OPUSCOLI

MATEMATICI
DI
VITO CARAVELLI.

IN NAPOLI

NELLA STAMPERIA DI GAETANO RAIMONDI

An. 1789.

A' DISCRETI LETTORI.

GLi Opuſcoli matematici, che ora vi preſento, ſono quadri ſcientifici, fatti ſecondo le occaſioni, piccioli sì, ma non mancanti nè degli ultimi lineamenti, nè di que' gradi di lume, che ho ſempre cercato dare a tutte le mie produzioni, per renderle intelligibili a chiunque n'è in grado di poterle intendere, ed evitare il difetto di coloro, che pongono a tortura il di loro ingegno per eſprimerſi in modi arcani, a fine d'eſſere ammirati, come depoſitarj di cognizioni ſublimi, ed alla portata de' soli talenti ſtraordinarj. Se vi ſia riuſcito in eſſi, come mi luſingo d'eſſere riuſcito nelle altre produzioni, non tocca a me a giudicarlo : poſſo ſolamente dire che, per riuſcirvi, non ho riſparmiata nè attenſione, nè fatica. Graditeli intanto, che ſe non condurranno a dilatare tra noi i lumi ſcientifici, ſerviranno almeno per ſtimolare altri di miglior lena a dilatarli, e vivete felici.

IN-

INDICE

DEGLI OPUSCOLI

contenuti in questo volume.

OPU-

di

OPUSCOLO I.

Esame sul giuoco, detto il *Lotto di 90 numeri*, per determinare le giuste vincite degli *Estratti*, degli *Ambi*, e de' *Terni*, e per ragguagliare con esse le vincite effettive, che si pagano.

PEr potere agevolmente comprendere nell' esame da fare quanto saremo per esporre, conviene anticipatamente avvertire più cose.

I. E' d' avvertire che di quanti numeri si sieno, per esempio di numeri 25, si determinano tutt' i possibili *ambi* con moltiplicare insieme 25, e 24, e con dividere il prodotto di essi per l' altro, che risulta moltiplicando insieme 1, e 2; tutt' i possibili *terni* con moltiplicare insieme 25, 24, 23, e con dividere tale prodotto per l' altro, che nasce moltiplicando insieme 1, 2, 3; tutt' i possibili *quaderni* con moltiplicare insieme 25, 24, 23, 22, e con dividere il prodotto, che si ha per quello, che risulta moltiplicando insieme 1, 2, 3, 4; e finalmente tutt' i possibili *quinterni* con moltiplicare insieme 25, 24, 23, 22, 21, e con dividere il prodotto di tale moltiplicazione per l' altro, che risulta moltiplicando insieme 1, 2, 3, 4, 5. Quindi de' 90 numeri del Lotto sono i possibili

$$\textit{Ambi}\ \frac{90\,.\,89}{1\,.\,2} = 4005$$

$$\textit{Terni}\ \frac{90\,.\,89\,.\,88}{1\,.\,2\,.\,3} = 117480$$

$$\textit{Quaderni}\ \frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 2555190$$

$$\textit{Quinterni}\ \frac{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 43949268.$$

Si-

Similmente de' 5 numeri, che s' estraggono in tale giuoco, sono tutt' i possibili

$$\textit{Ambi}\ \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

$$\textit{Terni}\ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$\textit{Quaderni}\ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

$$\textit{Quinterni}\ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1.$$

II. E' pure d'avvertire ch'estraendosi nel detto giuoco ogni volta 5 numeri, viene ad estraersi ogni volta uno de' possibili quinterni, che risultano dai 90 numeri. Sicchè i 90 numeri posti nella cassettina del giuoco, per riguardo dell' istesso giuoco vagliono lo stesso, come se fossero nella medesima cassettina racchiusi in distinte cartelline tutt' i possibili quinterni. E perciò con estrarre dalla detta cassettina 5 de' 90 numeri, che racchiude, deve accadere ciò, che accaderebbe, se una delle dette cartelline di quinterni venisse tratta fuori di essa.

III. Finalmente è d' avvertire che

de' 90 numeri del giuoco ognuno combinandosi ne' quinterni con quattro altri, si deve trovare in tanti de' possibili quinterni, quanti quaderni da numeri 89 risultano, vale a dire che si deve trovare in 2441626 quinterni; che ogni ambo, combinandosi ne' quinterni con tre altri numeri, si deve trovare in tanti quinterni, quanti terni risultano da 88 numeri, cioè in 109736 quinterni; che ogni terno, combinandosi ne' quinterni con due altri numeri, si deve trovare in tanti quinterni, quanti ambi risultano da 87 numeri, cioè in 3741 quinterni; e che finalmente ogni quaderno, combinandosi ne' quinterni con un' altro numero, si deve trovare in 86 quinterni. Premesse tali cose, procediamo ora all' esame, che ci siamo proposto di fare.

Esame relativamente agli Estratti.

Per la vincita d' un Estratto, giuocato un solo numero.

S' estrae nel giuoco del Lotto di 90 numeri uno de' 43949268 possibili quinterni, che formano i 90 numeri. Dunque

que quanti di tali quinterni contengono il numero giuocato, tanti eventi favorevoli avrà il giuocatore per vincere l'estratto. Or ognuno de' 90 numeri del giuoco si trova incluso in 2441626 quinterni dell' istesso giuoco. Sicchè le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere l'estratto sono 2441626, e conseguentemente le sfavorevoli 41507642. E perciò, dovendo essere nel giuoco giusto la perdita alla vincita nella ragione delle combinazioni favorevoli alle sfavorevoli, pagando il giuocatore gr. $7\frac{1}{2}$ per un estratto d'un ducato, dovrebbe nel caso di vincita riscuotere per giusta vincita duc. 1, e gr. $27\frac{1}{2}$. Ne riscuote effettivamente un solo ducato. Dunque ne riscuote della giusta vincita $\frac{200}{255}$, o sia $\frac{40}{51}$.

S'avverta che, se l'estratto viene giuocato per situazione, la difficoltà di vincere viene ad aumentarsi ulteriormente del quadruplo; avendo in tale caso il giuocatore nel quinterno, che s'estrae, una situazione favorevole del numero giuocato, e quattro sfavorevoli. Quindi la giusta vincita per riguardo dell' estratto giuocato per situazione è il quadruplo di quella dell' estratto semplice. Per la qual cosa siccome per gr. $7\frac{1}{2}$ nel caso dell'estratto semplice la giusta vincita dovrebbe esſere di duc. 1, e gr. 27 $\frac{1}{2}$; così nel caſo dell' eſtratto giuocato per ſituazione dovrebbe all'iſteſſa ſcommeſſa di gr. 7 $\frac{1}{2}$ corriſpondere per giuſta vincita la ſomma di duc. 5, e gr. 10. Or il giuocatore ne riſcuote in tal caſo duc. 5. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita $\frac{50}{51}$.

Eſame relativamente agli Ambi.

CASO I.

Per la vincita d'un ambo, giuocati due ſoli numeri.

Dovendo, per vincere il giuocatore l'ambo giuocato, venire eſtratto uno de' 109736 quinterni del giuoco, ne'quali eſſo ambo ſi trova compreſo: ne ſegue che le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere l'ambo giuocato ſono in queſto caso 109736, e le sfavorevoli 43839532. E perciò il giuocatore pagando per un ambo di duc. 5 gr. 2 $\frac{1}{4}$, nel caſo di vincita dovrebbe per giuſta vincita riſcuotere duc. 8, e gr. 98. Ne ri-

riſcuote effettivamente duc. 6. Sicchè ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{2}{3}$.

CASO II.

Per la vincita d' un ambo, giuocati ad ambi 3 numeri.

Eſſendo tutt' i terni del giuoco, che non contengono alcuno de' numeri giuocati, quei, che riſultano da numeri 87, vale a dire 105995; ſaranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 3 ambi de' tre numeri giuocati, $105995 \times 3 = 317985$. Onde in queſto caſo le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere un ambo ſono 317985, e le sfavorevoli conſeguentemente 43631283. Quindi il giuocatore pagando per 3 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno gr. $6\frac{3}{4}$, dovrebbe nel caſo della vincita d'un ambo riſcuotere per giuſta vincita duc. 9, e gr. 26. Ne riſcuote effettivamente duc. 6. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita pure circa $\frac{2}{3}$.

CASO III.

Per la vincita d' un ambo, giuocati ad ambi 4 numeri.

Essendo tutt' i terni del giuoco, che non contengono alcuno de' 4 numeri giuocati, quei, che nascono da numeri 86, cioè 102340; saranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 6 ambi de' 4 numeri giuocati, 102340 X 6 = 614040. Sicchè in questo caso sono le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere un ambo 614040, e le sfavorevoli 43335228. E perciò il giuocatore pagando per 4 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l' uno gr. 13 $\frac{1}{2}$, nel caso della vincita d' un ambo dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 9, e gr. 52. Ne riscuote effettivamente duc. 6. Sicchè ne riscuote della giusta vincita anche circa $\frac{2}{3}$.

CA-

CASO IV.

Per la vincita d' un ambo, giuocati ad ambi 5 numeri.

Essendo tutt' i terni del giuoco, che non contengono alcuno de' 5 numeri giuocati, quei, che risultano da numeri 85, cioè 98770; saranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 10 ambi de' 5 numeri giuocati, $98770 \times 10 = 987700$. Dunque in questo caso sono le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere un ambo 987700, e le sfavorevoli 42961568. Quindi il giuocatore pagando per 5 numeri giuocati ad ambi di ducati 5 l' uno gr. $22\frac{1}{2}$, nel caso della vincita d' un ambo dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 9, e gr. 78. Ne riscuote effettivamente duc. 6. Sicchè ne riscuote della giusta vincita pure circa $\frac{2}{3}$.

Caso V.

Per la vincita d' un ambo, giuocati ad ambi più di 5 numeri, per esempio numeri 10.

Essendo tutt' i terni del giuoco, che non comprendono alcuno de' 10 numeri giuocati, quei, che si formano da numeri 80, vale a dire 82160; saranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 45 ambi de' 10 numeri giuocati, $82160 \times 45 = 3697200$. Onde in questo caso sono le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere un ambo 3697200, e le sfavorevoli 40252068. E perciò il giuocatore pagando per 10 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l' uno gr. 101 $\frac{1}{4}$, nel caso della vincita d' un ambo dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 11, e gr. 2. Ne riscuote effettivamente duc. 6. Sicchè ne riscuote delle giusta vincita circa $\frac{100}{183}$.

Caso VI.

Per la vincita di 3 ambi, giuocati ad ambi 3 numeri.

Dovendo, per vincere in tal caso il giuo-

giuocatore 3 ambi, venire estratto uno de' quinterni del giuoco, che contengono il terno giuocato; e trovandosi ogni terno contenuto in 3741 quinterni: saranno in tale caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 3 ambi 3741, e le sfavorevoli 43945527. Quindi il giuocatore pagando gr. $6\frac{1}{4}$ per 3 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno, nel caso della vincita de' 3 ambi dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 792, e gr. 92. Ne riscuote effettivamente duc. 18. Sicchè ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{44}$.

CASO VII.

Per la vincita di 3 ambi, giuocati ad ambi 4 numeri.

Essendo tutti gli ambi del giuoco, che non contengono alcuno de' 4 numeri giuocati, quei, che si formano da numeri 86, cioè 3655; saranno tutt'i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 4 terni de' 4 numeri giuocati, $3655 \times 4 = 14620$. Sicchè in questo caso sono le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 3 ambi 14620, e le sfavorevoli 43934648. E perciò il giuocatore pagando do per 4 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l' uno gr. 13 $\frac{1}{2}$, nel caſo della vincita di 3 ambi dovrebbe per giuſta vincita riſcuotere duc. 405, e gr. 68. Ne riſcuote effettivamente duc. 18. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{1}{22}$.

CASO VIII.

Per la vincita di 3 ambi, giuocati ad ambi 5 numeri.

Eſſendo tutti gli ambi del giuoco, che non contengono alcuno de' 5 numeri giuocati, quei, che ſi formano da numeri 85, cioè 3570; ſaranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 10 terni de' 5 numeri giuocati, $3570 \times 10 = 35700$. Dunque in queſto caſo le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 3 ambi ſono 35700, e le sfavorevoli 43913568. Quindi il giuocatore pagando gr. 22 $\frac{1}{2}$ per 5 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l' uno, nel caſo della vincita di 3 ambi dovrebbe per giuſta vincita riſcuotere duc. 276, e gr. 76. Ne riſcuote effettivamente duc. 18. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{1}{15}$.

CA-

CASO IX.

Per la vincita di 3 ambi, giuocati ad ambi più di 5 numeri, per esempio numeri 10.

Essendo tutti gli ambi del giuoco, che non contengono alcuno de' 10 numeri giuocati, quei, che risultano da numeri 80, vale a dire 3160; saranno tutt'i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 120 terni, che formano i 10 numeri giuocati, $3160 \times 120 = 379200$. Sicchè in questo caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 3 ambi sono 379200, e le sfavorevoli 43570068. Quindi il giuocatore pagando gr. $101 \frac{1}{4}$ per 10 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno, nel caso della vincita di 3 ambi dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 116, e gr. 33. Ne riscuote effettivamente duc. 18. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{6}$.

CASO X.

Per la vincita di 6 ambi, giuocati ad ambi 4 numeri.

Dovendo in tal caſo, per vincere il giuocatore *6* ambi, venire eſtratto uno de' quinterni del giuoco, che contengono il quaderno giuocato; e trovandoſi ogni quaderno compreſo in *86* quinterni: ſaranno in tal caſo le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere *6* ambi *86*, e le sfavorevoli 43949182. E perciò il giuocatore pagando gr. $13\frac{1}{2}$ per 4 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno, nel caſo della vincita di *6* ambi dovrebbe per giuſta vincita riſcuotere duc. *68989*, e gr. *99*. Ne riſcuote effettivamente duc. *36*. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita $\frac{1}{1916}$.

CASO XI.

Per la vincita di 6 ambi, giuocati ad ambi 5 numeri.

Eſſendo 85 i numeri diverſi dalli 5 giuocati; ſaranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 5 qua-

quaderni de' 5 numeri giuocati, $85 \times 5 = 425$. Sicchè in questo caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere *6* ambi sono 425, e le sfavorevoli 43948843. E perciò il giuocatore pagando gr. $22\frac{1}{2}$ per 5 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno, nel caso della vincita di *6* ambi dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 23267, e gr. 3. Ne riscuote effettivamente duc. 36. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{646}$.

CASO XII.

Per la vincita di 6 ambi, giuocati ad ambi più di 5 numeri, per esempio numeri 10.

Essendo 80 i numeri diversi dalli 10 giuocati; saranno tutt'i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 210 quaderni de' 10 numeri giuocati, $80 \times 210 = 16800$. Onde in questo caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere *6* ambi sono 16800, e le sfavorevoli 43932468. E perciò il giuocatore pagando gr. $101\frac{1}{4}$ per 10 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno, nel caso della vincita di *6* ambi dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 2647, e gr. 71.

Ne

Ne riſcuote effettivamente duc. 36. Sicchè ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{1}{73}$.

CASO XIII.

Per la vincita di 10 *ambi, giuocati ad ambi* 5 *numeri*.

Dovendo in tale caſo, per vincere il giuocatore 10 ambi, venire eſtratto il quinterno giuocato; non ha egli dunque, ſe non una combinazione favorevole, e ne ha sfavorevoli 43949267. Onde il giuocatore pagando gr. $22\frac{1}{2}$ per 5 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l'uno, nel caſo della vincita di 10 ambi dovrebbe per giuſta vincita riſcuotere duc. 9888585, e gr. 7. Ne riſcuote effettivamente duc. 60. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{1}{164809}$.

CASO XIV.

Per la vincita di 10 *ambi, giuocati ad ambi più di* 5 *numeri, per eſempio numeri* 10.

Dovendo in queſto caſo, per vincere il

il giuocatore 10 ambi, venire estratto uno de' 252 quinterni, che formano i 10 numeri giuocati; saranno le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 10 ambi 252, e le sfavorevoli 43949016. E perciò il giuocatore pagando gr. 101 $\frac{1}{4}$ per 10 numeri giuocati ad ambi di duc. 5 l' uno, nel caso della vincita di 10 ambi dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 176580, e gr. 86. Ne riscuote effettivamente duc. 60. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{2943}$.

Ecco esposti tutt' i casi delle vincite da potersi fare circa gli ambi. Procediamo ora a fare l' istesso esame circa le vincite de' terni.

Esame relativamente ai Terni.

CASO I.

Per la vincita d' un terno, giuocati a terno 3 numeri.

Dovendo in questo caso, per vincere il giuocatore il terno, venire estratto uno de' quinterni del giuoco, che contengono il terno giuocato; e trovandosi ogni terno contenuto in 3741 quinterni; saranno le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere il terno 3741, e le sfavorevoli 43945527. Sicchè il giuocatore, pagando per 3 numeri giuocati a terno di duc. 100 gr. $3\frac{1}{2}$, nel caso della vincita dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 411, e gr. 14. Ne riscuote effettivamente duc. 180. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{25}{57}$.

CASO II.

Per la vincita d'un terno, giuocati a terni 4 numeri.

Essendo tutti gli ambi del giuoco, che non contengono alcuno de' 4 numeri giuocati, quei, che si formano da numeri 86, cioè 3655; saranno tutt'i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 4 terni, che fanno i 4 numeri giuocati, $3655 \times 4 = 14620$. Sicchè in questo caso sono le combinazioni favorevoli al giucatore per vincere un terno 14620, e le sfavorevoli 43934648. E perciò il giuocatore pagando per 4 numeri giuocati a terni di duc. 100 l'uno gr. 14, nel caso della vincita d'un terno dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 420, e gr. 70.

70. Ne riſcuote effettivamente duc. 180. Sicchè ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{100}{233}$.

CASO III.

Per la vincita d' un terno, giuocati a terni 5 numeri.

Eſſendo tutti gli ambi del giuoco, che non contengono alcuno de' 5 numeri giuocati, quei, che ſi formano da numeri 85, cioè 3570; ſaranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 10 terni, che fanno i 5 numeri giuocati $3570 \times 10 = 35700$. Dunque in queſto caſo le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere un terno ſono 35700, e le sfavorevoli 43913568. Quindi il giuocatore pagando per 5 numeri giuocati a terni di duc. 100 l' uno gr. 35, nel caſo della vincita d' un terno dovrebbe per giuſta vincita riſcuotere duc. 430, e gr. 52. Ne riſcuote effettivamente duc. 180. Dunque ne riſcuote della giuſta vincita circa $\frac{100}{239}$.

CASO IV.

Per la vincita d' un terno, giuocato a terni più di 5 numeri, per esempio numeri 10.

Essendo tutti gli ambi del giuoco, che non contengono alcuno de' 10 numeri giuocati, quei, che risultano da numeri 80, cioè 3160; saranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 120 terni, che formano i 10 numeri giuocati, $3160 \times 120 = 379200$. Sicchè in questo caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere un terno sono 379200, e le sfavorevoli 43570068. Quindi il giuocatore pagando per 10 numeri giuocati a terni di duc. 100 l' uno carl. 42, nel caso della vincita d' un terno dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 482, e gr. 57. Ne riscuote effettivamente duc. 180. Sicchè ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{25}{67}$.

CA-

CASO V.

Per la vincita di 4 terni, giuocati a terni 4 numeri.

Dovendo in questo caso, per vincere il giuocatore 4 terni, venire estratto uno de' quinterni del giuoco, che contengono il quaderno giuocato; e trovandosi ogni quaderno compreso in 86 quinterni dell' istesso giuoco: saranno in tal caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 4 terni 86, e le sfavorevcli 4394918z. Sicchè il giuocatore pagando gr. 14 per 4 numeri giuocati a terni di duc. 100 l'uno, nel caso della vincita del quaderno dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 71545, e gr. 18. Ne riscuote effettivamente duc. 720. Sicchè ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{99}$.

Quindi è che pel quaderno secco alla scommessa d'un carlino dovrebbe corrispondere per giusta vincita la somma di duc. 51103, e gr. 70, ed alla scommessa di un ducato la somma di duc. 511037.

CASO VI.

Per la vincita di 4 terni, giuocati a terni 5 numeri.

Essendo 85 i numeri diversi dai 5 giuocati; saranno tutt' i quinterni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 5 quaderni de' medesimi 5 numeri giuocati, $85 \times 5 = 425$. Sicchè in questo caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 4 terni sono 425, e le sfavorevoli 43948843. E perciò il giuocatore pagando gr. 35 per 5 numeri giuocati a terni di duc. 100 l'uno, nel caso della vincita di 4 terni dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 36193, e gr. 16. Ne riscuote effettivamente duc. 720. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{50}$.

CASO VII.

Per la vincita di 4 terni, giuocati a terni più di 5 numeri, per esempio numeri 10.

Essendo 80 i numeri diversi dalli 10 giuocati; saranno tutt' i possibili quinterni ni del giuoco, ognuno de' quali conterrà uno de' 210 quaderni de' medesimi 10 numeri giuocati, 80 × 210 = 16800. Onde in questo caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 4 terni sono 16800, e le sfavorevoli 43932468. E perciò il giuocatore pagando carl. 42 per 10 numeri giuocati a terni di duc. 100 l'uno, nel caso della vincita di 4 terni dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 10983, e gr. 11. Ne riscuote effettivamente duc. 720. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{15}$.

CASO VIII.

Per la vincita di 10 terni, giuocati a terni 5 numeri.

Dovendo in questo caso, per vincere il giuocatore 10 terni, venire estratto il quinterno giuocato, avrà egli in sì fatto caso una sola combinazione favorevole, e ne avrà sfavorevoli 43949267. E perciò il giuocatore pagando gr. 35 per 5 numeri giuocati a terni di duc. 100 l'uno, nel caso della vincita de' 10 terni dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 15382243, e gr. 45. Ne riscuote effettivamente duc. 1800. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{8545}$.

CASO IX.

Per la vincita di 10 *terni, giuocati a terni più di* 5 *numeri, per esempio numeri* 10.

Dovendo in quest' ultimo caso, per vincere il giuocatore 10 terni, venire estratto uno de' 252 quinterni, che formano i 10 numeri giuocati; saranno in tal caso le combinazioni favorevoli al giuocatore per vincere 10 terni 252, e le sfavorevoli 43949016. Sicchè il giuocatore pagando carl. 42 per 10 numeri giuocati a terni di duc. 100 l' uno, nel caso della vincita di 10 terni dovrebbe per giusta vincita riscuotere duc. 732483, e gr. 60. Ne riscuote effettivamente duc. 1800. Dunque ne riscuote della giusta vincita circa $\frac{1}{406}$.

Ecco esaminati pure tutt' i casi delle vincite da potersi fare circa i terni. Non proseguiamo a fare lo stesso esame relativamente a' numeri giuocati ad ambi, e terni insieme, rilevandosi agevolmente dagli esami già fatti.

Si

Si noti che non si sono ne' calcoli delle vincite incluse le picciole scommesse de' giuocatori, le quali nel caso di vincite dovrebbero a' giuocatori venir restituite; non essendo giusto che chi vince, paghi ciò, ch' è convenuto pagarsi nel caso di perdita. Ma di tali picciole somme non abbiamo stimato tenerne conto, potendo andare in compenso delle spese, ch' esige l'esecuzione del giuoco.

Fine.

Nota: Quest' opuscolo è stato altra volta pubblicato colla stampa dall' illustre Professore del Commercio, ed Economia dell' Università de' Regi studj, D. Trojano Odazj, in una sua ben ragionata operetta, in cui rileva egli i danni, che risulterebbero, se si dasse il nostro Lotto in affitto ad esteri Negozianti.

OPU-

OPUSCOLO II.

In cui si trovano esposti tutt' i calcoli, che danno i risultati notati in un foglio circa il Lotto avuto in Aprile del 1787 da Parigi da S. E. il Marchese D. Domenico Caracciolo, Segretario di Stato pel ripartimento di Stato, Casa Reale, Poste, Teatri, ec.

Si suppone il Lotto di 90 numeri, e che s' estraggono per ogni giuoco 5 numeri.

Si suppongono in oltre giuocati tutt' i 90 numeri in due viglietti di 45 numeri l' uno.

Fon.

Fondamenti de' calcoli da fare.

I. De' 45 numeri d'uno de' viglietti sono tutt' i possibili

$$\text{Ambi } \frac{45 \cdot 44}{1 \cdot 2} = 990$$

$$\text{Terni } \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14190$$

$$\text{Quaderni } \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 148995$$

$$\text{Quinterni } \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1221759.$$

II. Estraendosi nel detto giuoco ogni volta 5 numeri, viene ogni volta ad estraersi uno de' possibili quinterni, che risultano da i 90 numeri. Onde i 90 numeri posti nella cassettina del giuoco per riguardo dell' istesso giuoco vagliono lo stesso, come se fossero nella medesima cassettina racchiusi in distinte cartelline tutt' i possibili quinterni. E perciò con estrar-

estrarre dalla detta cassettina 5 de' 90 numeri, che racchiude, deve accadere ciò, che accaderebbe, se una delle dette cartelline di quinterni venisse tratta fuori.

Casi da accadere nel giuoco.

A 3 si riducono i casi, che possono accadere nel detto giuoco. I. Può accadere che de' 5 numeri, che s'estraggono, ne sieno compresi 3 in un viglietto, e 2 nell'altro. In tale caso il giuocatore guadagna un terno, e 4 ambi. II. Può accadere che de' detti 5 numeri ne sieno contenuti 4 in un viglietto, ed uno nell' altro. In tale altro caso il giuocatore vince un quaderno, 3 terni, e 6 ambi. III. Finalmente può accadere che i medesimi 5 numeri sieno tutti contenuti in uno de' viglietti. In tale ultimo caso il giuocatore guadagna un quinterno, 5 quaderni, 10 terni, e 10 ambi. Nel

CASO I.

De' possibili quinterni del Lotto sono secondo il caso tutti quei, che risultano dalla combinazione d' ogni terno de' 45 nu-

numeri d' uno de' viglietti con ciaſcuno degli ambi, che ſomminiſtrano i 45 numeri dell' altro viglietto, e reciprocamente; vale a dire tanti, quanti ne dinota il doppio di 14190 $\times$ 990, o ſia il doppio di 14048100, ovvero 28096200. Sicchè in tale caſo la certezza ſta alla probabilità di vincere un terno, e 4 ambi, come 43949268 : 28096200, o come 1 : $\frac{28096200}{43949268}$. Sicchè, poſta la certezza $= 1$, la probabilità di vincere in tale primo caſo viene eſpreſſa dal rotto $\frac{28096200}{43949268}$. Nel

CASO II.

De' poſſibili quinterni del Lotto ſono ſecondo il caſo tutti quei, che riſultano combinando ogni quaderno de' 45 numeri d' uno de' viglietti con ciaſcuno de' 45 numeri dell' altro viglietto, e reciprocamente; cioè tanti, quanti ne dinota il doppio di 148995 $\times$ 45, o ſia il doppio di 6704775, ovvero 13409550. Onde in tale altro caſo la certezza ſta alla probabilità di vincere un quaderno, 4 terni, e 6 ambi, come 43949268 :

134

13409550, o come $1 : \frac{13409550}{43949268}$. Quindi, posta la certezza $= 1$, la probabilità di vincere in sì fatto caso viene espressa dal rotto $\frac{13409550}{43949268}$. Nel

CASO III.

Finalmente de' possibili quinterni del Lotto sono secondo il caso tutti quei d'ambidue i viglietti, e conseguentemente tanti, quanti ne dinota il doppio di 1221759, ovvero 2443518. Sicchè in tale ultimo caso la certezza sta alla probabilità di vincere un quinterno, 5 quaderni, 10 terni, e 10 ambi, come 43949268 : 2443518, o come $1 : \frac{2443518}{43949268}$. E perciò, posta la certezza $= 1$, la probabilità di vincere in tale ultimo caso viene espressa dal rotto $\frac{2443518}{43949268}$.

Si noti che non s'è fatta mensione del giuoco per estratti, perchè coi due detti viglietti il giuocatore ha sempre la certezza di vincerne cinque.

For-

Formole generali del Lotto.

Si mettano le ſcommeſſe per ciaſcuno

eſtratto	$= a$
ambo	$= b$
terno	$= c$
quaderno	$= d$
quinterno	$= e$.

Eſſendo per gli due viglietti giuocati favorevoli al giuocatore

eſtratti	90	
ambi	2×990	$= 1980$
terni	2×14190	$= 28380$
quaderni	2×148995	$= 297990$
quinterni	2×1221759	$= 2443518$.

Sarà la formola generale per la generale ſcommeſſa $= 90 \times a + 1980 \times b + 28380 \times c + 297990 \times d + 2443518 \times e$.

Si mettano in oltre le vincite per ciaſcuno

eſtratto	$= \mathrm{A}a$
ambo	$= \mathrm{B}b$
terno	$= \mathrm{C}c$
quaderno	$= \mathrm{D}d$
quinterno	$= \mathrm{E}e$.

Sarà

Sarà, giuocando per estratti, la vincita espressa da $5Aa$; giuocando poi per ambi, terni, quaderni, e quinterni sarà espressa nel suddetto

Caso I. da $4Bb + Cc$
Caso II. da $6Bb + 4Cc + Dd$
Caso III. da $10Bb + 10Cc + 5Dd + Ee$.

Quindi, giuocando per estratti, si ha dal giuocatore la certezza di vincere $5Aa$; giuocando poi per ambi, terni, quaderni, e quinterni si ha la probabilità di

$\frac{28096200}{43949268}$	....	$4Bb + Cc$
$\frac{13409550}{43949268}$	per vincere	$6Bb + 4Cc + Dd$
$\frac{2443518}{43949268}$	....	$10Bb + 10Cc + 5Dd + Ee$.

Rapporti delle ſcommeſſe colle vincite, e perdite del giuocatore del Lotto ſecondo ſi pratica in Francia, ed eſame de' caſi vantaggioſi, e ſvantaggioſi al medeſimo giuocatore.

Nel Lotto di Francia ſi paga al giuocatore, che vince, per ogni

eſtratto	15	volte la ſcommeſſa.
ambo	270	
terno	5200	
quaderno	70000	
quinterno	1000000	

Quindi relativamente a tale Lotto ſono

$$A = 15$$
$$B = 270$$
$$C = 5200$$
$$D = 70000$$
$$E = 1000000.$$

I. *Si ſupponga fatto il giuoco per eſtratti.*

Il giuocatore ha allora la certezza di guadagnare $5\,A\,a = 75\,a$. Ma la ſcommeſſa

messa per gli due viglietti è = 90*a*. Sicchè il giuocatore perde di sicuro 15*a*. E quindi il giuoco per estratti è assolutamente svantaggioso al giuocatore.

II. *Si supponga il giuoco fatto per ambi.*

Accadendo il primo de' suddetti casi, si guadagnano 4 ambi, vale a dire 4B*b* = 1080*b*. Ma la scommessa per gli due viglietti giuocati è = 1980*b*. Sicchè il giuocatore perde in tal primo caso 900*b*.

Accadendo il caso secondo si guadagnano 6 ambi, cioè 6B*b* = 1620*b*. E' pure la scommessa = 1980*b*. Dunque il giuocatore perde nel secondo caso 360*b*.

Accadendo finalmente il terzo caso si guadagnano 10 ambi, o sia 10B*b* = 2700*b*. E' anche la scommessa = 1980*b*. Sicchè il giuocatore vince in tale ultimo caso 720*b*.

Quindi nel giuoco ad ambi, accadendo il primo, o il secondo de' suddetti casi, il giuocatore perde; e guadagna, accadendo il terzo caso; cioè accadendo che il quinterno, che viene estratto, sia compreso interamente in uno de' viglietti giuocati.

III. *Si supponga in oltre il giuoco fatto per terni.*

Accadendo il primo caso si guadagna

un terno, vale a dire $Cc = 5200c$. Ma la ſcommeſſa per gli due viglietti giuocati è $= 28380c$. Sicchè il giuocatore perde $23180c$.

Accadendo il caſo ſecondo ſi guadagnano 4 terni, cioè $4Cc = 20800c$. Ma la ſcommeſſa è pure $= 28380c$. Dunque dal giuocatore ſi perde $7580c$.

Accadendo finalmente il terzo caſo ſi guadagnano 10 terni, cioè $10Cc = 52000c$. E' anche la ſcommeſſa $= 28380c$. Sicchè il giuocatore guadagna in tale ultimo caſo $23620c$.

Per la qual coſa nel giuoco a terni pure il giuocatore non guadagna, ſe non accade l'ultimo caſo, cioè che il quinterno eſtratto ſia contenuto in uno de' viglietti.

IV. *Si ſupponga di più il giuoco fatto per quaderni.*

Accadendo il caſo primo non ſi guadagna quaderno alcuno, e conſeguentemente ſi perde l' intera ſcommeſſa, cioè $297990d$.

Accadendo il caſo ſecondo ſi guadagna un ſolo quaderno, vale a dire $Dd = 70000d$. Ma la ſcommeſſa è $= 297990d$. Dunque ſi perde dal giuocatore $227990d$.

Accadendo finalmente il terzo caſo ſi guadagnano 5 quaderni, o ſia $5Dd = 350000d$. E' anche la ſcommeſſa $=$

297990

297990 *d*. Dunque si guadagna 52010 *d*.

E perciò nel giuoco a quaderni il giuocatore neppure guadagna, se non nel terzo caso, quando il quinterno estratto viene compreso in uno de' viglietti.

V. *Si supponga finalmente il giuoco fatto a quinterno secco*.

Accadendo uno de' due primi casi non si guadagna quinterno alcuno, e conseguentemente si perde l'intera scommessa, o sia 2443518 *e*.

Accadendo poi il terzo caso si guadagna il quinterno estratto, e conseguentemente E *e* = 1000000 *e*. Ma la scommessa è = 2443518 *e*. Sicchè si perde dal giuocatore 1443518 *e*.

Quindi il giuoco a quinterno secco è al giuocatore assolutamente svantaggioso.

Conseguenze, che derivano dagli antecedenti esami.

I.

Il supposto giuoco del Lotto è sempre a danno del giuocatore facendosi o per semplici estratti, o a quinterno secco; e non riesce vantaggioso facendosi o ad ad ambi, o a terni, o a quaderni, se non nel terzo de' detti casi.

II.

Essendovi nel giuoco fatto ad ambi la perdita di $900\,b$ nel primo de' suddetti casi, la perdita di $360\,b$ nel secondo caso, e la vincita di $720\,b$ nel terzo caso; avrà nel giuoco ad ambi il giuocatore per perdere $900\,b$ la probabilità di $\frac{28096200}{43949268}$, per perdere $360\,b$ la probabilità di $\frac{13409550}{43949268}$, per vincere $720\,b$ la probabilità di $\frac{2443518}{43949268}$. Quindi contrassegnando le perdite col $-$, e le vincite col $+$, sarà la sorte del giuocatore nel giuocare ad ambi $-\,900\,b \times \frac{28096200}{43949268}$

$$-\,360\,b \times \frac{13409550}{43949268} + 720\,b \times \frac{2443518}{43949268} = -\frac{28354685040\,b}{43949268} = -$$

$645\,b$. Similmente si trova essere la sorte te del giuocatore nel giuocare a terni = — 15820 c, e nel giuocare a quaderni = — 257188 d, vale a dire ſempre negativa, e conſeguentemente dinotante perdita.

III.

Finalmente nel giuocare ad ambi eſſendo $\frac{28096200}{43949268}$ la probabilità di perdere 900 b, nel primo de' ſuddetti caſi, e $\frac{2443518}{43949268}$ la probabilità di vincere 720 b nel terzo caſo; ed eſſendo 28096200 : 2443518 in ragione alquanto maggiore di 11 : 1; ſarà alquanto più di 11 volte più probabile nel giuocare ad ambi di perdere 900 b, che di vincere 720 b. Similmente ſarà più di 11 volte più probabile nel giuocare a terni di perdere 23180 c, che di vincere 23620 c, e nel giuocare a quaderni di perdere 297990 d, che di vincere 52010 d.

S' espongono i simili calcoli relativamente al Lotto di Napoli, supposto pure che vengono giuocati tutt' i numeri in due viglietti di numeri 45 l' uno.

Nel Lotto di Napoli si giuoca solamente per estratti, ambi, e terni.

Si mettano le scommesse per ciascun

estratto $= a$
ambo $= b$
terno $= c$.

Sarà la formola generale per la generale scommessa $= 90a + 1980b + 28380c$.

Si mettano in oltre le vincite per ciascun

estratto $= Aa$
ambo $= Bb$
terno $= Cc$.

Sarà, giuocando per estratti, la vincita espressa da $5Aa$; giuocando poi per ambi, e terni, sarà espressa nel

Caso I. da $4Bb + Cc$
Caso II. da $6Bb + 4Cc$
Caso III. da $10Bb + 10Cc$.

Quin-

Quindi, giuocando per estratti, si ha dal giuocatore la certezza di vincere espressa da $5Aa$; giuocando poi per ambi, e terni, si ha la probabilità di

$$\frac{28096200}{43949268}, \quad \ldots\ldots \quad 4Bb + Cc$$

$$\frac{13409550}{43949268} \text{ per vincere } 6Bb + 4Cc$$

$$\frac{2443518}{43949268} \quad \ldots\ldots \quad 10Bb + 10Cc.$$

In oltre nel Lotto di Napoli si vince per ogni

$$\left.\begin{array}{ll} \text{estratto} & 13\frac{1}{3} \\ \text{ambo} & 266\frac{2}{3} \\ \text{terno} & 5142\frac{6}{7} \end{array}\right] \text{ volte la scommessa.}$$

Sicchè relativamente al Lotto di Napoli sono

$$\begin{aligned} A &= 13\tfrac{1}{3} \\ B &= 266\tfrac{2}{3} \\ C &= 5142\tfrac{6}{7}. \end{aligned}$$

I. *Si supponga fatto il giuoco per estratti.*

Il giuocatore ha allora la certezza di guadagnare $5Aa = 5 \times 13\frac{1}{3} \times a = 66\frac{2}{3} \times a$. Ma la scommessa per gli due viglietti giuocati è $= 90 \times a$. Sicchè il giuoca-

to-

tore perde di sicuro $23 \frac{1}{3} \times a$. Quindi il giuoco per estratti è assolutamente svantaggioso al giuocatore.

II. *Si supponga il giuoco fatto per ambi.*

Accadendo il caso primo si guadagnano 4 ambi, cioè $4 Bb = 1066 \frac{2}{3} \times b$. Ma la scommessa per gli due viglietti giuocati è $= 1980 b$. Sicchè il giuocatore perde $913 \frac{1}{3} \times b$.

Accadendo il caso secondo si guadagnano 6 ambi, o sia $6 Bb = 1600 b$. Ma la scommessa è pure $= 1980 b$. Dunque il giuocatore perde $380 b$.

Accadendo il caso terzo si guadagnano 10 ambi, cioè $10 Bb = 2666 \frac{2}{3} \times b$. Ma la scommessa è anche $= 1980 b$. Sicchè il giuocatore guadagna $686 \frac{2}{3} \times b$.

Quindi nel giuoco ad ambi, accadendo il primo, o il secondo caso, il giuocatore perde; e guadagna, accadendo il terzo caso.

III. *Si supponga il giuoco fatto per terni.*

Accadendo il caso primo si guadagna un terno, cioè $Cc = 5142 \frac{6}{7} \times c$. Ma la scommessa è $= 28380 \times c$. Sicchè il giuocatore perde $23237 \frac{1}{7} \times c$.

Accadendo il caso secondo si guadagnano 4 terni, cioè $4 Cc = 20571 \frac{3}{7} \times c$. Ma la scommessa è $= 28380 \times c$. Dunque il giuocatore pure perde $7808 \frac{4}{7} \times c$.

Ac-

Accadendo il terzo caſo ſi guadagnano 10 terni, o ſia $10\,C\,c = 51428\tfrac{4}{7} \times c$. Ma la ſcommeſſa è $= 28380 \times c$. Sicchè il giuocatore guadagna $23048\tfrac{4}{7} \times c$.

Per la qual coſa nel giuoco a terni pure il giuocatore non guadagna, ſe non accade l'ultimo de' tre anzi detti caſi.

Da quanto s'è determinato ſi rileva

1. Eſſere il detto giuoco aſſolutamente ſvantaggioſo al giuocatore facendoſi per ſemplici eſtratti, e non eſſere vantaggioſo facendoſi ad ambi, ed a terni, ſe non nel terzo caſo.

2. Eſſere la ſorte del giuocatore nel giuocare ad ambi $- 913\tfrac{1}{3}\,b \times \dfrac{28096200}{43949268}$

$$- 380\,b \times \frac{13409550}{43949268} + 686\tfrac{2}{3}\,b \times \frac{2443518}{43949268} = - \frac{29078942640}{43949268} \times b = - 661\,b.$$

Similmente eſſere la ſorte del giuocatore nel giuocare a terni $- 23237\tfrac{1}{7}\,c \times$

$$\frac{28096200}{43949268} - 7808\tfrac{4}{7}\,c \times \frac{13409550}{43949268}$$

$$+ 23048\tfrac{4}{7}\,c \times \frac{2443518}{43949268} = -$$

$$-\frac{701265242982\frac{6}{7}}{43949268}\times c=-15956\times c.$$

Sicchè la ſorte del giuoco e nel giuoco ad ambi, ed in quello a terni è ſempre negativa; vale a dire dinotante perdita, e non vincita.

3. Finalmente ſi rileva eſſere alquanto più di 11 volte più probabile nel giuocare ad ambi di perdere $913\frac{1}{3}\times b$, che di vincere $686\frac{2}{3}b$; e nel giuocare a terni di perdere $23237\frac{1}{7}c$, che di vincere $23048\frac{4}{7}c$.

OPU-

OPUSCOLO III.

In cui si dà una formola generale per determinare le probabilità composte.

PROBLEMA.

Determinare una formola generale per avere la probabilità di vincere un dato punto con due dadi, gittati qualsivoglia numero di volte.

SOLUZIONE.

Si mettano le combinazioni favorevoli al giuocatore $= a$, e le sfavorevoli $= b$; saranno tutte le combinazioni possibili de' due dadi $= a + b$. Si mettano inoltre la certezza di vincere $= 1$, e 'l convenuto numero di volte da gittare i dadi $= n$.

I.

Si ſupponga doverſi gittare i dadi una ſola volta.

Sarà la certezza alla probabilità di vincere nella ragione di $a + b : a$. Sicchè cercando in ordine ad $a + b$, ad a, e ad 1 il quarto proporzionale $\frac{a}{a+b}$; tale quarto proporzionale $\frac{a}{a+b}$ dà nel ſuppoſto caſo la probabilità di vincere, e conſeguentemente $1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$ dà la probabilità di perdere. Nel ſuppoſto caſo adunque il giuocatore ha della certezza la parte contraſſegnata dal rotto $\frac{a}{a+b}$ per vincere, e la parte rimanente contraſſegnata dal rotto $\frac{b}{a+b}$ per perdere.

II.

II.

Si supponga doversi gittare i dadi due volte.

Avendo il giuocatore per la prima gittata de' dadi dell' intera certezza la parte dinotata da $\frac{a}{a+b}$ per vincere; avrà per la seconda gittata non dell' intera certezza, ma della rimanente porzione $\frac{b}{a+b}$ pure la parte dinotata da $\frac{a}{a+b}$ per vincere. Sicchè la probabilità di vincere per la seconda gittata sarà $= \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b} = \frac{ab}{(a+b)^2}$, e conseguentemente per ambe le gittate $= \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b} = \frac{a^2+2ab}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 - b^2}{(a+b)^2} = 1 - \frac{b^2}{(a+b)^2}$. Onde la probabilità di perdere in tale caso è $= \frac{b^2}{(a+b)^2}$. Quindi il giuocatore in sì fatto

caso

caso ha dell' intera certezza la parte dinotata da $\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$ per vincere, e la parte rimanente $\frac{b^2}{(a+b)^2}$ per perdere.

III.

Si supponga doversi gittare i dati tre volte.

Avendo il giuocatore per le prime due gittate de' dadi dell' intera certezza la parte dinotata da $\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$ per vincere; avrà per la terza gittata non dell' intera certezza, ma della rimanente porzione $\frac{b^2}{(a+b)^2}$ pure la parte dinotata da $a+b$, o sia $\frac{b^2}{(a+b)^2} \times \frac{a}{a+b} = \frac{ab^2}{(a+b)^3}$ per vincere. Sicchè per tutte e tre le gittate la probabilità di vincere sarà $= \frac{ab^2}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b}$ =

$$= \frac{a^3 + 3a^2 b + 3ab^2}{(a+b)^3} = \frac{(a+b)^3 - b^3}{(a+b)^3} =$$

$$1 - \frac{b^3}{(a+b)^3}.$$ E perciò la probabilità di perdere in tale caso è $= \frac{b^3}{(a+b)^3}$.

Similmente procedendo si trova essere la probabilità di vincere nel caso di 4 gittate de' dadi $= \frac{ab^3}{(a+b)^4} + \frac{ab^2}{(a+b)^3}$ $+ \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b^4}{(a+b)^4}$; nel caso di 5 gittate de' dadi $= \frac{ab^4}{(a+b)^5}$ $+ \frac{ab^3}{(a+b)^4} + \frac{ab^2}{(a+b)^3} + \frac{ab}{(a+b)^2}$ $+ \frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b^5}{(a+b)^5}$; e così procedendo innanzi.

Per la qual cosa, esprimendo con n il numero delle gittate de' dadi, sarà la formola generale esprimente la probabili-

 tà

tà di vincere $= \frac{a b^{n-1}}{(a+b)^n} + \frac{a b^{n-2}}{(a+b)^{n-1}}$

$+ \frac{a b^{n-3}}{(a+b)^{n-2}} + \frac{a b^{n-4}}{(a+b)^{n-3}} \ldots\ldots\ldots$

$+ \frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b^n}{(a+b)^n}$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

Essendo la probabilità di vincere nel caso delle gittate n de' dadi $= 1 - \frac{b^n}{(a+b)^n} = \frac{(a+b)^n - b^n}{(a+b)^n}$, e conseguentemente quella di perdere $= \frac{b^n}{(a+b)^n}$; sarà la probabilità di vincere a quella di perdere nella ragione di $(a+b)^n - b^n : b^n$. Sicchè se tale ragione sia di $m : 1$, sarà

$$(a+b)^n - b^n : b^n = m : 1.$$

Onde

$$(a+b)^n - b^n = m b^n,$$

ed

$$(a+b)^n = (m+1) b^n.$$

Per la qual cosa, contrassegnando con l i logaritmi, sarà

nl

$$nl(a+b) = l(m+1) + nlb,$$

ed

$$n = \frac{l(m+1)}{l(a+b) - lb}.$$

COROLLARIO II.

Quindi nel caſo della probabilità di vincere uguale a quella di perdere, o ſia nel caſo delle ſorte uguali de' giuocatori ſarà $m = 1$, e conſeguentemente $n = \frac{l\,2}{l(a+b) - lb}$; nel caſo poi delle probabilità di vincere doppia, tripla, quadrupla, ec. di quella di perdere, ſarà ſucceſſivamente $n = \frac{l\,3}{l(a+b) - lb}$, $\frac{l\,4}{l(a+b) - lb}$, $\frac{l\,5}{l(a+b) - lb}$, ec..

ESEMPIO.

Sia da farſi con due dadi il punto 8.

Eſſendo 36 tutte le combinazioni poſſibili de' due dadi, e 5 le combinazioni, che danno l'8; ſaranno $a = 5$, $b = 31$, ed $a + b = 36$.

Nel caso delle sorte uguali de' due giuocatori sarà $n = \frac{l2}{l36 - l31} = \frac{0 . 3010300}{0 . 0649408} = 4 . 6$. Sicchè per fare il punto 8, se il giuocatore conviene di poter gittare i dadi per 4 volte, la probabilità di vincere è alquanto minore di quella di perdere; se poi conviene di poter gittare i dadi per 5 volte, la prima delle dette probabilità si fa alquanto maggiore della seconda.

Nel caso poi della probabilità di vincere decupla di quella di perdere sarà $n = \frac{l11}{l36 - l31} = \frac{1 . 0413927}{0 . 0649408} = 16$. Sicchè per fare il punto 8, se il giuocatore conviene di poter gittare i dadi per 16 volte, la probabilità di vincere si rende decupla di quella di perdere.

Fine.

OPUSCOLO IV.

Fenomeno, che s' osserva circa la grandezza della Luna, colle spiegazioni datene esaminate, e con una nuova spiegazione, che si propone.

FENOMENO.

Apparisce la Luna presso l' orizzonte di mole maggiore, ed, innalzata a certa altezza sull' orizzonte, di mole minore: la mole maggiore però, che presenta la Luna presso l' orizzonte, non è sempre dell' istessa grandezza, apparendo ingrandita tal volta più, e tal volta meno.

Tale fenomeno s' osserva guardandosi la Luna ad occhio nudo; ma se si guarda con qualche cannocchiale, apparisce allora dell' istessa mole minore presso l'orizzonte, che a considerevole altezza su di esso.

Or sì fatto fenomeno ha non poco esercitati gl' ingegni degli Astronomi, e degli Ottici. Noi intanto qui esporremo prima le principali ſpiegazioni datene cogli eſami di eſſe, e poſcia ſoggiugneremo quel tanto, che noi ne penſiamo.

Spiegazione I.

Eſſendo la luce ſoggetta alla refrazione, deve la refrazione alterare la mole della Luna, ed alterarla più preſſo l'orizzonte, dove la detta refrazione è maſſima, e meno, innalzata la Luna a certa altezza ſull'orizzonte, dove ſi fa ſenſibilmente minore. Ecco perchè appariſce la Luna ſecondo taluni di mole maggiore preſſo l'orizzonte, e di mole minore, innalzata a certa altezza ſull'orizzonte.

Eſame dell' eſpoſta ſpiegazione.

S'è già dimoſtrato nel 2.° tomo dell' Aſtronomia che la refrazione della luce è maſſima nell' orizzonte; che procede ſucceſſivamente diminuendoſi dall' orizzonte verſo il zenit; e che fa apparire i punti, da' quali vengono all'occhio i raggi della luce ne' medeſimi cerchi verticali, e più in alto di quello ſono. Sia

la

la Luna guardata da uno ſpettatore ſull' orizzonte. Per effetto della luce tale ſpettatore vedrà gli eſtremi del diametro orizzontale della Luna non ne' punti de' verticali procedenti per gli medeſimi eſtremi, ne' quali li vedrebbe ſenza refrazione, ma più in alto, e conſeguentemente non dove gli archi circolari de' detti verticali hanno certa diſtanza tra eſſi, ma dove hanno una diſtanza alquanto minore. Similmente per effetto della refrazione vedrà gli eſtremi del diametro verticale dell' iſteſſa Luna non ne' punti del verticale procedente pel centro della medeſima Luna, dove li vedrebbe ſenza refrazione, ma più in alto, e più innalzato l'eſtremo inferiore, e meno l' eſtremo ſuperiore. Onde per effetto della refrazione vedrà la diſtanza de' detti eſtremi alquanto minore di quella, che apparirebbe ſenza refrazione. Quindi ſe la refrazione della luce induceſſe ſenſibile alterazione e nel diametro orizzontale, e nel diametro verticale della Luna, e conſeguentemente nella mole di eſſa, dovrebbe la detta refrazione farci apparire la mole della Luna diminuita, e non accreſciuta; e più diminuita nell' orizzonte, dove la refrazione della luce è maſſima, e meno, e meno diminuita ſucceſſivamente, andandoſi la Luna da certa altezza ſucceſſivamente più, e più al-

allontanando dall' orizzonte, dove la refrazione si va successivamente rendendo minore, e minore. L' effetto dunque della refrazione della luce è contrario all' esposto fenomeno. S' aggiunga che se la refrazione della luce fosse la cagione di tale fenomeno, dovrebbe sì fatto fenomeno osservarsi e a occhio nudo, e col cannocchiale, sussistendo col cannocchiale l'effetto della refrazione della luce. Per la qual cosa la refrazione della luce non può dell' esposto fenomeno esserne in conto alcuno la cagione.

Spiegazione II.

La Luna presso l' orizzonte si vede in seguito d' innumerabili oggetti, e non già qualora è innalzata a certa altezza sull' orizzonte; onde la Luna presso l' orizzonte apparisce più lontana da noi, che non apparisce a certa altezza sull' orizzonte innalzata. Or noi siamo abituati a giudicare di due oggetti, che si veggono d' uguali grandezze a distanze disuguali, essere maggiore il più rimoto, e minore il men rimoto. Dunque, ancorchè la Luna sia dell' istessa grandezza nell' orizzonte, che quando è ad altezze considerevoli sull'orizzonte innalzata; pure la giudidichiamo essere di maggior mole presso l'orizzonte, dove apparisce più lontana, e di minor mole, innalzata a certa altezza sull'orizzonte, dove apparisce men lontana. Ed ecco in che altro modo s'è da altri spiegato l'istesso fenomeno.

Esame dell' esposta spiegazione.

Nell' esposto fenomeno non si tratta di *giudicare* se la Luna sia più grande presso l'orizzonte, e meno grande, qualora è innalzata a certa altezza sull'orizzonte; ma si tratta di *vedere* la Luna più grande presso l'orizzonte, e meno grande, qualora s'osserva a certa altezza sull' orizzonte. Sicchè la riferita spiegazione niente quadra al fenomeno.

Spiegazione III.

Il famoso Smith nel suo eccellente trattato d' Ottica s' ingegna di spiegare l'istesso fenomeno a quest'altro modo. Contrassegnino O l'occhio d' uno spetta- Fig. 1. tore terrestre, L M il suo orizzonte, LDM la periferia del parallelo, che in

una

una rivoluzione diurna apparisce descrivere la Luna sul detto orizzonte, ed i cerchietti A, B, C, D, ec. la Luna ne' diversi punti di tale periferia. S' intendano tirate da O alle periferie di sì fatti cerchietti le tangenti, che la figura dimostra. Saranno tutti gli angoli formati in O da ogni pajo delle tangenti, supposte tirate all' istesso cerchietto, uguali tra essi; e sotto tali angoli uguali apparirebbe il diametro della Luna ne' diversi punti A, B, C, D, ec., se la Luna apparisse all' occhio O in tali siti. Or dimostra l' istesso Smith che l' apparente volta del cielo, dove riferiamo gli oggetti celesti, non è un emisfero, ma una porzione sferica, minore della mezza sfera. Dunque la Luna nella detta rivoluzione apparisce all' occhio scorrere non la semiperiferia LDM, ma un' altra curva, che va segnata nella superficie della detta porzione sferica. Sia N *d* P tale curva. Onde la Luna nella detta rivoluzione apparisce all' occhio O successivamente non ne' punti A, B, C, D, ec., ma ne' punti *a*, *b*, *c*, *d*, ec., e rappresentata dai cerchietti *a*, *b*, *c*, *d*, ec. compresi dalle rispettive tangenti de' cerchi A, B, C, D, ec.. Per la qual cosa andando i diametri di tali cerchietti successivamente da N a *d* diminuendosi, e da *d* a P accrescendosi, deve la Luna,
in

in apparire mossa da N a *d*, apparire di mole successivamente decrescente, e di mole successivamente crescente in apparire mossa da *d* a P. Ed ecco in che modo il famoso Smith ha creduto spiegare, perchè la Luna presso l' orizzonte si vede di maggior mole di quella s' osserva innalzata a certa altezza sull' orizzonte.

Esame dell' esposta spiegazione.

Posta per vera tale spiegazione, dovrebbe accadere 1.° che l' istesso fenomeno si dovrebbe osservare col cannocchiale, che s' osserva ad occhio nudo: 2.° che la Luna, in procedere dall' orizzonte fino al meridiano dal lato d' oriente, dovrebbe apparire d' una mole, che s' andasse successivamente diminuendo, ed in procedere dal meridiano all' orizzonte dovrebbe apparire d' una mole, che s' andasse successivamente accrescendo: 3.° che presso l' orizzonte dovrebbe la Luna apparire sempre d' un costante ingrandimento, e non d' un ingrandimento soggetto a variazioni. Or niuna di tali cose s' osserva, osservandosi la Luna col cannocchiale nell' orizzonte dell' istessa mole, che s' osserva a qualunque altezza sull' orizzonte; osservandosi ad occhio nudo da cer-

certa altezza in ſu ſempre dell' iſteſſa mole ; ed oſſervandoſi ad occhio nudo nell' orizzonte ora più , ed ora meno ingrandita . Sicchè l' eſpoſta ſpiegazione non concorda co' fenomeni . E come mai può concordare ? Secondo Smith la Luna, che dovrebbe apparir moſſa in una rivoluzione diurna per la ſemiperiferia LDM, appariſce moſſa per la curva N*d*P, e rappreſentata ne' ſiti *a* , *b* , *c* , *d* , ec. dai cerchietti *a* , *b* , *c* , *d* , ec. , i cui diametri ſono proporzionali alle diſtanze, che hanno da O . Or procedendo tali cerchietti da N a *d* ſucceſſivamente diminuendoſi , e da *d* a P ſucceſſivamente accreſcendoſi, non ne ſegue che debbono apparire all' occhio in O da N a *d* ſucceſſivamente minori , e minori , e da *d* a P ſucceſſivamente maggiori, e maggiori : anzi , apparendo i diametri di eſſi da per tutto ſotto angoli eguali , debbono tutti apparire dell' iſteſſa grandezza. Quindi ſecondo la ſpiegazione di Smith la Luna per N*d*P deve da per tutto apparire dell' iſteſſa mole . E perciò tale ſpiegazione non rende affatto ragione dell' eſpoſto fenomeno.

Da quanto s' è detto fin qui circa l' eſpoſto fenomeno ſi rileva che niuno fin' ora ne ha data una ſpiegazione adeguata. Ardiſco proporne una nuova, che, ſe non m' inganno , pare che ſia ſoddisfacente, ed eccola . *Nuo-*

Nuova ſpiegazione dell' eſpoſto fenomeno.

Ogni corpo luminoſo, o illuminato, con diffondere il lume, ha intorno a ſe uno ſpazio, o ſia sfera illuminata, in cui l' intenſità del lume va ſcemando a proporzione che creſce il quadrato della diſtanza dal centro diffondente il lume. Or giugnendo all' occhio d' uno ſpettatore il lume d' un corpo luminoſo, o illuminato, ſe tale lume fa nell' organo della viſta un' impreſſione forte per riſpetto di quella, che viene fatta dal lume della ſua sfera luminoſa; in tale caſo l' azione del lume forte non fa avvertire quella del lume debole, e l' occhio diſcerne il corpo, e non confonde la ſua grandezza con quella della sfera luminoſa d' attorno. Se poi l' azione debole del lume, provveniente all' occhio dal corpo, è debole o per effetto della viſta debole, o per effetto della gran diſtanza, dalla quale viene all' occhio, o per effetto di qualche mezzo denſo, ch' è coſtretto di traverſare per giugnere all' occhio; in tale caſo l' azione debole del lume provveniente dal corpo non impediſce che ſi ren-

renda ſenſibile anche quella del lume provveniente dalla detta sfera luminoſa, e l'occhio non diſcerne allora il corpo da quella parte della detta sfera, che la debolezza del lume provveniente dal corpo permette di poter eſſere all' occhio ſenſibile. E quindi il corpo appariſce non della ſua grandezza, ma della grandezza della detta parte della ſua sfera luminoſa. Ecco perchè le ſtelle, ed i pianeti appariſcono di maggior mole all' occhio nudo, che all' occhio armato di cannocchiale: perchè le fiaccole nella notte di lontano appariſcono di maggior mole, che non appariſcono da vicino: perchè in un tempio illuminato i miopi veggono i lumi ad occhio nudo di maggiore grandezza, che non li veggono cogli occhiali. Or quando la Luna è preſſo l'orizzonte, il ſuo lume indebolito da vapori, ed eſalazioni, de' quali l'orizzonte ſi trova ſempre più, o meno ingombrato, fa che alla viſta ſia ſenſibile più, o meno della ſua sfera luminoſa d' attorno, e fa che all' occhio appariſca la Luna, come ſe foſſe della grandezza di tutta la parte della detta sfera luminoſa, che la debolezza del lume provveniente dal corpo lunare permette di diſcernere, e conſeguentemente d' una groſſezza maggiore, o minore a proporzione che l' orizzonte ſi

tro-

trova di vapori, ed esalazioni più, o meno ingombrato. Guardando poi la Luna presso l' orizzonte con cannocchiale; perchè il lume provveniente dal suo corpo viene dal cannocchiale rinforzato, perciò la vista non confonde il suo corpo colla detta sfera luminosa; e quindi appparisce la Luna presso l' orizzonte guardata con cannocchiale della giusta sua mole, e senza ingrandimento alcuno. Dell' istessa mole apparisce all' occhio nudo, qualora si guarda a certa altezza sull' orizzonte, e fuori del caso d' essere il suo lume insignemente debilitato da vapori, ed esalazioni. Ed ecco, se non m' inganno, la vera spiegazione dell' esposto fenomeno.

Fine.

OPU-

OPUSCOLO V.

S' insegnano con chiarezza in più problemi tutte le operazioni sussecutive da fare, per costruire su d' una pietra di lavagna, o altra materia un orologio solare orizzontale ; e si dà l' intera calcolazione relativamente all' altezza del polo per Napoli di tutte le linee conducenti alla facile costruzione di esso, affinchè possa con facilità , ed esattezza ognuno costruirselo per regolamento degli orologj a ruote.

PROBL. I.

1. *Insegnare il come va preparata, e situata la pietra di lavagna, su cui si deve costruire un orologio solare orizzontale.*

SOLUZIONE.

1. Si prepari una pietra di lavagna quadrata, o rettangola, perfettamente spianata, e della grandezza, che si rileverà dal calcolo, che sarà in seguito
Fig. 2. soggiunto; e, supposto essere A B tale pietra, si segni leggiermente nel mezzo di essa la linea retta LM con segno da doversi dopo il bisogno cancellare.

2. Si scelga un sito solido, che venghi illuminato per tutto l'anno dal Sole, almeno in più ore del giorno prima, e dopo il mezzodì; e su di esso, tenuto verticalmente sospeso un sottil filo nel momento del mezzodì in qualche giornata serena, si segni la direzione dell'ombra di tale filo nel detto momento.

3. Si fissi solidamente la detta pietra nel sito scelto in modo, che sia la LM nella direzione dell'ombra già segnata, o in una direzione parallela, e che abbia il suo piano superiore esattamente orizzontale. S'avrà in tal modo eseguita l'operazione proposta da fare. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

PROBL. II.

2. *Insegnare il come, eseguita già l'esposta operazione, va fatto, e situato il gnomone per l'orologio da costruire.*

So-

SOLUZIONE.

1. Si tenghi preparato un gnomone d'ottone, o di rame curvo della forma RPQ, come si vede nella *Fig.* 3, e della lunghezza, che verrà regolata secondo la grandezza della pietra dal calcolo, che sarà soggiunto.

2. Si fissi solidamente tale gnomone nella detta pietra, con avere intruso in un foro fatto nell'istessa pietra la parte PR; con avere la parte diritta di PQ perpendicolare al piano della pietra; e con avere finalmente il suo estremo Q non sottilmente acuto, e corrispondente a piombo alla linea LM della *Fig.* 2. S'avrà in tal modo eseguita la proposta operazione da fare. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

PROBL. III.

3. *Eseguite le operazioni già insegnate, determinare nella pietra il punto corrispondente a piombo all'estremo Q del gnomone curvo.*

SOLUZIONE.

Rappresentino AB la pietra, e PQ il gnomone curvo fissato nella pietra. Fig. 4.

1. Si ſegnino ſulla pietra tre punti D , E , F , preſi ad arbitrio coll' ajuto d' un compaſſo a diſtanze uguali dall' eſtremo Q del gnomone.

2. S' uniſcano le rette DE , EF , e ſi dividano in due parti uguali in G , ed H.

3. Per G , ed H ſi tirino ſul piano della pietra le GO , HO riſpettivamente perpendicolari a DE , EF.

Sarà il punto O d' interſecazione di sì fatte perpendicolari il punto cercato , come centro del cerchio , la cui periferia paſſa per gli tre punti D , E , F , e conſeguentemente come centro della baſe d' un cono retto , che ha per vertice il punto Q . Ch' è ciò , che biſognava determinare.

AVVERTIMENTO.

4. Si noti che la verticale QO è il vero gnomone dell' orologio da coſtruire. Onde in ſeguito chiameremo la QO *gnomone retto* , e 'l punto O il *piede del gnomone retto* : però di sì fatto gnomone non vi ſarà nell' orologio, ſe non l' eſtremo ſuperiore Q, che dovrà dinotare colla ſua ombra le ore.

PRO-

PROBL. IV.

5. *Eſeguite le inſegnate antecedenti operazioni, ſegnare ſulla pietra la linea meridiana procedente pel piede del gnomone diritto.*

SOLUZIONE.

Contraſſegnino AB la pietra, PQ il gnomone curvo, e QO il gnomone diritto. Fig.5.

1. Nel giorno del ſolſtizio d'eſtate, o anche d'inverno, ſe la ſtagione il permette, o almeno vicino al ſolſtizio s'eſplori circa due ore prima del mezzogiorno in qual punto della ſuperficie della pietra batte l' ombra della punta Q del gnomone; e, ſuppoſto eſſere S tale punto, con un compaſſo eſatto ſi deſcrivano ſulla pietra con ſegni facili a cancellare due, o tre archi circolari, come CD, EF, GH, ed archi di cerchi, che abbiano per comune centro il piede O del gnomone diritto, e per raggi il primo una retta alquanto minore di OS, il ſecondo una retta alquanto più piccola, e 'l terzo una retta alquanto minore del raggio ſecondo.

2. Si ſtia attento ad oſſervare, quando l'ombra della punta Q del gnomone

giugne esattamente prima all' arco CD, indi all' arco EF, e finalmente all' arco GH; e si notino diligentemente i punti *a*, *b*, *c*, dove la detta ombra giugne a toccare tali archi; il che deve accadere prima del mezzogiorno.

3. S' aspetti dopo il mezzogiorno quando l' ombra della medesima punta giugne di nuovo successivamente alli medesimi archi GH, EF, CD; e si notino pure diligentemente i punti *d*, *e*, *f*, dove di bel nuovo la detta ombra giugne a toccare gli stessi archi.

4. Si dividano esattamente in due parti uguali gli archi *af*, *be*, *cd* in *m*, *n*, *o*, e s' unisca la retta O*m*, la quale, se l' operazione è succeduta con esattezza, deve passare per gli punti *n*, ed *o*, determinati unicamente per assicurare l' esattezza dell' operazione.

5. Finalmente si prolunghi la O*m* in L, ed M, e secondo la direzione della LM con un' acuto pungolo d' acciajo si faccia nella pietra un solco sensibile sì, ma sottile.

Dinoterà tale solco la linea meridiana cercata, cioè quella linea, alla quale perverrà l' ombra della punta Q del gnomone in ogni giorno nel momento del mezzodì, o sia quella linea, che indicherà sempre il momento del mezzodì col pervenire ad essa la detta ombra. Ch' è ciò, che bisognava fare.

AV-

AVVERTIMENTO.

6. Si noti che l' insegnata operazione si deve fare ne' tempi de' solstizj, e non in altri; perchè allora la declinazione del Sole non varia sensibilmente nell' intervallo de' due momenti, ne' quali l' ombra dell' estremo Q del gnomone giugne prima, e dopo il mezzodì all' istesso arco CD; e quindi tale ombra giugne a toccare in ambe le volte il detto arco in momenti di tempo ugualmente distanti dal mezzodì. Lo stesso non può accadere, se si fa tale operazione in altri tempi: anzi se si fa in un giorno rimoto da' solstizj, la segnata meridiana allora col giugnere ad essa la detta ombra dinota o tempo, che posticipa alquanto il mezzodì, se il giorno scelto per l' operazione si ha procedendo dal 21 di Dicembre al 21 di Giugno, o tempo, che alquanto anticipa, se si ha procedendo dal 21 di Giugno al 21 di Dicembre.

PROBL. V.

7. *Eseguite le operazioni già insegnate, determinare sulla pietra il centro dell' orologio, o sia il punto, da cui debbono procedere le linee orarie, e segnare le medesime linee.*

SOLUZIONE.

Fig. 6. Contrassegnino LM la pietra, RS la meridiana già segnata, e B il piede del gnomone diritto.

1. Nel piano della pietra da B s'innalzi su RS la perpendicolare BC, e si faccia uguale alla lunghezza del gnomone diritto.

2. Nel punto C di BC si faccia coll' ajuto d' un mezzo cerchio da tavolino l' angolo BCD uguale all' altezza del polo relativamente al luogo dell' operazione.

3. Da C nel piano dell' istessa pietra s' innalzi CA perpendicolare a DC, e si prolunghi, finchè incontri la meridiana in A.

Sarà A il centro cercato.

4. Per D si tiri PQ perpendicolare alla meridiana RS; e, tagliata DE = DC, col centro E, e col raggio ED si descriva l' arco DF di quadrante.

5 Si divida l' arco DF in sei parti uguali, e da E per gli cinque punti di divisione si tirino le rette E*a*, E*b*, E*c*, E*d*, E*e*, che incontrano la PQ in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; e si taglino di più da DQ le D*p*, D*q*, D*r*, D*s*, D*t* rispettivamente uguali a D*a*, D*b*, D*c*, D*d*, D*e*.

6. Da

6. Da A si tirino ai dieci punti *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t* le rette A*e*, A*d*, A*c*, A*b*, A*a*, A*p*, A*q*, A*r*, A*s*, A*t*, e, prolungate tali rette come la Fig. il dimostra, con un acuto pungolo d' acciajo si facciano nelle direzioni di esse de' solchi nella pietra sensibili sì, ma sottili.

7. Si tiri di più per A la retta GH perpendicolare alla meridiana RS, e secondo la sua direzione si faccia pure un simil solco nella pietra.

8. Finalmente si notino a lato de' solchi già fatti nella pietra i numeri, che si veggono notati nella Figura.

Saranno i detti solchi le linee orarie dell' orologio; e di essi quelli, che sono a destra della meridiana, con giugnervi l' ombra dell' estremo del gnomone, dinoteranno le ore, che scorreranno dal nascere del Sole fino al mezzogiorno, ed ore denominate dai numeri, che tengono a lato; e gli altri, che sono a sinistra, dinoteranno con giugnervi l' istessa ombra le ore, che scorreranno dal mezzodì fino al tramontare del Sole, e ore denominate pure da' numeri, che tengono a lato. Ch' è quanto bisognava determinare.

AVVERTIMENTO.

8. Quanto si è fin qui insegnato pare sufficientissimo per costruire l'orologio solare orizzontale; e pure così non è, volendosi un orologio costrutto con esattezza. Di fatto le determinazioni del centro dell'orologio, e della maggior parte delle sue linee orarie dipendono dall'angolo BCD, fatto uguale all'altezza del polo. Or chi non sa che la formazione d'un angolo coll'ajuto d'un mezzo cerchio da tavolino non può riuscire esatto, massimamente quando la sua misura, oltre i gradi, racchiude anche minuti primi, e minuti secondi? L'inesattezza dunque dell'angolo BCD, fatto del detto modo, renderebbe difettose le determinazioni del centro dell'orologio, e delle sue linee orarie, e conseguentemente inesatto l'orologio. Per avere adunque tali determinazioni con precisione, conviene coll'ajuto della Trigonometria calcolare con finezza le linee, che menano alle medesime determinazioni. Perciò soggiugniamo il seguente calcolo.

Calcolo per la coſtruzione delle linee orarie di qualunque orologio orizzontale da farſi in Napoli.

Per tutt' i ſiti della città di Napoli ſi può ſicuramente prendere l' altezza del polo boreale di 40°. 50'. 18". Si metta in oltre la lunghezza del gnomone diritto, di qualunque miſura voglia prenderſi, diviſa in 1200 parti. Sicchè ne' triangoli ABC, CBD ſi hanno BC = 1200, l' angolo BAC = 40°. 50'. 18". e l' angolo BCD pure = 40°. 50'. 18".

I.

Per avere nel triangolo ABC il lato AB.

Log. ſen. ACB	=	9 . 8788420	
Log. BC = *Log.* 1200	=	3 . 0791812	
Somma	=	12 . 9580232	
Log. ſen. BAC	=	9 . 8155292	ſott.
Log. AB	=	3 . 1424940.	

E perciò AB = 1388 . 33.

II.

II.

Per avere nel triangolo CBD il lato BD.

Log. sen. BCD	=	9	. 8155292	
Log. BC	=	3	. 0791812	
Somma	=	12	. 8947104	
Log. sen. BDC	=	9	. 8788420	sott.
Log. BD	=	3	. 0158684.	

Quindi DB = 1037 . 21.

III.

Per avere nell' istesso triangolo CBD l' ipotenusa DC.

Log. sen. massi.	=	10	. 0000000	
Log. BC	=	3	. 0791812	
Somma	=	13	. 0791812	
Log. sen. BDC	=	9	. 8788420	sott.
Log. DC	=	3	. 2003392.	

Sicchè DC, e conseguentemente DE = 1586 . 13.

IV.

IV.

Per determinare D a nel triangolo EDa, essendo l' angolo DEa = 15°.

Log. tang. DE*a*	=	9 . 4280525	
Log. DE	=	3 . 2003392	
Somma	=	12 . 6283917	
Log. sen. massi.	=	10 . 0000000	sott.
Log. D *a*	=	2 . 6283917.	

E perciò D *a*, e conseguentemente D*p* = 425.

V.

Per determinare D*b* *nel triangolo* ED*b*, *essendo l' angolo* DE*b* = 30°.

Log. tang. DE*b*	=	9 . 7614394	
Log. DE	=	3 . 2003392	
Somma	=	12 . 9617786	
Log. sen. massi.	=	10 . 0000000	sott.
Log. D *b*	=	2 . 9617786.	

Sic-

Sicchè Db, e conseguentemente Dq = 915 . 75.

VI.

Per determinare Dc *nel triangolo* EDc, *essendo l' angolo* DEc = 45°.

Non occorre per tale determinazione far calcolo alcuno, essendo Dc, e conseguentemente Dr = DE = 1586 . 13.

VII.

Per determinare Dd *nel triangolo* EDd, *essendo l' angolo* DEd = 60°.

Log. tang.	DEd	=	10 . 2385606	
Log.	DE	=	3 . 2003392	
	Somma	=	13 . 4388998	
Log.	sen. massi.	=	10 . 0000000	sott.
Log.	Dd	=	3 . 4388998.	

E perciò Dd, e conseguentemente Ds = 2747 . 26.

VIII.

VIII.

Per determinare De *nel triangolo* EDe, *essendo l'angolo* DE e = 75°.

Log. tang. DE*e*	=	10 . 5719475
Log. DE	=	3 . 2003392
Somma	=	13 . 7722867
Log. sen. massi.	=	10 . 0000000 sott.
Log. D*e*	=	3 . 7722867 .

Quindi D*e*, e conseguentemente D*t* = 5919 . 52.

COROLLARIO I.

9. Posta dunque la lunghezza del gnomone diritto, e conseguentemente BC = 1200, debbono essere per Napoli

		AB	=	1388 . 33
		BD	=	1037 . 21
		DE	=	1586 . 13
D*a*	=	D*p*	=	425 . 00
D*b*	=	D*q*	=	915 . 75
D*c*	=	D*r*	=	1586 . 13
D*d*	=	D*s*	=	2747 . 26
D*e*	=	D*t*	=	5919 . 52.

Quin-

Quindi, posta l' altezza del gnomone diritto d' un' oncia, o sia di minuti 5, saranno

AB	=	onc. 1	. min. 0	. 7
BD	=	0	. 4	. 3
DE	=	1	. 1	. 6
D*a*	=	0	. 1	. 7
D*b*	=	0	. 3	. 8
D*c*	=	1	. 1	. 6
D*d*	=	2	. 1	. 4
D*e*	=	4	. 4	. 6.

Posta poi l' altezza del detto gnomone di 2 once, o sia di minuti 10, saranno

AB	=	onc. 2	. min. 1	. 5
BD	=	1	. 3	. 6
DE	=	2	. 3	. 2
D*a*	=	0	. 3	. 5
D*b*	=	1	. 2	. 6
D*c*	=	2	. 3	. 2
D*d*	=	4	. 2	. 8
D*e*	=	9	. 4	. 3.

Posta in oltre l' altezza dello stesso gnomone di 3 once, o sia di minuti 15, saranno

AB	=	pal.	o	. onc.	3	. min.	2	. 3
BD	=		o	.	2	.	2	. 9
DE	=		o	.	3	.	4	. 8
D*a*	=		o	.	1	.	o	. 3
D*b*	=		o	.	2	.	1	. 4
D*c*	=		o	.	3	.	4	. 8
D*d*	=		o	.	6	.	4	. 3
D*e*	=		1	.	2	.	3	. 9

Poſta di più l' altezza del medeſimo gnomone di 4 once, o ſia di 20 minuti, ſaranno

AB	=	pal.	o	. onc.	4	. min.	3	. 1
BD	=		o	.	3	.	2	. 3
DE	=		o	.	5	.	1	. 4
D*a*	=		o	.	1	.	2	. o
D*b*	=		o	.	3	.	o	. 2
D*c*	=		o	.	5	.	1	. 4
D*d*	=		o	.	9	.	o	. 8
D*e*	=		1	.	7	.	3	. 6

Poſta di più l' altezza del detto gnomone di 5 once, o ſia di 25 minuti, ſaranno

AB	=	pal.	0	. onc.	5	. min.	3 . 8
BD	=		0	.	4	.	1 . 6
DE	=		0	.	6	.	3 . 0
D*a*	=		0	.	1	.	3 . 8
D*b*	=		0	.	3	.	4 . 0
D*c*	=		0	.	6	.	3 . 0
D*d*	=		0	.	11	.	2 . 2
D*e*	=		2	.	0	.	3 . 3

Posta finalmente l'altezza del gnomone diritto di 6 once, o sia di 30 minuti, saranno

AB	=	pal.	0	. onc.	6	. min.	4 . 7
BD	=		0	.	5	.	0 . 9
DE	=		0	.	9	.	2 . 9
D*a*	=		0	.	2	.	0 . 6
D*b*	=		0	.	4	.	2 . 8
D*c*	=		0	.	9	.	2 . 9
D*d*	=		1	.	1	.	3 . 6
D*e*	=		2	.	5	.	2 . 9

COROLLARIO II.

16. Coll'ajuto delle misure già notate è facile ora in Napoli, stabilita la lunghezza del gnomone diritto, assegnare sulla pietra le lunghezze BA, D*a*, D*b*, D*c*, D*d*, D*e*, e conseguentemente determinare il centro A dell'orologio, e tirare sull'istessa pietra le linee orarie; ed è facile altresì regolare e la grandezza

za della pietra, e la ſituazione del gnomone.

AVVERTIMENTO I.

11. E' già noto che l' ombra meridiana dell'eſtremo del gnomone cade alla maſſima diſtanza dal ſuo piede nel ſolſtizio d'inverno, ed è limitata tale ombra dal raggio refratto, che procede non dal centro del Sole, ma dall' eſtremo ſuperiore del ſuo diametro verticale, vale a dire dal raggio di luce, che forma colla meridiana dell' orologio in Napoli un angolo di gr. 25. 59'. 56''. Quindi ſi ha tale diſtanza col quarto proporzionale trovato in ordine al ſeno di 25°. 59'. 56'', al ſuo coſeno, o ſia al ſeno di 64°. 00'. 4'', e alla lunghezza del gnomone diritto, o ſia 1200 parti. Eccone il calcolo

Log. ſen. 64°. 00'. 4''	=	9 . 9536643
Log. 1200	=	3 . 0791812
Somma	=	13 . 0328455
Log. ſen. 25°. 59'. 56''	=	9 . 6418247 ſott.
Log. diſt. cerca.	=	3 . 3910208.
Onde tale diſtanza è	=	2460 . 48.

 Per

Per la qual cosa, posta la lunghezza del gnomone diritto di parti 1200, la distanza massima, alla quale giugne l'ombra dell' estremo del gnomone nel solstizio d' inverno costa di 2460 . 48 delle istesse parti. E perciò sì fatta distanza sarà di onc. 2, e min. 0 . 2, se il gnomone diritto sarà d' un' oncia; di onc. 4, e min. 0 . 5, se il gnomone sarà di 2 once; di onc. 6, e min. 0 . 7, se il gnomone sarà di onc. 3; di onc. 8, e min. 1, se il gnomone sarà di 4 onc.; di onc. 10, e min. 1 . 2, se il gnomone sarà di onc. 5; e di pal. 1, onc. 0, e min. 1 . 5, se il gnomone sarà di once 6.

AVVERTIMENTO II.

12. Si noti pure che, essendo per Napoli il giorno più lungo di 16 ore, e'l più corto di ore 10, non può ne' giorni più lunghi in Napoli nè nascere il Sole prima delle ore 4 della mattina, nè tramontare dopo le 8 della sera; e ne' giorni più corti nè nascere prima delle ore 7 della mattina, nè tramontare dopo le 5 della sera. Quindi per rispetto di Napoli sono inutili nel descritto orologio le linee orarie, che indicano ore prima delle 4 della mattina, e dopo le 8 della sera. Ma ciò vale per un orologio situato in

in un orizzonte totalmente libero. Del resto dove l' orologio per impedimenti, che vi sono, non è illuminato dal Sole, se non in alcune ore solamente, ivi le linee orarie, dinotanti tutte le altre ore, sono inutili in sì fatto orologio.

AVVERTIMENTO III.

13. Si noti finalmente che se si vogliono nell' orologio delle linee orarie, che dinotino anche le mezze ore, basta segnare tra le già segnate altre linee, che dividano in due parti uguali gli angoli formati al centro dell' istesso orologio da quelle. Dell' istesso modo si possono pure segnare le altre, che vagliano a dinotare i quarti delle ore.

Fine.

OPUSCOLO VI.

S'insegnano con chiarezza tutt'i modi di poter ridurre ad un piano orizzontale angoli misurati in piani inclinati, e si rischiarano con esempj convenienti, per agevolarne la pratica a coloro, che ne dovranno far uso.

DEFINIZIONE.

1. Sieno O il sito dello spettatore, ABC il suo orizzonte, Z il suo zenit, P, Q i due oggetti terrestri, alli quali si dirìggono i raggi di mira OP, OQ in misurare l'angolo rettilineo POQ. Si dice *ridurre all' orizzonte* l'angolo POQ, se si determina l'angolo formato dalle comuni sezioni dell'istesso orizzonte ABC co' piani verticali procedenti per gli raggi di mira OP, OQ. Fig. 7, e 8, 9, 10, e 11

AVVERTIMENTO.

2. Tre casi possono occorrere. I°. Che sia l'oggetto P superiore, o inferiore al piano orizzontale ABC, e Q nell'istesso piano, come nelle *Fig.* 7, e 8. II°. Che gli oggetti P, e Q sieno o ambidue superiori al detto piano, o ambidue inferiori, come nelle *Fig.* 9, e 10. III°. Finalmente che P sia superiore al piano ABC, e Q inferiore, come nella *Fig.* 11. Per gli oggetti P, e Q s'intendano passare gli archi ZA, ZQ di cerchi verticali, che incontrano il detto piano orizzontale nel primo caso in A, e Q, e negli altri casi in A, e D.

COROLLARIO I.

3. Essendo ZA, ZQ archi di cerchi verticali, procedenti per P, Q, saranno OA, OQ nel primo caso, ed OA, OD negli altri due casi le comuni sezioni dell'orizzonte ABC co' piani verticali procedenti per gli raggi di mira OP, OQ. Sicchè nel primo caso AOQ è l'angolo POQ ridotto all'orizzonte, e negli altri due casi l'angolo AOD è l'angolo POQ ridotto pure all'orizzonte. Per la qual cosa si riduce l'angolo POQ all'orizzonte con determinare nel primo caso l'an-

l' angolo rettilineo AOQ, o l'arco AQ dell' orizzonte, e negli altri due casi con determinare l' angolo rettilineo AOD, o l' arco AD dell' orizzonte.

COROLLARIO II.

4. Essendo in oltre Z polo dell' orizzonte; saranno nel primo caso ZA, ZQ archi di quadranti, gli angoli sferici ZAQ, ZQA retti, e l' angolo sferico AZQ della misura dell' arco AQ; e negli altri due casi saranno ZA, ZD archi di quadranti, gli angoli sferici ZAD, ZDA retti, e l' angolo sferico AZD sarà della misura dell'arco AD dell' orizzonte. Quindi l' angolo sferico PZQ dà in tutt' i casi la riduzione all' orizzonte dell' angolo rettilineo POQ. Premesse tali cose, sia il

PROBL. I.

5. *Insegnare il modo come, misurato l' angolo rettilineo POQ con diriggere raggi di mira alli due oggetti P, e Q, e misurati relativamente all' orizzonte ABC nel primo caso l' angolo POA di elevazione, o di depressione dell' oggetto P, nel secondo caso gli angoli POA, QOD di elevazioni, o di depressioni degli oggetti P, e Q, e nel terzo caso l' angolo di elevazione POA dell' oggetto*

P,

P, e l' angolo di depressione DOQ dell' oggetto Q, si possa ridurre al medesimo detto orizzonte l' angolo POQ.

SOLUZIONE.

Per gli oggetti P, e Q s' intenda menato l' arco PQ dell' unico cerchio massimo, che può procedere per P, e Q. Venendo misurati l' angolo POQ dall'arco PQ, e gli angoli AOP, DOQ dagli archi PA, QD, saranno noti tali archi PQ, PA, QD. Si metta il seno massimo = R. Nel

CASO I.

Fig. 7, e 8 Essendo il triangolo sferico PAQ rettangolo in A, ed essendo di esso nota l' ipotenusa PQ, e noto il cateto PA, se si fa la seguente proporzione pel § 77 *della Trig. sfer.*

$$cos.\ AP : cos.\ PQ = R : cos.\ AQ,$$

si ha dal quarto proporzionale di tale proporzione la determinazione dell' arco AQ dell'orizzonte, e conseguentemente la misura dell' angolo cercato AOQ. Nel

CA-

CASO II.

S' intenda l' arco PQ prolungato, finchè incontri la periferia dell' orizzonte in E. Saranno i triangoli sferici EAP, ÆDQ rettangoli in A, e D, e saranno pel § 71 *della Trig. sfer.* Fig. 9, e 10

$$sen.\ AP : sen.\ PE = sen.\ E : R$$

$$sen.\ DQ : sen.\ QE = sen.\ E : R.$$

Onde

$$sen.\ AP ; sen.\ DQ = sen.\ PE : sen.\ QE,$$

e

$$sen.\ AP - sen.\ DQ : sen.\ AP + sen.\ DQ = sen.\ PE - sen.\ QE : sen.\ PE + sen.\ QE.$$

Sicchè pel § 70 *della Trig. sfer.*

$$tang.\left(\frac{AP-DQ}{2}\right) : tang\left(\frac{AP+DQ}{2}\right) = tang.\left(\frac{PE-QE}{2}\right) : tang.\left(\frac{PE+QE}{2}\right),$$

ovvero

$$tang.\left(\frac{AP-DQ}{2}\right) : tang\left(\frac{AP+DQ}{2}\right) =$$

tang.

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\ PQ : tang.\ \left(\frac{PE+QE}{2}\right).$$

Quindi, noti gli archi AP, DQ, PQ, ſi determini la metà della ſomma di PE, QE; e quindi, note la metà della ſomma di tali archi, e la metà della differenza, ſi determini sì l' arco PE, che l' arco QE.

In oltre nel triangolo sferico EAP, rettangolo in A, coll' ajuto della proporzione

$$coſ.\ AP : coſ.\ PE = R : coſ.\ AE,$$

ſi determini l' arco AE.

Similmente nel triangolo sferico EDQ, rettangolo in D, coll' ajuto della proporzione

$$coſ.\ DQ : coſ.\ QE = R : coſ.\ DE,$$

ſi determini l' arco DE.

Determinati finalmente gli archi AE, DE, colla differenza di eſſi ſi dermini l' arco AD, e conſeguentemente l' angolo cercato AOD. Nel

CASO III.

Fig. 11 Incontrando l' arco PQ la periferia dell' orizzonte in E, ſaranno i triangoli sferici PAE, EDQ rettangoli in A, e D; e ſaranno *ſen.*

$$sen.\ AP : sen.\ PE = sen.\ E : R$$

$$sen.\ DQ : sen.\ QE = sen.\ E : R.$$

Onde

$$sen.\ AP : sen.\ DQ = sen.\ PE : sen.\ QE,$$

e

$$sen.\ AP + sen.\ DQ : sen.\ AP - sen.\ DQ =$$
$$sen.\ PE + sen.\ QE : sen.\ PE - sen.\ QE.$$

Sicchè

$$tang.\left(\frac{AP+DQ}{2}\right) : tang.\left(\frac{AP-DQ}{2}\right) =$$

$$tang.\left(\frac{PE+EQ}{2}\right) : tang.\left(\frac{PE-EQ}{2}\right);$$

ovvero

$$tang.\left(\frac{AP+DQ}{2}\right) : tang.\left(\frac{AP-DQ}{2}\right) =$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\ PQ : tang.\left(\frac{PE-EQ}{2}\right).$$

Quindi, noti gli archi AP, DQ, PQ, si determini la metà della differenza di PE, EQ; e quindi, note la metà della somma di tali archi, e la metà del-

della differenza, si determini sì l' arco PE, che l'arco QE.

In oltre nel triangolo sferico EAP, rettangolo in A, coll' ajuto della proporzione

$$cos.\ AP : cos.\ PE = R : cos.\ AE$$

si determini l'arco AE.

Similmente nel triangolo sferico EDQ, rettangolo in D, coll' ajuto della proporzione

$$cos.\ DQ : cos.\ QE = R : cos.\ ED$$

si determini l'arco ED.

Determinati finalmente gli archi AE, ED, colla somma di essi si determini l'arco AD, e conseguentemente l'angolo cercato AOD. Ch' è quanto bisognava insegnare.

AVVERTIMENTO I.

6. Si noti che nel caso II. coll' ajuto della proporzione $tang. \left(\frac{AP-DQ}{2}\right) : tang. \left(\frac{AP+DQ}{2}\right) = tang. \frac{1}{2} PQ : tang. \left(\frac{PE+QE}{2}\right)$, qualora è l' arco PA=QD,

fa-

facendosi il primo termine di essa = o, non è possibile determinare la metà della somma degli archi PE, QE, e conseguentemente gli stessi archi. Però in tal caso si hanno l'arco PE $= 90° + \frac{1}{2}$ PQ, e l'arco QE $= 90° - \frac{1}{2}$ PQ.

AVVERTIMENTO II.

7. Si noti pure che nel caso III. coll'ajuto della proporzione $tang. \left(\frac{AP+DQ}{2}\right) : tang. \left(\frac{AP-DQ}{2}\right) = tang. \frac{1}{2} PQ : tang. \left(\frac{PE-EQ}{2}\right)$, qualora è l'arco PA=QD, facendosi il secondo termine di essa = o, non è possibile determinare la metà della differenza degli archi PE, EQ, essendo la differenza di tali archi = o. E' intanto in tale caso ciascuno degli archi PE, QE la metà di PQ.

ESEMPIO I.

Sieno l'angolo POQ, o l'arco PQ = Fig.7, e 8
24°.

24°. 15'. 18", *e l'angolo POA, o l'arco PA* = 8°. 39'. 46".

CALCOLO.

Log. cof. PQ	=	9 . 9598644
Log. fen. maſ.	=	10 . 0000000
Somma	=	19 . 9598644
Log. cof. AP	=	9 . 9950170 ſott.
Log. cof. AQ	=	9 . 9648474 .

E perciò l'arco AQ, e conſeguentemente l'angolo cercato AOQ = 22°. 44'. 36".

ESEMPIO II.

Fig. 9 e 10, *Sieno l'angolo POQ, o ſia l'arco PQ* = 24°. 15'. 18", *l'angolo AOP, o ſia l'arco AP* = 15°. 40'. 36", *e l'angolo DOQ, ò ſia l'arco DQ* = 8°. 44'. 34".

CALCOLO.

$$\textit{Log.tan.}\left(\frac{AP+DQ}{2}\right) = 9 . 6570839$$

Log.

Log. tan. $\frac{1}{2}$ PQ = 9 . 3322029

Somma = 18 . 9892868

$$Log.\,tan.\left(\frac{AP-DQ}{2}\right) = 9 . 0849817 \text{ sott.}$$

$$Log.\,tan.\left(\frac{PE+EQ}{2}\right) = 9 . 9043051 .$$

Onde $\frac{1}{2}$ (PE+EQ) = 38°. 44'. 16''.

E' di più $\frac{1}{2}$(PE−EQ) = 12 . 7 . 39.

Sicchè

PE = 50°. 51'. 55''

QE = 26 . 36 . 37.

In oltre

Log. cos. PE = 9 . 8001298

Log. sen. mas. = 10 . 0000000

Somma = 19 . 8001298

Log. cos. AP = 9 . 9835369 sott.

Log. cos. AE = 9 . 8165929.

G Sic-

Sicchè

$$AE = 49^\circ . 2' . 25''.$$

Similmente

Log. cos. QE	=	9 . 9513734
Log. sen. mas.	=	10 . 0000000
Somma	=	19 . 9513734
Log. cos. DQ	=	9 . 9949242 sott.
Log. cos. DE	=	9 . 9564492.

Onde

$$DE = 25^\circ . 13' . 58''.$$

Per la qual cosa l'arco AD = AE — DE, o sia l' angolo cercato AOD = $23^\circ . 48' . 27''$.

ESEMPIO III.

Fig. 11 *Sieno l'angolo POQ, o sia l'arco PQ = $24^\circ . 15' . 18''$, l'angolo d'elevazione POA, o sia l'arco AP = $5^\circ . 30' . 36''$, e l'angolo di depressione QOD, o sia l'arco QD = $3^\circ . 15' . 30''$.*

CAL

CALCOLO.

$$\textit{Log. tan.}\left(\frac{AP-DQ}{2}\right) = 8.2933955$$

$$\textit{Log. tan.}\ \tfrac{1}{2}PQ = 9.3322029$$

$$\text{Somma} = 17.6255984$$

$$\textit{Log. tan.}\left(\frac{AP+DQ}{2}\right) = 8.8846130 \text{ sott.}$$

$$\textit{Log. tan.}\left(\frac{PE-EQ}{2}\right) = 8.7409854.$$

Sicchè $\frac{1}{2}(PE-EQ) = 3^{\circ}.\ 9'.\ 9''.$

E' pure $\frac{1}{2}(PE+EQ) = 12.\ 7.\ 39.$

Dunque

$PE = 15^{\circ}.\ 16'.\ 48''$

$EQ = 8.\ 58.\ 30$

In oltre

Log. cos. PE = 9 . 9843695

Log. sen. mas. = 10 . 0000000

G 2 Som-

$$\text{Somma} = 19 \,.\, 9843695$$
$$Log.\ cos.\ AP = 9 \,.\, 9979886 \text{ sott.}$$

$$Log.\ cos.\ AE = 9 \,.\, 9863809 \,.$$

Sicchè

$$AE = 14^\circ.\ 16'.\ 27''.$$

Similmente

$$Log.\ cos.\ QE = 9 \,.\, 9946499$$
$$Log.\ sen.\ mas. = 10 \,.\, 0000000$$

$$\text{Somma} = 19 \,.\, 9946499$$
$$Log.\ cos.\ DQ = 9 \,.\, 9992973 \text{ sott.}$$

$$Log.\ cos.\ ED = 9 \,.\, 9953526 \,.$$

Onde

$$DE = 8^\circ.\ 22'.\ 2''.$$

Per la qual cosa l'arco $AD = AE + ED$, o sia l'angolo cercato $AOD = 22^\circ.\ 38'.\ 29''$.

AVVERTIMENTO.

8. Si noti che la Trigonometrìa sfe-

rica

rica ci somministra un'altra soluzione più elegante del medesimo problema. Quindi soggiugniamo la seguente.

SOLUZIONE II.

Essendo in tutt'i casi noti sempre tutt'i tre lati del triangolo sferico PZQ; se, posta la somma di tali lati $=$ S, si cerca in ordine a *sen.* ZP $\times$ *sen.* ZQ, a *sen.* $(\frac{1}{2}S - ZP) \times$ *sen.* $(\frac{1}{2}S - ZQ)$, e ad R^2 il quarto proporzionale; tale quarto proporzionale dà $(sen. \frac{1}{2} PZQ)^2$. E quindi si rileva l'angolo PZQ, e conseguentemente l'angolo cercato AOD. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sieno gli stessi dati dell'esempio primo della precedente soluzione.

Essendo l'arco $PQ = 24^\circ . 15' . 18''$, Fig. 7 l'arco $ZP = 81^\circ . 20' . 14''$, e l'arco $ZQ = 90^\circ$; sarà $\frac{1}{2}S = 97^\circ . 47' . 46''$. Onde

$$\frac{1}{2}S - ZP = 16^\circ . 27' . 32''$$

$$\frac{1}{2}S - ZQ = 7 . 47 . 46 .$$

CALCOLO.

$Log. sen. (\frac{1}{2}S - ZP) = 9.4522883$
$Log. sen. (\frac{1}{2}S - ZQ) = 9.1324142$
$2\ Log.\ R = 20.0000000$

Somma I. $= 38.5847025$.

In oltre

$Log. sen. ZQ = 10.0000000$
$Log. sen. ZP = 9.9950170$

Somma II. $= 19.9950170$.

E perciò

Somma I. $= 38.5847025$
Somma II. $= 19.9950170$ sott.

$2\ Log. sen. \frac{1}{2} PZQ = 18.5896855$,

e

$Log. sen. \frac{1}{2} PZQ = 9.2948427\frac{1}{2}$.

Sicchè

$\frac{1}{2} PZQ = 11^\circ.\ 22'.\ 17''$.

Per

Per la qual cosa l'angolo cercato AOD $= PZQ = 22^\circ . 44' . 34''$.

ESEMPIO II.

Sieno gli stessi dati dell' esempio secondo della precedente soluzione.

Essendo l'arco $PQ = 24^\circ . 15' . 18''$, Fig. 9 $ZP = 74^\circ . 19' . 24''$, e $ZQ = 81^\circ . 15' . 26''$; sarà $\frac{1}{2} S = 89^\circ . 55' . 4''$. Onde

$$\tfrac{1}{2} S - ZP = 15^\circ . 35' . 40''$$

$$\tfrac{1}{2} S - ZQ = 8 . 39 . 38.$$

CALCOLO.

Log.sen. $(\frac{1}{2} S - ZP) = 9 . 4294719$

Log.sen. $(\frac{1}{2} S - ZQ) = 9 . 1777679$

2 *Log.* $R = 20 . 0000000$

Somma I. $= 38 . 6072398$.

In oltre

Log. sen. $ZP = 9 . 9835369$

Log. sen. $ZQ = 9 . 9949242$

Somma II. $= 19 . 9784611$.

E perciò

Somma I. $= 38 . 6072398$

Somma II. $= 19 . 9784611$ sott.

---

2 *Log. sen.* $\frac{1}{2}$ PZQ $= 18 . 6287787$,

e

Log. sen. $\frac{1}{2}$ PZQ $= 9 . 3143893 \frac{1}{2}$.

Sicchè

$\frac{1}{2}$ PZQ $= 11^{\circ} . 54' . 9''$.

Per la qual cosa l'angolo cercato AOD $=$ PZQ $= 23^{\circ} . 48' . 18''$.

ESEMPIO III.

Sieno gli stessi dati dell'esempio terzo della precedente soluzione.

Fig. 11 Essendo l'arco PQ $= 24^{\circ} . 15' . 18''$, ZP $= 84^{\circ} . 29' . 24''$, e ZQ $= 93^{\circ} . 15' . 30''$; sarà $\frac{1}{2}$ S $= 101^{\circ} . 00' . 6''$. Onde

$\frac{1}{2}$ S — ZP $= 16^{\circ} . 30' . 42''$.

$\frac{1}{2}$ S — ZQ $= 7 . 44 . 36$.

CALCOLO.

Log. sen. ($\frac{1}{2}$ S — ZP) $= 9 . 4536402$

Log. sen. ($\frac{1}{2}$ S — ZQ) $= 9 . 1294822$

2. *Log.*

2 *Log.* R = 20 . 0000000

Somma I. = 38 . 5831224.

In oltre

Log. ſen. ZP = 9 . 9979886

Log. ſen. ZQ = 9 . 9992973

Somma II. = 19 . 9972859.

E perciò

Somma I. = 38 . 5831224

Somma II. = 19 . 9972859 ſott.

2 *Log. ſen.* $\frac{1}{2}$ PZQ = 18 . 5858365,

e

Log. ſen. $\frac{1}{2}$ PZQ = 9 . 2929182 $\frac{1}{2}$.

Sicchè

$\frac{1}{2}$ PZQ = 11°. 19'. 14".

Per la qual coſa l' angolo cercato AOD = PZQ = 22°. 38'. 28".

AVVERTIMENTO.

9. Oltre i due metodi già inſegnati per iſciorre il propoſto probl., ve n' è un' altro elegantiſſimo dato dal famoſo Si-

Signor Cagnoli nella ſua eccellente Trigonometria, avendovi impiegata in tale ſoluzione non la Trigonometria sferica, ma la pura Trigonometria piana. Per eſporre intanto tale metodo colla maſſima poſſibile chiarezza, ho ſtimato ſoggiugnere i tre ſeguenti probl., con conſiderare in eſſi diviſamente i tre caſi, che poſſono occorrere. Perciò ſia il

PROBL. II.

Fig. 12, e 13 10. *Inſegnare il modo come, miſurato l'angolo rettilineo POQ con diriggere da O i raggi di mira OP, OQ ai due oggetti P, e Q, cioè P orizzontale con O, e Q ſuperiore, o inferiore al piano orizzontale di O, e miſurato di più l' angolo d' elevazione, o di depreſſione di Q relativamente al detto piano, ſi poſſa all' iſteſſo detto piano orizzontale ridurre l' angolo miſurato POQ.*

SOLUZIONE.

Da Q s' intenda abbaſſata, o innalzata QA perpendicolare al piano orizzontale di O; e s' intendano congiunte le rette PA, OA, PQ. Sarà retto sì l' angolo PAQ, che l' angolo OAQ; ſarà AOQ l'angolo d' elevazione, o di depreſſione di Q relativamente al detto piano orizzontale; e ſa-e sarà POA l' angolo POQ ridotto all' istesso detto piano orizzontale.

S' intenda in oltre da Q calata nel triangolo PQO la QB perpendicolare a PO. Sarà pel § 134 *della Geo. pia.*

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2 - 2PO \times OB.$$

Onde

$$OB = \frac{PO^2 + OQ^2 - PQ^2}{2PO}.$$

Ma, posto il seno massimo $= R$, si ha

$$R : cos.\ POQ = OQ : OB.$$

Sicchè

$$OB = \frac{OQ}{R} \times cos.\ POQ.$$

E perciò

$$\frac{OQ}{R} \times cos.\ POQ = \frac{PO^2 + OQ^2 - PQ^2}{2\ PO}.$$

Similmente si dimostra essere

$$\frac{OA}{R} \times cos.\ POA = \frac{PO^2 + OA^2 - PA^2}{2\ PO}.$$

Di più per gli triangoli PAQ, OAQ, rettangoli in A, è

QA²

$$QA^2 = PQ^2 - PA^2 = OQ^2 - OA^2.$$

E perciò

$$OQ^2 - PQ^2 = OA^2 - PA^2,$$

e conseguentemente

$$\frac{PO^2 + OQ^2 - PQ^2}{2\,PO} = \frac{PO^2 + OA^2 - PA^2}{2\,PO}.$$

Sicchè

$$\frac{OQ}{R} \times cos.\ POQ = \frac{OA}{R} \times cos.\ POA$$

E perciò

$$cos.\ POA = \frac{OQ}{OA} \times cos.\ POQ.$$

Essendo finalmente $cos.\ AOQ : R = OA : OQ$; sarà $\frac{R}{cos.\ AOQ} = \frac{OQ}{OA}$. E perciò

$$cos.\ POA = R \times \frac{cos.\ POQ}{cos.\ AOQ},$$

e conseguentemente

$$cos.\ AOQ : cos.\ POQ = R : cos.\ POA.$$

Per

Per la qual cosa se in ordine al coseno dell'angolo AOQ di elevazione, o di depressione di Q, al coseno dell'angolo POQ, ed al seno massimo si trova il quarto proporzionale; tale quarto proporzionale dà il coseno dell'angolo cercato POA; e quindi si rileva sì fatto angolo. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO.

Sieno l'angolo POQ = $24^\circ . 15' . 18''$, *e l'angolo AOQ* = $8^\circ . 39' . 46''$.

CALCOLO.

Log. cos. POQ	= 9 . 9598644	
Log. R	= 10 . 0000000	
Somma	= 19 . 9598644	
Log. cos. AOQ	= 9 . 9950170	sott.
Log. cos. POA	= 9 . 9648474.	

E perciò l'angolo cercato POA = $22^\circ . 44' . 36''$.

AVVERTIMENTO I.

11. Si noti che se si misura anche in

P sì

P sì l'angolo OPQ, che l'angolo APQ d'elevazione, o di depressione di Q, si ha del modo insegnato l'angolo OPA al piano orizzontale di O: anzi se si misura di più l'orizzontale OP, si possono allora nel triangolo AOP coll'ajuto della Trigonometria calcolare gli altri lati AP, AO, e si può conseguentemente calcolare la sua quadratura.

AVVERTIMENTO II.

12. Si noti pure che, misurati i quattro angoli QOP, QPO, QOA, QPA, e'l lato OP, si possono allora coll'ajuto della Trigonometria primo nel triangolo PQO calcolare i lati QP, QO; poscia ne' triangoli rettangoli PAQ, OAQ calcolare i lati PA, OA; e finalmente nel triangolo OAP calcolare tutti gli angoli, senza bisogno d'adoperare metodo alcuno di riduzione d'angoli all'orizzonte.

PROBL. III.

Fig.14, e 15 13. *Insegnare il modo come, misurato l'angolo rettilineo POQ con diriggere da O i raggi di mira OP, OQ ai due oggetti P, e Q, ambidue superiori, o ambidue inferiori al piano orizzontale di O, e misurati di più gli angoli di elevazione, o di depressione di P, e Q rela-*

relativamente al detto piano, si possa all' istesso detto piano orizzontale ridurre l' angolo misurato POQ.

SOLUZIONE.

Da P, e Q s' intendano abbassate, o innalzate PA, QB perpendicolari al piano orizzontale di O, e s' intendano congiunte le rette OA, OB. Saranno PA, QB, come perpendicolari all' istesso piano, parallele; saranno retti gli angoli PAO, QBO; saranno AOP, QOB gli angoli di elevazione, o di depressione di P, e Q; e sarà l' angolo AOB il ridotto all' orizzonte di POQ. Essendo PA, QB parallele; congiunte AB, PQ, saranno tali rette nel piano delle dette parallele; onde, prolungate AB, PQ s' uniranno. Sia R il punto, in cui tali rette s' uniscono. Si congiunga OR. S' avranno le seguenti proporzioni:

$$QR : QO = sen.\ QOR : sen.\ QRO$$

$$PR : PO = sen.\ POR : sen.\ QRO.$$

Sicchè

$$PR : QR = PO \times sen.\ POR : QO \times sen.\ QOR.$$

Ma

$$PR : QR = PA : QB.$$

Dun-

Dunque

$PA : QB = PO \times sen.\ POR : QO \times sen.\ QOR$,

e

$$\frac{PA}{PO} : \frac{QB}{QO} = sen.\ POR : sen.\ QOR.$$

Or, posto il seno massimo $= T$, è

$$\frac{PA}{PO} = \frac{sen.\ POA}{T}, \text{ e } \frac{QB}{QO} = \frac{sen.\ QOB}{T}.$$

Sicchè

$sen.\ POA : sen.\ QOB = sen.\ POR : sen.\ QOR$.

Onde

$sen.\ POA - sen.\ QOB : sen.\ POA + sen.\ QOB = sen.\ POR - sen.\ QOR : sen.\ POR + sen.\ QOR$.

E' in oltre pel § 70 *della* **Trig.** *sferica*

$sen.\ POA - sen.\ QOB : sen.\ POA + sen.\ QOB = tan.\ \frac{1}{2}(POA - QOB) : tan.\ \frac{1}{2}(POA + QOB)$,

e

$sen.\ POR - sen.\ QOR : sen.\ POR + sen.\ QOR = tan.\ \frac{1}{2}(POR - QOR) :$

tan.

tan. $\frac{1}{2}$ (POR + QOR) = *tan.* $\frac{1}{2}$ POQ : *tan.* $\frac{1}{2}$ (POR + QOR).

Sicchè

tang. $\frac{1}{2}$ (POA — QOB) : *tang.* $\frac{1}{2}$ (POA + QOB) = *tang.* $\frac{1}{2}$ POQ : *tang.* $\frac{1}{2}$ (POR + QOR).

Determinando coll' ajuto di queſt' ultima proporzione la metà della ſomma de' due angoli POR, QOR; come è nota la metà della differenza di eſſi, cioè la metà di POQ, ſi determina anche sì l'angolo POR, che QOR.

Determinati in oltre tali angoli POR, QOR, e noti anche gli angoli POA, QOB, ſi determinano, ſecondo s'è già inſegnato nel precedente probl., i ridotti di eſſi all'orizzonte, cioè ROA, ROB, e conſeguentemente ſi determina l'angolo cercato AOB. Ch'è ciò, che biſognava inſegnare.

ESEMPIO.

Sieno l'angolo POQ = 24° . 15'. 18". *l'angolo AOP* = 15° . 40'. 36", *e l'angolo BOQ* = 8° . 44'. 34".

CALCOLO.

$$POA = 15^\circ \cdot 40' \cdot 36''$$
$$QOB = 8 \cdot 44 \cdot 34 \cdot$$

Dunque

$$\tfrac{1}{2}(POA + QOB) = 12^\circ \cdot 12' \cdot 35''$$
$$\tfrac{1}{2}(POA - QOB) = 3 \cdot 28 \cdot 1 \cdot$$

In oltre

$$Log. tan. \tfrac{1}{2}(POA+QOB) = 9 \cdot 3352276$$
$$Log. tan. \tfrac{1}{2} POQ = 9 \cdot 3322029$$

$$\text{Somma} = 18 \cdot 6674305$$
$$Log. tan. \tfrac{1}{2}(POA-QOB) = 8 \cdot 7823547 \text{ fott.}$$

$$Log. tan. \tfrac{1}{2}(POR + QOR) = 9 \cdot 8850758 \cdot$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2}(POR + QOR) = 37^\circ \cdot 30' \cdot 21''$$

E' di più $\tfrac{1}{2}(POR - QOR) = 12 \cdot 7 \cdot 39 \cdot$

Onde

$$POR = 49^\circ \cdot 38' \cdot 00''$$
$$QOR = 25 \cdot 22 \cdot 42 \cdot$$

Di

Di più

Log. cos. POR = 9 . 8113583
Log. sen. mas. = 10 . 0000000

Somma = 19 . 8113583
Log. cos. POA = 9 . 9835369 sott.

Log. cos. ROA = 9 . 8278214.

E perciò

ROA = 47° . 43'. 28".

Similmente

Log. cos. QOR = 9 . 9559269
Log. sen. mas. = 10 . 0000000

Somma = 19 . 9559269
Log. cos. QOB = 9 . 9949242 sott.

Log. cos. ROB = 9 . 9610027.

E perciò

ROB = 23° . 55'. 9"

Per la qual cosa l'angolo cercato AOB = ROA — ROB = 23° . 48'. 19".

AVVERTIMENTO.

14. Qualora gli angoli POA, QOB d' elevazione degli oggetti P, e Q sono uguali, nella proporzione $tan. \frac{1}{2}$ (POA— QOB) : $tan. \frac{1}{2}$ (POA + QOB) = $tan. \frac{1}{2}$ POQ : $tan. \frac{1}{2}$ (POR + QOR) il primo termine si fa = o; onde il metodo insegnato non è atto in tal caso a farci determinare l' angolo cercato. Fa uopo dunque per sì fatto caso cercare altro metodo, ed eccone la via.

S' è trovato essere *sen.* POA : *sen.* QOB = *sen.* POR : *sen.* QOR. Ma *sen.* POA = *sen.* QOB. Dunque anche *sen.* POR = *sen.* QOR. E perciò i due angoli POR, QOR, avendo l' istesso seno, sono uno complimento a due retti dell' altro. Quindi

$$POR = 180^{\circ} - QOR,$$

e

$$POQ = 180^{\circ} - 2\,QOR.$$

Onde

$$QOR = 90^{\circ} - \tfrac{1}{2}\,POQ.$$

E perciò

$$cos.\ QOR = sen.\ \tfrac{1}{2}\,POQ;$$

In oltre, supposto il seno massimo = T,

T, si hanno le seguenti proporzioni, cioè

$$\cos. POA : \cos. POR = T : \cos. AOR$$

$$\cos. QOB : \cos. QOR = T : \cos. BOR,$$

ovvero

$$\cos. POA : \cos. (180^\circ - QOR) = T : \cos. AOR$$

$$\cos. POA : \cos. QOR = T : \cos. BOR.$$

Sicchè

$$\cos. (180^\circ - QOR) : \cos. QOR = \cos. AOR : \cos. BOR.$$

Ma è

$$\cos. (180^\circ - QOR) = \cos. QOR.$$

Dunque anche

$$\cos. AOR = \cos. BOR.$$

E perciò gli angoli AOR, BOR sono pure uno il supplimento ai due retti dell' altro; e quindi

$$AOR = 180^\circ - BOR,$$

e

$$AOB = 180^\circ - 2 BOR.$$

Onde

$$\text{BOR} = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\,\text{AOB}.$$

E quindi

$$\cos.\ \text{BOR} = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{AOB}.$$

E' di più

$$\cos.\text{BOR} = \frac{\cos.\ \text{QOR}}{\cos.\ \text{QOB}} \times \text{T} = \frac{\cos.\ \text{QOR}}{\cos.\ \text{POA}} \times \text{T}.$$

Sicchè

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{AOB} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,\text{POQ}}{\text{Cos.}\ \text{POA}} \times \text{T}.$$

Per la qual cosa se in ordine a *cos.* POA, a *sen.* $\frac{1}{2}$ POQ, ed al seno massimo si trova il quarto proporzionale; tale quarto proporzionale da' *sen.* $\frac{1}{2}$ AOB; e quindi si rileva l' angolo cercato AOB nel supposto caso.

ESEMPIO.

Sieno POQ $= 24^\circ.\ 15'.\ 18''$, *ed* AOP $=$ BOQ $= 15^\circ.\ 40'.\ 36''$.

CALCOLO.

Log. sen. $\frac{1}{2}$ POQ $= 9 \cdot 3224008$

Log. sen. mas. $= 10 \cdot 0000000$

Som-

$$\text{Somma} = 19 \cdot 3224008$$

$$Log.\ cof.\ AOP = 9 \cdot 9835369 \text{ fott.}$$

$$Log.\ fen.\ \tfrac{1}{2} AOB = 9 \cdot 3388639.$$

E perciò

$$\tfrac{1}{2} AOB = 12^\circ.\ 36'.\ 12''.$$

Per la qual cosa l'angolo cercato AOB $= 25^\circ.\ 12'.\ 24''.$

PROBL. IV.

15. *Insegnare il modo come, misurato l'angolo rettilineo POQ con diriggere da O i raggi di mira OP, OQ ai due oggetti P, e Q, il primo superiore, e l'altro inferiore al piano orizzontale di O, e misurati di più l'angolo POA d'elevazione di P, e l'angolo QOB di depressione di Q relativamente al detto piano, si possa all'istesso detto piano orizzontale ridurre l'angolo misurato POQ.* Fig. 16

SOLUZIONE.

S'intendano da P abbassata PA, e da Q innalzata QB perpendicolari al piano orizzontale di O, e s'intendano congiunte le rette OA, OB. Saranno PA, QB, come perpendicolari all'isteſſo piano, tra eſſe parallele; ſaranno retti gli angoli PAO, QBO; ſarà AOP l'angolo d'elevazione di P, e BOQ l'angolo di depreſſione di Q; e ſarà l'angolo AOB il ridotto all'orizzonte di POQ. Eſſendo PA, QB parallele; congiunte le rette PQ, AB, ſaranno tali rette nel piano delle dette parallele, e conſeguentemente s' interſecheranno in R. Si congiunga OR. S' avranno le ſeguenti proporzioni:

$$QR : QO = \mathit{sen.}\, QOR : \mathit{sen.}\, QRO$$

$$PR : PO = \mathit{sen.}\, POR : \mathit{sen.}\, QRO.$$

Sicchè

$$PR : QR = PO \times \mathit{sen.}\, POR : QO \times \mathit{sen.}\, QOR.$$

Ma

$$PR : QR := PA : QB.$$

Dunque

$$PA : QB = PO \times \mathit{sen.}\, POR : QO \times \mathit{sen.}\, QOR,$$

e

$$\frac{PA}{PO} : \frac{QB}{QO} = \mathit{sen.}\, POR : \mathit{sen.}\, QOR:$$

Or, poſto il ſeno maſſimo = T, è PA

$$\frac{PA}{PO} = \frac{sen.\ POA}{T},\ e\ \frac{QB}{QO} = \frac{sen.\ QOB}{T}.$$

Sicchè

$$sen.\ POA : sen.\ QOB = sen.\ POR : sen.\ QOR.$$

Onde

$$sen.\ POA + sen.\ QOB : sen.\ POA - sen.\ QOB = sen.\ POR + sen.\ QOR : sen.\ POR - sen.\ QOR.$$

E' in oltre

$$sen.\ POA + sen.\ QOB : sen.\ POA - sen.\ QOB = tang.\ \tfrac{1}{2}(POA + QOB) : tang.\ \tfrac{1}{2}(POA - QOB),$$

e

$$sen.\ POR + sen.\ QOR : sen.\ POR - sen.\ QOR = tang.\ \tfrac{1}{2}(POR + QOR) : tang.\ \tfrac{1}{2}(POR - QOR) = tang.\ \tfrac{1}{2}\ POQ : tang.\ \tfrac{1}{2}(POR - QOR).$$

Sicchè

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(POA + QOB) : tang.\ \tfrac{1}{2}(POA - QOB) = tang.\ \tfrac{1}{2}\ POQ : tang.\ \tfrac{1}{2}(POR$$

$\frac{1}{2}$ (POR — QOR).

Determinando coll'ajuto di queſt' ultima proporzione la metà della differenza de' due angoli POR, QOR; come è notà la metà della ſomma di eſſi, cioè la metà di POQ, ſi determina anche sì l'angolo POR, che QOR.

Determinati in oltre tali angoli POR, QOR, e noti anche gli angoli POA, QOB, ſi determinano del modo già inſegnato i ridotti di eſſi all' orizzonte, cioè AOR, BOR, e conſeguentemente ſi determina l' angolo cercato AOB. Ch'è ciò, che biſognava inſegnare.

ESMEPIO

Sieno $POQ = 24°. 15'. 18''$, $POA = 5°. 30'. 36''$, e $QOB = 3°. 15'. 30''$.

CALCOLO.

$$POA = 5°. 30'. 36''$$
$$QOB = 3 . 15 . 30$$

Dunque

$$\tfrac{1}{2}(POA + QOB) = 4°. 23'. 3''$$
$$\tfrac{1}{2}(POA - QOB) = 1 . 7 . 33.$$

In

In oltre

$Log. tan. \frac{1}{2}(POA-QOB) = 8.2934055$

$Log. tan. \frac{1}{2}\ POQ = 9.3322029$

Somma $= 17.6256084$

$Log. tan. \frac{1}{2}(POA+QOB) = 8.8846130$ sott.

$Log. tan. \frac{1}{2}(POR-QOR) = 8.7409954.$

Sicchè

$\frac{1}{2}(POR-QOR) = 3^{\circ}.9'.9''.$

E' di più $\frac{1}{2}(POR+QOR) = 12.7.39''.$

Onde

$POR = 15^{\circ}.16'.48''$

$QOR = 8.58.30.$

Di più

$Log. cos. POR = 9.9843695$

$Log.$ sen. mas. $= 10.0000000$

Somma $= 19.9843695.$

$Log. cos. POA = 9.9979886$ sott.

$Log. cos. AOR = 9.9863809.$

E per-

E perciò

$$AOR = 14^\circ . 16' . 27''.$$

Similmente

$$\begin{array}{lcl} Log.\ cos.\ QOR & = & 9 . 9946499 \\ Log.\ sen.\ mas. & = & 10 . 0000000 \\ \hline \text{Somma} & = & 19 . 9946499 \\ Log.\ cos.\ QOB & = & 9 . 9992973\ \text{sott.} \\ \hline Log.\ cos.\ ROB & = & 9 . 9953526. \end{array}$$

E perciò

$$ROB = 8^\circ . 22' . 2''.$$

Per la qual cosa l'angolo cercato AOB $=$ AOR $+$ ROB $= 22^\circ . 38' . 29''$.

AVVERTIMENTO.

16. Si noti che se l'angolo POA d'elevazione di P uguaglia l'angolo QOB di depressione di Q, nella proporzione *tang.* $\frac{1}{2}$ (POA $+$ QOB) : *tang.* $\frac{1}{2}$ (POA $-$ QOB) $=$ *tang.* $\frac{1}{2}$ POQ : *tang.* $\frac{1}{2}$ (POR $-$ ROQ) il secondo termine si fa $= 0$; onde in tal caso del modo insegnato non si possono determinare gli angoli POR, ROQ

ROQ, e conseguentemente non si può determinare l' angolo cercato AOB. Intanto essendo *sen.* POA : *sen.* QOB = *sen.* POR : *sen.* ROQ, ed essendo *sen.* POA = *sen.* QOB, sarà *sen.* POR = *sen.* ROQ, e conseguentemente l' angolo POR = ROQ. Sicchè nel supposto caso i due angoli POR, ROQ sono determinati, essendo ognuno la metà dell' angolo misurato POQ. Del resto, noti tali angoli, si procede del modo già insegnato alla determinazione di AOR, ROB, e conseguentemente dell' angolo cercato AOB.

Fine.

OPUSCOLO VII.

Nuove formole coll' intera calcolazione di quanto risguarda la figura della terra, supposta un' elittoide elevata nell' equatore, e depressa ne' poli.

PROBL. I.

1. *Date le misure di due gradi di meridiani terrestri, rilevate in luoghi di diverse latitudini, determinare la differenza del semiasse della terra dal raggio del suo equatore.*

SOLUZIONE.

Contrassegni l' ellisse ACBD un meri- Fig. 17
diano terrestre, che, avendo per asse maggiore AB, e per asse minore CD, col girare intorno a CD generi la figura della terra. Dinoteranno OA il raggio dell' equatore, ed OC il semiasse terrestre. Contrassegnino di più Ee, Ff le lunghezze misurate in diverse latitudini, cori-

rispondente ognuna ad un grado. S' intenda in oltre essere EG, FH i raggi osculatori di sì fatta ellisse in E, ed F. Si potranno senza errore sensibile prendere gli archetti Ee, Ff come congruenti co' corrispondenti archetti d' un grado de' detti cerchi; talchè, congiunte le rette Ge, Hf, sarà d' un grado sì l' angolo EGe, che l' angolo FHf.

Ed essendo GE, HF perpendicolari alle tangenti dell' ellisse ne' punti E, ed F, tali rette prolungate passeranno per gli vertici, o sieno zenit de' punti E, ed F. E perciò uguagliano l' angolo EKA la latitudine di E, e l' angolo FLA la latitudine di F.

Finalmente da E si cali su AB la perpendicolare EP, e si mettano OA $= a$, OG $= c$, OP $= x$, PE $= y$. Per la natura dell' ellisse sarà

$$y^2 = \frac{1}{a^2}(a^2 c^2 - c^2 x^2),$$

e saranno conseguentemente

la sunnormale PK $= -\dfrac{c^2}{a^2} x$,

la normale EK $= \dfrac{c}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)x^2}$.

Or

Or differenziando l' equazione $y^2 = \frac{1}{a^2}$ $(a^2 c^2 - c^2 x^2)$, si ha

$$ydy = -\frac{c^2}{a^2} xdx.$$

Onde

$$dy^2 = \frac{c^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} = \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^2 (a^2 - x^2)}.$$

Differenziando poi $ydy = -\frac{c^2}{a^2} xdx$, con prendere costante il dx, si ha

$$dy^2 + yd^2 y = -\frac{c^2}{a^2} dx^2.$$

Sicchè

$$yd^2 y = -\frac{c^2}{a^2} dx^2 - \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^2 (a^2 - x^2)} = -\frac{c^2 dx^2}{a^2 - x^2},$$

e

I —

$$d^2 y = \frac{-c^2 dx^2}{(a^2 - x^2)y} =$$

$$\frac{-c^2 dx^2}{(a^2 - x^2)\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$\frac{-acdx^2}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Quindi sarà il raggio osculatore EG espresso dalla formola generale (§ 94 *del calc. diff.*)

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxd^2y} =$$

$$\frac{\left(dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)\sqrt{dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}}}{\frac{acdx^3}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}} =$$

$$\frac{1}{a^4 c}(a^4 - (a^2 - c^2)x^2)\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)x^2}.$$

E'in

E' in oltre, posto il seno massimo = R,

$$EK : EP = R : \mathit{sen.}\ EKA,$$

ovvero

$$\frac{c}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)x^2} : \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2} =$$

$R : (\mathit{sen.}\ EKA)$,

e conseguentemente

$$a^4 - (a^2 - c^2)x^2 : a^4 - a^2 x^2 = R^2 :$$

$(\mathit{sen.}\ EKA)^2$.

Dunque

$$(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)\,\text{sen. }EKA)^2)\,x^2 =$$

$$R^2 a^4 - a^4(\text{sen. }EKA)^2,$$

ed

$$x^2 = \frac{a^4(R^2 - (\text{sen. }EKA)^2)}{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. }EKA)^2},$$

ovvero.

$$x^2 = \frac{a^4(\text{cos. }EKA)^2}{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. }EKA)^2}.$$

E perciò il raggio osculatore EG =

$\frac{1}{a^4 c}$

$$\frac{1}{a^4 c}\left(a^4-\left(\frac{(a^2-c^2)\,a^4\,(\text{cos}.\,EKA)^2}{R^2 a^2-(a^2-c^2)(\text{sen}.\,EKA)^2}\right)\right)\times$$

$$\sqrt{a^4-\left(\frac{(a^2-c^2)\,a^4\,(\text{cos}.\,EKA)^2}{R^2 a^2-(a^2-c^2)(\text{sen}.\,EKA)^2}\right)}=$$

$$\left(\frac{R^2 a^2-(a^2-e^2)\,((\text{sen}.\,EKA)^2+(\text{cos}.\,EKA)^2)}{R^2 a^2-(a^2-c^2)\,\text{sen}.\,EKA)^2}\right)\times$$

$$\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{R^2 a^2-(a_2-c^2)((\text{sen}.\,EKA)_2+(\text{cos}.\,EKA)_2)}{R^2 a^2-(a^2-c^2)(\text{sen}.\,EKA)^2}}$$

$$=\left(\frac{R^2 a^2-(a^2-c^2)\,R^2}{R^2 a^2-(a^2-c^2)(\text{sen}.\,EKA)^2}\right)\times$$

$$\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{R^2 a^2-(a^2-c^2)\,R^2}{R^2 a^2-(a^2-c^2)(\text{sen}.\,EKA)^2}}$$

$$=\frac{a^2}{c}\times\frac{c^2 R^2\sqrt{c^2 R^2}}{\sqrt{(R^2 a^2-(a^2-c^2)(\text{sen}.\,EKA)^2)^3}}=$$

a^2

$$\frac{a^2 c^2 R^3}{\sqrt{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.EKA})^2)^3}}.$$

Similmente si trova il raggio osculatore

$$FH = \frac{a^2 c^2 R^3}{\sqrt{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.FLA})^2)^3}}.$$

E' di più

$$Ee : Ff = EG : FH.$$

Sicchè, poste la lunghezza $Ee = M$, e la lunghezza $Ff = N$, sarà

$$M : N = \frac{a^2 c^2 R^3}{\sqrt{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.EKA})^2)^3}} :$$

$$\frac{a^2 c^2 R^3}{\sqrt{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.FLA})^2)^3}}.$$

E perciò

$M^2 : N^2 = (R^2 a^2 - (a^2 - c^2)$ (sen.

 FLA

$FLA)^2)^3 : (R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } EKA)^2)^3$,

e

$$\sqrt[3]{M^2} : \sqrt[3]{N^2} =$$
$$R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } FLA)^2 :$$
$$R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } EKA)^2 .$$

E quindi

$$R^2 a^2 \sqrt[3]{M^2} - (a^2 - c^2)(\text{sen.} EKA)^2 \times \sqrt[3]{M^2} =$$
$$R^2 a^2 \sqrt[3]{N^2} - (a^2 - c^2)(\text{sen. } FLA)^2 \times \sqrt[3]{N^2};$$

ed

$$a^2 - c^2 = \frac{R^2 a^2 (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{\sqrt[3]{M^2} \times (\text{sen.} EKA)^2 - \sqrt[3]{N^2} \times (\text{sen.} FLA)^2}$$

Essendo finalmente

$$a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) = (a - c)\, 2a,$$

potendosi prendere senza errore sensibile $a + c = 2a$; sarà la differenza cercata, cioè

R^2

$$a - c = \frac{R^2 a (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{M^2} \times (\text{sen.EKA})^2 - 2\sqrt[3]{N^2} \times (\text{sen.FLA})^2}$$

e, posto il raggio dell' equatore, cioè $a = 1$, sarà la detta differenza, o sia

$$1 - c = \frac{R^2 (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{M^2} \times (\text{sen.EKA})^2 - 2\sqrt[3]{N^2} \times (\text{sen.FLA})^2};$$

Ch' è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

2. Se F cade nell' equatore, si fa allora l' angolo FLA = o, e la detta differenza si riduce ad

$$1 - c = \frac{R^2 (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{M^2} \times (\textit{sen.}\ \text{EKA})^2};$$

CALCOLO.

I celebri Bouguer, e de la Condamina della Regale Accademia delle scienze di Parigi determinarono sotto l' equatore la lunghezza d'un grado di meridiano esſere di teſe 56753; e gli altri Accademici inviati verſo il polo ſettentrionale determinarono la lunghezza d'un gragrado di meridiano alla latitudine di 66°. 20' eſſere di teſe 57422. Sicchè $M = 57422$, $N = 56753$, e l'angolo $EKA = 66°. 20'$. Quindi

$$Log.\ \sqrt[3]{M^2} = 3.1727188$$

$$Log.\ \sqrt[3]{N^2} = 3.1693292.$$

Dunque

$$\sqrt[3]{M^2} = 1488.39$$

$$\sqrt[3]{N^2} = 1476.81 \quad \text{ſott.}$$

$$\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2} = 11.58.$$

In oltre

$$Log.\ R^2 = 20.0000000$$

$$Log.\ (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2}) = 1.0637085 \quad \text{agg.}$$

$$Log.\ R^2 (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2}) = 21.0637085,$$

e

$$Log.\ 2 = 0.3010300$$

Log.

$$Log\ \sqrt[3]{M^2} = 3 . 1727188$$

$$Log.(sen.\ 66^\circ.\ 20')^2 = 19 . 9236926 \text{ agg.}$$

$$Log.2\sqrt[3]{M^2} \times (sen.66^\circ.20')^2 = 23.3974414.$$

Dunque

$$Log.\left(\frac{R^2(\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{M^2}\ (sen.66^\circ.20')^2}\right) = -2.3337329.$$

E perciò

$$\frac{R^2(\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{M^2}\ (sen.66^\circ.20')^2} = \frac{1}{215}.$$

COROLLARIO II.

3. Il raggio adunque dell'equatore eccede il semiasse terrestre di $\frac{1}{215}$ dell'istesso raggio; e quindi il raggio dell'equatore sta al semiasse terrestre nella ragione di 215 : 214.

CO-

COROLLARIO III.

4. Essendo finalmente un grado del cerchio osculatore in A di tese 56753; sarà l' intera periferia di tale cerchio di tese 360×56753, o sia di tese 20431080; onde, divisa per 2 (3 . 141), o sia per 6 . 282, sarà il raggio di tale cerchio osculatore di tese 3252320. Similmente si trova essere il raggio EG del cerchio osculatore in E alla latitudine di 66°. 20' di tese 3290659.

PROBL. II.

5. *Poste le determinazioni già fatte, determinare e la grandezza del raggio OA dell' equatore, e la grandezza del semiasse terrestre OC.*

SOLUZIONE.

Si supponga quanto s' è supposto nel probl. precedente, e s' intenda fatta l' istessa denominazione. Saranno

$$EG = \frac{1}{a^4 c}\left(a^4 - (a^2 - c^2)x^2\right)\sqrt{a^4 - (a^2 - c_2)x^2},$$

$$EK = \frac{c}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)x^2}.$$

Onde

Onde

$$EG : EK = a^4 - (a^2 - c^2)x^2 : a^2 c^2.$$

Ma

$$x^2 = \frac{a^4 (R^2 - (\text{sen. } EKA)^2)}{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } EKA)^2}.$$

Dunque

$$EG:EK = \frac{a^4 c^2 R^2}{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } EKA)^2} : a^2 c^2,$$

ovvero

$EG : EK = R^2 a^2 : R^2 a^2 - (a^2 - c^2)$
$(\text{sen. } EKA)^2$.

E perciò, posto il raggio del cerchio osculatore in E già determinato, cioè $EG = p$, sarà

$$EK = \frac{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } EKA)^2)p}{R^2 a^2}.$$

Similmente, posta $FH = q$, sarà

$$FL = \frac{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. } FLA)^2)q}{R^2 a^2}.$$

In

In oltre

$$PE^2 = y^2 = \frac{1}{a^2}(a^2c^2 - c^2x^2) =$$

$$\frac{1}{a^2}\left(a^2c^2 - \frac{a^4c^2R^2 + a^4c^2(\text{sen.}EKA)^2}{R^2a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.}EKA)^2}\right) =$$

$$\frac{c^4(\text{sen.}EKA)^2}{R^2a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.}EKA)^2}.$$

Onde

$$EP = \frac{c^2 \times \text{sen.}EKA}{\sqrt{R^2a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.}EKA)^2}}.$$

Di vantaggio

$$EK : EP = R : \text{sen.}EKA.$$

Dunque

$$\frac{(R^2a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.}EKA)^2)p}{R^2a^2} : \frac{c^2 \times \text{sen.}EKA}{\sqrt{R^2a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.}EKA)^2}}$$

$$= R : \text{sen.}EKA.$$

E per-

E perciò

$$\frac{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. EKA})^2)p}{R^2 a^2} = \frac{R c^2}{\sqrt{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. EKA})^2}},$$

e

$$p\sqrt{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. EKA})^2)^3} = R^3 a^2 c^2 .$$

Similmente si trova essere

$$q\sqrt{(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. FLA})^2)^3} = R^3 a^2 c^2 .$$

Quindi

$$p^2 (R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. EKA})^2)^3 = q^2 (R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. FLA})^2)^3 ,$$

e

$$\sqrt[3]{p^2}\,(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. EKA})^2) = \sqrt[3]{q^2}\,(R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen. FLA})^2),$$

ovvero

$\sqrt[3]{p^2}$

$$\sqrt[3]{p^2}\,(R^2 a^2 - a^2 \times (\text{sen. EKA})^2 + c^2 (\text{sen. EKA})^2) = \sqrt[3]{q^2}\,(R^2 a^2 - a^2 (\text{sen. FLA})^2 + c^2 (\text{sen. FLA})^2),$$

e

$$c^2 \sqrt[3]{p^2}\,(\text{sen. EKA})^2 - c^2 \sqrt[3]{q^2}\,(\text{sen. FLA})^2 = a^2 \sqrt[3]{q^2}\,(R^2 - (\text{sen. FLA})^2) - a^2 \sqrt[3]{p^2}\,(R^2 - (\text{sen. EKA})^2).$$

Sicchè

$$a^2 : c^2 = \sqrt[3]{p^2}\,(\text{sen. EKA})^2 - \sqrt[3]{q^2}\,(\text{sen. FLA})^2 : \sqrt[3]{q^2}\,(R^2 - (\text{sen FLA})^2) - \sqrt[3]{p^2}\,(R^2 - (\text{sen. EKA})^2),$$

ovvero, supposto il punto F nell' equatore, e conseguentemente *sen.* FLA $= 0$, sarà

$$a^2 : c^2 = \sqrt[3]{p^2}\,(\text{sen. EKA})^2 : R^2 \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2}\,(R^2 - (\text{sen. EKA})^2) = \sqrt[3]{p^2}\,(\text{sen. EKA})^2 : R^2 \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2}\,(\textit{cos}.\ \text{EKA})^2.$$

Ma, supposto il punto F in A, il raggio q del cerchio osculatore in A è la metà del parametro dell' asse AB dell' ellisse ACBD [§ 98 *del calc. diff.*]. Sicchè

chè $c^2 = aq$. E perciò sarà

$$a^2 : aq = \sqrt[3]{p^2} (\text{sen. } EKA)^2 : R^2 \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2} (\text{cos. } EKA)^2.$$

Per la qual cosa

$$a = \frac{q\sqrt[3]{p^2} (\text{sen. } EKA)^2}{R^2 \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2} (\text{cos. } EKA)^2},$$

e conseguentemente

$$c = \frac{q\sqrt[3]{p} \times \text{sen. } EKA}{\sqrt{R^2 \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2} (\text{cos. } EKA)^2}}.$$

Ch' è quanto bisognava determinare.

CALCOLO.

Pel calcolo da fare sono [§ 4]

$p = 3290659$

$q = 3252320 . 5$

$EKA = 66°. 20'.$

Per determinare il raggio dell' equatore a.

Log.

$$Log.\ q = 6\ .\ 5121933$$

$$Log.\ \sqrt[3]{p^2} = 4\ .\ 3448552$$

$$Log.\ (\text{sen.}EKA)^2 = 19\ .\ 9236926\ \text{agg.}$$

$$Log.\ q\sqrt[3]{p^2}(\text{sen.}EKA)^2 = 30\ .\ 7807411.$$

In oltre

$$Log.\ R^2 = 20\ .\ 0000000$$

$$Log.\ \sqrt[3]{q^2} = 4\ .\ 3414622\ \text{agg.}$$

$$Log.\ R^2\sqrt[3]{q^2} = 24\ .\ 3414622.$$

Onde $R^2\sqrt[3]{q^2} =$

$219514004044489383720930 2.$

Di più

$$Log.\ \sqrt[3]{p^2} = 4\ .\ 3448552$$

$$Log.\ (\text{cos.}EKA)^2 = 19\ .\ 2071872\ \text{agg.}$$

$$Log.\ \sqrt[3]{p^2}(\text{cos.}EKA)^2 = 23\ .\ 5520424.$$

Sicchè $\sqrt[3]{p^2}(\text{cos.}EKA)^2 =$

$3564859605911330049261 08.$

E perciò

$$R^2 \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2}\,(\text{cof. EKA})^2 =$$

18386540798537608322283194,

e

$$Log.(R^2\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2}(\text{cof.EKA})^2 = 24.2644999.$$

Quindi Log. $a =$

$$Log.\left(\frac{q\sqrt[3]{p^2}\,(\text{fen. EKA})^2}{R_2\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{p^2}(\text{fen EKA})^2}\right) = 6.5162412.$$

Onde

$$OA = a = 3282775 \text{ tefe}.$$

Per determinare il femiaffe terreftre c.

Effendo $c^2 = aq$; farà

$$\text{Log. } c = \tfrac{1}{2}(\log. a + \log. q).$$

Ma

Log. a =	6 . 5162412	
Log. q =	6 . 5121933	agg.
Som. =	13 . 0284345.	

K Sic-

Sicchè

$$\text{Log. } c = 6 . 5142172 .$$

E quindi

$$OC = c = 3267512 \text{ tese.}$$

COROLLARIO I.

6. Il raggio dell'equatore adunque eccede il semiasse terrestre di tese 15263, che formano $\frac{1}{215}$ del medesimo raggio.

COROLLARIO II.

7. Essendo la tese di pal. $7 . 4^{\text{onc.}} . 3^{\text{min.}} \frac{2}{5}$; saranno

OA	. . . . .	24259707
OC	di pal. .	24146913
AO — OC	. . . . . .	112794;

e, costando il miglio di pal. 7025, saranno

OA	. . . . .	3453 . 3960
OC	di migl. .	3437 . 2829
AO — OC	. . . . . .	16 . 0560.

PROBL. III.

8. *Poste le determinazioni già fatte, trovare una formola generale per determinare la lunghezza d'un grado di meridiano terrestre a qualunque altra data latitudine.*

SOLUZIONE.

S'intenda fatta la denominazione del probl. 1: si supponga essere E il luogo della data latitudine: e si metta la lunghezza del grado cercato di meridiano $= v$, cioè si metta $M = v$. Essendosi trovato, supposta N la lunghezza del grado di meridiano all'equatore,

$$a - c = \frac{R^2 a (\sqrt[3]{M^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{M^2} \times (\text{sen. EKA})^2};$$

sarà

$$a - c = \frac{R^2 a (\sqrt[3]{v^2} - \sqrt[3]{N^2})}{2\sqrt[3]{v^2} \times (\text{sen. EKA})^2}.$$

Onde

$$2(a - c)(\text{sen. EKA})^2 \sqrt[3]{v^2} = R^2 a \sqrt[3]{v^2} -$$

$- R^2 a \sqrt[3]{N^2}$.

E quindi

$$\sqrt[3]{v^2} = \frac{R^2 a \sqrt[3]{N^2}}{R^2 a - 2[a-c][\text{sen. EKA}]^2}.$$

E perciò

$$v^2 = \frac{R^6 a^3 N^2}{(R^2 a - 2[a-c][\text{sen.EKA}]^2]^3},$$

ed

$$v = \frac{R^3 N \sqrt{a^3}}{\sqrt{[R^2 a - 2[a-c][\text{sen.EKA}]^2]^3}}.$$

Ch' è ciò, che bisognava trovare.

ESEMPIO.

Sia da determinare la lunghezza del grado di meridiano alla latitudine di Napoli, cioè alla latitudine di 40°. 50' 15''.

Pel calcolo da fare sono

$a \quad = \quad 3282775$ tese

$a - c = 15263$

$N = 56753$

$EKA = 40°. 50'. 15''.$

CALCOLO.

$Log. R^3 = 30 . 0000000$

$Log. N = 4 . 7539888$

$Log. \sqrt{a^3} = 9 . 7743618$ agg.

$Log. R^3 N \sqrt{a^3} = 44 . 5283506.$

In oltre

$Log. R^2 = 20 . 0000000$

$Log. a = 6 . 5162412$ agg.

$Log. R^2 a = 26 . 5162412.$

Adunque $R^2 a =$

$328277551020408163265306122.$

Di più

$Log. 2 [a - c] = 4 . 4846698$

$Log. [\text{sen. } EKA]^2 = 19 . 6310438$ agg

$Log. 2[a-c][\text{sen.} EKA]^2 = 24 . 1157136.$

 Sic-

Sicchè $2[a-c][\text{sen. EKA}]^2 =$

$1305309888788698527201683$.

Quindi

$R^2 a - 2[a-c][\text{sen. EKA}]^2 =$

$3269722411316194647381044439$.

Onde

$$Log. \sqrt{[R^2 a - 2[a-c][\text{sen.EKA}]^2]^3} = 39 \cdot 7717663,$$

e conseguentemente

$Log. v =$

$$Log. \frac{R^3 N \sqrt{a^3}}{\sqrt{(R^2 a - 2[a-c][\text{sen.EKA}]^2]^3}} = 4 \cdot 7565843 \cdot$$

Per la qual cosa

$v = 57093$ tese.

COROLLARIO.

9. Essendo dunque alla nostra latitudine il grado di meridiano di tese 57093; sarà il raggio del cerchio osculatore del meridiano all' istessa detta latitudine di tese

tese 3271805. E quindi il detto grado di meridiano sarà pure della lunghezza di pal. 421917, ovvero di miglia 60 . 0593, e 'l detto raggio osculatore della lunghezza di pal. 24178639, o sia di miglia 3441 . 7991.

AVVERTIMENTO I.

16. Si noti che se il luogo E si suppone essere il polo C, si fa in tal caso l' angolo EKA $= 90°$, e conseguentemente $(sen.\,EKA)^2 = R^2$. Onde la formola determinatrice del grado di meridiano a qualunque latitudine, cioè

$$v = \frac{R^3 N \sqrt{a^3}}{\sqrt{[R^2 a - 2[a - c][sen.\,EKA]^2]^3}};$$

si trasmuta nella seguente

$$v = \frac{N \sqrt{a^3}}{\sqrt{[2c - a]^3}}.$$

Quindi risulta il seguente

CALCOLO.

Pel calcolo da fare sono

$$N = 56753 \text{ tese}$$
$$a = 3282775$$
$$c = 3267512$$
$$2c - a = 3252249.$$

Dunque

$$Log.\ N = 4 \cdot 7539888$$
$$Log.\ \sqrt{a^3} = 9 \cdot 7743618 \text{ agg.}$$

$$Log.\ N\sqrt{a^3} = 14 \cdot 5283506.$$

In oltre

$$Log.\ \sqrt{[2c - a]^3} = 9 \cdot 7682755.$$

Sicchè

$$Log.\ \frac{N\sqrt{a^3}}{\sqrt{[2c - a]^3}} = Log.\ v = 4 \cdot 7600751$$

Onde

$$v = 57553 \text{ tese.}$$

Quindi la lunghezza del grado di meridiano ai poli è di tese 57553.

COROLLARIO.

11. Essendo la lunghezza del grado di meridiano ai poli di tese 57553; sarà la lunghezza del raggio del cerchio osculatore di qualsisia meridiano ai poli di tese 3298166.

AVVERTIMENTO II.

12. Si noti pure che se il luogo E si suppone essere a gr. 30 di latitudine; si fa allora l' angolo EKA $= 30°$, e conseguentemente $[\mathit{sen}.\ \mathrm{EKA}]^2 = \frac{1}{4}\mathrm{R}^2$. Onde la formola determinatrice del grado di meridiano a qualunque latitudine, cioè

$$v = \frac{\mathrm{R}^3\,\mathrm{N}\sqrt{a^3}}{\sqrt{[\mathrm{R}^2 a - 2[a-c][\mathit{sen}.\mathrm{EKA}]^2]^3}},$$

si trasmuta nella seguente

$$v = \frac{\mathrm{N}\sqrt{a^3}}{\sqrt{[\frac{1}{2}[a+c]]^3}}.$$

Quindi risulta il seguente

CAL-

CALCOLO.

Per determinare la lunghezza d' un grado di meridiano alla latitudine di gr. 30.

Essendo $\frac{1}{2}[a + c] = 3275143 \cdot 5$; sarà

$$Log. \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^3} = 9 \cdot 7728454.$$

E' anche

$$Log. N\sqrt{a^3} = 14 \cdot 5283506.$$

Sicchè $Log. v =$

$$Log. \frac{N\sqrt{a^3}}{\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^3}} = 4 \cdot 7555052.$$

Onde

$$v = 56951 \text{ tese}.$$

Per la qual cosa la lunghezza del grado di meridiano alla latitudine di gr. 30 è di tese 56951.

PRO-

PROBL. IV.

13. *Poste le determinazioni già fatte, trovare una formola generale da poter calcolare col suo ajuto per qualunque data latitudine il raggio del parallelo terrestre.*

SOLUZIONE.

Si supponga la denominazione fatta nel probl. 1. Come OP $= x$ dinota il raggio del parallelo alla latitudine del luogo E; così si deve determinare la OP. Or essendosi trovato nel medesimo detto probl.

$$x^2 = \frac{a^4 [R^2 - [\text{sen. EKA}]^2]}{R^2 a^2 - [a^2 - c^2][\text{sen.EKA}]^2},$$

ovvero

$$x^2 = \frac{a^4 [\text{cos. EKA}]^2}{R^2 a^2 - [a^2 - c^2][\text{sen. EKA}]^2};$$

sarà

$$x = \frac{a^2 \times \text{cos. EKA}}{\sqrt{R^2 a^2 - [a+c][a-c][\text{sen.EKA}]^2}}.$$

Ch' è

Ch' è ciò, che bisognava trovare.

ESEMPIO.

Sia da determinare la lunghezza del raggio del parallelo, in cui si trova Napoli.

Pel calcolo da fare sono

$$a = 3282775 \text{ tese}$$

$$c = 3267512$$

$$EKA = 40^\circ.\ 50'.\ 15''.$$

CALCOLO.

$$Log.\ a^2 = 13\ .\ 0324824$$

$$Log.\ cos.\ EKA = 9\ .\ 8788475 \text{ agg.}$$

$$Log.\ a^2 \times cos.\ EKA = 22\ .\ 9113299\ .$$

In oltre

$$Log.\ R^2 = 20\ .\ 0000000$$

$$Log.\ a^2 = 13\ .\ 0324824 \text{ agg.}$$

$$Log\ R^2\ a^2 = 33\ .\ 0324824\ .$$

Onde

R²

$$R^2 a^2 =$$

$$1077661622426196973455718184073430,$$

Di più

$$Log.(a+c) = 6 \,.\, 8162603$$
$$Log.(a-c) = 4 \,.\, 1836398$$
$$Log.(sen.EKA)^2 = 19 \,.\, 6310438 \text{ agg.}$$

$$Log.(a^2-c^2)(sen.EKA)^2 = 30.6309439.$$

Dunque

$$(a^2 - c^2)(sen.EKA)^2 =$$

$$4275076771653543307086614173228.$$

Onde

$$R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(sen.EKA)^2 =$$

$$1073386545654543430148631569900202,$$

e

$$Log.\sqrt{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(sen.EKA)^2} = 16.5153780.$$

Sicchè

$$Log.\, OP = Log.\, x =$$

$$\text{Log.}\ \frac{a^2 \times \text{cof. EKA}}{\sqrt{R^2a^2-(a^2-c^2)(\text{fen.EKA})^2}} = 6.3959519.$$

E perciò

$$x = 2488581 \text{ tefe};$$

vale a dire che il raggio cercato è di tefe 2488581.

COROLLARIO.

14. Essendosi trovato il raggio del parallelo, in cui si trova Napoli di tese 2488581; sarà la lunghezza d'ogni grado di sì fatto parallelo di tese 43425. E quindi il detto raggio è di pal. 18390613, o sia di miglia 2617 . 8808, e'l detto grado di pal. 320910, o sia di miglia 45 . 6811.

PROBL. V.

15. *Poste le determinazioni già fatte, trovare una formola generale da poter calcolare col suo ajuto per qualunque luogo della terra di data latitudine la sua distanza dal centro della medesima.*

So-

SOLUZIONE.

Si ſupponga pure la denominazione fatta nel probl. 1, ed E rappreſenti qualunque luogo della ſuperficie terreſtre di data latitudine. Eſſendo

$$OE^2 = EP^2 + PO^2,$$

sarà

$$OE^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + x^2 = c^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2.$$

Ma

$$x^2 = \frac{a^4 (\text{coſ. } EKA)^2}{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{ſen. } EKA)^2};$$

Sicchè

$$OE^2 = c^2 + \frac{(a^2 - c^2) a^2 (\text{coſ.} EKA)^2}{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{ſen.} EKA)^2},$$

ovvero

$$OE^2 =$$

$(R^2 a^2 c^2 - a^2 c^2 (\text{ſen. } EKA)^2 + c^4 (\text{ſen. } EKA)^2 + a^4 (\text{coſ. } EKA)^2 - a^2 c^2 (\text{coſ. } EKA)^2) : (R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{ſen. } EKA)^2)$;

Ma

Ma

$$(\mathit{sen.}\ \mathrm{EKA})^2 + (\mathit{cos.}\ \mathrm{EKA})^2 = \mathrm{R}^2,$$

Dunque

$$\mathrm{OE}^2 = \frac{a^4\,(\mathrm{cos.EKA})^2 + c^4\,(\mathrm{sen.EKA})^2}{\mathrm{R}^2\,a^2 - (a^2 - c^2)(\mathrm{sen.EKA})^2},$$

e conseguentemente

$$\mathrm{OE} = \frac{\sqrt{a^4\,(\mathrm{cos.EKA})^2 + c^4\,(\mathrm{sen.EKA})^2}}{\sqrt{\mathrm{R}^2\,a^2 - (a^2 - c^2)(\mathrm{sen.EKA})^2}}.$$

Ch'è ciò, che bisognava trovare.

ESEMPIO.

Sia da determinare la distanza di Napoli dal centro della terra.

Pel calcolo da fare sono

$a = 3282775$ tese

$c = 3267512$

$\mathrm{EKA} = 40^\circ.\ 50'.\ 15''.$

CAL-

CALCOLO.

$$Log.\ a^4 = 26\ .\ 0649648$$

$$Log.\ (cos.\ EKA)^2 = 19\ .\ 7576950\ \text{agg.}$$

$$Log.\ a^4\ (cos.\ EKA)^2 = 45\ .\ 8226598$$

Onde

$$a^4\ (cos.\ EKA)^2 =$$

66475222052067381316998468606643·
185298621745788,

In oltre

$$Log.\ c^4 = 26\ .\ 0568688$$

$$Log.\ (sen.\ EKA)^2 = 19\ .\ 6310438\ \text{agg.}$$

$$Log.\ c^4\ (sen.\ EKA)^2 = 45\ .\ 6879126.$$

Onde

$$c^4\ (sen.\ EKA)^2 =$$

4874304152637485970819191919191919·
19191919191919.

E perciò

$$a^4\ (cos.\ EKA)^2 + c^4\ (sen.\ EKA)^2 =$$

115218263578442241025190387798351044905409376O7,

e

$$Log.\sqrt{a^4(\text{cos.EKA})^2+c^4(\text{sen.EKA})^2} = 23.0307606.$$

E' di più

$$Log.\sqrt{R^2a^2-(a^2-c^2)(\text{sen.EKA})^2} = 16.5153780.$$

Dunque

$Log.$ OE =

$$Log.\frac{\sqrt{a^4(\text{cos.EKA})^2+c^4(\text{sen.EKA})^2}}{\sqrt{R^2a^2-(a^2-c^2)(\text{sen.EKA})^2}} = 6.5153826.$$

E perciò

OE = 3276292 tese;

vale a dire che Napoli dista dal centro della terra per tese 3276292.

COROLLARIO I.

16. Quindi la distanza di Napoli dal centro della terra è di pal. 24211797, o sia di miglia 3446.5191.

CO-

COROLLARIO II.

17. Essendosi trovato per rispetto di Napoli OE di tese 3276292, ed OP di tese 2488581: se in ordine ad OE, ad OP, ed al seno massimo si cerca il quarto proporzionale, s' avrà con esso il seno dell' angolo OEP, e quindi s' avrà sì fatto angolo; e conseguentemente, essendo noto l' angolo EKA, latitudine di Napoli, e perciò noto il suo complimento al retto PEK, noto si farà anche l' angolo OEK, cioè l' angolo, che forma per rispetto di Napoli la verticale colla sua distanza dal centro della terra.

CALCOLO.

Log. OP = 6 . 3959519

Log. sen. mas. = 10 . 0000000 agg.

Somma = 16 . 3959519

Log. OE = 6 . 5153826 sott.

Log. sen. PEO = 9 . 8805693.

E Perciò

$$PEO = 49^\circ.\ 25'.\ 35''.$$

Ma

$$PEK = 49^\circ.\ 9'.\ 45''.$$

Sicchè

$$OEK = 0^\circ.\ 15'.\ 50''.$$

AVVERTIMENTO I.

18. Si noti che l'angolo OEK si può anche determinare in conseguenza d'una formola generale, note solamente OA, OC, e la latitudine del luogo. Di fatto nel probl. 1, poste OA $= a$, OC $= c$, ed OP $= x$, si ha PK $= \frac{c^2}{a^2} x$.

Onde OK $= x - \frac{c^2}{a^2} x = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) x$.

Ma dall'istesso detto plobl. si ha

$$x = \frac{a^2 \times \text{cos. EKA}}{\sqrt{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{sen.EKA})^2}}.$$

Dun-

Dunque

$$OK = \frac{(a^2 - c^2)\,\text{cof. EKA}}{\sqrt{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{fen. EKA})^2}}.$$

Si è poi nel probl. 5 trovata

$$OE = \frac{\sqrt{a^4 (\text{cof. EKA})^2 + c^4 (\text{fen. EKA})^2}}{\sqrt{R^2 a^2 - (a^2 - c^2)(\text{fen.EKA})^2}}.$$

Or essendo OE : OK = *fen.* EKA : *fen.* OEK , farà

$$\mathit{fen}.\text{OEK} = \frac{(a^2 - c^2)\,\text{cof. EKA} \times \text{fen. EKA}}{\sqrt{a^4 (\text{cof.EKA})^2 + c^4 \times \text{fen. EKA})^2}},$$

ovvero

$$\mathit{fen}.\text{OEK} = \frac{(a^2 - c^2)\,R \times \text{fen.EKA}}{\sqrt{R^2 a^4 + c^4 (\text{tang. EKA})^2}};$$

colla quale formola , noti il raggio dell' equatore , e 'l femiasse terrestre , e nota la latitudine del luogo E , si può determinare l' angolo OEK , che forma la verticale del luogo colla retta procedente

 dall'

dall' isteſſo luogo al centro della terra.

COROLLARIO III.

19. S' intenda eſſere PQ la comune ſezione del meridiano coll' orizzonte razionale del luogo E, che incontra la EG in T. Sarà l' angolo ETO retto. Eſſendo per riſpetto di Napoli l' angolo OEK = 15'. 50'', ſarà l' inclinazione di OE all' equatore, o ſia l' angolo EOA = 40°. 34'. 25''. e l' inclinazione dell' isteſſo OE all' orizzonte, o ſia l' angolo EOT = 89°. 44'. 10''.

AVVERTIMENTO II.

20. Si noti di vantaggio che eſſendo nel triangolo rettangolo ETO per riſpetto di Napoli determinati gli angoli EOT, OET, e determinata la OE di teſe 3276292; ſe ſi cerca in ordine al ſeno maſſimo, al ſeno di EOT, e ad OE la quarta proporzionale; s' avrà da eſſa la ET, perpendicolare all' orizzonte razionale; e ſe ſi cerca in ordine al ſeno maſſimo, al ſeno di OET, e ad OE la quarta proporzionale; s' avrà da eſſa la OT, diſtanza della verticale di Napoli dal centro della terra. Eccone intanto i calcoli.

CAL

CALCOLO I.

Log. *sen*. EOT = 9 . 9999954
Log. EO = 6 . 5153826 agg.

Somma = 16 . 5153780
Log. sen. mas. = 10 . 0000000 sott.

Log. ET = 6 . 5153780.

Sicchè

ET = 3276257 tese.

CALCOLO II.

Log. *sen*. OET = 7 . 6631730
Log. OE = 6 . 5153826 agg.

Somma = 14 . 1785556
Log. sen. mas. = 10 . 0000000 sott.

Log. OT = 4 . 1785556.

Sicchè

$$OT = 15085 \text{ tese.}$$

COROLLARIO IV.

21. Quindi per rispetto di Napoli EO eccede ET di tese 35, vale a dire di pal. 258, o sia di canne $32\frac{1}{2}$; e la verticale ET va lontana dal centro della terra per pal. 111478, o sia per miglia 15 . 8687.

AVVERTIMENTO III.

22. So che se si fossero adoperate nell' esposte calcolazioni misure d' altri gradi di meridiani, in altre latitudini fatte, i risultati avuti sarebbero riusciti con qualche differenza; ma io ho amato non adoperare, se non le misure fatte dagli Accademici di Parigi, una all' equatore, e l' altra alla latitudine di 66°. 20', come le più famose, e le più diligentemente eseguite. Spero intanto che voglia l' Astronomia pratica prender piede tra noi, e che voglia venir tempo, in cui un alto comando possa impegnare abili soggetti a misurare nelle nostre contrade un grado e di meridiano terrestre, e del parallelo, e così verificare quanto col-

colla ſola ſcorta della teorica ho potuto qui rilevare. Quando ciò ſarà, mi luſingo che non ſi tralaſcerà di confeſſare che oggi tra noi in ciò fare non mancano, ſe non i mezzi.

Fine.

OPU-

OPUSCOLO VIII.

Nuovo metodo di riferire al centro della terra, supposta della forma stabilita nell' opuscolo precedente, i misurati azzimutti della Luna, e le misurate sue altezze, e di calcolare le vere declinazioni, ascensioni rette, longitudini, e latitudini di essa senz' altro bisogno, che della sua parallasse orizzontale, determinata come se la terra fosse perfettamente sferica.

PRINCIPJ FONDAMENTALI.

1. Contrassegni l' ellisse APBR, della forma già determinata nell' opuscolo precedente, il meridiano di qualsivoglia luogo terrestre E; e contrassegnino PR l' asse terrestre, D il centro della terra, HO l' intersecazione del detto meridiano coll' Fig. 18

coll' orizzonte razionale di E, ED la distanza del luogo E dal centro della terra, CEZ la verticale di E, ed L la Luna a qualunque altezza. S' intendano congiunte le rette EL, DL, CL. Dinoteranno EL la direzione, per cui viene veduta la Luna da E, corretto il raggio di mira dalla refrazione; CL la direzione, per cui apparirebbe l' istessa Luna da C; e DL la direzione, percui si vedrebbe nel suo luogo vero dal centro D della terra.

COROLLARIO I.

2. Essendo EC la verticale di E, ogni piano, procedente per EC, sarà piano verticale relativamente al luogo E. Onde il triangolo ELC è in uno de' piani verticali di E; e conseguentemente la Luna L e da E, e da C viene veduta in uno de' detti verticali.

AVVERTIMENTO I.

3. Si noti che qualora la Luna L viene veduta da E nel meridiano, il verticale, in cui viene veduta, è il meridiano; onde il triangolo ELC è nel piano del meridiano, e forma conseguentemente col triangolo ECD un piano continuato; e di più l' azzimutto della Lu-

Luna in tal caſo è nullo. Qualora poi la Luna L viene veduta da E fuori del meridiano; in tale altro caſo il triangolo ELC è in piano verticale diverſo dal meridiano, e conſeguentemente diverſo dal piano del triangolo ECD. S' intenda in sì fatto caſo il triangolo ELC prolungato, finchè interſechi l' orizzonte razionale di E nella linea CQ. Dinoterà l' angolo HCQ l' azzimutto della Luna veduta da E. S' intenda in oltre in queſto iſteſſo caſo calata da L ſull' orizzonte razionale di E la perpendicolare LQ; tale perpendicolare caderà ſulla retta CQ (§ *69 della Geo. ſol.*). Finalmente s' intenda congiunta la retta DQ. Dinoterà DQ la comune ſezione del detto orizzonte col triangolo DLQ; e sì fatto triangolo, come procedente per LQ, ſarà perpendicolare al medeſimo orizzonte.

COROLLARIO II.

4. Nel caſo adunque, in cui la Luna L s' oſſerva fuori del meridiano, il verticale, in cui ſi vedrebbe nel ſuo luogo vero dal centro D della terra, è il triangolo DLQ; onde l' angolo HDQ dà l' azzimutto, in cui la Luna ſi vedrebbe allora nel ſuo luogo vero dal detto centro D.

CO-

COROLLARIO III.

5. Quindi la Luna L nell' isteſſo caſo guardata da E appariſce in un verticale, e dal centro della terra in un verticale diverſo. E perciò in ſeguito per chiarezza il primo de' detti piani verticali ſi chiamerà *verticale apparente*, e 'l ſecondo *verticale vero*; come altresì l' azzimutto HCQ, corriſpondente al verticale apparente, ſi dirà *azzimutto apparente*, e l' altro HDQ, corriſpondente al verticale vero, ſi chiamerà *azzimutto vero*.

COROLLARIO IV.

6. Eſſendo relativamente al triangolo QCD angolo eſterno HCQ; ſarà l' azzimutto apparente HCQ della Luna ſempre maggiore dell' azzimutto vero HDQ.

COROLLARIO V.

7. Qualora la Luna L appariſce nell' orizzonte, l' angolo CEL allora è angolo retto, e l' angolo GLE è la parallaſſe orizzontale della Luna, corriſpondente ad EG. Or poſta tale parallaſſe $=$ P, e poſto il ſeno maſſimo $=$ R, ſarà LC : CE $=$ R : *ſen.* P $= 57^{\circ}.\ 17'.\ 44''.\ 48'''$: P(§ 42 *Tom. 2 dell' Aſtro.*). Sicchè

P $=$

$$P = \frac{CE}{LC} \times (57^\circ.\ 17'.44''.\ 48''').$$

Per la qual coſa la parallaſſe orizzontale della Luna, non variandoſi ſenſibilmente la diſtanza LC dell' iſteſſa Luna dal punto, che rappreſenta C, ſi varia a proporzione, che ſi varia la EC. E quindi è maſſima nell'equatore, dove la EC ſi fa uguale al ſuo raggio, minima ne' poli, dove ſi fa uguale al ſemiaſſe terreſtre, e di mezzana grandezza negli altri ſiti.

COROLLARIO VI.

8. Nell' opuſcolo precedente s'è trovato eſſere il raggio dell'equatore terreſtre di teſe 3282775, il ſemiaſſe della terra di teſe 3267512, ed EC per riſpetto di Napoli di teſe 3276257. S'è pure in conſeguenza d'oſſervazioni rilevato eſſere nell'equatore la parallaſſe orizzontale maſſima della Luna perigea di 61'. 41''. 7, minima della Luna apogea di 55'. 16''. 4, e mezzana della Luna alle diſtanze mezzane dalla terra di 58'. 29'' $\frac{1}{2}$. Se dunque in ordine a 3282775, a 3267512, ed a ciaſcuna delle notate parallaſſi ſi cercano i quarti proporzionali,

li , s' avranno con essi le corrispondenti parallassi orizzontali della Luna ne' poli terrestri . E quindi ne' poli terrestri è la parallasse orizzontale massima della Luna perigea di 61'. 24". 4, minima della Luna apogea di 55'. 0". 9, e mezzana della Luna alle distanze mezzane dalla terra di 58'. 13". 1 . Similmente si trova essere per rispetto di Napoli la parallasse orizzontale massima della Luna perigea di 61'. 34". 3, minima della Luna apogea di 55'. 9". 8, e mezzana della Luna alle mezzane distanze dalla terra di 58'. 22". 5.

AVVERTIMENTO II.

9. Si noti pure che determinata la parallasse orizzontale della Luna, corrispondente ad EC, è facile determinare corrispondente all' istessa EC la parallasse, che compete alla Luna a qualunque sua altezza, corretta dalla refrazione; poichè tale parallasse è quarta proporzionale in ordine al seno massimo, al seno della distanza della Luna dal zenit, corretta dalla refrazione, ed alla parallasse orizzontale (§ 35 *Tom. 2 dell'Astro.*). Premesse intanto tali cose, procediamo ora ad insegnare il come dalle misure della parallesse orizzontale della Luna, della sua altezza apparente, e anche dell' azzimutto apparente, quando s' of-

s' osserva fuori del meridiano, si possono dell' istessa Luna rilevare l' altezza vera, l' effettiva sua distanza dal centro della terra, ed anche il vero azzimutto, qualora non è nullo; e si possono conseguentemente determinare, senza altro bisogno della medesima Luna la vera declinazione, l' ascensione retta, la longitudine, e la latitudine. Perciò sia il

PROBL. I.

10. *Date della Luna L la parallasse orizzontale, e la distanza meridiana dal zenit LEZ corretta dalla refrazione, e distanza avuta relativamente a qualunque luogo E della terra di nota latitudine; determinare dell' istessa Luna l' altezza vera HDL, e la sua effettiva distanza LD dal centro della terra, supposta la terra della forma stabilita nell' opuscolo precedente.*

SOLUZIONE.

S' intenda fatta la preparazione antecedentemente eseguita.

1. Si determinino relativamente al luogo terrestre E di nota latitudine, se non si hanno determinate, le rette EC, CD del modo insegnato nell' antecedente opuscolo.

2. Nota la parallasse orizzontale della Luna, si cerchi in ordine al seno massimo, al seno dell' angolo LEZ, distanza meridiana della Luna dal zenit corretta dalla refrazione, ed alla detta parallasse orizzontale il quarto proporzionale; s' avrà con esso la parallasse d' altezza della Luna corrispondente ad EC, o sia l' angolo ELC.

3. Nel triangolo ELC, noti l' angolo ELC già determinato, l' angolo CEL, conseguente di LEZ, ed anche per conseguenza l' angolo ECL, e noto il lato CE, si determini il lato CL.

4. Nel triangolo LCD, noti i due lati LC, CD, e l' angolo compreso LCD, somma dell' angolo LCE, e del retto ECD, si determinino l' angolo LDC, e 'l lato DL.

Daranno l' angolo LDC l' altezza vera della Luna, e DL la distanza effettiva dell' istessa Luna dal centro della terra.

Ch' è quanto bisognava determinare.

ESEMPIO.

Siesi in Napoli in una notte in passare la Luna pel meridiano determinata l' altezza meridiana del suo centro corretta dalla refrazione di 53°. 24'. 34", e sia stata allora la parallasse orizzontale della Luna di 1°. Si cerca quale ha *do-*

dovuto allora essere l' altezza vera della Luna, e quanta la sua effettiva distanza dal centro della terra, supposta la terra della forma stabilita nel precedente opuscolo.

CALCOLO.

Pel calcolo da fare sono

$$EC = 3276257 \text{ tese}$$
$$DG = 15085$$
$$\text{ang. } LEZ = 36^\circ.\ 35'.\ 26''.$$

Per determinare la parallasse d' altezza, o sia l' angolo ELC, essendo la parallasse orizzontale di 1°.

Si cerchi in ordine al seno massimo $= 10000000$, al seno di $LEC = 5960925$, ed alla parallasse orizzontale $= 1^\circ = 60'$ il quarto proporzionale; s' avrà con esso la parallasse d' altezza, corrispondente ad EC, o sia l' angolo $ELC = 35'.76555 = 35'.\ 45''$. E' pure l' angolo $LEC = 143^\circ.\ 24'.\ 34''$. Dunque l' angolo $LCE = 35^\circ.\ 59'.\ 41''$.

Per determinare nel triangolo LEC *il lato* LC .

Log. sen. CEL = 9 . 7753136
Log. EC = 6 . 5153780 agg.

Somma = 16 . 2906916
Log. sen. CLE = 8 . 0169622 sott.

Log. LC = 8 . 2737294 .

Sicchè

LC = 187814619 tese .

Per determinare nel triangolo LCD *l'angolo* CDL, *o sia l'altezza vera della Luna* .

LC = 187814619
CD = 15085

LC

$$LC + CD = 187829704$$
$$LC - CD = 187799534.$$

Di più

$$LCE = 35^{\circ}.\ 59'.\ 41''.$$
$$ECD = 90^{\circ}.\ 00'.\ 00''.$$

Dunque

$$LCD = 125^{\circ}.\ 59'.\ 41''.$$

E perciò

$$\tfrac{1}{2}(CDL + CLD) = 27^{\circ}.\ 00'.\ 9''\tfrac{1}{2}.$$

Quindi

$$Log.\ (LC - CD) = 8.2736945$$
$$Log.tan.\tfrac{1}{2}(CDL+CLD) = 9.7072153 \text{ agg.}$$

$$\text{Somma} = 17.9809098$$
$$Log.\ (LC + CD) = 8.2737642 \text{ sott.}$$

$$Log.tan.\tfrac{1}{2}(CDL-CLD) = 9.7071456.$$

Onde

$\frac{1}{2}(CDL - CLD) = 26°. 59'. 56.''$.

E perciò l'altezza vera della Luna, o sia l'angolo LDH $= 54°. 00'. 5''\frac{1}{2}$.

Per determinare nell' istesso triangolo LCD il lato LD, distanza effettiva della Luna dal centro della terra.

Log. sen. LCD =	9 . 9079866	
Log. LC =	8 . 2737294	agg.
Somma =	18 . 1817160	
Log. sen. LDC =	9 . 9079660	sott.
Log. LD =	8 . 2737500	

Sicchè la distanza effettiva della Luna dal centro della terra LD = 187823529 tese.

CO-

COROLLARIO.

11. Quindi l' altezza vera della Luna nel ſuppoſto caſo eccede la data, corretta dalla refrazione, di $35'. 31''\frac{1}{2}$.

PROBL. II.

12. *Date della Luna L la parallaſſe orizzontale, e la diſtanza non meridiana dal zenit LEZ corretta dalla refrazione, e diſtanza avuta relativamente a qualunque luogo E della terra di nota latitudine, e dato di più il ſuo azzimutto apparente HCQ; determinare dell' iſteſſa Luna il ſuo azzimutto vero HDQ, la ſua vera altezza QDL, e la ſua effettiva diſtanza LD dal centro D della terra.*

SOLUZIONE.

S' intenda fatta la preparazione antecedentemente eſeguita.

1. Si determinino le rette EC, CD, ſe non ſi hanno determinate, del modo inſegnato nell' opuſcolo precedente; e ſi determinino, come nell' antecedente probl., prima la parallaſſe d'altezza CLE, corriſpondente ad EC, e conſeguentemente l' angolo ECL, e poſcia la CL.

2. Essendo retto l' angolo ECQ, fatto noto l' angolo ECL, noto sarà pure il suo supplimento al retto LCQ. Onde nel triangolo LQC, rettangolo in Q, noto l' angolo acuto LCQ, e nota l' ipotenusa LC, si determinino i cateti LQ, QC.

3. Nel triangolo QCD, noti i due lati QC, CD, e noto l' angolo QCD da essi compreso, come conseguente dell' azzimutto apparente HCQ, si determinino l' angolo CDQ, e 'l lato DQ. S' avrà coll' angolo CDQ l' azzimutto vero cercato.

4. Finalmente nel triangolo LQD, rettangolo in Q, noti i cateti LQ, QD, si determinino l' ipotenusa LD, e l' angolo acuto LDQ. S' avranno coll' angolo LDQ l' altezza vera cercata della Luna, e colla LD l' effettiva sua distanza dal centro della terra.

Ch' è quanto bisognava determinare.

ESEMPIO.

Siesi in una notte determinata in Napoli l' altezza non meridiana del centro della Luna corretta dalla refrazione di 47°. 50'. 12'', e l' azzimutto apparente di 36°. 18'. 24'' ; e sia stata di più allora la parallasse orizzontale della Luna pure di 1°. Si vuole determinare pel me-

medesimo tempo della Luna il vero azzimutto, la vera altezza, e l'effettiva sua distanza dal centro della terra.

CALCOLO.

Pel calcolo da fare sono

EC = 3276257 tese

CD = 15085

ang. LEZ = 42°. 9'. 48"

ang. HCQ = 36°. 18'.24".

Per determinare la parallasse d'altezza, o sia l'angolo ELC, essendo la parallasse orizzontale di 1°.

Si cerchi in ordine al seno massimo 10000000, al seno di LEZ = 6712463, ed alla parallasse orizzontale = 1° = 60' il quarto proporzionale; s'avrà con esso la parallasse d'altezza corrispondente ad EC, o sia l'angolo ELC = 40'. 274778 = 40'. 16". Onde l'angolo LCE = 41°. 29'. 32", e conseguentemente il suo complimento al retto LCQ = 48°. 30'. 28".

Per determinare nel triangolo **LEC** *il lato* **LC**.

Log. sen. CEL	=	9 . 8268819	
Log. EC	=	6 . 5153780	agg.
Somma	=	16 . 3422599	
Log. sen. CLE	=	8 . 0686358	sott.
Log. LC	=	8 . 2736241.	

Sicchè

LC = 187769087 tese.

Per determinare nel triangolo rettangolo **LQC** *il cateto* **LQ**.

Log. sen. LCQ	=	9 . 8745082	
Log. LC	=	8 . 2736241	agg.
Somma	=	18 . 1481323	
Log. sen. mas.	=	10 . 0000000	sott.

Log.

Log. LQ = 8 . 1481323.

Dunque

LQ = 140647603 tese.

Per determinare nell' istesso triangolo il lato CQ.

Log. sen. QLC	= 9 . 8211979	
Log. LC	= 8 . 2736241	agg.
Somma	= 18 . 0948220	
Log. sen. mas.	= 10 . 0000000	sott.
Log. CQ	= 8 . 0948220.	

Onde

CQ = 124400458 tese.

Per

Per determinare nel triangolo QCD l' angolo CDQ.

$$QC = 124400458$$
$$CD = 15085$$

$$QC + CD = 124415543$$
$$QC - CD = 124385373.$$

Ed essendo HCQ = $36°.\ 18'.\ 24''$; sarà $\frac{1}{2}(CDQ + CQD) = 18°.\ 9'.\ 12''$.

Quindi

$$Log.(QC - CD) = 8.0947693$$
$$Log.tan.\tfrac{1}{2}(CDQ+CQD) = 9.5157162 \text{ agg.}$$

$$\text{Somma} = 17.6104855$$
$$Log.(QC + CD) = 8.0948746 \text{ sott.}$$

$$Log.tan.\tfrac{1}{2}(CDQ-CQD) = 9.5156109.$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2}(CDQ - CQD) = 18°.\ 8'.\ 57''.$$

Per

Per la qual cosa il vero azzimutto della Luna, o sia l' angolo HDQ = 36°. 18'. 9".

Per determinare nell' istesso triangolo CDQ il lato DQ.

Log. sen. QCD	=	9 . 7724001
Log. QG	=	8 . 0948220 agg.
Somma	=	17 . 8672221
Log. sen. CDQ	=	9 . 7723571 sott.
Log. QD	=	8 . 0948650.

Onde

QD = 124412783 tese.

Per determinare nel triangolo rettangolo LQD l' angolo LDQ.

Log. QL	=	8 . 1481323
Log. sen. mas.	=	10 . 0000000 agg.

Som-

Somma = 18 . 1481323
Log. DQ = 8 . 0948650 fott.

Log. tan. LDQ = 10 . 0532673 .

Sicchè l' altezza vera della Luna, o ſia l'angolo LDQ = 48°. 30'. 17".

Per determinare nell' iſteſſo triangolo LDQ il lato DL.

Log. ſen. maſ. = 10 . 0000000
Log. LQ = 8 . 1481323 agg.

Somma = 18 . 1481323
Log. ſen. LDQ = 9 . 8744877 ſott.

Log. DL = 8 . 2736446

Quindi la diſtanza effettiva della Luna dal centro della terra LD = 187777950 teſe.

CO-

COROLLARIO.

13. Essendosi determinato l'azzimutto vero della Luna nel supposto caso di 36°. 18'. 9'', e l'altezza vera di 48°. 30'. 17''; sarà l'azzimutto vero meno dell' apparente di 15'', e l'altezza vera più della data di 40'. 5''.

PROBL. III.

14. *Supposti i medesimi dati del probl. precedente, determinare della Luna la sua declinazione.*

SOLUZIONE.

1. In conseguenza de' dati si determinino della Luna il vero azzimutto, e la vera altezza, secondo s' è già insegnato.

2. Relativamente al luogo dell' osservazione si supponga contrassegnare HZPQ Fig. 19 il meridiano celeste, HO l'orizzonte razionale, EQ l'equatore celeste, Z il zenit, P il polo visibile, ed L il luogo vero, in cui apparirebbe la Luna dal centro della terra nel momento, per cui si cerca la sua declinazione; e per L s' intendano menati l' arco ZM di verticale, e l' arco PN di cerchio di declinazione.

Sa-

Sarà noto l' arco LM , altezza vera della Luna già determinata , e conseguentemente l' arco LZ, complimento di LM all' arco di quadrante ; e sarà noto altresì l' angolo sferico HZM , azzimutto vero pure determinato , e conseguentemente l' angolo LZP . Quindi nel triangolo sferico LZP , noti l' arco LZ , del modo già detto determinato , l' arco ZP , complimento dell' altezza PO del polo all' arco di quadrante , e l' angolo LZP , si determini coll' ajuto della Trigonometria sferica l' arco PL . Si farà perciò noto l' arco LN , declinazione cercata della Luna .

Ch' è ciò , che bisognava determinare .

ESEMPIO.

Sieno gli stessi dati dell' esempio del probl. precedente , si cerca la declinazione della Luna .

Operando del modo già insegnato , s' avranno della Luna

l' altezza vera LM $= 48^\circ.\ 30'.\ 17''$

il vero azzimutto HZM $= 36^\circ.\ 18'.\ 9''$,

e conseguentemente

l' arco LZ $= 41^\circ.\ 29'.\ 43''$

l' an-l' angolo LZP = 143°. 41'. 51''.

Ed essendo per rispetto di Napoli l' altezza PO del polo = 40°. 50'. 15'', sarà l' arco PZ = 49°. 9'. 45''. Ciò posto, eccone il rimanente del

CALCOLO.

S' intenda da L menato l' arco LA di cerchio massimo in modo, che l' angolo in A sia retto. S' avranno per la Trigonometria sferica, posto il seno massimo = R, le due seguenti proporzioni, cioè

R : *tan.* LZ = *cos.* LZA : *tan.* AZ

cos. AZ : *cos.* AP = *cos.* LZ : *cos.* LP.

Per determinare nel triangolo rettangolo LAZ l' arco AZ.

Log. tan. LZ = 9 . 9467362

Log. cos. LZA = 9 . 9062824 agg.

Somma = 19 . 8530186.

Log. sen. mas. = 10 . 0000000 sott.

N *Log*

$$Log.\ tan.\ AZ = 9 . 8530186.$$

Sicchè

$$AZ = 35^\circ.\ 29'.\ 3''.$$

Onde

$$AP = 84^\circ.\ 38'.\ 48''.$$

Per determinare nel triangolo obbliquangolo LZP l' arco LP.

Log. cof. AP = 8 . 9696692

Log. cof. LZ = 9 . 8744877 agg.

Somma = 18 . 8441569

Log. cof. AZ = 9 . 9107715 fott.

Log. cof. LP = 8 . 9333854.

Dunque

$$LP = 85^\circ.\ 4'.\ 45''.$$

E per-

E perciò la declinazione cercata della Luna, o sia l'arco LN = 4°. 55'. 15".

AVVERTIMENTO.

15. Si noti che dai dati, dopo aver determinate del modo già insegnato nel probl. antecedente le rette CD, CL, DL, e l'angolo LCQ, si può, per determinare la declinazione della Luna, procedere nel rimanente del calcolo senza bisogno della Trigonometria sferica, ma coll' ajuto della pura Trigonometria piana a questo modo. Fig. 18

S' intenda prolungata la verticale EC, finchè incontri l' asse terrestre PR in T; il che deve sempre accadere, dovendo per l' asse PR passare ogni meridiano terrestre; e s' intenda congiunta la retta LT.

1. Nel triangolo DCT, rettangolo in C, noto il cateto CD, già determinato, e noto l' angolo acuto CDT, come uguale all' altezza del polo PDO, si determinino il cateto CT, e l' ipotenusa DT.

2. Nel triangolo LCT, noti i lati LC, CT, già determinati, e noto l' angolo da essi compreso LCT, somma dell' angolo LCQ già determinato, e dell' angolo retto QCT, come fatto dall' orizzontale CQ, e dalla verticale CT, si determini il lato LT.

3. Finalmente nel triangolo LDT, noti tutt' i lati, si determini l' angolo LDT.

Darà il conseguente di tale angolo determinato, cioè l' angolo LDP la distanza della Luna dal polo; onde il suo complimento ai gr. 90 darà la declinazione cercata della Luna.

ESEMPIO.

Sieno pure gli stessi dati dell' esempio del probl. 2, si cerca la declinazione della Luna.

Operando del modo già insegnato, s' avranno

LC = 187769087 tese

CD = 15085

LD = 187777950

LCQ = 48°. 30'. 28".

Ciò posto, eccone il rimanente del

CAL-

CALCOLO.

Per determinare nel triangolo rettangolo DCT il cateto CT.

Log. tan. CDT	=	9 . 9366743	
Log. DC	=	4 . 1785556	agg.
Somma	=	14 . 1152299	
Log. ſen. maſ.	=	10 . 0000000	ſott.
Log. CT	=	4 . 1152299.	

Sicchè

CT = 13038 teſe.

Per determinare nell' iſteſſo triangolo DCT l' ipotenuſa DT.

Log. ſen. maſ.	=	10 . 0000000	
Log. DC	=	4 . 1785556	agg.

N 3 Som-

Somma $= 14 . 1785556$

Log. sen. DTC $= 9 . 8788475$ sott.

Log. DT $= 4 . 2997081$.

Onde

DT $= 19939$ tese

Per determinare nel triangolo LCT l' angolo CTL.

LC $= 187769087$

CT $= 13038$

LC + CT $= 187782125$

LC — CT $= 187756049$.

Di più

$\frac{1}{2}$ LCE $=$

$\frac{1}{2}$ (CTL + CLT) $= 20^\circ . 44' . 46''$.

Quindi

Log.

$Log. (LC - CT) = 8 . 2735939$

$Log.tan. \frac{1}{2}(CTL+CLT) = 9 . 5783967$ agg.

Somma $= 17 . 8519906$

$Log. (LC + CT) = 8 . 2736542$ sott.

$Log.tan. \frac{1}{2}(CTL - CLT) = 9 . 5783364.$

Sicchè

$\frac{1}{2} (CTL - CLT) = 20^{\circ} . 44' . 36''.$

E perciò

$CTL = 41^{\circ} . 29' . 22''.$

Per determinare nell' istesso triangolo LCT il lato LT.

$Log. sen. LCT = 9 . 8211979$

$Log. LC = 8 . 2736241$ agg.

Somma $= 18 . 0948220$

$Log. sen. LTC = 9 . 8211740$ sott.

$$Log.\ LT = 8\,.\,2736480.$$

E perciò

$$LT = 187779420 \text{ tese.}$$

Per determinare nel triangolo LDT l'angolo LDT.

$$LD = 187777950$$
$$DT = 19939$$
$$LT = 187779420 \text{ agg.}$$

$$\text{Somma} = 375577309.$$

Si metta tale somma = S; sarà $\frac{1}{2}$ S = 187788654 $\frac{1}{2}$. Onde

$$\tfrac{1}{2}S - DT = 187768715\,\tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2}S - LD = 10704\,\tfrac{1}{2}.$$

Quindi

$$Log.\,(\tfrac{1}{2}S - DT) = 8\,.\,2736232$$
$$Log.\,(\tfrac{1}{2}S - LD) = 4\,.\,0295663$$
$$2\ Log.\ \text{sen. mass.} = 20\,.\,0000000 \text{ agg.}$$

Som-

Somma I. $= 32 . 3031895$.

In oltre

Log. LD $= 8 . 2736446$

Log. DT $= 4 . 2997081$ agg.

Somma II. $= 12 . 5733527$.

Onde

Somma I. $= 32 . 3031895$

Somma II. $= 12 . 5733527$ sott.

Log.(sen. $\frac{1}{2}$ LDT)^2 $= 19 . 7298368$,

e conseguentemente

Log. sen. $\frac{1}{2}$ LDT $= 9 . 8649184$;

E quindi

$\frac{1}{2}$ LDT $= 47^\circ . 6' . 43''$,

ed

LDT $= 94^\circ . 13' . 26''$.

Per la qual cosa la distanza della Lu-
na

na dal polo, o sia l' angolo LDP = 85°. 46'. 34", e conseguentemente la declinazione cercata della Luna = 4°. 13'. 26".

AVVERTIMENTO II.

16. Si noti pure che qualora in conseguenza de' dati supposti negli addotti esempj per qualsisia tempo vengono del modo già insegnato calcolati il vero azimutto HZM della Luna, e la vera sua altezza ML; essendo allora noti nel triangolo sferico LZP i due lati LZ, ZP, e l' angolo compreso LZP, si può calcolare anche l' angolo orario LPZ, e conseguentemente l' arco EN dell' equatore. E quindi, calcolando pel medesimo tempo l' ascensione retta del mezzo cielo, si verrà a determinare pure l' ascensione retta della Luna. Ed ecco come coll' ajuto de' dati supposti negli addotti esempj si può, senz' altro bisogno calcolare della Luna non solamente la declinazione, ma anche l' ascensione retta.

Fig. 19

AVVERTIMENTO III.

17. Finalmente si noti che se in conseguenza della declinazione, e dell' ascensione retta della Luna, determinate per qualsisia tempo del modo già detto, si calcolano dell' istessa Luna la longitudine,

ne, e la latitudine, secondo s' è insegnato nel § 207 *del tom.* 1 *della mia Astron.*, si hanno pure per qualsisia tempo della Luna la longitudine in conseguenza de' medesimi dati supposti negli addotti esempj, senza bisogno di formole determinatrici di parallassi di longitudini, e di latitudini, e delle variazioni, che soffrono sì fatte parallassi a cagione della figura della terra.

Fine.

SUP-

SUPPLIMENTO.

Fig. 18 In determinare l' angolo LDT nel triangolo rettilineo LDT, dati tutt' i lati, s' è fatto uso, per facilità della calcolazione, d' un metodo non usato nella Trigonometria piana, sebbene usitatissimo in simil caso colla dovuta varietà nella Trigonometria sferica. Acciò non partorisca tale metodo dubbio alcuno, s' è stimato darne qui la dimostrazione. Perciò soggiugniamo il seguente

TEOREMA.

In ogni triangolo rettilineo obbliquan- Fig. 20, *golo ABC il prodotto di due lati sta al* e 21 *prodotto delle differenze de' medesimi lati dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo al quadrato del seno della metà dell' angolo compreso dagli stessi due lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Si cali da B su CA, prolungata se bisogna, la perpendicolare BD, e si metta il seno massimo = R. Essendo pel § 39 *della Trig. pia.* *sen.*

$$sen.\ \tfrac{1}{2} BAC = \sqrt{\tfrac{1}{2} R (R \mp cos. BAC)};$$

sarà

$$(sen.\ \tfrac{1}{2} BAC)^2 = \tfrac{1}{2} R (R \mp cos. BAC).$$

Or

$$cos.\ BAC = \frac{AD}{AB} \times R.$$

Dunque

$$(sen.\ \tfrac{1}{2} BAC)^2 =$$

$$\tfrac{1}{2} R(R \mp \frac{AD}{AB} \times R) = R^2 \left(\frac{AB \mp AD}{2AB}\right) =$$

$$R^2 \left(\frac{AB \times AC \mp AD \times AC}{2\, AB \times AC}\right).$$

Si metta in oltre la somma de' lati, cioè $AB + BC + CA = S$; saranno

$$\tfrac{1}{2} S - AB = \frac{BC + CA - AB}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} S - AC = \frac{AB + BC - CA}{2}$$

On-

Onde

$$\left(\tfrac{1}{2}S - AB\right)\left(\tfrac{1}{2}S - AC\right) =$$
$$\tfrac{1}{4}\left(AB \times BC + AB \times CA - AB^2 + BC^2 + BC \times CA - AB \times BC - BC \times CA - CA^2 + AB \times CA\right) =$$
$$\tfrac{1}{4}\left(2\,AB \times CA - AB^2 + BC^2 - CA^2\right).$$

E' di più

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 \mp 2CA \times AD,$$

e conſeguentemente

$$BC^2 - AB^2 - CA^2 = \mp 2CA \times AD.$$

Sicchè

$$\left(\tfrac{1}{2}S - AB\right)\left(\tfrac{1}{2}S - AC\right) =$$
$$\tfrac{1}{4}\left(2\,AB \times CA \mp 2\,CA \times AD\right) = \tfrac{1}{2}\left(AB \times CA \mp CA \times AD\right).$$

E quindi

$$\left(\mathit{sen.}\ \tfrac{1}{2}\, BAC\right)^2 =$$

$$R^2\left(\frac{AB \times CA \mp CA \times AD}{2\,AB \times AC}\right) =$$

R²

$$R^2 \left(\frac{(\frac{1}{2} S - AB)(\frac{1}{2} S - AC)}{AB \times AC} \right).$$

Per la qual cosa

$AB \times AC : (\frac{1}{2} S - AB)(\frac{1}{2} S - AC) = R^2 : \text{sen.} \frac{1}{2} BAC)^2$.

Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se si sommano insieme *Log.* $(\frac{1}{2} S - AB)$, *Log.* $(\frac{1}{2} S - AC)$, e 2 *Log.* R, e dalla somma se ne sottrae l'altra di *Log.* AB, e *Log.* AC, il residuo dà 2 *Log. sen.* $\frac{1}{2}$ BAC, e la sua metà dà *Log. sen.* $\frac{1}{2}$ BAC. Sicchè se si cerca a sì fatto seno in numero logaritmico l'angolo corrispondente, il doppio di esso dà il valore dell'angolo BAC. Similmente si può determinare qualunque angolo di qualsisia triangolo rettilineo obbliquangolo, qualora sono dati tutt'i lati.

Tav I

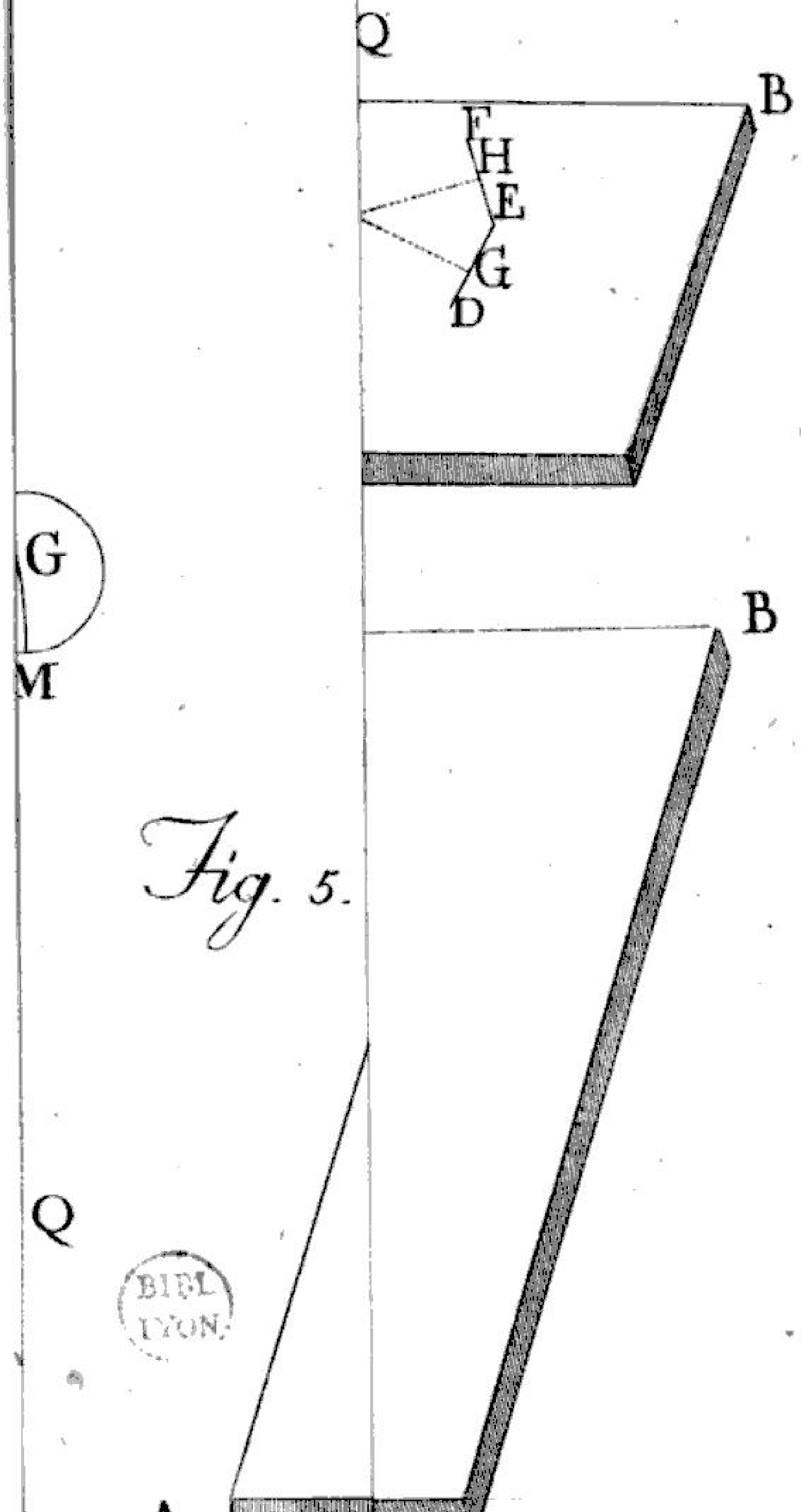
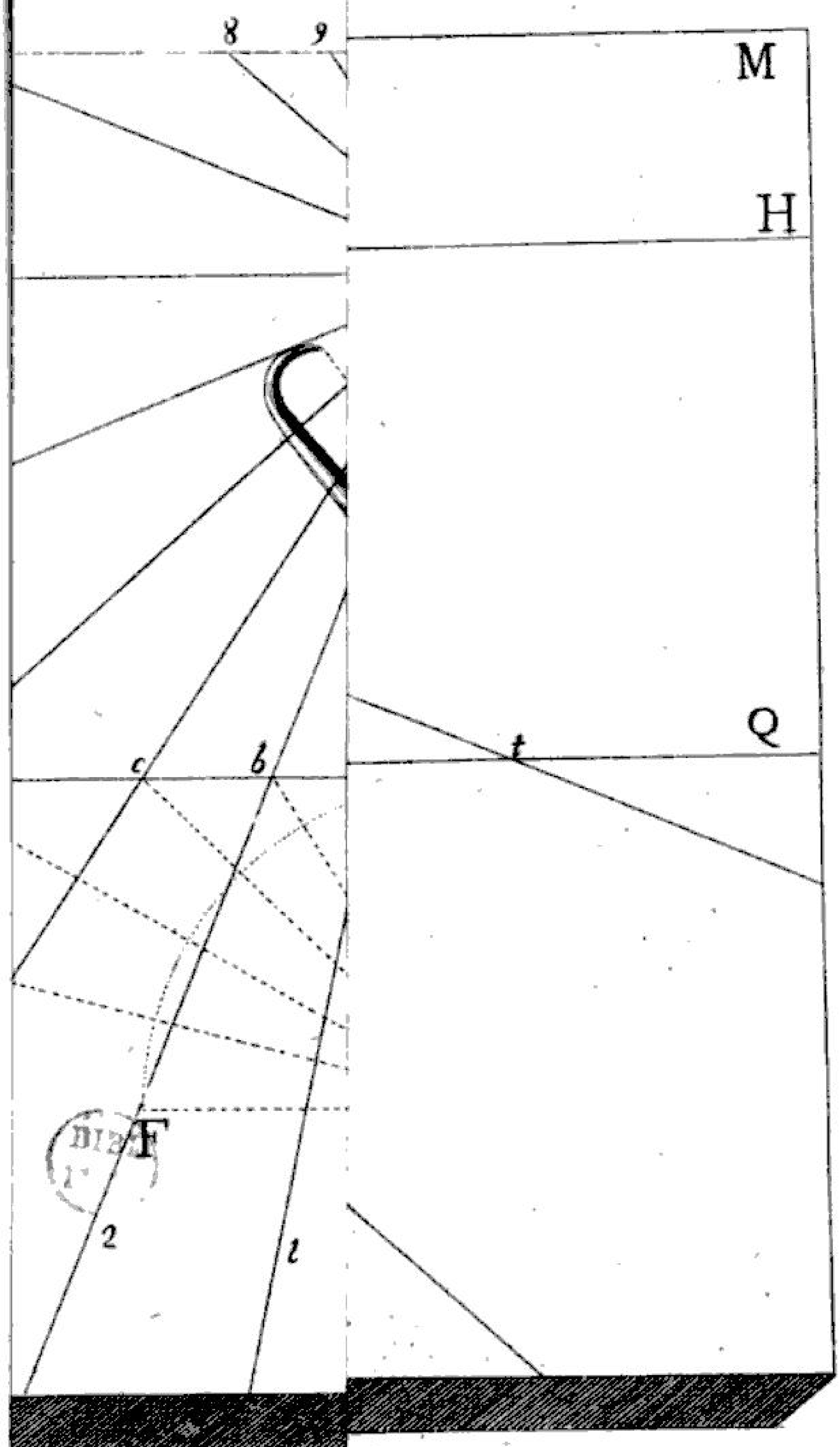


Fig. 5.

Tav. II.



Tav. III.

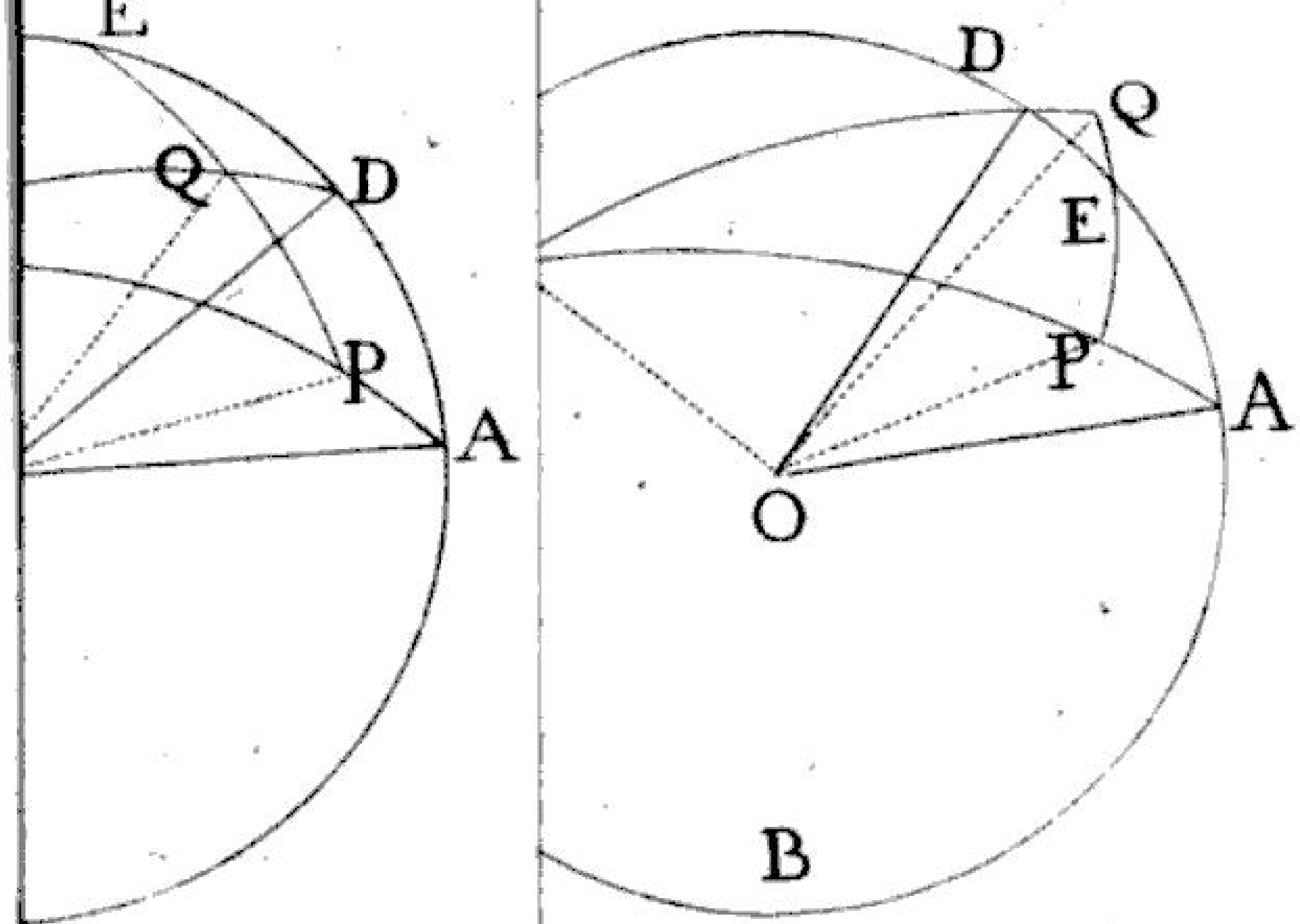
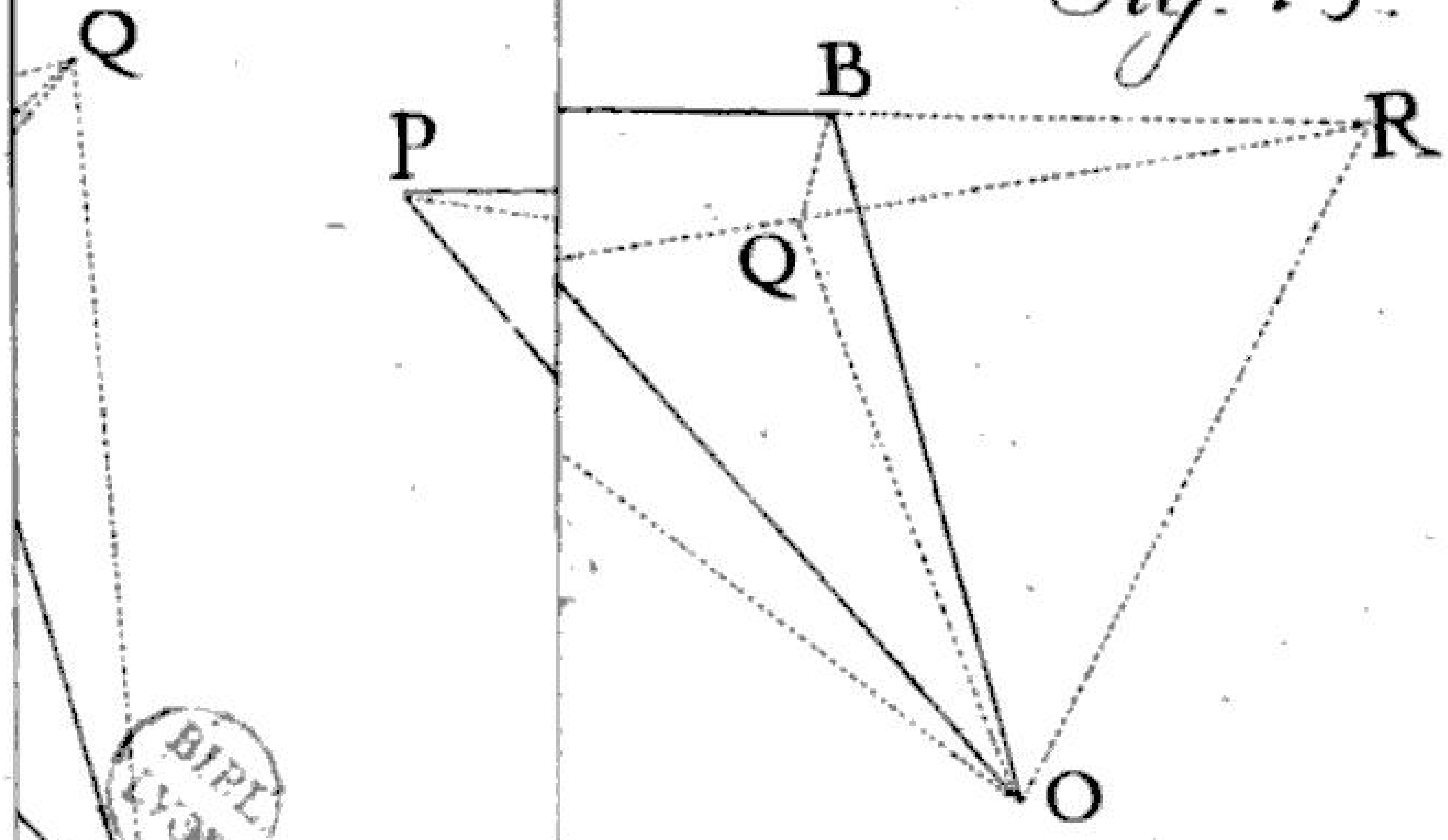


Fig. 15.



Tav. IV.

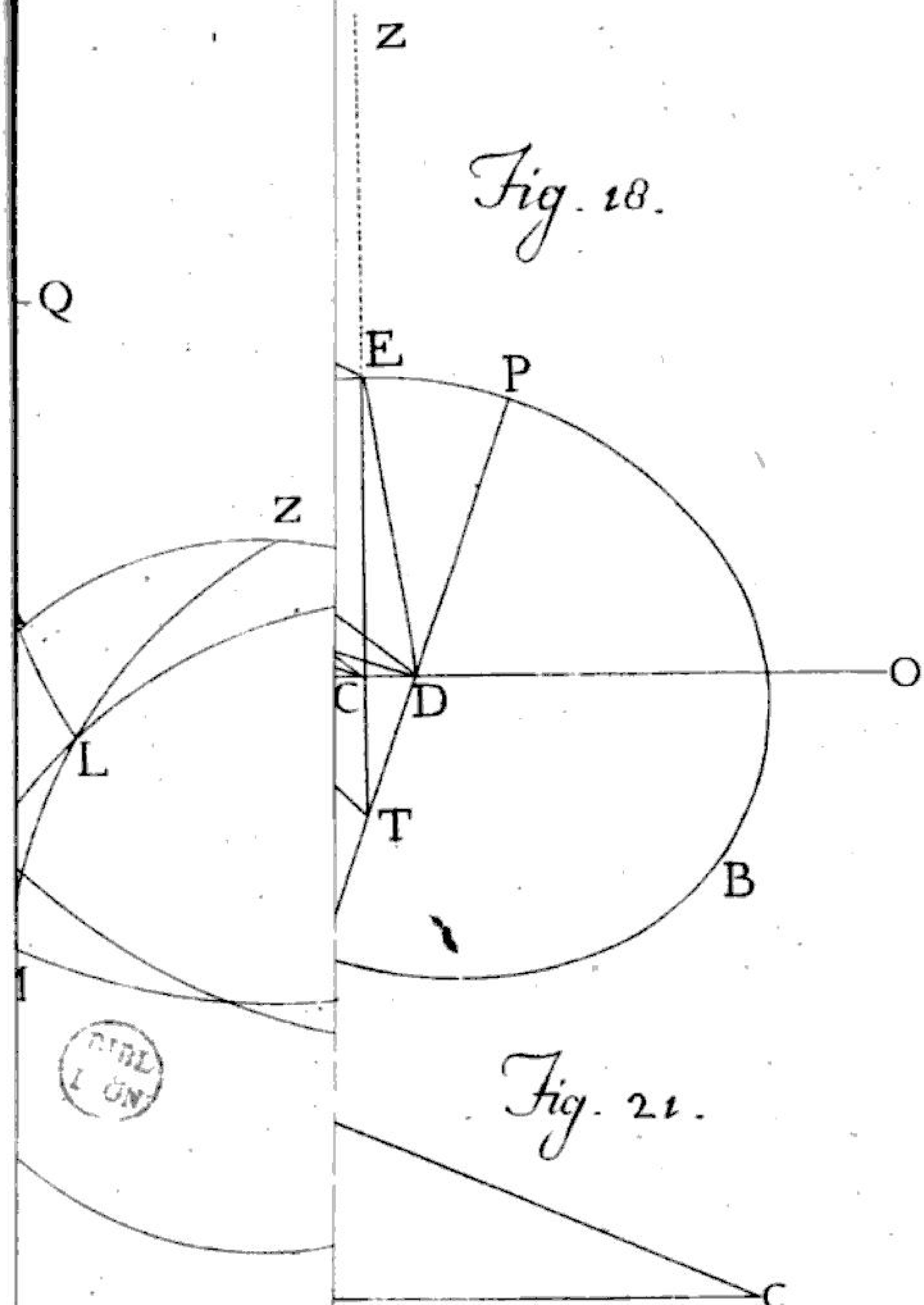


Fig. 18.

Fig. 21.