



FONDO PIZZO FALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XXVII



6

Palchetto

Num.° d'ordine

39

59/6

18-5-41

NAZIONALE

B. Prov.

I

VITT. EM. III

2555



B. Snow

I

2555

FONDI

F

608987

**T R A T T A T I**

D E L

**CALCOLO DIFFERENZIALE**

D I

**VITO CARAVELLI,**

E D E L

**CALCOLO INTEGRALE**

D I

**VINCENZO PORTO**

PER USO DEL

**REGALE COLLEGIO MILITARE.**



**I N N A P O L I**

---

**NELLA STAMPERIA DE' RAIMONDI  
CON LICENZA DE' SUPERIORI  
MDCCLXXVI.**

1882

## A DISCRETI LETTORI.

**I** Due trattati, che, per ubbidire a Sogetto rispettabilissimo, si veggono pubblicati in questo tomo, e trattati destinati per uso del regale Collegio militare, sono il primo di mia mano, e 'l secondo di mano assai migliore. M'era già noto che D. Vincenzo Porto, mio discepolo un tempo, ed ora mio stretto amico, uomo quanto versato nelle scienze matematiche, altrettanto di spedita comprensiva, di felici, ed elevati talenti, e di non ordinaria facilità nel comunicare ad altri la più astruse idee, tiene da più tempo preparato un compiuto trattato sul Calcolo integrale, per farne un dono al pubblico, subito che circostanze opportune il permetteranno. Avendo io pregato tale amico, per risparmiare alquanto la mia penna, resa dagli anni e dalle fatiche ormai pesante, e per dare il primo urto alla sua assai spedita, di fare uno stretto e sugoso  
com-

compendio del detto trattato , a fine di poterlo aggiugnere al lavoro da me fatto sul Calcolo differenziale , m' ha subito gentilmente compiaciuto ; ed io mi fo pregio ora di pubblicarlo , sicuro di rendere in tal modo miglior servizio alla gioventù militare , e al pubblico , che reso non l' avrei , se da me fatto si fosse . Onde siccome io mi protesto tenuto a tale amico della compiacenza usatemi ; così spero che la gioventù militare , e 'l pubblico li saprà grado del suo lavoro , che troverà eseguito senza misterj , e con quella facilità , che ho io sempre amata , e non so se conseguita nelle mie deboli produzioni . Gradite intanto tali fatiche , qualunque sieno le mie , e vivete felici .

# I N D I C E

De' Capi contenuti in  
questo Trattato.

---

**DEFINIZIONI , E NOZIONI  
PRELIMINARI.** pag. 145

---

**CAP. I.** *Delle regole per determinare gl' integrali algebratici delle quantità differenziali del primo grado, che contengono il differenziale di una sola variabile.* 153

**CAP. II.** *De' differenziali logaritmici, e del modo d' integrarli.* 193

**CAP. III.** *De' differenziali esponenziali, e del modo d' integrarli.* 203

**CAP. IV.** *Del modo d' integrare le quantità differenziali a più variabili.* 209

**CAP. V.** *Dell' uso degl' integrali de' dif-*

*differenziali del primo grado ad una  
variabile in determinare le quadra-  
ture de' spazj mistilinei, e curvi-  
linei.* 224

**CAP. VI.** *Dell' uso degl' integrali de'  
differenziali del primo grado ad una  
variabile in rettificare le linee cur-  
ve.* 250

**CAP. VII.** *Dell' uso degl' integrali de'  
differenziali del primo grado ad una  
variabile in determinare le grandez-  
ze de' solidi di rivoluzione.* 266

**CAP. VII.** *Dell' uso degl' integrali de'  
differenziali del primo grado ad una  
variabile in determinare le superficie  
curve de' solidi di rivoluzione.* 288



**T R A T T A T O**  
**D E L**  
**CALCOLO DIFFERENZIALE.**

---

**DEFINIZIONI, E NOZIONI  
PRELIMINARI.**

---

**DEFINIZIONE I.**

I.  I chiamano *quantità costanti* quelle, che sono date, e assegnate di grandezza; e *quantità variabili* quelle, che sono indeterminate di grandezza, cioè d'infiniti diversi gradi di grandezza suscettibili.

**A**

**AV.**

## A V V E R T I M E N T O I.

2. Ancorchè ogni quantità possa essere all' infinito accresciuta , e diminuita : nondimeno quando una è data , e assegnata di grandezza , non può ricevere nè accrescimento , nè diminuzione , senza che divenghi un' altra . Così se un cerchio è dato , e assegnato , non sono suscettibili d' accrescimento , e di diminuzione nè il raggio , nè la periferia , nè l' area , senza che il cerchio divenghi un altro ; laddove l' ordinata a qualunque suo diametro , e l' ascissa corrispondente possono variare all' infinito tra 'l zero , e la grandezza del raggio , senza che il cerchio divenghi un altro . Similmente se è data , e assegnata una parabola , non possono neppure ricevere accrescimento , e diminuzione per rispetto di qualunque diametro nè il parametro , nè la distanza del vertice del diametro dal fuoco , senza che la parabola divenghi un' altra ; laddove l' ordinata , e l' ascissa corrispondente possono all' infinito variare di grandezza tra 'l zero , e l' istesso infinito , senza che la parabola divenghi un' altra .

## C O R O L L A R I O .

3. Quindi in un dato cerchio sono quantità costanti il raggio , la periferia , e l' area ,  
e quan-

## DEL CALC. DIFFER. 3

e quantità variabili l'ordinata a qualunque diametro, e l'ascissa corrispondente. Similmente in una data parabola sono relativamente a qualunque diametro quantità costanti il parametro, e la distanza del vertice del diametro dal fuoco, e quantità variabili l'ordinata, e la corrispondente ascissa.

### AVVERTIMENTO II.

4. Contrassegneremo sempre nel calcolo differenziale le quantità costanti colle prime lettere dell'alfabeto, cioè con  $a, b, c, d, e$ , ec. fino alla  $x$  esclusivamente, e le variabili colle ultime  $x, y, z$ , ec..

### DEFINIZIONE II.

5. Diciamo in genere *differenziale* di qualsivoglia quantità variabile l'accrescimento, o la diminuzione infinitamente picciola, che acquista in passando da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo. In ispezie poi il differenziale si dice del *primo grado*, se è infinitamente picciolo per rispetto della quantità istessa, del *secondo grado*, se è infinitamente picciolo per rispetto del differenziale del primo grado, del *terzo grado*, se è infinitamente picciolo per rispetto del differenziale del grado secondo; e così procedendo innanzi.

## A V V E R T I M E N T O .

6. Si noti che l' espressioni algebrache, contrassegnanti i differenziali di qualunque grado delle quantità variabili, si ricavano, secondo s' inlegnerà appresso, dall' espressioni algebrache contrassegnanti le medesime quantità.

## D E F I N I Z I O N E III.

7. Chiameremo *differenziali algebraci* in genere l' espressioni algebrache, contrassegnanti differenziali di quantità variabili. In ispezie poi un differenziale algebraco si dirà del *grado primo*, *secondo*, *terzo*, ec., secondochè contrassegnerà il differenziale del grado primo, secondo, terzo, ec. di qualsivoglia quantità variabile.

## D E F I N I Z I O N E IV.

8. Si dirà *differenziare una grandezza algebraca*, quando si vorrà da essa ricavare il differenziale algebraco, contrassegnante il differenziale della quantità, che la grandezza algebraca dinoterà,

## D E F I N I Z I O N E V.

9. Si chiama *calcolo differenziale* la scienza,  
za,

## DEL CALC. DIFFER.

za, che insegna i metodi di determinare i differenziali algebrici d'ogni grado, e a sviluppare verità geometriche, e fisiche con mettere a calcolo i detti differenziali.

### AVVERTIMENTO I.

10. Nel calcolo differenziale contrassegnandosi quantità variabili con  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ec., si contrassegneranno i differenziali di esse del primo grado con  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ec., del secondo grado con  $ddx$ ,  $ddy$ ,  $ddz$ , ec., o con  $d^2x$ ,  $d^2y$ ,  $d^2z$ , ec., del terzo grado con  $dddx$ ,  $dddy$ ,  $dddz$ , ec., o con  $d^3x$ ,  $d^3y$ ,  $d^3z$ , ec., e così procedendo innanzi; vale a dire che tali differenziali si contrassegneranno colle medesime lettere  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ec., postavi innanzi il  $d$  coll'esponente indicante il grado del differenziale; il quale  $d$  s'adoprerà solamente per mera caratteristica de' differenziali, e non per altro uso.

### COROLLARIO I.

11. Quindi nel calcolo differenziale l'espressioni  $dx$ ,  $d^2x$ ,  $d^3x$ , ec. non dinoteranno prodotti della grandezza contrassegnata da  $x$  moltiplicata per le contrassegnate dal  $d$ ,  $d^2$ ,  $d^3$ , ec., ma differenziali algebrici del grado primo, secondo, terzo, ec. della grandezza contrassegnata da  $x$ .

## C O R O L L A R I O II.

12. Non essendo una quantità costante suscettibile d'accrescimento, e di diminuzione, il differenziale d'una quantità costante farà nullo, e s'esprimerà col zero. Sicchè se  $a$  contraffeggia una quantità costante, farà  $da = 0$ .

## C O R O L L A R I O III.

13. Contraffegnando con  $x$  una quantità variabile, verrà essa in un grado di grandezza infinitamente prossimo contraffegnata da  $x + dx$ , se s'accrescerà, e da  $x - dx$ , se si diminuirà. Dunque un differenziale algebrico si deve prendere col  $+$ , qualora contraffeggia accrescimento, e col  $-$ , qualora dinota diminuzione.

## C O R O L L A R I O IV.

14. Finalmente contraffegnando una grandezza infinitamente picciola  $dx$  per rispetto di quella, ch'esprime  $x$ ,  $d^2x$  per rispetto di quella, che dinota  $dx$ ,  $d^3x$  per rispetto di quella, che contraffeggia  $d^2x$ , ec.; si potrà nel calcolo differenziale prendere senza errore sensibile  $x \pm dx = x$ ,  $dx \pm d^2x = dx$ ,  $d^2x \pm d^3x = d^2x$ , ec.

## AVVERTIMENTO II.

15. Per brevità dinoteremo ne' calcoli doverli differenziare qualunque grandezza algebrica, con iscrivere in una parentesi, e metterla innanzi la caratteristica  $d$ . Così con  $d(a^2 x)$ ,  $d(ax - x^2)$ ,  $d(a^2 + ax - xy)$ , ec. si dinoterà doverli le grandezze algebriche  $a^2 x$ ,  $ax - x^2$ ,  $a^2 + ax - xy$ , ec. differenziare.

## AVVERTIMENTO III.

16. Finalmente si noti che del calcolo differenziale, non altrimenti che dell'Integrale, di cui si tratterà appresso, il cavaliere Newton n'è stato l'inventore, essendosene egli, prima che altri ne conoscessero le regole, avvaluto come d'un metodo suo particolare in isciorre più problemi, che sembravano alle forze geometriche, e algebriche superiori. L'acutissimo Leibnitz il primo indagò sì fatto metodo, e ne pubblicò le regole, attribuendosi perciò la gloria dell'invenzione. Tale gloria però li venne contrastata non dal Newton, che unì al sommo merito una uguale moderazione d'animo, ma dalli suoi discepoli; e la gara letteraria di pochi degenerò tosto in gara di nazioni; il che ha fatto che il litigio restasse sempre indeciso. Chi penetra intanto le scoperte

del Newton, scorge in esse il carattere luminoso dell' inventore de' detti calcoli. E' da sapere però che Newton chiama *grandezze fluenti* le variabili, *flussioni* i differenziali, e *calcolo delle flussioni* il calcolo differenziale; e di più contrassegnando con  $x$  una fluente, contrassegna la flussione del primo grado con  $\dot{x}$ , la flussione del secondo grado con  $\ddot{x}$ , la flussione del terzo grado con  $\ddot{\dot{x}}$ , ec.; vale a dire che contrassegna le flussioni coll' istessa  $x$ , positivi su uno, due, tre, ec. punti a proporzione del grado della flussione. Del resto come l' uso ha reso famigliari la denominazione di differenziale, e la caratteristica  $d$  del Leibnitz; così abbiamo stimato opportuno avvalerci della denominazione di differenziale, e della detta caratteristica  $d$ ; tanto più che la caratteristica del Newton, riducendosi a punti, riesce poco comoda ne' calcoli, e facile a far cadere in equivoci.

C A P. I.

*Delle regole per determinare i differenziali algebrici del primo grado.*

DEFINIZIONE I.

17. Chiameremo per brevità dell' espressione *variabile* ogni contrassegnante di grandezza variabile, e *termini variabili* d'una grandezza algebrica composta quei, che contengono variabili.

DEFINIZIONE II.

18. Una grandezza algebrica si dirà *del primo grado*, se conterrà una, o più variabili del primo grado, senza che le variabili, quando faranno più, si troveranno insieme moltiplicate.

P R O B L. I.

19. *Insegnare il modo di differenziare le grandezze algebriche del primo grado.*

So.

I.

*Sia da differenziare  $ax$ .*

Contraffegnando  $x$  il componente variabile della quantità espressa da  $ax$ ; passato tale componente da un grado di grandezza ad un' altro infinitamente prossimo, verrà esso espresso da  $x + dx$ . Dunque in tale altro grado di grandezza del detto componente la quantità espressa da  $ax$ , verrà espressa da  $a(x + dx)$ , o sia da  $ax + adx$ . Or tali due espressioni  $ax$ , ed  $ax + adx$  dell' istessa quantità in due gradi di grandezza infinitamente prossimi del suo componente variabile differiscono per  $adx$ . Sicchè il differenziale di  $ax$  è  $= adx$ .



II.

*Sia da differenziare  $a^2 \pm ax$ .*

Contraffegnando pure  $x$  il componente variabile della quantità espressa da  $a^2 \pm ax$ ; passato tale componente da un grado di grandezza ad un' altro infinitamente prossimo, verrà esso espresso da  $x + dx$ . Onde in tale altro grado di grandezza del detto componente la quantità espressa da  $a^2 \pm ax$ , verrà espressa da  $a^2 \pm a(x + dx)$ , o sia da  $a^2 \pm ax \pm adx$ . Ma tali due espressioni  $a^2 \pm ax$ , e  $a^2 \pm ax \pm adx$  dell' istessa quantità in due gradi di grandezza in-

DEL CALC. DIFFER. II  
 infinitamente prossimi del suo componente  
 variabile differiscono per  $\pm adx$ . Dunque il  
 differenziale di  $a^2 \pm ax$  è pure  $= \pm adx$ .



### III.

*Sia da differenziare  $a^2 + bx + cy - ez$ .*

Contraffegnando  $x, y, z$  i componenti  
 variabili della quantità espressa da  $a^2 + bx + cy - ez$ ;  
 passati tali componenti da un  
 grado di grandezza ad un altro infinitamen-  
 te prossimo, verranno espressi da  $x + dx, y + dy, z + dz$ .  
 Sicchè in tale altro gra-  
 do di grandezza de' detti componenti la  
 quantità espressa da  $a^2 + bx + cy - ez$ ,  
 verrà espressa da  $a^2 + b(x + dx) + c(y + dy) - e(z + dz)$ ,  
 o sia da  $a^2 + bx + cy - ez + bdx + cdy - edz$ .  
 Or tali due espressioni  $a^2 + bx + cy - ez$ ,  
 e  $a^2 + bx + cy - ez + bdx + cdy - edz$  dell' istessa quan-  
 tità in due gradi di grandezza infinitamente  
 prossimi de' suoi componenti variabili dif-  
 feriscono per  $bdx + cdy - edz$ . Dun-  
 que il differenziale di  $a^2 + bx + cy - ez$   
 è  $= bdx + cdy - edz$ .

Similmente si trova il differenziale d' ogni  
 altra grandezza algebrica del primo grado.  
 Quindi, per differenziare qualunque gran-  
 dezza algebrica del primo grado, conviene  
 procedere secondo la seguente

RE-

T R A T T A T O  
R E G O L A .

1. Se si tratta di grandezza algebrica semplice, si muti in essa la variabile nel suo differenziale, e s'avrà il differenziale cercato.

2. Se poi si tratta di grandezza algebrica composta, si prendano i soli termini variabili co' segni, che hanno, e si mutino in essi le variabili ne' differenziali de' medesimi; s'avrà in tal modo il differenziale, che si cerca.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

A V V E R T I M E N T O .

20. Si noti che se nella grandezza algebrica  $a^2 + ax$  per esempio il differenziale dell' $x$  deve contrassegnare non accrescimento, ma diminuzione; allora tale differenziale non è  $+ dx$ , ma  $- dx$ ; e conseguentemente il differenziale di  $a + ax$  non è  $+ a dx$ , ma  $- a dx$ . Similmente se in  $a^2 + bx + cy - ez$  col crescere della grandezza  $x$  le altre  $y$ , e  $z$  si diminuiscono; il che si conoscerà dalle circostanze delle quantità da differenziare; in tale caso i differenziali di  $y$ , e  $z$  non sono  $+ dy$ ,  $+ dz$ , ma  $- dy$ ,  $- dz$ , e conseguentemente il differenziale di  $a^2 + bx + cy - ez$  non è  $bdx + cdy - edz$ , ma  $bdx - cdy + edz$ .

PRO.

## P R O B L. II.

21. *Insegnare il modo di differenziare il prodotto  $x y$  di due variabili del primo grado,*

## S O L U Z I O N E.

Contraffegnando  $x$ , ed  $y$  i componenti variabili della quantità espressa da  $x y$ ; passati tali componenti da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo, verranno espressi rispettivamente da  $x + dx$ ,  $y + dy$ . Sicchè in tale altro grado di grandezza de' detti componenti, la quantità espressa da  $x y$ , verrà espressa da  $(x + dx)(y + dy)$ , o sia da  $x y + x dy + y dx + dx dy$ . Or tali due espressioni  $x y$ , e  $x y + x dy + y dx + dx dy$  dell' istessa quantità in due gradi di grandezza infinitamente prossimi de' suoi componenti variabili differiscono per  $x dy + y dx + dx dy$ , e conseguentemente per  $x dy + y dx$ , potendosi senza errore sensibile tralasciare  $dx dy$ , come infinitamente picciolo per rispetto e di  $x dy$ , e di  $y dx$ . Dunque il differenziale di  $x y$  è  $\mp x dy + y dx$ . Quindi, per differenziare il prodotto di due variabili del primo grado, si deve procedere secondo la seguente

RE.

*Si facciano due prodotti, uno con moltiplicare la prima variabile pel differenziale della seconda, e l'altro con moltiplicare la seconda variabile pel differenziale della prima, e si sommino insieme. S'avrà con tale somma il differenziale del prodotto delle due variabili del primo grado.*

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

A V V E R T I M E N T O I.

22. Insegnato il modo di differenziare il prodotto di due variabili del primo grado, è facile a comprendere in che modo si deve differenziare qualsiviasa altro prodotto di variabili del primo grado, qualunque ne sia il numero di esse, e qualsiviasa di tali prodotti, che racchiudono anche costanti.

I.

*Sia da differenziare il prodotto  $xyz$ .*

Si metta  $xy = v$ , sarà  $xyz = vz$ . Onde farà

$$d(xyz) = d(vz) = vdz + zdv.$$

Ma

$$v = xy,$$

e

$$dv = xdy + ydx.$$

Sicchè

$$d(xyz) = vdz + zdv = xydz + xzdy + yzdx.$$

II.



II.

*Sia da differenziare il prodotto  $xyzv$ .*

Si metta  $xyz = \omega$ ; farà  $xyzv = \omega v$ .

Onde farà

$$d(xyzv) = d(\omega v) = \omega dv + v d\omega.$$

Ma

$$\omega = xyz,$$

e

$$d\omega = xydz + xzdy + yzdx.$$

Sicchè

$$d(xyzv) = \omega dv + v d\omega = \\ xyzdv + xyvdz + xzudy + yzvdx.$$



III.

*Sia da differenziare il prodotto  $a^3 xyzv$ .*

Si metta  $xyzv = \omega$ ; farà  $a^3 xyzv = a^3 \omega$ . Onde farà

$$d(a^3 xyzv) = d(a^3 \omega) = a^3 d\omega.$$

Ma essendo

$$\omega = xyzv,$$

farà

$$d\omega =$$

$$xyzdv + xyvdz + xzudy + yzvdx.$$

Dunque

$$d(a^3 xyzv) = a^3 d\omega = \\ a^3 xyzdv + a^3 xyvdz + a^3 xzudy + a^3 yzvdx.$$

Similmente procedendo s'avrà il differenziale del prodotto di qualunque altro numero di variabili, e prodotto, che racchiuda sì,

sì , o no costanti ; e si conoscerà sempre che per avere il differenziale del prodotto di qualunque numero di variabili del primo grado , e prodotto , che comprenda sì , o no variabili , si deve procedere secondo la seguente

### REGOLA GENERALE.

*Si moltiplichino separatamente i differenziali di tutte le variabili per la grandezza da differenziare , escluse però da essa in ogni moltiplicazione la variabile , che si comprende differenziata , e se ne facciano de' prodotti particolari . La somma di tali prodotti dà il differenziale cercato .*

### AVVERTIMENTO II.

23. Si noti che le grandezze algebriche composte , che contengono i detti prodotti di variabili ne' diversi termini di esse , si differenziano con determinare i differenziali di tutt' i termini , e unirli insieme co' segni , che l' appartengono : perchè di tanto varia una grandezza algebrica composta , passando le variabili , che racchiude , da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo , quanto è ciò , che nasce unendo insieme co' segni , che l' appartengono , tutt' i differenziali de' suoi termini . Onde se si dovrà differenziare  $a^4 + a^3 x - b^2 xy + cxyz$  ; essendo

*d*

$$d(a^4) = 0$$

$$d(a^3 x) = + a^3 dx$$

$$d(-b^2 xy) = -b^2 x dy - b^2 y dx$$

$$d(cxyz) = + cxy dz + cxz dy + cyz dx.$$

Sarà

$$d(a^4 + a^3 x - b^2 xy + cxyz) = a^3 dx - b^2 x dy - b^2 y dx + cxy dz + cxz dy + cyz dx.$$

Similmente se si dovrà differenziare  $(a+x)(b-y)$ ; essendo  $(a+x)(b-y) = ab + bx - ay - xy$ , e

$$d(ab) = 0$$

$$d(bx) = + b dx$$

$$d(-ay) = - a dy$$

$$d(-xy) = - x dy - y dx,$$

farà

$$d(a+x)(b-y) = b dx - a dy - x dy - y dx.$$

### AVVERTIMENTO III.

24. Si noti pure che il differenziale di  $(a+x)(b-y)$  si può determinare senza l'attuale moltiplicazione di quest'altro modo:

$$d(a+x) = + dx.$$

$$d(b-y) = - dy.$$

Dunque

$$d(a+x)(b-y) = (b-y) dx + (a+x) (-dy) = b dx - y dx - a dy - x dy.$$

### P R O B L. III.

25. Insegnare il modo di differenziare qualunque.

B

lun.

lunque rotto, che racchiude variabili del primo grado.

## S O L U Z I O N E.

Contraffegni  $\frac{x}{y}$  qualunque rotto, che racchiude variabili del primo grado. Si metta

$\frac{x}{y} = v$ ; sarà  $x = vy$ . E perciò

$$dx = vdy + ydv.$$

Ma

$$v = \frac{x}{y}.$$

Dunque

$$dx = \frac{x}{y} dy + ydv,$$

ed

$$y^2 dv = ydx - xdy,$$

e conseguentemente

$$dv = d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Per avere adunque il differenziale di qualunque rotto, che racchiude variabili del primo grado, si deve operare secondo la seguente

RE.

R E G O L A.

1. Si facciano due prodotti, uno con moltiplicare il denominatore pel differenziale del numeratore, e l'altro con moltiplicare il numeratore pel differenziale del denominatore, e dal primo si sottragga il secondo.

2. Il residuo, che nasce, si divida pel quadrato del denominatore.

Si ha in tal modo il differenziale del detto rotto.

E S E M P I O I.

Sia da differenziare  $\frac{x}{a}$ .

Essendo  $da=0$ ; sarà  $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - x \times 0}{a^2}$

$= \frac{dx}{a}$ .

E S E M P I O II.

Sia da differenziare  $\frac{a}{x}$ .

Essendo pure  $da=0$ ; sarà  $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{0 \times x - a \times 1}{x^2}$

$$\frac{x \times 0 - adx}{x^2} = \frac{adx}{x^2}.$$

## E S E M P I O H I.

Sia da differenziare  $\frac{axy}{bzu}$ .

Essendo

$$\begin{aligned} d(axy) &= axdy + aydx \\ d(bzu) &= bzdu + budz; \end{aligned}$$

farà

$$d\left(\frac{axy}{bzu}\right) =$$

$$\begin{aligned} & \left( (bzu)(axdy + aydx) - axy(bzdu + budz) \right) : \\ & (b^2 z^2 u^2) = (axzudy + ayzudx - axyzdu - \\ & axyudz) : (bz^2 u^2). \end{aligned}$$

## E S E M P I O I V.

Sia da differenziare  $\frac{ax - yz}{ax + yz}$ .

Essendo

$$\begin{aligned} d(ax - yz) &= adx - ydz - zdy \\ d(ax + yz) &= adx + ydz + zdy; \end{aligned}$$

farà

$$d\left(\frac{ax - yz}{ax + yz}\right) =$$

(ax

$$\frac{\left\{ (ax + yz)(adx - ydz - zdy) - (ax - yz)(adx + ydz + zdy) \right\}}{(ax + yz)^2} = \frac{2ayzdx - 2axydz - 2axzdy}{(ax + yz)^2}.$$

P R O B L. IV.

26. Insegnare il modo di differenziare qualunque potenza  $x^m$ .

S O L U Z I O N E.

Essendo  $x^m$  un prodotto di tante indeterminate  $x$ , quante ne dinota l'esponente  $m$  della potenza; sarà il  $d(x^m)$  la somma di tutt'i prodotti, che si hanno con moltiplicare il differenziale di ciascuna  $x$ , componente  $x^m$ , pel prodotto di tutte le altre, cioè per  $x^{m-1}$  (§ 22). Ma ognuno di tali prodotti uguaglia  $x^{m-1} dx$ , ed il numero di essi è dinotato da  $m$ . Sicchè sarà

$$d(x^m) = mx^{m-1} dx.$$

Per differenziare adunque qualunque potenza, si deve procedere secondo la seguente

R E G O L A.

*Si moltiplichino insieme l'esponente della potenza, la potenza istessa, diminuito il suo esponente d'una unità, ed il differenziale della grandezza, che si trova innalzata alla poten-*

B 3                      za;

za ; s' avrà col prodotto il differenziale della potenza .

Ch' è ciò , che bisognava insegnare .

## E S E M P J .

$$1. d(x^2) = 2x dx .$$

$$2. d(x^3) = 3x^2 dx .$$

$$3. d(x^4) = 4x^3 dx .$$

$$4. d(x^3 y^2) = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy .$$

$$5. d(2ax - x^2) = 2a dx - 2x dx .$$

$$6. d(2ax - x^2)^3 = 3(2ax - x^2)^2 \times (2a dx - 2x dx) .$$

$$7. d(a+x)^3 \times (b-y)^2 = 3(a+x)^2 \times (b-y)^2 \times (dx) + 2(a+x)^3 \times (b-y) \times -dy .$$

$$8. d\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = \frac{3x^2 y^2 dx - 2x^3 y dy}{y^4} = \frac{3x^2 y dx - 2x^3 dy}{y^3} .$$

$$9. d\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{mx^{m-1} dx}{x^{2m}} = \frac{mx^{-m-1} dx}{x^{2m}} .$$

$$10. d\left(\frac{x}{a^3 + x^3}\right) = \frac{(a^3 + x^3) dx - 3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} = \frac{dx}{a^3 + x^3} - \frac{3x^3 dx}{(a^3 + x^3)^2} .$$

II.d

$$\begin{aligned}
 \text{II. } d\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^n &= n \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{n-1} \times \\
 &\left(\frac{y dx - x dy}{y^2} + \frac{x dy - y dx}{x^2}\right) = n \\
 &\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{n-1} \times \left(y dx \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2}\right) - x dy \right. \\
 &\left.\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2}\right)\right) = n \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{n-1} \times (y dx - \\
 &x dy) \times \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{I 2. } d(x^m \times (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \\
 fx^{4n}, \text{ ec.})^r) &= mx^{m-1} (a + bx^n + cx^{2n} + \\
 ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ ec.})^r dx &+ rx^m (a + bx^n + cx^{2n} + \\
 ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ ec.})^{r-1} \times &(nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1} + \\
 3necx^{3n-1} + 4nfx^{4n-1}, \text{ ec.}) dx &= (m(a + bx^n \\
 + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ ec.}) + rx \times &(nbx^{n-1} + \\
 2ncx^{2n-1} + 3necx^{3n-1} + 4nfx^{4n-1}, \text{ ec.}) x^{m-1} \\
 dx (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n})^{r-1} &= \\
 (ma + mbx^n + mcx^{2n} + mex^{3n} + mfx^{4n}, \\
 \text{ec.} + rnbx^n + 2rncx^{2n} + 3rncex^{3n} + 4rnfx^{4n}, \\
 \text{ec.}) (x^{m-1} dx) (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + \\
 fx^{4n}, \text{ ec.})^{r-1} &= (ma + m + rn. lx^n + m + 2rn. \\
 cx^{2n} + m + 3rn. ex^{3n} + m + 4rn. fx^{4n}, \text{ ec.}) \\
 (x^{m-1} dx) (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \\
 \text{ec.})^{r-1}.
 \end{aligned}$$

T R A T T A T O  
P R O B L. V.

27. Insegnare il modo di differenziare qualunque grandezza radicale variabile.

S O L U Z I O N E.

Contraffegni  $\sqrt[m]{x^n}$  qualunque grandezza radicale variabile. Si metta  $\sqrt[m]{x^n} = v$ ; farà  $x^n = v^m$ . Onde farà

$$nx^{n-1} dx = mv^{m-1} dv.$$

E perciò

$$dv = \frac{nx^{n-1} dx}{mv^{m-1}} = \frac{nx^{n-1} dx \times v}{mv^m} =$$

$$\frac{nx^{n-1} dx \times \sqrt[m]{x^n}}{mx^n} = \frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}.$$

Ma

$$dv = d\sqrt[m]{x^n}.$$

Sicchè

$$d\sqrt[m]{x^n} = \frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}.$$

Per differenziare adunque qualunque grandezza radicale variabile, si deve procedere secondo la seguente

RE.

R E G O L A.

1. Si facciano due prodotti, uno con moltiplicare l'esponente della potenza della grandezza di sotto il segno radicale pel differenziale dell'istessa grandezza, considerata senza il detto esponente, e l'altro con moltiplicare l'esponente del segno radicale per l'istesso radicale, dando però alla grandezza di sotto il segno per esponente l'eccesso dell'esponente del segno radicale sull'esponente proprio.

2. Di tali due prodotti se ne faccia un rotto, che abbia per numeratore il primo, e per denominatore il secondo.

Il quoziente darà il differenziale del radicale.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

E S E M P I O I.

Sia da differenziare  $\sqrt{ax - x^2}$ .

Essendo in tale caso  $m = 2$ ,  $n = 1$ , sarà  
 il differenziale cercato  $= \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}}$ .

E S E M P I O II.

Sia da differenziare  $\sqrt[3]{ax - x^2}$ .

Essen-

Essendo in tale altro caso  $m = 3, n = 1$ ;  
 $adx - 2xdx$   
 farà il differenziale cercato =  $\frac{\quad}{3 \sqrt[3]{(ax - x^2)^2}}$ .

## E S E M P I O III.

Sia da differenziare  $\sqrt[5]{(ax - x^2)^2}$ .  
 Essendo ora  $m = 5, n = 2$ ; farà il dif-  
 $2(adx - 2xdx,$   
 ferenziale cercato =  $\frac{\quad}{5 \sqrt[5]{(ax - x^2)^3}}$ .

## E S E M P I O IV.

Sia da differenziare  $\sqrt{ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2}}$ .  
 Essendo in tale caso  $m = 2$ , ed  $n = 1$ ;  
 ed essendo di più  $d(ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2})$   
 $ay^2 dx + 2axy dy$   
 $= adx + 2xdx + \frac{\quad}{2 \sqrt{a^4 + axy^2}}$ ; farà il  
 $adx + 2xdx$   
 differenziale cercato =  $\frac{\quad}{2 \sqrt{ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2}}}$   
 $ay^2$

$$ay^2 dx + 2axy dy$$

$$2\sqrt{a^4 + axy^2} \times 2\sqrt{ax + x^2} + \sqrt{a^4 + axy^2}$$

ESEMPIO V.

$$\sqrt[3]{ax + x^2}$$

Sia da differenziare  $\frac{\sqrt[3]{ax + x^2}}{\sqrt{xy + y^2}}$ .

Essendo

$$d \sqrt[3]{ax + x^2} = \frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax + x^2)^2}}$$

$$d \sqrt{xy + y^2} = \frac{xdy + ydx + 2ydy}{2\sqrt{xy + y^2}};$$

farà il differenziale cercato =

$$\frac{\sqrt{xy + y^2} \times adx + 2xdx}{(xy + y^2)^2} \times \frac{\sqrt[3]{ax + x^2}}{3\sqrt[3]{(ax + x^2)^2}} \times$$

$$\frac{(xy + y^2) \times 3\sqrt[3]{(ax + x^2)^2}}{(xdy + ydx + 2ydy)} \times \frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{xy + y^2}}$$

$$\frac{2\sqrt{xy + y^2} \times \sqrt[3]{ax + x^2} \times (xdy + ydx + 2ydy)}{\sqrt[3]{ax + x^2} \times (xy + y^2)^2 \times 2\sqrt{xy + y^2}}$$

$$(xy + y^2) \times 2\sqrt{xy + y^2}$$

AV.

## A V V E R T I M E N T O .

28. Si noti che sempre che occorreranno nelle grandezze algebriche da differenziare più variabili, si dovrà sempre badare di prendere col  $+$  i differenziali di quelle, che dinoteranno accrescimenti, e col  $-$  i differenziali di quelle, che dinoteranno diminuzioni; il che nell'uso del calcolo differenziale si conoscerà dalle circostanze delle grandezze contrassegnate dall'espressioni algebriche, che si dovranno differenziare. Insegnati intanto i modi di determinare i differenziali algebrici del primo grado, procediamo all'uso de' medesimi: però prima conviene premettere i due seguenti capi per l'intelligenza del detto uso. Perciò sia il

CAP.

C A P. II.

*Si determinano l'equazioni alle curve,  
delle quali equazioni si dovrà  
continuamente far uso  
in seguito.*

DEFINIZIONE.

29. Si dice equazione al cerchio, alla parabola, all'ellisse, all'iperbola, ec. quell'equazione indeterminata, ch'esprime la relazione delle coordinate della curva, che limita il cerchio, la parabola, l'ellisse, l'iperbola, ec., e che, dando all'ascissa qualunque valore, che possa appartenerlo, i valori dell'ignota dell'equazione determinata, che ne risulta, limitano i corrispondenti punti della medesima curva.

P R O B L. VI.

30. *Determinare l'equazione al cerchio.*

S O L U Z I O N E .

Contraffegnino  $A M B$  qualunque mezzo Fig. 1  
cerchio,  $AB$  il suo diametro, ed  $O$  il cen-  
tro.

tro. Da qualunque punto  $M$  della periferia si cali su  $AB$  la perpendicolare  $MP$ , e si congiunga il raggio  $OM$ . Si mettano l'ascissa  $OP = x$ , l'ordinata corrispondente  $PM = y$ , e'l raggio  $= r$ ; faranno  $AP = r - x$ ,  $PB = r + x$ . Essendo per la natura del cerchio  $PM^2 = AP \times PB$ , farà  $y^2 = r^2 - x^2$ ; e tale equazione, come esprime la relazione delle coordinate  $MP$ ,  $PO$  è l'equazione al cerchio, Ch'è ciò, che bisognava determinare.

### AVVERTIMENTO I.

31. Se si mette  $AP = x$ , computando l'ascissa non dal centro  $O$ , ma dall'estremo  $A$  del diametro; perchè  $PB = 2r - x$ , farà a questo modo  $y^2 = 2rx - x^2$ ; e questa farà un'altra equazione anche al cerchio.

### AVVERTIMENTO II.

32. Si noti che se  $AMB$  è una curva tale, che sia  $PM^3 = AP^2 \times PB$ , o  $PM^3 = AP \times PB^2$ , la figura  $AMB$  si dice *cerchio di secondo genere*, per distinguerlo da quello, di cui s'è determinata l'equazione, che chiamano i Geometri *cerchio di primo genere*. Similmente si dirà *cerchio di terzo genere*, se farà  $PM^4 = AP^3 \times PB$ , o  $PM^4 = AP^2 \times PB^2$ , o  $PM^4 = AP \times PB^3$ ; *cerchio*

chio di quarto genere, se sarà  $PM^5 = AP^4 \times PB$ , o  $PM^5 = AP^3 \times PB^2$ , o  $PM^5 = AP^2 \times PB^3$ , o  $PM^5 = AP \times PB^4$ , e così procedendo all' infinito,

COROLLARIO.

33. Sicchè sono l'equazioni al cerchio di primo genere  $y^2 = x(2r - x)$ , al cerchio di secondo genere  $y^3 = x^2(2r - x)$ ,  $y^3 = x(2r - x)^2$ , al cerchio di terzo genere  $y^4 = x^3(2r - x)$ ,  $y^4 = x^2(2r - x)^2$ ,  $y^4 = x(2r - x)^3$ , al cerchio di quarto genere  $y^5 = x^4(2r - x)$ ,  $y^5 = x^3(2r - x)^2$ ,  $y^5 = x^2(2r - x)^3$ ,  $y^5 = x(2r - x)^4$ , e così procedendo all' infinito. Quindi tutte l'equazioni de' cerchi di tutti gl' infiniti diversi generi si possono rappresentare dall'equazione generale  $y^{m+n} = x^m(2r - x)^n$ . E perciò tutte le curve, che terminano sì fatti cerchi, si dicono *curve d' un' istessa famiglia*, cioè della *famiglia de' cerchi*.

PROBL. VII.

34. Determinare l'equazione alla Parabola.

SOLUZIONE.

Contraffegnino BAC qualunque parabola, Fig. 2  
AQ il suo asse, ed AH il parametro dell'  
asse.

asse. Da qualunque punto  $M$  della curva si cali sull'asse la perpendicolare  $MP$ , e si mettano l'ordinata  $MP = y$ , l'ascissa corrispondente  $AP = x$ , e'l parametro  $AH = p$ . Essendo per la natura della Parabola  $PM^2 = AP \times AH$ , farà  $y^2 = px$ ; e tale equazione, come esprime la relazione delle coordinate  $AP$ ,  $PM$ , farà l'equazione alla Parabola. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

### A V V E R T I M E N T O .

35. Si noti che se  $BAC$  è una curva tale, che sia  $PM^3 = AP^2 \times AH$ , o  $PM^3 = AP \times AH^2$ , la figura  $BAC$  si dice *parabola di secondo genere*, o *parabola cubica*, per distinguerla da quella, di cui s'è determinata l'equazione, che chiamano i Geometri *parabola di primo genere*, o *parabola apolloniana*. Similmente si dirà *parabola di terzo genere*, se farà  $PM^4 = AP^3 \times AH$ , o  $PM^4 = AP^2 \times AH^2$ , o  $PM^4 = AP \times AH^3$ ; *parabola di quarto genere*, se farà  $PM^5 = AP^4 \times AH$ , o  $PM^5 = AP^3 \times AH^2$ , o  $PM^5 = AP^2 \times AH^3$ , o  $PM^5 = AP \times AH^4$ ; e così procedendo all'infinito.

### C O R O L L A R I O .

36. Sicchè sono l'equazioni alla parabola di primo genere  $y^2 = px$ , di secondo genere

re  $y^3 = x^2 \times p$ ,  $y^3 = x \times p^2$ , di terzo genere  $y^4 = x^3 \times p$ ,  $y^4 = x^2 \times p^2$ ,  $y^4 = x \times p^3$ , di quarto genere  $y^5 = x^4 \times p$ ,  $y^5 = x^3 \times p^2$ ,  $y^5 = x^2 \times p^3$ ,  $y^5 = x \times p^4$ , e così procedendo all'infinito. Quindi tutte l'equazioni delle parabole di tutti gl'infiniti diversi generi si possono rappresentare dall'equazione generale  $y^{m+n} = x^m \times p^n$ . E perciò tutte le curve, che limitano sì fatte parabole, si dicono pure dell'istessa famiglia, cioè della famiglia delle parabole.

PROBL. VIII.

37. Determinare l'equazione all'Ellisse.

SOLUZIONE.

Contraffegnino ACB qualunque mezza ellisse, AB il suo asse maggiore, O il suo centro, OC il suo semiasse minore, ed AH il parametro, che l'appartiene relativamente all'asse maggiore. S'intenda da qualunque punto M della curva calata su AB la perpendicolare MP; e si mettano il semiasse maggiore  $OA = a$ , il semiasse minore  $OC = c$ , l'ordinata  $PM = y$ , l'ascissa corrispondente  $OP = x$ , e'l parametro  $AH = p$ . Saranno  $AP = a - x$ , e  $PB = a + x$ . Essendo per la natura della curva  $PM^2 : AP \times PB = AH : AB$ , o come  $OC^2 : AO^2$

Fig. 3

AO<sup>2</sup>, farà  $y^2 : a^2 - x^2 = p : 2a$ , o co-

me  $c^2 : a^2$ . Sicchè  $y^2 = \frac{p}{2a} (a^2 - x^2)$ ,  
ovvero  $y^2 = \frac{p}{a^2} (a^2 - x^2)$ ; e ciascuna di

tali equazioni, come esprimente la relazione delle coordinate OP, PM, farà l'equazione all'ellisse. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

### AVVERTIMENTO I.

38. Se si mette AP = x, computando l'ascissa non dal centro O, ma dall'estremo A dell'asse maggiore; perchè PB = 2a - x, farà  $y^2 : 2ax - x^2 = p : 2a$ ; onde  $y^2 = \frac{p}{2a} (2ax - x^2)$ ; e questa farà un'altra equazione pure all'ellisse,

### AVVERTIMENTO II.

39. Si noti che se ACB è una curva tale, che sia AH : AB = PM<sup>3</sup> : AP<sup>2</sup> × PB, o come PM<sup>3</sup> : AP × PB<sup>2</sup>, la figura ACB si dice *ellisse di secondo genere*, per distinguerla da quella, di cui s'è determinata l'equazione, che chiamano i Geometri *ellisse di primo genere*. Similmente si dirà *ellisse di terzo genere*, se farà AH : AB = PM<sup>4</sup>

$PM^4 : AP^3 \times PB$ , o come  $PM^4 : AP^2 \times PB^2$ , o come  $PM^4 : AP \times PB^3$ ; *ellisse di quarto genere*, se farà  $AH : AB = PM^5$ ,  $AP^4 \times PB$ , o come  $PM^5 : AP^3 \times PB^2$ : o come  $PM^5 : AP^2 \times PB^3$ , o come  $PM^5 : AP \times PB^4$ ; e così procedendo all'infinito.

COROLLARIO.

40. Sicchè sono l'equazioni all'ellisse di

primo genere  $y^2 = \frac{p}{2a} \times x (2a - x)$ ,  
 all'ellisse di secondo genere  $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2 (2a - x)$ ,  
 $y^3 = \frac{p}{2a} \times x (2a - x)^2$ ,  
 all'ellisse di terzo genere  $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^3 (2a - x)$ ,  
 $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^2 (2a - x)^2$ ,  
 $y^4 = \frac{p}{2a} \times x (2a - x)^3$ , all'ellisse di quar-  
 to genere  $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^4 (2a - x)$ ,  $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^3 (2a - x)^2$ ,  
 $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^2 (2a - x)^3$ ,  
 $y^5 = \frac{p}{2a} \times x (2a - x)^4$ ; e così proce-

dendo all'infinito. Quindi tutte l'equazioni dell'ellissi di tutti gl'infiniti diversi generi

si possono rappresentare dall'equazione gene-

rale  $y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times x^m (2a - x)^n$ . E per-

ciò tutte le curve, che limitano sì fatte ellissi, si dicono anche *dell'istessa famiglia*, cioè *della famiglia dell'ellissi*.

### P R O B L. IX.

41. *Determinare l'equazione all'iperbola.*

### S O L U Z I O N E.

Fig. 4. Contraffegnino LAN qualunque iperbola, A a il suo asse primario, Bb il suo asse secondario, O il centro, ed AH il parametro, che l'appartiene relativamente all'asse primario. S'intenda da qualunque punto M della curva calata sull'asse primario la perpendicolare MP, e si mettano OA = a, OB = c, AH = p, l'ordinata MP = y, e l'ascissa corrispondente OP = x; faranno AP = x - a, ed aP = x + a. Essendo per la natura della curva PM<sup>2</sup> : aP × PA = AH : Aa, o come OB<sup>2</sup> : OA<sup>2</sup>. Sarà y<sup>2</sup> : x<sup>2</sup> - a<sup>2</sup> = p : 2a, o come c<sup>2</sup> : a<sup>2</sup>. Sicchè

$$y^2 = \frac{p}{2a} (x^2 - a^2), \text{ ovvero } y^2 = \frac{c^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

); e ciascuna di tali equazioni, come esprime la relazione delle coordinate OP, PM

PM, è all'iperbola. Ch'è ciò, che bisogna  
va determinare.

AVVERTIMENTO I.

42. Se si mette  $AP = x$ , computando l'  
ascissa non dal centro O, ma dal vertice A;  
perchè è  $aP = 2a + x$ , sarà  $y^2 : x(2a + x)$

$$= p : 2a. \text{ Onde } y^2 = \frac{p}{2a} \times x(2a + x);$$

e questa sarà un'altra equazione anche all'  
iperbola.

AVVERTIMENTO II.

43. Si noti che se LAN è una curva  
tale, che sia  $AH : Aa = PM^3 : AP^2 \times Pa$ ,  
o come  $PM^3 : AP \times Pa^2$ , la figura  
LAN si dice *iperbola del secondo genere*, per  
distinguerla da quella, di cui s'è già deter-  
minata l'equazione, e che i Geometri chia-  
mano *iperbola di primo genere*. Similmente  
si dirà *iperbola del terzo genere*, se sarà  $AH :$   
 $Aa = PM^4 : AP^3 \times Pa$ , o come  $PM^4 :$   
 $AP^2 \times Pa^2$ , o come  $PM^4 : AP \times Pa^3$ , *iperbola*  
*di quarto genere*, se sarà  $AH : Aa = PM^5 :$   
 $AP^4 \times Pa$ , o come  $PM^5 : AP^3 \times Pa^2$ ,  
o come  $PM^5 : AP^2 \times Pa^3$ , o come  $PM^5 :$   
 $AP \times Pa^4$ , e così procedendo all'infinito.

## C O R O L L A R I O .

44. Quindi sono l'equazioni all'iperbola  
di primo genere  $y^2 = \frac{p}{2a} \times x (2a + x)$ ,

di secondo genere  $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2 (2a + x)$ ,  
 $y^3 = \frac{p}{2a} \times x (2a + x)^2$ , di terzo ge-

nera  $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^3 (2a + x)$ ,  $y^4 = \frac{p}{2a} \times$   
 $x^2 (2a + x)^2$ ,  $y^4 = \frac{p}{2a} \times x (2a + x)^3$ ,

di quarto genere  $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^4 (2a + x)$ ,  
 $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^3 (2a + x)^2$ ,  $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^2$ ,

$(2a + x)^3$ ,  $y^5 = \frac{p}{2a} \times x (2a + x)^4$ ,

e così procedendo all'infinito. Tutte l'equazioni adunque delle iperbole di tutt'i diversi infiniti generi si possono rappresen-

tare dall'equazione generale  $y^{m+n} = \frac{p}{2a}$   
 $\times x^m (2a + x)^n$ . E perciò tutte le  
cur.

curve, che limitano sì fatte iperbole, si dicono *dell' istessa famiglia*, cioè *della famiglia delle iperbole*.

## AVVERTIMENTO III.

45. Si noti pure che  $v$  è un'altra equazione semplicissima all' iperbola, considerando le ordinate relativamente alli suoi asintoti. Di fatto sia  $OR$  uno degli asintoti dell' iperbola  $LAN$ , e da qualunque punto  $M$  della curva s' intenda menata ad esso l'ordinata  $MQ$ . Poste l'ordinata  $MQ = y$ , e l'ascissa corrispondente  $OQ = x$ , e posto anche il lato della potenza dell' iperbola  $= a$ ; essendo per la natura della curva  $OQ \times QM = a^2$ , farà  $xy = a^2$ ; e questa semplicissima equazione, come esprime la relazione delle coordinate  $OQ$ ,  $QM$  riferite agli asintoti, è anche un' equazione all' iperbola di primo genere. Del resto relativamente agli asintoti sono l' equazioni alle iperbole di secondo genere  $x^2 y = a^3$ ,  $xy^2 = a^3$ ; alle iperbole di terzo genere  $x^3 y = a^4$ ,  $x^2 y^2 = a^4$ ,  $xy^3 = a^4$ , e così procedendo all' infinito. E perciò tutte l' equazioni delle iperbole di tutt' i diversi infiniti generi relativamente agli asintoti si possono rappresentare dall' equazione generale  $x^m y^n = a^{m+n}$ .

## A V V E R T I M E N T O I V .

46. Si noti finalmente che sebbene non ci prendiamo qui la pena di determinare l'equazioni di altre curve, come non al bisogno della gioventù militare, che ama d'essere introdotta ne' calcoli sublimi: nondimeno nel capo seguente daremo una succinta idea della curva logaritmica, e ne determineremo la sua equazione, per insegnare in seguito il modo di differenziare e le quantità logaritmiche, e le quantità esponenziali. Perciò sia il

## C A P . I I I .

*Della curva logaritmica, e del modo di differenziare le quantità logaritmiche.*

## D E F I N I Z I O N E .

Fig. 5 47. Sia LMNO una curva riferita alla retta AB, e tale, che procedendo nella AB da A verso B le ascisse in qualunque progressione aritmetica, le corrispondenti ordinate, ad angoli retti disposte per rispetto di AB, procedano in qualunque progressione  
ne

DEL CALC. DIFFER. 41  
ne geometrica . Si fatta curva LMNO si  
dice dalli Geometri *logaritmica*, o *logistica*.

### AVVERTIMENTO.

48. Si dà a tale curva la denominazio-  
ne di *logaritmica*, perchè alle ordinate di  
esse le ascisse corrispondono, come ai nu-  
meri i logaritmi.

### COROLLARIO I.

49. Sia da qualunque punto M della lo-  
garitmica LMNO menata alla linea delle  
ascisse AB l'ordinata PM. Poste l'ordinata  
 $PM = y$ , e l'ascissa corrispondente  $AP = x$ ,  
e dinotando con  $l$  il logaritmo della gran-  
dezza, a cui si mette innanzi, farà l'equa-  
zione alla detta curva  $x = ly$ .

### COROLLARIO II.

50. Sieno in oltre PM, QN due or-  
dinate qualunque della logaritmica LMNO.  
S'intendano tirate  $pm$  parallela, ed infini-  
tamente vicina a PM, ed MR parallela  
ad AB. Saranno Pp differenziale di AP,  
ed Rm differenziale di PM; e di più l'ele-  
mento Mm della curva si potrà senza sensi-  
bile errore prendere per una lineetta fetta,  
tal che, prolungata in T, faranno TM la  
tangente della curva in M, e PT la sot-  
tan-

tangente corrispondente . S' intenda di più presa  $Qq = Pp$ , e s' intendano menate per  $q$  la  $qn$  parallela a  $QN$ , e per  $N$  la  $NS$  parallela pure ad  $AB$ . Si potrà l'elemento  $Nn$  della curva prendere anche per una lineetta retta, che, prolungata in  $U$ , darà la  $UN$  tangente della curva in  $N$ , e la  $QU$  sottangente corrispondente. Or essendo  $Ap$ ,  $AP$ ,  $Aq$ ,  $AQ$  in proporzione aritmetica, s'avrà la seguente proporzione geometrica

$$pm : PM = qn : QN.$$

Sicchè, dividendo, s'avrà

$$Rm : PM = Sn : QN.$$

$Ma$

$$Rm : PM = MR : PT$$

$$Sn : QN = NS : QU,$$

ovvero

$$Rm : PM = Pp : PT$$

$$Sn : QN = Qq : QU.$$

Dunque

$$Pp : PT = Qq : QU.$$

E perciò, essendo  $Pp = Qq$ , sarà  $PT = QU$ .

Per la qual cosa la sottangente nella logaritmica è relativamente a qualunque punto della curva sempre dell'istessa grandezza, e conseguentemente costante.

### C O R O L L A R I O III.

51. Sia dunque nella logaritmica qualunque

que ordinata  $PM = y$ , l'ascissa corrispondente  $AP = x$ , e la sottangente  $PT = a$ .  
 Essendo  $x = \log y$ , e conseguentemente  $dx = d \log y$ , ed essendo  $Rm : Pp = MP : PT$ , farà

$$dy : dx = y : a,$$

ovvero

$$dy : d \log y = y : a.$$

Sicchè

$$d \log y = a \times \frac{dy}{y}.$$

Quindi, per differenziare qualunque grandezza logaritmica, si deve procedere secondo la seguente

### R E G O L A.

*Si moltiplichi la sottangente della logaritmica, alla quale appartiene la grandezza logaritmica, pel rotto, che ha per numeratore il differenziale della grandezza, alla quale la grandezza logaritmica si riferisce, e per denominatore l'istessa grandezza, alla quale si riferisce la detta grandezza logaritmica; il prodotto, che nasce, dà il differenziale cercato della grandezza logaritmica.*

### AVVERTIMENTO I.

52. Si noti che in tutt'i casi, che sog-  
giu.

giugneremo , supperremo sempre la sottan-  
gente della logaritmica essere  $= a$ .

## C A S O I.

*Sia da differenziare  $l(1 - x)$ .*

Essendo  $d(1 - x) = -dx$ ; farà il  
differenziale cercato , cioè

$$dl(1 - x) = - \frac{adx}{1-x}$$

## C A S O II.

*Sia da differenziare  $lxy$ .*

Essendo  $d(xy) = xdy + ydx$ ; farà il dif-  
ferenziale cercato , cioè

$$dlxy = \frac{a(xdy + ydx)}{xy}$$

## C A S O III.

*Sia da differenziare  $(lx)^m$ .*

Si metta  $lx = y$ . Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$y^m = (lx)^m$$

$$y^{m-1} = (lx)^{m-1}$$

Onde

$$d(lx)^m = dy^m = my^{m-1} dy.$$

E

E perciò

$$d(lx)^m = m(lx)^{m-1} \times \frac{adx}{x}$$

C A S O IV.

Sia da differenziare  $(lx^n)^m$ .

Si metta  $x^n = y$ . Saranno

$$dy = nx^{n-1} dx$$

$$(ly)^m = (lx^n)^m$$

$$(ly)^{m-1} = (lx^n)^{m-1}$$

Onde

$$d(lx^n)^m = d(ly)^m = m(ly)^{m-1} \times \frac{ady}{y}$$

E perciò

$$d(lx^n)^m =$$

$$m(lx^n)^{m-1} \times \frac{adx}{x}$$

$$= mn(lx^n)^{m-1} \times$$

$$\frac{adx}{x}$$

C A S O V.

Sia da differenziare  $lx$ , o sia  $l^2x$ .

Si metta  $lx = y$ . Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$ly = l^2x$$

On-

Onde

$$d(11x) = dly = \frac{ady}{y}$$

E perciò

$$d(11x) = \frac{a^2 dx}{x1x}$$

## C A S O VI.

Sia da differenziare  $111x$ , o sia  $1^3 x$ .  
Si metta  $11x = y$ . Saranno

$$dy = \frac{a^2 dx}{x1x}$$

$$ly = 111x,$$

$$d(111x) = dly = \frac{ady}{y}$$

E perciò

$$d(111x) = \frac{a^3 dx}{x1x \cdot 11x}$$

Similmente procedendo si hanno

$$d(14x) = \frac{a^4 dx}{x1x \cdot 1^2 x \cdot 13x}$$

$$d(15x) = \frac{a^5 dx}{x1x \cdot 1^2 x \cdot 13x \cdot 14x}$$

 $d(1^n$

$$d(l^n x) = \frac{a^n dx}{x l x \cdot l^2 x \cdot l^3 x \cdot l^4 x \dots l^{n-1} x}$$

C A S O VII.

Sia da differenziare  $(l x)^m$ .  
Si metta  $l x = y$ . Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$(ly)^m = (l x)^m$$

$$(ly)^{m-1} = (l x)^{m-1}$$

Onde

$$d(l x)^m = d(ly)^m = m(ly)^{m-1} \times \frac{ady}{y}$$

E perciò

$$d(l x)^m = m(l x)^{m-1} \times \frac{a^2 dx}{x l x}$$

C A S O VIII.

Sia da differenziare  $(l(l x)^m)^n$ .  
Si metta  $l x = y$ . Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$y^m = (l x)^m$$

$$l y^m = l(l x)^m$$

$$(l y^m)^{n-1} = (l(l x)^m)^{n-1}$$

On-

Onde

$$d [ l [ l x ]^m ]^n = d [ l y^m ]^n = m n [ l y^m ]^{n-1} \times$$

$$\frac{a dy}{y}$$

y

E perciò

$$d ( l ( l x )^m )^n = m n ( l ( l x )^m )^{n-1} \times \frac{a^2 dx}{x l x}$$

## C A S O IX.

Sia da differenziare  $\frac{x^2}{l l x}$ .

Essendo  $d \left( \frac{x^2}{l l x} \right) = \frac{d(x^2) l l x - x^2 \times d[l l x]}{[l l x]^2}$ ;

ed essendo

$$d [ x^2 ] = 2 x dx$$

$$d [ l l x ] = \frac{a^2 dx}{x l x}$$

Sarà

$$d \left( \frac{x^2}{l l x} \right) =$$

$$\frac{2 x dx \cdot l l x - \frac{a^2 x dx}{x l x}}{[l l x]^2} = \frac{2 x dx \cdot l x \cdot l l x - a^2 x dx}{l x \cdot [l l x]^2}$$

CA.

## CASO X.

Sia finalmente da differenziare  $\frac{l x}{l l x}$ .

$$\text{Essendo } d \left( \frac{l x}{l l x} \right) = \frac{d[l x] \times l l x - l x \times d[l l x]}{[l l x]^2},$$

$$\text{ed essendo } d l x = \frac{a dx}{x}.$$

$$d[l l x] = \frac{a^2 dx}{x l x}.$$

Sarà

$$d \left( \frac{l x}{l l x} \right) = \frac{a dx \cdot l l x - a^2 dx}{x [l l x]^2}.$$

## AVVERTIMENTO II.

53. Gli esposti casi sono sufficientissimi a far comprendere in che modo si deve procedere per differenziare qualunque altra grandezza logaritmica, o che sia essa un intero, o un rotto.

## C A P. IV.

*Delle quantità esponenziali, e del modo di differenziarle.*

## DEFINIZIONE I.

54. Si dicono quantità esponenziali quelle, che si trovano innalzate a potenze d' esponenti variabili.

Così quantità esponenziali sono  $a^x$ ,  $x^y$ ,  $a^x y^z$ ,  $x^y z$ , ec.,

## AVVERTIMENTO.

55. Le quantità esponenziali furono chiamate da Giovanni Bernoulli anche *quantità percorrenti*, come atte a percorrere per tutte le possibili dimensioni, potendosi l' esponente indeterminato supporre dinotare qualsivoglia numero positivo, o negativo, intero, o rotto, commensurabile, o incommensurabile.

## DEFINIZIONE II.

56. Si dice una quantità esponenziale essere del primo grado, se l' esponente della quan-

DEL CALC. DIFFER. 51

quantità è un' indeterminata semplice ; *del grado secondo*, se l' esponente è una quantità esponenziale del primo grado ; *del terzo grado*, se l' esponente è una quantità esponenziale del grado secondo, e così procedendo all' infinito.

Così sono  $a^x$ ,  $x^y$ , ec. esponenziali del primo grado,  $a^{x^y}$ ,  $x^{y^z}$ , ec. esponenziali del secondo grado,  $a^{x^{y^z}}$ ,  $x^{y^{z^v}}$ , ec. esponenziali del terzo grado, e così procedendo all' infinito.

P R O B L. X.

57. *Insegnare il modo di differenziare le quantità esponenziali.*

S O L U Z I O N E.

Si ricavino prima dalle quantità esponenziali le grandezze logaritmiche, come si vedrà qui in seguito fatto; e poscia da queste differenziate si ricavino i differenziali di quelle. S' avranno in tal modo i differenziali delle quantità esponenziali. Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

A V V E R T I M E N T O I.

58. Si noti che ne' casi, che soggiungeremo,  $l$  sarà la contrassegnante de' logaritmi, ed  $a$  dinoterà sempre la sottangente  
D 2 della

52      T R A T T A T O  
 della curva logaritmica, che si suppone adoperata per la determinazione delle grandezze logaritmiche.

C A S O I.

*Sia da differenziare  $c^x$ .*

Si metta  $c^x = y$ , e se ne ricavi la grandezza logaritmica. S'avrà  $xlc = ly$ ; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$dxlc = dy = \frac{ady}{y} = \frac{ady}{c^x}$$

Sicchè

$$dy = dc^x = \frac{c^x dxlc}{a}$$

C A S O II.

*Sia da differenziare  $xy$ .*

Si metta  $xy = v$ . Sarà  $ylx = lv$ ; e differenziando tale equazione, s'avrà

$$dylx + yx \frac{adx}{x} = \frac{adv}{v} = \frac{adv}{xy}$$

Sicchè

$$dv = dxy = \frac{1}{a} [xy dylx + ayx^{y-1} dx].$$

CA.

C A S O III.

*Sia da differenziare  $c^x y^z$ .*

Si metta  $c^x y^z = v$ . Sarà  $xlc + zly = lv$ ; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$dx \cdot lc + dz \cdot ly + z \times \frac{ady}{y} = \frac{adv}{v}$$

$$\frac{adv}{v} = \frac{adv}{c^x y^z}$$

Sicchè

$$dv = dc^x y^z = \frac{1}{a} [c^x y^z dx \cdot lc + c^x y^z dz \cdot ly + azc^x y^{z-1} dy]$$

C A S O IV.

*Sia da differenziare  $x^y z^v$ .*

Si metta  $x^y z^v = \omega$ . Sarà  $ylx + vlz = l\omega$ ; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$dylx + yx \frac{adx}{x} + dvlz + vx \frac{adz}{z}$$

$$= \frac{ad\omega}{\omega} = \frac{ad\omega}{x^y z^v}$$

Sicchè

$$d\omega = d(x^y z^v) = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a} (ax^y z^v dylx + ayx^{y-1} z^v dx + x^y z^v dvlz + avx^y z^{v-1} dz).$$

## C A S O V.

Sia da differenziare  $x^y \pm z^v$ .

$$\text{Essendo } d(x^y) = \frac{1}{a} (x^y dylx + ayx^{y-1} dx),$$

$$d(z^v) = \frac{1}{a} [z^v dvlz + avz^{v-1} dz].$$

Sarà il differenziale cercato di  $x^y \pm z^v =$

$$\frac{1}{a} [x^y dylx + ayx^{y-1} dx] \pm \frac{1}{a} [z^v dvlz + avz^{v-1} dz].$$

## C A S O VI.

Sia da differenziare  $x^y$ .

Si metta  $x^y = v$ . Sarà  $yz lx = lv$ ; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$d[yz] lx + yz \times \frac{adx}{x} = \frac{adv}{v} = \frac{adv}{xy^z}.$$

Ma

$$d[yz] = \frac{1}{a} [yz dzly + azyz^{-1} dy].$$

Dun-

Dunque

$$\frac{1}{a} [y^z dz + ay^z x^{-1} dx] + ay^z x^{-1} dx$$

$$= \frac{a dv}{x^z}$$

E perciò

$$dv = d(x^z) =$$

$$\frac{1}{a^2} [y^z dz + ay^z x^{-1} dx] + y^z x^{-1} dx$$

## AVVERTIMENTO II.

59. Quanto s'è fin qui del calcolo differenziale insegnato è sufficientissimo a poter differenziare qualunque grandezza algebrica. Resta ora che si proceda agli usi del medesimo calcolo. E' d'avvertire però che degli usi non n' esporremo, se non i principali, per non intertenere la gioventù militare troppo in cose fuori del bisogno. Sia intanto il seguente

## C A P. V.

*Dell' uso de' differenziali del primo grado in determinare le tangenti delle curve.*

## P R O B L. XI.

60. *Determinare due formole generali per poter avere , facendo uso del calcolo differenziale , con una di esse la sottangente di qualunque curva algebrica , e coll' altra la sunnormale .*

## S O L U Z I O N E .

## C A S O I.

Fig. 6 *Contraffegnino*  $A M B$  qualunque curva ,  $AQ$  il suo asse ,  $MT$  la tangente in qualsiasi punto  $M$  , ed  $MH$  la normale . Da  $M$  s' intenda menata all' asse l' ordinata  $MP$  , e s' intendano tirate  $pm$  parallela , ed infinitamente vicina a  $PM$  , ed  $MR$  parallela ad  $AQ$  . Si potrà senza sensibile errore intendere l' elemento  $Mm$  della curva essere una lineetta retta in diretto della tangente  $TM$  ; e saranno relativamente al punto  $M$  la

la sottangente  $PT$ , e la funnormale  $PH$ .  
 Si mettano l'ordinata  $PM = y$ , e l'ascissa  
 corrispondente  $AP = x$ ; faranno  $MR =$   
 $Pp = dx$ ,  $Rm = dy$ . Essendo il triangolet-  
 to  $MRm$  simile ad  $MPT$ , sarà

$$mR : RM = MP : PT.$$

Onde

$$dy : dx = y : PT.$$

Sicchè

$$PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Essendo in oltre

$$TP : PM = PM : PH;$$

farà

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : PH.$$

Dunque

$$PH = \frac{ydy}{dx}.$$

Per la qual cosa le formole generali cercate  
 sono per la

$$\text{sottangente } PT = \frac{ydx}{dy},$$

$$\text{funnormale } PH = \frac{ydy}{dx}.$$

CA.

Fig. 7. Contraffegnino  $AMB$  qualunque curva tra gli asintoti  $OQ$ ,  $OT$ , ed  $MT$  la tangente in qualunque suo punto  $M$ , ed  $MH$  la normale. Da  $M$  s'intenda menata la perpendicolare  $MP$  ad  $OQ$ , e s'intendano tirate  $pm$  parallela, ed infinitamente vicina a  $PM$ , ed  $mR$  parallela ad  $OQ$ . Relativamente al punto  $M$  faranno  $PT$  la sotttangente, e  $PH$  la funnormale. Si mettano l'ordinata  $PM = y$ , e l'ascissa corrispondente  $OP = x$ ; faranno  $Pp = dx$ , ed  $MR = -dy$ . Effendo

$$MR : Rm = MP : PT,$$

$$-dy : dx = y : PT.$$

Dunque

$$PT = -\frac{ydx}{dy}.$$

Ed effendo

$$TP : PM = PM : PH,$$

$$-\frac{ydx}{dy} : y = y : PH.$$

Sicchè

$$PH = -\frac{ydy}{dx}.$$

Per

Per la qual cosa le formole cercate in questo secondo caso sono per la

$$\text{sottangente } PT = - \frac{y dx}{dy},$$

$$\text{funnormale } PH = - \frac{y dy}{dx}.$$

Ch'è quanto bisognava determinare.

COROLLARIO.

61. Essendo relativamente ad ogni cur. Fig. 6,

$$\text{va } PM = y, PH = \pm \frac{y dy}{dx}, \text{ e } PT$$

$$= \pm \frac{y dx}{dy}; \text{ faranno relativamente ad ogni}$$

curva le formole generali per la normale

$$MH = \sqrt{MP^2 + PH^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}}$$

$$= \frac{y}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ e per la tangente}$$

$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}}$$

=

$$= \frac{y}{dy} \sqrt{dy^2 + dx^2}.$$

## A V V E R T I M E N T O .

62. Si noti che, posto l'arco  $AM = v$ , è il suo elemento  $Mm = dv$ . Ma  $Pp : PT = Mm : MT$ . Dunque si ha  $dx : ydx = dv : MT$ . E perciò  $MT = \frac{ydv}{dy}$  dà un'altra formola generale per la tangente, includendovi in essa l'elemento dell'arco  $AM$  della curva.

## P R O B L. XII.

63. *Determinare la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto d'una curva algebrica coll'ajuto delle formole generali già trovate.*

## S O L U Z I O N E .

Si trovi il differenziale dell'equazione alla curva, e da esso si rilevino i valori delle formole  $\pm \frac{ydx}{dy}$ ,  $\pm \frac{ydy}{dx}$ . S'avranno in tal modo la sottangente cercata, e la cercata sunnormale.

ESEM.

ESEMPIO I.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto della parabola di qualunque genere.

Posto il parametro dell'asse =  $p$ , e poste l'ordinata all'asse menata da qualunque punto della curva =  $y$ , e l'ascissa corrispondente =  $x$ ; sarà l'equazione generale  $y^{m+n} = x^m p^n$ , e'l suo differenziale  $(m+n) y^{m+n-1} dy = mp^n x^{m-1} dx$ . Onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n) y^{m+n-1}}{mp^n x^{m-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mp^n x^{m-1}}{(m+n) y^{m+n-1}}$$

E perciò

$$\frac{y dx}{dy} =$$

$$\frac{[m+n] y^{m+n}}{mp^n x^{m-1}} = \frac{[m+n] x^m p^n}{mp^n x^{m-1}} = \frac{m+n}{m} \times x,$$

$$\frac{y dy}{dx} =$$

$$\frac{mp^n x^{m-1} y^2}{[m+n] y^{m+n}} = \frac{mp^n x^{m-1} y^2}{[m+n] x^m p^n} = \frac{m}{m+n} \times$$

28

Quin-

Quindi

1. Se la parabola è di primo genere. Essendo in tal caso  $y^2 = px$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; faranno la sottangente

$$\frac{m+n}{m} x = 2x, \text{ e la sunnormale}$$

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \times \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} p.$$

2. Se la parabola è di secondo genere. Posta la sua equazione  $y^3 = x^2 p$ , e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 1$ ; faranno la

$$\text{sottangente } \frac{m+n}{m} x = \frac{3}{2} x, \text{ e la sunnormale}$$

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{y^3}{x} = \frac{2}{3} \times \frac{y^3}{xy} = \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{x^2 p}{xy} = \frac{2}{3} p \times \frac{x}{y}. \text{ Posta poi l'equazione}$$

$$y^3 = x p^2, \text{ e conseguentemente } m =$$

$$1, n = 2; \text{ faranno la sottangente } \frac{m+n}{m} x$$

$$x = 3x, \text{ e la sunnormale } \frac{m}{m+n} \times \frac{y^3}{x} =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{y^3}{xy} = \frac{1}{3} \times \frac{p^2 x}{xy} = \frac{p^2}{3y}; \text{ e così procedendo innanzi.}$$

ESEM.

ESEMPIO II.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la subnormale relativamente a qualunque punto dell'ellisse di qualunque genere.

Posti il semiasse maggiore =  $a$ , il parametro relativamente all'istesso asse =  $p$ , l'ordinata al medesimo asse, menata da qualsiasi punto della curva =  $y$ , e l'ascissa corrispondente, computata dall'estremo dell'asse =  $x$ , sarà l'equazione generale  $y^{m+n} =$

$$\frac{p}{2a} x x^m [2a - x]^n, \text{ e' l suo differenzia-}$$

$$\text{le } [m + n] y^{m+n-1} dy = \frac{p}{2a} dx [m x^{m-1} x$$

$$[2a - x]^n - n x^m [2a - x]^{n-1}]; \text{ onde}$$

$$\frac{dx}{dy} =$$

$$[m + n] y^{m+n-1}$$

---


$$\frac{p}{2a} [m x^{m-1} [2a - x]^n - n x^m [2a - x]^{n-1}]$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{p}{2a}$$

$$\frac{p}{2a} [mx^{m-1}] [2a-x]^n - nx^m [2a-x]^{n-1}$$


---

$$[m+n] y^{m+n-1}$$

E perciò

$$\frac{y dx}{dy}$$

$$[m+n] y^{m+n}$$


---

$$\frac{p}{2a} [mx^{m-1} [2a-x]^n - nx^m [2a-x]^{n-1}]$$

$$[m+n] \frac{p}{2a} x^m [2a-x]^n$$


---

$$\frac{p}{2a} [mx^{m-1} [2a-x]^n - nx^m [2a-x]^{n-1}]$$

$$[m+n] x [2a-x]$$

$$m [2a-x] - nx$$

$$\frac{y dy}{dx} =$$

$$dx$$

$$\frac{p}{2a} y^2 [mx^{m-1} [2a-x]^n - nx^m [2a-x]^{n-1}]$$


---

$$[m+n] y^{m+n}$$

$$\frac{p}{2a}$$

$$\frac{p}{2a} y^2 [m x^{m-1} [2a-x]^n - n x^m [2a-x]^{n-1}]$$

---


$$[m+n] \frac{p}{2a} x^m [2a-x]^n$$

$$\frac{[m[2a-x] - nx] y^2}{(m+n)x[2a-x]}$$

Quindi

1. Se l'ellisse è di primo genere. Essendo in tal caso  $y^2 = \frac{p}{2a} x [2a-x]$ , e

conseguentemente  $m = 1, n = 1$ ; faranno

la sottangente =  $\frac{[m+n]x[2a-x]}{m[2a-x] - nx}$

$\frac{x[2a-x]}{a-x}$ , e la funnormale

$$\frac{[m[2a-x] - nx] y^2}{[m+n]x[2a-x]} = \frac{a-x}{x[2a-x]} \times y^2 =$$

$$[a-x] \frac{p}{2a} x [2a-x]$$

---


$$\frac{x[2a-x]}{2a} = \frac{p}{2a} [a-x]$$

2. Se l'ellisse è di secondo genere. Posta  
E la

la sua equazione  $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2 [2a - x]$ ,

e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 1$ ; faran-

no la sottangente  $\frac{[m + n] x [2a - x]}{m(2a - x) - nx} =$

$\frac{3x[2a - x]}{4a - 3x}$ , e la sunnormale

$\frac{[m[2a - x] - nx]y^2}{[m + n]x[2a - x]} = \frac{[4a - 3x]y^2}{3x[2a - x]}$

$= \frac{[4a - 3x]y^3}{3xy[2a - x]} = \frac{4a - 3x}{3xy} \times$

$\frac{p}{2a} \times x^2 [2a - x]$

$\frac{p}{2a} \times x^2 [2a - x] = \frac{p}{2a} \times x \times \frac{4a - 3x}{3y}$ . Posta

poi l'equazione  $y^3 = \frac{p}{2a} \times x [2a - x]^2$ ,

e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 2$ ; faran-

no la sottangente  $\frac{[m + n] x [2a - x]}{m[2a - x] - nx} =$

$\frac{3x[2a - x]}{2a - 3x}$ , e la sunnormale

[m

$$\frac{[m[2a-x] - nx]y^2}{[m+n]x[2a-x]} = \frac{2a-3x}{3x[2a-x]} x$$

$$y^2 = \frac{2a-3x}{3xy[2a-x]} x \quad y^3 = \frac{2a-3x}{3xy[2a-x]} x$$

$$\frac{p}{2a} x x [2a-x]^2 = \frac{p}{2a} x \frac{[2a-3x][2a-x]}{3y}$$

e così procedendo innanzi.

### AVVERTIMENTO.

64. Si noti che se nelle formole per l'ellissi si mette  $p = 2a$ , si trasmutano esse in formole pe' cerchi. Onde per la famiglia de' cerchi le formole generali sono per la

$$\text{fottangente} = \frac{[m+n]x[2a-x]}{m[2a-x] - nx},$$

$$\text{funnormale} = \frac{[m[2a-x] - nx]y^2}{[m+n]x[2a-x]}.$$

E perciò pel cerchio di primo genere sono la

$$\text{fottangente} = \frac{x[2a-x]}{a-x},$$

$$\text{funnormale} = \frac{a-x}{a-x}.$$

E 2

Pel

Pel cerchio di secondo genere. Posta la sua equazione  $y^3 = x^2 [2a - x]$ , sono la

$$\text{sottangente} = \frac{3x[2a - x]}{4a - 3x},$$

$$\text{funnormale} = \frac{(4a - 3x)x}{3y}.$$

Posta poi l'equazione  $y^3 = x(2a - x)^2$ , sono la

$$\text{sottangente} = \frac{3x(2a - x)}{2a - 3x},$$

$$\text{funnormale} = \frac{[2a - 3x][2a - x]}{3y};$$

e così procedendo innanzi.

### E S E M P I O III.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la funnormale relativamente a qualunque punto dell'iperbola di qualunque genere.

Posti il semiasse primario  $= a$ , il parametro relativamente all'istesso asse  $= p$ , l'ordinata al medesimo asse  $= y$ , e l'ascissa corrispondente, computata dall'estremo dell'asse  $= x$ ; farà l'equazione generale  $y^{m+n} =$

$$\frac{p}{2a} x x^m [2a + x]^n, \text{ e farà il suo differenziale } [m + n] y^{m+n-1} dy = \frac{p}{2a} dx$$

$$[m x^{m-1} [2a + x]^n + n x^m [2a + x]^{n-1}].$$

Onde

Onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[m+n] y^{m+n-1}}{p}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2a} [mx^{m-1} [2a+x]^n + nx^m [2a+x]^{n-1}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2a} (mx^{m-1} (2a+x)^n + nx^m (2a+x)^{n-1})$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n) y^{m+n-1}}{p}$$

E perciò

$$\frac{y dx}{dy} =$$

$$(m+n) y^{m+n}$$

$$\frac{p}{2a} (mx^{m-1} (2a+x)^n + nx^m (2a+x)^{n-1})$$

$$(m+n) \frac{p}{2a} x x^m (2a+x)^n$$

$$\frac{p}{2a} (mx^{m-1} (2a+x)^n + nx^m (2a+x)^{n-1})$$

$$\frac{(m+n) x (2a+x)}{m(2a+x) + n x}$$

$$E \quad 3$$

yd

$$\frac{y dy}{dx} =$$

$$\frac{p}{2a} y^2 (mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})$$

$$\frac{\hspace{10em}}{(m+n)y^{m+n}} =$$

$$\frac{p}{2a} y^2 (mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})$$

$$\frac{\hspace{10em}}{\hspace{10em}} =$$

$$(m+n) \frac{p}{2a} x^m (2a+x)^n$$

$$\frac{m[2a+x] + nx}{[m+n]x[2a+x]} \times y^2$$

Quindi

1. Se l'iperbola è di primo genere. Es-

sendo in tal caso  $y^2 = \frac{p}{2a} \times x[2a+x]$ ,

e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; fa-

ranno la sottangente  $= \frac{[m+n]x[2a+x]}{m(2a+x) + nx}$

$= \frac{x(2a+x)}{a+x}$ , e la sunnormale

(v)

$$\frac{(m(2a+x) + nx)y^2}{(m+n)x(2a+x)} = \frac{a+x}{x(2a+x)} \times y^2$$

$$= \frac{a+x}{x(2a+x)} \times \frac{p}{2a} \times x(2a+x) = \frac{p}{2a}$$

$\times (a+x)$ .

2. Se l'iperbola è di secondo genere. Po-

sta la sua equazione  $y^2 = \frac{p}{2a} \times x^2 [2a+x]$ ,

è conseguentemente  $m = 2, n = 1$ ; faran-

no la sottangente  $\frac{[m+n]x[2a+x]}{m[2a+x] + nx} =$

$\frac{3x[2a+x]}{4a+3x}$ , e la sunnormale

$$\frac{[m[2a+x] + nx]y^2}{(m+n)x(2a+x)} = \frac{[4a+3x]y^2}{3xy[2a+x]} =$$

$$(4a+3x) \frac{p}{2a} \times x^2 (2a+x)$$

$$\frac{p}{2a} \times \frac{3xy(2a+x)}{x(4a+3x)}$$

Posta poi l'equazione

$$y^2 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)^2, \text{ e conseguen-}$$

temente  $m = 1$ ,  $n = 2$ ; faranno la sot-

$$\text{tangente } \frac{(m+n)x(2a+x) - 3x(2a+x)}{m(2a+x) + nx} = \frac{3x(2a+x)}{2a+3x},$$

$$\text{e la funnormale } \frac{(m(2a+x) + nx)y^2}{(m+n)x(2a+x)} =$$

$$\frac{2a+3x}{3x(2a+x)} \times y^2 = \frac{2a+3x}{3xy(2a+x)} \times y^3 =$$

$$\frac{2a+3x}{3xy(2a+x)} \times \frac{p}{2a} \times (2a+x)^2 = \frac{p}{2a} \times$$

$$\frac{(2a+3x)(2a+x)}{3y}; \text{ e così proceden-}$$

do innanzi.

#### E S E M P I O IV.

*Sieno da determinarsi la sottangente, e la funnormale relativamente a qualunque punto dell'iperbola di qualunque genere, riferita agli asintoti.*

Posto il lato della potenza dell'iperbola  $= a$ , e poste l'ordinata all'asintoto, menata da qualunque punto della curva  $= y$ , e l'ascissa corrispondente  $= x$ ; farà l'equazione generale  $x^m y^n = a^{m+n}$ , e'l suo differenziale  $mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy = 0$ .

On-

Onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{nx^m y^{n-1}}{mx^{m-1} y^n} = \frac{n}{m} \times \frac{x}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1} y^n}{nx^m y^{n-1}} = \frac{m}{n} \times \frac{y}{x}.$$

E perciò

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{n}{m} \times x,$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{m}{n} \times \frac{y^2}{x}.$$

Quindi

1. Se l'iperbola è di primo genere. Essendo in tal caso  $xy = a^2$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; faranno la sottan-

gente  $\frac{1}{1} x = x$ , e la sunnormale  $\frac{1}{1} \times \frac{y^2}{x} = \frac{a^4}{x^2}$ .

2. Se l'iperbola è di secondo genere. Posta la sua equazione  $x^2 y = a^3$ , e conseguentemente  $m = 2$ , ed  $n = 1$ ; faranno

la sottangente  $\frac{1}{2} x = \frac{1}{2} x$ ,  
e la

e la funnormale  $\frac{m}{a^6} \times \frac{y^2}{x} = -2x$

Posta poi l'equazione  $xy^2 = a^3$ , e

conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 2$ ; saran-

no la sottangente  $\frac{m}{n} x = -2x$ , e

la funnormale  $\frac{m}{n} \times \frac{y^2}{x} = -\frac{1}{2} \times \frac{a^3}{x^2}$ ;

e così procedendo innanzi.

### E S E M P I O V.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la funnormale relativamente a qualunque punto della curva dell'equazione  $a^x = y$ .

Essendo  $a^x = y$ , sarà  $x \ln a = \ln y$ ; onde

$$\ln a \, dx = \frac{dy}{y}$$

Sicchè la

$$\text{sottangente } \frac{y \ln x}{dy} = \frac{1}{\ln a},$$

$$\text{funnormale } \frac{y \, dy}{dx} = y^2 \times \ln a;$$

ESEM.

ESEMPIO VI.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto della curva dell' equazione  $x^x = y$ .

Essendo  $x^x = y$ , farà  $x \ln x = \ln y$ ; onde

$$\ln x \, dx + \frac{x \, dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln x \times y \, dx + y \, dx = dy.$$

Sicchè la

sottangente  $\frac{y \, dx}{dy} = \frac{1}{\ln x + 1},$

sunnormale  $\frac{y \, dy}{dx} = (\ln x + 1) y^2.$

---



---

**C A P. VI.**

*Dell' uso de' differenziali del primo grado in isciorre i probl. de' massimi, e minimi.*

**D E F I N I Z I O N E.**

65. Se l'ordinata d'una curva procede successivamente crescendo, o scemando fino a certa misura, e da tale misura poi procede all'opposto successivamente scemando, o crescendo; il metodo di determinare tale massima, o minima ordinata è ciò, che si dice *metodo de' massimi, e minimi*.

**A V V E R T I M E N T O.**

66. Si noti che tutte le altre grandezze, che fino a certo limite possono crescere, o scemare, si possono nel limite della crescenza, o decrescenza determinare col metodo de' massimi, e minimi, considerandole come ordinate massime, o minime di curve, alle quali possono tali ordinate appartenere.

**PRO.**

PROBL. XIII.

67. Insegnare il come si deve in una curva algebrica, che ha massima, o minima ordinata, procedere per determinarla.

SOLUZIONE.

Dove d'una curva, che ha massima, e minima ordinata si trova corrispondere tale ordinata, ivi si fa parallela alla linea delle ascisse o la tangente, come nella Fig. 8, o la normale, come nella Fig. 9. Sicchè relativamente al detto punto si fa o infinita la sottangente, e nulla la sunnormale, o nulla la sottangente, ed infinita la sunnormale.

E perciò è  $0 \frac{ydx}{dy} ; \frac{ydy}{dx}$ , ovvero

$$\frac{dx}{dy} : \frac{dy}{dx} = \infty : 0, \quad 0 \frac{dy}{dx} ; \frac{dx}{dy} = \infty : 0.$$

Quindi relativamente al punto, dove corrisponde la massima, o la minima ordinata,

deve essere  $= 0$  il valore di  $\frac{dy}{dx}$ , o di  $\frac{dx}{dy}$ .

Si ricavi dunque dall'equazione della curva il

valore di  $\frac{dy}{dx}$  : con mettere  $= 0$  o il

va-

valore , che si ha di  $\frac{dy}{dx}$  , o il suo reciproco di  $\frac{dx}{dy}$  , si ha una grandezza , da cui si rileva il valore dell'ascissa , alla quale corrisponde la massima , o minima ordinata ; e , sostituito tale valore dell'ascissa nell'equazione della curva , si ha un'altra grandezza , da cui si rileva il valore della massima , o minima ordinata .  
Ch'è ciò , che bisognava insegnare .

## E S E M P I O I.

*Sia da determinare l'ordinata massima in qualunque genere di cerchio .*

L'equazione generale alli cerchi è  $y^{m+n} = x^m (2r - x)^n$  (§ 33) , e' l suo differenziale  $(m+n) y^{m+n-1} dy = mx^{m-1} (2r-x)^n dx - nx^m (2r-x)^{n-1} dx$ .  
Dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}(2r-x)^n - nx^m(2r-x)^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-1}}$$

Si metta  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Sarà

$$mx^{m-1}(2r-x)^n - nx^m(2r-x)^{n-1} = 0.$$

Onde

$$m(2r-x) - nx = 0,$$

ed

$$x = \frac{2mr}{m+n}.$$

Si sostituiscia ora il valore dell' $x$  trovato nell'equazione generale, s'avrà

$$y^{m+n} = \left( \frac{2mr}{m+n} \right)^m \times \left( \frac{2nr}{m+n} \right)^n,$$

$$y = \sqrt[m+n]{\left( \frac{2mr}{m+n} \right)^m \times \left( \frac{2nr}{m+n} \right)^n}.$$

Sicchè la formola generale per determinare l'ascissa, alla quale corrisponde la massima ordinata è

$$x = \frac{2mr}{m+n},$$

e l'altra per determinare l'istessa massima ordinata è

$$y = \sqrt[m+n]{\left( \frac{2mr}{m+n} \right)^m \left( \frac{2nr}{m+n} \right)^n}.$$

Quindi

1. Se il cerchio è di primo genere. Essendo in tal caso  $y^2 = x [2r - x]$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; sarà l'ascissa, alla quale corrisponde la massima or-

ordinata  $x = \frac{2mr}{m+n} = r$ , e l'ordinata mas-

sima  $y = \sqrt{rx} = r$ .

2. Se il cerchio è di secondo genere ;  
 Posta la sua equazione  $y^3 = x^2 [2r - x]$ ,  
 e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 1$  ; farà

$$x = \frac{2mr}{m+n} = \frac{4}{3} r, \text{ e } y = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3} r\right)^2 \times \frac{2}{3} r}$$

$\frac{1}{3} r \sqrt[3]{32}$ . Posta poi la sua equazione  $y^3$   
 $= x [2r - x]^2$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,

$n = 2$  ; farà  $x = \frac{2mr}{m+n} = \frac{2}{3} r$ , e  $y =$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3} r\right)^2 \times \frac{2}{3} r} = \frac{1}{3} r \sqrt[3]{32} \text{ pure ;}$$

e così procedendo innanzi.

### E S E M P I O II.

*Sia da determinare l'ordinata massima in qualunque genere d'ellisse.*

L'equazione generale all'ellissi è  $y^{m+n}$

$$= \frac{p}{2a} \times x^m (2a - x)^n \quad (\S 40), \text{ e 'l}$$

fuo

il suo differenziale  $(m+n)y^{m+n-1} dy = \frac{p}{2a} dx$

$$(mx^{m-1}(2a-x)^n - nx^m(2a-x)^{n-1}).$$

Dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2a} \left( \frac{mx^{m-1}(2a-x)^n - nx^m(2a-x)^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-1}} \right).$$

Si metta  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

Sarà  $\frac{p}{2a} (mx^{m-1}(2a-x)^n - nx^m(2a-x)^{n-1}) = 0$ .

Onde

$$m(2a-x) - nx = 0,$$

ed

$$x = \frac{2ma}{m+n}.$$

Si sostituiscasi ora il valore dell'  $x$  trovato nell' equazione generale, s' avrà

$$y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times \left( \frac{2ma}{m+n} \right)^m \times \left( \frac{2na}{m+n} \right)^n,$$

$$y = \sqrt[m+n]{\frac{p}{2a} \left( \frac{2ma}{m+n} \right)^m \left( \frac{2na}{m+n} \right)^n}.$$

Sicchè la formola generale per determinare l'ascissa, alla quale corrisponde l'ordinata massima, è

$$x = \frac{2ma}{m+n},$$

e l'altra per determinare l'istessa massima ordinata è

$$y = \sqrt[m+n]{\frac{p}{2a} \left(\frac{2ma}{m+n}\right)^m \left(\frac{2na}{m+n}\right)^n}.$$

Quindi

1. Se l'ellisse è di primo genere. Essendo

in tal caso  $y^2 = \frac{p}{2a} x (2a - x)$ , e

conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; farà l'ascissa, alla quale corrisponde l'ordinata massima

$x = \frac{2ma}{m+n} = a$ , e la massima ordinata

$y = \sqrt{\frac{p}{2a} \times a \times a} = \sqrt{\frac{1}{2} pa}$ ; e,

posto il semiasse secondario  $= c$ , e conseguentemente  $p = \frac{2c^2}{a}$ , farà la detta massima

ordinata  $y = \sqrt{\frac{1}{2} pa} = \sqrt{c^2} = c$ .

2. Se l'ellisse è di secondo genere. Posta

la sua equazione  $y^3 = \frac{p}{2a} x^2 (2a - x)$ , e con-

e conseguentemente  $m = 2, n = 1$ ; faranno

$$x = \frac{2ma}{m+n} = \frac{4}{3} a, \text{ e } y = \sqrt[3]{\frac{p}{2a} \times \left(\frac{4}{3} a\right)^2 \times \frac{2}{3}}$$

$a = \frac{1}{3} \sqrt[3]{16a^2 p}$ . Posta poi la sua equazione  $y^3 = \frac{p}{2a} \times x (2a - x)^2$ , e

conseguentemente  $m = 1, n = 2$ ; faranno  $x =$

$$\frac{2ma}{m+n} = \frac{2}{3} a, \text{ e } y = \sqrt[3]{\frac{p}{2a} \times \frac{2}{3} a \times \left(\frac{4}{3} a\right)^2}$$

$= \frac{1}{3} \sqrt[3]{16a^2 p}$ ; e così procedendo innanzi.

ESEMPIO III.

Sia da determinare la massima ordinata in una curva, la cui equazione sia  $x^3 + y^3 = axy$ .

Essendo il differenziale dell'equazione  $3x^2 dx + 3y^2 dy = axdy + aydx$ ; sarà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3x^2}{3y^2 - ax}$$

Si metta  $\frac{dy}{dx} = 0$ .

F 2

Sa

Sarà

$$ay - 3x^2 = 0,$$

$$y = \frac{3x^2}{a}.$$

Si sostituisca tale valore di  $y$  nell'equazione della curva, s'avrà

$$x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 3x^3.$$

Onde

$$27x^3 = 2a^3$$

$$27x = a \sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}.$$

E perciò

$$y = \frac{3x^2}{a} = \frac{1}{a} a \sqrt[3]{4}.$$

## E S E M P I O IV.

Sia da determinare la minima ordinata nella curva dell'equazione  $xy = x^2 + a^2$ .

Essendo l'equazione  $xy = x^2 + a^2$ , sarà

$$y = \frac{x^2 + a^2}{x}, \text{ il cui differenziale è } dy =$$

$$\frac{2x^2 dx - (x^2 + a^2) dx}{x^2} = \frac{(x^2 - a^2) dx}{x^2} \quad \text{Sic}$$

Sicchè

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - a^2}{x^2}.$$

Si metta  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Sarà

$$x^2 - a^2 = 0,$$

ed

$$x = \pm a.$$

Si sostituisca nell'equazione  $y' = \frac{x^2 + a^2}{x}$

in vece di  $x$  il valore trovato, s'avrà  $y =$

$$\frac{2a^2}{\pm a} = \pm 2a.$$

### AVVETIMENTO.

68. Si noti che si conosce, se una curva di data equazione ha ordinata massima, o ordinata minima, o non ha nè massima, nè minima ordinata a questo modo. Si ricavino dall'equazione della curva i valori dell'ascissa, e della ordinata corrispondente, procedendo del modo già insegnato per determinare la massima, o la minima ordinata. Supposto che si abbiano l'ascissa  $x = a$ , e l'ordinata corrispondente  $y = b$ , si sostituiscia nell'equazione della curva in vece dell' $x$  prima  $a + dx$ , e poscia  $a - dx$ , e

si rilevino in ambi i casi i valori corrispon-  
 denti dell'  $y$ . Se tali nuovi valori dell'  $y$   
 si trovano ambidue minori del  $b$ , la curva  
 in tal caso ha ordinata massima, ed è  $y=b$ .  
 Se poi si trovano ambidue maggiori del  $b$ ,  
 la curva in tale altro caso ha ordinata mi-  
 nima, ed è pure  $y=b$ . Se finalmente de'  
 due detti nuovi valori dell'  $y$  uno si trova  
 essere maggiore del  $b$ , e l' altro minore ;  
 la curva allora non ha nè massima, nè  
 minima ordinata ; e l' ordinata  $y=b$  già  
 determinata non è, se non l' ordina-  
 ta corrispondente all' ascissa  $x=a$ , sen-  
 za punto essere nè massima, nè minima.  
 Così nell' equazione  $xy = x^2 + a^2$  della  
 curva, in cui all' ascissa  $x = \pm a$  s' è  
 trovato corrispondere l' ordinata  $y = \pm 2a$ ,  
 sostituendo  $\pm a + dx$  in vece di  $x$ , ri-  

$$\frac{dx^2}{}$$
 sulta  $y = \pm a + \frac{\pm a + dx}{\pm a + dx}$ , e sostituen-  
 dovi  $\frac{\pm a - dx}{dx^2}$ , risulta pure  $y = \pm a$   

$$+ \frac{\pm a - dx}{\pm a - dx}$$
. Risultandone dunque in tut-  
 te e due le sostituzioni valori di  $y$  maggio-  
 ri di  $\pm 2a$ , ne segue avere la curva mi-  
 nima ordinata, ed essere  $y = \pm 2a$ , e  
 corrispondente all' ascissa  $x = \pm a$ . Se poi  
 l' equazione d' una curva è  $x^3 - 3ax^2 +$   
 $3a^2 x = a^2 y$ , da cui, procedendo del modo  
 insegnato, si ricavano  $x = a$ ,  $y = a$ . Per-  
 chè

chè con sostituire in tale equazione  $a + dx$

risulta  $y = a + \frac{dx^3}{a^2}$ , e con sostituirvi

$a - dx$  risulta  $y = a - \frac{dx^3}{a^2}$ , cioè una

ordinata colla prima sostituzione maggiore di  $a$ , e colla seconda minore; tale curva non ha nè massima, nè minima ordinata. Avvertite intanto tali cose, procediamo ora alli problemi detti de' *massimi*, e *minimi*.

P R O B L. XIV.

69. *Data qualunque linea retta AB, dividerla nel punto C in modo, che il rettangolo fatto da AC, e CB sia il massimo di tutti gl' infiniti rettangoli, che si possono similmente fare, dividenda l' istessa retta in ogni altro punto.* Fig. 10

S O L U Z I O N E.

Si mettano  $AB = a$ ,  $AC = x$ ; farà  $CB = a - x$ . Onde  $AC \times CB = ax - x^2$ .

Si finga essere  $cy = ax - x^2$  l'equazione d'una curva, e contrassegnare  $x$  le ascisse, ed  $y$  le ordinate. E' chiaro essere l'istesso il cercare la massima ordinata di tale curva, che il cercare che  $ax - x^2$  fa un massimo. Si cerchi dunque la massima ordinata di sì fatta curva. Perciò

F 4

$cdy$

## T R A T T A T O

$$c dy = a dx - 2x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{c}$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

farà

$$\frac{a - 2x}{c} = 0$$

$$a - 2x = 0,$$

$$x = \frac{1}{2} a.$$

Sicchè la massima ordinata nella supposta curva corrisponde all'ascissa  $x = \frac{1}{2} a$ ; e perciò  $ax - x^2$  è un massimo, quando è  $x = \frac{1}{2} a$ . Per la cosa il rettangolo fatto da AC, e CB è il massimo, quando AB è divisa in C in due parti uguali, cioè quando è il quadrato della metà di AB. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

## P R O B L. XV.

70. Dividere la retta AB in C in modo ;  
che

DEL CALCO. DIFFER. 89

che  $AC^2 \times CB$  sia il massimo di tutti gl' infiniti parallelepipedi, che si possono similmente formare, dividendo l' istessa linea in ogni altro punto.

SOLUZIONE.

Si mettano  $AB = a$ ,  $AC = x$ ; farà  $CB = a - x$ . Onde  $AC^2 \times CB = ax^2 - x^3$ .

Si finga essere  $c^2 y = ax^2 - x^3$  l' equazione d' una curva, e contrassegnare  $x$  le ascisse, ed  $y$  le ordinate. E' pure manifesto essere l' istesso il cercare la massima ordinata di tale curva, che il cercare che  $ax^2 - x^3$  sia un massimo. Si cerchi adunque la massima ordinata di sì fatta curva. Perciò

$$\frac{c^2 dy = 2ax dx - 3x^2 dx}{dx} = \frac{2ax - 3x^2}{c^2}$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

farà

$$\frac{2ax - 3x^2}{c^2} = 0$$

$$2ax - 3x^2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3} a.$$

Sicchè la massima ordinata nella supposta curva corrisponde all'ascissa  $x = \frac{2}{3} a$ ; e perciò  $ax^2 - x^3$  è un massimo, quando è  $x = \frac{2}{3} a$ . Per la qual cosa il parallelepipedo  $AC^2 \times CB$  è il massimo, quando è  $AG = \frac{2}{3} AB$ , cioè quando è  $= \frac{2}{3} AB$ . Ch'è ciò, che bisognava determinare.

## P R O B L. XVI.

Fig. II 71. *Data la retta AB, costruire su di essa un triangolo rettangolo, che sia il massimo di tutti gl' infiniti triangoli rettangoli, che possono avere AB per ipotenusa.*

## S O L U Z I O N E.

Sia ACB il triangolo rettangolo cercato. Si mettano  $AB = a$ ,  $AC = x$ ; farà  $CB = \sqrt{a^2 - x^2}$ . Onde il triangolo  $ABC = \frac{1}{2}$

$$AC \times CB = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Si

Si finga essere  $cy = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$  l'

equazione d'una curva, e contrassegnare  $x$  le ascisse, ed  $y$  le ordinate. E' chiaro pure che il cercare l'ordinata massima di tale

curva è l'istesso, che cercare che  $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$

sia un massimo. Si cerchi dunque la massima ordinata di sì fatta curva. Perciò

$$cdy = \frac{1}{2} dx \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{2} x^2 dx,$$

ovvero

$$cdy = \frac{(a^2 - x^2 - x^2) dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{2c\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0;$$

farà

farà

$$a^2 - 2x^2$$

$$\frac{a^2 - 2x^2}{2x} = 0.$$

$$2x \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{2x \sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - 2x^2} = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}.$$

Sicchè la massima ordinata nella supposta curva corrisponde all'ascissa  $x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}$ ; e

perciò  $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$  è un massimo, quan-

do è  $x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}$ . Per la qual cosa il triangolo rettangolo ABC è il massimo, quan-

do è  $AC = \sqrt{\frac{1}{2} AB^2}$ , e conseguentemen-

te pure  $BC = \sqrt{\frac{1}{2} AB^2}$ , vale a dire quando è isoscele. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

P R O B L. XVII.

72. Tra gl' infiniti cilindri retti uguali determinare quello, la cui superficie intera è la minima.

So-

SOLUZIONE.

Sia la solidità de' cilindri uguali =  $a^3$ ,  
 e sia  $r : p$  la ragione del raggio di qua-  
 lunque cerchio alla periferia. S' intenda  
 in oltre essere ABCD il cilindro da de-  
 terminare. Si metta il raggio AO della sua Fig. 12

base =  $x$ ; saranno la periferia  $AB = \frac{p}{r} x$ ,  
 il cerchio  $AB = \frac{p}{2r} x^2$ , e l' altezza AD

del cilindro =  $\frac{a^3}{\frac{p}{2r} x^2} = \frac{2ra^3}{px^2}$ . Onde la su-

perficie cilindrica AC =  $\frac{p}{r} x \times \frac{2ra^3}{px^2} =$

$\frac{2a^3}{x}$ , e conseguentemente la superficie intera  
 dell' istesso cilindro =  $\frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$ .

Si finga essere  $cy = \frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$

l' equazione d' una curva, e contrassegnare  $x$   
 le ascisse, e  $y$  le ordinate. E' manifesto  
 che il cercare l' ordinata minima di ta-  
 le equazione sia l' istesso, che il cercare che

$\frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$  sia un minimo. Si cerchi  
 dun-

94. TRATTATO  
 dunque la minima ordinata di sì fatta curva. Perciò

$$cdy = - \frac{2a^3 dx}{x^2} + \frac{2p}{r} x dx$$

---


$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a^3 r + 2px^3}{r c x^2}$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

farà

$$\frac{2px^3 - 2a^3 r}{r c x^2} = 0.$$

Onde

$$\frac{2px^3 - 2a^3 r}{r c x^2} = 0$$

$$x^3 = \frac{r}{a^3}$$

p

$$x = a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}$$

Sicchè la minima ordinata nella supposta  
 curva corrisponde all'ascissa  $x = a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}$ .

E

E perciò  $\frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$  è un minimo,

quando è  $x = a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}$ . Per la qual cosa

la superficie intera del cilindro ABCD è la minima, quando è il raggio della base,

cioè AO =  $a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}$ , e conseguentemente

$$\text{l'altezza AD} = \frac{2ra^3}{px^2} = \frac{2ra^3}{pa^2 \sqrt[3]{\frac{r^2}{p^2}}} =$$

$$\frac{2ra}{\sqrt[3]{r^2 p}} = \frac{2a \sqrt[3]{r^3}}{\sqrt[3]{r^2 p}} = 2a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}, \text{ vale}$$

a dire quando il cilindro è cilindro quadrato, cioè che ha l'altezza AD uguale al diametro AB della base. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

73. Essendosi trovata  $x^3 = \frac{r}{p} a^3$ , sarà

$x^3 : a^3 = r : p$ . Dunque nel cilindro quadrato, vale a dire nel cilindro, la cui superficie

perficie intera è la minima di tutte quelle degl' infiniti cilindri d' uguali grandezze, il cubo del raggio della base sta alla grandezza del cilindro nella ragione del raggio di qualunque cerchio alla periferia.

## P R O B L. XVIII.

Fig. 13 74. Tirare da qualunque punto C, esistente fuori della curva algebrica AMN, all' istessa curva la retta CM, che sia la minima di tutte le infinite rette, che da C si possono tirare alla medesima curva.

## S O L U Z I O N E.

Sia AQ l' asse della curva, e su di esso sieno calate dalli punti C, ed M le perpendicolari CB, MP; di più per M sia tirata MD parallela ad AQ, e CM sia prolungata in R. Si mettano in oltre  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; saranno  $DC = b - y$ , e  $DM = x - a$ . Sicchè

$$CM = \sqrt{(b - y)^2 + (x - a)^2} =$$

$\sqrt{b^2 - 2by + y^2 + x^2 - 2ax + a^2}$ . Dovendo tale grandezza essere un minimo, farà il suo differenziale, cioè

$$- bdy + ydy + xdx - adx$$

$$= 0$$

$$\sqrt{b^2 - 2by + y^2 + x^2 - 2ax + a^2}$$

Onde

Onde

$$\frac{(b - y) dy = (x - a) dx}{}$$

$$(b - y) \frac{y dy}{dx} = (x - a) y.$$

E perciò

$$b - y : x - a = y : \frac{y dy}{dx},$$

ovvero

$$DC : DM = MP : \frac{y dy}{dx}.$$

Ma

$$CD : DM = MP : PR ;$$

Dunque

$$PR = \frac{y dy}{dx} ;$$

vale a dire che PR, qualunque sia la curva, è la subnormale relativamente al punto M, e conseguentemente RM la normale. Per la qual cosa la perpendicolare calata da C alla curva è la più breve di tutte le infinite rette, che si possono da C tirare alla curva, qualunque essa sia. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

## C A P. VII.

*S' insegna a determinare i differenziali algebratici di gradi superiori.*

## P R O B L. XIX.

75. *Insegnare il modo di ricavare i differenziali di gradi superiori dalli differenziali di gradi inferiori.*

## S O L U Z I O N E.

Si proceda secondo le regole date per ricavare i differenziali del primo grado dalle grandezze algebratiche, che racchiudono variabili.

## E S E M P I O I.

*Sia da differenziare  $adx$ .*

Essendo il differenziale di  $a = 0$ , e quello di  $dx = d^2 x$ ; sarà il differenziale di  $adx = ad^2 x$ .

Similmente farà il differenziale

$$\text{di } ad^2 x = ad^3 x$$

$$\text{di } ad^3 x = ad^4 x$$

$$\text{di } ad^4 x = ad^5 x$$

$$\text{di } ad^n x = ad^{n+1} x.$$

ESEM.

ESEMPIO II.

Sia da differenziare  $x dx$ ,

Essendo  $x dx = x \times dx$ , sarà il suo differenziale  $dx \times dx + x d^2 x = dx^2 + x d^2 x$ .

Similmente sarà il differenziale

di  $dx d^2 x =$

$$d^2 x \times d^2 x + dx \times d^3 x = (d^2 x)^2 + dx d^3 x$$

di  $d^2 x d^3 x =$

$$d^3 x \times d^3 x + d^2 x \times d^4 x = (d^3 x)^2 + d^2 x d^4 x$$

di  $d^3 x d^4 x =$

$$d^4 x \times d^4 x + d^3 x \times d^5 x = (d^4 x)^2 + d^3 x d^5 x$$

di  $d^n x d^{n+1} x =$

$$d^{n+1} x \times d^{n+1} x + d^n x \times d^{n+2} x = (d^{n+1} x)^2 + d^n x d^{n+2} x.$$

ESEMPIO III.

Sia da differenziare  $\frac{dx}{x}$ .

Essendo  $dx$  il dividendo, ed  $x$  il divi-

fore, sarà il differenziale di  $\frac{dx}{x} =$

$$\frac{x \times d^2 x - dx \times dx}{x^2} = \frac{x d^2 x - dx^2}{x^2}.$$

Similmente sarà il differenziale

$$\text{di } \frac{d^2 x}{dx} =$$

$$G \quad x \quad dx$$

$$\frac{dx \times d^2 x - d^2 x \times dx}{dx^2} = \frac{dx d^3 x - (d^2 x)^2}{dx^2},$$

$$di \frac{d^3 x}{d^2 x} =$$

$$\frac{d^2 x \times d^4 x - d^3 x \times d^3 x}{(d^2 x)^2} = \frac{d^2 x d^4 x - (d^3 x)^2}{(d^2 x)^2},$$

$$di \frac{d^{n+1} x}{d^n x} =$$

$$\frac{d^n x \times d^{n+2} x - d^{n+1} x \times d^{n+1} x}{(d^n x)^2} =$$

$$\frac{d^n x d^{n+2} x - (d^{n+1} x)^2}{(d^n x)^2}.$$

## E S E M P I O IV.

Sia da differenziare  $\frac{a}{dx}$ .

Essendo il differenziale di  $a = 0$ , farà il

$$\text{differenziale di } \frac{a}{dx} = - \frac{ad^2 x}{dx^2}.$$

Similmente farà il differenziale

di

$$di \frac{a}{d^2 x} = \frac{ad^3 x}{(d^2 x)^2},$$

$$di \frac{a}{d^3 x} = \frac{ad^4 x}{(d^3 x)^2},$$

$$di \frac{a}{d^n x} = \frac{ad^{n+1} x}{(d^n x)^2}.$$

ESEMPIO V.

Sia da differenziare  $\frac{x}{dx}$ .

Essendo  $x$  il dividendo, e  $dx$  il divisore;

$$\text{farà il differenziale di } \frac{x}{dx} = \frac{dx \times x - x \times d'x}{dx^2} \\ = \frac{dx^2 - xd^2 x}{dx^2}.$$

Similmente farà il differenziale

$$di \frac{dx}{d^2 x} = \frac{d^2 x \times d^2 x - dx \times d^3 x}{(d^2 x)^2} = \frac{(d^2 x)^2 - dx d^3 x}{(d^2 x)^2},$$

$$di \frac{d^2 x}{d^3 x} =$$

G 3

ds

$$\frac{d^3 x \times d^3 x - d^2 x \times d^4 x}{(d^3 x)^2} = \frac{(d^3 x)^2 - d^2 x d^4 x}{(d^3 x)^2}$$

$$\text{di } \frac{d^n x}{d^{n+1} x} =$$

$$\frac{d^{n+1} x \times d^{n+1} x - d^n x \times d^{n+2} x}{(d^{n+1} x)^2} = \frac{(d^{n+1} x)^2 - d^n x d^{n+2} x}{(d^{n+1} x)^2}$$

## E S E M P I O VI.

Sia da differenziare  $(dx)^2$ .

Essendo  $(dx)^2 = dx \times dx$ , farà il suo differenziale  $dx \times d^2 x + dx \times d^2 x = 2dx d^2 x$ .

Similmente farà il differenziale

$$\begin{aligned} \text{di } (dx)^3 &= 3d^2 x (dx)^2 \\ \text{di } (dx)^4 &= 4d^2 x (dx)^3 \\ \text{di } (dx)^5 &= 5d^2 x (dx)^4 \\ \text{di } (dx)^n &= nd^2 x (dx)^{n-1}. \end{aligned}$$

## E S E M P I O VII.

Sia da differenziare  $\frac{ydx}{dy}$ .

Essendo il differenziale del numeratore  $ydx = dydx + yd^2 x$ , e quello del denominatore  $dy = d^2 y$ ; farà il differenziale di

$ydx$

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{(dy)^2 dx + ydyd^2x - ydx d^2y}{(dy)^2}$$

ESEMPIO VIII.

Sia da differenziare  $dx\sqrt{1-x^2}$ .  
 Essendo il differenziale di  $dx = d^2x$ , e

quello di  $\sqrt{1-x^2} = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; farà

il differenziale di  $dx\sqrt{1-x^2} = d^2x\sqrt{1-x^2}$

$$\frac{x d^2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d^2x - x^2 d^2x - x d^2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

ESEMPIO IX.

Sia da differenziare  $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}}$ .

Essendo il differenziale del numeratore  $adx - 2xdx = ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x$ ,

è quello del denominatore  $2\sqrt{ax - x^2} =$

$\frac{adx - 2xdx}{\sqrt{ax - x^2}}$ ; farà il differenziale di

$$\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}} = \left( \frac{ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x}{ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x} \right) : 4(ax - x^2) =$$

$$\frac{2xd^2x}{ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x} : 4(ax - x^2) =$$

$$\left( \frac{\frac{2xd^2x}{ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x}}{\sqrt{ax - x^2}} \right) : 4(ax - x^2) =$$

$$\frac{(ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x)(2ax - 2x^2)}{(ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x)^2} : (4(ax - x^2))$$

$$\frac{\sqrt{ax - x^2}}{2a^2xd^2x - 6ax^2d^2x + 4x^3d^2x - a^2dx^2} =$$

$$4(ax - x^2)\sqrt{ax - x^2}$$

AVVERTIMENTO.

76. Si noti che se in un differenziale,

come  $\frac{ydy}{dx}$  per esempio, farà costante il  $dx$ ,  
 il differenziale di  $\frac{ydy}{dx}$  farà  $= \frac{dy^2 + yd^2y}{dx}$  ;

se poi farà costante il  $dy$ , il differenziale di  $\frac{ydy}{dx}$   
 farà in tale altro caso  $= \frac{dxdy^2 - ydyd^2x}{dx^2}$ .

Similmente se nel differenziale  $\frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$   
 farà

farà costante il  $dx$ , il suo differenziale farà

$$\frac{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} + \frac{zdyd^2y}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} =$$

$$\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyd^2y}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} ; \text{ e se farà costan-}$$

te il  $dy$ , il suo differenziale farà

$$dzdx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdx^2d^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - zdy^2$$

$$\frac{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2}$$

$$\frac{dzdx^3 + dzdx^2dy^2 - zdy^2d^2x}{dx^2}$$

. Finalmente

$$\frac{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

se nel differenziale di  $\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2}$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2} - dxddy$$

farà costante il  $dx$ , il suo differenziale farà

$$\frac{-3dx^2ddy(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} + dx^2d^3y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2(dx^2 + dy^2)^2}$$

Si noti intanto in tale differenziale che non può accadere che sia  $dy$  costante; altrimenti  $ddy$  farebbe nullo. CA.

## C A P. VIII.

*Dell' uso de' differenziali del secondo grado in determinare i punti di flessioni contrarie, e de' ritorni delle curve, che hanno tali punti.*

## D E F I N I Z I O N E.

77. Se una curva ha rivolta verso l'asse fino a certo suo punto la sua concavità, e da tal punto in poi la sua convessità, o all'opposto; il punto, che separa la parte concava verso l'asse dalla convessa, si dice della curva *punto di flessione contraria*. Se poi una curva procede fino a certo suo punto verso un lato, e da tal punto procede ritornando verso il lato opposto; sì fatto punto si chiama della curva *punto di ritorno*.

Così le curve LMN nelle Fig. 14, 15, 16, e 17 hanno i punti M di flessioni contrarie; e la curva LMN della Fig. 18 ha il punto M di ritorno.

## AVVERTIMENTO I.

78. Proceda la curva  $AML$  concava ver. Fig. 19  
 so l'asse  $AB$ , andandosi da  $A$  verso  $L$  suc-  
 cessivamente allontanando dall'istesso asse; e  
 sia  $PM$  qualunque sua ordinata. S'intenda-  
 no tirate le altre due ordinate  $QN$ ,  $RS$ ,  
 tal che sieno  $PQ$ ,  $QR$  uguali, ed infinita-  
 mente picciole per rispetto dell'ascissa  $AP$ .  
 S'intendano di più tirate per  $M$ , ed  $N$  le  
 $MV$ ,  $NX$  parallele ad  $AB$ ; e finalmente  
 s'intenda l'elemento  $MN$  della curva, che  
 si può prendere per una lineetta retta, pro-  
 lungato in  $Y$ , finchè s'unisca con  $RS$  pro-  
 lungata in  $Y$  fuori della curva, potendosi  
 $MNY$  considerare come tangente dell'istessa  
 curva in  $N$ . Essendo i triangoletti  $MNV$ ,  
 $NXY$  simili, ed avendo  $MV = NX$ , farà  
 $NV = XY$ , e conseguentemente  $XS < NV$ .

## COROLLARIO I.

79. Quindi nel supposto caso chiamando  
 $y$  qualunque ordinata  $PM$ ,  $QN$ , ec., ed  $x$   
 l'ascissa corrispondente  $AP$ ,  $AQ$ , ec., e  
 prendendo il  $dx$  costante; coll'andare l'ascis-  
 sa  $x$  successivamente crescendo, il  $dy$ , diffe-  
 renza dell'ordinata, procederà successivamen-  
 te diminuendosi.

AV.

## A V V E R T I M E N T O II.

**Fig. 20** 80. Si noti che il contrario accade, se la curva  $MNL$ , concava verso l'asse  $AB$ , si va successivamente all'istesso asse avvicinando, cioè che, supposto costante il  $dx$ , differenziale dell'ascissa, coll'andare l'ascissa successivamente crescendo, il  $dy$ , differenziale dell'ordinata, procederà successivamente crescendo.

## A V V E R T I M E N T O III.

**Fig. 21** 81. Proceda la curva  $LMO$  convessa verso la linea  $AB$  delle ascisse, e da  $L$  verso  $O$  successivamente allontanandosi dall'istessa  $AB$ ; e sia  $PM$  qualunque sua ordinata ad  $AB$ . S'intendano tirate le altre due ordinate  $QN$ ,  $RS$ , tal che sieno pure  $PQ$ ,  $QR$  uguali, ed infinitamente picciole per rispetto dell'ascissa  $AP$ . S'intendano di più tirate per  $M$ , ed  $N$  le  $MV$ ,  $NX$  parallele ad  $AB$ ; e finalmente s'intenda l'elemento  $MN$  della curva prolungato in  $Y$ . Essendo i triangoletti  $MVN$ ,  $NXY$  equiangoli, ed avendo  $MV = NX$ , farà  $NV = XY$ , e conseguentemente  $SX > NV$ .

CO.

## COROLLARIO II.

82. Quindi nel supposto caso chiamando  $y$  qualunque ordinata  $PM$ ,  $QN$ , ec., ed  $x$  l'ascissa corrispondente  $AP$ ,  $AQ$ , ec., e prendendo il  $dx$  costante; coll'andare l'ascissa  $x$  successivamente crescendo, il  $dy$ , differenza dell'ordinata, procederà successivamente pure crescendo.

## AVVERTIMENTO IV.

83. Si noti finalmente che il contrario Fig. 23 accade, se la curva  $LMO$ , convessa verso  $AB$ , si va successivamente all'istessa  $AB$  successivamente avvicinando; cioè che, supposto costante il  $dx$ , differenza dell'ascissa; coll'andare l'ascissa successivamente crescendo, il  $dy$ , differenza dell'ordinata, procederà successivamente diminuendosi. Premesse intanto tali cose, procediamo ora al metodo di determinare i punti di flessioni contrarie, e de' ritorni delle curve, che hanno tali punti. Perciò sia il

## PROBL. XX.

84. *Insegnare il modo di poter determinare i punti di flessioni contrarie nelle curve, che hanno cotali punti.*

So-

## S O L U Z I O N E .

Fig. 14, Sia LMN la curva, che abbia il punto <sup>15,16</sup> M di flessione contraria. Quattro casi possono <sup>e 17</sup> accadere. I. Che la curva sia verso AB concava da L ad M, e convessa da M ad N, e proceda successivamente allontanandosi da AB, come nella Fig. 14.: II. Che sia verso AB concava pure da L ad M, e convessa da M ad N, ma proceda successivamente avvicinandosi ad AB, come nella Fig. 15.: III. Che sia verso AB convessa da L ad M, e concava da M ad N, e proceda successivamente allontanandosi da AB, come nella Fig. 16.: IV. Finalmente che sia pure verso AB convessa da L ad M, e concava da M ad N, ma proceda successivamente avvicinandosi ad AB, come nella Fig. 17.

Contrassegnando con  $x$  ogni ascissa computata in AB da A, e con  $y$  ogni ordinata, e preso il differenziale  $dx$  costante, anderà il differenziale  $dy$  nel primo, ed ultimo caso successivamente diminuendosi fino al punto M, e da tal punto in poi successivamente accrescendosi; e al contrario negli altri due casi s'anderà successivamente accrescendo fino ad M, e da tal punto in poi successivamente diminuendosi. E perciò, posto il differenziale  $dx$  costante, farà il differenziale  $dy$  relativamente al punto M

un minimo nel primo, ed ultimo caso, ed un massimo negli altri due casi. Onde relativamente al punto M il differenziale del differenziale di  $dy$ , o sia  $ddy$  si fa  $= 0$ , ovvero  $= \infty$ .

Per determinare adunque in una curva il punto di flessione contraria, quando la curva ha tale punto, si deve procedere a questo modo.

1. Si deve differenziare l'equazione della curva.

2. Supposto le ascisse contrassegnate coll'  $x$ , e le ordinate coll'  $y$ , si deve il differenziale trovato, preso il  $dx$  costante, di nuovo differenziare, e da tal nuovo differenziale rilevarne il valore del  $ddy$ .

3. Il valore trovato del  $ddy$  si deve mettere  $= 0$ , ovvero, non risultandone equazione da ricavarne valore dell'  $x$ ; o dell'  $y$ , si deve mettere  $= \infty$ .

4. Dall'equazione, che si ha, si deve ricavare il valore dell'  $x$ ; determinato il quale valore, è facile a determinare nell'equazione della curva anche il valore dell'  $y$ .

Daranno sì fatti valori dell'  $x$ ; e dell'  $y$  l'ascissa, e l'ordinata corrispondenti al punto della flessione contraria della curva, e conseguentemente daranno la determinazione di tale punto. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

## AVVERTIMENTO.

85. Si noti che ciò, che s'è detto per determinare i punti delle flessioni contrarie, si deve intendere ancora per determinare i punti de' ritorni delle curve; perchè ne' punti de' ritorni vi sono sempre le flessioni contrarie.

## ESEMPIO I.

**Fig. 23** Sieno  $AQB$  un semicerchio, ed  $AMC$  una curva, limitata dalla retta  $BC$ , perpendicolare ad  $AB$ ; e si fatta curva sia tale che, tirata in essa qualunque ordinata  $PM$  al suo asse  $AB$ , sia sempre la semiperiferia  $AQB$  alla retta  $BC$ , come l'arco circolare  $AQ$  alla retta  $QM$ : si di si fatta curva da determinare il punto della sua flessione contraria.

Si mettano il raggio  $OB = r$ , la semiperiferia  $AQB = p$ , la retta  $BC = a$ , la  $OP = x$ ,  $PM = y$ ,  $PQ = v$ , e l'arco  $AQ = z$ . Essendo  $AQB : BC = AQ : QM$ ,

o sia  $p : a = z : QM$ ; sarà  $QM = \frac{a}{p} z$ ,

e conseguentemente  $y = PQ + QM = v +$

$\frac{a}{p} z$ , e  $py = pv + az$ . Sicchè

$$pdy = pdu + adz.$$

Ma

Ma essendo  $v = \sqrt{r^2 - x^2}$ , e conseguente-

mente  $dv = -\frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ , e  $dz = \sqrt{dx^2 + dv^2}$

$$= \int dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{r^2 - x^2} = \int \frac{r^2 dx^2}{r^2 - x^2} =$$

$\frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ , sarà

$$\int \frac{p dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \int \frac{a r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \int \frac{(-px + ar) dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Sicchè, presa  $dx$  costante, sarà

$$\int \frac{p dx^2 \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{x dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} (-px + ar) dx}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{[-pr^2 + px^2 - px^2 + arx] dx^2}{(r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{[ -pr^2 + arx ] dx^2}{(r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= \frac{[ -pr^2 + arx ] dx^2}{(r^2 - x^2) \sqrt{r^2 - x^2}}$$

H

$$ddy = \frac{\left( - \frac{e}{pr^2} + arx \right) dx^2}{p [r^2 - x^2] \sqrt{r^2 - x^2}}$$

Si metta, per determinare il punto della flessione contraria,  $ddy = 0$ , farà

$$- \frac{e}{pr^2} + arx = 0.$$

Onde

$$x = \frac{pr}{a}.$$

Per la qual cosa il punto cercato della flessione contraria corrisponde all'ascissa  $OP$  computata dal centro  $O$ , che si ha con trovare il quarto proporzionale in ordine alla retta  $BC$ , alla semiperiferia  $AQB$ , e al raggio  $OB$  del semicerchio.

### E S E M P I O II.

Sia da determinare il punto di flessione contraria nella curva dell'equazione  $ax^2 = [x^2 + a^2] y$ .

$$\text{Essendo } y = \frac{ax^2}{x^2 + a^2}, \text{ farà}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax dx [x^2 + a^2] - 2x dx \times ax^2}{[x^2 + a^2]^2} =$$

$$\frac{2a^3 x dx}{[x^2 + a^2]^2}$$

$$\frac{2a^3 x dx}{[x^2 + a^2]^2}$$

E,

E, posto il  $dx$  costante, farà

$$\frac{2a^3 dx^2 (x^2 + a^2)^2 - 2(x^2 + a^2) \times 2x dx \times 2a^3 x dx}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$= \frac{(2a^7 - 6a^3 x^4 - 4a^5 x^2) dx^2}{(x^2 + a^2)^4}$$

Si metta, per determinare il punto cercato della flessione contraria,  $ddy = 0$ , farà

$$\frac{2a^7 - 6a^3 x^4 - 4a^5 x^2 = 0}{2a^3 \text{ div.}}$$

$$\frac{a^4 - 3x^4 - 2a^2 x^2 = 0}{}$$

$$x^4 + \frac{2}{3} a^2 x^2 = \frac{1}{3} a^4,$$

ed

$$x^2 = -\frac{1}{3} a^2 + \sqrt{\frac{1}{9} a^4 + \frac{1}{3} a^4} = -\frac{1}{3} a^2 + \frac{2}{3} a^2$$

$$\sqrt{\frac{4}{9} a^4} = -\frac{1}{3} a^2 + \frac{2}{3} a^2 = +\frac{1}{3} a^2,$$

ed

$$x = \sqrt{\frac{1}{3} a^2}.$$

Di più se nell' equazione della curva in vece di  $x$  si sostituisce  $\frac{1}{3} a^2$ , s' avrà

$$H a \quad y =$$

$$y = \frac{a^3}{4a^2} = \frac{1}{4} a.$$

Per la qual cosa il punto cercato della flessione contraria corrisponde all' ascissa  $x$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{3} a^3}, \text{ e l' ordinata relativamente a tale punto è } y = \frac{1}{4} a.$$

## E S E M P I O III.

Sia da determinare il punto di flessione contraria della curva dell' equazione  $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$ .

Essendo  $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$ , sarà  
 $4b^3 dx = (4b^2 y - 4y^3) dy,$

e

$$dy = \frac{b^3 dx}{b^2 y - y^3}.$$

E perciò, presa  $dx$  costante, sarà

$$ddy = \frac{(-b^2 dy + 3y^2 dy) b^3 dx}{(b^2 y - y^3)^2}.$$

Si metta adunque  $ddy = 0$ , sarà

$$-b^2 dy + 3y^2 dy = 0$$

$$y^2 = \frac{1}{3} b^2$$

y=

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3} b^2}.$$

... Sostituendo finalmente  $\frac{1}{3} b^2$  in vece di  $y^2$  nell' equazione della curva, si ha  $4b^3 x$

$$= \frac{2}{3} b^4 - \frac{1}{9} b^4 = \frac{5}{9} b^4,$$

ed

$$x = \frac{5}{36} b.$$

Per la qual cosa il punto cercato della flessione contraria corrisponde all' ascissa  $x =$

$$\frac{5}{36} b, \text{ e l' ordinata relativamente a tale punto è } y = \sqrt[3]{\frac{1}{3} b^2}.$$

### AVVERTIMENTO.

86. Si noti che se per riguardo dell' istessa curva si mette il  $ddy = \infty$ , sarà

$$b^2 y - y^3 = 0.$$

Onde

$$y^2 = b^2,$$

ed

$$y = b.$$

E sostituendo nell' equazione della curva il  $b$  in vece di  $y$ , si ha

$$4b^3 x = 2b^4 - b^4 = b^4,$$

H 3

ed

ed

$$x = \frac{1}{4} b .$$

E perciò l'istessa curva ha un altro punto di flessione contraria corrispondente all'ascissa  $x = \frac{1}{4} b$ , e l'ordinata relativamente a tale punto è  $y = b$ .

## C A P. IX.

*Dell'uso de' differenziali del secondo grado in determinare i raggi osculatori delle curve.*

## D E F I N I Z I O N E I.

Fig. 24 87. Sia LMNO una curva, ed ONMLA un filo affisso in O, e adattato con una sua parte a tale curva, e col rimanente alla retta AL, tangente l'istessa curva in L. Si vada sì fatto filo, con tenerlo sempre teso, movendo, e disobligando successivamente dalla detta curva, finchè ne sia interamente disobligato. L'estremo A di tale filo nel detto movimento descriverà l'altra curva ABCD. Si diranno di ABCD la curva LMNO l'

evo.

evoluta, e l'istessa ABCD la curva nata dalla evoluzione.

## COROLLARIO I.

88. Mantenedosi il filo ALMNO nel descrivere col suo estremo A la curva ABCD sempre teso, sarà la sua parte, che non si trova adattata alla curva LMNO, in ogni sito di esso sempre tangente della medesima curva.

## COROLLARIO II.

89. S'intenda Mm essere una parte infinitamente picciola dell'evoluta LMNO; e s'intenda il detto filo mosso dal sito MB per un intervallo infinitamente picciolo, tal che giunga nel sito mb ad essere tangente dell'evoluta in m. Si potrà senza sensibile errore prendere mb come uguale ad MB. Onde l'elemento Bb della curva ABCD si può senza sensibile errore considerare come un elemento della periferia circolare descritta col raggio MB. E perciò qualunque elemento della curva ABD, come per esempio Bb, si può senza sensibile errore prendere come congruente coll'elemento corrispondente della periferia del cerchio, che ha per raggio la parte MB del filo, che si trova non a-

H 4 dat.

dattata all' evoluta , e per centro il punto  $M$  , dove l' istessa porzione di filo si trova tangente della medesima evoluta .

## DEFINIZIONE II.

90. I cerchi, che hanno i centri negl' infiniti diversi punti  $L$  ,  $M$  ,  $N$  , ec. dell' evoluta , e per raggi  $LA$  ,  $MB$  ,  $NC$  , ec. si dicono *cerchi osculatori* della curva  $ABD$  ne' rispettivi suoi punti  $A$  ,  $B$  ,  $C$  , ec. ; ed i raggi  $LA$  ,  $MB$  ,  $NC$  , ec. de' medesimi cerchi si chiamano *raggi osculatori* , come raggi , co' quali si descrivono i detti cerchi osculatori .

## COROLLARIO I.

91. Quindi i raggi osculatori per rispetto de' punti  $A$  ,  $B$  ,  $C$  , ec. della curva  $ABCD$  sono tangenti dell' evoluta ne' rispettivi punti  $L$  ,  $M$  ,  $N$  , ec. della medesima evoluta , e dove cadono i centri de' cerchi osculatori , a' quali appartengono .

## COROLLARIO II.

92. Potendosi prendere gli elementi  $A$  ,  $B$  ,  $C$  ,  $D$  della curva  $ABD$  , come congruenti cogli elementi corrispondenti de' cerchi osculatori dell' istessa curva ne' medesimi punti ; faranno i raggi  $LA$  ,  $MB$  ,  $NC$  , ec. oscu-

osculatori perpendicolari alla detta curva ne' medesimi punti  $A, B, C$ , ec.; e sarà di più la curvatura della curva  $ABD$  ne' diversi punti  $A, B, C$ , ec. quale è quella de' cerchi osculatori ne' medesimi punti; vale a dire che procederà tale curvatura ne' detti punti  $A, B, C$ , ec. diminuendosi a proporzione, che vanno accrescendosi i raggi osculatori  $LA, MB, NC$ , ec..

COROLLARIO III.

93. Essendo finalmente l'arco  $LM$  dell'evoluta  $= MB - LA$ , l'arco  $LN = NC - LA$ , l'arco  $LO = OD - LA$ , l'arco  $MN = NC - MB$ , ec.: è chiaro essere la differenza di due raggi osculatori qualunque dell'istessa curva uguale all'arco della sua evoluta, che tramezza tra i punti di contatto de' medesimi raggi coll'istessa evoluta. Premesse intanto tali nozioni, procediamo ora al modo di determinare i raggi osculatori, o seno delle curvature delle curve algebriche, e l'evolte di esse. Perciò sia il

PROBL. XXI.

94. *Trovare una formola generale per poter determinare il raggio osculatore di qualunque curva algebrica relativamente a qualunque suo pun.*

punto, supposte le ordinate della curva perpendicolari all'asse.

## S O L U Z I O N E .

Fig. 25 Contraffegnino AMC qualunque curva, AB il suo asse, LNO la sua evoluta, ed MP qualunque ordinata all'asse. S'intenda essere  $mp$  parallela, ed infinitamente vicina ad MP e s'intendano essere NM, Nm i raggi osculatori della curva AMC ne' punti M,  $m$ , che si possono prendere per uguali, e per tangenti dell'evoluta nell'istesso punto N. S'intendano di più tirate parallele ad AB le MR, NQ, e prolungate le MP,  $mp$  in Q, e  $q$ .

Si mettano  $AP = x$ ,  $PM = y$ ,  $MQ = z$ ; faranno  $Pp = MR = dx$ ,  $Rm = dy$ , ed

$Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Essendo NM raggio osculatore della curva in M, farà l'angolo  $NMm$  retto, e conseguentemente uguale ad  $RMQ$ ; onde, toltone il comune  $RMN$ , farà l'angolo  $RMm = NMQ$ . E perciò il triangoletto  $MRm$  è simile ad  $MQN$ . Per la qual cosa sarà

$$MR : Mm = QM : MN,$$

ovvero

$$dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} = z : MN.$$

Sicchè

$$MN = \frac{z}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Or

Or prendendo per costante il  $dx$ , differenziale dell'ascissa, l'ordinata deve sempre variare, ed intanto il raggio osculatore  $MN$  deve per ogni elemento  $Mm$  della curva conservarsi costante. Sicchè il differenziale di  $MN$  per ogni elemento  $Mm$  della curva deve essere sempre nullo. Ma, posto il  $dx$  costante,

$$\text{è il differenziale di } MN = \frac{dz}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$+ \frac{z dy d^2 y}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}} =$$

$$\frac{dz dx^2 + dz dy^2 + z dy d^2 y}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Sicchè

$$\frac{dz dx^2 + dz dy^2 + z dy d^2 y}{dx \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0.$$

E perciò

$$dz dx^2 + dz dy^2 + z dy d^2 y = 0.$$

E' di più  $Rm$  differenziale sì di  $PM$ , che di  $QM$ , e conseguentemente  $dz = dy$ . Dunque sarà

$$\frac{dy dx^2 + dy dy^2 + z dy d^2 y}{dx^2 + dy^2 + z d^2 y} = 0,$$

e

$$\zeta = \frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$$

Essendo finalmente

$$MR : Mm = MQ : MN,$$

farà

$$dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{ddy} : MN$$

Dunque la formola cercata del raggio oscu-

$$\text{iatore } MN = \frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxddy}$$

Ch' è ciò, che bisognava trovare.

### P R O B L. XXII.

95. *Data l'equazione d'una curva, determinare col'ajuto della formola trovata il raggio osculatore di tale curva per qualsivoglia suo punto.*

### S O L U Z I O N E.

1. Si trovi il differenziale dell'equazione data, e tale differenziale, supposto il  $dx$  costante, si torni di nuovo a differenziare.

2. La formola  $\frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxddy}$ ,

fo-

sostituiti in essa i valori del  $dy^2$ , e del  $ddy$ , che si hanno dalli due differenziali già trovati, si riduca colle regole del calcolo in termini finiti.

S'avrà in tal modo in termini finiti il raggio osculatore cercato della curva per qualsivoglia suo punto. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

ESEMPIO I.

*Sia da determinare il raggio osculatore relativamente a qualunque punto della parabola di primo genere, vale a dire della parabola dell'equazione  $y^2 = px$ .*

Il differenziale di  $y^2 = px$  è  $2ydy = p dx$ ; onde

$$dy = \frac{p dx}{2y} = \frac{p dx}{2\sqrt{px}}$$

$$dy^2 = \frac{p^2 dx^2}{4px} = \frac{p dx^2}{4x}$$

Il differenziale di  $2ydy = p dx$ , preso il  $dx$  costante, è  $2dy^2 + 2yddy = 0$ ; onde

$$ddy = - \frac{dy^2}{y} = - \frac{p dx^2}{4x\sqrt{px}}$$

Sicchè, posta la curva AMC essere la parabola di primo genere, farà relativamente a qualunque suo punto M il raggio oscula-

$$\text{ore MN} = \frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{dx^2 + y^2}}{dx dy} =$$

$$\left( dx^2 + \frac{p dx^2}{4x} \right) \sqrt{dx^2 + \frac{p dx^2}{4x}}$$

$$=$$

$$dx \times \frac{p dx^2}{4x \sqrt{px}}$$

$$(4x+p) \frac{1}{2} x^3 \sqrt{\frac{4x+p}{x}}$$

$$=$$

$$dx^3 \sqrt{\frac{p}{x}}$$

$$\frac{(4x+p) \sqrt{4x+p}}{2\sqrt{p}}$$

$$2\sqrt{p}$$

### C O R O L L A R I O I.

96. Si supponga l'ascissa AP, o sia  $x = 0$ . Il punto M deve in tal caso cadere in A, e 'l raggio osculatore relativamente al pun-

$$\text{to A si fa} = \frac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2} p. \text{ Sicchè AL}$$

=

$= \frac{1}{2} p$ , cioè uguale alla metà del parametro dell'asse.

COROLLARIO II.

97. Essendo pel § 93  $MQ = \frac{2}{\sqrt{dx^2 + pdx^2}} =$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{ddy}, \text{ farà } MQ = \frac{4x}{\frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}} =$$

$$\frac{(4x + p)\sqrt{x}}{\sqrt{p}} = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}} + \sqrt{px}; \text{ onde ti-}$$

rata LS parallela ad MQ, LS = PQ =

$$MQ - MP = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}}. \text{ Essendo di più}$$

MR : Rm = MQ : QN, o sia dx : dy, ovvero  $2\sqrt{px} : p$ , o pure  $2\sqrt{x} : \sqrt{p} =$

$$\frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}} + \sqrt{px} : QN, \text{ farà } QN = 2x + \frac{1}{2}p,$$

e conseguentemente, tirata NT pure paral-

lele ad MQ, PT =  $2x + \frac{1}{2}p$ . Onde AT =

$$AP + PT = 3x + \frac{1}{2}p, \text{ e conseguente-}$$

men.

mente  $SN = LT = AT - AL = 3x$ .

Si mettano adunque  $LS = v$ , ed  $SN = w$ ;  
saranno

$$v = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{p}}$$

$$w = 3x.$$

E perciò

$$v = \frac{\frac{4}{3} w \sqrt{\frac{1}{3} w}}{\sqrt{p}}$$

$$v^2 = \frac{16w^3}{27p},$$

ed

$$w^3 = \frac{27}{16} pv^2.$$

Per la qual cosa l'evoluta LNO della parabola AMC del primo genere è la seconda parabola cubica, che ha per parametro

$$\frac{27}{16} p.$$

## E S E M P I O II.

Sia da determinare il raggio osculatore relativamente a qualunque punto dell'ellisse di primo genere, vale a dire dell'ellisse dell'equa-

zione  $y^2 = \frac{p}{2a} \times x(2a - x) = \frac{p}{2a} (2ax - x^2)$ .

Il differenziale di  $y^2 = \frac{p}{2a} (2ax - x^2)$  è  
 $ydy = \frac{p}{2a} (a - x) dx$ . Onde

$$dy = \frac{p}{2a} (a - x) dx \quad \frac{p}{2a} (a - x) dx$$

---


$$\frac{y}{\sqrt{\frac{p}{2a} (2ax - x^2)}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{p}{2a} (2ax - x^2)}}{\frac{p}{2a} (a - x) dx}, e$$

$$\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{\frac{p}{2a} (a - x)^2 dx^2}$$

$$dy^2 = \frac{2ax - x^2}{2ax - x^2}$$

Il differenziale di  $ydy = \frac{p}{2a} (a - x) dx$ ,

preso il  $dx$  costante, è  $dy^2 + yddy =$

$$\frac{p}{2a} dx^2; \text{ onde}$$

$$1 \rightarrow ddy$$

$$\frac{p}{2a} (a-x)^2 dx^2$$

$$\frac{p}{2ax-x^2} + \frac{p}{2a} dx^2$$

$$ddy = \frac{((a-x)^2 + 2ax - x^2) \frac{p}{2a} dx^2}{(2ax-x^2)}$$

$$(2ax-x^2) \sqrt{\frac{p}{2a} (2ax-x^2)}$$

$$a^2 dx^2 \sqrt{\frac{p}{2a}}$$

Sicchè, posta la curva AMG essere l'ellisse di primo genere, farà relativamente a qualunque suo punto M il raggio osculato-

$$re MN = \frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx dy}$$

$$\left( dx^2 + \frac{p (a-x)^2 dx^2}{2a (2ax-x^2)} \right) \times$$

$$\sqrt{\frac{p (a-x)^2 dx^2}{2a (2ax-x^2)}} :$$

$$a^2 dx^3 \sqrt{\frac{p}{2a}}$$

-----, e confe-

guentemente MN =  $(2ax - x^2) \sqrt{2ax - x^2}$

$$\left( 2ax - x^2 + \frac{p}{2a} (a - x)^2 \right) \times$$

$$\sqrt{2ax - x^2 + \frac{p}{2a} (a - x)^2}$$

-----  
 $a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}}$

COROLLARIO I.

98. Si supponga l'ascissa AP, o sia  $x = 0$ . Il punto M deve in tal caso cadere in A, e'l raggio osculatore relativamente

$$\frac{p}{2a} \times a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}} \times a^2$$

al punto A si fa = ----- =

$$a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}}$$

$\frac{1}{2} p$ . Sicchè AL =  $\frac{1}{2} p$ , cioè uguale

le alla metà del parametro dell'asse primario.

## C O R O L L A R I O II.

99. Si supponga in oltre l'ascissa AP, o sia  $x = a$ . Il punto M cade in tale altro caso nel vertice dell'asse secondario, e'l raggio osculatore relativamente a tale punto

$$\text{si fa} = \frac{a^2 \sqrt{a^2}}{a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{p}{2a}}} = \sqrt{\frac{2a^3}{p}}$$

$$= a \sqrt{\frac{2a}{p}}. \text{ Or, posta la metà del'asse}$$

secondario =  $c$ , e posto il parametro relativamente a tale asse =  $q$ , essendo  $a : c = c :$

$$\frac{1}{2} p, \text{ e conseguentemente } c = \sqrt{\frac{1}{2}} a p,$$

ed essendo  $c : a = a : \frac{1}{2} q$ , sarà  $\frac{1}{2} q =$

$$\frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{2}} a p} = \sqrt{\frac{2a^3}{p}} = a \sqrt{\frac{2a}{p}}.$$

Per la qual cosa il raggio osculatore relativamente al vertice dell'asse secondario nell'el.

ellisse di primo genere è  $= \frac{1}{2} q$ , cioè uguale alla metà del parametro del medesimo asse secondario.

COROLLARIO III.

100. Sia adunque ACB una mezza ellisse, Fig. 26 che abbia per semiasse primario AO, e per semiasse secondario CO. Si taglino da AB le porzioni AL, BM, ognuna uguale al semiparametro dell'asse AB, e si prolunghi il semiasse CO in P, finchè sia CP il semiparametro del medesimo asse. E' chiaro che l'evoluta della curva AC deve toccare AO in L, e CP in P; e similmente l'evoluta della curva CB deve toccare BO in M, e CP in P. Sicchè l'evoluta dell'intera curva ACB deve avere la forma della curva LPM, e conseguentemente deve essere una curva, che abbia in P un punto di ritorno, e composta da due rami PL, PM perfettamente uguali, e simili.

COROLLARIO IV.

101. Si mettano  $AO = a$ ,  $CO = c$ , il parametro dell'asse primario  $= p$ , e quello dell'asse secondario  $= q$ ; faranno  $AL = \frac{1}{2} p$ ,  $CP$

I 3

CP

$CP = \frac{1}{2} q$ , e la lunghezza dell' evoluta

$LP = PC - LA = \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} p$ . Or

essendo  $\frac{1}{2} p = \frac{c^2}{a}$ , ed  $\frac{1}{2} q = \frac{a^2}{c}$ , sarà

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} p &= \frac{a^2}{c} - \frac{c^2}{a} = \frac{a^3 - c^3}{ac} \\ &= \frac{(a - c)^3}{ac} + 3(a - c). \end{aligned}$$

Sicchè se al

quoziente, che nasce dividendo pel prodotto de' semiaffi AO, OC il cubo della differenza di essi, s'aggiugne il triplo dell' istessa differenza de' detti semiaffi, si ha la lunghezza dell' evoluta LP. Per la qual cosa, posti AO di palmi 10, e OC di pal. 6; sarà la lunghezza dell' evoluta LP =

$$\frac{(AO - OC)^3}{AO \times OC} + 3(AO - OC) =$$

$$\frac{64}{60} + 12 = \text{pal. } 13 \frac{1}{15}.$$

**ESEM.**

ESEMPIO III.

Sieno  $ARB$  un semicerchio, ed  $AMC$  una Fig. 27  
 curva limitata dalla retta  $BC$  perpendicolare  
 ad  $AB$ , ed eguale alla semiperiferia  $ARB$ ;  
 e si fatta curva sia tale, che, tirata in essa  
 qualunque ordinata  $PM$  al suo asse  $AB$ , sia  
 sempre la retta  $RM$  uguale al corrispondente  
 arco circolare  $AR$ : sia di si fatta curva da  
 determinare il raggio osculatore relativamente a  
 qualunque suo punto.

Si mettano il raggio  $AO = r$ , la semi-  
 periferia  $ARB$ , e conseguentemente la retta  
 $BC = p$ , l'ascissa  $AP = x$ , l'ordinata  
 $PM = y$ , la  $PR = v$ , l'arco  $AR$ , e  
 conseguentemente la retta  $RM = z$ ; sarà  
 $y = v + z$ , e  $dy = dv + dz$ . Ma es-

sendo  $v = \sqrt{2rx - x^2}$ , e conseguentemen-  
 te  $dv = \frac{(r-x) dx}{\sqrt{2rx - x^2}}$ , e  $dz = \sqrt{dx^2 + dv^2}$

$$= \sqrt{dx^2 + \frac{(r-x)^2 dx^2}{2rx - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 dx^2}{2rx - x^2}}$$

$$= \frac{r dx}{\sqrt{2rx - x^2}}, \text{ sarà}$$

I 4  $dy =$

$$\frac{dy}{(r-x)dx + rdx} = \frac{(2r-x)dn}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

Sicchè, presa  $dx$  costante, farà

$$\frac{-ddy}{(2r-x)rdx^2} = \frac{rdx^2}{(2rx-x^2)\sqrt{2rx-x^2}}$$

E perciò il raggio osculatore relativamente a qualunque punto M, cioè  $MN =$

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx ddy} =$$

$$\left( dx^2 + \frac{(2r-x)^2 dx^2}{2rx-x^2} \right) \times$$

$$\sqrt{dx^2 + \frac{(2r-x)^2 dx^2}{2rx-x^2}} : \frac{rdx^3}{x\sqrt{2rx-x^2}} =$$

$$2\sqrt{4r^2 - 2rx} = 2\sqrt{(2r-x)2r} =$$

$2\sqrt{AB} \times BP = 2BR$ , tirata nel semicerchio la corda BR.

COROLLARIO.

102. Essendo il raggio osculatore relativamente a qualunque punto della supposta

curva  $= 2\sqrt{4r^2 - 2rx}$ ; posta  $x = 0$ , il punto M cade nel vertice A, e 'l raggio osculatore relativamente al vertice A si fa  $= 2\sqrt{4r^2} = 4r$ , cioè doppio del diametro AB del semicerchio ARB. Posta poi  $x = 2r$ , il punto M in tale altro caso cade in C, e 'l raggio osculatore relativa-

mente al punto C si fa  $= 2\sqrt{4r^2 - 4r^2} = 0$ . Quindi l' evoluta della curva AMC deve avere la forma LNG, cioè deve avere il suo principio nel punto L, distante da A di  $LA = 2AB$ , e 'l suo termine nel punto C; e di più la lunghezza di sì fatta evoluta è  $= LA = 2AB$ .

AVVERTIMENTO.

103. Si noti che la curva AMC è la famosa curva, detta dalli Geometri la Cicloide.

ESEMPIO IV.

Sia da determinare il raggio osculatore *relativa-* Fig. 28  
*tivamente a qualunque punto M della logarit-*  
*mica LMN.*

Sia

Sia AB la linea delle ascisse, ed A l'origine di esse. S' intenda da M calata su AB la perpendicolare MP; e per l'istesso punto M s' intenda tirata la tangente MT. Si mettano l'ascissa AP = x, l'ordinata PM = y, e la sotttangente PT, ch' è co-

stante in tale curva = a. Sarà  $\frac{ydx}{dy} = a$ .  
 Onde

$$dy = \frac{ydx}{a};$$

e, presa dx costante, farà

$$ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{a^2}.$$

E perciò il raggio osculatore relativamente a qualunque punto M farà

$$\frac{(dx^2 + dy^2) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxddy} =$$

$$\frac{(dx^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2}) \sqrt{dx^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2}}}{\frac{ydx^3}{a^2}} =$$

$$\frac{(a^2 + y^2) \sqrt{a^2 + y^2}}{ay}.$$

CO.

COROLLARIO.

104. Si tiri da M la normale MH. Essendo  $TP : PM = PM : PH$ , o sia  $a :$

$$y = y : PH, \text{ sarà } PH = \frac{y^2}{a}, \text{ e } TH =$$

$$a + \frac{y^2}{a} = \frac{a^2 + y^2}{a}. \text{ E' di più } TM =$$

$$\sqrt{TP^2 + PM^2} = \sqrt{a^2 + y^2}. \text{ Dunque il raggio osculatore relativamente a qualunque}$$

$$TH \times TM$$

$$\text{punto M è } = - \frac{\quad}{PM}, \text{ cioè è quar-}$$

ta proporzionale in ordine a PM, TH, TM, e si deve prendere in continuazione di HM prolungata verso O pel segno negativo. Per la qual cosa se relativamente a qualunque punto M si prolunga la normale HM in Q, finchè sia MO quarta proporzionale in ordine all'ordinata PM, alla retta TH, somma della sotttangente TP, e della funnormale PH, e alla tangente TM; tale quarta proporzionale dà il raggio osculatore della logaritmica relativamente al punto M.

## A V V E R T I M E N T O .

105. Non ci prendiamo la pena di estendere di vantaggio l'uso dell'esposto calcolo differenziale; perchè quanto s'è insegnato è bastantissimo a guidare chicchessia ne' più fini sviluppi, che coll'ajuto di sì fatto calcolo far si possono.

*Fine del Calcolo differenziale.*

*Correzioni da fare.*

S'avverta che negli esempj V, e VI, che si trovano alle pagini 74, e 75 s'è adoperata l'unità per sottangente della logaritmica; onde se si suppone tale sottangente =  $c$ , deve essere nel primo de' detti

esempj la sottangente della curva =  $\frac{c}{la}$ ,

e la funnormale =  $\frac{y^2}{c} \times la$ , e nel secon-

do ~~la~~ sottangente della curva =  $\frac{c}{c + lx}$ , e  
la

la funnormale =  $\frac{y'^2}{c} \times (c + lx)$ .

Di più alla pagina 86 ne' versi 19, e  
20 in vece di  $y = \pm a + \frac{dx^2}{\pm a + dx}$ ,

$y = \pm a + \frac{dx^2}{\pm a - dx}$  deve essere  $y = \pm$

$2a + \frac{dx^2}{\pm a + dx}$ ,  $y = \pm 2a + \frac{dx^2}{\pm a - dx}$ .

IN.

# I N D I C E

DE' CAPI CONTENUTI IN QUESTO TRATTATO.

---

**DEFINIZIONI , E NOZIONI  
PRELIMINARI.** pag. 1

---

**CAP. I.** *Delle regole per determinare i differenziali algebratici del primo grado.* 9

**CAP. II.** *Si determinano l' equazioni alle curve , delle quali equazioni si dovrà continuamente far uso in seguito.* 29

**CAP. III.** *Della curva logaritmica , e del modo di differenziare le quantità logaritmiche.* 40

**CAP. IV.** *Delle quantità esponenziali , e del modo di differenziarle.* 50

**CAP. V.** *Dell' uso de' differenziali del primo grado in determinare le tangenti delle curve.* 56

**CAP. VI.** *Dell' uso de' differenziali del*

- 143
- del primo grado in isciorre i probl.  
de' massimi, e minimi.* 76
- CAP. VII.** *S' injezna a determinare i  
differenziali algebraici di gradi su-  
periori.* 98
- CAP. VIII.** *Dell' uso de' differenziali  
del secondo grado in determinare i  
punti di flessioni contrarie, e de'  
ritorni delle curve, che hanno tali  
punti.* 106
- CAP. IX.** *Dell' uso de' differenziali del  
secondo grado in determinare i raggi  
osculatori delle curve.* 118



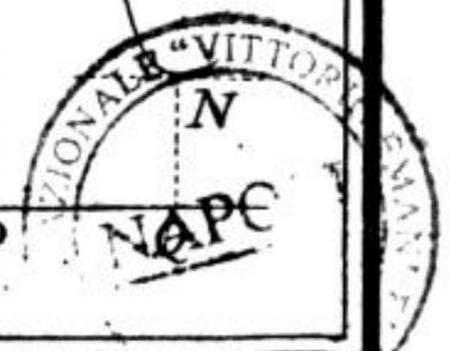
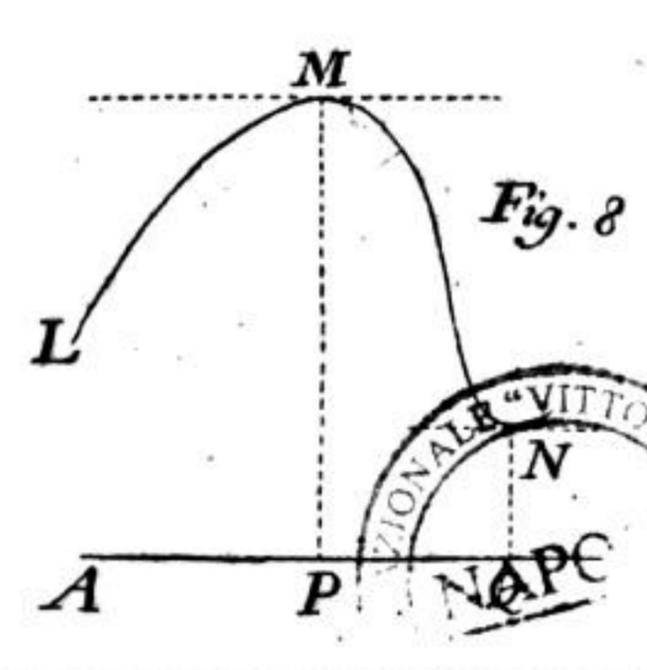
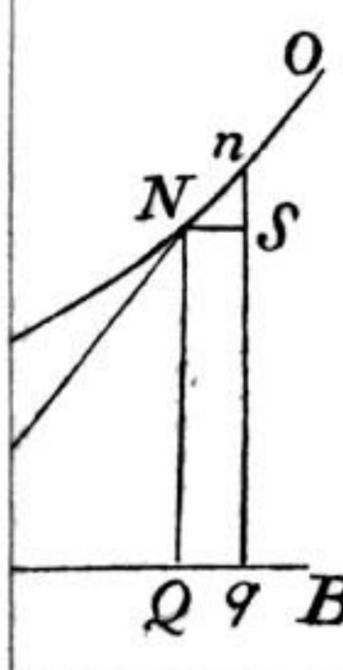
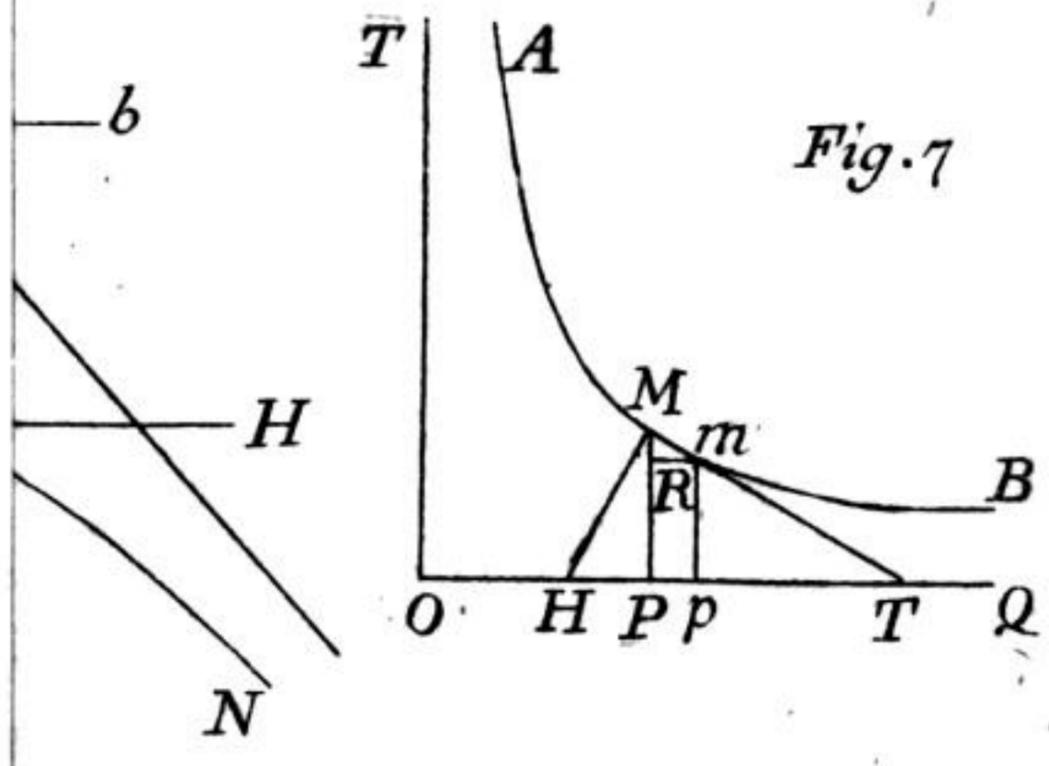
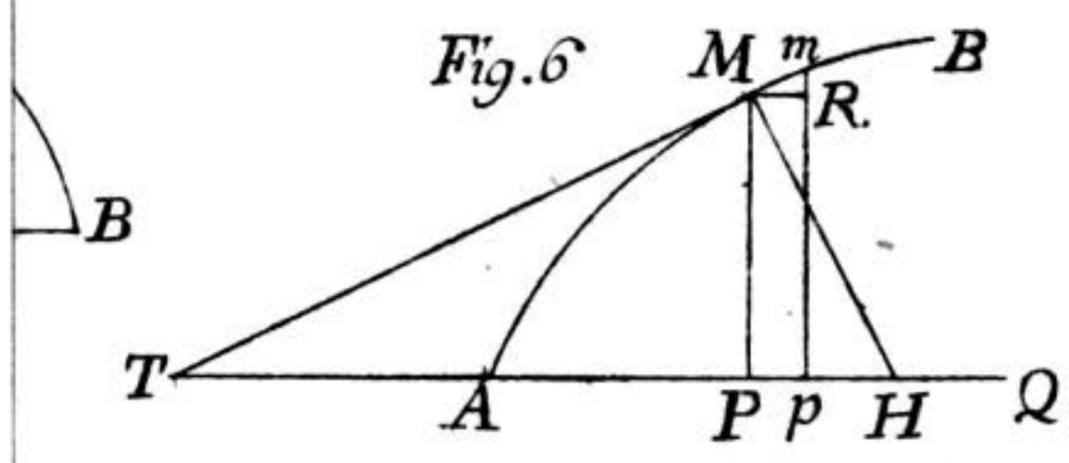
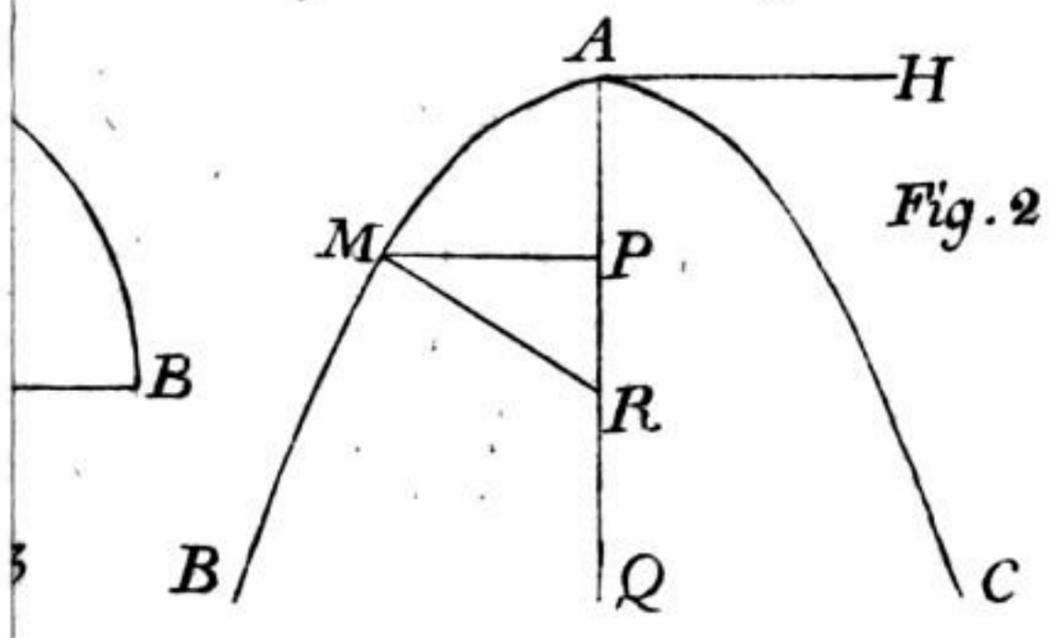




Fig. 10

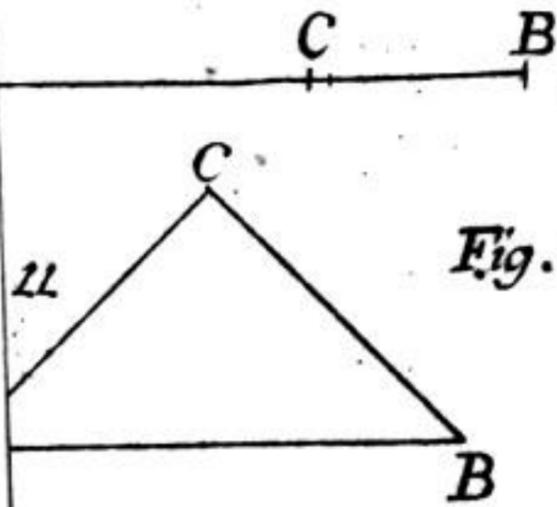


Fig. 12

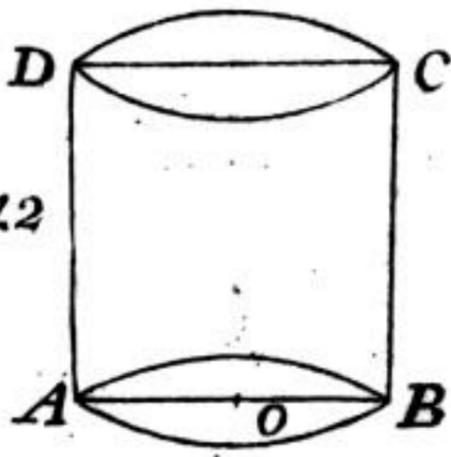


Fig. 14

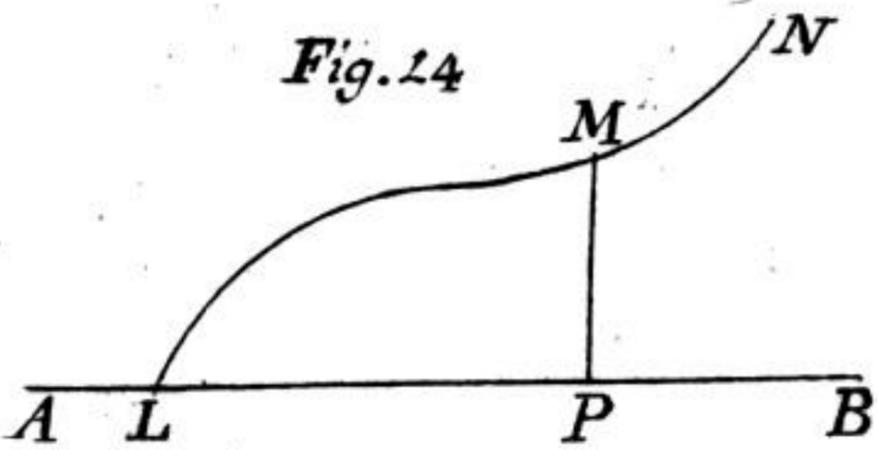


Fig. 16

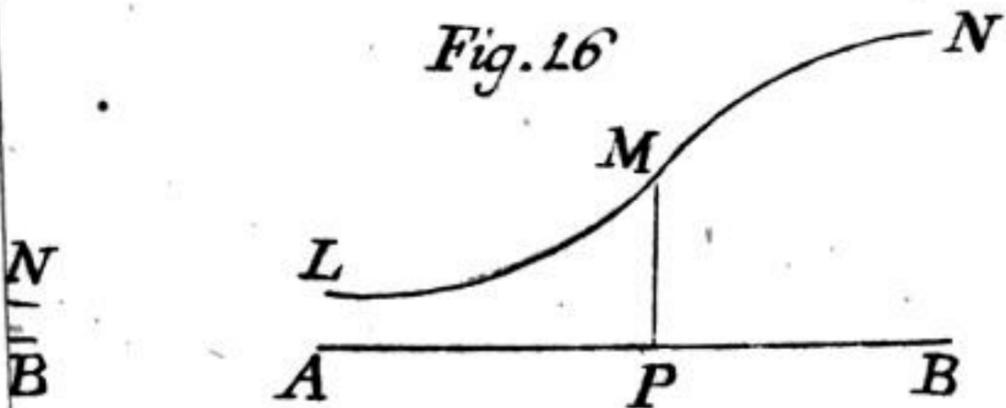


Fig. 18

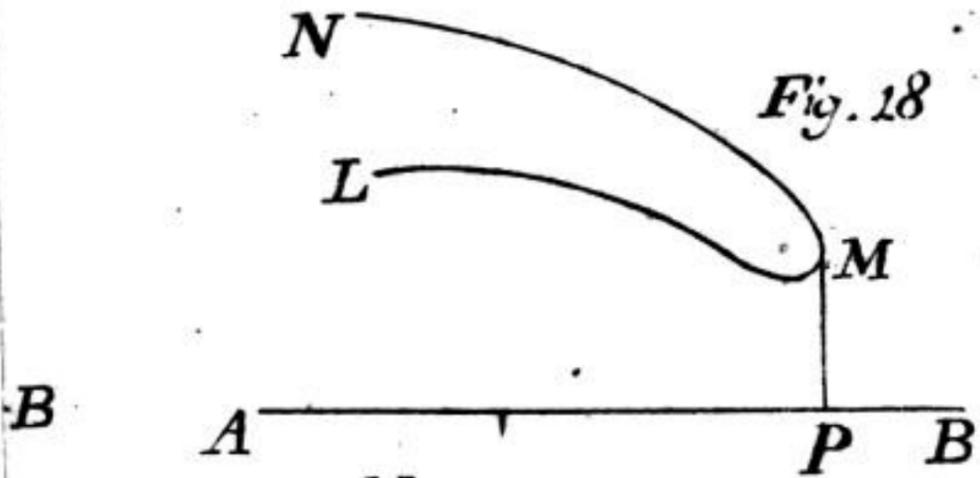
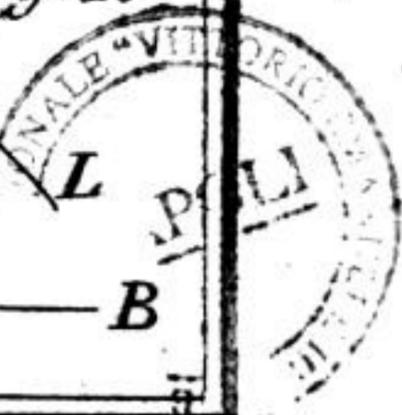
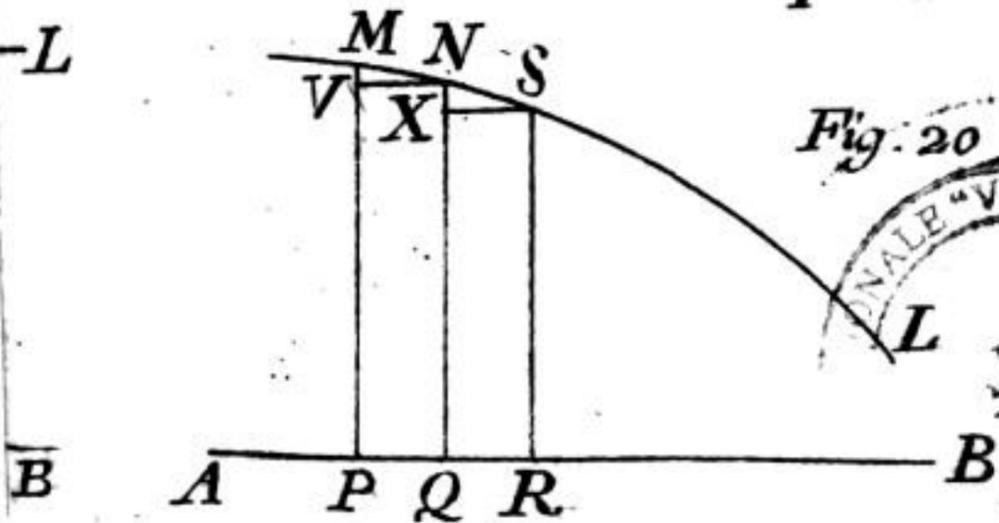
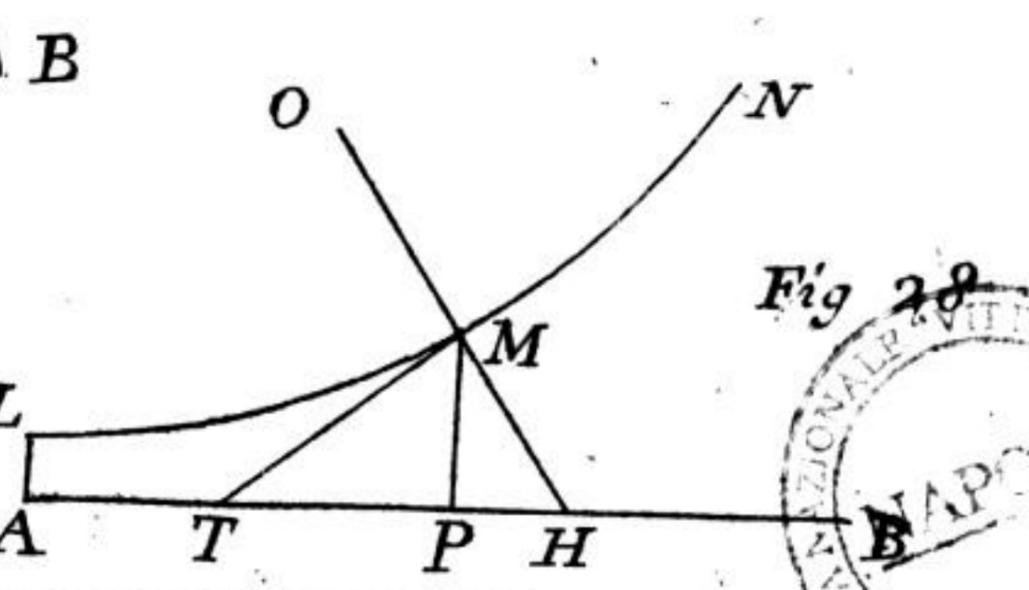
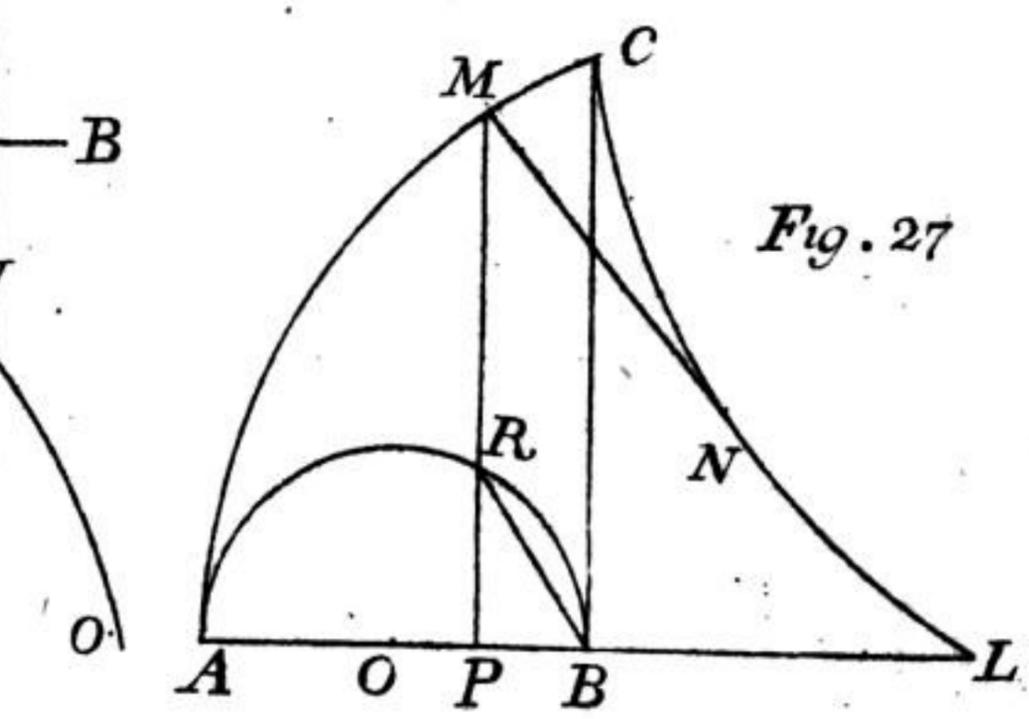
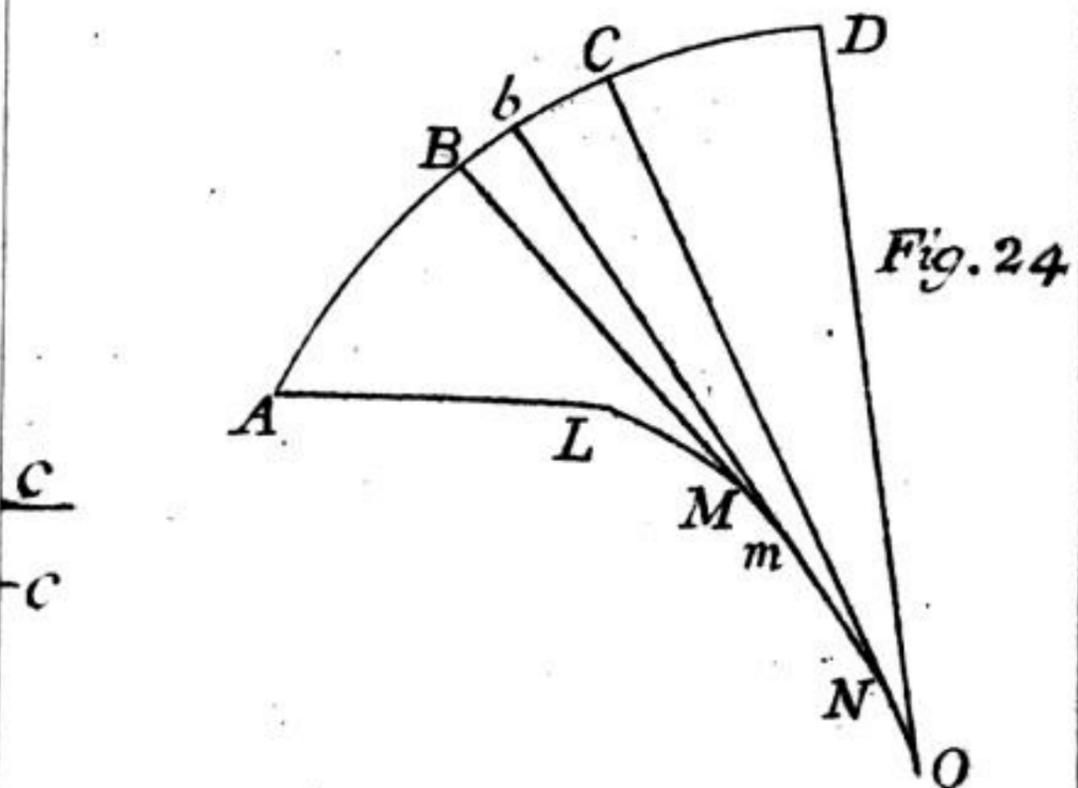
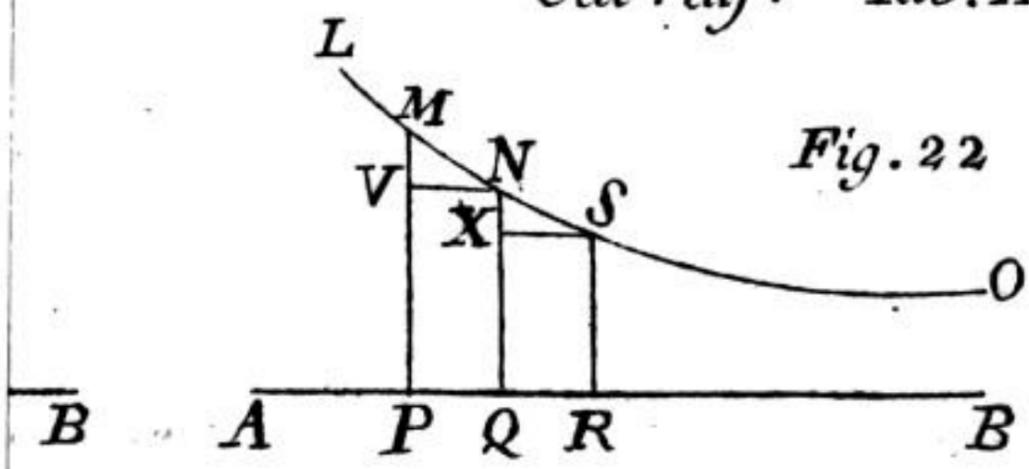


Fig. 20











*T R A T T A T O*  
 D E L  
 CALCOLO INTEGRALE.

---

*DEFINIZIONI , E NOZIONI  
 PRELIMINARI .*

---

DEFINIZIONE I.

I.



I dicono in generale *quantità differenziali* tutte l'espressioni algebrache , che contengono differenziali di qualunque grado di una , o più variabili . In particolare poi una quantità differenziale si dice del *grado primo* , *secondo* ,

K

ter.

terzo, ec., secondochè i differenziali, che contiene, sono del grado primo, secondo, terzo, ec.,

### C O R O L L A R I O.

2. Quindi l'espressioni algebriche  $adz + 2czdz + 3fz^2 dz$ ,  $zdz + adz - ydy$ ,  $2axdx + bdx - 2cx^{-3}y^2x + x^{-2}dy$ , ec. sono quantità differenziali del primo grado; e l'espressioni algebriche  $x d^2 y + 2dydx + yd^2 x$ ,  $(dx)^2 + x d^2 x + ad^2 x - (dy)^2$ , ec. sono quantità differenziali del secondo grado, e così procedendo innanzi.

### A V V E R T I M E N T O.

3. Le quantità differenziali non risultano tutte dal differenziare grandezze algebriche, che racchiudono variabili, o differenziali di variabili. In effetto le quantità differenziali del primo grado  $xdy$ , e  $xdy - ydx$  non derivano dal differenziare nè  $x + y$ , nè

$x - y$ , nè  $xy$ , nè  $\frac{x}{y}$ ; essendo il diffe-

renziale di  $x + y = dx + dy$ , quello di  $x - y = dx - dy$ , quello di  $xy = xdy$

$+ ydx$ , e quello di  $\frac{x}{y} = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$

$$= \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

DE.

DEFINIZIONE II.

4. Diciamo *integrale* di qualsiasi quantità differenziale la quantità, il di cui differenziale uguaglia la stessa quantità differenziale.

COROLLARIO I.

5. Quindi gl' integrali di  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ec. sono rispettivamente  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ec.; quelli di  $d^2x$ ,  $d^2y$ ,  $d^2z$ , ec. sono rispettivamente  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ec.; quelli di  $d^3x$ ,  $d^3y$ ,  $d^3z$ , ec. sono rispettivamente  $d^2x$ ,  $d^2y$ ,  $d^2z$ , ec., e così procedendo innanzi: vale a dire che gl' integrali delle quantità differenziali del primo grado sono quantità finite, quelli delle quantità differenziali del secondo grado sono grandezze differenziali del primo grado, quelli delle quantità differenziali del terzo grado sono grandezze differenziali del secondo grado; e così procedendo innanzi.

COROLLARIO II.

6. Essendo l' integrale di una data quantità differenziale quella quantità; che, differenziata, dà la stessa differenziale data; è chiaro che, per avere l' integrale di una data quantità differenziale, si debbono fare  
K 2 delle

delle operazioni contrarie a quelle , che si fanno nel differenziare .

### A V V E R T I M E N T O .

7. Si noti , che l'espressioni algebriche, che contrassegnano gl' integrali algebrici delle quantità differenziali , si ricavano , quando è possibile , secondo s' insegnerà appresso, dall' espressioni algebriche , che contrassegnano le medesime quantità differenziali .

### D E F I N I Z I O N E III.

8. Chiamiamo *integrali algebrici* l' espressioni algebriche , che contrassegnano gl' integrali delle quantità differenziali .

### D E F I N I Z I O N E IV.

9. Si dice *integrare* una quantità differenziale , quando da essa si vuole ricavare l' espressione algebrica , che contrassegna l' integrale della stessa quantità differenziale .

### D E F I N I Z I O N E V.

10. Si chiama *calcolo integrale* la scienza, che insegna i metodi di determinare ne' casi possibili gl' integrali algebrici delle quantità differenziali , e di sviluppare delle verità

DEL CALC. INTEGR. 149  
si geometriche, che fisiche col calcolo de'  
detti integrali.

## AVVERTIMENTO I.

11. Per brevità dinoteremo ne' calcoli doverli integrare una quantità differenziale semplice collo scriverle innanzi la lettera  $\int$ , ed una quantità differenziale composta collo scriverla in una parentesi, e col mettere innanzi alla parentesi la lettera  $\int$ , che si pronunzia colla voce *somma*.

## COROLLARIO.

12. Quindi nel calcolo integrale la lettera  $\int$  si adopera per mera caratteristica degli integrali; tal che l'espressioni  $\int a dx$ ,  $\int c y^{-4} dy$ ,  $\int (a dx + b dy + c dz)$ ,  $\int (x dy + y dx)$ , ec. non dinotano prodotti delle quantità differenziali  $a dx$ ,  $c y^{-4} dy$ ,  $a dx + b dy + c dz$ ,  $x dy + y dx$ , ec. moltiplicate per la grandezza contrassegnata dalla lettera  $\int$ , ma indicano che si debbono integrare le dette quantità differenziali espresse da  $a dx$ ,  $c y^{-4} dy$ ,  $a dx + b dy + c dz$ ,  $x dy + y dx$ , ec.

## A V V E R T I M E N T O II.

13. Si noti che ancorchè non vi sia grandezza algebrica, che racchiude quantità variabili, o differenziali di esse, che non si possa differenziare secondo le regole stabilite nel calcolo differenziale, vi è però un gran numero di quantità differenziali, che non si fanno integrare. Tra tali quantità ve ne sono delle non integrabili di lor natura, come  $xdy$ ,  $xdy - ydx$ , ec.; e sono tutte quelle, che non ammettono grandezze, che possono renderle con differenziarle. Ve ne sono poi delle altre, che, sebbene sieno integrabili di lor natura, non s'è però ancora trovato metodo per farne l'integrazione. Forse tra queste ve ne saranno di quelle, che non si sapranno integrare giammai.

## A V V E R T I M E N T O III.

14. Si noti pure che ancorchè una grandezza algebrica, che contiene variabili, o differenziali di esse, abbia un solo differenziale, nondimeno una quantità differenziale può avere un'infinità d'integrali diversi. Così la grandezza  $ax$  non ha altro differenziale, che  $adx$ ; ma il differenziale  $adx$  può avere un'infinità d'integrali diversi. In fatti contrassegnandosi con  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ec. quantità costanti,  $adx$  farà il differenziale di ciascuna

na delle quantità  $ax$ ,  $ax \pm b$ ,  $ax \pm c$ ,  $ax \pm d$ ,  $ax \pm cb$ ,  $ax \pm cd$ ,  $ax \pm bcd$ , ec.; perchè qualora nelle grandezze da differenziare si ritrovano de' termini costanti, tali termini non si notano nel differenziale, come nullo il differenziale di qualsivisa quantità costante. Or essendo  $a dx$  il differenziale di ciascuna delle quantità  $ax$ ,  $ax \pm b$ ,  $ax \pm c$ ,  $ax \pm d$ ,  $ax \pm bc$ ,  $ax \pm cd$ , ec.: è chiaro che ognuna delle suddette quantità può essere l'integrale di  $a dx$ . Dunque l'integrale di una data quantità differenziale può essere non solo quella quantità, che ha per suo differenziale la differenziale data, ma anche la stessa quantità accresciuta, o diminuita di una, o più costanti, o di una quantità composta di quantità tutte costanti. Perciò a qualunque integrale, che si determinerà, aggiungeremo sempre una costante, che disegneremo colla lettera C, iniziale della voce costante, affinchè si riconosca per tale. Si fatta costante avrà un valore arbitrario, finchè non si avrà altr' oggetto, che quello d' insegnare il modo di ritrovare l'integrale di una data quantità differenziale: ma quando l'integrazione si farà per risolvere qualche problema, allora la costante, che si aggiungerà all'integrale, che si ritroverà, avrà un valore, che sarà determinato, secondo si vedrà appresso, dalle condizioni dello stesso problema.

## AVVERTIMENTO IV.

15. Si noti di vantaggio che siccome non si può estrarre qualunque radice da ogni grandezza, ancorchè qualunque grandezza si possa innalzare a qualsiasi potenza; così non si può, che rade volte avere con esattezza l'integrale di un dato differenziale, ancorchè si sappia sempre ritrovare il differenziale di qualsivoglia grandezza variabile, o composta da variabili, e costanti: e che siccome l'aritmetica, e l'algebra ricorre alle approssimazioni per quelle radici, che non possono averli esattamente; così nel calcolo integrale ricorriamo alle serie infinite, quando gl'integrali, che si cercano, non possono averli con esattezza.

## AVVERTIMENTO V.

16. Si noti finalmente che il calcolo integrale si chiama anche *calcolo inverso*, o *reciproco delle flussioni*, essendo l'inverso del calcolo differenziale, chiamato dal Newton *calcolo delle flussioni*.

CA:

## C A P. I.

*Delle regole per determinare gl' integrali algebratici delle quantità differenziali del primo grado, che contengono il differenziale di una sola variabile.*

## P R O B L. I.

*17. Insegnare il modo d'integrare le quantità differenziali monomie, che contengono il differenziale del primo grado di una sola variabile non moltiplicato per la stessa variabile.*

## S O L U Z I O N E.

Avendosi il differenziale di una grandezza algebrica semplice del primo grado conmutare in essa la variabile nel suo differenziale: è chiaro che, volendosi al contrario l'integrale di una quantità differenziale semplice, che contiene il differenziale del primo grado di una sola variabile, conviene procedere secondo la seguente

ER.

*Si muti nella grandezza, che si deve integrare, il differenziale della variabile nella variabile istessa, ed a quel, che nasce, si aggiunga la costante C ( § 14 ). Si avrà in tal modo l' integrale cercato.*

E S E M P J.

$$1. \int 3a^2 dx = 3a^2 x + C.$$

$$2. \int 8c^3 dy = 8c^3 y + C.$$

$$3. \int 4a^3 b^2 c^4 dz = 4a^3 b^2 c^4 z + C.$$

$$4. \int ma^n p^r dx = ma^n p^r x + C.$$

P R O B L. II.

18. *Insegnare il modo d' integrare le differenziali monomie, che contengono il differenziale del primo grado di una sola variabile, moltiplicato per qualsivisa potenza della stessa variabile.*

S O L U Z I O N E.

Avendosi il differenziale di una grandezza algebrica semplice, che contiene qualunque potenza di una variabile, con moltiplicare la stessa grandezza, diminuito però l' espo-

esponente della sua variabile di un' unità , per lo prodotto , che nasce moltiplicando l' esponente della variabile pel differenziale della medesima : è chiaro che , volendosi al contrario l' integrale di una quantità differenziale semplice , che contiene il differenziale del primo grado di una sola variabile moltiplicato per qualche potenza della stessa variabile , conviene procedere secondo la seguente

REGOLA FONDAMENTALE :

*Si divida la grandezza data , accresciuto prima l' esponente della variabile di un' unità , pel prodotto , che si ha con moltiplicare il detto esponente della variabile accresciuto di un' unità per lo differenziale della medesima , ed a quel , che nasce , si aggiunga la costante C ( § 14 ) . In tal modo si avrà l' integrale cercato .*

E S E M P J .

$$1. \int 2x dx = \frac{2x^2 dx}{2dx} + C = x^2 + C .$$

$$2. \int 3y^2 dy = \frac{3y^3 dy}{3dy} + C = y^3 + C .$$

3.

$$3. \int az^4 dz = \frac{az^5 dz}{5dz} + C = \frac{1}{5} az^5 + C.$$

$$4. \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{\frac{2}{3}+1} + C =$$

$$\frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} a \sqrt[3]{x^5} + C.$$

$$5. \int ax^m dx = \frac{ax^{m+1} dx}{(m+1) dx} + C = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C.$$

## A V V E R T I M E N T O I.

19. Si noti che quando la differenziale, che si deve integrare, contiene il solo differenziale di una variabile, e non già la variabile istessa, si può la medesima integrare colla regola fondamentale, suppostavi però la detta variabile coll' esponente zero. In effetto essendo  $3a^2 dx = 3a^2 x^0 dx$ , sarà

$$\int 3a^2 dx = \int 3a^2 x^0 dx = \frac{3a^2 x^1 dx}{dx} + C =$$

$$3a^2 x + C. \text{ Similmente essendo } ma^n dx =$$

$$ma^n x^0 dx, \text{ sarà } \int ma^n dx = \int ma^n x^0 dx =$$

$$\frac{ma^n x dx}{dx} + C = ma^n x + C.$$

AV:

AVVETIMENTO II.

20. Si noti pure che se la differenziale semplice, che si deve integrare, è un rotto, il cui denominatore contiene la variabile con qualunque esponente, tale variabile si considera nel numeratore, mutando il segno al suo esponente, ed indi s' integra secondo la regola fondamentale.

E S E M P J.

$$1. \int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-2} dx}{-2dx} +$$

$$C = \frac{a}{2x^2} + C.$$

$$2. \int \frac{3c^2 dy}{4ay^4} = \int \frac{3c^2 y^{-4} dy}{4a} = \frac{3c^2 y^{-3} dy}{4ax-3dy} +$$

$$C = \frac{c^2 y^{-3}}{4a} + C = \frac{c^2}{4ay^3} + C.$$

$$3. \int \frac{ma^n dy}{c^n y^r} = \int \frac{ma^n y^{-r} dy}{c^n} = \frac{ma^n y^{-r+1} dy}{c^n (1-r)dy} +$$

$$C = \frac{ma^n y^{-r+1}}{c^n (1-r)} + C = \frac{ma^n}{c^n (1-r)y^{r-1}} + C.$$

AV.

## A V V E R T I M E N T O III.

21. Si noti di vantaggio che se la differenziale monomia, di cui si cerca l'integrale, contiene un radicale variabile; si sostituisce allora al radicale variabile la grandezza esistente sotto il segno radicale innalzata alla potenza indicata dal rotto, che ha per numeratore l'esponente della variabile, e per denominatore l'esponente del segno radicale, e poi s' integra colla regola fondamentale.

## E S E M P J.

$$1. \int a dx \sqrt[3]{x^2} = \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{5}{3}} dx}{\frac{5}{3} dx} + =$$

$$\frac{ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} a \sqrt[3]{x^5} + C.$$

$$2. \int 2c dy \sqrt[m]{y^n} = \int 2cy^{\frac{n}{m}} dy = \frac{2cy^{\frac{n}{m} + 1} dy}{\left(\frac{n}{m} + 1\right) dy} + C$$

$$+ C = \frac{2cy^m}{n+m} + C = \frac{2mcy^m}{n+m} + C =$$

$$\frac{2mc}{n+m} y^{n+m} + C.$$

$$3. \int m dx \sqrt[r]{ax^n} = \int m dx \sqrt[r]{a} \sqrt[r]{x^n} =$$

$$\int m \sqrt[r]{a} x^{\frac{n}{r}} dx = \frac{m \sqrt[r]{a} x^{\frac{n}{r} + 1}}{\left(\frac{n}{r} + 1\right)r} + C = \frac{m \sqrt[r]{a} x^{\frac{n}{r} + 1}}{\frac{n}{r} + 1}$$

$$+ C = \frac{m \sqrt[r]{a} x^{\frac{n+r}{r}}}{\frac{n+r}{r}} + C = \frac{rm \sqrt[r]{a}}{n+r} x^{\frac{n+r}{r}} + C$$

$$C = \frac{rm}{n+r} \sqrt[r]{a} \sqrt[r]{x^{n+r}} + C = \frac{rm}{n+r} \sqrt[r]{ax^{n+r}} + C.$$

$$4. \int \frac{adx}{\sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{adx}{cx^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{a}{c} x^{-\frac{3}{4}} dx =$$

$$\frac{ax^{\frac{3}{4}} dx}{\frac{3}{4} c dx} + C = \frac{4ax^{\frac{1}{4}}}{c} + C = \frac{4a}{c} \sqrt{x} + C.$$

$$5. \int \frac{ady}{b\sqrt{y^r}} = \int \frac{ady}{by^{\frac{r}{m}}} = \int \frac{ay^m}{b} \frac{dy}{y^{\frac{r}{m}}} =$$

$$\frac{ay^{\frac{r}{m} + 1}}{b \left(\frac{r}{m} + 1\right)} + C = \frac{ay^{\frac{m-r}{m}}}{b \left(\frac{m-r}{m}\right)} + C =$$

$$\frac{b \left( -\frac{r}{m} + 1 \right) dy}{\frac{m-r}{m}}$$

$$\frac{may^m}{b(m-r)} + C = \frac{ma}{(m-r)b} \sqrt{y^{m-r}} + C.$$

## AVVERTIMENTO IV.

22. Finalmente si noti che si esclude dalla regola fondamentale il solo caso, in cui l'esponente della variabile è  $-1$ . Se s'integrasse allora colla regola fondamentale, si avrebbe per integrale una quantità infinita, e per conseguenza inassegnabile. In fatti in-

te-

tegrando colla detta regola la differenziale

$$x^{-1} dx, \text{ nasce } \frac{x^0 dx}{0 \times dx} + C = \frac{1}{0} + C =$$

$\infty + C$ . Similmente integrando colla stes-

$$\text{sa regola } ay^{-1} dy, \text{ nasce } \frac{ay^0 dy}{0 \times dy} + C = \frac{ay^0}{0}$$

$$+ C = \frac{a}{0} + C = \infty + C. \text{ In s\`i fat-}$$

to caso le quantit\`a differenziali sono diffe-  
renziali di logaritmi, e conseguentemente i  
loro integrali, che si determineranno ne  
modo, che s' insegner\`a appresso, farann  
logaritmi; ed appresso s' inlegner\`a, perch\`e  
in tal caso il calcolo d\`a una quantit\`a in-  
finita.

### P R O B L. III.

23. *Insegnare il modo d' integrare le quan-  
tit\`a differenziali composte, i termini delle qua-  
li hanno le condizioni delle differenziali mono-  
mie, che si sono considerate ne' precedenti pro-  
blemi, ed avvertimenti.*

### S O L U Z I O N E.

Avendosi il differenziale di una grandez-  
za algebrica composta con determinare i  
differenziali di tutt' i suoi termini, ed unir-  
li insieme co' segni, che loro appartengono:

L. \text{ \textit{e}}

è chiaro che , volendosi al contrario l'integrale di una quantità differenziale composta, che contiene in ciascun termine il differenziale di una variabile sola , bisogna procedere secondo la seguente

## R E G O L A .

Si determinino colle regole precedenti gl' integrali di tutt' i termini , che compongono la proposta grandezza , e si uniscano in una somma . A sì fatta somma si aggiunga la costante C , e si avrà l' integrale cercato .

## E S E M P I O I .

Sia da integrarsi la quantità differenziale

$$ax^2 dx + \frac{bx^3 dx}{m} + \frac{cx^4 dx}{n} + ex^5 dx + f dx .$$

Essendo

$$\int ax^2 dx = \frac{1}{3} ax^3$$

$$\int \frac{bx^3 dx}{m} = \frac{3}{4m} bx^4$$

$$\int \frac{cx^4 dx}{n} = \frac{cx^5}{5n}$$

$$\int ex^5 dx = \frac{1}{6} ex^6$$

$$\int f dx = fx .$$

Sarà

Sarà

$$\int (ax^2 dx + \frac{bx^3 dx}{m} + \frac{cx^4 dx}{n} + ex^5 dx + f dx) =$$

$$\frac{1}{3} ax^3 + \frac{b}{4m} x^4 + \frac{c}{5n} x^5 + \frac{1}{6} ex^6 + fx + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi la quantità differenziale

$$3a^2 x^3 dx + 5c^3 dx \sqrt{x^2} + \frac{2adx}{3x^2} + \frac{7cdx}{2\sqrt{x}}$$

$$ax^2 dx.$$

Essendo

$$\int 3a^2 x^3 dx = \frac{3}{4} a^2 x^4$$

$$\int 5c^3 dx \sqrt{x^2} = \frac{25}{7} c^3 \sqrt{x^7}$$

$$\int \frac{2adx}{3x^2} = -\frac{2a}{3x}$$

$$\int \frac{7cdx}{2\sqrt{x}} = \frac{21}{4} c\sqrt{x^2}$$

$$\int ax^2 dx = \frac{1}{3} ax^3$$

L 2

Sa.

$$\int \left( 3a^2 x^3 dx + 5c^3 dx \sqrt{x^2} + \frac{2adx}{3x^2} + \frac{7cdx}{2\sqrt{x}} - ax^2 dx \right) = \frac{3}{4} a^2 x^4 + \frac{25}{7} c^3 \sqrt{x^7} - \frac{2a}{3x} + \frac{2I}{4} c \sqrt{x^2} - \frac{I}{3} ax^3 + C.$$

## E S E M P I O III.

Sia da integrarsi la quantità differenziale

$$2x^3 dx + 3ay^4 dy + 5czdz + \frac{2dy}{y^3} + 4dx\sqrt{x^2},$$

Essendo

$$\int 2x^3 dx = \frac{I}{2} x^4$$

$$\int 3ay^4 dy = \frac{3}{5} ay^5$$

$$\int 5czdz = \frac{5}{2} cz^2$$

$$\int \frac{2dy}{y^3} = -\frac{I}{y^2}$$

$$\int 4dx\sqrt{x^2} = \frac{I2}{5} \sqrt{x^5}$$

Sa-

Sarà

$$2x^3 dx + 3ay^4 dy + 5cz^2 dz + \frac{2dy}{y^3} + 4dx\sqrt{x^2} =$$

$$\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{5}ay^5 + \frac{5}{2}cz^3 - y^{-2} + \frac{12}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

### AVVERTIMENTO I.

24. Si noti che se l'esponente della variabile in qualche termine della quantità differenziale composta, che si deve integrare, è  $-1$ , l'integrale di tale termine non s'avrà colla regola fondamentale, ma per mezzo de' logaritmi (§ 22).

### AVVERTIMENTO II.

25. Se la grandezza, che si deve integrare, è il prodotto di una quantità differenziale semplice, o composta, che contiene ne' suoi termini il differenziale del primo grado di una sola variabile, moltiplicata per una grandezza composta, che ha la stessa variabile in tutti li suoi termini, o in alcuni di essi, innalzata ad una potenza, il di cui esponente è un numero intero, e positivo; sì fatta grandezza s'integra nel seguente modo. Si eleva prima la grandezza variabile composta alla potenza proposta, ed indi si moltiplica tale potenza per la quantità differenziale, che contiene la grandezza

L 3

da

data . S' integra colla regola fondamentale cialcun termine del prodotto, che nasce, ed alla somma di tutti gl'integrali, che si hanno, si aggiugne la costante C .

## E S E M P I O I.

Sia da integrarsi  $adx (c + px)^4$  .

Essendo

$$(c + px)^4 = c^4 + 4c^3 px + 6c^2 p^2 x^2 + 4cp^3 x^3 + p^4 x^4 .$$

Sarà

$$adx (c + px)^4 = ac^4 dx + 4ac^3 px dx + 6ac^2 p^2 x^2 dx + 4acp^3 x^3 dx + ap^4 x^4 dx .$$

E perciò

$$\int (adx (c + px)^4) = \int (ac^4 dx + 4ac^3 px dx + 6ac^2 p^2 x^2 dx + 4acp^3 x^3 dx + ap^4 x^4 dx) = ac^4 x + 2ac^3 px^2 + 2ac^2 p^2 x^3 + acp^3 x^4 + \frac{1}{5} ap^4 x^5 + C .$$

## E S E M P I O II.

Sia da integrarsi  $2ax^3 dx (bx + cx^2)^3$  .

Essendo

$$(bx + cx^2)^3 = b^3 x^3 + 3b^2 cx^4 + 3bc^2 x^5 + c^3 x^6 .$$

Sarà

$$2ax^3 dx (bx + cx^2)^3 = 2ab^3 x^6 dx + 6ab^2 cx^7 dx + 6abc^2 x^8 dx + 2ac^3 x^9 dx .$$

E perciò

$$\int (2ax^3 dx (bx + cx^2)^3) = \int (2ab^3 x^6 dx + 6ab^2 cx^7 dx + 6abc^2 x^8 dx + 2ac^3 x^9 dx) = \frac{2ab^3}{7} x^7 + \frac{6ab^2 c}{8} x^8 + \frac{6abc^2}{9} x^9 + \frac{2ac^3}{10} x^{10} + C .$$

$$6ab^2 cx^7 dx + 6abc^2 x^8 dx + 2ac^3 x^9 dx) = \frac{2}{7} ab^3 x^7 + \frac{3}{4} ab^2 c x^8 + \frac{2}{3} abc^2 x^9 + \frac{1}{5} ac^3 x^{10} + C.$$

E S E M P I O III.

Sia da integrarsi  $(2ax dx + 3c^2 x^3 dx) (a + cx)^2$ .

Essendo

$$(a + cx)^2 = a^2 + 2acx + c^2 x^2,$$

farà

$$(2ax dx + 3c^2 x^3 dx) (a + cx)^2 = 2a^3 x dx + 4a^2 cx^2 dx + 2ac^2 x^3 dx + 3a^2 c^2 x^3 dx + 6ac^3 x^4 dx + 3c^4 x^5 dx = 2a^3 x dx + 4a^2 cx^2 dx + (2ac^2 + 3a^2 c^2) x^3 dx + 6ac^3 x^4 dx + 3c^4 x^5 dx.$$

E perciò

$$\int ((2ax dx + 3c^2 x^3 dx) (a + cx)^2) = \int (2a^3 x dx + 4a^2 cx^2 dx + (2ac^2 + 3a^2 c^2) x^3 dx + 6ac^3 x^4 dx + 3c^4 x^5 dx) = a^3 x^2 + \frac{4}{3} a^2 cx^3 + (2ac^2 + 3a^2 c^2) x^4 + \frac{6}{5} ac^3 x^5 + \frac{3}{2} c^4 x^6 + C.$$

4

E S E M P I O IV.

Sia da integrarsi  $2x dx (a + bx)^3 + adx \times (x + cx^2 + fx^3)^2$ .

Essendo

$$(a + bx)^3 = a^3 + 3a^2 bx + 3ab^2 x^2 + b^3 x^3, \text{ e}$$

$$(x + cx^2 + fx^3)^2 = x^2 + 2cx^3 + 2fx^4 + c^2 x^4 + 2cfx^5 + f^2 x^6$$

L 4

+

$$+ 2cfx^5 + f^2 x^6 = x^2 + 2cx^3 + (2f + c^2) x^4 + 2cfx^5 + f^2 x^6.$$

Saranno

$$2x dx (a + bx)^3 = 2a^3 x dx + 6a^2 bx^2 dx + 6ab^2 x^3 dx + 2b^3 x^4 dx, \text{ e}$$

$$adx (x + cx^2 + fx^3)^2 = ax^2 dx + 2acx^3 dx + (2af + ac^2) x^4 dx + 2acfx^5 dx + af^2 x^6 dx.$$

E perciò

$$\int (2x dx (a + bx)^3 + adx (x + cx^2 + fx^3)^2) =$$

$$\int (2a^3 x dx + 6a^2 bx^2 dx + 6ab^2 x^3 dx + 2b^3 x^4 dx + ax^2 dx + 2acx^3 dx + (2af + ac^2) x^4 dx + 2acfx^5 dx + af^2 x^6 dx) =$$

$$\int (2a^3 x dx + (6a^2 b + a) x^2 dx + (6ab^2 + 2ac) x^3 dx + (2b^3 + 2af + ac^2) x^4 dx + 2acfx^5 dx + af^2 x^6 dx) =$$

$$a^3 x^2 + (2a^2 b + \frac{1}{3} a) x^3 + (3ab^2 + ac) x^4 + (2b^3 + 2af + ac^2) x^5$$

$$+ \frac{2}{3} acfx^6 + \frac{1}{7} af^2 x^7 + C.$$

### AVVERTIMENTO III.

26. Se la grandezza, che si deve integrare, è un prodotto, i cui fattori sono dell' indole esposta nel § antecedente, ed il fattore differenziale è il differenziale dell'altro fattore, non considerato l' esponente della potenza, a cui tale altro fattore dev' essere innalzato; o pure è il detto differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante.

stante : tale grandezza è sempre integrabile colla regola fondamentale, ancorchè l'esponente della detta potenza sia un rotto, o negativo, o rotto, e negativo insieme, escluso il solo caso, nel quale il detto esponente è  $-1$ . E ciò si ottiene nel seguente modo. Nella grandezza, che si deve integrare, si sostituiscono al fattore, che dev'essere innalzato ad una potenza, il di cui esponente è un rotto positivo, o negativo, o un intero negativo, una variabile semplice, ed all'altro fattore il differenziale del primo grado della stessa variabile semplice moltiplicato, o diviso per quella quantità costante, che, moltiplicata o divisa per lo differenziale del primo de' detti fattori, dà il secondo de' medesimi fattori. Indi s'integra colla regola fondamentale, ed a quel, che nasce, dopo di aver sostituito alla variabile il suo valore, si aggiugne la costante C.

E S E M P I O I.

Sia da integrarsi  $2cx dx (b + cx^2)^{\frac{2}{3}}$ .

Si metta  $b + cx^2 = y$ .

Essendo

$$2cxdx = d(b + cx^2):$$

Sarà

$$2cxdx = dy.$$

E perciò

$$2cxdx (b + cx^2)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} dy.$$

Ma

Ma

$$\int y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3}{5} \sqrt[3]{y^5} + C.$$

Dunque anche

$$\int (2cx dx (b + cx^2)^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{5} \sqrt[3]{y^5} + C.$$

E, sostituendo ad  $y$  il suo valore:  $b + cx^2$ ,  
farà

$$\int (2cx dx (b + cx^2)^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{5} \sqrt[3]{(b + cx^2)^5} + C.$$

## E S E M P I O II.

Sia da integrarsi  $(ady + 3cy^2 dy)$   
 $(ay + cy^3)^{-4}$ .

Si metta  $ay + cy^3 = x$ .

Essendo

$$ady + 3cy^2 dy = d(ay + cy^3);$$

farà

$$ady + 3cy^2 dy = dx.$$

Onde

$$(ady + 3cy^2 dy) (ay + cy^3)^{-4} = x^{-4} dx.$$

Ma

$$\int x^{-4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Dunque anche

$$\int ((ady + 3cy^2 dy) (ay + cy^3)^{-4}) = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

E

E, sostituendo alla variabile  $x$  il suo valore  $ay + cy^3$ ,

farà

$$\int \frac{(ady + 3cy^2 dy) (ay + cy^3)^{-4}}{3(ay + cy^3)^3} = -$$

E S E M P I O III.

Sia da integrarsi  $adx (a + bx)^{-\frac{1}{2}}$ .  
Si metta  $a + bx = y$ .

Essendo

$$adx = d(a + bx) \times \frac{a}{b}$$

Sarà

$$adx = \frac{a}{b} dy.$$

Onde

$$adx (a + bx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{b} y^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Ma

$$\int \frac{a}{b} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{ay^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}b} + C = \frac{2a}{b} \sqrt{y} + C.$$

Dunque anche

$$\int (adx (a + bx)^{-\frac{1}{2}}) = \frac{2a}{b} \sqrt{y} + C. \quad \text{E}$$

E, sostituendo alla variabile  $y$  il suo valore  $a + bx$ , farà

$$\int (adx (a + bx)^{-\frac{1}{2}}) = \frac{2a}{b} \sqrt{a + bx} + C.$$

## E S E M P I O IV.

Sia da integrarsi  $(a^2 dx + 2axdx)$ :  $\sqrt{ax + x^2} =$

$$(a^2 dx + 2axdx) (ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si metta  $ax + x^2 = y$ .

Essendo

$$a^2 dx + 2axdx = a \times d(ax + x^2),$$

farà

$$a^2 dx + 2axdx = a dy.$$

Onde

$$\frac{a^2 dx + 2axdx}{\sqrt{ax + x^2}} = ay^{-\frac{1}{2}} dy.$$

$$\sqrt{ax + x^2}$$

Ma

$$\int ay^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{ay^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2a\sqrt{y} + C.$$

Dunque anche

$$\int (a^2 dx + 2axdx) : \sqrt{ax + x^2} = 2a\sqrt{y} + C.$$

E, sostituendo ad  $y$  il suo valore  $ax + x^2$ , farà

$$\int (a^2 dx + 2axdx) : \sqrt{ax + x^2} = 2a\sqrt{ax + x^2} + C.$$

ESEM.

ESEMPIO V.

Sia da integrarsi  $adx (a + bx)^m$ .

Si metta  $a + bx = y$ .

Essendo

$$adx = \frac{a}{b} \times d(a + bx),$$

farà

$$adx = \frac{a}{b} dy.$$

Onde

$$adx (a + bx)^m = \frac{a}{b} y^m dy.$$

Ma

$$\int \frac{a}{b} y^m dy = \frac{ay^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

Dunque anche

$$\int (adx (a + bx)^m) = \frac{ay^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

E, sostituendo ad  $y$  il suo valore  $a + bx$ ,

farà

$$\int (adx (a + bx)^m) = \frac{a(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

ESEM.

## E S E M P I O VI.

Sia da integrarsi  $( a dx + 2cx dx + 3ex^2 dx ) ( ax + cx^2 + ex^3 )^{\frac{m}{n}}$ .

Si metta  $ax + cx^2 + ex^3 = y$ .

Essendo

$$a dx + 2cx dx + 3ex^2 dx = d(ax + cx^2 + ex^3),$$

sarà

$$a dx + 2cx dx + 3ex^2 dx = dy.$$

E perciò

$$(a dx + 2cx dx + 3ex^2 dx) (ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{m}{n}} dy.$$

Ma

$$\int y^{\frac{m}{n}} dy = \frac{y^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} + C.$$

Dunque anche

$$\int (a dx + 2cx dx + 3ex^2 dx) (ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}} = \frac{y^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} + C = \frac{n \sqrt[n]{y^{m+n}}}{m+n} + C.$$

E, sostituendo alla variabile  $y$  il suo valore  $ax + cx^2 + ex^3$ ,

farà

farà

$$\int \frac{(adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}}}{(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m+n}{n}}} = \frac{1}{m+n} \sqrt{(ax + cx^2 + ex^3)^{m+n}} + C.$$

Similmente si trova

$$\int \frac{(adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{-m}{n}}}{(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{-m-n}{n}}} = \frac{1}{n-m} \sqrt{(ax + cx^2 + ex^3)^{n-m}} + C.$$

COROLLARIO.

27. Quindi è che se la grandezza, che si deve integrare, è una differenziale binomia, cioè il prodotto di una quantità differenziale moltiplicata per una potenza di un binomio, che ha un termine costante, e l'altro variabile; tale grandezza si fa esattamente integrare non solamente, se l'esponente della potenza del binomio è un numero intero, e positivo, ma anche se l'esponente, che ha la variabile fuori del binomio, è minore di un'unità di quello, che ha nel binomio. Perchè in tale caso la parte differenziale della grandezza da integrarsi è il differenziale del binomio, che contiene la stessa grandezza, o è il detto differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante. Onde contrassegnando con  $r$  un numero intero, e positivo, è esattamente integrabile ogni differenziale binomia della seguente forma

$$ax^r$$

$$ax^m dx (b + cx^n)^r,$$

qualunque sia il valore degli esponenti  $m$ , ed  $n$  della variabile: e contrassegnando con  $p$  qualsiasi numero intero, o rotto, positivo, o negativo, è anche integrabile esattamente ogni differenziale binomia della forma seguente

$$ax^{m-1} dx (b + cx^m)^p,$$

qualunque sia il valore di  $m$ .

#### AVVERTIMENTO IV.

28. Si noti che una differenziale binomia si può anche integrare con esattezza, se l'esponente, che ha la variabile fuori del binomio, è tale, che accresciuto di un'unità, e diviso poi per l'esponente, che ha la stessa variabile nel binomio, dà per quoziente un numero intero, e positivo. Perciò soggiugniamo il seguente

#### P R O B L. IV.

29. Insegnare il modo d'integrare una differenziale binomia, qualora il quoziente, che nasce con dividere l'esponente, che ha la variabile fuori del binomio, accresciuto di un'unità, per l'esponente, che ha la stessa variabile nel binomio, è intero, e positivo.

So.

## S O L U Z I O N E.

1. Si metta il binomio uguale ad una sola variabile ; e da tale equazione se ne ricavi un'altra , che abbia nel primo membro la sola variabile della grandezza data .

2. S'innalzino amendue i membri di tale altra equazione a quella potenza , che bisogna , affinchè l'esponente della variabile nel primo membro della terza equazione , che nasce , ecceda quello , che ha la stessa variabile fuori del binomio nella grandezza data , di un'unità ; il che è sempre possibile , qualora il quoziente , che nasce con dividere l'esponente della variabile fuori del binomio , accresciuto di un' unità , per l'esponente , che ha la stessa variabile nel binomio , è intero , e positivo .

3. Si faccia una quarta equazione co' differenziali de' membri della terza , e da essa si ricavi il valore della parte della grandezza data , esistente fuori del binomio , considerata senza la quantità costante , per cui è moltiplicata , o divisa .

4. Tale valore si moltiplichi , o divida per la quantità costante , per cui è moltiplicata , o divisa la parte differenziale della grandezza data . Con quel , che nasce , si avrà il valore dell'intera parte esistente nella proposta grandezza fuori del binomio .

5. Nella grandezza data si sostituiscano al

M

bino.

binomio la variabile, con cui si è espresso, ed alla parte esistente fuori del binomio il suo valore ritrovato; e quel, che nasce, s' integri colle regole stabilite.

6. Finalmente alla variabile dell' integrale ritrovato si sostituisca il binomio della grandezza data; e si avrà l' integrale cercato. Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

## E S E M P I O I.

Sia da integrarsi  $ax^5 dx (b + cx^3)^{\frac{2}{3}}$ .  
 Simetta  $b + cx^3 = y$ .

Saranno

$$cx^3 = y - b,$$

$$x^3 = \frac{y - b}{c},$$

$$x^6 = \left( \frac{y - b}{c} \right)^2.$$

Onde

$$dx^6 = d \left( \frac{y - b}{c} \right)^2,$$

ovvero

$$6x^5 dx = 2 \left( \frac{y - b}{c} \right) \times \frac{dy}{c}.$$

E perciò

$$x^5 dx = 2 \left( \frac{y - b}{c} \right) \times \frac{dy}{6c} \quad ax^5,$$

$$ax^5 dx = \left( \frac{y-b}{c} \right) \times \frac{ady}{3c} = \frac{aydy - abdy}{3c^2}$$

Si sostituiscano nella grandezza data in vece del binomio  $b + cx^3$  la variabile  $y$ , ed in vece di  $ax^5 dx$  il valore ritrovato,

cioè  $\frac{aydy - abdy}{3c^2}$ , si avrà

$$ax^5 dx (b + cx^3)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{aydy - abdy}{3c^2} \right) y^{\frac{2}{3}} =$$

$$\frac{a y^{\frac{2}{3}+1} dy}{3c^2} - \frac{aby^{\frac{2}{3}} dy}{3c^2}$$

Onde

$$\int (ax^5 dx (b + cx^3)^{\frac{2}{3}}) = \int \left( \frac{ay^{\frac{2}{3}+1} dy}{3c^2} - \frac{aby^{\frac{2}{3}} dy}{3c^2} \right)$$

Ma

$$\int \left( \frac{ay^{\frac{2}{3}+1} dy}{3c^2} - \frac{aby^{\frac{2}{3}} dy}{3c^2} \right) = \frac{ay^{\frac{2}{3}+2}}{3c^2 \times \left( \frac{2}{3} + 2 \right)}$$

$$= \frac{aby^{\frac{2}{3}+1}}{3c^2 \times \left( \frac{2}{3} + 1 \right)} + C = \frac{ay^{\frac{2}{3}+2}}{M \cdot 2 \times \frac{8}{3}} - \frac{aby^{\frac{2}{3}+1}}{3c^2 \times \left( \frac{2}{3} + 1 \right)}$$

$$\frac{aby^3}{3c^2 \times \frac{5}{3}} + C = \frac{a}{3c^2} \times y^{\frac{2}{3}} \times$$

$$\left( \frac{3}{8} y^2 - \frac{3}{5} by \right) + C = \frac{a}{3c^2} \sqrt[3]{y^2} \times$$

$$\left( \frac{3}{8} y^2 - \frac{3}{5} by \right) + C.$$

Dunque anche

$$\int (ax^5 dx (b + cx^3)^{\frac{2}{3}}) = \frac{a}{3c^2} \sqrt[3]{y^2} \times$$

$$\left( \frac{3}{8} y^2 - \frac{3}{5} by \right) + C.$$

E, sostituendo alla variabile  $y$  il suo valore  $b + cx^3$ , farà

$$\int (ax^5 dx (b + cx^3)^{\frac{2}{3}}) = \frac{a}{3c^2} \sqrt[3]{(b + cx^3)^2} \times$$

$$\left( \frac{3}{8} (b + cx^3)^2 - \frac{3}{5} b (b + cx^3) \right) + C.$$

### E S E M P I O II.

Sia da integrarsi  $ax^{3m-1} dx (b + cx^m)^{-n}$ .

Si metta  $b + cx^m = y$ .

Saranno

$$cx^m = y - b,$$

$$y - b$$

$$dx^m = \frac{\quad}{c},$$

ed

$$x^{3m} = \left( \frac{y - b}{c} \right)^3;$$

onde

$$3mx^{3m-1} dx = 3 \left( \frac{y - b}{c} \right)^2 \times \frac{dy}{c}.$$

E perciò

$$x^{3m-1} dx = \left( \frac{y - b}{c} \right)^2 \times \frac{dy}{mc}$$

$$ax^{3m-1} dx = \left( \frac{y - b}{c} \right)^2 \times \frac{ady}{mc}$$

$$\left( \frac{y^2 - 2by + b^2}{c^2} \right) \times \frac{ady}{mc} =$$

$$\frac{ay^2 dy - 2abydy + ab^2 dy}{mc^3}$$

Si sostituiscano nella grandezza data in vece del binomio  $b + cx^m$  la variabile  $y$ , ed in vece di  $ax^{3m-1} dx$  il suo valore ritrovato,

cioè  $\frac{ay^2 dy - 2abydy + ab^2 dy}{mc^3}$ , si avrà

$$ax^{3m-1} dx (b + cx^m)^{-n} = \left( \frac{ay^2 dy - 2abydy + ab^2 dy}{mc^3} \right) y^{-n} =$$

$$\frac{ay^{-n+2} dy}{mc^3} - \frac{2aby^{-n+1} dy}{mc^3} + \frac{ab^2 y^{-n} dy}{mc^3} .$$

Onde

$$\int ( ax^{3m-1} dx (b + cx^m)^{-n} ) =$$

$$\int \left( \frac{ay^{-n+2} dy}{mc^3} - \frac{2aby^{-n+1} dy}{mc^3} + \frac{ab^2 y^{-n} dy}{mc^3} \right)$$

Ma

$$\int \left( \frac{ay^{-n+2} dy}{mc^3} - \frac{2aby^{-n+1} dy}{mc^3} + \frac{ab^2 y^{-n} dy}{mc^3} \right) =$$

$$\frac{ay^{-n+3}}{mc^3(3-n)} - \frac{2aby^{-n+2}}{mc^3(2-n)} + \frac{ab^2 y^{-n+1}}{mc^3(1-n)} + C.$$

$$= \frac{a}{mc^3} y^{-n} \left( \frac{y^3}{3-n} - \frac{2b}{2-n} y^2 + \frac{b^2}{1-n} y \right)$$

$$+ C .$$

Dunque anche

$$\int ( ax^{3m-1} dx (b + cx^m)^{-n} ) = \frac{a}{mc^3} y^{-n} \times$$

$$\left( \frac{y^3}{3-n} - \frac{2b}{2-n} y^2 + \frac{b^2}{1-n} y \right) + C .$$

E, sostituendo alla variabile  $y$  il suo valore  $b + cx^m$ , sarà

$$\int ( ax^{3m-1} dx (b + cx^m)^{-n} ) = \frac{a}{mc^3}$$

$$(b$$

$$\begin{aligned}
 & (b + cx^m)^{-n} \times \left( \frac{1}{3-n} (b + cx^m)^3 - \frac{2b}{2-n} \right. \\
 & \left. (b + cx^m)^2 + \frac{b^2}{1-n} (b + cx^m) \right) + \\
 C = & \frac{a}{mc^3 (b + cx^m)^n} \times \left( \frac{1}{3-n} (b + cx^m)^3 - \right. \\
 & \left. \frac{2b}{2-n} (b + cx^m)^2 + \frac{b^2}{1-n} (b + cx^m) \right) \\
 & + C.
 \end{aligned}$$

AVVERTIMENTO I.

30. Si noti che qualche volta accade, che una differenziale binomia, che non è compresa nel caso precedente, vi si riduce, con mutare il segno all' esponente della variabile nel binomio, senza mutare il valore della grandezza proposta. Or ciò s' ottiene nel seguente modo. Nella data grandezza si sostituiscono al binomio il quoziente, che nasce dividendo ciascuno de' suoi termini per quella potenza della variabile, che si ritrova in esso, ed alla parte esistente fuori del binomio il prodotto, che si ha con moltiplicare la stessa parte per quella potenza del divisore adoperato, che indica l' esponente del binomio. Per esempio la gran-

dezza  $\frac{a^2 dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = a^2 dy (a^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$  è tale,

che l'esponente della variabile fuori del binomio accresciuto di un'unità, cioè  $0 + 1$ , o sia  $1$ , non è divisibile esattamente per  $2$ , ch'è l'esponente della stessa variabile nel binomio. Onde tale grandezza non sembra compresa nel caso precedente. Ma vi si riduce, ed in conseguenza si rende integrabile secondo il modo insegnato, se il binomio si divide per  $y^2$ , ed  $a^2 dy$  si moltiplica per  $(y^2)^{-\frac{3}{2}}$ , o sia per  $y^{-3}$ . Perchè allora la grandezza data si muta nella seguente, cioè

$a^2 y^{-3} dy (a^2 y^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$ , nella quale l'esponente della variabile fuori del binomio, accresciuto di un'unità, cioè  $-3 + 1$ , o sia  $-2$ , diviso per  $-2$ , ch'è l'esponente della variabile nel binomio, dà per quoziente  $1$ , ch'è intero, e positivo. Or

l'integrale di  $a^2 y^{-3} dy (a^2 y^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$  è per lo § precedente  $= \frac{1}{\sqrt{a^2 y^{-2} + 1}} + C =$

$\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} + C$ . Dunque anche l'integrale

di

$$\text{di } \frac{a^2 dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} + C.$$

AVVERTIMENTO II.

31. Si noti pure che qualora una differenziale binomia non si riduce ad uno de' due casi considerati ne' §§ 27, e 29; ancorchè si faccia in essa la preparazione insegnata nel § 30, tale differenziale non è esattamente integrabile. Così non si può integrare con esattezza la diffe-

renziale binomia  $ax^5 dx (b + cx^4)^{\frac{-3}{5}}$ , la quale non si riduce al primo caso, per essere  $\frac{3}{5}$  un rotto, e negativo; nè al se-

condo, per non essere  $ax^5 dx$  il differenziale di  $b + cx^4$  moltiplicato, o diviso per una quantità costante; nè al terzo, per non essere  $5 + 1$ , o sia 6 divisibile per 4 esattamente; e se si opera in essa secondo si è insegnato nel § 30, nè anche la differen-

ziale binomia, che nasce, cioè  $ax^{\frac{13}{5}} dx$

$(bx^{-4} + c)^{\frac{-3}{5}}$  si riduce al caso terzo, come è facile a comprendere.

AV-

## A V V E R T I M E N T O III.

32. Si noti di vantaggio che ogni differenziale binomia, che ha la variabile in amendue i termini del suo binomio, si può trasformare in un'altra, che abbia la variabile in un solo termine del binomio, senza cambiare il suo valore, nel seguente modo. Si divida prima il binomio per quella potenza della variabile, che si ritrova in uno de' suoi termini; ed indi la parte, ch' esiste fuori del binomio, si moltiplichi per la stessa potenza della variabile, innalzata però alla potenza indicata dall' esponente del medesimo binomio. Così la differenziale

binomia  $ax^{\frac{4}{5}} dx (ax^2 + cx^3)^{\frac{3}{5}}$ , che ha la variabile  $x$  in amendue i termini del binomio  $ax^2 + cx^3$ , dividendo il binomio per  $x^2$ , e moltiplicando la parte  $ax^{\frac{4}{5}} dx$ , ch' è fuori del binomio per  $(x^2)^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{6}{5}}$ , si trasforma nella differenziale binomia  $ax^2 dx (a + cx)^{\frac{3}{5}}$ , che si riduce al caso terzo, e che conseguentemente è integrabile esattamente.

## C O R O L L A R I O.

33. Quindi le differenziali binomie, che  
con-

contengono la variabile in amendue i termini de' loro binomj; sono esattamente integrabili sì, o no, secondochè sono esattamente integrabili sì, o no quelle, nelle quali si possono trasformare, operando del modo insegnato nel § precedente.

#### AVVERTIMENTO IV.

34. Si noti che per le differenziali trinomie, quadrinomie, ec., oltre de' casi considerati ne' §§ 25, e 26, ve ne sono anche degli altri, ne' quali le medesime sono esattamente integrabili, e che noi ci dispensiamo di esaminare, perchè la brevità prefissaci non lo permette: tanto più che tali altri casi non occorrono, che rarissime volte.

#### AVVERTIMENTO V.

35. Si noti finalmente che se la differenziale, di cui si cerca l'integrale, è una differenziale composta, che non è compresa ne' casi esposti, tale differenziale s' integra allora per approssimazione. L' arte d' integrare per approssimazione è la seguente. Si risolve prima la grandezza data in una serie d' infiniti monomj, e poscia s' integrano molti de' primi termini della detta serie colle regole insegnate. La somma degl' integrali, che si avranno, coll'aggiunta della

co-

costante  $C$ , farà l'integrale della grandezza data, più o meno prossimo al vero, secondochè il numero de' termini della detta serie farà maggiore, o minore, e secondochè più, o meno la stessa serie farà convergente.

## E S E M P I O I.

Sia da integrarsi per approssimazione la differenziale  $ax^5 dx (b + cx^4)^{-\frac{3}{5}}$ .

Essendo

$$\begin{aligned} (b + cx^4)^{-\frac{3}{5}} &= b^{-\frac{3}{5}} - \frac{3b^{-\frac{3}{5}} cx^4}{5b^2} + \\ &\frac{24b^{-\frac{3}{5}} c^2 x^8}{50b^2} - \frac{104b^{-\frac{3}{5}} c^3 x^{12}}{250b^3}, \text{ ec.} = b^{-\frac{3}{5}} \\ &- \frac{3}{5} b^{-\frac{8}{5}} cx^4 + \frac{12}{25} b^{-\frac{13}{5}} c^2 x^8 - \frac{52}{125} b^{-\frac{18}{5}} c^3 x^{12}, \\ &\text{ec.} \end{aligned}$$

Sarà

$$\begin{aligned} ax^5 dx (b + cx^4)^{-\frac{3}{5}} &= ab^{-\frac{3}{5}} x^5 dx - \\ &\frac{3}{5} ab^{-\frac{8}{5}} cx^9 dx + \frac{12}{25} ab^{-\frac{13}{5}} c^2 x^{13} dx - \frac{52}{125} \\ &ab^{-\frac{18}{5}} c^3 x^{17} dx, \text{ ec.} = ab^{-\frac{3}{5}} (x^5 dx - \\ &\frac{3}{5} b^{-1} cx^9 dx + \frac{12}{25} b^{-2} c^2 x^{13} dx - \frac{52}{125} \\ &b^{-3} c^3 x^{17} dx, \text{ ec.}) \end{aligned}$$

E

E perciò

$$\int (ax^5 dx (b + cx^4)^{-\frac{3}{5}}) = \int (ab^{\frac{-3}{5}} x^5 dx - \frac{3}{5} b^{-1} cx^9 dx + \frac{12}{25} b^{-2} c^2 x^{13} dx - \frac{52}{125} b^{-3} c^3 x^{17} dx, \text{ ec.}) = ab^{\frac{-3}{5}} \left( \frac{1}{6} x^6 - \frac{3}{50} b^{-1} cx^{10} + \frac{6}{175} b^{-2} c^2 x^{14} - \frac{26}{1125} b^{-3} c^3 x^{18}, \text{ ec.} \right) + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi per approssimazione la

differenziale  $\frac{aydy}{a^4 - y^4} = aydy (a^4 - y^4)^{-1}$

Essendo

$$(a^4 - y^4)^{-1} = a^{-4} + \frac{a^{-4} y^4}{a^4} + \frac{a^{-4} y^8}{a^8} + \frac{a^{-4} y^{12}}{a^{12}}, \text{ ec.}$$

Sarà

$$\frac{aydy}{a^4 - y^4} = aydy (a^4 - y^4)^{-1} = \frac{ydy}{a^3} + \frac{y^5 dy}{a^7} + \frac{y^9 dy}{a^{11}} + \frac{y^{13} dy}{a^{15}}, \text{ ec.}$$

E

E perciò

$$\int \left( \frac{a y d y}{a^4 - y^4} \right) = \int \left( \frac{y d y}{a^3} + \frac{y^3 d y}{a^7} \right. \\ \left. \frac{y^9 d y}{a^{11}} + \frac{y^{13} d y}{a^{15}}, \text{ ec.} \right) = \frac{y^2}{2a^3} + \frac{y^6}{6a^6} + \\ \frac{y^{10}}{10a^9} + \frac{y^{14}}{14a^{13}}, \text{ ec.} + C.$$

## E S E M P I O III.

Sia da integrarsi per approssimazione la differenziale  $\frac{2a dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 2a dx (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

Essendo

$$(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1} \frac{a^{-1} x^2}{2a^2} + \frac{3a^{-1} x^4}{8a^4} \\ + \frac{5a^{-1} x^6}{16a^6} + \frac{35a^{-1} x^8}{128a^8}, \text{ ec.} = a^{-1} \left( 1 - \frac{x^2}{2a^2} + \right. \\ \left. \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{5x^6}{16a^6} + \frac{35x^8}{128a^8}, \text{ ec.} \right).$$

Sarà

$$\frac{2a dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 2a dx (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 2dx \quad (1)$$

$$\left( 1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{5x^6}{16a^6} + \frac{35x^8}{128a^8}, \text{ ec.} \right)$$

E perciò

$$\int \frac{2a dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \left( 2dx \left( 1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{5x^6}{16a^6} + \frac{35x^8}{128a^8}, \text{ ec.} \right) \right) = \int \left( 2dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{3x^4 dx}{4a^2} - \frac{5x^6 dx}{8a^6} + \frac{35x^8 dx}{64a^8}, \text{ ec.} \right)$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{3x^5}{20a^4} - \frac{5x^7}{56a^6} + \frac{35x^9}{576a^8}, \text{ ec.} + C.$$

ESEMPIO IV.

Sia da integrarsi per approssimazione la

differenziale  $ydy (y^2 + 2y^3)^{-\frac{m}{n}}$ .

Essendo

$$(y^2 + 2y^3)^{-\frac{m}{n}} = y^{-\frac{2m}{n}} - \frac{2m}{n} y^{-\frac{n-2m}{n}} + \frac{2(m^2 + mn)}{n^2} y^{-\frac{2n-2m}{n}} - \frac{4(m^3 + 3m^2n + 2mn^2)}{3n^3} y^{-\frac{3n-2m}{n}} + \dots$$

$$y^n + \frac{2(m^4 + 6m^3n + 11m^2n^2 + 6mn^3)}{3n^4}$$

$y^n$ , ec.

Sarà

$$y dy (y^2 + 2y^3)^n = y^{\frac{n-2m}{n} + 1} dy - \frac{2ms}{n}$$

$$y^{\frac{n-2m}{n} + 1} dy + \frac{2(m^2 + mn)}{n^2} y^{\frac{2n-2m}{n} + 1} dy -$$

$$\frac{4(m^3 + 3m^2n + 2mn^2)}{3n^3} y^{\frac{3n-2m}{n} + 1} dy +$$

$$\frac{2(m^4 + 6m^3n + 11m^2n^2 + 6mn^3)}{3n^4}$$

$$y^{\frac{4n-2m}{n} + 1} dy, \text{ ec. .}$$

E perciò

$$\int y dy (y^2 + 2y^3)^n = \int y^{\frac{n-2m}{n} + 1} dy -$$

$$\frac{2ms}{n} y^{\frac{n-2m}{n} + 1} dy + \frac{2(m^2 + mn)}{n^2} y^{\frac{2n-2m}{n} + 1} dy -$$

$$\frac{4(m^3 + 3m^2n + 2mn^2)}{3n^3} y^{\frac{3n-2m}{n} + 1} dy +$$

$$\frac{2(m^4 + 6m^3n + 11m^2n^2 + 6mn^3)}{3n^4}$$

$y$

$$\begin{aligned}
 & \frac{4n-m}{y^{n-m}} + 1 \quad \frac{2n-2m}{y^{n-2m}} \quad \frac{3n-2m}{y^{n-2m}} \\
 y^n dy, \text{ ec.} & = y^n \frac{2m}{3n-2m} y^n + \\
 & \frac{m^2 + mn}{2n^2 - mn} y^n \frac{4n-2m}{3n-2m} \frac{(4m^3 + 12m^2 n + 8mn^2)}{15n^3 - 6mn^2} \\
 & \frac{5n-2m}{6n-2m} y^n + \frac{m^4 + 6m^3 n + 11m^2 n^2 + 6mn^3}{9n^2 - 3mn^3} \\
 & y^n, \text{ ec.} + C.
 \end{aligned}$$

## C A P. II.

*De' differenziali logaritmici, e del modo d'integrarli.*

### DEFINIZIONE.

36. Si dicono *differenziali logaritmici* tutte le quantità differenziali, che contrassegnano differenziali di grandezze logaritmiche.

### COROLLARIO I.

37. Quindi gl' integrali de' differenziali logaritmici sono tutti grandezze logaritmiche.

N

CO.

## C O R O L L A R I O II.

38. Effendo il differenziale di qualunque grandezza logaritmica uguale al rotto, che ha per numeratore il differenziale della grandezza, alla quale si riferisce la grandezza logaritmica, e per denominatore la stessa grandezza, qualora si esprime coll'unità la sottangente della curva logaritmica, alla quale appartengono le grandezze logaritmiche: ne segue che i rotti differenziali, che hanno per numeratori i differenziali de' loro denominatori, sono tutti differenziali logaritmici, supposta la sottangente della curva logaritmica, alla quale appartengono le grandezze logaritmiche, che danno gl' integrali di sì fatti rotti,  $= 1$ .

## P R O B L. V.

39. *Insegnare il modo d' integrare i rotti differenziali, che hanno per numeratori i differenziali de' loro denominatori.*

## S O L U Z I O N E.

Al logaritmo del denominatore del rotto si aggiunga la costante  $C$ . La somma, che nasce, farà l'integrale cercato.

La ragione di ciò è manifesta per lo corollario precedente.

ESEM.

## E S E M P J.

$$1. \int \frac{dx}{x} = l x + C.$$

$$2. \int \frac{dy}{c+y} = l(c+y) + C.$$

$$3. \int \frac{3a^2 x^2 dx}{3q^2 + a^2 x^3} = l(3q^2 + a^2 x^3) + C.$$

$$4. \int \left( \frac{xdy + ydx}{xy} \right) = lxy + C = lx + ly + C.$$

$$5. \int \frac{my^{m-1} dy}{y^m} = l y^m + C = mly + C.$$

$$6. \int \frac{nx^m y^{n-1} dy + my^n x^{m-1} dx}{x^m y^n} = lx^m y^n +$$

$$C = lx^m + ly^n + C = mlx + nly + C.$$

## AVVERTIMENTO I.

40. Si noti che se il numeratore di un rotto differenziale non è esattamente il differenziale del denominatore dello stesso rotto, ma è il detto differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante;

N 2

l'in-

l'integrale di sì fatto rotto anche si riduce ad una grandezza logaritmica. In fatti se si risolve allora il rotto in due fattori, de' quali uno sia un rotto, che abbia per denominatore il denominatore del rotto proposto, e per numeratore il differenziale dello stesso denominatore, e l'altro sia costante; è chiaro che si avrà l'integrale del rotto proposto con moltiplicare per lo fattore costante l'integrale dell'altro fattore, o sia con moltiplicare per lo fattore costante il logaritmo del denominatore dell'altro fattore, e con aggiungere al prodotto, che nasce, la costante C.

## E S E M P I O I.

Sia da integrarsi il rotto  $\frac{ax^3 dx}{a^4 + x^4}$ .

Essendo  
 $d(a^4 + x^4) = 4x^3 dx$ ;  
 sarà

$$\frac{ax^3 dx}{a^4 + x^4} = \frac{a}{4} \times \frac{4x^3 dx}{a^4 + x^4}.$$

E perciò

$$\int \left( \frac{ax^3 dx}{a^4 + x^4} \right) = \int \left( \frac{a}{4} \times \frac{4x^3 dx}{a^4 + x^4} \right) = \frac{a}{4} \times$$

$$\int \left( \frac{4x^3 dx}{a^4 + x^4} \right).$$

On.

Onde

$$\int \left( \frac{ax^3 dx}{a^4 + x^4} \right) = \frac{1}{4} a l ( a^4 + x^4 ) + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi il rotto  $\frac{2nxdx}{mx^2}$ .

Essendo

$$d ( mx^2 ) = 2mxdx;$$

farà

$$\frac{2nxdx}{mx^2} = \frac{n}{m} \times \frac{2mxdx}{mx^2}$$

E perciò

$$\int \frac{2nxdx}{mx^2} = \int \left( \frac{n}{m} \times \frac{2mxdx}{mx^2} \right) = \frac{n}{m} \times$$

$$\int \frac{2mxdx}{mx^2} = \frac{n}{m} \times l ( mx^2 ) + C = \frac{n}{m}$$

$$( lm + lx^2 ) + C = \frac{n}{m} lm + \frac{2n}{m} lx + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi il rotto  $\frac{dy}{c-y}$ .

N 3

Es.

Essendo

$$d(c - y) = - dy; \\ \text{farà}$$

$$\frac{dy}{c - y} = - 1 \times \frac{- dy}{c - y}.$$

E perciò

$$\int \left( \frac{dy}{c - y} \right) = \int \left( - 1 \times \frac{- dy}{c - y} \right) =$$

$$- 1 \times \int \left( \frac{- dy}{c - y} \right) = - 1 \times$$

$$l(c - y) + C = - l(c - y) + C = 0 - l(c - y) + C = l \frac{1}{c - y}$$

$$l(c - y) + C = l \frac{1}{c - y} + C.$$

## C O R O L L A R I O.

$$41. \text{Essendo } x^{-1} dx = \frac{dx}{x}, \text{ farà } \int x^{-1} dx = \\ = \int \frac{dx}{x} = l x + C. \text{ Similmente essendo}$$

$$3a^2 y^{-1} dy = \frac{3a^2 dy}{y}, \text{ farà } \int 3a^2 y^{-1} dy =$$

$$\int \frac{3a^2 dy}{y} = 3a^2 \times \int \frac{dy}{y} = 3a^2 l y + C. \text{ Sic-}$$

chè

chè gl' integrali delle quantità differenziali monomie, che contengono la variabile coll' esponente  $-1$ , sono tutti logaritmi. Quindi s' intende perchè l' integrazioni di sì fatte quantità sono escluse dalla regola fondamentale.

AVVERTIMENTO II.

42. Si noti che vi sono de' rotti differenziali, i quali ancorchè non abbiano le condizioni esposte ne' §§ 39, e 40, nondimeno con qualche preparazione si possono ad essi somministrare. Si fatti rotti anche si possono integrare co' logaritmi. Così il

rotto differenziale  $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - a}}$  non ha nè la con-

dizione del § 39, nè quella del § 40; perchè il numeratore  $dy$  non è il differenziale

del denominatore  $\sqrt{y^2 - a}$ , nè è lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante; essendo il differenziale del

detto denominatore =  $\frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a}}$ . Ma moltiplicando il detto rotto per  $y + \sqrt{y^2 - a}$ , e dividendo poi il prodotto per la stessa

quantità  $y + \sqrt{y^2 - a}$ , nasce il rotto  $\frac{y dy}{\sqrt{y^2 - a}}$

$+ dy$ ):  $(y + \sqrt{y^2 - a})$ , il quale rotto è dello stesso valore del rotto proposto, ed ha per numeratore l'esatto differenziale del denominatore. Dunque l'integrale del primo rotto è lo stesso, che l'integrale del secondo. Ma l'integrale del secondo è

$= l[y + \sqrt{y^2 - a}] + C$  [ § 39 ]. Dunque anche l'integrale del primo è

$l[y + \sqrt{y^2 - a}]$ . Similmente il rotto dif-

ferenziale  $\frac{dx}{\sqrt{a - x^2}}$  non ha la condizione del

§ 39, nè quella del § 40; perchè il numeratore  $dx$  non è il differenziale del deno-

minatore  $\sqrt{a - x^2}$ , nè è lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante; essendo il differenziale del detto

denominatore  $= \frac{-x dx}{\sqrt{a - x^2}}$ . Ma moltipli-

cando sì il numeratore, che il denominatore del detto rotto per  $\sqrt{a - x^2}$ , nasce l'al-

$$dx \sqrt{-1}$$

l'altro rotto  $\frac{\text{-----}}{\text{-----}} =$

$$\frac{\sqrt{a-x^2} \times \sqrt{-1}}{dx}$$

$$\frac{dx \sqrt{-1}}{\sqrt{x^2-a}} = \sqrt{-1} \times \frac{\text{-----}}{\sqrt{x^2-a}} \text{ . Dunque}$$

l'integrale del rotto  $\frac{\text{-----}}{\sqrt{a-x^2}}$  è lo stesso, che

l'integrale del prodotto, che si ha con mol-

tiplicare per  $\sqrt{-1}$  il  $\frac{\text{-----}}{\sqrt{x^2-a}}$ , cioè è ugua-

le al prodotto, che nasce moltiplicando

per  $\sqrt{-1}$  l'integrale del rotto  $\frac{\text{-----}}{\sqrt{x^2-a}}$ .

Ora il rotto  $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$  non si riferisce nè al

§ 39, nè al § 40, come è facile a cono-

scere; ma moltiplicandolo per  $x + \sqrt{x^2-a}$ ,

e dividendo poi il prodotto, che nasce, per la stessa grandezza  $x + \sqrt{x^2-a}$ , nasce il rotto  $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}} \times (x + \sqrt{x^2-a}) : (x + \sqrt{x^2-a})$ , nel.

nel quale il numeratore è il differenziale e.

fatto del denominatore; essendo  $\frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a}}$  il

differenziale di  $\sqrt{x^2 - a}$ , e  $dx$  il differen-

ziale di  $x$ . Dunque l'integrale di  $\frac{dx}{\sqrt{a - x^2}}$

è uguale al prodotto, che si ha con multi-

plicare per  $\sqrt{-1}$  l'integrale del rotto

$$\left( \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a}} + dx \right) : (x + \sqrt{x^2 - a}). \text{ Ma}$$

l'integrale di sì fatto rotto è  $= l [x + \sqrt{x^2 - a}]$

+ C [§ 39]. Sicchè l'integrale di  $\frac{dx}{\sqrt{a - x^2}}$

è  $= \sqrt{-1} \times l [x + \sqrt{x^2 - a}] + C.$

## C A P. III.

*De' differenziali esponenziali, e del modo d' integrarli.*

## DEFINIZIONE.

43. Si dicono *differenziali esponenziali* tutte le grandezze differenziali, che contengono quantità esponenziali.

## P R O B L. VI.

44. *Insegnare il modo di conoscere, se un differenziale esponenziale sia integrabile sì, o no.*

## S O L U Z I O N E.

Avendosi il differenziale di qualsivisa quantità esponenziale con moltiplicare la stessa quantità per lo differenziale del suo logaritmo: è chiaro che sarà integrabile una quantità differenziale esponenziale, se si potrà risolvere in due fattori, de' quali l'uno sia il differenziale del logaritmo dell' altro, o lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

PRO.

## P R O B L. VII.

45. *Insegnare il modo d' integrare un differenziale esponenziale, ch' è dell' indole esposta nel problema precedente.*

## S O L U Z I O N E.

1. Si risolva la grandezza data in due fattori, de' quali l' uno sia il differenziale dell' altro, o lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante.

2. Si aggiunga la costante C al secondo de' detti fattori, o al prodotto, o quoziente, che nasce con moltiplicare, o dividere, il secondo de' detti fattori per la quantità costante, per cui è moltiplicato, o diviso nella grandezza data il differenziale dello stesso fattore.

La somma farà l' integrale cercato. Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

## E S E M P I O I.

Sia da integrarsi  $a^x dxla$ .

Essendo

$$dxla = d(la^x);$$

farà

$$\int (dxla \times a^x) = \int a^x dxla = a^x + C.$$

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi  $y^x lydx + \frac{y^x xdy}{y}$ .

Essendo

$$y^x lydx + \frac{y^x xdy}{y} = y^x \left( lydx + \frac{xdy}{y} \right),$$

$$lydx + \frac{xdy}{y} = d(xly) = d(ly^x).$$

Sarà

$$\int \left( y^x lydx + \frac{y^x xdy}{y} \right) = y^x + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi  $cy dylc + xz dzlx + \frac{xz zdx}{x}$ .

Essendo

$$dylc = d(ylc) = d(lcy);$$

farà

$$\int cy dylc = cy + C.$$

Similmente essendo

$$xz dzlx + \frac{xz zdx}{x} = xz \left( dzlx + \frac{zdx}{x} \right);$$

e

$$dz/x + \frac{z dx}{x} = d(\ln z) :$$

Sarà

$$\int \left( x^z dz/x + \frac{x^z z dx}{x} \right) = x^z + C.$$

Onde farà

$$\int \left( c^y dylc + x^z dz/x + \frac{x^z z dx}{x} \right) = c^y + x^z + C.$$

## E S E M P I O IV.

Sia da integrarsi  $[c^2 + y^2]^y ( dyl[c^2 + y^2] + \frac{2y^2 dy}{c^2 + y^2} )$ .

Essendo

$$dyl[c^2 + y^2] + \frac{2y^2 dy}{c^2 + y^2} = d(yl(c^2 + y^2)) = d[ l [ c^2 + y^2 ]^y ] .$$

Sarà

$$\int \left( [c^2 + y^2]^y [dyl[c^2 + y^2] + \frac{2y^2 dy}{c^2 + y^2}] \right) = [c^2 + y^2]^y + C.$$

ESEM.

## ESEMPIO V.

Sia da integrarsi  $dz a^{cz}$ .

Essendo

$$d [ l a^{cz} ] = d [ cz l a ] = cl dz,$$

$$dz = \frac{cl dz}{cl a} :$$

è chiaro che nel differenziale dato  $dz a^{cz}$  il fattore  $dz$  è il differenziale del logaritmo dell'altro fattore  $a^{cz}$ , diviso per la quantità costante  $cl a$ . Onde farà

$$\int dz a^{cz} = \int \frac{cl dz a^{cz}}{cl a} :$$

Ma

$$\int cl dz a^{cz} = a^{cz} + C.$$

E perciò

$$\int \frac{cl dz a^{cz}}{cl a} = \frac{a^{cz}}{cl a} + C.$$

Sicchè

$$\int dz a^{cz} = \frac{a^{cz}}{cl a} + C.$$

ESEM-

## E S E M P I O VI.

Sia da integrarsi  $cladxax^x$ .

Essendo

$$d[la^x] = d[ xla ] = ladx,$$

$$cladx = ladx \times c:$$

è chiaro che nel differenziale dato  $cladxax^x$  il fattore  $cladx$  è differenziale del logaritmo dell'altro fattore  $a^x$ , moltiplicato per la costante  $c$ . Onde farà

$$\int cladxax^x = c \times \int ladxax^x = ca^x + C.$$

## A V V E R T I M E N T O I.

46. Si noti che vi sono de' casi, ne quali si fanno integrare le quantità differenziali esponenziali, ancorchè non sieno dell'indole esposta nel problema precedente. Ma noi ci asteniamo di esaminarli, perchè la brevità prefissaci non lo permette.

## A V V E R T I M E N T O II.

47. Insegnato il modo d'integrare le quantità differenziali, che contengono il differenziale del primo grado di una sola variabile, e che perciò diconsi *differenziali ad una variabile*; passiamo ad esporre in che modo s'integrano le quantità differenziali, che contengono

gono i differenziali del primo grado di due, o più variabili, e che perciò chiamansi *differenziali a più variabili*. Perciò sia il

---

## C A P. IV.

*Del modo d' integrare le quantità differenziali a più variabili.*

### DEFINIZIONE.

48. Una quantità differenziale di qualunque grado dicesi *esatta*, o *inesatta*, ovvero *completa*, o *incompleta*, secondochè risulta sì, o no dal differenziare una grandezza algebrica, che contiene variabili, o differenziali di variabili.

### COROLLARIO.

49. Quindi è che una quantità differenziale di qualsivoglia grado è sì, o no integrabile, secondochè è completa, o incompleta. E perciò, prima di procedere ad insegnare il modo d' integrare i differenziali a più variabili, stabiliremo delle regole, colle quali si possa sempre conoscere, se tali differenziali sieno esatti sì, o no.

## A V V E R T I M E N T O I.

50. Si noti che qualunque differenziale esatto a due variabili costa di termini, de' quali alcuni sono moltiplicati per lo differenziale di una di tali variabili, e gli altri per lo differenziale dell' altra variabile. Onde chiamando  $A$  la somma de' primi, e  $B$  la somma degli altri, si potrà qualunque differenziale a due variabili  $x$ , e  $y$  esprimere colla formola generale  $A dx + B dy$ .

## A V V E R T I M E N T O II.

51. Si noti pure che rappresentando con  $A$  una grandezza algebrica, che contiene due variabili  $x$ , e  $y$ , dinoteremo appresso il

differenziale di sì fatta grandezza con  $\frac{dA dx}{dx}$ ,

quando si fa variare in essa solo  $x$ , con

$\frac{dA dy}{dy}$ , quando si fa variare solo  $y$ , e con

$\frac{d^2 A dx dy}{dx dy}$ , quando si differenzia la grandez-

za  $A$  con supporre variabile solo  $x$ , ed indi si differenzia il risultato, supponendo in esso variabile solo  $y$ .

PRO.

PROBL. VIII.

52. Insegnare il modo di conoscere, se un differenziale a due variabili sia sì, o no esatto.

SOLUZIONE.

Contraffegnino  $A dx + B dy$  un'esatto differenziale a due variabili  $x$ , e  $y$ , e  $P$  l'integrale di tale differenziale. Essendo

$$dP = \frac{dP dx}{dx} + \frac{dP dy}{dy},$$

farà

$$\frac{dP dx}{dx} + \frac{dP dy}{dy} = A dx + B dy ;$$

cioè faranno

$$\frac{dP dx}{dx} = A dx$$

$$\frac{dP dy}{dy} = B dy,$$

o sia

$$\frac{dP}{dx} = A,$$

$$\frac{dP}{dy} = B.$$

O 2

E

E differenziando l'equazione  $\frac{dP}{dx} = A$ , con  
 far variare solo  $y$ , e l'equazione  $\frac{dP}{dy} = B$ ,  
 con far variare solo  $x$ , faranno

$$\frac{d^2 P dy}{dx dy} = \frac{dA dy}{dy},$$

$$\frac{d^2 P dx}{dx dy} = \frac{dB dx}{dx};$$

o sia

$$\frac{d^2 P}{dx dy} = \frac{dA dy}{dy} : dy,$$

$$\frac{d^2 P}{dx dy} = \frac{dB dx}{dx} : dx;$$

e conseguentemente

$$\frac{dA dy}{dy} : dy = \frac{dB dx}{dx} : dx.$$

Ma  $\frac{dA dy}{dy}$  esprime il differenziale di  $A$   
 preso con far variare solo  $y$ , e  $\frac{dB dx}{dx}$  espri-

me il differenziale di  $B$  preso con far va-  
 riare solo  $x$ . Dunque il quoziente, che si ha  
 con dividere per  $dy$  il differenziale di  $A$ ,  
 pre-

preso con far variare solo  $y$ , è uguale al quoziente, che nasce dividendo per  $dx$  il differenziale di  $B$ , preso con far variare solo  $x$ . E perciò è esatta, e conseguentemente integrabile una quantità differenziale a due variabili  $x$ , e  $y$ , se il quoziente, che si ha con dividere per  $dy$  il differenziale di  $A$ , preso con far variare solo  $y$ , è uguale al quoziente, che nasce dividendo per  $dx$  il differenziale di  $B$ , preso con far variare solo  $x$ ; cioè se il quoziente, che si ha con dividere per lo differenziale della seconda variabile il differenziale della somma de' termini, che sono moltiplicati per lo differenziale della prima variabile, preso il differenziale della detta somma con far variare in essa solo la seconda delle variabili, è uguale al quoziente, che nasce dividendo per lo differenziale della prima variabile il differenziale della somma de' termini, che sono moltiplicati per lo differenziale della seconda variabile, preso il differenziale della detta somma con far variare in essa solo la prima delle variabili.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

COROLLARIO I.

53. Quindi le quantità differenziali  $aydx -$   
 $cdx + axdy$ , e  $bx^2y^3 dx + 9x^2y^2 dy$  sono  
 esatte, perchè nella prima è  $= a$  sì il quo-  
 ziente, che nasce con dividere per  $dy$  il dif-

ferenziale di  $ay - c$ , che quello, che si ha con dividere per  $dx$  il differenziale di  $ax$ : e nella seconda è  $= 18xy^2$  sì il quoziente, che si ha con dividere per  $dy$  il differenziale di  $6xy^3$ , preso con far variare solo  $y$ , che quello, che nasce dividendo per  $dx$  il differenziale di  $9x^2y^2$ , preso con far variare solo  $x$ . Al contrario le quantità differenziali  $axydx + cxdy$ , e  $xdy - ydx$  sono inesatte; perchè nella prima i quozienti, che si hanno con dividere per  $dy$  il differenziale di  $axy$ , preso con far variare solo  $y$ , e per  $dx$  il differenziale di  $cx$ , sono disuguali, essendo il primo di essi  $= ax$ , ed il secondo  $= c$ ; e nella seconda i quozienti, che nascono dividendo per  $dy$  il differenziale di  $-y$ , e per  $dx$  il differenziale di  $x$ , sono anche disuguali, essendo il primo di essi  $= -1$ , e l'altro  $= 1$ .

### AVVERTIMENTO I.

54. Si noti che qualunque differenziale esatto a tre variabili  $x, y, z$  si può esprimere colla formola generale  $A dx + B dy + C dz$ , chiamando  $A$  la somma de' termini moltiplicati per  $dx$ ,  $B$  quella de' termini moltiplicati per  $dy$ , e  $C$  quella de' termini moltiplicati per  $dz$ .

### AVVERTIMENTO II.

55. Si noti di vantaggio che se un differenziale

ferenziale esatto a tre variabili  $x, y, z$  si contrassegna con  $A dx + B dy + C dz$ ; ragionando del modo insegnato nel problema precedente si trovano il quoziente, che nasce con dividere per  $dy$  il differenziale di  $A$ , preso con far variare solo  $y$ , uguale al quoziente, che si ha con dividere per  $dx$  il differenziale di  $B$ , preso con far variare solo  $x$ ; il quoziente, che nasce con dividere per  $dz$  il differenziale di  $A$ , preso con far variare solo  $z$ , uguale al quoziente, che si ha dividendo per  $dx$  il differenziale di  $C$ , preso con far variare solo  $x$ ; e finalmente il quoziente, che si ha con dividere per  $dz$  il differenziale di  $B$ , preso con far variare solo  $z$ , uguale al quoziente, che nasce dividendo per  $dy$  il differenziale di  $C$ , preso con far variare solo  $y$ . Ondè contrassegnando con  $A dx + B dy + C dz$  un differenziale a tre variabili, il medesimo farà esatto, e conseguentemente integrabile, se faranno

$$\frac{\frac{dA dy}{dy}}{dy} = \frac{\frac{dB dx}{dx}}{dx},$$

$$\frac{\frac{dA dz}{dz}}{dz} = \frac{\frac{dC dx}{dx}}{dx},$$

○ 4

e

$$\frac{\frac{dBdz}{dz}}{dz} = \frac{\frac{dCdy}{dy}}{dy}$$

## C O R O L L A R I O II.

56. Quindi è che la quantità differenziale  $6xy^3 z dx + 9x^2 y^2 z dy + 3x^2 y^3 dz + 2y^2 dx + 4xy dy$  è esatta; perchè il differenziale di  $6xy^3 z + 2y^2$ , preso con far variare solo  $y$ , e diviso per  $dy$ , è uguale al differenziale di  $9x^2 y^2 z + 4xy$ , preso con far variare solo  $x$ , e diviso per  $dx$ , cioè

$$\frac{18xy^2 z dy + 4y dy}{dy} = \frac{18xy^2 z dx + 4y dx}{dx};$$

il differenziale di  $6xy^3 z + 2y^2$ , preso con supporre variabile solo  $z$ , e diviso per  $dz$ , è uguale al differenziale di  $3x^2 y^3$ , preso con supporre variabile solo  $x$ , e diviso per  $dx$ , cioè

$$\frac{6xy^3 dz}{dz} = \frac{6xy^3 dx}{dx};$$

e finalmente il differenziale di  $9x^2 y^2 z + 4xy$ , preso con far variare solo  $z$ , e diviso per  $dz$ , è uguale al differenziale di  $3x^2 y^3$ , preso con supporre variabile solo  $y$ , e diviso per  $dy$ , cioè

9x<sup>2</sup>

$$\frac{9x^2 y^2 dz}{dz} = \frac{9x^2 y^2 dy}{dy} .$$

Al contrario la quantità differenziale  $4xyz dx + x^2 z dy + 2x^2 y dz$  è inesatta, ancorchè il quoziente, che si ha con dividere per  $dz$  il differenziale di  $4xyz$ , preso con far variare solo  $z$ , sia uguale al quoziente, che nasce dividendo per  $dx$  il differenziale di  $2x^2 y$ , preso con supporre variabile solo  $x$ , cioè ancorchè sia

$$\frac{4xyz dz}{dz} = \frac{4xy dx}{dx} .$$

Perchè sono disuguali sì i quozienti, che nascono dividendo per  $dy$  il differenziale di  $4xyz$ , preso con far variare solo  $y$ , e per  $dx$  il differenziale di  $x^2 z$ , preso con far variare solo  $x$ , che i quozienti, che si hanno con dividere per  $dz$  il differenziale di  $x^2 z$ , preso con supporre variabile solo  $z$ , e per  $dy$  il differenziale di  $2x^2 y$ , preso con supporre variabile solo  $y$ ; essendo

$$\frac{4xz dy}{dy} > \frac{2xz dx}{dx} ,$$

$$\frac{x^2 dz}{dz} < \frac{2x^2 dy}{dy} .$$

## A V V E R T I M E N T O III.

57. Ciò , che si è detto de' differenziali a due , ed a tre variabili , è sufficiente a farci comprendere il come si dovrà procedere per conoscere, se sia esatto sì, o no, e conseguentemente integrabile sì, o no un differenziale , che contiene più di tre variabili .

## A V V E R T I M E N T O IV.

58. Insegnato il modo di conoscere , se un differenziale a più variabili sia sì , o no esatto , procediamo ora ad esporre il metodo di determinare gl' integrali de' differenziali a più variabili , qualora tali differenziali sono esatti . Perciò soggiugniamo il seguente

## P R O B L. IX.

59. *Insegnare il modo d' integrare le quantità differenziali a più variabili , qualora sono esatte .*

## S O L U Z I O N E .

Si uniscano in una somma tutt' i termini , che contengono il differenziale di una stessa variabile , e si fatta somma s' integri , considerando in essa come costanti tutte le altre variabili , che contiene ; e si noti

ti l'integrale, che si ritrova.

Si determini il differenziale dell'integrale notato, considerando in esso tutte le variabili, che contiene; e tale differenziale si sottragga dalla grandezza data.

Se niente vi rimane, è chiaro che l'integrale ritrovato, coll'aggiunta della costante  $C$ , sia l'integrale cercato.

Se poi colla detta sottrazione si ha qualche residuo; sì fatto residuo non conterrà la variabile, relativamente alla quale si è fatta la prima integrazione. Si ripeta allora per tale residuo la stessa operazione, che si è fatta per la grandezza data; e così si proceda innanzi, finchè niente vi rimanga della grandezza proposta.

La somma di tutti gl'integrali ritrovati coll'aggiunta della costante  $C$  sarà allora l'integrale, che si cerca.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

### E S E M P I O I.

Sia da integrarsi  $x dy + y dx$ .

L'integrale di  $y dx$ , preso con supporre variabile solo  $x$ , è  $= xy$ . Ma il differenziale di  $xy$ , preso con considerare ambedue le variabili  $x$ , e  $y$ , è  $= x dy + y dx$ , cioè è lo stesso, che la grandezza data. Dunque

$$\int (x dy + y dx) = xy + C.$$

ESEM.

## E S E M P I O II.

Sia da integrarsi  $xyzdv + xyvdz + xzudy + yzudx$ .

L'integrale di  $yzudx$ , preso con supporre variabile solo  $x$ , è  $= xyzv$ . Ma il differenziale di  $xyzv$ , preso con considerare tutte le variabili, che contiene, è  $= xyzdv + xyvdz + xvzdy + yzudx$ , ch'è lo stesso, che la grandezza data. Dunque

$$\int (xyzdv + xyvdz + xvzdy + yzudx) = xyzv + C.$$

## E S E M P I O III.

Sia da integrarsi  $6x^2ydx + 8xdx + 2x^3dy$ .

Essendo l'integrale di  $6x^2ydx + 8xdx$ , preso con supporre variabile solo  $x$ ,  $= 2x^3y + 4x^2$ ; ed essendo il differenziale di  $2x^3y + 4x^2$ , preso con considerare amendue la variabili  $x$ , e  $y$ ,  $= 6x^2ydx + 2x^3dy + 8xdx$ , cioè lo stesso, che la grandezza data; sarà

$$\int (6x^2ydx + 8xdx + 2x^3dy) = 2x^3y + 4x^2 + C.$$

## E S E M P I O IV.

Sia da integrarsi  $6xydx + 3x^2dy + 6x^2zdx + 2x^3dz$ .

Essendo l'integrale di  $6xydx + 6x^2zdx$ , pre-

preso con far variare solo  $x$ ,  $= 3x^2 y + 2x^3 z$ ; ed essendo il differenziale di  $3x^2 y + 2x^3 z$ , preso con considerare tutte le variabili, che contiene,  $= 6xydx + 3x^2 dy + 6x^2 zdx + 2x^3 dz$ , cioè lo stesso, che la grandezza data; sarà

$$\int (6xydx + 3x^2 dy + 6x^2 zdx + 2x^3 dz) = 3x^2 y + 2x^3 z + C.$$

ESEMPIO V.

Sia da integrarsi  $15x^2 y^2 dx + 10x^3 y dy + 6zdz$ .

L'integrale di  $15x^2 y^2 dx$ , preso con far variare solo  $x$ , è  $= 5x^3 y^2$ ; ed il differenziale di  $5x^3 y^2$ , preso con far variare sì  $x$ , che  $y$ , è  $= 15x^2 y^2 dx + 10x^3 y dy$ . Ma con sottrarre  $15x^2 y^2 dx + 10x^3 y dy$  dalla grandezza data, rimane  $6zdz$ . Dunque, essendo l'integrale di  $6zdz = 3z^2$ , sarà

$$\int (15x^2 y^2 dx + 10x^3 y dy + 6zdz) = 5x^3 y^2 + 3z^2 + C.$$

ESEMPIO VI.

Sia da integrarsi  $3x^2 y^2 dx + 2xzdx + 2x^3 ydy + 2yv^2 dy + x^2 dz + 2y^2 vdv + 3x^2 dx + 4y^3 dy$ .

L'integrale di  $3x^2 y^2 dx + 2xzdx + 3x^2 dx$ , preso con supporre solo  $x$  variabile, è  $= x^3 y^2 + x^2 z + x^3$ ; ed il differenziale

le di  $x^3 y^2 + x^2 z + x^3$ , preso con considerare tutte variabili  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , è  $= 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy + 2xz dx + x^2 dz + 3x^2 dx$ . Si sottragga quest'ultima grandezza dalla grandezza data, e si avrà per residuo  $2y v^2 dy + 2y^2 v dv + 4y^3 dy$ . In oltre l'integrale di  $2y v^2 dy + 4y^3 dy$ , preso con supporre variabile solo  $y$ , è  $= y^2 v^2 + y^4$ , ed il differenziale di  $y^2 v^2 + y^4$ , preso con far variare sì  $y$ , che  $v$ , è lo stesso, che il residuo  $2y v^2 dy + 4y^3 dy + 2y^2 v dv$ . Dunque sarà

$$\int (3x^2 y^2 dx + 2xz dx + 2x^3 y dy + 2y v^2 dy + x^2 dz + 2y^2 v dv + 3x^2 dx + 4y^3 dy) = x^3 y^2 + x^2 z + x^3 + y^2 v^2 + y^4 + C.$$

## E S E M P I O VII.

Sia da integrarsi  $max^{m-1} y^n dx + max^m y^{n-1} dy - mcy^{m-1} z^r dy - rcy^m z^{r-1} dz$ .

L'integrale di  $max^{m-1} y^n dx$ , preso con supporre variabile solo  $x$ , è  $= ax^m y^n$ ; ed il differenziale di  $ax^m y^n$ , preso con far variare sì  $x$ , che  $y$ , è  $= max^{m-1} y^n dx + max^m y^{n-1} dy$ . Si sottragga  $max^{m-1} y^n dx + max^m y^{n-1} dy$  dalla grandezza data; si avrà per residuo  $- mcy^{m-1} z^r dy - rcy^m z^{r-1} dz$ . In oltre l'integrale di  $- mcy^{m-1} z^r dy$ , preso con supporre variabile solo  $y$ , è  $= - cy^m z^r$ ; ed il differenziale di  $- cy^m z^r$ ,

pre-

preso con far variare sì  $y$ , che  $z$ , è lo stesso, che il residuo  $-mcy^{m-1}z^r dy - rcy^m z^{r-1} dz$ . Dunque farà

$$\int (max^{m-1}z^n dx + nax^m y^{n-1} dy - mcy^{m-1}z^r dy - rcy^m z^{r-1} dz) = ax^m y^n - cy^m z^r + C.$$

### AVVERTIMENTO.

60. Si noti che non ci fermiamo ad insegnare il modo d'integrare l'equazioni differenziali a due variabili, qualora i loro membri non si fanno integrare colle regole, che si sono stabilite, per non entrare in un'esame, che solo esigerebbe un lungo trattato. Del resto quel poco, che fin qui si è insegnato del calcolo integrale, se non è sufficiente a potere integrare qualunque grandezza differenziale, è sufficientissimo per l'uso, che potrà fare del detto calcolo la gioventù, a cui questo breve trattato è diretto. Procediamo ora a' principali usi di sì fatto calcolo.

## C A P. V.

*Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in determinare le quadrature de' spazj mistilinei, e curvilinei.*

## P R O B L. X.

61. *Determinare la formola generale, ch' esprime l' elemento dello spazio, che racchiude qualunque curva col suo asse, e con una, o due ordinate allo stesso asse.*

## S O L U Z I O N E.

**Fig. 1.** *Contrassegnino AMB qualunque curva, ed AC il suo asse. Da qualunque punto M della curva s'interda menata l'ordinata MP all'asse, e s'intenda tirata pm parallela, ed infinitamente vicina a PM. S'intenda di più menata all'asse un'altra ordinata QN a qualunque distanza AQ dal vertice del medesimo asse. Essendo il trapezietto infinitamente piccolo PMmp uguale sì alla differenza de' spazj  $Apm$ ,  $APM$ , che alla differenza de' spazj  $QNmp$ ,  $QNMP$ , farà sì fatto trapezietto il differenziale, o sia l'elemento*

mento sì dello spazio  $APM$ , preso dal vertice  $A$  dell'asse della curva, che dello spazio  $QNMP$ , preso dall'ordinata  $QN$  tirata a qualunque distanza  $AQ$  dal vertice dello stesso asse. Ma il trapezietto  $PMmp$  senza sensibile errore si può prendere per lo rettangolo delle rette  $PM$ ,  $Pp$ . Dunque l'elemento sì dello spazio  $APM$ , che dello spazio  $QNMP$  è  $= PM \times Pp$ . Si mettano l'ordinata  $PM = y$ , e l'ascissa corrispondente  $AP = x$ ; farà  $Pp = dx$ , e conseguentemente il trapezietto  $PMmp = ydx$ . Sicchè la formola generale, ch' esprime lo spazio, che racchiude qualunque curva col suo asse, e con una, o due ordinate allo stesso asse, è  $= ydx$ .

Ch' è ciò, che bisognava determinare.

P R O B L. XI.

62. *Determinare la formola generale, che esprime l'elemento dello spazio, che racchiude qualunque curva tra gli asintoti, disposti ad angolo retto, con un'ordinata ad uno degli asintoti, coll'ascissa corrispondente alla medesima ordinata, e coll'altro asintoto prolungato col ramo corrispondente della curva all'infinito, o con due ordinate ad uno degli asintoti, e colla parte dello stesso asintoto, ch'è compresa tra le medesime ordinate.*

P

So.

Fig. 2. Contraffegnino ANV qualunque curva tra gli asintoti OR, OT disposti ad angolo retto, e PM un'ordinata menata all'asintoto OR da qualunque punto M della curva. S'intenda tirata  $mp$  parallela, ed infinitamente vicina a MP; e s'intendano di più menata all'asintoto OR un'altra ordinata NQ a qualunque distanza OQ dal punto O, ch'è l'origine delle ascisse, e l'asintoto OT col corrispondente ramo BA della curva prolungato all'infinito. Essendo il trapezietto infinitamente picciolo  $PMmp$  uguale sì alla differenza de' spazj  $TOPmA$ ,  $TOPMA$ , che alla differenza de' spazj  $QNmp$ ,  $QNMP$ ; sarà sì fatto trapezietto il differenziale, o sia l'elemento sì dello spazio  $TOPMA$ , preso dall'asintoto OT, che dello spazio  $QNMP$ , preso dall'ordinata QN tirata all'asintoto OR a qualunque distanza OQ dall'origine O delle ascisse. Ma il trapezietto  $PMmp$  senza sensibile errore si può prendere per lo rettangolo delle rette PM, Pp. Dunque l'elemento di qualunque de' spazj  $TOPMA$ ,  $QNMP$  è  $= PM \times Pp$ . Si mettano l'ordinata  $PM = y$ , e l'ascissa corrispondente  $OP = x$ ; sarà  $Pp = dx$ , e conseguentemente il detto elemento  $= ydx$ . Sicchè la formola generale, ch'esprime l'elemento dello spazio, che qualunque curva tra gli asintoti

toti disposti ad angolo retto racchiude con un'ordinata ad uno degli asintoti, coll'ascissa corrispondente alla medesima ordinata, e coll'altro asintoto prolungato all'infinito col corrispondente ramo della curva, o con due ordinate ad uno degli asintoti, e colla parte dello stesso asintoto, ch'è compresa tra le medesime ordinate, è anche  $= ydx$ .

Ch'è ciò, che bisognava determinare.

### COROLLARIO I.

63. Esprimendo  $ydx$  nel caso della *Fig. 1* il differenziale sì dello spazio *APM*, che di qualunque altro spazio *QNMP*, che differisce dal primo per lo spazio *AQN*; e nel caso della *Fig. 2* il differenziale sì dello spazio *TOPMA*, che di qualunque altro spazio *QNMP*, che differisce dal primo per lo spazio *TOQNA*: è chiaro che l'integrale di  $ydx$ , che si ha dal calcolo, e che deve variare, secondo varia l'indole della curva, siccome vedremo poco appresso, appartiene in ognuno de' detti casi sì al primo de' detti spazj, che all'altro.

### COROLLARIO II.

64. Essendo l'integrale di  $ydx$ , che si ha dal calcolo, sempre lo stesso in una data curva, qualunque sia l'origine dello spazio, che si vuole determinare; il valore  
P z del-

della costante  $C$ , che si aggiugne sempre all'integrale, che dà il calcolo, dovrà variare, secondo varierà l'origine dello spazio, che si cerca. Onde se si determineranno del modo, che insegneremo ne' problemi, che seguono immediatamente, l'integrale di  $ydx$ , corrispondente ad una curva, di cui è data l'equazione, ed il valore, che compete alla costante  $C$ , qualora è dato nell'asse, o nell'asintoto della medesima curva il punto, dal quale principia lo spazio da determinarsi; la somma di sì fatti integrale, e valore di  $C$  darà l'aja, che si va cercando.

## P R O B L. XII.

65. *Determinare l'integrale di  $ydx$ , corrispondente a qualunque curva, di cui si ha l'equazione.*

## S O L U Z I O N E.

Si ricavi dall'equazione della curva il valore di  $y$ , e sì fatto valore si sostituisca nella formola  $ydx$ . Si avrà in tal modo una quantità, che conterrà solo  $x$ , e  $dx$ .

Si trovi l'integrale di sì fatta quantità, e si avrà l'integrale cercato.

Ch'è ciò, che bisognava determinare.

P R O Q.

## P R O B L. XIII.

66. Insegnare il modo di determinare il valore, che compete alla costante  $C$ , che si deve aggiugnere all' integrale di  $ydx$ , già determinato relativamente ad una data curva, qualora è dato nell'asse della medesima curva il punto, da cui principia lo spazio, che si vuole determinare.

## S O L U Z I O N E.

Due casi possono darsi. Può darsi il caso Fig. 1. che lo spazio, che si cerca, sia  $APM$ , preso dal vertice  $A$  dell'asse, ovvero  $QNMP$ , preso dall'ordinata  $QN$  menata all'asse a qualunque distanza  $AQ$  dal suo vertice  $A$ . Nel

## C A S O I.

Lo spazio  $APM$  diviene nullo, quando il punto  $P$  cade in  $A$ . Ma quando il punto  $P$  cade in  $A$ , diviene nulla anche l'ascissa  $AP$ , e perciò diviene  $x = 0$ . Dunque se nell' integrale ritrovato in vece di  $x$  si sostituisce il zero, quel, che nascerà, coll'aggiunta della costante  $C$ , sarà  $= 0$ . Si ricavi allora dalla detta equazione il valore di  $C$ , e si avrà il valore cercato. Nel

Si metta  $AQ = a$ , e si ricavi dall'equazione della curva il valore di  $QN$ , col sostituire in essa  $a$  in vece di  $x$ . Lo spazio  $QNMP$  diviene nullo, quando il punto  $P$  cade in  $Q$ . Ma quando il punto  $P$  cade in  $Q$ , si fa  $AP = AQ$ , o sia  $x = a$ . Dunque se nell'integrale ritrovato si sostituisce  $a$  in vece di  $x$ , quello, che nascerà, coll'aggiunta della costante  $C$ , sarà  $= 0$ . Si ricavi allora dalla detta equazione il valore di  $C$ , e si avrà il valore cercato.

Ch'è quanto bisognava insegnare.

### A V V E R T I M E N T O .

67. Si noti che quel, che si è detto per la determinazione della costante relativamente a qualunque curva, considerata per rispetto del suo asse, ha luogo anche per qualunque curva considerata tra gli asintoti.

### E S E M P I O I.

*Sia da determinarsi lo spazio, che racchiude la parabola di qualunque genere col suo asse, e con una, o due ordinate al medesimo asse.*

Fig. 3. *Contrasegni BAM una parabola di qualunque genere, e sieno AC il suo asse, e*  
PM

PM un'ordinata menata all'asse da qualunque punto M della curva.

Posto il parametro dell'asse =  $p$ , e poste l'ordinata  $PM = y$ , e l'ascissa corrispondente  $AP = x$ , farà l'equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = x^m p^n.$$

Onde farà

$$y = \sqrt[m+n]{x^m p^n} = x^{\frac{m}{m+n}} p^{\frac{n}{m+n}},$$

$$y dx = dx \sqrt[m+n]{x^m p^n}.$$

E perciò

$$\int_C y dx = \int dx \sqrt[m+n]{x^m p^n} = \frac{m+n}{2m+n} x \sqrt[m+n]{x^m p^n} +$$

E, sostituendo  $y$  al suo valore  $\sqrt[m+n]{x^m p^n}$ , farà

$$\int y dx = \frac{m+n}{2m+n} xy + C.$$

S' intenda a qualunque distanza AD dal vertice A dell'asse menata allo stesso asse l'ordinata DE. Posta l'ascissa  $AD = a$ , col sostituire nell'equazione generale della curva  $a$  in vece di  $x$ , si avrà l'ordinata  $DE =$

$$\sqrt[m+n]{a^m p^n}.$$

In oltre per avere il valore di  $C$ , corrispondente allo spazio APM, si sostituisc

nell' integrale ritrovato in vece di  $x$  il zero. Si avrà  $0 + C = 0$ , e conseguentemente  $C = 0$ . Sicchè la costante è nulla, qualora lo spazio, che si cerca, è preso dal vertice dell' asse. Essendo in tale caso nulla la costante, sarà lo spazio  $APM =$

$$\frac{m+n}{2m+n} xy = \frac{m+n}{2m+n} AP \times PM, \text{ cioè u-}$$

guale a quella parte del rettangolo fatto dall' ascissa  $AP$ , e dall' ordinata  $PM$ , che in-

dica il rotto  $\frac{m+n}{2m+n}$ .

Per avere poi il valore di  $C$ , corrispondente allo spazio  $DEMP$ , si sostituisca nell' integrale ritrovato  $a$  in vece di  $x$ . Si avrà

$$\frac{m+n}{2m+n} a \sqrt{a^m p^n} + C = 0,$$

e conseguentemente

$$C = - \left( \frac{m+n}{2m+n} \right) a \sqrt{a^m p^n};$$

Onde sarà lo spazio

$$DEMP = \frac{m+n}{2m+n} (xy - a \sqrt{a^m p^n}) =$$

$$\frac{m+n}{2m+n} (AP \times PM - AD \times DE).$$

CO.

COROLLARIO I.

68. Se la parabola è di primo genere. Effendo in tale caso  $y^2 = px$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; faranno lo spazio

$$APM = \frac{2}{3} AP \times PM, \text{ e lo spazio } DEMP = \frac{2}{3} (AP \times PM - AD \times DE).$$

COROLLARIO II.

69. Se la parabola è di secondo genere. Posta la sua equazione  $y^3 = x^2 p$ , e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 1$ ; faranno lo

$$\text{spazio } APM = \frac{3}{5} AP \times PM, \text{ e lo spazio } DEMP = \frac{3}{5} (AP \times PM - AD \times DE).$$

Posta poi la sua equazione  $y^3 = xp^2$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 2$ ; faranno

$$\text{lo spazio } APM = \frac{3}{4} AP \times PM, \text{ e lo spazio } DEMP = \frac{3}{4} (AP \times PM - AD \times DE).$$

ESEM.

## E S E M P I O II.

Sia da determinarsi lo spazio, che l'iperbola di qualunque genere considerata tra gli asintoti, che formano angolo retto, racchiude con un'ordinata ad uno degli asintoti, coll'ascissa corrispondente alla medesima ordinata, e coll'altro asintoto prolungato all'infinito col ramo corrispondente della curva, ovvero con due ordinate ad uno degli asintoti, e colla parte dello stesso asintoto, ch'è compresa tra le medesime ordinate.

Fig. 2. Contrassegni ANV un'iperbola di qualunque genere, e sieno OR, OT i suoi asintoti, che formano angolo retto, e PM un'ordinata menata all'asintoto OR da qualunque punto M della curva. Posto il lato della potenza =  $a$ , e poste l'ordinata  $MP = y$ , e l'ascissa corrispondente  $OP = x$ ; sarà l'equazione generale alla curva

$$x^m y^n = a^{m+n}.$$

Onde saranno

$$y^n = a^{m+n} x^{-m},$$

$$y = \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} = a^{\frac{m+n}{n}} x^{-\frac{m}{n}},$$

$$y dx = dx \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}};$$

E perciò

$$\int y dx = \int dx \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} = \frac{x}{n-m} \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} + C. \quad \text{E}$$

E, mettendo  $y$  in vece di  $\sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}}$ , sarà

$$\int y dx = \frac{n}{n-m} xy + C.$$

S' intenda a qualunque distanza  $OQ$  dal punto  $O$ , che è l'origine delle ascisse, menata all'asintoto  $OR$  l'ordinata  $QN$ , e si metta l'ascissa  $OQ = b$ .

In oltre, per avere il valore della costante  $C$  in qualunque caso, si proceda del modo, che si è tenuto nell'esempio precedente; cioè si metta nell'integrale ritrovato in vece di  $x$  il zero, o il  $b$ , secondochè lo spazio, che si vuole determinare, è preso dall'asintoto  $OT$ , o dall'ordinata  $QN$ .

### COROLLARIO I.

70. Se l'iperbola è di primo genere. Essendo in tale caso  $xy = a^2$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ , l'espressione generale

ritrovata  $\frac{n}{n-m} x \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} + C$  di-

verrà  $\frac{1}{0} \times x \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} + C = \infty$ . Sic-

chè colla formola generale ritrovata non ci riesce di determinare lo spazio asintotico relativamente all'iperbola di primo genere. Il come si dovrà procedere in tale caso, s'insegnerà nel seguente esempio. CO.

## C O R O L L A R I O II.

71. Se l' iperbola è di secondo genere .  
 Posta la sua equazione  $xy^2 = a^3$  , e conse-  
 guentemente  $m = 1$  ,  $n = 2$  ; la formola gene-  
 rale ritrovata si trasformerà in  $2x\sqrt{a^3} x^{-1} +$   
 $C = 2\sqrt{a^3} x + C$  . Onde faranno  $0 + C =$   
 $0$  , e  $2\sqrt{a^3} b + C = 0$  le due equazioni,  
 che daranno i valori diversi di  $C$  , secondo-  
 chè lo spazio asintotico , che si cerca , si  
 prende dall' asintoto  $OT$  , o dall' ordinata  
 $QN$  . E perciò sarà in un caso  $C = 0$  , e  
 nell' altro caso  $C = - 2\sqrt{a^3} b$  , e conse-  
 guentemente lo spazio , che si cerca , sarà  
 nel primo caso  $= 2\sqrt{a^3} x$  , e nell' altro ca-  
 so  $= 2\sqrt{a^3} x - 2\sqrt{a^3} b$  . Posta poi l'equa-  
 zione della curva  $x^2 y = a^3$  , e conseguen-  
 temente  $m = 2$  ,  $n = 1$  , la formola gene-  
 rale si trasformerà in  $-\frac{x \times a^3 x^{-2}}{a^3} +$

$C = -\frac{a^3 x^{-1}}{a^3} + C = -\frac{1}{x} + C$  . On-  
 de faranno  $-\frac{1}{0} + C = 0$  , e  $-\frac{1}{b} +$

$C = 0$  le due equazioni , che daranno i  
 diversi valori di  $C$  , secondochè lo spazio  
 asintotico , che si cerca , si prende dall' asin-  
 toto  $OT$  , o dall' ordinata  $QN$  . E perciò

sarà nel primo caso  $C = \frac{a^3}{0} = \infty$  , e nel-

l' al-

l'altro caso  $C = \frac{a^3}{b}$ ; e conseguentemente farà lo spazio, che si cerca, nel primo caso infinito, e nell'altro caso  $= \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$ .

COROLLARIO III.

72. Se l'iperbola è di terzo genere. Posta la sua equazione  $xy^3 = a^4$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 3$ ; la formola generale

si trasformerà in  $\frac{3}{2} x \sqrt[3]{a^4 x^{-1}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2} + C$ . Onde saranno  $0 + C = 0$ , e  $\frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 b^2} + C = 0$  le due equazio-

ni, che daranno i diversi valori di  $C$ , secondochè lo spazio asintotico, che si cerca, principia dell'asintoto  $OT$ , o dall'ordinata  $QN$ . E perciò farà nel primo caso  $C = 0$ ,

e nell'altro caso  $C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 b^2}$ ; e

conseguentemente farà lo spazio, che si cerca,

nel primo caso  $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}$ , e nell'

altro

$$\text{altro caso} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 b^2}.$$

Posta poi l'equazione della curva  $x^2 y^2 = a^4$ ,  
e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 2$ ; la for-

$$\text{mula generale diverrà } \frac{2}{0} \times x \sqrt{a^4 x^{-2}} +$$

$C = \infty$ . Sicchè non si può allora determi-  
nare lo spazio asintotico colla formola gene-  
rale. Ed essendo  $x^2 y^2 = a^4$ , sarà  $xy = a^2$ ;  
e perciò si farà allora la determinazione del-  
lo spazio asintotico nello stesso modo, che  
si terrà per la determinazione del detto spa-  
zio per rispetto all'iperbola di primo gene-  
re. Posta finalmente l'equazione della curva  
 $x^3 y = a^4$ , e conseguentemente  $m = 3$ ,  
 $n = 1$ ; la formola generale diverrà  $-\frac{1}{2} x \times$

$$a^4 x^{-3} + C = -\frac{1}{2} a^4 x^{-2} + C = \frac{a^4}{2x^2} + C.$$

$$\text{Onde saranno } -\frac{1}{2} \times \frac{a^4}{0} + C = 0, \text{ e } -\frac{a^4}{2b^2}$$

$+ C = 0$  le due equazioni, che daranno i  
valori di  $C$ , che corrisponderanno uno allo  
spazio preso dall'asintoto  $OT$ , e l'altro al-  
lo spazio preso dall'ordinata  $QN$ . E perciò

$$\text{farà nel primo caso } C = \frac{1}{2} \frac{a^4}{0} = \infty, \text{ e nel-}$$

$$\text{l'altro caso } C = \frac{a^4}{2b^2}; \text{ e conseguentemen-}$$

te

te sarà lo spazio, che si cerca, nel primo

caso infinito, e nell'altro caso  $= \frac{a^4}{2b^2} - \frac{a^4}{2x^2}$ .

COROLLARIO IV.

73. Posta adunque  $n > m$ , la costante sarà nulla, se lo spazio asintotico si prende dal centro dell'iperbola; e sarà finita, e conseguentemente assegnabile, se il detto spazio si prende da qualunque ordinata QN all'asintoto OR. Posta poi  $n < m$ , la costante sarà infinita, se lo spazio asintotico si prende dal centro; e sarà finita, e per conseguenza assegnabile, se il detto spazio si prende da qualunque ordinata QN all'asintoto OR. Posta finalmente  $m = n$ , la formola generale diverrà di un'infinito valore. E perciò non si potrà colla medesima determinare lo spazio asintotico, comunque sia preso. Intanto perchè l'equazione generale  $x^m y^n = a^{m+n}$  diviene allora  $x^m y^m = a^{2m}$ , o sia  $xy = a^2$ , ch'è l'equazione dell'iperbola di primo genere, perciò si farà in tale caso la determinazione dello spazio asintotico, come appartenente all'iperbola di primo genere.

COROLLARIO V.

74. Sieno finalmente B il vertice dell'asse dell'iperbola, e BC l'ordinata menata al-  
l'

l'asintoto OR dal punto B; farà  $OC = a$ .  
 Onde se nell'espressione, che si è ritrovata  
 per lo spazio QNMP in qualunque de' casi,  
 che si sono considerati, si metterà  $a$  in ve-  
 ce di  $b$ , si avrà con quel, che nascerà, la  
 quadratura dello spazio asintotico, preso dal-  
 l'ordinata menata all'asintoto OR dal vertice  
 dell'asse della curva.

### E S E M P I O III.

*Sia da determinarsi la quadratura dello spa-  
 zio asintotico nell'iperbola equilatera di primo  
 genere.*

Contrassegni ANV un'iperbola equilatera  
 di primo genere, e sieno OR, OT i suoi  
 asintoti, e PM un'ordinata menata all'asin-  
 toto OR da qualunque punto M della cur-  
 va. Posto il lato della potenza  $= a$ , e po-  
 ste l'ordinata  $MP = y$ , e l'ascissa corti-  
 spondente  $OP = x$ , farà  $xy = a^2$  l'equa-  
 zione alla curva. Essendo

$$xy = a^2,$$

faranno

$$a^2$$

$$y = \frac{a^2}{x},$$

e

$$ydx = \frac{a^2 dx}{x}.$$

E per-

E perciò

$$\int y dx = \int \frac{a^2 dx}{x} = a^2 \ln x + C \quad (\S 39).$$

Or se lo spazio asintotico si prende dall' asintoto OT, sarà  $a^2 \ln 0 + C = 0$  l'equazione, che darà il valore di C, e conseguentemente sarà  $C = -a^2 \ln 0$ . Se poi lo spazio si prende da qualunque ordinata QN, menata all' asintoto OR a qualsiasi distanza OQ dal centro O; posta  $OQ = b$ , sarà  $a^2 \ln b + C = 0$  l'equazione, che darà il valore di C, e conseguentemente sarà  $C = -a^2 \ln b$ . Sicchè lo spazio asintotico è

$$= a^2 \ln x - a^2 \ln b = a^2 (\ln x - \ln b) = a^2 \times \ln \frac{x}{b} = \infty, \text{ se si prende dall' asintoto}$$

OT prolungato all' infinito col corrispondente ramo BA della curva; ed è  $= a^2 \ln x -$

$$a^2 \ln b = a^2 (\ln x - \ln b) = a^2 \times \ln \frac{x}{b}, \text{ se}$$

si prende dall' ordinata QN; cioè è infinito nel primo caso, ed è nell' altro caso uguale al prodotto, che nasce moltiplicando per la potenza dell' iperbola il logaritmo iperbolico del numero, ch' esprime l' ascissa OP relativamente all' altra ascissa OQ posta = 1.

Q

CO.

## C O R O L L A R I O I.

75. Essendo l'ascissa, che corrisponde all'ordinata menata ad uno degli asintoti dal vertice dell'asse dell'iperbola uguale al lato della potenza, e perciò  $= a$ ; si avrà nell'iperbola equilatera di primo genere lo spazio asintotico, preso dall'ordinata, che procede dal vertice del suo asse, con sostituire  $a$  in vece di  $b$  nella grandezza  $a^2 \times$

$l \frac{x}{b}$ . Onde sarà sì fatto spazio  $= a^2 \times l \frac{x}{a}$ ,

cioè uguale al prodotto, che si ha con moltiplicare per la potenza dell'iperbola il logaritmo iperbolico del numero, ch' esprime l'ascissa, che corrisponde all'ordinata, che termina il detto spazio, relativamente al lato della potenza posto  $= 1$ .

## C O R O L L A R I O II.

76. Essendo in oltre  $\frac{a^2 dx}{x} = a^2 x^{-1} dx$ ,

ed esprimendo l'integrale di  $\frac{a^2 dx}{x}$  lo spa-

zio asintotico relativamente all'iperbola equilatera di primo genere; anche l'integrale di  $a^2 x^{-1} dx$  esprimerà lo stesso spazio. Ma quando s'integra  $a^2 x^{-1} dx$  colla regola

la fondamentale, si ha per integrale  $\frac{a^2}{0} +$

$C$ , o sia una quantità infinita; e lo spazio asintotico relativamente all'iperbola equilatera di primo genere è infinito, qualora si prende dall'origine degli asintoti. Dunque l'integrale di  $a^2 x^{-1} dx$ , che si ha colla regola fondamentale, esprime lo spazio asintotico, preso nell'iperbola equilatera di primo genere dall'origine degli asintoti.

AVVERTIMENTO.

77. Si noti che quel, che si è detto dell'integrale di  $a^2 x^{-1} dx$ , ha luogo per l'integrale di qualunque altra quantità differenziale monomia, che ha la variabile coll'esponente  $-1$ . Quindi s'intende perchè si ha sempre una quantità infinita, quando s'integra colla regola fondamentale una differenziale monomia, che ha la variabile coll'esponente  $-1$ .

ESEMPIO IV.

*Sia da determinarsi la quadratura dello spa. Fig. 4. zio circolare APM, che l'arco AM racchiude coll'ordinata MP al diametro AB, e coll'ascissa corrispondente AP.*

Si mettano il diametro  $AB = a$ , l'ordinata  $MP = y$ , e l'ascissa corrispondente

Q 2 AP

AP = x. Sarà PB = a - x, e farà  $y^2 = ax - x^2$  l'equazione alla curva. Essendo

$$y^2 = ax - x^2;$$

faranno

$$y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8\sqrt{a^3}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16\sqrt{a^5}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128\sqrt{a^7}}, \text{ ec.}$$

$$y dx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2\sqrt{a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8\sqrt{a^3}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{16\sqrt{a^5}} - \frac{x^{\frac{9}{2}} dx}{128\sqrt{a^7}}, \text{ ec.}$$

E perciò

$$\int y dx = \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} - \frac{\sqrt{x^5}}{5\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x^7}}{28\sqrt{a^3}} - \frac{\sqrt{x^9}}{72\sqrt{a^5}} - \frac{10\sqrt{x^{11}}}{1408\sqrt{a^7}}, \text{ ec.}$$

Ma l'integrale di  $y dx$  dà lo spazio APM; perchè prendendosi il detto spazio dall'origine delle ascisse, la costante deve essere nulla.

Dun-

Dunque sarà  $APM = \frac{2}{3} \sqrt{ax^3} - \frac{1}{5} \sqrt{\frac{x^5}{a}} - \frac{1}{28} \sqrt{\frac{x^7}{a^3}} - \frac{1}{72} \sqrt{\frac{x^9}{a^5}} - \frac{10}{1408} \sqrt{\frac{x^{11}}{a^7}}$ , ec. a un di presso.

COROLLARIO I.

78. Se l'ascissa AP si fa uguale al raggio  $AO = \frac{1}{2}a$ , lo spazio circolare APM si fa uguale alla quarte parte dell'intero cerchio. Sicchè se nella serie ritrovata si sostituirà  $\frac{1}{2}a$  in vece di  $x$ , la serie, che nascerà, darà a un di presso l'aja della quarta parte del cerchio, ed il quadruplo della stessa serie darà la quadratura del cerchio intero. Ma col sostituire nella serie trovata  $\frac{1}{2}a$

in vece di  $x$ , si ha la serie

$$\frac{2}{3} a^2 \sqrt{\frac{1}{8}} - \frac{1}{5} a^2 \sqrt{\frac{1}{32}} - \frac{1}{28} a^2 \sqrt{\frac{1}{128}}$$

Q 3

$$\frac{1}{72} a^2 \sqrt{\frac{1}{512}}, \text{ ec.} = a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{20} + \frac{1}{224} - \frac{1}{1152}, \text{ ec.} \right).$$

Dunque l'aja dell'intero cerchio è a un di presso =

$$4a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{20} + \frac{1}{224} - \frac{1}{1152}, \text{ ec.} \right) = 2a^2 \sqrt{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{20} + \frac{1}{224} - \frac{1}{1152}, \text{ ec.} \right).$$

Per la qual cosa, posto il raggio del cerchio di un palmo, e conseguentemente il diametro AB, o sia  $a$  di palmi 2, farà l'aja dell'intero cerchio =  $8\sqrt{2} \times 0.2781 = 11.3136 \times 0.2781$ , o di pal. quadrati 3.146 a un di presso.

## COROLLARIO II.

79. Se si mettono nell'ellisse di primo genere uno degli assi =  $a$ , l'altro asse =  $c$ , qualunque ordinata al primo de'detti assi =  $y$ , e l'ascissa corrispondente =  $x$ , computando la detta ascissa non dal centro, ma da uno degli estremi dell'asse posto =  $a$ , farà l'equazione della curva

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax - x^2).$$

Onde

Onde faranno

$$y = \frac{c}{a} (ax - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$y dx = \frac{c}{a} \times dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int y dx = \frac{c}{a} \times \int (dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}).$$

E' chiaro dunque che la quadratura dello spazio racchiuso dall'ellisse di primo genere è uguale a quella del cerchio, che ha per diametro l'asse posto =  $a$ , moltiplicata

per lo rotto  $\frac{c}{a}$ ; o ciò, ch'è lo stesso, che

la detta quadratura è quarta proporzionale in ordine all'asse =  $a$ , all'asse =  $c$ , ed al cerchio, che ha per diametro il primo de' detti assi. Per la qual cosa, posti l'asse maggiore di un'ellisse di palmi 3, e l'asse minore di palmi 2, farà l'intero spazio racchiuso dalla detta ellisse quarto proporzionale in ordine a 3, a 2, ed a 7. 067, ch'è ad un di presso l'aja del cerchio; che ha il diametro di palmi 3, e conseguentemente = pal. quadrati 4. 711 a un di presso.

Q 4

ESEM.

## ESEMPIO V.

Fig. 5. Sia LMV la curva logaritmica, e sieno AB la linea delle ascisse, ed A l'origine di esse. Da qualunque punto M della curva s'intenda calata su AB la perpendicolare MP; e sia da determinarsi in sè fatta curva la quadratura dello spazio ALMP.

Per lo punto M s'intenda tirata la tangente MT; e si mettano l'ascissa AP =  $x$ , l'ordinata PM =  $y$ , e la sotttangente PT, ch'è costante in tale curva, =  $a$ . Sarà l'equazione alla curva

$$x = by$$

Onde faranno

$$dx = \frac{ady}{y}$$

$$ydx = \frac{aydy}{y} = ady$$

E perciò

$$\int ydx = \int ady = ay + C = PT \times PM + C$$

In oltre, quando il punto P cade in A, lo spazio ALMP si fa nullo, e l'ordinata PM, o sia  $y$  si fa = AL. Onde sarà  $PT \times AL + C = 0$ , e conseguentemente  $C = -PT \times AL$ . Per la qual cosa lo spazio ALMP è =  $PT \times PM - PT \times AL$

$AL = PT ( PM - AL )$ , cioè è uguale al rettangolo fatto dalla sottangente  $PT$ , e dalla differenza delle ordinate  $PM, AL$ .

COROLLARIO I.

80. Quindi è che se si tira qualunque altra ordinata  $NQ$  alla linea  $AB$  delle ascisse, sarà lo spazio  $ALNQ = PT ( QN - AL )$ .

COROLLARIO II.

81. Essendo lo spazio  $ALNQ = PT ( QN - AL )$ , e lo spazio  $ALMP = PT ( PM - AL )$ , sarà lo spazio  $PMNQ = PT ( QN - PM )$ , cioè uguale al rettangolo fatto dalla sottangente, e dalla differenza delle ordinate, che comprendono lo stesso spazio.

CA-

## C A P. VI.

*Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in rettificare le linee curve.*

## DEFINIZIONE.

82 Si dice *rettificare* una linea curva, quando si vuole determinare la sua lunghezza, o sia una retta, che le sia uguale.

## P R O B L. XIV.

83. *Ritrovare la formola generale, ch' esprime l' elemento di qualunque arco di qualsivisia curva.*

## S O L U Z I O N E.

**Fig. 1.** Contrassegnino  $AM$  un'arco qualunque di qualsivisia curva  $AMB$ , e  $PM$  l'ordinata all'asse  $AC$  della curva, procedente per l'estremo  $M$  dell'arco  $AM$ . S'intenda tirata  $pm$  parallela, ed infinitamente vicina a  $PM$ , e dal punto  $M$  s'intenda calata su  $pm$  la perpendicolare  $MR$ . Sarà l'archetto infinitamente picciolo  $Mm$  il differenziale, o sia l'ele-

elemento dell'arco AM. Ma l'archetto Mm senza sensibile errore si può prendere per una lineetta retta, o sia per l'ipotenusa del triangoletto infinitamente picciolo MRm, ret-

tangolo in R, e perciò è  $= \sqrt{MR^2 + mR^2}$ . Dunque l'elemento dell'arco AM è  $=$

$\sqrt{MR^2 + mR^2}$ . Si mettano l'ordinata MP = y, e l'ascissa corrispondente AP = x; faranno MR = Pp = dx, ed mR = dy, e perciò  $MR^2 = dx^2$ , ed  $mR^2 = dy^2$ ; e

conseguentemente sarà  $\sqrt{MR^2 + mR^2} =$

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Per la qual cosa, chiamando y l'ordinata all'asse di qualsivoglia curva, che procede per l'estremo di qualunque arco della medesima, ed x l'ascissa corrispondente, la formola generale, ch'esprime l'

elemento del medesimo arco, è  $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

Ch'è ciò, che bisognava ritrovare.

### AVVERTIMENTO.

84. Si noti che se in qualunque curva tra gli asintoti si metterà l'ordinata ad uno di essi, che procede per l'estremo di qualsivoglia arco della medesima curva, = y, e l'ascissa corrispondente = x, si troverà, che la formola generale, ch'esprimerà l'elemen-

to del medesimo arco, sarà pure  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

CO.

## C O R O L L A R I O I.

85. Quindi si avrà la lunghezza di qualunque arco di qualsivoglia curva, di cui è nota l'equazione, con determinare l'integrale di  $\sqrt{ax^2 + ay^2}$ , che corrisponde all'indole della medesima curva, e con aggiugnere a sì fatto integrale il valore della costante C.

## C O R O L L A R I O II.

86. In oltre facendosi nulla in qualunque curva, che si riferisce al suo asse, così l'ascissa, che l'ordinata, quando si fa nullo l'arco preso dal vertice del o stesso asse: è chiaro che si avrà allora il valore della costante C, che si deve aggiugnere all'integrale

di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , con sostituire in sì fatto integrale il zero in vece di  $x$ , o di  $y$ , e comprendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

## P R O B L. XV.

87. Insegnare il modo di determinare l'integrale di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , corrispondente ad una curva, di cui si ha l'equazione.

So.

## S O L U Z I O N E .

1. Si ricavi dall'equazione della curva il valore di  $x$ , o di  $y$ . Indi si determini il differenziale di sì fatto valore di  $x$ , o di  $y$ , e s'innalzi tale differenziale a quadrato. S'avrà in tal modo il valore di  $dx^2$ , o di  $dy^2$ .

2. Si sostituisca nella formola generale  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  in vece di  $dx^2$ , o di  $dy^2$  il suo valore ritrovato; e si avrà una quantità, che conterrà solo una delle variabili.

3. Si determini finalmente l'integrale della detta quantità, che conterrà una sola variabile, e si avrà l'integrale cercato.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

## E S E M P I O I.

*Sia da rettificarsi l'arco AM della parabola BAM di qualunque genere.*

Posto il parametro dell'asse =  $p$ , e poste l'ordinata MP, menata all'asse dall'estremo dell'arco AM, =  $y$ , e l'ascissa corrispondente AP =  $x$ ; sarà l'equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = x^m p^n.$$

Onde faranno

$$x^m = p^{-n} y^{m+n},$$

$$x = p^{-\frac{n}{m}} y^{\frac{m+n}{m}},$$

$dx$

$$dx = \frac{m+n}{m} p^{-\frac{n}{m}} y^{\frac{n}{m}} dy,$$

$$dx^2 = \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2.$$

E perciò sarà

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2 + dy^2}$$

$$= dy \left( 1 + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

E, mutando il segno all'esponente di  $y$  nel binomio del modo insegnato nel § 30, sarà

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = y^{\frac{n}{m}} dy \left( y^{-\frac{2n}{m}} + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sicchè s'avrà la lunghezza dell'arco AM, coll'unire in una somma l'integrale di uno de' valori ritrovati di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , e quello, che nasce col sostituire il zero in vece di  $y$  nello stesso integrale, preso però col segno contrario (§ 85).

AVVERTIMENTO.

88. Se sarà  $\frac{2n}{m} = 1$ , o sia  $m = 2n$ , il

primo de' valori ritrovati di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  avrà la condizione esposta nel § 26; e perciò si potrà integrare esattamente. Se poi sarà intero, e positivo il valore del rotto

$\frac{m}{2n}$ , il primo de' detti valori avrà la condizione esposta nel § 29, e per conseguenza anche si potrà integrare esattamente. Se finalmente non sarà  $m = 2n$ , nè sarà intero, e positivo il valore del rotto

$\frac{m}{2n}$ , ma

farà intero, e positivo il valore del rotto

$\frac{n+m}{2n}$ ; allora il secondo de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$

avrà la condizione esposta nel § 29, e conseguentemente si potrà esattamente integrare. In ogni altro caso non si potrà avere l'integrale

del valore di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , che per approssimazione del modo insegnato nel § 35.

## COROLLARIO I.

89. Quindi la lunghezza dell' arco AM si avrà con esattezza 1°. se sarà  $m = 2^n$ ; 2°. se sarà intero, e positivo il valore del

rotto  $\frac{m}{2^n}$ ; 3°. se sarà intero, e positivo il valore del rotto  $\frac{m+n}{-2^n}$ ; e s' integreranno,

per potere avere la detta lunghezza, ne' primi due casi il primo de' valori ritrovati

di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , e nel terzo caso il secondo degli stessi valori. In qualunque altro caso non si avrà la lunghezza dell' arco AM, che a un di presso.

## COROLLARIO II.

90. Se la parabola è di primo genere. Essendo la sua equazione  $y^2 = px$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ : è chiaro che

niuno de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si può integrare con esattezza. Sicchè la lunghezza di qualunque arco della parabola di primo genere non si potrà avere, che a un di presso.

CO.

COROLLARIO III.

91. Se la parabola è di secondo genere :  
 Posta la sua equazione  $y^3 = p^2 x$ , e conse-  
 guentemente  $m = 1, n = 2$ ; è chiaro che

niuno de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si potrà in-  
 tegrare allora con esattezza. Sicchè in tale  
 caso non si potrà determinare la lunghezza  
 di qualunque arco della parabola di secondo  
 genere, che per approssimazione. Posta poi  
 la sua equazione  $y^3 = px^2$ , e conseguente-  
 mente  $m = 2, n = 1$ ; è chiaro che il

primo de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si potrà in-  
 tegrare esattamente del modo insegnato nel  
 § 26. Sicchè si avrà in tale altro caso con  
 esattezza la lunghezza di qualunque arco del-  
 la parabola di secondo genere. In effetto la

formola generale  $dy \left( 1 + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{\frac{2n}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}$   
 $y^{\frac{2n}{m}}$  diventa allora  $dy \left( 1 + \frac{9y}{4p} \right)^{\frac{1}{2}}$ , il di

cui integrale per lo § 26 è  $= \frac{27}{8p} \times$   
 $\left( 1 + \frac{9y}{4p} \right)^{\frac{3}{2}} + C$ . Ma la costante C deve  
 essere uguale allo stesso integrale, preso col  
 R segno

segno contrario, e mutata in esso l'  $y$  in

zero ( 85 ); e perciò è  $= - \frac{8p}{27}$ . Sicchè

l' arco AM in sì fatto caso è  $= \frac{27}{27} \times$

$\left( 1 + \frac{9y}{4p} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8p}{27}$ . Per la qual cosa, po-

sti il parametro  $p$  di palmi 18, e l'ordina-

ta PM, o sia  $y$  di palmi 16, farà l'arco

$AM = \frac{16}{3} \times \sqrt{27} - \frac{16}{3} = \text{pal. } 22.379.$

#### C O R O L L A R I O IV.

92. Se la parabola è di terzo genere, o che la sua equazione sia  $y^4 = px^3$ , o  $y^4 = p^2 x^2$ , o  $y^4 = p^3 x$ , e conseguentemente  $m = 3$ ,  $n = 1$ , o  $m = 2$ ,  $n = 2$ , o  $m = 1$ ,  $n = 3$ ; è chiaro che niuno de' valori

di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si potrà integrare allora con esattezza. Sicchè la lunghezza di qualunque arco della parabola di terzo genere non si potrà determinare, che a un di presso.

#### C O R O L L A R I O V.

93. Se la parabola è di quarto genere. Posta la sua equazione  $y^5 = p^2 x^3$ , o  $y^5 = p^3 x^2$ , o  $y^5 = p^4 x$ , e conseguentemente  $m = 3$ ,

$m = 3, n = 2$ , o  $m = 2, n = 3$ , o  $m = 1, n = 4$ ; è chiaro che niuno de' due valori

di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si potrà integrare allora con esattezza. Sicchè qualunque arco della parabola di quarto genere non si potrà rettificare allora, che per approssimazione. Posta poi la sua equazione  $y^5 = px^4$ , e conseguentemente  $m = 4, n = 1$ ; è chia-

ro che il primo de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si può integrare esattamente del modo insegnato nel § 29. Sicchè s'avrà in sì fatto caso la lunghezza di qualunque arco della parabola di quarto genere con esattezza. In

effetto la formola generale  $dy \left( 1 + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 \frac{y^{-2n}}{p^{\frac{1}{m}}} \right)^{\frac{1}{2}}$  diventa allora  $dy \left( 1 + \frac{25}{16} \times \left( \frac{y}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$ , il di cui integrale per lo § 29

$$è = \frac{1024p}{3125} \sqrt{\left( 1 + \frac{25}{16} \frac{y}{p} \right)^5} - \frac{1024p}{1875} \sqrt{\left( 1 + \frac{25}{16} \frac{y}{p} \right)^3} + C. \text{ Ma la costante } C \text{ è uguale allo stesso integrale,}$$

R 2 pre-

preso col segno contrario, e mutata in esso

l' $y$  in zero (§ 85); e perciò è  $= -\frac{1024p}{3125} + \frac{1024p}{1875}$ . Sicchè l'arco AM in sì fatto ca-

$$\text{fo è} = \frac{1024p}{3125} \sqrt{\left(1 + \frac{25}{16} \sqrt{\frac{y}{p}}\right)^5} - \frac{1024p}{1875} \sqrt{\left(1 + \frac{25}{16} \sqrt{\frac{y}{p}}\right)^3} - \frac{1024p}{3125} + \frac{1024p}{1875}$$

### C O R O L L A R I O VI.

94. Sia l'equazione della curva  $y^2 = x^3$   
 $p^{-1} = \frac{1}{p}$ . Essendo allora  $m = 3$ ,  $n = -1$ ;

è chiaro che il secondo de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  si può integrare esattamente del modo insegnato nel § 29. Sicchè si avrà in tale caso la lunghezza dell'arco AM con esattezza. In effetto la formola generale  $y^{\frac{n}{m}} dy$

$$\left(y^{\frac{-2n}{m}} + \left(\frac{m+n}{m}\right) p^{\frac{-2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ diventa allora } y^{\frac{-1}{3}} dy$$

$dy \left( y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$ , il di cui integrale per

lo § 29 è  $= \left( y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} + C$ . Ma C

per lo § 85 è  $= - \left( \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$ . Sicchè l'

arco AM in sì fatto caso è  $= \left( y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{\left( y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}{1}$$

$$= \sqrt[3]{\left( \sqrt[3]{y^2} + \frac{4}{9} \sqrt[3]{p^2} \right)^3} - \sqrt[3]{\left( \frac{4}{9} \sqrt[3]{p^2} \right)^3}$$

Per la qual cosa, posti  $p$  di palmi 8, ed  $y$  di palmi 10, farà l'arco  $AM = 16. 228 - 2. 354 = \text{pal. } 13. 874$ .

COROLLARIO VII.

95. Quindi, per avere con esattezza la lunghezza dell' arco AM per mezzo dell'

integrale del secondo de' valori di  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ , è necessario 1° che sia negativo il valore di  $n$ ; 2° che sia intero, e positivo il va-

lore del rotto  $\frac{m+n}{-2n}$ , siccome accade, se l'

R 3 6.

equazione della curva è  $y^4 = x^5 p^{-1}$ , o  $y^4 = x^6 p^{-2}$ , o  $y^6 = x^7 p^{-1}$ , o  $y^6 = x^9 p^{-2}$ , ec.

## E S E M P I O II.

*Sia da rettificarsi qualunque arco circolare minore dell'arco di quadrante.*

Fig.4. *Contraffeggino AMB un mezzo cerchio, ed AB il suo diametro. Dall'estremo M dell'arco AM, minore dell'arco di quadrante, si cali su AB la perpendicolare MP. Posto il diametro AB = a, e poste l'ordinata MP = y, e l'ascissa corrispondente AP = x; farà l'equazione alla curva*

$$y^2 = ax - x^2.$$

Onde faranno

$$y = \sqrt{ax - x^2},$$

$$\frac{1}{2} adx - xdx$$

$$dy = \frac{\quad}{\quad},$$

$$\frac{\sqrt{ax - x^2}}{e}$$

$$\frac{1}{4} a^2 dx^2 - axdx^2 + x^2 dx^2$$

$$dy^2 = \frac{\quad}{ax - x^2}.$$

E

E perciò farà

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$\sqrt{dx^2 + \frac{\frac{1}{4} a^2 dx^2 - ax dx^2 + x^2 dx^2}{ax - x^2}} =$$

$$\frac{1}{2} adx (ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Ma

$$(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8} a^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{5}{2}} + \frac{5}{16} a^{-\frac{7}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \text{ ec.},$$

e conseguentemente

$$\frac{1}{2} adx (ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx + \frac{15}{64} a^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{5}{2}} dx + \frac{63}{2048} a^{-\frac{7}{2}} x^{-\frac{7}{2}} dx, \text{ ec.}$$

Dunque

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} a^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40} a^{-\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112} a^{-\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} = \sqrt{x} \left( \sqrt{a} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{x^2}{a}} + \frac{3}{40} \sqrt{\frac{x^4}{a^3}} + \frac{5}{112} \sqrt{\frac{x^6}{a^5}} \right) + C.$$

R 4

In

In oltre facendosi nullo così l'arco AM, che l'ascissa AP, quando il punto M cade in A; la serie ritrovata diverrà nulla, se si sostituirà in essa il zero in vece di  $x$ ; e conseguentemente la costante C è nulla. Per la qual cosa la lunghezza dell'arco AM è a un di presso =

$$\sqrt{x} \left( \sqrt{a} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{x^2}{a}} + \frac{3}{40} \sqrt{\frac{x^4}{a^3}} + \frac{5}{112} \sqrt{\frac{x^6}{a^5}}, \text{ ec.} \right).$$

## C O R O L L A R I O.

96. Essendo AP il seno verso dell'arco AM, ed essendo il seno verso dell'arco di 60 gradi la metà del raggio; è chiaro

che, se nella serie ritrovata si sostituirà  $\frac{1}{4} a$

in vece di  $x$ , la serie, che nascerà, darà a un di presso la lunghezza dell'arco di 60°, e conseguentemente il suo sestuplo farà la lunghezza dell'intera periferia. Ma col so-

stituire nella serie ritrovata  $\frac{1}{4} a$  in vece

di  $x$ , e conseguentemente  $\frac{1}{2} \sqrt{a}$  in vece di

$\sqrt{x}$ , si ha la serie

$$\frac{1}{2} \sqrt{a}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{a} \left( \sqrt{a} + \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{1}{16} a} + \frac{3}{40} \sqrt[5]{\frac{1}{256} a} + \frac{5}{112} \sqrt[7]{\frac{1}{4096} a}, \text{ ec.} \right),$$

ovvero

$$\frac{1}{2} a \left( 1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168}, \text{ ec.} \right) :$$

Dunque la lunghezza dell'intera periferia è a un di presso =

$$3a \left( 1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168}, \text{ ec.} \right) .$$

Per la qual cosa, posto il diametro di un palmo, farà la periferia a un di presso = 3. 1411551.

### AVVERTIMENTO.

97. I due esempj, che si sono posti in questo capo, sono sufficienti a far comprendere in che modo si deve procedere per determinare la lunghezza di qualunque arco di qualsivisia altra curva, di cui si ha l'equazione. Procediamo ora ad insegnare il modo di determinare col calcolo integrale le grandezze de' solidi. E' d'avvertire però che ci limiteremo a' solidi, che si possono considerare come generati dagli spazj, che le curve racchiudono co' loro assi; o co' loro asin-

asintoti , e colle ordinate agli stessi assi , o asintoti , mossi con una perfetta rivoluzione intorno a' medesimi assi , o asintoti , e che perciò diconsi *solidi di rivoluzione* .

## C A P . VII.

*Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in determinare le grandezze de' solidi di rivoluzione .*

## P R O B L . XVI.

98. *Determinare la formola generale , ch' esprime l' elemento di qualunque solido di rivoluzione .*

## S O L U Z I O N E .

Fig. I. - Contrassegnino  $AMB$  qualunque curva ,  $AC$  il suo asse , ed  $MP$  qualsivoglia sua ordinata . S' intenda tirata  $pm$  parallela , ed infinitamente vicina a  $PM$  , e lo spazio  $AMP$  s' intenda girare con una perfetta rivoluzione intorno l' asse  $AP$  . Essendo il trapezietto  $PMmp$  l' elemento dello spazio  $AMP$  , sarà il solidetto , che nella detta rivoluzione descriverà il trapezietto  $PMmp$  , il differenzia-

zia .

ziale, o sia l'elemento del solido, che descriverà nella medesima rivoluzione lo spazio AMP. Ma il trapezietto PMmp senza sensibile errore si può prendere per un rettangolo. Dunque il solidetto, che descrive sì fatto trapezietto nella detta rivoluzione, si può prendere per un cilindretto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza Pp. E perciò l'elemento del solido, che genera lo spazio AMP, girando con una perfetta rivoluzione intorno l'asse AP, è uguale al cilindretto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza Pp. Si mettano l'ordinata MP = y, e l'ascissa corrispondente AP = x; sarà Pp = dx. Si metta di più = c il numero, ch' esprime la periferia di un cerchio relativamente al suo raggio posto = 1. Essendo le periferie de' cerchi nella ragione de' loro raggi, sarà la periferia del cerchio, che ha per raggio PM = cy, e conseguentemente sarà il cerchio descritto col raggio

$$PM = cy \times \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} cy^2. \text{ Onde sarà}$$

il cilindretto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza Pp, o sia l'elemento del solido, che genera lo spazio AMP, girando con una perfetta rivoluzione

$$\text{intorno l'asse AP,} = \frac{1}{2} cy^2 dx. \text{ Lo stesso}$$

si ri.

si ritrova, se si considera il solido descritto dallo spazio, che una curva tra gli asintoti racchiude con uno degli asintoti, e con due ordinate allo stesso asintoto, mosso con una perfetta rivoluzione intorno al medesimo asintoto. Dunque la formola generale, ch'espri-  
me l'elemento di qualunque solido di rivo-

luzione è  $\pm \frac{1}{2} cy^2 dx$ . Ch'è ciò, che bisognava determinare.

### C O R O L L A R I O I.

99. Quindi si avrà la grandezza di un solido di rivoluzione, qualora è data l'equazione della curva, che racchiude lo spazio, che lo genera colla sua perfetta rivoluzione,

con determinare l'integrale di  $\frac{1}{2} cy^2 dx$

relativamente alla medesima curva, e con aggiugnere a sì fatto integrale il valore della costante C.

### C O R O L L A R I O II.

100. In oltre facendosi nulla l'ascissa in qualunque curva, che si riferisce al suo asse, quando si fa nullo lo spazio, che la curva racchiude con un'ordinata all'asse, preso dal vertice dello stesso asse, e conseguente-  
men-

mente nullo il solido, che genera lo stesso spazio colla sua perfetta rivoluzione intorno l'asse: è chiaro, che si avrà allora il valore della costante  $C$ , che si deve aggiugnere

all'integrale di  $\frac{1}{2}cy^2 dx$ , con sostituire in sì fatto integrale il zero in vece di  $x$ , e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

### COROLLARIO III.

101. Facendosi finalmente in qualunque Fig. 2. curva  $ABV$  tra gli asintoti  $OT, OR$  l'ascissa  $PO = OC$ , ch'è l'ascissa, che corrisponde all'ordinata  $BC$ , procedente per lo vertice  $B$  dell'asse della curva, quando si fa nullo lo spazio  $BCPM$ , preso dall'ordinata  $BC$ ; e conseguentemente nullo il solido, che genera lo stesso spazio, girando con una perfetta rivoluzione intorno a  $CP$ . È chiaro, che si avrà in sì fatto caso il valore della costante  $C$ , che si deve aggiugnere all'integrale

di  $\frac{1}{2}cy^2 dx$ , con sostituire nel detto

integrale in vece di  $x$  il valore dell'ascissa, che corrisponde all'ordinata all'asintoto, che procede per lo vertice dell'asse della curva, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

PRO.

102. Insegnare il modo di determinare l'integrale di  $\frac{1}{2} cy^2 dx$  relativamente a qualunque curva, di cui si ha l'equazione.

## S O L U Z I O N E .

Si ricavi dall'equazione della curva il valore di  $y$ , e s'innalzi sì fatto valore a quadrato. Si avrà in tal modo il valore di  $y^2$ .

Si sostituisca nella formola generale  $\frac{1}{2} ey^2 dx$  in vece di  $y^2$  il suo valore ritrovato; e si avrà una quantità, che conterrà solo  $x$ , e  $dx$ .

Si determini finalmente l'integrale della detta quantità, e si avrà l'integrale cercato. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

## E S E M P I O I.

Fig. 3. Sia da determinarsi la grandezza del conoide parabolico, che descrive lo spazio AMP, racchiuso dall'arco AM della parabola di qualunque genere, dall'asse AP, e dall'ordinata MP allo stesso asse, mosso con una perfetta rivoluzione intorno AP.

Po.

Posto il paramentro dell'asse =  $p$ , e poste l'ordinata  $MP = y$ , e l'ascissa corrispondente  $AP = x$ , farà l'equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = p^n x^m.$$

Onde faranno

$$y = \left( \frac{p^{m+n}}{x^{m+n}} \right)^{\frac{1}{m+n}}$$

$$y^2 = p^{\frac{2m+2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}},$$

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c p^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}} dx.$$

E perciò farà

$$\frac{1}{2} c p^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}} + C$$

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c p^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}} + C.$$

E, sostituendo  $y^2$  in vece di  $p^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}}$ , farà

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c y^2 x + C.$$

Ma il valore di  $C$  è nullo, siccome si rileva dal sostituire nell'integrale ritrovato il zero in vece di  $x$ . Dunque il conoide cerca-

cato è  $= \frac{m+n}{3m+n} \times \frac{1}{2} cy^2 x$ . Per la qual

cosa contrassegnando  $\frac{1}{2} cy^2 x$  il cilindro,

che ha per base il cerchio descritto col raggio  $PM = y$ , e per altezza  $AP = x$ , o sia il cilindro, che ha col conoide la stessa base, e la stessa altezza; sarà qualunque conoide parabolico quella parte del cilindro, che ha con esso la stessa base, e la stessa al-

tezza, che dinota il rotto  $\frac{m+n}{3m+n}$ .

Quindi

1. Se la parabola è di primo genere. Essendo allora  $y^2 = px$  l'equazione della curva, e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ , farà il conoide parabolico la metà del cilindro, che l'uguaglia nella base, e nell'altezza.

2. Se la parabola è di secondo genere. Posta la sua equazione  $y^3 = px^2$ , e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 1$ , farà il conoide parabolico  $\frac{3}{7}$  del cilindro, che l'uguaglia nella base, e nell'altezza. Posta poi la sua equazione  $y^3 = p^2 x$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 2$ , farà il conoide parabo-

li-

lico  $\frac{3}{5}$  del cilindro, che ha con esso la medesima base, e la medesima altezza.

3. Se la parabola è di terzo genere. Secondochè la sua equazione è  $y^4 = px^3$ , o  $y^4 = p^2 x^2$ , o  $y^4 = p^3 x$ , e conseguentemente secondochè sono  $m = 3, n = 1$ ; o  $m = 2, n = 2$ , o  $m = 1, n = 3$ , così sarà il conoide parabolico  $\frac{2}{5}$ , o  $\frac{1}{2}$ , o  $\frac{2}{3}$  del cilindro, che l'uguaglia nella base, e nell'altezza; e così procedendo innanzi.

E S E M P I O II.

Sia da determinarsi la porzione sferica, che Fig.4. descrive lo spazio circolare APM, mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad AP.

Posto il diametro AB del cerchio =  $a$ , e poste l'ordinata MP =  $y$ , e l'ascissa corrispondente AP =  $x$ , sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = ax - x^2.$$

Onde faranno

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c (ax dx - x^2 dx),$$

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C.$$

S Ma

Ma il valore di  $C$  è nullo, siccome si rileva dal sostituire nell'integrale ritrovato il zero in vece di  $x$ . Dunque la solidità della porzione sferica, che ha per base il cerchio descritto col raggio  $PM$ , e per altezza  $AP$ ,

$$è = \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right). \text{ Per la}$$

qual cosa, posti il diametro della sfera di palmi 13, e l'altezza della porzione sferica di palmi 4, farà la solidità della medesima por-

$$zione = 3 \cdot 141 \times \left( 104 - 21 \frac{1}{3} \right) =$$

pal. cubici 259. 656.

### C O R O L L A R I O I.

103. Essendo l'altezza della mezza sfera uguale al raggio, e l'altezza della sfera intera uguale al diametro; è chiaro che si avrà la grandezza della mezza sfera col so-

stituire nell'espressione ritrovata  $\frac{1}{2} c$  in ve-

ce di  $x$ , e la grandezza della sfera intera col sostituire nella detta espressione  $a$  in vece di  $x$ . Sicchè saranno la solidità della mezza

$$\text{sfera} = \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{8} a^3 - \frac{1}{24} a^3 \right) = \frac{1}{2} c$$

X

$\times \frac{1}{12} a^3$ , e la solidità dell'intera sfera =

$$\frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) = \frac{1}{2} c \times \frac{1}{6} a^3.$$

Per la qual cosa, posto il diametro di una sfera di palmi 4, farà la sfera = 3. 141

$$\times 10 \frac{2}{3} = \text{pal. cubici } 33. 504.$$

### COROLLARIO II.

104. In oltre essendo la grandezza di una sfera, che ha il diametro =  $a$ , =  $\frac{1}{2} c \times$

$$\frac{1}{6} a^3 = \frac{2}{3} \text{ di } \frac{1}{2} c \times \frac{1}{4} a^3, \text{ ed essendo}$$

il cerchio massimo della stessa sfera =  $\frac{1}{2} c \times$

$\frac{1}{4} a^2$ , e conseguentemente il cilindro, che ha per base il cerchio massimo della medesima sfera, e per altezza il diametro, =

$$\frac{1}{2} c \times \frac{1}{4} a^3; \text{ è chiaro che qualunque sfe-}$$

ra sia  $\frac{2}{3}$  del cilindro, che ha per base il suo cerchio massimo, e per altezza il diametro, o sia  $\frac{2}{3}$  del cilindro circoscritto intorno alla medesima sfera.

## E S E M P I O III.

Fig. 6, e 7. Sieno  $ACB$  una mezza ellisse,  $AB$  il suo asse maggiore, o minore, ed  $MP$  un'ordinata qualunque all'asse  $AB$ ; e sia da determinarsi la porzione di ellitticoide, che descrive lo spazio  $AMP$  girando con una perfetta rivoluzione intorno ad  $AP$ .

Si mettano l'asse  $AB$  della rivoluzione  $= a$ , l'altro asse  $= b$ , l'ordinata  $MP = y$ , e l'ascissa corrispondente  $AP = x$ ; sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (ax - x^2).$$

Onde faranno

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c (ax dx - x^2 dx),$$

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C.$$

Ma

Ma la costante è nulla, siccome è facile a comprendere. Dunque la grandezza della porzione dell'ellittoide, che descrive lo spazio ellittico AMP girando con una perfetta

ta rivoluzione intorno ad AP, è  $= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right)$ . Per la qual cosa,

posti l'asse della rivoluzione di palmi 4, l'altro asse di palmi 3, e l'altezza AP della porzione di ellittoide, che si cerca, di palmi 2, farà la grandezza della detta

porzione  $= \frac{9}{16} \times 3 \cdot 141 \times 5 \frac{1}{3} =$  pal. cubici 9. 423.

Posti poi l'asse della rivoluzione di palmi 4, l'altro asse di palmi 5, e l'altezza AP di palmi 2; farà la grandezza della porzione d'ellittoide, descritta dallo spazio ellittico AMP,

$= \frac{25}{16} \times 3 \cdot 141 \times 5 \frac{1}{3} =$  pal. cubici 26. 175.

COROLLARIO I.

105. Essendo l'altezza del mezzo ellittoide uguale alla metà dell'asse della rivoluzione, e l'altezza dell'intero ellittoide uguale all'asse intero della rivoluzione: è chiaro

S 3 ro

ro che si avrà la grandezza del mezzo ellit-  
toide col sostituire nell'espressione ritro-

vata  $\frac{1}{2} a$  in vece di  $x$ , e quella dell'ellit-

toide intero col sostituire nella detta espres-  
sione  $a$  in vece di  $x$ . Sicchè faranno il mez-

$$\text{zo ellittoide} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{8} a^3 - \frac{1}{24} a^3 \right) =$$

$$\frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \times \frac{1}{12} a^3, \text{ e l'ellittoide inte-}$$

$$\text{ro} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) =$$

$$\frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \times \frac{1}{6} a^3; \text{ cioè farà l'intero}$$

ellittoide quarto proporzionale in ordine ad

$$a^2, a b^2, \text{ e ad } \frac{1}{2} c \times \frac{1}{6} a^3. \text{ Ma } \frac{1}{2} c \times$$

$\frac{1}{6} a^3$  dà la grandezza della sfera, che ha

il diametro  $= a$  (§ 103). Dunque qua-

lunque conoide ellittico è quarto proporzio-

nale in ordine al quadrato dell'asse della

rivoluzione, al quadrato dell'altro asse, ed

alla sfera, che ha per diametro l'asse della

rivoluzione. Per la qual cosa, posti l'asse

della rivoluzione di palmi 4, e l'altro asse

di

di palmi 3, farà l'ellittoide quarto proporzionale in ordine a 16, a 9, ed 33. 504, e conseguentemente = pal. cubici 18. 846. Posti poi l'asse della rivoluzione di palmi 4, e l'altro asse di palmi 5, farà l'ellittoide quarto proporzione in ordine a 16, a 25, ed a 33. 504, e conseguentemente = pal. cubici 52. 35.

COROLLARIO II.

106. Essendo in oltre  $\frac{b^2}{2} \times \frac{1}{2} c \times \frac{1}{6}$   
 $a^3 = \frac{2}{3}$  di  $\frac{1}{2} c \times \frac{1}{4} b^2 a$ , ed essendo il  
 cerchio, che ha il diametro =  $b$ , =  $\frac{1}{2} c \times$   
 $\frac{1}{2} b^2$ , e conseguentemente il cilindro, che  
 ha per base il cerchio, che ha il diametro  
 =  $b$ , e per altezza  $a$ , =  $\frac{1}{2} c \times \frac{1}{4} b^2 a$ ;  
 è chiaro che qualunque conoide ellittico sia  
 $\frac{2}{3}$  del cilindro, che ha per altezza l'asse  
 $\frac{3}{4}$  della rivoluzione, e per base il cerchio, che  
 ha per diametro l'altro asse, o sia  $\frac{2}{3}$  del  
 S 4 cilin.

cilindro circoscritto intorno al medesimo ellitticoide, e che ha per altezza l'asse della rivoluzione.

## E S E M P I O IV.

Fig. 8. Sia  $AM$  qualunque iperbola, e sieno  $OA$  la metà dell'asse primario,  $OB$  la metà dell'asse secondario, ed  $MP$  qualunque ordinata all'asse primario prolungato; e sia da determinarsi la grandezza del conoide iperbolico, che genera lo spazio iperbolico  $AMP$  mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad  $AP$ .

Posti l'asse primario  $= a$ , l'asse secondario  $= b$ , l'ordinata  $MP = y$ , e l'ascissa corrispondente  $AP = x$ , farà l'equazione alla curva

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (ax + x^2).$$

Onde faranno

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c (ax dx + x^2 dx),$$

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^3 \right) + C.$$

Ma la costante deve essere nulla, siccome è facile a comprendere. Dunque la grandezza del conoide iperbolico, che descrive lo spazio

zio iperbolico AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno ad AP, è =

$$\frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^3 \right).$$

COROLLARIO I.

107. Se si suppone l'ascissa AP uguale all'asse primario, o sia  $x = a$ , farà il conoide descritto dallo spazio iperbolico AMP

$$= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} a^3 + \frac{1}{3} a^3 \right) =$$

$$\frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \times \frac{5}{6} a^3 = \frac{5}{12} ab^2 c. \text{ Per}$$

la qual cosa, posti l'asse primario di palmi 10, e l'asse secondario di palmi 8; essendo  $c = 6.282$ , farà il conoide iperbolico

$$= \frac{5}{12} \times 10 \times 64 \times 6.282 = \text{pal. cu-}$$

bici 1675.2.

COROLLARIO II.

108. Se l'iperbola è equilatera; essendo allora  $a = b$ , farà il conoide iperbolico =

$$\frac{1}{2} c \left( \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^3 \right); \text{ e nel caso del-}$$

l'

l'ascissa uguale all'asse primario, farà il co-

noide iperbolico =  $\frac{5}{12} a^3 c$ . Per la qual

cosa, posto qualunque degli assi di palmi 10, essendo  $c = 6.282$ , farà il conoide iper-

bolico =  $\frac{5}{12} \times 1000 \times 6.282 =$  pal.  
cubici 2617.5.

### E S E M P I O V.

*Sia MG qualunque ordinata all'asse secondario dell'iperbola AM prolungato, e sia da determinarsi la grandezza del solido, che genera lo spazio iperbolico AOCM; mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad OC.*

Posti l'asse primario =  $a$ , l'asse secondario =  $b$ , l'ordinata MC =  $y$ , e l'ascissa corrispondente OC =  $x$ ; farà l'equazione alla curva

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{1}{4} b^2 + x^2 \right).$$

Onde faranno

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{4} b^2 dx + x^2 dx \right),$$

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{4} b^2 x + \frac{1}{3} x^3 \right) + C.$$

Ma

Ma la costante deve essere nulla ; perchè quando si fa nullo lo spazio AOCM, si fa nulla anche l'ascissa OC, o sia  $x$ . Dunque il solido, che descrive lo spazio iperbolico AOCM, girando con una perfetta rivoluzione intorno ad OC, è =

$$\frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{4} b^2 x + \frac{1}{3} x^3 \right)$$

COROLLARIO I.

109. Se si suppone l'ascissa OC uguale all'asse secondario, o sia  $x = b$ , farà il solido descritto dallo spazio iperbolico AOCM

$$= \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{4} b^3 + \frac{1}{3} b^3 \right) =$$

$\frac{7}{24} a^2 bc$ . Per la qual cosa, posti l'asse primario di palmi 10, e l'asse secondario

di palmi 8, farà il detto solido =  $\frac{7}{24} \times 100 \times 8 \times 6.282 =$  pal. cubici 1465.8.

COROLLARIO II.

110. Se l'iperbola è equilatera; essendo allora  $a = b$ , farà il solido descritto dallo spa-

spazio iperbolico AOCM  $= \frac{1}{2} c \left( \frac{1}{4} b^2 x + \right.$

$\left. \frac{1}{3} x^3 \right)$ . E nel caso, che sia  $x = b$ , farà  
il detto solido  $= \frac{7}{24} b^3 c$ . Per la qual co-

sa, posto ciascuno degli assi di palmi 10, farà  
il solido descritto dallo spazio AOCM  $=$

$\frac{7}{24} \times 1000 \times 6 \cdot 282 =$  pal. cubici  
1832. 25.

## E S E M P I O VI.

Fig. 2. Sieno ABV un' iperbola equilatera tra gli  
asintoti OR, OT, ed MP, e BC due ordi-  
nate all' asintoto OR, delle quali BC sia  
quella, che procede per lo vertice B dell' asse  
dell' iperbola; e sia da determinarsi il solido,  
che genera lo spazio asintotico BCPM, mosso  
con una perfetta rivoluzione intorno a CP.

Posto il lato della potenza, o sia OC  $= a$ ,  
e poste l'ordinata MP  $= y$ , e l'ascissa cor-  
rispondente OP  $= x$ , farà l'equazione alla  
curva

$$yx = a^2.$$

Onde faranno

$$y = \frac{a^2}{x} = a^2 x^{-1},$$

$y^2$

$$y^2 = a^4 x^{-2},$$

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} ca^4 x^{-2} dx,$$

E perciò

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} ca^4 x^{-1} + C = \frac{a^4 c}{2x} + C.$$

Ma

$$C = \frac{a^4 c}{2a} \quad (\S 100).$$

Dunque il solido, che descrive lo spazio asintotico BCPM, girando con una perfetta ri-

voluzione intorno a CP, è =  $\frac{a^4 c}{2a} - \frac{a^4 c}{2x}$

=  $\frac{1}{2} c \left( a^3 - \frac{a^4}{x} \right)$ . Per la qual cosa,

poste OC = a di palmi 10, e OP = x di palmi 40, farà il solido descritto dallo spazio asintotico BCPM = 3. 141 X 750 = pal. cubici 2355. 75.

### COROLLARIO I.

III. Essendo il solido descritto dallo spa-

zio asintotico BCPM =  $\frac{1}{2} c \left( a^3 - \frac{a^4}{x} \right)$

$$= \frac{1}{2} c \left( a^3 - \frac{a^4}{OP} \right); \text{ tirata qualunque al-}$$

tra ordinata NQ all' asintoto OR, farà il solido descritto dallo spazio asintotico BCQN

$$= \frac{1}{2} c \left( a^3 - \frac{a^4}{OQ} \right). \text{ Onde farà il soli-}$$

do descritto dallo spazio asintotico NQPM, compreso tra le ordinate NQ, MP all' asin-

$$\text{toto OR, } = \frac{1}{2} c \left( a^3 - \frac{a^4}{OP} \right) - \frac{1}{2} c$$

$$\left( a^3 - \frac{a^4}{OQ} \right) = \frac{1}{2} c \left( \frac{a^4}{OQ} - \frac{a^4}{OP} \right).$$

Per la qual cosa, poste OC = a di palmi 10, OP di palmi 40, ed OQ di palmi 20, farà il solido descritto dallo spazio asintotico NQPM = 3 . 141 X 250 = pal. cubici 785 . 25.

### C O R O L L A R I O II.

112. Se l' ascissa OP = x si fa infinita

si farà  $\frac{a^4}{x} = \frac{a^4}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ ; e conseguen-

temente si potrà prendere senza sensibile er-

rore  $a^3$  per  $a^3 - \frac{a^4}{x}$ . Onde, prolungate,

all

all' infinito e l'iperbola  $BV$ , e l'asintoto  $OR$ , farà il solido infinitamente lungo, che genererà lo spazio asintotico infinitamente lungo  $BCRV$ , mosso con una perfetta rivo-

luzione intorno a  $CR$ ,  $= \frac{1}{2} c \times a^3 =$

$\frac{1}{2} c \times OC^3$ . Ma  $\frac{1}{2} c \times OC^3$  dà il ci-

lindro, che ha per base il cerchio descritto

col raggio  $OC$ , e ch'è  $= \frac{1}{2} c \times OC^2$ ,

e per altezza  $OC$ . Dunque il detto solido infinitamente lungo è uguale al cilindro, che ha per base il cerchio, che ha per raggio il lato della potenza dell'iperbola, e per altezza lo stesso lato della potenza. Per la qual cosa, posto il lato della potenza di palmi 10, farà il detto solido di 3141 pal. cubici.

## C A P. VIII.

*Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in determinare le superficie curve de' solidi di rivoluzione.*

## P R O B L. XVIII.

113. *Ritrovare la formola generale, ch'espri-  
me l' elemento della superficie curva di qualun-  
que solido di rivoluzione.*

## S O L U Z I O N E.

**Fig. 1** Contrassegnino  $AMB$  qualunque curva,  $AC$  il suo asse, ed  $MP$  qualsivoglia sua ordinata. S' intenda tirata  $pm$  parallela, ed infinitamente vicina a  $MP$ , e lo spazio  $AMP$  s' intenda girare con una perfetta rivoluzione intorno l' asse  $AP$ . Essendo l' archetto infinitamente picciolo  $Mm$  l' elemento dell' arco  $AM$ , farà la superficietta, che nella detta rivoluzione descriverà l' archetto  $Mm$ , il differenziale, o sia l' elemento dell' intera superficie, che descriverà nella medesima rivoluzione l' intero arco  $AM$ , o sia l' elemento dell' intera superficie curva del solido

do, che descriverà lo spazio AMP. Ma il trapezietto PMmp senza sensibile errore si può prendere per un rettangolo: e perciò la superficietta, che descrive l'archetto Mm nella detta rivoluzione, si può prendere per la superficietta cilindrica del cilindretto retto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per uno de' suoi lati Mm; e conseguentemente è uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio descritto col raggio PM, e da Mm. Dunque l'elemento della superficie curva del solido, che genera lo spazio AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno l'asse AP, è uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio descritto col raggio PM, e dall'archetto Mm. Si mettano l'ordinata MP = y, e l'ascissa corrispondente AP = x, sarà l'ar-

chetto  $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Si metta di più = c il numero, ch'esprime la lunghezza della periferia di qualunque cerchio relativamente al suo raggio posto = r; sarà = cy la periferia del cerchio descritto col raggio PM = y. Onde sarà il rettangolo fatto dalla periferia del cerchio descritto col raggio PM, e dall'archetto Mm, o sia l'elemento della superficie curva del solido, che genera lo spazio AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno l'asse AP

$= cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Lo stesso si trova per ri-  
T
spet-

spetto dell' elemento della superficie curva del solido descritto dallo spazio, che qualunque curva tra gli asintoti racchiude con uno degli asintoti, e con due ordinate allo stesso asintoto, mosso con una perfetta rivoluzione intorno al medesimo asintoto. Dunque la formola generale, ch' esprime l' elemento della superficie curva di qualunque solido di rivoluzione, è  $= cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , Ch' è ciò, che bisognava trovare.

## C O R O L L A R I O I.

114. Quindi si avrà la grandezza della superficie curva di un solido di rivoluzione, qualora è data l'equazione della curva, che racchiude lo spazio, che genera sì fatto solido colla sua perfetta rivoluzione, con determinare l' integrale di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  relativamente alla medesima curva, e con aggiugnere al detto integrale il valore della costante C.

## C O R O L L A R I O II.

115. In oltre facendosi nulla sì l'ascissa, che l'ordinata in qualunque curva, che si riferisce al suo asse, quando si fa nullo lo spazio, che la medesima curva racchiude col-  
l'af-

l'asse, e con una sua ordinata, preso dal vertice dello stesso asse, e conseguentemente nullo il solido, che genera lo stesso spazio colla sua perfetta rivoluzione intorno l'asse, e nulla la superficie curva del medesimo solido: è chiaro che si avrà allora il valore della costante  $C$ , che si deve aggiugnere al-

l'integrale di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , con sostituire in sì fatto integrale il zero in vece di  $x$ , o di  $y$ , e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

### COROLLARIO III.

116. Facendosi finalmente in qualunque curva tra gli asintoti l'ordinata  $PM$  uguale all'ordinata  $BG$ , che procede per lo vertice  $B$  dell'asse della curva, e l'ascissa  $OP$  uguale all'ascissa  $OC$ , che corrisponde all'ordinata  $BC$ , quando si fa nullo lo spazio  $BCPM$ , preso dall'istessa ordinata  $BC$ ; e conseguentemente nullo il solido, che genera lo stesso spazio, girando con una perfetta rivoluzione intorno a  $CP$ , e nulla la superficie curva del medesimo solido: è chiaro che si avrà in sì fatto caso il valore della costante  $C$ , che si deve aggiugnere al-

l'integrale di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , con sostituire nel detto integrale in vece di  $y$  l'ordi-

ordinata all' asintoto, che procede per lo vertice dell' asse della curva, o in vece di  $x$  l' ascissa, che corrisponde all' ordinata procedente per lo vertice dell' asse, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

## P R O B L. XIX.

117. Insegnare il modo di determinare l' integrale di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , corrispondente ad una curva, di cui si ha l' equazione.

## S O L U Z I O N E.

1. Si ricavi dall' equazione della curva il valore di  $y$ , o di  $x$ . Indi si determini il differenziale di sì fatto valore di  $y$ , o di  $x$ , e s' innalzi tale differenziale a quadrato. Si avrà in tal modo il valore di  $dy^2$ , o di  $dx^2$ .

2. Si sostituiscano nella formola generale  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  in vece di  $y$ , e di  $dy^2$  i loro valori ritrovati; e si avrà una quantità, che conterrà solo  $x$ , e  $dx$ ; ovvero si

sostituisca in  $\sqrt{dx^2 + dy^2}$  in vece di  $dx^2$  il suo valore ritrovato, e quel, che nasce si moltiplichi per  $cy$ ; e si avrà una quantità, che conterrà solo  $y$ , e  $dy$ .

3. Si determini finalmente l' integrale della  
la

la detta quantità, che conterrà solo  $x$ , e  $dx$ , o solo  $y$ , e  $dy$ , e si avrà l'integrale cercato.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da determinarsi la grandezza della superficie curva del conoide parabolico, che descrive lo spazio AMP, racchiuso dall'arco AM della parabola di qualunque genere, dall'asse AP, e dall'ordinata MP allo stesso asse, e mosso con una perfetta rivoluzione intorno al medesimo asse. Fig. 3.

Posti il parametro dell'asse =  $p$ , l'ordinata MP =  $y$ , e l'ascissa corrispondente AP =  $x$ ; farà l'equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = x^m p^n.$$

Onde faranno

$$x^m = \frac{y^{m+n}}{p^n},$$

$$x = p^{\frac{m+n}{m}} y^{\frac{n}{m}},$$

$$dx = \frac{m+n}{m} p^{\frac{m+n}{m}} y^{\frac{n}{m}-1} dy,$$

$$dx^2 = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{\frac{2(m+n)}{m}} y^{\frac{2n}{m}-2} dy^2.$$

E perciò saranno

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = V \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2 + dy^2$$

$$= dy \left( 1 + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$cy \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2}$$

$$cy dy \left( 1 + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

E, mutando il segno all'esponente di  $y$  nel binomio del modo insegnato nel § 30, farà

$$cy \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$cy^{\frac{n}{m} + 1} dy \left( y^{-\frac{2n}{m}} + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sicchè s'avrà la superficie curva, che si cerca, con determinare l'integrale di uno de'

valori ritrovati di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , e con aggiugnere a sì fatto integrale quel, che nasce col sostituire il zero in vece di  $y$  nello stesso integrale, preso però col segno contrario (§ 115).

COROLLARIO I.

118. Ragionando, come si è ragionato nel § 88, si comprenderà che si avrà con esattezza la superficie curva, che si cerca:

1° se sarà  $\frac{2n}{m} = 2$ , o sia  $m = n$ : 2° se

sarà intero, e positivo il valore del rotto

$\frac{m}{n}$ : 3° se, essendo negativo il valore di  $n$ ,

sarà intero, e positivo il valore del rotto

$\frac{2m + n}{-2n}$ ; e che, per avere la detta superfie

cie con esattezza, si dovrà integrare ne' primi due casi il primo de' valori ritrovati di

$\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , e nel terzo caso il secondo degli stessi valori.

## C O R O L L A R I O II.

119. Se la parabola è di primo genere ;  
Essendo la sua equazione  $y^2 = px$ , e con-  
seguentemente  $m = 1$ ,  $n = 1$ , o sia  
 $m = n$ , la superficie curva del conoide si  
avrà con esattezza. In effetto la formola ge-

nerale  $cydy \left( 1 + \left( \frac{m+n}{m} \right)^2 p \frac{2n}{m} y \frac{2n}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$  diven-

ta allora  $cydy \left( 1 + \frac{4y^2}{p^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ , il di cui integra-

le per lo § 26 è  $= \frac{1}{12} p^2 c \left( 1 + \frac{4y^2}{p^2} \right)^{\frac{3}{2}} +$

$C = \frac{1}{12} p^2 c \sqrt{\left( 1 + \frac{4y^2}{p^2} \right)^3} + C$ . Ma

$C$  per lo § 115 è  $= -\frac{1}{12} p^2 c$ . Sicchè

la superficie curva del conoide in tale caso

è  $= \frac{1}{12} p^2 c \left( \sqrt{\left( 1 + \frac{4y^2}{p^2} \right)^3} - 1 \right)$ .

Per la qual cosa, posti il parametro di pal-  
mi 4, e l'ordinata PM, o sia  $y$  di palmi  
10; essendo  $c = 6.282$ , farà la superficie  
curva

curva del conoide  $\approx 8.376 \times 131.57$   
 $\approx$  pal. quadrati 1102.03032.

COROLLARIO III.

120. Se la parabola è di secondo genere.  
 Posta la sua equazione  $y^2 = px^2$ , e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 1$ , la superficie curva del conoide si avrà con esattezza, e s'integrerà il primo de' valori di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  del modo insegnato nel § 29. Posta poi la sua equazione  $y^3 = p^2 x$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 2$ , la detta superficie si avrà per approssimazione.

COROLLARIO IV.

121. Se la parabola è di terzo genere.  
 Posta la sua equazione  $y^4 = px^3$ , e conseguentemente  $m = 3$ ,  $n = 1$ , la superficie curva del conoide si avrà con esattezza integrando esattamente il primo de' valori di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  del modo insegnato nel § 29. Posta poi la sua equazione  $y^4 = p^2 x^2$ , e conseguentemente  $m = 2$ ,  $n = 2$ , la detta superficie anche si avrà con esattezza, integrando esattamente il detto valore di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  del modo insegnato nel § 26. Posta finalmente la sua equazione  $y^4 = p^3 x$ , e conseguentemente  $m = 1$ ,  $n = 3$ , la

la detta superficie si determinerà per approssimazione, integrando per approssimazione

il detto valore di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  del modo insegnato nel § 35.

### C O R O L L A R I O V.

122. Se l'equazione della curva è  $y^3 = ax^5 p^{-2}$ ; essendo allora  $m = 5$ ,  $n = -2$ ,

farà  $\frac{2m + n}{-2m} = \frac{8}{4} = 2$ ; e conseguente-

mente si potrà avere allora con esattezza la superficie curva del solido descritto dallo spazio AMP, integrando esattamente il se-

condo de' valori di  $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$  del modo insegnato nel § 29.

### E S E M P I O II.

*Sia da determinarsi la grandezza della superficie della porzione sferica, che descrive lo spazio circolare AMP, mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad AP.*

Posti il diametro AB del cerchio =  $a$ , l'ordinata MP =  $y$ , e l'ascissa corrispondente AP =  $x$ , farà l'equazione alla curva

$$y^2 = ax - x^2.$$

Ora

Onde faranno

$$y = \sqrt{ax - x^2},$$

$$\frac{1}{2} adx - xdx$$

$$dy = \frac{\frac{1}{2} adx - xdx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

$$\frac{1}{4} a^2 dy^2 = ax dx^2 + x^2 dx^2$$

$$dy^2 = \frac{4}{ax - x^2} \cdot$$

E perciò faranno

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} adx (ax - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$cy \sqrt{dx^2 + dy^2} = c (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} adx$$

$$(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} cadx;$$

Ma

$$\int \frac{1}{2} cadx = \frac{1}{2} acx + C;$$

$$C = 0 \text{ ( § 115 )};$$

Dunque la superficie della porzione sferica, che

300      T R A T T A T O  
 che ha per base il cerchio descritto col raga

gio PM, e per altezza AP, è =  $\frac{1}{2} acx$ .

Per la qual cosa, posto il diametro di palmi 13, e posta l'altezza della porzione sferica di palmi 4, farà la superficie della medesima

porzione =  $6 \frac{1}{2} \times 6.282 \times 4 =$  pal.  
 quadrati 163.332.

### C O R O L L A R I O I.

123. Essendo l'altezza della sfera uguale al diametro; è chiaro che si avrà la superficie dell'intera sfera col sostituire nell'espressione ritrovata  $a$  in vece di  $x$ . Sicchè l'intera superficie della sfera è =

$\frac{1}{2} ca^2$ . Ma  $\frac{1}{2} ca^2$  dà il cerchio, che ha

per raggio il diametro della sfera, o sia il quadruplo del cerchio massimo della sfera. Dunque la superficie di qualunque sfera è quadrupla del suo cerchio massimo.

### C O R O L L A R I O II.

124. Essendo la superficie della porzione sferica, che ha per altezza AP =  $\frac{1}{2} can$ ,  
 e la

e la superficie della sfera intera  $= \frac{1}{2} ca^2$  ;

farà la superficie della detta porzione sferica

alla superficie dell'intera sfera  $= \frac{1}{2} cax$  :

$\frac{1}{2} ca^2 = x : a$  . Sicchè la superficie di qua-

lunque porzione di sfera sta alla superficie dell'intera sfera, come l'altezza della porzione sferica al diametro della sfera .

### ESEMPIO III.

*Sia da determinarsi la grandezza della superficie curva del conoide iperbolico, che descrive lo spazio AMP dell'iperbola equilatera di primo genere, mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad AP.* Fig. 8

Posti il semiasse  $OA = a$  , l'ordinata  $MP = y$  , e l'ascissa  $OP$  , presa dal centro  $= x$  , farà l'equazione alla curva

$$y^2 = x^2 - a^2 .$$

Onde faranno

$$y = \sqrt{x^2 - a^2} ,$$

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} .$$

6

$$dy^2 = \frac{c^2 dx^2}{x^2 - a^2}$$

E perciò

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{x^2 - a^2}}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \sqrt{2x^2 - a^2}$$

$$e\gamma \sqrt{dx^2 + dy^2} = c dx \sqrt{2x^2 - a^2}$$

Ma

$$\sqrt{2x^2 - a^2} = x\sqrt{2} - \frac{\frac{1}{2}a^2}{x\sqrt{2}} - \frac{\frac{5}{8}a^4}{x^3\sqrt{8}} - \frac{\frac{5}{24}a^6}{x^5\sqrt{32}}, \text{ ec.}$$

e perciò

$$c dx \sqrt{2x^2 - a^2} = c x dx \sqrt{2} - \frac{\frac{1}{2} c a^2 dx}{x\sqrt{2}} - \frac{\frac{5}{8} c a^4 dx}{x^3\sqrt{8}} - \frac{\frac{5}{24} c a^6 dx}{x^5\sqrt{32}}, \text{ ec.}$$

Sic.

Sicchè

$$\int cy \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} cx^2 \sqrt{2} - \frac{\frac{3}{2} ca^2 \log}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{3}{8} ca^4}{2x^2 \sqrt{8}} + \frac{\frac{3}{8} ca^6}{4x^4 \sqrt{32}}, \text{ ec. } + C = \frac{1}{2} c \left( x \sqrt{2} - \frac{a^2 \log x}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{3}{4} a^4}{2x^2 \sqrt{8}} + \frac{\frac{3}{8} a^6}{4x^4 \sqrt{32}}, \text{ ec. } \right) + C.$$

In oltre quando si fa nullo lo spazio AMP, e conseguentemente nullo il solido, che descrive sì fatto spazio, girando con una perfetta rivoluzione intorno ad AP, e nulla la superficie curva del medesimo solido, si fa l'ascissa OP = OA, o sia  $x = a$ . Onde si avrà il valore di C col sostituire nella serie ritrovata  $a$  in vece di  $x$ , e con prendere quel, che nasce, col segno contrario; cioè sarà

$$C = - \frac{1}{2} c \left( a^2 \sqrt{2} - \frac{a^2 \log a}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{3}{4} a^4}{2\sqrt{8}} + \frac{\frac{3}{8} a^6}{4\sqrt{32}}, \text{ ec. } \right)$$

Sicchè la superficie curva del conoide iperbolico, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza AP, è =

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} c \left( x^2 \sqrt{2} - \frac{a^2 lx}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{4} a^4}{2x^2 \sqrt{8}} + \right. \\
 & \left. \frac{\frac{1}{8} a^6}{4x^4 \sqrt{32}}, \text{cc.} - \frac{1}{2} c \right) a^2 \sqrt{2} - \frac{a^2 la}{\sqrt{2}} + \\
 & \left. \frac{\frac{1}{4} a^2}{2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8} a^2}{4\sqrt{32}}, \text{cc.} \right) = \\
 & \frac{1}{2} c \left( x^2 \sqrt{2} - a^2 \sqrt{2} - \frac{a^2 lx}{\sqrt{2}} + \frac{a^2 la}{\sqrt{2}} + \right. \\
 & \frac{\frac{1}{4} a^4}{2x^2 \sqrt{8}} - \frac{\frac{1}{4} a^2}{2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8} a^6}{4x^4 \sqrt{32}} - \\
 & \left. \frac{\frac{1}{8} a^2}{4\sqrt{32}}, \text{cc.} \right).
 \end{aligned}$$

Per la qual cosa, poste OA di palmi 5,  
 ed OP di palmi 10,  $\frac{1}{2} c = 3.141$ , fa-  
 rà la superficie cercata  $= 3.141 (141 -$   
 $35.25 - 40.82 + 28.53 - 1.10 +$   
 $0.008 - 0.133 \text{ ec.}) = 3.141 \times 92.$   
 $505 = \text{pal. quadrati } 290.558.$

*Fino del calcolo integrale.*

608 81



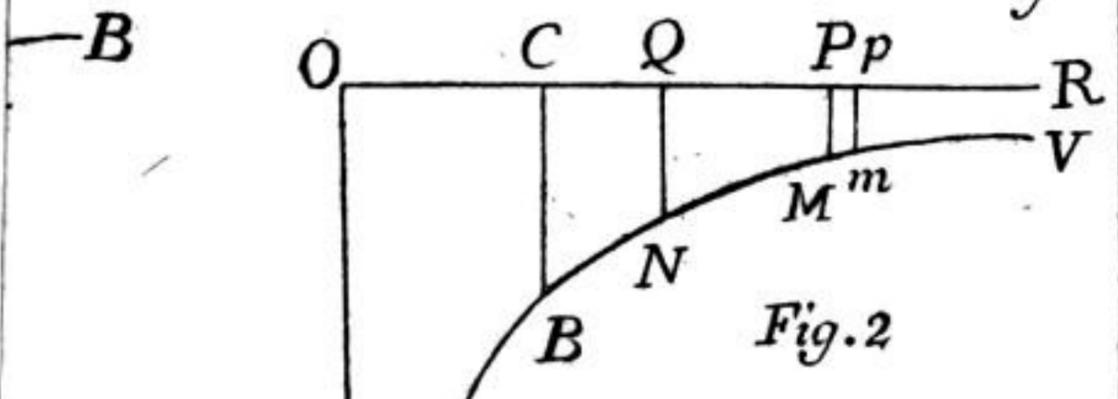


Fig. 2

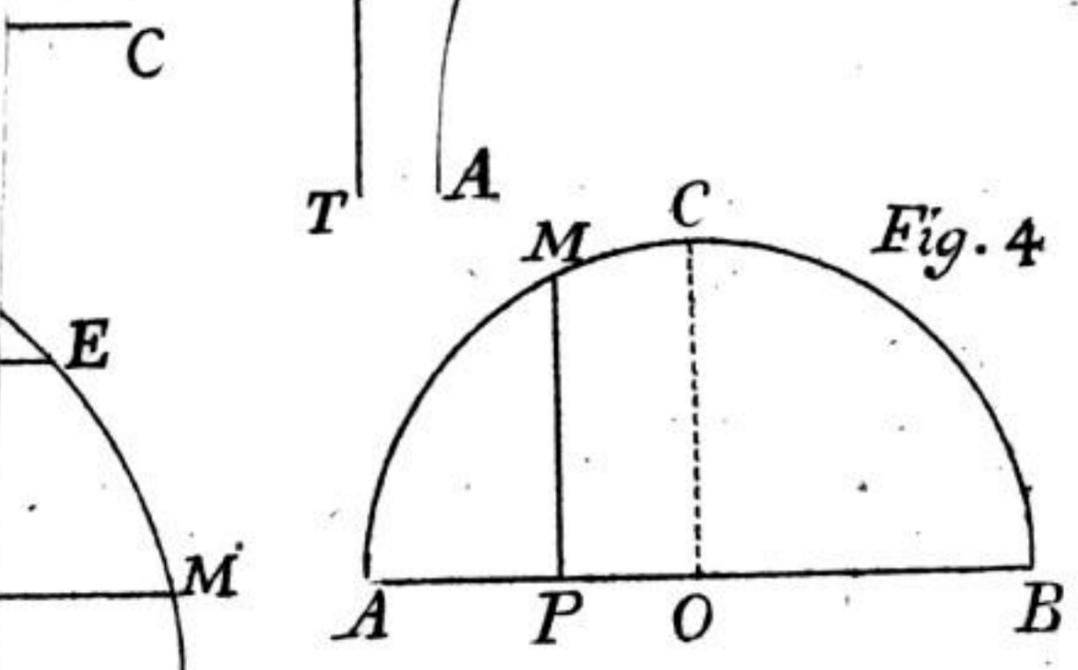


Fig. 4

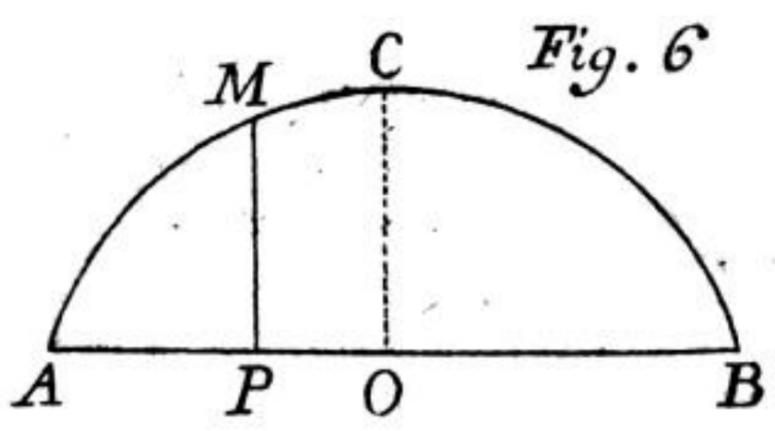
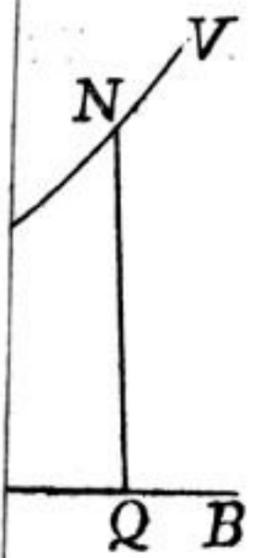
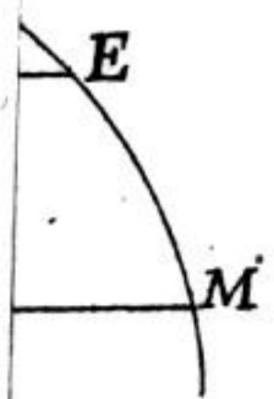


Fig. 6

Fig. 8

