Padrone
Giacomo Maria Paci
Dottore nelle Scienze Fisiche,
e Matematiche, Professore
di Storia Naturale nel Real
Liceo di Salerno, ec: ec:
1822,

DE CENTRO OSCILLATIONIS

EX GALILÆANIS LEGIBUS DETERMINANDO

MECHANICA DISQUISITIO

AUCTORE

PHILIPPO CASTELLANO

IN REGIA MILITARI ACADEMIA SUBCENTURIONE
ET CALCULI SUBLIMIS PROFESSORE.

EDITIO ALTERA.

NEAPOLI MDCCLXXXVII.

PROBLEMA, *quod nobis solvendum proponimus, Clarissimus Vir Christianus Hugenius, Mathematicus perillustris, omnium primus in eximio Opere* de Horologio Oscillatorio *ad examen revocavit, solutumque exhibuit. Verum quum in ipso solvendo principium tale assumpserit, quod licet demonstratione maxime indigeat, fidenter tamen certum supposuit, minimeque demonstratum reliquit; verissima ejus doctrina ab omnibus integrum assensum non impetravit. Quamobrem doctissimi Viri Bernoulli fratres, Taylorus, Hermannus, Boscovikius, aliique non pauci in eo operam impenderunt sedulam, ut novam, firmioremque ejusdem problematis solutionem traderent, atque Hugenii doctrinam, a quibus premebatur difficultatibus, vindicarent. Quas iniere vias, quæ adhibuere principia, quem ordinem servavere, quam perspicuitatem, certitudinemque sint consecuti, modo non inquirimus; hoc unum tantum asserimus: neminem, quod sciamus, centri oscillationis Theoriam deduxisse ex Galilæanis Legibus de potentia constante, qua corpora ad actualem motum sollicitantur. Interdum autem quum hæ leges simplicissimæ sint, atque in præsentia extra omne dubium positæ, earumque certitudo tam dilucide constet, ut axiomatum loco a Mechanicis merito habeantur; hinc nostro problemati tunc optime provisum putavimus, si solo earum auxilio generalem ejus pro quocumque corpore, quovisque casu nobis liceat solutionem assequi. Et re quidem vera: quænam, quæso, naturæ actio simplicior* *ea dari potest, quæ per constantem potentiam, quæ in omnibus infinitesimis elementis, sive spatii, sive temporis, per quod actio exercetur, prorsus est eadem; corpora inertia per lineam rectam incedere ab ipsa natura coguntur? Quænam itidem Mechanicæ leges magis securæ sunt expectandæ, quam illæ, quas Galilæus, Vir summus, nec umquam satis laudatus, felici quodam Mechanices fato, atque ad suum, Italiæque nostræ splendorem maximum, de potentia ipsa constante sancivit; siquidem & rationi innixæ, & innumeris experimentis consonæ sunt, & confirmatæ? Quid ergo simplicius, atque elegantius inferamus; quid certius, & firmius in re nostra poterit exoptari, si geometrico ratiocinio ex hisce legibus centri oscillationis determinationem, quæ olim tam celeberrima fuit, atque Mathematicos ingeniosissimos quidem, & magni clarissimique nominis tamdiu exagitavit; non prolixa consectariorum serie derivemus? Rei utilitate permoti, provinciam, etsi viribus impar, audacter tamen suscepimus; rati, quod si aliquem pro optato fine ex nostris laboribus fructum ceperimus, & Mechanicæ, & Mechanices studiosis gratum quid certe faciemus. Utrum autem res felicem, aut infelicem exitum nacta sit, Lectorum est judicare. Nostri tantum est, rem ipsam majore qua fieri potest claritate exponere, gravissimoque eorum judicio subjicere. Quapropter rem totam duas in partes dividemus. In prima præliminares quasdam Galilæanarum Legum notiones, prout nostri problematis solutioni necessariæ sunt, præmittemus. In secunda autem, vocum nonnullarum significationibus definitis, atque duabus lemmaticis propositionibus demonstratis; ad generalem nostri problematis solutionem ipsam statim deveniemus. Sit itaque*

PARS

PARS PRIMA

In qua exponuntur Galilæanæ Leges de potentia constante, quæ potentiis variabilibus applicantur, atque opportune ampliantur pro rei tractandæ indigentia.

I. PRincipia, quæ ſub Galilæanarum Legum nomine veniunt, quæque merito a Phyſicis, ut claves, quibus difficiliora Mechanices arcana reſerantur, jamdudum agnita ſunt, duabus hiſce propoſitionibus continentur.

1°. *Potentia conſtans, ſeu gravitas ducta in tempus, per quod ipſa corpus iners, vel maſſam corporis movet; proportionalis eſt eidem maſſæ, ductæ in ſuam celeritatem, illo elapſo tempore acquiſitam.*

2°. *Potentia conſtans ducta in ſpatium, per quod ipſa corpus iners trahit; proportionalis eſt maſſæ, ductæ in dimidium velocitatis ſuæ quadratum.*

Ut leges iſtæ analyticis formulis expreſſæ habeantur: vocetur potentia P, tempus T, maſſa M, velocitas V, ſpatium denique S; habebiturque, $PT = MV$, $PS = \frac{MV^2}{2}$; in quibus $=$ ſignum eſt proportionalitatis, minime vero æqualitatis.

Ex hiſce autem legibus, nonnullæ aliæ facillime deducuntur; verum quia ad rem noſtram non faciunt, eas conſulto omittimus.

II. Infiniteſimorum doctrina in auxilium advocata, haud difficulter prædictæ leges, quæ de conſtante potentia ſancitæ ſunt, potentiis variabilibus applicantur; earumque ope leges determinantur, quibus corpora ab ipſis ſollicitata mo-

moventur, potentiarum earumdem variationis tantum lege ſuppoſita. Quomodo autem id fiat, indicare nunc lubet, non ut aliquid novi afferamus, ſed ut lectoris memoriæ occurramus, ejuſque ſerviamus commodo.

Potentia utcumque variabilis ſit, per tempuſculum, ſpatiolumve infiniteſimum, ut conſtans cenſenda eſt; incrementum enim, vel decrementum ſuum, per tempuſculum illud, vel ſpatiolum, rationem ad ipſam potentiam habet, quacumque data minorem. Incrementum igitur tale, vel decrementum, tamquam nullum, adeoque potentia, ut conſtans haberi debet. Per totum ergo idem tempuſculum, aut ſpatiolum, valent leges de potentia conſtante in numero ſuperiore exhibitæ. Vocato itaque tempuſculo dT, $\pm dV$ vero velocitate infiniteſima, illa ſcilicet, quam corpus per tempuſculum illud infiniteſimum acquirit, aut amittit, prout motus acceleratus, vel retardatus fuerit; factaque opportuna ſubſtitutione in formula legis primæ, en tibi in quam ea convertitur, $P\,dT = \pm M\,dV$; in qua ſuperius ſignum valet pro motu accelerato, pro retardato autem inferius.

Ut ad alteram tranſeamus, advertimus, quemcumque motum variabilem, per tempuſculum, vel ſpatiolum infiniteſimum, tamquam æquabilem haberi poſſe, exceptis tamen initio motus accelerati, & fine retardati; ergo ex legibus motus æquabilis, velocitas V proportionalis erit ſpatiolo, per tempuſculum dT diviſo. Appellato itaque ſpatiolo dS, erit $V = \frac{dS}{dT}$, ſeu $dT = \frac{dS}{V}$; quo valore ipſius dT etiamſi non vero, ſed proportionali, in formula inventa $P\,dT = \pm M\,dV$ ſubſtituto, prodibit $P\,dS = \pm M\,V\,dV$, quæ erit ſecundæ legis formula.

At hæc valent pro tempuſculis, ſpatioliſque evaneſcentibus tantum. Verum ſi has formulas, integratione ad ſummam perducas, illæ quidem prodibunt pro temporibus, ſpatiiſque finitis.

III. Uſque adeo contemplati ſumus potentias, corpora per ipſarum directiones trahentes; poſuimus nempe ſpatiotiolum a corpore percursum, minimo, atque evanescente tempusculo, idem esse ac illud accessus, vel recessus, ut ajunt, a centro potentiæ; atque in hac hypothesi sancitæ sunt formulæ. Verum si potentiæ, corpora indirecte moveant, proindeque spatiolum accessus, vel recessus a potentiæ centro diversum sit ab illo a corpore percurso; valent ne adhuc ambæ eædem leges, & formulæ? Minime profecto. Contenti tamen sumus, quod locum habeat secunda, scilicet $P\,dS = \pm\, M V\,dV$, dummodo per dS spatiolum intelligas accessus, vel recessus a centro potentiæ P. Quod ita res se habeat, ex sequenti demonstratione patebit.

Sit A B D (Fig. 1. 2.) curva quælibet, a corpore inerti M accelerato, vel retardato motu percurrenda, ope applicatæ potentiæ, ab A S expressæ, cujus directio, dum M est in A, sit A S C. Accipiatur A B arculus curvæ infinitesimus, ducaturque ex A tangens curvæ A Q. Ex puncto S, ad perpendiculum S Q demittatur supra tangentem A Q.

Notum est ex Statica, potentiam A S in duas resolvi A Q, S Q, quarum hæc nihil confert ad corporis motum, quum tota ad curvam ipsam premendam impendatur, atque cum ea, ob contrarium curvæ nisum, æquilibretur. Tantum ergo altera A Q, ad corpus movendum, ut in Fig. 1., vel motum ejus retardandum, ut in 2., insumitur, & quidem per eamdem, ac motus directionem.

Jam vero, dum corpus est in B, directio potentiæ ei applicatæ sit B C, priorem A C in puncto C secans, quod centrum erit potentiæ A S. Centro C, radioque C B, arcus circuli B E describatur, qui ex infinitesimorum Geometria, infinitesimus erit, atque anguli in E recti; supponimus namque, potentiæ directiones in duobus infinitesimi arculi A B extremis punctis, haud concurrere in infinitesimam distantiam ab ipsis punctis A, B; adeoque C B, atque C E, finitas esse.

Triangula itaque A Q S, A E B similia erunt; siquidem rectangula sunt, & in Fig. 1. angulum A communem habent; æquales autem Q A S, E A B in Fig. 2.; erit igitur $AS : AQ :: AB : AE$; ergo $AS \cdot AE = AQ \cdot AB$. Sed A E spatiolum

lum eſt acceſſus, vel receſſus a centro potentiæ A S; A B vero illud acceſſus, vel receſſus ab illo potentiæ A Q, ſive ſpatiolum a corpore percurſum. Igitur potentia A S, in ſpatiolum ducta acceſſus, vel receſſus a centro ſuo, æquat potentiam A Q, directe in corpus agentem, ductam in ſpatiolum a corpore percurſum. Sed productum hoc (2) proportionale eſt $+ M V dV$ ſi motus acceleratus fuerit, vel $- M V dV$ ſi retardatus; ergo etiam illud. Formula itaque $P dS = \pm M V dV$, non tantum in directis motibus valet, verum etiam in indirectis, ubi ſcilicet dS non ſpatiolum denotat a corpore percurſum, ſed illud, per quod potentia accedit, vel recedit a centro ſuo. Q. E. D.

Sed hic ad majorem rei claritatem advertimus, in formula $\pm V dV$, V deſignare velocitatem, qua corpus M, in puncto A præditum eſt; $\pm dV$ vero, incrementum, vel decrementum velocitatis V, corpori inductum a potentia A S ei jugiter applicata, dum ſpatiolum A B, accelerato, vel retardato motu percurrit; ſive differentia ipſius V poſitive ſumpta in motu accelerato, & negative in retardato; ita ut, velocitas corporis in puncto B ſit $V + dV$, ſive $V - dV$ ſi motus retardatus fuerit; ſicque, ſucceſive ſumpto alio ſpatiolo, ſit in ejus termino corporis velocitas $V + 2dV + ddV$, hoc eſt $V + dV$ una cum ſuo differentiale, ſi motus acceleratus fuerit, & $V - 2dV - ddV$ ſi retardatus, & ita porro. Si enim maſſa M, potentia A S expers, velocitate ſua V tantum prædita, adeoque motu æquabili, tranſeundo ab A per A B, aliquid de celeritate ipſa V amitteret; tunc incrementum illud dV, vel decrementum $- dV$, quod ei, applicata potentia, induceretur, non eſſet amplius ipſius V differentia; adeoque neque $P dS = \pm M V dV$. Ut valeat igitur formula, nil corpus debet amittere velocitatis prius conceptæ, dum ab uno ſpatii puncto ad punctum aliud pergit, ſi id excipias, quod in motu retardato, ob potentiam ex oppoſita directione applicatam, neceſſario amittere debet, quodque decrementum $- dV$ appellavimus.

Hoc autem haud aliter in natura accidit. Et quidem cla-

clariſſime conſtat ſi A B planum fuerit continuum quomodocumque horizonti inclinatum. In eo ſiquidem, dum corpus M a puncto A, ad punctum B pergit, quia continuo per eamdem directionem incedit, nihil celeritatis ſuæ V per ſolam plani reſiſtentiam amittit; adeoque in puncto B præditum eſt velocitate $V \pm dV$, exiſtente $\pm dV$ ipſius V differentia, a potentia A S, per ſpatiolum illud A B, corpori inducta.

At in motu per curvam, res non ita eſt clara, ut demonſtratione non egeat; corpus enim, quod per curvam incedit, continuo ab una, ad aliam directionem tranſit, quo in tranſitu, neceſſe aliquid de ſua celeritate amittere debet. Recte quidem. Verum ſi ſumma velocitatum omnium, in continua illa directionis mutatione per curvæ arculos a corpore amiſſarum, rationem habet velocitati, quam per arcum integrum corpus retinet, quavis data minorem; in motu etiam per curvam dicendum erit, nil corpus amittere velocitatis jam conceptæ, dum cum ipſa tantum, ab uno, ad aliud ſpatii punctum tranſit. Hoc igitur eſt nunc demonſtrandum.

Sit A B C arcus curvæ cujuslibet (Fig. 3.). Ducatur tangens B H, ſitque A B infiniteſimus arculus. A puncto A, normalis A H demittatur ſupra tangentem; atque centro B, intervallo B H arculus deſcribatur H O, qui ad A B normalis erit.

Jam vero eſt A B : A H : : A H : A O; ſed ob angulum A B H evaneſcentem, A H infiniteſima eſt præ A B (ex Geom. infiniteſ.); ergo A O infiniteſima præ A H, adeoque A O infiniteſima eſt ſecundi ordinis præ A B; ſed ex eadem Geometria diſcimus, B H ejuſdem eſſe ordinis, ac A B; ergo A O infiniteſima quoque ſecundi ordinis præ B H. Hoc poſito ita ratiocinemur.

Repræſentet A B velocitatem corporis M per A B, ſeu quam habet in puncto B. Hæc ſane reſolvitur in duas B H, A H. Velocitas A H efficit, ut tranſeat corpus a directione A B ad directionem B C, ſeu H B C; hoc eſt tota impenditur ad planum ipſum premendum. Altera B H est velocitas, quam tantum retinet corpus, quæque sola, in nova motus directione H B C exercetur; sed velocitas, quæ prius per motus directionem exercebatur, ex hypothesi erat A B; ergo subtracta B H, seu B O ab A B, erit A O portio exprimens velocitatem in directionis alterius transitu amissam; sed A O, ut vidimus, infinitesima est secundi ordinis præ B H; ergo velocitas in transitu a corpore M amissa, infinitesima est secundi ordinis præ retenta B H. Licet itaque hic transitus infinities fiat per arcum finitum, ac proinde velocitates amissæ numero sint infinitæ; præ velocitate tamen a corpore M retenta, nonnisi infinitesimum quid constituunt; sed si hoc, jam velocitas amissa, rationem ad retentam habet quavis data minorem; ergo &c. Q. E. D.

IV. Verum, ut perspiciatur quantum late pateat formula $P\,d\,S = \pm\, M\,V\,d\,V$, eo vel magis, quia ad rem nostram facit, sequens demonstremus theorema.

Formula $P\,d\,S = \pm\, M\,V\,d\,V$ *extenditur etiam ad casus, in quibus potentia* P *non unicam massam* M, *sed plures simul ab ipsa expressas, atque inter se colligatas, ad motum sollicitat, vel retardat. Ut esset*, ex. gr., *si potentia* S N (Fig. 4.) *motum accelararet, vel retardaret vectis* C M′ M S, *cui massæ inertes* M, M′ *sint applicatæ.*

Demonstr. Vectis C M′ M S circa punctum C moveatur, arculumque S *s* descendendo, aut ascendendo, ope potentiæ S N, describat. Pro hac potentia S N puncto S applicata, in centris massarum M, M′, potentiæ duæ y, z supponantur, quæ vectem C M′ M, eodem præcise modo per arculum S *s* infinitesimum moveant, quo ipse per arculum eumdem, a potentia S N movebatur. Nulli dubium esse potest, quin potentiæ istæ y, z habere possint rationem illam, quam habent producta M. M C, M′. M′ C, sive M. M *m*, M′. M′ *m′*, quarumque directiones, eædem sint, ac illæ motus corporum M, M′; ita ut, earum accessus, recessusve spatiola M *m*, M′ *m′*, illa sint, a corporibus ipsis infinitesimo motu percursa.

Tales esse proportionem, directionesque potentiarum

y, z

y, z ſupponamus. Hæ autem ſive per virgam C M′ M′ conjungantur, ſive non, eodem modo corpora M, M movebunt; quod quoque demonſtrat, potentias y, z, quæ ſint in ratione M . M C : M′ . M′ C ſubſtitui poſſe pro potentia S N in centris maſſarum M, M′ ut ſupponimus. Quod autem revera y, z, conjunctim & ſeorſim, eumdem corporibus M, M′ motum inducerent, ſic oſtendimus.

Ex motus æquabilis legibus, quas (2) in motibus infiniteſimis valere diximus, habetur $dT : dT' :: \frac{Mm}{V} : \frac{M'm'}{V'}$, vocatis dT, dT' tempuſculis, quibus maſſæ M, M′, ſua ſpatiola Mm, Mm' ſimilia, ſeorſim percurrunt; V, V′ vero earum celeritatibus. Præterea ex ſecunda Galilæi Lege, eodem numero expoſita, valent hæ proportionalitates, $y \cdot Mm = \pm M V dV$, $z \cdot M'm' = \pm M' V' dV'$; ergo $\frac{y \cdot Mm}{M} : \frac{z \cdot M'm'}{M'} :: \pm V dV : \pm V' dV'$; ſed $y : z :: M . Mm : M' . M'm'$, ex hypotheſi; igitur ſubſtitutione pro $y : z$ adhibita, orietur $\overline{Mm}^2 : \overline{M'm'}^2 :: \pm V dV : \pm V' dV'$; at ratio $\overline{Mm}^2 : \overline{M'm'}^2$ eſt conſtans; ſiquidem eadem eſt, ac illa $\overline{MC}^2 : \overline{M'C}^2$; ergo etiam integrando $\pm \frac{V^2}{2} : \pm \frac{V'^2}{2} :: \overline{Mm}^2 : \overline{M'm'}^2$; adeoque $V : V' :: Mm : M'm'$. Subſtitue nunc hæc pro illa ratione in proportionalitate $dT : dT' :: \frac{Mm}{V} : \frac{M'm'}{V'}$, & nanciſceris, $dT : dT' :: \frac{Mm}{Mm} : \frac{M'm'}{M'm'}$, in ratione ſcilicet æqualitatis. Corpora igitur M, M′ a potentiis y, z, quæ ſint in ratione M . M m : M′ . M′ m', reſpective ad eorum motum accelerandum, vel retardandum coacta; ſpatiola M m, M′ m' ſimilia, eodem tempore, ſeorſim conficient. Sive itaque per virgam C M′ M connectantur, ſive non; eodem modo a potentiis y, z movebuntur. *q. e. d.*

Hinc eædem ſemper valebunt proportionalitates, ſive conjuncta, ſive disjuncta moveantur corpora; ſed dum moventur disjuncta valent formulæ $y \cdot Mm = \pm M V dV$, $z \cdot M'm' = \pm M' V' dV'$; ergo & etiam dum moventur

 con-

conjuncta locum habent, ac proinde erit quoque in hoc casu, $y . M m + z . M' m' = \pm M V d V \pm M' V' d V'$.

Enimvero si supponatur potentiam S N simul agere per contrariam directionem, ac agunt potentiæ y, z; deberet vectis, eodem tempore moveri per duas ex diametro oppositas directiones; atqui hoc repugnat; igitur repugnat quoque, vectem per aliquam directionem moveri; adeoque immotus manebit, potentiæque y, z cum S N æquilibrum constituent; sed per principium Statices *velocitatum virtualium*, supposito in vecte infinitesimo motu per arculum $S s$; potentia S N, ducta in S R, quod spatiolum est accessus, vel recessus a centro suo, æqualis est y, z in spatiolis suis respective ductis, hoc est $S N . S R = y . M m + z . M' m'$; ergo, quum sit $y . M m + z . M' m' = \pm M V d V \pm M' V' d V'$, ut vidimus, erit quoque $S N . S R = \pm M V d V \pm M' V' d V'$. Q. E. D.

Quod dictum est de duobus corporibus, idem valet de tribus, quatuor &c. utcumque vecti dispositis. Imo haud aliter accidit, etiamsi corpora non per unicam virgam C M' M S sint connexa, sed per plures utcumque inter se dispositas, seu per figuram quamlibet sive planam, sive solidam gravitatis expertem. In utroque enim casu, eadem viget demonstrandi methodus. Constat itaque propositum.

Sed hisce, rei nostræ absolute necessariis, jam nunc in prima hac parte expeditis; ad rem ipsam propius tractandam accedamus.

PARS

PARS ALTERA.

Ubi nonnullis præmiſſis ad problema immediate pertinentibus ; ex principiis in prima parte ſtatutis , oſcillationis centrum penduli cujuſvis generaliter determinatur.

V. REctus claruſque rerum omnium ordo poſtulat, ut nulla tractetur materia , quin a verborum explicatione, quorum uſus eſt faciendus exordiatur . Priuſquam itaque primarium noſtrum problema attingamus , operæ prætium erit definitiones quaſdam præmittere.

Definit. I. *Pendulum* vocetur linea quælibet , vel figura ſive plana , ſive ſolida, conſtante potentia , ſeu gravitate prædita, ita puncto aliquo fixo , vel axi potius in plano horizontali parallelo immobiliter exiſtenti, ſuſpenſa, ut circa ipſum libere, vi gravitatis ſuæ rotari, motumque reciprocum eundo , & redeundo continuare poſſit.

Definit. II. Ipſemet motus , qui a pendulo fit eundo , & redeundo , circulareſque arcus aſcenſu , deſcenſui æquali deſcribendo , *oſcillatio* dicitur .

Definit. III. Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem pendulum movetur , atque oſcillat , *axis oſcillationis* vocabitur .

Definit. IV. *Axis penduli* eſt linea recta, quæ per gravitatis centrum omnium penduli ponderum tranſiens, ad perpendiculum ſupra oſcillationis axem ducitur .

Definit. V. Pendulum *ſimplex* illud eſt, quod linea, vel virga rigida , atque inflexibili , gravitatis experte, inſtructum , imo ſuæ longitudinis puncto, pondus affixum gerit.

Definit. VI. Linea vero , vel figura quælibet ſive plana , ſive ſolida, utcumque ſuſpenſa , quæ plura , etſi numero ro infinita, gerat pondera, diverſo modo connexa, eaſdemque diſtantias inter ſe, atque ab oſcillationis axe perpetuo ſervantia; *compoſitum* pendulum nuncupetur. Hinc corpus quodvis ſuſpenſum tamquam compoſitum pendulum haberi poteſt, quatenus in partes quaslibet diviſibile eſſe concipitur.

Porro pro diverſa pendulorum figura, diverſaque ponderum diſpoſitione, atque connexione, tria compoſitorum pendulorum genera conſiderari poterunt; *linearia* ſcilicet, *plana*, atque *ſolida*.

Definit. VII. Pendulum *lineare* compoſitum illud eſt, cujus ponderum centra gravitatis omnia, in eadem recta linea oſcillationis axi normali, adeoque in penduli axe (*Def.* IV.) exiſtunt.

Definit. VIII. Pendulum vero *planum* dicatur, cujus corporum centra gravitatis omnia, etſi non ſint in eadem recta linea oſcillationis axi normali, ſunt tamen in eodem plano circa hunc axem rotante.

Definit. IX. Si tandem penduli ponderum centra gravitatis omnia, neque in eadem recta linea, neque in eodem plano, ſed in ſolido circa oſcillationis axem rotante conſiſtant, pendulum *ſolidum* nuncupetur. Hinc pendulum hocce, ſaltem tribus corporibus eſt compoſitum.

Definit. X. Pendula *iſochrona* vocantur, quorum oſcillationes per arcus ſimiles, æqualibus, vel iiſdem temporibus peraguntur. Sicuti *oſcillationes iſochronæ* illæ ſunt, quæ per arcus ſimiles, eodem, vel æquali tempore conficiuntur.

Definit. XI. *Centrum* denique *oſcillationis* penduli cujuſvis compoſiti, punctum illud eſt in penduli axe exiſtens, in quo ſi pro ponderibus, ſeu potentiis, maſſiſque huc illuc in compoſito pendulo diſperſis, pondus unicum, earum ſummæ æquale applicetur; ſimplex pendulum habebitur, quod erit compoſito iſochronum.

VI. Hiſce difinitionibus præmiſſis, ſequens problema ad ſimplicia pendula pertinens, nobiſque apprime neceſſarium, reſolvamus.

Sint

Sint pendula duo quæcumque simplicia* (Fig. 5.) C M, *c m, quæ oscillent per arcus similes* Q Q, *q q : quæritur ratio temporum oscillationum.

Solut. Sumantur duo puncta analoga S, *s* sive ex parte pendulorum descensuum, sive ex illa ascensuum, ducanturque S R, *s r*, quæ directiones repræsentent potentiarum, seu gravitatum, dum ipsæ punctis S, *s* sunt applicatæ, quæque erunt parallelæ. Abscindantur infinitesima, atque similia spatiola S N, *s n*, quæ elementa erunt arcuum Q Q, *q q*; atque ab ipsis punctis N, *n* supra S R, *s r* normales demittantur N O, *n o*, particulas S O, *s o* definientes, quæ spatiola erunt accessus, vel recessus a potentiarum centris.

Enim vero velocitatibus massarum M, *m*, quibus in punctis S, *s* præditæ sunt, vocatis V, *v*; corporumque gravitatibus, seu potentiis P, *p*; habebitur (3) $P . SO = \pm M V d V$, & $p . s o = \pm m v d v$; ergo $P . S O : p . s o :: \pm M V d V : \pm m v d v$; sed ob angulos N S O, *n s o*, item O, & *o* æquales, est $S O : s o :: S N : s n$; & ob similitudinem arculorum S N, *s n*, habetur $S N : s n :: C M : c m$; ergo $\pm M V d V : \pm m v d v :: P . C M : p . c m$, quæ ratio quum constans sit, sequitur integrando, & ducendo antecedentia in 2, esse $\pm M V^2 : \pm m v^2 :: P . C M : p . c m$; igitur $V : v :: \sqrt{\frac{P . C M}{M}} : \sqrt{\frac{p . c m}{m}}$. Sed vocatis T, *t* temporibus, quæ quæruntur, adeoque $d T$, $d t$ elementis illis, quæ in spatiolis S N, *s n* percurrendis, insumuntur, est (2) $V : v :: \frac{S N}{d T} : \frac{s n}{d t} :: \frac{C M}{d T} : \frac{c m}{d t}$; ergo $\frac{C M}{d T} : \frac{c m}{d t} :: \sqrt{\frac{P . C M}{M}} : \sqrt{\frac{p . c m}{m}}$; adeoque $d T : d t :: \frac{\sqrt{M} . \sqrt{C M}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{m} . \sqrt{c m}}{\sqrt{p}}$; at ratio hæc constans est; ergo integrando erit etiam, T : *t* in eadem ratione $\frac{\sqrt{M} . \sqrt{C M}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{m} . \sqrt{c m}}{\sqrt{p}}$; & pendulorum longitudinibus C M, *c m* ab L, *l* expressis, $T : t :: \frac{\sqrt{M} . \sqrt{L}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{m} . \sqrt{l}}{\sqrt{p}}$; in ratione scilicet composita ex directis subduplicatis massarum, longitudinumque pendulorum, atque reciproca subduplicata potentiarum. Q. E. I.

VII. Soluto hujusmodi problemate, ut majore claritate, atque certitudine procedamus, sequens lemma, licet per se manifestum, demonstremus.

Sit pendulum quodvis compositum, gerens corpora M, M' &c., *quorum gravitates a* G, G' &c. *exprimantur. Dico ipsum sive ad oscillandum cogatur circa oscillationis axem, a corporum gravitatibus* G, G' &c. *sive a potentia earum summæ* G + G' &c. *æquali, in eorumdem corporum centro gravitatis, per hujus directionem applicata; eodem prorsus modo moveri, easdemque oscillationes, eodem tempore conficere.*

Demonstr. Quod dari possit potentia, quæ in centro gravitatis corporum omnium M, M' &c. applicata, eodem tempore, eumdem prorsus motum, ac corporum gravitates G, G' &c. pendulo inducere valeat; nulli dubium esse potest. Si aliqua adest difficultas, hæc sane est potius; utrum talis potentia æquetur G + G' &c., summæ scilicet gravitatum omnium corporum M, M' &c.

Hoc quidem ex Statica constat, ex qua discimus, potentiam G + G' &c. æqualem, centro gravitatis corporum M, M' &c. applicatam, perfecte ipsorum gravitatibus æquivalere.

Verum si negas. Sit alia potentia major, vel minor G + G', quæ videlicet in C (Fig. *6.*) quod centrum sit gravitatis massarum M, M', quibus compositum est pendulum A M, per gravitatis directionem applicata, efficiat, ut pendulum eodem prorsus modo moveatur, eodemque tempore easdem oscillationes conficiat, quas dum a corporum gravitatibus G, G' ad motum sollicitabatur, conficiebat. Quæ potentia igitur, per contrariam directionem in C applicari requiritur ad motum omnem penduli A M extinguendum, oscillationesque suas impedire, quum ipsum ad motum a corporum gravitatibus G, G' est coactum; eadem quoque exposcitur, ad idem, in eodem pendulo obtinennendum, quum a supposita potentia, major, vel minor $G+G'$ in eodem centro C applicata, ad oscillandum sollicitatur. Sed quia gravitatum directiones, ut notum est, sunt parallelæ, potentia, quæ in primo casu requiritur, æquatur, ex Statica, gravitatum summæ $G+G'$; ergo etiam hæc in secundo casu est necessaria. Potentia igitur $G+G'$, æquilibrium circa punctum C constituere debet cum alia majore, vel minore ex opposita directione applicata; sed hoc est absurdum; ergo absurdum est quoque dicendum, potentiam a $G+G'$ diversam, eumdem motum, ac corporum M, M' gravitates pendulo AM eodem tempore communicare. Ergo &c. Q. E. D.

Quod ostensum est de lineari pendulo A M, eadem methodo demonstrabitur etiam de quocumque alio cujusvis generis, atque figuræ, quovisque corporum M, M' numero composito. Imo idem, eodem ratiocinio demonstrabitur, etiamsi non omnia corpora M, M' &c. inferius oscillationis axi B B existant; sed aliquod, ex. gr. M', gravitate sua G' præditum, supra ipsum axem B B consistat, atque oscillet, quemadmodum accidit in Fig. 4.; quo in casu, summa gravitatum omnium, seu potentia centro gravitatis substituenda, non erit amplius $G+G'$ &c., sed $G-G'$; quia G', ut ex Statica constat, habenda est tamquam potentia negativa, atque ex opposita directione applicata. Constat itaque propositum.

VIII. Sed non est cur diutius in præliminaribus hisce immoremur. Tempus jam potius videtur, ut ad ipsum *centri oscillationis* problema proponendum transeamus, nostramque id solvendi methodum exponamus. Sit itaque

Problema generale.

Dato pendulo quovis composito, ejus oscillationis centrum determinare.

S O L U T I O.

POssemus hujus problematis, etsi ita generaliter propositi, solutionem statim exhibere, methodum, qua id resolvimus pendulo cuicumque composito simul applicando. Verum, ut clarius ejusdem methodi universalitas appareat, varios casus pro diversis pendulorum generibus num. quinto assignatis distincte consideremus, atque gradatim, peculiaribus problematibus nobis pro quolibet casu propositis, ab uno, ad alia ipsam extendamus methodum.

Tres itaque distinguendi sunt casus. Primus scilicet, quod pendulum sit *lineare*; alter, quod sit *planum*; tertius denique, quod *solidum* sit.

Solvamus problema quoad priorem; atque supponamus in primis lineare pendulum A M (Fig. 7.), cujus oscillationis centrum quæritur, duobus tantum compositum esse ponderibus M, M', quorum gravitates G, G'.

Determinetur punctum C, quod centrum sit gravitatis ponderum M, M', adeoque A C ejus distantia ab oscillationis axe B B; qui axis per punctum A plano paginæ verticalis, seu normalis transire intelligitur; atque sumpta $ac = AC$, quæratur quænam massa in c esset applicanda, quæ a gravitate æquali $G + G'$ immediate ad motum sollicitata, simplex pendulum ac constituat, composito A M isochronum.

Massa, quam quærimus, vocetur $= x$, & longitudo penduli $ac = a$.

Ex num. præcedente, pendulum A M sive ad motum

tum ſollicitetur a corporum gravitatibus G, G', ſive a potentia æquali $G + G'$ centro C applicata, nullam ſubit mutationem, eaſdemque prorſus eodem tempore oſcillationes conficit. Itaque ſupponamus ipſum non a G, G', ſed a potentia $G + G'$ centro C applicata, ad oſcillandum ſollicitari; adeoque tam compoſitum pendulum AM, quam ſimplex ei iſochronum ac, cujus maſſa x in puncto c ſuſpendenda quæritur, ab æquali potentia, punctis C, c, applicata a pendulorum oſcillationis axibus BB, bb æquediſtantibus agitari. Igitur in unaquaque integra, iſochronaque eorumdem pendulorum in plano paginæ oſcillatione NN, nn; ſimilia ſpatia NN, nn a punctis ipſis C, c deſcendendo, atque aſcendendo percurſa, æqualia erunt.

Horum ſpatiorum elementa duo infiniteſima YZ, yz æqualia, atque analoga, ideſt ſimiliter poſita, ſive ex parte deſcenſus, ſive ex illa pendulorum aſcenſus ſumantur. Hæc quidem eodem quoque tempore ab iiſdem punctis C, c, vi potentiæ $G + G'$ percurrebuntur; & dum percurruntur, ſpatiola ZS, zs, per quæ potentia hæc $G + G'$ centris ſuis accedit, vel ab ipſis recedit, determinata a normalibus YS, ys ductis ſupra potentiæ ejuſdem $G + G'$ parallelas directiones ZR, zr, æqualia erunt. Sed velocitatibus corporum, ſeu maſſarum x, & M, M', pendulorum ac, & AM, reſpective ab v, & V, V' expreſſis; eſt $(G + G') \,.\, zs = \pm xvdv$ in ſimplici pendulo ac (3), & $(G + G') \,.\, ZS = \pm MVdV \pm M'V'dV'$ in compoſito AM (4.). Ergo $\pm xvdv = \pm MVdV \pm M'V'dV'$; & integrando $\pm \frac{xv^2}{2} = \pm \frac{MV^2}{2} \pm \frac{M'V'^2}{2}$, ſeu $x = \frac{MV^2}{v^2} + \frac{M'V'^2}{v^2}$; ubi ſignum $=$, non amplius proportionalitatem indicat, ſed æqualitatem.

Enimvero quoniam, ut antea animadvertimus, elementum yz percurri debet a puncto c, ſeu a maſſa x, eodem tempore, ac YZ a C percurritur; abſolvi quoque debebit eodem tempore, ac ſpatiola YZ, $Y'Z'$ analoga, atque ſimilia YZ, a maſſis M, M' ſimul abſolvuntur; ſed ex num. 2. , maſſarum x, M, M′ velocitates v, V, V′ ſunt, ut ſpatiola ipſa percurſa yz, Y Z, Y′Z′, diviſa per tempuſculá reſpectiva in eorum percurſione inſumpta; ergo velocitates v, V, V′ erunt uti ſpatiola, ſeu arculi yz, Y Z, Y′Z′. Sed hi, ut inter ſe ſimiles, ſunt radiis, vel maſſarum ab oſcillationum axibus bb, B B, diſtantiis ac, A M, A M′, ſeu a, A M, A M′ proportionales; igitur velocitates v, V, V′ ſunt in ratione diſtantiarum ab oſcillationum axibus a, A M, A M′; adeoque illorum quadrata v^2, V^2, V'^2, horum quadratis a^2, $\overline{AM}^2$, $\overline{AM'}^2$ proportionalia. Ergo quælibet $\frac{V^2}{v^2}$, $\frac{V'^2}{v^2}$ reſpective æqualis $\frac{\overline{AM}^2}{a^2}$, $\frac{\overline{AM'}^2}{a^2}$.

Itaque hi valores pro illis in æquatione $x = \frac{MV^2}{v^2} + \frac{MV'^2}{v^2}$, jam ſupra inventa, ſubſtitutis, habebitur tandem $x = \frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2}{a^2}$, qui maſſæ puncto c applicandæ valor erit quæſitus. Pendulum igitur ſimplex, longitudinis $ac = AC$, ſi maſſam hanc imo ſui puncto c gerat, ad motum a potentia G + G′ immediate ſollicitatam, erit compoſito A M iſochronum.

Hoc poſito, manifeſtum eſt Problema eo redactum eſſe, ut inveniatur longitudo penduli talis, ut ſi ejus extremo puncto, maſſa M + M′ ſuſpendatur, a potentia G + G′ immediate ſollicitata, ſimplex pendulum conſtituat, quod ſimplici huic ac, maſſam x gerenti eadem potentia G + G′ præditam, iſochronum ſit.

Id autem obtinebitur facillime, ſi in memoriam revocemus theorema ad ſimplicia pendula pertinens, num. ſexto contentum. Ab eo enim diſcimus, quod tempora ſimilium oſcillationum, a pendulis duobus ſimplicibus peractarum, ſequentem conſtituant proportionalitatem, $T : t :: \frac{\sqrt{M} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{P}} : \frac{\sqrt{m} \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{p}}$. Ergo vocata y longitudine penduli quæſita, atque opportunis ſubſtitutionibus adhibitis, habebitur $T : t$

::

$: : \frac{\sqrt{\overline{M+M'}}.\sqrt{y}}{\sqrt{G+G'}} : \frac{\sqrt{x}.\sqrt{a}}{\sqrt{G+G'}}$; sed ut pendula sint isochrona, esse debet $T = t$; ergo $\frac{\sqrt{\overline{M+M'}}.\sqrt{y}}{\sqrt{G+G'}} = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{a}}{\sqrt{G+G'}}$, & quadrando $\frac{\overline{M+M'}.\,y}{G+G'} = \frac{x\,a}{G+G'}$, seu $\overline{M+M'}.\,y = x\,a$; igitur $y = \frac{x\,a}{M+M'}$; atque pro x valorem suum jam supra inventum substituendo, habebitur tandem $y = \frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2}{\overline{M+M'}.\,a}$.
Itaque pendulum hujus longitudinis, massam gerentem $M + M'$ a potentiam $G + G'$ sollicitatam, isochronum est pendulo $a\,c$, cujus massa $x = \frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2}{a^2}$ ab eadem $G + G'$ moveatur. Sed pendulum hoc isochronum est composito A M; ergo etiam illud. Sumpta igitur in axe A C M penduli A M, distantia A O æquali $y = \frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2}{\overline{M+M'}.\,a}$, hæc quidem determinabit punctum O, quod (*Def.* IX.) centrum erit oscillationis quæsitum compositi penduli A M. *q.e.i.*

Supponamus modo, lineare pendulum A M (Fig. 8.) massas tres gerere M, M', M", potentiis præditas G, G', G", & videamus quænam sit formula centri oscillationis distantiæ ab oscillationis axe B B.

Sit C gravitatis centrum ponderum M, M', M", ita ut $AC = ac = a$ ejus sit ab oscillationis axe distantia; atque supposito, quod pendulum A M non a G, G', G" seorsim agentibus sollicitetur, sed ab earum summa $G + G' + G''$ in C collecta; massam x, ut antea, determinemus, quæ in c applicata, atque eadem potentia $G + G' + G''$ prædita, pendulum simplex $a\,c$ exhibeat, quod composito illo isochronum sit.

Quoniam A C, $a\,c$ æquantur inter se; sicuti spatia isochrona, atque integra oscillatione a punctis C, c vi potentiæ $G + G' + G''$ descendendo, & ascendendo percursa æqualia sunt; ita quoque analoga eorum elementa, eodem tem-

temporis momento ab iisdem punctis descripta, æqualia erunt; igitur spatiola, per quæ potentia $G+G'+G''$ in elementis ipsis percurrendis, centris suis accedit, vel ab ipsis recedit, erunt etiam æqualia; adeoque per eamdem dS exprimi poterunt. Sed per num. tertium, & quartum est, $\overline{G+G'+G''}.dS=\pm xvdv$ in pendulo simplici ac, & $\overline{G+G'+G''}.dS=\pm MVdV\pm M'V'dV'\pm M''V''dV''$ in composito AM, vocata massæ inveniendæ x velocitate v, atque V, V', V'' illis massarum M, M', M''; ergo $\pm xvdv=\pm MVdV\pm M'V'dV'\pm M''V''dV''$; & integrando $\pm\frac{xv^2}{2}=\pm\frac{MV^2}{2}\pm\frac{M'V'^2}{2}\pm\frac{M''V''^2}{2}$, seu $x=\frac{MV^2}{v^2}+\frac{M'V'^2}{v^2}+\frac{M''V''^2}{v^2}$. Sed massarum velocitates v, V, V', V'' sunt respective uti massarum ab oscillationum axibus bb, BB distantiæ $ac=a$, AM, AM', AM'', ut vidimus solutione præcedenti, adeoque $\frac{V^2}{v^2}=\frac{\overline{AM}^2}{a^2}$, $\frac{V'^2}{v^2}=\frac{\overline{AM'}^2}{a^2}$, $\frac{V''^2}{v^2}=\frac{\overline{AM''}^2}{a^2}$; ergo substitutione in inventa æquatione adhibita, erit $x=\frac{M.\overline{AM}^2+M'.\overline{AM'}^2+M''.\overline{AM''}^2}{a^2}$.

Hæc igitur massa in c est applicanda, ut cum potentia $G+G'+G''$ immediate conjuncta, pendulum ac constituat, composito AM isochronum.

Determinemus nunc longitudinem simplicis penduli, quod ima ejus parte, massam $M+M'+M''$ a potentia $G+G'+G''$ sollicitatam gerens, isochronum sit pendulo ac, cujus massa x ab eadem potentia $G+G'+G''$ agitetur. Hæc quidem longitudo, distantia erit centri oscillationis quæsiti ab oscillationis axe (*Def.* XI.)

Itaque vocata y longitudine, quam quærimus, erit ex num. sexto $T:t::\frac{\sqrt{M+M'+M''}.\sqrt{y}}{\sqrt{G+G'+G''}}:\frac{\sqrt{x}.\sqrt{a}}{\sqrt{G+G'+G''}}$; sed $T=t$; ergo $\frac{\sqrt{M+M'+M''}.\sqrt{y}}{\sqrt{G+G'+G''}}=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{a}}{\sqrt{G'+G'+G''}}$, seu y

$=$

$= \frac{x\,a}{M+M'+M''}$; atque valore x ſupra invento ſubſtituto, erit tandem longitudo penduli quæſiti, ſeu penduli A M diſtantia centri oſcillationis ab axe B B $= y$

$$= \frac{M \,.\, \overline{AM}^2 + M' \,.\, \overline{AM'}^2 + M'' \,.\, \overline{AM''}^2}{\overline{M+M'+M''} \,.\, a} \,.\, q.\ e.\ i.$$

Eadem methodo determinaremus diſtantiam centri oſcillationis penduli quatuor ponderibus M, M', M'', M''' compoſiti a ſuo oſcillationis axe, æqualem eſſe formulæ

$$\frac{M \,.\, \overline{AM}^2 + M' \,.\, \overline{AM'}^2 + M'' \,.\, \overline{AM''}^2 + M''' \,.\, \overline{AM'''}^2}{\overline{M+M'+M''+M'''} \,.\, a},$$

& ſic deinceps ultra quoſcumque limites procedendo, ubi A M, A M' &c. diſtantiæ ſint uniuſcujuſque reſpectivi corporis M, M' &c., & a, illa eorum centri gravitatis, ab oſcillationis axe.

Quod ſi aliquod e penduli corporibus, ex. gr. M''', ſupra oſcillationis axem exiſtat, eodem progreſſu, mutatis tantum G''' in $-G'''$, & A M''' in $-$ A M''', vi num. ſexti, & ſeptimi ad eamdem prorſus formulam deveniremus: quia etſi ejus diſtantia ab oſcillationis axe, non ſit amplius poſitiva, ſed negativa; attamen quum in formula ad ſecundam elevari debeat poteſtatem, eumdem prorſus productum $M''' \,.\, \overline{AM'''}^2$, adeoque eamdem formulam exhibebit.

Ex hiſce itaque palam fit, centrum oſcillationis linearis penduli quolibet ponderum numero etiamſi infinito utcumque compoſiti, punctum illud eſſe, in axe, ſeu longitudine ſua exiſtens, cujus ab oſcillationis axe diſtantia, æquatur ſummæ uniuſcujuſque penduli maſſæ, ductæ in quadratum ſuæ diſtantiæ ab ipſo oſcillationis axe, diviſæ per ſummam maſſarum omnium, ductam in diſtantiam centri gravitatis ponderum ab eodem oſcillationis axe. Q. E. pro primo caſu determinandum.

IX. Soluto problemate quoad primam partem, transeamus modo ad ſecundam, in qua, pendula plana contemplanda veniunt.

Sed ante omnia animadvertendum eſt, pendulum pla-

num

num duplici modo oscillare posse circa suum oscillationis axem. Aut enim ita oscillat, ut axis oscillationis, in eodem semper sit plano cum illo oscillante penduli, in quo, corpora, eorumque gravitatis centra existunt; aut vero ita, ut huic plano idem oscillationis axis, verticalis, seu normalis sit. In planis itaque pendulis, centri oscillationis Problema, pro duobus hisce oscillandi modis, duplicem solutionem admitteret, nisi nostra methodus, unica solutione, utrumque casum complecti sufficiens sit.

Oscillet planum pendulum AMM' (Fig. 9. 10.) duobus corporibus M, M' compositum, circa axem BB duplici modo; ita scilicet, ut BB in eodem semper sit plano cum oscillante, ex quo pendent corpora M, M', ut in Fig. 9; atque sic, ut idem axis, Fig. 10., transiens per punctum A, verticalis eodem plano semper existat.

Sit C gravitatis centrum corporum M, M'; AC vero ejus distantia ab oscillationis axe BB, adeoque penduli axis. Sumatur $ac = AC = a$, atque, ut methodus postulat, inveniatur in primis massa x puncto c applicanda, quæ sollicitata a potentia, seu gravitate $G+G'$ massarum M, M', pendulum ac constituat, composito AMM' isochronum.

Posito, ut antea, quod compositum pendulum non a G, G' in M, M', sed ab earum summa $G+G'$ in C applicata, sollicitetur; manifestum est, ob æqualitatem radiorum AC, ac, analoga, atque similia elementa spatiorum a punctis C, c, vi potentiæ $G+G'$, isochrona oscillatione percursorum, eodem momento temporis integræ oscillationis descripta æqualia esse; ergo æqualia quoque erunt spatiola dS, per quæ $G+G'$, in ipsis eodem tempore describendis, centris suis accedit, vel ab ipsis recedit.

Jam vero, quoniam $\overline{G+G'}.dS = \pm xvdv$ in pendulo simplici ac (3), & $\overline{G+G'}.dS = \pm MVdV \pm M'V'dV'$ in composito (4); erit quoque $\pm xvdv = \pm MVdV \pm M'V'dV'$. Ergo opportunis operationibus adhibitis $x = \frac{MV^2}{v^2} + \frac{M'V'^2}{v^2}$.
Sed, ex punctis M, M' ductis normalibus MA, $M'A$ supra oscillationis axem BB, quæ in Fig. 10., ambo concur-

rent

rent in puncto A, per quod axis idem oscillationis transit; velocitates v, V, V' proportionales sunt respectivis massarum ab oscillationis axibus bb, B B distantiis $ac = a$, A M, A M', uti ostendi potest eodem modo, ac numero præcedente in pendulis linearibus. Ergo substitutione peracta, erit $x = \frac{M . \overline{AM}^2 + M' . \overline{AM'}^2}{a^2}$.

Determinemus modo penduli simplicis longitudinem y, quæ talis sit, ut si in ejus extremo puncto summa massarum M, M' applicetur, immediate sollicitata a suarum potentiarum summa G + G', exhibeat pendulum isochronum pendulo ac, prædito massa x, atque ab eadem potentia agitato.

Ex num. sexto est, T : t : : $\frac{\sqrt{M+M'} . \sqrt{y}}{\sqrt{G+G'}} = \frac{\sqrt{x} . \sqrt{a}}{\sqrt{G+G'}}$: sed T = t; ergo $y = \frac{x\ a}{M+M'}$; & pro x suo valore substituto, $y = \frac{M . \overline{AM}^2 + M' . \overline{AM'}^2}{\overline{M+M'} . a}$, quæ erit formula distantiæ centri oscillationis penduli plani, duobus corporibus M, M' compositi, ab oscillationis axe (*Def.* XI.); quæque non differt ab illa linearis penduli, numero præcedente inventa.

Si aliquod e corporibus, ex. gr. M', supra oscillationis axem B B existat, eadem methodo, mutatis tantum G' in — G', & A M' in — A M', ad eamdem formulam deveniremus.

Simili progressu inveniremus

$\frac{M . \overline{AM}^2 + M' . \overline{AM'}^2 + M'' . \overline{AM''}^2}{\overline{M + M' + M''} . a}$ esse formulam distantiæ centri oscillationis ab oscillationis axe plani penduli tribus corporibus compositi, etiamsi ex hisce aliquod supra oscillationis axem consistat; & sic deinceps in infinitum.

Ergo etiam in planis pendulis utroque modo oscillantibus, centrum oscillationis distat ab oscillationis axe, per quantitatem æqualem summæ uniuscujusque penduli massæ ductæ in quadratum suæ distantiæ ab ipso oscillationis axe, divisæ per earumdem massarum summam ductam in distantiam centri gravitatis corporum ab eodem axe. Q. E. pro casu altero inveniendum.

X. Remanet modo, ut oscillationis centrum in solidis pendulis determinemus. Methodus, ut universalis, semper eadem est.

Sit solidum pendulum $AMM'M''$ (Fig. 11.) tribus corporibus M, M', M'' compositum, circa axem B B oscillans; sitque C horum corporum gravitatis centrum, AC autem ejus distantia ab oscillationis axe, adeoque portio axis penduli.

Sumpta $ac = AC = a$, & supposito, quod pendulum compositum, non a corporum M, M', M'' gravitatibus G, G', G'' in suis locis agentibus sollicitetur, sed ab earum summa $G+G'+G''$, centro C collecta; quæramus, ut antea, massam x in c applicandam, quæ a potentia eadem $G+G'+G''$ agitatam, pendulum ac reddat composito illo isochronum.

Dubium non est, quin spatia similia descendendo & ascendendo percursa a corporibus M, M', M'', atque massa x, seu puncto c, in quavis isochrona penduli compositi & simplicis ac oscillatione, nil aliud sint, quam similes arcus, respectivis suis ab oscillationum axibus B B, bb distantiis A M, A M', A M'', & ac descripti. Ergo etiam eorum elementa similia & analoga, eodem momento temporis percursa, elementa erunt similia & analoga arcuum dictis distantiis descriptorum; adeoque erunt istis distantiis proportionalia: sed talia elementa, quippe eodem momento temporis percursa, sunt (2) ut velocitates V, V', V'', & v, quibus massæ respectivæ M, M', M'', & x præditæ sunt in ipsis percurrendis; ergo V, V', V'', & v sunt uti distantiæ A M, A M', A M'', & $ac = a$.

Præterea, quia analoga elementa arcuum descriptorum a punctis C, c, quibus applicatæ supponuntur potentiæ duæ æquales $G+G'+G''$, proportionalia sunt AC, ac; erunt ob horum æqualitatem æqualia. Igitur dum vi potentiæ $G+G'+G''$ a punctis ipsis C, c, seu a puncto C, & massa x percurrebuntur, potentia ipsa accedet, vel recedet a centris suis per spatiola dS æqualia.

Hoc posito, quoniam (3) habemus in simplici pendulo ac, $\overline{G+G'+G''}.dS = \pm x v dv$, & $\overline{G+G'+G''}.dS = \pm MVdV$

±

$\pm M'V'dV' \pm M''V''dV''$ (4) in composito; erit $\pm xvdv = \pm MVdV \pm M'V'dV' \pm M''V''dV''$. Ergo peractis necessariis operationibus, $x = \frac{MV^2}{v^2} + \frac{M'V'^2}{v^2} + \frac{M''V''^2}{v^2}$; sed V, V', V'', & v sunt uti AM, AM', AM'', & a; adeoque $\frac{V^2}{v^2} = \frac{\overline{AM}^2}{a^2}$ &c; ergo substitutione adhibita, $x = \frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2 + M''.\overline{AM''}^2}{a^2}$.

Ad determinandam longitudinem y penduli, quæ massarum summam $M+M'+M''$ gerens, a potentia $G+G'+G''$ immediate sollicitatam, pendulum simplex præbeat, quod isochronum sit simplici ac, cujus massa x ab eadem $G+G'+G''$ moveatur; eodem modo, ac antea est procedendum.

Quamobrem habebimus (6) $T : t :: \frac{\sqrt{M+M'+M''} \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{G+G'+G''}} : \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{G+G'+G''}}$; sed $T = t$; ergo est quoque $y = \frac{xa}{M+M'+M''}$ atque valorem x supra inventum substituendo, $y = \frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2 + M''.\overline{AM''}^2}{\overline{M+M'+M''}.a}$: quæ formula valor est (ex *Def.* XI.) distantiæ centri oscillationis solidi penduli tribus corporibus M, M', M'' compositi, a suo oscillationis axe; & non differt ab illis, in pendulis lineari & plano, num. præcedentibus inventis.

Quod si M'', ex. gr., oscillet supra axem B B; tunc etiam eodem progressu, mutatis tantum G'', & AM'', in $-G''$, & $-AM''$, eadem semper prodiret formula.

Similem methodum adhibendo ad centrum oscillationis determinandum solidi penduli quatuor corporibus compositi, posito etiam, quod ex hisce aliquod supra oscillationis axem existat; inveniemus ejus distantiam a dicto axe, æquare formulam $\frac{M.\overline{AM}^2 + M'.\overline{AM'}^2 + M''\overline{AM''}^2 + M'''.\overline{AM'''}^2}{\overline{M+M'+M''+M'''}.a}$; & sic de aliis solidis pendulis, majori, & etiam infinito corporum numero utcumque compositis.

Igitur centri oscillationis distantia ab oscillationis axe etiam in pendulo solido quocumque, æquatur summæ productorum uniuscujusque penduli massæ in quadratum distantiæ suæ ab ipso oscillationis axe, divisæ per massarum omnium summam ductam in quadratum distantiæ centri gravitatis corporum eorumdem ab eodem axe oscillationis. Q. E. pro casu ultimo determinandum.

XI. Ex hisce itaque illud concludamus oportet: *centrum oscillationis penduli cujusvis compositi, punctum illud esse in axe penduli existens, cujus distantia ab oscillationis axe adæquat summam uniuscujusque massæ corporum penduli ductæ in quadratum suæ distantiæ ab ipso oscillationis axe, divisam per productum summæ earumdem massarum in distantiam centri gravitatis corporum omnium ab eodem oscillationis axe*. Q. E. D.

Itaque vocata qualibet corporis massa $= M$, ejusque distantia ab oscillationis axe $= D$, atque distantia ab eodem axe centri gravitatis corporum omnium $= K$; erit in quocumque pendulo, distantia centri oscillationis ab oscillationis axe $= \frac{\int M D^2}{\int M.K}$; quod ferme convenit cum eo, quod Hugenius in primis, Bernoullii, Hermannus, aliique quamplurimi ex recentioribus magni viri, diversis methodis tradiderunt. Quapropter solutum remanet, ex Galilæanis Legibus, generale *centri oscillationis* problema nobis propositum, & per consequens nostri muneris partes expletæ.

De-

DEterminato generaliter penduli cujusvis compositi oscillationis centro, inventaque generali formula $\frac{\int M\,D^2}{\int M.K}$, quæ ipsius distantiam ab oscillationis axe determinat; abs re non erit nonnulla hic adjicere exempla, quibus palam fit methodus, qua procedendum est, ut particulariter, ope formulæ ejusdem, idem oscillationis centrum in dato pendulo aliquo definiatur. Tota difficultas consistit in determinatione valoris dictæ $\frac{\int M\,D^2}{\int M.K}$, pro diversa penduli oscillantis figura. Id autem præstabimus in nonnullis tantum regularibus solidis circa axem aliquem oscillantibus; remque ipsam, tribus, quæ sequuntur, exemplis expediemus.

EXEMPLUM I.

Determinemus in primis oscillationis centrum parallelepipedi rectangularis (Fig. 12.) ALD circa latus suum A L, seu axem B B oscillantis.

Sumpta in A R qualibet abscissa A m, quæ vocetur x, atque ejus elemento $mn = dx$, per puncta m, n intelligantur ducta plana duo mtp, nqs parallela plano A C; adeoque plano etiam R F. Hæc quidem dividebunt parallelepipedum in elementa infinitesima $mtpsqn$. Dicatur A L $= tp = a$, quælibet ordinata mz in mt accepta $= y$, ejusque elementum infinitesimum $= dy$; erit A z $= \sqrt{x^2+y^2}$.

Enim vero quodlibet solidum infinities infinitesimum $a\,dx\,dy$, quod elementum est infinitesimi elementi $mtpsqn$, in quolibet puncto distat ab axe B B per Az. Ergo si multiplicetur per $\overline{Az}^2 = x^2 + y^2$, & ad integrationem perducatur, habebitur ejus integrale æquale in casu nostro numeratori formulæ centri oscillationis distantiæ ab oscillationis axe num. ultimo expositæ, scilicet $\int a\,dx\,.\,dy\,.\,\overline{x^2+y^2}$ $= \int MD^2$; adeoque formula integra $\frac{\int M\,D^2}{\int M.K} = \frac{\int a\,dx\,.\,dy\,.\,\overline{x^2+y^2}}{\int a\,dx\,.\,dy\,.\,K}$,

quæ, quum productum duorum infinitesimorum contineat,

neat, duplicem integrationem exigit.

Posita x, & dx constante, integremus formulæ numeratorem $\int \overline{adx.dy.\overline{x^2+y^2}} = \int \overline{ax^2dx.dy} + \int \overline{adx.y^2dy}$, & habebitur $ax^2dx.y + \frac{adx.y^3}{3}$ + A constante si opus fuerit; & posita summa $= o$ quando $y = o$, erit $ax^2dx.y + \frac{adx.y^3}{3}$, nempe nulla constante opus est. Fiat $y = m\,t = $ R D $= b$, & habebitur $abx^2dx + \frac{ab^3dx}{3}$. Hæc formula denuo integrata erit $\frac{abx^3}{3} + \frac{ab^3x}{3}$, & facta $x = $ A R $= c$, erit tandem $\frac{abc^3}{3} + \frac{ab^3c}{3} = abc.\frac{\overline{c^2+b^2}}{3} = \int$ MD².

Ad formulæ nostræ denominatorem $\int \overline{adx.dy}$.K devenientes, advertimus valorem ejus haberi posse absque actuali integratione, quia $\int \overline{adx.dy}$ est summatoria omnium massarum, seu solidorum infinities infinitesimorum, quæ ex Geom. æqualis est abc, atque distantia K centri gravitatis parallelepipedi ab oscillationis axe B B, æquatur $\frac{\sqrt{c^2+b^2}}{2}$. Ergo $abc.\frac{\sqrt{c^2+b^2}}{2} = \int \overline{adx.dy}$.K $= \int$ M.K.

Itaque $\frac{\int MD^2}{\int M.K} = \frac{2.\overline{c^2+b^2}}{3\sqrt{c^2+b^2}} = \frac{2}{3}\sqrt{c^2+b^2}$, æqualis nempe $\frac{2}{3}$ diagonalis A D; sed $\frac{\int MD^2}{\int M.K}$ est distantia centri oscillationis parallelepipedi ab oscillationis axe B B; ergo etiam $\frac{2}{3}$ A D.

Verum hæc distantiam tantum centri oscillationis ab axe B B determinat, sed non centrum ipsum. Ut autem determinetur & centrum, dividenda sunt latera A L, D F bifariam in E, G, & ducta E G $=$ A D, quæ axis erit penduli, seu parallelepipedi, sumenda est E O $= \frac{2}{3}$ E G; hæc quidem determinabit punctum O, quod centrum erit quæsitum. Q. E. D.

Si R D sit infinitesima præ A R, adeoque b infinitesima ma præ c, ſumenda erit $EO = \frac{2c}{3} = \frac{2AR}{3}$. Contra EO ſumenda erit $= \frac{2b}{3} = \frac{2RD}{3}$ ſi AR infiniteſima ſit præ RD.

Tunc autem accipi debet $EO = AR = c$, vel $= RD = b$, quum erit $c = \frac{2b}{\sqrt{5}}$, aut $b = \frac{2c}{\sqrt{5}}$, ut inito calculo ſtatim patebit.

Alias hypotheſes, ut faciliores, omittimus.

EXEMPLUM II.

Inveniamus modo oſcillationis centrum in cono recto ex vertice ſuo ſuſpenſo.

Sit MCN (Fig. 13.) conus rectus oſcillans circa axem BB, qui in plano trianguli MCN, per verticem C tranſiens, normalis ad axem coni CD exiſtat.

Ponatur quælibet abſciſſa $Cs = x$, atque ordinata sq ei normalis $= y$, ut sr, elementum infiniteſimum abſciſſæ cs, ſit $= dx$, & elementum ordinatæ $sq = dy$. Porro fiat $CD = b$, $DN = a$, ut ſit quælibet $y = \frac{ax}{b}$.

Sint hiq, fgt circuli paralleli baſi, quorum centri ſint s, r; eorum radii erunt reſpectivæ y. Hi quidem circuli dividebunt conum in elementa infiniteſima $hiqtgf$. Quælibet abſciſſa sl dicatur z, ejuſque infiniteſimum elementum dz; erit ordinata ad angulos rectos $pl = \sqrt{y^2 - z^2}$. Denique peripheria circuli kpq vocetur p, ejuſque elementum dp, ut ſit circularis zonulæ pdy elementum $= dpdy$, & ductum in $sr = dx$, det $dpdydx$ elementum coni ordinis tertii infiniteſimorum.

Jamvero quoniam hujus conici elementi diſtantia ab oſcillationis axe BB eſt $pu = \sqrt{\overline{ul}^2 + \overline{lp}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$, erit formula noſtra centri oſcillationis diſtantiæ ab oſcillationis axe, ſcilicet $\frac{\int MD^2}{\int M.K} = \frac{\int dp.dy.dx \cdot \overline{x^2 + y^2 - z^2}}{\int dp.dy.dx \cdot K}$, ubi ſi-

gnum

gnum ſummatoriæ indicat, quod ſumma per tres vices debet iterari, ut ex ſequenti operatione apparebit.

Integremus formulæ numeratorem. Sed antea animadvertamus, $dp = \frac{y\,dz}{\sqrt{y^2-z^2}}$; ergo facta ſubſtitutione, & poſita variabili ſola z atque dz, erit $\int \overline{dp.dy.dx}\,.\,\overline{x^2+y^2-z^2} = \int \overline{x^2dx.dy.\frac{ydz}{\sqrt{y^2-z^2}}} + \int \overline{dy.dx.ydz.\sqrt{y^2-z^2}} = x^2dx.dy.\int\frac{ydz}{\sqrt{y^2-z^2}} + ydy.dx.\int dz\sqrt{y^2-z^2}$. Sed vocata $r:p$ ratione radii ad peripheriam circuli hiq, $\int\frac{ydz}{\sqrt{y^2-z^2}} = p = \frac{py}{r}$; & $\int dz\sqrt{y^2-z^2} = \frac{py^2}{2r}$, quia $dz.\sqrt{y^2-z^2}$ elementum eſt areæ circularis, cujus radius eſt y, & peripheria $\frac{py}{r}$. Ergo noſtræ formulæ numerator ad integrationem ſemel perductus erit $\frac{p}{r}.x^2dxydy + \frac{p}{2r}.y^3dydx$. Et denuo ſummando, poſita conſtante x ejuſque elemento dx, habebimus $\frac{p}{2r}.y^2x^2dx + \frac{p}{8r}.y^4dx$. Sed $y = \frac{ax}{b}$; ergo ſubſtituendo, $\frac{p}{2r}.\frac{a^2}{b^2}.x^4dx + \frac{p}{8r}.\frac{a^4}{b^4}.x^4dx$. Et integrando iterum, erit $\frac{pa^2}{10rb^2}x^5 + \frac{pa^4}{40rb^4}x^5 = \frac{pa^2}{40rb^4}.\overline{4b^2+a^2}.x^5$; & facta $x = \mathrm{CD} = b$, $r = \mathrm{DN} = a$, adeoque $p =$ baſi coni circumferentiæ $= c$, fiet tandem $\frac{cab}{40}.\overline{4b^2+a^2} = \int \mathrm{MD}^2$.

Denominator formulæ noſtræ, ſcilicet $\int\overline{dp.dy.dx}.\mathrm{K}$, nulla indiget integratione, quia æquatur cono, ducto in diſtantiam centri ſui gravitatis a vertice C; ergo quum conus æqualis ſit $\frac{cab}{6}$, & talis diſtantia $= \frac{3b}{4}$, erit $\int\overline{dp.dy.dx}.\mathrm{K} = \frac{cab^2}{8} = \int \mathrm{M.K}$.

Ita-

Itaque $\frac{\int M D^2}{\int M.K} = \frac{c\,a\,b.\,\overline{4b^2+a^2}}{40\,.\,\frac{c\,a\,b^2}{8}} = \frac{4b^2+a^2}{5b}$; adeoque in coni axe C D, ſumpta A O $= \frac{4}{5}$ longitudinis ſuæ C D, $+ \frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis poſt eamdem C D, & baſis radium D N, punctum O habebitur, quod centrum erit oſcillationis quæſitum. Q. E. D.

Si D N $=$ C D, hoc eſt $a = b$, fiet diſtantia prædicta $= b$, adeoque oſcillationis centrum coni, in centro D baſis ſuæ cadet.

E X E M P L U M III.

Ad oſcillationis centrum determinandum in cylindro recto M C N (Fig. 14.), oſcillante circa axem BB tranſeuntem per centrum C, eodem modo, ac antea in cono eſt procedendum; atque iiſdem denominationibus poſitis, habebitur etiam denominator formulæ generalis, ſcilicet $\int M D^2$, ad duplicem integrationem perductus, æqualis, ut antea, $\frac{p}{2r} . y^2 x^2 dx + \frac{p}{8r} . y^4 dx$; ergo, quum in cylindro, y æqualis ſit a, erit ſubſtituendo, & integrando $\frac{p\,a^2}{6\,r} . x^3 + \frac{p\,a^4}{8\,r} . x$; & poſita $x = b$, adeoque $r = a$, $p = c$, habebitur $\frac{c\,a\,b^3}{6} + \frac{c\,a^3\,b}{8} = \frac{c\,a\,b}{2} . \overline{\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \int M D^2$. Quoniam autem cylindri ſoliditas $= \int M, = \frac{c\,a\,b}{2}$; ſuique centri gravitatis diſtantia ab axe B B $=$ K, $= \frac{b}{2}$; erit $\int M.K = \frac{c\,a\,b^2}{4}$, ac proinde $\frac{\int M D^2}{\int M.K} = \frac{\frac{c\,a\,b}{2} . \overline{\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{4}}}{\frac{c\,a\,b^2}{4}} = \frac{2b}{3} + \frac{a^2}{2b}$.

Igitur in cylindro diſtantia centri oſcillationis O in axe ſuo C D exiſtentis, æquatur $\frac{2}{3}$ ejuſdem axis C D, $+ \frac{1}{2}$ tertiæ proportionalis post axem eumdem, basisque radium D N. Q.E.I.

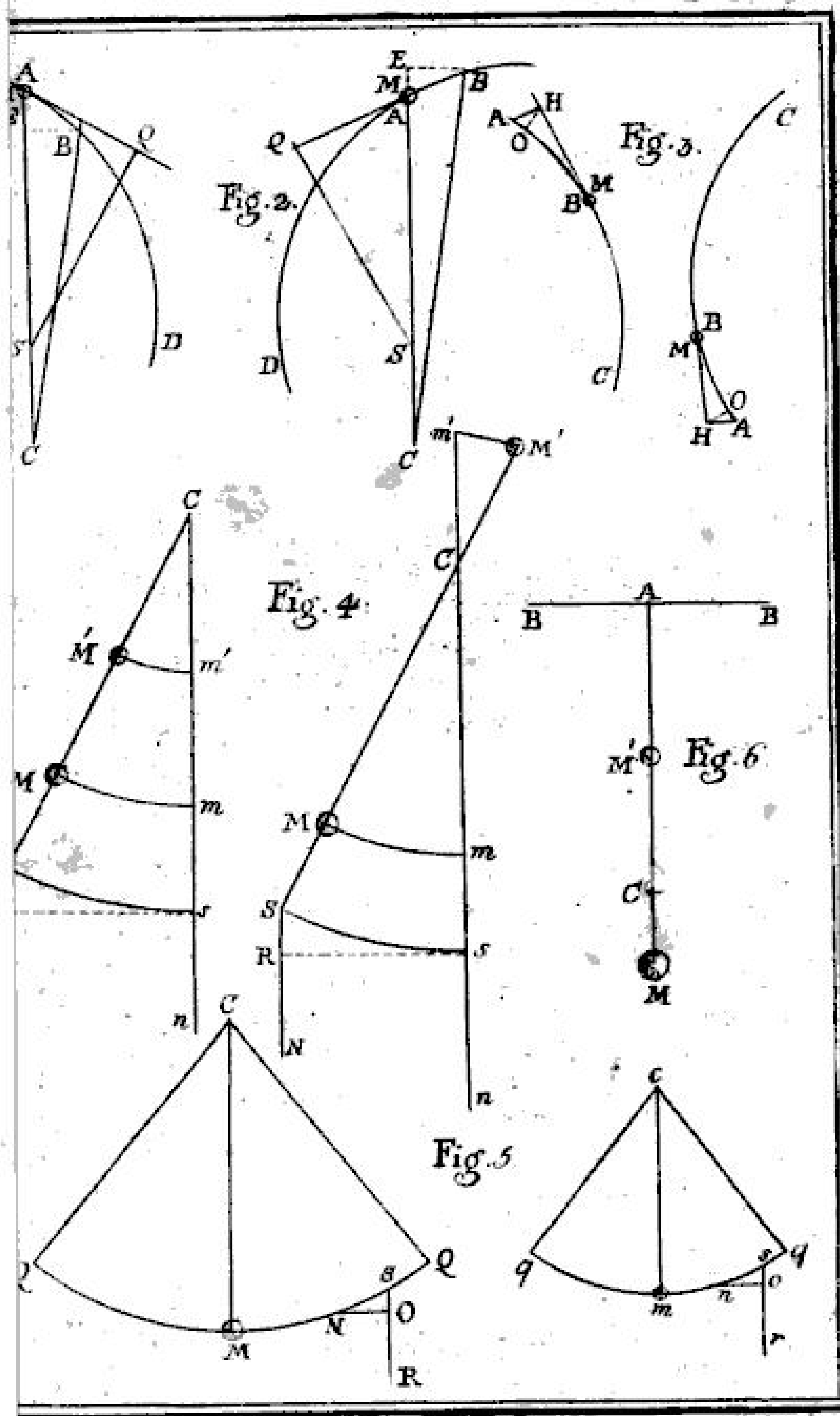
Si sit axis C D æqualis radio basis D N, hoc est $b = a$, erit distantia prædicta $CO = \frac{7b}{6} = b + \frac{b}{6}$. Igitur oscillationis centrum erit in productione axis per ejus partem sextuplam.

Si fuerit radius D N infinitesimus præ C D, hoc est a infinitesima præ b, erit $CO = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}CD$. Tunc autem $CO = CD$, hoc est oscillationis centrum in centro basis cadet, quum est $b = \sqrt{\frac{3a^2}{2}}$, ut adhibita substitutione in formula supra inventa $\frac{2}{3}b + \frac{a^2}{2b}$, statim patebit.

Atque exempla hæc satis superque sint ad methodum indicandam, qua procedendum est, ut in aliis figuris, ope generalis formulæ numero ultimo exhibitæ, oscillationis centra determinentur.

Interea priusquam disquisitioni huic finem imponamus, haud superfluum existimamus animadvertere, rem alioquin unicuique obviam, scilicet, quod ea, quæ adhuc statuta sunt, nullam supponant aeris gravitatem, vel resistentiam. Quum autem hæ adsint, tunc inter potentias pendulis applicatas, istæ quoque essent recensendæ, & computandæ, Verum de his agere esset propositum nostrum excedere.

TAB. I



TAB. II.