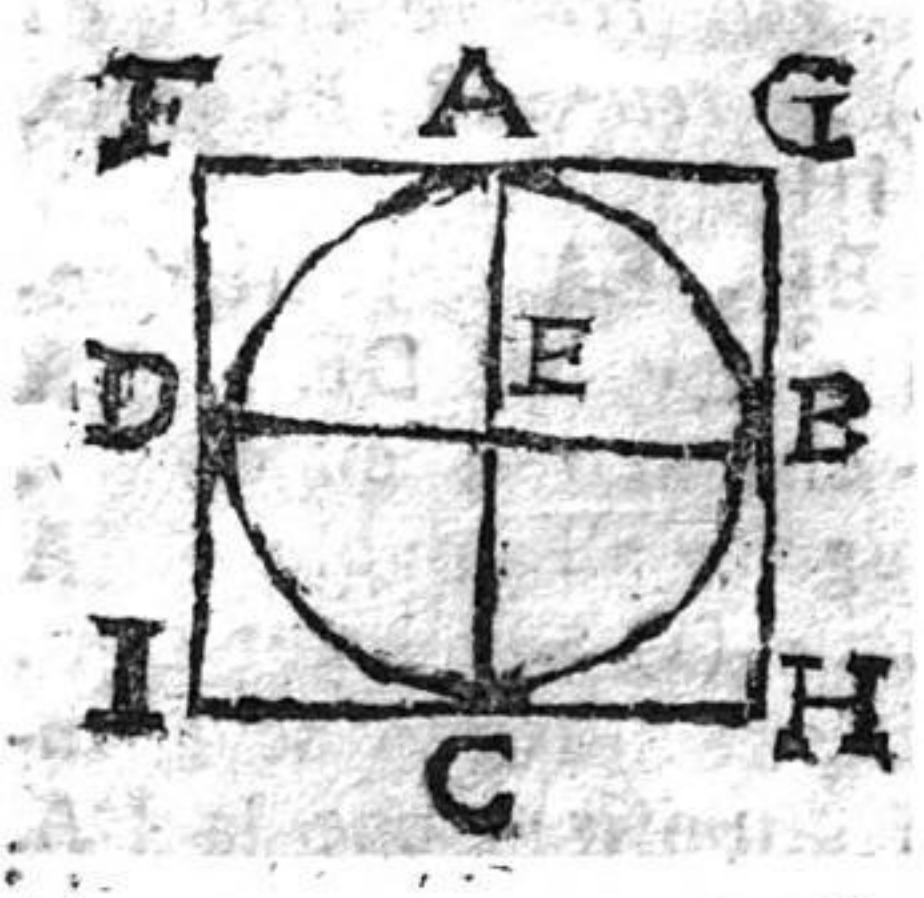
(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 4. *I.* (3) *Pr.* 21. *III*

Digitalizzato da Google

te essendo AC diametro, sarà ABC un semicerchio, ed ADC sarà un'altro semicerchio, di modochè gli angoli ABC, ADC ne' semicerchi saranno retti; quindi tutti li quattro angoli della suddetta figura quadrilatera ABCD saranno retti; e perciò essa sarà un quadrato; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. VII. PROBLEMA.

Descrivere un quadrato intorno ad un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descrivere intorno ad esso un quadrato.

II.

Si tirino i due diametri AC, BD, li quali si sechino ad angoli retti nel centro E.

III.

Per li punti A, B, C, D, si tirino le tangenti FG, GH, IF (1). Io dico, che la figura quadrilatera FGIH sia il quadrato, che si cerca.

IV.

Perchè dalla costruzione le FG tocca il cer-

(1) *Pr.* 18. *III.*

Digitalizzato da Google

cerchio ABCD nel punto A., e dal centro E al punto A del toccamento si è tirata la retta EA; gli angoli, che sono al detto punto A saranno retti. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che gli angoli, che sono ne' punti B, C, e D siano tutti retti. Quindi, perchè dalla costruzione l'angolo AED è retto, ed è retto similmente l'angolo FDE, saranno li due angoli inferiori AED, FDE eguali a due retti, e per conseguente le linee rette FI, AC saranno parallele: per la medesima ragione sarà la AC parallela alla GH, e la DB parallela, così alla EG, come alla IH: e perciò le cinque figure FIHG, FDBG, DHIB, FICA, ACHG saranno tutte parallelogrammi: di modochè sarà la AC eguale a ciascuno delle due FI, GH, e la DB eguale a diascuna delle due FG, IH: ma AC, e DB sono eguali fra di loro; perchè sono diametri del cerchio ABCD; dunque le quattro linee FG, GH, HI, IF saranno tutte eguali: e perciò il parallelogrammo FGIH descritto intorno al cerchio dato è equilatero: Che poi sia rettangolo ancora, si dimostra così. Perchè FDBG è parallelogrammo, e l'angolo GBD è retto, l'angolo opposto GFD sarà parimente retto (1): quindi tutti gli altri tre angoli del parallelogrammo FHIG saranno ancora retti (2); e perciò il parallelogrammo FHIG sarà

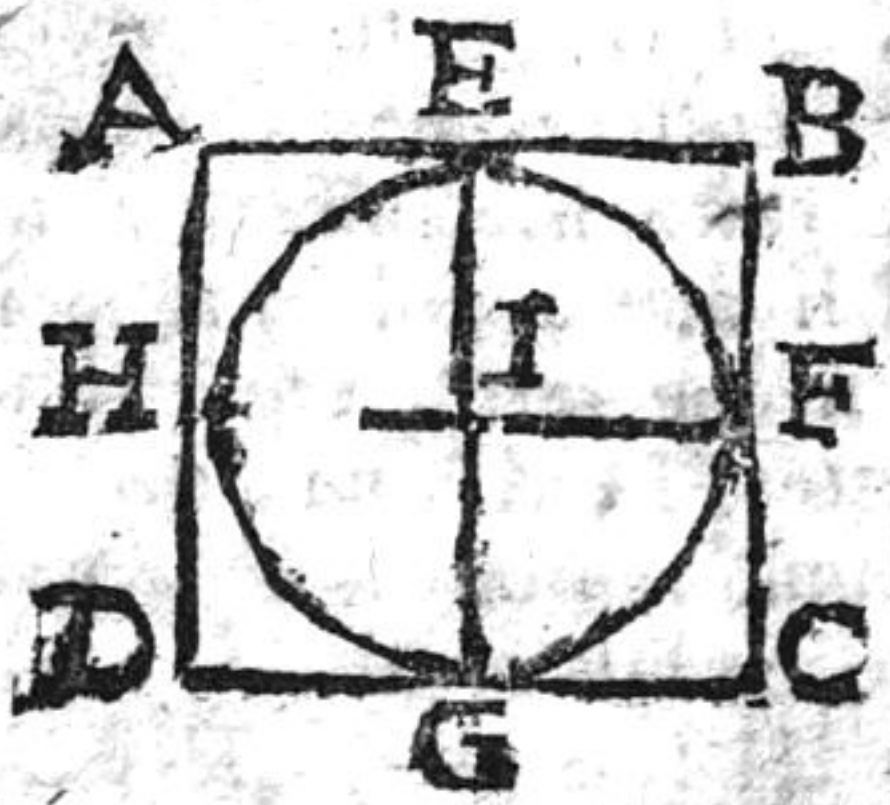
(1) *Pr.* 34. *I.* (2) *Cor.* 1. *della pr.* 46. *I.*

Digitalizzato da Google

un quadrato. Ciocchè doveva farſi.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Deſcrivere un cerchio in un quadrato dato.



I.

Sia dato il quadrato AFCD; fa duopo deſcrivere dentro di eſſo un cerchio.

II.

Sechinſi (1) *i lati AB, AD per mezzo ne' punti E, ed H.*

Per lo punto E ſi tiri (2) *la EG parallela a ciaſcuna delle due AD, BC.*

Similmente per lo punto H ſi tiri (3) *la HF parallela a ciaſcuna delle due AB, DC.*

Siccome dalla coſtruzione la retta HF è parallela alle due AB, DC, e la EG è parallela alle due AD, BC, così il quadrato BDBC rimane compartito dalle due linee HF, EG in quattro parallelogrammi; quindi ſarà (4) la AE eguale alla HI, e la AH ſarà eguale alla EI: ma la AE è eguale alla AH (5), perchè le rette AB, AD, le quali ſono doppie della AE, AH ſono eguali fra di loro; dunque ſarà ancora

(1) *Pr.* 10. *I.* (2) *Pr.* 31. *I.*
(3) *Pr.* 31. *I.* (4) *Pr.* 34. *I.*
(5) *Aſſio.* 7.

Digitalizzato da Google

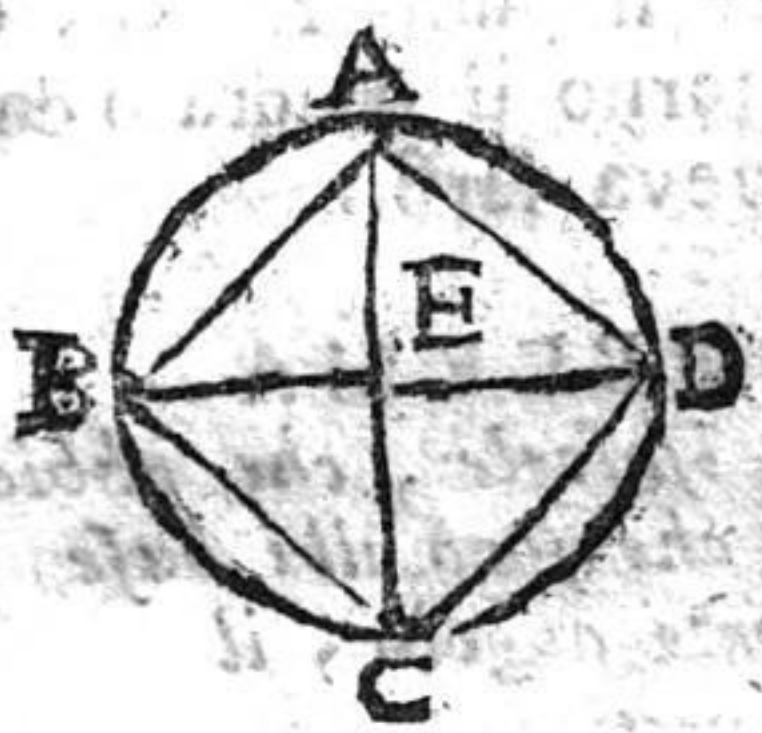
ra EI eguale alla IH; così similmente si dimostra, che la EI sia eguale alla FI, e che la FI sia eguale alla GI; di modochè le quattro rette HI, EI, FI, GI saranno eguali fra di loro; perlocchè il cerchio descritto dal centro I, col raggio IH dovrà passare per li punti E, F, e G, e toccherà le linee AD, AB, BC, CD (1); perchè gli angoli in H, in E, in F, e G sono retti dalla costruzione; essendosi tirate le rette HE, EG parallele respettivamente a' lati AB, BC del quadrato. Ciocchè doveva farsi.

PROP. IX. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un quadrato dato.

I.

Sia dato (2) il quadrato ABCD; fa duopo intorno ad esso descrivere un cerchio.



II.

Congiungansi (3) *le diagonali AC, BD.*

III.

Siccome la AB è eguale alla AD, e la AC è comune; così formano i due lati BA, AC del triangolo BAC eguali a' due la-

(1) *Pr.* 16. *III.* (2) *Vegasi la figura 6.*
(3) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

lati DA, AC del triangolo DAC, ciascuno a ciascuno: quindi essendo la base BC eguale alla base DC; sarà (1) l'angolo BAC eguale all'angolo DAC, e per conseguente l'angolo retto BAD sarà secato per mezzo del diametro AC. Similmente si mostrerà, che ciascuno de' tre angoli retti ABC, BCD, CDA resti diviso per mezzo dal diametro BD, e dal diametro CA; il perchè gli otto angoli, due in A, due in B, due in C, e due in D saranno tutti eguali fra di loro. Ora i quattro triangoli EAB, EBC, ECD, EDA, avendo gli angoli sopra le basi AB, BC, CD, DA eguali fra di loro, saranno isosceli (2); e perciò le quattro rette EA, EB, EC, ED saranno eguali; di modochè il cerchio descritto dal centro E, e col raggio EA passerà necessariamente per li punti B, C, e D, e sarà descritto intorno il quadrato dato ABCD; ciocchè doveva farsi.

PROP. X. PROBLEMA.

Descrivere un triangolo isoscele, che abbia amendue gli angoli; che sono alla base doppj del rimanente angolo, il quale è nel vertice.

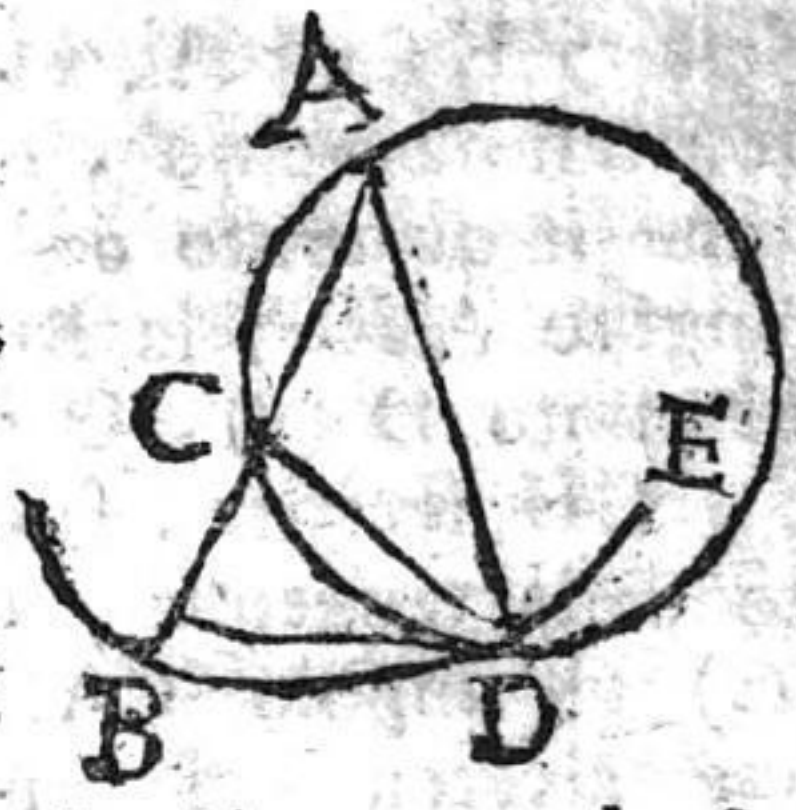
I.

Qui non si dà cosa alcuna; si cerca solamente di descrivere un triangolo isoscele ABD, tale, che ciascuno degli angoli AB-

D,

(1) *Pr.* 8. I. (2) *Pr.* 6. I.

Digitalizzato da Google



D, ABE ; che ſono alla baſe ſia doppio dell' angolo BAD, il quale è nel vertice.

II.

Si prenda la retta AB ad arbitrio.

Sechinſi in tal modo nel punto F (1), *che il rettangolo formato da tutta la AB, e dalla parte minore CB ſia eguale al quadrato della maggiore AC.*

Dal centro A col raggio AB (2) *deſcrivaſi il cerchio BDE.*

S' adatti in queſto cerchio così deſcritto la retta BD eguale (3) *alla DC.*

Si congiunga la retta AD (4): Io dico, che il triangolo iſoſcele ABC ſia quello, che ſi cerca.

III.

Per dimoſtrarlo, s' intenda intorno il triangolo ACD deſcritto il cerchio ACD (5), perchè dalla coſtruzione la BD è eguale alla AC: ſiccome dall' iſteſſa coſtruzione, il quadrato della AC è eguale al rettangolo ABC, così ſarà parimente il quadrato della BD eguale al rettangolo ABC, così ſarà parimente il quadrato della BA eguale al rettangolo ABC: quindi la BA, ſe-

(1) *Pr.* 11. II.
(2) *Dim.* 3.
(3) *Pr.* 1. *di queſto.*
(4) *Dim.* 1.
(5) *Pr.* 5. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

ſecando il cerchio ne' punti C, ed A, e la BD ſtando accanto all' iſteſſo cerchio, ed eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato della BC ſia eguale al rettangolo ABC; la BD toccherà il cerchio nel punto D (1). Ora, eſſendo DB tangente, e CD ſecante, ſarà l'angolo BDC f rmato dalla tangente, e dalla ſecante eguale (2) all'angolo CAD coſtituito nella porzione alterna del cerchio, e perciò aggiunto commemente l' angolo CDA, ſarà (3) tutto l'angolo ADB eguale a due angoli ACD, CDA, ma queſti due angoli CAD, DCA ſono eguali all'angolo eſteriore DCB (4), dunque l'angolo eſteriore DCB ſarà eguale ancora all' angolo ADB, ovvero all'angolo ABD, il quale è eguale all'angolo ADB (5), perchè il triangolo ABC è iſoſcele. Quindi eſſendo gli angoli DCB, DBC, ſopra la baſe BC del triangolo DCB eguali fra di loro, ſaranno i lati DC, DB ad eſſi ſottopoſti parimente eguali (6); ma dalla coſtruzione la AC è eguale a BD; dunque ſarà (7) la AC eguale parimente a DC ſarà iſoſcele, e l' angolo CAD ſarà eguale all'angolo CAD (8): ma ſi è dimoſtrato l'angolo CDB parimente eguale all'angolo CAD; dunque tutto l'angolo ADB ſarà

(1) *Pr.* 37. III.
(2) *Pr.* 32. III.
(3) *Aſſio.* 2.
(4) *Pr.* 32. I.
(5) *Pr.* 5 I.
(6) *Pr.* 6. I.
(7) *Aſſio.* 1.
(8) *Pr.* 5. I.

Digitalizzato da Google

rà doppio dell'angolo CAD, ovvero dell'angolo BAD; e perciò ancora l'angolo ABD farà doppio dell'angolo BAD; ciocchè doveva farsi.

ADDIZIONE.

Per sapere il valore di ciascuno de' tre angoli ABD, ADB, BAD, si potrà far così; ciascuno degli angoli ABD, ADB è doppio dell' angolo BAD: dunque tutti due insieme sono quadrupli dell' angolo ABD, e tutti due insieme giuntovi l'angolo BAD, vale a dire li tre angoli del triangolo ABD saranno quintupli dell' istesso angolo BAD; ma tutti tre gli angoli del triangolo ABD sono eguali a due retti, ovvero a 180 gradi: dunque il solo angolo BAD sarà eguale alla quinta parte di 180 gradi, il perchè essendo 36 la quinta parte di 180 ne siegue che l'angolo BAD sia di 36 gradi: gli altri due ABD, ADB, saranno ciascuno di 72 gradi, e rimane la somma di tutti tre 36, 72, e 72 eguale a 180 gradi.

Per mezzo di questo Problema Euclide *nella proposizione, che siegue descrive in un cerchio dato un pentagono equilatero, ed equiangolo, vale a dire una figura di cinque lati equilatera, ed equiangola: la regola è questa. Siccome tutta la circonferenza contiene 160 gradi, così ogni quinta parte di essa ne conterrà 72: quanti appunto ne contiene ciascuno degli angoli alla base del triangolo isoscele ABD. Costitui-*

Digitalizzato da Google

scasi dunque al centro del cerchio dato un' angolo di 72 gradi, vale a dire un angolo eguale all' angolo ABD., poichè la base di esso sarà la quinta parte della circonferenza, e per conseguente la sotteſa di questa base sarà uno de' lati del pentagono, che si dimanda.

PROP. XI. PROBLEMA.

Descrivere in un cerchio dato un pentagono equilatero, ed equiangolo.



I.

Sia dato il cerchio ABCD, fa duopo descrivere dentro di esso un pentagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Si descriva in disparte il triangolo isoscele FGH tale, che ciascuno de' due angoli FGH. FHG sopra la base sia doppio dell' angolo al vertice, GFH (1).

Nel cerchio dato si descrive il triangolo ACD equiangolo al triangolo FGH (2).

Ciascuno de due angoli AGD, ADC si sechi per mezzo colle rette CE, DB (3).

Si congiungano le rette AB, BC, AE, ED (4): Io dico, che il pentagolo ABCDE

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr. 2. di questo.*
(3) *Pr. 9. I.* (4) *Dim. 1.*

Digitalizzato da Google

CDE descritto nel cerchio dato sia equilatero, ed equiangolo.

III.

Perchè dalla costruzione il triangolo ACD è equiangolo al triangolo FGH, siccome gli angoli FGH, FHG sono doppj dell'angolo GFH, così gli angoli ACD, ADC, saranno doppj dell' angolo CAD: il perchè, essendo dalla costituzione l'angolo ACD secato per mezzo dalla retta CE, e l'angolo ADC similmente essendo secato per mezzo dalla retta DB, saranno i cinque angoli alla circonferenza CAD, CDB, BDA, ACE, ECD eguali fra di loro: ma le basi degli angoli eguali, che stanno alla circonferenza sono eguali fra di loro (1); dunque saranno i cinque archi DC, CB, BA, AE, ED eguale fra di loro, e per conseguente le loro corde (2), ovvero sottese DC, CB, BA, AF, ED, saranno parimente eguali: laonde il pentangolo descritto sarà equilatero: che sia poi equiangolo, si dimostra così, l'arco BC è eguale all' arco AE; aggiungendo dunque comunemente l'arco CDE, sarà la circonferenza BCDE eguale alla circonferenza CDEA: ma la circonferenza BCDE è base dell' angolo BAE, e la circonferenza CDEA è base dell' angolo CBA, dunque, poichè essendo le basi eguali, ancora gli angoli alla circonferenza debbono esse-

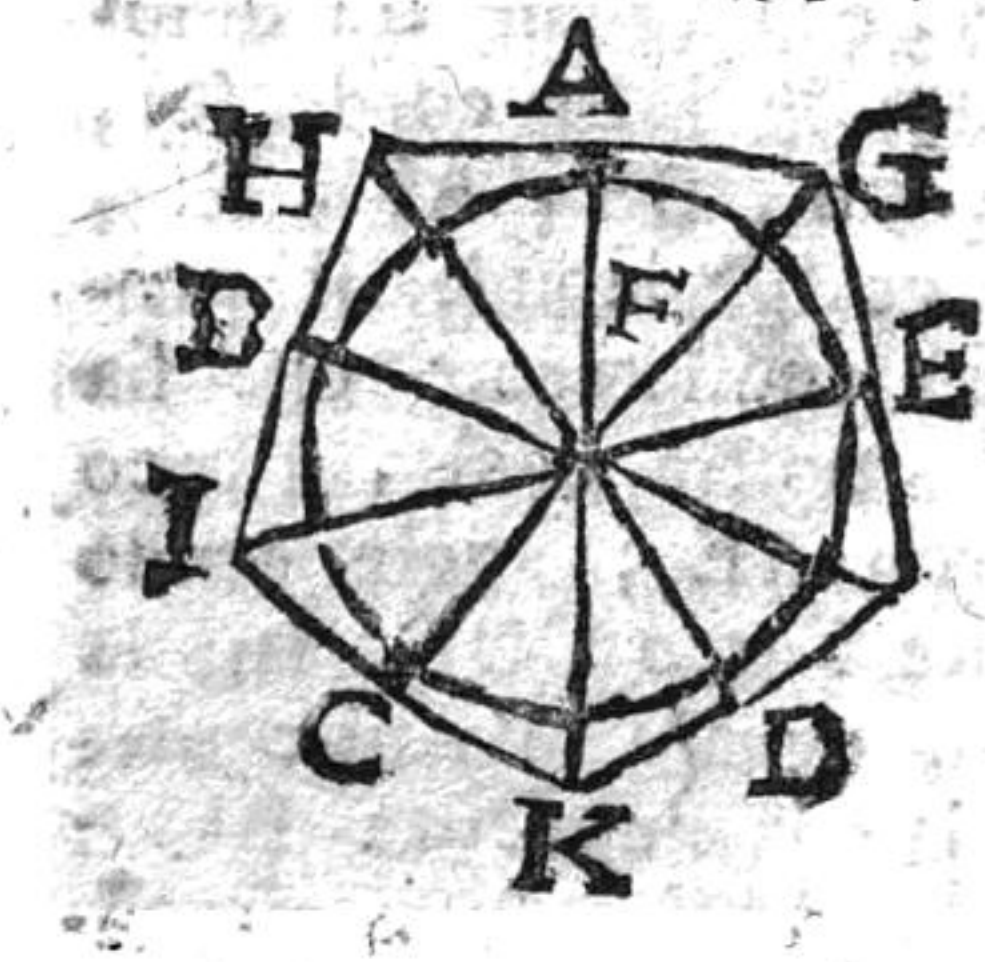
(1) Pr. 26. III. (2) Pr. 19. III.

Digitalizzato da Google

essere eguali (1): sarà l'angolo BAE eguale all'angolo CBA. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo CBA sia eguale all'angolo ECB; e che questo sia eguale all'angolo EDC; è questo eguale all'angolo AED; il perchè tutti i cinque angoli del pentagono ABCDE descritto nel cerchio dato saranno eguali; sicchè essendosi già dimostrato, che i cinque lati del medesimo sono ancora eguali; ne siegue, che egli sarà equilatero, ed equiangolo: cioccchè dovea farsi.

PROP. XII. PROBLEMA.

Descrivere un pentagono equilatero, ed equiangolo intorno ad un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ABCDE; fa duopo descrivere intorno ad esso un pentagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Descrivasi dentro al cerchio dato (2) un pentagono equilatero, ed equiangolo, e siano A, B, C, D, E, punti, ne' quali gli angoli del pentagono toccano la circonferenza del cerchio.

Per

(1) Pr. 17. III.

(2) Pr. ant.

Digitalizzato da Google

Per li punti A, B, C, D, E, così determinati s'intendano passare le tangenti H-G, GL, LK, IK, KI, IH; io dico, che il pentangono HIKLG, contenuto dalle suddette tangenti, e descritto intorno al cerchio dato sia equilatero, ed equiangolo.

III.

Sia F il centro del cerchio dato, dal quale s'intendano congiunte le linee rette FH, FI, FK, FL, FG; siccome ancora i raggi FA, EB, FC, FD, FE; li quali saranno perpendicolari (1) respettivamente alle tangenti HG, HI, IK, KL, LG. Quindi i triangoli FBH, FAH saranno rettangoli, e perciò il quadrato dell'ipotenusa FH sarà eguale (2) così a'quadrati di FB, e BH, come a'quadrati di FA, e di AH; laonde i quadrati di FB, e di BH saranno eguali a'quadrati di FA, e di AH; e per conseguente, essendo il quadrato del raggio FB eguale al quadrato del raggio FB eguale al quadrato del raggio FA, sarà l'altro quadrato di BH eguale all'altro quadrato di HA, e la linea retta BH sarà eguale alla linea retta HA (3): nell'istessa maniera si dimostrerà, che la linea retta AG sia eguale alla sua vicina GE, e la EI alla sua vicina LD, e così si dirà di tutte le altre.

In oltre, essendo la BH eguale alla HA, e la

(1) *Pr.* 18. *III.* (2) *Pr.* 47. *I.*
(3) *Cor.* 3. *della pr.* 47. *I.*

Digitalizzato da Google

e la BF eguale alla AF, saranno i due lati HB, BF del triangolo HBF eguali a' due lati HA, AF del triangolo HAF, ciascuno a ciascuno: laonde, essendo di più la base HF comune all' uno triangolo, e all' altro, saranno tutti gli angoli (1) eguali a tutti gli angoli, ciascuno a ciascuno, vale a dire l'angolo BFH sarà eguale all' angolo AFH, e l'angolo BHF sarà eguale all' angolo AHF; e perciò, così l'angolo BFA, come l'angolo BHA rimane diviso per mezzo della retta FH: nell'istessa maniera si dimostrerà, che gli angoli AFE, AGE sono divisi per mezzo della retta FG; e che gli angoli EDF, ELD sono ancora divisi per mezzo della retta EL, e così deve intendersi di tutti gli altri angoli conseguenti.

Di più, cadendo dalla costruzione gli angoli del pentagono equilatero, ed equiangolo descritto nel cerchio ne' punti A, B, C, D, F, saranno i cinque archi AB, BC, CD, DF, EA eguali fra di loro, e per conseguente i cinque angoli al centro ABF, BFC, GDF, DFF, EFA saranno parimente eguali; il perchè essendo stato dimostrato, che essi sono divisi per mezzo dalle rette FH, FI, FK, FL, FG, saranno i diece angoli AFH, HFB, BFI, IFG, CFK, KFD, DFL, LFE, EFG, GFA tutti eguali fra di loro.

Ei-

(1) *Pr.* 8. *l.*

Digitalizzato da Google

Finalmente, essendo li due angoli HAF, GAF eguali fra di loro, per essere entrambi retti; siccome ancora essendo eguali gli angoli AFH, AFG, saranno i due angoli HAF, AGH del triangolo HAF eguali a' due angoli GAF, AFG del triangolo GAF, ciascuno a ciascuno: quindi, essendo in oltre il lato AF comune ad entrambi i triangoli HAF, GAE, saranno (1) tutte le altre cose eguali a tutte le altre cose: vale a dire, sarà l'angolo FHA eguale all'angolo FGA, e la retta AH sarà eguale alla retta AG; il perchè tutta la HG rimane divisa per mezzo nel punto A. Nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo FGE sia eguale all'angolo FLE, e che la retta LG sia divisa per mezzo nel punto E, siccome ancora che l'angolo FLD sia eguale all'angolo FKD, e che la retta LK sia divisa per mezzo nel punto D; così deve intendersi ancora degli altri angoli, e rette conseguenti.

D'onde poi facilmente si conchiuderà, che il pentagono HGLKI sia equilatero, ed equiangolo: I. essendosi dimostrato, che le rette HG, HI sono divise per mezzo ne' punti A, e B, e di più essendosi dimostrato, che la metà HA, HB sono eguali fra di loro, saranno ancora tutte le rette HG, HI eguali fra di loro: nell'istessa maniera si mostrerà, che HI sia eguale

(1) *Pr.* 16. *I.*

Digitalizzato da Google

guale ad IK, e questa a KL, e questa ad LG, e questa ad HG: dimodochè il pentagono HGLKI sarà equilatero. II. Essendosi dimostrato, che l'angolo AHB è diviso per mezzo della retta HF, siccome ancora, che l'angolo BIC è diviso per mezzo dalla retta IF; ed essendosi di più dimostrato, che gli angoli FHB, FIB sono eguali fra di loro: ne siegue, che l'angolo AHB sia eguale all'angolo BIC, quindi essendo tutto questo discorso applicabile agli altri angoli, ne siegue, che il pentagono HGLKI sia parimente equiangolo; ciocchè bisognava fare.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio in un pentagono equilatero, ed equiangolo dato.



I.

Sia dato il pentangolo ABCDE equilatero, ed equiangolo; fa duopo descriverci dentro un cerchio.

II.

Si sechino per mezzo li due angoli (1) *EAB, ABC per le rette AF, BF, le quali si vadino a congiungere al punto F.* Si

(1) *Pr.* 9. I.

Digitalizzato da Google

Si unisca no le rette (1) *FG, FD, FE.*

Dal punto F si facciano (2) *sopra li lati AB, BC, CD, DE, EA del pentagono cadere le perpendicolari FL, FG, EH, FI, FK.*

III.

Perchè dalla suppoſizione la AB è eguale alla AE, e la AE è comune, ſaranno li due lati BA, AF del triangolo ABF eguali a due lati EA, AF de triangolo AEF, ciaſcuno a ciaſcuno: quindi, eſſendo ancora dalla coſtruzione l'angolo BCF eguale all'angolo EAF, ſarà (3) l'angolo ABF, eguale all'angolo AEF: ma dalla coſtruzione l'angolo ABC è doppio dell'angolo ABF: dunque l'iſteſſo angolo ABC ſarà doppio dell'angolo AEF: il perchè, eſſendo dalla ſuppoſizione l'angolo AED eguale all'angolo ABC, ne ſiegue, che l'angolo AED ſia parimente doppio dell'angolo AEF: e perciò, che l'angolo AED è diviſo per mezzo dalla retta FE. Nell'iſteſſa maniera paragonando il triangolo AEF col triangolo DEF, ſi dimoſtrerà che l'angolo EDC ſia diviſo per mezzo dalla retta FD, e finalmente, che l'angolo DCB ſia diviſo per mezzo dalla retta CF.

In oltre perchè l'angolo retto FLA è eguale all'angolo retto FKA, e l'angolo FAL è eguale all'angolo FAK, ſaranno li

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 12. *I.*

Digitalizzato da Google

li due angoli FLA, FAL del triangolo FAL eguali a' due angoli FKA, FAK del triangolo FKA; quindi, essendo il lato FA, comune ad entrambi i triangoli; sarà (1) la retta FL eguale alla retta FK: nell' istessa maniera si dimostrerà, che la FK sia eguale alla FI, e la FI alla FH, e questa alla FG, e questa alla FL: di modocchè le cinque rette FL, FH, FI, FH, FG saranno tutte eguali fra di loro laonde dal centro F col raggio FL descrivendo un cerchio, egli passerà necessariamente per li punti K, I, H, e G, e toccherà i lati AB, AE, ED, DC, CB, del pentagono ne suddetti punti (2), perchè dalla costruzione le rette FL, FK, FI, FH, FG sono perpendicolari a' suddetti lati del pentagono; ciocchè bilognava fare.

PROP. XIV. PROBLEMA.

Descrivere un cerchio intorno ad un pentagono equilatero, ed equiangolo dato.

I.



Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo, fa duopo descrivere intorno ad esso un cerchio.

II.

Si sechino (3) *per mez-*

(1) *Pr.* 26. I.
(2) *Pr.* 16. III.
(3) *Pr.* 9. I.

Digitalizzato da Google

mezzo li due angoli EAD, ABC, per le rette AF, BF.

Si congiungono (1) *le rette FE, FD, FC.*

III.

Siccome dalla ſuppoſizione la AB è eguale alla AE, e la AF è comune, così ſaranno i due lati BA, AF del triangolo EAF, eguali a' due lati EA AF del triangolo EAF, ciaſcuno a ciaſcuno; quindi, eſſendo di più dalla coſtruzione l' angolo BAF eguale all' angolo EAF, ſarà (2) la baſe BF eguale alla baſe EF, e l' angolo ABF eguale all' angolo AEF: ma dalla coſtruzione l' angolo ABC è doppio dell' angolo ABF; dunque l' iſteſſo angolo ABC ſarà parimente doppio dell' angolo AEF: laonde, eſſendo dalla ſuppoſizione l' angolo ABC eguale all' angolo AED; ſarà l' angolo AED doppio dell' angolo AEF: e per conſeguente l' angolo AED rimane diviſo per mezzo dalla retta EF. Nell' iſteſſa maniera paragonando il triangolo AEF col triangolo DEF, ſi dimoſtrerà, che la baſe AF ſia eguale alla baſe FD, e che l' angolo EDC reſti diviſo per mezzo dalla retta DF; e poi paragonando il triangolo EDF col triangolo CDF, ſi moſtrerà, che la baſe FE ſia eguale alla baſe FC, e che l' angolo BCD rimanga diviſo per mezzo dalla retta CF; di modocchè le cinque rette FA, FE, FD, FC, BF ſaranno egua-

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 4. *I.*

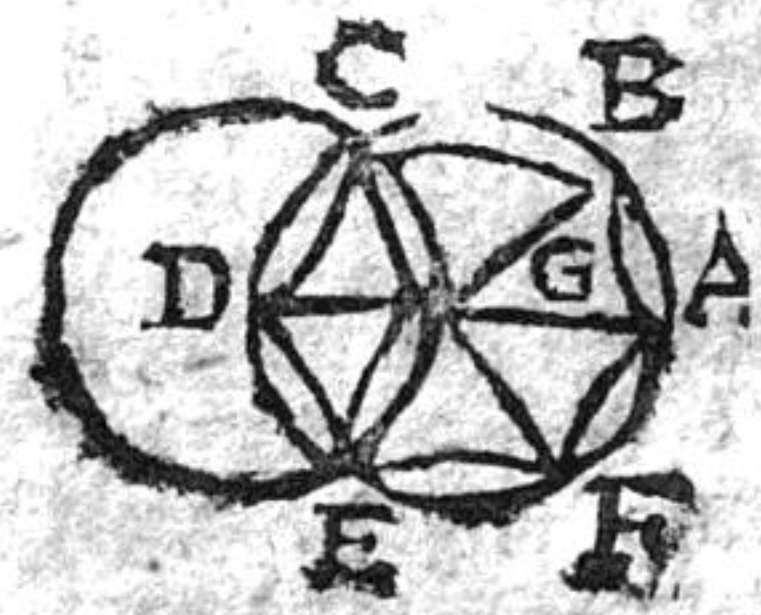
Digitalizzato da Google

li fra di loro: il perchè dal centro F col raggio FA descrivendo un cerchio, egli passerà per tutti li cinque angoli A, E, D, C, B del pentagono dato. Ciocchè doveva farsi.

PROP. XV. PROBLEMA.

Descrivere un' essagono equilatero, ed equiangolo in un cerchio dato.

I.



Sia dato il cerchio ABCDEF, avendo il centro G; fa duopo descrivere in esso un' essagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Tirisi il diametro AGD (1).

Dal centro D col raggio DG si descriva il cerchio CGE.

Si congiungano (2) *le rette CG, EG.*

Si distendano la CG in G, e la EG in B (3).

Si congiungano le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA (4). Io dico, che la figura ABCDEF descritta nel cerchio dato sia un' essagono equilatero, ed equiangolo.

III.

Siccome dalla costruzione il punto D è centro del cerchio CGE, così le tre rette DC, DG, DE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro.

Si-

(1) *Dim.* 4. (2) *Dim.* 1.
(3) *Dim.* 2. (4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

Similmente, ſiccome dalla ſuppoſizione G è il centro del cerchio ABCDEF, così le tre rette GC, GD, GE cadenti dal centro alla circonferenza ſaranno eguali fra loro d'onde è facile a dedurne, che li due triangoli DCG, EDG ſono equilateri, e per conſeguente equiangoli (1): Quindi, eſſendo i tre angoli d'ogni triangolo eguali a due angoli retti (2), ſarà così l'angolo DEG, come l'angolo DGC eguale alla terza parte di due angoli retti: laonde eſſendo i tre angoli DGE, DGC, CGB eguali a due angoli retti (3), ſarà l'angolo rimanente CGB eguale ancora alla terza parte di due retti; il perchè li tre angoli DGE, DGC, CGB ſaranno eguali fra di loro: ma li detti tre angoli DGE, DGC, CGB ſono eguali a tre angoli BGA, AGF, FGE, perchè ſono queſti oppoſti al vertice di quelli (4): dunque li ſei angoli DGE, DGC, BGA, CGB AGF, FGE ſaranno eguali fra di loro: e per conſeguente gli archi DE, DC, CB, BA, AF, FE, a' quali inſiſtono i ſuddetti ſei angoli ſaranno parimente eguali (1): d'onde poi ſiegue, che le corde, quali ſono ſottopoſte agli archi accennati; cioè le corde DE, CD, CB, BA, AF, FE ſono

(1) *Cor. 1. della Pr. 5. I.* (2) *Pr. 32. I.*
(3) *Pr. 13. I.*
(4) *Pr. 13. I.*
(5) *Avvertimento della pr. 26. III.*

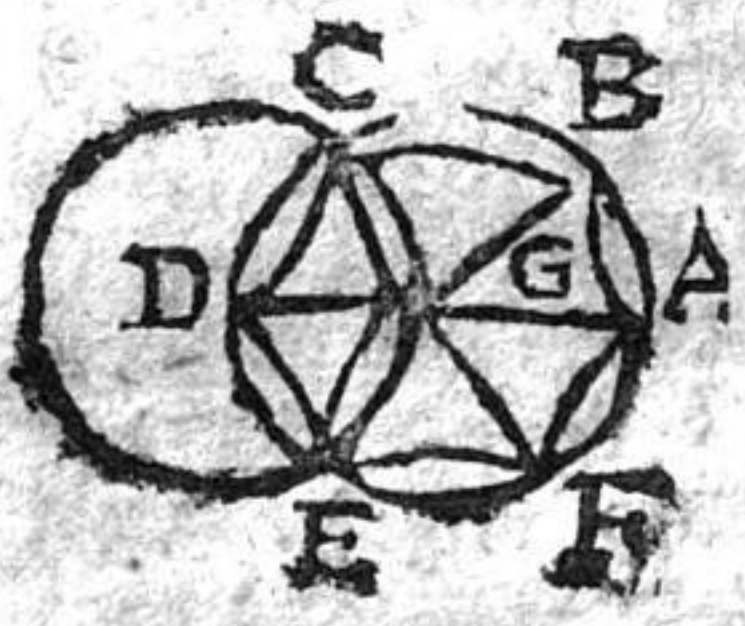
Digitalizzato da Google

li fra di loro: il perchè dal centro F col raggio FA descrivendo un cerchio, egli passerà per tutti li cinque angoli A, E, D, C, B del pentagono dato. Ciocchè doveva farsi.

PROP. XV. PROBLEMA.

Descrivere un' essagono equilatero, ed equiangolo in un cerchio dato.

I.



Sia dato il cerchio ABCDEF, avendo il centro G; fa duopo descrivere in esso un' essagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Tirisi il diametro AGD (1).

Dal centro D col raggio DG si descriva il cerchio CGE.

Si congiungano (2) *le rette CG, EG.*

Si distendano la CG *in G, e la EG in B* (3).

Si congiungano le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA (4). Io dico, che la figura ABCDEF descritta nel cerchio dato sia un' essagono equilatero, ed equiangolo.

III.

Siccome dalla costruzione il punto D è centro del cerchio CGE, così le tre rette DC, DG, DE cadenti dal centro alla circonferenza saranno eguali fra di loro.

Si-

(1) *Dim.* 4.
(2) *Dim.* 1.
(3) *Dim.* 2.
(4) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

Similmente, ficcome dalla fuppofizione G è il centro del cerchio ABCDEF, così le tre rette GC, GD, GE cadenti dal centro alla circonferenza faranno eguali fra loro d' onde è facile a dedurne, che li due triangoli DCG, EDG fono equilateri, e per confeguente equiangoli (1) : Quindi, effendo i tre angoli d' ogni triangolo eguali a due angoli retti (2), farà così l' angolo DEG, come l' angolo DGC eguale alla terza parte di due angoli retti : laonde effendo i tre angoli DGE, DGC, CGB eguali a' due angoli retti (3), farà l' angolo rimanente CGB eguale ancora alla terza parte di due retti; il perchè li tre angoli DGE, DGC, CGB faranno eguali fra di loro: ma li detti tre angoli DGE, DGC, CGB fono eguali a' tre angoli BGA, AGF, FGE, perchè fono queſti oppoſti al vertice di quelli (4): dunque li fei angoli DGE, DGC, BGA, CGB AGF, FGE faranno eguali fra di loro: e per confeguente gli archi DE, DC, CB, BA, AF, FE, a' quali inſiſtono i ſuddetti fei angoli faranno parimente eguali (1): d'onde poi ſiegue, che le corde, quali ſono ſottopoſte agli archi accennati; cioè le corde DE, CD, CB, BA, AF, FE ſono

(1) Cor. 1. della Pr. 5. I. (2) Pr. 32. I.
(3) Pr. 13. I.
(4) Pr. 13. I.
(5) Avvertimento della pr. 26. III.

Digitalizzato da Google

eguali fra di loro (1), di modochè l'essagono ABCDEF sarà equilatero. Che poi sia equiangolo, si dimostra così (2): l'arco AB è eguale all'arco DC, aggiungendo dunque comunemente l'arco AFED sarà l'arco BAFED eguale all'arco AFEDC; quindi poichè gli angoli alle circonferenze insistenti ad archi eguali sono eguali fra di loro; sarà l'angolo BCD eguale all'angolo CBA: nell'istessa maniera si dimostrerà, che l'angolo CBA sia eguale all'angolo BAF, e che questo sia eguale all'angolo AFE, e così delli altri: dacchè poi siegue, che l'essagono ABCDEF sia parimente equiangolo: ciocchè doveva farsi.

COROLLARIO.

Da quì è manifesto, che il lato AB dell'essagono sia eguale al raggio del cerchio, nel quale l'essagono è descritto; e per conseguente tutti i sei lati dell'essagono sono eguali al raggio del cerchio replicato sei volte, ovvero al diametro dell'istesso cerchio replicato tre volte; ma la circonferenza del cerchio è maggiore de' sei lati dell'essagono; dunque la circonferenza del cerchio è maggiore del diametro del cerchio replicato tre volte: vale a dire, se il diametro del cerchio è di sette palmi, la di lui circonferenza sarà più di 21 palmi. Di fatto Archimede ha dimostrato, che la circonferenza al diametro sia a un di presso, come 22 a 7.

AV-

(1) Pr. 29. III. (2) Pr. 27. III.

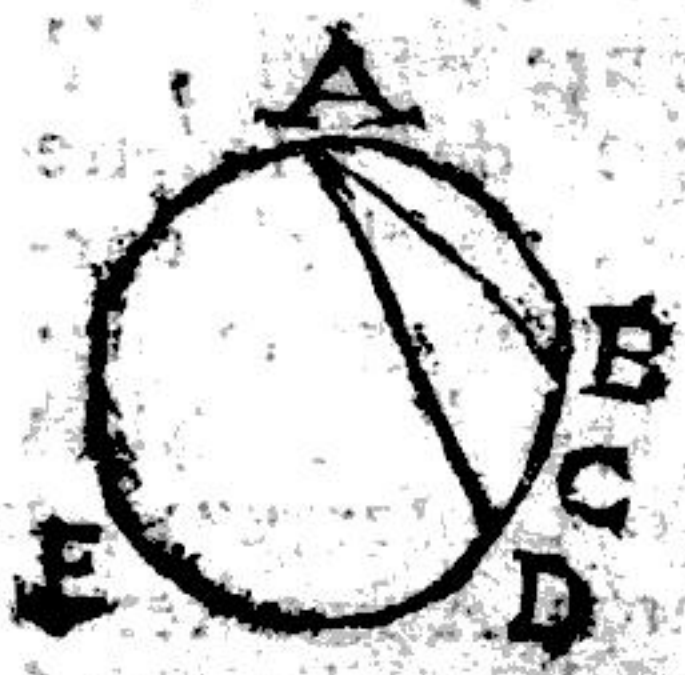
Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

Se, descritto l' essagono ABCDEF nel cerchio dato si tirino per li punti A, B, C, D, E, F le tangenti al cerchio, si vedrà nascere intorno al detto cerchio, un' essagono equilatero, ed equiangolo, siccome si è detto nel pentagono; similmente si potrà descrivere un cerchio dentro, ed intorno al un' essegano equilatero, ed equiangolo dato.

PROP. XVI. PROBLEMA.

Descrivere un quindecagono equilatero ed equiangolo in un cerchio dato.



I.

Sia dato il cerchio ADE; fa duopo descriverci dentro un quindecagono equilatero, ed equiangolo.

II.

Descrivasi nel cerchio dato (1) *un triangolo equiangolo ad un triangolo equilatero qualunque, il quale triangolo dopo che sarà descritto, si ritroverà egli ancora equilatero, e sia AD uno de' lati del triangolo equilatero.*

Descrivasi nel detto cerchio a cominciare dal punto A (4) *un pentagono equilatero, ed equiangolo, e sia AB uno de' lati del detto pentagono.*

(1) *Pr. 2. di questo.* (2) *Pr. 11. di questo.*

Digitalizzato da Google

Sechisi l'arco BD per mezzo (1) *nel punto C*. Io dico, che così l'arco BC, come l'arco CD, sono la decimaquinta parte della circonferenza del cerchio dato, di modochè congiugnendo le corde BC, CD, ed adattando nel cerchio continuamente tante altre linee rette eguali a ciascuna delle due BC, CD, si vedrà uscir fuori in quindecagono equilatero, ed equiangolo.

III.

Imperciochè, siccome la corda AD è uno de' lati del triangolo equilatero descritto nel cerchio, così sarà l'arco AD la terza parte della sua circonferenza, quindi, intendendo compartita la detta circonferenza in quindici parti tutte eguali, l'arco AD ne conterrà cinque delle sudette quindici parti. Similmente, perchè la corda AB, è uno de' lati del pentagono descritto nel cerchio ABE, sarà l'arco AB la quinta parte della di lui circonferenza; e per conseguente l'istesso arco AB conterrà tre delle quindici parti eguali, nelle quali s'intende compartita la di lui circonferenza: ma si è dimostrato l'arco AD contenerne cinque; dunque l'arco BD ne conterrà due; e perciò, così l'archetto BC, come l'altro archetto CD saranno la decimaquinta parte nella circonferenza del cerchio. Ciocchè bisognava fare.

LI-

(1) *Pr.* 30. *III.*

Digitalizzato da Google

LIBRO QUINTO.

DEFINIZIONI.

I.

OGni grandezza minore, che misura esattamente un'altra grandezza maggiore, dicesi parte.

II.

Viceversa ogni grandezza maggiore, che è misurata esattamente da un'altra grandezza minore, dicesi multiplice.

SPIEGAZIONE.

I nomi di parte, *e di* multiplice *sono correlativi. Se vi sono due grandezze, una minore, l'altra maggiore tali, che la minore misuri esattamente la maggiore; la minore dicesi* parte *in rispetto della maggiore, e la maggiore dicesi* multiplice *in rispetto della minore, la voce dunque di* parte *qui è un poco ristretta, nè si prenda come comunemente suol prendersi, per una porzione qualunque d'una grandezza, ma piuttosto per una porzione tale, che misuri esattamente il suo tutto. Quindi altri, per maggior distinzione hanno distinte due parti di parti, l'una* aliquota, *l'altra* aliquanta. *Chiaman parte* aliquanta *quella, che non misuri esattamente il suo tutto; chiamano parte* aliquota *quella, che misura il suo tutto esattamente; così per esempio dicono, che il* 5 *sia parte aliquanta del* 12,

Digitalizzato da Google

e che il 5 *ſia parte aliquota del* 15.

Se vi ſono due grandezze minori, le quali contengono un egual numero di volte in due altre grandezze maggiori, le minori ſi chiameranno parti ſimili *in riguardo delle maggiori, e viceverſa le maggiori ſi chiameranno* ſemplici ſimili, *ovvero* egualmente multiplici *in riguardo delle minori; così per eſempio, perchè le due grandezze minori* 2, *e* 5 *ſi contengono reſpettivamente cinque volte nelle maggiori* 16, *e* 25; *le minori* 2, *e* 5 *le chiameremo* parti ſimili *in riguardo di* 10, *e* 22, *ma le maggiori* 10, *e* 25 *le chiameremo* multiplici ſimili, *ovvero più elegantemente* egualmente multiplici *di* 2, *e* 5.

III.

La ragione non è altra coſa, ſe non il rapporto di due grandezze omogenee paragonate l' una coll' altra ſecondo la quantità.

IV.

Due grandezze allora ſono omogenee, quando la minore di eſſa replicata più volte può ſopravvanzare la maggiore.

SPIEGAZIONE.

Per darſi luogo alla ragione ſi richieggono tre coſe. I. *Due grandezze.* II. *Che ſiano omogenee.* III. *Che ſi paragonino inſieme ſecondo la quantità, non già ſecondo gli altri loro attributi; quando queſte tre coſe ſi verificano, ſi darà luogo alla ragione, la quale altro non è, ſe non la compara-*

Digitalizzato da Google

razione frambievole delle due ſuddette grandezze: Per conoſcere poi ſe due grandezze ſono omogenee, o nò dovrà tenerſi queſta regola: biſognerà vedere, ſe la minore di eſſe replicata più volte è capace di ſopravvanzare la maggiore: Ove ciò ſiegua, le due grandezze dovranno ſtimarſi eterogenee. Così due linee, due ſuperficie, due corpi, due durate, &c. dovranno ſtimarſi omogenee; imperciocchè la linea minore, la ſuperficie minore, il corpo minore, la durata minore &c. preſe molte volte poſſono ſuperare la linea, la ſuperficie, il corpo, e la durata maggiore. Ma una linea non è omogenea con una ſuperficie; imperciocchè la linea moltiplicata quante volte ſi vuole, giammai può degenerare in ſuperficie.

La definizione della ragione addotta da Euclide *è generale, e comprende ſotto di ſe due ſorte di ragioni, l'una delle quali diceſi* geometrica, *e l'altra* aritmetica, *come che egli tratti poi ſolamente della ragione geometrica. Ma avanti, che io entri a ragionare de' caratteri dell'una, e dell'altra, dirò, che ſiccome in ogni ragione fa duopo, che vi ſiano due grandezze omogenee; così la prima di eſſe diceſi* antecedente *della ragione, e l'altra diceſi* conſeguente *dell'iſteſſa ragione. Quindi ogni ragione tiene un antecedente, ed un conſeguente, li quali devono eſſere omogenii, altrimente la ragion non vi ſarebbe più. ſecondo quello che ſi è detto. Ora è da ſaperſi, che qualora*

lora ſi compara l' antecedente col conſeguente; e ſi va conſiderando l' eccesſo dell' uno ſopra l' altro, ovvero il difetto dell' uno dall' altro, in tal caſo la ragione ſi chiama aritmetica. *Ma quando ſi compara l' antecedente col ſuo conſeguente, e ſi va conſiderando quante volte l' uno contenga l' altro, ovvero quante volte l' uno ſi contenga nell' altro, allora la ragione ſi chiama* geometrica; *Così per eſempio, ſe paragonando il lato del quadrato colla ſua diagonale ſi va eſaminando quanto il lato ſia minore della diagonale, la ragione diraſſi aritmetica; ma ſe paragonando l' uno coll' altro ſi cerca ſapere quante volte il lato ſi contiene nella diagonale, la ragione ſi chiamerà geometrica. Del rimanente è quì da avvertirſi, che ſiccome può l' antecedente eſſere maggiore, eguale e minore del conſeguente, così la ragione geometrica, non meno che l' aritmetica può eſſere di* maggiore a minore; *di* eguale ad eguale; *e di* minore a maggiore.

V.

La propoſizione altro non è, ſe non la comparazione di due ragioni eguali.

VI.

Due ragioni allora ſono eguali, quando gli egualmente multiplici degli antecedenti pigliati ſecondo qualſivoglia moltiplicazione ſono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente multiplici de' conſeguenti pigliati eziandio ſecondo qualſivoglia moltiplicazione.

VII.

Digitalizzato da Google

VII.

Ma ſe pigliati gli egualmente multiplici degli antecedenti ſecondo qualche moltiplicazione, e preſi eziandio gli egualmente multiplici de' conſeguenti parimente ſecondo qualche moltiplicazione ſi troverà, che il multiplice del primo antecedente avanza il multiplice del ſuo conſeguente, ma l'egualmente multiplice all' altro antecedente non è maggiore dell'egualmente multiplice del ſuo conſeguente, ſi dirà, che il primo antecedente al ſuo conſeguente abbia maggior ragione dell'altro antecedente al ſuo conſeguente.

SPIEGAZIONE.

Se vi ſono due ragioni eguali, e ſi paragonano inſieme, il paragone di queſte due ragioni diceſi proporzione, *la quale ſarà* aritmetica, *ſe le due ragioni eguali ſiano aritmetiche, e ſarà* geometrica *ſe le due ragioni eguali ſiano geometriche. Ora è da ſaperſi, ſiccome la proporzione è il paragone di due ragioni eguali, così ogni proporzione, che contenga due antecedenti, e due conſeguenti, diceſi ragione: imperciocchè ogni ragione contiene un antecedente, ed un conſeguente.*

Due ragioni aritmetiche allora ſono eguali, quando gli ecceſſi, ovvero i diferti de' due antecedenti da' loro conſeguenti ſono eguali. Così per eſempio le due ragioni aritmetiche di 8 a 5, e di 4 a 1 ſono eguali

Digitalizzato da Google

fra di loro, perchè gli eccessi degli antecedenti 8 *e* 4 *sopra i loro conseguenti* 5, *e* 1 *sono eguali fra di loro: e così similmente le ragioni aritmetiche di* 3 *a* 6, *e di* 8 *a* 10 *sono eguali; perchè i diferti degli antecedenti* 4, *e* 8 *da' loro conseguenti* 6, *e* 10 *sono paremente eguali; quindi dicendosi come sta* 8 *a* 5, *così sta* 4 *a* 1, *ovvero come sta* 4 *a* 6, *così* 8 *a* 10 *si darà luogo alla proposizione aritmetica.*

Due ragioni geometriche allora si dicono eguali, quando gli antecedenti contengono, ovvero sono contenuti da' conseguenti nell' istessa maniera, di modo che quello, che deve fare un antecedente per rendersi eguale al suo conseguente, quell' istesso debba fare l' altro antecedente per rendersi eguale al suo conseguente, quell' istessa debba fare l' altro antecedente per equagliare il suo conseguente. Sicchè dicendosi come 2 *a* 6, *così* 4 *a* 12, *ovvero come* 8 *a* 4 *così* 2 *a* 1, *si darà luogo alla proporzione geometrica.*

Euclide, *che ha voluto bandire affatto le idee del contenere, e dell' essere contenuto dalle ragioni geometriche, come quello, che vedeva non aver luogo nelle quantità* irrazionali, o incommensabili, *delle quali egli tratta ampiamente nel libro* x., *ci ha additato un altro criterio per discernere se due ragioni geometriche sono eguali, o no, del quale criterio non sembra, che i moderni siano rimasi gran fatto soddisfatti, forse perchè non hanno scoperti i veri fonti, da'*

qua-

Digitalizzato da Google

quali egli ha tratto. Il criterio ſuggeritoci da Euclide è queſto: Quando naſce il dubbio ſe due ragioni geometriche ſiano eguali, o no, ſa duopo pigliare gli egualmente multiplici degli antecedenti ſecondo qualſivoglia moltiplicazione, ſiccome ancora pigliare gli egualmente multiplici de' conſeguenti, parimente ſecondo qualſivoglia moltiplicazione; ciò fatto, ſa duopo paragonare gli uni cogli altri, a vedere ſe i primi ſono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori de' ſecondi: ove ciò ſiegua in tutte le moltiplicazioni poſſibili, ſi potrà dire ſicuramente, che le due ragioni ſiano eguali; ma ſe paragonati gli uni cogli altri ſi trovi un caſo, in cui il multiplice del primo antecedente è maggiore del multiplice del ſuo conſeguente, in tal caſo ſi dirà, che il primo antecedente al ſuo conſeguente ha maggiore ragione dell'altro antecedente al ſuo conſeguente. Queſto è il tanto celebre criterio ſuggeritoci da Euclide, dal quale egli ha dedotte tutte le proprietà delle proporzioni. Per ora baſterà di metterſi bene a mente le quattro ſeguenti propoſizioni.

I. Se gli egualmente multiplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio ſono entrambi eguali, maggiori, o minori degli egualmente multiplici de' conſeguenti pigliati parimente ad arbitrio, le quattro quantità ſaranno proporzionali. II. *Viceverſa*, ſe quattro quantità ſono proporzionali, gli egualmente multiplici degli antecedenti pigliati

Digitalizzato da Google

gliati ad arbitrio saranno entrambi eguali, maggiori, e minori degli egualmente multiplici de' conseguenti pigliati parimente ad arbitrio. III. Che se pigliati gli egualmente multiplici così degli antecedenti, come de' conseguenti, si trovi, che il multiplice del primo antecedente sia maggiore del multiplice del suo conseguente, ma il multiplice dell'altro antecedente non sia maggiore del multiplice del suo conseguente, in tal caso la prima alla seconda avrà maggiore ragione della terza alla quarta. IV. *Viceversa*, se la prima alla seconda ha maggior ragione della terza alla quarta, si potranno pigliare tali egualmente multiplici degli antecedenti, e tali egualmente multiplici de' conseguenti, che quello del primo antecedente sia maggiore di quello del suo conseguente, ma quello dell'altro antecedente non sia maggiore di quello del suo conseguente.

VIII.

Le grandezze, che hanno la medesima ragione si chiamano proporzionali.

IX.

In ogni proporzione gli antecedenti si chiamano omologi fra di loro, siccome ancora li conseguenti.

X.

La proporzione almeno ha bisogno di tre termini.

SPIE-

Digitalizzato da Google

SPIEGAZIONE.

Siccome la proporzione è il paragone di due ragioni eguali, così la proporzione deve contenere quattro termini, vale a dire due antecedenti, e due conſeguenti. Nulla di manco potria la proporzione aver luogo in tre termini, ma non già in meno di tre termini. Ciò avviene allora quando il conſeguente della prima ragione è parimente antecedente dell' altra ragione: in tal caſo la proporzione avrà i ſuoi due antecedenti, e i ſuoi due conſeguenti, quantunque non abbia più di tre termini; e queſto a cauſa che quello di mezzo fa le veci d' antecedente nella ſeconda ragione, e di conſeguente nella prima, come ſi ſcorge in queſta proporzione 8 ſta a 4, come l' iſteſſo 4 a 2: Ora è da ſaperſi, che quando la proporzione ha luogo in tre termini ſi dice continua; *ma quando ha luogo in quattro termini ſi chiama* interrotta.

XI.

Ragione permutata ſi chiama, quando in una proporzione ſi paragona l' antecedente coll' altro antecedente, ed il conſeguente coll' altro conſeguente.

XII.

Ragione inverſa ſi chiama, quando in una proporzione l' antecedente ſi fa conſeguente, ed il conſeguente ſi fa antecedente.

XIII.

Ragione compoſta ſi dice, quando in una

Digitalizzato da Google

una proporzione la ſomma dell'antecedente, e del conſeguente ſi compara coll'iſteſſo conſeguente.

XIV.

Ragione diviſa ſi dice, quando viceverſa in una proporzione l'eccesſo dell'antecedente ſopra il ſuo conſeguente ſi compara coll'iſteſſo conſeguente.

XV.

Ragione converſa ſi dice, quando in una proporzione ſi compara l'antecedente ſopra il ſuo conſeguente.

SPIEGAZIONE.

Prendaſi una proporzione qualſivoglia come queſta: 8 *a* 2, *così* 4 *a* 1: *ſe ſi fa come* 8 *a* 4, *così* 2 *a* 1: *queſta ſi dirà ragione* permutata; *ma dicendoſi come* 2 *a* 8, *così* 1 *a* 4 *queſta ſi chiamerà razione* inverſa: *inoltre dicendoſi come* 12 *a* 2, *così* 5 *a* 1, *queſta ſi dirà ragione* compoſta; *che ſe poi ſi faccia* 6 *a* 2, *così* 3 *ad* 4, *queſta ſi chiamerà ragione* diviſa; *finalmente dicendoſi come* 8 *a* 6, *così* 4 *a* 3, *queſta ſi chiamerà ragione* converſa. *Avverraſi quì, che* Euclide *in queſto luogo ha inteſo ſolamente ſpiegare i nomi di ragione* permutata, inverſa, compoſta, diviſa, *e* converſa, *e non altro: che poi una proporzione poſſa permutarſi, inverterſi, comporſi, dividerſi, e convertirſi, e ciò non oſtante rimanga ancora proporzione, queſta è una coſa, che ha biſogno di eſſere dimoſtrata;*

Digitalizzato da Google

come di fatto egli lo dimostra in varj luoghi di questo quinto libro.

XVI.

Se vi sono più di due grandezze da una parte, che compongono una serie, ed altrettante da un' altra, che compongono un altra serie, e sia come la prima alla seconda nell' altra serie, e come la seconda alla terza nella prima serie, così la seconda alla terza nell' altra serie, e come la terza alla quarta nella prima serie, così la terza alla quarta nell' altra serie, e come la terza alla quarta nella prima serie, così la quarta alla quinta nell' altra serie, e così ordinatamente in tutte le altre, che seguono diraffi cotesta ragione ordinata.

XVII.

Ma se come sta la prima alla seconda nella prima serie, così sta la penultima all' ultima nell' altra serie; e come le seconda alla terza nella prima serie, così l' antepenultima alla penultima nell' altra serie, e come la terza alla quarta nella prima serie, così quella, che sta avanti all' antepenultima all' istessa antepenultima, e con quest' ordine si vada avanzando sempre la ragione: diraffi cotesta ragione non ordinata, ma perturbata.

XVIII.

Se poi nell' uno caso, e nell' altro si dice, come la prima all' ultima nella prima serie, così la prima all' ultima nell' altra serie, questa chiameraffi ragione eguale, la quale sarà ordinata, se la ragione sia ordinata, e sarà perturbata, se la ragione sia perturbata.

SPIE-

Digitalizzato da Google

SPIEGAZIONE.

Se vi ſono due ſerie di quantità eguali di numero, e comparate ſempre due quantità d' una ſerie con due altre dell' altra ſerie, eſca fuori una proporzione, tal ſorte di ragione ſi chiamerà ora ordinata, *ora* perturbata, *ſecondo la maniera, nella quale ſi prendono le grandezze proporzionali: mettiamo, che le due ſerie ſiano queſte qui ſcritte, nelle quali come ſta 2 a 4, così 1 a 5; come 4 a 12, così 2 a 6, e come 11 a 60, così 6 a 30 diraſſi queſta ragione* ordinata: *mettiamo in oltre, che le due ſerie ſiano queſte due altre quì notate, nelle quali come ſta 2 a 4, così 15 a 30, e come 4 a 12, così 5 a 15, e come 12 a 60, così 1 a 5; diraſſi queſt' altra ragione* perturbata: *nell' una poi, e nell' altra ſerie ſe ſi dice, come 2 a 60, così 1 a 30, diraſſi quſta, ragione* eguale, *la quale ſarà* ordinata *nelle due prime ſerie, e* perturbata *nelle altre due.*

2 . 4 . 12 . 60	
1 . 2 . 6 . 30	

2 . 4 . 12 . 60	
1 . 5 . 15 . 30	

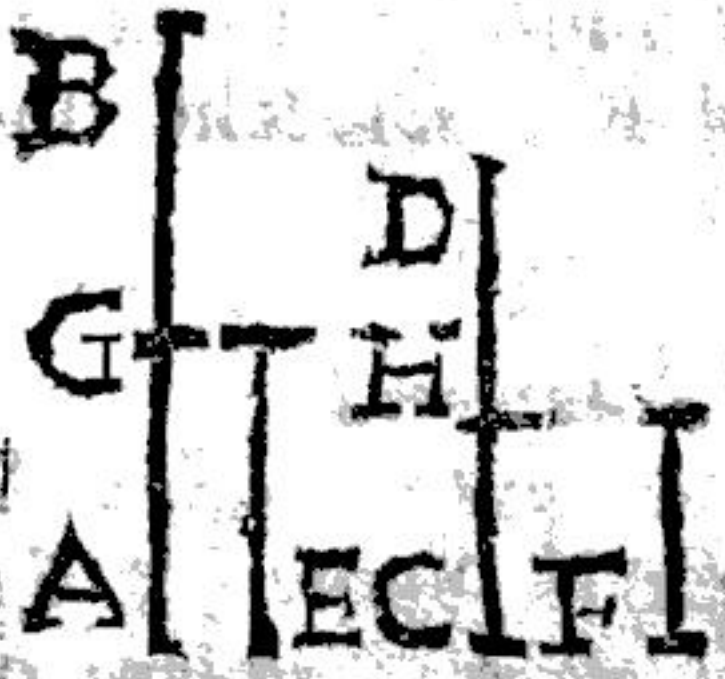
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. I. TEOREMA.

Se quante grandezze si vogliano sieno egualmente moltiplici di altrettante grandezze, quando ciascuna grandezza è moltiplice della sua corrispondente, altrettanto saranno moltiplici ancora tutte di tutte.

I.



Siano quante grandezze si vogliano AB, CD egualmente moltiplici d'altrettante grandezze E, ed F ciascuna di ciascuna; vale a dire AB di E, e CD di F: io dico, che quando AB è moltiplice della sua corrispondente E, tanto la AB, e CD insieme saranno moltiplici delle E, ed F insieme.

II.

Perchè dalla supposizione la AB è tanto moltiplice di E, quanto la CD è moltiplice di F, quante grandezze sono nella AB eguali alla E, altrettante ne saranno nella CD eguali alla F. Risolvendo dunque la AB in parti eguali alla E, che siano AG, GB, e risolvendo in oltre la CD in parti eguali alla F, che siano CH HD, sarà la moltitudine delle parti AG, GH eguale alla moltitudine delle parti CH, HD. Quindi, perchè la AG è eguale alla E, e la CH è eguale alla F, saranno le due AG, CH insieme eguali alle due E, ed F insie-

Digitalizzato da Google

sieme ; e similmente le due GB, HD insieme saranno eguali alle due E, ed F insieme ; dal che si conchiude, che quante parti sono in AB, e CD insieme eguali alle due E, ed F insieme, altrettante ne sono nella sola AB eguali alla E, e per conseguente, che la AB sia tanto moltiplice della sua corrispondente E, quando tutte due insieme AB, e CD sono moltiplici di tutte due insieme E, ed F. Ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

Tutte le proposizioni di questo libro si possono dimostrare per via di numeri ; sia dunque 8 *tanto moltiplice di* 4, *quanto* 6 *è moltiplice di* 3, *e quanto* 10 *è moltiplice di* 5 : *è manifesto, che come* 8 *è moltiplice di* 5 ; *così* 24 *somma di* 8., 6 ; *e* 10 *e moltiplice di* 12 *somma di* 4, 3, 12, *e* 5.

8. 4
6. 3
10. 4
24. 12

PROP. II. TEOREMA.

Se la prima è tanto moltiplice della seconda, quanto la terza della quarta ; e sia in oltre la quinta tanto moltiplice dell' istessa seconda, quanto la sesta è moltiplice della quarta ; sarà la composta della terza, e della sesta e moltiplice della quarta.

I.

Sia la prima AB tanto moltiplice della seconda C, quanto la terza DE è molti-

Digitalizzato da Google



tiplice della quarta F : Sia di più la quinta BG tanto moltiplice dell'istessa seconda C, quanto la sesta EH è moltiplice della quarta F; io dico, che la AG composta dalla prima, e dalla quinta sia tanto moltiplice della seconda C, quanto la DH composta dalla terza, e dalla sesta è moltiplice della quarta F.

II.

Perchè dalla suppositione la *AB* è tanto moltiplice della C, quanto la DE della F; quante grandezze sono in AB eguali a C, tutte ne saranno in DE eguali ad F, e similmente quante grandezze sono in BG eguali a C, tante ne saranno in EH eguali ad F; e per conseguente quante ne sono in tutta la AG eguali a C, tante ne saranno in tutta DH eguali alla F; vale à dire la AG sarà tanto moltiplice della C, quanto la DG è moltiplice della F: Quindi, essendo la AG composta dalla prima, e dalla quinta, e la DH essendo composta dalla terza, e dalla sesta, ne siegue, che il Teorema in questione sia vero.

Dimostrazione co' numeri.

8 4 2 1 19 5 . . . . . 18 . 2 . 0 . 1

Il primo 8 sia tanto moltiplice del secondo 2, quanto il terzo 4 del quarto 1: il quinto 10 sia tanto moltiplice dell' istesso secondo 2, quanto il sesto 5 è molti-

Digitalizzato da Google

tiplice del quarto 1 : *egli è manifesto, che* 18 *composto dal primo, e dal quinto è tanto moltiplice del secondo* 2; *quanto* 9 *composto dal terzo, e dal sesto è moltiplice del quarto* 1.

PROP. III. PROBLEMA.

Se la prima sia tanto moltiplice della seconda quanto la terza è moltiplice della quarta; gli egualmente moltiplici della prima, e della terza pigliati ad arbitrio riusciranno parimente egualmente moltiplici della seconda, e della quarta.

I.



Se la prima A tanto è moltiplice della seconda B, quanto la terza C è moltiplice della quarta D, e si prendono ad arbitrio della prima A, e della terza C gli egualmente moltiplici EF, GH: io dico, che essi saranno egualmente moltiplici ancora della seconda B, e della quarta D, vale a dire, che come EF è moltiplice della B, così la GH è moltiplice della D.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Perchè dalla ſuppoſizione le due grandezze EF, e GH ſono egualmente moltiplici delle due A, e C; quante grandezze ſono in EF eguali ad A altrettante ſe ne conterranno in GH eguali a G: riſolvendo dunque la EF in parti eguali alla A, le quali ſiano EK, KF, e riſolvendo ancora la GH in parti eguali alla C, le quali ſiano HK, LH, ſarà la moltitudine delle parti EK, KF eguale alla moltitudine delle parti HL, LH. Quindi poichè dalla ſuppoſizione la A è tanto moltiplice della B, quanto la C è moltiplice della D, eſſendo la EK eguale alla A, e la GL eguale C, ſarà la prima DK tanto moltiplice della ſeconda B, quanto la terza GL è moltiplice della quarta D. Per l'iſteſſa ragione la quinta KF ſarà tanto moltiplice della ſeconda B, quanto la ſeſta LH è moltiplice della quarta D; laonde la compoſta (1) EF dalla prima, e dalla quinta ſarà tanto moltiplice della ſeconda B, quanto la compoſta GH della terza, e della ſeſta è moltiplice della quarta D: Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione co' numeri.

10 . 2 . 30 . 6
30 . 90

Sia 10 *tanto moltiplice di* 2, *quanto* 30 *è moltiplice di* 6, *di poi di* 10; *e di* 30 *ſe ne pren-*

(1) *Pr. ant.*

Digitalizzato da Google

prendono ad arbitrio gli egualmente moltiplici 30, *e* 90: *è manifesto, che questi due numeri* 30, *e* 90 *sono parimente egualmente moltiplici di* 2, *e di* 6.

PROP. IV. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, le egualmente moltiplici della prima, e della terza pigliate ad arbitrio paragonate colle egualmente moltiplici della seconda, e della quarta ancora pigliate ad arbitrio, si ritroveranno parimente avere l' istessa ragione.



I.

Abbia la prima A alla seconda B l'istessa ragione, che la terza C alla quarta D, e pigliansi ad arbitrio le due E, ed F egualmente moltiplici di A, e di C, siccome ancora le altre due G, ed H, egualmente moltiplici di B, e di D; io dico, che la E, sia alla G, come sia la F alla H.

II.

Per dimostrarlo si prendano ad arbitrio K, ed L egualmente moltiplici di E, e

di

di F, ed M, ed N egualmente moltiplici di G, e di H. Perchè dunque la E è tanto moltiplice della A, quanto la F della C, e si sono pigliate le due K, ed L egualmente moltiplici di E, e di F; saranno (1) le due K, ed L parimente egualmente moltiplici di A, e di C: per la medesima ragione saranno le due M, ed N egualmente moltiplici di B, e di D. Quindi supponendosi, che A abbia la medesima ragione a B, che C, a D dovranno le egualmente moltiplici K, ed L degli antecedenti essere o tutte due maggiori, o tutte due eguali, o tutte due minori delle egualmente moltiplici M, ed N de' conseguenti: ma K, ed L sono parimente egualmente moltiplici di E, ed F, siccome ancora M, ed N sono egualmente moltiplici di G, ed H: sicchè verificandosi nelle egualmente moltiplici degli antecedenti E, ed F, e de' conseguenti G, ed H la legge espostа nella definizione VI. di questo libro, ne siegue, che E abbia la medesima ragione a G, che F ad H.

COROLLARIO.

Di quì è manifesto, che se quattro grandezze, E, G, F, ed H sono proporzionali, ancorchè s' invertano rimarranno proporzionali: vale a dire sarà ancora come M *a* G *ad*

(1) *Pr. ant.*

Digitalizzato da Google

G ad E, così H ad F; imperciocchè essendosi dimostrato, che le due K, ed L sono entrambe, o maggiori, o eguali, o minori delle due M, ed N, ne siegue, che ancora le due M, ed N saranno entrambe o maggiori, o minori, o eguali alle due K, ed L: quindi sarà come G ad E, così H ad F (1).

Dimostrazione co' numeri.

16 4 . 24 6
24 6 . 36

Sia come 4 a 2, così 6 a 3, e siano 16, a 24 egualmente moltiplici gli antecedenti, e 4 e 6 siano egualmente moltiplici de' conseguenti è chiaro, che 16 sta a 4 come 24 a 6, e viceversa, che 4 sta a 16 come 6 a 24.

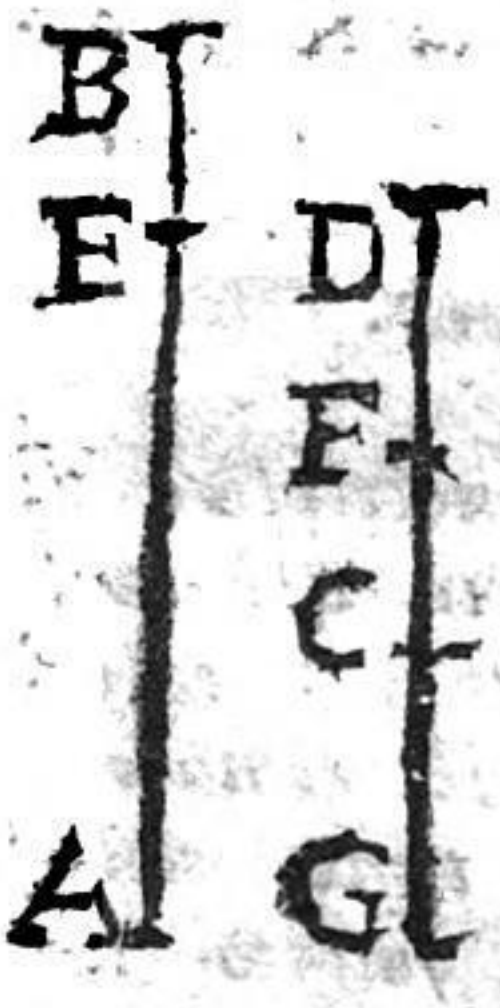
---

(1) *Def. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. V. TEOREMA.

Se tutta una grandezza sia tanto moltiplice di tutta un' altra grandezza, quanto per parte della prima è moltiplice d' una parte della seconda; sarà l' avanzo della prima tanto moltiplice dell' avanzo dell' altra, quanto la tutta è moltiplice della tutta.



I.

Sia tutta la grandezza AB tanto moltiplice della grandezza CD, quanto la parte AE è moltiplice della parte CF; io dico, che la rimanente EB sia tanto moltiplice della rimanente FD, quanto la tutta AB è moltiplice della tutta GD.

II.

Per dimostrarlo; s' intenda alla CD aggiunta per diritto la CG tale, che EB sia tanto moltiplice di essa, quanto la tutta AB è moltiplice della tutta CD, e per conseguente quanto la parte AE è moltiplice della parte CF. Poichè dunque la AE è tanto moltiplice della CF, quanto la EB è moltiplice della GC, sarà (1) la AB tanto moltiplice della GF, quanto la AE è

(1) *Pr. 1. di questo.*

Digitalizzato da Google

moltiplice della CF, e per conseguente quanto la AB è moltiplice della CD; quindi, essendo la AB egualmente moltiplice delle due GF, CD; saranno (1) queste eguali tra di loro; si togiia via la CF, la quale è comunemente, e rimarrà (2) la GC eguale alla FD: ma si è supposto, che la EB sia tanto moltiplice della parte aggiunta CG, quanto la AB è moltiplice della CD, dunque sarà parimente la EB tanto moltiplice della FD, quanto la tutta AB è moltiplice della tutta CD; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

10.	3	*Sia* 20 *tanto moltiplice di*
4.	1	5, *quanto la parte* 4 *è mol-*
.....		*tiplice della parte* 1: *egli è*
16.	4	*manifesto, che il rimanente numero* 15 *sia tanto moltiplice del rimanente numero* 4, *quanto tutto il numero* 20 *è moltiplice di tutto il numero* 5.

Preparazione alla proposizione seguente.

Se una grandezza è moltiplice d' un' altra grandezza, ed una parte della prima sia parimente moltiplice della medesimo grandezza; è certo, che la rimanente o sia

(1) *Assio.* 7. (2) *Assio* 3.

Digitalizzato da Google

ſia moltiplice, o per lo meno ſia eguale all' altra grandezza. Così 30 *è moltiplice di* 5, *e* 20, *che è parte di* 30 *parimente è moltiplice di* 5; *l' avanzo* 10 *è moltiplice anche dell' iſteſſo* 5. *Inoltre* 15 *è moltiplice di* 3, *e la parte* 12 *è ancora moltiplice di* 3: *ma quì l' avanzo* 5 *è eguale all' iſteſſo* 3.

PROP. VI. PROBLEMA.

Se due grandezze ſiano egualmente moltiplici di due altre grandezze ciaſcuna di ciaſcuna: e ſiano in oltre due parti di quelle egualmente moltiplici delle medeſime; ſaranno le rimanenti, o egualmente moltiplici, o per lo meno eguali ad eſſe.



I.

Siano le due grandezze AB, CD egualmente moltiplici di E, e di F, vale a dire AB di E, e GD di F, e ſiano in oltre le parti AG, CH egualmente moltiplici delle medeſime E, ed F; io dico, che le rimanenti GB, HD faranno o egualmente moltiplici, o per lo meno eguali alle due E, ed F; vale a dire, che ſe BG è moltiplice ovvero eguale ad E, ancora la HD ſarà egualmente moltiplice, ovvero eguale alla F.

Digitalizzato da Google

II.

Supponendo . I. Che la GB ſia moltiplice della E : intendaſi alla DC , aggiunta per diritto la CK , in modochè eſſa ſia tanto moltiplice della F , quanto la GB è moltiplice della E . Quindi , poichè la AC prima è tanto moltiplice della ſeconda E , quanto la terza CH è moltiplice della quarta F , e la quinta GB tanto è moltiplice della ſeconda E , quanto la ſeſta CK della quarta F , ſarà (.) la AB compoſta dalla prima , e dalla quinta tanto moltiplice della ſeconda R , quanto ha KH compoſta dalla terza , e dalla ſeſta è moltiplice della quarta F : ma dalla ſuppoſizione la AB è tanto moltiplice della E ; quanto la CD è moltiplice della F ; dunque la KH , CD ſaranno egualmente moltiplici delle medeſime E ed F , e per conſeguente ſaranno eguali fra di loro ; togliendone via la CH , la quale è comune ; rimarrà l'avanzo CK eguale all' avanzo HD : ma ſi è ſuppoſto , che CK ſia tanto moltiplice di F , quanto BG è moltiplice di E ; dunque ſarà parimente HD tanto moltiplice di F , quanto BG è moltiplice di E .

Supponendo II. che BG ſia eguale ad E , io dico , che DH ſia parimente eguale ad F : Intendaſi alla GD aggiunta per diritto la CF eguale alla F . Quindi poichè , la AG è tanto moltiplice della E , quan-

(1) *Pr.* 5. *di queſto* .

Digitalizzato da Google

quanto la CH è moltiplice della F, e la GB è eguale all' istessa E; siccome la CK è eguale alla F: sarà la AB, tanto moltiplice della E, quanto la HK è moltiplice della F: ma dalla suppositione la AB è tanto moltiplice della E; quanto la CD è moltiplice della F; dunque le due KH, CD saranno egualmente moltiplici dell' istessa F, e per conseguente saranno eguali fra di loro: si toglia via la comune CH; rimarrà la CK eguale alla HD, ma la CK dalla costruzione è eguale alla F, dunque la HD è ancora eguale alla F: Ciocchè doveva dimostrarsi.

30 . 4 . 5 . 1
12 . 3
. . . . . .
8 . 4 . 2 . 1

Sia 30, *tanto moltiplice di* 4, *quanto* 5 *è moltiplice di* 1, *e sia in oltre* 12 *tanto moltiplice dell' istesso* 4, *quanto* 3 *è moltiplice di* 1: *è manifesto, che l' avanzo* 8 *è tanto moltiplice del medesimo* 4, *quanto l' avanzo* 2 *è moltiplice di* 1. *Sia di più* 30, *tanto moltiplice de* 6, *quanto* 10 *è moltiplice di* 2; *e* 14 *sia tanto moltiplice dell' istesso* 5, *quanto* 8 *è moltiplice di* 2; *è manifesto, che, siccome l' avanzo* 6 *è eguale a* 6, *così l' avanzo* 2 *e eguale a* 2.

30 . 6 . 10 . 2
24 8
. . . . . .
6 . 6 . 6 . 3

Digitalizzato da Google

PROP. VII. PROBLEMA.

I. Due grandezze eguali hanno la medesima ragione a una terza grandezza. II. viceversa una grandezza ha la medesima ragione a due grandezze eguali.

I.



Siano due grandezze eguali, A, e B, e sia la terza grandezza C; io dico primieramente, che A sta a C; come sta B a C. Dico in secondo luogo, che C stia ad A, come sta D a B.

II.

I. Piglianſi le grandezze D, ed E ad arbitrio egualmente moltiplici delle due A, e B: e pigliſi in oltre la grandezza E moltiplice della terza C. Siccome le due A, e B dalla ſuppoſizione ſono eguali fra di loro; così gli egualmente moltiplici di eſſe D, ed E ſaranno fra di loro eguali (1). Quindi le due D, ed E faranno entrambe, o maggiori, o eguali, o minori della terza F (2): il perchè avendo due ragioni di A a C, e di B a C; ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici D, ed E degli ante-

(1) *Aſſio.* 6. (2) *Aſſio* 1.

Digitalizzato da Google

tecedenti A, e B ſiano entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici F, ed F de' conſeguenti C, e C; ne ſiegue (1), che le ſudette due ragioni ſiano eguali: vale a dire, che la A ſia alla C, come ſta la B alla medeſima C.

II. Suppoſte le medeſime coſe dimoſtraremo ſimilmente, che la F, o è maggiore, o è eguale, o minore di ciaſcuna delle due D, ed E. Quindi, avendo due ragioni di C, ad A, e di C a B, ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici F, ed F degli antecedenti C, e C ſono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici D, ed E de' conſeguenti A, e B ne ſiegue (2), che le ſuddette due ragioni ſiano eguali; vale a dire, che la C ſtia alla A, come ſta la C alla B.

Dimoſtrazione co' numeri.

2 *Siano due numeri* 8 *e* 8 *eguali*
fra di loro, e il terzo numero 4,
4 *egli è manifeſto; che come ſta* 8 *a* 4,
così ſta 8 *a* 4; *viceverſa come ſta*
2 4 *a* 8, *come ſta* 4 *all'iſteſſo* 8.

(c) *Def.6. di questo.* (2) *Def.6. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. VIII. PROBLEMA.

I. Se due grandezze ſono diſeguali, eſſe non anno la medeſima ragione ad una terza grandezza; ma quella ha maggior ragione alla terza, la quale è più grande. II. Viceverſa una terza grandezza ha maggiore ragione alla più piccola di due grandezze diſeguali, che alla più grande.

I.



Siano due grandezze diſeguali AB, e C, ed una terza grandezza D, e ſia AB maggiore di C, io dico, che la AB ha maggiore ragione alla D che la C all'iſteſſa D; e viceverſa, che la D ha maggiore ragione alla C, che alla B.

II.

Siccome dalla ſuppoſizione la AB è maggiore della C, così ſi può da eſſa tagliare una parte eguale (1) alla minore C. Tagliſi dunque *I. la BE eguale alla C. II. Si prendano le tre grandezze FG, GH, ed M egualmente moltiplici reſpettivamente*

(1) Pr. 3. I.

te delle tre grandezze, AE, EB, e C, ma con queſta legge, che la FG, la quale è moltiplice della AE ſia maggiore della D. III. Si prenda dalla D il moltiplice N, ma con queſta legge, che egli ſuperi HG moltiplice di BE d' una parte non maggiore di D.

III.

E. Perchè dalla coſtruzione le due BE, e C ſono eguali fra di loro: li loro egualmente moltiplici GH, ed M ſaranno (1) parimenti eguali: onde, ſiccome la N dalla coſtruzione è maggiore della GH; così ſarà parimente la N maggiore della M (2). Di più perchè dalla coſtruzione la N ſupera la HG d' una parte non maggiore di D, e dall' iſteſſa coſtruzione la FG è maggiore di D; ſarà la FH maggiore di N: quando delle due grandezze FL, ed M, la prima FH è maggiore di N, e l'altra M non è maggiore di N. Inoltre, perchè dalla coſtruzione le due FH, e GH ſono egualmente moltiplici delle due AE, EB, ſarà (3) la FH tanto moltiplice della AC, quanto la GH è moltiplice del EB, ovvero, quanto la M è moltiplice della C: il perchè avendo due ragioni di AB a D, e di D a C; ed eſſendoſi dimoſtrato, che FH moltiplice della prima AB ſupera N moltiplice della ſeconda

(1) *Aſſiom.* 1. (2) *Aſſiom.* 2.
(3) *Pr.* 1. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

D, ma M moltiplice della terza C è minore di N moltiplice della quarta D; ne ſiegue (1), che AB ha maggior ragione di D, che C a D.

II. Viceverſa avendo due ragioni di D a C, e di D ad AB; ed eſſendoſi dimoſtrato, che N moltiplice della prima D ſupera M moltiplice della ſeconda C; ma che N moltiplice della terza D non ſupera HF moltiplice della quarta AC; ne ſiegue, che D, A, C, abbia maggiore di D ad AB: ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione co' numeri.

6 2
38 12 6 9 . 2 14
12 18 6 6 . 2 14

Siano i due numeri diſeguali 9 *e* 6, *ed il terzo* 2; *io dico, che* 9 *a* 2 *ha maggior ragione di* 5 *a* 2: *e viceverſa, che* 2 *a* 6 *ha maggior ragione di* 2 *a* 9. *Quantunque ciò ſia manifeſto da ſe medeſimo, tuttavolta ſi dimoſtra così: ſi levi dal numero maggiore* 9 *la parte* 3, *di modochè l' avanzo* 6 *ſia egual al numero minore* 6; *dopo de' numeri* 3, 6, *e* 6 *ſe ne prendano gli egualmente moltiplici,* 6, 12, *e* 12 *con queſta legge, che* 6, *moltiplice di* 3 *ſia maggiore di* 2. *Ciò fatto facendo una ſumma dagli egualmente moltipli di* 3, *e* 6 *ſaranno i numeri* 18, *e* 12 *egualmente moltiplici di* 9, *e* 6

(1) *Def.* 7. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

e 6 : finalmente de' numeri 2 , e 2 se ne prendano gli egualmente moltiplici 14 , e 14 , con quella legge , che il detto 14 sia maggiore di 12 , moltiplice di 6 , d' una parte non maggiore di 2 : ora 18 moltiplice di 9 essendo maggiore di 14 moltiplice di 2 , ma 12 egualmente moltiplice di 6 non essendo maggiore di 14 egualmente moltiplice di 2 ; ne siegue (1) che 9 ha maggiore ragione a 2 , che 6 a 2 . Viceversa 14 moltiplice di 2 supponendo 12 moltiplice di 6; ma 14 egualmente moltiplice di 2 non essendo maggiore di 18 egualmente moltiplice di 6 , ne siegue che 2 a 5 ha maggiore azione di 2 a 9 (2).

PROP.

(1) *Def. 7. di questo .*
(2) *Def. 7. di questo .*

Digitalizzato da Google

PROP. IX. PROBLEMA.

I. Se due grandezze anno la medesima ragione ad una terza grandezza, esse sono eguali fra di loro. II. E. se una terza grandezza ha la medesima ragione a due grandezze; queste due grandezze sono eguali.

I.



Siano le due grandezze A, e B, e sia la terza C: io dico, che se A sta a C, come sta B a C, la A sarà eguale alla B: dico di più, che se C, sta ad A, come sta C a B, sarà similmente la A eguale alla B.

II.

Imperciocchè. I. Se A non fosse eguale a B ma fosse per esempio A maggiore di B, avria A maggior ragione a C (2), che B a C; il che è contrario alla fupposizione, la quale vuole che A stia a C, come sta B a C. II. Se A fosse maggiore di B, avria C a B maggior ragione (2), che C ad A; il che è parimente contrario alla supposizione. la quale vuole, che C stia ad A, come sta C a B. Ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr. ant.*

Digitalizzato da Google

PROP. X. TOEREMA.

I. Di due grandezze, che anno ragione ad una terza grandezza, quella, che ha da essa maggior ragione è maggiore II. E quella, alla quale la terza grandezza ha maggiore ragione è minore.

I.



Siano le due grandezze A, e B, e sia la terza grandezza C; io dico, che A sarà maggiore di B; ove A abbia maggior ragione a C, che B a C; dico di più, che B sarà minore di A, ove C abbia maggior ragione a B, che l'istessa C ad A.

II.

Imperciocchè. I. Se A non è maggior di B, sarà A, o eguale a B, ovvero A minore di B: non può essere A eguale a B: perchè sarà (1) A a C, così B A C, contro la supposizione, la quale vuole, che A abbia maggiore ragione a C, che B a C: non può essere A minore di B; poichè A avria a C minor ragione (2), che B a C; ciocchè parimente è contro la supposizione, la quale vuole che A abbia

(1) *Pr. 7. di questo.* (2) *Pr. 8. di questo.*

bia maggior ragione a C, che B a C.
II. Se A foſſe eguale a B, avria C ad A la medeſima ragione (1), che C a B: ciocchè è contrario alla ſuppoſizione, la quale vuole, che C abbia maggior ragione a B, che C ad A: ſe poi foſſe A minore di B, C avria ad A maggior ragione (2) di C a D; ciocchè è parimente contrario alla ſuppoſizione, la quale vuole che C abbia maggior ragione a B, che C ad A. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

La dimoſtrazione co' numeri è manifeſta.

PROP.

(1) *Pr. 7. di questo.*
(2) *Pr. 8. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XI. PROBLEMA.

Due ragioni eguali ad una medeſima ragione eguali fra di loro.



I.

Siano le tre ragioni di A a D, di B ad E, e di C ad F, ed A ſtia ad E, come ſta B ad E, e B ſtia ad E, come ſta C ad F; io dico, che come ſta A a D, così ſtarà C ad F.

II.

S' intendano le grandezze G, E, ed I egualmente moltiplici reſpettivamente degli antecedenti A, B, e C, e parimente le grandezze K, L ed M egualmente moltiplici de' conſeguenti D, E, ed F: Poichè dunque come ſta A a D, così ſta B ad E, ne ſiegue (3), che gli egualmente moltiplici G, ed H degli antecedenti A, e B ſiano entrambi, o maggiori, o minori, o eguali agli egualmente moltiplici K, ed L de' conſeguenti D, ed E; Parimente, poichè B ſta ad F, come

(1) *Def. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

me ſta C ad F ; ne ſiegue (1) , che gli egualmente mlotiplici H , ed I degli antecedenti B , e C ſiano entrambi , o maggiori , o minori , o eguali agli egualmente moltiplici L , ed M de' conſeguenti E , ed F ; quindi , ſe G avanza K , ancora I avanzerà M ; e ſe gli è eguale , gli ſarà parimente eguale , e ſe è minore , ſarà ancora minore , il perchè A , D , C , F (1), alle quali ſi riferiſcono i ſuddetti egualmente moltiplici ſaranno proporzionali ; e per conſeguente ſarà , come A a D , così C ad F : Il che doveva dimoſtrarſi .

Dimostrazione co' numeri .

2 . 6
1 . 3
4 . 12

Sia 2 *a* 6, *così a* 3 : *e come* 1 *ſta a* 3, *così ſta* 4 *a* 11 : *Egli è manifeſto ; che come ſta* 2 *a* 6 *così ſta* 4 *a* 12 .

PROP. XII. PROBLEMA.

Se vi ſiano più ragioni eguali ; come ſta l' uno degli antecedenti al ſuo conſeguente così ſaranno tutti gli antecedenti inſieme a tutti i conſeguenti inſieme .

Siano le ragioni di A a D , di B ad E , e di C ad F eguali fra di loro , vale a dire , come A ſta a D , così ſia B ad E , e co-

(1) *Def. 6. di questo .*

Digitalizzato da Google

e così C ad F ; io dico , che come sta l' antecedente A al suo conseguente D , così saranno tutti gli antecedenti A , B , e C a tutti li conseguenti D , E , ed F .

II.

S' intendano le grandezze G , H , ed I egualmente moltiplici degli antecedenti A B , e C ; e similmente le grandezze K L , ed M egualmente moltiplici de' conseguenti D , E , ed F . Perchè dunque le grandezze A , B , e C anno l' istessa ragione alle grandezze D , E , ed F (1) ; ne siegue , che gli egualmente moltiplici G , H , ed I saranno tutti tre , o maggiori , o eguali , o minori degli egualmente moltiplici K , L , ed M de' conseguenti , quindi , se G è maggiore di K , saranno tutti tre insieme G , H , ed I ancora maggiori di tutti tre insieme K , L , ed M , e se G sia eguale a K , saranno ancora tutti tre insieme G , H , ed I eguali a tutti tre insieme K , L , ed M : e finalmente se G è minore di K , saranno tutti tre insieme G , H , ed I minori di tutti tre insieme K , L , ed M .

In oltre , perchè le tre grandezze G , H , ed I sono egualmente moltiplici delle tre grandezze A , B , e C , come la G è moltiplice della A , così saranno (2) tutte tre unite insieme G , H , ed I moltiplici di

(1) *Def. 6. d. questa.* (2) *Pr. 1. di questo.*

Digitalizzato da Google

di A, B, e C unite insieme: e similmente come la K è moltiplice della D, così saranno tutte tre unite insieme K, L, ed M moltiplici di D, E, ed F unite insieme: il perchè avendo due ragioni di A a D, e della somma di A, B, e C alla somma di D, E, ed F; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, che sono G, e la somma di G, H, ed I sono entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici da' conseguenti, che sono K, e K, L, ed M; ne siegue, che le suddette ragioni siano eguali; e per conseguente, che A sia a D, come sta la somma di A, B, e C alla somma di D, E, ed F: ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostraziene co' numeri.

Sia come 4 *ad* 1, *così* 8 *a* 2;
3 : 1 *e così* 32 *a* 5: *egli è manifesto*;
8 . 2 *che, come sta l' antecedente* 4 *al*
32 . 5 *conseguente* 1, *così sarà la som-*
. . . . *ma* 62 *di tutti gli antecedenti al-*
32 . 8 *la somma* 8 *di tutti li conse-*
guenti.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XIII. PROBLEMA.

Se la prima alla ſeconda abbia la medeſima ragione, che la terza alla quarta, ma la terza alla quarta abbia maggior ragione, che la quinta alla ſeſta; ancora la prima alla ſeconda avrà maggior ragione, che la quinta alla ſeſta.

I.



La prima A abbia alla ſeconda B la medeſima ragione, che la terza C alla quarta D, ma la terza C alla quarta D abbia maggior ragione, che la quinta E alla ſeſta F: io dico, che la prima A ha maggior ragione alla ſeconda B, che la quinta G alla ſeſta F.

II.

Perchè dalla ſuppoſizione C ha maggior ragione a D, che ad F, ſi poſſono trovare tali egualmente moltiplici degli antecedenti C, ed E, e tali egualmente moltiplici de' conſeguenti D, ed F, che (1) quello di C ſuperi quello di D, ma quello di E non ſuperi quello di F: ſono coteſti egualmente moltiplici G, H, K, ed

L

(1) *Def. 7. di queſto.*

Digitalizzato da Google

L: vale a dire G, ad H di C, ed E: K, ed L di D, ed F: sarà dunque G maggiore di K, ed H non sarà maggiore di L. Intendasi ora la grandezza M tanto moltiplice di A, quanto la G è moltiplice di C, e per conseguente quanto la H è moltiplice di E. Intendasi di più la grandezza N tanto moltiplice di B, quanto la K è moltiplice di D, e per conseguente, quanto la L è moltiplice di F: quindi supponendosi, che A sia a B, come sta C a D, gli egualmente moltiplici M, e G degli antecedenti (1) seguiranno l'istessa legge paragonati cogli egualmente moltiplici N, e K de' conseguenti; il perchè G superando per quello, che si è supposto K, sarà parimente M maggiore di N: avendo dunque due ragioni di A a B, e di E ad F, ed essendosi dimostrato, che il moltiplice M della prima A è maggiore del moltiplice N della seconda B, ma l'egualmente moltiplice H della quinta E non è maggiore dell' egualmente moltiplice L dalla sesta F; ne siegue, che le suddette due ragioni non siano eguali; e per conseguente che A a B abbia maggior ragione di E ad F.

Di-

(1) *Def. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

Sia come 10 *a* 2, *così* 5 *ad* 1; *ma* 5 *ad* 1 *abbia maggior ragione di* 4 *a* 3; *egli è manifesto, che* 10 *a* 2 *ha maggior ragione di* 4 *a* 3.

10 . 2
5 . 1
4 . 3

PROP. XI. PROBLEMA.

Se quattro grandezze sono proporzionali: secondo che la prima è maggiore, eguale, o minore della terza, sarà la seconda maggiore eguale, o minore della quarta.



I.

Sia, come A a B, così C a D; io dico, che secondo che la prima A è maggiore eguale, o minore della terza C, sarà ancóra la seconda B maggiore eguale, o minore della quarta D.

II.

Imperciocchè, supponendo I., che A sia maggiore di C, avrà A maggior ragione a B (1), che C a B; ma A sta a B dalla supposizione, come C a E; dunque C avrà parimente maggior ragione a D, che C a A (2): e per conseguente sarà la D minore

(1) *Pr.* 8. *di questo.* (2) *Pr. ant.*

Digitalizzato da Google

re della B (1), ovvero la B maggior dalla D.

Supponendo II. che A sia eguale a C, sarà come A a B, così G a B (2): ma dalla suppoſizione la A sta alla B, come la C alla D; dunque sarà ancora, come la C alla D, così (3) la C alla B; e per conseguente la D sarà eguale alla B ovvéro la B alla D.

Supponendo III., che A sia minore di C avrà A a B minor ragione di C a B (4): ma dalla suppoſizione la A sta alla B, come la C alla D; dunque la C alla D avrà parimente minor ragione della C alla B (5): quindi sarà la D maggiore della B, ovvero la B minore della D: ciocchè doveva dimoſtrarsi.

Dimostrazione co' numeri:

4 . 8 : 3 6
4 . 8 : 4 8
4 . 8 : 6 . 12

Sia I. *come* 4 *ad* 8, *così* 3 *a* ~~6~~ 6; *egli è manifesto, che ſiccome* 4 *è maggiore di* 3, *così* 8 *è maggiore di* 6. *Sia* II. *come* 4 *ad* 8, *così* 4 *ad* 8; *egli è chiaro, che ſiccome* 4 *è eguale a* 4, *così* 8 *è eguale a* 8. *Sia* III. *come* 4 *ad* 8, *così* 6 *a* 12; *è manifesto, che ſiccome* 4 *è minore di* 6, *così* 8 *è minore di* 12.

PROP.

(1) *Pr.* 10. *di questo.* (2) *Pr.* 7. *di questo.*
(3) *Pr.* 11. *di questo.* (4) *Pr.* 8. *di questo.*
(5) *Pr.* 8. *di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XV. PROBLEMA.

Le parti paragonate co' loro egualmente moltiplici ſi ritrovano avere la medeſima ragione.



I.

Siano A, e B due grandezze arbitrarie, e CF, FK due altre grandezze tali, che le prime A, e B ſiano punti ſimili di eſſe, ovvero (il che ritorna all'iſteſſo) che eſſe ſiano egualmente moltiplici delle ſuddette grandezze A, e B: io dico, che paragonando le une coll'altre, ſi troverà eſſere A a B, come CF ſta a GK.

II.

Siccome le grandezze CF, HK ſono dalla ſuppoſizione egualmente moltiplici delle grandezze A, e B, quante parti ſi contengono nella CF eguali alla A, tante ſe ne conterranno nella GK eguali alla B. Siano dunque la parti CD, DE, EF eguali alla A; e le parti GH, GL, LK eguali alla B. Ora, perchè le grandezze CD, DE, EF ſono eguali fra di loro, e ſono eguali parimente le grandezze GH, HL, LK, ſarà, come CD a GH, così DE ad HL, ed EF ad LK; quindi uno degli an-

Digitalizzato da Google

tecedenti CD sarà nel suo conseguente GH, come tutti gli antecedenti CF a tutti li conseguenti GD (3): ma CD è eguale alla A, e GH è eguale alla B: dunque sarà parimente, come la A alla B, cosi GF a GD: ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

12 . 2
36 . 6

Siano le due parti 2, *e* 6 *egli egualmente moltiplici di queste parti siano* 12 *a* 36: *egli è manifesto, che come sta* 2 *a* 6, *così sta* 12 *a* 36.

(3) *Pr.* 11. *di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XVI. TEOREMA.

Se quattro grandezze ſono proporzionali, ancorchè ſi permutino, rimarranno proporzionali.



I.

Siano quattro grandezze proporzionali A, B, C, D, vale a dire ſia come A a B, così C a D; io dico, che permutandole, rimarranno ancora proporzionali; cioè, come ſta A a C, così ſarà B a D.

II.

S' intendano le grandezze E, ed F egualmente moltiplici di A, e di B, ſiccome ancora le grandezze G, ed H egualmente moltiplici delle grandezze C, e D: poichè dunque le grandezze E, ed F ſono egualmente moltiplici di A, e B; ſarà come (1) E ad F, così A a B; quindi eſſendo dalla ſuppoſizione, come A a B, così C a D, ſarà parimente come E ad F (2) così C a D. In oltre, perchè le grandezze G, ed H ſono egualmente molti-

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr.* 11. *di questo.*

Digitalizzato da Google

tiplici delle grandezze C, e D, sarà (1) come G ad H, così C a D; ma si è dimostrato, che E sia ad F, come sta C a D; dunque sarà E ad F (2), così G ad H; il perchè, se E supera, è eguale, o minore di G, ancora F avanzerà (3) e sarà eguale, o minore di H. Quindi, avendo due ragioni di A a C, e di B a D; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici E, ed F degli antecedenti A, e B siano tutti due, o maggiori, o minori degli egualmente moltiplici G, ed H, de' conseguenti C, e D, ne siegue (4), che le suddette due ragioni siano eguali e per conseguente, che A, sia a C, come sta B a D; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

2 . 4 : : 6 . 12
2 . 4 : : 4 . 12

Sia come 2 *a* 4, *così* 6 *a* 12: *è manifesto, che permutati questi quattro numeri, sarà ancora* 2 *a* 6, *così* 4 *a* 12.

PROP.

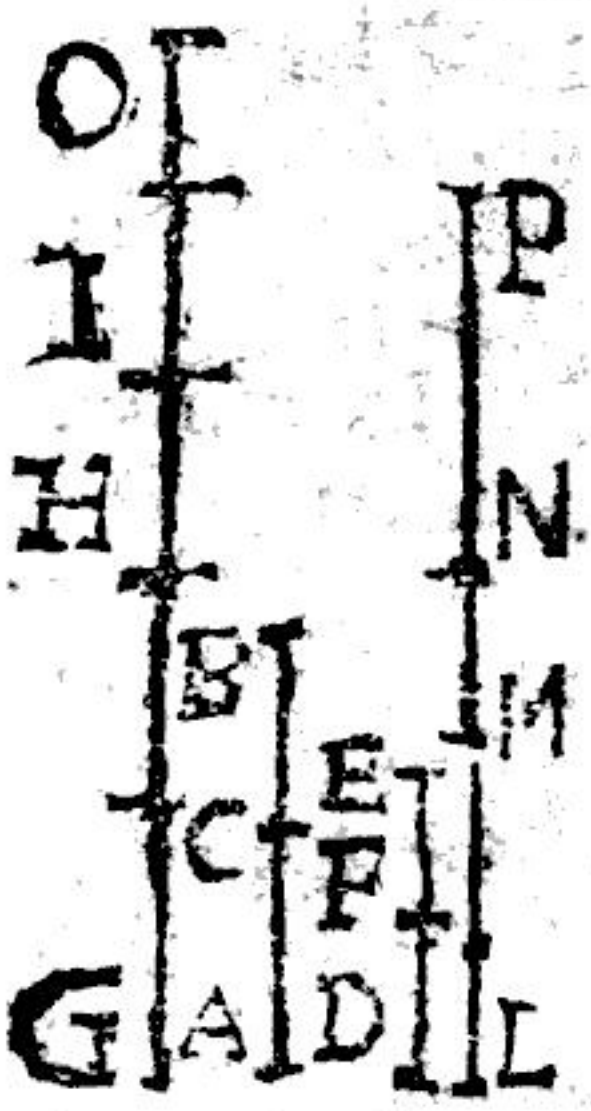
(1) *Pr. ant.* (2) *Pr.* 1 *r. di questo.*
(3) *Pr.* 14. *di questo.* (4) *Def.* 6. *di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XVII. PROBLEMA.

Se quattro grandezze composte ſono preporzionali, ancorchè ſi dividano, rimarranno proporzionali.

I.



Siano due grandezze omogenee, e compoſte inſieme AB, BC, e due altre pure omogenee, e compoſte inſieme DE, EF, e ſiano tra loro proporzionali: vale a dire, come ſta AB, a BC, così ſia DE ad FE, io dico, che dividendole, rimarranno proporzionali; cioè, che AG ſarà a CB, come ſta DF ad FE.

II.

Prendaſi delle AC, CB, FE gli egualmente moltiplici, li quali ſiano GH, HI, LM, MN ſecondo un medeſimo qualunque numero, vale a dire, quanto la prima GH è moltiplice della ſua corriſpondente AC, altrettanto le altre HI, LM, MN ſiano moltiplici reſpettivamente delle CB, DI, FE: Si prendono di più delle due grandezze CB, FE due altri egualmente moltiplici ad arbitrio, i quali ſiano IO, NP. Perchè dunque GH è tanto moltipli-

ce di AC, quanto HI è moltiplice di CB sarà (1) la GI tanto moltiplice della AB, quanto la CH è moltiplice della sua corrispondente AC. Per la medesima ragione la LN sarà tanto moltiplice dalla DE, quanto la LM è moltiplice di DF; quindi, essendo dalla supposizione la GH, tanto moltiplice della AC, quanto la LM è moltiplice della DF, ne siegue, che la GI sia tanto moltiplice delle AB, quanto la LN è moltiplice della DE. In oltre, essendo la prima HI tanto moltiplice della seconda CB, quanto la terza MN è moltiplice della quarta FE, e la quinta IO; essendo tanto moltiplice dell' istessa seconda CB, quanto la sesta NP è moltiplice della quarta FE, sarà la HO composta dalla prima, e dalla quinta (2) tanto moltiplice della secunda CB, quanto la MP composta dalla terza, e dalla sesta è moltiplice della quarta FE. Il perchè essendo dalla supposizione AB a BC, come DE ad EF; ne siegue, che gli egualmente moltiplici (3) GI, ed LN degli antecedenti AB, e DE siano entrambi, o minori degli egualmente moltiplici HO, MP de' conseguenti CB, FE: quindi togliendone le parti comuni HI, MN (4), rimarranno le due GH, LM entrambe, o mag-

(1) *Pr.* 1. *di questo.* (2) *Pr.*2. *di questo.*
(3) *Def.*6. *di questo.* (4) *Assio.* 2. 4.

Digitalizzato da Google

o maggiori, o eguali, o minori delle due IO, NP: ſicchè, avendo due ragioni di AC a CB, e di DF ad FB; ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltipli-ci GH, LM degli antecedenti AC, DF ſono entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici IO, NP de' conſeguenti CB, FE; ne ſiegue, che le ſudette due ragioni ſiano eguali, e per conſeguente, che AC ſia a CB, co-me ſta DF ad FE. Ciocchè doveva di-moſtrarſi.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 2 : : 4 . 1
6 . 2 : : 3 . 1

Sia come 8 *a* 2, *così* 4 *a* 1: *egli è chiaro, che dividendo cotesti numeri, e facendo come* 6 *a* 2, *così* 3 *a* 1 *essi rimangono proporzionali.*

Digitalizzato da Google

PROP. XVIII. PROBLEMA.

Se quattro grandezze divise sono proporzionali, ancorchè si compongono rimarranno proporzionali.



I.

Siano le quattro grandezze divise AB, BC, DC, GF proporzionali: vale a dire, come sta AB a BC, così la DG a GF; io dico, che componendole, rimarranno proporzionali: di modochè, come sta AC a CB, così starà DF ad FG.

II.

Se questo non è vero, si metta, che AC sia a CB, come sta DF ad FE; quindi essendo le quattro grandezze composte AC, CB, DF, EF proporzionali, dividendole, rimarranno (1) proporzionali: e per conseguente sarà AB a BC, così DE ad EF: ma dalla supposizione, come sta AB a BC, così sta DG a GF; dunque sarà parimente (2) come DG a GF, così DE ad EF, il perchè essendo la prima DG maggiore della terza DE, sarà parimente (3) la seconda GF maggiore della quarta EF, va-

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr. 11. di questo.*
(3) *Pr. 14. di questo.*

Digitalizzato da Google

vale a dire la parte sarà maggiore del tutto; ciocchè non potendo sossistere, ne segue la verità del Teorema in questione.

Dimostrazione co' numeri.

Sia, come 6 *a* 2, *così* 12 *a* 4: *è manifesto*, che componendo *coresti numeri*; *e facendo*; *come* 3 2, *così* 16 *a* 41; *essi rimangano parimente proporzionali.*

6 . 2 : : 12 , 4
8 . 2 : : 16 . 4

PROP. XIX. TEOREMA.

Se tutta una grandezza sta a tutta un' altra grandezza, come una certa parte di quella ad una certa parte dell' altra; sarà ancora la rimanente parte dell' una alla rimanente parte dell' altra, come sta tutta la prima grandezza a tutta l' altra grandezza.

I.



Sia, come tutte la AB a tutta la CD; così la parte AE alla parte CF, io dico, che l'avanzo BE sta all avanzo DF, come sta tutta la AB a tutta la CD.

II.

Perchè dalle suppoſizione la AB sta alla

Digitalizzato da Google

CD, come la AE alla CF, sarà per ragion permutata come AB ad AE, così CD a CF; quindi essendo le quattro grandezze compoſte AB, AE, CD, CF proporzionali, dividendo, e rimarranno ancora proporzionali, e per conseguente sarà BE ad EA, come DF, ad FC, e di nuovo per la ragione permutata, sarà, come BE a DF, così EA ad FC: ma dalla suppoſizione AE sta a GF, come tutta la AB a tutta la CD; dunque sarà ancora l'avanzo BE all'avanzo DF, così tutta la AB a tutta la CD: ciocchè doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

Da quì è manifesto, che se quattro grandezze composte sono proporzionali, ancorchè si convertano, rimarranno proporzionali. Siano le quattro grandezze composte AB, BE, CD, CF proporzionali, vale a dire, sia, come AB ad AE, così CD a CF: io dico, che convertendole, rimarranno proporzionali, e per conseguenze sarà, come AB a BE, così CD a DF. Imperciocchè, essendo dalla suppoſizione, come AB ad AE, così CD a GF sarà per la ragione permutata (1), come la tutta AB alla tutta CD, così la parte tratta AE alla parte tratta CG: quindi per la propoſizio-

(1) *Pr.* 16 *di questo.*

Digitalizzato da Google

zione ora dimostrata sarà la tutta CD, così l'avanzo BE all'avanzo DF; e di nuovo per la ragione permutata (1) sarà, come AE a BE, così CD a DG.

Dimostrazione co' numeri.

80.	10	*Sia come* 30 *a* 20, *così* 18
18.	6	*a* 6; *è manifesto, che l'avan-*
.....		*zo* 12 *sta all'avanzo* 4, *co-*
12.	4	*me sta* 30 *a* 10, *così* 18 *a*
		6; *è chiaro, che ancorchè*

cotesti numeri si convertano, rimangono proporzionali, di fatti, come sta 30 *a* 20, *così sta* 18 *a* 12.

(1) *Pr.* 14. *di questo.*

Digitalizzato da Google

gione di F ad E (1); il perchè la grandezza D sarà maggiore dalla grandezza F (2).

Mettasi II. che A sia eguale a C: quindi avrà A a B la medesima ragione di C a B: ma A sta a B dalla suppossizione, come D ad F, e per la ragion inversa (3) C sta a B, come F ad E: dunque, come sta D ad E (4), così starà F ad E: il perchè le due grandezze D, ed F saranno eguali fra di loro (5).

Mettasi III. che A sia minore di C; quindi A avrà minor ragione a B di C a B; ma dalla suppossizione A sta a B, come D ad E, e per la ragion inversa (6) C sta a B, come F ad E: dunque avrà D ad E minor ragione (7) di F ad E; e per conseguente sarà D minore di F; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1 24 . 12 . 3.
8 . 4 . 8 24 . 12 . 24
8 . 4 . 16 24 . 12 . 48

Siano primieramente, li tre numeri 8, 4, 1 *in ragione ordinata co' numeri* 24 12 3, *è manifesto, che siccome* 8 *è maggiore di* 1 *così* 24 *è maggio-*

(1) *Pr.*13. *di questo.* (2) *Pr.*10. *di questo.*
(3) *Pr.* 7. *di questo.*
(4) *Corollario della pr.* 4.
(5) *Corollario della pr.* 13. *di questo.*
(6) *Pr.*14. *di questo.* (7) *Pr.*10. *di questo.*

Digitalizzato da Google

giore di tre. Siano di più li tre numeri 8 4 8 *in ragione ordinata co' tre numeri* 24 12 24, *è chiaro, che ſiccome* 8 *è eguale a* 8, *così* 24 *è eguale a* 24. *Finalmente ſiano i tre numeri* 8 4 16 *in ragione ordinata co' tre numeri* 24 12 48: *è manifesto, che ſiccome* 8 *è minore di* 16, *così* 24 *è minore di* 48.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se due grandezze paragonate con tre altre grandezze ſi ritrovano eſſere in ragione perturbata, e ſia la prima maggiore, eguale, o minore della terza, ſarà la quarta maggiore, eguale, o minore della ſesta.



I.

Siano tre grandezze A, B, C, e tra le grandezze D, E, F, e le tre prime paragonate colle tre seconde costituiscano una ragione perturbata, vale a dire come sta A a B, così E ad F, e come B a C, così sta D ad E, io dico, che se A è maggiore, eguale, o minore di C, ancora D è maggiore, eguale, o minore di F.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Mettasi I. che A sia maggior è di C ; quindi avrà A a B maggior ragione (1) di C a B ; ma dalla suppoſizione , come sta A a B , così sta E ad F ; e per la ragion inversa (2) C sta a B , come sta E a D ; dunque la E alla F avrà parimente (3) maggior ragione di E alla D ; e per conseguente sarà D maggiore di F (4).

Mettasi II. che A sia eguale a G ; quindi avrà A a B l' istessa ragione (5) di C a B : ma dalla suppoſizione la A sta alla B , come la C alla F ; e per la ragion inversa la C sta alla B , come la E alla D ; dunque sarà parimente (6) E ad F , così E a D : sì perchè le due D , ed F saranno eguali fra di loro (7).

Mettasi III. che A sia minore di C : quindi avrà A a B minor ragione di C a B : ma dalla suppoſizione A sta a B , come sta E ad F : e C sia a B per la ragion inversa , come sta E a D ; dunque avrà parimente E ad F minor ragione di E a D (7) , il perchè la grandezza D sarà minore della grandezza F (9) . Ciocchè doveva dimoſtrarsi .

Di-

---

(1) *Pr.* 8. *di questo.*
(2) *Cor. 1 ella pr.* 4. *di questo.*
(3) *Pr.*13.*di questo.* (4) *Pr.*10. *di questo.*
(5) *Pr.* 7. *di questo.* (6) *Pr.* 11. *di questo.*
(7) *Pr.* 9. *di questo.* (8) *Pr.*13.*di questo.*
(9) *Pr.* 10. *di questo.*

Digitalizzato da Google

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1 16 . 4 . 2
8 . 4 . 8 26 . 32 . 16
8 . 4 . 16 16 . 64 . 32

Siano primieramente li tre numeri 8 4 1 : *in ragion perturbata co' tre numeri* 16 4 2 : *è manifesto, che ſiccome* 8 *è maggiore di* 1, *così* 16 *è maggiore di* 2 *ſiano di più i tre numeri* 8 4 8 *in ragione perturbata co' tre numeri* 15 32 16, *è chiaro, che ſiccome il numero* 8 *è eguale a* 8, *così* 16 *è eguale al* 16. *Finalmente ſiano i tre numeri* 8 4 16 *in ragion perturbata co' tre numeri* 16 64 32 *è chiaro, che ſiccome* 8 *è minore di* 16, *così* 16 *è minore di* 32.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXII. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragione ordinata; sarà per l'egual ragione ordinata, come la prima alla terza, così la quarta alla sesta.



I.

Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre grandezze D, E, F, e le tre prime paragonate colle tre, secondo costituiscano una ragione ordinata: vale a dire, come sta A a B, così sta D ad E; e come sta B a D, così sia E ad F; io dico, che per l'egual ragion ordinata la prima A sarà alla terza C, come la quarta D alla sesta F.

II.

Si prendano dalla prima A, e dalla quarta D dalla seconda B, e dalla quinta E, dalla terza C, e della sesta F gli egualmente moltiplici, li quali siano G, ed L: H, ed M: K, ed N, e perchè dalla supposizione A sta a B, come sta D ad E, e degli antecedenti A, e D sono stati presi gli egualmente moltiplici G, ed L, e de' conseguenti B, ed E gli egualmente

Digitalizzato da Google

te moltiplici H, ed M, farà (1) G ad H, così L ad M. In oltre, perchè dalla suppoſizione B ſta a C; come ſta E ad F, e degli antecedenti B, ed E ſono ſtati pigliati gli egualmente moltiplici H, ed M, e de' conſeguenti C, ed F gli egualmente moltiplici K, ed N, ſarà (2) H a K, così M ad N: quindi le tre grandezze G, H, e K, paragonate colle altre tre L, M, ed N, coſtituiſcono una ragione ordinata, eſſendoſi dimoſtrato, che G ad H ſia, come L ad M, e che H ſia a K, come M ad N: laonde, ſe G ſia maggiore eguale, o minore di K, ſarà ancora (4) L maggiore eguale, o minore di N: il perchè avendo due ragioni di A a C, e di C ad F, ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici G, ed L degli antecedenti A, e D pigliati ad arbitrio ſono entrambi, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici K, ed N preſi ancora ad arbitrio; ne ſiegue, che le ſuddette due ragioni ſiano eguali (4), e per conſeguente, che A ſtia a C come ſta D a F. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

ALTRA DIMOSTRAZIONE.

Perchè dalla ſuppoſizione A ſta a B; co-

(1) *Pr. 4. di questo.* (2) *Pr. 4. di questo.*
(3) *Pr. 20. di questo.* (4) *Def. 6. di questo.*

Digitalizzato da Google

come D ad E, sarà per la ragion permutata A a D, così B ad E. Similmente essendo dalla suppositione B a C, così E ad F, sarà per la ragion permutata, come B ad E; così C ad F: quindi, essendo così la ragione di A a D, come la ragione di C ad F eguale a questa di B ad E, saranno le dette due ragioni eguali fra loro, e per conseguente, come sta A a D, così C ad F: e per la ragion permutata, come A a C, così D ad F; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

8 . 4 . 1
16 . 8 . 2

Siano i tre numeri 8 4 1 *in ragione ordinata cogli altri tre numeri* 16 8 2: *vale a dire, sta come* 8 *a* 4, *così* 16 *a* 8, *e come* 4 *a* 1, *così* 8 *a* 1, *è manifesto, che per l'egual regione ordinata sarà, come* 8 *a* 1, *così* 19 *a* 2.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIII. TEOREMA.

Se tre grandezze paragonate con tre altre grandezze si ritrovano essere in ragione perturbata, sarà per l'egual ragione perturbata, come la prima alla terza, così la quarta alla sesta.



Siano tre grandezze A, B, C, e tre altre D, E, F, le quali paragonate con quelle costituiscano una ragion perturbata, vale a dire, sia come A a B, così B ad F, e come B a C, così D ad E; io dico, che per l'egual ragione perturbata sarà, come A a C, così D ad F.

II.

Si prendano dalla prima A, dalla seconda B, e dalla quarta D gli egualmente moltiplici G, H, ed L secondo qualsivoglia numero. Si prendano in oltre dalla terza C, dalla quinta E, e dalla sesta F gli egualmente moltiplici K, M, ed N parimente secondo qualsivoglia numero. Quindi essendo G ed H egualmente moltiplici delle parti A, e B, sarà, come

A a

Digitalizzato da Google

A a B (1) così G ad H; e per la medesima ragione, sarà E ad F, così M ad N; ma dalla suppoſizione, come ſta A a B, così ſta E ad F: dunque ſarà parimente (2), come G a H, così M ad N; Inoltre, perchè dalla suppoſizione B ſta a C, come D ad E, egualmente moltiplici H, ed L dagli antecedenti B, e D paragonati cogli egualmente moltiplici K, ed M de' conſeguenti C, ed E, ſi ritroveranno avere l'iſteſſa proporzione (3): vale a dire, come ſta a K, così ſtarà L ad M, il perchè le tre grandezze G, H, e K, paragonate colle altre L, M, ed N coſtituiranno una ragion perturbata, eſſendoſi dimoſtrato, che G ſia ad H, come M ad N, e che H ſia G K, come L ad M: laonde, ſe (4) G ſarà maggiore, eguale, o minore di K, ancora L ſarà maggiore, eguale, o minore di N: avendo dunque due ragioni di A C, e di D ad F, ed eſſendoſi dimoſtrato, che gli egualmente moltiplici D, ed L degli antecedenti A, e D ſono entrambi o maggiori, o uguali, o minori degli egualmente moltiplici K, ed N de' conſeguenti D, ed F; ne ſiegue che le ſuddette due ragioni ſiano eguali (5), e per conſeguente, che

(1) *Def.* 13. *di questo.* (2) *Pr.* 11. *di questo.*
( ) *Pr.* 4. *di questo.* (4) *Pr.* 21. *di questo.*
(5) *Defin.* 6. *di questo.*

Digitalizzato da Google

che A ſia a C, come ſta D ad F: ciocchè dovea dimoſtrarſi.

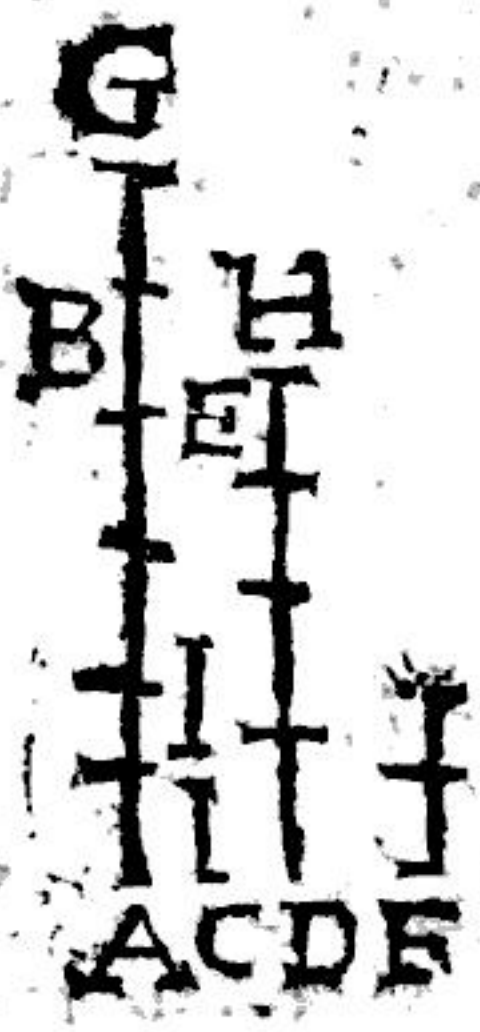
Dimoſtrazione co' numeri.

Siano i tre numeri 8 4 1
8 . 4 . 1 *in ragion perturbata co' tre*
64 . 16 . 8 *numeri* 64 16 8 *vale a dire, ſia come* 8 *a* 4, *così* 16 *a* 8, *e come* 4 *ad* 1, *così* 64 *a* 16; *e manifeſto, che per l' egual ragion perturbata, ſarà come* 8 *ad* 1, *così* 64 *ad* 8.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIV. TEOREMA.

Se la prima alla seconda abbia la medesima ragione, che la terza alla quarta, e la quinta alla seconda abbia parimente la medesima ragione, che la sesta alla quarta: avrà ancora la composta dalla prima, e dalla quinta alla seconda la medesima ragione, che la composta dalla terza, e dalla sesta alla quarta.



I.

Abbia la prima AB alla seconda C la medesima ragione, che la terza DE alla quarta F; ed abbia in oltre la quinta BG alla istessa seconda C la medesima ragione, che la sesta EH alla quarta F; io dico, che AG composta dalla prima, e dalla quinta, abbia la medesima ragione a C, che la DH composta dalla terza, e sesta ave alla quarta F.

II.

Perchè dalla suppositione BG sta a C, come EH ad F, sarà per la ragion inversa (2) C a BG, così F ad KH: quindi le tre

(1) *Cor. 1. della Pr. di queste.*

Digitalizzato da Google

a HH: ma dalla ſuppoſizione la prima AB è maggiore dalla terza CD; dunque ſarà parimente (1) la ſeconda GB maggiore dalla quarta HD. Ora eſſendo AG eguale ad E, e CH eguale ad F, ſaranno le due AG, ed F unite inſieme eguali alli due CH, ed E unite inſieme (2): il perchè aggiugnendo alle due prime la GB maggiore, ed alle due ſeconde la HD minore, riuſcirà (3) la ſomma delle due AB, ed F maggiore della ſomma delle due CD, e B; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione co' numeri.

8 . 4 . 6 . 3

Sia come 8 *a* 4, *così* 6 *a* 3; *è manifeſto, che la ſomma di* 8, *e* 3 *vale a dire del maſſimo numero, e del minore è maggiore alla ſomma degli altri due* 4, *e* 6.

LI.

(1) *Pr.* 14. *di queſto.* (2) *Aſſio.* 2.
(3) *Aſſiom.* 4.

Digitalizzato da Google

LIBRO SESTO.

DEFINIZIONI.

I.

LE figure ſimili ſono quelle, che hanno gli angoli eguali agli angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, ed intorno agli angoli eguali hanno parimenti i lati proporzionali, ciaſcuno a ciaſcuno.

SPIEGAZIONE.

Acciocchè due figure poſſano chiamarſi ſimili, ſi ricercano tre condizioni. I. *Che ſiano pariangole. Quindi un triangolo potrà eſſere ſimile ad un altro triangolo, ma non già ad uaa figura quadrilatera, o multilatera. E ſimilmente una figura quadrilatera potrà eſſere ſimile ad un' altra figura quadrilatera, ma non già ad una figura di più di quattro lati.* II. *Che ciaſcuno angolo ſia eguale a ciaſcuno angolo.* III. *Che intorno gli angoli eguali abbiano i lati proporzionali: ove queſte tre condizioni ſi rincontrino, le figure ſi diranno ſimili: ove una ſola di eſſe non abbia luogo le figure ſi diranno ſimili, da quì è manifeſto, che tutti i triangoli equilateri*

Digitalizzato da Google

ſono ſimili fra di loro, ſiccome parimente tutti i quadrati: poichè negli uni, e negli altri ſi verificano tutte tre le condizioni.

II.

Le figure reciproche ſono quelle, fra i lati da' quali ha luogo tale proporzione, che gli eſtremi di eſſa s' incontrarono in una figura, e li mezzi nell' altra figura

SPIEGAZIONE.

Per dirſi reciproci i due triangoli ABF, DGE; fa duopo I. che due lati dell' uno ſiano proporzionali a due dell' altro (1). *II. Che la proporzione ſia tale, che gli eſtremi di eſſa ſi ritrovino in un triangolo, e li mezzi nell' altro triangolo; vale a dire, che ſia AB a DC, così CE, EF; imperciocchè in tal modo gli eſtremi AB, BF dalla proporzione ſi ritrovano nel triangolo ABF, e li mezzi DC, CE ſi ritrovano nel triangolo DCE.*

III.

L'altezza d' una figura è la perpendicolare, che ſi fa vedere dal vertice ſopra la baſe.

COROLLARIO.

Quindi ne ſiegue I. che due triangoli coſtituiti in modochè le baſe di eſſi giacciono a dirittura, e li vertici ſiano riuniti in

(1) *Fig. V. avanti la Fig. I. di queſto.*

Digitalizzato da Google

in un medeſimo punto, abbiano la medeſima altezza; imperciocchè la perpendicolare, che cade dal vertice ſopra la baſe è comune all' uno, ed all' altro triangolo.

II. Che due figure ſituate fra due parallele hanno ancora la medeſima altezza, la quale è la diſtanza delle due parallele, di maniera chè è l' iſteſſo il dire due figure hanno l' iſteſſa altezza, e due figure ſono coſtituite, o per lo meno poſſono eſſere coſtituite fra le due parallele.

IV.

Una linea retta dicesi ſecata ſecondo l' eſtrema e mezza ragione, quando tutta la linea retta è alla di lei maggior porzione, come l' iſteſſa maggior porzione ſta alla minor porzione: *vale a dire la retta AB ſi dirà ſecata nel punto C A C B ſecondo l' eſtrema, e mezza ragione, ſiccome ſta AB ad AC, così ſta AC a CB.*

V.

La quantità di ragione è il quoziente, che naſce, dividendo il ſuo antecedente per lo ſuo conſeguente: dicaſi detto quoziente ancora, denominatore dalla ragione, ovvero eſponente della ragione.

SPIEGAZIONE.

La ragione, ſecondo quello, che ſi diſſe nel principio del libro V., è il rapporto di due gandezze omogenee paragonate ſecondo le quantità. Ora, chi vuol ſapere il valore

Digitalizzato da Google

d' una ragione, il qual valore si chiama da' Geometri quantità, *o* esponente, *o* denomintore, *egli deve vedere, quante volte l' antecedente contiene il conseguente, o che ritorna all' istesso, quante volte il conseguente si contiene nell' antecedente: imperciocché il numero, che indica cotesta continenza sarà il valore della ragione; e si chiamerà* quantità *della medesima; quindi la quantità della ragione di* 8 *a* 4 *sarà* 2: *imperciocchè dividendo il numero* 8 *per lo* 4 *ne nasce il numero* 2: *la quantità della ragione di* 13 *a* 2 *è* 1/5 *imperciocchè il* 2 *nel* 13 *entra* 6 1/2: *e finalmente la quantità della ragione di* 2 *a* 2/3 *è* 2/3 *imperciocchè* 2/3 *è il quoziente della divisione dell' antecedente* 2 *per lo conseguente* 3.

Questa definizione ci suggerisce un altro contrassegno per conoscere se due ragioni sono eguali o no, il quale è questo: Se la quantità delle due ragioni, *sopra le quali nasce il dubbio, se siano eguali, o no*, sono eguali, le ragioni saranno parimente eguali: ma se le suddette quantità sono diseguali, le ragioni ancora saranno diseguali, e quella ragione sarà mag-

Digitalizzato da Google

maggiore, la quantità della quale è maggiore : *Per mezzo di questo contrassegno conosciamo, che* 12 *sta a* 2, *come* 18 *a* 3 : *imparciocchè la quantità dell' una, e dell' altra ragione è il numero* 6. *Conosceremo di più, che* 2 *sta a* 6, *come sta* 4 *a* 12 ; *imperciocchè la quantità dell' una* 1 *e dell' altra ragione è* --- . *Finalmente co-* 3 *nosceremo, che* 12 *ha maggior ragione a* 3, *che* 6 *a* 2, *imperciocchè la prima ragione ha* 4 *per denominatore, ovvero esponente, e la seconda ha* 3.

VI.

Una ragione dicesi composta da più altre ragioni, quando la quantità di essa nasce dal moltiplicare insieme tutte le quantità delle ragioni componenti.

VII.

Se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta dicesi duplicata se sono tre, e sono eguali dicesi triplicata, se sono quattro, e sono eguali, quadruplicata, e così all' infinito.

SPIEGAZIONE.

Si è detto nella definizione antecedente; che due ragioni allora sono eguali, quando le loro quantità sono eguali fra di loro; ma se la quantità d'una ragione fosse eguale alla quantità di più altre ragioni mol-

Digitalizzato da Google

moltiplicate insieme, in tal caso la suddetta ragione si direbbe composta da tutte queste ragioni. Per esempio la ragione di 9 a 1 è composta dalle ragioni di 12 a 4, e 6 a 5: imperciocchè le quantità delle due ultime ragioni sono respettivamente 3, e 2, le quali moltiplicate insieme producono il numero 6, che è la quantità della ragione di 6 a 1. Similmente la ragione di 12 a 1 è composta da queste tre ragioni di 6 a 2, di 8 a 4, e di 10 a 5; imperciochè le quantità delle tre ultime ragioni sono respettivamente 3, 2, e 2; le quali moltiplicate insieme producono il numero 12, che è la quantità della ragione di 12 a 1.

Quindi date più ragioni semplici sarà facile a ritrovare la ragione; che da esse è composta; imperciocchè non si dee far altro, che ritrovare primieramente le quantità di tutte le ragioni semplici date, e poi moltiplicarle insieme, che poi la ragione, che ha il prodotto per esponente; ovvero per denominatore sarebbe la ragione composta desiderata. Vogliasi per esempio ritrovare la ragione composta da queste due ragioni di 18 a 5, di 4 a 1, perchè la quantità di queste due ragioni sono respettivamente 5, e 4, le quali moltiplicate insieme producono il numero 24; ne siegue, che la ragione di 24 a 1, ovvero di 48 a 2, ovvero di 72 a 3, &c. è composta delle due ragioni semplici date: imperciocchè

Digitalizzato da Google

chè la quantità di ciascuna di queste tre ragioni è l' istesso numero 24. *Si potrebbe anco ritrovare la ragione composta da più ragioni semplici date, moltiplicando insieme tutti gli antecedenti della ragione, e poi tutti i conseguenti delle medesime, e da' prodotti costituirne un' altra ragione, la quale sarà la composta desiderata. Così senza appartarci dall' esempio ora proposto, perchè gli antecedenti delle due ragioni sono* 28, *e* 4, *il prodotto delle quali è* 72, *e li conseguenti sono* 3, *ed* 1, *il prodotto de' quali è* 3; *ne siegue, che la ragione di* 72 *a* 3 *è composta dalle due ragioni di* 18 *a* 3, *e di* 4 *a* 2, *siccome già era stato ritrovato per l' altra maniera di compire le ragioni.*

Ora è da saperfi, che se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta si chiama duplicata, *in riguardo a ciascuna delle due componenti; e se sono tre, e sono eguali, si chiami* triplicata, *e se quattro, e sono eguali* quadruplicata, *e così all' infinito. Per esempio la ragione di* 6 *a* 2; *e* 12 *a* 4 *sono eguali; sicchè la ragione di* 9 *a* 1 *composta da esse si dirà duplicata così di* 4 *a* 2, *come parimente di* 12 *a* 4. *Similmente le ragioni di* 4 *a* 2, *di* 8 *a* 4, *e di* 12 *a* 6 *sono eguali, il perchè la ragione di* 8 *a* 1 *composta da tutte tre si dirà triplicata di ciascuna di esso. In fine le ragioni di* 3 *a* 1, *di* 6 *a* 2, *di* 9 *a* 3, *e di* 12 *a* 4 *sono tutte egua-*

Digitalizzato da Google

tre grandezze AB, C, e BG paragonate colle tre grandezze DE, F, ed EH costituiscano una ragione ordinata; imperciocchè si suppone, che AB sia a C, come DE ad F, e si è dimostrato, che G sia a BG, come F ad EH; il perchè per l'egual ragione ordinata (1) sarà, come AB a BG, così DE ad EH; e per la ragion composta, come (2) AG a GB, così DH a HE: dunque le tre grandezze AG, GB, e C paragonate colle tre grandezza DH, HE, ed F ancore costituiscono una ragione ordinata: imperciocchè si è dimostrato, che AG sia a GB, come DH ad HE, e si è supposto, che GB sia a C, come EH ad F: dunque di nuovo per l'egual ragione ordinata (3) sarà, come AG a C, così DH ad E; ciocchè doveva dimostrarsi.

Dimostrazione co' numeri.

10 . 2 . 5 . 1
4 2 .
. . . . . .
14 . 2 :: 7 . 1

Sia come 20 a 2, così 5 ad 4; e sia in oltro come 4 all' istesso 2, così 2 all' istesso 1, è manifesto che 14 sta a 2, così sta 7 a 1.

PROP.

(1) *Pr. 28. di questo.* (2) *Pr. 17. di questo.*
(3) *Pr. 22. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXV. PROBLEMA.

Se quattro grandezze ſono proporzionali, la maſſima di eſſe, e la minima unite inſieme ſaranno maggiori delle altre due unite inſieme.



I.

Siano quattro grandezze AB, CD, K, ed F proporzionali, vale a dire, ſia come AB a CD, così B ad FI; io dico, che la maſſima AB, e la minima F ſono maggiori delle altre due CD, ed E.

II.

Si tagliano le parti AG, CH (1) *eguali reſpettivamente alle due E, ed F*; e perchè dalla ſuppoſizione AB ſta a CD, come E ad F, ſarà parimente, come DB a CD, così AG a CH: quindi eſſendo la tutta AB alla tutta CD, così la parte tratta AG alla parte tratta CH, ſarà (2) l'avanzo GB all'avanzo HD, così la tutta AB alla tutta CD, ovvero come AB a CD, così GB ad HD; e per la ragion permutata (3) come AB a BG, così CD

(1) *Pr.* 3. *I.* (2) *Pr.* 19. *di queſto.*
(3) *Pr.* 16. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

a DH: ma dalla suppoſizione la prima AB è maggiore dalla terza CD; dunque ſarà parimente (1) la ſeconda GB maggiore dalla quarta HD. Ora eſſendo AG eguale ad E, e CH eguale ad F, ſaranno le due AG, ed F unite inſieme eguali alli due CH, ed E unite inſieme (2): il perchè aggiugnendo alle due prime la GB maggiore, ed alle due ſeconde la HD minore, riuſcirà (3) la ſomma delle due AB, ed F maggiore della ſomma delle due CD, e B; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Dimoſtrazione co' numeri.

8 . 4 . 6 . 3

Sia come 8 *a* 4, *così* 6 *a* 3; *è manifeſto, che la ſomma di* 8, *e* 3 *vale a dire del maſſimo numero, e del minore è maggiore alla ſomma degli altri due* 4, *e* 6.

(1) *Pr.* 14. *di queſto.* (2) *Aſſio.* 2.
(3) *Aſſiom.* 4.

Digitalizzato da Google

LIBRO SESTO.

DEFINIZIONI.

I.

LE figure ſimili ſono quelle, che hanno gli angoli eguali agli angoli, ciaſcuno a ciaſcuno, ed intorno agli angoli eguali hanno parimenti i lati proporzionali, ciaſcuno a ciaſcuno.

SPIEGAZIONE.

Acciocchè due figure poſſano chiamarſi ſimili, ſi ricercano tre condizioni. I. *Che ſiano pariangole. Quindi un triangolo potrà eſſere ſimile ad un altro triangolo, ma non già ad uaa figura quadrilatera, o multilatera. E ſimilmente una figura quadrilatera potrà eſſere ſimile ad un' altra figura quadrilatera, ma non già ad una figura di più di quattro lati.* II. *Che ciaſcuno angolo ſia eguale a ciaſcuno angolo.* III. *Che intorno gli angoli eguali abbiano i lati proporzionali: ove queſte tre condizioni ſi rincontrino, le figure ſi diranno ſimili: ove una ſola di eſſe non abbia luogo le figure ſi diranno ſimili, da quì è manifeſto, che tutti i triangoli equilateri*

Digitalizzato da Google

ſono ſimili fra di loro, ſiccome parimente tutti i quadrati: poichè negli uni, e negli altri ſi verificano tutte tre le condizioni.

II.

Le figure reciproche ſono quelle, fra i lati da' quali ha luogo tale proporzione, che gli eſtremi di eſſa s' incontrarono in una figura, e li mezzi nell' altra figura

SPIEGAZIONE.

Per dirſi reciproci i due triangoli ABF, DGE; fa duopo I. che due lati dell' uno ſiano proporzionali a due dell' altro (1). *II. Che la proporzione ſia tale, che gli eſtremi di eſſa ſi ritrovino in un triangolo, e li mezzi nell' altro triangolo; vale a dire, che ſia AB a DC, così CE, EF; imperciocchè in tal modo gli eſtremi AB, BF dalla proporzione ſi ritrovano nel triangolo ABF, e li mezzi DC, CE ſi ritrovano nel triangolo DCE.*

III.

L'altezza d' una figura è la perpendicolare, che ſi fa vedere dal vertice ſopra la baſe.

COROLLARIO.

Quindi ne ſiegue I. *che due triangoli coſtituiti in modochè le baſe di eſſi giacciono a dirittura, e li vertici ſiano riuniti in*

(1) *Fig. V. avanti la Fig.* I. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

in un medeſimo punto, abbiano la medeſima altezza; imperciocchè la perpendicolare, che cade dal vertice ſopra la baſe è comune all' uno, ed all' altro triangolo.

II. Che due figure ſituate fra due parallele hanno ancora la medeſima altezza, la quale è la diſtanza delle due parallele, di maniera cchè è l' iſteſſo il dire due figure hanno l' iſteſſa altezza, e due figure ſono coſtituite, o per lo meno poſſono eſſere coſtituite fra le due parallele.

IV.

Una linea retta dicesi ſecata ſecondo l' eſtrema e mezza ragione, quando tutta la linea retta è alla di lei maggior porzione, come l' iſteſſa maggior porzione ſta alla minor porzione: *vale a dire la retta AB ſi dirà ſecata nel punto C A C B ſecondo l' eſtrema, e mezza ragione, ſiccome ſta AB ad AC, così ſta AC a CB.*

V.

La quantità di ragione è il quoziente, che naſce, dividendo il ſuo antecedente per lo ſuo conſeguente: dicaſi detto quoziente ancora, denominatore dalla ragione, ovvero eſponente della ragione.

SPIEGAZIONE.

La ragione, ſecondo quello, che ſi diſſe nel principio del libro V., è il rapporto di due gandezze omogenee paragonate ſecondo le quantità. Ora, chi vuol ſapere il valore

Digitalizzato da Google

d' una ragione, il qual valore si chiama da' Geometri quantità, o esponente, o denominatore, *egli deve vedere, quante volte l' antecedente contiene il conseguente, o che ritorna all' istesso, quante volte il conseguente si contiene nell' antecedente: imperciocché il numero, che indica cotesta continenza sarà il valore della ragione; e si chiamerà* quantità *della medesima; quindi la quantità della ragione di* 8 *a* 4 *sarà* 2: *imperciocchè dividendo il numero* 8 *per lo* 4 *ne nasce il numero* 2: *la quantità della ragione di* 13 *a* 2 *è* $\frac{1}{5}$ *imperciocchè il* 2 *nel* 13 *entra* 6 $\frac{1}{2}$: *e finalmente la quantità della ragione di* 2 *á* 2 *è* $\frac{2}{3}$ *imperciocchè* $\frac{2}{3}$ *è il quoziente della divisione dell' antecedente* 2 *per lo conseguente* 3.

Questa definizione ci suggerisce un altro contrassegno per conoscere se due ragioni sono eguali o no, il quale è questo: Se la quantità delle due ragioni, *sopra le quali nasce il dubbio, se siano eguali, o no*, sono eguali, le ragioni saranno parimente eguali: ma se le suddette quantità sono diseguali, le ragioni ancora saranno diseguali, e quella ragione sarà mag-

Digitalizzato da Google

maggiore, la quantità della quale è maggiore: *Per mezzo di questo contrassegno conosciamo, che* 12 *sta a* 2, *come* 18 *a* 3: *imparciocchè la quantità dell' una, e dell' altra ragione è il numero* 6. *Conosceremo di più, che* 2 *sta a* 6, *come sta* 4 *a* 12; *imperciocchè la quantità dell' una* 1 *e dell' altra ragione è* ---. *Finalmente co-* 3 *nosceremo, che* 12 *ha maggior ragione a* 3, *che* 6 *a* 2, *imperciocchè la prima ragione ha* 4 *per denominatore, ovvero esponente, e la seconda ha* 3.

VI.

Una ragione dicesi composta da più altre ragioni, quando la quantità di essa nasce dal moltiplicare insieme tutte le quantità delle ragioni componenti.

VII.

Se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta dicesi duplicata se sono tre, e sono eguali dicesi triplicata, se sono quattro, e sono eguali, quadruplicata, e così all' infinito.

SPIEGAZIONE.

Si è detto nella definizione antecedente; che due ragioni allora sono eguali, quando le loro quantità sono eguali fra di loro; ma se la quantità d'una ragione fosse eguale alla quantità di più altre ragioni mol-

Digitalizzato da Google

moltiplicate insieme, in tal caso la suddetta ragione si direbbe composta da tutte queste ragioni. Per esempio la ragione di 9 a 1 è composta dalle ragioni di 12 a 4, e 6 a 5: imperciocchè le quantità delle due ultime ragioni sono respettivamente 3, e 2, le quali moltiplicate insieme producono il numero 6, che è la quantità della ragione di 6 a 1. Similmente la ragione di 12 a 1 è composta da queste tre ragioni di 6 a 2, di 8 a 4, e di 10 a 5; imperciochè le quantità delle tre ultime ragioni sono respettivamente 3, 2, e 2; le quali moltiplicate insieme producono il numero 12, che è la quantità della ragione di 12 a 1.

Quindi date più ragioni semplici sarà facile a ritrovare la ragione; che da esse è composta; imperciocchè non si dee far altro, che ritrovare primieramente le quantità di tutte le ragioni semplici date, e poi moltiplicarle insieme, che poi la ragione, che ha il prodotto per esponente; ovvero per denominatore sarebbe la ragione composta desiderata. Vogliasi per esempio ritrovare la ragione composta da queste due ragioni di 18 a 5, di 4 a 1, perchè la quantità di queste due ragioni sono respettivamente 6, e 4, le quali moltiplicate insieme producono il numero 24; ne siegue, che la ragione di 24 a 1, ovvero di 48 a 2, ovvero di 72 a 3, &c. è composta delle due ragioni semplici date: imperciocchè

Digitalizzato da Google

chè la quantità di ciascuna di queste tre ragioni è l' istesso numero 24. *Si potrebbe anco ritrovare la ragione composta da più ragioni semplici date, moltiplicando insieme tutti gli antecedenti della ragione, e poi tutti i conseguenti delle medesime, e da' prodotti costituirne un' altra ragione, la quale sarà la composta desiderata. Così senza appartarci dall' esempio ora proposto, perchè gli antecedenti delle due ragioni sono* 28, *e* 4, *il prodotto delle quali è* 72, *e li conseguenti sono* 3, *ed* 1, *il prodotto de' quali è* 3; *ne siegue, che la ragione di* 72 *a* 3 *è composta dalle due ragioni di* 18 *a* 3, *e di* 4 *a* 2, *siccome già era stato ritrovato per l' altra maniera di compire le ragioni.*

Ora è da saperfi, che se le ragioni componenti sono due, e sono eguali, la composta si chiama duplicata, *in riguardo a ciascuna delle due componenti; e se sono tre, e sono eguali, si chiami* triplicata, *e se quattro, e sono eguali* quadruplicata, *e così all' infinito. Per esempio la ragione di* 6 *a* 2; *e* 12 *a* 4 *sono eguali; sicchè la ragione di* 9 *a* 1 *composta da esse si dirà duplicata così di* 4 *a* 2, *come parimente di* 12 *a* 4. *Similmente le ragioni di* 4 *a* 2, *di* 8 *a* 4, *e di* 12 *a* 6 *sono eguali, il perchè la ragione di* 8 *a* 1 *composta da tutte tre si dirà triplicata di ciascuna di esso. In fine le ragioni di* 3 *a* 1, *di* 6 *a* 2, *di* 9 *a* 3, *e di* 12 *a* 4 *sono tutte egua-*

Digitalizzato da Google

li; quindi la ragione di 8 *a* 1 *composta da tutte quattro si dirà quadruplicata di ciascuna di esse. Del rimanente siccome per darsi luogo alla ragione duplicata si richiedono due ragioni eguali, per darsi luogo alla triplicata si richiedono tre ragioni eguali, e così all' infinito: così basterà una ragione sola per ritrovarne la duplicata, la triplicata, &c.: imperciocchè non avrà da farsi altro, che moltiplicare una volta per se medesima la quantità della ragione data per ritrovare la sua duplicata, moltiplicarla due volte per avere la triplicata, tre volte per avere la quadruplicata, e così all' infinito.*

Intorno le ragioni composte è degno, che qui si riferisca il seguente Teorema. Se fra due qualsivogliano quantità omogenee si mettano altre qualsivogliano quantità omogenee, e quante si vogliano; la ragione, che la prima ha all' ultima sarà composta da tutte le ragioni intermezze; *vale a dire se fra le quantità* 20, *e* 1 *si frapongono le quantità* 10, *e* 5, *le quali si prendono ad arbitrio, la ragione di* 20 *a* 2 *sarà composta dalle ragioni intermezze di* 20 *a* 10, *di* 10 *a* 5, *e di* 5 *a* 1: *di fatto componendo insieme queste tre ragioni semplici si vedrà uscir fuori la composta di* 20 *a* 1. *Similmente se fra le quantità* 2, *e* 4 *si frappongono ad arbitrio le quantità*, 5, *e* 8, 30, *e* 4: *la ragione di* 2 *a* 3 *sarà composta da tutte le ragioni intermez-*

Digitalizzato da Google

mezze di 2 a 5, di 5 a 8, di 8 a 30, di 36 a 4, e di 4 a 5: di fatto componendo insieme tutte queste ragioni si vedrà uscir fuori la composta di 2 a 3; ma avvertasi quì, che per fare questa composizione fa duopo sapere la teoria de' numeri retti.

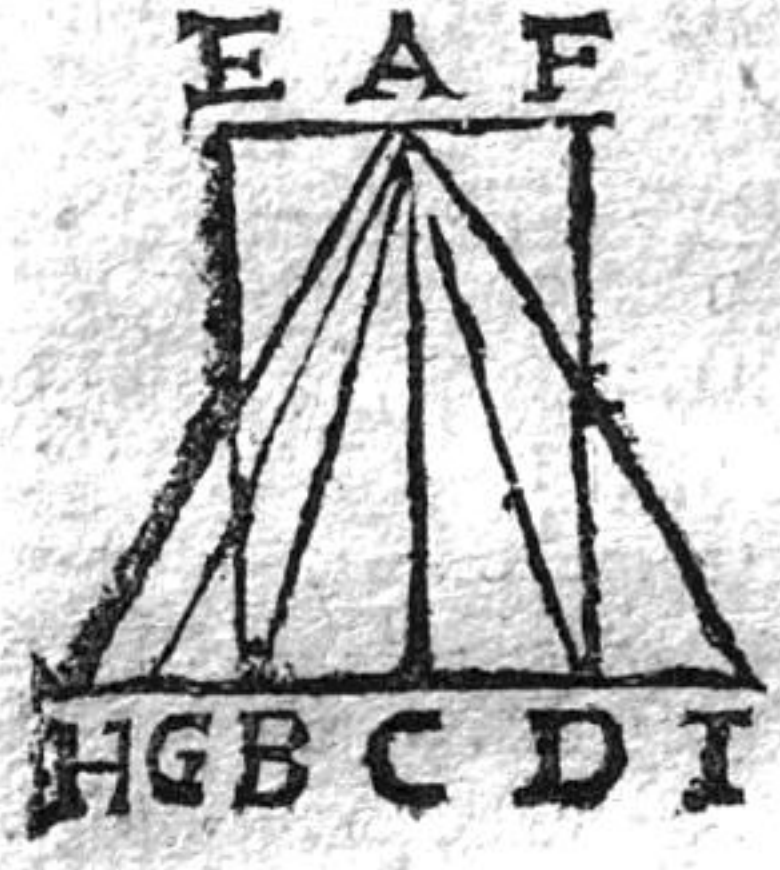
Da quì è manifesto. I. Che se tre quantità A, B, C, sono continuamente proporzionali, la ragione della prima A alla terza C e duplicata della prima A alla seconda B; imperciocchè fra A, e B ritrovandosi interposta la B, sarà a ragione di A a C composta dalle ragioni di A a B, e di B a C; ma queste due ragioni sono supposte eguali fra loro; dunque la ragione di A a C sarà duplicata di A a B, e per conseguente di B a C. II. Che se quattro quantità A, B, C, D sono continuamente proporzionali, la ragione della prima alla quarta D, sia triplicata della ragione della prima A alla seconda B: imperciocchè fra le due grandezze A, e D ritrovandosi interposte le due grandezze B, e C, sarà la ragione di A a D composta dalle tre ragioni intermezze di A a B, di B a C, e di C a E; quindi supponendosi eguali queste tre ragioni, sarà la ragione di A a D triplicata, così della ragione di A B, come delle ragioni di A a C, e di C a D: nell'istessa maniera si mostrerà, che se cinque quantità sono continaumente proporzionali, la ragione

Digitalizzato da Google

della prima dalla quinta ſia quadruplicata della ragione ella prima alla ſeconda.

PROP. I. TEOREMA.

Li triangoli, che hanno l'iſteſſa altezza ſono fra loro come le baſi. Similmente li parallelogrammi, che hanno l' isteſſa altezza ſono fra loro, come le baſi.



I.

Li due triangoli ABC, ADC; ſiccome ancora li due parallelogrammi ACBE ACDF abbiano la medeſima altezza: io dico, che il triangolo ABC ſtia al triangolo ADC, come ſta la baſe BC alla baſe DC, dico, di più che il parallelogrammo ACBE ſtia al parallelogrammo ACD, come ſta l'iſteſſa baſe BC alla baſe DCF.

II.

Si distendano (1) *le baſi* BC, DC *verſo* H, *ed* I.

Si prendano (2) *le parti* BG, GH *ciaſcuna eguale alla* BC, *il numero delle quali parti ſia arbitrario; ſiccome ancora ſi prenda la parte* DI *eguale a* BD.

Si

(1) Dim. 2. (2) Pr. 3. I.

Digitalizzato da Google

Si congiungano (1) *le linee rette AG, AH, AI.*

III.

I. Perchè dalla costruzione le basi HG, GB, BC sono eguali fra di loro, saranno (2) i triangoli AHG, AGB, ABC eguali fra di loro: il perchè, quanto la base CH è moltiplice della base CB, tanto sarà il triangolo AHC moltiplice del triangolo ABC. Similmente, perchè dalla costruzione le basi ID, DC sono eguali fra di loro, saranno li triangoli (3) AID, ADC parimente eguali: e per conseguente, quanto la base IC è moltiplice della base DC, altrettanto il triangolo AIC sarà moltiplice del triangolo ADC. Ora, se la base HC è eguale alla dase CI, è manifesto ancora, che se la base HC è maggiore, o minore della base IC, ancora il triangolo AHC sarà maggiore, o minore del triangolo AIC. Quindi, avendo due ragioni di BC a CD, e dei triangolo ABC al triangolo ADC; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti BG, e del triangolo ABC, i quali egualmente moltiplici, sono HG, ed il triangolo AHC sono entrambi maggiori, o eguali, o minori degli egualmente moltiplici CI, e del triangolo AIC de' conseguenti DC, e del triangolo ADC;

---

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 37. *I.*
(3) *Pr.* 37. *I.* (4) *Pr.* 57. *I.*

Digitalizzato da Google

ADC; ne ſiegue (1) che le ſuddette due ragioni ſiano eguali; e per conſeguente, che BC ſia a CD, come il triangolo ABC al triangolo ADC.

II. Perchè il parallelogrammo (2) ACBE è doppio del triangolo ACB, ſiccome il paralielogrammo ACDF è doppio del triangolo ACD, ſaranno i due parallelogrammi ACBE; ACDF egualmente moltiplici de' triangoli ACB, ACD; quindi, come ſta il triangolo ABL al triangolo ACD (3), così ſtarà il parallelogrammo ACBE al parallelogrammo ACDF; ma ſi è dimoſtrato, che la baſe BC ſia alla baſe DC, come il triangolo ABC al triangolo ADC; dunque ſarà parimente (4) la baſe BC alla baſe DC, così il parallelogrammo ACBF al parallelogrammo ACDF. Cioccchè doveva dimoſtrarſi.

PROP.

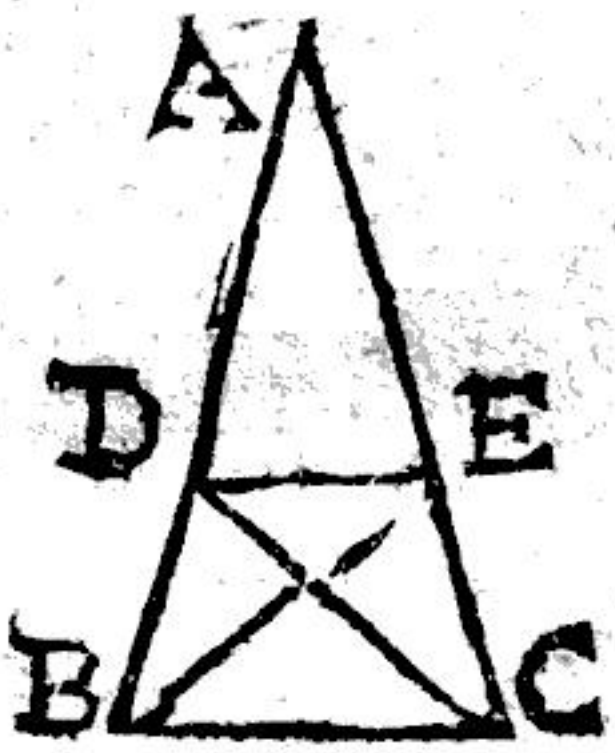
(1) *Def.* 6. (2) *Pr.* 34. *I.*
(3) *Pr.* 15. *V.* (4) *Pr.* 12. *V.*

Digitalizzato da Google

SESTO.

PROP. II. PROBLEMA.

Se in un triangolo s'intende tirata una linea retta qualunque parallela alla baſe, eſſa ſecherà i lati proporzionalmente. Viceverſa, ſe i lati di un triangolo ſiano ſecati proporzionalmente, la linea retta, che congiugne i ſecamenti ſarà parallela alla baſe.



I.

Nel triangolo ABC intendaſi tirata la linea DE parallela alla ſua baſe BC: io dico in primo luogo, che i lati AB, AC rimangono ſecati proporzionalmente, dimodocchè, come ſta BD a DA, così ſtarà CE ad EA; dico in oltre, che ſe BD ſta a DA, come CE ad EA, la linea DF, la quale congiugne i punti D, ed E ſarà parallela alla baſe BC del triangolo ABG.

II.

Congiunganſi le due linee rette DC, BE (2).

III.

I. Perchè dalla ſuppoſizione le rette DE,

---

(1) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

DE, BC ſono parallele, ſaranno (1) i triangoli BDE, CED eguali fra di loro, quindi, come ſta il triangolo (2) BDE al triangolo ADE, così ſtarà il triangolo CED all' iſteſſo triangolo ADE; ma il triangolo BDE ſta al triangolo ADE (3), come la baſe BD alla baſe DA; e ſimilmente il triangolo CED ſta al triangolo ADE (4) come la baſe CE alla baſe EA, dunque ſarà parimente BD a DA (5), così la CE alla EA.

II. Perchè dalla ſuppoſizione BD ſta a DA come CE ad EA, ed oltre a ciò l'iſteſſa BD ſta a DA (6), come il triangolo BDE ſta al triangolo ADE, e CE ſta ad EA, come al triangolo CED al triangolo ADE, ſarà (7) il triangolo EDE al triangolo ADE: quindi i due triangoli BDE, CED avendo la medeſima ragione all' iſteſſo triangolo ADE ſaranno eguali fra di loro (8): ma ſono coſtituiti ſopra la medeſima baſe DE; dunque ſaranno fra le medeſime parallele (9): e per conſeguente la BC parallela alla DE; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

CO-

(1) *Pr.* 37. *I.*
(2) *Pr.* 7. *V.*
(3) *Pr. ant.*
(4) *Pr. ant.*
(5) *Pr.* 11. *V.*
(6) *Pr. ant.*
(7) *Pr.* 11. *V.*
(8) *Pr.* 9. *V.*
(9) *Pr.* 39. *I.*

Digitalizzato da Google

COROLLARJ.

Da quì è manifesto. I. *Chè* AD *ſia a* DB, *come* AE *a* EC: *imperciocchè eſſendoſi dimoſtrato, che* BD *ſia a* DA, *come* CE *ad* EA, *ſarà per la ragione inverſa* (1), *come* AD *a* DB, *così* AE *a* DC. II. *Che* BA *ſta ad* AD, *come* CA *ad* AE; *imperciocchè eſſendoſi dimoſtrato, che* BD *ſia* DA, *come* CE *ad* EA; *ſarà per la compoſizione della ragione* (2), *come* BA *ad* AD, *così* CA *ad* AE. III. *Che* AB *ſia a* BD, *come* AC *a* CE: *imperciocchè eſſendoſi dimoſtrato, che a* AB *ſia* DB, *come ſta* AD *ed* EC, *ſarà per la compoſizione della ragione* (3); *come* AB *a* BD, *così* AC *a* CE.

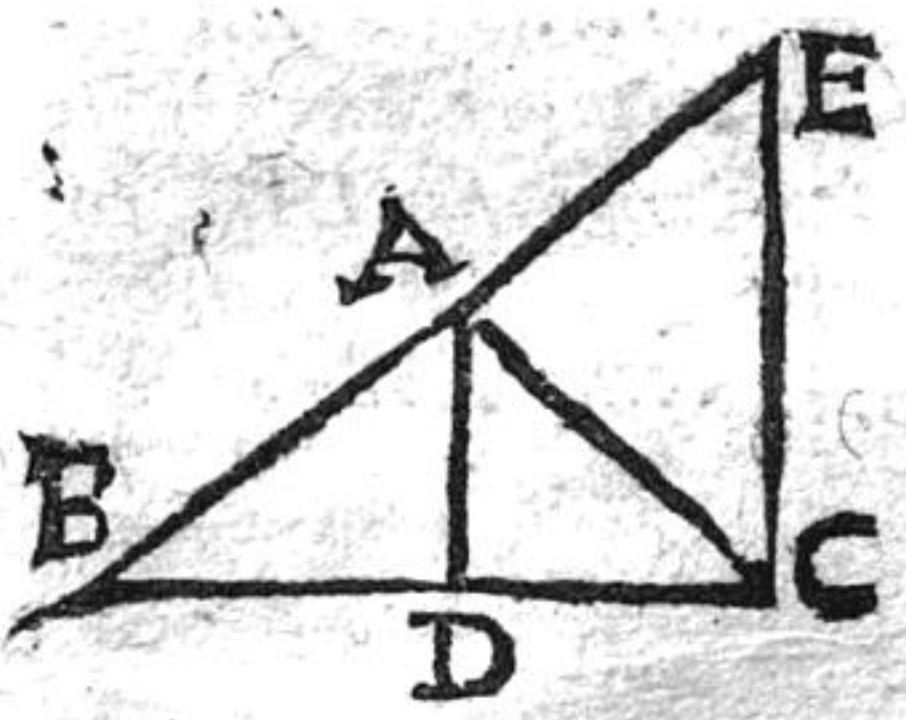
PROP.

(1) *Cor. della pr.* 4.
(2) *Pr.* 18. *V.* (3) *Pr.* 18. *V.*

Digitalizzato da Google

PROP. III. PROBLEMA.

Se l' angolo contenuto da' lati d' un triangolo s' intenda diviso per mezzo, la linea, che lo divide secherà la base dell' istessa proporzione de' lati. Viceversa, se la base sia secata nell' istessa proporzione de' lati, la linea, che unisce il vertice del triangolo col punto della sezione, secherà il suddetto angolo per mezzo.



I.

Nel triangolo ABC intendasi l' angolo BAC diviso per mezzo dalla retta AD; io dico, primieramente, che questa retta secherà la base BC nel punto D, in modocchè le parti di essa sono proporzionali a' lati BA ad AC, così sarà BD a BC. Io dico inoltre, che se BD sta a DC, come BA ad AC, la linea AD, la quale congiunge il vertice A del triangolo col punto della sezione D, divida l' angolo BAG per mezzo.

II.

Distendasi (1) *la retta* **BA** *verso* **E**.

Si

(1) *Dim.* 2.

Digitalizzato da Google

Si tagli la parte AE eguale (2) *alla AC.*
Si coogiunga la CE (1).

III.

I. Perchè dalla costruzione la AE è eguale alla AC, sarà il triangolo ADG isoscele; il perchè l'angolo (3) AEC sarà eguale all'angolo ACE; laonde essendo l'angolo esteriore BAC eguale (4) a' due angoli interiori opposti AEC, ACE; sarà l'angolo BAC doppio dell'angolo ACE: quindi essendo dalla supposizione l'angolo BAC parimente doppio dell'angolo DAC, saranno (5) li due angoli DAC, AGE eguali fra di loro: ma sono alterni delle linee AD, GE; dunque queste due linee saranno parallele (6). Ciò posto, perchè nel triangolo BCE si è tirata la retta DA parallela alla base GE, sarà (7) BA ad AE, così BD a DG; quindi, essendo dalla costruzione la AC eguale alla AE; sarà ancora, come BA ad AG, così BD a DC.

II. Essendo dalla supposizione BA ad AC, così BD a DG; e dalla costruzione essendo la AE eguale alla AG, sarà come BA ad AE, così BD a DG: quindi la linea retta AD, che unisce i punti A, e D, sarà parallela (8) alla base CE, il

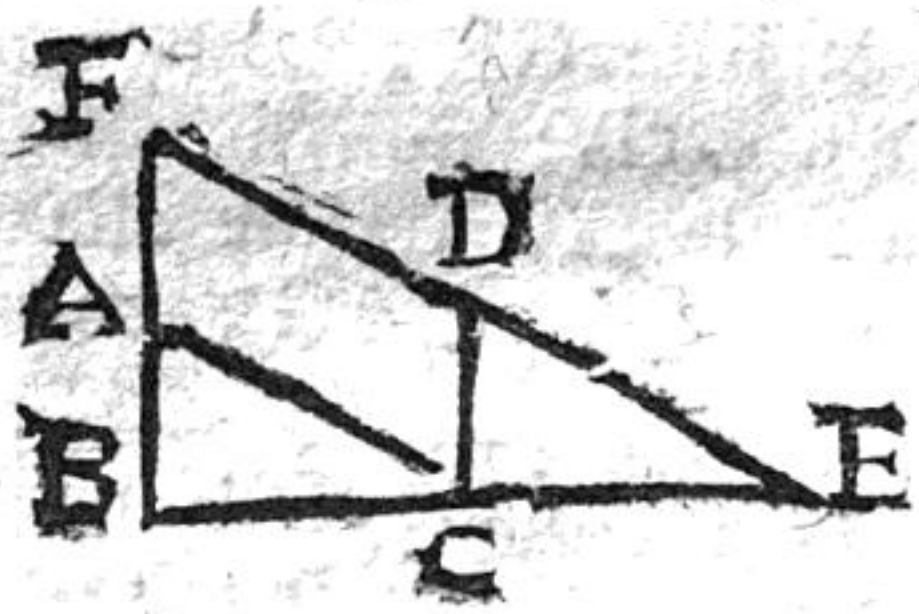
(1) *Pr.* 3. *I.*
(2) *Dim.* 1.
(3) *Pr.* 5. *I.*
(4) *Pr.* 32. *I.*
(5) *Assio.* 7.
(6) *Pr.* 27. *I.*
(7) *Cor.* 1. *della pr. ant.*
(8) *Pr. ant.*

Digitalizzato da Google

il perchè farà in primo luogo l'angolo esteriore BAD (1) eguale all'interiore opposto AEG: e farà ancora l'angolo DAC eguale al suo alterno ACE (2): ma gli angoli ACE, AEC sono eguali fra di loro, perchè (3) dalla costruzione la AE è eguale alla AC; dunque saranno parimente eguali gli angoli BAC DAC (4), ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. IV. PROBLEMA.

Se due triangoli sono equiangoli, i lati intorno agli angoli eguali saranno omologi, i quali stanno dirimpetto agli angoli eguali.



I.

Li due triangoli ABC, DCE siano equiangoli, vale a dire siano gli angoli BAC, ABC, BCA del primo triangolo eguali respettivamente agli angoli CDE, DCE, CED dell'altro triangolo, ciascuno a ciascuno; io dico, che li lati intorno li suddetti angoli eguali sono proporzionali, prendendo però per lati omologi

(1) *Pr.* 19. *I.*
(2) *Pr.* 29. *I.*
(3) *Pr.* 5. *I.*
(4) *Assio:* 1.

Digitalizzato da Google

gi quelli, che ſtanno dirimpetto agli angoli eguali, cioè AB, e CD, BC, e CE, AC, e DE; dimodocchè ſarà AB a BC, come DC a CE, e come BC a CA, così CE ad ED; e finalmente, come BA ad AC, così CD a DE.

II.

Si mettano i due lati omologi BC, e CE a dirittura.

Si diſtendano i due lati BA, ED, finchè vadano a congiungerſi nel punto F (1).

III.

Poichè dalla ſuppoſizione l'angolo eſteriore ACB è eguale all'interiore oppoſto dall'iſteſſa parte FEB, le due linee rette AC, FE, ſaranno parallele (2). Similmente perchè dalla ſuppoſizione l'angolo eſteriore DCE è eguale all'angolo interiore oppoſto FBC, le due linee DC, FB ſaranno parallele; quindi la figura quadrilatera FACD avendo i lati oppoſti paralleli, ſarà un parallelogrammo (4); e per conſeguente i lati oppoſti AC, ED, ed AF, CD ſaranno eguali fra di loro (5). Ora, perchè nel triangolo FBE la linea AC è parallela alla baſe FE, ſarà BC ad AF, così BC a CE (6), e per conſeguente ſarà ancora BA a GD, come BC a CE,

---

(1) *Dim.* 2.
(2) *Pr.* 28. *I.*
(3) *Pr.* 28. *I.*
(4) *Def. ult. I.*
(5) *Pr.* 34. *I.*
(6) *Pr.* 2. *di questo.*

Digitalizzato da Google

CE e per la ragione permutata (1), come BA a BC, così CD a CE. Similmente, perchè nel triangolo EFB la linea CD è parallela alla base BF (2) BC a CE, così FD a DE, e per conseguente BC a CE, come AC a DE, e per la ragion permutata (3), come BC a CA, così CE ad ED. Ora essendosi dimostrato, che AB sta a BC, come DC a CE, e che BC sia a CA, come CE ad ED, saranno le tre linee AB, BC, CA in ragion ordinata colle tre linee DC, CE, ED; e per conseguente per l'egual ragion ordinata sarà come (4) BA ad AC, così CD a DE; ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quì è manifesto I. *che se due triangoli sono equiangoli, essi sono parimente simili: imperciocchè, acciocchè siano simili, si richiede, che gli angoli siano eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e li lati intorno gli angoli sono proporzionali: ora la prima di queste condizioni si suppone, e l'altra è una conseguenza necessaria della prima.* II. *Che se nel triangolo* FBE *si tira la retta* AC *parallela alla base* FE, *il triangolo* ABC *sia simile al triangolo* FBE, *imperciocchè a cagione delle due parallele*

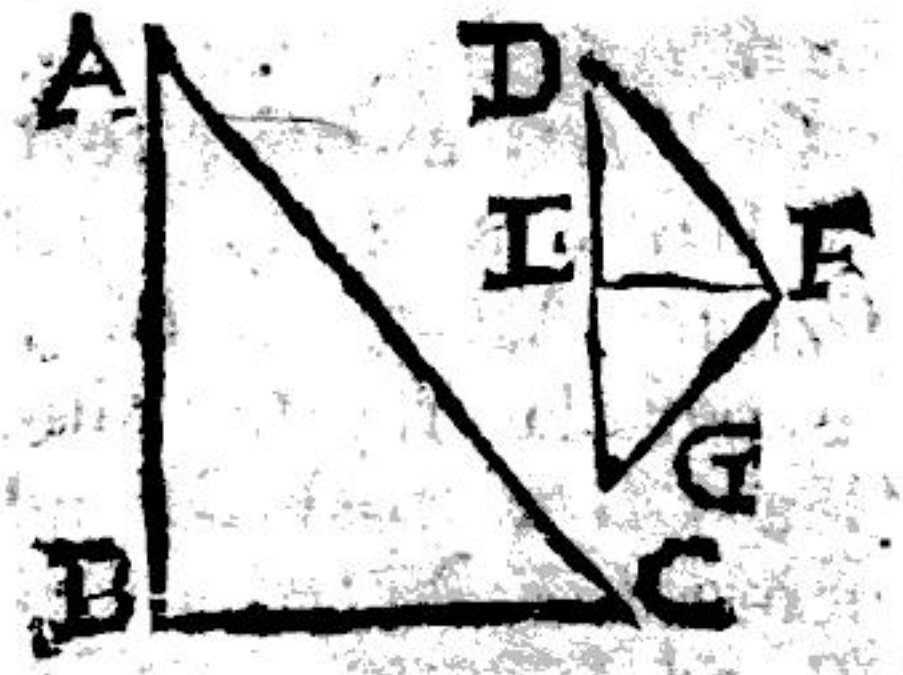
(1) *Pr.* 16. *V.* (2) *Pr.* 2. *di questo*
(3) *Pr.* 16. *V.* (4) *Pr.* 22. *V.*

Digitalizzato da Google

parallele AC, FE, l'angolo BAC è eguale all'angolo BFE, e l'angolo BCA è eguale all'angolo BEF; quindi essendo di più l'angolo ABC comune all'uno, ed all'altro triangolo; saranno essi equiangoli, e per conseguenti saranno simili.

PROP. V. TEOREMA.

Se due triangoli hanno i lati proporzionali, saranno equiangoli, e quegli angoli saranno eguali, e quali stanno dirimpetto a' lati omologi.



I.

Li due triangoli ABC, DEF abbiano i lati proporzionali; vale a dire, come sta AB a BC, così sta DE ad EF; come BC a CA, così EF a FD, e come BA ad AC, così ED a EF: io dico, che gli angoli del triangolo DEF, ciascuno a ciascuno, e quelli propriamente, li quali stanno dirimpetto a' lati omologi: vale a dire l'angolo ABC all'angolo DEF, l'angolo BCA all'angolo EFD, e l'angolo BAC all'angolo EDF.

II.

(1) *Pr.* 29. *I.*

Digitalizzato da Google

II.

Costituiscansi (1) *gli angoli* GEF, GFE *eguali respettivamente agli angoli* ABC, ACB.

Si distendano le due linee rette EG, FG, *finchè vadano ad unirsi nel punto* G (2).

III.

Perchè dalla costruzione li due angoli ABC, ACB sono eguali respettivamente agli angoli GEF, GFE, sarà il rimanente angolo BAC eguale al rimanente angolo EGF, perchè in ogni triangolo li tre angoli (3) sono eguali a' due retti. Quindi li triangoli ABC, GEF essendo equiangoli (4) avranno i lati proporzionali, e per conseguente sarà AB a BC, così GE ad EF; ed AC a CB, così GF ad FE: ma dalla suppoſizione AB sta a BC, come DE ad EF, e per la ragione inversa (5), come AC a CB, così DF ad FE; dunque sarà ancora GE ad EF, come DE ad FF, e GF ad FE (6): laonde, così le due linee rette GE, FE, come le due GF, FD saranno eguali fra di loro, a cagione che hanno la medesima ragione alla terza EF (7): quindi i due triangoli DEF, GEF avendo i due lati DE, DF eguali a' due lati GE, GF, cia-

(1) *Pr.* 23. *I.*
(2) *Dim.* 2.
(3) *Pr.* 32. *I.*
(4) *Pr. ant.*
(5) *Cor. della prop.* 4. *del V.*
(6) *Pr.* 11. *V.*
(7) *Pr.* 9. *V.*

Digitalizzato da Google

ciascuno a ciascuno, ed avendo di più la base EF comune, avranno (1) gli angoli eguali agli angoli, vale a dire, sarà l'angolo EDF eguale all'angolo EGF, l'angolo DFE eguale all'angolo GEE: ma i tre angoli EGF, GEF, GFE sono dalla costruzione eguali a' tre angoli BAC, ABC, ACB: dunque saranno ancora gli angoli del triangolo DEB eguali (2) agli angoli del triangolo ABC: ciocchè dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quì è manifesto, che se due triangoli hanno i lati proporzionali, essi sono simili: imperciocchè, acciocchè siano simili si richiede, che gli angoli siano eguali agli angoli, ciascuno a ciascuno, e di più, che i lati intorno agli angoli eguali siano proporzionali. Ora la seconda condizione si suppone, e la prima è una conseguenza necessaria della seconda. Questa proposizione è conversa dell'antecedente.

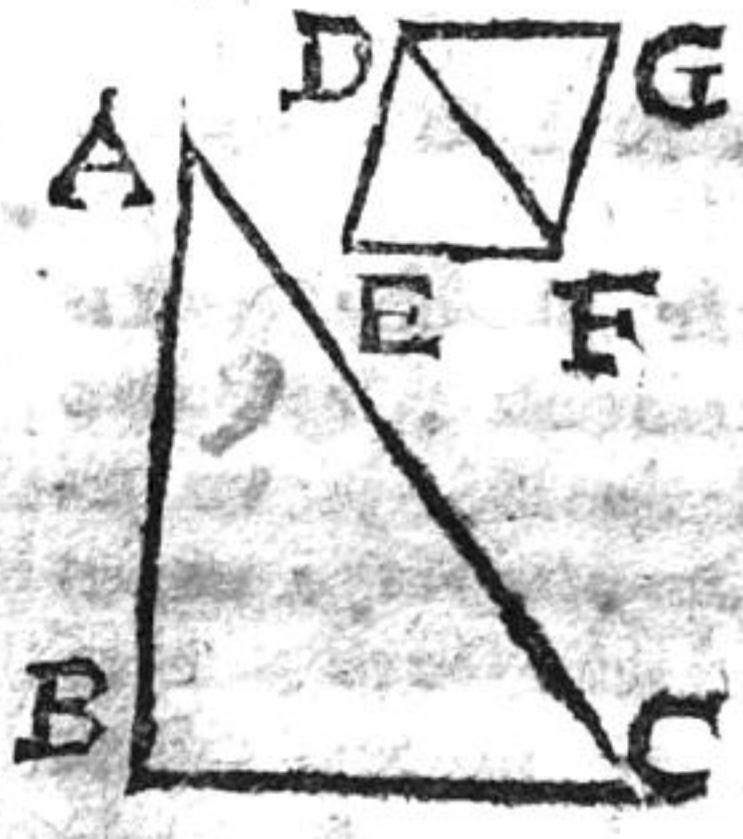
(1) *Pr.* 8. I. (2) *Assio.* 1.

Digitalizzato da Google

PROP. VI. TEOREMA.

Se due triangoli hanno un' angolo eguale ad un angolo, e i lati intorno queſti angoli proporzionali, eſſi ſaranno equiangoli, e quegli angoli propriamente ſaranno eguali, i quali ſtanno dirimpetto a' lati omologi.

I.



Abbiano i due triangoli ABC, DEF, l'angolo ABC eguale all' angolo DBF, ed abbiano di più i lati intorno queſti angoli eguali proporzionali; vale a dire, ſia come AB a BC; così DE ad EE; io dico, che gli altri due angoli del primo triangolo ſono eguali agli altri due angoli del ſecondo triangolo, e quelli propriamente che ſtanno dirimpetto a' lati omologi, cioè l'angolo BAC è eguale all' angolo DEF, e l'angolo ACB è eguale all'angolo DFE.

II.

Coſtituiſcanſi (1) *gli angoli GEF, GFE eguali riſpettivamente agli angoli ABC, ACB.*

Si

(1) *Pr. 23. I.*

Digitalizzato da Google

Si distendano (1) *le linee rette GE, DE, finchè si vadino ad unire nel punto G.*

III.

Perchè dalla costruzione li due angoli ABC, ADB sono eguali a' due angoli GEF, GFE, sarà il rimanente angolo BAC eguale al rimanente angolo EGF: poichè in ogni triangolo tutti li tre angoli sono eguali a' due retti (2): il perchè li due triangoli ABC, GEF essendo equiangoli, avranno (3) i lati proporzionali, e per conseguente sarà AB a BC, così GE ad EF; ma dalla supposizione AB sta a FC, come DE ad EF: dunque sarà ancora (4) GE ad EF, così DE alla medesima EF; laonde le due rette GE, DE saranno eguali fra di loro (5): quindi i due triangoli DEF, avendo i due lati CE, EF eguali a' due lati GE, EF, ciascuno a ciascuno, ed avendo di più l' angolo DEF eguale all' angolo GEF, perchè ciascuno di essi è eguale al medesimo angolo ABC, sarà (6) l' angolo EDE eguale all' angolo EGF, e l' angolo EFD eguale all' angolo EFG: ma dalla costruzione gli angoli EGF, e EFG sono eguali respettivamente agli angoli BAC, BCA; dunque ancora gli angoli EDF, EFD saranno respettivamente eguali agli angoli

(1) *Dim.* 2. (2) *Pr.* 32. *I.*
(3) *Pr.* 4. *di questo.* (4) *Pr.* 11. *V.*
(5) *Pr.* 9. *V.* (6) *Pr.* 4. *I.*

Digitalizzato da Google

BAC, BCA, ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

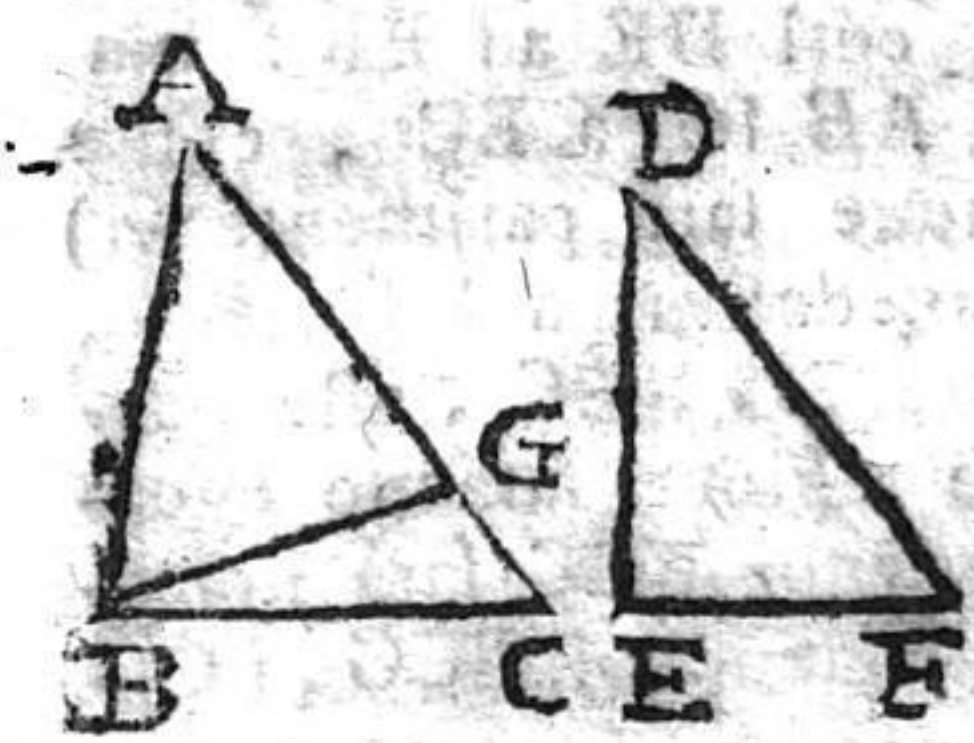
Da quì è manifesto, che se due triangoli hanno un' angolo eguale ad un' angolo, e i lati intorno questi angoli proporzionali, essi sono simili; imperciocchè si è dimostrato, che i medesimi triangoli sono equiangoli, e per conseguente (1) *sono simili.*

(1) *Cor. 1. della pr. 4. di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. VII. TOEREMA.

Se due triangoli hanno I. *un' angolo eguale ad un' angolo* II. *intorno due altri angoli hanno i lati proporzionali* III. *hanno i rimanenti angoli della medeſima ſpecie, vale a dire tutti due retti, tutti due acuti, ovvero tutti due ottuſi, i triangoli ſaranno equiangoli, e propriamente ſaranno eguali i due angoli, intorno i quali i lati ſono proporzionali.*



I.

Abbiano li due triangoli AEC, DEF primieramente li due angoli BAC EDF eguali; in ſecondo luogo intorno gli angoli ABA, DEF abbiano i lati proporzionali; vale a dire, ſia come AB a BC, così DE ad EF: finalmente ſiano gli angoli ACB, DFE della medeſima ſpecie, vale a dire tutti due retti; tutti due acuti, ovvero tutti due ottuſi; io dico, che li ſuddetti triangoli ABC, DEF ſaranno equiangoli; e farà l' angolo ABC eguale all' angolo DEF, e l' angolo ACB eguale all' angolo DFE.

Digitalizzato da Google

II.

Se mai è poſſibile non ſia l'angolo ABG eguale all'angolo DEF, ma ſia maggiore. *Coſtruiſcaſi dunque* (1) *l'angolo ABG eguale all'angolo DEF.*

III.

Perchè dalla ſuppoſizione l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF, e dalla coſtruzione l'angolo ABG è eguale all'angolo DEF, ſarà l'angolo rimanente AGB eguale all'angolo rimanente DCE; quindi li triangoli ABG, DEF, eſſendo equiangoli, avranno (2) li lati intorno gli angoli eguali proporzionali; e per conſeguente ſarà AB a BG, così DE ad EF: ma dalla ſuppoſizione AB ſta a BC, come DE ad EF; dunque ſarà parimente (3) AB a BG, così la medeſima a AB a BD, e perciò le due rette BG, BC, alle quali la AB ha l'iſteſſa ragione ſaranno eguali (4); quindi il triangolo BGC ſarà iſoſcele, e per conſeguente gli angoli BCG, BGC ſaranno (5) eguali.

Ciò premeſſo, ſe l'angolo BCG è retto, ovvero ottuſo, il triangolo BCG verrebbe ad avere due angoli retti, ovvero due angoli ottuſi, il che non può ſoſſiſtere. Ma ſe l'angolo BCG ſi mette acuto, eſſendo ancora acuto l'angolo BGC, ſarà

(1) *Pr.* 3. *I.* (2) *Pr.* 4. *di queſto.*
(3) *Pr.* 11. *V.* (4) *Pr.* 9. *V.*
(5) *Pr.* 5. *I.*

Digitalizzato da Google

farà ottuſo l'angolo AHB, perchè li due angoli BGC, AGB ſono eguali a due retti (1): e per conſeguente ſarà ancora ottuſo l'angolo DFE, il quale è eguale all'angolo AGB; ma nel ſuppoſto, che l'angolo ACB ſia acuto, ancora l'angolo DFE, il quale è dell'iſteſſa ſpecie è acuto: dunque l'angolo DFE è nell'iſteſſo tempo ottuſo, ed acuto; ciocchè non potendo ſoſſiſtere, rimane vero il Teorema in queſtione.

COROLLARIO.

Da quì è manifeſto, che ſe due triangoli hanno due angoli; hanno di più intorno due altri angoli li lati proporzionali; ed hanno finalmente li rimanenti angoli dell'iſteſſa ſpecie, li ſuddetti triangoli ſaranno ſimili.

(1) *Pr.* 13. *I.*

Digitalizzato da Google

II.

Se mai è poſſibile non ſia l'angolo ABG eguale all'angolo DEF, ma ſia maggiore. *Coſtituiſcaſi dunque* (1) *l'angolo ABG eguale all'angolo DEF.*

III.

Perchè dalla ſuppoſizione l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF, e dalla coſtruzione l'angolo ABG è eguale all'angolo DEF, ſarà l'angolo rimanente AGB eguale all'angolo rimanente DCE; quindi li triangoli ABG, DEF, eſſendo equiangoli, avranno (2) li lati intorno gli angoli eguali proporzionali; e per conſeguente ſarà AB a BG, così DE ad EF: ma dalla ſuppoſizione *AB* ſta a BC, come DE ad EF; dunque ſarà parimente (3) AB a BG, così la medeſima a AB a BD, e perciò le due rette BG, BC, alle quali la AB ha l'iſteſſa ragione ſaranno eguali (4); quindi il triangolo BGC ſarà iſoſcele, e per conſeguente gli angoli BCG, BGC ſaranno (5) eguali.

Ciò premeſſo, ſe l'angolo BCG è retto, ovvero ottuſo, il triangolo BCG verrebbe ad avere due angoli retti, ovvero due angoli ottuſi, il che non può ſoſſiſtere. Ma ſe l'angolo BCG ſi mette acuto, eſſendo ancora acuto l'angolo BGC, ſarà

(1) *Pr.* 3. *I.*
(2) *Pr.* 4. *di queſto.*
(3) *Pr.* 11. *V.*
(4) *Pr.* 9. *V.*
(5) *Pr.* 5. *I.*

Digitalizzato da Google

farà ottuſo l'angolo AHB, perchè li due angoli BGC, AGB ſono eguali a due retti (1): e per conſeguente ſarà ancora ottuſo l'angolo DFE, il quale è eguale all'angolo AGB; ma nel ſuppoſto, che l'angolo ACB ſia acuto, ancora l'angolo DFE, il quale è dell'iſteſſa ſpecie è acuto: dunque l'angolo DFE è nell'iſteſſo tempo ottuſo, ed acuto; ciocchè non potendo ſoſſiſtere, rimane vero il Teorema in queſtione.

COROLLARIO.

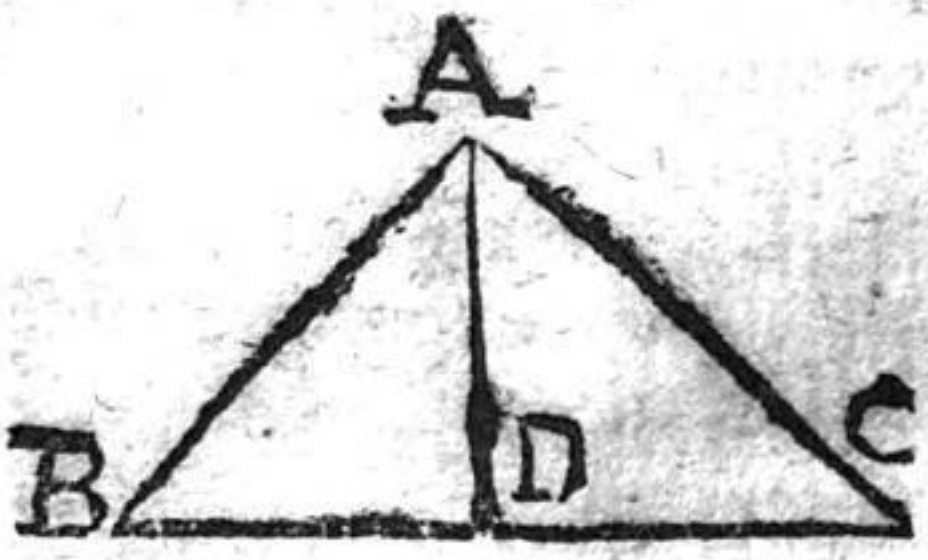
Da quì è manifeſto, che ſe due triangoli hanno due angoli; hanno di più intorno due altri angoli li lati proporzionali; ed hanno finalmente li rimanenti angoli dell'iſteſſa ſpecie, li ſuddetti triangoli ſaranno ſimili.

(1) *Pr.* 13. *I.*

Digitalizzato da Google

PROP. VIII. TEOREMA.

Se in un triangolo rettangolo si fa dall' angolo retto cadere una perpendicolare sopra la base, essa dividerà il triangolo in due triangoli. I. Simili fra loro. II. Simili a tutto il triangolo rettangolo.



I.

Nel triangolo rettangolo ABC si faccia dall' angolo retto A cadere la perpendicolare AD sopra la base BC ; io dico , che essa divide il triangolo in due triangoli ADB , ADC , li quali sono simili fra loro , e sono dippiù simili a tutto il triangolo ABC .

II.

I. Il triangolo ABD è equiangolo al triangolo ABC ; imperciocchè l' angolo in B è comune all' uno , ed all' altro triangolo , l' angolo ADB è eguale all' angolo BAC , perchè entrambi sono retti , e l' angolo rimanente BAD è eguale all' angolo rimanente BCA : quindi i sudetti due triangoli saranno simili (1).

II.

(1) *Cor. 1. della pr. 4. di questo .*

Digitalizzato da Google

II. Il triangolo ADC è equiangolo al triangolo ACB: imperciocchè l'angolo in C è comune all'uno, ed all'altro triangolo, l'angolo ADC è eguale all'angolo CAB, perchè entrambi sono retti, e l'angolo rimanente CDA è eguale all'angolo rimanente CBA: quindi li suddetti due triangoli saranno simili (1).

III. Finalmente il triangolo ADB è equiangolo al triangolo ADC, perchè gli angoli ADB, ADC sono eguali, essendo entrambi retti: gli angoli BAD, ACD si sono dimostrati eguali; e si sono ancora dimostrati eguali i rimanenti angoli ADB, CAD: quindi i suddetti due triangoli saranno simili (2).

COROLLARJ.

Quindi, perchè li triangoli simili hanno intorno gli angoli eguali i lati proporzionali, e que' lati sono omologi, li quali stanno dirimpetto agli angoli eguali sarà

I. per ragione de' triangoli ABC, ABD, li quali si sono dimostrati simili, come CB a BA, così BA a BD; vale a dire il lato BA sarà mezzo proporzionale fra l'ipotenusa BC, e la parte adjacente BD.

II. Per ragione de' triangoli BCA, ACD, li quali si sono dimostrati parimente simili sarà, come BC a CA, così CA a CD;

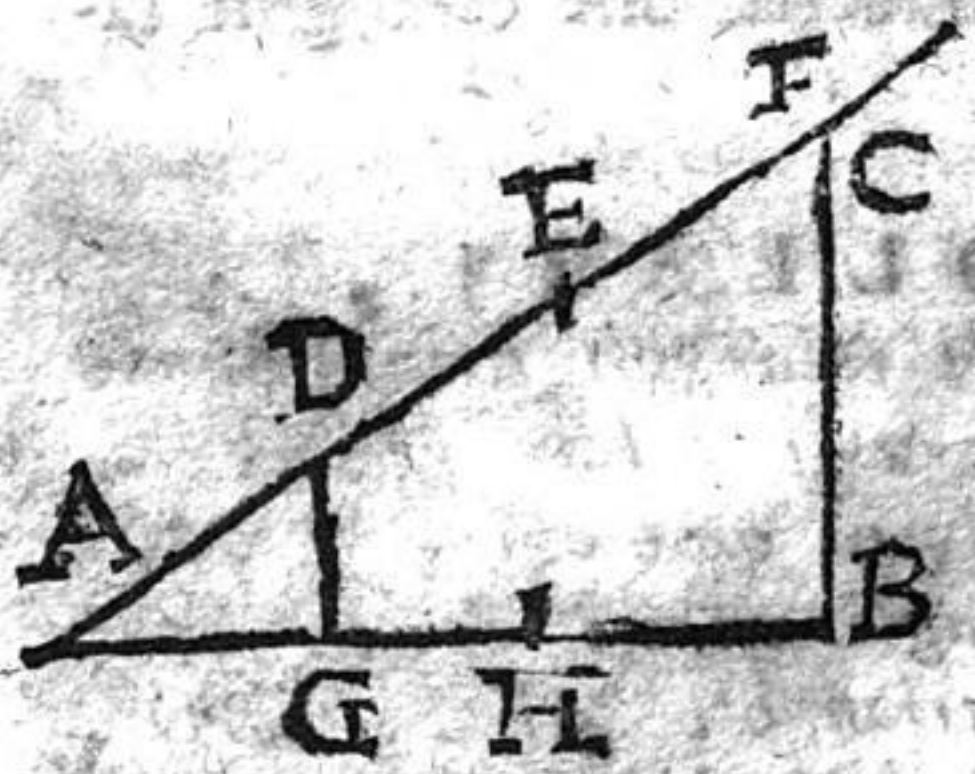
(1) Cor. della pr. 4. di questo.
(2) Cor. della pr. 4. di questo.

Digitalizzato da Google

vale a dire l' altro lato CA sarà mezzo proporzionale fra l' ipotenusa BC, e la parte adjacente CD. III. Per ragione de' triangoli BDA, ADC, li quali si sono dimostrati simili, sarà come BD a DA, così DA a DC; vale a dire la perpendicolare DA sarà mezzo proporzionale fra le parti BD, DC dell' ipotenusa BD.

PROP. IX. PROBLEMA.

Da una linea retta data tagliarne una parte ordinata.



I.

Sia data la linea retta AB; fa duopo tagliarne una parte ordinata, come per esempio la terza parte.

II.

Dal punto A si tiri ad arbitrio la retta indefinita AC, la quale comprenda colla data AB l' angolo CAB.

Prendasi nella AC il punto D ad arbitrio. Si taglino (1) le parti DE, EF eguali ciascuna ad AD.

Si

(1) Pr. 3°. I.

Si congiunga (1) *la FB.*

Per lo punto D ſi tiri (2) *la retta DG parallela alla FB* : io dico, che AG ſia la terza parte della AB.

III.

Siccome dalla coſtruzione la DG è parallela alla EB, così ſarà (3) FA ad AD, come BA ad AG: ma dalla coſtruzione la FA è tripla della AD, cunque ſarà parimente la BA tripla della AC, e per conſeguente ſarà la AC la terza parte della AB. Ciocchè doveva farſi.

PROP. X. PROBLEMA.

Date due linee rette, l' una diviſa in molte parti ad arbitrio, l' altra diviſa, ſecare l' indiviſa nell' iſteſſo modo, che ſi ritrova ſecata la linea retta diviſa.

I.



Sia data la linea retta AB diviſa nelle parti AF, FG, GB, e ſia data di più la linea retta AB indiviſa, ſa duopo ſecare coteſta retta indiviſa in altrettante parti, le quali ſiano proporzionali alle parti AF, FG, GB dalla retta diviſa AB.

(1) *Dim.* 1. (2) *Pr.* 31. *l.*
(3) *Cor.* 2. *della pr.* 2. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

II.

Si congiungano le due rette date AB, AC, in modo che formino un' angolo ad arbitrio, come BAD.

Si congiunga (1) *la retta BC.*

Per li punti E, e G si tirino (2) *le linee rette FD, GE parallele a BC.* Io dico, che la retta AC rimane divisa ne' punti D, ed E nell' istesso modo, che la data AB è secata ne' punti F, e G: vale a dire, come sta AF ad FC, così AD a DE, e come FC a GB, così DE ad EC, e come AG a CB, così AE ad EC, e come AF ad FB, così AD a DC.

III.

Per lo punto D tirisi la DH (3) *parallela alla AB*: ciò fatto, le due figure quadrilatere DFGI, IGBH saranno parallelogramme: il perchè sarà così la DI eguale alla FG (3) come la IH eguale alla GE. Nel triangolo AGE, essendo tirata la FD parallela alla base GE, sarà (5) AF ad EG, così AD a DE. Inoltre, nel triangolo DHC, essendosi tirata la EI parallela alla base CH, sarà DI ad IH, ovvero FG a GB, così DE ad EC. Di più nel triangolo ABC, essendosi tirata la GE parallela alla BC, sarà la AH, alla GB, così la AE alla EC. Finalmente nell'

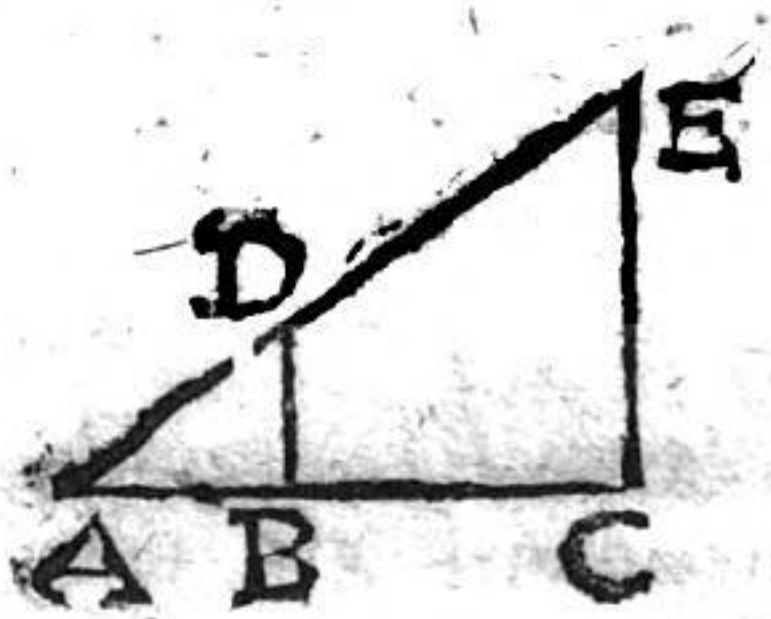
(1) *Dim.* 2. (2) *Pr.* 31. *I.*
(3) *Pr.* 31. *I.* (4) *Pr.* 34. *I.*
(5) *Cor.* 1. *della pr.* 4. *di questo.*

Digitalizzato da Google

nell' istesso triangolo ABC, essendosi tirata la FD paraliela alla BC, sarà la AF alla FB, così la AD alla CD; ciocchè bisognava fare.

PROP. XI. PROBLEMA

Date due linee rette ritrovare in ordine ad esse la terza proporzionale.



I.

Siano date due linee rette AB, ed AD, fa duopo ritrovare in ordine ad esse la terza proporzionale.

II.

Si congiungano in maniera le due suddette linee date, che formino l' angolo DAB.

Si congiunga la BD.

La AB si porti innanzi fin' al punto C, in modochè la BC sia eguale alla AD (1).

Per lo punto C si tiri la retta CE parallela alla BD, la quale s' incontri colla AD portata, tanto innanzi, quanto bisogna nel punto E. Io dico, che la DE sia la terza proporzionale richiesta; vale a dire, che AB sia ad AD, come l' istessa AD alla terza proporzionale DE.

III.

(1) *Dim.* 1.

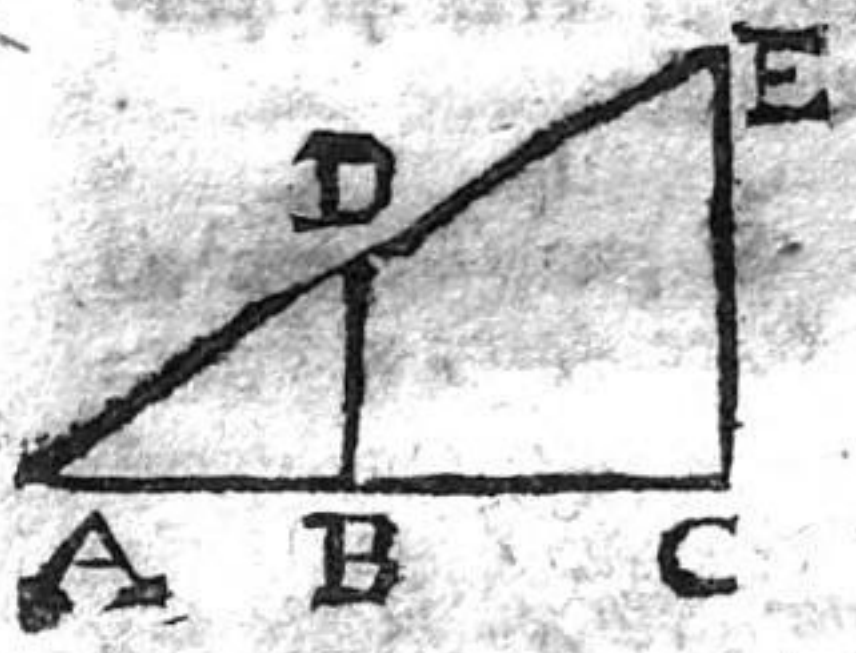
Digitalizzato da Google

III.

Siccome nel triangolo ACE si è tirata la BD parallela alla base CE, così sarà (1) AB a FC, come la AD alla DE; ma dalla costruzione la EC è eguale alla AD; dunque sarà parimente, come AB ad AD, così l'istessa AD alla DE; ciocchè bisognava fare.

PROP. XII. TEOREMA.

Date tre linee rette ritrovare in ordine ad esse la quarta proporzionale.



I.

Siano date tre linee rette AB, BC, AD.; fa duopo ritrovare in ordine ad esse la quarta proporzionale.

II.

Le due prime AB, BC si mettano a giacere a dirittura, sicchè formino la sola linea diritta ABC.

L'altra AD si unisca colla AC, in modochè formi l'angolo DAC.

Si congiunga (2) *la DB.*

Per lo punto C si tiri la CE parallela alla BD, la quale s'incontri colla AD por-

(1) *Cor.* 1. *della prop.* 2. *di questo.*
(2) *Dim.* 1.

Digitalizzato da Google

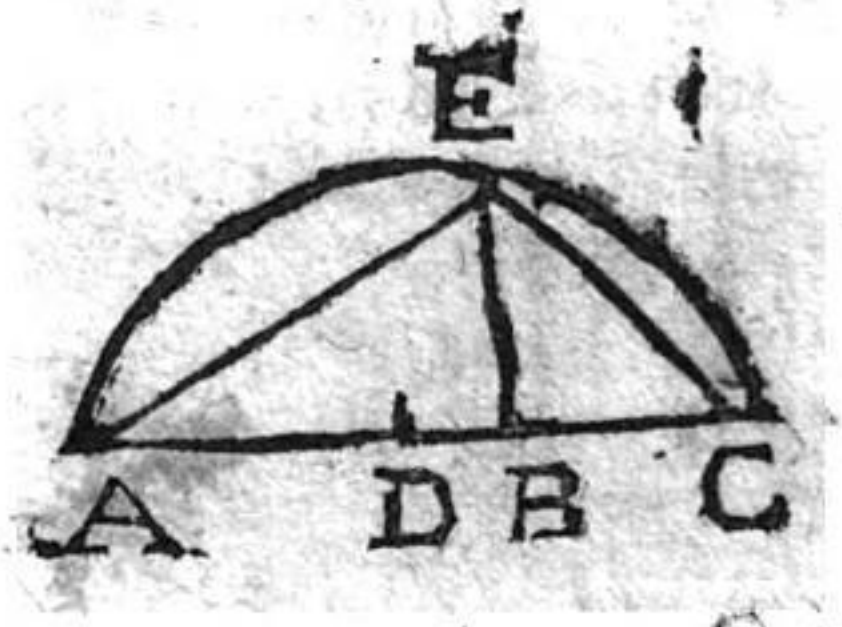
portata innanzi, *quanto bisogna nel punto E*. Io dico, che la DE sia la quarta proporzionale richiesta in ordine alle tre linee rette date AB, BC, AD: vale a dire, che come sta AB a BC, così sarà AD a DE.

III.

Siccome nel triangolo ACE si è tirata la BD parallela alla base CE, così sarà (1) la AB alla BC come la AD alla DE. Ciocchè bisognava fare.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Date due linee rette, ritrovare la mezza proporzionale.



I

Siano date due linee rette AB, BC, fa duopo ritrovare in ordine ad esse la mezza proporzionale.

II.

Si pongano le due linee rette date AB, BC a dirittura, sicchè costituiscano la sola linea retta AC.

Si sechi la AC per mezzo (2) nel punto D.

Dal

(1) Cor. 1. della pr. 2. di questo.
(2) Pr. 10. l.

Digitalizzato da Google

Dal centro D col raggio DA, ovvero BC si descriva (1) *il semicerchio AEC.*

S' inalzi dal punto B sopra la AC la perpendicolare BE (2). Io dico, che questa perpendicolare sia la mezza proporzionale richiesta; vale a dire, che come sta la AB alla BE, così sta l'istessa BE alla BC.

III.

Si congiungano (3) *le due rette AE, CE*, perchè l'angolo AEC è nel semicerchio i in conseguenza egli sarà retto (4): quindil triangolo AEC sarà rettangolo; nel quale essendosi tirata la perpendicolare EB dal vertice E sopra la base AC, sarà (5) come AB a BE, così l'istessa BE alla BC; ciocchè dovea farsi.

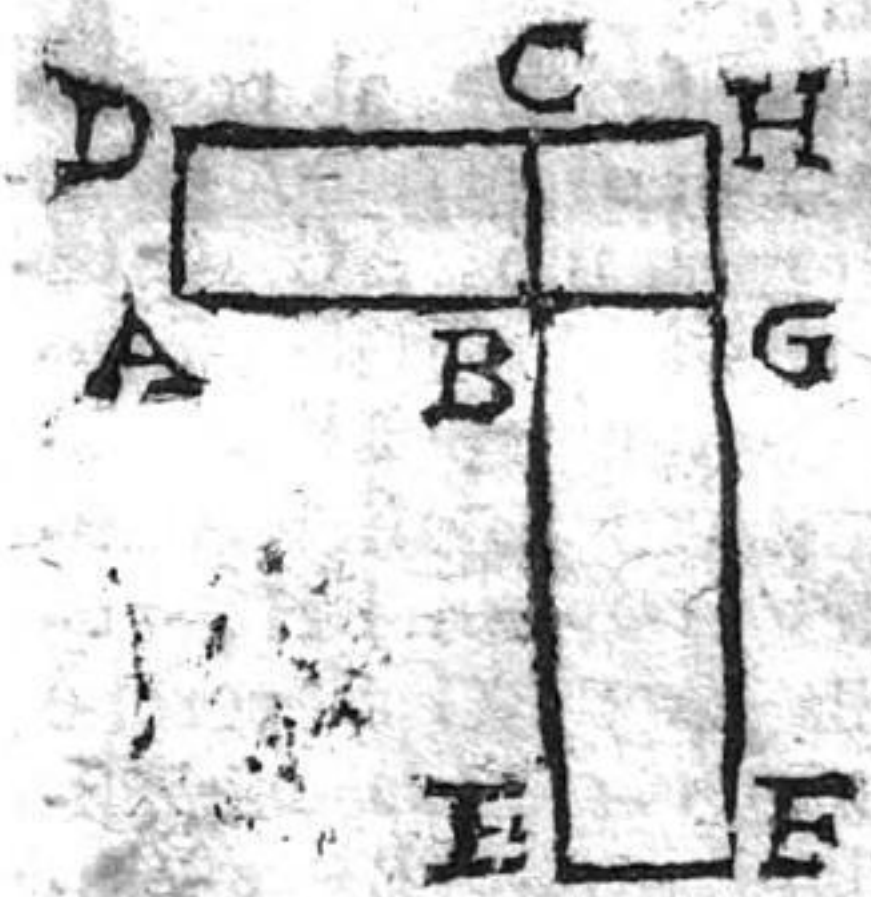
PROP.

(1) *Dim.* 3. (2) *Pr.* 11. *I.*
(3) *Dim.* 1. (4) *Pr.* 31. *III.*
(5) *Cor.* 3. *della pr.* 8. *di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XIV. TEOREMA.

Se due parallelogrammi hanno un' angolo eguale ad un' angolo, e ſono eguali fra di loro; avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. Viceverſa, le due parallelogrammi hanno un' angolo eguale ad un' angolo, ed i lati intorno coteſti angoli reciproeamente proporzionali, ſaranno eſſi eguali fra di loro.



I.

Li due parallelogrammi AB, BF abbiano in primo luogo gli angoli ABC, EBG eguali fra loro, ed in oltre eſſi eguali fra di loro; io dico, che li lati intorno gli angoli eguali ſaranno reciprocamente proporzionali, vale a dire, come ſta AB a BG, così ſarà EB a BC. Viceverſa, ſe l'angolo ABC ſia eguale all'angolo EBG, e ſiano iſi oltre i lati intorno gli accennati angoli eguali, reciprocamente proporzionali, i due parallelogrammi ſaranno eguali fra loro.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Cosituitosi il lato AB del paralleogrammo AC in diritto al lato BG del parallelogrammo BF: non è da ponersi in dubbio, che l'altro lato CB del primo parallelogrammo resti a giacere per diritto coll'altro lato BE del secondo parallelogrammo; perchè in tal modo si verifica, che gli angoli ABC, e EBG siano eguali fra loro. *Si dicendano i lati DC, FG* (1) *finchè vadano ad unirsi nel punto H.*

III.

I. Poichè dalla suppoſizione al parallelogrammo AC è eguale al parallelogrammo BF, il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, avrà l'istessa ragione (2), che il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH: ma il parallelogrammo AC sta al parallelogrammo BH, come la base (3) AB alla base BG, perchè hanno l'istessa altezza; e per la medesima ragione il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH sta come la base BE alla base BC: dunque sarà (4) AB a BG, così BE a BC.

II. Perchè dalla suppoſizione AB sta a BH, come BE a BC, ed AB a BG sta, come il parallelogrammo AC al paralle-

lo-

(1) *Dim.* 2. (2) *Pr.* 7. *V.*
(3) *Pr.* 1. *di questo.* (4) *Pr.* 11. *V.*

Digitalizzato da Google

logrammo BG, perchè queſti due parallelogrammi (1) hanno l'iſteſſa altezza; e BE a BC ſta, come il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH; ſarà (2) come il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, così il parallelogrammo BF all'iſteſſo parallelogrammo AC, BF avendo l'iſteſſa ragione al terzo parallelogrammo BH ſaranno (3) eguali fra loro; ciocchè doveva dimoſtrarſi.



PROP.

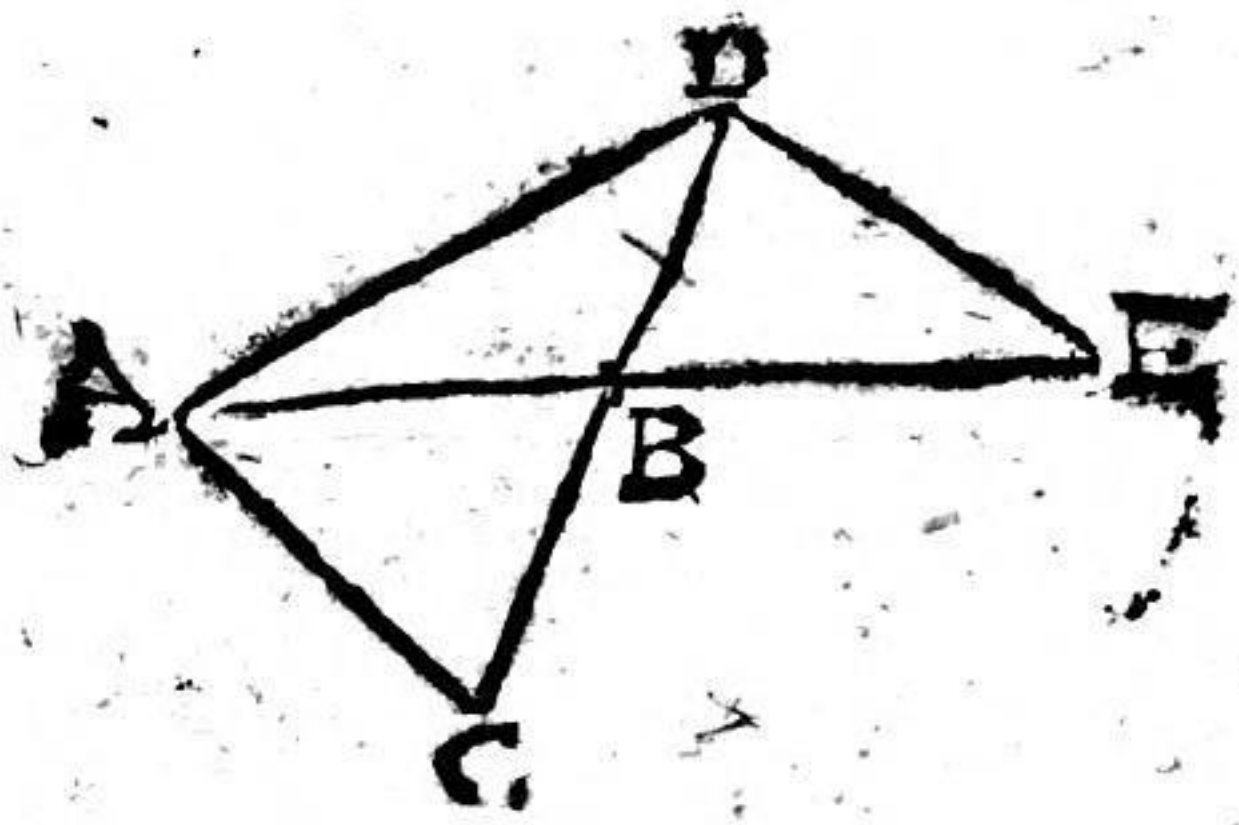
(1) *Pr. 1. di queſto.* *Pr. 11. V.*
(3) *Pr. 9. V.*

Digitalizzato da Google

PROP. XV. TEOREMA.

Se due triangoli hanno un' angolo eguale ad un' angolo; e sono eguali fra loro, avranno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali. Viceversa se due triangoli hanno un' angolo eguale, ed hanno i lati intorno gli angoli eguali reciprocamente proporzionali saranno eguali fra loro.

I.



Li due triangoli ABC, DBE abbiano in primo luogo l'angolo ABC eguale all' angolo DBE, e siano in oltre eguali fra loro; io dico, che i lati intorno gli due angoli saranno reciprocamente proporzionali; vale a dire, che AB sarà a BE, come AB a BC. Viceversa, se l'angolo ABC sia eguale all' angolo DBE, e siano

Digitalizzato da Google

no di più i lati intorno gli angoli eguali, reciprocamente proporzionali ; li due accennati triangoli saranno eguali fra di loro.

II.

Costituiscasi il lato BA del triangolo ABC in diritto col lato BE dell' altro triangolo DAE: non è da porsi in dubbio, che l' altro BC del primo triangolo resti a giacere per diritto dell' altro lato BD del secondo triangolo, perchè in tal modo si verifica, che gli angoli (1) ABC, DBE siano eguali fra loro. *Si congiunga la retta AD* (2).

III.

I. Perchè dalla suppositione, il triangolo ABC è eguale al triangolo DBE ; il triangolo ABC avrà al terzo triangolo ABD l' istessa ragione (3), che ha il triangolo DBE al medesimo triangolo ABD: ma perchè li triangoli ABC, ABD hanno l' istessa altezza, il primo al secondo stà (4), come la base CB alla base BD : e per l' istessa ragione il triangolo DBE sta al triangolo DBA, come la base BA, sarà, come CB a BD (3), così BE a BA.

II. Perchè dalla suppositione i due triangoli ABC, DBE hanno i lati intorno gli an-

(1) *Pr.* 15. *I.*
(2) *Dim.* 1.
(3) *Pr.* 7. *V.*
(4) *Pr.* 1. *di questo.*
(5) *Pr.* 11. *V.*

Digitalizzato da Google

angoli eguali reciprocamente proporzionali, sarà AB a BE, così BD a BC: ma AB sta a BE, come il triangolo ABD al triangolo DBE, perchè questi due triangoli hanno l' istessa altezza, e per l' istessa ragione DB a BC sta come il medesimo triangolo ABD al triangolo ABC; sarà come il triangolo ABD al triangolo DBE, così (1) l' istesso triangolo ABD al triangolo ABC: il perchè avendo il triangolo ABD l' istessa ragione a' due triangoli DBE, ABC, saranno questi eguali fra loro; ciocchè doveva dimostrarsi.

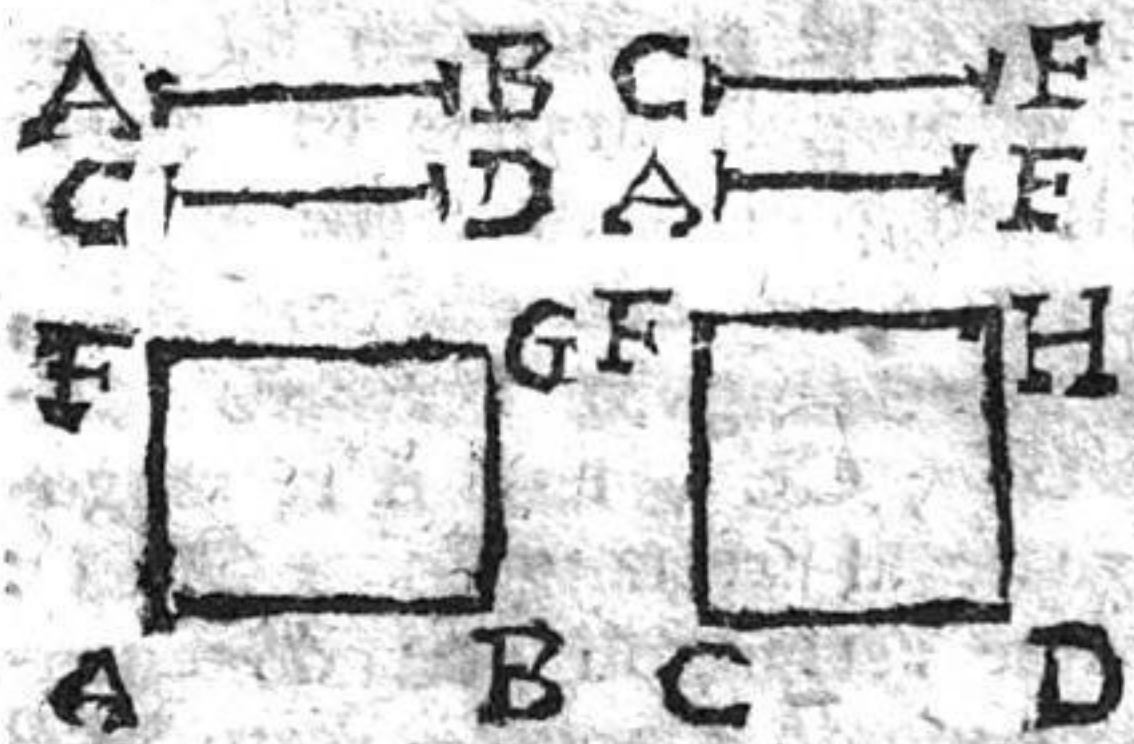
(1) *Pr.* 11. *V.*

Digitalizzato da Google

PROP. XIX. TEOREMA.

Se quattro linee rette ſono proporzionali, il triangolo formato dalle due linee eſtreme ſarà eguale al rettangolo formato dalle due mezze. Viceverſa, ſe quattro linee rette ſono tanto lunghe, che il rettangolo formato dalle due eſtreme ſia eguale formato dalle due mezze, le ſuldette quattro linee rette ſaranno proporzionali.

I.



Siano quattro linee rette proporzionali AB, CD, CE, AF, vale a dire ſia AB a CD, come CE ad AF; io dico, che il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF ſia eguale al rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF ſia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE; viceverſa, ſe il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF ſia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE, le ſuddette quattro linee rette ſaranno proporzionali.

II.

Digitalizzato da Google

II.

Dalle due estreme AB, AF, se ne formi il rettangolo FABC.

Dalle due mezze CD, CF se ne formi similmente il rettangolo ECDH.

III.

I. Perchè, si suppone, che le quattro linee rette AB, CD, CE, AF siano proporzionali, i due parallelogrammi rettangoli FAEG, ECDH averanno intorno gli angoli retti, e per conseguenti eguali FAB, ECD i lati reciprocamente proporzionali, essendo dalla suppositione AB a CD, così CE ad AF; il perchè gli suddetti due parallelogrammi rettangoli saranno (1) eguali fra loro. II. Supponendosi, che il rettangolo formato dalle due estreme AB, AF sia eguale al rettangolo formato dalle due mezze CD, CE, sarà il rettangolo FAEG eguale al rettangolo ECDH: quindi queiti due rettangoli essendo eguali fra loro, ed avendo l'angolo retto FAB eguale all'angolo retto ECD, doveranno avere i lati reciprocamente proporzionali (2): il perchè, come sta AB a CD, così starà CE ad AF; giocchè doveva dimostrarsi

PROP.

(1) *Pr.15.di questo.* (2) *Pr.15.di questo*

Digitalizzato da Google

PROP. XVII. TEOREMA.

Se tre linee ſono proporzionali il rettangolo formato dalle due linee eſtreme ſarà eguale al quadrato formato ſopra la mezza. Viceverſa, ſe tre linee rette ſono tanto lunghe, che il rettangolo formato dalle due eſtreme ſia eguale al quadrato formato ſopra la mezza, le ſuddette tre linee rette ſaranno proporzionali.

I.

Siano tre linee proporzionali (1) AB, CD, BF: vale a dire, ſia AB a CD, come CD ad AF: dico, che il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF, ſia eguale al quadrato formato ſopra la mezza CD. Viceverſa, ſe il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, AF ſia eguale al quadrato formato ſopra la mezza CD, le ſuddette tre linee rette ſaranno proporzionali.

II.

Si prenda un' altra linea retta CE *eguale alla* CD. *Dalle due eſtreme* AB, AF *ſe ne formi il rettangolo* FABG.

Dalla mezza CD, *e della ſua eguale* CE *ſe ne formi il rettangolo* ECDH, *il quale riuſcirà quadrato, perchè la lunghezza è eguale alla larghezza.*

(1) *Veggaſi la Fig.* 16.

Digitalizzato da Google

III.

E primieramente ſupponendoſi, che AB ſia a CD, come CD ad AF, ſarà come AB a CD, così CE ad AF; perchè dalla coſtruzione la CE è eguale alla CD: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH avendo l' angolo retto FAB eguale all' angolo retto ECD, e di più avendo intorno a queſti angoli i lati reciprocamente proporzionali, ſaranno eſſi (1) eguali fra loro: ma il rettangolo ECDH è eguale al quadrato della mezza CD; dunque il rettangolo formato dalle due eſtreme ſarà eguale al quadrato della mezza. Viceverſa ſupponendoſi il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, ed AF eguale al quadrato della mezza CD, ſarà il rettangolo FABG eguale al quadrato, ovvero al rettangolo ECDB: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABC, ECDH eſſendo eguali fra loro, ed avendo di più l'angolo retto FAB eguale all' angolo retto ECD, avranno (2) i lati reciprocamente proporzionali, e per conſeguente ſarà AB a CD, così CE, ovvero CD ad AF. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP.

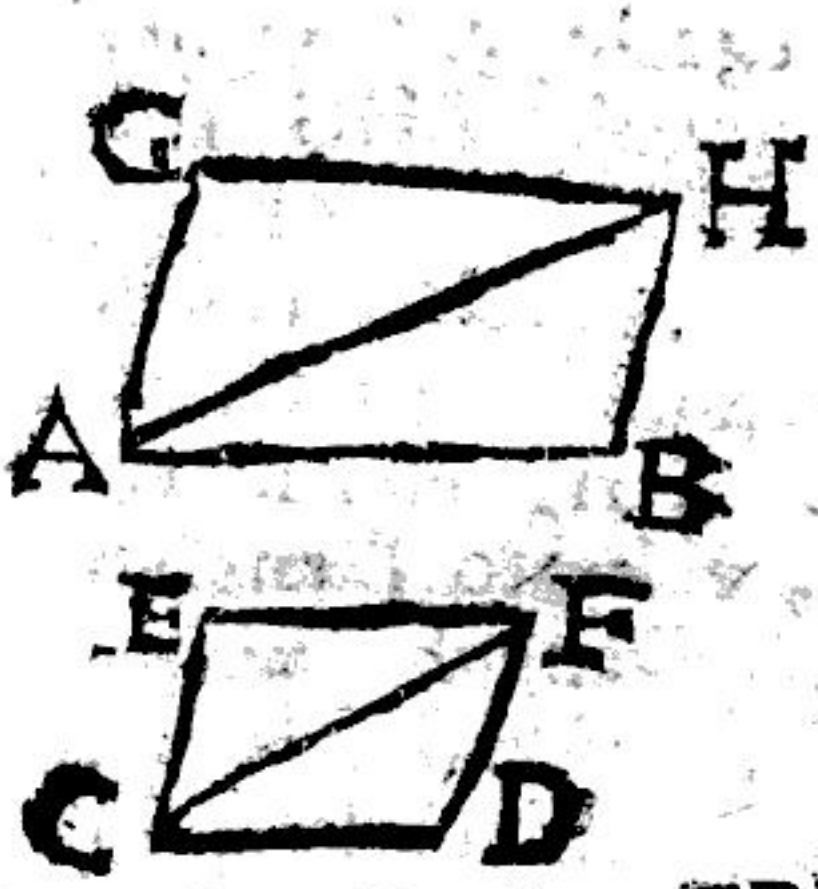
(1) *Pr.14. li queſto.* (2) *Pr.14. di q ueſto*

Digitalizzato da Google

PROP. XVIII. PROBLEMA.

Descrivere sopra una linea retta data una figura rettilinea simile, e similmente posta ad un'altra figura rettilinea data.

I.



Sia data la linea diritta AB, e sia data la figura rettilinea CDFE: fa duopo sopra la linea diritta data AB descrivere una figura rettilinea simile, e similmente posta alla data CDFE.

II.

Si risolva la figura rettilinea data in tanti triangoli, come quì, in due CDF, CFE.

Si facciano (1) *gli angoli BAH, ABH eguali respettivamente agli angoli DCF, CFE.*

Si facciano gli angoli (2) *HAG, AHG eguali respettivamente agli angoli FGE, CFE*, io dico, che la figura rettilinea ADHG sia simile, e similmente posta alla CDFE.

(1) *Pr.* 23. *I.* (2) *Pr.* 23. *I.*

Digitalizzato da Google

III.

Imperciocchè, essendo dalla costruzione li due angoli BAH, ABH eguali agli angoli DCF, CDF, ciascuno a ciascuno, sarà li rimanente angolo AHB eguale all' angolo rimanente CFD: imperciocchè in ogni triangolo tutti li tre angoli sono eguali a due retti (1): ma dall'istessa costruzione l'angolo AHG è eguale all' angolo CFE; dunque tutto l' angolo BHG sarà eguale a tutto l'angolo DFE. In oltre, essendo li due angoli HAG, AHG eguali respettivamente a' due angoli FCE, CFE, sarà l'angolo rimanente AGH eguale all' angolo rimanente CEF, e tutto l' angolo GAB sarà eguale a tutto l' angolo ECD; quindi i quattro angoli GAB, AHG, BAH, ABH, dalla figura rettilinea descritta saranno eguali respettivamente a' quattro angoli ECD, CDF, DFE, FEC, della figura rettilinea data. In oltre, essendo il triangolo ABH equiangolo al triangolo GDF, saranno i lati (2) intorno gli angoli eguali proporzionali, e per conseguente sarà AB a BH, così CD a DF; e BH ad HA, così DF ad FC: ma a cagione degli altri due triangoli equiangoli AHG, CFE, AH sta ad HG, come CF ad FE; dunque per l' egual ragione ordinata sarà (3) BH ad HG, così DF ad FE: e per causa

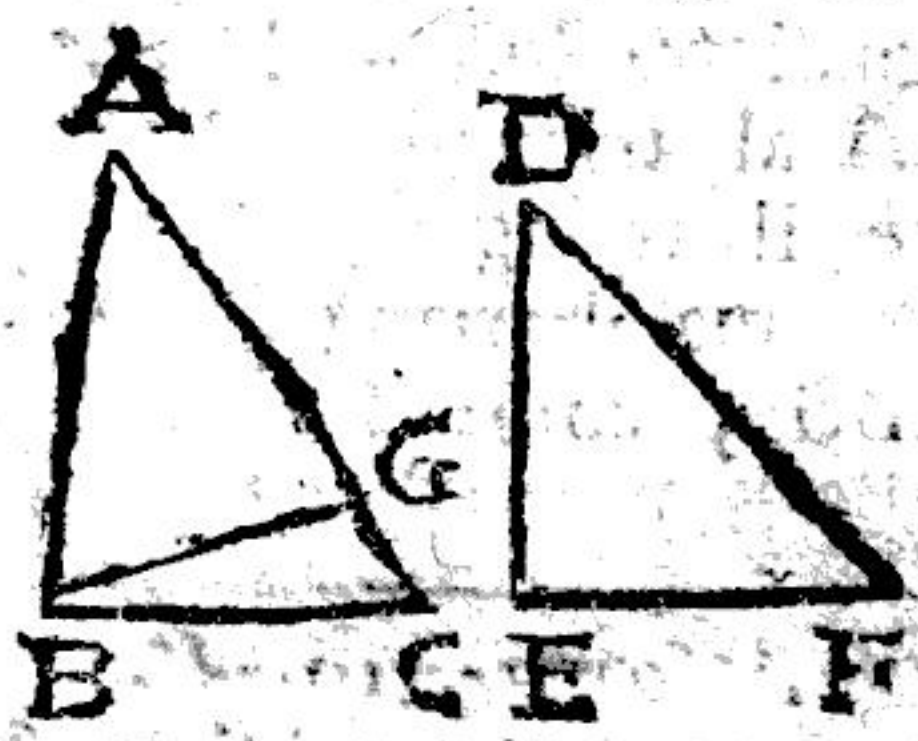
(1) *Pr.* 32. *I.* (2) *Pr.* 4. *di questo*.
(3) *Pr.* 22. *V.*

Digitalizzato da Google

ſa de' medeſimi triangoli equiangoli AHG, CFE, ſarà HG a GA, così FE ad EC, e GA ad AH, così EC a CF; ma a cagione de' due altri triangoli equiangoli AHB, CFD; AH ad AB ſta, come CF a CD: dunque per l'egual ragione ordinata, ſarà AG ad AB, così CE a CD: quindi i quattro lati AB, BH, HG, GA della figura rettilinea deſcritta ſopra la data AB ſono proporzionali a' quattro lati CD, DF, FE, EC della figura rettilinea data; il perchè eſſendoſi dimoſtrato, che gli angoli ſono eguali agli angoli, ciaſcuno a ciaſcuno; ne ſiegue, che le ſuddette due figure rettilinee ſiano ſimili, e ſimilmente poſte; ciocchè bilognava fare.

PROP. XIX. THEOREMA.

I triangoli ſimili ſono fra loro in ragione duplicata de' lati omologi.



I. Siano i due triangoli ſimili ABC, DEF, e ſia il lato BC, omologo al lato EF; io dico, che il triangolo ABC al triangolo DEF ha ra-

ragion duplicata del lato BC al lato omologo EF.

II.

Ritrovaſi (1) *in ordine alle due linee rette* BC, DF *la terza proporzionale* BG.

Si unisca la retta AG.

III.

Siccome il triangolo ABC dalla ſuppoſizione è ſimile al triangolo DEF, così ſarà il lato AB al lato BC, come il lato DE al lato EF, e per la ragion permutata (2) come il lato AB al lato DE, così il lato BC al lato EF: ma dalla coſtruzione il lato BC ſta al lato EF, come l'iſteſſo lato EF a BG; dunque ſarà ancora (3) AB a DF, così EF a BG: il perchè i due triangoli ABG, DEF, avendo l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, perchè i detti triangoli ſi ſuppongono ſimili, ed avendo i lati reciprocamente proporzionali intorno gli angoli eguali, ſaranno (4) eſſi eguali fra loro, laonde il triangolo ABC avrà al triangolo DEF l'iſteſſa ragione che il triangolo ABC al triangolo ABG (5): ma il triangolo ABC ſta al triangolo ABG, come ſta la baſe BC

(1) *Pr.*11. *di queſto.* (2) *Pr.* 16. *V.*
(3) *Pr.* 11. *V.* (4) *Pr.*15. *di queſto.*
(5) *Pr.* 7. *V.*

Digitalizzato da Google

BC alla baſe BG (1); dunque ſarà parimente il triangolo ABC al triangolo DEF (2), così la baſe BC alla baſe BG. Si conſideri ora, che eſſendo le tre linee BC, EF, BG continuamente proporzionali, la prima BC alla terza BG (3) ha ragion duplicata della prima BC alla ſeconda EF; quindi eſſendoſi già dimoſtrato, che il triangolo ABC al triangolo DEF ſia, come BC a BG; avrà ancora il triangolo ABC al triangolo DEF ragion duplicata di BC ad EF. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

Dalla dimoſtrazione di queſta propoſizione ne ſiegue I. che ſe tre linee BC, EF, BG ſono continuamente proporzionali, come ſta la prima BC alla terza BG, così ſta il triangolo ABC deſcritto ſopra la prima al triangolo DEF ſimile, e ſimilmente poſto deſcritto ſopra la ſeconda. II. Che avendo due triangoli ſimili ABC, DEF, per ritrovarne la ragione, fa duopo, o cercare la ragion duplicata de' lati omologi BC, EF, vale a dire la ragion compoſta di due ragioni, ciaſcuna delle quali ſia eguale a quella, che ha BC ad EF: ovvero ritrovare in ordine a' due lati

(1) *Pr. 1. di queſto.* (2) *Pr. 11. V.*
(3) *Veggaſi la Spiegazione delle def. 6. e 7*

Digitalizzato da Google

si risolve il poligono N, in altrettanti triangoli si risolve parimente il poligono P. Dico di più, che li triangoli del primo poligono sono simili a' triangoli corrispondenti del secondo poligono: dico inoltre, che i detti triangoli sono fra loro, come sono i poligoni. E finalmente dico, che il poligono al poligono ha ragione duplicata del lato AB al lato omologo FG.

II.

Da' vertici A, ed F degli angoli eguali BAE, GFK si tirino le linee rette AC AD, FH, FI (1).

III.

I. Supponendosi il poligono N simile al poligono P, sarà il numero degli angoli del primo poligono eguale al numero degli angoli dell' altro poligono: quindi, quante linee rette si tirano nel poligono N, altrettante se ne tireranno nell' altro poligono P: dal che poi ne segue, che il numero de' triangoli fatti nel primo poligono sia eguale al numero de' triangoli fatti nell' altro poligono.

II. Essendo dalla supposizione l' angolo ABC eguale all' angolo FGH, e di più il lato AB al lato BC, come il lato FG al

(1) *Dim.* I.

Digitalizzato da Google

lato GH, i due triangoli ABC, FGH; avendo un angolo eguale ad un' angolo, ed intorno gli angoli eguali i lati proporzionali, faranno (1) equiangoli, e fimili; e perciò l' angolo BAC farà eguale all' angolo GFH, e l' aogolo BCA farà eguale all' angolo GHF: ma dalla fuppofizione l'angolo BAE è eguale all'angolo GFK, e l'angolo BCD è eguale all' angolo GHI; dúnque farà l'angolo CAE eguale all' angolo HFK, e l'angolo ACD eguale all' angolo FHI. In oltre effendo l' angolo AED eguale all'angolo FKI, ed il lato AE ad ED, come FK a KI, i triangoli AED, FKI, perchè anno un' angolo eguale ad un'angolo, ed intorno agli angoli eguali i lati proporzionali, faranno equiangoli (2), e fimili; e per confeguente farà l'angolo EDA eguale all' angolo KFI, e l'angolo EDA eguale all' angolo KIF: quindi, effendofi dimoftrato, che l'angolo CAE fia eguale all'angolo HFK, ed effendo dalla fuppofizione l'angolo EDC eguale all' angolo KIH; farà l'angolo CAD eguale, all' angolo HFI, e l' angolo ADC eguale all' angolo FIH: di modochè i due triangoli ACD, FHI effendo equiangoli, faranno (3) ancora fimili; il perchè i tre triangoli ABC, ACD, ADE

(1) *Pr. 6. di queſto.*
(2) *Pr. 6. di queſto.*
(3) *Pr. 8. di queſto.*

Digitalizzato da Google

ADE ſono reſpettivamente ſimili a' tre triangoli FGH, FHI, FIK.

III. Eſſendoſi dimoſtrati i triangoli ABC, FGH ſimili fra loro, avrà (1) il triangolo ABC al triangolo FGH ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: e per l'iſteſſa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI avrà parimente ragion duplicata del lato omologo FH: quindi, come ſta il triangolo ABC al triangolo FGH, così ſarà il triangolo ACD al triangolo FHI, poichè la ragione de' due primi triangoli, e la ragione de' due ſecondi triangoli, è in ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: nell'iſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che il triangolo ACD al triangolo FHI ſia, come il triangolo ADE al triangolo FIK, perchè la ragione de' due primi, e de' due triangoli, è in ragion duplicata del lato AD al lato omologo FI: quindi i tre triangoli ABC, ACD, ADE ſaranno reſpettivamente proporzionali a' tre triangoli FGH, FHI, FIK, ciaſcuno a ciaſcuno, e per conſeguente, come ſta il triangolo ABC al triangolo FGH, così ſaranno (2) tutti tre i triangoli a tutti gli altri tre triangoli: ma tutti tre i primi triangoli formano il poligono N, e tutti tre i ſecondi triangoli formano l'altro poligono P; dunque ſarà il poligono N al

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr.* 12. *V.*

Digitalizzato da Google

III.

E primieramente ſupponendoſi, che AB ſia a CD, come CD ad AF, ſarà come AB a CD, così CE ad AF; perchè dalla coſtruzione la CE è eguale alla CD: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABG, ECDH avendo l' angolo retto FAB eguale all' angolo retto ECD, e di più avendo intorno a queſti angoli i lati reciprocamente proporzionali, ſaranno eſſi (1) eguali fra loro: ma il rettangolo ECDH è eguale al quadrato della mezza CD; dunque il rettangolo formato dalle due eſtreme ſarà eguale al quadrato della mezza. Viceverſa ſupponendoſi il rettangolo formato dalle due eſtreme AB, ed AF eguale al quadrato della mezza CD, ſarà il rettangolo FABG eguale al quadrato, ovvero al rettangolo ECDB: quindi i due parallelogrammi rettangoli FABC, ECDH eſſendo eguali fra loro, ed avendo di più l' angolo retto FAB eguale all' angolo retto ECD, avranno (2) i lati reciprocamente proporzionali, e per conſeguente ſarà AB a CD, così CE, ovvero CD ad AF. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP.

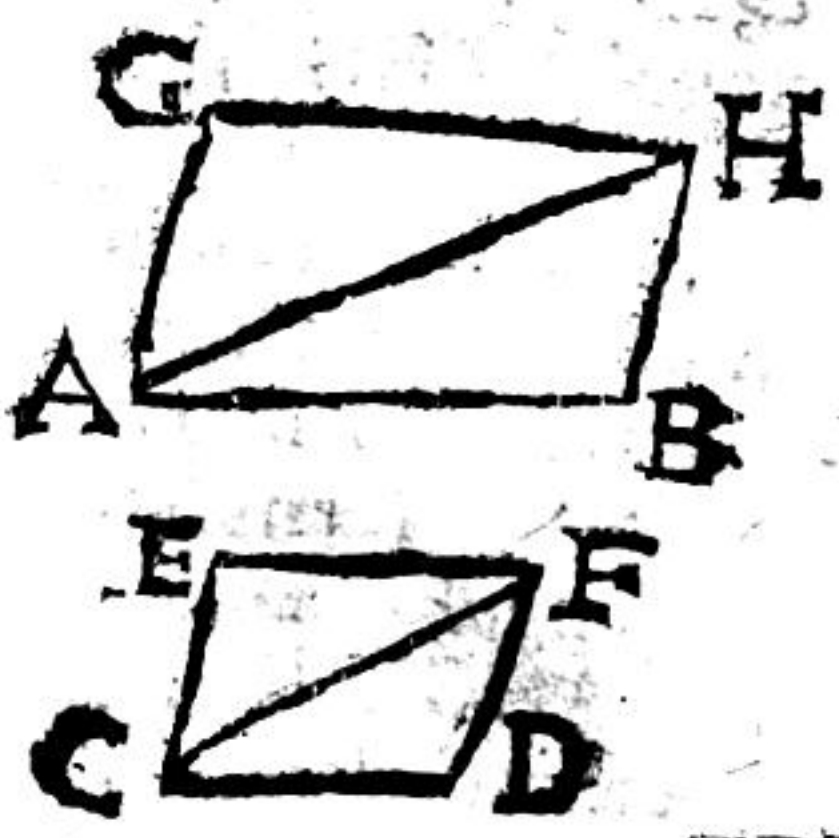
(1) *Pr.14. di queſto.* (2) *Pr.14. di q ueſto*

Digitalizzato da Google

PROP. XVIII. PROBLEMA.

Descrivere sopra una linea retta data una figura rettilinea simile, e similmente posta ad un'altra figura rettilinea data.

I.



Sia data la linea diritta AB, e sia data la figura rettilinea CDFE: fa duopo sopra la linea diritta data AB descrivere una figura rettilinea simile, e similmente posta alla data CDFE.

II.

Si risolva la figura rettilinea data in tanti triangoli, come quì, in due CDF, CFE.

Si facciano (1) *gli angoli BAH, ABH eguali respettivamente agli angoli DCF, CFE.*

Si facciano gli angoli (2) *HAG, AHG eguali respettivamente agli angoli FGE, CFE*, io dico, che la figura rettilinea ADHG sia simile, e similmente posta alla CDFE.

(1) *Pr.* 23. *I.* (2) *Pr.* 23. *I.*

Digitalizzato da Google

III.

Imperciocchè, essendo dalla costruzione li due angoli BAH, ABH eguali agli angoli DCF, CDF, ciascuno a ciascuno, sarà li rimanente angolo AHB eguale all' angolo rimanente CFD: imperciocchè in ogni triangolo tutti li tre angoli sono eguali a due retti (1): ma dall'istessa costruzione l'angolo AHG è eguale all' angolo CFE; dunque tutto l' angolo BHG sarà eguale a tutto l'angolo DFE. In oltre, essendo li due angoli HAG, AHG eguali respettivamente a' due angoli FCE, CFE, sarà l'angolo rimanente AGH eguale all' angolo rimanente CEF, e tutto l' angolo GAB sarà eguale a tutto l' angolo ECD; quindi i quattro angoli GAB, AHG, BAH, ABH, dalla figura rettilinea descritta saranno eguali respettivamente a' quattro angoli ECD, CDF, DFE, FEC, della figura rettilinea data. In oltre, essendo il triangolo ABH equiangolo al triangolo GDF, saranno i lati (2) intorno gli angoli eguali proporzionali, e per conseguente sarà AB a BH, così CD a DF; e BH ad HA, così DF ad FC: ma a cagione degli altri due triangoli equiangoli AHG, CFE, AH sta ad HG, come CF ad FE; dunque per l' egual ragione ordinata sarà (3) BH ad HG, così DF ad FE: e per causa

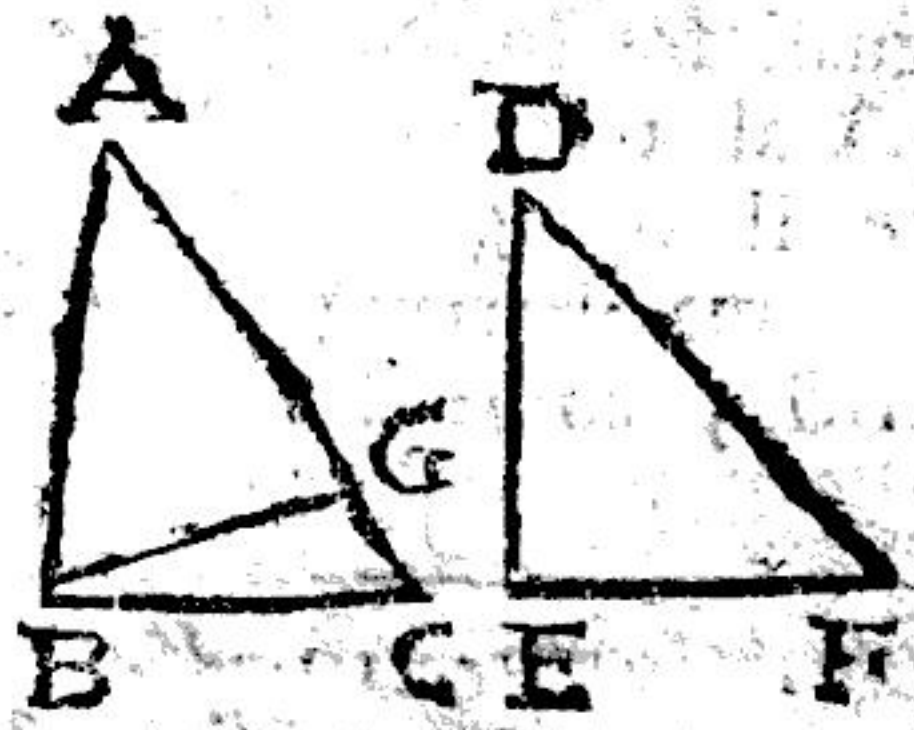
(1) *Pr.* 32. *I.* (2) *Pr.* 4. *di questo*.
(3) *Pr.* 22. *V.*

Digitalizzato da Google

ſa de' medeſimi triangoli equiangoli AHG, CFE, ſarà HG a GA, così FE ad EC, e GA ad AH, così EC a CF; ma a cagione de' due altri triangoli equiangoli AHB, CFD; AH ad AB ſta, come CF a CD: dunque per l'egual ragione ordinata, ſarà AG ad AB, così CE a CD: quindi i quattro lati AB, BH, HG, GA della figura rettilinea deſcritta ſopra la data AB ſono proporzionali a' quattro lati CD, DF, FE, EC della figura rettilinea data; il perchè eſſendoſi dimoſtrato, che gli angoli ſono eguali agli angoli, ciaſcuno a ciaſcuno; ne ſiegue, che le ſuddette due figure rettilinee ſiano ſimili, e ſimilmente poſte; ciocchè bilagnava fare.

PROP. XIX. THEOREMA.

I triangoli ſimili ſono fra loro in ragione duplicata de' lati omologi.



I. Siano i due triangoli ſimili ABC, DEF, e ſia il lato BC, omologo al lato EF; io dico, che il triangolo ABC al triangolo DEF ha ra-

ragion duplicata del lato BC al lato omologo EF.

II.

Ritrovaſi (1) *in ordine alle due linee rette* BC, DF *la terza proporzionale* BG. *Si uniſca la retta* AG.

III.

Siccome il triangolo ABC dalla ſuppoſizione è ſimile al triangolo DEF, così ſarà il lato AB al lato BC, come il lato DE al lato EF, e per la ragion permutata (2) come il lato AB al lato DE, così il lato BC al lato EF: ma dalla coſtruzione il lato BC ſta al lato EF, come l'iſteſſo lato EF a BG; dunque ſarà ancora (3) AB a DF, così EF a BG: il perchè i due triangoli ABG, DEF, avendo l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, perchè i detti triangoli ſi ſuppongono ſimili, ed avendo i lati reciprocamente proporzionali intorno gli angoli eguali, ſaranno (4) eſſi eguali fra loro, laonde il triangolo ABC avrà al triangolo DEF l'iſteſſa ragione che il triangolo ABC al triangolo ABG (5): ma il triangolo ABC ſta al triangolo ABG, come ſta la baſe BC

(1) *Pr.* 11. *di queſto.* (2) *Pr.* 16. *V.*
(3) *Pr.* 11. *V.* (4) *Pr.* 15. *di queſto.*
(5) *Pr.* 7. *V.*

Digitalizzato da Google

BC alla baſe BG (1); dunque ſarà parimente il triangolo ABC al triangolo DEF (2), così la baſe BC alla baſe BG. Si conſideri ora, che eſſendo le tre linee BC, EF, BG continuamente proporzionali, la prima BC alla terza BG (3) ha ragion duplicata della prima BC alla ſeconda EF; quindi eſſendoſi già dimoſtrato, che il triangolo ABC al triangolo DEF ſia, come BC a BG; avrà ancora il triangolo ABC al triangolo DEF ragion duplicata di BC ad EF. Ciocchè doveva dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

Dalla dimoſtrazione di queſta propoſizione ne ſiegue I. che ſe tre linee BC, EF, BG ſono continuamente proporzionali, come ſta la prima BC alla terza BG, così ſta il triangolo ABC deſcritto ſopra la prima al triangolo DEF ſimile, e ſimilmente poſto deſcritto ſopra la ſeconda. II. Che avendo due triangoli ſimili ABC, DEF, per ritrovarne la ragione, fa duopo, o cercare la ragion duplicata de' lati omologi BC, EF, vale a dire la ragion compoſta di due ragioni, ciaſcuna delle quali ſia eguale a quella, che ha BC ad EF: ovvero ritrovare in ordine a' due lati

(1) Pr. 1. di queſto. (2) Pr. 11. V.
(3) Veggaſi la Spiegazione delle def. 6. e 7.

Digitalizzato da Google

si risolve il poligono N, in altrettanti triangoli si risolve parimente il poligono P. Dico di più, che li triangoli del primo poligono sono simili a' triangoli corrispondenti del secondo poligono: dico inoltre, che i detti triangoli sono fra loro, come sono i poligoni. E finalmente io dico, che il poligono al poligono ha ragione duplicata del lato AB al lato omologo FG.

II.

Da' vertici A, ed F degli angoli eguali BAE, GFK si tirino le linee rette AC AD, FH, FI (1).

III.

I. Supponendosi il poligono N simile al poligono P, sarà il numero degli angoli del primo poligono eguale al numero degli angoli dell' altro poligono: quindi, quante linee rette si tirano nel poligono N, altrettante se ne tireranno nell' altro poligono P: dal che poi ne siegue, che il numero de' triangoli fatti nel primo poligono sia eguale al numero de' triangoli fatti nell' altro poligono.

II. Essendo dalla supposizione l' angolo ABC eguale all' angolo FGH, e di più il lato AB al lato BC, come il lato FG al

(1) *Dim.* I.

Digitalizzato da Google

ADE ſono reſpettivamente ſimili a' tre triangoli FGH, FHI, FIK.

III. Eſſendoſi dimoſtrati i triangoli ABC, FGH ſimili fra loro, avrà (1) il triangolo ABC al triangolo FGH ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: e per l'iſteſſa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI avrà parimente ragion duplicata del lato omologo FH: quindi, come ſta il triangolo ABC al triangolo FGH, così ſarà il triangolo ACD al triangolo FHI, poichè la ragione de' due primi triangoli, e la ragione de' due ſecondi triangoli, è in ragion duplicata del lato AC al lato omologo FH: nell'iſteſſa maniera ſi dimoſtrerà, che il triangolo ACD al triangolo FHI ſia, come il triangolo ADE al triangolo FIK, perchè la ragione de' due primi, e de' due triangoli, è in ragion duplicata del lato AD al lato omologo FI: quindi i tre triangoli ABC, ACD, ADE ſaranno reſpettivamente proporzionali a' tre triangoli FGH, FHI, FIK, ciaſcuno a ciaſcuno, e per conſeguente, come ſta il triangolo ABC al triangolo FGH, così ſaranno (2) tutti tre i triangoli a tutti gli altri tre triangoli: ma tutti tre i primi triangoli formano il poligono N, e tutti tre i ſecondi triangoli formano l'altro poligono P; dunque ſarà il poligono N al

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr.* 12. *V.*

Digitalizzato da Google

poligono P, così il triangolo ABC al triangolo FGH, e per conseguente, come il triangolo ACD al triangolo FHI, così il triangolo AIDE al triangolo FIK.

IV. Finalmente essendosi dimostrato, che il poligono N sia al poligono P, come il triangolo ADC al triangolo FGH, siccome il triangolo ABC al triangolo FGH ha ragion duplicata del lato AB al lato omologo E[illegible]; così similmente il poligono N avrà al poligono P ragion duplicata del lat[illegible] AB al lato omologo FG, ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

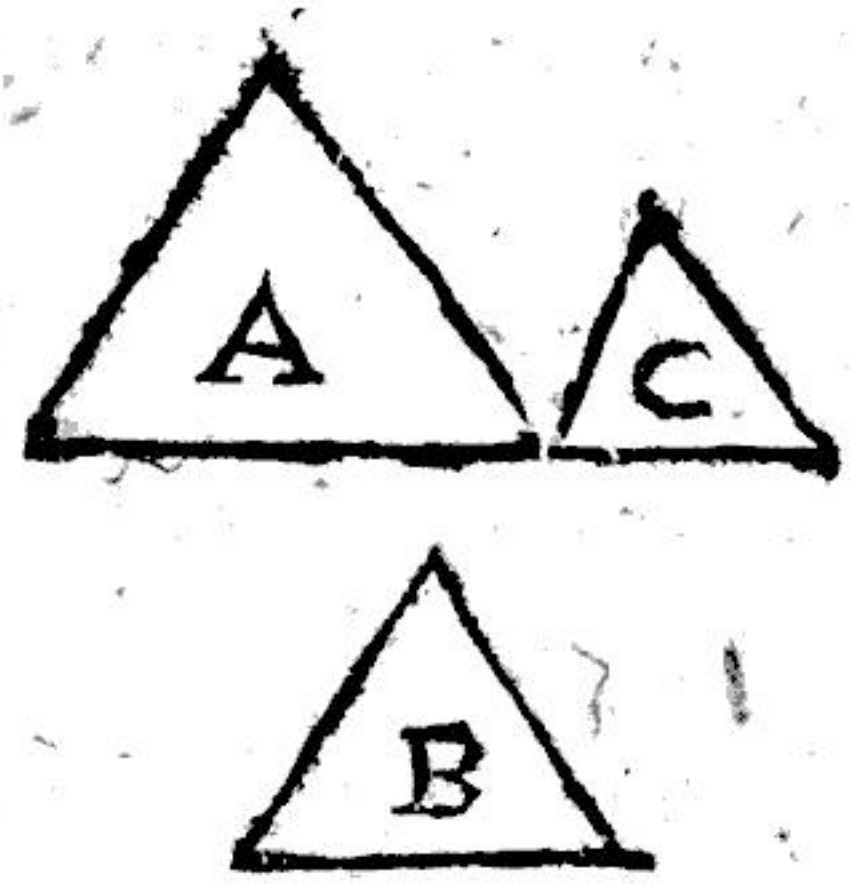
I. Se tre linee rette AB, FG, ed X, sono continuamente proporzionali, come sta la prima AB alla terza X, così starà il poligono N descritto sopra la prima al poligono P simile, e similmente posto descritto sopra la seconda; imperciocchè, così la ragione di AB ad X, come quella del primo poligono al secondo è indupli-
cata ragione di AB ad FG. II. Che avendo due poligoni N, P simili, per ritrovarne la ragione, fa duopo, o cercare la ragion duplicata de' lati omologi AB, FG, vale a dire la ragion composta da due ragioni, ciascuna delle quali sia eguale, a quella, che ha AB al FG; ovvero ritrovare in ordine a' due lati omologi AB, ed FG la terza proporzionale X, che poi, come

Digitalizzato da Google

come sta AB ad X, così starà il poligono al poligono.

PROP. XXI. TEOREMA.

Se due figure rettilinee sono simili ad una medesima figura rettilinea, saranno simili fra loro.



I.

Siano le due figure rettilinee A, e C simili alla terza B; io dico effer esse simili fra loro.

II.

Perchè dalla suppoſizione la figura A è simile alla figura B, non ſolamente il numero degli angoli della figura A ſarà eguale al numero degli angoli della figura B, ma ancora ſarà ciaſcuno angolo della figura A eguale a ciaſcun' angolo della figura B. Similmente. perchè la figura C dalla suppoſizione è simile alla figura B, come ſolamente il numero degli angoli della figura C ſarà eguale al numero degli angoli della figura B, ma ſarà ciaſcun angolo della figura C eguale a ciaſcun' angolo dell' iſteſſa figura B; quindi gli angoli della figu-

Digitalizzato da Google

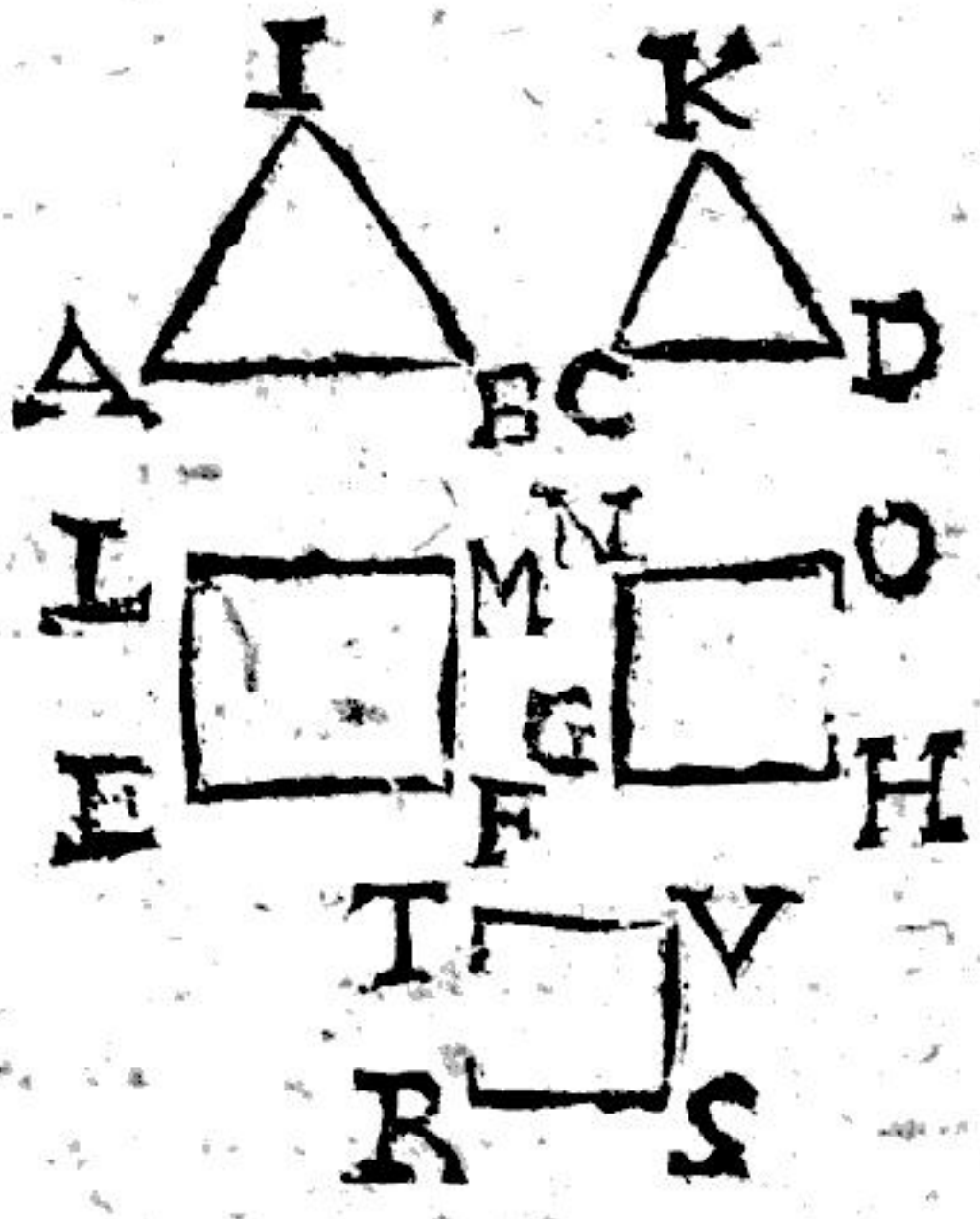
figura A saranno eguali, così di numero, come di quantità agli angoli della figuta C. Inoltre, essendo dalla suppoſizione la figura A simile alla figura B, saranno i lati intorno agli angoli eguali delle sudette figure proporzionali fra loro, il che supponendosi parimente delle figure C, e B; ne siegue, che i lati intorno gli angoli della figura A sano proporzionali a' lati intorno gli angoli eguali della figura C, e per conseguente le figure A, e C sono simili; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXII. TEOREMA.

Se quattro linee rette ſono proporzionali, e ſopra la prima, e la ſeconda s'intendano deſcritte due figure rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, e ſiccome ancora ſopra la terza, e la quarta due altre figure rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, ſarà la prima figura alla ſeconda, come la terza alla quarta. Viceverſa, ſe quattro linee rette ſono tali, che deſcritte ſopra la prima, e la ſeconda due figure rettilinee ſimili, e ſimilmente poſte, e deſcritte in oltre ſopra la terza, e la quarta due altre figure ſimili, e ſimilmente poſte, ſiano le ſuddette figure proporzionali, le quattro linee rette ſaranno parimente proporzionali.



I.

Siano quattro linee rette AB, CD, EF, GH proporzionali, vale a dire, ſia, come AB a CD, così EF a GH: io dico, che deſcritte ſopra la prima, e la ſeconda le due figure ret-

Digitalizzato da Google

rettilinee ABI , CDK simile e similmente poste , e descritte di più sopra la terza, e la quarta due altre figure rettilinee Z, X simili , e similmente poste , sarà la figura ABI alla figura CDK , così la figura Z alla figura X. Viceversa , se essendo simili , e similmente poste le figure ABI, CDK , ed essendo parimente simili, e similmente poste le figure Z , X sia , come la figura ABI alla figura CDK , così la figura Z alla figura X , sarà AB a CD , così EF a GH.

II.

I. Perchè dalla soppoſizione la figura rettilinea ABI è simile alla figura rettilinea CDK , avrà (1) la figura ABI alla figura CDK ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD: ma AB a CD dall' istessa suppoſizione sta, come EF a GH , dunque la figura CDK (2) avrà parimente ragion duplicata di EF a GH . Quindi , perchè anche la figura Z alla figura X ha ragion duplicata del lato EF al lato omologo GH , perchè le dette figure Z, X sono suppoſte simili , ne siegue , che la figura ACI sia alla figura CDK , come sta la figura Z alla figura X.

II. Perchè dalla suppoſizione la figura ABI è simile alla figura CDK , avrà la figu-

(1) *Pr.* 20. *di queſto*. (2) *Pr.* 11, *V.*

Digitalizzato da Google

figura ABI alla figura CDK ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD; ma dall' istessa supposizione la figura ABI alla figura CDK sta, come la figura Z alla figura X; dunque anche la figura Z alla figura X avrà ragion duplicata del lato AB al lato omologo CD: quindi, la figura Z alla figura X ha ancora ragion duplicata di EF a GH, perchè le dette figure sono sopposte simili, ne siegue, che la ragion duplicata di AB a CD sia eguale alla ragion duplicata di EF a GH; e per conseguente, che AB sia a CD, come EF a GH; ciocchè doveva dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da questa proposizione siegue, che se quattro linee diritte sono proporzionali, anche i quadrati formati sopra di esse siano proporzionali; imperciocchè i quadrati descritti sopra la prima, e la seconda sono due figure simili, e similmente poste, siccome ancora i quadrati descritti sopra la terza, e la quarta sono due figure simili, e similmente poste. Si può provare questa verità per mezzo de' numeri. Sia 2 a 4, così 5 a 10: è manifesto, che 4 quadrato di 2 sta a 16 quadrato di 4, come 25 quadrato di 5 sta a 100 quadrato di 20.

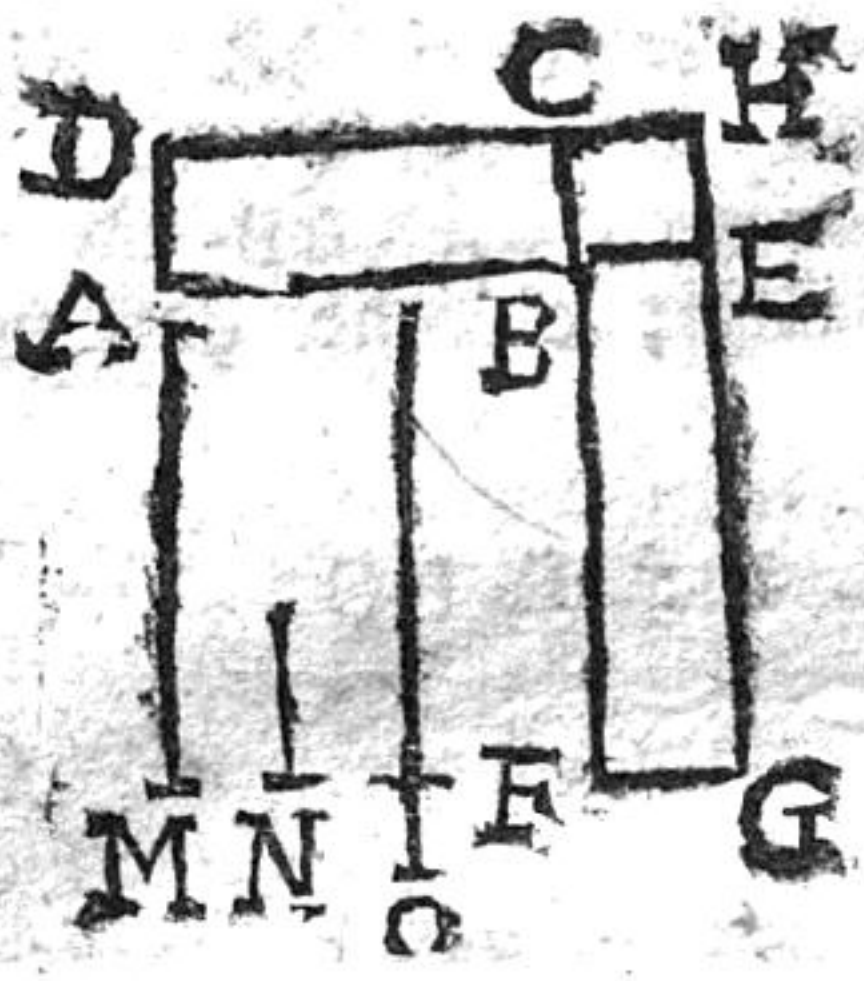
PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIII. TEOREMA.

Li parallelogrammi equiangoli hanno fra loro quella ragione, che nasce, componendo insieme le ragioni de' lati, che sono intorno gli angoli eguali.

I.



Siano li due parallelogrammi equiangoli AC, RG, e sia l'angolo FBE: io dico, che il parallelogrammo, AC abbia al parallelogrammo, BG quella stessa ragione, la quale nasce componendo insieme le ragioni di AB a BE, e di CB a BF, vale a dire de' lati, che sono intorno gli angoli eguali.

II.

Si dispongano questi due parallelogrammi in modochè la retta AB giaccia a dirittura colla retta BE: non è da mettersi in dubbio, che la retta CB verrà a giacere ancora per diritto alla retta BF: imperciocchè

Digitalizzato da Google

chè in tal modo ſi verifica, che gli angoli ABC, FBE ſiano equali fra loro.

Si diſtendano le rette DC, GE, finchè vadino ad unirſi nel punto H.

Si prenda ad arbitrio la linea retta M, ed in ordine alle tre linee rette AB, BE, ed M ſi ritrovi la quarta proporzionale N.

In ordine alle tre linee rette CB, BF, ed N ſi ritrovi la quarta proporzionale O.

III.

Perchè li due parallelogrammi AC, BH hanno l' iſteſſa altezza, ſarà il primo parallelogrammo al ſecondo (1), come la baſe BC alla baſe BE: ma BC a BE dalla coſtruzione ſta, come M ad N; dunque farà parimente il parallelogrammo AC al parallelogrammo BH, così M ed N. Similmente, perchè li parallelogrammi BH, BG hanno l' iſteſſa altezza, ſarà il parallelogrammo al ſecondo, come la baſe BC alla baſe EF ſta, come N ad O, dunque ſarà parimente il parallelogrammo BH al parallelogrammo BG, così N ad O. Quindi i tre parallelogrammi AC, BH, BG paragonati colle tre linee rette M, N, ed O coſtituiſcono una tagion ordinata, eſſendo, come il primo parallelogrammo al ſecondo, così la prima linea alla ſeconda, come

il

(1) *Pr.* 1. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

il secondo parallelogrammo al terzo, così la seconda linea alla terza: laonde sarà il parallelogrammo AC al parallelogrammo BG, così la prima M alla terza O. Ma la prima M alla terza O (1) ha ragion composta da M ad N, e da N ad O: dunque anche il parallelogrammo AC al parallelogrammo BG avrà ragion composta dalle ragioni di M ad N, e di M ad O; di modochè essendo, come M ad N, così AB a BE, e come N ad O, così CB a BF; ne siegue, che il parallelogrammo AC al parallelogrammo BG abbia parimente ragion composta dalle ragioni di AB a BE, e di GB a BF; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP.

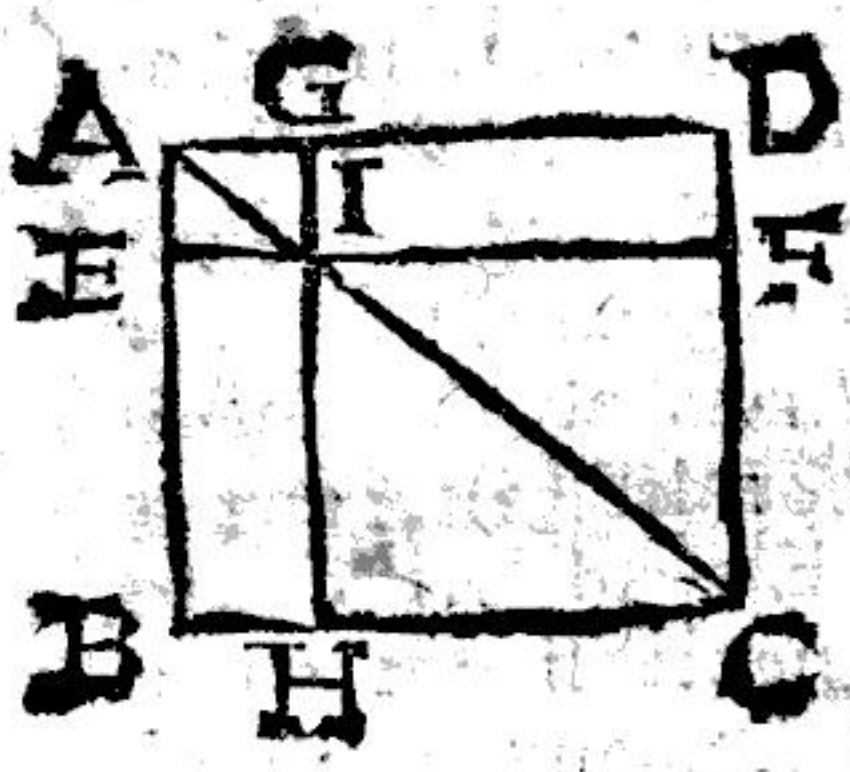
(1) *Veggasi la spiegazione delle def.* 5. e 6. *di questo.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXIV. TEOREMA.

parallelogrammi, che ſtanno intorno la diagonale d' un parallelogrammo ſono ſimili a tutto il parallelogrammo, e ſono ſimili fra loro.

II.



Sia il parallelogrammo ABCD compartito dalla diagonale AC, e dalle due parallele EF, GH, le quali s' incrociano nel punto I della ſuddetta diagonale in quattro parallelogrammi; io dico, che li due parallelogrammi AEIG, IHCF, che ſtanno intorno al diametro AC ſono ſimili, così a tutto il parallelogrammo ABCD, come fra loro.

II.

Imperciocchè I. li due parallelogrammi AEIG, ABCD anno l'angolo in A comune. II. A cauſa delle parallele EF, BC ſecate dalla terza AB, l'angolo eſteriore AEI è eguale (1) all'angolo interiore oppoſto ABC. III. L'angolo EIG è eguale all'

(1) *Pr.* 29. *1.*

Digitalizzato da Google

all' angolo BCD, perchè entrambi sono eguali (1) all' istesso angolo opposto EAG: e finalmente l' angolo esteriore AGI è eguale all'angolo interiore opposto ADC, a causa delle parallele GH, DC secate dalla terza AD: quindi li due parallelogrammi AEIG, ABCD saranno equiangoli. Rimane ora a dimostrare, che abbiano i lati intorno agli angoli eguali proporzionali; ciocchè noi faremo così. Il triangolo AEI è equiangolo al triangolo ABC: poichè l'angolo in A è comune, e l'angolo AEI si è dimostrato eguale all' angolo ABC: dunque i lati intorno gli angoli eguali saranno proporzionali (2), e per conseguente, come sta EA ad AI, così starà BA ad AC: Similmente li due triangoli AGI, ADC sono equiangoli, perchè l'angolo in A è comune ad entrambi, e l'angolo AGI è eguale all'angolo ADC; dunque i lati intorno gli angoli eguali saranno proporzionali, e per conseguente sarà IA ad AG, come CA ad AD: ma è stato dimostrato, che EA ad AI, come BA ad AC; dunque per l' egual ragion ordinata, sarà EA ad AG, così BA ad AD: Inoltre per ragion degl' istessi triangoli AGI, ADC equiangoli, sarà AG e GI, come AD a DC, e come GI ad IA, così CD a CA; ma per causa de' triangoli equiangoli AIE, ACB, IA ad IE

(1) *Pr.* 34. *I.* (2) *Pr.* 4. *di questo.*

Digitalizzato da Google

IE è come CA a CB ; dunque di nuovo per l' egual ragion ordinata sarà GI ad IE, così CD a CB ; e finalmente , come IE ad EA , così CB a BA : di modochè i parallelogrammi AEIG , ABCD , oltre l'avere gli angoli eguali , ciascuno a ciascuno , anno di più i lati proporzionali intorno gli angoli eguali ; e per conseguente sono simili : nell' istessa maniera si dimostrerà , che l' altro parallelogrammo IHCF sia simile all' istesso parallelogrammo ABC ; Di modochè li due parallelogrammi AEIG , IHCF ritrovandosi simili al terzo parallelogrammo ABCD , saranno simili fra loro (1) ; Ciocchè doveva dimostrarsi .

AVVERTIMENTO.

Nel Corollario della proposizione IV. *del libro* II. *si disse , che i parallelogrammi , i quali sono posti intorno la diagonale del quadrato sono quadrati*: Euclide *quì dimostra , che i parallelogrammi situati intorno la diagonale di un parallelogrammo sono simili all' istesso parallelogrammo* : *imperciocchè da questa proporzione è facile a dedurre , che se il parallelogrammo principale è quadrato , anche i due parallelogrammi descritti intorno la di lui diagonale abbiano da essere quadrati : giacchè un quadrato non può esser simile ad altre figure , se non che alle quadrate.*

PROP.

(1) *Pr.* 21. *di questo.*

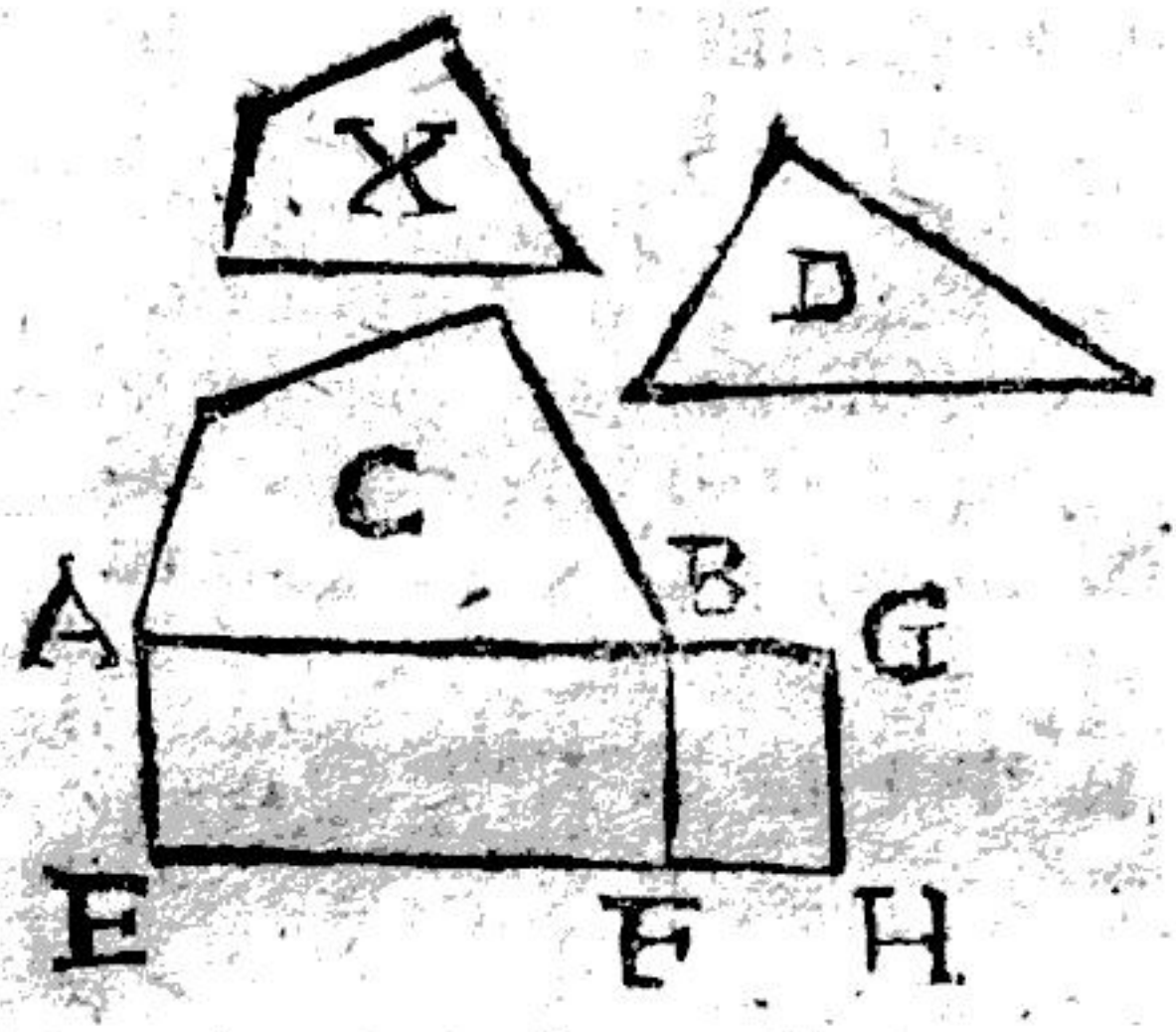
Digitalizzato da Google

PROP. XXV. PROBLEMA.

Date due figure rettilinee, fa duopo descriverne una terza, la quale sia simile, e simil mente pósta ad una delle due suddette figure date, e sia eguale all' altra.

I.

Siano date due figure rettilinee C e D fa duopo descrivere una terza, la quale sia simile, e similmente posta alla figura C, e



eguale altra figura D.

II.

Sopra il lato AB della figura C si descriva il parallelogrammo L (1), eguale all' istesso rettilineo C, adoperando qualsivoglia angolo BAE.

Sopra il lato BF si adatti il parallelogrammo I eguale all' altro rettilineo D, che abbia l' angolo GBF eguale all' angolo BAE; in tal modo le due linee rette AB, BG giaceranno a dirittura, e li due parallelogrammi L, I avranno l' istessa altezza.

Fra

(1) Pr. 45. I.

Digitalizzato da Google

Fra le rette AB , BG si ritrovi la mezza proporzionale X (1).

Si descriva sopra questa linea retta X una figura rettilinea (2) *simile , e similmente posta alla figura C* : io dico , che essa riuscirà eguale all' altra figura data D.

III.

Imperciocchè , essendo dalla costruzione AB ad X, così X a BG , sarà la figura rettilinea C descritta sopra la prima AB alla figura rettilinea simile , e similmente posta, descritta sopra la seconda X , così la prima AB (3) alla terza BG : ma AB sta a BG, come il parallelogrammo L al parallelogrammo I , perchè questi due parallelogrammi anno l' istessa altezza : dunque sarà ancora la figura rettilinea C alla figura rettilinea descritta sopra la linea retta X , così il parallelogrammo L al parallelogrammo I; quindi , essendo la figura rettilinea C eguale dalla costruzione al parallelogrammo L , sarà (4) la figura rettilinea descritta sopra la linea retta X eguale al parallelogrammo I : ma questo parallelogrammo dalla costruzione è eguale al rettilineo D; dunque sarà la figura rettilinea descritta sopra la linea retta X eguale alla data D : sicchè , essendo dalla costruzione simile all' altra figura rettilinea C ; si è soddisfatto al Problema in questione.

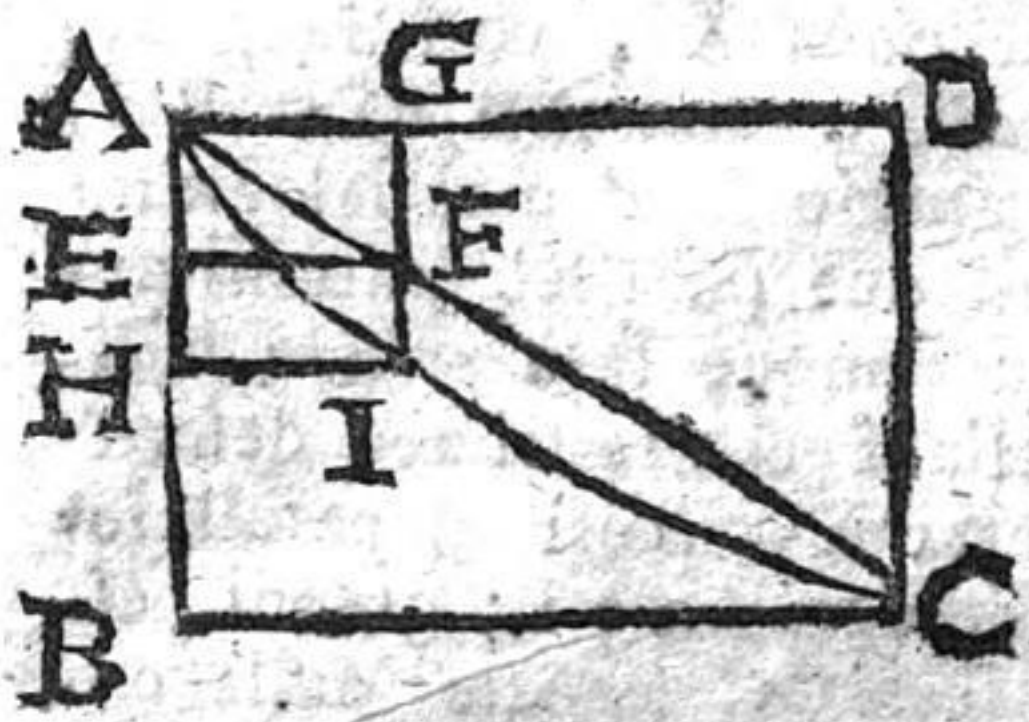
(1) *Pr.* 23. *di questo*. (2) *Pr.* 18. *di questo.*
(3) *Cor.* 1. *della pr.* 20. *di questo*.
(4) *Pr.* 14. *V.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXVI. TEOREMA.

Se da un parallelogrammo ſia tolto un' altro parallelogrammo, il quale ſia ſimile, e ſimilmente poſto all' iſteſſo parallelogrammo, ed abbiano di più coteſti due parallelogrammi un' angolo comune, eſſi ſtaranno a giacere intorno la medeſima diagonale.

I.



Dal parallelogramino BD ſia tolto il parallelogrammo EG ſimile, e ſimilmente poſto all'iſteſſo parallelograino BD, e ſia l'angolo in A comune all'uno, ed all' altro parallelogrammo, io dico, che eſſi ſtaranno a giacere intorno la medeſima diagonale AC; vale a dire, che la medeſima diagonale AC deve paſſare per lo punto F.

II.

Se mai è poſſibile, ſia la diagonale del parallelogrammo BD la retta AIC, la quale non paſſa per l' angolo F del parallelogrammo EG.

Si diſtenda la GF, finchè ſechi la ſuddetta diagonale nel punto I.

Si tiri per lo punto I la retta IH parallela alla retta AG.

III.

Perchè li due parallelogrammi BD, HG ſtanno a giacere intorno l' iſteſſa diagonale AIC.

Digitalizzato da Google

AIC, saranno essi simili fra loro (1) : quindi, come sta AD ad AB, così starà AG ad AH : ma supponendosi il parallelogramino BD simile, e similmente posto al parallelogrammo EG, come sta AD ad AB, così sta AG ad AE: dunque (2) come sta AG ad AH, così starà l' istessa AG all' AE : quindi la retta AH maggiore sarà (3) eguale alla retta AE minore; ciocchè non potendo sussistere ; ne siegue la verità del Teorema in questione.

Preparazione alle quattro Proposizioni seguenti.

Sia la linea retta AB, sopra la quale si formi ad arbitrio il parallelogrammo ABCD, o siano similmente sopra l' istessa linea AB formati due altri parallelogrammi AEFD, AGHD, che abbiano l' istessa altezza col primo ABCD, ma che uno sia minore, l' altro maggiore del medesimo parallelogrammo ABCD, noi diremo per innanzi, che tutti tre cotesti parallelogrammi siano adattati sopra la linea retta AB, con questo divario però, che il secondo si dirà mancante, ed il terzo eccedente in riguardo al primo ABCD, il quale nè manca, nè eccede, ma si ritrova addatato giustamente sopra l' istessa linea retta AB : diremo di più, che il difetto, o mancanza del secondo sia il parallelogrammo EBCF ; e l' eccesso del terzo sia il parallelogrammo BGHC..

[1] *Prop.* 24: *di questo.* (2) *Pr.* 11. *V.*
[4] *Prop.* 9. *V.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXV. TEOREMA.

Fra tutti i parallelogrammi adattati sopra una linea retta data, che mancano di altrettanti parallelogrammi tutti simili, così fra loro, come ad un parallelogrammo adattato ad arbitrio sopra la metà, il più grande è quello, che si adatta sopra la metà, e che è simile ed eguale al suo difetto.

I.



Sia la linea retta AB secata per mezzo nel punto C, e sopra la retta CB sia descritto ad arbitrio il parallelogrammo CBED: io dico, che fra tutti i parallelogrammi, che si possono adattare sopra la retta AB, e che mancano di altrettanti parallelogrammi tutti simili al parallelogrammo CBED descritto sopra la di lui metà CB, il più grande è il parallelogrammo ACDF, il quale è descritto sopra l'altra metà AC, ed è eguale, e simile al suo difetto CBED.

II.

Si congiunga la diagonale BD, *nella quale si prendano ad arbitrio due punti* G, *e* K, *il primo nell'istessa diagonale* BD, *l'altro nel suo prolongamento* DK.

Per li punti G, *e* K *si tirino le linee* LGQ KNT

KNT parallele (1) *alle due* BE, *AF*.

Per li medeſimi punti G, e K ſi tirino di più le parallele OGR, IKH alle due AB, FE.

Finalmente, ſi coſtituiſca la figura tale, quale ſi vede quì delineata. Ora non è da metterſi in dubbio, che il parallelogrammo AQGO è adattato ſopra la retta AB, e manca del parallelogrammo QBRG, il quale è ſimile ai parallelogrammo CBED deſcritto ſopra la mettà GB: imperciocchè i parallelogrammi, che ſtanno (2) intorno la diagonale d'un parallelogrammo ſono ſimili all'iſteſſo parallelogrammo; ſiccome ancora non da dubitare, che il parallelogrammo ATKI ſia adattato ſopra la linea retta AB, e manchi del parallelogrammo TBGK, il quale è parimente ſimile al parallelogrammo CBED deſcritto ſopra la mettà CB: io dico dunque, che il parallelogrammo ACDF adattato ſopra la mettà AC è maggiore, così de' parallelogrammi AQGO, ATKI, come d'ogni altro parallelogrammo, nel quale concorrono le ſuddette condizioni.

III.

Dimoſtreremo primieramente, che il parallelogrammo ACDF ſia maggiore del parallelogrammo AQGO. Il parallelogrammo PCQG è eguale (3) al parallelogrammo GREL raggiugnendo dunque ad eſſi communemente il parallelogrammo QBRG, ſarà il parallelogrammo CBRP eguale al parallelogrammo QBEL: ma il parallelogrammo ACPO è eguale (4) al parallelogrammo CB-

(1) *Pr.* 31. *I.*
(2) *Pr.* 24. *di queſto.*
(3) *Pr.* 43. *I.*
(3) *Pr.* 36. *I.*

Digitalizzato da Google

RP: dunque sarà ancora il parallelogrammo ACPO eguale al parallelogrammo QBEL; ed aggiugnendo di nuovo comunemente il parallelogrammo CQGP, sarà il parallelogrammo AQCO eguale al gnomone SGK: quindi, essendo il parallelogrammo CBED, ovvero il suo eguale ACDF maggiore del gnomone SGK, sarà l'istesso parallelogrammo ACDF maggiore del parallelogrammo AQGO.

Dimostraremo inoltre, che l'istesso parallelogrammo ACDF sia maggiore del parallelogrammo ATKI. Il parallelogrammo TCDN è eguale al parallelogrammo (1) DEHM: ma il parallelogrammo DEHM è eguale al parallelogrammo (2) FDMI: dunque il parallelogrammo FDMI: quindi l'istesso parallelogrammo TCDN sarà maggiore del parallelogrammo FNKI: il perchè aggiugnendo communemente il parallelogrammo ATNF, sarà il parallelogrammo ACDF maggiore del parallelogrammo ATKI; ciocchè doveva dimostrarsi.

PROP. XXVIII. PROBLEMA.

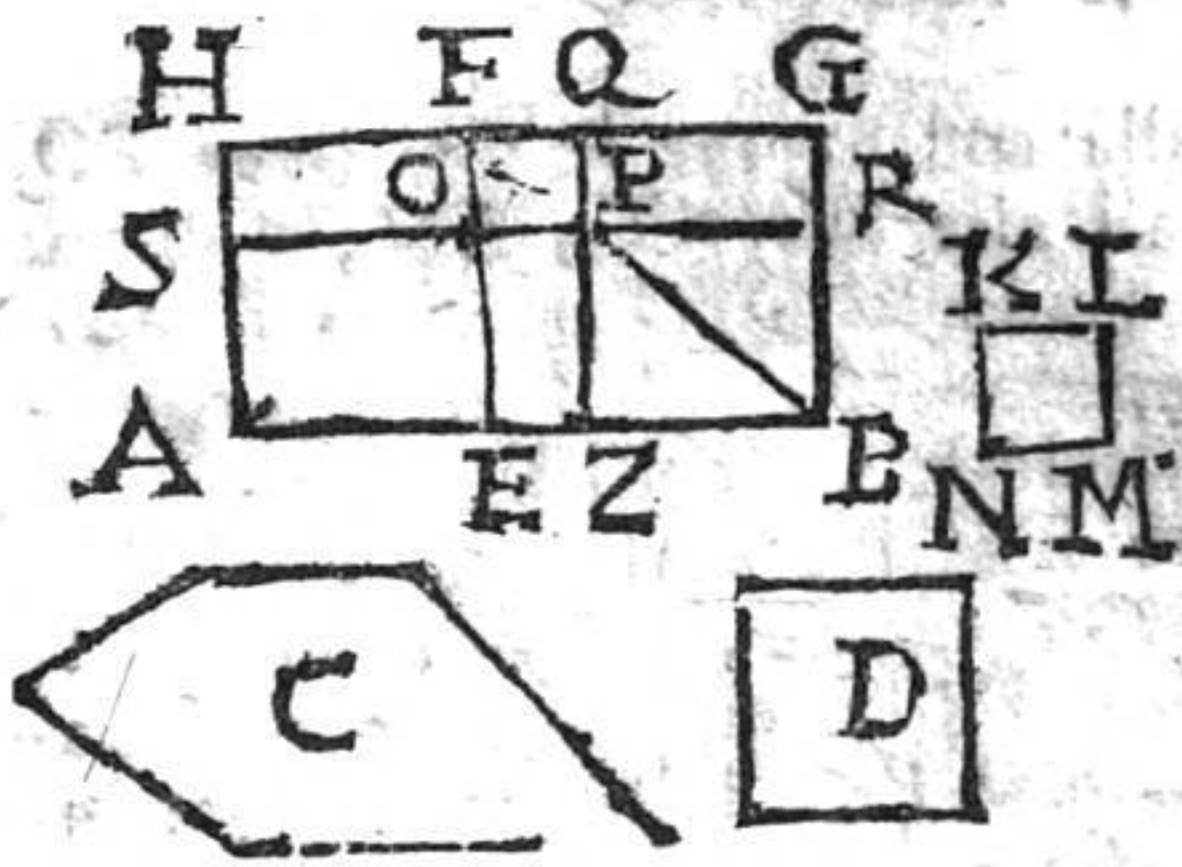
Sopra una linea retta data adattare un parallelogrammo eguale ad una figura rettilinea data, e che manchi d'un parallelogrammo simile ad un'altro parallelogrammo dato.

I.

Sia data la linea retta AB, e sia data inoltre, così la figura rettilinea C, come il paral-

(1) *Pr.* 43. I. (2) *Pr.* 86. I.

Digitalizzato da Google



rallelogrammo D: fa duopo adattare ſopra la linea retta data AB un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data C, e che manchi d'un parallelogrammo ſimile al dato parallelogrammo D.

II.

Sechiſi la AB prr mezzo nel punto E.

Sopra la mettà EB ſi deſcriva (1) *il parallelogrammo* EBGF *ſimile al parallelogrammo dato D.*

Si ritrovi l'eccesſo del parallelegrammo EBGF *ſopra il tettilineo* C, *il quale eccesſo ſi determina per mezzo della propoſizione XLV. del primo, ſiccome orꝛ ſi dimoſtrerà.*

Si formi il parallelogrammo MNTK eguale (2) *al ſuddetto eccesſo, e ſimile al parallelogrammo dato D, ovvero al parallelogrammo* EBGF *deſcritto ſopra la mettà* EB.

Si ſechino da' lati FG, FE *le porzioni* FQ, FO *eguali reſpettivamente a' lati omologi* KT KN.

Per li punti Q, ed O ſi facciano paſſare le rette QPZ, SOR parallele a' lati del parallelogrammo EBGF: io dico, che il parallelogrammo AZPS ſia quello, che ſi dimanda.

(1) *Pr.* 18. *di queſto.* (2) *Pr.*25. *di queſto.*

Digitalizzato da Google

III

Siccome dalla costruzione le due linee FQ FO sono eguali alle due KT, KN, e di più comprendono l' angolo QFO eguale all' angolo TKN; imperciochè dall' istessa costruzione il parallelogrammo NMTK è simile al parallogrammo EBGF, così sarà il parallelogrammo OPQF eguale, e simile al parallelogrammo NMTK: quindi essendo il parallelogrammo NMTK dalla costruzione simile al parallelogrammo EBGF, sarà similmente il parallelogrammo OPQF simile al parallelogrammo (1) EBGF: ma essi anno di più l' angolo in E comune, dunque saranno situati intorno l'istessa diagonale FPB (2), laonde il parallelogrammo AZPS adattato sopra la retta AB manca del parallelogrammo ZBRP simile al parallelogrammo EBGF descritto sopra la mettà, ouvero simile al parallelogrammo D, rimane ora a dimostrare, che esso sia eguale al rettilineo dato C. Siccome dalla costruzione il parallelogrammo NMIK, ovvero il suo eguale FOPQ è l' eccesso del parallelogramino EBGF sopra il rettilineo dato C; così ne siegue che il gnomone QPOEBG sia eguale al sudderto rettilineo C: ma il gnomone è eguale al parallelogrammo AZPS, siccome è facile a dimostrare dunque il parallelogrammo AZPS, sarà eguale alla figura rettilinea C; ciocchè doveva dimostrarsi.

AV-

(1) *Pr.* 21. *di questo*. (2) *Pr.* 26. *di questo*.

Digitalizzato da Google

AVVERTIMENTO.

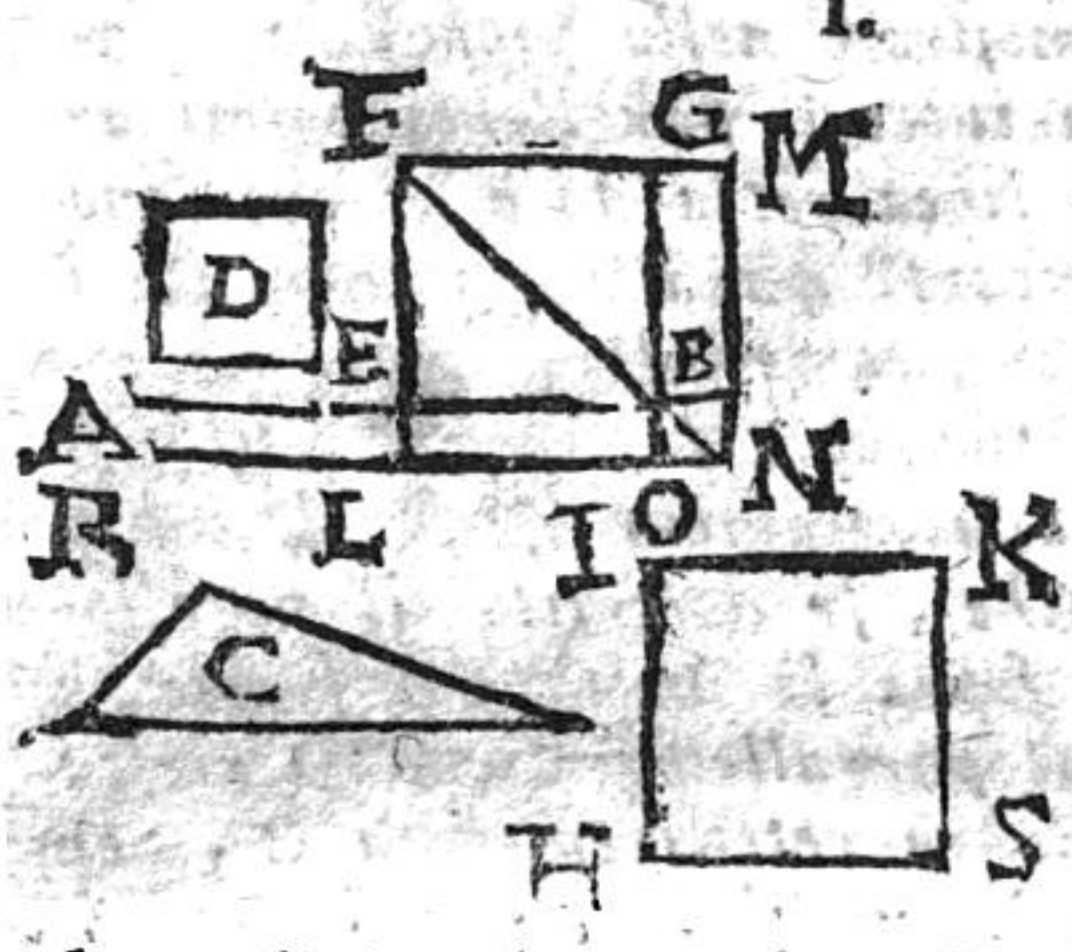
Acciò questo Problema possa esser risoluto si richiede, che il parallelogrammo EBGF descritto sopra la mettà della linea retta data simile al parallelogrammo dato D non sia minore della figura rettilinea C, ma, o sia maggiore di essa, e per lo meno le sia eguale: imperciocchè si è dimostrato nella proposizione antecedente, che fra tutti i parallelogrammi adattati sopra una linea retta data, che sono mancanti di altrettanti parallelogrammi tutti simili, così fra loro, come ad un certo parallelogrammo descritto sopra la mettà, il più grande sia il parallelogrammo istesso descritto sopra la mettà. Che, se descritto il parallelogrammo EBGF sopra la mettà EB simile, e similmente posto al parrallelogrammo D riesca esso eguale alla figura rettilinea data C, non accaderà tirare più avanti la costruzione: poichè il supplemento ABFH del detto parallelogrammo soddisfarà al Problema, come quello, che è eguale ancora alla figura rettilinea C, e manca d'un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Adattare sopra una linea retta data un parallelogrammo eguale ad una figura rettilinea data, e che ecceda d'un parallelogrammo simile ad un' altro parallelogrammo dato.

I.



Sia data la linea retta AB: fa duopo sopra di essa adattare un parallelogrammo eguale alla figura rettilinea data C, e che ecceda d'un parallelogrammo simile al parallelogrammo dato D.

II.

Sechisi la retta data AB per mezzo nel punto E.

Si descriva sopra la metà EB il parallelogrammo EBFG simile (1) al parallelogrammo dato D.

Ritrovisi un parallelogrammo, il quale sia eguale al parallelogrammo EBGF, ed al rettilineo C uniti insieme; ciocchè si può fare mediante la proposizione XLV. del libro primo, siccome ora si dimostrerà.

Si descriva il parallelogrammo HSKI egua-

le

(1) Pr. 18. di questo.

Digitalizzato da Google

le, al ſuddetto parallelogrammo, ovvero eguale al parallelogrammo EBGF, ed alla figura rettilinea C uniti inſieme, e ſimile al parallelogrammo dato, e per conſeguente ſimile al parallelogramo EBGF (1).

Sopra i lati FG, FE *diſteſi, quanto biſogna ſi prendano le parti* FM, FL *eguali reſpettivamente a' lati omologi* IK, IH.

Per li punti M, *ed* L *ſi facciano paſſare le parallele* MPN, RLN *a' lati* BG, BE, *del parallelogrammo* EBGF, *e di più s' intenda compiuta la figura, tale quale ſi vede deſcritta;* io dico, che il parallelogrammo ARPN ſia quello, che ſi dimanda.

III.

Siccome dalla coſtruzione le due linee rette FM, FL, ſono reſpettivamente eguali alle due IK IH, e di più l'angolo LFM è eguale all' angolo HIK, così ſarà il parallelogrammo LFMN eguale, e ſimile al parallelogrammo IHSK, ovvero al parallelogrammo FEBG, al quale è ſimile il ſuddetto parallelogrammo IHSK, eſſendo entrambi ſimili al medeſimo parallelogrammo D. Quindi i due parallelogrammi FLNM, FEBG, avendo l'angolo in F comune, ed eſſendo di più ſimili fra loro, ſaranno ſituati intorno l' iſteſſa diagonale FBN: laonde il parallelogrammo ARNP adattato ſopra la linea retta data AB eccederà d' un parallelogrammo ſimile al parallelogrammo dato D: imperciocchè l'eccesſo è il parallelogrammo BONP, il quale è ſimile (2) al parallelogrammo EBGF, e per conſeguente è ſimile al parallelo-

(1) *Pr.* 21. *di queſto.* (2) *Pr.* 24. *di queſto*

Digitalizzato da Google

grammo D. Rimane a dimoſtrare, che il ſuddetto parallelogrammo ſia eguale alla figura rettilinea data C: ciocchè ſi farà nella maniera ſeguente. Dalla coſtruzione il parallelogrammo IHSK, ovvero FLNM è eguale al parallelogrammo FEBG, ed alla figura rettilinea C uniti inſieme: togliendo dunque da eſſi comunemente il parallelogrammo FEBG, rimarrà il gnomone GBELNM eguale alla figura rettilinea C: ma il fudetto gnomone è eguale al parallelogrammo ARNP, ſiccome è facile a dimoſtrare dunque il parallelogrammo ARNP è eguale alla figura rettilinea C; ciocchè doveva dimoſtrarſi.

Avvertimento comune alle due antecedenti Propoſizioni.

Si è aſſunto nelle propoſizioni XXVIII *che poſſa deſcriverſi un parallelogrammo eguale alla differenza di due figure rettilinee date, e nell' antecedente ſi è aſſunto, che poſſa deſcriverſi un parallelogrammo eguale alla ſomma di due figure rettilinee date, e ſi è detto, che l' uno, e l' altro poſſa ottenerſi mediante la propoſizione* XLV. *del libro primo. Il metodo è queſto. Siano date le due figure rettilinee A, e B, fa duopo primieramente ritrovare un parallelogrammo eguale alla differenza delle due ſuddette figure. Si deſcriva il parallelogrammo CDGH eguale alla figura rettilinea A* (1), *avvalendoſi di qualſivoglia angolo CDG. Poi ſopra la linea retta CD adoperando l' iſteſſo angolo CDG ſi deſcriva il parallelogrammo CD-*

EF

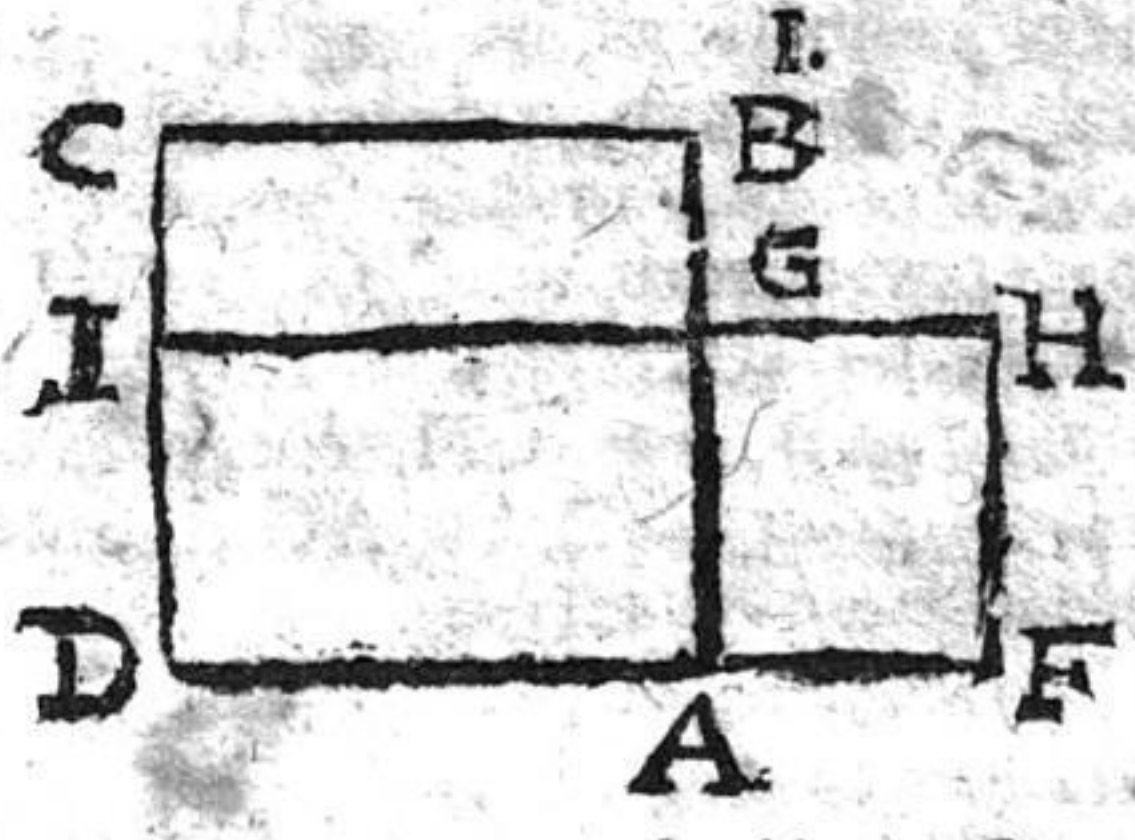
(1) Pr. 45. I.

Digitalizzato da Google

EF eguale all' altra figura rettilinea B : Ciò fatto, sarà il parallelogrammo HGEF eguale alla differenza delle due figure rettilinee date. Se poi si voleſſe un parallelogrammmo eguale a tutte due le figure rettilinee si dovria far così : bisognarebbe primieramente descrivere per la suddetta propoſizione XLV. il parallelogrammo CDGH eguale alla figura rettilinea A adoperando qualsivoglia angolo CDG : dopo sopra la retta HG bisognaria di più descrivere il parallelogrammo HGEF eguale all' altra figura rettilinea B adoperando l' angolo HGE eguale all' angolo CDG : che così si verrebbe ad ottenere il parallelogrammo CDEF eguale ad entrambe le figure rettilinee A, e B.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Segare una linea retta data secondo l' estrema, e mezza ragione.



Sia data la linea retta AB : fa duopo segarla secondo l' estrema, e mezza ragione, vale a dire, talmentechè tutta la linea sia alla parte maggiore di essa, come l' istessa parte maggiore sia alla parte minore.

Digitalizzato da Google

II.

Sopra la linea retta data AB descrivasi il quadrato AC.

Sopra la retta AD si adatti il parallelogrammo rettangolo (1) *DH eguale al quadrato AC, e che ecceda d' un altro parallelogrammo rettangolo, il quale è FG, che sia simile al medesimo quadrato AC: quindi, perchè ad un quadrato non gli può esser simile altra figura, se non la quadrata; ne siegue, che il parallelogrammo rettangolo FG sia un quadrato:* ora io dico, che il punto G divide la linea retta data AB secondo l' estrema, e mezza ragione, vale a dire, che AB sia ad AG, come AG a GB.

III.

Siccome dalla costruzione il rettangolo DH è eguale al quadrato DB, così togliendone comunemente il rettangolo DG, rimarrà il quadrato FG eguale al rettangolo IB: quindi i due parallelogrammi rettangoli IB, FG, avendo un' angolo eguale ad un' angolo, e di più essendo eguali, avranno intorno gli angoli eguali i lati reciprocamente proporzionali (2), e per conseguente sarà IG a GH, come GA a GB: ma IG è eguale a DA, e per conseguente ad AB, e GH è eguale a GA; dunque sarà ancora BA ad AG, come AG a GB; ciocchè doveva farsi.

AV-

(1) *Pr. ant.* (2) *Pr. 4. di questo.*

Digitalizzato da Google

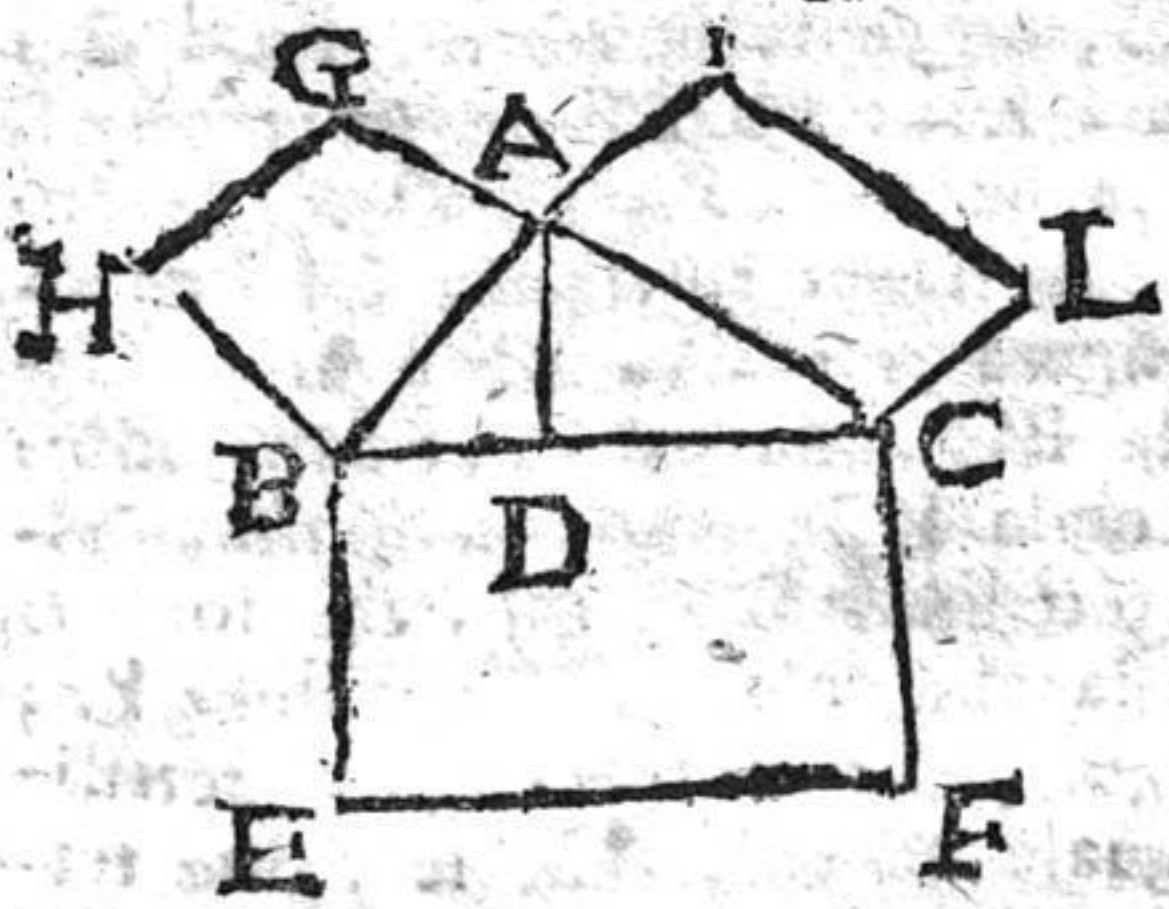
AVVERTIMENTO.

Questo Problema non è diverso dalla proposizione XI. *del libro II., imperciocchè, secata, che sia la retta AB talmente nel punto G, che il rettangolo formato da AB, e BG sia eguale al quadrato di AG, sarà AB ad AG (1), come AG a GB: viceversa secata la retta AB secondo l' estrema, e mezza ragione nel punto G sarà il rettangolo formato da AB, e BG eguale al quadrato di AG (2).*

PROP. XXXI. TEOREMA.

Ne' triangoli rettangoli la figura rettilinea descritta ad arbitrio sopra l' ipotenusa è eguale alle due figure rettilinee descritte sopra i lati, che contengono l' angolo retto, simili, e similmente poste a quella, che è stata descritta sopra l' ipotenusa.

I.



Si il triangolo rettangolo ABC, sopra l' ipotenusa BC, del quale sia descritta ad arbitrio la figura rettilinea BF, e sopra li due lati AB, AC siano descritte le figure BG CI, simili, e simil-

(1) *Pr.* 17. *di questo.* (2) *Pr.* 17. *di questo.*

Digitalizzato da Google

ſimilmente poſte alla ſuddetta figura BF : io dico, che queſta figura ſola è eguale a tutte due le figure BG, CI inſieme.

II.

Dal punto A s' intenda abbaſſata la perpendicolare AD (1).

III.

Poichè nel triangolo rettangolo ABC dall' angolo retto A ſi è tirata la perpendicolare AD ſopra la baſe BC, ſarà così BA (2) mezza proporzionale fra CB, e CD. Quindi, eſſendo CB a BA, come BA a BD, ſarà la prima CB alla terza BD (3), come la figura rettilinea BF deſcritta ſopra la prima alla figura rettilinea BG ſimile, e ſimilmente poſta deſcritta ſopra la ſeconda: e per ragion permutata ſarà BD a BC, come la figura BG alla figura BF, ſi dimoſtrerà parimente, che DC ſia all' iſteſſa BC, come la figura rettilinea BF: quindi, eſſendo la prima BD alla ſeconda BC, come la figura rettilinea BG terza alla figura rettilinea BF quarta; ed eſſendo di più la quinta DC all' iſteſſa ſeconda BC, come la figura rettilinea CI ſeſta alla medeſima figura rettilinea BF quarta, ſarà la compoſta BC dalla prima, e dalla quinta (4) alla ſeconda BC; come la ſomma delle due figure rettilinee BG, CI, che ſono la terza, e la ſeſta alla ſola figura rettilinea BF; dalchè poi ſiegue, che la ſola figura rettilinea BF ſia eguale ad entrambe le figure rettili-

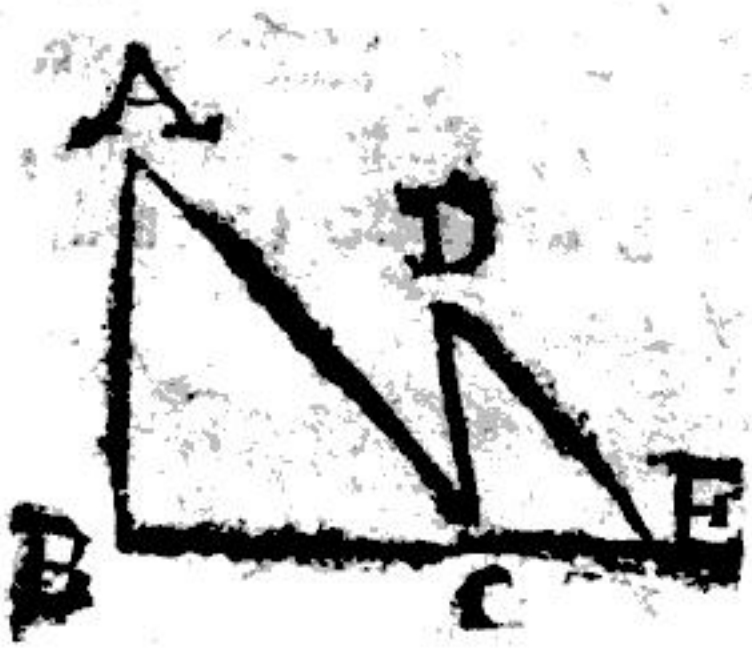
(1) *Pr.* 11. *I.*
(2) *Cor. della pr.* 8. *di queſto.*
(3) *Cor. della pr.* 20. *di queſte.*
(4) *Pr.* 2. *V.*

Digitalizzato da Google

tilinee BG, CI: ciocchè doveva dimoſtrarſi.

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Se due triangoli avendo due lati proporzionali a due lati ſiano congiunti in un angolo, in modo che i lati omologi rieſcano paralelle, ciaſcuno a ciaſcuno; gli altri due lati de' ſuddetti triangoli giaceranno a dirittura.



I. Abbiamo i due triangoli ABC, DCE, i due lati AB, AC proporzionali a' due lati CD, e DE, vale a dire, come ſta AB ad AC, così ſia DC a DE, ed oltre a ciò i detti triangoli ſiano tali, che congiungnendoſi nell' angolo C, retti il lato AB paralelo al lato DE, ed AC parallelo a DE: io dico, che gli altri due lati BC, CE giaceranno a dirittura.

II. Siccome dalla ſuppoſizione la retta AB è parallela alla retta DC, così ſarà l'angolo ABG eguale (1) all'angolo AGD: ſimilmente ſiccome dalla ſuppoſizione la retta AC è parallela alla retta DE, così ſarà l'angolo ACD eguale all'angolo CDE; quindi i due angoli BAC, CDE ſaranno eguali fra loro. Il perchè i due triangoli ABC, DCE, aven-

(1) *Pr.* 29. *I.*

Digitalizzato da Google

vendo l'angolo A eguale all'angolo D, ed avendo di più intorno a coteſti angoli i lati proporzionali; ſaranno (1) equiangoli, e per conſeguente ſarà l'angolo DCE eguale all'angolo ABC: ma ſi è dimoſtrato l'angolo ACD eguale all'angolo BAC; dunque tutto l'angolo ACE ſarà eguale a due angoli BAC, ABC congiunti inſieme: aggiugnendo comunemente l'angolo ACB; ſaranno i due angoli ACE, ACB eguali a' tre angoli BAC, ABC, BCA del triangolo ABC; ma queſti tre angoli ſono eguali a' due retti (2); dunque ancora i due angoli ACE, ACB ſono eguali a due angoli retti, dal che poi ſiegue, che le due rette BC, CE giacciono (3) a dirittura.



(1) *Pr. 6. di queſte.* (2) *Pr. 32. I.*
(3) *Pr. 14. I.*

Digitalizzato da Google

PROP. XXXIII. TEOREMA.

Ne' cerchi eguali, gli angoli così ne' centri, come nelle circonferenze seguono ragione degli archi, a' quali insistono. Di più i settori seguono la ragione de' loro archi.

I.





Ne' cerchi eguali ABC, EFG vi siano ne' centri D, ed H due angoli BDC, FHG, e siano due altri angoli alle circonferenze BAC, EEG: io dico primieramente, che l' angolo BDC sta all' angolo FHG, come l' arco BC all' arco FG: dico di più, che l' angolo BAC sta all' angolo FEG, come l' istesso arco BC all' arco FG: finalmente dico, che il settore BDC sta al settore FHG, come il medesimo arco BC all' arco FG.

II.

Si congiungano le linee rette BC, FG. Si adatti la retta CI eguale (1) *alla linea ret-*

(1) *Pr.* i. *IV.*

Digitalizzato da Google

retta BC ; ſiccome ancora ſi adattino le rette GL, LP eguali ad FG .

Si congiungano le linee rette DI , HL , HP.

Preſi ad arbitrio negli archi BC , CI i punti M , ad N , ſi uniſcano le linee rette MB , MC , NC , NI .

III.

I. Perchè i due raggi BD , ID ſono eguali fra loro , ed il raggio DC è comune , ſaranno i due lati BD , DC del triangolo BDC eguali a' due lati ID , DC del triangolo IDC , ciaſcuno a ciaſcuno ; quindi , eſſendo di più la baſe BC eguale alla baſe CI , ſarà l' angolo BDC eguale all' angolo IDC ; laonde l' angolo BDI ſarà doppio dell' angolo BDC : di più , eſſendo dalla coſtruzione la corda BC eguale alla corda CI , ſarà l' arco BC eguale (1) all' arco CI ; il perchè l' arco BCI ſarà doppio dell' arco BC ; e per conſeguente l' angolo BDI , e l' arco BI ſono egualmente moltiplici dell' angolo BDC , e dell' arco BC . Nell' iſteſſa maniera ſi dimoſtrerà , che l' angolo FHP , e l' arco FLP ſiano egualmente moltiplici dell' angolo , FHG e dell' arco FG . Ora , ſe l' angolo BDI è eguale all' angolo FHP ſarà l' arco BCI eguale all' arco (2) FLP ; o ſe l' angolo ADI è maggiore , o minore dell' angolo FHP , ancora l' arco BCI , maggiore , o minore dell' arco FLP ; quindi , avendo due ragioni , la prima delle quali è fra l' angolo BDC , e l' angolo EHG , e l' altra è fra l' arco BC , e l' arco FG ; ed eſſendoſi dimoſtrato , che gli egual-

(1) *Pr.* 28. *III.*
(2) *Pr.* 27. *III.*

Digitalizzato da Google

egualmente moltiplici degli antecedenti, i quali ſono l'angolo BDI, e l'arco BCI ſono entrambi, o eguali, o maggiori, o minori degli egualmente moltiplici de' conſeguenti, che ſono l'angolo FHP, e l'arco FLP; ne ſiegue, che le ſuddette due ragioni ſiano eguali fra loro (1); e per conſeguente, l'angolo ADC ſia all'angolo FHG, come l'arco BC all'arco FG.

II. L'angolo BDC è doppio dell'angolo BAC, e l'angolo FHG è doppio dell'angolo FEG (2): quindi, come ſta l'angolo BDC all'angolo FHG; così ſtarà l'angolo BAC all'angolo FEG (3): ma ſi è dimoſtrato, che l'angolo BDC ſia all'angolo FHG; come l'arco BC all'arco FG: dunque ſarà ancora (4) l'angolo BAC all'angolo FEG, come l'arco BC all'arco FG.

III. Eſſendo l'arco BC dalla coſtruzione all'arco CI, ſarà la circonferenza rimanente BAC eguale alla circonferenza rimanente CBAI, e per conſeguente l'angolo BMC, che inſiſte alla prima circonferenza ſarà eguale (5) all'angolo GNI, il quale inſiſte alla ſeconda circonferenza; quindi, le due porzioni di cerchio BMC, CNI ſaranno ſimili fra loro; ma le baſi BC, CI delle ſuddette porzioni ſono eguali, dunque eſſe porzioni ſaranno ancora eguali (6); ſicchè eſſendo ancora eguali i triangoli DBC, DCI per la propoſizione IV. del libro I. ſaranno eguali i ſettori DIMC, DCNI e per conſeguente il ſettore DBCI

(1) *Def.* 6. *V.* (2) *Pr.* 20. *III.*
(3) *Pr.* 15. *V.* (4) *Pr.* 11. *V.*
(5) *Pr.* 27. *III.* (6) *Pr.* 24. *III.*

Digitalizzato da Google

BCI sarà doppio del settore DBMC; il perchè il settore DBCI, e l'arco BCI saranno egualmente moltiplici del settore DBMC, e dell'arco BC. Similmente si dimostrerà, che il settore HFGLP, e l'arco FGLP siano egualmente moltiplici del settore HFG, e dell'arco FG; ora se l'arco BCI è maggiore, minore, ovvero eguale all'arco FGLP, ancora il settore DBCI sarà maggiore, minore, ovvero eguale al settore HFGLP: quindi avendo due ragioni, la prima delle quali è fra l'arco BC, e l'arco FG, l'altra è fra il settore DBC, ed il settore HFG; ed essendosi dimostrato, che gli egualmente moltiplici degli antecedenti, i quali sono l'arco BCI, ed il settore DBCI sono entrambi maggiori, minori, ovvero eguali agli egualmente moltiplici de' conseguenti, che sono l'arco FGLP, ed il settore HFGLP; ne siegue, che le suddette due ragioni siano eguali, e che per conseguente l'arco BC sia all'arco FG, come il settore DBC al settore HFG: ciocchè doveva dimostrarsi.

CO.

Digitalizzato da Google

COROLLARIO.

I. *Ne ſiegue, che il ſettore DBC ſia al ſettore HFG, come l' angolo BDC all' angolo FHG, ovvero, come l' angolo BAC all' angolo FEG: imperciocchè l' angolo BDC ſta all' angolo FHG, come l' arco BC all' arco FG, e nell' iſteſſa ragione è l' angolo BAC all' angolo FEG.* II. *Che l' angolo al centro BDC ſia a quattro angoli retti, come l' arco BC a tutta la circonferenza del cerchio: imperciocchè l' angolo al centro BDC è ad un' angolo retto, come l' arco BG alla quarta parte della circonferenza del cerchio; dal che poi facilmente ſi ded, uce che l' angolo al centro BDC ſia a quattro angoli retti, come l' arco BC a tutta la circonferenza del cerchio.*

Digitalizzato da Google

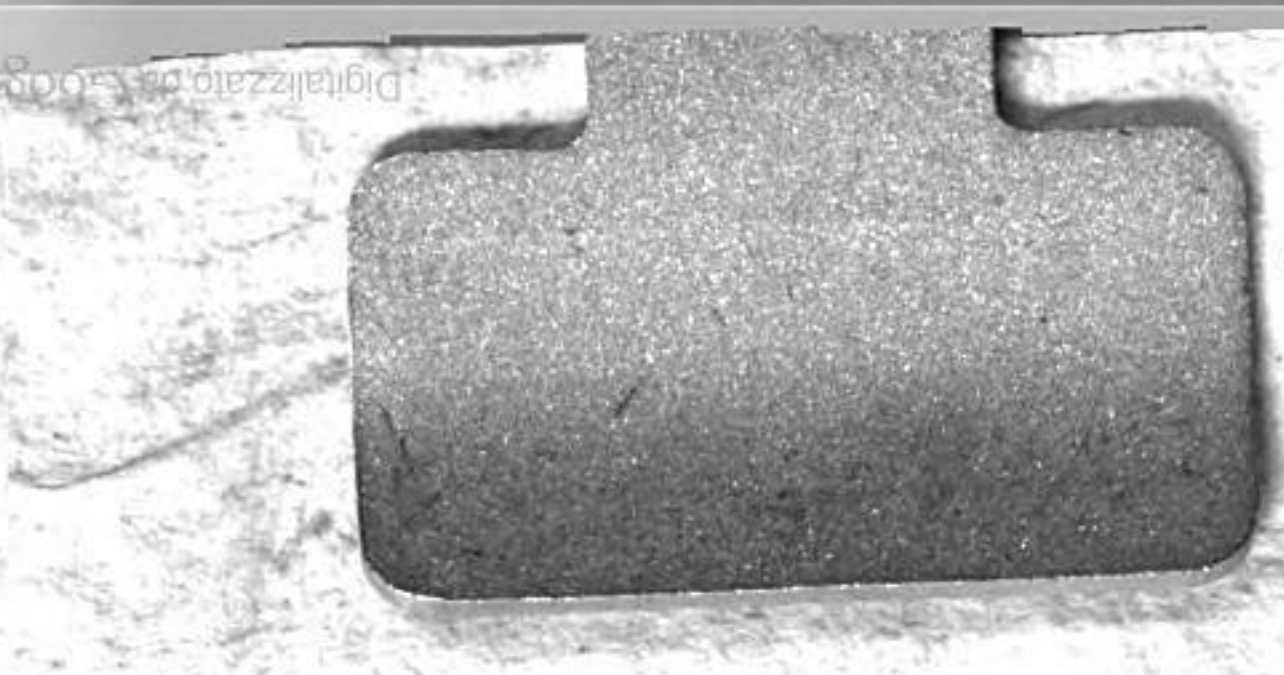
Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google



Digitalizzato da Google