Opuscoli
di vario argomento

Di Giuseppe Cassella

Pi. 20

OPUSCOLI
DI VARIO ARGOMENTO
DI
GIUSEPPE CASSELLA

REGIO ASTRONOMO ALLA MARINA,
DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE, LETTERE, ED ARTI DI PADOVA.

OPUSCOLO I°.
SAGGIO D' UN TENTATIVO
PER RISOLVERE L' EQUAZIONI DI TUTT' I GRADI.

NAPOLI MDCCLXXXVIII.
Nella Stamperia di Pietro Perger.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

. . . . *Quod si cessas, aut strenuus anteis,*
Nec tardum opperior, nec praecedentibus insto.

Hor. Lib. I. Epist. II.

AI LEGGITORI.

A Uno benchè breve Opuscolo, conviene qualche verso di prefazione. Serve essa per indicare, fra le altre cose, il fine, e 'l disegno dell' Autore, e quale motivo l'ha spinto a scrivere. E' già qualche anno, da che nel tempo del mio studioso soggiorno a Padova, fra gli Accademici delle Scienze di quella Città trattavasi dell' Equazioni cubiche, e delle formole Cardaniche. Mi ricordava di avere tra i miei scritti notata qualche cosa circa questo particolare nel tempo delle prime scolaresce fatiche: mi venne subito il pensiero di scorrer quelli; e, aggiunta alle altre qualche osservazione di più, faceva osservare a qualche buon' amico, ed Accademico quelle prime idee, così com' erano. Alcune particolari circostanze non permettendo allora che le mettessi tutte in miglior ordine per pubblicarle (secondo avrebbe desiderato qualcheduno) la faccenda si differì più a lungo fino a questo tempo. Mi si presentò fin d' allora un pensiero, che il metodo da me tenuto nella soluzione, che dava dell' equazioni cubiche, potesse estendersi più oltre, a risolvere cioè quelle di più alto grado,

po-

potendo benissimo non essere che generale. La cosa riuscì felicemente, modificando diversamente il metodo, nel risolvere l' equazioni medesime del terzo, e quelle anche del quarto grado. L'asserire francamente che applicando questo stesso alla soluzione dell' equazioni di più alto grado, debba la cosa riuscire secondo il desiderio, prima di farne sperienza col fatto, sarebbe proposizione troppo ardita, che non potrebbe farmi esente dalla taccia di presuntuoso; sapendosi benissimo, che i principali metodi adoperati fino a questo tempo da valenti Algebristi (come fra gli altri quelli di Bezout, Euler ecc.) quantunque non si credano insufficienti per risolvere l'equazioni di grado superiore al quarto: con tutto ciò a cagione dei calcoli troppo lunghi e intrigatissimi, che ricercano, fino al presente non ci hanno dato ancora la soluzione dell'equazioni di quinto grado, almeno generalmente. Anche il presente non è (come indica il titolo stesso dell' Opuscolo) che un semplice tentativo: e veramente non ho data completa qui che la soluzione dell' equazioni, cominciando da quelle del primo fino a quelle del quarto grado: essendo soltanto molto ragionevole lo sperare, che (usando alcuni artificj consimili a quelli, che si vedranno adoperati qualche volta nel presente Scritto) si possano così con felice successo risolvere l' Equazioni di più alto grado.

In quest' Opuscolo non si hanno che poche cose, e le più essenziali circa la quistione di cui si tratta: avendo differita qualche altra riflessione a più opportuno tempo. Io le ho scritte, come le ho ritrovate, e niente più: per cui forse man-

che-

cherà nel averle disposte quell' ordine preciso, e rigoroso, che altri forse desiderebbe in queste materie; essendomi contentato (per iscansare una fatica di più, e tediosa) di accennare soltanto alcune altre; tanto che chi legge possa venire a capo del metodo, ch' è la cosa principale, e la più essenziale. Che anzi per la natura in se stessa austera delle Scienze Analitiche, che quasi sfuggono ogni ornamento di dicitura, è avvenuto, che anche questa si sia in parte trascurata. Io debbo ripeterlo; questa non è che una fatica scolaresca; e prego il pubblico a compatirla come tale. In seguito (se questa sorta di lavoro sarà gradita) daremo qualche altra cosa di maggior importanza, che preparata disporremo una dopo l' altra circa il calcolo integrale, sopra una maniera di risolvere i problemi con arbitraria ipotesi, e specialmente sopra i massimi e i minimi d' un uso frequentissimo in Astronomia, e in Navigazione; perchè coltivassi le quali si è compiaciuto per sola sua clemenza il benefico e magnanimo nostro Sovrano di ordinare che fossi onorevolmente richiamato nella patria, dando di mano in mano le opportune providenze, perchè si facciano le convenienti osservazioni per l' avanzamento, e per la perfezione delle medesime.

LO STAMPATORE A CHI LEGGE.

Per la forma del libro non essendosi potuto mettere tutte l'Equazioni nei respettivi luoghi dell'Opuscolo, ove appartenevano; si è creduto necessario di stampare le più lunghe in una Tavola, che si trova in fine dello stesso. Vivi felice.

ERRORI	CORREZIONI
Pag. 4. linea 8. per zero,	per zero)
pag. 16. lin. 9. delia	della
detta lin. 14. che che	che
pag. 21 lin. 7 $x = -\frac{-c}{2m}$	$\frac{-c}{2m}$
pag. 23. lin. 2. quella	quella
pag. 27 lin. 2 $\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{ab}{2}-\frac{a^3}{8}-c} . m^2$	$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{ab}{2}-\frac{a^3}{8}-c} : m^2$
p. 28. l. 18. $(3z^2+3)^2 = -\frac{5}{4}$	$(3z^2+3)^2 - \frac{5}{4}$ ec.
pag. 32. lin. 17. $12\ c^2\ r^2$	$12\ c^2\ r^3$
detta lin. 18. $12^2\ c^2\ r^2$.	$12\ c^2\ r^3$
detta lin. 22. $r^4 =$	$r^4 +$
detta lin. ult. $r^3 + \frac{abc-9c^3}{8a^2-a4b} = + \sqrt{\text{ec.}}$	$r^3 + \frac{abc-9c^3}{8a^3-24b} = \pm \sqrt{\text{ec.}}$
pag. 34. lin. 7. manieta	maniera
detta lin. 12 $+ 3zx$	$+ 3z^2x$

OPUSCOLO I.

Saggio d' un tentativo per risolvere l' Equazioni di tutt' i gradi.

LA più grande difficoltà, o, per meglio dire, l'unica che s' incontra tentando la soluzione del Problema, *Trovare un metodo generale per risolvere l' Equazioni di tutt' i gradi*, si riduce a questa; di trattare cioè una Equazione qualunque per li varj artificj già noti in Algebra in modo, che si pervenghi a un' altra di grado inferiore alla proposta. Varj tentativi, e certamente ingegnosi si sono adoperati a questo fine da valenti Algebristi, i quali ordinariamente si riducono all' artificio di trasformare la proposta in un' altra per sostituzioni; e fra gli altri non sono da tacersi i due elegantissimi, uno del Sig. Bezout negli Atti dell' Accademia di Par. 1761, l' altro dell' immortale Euler Tom. IX. Com. Pietr. Una strada affatto diversa si è da noi battuta nel presente Opuscolo, la quale coll' aggiungere la medesima grandezza all' Equazione, che si vuol risolvere, fa in modo, che possa divenir quadrato, e in conseguenza abbassarsi a un' altra di grado eguale alla metà del coefficiente massimo della proposta a risolversi, se questo è numero pari, o, s' è dispari, al medesimo più l' unità diviso per

 due.

due. Affinchè si vegga più facilmente l'andamento del metodo, è bene di applicarlo prima alla soluzione anche dell' Equazioni del primo, e del secondo grado; quantunque di esse sia molto facile la soluzione per altro verso: e facciamo ciò tanto più volentieri, quanto che l'idea di esso non mi è venuta in pensiero che riflettendo più da presso alla maniera, che si tiene ordinariamente nel risolvere l'Equazioni quadratiche, estendendola alla risoluzione di quelle di grado più alto.

1. Si voglia pertanto dell'Equazione del primo grado $x - a = o$ il valore dell'ignota. Ridotta a una di secondo grado, onde sia $x^2 - ax = o$ (moltiplicandola cioè per $x = o$), si aggiunga m^2 così al primo, che al secondo membro, e avremo $x^2 - a\,x + m^2 = m^2$ (la m è ignota). Il secondo membro di quest' ultima Equazione è un quadrato: supponendo dunque quadrato anche il primo, converrebbe che fosse $\frac{a^2}{4} = m^2$, per cui si avranno due valori di m, vale a dire $\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}$. Ciò posto estratta la radice quadrata da ambi i membri dell' Equazione ridotta, avremo $x \pm m = \pm m$, e, sostituendo $\pm \frac{a}{2}$ in vece di m, $x \pm \frac{a}{2} = \pm \cdot \pm \frac{a}{2}$, cioè $x = o$, $x = + a$, $x = - a$: tre radici, due delle quali $x = o$, $x = a$ servono per risolvere la proposta modificata $x^2 - a\,x = o$. Si noti che una delle x è venuta eguale a *zero*; perchè l'Equazione $x - a = o$ da noi, per seguire il nostro metodo, si è moltiplicata per $x = o$: l'altra poi $x = - a$ è la negativa opposta alla positiva, la quale sebbene sia estranea, e non faccia al nostro proposito; pure ci fa avvertiti di alcune particolarità, che converrà osservare nel progresso di questo Scritto.

2. Non altrimenti si risolveranno l'Equazioni di secondo grado. Vogliansi le radici dell' Equazione quadratica $x^2 + a\,x + b = o$. Aggiungendo (come al n. 1. si è fatto) m^2

m^2 a ciascuno dei due membri di essa, sarà $x^2 + ax + b + m^2 = m^2$ (supponendo m ignota); e facendo quadrato il primo membro, giacchè è tale il secondo, si avrà
(A) $x + \sqrt{b + m^2} = \pm m$, onde $x = \pm m - \sqrt{b + m^2}$.
Ora per venire in cognizione della m, fatto il quadrato del primo membro dell' Equazione (A), ch' è $x^2 + 2x\sqrt{b + m^2} + b + m^2$, e paragonati i termini analoghi di questo con quelli del primo membro della proposta modificata, si avrà $2\sqrt{b + m^2} = a$, ovvero $4b + 4m^2 = a^2$, e $m = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. Quindi sostituendo in (A) $x = \pm m - \sqrt{b + m^2}$ in luogo di m il valore or ora ritrovato $\pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$; avremo tutt' i valori dell' Equazione modificata $x = \pm . \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4} - b} = \pm . \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \sqrt{\frac{a^2}{4}}$, i quali sono 1° $x = +\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2}$ 2°. $x = -\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2}$ (prendendo $-\sqrt{\frac{a^2}{4}} = -\frac{a}{2}$) 3°. $x = +\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + \frac{a}{2}$, 4°. $x = -\sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + \frac{a}{2}$ (prendendo $-\sqrt{\frac{a^2}{4}} = +\frac{a}{2}$). I due primi sono le radici della nostra Equazione $x^2 + ax + b = o$ proposta a risolversi: i rimanenti due sono le opposte negative, che al presente problema non appartengono bensì, ma bisogna notarle, come dipendenti dal metodo da noi usato.

3. Ciò premesso per l' intelligenza della natura del nostro metodo; veniamo alla soluzione dell' Equazioni di più alto grado, e prima risolviamo quelle del terzo. L' Equazioni cubiche possono tutte essere comprese nella generale seguente $x^3 \pm ax^2 \pm bx \pm c = o$, in cui si hanno tut-

te le possibili combinazioni de' segni. Scegliamo per ora l' Equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = o$, combinando i segni tutti positivi, e si voglia risolver generalmente alla nostra maniera: giacchè le altre, diversamente combinati i segni, si potranno a norma di essa risolvere con molta facilità. Si riduca perciò alla forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = o$ (moltiplicando cioè il primo membro per x, e 'l secondo per *zero*, e si disponga così, senza che si alteri punto, $x^4 + ax^3 = - bx^2 - cx$. Concepiscasi ora aggiunta sì al primo, che al secondo membro la stessa quantità onde sia (V) $x^4 + ax^3 + \frac{a^2}{4} x^2 + 2mx^2 + amx + m^2 = (- b + \frac{a^2}{4} + 2m).\, x^2 + (am - c).\, x + m^2$, e si supponga la m ignota, da determinarsi secondo la maniera tenuta ai numeri 1., e 2.

4. Giacchè il primo membro della nostra Equazione (V) è un quadrato; per legge d' uguaglianza dobbiamo supporre, e fare quadrato anche il secondo: la quale ipotesi fatta, ed estratta la radice quadrata da ambi i membri, si avrà $x^2 + \frac{ax}{2} + m = \frac{am - c}{2m}.\, x + m$, ovvero $x = \frac{-c}{2m}$. Ora nella cubica data a risolversi al numero 3. $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ sostituito $- \frac{c}{2m}$ in vece di x, nascerà $- \frac{c^3}{8m^3} + \frac{ac^2}{4m^2} - \frac{bc}{2m} + c = o$, che passa in questa (A) $m^3 - \frac{bm^2}{2} + \frac{acm}{4} - \frac{c^2}{8} = o$, anch' essa cubica, di cui a primo aspetto potrebbe dubitarsi, e con ragione, che si possano avere le radici: dapoichè dovendosi esse ricercare per la soluzione d' una Equazione cubica, ch' è quello si pretende di fare, si caderebbe nell' inconveniente di cercare l' ignoto per l' ignoto medesimo.

Non-

Nondimeno, siccome l'industria vale molto nelle materie, che trattiamo, è bene osservare, che nel caso si supponesse fra i coefficienti della proposta Equazione valere la condizione $\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3ac}{4}$, vale a dire $b^2 = 3ac$, si potrà certamente determinare la m. Dapoichè l'Equazione (A) divenendo, per una tal condizione, $m^3 - \frac{bm^2}{2} + \frac{b^2}{12} m = \frac{c^2}{8}$, sarà anche $m^3 - \frac{bm^2}{2} + \frac{b^2}{12} m - \frac{b^3}{216} = \frac{c^2}{8} - \frac{b^3}{216}$; e quindi, estratta la radice terza da ambi i membri, avremo $m - \frac{b}{6} = \sqrt[3]{\frac{c^2}{8} - \frac{b^3}{216}}$, e finalmente (B) $m = \frac{b}{6} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}$.

5. Determinata la m è facile a vedersi che l'Equazione al numero 3. (V) $x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} + 2mx^2 + amx + m^2 = \left(-b + \frac{a^2}{4} + 2m\right).x^2 + (am - c).x + m^2$ è già risoluta: imperciocchè avendo noi determinata la m in guisa che diviene anche quadrato il secondo membro di essa, si potrà da ambi i membri estrarre la radice quadrata; quindi sarà $x^2 + \frac{ax}{2} + m = \pm x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} \pm m$; e, servendoci della combinazione de' segni la più comoda, e la meno intrigata, $x^2 + \frac{ax}{2} + m = x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} + m$, che diviene $x^2 + \frac{ax}{2} - x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} = 0$. Da questa ricaviamo quì due valori soltanto $x = 0$, $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$, che sono due radici dell' Equazione ridotta al numero 3. Più sotto faremo vedere come si potranno avere tutte le radici della cubica

pro

proposta a risolversi, le quali si ricavano dalla medesima ridotta.

6. Ora perchè dell' Equazione (A) num. 4. niuna radice si potrebbe avere, se non se, (come abbiamo veduto) quando si avverasse la condizione $b^2 = 3\,a\,c$ fra i coefficienti dell' Equazione $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = o$ proposta a risolversi; perciò è necessario, prima di andar oltre, che facciamo vedere la maniera di ridurre tutte le cubiche, sì che i coefficienti di essa abbiano una sì fatta condizione. La cosa è molto facile, e se ne faccia pruovà in tutti i possibili casi.

7. E prima l' Equazione $y^3 + f\,y^2 + g = o$ si voglia ridurre a un' altra di questa forma $x^3 \ldots a\,x^2 \ldots b\,x \ldots c = o$, sicchè vaglia fra i coefficienti di essa la condizione $b^2 = 3\,a\,c$. Facciasi $y = x + z$ (z è una ignota); sostituendo sarà

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\,z\,x^2 + 3\,z^2\,x + z^3 \\ \quad + f\,x^2 + 2\,f\,z\,x + f\,z^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + g \end{array}\right\} = o.$$ Dovendo essere,

per quello che si cerca, $b^2 = 3\,a\,c$; sarebbe $(3\,z^2 + 2\,f\,z)^2 = 3 \cdot (3\,z + f) \cdot (z^3 + f\,z^2 + g)$, che riducendola diverrà $z^2 - \frac{9\,g\,z}{f^2} = \frac{3\,g}{f}$, e risoluta $z = \frac{9\,g}{2\,f^2}$

$\pm \sqrt{\frac{3\,g}{f} + \frac{81\,g^2}{4\,f^4}}$. Facendo dunque $y = x + \frac{9\,g}{2\,f^2}$

$\pm \sqrt{\frac{3\,g}{f} + \frac{81\,g^2}{4\,f^4}}$ si avrà la desiderata trasmutazione.

8. Si opererà della stessa maniera volendosi ridurre alla richiesta condizione una Equazione numerica. Nell' Equazione $y^3 + 3\,y - 1 = o$ messo, come al passato numero, $x + z$ in vece di y, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3\,z\,x^2 + 3\,z^2\,x + z^3 - 1 \\ \qquad\qquad + 3\,x + 3\,z \end{array}\right\} = o:$$

e per la condizione num. 4. dovendo essere $(3\,z^2 + 3)^2 = 3 \cdot 3\,z \cdot (z^3 + 3\,z - 1)$, si avrà $z^2 - z = 1$; per uno de' valori della quale già risoluta, si ridurrà la proposta $y^3 + 3\,y - 1 = o$ alla condizione richiesta. Se l' Equaziozione da ridursi avesse tutt' i termini, riuscirebbe non ostante la trasmutazione. Noi ci astenghiamo di farlo vedere, potendo ognuno provarlo da se, quando lo voglia.

9. Ritornando ora alla nostra generale Equazione num. 3., di cui abbiamo già sopra notato aversi due radici $x = o$, $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$: osserviamo che d'esse l'ultima è una delle tre, che soddisfa all'Equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ proposta a risolversi. Conviene ora, per la completa soluzione del Problema, trovare le rimanenti due radici. E fra le molte maniere, onde si può pervenire all'intento, scelgo la seguente, per essere la più breve, la più semplice, e forse la più elegante delle altre; ricavando cioè quelle dalla già ritrovata $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$.

10. Imperciocchè l'Equazione (A) num. 4. $m^3 - \frac{bm^2}{2} + \frac{acm}{4} - \frac{c^2}{8} = o$ avendo, com'è noto, tre valori (che si avranno col moltiplicare $\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}$, che compone la m al numero 4. per le tre radici dell'unità cubica 1, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$), i quali sono per appunto $m = \frac{b}{6} + \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}\right).1$, $m = \frac{b}{6} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}\right).\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$, $m = \frac{b}{6} + \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}\right).\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$: sostituendo nella nostra radice $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$ i tre già detti valori di m, si avranno tutte e tre le radici della proposta cubica: e sono

I. x

$$\text{I. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + \frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}}$$

$$\text{II. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + \frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} \times -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$$

$$\text{III. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + \frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} \times -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$$

11. Ma perchè noi dovremo più sotto al num. 13 far osservare una certa trasmutazione, che si vede nascere fra le nostre radici, di modo che una passa nell'altra, e per quello saremo per notare in seguito: esprimeremo le già ritrovate x per gli tre valori di m, che facilmente ricavar si potranno dalla medesima Equazione (B) $m = \frac{b}{6} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}$, che sono $\overline{2m - \frac{b}{3}} \times 1 + \frac{b}{3}$, o sia $2m$, $\overline{2m - \frac{b}{3}} \cdot \overline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}$, $\overline{2m - \frac{b}{3}} \cdot \overline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}$. Esse dunque verranno espresse altrimente così

$$\text{I. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$$

$$\text{II. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + \overline{2m - \frac{b}{3}} \cdot \overline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}}$$

$$\text{III. } x = -\frac{a}{2} + \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + \overline{2m - \frac{b}{3}} \cdot \overline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}}$$

12. Esempio. Vogliansi indagare coll' ajuto delle nostre formole le tre radici dell' Equazione numerica $x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$. Non dovendo essa ridursi (imperciocchè vale ne' coefficienti la condizione n. 4. $b^2 = 3ac$) : fat-

te le opportune sostituzioni si troverà (B) $m = \frac{b}{6} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}$

$= \frac{3}{2}$: quindi $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} + \sqrt{-3}}$,

$x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{11}{4} - \sqrt{-3}}$; vale a dire

I. $x = -1$

II. $x = \sqrt{-3}$

III. $x = -\sqrt{-3}$

13. E' questo il luogo di far vedere come delle tre radici d'una Equazione cubica secondo questa maniera di risolverle, una passa nell' altra, secondo che si danno alla m i tre diversi valori, che le spettano; quantunque però ritornino sempre le stesse. Noi potremmo far vedere ciò generalmente colle lettere, e molto facilmente per ciò che si è detto al num. 10; ma fia meglio per brevità farlo osservare nelle radici della superiore Equazione numerica $x^3 + x^2 + 3x + 3 = o$. Cerchiamo perciò prima tutt'i valori di m nel caso presente, che sono $\frac{3}{2}$ num. 12., $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ pel num. 10: indi sostituendo $\frac{3}{2}$ per m in tutte le radici al num. 11., si avranno le x coll'ordine, onde si vedono al num. 12: mettendo poi $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ per m nelle medesime radici, si avranno

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} + \sqrt{-3}}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} + \sqrt{-3} - 1 \cdot -\frac{1}{2} + \sqrt{-3} + 1}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} + \sqrt{-3} - 1 \cdot \overline{-\frac{1}{2} - \sqrt{-3} + 1}} \; ;$$

la prima delle quali $x = \sqrt{-3}$ è la 2. del n. 12; la seconda $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} - \sqrt{-3} + 1 - 1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} - \sqrt{-3}} = -\sqrt{-3}$ passa nella 3. dello stesso numero; la terza finalmente

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1}$$

$$= -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{11}{4} + 3} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

è certamente la seconda. E' superfluo il sostituire l'altro valore di $m = -\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ nelle superiori x, dovendosi avere lo stesso risultato.

14. L' Analisi contenendo sempre sotto ogni formola, o Equazione più di quello, che si ricerca, quando si abbia l' accortezza d' esaminarne gli andamenti per ogni verso, e presentando tutt' ora cose degne di attenzione agl' indagatori della verità: fermiamoci pur un poco a fare sulla passata soluzione, e sulle già ritrovate radici qualche riflessione, che incidentemente cade in acconcio, sebbene in materia d' Analisi elementare.

15. E prima di tutto, facendo attenzione al metodo da noi tenuto per risolvere generalmente l' Equazioni cubiche, si vede che avendo ridotta a Equazione di quarto grado una di terzo, moltiplicandola per $x = o$, l' Analisi deve darci una delle trovate radici eguale al zero. Così è in fatti; dapoichè pel n. 5. si ha una delle $x = o$.

16. In seguito non lasciamo di osservare, che siccome la radice quadrata ha sempre necessariamente due valori; così

così le x, che si ritrovano col presente nostro metodo, sono veramente sei. Il Problema dunque considerato sotto questo aspetto è certamente di sesto grado: quantunque delle sei radici quelle debbono scegliersi, le quali facciano verificare le condizioni, che v'hanno fra i coefficienti della proposta Equazione; trascurando le altre tre, come d'altro uso. Questo s'accorda molto bene con quello che altri hanno scritto relativamente su questo particolare. Si legga fra gli altri il Sig. d'Alembert Tom. V. Opusc. *sur les quantités imaginaires*, e specialmente il §. 34.

17. Che anzi, ritornando all'Equazione num. 3°., che nel num. 5°. si è abbassata a una di secondo grado; è chiaro, che sebbene per maggior semplicità del calcolo si è intieramente soddisfatto alla ricercata soluzione dell'Equazioni cubiche, tuttavolta a rigore le due radici estratte dai membri dell'anzidetta Equazione debbono esprimersi così

$\pm x^2 \pm \frac{ax}{2} \pm m = \pm x . \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} \pm m$. Per ora ci può bastare la combinazione $x^2 + \frac{ax}{2} + m =$ $\pm x \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} \pm m$; che, lasciate le altre, prendiamo a esaminare più particolarmente.

18. Quattro essendo le maniere, onde si possono combinare i termini dell'Equazione al num. antecedente; della prima delle quali

$x^2 + \frac{ax}{2} + m = x \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} + m$ coi segni tutti positivi ci siamo serviti per la soluzione da noi già data dell'Equazioni di terzo grado; e lasciando anche le altre due $x^2 + \frac{ax}{2} + m = + x \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} - m$, $x^2 + \frac{ax}{2} + m = - x \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} + m$, come inservienti ad altro problema: fermiamoci al ultima

$x^2 + \frac{ax}{2} + m = - x \sqrt{- b + \frac{a^2}{4} + 2m - \overline{m}}$; onde si dee anche legittimamente ricavare la soluzione del proposto problema cubico; imperciocchè con essa egualmente che colla prima si fa ritorro alla proposta.

19. Ridotta, e risoluta quest' ultima ci dà (A) (*Vedi la Tavola pag. ultim.*); due radici, delle quali una almeno appartiene alla nostra cubica proposta a risolversi. Ora, siccome abbiamo già sopra notato, essendo tre i valori di m, sostituiti tutti e tre nella nostra, oltre alle due già dette radici, si avranno altre quattro espresse anche per m per maggior semplicità (*B*), *e* (*C*). (*Tav.*)

20. E' facile a vedersi come i valori di m essendo tre, e potendosi questi combinare in tante differenti maniere nelle precedenti sei Equazioni; si avranno di x tanti valori, quante esser possono le possibili combinazioni della m cogli altri termini. Ma siccome le altre molte radici, che potrebbero ritrovarsi, non appartengono al nostro Problema, la cui soluzione è lo scopo nostro principale; così tralasciamo per ora una sì fatta ricerca. Intanto fra i sei superiori valori di x num. 19. dovendo essere compresi i tre, che sono le radici della proposta cubica, tra essi sceglier dobbiamo quelli, che facciano verificare le condizioni fra i coefficienti della medesima. Col qual criterio escludendo le altre, le tre radici della proposta cubica, che cerchiamo sono (*D*), (*E*), (*F*) (*Tav. pag. ultima*): la m è nota pel num. 4.

21. Noi potremmo far osservare, che delle radici espresse in altra maniera al numero antecedente una passa nell' altra, secondo che si danno alla m i tre diversi valori, giusta l' esposto al num. 13; se pur non sapressimo di dover essere lunghi più del bisogno. Fermiamoci soltanto a ricavare dalle formole (D), (E), (F) le medesime radici dell' Equazione numerica $x^3 + x^2 + 3x + 3 = o$, che si sono già ritrovate al num. 12. Per iscansare il calcolo, che potrebbe riuscire un poco più intrigato, e conseguentemente divenire più nojoso volendo servirci a dirittura delle anzidette formole: facciamo piuttosto ritorno all' Equazione del

num. 18.

num. 18. $x^2 + \frac{ax}{2} + m = -x\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m} - m$, la quale, fatte le opportune sostituzioni, passa in questa $x^2 + \frac{x}{2} + m = -x\sqrt{-\frac{11}{4}+2m} - m$. Si sostituiscano ora in essa in vece di m i tre valori numerici altrove ritrovati al num. 13, cioè $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ uno per volta; e si avrà per la prima sostituzione $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = -x\sqrt{-\frac{11}{4}+3} - \frac{3}{2}$, o sia $x^2 + \frac{x}{2} = -x\sqrt{\frac{1}{4}} - 3$ cioè $x^2 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - 3$, onde finalmente $x = \sqrt{-3}$ I. e $x = -\sqrt{-3}$

22. Messa in seguito in vece di m l' altra $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ nella medesima Equazione, nascerà $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -x\sqrt{-\frac{11}{4}+\sqrt{-3}} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, che diviene $x^2 + \frac{x}{2} = -x.\overline{\frac{1}{2}+\sqrt{-3}} - \sqrt{-3}$ (servendoci della radice, che dal binomio $-\frac{11}{4}+\sqrt{-3}$ abbiamo estratta al num. 12.) o sia $x^2 + x + x\sqrt{-3} = -\sqrt{-3}$, dalla quale risoluta si ha $x - \sqrt{-3}$ II, e $x = -1$.

23. Finalmente mettendo $-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ per m, si avrà

x^2

$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -x\sqrt{-\frac{11}{4} - \sqrt{-3}}$, cioè

$x^2 + \frac{x}{2} = -x \cdot \overline{\frac{1}{2} - \sqrt{-3}} + \sqrt{-3}$, che diviene

$x^2 + x - x\sqrt{-3} = \sqrt{-3}$: onde risolvendo, si avrà

$x = -1$ III., e $x = \sqrt{-3}$. Avremo dunque da cadauna

delle tre Equazioni una radice; e sono I. $x = \sqrt{-3}$, II.

$x = -\sqrt{-3}$, III. $x = -1$; le stesse, che abbiamo altrove ritrovate.

24. La natura del metodo da noi adoperato per risolvere l' Equazioni di terzo grado (riducendo cioè a quadrato-quadrata una Equazione cubica, moltiplicandola per $x = o$) richiederebbe, che siccome nell' altra espressione delle radici si è notato avvenire al num. 15, anche in questo modo d' esprimerle una delle x diventi *zero*, La faccenda però va altrimenti: dapoichè se si rifletta sull' Equazione num. 18.

$x^2 + \frac{ax}{2} + m = -x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} - m$ (espressione anch' essa legittimamente dedotta dall' Equazione ridotta

$x^4 + ax^3 + \frac{a^2}{4}x^2 + 2mx^2 + amx + m^2 = \left(-b + \frac{a}{4} + 2m\right)x^2 + (am - c)x + m^2$, alla quale si fa ritorno alzando ambi i membri a quadrato) si osserverà che l' Analisi non ci presenta veruna delle x, che diventi *zero*, urtandosi in alcuni inconvenienti. La cosa può a primo aspetto sembrare un poco misteriosa, e merita certamente, che ci tratteghiamo pur un poco per ingegnarci di spiegarla.

25. Giacchè si vuole che nella nostra espressione

$x^2 + \frac{ax}{2} + m = -x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m} - m$ una delle x possa sa divenire *zero*; si metta pur ivi *zero* in vece di x, e vediamo che nasce subito $m = -m$, cioè $1 = -1$; equazione a primo aspetto assurda; la quale nondimeno, facendovi attenzione, c'indica alcune avvertenze, che bisogna avere circa i segni da legittimamente adoperarsi, perchè si pervenga all'intento. Dapoichè siccome per essa siamo avvertiti d'aver adoperato il segno negativo pel positivo, nell'estrarre la radice dal secondo membro, com'è in fatti; così ella ci fa sapere nello stesso tempo che l'estrazione della radice così disposta non bene s'accorda col mettere una delle x *zero*. Val quanto dire ch'è impossibile che una delle x diventi *zero* (secondo richiederebbe la natura del nostro metodo, che riduce a quarto grado una Equazione del terzo) volendo servirci nello stesso tempo nell'estrazione della radice dal secondo membro dei segni negativi a preferenza dei positivi, diversamente dall'operato al num. 6., se pur non si voglia cadere nell'inconveniente dell'Equazione $1 = -1$; la quale manifestamente ci avvertisce della scelta de' segni.

26. Per avvalorare la superiore verità; e perchè vie maggiormente si confermi che combinando i segni nel secondo membro delle nostra Equazione in maniera diversa da quella adoperata al num. 5., cioè mettendo il segno $-$ pel segno $+$, o a rovescio delle sei x al num. 19. niuna possa divenire *zero*, senza che s'inciampi in assurdi: prendiamo di nuovo per mano l'Equazione

$x^2 + \frac{ax}{2} + m = -x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m - m}$; e osserviamo che messa quivi *zero* per x, nascendo (come notammo) $m = -m$, ovvero $+2m = 0$, si potrebbe sospettare che per esser tre i valori di m, e questi composti di più termini, uno almeno possa divenir *zero*, onde possa esser vera l'Equazione $+2m = 0$. Vediamolo.

27. Una delle m è $\frac{b}{6} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}$ n. 4. le altre due

sono $\frac{b}{6} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} \times \overline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$

$\frac{b}{6} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} \times \overline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$ num. 10. Ora nel caso nostro di $+2m = o$, dovrebbe essere nella prima m

$\frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} = o$, nelle altre due

$-\frac{b}{3} = \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} \times \overline{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$;

$-\frac{b}{3} = \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}} \times \overline{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$, delle quali sì dalla prima, che dalle altre due ridotte si verrà alla medesima conclusione di $-\frac{b^3}{27} = c^2 - \frac{b^3}{27}$, cioè di $c^2 = o$; altro inconveniente. Cioè a dire che dovrebbe esser *zero* l'ultimo termine della nostra cubica; e passando conseguentemente a una di secondo grado, il nostro metodo non potrebbe applicarsi che alla soluzione di queste, (come sarebbe in fatti volendo farne sperienza) niente potendo servirci per risolvere le cubiche, ch'è lo scopo del nostro artificio. Il volere dunque una delle *x zero* nello stesso tempo, che che si mette il negativo pel positivo, secondo l'operato, è incompatibile nella presente circostanza; dapoichè si cade, come abbiam veduto, nell'inconveniente o dell'Equazione $1 = -1$, o dell'altra $c^2 = o$, che da essa dipende, e n'è una immediata conseguenza.

28. Restiamo convinti sempre più della verità di quanto abbiamo ne' tre passati numeri asserito, che l'Equazione $1 = -1$ è nata da ciò, che si è adoperato piuttosto il segno *meno*, che 'l *più*, estraendo la radice dal secondo membro dell'Equazione del num. 4., se facciamo attenzione, che ricadiamo nel medesimo inconveniente, esprimendo diversamente le radici dei due membri della stessa, così

$x^2 + \frac{ax}{2} + m = \frac{-am + c}{2m} . x - m$, o in quest'altra maniera

niera $x^2 + \frac{ax}{2} + m = - x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}\ \frac{-am + c}{2\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}}$

(usando sempre la combinazione dei segni negativi nei termini del secondo membro). Imperciocchè nella prima di queste due fatta $x = o$, si avrebbe lo stesso risultato di $m = -m$, o di $1 = -1$, per cui di essa non occorre far altra parola: nell' altra poi $x^2 + \frac{ax}{2} + m = - x\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$
$\frac{-am + c}{2\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}}$ messo *zero* per x si avrà

$m = \frac{c - am}{2\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}}$, la quale resta da esaminarsi.

29. Ora quantunque sia vero, che riducendo questa, e ordinandola per m, si perviene sempre alla medesima Equazione cubica num. 4. $m^3 - \frac{bm^2}{2} + \frac{acm}{4} = \frac{c^2}{8}$ egualmente che se riducessimo l'altra $m = \frac{-c + am}{2\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}}$

usando nel secondo membro la combinazione de' segni tutti positi (dapoichè il quadrato di $c - am$ è lo stesso che quello di $am - c$): tuttavolta è cosa degna di osservazione il vedere, che volendo una delle x anche in questa sia *zero*, le radici vengono diverse per li segni, e per altra via si ritorna all' Equazione $1 = -1$. Ecco come.

30. Si è osservato n.28., che nell' Equazione $x^2 + \frac{ax}{2} + m = -x\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m} \quad \frac{-am+c}{2\sqrt{-b+a^2+2m}}$ mettendo *zero* per x, nasce $m = \frac{-am+c}{2\sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m}}$. Siano vere nello stesso tempo ambe queste condizioni, e si avranno per radici della proposta cubica (veggasi il medesimo num. 28.) le seguenti

I. $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m}$

II. $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m-\frac{b}{3}} \times \overline{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}$

III. $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m-\frac{b}{3}} \times \overline{-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}$:

radici, che, come abbiamo asserito, differiscono in parte per li segni da quelle ritrovate al num. 11. Ora poichè le radici trovate, o che si adoperi la prima, o quest' altra maniera sono sempre identiche, come radici della medesima Equazione cubica: perciò eguagliate insieme la prima del numero 11, e la prima di questo, si avrà $x = x$, o sia $-\frac{a}{2} + \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m} = -\frac{a}{2} - \sqrt{-b+\frac{a^2}{4}+2m}$, vale a dire $1 = -1$. Nè si scanserà l'inconveniente, se non se adoperando il segno negativo dopo estratta la radice dalla quantità $-b+\frac{a^2}{4}+2m$ del num. 11., lasciando il positivo a quella del presente, come si farebbe nei numeri cercandosi le radici della nostra data $x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0$; avendosi in questa maniera ambe l'espressioni identiche, ch'è appunto quello che convien fare, secondo c' insegna la sudetta Equazione $1 = -1$

31. Si è veduto più d'una volta, che, potendosi le radici quadrate prendere col doppio segno, l'Analisi dà sempre più radici di quelle che si cercano, e che appartengono all' Equazione, che si vuol risolvere. Ora si potrebbe a questo proposito ricercare, perchè tante radici? e non servendo tutte per la nostra soluzione, quale il lor uso? Egli sembra che fra i molti altri usi, che si possono fare delle tante radici sia da notarsi quello di poter dalle radici superflue, ed estranee alla richiesta soluzione passare all' Equazione, che si vuol risolvere per quello si è ne' passati numeri detto, sostituendo il positivo pel negativo, o a rovescio. Non riuscendomi di farlo vedere in maniera più chiara, ed evidente che nell' Equazioni numeriche; se ne faccia la pruova nella nostra $x^3 + x^2 + 3x + 3 = o$.

32. Risolvendo questa secondo il nostro metodo, si è osservato num. 21. ch' estraendo la radice dall' Equazione ridotta al num. 3. si ha $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = -x\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}}$, o sia $x^2 + \frac{x}{2} = -x\sqrt{\frac{1}{4} - 3}$, e (facendo $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$) $x^2 + x = -3$, cioè $x^2 + x + \frac{1}{4} = -3 + \frac{1}{4}$, e finalmente $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}}$; due radici estranee pella data nostra Equazione $x^3 + x^2 + 3x + 3 = o$. Or ecco come da queste due radici estranee si potrà passare alla nostra cubica, e per conseguenza alle vere. Essendo $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}}$ sarà anche $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, o espressa così $x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = -x\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}}$: e, alzando a quadrato ambi

bi i membri, $x^4 + x^3 + 3x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4} = \frac{x^2}{4} + 3x\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{9}{4}$;
$+ \frac{x^2}{4}$

o sia $x^4 + x^3 + 3x^2 + \frac{3x}{2} = 3x\sqrt{\frac{1}{4}}$, cioè $x^3 + x^2 + 3x + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$ (facendo $\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$ a rovescio di ciò che si è operato antecedentemente, quando si è pervenuto alle radici estranee), e finalmente $x^3 + x^2 + 3x + 3 = o$, ch' è la cubica proposta. La brevità, che ci abbiamo prefissa nel presente Opuscolo non permette che ci fermiamo più a lungo sulla presente materia; onde è che differiamo molte altre cose di non minore importanza, quando tratteremo la costruzione geometrica delle nostre radici.

33. Le cose dette dal num. 24. fino al passato sono, come ognuno può facilmente comprendere, molto analoghe a quanto l' acutissimo Analista Sig. Ab. Nicolai ha scritto in varie Operette (*vedi anche Saggi ec. dell' Accademia di Padova* 1786.), ma principalmente nell' Opera recente *Nova Analyseos Elementa*, ove, fra le altre cose d' importanza, ha trattato accuratamente, e meglio che altri non ha fatto, la teoria delle quantità negative: teoria che (per giudizio dell' immortale Sig. d' Alembert) ha bisogno, come tante altre cose in Algebra d' essere esaminata seriamente, e discussa con maggior cura, e diligenza di quello si faccia ordinariamente, per espurgarla giusta il di lui sentimento da quelle nozioni false ed imperfette, delle quali è ripiena negli ordinarj Scrittori d' Elementi (*).

34. Quantunque il fin qui detto sia sufficiente pella completa soluzione dell' Equazioni cubiche: tuttavolta non sarà fuor

---

(*) *Je remarquerai en finissant que toute la théorie des quantités negatives n' est pas entiere bien éclaircie*. Tom. VIII. Opusc. *Sur les quantités negatives* §. 14.

fuor di proposito il far vedere come si possa pervenire al medesimo risultato per diverse vie, o più brevi, o più eleganti. In fatti, avendo al num 3. ritrovata una delle $x = -\frac{c}{2m}$; senza molto inviluppārci ne' radicali, si potrebbero per lo detto innanzi facilmente avere così tutte le radici della cubica proposta,

$$1.\ x = \frac{-c}{2m},\quad 2.\ x = \frac{-c}{2m - \frac{b}{3}\cdot\overline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}},$$

$$3.\ x = \frac{-c}{2m - \frac{b}{3}\cdot\overline{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}} + \frac{b}{3}}:$$

nelle quali formole sostituiti i numeri, che convengono pel nostro esempio num. 12. si avranno per radici della proposta Equazione

$$1.\ x = \frac{-3}{2\cdot\frac{3}{2}} = -1,$$

$$2.\ x = \frac{-3}{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{-3}} = \frac{-3}{\sqrt{-3}} = \sqrt{-3},$$

$$3.\ x = \frac{-3}{2\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{-3}} = \frac{-3}{-\sqrt{-3}} = -\sqrt{-3};$$

le

E al §. 15. pag. 279. *Il seroit a souhaiter que dans les Traités élémentaires, on s' appliquat davantage à bien éclairir la théorie de ces quantités (negatives); et du moins qu' on ne la présentat pas de maniere à laisser dans l' esprit des commençans des notions fausses.*

Inoltre al §. 16. *Nous avons fait voir dans l' Enciclopedie aux mots* Division, Equation, Cas irreductible, *et dans plusieurs autres, combien les livres élémentaires sont remplis de notions fausses, ou imperfaites sur ces differens sujets:*

le medesime, che quelle si sono altrove ritrovate. L'espressione delle radici data in questo numero è, come ognuno può osservare, molto più semplice che quella data al n. 11.

35. Non volendosi poi una delle x *zero*, si potranno non ostante avere le nostre radici, sebbene espresse diversamente. Dapoichè estraendo le due radici così $x^2 + \frac{ax}{2} + m$

$$= \frac{c - am}{2m} \cdot x - m, \text{ ovvero } x^2 + ax \frac{-cx}{2m} = -2m$$

(ove niuna delle x diviene *zero*); questa risoluta darà due valori, uno almeno de' quali servirà alla cubica proposta a risolversi. Gli altri due si avranno facilmente pel detto innanzi. Anche estraendo dall' Equazione ridotta al num. 3. le due radici così $x^2 + \frac{ax}{2} + m = \pm x \sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}$

$$\pm \cdot \frac{am - c}{2\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}}$$

; o in questa maniera

$$x^2 + \frac{ax}{2} + m = \pm \frac{am - c}{2m} x \pm \cdot \frac{am - c}{2\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m}}$$

si perviene diversamente alla soluzione del nostro Problema.

36. E affinchè si vegga come le modificazioni dello stesso metodo conducono alla medesima conclusione: aggiungiamo un'altra soluzione dell'Equazioni cubiche, che poggiando intieramente sullo stesso artifizio, e dipendendone immediatamente, non è da tralasciarsi. Richiede essa, come la passata, tra i coefficienti della proposta a risolversi la condizione $b^2 = 3ac$.

37.

37. L' Equazione cubica a risolversi sia la medesima che quella al n°. 3°. $x^3 + a x^2 + b x + c = o$. Si riduca prima a $x^4 + a x^3 + b x^2 + c x = o$; indi aggiungendo sì al primo, che al secondo membro la stessa grandezza $(mx + n)^2$ (le due m, n sono ignote) sarà (C)

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \\ + m^2 x^2 + 2 m nx + n^2 = (mx + n)^2. \end{array}$$

Il secondo membro di questa Equazione è un quadrato: dee dunque esserlo anche il primo. Sia così, e la radice sarebbe $x^2 + \frac{ax}{2} + n$. Ora dovendo noi determinare le due ignote m e n, è chiaro che, per aver supposto $x^2 + \frac{ax}{2} + n$ radice quadrata del primo membro, alzando questa a quadrato $x^4 + ax^3 + 2nx^2 + anx + n^2$,
$$+ \frac{a^2 x^2}{4}$$

e fatto il confronto de' termini, si avrebbero le due Equazioni (D) $2n + \frac{a^2}{4} = b + m^2$, (E) $an = c + 2mn$.

38. Nell' Equazione (E) si trovi il valore di $m = \frac{an - c}{2n}$, e sostituendo il di lei quadrato nell' altra (D) $2n + \frac{a^2}{4} = b + m^2$, si avrà $2n + \frac{a^2}{4} = b + \left(\frac{an - c}{2n}\right)^2$, che diviene $2n + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2 n^2 - 2acn + c^2}{4n^2}$, o sia $2n^3 + \frac{a^2 n^2}{4} - bn^2 = \frac{a^2 n^2}{4} - \frac{acn}{2} + \frac{c^2}{4}$, che ordinata per n è $n^3 - \frac{bn^2}{2} + \frac{acn}{4} = \frac{c^2}{8}$; la quale niente differendo dall' altra simile (A) al num. 4. che pella sola ignota, si risolverà come quella: per cui dee ve-

verificarsi, come detto abbiamo, la condizione tra i coefficienti $b^2 = 3ac$; alla quale si è veduto potersi ridurre tutte le cubiche.

39. Supponendo che vaglia tra i coefficienti la nostra condizione $b^2 = 3ac$; fatte le opportune sostituzioni secondo la maniera usata al numero quarto si avrà $n^3 - \frac{bn^2}{2} + \frac{b^2 n}{12} = \frac{c^2}{8}$, e (F) $n = \frac{b}{6} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}$. E poichè si ha (E) $m = \frac{a}{2} - \frac{c}{2n}$; sostituendo sarà, (G) $m = \frac{a}{2} - \cfrac{c}{\frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}}$

40. Ritornando ora all' Equazione (C) num. 37. giacchè di essa ambi i membri sono quadrati, le loro radici quadrate saranno eguali; quindi si avrà $x^2 + \frac{ax}{2} + n = mx + n$, o sia $x = -\frac{a}{2} + m$, ove sostituendo il valore di m trovato nel numero antecedente, avremo una delle desiderate radici $x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - \cfrac{c}{\frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}} = \cfrac{-c}{\frac{b}{3} + \sqrt[3]{c^2 - \frac{b^3}{27}}}$, la stessa stessissima ritrovata coll' altro metodo al numero 34.

41. Non è necessario che ci trattenghiamo a ritrovare le rimanenti due radici della proposta cubica: dapoichè si ripeterebbe lo stesso che altrove si è detto. Solamente non si deve tralasciare d' avvertire, che anche in quest' altra maniera risolvendo l' Equazioni cubiche, una delle x diventa *zero*, per esserci serviti de' convenienti segni, o tutti positivi, o tutti negativi; quando volendo mettere i negativi nel

nel secondo membro solamente, niuna delle x potrà divenir *zero*, senza urtare nell' Equazione $1 = -1$, com'è chiaro.

42. Succede lo stesso, volendo esprimere altrimenti l'estrazione delle due radici. Dapoichè, potendo essere anche $x^2 + \frac{c + 2mn}{2n} . x + n = \pm mx \pm n$, scegliendo la combinazione $x^2 + \frac{c + 2mn}{2n} . x + n = - mx - n$, e facendo $x = o$, si avrebbe egualmente $n = - n$, e $1 = - 1$. Esprimendola poi così $x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{c + 2mn}{a} = \pm mx \pm n$, e volendo prendere la combinazione $x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{c + 2mn}{a} = - mx - n$ a preferenza dell' altra coi segni tutti positivi, cercandosi una delle x *zero* (come il nostro metodo richiederebbe), converrebbe che fosse $\frac{c + 2mn}{a} = - n$: equazione, che differisce per li segni dalla (E) $n = \frac{c + 2mn}{a}$ num. 37. nata immediatamente dal metodo ivi usato per la soluzione dell' Equazioni cubiche. Non tralasciamo a questo proposito di osservare, che volendo che resti ferma la legge d'uguaglianza, paragonate le due ultime Equazioni fra loro, si avrebbe $- n = + n$, e $- 1 = + 1$: la quale Equazione nel suo retto senso presa ci avvertisce (come si è tante volte notato) della scelta de' segni tutti positivi da adoperarsi a preferenza dei negativi nel secondo membro, quando ci siamo serviti dei positivi nel primo: o a rovescio.

43. Ma perchè volendo venire all' Equazione finale data per m, non già per n (come si è fatto nella quì sopra immediata soluzione) ci si presenta una Equazione cubica d'aspetto un poco differente dalle passate, e per conseguenza le radici dell' Equazioni di terzo grado vengono espresse in una maniera affatto diversa: così è bene che ci fermiamo

a ria ricercare una tal diversa espressione delle radici. Preso a questo fine nell' Equazione (D) num. 37. il valore di $n = \frac{m^2 + b - \frac{a^2}{4}}{2}$

e sostituitolo in (E) si avrà $m^3 - \frac{am^2}{2} + bm - \frac{a^2}{4}m = \frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c$ (Q): la quale, quantunque così disposta non si possa risolvere per la nostra superiormente adoprata maniera; tuttavolta mediante un consimile artificio si potrà venire in cognizione delle di lei radici.

44. Imperciocchè se l' Equazione (Q) si disponga così

$$1 - \frac{b}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c}\cdot m + \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c}\cdot m$$

$$+ \frac{\frac{a}{2}}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c}\cdot m^2 = \frac{m^3}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c},$$

si potrà certamente risolvere nel caso supponghiamo verificarsi fra i coefficienti l' Equazione $\left(-b + \frac{a^2}{4}\right)^2 = \frac{3a}{2} \times \overline{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c}$, o la più semplice $b^2 - \frac{5a^2b}{4} + \frac{a^4}{4} = -\frac{3ac}{2}$; alla qual condizione vedremo più sotto num. 46. potersi ridurre tutte le cubiche. In fatti compito il cubo sarà

1 —

$$1 - \frac{b}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c} \cdot m + \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c} \cdot m$$

$$+ \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c} \cdot m^2 + \left\{ \frac{-b + \frac{a^2}{4}}{\frac{3\,ab}{2} - \frac{3a^3}{8} - 3c} \right\}^3 \cdot m^3$$

$$= \frac{m^3}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c} + \left\{ \frac{-b + \frac{a^2}{4}}{\frac{3\,ab}{2} - \frac{3\,a^3}{8} - 3c} \right\}^3 \cdot m^3;$$ e, da ambi i membri estratta la radice terza, $1 - \frac{b}{\frac{3\,ab}{2} - \frac{3\,a^3}{8} - 3c} \cdot m$

$$+ \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{3\,ab}{2} - \frac{3\,a^3}{8} - 3\,c} \cdot m$$

$$= m \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c} + \left\{ \frac{-b + \frac{a^2}{4}}{\frac{3\,ab}{2} - \frac{3a^3}{8} - 3c} \right\}^3};$$

 e fie finalmente (S) (Tav. *pag. ult.*) . Le altre due m si avranno facilmente con moltiplicare la radice terza ch' è in (S) per li due valori $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, e sono (T), (V). (Tav. *pag. ult.*)

45. Ora per venire in cognizione delle radici che soddisfano alla nostra Equazione; giacchè pel numero 40 si ha $x=-\frac{a}{2}+m$: sostituendo tutti e tre i valori di m ritrovati nel numero antecedente, si avranno le tre radici, che si cercano (M), (N), (P) (Tav. *pag. ult.*)

46. Ma perchè la presente maniera di risolvere l' Equazioni cubiche ricerca fra i coefficienti di quella, di cui si vogliono le radici la condizione n. 44. $b^2-\frac{5}{4}\frac{a^2b}{}+\frac{a^4}{4}=-\frac{3ac}{2}$: perciò non ci resta a far altro, che mostrare come possiamo pervenirvi. Abbiasi dunque a ridurre l' Equazione $y^3+3y-1=0$ a tale, che vaglia tra i coefficienti la nostra condizione. Fatta $y=x+z$ (z è da determinarsi), sostituendo sarà $\left.\begin{matrix}x^3+3zx^2+3z^2x+z^3\\ +3x+3z-1\end{matrix}\right)=0$: per la condizione num. 44. deve essere $(3z^2+3)^2=-\frac{5}{4}\times 9z^2\times\overline{3z^2+3}+\frac{(3z)^4}{4}=-\frac{3}{2}\times 3z\times\overline{z^3+3z-1}$, la quale ridotta sarà $z^2+2z=4$, e risoluta, per uno de' valori di essa si otterrà che la proposta cubica si riduce alla richiesta condizione. Con simigliante artificio si ridurranno le altre Equazioni, come potrebbe provarlo a suo piacere chi lo volesse.

47. Esempio. Abbia a risolversi l' Equazione cubica $x^3+2x^2+3x+\frac{2}{3}=0$, la quale non ha bisogno di esser ridotta, valendo in essa la condizione richiesta al num. 44. Fatte le opportune sostituzioni, si avrà la prima delle

m

$m = \frac{2}{1+\sqrt[3]{5}}$, la seconda $m = \frac{2}{1+\sqrt[3]{5}\times\overline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}}$

la terza $m = \frac{2}{1+\sqrt[3]{5}\times\overline{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}}$. Quindi le radici della nostra cubica pel num. 45. sono

$$\text{I. } x = -\frac{a}{2}+m = -1+\frac{2}{1+\sqrt[3]{5}}$$

$$\text{II. } x = -\frac{a}{2}+m = -1+\frac{2}{1+\sqrt[3]{5}\times\overline{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}}}$$

$$\text{III. } x = -\frac{a}{2}+m = -1+\frac{2}{1+\sqrt[3]{5}\times\overline{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}}}.$$

48. Le formole fin quì esposte inservienti alla soluzione dell' Equazioni cubiche, se bene si esaminano, facendo il confronto colle altre finora note, e specialmente colle così dette *Cardaniche*, si troverà che avranno sempre qualche particolare vantaggio; e per la loro forma ed espressione in molte occorrenze anche superiore alle stesse Cardaniche, quantunque queste ultime appariscano a primo aspetto più semplici. Sarà questa materia d' un altro Opuscolo, in cui particolarmente svilupperemo in serie le nostre radici e le costruiremo geometricamente.

49. Alle superiori maniere di risolvere l' Equazioni cubiche si aggiunga anche quest' altra, come quella, che dipendendo dallo stesso metodo, ci fa conoscere l' attività, e l' universalità del medesimo; e ci fa concepire una molto pro-

probabile speranza, che tentando con esso la soluzione dell' Equazioni di più alto grado, possiamo riuscire nel nostro intento. Evvi in questa il vantaggio che non dipende punto, come le due passate, da veruna condizione tra i coefficienti della proposta cubica, se pur non vogliamo usare l' artificio, che si spiegherà ai numeri 57, e seguenti.

50. L' Equazione a risolversi sia la medesima che quella ai numeri 3 e 37, $x^3 + ax^2 + bx + c = o$. Ridotta prima a $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = o$, poi aggiunta a ambi i membri l' istessa quantità $(mx^2 + nx + r)^2$, nascera l' Equazione.

$$\text{(M)}\quad \begin{matrix} x^4 + & ax^3 & + bx^2 & + cx & \\ + m^2x^4 + & 2mnx^3 & + n^2x^2 & + 2nrx + r^2 = (mx^2 + nx + r)^2. \\ & & + 2mrx^2 & & \end{matrix}$$

Per poco che si rifletta sul metodo tenuto nelle passate soluzioni, è chiaro che supponendo quadrato il primo membro della nostra Equazione (M), la radice quadrata sarebbe $x^2\sqrt{1+m^2} + \frac{c+2nr}{2r}.x + r$: la quale poi elevata a quadrato, e fatto il confronto de' termini con quelli del primo membro, si avranno le due Equazioni

$$\text{I.}\quad \frac{c+2nr}{r}.\sqrt{1+m^2} = a + 2mn,$$

$$\text{II.}\quad 2r\sqrt{1+m^2} + \left(\frac{c+2nr}{2r}\right)^2 = b + n^2 + 2mr:$$ mediante le quali si debbono determinare le tre m, n, r, che mettiamo ignote.

51. Dalla I. si ha $n = \frac{ar - c\sqrt{1+m^2}}{2r\sqrt{1+m^2} - 2mr}$; e la II.

(far-

(fatta la riduzione) diviene $2r^3\sqrt{1+m^2}+\frac{c^2}{4}+cnr$ $=br^2+2mr^3$, in cui sostituendo il valore di n ritrovato nella I. si avrà

$$2r^3\sqrt{1+m^2}+\frac{c^2}{4}+\frac{car-c^2\sqrt{1+m^2}}{2\sqrt{1+m^2}-2m}=br^2+2mr^3\text{, o sia}$$

$$4r^3\times\overline{1+m^2}-4mr^3\sqrt{1+m^2}+\frac{c^2}{2}\sqrt{1+m^2}-\frac{c^2m}{2}$$

$$+car-c^2\sqrt{1+m^2}=2br^2\sqrt{1+m^2}-2bmr^2$$

$$+4mr^3\sqrt{1+m^2}-4m^2r^3\text{, ovvero}$$

$$\left.\begin{array}{l}8mr^3\sqrt{1+m^2}-4r^3-8m^2r^3-2bmr^2-acr+\frac{c^2m}{2}\\ \qquad +2br^2\sqrt{1+m^2}\\ \qquad\qquad +\frac{c^2}{2}\sqrt{1+m^2}\end{array}\right\}=0\,;$$

che ordinata per r sarà

$$(P)\quad r^3+\frac{2b\sqrt{1+m^2}-2bm}{8m\sqrt{1+m^2}-4-8m^2}\cdot r^2-\frac{ac}{8m\sqrt{1+m^2}-4-8m^2}\cdot r$$

$$+\frac{\frac{c^2}{2}m+\frac{c^2}{2}\sqrt{1+m^2}}{8m\sqrt{1+m^2}-4-8m^2}=0.$$

52. Ora lasciando di tentare la soluzione dell' Equazione (P) in differenti maniere, che menarebbero la faccenda troppo a lungo; piuttosto perchè l' Equazione finale al num. superiore ordinata per m, in vece di ordinarla per r ci si pre-

presenta alquanto diversa; fermiamoci un poco per esaminarla. Essa dunque verrebbe disposta così

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{8\,m^2 r^3 + 2bm\,r^2 - \frac{c^2}{2}m + 4\,r^3 + acr}{8\,m\,r^3 + 2br^2 + \frac{c^2}{2}};$$ che liberata dal radicale, e ordinata per m diviene

$$(S)\quad \left.\begin{array}{l} 16\,c^2r^3m^3 + 4b\,r^2c^2m^2 + 12\,c^2r^3m + 4b^2r^4 + \frac{c^4}{4} + 2br^2c^2 \\ \quad - 16acr^4m^2 + 16\,br^5\,m - 16r^6 - 8acr^4 - c^2a^2r^2 \\ \quad + c^3\,a\,r\,m \\ \quad - 4acbr^3m \end{array}\right\} = 0.$$

53. Tentiamo in varie maniere la soluzione dell' Equazione (S): e prima secondo quella, che si è adoperata più volte superiormente. Perchè dunque possa essa ridursi a cubo (lasciando libero il primo termine, e passando al secondo membro i termini che sono senza la m) converrebbe che fosse vera l' Equazione $\overline{(4br^2c^2 - 16\,acr^4)^2}$ $= 3\times 16\,c^2r^3 \times \overline{12c^2r^3 + 16br^5 + c^3ar - 4\,ac\,b\,r^3}$, che si dispone più semplicemente così $\overline{(4cr^2)^2}.\ (b\,c - 4\,ar^2)^2 = 3\times 16c^2r^3 \times \overline{12c^2r^3 + 16\,br^5 + c^3ar - 4\,abcr^3}$, la quale diviene $(bc - 4ar^2)^2 = 3\times \overline{12^2c^2\,r^2 + 16\,b\,r^4} \overline{+ c^3\,a - 4abcr^2}$, Equazione derivativa di secondo grado da potersi risolvere facilmente.

54. In fatti si riduca, e si avrà $\left.\begin{array}{l} 16\,a^2r^4 + 4abcr^2 - 3ac^3 \\ - 48br^4 - 36c^2r^2 + b^2c^2 \end{array}\right\} = 0$, la quale ordinata per r, sarà

(V) $r^4 + \frac{4abc - 36\,c^2}{16\,a^2 - 48b}\,.\,r^2 + \frac{b^2\,c^2 - 3\,ac^3}{16a^2 - 48b} = 0$. Si risolva, e si avrà

$$r^2 + \frac{abc - 9c^2}{8\,a^2 - 24b} = \pm\sqrt{-\frac{b^2c^2 + 3ac^3}{16a^2 - 48b} + \left(\frac{a\,b\,c - 9\,c^2}{8\,a^2 - 24\,b}\right)^2},$$

e fie finalmente r

$$= \pm \sqrt{\frac{-abc + 9c^2}{8a^2 - 24b} \pm \sqrt{\frac{-b^2c^2 + 3ac^3}{16a^2 - 48b} + \left(\frac{abc - 9c^2}{8a^2 - 24b}\right)^2}}$$

55. Nell' Equazione (S) num. 52. supponendo nota la r, la quale si hà pel numero antecedente, si determinerà facilmente l' altra ignota m: dapoiche sarà (compiendo il cubo, ed estraendo la radice terza) (G) (Tav. *pag. ult.*)

56. Ora per ritrovare una delle radici dell' Equazione proposta a risolversi al num. 50., si estragga la radice quadrata da ambi i membri dell' Equazione (M) dello stesso numero, e si avrà

$x^2 \sqrt{1 + m^2} + \frac{c}{2r} x + n x + r = m x^2 + n x + r$, ovvero $x \sqrt{1 + m^2} - m x = - \frac{c}{2r}$,

e $x = \frac{-c}{2r . \sqrt{1 + m^2} - m}$, che si fa nota; dapoichè nei due passati numeri si è ritrovato il valore delle due r, m. Non riesce difficile il ritrovare le altre due radici per quello si è detto ne' numeri antecedenti.

57. Ma siccome, seguendo questa maniera di risolvere l'equazioni cubiche, non si è alterata l' Equazione primitiva $x^3 + ax^2 + bx + c = o$, e potendosi avere una data condizione tra i coefficienti di essa: così, ritornando all' Equazione del num. 54., osserviamo che può rendersi più semplice in varie maniere, e così potrà risolversi l' Equazione al num. 50. diversamente, siccome abbiamo notato al num. 49. Dapoichè se nell' Equazione $\left.\begin{array}{l} 16 a^2 r^4 + 4 a b c r^2 - 3 a c^3 \\ - 48 b r^4 - 36 c^2 r^2 + b^2 c^2 \end{array}\right) = o$

si supponga $b^2 = 3ac$, si toglierà l' ultimo termine; sicco-

E me

me anderà via il secondo, supponendo $ab = 9c$: tralasciando per ora varie altre ipotesi, che si potrebbero fare.

58. Dunque tutta la faccenda si riduce a questo: di far vedere cioè come si possono ottenere le due superiori condizioni nell' Equazioni cubiche, e quale sarebbe l' espressione delle radici di esse. Tralasciamo volentieri di mostrare la maniera, onde si può ottenere che i cofficienti d' una Equazione cubica abbiamo la condizione $b^2 = 3ac$, essendosi spiegato già al num. 7. Alla condizione poi $ab = 9c$ si ridurrà una Equazione cubica per esempio $y^3 + fy + g = o$, seguendo il metodo usato nello stesso numero. Dapoichè facendo $y = x + z$, si avrebbe sostituendo

$$\begin{array}{l} x^3 + 3zx^2 + 3z^2x + z^3 + g = o \\ \qquad\qquad\quad + fx + fz \end{array}$$

e affinchè valesse la nostra condizione $ab = 9c$, converrebbe che fosse $9z^3 + 3fz = 9z^3 + 9fz + 9g$, o $6fz = -9g$, e $z = -\frac{3g}{2f}$. Si avrà dunque ciocchè si cerca, facendo $y = x - \frac{3g}{2f}$, com'è manifesto.

59. Resta ora che si osservi quale sarebbe l' espressione delle radici della nostra Equazione proposta a risolversi al numero 50. per queste ultime due condizioni. L' Equazione al num. 54. nel caso di $b^2 = 3ac$, per cui svanisce l'ultimo termine diviene $r^2 = \frac{36c^2 - 4abc}{16a^2 - 48b} = \frac{9c^2 - abc}{4a^2 - 12b}$, e $r = \pm \sqrt{\frac{9c^2 - abc}{4a^2 - 12b}}$. Nell' altra ipotesi poi di $ab = 9c$, onde divien zero il secondo termine, si avrebbe $r^4 = \frac{3ac^3 - b^2c^2}{16a^2 - 48b}$, e $r = \pm \sqrt[4]{\frac{3ac^3 - b^2c^2}{16a^2 - 48b}}$. Quindi sostituendo i due valori di r or ora ritrovati al num. 55, si avranno due valori di m: e conseguentemente essendo (ved. num.

num. 56.) $x = \frac{-c}{2r.\sqrt{1+m^2}-m}$; avremo, com'è chiaro, due differenti espressioni di una delle radici dell'Equazioni di terzo grado, essendo già note le due m, e r.

60. Converrebbe fare in questo luogo alcune particolari osservazioni sulle radici ritrovate secondo quest'ultime maniere, e notare specialmente se le radici reali e irrazionali anche reali compariscano; ma siccome la brevità che ci abbiamo prefissa nel presente Opuscolo non ce lo permette; così differendo la cosa a più opportuno tempo, come quella che richiede un più maturo esame, passiamo piuttosto a risolvere l'Equazione (S) al num. 52. in altra maniera come abbiamo promesso. Supposto dunque *zero* l'ultimo termine, sarà $16r^6 + 8acr^4 + a^2c^2r^2 = 4b^2r^4 + 2br^2c^2 + \frac{c^4}{4}$, la quale abbassata è $4r^3 + acr = 2br^2 + \frac{c^2}{2}$, o finalmente $r^3 - \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} = \frac{c^2}{8}$, Equazione altre volte da noi trattata, che si potrà risolvere, posto che sia vera la condizione $b^2 = 3ac$.

61. Nella supposizione che diventi *zero* l'ultimo termine dell'Equazione (S) secondo ciò che si è detto nel passato numero, essa passerà a questa

$m^2 + \frac{bm}{4r} - \frac{am}{cr} + \frac{br^2}{c^2} + \frac{ac}{16r^2} - \frac{ab}{4c} + \frac{3}{4} = o$, in cui sostituendo $\frac{b^2}{3c}$ per a (giusta la condizione che si richiede pel numero antecedente) si avrà

$m^2 + \frac{bm}{4r} - \frac{b^2m}{3c^2r} + \frac{br^2}{c^2} + \frac{b^2}{48r^2} - \frac{b^3}{12c^2} + \frac{3}{4} = o$, la quale risoluta ci darà una delle m, che vien data per r nota già, ri-

 sol-

solvendo l' Equazione cubica superiore
$r^3 - \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} = \frac{c^2}{8}$.

62. E dapoichè si sono determinate le due m, e r per li numeri antecedenti; sostituendo il valore di esse nell'Equazione num. 56. $x = \frac{-c}{2r.\sqrt{1+m^2}-m}$, si avrà una delle radici della nostra Equazione cubica; la quale sarà certamente risoluta in maniera diversa dalle antecedenti, essendo che le m, e r sono diversamente espresse, com'è manifesto a chiunque vorrà esaminare la cosa compiutamente, e provarla col fatto. Si avranno anche le rimanenti due radici, seguendo il metodo che si è tenuto nelle passate soluzioni.

63. Evvi però una maniera brevissima, e facilissima di poter avere le tre radici dell' Equazione cubica proposta a risolversi, per quello si è osservato negli ultimi passati numeri. Imperciocchè supponendo *zero* l' ultimo termine dell' Equazione (S) num. 52., è evidente che anche una delle m sarà *zero*: adunque sostituendo *zero* in vece di m nell' espressione $x = \frac{-c}{2r.\sqrt{1+m^2}-m}$, si avrà $x = \frac{-c}{2r.\sqrt{1}}$ $= -\frac{c}{2r}$, espressione ch'è la stessa, che quella altre volte ritrovata, seguendo altri metodi.

64. Si aggiunga alle superiori qualche altra soluzione di più, per far vedere quanto giovi l' industria nella presente materia, e perchè si possano paragonare le diverse espressioni delle radici per l' Equazioni cubiche, e notare quella ch' è la più semplice. Si disponga perciò così l' Equazione superiore data al num. 50.

(M)

$$\text{(M)}\ \begin{array}{l} -x^4 - ax^3 - bx^2 - cx \\ +m^2x^4 + 2mnx^3 + n^2x^2 + 2nrx + r^2 = (mx^2 + nx + r)^2;\ \text{in} \\ \qquad\qquad\qquad +2mrx^2 \end{array}$$

cui essendo tre le ignote m, n, r, abbiamo il vantaggio di supporre tre condizioni per determinarle.

65. Si facciano svanire i due primi termini della superiore Equazione (M), onde si abbiano due condizioni, e sia I. $m^2 - 1 = o$, II. $2mn - a = o$. Per esse si determinino le due m, e n onde si abbia $m = \pm 1$, $n = \pm \frac{a}{2}$: e fatto (terza condizione) il resto del primo membro

$$\begin{array}{l} -bx^2 - cx + r^2 \\ +n^2x^2 + 2nrx \\ +2mrx^2 \end{array}$$

quadrato, per cui deve essere III.

$4r^2 \times \overline{-b+n^2+2mr} = \overline{2nr-c}^2$, si avrà $r^3 - \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} - \frac{c^2}{8} = o$ (mettendo 1 per m, e $\frac{a}{2}$ per n) ò quest' altra $r^3 + \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} + \frac{c^2}{8} = o$ (mettendo -1 per m, e $-\frac{a}{2}$ per n): le quali entrambe si potranno risolvere, purchè sia vera fra i coefficienti della proposta cubica la tante volte notata condizione $b^2 = 3ac$.

66. Ora divenendo *zero* i due primi termini della nostra Equazione (M) num. 64., e 'l resto del primo membro essendo quadrato: estraendo da ambi i membri di essa la radice quadrata avremo $\frac{-c+2nr}{2r} . x + r = mx^2 + nx + r$; cioè $-\frac{cx}{2r} = mx^2$, e $x = -\frac{c}{2rm}$: vale a dire (per essere $m = 1$ num. 65.) $x = -\frac{c}{2r}$. Ma poichè dall' Equazione al medesimo numero 65. $r^3 - \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} - \frac{c^2}{8} = o$ si ricavano i medesimi valori, che si sono ritrovati altrove, risol-

solvendo Equazioni consimili a questa (ved. num. 34, 39, e 63); è chiaro che le radici espresse per la presente soluzione, niente differiscono dalle altre: anche se si voglia mettere $m = -1$. Dapoichè quantunque si avrebbe $x = \frac{-c}{2r.-1} = \frac{c}{2r}$ positiva; tuttavolta perchè nell' ipotesi medesima di $m = -1$ si dovrebbe risolvere l' Equazione $r^3 + \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} + \frac{c^2}{8} = 0$ (le cui radici sono le opposte di quelle dell' altra $r^3 - \frac{br^2}{2} + \frac{acr}{4} - \frac{c^2}{8} = 0$ nata mettendo $m = 1$); perciò sostituendo il valore di r si verrebbe sempre alla medesima espressione di $x = -\frac{c}{2r}$, come si potrebbe provare in effetto.

67. Con quest' altro consimile artificio si risolveranno anche l' Equazioni cubiche. Si disponga così l' Equazione medesima cubica

$$\text{(N)}\quad \begin{array}{l} m^2x^4 + 2mnx^3 + n^2x^2 + 2nrx + r^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 2mrx^2 \\ \qquad\quad - x^3 \quad - ax^2 \quad - bx \quad - c \end{array} = (mx^2 + nx + r)^2;$$

e supposti *zero* gli ultimi due termini del primo membro, e 'l resto quadrato, si avranno le tre Equazioni I. $r^2 - c = 0$, II. $2nr - b = 0$; III. $4m^2 \times \overline{n^2 + 2mr - a} = 4m^2n^2 - 4mn + 1$. Dalla I. si ha $r = \pm\sqrt{c}$, che sostituita nella II. sarà $n = \frac{b}{\pm 2\sqrt{c}}$: e mettendo sì il valore di r, che quello di n nella III. sarà $1 - \frac{2bm}{\pm\sqrt{c}} + 4am^2 - \frac{8m^3}{\pm\sqrt{c}} = 0$; la quale così disposta si potrà certamente risolvere, purchè tra i coefficienti di essa sia vera la solita condizione $b^2 = 3ac$. Operando circa il resto, come nella passata soluzione, ed estraendo la radice quadrata da ambi i membri, si avrà $mx^2 + \frac{2mn - 1}{2m} . x = mx^2 + nx + r$, e $x = -2rm$, una delle radici della cubica proposta a risolversi.

68. Prima di passare all'applicazione del nostro metodo alla soluzione dell'Equazioni di quarto grado; non sarà fuor di proposito d'indicare soltanto una, o due delle molte altre maniere, onde potrà tentarsi la soluzione dell'Equazioni cubiche, le quali maniere, con qualche modificazione, si potrebbero con riuscita applicare alla soluzione di quelle di più alto grado. Abbiamo in queste il vantaggio d'introdurvi molto più ignote, e conseguentemente riuscirà più facile la determinazione di esse.

69. L'Equazione cubica $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ potrebbe disporsi così $ux^3 + aux^2 + bux + cu$

$$\begin{array}{l} + m^2x^4 + 2mnx^3 + n^2x^2 + 2nrx + r^2 \\ \qquad\qquad + 2mrx^2 \end{array} = (mx^2 + nx + r)^2,$$

in cui supponendo quadrato il primo membro, si avranno (per le cose dette innanzi) due Equazioni con quattro ignote m, n, r, e, u, che si potranno (usato qualche artificio, che si spiegherà a più opportuno tempo) facilmente determinare. O anche disponendola così

$$\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \\ (mx^3 + nx^2 + rx + s)^2, \end{array} = (mx^3 + nx^2 + rx + s)^2, \text{ e,}$$

supponendo quadrato il primo membro, si giugnerà alla desiderata soluzione, determinando le ignote m, n, r, e s.

70. Ma passiamo pure a dire una parola circa l'applicazione del presente metodo alla soluzione dell'Equazioni di quarto grado. Voglia risolversi l'Equazione biquadratica $x^4 + px^2 + qx + r = o$, priva del secondo termine. Aggiungendo sì al primo, che al secondo membro la quantità $m^2x^4 + 2mnx^3 + n^2x^2$, onde si abbia

(N) $\begin{array}{l} x^4 + px^2 + qx + r \\ + m^2x^4 + 2\,mnx^3 + n^2x^2 \end{array} = (mx^2 + nx)^2$, si supponga quadrato il primo membro, e si metta per radice di esso $x^2\sqrt{1+m^2} + \frac{qx}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r}$. Fatto di quest' ultima quantità il quadrato,

$$\overline{1+m^2}\,x^4 + qx^3\sqrt{\frac{1+m^2}{r}} + \begin{array}{c} 2x^2\sqrt{r+rm^2} \\ + \frac{q^2x^2}{4r} \end{array} + qx + r,$$

e paragonati termini i analoghi, avremo le due Equazioni I. $q\sqrt{\frac{1+m^2}{r}} = 2mn$, II. $2\sqrt{r+rm^2} + \frac{q^2}{4r} = p + n^2$; mediante le quali si verrà in cognizione delle ignote m, e n.

71. Si trovi nella prima il valore di n^2, che sarà $\frac{q^2}{4\,m^2} \cdot \frac{1+m^2}{r}$, il quale sostituito nella II., si avrà

$2\sqrt{r+rm^2} + \frac{q^2}{4r} = p + \frac{q^2 + q^2m^2}{4\,rm^2}$, ovvero

$8rm^2\sqrt{r+rm^2} = 4prm^2 - q^2m^2 + q^2 + q^2m^2$; e liberata dal radicale

$64\,r^2m^4.\,\overline{r+rm^2} = \overline{4prm^2 + q^2}^2$, cioè $64\,r^3m^4 + 64\,r^3m^6 = 16\,p^2r^2m^4 + 8\,prq^2m^2 + q^4$, e finalmente

$m^6 - \frac{p^2}{4r}m^4 + m^4 - \frac{pq^2}{8r^2}m^2 - \frac{q^4}{64\,r^3} = 0$, ch' è una Equazione di sesto grado, che può ridursi a una del terzo.

72. Suppongasi nota la m, che si potrà avere risolvendo l' Equazione (Q) del numero antecedente, si farà nota an-

anche la n: imperciocchè si ha per la I. $n^2 = \frac{q^2}{4m^2} \cdot - \frac{1 + m^2}{r}$.
Determinate le due m, e n, riesce facile ritrovare le radici della proposta Equazione di quarto grado: dapoichè estraendo la radice quadrata da ambi i membri dell'Equazione (N) al n. 70, ch'è $x^2 \sqrt{1 + m^2} + \frac{qx}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} = \pm mx^2 \pm nx$, le due legittime combinazioni de' termini di essa daranno le quattro radici, che soddisfano alla proposta di quarto grado.

73. Adoperando un poco d'industria si risolveranno in altra maniera l'Equazioni di quarto grado. Si abbia a risolvere l'Equazione biquadratica $x^4 = qx^2 + rx + s$. Aggiungendo sì al primo, che al secondo membro la stessa grandezza, si avrà (R) $x^4 + 2rx^2 + r^2 = \begin{matrix} qx^2 + rx + s \\ + 2rx^2 \quad + r^2 \end{matrix}$, e supponendo quadrato il secondo membro, si avrebbe l'Equazione tra i coefficienti $\overline{r^2 + s} \cdot \overline{q + 2r} = \frac{r^2}{4}$, alla qual condizione si potranno ridurre tutte l'Equazioni biquadratiche prive del secondo termine, come si vedrà più sotto.

74. E poichè divien quadrato il secondo membro dell'Equazione (R), siccome lo è il primo; quindi estraendo la radice quadrata dall'uno, e dall'altro membro si avrà $x^2 + r = \pm x \sqrt{q + 2r} \pm \sqrt{r^2 + s}$; dalla quale Equazione si ricaveranno le quattro radici della proposta $x^4 = qx^2 + rx + s$.

75. Resta che facciamo vedere come ogni Equazione biquadratica priva del secondo termine si possa ridurre a tale, che vaglia fra i coefficienti la condizione num. 73 $\overline{r^2 + s} \times \overline{q + 2r} = \frac{r^2}{4}$. Serva di esempio l'Equazione $y^4 - ay^2 - by - c = 0$. Si faccia $y = \frac{x}{z}$ (z si suppone ignota): sostituen-

tuendo sarà $\frac{x^4}{z^4} - \frac{ax^2}{z^2} - \frac{bx}{z} - c = o$, ovvero $x^4 - a z^2 x^2 - b z^3 x - c z^4 = o$. Ora dovendo fra i coefficienti valere la nostra condizione $\overline{r^2 + s} \,.\, \overline{q + 2r} = \frac{r^2}{4}$, si avrebbe l' Equazione $\overline{b^2 z^6 - c z^4} \,.\, \overline{- a z^2 - 2 b z^3} = \frac{b^2 z^6}{4}$, cioè più semplicemente $\overline{b^2 z^2 - c} \,.\, \overline{- a z^2 - 2 b z^3} = \frac{b^2 z^2}{4}$, e, facendo la multiplicazione, $- ab^2 z^4 - 2b^3 z^5 + acz^2 + 2\, bcz^3 = \frac{b^2 z^2}{4}$; che diviene finalmente $2b^3 z^3 + ab^2 z^2 - 2\, b\, c\, z + \frac{b^2}{4} - ac = o$, Equazione di terzo grado, che si potrà risolvere per le cose superiormente dette, e per conseguenza la proposta biquadratica si potrà ridurre alla ricercata condizione. Si operi nella medesima maniera volendo ridurre le altre Equazioni consimili.

76. Che se si volesse disporre la superiore Equazione così (V) $x^4 + 2sx^2 + s^2 = \begin{matrix} qx^2 + rx + s \\ + 2sx^2 \quad\quad + s^2 \end{matrix}$, potrà non ostante risolversi altrimenti. Imperciocchè supponendo quadrato il secondo membro, si verrebbe all' Equazione $\overline{q + 2s} \,.\, \overline{s^2 + s} = \frac{r^2}{4}$; alla quale condizione potremo ridurre tutte l' Equazioni biquadratiche prive del secondo termine, usando il medesimo artificio che si è adoperato in un consimile caso al numero antecedente.

77. Le quattro radici poi si avranno facilmente, estraendo da ambi i membri della Equazione (V) la radice quadrata; dapoichè sarà $x^2 + s = \pm \frac{r x}{2\sqrt{s^2 + s}} \pm \sqrt{s^2 + s}$; la quale

ri-

risoluta darà pel nostro uso le quattro radici della proposta a risolversi, che cerchiamo. Sia questo sufficiente per far vedere l'attività del metodo nella soluzione delle Equazioni biquadratiche.

Per le cose già dette, e per le risoluzioni dell' Equazioni fino a quelle del quarto grado date nell' Opuscolo, si vede chiaro, che lo spirito del metodo, ch' è generale, consiste nel far sì che l' Equazione proposta a risolversi possa ridursi a quadrato, per poi abbassarla a un grado inferiore. E perchè non si potrebbe ottenere anche lo stesso, riducendola a cubo, o dividendola per una data quantità, ec.? L'Equazione cubica per esempio $x^3 - px^2 - q = o$ disposta prima così $8x^3 = 7x^3 + px^2 + q$; indi aggiungendo sì al primo, che al secondo membro la stessa quantità, diverrebbe $(2x+m)^3 = 7x^3 + px^2 + 6m^2x + q + m^3 + 12mx^2$, o anche

$$\left(\frac{2x+m}{\sqrt[3]{7}}\right)^3 = x^3 + \frac{p+12m}{7} . x^2 + \frac{6m^2x}{7} + \frac{q+m^3}{7}.$$ Ora,

supponendo cubo il secondo membro, si avrebbero le due Equazioni I. $\left(\frac{p+12m}{7}\right)^2 = \frac{3\times 6m^2}{7}$; II. $\frac{q+m^3}{7} = \frac{p+12m}{7.9} . \frac{6m^2}{7}$.

Si trovi il valore di m nella I, e sostituito nella II. si avrà una Equazione fra i coefficienti della proposta $x^3 - px^2 - q = o$; la quale verificata, si risolveranno in altra maniera l'Equazioni di terzo grado. Trattando diversamente l' Equazione proposta, si otterrà un' altra Equazione fra i coefficienti, e si potranno risolvere diversamente le cubiche. A suo tempo svilupperemo meglio questo pensiero, e tratteremo più diffusamente i tentativi diversi di riuscita, anche universalmente parlando, circa questo particolare. Del rimanente, siccome quest' ultima maniera ricerca molto più d' industria, e che per ottenere l' intento s' introduchino più ignote, che nell' altra passata; così fia meglio attenersi a quella, come molto più semplice, e che conduce meglio al desiderato fine.

Molte osservazioni potrebbero farsi sulle ritrovate radici dell'

dell' Equazioni risolute in questo Saggio, paragonandole specialmente colle altre finora note. Facciamone una solamente circa le radici dell' Equazioni cubiche. Quantunque la forma, sotto la quale ci si presentano le radici così dette Cardaniche, sembri all' aspetto un poco più semplice, che alcuna delle nostre; tuttavolta in certi incontri si potrà da quest' ultime ritrarre un gran vantaggio. E veramente se l' Equazione di secondo grado al num. 7, dalla quale dipende la soluzione dell' Equazioni cubiche data al num. 10 (per non parlare delle altre) abbia una delle radici razionale, le formole nostre sudette ci si presenteranno molto più semplici; e avranno questo particolar vantaggio, che siccome le Cardaniche richiedono l' estrazione della radice cubica da un binomio composto di razionali, e di radicali (ricercandosi le radici razionali); nelle nostre al contrario, *ceteris paribus*, si dovrebbe estrarre una radice quadrata da un binomio composto di razionali, e di radicali. Quanto la prima operazione sia più fastidiosa che la seconda, si comprenderà da chiunque volesse sperimentarlo.

Sarebbe una proposizione troppo ardita (come abbiamo anche notato nella prefazione) l' asserire che l' esposto metodo applicato alla soluzione dell' Equazioni di più alto grado possa riuscire secondo il desiderio. A ogni modo non bisogna disperare dell' esito. E sebbene, come si può osservare, la soluzione per esempio dell' Equazioni di quinto grado, seguendo le maniere tenute dai Signori *Bezout*, e *Euler*, richiede calcoli così lunghi e complicati, che riempiendo intere pagine scoraggiscono chiunque, quantunque esercitato e paziente: tutta volta paragonato quell' andamento con quest' altro da noi adoperato, osservo, che fortunatamente i calcoli ci si presentano molto più brevi, semplici, e trattabili, in modo che si diminuisce di molto la difficoltà per questa parte. Quando sarò libero da qualche più premuroso lavoro, riprenderò ne' miei manoscritti i tentativi (e ve n' è più d' uno) per risolvere l' Equazioni medesime di quinto grado, che con altre cose relative a questo particolare si comunicheranno al pubblico.

(A) $$x = -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m \pm \sqrt{\left(+\frac{a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{}\right.}}$$

(B) $$x = -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m - \frac{b}{3} \cdot -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}}$$

(C) $$x = -\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-b + \frac{a^2}{4} + 2m - \frac{b}{3} \cdot -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}}.$$ edi n. 19.

(P) 3. $$x = -\frac{a}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{b - \frac{a^2}{4}}{\frac{3ab}{2} - \frac{3a^3}{8} - 3c} + \left(\sqrt[3]{\cfrac{1}{\frac{ab}{2} - \frac{a^3}{8} - c} + \right.}}$$

(G) $$m + \frac{4br^3c^2 - 16acr^6}{3 \cdot 16c^2r^3} = \sqrt[3]{\frac{16r^6 + 8acr^6 + c^2a^2r}{16}}$$

e finalmente

$$m = \frac{-bc + 4ar^3}{3 \cdot 4cr} + \sqrt[3]{\frac{16r^6 + 8acr^6 + c^2a^2r}{16c^2r}}$$