TRATTATO

DELL'

EQUILIBRIO

E DEL

MOTO DE' CORPI.

TRATTATO
DELL'
EQUILIBRIO
E DEL
MOTO DE' CORPI

COMPOSTO DAL FU

NICCOLO' DI MARTINO

Regio Percettore, e Maeſtro di Matematica

DI

FERDINANDO IV.

NOSTRO AUGUSTISSIMO REGNANTE

Riſtampato per uſo dell' Accademia
Militare del

B. R. F.

DEDICATO

A S. E. IL SIGNOR

D. FRANCESCO PIGNATELLI

DE' PRINCIPI STRONGOLI

TOMO I.

IN NAPOLI MDCCLXXXI.

PRESSO GIOACCHINO MILO

Con Regal Permeſſo.

A S. E.

IL SIGNOR

D. FRANCESCO PIGNATELLI

DE' PRINCIPI STRONGOLI

Ajutante Reale di S.M., e ſuo Gentiluomo di Camera di Entrata con gli onori dell' Eſercizio. Mareſciallo di Campo ne' ſuoi Reali Eſerciti, Colonnello Governatore nel ſuo Battaglione Real Ferdinando, e Comandante del Caſtello di S. Eramo.

NAtural coſa è, che coloro, i quali per forza di amicizia, o per vincolo di ſangue furono ai trapaſſati congiunti ed uniti, godano nel vederne anche dopo morte onorata, ed illuſtrata

anzi

la mano, e pregandovi da Dio ogni bene, mi reco ad onore essere

Di V. E.

Divotiss., ed Oblicatiss. Ser. Vero
Giuseppe di Martino.

TRATTATO

DELL' EQUILIBRIO, E DEL MOTO DE' CORPI

1. IL noſtro ſcopo in queſto Trattato ſi è di ragionare dell' equilibrio, e del moto così de' corpi duri, o ſiano conſiſtenti, come degli altri, che appellanſi fluidi, e perciò racchiuderemo in eſſo gli Elementi non ſolo della Statica, e della Meccanica, ma eziandio dell' Idroſtatica, e dell' Idraulica (1).

2. Ed in vero egli è ſtato ſempre comune ſentimento di doverſi diſtinguere il moto de' corpi dal loro equilibrio: onde ſi è, che ſi ſono formate due ſcienze intorno ai corpi conſiſtenti, a cui ſi ſono dati i nomi di Statica, e di Meccanica; e due altre ancora intorno ai corpi fluidi, che ſono ſtate dinominate Idroſtatica, ed Idraulica (2).

3. S' intende adunque per Statica la ſcienza, che tratta dell' equilibrio de' corpi conſiſtenti; s' intende all' incontro per Meccanica la ſcienza, che ſi aggira intorno al moto de' medeſimi corpi. E così ancora chiamaſi Idroſtatica la ſcienza, che tratta dell' equilibrio de' corpi fluidi; chiamaſi all' incontro Idraulica la ſcienza, che riguarda il loro moto (3).

4. Intanto, ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà, che il moto, e l' equilibrio ſiano due affezioni, le quali non debbono diſgiungerſi l' una dall' altra; sì perchè daſſi luogo al moto de' corpi, che ſoggiace a' noſtri ſenſi, qualora ceſſa l' equilibrio; come ancora perchè nell' equilibrio ſteſſo de' corpi ſi fanno de' continui moti inſenſibili, che per la loro contrarietà, ed uguaglianza ſi diſtruggono in ogni momento.

5. Quindi ſenza fare una tal diſtinzione ragio-

neremo unitamente del moto, e dell' equilibrio de' corpi. E poichè i corpi fluidi per una special loro tessitura debbono considerarsi separatamente dai corpi consistenti; perciò prima tratteremo dell' equilibrio, e del moto de' corpi consistenti; indi dell' equilibrio, e del moto de' corpi fluidi.

LIBRO I.

Dell' equilibrio, e del moto de' corpi consistenti.

6. QUantunque il moto, di cui specialmente dee ragionarsi in questo trattato, sia quello, che deriva dalla gravità de' corpi; nientedimeno ogni ragion vuole, che si tratti primieramente della scienza del moto in generale, a cui suol darsi il nome di Dinamica: non potendosi intendere ciò, che ad un special moto si appartiene, se prima non siano note le affezioni comuni ad ogni moto.

CAPITOLO I.

Del moto in generale, e delle sue principali affezioni.

7. COnforme il moto, di cui dobbiam ragionare, risiede ne' corpi; così per l' intelligenza di quel tanto dee dirsi intorno al moto giova premettere la nozione di alcune affezioni, che sogliono considerarsi in ogni corpo, siccome sono la massa, la mole, e la densità: con far vedere, quale sia l' indole di ciascuna di esse, e donde propriamente derivi la loro considerazione.

I.

Della massa, della mole, e della densità di qualsisia corpo.

8. EGli è comune sentimento de' Fisici, che i minimi elementi di qualsisia corpo siano pic-

picciole particelle non ſolo dotate di eſtenſione, ma eziandio ſolide, ed impenetrabili. Queſte particelle intanto con unirſi inſieme non combacianſi perfettamente tra loro, ma laſciano tra di eſſe alcuni interſtizj, che chiamanſi comunemente pori, ovvero meati. E quindi ſi è, che in ogni corpo debba diſtinguerſi così la maſſa, come la mole (4).

9. S' intende adunque per maſſa di un corpo l'aggregato, o ſia ſomma de' minimi ſuoi elementi; s' intende all'incontro per mole l'eſtenſione, ſotto di cui vedeſi il corpo formato coll'unione di quei minimi elementi. Onde alla maſſa appartiene la ſola eſtenſione de' minimi elementi, che formano il corpo; alla mole poi, oltre di quella eſtenſione, deve aſcriverſi ancora l'altra, che riſiede ne' pori, ovvero meati.

10. I minimi elementi, di cui il corpo ſi compone, ſono riguardati comunemente da' Fiſici come la materia dell'iſteſſo corpo; onde la quantità della materia in ogni corpo non dee ſtimarſi differente dalla ſua maſſa. La mole poi ſi appella ancora col nome di volume; e poichè ella conſiſte in quella eſtenſione, ſotto di cui il corpo ſi ravviſa, perciò la medeſima potrà determinarſi facilmente per mezzo della Geometria (5).

11. Or ſiccome i minimi elementi de' corpi ſono diverſi tra loro tanto per la grandezza, quanto per la figura; così nè pure i pori, che laſciano tra eſſo loro, ſono tutti della ſteſſa ampiezza. Onde conforme ſotto una data mole non ſempre ritrovaſi racchiuſa una ſteſſa quantità di materia; così nè pure una data quantità di materia ſi conterrà ſempre ſotto una ſteſſa mole (6).

12. Da ciò è derivata la conſiderazione della denſità, la quale dee ſtimarſi maggiore, o minore sì per la maggiore, o minore quantità di materia, che ſi contiene ſotto una data mole; come per la minore, o maggiore mole, ſotto di cui racchiudeſi una data quantità di materia. Onde ne' corpi di eguali

moli le densità sono nella diretta ragione delle masse; ne' corpi all'incontro di eguali masse le stesse densità sono nella reciproca ragione delle moli (7).

13. Qualora poi i corpi ritrovansi avere così masse, come moli disuguali: chiaro si è, che le loro densità debbano essere nella ragion composta della diretta delle masse, e della reciproca delle moli. Dal che egli è facile il ricavarne, che avranno due corpi eguali densità, non solo se siano eguali tanto le loro masse, quanto le loro moli, ma eziandio se le masse, e le moli siano tra di esse nella stessa ragione (8).

14. Se bene per mezzo della Geometria sia facile il definire la mole di un corpo; nientedimeno essendo invisibili, così i minimi suoi elementi, come i pori, che tra questi si frammezzano, non possiamo coll'istessa facilità determinare la massa, e la densità del medesimo corpo. Vedremo intanto in appresso, che la massa di qualsisia corpo corrisponde in proporzione al suo proprio peso. Onde le densità di due qualsisiano corpi saranno nella ragion composta della diretta de' pesi, e della reciproca delle moli (9).

15. Dal teorema generale delle densità possiamo dedurne primieramente, che le masse ovvero pesi di due corpi siano nella ragion composta della diretta delle loro densità, e della diretta ancora delle loro moli. Onde, siccome debbono essere nella semplice ragione delle densità, essendo eguali le moli, e nella semplice ragione delle moli, essendo eguali le densità; così se siano eguali tanto le densità, quanto le moli, o pure l' une coll' altre siano reciprocamente proporzionali, le masse ovvero pesi dei due corpi saranno tra loro eguali (10).

16. Possiamo dedurne in secondo luogo, che le moli di due corpi siano nella ragion composta della diretta delle loro masse, e della reciproca delle loro densità. Onde, conforme debbono essere nella semplice ragion diretta delle masse, essendo eguali

le

le denſità, e nella ſemplice ragion reciproca dellli denſità, eſſendo eguali le maſſe; così ſe ſiano eguae tanto le maſſe, quanto le denſità, o pure l' une coll' altre ſiano nella ſteſſa ragione, le moli dei due corpi ſaranno tra loro eguali (11).

II.

Del moto, e della quiete: come ancora dello ſpazio, del luogo, e del tempo.

17. PRemeſſe le nozioni di tali affezioni, diciamo ora, che un corpo ſi muove, quante volte ſi traſporta ſucceſſivamente da un luogo in un' altro luogo. E conforme diceſi eſſere luogo di un corpo la porzione dello ſpazio occupata dal medeſimo corpo; così deve intenderſi per ſpazio quella vaſta ed immenſa eſtenſione, in cui i corpi tutti ſi contengono, e che non ſolo è ſimilare da pertutto, ed immobile di ſua natura, ma eziandio vacua, e penetrabile (12).

18. Quantunque poi di queſta vaſta eſtenſione, che forma lo ſpazio, nè pure col penſiero poſſano da noi intenderſi i termini; nientedimeno ſogliamo limitarla per rapporto ai corpi ſteſſi, che in eſſa ſi contengono. E perciò oltre allo ſpazio aſſoluto, la di cui indole ſi è di eſſere immobile così nel ſuo tutto, come nelle ſue parti, giova diſtinguere lo ſpazio relativo: per cui ſiccome intendeſi quello, che ſi conſidera per rapporto ai corpi, che egli racchiude; così riguardaſi come mobile, per cambiarſi col moto degli ſteſſi corpi (13).

19. Poichè dunque per luogo di un corpo intendeſi la porzione dello ſpazio occupata dal medeſimo corpo; chiaro ſi è, che ancora il luogo debba diſtinguerſi in aſſoluto, e relativo. In fatti, o egli riguardaſi come porzione dello ſpazio aſſoluto, ed in queſto caſo dee dirſi luogo aſſoluto; o il medeſimo conſideraſi come porzione di uno ſpazio relativo, ed in queſt' altro caſo dovrà chiamarſi luogo relativo.

20. E poichè per moto s'intende il trasporto successivo di un corpo da un luogo in un' altro luogo; chiara cosa ancora si è, che eziandio il moto debba distinguersi in assoluto, e relativo. Di fatti, o il corpo trasportasi da un luogo assoluto in un' altro ancora assoluto, e questo suo trasporto dee dirsi moto assoluto; o trasportasi da un luogo relativo in un' altro ancora relativo, e quest' altro suo trasporto dovrà chiamarsi moto relativo.

21. Al moto poi si oppone la quiete, per cui s' intende la permanenza del corpo in un medesimo luogo. Nè egli è da porsi in dubbio, che ancora la quiete debba distinguersi in assoluta, e relativa. Imperocchè o il corpo persiste sempre in un medesimo luogo assoluto, e questa sua permanenza dee dirsi quiete assoluta; o sempre si ditiene in un' istesso luogo relativo, e quest' altra sua permanenza dovrà chiamarsi quiete relativa.

22. Or per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che la quiete relativa non sia sempre vera quiete. In effetto si è veduto di sopra, che sebbene lo spazio assoluto sia di sua natura immobile; nientedimeno l' altro relativo possa essere capace di moto. Onde se fingiamo, che un qualche spazio relativo, come quello di una nave, effettivamente si muova; non v' ha dubbio, che si muoveranno altresì i corpi tutti, che occupano quello spazio, e godono di una quiete relativa.

23. Per la stessa ragione può avvenire ancora, che il moto relativo o non sia vero moto, o non facciasi con quella legge, sotto di cui a noi si manifesta. In fatti, se una nave con una data velocità muovasi verso occidente; participeranno di questo moto tuttti i corpi, che nella nave ritrovansi. Onde se uno di essi muovasi verso oriente sulla nave medesima, il suo moto relativo dovrà diminuirsi dell' altro della nave; e perciò siccome si ridurrà egli a vera quiete, se le velocità dei due moti siano eguali; così essendo queste disuguali, si trasporterà

terà effettivamente il corpo colla differenza delle due velocità, e colla direzione della velocità maggiore..

24. Quindi, per giudicare sanamente del moto, o della quiete relativa di un corpo, dee conoscersi preventivamente lo stato dello spazio relativo, in cui vedesi quel corpo muovere, o stare in quiete. E poichè questo spazio relativo può essere porzione di un' altro spazio relativo maggiore; perciò eziandio lo stato di quest' altro spazio deve essere a noi noto. Ed essendo così, egli è chiaro non essere cosa così facile il giudicare, se un corpo in questo mondo effettivamente si muova, o sia in quiete (14).

25. Del rimanente, consistendo il moto nel trasporto successivo di un corpo da un luogo in un' altro luogo, chiaro si è, che non possa egli essere instantaneo, ma debba farsi sempre in tempo. Intorno al tempo poi giova quì l' avvertire, che egli non sia altra cosa, se non che la durazione successiva delle cose create, le di cui parti si succedono eguabilmente, senza essere soggette a' nostri sensi. Per renderle intanto sensibili, sogliamo noi misurarle col moto eguabile di un qualche corpo; onde si è, che ancora il tempo deè distinguersi in assoluto, e relativo (15).

26. Specialmente poi per la misura del tempo si è ricorso al Sole; sì per essere un corpo, che da tutti si distingue; come ancora, perchè il di lui moto sembra essere eguabile, ed uniforme. Ma se bene una tal misura sia bastante per gli usi della vita civile; nientedimeno pure è soggetta a qualche piccolo errore, per non essere del tutto eguabile il moto del Sole. Ed in fatti gli stessi Astronomi riconoscono qualche divario tra il tempo apparente, ed il tempo vero; onde si è, che si sono studiati di prescrivere regole per uguagliargli, e dedurre l'uno dall' altro (16).

III.

Della velocità, o sia celerità: come ancora del moto equabile.

27. CONsistendo il moto nel trasporto successivo del corpo da un luogo in un' altro luogo, non solo dovrà egli farsi sempre in tempo, ma eziandio il corpo col suo moto dovrà percorrere un qualche spazio. L' esperienza intanto c' insegna, che nè in un dato tempo si percorre sempre dal mobile lo stesso spazio, nè un dato spazio si percorre sempre dal mobile nel medesimo tempo. Onde da ciò è derivata la considerazione della velocità o sia celerità, che dee dedursi così dallo spazio, che percorre il mobile, come dal tempo, che impiega a percorrerlo.

28. Ed in vero movendosi il corpo in un dato tempo, la sua velocità dee stimarsi maggiore, o minore a misura dello spazio maggiore, o minore, che egli percorre in quel dato tempo. All' incontro poi portandosi il corpo per un dato spazio, la sua velocità dovrà giudicarsi maggiore, o minore a misura del tempo minore, o maggiore, che egli impiega a percorrere quel dato spazio. Onde, essendo dato il tempo, la velocità sarà proporzionale direttamente allo spazio percorso; essendo poi dato lo spazio, la stessa velocità sarà reciprocamente proporzionale al tempo (17).

29. Adunque, siccome movendosi due corpi in tempi eguali, le loro velocità debbono essere nella diretta ragione degli spazj percorsi; così al contrario percorrendo due corpi eguali spazj, le stesse loro velocità dovranno essere nella reciproca ragione de' tempi. Quindi, se siano disuguali così i tempi, come gli spazj, le velocità dei due corpi saranno nella ragion composta della diretta degli spazj, e della reciproca de' tempi; e pertanto, se siano eguali tanto gli spazj, quanto i tempi, o pure gli uni cogli altri siano nella stessa ragione, le velocità dei

due

due corpi saranno tra loro eguali.

30. Essendo così, per vedere se un corpo mosso continui il suo moto sempre colla stessa velocità, non dovrà farsi altra cosa, se non che notare, se gli spazj percorsi si ritrovino essere sempre nella stessa ragione coi tempi, in cui si percorrono. L'esperienza intanto ci apprende, che non ogni moto, facciasi con questa legge; e quindi è derivata la divisione del moto in eguabile, e variabile: chiamandosi moto eguabile ovvero uniforme quello, in cui la velocità rimane sempre la medesima; e moto variabile ovvero difforme l'altro, in cui la velocità varia in ogni momento.

31. Per quanto al moto eguabile, le sue affezioni sono facili a definirsi. Imperocchè, non soggiacendo la di lui velocità a cambiamento alcuno, conforme gli spazj percorsi con un tal moto debbono essere come i tempi, in cui si percorrono; così in tempi eguali debbono percorrersi spazj eziandio eguali. Ma egli è facile di paragonare ancora tra loro i moti eguabili di due corpi, non solo per le loro velocità, ma altresì tanto per gli spazj, che si percorrono con tali moti, quanto per gli tempi, che s'impiegano a percorrergli.

32. In fatti, se due corpi si muovano eguabilmente, le loro velocità, che restano sempre le medesime, debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazj, e della reciproca de' tempi. Onde, siccome saranno nella sola ragion diretta degli spazj essendo eguali i tempi, e nella sola ragion reciproca de' tempi, essendo eguali gli spazj; così se mai siano eguali tanto i tempi, quanto gli spazj, o pure gli uni cogli altri siano nella stessa ragione, le velocità dei due corpi saranno tra loro eguali.

33. Per quanto poi agli spazj, che percorrono due corpi eguabilmente mossi, questi debbono essere nella ragion composta della diretta delle velocità, e della diretta ancora de' tempi. Onde, conforme saranno nella sola ragion diretta delle veloci-

tà

tà essendo eguali i tempi, e nella sola ragion diretta dei tempi essendo eguali le velocità; così, se mai siano eguali tanto i tempi, quanto le velocità, o pure le velocità, ed i tempi siano reciprocamente proporzionali, gli spazj percorsi dai due corpi saranno tra loro eguali.

34. Finalmente per quanto ai tempi, che due corpi mossi eguabilmente impiegano a percorrere due qualsisiano spazj, questi debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazj, e della reciproca della velocità. Onde siccome saranno nella sola ragion diretta degli spazj, essendo eguali le velocità, e nella sola ragion reciproca delle velocità, essendo eguali gli spazj; così se mai siano eguali tanto le velocità, quanto gli spazj, o pure le velocità, e gli spazj siano nella stessa ragione, i tempi impiegati a percorrere detti spazj saranno tra loro eguali.

IV.

Del moto variabile, e delle sue varie specie.

35. CONforme nel moto eguabile la velocità rimane sempre la medesima, così al contrario nel moto variabile ella si cambia continuamente. Può cambiarsi intanto la velocità di un mobile non solo con aumentarsi, ma eziandio con diminuirsi; onde si è, che dividesi il moto variabile in accelerato, e ritardato: chiamandosi moto accelerato quello, in cui la velocità sempre si aumenta; e per lo contrario moto ritardato l'altro, in cui la velocità sempre si minora.

36. Or potendosi la velocità di un mobile aumentare, e diminuire con infinite leggi diverse, non v' ha dubbio, che possano essere infinite altresì le specie tanto del moto accelerato, quanto del moto ritardato. Meritano intanto special considerazione il moto eguabilmente accelerato, in cui la velocità si aumenta in ragion del tempo; ed il moto eguabilmente ritardato, in cui la velocità si diminuisce

nuiſce nella ſteſſa ragione. E ciò per la ragione, che queſte due ſpecie di moto variabile hanno luogo nella caduta, e ſalita de'gravi, ſecondo ſi vedrà in appreſſo (18).

37. Per poco, che ſi voglia riflettere, ſi comprenderà facilmente, che ſiccome le parti dello ſpazio percorſe ſucceſſivamente in tempi eguali ſono eziandio eguali nel moto eguabile; così debbono eſſere ſempre più maggiori nel moto accelerato, e ſempre più minori nel moto ritardato. Anzi ſiccome i tempi, in cui ſi percorrono ſucceſſivamente eguali parti dello ſpazio, ſono eziandio eguali nel moto eguabile; così dovranno farſi ſempre più minori nel moto accelerato, e ſempre più maggiori nel moto ritardato.

38. In qualſiſia moto variabile conforme cambiaſi la velocità in ogni momento, così chiamaſi velocità iniziale quella, con cui incomincia il moto, e ſi appella velocità finale quella, con cui termina l'iſteſſo moto. Ma egli è da notarſi, che una di queſte due velocità può eſſere tal volta nulla, cioè la velocità iniziale nel moto accelerato, e la velocità finale nel moto ritardato: conforme ſcorgeſi nella caduta libera de' gravi, che è moto accelerato, e nella ſalita de' medeſimi, che è moto ritardato.

39. Quantunque poi nel moto variabile cambiaſi la velocità continuamente; nientedimeno, ſe intendiamo diviſo il tempo in particelle infinitamente picciole, non v'ha dubbio, che il cambiamento della velocità in ciaſcuna di eſſe ſarà eziandio di una picciolezza infinita. Quindi ſiccome sì fatto cambiamento può traſcurarſi impunemente, e ſenza nota di errore; così il moto ſteſſo, durante quella picciola porzione di tempo, potrà riguardarſi come eguabile, ed uniforme. Onde eſſendo nota la legge, con cui cambiaſi la velocità per rapporto al tempo, niente ſarà più facile, quanto il definire, come ſiano gli ſpazj percorſi relativamente ai tempi, in cui ſi percorrono (19).

40

Fig. 1. 2. 40. Perciò intorno alla retta AB come asse intendasi descritta la curva CD d' indole tale, che esprimendosi i tempi per le ascisse AN, AQ, ci additino le ordinate MN, PQ corrispondenti a dette ascisse le velocità, che ritrovasi avere il mobile nella fine di quei tempi. Ed io dico, che se AC sia l'ordinata della curva, che ci disegna la velocità iniziale, gli spazj percorsi dal mobile nei tempi AN, AQ siano come l'aree corrispondenti ACMN, ACPQ. Per dimostrarlo, sia *mn* un' altra ordinata infinitamente vicina alla MN; ed essendo N*n* una porzione di tempo infinitamente picciola, potrà aversi il moto, durante questa picciola porzione di tempo, come eguabile, ed uniforme.

41. Quindi il picciolo spazio, che tra questo mentre si percorre dal mobile, sarà congiuntamente come la velocità MN, con cui si percorre, ed il picciolo tempo N*n*, in cui si percorre. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il picciolo rettangolo di MN in N*n*, che non differisce sensisibilmente dal picciolo trapezio MN*nm*. Dunque quel picciolo spazio, e questo picciolo trapezio saranno proporzionali tra loro; e pertanto, avendo luogo da pertutto la stessa dimostrazione, sarà componendo così lo spazio percorso nel tempo AN proporzionale all'area ACMN, come lo spazio percorso nel tempo AQ proporzionale all'area ACPQ.

42. Con questo stesso artificio niente ancora farà più facile, quanto di paragonare lo spazio percorso dal mobile in un qualche tempo così con quello, che nell' istesso tempo si percorrerebbe eguabilmente colla velocità iniziale, come coll' altro, che nel medesimo tempo eziandio eguabilmente si percorrerebbe colla velocità finale. In fatti, se il tempo si disegni per l' ascissa AQ, sarà AC la velocità iniziale, e PQ la velocità finale. Onde, se forminsi i due rettangoli ACRQ, ASPQ; sarà lo spazio, che nel tempo AQ si percorre eguabilmente colla velocità iniziale AC, proporzionale al primo

mo di essi; e l'altro spazio, che nel medesimo tempo AQ si percorre eguabilmente colla velocità finale PQ proporzionale al secondo.

43. Or di già si è dimostrato, che lo spazio percorso col moto variabile nel tempo AQ sia proporzionale all' area ACPQ. Dunque, conforme egli deve essere allo spazio, che nell' istesso tempo AQ si percorre eguabilmente colla velocità iniziale AC, come l'area ACPQ al rettangolo ACRQ; così sarà all' altro spazio, che nel medesimo tempo AQ si percorre eziandio eguabilmente colla velocità finale PQ, come la stessa area ACPQ all'altro rettangolo ASPQ. Ed egli è da notarsi, che siccome svanisce il primo dei due rettangoli, essendo nulla la velocità iniziale AC; così svanirà il secondo di essi, se mai sia nulla la velocità finale PQ.

V.

Del momento, o sia quantità di moto di qualsisia mobile.

44. Qualora un corpo si muove, egli non è da porsi in dubbio, che si muovano altresì tutti i minimi elementi, di cui quel corpo si compone. Quindi la quantità del moto, che risiede nel corpo, sarà la somma, o aggregato de' moti, che risiedono nei minimi suoi elementi. Onde egli è facile il dimostrare, che la stessa quantità di moto debba ripetersi non solo dalla velocità, con cui il corpo si muove, ma eziandio dalla massa, o sia peso del medesimo corpo (20).

45. Ed in vero, siccome l' effetto del moto altro non è, se non se lo spazio, che si percorre dal mobile in un dato tempo; così sembra naturale il credere, che debba giudicarsi della sua quantità per mezzo della velocità stessa del corpo. Ma conforme quello spazio si percorre da tutti i minimi elementi del corpo, e questa velocità ritrovasi in ciascuno di detti elementi; così la giusta misura della riferita

ferita quantità di moto farà la velocità del corpo presa tante volte, quanti sono di numero i suoi elementi.

46. Essendo così, egli è chiaro doversi ripetere la quantità del moto, che risiede in un corpo, così dalla velocità, con cui il corpo si muove, come dal numero de' suoi minimi elementi. E poichè niente vieta di riguardare in ogni corpo questi minimi elementi come dotati di una data grandezza; perciò il loro numero in qualsisia corpo corrisponderà in proporzione alla massa, o sia peso del medesimo corpo. Onde la stessa quantità di moto dovrà dedursi così dalla velocità, come dalla massa.

47. Se adunque due corpi si muovano, le quantità dei loro moti saranno in ragion composta delle loro velocità, e delle loro masse. Onde siccome debbono essere nella semplice ragione delle velocità essendo eguali le masse, e nella semplice ragione delle masse essendo eguali le velocità; così, se mai siano eguali tanto le velocità, quanto le masse, o pure le masse siano nella reciproca ragione delle velocità, avranno i due corpi eguali quantità di moto.

48. Or conforme il moto di un corpo può essere o eguabile, o variabile; così la sua quantità sarà sempre la stessa nel primo caso, e dovrà cambiarsi continuamente nel secondo. In fatti dovendo ella ripetersi così dalla massa, come dalla velocità di un corpo; chiaro si è, che in un dato corpo debba giudicarsi di essa per ciò, che avviene alla sola velocità. Onde siccome la velocità è sempre la stessa nel moto eguabile, e cambiasi continuamente nel moto variabile; così eziandio la quantità di moto sarà costante nel primo, e si cambierà in ogni momento nel secondo (21).

49. Del rimanente la quantità di moto si appella ancora momento per la ragione, che siccome col moto si rende il corpo capace di agire, così la sua forza attiva dee stimarsi maggiore, o minore

re

re per la maggiore o minore quantità di moto, che in esso risiede. Di fatti l' esperienza stessa ci apprende, che si aumenta la forza attiva di un corpo non meno con aumentare la sua velocità, che con aggiungere ad esso maggior copia di materia. Onde dovendosi eziandio quella ripetere così dalla velocità, come dalla massa del corpo; sarà la medesima proporzionale alla quantità di moto dello stesso corpo (22).

50. Intanto sebbene la forza attiva di un corpo, che si muove, sia sempre proporzionale alla quantità del suo moto; nientedimeno l' attuale azione non sempre corrisponderà in proporzione alla stessa quantità di moto. Avviene ciò quante volte agisce il corpo con una sola porzione della sua velocità, poichè siccome in questo caso la rimanente porzione niente contribuisce all' azione, che esercita il corpo, così in definire la stessa azione dovrà tenersi conto della sola porzione impiegata, nè bisognerà porre a calcolo l' altra rimanente (23).

31. Dall' esser poi la forza attiva di un mobile proporzionale alla quantità del suo moto, egli è facile il ricavarne, che non possa esservi equilibrio tra due corpi, che agiscono tra esso loro colle forze loro totali, se non siano eguali le quantità dei loro moti, da cui derivano le loro forze. E poichè per avere questa uguaglianza, è necessario, che le velocità dei due corpi siano reciprocamente proporzionali alle loro masse, o siano pesi; perciò vi sarà equilibrio tra due corpi, che nelle scambievoli loro azioni impiegano le totali loro forze, qualora le velocità, ed i pesi dei due corpi sono reciprocamente proporzionali tra loro (24).

IV.

VI.

Della forza motrice, e del modo di definire la sua atttività.

52. LA materia, di cui sono composti i corp tutti, vien riguardata comunemente da Fisici come inerte, e priva di ogni attività. Quinci siccome un corpo di sua natura è incapace di muoversi da per se stesso, così non potrà egli porsi in moto, se non lo riceva da qualche causa esteriore, che sia valevole a generarlo. Questa causa qualunque ella sia, chiamasi forza motrice, la quale niente vieta di essere talvolta il moto istesso di un'altro corpo, essendo noto per esperienza, che un corpo mosso possa muovere un'altro corpo, con cui egli s' incontra.

53. Or sebbene l' effetto della forza motrice sia il moto, che si produce nel corpo: nientedimeno, per giudicare dirittamente di essa, dee tenersi conto non solo del moto prodotto, ma eziandio del tempo, che s' impiega nella produzione del moto. Ed in fatti dee stimarsi una forza motrice maggiore, o minore sì per lo moto maggiore, o minore, che produce nel corpo in un dato tempo, come ancora per lo minore, o maggior tempo, che impiega in produrre un dato moto.

54. Le forze motrici adunque, che producono moti diversi in tempi eguali, sono nella diretta ragione de' moti prodotti; quelle poi, che producono moti eguali in tempi diversi, sono nella reciproca ragione de' tempi. Ma siccome essendo disuguali tanto i tempi, quanto i moti, le stesse forze motrici debbono essere nella ragion composta della diretta de' moti, e della reciproca de' tempi; così se mai siano eguali non meno i tempi, che i moti, o pure gli uni cogli altri siano nella stessa ragione, le forze motrici saranno tra loro eguali (25).

55. Conforme poi il moto di un corpo può essere o eguabile, o variabile; così conviene credere, che

che la forza motrice talvolta agiſce su 'l corpo una volta ſola, ed indi lo abbandona, talvolta lo ſpinge continuamente ſenza laſciarlo giammai. In effetto nel primo caſo il corpo ſi muove ſempre con quella ſteſſa velocità impreſſagli dalla forza in quella ſola volta; onde ſi è, che il ſuo moto ſia eguabile. All'incontro nel ſecondo per le continue ſpinte della forza motrice la velocità del corpo riceve ſempre nuovi aumenti; e pertanto il ſuo moto ſarà non ſolo variabile, ma eziandio accelerato.

56. Egli è vero, che il moto variabile può eſſere ancora ritardato; ma eziandio per queſto moto dee ricevere il corpo continue ſpinte da una qualche forza motrice. Fingiamo perciò, che al corpo ſia ſtata impreſſa da una qualche forza una data velocità; e ſe un'altra forza lo ſpinga continuamente con direzione oppoſta, colla nuova velocità impreſſa al corpo da queſt'altra forza ſenza dubbio ſi minorerà la prima. Onde ſiccome queſta ſeconda velocità per le continue ſpinte della forza motrice, che la produce, ſempre più ſi va aumentando; così al contrario la prima per mezzo di eſſa ſi anderà ſempre più minorando, ed in conſeguenza il moto del corpo ſarà ritardato.

57. Il più delle volte intanto veggiamo ritardarſi il moto di un qualche corpo per la continua reſiſtenza, che incontra il corpo nel mezzo, in cui ſi muove. Ma in queſto caſo la ſteſſa reſiſtenza, che dee ſuperarſi dal corpo in ogni momento, ſi potrà riguardare come un' altra forza, che agiſce su 'l corpo con direzione oppoſta al di lui moto. Ed in queſta guiſa potrà averſi il moto eguabile eziandio per mezzo di una forza, che continuamente ſpinga il corpo: baſtando, che egli facciaſi in un mezzo, che colla ſua continua reſiſtenza gli tolga quello ſteſſo aumento di velocità, che dalla forza riceve (26).

58. Vedeſi ciò nella caduta de' gravi, la quale ſebbene da principio ſia moto accelerato, tutta volta

ta dopo un qualche termine riducesi finalmente ad essere moto equabile, ed uniforme. In fatti i gravi cadendo intanto si accelerano, perchè sono spinti continuamente da quella forza, che chiamasi gravità. E quantunque il loro moto facciasi nell'aere, che in ogni momento gli toglie porzione della velocità, che acquistano; nientedimeno ciò, che si aggiunge ad essi di velocità, è sempre maggiore di quella, che perdono; onde, non ostante la resistenza dell'aere, il loro moto continua ad essere accelerato.

59. Niente però vieta, che dopo un qualche termine la resistenza dell'aere per rapporto ai gravi, che cadono, diventi tale, che tolga a' detti gravi quello stesso aumento di velocità, che ad essi si aggiunge. Onde siccome in questo caso continuano i gravi la loro caduta con quella medesima velocità, che ritrovansi avere acquistata; così il loro moto non sarà più accelerato, ma bensì equabile, ed uniforme. Anzi se mai la resistenza dell' aere potesse divenire maggiore, cosicchè togliesse ai gravi maggior velocità di quella, che acquistano; in tal caso il loro moto diverrebbe ritardato.

60. Del rimanente intorno alla forza motrice, che spinge il corpo continuamente, giova l' avvertire, che siccome ella può essere o costante, o variabile; così la velocità, che si acquista dal corpo colle continue sue spinte, può aumentarsi o nella stessa ragione col tempo, o pure in altra ragione. E poichè in una particella di tempo infinitamente picciola niente vieta di riguardare come costante qualsisia forza variabile; perciò, se mai sia nota la legge, con cui cambiasi la forza motrice per rapporto al tempo, potrà determinarsi facilmente, come debba aumentarsi la velocità del corpo relativamente all' istesso tempo (27).

Fig. 1.2. 61. Descrivasi perciò intorno alla retta AB come asse la curva CD d' indole tale, che esprimendosi i tempi per le ascisse AN, AQ, ci additino le le ordinate MN, PQ corrispondenti a dette ascisse le forze, che spingono il corpo nella fine di quei tempi. Ed io dico, che se AC sia l' ordinata della curva, che ci disegna la forza iniziale, le velocità acquistate dal corpo nei tempi AN, AQ siano come le aree corrispondenti ACMN, ACPQ. Per dimostrarlo, sia *mn* un' altra ordinata infinitamente vicina alla prima MN; ed essendo N*n* una porzione di tempo infinitamente picciola, potrà aversi la forza durante questa picciola porzione di tempo come costante.

62. Quindi il picciolo aumento di velocità, che tra questo mentre si aggiunge al corpo, sarà congiuntamente come la forza MN, da cui deriva, ed il picciolo tempo N*n*, in cui si genera. Ma in questa stessa ragion composta sta ancora il picciolo rettangolo di MN in N*n*, che non differisce sensibilmente dal picciolo trapezio MN*nm*. Dunque quel picciolo aumento di velocità, e questo picciolo trapezio saranno proporzionali tra loro; e pertanto, avendo luogo da pertutto la stessa dimostrazione, sarà componendo così la velocità acquistata nel tempo AN proporzionale all'area ACMN, come la velocità acquistata nel tempo AQ proporzionale all'area ACPQ (28).

VII.

Delle forze centrali, e del modo di determinare la loro attività.

63. TRa le forze motrici meritano special considerazione quelle, che spingono i corpi verso un qualche centro, ed a cui perciò si è dato il nome di forze centrali. Di questa indole è la forza della gravità, per mezzo di cui i corpi terrestri sono spinti verso il centro della terra. E tale ancora è la forza, che trattiene nei loro orbi così i pianeti primarj, come gli altri secondarj, per la ragione, che i primi sono spinti da quel-

la forza verso il centro del Sole, ed i secondi verso i centri de' loro primarj (29).

64. Quantunque non siano di accordo tra loro i Fisici intorno all' origine di queste forze centrali; tuttavolta niente vieta di riguardarle, come inerenti ai loro centri, e diramate intorno intorno per tante linee rette, che partono dagli stessi centri. Intanto, secondo questa loro nozione, i corpi, su di cui agiscono tali forze, dovranno dirsi non tanto spinti, quanto tirati verso i centri, in cui le forze risiedono; e quindi si è, che tali forze si appellano ancora da alcuni col nome di forze traenti (30).

65. Se bene poi si voglia supporre, che queste tali forze in tutta la lunghezza delle rette, per cui si diramano, conservino sempre l' istesso vigore; pure però la loro attività dovrà tanto più minorarsi, quanto maggiormente si discostano dal loro centro: e ciò per la ragione, che le stesse rette, per cui le forze si diramano, con discostarsi maggiormente dal centro, si fanno vie più divergenti. Anzi nella riferita supposizione egli è facile il dimostrare, che l' attività della forza debba minorarsi in duplicata ragione della sua distanza dal centro.

66. Intendasi perciò diviso tutto lo spazio, che giace intorno al centro della forza, in tanti piccioli strati per superficie sferiche, che abbiano per loro centro comune l' istesso centro della forza. Ed attenta la divergenza delle rette, per cui la forza si dirama, chiaro si è, che l' attività della forza debba tanto più minorarsi, quanto diviene maggiore la superficie sferica, in cui ella si esercita. Onde, siccome la superficie sferica si aumenta nella duplicata ragione della sua distanza dal centro; così in questa stessa duplicata ragione dovrà minorarsi altresì l' attività della forza (31).

67. Intanto, siccome questa legge di diminuzione ha luogo nella supposizione, che la forza in tutta la lunghezza delle rette, per cui si dirama, conservi sempre l' istesso vigore; così potrebbe non essere

re vera una tal ſuppoſizione, nel quale caſo dovrebbe minorarſi l'attività della forza con altra legge. Qualunque però ſiaſi la legge, con cui ſi ſpande la forza intorno al ſuo centro, ſe mai ella ſia nota, niente ſarà più facile, quanto il definire la ragione, che ſerbano tra loro le velocità, che ritrovaſi avere il corpo in varj luoghi, eſſendo tirato verſo il centro da una tale forza.

68. Fingiamo perciò, che C ſia il centro della forza, ed AC la retta, per cui il corpo tirato da queſta forza ſi porta verſo il centro. Deſcrivaſi intorno alla AC come aſſe la curva BD d'indole tale, che colle ſue ordinate BA, MN, PQ ci diſegni le diverſe attività della forza nei luoghi corriſpondenti A, N, Q. Ed io dico, che le velocità acquiſtate dal corpo per ſino ai luoghi N, e Q ſi ritroveranno eſſere tali, che i loro quadrati saranno, come le aree corriſpondenti ABMN, ABPQ. *Fig.* 3.

69. Per dimoſtrarlo, intendaſi intorno alla ſteſsa AC deſcritta l'altra curva AE di natura tale, che colle ſue ordinate NO, QR ci diſegni le velocità, che ritrovaſi avere il corpo nei luoghi N, e Q; e ſuppongaſi ancora, che l'altra *mo* ſia talmente vicina alla prima MO, che nel traſporto del corpo per lo picciolo ſpazio N*n* l'attività della forza reſti la medeſima. Se adunque tiriſi la *o*S parallela alla AC, che s'incontri colla NO nel punto S; ſarà OS l'aumento di velocità, che riceve il corpo nel ſuo traſporto per N*n*; e pertanto, ſe ſia dato il picciolo tempo, in cui ſi fa detto traſporto, ſarà quell'aumento di velocità OS proporzionale alla forza MN, da cui ſi genera.

70. Eleviſi ora ſulla MO la perpendicolare OH eguale alla NO, e prolunghiſi la *o*S fino a che s'incontri colla NH nel punto I. Facendoſi adunque la velocità NO, ovvero OH proporzionale allo ſpazietto N*n*, che con eſſa ſi percorre; ſaranno proporzionali altresì i due piccioli trapezj HOSI, MN*nm*, che poſsono riguardarſi come due piccioli

rettangoli. Onde, perchè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto, sarà componendo il triangolo NOH proporzionale all'area ABMN; ed in conseguenza, essendo quel triangolo la metà del quadrato fatto dalla NO, sarà eziandio questo quadrato proporzionale all'area ABMN (32).

71. In una maniera consimile dimostreremo parimente, che il quadrato della QR sia proporzionale all'area ABPQ. Onde non è egli da porsi in dubbio, che i quadrati delle velocità acquistate dal corpo per fino ai luoghi N, e Q siano come le aree corrispondenti ABMN, ABPQ. Quindi, se intorno al medesimo asse A C descrivasi la terza curva FG d'indole tale, che i quadrati delle sue ordinate NT, QU siano reciprocamente proporzionali all' aree ABMN, ABPQ; egli è facile il dimostrare, che i tempi, in cui si percorrono dal corpo gli spazj AN, AQ, siano come le aree corrispondenti di quest'altra curva.

72. In fatti, essendo il quadrato dell' ordinata NT reciprocamente proporzionale all'area ABMN; sarà la stessa NT reciprocamente proporzionale alla velocità, che ritrovasi avere il corpo nel luogo N. Onde, attenta la maniera di definire il tempo nel moto equabile, sarà il picciolo tempo, in cui si percorre dal corpo lo spazietto N*n*, proporzionale al picciolo trapezio TN*nt*, che può riguardarsi come un picciolo rettangolo. E poichè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto; perciò i tempi, in cui si percorrono dal corpo gli spazj AN, AQ, saranno come le aree corrispondenti della nuova curva FG.

VIII.

Delle forze vive, e della vera loro misura.

73. LE cose dette fin' ora intorno alle forze motrici, ci danno bastante lume per definire la celebre controversia delle forze vive, la quale

quale tutta si aggira intorno alla maniera di definirle, e di porle a calcolo. Si appellano adunque col nome di forze vive tutte quelle forze, che non solo spingono continuamente i corpi, su de' quali agiscono, ma colle continue loro spinte ottengono altresì l'effetto di muovere gli stessi corpi; e di trasportargli per un qualche spazio, durante la loro azione,

74. Ciò, che poi si controverte intorno alle forze di questa indole, si è come debbano porsi a calcolo, e quale debba essere la vera loro misura. Imperocchè, essendo data la massa del corpo, su di cui agiscono, alcuni pretendono, che tali forze siano proporzionali alla velocità, che generano nel corpo almeno in un dato tempo; altri all' incontro sono nel sentimento; che le riferite forze corrispondano in proporzione non già alla semplice velocità, che da esse si genera nel corpo, ma bensì al di lei quadrato (33).

75. Ed in vero la prima cosa da noi stabilita intorno a qualsisia forza motrice si è, che ella sia in ragion composta della diretta del moto prodotto, e della reciproca del tempo, che impiega a produrlo. Onde siccome essendo dato il tempo, la forza motrice deve essere nella semplice ragion diretta del moto prodotto; così, se insieme col tempo sia data ancora la massa del corpo, in cui il moto si produce, la stessa forza motrice dovrà essere proporzionale alla semplice velocità, che ella genera nel corpo.

76. La verità di ciò da nessuno rivocasi in dubbio, quante volte la forza agisce su 'l corpo una volta sola, e con una sola spinta genera in quella qualche velocità, e lo pone in moto. Ma sorge il dubbio intorno alla forza, che spinge il corpo continuamente, ed in ogni spinta aggiunge velocità all'istesso corpo. Imperocchè, siccome in questo caso per avere la forza, da cui deriva la totale velocità generata nel corpo, bisogna riunire insieme

tutte le forze, da cui si sono date al corpo le diverse spinte; così potrebbe avvenire, che la somma di queste forze fosse proporzionale al quadrato della riferita velocità.

77. Nè poi è da porsi in dubbio, che debbansi riunire insieme tutte le forze, da cui si sono date al corpo le diverse spinte, per potersi aver la forza, a cui deve ascriversi la totale velocità generata nel corpo. Poichè per prima siccome in ciascuna spinta si aggiunge velocità al corpo, così la forza nella totale sua azione viene a ripetersi tante volte, qnante sono le spinte. E di poi potendo essere la forza variabile di sua natura, è necessario, che la medesima per ciascuna spinta si consideri in quel grado di attività, in cui ella era nel punto di dare al corpo quella spinta.

78. Or le forze, che danno al corpo le diverse spinte, in due maniere possono sommarsi insieme: cioè, o relativamente alle parti del tempo, in cui si sono date da essa al corpo quelle spinte; o relativamente alle parti dello spazio, che si percorre dal corpo in quel medesimo tempo. E quindi sorgono due teoremi diversi; poichè siccome sommandole per rapporto alle parti del tempo, la loro somma ritrovasi proporzionale alla semplice velocità generata nel corpo; così al contrario, se vogliansi sommare per rapporto alle parti dello spazio, la stessa somma si farà proporzionale al quadrato della riferita velocità.

Fig. 1. 79. Questi due teoremi di già sono stati dimostrati da noi di sopra. In fatti per quanto al primo, se la curva CD descritta intorno all' asse AB sia d' indole tale, che le ascisse AN, AQ ci additino i tempi, e le ordinate MN, PQ ci esprimano le attività della forza nella fine di quei tempi; chiaro si è, che le aree ACMN, ACPQ saranno le forze sommate insieme relativamente alle parti del tempo. Onde siccome le velocità generate nel corpo ne' tempi AN, AQ si sono dimostrate propor-

zio-

zionali all'aree ACMN, ACPQ; così le medesime velocità saranno proporzionali altresì alle riferite somme.

80. Per quanto poi al secondo, se la curva BD descritta intorno all'asse AC sia di natura tale, che le ascisse AN, AQ siano gli spazj percorsi dal corpo, e le ordinate MN, PQ siano le attività della forza nei luoghi N, e Q; chiara cosa ancora si è, che le aree ABMN, ABPQ saranno le forze sommate insieme relativamente alle parti dello spazio. Onde, siccome i quadrati delle velocità, che ritrovasi avere il corpo ne' luoghi N, e Q, si sono dimostrati proporzionali all'aree ABMN, ABPQ; così i medesimi quadrati saranno proporzionali parimente alle riferite somme. Fig. 3.

81. Ecco adunque donde deriva propriamente il dubbio, in cui si è intorno alla misura delle forze vive. Imperocchè, siccome queste tali forze agiscono continuamente su 'l corpo, ed aggiungono ad esso velocità in ogni spinta, che gli danno; così ciascuna forza si avrà con unire insieme le forze, che danno al corpo le diverse spinte. Onde se queste forze debbono sommarsi insieme relativamente alle parti del tempo, si farà la forza viva proporzionale alla semplice velocità generata nel corpo; ma se all'incontro dee prendersi la loro somma relativamente alle parti dello spazio, la stessa forza viva corrisponderà in proporzione al quadrato della riferita velocità,

82. Intanto, se si voglia attentamente riflettere, si comprenderà facilmente, che per avere la forza viva debbano sommarsi relativamente alle parti del tempo le forze, che danno al corpo le diverse spinte; e ciò per la ragione, che essendo continua, e non mai interrotta l'azione della forza viva, le di lei diverse spinte si succedono eguabilmente, come le parti stesse del tempo. Onde dobbiam conchiudere, che la vera misura di qualsisia forza viva debba ripetersi dalla semplice velocità generata nel corpo,

po, e non già dal di lei quadrato: della quale verità eccone una breve, e netta dimostrazione.

83. Intendasi diviso il tempo, in cui la forza viva agisce su'l corpo, in parti eguali, ed infinitamente picciole; ed essendo continua l' azione della forza viva, in ciascuna di quelle parti riceverà il corpo da essa una spinta. Onde siccome gli aumenti di velocità, che riceve il corpo con queste spinte, sono proporzionali alle forze, che li generano; così componendo eziandio la velocità totale corrisponderà in proporzione alla somma di quelle forze. Ma questa somma è la forza viva, che agisce su'l corpo. Dunque la velocità totale del corpo, e la forza viva, da cui è stata prodotta, saranno parimente proporzionali tra loro.

84. Del rimanente alle forze vive sogliono opporsi le forze morte, per cui s' intendono quelle forze, che sebbene agiscono continuamente su'l corpo, nientedimeno colla continuata loro azione non sono valevoli a porlo in moto: siccome sarebbe il peso di un corpo sostenuto da un qualche piano, il quale non ostante la sua continuata pressione, non mai desta nel piano moto veruno. Ma egli è chiaro, che queste tali forze debbono aversi come morte soltanto per rapporto al corpo, su di cui agiscono, in quanto che incontrano in esso una resistenza, che non può vincersi dalla loro attività (34).

IX.

Della forza dell' inerzia, e dei suoi effetti principali.

85. QUantunque la materia, di cui si compone ogni corpo, sia di sua natura inerte, e priva di ogni attività; nientedimeno conforme i corpi resistono alle forze impresse, così non da altro dee dedursi questa loro resistenza, se non se dall' inerzia stessa della loro materia. Onde non andarono errati coloro, che ci rap-

rappresentarono la materia come un peso inerte; poichè siccome non è da credersi, che avessero avuto in mente quel peso, che deriva dalla gravità, per essere egli attivo di sua natura, e non già inerte; così è molto verisimile, non altra esser stata la loro mira, se non se di darci a divedere, che la materia per la stessa sua inerzia sia capace di opporsi a qualsisia forza motrice.

86. Intendiamo adunque per forza d' inerzia quella resistenza, che oppongono i corpi alle forze motrici. E poichè una tal forza non deriva da una qualche causa esteriore, ma è insita alla stessa materia; perciò egli è facile ad intendersi, che la medesima in ogni corpo debba essere proporzionale alla massa, o sia copia di materia, che nell' istesso corpo si racchiude. Questa forza poi è stata conceduta dalla natura ai corpi tutti unicamente per potersi mantenere per mezzo di essa nello stato, in cui ritrovansi; ed appunto collo sforzo, che fanno i corpi per conservarsi nel loro stato, resistono alle forze motrici, le quali al contrario cercano da quello distoglierli.

87. Quindi se bene la forza dell' inerzia non sia capace di produrre moto alcuno, nientedimeno ad essa deve ascriversi la conservazione del moto generato nel corpo da una qualche forza motrice: tanto vero, che siccome non si diparte mai dal corpo una tal forza, così il corpo una volta mosso dee per mezzo di essa persistere sempre nel medesimo moto. E quantunque i moti, che si fanno presso di noi, vadansi minorando a poco a poco, ed alla per fine cessino interamente; tuttavolta non dobbiamo con taluni darci a credere, che ciò derivi da una natural propensione, che abbiano i corpi per la quiete, ma bensì dai continui ostacoli, che incontrano i corpi mossi, e che non possono da questi superarsi senza perdita di moto.

88. Or siccome ogni moto dee farsi con qualche velocità, così la forza dell' inerzia non fa altra co-

sa

fa nel corpo mosso, se non che conservargli quel grado di velocità impressogli dalla forza motrice; e perciò il suo moto di sua natura dovrà essere eguabile, ed uniforme. Onde al contrario, qualora vedesi cambiata la velocità del corpo, che si muove; bisognerà ascrivere quel cambiamento o a qualche ostacolo, che si è opposto al moto del corpo, o pure a qualche forza motrice, che abbia dato altro impulso all'istesso corpo. Anzi, se il cambiamento della velocità sia continuo, cosicchè il moto del corpo facciasi variabile; conviene credere, che gli ostacoli, ovvero gl' impulsi siano parimente continui.

89. Per la forza dell' inerzia dee rimanere sempre la stessa, non solo la velocità del corpo, ma eziandio la sua direzione. E poichè, quando un corpo incomincia a muoversi, la direzione del suo moto è sempre una linea retta; perciò ogni moto di sua natura dovrà essere rettilineo. Nè vale il dire, che potrebbe un corpo incominciare il suo moto per una qualche linea curva. Imperocchè egli è noto presso de'Geometri, che ogni curva sia composta di rette infinitamente picciole, che traviano l'una dall'altra per angoli di una picciolezza ancora infinita. Onde, attesa questa nozione, non è egli da porsi in dubbio, che ogni moto nel suo principio debba farsi sempre per una linea retta.

90. Qualora adunque vedesi cambiata la direzione del moto, deve ascriversi quel cambiamento o a qualche ostacolo, in cui siasi incontrato il corpo, che si muove, o pure a nuovo impulso impresso all'istesso corpo da una qualche forza motrice. Anzi, se il cambiamento della direzione sia continuo, cosicchè il moto facciasi curvilineo; conviene dire, che gli ostacoli, ovvero gl' impulsi siano eziandio continui. Attenta intanto la forza dell'inerzia, egli è facile il dimostrare, che il corpo mosso per una curva qualsivoglia cerca girsene in ogni punto per la tangente con quella stessa velocità, che ritrovasi ave-

avere in quel medeſimo punto.

91. In fatti, con muoverſi il corpo per una curva, non fa egli altra coſa, ſe non che percorrere ſucceſſivamente le infinite picciole rette, che la compongono. Quindi conſiderandolo nello ſtato di aver precorſo una di quelle picciole rette, dovrà egli per la forza dell'inerzia continuare il ſuo moto non ſolo per la ſteſſa picciola retta prolungata, ma eziandio colla medeſima velocità, con cui ritrovaſi aver percorſo quella picciola retta. Onde, ſiccome con prolungare la riferita picciola retta ſi viene ad avere la tangente della curva; così il corpo in ogni punto della curva, che deſcrive, cercherà di girſene per la tangente con quella ſteſſa velocità, che ritrovaſi avere il corpo in quel medeſimo punto.

92. Vedeſi ciò chiaramente nel corpo, che ſi porta in giro per mezzo di una fionda. Imperocchè ſiccome egli aggiraſi intorno alla mano, che muove la fionda, in virtù della fionda medeſima, che lo trattiene; così non per altra ragione ſenteſi la mano tirata dal corpo, ſe non perchè in ogni punto della curva cerca l'iſteſſo corpo girſene per la retta, che tocca la curva in quel punto. E poichè la mano dal corpo tanto più ſenteſi tirata, quanto è più veloce il di lui moto; perciò nè pure è da porſi in dubbio, che in ogni punto cerca il corpo girſene per la tangente colla ſteſſa velocità, che ivi ritrovaſi avere (35).

X.

Della compoſizione, e riſoluzione così delle forze, come de' moti.

93. QUalora il corpo è ſpinto da una ſola forza, ſiccome il ſuo moto deve eſſere proporzionale alla forza medeſima, così di ſua natura ſarà eguabile ed uniforme, e ſi farà altresì colla ſteſſa direzione, con cui il corpo è ſpinto dalla forza. Ma niente vieta, che un corpo

po

po sia spinto nell'istesso tempo da due, o più forze seconde direzioni diverse. Onde dobbiamo ora far vedere, quale sia il moto del corpo, che risulta da tutte quelle forze, e quale ancora la sua direzione.

94. Ed in primo luogo, se il corpo sia spinto da due forze, che separatamente lo trasportino in un dato tempo, e con moto eguabile per gli due lati di un qualche parallelogrammo, egli è facile il dimostrare, che le medesime insieme debbano trasportarlo nell' istesso tempo, ed eziandio eguabilmente per la diagonale del medesimo parallelogrammo. Sia perciò il corpo situato in A, da cui si percorra eguabilmente, ed in un dato tempo la AB con una forza, e la AC con un'altra forza. Compiscasi il parallelogrammo ABDC; ed io dico, che colle due forze insieme si percorrerà dal corpo eziandio eguabilmente, e nell' istesso tempo la sua diagonale AD.

Fig. 4.

95. In fatti, se bene il corpo sia spinto dalle due forze con direzioni diverse, nientedimeno col suo moto dovrà egli adempiere per quanto si può l' effetto così dell'una, come dell'altra. Onde, siccome il corpo dee condursi colla prima forza verso la BD parallela alla AC, e colla seconda verso la CD parallela alla AB; così bisognerà, che egli nella fine del suo moto si ritrovi nel punto D, che è comune alle due rette BD, CD. Ma dee condursi il corpo da A per fino a D con moto eguabile, e rettilineo, per non esservi altra forza, che possa mutargli la sua velocità, e la sua direzione. Dunque il corpo spinto dalle due forze dovrà percorrere eguabilmente, e nell'istesso tempo la diagonale AD.

96. La stessa verità può dimostrarsi ancora in un' altra maniera, cioè con supporre, che il corpo si muova col solo moto da A verso B, e che l' altro moto da A verso C risieda nella AB, su di cui il corpo si muove.. Imperocchè in questa supposi-

zio-

zione il corpo si muoverà eziandio con due moti per la ragione, che oltre al suo moto proprio, il quale si fa eguabilmente, ed in un dato tempo sulla retta AB da A per fino a B, avrà altresì l'altro moto delle retta AB, che si trasporta nello stesso tempo ancora eguabilmente da AB per fino a CD. Onde, se con questi due moti possiamo dimostrare, che il corpo descrive la diagonale AD; non v'ha dubbio, che dovrà egli descrivere la stessa diagonale ancora, quando i due moti s'imprimono insieme allo stesso corpo.

97. Suppongasi adunque primieramente, che il corpo col proprio suo moto sia giunto al punto B. E poichè in questo caso la AB col moto suo dee ritrovarsi sull'altra CD; perciò nella fine dei due moti si ritroverà il corpo nel punto D, su di cui cade il punto B. Suppongasi di poi, che portandosi la AB per fino alla sua parallela EF, il corpo si ritrovi nel punto G. E poichè AE, EG sono spazj percorsi con questi due moti nel medesimo tempo; sarà pertanto AE ad EG, come la velocità del moto della retta alla velocità del moto del corpo. Ma per una ragione consimile nella stessa ragione di queste due velocità deve essere ancora AC ad AB ovvero CD. Dunque sarà come AE ad EG, così AC a CD; e pertanto il punto G devrà ritrovarsi nella diagonale AD.

98. Non è egli dunque da porsi in dubbio, che un corpo spinto da due forze valevoli a portarlo separatamente con modo eguabile, ed in un medesimo tempo per gli due lati AB, AC del parallelogrammo ABDC, debba descrivere colle due forze insieme la diagonale AD del medesimo parallelogrammo nello stesso tempo, e con moto eziandio eguabile: Onde, siccome i lati AB, AC disegnano tanto le velocità, che s'imprimono al corpo dalle due forze, quanto le loro direzioni; così qualora le stesse forze agiscono insieme su 'l corpo, e questo si muove colle spinte, che riceve da ambedue, dise-

disegnerà la diagonale AD non meno la velocità, che la direzione del suo moto.

Fig. 5. 99. Sia spinto ora il corpo, non solo dalle due forze AB, AC, ma ancora dalla terza AF; ed in questo caso, se compiesi l' altro parallelogrammo ADGF, si porterà egli con moto eguabile per la diagonale AG di quest' altro parallelogrammo. In fatti essendosi dimostrato, che colle due forze AB, AC debba descrivere il corpo la diagonale AD del parallelogrammo ABDC; chiaro si è, che queste due forze insieme tanto potranno su'l corpo, quanto la sola forza AD; e per tanto lo stesso sarà, se spingasi il corpo colle tre forze AB, AC, AF, che spingasi colle due AD, AF. Ma essendo spinto dalle due forze AD, AF, deve egli descrivere eguabilmente la diagonale AG del parallelogrammo ADGF. Dunque ancora spinto dalle tre AB, AC, AF dovrà descrivere con moto eguabile la stessa diagonale.

100. In una maniera consimile, se il corpo sia spinto non solo dalle tre forze AB, AC, AF, ma eziandio dalla quarta AH; dovrà egli muoversi con moto eguabile per la diagonale AI del terzo parallelogrammo AGIH. Imperocchè dovendo il corpo descrivere la AG, qualora è spinto dalle tre forze AB, AC, AF; chiaro si è, che queste tre forze insieme tanto potranno su'l corpo, quanto la sola forza AG; ed in conseguenza lo stesso sarà, se spingasi il corpo colle quattro forze AB, AC, AF, AH, che se spingasi colle due AG, AH. Ma con queste due deve egli descrivere eguabilmente la diagonale AI del parallelogrammo AGIH. Dunque ancora con quelle quattro dovrà descrivere con moto eguabile la stessa diagonale. Ed egli è chiaro, che in questo modo, qualunque sia il numero delle forze, che spingono il corpo, possa sempre determinarsi il suo moto, e la sua direzione.

101. E quindi ora possiamo dedurne la composizione, e risoluzione delle forze, cotanto profittevole

le in esaminare i moti de'corpi. In effetto, descrivendosi dal corpo colle due forze AB, AC insieme la diagonale AD del parallelogrammo ABDC, faranno quelle forze su'l corpo l'istesso effetto, che farebbe su di esso la sola forza AD. Onde siccome quelle due forze insieme compongono la sola forza AD, così al contrario questa sola forza AD potrà risolversi nelle due AB, AC. Generalmente adunque, se i lati di un qualche parallelogrammo disegnino non meno le forze componenti, che le loro direzioni; disegnerà la sua diagonale la quantità, e direzione della forza composta. Ed al contrario, se la quantità, e direzione di una forza disegnisi per una retta, intorno a cui come diagonale descrivesi un parallelogrammo, potrà risolversi quella forza in altre due, di cui così le quantità, come le direzioni saranno disegnate dai lati di detto parallelogrammo (36). *Fig. 4.*

102. Essendo così, si vede primieramente, che sebbene date le forze componenti, debba esser data la forza composta, tutta volta non avviene l'istesso, se una data forza debbasi risolvere in altre due; e ciò per la ragione, che potendosi descrivere intorno ad una stessa diagonale infiniti parallelogrammi, potranno ricevere altresì infinite variazioni l' altre due forze, nelle quali dee risolversi la forza data. Si vede in secondo luogo, che siccome in un parallelogrammo, di cui sono dati i lati, la diagonale si fa maggiore o minore, secondochè è minore o maggiore l'angolo contenuto da detti lati; così la forza composta sarà maggiore o minore, secondochè le forze componenti sono più o meno tra loro conspiranti.

103. Intanto, conforme in ogni parallelogrammo la diagonale ritrovasi essere sempre minore della somma, e maggiore della differenza dei due lati; così eziandio la forza composta dovrà essere sempre minore della somma, e maggiore della differenza delle due forze componenti. Ma egli è da

notarsi, che ciò ha luogo, sempre quando le direzioni delle due forze componenti formano angolo; poichè se mai le due forze siano, o talmente cospiranti, che le loro direzioni ricadano sopra una medesima retta, o pure talmente contrarie, che le stesse direzioni siano tra loro a dirittura, allora la forza composta a simiglianza di ciò, che avviene alla diagonale del parallelogrammo per rapporto ai suoi lati, sarà eguale alla somma delle due forze componenti nel primo caso, ed alla differenza delle stesse forze nel secondo (37).

104. Del rimanente tutto ciò, che si è detto intorno alle forze, deve applicarsi altresì alle velocità, che da esse s' imprimono al corpo, ed in conseguenza ai moti, che ne derivano. Se adunque nel corpo si ritrovino due velocità disegnate per gli lati di un qualche parallelogrammo; queste insieme comporranno in esso una velocità, che dovrà esprimersi per mezzo della diagonale dell' istesso parallelogrammo. Ed al contrario, se la velocità, con cui muovesi il corpo, si disegni per una retta, intorno a cui come diagonale descrivasi un parallelogrammo, potrà ella risolversi in due altre velocità corrispondenti ai lati di quel parallelogrammo. Ed essendo così, eziandio intorno alla velocità composta debbono aver luogo gli stessi avvertimenti fatti per la forza composta (38).

XI.

Del moto curvilineo de' corpi, e specialmente di quello fatto con forza centrale.

105. AVvertimmo di sopra, che conforme ogni moto di sua natura deve essere rettilineo; così non possa egli divenire curvilineo, se il corpo movendosi non sia spinto continuamente da una qualche forza motrice, che lo faccia traviare in ogni minima particella di tempo dalla sua primitiva direzione. Or come ciò avvenga, egli è fa-

cile

cile presentemente ad intendersi, dopo essersi dimostrata la composizione, e risoluzione così delle forze, come de' moti. Fingiamo perciò, che il corpo con una data velocità si muova per la retta AB, e che il medesimo sia spinto continuamente da una forza motrice, che agisca su di esso con direzioni parallele all'altra retta AC. Io dico, che il moto del corpo dovrà essere curvilineo, e che la curva descritta da detto corpo si ritroverà nel piano delle due rette AB, AC (39). *Fig. 6.*

106. Per dimostrarlo, intendasi diviso il tempo in parti eguali, ed infinitamente picciole; e se il corpo nella prima di esse colla velocità finita, che egli ha, percorra sulla AB lo spazietto AD, dovrà il medesimo colla stessa velocità continuare il suo moto a dirittura, e percorrere nella seconda particella di tempo l'altro spazietto DE eguale al primo AD. Ma si vuole, che il corpo sia spinto continuamente da una forza motrice con direzioni parallele alla AC, colle quali spinte egli va ricevendo a poco a poco altra velocità diversa da quella, che già in essa risiede. Dunque se fingiamo, che nel luogo D riceva il corpo da quella forza una spinta valevole a fargli descrivere la DF nella seconda particella di tempo; avrà egli due moti, cioè uno per la DE, e l'altro per la DF, coi quali in conseguenza si porterà per la diagonale DG del picciolo parallelogrammo DEGF, e devierà dalla prima sua direzione AD.

107. Per la stessa ragione, se nella terza particella di tempo non avesse il corpo altra velocità se non se quella, con cui ha descritto la DG, dovrebbe continuare il suo moto a dirittura, e descrivere la GH eguale alla DG. Ma perchè nel luogo G riceve altra spinta da quella forza, che continuamente agisce su di esso; perciò se fingiamo, che quest' altra spinta sia valevole a fargli descrivere la GI nella terza particella di tempo, avrà egli parimente due moti, cioè uno per la

CH, e l' altra per la GI. Onde coi medesimi insieme si porterà per la diagonale GK dell'altro picciolo parallelogrammo CHKI, e devierà di nuovo dalla sua precedente direzione DG. E poichè lo stesso deve avvenire parimente in tutte l'altre particelle di tempo, perciò il moto del corpo si farà per una linea curva situata nel piano delle due rette AB, AC.

108. Nè poi è da porsi in dubbio, che sia vera curva la linea descritta dal corpo; essendo cosa facile il dimostrare, che ella si compone di rette infinitamente picciole, che traviano l' una dall' altra per angoli di una picciolezza ancora infinita. In fatti se bene sia finita la velocità, con cui muovesi il corpo sulla AB; nientedimeno le due AD, DE, che si descrivono dal corpo con quella velocità nelle prime due particelle di tempo, debbono essere infinitamente picciole. Ma colla spinta, che riceve il corpo dalla forza nel luogo D, si genera in esso una velocità infinitamente picciola per rapporto a quella, che di già risiede nel corpo. Dunque la DF, ovvero EG sarà eziandio infinitamente picciola per rapporto alla DE, e perciò così la diagonale DG del picciolo parallelogrammo DEGF, come l' angolo EDG, per cui la stessa DG devia dalla AD, sarà di una picciolezza infinita. Ed egli è chiaro, che la stessa dimostrazione debba aver luogo da per tutto.

109. Or se la forza, che spinge continuamente il corpo, sia centrale di sua natura, non solo sarà curvilineo il moto del corpo; ma le aree, che egli descrive intorno al centro della forza, saranno
Fig. 7. proporzionali ai tempi, in cui le descrive. Per dimostrarlo, muovasi di nuovo il corpo con una data velocità per la retta AB, e sia C il centro della forza, che lo spinge continuamente, e cerca di condurlo verso quel centro. In questo caso adunque le picciole rette DF, GI, che si descrivono dal corpo spinto dalla forza, prolungate si anderanno

ad

ad incontrare nel punto C; e se congiunganfi l'altre rette CE, CK, saranno egnali tra loro tanto i due piccioli triangoli CDE, CDG, quanto gli altri due CGH, CGK. Ma, congiunta la retta AC, si fanno eguali similmente così i piccioli due triangoli CAD, CDE, come gli altri due CDG, CGH. Dunque i tre piccioli triangoli CAD, CDG, CGK saranno tra loro eguali.

110. Quindi, siccome sono eguali tra loro le particelle di tempo, in cui il corpo col suo moto curvilineo descrive le picciole rette AD, DG, GK; così sono eguali parimente i piccicli triangoli CAD, CDG, CGK, che si estendono dal centro della forza per sino a quelle picciole rette. Ma la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto, e coi riferiti piccioli triangoli uniti insieme si hanno le aree, che percorre il corpo intorno al centro della forza. Dunque se la forza, che spinge il corpo continuamente, sia centrale di sua natura, non solo sarà curvilineo il moto del corpo, ma le aree, che da esso si percorrono intorno al centro della forza, saranno proporzionali altresì ai tempi, in cui si percorrono: di modochè, se C sia il centro della *Fig.* 8.
forza, ed AMN la curva descritta dal corpo, sarà il tempo per l'arco AM al tempo per l'arco AN, come l'area CAM all'area CAN.

111. Conforme poi il corpo deve essere spinto continuamente da una qualche forza, per poter egli descrivere una linea curva; così se mai la descriva con legge tale, che intorno ad un qualche punto percorra aree proporzionali ai tempi, quella forza, che lo spinge, sarà quel medesimo punto. Sia *Fig.* 7.
perciò ADCK la curva, che si descrive dal corpo; e sia ancora C il punto, intorno a cui dal medesimo corpo si percorrono aree proporzionali ai tempi. Prendansi in detta curva i due archetti infinitamente piccioli AD, DG; e supposto, che questi archetti, i quali possono considerarsi come due picciole rette, descrivansi dal corpo in eguali parti-

 celle

celle di tempo, si faranno eguali le due picciole aree, o siano triangoli CAD, CDG.

112. Or se il corpo, dopo aver descritta nella prima particella di tempo la prima picciola retta AD, non fosse spinto nel luogo D da forza veruna; certo si è, che continuarebbe egli il suo moto a dirittura, e descriverebbe nella seconda particella di tempo la DE eguale alla AD. Onde, affinchè il corpo in vece della DE possa descrivere l'altra DG, bisognerà che egli nel luogo D sia spinto da una forza con direzione parallela alla EG. Ma per essere eguali tra loro tanto i due piccioli triangoli CAD, CDG, quanto i due CAD, CDE, si fanno eguali altresì i piccioli due triangoli CDG, CDE, i quali perciò debbono essere tra le stesse parallele. Dunque, facendosi la DC parallela alla EG, sarà la stessa DC la direzione, con cui la forza spinge il corpo nel luogo D. E poichè la medesima dimostrazione ha luogo da per tutto, perciò la riferita forza sarà centrale di sua natura, ed avrà per suo centro il punto C.

113. E quindi ora vedesi la verità di quel tanto fu avvertito di sopra, cioè che le forze, per mezzo di cui sono trattenuti nei loro orbi tanto i pianeti primarj, quanto i pianeti secondarj, siano centrali di lor natura, e che nei primi dirigansi propriamente al centro del Sole, e nei secondi ai centri de' loro primarj. Imperocchè di già si è dimostrato, che qualora il corpo portasi per una curva con legge tale, che intorno ad un dato punto percorra aree proporzionali ai tempi, debba egli essere spinto continuamente da una forza centrale, che ha quel punto per suo centro. Ma convengono tra loro gli Astronomi, che i pianeti descrivono talmente i loro orbi, che si percorrano aree proporzionali ai tempi dai primarj intorno al centro del Sole, e dai secondarj intorno ai centri de' loro primarj. Dunque le forze, per mezzo di cui gli stessi pianeti sono trattenuti nei loro orbi, saranno cen-

trali

trali, e nei primarj si dirigeranno al centro del Sole, e nei secondarj ai centri de' loro primarj.

114. Del rimanente, qualora il corpo spinto da forza centrale si porta per una curva, egli è facile il dimostrare, che la sua velocità in qualsisia punto della curva debba essere reciprocamente proporzionale alla perpendicolare, che dal centro della forza si abbassa sulla retta, che tocca la curva in quel punto. Sia però AMN la curva, che descrivesi dal corpo; e sia ancora C il centro della forza, per mezzo di cui egli la descrive. Prendansi in quella curva i due archetti infinitamente piccioli *Mm*, *Nn*; e siccome questi archetti possono riguardarsi come due picciole rette, così i medesimi prolungati a dirittura ci daranno le rette MS, NT, che toccano la curva ne' punti M, ed N. Si abbassino adunque su di esse le perpendicolari CS, CT dal centro della forza C; ed io dico, che le velocità del corpo nei punti M, ed N siano nella reciproca ragione di queste perpendicolari. *Fig. 8.*

115. In fatti se fingiamo, che i due archetti *Mm*, *Nn* si descrivano dal corpo in eguali particelle di tempo; si faranno eguali tra loro le due picciole aree, o siano triangoli C*Mm*, C*Nn*; e pertanto quegli archetti *Mm*, *Nn*, che sono basi di questi piccioli triangoli, saranno nella reciproca ragione delle loro altezze CS, CT. Ma gli stessi piccioli archetti si percorrono dal corpo in eguali particelle di tempo colle velocità, che ritrovansi avere il corpo ne' punti M, ed N. Dunque, siccome queste velocità debbono essere tra loro nella diretta ragione di quei piccioli archetti; così le medesime saranno altresì nella ragion reciproca delle perpendicolari CS, CT abbassate dal centro della forza C sulle tangenti MS, NT (40).

XII.

Dei corpi, che si muovono circolarmente con moto equabile, ed uniforme.

116. SE un corpo muovasi equabilmente per una circonferenza di cerchio, non v' ha dubbio, che egli debba essere spinto continuamente da una forza centrale, che ha per centro il centro stesso del cerchio. Imperocchè, essendo equabile il di lui moto, saranno gli archi, che egli descrive, proporzionali ai tempi, in cui li descrive. Ma nella ragione di quegli archi sono ancora i settori, che li corrispondono. Dunque percorrendo il corpo intorno al centro del cerchio aree, ovvero settori proporzionali ai tempi, per necessità la forza, che lo trattiene nella circonferenza del cerchio, dovrà dirigersi al di lui centro.

117. Ma il converso di ciò può dimostrarsi ancora facilmente, e si è, che se il corpo spinto da forza centrale si porti per una circonferenza di cerchio, che abbia per suo centro l' istesso centro della forza, il di lui moto debba essere equabile, ed uniforme. In fatti per ciò, che si è dimostrato di sopra, le velocità del corpo in punti diversi della circonferenza, che egli descrive, debbono essere nella reciproca ragione delle perpendicolari, che dal centro della forza si abbassano sulle rette, che toccano la circonferenza in quei medesimi punti. Ma queste perpendicolari cadono sulli punti del contatto; ed in conseguenza come raggi del cerchio sono tra loro in ragion di uguaglianza. Dunque ancora le velocità del corpo saranno tra loro eguali (41).

118. Or se mai due corpi muovansi equabilmente per le circonferenze di due cerchi diversi, le forze centrali, da cui sono spinti continuamente, saranno in ragion composta della duplicata diretta degli archi, che descrivono nell' istesso tempo, e

Fig. 9. della semplice reciproca de' raggi. Siano perciò

AMD,

AMD, BNE le circonferenze descritte dai due corpi intorno al comune loro centro C; e supposto, che Aa, Bb siano due archetti infinitamente piccioli, saranno i loro seni versi AF, BG i piccioli spazj, che descriverebbero i due corpi colle forze, da cui sono spinti, nel mentre portansi per quegli archetti. Onde, se fingiamo inoltre, che gli stessi archetti si descrivano dai due corpi in una medesima particella di tempo; saranno le forze, che spingono i due corpi, nella ragione delle due AF, BG.

119. Or essendo gli archetti Aa, Eb di una picciolezza infinita, non differiranno i medesimi dalle loro corde; e perciò i loro quadrati, come eguali ai rettangoli DAF, EBG, saranno nella ragion composta della diretta delle due AF, BG, e della diretta ancora dell'altre due AD, BE. Quindi siccome le due AF, BG ritrovansi essere nella ragion composta della diretta di quei quadrati, e della reciproca dell'altre due AD, BE; così in questa stessa ragion composta saranno ancora le forze, che spingono i due corpi. Ma descrivendosi le circonferenze eguabilmente, i due piccioli archetti Aa, Bb sono, come due archi AM, BN descritti in qualsisia tempo finito; e per essere le due AD BE diametri delle circonferenze, la loro ragione è la stessa con quella de' raggi CA, CB. Dunque le forze, da cui sono spinti i due corpi, saranno altresì in ragion composta della duplicata direttta di due qualsisiano archi AM, BN descritti nel medesimo tempo, e della semplice reciproca dei raggi CA, CB (42).

120. Per essere poi il moto de' corpi eguabile, ed uniforme, chiaro si è, che conforme gli archi AM, BN descritti nel medesimo tempo sono, come le velocità, con cui si descrivono; così queste stesse velocità siano nella ragion composta della diretta dell' intere circonferenze, o pure de'raggi CA, CB, e della reciproca de'tempi, che impiegano i corpi

corpi a fare i loro giri, o siano periodi. E quindi sorgono due altri teoremi, di cui il primo si è, che le forze, da cui sono spinti i due corpi, siano nella ragion composta della duplicata diretta delle velocità, e della semplice reciproca de' raggi; ed il secondo, che le stesse forze siano nella ragion composta della semplice diretta de' raggi, e della duplicata reciproca de' tempi periodici (43).

121. Essendo così, vedesi chiaramente, che se mai sia nota la ragione, in cui sono tra loro i tempi periodici; niente sia più facile, quanto il definire, come debbano essere tra di esse le forze, che spingono i due corpi. In fatti, se i tempi periodici siano nella semplice ragion diretta de' raggi, le forze dovranno essere nella semplice reciproca degli stessi raggi. Se poi i tempi siano nella sesquiplicata ragion diretta de' raggi, cosicchè i loro quadrati siano come i cubi fatti dai raggi; in tal caso le forze saranno nella duplicata reciproca degli stessi raggi. Ed in fine, se vogliasi, che i tempi periodici siano nella ragion duplicata diretta de' raggi, si ritroveranno essere le forze nella ragion triplicata reciproca de' medesimi raggi.

122. Il caso di essere le forze nella reciproca duplicata ragione de' raggi ha luogo nel moto de' corpi celesti. Imperocchè si conviene oggi dì presso gli Astronomi, che questi moti facciansi con legge tale, che i quadrati de' tempi periodici siano nei pianeti primarj, come i cubi delle loro distanze dal centro del Sole, nei satelliti di Giove come i cubi delle loro distanze dal centro di Giove, e nei satelliti di Saturno come i cubi delle loro distanze dal centro di Saturno. Onde conforme si è fatto vedere, che tutti questi corpi sono trattenuti ne' loro orbi per forze, che dirigonsi ai riferiti centri; così dobbiam conchiudere ancora, che queste forze si diramino talmente intorno ai loro centri, che con discostarsi da essi si minorino in duplicata ragione della distanza.

123.

123. Egli è vero, che per non eſſervi altro corpo, che a ſimiglianza della Luna giri intorno alla terra, non poſſa adattarſi la ſteſſa dimoſtrazione alla forza, che trattiene la Luna nel ſuo orbe, e che dirigeſi al centro della terra. Ma eſſendo il moto della Luna fenomeno dell' iſteſſa indole coi moti degli altri pianeti, conviene credere, che ancora queſt' altra forza ſi ſpanda colla ſteſſa legge intorno al ſuo centro. E poichè egli è facile il ſupputare, che colla forza relativa alla Luna ſi deſcriverebbe quì giù in una ſeconda di tempo quel medeſimo ſpazio, che deſcriveſi dai corpi terreſtri colla forza della gravità; perciò è da crederſi ancora, che la forza della gravità ſi dirami perſino alla Luna, e che dalla medeſima forza ſia trattenuta la Luna nell' orbe, che ella deſcrive intorno alla terra.

124. Nè vale il dire, che gli orbi, per cui ſi portano i pianeti intorno ai centri delle loro forze, ſiano più toſto ellittici; e che il centro della forza per qualſiſia pianeta riſieda in uno de' fochi dell'elliſſe, che egli deſcrive. Imperocchè per prima, ſebbene i riferiti orbi ſiano ellittici di lor natura, tuttavia i fochi della maggior parte di eſſi ſono così poco diſtanti dai loro centri, che niente vieta di riguardargli come orbi circolari. E di poi, ſe la curva deſcritta dal corpo con forza centrale ſia elliſſe, ed il centro della forza riſieda in uno de' ſuoi fuochi; egli è facile il dimoſtrare, che la forza con diſcoſtarſi dal ſuo centro tuttavia debba minorarſi in duplicata ragione della diſtanza. Anzi ſe del corpo prendaſi quella diſtanza dal centro, che è mezza tra la maſſima, e la minima; pure il tempo periodico ſi ritroverà eſſere nella ſeſquiplicata ragione della riferita diſtanza (44).

128. Del rimanente di già fu avvertito di ſopra, che portandoſi il corpo per una curva con qualſiſia forza, cerca egli in ogni punto di girſene per la tangente in virtù della ſua forza d' inerzia colla

ſteſſa

ſteſſa velocità, che ritrovaſi avere in quel punto. Quindi in ogni moto curvilineo oltre alla forza, che traſporta il corpo dalla tangente verſo la curva, deve conſiderarſene ancora un'altra, che al contrario cerca di riportare il corpo dalla curva verſo la tangente. E ſiccome per poco, che ſi voglia riflettere, ſi comprenderà facilmente, che queſte due forze ſiano tra loro eguali, e contrarie; così nè pure ſi durerà fatica ad intendere, che ſe la prima ſia centrale di ſua natura, debba eſſere centrale ancora la ſeconda: col divario bensì, che in luogo di tirare il corpo verſo il centro, ſi ſtudia al contrario di allontanarlo da quello; onde ſi è, che la prima chiamaſi forza centripeta, e la ſeconda forza centrifuga.

126. Attenta intanto la contrarietà, ed uguaglianza di queſte due forze, chiaro ſi è, che queltanto ſi è dimoſtrato intorno alle forze centripete, che coſtringono i corpi a muoverſi eguabilmente per circonferenze de' cerchi, debba aver luogo parimente a riguardo delle loro forze centrifughe. Onde la ragione di queſt' altre forze eziandio ſarà compoſta o della duplicata diretta degli archi, che ſi deſcrivono dai corpi nell' iſteſſo tempo, e della ſemplice reciproca de' raggi; o della duplicata diretta delle velocità, con cui muovonſi i corpi, ed eziandio della ſemplice reciproca de' raggi; o finalmente della ſemplice diretta de' raggi, e della duplicata reciproca de' tempi periodici: dai quali teoremi generali egli è facile di dedurne infiniti altri ſpeciali.

XIII.

Dell' azione, e reazione; ed in qual ſenſo ſiano eguali, e contrarie.

127. UN corpo, che ſi muove, allora propriamente diceſi agire, quante volte la forza, che egli ha per ragion del ſuo moto, è im-

impiegata contra un altro corpo, che gli resiste. Colla resistenza intanto, che gli oppone quest'altro corpo, non è egli da porsi in dubbio, che ancora il secondo corpo agisce su'l primo. Quindi l'azione di un corpo, che agisce, dee sempre andare accoppiata colla reazione dell'altro, che resiste; e perciò suol dirsi comunemente, che ogni agente nello stesso tempo, che agisce, sia costretto di soffrire colla sua azione medesima.

128. Or siccome l'azione, e reazione debbono sempre accoppiarsi insieme, nè mai può disgiungersi l'una dall'altra; così per picciola riflessione, che voglia farsi, s'intenderà facilmente, che le medesime debbano essere non solo contrarie, ma eziandio eguali tra loro. In fatti se potesse darsi un'azione maggiore della reazione, che incontra; senza dubbio quel più di azione non avrebbe reazione contraria. Onde almeno in parte potrebbe agire il corpo senza reazione, il che certamente non può intendersi (45).

129. Intanto una verità così chiara, e manifesta rivocasi da taluno in dubbio per la ragione, che se mai l'azione, e reazione fossero sempre eguali, e contrarie, non mai potrebbe nascere moto dalla scambievole azione di due corpi, come quei, che per la riferita contrarietà, ed uguaglianza dovrebbero rimanere tra loro sempre in equilibrio. Onde, per rispondere alla difficoltà proposta, e togliere altresì ogn'altro dubbio dall'argomento, di cui si tratta, giova esaminare quel tanto deve avvenire ai due corpi colla scambievole loro azione.

130. Ed in vero, siccome la forza di agire nel corpo, che si muove, deriva dal suo moto; così nell'azione, che esercita l'istesso corpo su di un altro, che gli resiste, deve egli impiegare porzione di quel moto. Intanto, se bene dal corpo agente perdasi quella porzione di moto, che impiega nella sua azione; nientedimeno la stessa porzione di moto non già si distrugge, ma dal corpo agente

si tramſi trammanda colla medeſima direzione all' altro, che reſiſte. Onde ciò, che avviene nella ſcambievole azione dei due corpi, ſi è, che quanto moto perdeſi dal corpo agente, altrettanto ne acquiſta l'altro reſiſtente.

131. Conforme poi la perdita di moto, che ſoffre il corpo agente, deriva dalla ſua azione; così l'acquiſto, che ne fa l'altro corpo reſiſtente, deve aſcriverſi alla ſua reazione, o ſia reſiſtenza; e quindi ſi è, che l'azione, e reazione ſiano, non ſolo contrarie, ma eguali ancora tra loro. Imperocchè ſiccome la contrarietà riluce nella perdita di moto, che ſoffre l'uno, e nell' acquiſto, che ne fa l'altro; così l' uguaglianza ricavaſi da ciò, che la quantità di moto perduta dal corpo agente, e l'altra acquiſtata dal corpo reſiſtente ſiano tra loro eguali.

132. Or ſiccome la ſcambievole azione dei due corpi deve eſercitarſi per ſino a che rendonſi incapaci di poter più agire, e reagire tra eſſo loro; così per poco, che ſi voglia riflettere, ſi comprenderà facilmente, che ciò debba avvenire, quante volte dal corpo agente ſi è trammandato tanto di moto al corpo reſiſtente, che ritrovanſi avere la ſteſſa velocità, e la ſteſſa direzione. Ed in fatti, qualora due corpi ſi muovono inſieme con eguali velocità, non può il corpo, che ſegue, ſpingere l'altro, che precede; onde nè il primo potrà agire su'l ſecondo, nè il ſecondo reſiſtere al primo.

133. Per quanto al corpo reſiſtente, niente vieta, che egli prima dell'azione eziandio ſi muova; onde in queſto caſo, ſeguita l'azione, ſi ritroveranno in eſſo due moti: cioè il moto, di cui prima godeva; e l'altro trammandatoli dal corpo agente. Queſti due moti intanto poſſono avere direzioni o coſpiranti tra loro, o pure contrarie. Per lo che ſiccome nel primo caſo ſi muoverà il corpo colla ſomma dei due moti, e colla comune loro direzione; così nel ſecondo caſo dovrà egli muoverſi colla

dif-

differenza dei due moti, e colla direzione del moto maggiore.

134. Se poi si voglia attentamente riflettere, si vedrà, che le direzioni dei due riferiti moti debbano essere cospiranti, o contrarie, secondochè erano cospiranti, o contrarie le direzioni degli altri due moti, con cui prima dell' azione muoveansi i corpi. Onde non si durerà fatica ad intendere, che siccome muovendosi i corpi verso la stessa parte, colla scambievole loro azione non deve alterarsi la somma de' loro moti; così muovendosi a parti contrarie non dovrà cambiarsi la loro differenza.

135. Si vede adunque, che tre cose debbono avvenire ai corpi colla scambievole loro azione. I, che quanto moto perde il corpo, che agisce, altrettanto ne acquista l'altro, che resiste. II, che terminata l'azione debbano i due corpi andare unitamente colla stessa velocità, e colla stessa direzione. E III finalmente, che così la somma de' moti fatti verso la stessa parte, come la differenza de' moti fatti a parti contrarie, non debba alterarsi colla scambievole azione dei due corpi.

136. Si vuol però quì notare, chè la comune velocità, con cui debbono andare unitamente i corpi, seguita l'azione, potrebbe talvolta essere nulla. Avviene ciò, quando i corpi prima dell' azione si muovono a parti contrarie con moti eguali; poichè, facendosi nulla la differenza de' loro moti, che dee rimanere dopo l'azione, dovrà essere nulla parimente la riferita velocità. Ed ecco l'unico caso, in cui dalla scambievole azione di due corpi non risulta moto veruno, ma restano i due corpi seguita l'azione fermi ed immobili.

137. Del rimanente per la perfetta intelligenza di quel tanto finora si è detto, giova l'avvertire, che sebbene il fonte di ogni resistenza sia la forza dell' inerzia, la quale corrisponde in proporzione alla massa del corpo, che resiste; nientedimeno, siccome per mezzo di essa si sforza il corpo di

man-

mantenersi nello stato, in cui egli ritrovasi; così trattandosi della resistenza, che oppone un corpo ad un altro corpo, dee tenersi conto così della forza dell'inerzia, come dello stato stesso del corpo; onde si è, che un medesimo corpo può resistere in varie guise.

138. Questo stato intanto dee considerarsi non già in se stesso, ma relativamente al corpo, che agisce; e perciò egli può essere di tre specie: cioè, o stato di moto cospirante, ma meno celere; o stato di quiete, ovvero di privazione di moto; o finalmente stato di moto contrario. Qualunque però siasi lo stato del corpo, che resiste, egli colla scambievole azione dee ridursi a stato di moto cospirante, ed ugualmente celere; e ciò per la ragione, che con questo nuovo stato cessa così l'azione, come la resistenza, o sia reazione (46).

XIV.

Delle leggi del moto nell' incontro de' corpi inerti.

139. DAi principj ora stabiliti egli è facile di dedurne le leggi di moto, che debbono aver luogo nell'incontro de' corpi. Nello stabilimento intanto di queste leggi giova distinguere due specie di corpi; e ciò per la ragione, che alcuni agiscono colla sola forza, che deriva dal loro moto; altri all'incontro possono agire ancora con un' altra forza, che si desta in essi per mezzo della percossa, ed appellasi forza elastica. Onde dando ai primi il nome di corpi inerti, ed ai secondi il nome di corpi elastici; primieramente ragioneremo delle leggi, che si osservano nell'incontro de' corpi inerti; indi di quelle, che osservar si debbono nell' incontro de' corpi elastici.

140. Per l'intelligenza di queste leggi giova prima l'avvertire, che se esprimasi con numeri, così la massa o sia peso del corpo, che si muove, come

la

la velocità, che ritrovasi avere l'istesso corpo; si potrà esprimere col prodotto di questi due numeri la quantità di moto, che risiede nel medesimo corpo. Cosi, se il corpo A abbia 2 libbre di peso, e 5 gradi di velocità; diremo, che il suo moto sia di 10 gradi, per essere 10 il prodotto di 2 per 5. E così ancora se l'altro corpo B abbia 3 libbre di peso, e 4 gradi di velocità; diremo, che il suo moto sia di 12 gradi, per essere 12 il prodotto di 3 per 4.

141. La ragione è chiara. Imperocchè, secondo si vide di sopra, i moti dei due corpi A, e B debbono essere in ragione composta dei loro pesi, e delle loro velocità. Onde, essendo per supposizione i pesi di essi nella ragione di 2 a 3, e le velocità nella ragione di 5 a 4; sarà il moto del corpo A al moto del corpo B in ragion composta di 2 a 3, e di 5 a 4. Ma moltiplicando tra loro così gli antecedenti 2, e 5, come i conseguenti 3, e 4 di queste due ragioni, ancora i prodotti 10, e 12 sono nella stessa ragion composta. Dunque il moto del corpo A al moto del corpo B sarà, come 10 a 12; e pertanto essendo il moto del corpo A di 10 gradi, sarà di gradi 12 il moto del corpo B.

142. Quindi al contrario, se sia espresso con numeri così il moto di un corpo, come il suo peso, potrà esprimersi la di lui velocità per mezzo del quoziente, che ricavasi dalla divisione del primo numero per lo secondo. Così, se il moto del corpo A sia di 10 gradi, ed il suo peso di 2 libbre; diremo, che la sua velocità sia di 5 gradi, per essere 5 il quoziente, che si deduce dalla divisione di 10 per 2. E similmente, se il moto del corpo B sia di 12 gradi, ed il suo peso di 3 libbre; diremo, che la sua velocità sia di 4 gradi, per essere 4 il quoziente, che si ricava dalla divisione di 12 per 3.

143. Premesse tali cose, veniamo ora alle leggi di moto, che debbono aver luogo nell' incontro de'

 cor-

corpi inerti. Riduconsi queste leggi a far vedere, come dati i corpi, che s'incontrano e dati i moti, con cui s'incontrano, possano determinarsi gli altri moti, che debbono avere gli stessi corpi dopo l'incontro. Onde è necessario, che siano a noi note non solo le masse, ovvero pesi dei due corpi, ma eziandio le loro velocità, e le loro direzioni; poichè siccome coi pesi, e colle velocità conosceremo i primitivi moti dei due corpi, così per mezzo delle direzioni sapremo altresì, se quei moti facciansi verso la stessa parte, o pure a parti contrarie (47).

144. Adunque, dopo essersi determinati i primitivi moti dei due corpi, prendasi o la loro somma se facciansi verso la stessa parte, o la loro differenza se facciansi a parti contrarie. E poichè i due corpi dopo l' incontro debbono talmente muoversi insieme con una stessa velocità, che non deve alterarsi la somma, o differenza de' loro moti primitivi; perciò se la stessa somma, o differenza dividasi per lo peso dei due corpi insieme, il quoziente di questa divisione ci darà la comune velocità dei due corpi, dalla quale poi egli è facile di dedurne i loro moti (48).

145. Per ischiarire questa regola generale con esempj speciali, siano A, e B due corpi, di cui il primo A sia di 2 libbre, ed il secondo B di libbre 3. Muovansi primieramente questi corpi verso la stessa parte, e sia di 5 gradi la velocità del primo A, che precede, e di gradi 10 la velocità dell' altro B, che inseguendo il primo A, dovrà finalmente incontrarlo. Poichè dunque il primo A è di 2 libbre, ed il medesimo muovesi con 5 gradi di velocità; sarà il suo moto primitivo di gradi 10. E così ancora, perchè il secondo A è di 3 libbre, e la sua velocità è di 10 gradi; sarà il suo moto primitivo di gradi 30.

146. Facendosi poi questi moti verso la stessa parte, coll' incontro dei due corpi non dovrà alterarsi

rarsi

rarsi la loro somma, che ritrovasi essere di gradi 40. Onde essendo di 5 libbre il peso dei due corpi insieme, si avrà la comune velocità degli stessi corpi dopo l'incontro, con dividere 40 per 5. E poichè il quoziente di questa divisione ritrovasi essere 8, perciò la riferita comune velocità sarà di 8 gradi. Onde dopo l'incontro sarà di gradi 16 il moto del corpo A, e di gradi 24 il moto del corpo B: coi quali moti continueranno i due corpi a muoversi verso la stessa parte, per cui muoveansi prima dell'incontro (49).

147. Suppongasi ora, che i due corpi A, e B colle stesse velocità muovansi a parti contrarie; ed in questo caso per mezzo dell' incontro non dovrà alterarsi la differenza de' loro moti, che ritrovasi essere di gradi 20; onde, per avere la comune velocità dei due corpi dopo l'incontro, bisognerà dividere 20 per 5. E poichè il quoziente di quest'altra divisione ritrovasi essere 4, perciò la riferita comune velocità sarà di 4 gradi, ed in conseguenza dopò l'incontro sarà di gradi 8 il moto del corpo A, e di gradi 12 il moto del corpo B: i quali moti si faranno verso quella parte, per cui faceasi prima dell'incontro il moto maggiore del corpo B (50).

148. Suppongasi finalmente, che dei due corpi A, e B il primo A sia in quiete, e l'altro B muovasi verso di esso eziandio con 30 gradi di moto. Essendo adunque in quiete il corpo A, potrà dirsi, che egli abbia zero di moto; onde o che i moti si considerino fatti verso la stessa parte, o a parti contrarie, così la loro somma, come la loro differenza sarà di gradi 30. Quindi per avere la comune velocità dei due corpi dopo l'incontro, dovrà dividersi 30 per 5; ed essendo 6 il quoziente di questa divisione, sarà la riferita comune velocità di 6 gradi. Onde dopo l'incontro sarà di gradi 12 il moto del corpo A, e di gradi 16 il moto del corpo B: i quali moti si faranno verso la stessa parte, per cui faceasi prima dell'incontro il moto del corpo B (51).

 149.

149. Del rimanente dalle riferite leggi di moto egli è facile il ricavarne, che non possa un corpo imprimere successivamente eguali gradi di velocità ad un'altro corpo eguale, se la sua velocità non sia di due gradi essendo l'altro quiescente, di tre gradi muovendosi l'altro col grado impressogli, di quattro gradi muovendosi l'altro coi due gradi ricevuti, e così all'infinito. Quindi, riguardando la forza viva come un mobile, che imprime continuamente velocità al corpo, su di cui agisce, credesi da taluni potersi facilmente dimostrare, che la riferita forza debba essere proporzionale al quadrato della totale velocità impressa al corpo, eziandio nella supposizione di doversi sommare relativamente alle parti del tempo i varj gradi della sua attività; ed ecco come.

Fig. 10. 150. Intendasi la AB divisa in parti eguali, ed infinitamente picciole, colle quali esprimansi così le eguali particelle di tempo, in cui si danno dalla forza viva al corpo le diverse spinte, come le eguali particelle di velocità, che riceve il corpo con quelle stesse spinte. Adunque siccome la forza viva, per imprimere al corpo la prima particella di velocità, deve averne due; così dovrà averne tre per imprimergli la seconda, quattro per imprimergli la terza, e così all'infinito. Quindi le attività della forza nelle diverse particelle del tempo dovranno esprimersi per le corrispondenti ordinate del triangolo ABC. Onde la loro somma, come proporzionale all'istesso triangolo, sarà in duplicata ragione così della totale velocità impressa al corpo, come del tempo impiegato ad imprimergliela.

151. Ma per prima si vuol notare, che la maniera di agire delle forze, che continuamente spingono i corpi, è molto diversa da quella, con cui agiscono i corpi, che si muovono; e ciò per la ragione, che questi con agire perdono sempre porzione del loro moto, quandochè le forze nelle loro azioni niente perdono della loro attività. Di poi colla riferita dimo-

dimostrazione si farebbe la forza viva proporzionale al quadrato della velocità generata nel corpo soltanto nel caso, che aumentasi la velocità del corpo in ragion del tempo. Ed in fine ancora quando un corpo col suo moto agisce su di un'altro corpo, che gli resiste, dee giudicarsi della forza, da cui deriva l'azione, per mezzo del solo moto, che egli perde; giacchè l'altro rimanente gli ha servito più tosto per essere in istato d' impiegare nell'azione la porzione di moto perduta (52).

XV.

Delle leggi del moto nell' incontro de' corpi elastici.

152. LE precedenti leggi di moto hanno luogo nell' incontro de' corpi inerti, i quali agiscono colla sola forza, che deriva dal loro moto; conforme sono, o i corpi, che col loro incontro affatto non si piegano; o pure quei, che piegandosi sono incapaci di rimettersi nel primo loro stato. Ma oltre a questi corpi abbiamo ancora gli elastici, che quantunque siano pieghevoli, possono tutta volta ritornare al primo stato per mezzo della forza elastica, che si desta in essi colla percossa. Onde passeremo ora a far vedere, quali siano le leggi del moto nell'incontro de' corpi elastici, per cui bisogna tener conto così della forza, che nasce dal loro moto, come dell'altra, che si risveglia in essi coll'urto medesimo.

153. Ed in vero, conforme due corpi elastici comprimendosi col loro incontro, hanno forza per rimettersi nel primo stato; così con questa forza generansi in essi velocità, con cui portansi a parti contrarie. Quindi nell'incontro di questi corpi, oltre di quella comune velocità, con cui si muoverebbero insieme verso la stessa parte, se fossero inerti, debbono considerarsi ancora le velocità, che ricevono dalla loro forza elastica. E conforme cia-

ſcuno dei due corpi ritrovaſi avere dopo l' incontro due velocità, una comune, e l' altra propria; così il corpo, che precede, ſi muoverà colla ſomma delle due ſue, per eſſere coſpiranti le loro direzioni; e l' altro, che ſegue, ſi muoverà al contrario colla differenza delle due, che gli ſpettano, per eſſere le direzioni di queſt' altre tra loro contrarie (53).

154. Ma ſiccome per la contrarietà delle direzioni, che ritrovanſi avere le due velocità del ſecondo corpo, deve egli muoverſi colla differenza di quelle velocità; così per la ſteſſa ragione biſognerà parimente, che il medeſimo ſi muova colla direzione della velocità maggiore. Onde, ſe mai ſia maggiore la velocità, che gli ſpetta come corpo inerte, dovrà muoverſi verſo la ſteſſa parte del primo corpo; ma ſe al contrario ſia maggiore la velocità, che riceve dalla forza elaſtica, il ſuo moto dovrà farſi verſo la parte oppoſta. Niente però vieta, che le due ſue velocità ſiano tal volta tra loro eguali; ed in queſto caſo, per farſi nulla la differenza di eſſe, rimarrà il corpo ſenza moto, ed in conſeguenza fermo ed immobile.

155. Or conforme i due corpi elaſtici ſi comprimono colla ſteſſa velocità, con cui s' incontrano; così per poco, che ſi voglia riflettere, ſi comprenderà facilmente, che queſta velocità ſia eguale o alla differenza delle velocità, che riſiedono nei due corpi, ſe i loro moti faccianſi verſo la ſteſſa parte; o pure alla ſomma di eſſe, ſe gli ſteſſi moti faccianſi a parti contrarie. Onde, ſe mai i corpi ſiano perfettamente elaſtici, coſichè ritornino al primo loro ſtato colla ſteſſa forza, con cui ſi comprimono; eziandio la velocità generata nei due corpi inſieme dalla loro forza elaſtica ſarà eguale o alla differenza delle velocità, che riſiedevano ne' corpi prima dell' incontro, o pure alla loro ſomma (54).

156. Nè poi è egli difficile ad intenderſi, come la velocità generata nei due corpi inſieme dalla loro

loro forza elastica, debba distribuirsi agli stessi corpi. Imperocchè, qualora dopo la compressione cercano i due corpi di rimettersi nel primo stato, non v' ha dubbio, che tuttavia agiscono tra esso loro. Onde conforme l' azione, e reazione sono sempre eguali, e contrarie; così saranno eguali, e contrarj i moti, con cui i corpi effettivamente si rimettono nello stato di prima. E perciò la distribuzione della riferita velocità dee farsi in modo, che le porzioni da darsi ai due corpi con direzioni opposte siano reciprocamente proporzionali ai loro pesi; poichè in questa guisa vengono ad essere eguali, e contrarj i moti, che ne risultano (55).

157. Essendo così, ecco ora, che dee farsi per definire le leggi del moto nell' incontro de' corpi perfettamente elastici. Primieramente ritrovisi la comune velocità, con cui i due corpi si muoverebbero insieme verso la stessa parte, se fossero inerti. Indi la velocità, con cui s' incontrano, distribuiscasi ad essi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. E conforme dopo l'incontro il corpo, che precede, dee muoversi colla somma di quella velocità comune, e di quest'altra propria; così il moto dell'altro corpo dovrà farsi colla differenza tra la stessa velocità comune, e l' altra sua propria: il quale moto, dovendosi fare colla direzione della velocità maggiore, talvolta si farà verso la stessa parte, ove portasi il primo corpo, talvolta verso la parte opposta.

158. Siano adunque A, e B due corpi perfettamente elastici, di cui il primo A sia di 2 libbre, ed il secondo B di libbre 3. Muovansi primieramente questi corpi verso la stessa parte con velocità tali, che il primo A ne abbia 5 gradi, ed il secondo B gradi 10; e di già, se i corpi fossero inerti, la comune loro velocità dopo l'incontro sarebbe di 8 gradi. Ma muovendosi i due corpi verso la stessa parte, dee farsi il loro incontro colla differenza delle loro velocità, che è di gradi 5; e distribuen-

buendo ad essi questa velocità nella reciproca ragione de' loro pesi, il primo A di 2 libbre ne deve avere 3 gradi, ed il secondo B di libbre 3 deve averne gradi 2. Dunque dopo l'incontro la velocità del primo A sarà di 11 gradi, e la velocità del secondo B di gradi 6, colle quali velocità si muoveranno i due corpi verso la stessa parte (56).

159. Muovansi in appresso gli stessi corpi colle stesse velocità a parti contrarie, dimodoche l' uno vada contro dell'altro. Ed in quest'altro caso conforme, se i corpi fossero inerti, la comune loro velocità dopo l'incontro sarebbe di 4 gradi; così, per muoversi a parti opposte, si farà il loro incontro colla somma delle loro velocità, che è di gradi 15. Quindi distribuendo ad essi questa velocità nella reciproca ragione de' loro pesi, il primo A di 2 libbre ne avrà 9 gradi, ed il secondo B di libbre 3 ne avrà gradi 6. Onde dopo l' incontro la velocità del primo A sarà di 13 gradi, e la velocità del secondo B di gradi 2, colle quali velocità tuttavolta dovranno muoversi eziandio a parti contrarie (57).

160. Finalmente dei medesimi corpi il primo A sia in quiete, ed il secondo B muovasi contro di esso colla stessa velocità di 10 gradi. Ed in questo terzo caso conforme, se i corpi fossero inerti, la comune loro velocità dopo l' incontro sarebbe di 6 gradi; così, per essere il corpo A in quiete, si farà il loro incontro colla sola velocità del corpo B, che è di gradi 10. Distribuiscasi adunque agli stessi corpi questa velocità nella reciproca ragione de' loro pesi; ed il primo A di 2 libbre ne avrà 6 gradi, ed il secondo B di libbre 3 ne avrà gradi 4. Onde dopo l'incontro la velocità del primo A sarà di 12 gradi, e la velocità del secondo B di gradi 2, colle quali velocità si muoveranno i due corpi verso la stessa parte.

161. Del rimanente, se i due corpi perfettamente elastici siano eguali, ovvero dello stesso peso, si ri-

ritroverà I, che muovendosi verso la stessa parte, tuttavia dopo l'incontro continueranno a muoversi colla stessa direzione; ma il primo colla velocità del secondo, ed il secondo con quella del primo, II, che muovendosi a parti contrarie, permuteranno eziandio insieme coll' incontro le primitive loro velocità, colle quali tuttavia si muoveranno a parti contrarie. E III finalmente, che essendo in quiete uno dei due corpi, e l'altro muovendosi contro di esso, il primo si muoverà dopo l'incontro colla velocità del secondo, ed al contrario il secondo resterà fermo ed immobile (58).

XVI.

Conseguenze, che si ricavano dalle precedenti leggi di moto.

162. DAlle leggi di moto, che debbono aver luogo nell' incontro de' corpi perfettamente elastici, possiamo ora dedurne tre conseguenze. La prima si è, che sebbene i due corpi dopo l'incontro debbansi muovere non solo colla comune velocità, che avrebbero, se fossero inerti, ma eziandio con quelle, che ricevono dalla loro forza elastica; pure però dee rimanere la stessa così la somma de' moti, che prima si facevano verso la stessa parte, come la differenza di quei, che faceansi prima a parti contrarie. In fatti colla sola comune velocità questa somma, o questa differenza non deve alterarsi. Ma le altre velocità impresse ai due corpi dalla loro forza elastica producono in essi moti eguali, e contrarj. Dunque neppure con quest'altre velocità dovrà alterarsi la riferita somma, o la riferita differenza.

163. La seconda conseguenza si è, che dopo l'incontro dei due corpi perfettamente elastici, la velocità primitiva di quello, che precede, ritrovasi sempre aumentata del doppio di quella, che riceve dalla forza elastica; ed all' incontro la velocità pri-

primitiva dell'altro, che segue, ritrovasi sempre diminuita del doppio di quella, che dalla stessa forza se gl' imprime. Per dimostrarlo geometricamente, esprimansi colle rette AB, AC i pesi dei due corpi, e coll'altre AD, AE così le loro velocità, come le loro direzioni. Ed essendo i moti dei due corpi in ragion composta dei loro pesi, e delle loro velocità; chiaro si è, che potranno esprimersi quei moti per mezzo dei due rettangoli BD, CE.

Fig. 11. 12.

164. Sia ora AF la comune velocità, con cui muovonsi i due corpi dopo l'incontro, essendo inerti. E poichè per mezzo dell'incontro non deve alterarsi la somma de' moti, che prima si facevano verso la stessa parte, e la differenza di quei, che faceansi prima a parti contrarie; perciò la somma, o differenza dei due rettangoli BD, CE sarà eguale al rettangolo CG, che è la somma dei due BF, CF. Onde siccome da ciò egli è facile il ricavarne, che siano eguali i due rettangoli EH, DG; così da questa stessa loro eguaglianza ne segue, che i lati di essi DF, EF siano nella reciproca ragione degli altri due FG, FH, o pure dei due AB, AC (59).

165. Quindi, essendo DE la velocità, con cui i due corpi AB, AC s'incontrano, saranno DF, EF le porzioni di essa, che per ragion della forza elastica spettano a detti corpi; onde dopo l'incontro il primo AB si muoverà colla somma delle due velocità AF, DF, ed il secondo AC colla differenza delle due AF, EF. Ma la somma delle due AF, DF è eguale alla AD aumentata del doppio della DF; ed all' incontro la differenza delle due AF, EF è eguale alla AE diminuita del doppio EF. Dunque dopo l'incontro il primo corpo AB si muoverà colla sua velocità primitiva aumentata del doppio di quella, che riceve dalla forza elastica; ed al contrario il secondo AC colla sua velocità primitiva diminuita del doppio di quella, che dalla stessa forza se gl' imprime.

169.

166. La terza ed ultima conseguenza si è, che moltiplicando i pesi dei due corpi una volta per gli quadrati delle loro velocità primitive, ed un' altra volta per gli quadrati delle velocità, con cui si muovono dopo l'incontro, la somma dei prodotti in ambedue le volte deve essere la stessa. Per dimostrarlo eziandio geometricamente, siano di nuovo AB, AC i pesi dei due corpi; AD, AE le loro velocità, e le loro direzioni; ed AF la comune velocità, con cui muovonsi i due corpi dopo l'incontro, essendo inerti. E poichè le velocità, che ricevono dalla forza elastica sono le due DF, EF; si muoverà dopo l'incontro il primo di essi AB colla somma delle due velocità AF, DF; ed il secondo AC colla differenza delle due AF, EF. *Fig.* 11. 12.

167. Or siccome il quadrato della somma delle due AF, DF è maggiore del quadrato della AD nel quadruplo del rettangolo fatto dalle stesse due AF, DF; così al contrario il quadrato della differenza delle due AF, EF è minore del quadrato della AE nel quadruplo del rettangolo fatto dalle medesime due AF, EF. Onde i pesi dei due corpi AB, AC moltiplicati per gli quadrati delle loro velocità primitive AD, AE ci daranno la stessa somma, che ricavasi dagli stessi pesi moltiplicati per gli quadrati delle velocità, con cui si muovono i due corpi dopo l'incontro, se il solido delle tre AB, AF, DF sia eguale al solido dell'altre tre AC, AF, EF, o pure se il rettangolo delle due AB, DF sia eguale al rettangolo dell'altre due AC, EF (60).

168. La conseguenza adunque, di cui si tratta, riducesi a far vedere, che il rettangolo delle due AB, DF sia eguale al rettangolo dell'altre due AC, EF. Ciò intanto si ritrova essere di già da noi dimostrato; poicchè siccome nell'altra conseguenza si è fatto vedere, che debbano essere eguali tra loro i due rettangoli DG, EH; così per essere le due AB, AC eguali all'altre due FG, FH, il pri-

primo di essi è fatto dalla AB nella DF, ed il secondo dalla AC nella EF. Onde non è egli da porsi in dubbio, che se i pesi dei due corpi una volta si moltiplichino per gli quadrati delle velocità loro primitive, ed un'altra volta per gli quadrati delle velocità, con cui si muovono dopo l'incontro, la somma de' prodotti in ambedue le volte debba essere la stessa (61).

169. Prima di passare oltre, giova quì l'avvertire, che sebbene siasi da noi supposto, che i corpi siano perfettamente elastici, e che ritornino in conseguenza al primo loro stato colla stessa forza, con cui si comprimono; nientedimeno se non siano di questa indole, e sia nota la ragione, che ha la forza comprimente alla forza elastica, pure col medesimo artificio potranno determinarsi le leggi di moto, che debbono aver luogo nel loro incontro. In fatti la velocità, con cui comprimonsi quest' altri corpi, tuttavia è eguale o alla differenza delle loro velocità, se muovonsi verso la stessa parte, o alla somma delle medesime, se i moti facciansi a parti contrarie. Onde con esser nota la ragione tra la forza comprimente, e la forza elastica, facilmente potrà determinarsi la velocità, che nei due corpi insieme generasi dalla loro forza elastica.

170. Questa velocità poi eziandio dovrà distribuirsi ai due corpi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. Onde non solo sarà a noi nota la comune velocità, con cui dopo l'incontro debbono muoversi insieme i due corpi, essendo inerti; ma sapremo altresì le velocità, che ricevono gli stessi corpi dalla loro forza elastica. E siccome ciascuno dei due corpi ritrovasi avere dopo l'incontro due velocità, cioè una comune, e l'altra propria; così il corpo, che precede, eziandio si muoverà colla somma delle due sue, per essere cospiranti le loro direzioni; e l'altro, che segue, pure al contrario si muoverà colla differenza delle due, che gli spettano, per essere le direzioni di quest' altre tra loro contrarie.

171. Così, se il corpo A di 2 libbre abbia 10 gradi di velocità, ed il corpo B di libbre 3 ne abbia 20; chiaro si è, che facendosi i loro moti verso la stessa parte, sia di gradi 16 la comune velocità con cui dopo l'incontro debbono muoversi insieme, essendo inerti. E poichè l'incontro di essi si fa, con 10 gradi di velocità; perciò se suppongasi, che la loro forza elastica sia la metà di quella, con cui si comprimono, sarà di gradi 5 la velocità generata da quella forza nei due corpi insieme; e distribuendola ai medesimi con direzioni contrarie nella reciproca ragione de' loro pesi, ne spetteranno 3 gradi al corpo A di 2 libbre, e gradi 2 al corpo B di 3 libbre. Onde i due corpi dopo l' incontro si muoveranno tuttavia verso la stessa parte, ma il corpo A con 19 gradi di velocità, ed il corpo B con gradi 14.

172. Un' altro avvertimento dee farsi in questo luogo, e si è, che se mai dei due corpi, che s'incontrano, uno sia elastico, e l' altro inflessibile, pure dopo l'incontro debbono muoversi, come se ambidue fossero elastici. Imperocchè se bene con incontrarsi tra loro comprimasi solamente il corpo elastico; nientedimeno, qualora questo corpo dopo la compressione cerca di rimettersi colla sua forza elastica nel primo stato, tuttavia agisce sull'altro corpo; onde si è, che con questa azione eziandio la velocità generata da quella forza dee distribuirsi ai due corpi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. E' necessario però, che l'altro corpo sia inflessibile per la ragione, che se mai fosse pieghevole, potrebbe non ricevere col solo incontro tutto il piegamento, di cui è capace; onde siccome colla nuova azione del corpo elastico continuarebbe egli a piegarsi, così la distribuzione della velocità, che si genera dalla forza elastica, potrebbe farsi in altra ragione.

XVII.

XVII.

Delle leggi del moto nell' incontro obliquo de' corpi.

173. IN trattare delle leggi di moto, che debbono aver luogo nell' incontro de' corpi, tacitamente si è supposto, che i loro moti faccianſi ſopra una medeſima linea retta, ed in conſeguenza che i due corpi s' incontrino a dirittura. Potrebbe intanto avvenire, che gli ſteſſi corpi muovanſi ſopra rette diverſe, le quali formino un qualche angolo, e che incontrandoſi nel vertice di queſt' angolo ſia obliquo il loro incontro. Onde, per non tralaſciare queſt' altro caſo, paſſeremo ora a ragionare delle leggi di moto, che debbono oſſervarſi nell' incontro obliquo de' corpi.

Fig. 13. 14. 174. Siano adunque A, e B due corpi, i quali muovendoſi eguabilmente sulle rette AC, BC, che formano l' angolo ACB, vadanſi ad incontrare tra loro obliquamente nel vertice C di queſt' angolo. E poichè i due corpi A, e B percorrono le due rette AC, BC con moto eguabile, e nel medeſimo tempo, ſaranno le loro velocità proporzionali alle ſteſſe rette; e pertanto ſe la velocità del corpo A eſprimaſi colla prima AC, dovrà l' altra BC diſegnarci la velocità del corpo B. Onde dobbiamo far vedere, come date le velocità, e le direzioni dei due corpi A, e B, che s' incontrano obliquamente nel punto C, poſſono determinarſi le velocità, e le direzioni degli ſteſſi corpi dopo l' incontro (62).

175. Determiniſi perciò la poſizione del piano CD, che tocca i due corpi nel luogo dell' incontro; ed abbaſſate su di eſſo le perpendicolari AD, BE, compiſcanſi i parallelogrammi ADCF, BECG. Potendoſi adunque riſolvere la velocità AC nelle due AD, AF, e la velocità BC nelle due BE, BG; ſi muoverà verſo C il corpo A colle due velocità AD, AF, ed il corpo B colle due BE, BG. Ma per eſſere parallele le direzioni delle

ve-

velocità AF, BG, non possono i due corpi con esse incontrarsi. Dunque, siccome il loro incontro si farà colle velocità AD, BE, o pure colle due FC, GC, le cui direzioni sono contrarie; così le prime due si conserveranno nei corpi senza veruna mutazione.

176. Or se i due corpi A, e B siano inerti, il loro incontro colle velocità FC, GC dee farsi talmente, che si muoveranno in appresso insieme verso la stessa parte, e colla stessa velocità. Quindi se CH sia questa comune loro velocità segnata secondo la sua direzione, e sulla DC prolungata prendansi le porzioni CI, CL eguali alle due AF, BG; si ritroverà avere dopo l'incontro il corpo A le due velocità CH, CI, ed il corpo B le due CH, CL. Onde compiuti i parallelogrammi CHMI, CHNL, si faranno effettivamente i moti dei due corpi per le diagonali CM, CN; e sarà CM la velocità del primo corpo, e CN la velocità dell' altro. *Fig.* 13.

177. Se poi i due corpi A, e B siano elastici, in tal caso il loro incontro colle velocità FC, GC si farà in modo, che si muoveranno in appresso con velocità diverse. Quindi, se CH, CK siano queste loro velocità segnate secondo le proprie loro direzioni, e prendansi di nuovo sulla DC prolungata le porzioni CI, CL eguali alle due AF, BG; si ritroverà avere dopo l'incontro il corpo A le due velocità CH, CI, ed il corpo B le due CK, CL. Onde, compiuti i parallelogrammi CHMI, CKNL, si faranno effettivamente i moti dei due corpi per le diagonali CM, CN; e sarà CM la velocità del primo corpo, e CN la velocità dell' altro. *Fig.* 14.

178. Si vede dunque, che le leggi di moto dell' incontro obliquo derivano da quelle dell' incontro diretto. Imperocchè, determinata la posizione del piano, che tocca i due corpi nel luogo dell' incontro, conforme possiamo risolvere la velocità obli-

qua

qua di ciascuno dei due corpi in due altre laterali, di cui una sia perpendicolare, e l'altra parallela a quel piano; così l'incontro si farà colle sole velocità perpendicolari, e l'altre parallele rimaranno intatte nei due corpi. E poichè con quelle velocità perpendicolari s'incontrano i due corpi direttamente tra loro; perciò determinando la velocità, che deve avere ciascuno di essi dopo l'incontro, e componendo colla medesima l'altra parallela, che rimane intatta nel corpo, avremo così le totali velocità dei due corpi dopo l'incontro, come le direzioni dei loro moti.

179. Or qualunque siasi l'indole de' corpi, che s'incontrano, e comunque facciasi il loro incontro, se uno di essi sia in quiete, e l'altro si muova verso di quello; non v'ha dubbio, che dopo l'incontro sempre dovrà muoversi il corpo quiescente. Ciò però deve intendersi nel caso, che i pesi dei due corpi siano tra loro in ragion finita; poichè se mai il peso del corpo quiescente sia infinitamente grande per rapporto al peso dell'altro, che si muove, sarà così picciola la velocità impressagli dal corpo mosso, che dopo l'incontro tuttavia dovrà egli riguardarsi come fermo, ed immobile.

180. Per intenderne la ragione, e per vedere altresì qneltanto deve avvenire dopo l'incontro al
Fig. 15. corpo, che si muove; sia A il corpo, che essendo di peso finito si muove con velocità ancora finita, e sia B il corpo quiescente di un peso infinitamente maggiore. Suppongasi primieramente, che il moto del corpo A facciasi secondo la retta AB perpendicolare al piano DE, che tocca i due corpi nel luogo dell'incontro. E conforme in questo caso l'incontro dei due corpi deve aversi come diretto; così il corpo A agirà contra l'altro B coll' intera sua velocità. Onde, se i due corpi siano inerti, si avrà la comune velocità, con cui debbono andare insieme dopo l'incontro, con dividere il numero, che ci addita il moto del corpo A,

per

per l'altro, che ci dimostra il peso dei due corpi insieme.

181. Or essendo finito non meno il peso, che la velocità del corpo A, il di lui moto dovrà esprimersi per un numero ancora finito; ed al contrario essendo infinitamente grande il peso del corpo B, dovrà disegnarsi il peso dei due corpi insieme per un numero eziandio infinitamente grande. Ma il quoziente, che ricavasi dalla divisione di un dato numero per un altro variabile, deesi tanto più minorare, quanto maggiormente si aumenta il divisore variabile. Dunque con dividere il numero, che ci addita il moto del corpo A, per l'altro, che ci dimostra il peso dei due corpi insieme, avremo in quoziente un numero infinitamente picciolo; e pertanto facendosi di una picciolezza ancora infinita la comune velocità dei due corpi, lo stato di essi dopo l'incontro non sarà differente da quello della quiete.

182. Se poi i due corpi siano perfettamente elastici, o pure uno di essi sia tale, e l'altro inflessibile; allora dopo l'incontro resterà tuttavia fermo, ed immobile il corpo B, ma l'altro A ritornerà per la stessa BA colla primitiva sua velocità. In fatti, siccome con questa velocità incontransi tra loro i due corpi, così ad essa sarà eguale l'altra, che nei due corpi insieme generasi dalla forza elastica. Ma quest'altra velocità non differente dalla prima dee distribuirsi agli stessi corpi con direzioni opposte, e nella reciproca ragione de' loro pesi. Dunque facendosi infinitamente picciola la porzione, che ne spetta al corpo B, dovrà darsi la riferita velocità interamente al corpo A, il quale perciò dopo l'incontro ritornerà per la BA colla velocità sua primitiva (63).

183. Suppongasi in appresso, che la AB, per cui si muove il corpo A, sia obliqua al piano DE, che tocca i due corpi nel luogo dell'incontro. E conforme in quest'altro caso l'incontro dei due cor- *Fig.* 16.

pi deve aversi come obliquo, così il corpo A agirà contra l'altro B non già coll' intera sua velocità, ma con una delle due, che la compongono. In effetto, se abbassata sul piano DE la perpendicolare AD, compiscasi il parallelogrammo ADBF; potrà risolversi la velocità obliqua AB del corpo A nelle due laterali AD, AF. Onde essendo la direzione della velocità AF parallela al piano DE l' incontro de' due corpi, ed in conseguenza la loro scambievole azione si farà colla sola velocità AD, o sia FB, la di cui direzione è perpendicolare al medesimo piano.

184. Or conforme la velocita AF niente conferisce all'incontro dei due corpi, così la medesima senza ricevere cambiamento alcuno si conserverà nel corpo A. Quindi nella supposizione, che i due corpi siano inerti, resterà il corpo B tuttavia fermo ed immobile dopo l' incontro, ma l' altro A continuerà a muoversi su 'l piano DE colla velocità AF, che in esso rimane intatta. Nella supposizione poi, che i due corpi siano perfettamente elastici, o pure che uno di essi sia tale, e l'altro inflessibile, si muoverà il corpo A dopo l' incontro eziandio colla velocità, che lo fa ritornare per la BF; onde se facciasi la BE eguale alla DB, e compiscasi il parallelogrammo FBEC, si farà il moto del corpo A per la diagonale BC, e la stessa BC sarà la velocità totale.

185. Giova intanto quì notare, che con essere eguali così le due DB, BE, come le due AD, CE, saranno eguali parimente tanto le altre due AB, BC, quanto i due angoli ABD, CBE; poichè da ciò potremo dedurne, che nell' incontro obliquo pure il corpo perfettamente elastico A debba riflettersi colla stessa sua velocità primitiva, ma con direzione tale bensì, che l' angolo della riflessione CBE sia eguale all'angolo dell'incidenza ABD. Del rimanente se l'elasticità del corpo non sia perfetta, egli è facile ad intendersi, che essendo l' in-

con-

contro diretto, debba ritornare il corpo per l'istesso cammino, ma con minor velocità della sua primitiva; essendo poi obliquo, debba egli riflettersi non solo con minor velocità, ma eziandio in modo, che l'angolo della riflessione sia minore dell'angolo dell'incidenza (64).

XVIII.

Del moto comune, e quando egli non altera gli effetti dei moti proprj.

186. Conforme muovendosi un corpo, si muovono altresì tutti i minimi elementi, che lo compongono; così muovendosi un qualche spazio relativo, come quello di una nave, si muoveranno parimente tutti corpi, che in quello spazio si contengono. Ma sebene i minimi elementi del corpo per la loro coesione non siano capaci di altri moti; nientedimeno i corpi racchiusi nello spazio, per essere distaccati l'uno dall'altro, possono muoversi ancora tra loro. Quindi il moto dello spazio, di cui partecipano tutti i corpi, che in esso racchiudonsi, riguardasi come moto loro comune; all'incontro i moti, con cui gli stessi corpi muovonsi tra loro, sogliono aversi come moti proprj.

187. Or quantunque il moto dello spazio sia comune a tutti i corpi, che in esso contengonsi; tuttavolta di quel moto non sempre ne partecipano egualmente gli stessi corpi. Avviene ciò, quantevolte lo spazio col suo moto aggirasi intorno ad un qualche punto; poichè in questo caso, siccome non tutte le parti dello spazio muovonsi colla stessa velocità, così nè pure la velocità, che ricevono i corpi da quel moto comune, sarà in tutti la stessa. Ed in fatti, se la AB aggirandosi intorno al punto C si trasporti per fino alla *ab*, gli spazj percorsi nello stesso tempo dai punti A, e B saranno gli archi A*a*, B*b*. Onde siccome questi *Fig.* 17.

archi, per essere simili, sono nella ragione de'raggi CA, CB; così in questa stessa ragione saranno parimente le velocità tanto dei punti A, e B, quanto dei corpi situati in detti punti.

188. Ciò, che diciamo de' corpi, che muovonsi col moto dello spazio, in cui si contengono, può avvenire altresì ai minimi elementi del corpo, che si muove. Imperocchè, se mai il moto del corpo facciasi intorno ad un qualche punto, saranno disuguali gli spazj, che si percorrono nello stesso tempo dai minimi suoi elementi; ed in conseguenza disuguali ancora le velocità, con cui gli stessi elementi si muovono. Onde siccome per definire la quantità di moto, che in questo caso risiede nel corpo, per necessità debbonsi riunire insieme le diverse velocità dei minimi suoi elementi; così la velocità d'ascriversi all' istesso corpo sarà quella, che essendo comune a tutti gli elementi produce nel corpo la stessa quantità di moto; e dimostreremo a suo luogo in qual punto del corpo ritrovasi questa mezzana velocità, per mezzo di cui ritiene il corpo l'istesso momento.

189. Ma nè pure basta, che il moto dello spazio facciasi a dirittura, per poterne partecipare egualmente i corpi tutti, che in esso contengonsi; poichè se mai qualche forza centrale spinga lo spazio a dirittura verso il suo centro, pure le velocità dei corpi possono essere diverse. In fatti la forza centrale non essendo dell'istessa attività in ogni sua distanza dal centro, agisce diversamente sulle diverse parti dello spazio. E se bene queste parti per la loro coesione debbano comporre insieme le diverse spinte, che dalla forza ricevono, ed accelerarsi in conseguenza egualmente; nientedimeno i corpi, che in esse ritrovansi, per essere distaccati l'uno dall' altro, possono risentire gli effetti di quelle diverse spinte, ed accelerarsi per tanto diversamente (65).

190. Quindi per potere i corpi racchiusi in un qual-

qualche spazio partecipare egualmente del di lui moto, dovrà egli muoversi non solo a dirittura, ma eziandio eguabilmente; ed in questo caso il comune moto dello spazio non potrà alterare gli effetti dei proprj moti; con cui gli stessi corpi muovonsi tra loro. Imperocchè, essendo eguali, e cospiranti le velocità, che ricevono i corpi dal comune moto dello spazio, senza dubbio questi con esse non potranno tra loro incontrarsi. Quindi l'incontro de' corpi si farà tuttavia colle sole velocità dei proprj loro moti; e perciò, non ostante il comune moto dello spazio, pure gli effetti dell'incontro dovranno essere gli stessi: siccome vedesi nella nave, dentro di cui agiscono scambievolmente i corpi coi proprj loro moti egualmente se la nave sia immobile, che se muovasi a dirittura con moto eguabile.

191. Conforme poi il moto rettilineo, ed eguabile dello spazio intanto non altera gli effetti dei proprj moti de' corpi, che in esso contengonsi, in quanto che sono eguali, e cospiranti le velocità, che ricevono gli stessi corpi dal comune moto dello spazio; così potrà stabilirsi come principio indubitato, che se con direzioni parallele imprimansi a' corpi, che si muovono, altre velocità eguali, non debbano alterarsi con queste nuove velocità gli effetti dei primi loro moti. Per far uso intanto di questo principio, dimostreremo per mezzo di esso, che se bene spingendosi un corpo verso un piano immobile, riceva il piano la percossa colla stessa direzione, con cui il corpo si spinge; nientedimeno, se il piano muovasi secondo la sua lunghezza, dovrà egli riceverla con direzione diversa.

192. Sia perciò BC il piano, che muovesi secondo la sua lunghezza da B verso C; e sia A il corpo, che spinto verso quel piano per la retta AC lo percuote nel punto C. Esprimasi per la BC la velocità del piano, e per la AC la veloci- *Fig.* 18

tà del corpo; e se facciasi la CD parallela alla AB, io dico, che si riceverà dal piano la percossa secondo la direzione della DC. Per dimostrarlo, imprimasi tanto al piano, quanto al corpo un' altra velocità eguale, e contraria a quella del piano. E conforme per mezzo di essa il piano diviene immobile, così terminato il parallelogrammo ACBE, si muoverà il corpo colle due velocità AC, AE, le quali compongono insieme la velocità disegnata dalla diagonale AB.

193. Colla nuova velocità adunque impressa così al piano, come al corpo, ricevesi dal piano la percossa colla direzione della AB. Ma questa nuova velocità non deve alterare gli effetti dei primi moti del piano, e del corpo. Dunque eziandio senza di essa dovrà riceversi dal piano la percossa con direzione consimile; e pertanto essendosi fatta la DC parallela alla AB, si riceverà la percossa dal piano mobile colla direzione della DC. Ed in fatti, se teminato l'altro parallelogrammo ACBD, la velocità AC del corpo risolvasi nelle due AD, AB, la prima di esse AD sarà eguale, e cospirante con quella del piano. Onde muovendosi il corpo, ed il piano con una velocità comune, per necessità dovrà percuotersi il piano dal corpo, come se il piano fosse immobile, ed il corpo si muovesse verso di esso colla sola velocità AB.

194. Col cambiamento della direzione, con cui ricevesi la percossa dal piano mobile, può rendersi ragione, almeno nella supposizione di aggirarsi annualmente la terra intorno al Sole, della paralasse, o sia mutazione di sito, a cui soggiacciono le stelle fisse. Imperocchè, siccome noi veggiamo i corpi per mezzo de' raggi di luce, che o quelli ci mandano, o pure ci riflettono; così dobbiamo vedergli in que' luoghi propriamente, che ci additano le direzioni, con cui l' occhio è percosso dagli stessi raggi. Onde se mai l' occhio si muova, e da un sito passi in un altro nel mentre, che i raggi partano

tano dai corpi, e giungono per ſino a noi; dovrà egli riceverne le percoſſe con direzioni diverſe da quelle, con cui ci s' inviano; e pertanto eziandio i corpi dovranno vederſi in luoghi diverſi da quei, in cui ritrovanſi.

195. Or ſe bene ne' corpi non molto da noi diſtanti non mai poſſa avvenire, che l' occhio cambi ſito nel mentre, che i loro raggi da eſſi giungono per ſino a noi, per eſſere momentaneo il loro tranſito; nientedimeno non dee dirſi lo ſteſſo delle ſtelle fiſſe, i di cui raggi per l' immenſa loro diſtanza non poſſono portarſi per fino a noi ſenza tempo conſiderabile. Se adunque in A ſia una ſtella fiſſa, e nel mentre, che i ſuoi raggi portanſi per fino a noi, l'occhio col moto annuo della terra ſi traſporti da B per ſino a C; ſarà percoſſo l' occhio da detti raggi colla direzione della DC parallela alla BA. Onde, ſiccome la ſtella, che ritrovaſi in A, dee vederſi in D; così dovrà giudicarſi della ſua deviazione dal luogo vero, che chiamaſi paralaſſe, per mezzo dell' angolo BAC eguale al ſuo alterno ACD.

CAPITOLO II.

Del moto de' corpi derivato dalla gravità.

196. PRemeſſa la ſcienza del moto in generale, paſſeremo ora a ragionare del moto de' corpi gravi, per cui prima di ogni altra coſa è neceſſario inveſtigare l' indole di quella forza, che rende grave, e ponderoſo qualſiſia corpo terreſtre. Ed in fatti, ſebbene non ſiano di accordo tra loro i Fiſici intorno all' origine di una tal forza; nientedimeno la ſua maniera di agire può dedurſi baſtantemente dagli effetti pur troppo noti, che ella produce ne' corpi (*66*).

I.

Della forza della gravità, e della sua maniera di agire.

197. SIccome i corpi terrestri lasciati in libertà portansi verso la terra con moto accelerato; così la forza, che li spinge continuamente, e produce in essi quel moto, comunemente chiamasi gravità. L'esperienza intanto ci apprende, che si esercita questa forza non solo ne' luoghi superiori alla terra, ma eziandio nelle valli, e ne' luoghi sotterranei. Onde conviene credere, che i corpi terrestri spinti continuamente dalla riferita forza cerchino di portarsi verso un qualche punto interno della terra, il quale perciò riguardasi come comune centro de' gravi.

198. Or nella supposizione di esser sferica la figura della terra, egli è facile il dimostrare, che il di lei centro debba essere il comune centro de' gravi. Imperocchè una delle proprietà della figura sferica si è, che le rette perpendicolari alla sua superficie s'incontrino prolungate nel di lei centro. Ma l'esperienza ci dimostra, che i corpi terrestri spinti dalla gravità portansi verso la terra per rette perpendicolari alla sua superficie. Dunque nella supposizione di esser sferica la superficie della terra, si porteranno i riferiti corpi verso il centro di essa, il quale perciò sarà il comune centro de' gravi (67).

199. Conforme poi i corpi terrestri colle continue spinte, che ricevono dalla forza della gravità, rendonsi gravi, e ponderosi; così l'esperienza stessa c'insegna, che con cambiarsi la figura di un corpo non s'induce cambiamento alcuno nel di lui peso. Ma siccome da ciò ne segue, che la forza della gravità agisce egualmente in tutti i minimi elementi del corpo; così neppure sarà difficile il ricavarne, che il peso, e la massa in ogni corpo debbano essere proporzionali tra loro.

200.

200. Fingiamo perciò, che i minimi elementi in ogni corpo ſiano di una data grandezza; e per agire in tutti egualmente la forza della gravità; ſaranno eguali altresì le loro gravitazioni. Ma da queſte gravitazioni riunite inſieme riſulta la gravitazione, o ſia peſo totale del corpo. Dunque dovrà giudicarſi del peſo di un corpo per lo numero dei minimi elementi, che lo compongono; e pertanto ſiccome queſto numero corriſponde in proporzione alla maſſa del corpo, così il peſo, e la maſſa in ogni corpo ſaranno proporzionali tra loro.

201. Quantunque poi dall'oſſervazioni, che poſſono farſi, ricaviſi ancora, che ovunque portiſi un dato corpo, il ſuo peſo non mai ſi alteri; nientedimeno non poſſiamo da ciò dedurne, che in ogni diſtanza dal centro della terra l'azione della gravità ſia ſempre la ſteſſa. In fatti le diſtanze, di cui facciamo uſo in fare tali oſſervazioni, ſono così poco differenti l'una dall'altra, che poſſono riguardarſi come eguali tra loro. Onde ſebbene vogliaſi ſupporre, che col cambiamento della diſtanza debba cambiarſi l'azione della gravità; pure però un dato corpo dovrà ritenere l'iſteſſo peſo in tutte le diſtanze, in cui poſſiamo condurlo (68).

202. Ed in vero, volendone giudicare per la forza, che trattiene la Luna nel ſuo orbe, egli è molto probabile, che l'azione della gravità con diſcoſtarſi dal centro della terra, da cui ſi dirama, ſi minori in duplicata ragione della diſtanza. Quindi i peſi di due corpi collocati in diverſe diſtanze dal centro della terra ſaranno in ragione compoſta della ſemplice diretta delle loro maſſe, e della duplicata reciproca delle loro diſtanze. Onde conforme debbono eſſere nella ſola ragion diretta delle maſſe, eſſendo eguali le diſtanze, e nella ſola ragion reciproca dei quadrati delle diſtanze, eſſendo eguali le maſſe; così ſe mai ſiano eguali tanto le maſſe, quanto le diſtanze, o pure le maſſe ed i quadrati delle diſtanze ſiano nella ſteſſa ragione, i peſi dei

due

due corpi saranno tra loro eguali.

203. La forza poi, che trattiene la Luna nel suo orbe, dee stimarsi della stessa indole con quella, che trattiene nei loro orbi così i pianeti primarj, come gli altri secondarj. Onde egli è assai verisimile ancora, che la gravitazione sia universale, e che conforme i corpi terrestri insieme colla Luna gravitano verso il centro della terra; così debbano gravitare altresì con leggi consimili i pianeti primarj verso il centro del Sole, ed i pianeti secondarj verso i centri de' loro primarj. Intanto, se voglionsi paragonare tra loro i pesi dei due corpi, che gravitano verso centri diversi; in tal caso dovrà tenersi conto non solo delle loro masse, e delle loro distanze dai riferiti centri, ma eziandio delle quantità assolute delle forze, per cui rendonsi i due corpi gravi, e ponderosi.

204. In fatti sebbene le forze, che partono dai divisati centri, si diramino intorno intorno con legge tale, che ciascuna di esse con discostarsi dal suo centro si minori in duplicata ragione della distanza; nientedimeno se mai le stesse forze nella prima loro origine siano di diverso vigore, non v' ha dubbio, che in eguali distanze dai loro centri saranno diverse altresì le loro attività; onde eziandio corpi di eguali masse situati in quelle eguali distanze dovranno essere diversamente gravi, e ponderosi. Il vigore adunque della forza nella prima sua origine si è la quantità sua assoluta; e perciò di essa parimente dee tenersi conto, qualora il peso di un corpo, che gravita verso un centro, vuol paragonarsi col peso di un' altro corpo, che gravita verso un' altro centro.

205. Or siccome ciascuna delle riferite forze cerca di portare verso il suo centro qualsisia corpo, che ritrovasi nella sfera della sua attività; così si ha bastante motivo per credere, che la quantità assoluta della forza corrisponda in proporzione alla copia di materia riunita, e raccolta nel di lei centro.

tro. E poichè i vasti corpi, che risiedono nei centri delle forze, formati si sono col racccoglimento di quella materia; perciò le quantità assolute delle stesse forze saranno, come le masse dei vasti corpi, che occupano i loro centri. Onde i pesi di due corpi, che gravitano verso centri diversi, saranno in ragion composta della semplice diretta delle loro masse, della duplicata reciproca delle loro distanze da quei centri, e della semplice diretta delle masse dei corpi, che risiedono negli stessi centri.

206. Del rimanente, se mai sia vero, che colle riferite forze siansi formati i vasti corpi, che occupano i loro centri; conviene credere, che con forze consimili sian sorti parimente tutti gli altri gran corpi, che in questo mondo si ravvisano; e perciò eziandio dal centro di ciascuno di essi si diramerà una forza, la di cui quantità assoluta corrisponderà in proporzione alla massa del corpo, e che con discostarsi dal suo centro si minorerà in duplicata ragione della distanza. Non avendo poi limiti l' espansioni di tutte queste forze, agirà ciascuna di esse in tutti i corpi, con cui s' incontra; e pertanto la gravitazione sarà non solo universale, ma eziandio reciproca: dimodochè il sole, la terra, i pianeti primarj, i pianeti secondarj, e le stelle fisse graviteranno reciprocamente tra esse loro.

207. Egli è vero, che le gravitazioni di un corpo verso due diversi centri possono essere tali, che l' una svanisca a riguardo dell' altra; ma niente vieta, che gli effetti di ciascuna di esse siano talvolta sensibili. In fatti delle due gravitazioni della Luna verso il centro della terra, e verso il centro del Sole, non v' ha dubbio, che la prima avanzi di molto la seconda; onde si è, che la Luna si aggiri intorno alla terra, e non già intorno al Sole. In tanto per rapporto alla gravitazione maggiore della Luna verso il centro della terra non svanisce

l' altra

l'altra minore verſo il centro del Sole, ma ella ancora rimane ſenſibile; e quindi ſi è, che il moto della Luna ſia ſoggetto a varie diſuguaglianze, le quali perciò ſpieganſi felicemente colle riferite due gravitazioni.

208. Similmente ſe bene la gravitazione dell' acque del noſtro oceano verſo il centro della terra ſia maggiore così di quella, che eſercitano verſo il centro della Luna, come dell'altra, che eſercitano verſo il centro del Sole, nientedimeno queſt' altre due loro gravitazioni non ſvaniſcono per rapporto alla prima, ma eſſe ancora ſono ſenſibili. E quindi avviene, che le riferite acque ſiano ſoggette al fluſſo, e rifluſſo, il quale ſecondo le varie ſituazioni del Sole, e della Luna a riguardo della terra riceve parimente varie mutazioni, di cui perciò può renderſi ragione con porre a calcolo tutte tre le riferite gravitazioni.

II.

Dell' origine delle forze, da cui deriva la gravitazione univerſale, e reciproca de' corpi.

209. QUantunque non ſia noſtro iſtituto di entrare in ricerche puramente fiſiche; nientedimeno delle forze, da cui deriva la gravitazione univerſale, e reciproca de'corpi, giova inveſtigarne l'origine. Ed in vero, ſe voglia averſi per indubitato, che ogni minima particella di materia ſia capace di dividerſi all'infinito; conviene dire, che la primitiva materia altro non era, ſe non che un tutto, in cui naſcevano le parti coll'attuale ſua diviſione. Quindi ſiccome dee dirſi ancora, che le parti, in cui fu diviſa da principio la ſteſſa materia, ritrovavanſi unite inſieme per principio inſito alle ſteſſe parti, così non oſtante la loro ſeparazione, dovette rimanere in eſſe un tal principio; e perciò nelle minime particelle della materia

ria

ria debbono ammetterſi forze, per mezzo di cui cercano unirſi di nuovo, con attirarſi ſcambievolmente tra loro.

210. Derivando queſte forze traenti nelle minime particelle della materia da quel principio inſito, per cui prima univanſi inſieme; chiaro ſi è, che la quantità aſſolûta di ciaſcuna di eſſe debba corriſpondere in proporzione alla particella ſteſſa, in cui riſiede. E per una ragione conſimile, qualora ſpandeſi queſta forza intorno intorno per rette, che partono dal ſuo fonte; conſerverà ella in tutta la lunghezza di queſte rette l'iſteſſo vigore. Onde ſiccome con diſcoſtarſi dal ſuo fonte non può ricevere altra diminuzione, ſe non ſe quella, che deriva dalla divergenza delle rette, per cui ſi dirama; così per neceſſità dovrà diminuirſi in duplicata ragione della diſtanza.

211. Or conforme le minime particelle, in cui fu diviſa da principio la primitiva materia, compongono i corpi; così la formazione di queſti corpi deve aſcriverſi propriamente a quelle forze, per mezzo di cui le ſteſſe particelle ſcambievolmente tra loro ſi attirano. Quantunque poi le riferite particelle colle ſcambievoli loro attrazioni congiunganſi inſieme di bel nuovo, e formino i corpi ſenſibili; nientedimeno per gli pori, o ſiano meati, che laſciano tra eſſo loro, non uniſconſi in modo, che non poſſano ſepararſi, ed unirſi ad altre parti, che maggiormente le attirano. E quindi ſi è, che almeno preſſo di noi non ſempre ſuſſiſtono gli ſteſſi corpi, ma nel mentre, che alcuni riſolvonſi, altri al contrario ſi generano, e ricevono il loro eſſere (69).

212. Veggonſi intanto nella vaſta eſtenſione di queſto mondo moltiſſimi corpi, che non ſolo ſono di una mole grandiſſima, ma ſembrano altresì incapaci di poterſi riſolvere. Perciò conviene credere, che nel centro di ciaſcuno di eſſi ritroviſi una parte molto conſiderabile della primitiva materia, la quale per l'ecceſſiva ſua forza traente non ſolo

è ſtata

è stata valevole di attirarsi in somma copia le altre parti più picciole, ma le tiene altresì talmente a se unite, che non così facilmente possono distaccarsene. E poichè gli stessi corpi veggonsi presso a poco di figura sferica, perciò è da credersi, che eziandio quelle parti considerabili della primitiva materia, le quali occupano i loro centri, siano della stessa figura.

213. Ed in fatti qualora queste parti centrali pongonsi di figura sferica, le loro forze traenti saranno della stessa attività non solo in tutta la loro superficie, ma eziandio in eguali distanze da quella. Onde siccome le riferite parti centrali attireranno a se da per tutto egual copia di altre parti più picciole; così quest' altre parti, unendosi colle loro centrali, si disporranno in modo, che non altereranno sensibilmente la loro figura sferica. E poichè l'unione delle medesime picciole parti colle loro centrali deve essere più, o meno stretta a misura della maggiore, o minore attività della forza, che con quelle le unisce; perciò non solo saranno sferici i corpi, che formansi, ma sarà tale ancora la loro tessitura, che conforme la densità in ciascuno di essi deve essere la stessa in eguali distanze dal centro, così dovrà diminuirsi in distanza maggiore.

214. Or non v'ha dubbio, che con unirsi colle riferite parti centrali gran copia di altre parti più picciole, debbano aumentarsi a proporzione le loro forze traenti; ed appunto queste forze così aumentate sono quelle, da cui deriva l'universale, e reciproca gravitazione de' corpi. Nè poi è da porsi in dubbio, che ne' vasti corpi di questo mondo, con riunirsi insieme le forze traenti delle medesime loro particelle, abbiansi forze, che si diramino dai loro centri, e con discostarsi da essi si minorino in duplicata ragione della distanza. Imperocchè, se intendansi divisi que' corpi in strati concentrici di una bassezza così picciola, che possano aversi come super-

ſuperficie sferiche concentriche; ſarà ciaſcuno di queſti ſtrati egualmente denſo da per tutto. Onde baſterà far vedere, che in uno ſtrato di queſta indole colla riferita legge ſi eſerciti la forza traente, che ſi ha con riunire inſieme le forze delle minime particelle, che lo compongono.

215. Generiſi perciò lo ſtrato, di cui ſi tratta, colla rivoluzione della circonferenza AMB; e ſia AB il diametro, su di cui prolungato ritrovaſi il corpo D tirato dallo ſteſſo ſtrato. Tiriſi alla circonferenza la retta DMN ad arbitrio, a cui ſia infinitamente vicina l'altra D*mn*; e ſi abbaſſino su'l diametro AB le perpendicolari MO, NR. Le porzioni adunque dello ſtrato, che ſi generano colla rivoluzione dei due archetti M*m*, N*n* intorno al diametro AB, ſono proporzionali ai due rettangoli OM*m*, RN*n*. Onde le loro forze traenti a riguardo del corpo D ſaranno in ragion compoſta della diretta de' rettangoli OM*m*, RN*n*, e della reciproca de' quadrati fatti dalle due DM, DN. Quindi, per eſſere nella diretta ragione di queſte due, tanto le perpendicolari MO, NR, quanto gli archetti M*m*, N*n*, ſaranno eguali le riferite forze traenti; e perciò la loro ſomma potrà eſprimerſi per la ragione, che ha il doppio del rettangolo OM*m* al quadrato della DM. *Fig.* 19.

216. Si abbaſſi ora dal centro C la CE perpendicolare sulla MN, e ſia la E*e* parallela alla retta, che tocca la circonferenza nel punto M. Facendoſi adunque proporzionali così le quattro M*m*, DM, E*e*, DE, come le quattro MO, DM, CE, DC; ſarà il rettangolo OM*m* al quadrato della DM, come il rettangolo CE*e* al rettangolo CDE; e pertanto la ſomma delle riferite due forze potrà eſprimerſi altresì per la ragione, che ha il doppio del rettangolo CE*e* al rettangolo CDE. Ma nella ſuppoſizione di eſſere l'arco AH la metà dei due AM, BN, l'altro H*h* la metà degli altri due M*m*, N*n*, e la HI perpendicolare su'l diametro AB, ſi

OM*m*

sanno eguali i due rettangoli CEe, IHh. Dunque la somma delle stesse forze potrà disegnarsi parimente per la ragione, cha ha il doppio del rettangolo IHh al rettangolo CDE.

217. Se poi ciascuna delle forze, con cui le minime particelle delle divisate porzioni dello strato tirano il corpo, risolvasi in due, di cui una sia perpendicolare, e l'altra parallela al diametro AB; si distruggeranno tra esso loro le attrazioni del corpo, che derivano dalle forze perpendicolari, e sarà tirato il corpo dalle sole forze parallele, la di cui somma agirà su 'l corpo, come se si diramasse dal centro C. Ma la somma di queste forze parallele sta alla somma delle forze totali, come DO a DM, o pure come DE a DC, o finalmente come il rettangolo CDE al quadrato della DC. Dunque la somma delle riferite forze parallele dovrà esprimersi per la ragione, che ha il doppio del rettangolo IHh al quadrato della DC: e pertanto essendo il rettangolo IHh proporzionale alla porzione dello strato, che si genera colla rivoluzione dell' archetto Hh intorno al diametro, ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, non solo si diramerà dal centro la forza traente dell'intero stato, ma con discostarsene si diminuerà altresì in duplicata ragione della distanza.

218. Del rimanente quantunque dai nostri principj ne segua, che ancora le stelle fisse sian dotate di forze traenti consimili, con cui non solo gravitano sciambievolmente tra loro, ma cercano altresì di attirare a se tutti i corpi del nostro sistema solare; nientedimeno questi corpi non debbono sentirne gli effetti, sì per l'immensa distanza, in cui sono le stelle fisse a riguardo di ciascuno di essi, come ancora per equilibrarsi tra loro le forze traenti delle medesime stelle. In fatti, siccome il Cielo stellifero è talmente ripieno di stelle, che niente vieta di riguardarlo come un' orbe egualmente *Fig.* 20. denso da per tutto; così, se AMB sia la circonfe-

renza

renza di cerchio, colla di cui rivoluzione generasi il riferito orbe, e D il corpo, che situato dentro di esso vien tirato per ogni lato dalle minime particelle, che lo compongono, ritroveremo essere eguali tra loro le forze, che cercano di tirare il corpo a parti contrarie; e perciò l' istesso corpo dovrà rimanere fermo ed immobile.

219. Per quanto ai corpi terrestri, ancora essi sono dotati di forze traenti, con cui scambievolmente gravitano tra loro; ma non dee sembrarci strano, che questa scambievole loro gravitazione non sia sensibile, per svanire a riguardo di quella, con cui gravitano verso il centro della terra. Aggiungasi, che per un' altra ragione ancora le forze traenti de'corpi terrestri debbono essere regolarmente molto languide; e si è, che sebbene le forze delle minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia, con discostarsi dai loro fonti, diminuiscansi in duplicata ragione della distanza; nientedimeno le forze di altre parti grandi derivate dall' unione di quelle, lontano di osservare la stessa legge di diminuzione, possono al contrario spandersi con infinite leggi diverse. Questa ragione intanto merita di esser posta in tutta la sua luce, maggiormente che per mezzo di essa si farà a noi noto donde derivi la varietà, che ne' corpi terrestri si ravvisa.

III.

Continuazione dello stesso argomento, e donde derivi la specifica differenza de' corpi.

220. QUantunque siansi formati i corpi colle minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia; nientedimeno gl' immediati loro elementi non sono già le riferite minime particelle, ma altre di mole maggiore, che sono nate dall' unione di quelle. In fatti siccome separate, che furono le prime particelle

della materia, incominciarono subito ad unirsi insieme colle loro forze traenti ; così avanti , che sorgessero i corpi , e ricevessero il loro essere , conviene credere , che si fossero fatte di quelle particelle varie consecutive unioni . Onde le particelle di mole maggiore nate con queste varie unioni successive sono gl' immediati elementi de' corpi, i quali elementi perciò debbonsi distinguere in varj ordini , secondo le replicate unioni, per mezzo di cui formati si sono.

221. Siccome adunque debbono aversi per elementi del primo ordine le particelle di mole maggiore nate dalla prima unione di quelle , in cui fu divisa la primitiva materia; così elementi del secondo ordine saranno le altre di mole vie più maggiore derivate dalla nuova unione degli elementi del primo. Per la stessa ragione poi le particelle formate coll' unione degli elementi del secondo saranno elementi del terzo ordine; come ancora l'altre generate coll' unione degli elementi del terzo saranno elementi del quarto ordine. E quantunque sia a noi ignoto, quanti ordini di elementi siansi formati prima , che i corpi ricevessero il loro essere; conviene tuttavolta credere, che non sia picciolo il loro numero per la ragione, che da essi dee ripetersi l' immensa varietà, che tra i corpi si ravvisa.

222. Vediamo intanto , quali siano le affezioni, per cui gli elementi di diverso ordine si fanno d' indole ancora diversa . Ed in primo luogo non v' ha dubbio , che debbano essere tra loro differenti sì per la mole , come ancora per la densità ; con questo divario bensì, che siccome la mole deve aumentarsi a misura , che gli elementi da un' ordine passano in un'altro; così al contrario la densità debba diminuirsi , con farsi gli elementi di un' ordine superiore. In fatti l'ampiezza de' pori, che lasciano tra loro le particelle, che confusamente insieme si uniscono, deriva presso a poco dalla mole delle stesse particelle. Onde conforme negli elementi di un'

ordi-

ordine ſuperiore gl' immediati componenti ſono di mole maggiore, così ſarà maggiore altresì l'ampiezza de' pori, che tra quei componenti ſi frammezzano; e pertanto la denſità degli ſteſſi elementi dovrà eſſere parimente maggiore (70).

223. Per ſchiarire di vantaggio queſta diverſa denſità, per cui elementi di diverſo ordine debbono eſſere tra loro differenti, giova l' avvertire, che ſiccome gli elementi di qualſiſia ordine ſuperiore ſono nati dalle conſecutive unioni degli elementi di tutti gli altri ordini inferiori; così in eſſi debbonſi ritrovare i pori derivati tanto dall' ultima unione, quanto da tutte l' altre unioni precedenti. Onde ſe voglia ſupporſi, che in ogni unione i pori uguaglino la mole delle particelle, che ſi uniſcono, ſarà la parte poroſa alla parte ſolida, come 1 ad 1 negli elementi del primo ordine, come 3 ad 1 negli elementi del ſecondo, come 7 ad 1 negli elementi del terzo, e così conſecutivamente negli altri; e perciò le denſità, che ſono in ragion compoſta della diretta delle maſſe, e della reciproca delle moli, ſi diminuiranno negli ſteſſi elementi in modo, che ciaſcuna ſarà la metà della precedente.

224. La ſeconda differenza, che incontraſi tra elementi di diverſo ordine, dee ripeterſi dalla coeſione degl' immediati loro componenti; la quale deve eſſere tanto più debole, quanto maggiormente elevaſi l'ordine degli elementi. Per intenderne la ragione, baſta riflettere ai ſeguenti due principj. I, che ſiccome due qualſiſiano particelle di materia uniſconſi inſieme per mezzo delle forze, con cui ſcambievolmente tra loro ſi attirano: così il grado della loro coeſione dipende dall'attività delle forze, con cui inſieme ſi uniſcono. E II, che ſiccome la forza di qualſiſia particella di materia ſi ha, con riunire inſieme le forze dell' altre parti più picciole, che la compongono; così la medeſima ſi raccoglie in uno dei punti interni della ſteſſa par-

 ticel-

ticella, da cui poſcia per tante rette divergenti diramaſi verſo la ſuperficie.

225. Or non v' ha dubbio, che con farſi l' elemento di un' ordine ſuperiore, elevaſi altresì l' ordine degl' immediati ſuoi componenti, nei quali perciò aumentaſi non ſolo la mole, ma eziandio la ragione della parte poroſa alla parte ſolida. Quindi ſebbene in ciaſcuno di eſſi ſia maggiore così la copia della ſua materia, come la quantità aſſoluta della ſua forza traente; nientedimeno, attento il ſecondo principio, l'attività di queſta forza deve eſſere molto minore nella di lui ſuperficie. Onde qualora gli ſteſſi componenti uniſconſi inſieme colle loro forze traenti, e colla loro unione formano l' elemento, di cui ſi tratta; per neceſſità la loro coeſione deve eſſere meno valida, come quella, che in virtù del ſecondo principio dee ripeterſi dall' attività delle forze, per mezzo di cui inſieme ſi uniſcono.

226. Egli è vero, che per giudicare del grado di coeſione, che ritrovaſi tra due qualſiſiano particelle di materia unite inſieme colle loro forze traenti; dee tenerſi conto altresì del numero de' punti, in cui toccanſi le ſteſſe particelle colla loro ſolidità; ma eziandio per queſto capo, con farſi più elevato l' ordine, a cui l'elemento ſi riduce, la coeſione tra gl' immediati ſuoi componenti deve eſſere più debole. In fatti ſe bene per farſi queſti componenti di mole maggiore, ſia maggiore parimente nel luogo del contatto la comune loro ſuperficie; nientedimeno; perchè negli ſteſſi componenti la parte poroſa avanza di molto la parte ſolida, moltiſſimi punti della parte ſolida dell'uno corriſponderanno a punti della parte poroſa dell' altro; e perciò il numero de'punti, in cui le parti ſolide dei medeſimi componenti tra loro ſi toccano, ſarà più toſto minore.

227. La terza, ed ultima differenza, che ritrovaſi tra elementi di diverſo ordine, deriva dalla precedente; e ſi è, che un'elemento tanto più facilmen-

mente

mente possa risolversi negli altri immediati, che lo compongono, quanto scorgesi più elevato l'ordine, a cui egli si riduce. In effetto di qualunque ordine sia l'elemento, non potrà egli risolversi, se prima non tolgasi la coesione tra gli altri elementi di ordine inferiore, di cui il medesimo immediatamente si compone. Ma di già si è dimostrato, che questa coesione debba essere tanto più debole, quanto maggiormente elevasi l'ordine, a cui appartiene l'elemento. Dunque, con farsi l'elemento di un' ordine superiore, siccome con maggior facilità può togliersi la coesione tra i suoi componenti immediati, così l'elemento stesso potrà più facilmente ancora risolversi.

228. Per risolvere intanto un' elemento, non v' ha dubbio, che si ha bisogno di una forza maggiore di quella, da cui deriva la coesione tra i suoi componenti immediati. Quindi per poco, che vogliasi riflettere, s' intenderà facilmente, che non possa egli risolversi coll'attività di coloro, che immediatamente lo precedono; ma debba farsi la risoluzione di esso per mezzo di altri elementi, il di cui ordine sia di due gradi almeno più basso. Onde così gli elementi del primo ordine, come quei del secondo non potranno affatto risolversi. Imperocchè sebbene per la risoluzione di coloro, che sono del secondo ordine, potrebbe bastare l'attività delle minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia; nientedimeno non possono aversi queste tali particelle, se prima non risolvansi gli elementi del primo ordine.

229. Ciò, che poi è comune a tutti gli elementi di qualunque ordine essi si siano, riguarda l'espansione delle loro forze, la quale non dee soggiacere alla stessa legge, con cui spandonsi le forze delle minime particelle, in cui fu divisa da principio la primitiva materia. In fatti si è veduto di sopra, che ne'vasti corpi di questo mondo non per altra ragione diramansi le forze da' loro centri, e

diminuisconsi con discostarsi da essi in duplicata ragione della distanza, se non perchè la loro figura è sferica, e ciascuno de' medesimi in eguali distanze dal centro ritrovasi essere egualmente denso. Onde se mai il corpo non sia sferico, o pure la sua densità in eguali distanze dal centro non sia la medesima; per necessità dovrà spandersi la forza con altra legge.

230. Or attenta la maniera, con cui formansi gli elementi, non è da credersi, che la loro figura sia sferica; e se mai alcuni di essi abbiano presso a poco una tal figura, egli è molto verisimile, che i medesimi in eguali distanze dai centri non siano egualmente densi. Onde le forze negli elementi sebbene si diramino da uno dei punti loro interiori, con discostarsi nientedimeno da essi non si minoreranno in duplicata ragione della distanza. Conforme poi per determinare la legge della diminuzione, che seguono le loro forze, deè tenersi conto non meno della loro figura, che della varia loro densità; così a misura, che variano negli elementi queste due affezioni, debbono variare altresì le leggi, con cui le loro forze si spandono; e perciò potranno spandersi con infinite leggi diverse.

231. Comunque però negli elementi mutisi la legge, con cui diminuisconsi le forze discostandosi dai loro centri, non v' ha dubbio, che debba farsi la diminuzione di esse sempre in maggior ragione della duplicata della distanza; e perciò si diminuiranno le forze sì per la divergenza delle rette, per cui si diramano, come ancora per non conservarsi dell' istesso vigore in tutta la lunghezza di queste rette. Intanto se vogliansi considerare separatamente le riferite due diminuzioni, non è egli da porsi in dubbio, che la seconda di esse possa farsi in qualsisia ragione della distanza; poichè facendosi la prima continuamente in duplicata ragione, sempre con comporre insieme le due ragioni si avrà una ragione maggiore della duplicata,

sicco-

ſiccome deve eſſere quella, con cui ſi fa la diminuzione totale.

232. Siccome poi le forze negli elementi non conſervanſi dell' iſteſſo vigore in tutta la lunghezza delle rette, per cui ſi diramino; così accaderà il più delle volte, che le ſteſſe forze non ſiano ſenſibili, ſe non in picciole diſtanze dai loro centri. Quindi ſebbene gli elementi colle loro forze poſſano ſempre unirſi inſieme, e formare i corpi ſoggetti a noſtri ſenſi; nientedimeno queſti corpi colle loro forze, le quali riſultano dall'unione di quelle, che riſiedono nei loro elementi, rare volte potranno attirarſi ſcambievolmente in modo, che ſiano manifeſti gli effetti delle loro ſcambievoli attrazioni. Ed ecco, che ancorchè la loro gravitazione verſo il centro della terra non foſſe notabilmente maggiore; pure le ſcambievoli attrazioni, che eſercitano tra eſſo loro con forze molto languide, aſſai di rado dovrebbero eſſere ſenſibili.

233. Del rimanente la varietà, che ſi ravviſa ne' corpi, non da altro dee ripeterſi, ſe non ſe dalla diverſità delle forze, che ritrovanſi tra gli elementi, di cui ſi compongono; nè ciò ſi oppone al comune ſentimento de' Fiſici, i quali ſtimano doverſi quella varietà dedurre dalle varie figure, e dalle varie denſità degli ſteſſi loro elementi; poichè, ſecondo è ſtato avvertito, dee variare in un elemento la forza a miſura, che varia in eſſo così la figura, come la denſità. Onde il metodo da tenerſi nelle ricerche fiſiche ſi è, primieramente d'inveſtigare per mezzo delle oſſervazioni, e dell'eſperienze le forze, che riſiedono negli elementi di qualſiſia corpo; ed indi di dedurre da queſte forze gli effetti che producono i corpi, o ſeparatamente l'uno dall'altro, o pure meſcolati inſieme (71).

IV.

Delle leggi, che si osservano nella caduta verticale de' gravi.

234. QUuantunque la gravità abbia luogo così ne' corpi terrestri, come ne' celesti; nientedimeno i moti, che specialmente da noi considerar si debbono, sono quei, che produce la gravità terrestre ne' corpi, che alla nostra terra si appartengono. Or le distanze di questi corpi dal centro della terra, da cui diramasi la gravità terrestre, sono così poco differenti l' una dall' altra, che possono aversi presso a poco come eguali tra loro. Quindi se bene la gravità terrestre, con discostarsi dal suo centro, diminuiscasi in duplicata ragione della distanza; ad ogni modo presso la superficie della terra, ove deve essere da noi considerata, senza nota di errore può riguardarsi come costante. Onde in questa supposizione niente sarà più facile, quanto di definire; e porre a calcolo i moti de' gravi terrestri (72).

235. Ed in primo luogo, siccome un grave terrestre lasciato in libertà dee portarsi verso la terra per una retta perpendicolare alla sua superficie, così il suo moto dovrà essere eguabilmente accelerato. Per dimostrarlo, intendasi diviso il tempo in particelle eguali, ed infinitamente picciole; ed essendo il grave continuamente spinto dalla gravità terrestre, riceverà egli in ogni particella di tempo una spinta diversa. Ma nella supposizione di essere costante la stessa gravità, queste spinte debbono essere eguali. Dunque gl' incrementi di velocità, che acquista il grave colle medesime spinte, saranno eziandio eguali; e pertanto aumentandosi la sua velocità in ragione del tempo, il suo moto dovrà essere eguabilmente accelerato.

236. La stessa cosa può dedursi ancora dal teorema generale dimostrato di sopra (61). Fingiamo perciò, che la curva CD descritta intorno all' asse
Fig. 1.

AB

AB sia d'indole tale, che esprimendosi i tempi per l'ascisse AN, AQ, possano disegnarsi per le ordinate corrispondenti MN, PQ le attività della forza nella fine di que' tempi; ed in virtù del riferito teorema le velocità acquistate dal corpo ne' tempi AN, AQ saranno, come le aree ACMN, ACPQ. Ma nella supposizione di essere la forza costante, la curva CD cambiasi in una retta parallela all' asse AB, e le riferite aree diventano parallelogrammi di eguali altezze. Dunque siccome questi parallelogrammi debbono essere tra loro, come le basi AN, AQ; così le velocità acquistate dal corpo ne' tempi AN, AQ saranno proporzionali agli stessi tempi.

237. Essendo la caduta libera del grave moto equabilmente accelerato, possiamo dimostrare in secondo luogo, che gli spazj percorsi dal grave, numerati dal principio della sua caduta, siano come i quadrati de' tempi, in cui si percorrono. Esprimansi perciò i tempi per le ascisse AN, AQ, e le velocità, che ritrovasi avere il grave nella fine di que' tempi, per le ordinate corrispondenti MN, PQ. Ed essendo le velocità proporzionali ai tempi, si termineranno le ordinate MN, PQ alla retta AD, che incontrasi alla AB nel punto A. Quindi per ciò, che è stato dimostrato di sopra (40), gli spazj percorsi dal grave nei tempi AN, AQ, saranno, come i triangoli AMN, APQ. Ma questi triangoli, per essere simili, sono come i quadrati dei lati omologi AN, AQ. Dunque ancora gli spazj, che si percorrono dal grave nei tempi AN, AQ saranno; come i quadrati dei tempi, in cui si percorrono. *Fig.* 21.

238. La stessa verità può dimostrarsi ancora in un'altra maniera, ed ecco come. Esprimansi per le ascisse AN, AQ prese sull' asse AC gli spazj percorsi dal grave in due qualsisiano tempi; e se le attività, che ritrovasi avere la gravità terrestre ne' luoghi A, N, Q si disegnino per le ordinate BA, *Fig.* 3.

MN,

MN, PQ della curva BD, saranno i quadrati delle velocità acquistate dal grave fino ai luoghi N, e Q, come le aree corrispondenti ABMN, ABPQ (68). Ma nella supposizione di essere costante la gravità terrestre, la curva BD cambiasi in una retta parallela all' asse AC, e le riferite aree diventano parallelogrammi di eguali altezze. Dunque siccome questi parallelogrammi debbono essere tra loro, come le basi AN, AQ; così in questa stessa ragione saranno ancora i quadrati delle riferite velocità; e pertanto essendo le velocità proporzionali ai tempi, saranno gli spazj AN, AQ percorsi dal grave, ed i quadrati dei tempi, in cui si percorrono, nella stessa ragione.

239. Essendo così, può dimostrarsi in terzo luogo, che gli spazj percorsi successivamente dal grave in tempi eguali siano, come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c. Distinguansi perciò i tempi in modo, che numerati dal principio della caduta siano tra loro, come i numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, &c.; e per queltanto è stato dimostrato gli spazj percorsi dal grave in detti tempi saranno, come i quadrati degli stessi numeri 1, 4, 9, 16, 25, &c. Ma togliendo ciascun tempo da quello, che segue, vengono ad aversi tempi eguali; e togliendo ancora ciascun spazio dall'altro susseguente, vengono ad aversi spazj, che sono come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c. Dunque gli spazj, che successivamente si percorrono dal grave in tempi eguali, debbono essere tra loro, come i riferiti numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c.

240. Reca intanto meraviglia, come i divisati spazj possano essere tra loro in questa ragione, quandochè la velocità del grave diventa dupla nel secondo tempo, tripla nel terzo, quadrupla nel quarto, e così all' infinito. Ma egli è da notarsi, che la nuova velocità, che aggiungesi al grave in ogni tempo, generasi a poco a poco, ed equabilmente. Quindi il grave in descrivere lo spazio corrispondente

dente

dente a qualsisia dei tempi eguali, non impiega tutta la nuova velocità, che riceve in detto tempo, ma semplicemente la sua metà. Onde fatto il computo si ritroverà, che eziandio le velocità, con cui dal grave si percorrono spazj in tempi eguali, siano come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c. (73).

241. Può dimostrarsi finalmente, che lo spazio percorso dal grave in un dato tempo sia la metà di quello, che nell' istesso tempo si percorrerebbe eguabilmente colla velocità finale. In fatti, se AQ disegni il tempo, e PQ la velocità finale; dovrà disegnarsi il primo spazio per mezzo del triangolo APQ, ed il secondo per mezzo del parallelogrammo ASPQ (42). Onde siccome il triangolo APQ è la metà del parallelogrammo ASPQ, così eziandio il primo spazio dovrà essere la metà del secondo. E di poi, secondo l'avvertimento poc'anzi fatto, nella descrizione del primo spazio impiegasi dal grave solamente la metà della velocità finale. Dunque descrivendosi il secondo spazio coll' intera velocità, per necessità il primo dovrà essere la metà del secondo. *Fig.* 21.

242. Del rimanente per non tralasciare cosa alcuna intorno alla caduta verticale de' gravi, noteremo ora due cose. La prima si è, che tutti i gravi lasciati in libertà debbano in tempi eguali acquistare eguali velocità, e descrivere spazj eziandio eguali. Dipende ciò dall'essere costante la gravità presso la superficie della terra, e dall' essere eguali le spinte, che da essa continuamente ricevono non già i gravi, ma le minime, ed eguali loro particelle. Imperocchè siccome per queste eguali spinte debbono le stesse particelle accelerarsi egualmente in tempi eguali, e descrivere spazj similmente eguali; così ancora per rapporto ai gravi, che si compongono di quelle particelle, dovranno essere eguali tanto le velocità, che acquistano in tempi eguali, quanto gli spazj, che percorrono negli stessi tempi (74).

243. Egli è vero, che in pratica non sempre avviene, che gravi diversi cadendo liberamente percorrano eguali spazj in tempi eguali; ma ciò deve ascriversi alla resistenza dell' aere; la quale siccome non è la stessa per rapporto a tutti i gravi, così nè pure minora egualmente le velocità, che da essi si acquistano. Intanto se prendasi un tubo di vetro bastantemente lungo, da cui tolgasi tutto l'aere per mezzo della machina pneumatica, e dentro di esso facciansi cadere da una stessa altezza due qualsisiano gravi; si vedrà, che giungeranno questi gravi al fondo del tubo in un medesimo tempo. Onde non è egli da porsi in dubbio, che tolta via la resistenza dell' aere, debbano essere eguali così gli spazj, che in eguali tempi si percorrono da' gravi, come le velocità, che nei medesimi tempi da essi si acquistano (75).

244. L'altra cosa da notarsi si è, che secondo le osservazioni fatte per mezzo de' pendoli un grave qualsivoglia lasciato in libertà debba descrivere nel tempo di una seconda 15 piedi di Parigi con una dodicesima parte di più. Onde perchè gli spazj, che percorre il grave dal principio della sua caduta, debbono essere come i quadrati de' tempi, in cui gli percorre; niente sarà più facile, quanto di definire così lo spazio, che dee percorrersi dal grave in qualsisia tempo dato, come il tempo, che deve impiegare il grave a percorrere qualsisia dato spazio. Ed in fatti, se il tempo dato sia di 10 seconde, sarà di piedi 1508 con una terza parte di più lo spazio, che si dimanda; ed al contrario, se lo spazio dato sia di 2000 piedi, sarà di 11 seconde con una metà di più il tempo, che si cerca (76).

V.

Delle leggi, che si osservano nella caduta obliqua de' gravi.

245. Conforme un grave col suo peso cerca di portarsi verso la terra con direzione perpendicolare alla sua superficie; così se mai sia egli sostenuto da un piano orizzontale, impiegherà tutto il suo peso in premere il piano, che lo sostiene; onde si è, che il medesimo grave dovrà rimanere fermo ed immobile. Non avviene però lo stesso, se il grave posi su di un piano, che sia inclinato sull'orizzonte; poichè in questo caso premerà egli il piano, su di cui poggia, con una sola porzione del suo peso; onde coll'altra rimanente, che non dee rimanere oziosa, si porterà tuttavia verso la terra, ma con direzione parallela al medesimo piano.

246. Sia perciò BC un piano orizzontale, a cui inclinisi un altro ad arbitrio, e sia AB. Situisi su di quest'altro piano inclinato il grave D, e siccome egli col suo peso agisce secondo la DE perpendicolare al piano orizzontale BC, così premerà l'altro piano inclinato AB secondo la retta DF perpendicolare all'istesso piano. Quindi se il peso totale del grave esprimasi per la DG, e compiuto il parallelogrammo DFGH, dividasi nelle parti DF, DH; premerà egli il piano inclinato AB colla sola parte DF. Onde l'altra parte DH, che non impiegasi nella pressione, rimarrà intatta nel grave, la quale perciò farà, che il grave portisi verso la terra colla sua medesima direzione. *Fig.* 22.

247. Essendo così, sogliono distinguersi due pesi in un grave, che poggia sopra un piano inclinato; di cui uno è il peso suo totale, che chiamasi peso assoluto; e l'altro è la porzione dello stesso peso totale, che conduce il grave per la lunghezza del piano, la quale porzione appellasi peso relativo. Onde nel grave D, che poggia su'l piano inclina-

clinato AB, il peso assoluto sarà quello, che si è espresso per la DG; all' incontro il peso relativo sarà la porzione del medesimo peso assoluto corrispondente alla DH. Ed egli è chiaro, che se bene il peso assoluto del grave sia sempre lo stesso, nientedimeno il peso relativo debba variare secondo varia l' inclinazione del piano, su di cui poggia l'istesso grave: siccome in effetto chiamasi peso relativo, perchè si considera relativamente al piano inclinato (77).

248 Qualunque però siasi l' inclinazione del piano, egli è facile il dimostrare, che il peso assoluto sia al peso relativo, come la lunghezza del piano alla sua altezza. Così se dal punto A si abbassi su 'l piano orizzontale BC la perpendicolare AC, sarà questa AC l' altezza del piano inclinato AB. Onde ciò, che dee dimostrarsi, si è, che il peso assoluto del grave D sia al peso suo relativo, come la lunghezza AB del piano inclinato all'altezza AC del medesimo piano: il che ricavasi dall' essere i due triangoli DGH, ABC tra loro equiangoli. Imperocchè in virtù di essi deve essere, come DG a DH, così AB ad AC. Ma di già si è veduto, che esprimendosi per la DG il peso assoluto debba disegnarsi per la DH il peso relativo. Dunque ancora il peso assoluto deve essere al peso relativo, come AB ad AC (78).

249. Se poi prendasi per raggio la lunghezza del piano inclinato AB, chiaro si è, che la sua altezza AC si farà seno dell'angolo ABC, per mezzo di cui si misura l' obliquità, o sia inclinazione del piano. Quindi comunque inclinisi il piano AB sull'altro orizzontale BC, il peso assoluto del grave D sarà al suo peso relativo, come sta il raggio al seno dell'angolo, che ci addita l' inclinazione del medesimo piano. Onde siccome il peso relativo dee farsi eguale al peso assoluto, quantevolte facendosi l'angolo ABC retto, il piano AB diviene verticale; così al contrario dovrà egli annientarsi, qualora

ra

ra combaciandosi tra loro i due piani AB, BC, ed annientandosi l'angolo ABC, diventa orizzontale il piano AB.

250. La verità di queltanto si è dimostrato intorno alla ragione tra il peso assoluto, ed il peso relativo può comprovarsi ancora coll' esperienza, ed ecco come. Pongasi in A una girella, per cui facciasi passare il filo DIL attaccato con uno de' suoi estremi al grave D; indi dall' altro estremo dello stesso filo sospendasi un altro grave L, che coll' attività del suo peso arresti su 'l piano AB il primo grave. Poichè dunque il grave D cerca di portarsi per la lunghezza del piano AB col suo peso relativo, chiaro si è, che non potrà egli essere arrestato dall'altro grave L, se il peso assoluto di questo non sia eguale al peso relativo di quello. Onde se mai ritrovasi, che il peso assoluto del grave D sia al peso assoluto del grave L, come AB ad AC; in questa stessa ragione dovrà essere parimente il peso assoluto del grave D al peso suo relativo.

251. Si vuol però quì notare, che in fare la riferita esperienza dee farsi uso di una girella, per mezzo di cui la porzione del filo DI facciasi parallela al piano AB; e ciò per la ragione, che se mai non fosse parallela, il grave L non arrestarebbe su'l piano l'altro D col peso suo totale, ma solamente con una porzione di esso. Fingiamo perciò, che la DI sia inclinata su'l piano AB, ed esprimasi per la stessa DI il peso totale del grave L. Tirisi la IM parallela al piano AB, su di cui si abbassi la perpendicolare DM. E conforme quello stesso peso può dividersi nelle due parti IM, DM; così non è egli da porsi in dubbio, che il grave D sia arrestato sul piano AB dalla sola prima IM, impiegandosi l'altra DM più tosto a premere l'istesso grave contro di quel piano. *Fig.* 23.

252. Intanto in questo stesso caso non sarà egli difficile il definire, come debbano essere tra loro i

pesi

pesi totali dei due gravi D, ed L. Imperocchè di già il peso totale del grave D deve essere alla parte dell' altro corrispondente alla IM, come AB ad AC. Ma questa parte sta al suo tutto, come IM a DI. Dunque il peso totale del grave D dovrà essere al peso totale dell' altro L in ragion composta di AB ad AC, e di IM a DI. E poichè tirandosi la AN parallela alla DI, ed abbassandosi su di essa la perpendicolare BN, si fanno equiangoli i due triangoli DIM, ABN; sarà IM a DI, come AN ad AB. Onde il peso totale del grave D dovrà essere al peso totale del grave L in ragion composta di AB ad AC, e di AN ad AB, o pure nella semplice ragione di AN ad AC.

253. Or se bene la caduta del grave per un piano inclinato debba ripetersi da una sola porzione del peso suo assoluto, la quale chiamasi peso relativo; pure però deve ella farsi colle stesse leggi, che si osservano nella caduta verticale. In fatti, secondo è stato dimostrato, il peso assoluto del grave sta al peso relativo, come la lunghezza del piano inclinato alla sua altezza. Onde siccome per tutta la lunghezza del piano il peso assoluto non mai si altera, così nè pure dovrà soggiacere a cambiamento alcuno il peso relativo. Quindi tanto la caduta verticale del grave, quanto l'altra per un piano inclinato deve ascriversi a forza costante; e perciò debbono osservarsi le medesime leggi così nell' una, come nell'altra caduta.

254. Qualora adunque portasi il grave col suo peso relativo per un piano inclinato, dovrà egli accelerarsi talmente, che si aumenterà la sua velocità in ragion del tempo, ed in conseguenza il suo moto sarà eguabilmente accelerato. Quindi siccome gli spazj, che egli percorre, numerati dal principio del suo moto, debbono essere, come i quadrati dei tempi, in cui si percorrono così gli altri percorsi successivamente in tempi eguali saranno, come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c. Ed

in

in fine lo ſpazio percorſo dall'iſteſso grave in un dato tempo ſarà la metà di quello, che ſi percorrerebbe nell'iſteſso tempo eguabilmente colla velocità finale (79).

255. Del rimanente, ſiccome debbonſi oſservare le ſteſse leggi tanto nella caduta verticale de' gravi, quanto nell'altra obliqua; così avvalendoci di un piano lunghiſſimo, che ſia molto poco inclinato sull'orizzonte, potremo facilmente ſperimentare, ſe le leggi eſpoſte abbiano luogo così nell'una, come nell'altra caduta. Prendaſi perciò un grave di figura sferica, coſicchè poſsa muoverſi liberamente sulla lunghezza del piano; e notinſi gli ſpazj, che ſucceſſivamente da eſſo ſi percorrono in tempi eguali. Se adunque ritroveremo, che queſti ſpazj ſiano tra loro, come i numeri impari 1, 3, 5, 7, 9, &c.; ſaranno vere ſenza dubbio le riferite leggi.

256. La ragione poi, per cui il piano lunghiſſimo deve eſſere molto poco inclinato sull' orizzonte, dipende da ciò, che eſſendo picciola l'inclinazione del piano, non viene ad eſſere così rapido il moto del grave; onde poſſono notarſi con eſattezza gli ſpazj, che ſucceſſivamente ſi percorrono dall'iſteſſo grave in tempi eguali. Ed egli è d'avvertirſi, che ſiccome il piano dee ſpianarſi in modo, che non reſti in eſſo ſcabrezza alcuna ſenſibile, con cui ſi opponga al moto del grave; così in fare la riferita eſperienza dee tenerſi conto della reſiſtenza dell' aere, la quale togliendo continuamente qualche poco di velocità al grave farà, che i diviſati ſpazj non ſiano eſattamente tra loro nella ragione de' numeri impari.

VI.

Della caduta obliqua paragonata colla caduta verticale.

257. PAragoneremo ora la caduta obliqua de' gravi colla loro caduta verticale. Ed in primo luogo dimostreremo, che la velocità acquistata da un grave colla sua caduta verticale sia all'altra, che acquistarebbe nell'istesso tempo ca-
Fig.24. dendo obliquamente per lo piano inclinato AB, come sta la lunghezza AB del piano alla sua altezza AC. Intendasi perciò diviso il tempo in particelle infinitamente picciole. Ed essendo gli aumenti di velocità, che in ciascuna di esse riceve il grave colle due sue cadute, come le forze costanti, da cui le stesse cadute derivano; chiaro si è, che componendo ancora le velocità totali saranno nella stessa ragione. Ma la caduta verticale del grave dipende dal suo peso assoluto, e l'altra obliqua deriva dal peso suo relativo. Dunque conforme è stato dimostrato (248), che questi due pesi siano tra loro nella ragione di AB ad AC; così nella medesima ragione saranno altresì le velocità, che si acquistano nell'istesso tempo dal grave colle due sue cadute (80).

258. Da ciò intanto possiamo dedurne, che debbano esere eguali tra loro le velocità, che si acquistano nell'istesso tempo da due gravi, che cadono obliquamente per un medesimo piano inclinato AB. In fatti per rapporto a ciascuno de' due gravi la velocità acquistata colla caduta verticale sta all'altra, che si acquista nel medesimo tempo colla caduta obliqua, come AB ad AC. Dunque le velocità, che acquistano i due gravi in un dato tempo colle loro cadute verticali, saranno nella stessa ragione colle velocità, che acquistano gli stessi gravi nel medesimo tempo colle loro cadute oblique. Ma si è dimostrato di sopra (242), che le prime due velocità siano in ragion di uguaglianza. Dunque ancora

cora l'altre due velocità saranno tra loro eguali, colle quali in conseguenza i due gravi dovranno percorrere spazj eziandio eguali (81).

259. Dimostreremo in secondo luogo, che se un grave cadendo obliquamente per un piano inclinato AB percorra la porzione AD nel medesimo tempo, in cui colla caduta verticale descrive la AC; le tre rette AB, AC, AD debbano essere continuamente proporzionali. Imperocchè, secondo è stato dimostrato (257), le velocità acquistate dal grave colle due sue cadute ne' punti C, e D debbono essere nella ragione di AB ad AC. Ma con quelle velocità debbonsi descrivere eguabilmente, e nel medesimo tempo spazj doppj dei due AC, AD. Dunque le stesse velocità saranno ancora nella ragione di questi spazj doppj, o pure delle due AC, AD; e pertanto dovendo essere, come AB ad AC, così AC ad AD, le tre rette AB, AC, AD saranno continuamente proporzionali tra loro.

260 Ma siccome con dimostrazione negativa possiamo al contrario far vedere, che essendo le tre AB, AC, AD continuamente proporzionali, debba il grave colla sua caduta obliqua percorrere la AD nell'istesso tempo, in cui colla caduta verticale descrive la AC; così niente sarà più facile, quanto di determinare la porzione AD del piano inclinato, che dee percorrersi dal grave nel medesimo tempo, in cui verticalmente portasi per la AC. Si abbassi perciò dal punto C la perpendicolare GD su'l piano inclinato; ed io dico, che la porzione AD tagliata da questa perpendicolare sia quella, che si dimanda: il che dipende da ciò, che essendo il triangolo ACB rettangolo in C, ed essendosi dall'angolo retto abbassata la perpendicolare AD sulla sua ipotenusa, le tre AB, AC, AD debbono essere continuamente proporzionali tra loro.

261. Se poi dal punto A partano due piani diversi AB, AE, e presa su'l primo di essi la porzione AD ad arbitrio, debba determinarsi la por-

zione AF dell'altro piano, che si percorre dal grave nel medesimo tempo, in cui si porta per la AD; potremo avvalerci della seguente costruzione. S' innalzi primieramente su 'l piano AB la perpendicolare DC, che s'incontri colla verticale AC nel punto C; indi da questo punto si abbassi sull'altro piano AE l'altra perpendicolare AF, che tagli da esso la porzione AF; ed io dico, che la AF sia la porzione, che si cerca. La ragione è chiara. Imperocchè, tanto le due AC, AD, quanto le due AC, AF debbono percorrersi dal grave in tempi eguali. Onde saranno eguali parimente i tempi, in cui si percorreranno dal grave le due AD, AF.

Fig. 25. 262. Essendo così, egli è facile ad intendersi, che se il cerchio ACD sia perpendicolarmente elevato sull'orizzonte, le corde di esso AD, AF, che partono dal punto supremo A, debbono percorrersi dal grave nel medesimo tempo, in cui si porta per lo diametro verticale AC. Tirisi perciò al punto C la tangente CE, che s'incontri colle due corde AD, AF prolungate ne' punti B, ed E; e congiungansi le due CD, CF. Essendo adunque la CE tangente del cerchio, sarà l'angolo ACE retto; e pertanto la stessa CE, come perpendicolare sulla verticale AC, sarà retta orizzontale. Ma per essere i due angoli ADC, AFC situati nel mezzo cerchio, ciascuno di essi similmente è retto. Dunque essendo le due CD, CF perpendicolari sull' altre due AB, AE, che sono rette inclinate sull' orizzonte; si percorrerà dal grave tanto la AD, quanto la AF nell'istesso tempo, in cui portasi per la AC.

263. Ma eziandio le corde DC, FC, che nel riferito cerchio si terminano al punto più basso C, debbonsi percorrere dal grave nel medesimo tempo, in cui portasi per lo diametro verticale AC. Compiscasi perciò il parallelogrammo CADG, e per lo punto G tirisi l'altra orizzontale GH, che vadasi ad incontrare colla corda DC prolungata nel

punto

punto H. Essendo adunque parallele le due AC, DG, sarà la DG similmente retta verticale. Ma l'angolo DCG, come eguale al suo alterno ADC, è retto. Dunque facendosi la GC perpendicolare sulla DH, che è retta inclinata sull'orizzonte, si percorrerà dal grave la DC nell'istesso tempo, in cui portasi per la DG, ovvero AC. Ed in una maniera consimile si dimostrerà parimente, che l'altra corda FC debba percorrersi dal grave eziandio nel medesimo tempo (82).

264. Dimostreremo in terzo luogo, che il tempo, in cui percorre il grave la lunghezza del piano inclinato AB, sia al tempo, in cui portasi per la sua altezza AC, nella stessa ragione delle due AB, AC. Si abbassi perciò dal punto C la perpendicolare CD su 'l piano inclinato AB; e per ciò, che è stato dimostrato (260), colla caduta obliqua, e colla caduta verticale si percorreranno dal grave le due AD, AC nel medesimo tempo. Ma il tempo per la AB sta al tempo per la AD nella suddupplicata ragione delle due AB, AD, ed in conseguenza nella ragion semplice dell'altre due AB, AC, per essere continuamente proporzionali le tre rette AB, AC, AD. Dunque ancora i tempi per le due AB, AC saranno tra loro nella semplice ragione di AB ad AC. *Fig. 26.*

265. Quindi se dal medesimo punto A partano due diversi piani inclinati AB, AE, che si terminino alla stessa retta orizzontale CE, ed abbiano in conseguenza la medesima altezza AC, egli è facile ad intendersi, che i riferiti due piani debbansi percorrere dal grave in tempi proporzionali alle loro lunghezze. In fatti siccome il tempo per la AB deve essere al tempo per la AC nella ragione di AB ad AC; così il tempo per la AC sarà al tempo per la AE nella ragione di AC ad AE. Quindi il tempo per la AB sarà al tempo per la AE in ragion composta di AB ad AC, e di AC ad AE. Ma queste due ragioni compongono la ragione

di AB ad AE. Dunque ancora il tempo per la AB sarà al tempo per la AE nella semplice ragione di AB ad AE.

266. Dimostreremo finalmente, che le velocità acquistate dal grave colla sua caduta obliqua per la *Fig.* 24. lunghezza del piano inclinato AB, e colla sua caduta verticale per l'altezza dell'istesso piano AC, siano tra loro eguali. Si abbassi perciò di nuovo la perpendicolare CD su'l piano inclinato AB; e percorrendosi dal grave le due AC, AD nel medesimo tempo, sarà la velocità acquistata per la AC alla velocità acquistata per la AD, come AB ad AC. Ma la velocità acquistata per la AB sta alla velocità acquistata per la AD, come il tempo per la AB al tempo per la AD, ovvero AC. Dunque essendosi dimostrato, che questi due tempi siano tra loro nella stessa ragione di AB ad AC, sarà la velocità acquistata per la AB eguale alla velocità acquistata per la AC.

267. Essendo così non si durerà fatica ad intendere, che se dal medesimo punto A partano due diversi piani inclinati AB, AE, che si terminino alla stessa retta orizzontale CE, ed abbiano in conseguenza la medesima altezza AC, siano eguali le velocità, che si acquistano dal grave con portarsi per le loro lunghezze. Quindi generalmente può stabilirsi, che portandosi un grave da un' orizzontale più alta ad un' altra più bassa, debba egli acquistare la stessa velocità così colla caduta sua verticale, come con qualsisia altra caduta obliqua. Nè ciò dee sembrarci strano. Imperocchè se bene nella caduta obliqua sia spinto il grave da forza tanto più picciola, quanto più picciolo è il seno dell' angolo, che misura l'inclinazione del piano, per cui cade; nientedimeno la picciolezza della forza vien compensata dal tempo proporzionalmente più lungo, che impiegasi in quella caduta (83).

VII.

Della caduta de' gravi per piani contigui diversamente inclinati sull' orizzonte.

268. UN grave può portarsi ancora così per piani contigui diversamente inclinati sull'orizzonte, come altresì per superficie, che siano curve. Onde passeremo ora a far vedere, quali siano le leggi di quest' altre due cadute. Per incominciare dalla prima, siano AB, BC due piani contigui, di cui il secondo vadasi ad incontrare prolungato coll' orizzontale AD nel punto D. Se adunque vogliasi supporre, che il grave passando dal piano AB nell'altro BC niente perda della velocità acquistata, ma semplicemente muti direzione; chiaro si è, che colla caduta per gli due piani AB, BC debba egli acquistare la stessa velocità, che acquista cadendo a dirittura per lo piano DC. Imperocchè, essendo eguali le velocità, che acquistansi per gli due piani AB, DB (267), entrerà il grave nel secondo piano colla velocità acquistata per DB; onde nel termine di esso C si ritroverà egli avere la stessa velocità, che acquistasi cadendo per DC. *Fig. 26.*

269. Se poi tra le due DB, DC ritrovisi la mezza proporzionale, che sia DE, egli è facile il dimostrare, che nella stessa caduta il tempo per lo primo piano AB sia al tempo, in cui con moto continuato si percorre l' altro piano BC, come AB a BE. In fatti dovendo essere il tempo per DB al tempo per DC nella sudduplicata ragione di DB a DC, o pure nella ragion semplice di DB a DE; sarà il tempo per DB al tempo per BC, come DB a BE. Ma il tempo per AB sta al tempo per DB, come AB a DB (264). Dunque il tempo per AB sarà al tempo per BC in ragion composta di AB a DB, e di DB a BE; e per tanto, siccome queste due ragioni compongono in-

 sieme

ſieme la ragione di AB a BE, così in queſta ſteſſa ragione ſaranno altresì i tempi, in cui il grave con moto continuato percorre i due piani AB, BC (84).

270. Quindi ſe due altri piani contigui *ab*, *bc* ſiano inclinati sull' orizzonte colla ſteſſa legge dei due AB, BC, e le lunghezze degli uni ſiano proporzionali alle lunghezze degli altri; ſarà il tempo per gli primi due piani AB, BC al tempo per gli altri due *ab*, *bc* nella ſudduplicata ragione delle totali loro lunghezze. Prolunghiſi perciò il ſecondo piano *bc* ſino a che vadaſi ad incontrare coll'orizzontale *ad* nel punto *d*, e tra le due *db*, *dc* ritroviſi parimente la mezza proporzionale, che ſia *de*. Facendoſi adunque ſimili le due figure, ſaranno le rette dell' una proporzionali alle corriſpondenti rette dell' altre. Onde eſſendo le due AB, BE nella ſteſſa ragione colle due *ab*, *be*, ſarà il tempo per AB al tempo per BC, come il tempo per *ab* al tempo per *bc*; e pertanto il tempo per gli due piani AB, BC ſarà al tempo per gli altri due *ab*, *bc*, come il tempo per AB al tempo per *ab*.

271. Per eſſere poſcia i due piani AB, *ab* egualmente inclinati sull' orizzonte, chiaro ſi è, che i medeſimi poſſono riguardarſi come porzioni di un medeſimo piano inclinato. Quindi i riferiti due piani ſi percorreranno in tempi, che ſaranno in ſudduplicata ragione delle loro lunghezze; e perciò ancora il tempo per gli pue piani AB, BC ſarà al tempo per gli altri due *ab*, *bc* in ſudduplicata ragione di AB ad *ab*. Ma eſſendo le lunghezze dei due piani AB, BC proporzionali alle lunghezze degli altri due *ab*, *bc*, la ſomma delle due prime ſta alla ſomma dell'altre due, come la ſola lunghezza AB alla ſola lunghezza *ab*. Dunque il tempo per gli due piani AB, BC ſarà al tempo per gli altri due *ab*, *bc* nella ſudduplicata ragione delle totali loro lunghezze.

272.

272. Ciò, che si è dimostrato intorno alla caduta del grave per due soli piani contigui, ha luogo parimente, quando portasi il grave con moto continuato per più piani della stessa indole. In fatti nella supposizione, che nel passaggio del grave da un piano in un altro niente perdasi della velocità acquistata, sempre nella fine del moto si ritroverà egli avere tanta velocità, quanta ne acquista colla caduta per un solo piano egualmente alto. E conforme possono facilmente determinarsi i tempi, in cui ad uno ad uno percorronsi dal grave con moto continuato i riferiti piani; così se si abbiano altrettanti piani contigui, che siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei primi, e le di cui lunghezze siano proporzionali alle lunghezze di quelli; pure potrà dimostrarsi, che i tempi per le due serie de' piani siano nella sudduplicata ragione delle totali loro lunghezze.

273. Or la supposizione di non perdersi velocità nel passaggio del grave da un piano in un altro, si discosta molto dal vero; e ciò per la ragione, che il nuovo piano non essendo a dirittura col precedente deve opporsi al moto del grave. Niente però è egli più facile, quanto di determinare la ragione tra la velocità acquistata dal grave per lo primo piano, e l'altra, con cui l'istesso grave entra nel secondo. Siano perciò AB, BC i due piani, e la velocità acquistata per lo primo di essi AB esprimasi per la sua propria lunghezza. Se adunque su'l secondo piano prolungato si abbassi la perpendicolare AD, e compiscasi il parallelogrammo ADBE; potrà risolversi la velocità AB nelle due AD, AE. Ma di queste due la prima AD come perpendicolare al piano BC soltanto preme il suddetto piano, colla di cui reazione ella in conseguenza si perde. Dunque il passaggio del grave dal piano AB nell'altro BC si farà colla sola velocità parallela AE, ovvero DB. *Fig. 27.*

274. Quindi possono stabilirsi due teoremi, di cui il primo si è, che la velocità acquistata dal grave per lo primo piano AB sia a quella, che si perde col passaggio dello stesso grave nel secondo piano BC, come AB ad AD; ed il secondo, che la medesima velocità acquistata sia all' altra, che rimane nel grave, e con cui si fa il riferito passaggio, come AB a DB. Se poi vogliasi prendere la AB per raggio o seno totale, chiaro si è, che sarà la AD seno primo dell'angolo ABD formato dai due piani col loro incontro, e la DB seno secondo del medesimo angolo. Onde conforme nel primo teorema la ragione della velocità acquistata all'altra, che si perde, deve essere eguale alla ragione, che ha il raggio al seno primo dell'angolo contenuto dai due piani; così nel secondo teorema la ragione della velocità acquistata all'altra, che rimane, sarà eguale alla ragione, che ha il raggio al seno secondo del medesimo angolo.

275. Si abbassi ora su'l primo piano AB l'altra perpendicolare DF; ed egli è facile il dimostrare, che il grave entri nel secondo piano BC colla velocità, che si acquista pet FB. In fatti per ciò, che è stato dimostrato, la velocità acquistata per AB sta alla velocità, con cui entra il grave nel secondo piano BC, come AB a DB. Ma per essere le tre AB, DB, BF continuamente proporzionali, nella stessa ragione di AB a DB sta ancora la velocità acquistata per AB all' altra, che si acquista colla caduta per FB. Dunque la velocità, con cui entra il grave nel secondo piano BC, e l'altra, che egli acquista, cadendo per FB, saranno tra loro eguali. Ed essendo così, egli è chiaro, che se prolunghisi il secondo piano sino a che vadasi ad incontrare coll' orizzontale FG nel punto G, la velocità acquistata per gli due piani AB, BC sarà tanta, quanta se ne acquista colla caduta per lo solo piano GC.

276. Se poi tra le due GB, GC ritrovisi la mezza proporzionale, che sia GH; può dimostrarsi ancora facilmente, che il tempo per lo primo piano AB sia al tempo, in cui con moto continuato si percorre l'altro piano BC, come DB a BH. In effetto nella supposizione, di non perdersi velocità nella caduta per gli due piani FB, BC, il tempo per FB deve essere al tempo per BC, come FB a BH (269). Ma essendo continuamente proporzionali le tre rette AB, DB, FB, il tempo per AB sta al tempo per FB, come AB a DB, o pure come DB ad FB. Dunque portandosi il grave per gli due piani AB, BC, il tempo per AB sarà al tempo per BC, come DB a BH. E da ciò con dimostrazione consimile a quella di sopra potrà ricavarsi, che se gli altri due piani *ab*, *bc* siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei due AB, BC, e le lunghezze degli uni siano proporzionali alle lunghezze degli altri, il tempo per gli primi due AB, BC sia al tempo per gli altri due *ab*, *bc* nella sudduplicata ragione delle loro lunghezze totali (85).

277. Del rimanente per poco, che si voglia riflettere, si comprenderà facilmente, che qualunque sia il numero de' piani contigui, per cui portasi il grave, sempre con reiterare la costruzione, di cui ci siamo serviti essendo due, possa determinarsi la velocità, che si ritroverà avere il grave nella fine del suo moto. Anzi siccome possono determinarsi facilmente ancora i tempi, in cui ad uno ad uno si percorrono dal grave con moto continuato i riferiti piani; così, se si abbiano altrettanti piani contigui, che siano inclinati sull'orizzonte colla stessa legge dei primi, e le di cui lunghezze siano proporzionali alle lunghezze di quelli, tuttavia potrà dimostrarsi, che i tempi per le due serie de' piani siano nella sudduplicata ragione delle totali loro lunghezze: dimodocchè questa proprietà deve aver luogo tanto se si perda velocità nel pas-

sag-

ſaggio del grave da un piano in un altro, quanto ſe non facciaſi di eſſa perdita veruna (86).

VIII.

Della caduta de' gravi per ſuperficie curve.

278. SEgue ora l'altra caduta de' gravi, che dicemmo poterſi fare per ſuperficie curve. Ed in vero, potendoſi riguardare ciaſcuna di queſte ſuperficie, come compoſta di piani infinitamente piccioli, che traviano l'uno dall' altro per angoli di una picciolezza ancora infinita; chiaro ſi è, che con eſſerſi eſaminata la caduta de' gravi per piani contigui diverſamente inclinati ſull' orizzonte, debba riuſcire facile l'eſame di queſt' altra, con cui portanſi i gravi per ſuperficie curve; ſiccome in effetto tra le due cadute non oſſervaſi altro divario, ſe non se quello, che deriva dall' infinita picciolezza così de' piani, di cui ſi compone la ſuperficie curva, come degli angoli, che formano tra loro gli ſteſſi piani.

279. In primo luogo adunque, ſe bene portandoſi il grave per piani contigui diverſamente inclinati ſull' orizzonte, debba egli perdere velocità nel paſſare da un piano in un' altro; non avviene però lo ſteſſo, quante volte portaſi il grave per una ſuperficie curva, per non farſi della velocità acquiſtata perdita veruna. Deriva ciò appunto dall' eſſere infinitamente piccioli gli angoli, che formano tra loro i piani, di cui ſi compone la ſuperficie curva. In fatti ſecondo è ſtato dimoſtrato di ſopra (274), nel paſſare il grave da un piano in un' altro la velocità acquiſtata ſta a quella, che ſi perde, come il raggio al ſeno primo dell' angolo contenuto dai due piani. Ma con farſi l'angolo dei due piani infinitamente picciolo, eziandio il ſuo ſeno primo ſi fa di una picciolezza infinita. Dunque la velocità, che ſi perde, ſarà così picciola, che non dovrà tenerſi conto della ſua perdita.

280.

280. Si potrebbe in tanto ridire, che sebbene a riguardo di una superficie curva la perdita di velocità, che si fa nel passare il grave da uno de' suoi piani nell' altro contiguo, sia infinitamente picciola; nientedimeno conforme queste perdite sono continue, ed in conseguenza infinite di numero, così potrebbe avvenire, che la somma di esse fosse una velocità finita. Quindi per rispondere alla difficoltà proposta, e per vedere altresì quale sia l'effettiva velocità, che si perde; giova riflettere, che quantunque risolvendo la velocità disegnata per la AB nelle due laterali AD, DB, la prima di esse AD perdasi dal grave nel passaggio, che egli fa dal piano AB nell' altro BC; ad ogni modo siccome rimane al grave l'altra velocità DB, così la velocità acquistata si ritroverà effettivamente diminuita di tanto, per quanto DB differisce dalla AB. *Fig.* 28.

281. Or se col punto B come centro, e coll' intervallo della BA descrivasi il mezzo cerchio EAF, che s' incontri colla DB prolungata nei punti E, ed F; chiaro si è, che la differenza delle due DB, AB sia la DE, che è seno verso dell' angolo ABD, onde l'effettiva diminuzione, che soffre la velocità acquistata nel passaggio del grave dal piano AB nell' altro BC, corrisponderà in proporzione alla stessa DE. Quantunque poi facendosi l'angolo ABD infinitamente picciolo, facciasi di una picciolezza eziandio infinita tanto la AD, quanto la DE; nientedimeno per essere DE ad AD, come AD a DF, sarà la picciolezza della DE infinitamente minore per rapporto a quella della AD; e perciò la somma di tutte le infinitamente picciole velocità, che perde il grave portandosi per una superficie curva, tuttavia sarà una velocità infinitamente picciola (87).

282. Sia ora AM la superficie curva, per cui portasi il grave colla sua caduta; e sia ancora AB la retta orizzontale corrispondente al punto A, donde incomincia la caduta del grave. Poichè dunque *Fig.* 29.

niente

niente perdesi della velocità, che va acquistando il grave colla sua caduta; avrà egli in ogni punto M della curva, che percorre nella riferita superficie, tanta velocità, quanta ne acquistarebbe colla caduta verticale fatta per la NM. Onde siccome compiuto il parallelogrammo ANMO la velocità del grave nel punto M deve essere nella sudduplicata ragione della NM, ovvero AO; così se intorno all' altra verticale AD come asse descrivasi la parabola apolloniana AR, chiaro si è, che la stessa velocità possa disegnarsi per la OR, che è l' ordinata di questa parabola corrispondente all'ascissa AO.

283. Quindi se mai la curva AM descritta dal grave sia d' indole tale, che qualsisia suo arco AM sia groporzionale all' area parabolica corrispondente AOR; egli è facile il dimostrare, che il tempo della caduta per l' arco AM sia proporzionale alla AO, ovvero MN. Sia perciò l' altra *mor* infinitamente vicina alla prima MOR; ed essendo l' arco AM proporzionale all' area AOR, corrisponderà altresì in proporzione il picciolo archetto M*m* al picciolo trapezio OR*ro*; onde l' istesso picciolo archetto sarà in ragion composta delle due OR, O*o*. Ma l'archetto M*m* deve essere ancora in ragion composta della velocità OR, con cui si descrive, e del picciolo tempo, in cui si descrive. Dunque questo picciolo tempo sarà proporzionale alla O*o*; ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione sarà il tempo della caduta per l'arco AM proporzionale alla AO, ovvero MN.

284. Da ciò intanto possiamo dedurne due conseguenze. La prima si è, che essendo la curva AM descritta dal grave della riferita indole, la velocità, che acquistasi colla caduta per l' arco AM, sia in sudduplicata ragione del tempo, in cui si acquista; e ciò per la ragione, che siccome quella velocità deve essere in ragion sudduplicata della MN, così questo tempo corrisponde in proporzione alla stessa MN. L' altra conseguenza si è, che portandosi il

grave

grave per la divisata curva debba egli in tempi eguali discostarsi egualmente dall' orizzontale AB; poichè additandoci la MN così il tempo, in cui si percorre dal grave l' arco AM, come l' allontanamento dell' istesso grave dall' orizzontale AB, si aumenterà il tempo nella stessa ragione col riferito allontanamento; e perciò essendo eguali i tempi, eziandio gli allontanamenti dovranno essere eguali.

285. Or conforme la curva AM descritta dal grave dee riguardarsi come una serie d' infinite picciole rette diversamente inclinate sull' orizzonte; così col prolungamento di esse si avranno le rette, che sono tangenti della stessa curva. Quindi se MT sia la retta, che tocca la curva nel punto M; si accelererà il grave in questo punto, come se egli si portasse per la MT. Onde per rapporto alla medesima MT dovrà definirsi nel punto M così la forza, da cui deriva l' accelerazione del grave, come l' altra, per mezzo di cui l' istesso grave preme la curva. Dal che egli è facile il ricavarne, che se la curva AM sia circonferenza di cerchio, la quale abbia per suo diametro la AB, e per suo centro il punto C, debba essere proporzionale nel punto M la forza premente al seno primo dell' arco AM, e la forza acceleratrice al suo seno secondo. *Fig.* 30.

286. Congiungasi perciò il raggio CM, su di cui dal punto N si abbassi la perpendicolare NH. E siccome il grave col suo peso assoluto agisce secondo la direzione della verticale NM; così per essere la CM perpendicolare, e la NH parallela alla tangente MT, agirà il medesimo grave colla sua forza premente secondo la direzione della CM, e colla sua forza acceleratrice secondo la direzione della NH. Onde il peso assoluto del grave sarà alla forza premente, come NM ad HM; e l' istesso peso assoluto sarà alla forza acceleratrice, come NM ad NH. Ma per essere i due triangoli NMH, CMN tra loro equiangoli, i tre lati dell' uno NM,

HM,

HM, NH sono proporzionali ai tre lati dell' altro CM, NM, CN. Dunque il peso assoluto, la forza premente, e la forza accelatrice saranno tra loro, come le tre rette CM, NM, CN; e pertanto, siccome il peso assoluto, che non mai si altera, può esprimersi per mezzo del raggio CM eziandio costante; così potrà disegnarsi per la NM, che è seno primo dell' arco AM, la forza premente, e per la CN, che è seno secondo del medesimo arco, la forza acceleratrice.

287. Finalmente se in superficie diverse si abbiabiano due curve AM, *am*, non solo simili tra loro, ma similmente ancora inclinate sull' orizzonte; non v' ha dubbio, che potranno le medesime riguardarsi come serie di un' egual numero di rette infinitamente picciole, non solo proporzionali, ma inclinate altresì sull'orizzonte colla stessa legge. Quindi per ciò, che è stato dimostrato di sopra, si percorreranno le riferite due curve in tempi, che saranno nella sudduplicata ragione delle loro lunghezze totali. Onde se mai le stesse curve siano due archi circolari, saranno simili tra loro i due settori CAM, C*am*; e pertanto dovendo essere come l' arco AM all' arco *am*, così il raggio CA al raggio C*a*, saranno i tempi, in cui percorronsi i due archi AM, *am* nella sudduplicata ragione dei loro raggi CA, C*a* (88).

IX.

Della salita de' gravi per superficie così piane, come curve.

288. ALla caduta del grave si oppone la sua salita, per cui siccome è necessario, che imprimasi al grave qualche velocità, che lo porti in alto, così potrà egli ascendere per superficie, non solo piane, ma eziandio curve. Ed in primo luogo, se la velocità imprimasi al grave con direzione verticale, egli si porterà in alto verticalmente,

mente, ſenza eſſervi biſogno di ſuperficie alcuna, che lo conſervi in quella direzione. Imperocchè ſebbene nel medeſimo tempo, che ſale, ſia ſpinto continuamente verſo baſſo dal peſo ſuo aſſoluto; nientedimeno queſte continue ſpinte ſi ricevono dal grave con direzione interamente contraria al ſuo moto; onde ſi è, che minoreranno a poco a poco la ſua velocità, ma non altereranno la ſua direzione.

289. Or ſiccome le ſteſſe ſpinte generano nel grave con direzione contraria una nuova velocità, che aumentaſi in ragion del tempo; così la prima velocità impreſſa al grave coll' aggiunta dell' altra nuova dovrà diminuirſi nella ſteſſa ragione; e perciò la ſalita verticale del grave ſarà moto eguabilmente ritardato. Si vede intanto, che il grave colla ſua ſalita verticale debba portarſi a quell' altezza, per cui cadendo riacquiſta la velocità impreſſagli; anzi ſe vogliaſi attentamente riflettere, ſi vedrà ancora, che in ogni punto della ſteſſa altezza debba rimanere al grave tanta velocità, quanta ne riacquiſta con cadere per l'altezza rimanente: dimodocchè le diverſe velocità, che ritrovaſi avere il grave nella ſalita, e nella caduta, dovranno eſſere tra loro eguali.

290. Quindi ſe il tempo della ſalita totale dividaſi in parti eguali; pure gli ſpazj percorſi ſucceſſivamente dal grave aſcendente in queſte eguali parti di tempo dovranno eſſere, come altrettanti termini della ſerie de' numeri impari, ma preſi con ordine contrario, e non già a dirittura. Onde ſe l' eguali parti del tempo ſiano quattro, gli ſpazj, che conſecutivamente in eſſe ſi percorrono, ſaranno come i numeri 7, 5, 3, 1. E per la ſteſſa ragione, ſe l' eguali parti del tempo ſiano cinque, nella loro durata ſi percorreranno ſucceſſivamente ſpazj tali, che paragonati tra loro ſi ritroveranno eſſere, come i numeri 9, 7, 5, 3, 1, Ed eſſendo così, ſaranno nella duplicata ragione de' tempi non

già gli ſpazj numerati dal principio della ſalita del grave, ma gli altri, che ſi numerano per ſino all' ultimo termine di eſſa.

291. Per poco poi, che ſi voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che gli ſpazj numerati dal principio della ſalita del grave debbano eſſere in ragion compoſta dei tempi, in cui ſi percorrono, e degli altri, che ſi hanno con togliere gli ſteſſi tempi dal duplo di quello, che impiegaſi nella ſalita totale. Così ſe il tempo della ſalita totale ſia di quattro ſeconde, lo ſpazio percorſo nella prima ſeconda ſarà allo ſpazio percorſo nelle prime due ſeconde in ragion compoſta di 1 a 2, e di 7 a 6, o pure nella ſemplice ragione di 7 a 12. E così parimente, ſe il tempo della ſalita totale ſia di cinque ſeconde, lo ſpazio percorſo nella prima ſeconda ſarà allo ſpazio percorſo nelle prime due ſeconde in ragion compoſta di 1 a 2, e di 9 ad 8, ovvero nella ſemplice ragione di 9 a 16 (89).

292. Notiſi quì intanto, che eſſendo data la velocità, che imprimeſi al grave, può determinarſi facilmente così l' altezza, a cui ſale l' iſteſſo grave, come il tempo, che impiegaſi in detta ſalita. In
Fig. 31. fatti, ſe AB ſia un' altezza di 15 piedi con una dodiceſima parte di più, ſi percorrerà ella da un grave cadente nel tempo di una ſeconda, e colla velocità finale ſi percorrerà eguabilmente nel medeſimo tempo il duplo della AB. Quindi ſe la data velocità ſia tale, che nel tempo di una ſeconda ſi percorra con eſſa eguabilmente il duplo della AC; ſaranno le due velocità tra loro nella ragione di AB ad AC. Onde la terza proporzionale dopo le due AB, AC ſarà l' altezza, a cui ſale il grave colla data velocità; ed il tempo della ſua ſalita totale ſarà al tempo di una ſeconda, come AC ad AB.

293. Per dimoſtrarlo, ſia a AD la terza proporzionale dopo le due AB, AC. Ed eſſendo continuamente proporzionali le tre rette AB, AC, AD;
ſarà

farà la prima AB alla feconda AC in fudduplicata ragione della prima AB alla terza AD. Ma in quefta fteffa fudduplicata ragione fono ancora le velocità, che acquiftanfi colla caduta per le due AB, AD. Dunque la ragione di quefte velocità farà eguale alla ragione di AB ad AC; e pertanto, facendofi la data velocità eguale a quella, che acquiftafi colla caduta per la AD, farà quella fteffa AD l'altezza, a cui fale il grave colla data velocità. I tempi poi, che impieganfi così nella caduta, come nella falita per le due AB, AD, fimilmente debbono effere nella ragione di AB ad AC. Onde effendo di una feconda il primo di quefti tempi, farà il tempo della totale falita del grave al tempo di una feconda, come AC ad AB (90).

294. Imprimafi ora la velocità al grave colla direzione della AE, che fia inclinata all'orizzonte; ed in quefto cafo chiaro fi è non poterfi confervare nel grave, che fale, la fteffa direzione, fe non fia egli foftenuto da un piano, che abbia per rapporto all'orizzonte la fteffa inclinazione. Con portarfi intanto il grave per quefto piano inclinato, che lo foftiene, tuttavia farà egli fpinto continuamente verfo baffo dal fuo pefo relativo. Onde conforme con quefte continue fpinte generafi in effo con direzione contraria una nuova velocità, che fi aumenta in ragion del tempo; così la prima velocità impreffa al grave coll' aggiunta dell'altra nuova fi diminuirà nella fteffa ragione; e per tanto eziandio la falita del grave per un piano inclinato full' orizzonte farà moto eguabilmente ritardato.

295. Quindi le fteffe leggi, che hanno luogo nella falita verticale del grave, debbono offervarfi altresì nella di lui falita obliqua. Se dunque dividafi il tempo della falita obliqua totale in parti eguali, gli fpazj percorfi fucceffivamente in quefte eguali parti di tempo pure dovranno effere, come altrettanti termini della ferie de' numeri impari prefi con ordine contrario. E conforme gli fpazj nume-

rati fino all' ultimo termine della salita, tuttavia debbono essere nella duplicata ragione de' tempi, in cui si percorrono; così gli altri spazj numerati dal principio della salita eziandio saranno in ragion composta dei tempi, in cui descrivonsi, e degli altri, che si hanno con togliere gli stessi tempi dal duplo di quelli, che impiegasi nella salita totale.

296. Con esser data poi la velocità, che s'imprime al grave secondo la direzione dell'obliqua AE, egli è facile di determinare così l' ultimo termine della salita obliqua del grave, come il tempo, che impiegasi dall'istesso grave per giugnere a quell'ultimo termine. Determinisi perciò primieramente l' altezza verticale AD, a cui può ascendere il grave colla data velocità impressagli verticalmente; e si determini ancora il tempo della salita per la AD. Tirisi di poi per lo punto D l' orizzontale DE, che s' incontri coll' obliqua AE nel punto E; e per picciola riflessione, che voglia farsi, s' intenderà facilmente, che il punto E sia l' ultimo termine della salita obliqua del grave, e che il tempo della salita per la AE sia al tempo della salita per la AD, come AE ad AD.

297. Finalmente può salire il grave eziandio per una linea curva, come AMF; ma conforme per potersi ciò fare, deve egli essere sostenuto da superficie della stessa curvatura, così nel punto A deve imprimersi al grave la velocità secondo la direzione della tangente AH. Questa velocità poi pure diminuiscesi continuamente dal peso relativo del grave, che agisce sempre con direzione contraria; ma cambiandosi questo peso in ogni punto della curva, non sarà la salita del grave moto equabilmente accelerato. Con portarsi in tanto il grave per la curva AMF, tuttavia dovrà egli ascendere per fino a quel punto, da cui cadendo per la stessa curva riacquista in A la primitiva sua velocità; e se F sia questo punto, che può determinarsi parimente

mente per mezzo della salita verticale, eziandio in ogni altro punto M della curva dovrà rimanere al grave tanta velocità, quanta ne acquista cadendo per l'arco rimanente FM.

298. Quindi se la curva sia composta di due parti, le quali abbiano in A una curvatura continua; il grave, che cade per una di esse, dovrà salire per l'altra in modo, che non solo ascenderà alla stessa altezza, da cui cade, ma in eguali altezze della salita, e della caduta avrà velocità eziandio eguali. E poicchè lo stesso deve avvenire, qualora ricade il grave per quest' altra parte della curva; perciò il grave con salire, e ricadere sarà in un continuo, e perpetuo moto. Quantunque poi in pratica veggasi il di lui moto a poco a poco rallentarsi, e finalmente estinguersi; ciò tuttavolta deve ascriversi alla resistenza dell'aere, che minora continuamente la velocità del grave così nella caduta, come nella salita. Aggiungasi, che per quanto si spiani la superficie, che dee sostenere il grave, sempre rimanerà in essa qualche scabrezza, che non solo ritarderà il grave, ma lo farà talvolta traviare dal suo cammino.

X.

Del moto de' pendoli per archi circolari.

299. SEgue ora il moto de' pendoli, i quali altro non sono, se non che gravi sospesi da punti fissi per mezzo de' fili sottilissimi, che con moto oscillatorio aggiransi intorno a que' punti, e descrivono archi circolari. Per investigare le leggi del loro moto, sia il pendolo CA, a cui *Fig. 32.* diasi la posizione obliqua CD, affinchè lasciato in quel sito possa di là cadere, e descrivere in conseguenza l'arco circolare DAE. Dividasi il peso assoluto del grave in due parti, di cui una sia parallela, e l'altra perpendicolare alla lunghezza del filo CD. E poichè il grave colla parte parallela cerca

di diſtaccarſi dal filo, che lo trattiene, perciò ſi ponerà egli in moto colla ſola parte perpendicolare. Onde ſe ſi voglia attentamente riflettere, ſi vedrà, che deſcrive il grave l'arco circolare DAE, come appunto lo deſcriverebbe, ſe in vece di eſſere attaccato al filo, foſſe ſoſtenuto da una ſuperficie curva della ſteſſa curvatura (91).

300. Quindi ſiccome il grave, dopo la ſua caduta per l'arco DA, dee ſalire per l'altro eguale AE; così ricadendo in appreſſo per queſt' altro AE, dovrà al contrario riſalire per lo primo AD. Volendoſi poi preſcindere così dalla reſiſtenza dell'aere, come dall' altra, che deriva dallo ſtropicciamento del filo intorno al punto C; chiaro ſi è, che non mai debba interromperſi queſto reciproco cadere, e ſalire del grave. Onde il moto del pendolo non ſolo ſarà oſcillatorio di ſua natura; ma eziandio di una continua, e perpetua durata. E perchè nella riferita ſuppoſizione il medeſimo grave in ciaſcuna delle ſue oſcillazioni dee percorrere ſempre lo ſteſſo ſpazio, cioè la lunghezza dell' arco circolare DAE; perciò i tempi, in cui ſi fanno dal pendolo l'eguali ſue oſcillazioni, ſaranno parimente tra loro eguali.

301. Quantunque poi le oſcillazioni del pendolo sì per la reſiſtenza dell'aere, come per lo ſtropicciamento del filo, continuamente ſi raccorcino; pure però, ſe elleno facciànſi per archi piccioli, ſaranno eguali preſſo a poco i tempi, in cui ſi fanno. Fingiamo perciò, che i piccioli archi, per cui ſi fanno dal pendolo due diverſe oſcillazioni, ſiano DAE, *d* A *e*. E poichè debbono eſſere molto più piccioli gli altri due DA, *d* A, che ſono le loro metà, ſi confonderà ciaſcuno di eſſi colla ſua corda. Onde ſiccome ſono eguali i tempi per queſte corde (262), così preſſo a poco ſaranno eguali altresì i tempi per gli archi DA, *d* A. Ma i tempi per gli archi intieri DAE, *d* A *e* ſono dupli di quelli, che impieganſi per le loro metà. Dunque anco-

ancora i tempi per gli archi DAE, *dAe* potranno aversi come eguali tra loro.

302. Essendo così, potranno misurarsi l' eguali parti del tempo per mezzo delle picciole oscillazioni, che si fanno da un pendolo; poichè se bene tra i tempi di esse debba esservi qualche divario, nientedimeno l' esperienza stessa fa vedere essere così insensibile questo divario, che la misura del tempo riesce molto più esatta con far uso del pendolo, che con ricorrere al moto del sole. Ed in fatti, se prendansi due pendoli egualmente lunghi, e le picciole oscillazioni di uno di essi siano un tantino maggiori delle picciole oscillazioni dell' altro; si vedrà, che in cento oscillazioni appena incontrasi il divario del tempo di una sola oscillazione. Conforme poi le parti più picciole del tempo sono le seconde, di cui 60 formano il minuto primo; così il pendolo da impiegarsi nella misura del tempo deve essere così lungo, che facciasi ciascuna delle sue oscillazioni nel tempo di una seconda.

303. Per determinare intanto la lunghezza di questo pendolo, dimostreremo primieramente il seguente teorema, cioè, che se due pendoli facciano le loro oscillazioni per archi simili, i tempi di due di esse siano nella sudduplicata ragione delle lunghezze degli stessi pendoli. Fingiamo perciò, che i due archi simili, per cui si fanno dai due pendoli CA, C*a* le loro oscillazioni, siano DAE, *dae*. E poichè gli altri due archi DA, *da*, che sono le loro metà, vengono ad essere non solo simili, ma inclinati altresì egualmente sull' orizzonte; sarà il tempo per l' arco DA al tempo per l' arco *da* nella sudduplicata ragione del raggio CA al raggio C*a* (287). Ma i tempi per gli archi intieri DAE, *dae* sono dupli di quelli, che impieganst per le loro metà DA, *da*. Dunque ancora questi altri tempi saranno nella sudduplicata ragione de' *Fig.* 33.

raggi CA, Ca, i quali raggi sono le lunghezze stesse dei due pendoli.

304. Or potendosi riguardare le picciole oscillazioni di due pendoli come fatte per archi simili, saranno i tempi di due di esse eziandio nella sudduplicata ragione delle lunghezze degli stessi pendoli. Ma questi tempi sono reciprocamente proporzionali alle somme delle oscillazioni, che si fanno dai due pendoli in un medesimo tempo. Dunque tutte queste oscillazioni unite insieme saranno nella reciproca sudduplicata ragione delle riferite lunghezze. Onde siccome date le lunghezze di due pendoli, e dato il numero delle picciole oscillazioni, che si fanno da uno di essi in un tempo dato, può determinarsi facilmente il numero delle picciole oscillazioni, che si fanno nell' istesso tempo dall' altro pendolo; così al contrario dati i numeri delle picciole oscillazioni, che si fanno da due pendoli in un medesimo tempo, e data la lunghezza di uno di essi, non sarà egli difficile di definire la lunghezza dell' altro (92).

305. Quindi niente sarà più facile, quanto di determinare la lunghezza del pendolo, che faccia ciascuna delle sue picciole oscillazioni nel tempo di una seconda. Prendasi perciò un pendolo ad arbitrio, e notisi il numero delle picciole oscillazioni, che egli fa in un dato tempo, come in quello di un minuto primo. L' altro pendolo adunque, che si dimanda, dovrà fare in questo stesso minuto di tempo 60 picciole oscillazioni. Onde il quadrato di questo numero 60 dovrà essere al quadrato dell' altro numero notato, come la lunghezza del pendolo preso ad arbitrio alla lunghezza del pendolo ricercato; e perciò se la lunghezza del pendolo arbitrario moltiplichisi per lo quadrato del numero notato, ed il prodotto dividasi per lo quadrato di 60, si avrà col quoziente di questa divisione la lunghezza del pendolo, che si dimanda.

306

306. Determinata la lunghezza del pendolo, che fa ciascuna delle sue picciole oscillazioni nel tempo di una seconda, può determinarsi altresì lo spazio, che nello stesso tempo di una seconda si percorre dal grave colla sua caduta verticale. In fatti il riferito pendolo nel tempo di una mezza seconda dee fare la metà di una sola oscillazione. Ma per essere l'oscillazione picciola, la sua metà si fa in un'arco non differente dalla sua corda, la quale corda si percorre dal grave nello stesso tempo, in cui colla caduta verticale descrivesi l'intiero diametro del cerchio (262), che è il duplo della lunghezza del pendolo. Dunque nel tempo di una mezza seconda dee percorrersi colla caduta verticale tanto spazio, quanto è il duplo della lunghezza del pendolo; e pertanto lo spazio percorso colla medesima caduta nel tempo di una seconda dovrà essere l'ottuplo della stessa lunghezza.

307. Del rimanente al moto del pendolo appartiene ancora un'altra proprietà, e si è, che la sua velocità nel punto più basso sia, come la corda dell'arco, che egli descrive per fino a quel punto. Fingiamo perciò, che il pendolo CA faccia le sue oscillazioni per l'arco DAE. Congiungasi la DE, che s'incontri col diametro verticale AB nel punto F; e la velocità del pendolo nel punto più basso A sarà quella, che acquistasi colla caduta verticale per la FA; onde il suo quadrato corrisponderà in proporzione alla stessa FA. Ma il quadrato della corda DA, o EA, come eguale al rettangolo fatto dalla FA nel diametro AB, eziandio corrisponde in proporzione alla EA. Dunque la velocità del pendolo nel punto più basso A, e la corda DA, o EA dell'arco, che egli descrive per fino a quel punto, saranno proporzionali tra loro. *Fig.* 34.

408. Conforme poi essendo picciole le oscillazioni del pendolo, la sua velocità nel punto più basso A deve essere, come l'arco DA, o EA, che egli descri-

descrive per fino a quel punto; così attenta questa proprietà potrà construirsi una machina per compruovare le leggi di moto, che hanno luogo nell' incontro de' corpi. Formisi perciò di legno, o di
Fig. 35. altra materia il triangolo isoscele MNO, nella di cui cima prendansi due punti C, e *c* egualmente distanti dalla base MN, e così vicini, che i due pendoli di egual lunghezza tra loro si tocchino. Descrivansi di poi cogli stessi punti come centri i due archi AD, *ad*; e se dividasi ciascuno di essi in picciole parti eguali, ai di cui termini pongansi i respettivi numeri 1, 2, 3, 4, &c., avremo la machina, che si dimanda: dimodocchè coi due pendoli CA, *ca* potranno compruovarsi le riferite leggi di moto.

309. In fatti siccome per fare, che i due pendoli s' incontrino tra loro con date velocità, basta lasciarli cadere dai punti, che ci additano i gradi di esse; così con notare i punti, a cui ascendono gli stessi pendoli dopo essersi incontrati, sapremo le velocità, con cui si muovono dopo l' incontro. Quantunque poi siano disuguali gli archi, per cui lascinsi cadere; nientedimeno attenta la loro picciolezza, si percorreranno quegli archi dai due pendoli in eguali tempi; onde l' incontro di questi si farà nel luogo più basso. Ed in fine se bene gli stessi pendoli muovansi per archi circolari, pure però l' incontro di essi sarà diretto; poichè siccome incontransi propriamente colla direzione delle rette, che toccano i due archi ne' punti A, ed *a*, così queste due rette, come perpendicolari sulle due CA, *ca*, vengono ad essere tra loro a dirittura.

XI.

XI.

Della natura, e delle principali proprietà della cicloide.

310. QUantunque con far uso delle picciole oscillazioni di un pendolo, si misurino le eguali parti del tempo con maggior esattezza, che col moto del sole; pure però una tal misura soggiace a qualche picciolo errore, per non essere del tutto eguali i tempi, in cui si fanno dal pendolo le sue picciole oscillazioni. Intanto se potesse farsi in modo, che il pendolo in vece di descrivere archi circolari, si portasse per archi di quella curva, che comunemente chiamasi cicloide; si avrebbe colle oscillazioni di quest' altro pendolo la vera, ed esatta misura del tempo, per essere esattamente eguali i tempi, in cui quest' altro pendolo farebbe le sue oscillazioni. Onde per l' intelligenza di queltanto saremo per dire intorno al moto de' pendoli da farsi per archi cicloidali, giova prima far vedere quale sia l' indole della curva chiamata cicloide, e quali ancora le principali sue affezioni.

311. Prendasi perciò un cerchio ad arbitrio, come AMB, di cui centro ne sia il punto C, diametro la retta AB, e tangente al punto B l'altra BD. *Fig. 36.* Aggirisi questo cerchio sulla sua tangente BD, così dall' una, come dall' altra parte, persino a che coll' altra estremità B del suo diametro tocchi la BD nel punto D. Con questa sua rivoluzione adunque da ambedue le parti si descriveranno dal punto A due curve simili, ed eguali AND, AND. E conforme ciascuna di esse sarà la metà della curva chiamata cicloidè, così colle medesime unite insieme avremo la cicloide intiera DAD: di cui chiameremo vertice il punto A, asse la retta AB, base l' altra DBD, che resta divisa dall' asse per metà, e ad angoli retti, e finalmente cerchio genitore l' istesso cerchio AMB, colla di cui rivoluzione generasi la cicloide.

312. Or attenta la generazione di questa curva, non v' ha dubbio, che la mezza circonferenza AMB sia eguale alla BD, che è la metà della base della cicloide; ma io dico di più, che essendo la NO parallela alla BD, ancora l'arco AM debba essere eguale alla MN. Sia perciò NPQ la posizione del mezzo cerchio genitore, quando il punto A cade su 'l punto N. E poichè la PR alzata perpendicolarmente sulla BD dee passare per lo centro C, saranno eguali così le due CR, CO, come le due NR, MO. Onde facendosi eguali le corde PN, BM, saranno eguali altresì tanto gli archi sostenuti da queste corde, quanto i due rimanenti PQ, AM. Ma per la generazione della cicloide l'arco PQ deve essere eguale alla retta PB ovvero RO; ed essendo eguali le due NR, MO, ancora le due MN, RO debbono essere eguali. Dunque l'arco AM, e la retta MN saranno eziandio eguali tra loro.

Fig. 37. 313. Da ciò poi può dedursi in primo luogo, che se la NT tocchi la cicloide nel punto N, e la PN sia perpendicolare sulla tangente NT, le due NT, PN debbano essere parallele alle corde AM, BM. Facciasi perciò, che la MT sia tangente del cerchio in M, e se l' altra *mn* sia infinitamente vicina alla prima MN, potranno riguardarsi i due archetti M*m*, N*n* come porzioni delle tangenti MT, NT; onde la differenza delle due MN *mn* sarà all' archetto M*m* come MN ad MT. Ma per essere le due MN, *mn* eguali ai due archi AM, A*m*, ancora la loro differenza deve essere eguale all'archetto M*m*: Dunque facendosi eguali le due MN, MT, sarà l' angolo OMT duplo dell' angolo ONT. e pertanto, essendo lo stesso angolo OMT duplo altresì dell' angolo OMA, saranno i due angoli ONT, OMA tra loro eguali; con che saranno parallele così le due NT, AM, come le due PN, BM.

314. Può dedursi in secondo luogo, che l' arco cicloi-

cicloidale AN sia duplo della corda AM. Descrivasi perciò col punto A come centro, e coll' intervallo della corda infinitamente vicina A*m* l' archetto *mi*; e potendosi riguardare quest' archetto come una perpendicolare abbassata sulla base M*h* del picciolo triangolo isoscele M*mh*, resterà divisa la M*h* per metà nel punto *i*. Quindi il picciolo archetto cicloidale N*n*, come eguale alla M*h*, sarà duplo della M*i*, che è la differenza delle due corde AM, A*m*; e per la stessa ragione ogni altro archetto cicloidale sarà eziandio duplo della differenza delle due corde, che li corrispondono. Onde l' arco cicloidale AN, che è la somma di tutti quegli archetti, similmente sarà duplo della corda AM, che è la somma di tutte le riferite differenze; e perciò ancora la mezza cicloide AND sarà dupla del diametro AB, che è la corda ad essa corrispondente.

315. Può dedursi finalmente, che se compiscasi il rettangolo AONR, lo spazio cicloidale esteriore ANR sia eguale al corrispondente spazio circolare AMO. Facciasi perciò la *nr* parallela alla NR, la quale prolunghisi per fino a che s' incontri colla NO in *l*. Essendo adunque equiangoli i due triangoli AMO, *n*N*l*, sarà come AO ad MO, così *nl* ad N*l*; e sostituendo le eguali, sarà ancora come NR ad MO, così O*o* ad R*r*. Onde i piccioli due trapezj NR*rn*, MO*om* non differenti dai due piccioli rettangoli NR*r*, MO*o*, saranno tra loro eguali. Conforme poi, per aver luogo da per tutto la stessa dimostrazione, lo spazio cicloidale ANR deve essere eguale all' altro circolare AMO; così se compiscasi l'altro rettangolo ABDE, sarà l' intiero spazio cicloidale esteriore ADE eguale all' intiero mezzo cerchio AMB: dal che egli è facile il ricavarne, che l' altro spazio cicloidale interiore ADB sia triplo dello stesso mezzo cerchio.

316. Alla cicloide appartiene ancora un' altra pro-

proprietà molto elegante, e si è che ella sviluppandosi ne genera un' altra eguale con posizione contraria. Per dimostrarlo, daremo prima una nozione generale delle curve, che generansi in questo modo. Sia perciò ABC una curva qualsivoglia, intorno a cui intendasi avvolto un filo egualmente teso da per tutto; si distacchi poscia questo filo a poco a poco dalla curva, incominciando dal termine A; e se le porzioni distaccate BM, CN restino sempre tese, si avrà l' altra curva AMN, per rapporto a cui la prima ABC chiamasi sviluppata. Le porzioni poi del filo BM, CN, che riguardansi come suoi raggi, chiaro si è, che siano eguali agli archi AB, AC, da cui si sono distaccate; e se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà ancora, che gli stessi raggi tocchino la sviluppata ne' punti B, e C, ed incontrinsi ad angoli retti coll' altra curva AMN. Onde per determinare la sviluppata di qualsisia curva data, non dovrà fare altra cosa, se non che definire il punto, in cui due perpendicolari infinitamente vicine della data curva tra loro s' incontrano.

Fig. 38.

Fig. 39.

317. Ciò posto, egli è facile il dimostrare, che la sviluppata della mezza cicloide AND sia un' altra mezza cicloide eguale situata al rovescio. Siano perciò NR, nR le due perpendicolari infinitamente vicine, le quali come parallele alle corde BM, Bm faranno, che siano eguali i due piccioli angoli NRn, MBm; onde se congiungiamo l' altra corda AM, che s' incontri colla Bm in i, sarà come Nn ad Mi, così NR a BM. Ma potendosi riguardare la mi come un archetto circolare descritto col punto A come centro, chiaro si è, che la Mi sia la differenza delle due corde AM, Am. Dunque siccome l' archetto cicloidale Nn deve essere duplo della Mi (314), così si avrà il punto R della sviluppata corrispondente al punto N, con fare, che la NR sia dupla della BM, ovvero NP; e per la stessa ragione, se facciasi la

AH

AH dupla del diametro AB, sarà H il punto della sviluppata corrispondente al vertice A.

318. Compiscasi ora il rettangolo DBHE; e se sulla DE come diametro descrivasi il mezzo cerchio DIE, sarà egli eguale all' altro mezzo cerchio AMB. Quindi, tirata la RIL parallela alla BD, saranno eguali non solo le due BO, DL, ma eziandio le corde BM, DI. Onde facendosi eguali tra loro così gli archi sostenuti da queste corde, come gli altri rimanenti AM, EI; saranno eguali altresì, non meno i due angoli ABM, EDI, che gli altri due DBM, BDI; e pertanto la corda DI, come parallela alla corda BM, sarà parallela ancora alla PR. Ma per la cicloide deve essere così l' arco AM eguale alla MN, ovvero BP, come l' arco BM eguale alla DP, ovvero IR. Dunque, essendo eguali i due archi BM, DI, eziandio l'arco DI sarà eguale alla IR; e perciò il punto R si ritroverà nella mezza cicloide, che descrivesi colla rivoluzione del mezzo cerchio DIE sulla base EH (93).

XII.

Del moto de' pendoli per archi cicloidali.

319. PRemesso quanto basta intorno alla cicloide, passeremo ora a ragionare del moto de' pendoli da farsi per archi cicloidali, per cui bisogna prima investigare ciò, che avvenir deve ad un corpo, che in percorrere un dato spazio è spinto continuamente da forza proporzionale alla parte di esso, che rimane a percorrersi. Sia perciò AC lo spazio, che deesi percorrere dal corpo; e *Fig* 40.
se la forza, che lo spinge in qualsisia punto N, sia proporzionale alla parte rimanente CN, chiaro si è, che le diverse attività della forza nei diversi punti dello spazio potranno esprimersi per le ordinate corrispondenti del triangolo ABC. Onde in virtù del teorema generale dimostrato di sopra (68)

sarà

sarà il quadrato della velocità, che ritrovasi avere il corpo nel punto N, come l'area corrispondente ABMN.

320. Or da ciò possono dedursi varie conseguenze. La prima si è, che se col punto C come centro, e coll'intervallo della CA descrivasi il quadrante AOD, la velocità del corpo nel punto N sia come la corrispondente ordinata NO del quadrante descritto. In fatti l'area ABMN, a cui è proporzionale il quadrato della riferita velocità, come eguale alla differenza dei due triangoli ABC, NMC, corrispondente in proporzione alla differenza de' quadrati fatti dalle due CA, CN. Ma la differenza di questi quadrati è eguale al quadrato della NO. Dunque ancora l'area ABMN corrisponderà in proporzione al quadrato della NO; e pertanto la velocità del corpo nel punto N sarà proporzionale alla NO.

321. La seconda conseguenza si è, che il tempo per la AN sia come l'arco corrispondente AO del medesimo quadrante. Facciasi perciò, che l'altra *no* sia infinitamente vicina alla prima NO, e tirisi ancora la *or* parallela alla AC. Potendosi adunque riguardare il picciolo archetto O*o* come porzione della retta, che tocca il quadrante nel punto O, saranno eguiangoli i due triangoli CNO, O*ro*; e pertanto, dovendo essere, come CO ad NO, così O*o* ad *or*, ovvero N*n*, sarà il rettangolo delle due CO, N*n* eguale al rettangolo dell'altre due NO, O*o*. Quindi, per essere il raggio CO costante, sarà il picciolo spazietto N*n* in ragion composta delle due NO, O*o*. Ma lo stesso picciolo spazietto deve essere altresì in ragion composta della velocità NO, con cui si percorre, e del picciolo tempo, in cui si percorre. Dunque questo picciolo tempo sarà come l'archetto O*o*; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il tempo per la AN, come l'arco AO.

322.

322. La terza conseguenza si è, che nel medesimo tempo, in cui si percorre dal corpo lo spazio AC, debba descriversi eguabilmente colla velocità finale CD uno spazio eguale alla circonferenza del quadrante AOD. In fatti nel mentre, che dal corpo si percorre lo spazietto N*n* colla velocità NO, dee descriversi colla velocità finale CD un'altro spazietto, che sia ad N*n*, come CD, ovvero CO ad NO. Ma per gli due triangoli CNO, O*ro* tra loro equiangoli CO sta ad NO, come O*o* ad N*n*. Dunque sarà O*o* l' altro spazietto, che dee descriversi colla velocità finale CD nel mentre, che si percorre dal corpo colla velocità NO lo spazietto N *n*; e pertanto, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, nel medesimo tempo, in cui si percorre dal corpo lo spazio AC, dovrà descriversi eguabilmente colla velocità finale CD uno spazio eguale alla circonferenza del quadrante AOD (94).

323. La quarta, ed ultima conseguenza si è, che essendo spinto il corpo dalla riferita forza, sia che egli incominci il suo moto dal punto A, sia che lo incominci da un' altro punto, come *a*, debbano essere eguali i tempi, in cui percorre i due spazj AC, *a*C. Descrivasi perciò l' altro quadrante *ad*; e conforme la velocità finale del secondo moto corrisponde in proporzione alla C *d*, così nel mentre, che dal corpo si percorre lo spazio *a* C, dee descriversi eguabilmente colla velocità finale C *d* un' altro spazio eguale alla circonferenza del quadrante *ad*. Quindi per essere le circonferenze dei due quadranti AD, *ad*, come le sole velocità CD, C *d*, con cui eguabilmente si descrivono, saranno eguali i tempi, che impieghansi nella loro descrizione. Onde eziandio il corpo coi due suoi moti dovrà percorrere i due spazj AC, *a*C in tempi eguali (95).

324. Per venire ora al moto de' pendoli da farsi per archi cicloidali, sia la mezza cicloide AND *Fig.* 41

talmente elevata a perpendicolo sull' orizzonte, che il punto più basso di essa sia il suo vertice A. Prendansi nel suo perimetro ad arbitrio due punti, che siano N, ed *n*; ed io dico, che sebbene siano disuguali i due archi cicloidali NA, *n*A, nientedimeno un grave debba percorrere nel medesimo tempo, così l' arco maggiore NA, come l'altro minore *n* A. Si abbassino perciò le perpendicolari NO, *no* sull'asse AB, che s'incontrino colla circonferenza del cerchio genitore ne' punti M, ed *m*; e congiunganfi così le corde AM, A*m*, come le altre due BM, B*m*. E per quel tanto è stato dimostrato, conforme le rette, che toccano la mezza cicloide ne' punti N, ed *n*, debbono essere parallele alle corde AM, A*m*; così gli archi cicloidali NA, *n*A saranno dupli delle stesse corde.

325. Quindi le forze, che accelerano il grave nei punti N, ed *n*; agiranno con direzioni parallele alle corde AM, A*m*; e perciò, se il peso assoluto del grave esprimasi per la verticale AB, si faranno proporzionali le stesse forze, non meno alle corde AM, A*m*, che agli archi cicloidali NA, *n*A. E poichè questo stesso ha luogo da per tutto, perciò il grave cadendo per ciascuno dei due archi NA, *n* A sarà spinto continuamente da una forza proporzionale in ogni punto alla parte dello spazio, che rimane a percorrersi. Onde sia che il grave cada per l' arco maggiore NA, sia che cada per l' altro minore *n*A, dovranno essere eguali i tempi, in cui questi due archi disuguali da esso si percorrono (96).

326. Nè poi è egli difficile di definire il tempo, che impiegasi dal grave a percorrere qualsisia arco cicloidale terminato al punto più basso A. Imperocchè nel mentre, che percorre il grave la mezza cicloide DNA, colla velocità finale, che si acquista colla caduta verticale per la BA, dee descriversi egualbilmente un spazio eguale alla circonferen-

ferenza del quadrante, che ha per raggio la lunghezza stessa della mezza cicloide (322). Ma per essere questa lunghezza dupla della BA, il riferito spazio è eguale altresì alla circonferenza dell'intiero cerchio genitore; e nel mentre, che il grave cade per la BA, con quella stessa velocità finale dee descriversi equabilmente un spazio duplo della BA. Dunque il tempo della caduta così per la mezza cicloide DNA, come per ogn'altro arco cicloidale NA sarà al tempo della caduta per la BA, come la circonferenza dell' iutiero cerchio genitore al duplo del suo diametro.

327. Or per fare, che un pendolo faccia le sue oscillazioni nella cicloide DAD, basta determinare le sue sviluppate DRH, DRH delle due sue metà. In fatti siccome ciascuna di esse con svilupparsi descrive la mezza cicloide aggiacente DNA; così, se H sia il centro del pendolo, ed HA la sua lunghezza, con avvolgersi il filo ora intorno ad una delle due sviluppate, ed ora intorno all'altra, si porterà il pendolo continuamente per la cicloide DAD. Ed abbenchè, così per la resistenza dell' aere, come per lo stropicciamento del filo non meno intorno al punto H, che intorno alle due sviluppate, debbano raccorciarsi continuamente le sue oscillazioni; nientedimeno secondo è stato dimostrato i tempi, in cui si fanno dal pendolo le sue disuguali oscillazioni, dovranno essere tra loro eguali. *Fig.* 42.

328. Si è veduto intanto di sopra, che la sviluppata della metà di una cicloide sia un' altra mezza cicloide eguale, descritta bensì con posizione contraria alla prima. Onde se dopo essersi esattamente delineata su di un piano la cicloide DAD, in cui si vuole, che il pendolo faccia le sue oscillazioni, prendansi due laminette di ottone, a ciascuna delle quali diasi la stessa convessità della sua metà AND; queste due laminette saranno le sviluppate, che debbono adattarsi intorno al pendolo

I 2 per

per fare, che egli faccia le sue oscillazioni nella descritta cicloide. Siccome poi la loro posizione deve essere tale, che si tocchino nel centro del pendolo coi loro estremi, e l' una sia rivoltata verso l'altra colla sua convessità; così non essendo necessario, che il pendolo descriva l' intera cicloide, basterà adattarci le porzioni di esse, corrispondenti all'arco cicloidale, che dee descriversi (97).

XIII.

Della caduta de' gravi la più celere.

329. PEr non tralasciare cosa alcuna intorno alla caduta de' gravi, ricercheremo presentemente, quale sia la caduta di essi la più celere, o più tosto qual cammino debba tenere un grave, affinchè da un punto più alto ad un'altro più basso si porti nel più breve tempo, che sia possibile. Ed in vero, se i due punti dati siano in una stessa verticale, non è egli da porsi in dubbio, che la caduta la più celere sia quella, che si fa per la verticale medesima; poichè, siccome la caduta verticale dipende dal peso totale del grave, così ogn'altra caduta si fa con forza minore del riferito peso, onde il tempo per quest'altra caduta dee essere sempre maggiore. La ricerca adunque di quentanto si dimanda dee farsi nel caso, che i due dati punti si ritrovino in verticali diverse; e se mai la più celere caduta non facciasi per la retta, che li congiunge insieme, senza dubbio dovrà ella farsi per una curva, per cui il grave niente perde della velocità, che egli acquista.

330. Or se intendansi tirate tra i due punti dati tutte le linee, che possono unirgli insieme, e le medesime dividansi in piccioli elementi per orizzontali infinitamente vicine tra loro; chiaro si è, che ne' punti di esse, corrispondenti ad una stessa orizzontale, debba avere il grave eguali velocità. Quindi gli elementi delle medesime linee, che tra loro

si corsi corrispondono, si percorreranno dal grave con velocità eziandio eguali. E perciò, se vogliasi attentamente riflettere, non si durerà fatica ad intendere, che la ricerca della linea, per cui dee farsi la caduta la più celere, dipende dall'investigare, come da due dati punti debbano inclinarsi sopra una retta data due altre rette, affinchè portandosi un corpo per queste rette con date velocità, vada egli da un punto all'altro nel più breve tempo, che sia possibile.

331. Sia perciò MN la retta dàta, e siano ancora A, e B i due punti, da cui debbono inclinarsi sulla MN le rette AC, BC. Facciasi che la velocità, con cui si percorre la AC, sia alla velocità, con cui si percorre la BC, nella reciproca ragione delle due BC, CD. E poichè i tempi debbono essere nella ragion composta della diretta degli spazj, e della reciproca delle velocità; sarà il tempo per AC al tempo per BC in ragion composta di AC a BC, e di BC a CD. Ma queste due ragioni compongono insieme la semplice ragione di AC a CD. Dunque i tempi per le due AC, BC saranno, come AC a CD; e pertanto, siccome può esprimersi colla AC il tempo per AC, e colla CD il tempo per BC, così, i due tempi insieme potranno disegnarsi colla somma delle due AC, CD. *Fig.* 43.

332. Quindi le rette AC, BC debbono inclinarsi sulla MN in modo, che la somma delle due AC, CD sia la più picciola; e perciò attenta l'indole così dei minimi, come dei massimi, se A*c*, B*c* siano due altre rette infinitamente vicine alle prime AC, BC, non dovrà alterarsi in esse la riferita somma. Se adunque tirisi la D*d* parallela alla MN, dovrà essere non solo la somma delle due AC, CD, eguale alla somma dell'altre due A*c*, *cd*, ma altresì la differenza delle due AC, A*c* eguale alla differenza dell'altre due CD, *cd*; e pertanto, se terminato il parallelogrammo CD*do* descrivansi col

punti A, e *d* come centri, e cogli intervalli *Ac*, *do* gli archetti *c*H, *or*, sarà la CH differenza delle due AC, A*c* eguale alla *cr* differenza dell'altre due CD, *cd* (98).

333. Essendo poi i due archetti *c*H, *or* infinitamente piccioli, chiaro si è, che i medesimi possono riguardarsi, come due perpendicolari abbassate sulle rette AC, *cd*. Onde se si abbassi sulla *cd* l'altra perpendicolare C*h*, sarà CH a *ch*, come *co* a *c*C, ovvero come CD a BC. Ma nella ragione di CD a BC sono ancora le velocità, con cui descrivonsi le due AC, BC; e prendendo la *c*C per raggio, si viene a fare la CH seno secondo dell' angolo ACM, e la *ch* seno secondo dell'angolo B*c*N, o BCN. Dunque le due rette AC, BC debbono inclinarsi sulla MN in modo, che i seni secondi delle loro inclinazioni siano, come le velocità, con cui descrivonsi le stesse rette. Ed in fatti dando ad esse la riferita inclinazione, egli è facile il dimostrare, che le medesime debbansi percorrere colle date velocità in minor tempo di quello, che impiegasi in descriverne altre due, inclinate sulla MN con altra legge (99).

Fig. 44. 334. Siano perciò AD, BD l'altre due rette, inclinate sulla MN con altra legge; e dopo essersi fatta la DE parallela alla AC, si abbassino così su di essa le perpendicolari AE, CF, come sulla BC la perpendicolare DG. Prendendosi adunque per raggio la CD, si farà la DF seno secondo dell'angolo EDM, o ACM, e la CG seno secondo dell' angolo BCN. Onde siccome le velocità date debbono essere nella ragione delle due rette DF, CG; così queste stesse rette si percorreranno con quelle velocità in tempi eguali. Ma colla prima velocità le due EF, AC come eguali si percorrono in tempi eziandio eguali; e colla seconda velocità si percorre in minor tempo la minore BC, che la maggiore BD. Dunque il tempo per le due AC, BC sarà minore del tempo per le due ED, BD, ed

in

in conſeguenza molto più minore del tempo per le due AD, BD (100).

335. Eſſendo così, ſi vede ora, che qualora i due punti dati ritrovanſi in verticali diverſe, la caduta la più celere debba farſi per una linea, i di cui piccioli elementi inclinanſi ſulle orizzontali corriſpondenti in modo, che i ſeni ſecondi delle loro inclinazioni ſiano, come le velocità, con cui ſi percorrono gli ſteſſi elementi. E da ciò, egli è facile il ricavarne, che una tale caduta non mai poſſa farſi per la retta, che congiunge inſieme i due punti dati. Imperocchè i piccioli elementi di queſta retta inclinanſi egualmente ſulle orizzontali, che li corriſpondono; onde eſſendo eguali i ſeni ſecondi delle loro inclinazioni, dovrebbero eſſere eguali altresì le velocità, con cui gli elementi ſteſſi ſi percorrono: il che non può avvenire al grave, che col peſo ſuo relativo portaſi per quella retta; ma bensì al corpo, che la deſcrive con moto eguabile, ed uniforme.

336. Col riferito principio intanto neppure ſarà egli difficile il dimoſtrare, che la caduta la più celere debba farſi propriamente per un'arco cicloidale. Sia perciò DNA una mezza cicloide talmente elevata ſull'orizzonte, che il punto più baſſo di eſſa ſia il ſuo vertice A. E poichè la NT, che tocca la mezza cicloide nel punto N, dee eſſere parallela alla corda AM; ſarà AMO, o pure ABM l'angolo, che ci addita l'inclinazione del picciolo archetto N*n* ſull'orizzontale NO; e pertanto, prendendo la AB per raggio, ſarà l'altra corda BM il ſeno ſecondo della riferita inclinazione. Ma così queſt'altra corda BM, come la velocità, con cui ſi percorre l'archetto N*n*, ſta nella ſudduplicata ragione della BO. Dunque la velocità, ed il ſeno ſecondo ſaranno proporzionali tra loro; ed in conſeguenza la caduta la più celere da D ſino ad N dovrà farſi per l'arco cicloidale DN. *Fig.* 39.

337. Per determinare poi la mezza cicloide. in

cui sia situato, tanto il punto D, quanto il punto N, potrà farsi in questo modo. Descrivasi primieramente ad arbitrio la mezza cicloide D*na*, che
Fig. 45. abbia per vertice il punto *a*, per asse la verticale *ab*, e per base l'orizzontale *b*D; indi congiungasi la DN, che seghi la descritta mezza cicloide nel punto *n*. Tirisi di poi la NA parallela alla *na*, che s'incontri colla D*a* prolungata nel punto A; ed io dico, che la mezza cicloide ricercata debba avere per vertice il punto A, per asse la verticale AB, e per base l'orizzontale BD. Per dimostrarlo, abbassinsi sulle due *ab*, AB le perpendicolari *no*, NO, che s'incontrino colle circonferenze dei due mezzi cerchi genitori ne' punti *m*, ed M; e se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che nella ragione di *ab* ad AB siano così le due *bo*, BO, come le due *no*, NO.

338. Poichè dunque i diametri *ab*, AB dei due mezzi cerchi genitori sono divisi proporzionalmente ne' punti *o*, ed O; saranno nella medesima ragione di *ab* ad AB, e le due *mo*, MO, e le due *mn*, MN, ed altresì i due archi *am*, AM; onde sarà, come *mn* ad MN, così l'arco *am*, all'arco AM. Ma per la mezza cicloide D*na* la *mn*, e l'arco *am* sono tra loro eguali. Dunque saranno eguali parimente la MN, e l'arco AM; ed in conseguenza la mezza cicloide, che si descrive col vertice A, e coll'asse AB, dovrà passare non solo per lo punto D, ma eziandio per l'altro N. Essendo poi le corde *am*, AM eziandio nella ragione di *ab* ad AB; egli è facile ad intendersi, che le due mezze cicloidi descritte sulla stessa base, e terminate ad un medesimo punto siano divise dalla DN proporzionalmente ne' punti *n*, ed N.

XIV.

XIV.

Del moto de' projetti, e della natura della curva, che da essi si descrive.

339. RImane finalmente a trattarsi del moto de' projetti, il quale moto deriva così dalla velocità, che imprime al grave la forza projettile, come dall'altra, che genera continuamente nello stesso grave la forza della gravità. Ed in vero, se la prima velocità imprimasi al grave con direzione verticale, non potrà egli traviare da questa direzione coll'altra velocità, che aumentasi in ragion del tempo; poichè eziandio quest'altra velocità generasi nel grave con direzione verticale. Intanto sebbene siano verticali le direzioni delle due velocità, possono tutta volta essere tra loro, non solo conspiranti, ma eziandio contrarie; e quindi si è, che il moto del grave sia eguabilmente accelerato nel primo caso, ed eguabilmente ritardato nel secondo.

340. Quantunque poi, essendo conspiranti le direzioni delle due velocità, il moto del grave sia eguabilmente accelerato; nientedimeno per definire gli spazj, che si percorrono con questo moto, dee tenersi conto così dell'una, come dell'altra velocità. Quindi siccome per principio del moto dee prendersi non già il punto, da cui il grave incomincia a muoversi, ma l'altro più elevato, da cui portandosi l'istesso grave fino a quel punto acquista la velocità impressali dalla forza projettile; così al tempo del moto attuale dovrà aggiungersi ancora l'altro, in cui si percorre dal grave la distanza dei due punti. Ed in questa maniera il moto accelerato del grave tuttavia si farà in modo, che gli spazj numerati dal principio del moto siano, come i quadrati dei tempi, in cui si percorrono (101).

341. Fingiamo ora, che la direzione della velocità impressa al grave dalla forza projettile sia diversa dalla verticale; ed in questo caso non v'ha dubbio, che coll'altra velocità, la quale genera conti-

continuamente nello stesso grave la forza della gravità, debba egli traviare da quella direzione, e portarsi in conseguenza per una linea curva. Per determinare intanto l' indole di questa curva, sia
Fig. 46. AB la retta verticale, AC la direzione, con cui imprimesi al grave la velocità dalla forza projettile, ed AMD la curva; per cui portasi l' istesso grave colle due velocità insieme. Descrivansi intorno a questa curva i due parallelogrammi ANMO, AQPR; e nel mentre, che colla prima velocità percorronsi sulla AC gli spazj AO, AR, chiaro si è, che coll' altra velocità si percorreranno sulla AB gli spazj AN, AQ.

342. Or siccome i primi due spazj AO, AR, come percorsi con moto eguabile, ed uniforme, debbono essere nella semplice ragione de' tempi, in cui si percorrono; così gli altri due AN, AQ, come percorsi con moto eguabilmente accelerato, che incomincia dal punto A, dovranno essere nella loro duplicata ragione. Quindi eziandio questi due spazj AN, AQ saranno nella duplicata ragione dei primi due AO, AR, o pure dei loro eguali MN, PQ. Onde conforme la curva AMD ritrovasi essere d'indole tale, che i quadrati delle ordinate MN, PQ sono, come le ascisse corrispondenti AN, AQ; così la medesima curva sarà una parabola, che avrà per suo diametro la verticale AB, per suo vertice il punto A, e per tangente a questo vertice la retta AC, colla di cui direzione si è impressa al grave la velocità dalla forza projettile.

343. Per poco poi, che vogliasi riflettere, s'intenderà facilmente, che l' ampiezza di questa parabola dipende dalla velocità, che s' imprime al grave dalla forza projettile. In fatti la di lei ampiezza dee ripetersi propriamente dal parametro del suo diametro AB; ed egli è facile il dimostrare, che questo parametro sia quadruplo dell' altezza, per cui acquistasi cadendo la riferita velocità. Fingiamo perciò, che AE sia quella altezza; e colla velocità,

locità, che acquistasi cadendo per essa, dovrà percorrersi eguabilmente nel medesimo tempo la AO dupla della AE. Ma in questo stesso tempo colla caduta per la AB dee percorrersi la AN eguale alla AE. Dunque la AO, ovvero MN sarà dupla ancora della AN; e pertanto il parametro del diametro AB, come terza proporzionale dopo le due AN, MN, sarà quadrupla della AN, o sia AE.

344. Quindi se sia data la parabola AMD, niente sarà più facile, quanto di spingere il grave in modo, che si porti per la parabola data. Perciò tirisi primieramente la retta AC, che tocchi la parabola nel punto A; indi prolunghisi il diametro AB talmente sino al punto E, che la AE sia eguale alla quarta parte del suo parametro. E se colla velocità, che si acquista cadendo per la AE, spingasi il grave secondo la direzione della AC; non v'ha dubbio, che dovrà egli portarsi per la parabola data AMD. In ogn'altro punto poi della stessa parabola, chiaro si è, che la velocità del grave debba essere tanta, quanta ne dovrebbe egli ricevere dalla forza projettile, per incominciarla a descrivere da quel punto. Onde per una ragione consimile la velocità, che ritrovasi avere il grave in qualsisia punto M della parabola, si acquista colla caduta per un'altezza eguale alla quarta parte del parametro di quel diametro, che ha per suo vertice il punto M.

345. Essendo così, non sarà egli difficile il definire la ragione, in cui sono tra loro le velocità, che ritrovasi avere il grave in diversi punti della parabola, che egli descrive. Sia perciò AB l'asse *Fig. 47.* della parabola, A il vertice principale, ed F il foco. Prendansi nella stessa parabola due punti ad arbitrio, li quali siano M, e P; ed io dico, che le velocità del grave in questi punti siano nella sudduplicata ragione delle rette MF, PF tirate dagli stessi punti al foco F. Dipende ciò da una proprietà della parabola, la quale si è, che i parametri

dei

dei diametri, che hanno per loro vertici i punti M, e P, siano quadrupli delle rette MF, PF. Imperocchè siccome le altezze, per cui cadendo acquistansi le velocità, che ritrovasi avere il grave ne' punti M, e P, debbono essere eguali alle due MF, PF; così le velocità medesime saranno nella sudduplicata ragione di MF a PF.

346. Or delle rette, che tiransi dai diversi punti della parabola al foco F, non v'ha dubbio, che la più picciola sia la AF tirata dal vertice principale A; onde la minima velocità, che ritrovasi avere il grave in descrivere la parabola, sarà quella, che risiede in esso nel riferito vertice. Conforme poi di quelle stesse rette la più distante dalla AF è sempre maggiore della più vicina; così con discostarsi il grave dal vertice principale della parabola, dovrà sempre aumentarsi la di lui velocità. Ed in fine, siccome sono eguali le rette, che nelle due parti della parabola distano egualmente dalla AF, e formano con essa angoli eguali; così eziandio le velocità, che ritrovasi avere il grave ne' punti della parabola egualmente distanti dal vertice principale A, dovranno essere tra loro eguali.

347. Prolunghisi ora l'asse della parabola AB talmente fino al punto E, che siano eguali le due AE, AF; e di già la velocità, che ritrovasi avere il grave nel vertice principale A, si acquisterà colla caduta per la AE, che è la quarta parte del parametro dell'asse AB. Ma io dico di più, che se per lo punto E tirisi l'orizzontale EH, la velocità del grave in ogn'altro punto M della parabola dovrà acquistarsi colla caduta da quella orizzontale fino al punto M. In fatti la EH, come perpendicolare sull'asse BE, viene ad essere quella retta, che comunemente chiamasi direttrice della parabola. Onde la perpendicolare MH abbassata su di essa, siccome dee essere eguale alla MF, così sarà eguale altresì alla quarta parte del parametro di quel diametro, che ha per vertice il pun-

to M; e pertanto la velocità del grave nel punto M sarà quella, che acquistasi colla caduta per la MH (102).

XV.

Del moto de' projetti, che terminasi alla stessa orizzontale, da cui incomincia.

348. DEterminata, così l'indole della curva, che descrivono i projetti, come la velocità, che ritrovansi avere in qualsisia punto di essa; egli è facile ora ad intendersi ogn'altra affezione del loro moto. Ed in primo luogo, se il projetto debba muoversi in modo, che si termini il di lui moto alla stessa retta orizzontale, da cui incomincia; non v'ha dubbio, che la forza projettile dee spingerlo con direzione, che lo sollevi sulla stessa orizzontale. Onde nel suo moto possono considerarsi tre cose; cioè la velocità, che imprimesi al grave dalla forza projettile; l'angolo, che forma colla verticale la direzione di questa velocità; e l'ampiezza della parabola descritta dal grave, che è l'orizzontale racchiusa tra il principio del moto, ed il suo termine.

349. Sia perciò in A situato un grave, il quale colla velocità, che acquistasi cadendo per la verticale AE, spingasi dalla forza projettile secondo la direzione della AC. Sia in oltre AMD la parabola descritta dall'istesso grave, la quale parabola incontrisi coll'orizzontale AD nel punto D, che sia l'ultimo termine del moto del grave. La velocità adunque da considerarsi in questo moto sarà quella, che acquistasi colla caduta per la AE. L'angolo poi, che forma la direzione AC di questa velocità colla verticale AE, sarà l'angolo CAE. Ed in fine l'ampiezza della parabola descritta dal grave sarà l'orizzontale AD racchiusa tra il principio del moto A, ed il suo termine D, la quale Fig. 48.

ampiez-

ampiezza ci dà a dividere l'estensione, o sia portata dello stesso moto.

350. Or queste tre cose, che possono considerarsi nel moto del projetto, hanno un tale attacco tra loro, che date due di esse, niente sarà più facile, quanto di determinare la terza, che rimane. In fatti se intorno alla AD come diagonale descrivasi il parallelogrammo ACDB, sarà la DB una delle ordinate del diametro AB. Onde essendo il parametro di questo diametro quadruplo della AE, sarà il quadrato della DB ovvero AC eguale al rettangolo fatto dal quadruplo della AE nella AB ovvero CD. Ma alzata sulla AC la perpendicolare CF, che s'incontri colla AE prolungata nel punto F, ed abbassata sulla AF l'altra perpendicolare CG, il quadrato della stessa AC dee essere eguale altresì al rettangolo fatto dalla AF nella AG, ovvero CD. Dunque il quadruplo della AE, e la AF saranno tra loro eguali.

351. Essendo così, può dimostrarsi ora il seguente teorema, cioè, che se dell'angolo, che forma la direzione della velocità colla retta verticale, prendasi il duplo, la metà del raggio sia al seno di quest'angolo duplo, come l'altezza, per cui acquistasi cadendo la stessa velocità, all'ampiezza della parabola. Dividasi perciò la AF per metà nel punto H. E poichè il mezzo cerchio, che descrivesi sulla AF come diametro dee passare per lo punto C, saranno eguali le due AH, CH. Onde essendo isoscele il triangolo AHC, saranno eguali ancora i due angoli CAH, ACH. Ma l'angolo CHF, come esteriore, dee essere eguale ai due CAH, ACH uniti insieme. Dunque il medesimo angolo CHF sarà duplo del solo CAH, che formasi sulla direzioue della velocità AC colla retta verticale AE.

352. Per essere poi il triangolo CGH rettangolo in G, sarà come CH a CG, così il raggio al seno dell'angolo CHF; e pertanto, prendendo le

metà

metà dei due antecedenti di questa analogia, sarà ancora come la metà della CH alla CG, così la metà del raggio al seno dell' angolo CHF. Ma la metà della CH è eguale alla AE, per cui acquistasi cadendo la velocità impressa al grave; ed in oltre la CG è eguale alla AD, che è l' ampiezza della parabola descritta dallo stesso grave. Dunque se dell' angolo, che forma la direzione della velocità colla retta verticale, prendasi il duplo, la metà del raggio sarà al seno di quest' angolo duplo, come l' altezza, per cui acquistasi cadendo la stessa velocità, all' ampiezza della parabola.

353. Se adunque insieme coll' angolo CAE sia data la verticale AE, si determinerà l' ampiezza AD con fare, come la metà del raggio al seno del duplo dell' angolo CAE, così la verticale data AE ad una quarta proporzionale. Se poi al contrario insieme coll' angolo CAE sia data l' ampiezza AD, si determinerà la verticale AE con fare al rovescio, come il seno del duplo dell' angolo CAE alla metà del raggio, così l' ampiezza data AD ad una quarta proporzionale. Ed in fine, se sia data tanto la verticale AE, quanto l' ampiezza AD, si determinerà l' angolo CAE con fare, come la verticale data AE alla data ampiezza AD, così la metà del raggio ad una qua a proporzionale; poichè la metà dell' angolo, a cui questa quarta proporzionale rapportasi come seno, sarà l' angolo ricercato.

354. Questa quarta proporzionale intanto può rapportarsi come seno, così ad un' angolo acuto, come ad un' altro ottuso, che faccia due retti con quell' acuto; onde eziandio la AC potrà formare colla AE due angoli, li quali per essere le metà di quelli due saranno insieme eguali ad un solo retto. Niente però vieta, che questi due angoli siano talvolta tra loro eguali, e ciò avviene sempre quando l' ampiezza AD è dupla della verticale AE; poichè, facendosi in questo caso la quarta proporzionale eguale al raggio, sarà retto ciascuno dei due

ango-

angoli, a cui ella rapportasi come seno, e pertanto le loro metà saranno di gradi 45. Ed in fine, se la AD sia maggiore del duplo della AE, la stessa quarta proporzionale si farà maggiore ancora del raggio e perciò, conforme ella non può rapportarsi come seno ad angolo alcuno, così neppure la AC potrà formare verun'angolo colla AE.

355. Quindi intorno all' ampiezza della parabola AD possono stabilirsi tre cose. I, che qualunque siasi l'angolo CAE, che la linea della direzione AC forma colla verticale AE, non mai l'ampiezza AD possa essere maggiore del duplo dell'altezza AE, per cui acquistasi cadendo la velocità impressa al grave dalla forza projettile. II, che siccome la massima ampiezza si ha, quante volte l'angolo CAE è di gradi 45, ed in conseguenza eguale alla metà del retto; così la stessa massima ampiezza debba essere eguale al duplo della AE. E III. finalmente, che siccome con ogn'altro angolo sia minore, sia maggiore di gradi 45, l'ampiezza AD dee farsi sempre minore del duplo della AE; così debba ella essere la stessa nei due angoli, che uniti insieme formano il retto.

356. Del rimanente, se l'orizzontale AD, che è l'ampiezza della parabola, dividasi per metà nel punto N; non v'ha dubbio, che la perpendicolare NM alzata su di essa debba essere l'asse, ed in conseguenza l'altezza della stessa parabola. Ma egli è facile ancora il dimostrare, che la AG sia il quadruplo di questa altezza. In fatti attenta la proprietà della tangente della parabola, se prolunghisi la NM fino a che s'incontri colla AC nel punto O; si faranno eguali le due NM, MO, e pertanto la NO sarà dupla della NM. Ma per essere i due triangoli ADC, ANO tra loro equiangoli, AD sta ad AN, come DC ad NO. Dunque essendo la AD dupla della AN, sarà la DC, ovvero AG dupla ancora della NO; ed in conseguenza la stessa AG sarà quadrupla dell' altezza NM.

357. Da ciò poi possono dedursi due teoremi. Il primo si è, che l'ampiezza della parabola AD sia alla sua altezza NM, come il raggio alla quarta parte della tangente seconda dell'angolo CAE. Imperocchè essendo il triangolo ACG rettangolo in G, deve essere come il raggio alla tangente seconda dell' angolo CAE, così il lato CG al lato AG. Ma il lato CG è eguale all'ampiezza della parabola AD, e l'altro lato AG è eguale al quadruplo della sua altezza NM. Dunque sarà ancora come il raggio alla tangente seconda dell' angolo CAE, così l' ampiezza AD al quadruplo dell'altezza NM; e pertanto prendendo le quarte parti dei due conseguenti di quest' analogia, sarà l' ampiezza della parabola AD alla sua altezza NM, come il raggio alla quarta parte della tangente seconda dell' angolo CAE.

358. L'altro teorema si è, che la verticale AE, per cui acquistasi cadendo la velocità impressa al grave, sia all' altezza della parabola NM nella duplicata ragione del raggio al seno secondo dell' angolo CAE. Imperocchè essendo le tre AF, AC, AG continuamente proporzionali, sarà la prima AF alla terza AG nella duplicata ragione della prima AF alla seconda AC. Ma per essere le due AF, AC quadruple dell' altre due AE, NM, la ragione di AF ad AC è eguale alla ragione di AE ad NM; ed in oltre, per essere il triangolo ACF rettangolo in C, la ragione di AF ad AC è eguale alla ragione del raggio al seno secondo dell' angolo CAE. Dunque la verticale AE all' altezza NM sarà nella duplicata ragione del raggio al seno secondo dell'angolo CAE (103).

XVI.

Della formazione di una tavola per regolare il riferito moto de' projetti.

359. QUantunque i principali problemi intorno al moto de' projetti, che terminasi alla stessa orizzontale, da cui incomincia, possano risolversi col canone trigonometrico; nientedimeno per agevolare la soluzione di essi nella pratica, giova costruire una tavola, in cui sia notata l' ampiezza della parabola, che descrivesi dal grave con una data velocità per ogni angolo, che possa formare colla retta verticale la direzione della stessa velocità. Per construire intanto questa tavola, dee definirsi primieramente l'altezza, per cui acquistasi cadendo la velocità data. E poichè quest' altezza deve essere la metà dell' ampiezza di quella parabola, che descrivesi colla data velocità, e coll' angolo di 45 gradi; perciò la medesima potrà determinarsi, con investigare per mezzo di reiterati esperimenti l' ampiezza della riferita parabola.

360. Dopo essersi adunque definita l'altezza, per cui acquistasi cadendo la data velocità, si determinerà l' ampiezza della parabola per qualsisia angolo dato, primieramente con prendere nel canone trigometrico il seno dell' angolo duplo, ed indi con fare, che la metà del raggio sia a questo seno, come la riferita altezza ad una quarta proporzionale. Nella formazione poi della tavola basterà notare i minuti di qualsisia grado da 10 in 10; poichè, per quanto agli altri angoli, che tra quelli si frammezzano, si avranno le loro ampiezze coll' aggiunta delle parti proporzionali. Ed in fine, dopo essersi formata la tavola fino all' angolo di gradi 45, non occorre continuarla più oltre, per la ragione, che secondo è stato avvertito di sopra, andando più innanzi ritornano le stesse ampiezze con ordine contrario.

361.

361. Sempre quando imprimesi al grave quella medesima velocità, con cui si è formata la tavola, chiaro si è, che la tavola stessa ci additerà così l' angolo, di cui dee farsi uso per una data ampiezza, come l' ampiezza, che dee corrispondere ad un' angolo dato. Ma io dico di più, che possono ritrarsi dalla tavola i medesimi usi, eziandio quando la velocità da imprimersi al grave è diversa da quella della tavola. In fatti, se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che le ampiezze di due parabole descritte con un medesimo angolo siano, come le altezze, per cui acquistansi cadendo le velocità, colle quali si descrivono le due parabole. Onde siccome queste altezze sono nella duplicata ragione delle velocità, che colla caduta per esse si acquistano, così nella stessa duplicata ragione saranno altresì l' ampiezze delle due parabole.

362. Se adunque la velocità, che deve imprimersi al grave, sia dupla di quella, con cui si è formata la tavola; dovrà quadruplicarsi per qualsisia angolo l' ampiezza notata nella stessa tavola. Onde l' angolo corrispondente ad una data ampiezza sarà quello, che corrisponde nella tavola alla quarta parte dell' ampiezza data; ed al contrario l' ampiezza corrispondente ad un dato angolo sarà il quadruplo di quella, che corrisponde nella tavola all' angolo dato. Se poi vogliasi la velocità, che deve imprimersi al grave, affinchè la parabola descritta con un dato angolo abbia altresì una data ampiezza; ritrovisi la mezza proporzionale tra l' ampiezza data, e l' altra, che corrisponde nella tavola all' angolo dato; e la velocità ricercata sarà alla velocità della tavola, come la mezza proporzionale ritrovata all' ampiezza della stessa tavola.

363. Oltre all' ampiezze, possono notarsi altresì nella tavola le altezze delle parabole, che descrivonsi dal grave colla data velocità; ed attento il primo teorema dimostrato di sopra intorno a cia-

scuna di esse, si determinerà l' altezza della parabola per qualsisia angolo dato, primieramente con prendere nel canone trigonometrico la tangente seconda del dato angolo, ed indi con fare, che il raggio sia alla quarta parte di questa tangente, come l' ampiezza della parabola alla sua altezza. Per le altezze poi necessariamente dee continuarsi la tavola fino ai 90 gradi; poichè se bene dopo i gradi 45 ritornino le stesse ampiezze con ordine contrario, nientedimeno le altezze continuano tuttavia ad essere differenti. Ed in fine se le parabole debbansi descrivere con velocità maggiore, o minore, si avranno le loro altezze con aumentare, o diminuire quelle della tavola nella duplicata ragione della nuova velocità.

364. Ed in fatti essendo dato l' angolo, con cui imprimesi la velocità al grave; così l' ampiezza della parabola, che descrive il grave, come la di lei altezza corrisponderà in proporzione alla verticale, per cui acquistasi cadendo la velocità, che se gl' imprime. Onde siccome questa verticale è nella duplicata ragione della riferita velocità, così nella stessa duplicata ragione sarà parimente tanto l' ampiezza, quanto l' altezza della parabola. Conforme poi da ciò con ogni chiarezza ne siegue, che nelle parabole, le quali descrivonsi con angoli eguali, e con velocità disuguali, le ampiezze, e le altezze siano tra loro nella stessa ragione; così nè pure sarà egli difficile il ricavarne, che descrivendosi le riferite parabole da gravi, che partano da un medesimo punto, debbano ritrovarsi in una stessa retta, non solo i vertici loro principali, ma eziandio i loro fochi.

Fig. 49. 365. Siano perciò AMD, A*md* due parabole descritte da due gravi con un medesimo angolo, e con velocità disuguali. Le loro ampiezze adunque saranno le orizzontali AD, A*d*, colle quali s' incontrano; e se dividansi queste ampiezze per metà nei punti N, ed *n*, le perpendicolari NM, *nm*

alza-

alzate su di esse saranno le loro altezze. Or essendo NM ad nm, come AD ad Ad; sarà altresì NM ad nm, come AN ad An. Onde se congiungasi il punto A col vertice principale M di una delle due parabole per mezzo della retta AM, dovrà passare questa retta prolungata per lo vertice principale m dell' altra parabola. Se poi siano F, ed f i fochi delle due parabole, saranno i parametri dei loro assi quadrupli delle due MF, mf. Onde dovendo essere MF ad mf, come AN ad An, o pure come AM ad Am; eziandio la AF, che tirasi dal punto A al foco F, dovrà passare prolungata per l' altro fuoco f.

366. Descrivansi ora le parabole tutto al contrario con velocità eguali, e con angoli disuguali; e se i gravi, che le descrivono, partano da un medesimo punto, neppure sarà egli difficile il definire così il luogo dei vertici loro principali, come l' altro dei loro fochi. Sia perciò AE la verticale, *Fig.* 50. per cui acquistasi cadendo la comune velocità, colla quale descrivonsi le riferite parabole; e sia AMD una di esse, la quale abbia per asse la MF, per vertice principale il punto M, e per foco il punto F. Io dico primieramente, che questo foco F debba ritrovarsi nella circonferenza del cerchio, che descrivesi col punto A come centro, e coll' intervallo della AE. Dipende ciò dall' essere eguale alla quarta parte del parametro del diametro AB così la AE, come la AF; poichè facendosi eguali le due AE, AF, per necessità la circonferenza del cerchio, che ha per centro il punto A, e per intervallo la AE, dovrà passare per lo punto F.

367. Io dico in secondo luogo, che il vertice principale M debba ritrovarsi nell' ellisse, che ha la AE per asse picciolo, ed il suo duplo per asse grande. Per dimostrarlo, tirisi l' orizzontale EH, con cui vadasi ad incontrare l' asse della parabola nel punto H. Il parametro adunque di quest' asse sarà eguale

 al

al quadruplo della MH; e pertanto il quadrato della AN sarà al rettangolo delle due NM, MH, come 4 ad 1. Ma abbassata sulla AE la perpendicolare MO, le tre AN, NM, MH si fanno eguali alle altre tre MO, AO, OE. Dunque ancora il quadrato della MO sarà al rettangolo delle due AO, OE, come 4 ad 1. Or nella riferita ellisse il quadrato dell' asse grande al quadrato dell' asse picciolo sta eziandio, come 4 ad 1. Dunque il quadrato della MO sarà al rettangolo delle due AO, OE, come il quadrato dell' asse grande al quadrato dell' asse picciolo; ed in conseguenza, dovendo essere la MO ordinata dell' asse picciolo, sarà il suo termine M uno dei punti dell' ellisse.

468. A queste parabole intanto compete ancora un' altra proprietà, e si è, che se al foco F di ciascuna di esse tirisi la AF, che s'incontri prolungata colla parabola nel punto P, debba ritrovarsi questo punto P eziandio nella parabola, che ha per vertice principale il punto E, e per foco il punto A. Prolunghisi perciò la AE fino al punto G, dimodochè siano eguali le due AE, EG; e sulle orizzontali EQ, GR si abbassi dal punto P la perpendicolare PQR. Per la parabola adunque AMD debbono essere eguali così le due AF, AE, come le PF, PQ. Onde la AP sarà eguale alle due AE, PQ unite insieme. Ma per essersi fatta la EG, o sia QR eguale alla AE; le due AE, PQ insieme sono eguali alla PR. Dunque la AP, e la PR saranno tra loro eguali; e pertanto la parabola, che descrivesi col vertice principale E, e col foco A, dovrà passare per P.

369. Ma io dico di più, che questa nuova parabola, e l' altra AMD debbano avere nel comune punto P la stessa tangente, ed in conseguenza toccarsi tra loro in quel medesimo punto. In fatti essendo eguali tanto le due PA, PR, quanto le due PF, PQ; sarà come PA a PF, così PR a PQ. Onde se congiungasi così la AR, come la FQ;

que-

queste due AR, FQ saranno tra loro parallele. Ma per avere la retta, che tocca la parabola AMD nel punto P, non dee farsi altra cosa, se non che dividere la FQ per metà nel punto S, e congiungere insieme i due punti P, e S per la retta PS. Dunque perchè la PS divide eziandio la AR per metà nel punto T, sarà la PS tangente altresì della parabola, che ha per vertice principale il punto E, e per foco il punto A; e perciò le due parabole si toccheranno tra loro nel punto P (104).

XVII.

Del moto de' projetti terminato ad una orizzontale diversa da quella, da cui principia.

370. ESamineremo ora il moto de' projetti, che terminasi non già all'orizzontale, da cui principia, ma ad un'altra differente, la quale se sia più elevata della prima, pure il grave dee spingersi in modo, che si sollevi su di esse. Sia perciò AN l'orizzontale, da cui incomincia il moto; e BD l'altra orizzontale, a cui terminasi lo stesso moto. Sia di poi AE la verticale, per cui acquistasi cadendo la velocità da imprimersi al grave; ed AC la direzione, con cui imprimesi al grave la stessa velocità. Sia finalmente AMD la parabola, che colla riferita velocità, e colla riferita direzione descrivesi dal grave, la quale parabola incontrisi colla seconda orizzontale BD nel punto D. *Fig.* 51.

371. Or in questo moto, che incomincia dall' orizzontale AN, e terminasi all'altra BD, pure debbono considerarsi tre cose: cioè la verticale AE, per cui acquistasi cadendo la velocità, che s'imprime al grave; l'angolo CAE, che la direzione della velocità AC forma colla verticale AE; ed in fine la BD, che è la distanza orizzontale tra il principio del moto A, ed il suo termine D. Onde i problemi attinenti a questo moto similmente sono

tre; nel primo de' quali, data l'orizzontale BD insieme coll'angolo CAE, dimandasi la verticale AE; nel secondo, data la verticale AE insieme coll' angolo CAE, cercasi l'orizzontale BD; e nel terzo finalmente, data così l'orizzontale BD, come la verticale AE, si dimanda l'angolo CAE.

372. Per quanto al primo, la sua soluzione è molto facile. Tirisi perciò al diametro AB l'ordinata DG; e dovendo ella essere parallela alla AC, che tocca la parabola nel punto A, sarà l'angolo DGA eguale all'angolo CAE. Onde se facciasi come il raggio alla tangente seconda del dato angolo CAE, così l'orizzontale data BD ad una quarta proporzionale, si farà a noi nota la BG; e pertanto, con essere data la distanza AB delle due orizzontali AN, BD, sapremo altresì la lunghezza della AG. Faccians di poi i quadrati delle due BD, BG; e se dalla loro somma cavisi la radice quadrata, verremo in cognizione della DG. Quindi con ritrovare la terza proporzionale dopo le due AG, DG, avremo il parametro del diametro AB; ed in conseguenza, con prenderne la quarta parte, resterà determinata la verticale AE, che si dimanda.

373. Molto più facile intanto riuscirà la soluzione di questo primo problema, se essendo l'orizzontale AN, da cui incomincia il moto, più elevata dall' altra BD, a cui egli si termina, spingasi il grave dalla forza projettile secondo la direzione della stessa AN. Di fatti in questo caso debbono combaciarsi tra loro le due AC, AN; e pertanto, essendo retto l'angolo dato CAE, sarà la AB l'asse della parabola, che descrivesi dal grave. Quindi facendosi sua ordinata l'orizzontale data BD, sarà la terza proporzionale dopo le due AB, BD il suo parametro. Onde si avrà la verticale ricercata AE, primieramente con determinare la retta, che è terza proporzionale dopo le due AB, BD, ed indi con prenderne di essa la quarta parte.

374.

374. Per quanto al secondo, si potrà egli risolvere in questo modo. Facciasi l'angolo CAF eguale all'angolo dato CAE. E conforme, tagliando la AF eguale alla verticale data AE, il punto F si fa foco della parabola; così, tirando per questo punto la MO parallela al diametro AB, avremo con essa l'asse della stessa parabola. Si abbassi di poi sulla MO la perpendicolare AN; ed essendo eguali i due angoli AFO, FAE, sarà l'angolo AFO duplo dell'angolo dato CAE. Onde se facciasi come il raggio al seno di quest'angolo duplo, così la verticale data AE, ovvero AF ad una quarta proporzionale, si farà a noi nota la AN, o sia BO; e pertanto, se prendansi i quadrati delle due AF, AN, e dalla loro differenza cavisi la radice quadrata, si avrà con questa radice la lunghezza della FN.

375. Si abbassi inoltre sull'asse MO la perpendicolare EH; e se dividasi la FH per metà nel punto M, sarà questo punto il vertice dell'asse, ed il quadruplo della FM il suo parametro. Ma con essere note le due AE, FN, deve esserci nota altresì così la FH, come la sua metà FM. Dunque se determinisi questa metà, e di essa prendasi il quadruplo, resterà determinato parimente il parametro dell'asse. Finalmente essendo note le due AB, MN, sarà nota ancora la MO, che è l'ascissa corrispondente all'ordinata dell'asse DO. Onde se il parametro dell'asse di già determinato moltiplichisi per la MO, e dal prodotto cavisi la radice quadrata, si avrà con questa radice la DO, la quale coll'aggiunta della AN, ovvero BO ci darà l'orizzontale BD, che si dimanda.

376. Notisi quì intanto, che se l'angolo dato CAE sia di gradi 45, il calcolo riuscirà molto più facile; poichè, facendosi retto il suo duplo EAF, sarà la stessa AF la perpendicolare abbassata sull'asse dal punto A; e pertanto la FM sarà eguale alla metà della verticale data AE. Se poi l'orizzon-

zontale AN, da cui incomincia il moto del grave, sia più elevata dell' altra BD, a cui terminasi lo stesso moto, e l'angolo dato CAE sia retto; in tal caso la AB sarà l'asse della parabola, ed il quadruplo della AE sarà il suo parametro. Onde si determinerà l'orizzontale BD, che si dimanda, primieramente con moltiplicare il quadruplo della verticale data per la distanza AB delle due orizzontali, ed indi con estrarre dal prodotto la radice quadrata.

377. Finalmente per quanto al terzo problema, che è il più difficile, si potrebbe egli risolvere geometricamente in questo modo. Facciasi primieramente la EH parallela alla BD, e si abbassi su di essa la perpendicolare DI. Descrivansi di poi coi punti A, e D come centri, e cogl' intervalli delle due AE, DI gli archi circolari EF, IF, che s'intersechino tra loro nel punto F. Congiungasi finalmente la AF, ed io dico, che se dividasi l' angolo EAF in due parti eguali per la retta AC, sarà CAE l' angolo, che si dimanda. In fatti essendo eguali così le due AE, AF, come le due DI, DF, sarà F il foco della parabola. Quindi la AC, che divide per metà l' angolo EAF, si farà tangente della stessa parabola in A. Onde colla velocità, che acquistasi colla caduta per la AE, dovrà spingersi il grave secondo la direzione della AC.

Fig. 52.

378. Secondo questa costruzione vedesi chiaramente, che il problema, di cui si tratta, sia capace regolarmente di due soluzioni. In effetto, se i due archi EF, IF, dopo essersi incontrati nel punto F, distendansi più oltre, s'incontreranno di nuovo in un altro punto *f*. Onde la direzione della velocità da imprimersi al grave potrà essere tanto la retta, che divide per metà l'angolo EAF, quanto la retta, che divide in parti eguali l'altro angolo EA*f*. Se poi vogliasi attentamente riflettere, si vedrà ancora, che i fuochi F, ed *f* delle due parabole, che possono descriversi dal grave, debbano esse-

essere egualmente distanti dalla AD, che congiunge insieme i centri dei due archi. Onde facendosi eguali tra loro i due angoli DAF, DA*f*, sarà l'angolo ricercato in una soluzione eguale alla metà della differenza dei due DAE, DAF, ed in un' altra eguale alla metà della loro somma.

379. Quindi per ridurre a calcolo l' istesso problema, non dovrà farsi altra cosa, se non che determinare i due angoli DAE, DAF. Ed in vero per quanto al primo DAE, resterà egli determinato, se facciasi come AB a BD, così il raggio ad una quarta proporzionale; poichè l'angolo ottuso, a cui questa quarta proporzionale rapportasi come tangente, ci darà l'angolo DAE. Per quanto poi all'altro DAF; determinisi primieramente la AD, che è ipotenusa del triangolo rettangolo ABD, di cui sono noti i due lati AB, BD. E poichè nel triangolo DAF sono noti tutti tre i lati, potrà determinarsi facilmente la porzione AL, che taglia dalla AD la perpendicolare FL. Onde se facciasi come AF ad AL, così il raggio ad una quarta proporzionale; l'angolo acuto, a cui questa quarta proporzionale rapportasi come seno secondo, ci darà l'altro angolo DAF.

380. Quantunque poi il problema sia capace regolarmente di sue soluzioni, niente però vieta, che queste due soluzioni riducansi talvolta ad una. Avviene ciò, sempre quando le due AE, DI insieme sono eguali alla AD; poichè in questo caso i due archi circolari, che descrivonsi coi punti A, e D come centri, e cogl' intervalli delle due AE, DI, si toccheranno tra loro in un sol punto; e perciò, conforme una sola parabola potrà descriversi dal grave colla velocità, che acquistasi cadendo per la AE; così una sola sarà la direzione, con cui dovrà imprimersi al grave la riferita velocità. Il punto intanto, in cui toccansi tra loro i due archi, si ritroverà nella AD. Onde siccome l'angolo ricercato deve essere la metà dell'angolo DAE, così la solu-

soluzione arimmetica del problema riducesi alla determinazione di quest' angolo.

381. Ma egli è da notarsi, che può avvenire ancora talvolta, che il problema sia impossibile. Accade ciò, qualora le due AE, DI insieme sono minori della AD; poichè in quest'altro caso i due archi circolari descritti co' punti A, e D come centri, e cogl' intervalli delle due AE, DI affatto non s'incontrano; onde siccome per mezzo di essi non ritrovasi punto alcuno, così nè pure il problema sarà capace di veruna soluzione. Finalmente il caso di essere retto l'angolo ricercato si avrà, quante volte la differenza delle due AB, AE ritrovasi essere mezza proporzionale tra la differenza dell'altre due BD, DI, e la loro somma. Ma conforme il problema ancora in questo caso ammette due soluzioni diverse; così l'angolo, che si dimanda, in una di esse si avrà colla metà della somma dei due DAE, DAB, ed in un'altra colla metà della loro differenza (105).

CAPITOLO III.

Dell' equilibrio de' gravi nelle scambievoli loro azioni.

382. NEl capitolo precedente si è trattato de' moti, che possono avvenire a qualsisia corpo grave per ragion del suo proprio peso; passeremo ora a ragionare in quest' altro dell'equilibrio, che osservasi nelle azioni, che per mezzo degli stessi pesi esercitano tra esso loro due, o più gravi, i quali hanno tra di essi un qualche attacco. E poichè ogni altra potenza può riguardarsi come un grave dotato di peso proporzionale alla sua forza di agire; perciò si tratterà in questo capitolo dell' equilibrio, che osservasi non solo nelle scambievoli azioni de' corpi gravi, ma eziandio in quelle di altre potenze; onde si è, che il suo argomento

to sarà molto più disteso di quello, che egli sembra promettere.

I.

Del centro di gravità di qualsisia grave, e della sua linea di direzione.

383. Quantunque il peso di un corpo sia sparso egualmente in tutte le minime particelle, che lo compongono; nientedimeno il costume si è, di considerarlo come raccolto, e riunito talmente in uno de' punti dello stesso corpo, che fuori di esso non siavi altro peso nell'altre parti rimanenti; e quindi si è, che il riferito punto riguardasi comunemente come centro della propria gravità, o sia peso del corpo. Si vede intanto, che conforme il corpo dee rimanere in equilibrio, quante volte tienesi sospeso per un filo, che passa prolungato per quel centro; così al contrario se situisi un corpo talmente sopra un piano verticale, che resti su di esso fermo, ed immobile, questo piano dovrà passare prolungato per lo stesso centro (106).

384. Quindi con un piano di questa indole potrà determinarsi facilmente il centro di gravità di qualsisia corpo, ed ecco come. Situisi su di esso il corpo, di cui si tratta, ora secondo la sua lunghezza, ora secondo la sua larghezza, ed ora finalmente secondo la sua altezza, o sia profondità: ed in tutte tre queste situazioni cerchisi la posizione, in cui il corpo rimane su'l piano in equilibrio, ed in conseguenza fermo, ed immobile. Il piano adunque in ciascuna delle tre posizioni del corpo dovrà passare prolungato per lo centro della sua gravità. Onde siccome questo centro dee ritrovarsi in tutte tre le sezioni fatte nel corpo dal medesimo piano; così il punto comune alle tre riferite sezioni sarà il centro, che si dimanda.

385. La ragione poi, per cui il totale peso del corpo considerasi come riunito, e raccolto nel divisato centro, dipende da ciò; che qualora il corpo spinto dal suo peso portasi liberamente verso la terra, vien regolato il di lui moto dal suddetto centro, e le altre parti del corpo, quasicchè prive di peso, non fanno altra cosa, se non che secondare la sua direzione. Ed in fatti la retta perpendicolare alla superficie della terra, per cui il corpo si muove, descrivesi propriamente dal centro della sua gravità; onde si è, che rimane ella determinata, con congiungersi il centro della gravità del corpo col centro della terra, che è il comune centro de' gravi.

386. Questa retta suol chiamarsi linea di direzione, in quantoche per essa dirigesi il moto del corpo derivato dalla gravità. Ed egli è da notarsi, che se bene le direzioni de' corpi gravi vadansi ad incontrare prolungate nel centro della terra; nientedimeno, se si abbiano due gravi così poco distanti l'uno dall'altro, che la loro distanza sia insensibile per rapporto a ciascuna di quelle, per cui gli stessi gravi distano dal centro della terra, in tal caso le loro direzioni potranno aversi come parallele: conforme in effetto le mura degli edificj, che innalzansi a perpendicolo sulla superficie della terra sembrano essere parallele tra loro.

387. Or sebbene il grave lasciato in libertà portisi verso il centro della terra per la linea di direzione; nientedimeno l'esperienza stessa ci dimostra, che egli nel cadere non sempre conservasi. Onde giova quì l'avvertire, che riterrà il grave la prima sua posizione, sempre quando tra gl' infiniti piani verticali, che passano per la sua linea di direzione, ritrovasene uno, intorno a cui si equilibrano tra loro le due parti dello stesso grave. Ma se mai nessuno di essi sia di questa indole, in tal caso il grave nel momento stesso, che in comincia a cadere, si aggirerà intorno al suo centro di gravità

vità fino a che la sua posizione facciasi tale, che uno dei riferiti piani divida il grave in due parti, che sia tra loro in equilibrio intorno a quel piano.

388. Se poi vogliasi attentamente riflettere, s'intenderà facilmente, che il moto circolare del grave debba farsi intorno a quel piano verticale, per rapporto a cui le due parti dello stesso grave maggiormente si discostano dall' equilibrio. E poichè deriva quel moto appunto da ciò, che il centro di gravità del grave è tirato verso basso più da una parte, che dall' altra; perciò nè pure si durerà fatica ad intendere, che la direzione del medesimo moto debba essere la stessa con quella della parte, che esercita azione maggiore: dimodochè accaderà al grave cadente lo stesso, che vedesi avvenire ad una girella, la quale se per mezzo di una corda sia tirata verso basso da due pesi disuguali, incomincia subito ad aggirarsi verso quel lato, da cui pende peso maggiore.

389. Nè vale il dire, che potrebbe il grave rimaner diviso in parti, che maggiormente si discostino dall' equilibrio, da due, o più piani verticali. Imperocchè se ciò potesse avvenire, il centro di gravità del grave sarebbe tirato maggiormente verso basso da due, o più forze eguali con direzioni, che formano angoli tra loro. Quindi siccome il grave dovrebbe aggirarsi verso quel lato, per cui dirigesi la forza, che si ha colla loro composizione; così la parte, che prepondera più di ogni altra, ed esercita azione maggiore, si verrebbe a ritrovare nel medesimo lato. Onde tuttavia sarebbe uno il piano verticale, per cui il grave rimane diviso in due parti, che maggiormente si discostino dall' equilibrio, il quale piano sarebbe perpendicolare alla direzione della forza composta.

390 Del rimanente, siccome il grave col suo peso cerca di avvicinarsi sempre più al centro della terra; così dee giudicarsi di questo avvicinamento, non già per ciò, che vedesi avvenire all' esterna su-

per-

perficie del grave, ma per quel tanto accade al ſuo centro di gravità, in cui ſi riuniſce, e ſi raccoglie il di lui peſo. Onde intorno al moto di un grave, che dee naſcere dal ſuo proprio peſo, poſſono ſtabilirſi due principj. Il primo ſi è, che debba muoverſi il grave col ſuo peſo, ogni qualvolta egli ritrovaſi avere poſizione tale, che permette al ſuo centro di gravità di avvicinarſi al centro della terra. L'altro principio ſi è, che il moto del grave debba farſi in modo, che lo ſteſſo centro di gravità avviciniſi all' altro della terra il più, che ſia poſſibile.

391. Per fare qualche uſo di queſti principj, eſaminiamo primieramente ciò, che deve avvenire al
Fig. 53. grave ABCD, che ritrovaſi ſituato su'l piano orizzontale MN. Sia perciò E il ſuo centro di gravità; e ſe la ſua linea di direzione EF cada su di un qualche punto interno della ſua baſe BC, chiaro ſi è non poterſi il grave muovere in altra guiſa, ſe non che con aggirarſi intorno ad uno dei termini della ſteſſa baſe, come intorno a B. Ma egli è facile il dimoſtrare, che ſi oppone queſto moto al primo principio. In fatti eſſendo l' angolo EBM ottuſo, ſarà l' arco EG deſcritto col centro B, e coll' intervallo della BE, maggiore del quadrante. Onde ſiccome porzione di eſſo elevaſi ſull' orizzontale EH, così il centro E, con portarſi per quella porzione, in vece di avvicinarſi al centro della terra, ſi diſcoſtarebbe più toſto da quello.

392. Quantunque poi cadendo la linea della direzione ſu 'l termine della baſe B, facciaſi retto l'angolo EBM, ed in conſeguenza eguale al quadrante l'arco EG; pure però il grave dee rimanere fermo, ed immobile. Imperocchè ſiccome il picciolo archetto aggiacente al centro E, ritrovaſi ſituato ſull' orizzontale EH, che è tangente dell' arco EG; così il centro E, con portarſi per quell' archetto, neppure avvicinaſi al centro della terra. Si muoverà adunque il grave nel ſolo caſo, che la

linea

linea di direzione EF cada fuori della base BC; e ciò per la ragione, che facendosi acuto l' angolo EBM, sarà l'arco EG minore del quadrante; onde ritrovandosi quest' arco interamente racchiuso tra le due orizzontali EH, MN, il centro E avvicinasi al centro della terra, con portarsi per la sua lunghezza,

393. Esaminiamo in appresso ciò, che deve avvenire allo stesso grave ABCD, essendo inclinato sull'orizzonte il piano MN, su di cui egli ritrovasi situato. Si abbassi perciò dal centro E la perpendicolare EF sul piano MN; e dopo essersi tirata la EH parallela allo stesso piano, descrivasi col centro B, e coll' intervallo della BE l' arco circolare EG. Quest' arco adunque sarà maggiore del quadrante, qualora la EF cade dentro della base BC; ed al contrario minore, quante volte la stessa EF cade fuori. Quindi il centro E, per potersi avvicinare il più che sia possibile al centro della terra, dovrà portarsi per la EH nel primo caso, e per l' arco EG nel secondo. Onde il grave sempre dovrà muoversi su 'l piano inclinato MN, ma nel primo caso dovrà strisciare per la lunghezza del piano, e nel secondo dovrà aggirarsi intorno al punto B.

394. Se poi la perpendicolare abbassata sul piano dal centro E cada sul termine della base B; in tal caso l' arco EG sarà quadrante, e la EH si sarà tangente di esso in E. Onde nel principio del moto il centro E egualmente si avvicinerà al centro della terra, portandosi per la EH, che per l' arco EG. Con continuarsi intanto il moto, non v' ha dubbio che sia maggiore l' avvicinamento fatto per EG, che l'altro fatto per la EH; e perciò il grave dovrà muoversi sul piano inclinato MN, non già strisciando per la sua lunghezza, ma bensì con aggirarsi intorno al punto B. Quindi un grave di figura sferica percorrerà la lunghezza del piano sempre rotolando; e poichè ne' projetti fa le veci di

L piano

piano inclinato la velocità, che se gl' imprime dalla forza projettile, perciò ancora essi rotolando descriveranno la parabola, per cui si muovono (107).

II.

Del principio generale dell' equilibrio, e dell' applicazione di esso alla bilancia.

395. DUe gravi non possono agire tra esso loro, se per mezzo di un qualche strumento, a cui sia applicato ciascuno di essi, non siano in un certo modo uniti, e ligati insieme. Or conforme quest' istrumento, che unisce, e liga insieme i due gravi, che agiscono tra esso loro, comunemente chiamasi machina; così sebbene sia scambievole l' azione degli stessi gravi, ad ogni modo il costume si è, di riguardare uno dei due come potenza, e l' altro come resistenza. Anzi è stato necessario di fare una tal distinzione, eziandio per la ragione, che siccome facciamo uso delle machine non solo per elevare in alto smisurati pesi, ma altresì per trasportargli orizzontalmente da un luogo in un altro, o pure per comprimere, e spezzare corpi difficili a cedere; così per vincere, e superare le divisate resistenze talvolta impiegasi il peso di un grave, e talvolta una potenza di altra indole (108).

396. Quantunque nell' uso, che si fa delle machine, la potenza, e la resistenza non siano sempre pesi di corpi gravi; niente però vieta di riguardare così l' una, come l' altra a guisa di un peso. In fatti qualunque siasi la potenza, che impiegasi in una qualche machina per vincere, e superare una data resistenza; certo si è, che se ella faccia a cagion di esempio lo stesso effetto, che farebbe un peso di 10. libbre sostituito in luogo di essa, equivalerà la medesima al riferito peso. E per la stessa ragione, qualunque siasi la resistenza, che per mezzo di una machina dee vincersi, e superarsi da una

data

data potenza; certa cosa ancora si è, che se ella faccia per ragion di esempio alla potenza la stessa opposizione, che farebbe un peso di 100. libbre sostituito in sua vece, equivalerà la medesima al peso divisato.

397. Con esser data poi la machina, a cui applicansi la potenza, e la resistenza, possono determinarsi facilmente così gli spazj, che percorrono ambedue nel medesimo tempo, come le velocità, con cui descrivonsi questi spazj. Onde considerando la potenza, e la resistenza come due corpi, che muovonsi con date velocità, agiranno tra esso loro con forze proporzionali ai loro moti; e perciò saranno le medesime in equilibrio, quantevolte ritrovansi essere nella reciproca ragione delle loro velocità (51). Questa reciproca ragione adunque si è il principio generale dell'equilibrio, e conforme con essa egli è facile di definire la potenza, che per mezzo di una data machina equilibrasi con una resistenza data; così per poco, che si aumenti questa potenza, non solo cesserà l'equilibrio, ma resterà altresì vinta, e superata la data resistenza.

398. Debbonsi quì intanto avvertire due cose. La prima si è, che siccome la velocità, con cui agiscono tra esso loro la potenza, e la resistenza, debbono ripetersi dagli spazj, che percorrono ambedue nel medesimo tempo; così questi spazj debbono prendersi, e misurarsi secondo le direzioni, con cui la potenza, e la resistenza esercitano le loro azioni. L'altro si è, che conforme la stessa potenza, che impiegasi a vincere, e superare la resistenza data, dee porre in moto altresì la machina, di cui si fa uso; così in determinare la riferita potenza dee tenersi conto altresì dell'altra resistenza, che deriva dal peso delle parti della machina, e dallo stropicciamento loro scambievole. Noi intanto prescinderemo per ora da quest'altra resistenza, e faremo vedere a suo luogo, come spe-

L 2 cial-

cialmente possa definirsi, e porsi a calcolo quella, che nasce dallo stropicciamento delle parti della machina (109).

399. Per applicare prensentemente il riferito principio generale dell' equilibrio alle machine le più semplici, e le più usitate, incominceremo dalla bilancia, che riguardasi come una retta orizzontale priva di ogni gravità, la quale sospesa da uno de' punti di mezzo tiene attaccati ai suoi estremi due pesi, che pendono da essi liberamente. Sia adunque

Fig. 65. AB questa retta orizzontale, la quale sia sospesa dal punto C, che considerasi come suo centro. Siano ancora M, ed N i due pesi, che pendono liberamente dai suoi estremi A, e B. Io dico, che saranno questi due pesi in equilibrio, quantevolte ritrovansi essere nella reciproca ragione delle braccia della bilancia, da cui pendono, vale a dire, quante volte il peso M sta al peso N, come il braccio BC al braccio AC.

400. Per dimostrarlo, trasportisi la bilancia colla scambievole azione dei due pesi dalla posizione ACB all' altra infinitamente vicina *a*C*b*. E poichè gli archetti A*a*, B*b* descritti intorno al centro della bilancia C dai due termini A, e B possono riguardarsi come due picciole rette alzate perpendicolarmente sulla AB; chiaro si è, che i medesimi archetti siano gli spazj, che percorrono secondo le loro direzioni i due pesi M, ed N in quel picciolo moto della bilancia; onde la velocità del peso M sarà alla velocità del peso N, come l' archetto A*a* all' archetto B*b*. Ma per essere simili i due piccioli settori AC*a*, BC*b*, l'archetto A*a* sta all' archetto B*b* nella ragione di AC a BC. Dunque in questa stessa ragione saranno altresì le velocità dei due pesi M, ed N; e perciò gli stessi pesi saranno tra loro in equilibrio, sempre quando il peso M sta al peso N, come BC ad AC.

401. Or sebbene la bilancia comune abbia le sue braccia a dirittura, e pongasi la medesima in sito

oriz-

orizzontale, sempre quando trattasi d' investigare l'equilibrio dei due pesi, che pendono liberamente dai suoi termini; niente però vieta di formare una bilancia, le di cui braccia facciano angolo tra loro, ed abbiano per rapporto all' orizzonte qualsisia posizione, siccome è la bilancia ACB. Ma in questo caso, per non essere le direzioni AM, BN dei due pesi perpendicolari sulle braccia della bilancia AC, BC, debbonsi prendere le loro distanze dal centro C, che sono le perpendicolari CD, CE abbassate su di esse da quel centro; e si avrà l' equilibrio, quante volte il peso M sta al peso N, come la distanza CE alla distanza CD. Per dimostrarlo, trasportisi ancora la bilancia dalla sua posizione ACB all'altra infinitamente vicina aCb, e si abbassino sulle stesse direzioni l'altre picciole perpendicolari am, bn. Fig. 56.

402. Gli spazj adunque, che in quel picciolo moto della bilancia percorronsi dai due pesi M, ed N secondo le loro direzioni, sono le due Am, Bn; onde si è, che la velocità del peso M sia alla velocità del peso N, come Am a Bn, o pure in ragion composta di Am ad Aa, di Aa a Bb, e di Bb a Bn. Ma per essere i due piccioli triangoli Ama, Bnb equiangoli coi due CDA, CEB, e per essere ancora simili i due piccioli settori ACa, BCb, le tre riferite ragioni sono eguali all' altre tre di CD ad AC, di AC a BC, e di BC a CE, le quali ragioni compongono insieme la sola ragione di CD a CE. Dunque la velocità del peso M sarà alla velocità del peso N eziandio nella ragione di CD a CE; e perciò gli stessi pesi saranno tra loro in equilibrio, sempre quando il peso M sta al peso N, come la distanza CE alla distanza CD.

403. Niente vieta altresì, di rendere inclinate sull' orizzonte le direzioni dei due pesi così nella bilancia rettilinea, come nell' altra angolare, bastando far passare per le due girelle F, e G le cor- Fig. 57.

 de

de, a cui sono attaccati gli stessi pesi. Ed eziandio in questo caso, se dal centro C della bilancia si abbassino sulle due AF, BG le perpendicolari CD, CE, si avrà l'equilibrio, sempre quando il peso M sta al peso N, come CE a CD. Per dimostrarlo, trasportisi di nuovo la bilancia dalla sua posizione ACB all' altra infinitamente vicina *aCb*; indi coi punti F, e G come centri, e cogl' intervalli delle due F*a*, G*b* descrivansi i due piccioli archi circolari *am*, *bn*, che potranno riguardarsi come due picciole rette abbassate perpendicolarmente sulle stesse due AF, BG.

404. Gli spazj adunque, che in quel picciolo moto della bilancia percorronsi dai due pesi M, ed N secondo le direzioni, con cui tirano verso basso le braccia della stessa bilancia, sono le due A*m*, B*n*; ed in conseguenza la velocità del peso M sarà alla velocità del peso N come A*m* a B*n*, o pure in ragion composta di A*m* ad A*a*, di A*a* a B*b*, e di B*b* a B*n*. Mà per essere i due piccioli triangoli A*ma*, B*bn* equiangoli coi due CDA, CEB, e per essere altresì simili i due piccioli settori AC*a*, BC*b*, le riferite tre ragioni sono eguali all' altre tre di CD ad AC, di AC a BC, e di BC a CE, le quali ragioni compongono insieme la sola ragione di CD a CE. Dunque la velocità del peso M sarà alla velocità del peso N eziandio nella ragione di CD a CE; e pertanto saranno tra loro in equilibrio gli stessi pesi, sempre quando il peso M sta al peso N nella reciproca ragione di CD a CE.

405. Giova intanto di essersi esaminato questo terzo caso, che è il più universale. Imperocchè siccome le due braccia della bilancia possono essere tirate verso basso, non solo da due pesi, ma eziandio da due potenze animate; così non v' ha dubbio, che queste due potenze possano tirarle con direzioni, che talvolta siano perpendicolari, e talvolta inclinate sull' orizzonte. Tenendosi poi attaccata

cata

cata la bilancia col suo centro ad un punto fisso, ed immobile; chiaro si è, che per mezzo di potenze animate potranno tirarsi le sue braccia non solo verso basso, ma altresì verso qualunque lato si voglia. Onde avvalendoci della stessa dimostrazione, tuttavia ritroveremo, che saranno in equilibrio le due potenze, sempre quando sono reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal centro della bilancia (110).

III.

Dell' equilibrio, che osservasi nella leva, nell' asse nella ruota, e nel polispasto.

406. Affine alla bilancia si è la leva, per cui intendesi quel lungo palo, di cui si fa uso per ismuovere un grave di smisurato peso, ed il quale riguardasi come una retta rigida priva di gravità. In fatti per potersi colla leva AB smuovere il grave M, primierameute dee porsi sotto il grave l' estremo di essa A; indi la stessa leva dee sostentarsi con uno de' suoi punti C su di un qualche appoggio, che con voce greca chiamasi ipomoclio; ed in fine l' altro suo estremo B dee premersi verso basso per mezzo di una qualche potenza, come N. Quindi si ridurrà la leva ad una bilancia, che avrà per centro il punto C, e per braccia le due AB, BC. Onde il peso M, e la potenza N saranno in equilibrio, sempre quando sono reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal punto del sostegno C. *Fig.* 58.

407. Qnesta leva, in cui ritrovasi il peso in un estremo, la potenza nell' altro estremo, ed il sostegno in un punto di mezzo, chiamasi leva del primo genere; e ciò per la ragione, che sogliono considerarsene altre due, di cui una dinominata leva del secondo genere tiene il sostegno in un'estremo, la potenza nell' altro estremo, ed il peso in un punto di mezzo; e l' altra chiamata leva di ter- *Fig* 59. 60.

zo genere tiene al contrario il sostegno in un'estremo, il peso nell'altro estremo, e la potenza in un punto di mezzo. Quantunque poi in ciascuna di quest' altre due leve la potenza debba agire con direzione, che porti la leva in alto; pure però il peso, e la potenza saranno tra loro in equilibrio, quante volte ritrovansi essere reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal punto del sostegno.

408. Con ciascuna di queste leve può agire una potenza non solo contro il peso di un grave, ma eziandio contro qualsisia altra resistenza; ed ovunque tendano le loro direzioni, che debbono essere colla leva sempre in un medesimo piano, tuttavia si avrà l'equilibrio, sempre quando la resistenza, e la potenza sono reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni dal punto del sostegno. Ciò che poi dee notarsi intorno alle stesse leve, si è, che la meno efficace sia quella del terzo genere. Di fatti in questa leva la resistenza ritrovasi in uno de' suoi estremi, e la potenza in uno de' punti di mezzo. Onde siccome dall' altro estremo, che è il punto del sostegno, meno dista la direzione della potenza, che l' altra della resistenza; così al contrario la potenza, che equilibrasi colla resistenza, dovrà essere sempre maggiore della resistenza medesima (111).

409. Dopo la leva siegue l' asse nella ruota, che appellasi con questo nome, perchè consiste in una *Fig. 61.* ruota situata intorno ad un' asse, che passa per lo suo centro, e guarnita esteriormente di molti bastoncini ficcati a perpendicolo nella sua convessità, che in greco chiamansi scitale. Si fa uso di questa machina per portare in alto qualsisia peso; e si ottiene ciò, primieramente con porre l' asse talmente in sito orizzontale, che possa aggirarsi intorno ai suoi estremi; indi con avvolgere una fune intorno alla parte inferiore dell' asse, a cui sia attaccato il peso, che dee portarsi in alto; e finalmente con

aggi-

aggirare la ruota insieme coll' asse per mezzo di una potenza animata, che tiri successivamente a se i bastoncini esteriori della ruota. Ed in fatti colla rivoluzione della ruota avvolgesi sempre più la fune intorno all' asse; onde si è, che elevasi il peso attaccato alla stessa fune.

410. In questa machina il peso, e la potenza sono tra loro in equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come il perimetro dell' asse al perimetro dell' orbe, che passa per le estremità dei bastoncini esteriori della ruota. Imperocchè in una rivoluzione intiera della machina, siccome la potenza percorre tanto spazio, quanto è il perimetro del riferito orbe; così il peso sale per un' altezza eguale alla fune, che avvolgesi intorno all'asse, ed in conseguenza eguale al perimetro del medesimo asse. Quindi la velocità della potenza sarà alla velocità del peso, come il perimetro dell' orbe esteriore al perimetro dell'asse. Onde attento il principio generale dell' equilibrio, si equilibreranno tra loro il peso, e la potenza, quante volte la potenza sta al peso, come il perimetro dell'asse al perimetro dell' orbe esteriore (112).

411. La riferita machina riducesi eziandio ad una bilancia. Descrivansi perciò in un piano verticale due cerchi concentrici, di cui il più picciolo sia il perimetro dell' asse, ed il più grande il perimetro dell' orbe esteriore. Se adunque per lo comune centro C tirisi l' orizzontale ACB, che s' incontri *Fig. 62.* col primo cerchio nel punto A, e col secondo nel punto B; chiaro si è, che il peso penderà dall' estremità del raggio CA, e la potenza sarà applicata a perpendicolo sull' estremità dell' altro raggio CB. Ma nella rivoluzione di questi raggi il punto C rimane fisso, ed immobile. Dunque coll'orizzontale ACB avremo una bilancia, in cui saranno in equilibrio il peso, e la potenza, sempre quando la potenza sta al peso, come il raggio AC al raggio BC, o pure come la circonferenza del cerchio picciolo-

ciolo alla circonferenza del cerchio grande.

412. Consimile a questa machina si è l'altra, che chiamasi argano, e di cui si fa uso non già per tirare in alto un grave, ma per condurlo da un luogo in un altro su di un piano orizzontale. Per renderla intanto atta a questo moto, erigesi l' asse a perpendicolo su 'l piano, per cui dee condursi il grave; e senza apporvi ruota alcuna aggirasi egli dalla potenza intorno a se stesso per mezzo di due leve, che si fan passare per due buchi fatti nella parte sua superiore. E poichè nel mentre, che la potenza percorre il perimetro dell' orbe descritto intorno all'estremità delle due leve, tuttavia il grave trasportasi per uno spazio eguale al perimetro dell' asse; perciò eziandio nell' argano la potenza, e la resistenza saranno tra loro in equilibrio, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come il perimetro dell' asse al perimetro dell' orbe esteriore.

Fig. 63. 64. 413. Dall' asse nella ruota passeremo al polispasto, che è una machina composta di una, o più girelle mobili intorno ai loro assi, per cui si fa passare una fune, che tirata da una potenza animata conduce in alto un dato peso. In questa machina dee tenersi conto non tanto delle girelle, che la compongono, quanto delle funi, da cui è sostenuto il peso, che portasi in alto; onde si è, che secondo il numero di esse dividesi in varie specie, chiamandosi monospasto, se il peso sia sostenuto da una sola fune, bispasto, se da due, trispasto, se da tre, quadrispasto, se da quattro, e così all' infinito. Ed in fatti, qualunque siasi il polispasto, sarà la potenza in equilibrio col peso, sempre quando la potenza sta al peso, come l' unità al numero delle funi, che sostengono l' istesso peso (113).

414. Per dimostrarlo, basta riflettere, che per potersi il peso elevare a cagion di esempio per l'altezza di un palmo, conforme deve accortarsi di un palmo ciascuna delle funi, che lo sostentano, così la potenza debba tirarne a se tanti palmi, quante

sono

ſono di numero le ſteſſe funi. Quindi lo ſpazio percorſo dal peſo ſarà allo ſpazio percorſo nel medeſimo tempo della potenza, come l'unità al numero delle funi, che ſoſtentano il peſo; e perciò in queſta ſteſſa ragione ſarà altresì la velocità del peſo alla velocità della potenza. Ma ſecondo il principio generale dell'equilibrio non poſſono la potenza, ed il peſo equilibrarſi tra loro, ſe non ſiano nella reciproca ragione delle velocità, con cui ſi muovono. Dunque in ogni poliſpaſto ſarà la potenza in equilibrio col peſo, quante volte la potenza ſta al peſo, come l'unità al numero delle funi, che ſoſtengono l'iſteſſo peſo.

415. Secondo queſto teorema adunque, per poterſi dar luogo all'equilibrio, la potenza deve eſſere al peſo, come 1 a 2 nel biſpaſto, come 1 a 3 nel tripaſto, come 1 a 4 nel quadriſpaſto, e così all'infinito. Per la ſteſſa ragione poi ſi avrà l'equilibrio nel monoſpaſto, ſempre quando la potenza, ed il peſo ſono tra loro in ragion di uguaglianza. Nè a ciò ſi oppone queltanto ſperimentaſi alla giornata, cioè che ſi duri maggior fatica in tirare a mano l'acqua dai pozzi, che in tirarla per mezzo del monoſpaſto, o ſia della girella. Imperocchè il divario deriva da ciò, che avvalendoci della girella, la tiriamo all'ingiù; onde il proprio peſo delle braccia, che ſi portano verſo baſſo, conferiſce non poco a tirarla. All'incontro tirandola a mano, la tiriamo all'insu; e pertanto oltre al peſo dell'acqua dee ſollevarſi altresì quello delle braccia, da cui dipende la fatica maggiore (114).

416. Con queſta occaſione notiſi in queſto luogo, che intanto il numero delle girelle, di cui ſi compone il poliſpaſto, non ſempre corriſponde al numero delle funi, che ſoſtentano il peſo, in quanto che il poliſpaſto non ſempre formaſi in modo, che la direzione della potenza tenda verſo baſſo, ma talvolta la ſua ſtruttura è tale, che la potenza deve agire con direzione tendente verſo ſopra.

In

In fatti nel primo caso il peso non sostentasi da quella fune, a cui applicasi la potenza; e perciò il numero delle girelle si fa eguale al numero delle funi, che sostentano il peso. All' incontro nel secondo caso il peso è sostenuto eziandio da quella fune, a cui deve applicarsi la potenza; ed in conseguenza il numero delle funi, da cui pende il peso, supera di uno l'altro delle girelle. Intanto attenta la maggior facilità, con cui la potenza agisce verso basso, giova formare il polispasto in modo, che il numero delle girelle sia eguale al numero delle funi, da cui è sostenuto il peso.

417. Un altro avvertimento dee farsi in questo luogo, e si è, che la girella attaccata ad un punto fisso riducesi ad una leva del primo genere; quella poi, che scorre per la fune, dee riguardarsi come leva del secondo genere. Considerisi perciò il solo diametro orizzontale della girella. Ed essendo questa fissa, il peso penderà da uno ai suoi estremi, la potenza agirà nell' altro estremo, ed il punto del sostegno sarà quello, che divide il diametro per metà. Onde non solo la girella sarà leva del primo genere, ma saranno in equilibrio la potenza, ed il peso, sempre quando sono tra loro in ragion di uguaglianza. Essendo poi la girella mobile, il peso penderà dal punto, che divide il diametro egualmente, la potenza agirà in uno de' suoi estremi, ed il punto del sostegno sarà nell'altro estremo. Onde si ridurrà la girella ad una leva del secondo genere, in cui si avrà l'equilibrio, quante volte la potenza sta al peso, come 1 a 2.

IV.

IV.

Dell' equilibrio, che osservasi nel piano inclinato nel cuneo, e nella vite.

418. OLtre alle riferite machine semplici ne abbiamo tre altre, cioè il piano inclinato, il cuneo, e la vite. Ed in primo luogo, per quanto al piano inclinato, sia AB questo piano, *Fig. 65.* il quale per rapporto all'altro orizzontale BC abbia per sua altezza la verticale AC; e debbasi per questo piano tirare un peso da una potenza, che agisce con direzione parallela alla AN. Si abbassi sulla AN la perpendicolare BN; ed io dico, che la potenza, ed il peso saranno in equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come AC ad AN. Per dimostrarlo, fingiamo, che il peso siasi tirato dalla potenza da B fino ad A; e se vogliasi attentamente riflettere, si vedrà, che gli sparzj percorsi dal peso, e dalla potenza secondo le loro direzioni siano eguali alle due AC, AN. Quindi le loro velocità saranno nella ragione di AC, AN; e pertanto si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come AC ad AN.

419. Da ciò intanto, che è stato dimostrato di sopra (252), eziandio con altri principj, possono dedursi due conseguenze. La prima si è, che se la potenza agisca con direzione parallela alla stessa lunghezza del piano inclinato AB, si avrà l'equilibrio, quante volte la potenza sta al peso, come AC ad AB. L'altra si è, che essendo la direzione della potenza parallela alla BC, che è la base del piano inclinato, si equilibreranno tra loro il peso, e la potenza, qualora la potenza sia al peso, come AC a BC. Ed in fatti, conforme nel primo caso combaciansi tra di esse le due AN, AB, ed in conseguenza diventano eguali; così nel secondo caso si fanno parallele le due AN, BC, le quali dovendo formare un parallelogrammo coll'altre due AC, BN, saranno eziandio eguali tra loro (115).

420.

420. Per quanto poi al cuneo, s'intende per esso quell' istrumento, di cui si fa uso per spezzare i corpi, e che comunemente chiamasi zeppa. Egli formasi di ferro, o pure di legno durissimo a guisa di un prisma triangolare. E conforme sono regolarmente isosceli i due triangoli opposti, così chiamasi taglio ovvero punta del cuneo la retta, che unisce insieme i vertici dei due triangoli; base del cuneo il parallelogrammo opposto alla punta; altezza del cuneo la perpendicolare, che dalla punta si abbassa sulla base; ed in fine crassezza del cuneo la base di ciascuno dei due triangoli, i quali hanno col cuneo la stessa altezza. Si spezza poi il corpo per mezzo del cuneo, primieramente con adattarlo a perpendicolo in una fessura fatta nel corpo, ed indi con spingerlo più in dentro per mezzo di reiterate percosse; onde si è, che la potenza sia la percossa da farsi a perpendicolo sulla base del cuneo, e la resistenza sia la coesione tra le parti del corpo.

421. Equilibrasi nel cuneo la potenza colla resistenza, quante volte la potenza sta alla resistenza, come la metà della crassezza del cuneo alla

Fig. 66. sua altezza. Per dimostrarlo, fingiamo, che ABC sia uno dei triangoli isosceli del cuneo; e se dal suo vertice A si abbassi sulla base BC la perpendicolare AD, sarà BC la crassezza del cuneo, ed AD la sua altezza. Fingiamo ancora, che il cuneo per mezzo della potenza siasi a tal segno intromesso dentro del corpo, che sia AG la profondità, in cui giace immerso, ed EF la distanza, per cui ritrovansi disgiunte, e separate le parti superiori del corpo. Or sebbene la stessa AG sia lo spazio percorso così dal cuneo, come dalla potenza; nientedimeno, per avere l'altro spazio percorso nel medesimo tempo dalla resistenza, dee tenersi conto altresì delle distanze tra le parti inferiori del corpo, che similmente restano separate, e prendersi la distanza mezza.

422. Perciò intendansi nel triangolo AEF tirate rette parallele alla EF infinitamente vicine tra loro, ed egualmente distanti l'una dall'altra. Queste parallele adunque saranno le distanze, per cui le parti del lato AE ritrovansi disgiunte, e separate dall'altre corrispondenti del lato AF. Ma per la natura del triangolo le stesse parallele dalla massima, che è la EF, sino alla minima, che è l' aggiacente al punto A, minoransi in progressione arimmetica. Dunque si avrà la distanza mezza, con prendere la metà della loro somma. Quindi essendo la distanza minima di una picciolezza infinita, sarà la distanza mezza eguale alla metà della sola massima EF; e pertanto nel mentre, che dalla potenza si percorre la AG, si percorrerà dalla resistenza uno spazio eguale alla metà della EF.

423. Essendo così, la velocità della potenza sarà alla velocità della resistenza, come la AG alla metà della EF. Ma per essere i due triangoli AEF, ABC tra loro equiangoli, le due AG, EF sono nella stessa ragione coll'altre due AD, BC. Dunque la velocità della potenza alla velocità della resistenza sarà ancora, come l'altezza del cuneo AD alla metà della sua crassezza BC; ed in conseguenza, attento il principio generale dell'equilibrio, si equilibreranno tra loro nel cuneo la potenza, e la resistenza, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come la metà della crassezza del cuneo alla sua altezza. Con che si vede ingannarsi coloro, che prendendo tutta la EF per lo spazio percorso dalla resistenza, credono aversi l'equilibrio, quantevolte la potenza sta alla resistenza, come la crassezza intiera del cuneo alla sua altezza.

424. Nè vale il dire, che conforme il cuneo per mezzo di replicate percosse entra a poco a poco dentro del corpo; così le fibre, che compongono lo stesso corpo, non si spezzano tutte insieme, ma bensì ad una ad una. Imperciocchè sebbene ciò sia

più

più che vero, pure però la velocità della potenza deve essere alla velocità della resistenza, come l'altezza del cuneo alla sua crassezza dimezzata. Perciò si vuol riflettere, che le fibre del corpo, tuttocchè sottilissime, non sono già linee geometriche, ma filamenti dotati di qualche profondità. Quindi siccome in questa profondità deve immergersi il cuneo, affinchè si spezzi la fibra, così la separazione fatta coll'immersione del cuneo ci darà un vuoto, che sarà sempre un picciolo triangolo simile all' altro ABC. Onde sempre l' altezza di questo picciolo triangolo sarà lo spazio percorso così dal cuneo, come dalla potenza, e la metà della sua base sarà lo spazio percorso dalla resistenza (116).

425. Si studiano taluni di ridurre il cuneo a due leve, che sono in contrasto l' una coll' altra; ma egli è più naturale di ridurlo a due piani inclinati; siccome in effetto uno di essi è la AB, e l' altro la AC, che sono le due credute leve. Questi due piani poi, conforme hanno per comune loro base la AD; così per essere isoscele il triangolo ABC, avranno altresì eguali altezze, che sono le due BD, CD. E poichè la potenza spinge il cuneo colla direzione della DA, chiaro si è, che in ambidue i piani agisce la potenza con direzione parallela alla comune loro base. Quindi si avrà in essi l'equilibrio, quante volte la potenza sta alla resistenza, come l'altezza del piano alla sua base (419). Ma la potenza, e la resistenza da considerarsi in ciascuno dei due piani sono le metà di quelle, che agiscono tra loro nel cuneo. Dunque ancora nel cuneo si avrà l' equilibrio, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come la metà della crassezza del cuneo alla sua altezza.

426. Finalmente per quanto alla vite, ella consiste in un lungo cilindro verticale, che colle spire incise nella sua convessità conducesi per le spire insculpite nella concavità di due altri cilindri più corti. Questi cilindri incisi colle spire generalmen-

mente chiamansi coclee. Ma siccome si appellano coclee interne, ovvero masculee quelle, in cui le spire sporgono in fuori nella loro convessità; così al contrario diconsi coclee esterne, ovvero feminee l'altre, in cui le spire rientrano in dentro nella loro concavità. Quindi la vite si compone di tre coclee, cioè di una masculea, e di due altre feminee. E poichè la coclea masculea colle sue spire cacciate in fuori dee condursi per le spire incavate nell' altre due feminee; perciò non solo le tre coclee debbono essere di egual diametro, ma bisogna altresì, che in esse siano eguali gl' intervalli delle loro spire.

427. Le spire poi della coclea masculea conduconsi per le spire dell' altre due coclee feminee, per mezzo di una leva, che spinta lateralmente dalla potenza, applicata alla sua estremità con direzione perpendicolare alla sua lunghezza, fa girare la coclea intorno al suo asse. E poichè può farsi questa rivoluzione ora in modo, che la coclea si elevi, ed ora in maniera, che la coclea si abbassi; perciò potrà farsi uso delle vite, così per condurre in alto un dato peso, che dee collocarsi al di sopra della coclea masculea, come per comprimere un dato corpo, che al contrario dee situarsi al di sotto della stessa coclea. Intanto sia, che con essa debba elevarsi un dato peso, sia che debba comprimersi un dato corpo, si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sta alla resistenza, come l'intervallo di due spire vicine al perimetro dell' orbe, per cui portasi la potenza applicata alla leva.

428. In fatti in una rivoluzione intiera della coclea masculea, siccome la potenza percorre l'intiero perimetro del suo orbe; così l'altezza, per cui si eleva, o si abbassa la stessa coclea, sarà eguale all' intervallo di due spire vicine. Quindi per farsi eguale allo stesso intervallo eziandio lo spazio, che nel medesimo tempo si percorre dalla resistenza, sarà la velocità della potenza alla velocità della re-

ſiſtenza, come il perimetro dell'orbe, per cui portaſi la potenza, all'intervallo di due ſpire vicine. Onde attento il principio generale dell' equilibrio, ſi equilibreranno tra loro nella vite la potenza, e la reſiſtenza, quante volte la potenza ſta alla reſiſtenza, come l'intervallo di due ſpire vicine al perimetro dell'orbe, che ſi deſcrive dalla potenza.

429. Del rimanente ancora queſta machina riduceſi ad un piano inclinato, che ſi avrà con iſpiegare una delle ſpire incise intorno alla coclea maſcu-lea. In fatti ſiccome la ſpira diſteſa a dirittura ci dà la lunghezza del piano inclinato; così la ſua baſe ſi farà eguale al perimetro della coclea, e la ſua altezza all'intervallo di due ſpire vicine. Quindi ſe la potenza, che agiſce con direzione parallela alla baſe, ſia applicata al perimetro ſteſſo della coclea, ſi avrà l' equilibrio, quantevolte la potenza ſta alla reſiſtenza, come l'intevallo di due ſpire vicine al riferito perimetro. Onde tenendo conto dell' aumento, che riceve la velocità della potenza, con applicarſi all' eſtremità della leva; chiaro ſi è, che in queſt' altro caſo l' equilibrio ſi avrà, ſempre quando la potenza ſta alla reſiſtenza, come l'intervallo di due ſpire vicine al perimetro dell' orbe, per cui la potenza ſi conduce (117).

V.

Dell' equilibrio, che oſſervaſi nelle machine fatte con ruote dentate.

430. Con far uſo del principio generale ſtabilito di ſopra, può definirſi il caſo dell'equilibrio tra la potenza, e la reſiſtenza eziandio nelle machine compoſte, le quali poſſono variare all'infinito. Diaſi perciò moto alla machina, qualunque ella ſia; e notinſi gli ſpazj, che la potenza, e la reſiſtenza percorrono nel medeſimo tempo. Nella ragione adunque, in cui ſono queſti ſpazj, ſaranno altresì le velocità, con cui la potenza, e la

e la resistenza agiscono tra esso loro. Onde si avrà l'equilibrio, se facciasi, che la ragione della potenza alla resistenza sia reciproca di quella, in cui sono tra loro i riferiti spazj. Per darne qualche essempio, imprenderemo quì a considerare alcune di quelle machine, che formansi con ruote dentate, tanto maggiormente, che con queste ruote aumentasi mirabilmente il momento della potenza.

431. Ed in primo luogo si fa uso delle ruote dentate in quella stessa machina, che chiamasi asse nella ruota. Sia perciò AB la ruota situata intorno all'asse CD, e fingiamo, che nel suo perimetro si ritrovino 30 denti egualmente distanti l'uno dall'altro. Sia di poi EF un'altra ruota volubile intorno ad un'altro asse GH; e suppongasi, che la sua struttura sia tale, che incontrandosi colla prima AB trasporti seco in ogni sua rivoluzione 10 denti di essa. Adunque quest'altra ruota EF dovrà aggirarsi tre volte intorno al suo asse GH, affinchè possa seco condurre tutti i 30 denti della prima ruota AB, e permettere che questa stessa prima ruota faccia l'intiero suo giro. Onde la potenza, che per mezzo della leva IL fa girare la ruota EF, percorrerà il perimetro del suo orbe ancora tre volte in una sola rivoluzione della ruota AB. *Fig. 68.*

432. Con aggirarsi intanto la ruota AB una sola volta intorno al suo asse CD, chiaro si è, che elevasi il peso per un'altezza eguale al perimetro del medesimo asse. Quindi la velocità del peso sarà alla velocità della potenza, come il perimetro dell'asse CD al triplo del perimetro dell'orbe, per cui portasi la potenza; e pertanto si avrà l'equilibrio, se la potenza sia al peso in questa stessa ragione. Si vede adunque, che con porre 30 denti nella ruota AB, e con fare, che l'altra EF in ogni sua rivoluzione ne trasporti seco 10, aumentasi il momento della potenza nella ragione di 1 a 3, o pure di 10 a 30. Onde generalmente, se m sia il numero de' denti, che ritrovansi nella ruo-

ta AB, ed n il numero di quei, che trasportansi dall' altra ruota EF in ciascuna sua rivoluzione, si aumenterà il momento della potenza nella ragione di n ad m.

433. Essendo poi m il numero de' denti, che ritrovansi nella prima ruota AB, si avrà l' altra ruota EF, che in ogni sua rivoluzione ne trasporti seco il numero n; primieramente con farla di ampiezza tale, che i raggi delle due ruote siano tra loro, come m ad n; ed indi con apporre nel suo perimetro tanti denti, e non più, quanti ne disegna il numero n. In fatti essendo i raggi delle due ruote nella ragione di m ad n, saranno in questa stessa ragione così i loro perimetri, come le distanze dei loro denti. Quindi ogni dente della seconda ruota ne condurrà seco un' altro della prima; e pertanto, siccome n è il numero de' denti posti nella seconda ruota, così in ogni sua rivoluzione se ne trasporteranno tanti della prima, quanti ne addita lo stesso numero n.

434. Or dovendosi costruire le due ruote colle riferite leggi, non possiamo a nostro piacere aumentare il numero dei denti nella prima ruota, e diminuire il numero di coloro, che dee condurre seco la seconda in ogni sua rivoluzione; sì perchè il raggio della seconda ruota si dovrebbe minorare di molto per rapporto a quello della prima; come ancora perchè i loro denti dovrebbero assottigliarsi non poco, e farsi in conseguenza più deboli. Quindi per aumentare maggiormente il momento della potenza, piuttosto deve aggiungersi alla machina una terza ruota dentata, che porti seco in ogni sua rivoluzione un dato numero dei denti della seconda; poichè in questa maniera tuttavia la potenza dovrà percorrere maggior numero di volte il perimetro del suo orbe nel mentre, che il peso sale per un' altezza eguale al perimetro dell' asse della prima ruota.

435. Ed in vero, se la machina sia fatta con due

due ſole ruote dentate, e dei 30 denti poſti nella prima ne traſporti ſeco la ſeconda in ogni ſua rivoluzione non più, che 10; di già ſi è veduto, che ſi avrà l'equilibrio, ſempre quando la potenza ſta al peſo, come il perimetro dell'aſſe della prima ruota al triplo dell'orbe, per cui dee condurſi la potenza. Aggiungaſi ora alla machina una terza ruota, che dei 10 denti poſti nella ſeconda ne porti ſeco cinque in ciaſcuna ſua rivoluzione. Ed in queſto caſo, ſiccome la ſeconda ruota farà l'intiero ſuo giro dopo due rivoluzioni della terza, così per l'intiero giro della prima dovranno farſi dalla terza ſei rivoluzioni. Onde ſi avrà l'equilibrio, quante volte la potenza ſta al peſo, come il perimetro dell'aſſe della prima ruota al ſeſtuplo del perimetro dell'orbe, che dee deſcrivere la potenza.

436. Coll'aggiunta adunque della terza ruota aumentaſi il momemento della potenza nella ragione di 1 a 6, o pure di 5 a 30. Onde ſi vede, che ſiccome eſſendo due le ruote dentate, l'aumento ſi fa nella ragione dei denti della ſeconda ai denti della prima; così, ſe le ruote dentate ſiano tre, l'aumento dovrà farſi nella ragione dei denti della terza ai denti della prima. Qualunque poi ſiaſi il numero delle ruote dentate, con cui formaſi la machina, ſi dimoſtrerà in una maniera conſimile, che ſi aumenterà il momento della potenza nella ragione dei denti dell' ultima ruota ai denti della prima. E perciò nella ſtima della machina non occorre darſi pena dei denti delle ruote intermedie, ma baſta tener conto dei ſoli denti della prima, e dell'ultima ruota.

437. In fatti la leva, a cui applicaſi la potenza, aggira ſempre l'ultima ruota. Onde ſe dividaſi il numero dei denti della prima per lo numero dei denti dell'ultima, il quoziente di queſta diviſione ci dà a divedere le rivoluzioni, che debbono farſi dall'ultima ruota, affinchè la prima faccia l'intiero ſuo giro; e perciò ſi avrà l'equilibrio, ſempre quan-

do la potenza sta al peso, come il perimetro dell' asse della prima ruota al perimetro dell' orbe, per cui dee condursi la potenza, moltiplicato per lo stesso quoziente. Questo quoziente intanto potrebbe talvolta racchiudere qualche rotto; e quindi si è, che tornerà più conto di dire, che l' equilibrio si abbia, quante volte la potenza sta al peso in ragion composta del perimetro dell' asse della prima ruota al perimetro dell' orbe, che dee descrivere la potenza, e del numero dei denti dell' ultima ruota al numero dei denti della prima.

438. Le ruote dentate applicansi ancora alla coclea, ed ecco come. Sia AB una ruota dentata posta intorno al suo asse CD; e sia ancora EF una coclea masculea incisa non già con una, ma con varie spire egualmente distanti tra loro. Situisi questa coclea talmente sulla ruota, che aggirandosi intorno ai suoi estremi, trasporti seco colle sue spire in ogni rivoluzione un' egual numero dei denti della ruota. Colla rivoluzione adunque della coclea EF deve aggirarsi parimente così la ruota dentata AB, come il suo asse CD. Onde potrà farsi uso di questa machina nell' elevazione de' pesi, bastando attaccargli ad una fune, che vadasi complicando intorno all' asse CD. Comunemente ella chiamasi coclea infinita, per la ragione, che non dovendo portarsi per dentro di altre coclee feminee, può continuarsi il suo moto all' infinito. Ma il vero si è, che la riferita machina riducesi alla precedente, col solo divario, che in essa la coclea stessa fa le veci di un' altra ruota dentata.

Fig. 89.

439. Ed in fatti, con aggirarsi la coclea EF intorno al suo asse, ciascuna delle sue spire porta seco un dente della ruota AB. Onde se i denti di questa siano 30, e le spire di quella 5; condurrà seco la coclea in ogni sua rivoluzione cinque soli denti della ruota; e pertanto dopo sei rivoluzioni della coclea farà la ruota l' intiero suo giro. Ma aggirasi la coclea intorno al suo asse per mezzo della

la potenza applicata all' estremità della leva GH. Dunque per farsi l'intiero giro della ruota, ancora la potenza dovrà percorrere sei volte il perimetro del suo orbe; ed in conseguenza si avrà l'equilibrio, sempre quando la potenza sta al peso, come il perimetro dell' asse della ruota al sestuplo del perimetro dell' orbe, per cui dee condursi la potenza: dimodoche aumentasi il momento della potenza nella ragione di 1 a 6, o pure di 5 a 30, che vale a dire nella ragione del numero delle spire della coclea al numero dei denti della ruota (118).

VI.

Soluzione di una difficoltà intorno al principio generale dell' equilibrio.

440. QUantunque due corpi, che agiscono tra esso loro con velocità reciprocamente proporzionali alle loro masse, o siano pesi, debbano rimanere in equilibrio nel conflitto loro scambievole; nientedimeno credono alcuni, che non possa farsi uso di un tal principio, quante volte trattasi di definire la legge dell' equilibrio tra la potenza, e la resistenza in qualsisia machina, per la ragione, che non risiede in esse velocità alcuna nello stato, in cui ritrovansi. E tanto maggiormente confermansi in questo loro sentimento dal vedere, che il celebre Archimede per dimostrare, che nella bilancia non possono equilibrarsi due pesi tra loro, se non siano nella reciproca ragione delle braccia, da cui pendono, abbia ricorso piuttosto al principio del centro di gravità, il quale si è, che tenendosi un grave sospeso per un filo, che passa per quel centro, le di lui parti debbano rimanere in equilibrio.

441. Per convincergli intanto del contrario, potrebbe essere bastante argomento il fargli riflettere, che la stima delle machine fatta col divisato principio accordasi perfettamente con queltanto intorno

ad esse l'esperienza stessa ci apprende. Ma giova di rispondere direttamente alla difficoltà proposta, perchè in questa maniera avremo luogo d'investigare ciò, che avviene alla potenza, ed alla resistenza, che equilibransi tra loro in una qualche machina. Ed in primo luogo diasi per vero, che equilibrandosi queste tra loro, non risieda in esse velocità al-
Fig. 70. cuna. Non potrà però negarsi, che ciascuna delle due faccia almeno un sforzo continuo per imprimere moto, ed in conseguenza velocità alla sua contraria. Onde questi continui sforzi, che fanno, dovranno riguardarsi come due forze motrici, con cui cercano scambievolmente di porsi in moto, e di preponderare l'una sull'altra.

442. Or nel caso dell' equilibrio non è egli da porsi in dubbio, che le riferite forze motrici debbano essere tra loro eguali. Quindi saranno eguali altresì i moti, che la potenza, e la resistenza colle riferite forze cercano d' imprimersi scambievolmente. Onde si avrà il loro equilibrio almeno quando sono nella reciproca ragione delle velocità, che che ciascuna delle due studiasi d' imprimere alla sua contraria. Ma io dico di più, che queste velocità colle divisate forze effettivamente si generano, e che intanto la potenza, e la resistenza non muovonsi per mezzo di esse con moto sensibile, perchè appena nate immediatamente tra esso loro si distruggono. Per intenderne la ragione, siaci di esempio
Fig. 55. la bilancia ACB, che abbia per suo centro il punto C, e dai di cui estremi pendano liberamente i due pesi M, ed N.

443. Fingiamo adunque, che cogli sforzi continui di questi pesi il primo M elevi l' estremo B per l' archetto *Bb*, ed il secondo N elevi l'estremo A per l'archetto *Ac*. E poichè con elevarsi ciascuno de' due estremi, deve abbassarsi nel medesimo tempo il suo contrario; perciò trovandosi l'estremo B per l'archetto *Bb*, si abbasserà il contrario A per l'archetto *Aa*; ed in una maniera consimi-

ſimile, elevandoſi l'eſtremo A per l'archetto Ac, ſi abbaſſerà il contrario B per l'archetto Bd. Quindi ciaſcuno dei due peſi, che pendono da queſti eſtremi, ſarà agitato nel medeſimo tempo da due velocità contrarie: cioè il peſo M dalle due Ac, Aa, ed il peſo N dalle due Bb, Bd. Onde ſe mai poteſſe dimoſtrarſi, che le altre due velocità Aa, Bd ſiano eguali alle loro contrarie Ac, Bb; non v'ha dubbio, che per la loro contrarietà, ed uguaglianza ſi dovrebbero tra eſſo loro diſtruggere.

444. Perciò giova il riflettere, che così l'elevazione dei due eſtremi A, e B, come il loro abbaſſamento dee ripeterſi da un medeſimo principio, cioè dagli sforzi eguali dei due peſi M, ed N, che pendono da detti eſtremi; poichè così ſi faranno a noi note due verità; di cui una ſi è, che la ſomma delle due velocità Aa, Bd ſia eguale alla ſomma dell'altre due Ac, Bb; e l'altra, che tanto le due Aa, Bd, quanto le due Ac, Bd ſiano nella reciproca ragione dei due peſi M, ed N. Quindi facendoſi proporzionali tra loro le quattro velocità Aa, Bd, Ac, Bb; ſarà la ſomma delle due Aa, Bd, alla ſomma dell'altre due Ac, Bb nella ſteſſa ragione, così delle due Aa, Ac, come delle due Bd, Bb. Onde conforme ſono eguali tra loro quelle due ſomme, così ſaranno eguali altresì, tanto le due Aa, Ac, quanto le due Bd, Bb.

445. Con iſpiegarſi l'equilibrio dei due peſi M, ed N in queſta guiſa, vedeſi chiaramente, che i medeſimi tuttocchè quieſcenti, ed immobili ſiano tra loro in un conflitto continuo, per derivare la loro quiete da moti eguali, e contrarj. Conforme poi per definire la legge del loro equilibrio, dee determinarſi la ragione della velocità, che imprimonſi ſcambievolmente gli ſteſſi peſi cogli sforzi loro continui; così vedeſi ancora, che queſta ragione reſti determinata per mezzo dell'altra degli ſpazj, che percorronſi dai due peſi ſecondo le loro direzioni, comunque muovaſi la bilancia. Imperocchè

chè sebbene le velocità siano, o le due *Ac*, B*b*, o le due A*a*, B*d*; nientedimeno per essere eguali tra loro così le due *Ac*, A*a*, come le due B*b*, B*d*, possiamo dire, che le stesse velocità siano, o le due A*a*, B*b*, che generansi con trasportarsi la bilancia nel sito *a*C*b*, o pure le due A*c*, B*d*, che producònsi col suo trasporto nel sito contrario *c*C*d*.

446. Per quanto alla dimostrazione di Archimede intorno all' equilibrio della bilancia, egli è vero, che in essa si fa uso del principio del centro di gravità; ma questo principio riducesi al nostro, giacchè non per altra ragione equilibransi le parti di un grave intorno al suo centro di gravità, se non perchè sono costrette a muoversi nel medesimo tempo con moti eguali, e contrarj. Per essere poi molto ingegnosa, ed elegante la suddetta dimostrazione, stimiamo ben fatto di soggiungerla in questo luogo con tutta la brevità, e chiarezza pos-
Fig. 70. sibile. Sia perciò DM un prisma formato con materia egualmente densa da per tutto. E siccome il suo centro di gravità dee ritrovarsi nel piano, che divide la sua lunghezza DE per metà in F; così se lo intendiamo diviso in due altri prismi disuguali DN, EN, i centri di gravità di quest' altri due prismi similmente si ritroveranno ne' piani, che dividono le loro lunghezze DG, EG per metà in H, ed I.

447. Prendasi di poi una bilancia, che uguagli la HI colla sua lunghezza AB, la FH col suo braccio AC, e la FI coll' altro suo braccio BC; ed attacchisi il prisma DM agli estremi A, e B di questa bilancia colle due corde eguali AH, BI, che passino prolungate per gli centri di gravità degli altri due DN, EN. Se adunque sospendiamo la bilancia dal suo centro, resterà sospeso il prisma DM con corda, che passerà prolungata per lo suo centro di gravità; onde in questa posizione dovrà egli conservarsi immobile, ovvero in equilibrio.

Ma

Ma se separiamo i due prismi DN, EN, eziandio ciascuno di essi rimane sospeso con corda, che passa prolungata per lo centro della sua propria gravità. Dunque colla loro separazione tuttavia sussisterà l'equilibrio; e perciò rimane soltanto a dimostrarsi, che i pesi dei due prismi DN, EN siano tra loro nella reciproca ragione delle braccia AC, BC, da cui pendono.

448. Ed in vero, essendo i due prismi DN, EN della stessa densità, i pesi di essi saranno come le loro moli, o pure come le loro lunghezze DG, EG. Ma queste lunghezze sono nella stessa ragione colle loro metà GH, GI. Dunque ancora il peso del prisma DN sarà al peso del prisma EN, come GH a GI. Essendo poi eguale alla metà della DE, così la HI, come la DF; saranno eguali le due HI, DF. Onde toltane la comune FH, sarà la FI eguale alla DH ovvero GH; e pertanto ancora l'altre due FH, GI saranno tra loro eguali. Quindi i pesi dei due prismi DN, EN saranno altresì nella ragione di FI ad FH; ed in conseguenza, per essere alle due braccia BC, AC della bilancia eguali alle due FI, FH, sarà il peso del prisma DN al peso del prisma EN, come il braccio BC al braccio AC.

449. Del rimanente sebbene nella riferita dimostrazione i gravi, che pendono dalle due estremità della bilancia, siano due prismi non solo di eguali densità, ma eziandio di forma tale, che situati secondo le loro lunghezze ritrovansi essere porzioni di un medesimo prisma; nientedimeno egli è facile di estenderla a gravi, che siano differenti tra loro, così per la densità, come per la figura. In fatti il peso di qualsisia grave, come proporzionale alla quantità della sua materia, non riceve cambiamento alcuno con cambiarsi la densità, e la figura dello stesso grave. Onde se ai due prismi diasi altra figura, e mutisi altresì la densità di uno di essi, i loro pesi tuttavia saranno gli stessi; e perciò i pesi dei

dei nuovi gravi, che seguitano ad essere tra loro in equilibrio, pure saranno nella reciproca ragione delle braccia, da cui pendono (119).

VII.

Della resistenza, che deriva dallo stropicciamento delle parti di una macchina.

450. AVvertimmo di sopra, che in qualsisia machina oltre alla resistenza principale, dee vincersi, e superarsi dalla potenza, debba tenersi conto altresì così della resistenza, che deriva dal peso delle parti della machina, come dell' altra, che nasce dallo scambievole loro stropicciamento. Or sebbene la prima di queste due resistenze sia facile a definirsi, per essere noto a noi il peso delle parti dalla machina, che debbonsi muovere dalla potenza; nientedimeno la seconda non potrà determinarsi, se prima non si esamini donde avvenga, che stropicciansi tra esso loro due corpi, quante volte uno di essi si muove sull' altro. Onde per non tralasciare cosa alcuna intorno alle machine, primieramente ricercheremo la causa dello stropicciamento scambievole di due corpi, ed indi faremo vedere, come egli debba definirsi, e porsi a calcolo.

451. Ed in vero stropicciansi tra esso loro due corpi, di cui uno si muove sull' altro, in quanto che sono ruvide, e scabre le superficie, in cui si toccano. In fatti deriva questa loro scabrezza dall' essere le parti di essa, dove più sollevate, e dove più depresse. Quindi toccandosi i due corpi tra loro colle riferite superficie, immergonsi le parti più sollevate dell' una nelle cavità delle parti più depresse dell' altra. Onde intralciansi le stesse parti in modo, che non può muoversi uno dei due corpi sull' altro, senza stropicciarsi scambievolmente tra esso loro. Conforme poi dee ripetersi lo stropicciamento loro scambievole dalla scabrezza delle superficie,

ficie, in cui si toccano; così, non v' ha dubbio, che debba egli stimarsi maggiore, o minore a misura della maggiore, o minore scabrezza, che ritrovasi in dette superficie; e perciò, se potesse farsi in modo, che le divisate superficie fossero pulite, e levigate; non vi sarebbe stropicciamento alcuno, ed in conseguenza neppure resistenza.

452. Quì però si vogliono notare due cose. La prima si è, che una superficie può essere pulita, e levigata, eziandio se sia curva di sua natura. Imperocchè sebbene la curvità della superficie non permetta, che i minimi suoi elementi siano tra loro a dirittura; nientedimeno non osta, che gli angoli, per cui traviano l' uno dall' altro, siano di una picciolezza infinita. Onde in questa supposizione gli elementi della superficie saranno situati in modo, che non si troverà tra di essi cavità alcuna; e perciò la superficie medesima, tuttocchè curva, dovrà aversi come priva di ogni scabrezza, ed in conseguenza come pulita, e levigata. Ed in fatti gli specchi, di cui facciamo uso per riflettere i raggi della luce, debbono essere immuni da qualsisia scabrezza; ma ciò non ostante distinguonsi di essi tre specie, dei quali alcuni sono piani, altri convessi, ed altri finalmente concavi.

453. L'altra cosa da notarsi si è, che siccome i corpi tutti sono porosi di lor natura, e composti altresì di parti eterogenee; così le loro superficie non mai potranno pulirsi in modo, che rendansi prive di ogni scabrezza. Per convincerci di ciò, basta riguardare con un microscopio quelle stesse superficie, che all' occhio nudo sembrano pulite, e levigate; poichè ravviseremo in esse a vicenda tante alture, e tante cavità, che ci recherà maraviglia, come quelle non siano a noi sensibili. Ed affinchè non credasi, che le disuguaglianze di questa indole niente pregiudichino al moto de' corpi, basta far muovere sulle stesse superficie una formica, o altro picciolo animaletto, che sia; poichè siccome

sensifensibilmente vedraſſi, che egli ora ſi eleva, ed ora ſi abbaſſa; così queſto ſteſſo dovrà eſſerci di argomento, che le parti più ſollevate, e le altre più depreſſe delle riferite ſuperficie, tuttocchè inſenſibili, ſiano di oſtacolo al moto de' corpi.

454. Sempre però ſarà vero, che quanto più ſi minora la ſcabrezza delle ſuperficie, in cui i due corpi ſi toccano, tanto più ſpeditamente poſſa muoverſi uno di eſſi ſull' altro. Vedeſi ciò nelle machine, che ſcorgonſi più pronte, e ſpedite al moto, dopo eſſerſi uſate qualche tempo, che quando partono dalle mani dell' Arteſice, ed incominciano a travagliare. E la ragione ſi è, che ſiccome l' Arteſice, per quanto ſtudio ponga nella ſtruttura di eſſe, non mai può renderle immuni da ogni ſcabrezza; così con farſi uſo delle medeſime, abbattonſi ſempre più le parti più ſollevate, ed in conſeguenza quella ſcabrezza diventa minore. E da ciò ancora dipende, che ungendoſi le ſteſſe machine con una qualche materia oleaginoſa, rendonſi più atte, e ſpedite al moto; poichè inſinuandoſi quella tal materia nelle cavità delle parti più depreſſe, le pone per dir così nello ſteſſo livello coll' altre più elevate; onde minoraſi la ſcabrezza, che nelle machine ſi ritrova.

455. Or la prima coſa, di cui dee tenerſi conto per definire lo ſtropicciamento di due corpi, ſi è la denſità della materia, di cui eſſi ſi compongono. In fatti di già ſi è veduto, che ſtropiccianſi i due corpi tra eſſo loro per la ragione, che eſſendo ſcabre le ſuperficie, in cui ſi toccano, le parti più ſollevate dell' una immergonſi nella cavità delle parti più depreſſe dell' altra; ed in conſeguenza ſono come tanti uncini, che ligano inſieme i due corpi, ed impediſcono, che uno di eſſi poſſa muoverſi liberamente ſull' altro. Quindi non ſi durerà fatica ad intendere, che lo ſtropicciamento dei due corpi debba eſſere tanto maggiore, quanto ſono più validi, e reſiſtenti i riferiti uncini. Onde ſiccome il

vigo-

vigore, e resistenza di questi corrisponde presso a poco in proporzione alla densità della materia, di cui i due corpi si compongono; così alla stessa densità sarà proporzionale altresì lo stropicciamento de' medesimi corpi.

456. Dee tenersi conto in secondo luogo delle superficie, in cui toccansi i due corpi, che stropicciansi tra esso loro. Imperocchè di già si è avvertito, che le parti più sollevate di una delle due superficie, con immergersi nelle cavità delle parti più depresse dell' altra, sono come tanti uncini, che tenendo ligati insieme i due corpi vietano, che uno di essi possa muoversi liberamenae sull' altro. Quindi l'ostacolo, ed in conseguenza lo stropicciamento dei due corpi deve essere tanto maggiore, quanto maggiore è il numero dei riferiti uncini. Onde siccome il numero di questi corrisponde in porporzione alle superficie, in cui toccansi i due corpi, che tra esso loro stropicciansi; così eziandio il loro stropicciamento sarà proporzionale alle stesse superficie. Per essere poi eguali tra loro queste due supercie, chiaro si è, che basta tener conto soltanto di una di esse; e perciò lo stropicciamento di due corpi sarà proporzionale per questo verso alla comune loro superficie nel luogo del contatto.

457. Finalmente siccome con minorarsi al più, che sia possibile, la scabrezza delle superficie, in cui toccansi i due corpi, che tra esso loro stropicciansi, non possono le parti più sollevate dell' una immergersi nelle cavità delle parti più depresse dell' altra, se non vi sia una forza, che prema una delle due superficie verso dell' altra; così eziandio di questa forza premente dee tenersi conto per definire, e porre a calcolo lo stropicciamento dei due corpi. Ed in fatti per poco, che vogliasi riflettere, s' intenderà facilmente, che i due corpi colle loro superficie tanto più debbano stropicciarsi tra esso loro, quanto maggiormente immergonsi le parti più sollevate dell' una nelle cavità delle parti più depres-

depresse dell'altra. Onde siccome questa immersione aumentasi a misura della forza, che preme una delle due superficie verso dell'altra; così lo stropicciamento dei due corpi corrisponderà in proporzione alla stessa forza premente.

458. Quindi intorno allo stropicciamento di due corpi può stabilirsi il seguente teorema generale, cioè, che egli sia in ragion composta della densità della loro materia, della comune loro superficie, e della forza loro premente. Conforme poi da questo teorema ne segue, che lo stesso stropicciamento sia in ragion composta della densità, e della comune superficie, essendo data la forza premente; della densità, e della forza premente, essendo data la comune superficie; ed in fine della comune superficie, e della forza premente, essendo data la densità: così neppure sarà difficile il ricavarne, che egli debba essere nella semplice ragione della densità, se sia data così la comune superficie, come la forza premente; nella semplice ragione della comune superficie, se sia data così la forza premente, come la densità; ed in fine nella semplice ragione della forza premente, se sia data tanto la densità, quanto la comune superficie.

459. Dal medesimo teorema generale egli è facile ancora il ricavarne, che lo stropicciamento di due corpi debba essere dato, primieramente se insieme colla densità della loro materia sia data, così la comune loro superficie, come la forza loro premente; in secondo luogo, se essendo data la sola densità, sia la comune superficie reciprocamente proporzionale alla forza premente; in terzo luogo, se essendo data la sola comune superficie, sia la densità reciprocamente proporzionale alla stessa forza premente; in quarto luogo, se essendo data la sola forza premente, siano la densità, e la comune superficie reciprocamente proporzionali tra loro; ed in fine, se nessuna delle riferite tre cose essendo data, sia una di esse nella reciproca ragione di quel-

la, che si compone dell'altre due.

460. Del rimanente, siccome dei due corpi, che stropiccians tra esso loro, uno poggia sull' altro; così la forza loro premente dee dedursi dal peso del corpo superiore sostenuto dall' altro inferiore; onde si è, che per definirla, deve esserci nota la situazione del primo corpo per rapporto al secondo. In fatti se il corpo inferiore sostenga l' altro superiore a guisa di un piano orizzontale, chiaro si è, che la forza premente sia il totale peso del corpo superiore; ma se poi lo sostenga a guisa di un piano inclinato sull'orizzonte, in tal caso dovrà aversi per forza premente, non già l'intiero peso del corpo superiore, ma quella sola porzione di esso, che sta al peso intiero, come il seno secondo dell' angolo dell'inclinazione al raggio, o sia seno totale; e ciò per la ragione, che in quest' altro caso, secondo è stato dimostrato di sopra, il corpo superiore preme l'altro inferiore colla sola riferita porzione del suo peso assoluto.

461. Quantunque poi la forza premente debba ripetersi regolarmente dal peso del corpo superiore sostenuto dall'altro inferiore; nientedimento può ella aumentarsi talvolta col moto stesso del corpo superiore, il che avviene, qualora egli si muove con direzione, che faccia angolo colla superficie dell'altro inferiore, su di cui si muove. E quindi si è, che stropiccians tra esso loro due corpi, eziandio quando uno di essi portasi lungo la superficie verticale dell' altro. Imperocchè sebbene in questo caso la riferita superficie non sostenga porzione alcuna del peso del corpo, che si muove; nientedimeno per poco, che la direzione del moto s' inclini su di essa, il moto stesso farà le veci di forza premente. Intanto se vogliasi attentamente riflettere, si comprenderà facilmente, che siccome per forza premente deve aversi l'intiero moto del corpo, quante volte la sua direzione è perpendicolare sulla superficie dell' altro corpo; così essendo altra l' incli-

clinazione di detta direzione, si farà la pressione con quella sola porzione di moto, che sta al moto intiero, come il seno primo dell'angolo dell'inclinazione al seno totale.

462. Un altro avvertimento dee farsi in questo luogo, e si è, che lo stropicciamento di due corpi minorasi di molto, se uno di essi in vece di strisciare sulla superficie dell'altro corpo, muovasi in modo, che si aggiri su di essa. Ne è egli difficile ad intenderne la ragione; poichè qualora un corpo aggirasi sulla superficie di un altro corpo, la stessa sua rivoluzione fa, che si abbassino le parti anteriori, ed elevinsi quelle di dietro; onde senza quasi consumo di forza sprigionansi le parti più sollevate dalle cavità dell' altre più depresse, in cui eransi immerse: il che senza dubbio non avviene, quantevolte il moto si fa strisciando. Quindi nella struttura delle machine non mai debbonsi far strisciare quelle parti, che possono aggirarsi; e perciò non sarebbe mal fatto, se gli assi volubili, in vece di riporgli dentro de' forami rotondi, si appoggiassero sopra girelle mobili; poichè in questa maniera verrebbero ad aggirarsi, non meno le superficie dei loro estremi, che le altre su di cui gli estremi stessi si appoggiano (120).

VIII.

Del comune centro di gravità di quanti si siano gravi, e delle principali loro affezioni.

463. CONforme quel punto di un grave, intorno a cui equilibransi le sue parti, riguardasi come centro della sua gravità; così se si abbiano più gravi disgiunti l' uno dall' altro, e tra di essi ritrovisi un punto, con cui congiungendosi per tante rette gli stessi gravi, siano intorno ad esso in equilibrio, potrà aversi questo punto come comune centro delle loro gravità. Nè è egli

da

da porsi in dubbio, che debba ritrovarsi un tal punto tra i riferiti gravi. Imperocchè con congiungergli insieme per tante rette formasi un nuovo grave verso da ciascuno di essi. Quindi eziandio per rapporto a questo nuovo grave deve esservi un punto, in cui si uniscono, e si riconcentrano i pesi dei varj gravi, che lo compongono. Onde siccome con tenergli sospesi per un filo attaccato a questo punto, debbono rimanere tra loro in equilibrio; così il medesimo punto sarà il comune centro di gravità degli stessi gravi.

464. Ed in vero se siano a noi noti i centri di gravità di due, o più gravi, niente sarà più facile, quanto di determinare il punto, che deve essere il comune loro centro di gravità. Perciò fingiamo primieramente, che i gravi siano due, e disegninsi per gli punti A, e B così i proprj loro centri di gravità, come i gravi medesimi, i di cui pesi si riuniscono in detti centri. Conginngansi la AB, e dividasi la medesima talmente nel punto C, che il grave A sia al grave B, come BC ad AC. Io dico, che il punto C sia il comune centro di gravità dei due gravi A, e B. La ragione è chiara. Imperocchè se sospendiamo la AB per un filo attaccato al punto C, avremo con essa una bilancia. Ma per costruzione i due gravi A, e B sono nella reciproca ragione delle braccia AC, BC, da cui pendono. Dunque i medesimi gravi con quella sospensione saranno tra loro in equilibrio; e pertanto il comune loro centro di gravità dovrà essere il punto C. *Fig. 71.*

465. Fingiamo in appresso, che i gravi siano tre, e disegninsi parimente per gli punti A, B, C, così i proprj loro centri di gravità, come i gravi medesimi. Ritrovisi primieramente il comune centro di gravità dei due gravi A, e B, il quale sia il punto D; indi congiungasi la CD, la quale dividasi talmente in E, che i due gravi A, e B insieme siano al terzo C, come CE a DE; ed io *Fig. 72.*

dico, che il punto E sia il comune centro di gravità dei tre gravi A, B, C. Sospendansi perciò i suddetti gravi per un filo attaccato al punto E; ed essendo D il comune centro dei due A, e B, graviteranno questi due nei loro luoghi della stessa maniera, che gravitano riuniti nel punto D. Ma in questo punto di già equilibransi col terzo C, per essere la somma di essi a quest' altro grave C, come CE a DE. Dunque ancora nei loro luoghi saranno in equilibrio col medesimo grave C; e pertanto il comune centro di gravità di tutti tre i gravi dovrà essere il punto E.

466. Or egli è chiaro, che equilibransi intorno al puuto E non solo i due gravi A, e B col terzo C; ma eziandio, così i due A, e C col terzo B, come i due B, e C col terzo A. Quindi se distendisi la BE fino a che s'incontri colla AC nel punto F, non solamente sarà questo punto il comune centro di gravità dei due gravi A, e C; ma sarà ancora come la somma di questi due gravi al terzo B, così BE ad FE. E per la stessa ragione, se distendisi la AE fino a che s' incontri colla BC nel punto G, non solo si avrà con questo punto il comune centro di gravità degli altri due gravi B, e C; ma sarà in oltre come la somma di questi stessi gravi al terzo A, così AE a GE. Onde siccome per determinare il comune centro di gravità di tre gravi, A, B, C, dee prima rinvenirsi quello, che è comune a due di essi, così rimarrà egli sempre determinato, sia che si ritrovi il comune centro dei due A, e B, sia l' altro dei due A, e C, sia il terzo dei due B, e C.

467. In una maniera consimile potrà determinarsi il comune centro di gravità di quanti si siano gravi. Separisi perciò dal loro numero un grave ad arbitrio, e ritrovisi il comune centro di gravità dei gravi rimanenti. Congiungasi di poi questo centro col grave separato per una retta; e se dividasi questa retta con legge tale, che la som-

ma

ma dei primi gravi sia al grave separato, come la porzione aggiacente a questo grave alla porzione rimanente, sarà il punto della divisione il comune centro di gravità dei gravi proposti. Onde si vede, non potersi definire il comune centro di gravità di quanti si siano gravi, se non si proceda nella ricerca di esso con ordine: siccome in effetto essendo quattro i gravi, primieramente dovrà ritrovarsi il centro comune a due di essi, indi il centro comune a tre, ed in fine quello, che è comune a tutti quattro.

468. Nella ricerca intanto del riferito centro potrebbe farsi uso di altro metodo, ed ecco come. Fingiamo, che i gravi siano quattro, cioè A, B, *Fig.* 73.
C, D. Ritrovisi primieramente, così il comune centro dei due A, e B, il quale sia E, come il comune centro degli altri due C, e D, il quale sia F; dividasi di poi la EF talmente in G, che la somma dei primi due A, e B sia alla somma degli altri due C, e D, come FG ad EG; ed io dico, che il punto G sia il comune centro di gravità dei gravi proposti. Sospendansi perciò i suddetti gravi per un filo attaccato al punto G; ed egli è chiaro, che graviteranno i medesimi nei loro luoghi della stessa maniera, che gravitano ponendo i due A, e B nel comune loro centro E, e gli altri due C, e D nel comune loro centro F. Ma in questa posizione di già equilibransi tra esso loro, per essere la somma degli uni alla somma degli altri, come FG ad EG. Dunque ancora nei loro luoghi saranno tra di essi in equilibrio; e perciò il comune loro centro di gravità dovrà essere il punto G.

469. Del riferito centro tre sono le affezioni principali. La prima si è, che se per esso tirisi un piano, e moltiplichinsi per le distanze dei loro centri di gravità da detto piano, così i gravi di un lato, come i gravi dell' altro; le somme de' prodotti siano tra loro eguali. L'altra si è, che se un piano lasci tutti i gravi da un medesimo lato, e molti-

 tipli-

tiplichisi ciascuno dei gravi per la distanza del suo centro di gravità dal piano; la somma de' prodotti sia eguale al prodotto di tutti i gravi insieme per la distanza del comune loro centro di gravità dal medesimo piano. La terza finalmente si è, che se un piano lasci gravi così da un lato, come dall' altro, e moltiplichinsi per le distanze dei loro centri di gravità dal piano tanto gli uni, quanto gli altri; la differenza tra le somme de' respettivi prodotti eziandio sia eguale al prodotto di tutti i gravi insieme per la distanza del comune loro centro di gravità dal medesimo piano.

470. Per dimostrare la verità di esse, siano i due
Fig. 71. gravi A, e B, che abbiano per comune loro centro di gravità il punto C. Tirisi primieramente per questo centro il piano DE; e se mai sia perpendicolare su di esso la AB, saranno AC, BC le distanze dei due gravi dal medesimo piano. Onde essendo il grave A al grave B, come BC ad AC; sarà il prodotto del grave A per la sua distanza AC eguale al prodotto del grave B per la sua distanza BC. Qualora poi la AB non è perpendicolare sul piano DE, abbassinsi su di esso le perpendicolari AD, BE. E siccome queste perpendicolari saranno le distanze dei due gravi dal medesimo piano; così per essere equiangoli i due triangoli BCE, ACD, sarà come BE ad AD, così BC ad AC. Ma BC sta ad AC, come il grave A al grave B. Dunque sarà ancora come il grave A al grave B, così BE ad AD; e pertanto il prodotto del grave A per la sua distanza AD pure sarà eguale al prodotto del grave B per la sua distanza BE.

471. Sia di poi FG il piano, che lascia i due gravi dal medesimo lato; ed abbassate su di esso le perpendicolari AF, BG, CH, tirisi per C l'altro piano parallelo DE. Or siccome il prodotto del grave A per AF è eguale a due prodotti, uno del grave A per AD, e l' altro del grave A per

DF,

DF, ovvero CH; così due prodotti, uno del grave B per BE, e l'altro del grave B per BG, saranno eguali al solo prodotto del grave B per EG ovvero CH. Quindi tre prodotti, uno del grave A per AF, l'altro del grave B per BE; ed il terzo del grave B per BG, saranno eguali a tre altri prodotti, uno del grave A per AD, l'altro del grave A per CH, ed il terzo del grave B per CH. Ma di già si è dimostrato, che il prodotto del grave B per BE sia eguale al prodotto del grave A per AD. Dunque togliendo via questi prodotti, saranno i due di A per AF, e di B per BG eguali agli altri due di A per CH, e di B per CH, o pure al solo prodotto dei due gravi A, e B insieme per CH.

472. Sia finalmente IL il piano, che non passando per C lascia il grave A da un lato, ed il grave B dall'altro lato. Si abbassino su di esso le perpendicolari AI, BL, CM; e tirisi parimente per C l'altro piano parallelo DE. Siccome adunque il prodotto del grave A per AD è eguale a due prodotti, uno del grave A per AI, e l'altro del grave A per DI, ovvero CM; così eziandio il prodotto del grave B per BL sarà eguale a due prodotti, uno del grave B per BE, e l'altro del grave B per EL, ovvero CM. Quindi due prodotti, uno di A per AD, e l'altro di B per BL, saranno eguali a quattro prodotti, uno di A per AI, l'altro di A per CM, il terzo di B per BE, ed il quarto di B per CM. Ma di già si è dimostrato, che il prodotto di A per AD sia eguale al prodotto di B per BE. Dunque il solo prodotto di B per BL sarà eguale a tre prodotti uno di A per AI, l'altro di A per CM, ed il terzo di B per CM; e per tanto la differenza tra i due prodotti di A per AI, e di B per BL sarà eguale al prodotto dei due gravi A, e B insieme per CM.

473. In una maniera consimile potrà dimostrarsi la verità delle stesse affezioni per qualsisia numero

de' gravi, se non che fa duopo avvertire, che nella dimostrazione della prima di esse dee farsi uso altresì del centro comune ai gravi, che ritrovansi da un medesimo lato del piano. Per darne quì un' essempio, che possa servirci di norma per tutti gli altri, che possono occorrere, siano i quattro gra-
Fig. 73. vi A, B, C, D, i quali abbiano per comune loro centro di gravità il punto G. Tirisi per questo punto il piano MN, che lasci i due gravi A, e B da un lato, e gli altri due C, e D dall' altro lato. Sia di poi E il comune centro dei due primi, ed F il comune centro degli altri due. E per ragion dell' equilibrio, conforme il punto G dee ritrovarsi nella retta EF, che congiunge insieme quest' altri due centri; così la somma dei due gravi A, e B dovrà essere alla somma degli altri due C, e D, come FG ad EG.

474. Si abbassino ora sul piano MN le perpendicolari EH, FI. E facendosi equiangoli i due triangoli FGI, EGH, sarà FG ad EG, come FI ad EH. Onde siccome la somma dei due gravi A, e B deve essere alla somma degli altri due C, e D eziandio, come FI ad EH; così il prodotto dei primi due insieme per EH sarà eguale al prodotto degli altri due insieme per FI. Ma abbassando sul piano MN le perpendicolari AM, BN, il prodotto dei due gravi A, e B insieme per EH deve essere eguale ai due prodotti del grave A per AM, e del grave B per BN; come ancora, abbassando sul medesimo piano l' altre due perpendicolari CO, DR, l' altro prodotto dei due gravi C, e D insieme per FI deve essere eguale ai due prodotti del grave C per CO, e del grave D per DR. Dunque ancora i due prodotti del grave A per AM, e del grave B per BN saranno eguali agli altri due del grave C per CO, e del grave D per DR (121).

IX.

Del modo di determinare il centro di gravità delle linee così rette, come curve.

475. QUantunque la gravità sia affezione della materia, ed in conseguenza del corpo; nientedimeno il costume si è di ascriverla non solo ai corpi, ma eziandio ai loro termini, che sono le linee, e le superficie. Ed in vero possono darsi filamenti di materia così sottili, che sia di una picciolezza infinita così la loro larghezza, come la loro profondità. Onde siccome questi tali filamenti di materia debbono riguardarsi come pure linee, così potrà ascriversi la gravità almeno alle linee di questa indole. Ed in una maniera consimile niente vieta, che diansi pellicole di materia talmente tenui, che sia di una picciolezza infinita la loro crassezza. Onde conforme queste tali pellicole di materia debbono aversi come pure superficie, così almeno le superficie di questa sorte saranno dotate di gravità. Anzi in questa guisa può ascriversi la gravità eziandio ai punti, bastando riguardargli come corpi così esili, che sia di una picciolezza infinita ciascuna delle tre loro dimensioni.

476. Or qualunque siasi la grandezza grave, purchè ella abbia da per tutto la stessa densità, e sia nota altresì la sua indole, potrà determinarsi il centro della sua propria gravità per mezzo di queltanto si è dimostrato poc' anzi intorno al comune centro di gravità di quanti si siano gravi. Tralasciando adunque i punti, in cui il centro di gravità, e la grandezza grave confondonsi tra esso loro, incominceremo dalle linee, tra le quali siccome la più semplice è la linea retta; così non è egli da porsi in dubbio, che il centro di gravità di qualsisia retta data sia il punto, che la divide per metà. Quindi se si abbia un'angolo rettilineo, come BAC, *Fig.* 74. si ritroverà il centro di gravità delle due rette AB,

AC,

AC, che lo contengono, primieramente con dividere in parti eguali, così la AB nel punto D, come la AC nel punto E; ed indi con dividere ancora la DE talmente in F, che la AB sia alla AC, come EF a DF.

477. Si vede intanto, che in una maniera consimile possa determinarsi il centro di gravità così del perimetro di un dato triangolo, come del perimetro di qualsisia figura rettilinea data. In fatti se gli estremi delle rette AB, AC, che contengono l'angolo BAC, congiunganfi insieme per mezzo dell' altra retta BC, avremo il triangolo ABC. Onde se dopo essersi divisa la BC per metà nel punto G, dividasi in oltre la FG talmente in H, che le due AB, AC insieme siano alla BC, come GH ad FH, sarà H il centro di gravità del perimetro del triangolo ABC. Anzi nelle figure terminate da un maggior numero de' lati potrà determinarsi il centro di gravità del loro perimetro, eziandio con prendere i lati a due a due. Così se si abbia il

Fig. 75. quadrilatero ABCD, primieramente potrà ritrovarsi il punto E, che sia centro di gravità dei due lati AB, AC; indi il punto F, che sia centro di gravità degli altri due lati BD, CD; ed in fine potrà dividersi la FF talmente in G, che la somma dei due lati AB, AC sia alla somma degli altri due BD, CD, come FG ad EG.

478. Se la figura rettilinea sia regolare, non si durerà fatica ad intendere, che il centro di gravità del suo perimetro sia il centro stesso della figura. In fatti se per questo centro, e per uno de' suoi angoli tirisi una retta, chiaro si è, che non solo resterà diviso il perimetro per metà da questa retta, ma i piccioli elementi delle due metà, che tra di essi si corrispondono, saranno ed eguali tra loro, ed egualmente distanti dalla stessa retta. Onde siccome le due riferite metà equilibransi tra esso loro intorno a quella retta, così nella medesima dovrà ritrovarsi il centro di gravità dell' intiero perimetro. Ma la

stessa

ſteſſa dimoſtrazione ha luogo per rapporto ad ogn' altra retta, che tiraſi dentro del perimetro colla ſteſſa legge. Dunque il centro di gravità ſarà il punto comune a due di queſte rette; ed in conſeguenza, eſſendo queſto punto il centro della figura, col medeſimo ſi avrà il centro di gravità del ſuo perimetro. Dal che egli è facile il ricavarne, che ancora il centro di gravità del perimetro di un cerchio ſia il ſuo medeſimo centro.

479. Per quanto alle linee curve, ſi determinerà il loro centro di gravità con ricorrere ai minimi loro elementi, che poſſono riguardarſi come tanti punti gravi, ed ecco come. Sia AM una curva qualſivoglia, di cui fingiamo, che ſia D il ſuo centro di gravità. Siano ancora AC, BC due rette date di poſizione, che s' interſeghino tra loro ad angoli retti nel punto C; ed abbaſſinſi su di eſſe le perpendicolari DE, DF. Attenta adunque la ſeconda proprietà del comune centro di gravità di quanti ſi ſiano gravi, la ſomma de' prodotti, che ſi hanno con moltiplicare i minimi elementi della curva per le loro diſtanze dalla AC, ſarà eguale al prodotto della ſteſſa curva per la DE; come ancora la ſomma di quei, che ſi hanno con moltiplicare gli ſteſſi elementi per le loro diſtanze dalla BC, ſarà eguale al prodotto della medeſima curva per la DF. Quindi ſe determininſi le due riferite ſomme, reſteranno determinati altresì gli eguali loro prodotti; e pertanto facendoſi note le due DE, DF, o pure le loro eguali CF; CE, niente ſarà più facile, quanto di definire la poſizione del centro D, che ſi dimanda. *Fig. 76.*

480. Per darne un' eſſempio fingiamo, che la curva AM ſia un' arco circolare, che abbia per ſuo centro il punto C; e ſe M*m* ſia uno dei ſuoi elementi, dal di cui termine M ſi abbaſſi ſulla AC la perpendicolare MN, ſarà MN la ſua diſtanza dalla AC, e CN la ſua diſtanza dalla BC. Abbaſſando di poi l' altra perpendicolare *mn* dall' altro

ſuo

suo termine *m*, e facendo la *mr* parallela alla AC; saranno equiangoli i due triangoli CMN, M*mr*, i quali perciò ci daranno due analogie; di cui una si è, che CM sia ad MN, come M*m* ad *mr*, ovvero N*n*; e l' altra, che CM sia a CN, come M*m* ad M*r*. Quindi il prodotto di M*m* per MN sarà eguale al prodotto del raggio CM per N*n*, ed il prodotto di M*m* per CN sarà eguale al prodotto del medesimo raggio CM per M*r*. Onde perchè la stessa dimostrazione ha luogo da per tutto; perciò sarà la prima delle due somme eguale al prodotto del raggio AC per AN, e la seconda eguale al prodotto del raggio AC per MN.

481. Essendo così, sarà il prodotto del raggio AC per AN eguale al prodotto dell' arco AM per CF, ed il prodotto del raggio AC per MN eguale al prodotto dell' arco AM per CE. Quindi se facciasi primieramente, come l' arco AM al raggio AC, così AN ad una quarta proporzionale, avremo la CF; e se facciasi in appresso, come l' arco AM al raggio AC, così MN ad un' altra quarta proporzionale, avremo la CE. Onde determinate le due CF, CE, se compiscasi il rettangolo ECFD, avremo finalmente il centro D, che si dimanda. Da ciò intanto possiamo dedurne due conseguenze, che renderanno molto più facile la determinazione del centro, di cui si tratta. La prima si è, che il riferito centro debba ritrovarsi nel raggio, che divide l' arco per metà. E la seconda, che la porzione di questo raggio compresa tra il centro dell' arco, e l' altro della sua gravità sia alla corda dell' arco, come il raggio all' arco medesimo: dimodocchè si avrà la suddetta porzione con fare, che l' arco sia alla sua corda, come il raggio ad una quarta proporzionale.

482. In fatti essendo così le due AN, CF, come le due MN, CE nella ragione dell' arco AM al raggio AC; sarà AN a CF, ovvero DE, come MN a CE. Onde facendosi equiangoli i due trian-

goli

goli ANM, DEC, sarà l'angolo AMN eguale all' angolo ACD. Ma i due angoli AMN, ACM appoggiansi sopra archi eguali; ed in conseguenza il primo di essi AMN come situato nella circonferenza deve essere la metà dell' altro ACM, che ritrovasi nel centro. Dunque ancora l' angolo ACD sarà la metà dell' angolo ACM; e pertanto la AD prolungata dividerà in due parti eguali, così l' angolo ACM, come l'arco AM sostenuto da quell' angolo, che è la prima conseguenza. Per essere poi equiangoli i due triangoli DEG, ANM, sarà altresì, come CD ad AM, così CE ad AN. Ma CE sta ad AN, come il raggio AC all'arco AM. Dunque nella stessa ragione del raggio AC all' arco AM sarà parimente la CD alla AM, cioè la porzione del raggio compresa tra il centro dell' arco, e l' altro della sua gravità alla corda del medesimo arco, che è la seconda conseguenza.

483. Ed in vero, che il centro di gravità di un' arco circolare debba ritrovarsi nel raggio, che lo divide per metà, può dedursi ancora da ciò, che i minimi elementi delle due metà, che tra di essi si corrispondono, sono ed eguali tra loro, ed egualmente distanti da quel raggio. Imperocchè siccome per queste due uguaglianze le suddette due metà debbono equilibrarsi tra loro intorno al riferito raggio; così per necessità nel medesimo raggio deve essere situato altresì il centro di gravità dell' arco intiero. Quindi se si voglia attentamente riflettere, s' intenderà facilmente, che intanto il centro di gravità di un' arco circolare ritrovasi nel raggio, che lo divide in due parti eguali, in quanto che le due sue metà sono simili, e similmente situate per rapporto al suddetto raggio. Onde se mai si abbia uu' altra curva, che sia divisa egualmente da una retta colla stessa legge, pure il suo centro di gravità dovrà ritrovarsi nella riferita retta.

484. Qualora poi è nota la retta, in cui ritrovasi il centro di gravità di una curva data, chiaro

si è,

si è, che per avere la posizione di esso non debba farsi altra cosa, se non che definire la sua distanza da una retta, che s' intersechi con quell' altra
Fig. 77. ad angoli retti. Così se la curva MAO sia un'arco circolare descritto col punto C come centro, di già il suo centro di gravità D dee ritrovarsi nel raggio CA, che lo divide per metà nel punto A. Onde se EF sia un diametro perpendicolare sul raggio CA, si avrà la posizione del centro D, che si dimanda, con determinare la DC, che è la sua distanza dalla EF. E poichè con dimostrazione simile alla precedente ritrovasi, che la somma de' prodotti, che si hanno con moltiplicare i minimi elementi dell'arco MAO, per le loro distanze dalla stessa EF, sia eguale al prodotto del raggio CA per la MO, che è la corda dell'arco; perciò il prodotto del raggio CA per la MO sarà eguale al prodotto dell' arco MAO per la DC; e pertanto si determinerà la DC, se facciasi come l' arco MAO alla sua corda, così il raggio CA ad una quarta proporzionale: dimodocchè se l'arco sia eguale alla mezza circonferenza EAF, la DC sarà terza proporzionale dopo la sua metà, che è il quadrante AE, o AF, ed il suo raggio AC.

485. Giova intanto quì l'avvertire, che se l'ar-
Fig. 78. co circolare MAO sia maggiore della mezza circonferenza EAF; pure dovrà determinarsi la DC, che è la distanza del suo centro di gravità dal diametro EF perpendicolare sul raggio CA, con fare, come l'arco MAO alla sua corda MO, così il raggio AC ad una quarta proporzionale; ma la dimostrazione dovrà ripetersi dalla terza proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi. In fatti siccome il diametro EF lascia una porzione dell' arco da un lato, ed un' altra porzione dall' altro lato; così se moltiplichinsi gli elementi di dette porzioni per le loro distanze dalla EF, sarà la differenza tra le somme de'prodotti eguale al prodotto dell' arco MAO per la DC. Ma la somma

cor-

corrifpondente alla porzione EAF, che fta da un lato della EF, fi fa eguale al prodotto del raggio CA per la EF; e la fomma corrifpondente all'altre due porzioni ME, OF, che ftanno dall'altro lato, fi fa eguale al prodotto del raggio CA per la differenza delle due EF, MO. Dunque la differenza tra le due riferite fomme tuttavia farà eguale al prodotto del raggio CA per la MO, che è la corda dell'arco.

486. Si vede adunque, che qualunque fiafi la lunghezza dell'arco circolare MAO, non folo dee ritrovarfi il fuo centro di gravità D nel raggio CA, che lo divide per metà; ma deve effere altresì, come l'arco MAO alla fua corda MO, così il raggio CA alla DC. Onde ficcome con aumentarfi l'arco aumentafi la ragione, che egli ferba colla fua corda; così col fuo aumento dovrà aumentarfi parimente l'altra ragione eguale del raggio CA alla DC. Quindi la DC, che è la diftanza tra il centro dell'arco, e l'altro della fua gravità, tanto più dee diminuirfi per rapporto al raggio CA, quanto maggiormente aumentafi l'arco relativamente alla fua corda. E perciò fe l'arco facciafi eguale alla circonferenza del cerchio, cofìcchè diventi infinitamente grande a riguardo della fua corda; diverrà la DC di una picciolezza infinita per rapporto al raggio CA; onde fi è, che il centro della circonferenza, ed il fuo centro di gravità fi riuniranno infieme, ne faranno differenti l'uno dall'altro (122).

X.

Del modo di determinare il centro di gravità delle figure piane.

487. DAlle linee pafferemo alle figure piane; e ficcome dee darfi il primo luogo a quelle, che terminate da linee rette appellanfi figure rettilinee, così tra le figure di quefta indole

la

la più ſemplice ſi è il triangolo. Suppoſto adunque, che ABC ſia un triangolo qualſivoglia, e che la AD divida il lato BC per metà nel punto D; chiaro ſi è, che la ſteſſa AD dovrà dividere ancora egualmente tutte le rette, che dentro del triangolo poſſono tirarſi parallele al lato BC. Quindi riguardando queſte rette parallele come elementi del triangolo, ſi equilibreranno tra eſſo loro le due ſue parti ADB, ADC intorno alla AD; e pertanto della ſteſſa AD dovrà ritrovarſi il centro della ſua gravità. Ma per una ragione conſimile il medeſimo centro dee ritrovarſi ancora nella BE, che divide il lato AC per metà nel punto E. Dunque il centro di gravità del triangolo ABC dovrà eſſere il punto F, in cui interſeganſi le due AD, BE.

Fig. 79.

488. Or egli è facile il dimoſtrare, che in ciaſcuna delle due AD, BE ſia tale la poſizione del punto F, che debba eſſere, tanto la AF dupla della DF, quanto la BF dupla della EF. In fatti eſſendo i due lati BC, AC diviſi egualmente nei punti D, ed E; ſarà BD a DC, come AE ad EC; e pertanto la DE ſarà parallela al terzo lato AB. Quindi facendoſi equiangoli i due triangoli ABC, EDC, ſarà ancora come AB a DE, così BC a DC; ed in conſeguenza, conforme la BC è dupla della DC, così eziandio la AB ſarà dupla della DE. Ma per le medeſime parallele AB, DE ſono equiangoli altresì i due triangoli ABF, DEF. Dunque nella ragione di AB a DE ſaranno così le due AF, DF, come le due BF, EF; e perciò, eſſendoſi dimoſtrato, che la AB ſia dupla della DE ſarà parimente tanto la AF dupla della DF, quanto la BF dupla EF.

489. Conforme poi ogn' altra figura rettilinea può dividerſi in triangoli per mezzo di rette tirate da uno de' ſuoi angoli agli altri oppoſti; così con determinare i centri di gravità dei ſuddetti triangoli, potrà definirſi altresì il centro di gravità dell'in-

l'intiera figura. Sia perciò il quadrilatero ABCD, il quale dividasi per mezzo della AC nei due triangoli ABC, ACD; e sia ancora E il centro di gravità del primo triangolo, ed F quello del secondo. Se adunque dividiamo la EF talmente in G, che il triangolo ABC sia al triangolo ACD, come FG ad EG; sarà G il centro di gravità dell' intiero quadrilatero ABCD. E così parimente, se la figura sia pentagono, dimodochè oltre ai riferiti due triangoli abbia ancora il terzo CDH; ritrovisi il centro di gravità di questo terzo triangolo, che sia il punto I; e se dividasi la GI talmente in L, che il quadrilatero ABCD sia al terzo triangolo CDH, come IL a GL; sarà L il centro di gravità dell' intiero pentagono. *Fig.* 80.

490. Se la figura rettilinea sia regolare, il suo centro di gravità sarà il centro stesso della figura. Imperocchè se per questo centro, e per uno de' suoi angoli tirisi una retta; dividerà questa retta per metà tutte le perpendicolari, che alzansi su di essa sino al perimetro della figura. Quindi riguardando queste perpendicolari come elementi della stessa figura, le due sue parti, che giacciono nei due lati della retta, si equilibreranno tra esso loro intorno alla medesima retta; e perciò nella suddetta retta si ritroverà il centro di gravità dell'intiera figura. Ma per una ragione consimile lo stesso centro dee ritrovarsi altresì in ogni altra retta, che tirasi dentro della figura colla medesima legge. Dunque dovrà egli essere un punto comune a due di queste rette; ed in conseguenza, siccome questo punto è il centro della figura, così il medesimo centro sarà quello della sua gravità. Dal che egli è facile il ricavarne, che il centro di gravità di un cerchio sia il suo medesimo centro.

491. Per quanto poi alle figure piane terminate da linee curve, potrà determinarsi il loro centro di gravità con ricorrere ai minimi loro elementi, che si hanno con tirare dentro di esse rette paral-

Fig. 81. lele infinitamente vicine tra loro. Sia perciò ABC una di queste figure, la quale per un lato sia terminata dalla curva AMB, e per gli altri dalle due rette AC, BC, che intersеghinsi tra loro ad angoli retti nel punto C. Sia ancora D il centro di gravità della stessa figura, da cui abbassinsi sulle due AC, BC le perpendicolari DE, DF. Se adunque moltiplichinsi gli elementi della figura per le distanze dei loro centri di gravità dalla AC; sarà la somma de' prodotti eguale al prodotto della figura ABC per la DE. E così ancora, se moltiplichinsi gli stessi elementi per le distanze dei loro centri di gravità dall'altra BC; sarà la somma de' prodotti eguale al prodotto della figura ABC per la DF. Onde siccome con determinare le due riferite somme restano determinati altresì gli eguali loro prodotti, ed in conseguenza le due DE, DF, o pure le loro eguali CF, CE; così per mezzo di queste due rette potrà definirsi facilmente la posizione del punto D, che si dimanda.

492. Fingiamo perciò, che la figura ABC sia un quadrante di cerchio, che abbia per suo centro il punto C; e per rendere l'esempio più generale fingiamo ancora, che D sia il centro di gravità dello spazio circolare AMN tagliato per la MN parallela al raggio BC. Se adunque la *mn* sia un' altra parallela infinitamente vicina alla prima MN; sarà il picciolo trapezio MN*nm* uno degli elementi dello spazio. E poichè egli può riguardarsi come una semplice retta, si troverà il suo centro di gravità nella metà della sua lunghezza; e perciò sarà la metà della MN la sua distanza dal raggio AC, e la CN la sua distanza dall' altro raggio BC. Quindi siccome il prodotto del riferito picciolo trapezio per la prima distanza si fa eguale alla metà del solido quadrato della MN nella N*n*, così il prodotto dello stesso picciolo trapezio per la seconda distanza si farà eguale al solido del rettangolo delle due MN, CN nella N*n*. Onde deducendosi le

stesse

stesse uguaglianze da ogni altro elemento dello spazio circolare AMN, riducesi la cosa ad investigare la somma così degli uni, come degli altri solidi.

493. Ed in vero, essendo il quadrato della MN eguale alla differenza degli altri due CM, CN; sarà il solido del quadrato della MN nella N*n* eguale a due altri solidi, uno del quadrato del raggio AC nella N*n*, l'altro del quadrato della CN nella N*n*. Ma colla somma de' solidi affini al primo si ha il solido del quadrato del raggio AC nella AN; e colla somma de' solidi affini al secondo si ha la differenza di due piramidi quadrate, di cui così i lati delle basi, come le altezze sono le due AC, CN. Dunque se la differenza di queste piramidi facciasi eguale al solido del quadrato del raggio AC nella AH; sarà la differenza tra le due somme eguale al solido del quadrato del raggio AC nella HN. Onde dovendo essere la metà di questo solido eguale al prodotto dello spazio circolare AMN per la DE, si determinerà la DE con fare come lo spazio circolare AMN al quadrato del raggio AC, così la metà della HN ad una quarta proporzionale.

494. Per quanto poi all'altro solido del rettangolo delle due CN, MN nella N*n*, tirisi al punto M la tangente MT, e facciasi la *mr* parallela al raggio AC. Essendo adunque equiangoli i due triangoli MNT, M*rm*, sarà come MN ad NT, così M*r* ad *mr*, ovvero N*n*. Onde siccome il rettangolo delle due MN, N*n* è eguale al rettangolo dell'altre due NT, M*r*; così sarà il solido delle tre CN, MN, N*n* eguale al solido dell'altre tre CN, NT, M*r*. Ma per essere il rettangolo delle due CN, NT eguale al quadrato della MN, il solido delle tre CN, NT, M*r* è eguale al solido del quadrato della MN nella M*r*. Dunque a questo stesso solido sarà eguale parimente l'altro del rettangolo delle due CN, MN nella N*n*. Quindi la somma di tutti i solidi affini sarà eguale alla pira-

mide, che ha per base il quadrato della MN, e per altezza la stessa MN. Onde dovendo essere questa piramide eguale al prodotto dello spazio circolare AMN per la DF, si determinerà la DF con fare, come lo spazio circolare AMN al quadrato della MN, così la terza parte della stessa MN ad una quarta proporzionale.

495. Fingiamo ora, che lo spazio circolare, di cui dee determinarsi il centro di gravità D, sia l'intiero quadrante ABC. E combaciandosi in questo caso la MN col raggio BC, chiaro si è, che si determinerà la DF con fare, come il quadrante ABC al quadrato del raggio BC, così la terza parte dello stesso raggio ad una quarta proporzionale. Ma io dico di più, che della stessa costruzione dee farsi uso altresì per determinare la DE. Imperocchè annientandosi la CN, e facendosi la AN eguale all' altro raggio AC; sarà il prodotto del quadrante ABC per la DE eguale alla metà della differenza tra il cubo del raggio AC, e la piramide quadrata, di cui così il lato della base, come l' altezza è il medesimo raggio. Ma la metà di questa differenza è eguale al solido, che si fa dal quadrato del raggio AC nella terza parte dello stesso raggio. Dunque a questo stesso solido sarà eguale parimente il prodotto del quadrante ABC per la DE; e pertanto si avrà la DE con fare, come il quadrante ABC al quadrato del raggio AC, così la terza parte del medesimo raggio ad una quarta proporzionale.

Fig. 82. 496. Se lo spazio circolare AMN sia maggiore del quadrante ABC, sarà il prodotto del riferito spazio per la DE eguale alla metà della differenza tra il solido del quadrato del raggio AC nella AN, e la somma di due piramidi quadrate, di cui così i lati delle basi, come le altezze sono le due AC, CN. Onde se facciasi, che la somma di queste piramidi sia eguale al solido del quadrato del raggio AC nella AH, si determinerà la DE eziandio con

fare,

fare, come lo ſpazio circolare AMN al quadrato del raggio AC, così la metà della HN ad una quarta proporzionale. Per quanto poi alla DF, quantunque per determinarla debba ricorrerſi alla terza proprietà del comune centro di gravità di quanti ſi ſiano gravi, per la ragione che il raggio BC laſcia una porzione dello ſpazio da un lato, ed un' altra porzione dell' altro lato; nientedimeno pure ſi ritroverà, che debba ella definirſi con fare, come lo ſpazio circolare AMN al quadrato della MN, così la terza parte della ſteſſa MN ad una quarta proporzionale.

497. Del rimanente, ſe mai allo ſpazio circolare AMN aggiungaſi l' altro eguale AON, che ritrovaſi dall' altro lato; non v' ha dubbio, che il centro di gravità dello ſpazio intiero MAO ſi ritroverà nel raggio AC, che lo divide per metà. Onde ſiccome per determinarlo baſterà definire la ſola ſua diſtanza dal centro C; così ſi avrà queſta diſtanza con fare, che lo ſpazio circolare MAO ſia al quadrato fatto dalla metà della MO, come i due terzi della ſteſſa metà ad una quarta proporzionale. Conforme poi da ciò ne ſiegue, che per avere la diſtanza tra il centro C del mezzo cerchio BAG, e l'altro della ſua gravità debba farſi, che il mezzo cerchio BAG ſia al quadrato del raggio BC, come i due terzi dello ſteſſo raggio alla riferita diſtanza; così neppure ſarà difficile il ricavarne, che il centro di gravità del cerchio intiero ſia il ſuo medeſimo centro. Ed in fine, ſe ritroviſi il centro di gravità così dello ſpazio circolare MAO, come del triangolo COM, e dividaſi la retta, che li congiunge inſieme, nella reciproca ragione dello ſpazio, e del triangolo; ſi avrà col punto di queſta diviſione il centro di gravità del ſettore CMO (123). *Fig.* 81. 82.

O 3 XI.

XI.

Del modo di determinare il centro di gravità così delle figure solide, come dei loro perimetri.

498. Restano le figure solide, tra le quali considereremo in primo luogo quelle, che sono terminate da superficie piane. Ed in vero, se vogliasi il centro di gravità del perimetro di una di queste figure, non dovrà farsi altra cosa, se non che determinare i centri di gravità di tutte le facce, che lo compongono. Imperocchè siccome con dividere la retta, che congiunge insieme due di essi nella reciproca ragione delle facce, a cui corrispondono, si ha il centro comune alle due facce; così se congiungasi questo centro con quello di una terza faccia, e la retta, che gli unisce insieme, dividasi nella reciproca ragione delle prime due facce alla terza, si avrà il centro comune alle tre facce. Onde avvalendoci sempre dello stesso artificio fino a che resti assorbito l' intiero numero delle facce, avremo finalmente il comune loro centro di gravità, ed in conseguenza quello del perimetro della figura.

499. Per quanto poi al centro di gravità della figura medesima, fingiamo primieramente, che ella sia una prisma. E se il prisma dato seghisi per infiniti piani paralleli alla sua base, ed egualmente distanti l' uno dall' altro; saranno le sezioni fatte nel prisma altrettante figure piane simili, ed eguali alla stessa base. Quindi i loro centri di gravità si ritroveranno in una medesima retta, la quale perciò potrà chiamarsi retta centrale. Onde il centro di gravità comune a tutte le sezioni sarà il punto, che divide la retta centrale per metà. Ma potendosi riguardare le riferite sezioni come elementi del prisma, il comune loro centro di gravità non è differente da quello del prisma. Dunque ancora il centro di gravità del prisma sarà il

pun-

punto, che divide egualmente la retta centrale; è pertanto, ſiccome queſta retta ſi ha con unire il centro di gravità delle baſe del priſma coll' altro della faccia oppoſta, così con dividere la ſteſſa retta per metà ſi avrà il centro di gravità del priſma propoſto.

500. Fingiamo in appreſſo, che la figura data ſia una piramide. E quantunque le ſezioni fatte nella piramide con infiniti piani paralleli alla ſua baſe, ed egualmente diſtanti l' uno dall' altro, ſiano figure piane ſoltanto ſimili alla ſteſſa baſe; pure però i loro centri di gravità dovranno ritrovarſi nella retta, che congiunge il centro di gravità della baſe col vertice della piramide; onde in queſta ſteſſa retta centrale ſarà ſituato altresì il centro di gravità comune a tutte le ſezioni, che non è differente da quello della piramide. Per inveſtigare intanto la poſizione di eſſo, tiriſi per lo vertice della piramide un piano parallelo alla ſua baſe, ed i prodotti delle ſezioni per le diſtanze dei loro centri di gravità dal piano tirato ſaranno, come i cubi delle ſteſſe diſtanze; onde eſſendo queſte diſtanze tra loro, come gl' infiniti numeri naturali preſi dall'unità, ſarà la ſomma de'prodotti all'ultimo preſo altrettante volte, come 1 a 4.

501. Or ſiccome la ſomma de'prodotti deve eſſere eguale al prodotto dell' intiera piramide per la diſtanza del ſuo centro di gravità dal medeſimo piano; così l' ultimo di eſſi preſo altrettante volte ſarà eguale al prodotto della baſe della piramide per lo quadrato della ſua altezza; onde eziandio queſti due prodotti ſaranno tra loro nella ragione di 1 a 4. Ma la piramide ſi ha colla moltiplicazione della ſua baſe per la terza parte della ſua altezza. Dunque ponendo a parte ciò, che è comune ai due prodotti, ancora la diſtanza del centro di gravità della piramide dal riferito piano ſarà al triplo dell' altezza della piramide nella ragione di 1 a 4; e pertanto facendoſi la ſuddetta diſtanza

eguale ai tre quarti dell' altezza della piramide, si avrà il centro di gravità, che si dimanda, con dividere la retta centrale in modo, che la porzione di essa aggiacente al vertice sia tripla della porzione rimanente.

502. Per quanto all' altre figure solide terminate da superficie piane, di già ciascuna di esse può dividersi in modo, che le sue parti siano prismi, e piramidi. Onde con determinare i centri di gravità dei prismi, e delle piramidi, che la compongono, niente sarà più facile, quanto di definire il centro di gravità di tutta la figura. Intanto se la figura, di cui si dimanda il centro di gravità, sia una piramide troncata; in vece di dividerla in prismi, e piramidi, tornerà più conto di renderla intiera coll' aggiunta di un' altra piramide. In fatti se ritrovisi il centro di gravità, così della piramide aggiunta, come della piramide intiera; e la retta, che congiunge insieme questi due centri, distendasi verso la piramide troncata in modo, che la stessa retta sia alla parte distesa, come la piramide troncata alla piramide aggiunta; si avrà col termine della parte distesa il centro di gravità della piramide intiera.

503. Per venire ora alle figure solide terminate
Fig. 83. da superficie curve, sia il triangolo ABC rettangolo in B, e vogliasi il centro di gravità così della superficie conica, che descrivesi colla rivoluzione dell' ipotenusa AC intorno al lato AB, come del cono medesimo. Prendasi nella AC la porzione infinitamente picciola M*m*, e da i suoi estremi abbassinsi sull' asse del cono AB le perpendicolari MN, *mn*. Essendo adunque le due M*m*, N*n* in data ragione, ed essendo la circonferenza descritta col raggio MN proporzionale allo stesso raggio, o pure alla AN; sarà la picciola corona conica corrispondente alla M*m* proporzionale al rettangolo delle due AN, N*n*. Quindi se per lo vertice del cono tirisi un piano parallelo alla sua base, sarà il prodotto della stessa

piccio-

picciola corona per la diſtanza del ſuo centro di gravità del piano tirato proporzionalmente al ſolido del quadrato della AN nella N*n*. Onde la ſomma de' prodotti di tutte le picciole corone coniche per le diſtanze dei loro centri di gravità dal medeſimo piano ſarà proporzionale alla piramide quadrata, di cui così il lato della baſe, come l' altezza è eguale alla AB.

504. Conforme poi la picciola corona conica corriſpondente alla M*m* è proporzionale al rettangolo delle due AN, N*n*; così l' intiera ſuperficie conica ſarà proporzionale alla metà del quadrato della AB. Quindi il prodotto della ſteſſa ſuperficie conica per la diſtanza del ſuo centro di gravità dal menzionato piano corriſponderà in proporzione al ſolido della metà del quadrato della AB nella ſteſſa diſtanza. Onde dovendo eſſere queſto ſolido eguale alla riferita piramide quadrata, ſi farà la ſuddetta diſtanza eguale ai due terzi della AB. Riguardando poſcia il cono come una piramide circolare, chiaro ſi è, che la diſtanza dal ſuo centro di gravità dal medeſimo piano debba farſi eguale ai tre quarti della ſteſſa AB. E perciò ſiccome il centro di gravità della ſuperficie conica ſi ha, con dividere l' aſſe AB in modo, che la porzione aggiacente al vertice ſia dupla della porzione rimanente; così l' altro del cono ſi avrà, con dividere il medeſimo aſſe talmente, che la porzione aggiacente al vertice ſia tripla dell' altra rimanente.

505. Sia inoltre il mezzo cerchio AMB, colla di cui rivoluzione intorno al diametro AB deſcrivaſi la sfera; e debbaſi ritrovare il centro di gravità così della ſuperficie sferica corriſpondente all' arco AM, come del ſettore sferico ſoſtenuto da detta ſuperficie. Prendaſi l' archetto infinitamente picciolo M*m*, dai di cui eſtremi abbaſſinſi ſul diametro AB le perpendicolari MN, *mn*. E ſe facciaſi la *mr* parallela allo ſteſſo diametro, ſaranno equiangoli i due triangoli CMN, M*mr*; ed in conſeguen- *Fig.* 84.

ſeguenza, eſſendo CN ad MN, come Mr ad mr, ovvero Nn, ſarà il rettangolo delle due CN, Nn eguale al rettangolo dell'altre due MN, Mr. Tiriſi di poi per lo centro C il piano DE, a cui ſia perpendicolare il raggio AC. E poichè la picciola corona sferica corriſpondente all' archetto Mm è proporzionale alla Nn, ſarà il prodotto della ſteſſa picciola corona per la diſtanza del ſuo centro di gravità dal piano DE proporzionale al rettangolo delle due CN, Nn, o pure delle due MN, Mr. Onde la ſomma di tutti i prodotti conſimili corriſponderà in proporzione alla metà del quadrato della MN, o pure alla metà del rettangolo delle due AN, BN.

506. Or eſſendo la ſuperficie sferica corriſpondente all'arco AM proporzionale alla AN, ſarà il prodotto della ſteſſa ſuperficie per la diſtanza del ſuo centro di gravità dal medeſimo piano DE proporzionale al rettangolo della AN nella ſteſſa diſtanza. Quindi dovendo eſſere queſto rettangolo eguale alla metà dell'altro delle due AN, BN, ſarà la riferita diſtanza eguale alla metà della BN, o pure alla metà della ſomma delle due AC, CN. E perciò ſe dividaſi la AN egualmente, ſi avrà col punto della diviſione il centro di gravità della ſuperficie sferica, che deſcriveſi colla rivoluzione dell' arco AM. Conforme poi da ciò ne ſegue, che facendoſi l'arco AM eguale al quadrante AD, il cercato centro ſi abbia con dividere per metà il raggio AD; così non oſtante, che l' arco facciaſi maggiore del quadrante, pure il centro di gravità della ſuperficie sferica corriſpondente dovrà determinarſi con coſtruzione conſimile.

507. Per quanto al centro di gravità del ſettore sferico, prendaſi per ſuo elemento la porzione ſoſtenuta dalla picciola corona sferica corriſpondente all' archetto Mm, e dividaſi queſta ſteſſa porzione in picciole piramidi eguali, che abbiano il centro C per comune loro vertice. Poichè dunque queſte pic-

picciole piramidi eguali ſono egualmente diſtanti dalla CN; ſi ritroverà nella ſteſſa CN il comune loro centro di gravità, da cui non è differente quello dell'intiera porzione. Quindi ſiccome il centro di gravità di ciaſcuna di eſſe diſta da C per gli tre quarti della CM, così eziandio il centro di gravità dell' intiera porzione ſarà diſtante da C per gli tre quarti della CN. Onde perchè corriſponde in proporzione così la riferita porzione del ſettore alla N*n*, come il ſettore medeſimo alla AN; con dimoſtrazione ſimile alla precedente ſi ritroverà, che il centro di gravità del ſettore ſia diſtante dal piano DE per le tre ottave parti della ſomma delle due AC, CN.

508. Conforme poi nel ſettore sferico ſi contiene ed il cono, che deſcriveſi colla rivoluzione del triangolo CNM, e la porzione della sfera, che generaſi colla rivoluzione dello ſpazio circolare ANM; così con determinare i centri di gravità del cono, e del ſettore potrà definirſi altresì quello, che appartiene alla proporzione della sfera. Congiunganſi perciò i due riferiti centri per una retta; e ſe queſta retta diſtendaſi verſo la porzione della sfera in modo, che la ſteſſa retta ſia alla parte diſteſa, come la porzione della sfera al cono, ſi avrà col termine della parte diſteſa il centro, che ſi dimanda. Anzi in una maniera conſimile potrà determinarſi ancora il centro di gravità della porzione maggiore, che generaſi colla rivoluzione dell' altro ſpazio circolare BNM: cioè con congiungere il centro della porzione minore coll' altro della sfera per una retta, e con prolungare queſta retta in modo, che la medeſima retta ſia alla parte prolungata, come la porzione maggiore alla porzione minore.

509. Quindi ſiccome determinaſi con eſattezza così il centro di gravità del cono, che deſcriveſi colla rivoluzione del triangolo CNM; come quello del ſettore sferico ſoſtenuto dalla ſuperficie corriſpondente all' arco AM; così ſi determinerà ancora

ra esattamente il centro di gravità della porzione sferica, che generasi colla rivoluzione dello spazio circolare ANM. In fatti conforme il cono si ha, con moltiplicare il cerchio descritto col raggio MN per la terza parte della CN; così se AF sia la terza parte della AN, si avrà la porzione sferica, con moltiplicare la circonferenza, che ha per diametro la CF, per lo quadrato della AN. Quindi la porzione sferica sarà al cono in ragion composta del quadrato della AN al quadrato della MN, e della CF alla sesta parte della CN, o pure in ragion composta della AN alla BN, e del sestuplo della CF alla CN. Onde se la retta, che congiunge insieme i centri di gravità del cono, e del settore, distendasi in modo, che la stessa retta sia alla parte distesa nella medesima ragion composta, si avrà il centro di gravità della porzione sferica.

510. Con esattezza si determinerà parimente il centro di gravità della porzione sferica maggiore, che generasi colla rivoluzione dell' altro spazio circolare BNM. Imperocchè se BG sia la terza parte della BN, ancora quest' altra porzione maggiore si avrà, con moltiplicare la circonferenza, che ha per diametro la CG, per lo quadrato della BN. Quindi la porzione maggiore sarà alla porzione minore in ragion composta della CG alla CF, e del quadrato della BN al quadrato della AN. Onde se la retta, che congiunge insieme il centro di gravità della porzione minore col centro della sfera, prolunghisi in modo, che la stessa retta sia alla parte prolungata nella medesima ragion composta, si avrà il centro di gravità dell' altra porzione maggiore. Del rimanente la maniera stessa di determinare il centro di gravità del settore sferico, chiaramente ci fa conoscere, che quello dell' emisfero sia distante dalla sua base per le tre ottave parti del suo raggio (124).

XII.

XII.

Del modo di definire le grandezze, che generansi colla rivoluzione di altre grandezze più semplici.

511. Niente è più familiare presso de' Geometri, quanto di derivare grandezze dalla rivoluzione di altre grandezze più semplici. Così generasi il cerchio colla rivoluzione di una retta intorno ad uno de' suoi termini; generasi il cilindro retto colla rivoluzione di un parallelogrammo rettangolo intorno ad uno de' suoi lati; generasi il cono retto colla rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno ad uno de' lati, che contengono l' angolo retto; generasi finalmente la sfera colla rivoluzione di un mezzo cerchio intorno al suo diametro. Or considerandosi come grave la grandezza, che aggirasi, potrà determinarsi l' altra, che si genera, per mezzo del centro di gravità della stessa grandezza generatrice; ed il teorema generale si è, che moltiplicandosi la grandezza generatrice per l' arco circolare, che si descrive dal suo centro di gravità, il prodotto debba essere eguale all' altra grandezza, che si genera.

512. Ed in vero le grandezze, che col loro moto possono generare altre grandezze più composte, sono tanto le linee, quanto le superficie, che giacciono in un medesimo piano, poichè siccome generansi superficie col moto laterale delle linee, così produconsi corpi col moto traversale delle superficie. Se adunque il moto laterale di una linea giacente in un medesimo piano facciasi in modo, che i minimi suoi elementi portinsi per rette parallele, a cui siano perpendicolari gli stessi elementi; chiaro si è, che si avrà la superficie, che si genera, con moltiplicare la linea generatrice per una di quelle rette. E così parimente, se il moto traversale di una superficie piana facciasi con legge tale, che i minimi suoi elementi percorrano rette parallele, a cui siano perpendicolari i medesimi elementi; chiara

ra

ra cosa ancora si è, che si avrà il corpo, che si produce, con moltiplicare la superficie generatrice per una delle riferite rette.

513. Da questi stessi principj intanto egli è facile il ricavarne la verità del proposto teorema generale, ed ecco come. Sia AB l'asse della rivoluzione, e sia CMD la grandezza, che intorno ad essa si aggira. Dividasi questa grandezza in minimi elementi per rette parallele all' asse AB, ed aggirisi la medesima in modo, che sia infinitamente picciolo l'angolo della sua rivoluzione. L' archetto adunque, che descrivesi dal centro di gravità; così di ogni elemento, come di tutta la grandezza, sarà proporzionale alla sua distanza dall'asse AB, che viene ad essere il raggio di detto archetto. Onde attenta la seconda proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi, se moltiplichinsi gli elementi della grandezza CMD per gli archetti descritti dai loro centri di gravità, sarà la somma de' prodotti eguale al prodotto di tutta la grandezza CMD per l' archetto descritto dal suo proprio centro.

Fig. 85.

514. Per ritrovarsi poi racchiuso qualsisia elemento della grandezza tra rette parallele all' asse AB, chiaro si è, che le parti sue più picciole portansi per archetti eguali a quello, che si descrive dal suo centro di gravità. Quindi potendosi riguardare tutti questi archetti come picciole rette, non solo parallele tra loro, ma perpendicolari altresì all'elemento, a cui si rapportano; sarà il prodotto dell' elemento per uno di essi eguale alla grandezza, che generasi colla picciola rivoluzione dello stesso elemento. Onde siccome colla somma di tutti i prodotti consimili si viene ad avere la grandezza, che generasi colla picciola rivoluzione di tutta la grandezza generatrice; così la grandezza generata, ed il prodotto della generatrice per l' archetto descritto dal suo centro di gravità saranno eziandio eguali tra loro.

515.

515. Colla ſteſſa dimoſtrazione ſi farà vedere, che la riferita uguaglianza debba aver luogo in ogni altra picciola rivoluzione della grandezza generatrice. Onde non è egli da porſi in dubbio, che la grandezza, che generaſi colla rivoluzione di un' altra grandezza più ſemplice, ſia eguale al prodotto della grandezza generatrice per l' arco circolare, che deſcriveſi dal ſuo centro di gravità. Si vuol però quì notare, che la medeſima coſa debba avvenire altresì, ſe il centro di gravità della grandezza generatrice portiſi per una curva, a cui ſia ſempre perpendicolare la ſteſſa grandezza. Imperocchè ſiccome i minimi elementi della curva poſſono riguardarſi come tanti archetti circolari deſcritti con diverſi centri, i quali ritrovanſi nella ſua ſviluppata; così, con portarſi la grandezza generatrice per ciaſcuno di eſſi, aggiraſi la medeſima intorno ad un' aſſe alzato dal ſuo centro perpendicolarmente sul piano della curva.

516. Per iſchiarire con eſempj la verità del riferito teorema, aggiriſi primieramente la retta AC intorno ad uno de' ſuoi termini A. Colla ſua rivoluzione adunque ſi genererà il cerchio CMN, che avrà per ſuo raggio la ſteſſa retta AC. E poichè la medeſima AC rimane diviſa egualmente dal ſuo centro di gravità; ſi porterà queſto centro nella rivoluzione della retta per una circonferenza di cerchio, che ſarà la metà di quella, per cui terminaſi il cerchio CMN. Onde ſi avrà l' area del cerchio CMN, con moltiplicare il ſuo raggio AC per la metà della ſua circonferenza. Per la ſteſſa ragione poi, ſe la retta AC aggiriſi intorno al ſuo termine A ſino a che ſi generi il ſettore CAM; ſi porterà il ſuo centro di gravità per un arco circolare, che ſarà la metà dell' altro CM, su di cui appoggiaſi il ſettore. Onde ancora l'area del ſettore ſi avrà, con moltiplicare il ſuo raggio AC per la metà dell' arco CM, che ſoſtiene il ſettore. *Fig.* 86.

517.

Fig. 87. 517. Aggirisi in appresso il parallelogrammo rettangolo ABCD intorno al suo lato AB. E siccome colla sua rivoluzione generasi il cilindro retto, così con quella del lato opposto CD si genererà la sua superficie cilindrica. Portandosi adunque il centro di gravità dal lato CD per una circonferenza di cerchio eguale a quella, per cui terminasi la base del cilindro; si avrà la superficie cilindrica, con moltiplicare il lato, che la descrive, per la circonferenza della base. E poichè il centro di gravità del parallelogrammo ABCD ritrovasi nella metà della EF, che divide egualmente i due lati opposti AB, CD; si porterà egli per una circonferenza di cerchio, che sarà la metà di quella della base. Onde si avrà la solidità del cilindro retto, con moltiplicare la metà della circonferenza della base primieramente per lo lato BC, che è il suo raggio, ed indi per l'altro lato AB, che è l' asse del cilindro: dimodocchè sarà ella eguale al prodotto della base per l' asse.

Fig. 88. 518. Aggirisi inoltre il triangolo rettangolo ABC intorno al lato AB, che è uno dei due, che contengono l'angolo retto. E siccome colla sua rivoluzione generasi il cono retto, così con quella dell' ipotenusa AC si genererà la sua superficie conica. Portandosi adunque il centro di gravità della riferita ipotenusa per una circonferenza di cerchio eguale alla metà di quella, per cui terminasi la base del cono; si avrà la superficie conica, con moltiplicare l' ipotenusa, che la descrive, per la metà della circonferenza della base. E poichè il centro di gravità del triangolo ABC ritrovasi nei due terzi della AG, che divide il lato BC per metà; si porterà egli per la circonferenza di un cerchio, che sarà la terza parte di quella della base. Onde si avrà la solidità del cono retto, con moltiplicare la terza parte della circonferenza della base primieramente per la metà del lato BC, che è il suo raggio, ed indi per l'altro lato AB, che l'asse del

cono:

cono: dimodocchè farà ella eguale al prodotto della terza parte della base per l'asse.

519. Aggirisi finalmente il mezzo cerchio AEB intorno al suo diametro AB. E conforme colla sua rivoluzione generasi la sfera, così con quella della mezza circonferenza si genererà la sua superficie sferica. Taglisi adunque dal raggio CE alzato perpendicolarmente sul diametro AB la porzione CD, che sia al medesimo raggio, come il diametro AB alla mezza circonferenza AEB; e per ciò, che è stato dimostrato di sopra, il punto D sarà il centro di gravità della mezza circonferenza AEB. Quindi nella sua rivoluzione si porterà questo centro per la circonferenza di un cerchio, che sarà alla circonferenza di quello, che ha per raggio la CE, come CD a CE, o pure come il diametro AB alla mezza circonferenza AEB. Onde si avrà la superficie sferica, con moltiplicare il diametro AB per l'intiera sua circonferenza, dimodocchè sarà ella eguale al quadruplo del cerchio massimo della sfera. *Fig.* 89.

520. Se poi la porzione CD sia di lunghezza tale, che il mezzo cerchio AEB sia al quadrato del raggio CE; come i due terzi dello stesso raggio alla CD; in tal caso il punto D sarà il centro di gravità del mezzo cerchio AEB, e si porterà egli per una circonferenza di cerchio, che sarà alla circonferenza di quello, che ha per raggio la CE, come i due terzi del quadrato di questo raggio al mezzo cerchio AEB. Onde si avrà la solidità della sfera con moltiplicare la circonferenza del cerchio massimo primieramente per l'intiero suo diametro, ed indi per la terza parte del suo raggio, che vale a dire con moltiplicare la superficie sferica per la terza parte del suo raggio. Ed in questo stesso modo chiaro si è, che potrà determinarsi parimente così la superficie sferica, che descrivesi colla rivoluzione di qualsisia arco AM della mezza circonferenza AEB, come la solidità

P e del-e della porzione della sfera racchiusa sotto la stessa superficie, e del settore sferico, che su di essa si appoggia.

521. Or conforme con aggirarsi un mezzo cerchio intorno al suo diametro generasi la sfera; così colla rivoluzione di ogni altra porzione di cerchio intorno alla sua corda producesi un solido chiamato sferoide, che sarà acuminato, o incavato ne' suoi poli, secondocchè la porzione di cerchio, da cui egli si deduce, prendesi minore, o maggiore del mezzo cerchio; onde con far uso del medesimo teorema potrà determinarsi facilmente così la superficie, come la solidità dell' uno, e dell' altro sferoide. E poichè quel solido, che chiamasi botte, può riguardarsi come formato colla rivoluzione di un' arco circolare intorno ad una retta parallela alla sua corda; perciò, se determinisi così il centro, come la lunghezza dell' arco, con cui egli si forma, potrà definirsi altresì non meno l' interna sua capacità, che la sua superficie curva.

522. Se poi aggirisi un cerchio intiero intorno ad una retta presa ad arbitrio nel suo piano, chiaro si è, che si genererà quel solido, che chiamasi anello sferico, la di cui solidità si produce colla rivoluzione del cerchio, e la superficie curva colla rivoluzione della sua circonferenza. Quindi essendo il centro di gravità così del cerchio, come della circonferenza il suo medesimo centro, possono stabilirsi intorno all' anello sferico due teoremi. Il primo si è, che la solidità dell' anello si abbia con moltiplicare il cerchio, che si aggira, per la circonferenza, che nella sua rivoluzione percorre il suo centro. L' altro si è, che la superficie curva dello stesso anello si abbia con moltiplicare la circonferenza del medesimo cerchio per quella stessa, che si percorre dal suo centro (125).

XIII.

XIII.

Del modo di definire così la velocità mezza, come il centro del moto delle grandezze che si aggirano.

523. Qualora una grandezza aggirasi intorno ad un qualche asse, non è egli da porsi in dubbio, che siano diverse tra loro le velocità, con cui si muovono i minimi suoi elementi. Quindi siccome per avere la quantità di moto, che risiede in tutta la grandezza, dee moltiplicarsi ciascuno de' suoi elementi per la velocità, con cui egli si muove, così chiamasi velocità mezza quella, con cui muovendosi tutti gli elementi della grandezza, si viene ad avere la stessa quantità di moto, che di già in essa ritrovasi; onde se mai sia nota questa quantità di moto, potrà determinarsi la velocità mezza della grandezza con dividere la riferita quantità per la grandezza medesima. Intanto dovendosi incontrare la suddetta velocità in uno degli elementi della grandezza, che si aggira, tornerà più conto di ricercarla con definire l' elemento, o sia il punto della grandezza, in cui ella s'incontra.

524. Ed in vero con far uso della seconda proprietà del comune centro di gravità di quanti si siano gravi può dimostrarsi il seguente teorema generale, cioè che qualunque siasi la grandezza, che aggirasi intorno ad un'asse, la sua velocità mezza sia quella, che risiede nel suo centro di gravità. In fatti se intendasi divisa la grandezza in minimi elementi per rette, o per piani paralleli all' asse della rivoluzione; la velocità di ciascuno di questi elementi corrisponderà in proporzione alla sua distanza dal medesimo asse. Quindi attenta la riferita proprietà, la somma de' prodotti, che si hanno con moltiplicare gli stessi elementi per le proprie loro velocità, sarà eguale al prodotto di tutta la grandezza per la velocità del suo centro di

gravità. Onde ficcome con quefta velocità viene ad avere la grandezza la fteffa quantità di moto, che in effa ritrovafi, così la medefima farà la fua velocità mezza.

525. Or muovendofi la grandezza in modo, che tutti i fuoi elementi abbiano la fteffa velocità, non è egli da porfi in dubbio, che il moto di effa fi riunifce, e fi raccoglie nel fuo centro di gravità. Ma fe mai la grandezza aggirifi intorno ad un'affe, ed in confeguenza i fuoi elementi muovanfi con velocità proporzionali alle loro diftanze da quell'affe; in tal cafo potrà definirfi il centro del moto, primieramente con trasformare la grandezza in un'altra, in cui i fuoi elementi fiano aumentati nella ragione delle loro velocità, ed indi con determinare il centro di gravità di quefta nuova grandezza.
Fig. 90. Così fe intorno all' affe AB aggirifi la retta CD, e facciafi da per tutto, che la NM parallela all' affe AB fia proporzionale alla fua diftanza CN dal medefimo affe; farà il triangolo CDE la nuova grandezza. Onde fe F fia il fuo centro di gravità, e tirifi la FG parallela all' ifteffo affe, che s' incontri colla CD nel punto G; farà G il centro del moto della CD, il quale perciò fi ritroverà nei due terzi della fua lunghezza.

526. Similmente, fe intorno all' affe AB aggirifi il triangolo CDE, e la figura piana CDH fia di tal natura, che la NO fia proporzionale al rettangolo delle due CN, NM, o pure al quadrato della fola CN; farà quefta figura la nuova grandezza. Onde fe I fia il fuo centro di gravità, e tirifi la IL parallela all' affe AB, che s' incontri colla CF nel punto L; farà L il centro, in cui fi riunifce il moto del triangolo CDE, il quale perciò fi ritroverà nei tre quarti della tutta CK. E così finalmente, fe intorno all' affe AB aggirifi il cono, che fi ha colla rivoluzione del triangolo rettangolo CDE intorno al lato CD, e la figura CDH fia d' indole tale, che la NO fia proporzionale

nale al solido della CN nel quadrato della NM, o pure al cubo della sola CN; sarà questa figura la nuova grandezza. Onde se dal suo centro di gravità I tirisi la IB parallela all'asse AB, che s'incontri colla CD nel punto R; sarà R il centro del moto del divisato cono, il quale perciò si ritroverà nei quattro quinti della CD.

527. Nè poi è egli difficile il dimostrare, che aggirandosi una grandezza qualsisia intorno ad un' asse, ed aumentandosi ciascuno de' suoi elementi nella ragione della velocità, con cui egli si muove, si abbia col centro di gravità della nuova grandezza il centro del moto della prima. Imperocchè attenta la ragione, in cui si vuole aumentato ciascuno elemento della grandezza, che si aggira, chiaro si è, che gli elementi della nuova grandezza siano proporzionali ai momenti degli elementi corrispondenti della prima. Quindi se la nuova grandezza muovasi in modo, che tutti i suoi elementi abbiano la stessa velocità; ancora i momenti degli stessi suoi elementi corrisponderanno in proporzione ai momenti dei rispettivi elementi della prima. Onde siccome debbono corrispondersi tra loro i centri di moto dell' una, e dell' altra grandezza; così il centro del moto della prima si avrà senza dubbio col centro di gravità della nuova grandezza.

528. Del rimanente il centro del moto si appella ancora centro di percussione per la ragione, che riunendosi in esso la forza di agire, che risiede nella grandezza a cagion del suo moto, si ha la massima percossa, quante volte l' incontro della grandezza coll' ostacolo si fa col riferito centro. E poichè le oscillazioni di un pendolo, a cui siano attaccati varj pesi in diverse distanze dall' asse, da cui egli pende, debbono ripetersi dal moto, che risiede in ciascuno di detti pesi; perciò la vera lunghezza di un pendolo composto sarà quella, che si frappone tra l' asse della suspensione, ed il centro del suo moto. Quindi in un pendolo di que-

sta indole il centro del moto si appella altresì centro di oscillazione; e se mai si voglia un pendolo semplice, che faccia le sue oscillazioni nel medesimo tempo con quelle di un pendolo composto, la sua lunghezza dovrà farsi eguale alla riferita distanza.

529. Or in un pendolo composto non è egli difficile il definire la distanza tra il centro di oscillazione, e l' asse della sospensione. Siano perciò A, e B i pesi del pendolo, o pure i proprj loro centri di gravità; e sia ancora C il centro di gravità comune ad ambedue, D il centro di oscillazione, ed EF l' asse della suspensione. Abbassinsi su di questo asse le perpendicolari AE, BF, CG, DH; ed essendo C il comune centro di gravità dei due pesi A, e B, saranno due prodotti, uno di A per AE, l'altro di B per BF, eguali al solo prodotto di A, e B insieme per CG. Ma per corrispondere a D il comune centro di gravità degli stessi pesi aumentati nella ragione delle loro velocità, due altri prodotti, uno di A per lo quadrato della AE, l'altro di B per lo quadrato della BF; sono eguali al prodotto dei primi due insieme per la DH. Dunque questi altri due prodotti saranno eguali altresì al solo prodotto di A, e B insieme per lo rettangolo delle due CG, DH; e pertanto si avrà la distanza ricercata DH con dividere la loro somma per lo prodotto, che si ha moltiplicando i due pesi A, e B insieme per la CG.

Fig. 91.

530. Questa determinazione intanto della distanza DH deve aversi come esatta, sempre quando i diversi pesi A, e B del pendolo composto sono così piccioli, che non incontrasi sensibile divario tra le diverse velocità, con cui nell' oscillazioni del pendolo muovonsi le minime parti di ciascuno di essi. In fatti quando ciò avviene, i pesi A, e B aumentati nella ragione delle loro velocità ritengono presso a poco gli stessi centri di gravità, che avevano prima; e quindi si è, che i due prodotti

dotti, uno del peso A per lo quadrato della AE, l'altro del peso B per lo quadrato della BF, siano eguali al solo prodotto dei due pesi A, e B insieme per lo rettangolo delle due CG, DG. Qualora poi ritrovasi divario sensibile tra le velocità, con cui muovonsi le minime parti dei pesi A, e B; in tal caso con aumentarsi questi pesi nella ragione delle loro velocità, cambiansi sensibilmente i loro centri di gravità. Onde siccome non può sussistere l'uguaglianza tra i riferiti prodotti, così neppure potrà determinarsi nell' accennata guisa la distanza DH, di cui si tratta.

531. Quindi per definire in quest' altro caso la distanza ricercata DH, primieramente dovrà ritrovarsi il centro del moto così del peso A, come del peso B; indi supposto, che *a*, e *b* siano questi centri, dovranno determinarsi altresì le loro distanze *ae*, *bf* dall' asse della sospensione. Ed in fatti, attenta la maniera di determinare il centro del moto di qualsisia grandezza, chiaro si è, che ad *a*, e *b* corrispondono i centri di gravità dei nuovi pesi, che si hanno con aumentare le minime parti dei due A, e B nella ragione delle loro velocità. Quindi due prodotti, uno del peso A per lo rettangolo delle due AE, *ae*, l' altro del peso B per lo rettangolo delle due BF, *bf*, saranno eguali al solo prodotto dei due pesi A, e B insieme per lo rettangolo delle due CG, DH. Onde se dividasi la somma dei primi due prodotti per lo prodotto, che si ha moltiplicando i due pesi A, e B insieme per la CG; il quoziente di questa divisione ci darà la distanza DH, che si dimanda (126).

XIV.

Dell' equilibrio di più potenze, applicate ad un corpo rigido, ed inflessibile.

532. PAsseremo ora a ragionare dell' equilibrio di più potenze, che con diverse direzioni sforzansi di tirare a se un medesimo corpo; e per andare con ordine, distingueremo due casi: cioè uno, quando il corpo tirato da più potenze è rigido, ed inflessibile; e l' altro, quando al contrario egli è di sua natura pieghevole. Per l' esame intanto così dell' uno, come dell' altro caso, giova prima investigare, quando equilibransi tra esso loro più potenze, che cercano di tirare a se un medesimo punto; ed intorno a questo equilibrio può stabilirsi il seguente teorema generale: cioè, che se le rette AB, AC, AD, AE disegnino così le potenze, che tirano il punto A, come le proprie loro direzioni, debbano equilibrarsi tra loro le riferite potenze, sempre quando il punto A ritrovasi essere il comune centro di gravità di altrettanti pesi eguali situati nei termini B, C, D, E di quelle rette.

533. Fingiamo perciò, che non già le potenze, ma i riferiti pesi tirino a se il punto A; e per poco, che si voglia riflettere, s' intenderà facilmente, che ciascuno di essi lo tirerà con forza proporzionale alla potenza, a cui egli corrisponde. Onde saranno tra loro in equilibrio le potenze, sempre quando i pesi colle loro forze equilibransi intorno al punto A. Ma non possono i pesi equilibrarsi intorno a quel punto, se egli non sia il comune loro centro di gravità. Dunque ancora le potenze disegnate per le rette AB, AC, AD, AE non potranno essere tra loro in equilibrio, se il punto A tirato da dette potenze non sia il comune centro di gravità di altrettanti pesi eguali situati nei termini, B, C, D, E di quelle rette.

534. Per mezzo di questo teorema possiamo in

primo

primo luogo comporre insieme quante si siano potenze AC, AD, AE, che tirano il punto A, ed ecco come. Ponganfi primieramente nei loro termini altrettanti pesi eguali; e ritrovisi il comune loro centro di gravità, che sia il punto F. Prolunghisi di poi la AF talmente sino al punto G, che la AG sia tripla della AF; ed io dico, che la potenza composta sia la AG. Per dimostrarlo, sia AB un' altra potenza che equilibrisi colle tre date AC, AD, AE; e per ragion dell'equilibrio la potenza, che si ha colla composizione delle tre AC, AD, AE, dovrà essere eguale, e contraria alla AB. Ma se al punto B pongasi un' altro peso eguale a ciascuno de' tre primi, il comune centro di gravità di tutti quattro i pesi deve essere il punto A. Dunque non solo saranno a dirittura le due AB, AF, ma sarà altresì la AB tripla della AF; e pertanto, facendosi eguali, e contrarie le due AB, AG, sarà AG la potenza, che si ha colla composizione delle tre AC, AD, AE.

535. Possiamo in secondo luogo esaminare ciocchè deve avvenire al punto A, essendo egli tirato da più potenze AB, AC, AD, AE, ed ecco come. Separisi primieramente ad arbitrio una di esse dall'altre, e sia la AB; indi le rimanenti AC, AD, AE componganfi insieme, e sia AG la potenza, che si ha colla loro composizione. Se adunque le due AB, AG siano eguali, e contrarie; il punto A sarà tirato egualmente per ogni lato, ed in conseguenza rimarrà egli fermo, ed immobile. Ma se le due AB, AG siano contrarie, ma non già eguali; in tal caso il punto A si muoverà con velocità proporzionale alla loro differenza, e colla direzione della potenza maggiore. Ed in fine, se le due AB, AG non siano contrarie, ma contengano un qualche angolo; si muoverà il punto A per la diagonale del parallelogrammo formato colle stesse due, e la velocità del suo moto corrisponderà in proporzione alla lunghezza della medesima diagonale.

536.

536. Possiamo finalmente dimostrare un'altro teorema speciale, e si è, che per potersi equilibrare tra loro la tre potenze AB, AC, AD, che tirano il punto A, primieramente le loro direzioni debbono essere in un medesimo piano, ed indi il centro di gravità del triangolo BCD formato colle rette, che congiungono i loro estremi, deve essere il punto A. In fatti secondo il teorema generale non possono essere in equilibrio le tre potenze AB, AC, AD, se il punto A non sia il centro di gravità di tre pesi eguali situati ne' punti B, C, D. Ma perchè ciò possa avvenire, primieramente la AB deve incontrarsi prolungata colla CD, indi deve dividerla per metà in E, e finalmente la stessa AB deve essere dupla della AE. Dunque per potersi dar luogo all' equilibrio, non solo la AB dee ritrovarsi nel medesimo piano coll'altre due AC, AD, ma bisogna altresì, che il centro di gravità del triangolo BCD sia il punto A.

Fig. 93.

537. Ma in un' altra maniera ancora può indagarsi l' equilibrio tra le tre potenze AB, AC, AD, che tirano il punto A; e si è, se essendo le loro direzioni in un medesimo piano, sia ciascuna di esse proporzionale al seno dell' angolo contenuto dall' altre due. Compiscasi perciò il parallelogrammo ACFD, ed essendo i tre angoli ACF, AFC, CAF complimenti a due retti degli altri tre CAD, BAD, BAC, avranno così gli uni, come gli altri gli stessi seni. Ma per ragion del triangolo ACF, i di cui lati sono eguali alle tre rette, che ci additano le potenze, la prima potenza AB corrisponde in proporzione al seno dell' angolo ACF, la seconda AC al seno dell' angolo AFC, e la terza AD al seno dell'angolo CAF. Dunque corrisponderà altresì in proporzione la prima AB al seno dell'angolo CAD, la seconda AC al seno dell' angolo BAD, e la terza AD al seno dell' angolo BAC.

538. Esaminato l' equilibrio delle potenze, che

tira-

tirano a se un medesimo punto, fingiamo ora, che la BCD sia la lunghezza di un qualche corpo rigido, ed inflessibile, a cui applichinsi più potenze, come BE, CF, DG, che la tirino verso un medesimo lato con direzioni esistenti in un' istesso piano. Se adunque le loro direzioni s'incontrino prolungate in un medesimo punto, sarà tirata da esse la retta BCD, come sarebbe tirato quel punto. Onde tuttavia col metodo esposto potrà definirsi la potenza, che si ha colla loro composizione. Non incontrandosi poi le loro direzioni in un medesimo punto, prendasi nel piano di esse dall'altro lato un punto A ad arbitrio, e tirinsi alla retta BCD le parallele EH, FI, GL, che vadansi ad incontrare colle rette AB, AC, AD prolungate ne' punti H, I, L. E siccome può risolversi la prima potenza BE nelle due BH, EH, la seconda CF nelle due CI, FI, e la terza DG nelle due DL, GL; così, se MN sia la potenza composta dalle tre convergenti BH, CI, DL, ed NO la potenza composta dalle tre parallele EH, FI, GL, sarà MO la potenza, che si ha colla composizione delle tre date BE, CF, DG. *Fig.* 94.

539. Quindi si avrà l'equilibrio tra le potenze BE, CF, DG, che tirano verso un medesimo lato la retta BCD, o se questa stessa retta sia tirata verso il lato opposto da una potenza eguale, contraria alla MO, o pure se nel punto M pongasi un sostegno, che faccia le veci di quest'altra potenza. In ambidue i casi intanto egli è facile il dimostrare, che se moltiplichinsi le potenze per le distanze delle loro direzioni dal punto M, i prodotti nati dalle due BE, CF, che sono da una parte, siano eguali al prodotto nato dalla DG, che ritrovasi dall' altra parte. Si abbassino perciò le perpendicolari Mr, Ms, Bt sulle rette BH, BE, EH; e facendosi i due triangoli BMr, BMs equiangoli cogli altri due BHt, BEt, le due ragioni di Mr a BM, e di BM ad Ms saranno eguali all' altre due ragioni di Bt a BH, e di BE a Bt. Quindi la ragione

gione di Mr ad Ms, che si compone dalle prime due, sarà eziandio eguale alla ragione di BE a BH, che si compone dall' altre due; e pertanto i prodotti delle due BH, BE nelle loro distanze Mr, Ms dal punto M saranno tra loro eguali.

540. In una maniera consimile dimostreremo, che siano eguali tra loro, così i prodotti delle due CI, CF per le loro distanze dal punto M, come i prodotti delle due DL, DG per le loro distanze dal medesimo punto. Onde basterà far vedere, che i prodotti delle due BH, CI per le loro distanze dal punto M siano eguali al prodotto della DL per la sua distanza dallo stesso punto. Perciò risolvansi come sopra le potenze BE, CF, DG così nelle parallele EH, FI, GL, come nelle convergenti BH, CI, DL. E poichè le potenze parallele niente conferiscono in tirare la retta BCD, perciò sarà tirata questa retta dalle sole potenze convergenti. Onde non potranno equilibrarsi tra loro le potenze BE, CF, DG, se non siano altresì in equilibrio le loro convergenti BH, CI, DL, le quali compongono insieme la potenza MN, la di cui direzione passa prolungata per lo punto A.

541. Si applichino ora al punto A le potenze convergenti BH, CI, DL secondo le proprie loro direzioni; e siano Ah, Ai, Al. Essendo adunque AM la direzione della potenza, che si ha colla loro composizione; nella stessa AM dovrà ritrovarsi il comune centro di gravità di altrettanti pesi eguali posti nei punti h, i, l. Onde siccome le distanze dei punti h; ed i dalla AM debbono essere eguali alla distanza del punto l dalla stessa AM; così i prodotti della AM per le prime distanze saranno eziandio eguali al prodotto della medesima AM per l' altra distanza. Ma i primi prodotti sono eguali a quei, che si hanno con moltiplicare le potenze Ah, Ai per le distanze delle loro direzioni dal punto M, e l' altro prodotto è eguale a quello, che si ha con moltiplicare la potenza

tenza Al per la distanza della sua direzione dal medesimo punto. Dunque i prodotti delle potenze BH, CI per le distanze delle loro direzioni dal punto M saranno parimente eguali al prodotto della potenza DL per la distanza della sua direzione dallo stesso punto (127).

XV.

Dell' equilibrio di più potenze applicate ad un corpo di sua natura pieghievole.

542. ESamineremo ora l' altro caso; quando il corpo tirato da più potenze è di sua natura pieghevole. Fingiamo perciò, che la BCD sia la lunghezza di una corda, o di altro corpo consimile, la quale sia attaccata coi suoi termini B, e D a due punti fissi, ed immobili. Applichisi primieramente ad un punto di essa C la sola potenza CE, da cui le porzioni CB, CD siano talmente tese, che si spezzino tendendosi di vantaggio. E siccome impiegasi l' azione di questa potenza in tendere le porzioni della corda CB, CD, le quali perciò dispongonsi in modo, che contengono insieme un qualche angolo; così non è egli da porsi in dubbio, che resistono alla medesima le forze, che colla coesione delle loro parti esercitano le stesse porzioni. *Fig. 95.*

543. Quindi considerando il punto C come tirato da tre potenze, che agiscono colle direzioni CB, CD, CE; ed equilibransi tra esso loro; sarà la resistenza della porzione CB alla resistenza della porzione CD, come il seno dell'angolo DCE al seno dell' angolo BCE. Onde le resistenze delle due porzioni CB, CD non possono essere tra loro eguali, se non siano eguali altresì i due angoli BCE, DCE; e pertanto se la direzione della potenza CE non divida per metà l'angolo BCD contenuto dalle due porzioni della corda. Conforme poi la potenza CD deve essere alla resistenza di ciascuna delle due porzioni,

come

come il ſeno dell' angolo BCD al ſeno dell' angolo oppoſto alla porzione, di cui ſi tratta; così nella ſuppoſizione di eſſere eguali le reſiſtenze delle due porzioni, la ſteſſa potenza ſarà a ciaſcuna delle due reſiſtenze, come il ſeno dell' angolo BCD al ſeno della ſua metà.

Fig. 96. 544. Applichiſi in appreſſo alla ſteſſa BCD un' altra potenza FG; che la tiri a ſe colla medeſima legge della prima CE. E conſiderando la ſola porzione di eſſa CF, che per la ſua tenſione può riguardarſi come una retta rigida; chiaro ſi è, che ella ſia tirata per un lato dalle due potenze CE, FG, e per l' altro da due altre potenze, che agiſcono colle direzioni CB, FD. Quindi ſiccome la tirano le due prime, come ſe tiraſſero il punto A, in cui incontranſi prolungate le loro direzioni; così la tireranno le altre due come tiraſſero il punto H, in cui le direzioni di eſſe prolungate parimente s' incontrano. Onde ſe voglianſi le due potenze, che riſultano dalla compoſizione così dell' une, come dell' altre, non è egli da porſi in dubbio, che paſſerà per lo punto A la direzione della prima, e per lo punto H la direzione della ſeconda; e pertanto, perchè queſte due potenze per ragion dell' equilibrio debbono eſſere eguali, e contrarie, ſarà AH la direzione così dell' una, come dell' altra.

545. Conſideriſi di poi ſeparatamente così la porzione BCF, come la porzione CFD; e ſi dimoſtrerà come ſopra, che non poſſano eſſere eguali le reſiſtenze delle loro porzioni BC, CF, FD, ſe non dividaſi egualmente così l' angolo BCF dalla direzione della potenza CE, come l'angolo CFD dalla direzione della potenza FG. E poichè la potenza, che ſi ha colla compoſizione delle due CE, FG, ed agiſce colla direzione AH, tira la BCFD, come ſe applicata al punto H tiraſſe la BHD; chiaro ſi è, che opponganſi ad eſſa le ſole reſiſtenze delle due porzioni eſtreme BC, DF, le quali agi-

ſcono

ſcono colle direzioni BH, DH. Onde ſiccome queſte reſiſtenze debbono eſſere tra loro, come i ſeni dei due angoli AHD, AHB; così non potranno le medeſime eſſere eguali, ſe la AH non divida egualmente l'angolo BHD contento dalle due porzioni eſtreme BC, DF.

546. Applichiſi inoltre alla medeſima BCD una terza potenza, che ſia IL. E conſiderando primieramente la ſola porzione BCFI, che è tirata dalle due potenze CE, FG; dimoſtreremo come ſopra, che incontrandoſi prolungate le due CE, FG nel punto M, e le due BC, IF nel punto N, ſia MN la direzione della potenza, che ſi ha colla compoſizione delle due CE, FG. Se poi la NO ſia la potenza compoſta, che agiſce con quella direzione; chiaro ſi è, che ella tirerà la porzione BCFI, come ſe applicata al punto N tiraſſe la BNI. Quindi le tre potenze CE, FG, IL tireranno la BCFID nella ſteſſa guiſa, che le due NO, IL tirano la BNID. Onde ſe incontrinſi prolungate le due NO, IL nel punto A, e le due BN, DI nel punto H; ſarà AH la direzione della potenza, che ſi ha colla compoſizione così delle due NO, IL, come delle tre CE, FG, IL; *Fig. 97.*

547. Queſta potenza intanto, che equivale alle tre CE, FG, IL, ed agiſce colla direzione AH, tira la BCFID, come ſe applicata al punto H tiraſſe la BHD. Quindi ſi opporranno ad eſſa le ſole reſiſtenze delle due porzioni eſtreme BC, DI, le quali agiſcono colle direzioni BH, DH. Onde ſiccome queſte reſiſtenze debbono eſſere tra loro, come i ſeni dei due angoli AHD, AHB; così non potranno le medeſime eſſere eguali, ſe la AH non divida egualmente l'angolo BHD contenuto dalle due porzioni eſtreme BC, DI. Ed in fine affinchè ſiano eguali le reſiſtenze così delle porzioni eſtreme BC, DI, come dell'altre due di mezzo CF, IF; ſi dimoſtrerà come ſopra, che ciaſcuno dei tre angoli BCF, CFI, FID debba eſſere diviſo

ſo

so per metà dalla direzione della potenza, che ritrovasi applicata al suo vertice.

548. Or qualunque siasi il numero delle potenze, che tirano a sè la BCD; chiaro si è, che con comporle insieme con ordine, cioè primieramente la prima colla seconda, indi la composta di esse colla terza, e così di mano in mano sino all' ultima, resterà determinata finalmente la direzione della potenza, che si ha colla composizione di tutte. Conforme poi può ella riguardarsi come una direzione mezza delle stesse potenze; così si ritroverà, che la medesima debba sempre passare per lo punto, in cui incontransi prolungate le due porzioni estreme della BCD. Ed in fine, siccome per poter essere eguali le resistenze di queste due porzioni la stessa mezza direzione dee dividere per metà l' angolo formato col loro incontro; così non potranno essere eguali le resistenze di tutte le porzioni della BCD, se ciascuno degli angoli, che le medesime formano insieme, non sia diviso egualmente dalla direzione della potenza, che ritrovasi applicata al suo vertice.

549. Del rimanente, siccome con aumentarsi all' *Fig.* 98. infinito il numero delle potenze, che tirano la BCD, la medesima diventa una linea curva; così con prolungarsi a dirittura le due estreme porzioni di essa, contigue ai punti B, e D, si avranno le rette, che toccano la curva in detti punti. Quindi se BH, DH siano queste tangenti, la mezza direzione dell' infinite potenze, che tirano la BCD, passerà per H, che è il punto del loro incontro. E poichè alle stesse infinite potenze, o pure a quella, che da esse si compone, oppongonsi le resistenze delle riferite due porzioni estreme, le quali agiscono colle direzioni delle rispettive tangenti; perciò non potranno queste resistenze essere tra loro eguali, se la stessa mezza direzione non divida per metà l'angolo BHD contenuto dalle due tangenti. Ed in fine, affinchè siano eguali le resistenze di tutti i mi-

nimi

nimi elementi della BCD, egli è neceſſario, che la BCD ſia ſegata ad angoli retti dalla direzione di ciaſcuna potenza.

550. Per poco poi, che ſi voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che qualora le infinite potenze, per mezzo di cui incurvaſi la BCD, agiſcono con direzioni perpendicolari alla ſteſſa curva, debba eſſere altresì ciaſcuna di eſſe proporzionale al ſeno dell'angolo, che ci addita la curvatura della curva in quel luogo, ove ritrovaſi applicata la ſteſſa potenza. Onde ſe mai le infinite potenze ſiano tutte tra loro eguali, la curva, in cui piegaſi la BCD, dovrà eſſere di egual curvatura da per tutto; e perciò ſarà ella circonferenza di cerchio, nel di cui centro s' incontreranno prolungate le direzioni delle ſteſſe potenze: ſiccome in effetto quelle picciole ampolle, che formanſi da fanciulli con ſapone ſciolto nell' acqua, non per altra ragione veggonſi eſſere perfettamente rotonde, ſe non perchè l'aere racchiuſo dentro di eſſe colla ſua forza elaſtica preme egualmente, e ad angoli retti le minime loro particelle.

551. Ma conforme, eſſendo diſuguali tra loro le infinite potenze, che tirano la BCD perpendicolarmente, deve eſſere altra l'indole della curva, in cui la piegano; così potrà ella determinarſi facilmente, ſe mai ſia nota l' attività di ciaſcuna potenza. Fingiamo perciò, che BCD ſia la curva, *Fig. 99.* in cui coll'azione del vento piegaſi la vela di una nave. E quantunque muovaſi il vento colla direzione della AC, che è l'aſſe della curva; nientedimeno le preſſioni, che egli eſercita contra i minimi ſuoi elementi, ſi fanno per rette perpendicolari agli ſteſſi elementi. Se poi M*m* ſia un dato elemento della curva, dimoſtreremo a ſuo luogo, che eſſendo OM parallela alla AC, la preſſione del vento contra detto elemento ſia come il quadrato del ſeno dell' angolo OM*m*. Ma eſ-

sendo MT la retta, che tocca la curva nel punto M, la stessa pressione deve essere altresì come il seno dell' angolo TMm. Dunque il quadrato di quel primo seno sarà nella semplice ragione di questo altro.

552. Sia ora MN l' ordinata della curva corrispondente al punto M, e siano ancora mo, mr perperdicolari sulle due MN, MT. Se dunque prendasi la Mm per raggio, sarà Mo il seno dell' angolo OMm, ed mr il seno dell' angolo TMm; e perciò il quadrato della Mo sarà nella semplice ragione della mr. Quindi se sull' asse AC alzisi la perpendicolare CE di lunghezza tale, che il quadrato della Mo sia eguale al rettangolo delle due CE, mr; avrà luogo questa uguaglianza da per tutto, e sarà CE ad Mo, come Mo ad mr, o pure in ragion composta di Mo ad Mm, e di Mm ad mr. Ma tirate le due EF, Ef parallele all' altre due MT, Mt, ed abbassata sulla EF la perpendicolare fs, si fanno equiangoli così i due triangoli Mom, CEf, come gli altri due Mmr, Efs. Dunque essendo Mo ad Mm, come CE ad Ef, ed Mm ad mr, come Ef ad fs; sarà CE ad Mo, come CE ad fs, ed in conseguenza le due Mo, fs saranno tra loro eguali.

553. Per farsi poi equiangoli eziandio i due triangoli Mom, Ffs; chiaro si è, che non possono le due Mo, fs essere tra loro eguali, se non siano eguali altresì l' altre due Mm, Ff. Onde perchè quest' uguaglianza deve aver luogo da per tutto, sarà l' arco CM eguale alla CF; e perciò riguardando la costante CE come parametro della curva, la sua indole sarà tale, che il parametro CE sia a qualsisia arco CM, come l'ordinata corrispondente MN alla porzione dell' asse NT, che sostiene la tangente MT. Ed in fatti, essendosi dimostrato l' arco CM eguale alla CF, avrà il parametro CE la stessa ragione alla CF, che all'arco CM.

Ma

Ma per essere i due triangoli CEF, NMT tra loro equiangoli, la ragione delle due CE, CF è eguale alla ragione dell'altre due MN, NT. Dunque il parametro CE sarà all'arco CM, come l'ordinata MN alla sottangente NT.

554. Essendo così, egli è facile il dimostrare, che la curva, in cui piegasi la vela di una nave spinta dal vento sia la stessa con quella, in cui per l'attività del suo peso incurvasi la corda BCD, *Fig.*100.
che attaccata coi suoi termini B, e D a due punti fissi, ed immobili pende liberamente. Sia perciò C il punto più basso della corda; e considerando la verticale CA come asse della curva, avremo la tangente nel vertice C con alzare sull'asse CA la perpendicolare CH. Quindi se MH sia la retta, che tocca la stessa curva in un altro punto M, passerà per lo punto H, in cui incontransi le due CH, MH, la mezza direzione delle infinite potenze, che tirano la porzione CM. Onde siccome queste infinite potenze sono i piccioli pesi dei minimi elementi della stessa porzione; così avremo la potenza, che le medesime compongono insieme, con attaccare al punto H il peso P, che sia eguale al peso della porzione CM.

555. Si abbassi ora sull'asse CA l'ordinata MN, e prolunghisi ancora la MH sino a che s'incontri col medesimo asse nel punto T. Equilibrandosi adunque il peso P colle resistenze, che esercita la corda nei punti C, ed M; sarà la resistenza in C al peso P, come il seno dell'angolo MHP al seno dell'angolo CHM. Ma questi seni sono gli stessi coi due degli angoli THP, CHT, i quali sono tra loro nella ragione di CH a CT, o pure di MN ad NT. Dunque la resistenza in C al peso P sarà eziandio in questa stessa ragione. Onde se la resistenza in C, che rimane sempre la stessa, esprimasi per la retta costante CE, la quale perciò potrà riguardarsi come parametro della curva;

 ed

ed il peso P, che uguaglia quello della porzione CM, esprimasi per la lunghezza della stessa porzione, a cui ritrovasi essere sempre proporzionale; sarà il parametro CE all'arco CM, come l'ordinata MN alla sottangente NT (128).

XVI.

Della resistenza, che i gravi sospesi verticalmente oppongono al loro peso.

556. PEr non tralasciare cosa alcuna, che meriti di essere esaminata, tratteremo finalmente della resistenza, che i gravi sospesi oppongono al proprio loro peso. Ed in vero tenendosi un grave sospeso verticalmente, siccome le parti inferiori coll'attività del loro peso cercano di distaccarsi dall'altre superiori; così ciò, che le trattiene, e si oppone alla loro separazione, si è la forza della coesione, che unisce insieme l'une coll'altre. Or essendo il grave egualmente denso da per tutto, non è egli da porsi in dubbio, che questa forza sia della stessa attività in tutte le minime particelle del grave. Onde siccome in qualsisia luogo deve ella corrispondere in proporzione al numero delle particelle, che ritrovansi nella sezione orizzontale fatta in quel luogo; così la sezione, e la forza saranno da per tutto proporzionali tra loro. E perciò può stabilirsi su di ciò il seguente teorema generale, cioè, che un grave egualmente denso da per tutto, e sospeso verticalmente resiste in ogni luogo al peso delle parti inferiori con forza proporzionale alla sezione orizzontale fatta nel medesimo luogo.

557. Quindi un grave prismatico, ovvero cilindrico, che sospeso verticalmente non si spezza per l'attività del suo peso, neppure dovrà spezzarsi aumentandosi la sua base; poichè in quella stessa ragione, in cui aumentasi il peso, che ritrovasi

sotto

sotto qualsisia sezione orizzontale del grave, si aumenterà altresì la sezione medesima, a cui la resistenza corrisponde in proporzione. Ma non avviene così, se facciasi maggiore così la base, come la lunghezza del riferito grave; poichè la resistenza aumentasi nella sola ragione della base, quandocchè il peso, a cui ella si oppone, diventa maggiore non solo per l'aumento della base, ma eziandio per quello della lunghezza. Onde siccome due gravi prismatici, ovvero cilindrici, che essendo della stessa materia sono altresì di egual lunghezza, debbono essere egualmente resistenti; così quello dei due sarà meno resistente, che ritrovasi avere lunghezza maggiore.

558. Affinchè poi un grave sospeso verticalmente sia di egual resistenza da per tutto, chiaro si è, che la sua figura debba essere tale, che la sezione orizzontale fatta in qualsisia luogo corrisponda in proporzione alla parte dello stesso grave, che giace sotto la sezione. Quindi un grave prismatico ovvero cilindrico non potrà essere di questa indole per la ragione, che la sezione orizzontale è la stessa da per tutto, quandocchè la porzione, che ritrovasi sotto la sezione, si diminuisce con farsi la sezione più bassa, e si aumenta con farsi al contrario più alta. Anzi per questa stessa ragione, se mai un grave dotato di tal figura sia talmente lungo, che non possa sostenere il suo proprio peso; dovrà egli spezzarsi nella parte sua suprema, cioè nel luogo, da cui egli incomincia a pendere liberamente. Ed in fine, se vogliasi la massima lunghezza, a cui può estendersi lo stesso grave senza spezzarsi; primieramente dovrà determinarsi il massimo peso, che può egli sostenere attaccato alla sua estremità; ed indi dovrà distendersi il grave fino a che il peso della parte aggiunta uguagli quel massimo peso.

559. Siccome poi un grave sospeso verticalmente sarà di egual resistenza da per tutto, quante vol-

te la sezione orizzontale fatta in qualsisia luogo corrisponde in proporzione alla porzione dello stesso grave, che giace sotto la sezione; così si avrà un grave di questa indole colla rivoluzione intorno al suo asse di quella curva, che i moderni Geometri chiamano curva logaritmica, ed in cui prendendosi le ascisse in progressione arimmetica, ritrovansi essere le ordinate corrispondenti in progressione geo-
*Fig.*101. metrica. Per dimostrarlo sia CMD la curva logaritmica, che abbia per suo asse la AB. Se adunque su di questo asse prendansi le ascisse A1, A2, A3, A4, A5, &c. in progressione arimmetica, cosicchè siano egualmente differenti tra loro; le ordinate corrispondenti M1, M2, M3, M4, M5, &c. saranno in progressione geometrica; e quella stessa ragione, in cui sta la prima M1 alla seconda M2, avrà altresì la seconda M2 alla terza M3, la terza M3 alla quarta M4, la quarta M4 alla quinta M5, e così dell'altre.

560. Quindi la natura della curva logaritmica propriamente si è, che le ordinate prese in egual distanza tra loro formino sempre una progressione geometrica. E poichè dopo due qualisisiano rette date può sempre ritrovarsi una terza proporzionale, che similmente sarà data; chiaro si è, che la stessa logaritmica debba estendersi all' infinito, così dalla parte, verso dove aumentansi le sue ordinate, come dall' altra, verso dove minoransi. Onde siccome ella da un lato dee sempre più discostarsi dal suo asse, e dall' altro sempre più ad esso avvicinarsi; così dovrà aversi il medesimo asse come asintoto della logaritmica, cioè come una retta, a cui accostasi continuamente la curva, senza giammai incontrarla. Se poi prendansi quattro ordinate, non già egualmente distanti tra loro, ma bensì con legge tale, che la distanza tra le prime due sia eguale alla distanza tra l'altre due; pure la ragione dell' une sarà eguale alla ragione dell'altre.

561.

561. Essendo così, può dimostrarsi primieramente intorno alla logaritmica, che la porzione dell' asse, da cui è sostenuta qualsisia sua tangente, sia da per tutto della stessa lunghezza. Siano perciò MS, PT due rette, che tocchino ne' punti M; e P la logaritmica CMD, e s' incontrino coll' asse AB ne' punti S, e T; io dico, che essendo MN, PQ le ordinate abbassate sull' asse dai due punti del contatto, siano eguali le porzioni NS, QT, che sostengono le due tangenti. Per dimostrarlo fingiamo, che N*n*, Q*q* siano due porzioni dell' asse infinitamente picciole, ed eguali tra loro; ed essendo *mn*, *pq* le ordinate corrispondenti ai punti *n*, e *q*, sarà MN ad *mn*, come PQ a *pq*. Ma potendosi riguardare i due archetti M*m*, P*p* come porzioni delle tangenti MS, PT, chiaro si è, che le due MN, *mn* siano nella ragione di NS ad *n*S, e le altre due PQ, *pq* nella ragione di QT a *q*T. Dunque dovendo essere NS ad *n*S, come QT a *q*T, sarà altresì come NS ad N*n*, così QT a Q*q*; e pertanto conforme sono eguali le due N*n*, Q*q*, così saranno eguali parimente le due NS, QT. *Fig.* 102.

562. Può dimostrarsi in secondo luogo, che lo spazio infinitamente lungo BACD tagliato da un' ordinata qualsivoglia CA verso quella parte, ove la logaritmica sempre più si avvicina al suo asse, sia eguale al rettangolo fatto dalla stessa ordinata CA nella sottotangente NS. Tirisi perciò la *mo* parallela all' asse AB; ed essendo equiangoli i due triangoli MNS, M*om*, sarà MN ad NS, come M*o* ad *om*, ovvero N*n*. Onde il rettangolo delle due MN, N*n*, non differente dal picciolo trapezio MN*nm*, sarà eguale al rettangolo dell' altre due NS, M*o*; ed avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà l' intero spazio BACD eguale al rettangolo, che si fa dall' intiera ordinata CA nella sottotangente NS, che si è dimostrata essere da per tutto costante. Per la stessa ragione poi lo spazio BQPD tagliato dall' altra ordinata PQ sarà

eguale al rettangolo fatto dalla PQ nella ſteſſa ſottotangente : donde egli è facile il ricavarne, che i due ſpazj BACD, BQPD ſiano tra loro, come le ordinate CA, PQ, a cui ſi terminano.

563. Può dimoſtrarſi in terzo luogo, che ſe E ſia il centro di gravità dello ſpazio infinitamente lungo BACD, debba eſſere eguale alla ſottotangente NS la ſua diſtanza EF dall' ordinata CA, ed alla quarta parte di queſta ordinata la ſua diſtanza EG dall' aſſe AB. In fatti eſſendo il picciolo trapezio MN*nm* eguale al rettangolo delle due M*o*, NS; ſi avrà il ſolido delle tre AN, M*o*, NS con moltiplicarlo per la diſtanza del ſuo centro di gravità dalla CA, e la metà del ſolido dell'altre tre MN, M*o*, NS con moltiplicarlo per la diſtanza dello ſteſſo centro dalla AB. Onde ſi ritroverà, che la ſomma de' prodotti conſimili al primo ſia eguale al prodotto dello ſpazio BACD per la NS, e la ſomma de' prodotti conſimili al ſecondo ſia eguale al prodotto del medeſimo ſpazio per la quarta parte della CA. Ma le ſteſſe ſomme debbono eſſere eguali ai prodotti dello ſpazio BACD per le due EF, EG. Dunque ſarà la EF eguale alla NS, e la EG eguale alla quarta parte della CA.

564. Può dimoſtrarſi finalmente, che il ſolido deſcritto colla rivoluzione dello ſpazio infinitamente lungo BACD intorno all'aſſe AB ſia eguale alla metà del cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto coll'ordinata AC come raggio, e per altezza la ſottotangente NS. In fatti ſiccome il riferito cerchio ſi ha con moltiplicare la ſua circonferenza per la metà del raggio CA, così la picciola corona del medeſimo cerchio corriſpondente alla porzione del raggio C*t* ſi avrà con moltiplicare la ſteſſa circonferenza per la C*t*. Quindi il cerchio ſarà alla picciola corona, come la metà della CA alla C*t*, o pure come la metà della NS alla A*a*; onde il prodotto del cerchio per la A*a* ſarà eguale

al

al prodotto della picciola corona per la metà della NS; ed avendo luogo da per tutto la ſteſſa dimoſtrazione, ſarà il ſolido formato colla rivoluzione dello ſpazio BACD intorno all'aſſe AB eguale alla metà del cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto col raggio CA, e per altezza la ſottotangente NS.

565. La ſteſſa verità può dimoſtrarſi ancora in altra guiſa, ed ecco come. Sia E il centro di gravità dello ſpazio infinitamente lungo BACD. E poichè la ſua diſtanza EG dall'aſſe AB ſi è dimoſtrata eguale alla quarta parte della CA; ſi porterà il centro E nella rivoluzione dello ſpazio per una circonferenza di cerchio, che ſarà la quarta parte di quella, che ſi deſcrive col raggio CA. Onde il ſolido, che ſi genera, ſarà eguale al prodotto dello ſpazio BACD, o pure del rettangolo delle due CA, NS per la quarta parte della riferita circonferenza. Ma moltiplicando il raggio CA per la quarta parte della ſua circonferenza ſi ha la metà del cerchio deſcritto collo ſteſſo raggio. Dunque il ſolido, che ſi genera colla rivoluzione dello ſpazio infinitamente lungo intorno all'aſſe AB ſarà eguale alla metà del cilindro, che ha per baſe il ſuddetto cerchio, e per altezza la ſottotangente NS.

566. In una maniera conſimile dimoſtreremo altresì, che il ſolido formato colla rivoluzione dell'altro ſpazio infinitamente lungo BQPD intorno all'aſſe AB ſia eguale alla metà del cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto coll'ordinata PQ come raggio, e per altezza la ſteſſa ſottotangente: dal che egli è facile il ricavarne, che i ſolidi formati colla rivoluzione dei due ſpazj BACD, BQPD intorno all'aſſe AB ſiano tra loro, come i cerchi, che hanno per raggi le due ordinate CA, PQ. Ed eſſendo così, non è egli da porſi in dubbio, che queſti ſteſſi ſolidi ſoſpeſi verticalmente debbano eſſere di egual reſiſtenza da per tutto; poichè ovunque

que facciasi in essi la sezione orizzontale, sarà la porzione, che giace sotto la sezione, proporzionale alla sezione medesima. Se poi sugli stessi spazj BACD, BQPD elevinsi solidi, che si terminino ad altri spazj simili, eguali, e paralleli ai primi; si ritroverà, che ancora questi altri solidi sospesi verticalmente siano di egual resistenza per tutta la loro lunghezza.

567. Del rimanente egli è quì da notarsi, che sebbene un solido prismatico ovvero cilindrico sospeso verticalmente non sia di egual resistenza da per tutto; nientedimeno se il medesimo voglia considerarsi come privo della sua gravità, e colla forza, che deriva dalla coesione delle sue parti, debba egli resistere ad un dato peso attaccato alla sua estremità, in tal caso la sua resistenza sarà la stessa per tutta la sua lunghezza. In fatti siccome è dato il peso, che colla sua attività si sforza di spezzare il solido in qualsisia sua sezione; così è data altresì la forza, che resiste al dato peso. Onde essendo in tutte le sezioni il peso, e la forza proporzionali tra loro, per necessità il solido dovrà essere egualmente resistente da per tutto. Per la stessa ragione poi due solidi prismatici ovvero cilindrici privi di gravità resisteranno egualmente a due pesi attaccati ai loro termini, sempre quando le loro basi sono nella stessa ragione coi pesi, che agiscono contro di essi (129).

XVII.

XVII.

Della resistenza, che i gravi sospesi orizzontalmente oppongono al loro peso.

568. Quantunque un grave sospeso orizzontalmente sia eziandio soggetto a spezzarsi per l'attività del suo proprio peso; nientedimeno in quest' altra sua posizione il peso, e la resistenza agiscono tra esso loro per mezzo di una leva; onde si è, che dee giudicarsi del loro equilibrio in altra guisa. Fingiamo perciò, che ADE sia il grave, il quale ficcato con uno de' suoi estremi dentro di un qualche muro rimane sospeso orizzontalmente. E se mai prevalendo l'attività del suo peso, si spezzi egli presso la sezione verticale ABC; chiaro si è, che il medesimo spezzandosi si aggirerà intorno alla retta orizzontale BC, che è la base della riferita sezione. Onde conforme la stessa BC dee riguardarsi come il sostegno della leva, per mezzo di cui il peso, e la resistenza agiscono tra esso loro; così se nel piano inferiore del grave sia F il punto, a cui corrisponde il suo centro di gravità; e nella sezione verticale ABC il punto, in cui si riunisce la sua resistenza, sia G; avremo le due braccia della leva con abbassare sulla BC le perpendicolari FH, GH. *Fig.* 103.

569. Or secondo è stato avvertito di sopra, qualora il grave è egualmente denso da per tutto, l'attività della coesione deve essere la stessa in tutte le sue parti; e perciò spandendosi egualmente nella sezione ABC la forza, con cui ella resiste al peso del grave, si riunirà la medesima nel centro di gravità della stessa sezione. Quindi siccome il momento della forza, che tende a spezzare il grave ADE presso la sezione verticale ABC, si ha con moltiplicare il peso del grave per la distanza del suo centro di gravità dal piano della sezione; così il momento dell' altra forza, con cui la sezio-

ne

ne ABC impedisce, che il grave non si spezzi, si avrà con moltiplicare la medesima sezione per la distanza del suo centro di gravità dalla sua base BC. Onde conforme si ha l'equilibrio, sempre quando i riferiti due prodotti, o siano momenti sono tra loro eguali; così sarà il grave di egual resistenza da per tutto, quantevolte gli stessi momenti in qualsisia sua sezione verticale sono tra di essi in data regione.

570. Essendo così, se il grave sia prismatico, ovvero cilindrico, chiaro si è, che sospeso orizzontalmente non possa egli essere di egual resistenza da per tutto; e ciò per la ragione, che il momento della resistenza in ogni sua sezione verticale ritrovasi essere sempre lo stesso, quandocchè con diminuirsi la lunghezza del grave si diminuisce il momento del peso, e perchè minorasi il peso medesimo, e perchè la distanza del suo centro di gravità dal piano della sezione si fa eziandio minore. Anzi il riferito grave neppure potrà essere egualmente resistente per tutta la sua lunghezza, se considerato come privo di gravità debba egli resistere colla forza, che deriva dalla coesione delle sue parti, ad un dato peso attaccato alla sua estremità. Imperocchè sebbene sia dato il peso, che tende a spezzarlo in qualsisia sua sezione verticale; nientedimeno il di lui momento tuttavia si diminuisce con avvicinarsi la sezione al medesimo peso; onde si è, che il momento della resistenza, ed il momento del peso non saranno da per tutto in data ragione tra loro.

Fig. 104. 571. Intanto se AD sia una parabola, che abbia per vertice principale il punto D, e per tangente a questo vertice la retta BD; colla sua rivoluzione intorno alla riferita tangente avremo un solido, che sospeso orizzontalmente sarà da per tutto di egual resistenza. Prendasi perciò nella parabola un punto M ad arbitrio, da cui si abbassi sulla BD la perpendipendicolare MN. E poichè colla sezione verticale fatta in quel punto generasi un cerchio, che ha per raggio la MN; chiaro si è, che il momento della resistenza, che si esercita in detta sezione, sia nella triplicata ragione della MN, o pure nella sestuplicata della DN. Ma essendo la porzione del solido corrispondente alla medesima sezione nella quintuplicata ragione della DN, ed essendo inoltre la distanza del suo centro di gravità dal piano della stessa sezione nella semplice ragione della DN, ancora il momento del peso della riferita porzione deve essere nella sestuplicata ragione della DN. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso saranno proporzionali tra loro; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione; sarà il solido, di cui si tratta, egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

572. Se poi sullo spazio parabolico ABD elevisi un solido, che si vada a terminare all'altro spazio *abd* simile, eguale, e parallelo al primo; egli è facile il dimostrare, che ancora questo altro solido sospeso orizzontalmente in modo, che abbia per sua base il rettangolo BD*db*, sia di egual resistenza da per tutto. Prendasi perciò di nuovo nella parabola un punto M ad arbitrio, da cui si abbassi ancora sulla BD la perpendicolare MN. E poichè colla sezione verticale fatta in quel punto producesi il rettangolo MN*nm*, di cui è data la base N*n*; sarà il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, nella duplicata ragione della MN, o pure nella quadruplicata della DN. Ma per essere la la porzione del solido corrispondente alla medesima sezione nella triplicata ragione della DN, e per essere inoltre la distanza del suo centro di gravità dal piano della stessa sezione nella semplice ragione della DN, ancora il momento del peso della riferita porzione viene ad essere nella quadruplicata ragione della DN. Dunque il momento della resisten- *Fig.* 105.

za,

za, ed il momento del peso saranno proporzionali tra loro; e pertanto, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il divisato solido di egual resistenza per tutta la sua lunghezza.

573. Un'altro solido egualmente resistente da per tutto si ha altresì per mezzo dello spazio logarit-
Fig. 102. mico infinitamente lungo BACD; ma conforme deve egli elevarsi su 'l riferito spazio in modo, che si termini ad un'altro spazio simile, eguale, e parallelo al primo; così il medesimo dee sospendersi orizzontalmente con legge tale, che abbia per sua base uno dei due spazj. In fatti se MN sia un'ordinata della logaritmica, e facciasi nel solido una sezione verticale, che corrisponda alla MN; si avrà con essa un rettangolo, la di cui altezza sarà data; onde il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, sarà proporzionale alla MN. Ma alla stessa MN è ancora proporzionale il momento del peso, che ritrovasi nella proporzione del solido corrispondente alla medesima sezione, per essere la distanza del suo centro di gravità dal piano della sezione eguale alla sottotangente della logaritmica, che è da per tutto la stessa. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso saranno proporzionali tra loro; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il riferito solido egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

574. Volendosi poscia considerare il solido, che dee sospendersi orizzontalmente, come privo di gravità, resisterà egli egualmente da per tutto ad un dato peso attaccato alla sua estremità, se abbia
Fig. 106. per sua base un triangolo qualsivoglia, come BDC, e sia elevato su di esso in modo, che si termini ad un'altro triangolo simile, eguale, e parallelo al primo. Tirisi perciò la MN parallela alla BC. E siccome facendosi nel solido una sezione verticale, che corrisponda alla MN, si avrà con essa

un

un rettangolo, la di cui altezza sarà data; così il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, sarà proporzionale alla sua base MN. Ma essendo la DH perpendicolare sulle due BC, MN, chiaro si è, che il momento del peso attaccato al punto D sia proporzionale alla DO. Dunque il momento della resistenza al momento del peso sarà, come MN a DO, o pure come BC a DH; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il divisato solido egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

575. Un solido di questa indole può aversi ancora per mezzo della parabola, ed ecco come. Sia AD la parabola, che abbia per vertice principale il punto D, e per asse la BD. Si abbassi sull'asse l'ordinata AB, ed elevisi sullo spazio ABD un solido, che si vada a terminare ad un' altro spazio *abd* simile, eguale, e parallelo al primo. Io dico, che sospendendosi questo solido orizzontalmente in modo, che abbia per sua base il rettangolo BD*bd*, resisterà egli egualmente da per tutto ad un dato peso attaccato alla sua estremità. Prendasi perciò nella parabola un punto M ad arbitrio; ed essendo la sezione verticale fatta in questo punto il rettangolo MN*nm*, la di cui base N*n* è data, sarà il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, nella duplicata ragione della MN, o pure nella semplice ragione della DN. Ma in questa stessa semplice ragione è altresì il momento del peso. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso saranno proporzionali tra loro; ed in conseguenza, avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il riferito solido egualmente resistente per tutta la sua lunghezza. *Fig.* 107.

576. Se poi la curva AD sia d'indole tale, che i cubi delle sue ordinate perpendicolarmente abbassate sull' asse BD siano, come le ascisse corrispondenti; ancora colla sua rivoluzione intorno all' asse *Fig.* 108.

BD

BD si avrà un solido, che sospeso orizzontalmente, e considerato come privo di gravità resisterà egualmente da per tutto ad un dato peso attaccato alla sua estremità. Prendasi perciò nella curva un punto M ad arbitrio, da cui si abbassi sull' asse BD l' ordinata MN. E poichè colla sezione verticale fatta in quel punto generasi un cerchio, che ha per raggio la MN; chiaro si è, che il momento della resistenza, che esercitasi in detta sezione, sia nella triplicata ragione della MN, o pure nella semplice ragione della DN. Ma in questa stessa semplice ragione è altresì il momento del peso. Dunque il momento della resistenza, ed il momento del peso saranno proporzionali tra loro; e pertanto avendo luogo da per tutto la stessa dimostrazione, sarà il solido, di cui si tratta, egualmente resistente per tutta la sua lunghezza.

577. Or un solido, che si sospende orizzontalmente, può situarsi ancora in modo, che ciascuno de' suoi estremi sia sostenuto da un qualche appoggio; ma in questo caso, siccome il peso totale del solido si riunisce nel suo centro di gravità, così eziandio la resistenza si riunirà nella sezione verticale fatta nello stesso centro; onde si è, che si avrà la resistenza totale, con moltiplicare la riferita sezione per l' intiera lunghezza del solido. Per poco poi, che si voglia riflettere, s'intenderà facilmente, che per avere il momento del peso debba moltiplicarsi il solido per ciascuna delle due rette, che ci additano le distanze del suo centro di gravità dai due appoggi. E poichè, spezzandosi il solido nella sezione verticale, in cui si riunisce la resistenza totale, incomincia egli a spezzarsi dalla parte sua più bassa; perciò neppure sarà egli difficile ad intendersi, che si avrà il momento della resistenza totale con moltiplicarla per la distanza del centro di gravità della sezione dalla parte sua più alta.

578.

578. Se poi il ſolido ſoſpeſo orizzontalmente colla riferita legge voglia conſiderarſi come privo di gravità, ed il medeſimo debba reſiſtere ad un dato peſo attaccato ad uno de' ſuoi punti; tuttavia avrà luogo la ſteſſa teoria, ſe non che la reſiſtenza ſi riunirà nella ſezione verticale fatta nel luogo, donde pende il peſo dato. Giova intanto l' avvertire, che ſiccome per avere il momento del peſo deve egli moltiplicarſi per le due rette, che ci additano le ſue diſtanze dai due appoggi; così con cambiare il punto, a cui attaccaſi il dato peſo, ſi cambierà altresì il momento dello ſteſſo peſo. Ed eſſendo così, non ſi durerà fatica ad intendere, che reſiſterà il ſolido con egual forza al peſo dato, ovunque egli ſi attacchi, ſempre quando la ſua figura è tale, che ciaſcuna ſezione verticale moltiplicata per la diſtanza del ſuo centro di gravità dalla parte ſua più alta ſia in data ragione col rettangolo delle due rette, che ci additano le diſtanze della ſteſſa ſezione dai due appoggi.

579. Del rimanente in un ſolido ſoſpeſo orizzontalmente potrebbe non eſſere vero, che la forza della reſiſtenza ſi riuniſca, e ſi raccolga nel centro di gravità della ſezione, in cui ella ſi eſercita. Suppongaſi perciò, come per altro ſembra molto veriſimile, che i piccioli filamenti della ſezione ſiano di lor natura capaci di diſtenderſi; ed in queſta ſuppoſizione chiaro ſi è, che reſiſteranno gli ſteſſi filamenti coll' intiere loro forze, quantevolte ſi ſaranno diſteſi in modo, che ſi ſpezzino con diſtenderſi di vantaggio. Or per ragion della leva, per mezzo di cui i medeſimi filamenti agiſcono reſiſtendo, chiara coſa ancora ſi è, che non tutti ſi diſtendono egualmente, ma quei bensì ſoffrono diſtenſione maggiore, che maggiormente ſi diſcoſtano dal punto del ſoſtegno. Onde nella riferita ſuppoſizione, ſiccome la forza della reſiſtenza non ſi ſpanderà egualmente per gli filamenti della ſezione, così

sì neppure la medesima si riunirà nel centro di gravità della stessa sezione;

580. Se poi si voglia attentamente riflettere, s'intenderà facilmente, che nella supposizione, di cui si tratta, debba riunirsi la forza della resistenza in quel punto della sezione, in cui si riunirebbe il moto di essa, se la medesima si aggirasse intorno al sostegno della leva. Ed essendo così, neppure si durerà fatica ad intendere, che i solidi riferiti di sopra debbano essere egualmente resistenti da per tutto, eziandio se voglia supporsi, che i filamenti della sezione, in cui esercitasi la resistenza, siano capaci di distendersi. Imperocchè sebbene per definire il momento della resistenza in luogo della distanza del centro di gravità della sezione dal sostegno della leva debba sostituirsi quella del centro di percussione; nientedimeno, per essere queste due distanze in ciascuna sezione proporzionali tra loro, tuttavia il momento della resistenza sarà da per tutto in data ragione col momento del peso (130).

FINE DEL PRIMO LIBRO.

IN-

INDICE

DE' CAPITOLI, E DE' PARAGRAFI CONTENUTI NEL

LIBRO PRIMO

IN CUI SI TRATTA

Dell' Equilibrio, e del Moto de' Corpi Consistenti.

CAP. I. D*El moto in generale, e delle sue principali affezioni.* 2

I. *Della massa, della mole, e della densità di qualsisia corpo.* 2

II. *Del moto, e della quiete: come ancora dello spazio, del luogo, e del tempo.* 5

III. *Della velocità, o sia celerità: come ancora del moto eguabile.* 8

IV. *Del moto variabile, e delle sue varie specie.* 10

V. *Del momento, o sia quantità di moto di qualsisia mobile.* 13

VI. *Della forza motrice, e del modo di definire la sua attività.* 16

VII. *Delle forze centrali, e del modo di determinare la loro attività.* 19

VIII. *Delle forze vive, e della vera loro misura.* 22

IX. *Della forza dell' inerzia, e de' suoi effetti principali.* 26

X. *Della composizione, e risoluzione così delle forze, come de' moti.* 29

XI. *Del moto curvilineo de' corpi, e specialmente di quello fatto con forza centrale.* 34

XII. *Dei corpi, che si muovono circolarmente con moto eguabile, ed uniforme.* 40
XIII. *Dell' azione, e reazione; ed in qual senso siano eguali, e contrarie.* 44
XIV. *Delle leggi del moto nell' incontro de' corpi inerti.* 48
XV. *Delle leggi del moto nell' incontro de' corpi elastici.* 53
XVI. *Conseguenze, che si ricavano dalle precedenti leggi di moto.* 57
XVII. *Delle leggi del moto nell' incontro obliquo de' corpi.* 62
XVIII. *Del moto comune, e quando egli non altera gli effetti dei moti proprj.* 67
CAP. II. *Del moto de' corpi derivato dalla gravità.* 71
I. *Della forza della gravità, e della sua maniera di agire.* 72
II. *Dell' origine delle forze, da cui deriva la gravitazione universale, e reciproca de' corpi.* 76
III. *Continuazione dello stesso argomento, e donde derivi la specifica differenza de' corpi.* 81
IV. *Delle leggi, che si osservano nella caduta verticale de' gravi.* 88
V. *Delle leggi, che si osservano nella caduta obliqua de' gravi.* 93
VI. *Della caduta obliqua paragonata colla caduta verticale.* 98
VII. *Della caduta de' gravi per piani contigui diversamente inclinati sull' orizzonte.* 103
VIII. *Della caduta de' gravi per superficie curve.* 108
IX. *Della salita de' gravi per superficie così piane, come curve.* 112
X. *Del moto de' pendoli per archi circolari.* 117
XI. *Della natura, e delle principali proprietà della cicloide.* 123
XII. *Del moto de' pendoli per archi cicloidali.* 127

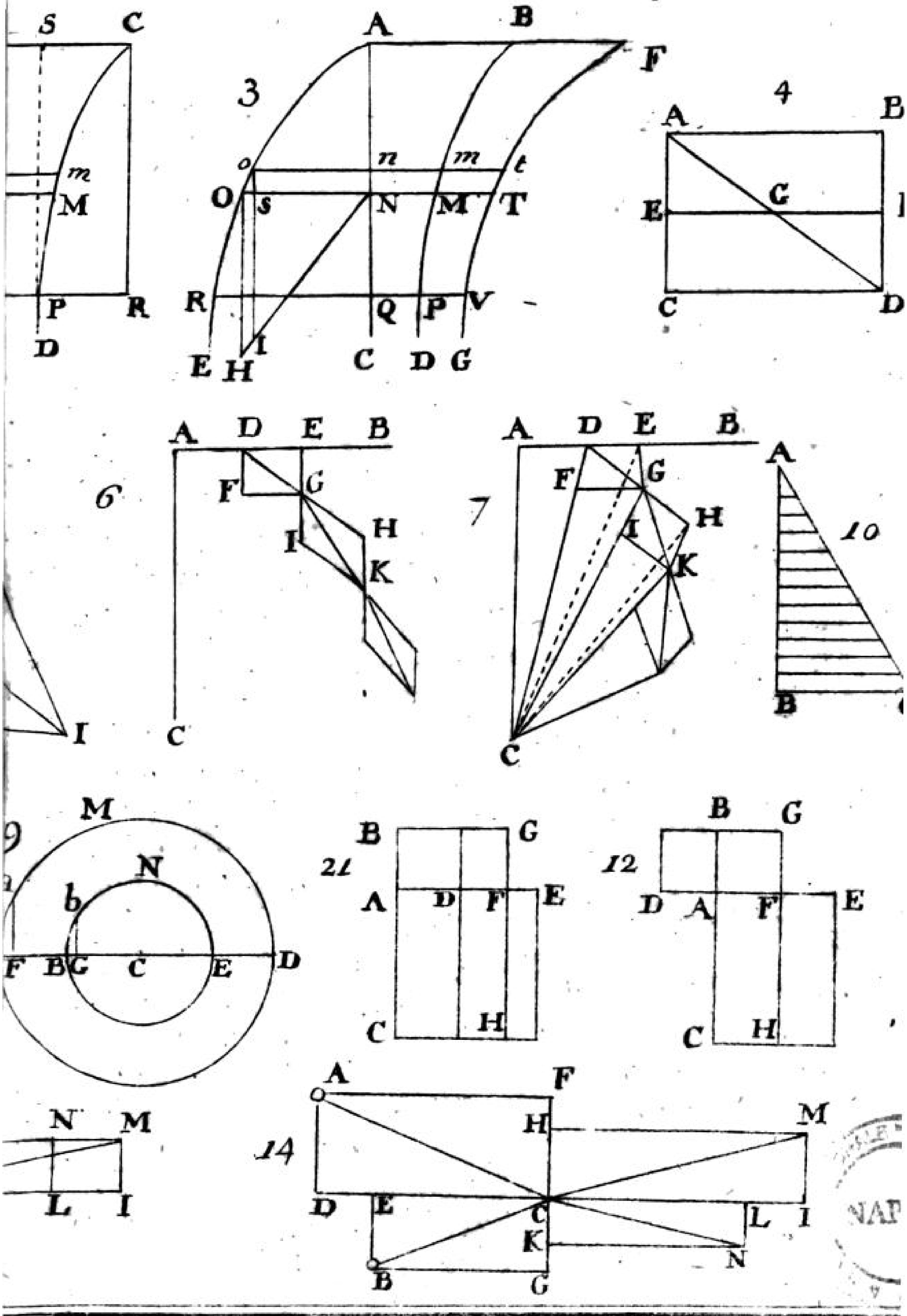
XIII. *Della caduta de' gravi la più celere.* 132
XIV. *Del moto de' projetti, e della natura della curva, che da essi si descrive.* 137
XV. *Del moto de' projetti, che terminasi alla stessa orizzontale, da cui incomincia.* 141
XVI. *Della formazione di una tavola per regolare il riferito moto de' projetti.* 146
XVII. *Del moto de' projetti terminato ad una orizzontale diversa da quella, da cui principia.* 151
CAP. III. *Dell' equilibrio de' gravi nelle scambievoli loro azioni.* 156
I. *Del centro di gravità di qualsisia grave, e della sua linea di direzione.* 157
II. *Del principio generale dell' equilibrio, e dell' applicazione di esso alla bilancia.* 162
III. *Dell' equilibrio, che osservasi nella leva, nell' asse nella ruota, e nel polispasto.* 167
IV. *Dell' equilibrio, che osservasi nel piano inclinato nel cuneo, e nella vite.* 175
V. *Dell' equilibrio, che osservasi nelle machine fatte con ruote dentate.* 178
VI. *Soluzione di una difficoltà intorno al principio generale dell' equilibrio.* 183
VII. *Della resistenza, che deriva dallo stropicciamento delle parti di una macchina.* 188
VIII. *Del comune centro di gravità di quanti si siano gravi, e delle principali loro affezioni.* 194
IX. *Del modo di determinare il centro di gravità delle linee così rette, come curve.* 201
X. *Del modo di determinare il centro di gravità delle figure piane.* 207
XI. *Del modo di determinare il centro di gravità così delle figure solide, come dei loro perimetri.* 214
XII. *Del modo di definire le grandezze, che generansi colla rivoluzione di altre grandezze più semplici.* 221
XIII. *Del modo di definire così la velocità mezza,*

come

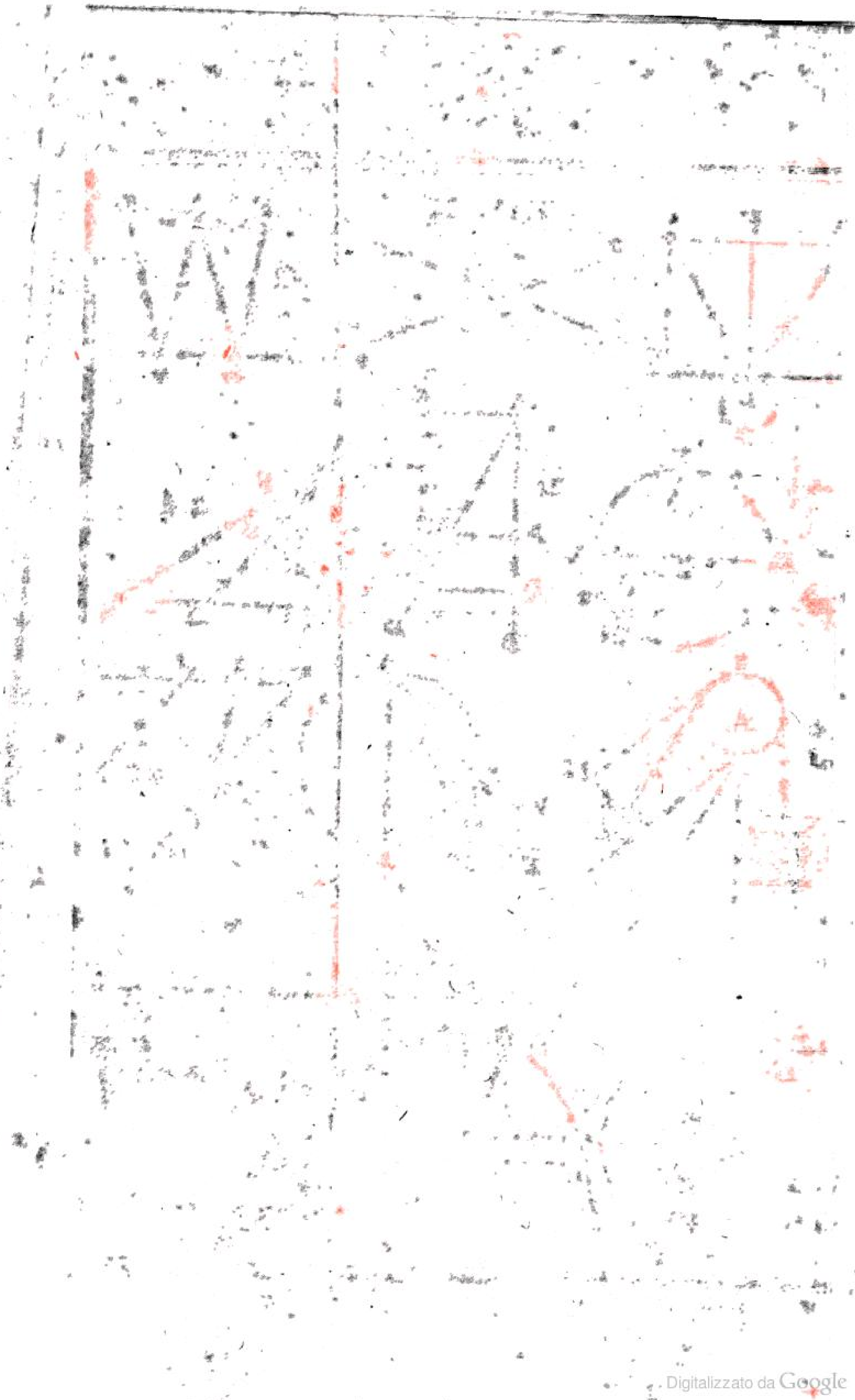
come il centro del moto delle grandezze che si aggirano. 227
XIV. *Dell' equilibrio di più potenze applicate ad un corpo rigido, ed inflessibile.* 232
XV. *Dell' equilibrio di più potenze applicate ad un corpo di sua natura pieghievole.* 237
XVI. *Della resistenza, che i gravi sospesi verticalmente oppongono al loro peso.* 244
XVII. *Della resistenza, che i gravi sospesi orizzontalmente oppongono al loro peso.* 251

FINE DELL' INDICE.

TAVOLA I



Aloja inc.



TAV. II

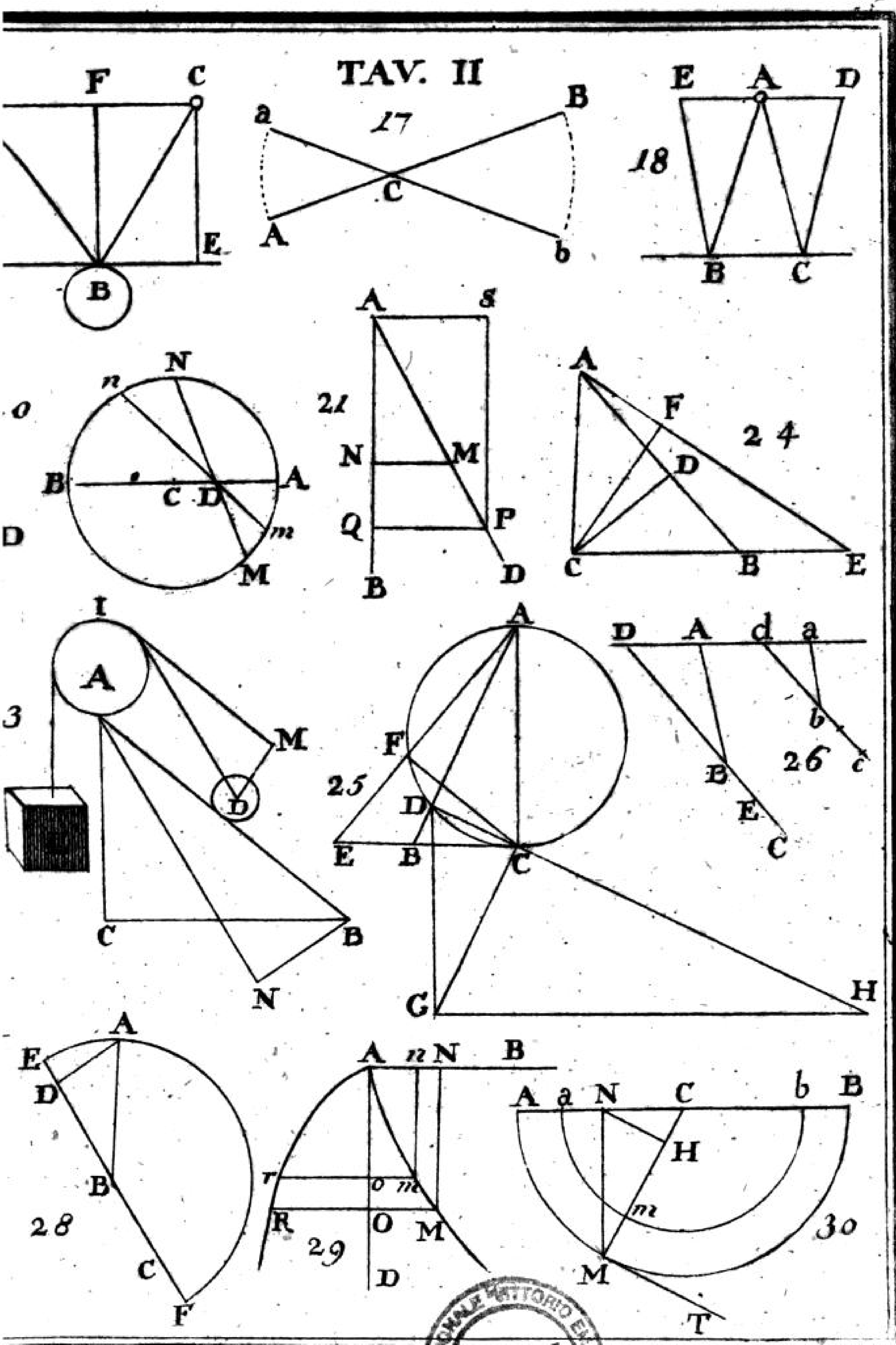
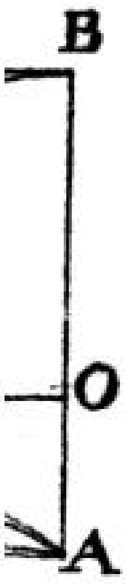
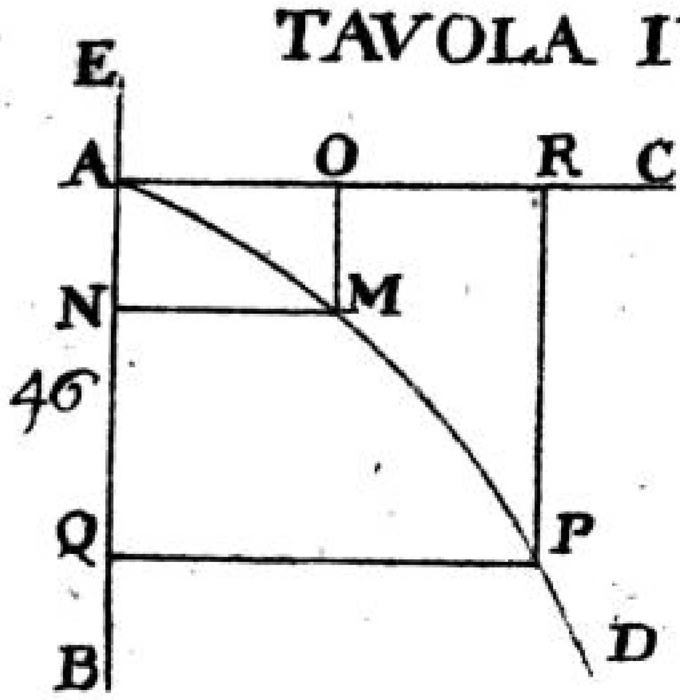
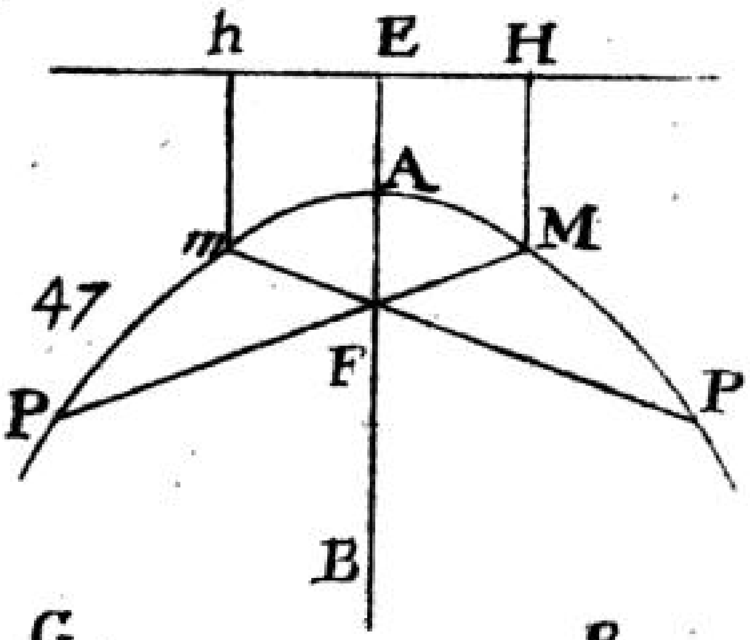
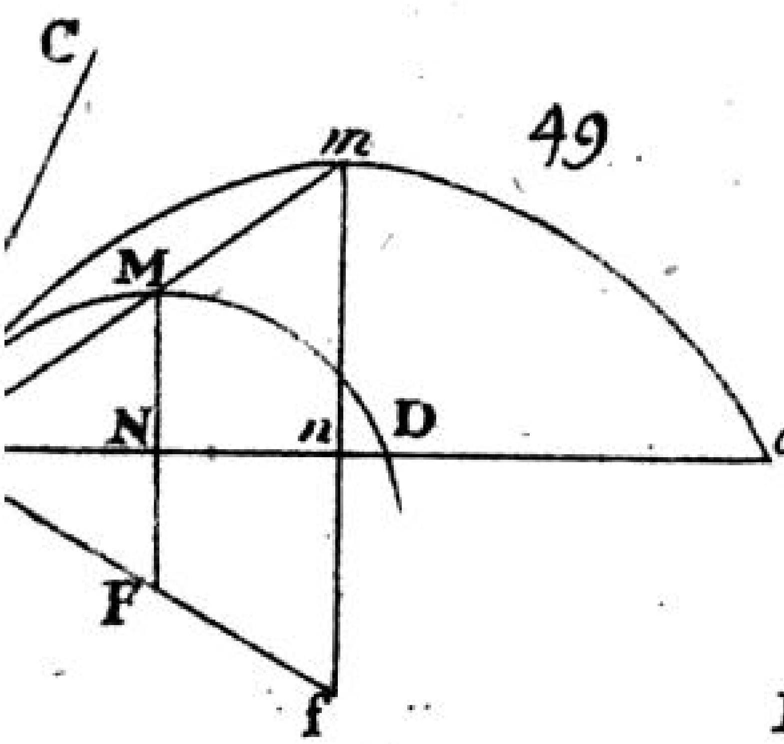


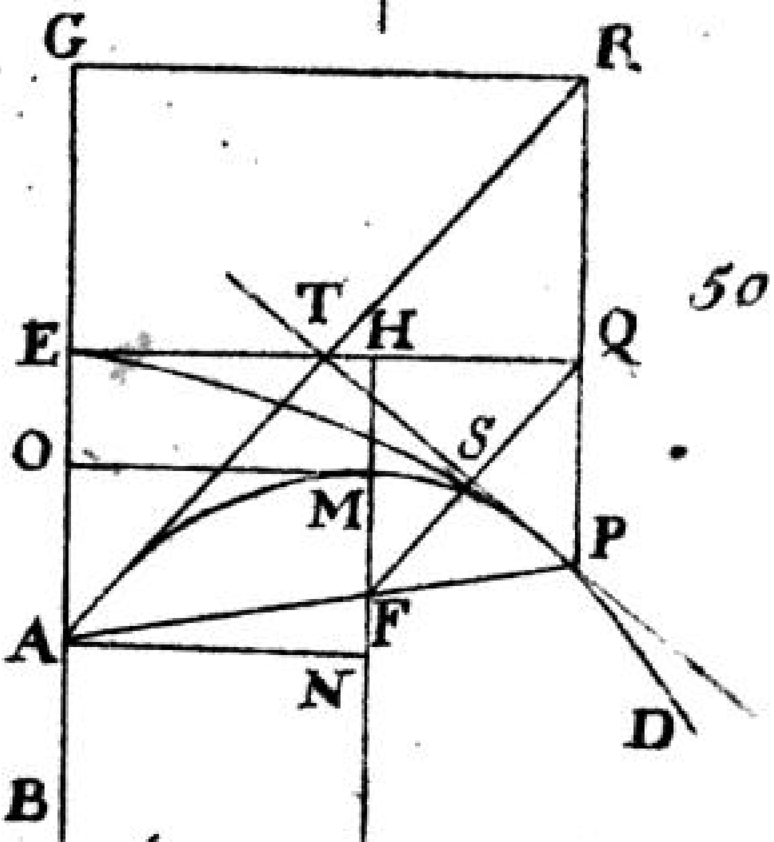
TAVOLA IV

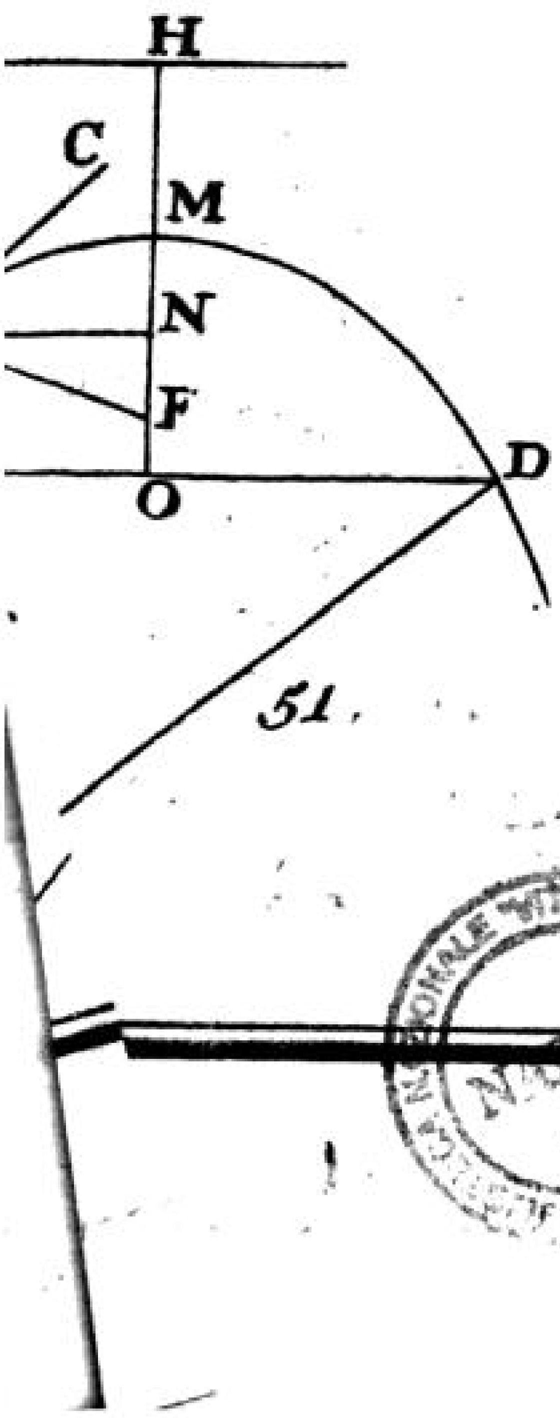

B
O
A

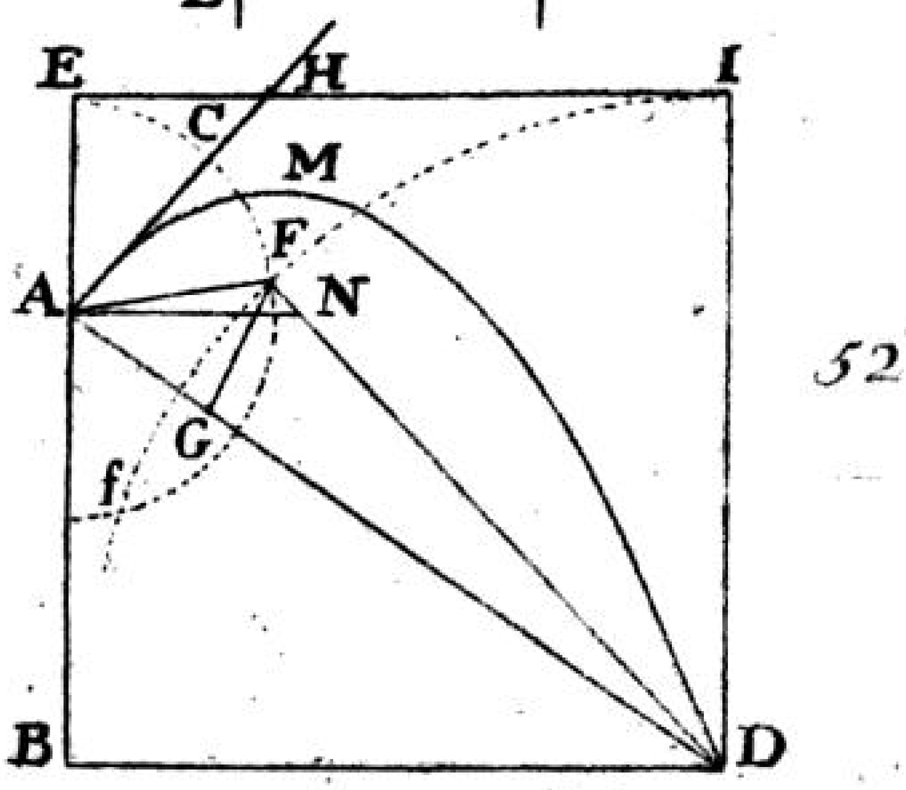

E
A O R C
N M
46
Q P
B D


h E H
A
m M
47
F
P P
B


C
m
49
M
N n D d
F
f


G R
T H Q
50
E
O S
M P
A F
N D
B


H
C
M
N
F
O D
51


E H I
C
M
F
A N
52
G
f
B D

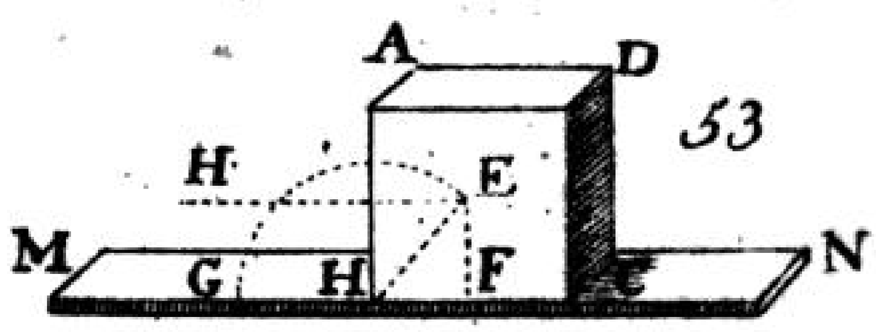
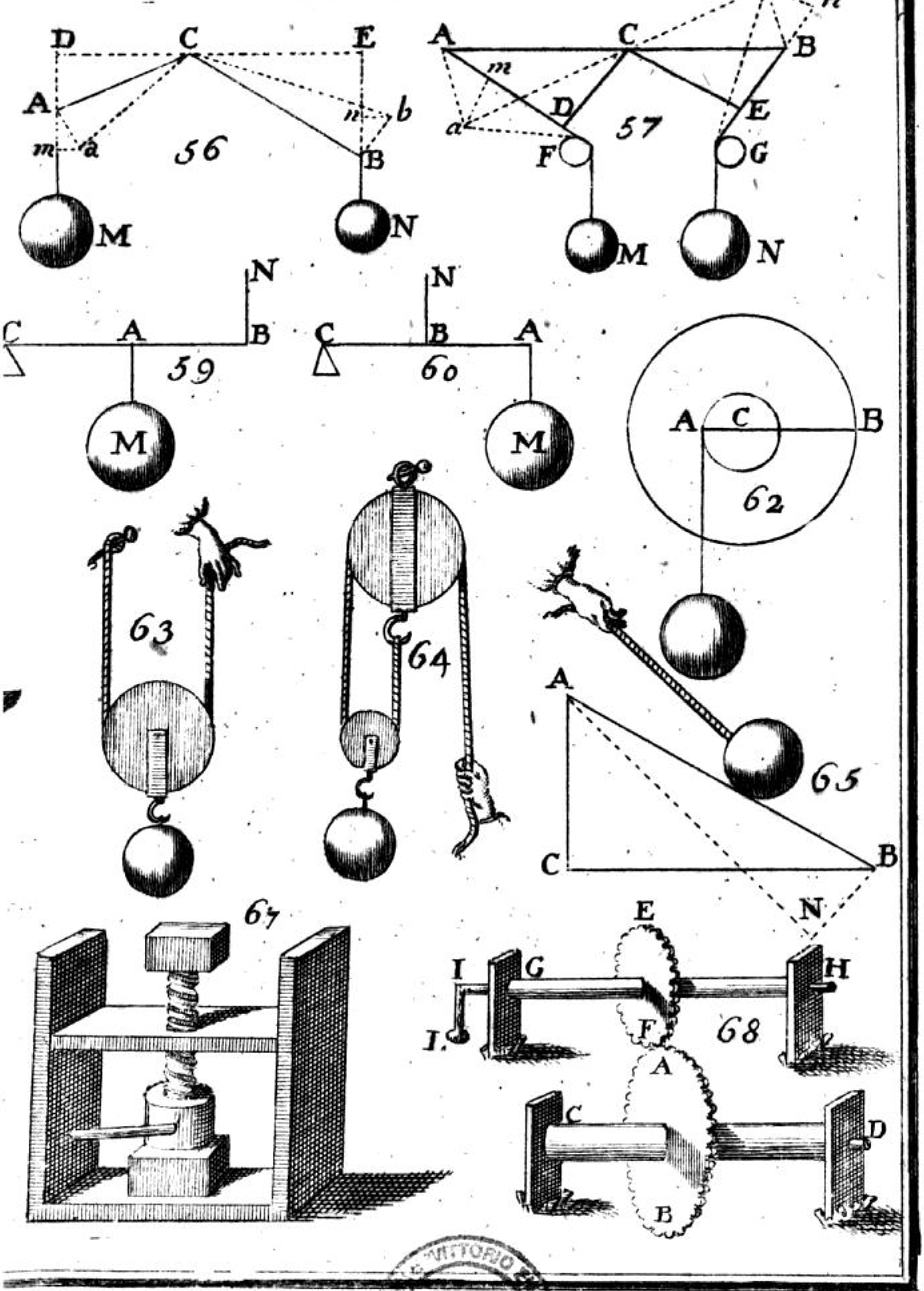
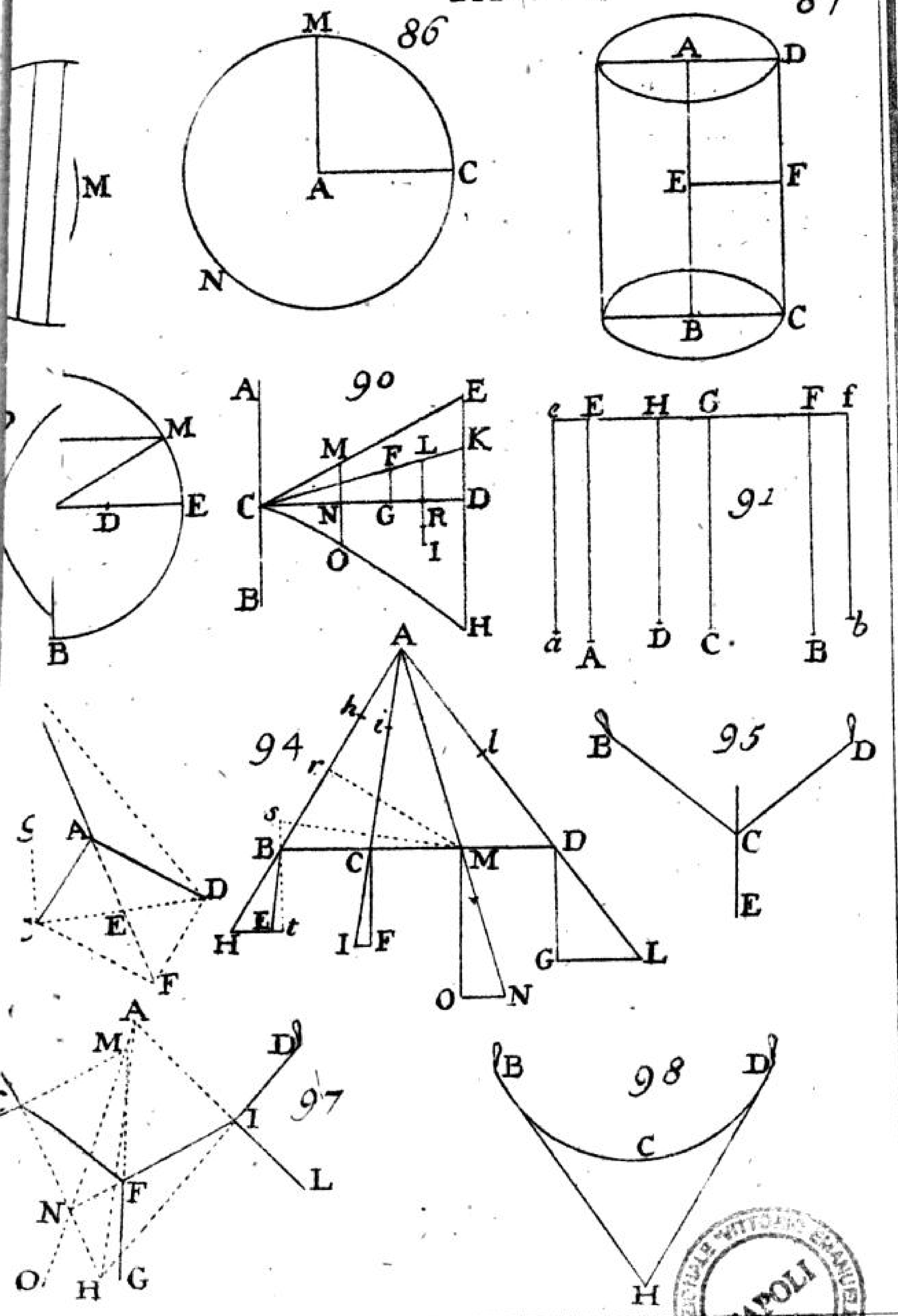

A D
53
H E
M G H F N

TAVOLA V

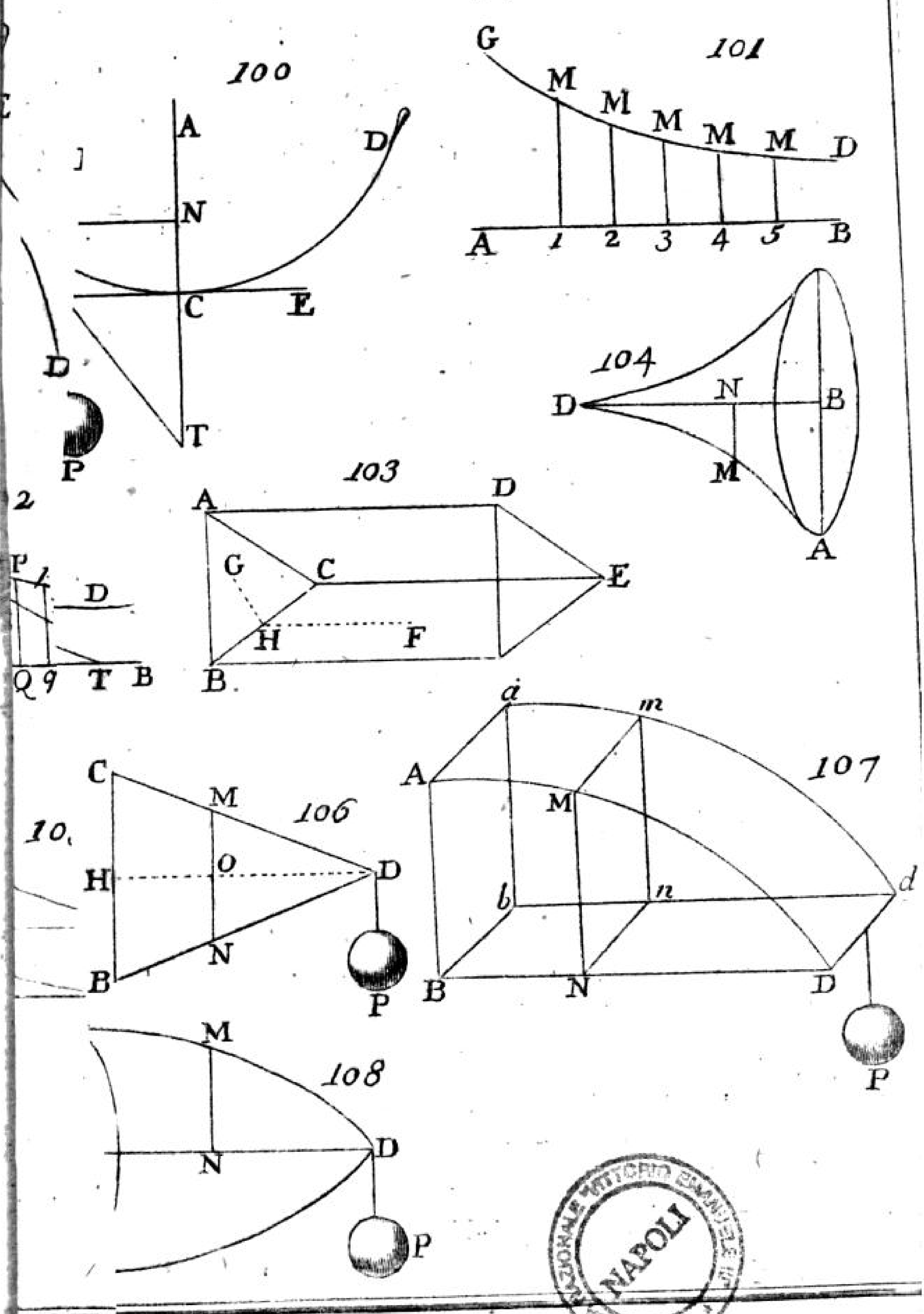


TAV. VII



86
M
A
C
N
87
A
D
E
F
B
C
90
A
E
M
F
L
K
C
N
G
R
D
I
O
B
H
91
e
E
H
G
F
f
a
A
D
C
B
b
94
A
h
i
l
r
s
B
C
M
D
H
E
t
I
F
G
L
O
N
95
B
D
C
E
97
A
M
D
I
L
F
N
O
H
G
98
B
D
C
H

TAVOLA VIII


100
A
N
C
E
D
T
101
G
M M M M M
D
A 1 2 3 4 5 B
104
D
N
B
M
A
103
A D
G C E
H F
B
106
C
M
H O D
N
B
P
107
a m
A
M
b n d
B N D
P
108
M
N D
P