TRATTATO
DELLA
TRIGONOMETRIA
SFERICA
DI
VITO CARAVELLI.

IN NAPOLI

NELLA STAMPERIA DE' RAIMONDI
Con licenza de' Superiori
MDCCLXXIX.

A' DISCRETI LETTORI.

NEgli elementi di Matematica, da più anni da me pubblicati colle stampe, alla dottrina de' Logaritmi, e alla Trigonometria piana non v' associai la Trigonometria sferica; perchè l'uso, al quale furono tali elementi destinati, non l' esigeva. Ho stimato ora pubblicarla; acciò i giovani, che s' avvalgono de' detti miei elementi, e che amano d' apprenderla, possano apprenderla modellata sul medesimo gusto della Trigonometria piana, e conseguentemente con quella facilità, che concilia alle scienze l' uniformità del metodo.

L' intenzion mia, in trattare qualunque scienza, è stata sempre non di empirla d' idee inadequate, e spesso capricciose, o di darle un' aria arcana, e misteriosa, per sorprendere senza instruire, e molto meno d' oscurarla con ragionarvi in gergo, affine d' imporre alla moltitudine, e nascondere nel tempo istesso la propria debolezza, vizj nelle scienze matematiche affatto insopportabili; ma di metterla anzi in un tal punto di veduta, che riuscisse agevole a chiunque dovesse apprenderla, e di legarvi talmente le dottrine, che potesse ognuno con facilità comprenderne l' intero sistema.

Se

Se tale mia intenzione si troverà eseguita in quest' opericciuola, che ora vi presento, come mi lusingo trovarsi eseguita nelle altre prima pubblicate, non tocca a me a giudicarne: posso solamente assicurare ognuno che non ho in essa trascurato diligenza, per trarre le dottrine dal grado di difficoltà, e di caligine, che s' incontra spesso in altri, che l' hanno prima di me trattata, e da' quali, confesso, averne nondimeno tratti de' lumi.

Gradite intanto sì fatta mia fatica, qualunque ella sia; che, se non sarà utile alla gioventù studiosa, dimostrerà almeno il desiderio, che ho sempre di giovarla. Vivete felici.

TRATTATO

DELLA

TRIGONOMETRIA SFERICA.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. SI dice d' una sfera *cerchio massimo* ogni cerchio generato in essa da una sezione, procedente pel suo centro.

COROLLARIO I.

2. Quindi ogni cerchio massimo d' una sfera ha per centro, e per raggi il centro, e i raggi dell' istessa sfera.

COROLLARIO II.

3. Essendo i cerchi massimi d'una sfera tutt' in piani procedenti pel centro della medesima: ne segue 1°. che ogni cerchio massimo deve essere da qualunque altro dell' istessa sfera intersecato; 2°. che la comune sezione di due di tali cerchi è sempre un diametro della sfera; 3°. che un cerchio massimo, che passa per un punto della superficie della sfera, passa anche pel punto diametralmente opposto; e 4°. finalmente che due cerchi massimi s'intersecano in due parti uguali, e le periferie di essi in punti diametralmente opposti.

COROLLARIO III.

4. Finalmente, potendo per una retta passare infiniti piani, e un solo per ambi i lati d'un angolo rettilineo, potranno per due punti della superficie d' una sfera diametralmente opposti passare infiniti cerchi massimi; e per due punti non diametralmente opposti, e alli quali conseguentemente pervengono raggi, che formano un angolo rettilineo, potrà passarne un solo.

DEFINIZIONE II.

5. Si chiama d' una sfera *cerchio minore* ogni cerchio generato in essa da una sezione non procedente pel suo centro.

COROLLARIO I.

6. Adunque ogni cerchio minore divide la sfera in due porzioni disuguali; e 'l diametro della sfera, che passa pel centro d' un cerchio minore, siccome è perpendicolare al medesimo cerchio (§ 151 *del tom.* 4), così incontra la superficie della sfera ne'vertici delle due porzioni sferiche, nelle quali l' istessa sfera dal medesimo cerchio resta divisa (§ 40 *del tom.* 4).

CO-

COROLLARIO II.

7. Essendo infiniti i piani, che possono passare per la retta, che congiugne due punti della superficie d' una sfera non diametralmente opposti, senza che passino ancora pel suo centro; infiniti sono pure i cerchi minori d' una sfera, che possono passare per due punti della sua superficie non diametralmente opposti. Sicchè per due punti della superficie d' una sfera, non diametralmente opposti, non vi può passare, se non un solo cerchio massimo (§ 4), e possono passarvi intanto infiniti cerchi minori.

AVVERTIMENTO I.

8. Contrassegnino LPMQ qualsisia sfera, ed A, e B due punti della sua superficie non diametralmente opposti; e contrassegnino di più LM l' unico cerchio massimo, che può passare per gli detti punti, e PQ qualunque degl' infiniti cerchi minori, che possono pure passare per gli stessi punti. S' intenda congiunta la retta AB, e intorno a tale retta s' intenda girare uno de' detti cerchi, finchè parvenga nel piano dell' altro: è chiaro che deve cadere la porzione ALB del cerchio massimo, minore del mezzo cerchio, dentro della porzione APB, o AQB del cerchio minore, e la porzione restante AMB del cerchio massimo, maggiore del mezzo cerchio, fuori della porzione AQB, o APB del cerchio minore. E perciò di ciascuno degli archi APB, AQB l' arco ALB è minore, e l' arco AMB è maggiore. Fig. 1.

COROLLARIO III.

9. Quindi di tutti gl' infiniti archi circolari, che possono tramezzare tra due punti della superficie d' una sfera, non diametralmente opposti, e archi di tutti gl' infiniti cerchi, che possono per tali punti passare, l' arco minore della mezza periferia dell' unico cerchio massimo, che può passare per sì fatti punti, è il minimo.

AVVERTIMENTO II.

10. Si noti ancora che se sulla superficie di qualunque sfera si vuole procedere da un punto a un altro per la via più brieve, non si può procedere, se non nella direzione di un piano, che passa per tali punti, e conseguentemente per l'arco di qualche cerchio dell'istessa sfera. Or se i punti sono diametralmente opposti, tale arco non può essere, se non la mezza periferia di qualunque degl'infiniti cerchi massimi, che possono per sì fatti punti passare; perchè per gli detti punti passare non vi possono, se non cerchi massimi: se poi i punti non sono diametralmente opposti, il detto arco è in tale caso l'arco minore della mezza periferia dell'unico cerchio massimo, che passa per tali punti, e che agli medesimi punti termina, come il minimo di tutti gl'infiniti archi circolari, che terminano negli stessi punti.

COROLLARIO IV.

11. Quindi è che sulla superficie di qualunque sfera la distanza da un punto a un altro si determina sempre per l'arco di cerchio massimo, che non oltrepassa la mezza periferia, e che termina agli medesimi punti; come l'arco, che dinota la via più brieve, per cui si può dall'uno all'altro punto pervenire.

DEFINIZIONE III.

12. D'un cerchio qualunque d'una sfera si dicono *asse* il diametro della sfera, che l'è perpendicolare, e *poli* gli estremi dell'asse.

COROLLARIO I.

13. Quindi di qualunque cerchio minore d'una sfera l'asse è il diametro della sfera, che passa pel centro dell'istesso cerchio (§ *6*); e quindi di qualunque cerchio d'una sfera i poli sono i vertici delle due porzioni sferiche, nel-

nelle quali la sfera dal cerchio resta divisa; le quali porzioni sono mezze sfere, qualora il cerchio è massimo.

COROLLARIO II.

14. Essendo i vertici delle due porzioni sferiche, nelle quali resta divisa una sfera da qualunque suo cerchio, vertici ancora delle due porzioni, nelle quali viene divisa da qualunque altro cerchio parallelo: ne segue che i cerchi paralleli in una sfera hanno i medesimi poli.

COROLLARIO III.

15. Essendo di più a ogni cerchio d'una sfera perpendicolare il suo asse; saranno a ogni cerchio d'una sfera perpendicolari tutti gl' infiniti cerchi massimi, che possono passare pel suo asse, e conseguentemente per gli suoi poli: anzi non potendosi su d'un piano da un suo punto innalzare, se non una sola perpendicolare; a qualsisia cerchio d' una sfera non vi possono essere perpendicolari altri cerchi massimi, se non quelli, che passano per gli suoi poli.

COROLLARIO IV.

16. E perciò un cerchio massimo d' una sfera se passa per gli poli di qualsisia altro cerchio dell' istessa sfera, divide tale cerchio perpendicolarmente, e se il divide perpendicolarmente, passa per gli suoi poli.

COROLLARIO V.

17. E se di due cerchi massimi d' una sfera il primo passa per gli poli del secondo; intersecandosi perpendicolarmente, il secondo passa anche per gli poli del primo. E perciò tutti gl' infiniti cerchi massimi, che possono passare per gli poli d'un altro cerchio massimo, hanno tutt' i poli di essi nella periferia di tale altro cerchio massimo.

CO-

COROLLARIO VI.

18. Di vantaggio ogni cerchio maſſimo d'una sfera, che paſſa per gli poli di qualſiſia cerchio minore dell' iſteſſa sfera, paſſa anche per l' aſſe di sì fatto cerchio minore, e conſeguentemente pel ſuo centro. E perciò ogni cerchio maſſimo, che paſſa per gli poli di qualunque cerchio minore, divide tale cerchio minore in due parti uguali.

COROLLARIO VII.

19. Non potendo in oltre per due punti della ſuperficie d'una sfera, non diametralmente oppoſti, paſſare, ſe non un ſolo cerchio maſſimo (§ 4); e non potendo un cerchio maſſimo d'una sfera eſſere perpendicolare a qualſiſia al tro cerchio della medeſima, ſe quello non paſſa per gli poli di queſto (§ 16): ne ſegue che per un punto della ſuperficie d'una sfera, diverſo dagli poli di un cerchio qualunque della medeſima, non può paſſare, ſe non un ſolo cerchio maſſimo pendicolare a sì fatto cerchio, e deve eſſere quello, che paſſa anche per gli ſuoi poli.

AVVERTIMENTO.

Fig. 2. 20. Contraſſegnino ABCD una sfera, AC un ſuo cerchio maſſimo, LM un cerchio minore parallelo ad AC, BD l' aſſe di tali cerchi, B, e D i poli di eſſi, e BAD, BED, BFD, ec. cerchi maſſimi procedenti per B, e D. Saranno i cerchi BAD, BED, BFD, ec. tutti perpendicolari ad AC, LM (§ 16). S' intendano di più tirati nel cerchio AC i raggi OA, OE, OF, e nel cerchio LM i raggi PL, PN, PQ; ſaranno retti sì gli angoli BOA, BOE, BOF, che gli angoli BPL, BPN, BPQ. E perciò ſaranno sì BA, BE, BF, che DA, DE, DF archi di quadranti, BL, BN, BQ minori di archi di quadranti, DL, DN, DQ maggiori di archi di quadranti, e l' angolo LPN = AOE.

COROLLARIO VIII.

21. Quindi ne ſegue 1°. che gli archi di cerchi maſſimi, che tramezzano tra la periferia di qualunque altro cerchio maſſimo, e i ſuoi poli, ſono archi di quadranti; 2°. che gli archi di cerchi maſſimi, che tramezzano tra la periferia di qualunque cerchio minore, e i poli di eſſo, ſono degli archi di quadranti minori quelli, che ſi trovano dal lato del polo più vicino, e maggiori quelli, che ſi trovano dal lato del polo più rimoto; 3°. che ſe il cerchio maſſimo ABCD è perpendicolare all'altro cerchio maſſimo AC; prendendo gli archi AB, AD ognuno di 90 gr., i punti B, e D ſono poli del cerchio AC; 4°. che ſe BAD, BED ſono due cerchi maſſimi, che s' interſecano in B, e D; prendendo gli archi BA, BE ognuno di gr. 90, il cerchio maſſimo AC, che paſſa per gli punti A, ed E, ha per poli i punti B, e D, e viene conſeguentemente dagli ſteſſi cerchi BAD, BED perpendicolarmente interſecato; e 5°. finalmente che ſe i cerchi AC, LM ſono paralleli, e vengono interſecati dagli cerchi maſſimi BAD, BED, procedenti per gli poli di eſſi, l'arco LN è ſimile all'arco AE.

DEFINIZIONE IV.

22. Si dice *angolo sferico* l'inclinazione ſcambievole, che hanno nel punto, in cui s'uniſcono ſulla ſuperficie d'una sfera due archi di cerchi della medeſima sfera. Dell' angolo sferico poi ſi dicono *vertice* il punto, in cui i due archi s' uniſcono, e *lati* gli archi iſteſſi.

DEFINIZIONE V.

23. Un angolo sferico ſi dice *retto*, o *obbliquo*, ſecondochè uguaglia sì, o no un angolo retto rettilineo. L' angolo sferico obbliquo ſi chiama *ottuſo*, o *acuto*, ſecondochè è maggiore, o minore del retto. Di più i due angoli sferici, che forma un arco circolare con un altro, che incontra ſulla ſuperficie d' una sfera, e che fa uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra, ſi chiamano *angoli conſeguenti*. E finalmen-

te

te gli angoli sferici, che hanno un vertice comune, e i lati nelle direzioni delle medesime periferie circolari, si dicono *angoli verticali*.

COROLLARIO I.

24. Essendo l' angolo sferico la scambievole inclinazione, che hanno nel punto, in cui s' uniscono sulla superficie d' una sfera due archi di cerchi della medesima sfera; sarà ogni angolo sferico l' istesso, che l' angolo rettilineo formato dalli due elementi de' suoi lati adiacenti al vertice, e conseguentemente l' istesso, che l' angolo rettilineo formato dalle rette tangenti i lati nell' istesso vertice.

COROLLARIO II.

25. Quindi gli angoli sferici verticali sono tra essi uguali, e gli angoli sferici conseguenti uguagliano due angoli retti.

COROLLARIO III.

26. Se i lati d' un angolo sferico appartengono a cerchi massimi d' una sfera: perchè le tangenti di tali archi nel vertice dell' angolo sono perpendicolari al diametro comune de' cerchj, delle cui periferie gli archi sono porzioni; perciò l' angolo sferico in tale caso è uguale all' inclinazione scambievole de' mezzi cerchi, delle cui periferie sono porzioni i lati dell' angolo.

COROLLARIO IV.

27. Quindi ne segue 1°. che se un angolo sferico, formato da due archi di cerchi massimi, è retto, tali cerchi massimi s' intersecano perpendicolarmente; e se s' intersecano perpendicolarmente, l' angolo sferico è retto; 2°. che se un angolo sferico, formato pure da archi di cerchi massimi, è retto, ognuno de' lati di tale angolo, prolungato se bisogna, passa pel polo del cerchio, a cui appartiene l' altro lato; e se

se ognuno de' lati, prolungato se bisogna, passa pel polo del cerchio, a cui appartiene l' altro lato, l' angolo sferico è retto; e 3°. finalmente che se un angolo sferico, formato anche da archi di cerchi massimi, è retto, e uno de' lati si estende, finchè sia arco di quadrante; il termine di tale arco è polo del cerchio, a cui appartiene l'altro lato; e ogni arco di cerchio massimo, che tramezza tra 'l detto altro lato, e 'l detto polo, è arco di quadrante, e forma col medesimo lato angolo retto.

COROLLARIO V.

28. Sieno in oltre della sfera ABCD due mezzi cerchi massimi BAD, BED, che s'intersecano nel diametro BD; e dal centro comune O sieno tirati in essi i raggi OA, OE, ambidue perpendicolari al diametro BD. Essendo l' angolo rettilineo AOE l' inclinazione de' detti mezzi cerchi; sarà sì l' angolo sferico ABE, che l' altro ADE uguale all' angolo rettilineo AOE; e saranno conseguentemente i due angoli sferici ABE, ADE tra essi uguali.

COROLLARIO VI.

29. S' intenda di vantaggio per gli punti A, ed E passare il cerchio massimo AC, che, a cagione degli archi BA, BE di quadranti, ha per poli i punti B, e D (§ 21). Sarà l' angolo sferico ABE, o ADE di tanti gradi, quanti ne contiene l' angolo AOE, e conseguentemente l' arco AE. Per la qual cosa la misura d' ogni angolo sferico, formato da archi di cerchi massimi, è l' arco, che resta compreso tra i suoi lati, del cerchio massimo, che ha per uno de' suoi poli il vertice dell' istesso angolo.

COROLLARIO VII.

30. Avendo finalmente il cerchio massimo AC per poli i punti B, e D, avranno i cerchi massimi BAD, BED i poli di essi nella periferia del cerchio AC (§ 17). Sieno X uno de' poli del cerchio BAD, e Y uno de' poli del cerchio BED; e s' intendano tirati i raggi OX, OY, che saranno

ranno metà degli assi de' detti cerchi BAD, BED. Or, essendo di gr. 90 sì l'arco AX, che l'arco EY, sarà l'arco AX, uguale all'arco EY; e conseguentemente, toltone l'arco comune EX, sarà l'arco AE uguale all' arco XY. E perciò l'angolo sferico ABE, e conseguentemente l'angolo d'inclinazione de' cerchi massimi BAD, BED è uguale all' angolo d'inclinazione degli assi de' medesimi cerchi, e per conseguenza viene misurato dalla distanza XY de' poli X, e Y.

DEFINIZIONE VI.

31. Si chiama *triangolo sferico* ogni porzione di superficie sferica, terminata da tre archi di cerchi della medesima sfera. Il triangolo sferico poi si dice per rispetto de' lati *equilatero*, *isoscele*, o *scaleno*, secondochè i lati sono o tutti e tre uguali, o uguali due solamente, o tutti e tre disuguali; e per rispetto degli angoli *rettangolo*, o *obbliquangolo*, secondochè ha uno, o più angoli retti, o niuno. E finalmente nel triangolo rettangolo, che ha un angolo retto, il lato opposto a tale angolo si nomina *ipotenusa*.

DEFINIZIONE VII.

32. Si dice *Trigonometria sferica* la scienza, che insegna a sciorre in tutt' i casi possibili il seguente problema: *date tre parti di qualunque triangolo sferico, terminato da archi di cerchi massimi di qualsisia sfera, determinare col calcolo aritmetico ciascuna delle altre.*

AVVERTIMENTO I.

33. Nella Trigonometria sferica occorre, come nella piana determinare e lati, e angoli di triangoli sferici; i lati, per avere le distanze de' punti, tra' quali tramezzano; e gli angoli, per avere con ognuno di essi la posizione d'un punto per rispetto di due altri, e per condurci tal volta alla determinazione di lati ignoti. Tali determinazioni occorrono soltanto relativamente a triangoli sferici, terminati da archi di cerchi massimi; perchè sì fatti archi sulla superficie di qua-

qualunque sfera dinotano le distanze de' punti, tra' quali tramezzano, e formano angoli costanti, e determinabili per mezzo delle inclinazioni de' piani, ne' quali si trovano. Quindi in seguito, qualora diremo triangolo sferico, e angolo sferico, intenderemo sempre un triangolo terminato da archi di cerchi massimi, e un angolo pure da archi di cerchi massimi formato.

AVVERTIMENTO II.

34. Sebbene nella Trigonometria sferica si sciolga l' istesso probl. relativamente a triangoli sferici, che s' è sciolto nella Trigonometria piana relativamente a triangoli rettilinei: nondimeno le regole sono diverse. Nè ciò deve recare maraviglia. Nella Trigonometria piana si paragonano i lati de' triangoli rettilinei co' seni, colle tangenti, ec. degli angoli; nella Trigonometria sferica si debbono paragonare i seni, le tangenti, ec. de' lati de' triangoli sferici co' seni, colle tangenti, ec. degli angoli: in quella si determinano le lunghezze de' lati de' triangoli; in questa si debbono determinare i valori de' lati in gradi, e minuti: e finalmente in quella, noti due angoli del triangolo, è noto anche il terzo; in questa dalla conoscenza di due angoli del triangolo non si può argomentare il valore del terzo angolo. L' ordine intanto che in questo trattato seguiremo, sarà il seguente. I°. Premetteremo alcune proprietà de' triangoli sferici, risguardanti e lati, e angoli di essi, acciò ci sieno di scorta nelle dottrine, che dovranno seguire. II°. Premetteremo alcuni principj teoretici risguardanti i coseni della somma, e della differenza di due angoli piani, o di due archi d'un quadrante circolare, acciò cogli altri stabiliti nella Trigonometria piana, ci possano menare all' intero sviluppo di quanto ci occorre per la Trigonometria sferica. III°. Esporremo le proporzioni, che risultano dal paragonare insieme i seni, le tangenti, ec. de' lati de' triangoli sferici co' seni, colle tangenti, ec. degli angoli di essi. IV°. Procederemo coll' ajuto di sì fatte proporzioni alla soluzione del suddetto probl. secondo tutt' i casi possibili. V°. Finalmente esporremo i rapporti delle variazioni,

che possono accadere nelle parti di qualunque triangolo sferico, qualora tali variazioni, saranno picciolissime, e due delle dette parti rimarranno invariabili. Il che servirà per non essere nella pratica obbligato a rifare un intero calçolo, qualora si dà il caso di picciola variazione in un lato, o in un angolo d' un triangolo sferico, o si dà il caso di conoscersi un picciolo errore commesso nella misura d' un lato, o d' un angolo; e per poterci nella pratica guidare in modo, che gl' inevitabili piccioli errori, ne' quali si cade in misurare alcune parti de' triangoli sferici coll' ajuto di strumenti, anche d' esattissime costruzioni, non arrechino nelle determinazioni di quelle, che il calcolo ci somministra, se non errori assai piccioli, e da non tenerne conto.

C A P. I.

Si premettono alcune proprietà de' triangoli sferici, risguardanti e lati, e angoli di essi.

T E O R. I.

35. *In qualunque triangolo sferico ogni lato è minore della somma degli altri due, e tutti e tre insieme sono sempre minori dell' intera periferia.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 3. Contrassegnino ABC qualunque triangolo sferico, e O il centro della sfera. Dal centro O agli vertici degli angoli del triangolo s' intendano tirati i raggi OA, OB, OC. Saranno i tre archi AB, BC, CA misura degli tre angoli piani AOB, BOC, COA, che formano l' angolo solido in O. Or in qualunque angolo solido, formato da tre angoli piani, ognu-

ognuno degli angoli piani è minore della ſomma degli altri due (§ 77 *del tom.* 4.), e tutti e tre inſieme ſono minori di quattro retti (§ 78 *del tom.* 4.). Sicchè in qualunque triangolo sferico ABC ogni lato è minore della ſomma degli altri due, e tutti e tre inſieme ſono ſempre minori dell' intera periferia. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO.

36. Quindi in qualunque triangolo sferico ogni lato è minore della mezza periferia; poichè ſe un lato foſſe uguale, o maggiore della mezza periferia, gli altri due inſieme ſarebbero della mezza periferia maggiori, e tutti e tre inſieme maggiori dell' intera periferia; il che è impoſſibile.

TEOR. II.

37. *Se in un triangolo sferico due lati ſono uguali, gli angoli sferici oppoſti a tali lati ſono anch' eſſi uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Abbia il triangolo sferico ABC il lato AB = BC; e ſieno O il centro della sfera, e OA, OC i raggi, che giungono agli punti A, e C. S' intendano da B calate ſu AO, OC le perpendicolari BD, BE, e dagli punti D, ed E tirate nel ſettore circolare AOC le rette DP, EP anche perpendicolari ad OA, OC; e, prolungate DP, EP, finchè s' uniſcano in P, s' intendano congiunte le OP, BP. Saranno gli angoli sferici BAC, BCA riſpettivamente uguali agli angoli rettilinei BDP, BEP (§ 26). Eſſendo uguali gli archi BA, BC per l' ipoteſi, uguali ſaranno ancora e i ſeni BD, BE, e i coſeni OD, OE di eſſi. E' di più al quadrato di OP uguale sì la ſomma de' quadrati di OD, DP, che la ſomma de' quadrati di OE, EP. Dunque la ſomma de' quadrati di OD, DP uguaglia la ſomma de' quadrati di OE, EP. E perciò uguali ſono tra eſſi i quadrati di DP, EP; e conſeguentemente uguali le rette DP, EP. Per la qual coſa gli angoli rettilinei BDP, BEP hanno i lati BD, DP Fig. 4.
ri-

rispettivamente uguali agli lati BE, EP, e la base BP comune. Sicchè tali angoli rettilinei BDP, BEP sono uguali; e perciò uguali sono anche gli angoli sferici BAC, BCA. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

38. Quindi se un triangolo sferico è equilatero, è anche equiangolo.

TEOR. III.

39. *Se in un triangolo sferico due angoli sferici sono uguali, i lati opposti a tali angoli sono anch' essi uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 5. Abbia il triangolo sferico ABC gli angoli sferici BAC, BCA uguali; e sieno O il centro della sfera, e OA, OC i raggi, che giungono agli punti A, e C. Se i lati AB, BC non sono uguali; sia, s' è possibile, BC maggiore di AB, e si tagli CF uguale ad AB. S' intendano dagli punti B, e F calate su i raggi OA, OC rispettivamente le perpendicolari BD, FE, e dagli punti D, ed E tirate nel settore circolare AOG le rette DP, EP pure perpendicolari ad OA, OC; e, prolungate le DP, EP, finchè s' uniscano in P, s' intendano congiunte le BP, FP, OP. Saranno gli angoli sferici BAC, BCA uguali rispettivamente agli angoli rettilinei BDP, FEP (§ 26). Essendo uguali gli archi BA, FC, uguali saranno ancora e i seni BD, FE, e i coseni OD, OE di essi; onde uguali saranno pure, come nella precedente dimostrazione, le rette DP, EP. Dunque gli angoli rettilinei BDP, FEP hanno i lati BD, DP rispettivamente uguali agli lati FE, EP, e la base BP maggiore della base FP. E perciò l' angolo BDP è maggiore dell' angolo FEP; e conseguentemente l' angolo sferico BAC è maggiore dell' angolo sferico BCA. Or ciò ripugna all' ipotesi. Dunque ripugna che sia il lato BC maggiore di AB. Similmente si dimostra non essere BC minore di BA. Sicchè il lato BC è uguale al lato AB. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

40. Quindi se un triangolo sferico è equi angolo, è anche equilatero.

COROLLARIO II.

41. Essendo, supposto il lato BC maggiore di BA, l' angolo sferico BAC maggiore di BCA: ne segue che se in un triangolo sferico un lato è maggiore d' un altro, l' angolo opposto al lato maggiore è pure maggiore dell' angolo opposto al lato minore.

COROLLARIO III.

42. Se finalmente nel triangolo sferico ABC l' angolo sferico BAC è maggiore di BCA, il lato BC non può essere nè uguale, nè minore di BA; altrimenti l' angolo BAC sarebbe uguale, o minore di BCA. Quindi il lato BC è maggiore di BA. E perciò se in un triangolo sferico un angolo è maggiore d' un altro, il lato opposto all' angolo maggiore è anche maggiore del lato opposto all' angolo minore.

TEOR. IV.

43. *Se in un triangolo sferico* ABC *due lati* BA, BC *sono archi di quadranti, gli angoli sferici* BCA, BAC, *opposti a tali lati, sono retti; e al contrario.* Fig.4.

DIMOSTRAZIONE.

I. Sieno i lati BA, BC archi di quadranti. Sarà B il polo del cerchio, a cui appartiene l' arco AC. Onde gli angoli sferici BCA, BAC sono retti (§ 27).

II. Sieno retti gli angoli sferici BCA, BAC. Dovendo gli archi AB, CB ambidue passare pel polo del cerchio, a cui appartiene l' arco AC (§ 27); sarà il punto B, in cui tali archi s' uniscono, sì fatto polo. E perciò gli archi

BA

BA, BC ſono archi di quadranti. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

44. Quindi d' un triangolo sferico ſe tutti e tre i lati ſono archi di quadranti, tutti e tre gli angoli sferici ſono retti; e ſe tutti e tre gli angoli sferici ſono retti, tutti e tre i lati ſono archi di quadranti.

COROLLARIO II.

45. Eſſendo in oltre l' arco AC miſura dell' angolo sferico ABC, qualora B è polo del cerchio, a cui l' iſteſſo arco AC s' appartiene (§ 29). Se i lati AB, BC ſono archi di quadranti, o gli angoli sferici BCA, BAC ſono retti, l' angolo sferico ABC ſarà maggiore, o minore del retto, ſecondochè il lato AC ſarà maggiore, o minore dell' arco di quadrante; e all' oppoſto il lato AC ſarà maggiore, o minore dell' arco di quadrante, ſecondochè l' angolo sferico ABC ſarà maggiore, o minore del retto.

TEOR. V.

46. *Se nel triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* A, *uno de' lati adiacenti all' angolo retto è arco di quadrante, l' angolo oppoſto a tale lato è retto; e al contrario.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Sia AB arco di quadrante. Eſſendo l' angolo in A retto, e AB arco di quadrante; ſarà B polo del cerchio, a cui l' arco AC s' appartiene. E perciò l' angolo BCA è retto (§ 27).

II. Sia retto l' angolo in C. Eſſendo i due angoli in A, e C retti; ſaranno BC, BA archi di quadranti (§ 43). E perciò arco di quadrante è il lato AB. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

AV-

AVVERTIMENTO.

47. Dell' istesso modo si dimostra essere l' angolo in B retto, se AC è arco di quadrante, ed essere AC arco di quadrante, se l' angolo in B è retto.

COROLLARIO I.

48. Sicchè in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, gli altri due angoli sono retti, se i lati opposti sono archi di quadranti; e i lati AB, AC, adiacenti all'angolo retto in A, sono archi di quadranti, se gli angoli opposti sono retti.

COROLLARIO II.

49. Essendo arco di quadrante BC, qualora B, o C è polo del cerchio, a cui appartiene AC, o AB (§ 27). Dunque se nel triangolo sferico ABC, rettangolo in A, uno de' lati AB, AC è arco di quadrante, o ambidue sono tali, ovvero uno degli angoli in C, e B è retto, o sono retti ambidue, il lato BC, opposto al retto in A, è sempre arco di quadrante.

TEOR. VI.

50. *Se nel triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* A, *uno de' lati adiacenti all' angolo retto è minore dell' arco di quadrante, l' angolo opposto a tale lato è acuto; e al contrario.* Fig.6.

DIMOSTRAZIONE.

I. Sia AB minore dell' arco di quadrante. S' intenda AB prolungato in D, finchè sia AD arco di quadrante; e s' intenda per D, e C menato l' arco CD di cerchio massimo.

Essendo l' angolo in A retto, e AD arco di quadrante; sarà D polo del cerchio, a cui appartiene AC (§ 27). Onde de l' angolo sferico DCA è retto (§ 27); e conseguentemente l' angolo sferico BCA è acuto.

II. Sia l' angolo sferico BCA acuto. S' intenda per C menato l' arco CD di cerchio massimo in modo, che l' angolo ACD sia retto; e s' intenda l' arco AB prolungato in D.

Essendo retti i due angoli DAC, DCA; saranno DA, DC archi di quadranti (§ 43). Sicchè AB è minore dell' arco di quadrante. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

51. Dell' istesso modo si dimostra essere l' angolo sferico ABC acuto, se AC è minore dell' arco di quadrante, ed essere il lato AC minore dell' arco di quadrante, se l' angolo ABC è acuto.

COROLLARIO I.

52. Quindi se in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC sono ambidue minori di archi di quadranti, gli angoli in C, e B, opposti a tali lati, sono ambidue acuti; e se tali angoli sono ambidue acuti, i lati opposti sono ambidue minori di archi di quadranti.

COROLLARIO II.

53. Supposto che i due lati AB, AC sieno minori di archi di quadranti, nel qual caso gli angoli in C, e B sono acuti, o che i due angoli in C, e B sieno acuti, nel qual' altro caso i lati AB, AC sono minori di archi di quadranti; l' angolo ADC, fatto nel polo D, è sempre acuto (§ 45). E' anche l' angolo ABC sempre acuto, e perciò sempre ottuso il suo conseguente CBD. Dunque nel triangolo sferico CBD l' angolo CDB è minore sempre di CBD. E perciò CB è sempre minore di CD. Ma, per essere D polo del cerchio, a cui appartiene AC, è CD arco di quadrante (§ 27). Sicchè CB è sempre minore dell' arco di quadrante. Per la qual cosa se in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC sono minori

nori di archi di quadranti, ovvero i due angoli in B, e C ſono acuti, l' ipotenuſa BC è ſempre minore dell' arco di quadrante.

TEOR. VII.

54. *Se nel triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* A, *uno de' lati adiacenti all' angolo retto è maggiore dell' arco di quadrante, l' angolo sferico oppoſto a tale lato è ottuſo; e al contrario.* Fig.7.

DIMOSTRAZIONE.

I. Sia AB maggiore dell' arco di quadrante. Da AB ſi tagli l' arco AD di quadrante; e s' intenda per D, e C menato l' arco CD di cerchio maſſimo.

Eſſendo l' angolo in A retto, e AD arco di quadrante; ſarà D polo del cerchio, a cui appartiene AC (§ 27). Onde l' angolo ACD è retto (§ 27); e conſeguentemente l' angolo ACB è ottuſo.

II. Sia l' angolo sferico ACB ottuſo. S' intenda per C menato l' arco CD di cerchio maſſimo in modo, che l' angolo ACD ſia retto.

Eſſendo retti i due angoli DAC, DCA, ſaranno DA, DC archi di quadranti (§ 43). Sicchè AB è maggiore dell' arco di quadrante. Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

AVVERTIMENTO.

55. Dell' iſteſſo modo ſi dimoſtra eſſere l' angolo sferico ABC ottuſo, ſe AC è maggiore dell' arco di quadrante, ed eſſere AC maggiore dell' arco di quadrante, ſe ABC è ottuſo.

COROLLARIO I.

56. Quindi ſe in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC ſono ambidue maggiori di archi di quadranti, gli angoli in C, e B, oppoſti a tali lati, ſono ambidue ottuſi; e ſe tali angoli ſono ambidue ottuſi, i lati

lati opposti sono ambidue maggiori di archi di quadranti.

COROLLARIO II.

57. Supposto che i due lati AB, AC sieno maggiori di archi di quadranti, nel qual caso gli angoli in C, e B sono ottusi, o che i due angoli in C, e B sieno ottusi, nel qual' altro caso i lati AB, AC sono maggiori di archi di quadranti; l' angolo ADC, fatto nel polo D, è sempre ottuso (§ 45); e perciò il suo conseguente CDB sempre acuto. E' anche ABC sempre ottuso. Dunque nel triangolo CBD l' angolo in D è sempre minore dell' angolo in B. E perciò CB è sempre minore di CD (§ 42). Ma, per essere D polo del cerchio, a cui appartiene AC, è CD arco di quadrante (§ 27). Sicchè CB è sempre minore dell' arco di quadrante. Per la qual cosa se in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, i due lati AB, AC sono maggiori di archi di quadranti, ovvero i due angoli in C, e B sono ottusi, l' ipotenusa BC è pure sempre minore dell' arco di quadrante.

TEOR. VIII.

Fig.8. 58. *Se nel triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* A, *il lato* AB *è maggiore, e* AC *minore dell' arco di quadrante, l' angolo sferico* ACB *è ottuso, e* ABC *è acuto; e al contrario.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Sieno AB maggiore, e AC minore dell' arco di quadrante. Tagliato l'arco AD di quadrante, e disteso AC in E, finchè AE sia arco di quadrante, s' intendano menati gli archi DC, BE di cerchi massimi.

Essendo l' angolo in A retto, e AD, AE archi di quadranti; saranno D, ed E rispettivamente poli de' cerchi, a' quali appartengono gli archi AC, AB (§ 27). Sicchè gli angoli DCA, EBA sono retti (§ 43). E perciò l' angolo ACB è ottuso, e ABC è acuto.

II.

II. Sieno l' angolo ACB ottuſo, e ABC acuto. S'intendano per gli punti B, e C menati gli archi BE, CD di cerchi maſſimi in modo, che gli angoli ABE, ACD ſieno retti.

Eſſendo retti sì gli angoli EAB, EBA, che gli angoli DAC, DCA; ſarà arco di quadrante sì AE, che AD (§ 43). Dunque AB è maggiore dell' arco di quadrante, e AC è minore. Ch'è quanto biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

59. Eſſendo D polo del cerchio, a cui appartiene l' arco AC, e AC minore dell' arco di quadrante; ſarà l' angolo ADC acuto; onde il ſuo conſeguente CDB è ottuſo. E' l' angolo CBD acuto. Dunque nel triangolo CDB l' angolo CDB è maggiore di CBD; e perciò CB è maggiore di CD (§ 42). Ma CD è arco di quadrante (§ 27). Sicchè CB è maggiore dell' arco di quadrante. Per la qual coſa ſe in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, il lato AB è maggiore dell' arco di quadrante, e 'l lato AC è minore, ovvero l' angolo ACB è ottuſo, e ABC è acuto, l' ipotenuſa BC è ſempre maggiore dell' arco di quadrante.

COROLLARIO II.

60. E perciò ſe in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, l' ipotenuſa BC è minore dell' arco di quadrante, i due lati AB, AC ſono allora o ambidue minori, o ambidue maggiori di archi di quadranti, e i due angoli ABC, ACB conſeguentemente o ambidue acuti, o ambidue ottuſi: altrimenti ſe AB foſſe maggiore, e AC minore dell' arco di quadrante, o l' angolo ACB ottuſo, e ABC acuto, l' ipotenuſa BC ſarebbe maggiore, e non minore dell' arco di quadrante (§ *prec.*). Similmente ſe in un triangolo sferico ABC, rettangolo in A, l' ipotenuſa BC è maggiore dell' arco di quadrante; degli lati AB, AC uno deve eſſere maggiore, e l' altro minore dell' arco di quadrante; e degli angoli ACB, ABC uno deve eſſere ottuſo, e l' altro acuto: altrimenti ſe i lati AB, AC foſſero o ambidue minori, o ambidue maggiori

Fig. 6, e 7.

Fig. 8.

giori

giori di archi di quadranti, o gli angoli ACB, ABC ambidue acuti, o ambidue ottusi, l' ipotenusa BC sarebbe minore, e non maggiore dell'arco di quadrante (§ 53, e 57).

TEOR. IX.

Fig. 9, e 10. *61. Se dal vertice dell' angolo* B *di qualsisia triangolo sferico* ABC *si mena l' arco* BD *di cerchio massimo, perpendicolare al lato opposto* AC; *tale arco cade dentro del triangolo, se gli angoli in* A, *e* C *sono della medesima spezie, cioè ambi acuti, o ambi ottusi, e fuori, se sono di spezie diverse.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 9. I. Sieno nel triangolo ABC gli angoli BAC, BCA ambi acuti. Se si niega cadere l' arco perpendicolare ad AC dentro del triangolo, caschi fuori, s' è possibile, e sia l' arco BE, che incontra AC prolungato in E. Essendo l' angolo BCA acuto, sarà il suo conseguente BCE ottuso. E perciò BE, come opposto nel triangolo rettangolo BEA all' angolo acuto in A, sarà minore dell' arco di quadrante (§ 50), e come opposto nel triangolo rettangolo BEC all' angolo ottuso BCE, sarà maggiore dell' arco di quadrante (§ 54). Or ciò è impossibile. Dunque è impossibile che l' arco di cerchio massimo BD, menato dal punto B perpendicolare ad AC, non caschi dentro del triangolo ABC. L' istessa è la dimostrazione, qualora gli angoli BAC, BCA sono ambidue ottusi.

Fig. 10. II. Sieno nel triangolo ABC l' angolo in A acuto, e l' angolo in C ottuso. Se si niega cadere l' arco perpendicolare ad AC fuori del triangolo, caschi dentro, s' è possibile, e sia BE. Sarà BE, come opposto nel triangolo rettangolo BEA all' angolo acuto BAE, minore dell' arco di quadrante (§ 50), e come opposto nel triangolo rettangolo BEC all' angolo ottuso BCE, maggiore dell' arco di quadrante (§ 54). Or ciò è similmente impossibile. Sicchè è impossibile che l' arco BD di cerchio massimo, perpendicolare ad AC, non caschi in tale caso fuori del triangolo ABC. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

AV-

AVVERTIMENTO.

62 Si noti che se gli angoli in A, e C sono ambidue retti: siccome il punto B è in tale caso polo del cerchio, a cui appartiene l' arco AC (§ 27); così sono perpendicolari ad A tutti gl' infiniti archi di cerchi massimi, menati da B agl' infiniti punti dell' intera periferia, di cui l' arco AC è parte. Fig. 9.

TEOR. X.

63. *In ogni triangolo sferico* ABC *la somma di due angoli* BCA, BAC *è maggiore, uguale, o minore di due retti, secondochè la somma de' lati opposti* AB, BC *è maggiore, uguale, o minore della mezza periferia; e al contrario.* Fig. 11.

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano prolungati gli archi AB, AC, finchè s' interſechino in D. Sarà ABD una mezza periferia (§ 3); e sarà l' angolo in D uguale all' angolo in A (§ 28).

I. Secondochè la somma di AB, BC è maggiore, uguale, o minore di ABD; così BC è maggiore, uguale, o minore di BD, e conseguentemente l' angolo in D è maggiore, uguale, o minore dell' angolo BCD. Sicchè secondochè la somma de' lati AB, BC è maggiore, uguale, o minore della mezza periferia; così l' angolo in A è maggiore, uguale, o minore dell' angolo BCD, e conseguentemente la somma degli angoli BAC, BCA è maggiore, uguale, o minore della somma degli angoli BCD, BCA, o sia di due retti (§ 25).

II. In oltre secondochè la somma degli angoli BAC, BCA è maggiore, uguale, o minore di due retti, o sia della somma degli angoli BCD, BCA; così l' angolo in A è maggiore, uguale, o minore dell' angolo BCD. Sicchè secondochè la somma degli angoli BAC, BCA è maggiore, uguale, o minore di due retti; così l' angolo in D è maggiore, uguale, o minore dell' angolo BCD; e perciò BC è mag-

maggiore, uguale, o minore di BD, e conseguentemente la somma de' lati AB, BC è maggiore, uguale, o minore di ABD, o sia della mezza periferia. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

TEOR. XI.

64. *In qualunque triangolo sferico ogni angolo è minore di due retti, e tutti e tre insieme sono sempre minori di sei retti, e maggiori di due.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo ogni angolo di qualunque triangolo sferico, una col suo conseguente esterno uguale a due retti (§ 25). Sarà ogni angolo di qualunque triangolo sferico minore di due retti; e conseguentemente tutti e tre insieme minori di sei retti.

Contrassegni in oltre ABC qualunque triangolo sferico; e s' intendano gli archi AB, AC prolungati, finchè s' intersechino in D.

Se la somma degli angoli BAC, BCA è uguale, o maggiore di due retti. E' chiaro essere la somma degli tre angoli in A, B, e C del triangolo maggiore di due angoli retti. Se poi la somma degli angoli BAC, BCA è minore di due retti; sarà in tale caso l' angolo BAC minore dell' esterno BCD. S' intenda da C menato l' arco CE in modo, che l' angolo ECD sia uguale a BAC. Sarà la somma degli angoli EAC, ECA uguale a due retti. E perciò la somma de' lati AE, EC uguaglierà la mezza periferia (§ 63); e conseguentemente la somma di BE, EC sarà minore della mezza periferia. E quindi la somma degli angoli EBC, ECB sarà minore di due retti (§ 63). Per la qual cosa l' angolo ABC sarà maggiore di ECB, e conseguentemente la somma degli tre angoli ABC, BCA, BAC sarà maggiore della somma degli EAC, ECA, o sia di due retti. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

CA-

C A P. II.

Si premettono alcuni principj teoretici risguardanti i coseni della somma, e della differenza di due angoli piani, o di due archi circolari.

T E O R. XII.

65. *Sieno* LOM *un quadrante circolare, e* MG, CD *due archi qualunque. Dico che, mettendo l' arco* DC $=$ A, CM $=$ B, *e 'l raggio, o sia seno massimo* $=$ R, sarà Fig.12.

$$cos.\,(A+B) = \frac{cos.\,A \times cos.\,B - sen.\,A \times sen.\,B}{R}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Si tiri il raggio OC, e da C, e D si calino CE, DG, DF perpendicolari le due prime su OM, e la terza su OG. Saranno i tre triangoli CEO, HGO, DFH simili tra essi; e saranno altresì DF $=$ *sen.* A, OF $=$ *cos.* A, CE $=$ *sen.* B, OE $=$ *cos.* B, DG $=$ *sen.* (A + B), e OG $=$ *cos.* (A + B). Essendo

$$OE : EC = DF : FH,$$

ovvero

$$cos.\,B : sen.\,B = sen.\,A : FH.$$

D Sarà

Sarà

$$FH = \frac{sen.\ A \times sen.\ B}{cos.\ B};$$

onde

$$OH = OF - FH = cos.\ A - \frac{sen.\ A \times sen.\ B}{cos.\ B} = \frac{cos.\ A \times cos.\ B - sen.\ A \times sen.\ B}{cos.\ B}.$$

E' in oltre

$$OC : OE = OH : OG,$$

ovvero

$$R : cos.\ B = \frac{cos.\ A \times cos.\ B - sen.\ A \times sen.\ B}{cos.\ B} : cos.\ (A + B).$$

Dunque

$$cos.\ (A + B) = \frac{cos.\ A \times cos.\ B - sen.\ A \times sen.\ B}{R}.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

TEOR. XIII.

66. *Sieno* LOM *un quadrante circolare, e* MD, MC *due archi disuguali. Dico che, mettendo l'arco* DM $= A$, MC $= B$, *e'l raggio, o sia seno massimo* $= R$, *sarà*

$$cos.\ (A - B) = \frac{cos.\ A \times cos.\ B + sen.\ A \times sen.\ B}{R}.$$

DI-

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda fatta l' isteſſa preparazione del teorema prec.; saranno DG $=$ *ſen.* A, OG $=$ *coſ.* A, CE $=$ *ſen.* B, OE $=$ *coſ.* B, DF $=$ *ſen.* (A—B) $=$

$$\frac{sen.\ A \times cos.\ B - sen.\ B \times cos.\ A}{R}$$ (§ 37 *della Trig. pian.*),

ed OF $=$ *coſ.* (A—B). Eſſendo

$$OE : EC = DF : FH,$$

ovvero

$$cos.\ B : sen.\ B = \frac{sen.\ A \times cos.\ B - sen.\ B \times cos.\ A}{R} : FH.$$

Sarà

$$FH = \frac{sen.\ A \times sen.\ B}{R} - \frac{(sen.\ B)^2 \times cos.\ A}{R \times cos.\ B}.$$

E' in oltre

$$OE : OG = OG : OH,$$

ovvero

$$cos.\ B : R = cos.\ A : OH.$$

Sicchè

$$OH = \frac{R \times cos.\ A}{cos.\ B} = \frac{R^2 \times cos.\ A}{R \times cos.\ B} =$$

$$\frac{((sen.\ B)^2 + (cos.\ B)^2)\,cos.\ A}{R \times cos.\ B} = \frac{(sen.\ B)^2 \times cos.\ A}{R \times cos.\ B} + \frac{cos.\ A \times cos.\ B}{R}.$$

Per

Per la qual cosa

$$cos.(A-B) = OF = \frac{(sen.\,B)^2 \times cos.\,A}{R \times cos.\,B} + \frac{cos.\,A \times cos.\,B}{R}$$
$$+ \frac{sen.\,A \times sen.\,B}{R} - \frac{(sen.\,B)^2 \times cos.\,A}{R \times cos.\,B} =$$
$$\frac{cos.\,A \times cos.\,B + sen.\,A \times sen.\,B}{R}.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

67. Essendo

$$cos.(A-B) = \frac{cos.\,A \times cos.\,B + sen.\,A \times sen.\,B}{R},$$
$$cos.(A+B) = \frac{cos.\,A \times cos.\,B - sen.\,A \times sen.\,B}{R};$$

saranno

$$cos.(A-B) + cos.(A+B) = \frac{2(cos.\,A \times cos.\,B)}{R},$$
$$cos.(A-B) - cos.(A+B) = \frac{2(sen.\,A \times sen.\,B)}{R},$$

e conseguentemente

$$\tfrac{1}{2}R\big(cos.(A-B) + cos.(A+B)\big) = cos.\,A \times cos.\,B;$$
$$\tfrac{1}{2}R\big(cos.(A-B) - cos.(A+B)\big) = sen.\,A \times sen.\,B.$$

Or tali due ultime formole, poste $A+B = P$, e $A-B = Q$

$= Q$, e conseguentemente $A = \frac{P+Q}{2}$, e $B = \frac{P-Q}{2}$, si trasmutano nelle seguenti

$$\tfrac{1}{2}R\,(\cos. Q + \cos. P) = \cos. \frac{P+Q}{2} \times \cos. \frac{P-Q}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}R\,(\cos. Q - \cos. P) = \text{sen}. \frac{P+Q}{2} \times \text{sen}. \frac{P-Q}{2}.$$

COROLLARIO II.

68. Quindi sarà

$$\frac{\cos. Q + \cos. P}{\cos. Q - \cos. P} = \frac{\cos. \frac{P+Q}{2} \times \cos. \frac{P-Q}{2}}{\text{sen}. \frac{P+Q}{2} \times \text{sen}. \frac{P-Q}{2}}.$$

Ma essendo

$$\cos. \frac{P \pm Q}{2} : \text{sen}. \frac{P \pm Q}{2} = R : \text{tang}. \frac{P \pm Q}{2};$$

sarà

$$\frac{\cos. \frac{P \pm Q}{2}}{\text{sen}. \frac{P \pm Q}{2}} = \frac{R}{\text{tang}. \frac{P \pm Q}{2}};$$

E perciò

$$\frac{\cos. Q + \cos. P}{\cos. Q - \cos. P} = \frac{R^2}{\text{tang}. \frac{P+Q}{2} \times \text{tang}. \frac{P-Q}{2}};$$

Ed

Ed essendo di più

$$tang. \frac{P+Q}{2} : R == R : cotang. \frac{P+Q}{2},$$

e conseguentemente

$$\frac{R}{tang. \frac{P+Q}{2}} == \frac{cotang. \frac{P+Q}{2}}{R}.$$

Dunque

$$\frac{cos. Q + cos. P}{cos. Q -- cos. P} == \frac{cotang. \frac{P+Q}{2}}{tang. \frac{P-Q}{2}}.$$

COROLLARIO III.

69. Si è dimostrato nel § 40 della Trig. pia. essere

$$\tfrac{1}{2} R\left(sen. (A+B) + sen. (A-B)\right) == sen. A \times cos. B,$$

$$\tfrac{1}{2} R\left(sen. (A+B) - sen. (A-B)\right) == sen. B \times cos. A.$$

Dunque, poste pure $A+B == P$, $A-B == Q$, e conseguentemente $A == \frac{P+Q}{2}$, $B == \frac{P-Q}{2}$, s'avranno

$$\tfrac{1}{2} R\,(sen. P + sen. Q) == sen. \frac{P+Q}{2} \times cos. \frac{P-Q}{2},$$

$$\tfrac{1}{2} R\,(sen. P - sen. Q) == sen. \frac{P-Q}{2} \times cos. \frac{P+Q}{2}.$$

COROLLARIO IV.

70. E perciò sarà

$$\frac{sen.\,P + sen.\,Q}{sen.\,P - sen.\,Q} = \frac{sen.\,\frac{P+Q}{2} \times cos.\,\frac{P-Q}{2}}{cos.\,\frac{P+Q}{2} \times sen.\,\frac{P-Q}{2}};$$

Or

$$\frac{sen.\,\frac{P+Q}{2}}{cos.\,\frac{P+Q}{2}} = \frac{tang.\,\frac{P+Q}{2}}{R},$$

$$\frac{cos.\,\frac{P-Q}{2}}{sen.\,\frac{P-Q}{2}} = \frac{R}{tang.\,\frac{P-Q}{2}}.$$

Sicchè

$$\frac{sen.\,P + sen.\,Q}{sen.\,P - sen.\,Q} = \frac{tang.\,\frac{P+Q}{2}}{tang.\,\frac{P-Q}{2}};$$

CAP.

CAP. III.

Delle proporzioni, che nascono dagli seni, dalle tangenti, ec. degli angoli de' triangoli sferici rettangoli, paragonati co' seni, colle tangenti, ec. de' lati di essi.

TEOR. XIV.

Fig. 13. 71. *Sia* ABC *un triangolo sferico, rettangolo in* A. *Dico* 1º *che il seno massimo sta al seno dell' ipotenusa, come il seno d' un angolo obbliquo al seno del lato opposto al medesimo angolo; 2º che il seno massimo sta alla tangente dell' ipotenusa, come il coseno d' un angolo obbliquo alla tangente del lato adiacente al medesimo angolo; e 3º che il seno massimo sta alla tangente d' un angolo obbliquo, come il seno del lato adiacente al medesimo angolo alla tangente del lato opposto.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano dal centro O della sfera tirati i tre raggi OA, OB, OC. Saranno i tre archi AB, BC, CA misure degli tre angoli rettilinei AOB, BOC, COA. S' intendano di più nel settore AOB dal punto B tirata BP perpendicolare ad AO, nel settore AOC dal punto P tirata PQ perpendicolare ad OC, e congiunta la retta BQ. Sarà BP seno dell' arco AB; ed essendo l' angolo BAC retto, e conseguentemente il settore AOB perpendicolare al settore AOC (§ 26), l' istessa BP è perpendicolare al settore AOC; onde l' angolo BPQ è retto (§ 4 *del tom.* 4), e 'l triangolo retti-

rettilineo BPQ è anche perpendicolare al settore AOC (§ 67 *del tom.* 4). E perciò OQ, come perpendicolare a PQ, è perpendicolare al triangolo BPQ, e conseguentemente alla retta BQ (§ 4 *del tom.* 4). Per la qual cosa BQ è seno dell'arco BC, e l'angolo rettilineo BQP, come angolo d'inclinazione de' due settori BOC, AOC, è uguale all'angolo sferico ACB (§ 26).
Si metta il seno massimo $=$ R.

I.

Essendo

$$BQ : BP = \mathit{sen.}\ BC : \mathit{sen.}\ AB,$$

e pel triangolo rettangolo BPQ,

$$\begin{aligned} BQ : BP &= R : \mathit{sen.}\ BQP \\ &= R : \mathit{sen.}\ BCA. \end{aligned}$$

Sarà

$$R : \mathit{sen.}\ BC = \mathit{sen.}\ BCA : \mathit{sen.}\ AB.$$

Similmente si dimostra essere

$$R : \mathit{sen.}\ BC = \mathit{sen.}\ CBA : \mathit{sen.}\ AC.$$

II.

Essendo in oltre, presa OQ per raggio, QB tangente dell'angolo BOC, e PQ tangente dell'angolo AOC. Dunque

$$\begin{aligned} BQ : PQ &= \mathit{tang.}\ BOC : \mathit{tang.}\ AOC \\ &= \mathit{tang.}\ BC : \mathit{tang.}\ AC. \end{aligned}$$

Ma pel triangolo rettangolo BPQ è pure

$$\begin{aligned} BQ : PQ &= R : \mathit{cos.}\ BQP \\ &= R : \mathit{cos.}\ BCA. \end{aligned}$$

Sicchè

$$R : tang.\ BC = cos.\ BCA : tang.\ AC.$$

Similmente si dimostra essere

$$R : tang.\ BC = cos.\ CBA : tang.\ AB.$$

III.

Essendo finalmente, presa OP per raggio, PQ seno dell' angolo AOC, e BP tangente dell' angolo AOB. Dunque

$$\begin{aligned} QP : PB &= sen.\ AOC : tang.\ AOB \\ &= sen.\ AC : tang.\ AB. \end{aligned}$$

Ma pel triangolo rettangolo BPQ è anche

$$\begin{aligned} QP : PB &= R : tang.\ BQP \\ &= R : tang.\ BCA. \end{aligned}$$

Sicchè

$$R : tang.\ BCA = sen.\ AC : tang.\ AB.$$

Similmente si dimostra essere

$$R : tang.\ CBA = sen.\ AB : tang.\ AC.$$

Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

72. Quindi, posta di qualunque triangolo sferico, chè ha un angolo retto, l'ipotenusa = I, e posti qualunque degli angoli obbliqui = A, il lato opposto a un angolo obbliquo = L, e 'l lato adiacente = L'', s'avranno le tre seguenti proporzioni:

R :

$$R : \mathit{sen.}\ I == \mathit{sen.}\ A : \mathit{sen.}\ L\ ,$$
$$R : \mathit{tang.}\ I == \mathit{cos.}\ A : \mathit{tang.}\ L'',$$
$$R : \mathit{tang.}\ A == \mathit{sen.}\ L'' : \mathit{tang.}\ L\ .$$

COROLLARIO II.

73. Essendo R : *sen.* I == *sen.* A : *sen.* L ; saranno

$$\mathit{sen.}\ I == \frac{R \times \mathit{sen.}\ L}{\mathit{sen.}\ A},$$
$$\mathit{sen.}\ A == \frac{R \times \mathit{sen.}\ L}{\mathit{sen.}\ I},$$
$$\mathit{sen.}\ L == \frac{\mathit{sen.}\ I \times \mathit{sen.}\ A}{R}.$$

Sicchè delle tre grandezze I, A, L, cioè dell'ipotenusa, d'un angolo obbliquo, e del lato opposto al medesimo angolo, datene due qualunque, si determina la terza; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni di tre casi del probl., che insegna a sciorre la Trigonometria relativamente agli triangoli rettangoli.

COROLLARIO III.

74. Essendo in oltre R : *tang.* I == *cos.* A : *tang.* L''; saranno

$$\mathit{tang.}\ I == \frac{R \times \mathit{tang.}\ L''}{\mathit{cos.}\ A},$$
$$\mathit{cos.}\ A == \frac{R \times \mathit{tang.}\ L''}{\mathit{tang.}\ I},$$
$$\mathit{tang.}\ L'' == \frac{\mathit{tang.}\ I \times \mathit{cos.}\ A}{R}.$$

Quindi delle tre grandezze I, A, L'', cioè dell'ipotenusa, d'un angolo obbliquo, e del lato adiacente al medesimo an-

angolo, datene due qualunque, si determina la terza; e sì fatte determinazioni costituiscono le soluzioni di tre altri casi del detto probl..

COROLLARIO IV.

75. Essendo finalmente R : *tang.* A == *sen.* L'' : *tang.* L; saranno

$$tang.\ A == \frac{R \times tang.\ L}{sen.\ L''},$$

$$sen.\ L'' == \frac{R \times tang.\ L}{tang.\ A},$$

$$tang.\ L == \frac{tang.\ A \times sen.\ L''}{R}.$$

Dunque delle tre grandezze A, L, L'', cioè d'un angolo obbliquo, del lato opposto al medesimo angolo, e del lato adiacente, datene due qualunque, si determina la terza; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni di tre altri casi dell'anzidetto probl.

AVVERTIMENTO.

76. Nel triangolo sferico rettangolo le parti, ch' esigono d'essere secondo il bisogno or l'una, or l'altra determinate, per l'angolo retto già noto, sono cinque, cioè i tre lati, e i due angoli obbliqui; e si determina ciascuna di esse coll'ajuto d'una proporzione, in cui si trova ella combinata con due altre note, e conseguentemente date. Or tutte le combinazioni a tre a tre di sì fatte cinque parti, si riducono alle sei seguenti, cioè alle combinazioni 1º dell' ipotenusa, d'un angolo obbliquo, e del lato opposto al medesimo angolo; 2º dell'ipotenusa, d'un angolo obbliquo, e del lato adiacente all'istesso angolo; 3º d'un angolo obbliquo, e degli due lati; 4º dell' ipotenusa, e degli stessi due lati; 5º d'un lato, e degli due angoli obbliqui; e 6º finalmente dell'ipotenusa, e degli stessi due angoli obbliqui. Somministrando intanto ognuna di sì fatte combinazioni, com-

presa

presa in una proporzione, la soluzione di tre casi del probl., che insegna la Trigonometria a sciorre relativamente agli triangoli rettangoli; tutt'i casi di sì fatto probl. debbono essere 18. Ad ogni modo si riducono a 16; perchè tanto nella combinazione dell'ipotenusa, e degli due lati, quanto nell'altra dell'ipotenusa, e degli due angoli obbliqui, i casi da sciorre sono realmente due, e non tre; valendo l'istesso per riguardo della prima il determinare l'un lato, che l'altro, e per riguardo della seconda il determinare l'un angolo obbliquo, che l'altro. Esposte intanto le tre proporzioni, comprendenti tre delle riferite combinazioni, conviene esporne tre altre, comprendenti le tre rimanenti combinazioni; acciò coll'ajuto di tutte le sei proporzioni, comprendenti le dette sei combinazioni, si possa sciorre relativamente agli triangoli rettangoli il suddetto probl. in tutt'i casi possibili. Perciò sia il

TEOR. XV.

77. *Sia l'istesso triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* A. *Dico* 1º *che il seno massimo sta al coseno d'un lato, come il coseno dell'altro lato al coseno dell'ipotenusa;* 2º *che il seno massimo sta al seno d'un angolo obbliquo, come il coseno del lato adiacente al medesimo angolo al coseno dell'altr'angolo obbliquo; e* 3º *finalmente che il seno massimo sta alla tangente d'un angolo obbliquo, come il coseno dell'ipotenusa alla contangente dell'altr'angolo obbliquo.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intendano gli archi CA, CB prolungati in F, e D, finchè CF, CD sieno quadranti; e per F, e D s'intenda menato l'arco FE di cerchio massimo, che interseca AB prolungato in E. Saranno gli angoli in F, e D retti (§ 43); e sarà FD misura dell'angolo ACB (§ 29). Ed essendo retti gli angoli EFA, EAF, saranno EA, EF archi di quadranti (§ 43), ed AF misura dell'angolo AEF (§ 29). Sicchè del triangolo sferico BDE, rettangolo in D, il lato BD manca dall'arco di quadrante per BC, l'ipotenusa BE man-

manca pure dall' arco di quadrante per AB, e 'l lato DE manca anche dall' arco di quadrante per FD, che misura l' angolo sferico in C.

Si metta il seno massimo $= R$.

I.

Essendo per la 1ª parte del teor. prec.

$$R : sen.\ BE = sen.\ DEB : sen.\ BD.$$

Ed essendo

$$sen.\ BE = cos.\ AB,$$
$$sen.\ DEB = sen.\ AF = cos.\ AC,$$
$$sen.\ BD = cos.\ BC.$$

Sarà

$$R : cos.\ AB = cos.\ AC : cos.\ BC.$$

II.

Essendo pure per la 1ª part. del teor. prec.

$$R : sen.\ DBE = sen.\ BE : sen.\ DE.$$

Ed essendo

l' angolo $DBE = ABC$ (§ 25),
$$sen.\ BE = cos.\ AB,$$
$$sen.\ DE = cos.\ FD = cos.\ ACB:$$

Sarà

$$R : sen.\ ABG = cos.\ AB : cos.\ ACB.$$

Simil-

Similmente ſi dimoſtra eſſere

$$R : \mathit{sen.}\ ACB = \mathit{cos.}\ AC : \mathit{cos.}\ ABC.$$

III.

Eſſendo finalmente per la 3ª parte del teor. prec.

$$R : \mathit{tang.}\ DBE = \mathit{sen.}\ BD : \mathit{tang.}\ DE.$$

Ed eſſendo

l'angolo $DBE = ABC$,
$\mathit{sen.}\ BD = \mathit{cos.}\ BC$,
$\mathit{tang.}\ DE = \mathit{cotang.}\ FD = \mathit{cotang.}\ ACB$.

Sarà

$$R : \mathit{tang.}\ ABC = \mathit{cos.}\ BC : \mathit{cotang.}\ ACB.$$

Similmente ſi dimoſtra eſſere

$$R : \mathit{tang.}\ ACB = \mathit{cos.}\ BC : \mathit{cotang.}\ ABC.$$

Ch' è quanto biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

78. Quindi, poſta di qualunque triangolo sferico, che ha un angolo retto, l' ipotenuſa $= I$, e poſti uno degli angoli obbliqui $= A$, l' altro $= A''$, il lato oppoſto all' angolo $A = L$, e 'l lato adiacente $= L''$; s' avranno le tre ſeguenti proporzioni:

$$R : \mathit{cos.}\ L = \mathit{cos.}\ L'' : \mathit{cos.}\ I,$$

R : ſen.

$$R : \mathit{sen.}\ A = \mathit{cos.}\ L'' : \mathit{cos.}\ A'',$$
$$R : \mathit{tang.}\ A = \mathit{cos.}\ I : \mathit{cotang.}\ A''.$$

COROLLARIO II.

79. Essendo $R : \mathit{cos.}\ L = \mathit{cos.}\ L'' : \mathit{cos.}\ I$; sara nno

$$\mathit{cos.}\ L = \frac{R \times \mathit{cos.}\ I}{\mathit{cos.}\ L''},$$
$$\mathit{cos.}\ L'' = \frac{R \times \mathit{cos.}\ I}{\mathit{cos.}\ L},$$
$$\mathit{cos.}\ I = \frac{\mathit{cos.}\ L \times \mathit{cos.}\ L''}{R}.$$

Delle quali formole le due prime non differiscono realmente tra esse; perchè, non avendo in esse i lati del triangolo rapporto ad angoli, è indifferente che L esprima l'uno, o l'altro di tali lati. Quindi delle tre grandezze I, L, L'', cioè dell'ipotenusa, e de' due lati, data l'ipotenusa, e dato uno de' lati, si determina l'altro lato, e dati i due lati, si determina l'ipotenusa; e tali determinazioni costituiscono le soluzioni di due altri casi del probl., che insegna a sciorre la Trigonometria relativamente agli angoli rettangoli.

COROLLARIO III.

80. Essendo in oltre $R : \mathit{sen.}\ A = \mathit{cos.}\ L'' : \mathit{cos.}\ A''$; saranno

$$\mathit{sen.}\ A = \frac{R \times \mathit{cos.}\ A''}{\mathit{cos.}\ L''},$$
$$\mathit{cos.}\ L'' = \frac{R \times \mathit{cos.}\ A''}{\mathit{sen.}\ A}.$$
$$\mathit{cos.}\ A'' = \frac{\mathit{sen.}\ A \times \mathit{cos.}\ L''}{R}.$$

Quindi delle tre grandezze A, L'', A'', cioè d'un angolo obbli-

quo,

quo, del lato adiacente all' isteſſo angolo, e dell' altr' angolo obbliquo, datene due qualunque, ſi determina la terza; e s fatte determinazioni coſtituiſcono le ſoluzioni di tre altri caſi dell' anzidetto probl.

COROLLARIO IV.

81. Eſſendo finalmente R : *tang.* A == *coſ.* I : *cotang.* A''; ſaranno

$$tang.\ A = \frac{R \times cotang.\ A''}{cos.\ I},$$

$$cos.\ I = \frac{R \times cotang.\ A''}{tang.\ A},$$

$$cotang.\ A'' = \frac{tang.\ A \times cos.\ I}{R}.$$

Delle quali formole tanto la prima, quanto l' ultima ci mena alla determinazione d' ambi gli angoli obbliqui; perchè non avendo in eſſe gli angoli obbliqui rapporto agli lati, è indifferente che A eſprima l' uno, o l' altro di sì fatti angoli: onde tali due formole equivalgono a una, menandoci alle medeſime determinazioni, ſebbene per vie diverſe. E quindi delle tre grandezze I, A, A'', cioè dell' ipotenuſa, e degli due angoli obbliqui, data l' ipotenuſa, e dato uno degli angoli obbliqui, ſi determina l' altro angolo obbliquo; e, dati i due angoli obbliqui, ſi determina l' ipotenuſa; e tali determinazioni coſtituiſcono le ſoluzioni degli ultimi due caſi del detto problema relativamente agli triangoli ſferici rettangoli.

AVVERTIMENTO I.

82. S' intendano compiti i mezzi cerchi CAH, CBH; s' avrà il triangolo ſferico B A H, rettangolo in A, coll' angolo obbliquo A H B == A C B (§ 28). Onde i triangoli B A C, BAH, rettangoli ambidue in A, hanno il lato comune A B,

ed uguali gli angoli ACB, AHB oppoſti a tale lato. Sicchè ſe nel triangolo rettangolo ſaranno dati il lato AB, e l' angolo oppoſto, e in conſeguenza di tali dati ſi cercherà ciaſcuna delle parti rimanenti: come i dati appartengono sì al triangolo BAC, che al triangolo BAH; così le parti, che vengono determinate, poſſono appartenere sì all' uno, che all' altro triangolo. E perciò ſi poſſono determinare per ipotenuſa sì BC, che il ſuo complimento BH alla mezza periferia; per l' altro lato sì AC, che il ſuo complimento AH alla mezza periferia; e per l' altr' angolo obbliquo sì ABC, che il ſuo conſeguente ABH. Quindi i tre caſi del detto probl. relativamente agli triangoli rettangoli, qualora i dati ſono un lato, e l' angolo oppoſto, ſi dicono *caſi ambigui;* e conviene badarvi, acciò non ſi prendano per le parti cercate quelle, che non corriſpondono al biſogno.

AVVERTIMENTO II.

83. Ecco eſpoſto quanto biſogna per iſciorre relativamente agli triangoli sferici rettangoli in tutt' i caſi poſſibili il probl., che inſegna la Trigonometria a ſciorre. Reſta che s' eſponga quanto è neceſſario per poter iſciorre in tutt' i caſi poſſibili l' iſteſſo probl. relativamente a' triangoli sferici obbliquangoli. Perciò ſoggiugniamo il ſeguente

CAP.

CAP. IV.

Delle proporzioni, che nascono dagli seni, dalle tangenti, ec. degli angoli de' triangoli sferici obbliquangoli, paragonati co' seni, colle tangenti, ec. de' lati di essi.

TEOR. XVI.

84. *Sia* ABC *qualunque triangolo sferico obbliquangolo*, *e* BD *sia l'arco di cerchio massimo, menato dal punto* B *perpendicolare ad* AC. *Dico* 1° *che i seni degli angoli del triangolo* ABC *sono tra essi nella ragione de' seni de' lati opposti*; 2° *che i coseni degli angoli* ABD, CBD *sono nella ragione delle tangenti degli archi* BC, BA; *e* 3° *che le tangenti degli angoli in* A, *e* C *sono nella ragione de' seni degli archi* CD, DA. Fig. 14, e 15.

DIMOSTRAZIONE.

I.

Essendo pel § 71

$$R : sen.\ AB = sen.\ BAC : sen.\ BD,$$
$$R : sen.\ BC = sen.\ BCA : sen.\ BD.$$

Saranno

$$R \times sen.\ BD = sen.\ AB \times sen.\ BAC,$$
$$R \times sen.\ BD = sen.\ BC \times sen.\ BCA.$$

 On.

Onde

$$\text{sen. } AB \times \text{sen. } BAC = \text{sen. } BC \times \text{sen. } ACB.$$

E perciò

$$\text{sen. } AB : \text{sen. } BC = \text{sen. } ACB : \text{sen. } BAC.$$

Similmente si dimostra essere

$$\text{sen. } AB : \text{sen. } AC = \text{sen. } ACB : \text{sen. } ABC,$$
$$\text{sen. } AC : \text{sen. } BC = \text{sen. } ABC : \text{sen. } BAC.$$

II.

Essendo in oltre pel § 71

$$R : \text{cos. } ABD = \text{tang. } AB : \text{tang. } BD,$$
$$R : \text{cos. } CBD = \text{tang. } BC : \text{tang. } BD.$$

Saranno

$$R \times \text{tang. } BD = \text{cos. } ABD \times \text{tang. } AB,$$
$$R \times \text{tang. } BD = \text{cos. } CBD \times \text{tang. } BC.$$

Dunque

$$\text{cos. } ABD \times \text{tang. } AB = \text{cos. } CBD \times \text{tang. } BC.$$

E perciò

$$\text{cos. } ABD : \text{cos. } CBD = \text{tang. } BC : \text{tang. } AB.$$

III.

III.

Essendo finalmente pel § 71

$$R : tang.\ BAC = sen.\ AD : tang.\ BD,$$
$$R : tang.\ BCA = sen.\ CD : tang.\ BD.$$

Saranno

$$R \times tang.\ BD = sen.\ AD \times tang.\ BAC,$$
$$R \times tang.\ BD = sen.\ CD \times tang.\ BCA.$$

Sicchè

$$sen.\ AD \times tang.\ BAC = sen.\ CD \times tang.\ BCA.$$

E quindi

$$tang.\ BAC : tang.\ BCA = sen.\ CD : sen.\ AD.$$

Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

85. Essendo

$$sen.\ A : sen.\ B = sen.\ BC : sen.\ AC,$$
$$sen.\ A : sen.\ C = sen.\ BC : sen.\ AB,$$
$$sen.\ B : sen.\ C = sen.\ AC : sen.\ AB.$$

S' avranno

$$1. \quad sen.\ A = \begin{cases} \dfrac{sen.\ B \times sen.\ BC}{sen.\ AC} \\[2ex] \dfrac{sen.\ C \times sen.\ BC}{sen.\ AB} \end{cases}$$

$$2. \quad sen.\ B = \begin{cases} \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AC}{sen.\ BC} \\[2ex] \dfrac{sen.\ C \times sen.\ AC}{sen.\ AB} \end{cases}$$

$$3. \quad sen.\ C = \begin{cases} \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AB}{sen.\ BC} \\[2ex] \dfrac{sen.\ B \times sen.\ AB}{sen.\ AC} \end{cases}$$

$$4. \quad sen.\ AB = \begin{cases} \dfrac{sen.\ C \times sen.\ BC}{sen.\ A} \\[2ex] \dfrac{sen.\ C \times sen.\ AC}{sen.\ B} \end{cases}$$

$$5. \quad sen.\ BC = \begin{cases} \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AC}{sen.\ B} \\[2ex] \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AB}{sen.\ C} \end{cases}$$

sen.

$$6. \quad sen.\, AC = \begin{cases} \dfrac{sen.\, B \times sen.\, BC}{sen.\, A} \\ \dfrac{sen.\, B \times sen.\, AB}{sen.\, C} \end{cases}$$

TEOR. XVII.

86. *Sia l'istesso, che s'è supposto nel teorema precedente. Dico* 1°. *che i coseni degli archi* AD, DC *sono nella ragione de' coseni de' lati* AB, BC; *e* 2°. *che i seni degli angoli* ABD, CBD *sono nella ragione de' coseni degli angoli* BAD, BCD.

DIMOSTRAZIONE.

I.

Essendo pel § 77

$$R : cos.\, BD = cos.\, AD : cos.\, AB,$$
$$R : cos.\, BD = cos.\, DC : cos.\, BC.$$

Sarà

$$cos.\, AD : cos.\, DC = cos.\, AB : cos.\, BC.$$

II.

Essendo in oltre pel § 77

$$R : cos.\, BD = sen.\, ABD : cos.\, BAD,$$
$$R : cos.\, BD = sen.\, CBD : cos.\, BCD.$$

Sa-

Sarà

$$sen.\ ABD : sen.\ CBD = cos.\ BAD : cos.\ BCD.$$

Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

87. Essendo

$$cos.\ AD : cos.\ CD = cos.\ AB : cos.\ BC.$$

Sarà

$$cos.\ BC = \frac{cos.\ AB \times cos.\ CD}{cos.\ AD}.$$

Ma

$$cos.\ CD = cos.\ \pm (AC - AD) =$$

$$\frac{cos.\ AC \times cos.\ AD + sen.\ AC \times sen.\ AD}{R} \quad (\S\ 66).$$

Dunque

$$cos.\ BC =$$

$$\frac{cos.\ AB \times cos.\ AC \times cos.\ AD + cos.\ AB \times sen.\ AC \times sen.\ AD}{R \times cos.\ AD}$$

$$= \frac{cos.\ AB \times cos.\ AC}{R} + \frac{cos.\ AB \times sen.\ AC}{R} \times \frac{sen.\ AD}{cos.\ AD}$$

$$= \frac{R \times cos.\ AB \times cos.\ AC + cos.\ AB \times sen.\ AC \times tang.\ AD}{R^2}.$$

Es-

Essendo di più pel § 71

$$R : tang.\ AB = cos.\ A : tang.\ AD.$$

Sarà

$$tang.\ AD = \frac{cos.\ A}{R} \times tang.\ AB = \frac{cos.\ A \times sen.\ AB}{cos.\ AB}.$$

Sicchè

$$cos.\ BC =$$

$$\frac{R \times cos.\ AB \times cos.\ AC + cos.\ A \times sen.\ AC \times sen.\ AB}{R^2}.$$

Per la qual cosa

$$cos.\ A =$$

$$\frac{R^2 \times cos.\ BC - R \times cos.\ AB \times cos.\ AC}{sen.\ AC \times sen.\ AB}.$$

COROLLARIO II.

88. Essendo in oltre pel § 86

$$sen.\ CBD : sen.\ ABD = cos.\ DCB : cos.\ BAD.$$

Sarà

$$cos.\ BAD = \frac{cos.\ DCB \times sen.\ ABD}{sen.\ CBD}.$$

 Ma

Ma

$$sen.\ ABD = sen.\ (ABC \mp CBD) =$$

$$\frac{sen.\ ABC \times cos.\ CBD \mp sen.\ CBD \times cos.\ ABC}{R}.$$

Dunque

$$cos.\ BAD = cos.\ A =$$

$$\frac{sen. ABC \times cos. DCB \times cos. CBD \mp sen.\ CBD \times cos.\ DCB \times cos. ABC.}{R \times sen.\ CBD}$$

$$= \frac{sen.\ ABC \times cos.\ DCB}{tang.\ CBD} \mp \frac{cos.\ DCB \times cos.\ ABC}{R}.$$

Essendo di più pel § 77

$$R : tang.\ CBD = cos.\ BC : cotang.\ DCB,$$

ovvero

$$R : tang.\ CBD = cos.\ BC : \frac{R \times cos.\ DCB}{sen.\ DCB}.$$

Sarà

$$tang.\ CBD = \frac{R^2 \times cos.\ DCB}{sen.\ DCB \times cos.\ BC}.$$

Sic-

Sicchè

$$cos.\ A =$$

$$\frac{sen.\ ABC \times sen.\ DCB \times cos.\ BC}{R^2} \mp \frac{cos.\ DCB \times cos.\ ABC}{R}$$

$$= \frac{sen.\ ABC \times sen.\ DCB \times cos.\ BC \mp R \times cos.\ DCB \times cos.\ ABC.}{R^2}$$

Avendo finalmente i due angoli DCB, BCA, anche nel caso della *Fig.* 15, l'istesso seno, e l'istesso coseno; e chiamando gli angoli del triangolo ABC colle lettere poste ne' vertici di essi; sarà

$$cos.\ A =$$

$$\frac{sen.\ B \times sen.\ C \times cos.\ BC \mp R \times cos.\ B \times cos.\ C}{R^2}.$$

COROLLARIO III.

89. Quindi

$$cos.\ A = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times cos.\ BC - R \times cos.\ AB \times cos.\ AC}{sen.\ AB \times sen.\ AC}, \\[2ex] \dfrac{sen.\ B \times sen.\ C \times cos.\ BC \mp R \times cos.\ B \times cos.\ C}{R^2}. \end{cases}$$

Similmente si dimostra essere

$$\text{cos.}\,B = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times \text{cos.}\,AC - R \times \text{cos.}\,AB \times \text{cos.}\,BC}{\text{sen.}\,AB \times \text{sen.}\,BC}, \\[2ex] \dfrac{\text{sen.}\,A \times \text{sen.}\,C \times \text{cos.}\,AC \pm R \times \text{cos.}\,A \times \text{cos.}\,C}{R^2}. \end{cases}$$

$$\text{cos.}\,C = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times \text{cos.}\,AB - R \times \text{cos.}\,AC \times \text{cos.}\,BC}{\text{sen.}\,AC \times \text{sen.}\,BC}. \\[2ex] \dfrac{\text{sen.}\,A \times \text{sen.}\,B \times \text{cos.}\,AB \mp R \times \text{cos.}\,A \times \text{cos.}\,B}{R^2}. \end{cases}$$

COROLLARIO IV.

90. E quindi dalle formole precedenti di $\text{cos.}\,C$, $\text{cos.}\,A$, $\text{cos.}\,B$ si ricavano le seguenti, cioè

$$\text{cos.}\,AB = \begin{cases} \dfrac{\text{cos.}\,C \times \text{sen.}\,AC \times \text{sen.}\,BC + R \times \text{cos.}\,AC \times \text{cos.}\,BC}{R^2}, \\[2ex] \dfrac{R^2 \times \text{cos.}\,C \pm R \times \text{cos.}\,A \times \text{cos.}\,B}{\text{sen.}\,A \times \text{sen.}\,B}, \end{cases}$$

$$\text{cos.}\,BC = \begin{cases} \dfrac{\text{cos.}\,A \times \text{sen.}\,AB \times \text{sen.}\,AC + R \times \text{cos.}\,AB \times \text{cos.}\,AC}{R^2}, \\[2ex] \dfrac{R^2 \times \text{cos.}\,A \pm R \times \text{cos.}\,B \times \text{cos.}\,C}{\text{sen.}\,B \times \text{sen.}\,C} \end{cases}$$

cos.

$$\cos. AC = \begin{cases} \dfrac{\cos. B \times \text{sen.} AB \times \text{sen.} BC + R \times \cos. AB \times \cos. BC}{R^2}, \\[2ex] \dfrac{R^2 \times \cos. B \pm R \times \cos. A \times \cos. C}{\text{sen.} A \times \text{sen.} C}. \end{cases}$$

COROLLARIO V.

91. Essendo di vantaggio pel § 84

$$\text{tang.} A : \text{tang.} C = \text{sen.} CD : \text{sen.} AD.$$

Sarà

$$\text{tang.} A = \frac{\text{tang.} C \times \text{sen.} CD}{\text{sen.} AD}.$$

Ma

$$\text{sen.} AD = \text{sen.} (AC \mp DC = \frac{\text{sen.} AC \times \cos. DC \mp \text{sen.} DC \times \cos. AC}{R}.$$

Dunque

$$\text{tang.} A = \frac{R \times \text{tang.} C \times \text{sen.} DC}{\text{sen.} AC \times \cos. DC \mp \text{sen.} DC \times \cos. AC} = \frac{R \times \text{tang.} C}{\text{sen.} AC \times \dfrac{R}{\text{tang.} DC} \mp \cos. AC}.$$

E in

E' in oltre

$$tang.\ C = \frac{sen.\ C}{cos.\ C} \times R.$$

Ed essendo pel § 71

$$R : cos.\ C = tang.\ BC : tang.\ CD,$$

è pure

$$tang.\ DC = \frac{cos.\ C \times tang.\ BC}{R}.$$

Sicchè

$$tang.\ A = \frac{R^2 \times \frac{sen.\ C}{cos.\ C}}{sen.\ AC \times \frac{R^2}{cos.\ C \times tang.\ BC} \mp cos.\ AC}$$

$$= \frac{R^2 \times sen.\ C}{sen.\ AC \times cotang.\ BC \mp cos.\ AC \times cos.\ C}.$$

Similmente si dimostra essere

$$tang.\ A = \frac{R^2 \times sen.\ B}{sen.\ AB \times cotang.\ BC \mp cos.\ B \times cos.\ AB}.$$

COROLLARIO VI.

92. Quindi

$$tang.\ A = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times sen.\ C}{sen\ AC \times cotang.\ BC \mp cos.\ C \times cos.\ AC} \\ \dfrac{R^2 \times sen.\ B}{sen.\ AB \times cotang.\ BC \mp cos.\ B \times cos.\ AB} \end{cases}$$

Similmente si trova essere

$$tang.\ B = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times sen.\ A}{sen.\ AB \times cotang.\ AC \mp cos.\ A \times cos.\ AB} \\ \dfrac{R^2 \times sen.\ C}{sen.\ BC \times cotang.\ AC \mp cos.\ C \times cos.\ BC} \end{cases}$$

$$tang.\ C = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times sen.\ A}{sen.\ AC \times cotang.\ AB \mp cos.\ A \times cos.\ AC} \\ \dfrac{R^2 \times sen.\ B}{sen.\ BC \times cotang.\ AB \mp cos.\ B \times cos.\ BC} \end{cases}$$

COROLLARIO VII.

93. E quindi, essendo la cotangente d'ogni angolo uguale al quadrato del seno massimo diviso per la sua tangente, saranno

$$cot.\ A = \begin{cases} \dfrac{sen.\ AC \times cot.\ BC \mp cos.\ C \times cos.\ AC}{sen.\ C} \\ \dfrac{sen.\ AB \times cot.\ BC \mp cos.\ B \times cos.\ AB}{sen.\ B} \end{cases}$$

$$cot.\ B = \begin{cases} \dfrac{sen.\ AB \times cot.\ AC \mp cos.\ A \times cos.\ AB}{sen.\ A} \\ \dfrac{sen.\ BC \times cot.\ AC \mp cos.\ C \times cos.\ BC}{sen.\ C} \end{cases}$$

$$cot.\ C = \begin{cases} \dfrac{sen.\ AC \times cot.\ AB \mp cos.\ A \times cos.\ AC}{sen.\ A} \\ \dfrac{sen.\ BC \times cot.\ AB \mp cos.\ B \times cos.\ BC}{sen.\ B} \end{cases};$$

ovvero, essendo il coseno d'un angolo, diviso pel suo seno, uguale alla cotangente dell' istesso angolo, diviso pel seno massimo, saranno

$$cot.\ A = \begin{cases} \dfrac{sen.\ AC \times cot.\ BC}{sen.\ C} \mp \dfrac{cot.\ C \times cos.\ AC}{R} \\ \dfrac{sen.\ AB \times cot.\ BC}{sen.\ B} \mp \dfrac{cot.\ B \times cos.\ AB}{R} \end{cases}$$

sen.

$$cot.\ B = \begin{cases} \dfrac{sen.\ AB \times cot.\ AC}{sen.\ A} \mp \dfrac{cot.\ A \times cos.\ AB}{R} \\ \dfrac{sen.\ BC \times cot.\ AC}{sen.\ C} \mp \dfrac{cot.\ C \times cos.\ BC}{R} \end{cases}$$

$$cot.\ C = \begin{cases} \dfrac{sen.\ AC \times cot.\ AB}{sen.\ A} \mp \dfrac{cot.\ A \times cos.\ AC}{R} \\ \dfrac{sen.\ BC \times cot.\ AB}{sen.\ B} \mp \dfrac{cot.\ B \times cos.\ BC}{R}. \end{cases}$$

COROLLARIO VIII.

94. E finalmente per le formole del § 92, cioè di *tang.* C, *tang.* A, *tang.* B si hanno le seguenti

$$cot.\ AB = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times sen.\ A \pm tang.\ C \times cos.\ A \times cos.\ AC}{tang.\ C \times sen.\ AC} \\ \dfrac{R^2 \times sen.\ B \pm tang.\ C \times cos.\ B \times cos.\ BC}{tang.\ C \times sen.\ BC} \end{cases}$$

$$cot.\ BC = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times sen.\ C \pm tang.\ A \times cos.\ C \times cos.\ AC}{tang.\ A \times sen.\ AC} \\ \dfrac{R^2 \times sen.\ B \pm tang.\ A \times cos.\ B \times cos.\ AB}{tang.\ A \times sen.\ AB} \end{cases}$$

$$cot.\ AC = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times sen.\ A \pm tang.\ B \times cos.\ A \times cos.\ AB}{tang.\ B \times sen.\ AB} \\ \dfrac{R^2 \times sen.\ C \pm tang.\ B \times cos.\ C \times cos.\ BC}{tang.\ B \times sen.\ BC} \end{cases}$$

E conseguentemente, essendo il quadrato del seno massimo, diviso per la tangente di qualunque angolo, uguale alla cotangente dell' istesso angolo, saranno

$$cot.\ AB = \begin{cases} \dfrac{cot.\ C \times sen.\ A \pm cos.\ A \times cos.\ AC}{sen.\ AC} \\ \dfrac{cot.\ C \times sen.\ B \pm cos.\ B \times cos.\ BC}{sen.\ BC} \end{cases}$$

$$cot.\ BC = \begin{cases} \dfrac{cot.\ A \times sen.\ C \pm cos.\ C \times cos.\ AC}{sen.\ AC} \\ \dfrac{cot.\ A \times sen.\ B \pm cos.\ B \times cos.\ AB}{sen.\ AB} \end{cases}$$

$$cot.\ AC = \begin{cases} \dfrac{cot.\ B \times sen.\ A \pm cos.\ A \times cos.\ AB}{sen.\ AB} \\ \dfrac{cot.\ B \times sen.\ C \pm cos.\ C \times cos.\ BC}{sen.\ BC} \end{cases}$$

E perciò ſaranno

$$\textit{tang.}\,AB = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times \textit{ſen.}\,AC}{\textit{cot.}\,C \times \textit{ſen.}\,A \pm \textit{coſ.}\,A \times \textit{coſ.}\,AC} \\ \dfrac{R^2 \times \textit{ſen.}\,BC}{\textit{cot.}\,C \times \textit{ſen.}\,B \pm \textit{coſ.}\,B \times \textit{coſ.}\,BC} \end{cases}$$

$$\textit{tang.}\,BC = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times \textit{ſen.}\,AC}{\textit{cot.}\,A \times \textit{ſen.}\,C \pm \textit{coſ.}\,C \times \textit{coſ.}\,AC} \\ \dfrac{R^2 \times \textit{ſen.}\,AB}{\textit{cot.}\,A \times \textit{ſen.}\,B \pm \textit{coſ.}\,B \times \textit{coſ.}\,AB} \end{cases}$$

$$\textit{tang.}\,AC = \begin{cases} \dfrac{R^2 \times \textit{ſen.}\,AB}{\textit{cot.}\,B \times \textit{ſen.}\,A \pm \textit{coſ.}\,A \times \textit{coſ.}\,AB} \\ \dfrac{R^2 \times \textit{ſen.}\,BC}{\textit{cot.}\,B \times \textit{ſen.}\,C \pm \textit{coſ.}\,C \times \textit{coſ.}\,BC}. \end{cases}$$

E ſaranno, poſte nelle formole precedenti in vece de' coſeni degli angoli, diviſi per gli ſeni, le cotangenti de' medeſimi angoli diviſe pel ſeno maſſimo

$$\textit{cot.}\,AB = \begin{cases} \dfrac{\textit{cot.}\,C \times \textit{ſen.}\,A}{\textit{ſen.}\,AC} \pm \dfrac{\textit{coſ.}\,A \times \textit{cot.}\,AC}{R} \\ \dfrac{\textit{cot.}\,C \times \textit{ſen.}\,B}{\textit{ſen.}\,BC} \pm \dfrac{\textit{coſ.}\,B \times \textit{cot.}\,BC}{R} \end{cases}$$

$$cot.\ BC = \begin{cases} \dfrac{cot.\ A \times sen.\ C}{sen.\ AC} \pm \dfrac{cos.\ C \times cot.\ AC}{R} \\ \dfrac{cot.\ A \times sen.\ B}{sen.\ AB} \pm \dfrac{cos.\ B \times cot.\ AB}{R} \end{cases}$$

$$cot.\ AC = \begin{cases} \dfrac{cot.\ B \times sen.\ A}{sen.\ AB} \pm \dfrac{cos.\ A \times cot.\ AB}{R} \\ \dfrac{cot.\ B \times sen.\ C}{sen.\ BC} \pm \dfrac{cos.\ C \times cot.\ BC}{R}. \end{cases}$$

AVVERTIMENTO I.

95. Dovendosi per riguardo de' triangoli obbliquangoli da tre parti di essi rilevare le determinazioni delle tre altre rimanenti: è facile ad intendere essere tanti i casi del probl., che insegna a sciorre la Trigonometria relativamente a' triangoli obbliquangoli, quanti ne dinota il triplo delle combinazioni a tre a tre, che delle sei parti de' detti triangoli far si possono. Or tali combinazioni si riducono a sei, cioè alle combinazioni 1° di due lati, e d'un angolo opposto a uno di sì fatti lati; 2° di due lati, e dell'angolo compreso dagli medesimi lati; 3° di due angoli, e d'un lato opposto a uno di sì fatti angoli; 4° di due angoli, e del lato da essi compreso; 5° di tutti e tre i lati; e 6° finalmente di tutti e tre gli angoli. Quindi il numero de' detti casi è 18; ma si riduce a 16; perchè tanto nella combinazione di due lati, e dell'angolo da essi compreso, quanto nell'altra di due angoli, e del lato compreso dagli medesimi angoli, i casi da sciorre sono realmente due, e non tre; valendo l'istesso per riguardo della prima il determinare l'uno, che l'altro de' rimanenti angoli, e per riguardo della seconda il determinare l'uno, o l'altro de' rimanenti lati.

AV-

AVVERTIMENTO II.

96. Si noti che, qualora il triangolo A B C ha il lato A B minore del quadrante, il lato B C minore di A B, e l'angolo in A acuto, per B ſi può menare l' arco B E di cerchio maſſimo uguale a B C; e s' avrà l' angolo B E C uguale a B C E (§ 37); onde l'angolo B E A è uguale al conſeguente di B C A. Or ſe in tale caſo vengono dati il lato A B, il lato B C, e l' angolo in A, e ſi vogliono in conſeguenza di tali dati determinare le parti rimanenti del triangolo: come tali dati appartengono sì al triangolo A B C, che al triangolo A B E; così le parti rimanenti ſi poſſono determinare e relativamente all' uno, e relativamente all' altro triangolo. Quindi i tre caſi del problema, che inſegna la Trigonometria a ſciorre relativamente a' triangoli obbliquangoli, qualora i dati ſono i già detti, e il triangolo ha le dette condizioni, ſi dicono *caſi ambigui*; e conviene nella pratica badarvi, acciò non ſi prendano per le parti cercate quelle, che non corriſpondono al biſogno.

AVVERTIMENTO III.

97. Si noti ancora che per iſciorre i caſi, qualora i dati coſtituiſcono le quattro prime ſuddette combinazioni, ſono ſufficientiſſimi i principj già ſtabiliti, come ſi conoſcerà nel cap. ſeguente; ma per gli altri caſi, qualora i dati coſtituiſcono le due altre combinazioni, v' abbiſognano altri principj, che l' anderemo qui in ſeguito ſoggiugnendo. Perciò ſia il

TEOR. XVIII.

98. *Sia l' iſteſſo, che s' è ſuppoſto nel teo. 16. Dico eſſere* $\cot.\dfrac{AB+BC}{2} : \tan.\dfrac{AB-BC}{2} = \cot.\dfrac{AD+DC}{2} : \tan g.\dfrac{AD-DC}{2}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, essendo pel § 86

$$\cos. AB : \cos BC = \cos. AD : \cos. DC,$$

sarà

$$\cos. AB + \cos. BC : \cos. AB - \cos. BC =$$
$$\cos. AD + \cos. DC : \cos. AD - \cos. DC;$$

e perciò

$$\frac{\cos. AB + \cos. BC}{\cos. AB - \cos. BC} = \frac{\cos. AD + \cos. DC}{\cos. AD - \cos. DC}.$$

Ma pel § 68

$$\frac{\cos. AB + \cos. BC}{\cos. AB - \cos. BG} = \frac{\cot. \frac{AB + BG}{2}}{\tang. \frac{AB - BC}{2}},$$

$$\frac{\cos. AD + \cos. DG}{\cos. AD - \cos. DG} = \frac{\cot. \frac{AD + DC}{2}}{\tang. \frac{AD - DG}{2}}.$$

Dun-

Dunque

$$\frac{cot.\ \frac{AB + BC}{2}}{tang.\ \frac{AB - BC}{2}} = \frac{cot.\ \frac{AD + DC}{2}}{tang.\ \frac{AD - DC}{2}}.$$

Per la qual cofa

$$cot.\ \frac{AB + BC}{2} : tang.\ \frac{AB - BC}{2} = cot.\ \frac{AD + DG}{2} : tang.\ \frac{AD - DC}{2}.$$

Ch'è ciò, che bifognava dimoftrare.

COROLLARIO I.

99. Effendo

$$cot.\ \frac{AB + BC}{2} = \frac{R^2}{tang.\ \frac{AB + BC}{2}},$$

$$cot.\ \frac{AD + DC}{2} = \frac{R^2}{tang.\ \frac{AD + DC}{2}}.$$

Sa-

Saranno

$$\frac{\cot.\frac{AB+BC}{2}}{\tang.\frac{AB-BC}{2}} = \frac{R^2}{\tang.\frac{AB+BC}{2} \times \tan.\frac{AB-BC}{2}}.$$

$$\frac{\cot.\frac{AD+DC}{2}}{\tang.\frac{AD-DC}{2}} = \frac{R^2}{\tan.\frac{AD+DC}{2} \times \tan.\frac{AD-DC}{2}}.$$

Onde

$$\frac{R^2}{\tan.\frac{AB+BC}{2} \times \tan\frac{AB-BC}{2}} = \frac{R^2}{\tan.\frac{AD+DC}{2} \times \tan.\frac{AD-DC}{2}},$$

e conseguentemente

$$\tan.\frac{AB+BC}{2} \times \tan.\frac{AB-BC}{2} = \tan.\frac{AD+DC}{2} \times \tan.\frac{AD-DC}{2}.$$

Per la qual cosa

$$\tan.\frac{AD+DC}{2} : \tan.\frac{AB+BC}{2} = \tan.\frac{AB-BC}{2} : \tan.\frac{AD-DC}{2}.$$

CO.

COROLLARIO II.

100. Quindi nel caſo della *Fig.* 14, in cui $\frac{AD + DC}{2}$ dinota la metà della baſe AC, dati tutt'i lati del triangolo, facendo: come ſta la cotangente della metà della ſomma de' lati AB, BC alla tangente della metà della differenza di eſſi, così la cotangente della metà della baſe AC al quarto proporzionale; o pure come ſta la tangente della metà della baſe AC alla tangente della metà della ſomma de' lati AB, BC, così la tangente della metà della differenza de' medeſimi lati al quarto proporzionale; in ambi i caſi col quarto proporzionale ſi ha la tangente di $\frac{AD - DC}{2}$, vale a dire della metà della differenza delle due porzioni AD, DC della baſe AC. Or ſe coll'ajuto delle Tavole trigonometriche ſi determina la grandezza $\frac{AD - DC}{2}$; con aggiugnerla alla metà della baſe AC, ſi ha AD, e con toglierla dall' iſteſſa metà della baſe, ſi ha DC; e ſe ne' triangoli rettangoli ADB, BDC, in cui ſono note le ipotenuſe AB, BC, conoſciuti i lati AD, DC, ſi determinano tutti gli angoli, ſi determinano in tal modo tutti gli angoli del triangolo obbliquangolo ABC. Ecco come nel caſo della *Fig.* 14, dati tutt'i lati, ſi poſſono determinare tutti gli angoli.

COROLLARIO III.

101. Nel caſo poi della *Fig.* 15, in cui $\frac{AD - DC}{2}$ dinota la metà della baſe AC, dati tutt'i lati del triangolo, facendo: come ſta la tangente della metà della differenza de' lati AB, BC alla cotangente della metà della ſomma di eſſi, così la tangente della metà della baſe AC al quarto proporzionale; o pure come ſta la tangente della

metà della base A C alla tangente della metà della differenza de' lati A B, B C, così la tangente della metà della somma de' medesimi lati al quarto proporzionale; col quarto proporzionale si ha nel primo caso la cotangente, e nel secondo caso la tangente della grandezza $\frac{AD + DC}{2}$. Or se coll'ajuto delle Tavole trigonometriche si determina tale grandezza $\frac{AD + DC}{2}$; con aggiugnerci la metà della base A C, si ha A D, e con toglierne l'istessa metà della base A C, si ha D C; e se ne' triangoli rettangoli A D B, B D C, in cui sono note le ipotenuse A B, B C, conosciuti i lati A D, D C, si determinano tutti gli angoli, si determinano in tal modo tutti gli angoli del triangolo obbliquangolo A B C. Ed ecco come nel caso della *Fig.* 15, dati tutt'i lati, si possono determinare anche tutti gli angoli.

AVVERTIMENTO.

102. Ancorchè secondo i modi già insegnati si possano determinare i tre angoli di qualunque triangolo obbliquangolo, qualora sono dati tutt'i lati: nondimeno ci piace di soggiugnerne un altro, che riesce più spedito, e più comodo nella pratica, menandoci alla determinazione di qualunque degli tre angoli coll'ajuto d'una sola proporzione, senza bisogno d'altro. Perciò soggiugniamo il seguente

TEOR. XIX.

Fig. 14, e 15. 103. *In ogni triangolo obbliquangolo* A B C *il prodotto de' seni di due lati sta al prodotto de' seni delle differenze de' medesimi lati dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo al quadrato del seno della metà dell'angolo compreso dagl'istessi due lati.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Si metta il ſeno maſſimo $=$ R. Eſſendo pel § 39 *della Trig. piana*

$$sen. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\tfrac{1}{2} R (R - cos. A)};$$

e perciò

$$2 (sen. \tfrac{1}{2} A)^2 = R (R - cos. A).$$

Ed eſſendo pel § 88

$$cos. A = \frac{R^2 \times cos. BC - R \times cos. AB \times cos. AC}{sen. AB \times sen. AC}.$$

Sarà

$$2 (sen. \tfrac{1}{2} A)^2 =$$

$$R \left(R - \left(\frac{R^2 \times cos. BC - R \times cos. AB \times cos. AC}{sen. AB \times sen. AC} \right) \right)$$

$$= R \left(\frac{R (cos. AB \times cos. AC + sen. AB \times sen. AC) - R^2 \times cos. BC}{sen. AB \times sen. AC} \right).$$

Ma pel § *66*

$$\frac{cos. AB \times cos. AC + sen. AB \times sen. AC}{R} = cos. \pm (AC - AB),$$

e conſeguentemente

$$R (cos. AB \times cos. AC + sen. AB \times sen. AC) = R^2 \times cos. \pm (AC - AB).$$

 Sicchè

Sicchè

$$2\,(\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A)^2 = \frac{R^3(\text{cos.}\pm(AC-AB)-\text{cos.}BC)}{\text{sen.}\,AB\times\text{sen.}\,AC},$$

e

$$(\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A)^2 = R^2\left(\frac{\tfrac{1}{2}R(\text{cos.}\pm(AC-AB)-\text{cos.}BC)}{\text{sen.}\,AB\times\text{sen.}\,AC}\right).$$

E' in oltre pel § 67

$$\tfrac{1}{2}R\,(\text{cos.}\,(AC-AB)-\text{cos.}\,BC) =$$

$$\text{sen.}\,\frac{AC+BC-AB}{2}\times\text{sen.}\,\frac{BC+AB-AC}{2}.$$

Dunque

$$(\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A)^2 =$$

$$R^2\left[\frac{\text{sen.}\,\frac{AC+BC-AB}{2}\times\text{sen.}\,\frac{BC+AB-AC}{2}}{\text{sen.}\,AB\times\text{sen.}\,AC}\right].$$

Posta finalmente la somma de' lati AB, BC, CA, cioè $AB+BC+CA = S$; sarà

$$\tfrac{1}{2}S = \frac{AB+BC+CA}{2},$$

e

$$\tfrac{1}{2} S - AB = \frac{AC + BC - AB}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} S - AC = \frac{AB + BC - AC}{2},$$

Onde

$$(\textit{sen.}\ \tfrac{1}{2} A)^2 =$$

$$R^2 \left(\frac{\textit{sen.}\ (\tfrac{1}{2} S - AB) \times \textit{sen.}\ (\tfrac{1}{2} S - AC)}{\textit{sen.}\ AB \times \textit{sen.}\ AC} \right).$$

Per la qual cosa

$\textit{sen.}\ AB \times \textit{sen.}\ AC : \textit{sen.}\ (\tfrac{1}{2} S - AB) \times \textit{sen.}\ (\tfrac{1}{2} S - AC) = R^2 : (\textit{sen.}\ \tfrac{1}{2} A)^2$.

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

104. Si noti che, facendo uso de' seni in numeri logaritmici, se si sommano insieme *Log. sen.* $(\tfrac{1}{2} S - AB)$, *Log. sen.* $(\tfrac{1}{2} S - AC)$, e 2 *Log.* R, e da tale somma se ne sottrae l'altra di *Log. sen.* AB, e *Log. sen.* AC, il residuo dà *Log.* $(\textit{sen.}\ \tfrac{1}{2} A)^2$, e la metà dà *Log. sen.* $\tfrac{1}{2}$ A. Or se si cerca nelle Tavole trigonometriche il valore dell'angolo corrispondente a *Log. sen.* $\tfrac{1}{2}$ A, e di tale valore se ne prende il doppio; si ha in tal modo il valore dell'angolo in A. Coll'istessa facilità si possono determinare i rimanenti angoli del triangolo A B C, qualora sono dati tutt'i lati.

AV-

AVVERTIMENTO II.

105. Esposti già tutt'i principj teoretici, che ci menano a determinare tutti gli angoli di qualunque triangolo obbliquangolo, qualora sono dati tutt'i lati; resta ora che s'esponga il principio teoretico, che ci deve condurre a determinare di qualunque triangolo obbliquangolo tutt'i lati, qualora sono dati tutti gli angoli. Perciò soggiugniamo il seguente

TEOR. XX.

Fig. 14, e 15. 106. *Sia* ABC *qualunque triangolo sferico obbliquangolo, e* BD *sia l'arco di cerchio massimo menato dal punto* B *perpendicolare ad* AC. *Dico essere la tangente della metà della somma de' due angoli* ABD, CBD *alla tangente della metà della differenza di essi, come la cotangente della metà della somma de' due angoli* BAC, BCA *alla tangente della metà della differenza de' medesimi.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo pel § 86

$$sen.\,ABD : sen.\,CBD = cos.\,BAD : cos.\,BCD.$$

Sarà

$$sen.\,ABD + sen.\,CBD : sen.\,ABD - sen.\,CBD =$$

$$cos.\,BAD + cos.\,BCD : cos.\,BAD - cos.\,BCD.$$

Onde

$$\frac{sen.\,ABD + sen.\,CBD}{sen.\,ABD - sen.\,CBD} = \frac{cos.\,BAD + cos.\,BCD}{cos.\,BAD - cos.\,BCD}.$$

Ma

Ma pel § 70

$$\frac{sen.\ ABD + sen.\ CBD}{sen.\ ABD - sen.\ CBD} = \frac{tan.\ \frac{ABD + CBD}{2}}{tan.\ \frac{ABD - CBD}{2}},$$

e pel § 68

$$\frac{cos.\ BAD + cos.\ BCD}{cos.\ BAD - cos.\ BCD} = \frac{cotan.\ \frac{BCD + BAD}{2}}{tang.\ \frac{BCD - BAD}{2}}.$$

Sicchè

$$\frac{tang.\ \frac{ABD + CBD}{2}}{tang.\ \frac{ABD - CBD}{2}} = \frac{cotan.\ \frac{BCD + BAD}{2}}{tang.\ \frac{BCD - BAD}{2}}.$$

E perciò

$$tang.\ \frac{ABD + CBD}{2} : tang.\ \frac{ABD - CBD}{2} = cotan.\ \frac{BCD + BAD}{2} : tang.\ \frac{BCD - BAD}{2}.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

107. Quindi nel caſo della *Fig.* 14, in cui $\frac{ABD + CBD}{2}$ dinota la metà dell'angolo ABC, dati tutti gli angoli del triangolo, facendo: come ſta la cotangente della metà della ſomma degli angoli BCD, BAD alla tangente della metà della differenza di eſſi, così la tangente della metà dell'angolo ABC al quarto proporzionale; col quarto proporzionale ſi ha la tangente di $\frac{ABD - CBD}{2}$, o ſia della metà della differenza degli angoli ABD, CBD. Or ſe coll'ajuto delle Tavole trigonometriche ſi determina la grandezza $\frac{ABD - CBD}{2}$; con aggiugnerla alla metà dell'angolo ABC, ſi ha l'angolo maggiore ABD, e con toglierla dall'iſteſſa metà dell'angolo ABC, ſi ha l'angolo minore CBD; e ſe ne' triangoli rettangoli BDA, BDC, in cui ſono noti gli angoli obbliqui BAD, BCD, conoſciuti gli altri angoli obbliqui ABD, CBD, ſi determinano le ipotenuſe AB, CB, e i lati AD, DC, ſi determinano in tal modo tutt'i lati del triangolo obbliquangolo ABC. Ecco come nel caſo della *Fig.* 14, dati tutti gli angoli, ſi poſſono determinare tutt'i lati.

COROLLARIO II.

108. Nel caſo poi della *Fig.* 15, in cui dinota $\frac{ABD - CBD}{2}$ la metà dell'angolo ABC, facendo: come ſta la tangente della metà della differenza degli angoli BAD, BCD alla cotangente della metà della ſomma di eſſi, così la tangente della metà dell'angolo ABC al quarto proporzionale; con tale quarto proporzionale ſi ha la tangente

gente di $\frac{ABD + CBD}{2}$. Or ſe coll' ajuto delle Tavole trigonometriche ſi determina l' angolo $\frac{ABD + CBD}{2}$; con aggiugnervi la metà dell'angolo A B C, ſi ha l'angolo A B D, e con toglierne l'iſteſſa metà dell' angolo A B C, ſi ha l'angolo C B D; e ſe ne' triangoli rettangoli A D B, C D B, ne' quali ſono noti gli angoli obbliqui BAD, BCD, conoſciuti gli altri angoli obbliqui A B D, C B D, ſi determinano le ipotenuſe A B, C B, e i lati A D, C D, ſi determinano in tal modo tutt'i lati del triangolo obbliquangolo A B C. Ed ecco come anche nel caſo della *Fig.* 15, dati tutti gli angoli, ſi poſſono determinare tutt'i lati.

AVVERTIMENTO.

109. Sebbene del modo già eſpoſto ſi poſſono determinare i tre lati di qualunque triangolo obbliquangolo, qualora ſono dati tutti gli angoli: pure ci piace di aggiugnerne un altro, che rieſce nella pratica più ſpedito, e conſeguentemente più comodo, menandoci alla determinazione di qualunque de' tre lati coll' ajuto d' una ſola proporzione, ſenza biſogno d' altro. Per eſporre intanto tal modo, conviene che premettiamo il ſeguente

LEMMA.

110. *Sia* A B C *qualunque triangolo ſferico, ed* L M N *ſia un altro triangolo ſferico deſcritto ſulla ſuperficie dell' iſteſſa ſfera in modo, che i cerchi, a' quali appartengono i lati* L M, M N, N L, *abbiano per poli riſpettivamente i punti* A, B, C. *Dico* 1º *che i lati del triangolo* L M N *ſono i ſupplimenti alle mezze periferie degli archi, che miſurano gli angoli corriſpondenti del triangolo* A B C; *e* 2º *che le miſure degli angoli del triangolo* L M N *ſono i ſupplimenti alle mezze periferie de' lati corriſpondenti del medeſimo triangolo* A B C. Fig. 16

DIMOSTRAZIONE.

I. Passando il cerchio, a cui appartiene AB, per gli poli A, e B di quelli, a' quali appartengono LM, MN; passeranno i cerchi, a' quali appartengono LM, MN, pel polo di quello, a cui appartiene AB (§ 17). Onde M è polo di sì fatto cerchio. Similmente si dimostra essere L, e N poli de' cerchi, a' quali appartengono AC, CB. Sicchè LI, LF, MG, MD, NE, NH sono tutti archi di quadranti (§ 21). E perciò NE + MD uguaglia una mezza periferia, e conseguentemente NM è supplimento di DE alla mezza periferia. Ma DE è misura dell'angolo in B (§ 29). Sicchè NM è supplimento alla mezza periferia dell'arco, che misura il corrispondente angolo sferico ABC. Dell'istesso modo si dimostra essere ML, LN supplimenti alle mezze periferie degli archi FG, HI, che misurano i corrispondenti angoli sferici BAC. BCA.

II. Essendo IC, AF archi di quadranti; sarà IF supplimento di AC alla mezza periferia. Ma IF misura l'angolo in L (§ 29). Sicchè la misura dell'angolo sferico in L è il supplimento alla mezza periferia del lato AC. Dell'istesso modo si dimostra essere le misure degli angoli sferici in M, e N i supplimenti degli corrispondenti lati AB, BC alle mezze periferie. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

III. Si mettano la somma de' lati LM, MN, NL, o sia $LM + MN + NL == S$, e la somma degli angoli in A, B, C, ovvero $A + B + C == S''$. Essendo

$LM + A$		180°
$MN + B$	di	180°
$NL + C$		180°,

sarà

sarà

$$\tfrac{1}{2}\,S + \tfrac{1}{2}\,S'' \quad \text{di} \quad 3 \times 90^\circ.$$

Posti in oltre qualunque de' lati del triangolo LMN == P, e l'angolo del triangolo ABC corrispondente all' istesso lato == Q; sarà

$$P + Q \quad \text{di} \quad 2 \times 90^\circ.$$

Onde sarà

$$\tfrac{1}{2}\,S - P + \tfrac{1}{2}\,S'' - Q \quad \text{di} \quad 90^\circ.$$

E perciò i gradi, che dinota $\frac{1}{2}\,S - P$, e quelli, che dinota $\frac{1}{2}\,S'' - Q$, formano insieme i gradi dell'arco d'un quadrante. Ma $\frac{1}{2}\,S - P$ è la differenza di qualunque lato del triangolo LMN dalla metà della somma di tutti e tre; ed $\frac{1}{2}\,S'' - Q$ è la differenza dell' angolo del triangolo ABC, corrispondente all' istesso lato del triangolo LMN, dalla metà della somma di tutti e tre gli angoli del medesimo triangolo ABC. Sicchè i gradi della prima differenza, e quelli della seconda insieme uguagliano i gradi dell' arco d'un quadrante.

TEOR. XXI.

112. *In ogni triangolo sferico obbliquangolo* ABC *il prodotto de' seni di due angoli sta al prodotto de' coseni delle differenze de' medesimi angoli dalla metà della somma di tutti e tre, come il quadrato del seno massimo al quadrato del coseno della metà del lato compreso dagli stessi due angoli.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda costrutto il triangolo sferico LMN del modo supposto nel *lem. prec.*; e si mettano il seno massimo == R, la somma de' lati LM, MN, NL, o sia LM + MN + NL == S, e la somma degli angoli in A, B, C, o sia A + B + C == S'. Sarà pel § 103

$sen.\ LM \times sen.\ MN : sen.\ (\frac{1}{2} S - LM) \times sen.\ (\frac{1}{2} S - MN) == R^2 : (sen.\ \frac{1}{2} M)^2$.

Or essendo gli archi L M, M N supplimenti alle mezze periferie di quelli, che misurano gli angoli in A, e B (*lem. prec.*); saranno

$$sen.\ LM == sen.\ A,$$

$$sen.\ MN == sen.\ B.$$

Essendo in oltre 90 i gradi di $\frac{1}{2}$ S — L M una con quei di $\frac{1}{2}$ S′ — A, e 90 pure i gradi di $\frac{1}{2}$ S — M N una con quei di $\frac{1}{2}$ S′ — B pel § *prec.*; saranno

$$sen.\ (\frac{1}{2} S - LM) == cos.\ (\frac{1}{2} S' - A),$$
$$sen.\ (\frac{1}{2} S - MN) == cos.\ (\frac{1}{2} S' - B).$$

E finalmente essendo $\frac{1}{2}$ A B della metà dell' arco, che misura l' angolo in M, supplimento all' arco di quadrante; sarà

$$sen.\ \frac{1}{2} M == cos.\ \frac{1}{2} AB.$$

Quindi sarà

$sen.\ A \times sen.\ B : cos.\ (\frac{1}{2} S' - A) \times cos.\ (\frac{1}{2} S' - B) == R^2 : (cos.\ \frac{1}{2} AB)^2$.
Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

113. Si noti che, facendo uso de' seni in numeri logaritmici, se si sommano insieme *Log. cos.* ($\frac{1}{2}$ S′ — A), *Log. cos.* ($\frac{1}{2}$ S′ — B), e 2 *Log.* R, e da tale somma se ne sottrae l' altra di *Log.* A, e *Log.* B; il residuo dà *Log.* (*cos.* $\frac{1}{2}$ A B)^2, e la metà dà *Log. cos.* $\frac{1}{2}$ A B. Or se si cerca nelle Tavole trigonometriche il valore dell' arco corrispondente a *Log. cos.* $\frac{1}{2}$ A B; e di tale valore se ne prende il doppio; si ha

si ha in tal modo il valore del lato AB. Coll'istessa facilità si possono determinare i rimanenti lati del triangolo ABC, qualora sono dati tutti gli angoli.

AVVERTIMENTO II.

114. Ecco esposto quanto bisogna per potere determinare in tutt'i casi possibili le parti ignote di qualsisia triangolo sferico, in conseguenza de' dati necessarj. Resta ora che si proceda alla pratica di sì fatte determinazioni. Perciò soggiugniamo il capo seguente.

CAP. V.

Del probl.: *date tre parti d' un triangolo sferico, determinare ciascuna delle altre*, sciolto col calcolo aritmetico secondo tutt'i casi possibili.

PROBL. I.

115. *Date due parti d' un triangolo sferico rettangolo; determinare col calcolo aritmetico ciascuna delle altre.*

SOLUZIONE.

Si metta il seno massimo = R.

I.ª Combinazione di dati.

Fig. 13. Sieno dati l'ipotenusa BC, e'l lato AB.

CASO I.

Per determinare l'angolo ACB.

Si faccia *Log. sen.* BC : *Log.* R == *Log. sen.* AB : *Log. sen.* ACB (§ 71); e si determini l'angolo ACB.

ESEMPIO.

Sieno BC == 63°. 18'. 23", e AB == 23°. 12'. 43".

Log. sen. AB == 9 . 5956433

Log. R == 10 . 0000000 agg.

Som. == 19 . 5956433

Log. sen. BC == 9 . 9510563 sott.

Log. sen. ACB == 9 . 6445870.

Sicchè

ACB == 26° . 10' . 38".

CA-

CASO II.

Per determinare l'angolo ABC.

Si faccia *Log. tan.* BC : *Log* R == *Log. tan.* AB : *Log. cos.* ABC (§ 71); e si determini l'angolo ABC.

ESEMPIO.

Sieno pure BC == $63^\circ . 18' . 23''$, e AB == $23^\circ . 12' . 43''$.

Log. tan. AB	==	9 . 6323026
Log. R	==	10 . 0000000 agg.
Som.	==	19 . 6323026
Log. tan. BC	==	10 . 2986029 sott.
Log. cos. ABC	==	9 . 3336997.

Dunque

ABC == $77^\circ . 32' . 53''$.

CASO III.

Per determinare AC.

Si faccia *Log. cos.* AB : *Log. cos.* BC == *Log.* R : *Log. cos.* AC (77); e si determini il lato AC.

ESEM-

ESEMPIO.

Sieno anche BC == $63^\circ . 18' . 23''$, e AB == $23^\circ . 12' . 43''$.

Log. cos. BC	==	9 . 6524584	
Log. R	==	10 . 0000000	agg.
Som.	==	19 . 6524584	
Log. cos. AB	==	9 . 9633406	sott.
Log. cos. AC	==	9 . 6891178.	

Sicchè

AC == $60^\circ . 44' . 22''$.

II. *Combinazione di dati.*

Sieno dati l'ipotenusa BC, e l'angolo obbliquo ACB.

CASO IV.

Per determinare il lato AB.

Si faccia *Log.* R : *Log. sen.* BC == *Log. sen.* ACB : *Log. sen.* AB (§ 71); e si determini AB.

ESEMPIO.

Sieno BC == $63^\circ . 18' . 23''$, e ACB == $26^\circ . 10' . 38''$.

Log.

Log. sen. BC == 9 . 9510563

Log. sen. ACB == 9 . 6445853 agg.

Som. == 19 . 5956416

Log. R == 10 . 0000000 sott.

Log. sen. AB == 9 . 5956416.

Sicchè

AB == 23° . 12′ . 42″.

C A S O V.

Per determinare il lato AC.

Si faccia *Log.* R : *Log. tang.* BC == *Log. cos.* ACB : *Log. tang.* AC (§ 71); e si determini AC.

E S E M P I O.

Sieno pure BC == 63° . 18′ . 23″, e ACB == 26° . 10′ . 38″.

Log. tang. BC == 10 . 2986029

Log. cos. ACB == 9 . 9530024 agg.

Som. == 20 . 2516053

Log. R == 10 . 0000000 sott.

Log. tang. AC == 10 . 2516053.

 Sic-

Sicchè

$$AC = 60^{\circ} . 44' . 22''.$$

CASO VI.

Per determinare l' angolo ABC.

Si faccia *Log.* R : *Log. tang.* ACB = *Log. cof.* BC : *Log. cotang.* ABC (§ 77); e fi determini l'angolo ABC.

ESEMPIO.

Sieno anche BC = $63^{\circ} . 18' . 23''$, e ACB = $26^{\circ} . 10' . 38''$.

Log. tang. ACB = 9 . 6915830

Log. cof. BC = 9 . 6524584 agg.

Som. = 19 . 3440414

Log. R = 10 . 0000000 fott.

Log. cotan. ABC = 9 . 3440414.

Sicchè

$$ABC = 77^{\circ} . 32' . 52''.$$

III.

III. Combinazione di dati.

Sieno dati l'angolo ACB, e'l lato opposto AB.

CASO VII.

Per determinare l'ipotenusa BC.

Si faccia *Log. sen.* ACB : *Log. sen.* AB == *Log.* R : *Log. sen.* BC (§ 71); e si determini BC.

ESEMPIO.

Sieno ACB == 26°. 10'. 38'', e AB == 23°. 12'. 43''.

Log. sen. AB	==	9 . 5956433	
Log. R	==	10 . 0000000	agg.
Som.	==	19 . 5956433	
Log. sen. ACB	==	9 . 6445853	sott.
Log. sen. BC	==	9 . 9510580.	

Sicchè

$$BC == \begin{cases} 63^\circ . 18' . 24'' \\ 116 . 41 . 36. \end{cases}$$

CASO VIII.

Per determinare AC.

Si faccia *Log. tang.* ACB : *Log.* R == *Log. tang.* AB : *Log. sen.* AC (§ 71); e si determini AC.

ESEMPIO.

Sieno pure ACB == 26° . 10′ . 38″, e AB == 23° . 12′ . 43″.

Log. tan. AB	== 9 . 6323026	
Log. R	== 10 . 0000000	agg.
Som.	== 19 . 6323026	
Log. tan. ACB	== 9 . 6915830	sott.
Log. sen. AC	== 9 . 9407196.	

Sicchè

$$AC == \begin{cases} 60^\circ . 44' . 22'' \\ 119 . 15 . 38. \end{cases}$$

CASO IX.

Per determinare ABC.

Si faccia *Log. cos.* AB : *Log. cos.* ACB == *Log.* R : *Log. sen.* ABC (§ 77); e si determini l'angolo ABC.

ESEM-

ESEMPIO.

Sieno anche ACB = 26°. 10'. 38'', e AB = 23°. 12'. 43''.

Log. cos. ACB	=	9.9530024	
Log. R	=	10.0000000	agg.
Som.	=	19.9530024	
Log. cos. AB	=	9.9633406	sott.
Log. sen. ABC	=	9.9896618.	

Sicchè

$$ABC = \begin{cases} 77° . 32' . 52'' \\ 12 . 27 . 8. \end{cases}$$

IV.ª Combinazione di dati.

Sieno dati l'angolo ACB, e'l lato adiacente AC.

CASO X.

Per determinare l'ipotenusa BC.

Si faccia *Log. cos.* ACB : *Log. tan.* AC = *Log.* R : *Log. tan.* BC (§ 71); e si determini BC.

ESEM-

ESEMPIO.

Sieno l'angolo ACB $=$ 26° . 10′ . 38″, e 'l lato AC $=$ 60° . 44′ . 22″.

Log. tan. AC	$=$	10 . 2516034	
Log. R	$=$	10 . 0000000	agg.
Som.	$=$	20 . 2516034	
Log. cos. ACB	$=$	9 . 9530024	sott.
Log. tan. BC	$=$	10 . 2986010.	

Sicchè

BC $=$ 63° . 18′ . 23″.

CASO XI.

Per determinare il lato AB.

Si faccia *Log.* R : *Log. tan.* ACB $=$ *Log. sen.* AC : *Log. tan.* AB (§ 71); e si determini AB.

ESEMPIO.

Sieno pure ACB $=$ 26° . 10′ . 38″, e AC $=$ 60° . 44′ . 22″.

Log. tan. ACB $=$ 9 . 6915830

Log.

Log. sen. AC == 9 . 9407181 agg.

Som. == 19 . 6323011

Log. R == 10 . 0000000 sott.

Log. tan. AB == 9 . 6323011,

Sicchè

AB == 23° . 12′. 42″.

CASO XII.

Per determinare l'angolo ABC.

Si faccia *Log.* R : *Log. sen.* ACB == *Log. cos.* AC : *Log. cos.* ABC (§ 77); e si determini l' angolo ABC.

ESEMPIO.

Sieno anche ACB == 26° . 10′ . 38″, e AC == 60° . 44′ . 22″.

Log. sen. ACB == 9 . 6445853

Log. cos. AC == 9 . 6891151 agg.

Som. == 19 . 3337004

Log. R == 10 . 0000000 sott.

Log. cos. ABC == 9 . 3337004.

Dun-

Dunque

$$ABC = 77^\circ . 32' . 52''.$$

V.ª Combinazione di dati.

Sieno dati i due lati AB, AC.

CASO XIII.

Per determinare l' ipotenusa BC.

Si faccia *Log.* R : *Log. cos.* AB = *Log. cos.* AC : *Log. cos.* BC (§ 77); e si determini BC.

ESEMPIO.

Sieno AB = 23° . 12' . 43", e AC = 60° . 44' . 22".

Log. cos. AB = 9 . 9633406

Log. cos. AC = 9 . 6891151 agg.

Som. = 19 . 6524557

Log. R = 10 . 0000000 sott.

Log. cos. BC = 9 . 6524557.

Sicchè

$$BC = 63^\circ . 18' . 24''.$$

CA-

CASO XIV.

Per determinare uno degli angoli obbliqui, *cioè* ACB.

Si faccia *Log. sen.* AC : *Log. tan.* AB == *Log.* R : *Log. tan.* ACB (§ 71); e si determini l' angolo ACB.

ESEMPIO.

Sieno pure AB == 23°. 12'. 43'', e AC == 60°. 44'. 22''.

Log. tan. AB	== 9 . 6323026	
Log. R	== 10 . 0000000	agg.
Som.	== 19 . 6323026	
Log. sen. AC	== 9 . 9407181	sott.
Log. tan. ACB	== 9 . 6915845.	

Sicchè

ACB == 16° . 10' . 38''.

VI.ª Combinazione di dati.

Sieno dati i due angoli obbliqui ACB, ABC.

CASO XV.

Per determinare l' ipotenusa BC.

Si faccia *Log. tan.* ACB : *Log.* R == *Log. cotan.* ABC : *Log. cos.* BC (§ 77); e si determini BC.

ESEMPIO.

Sieno ACB == 26°. 10'. 38", e ABC == 77°. 32'. 52".

Log. cotan. ABG	==	9 . 3440382	
Log. R	==	10 . 0000000	agg.
Som.	==	19 . 3440382	
Log. tan. ACB	==	9 . 6915830	sott.
Log. cos. BC	==	9 . 6524552.	

Dunque

BC == 63° . 18' . 24".

CA-

CASO XVI.

Per determinare uno de' lati, cioè AB.

Si faccia *Log. sen.* ABC : *Log.* R == *Log. cos.* ACB : *Log. cos.* AB (§ 77); e si determini il lato AB.

ESEMPIO.

Sieno pure ACB == 26°. 10'. 38", e ABC == 77° 32'. 52".

Log. cos. ACB == 9.9530024
Log. R == 10.0000000 agg.

Som. == 19.9530024
Log. sen. ABC == 9.9896616 sott.

Log. cos. AB == 9.9633408.

Sicchè

AB == 23°. 12'. 43".

PROBL. II.

116. *Date tre parti di qualunque triangolo sferico obbliquangolo, determinare col calcolo aritmetico ciascuna delle altre.*

SOLUZIONE.

Si metta il seno massimo == R.

Iª Combinazione di dati.

Fig. 14, e 15. Sieno dati i lati AB, BC, e l'angolo BCA.

CASO I.

Per determinare l'angolo BAC.

Si faccia *Log. sen.* AB : *Log. sen.* BC == *Log. sen.* BCA : *Log. sen.* BAC (§ 84); e si determini l'angolo BAC.

ESEMPIO.

Fig. 14. Sieno AB == 67°. 23'. 18", BC == 38°. 15'. 52", e BCA == 52°. 10'. 13".

Log. sen. BC == 9 . 7918954

Log. sen. BCA == 9 . 8975374 agg.

Som. == 19 . 6894328

Log. sen. AB == 9 . 9652637 sott.

Log. sen. BAC == 9 . 7241691.

Sicchè

BAC == 31° . 59' . 47".

CA-

CASO II.

Per determinare il lato AC. Fig. 14, e 15.

1. Nel triangolo rettangolo BDC, nota l' ipotenusa BC, e noto l' angolo obbliquo BCD, facendo *Log.* R : *Log. tan.* BC == *Log. cos.* BCD : *Log. tan.* DC (§ 71), si determini CD.

2. Si faccia *Log. cos.* BC : *Log. cos.* AB == *Log. cos.* CD : *Log. cos.* AD (§ 86); e si determini AD.

S' avrà nel caso della *Fig.* 14 AC == AD + DC, e nel caso della *Fig.* 15 AC == AD — DC.

ESEMPIO.

Sieno pure AB == 67°. 23'. 18", BC == 38°. 15'. 52", e BCA == 52°. 10'. 13". Fig. 14.

Log. tan. BC == 9.8969367

Log. cos. BCD == 9.7876849 agg.

Som. == 19.6846216

Log. R == 10.0000000 sott.

Log. tan. DC == 9.6846216.

Sicchè

DC == 25°. 48'. 55".

In

In oltre

$$Log.\ cos.\ AB = 9 \cdot 5848774$$
$$Log.\ cos.\ CD = 9 \cdot 9543403 \text{ agg.}$$

$$Som. = 19 \cdot 5392177$$
$$Log.\ cos.\ BC = 9 \cdot 8949585 \text{ sott.}$$

$$Log.\ cos.\ AD = 9 \cdot 6442592.$$

Dunque

$$AD = 63^\circ \cdot 50' \cdot 39''.$$

E perciò

$$AC = AD + DC = 89^\circ \cdot 39' \cdot 34''.$$

CASO III.

Per determinare ABC.

Fig.14, e 15. 1. Nel triangolo rettangolo BDC, nota l'ipotenusa BC, e noto l'angolo BCD, si faccia *Log.* R : *Log. tan.* BCD = *Log. cos.* BC : *Log. cotan.* CBD (§ 77); e si determini l'angolo CBD.

2. Si faccia *Log. tan.* AB : *Log. tan.* BC = *Log. cos.* CBD : *Log. cos.* ABD (§ 84); e si determini l'angolo ABD.

S'avrà nel caso della *Fig.*14 l'angolo ABC = ABD + DBC, e nel caso della *Fig.*15 ABC = ABD − DBC.

ESEM-

ESEMPIO.

Sieno anche AB == 67°. 23'. 18", BC == 38°. 15'. 52", e BCA == 52°. 10'. 13". Fig. 14.

Log. tan. BCD == 10 . 1098525

Log. cos. BC == 9 . 8949586 agg.

Som. == 20 . 0048111

Log. R == 10 . 0000000 sott.

Log. cotan. CBD == 10 . 0048111.

Sicchè

CBD == 44° . 40' . 58".

In oltre

Log. tan. BC == 9 . 8969367

Log. cos. CBD == 9 . 8518762 agg.

Som. == 19 . 7488129

Log. tan. AB == 10 . 3803863 sott.

Log. cos. ABD == 9 . 3684266.

Dunque

ABD == 76° . 29' . 33".

E per-

E perciò

$$ABC = ABD + DBC = 121° . 10' . 31''.$$

II.ª *Combinazione di dati.*

Fig. 14, e 15. Sieno dati i lati BA, AC, e l'angolo BAC da essi compreso.

CASO IV.

Per determinare il lato BC.

1. Nel triangolo rettangolo ADB, nota l'ipotenusa AB, e noto l'angolo obbliquo BAD, si faccia *Log.* R *Log. tan.* AB = *Log. cos.* BAD : *Log. tan* AD (§ 71); e si determini AD. S'avrà nota anche DC.

2. Si faccia *Log. cos.* AD : *Log. cos.* DC = *Log. cos.* AB : *Log. cos.* BC (§ 86); e si determini BC.

ESEMPIO.

Fig. 14. Sieno AB = 67° . 23' . 18'', AC = 89° . 39' . 34'', e BAC = 31° . 59' . 47''.

Log. tan. AB	= 10 . 3803863	
Log. cos. BAD	= 9 . 9284375	agg.
Som.	= 20 . 3088238	
Log. R	= 10 . 0000000	sott.
Log. tan. AD	= 10 . 3088238.	

Sic-

Sicchè

$$AD = 63° . 50' . 38'',$$

e conseguentemente

$$DC = 25° . 48' . 56''$$

In oltre

Log. cos. CD	=	9 . 9543392
Log. cos. AB	=	9 . 5848774 agg.
Som.	=	19 . 5392166
Log. cos. AD	=	9 . 6442597
Log. cos. BC	=	9 . 8949569.

Dunque

$$BC = 38° . 15' . 53''.$$

CASO V.

Per determinare uno de' rimanenti angoli, per esempio BCA. Fig. 14, e 15.

1. Si trovino, come nel caso precedente, AD, DC.

2. Si faccia *Log. sen.* CD : *Log. sen.* AD = *Log. tan.* BAC : *Log. tan.* BCA (§ 84); e si determini l' angolo BCA.

ESEMPIO.

Fig. 14. Sieno pure $AB = 67° . 23' . 18''$, $AC = 89° . 39' . 34''$, e $BAC = 31° . 59' . 47''$.

Si proceda, come nell' esempio precedente, e si determinino

$$AD = 63° . 50' . 38''.$$

$$DC = 25° . 48' . 56''.$$

In oltre

Log. sen. AD =	9 . 9530810	
Log. tan. BAC =	9 . 7957283	agg.
Som. =	19 . 7488093	
Log. sen. CD =	9 . 6389637	sott.
Log. tan. BCA =	10 . 1098456.	

Sicchè

$$BCA = 52° . 10' . 11''.$$

III.ª Combinazione di dati.

Sieno dati gli angoli BAC, BCA, e'l lato AB opposto a uno di tali angoli. Fig. 14, e 15.

CASO VI.

Per determinare il lato BC.

Si faccia *Log. sen.* BCA : *Log. sen.* BAC = *Log. sen.* AB : *Log. sen.* BC (§ 84); e si determini BC.

ESEMPIO.

Sieno BAC = 31°. 59'. 47", BCA = 52°. 10'. 13", e AB = 67°. 23'. 18". Fig. 14.

Log. sen. BAC = 9.7241659

Log. sen. AB = 9.9652637 agg.

Som. = 19.6894296

Log. sen. BCA = 9.8975374

Log. sen. BC = 9.7918922.

Dunque

BC = 38°. 15'. 31".

CASO VII.

Per determinare il lato AC.

Fig. 14, e 15. 1. Nel triangolo rettangolo ADB, nota l'ipotenusa AB, e noto l'angolo obbliquo BAD, si faccia *Log.* R : *Log. tan.* AB == *Log. cos.* BAD : *Log. tan.* AD (§ 71); e si determini AD.

2. Si faccia *Log. tan.* BCD : *Log. tan.* BAC == *Log. sen.* AD : *Log. sen.* CD (§ 84); e si determini CD.

S' avrà AC == AD + DC nel caso della *Fig.* 14, e AC == AD — DC nel caso della *Fig.* 15.

ESEMPIO.

Fig. 14. Sieno pure BAC == 31°. 59'. 47'', BCA == 52°. 10'. 13'', e AB == 67°. 23'. 18''.

Log. tan. AB	== 10 . 3803863	
Log. cos. BAD	== 9 . 9284375	agg.
Som.	== 20 . 3088238	
Log. R	== 10 . 0000000	sott.
Log. tan. AD	== 10 . 3088238.	

Dunque

AD == 63°. 50'. 38''.

In

In oltre

Log. tan. BAC == 9 . 7957283
Log. ſen. AD == 9 . 9530810 agg.

Som. == 19 . 7488093
Log. tan. BCA == 10 . 1098525 ſott.

Log. ſen. CD == 9 . 6389568 .

Sicchè

CD == 25° . 48′ . 54″.

Per la qual coſa

AG == AD + DG == 89° . 39′ . 32″ .

C A S O VIII.

Per determinare l' angolo ABC.

1. Nel triangolo rettangolo ADB, nota l' ipotenuſa AB, e noto l'angolo obbliquo in A, ſi faccia *Log.* R : *Log. tan.* BAD == *Log. coſ.* AB : *Log. cotan.* ABD (§ 77); e ſi determini l' angolo ABD. Fig. 14, e 15.

2. Si faccia *Log. coſ.* BAG : *Log. coſ.* BCA == *Log. ſen.* ABD : *Log. ſen.* CBD (§ 86); e ſi determini l' angolo CBD.

S' avrà ABG == ABD + DBC nel caſo della *Fig.* 14.

14, e ABC = ABD — CBD nel caſo della *Fig.* 15:

ESEMPIO.

Fig. 14. Sieno ancora ABC = 31°. 59′. 47″, BCA = 52°. 10′. 13″, e AB = 67°. 23′. 18″.

Log. tan.	BAD	=	9 . 7957283	
Log. coſ.	AB	=	9 . 5848774	agg.
Som.		=	19 . 3806057	
Log.	R	=	10 . 0000000	ſott.
Log. cotan.	ABD	=	9 . 3806057.	

Sicchè

ABD = 76° . 29′ . 33″.

In oltre

Log. coſ.	BCA	=	9 . 7876849	
Log. ſen.	ABD	=	9 . 9878178	agg.
Som.		=	19 . 7755027	
Log. coſ.	BAC	=	9 . 9284380.	ſott.
Log. ſen.	CBD	=	9 . 8470647.	

Onde

Onde

$$CBD = 44^\circ . 40' . 56''.$$

E perciò

$$ABC = ABD + DBC = 121^\circ . 10' . 29''.$$

IV^a. Combinazione di dati.

Sieno dati i due angoli CAB, CBA, e'l lato AB adiacente a tali angoli. Fig. 14, e 15.

C A S O IX.

Per determinare uno de' rimanenti lati, per esempio BC.

1. Nel triangolo rettangolo ADB, nota l'ipotenusa AB, e noto l'angolo in A, si faccia *Log.* R : *Log. tan.* BAD = *Log. cos.* AB : *Log. cotan.* ABD (§ 77); e si determini l'angolo ABD. Si farà noto anche l'angolo DBG.

2. Si faccia *Log. cos.* CBD : *Log. cos.* ABD = *Log. tan.* AB : *Log. tan.* BC (§ 84); e si determini il lato cercato BC.

E S E M P I O.

Sieno CAB = $31^\circ . 59' . 47''$, GBA = $121^\circ . 10' . 31''$, e AB = $67^\circ . 23' . 18''$. Fig. 14.

Log.

Log. tan. BAD	== 9 . 7957283	
Log. cos. AB	== 9 . 5848774	agg.
Som.	== 19 . 3806057	
Log. R	== 10 . 0000000	sott.
Log. cotan. ABD	== 9 . 3806057.	

Dunque

$$ABD == 76^{\circ} . 29' . 33'',$$

e conseguentemente

$$DBG == 44^{\circ} . 40' . 58''.$$

In oltre

Log. cos. ABD	== 9 . 3684219	
Log. tan. AB	== 10 . 3803863	agg.
Som.	== 19 . 7488082	
Log. cos. CBD	== 9 . 8518762	sott.
Log. tan. BC	== 9 . 8969320.	

Sicchè

$$BG == 38^{\circ} . 15' . 51''.$$

CASO X.

Per determinare l' angolo rimanente ACB.

1. Si determini, come nel caso precedente l' angolo ABD, e conseguentemente CBD. Fig. 14, e 15.

2. Si faccia *Log. sen.* ABD : *Log. sen.* CBD == *Log. cos.* BAC : *Log. cos.* BCA (§ 86); e si determini l' angolo cercato BCA.

ESEMPIO.

Sieno pure CAB == 31° . 59' . 47'', CBA == 121° . 10' . 31'', e AB == 67° . 23' . 18''. Fig. 14.

Si proceda come nell' esempio precedente, e si determinino

ABD == 76° . 29' . 33''.

CBD == 44° . 40' . 58''.

In oltre

Log. sen. CBD == 9 . 8470671

Log. cos. BAC == 9 . 9284380 agg.

Som. == 19 . 7755051

Log. sen. ABD == 9 . 9878178 sott.

Log. cos. BCA == 9 . 7876873.

O Sic.

Sicchè

$$BCA = 52^\circ . 10' . 13''.$$

V.ª Combinazione di dati.

Fig. 14, e 15. Sieno dati tutt'i lati del triangolo ABC.

CASO XI.

Per determinare l'angolo A.

1. Si faccia *Log. tang.* $\frac{AD \pm DC}{2}$: *Log. tang.* $\frac{AB \pm BC}{2}$: *Log. tan.* $\frac{AB \mp BC}{2}$: *Log. tan.* $\frac{AD \mp DC}{2}$, servendosi de' segni superiori pel caso della *Fig.* 14, e de' segni inferiori pel caso della *Fig.* 15; e si determini $\frac{AD \mp DC}{2}$, e conseguentemente si determinino AD, DC (§ 100).

2. Nel triangolo rettangolo ADB, nota l'ipotenusa AB, e noto il lato AD, si faccia *Log. tan.* AB : *Log.* R = *Log. tan.* AD : *Log. cos.* BAD, e si determini l'angolo cercato BAC.

ESEMPIO.

Sieno AB $= 85^\circ . 17' . 6''$, BC $= 38^\circ . 17' . 33''$,
Fig. 15. e AC $= 74^\circ . 13' . 2''$.

AB

$$\text{Log. tan. } \frac{AB - BC}{2} = 9 . 6382241$$

$$\text{Log. tan. } \frac{AB + BC}{2} = 10 . 2704722 \text{ agg.}$$

$$\text{Som.} \qquad = 19 . 9086963$$

$$\text{Log. tan. } \frac{AD - DC}{2} = 9 . 8788263 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. tan. } \frac{AD + DC}{2} = 10 . 0298700.$$

Sicchè

$$\frac{AD + DC}{2} = 46^\circ . 58' . 7''.$$

E perciò

$$AD = 84^\circ . 4' . 38'',$$

$$GD = 9^\circ . 51' . 36''.$$

In oltre

Log. tan. AD	==	10 . 9840467	
Log. R	==	10 . 0000000	agg.
Som.	==	20 . 9840467	
Log. tan. AB	==	11 . 0836592	ſott.
Log. coſ. BAD	==	9 . 9003875 .	

Onde

BAC == 37° . $20'$. $29''$.

Altrimenti.

1. Poſta la ſomma di tutt' i lati del triangolo == S, ſi ſommino *Log. ſen.* ($\frac{1}{2}$ S — AB), *Log. ſen.* ($\frac{1}{2}$ S — AC), e 2 *Log.* R.

2. Si ſommino anche *Log. ſen.* AB, *Log. ſen.* AC, e tale ſomma ſi ſottragga dalla precedente, e ſi noti il reſiduo.

3. Di tale reſiduo ſe ne prenda la metà. S' avrà in tal modo *Log. ſen.* $\frac{1}{2}$ A (104).

4. Finalmente ſi determini l'angolo $\frac{1}{2}$ A, e ſe ne prenda il doppio.

S' avrà in sì fatta maniera l'angolo cercato BAC.

ESEM-

E S E M P I O.

Sieno pure $AB = 85^\circ.\ 17'.\ 6''$, $BC = 38^\circ.\ 17'.\ 33''$, e $AC = 74^\circ.\ 13'.\ 2''$.

$$\tfrac{1}{2} S - AB = 13^\circ.\ 36'.\ 44''\ \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} S - AC = 24^\circ.\ 40'.\ 48''\ \tfrac{1}{2}.$$

Dunque

$$\begin{array}{ll} \textit{Log. sen.}\ (\tfrac{1}{2} S - AB) = & 9.3717174 \\ \textit{Log. sen.}\ (\tfrac{1}{2} S - AC) = & 9.6207106 \\ 2\ \textit{Log.}\ R = & 20.0000000 \\ \hline \textit{Som. I}^a = & 38.9924280. \end{array}$$

In oltre

$$\begin{array}{ll} \textit{Log. sen.}\ AB = & 9.9985278 \\ \textit{Log. sen.}\ AC = & 9.9833103 \\ \hline \textit{Som. II}^a = & 19.9818381. \end{array}$$

E perciò

$$\begin{array}{ll} \textit{Som. I}^a = & 38.9924280 \\ \textit{Som. II}^a = & 19.9818381\ \text{sott.} \\ \hline \end{array}$$

$$\textit{Log.}\ (\textit{sen.}\ \tfrac{1}{2} A)^2 = 19.0105899;$$

e

e

$$Log.\ sen.\ \tfrac{1}{2}\ A = 9 . 5052949.$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2}\ BAC = 18^\circ . 40' . 9'',$$

e conseguentemente

$$BAC = 37^\circ . 20' . 18''.$$

CASO XII.

Per determinare l' angolo BCA.

Fig. 14, e 15. 1. Si determinino, come nel caso prec. AD, DG.

2. Nel triangolo rettangolo CDB, nota l' ipotenusa BC, e noto il lato CD, con fare *Log. tan.* BC : *Log.* R = *Log. tan.* CD : *Log. cos.* BCD (§ 71), si determini l' angolo BCD.

S' avrà nel caso della *Fig.* 15 col conseguente di BCD l' angolo cercato BCA.

ESEMPIO.

Fig. 15. Sieno pure AB = 85°. 17'. 6'', BC = 38°. 17'. 33'', e AC = 74°. 13'. 2''.

Si proceda come nell' esempio precedente, e si trovino

$$AD = 84^\circ . 4' . 38''$$

$$CD = 9^\circ . 51' . 36''.$$

In-

In oltre

Log. tan. CD == 9 . 2400712

Log. R == 10 . 0000000 agg.

Som. == 19 . 2400712

Log. tan. BC == 9 . 8973741 sott.

Log. cos. BCD == 9 . 3426971.

Sicchè

BCD == 77° . 16′ . 59″.

E perciò

ACB == 102° . 43′ . 1″.

Altrimenti.

$\frac{1}{2}$ S — AC == 24° . 40′ . 48″ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ S — BC == 60° . 36′ . 17″ $\frac{1}{2}$.

Dun-

Dunque

$$\text{Log. sen. } (\tfrac{1}{2} S - AC) = 9.6207107$$

$$\text{Log. sen. } (\tfrac{1}{2} S - BC) = 9.9401455$$

$$2 \text{ Log. } R = 20.0000000$$

$$\text{Som. I}^a = 39.5608562.$$

In oltre

$$\text{Log. sen. } AC = 9.9833103$$

$$\text{Log. sen. } BC = 9.7921649$$

$$\text{Som. II}^a = 19.7754752.$$

E perciò

$$\text{Som. I}^a = 39.5608562$$

$$\text{Som. II}^a = 19.7754752 \text{ sott.}$$

$$\text{Log. } (\text{sen. } \tfrac{1}{2} ACB)^2 = 19.7853810,$$

e

$$\text{Log. sen. } \tfrac{1}{2} ACB = 9.8926905.$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2} AGB = 51^\circ . 21' . 31'',$$

e

Onde

$$ACB = 102^\circ . 43' . 2''.$$

CASO XIII.

Per determinare l' angolo ABC.

1. Si determinino, come nel caso 11° AD, DC. Fig. 14, e 15.

2. Nel triangolo rettangolo ADB, nota l' ipotenusa AB, e noto il lato AD, con fare *Log. sen.* AB : *Log.* R = *Log. sen.* AD : *Log. sen.* ABD (§ 71), si determini l' angolo ABD.

3. Similmente nel triangolo rettangolo CDB, nota l' ipotenusa BC, e noto il lato CD, con fare *Log. sen.* BC : *Log.* R = *Log. sen.* CD : *Log. sen.* CBD, si determini l' angolo CBD.

S' avrà ABC = ABD + DBC nel caso della *Fig.* 14, e ABC = ABD − DBC nel caso della *Fig.* 15.

ESEMPIO.

Sieno anche AB = 85° . 17' . 6", BC = 38° . 17'. 33", e AC = 74° . 13' . 2". Fig. 15.

Si proceda come nell' esempio del caso 11°, e si trovino

$$AD = 84^\circ . 4' . 38''$$

$$CD = 9^\circ . 51' . 36''.$$

In oltre

Log. ſen. AD	==	9 . 9976755	
Log. R	==	10 . 0000000	agg.
Som.	==	19 . 9976755	
Log. ſen. AB	==	9 . 9985278	ſott.
Log. ſen. ABD	==	9 . 9991477 .	

Dunque

ABD == 86° . 24′ . 41″.

Di vantaggio

Log. ſen. CD	==	9 . 2336084	
Log. R	==	10 . 0000000	agg.
Som.	==	19 . 2336084	
Log. ſen. BC	==	9 . 7921649	ſott.
Log. ſen. CBD	==	9 . 4414435 .	

Onde

CBD == 16° . 2′ . 30″.

Per la qual coſa

ABC == ABD — CBD == 70° . 22′ . 11″.

Altri-

Altrimenti.

$$\tfrac{1}{2} S - AB = 13^\circ . 36' . 44'' \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2} S - BC = 60^\circ . 36' . 17'' \tfrac{1}{2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} &Log.\ sen.\ (\tfrac{1}{2} S - AB) &= 9 . 3717174 \\ &Log.\ sen.\ (\tfrac{1}{2} S - BC) &= 9 . 9401455 \\ &2\ Log.\ R &= 20 . 0000000. \end{aligned}$$

$$Som.\ I^a = 39 . 3118629.$$

In oltre

$$\begin{aligned} &Log.\ sen.\ AB &= 9 . 9985278 \\ &Log.\ sen.\ BC &= 9 . 7921649. \end{aligned}$$

$$Som.\ II^a = 19 . 7906927.$$

E perciò

$$\begin{aligned} &Som.\ I^a &= 39 . 3118629 \\ &Som.\ II^a &= 19 . 7906927 \text{ sott.} \end{aligned}$$

$$Log.\ (sen.\ \tfrac{1}{2} ABC)^2 = 19 . 5211702,$$

e

$$Log.\ sen.\ \tfrac{1}{2}\ ABC = 9 . 7605851.$$

P 2 Sic-

Sicchè

$$\tfrac{1}{2}\,ABC = 35^\circ\,.\,11'\,.\,5'',$$

e conseguentemente

$$ABC = 70^\circ\,.\,22'\,.\,10''.$$

VI.ª Combinazione di dati.

Fig. 14, e 15. Sieno dati tutti gli angoli del triangolo ABC.

CASO XIV.

Per determinare il lato AB.

1. Si faccia nel caso della *Fig.* 14 *Log. cotang.* $\frac{BCD + BAD}{2}$: *Log. tang.* $\frac{BCD - BAD}{2}$ = *Log. tan.* $\frac{ABD + CBD}{2}$: *Log. tan.* $\frac{ABD - CBD}{2}$ (§ 107), e nel caso della *Fig.* 15 *Log. tan.* $\frac{BCD - BAD}{2}$: *Log. cotan.* $\frac{BAD + BCD}{2}$ = *Log. tan.* $\frac{ABD - CBD}{2}$: *Log. tan.* $\frac{ABD + CBD}{2}$ (§ 108); e si determinino nel primo caso $\frac{ABD - CBD}{2}$, e nel caso secondo $\frac{ABD + CBD}{2}$, e

con-

conseguentemente in ambi i casi si determinino gli angoli ABD, CBD.

2. Nel triangolo rettangolo ADB, noti gli angoli obbliqui, coll' ajuto della proporzione *Log. tan.* BAD : *Log.* R == *Log. cotan.* ABD : *Log. cos.* AB (§ 77), si determini il lato cercato AB.

E S E M P I O.

Sieno BAC == 37°. 20'. 29", BCA == 102°. 43'. 1", e ABC == 70°. 22'. 11". Fig. 15.

$$\textit{Log. cotan.}\ \frac{BAD + BCD}{2} = 9.8073235$$

$$\textit{Log. tang.}\ \frac{ABD - CBD}{2} = 9.8482056 \text{ agg.}$$

$$\textit{Som.} = 19.6555291$$

$$\textit{Log. tang.}\ \frac{BCD - BAD}{2} = 9.5603776 \text{ sott.}$$

$$\textit{Log. tang.}\ \frac{ABD + CBD}{2} = 10.0951515.$$

Sicchè

$$\frac{ABD + CBD}{2} = 51°.\ 13'.\ 37''.$$

E' pu-

E' pure

$$\frac{ABD - CBD}{2} = 35^\circ . 11' . 5'' \tfrac{1}{2}.$$

Dunque

$$ABD = 86^\circ . 24' . 42'' \tfrac{1}{2}$$

$$CBD = 16^\circ . 2' . 31'' \tfrac{1}{2}.$$

In oltre

Log. cotan. ABD	= 8 . 7973206	
Log. R	= 10 . 0000000	agg.
Som.	= 18 . 7973206	
Log. tang. BAD	= 9 . 8824893	ſott.
Log. coſ. AB	= 8 . 9148313.	

Sicchè

$$AB = 85^\circ . 17' . 8''.$$

Altrimenti.

1. Poſta la ſomma di tutti gli angoli del triangolo = S, ſi ſommino *Log. coſ.* ($\frac{1}{2}$ S — A), *Log. coſ.* ($\frac{1}{2}$ S — B), e 2 *Log.* R.

2. Si

2. Si sommino anche *Log. sen.* A, *Log. sen.* B, e tale somma si sottragga dalla precedente, e si noti il residuo.

3. Di tale residuo se ne prenda la metà. S'avrà in tal modo *Log. cos.* $\frac{1}{2}$ AB (§ 113).

4. Finalmente si determini $\frac{1}{2}$ AB, e se ne prenda il doppio.

S'avrà in tal modo il lato cercato AB.

E S E M P I O.

Sieno pure A $=$ 37° . 20′ . 29″, B $=$ 70° . 22′ . 11″, e C $=$ 102° . 43′ . 1″. Sarà

$$\tfrac{1}{2}\,S = 105^\circ \;.\; 12' \;.\; 50''\,\tfrac{1}{2}.$$

E perciò

$$\tfrac{1}{2}\,S - A = 67^\circ \;.\; 52' \;.\; 21''\,\tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\,S - B = 34^\circ \;.\; 50' \;.\; 39''\,\tfrac{1}{2}.$$

Dunque

Log. cos. ($\frac{1}{2}$ S — A)	$=$ 9 . 5759571
Log. cos. ($\frac{1}{2}$ S — B)	$=$ 9 . 9141884
2 *Log.* R	$=$ 20 . 0000000
Som. I^a	$=$ 39 . 4901455.

In

In oltre

$$Log.\ sen.\ A = 9 . 7828758$$
$$Log.\ sen.\ B = 9 . 9739955$$

$$Som.\ II^a = 19 . 7568713 .$$

E perciò

$$Som.\ I^a = 39 . 4901455$$
$$Som.\ II^a = 19 . 7568713 \text{ sott.}$$

$$Log.\ (cos.\ \tfrac{1}{2} AB)^2 = 19 . 7332742 ,$$

e

$$Log.\ cos.\ \tfrac{1}{2} AB = 9 . 8666371 .$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2} AB = 44^\circ . 38' . 34'' ,$$

e conseguentemente

$$AB = 85^\circ . 17' . 8'' .$$

CASO XV.

Fig. 14 e 15. *Per determinare il lato* BC.

1. Si determinino, come nel caso prec. gli angoli ABD, CBD.

2. Nel

2. Nel triangolo rettangolo CDB, noti gli angoli obbliqui, coll'ajuto della proporzione *Log. tan.* BCD : *Log.* R == *Log. cotan.* CBD : *Log. cos.* BC (§ 77), si determini il lato BC.

ESEMPIO.

Sieno pure BAC == 37°. 20'. 29", BCA == 102°. 43'. 1", e ABC == 70°. 22'. 11". Fig. 15.

Si proceda come nell'esempio del caso prec., e si determinino

ABD == 86° . 24' . 42" $\frac{1}{2}$

CBD == 16° . 2' . 31" $\frac{1}{2}$.

In oltre

Log. cotan. CBD == 10 . 5413011

Log. R == 10 . 0000000 agg.

Som. == 20 . 5413011

Log. tan. BCD == 10 . 6465252 sott.

Log. cos. BC == 9 . 8947759.

Sicchè

BC == 38° . 17' . 42".

Altrimenti

$$\tfrac{1}{2} S - B = 34^\circ \,.\, 50' \,.\, 39'' \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} S - C = 2^\circ \,.\, 29' \,.\, 49'' \tfrac{1}{2}.$$

Dunque

$$\begin{array}{ll} Log.\ cos.\ (\tfrac{1}{2} S - B) & = 9 \,.\, 9141884 \\ Log.\ cos.\ (\tfrac{1}{2} S - C) & = 9 \,.\, 9995874 \\ 2\ Log.\ R & = 20 \,.\, 0000000 \\ \hline Som.\ I^a & = 39 \,.\, 9137758. \end{array}$$

In oltre

$$\begin{array}{lll} Log.\ sen.\ B & = 9 \,.\, 9739955 & \\ Log.\ sen.\ C & = 9 \,.\, 9892137 & \text{agg.} \\ \hline Som.\ II^a & = 19 \,.\, 9632092. & \end{array}$$

E perciò

$$\begin{array}{lll} Som.\ I^a & = 39 \,.\, 9137758 & \\ Som.\ II^a & = 19 \,.\, 9632092 & \text{sott.} \\ \hline Log.\ (cos.\ \tfrac{1}{2} BC)^2 & = 19 \,.\, 9505666, & \end{array}$$

e

e

$$Log.\ cos.\ \tfrac{1}{2}\ BC \quad = \quad 9 \cdot 9752833.$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2}\ BC = 19^\circ \ . \ 8' \ . \ 52'',$$

e conseguentemente

$$BC = 38^\circ \ . \ 17' \ . \ 44''.$$

C A S O XVI.

Per determinare il lato AC.

1. Si determinino come nel caso 14° gli angoli ABD, CBD. Fig. 14, e 15.

2. Nel triangolo rettangolo ADB, noti gli angoli obbliqui, coll' ajuto della proporzione *Log. sen.* BAD : *Log.* R = *Log. cos.* ABD : *Log. cos.* AD (§ 77), si determini AD.

3. Similmente nel triangolo rettangolo CDB, noti pure gli angoli obbliqui, coll' ajuto della proporzione *Log. sen.* BCD : *Log.* R = *Log. cos.* CBD : *Log. cos.* CD, si determini CD.

S' avrà AC = AD + DC nel caso della *Fig.* 14, e AC = AD — DC nel caso della *Fig.* 15.

E S E M P I O.

Sieno anche BAC $= 37^\circ . 20' . 29''$, BCA $= 102^\circ . 43' . 1''$, e ABC $= 70^\circ . 22' . 11''$. Fig. 15.

Si proceda come nell'esempio del caso 14°, e si trovino

$$ABD = 86° . 24' . 42'' \tfrac{1}{2}$$
$$CBD = 16° . 2' . 31'' \tfrac{1}{2}.$$

In oltre

Log. cos. ABD	= 8 . 7964684	
Log. R	= 10 . 0000000	agg.
Som.	= 18 . 7964684	
Log. sen. BAD	= 9 . 7828758	sott.
Log. cos. AD	= 9 . 0135926.	

Sicchè

$$AD = 84° . 4' . 40''.$$

Di più

Log. cos. CBD	= 9 . 9827500	
Log. R	= 10 . 0000000	agg.
Som.	= 19 . 9827500	
Log. sen. BCD	= 9 . 9892137	sott.
Log. cos. CD	= 9 . 9935363.	

Dunque

$$CD = 9° . 51' . 39''.$$

E

E perciò

$$AC = AD - DC = 74^\circ . 13' . 1''.$$

Altrimenti.

$$\tfrac{1}{2} S - A = 67^\circ . 52' . 21'' \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{2} S - C = 2^\circ . 29' . 49'' \tfrac{1}{2}.$$

Dunque

Log. cos. $(\tfrac{1}{2} S - A)$	$= 9 . 5759571$
Log. cos. $(\tfrac{1}{2} S - C)$	$= 9 . 9995874$
2 *Log.* R	$= 20 . 0000000$
Som. I^a	$= 39 . 5755445.$

In oltre

Log. sen. A	$= 9 . 7828758$
Log. sen. C	$= 9 . 9892137$
Som. II^a	$= 19 . 7720895.$

E perciò

Som. I^a	$= 39 . 5755445$
Som. II^a	$= 19 . 7720895$ sott.
Log. cos. $(\tfrac{1}{2} AC)^2$	$= 19 . 8034550,$

e

e

$$Log.\ cos.\ \tfrac{1}{2}\,AC = 9.9017275.$$

Sicchè

$$\tfrac{1}{2}\,AC = 37^{\circ}\ ,\ 6'\ .\ 31'',$$

e conseguentemente

$$AC = 74^{\circ}\ .\ 13'\ .\ 2''.$$

AVVERTIMENTO.

117. Ecco esposti tutt' i casi possibili del problema, che insegna la Trigonometria sferica a sciorre relativamente agli triangoli sferici e rettangoli, e obbliquangoli; ed ecco nel tempo istesso esposto quanto constituisce il sostanziale di sì fatta Trigonometria. Ciò, che soggiugneremo, servirà unicamente per potere ne' bisogni con facilità determinare la picciola variazione, che accade in una delle parti di qualunque triangolo sferico, qualora si conosce la variazione picciolissima d' un' altra sua parte, senza bisogno di rifare un intero calcolo; e per guidarci nella pratica circa la grandezza degli angoli, e de' lati de' triangoli sferici da misurare coll' ajuto di strumenti; acciò i piccioli inevitabili errori, ne' quali si cade in sì fatte misure, a cagione dell' insensibilità delle minime parti de' strumenti, non arrechino, se non errori, quanto più riesce possibile, picciolissimi negli angoli, e ne' lati de' medesimi triangoli, che si rilevano col calcolo trigonometrico.

CAP. VI.

S'espongono i rapporti delle variazioni, che possono accadere nelle parti di qualunque triangolo sferico, qualora tali variazioni sono picciolissime, e due delle dette parti rimangono costanti.

DEFINIZIONE.

118. Quando in un triangolo sferico, con restare costanti due delle sue parti, si cambiano alquanto le grandezze delle altre; le quantità, di cui si cambiano tali parti, chiamiamo *variazioni* di esse.

AVVERTIMENTO.

119. Si noti che in seguito per brevità contrassegneremo la variazione d'un arco qualunque AB di qualsisia triangolo sferico ABC, con notare *var.* AB, e la variazione d'un angolo qualunque BAC, con notare *var.* BAC, o *var.* A, premettendo *var.* alle lettere contrassegnanti l'arco, o l'angolo. Fig. 16.

PROBL. III.

120. *Sieno nel triangolo sferico* ABC *costanti il lato* AB, *e l'angolo adiacente in* B. *Determinare, accaduta una picciola variazione in una delle quattro rimanenti parti, cioè o nel lato* BC, *o nel lato* AC, *o nell'angolo in* A, *o nell'angolo in* C, *i rapporti, che hanno a sì fatta variazione quelle, che succedono conseguentemente nelle altre tre.* Fig. 17.

SO-

SOLUZIONE.

S' intenda avere il triangolo sferico A B C sofferta una picciolissima variazione, ed essersi trasmutato nel triangolo A B D; talchè si sieno variati BC in B D, AC in A D, l'angolo B A C in B A D, e l'angolo B C A in B D A. S'intenda in oltre A C prolungato in E, finchè sia A E arco di quadrante; e per C, ed E s' intendano menati gli archi circolari C G, E F, che incontrino l'arco A D, prolungato in F, ne' punti G, e F, e archi di cerchi, che abbiano l'istesso punto A per comune polo. Saranno E F arco di cerchio massimo, e misura dell'angoletto sferico C A D (§ 29), CG arco di cerchio minore, parallelo a quello, a cui appartiene E F, e AG == AC; e saranno altresì DC == *var.* BC, DG == *var.* AC, ed EF == *var.* B A C == *var.* A. E di più, per le variazioni assai picciole, si potranno senza sensibile errore prendere il triangoletto C G D come rettilineo, e conseguentemente come rettangolo in G, e l' angolo C D G come uguale ad A C B.

Si metta il seno massimo == R.

I.

DC : DG == R : *cos.* CDG == R : *cos.* ACB.

Dunque

var. BC : *var.* AC == R : *cos.* C.

II.

Essendo gli archetti CG, EF simili nella ragione de' raggi de' cerchi, a' quali appartengono, e conseguentemente nella ragione de' seni degli archi AC, AE; sarà

$$GC : EF = \textit{sen.}\ AC : R.$$

Ma

$$DC : GC = R : \textit{sen.}\ CDG = R : \textit{sen.}\ ACB.$$

Dunque

$$DC : EF = \textit{sen.}\ AC : \textit{sen.}\ ACB.$$

E perciò

$$\textit{var.}\ BC : \textit{var.}\ A = \textit{sen.}\ AC : \textit{sen.}\ C.$$

III.

$$DG : GC = R : \textit{tan.}\ CDG = R : \textit{tan.}\ ACB.$$

Ma

$$GC : EF = \textit{sen.}\ AC : R.$$

Dunque

$$DG : EF = \textit{sen.}\ AC : \textit{tan.}\ ACB.$$

Onde

$$\textit{var.}\ AC : \textit{var.}\ A = \frac{\textit{sen.}\ AC\ ;\ \textit{tan.}\ C}{R}$$

IV.

IV.

Fig16. S' intenda relativamente al triangolo sferico ABC costrutto il triangolo LMN secondo la condizione supposta nel § 110. Essendo nel triangolo ABC costanti il lato AB, e l'angolo in B, costanti saranno nel triangolo LMN l'angolo in M, e'l lato MN. Onde sarà

$$var.\ LN : var.\ N = sen.\ NL : tan.\ L.$$

Ma di quanto varia l'angolo in C, di tanto deve variare LN, supplimento alla mezza periferia dell'arco, che misura il detto angolo; e di quanto varia BC, di tanto deve variare l'angolo in N, la cui misura è supplimento alla mezza periferia dell'arco BC. Dunque

$$var.\ C : var.\ BC = sen.\ NL : tan.\ L,$$

ovvero

$$var.\ C : var.\ BC = sen.\ C : tan.\ AC.$$

V.

Fig.17.

$$var.\ C : var.\ BC = sen.\ C : tan.\ AC.$$

$$var.\ BC : var.\ AC = R : cos.\ C.$$

Dunque

$$var.\ C : var.\ AC = \frac{sen.\ C}{cos.\ C} : \frac{tan.\ AC}{R}.$$

E

E perciò

$$var.\ C : var.\ AC = tan.\ C : tan.\ AC.$$

VI.

$$var.\ C : var.\ BC = sen.\ C : tan.\ AC,$$

$$var.\ BC : var.\ A = sen.\ AC : sen.\ C.$$

Dunque

$$var.\ C : var.\ A = sen.\ AC : tan.\ AC,$$

ovvero

$$var.\ C : var.\ A = cos.\ AC : R.$$

Ch'è quanto bisognava determinare.

COROLLARIO I.

121. Quindi tutt'i cercati rapporti, ordinatamente disposti, sono

1. $var.\ BC : var.\ AC = R : cos.\ C,$
2. $var.\ BC : var.\ A = sen.\ AC : sen.\ C,$
3. $var.\ BC : var.\ C = tan.\ AC : sen.\ C,$
4. $var.\ AC : var.\ A = sen.\ AC : tan.\ C,$
5. $var.\ AC : var.\ C = tan.\ AC : tan.\ C,$
6. $var.\ C : var.\ A = cos.\ AC : R.$

E quindi coll'ajuto di tali sei proporzioni, qualora nel triangolo A B C rimangono costanti il lato A B, e l'angolo adiacente A B C, data una picciola variazione di qualunque delle quattro rimanenti parti, si può sempre determinare la variazione, che conseguentemente succede in ognuna delle altre tre, purchè sieno già noti tutti gli angoli, e tutt' i lati dell' istesso triangolo A B C.

COROLLARIO II.

122. Dalla proporzione *var.* B C : *var.* A C = R : *cos.* C ne derivano più altre.

I.

Essendo pel § 89

$$cos.\ C = \frac{R^2 \times cos.\ AB - R \times cos.\ AC \times cos.\ BC}{sen.\ AC \times sen.\ BC};$$

sarà

1. $var.\,BC : var.\,AC = sen.\,AC \times sen.\,BC : R \times cos.\,AB - cos.\,AC \times cos.\,BC.$

E perciò, se A C = 90°, nel qual caso è *sen.* A C = R, e *cos.* A C = o, sarà

2. $var.\ BC : var.\ AC = sen.\ BC : cos.\ AB.$

Se poi è B C = 90°; è allora

3. $var.\ BC : var.\ AC = sen.\ AC : cos.\ AB.$

Se finalmente A B = 90°; in tale caso è

$var.\,BC : var.\,AC = sen.\,AC \times sen.\,BC : cos.\,AC \times cos.\,BC,$

ovvero

$$var.\ BC : var.\ AC = \frac{sen.\ BC}{cos.\ BC} : \frac{cos.\ AC}{sen.\ AC},$$

e conseguentemente

4. $var.\ BC : var.\ AC = tan.\ BC : cot.\ AC.$

II.

Essendo pure pel § 89

$$cos.\ C = \frac{sen.\ A \times sen.\ B \times cos.\ AB \mp R \times cos.\ A \times cos.\ B}{R^2};$$

sarà

5. $var.\ BC : var.\ AC = R^3 : sen.\ A \times sen.\ B \times cos.\ AB \mp R \times cos.\ A \times cos.\ B$

E perciò, se $A = 90^\circ$, sarà

6. $var.\ BC : var.\ AC = R^2 : sen.\ B \times cos.\ AB.$

Se $B = 90^\circ$, sarà

7. $var.\ BC : var.\ AC = R^2 : sen.\ A \times cos.\ AB.$

Se $AB = 90^\circ$, sarà

8. $var.\ BC : var.\ AC = R^2 : cos.\ A \times cos.\ B.$

AVVERTIMENTO.

123. Si noti che se l'angolo ACB è retto, e conseguentemente retto ACD, si ha la seguente proporzione pel § 77, cioè R :

$$R : cos.\ CD = cos.\ AC : cos.\ AD;$$

colla quale proporzione, data la variazione di BC, si determina a dirittura il lato AD, senza bisogno di determinare la variazione di AC.

COROLLARIO III.

124. Dalla proporzione $var.\ BC : var.\ A = sen.\ AC : sen.\ C$ ne derivano pure più altre.

I.

Se $AC = 90°$, sarà

1. $var.\ BC : var.\ A = R : sen.\ C.$

Se $C = 90°$, sarà

2. $var.\ BC : var.\ A = sen.\ AC : R.$

II.

Essendo pel § 85

$$sen.\ C = \begin{cases} \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AB}{sen.\ BC} \\ \dfrac{sen.\ B \times sen.\ AB}{sen.\ AC} \end{cases}$$

$$sen.\ AC = \begin{cases} \dfrac{sen.\ B \times sen.\ BC}{sen.\ A} \\ \dfrac{sen.\ B \times sen.\ AB}{sen.\ C}; \end{cases}$$

sa-

faranno

3. $var.\,BC : var.\,A = sen.\,AC \times sen.\,BC : sen.\,A \times sen.\,AB$,

4. $var.\,BC : var.\,A = (sen.\,AC)^2 : sen.\,B \times sen.\,AB$,

5. $var.\,BC : var.\,A = sen.\,B \times sen.\,BC : sen.\,A \times sen.\,C$,

6. $var.\,BC : var.\,A = sen.\,B \times sen.\,AB : (sen.\,C)^2$

7. $var.\,BC : var.\,A = (sen.\,BC)^2 \times sen.\,B : (sen.\,A)^2 \times sen.\,AB$.

COROLARIO IV.

125. Dalla proporzione $var.\,BC : var.\,C = tan.\,AC$ $sen.\,C$ ne derivano le feguenti.

I.

Effendo pel § 85

$$sen.\,C = \begin{cases} \dfrac{sen.\,A \times sen.\,AB}{sen.\,BC} \\ \dfrac{sen.\,B \times sen.\,AB}{sen.\,AC}, \end{cases}$$

faranno

1. $var.\,BC : var.\,C = tan.\,AC \times sen.\,BC : sen.\,A \times sen.\,AB$

2. $var.\,BC : var.\,C = tan.\,AC \times sen.\,AC : sen.\,B \times sen.\,AB$.

II.

Effendo pel § 94

$$tan.\,AC = \frac{R^2 \times sen.\,BC}{cot.\,B \times sen.\,C \pm cos.\,C \times cos.\,BC},$$

fa-

farà

$$3.\quad var.\,BC : var.\,C = R^2 \times sen.\,BC : cot.\,B \times (sen.\,C)^2 \pm sen.\,C \times cos.\,C \times cos.\,BC.$$

E perciò se $C = 90^\circ$, farà

$$4.\quad var.\,BC : var.\,C = sen.\,BC : cot.\,B.$$

Se poi $BC = 90^\circ$, farà

$$5.\quad var.\,BC : var.\,C = R^3 : cot.\,B \times (sen.\,C)^2,$$

ovvero

$$6.\quad var.\,BC : var.\,C = R \times tan.\,B : (sen.\,C)^2.$$

COROLLARIO V.

126. Dalla proporzione $var.\,AC : var.\,A = sen.\,AC : tan.\,C$ ne derivano le seguenti altre.

I.

Se $AC = 90^\circ$, farà

$$1.\quad var.\,AC : var.\,A = R : tan.\,C.$$

II.

Essendo pel § 85

$$sen.\,AC = \begin{cases} \dfrac{sen.\,B \times sen.\,BC}{sen.\,A} \\[2ex] \dfrac{sen.\,B \times sen.\,AB}{sen.\,C}, \end{cases}$$

iafaranno

2. $var. AC : var. A = sen. B \times sen. BC : sen. A \times tan. C$,

3. $var. AC : var. A = sen. B \times sen. AB : sen. C \times tan. C$.

III.

Ed essendo pel § 92

$$tan. C = \frac{R^2 \times sen. A}{sen. AC \times cot. AB \mp cos. A \times cos. AC},$$

farà

4. $var. AC : var. A = (sen. AC)^2 \times cot. AB \mp cos. A \times sen. AC \times cos. AC : R^2 \times sen. A$.

E perciò, se $AC = 90°$, farà

5. $var. AC : var. A = cot. AB : sen. A$.

Se poi $A = 90°$, farà

6. $var. AC : var. A = (sen. AC)^2 \times cot. AB : R^3$;

ovvero

7. $var. AC : var. A = (sen. AC)^2 : R \times tan. AB$.

COROLLARIO VI.

127. Finalmente dalla proporzione $var. C : var. A = cos. AC : R$ ne derivano le altre seguenti. Essendo

S cos.

$$cof.\ AC = \frac{R^2 \times cof.\ B \pm R \times cof.\ A \times cof.\ C}{fen.\ A \times fen.\ C};$$

farà

1. $var.\ C : var.\ A = R \times cof.\ B \pm cof.\ A \times cof.\ C : fen.\ A \times fen.\ C.$

E perciò, se $A = 90°$, farà

2. $var.\ C : var.\ A = cof.\ B : fen.\ C.$

Se $C = 90°$, farà

3. $var.\ C : var.\ A = cof.\ B : fen.\ A.$

Se finalmente $B = 90°$, farà

4. $var.\ C : var.\ A = \frac{cof.\ A}{fen.\ A} : \frac{fen.\ C}{cof.\ C} : = cot.\ A : tan.\ C.$

LEMMA.

Fig.18. 128. *Sia AOB un quadrante circolare, e sieno BC un arco qualunque, e CM una sua parte assai picciola. Congiunto il raggio OC, s'intendano calate da C, e M su OB le perpendicolari CP, MQ, e da M su CP la perpendicolare MR. Saranno OP = cof. BC, PC = fen. BC, CM = var. BC, e CR = var. fen. BC. Dico, posto il seno massimo = R, essere* $var.\ fen.\ BC = \frac{cof.\ BC}{R} \times var.\ BC.$

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, potendosi senza errore sensibile prendere CRM per triangoletto rettilineo, e simile ad OPC, farà CR

$$CR : CM = OP : OC.$$

Dunque

$$var.\ sen.\ BC : var.\ BC = cos.\ BC : R.$$

E perciò

$$var.\ sen.\ BC = \frac{cos.\ BC}{R} \times var.\ BC.$$

Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

P R O B L. IV.

129. *Sieno nel triangolo sferio* ABC *costanti il lato* AC, *e l'angolo opposto* B. *Determinare, succeduta una picciola variazione in una della quattro rimanenti parti, cioè nel lato* AB, *o nel lato* BC, *o nell' angolo in* A, *o nell' angolo in* C, *i rapporti, che hanno a sì fatta variazione quelle, che succedono conseguentemente nelle altre tre.* Fig. 19.

S O L U Z I O N E.

S' intenda avere il triangolo ABC sofferta una picciolissima variazione, ed essersi trasmutato nel triangolo DBE, con rimanere DE = AC, e con essersi variato BA in BD, l'angolo BAC in BDE, e l'angolo BCA in BED. Saranno AD = *var.* AB, e GE = *var.* BC.

Si metta il seno massimo = R.

I.

Potendosi senza errore sensibile prendere

$$sen.\ AB \pm var.\ sen.\ AB = sen.\ AB,$$

$$sen.\ C + var.\ sen.\ C = sen.\ C;$$

sarà

$$sen.\ AB \pm var.\ sen.\ AB : sen.\ AB = sen.\ C + var.\ sen.\ C : sen.\ C.$$

E perciò

$$var.\ sen.\ AB : var.\ sen.\ C = sen.\ AB : sen.\ C.$$

Ma pel lem. prec.

$$var.\ sen.\ AB = \frac{cos.\ AB}{R} \times var.\ AB,$$

$$var.\ sen.\ C = \frac{cos.\ C}{R} \times var.\ C.$$

Dunque

$$\frac{cos.\ AB}{R} \times var.\ AB : \frac{cos.\ C}{R} \times var.\ C = sen.\ AB : sen.\ C.$$

Onde

$$var.\ AB : var.\ C = \frac{sen.\ AB}{cos.\ AB} : \frac{sen.\ C}{cos.\ C},$$

ov-

ovvero

$$var.\ AB : var.\ C = tan.\ AB : tan.\ C.$$

Similmente si dimostra essere

$$var.\ BC : var.\ A = tan.\ BC : tan.\ A.$$

II.

S' intenda l'arco ED prolungato in F, finchè sia OF = OA; e per A, e C s' intendano menati gli archetti AF, CG di cerchi minori, che abbiano O per uno de' poli. Si potranno prendere senza errore sensibile AFD, CGE per triangoletti rettilinei, rettangoli in F, e G, ed FD = GE. Onde saranno

$$AD : DF = R : cos.\ ADF = R : cos.\ BAC,$$

$$GE : EC = cos.\ GEC : R = cos.\ BCA : R.$$

Sicchè

$$AD : EC = cos.\ BCA : cos.\ BAC;$$

vale a dire

$$var.\ AB : var.\ BC = cos.\ C : cos.\ A.$$

III.

Si supponga relativamente al triangolo sferico ABC costrutto l'altro LMN del modo insegnato nel § 110. Essendo nel triangolo ABC costanti il lato AC, e l'angolo oppo- Fig. 16.

posto in B, costanti saranno ancora nel triangolo LMN il lato MN, e l'angolo opposto in L. Onde sarà

$$var.\ LN : var.\ LM = cos.\ M : cos.\ N.$$

Ma di quanto variano LN, LM, di tanto variar debbono gli angoli in C, e A; ed i coseni degli angoli in M, ed N sono gli stessi de' coseni degli archi AB, BC. Sicchè

$$var.\ C : var.\ A = cos.\ AB : cos.\ BC.$$

IV.

Fig. 19.

$$var.\ AB : var.\ C = tan.\ AB : tan.\ C,$$

$$var.\ C : var.\ A = cos.\ AB : cos.\ BC.$$

Dunque

$$var.\ AB : var.\ A = cos.\ AB \times tan.\ AB : cos.\ BC \times tan.\ C.$$

Ma

$$cos.\ AB \times tan.\ AB = R \times sen.\ AB.$$

Sicchè

$$var.\ AB : var.\ A = R \times sen.\ AB : cos.\ BC \times tan.\ C.$$

Similmente si dimostra essere

$$var.\ BC : var.\ C = R \times sen.\ BC : cos.\ AB \times tan.\ A.$$

Ch'è quanto bisognava determinare.

CO.

COROLLARIO I.

130. Quindi tutt'i cercati rapporti, ordinatamente disposti, sono

1. $var.\ AB : var.\ BC == cos.\ C : cos.\ A$,

2. $var.\ AB : var.\ C == tan.\ AB : tan.\ C$,

3. $var.\ AB : var.\ A == R \times sen.\ AB : cos.\ BC \times ta$

4. $var.\ BC : var.\ A == tan.\ BC : tan.\ A$,

5. $var.\ BC : var.\ C == R \times sen.\ BC : cos.\ AB \times tan.\ A$;

6. $var.\ C : var.\ A == cos.\ AB : cos.\ BC$.

E quindi coll'ajuto di tali sei proporzioni, qualora nel triangolo ABC sono costanti il lato AC, e l'angolo opposto in B, data una picciola variazione di qualunque delle quattro rimanenti parti, si può sempre determinare la variazione, che conseguentemente succede in ognuna delle tre altre; purchè sieno già noti tutti gli angoli, e tutt'i lati del triangolo ABC.

COROLLARIO II.

131. Dalla proporzione $var.\ AB : var.\ BC == cos.\ C : cos.\ A$ ne derivano più altre.

I.

Essendo pel § 89

$$cos.\ C == \frac{R^2 \times cos.\ AB - R \times cos.\ AC \times cos.\ BC}{sen.\ AC \times sen.\ BC},$$

sarà

sarà

1. $var. AB : var. BC = R^2 \times cos. AB - R \times cos. AC \times cos. BC : sen. AC \times sen. BC \times cos. A.$

Se $AC = 90^\circ$, sarà

2. $var. AB : var. BC = R \times cos. AB : sen. BC \times cos. A.$

Se $BC = 90^\circ$, sarà

3. $var. AB : var. BC = R \times cos. AB : sen. AC \times cos. A.$

Se $AB = 90^\circ$, sarà

4. $var. AB : var. BC = R \times \frac{cos. AC}{sen. AC} : \frac{sen. BC}{cos. BC} \times cos. A,$

ovvero

5. $var. AB : var. BC = R \times cot. AC : tan. BC \times cos. A.$

II.

Essendo pel § 89

$$cos. A = \frac{R^2 \times cos. BC - R \times cos. AB \times cos. AC}{sen. AB \times sen. AC},$$

sarà

6. $var. AB : var. BC = cos. C \times sen. AB \times sen. AC : R^2 \times cos. BC - R \times cos. AB \times cos. AC.$

Se

Se $AB = 90^\circ$, farà

7. $var. AB : var. BC = cof. C \times fen. AC : R \times cof. BC$.

Se $AC = 90^\circ$, farà

8. $var. AB : var. BC = cof. C \times fen. AB : R \times cof. BC$.

Se $BC = 90^\circ$, farà

9. $var. AB : var. BC = cof. C \times \frac{fen. AB}{cof. AB} : R \times \frac{cof. AC}{fen. AC}$,

ovvero

10. $var. AB : var. BC = cof. C \times tan. AB : R \times cot. AC$

III.

Softituendo finalmente nella proporzione $var. AB : var. BC = cof. C : cof. A$ gli anzi notati valori di $cof. C$, $cof. A$, farà

11. $var. AB : var. BC = R \times cof. AB \times fen. AB - cof. AC \times cof. BC \times fen. AB : R \times cof. BC \times fen. BC - cof. AB \times cof. AC \times fen. BC$.

E quindi, fe $AC = 90^\circ$, farà

12. $var. AB : var. BC = cof. AB \times fen. AB : cof. BC \times fen. BC$,

ovvero, effendo pel § 36 della Trig. pia.

$cof. AB \times fen. AB = \frac{1}{2} R \times fen. 2 AB$

$cof. BC \times fen. BC = \frac{1}{2} R \times fen. 2 BC$,

T fa-

sarà

$$13.\ \textit{var.}\ AB : \textit{var.}\ BC = \textit{sen.}\ 2AB : \textit{sen.}\ 2BC.$$

COROLLARIO III.

132. Dalla proporzione $\textit{var.}\ AB : \textit{var.}\ C = \textit{tan.}\ AB : \textit{tan.}\ C$ se ne derivano più altre.

I.

Se $B = 90^\circ$

Essendo in tale caso pel § 71

$$\textit{tan.}\ AB : \textit{tan.}\ C = \textit{sen.}\ BC : R;$$

sarà

$$1.\ \textit{var.}\ AB : \textit{var.}\ C = \textit{sen.}\ BC : R.$$

Se poi $A = 90^\circ$.

Essendo in tale altro caso

$$\textit{tan.}\ AB : \textit{tan.}\ C = \textit{sen.}\ AC : R;$$

sarà

$$2.\ \textit{var.}\ AB : \textit{var.}\ C = \textit{sen.}\ AC : R.$$

II.

Essendo pel § 94

$$\textit{tan.}\ AB = \frac{R^2 \times \textit{sen.}\ AC}{\textit{sen.}\ A \times \textit{cot.}\ C \pm \textit{cos.}\ A \times \textit{cos.}\ AC};$$

e pel

e pel § 92

$$tan.\ C = \frac{R^2 \times sen.\ A}{sen.\ AC \times cot.\ AB \mp cos.\ A \times cos.\ AC};$$

farà

3. $var.\ AB : var.\ C = (sen.\ AC)^2 \times cot.\ AB \mp cos.\ A \times cos.\ AC \times sen.\ AC : (sen.\ A)^2 \times cot.\ C \pm sen.\ A \times cos.\ A \times cos.\ AC.$

E quindi, se $AC = 90°$, farà

4. $var.\ AB : var.\ C = R^2 \times cot.\ AB : (sen.\ A)^2 \times cot.\ C,$

ovvero

5. $var.\ AB : var.\ C = tan.\ C \times cot.\ AB : (sen.\ A)^2.$

AVVERTIMENTO I.

133. Si noti che dalla proporzione $var.\ BC : var.\ A = tan.\ BC : tan.\ A$ similmente se ne derivano più altre.

Se $B = 90°$,

1. $var.\ BC : var.\ A = sen.\ AB : R.$

Se $C = 90°$,

2. $var.\ BC : var.\ A = sen.\ AC : R.$

Se $AC = 90°$,

3. $var.\ BC : var.\ A = tan.\ A \times cot.\ BC : (sen.\ C)^2.$

COROLLARIO IV.

134. Dalla proporzione $var.\ AB : var.\ A = sen.\ AB \times R : tan.\ C \times cos.\ BC$ se ne derivano le seguenti.

Se $B = 90°$.

Essendo in tale caso pel § 71

$$R : tan.\ C = sen.\ BC : tan.\ AB,$$

e conseguentemente

$$tan.\ C = \frac{R \times tan.\ AB}{sen.\ BC};$$

sarà

$$var.\ AB : var.\ A = \frac{sen.\ AB}{tan.\ AB} : \frac{cos.\ BC}{sen.\ BC}.$$

Ma

$$\frac{sen.\ AB}{tan.\ AB} = \frac{cos.\ AB}{R}$$

$$\frac{cos.\ BC}{sen.\ BC} = \frac{R}{tan.\ BC};$$

Dunque sarà

1. $var.\ AB : var.\ A = cos.\ AB \times tan.\ BC : R^2;$

E quindi essendo pel § 71

$$R : tan.\, A = sen.\, AB : tan.\, BC,$$

e conseguentemente

$$tan.\, BC = \frac{sen.\, AB \times tan.\, A}{R},$$

sarà

$$2.\quad var.\, AB : var.\, A = \frac{cos.\, AB \times sen.\, AB}{R} \times tan.\, A : R^2 = \tfrac{1}{2}\, sen.\, 2AB : \frac{R^2}{tan.\, A} = \tfrac{1}{2}\, sen\; 2AB : cot.\, A.$$

AVVERTIMENTO II.

135. Si noti che dalla proporzione $var.\, BC : var.\, C = R \times sen.\, BC : cos.\, AB \times tan.\, A$ se ne derivano nel caso di $B = 90^\circ$ le seguenti, cioè

$$1.\quad var.\, BC : var.\, C = cos.\, BC \times tan.\, AB : R^2,$$

$$2.\quad var.\, BC : var.\, C = \tfrac{1}{2}\, sen.\, 2BC : cot.\, C.$$

COROLLARIO V.

136. Finalmente dalla proporzione $var.\, C : var.\, A = cos.\, AB : cos.\, BC$ se ne derivano delle altre. In fatti essendo

$$cos.\, AB = \frac{cos.\, C \times sen.\, AC \times sen.\, BC + R \times cos.\, AC \times cos.\, BC}{R^2},$$

sa-

sarà

$$1.\quad var.\,C : var.\,A == cos.\,C \times sen.\,AC \times \frac{sen.\,BC}{cos.\,BC}$$

$+ R \times cos.\,AC : R^2 == cos.\,C \times sen.\,AC \times tan.\,BC +$ $R^2 \times cos.\,AC : R^3$.

E quindi, se $AC == 90^o$, sarà

$$2.\quad var.\,C : var.\,A == cos.\,C \times tan.\,BC : R^2,$$

Se poi $C == 90^o$, sarà

$$3.\quad var.\,C : var.\,A == cos.\,AC : R.$$

PROBL. V.

Fig.20. 137. *Sieno nel triangolo sferico* ABC *costanti* AB, BC. *Determinare, succeduta una picciolissima variazione in una delle quattro rimanenti parti, cioè o nel lato* AC, *o in ciascuno degli angoli in* A, B, C, *i rapporti, che hanno a sì fatta variazione quelle, che conseguentemente succedono nelle altre tre.*

SOLUZIONE.

S' intenda avere il triangolo ABC sofferta una picciolissima variazione, con essersi trasmutato nel triangolo ABD, restando intanto AB senz' essersi variato, e BD == BC. S' intendano in oltre BC, AC prolungati in F, e H, finchè sieno BF, AH archi di quadranti; e s' intendano di più menati per C, ed F gli archetti CD, FG di cerchi, che abbiano per polo comune il punto B, e archi, che intersecano BD, prolungato in G, ne' punti D, e G, e per C, e H gli archetti CE, HI di cerchi, che abbiano per polo comune il punto A, e archi, che intersecano AD, prolungato in I, ne' punti E, e I. Sarà AE == AC; il triangoletletto CED si potrà senza errore sensibile prendere per rettilineo, e rettangolo in E; e gli angoli ACE, BCD si potranno senza errore sensibile pure prendere per retti, e conseguentemente per uguali; e quindi per uguali senza errore sensibile si potranno prendere l' angolo rettilineo ECD, e l' angolo sferico ACB. E saranno FG $=$ *var.* B, HI $=$ *var.* A, e DE $=$ *var.* AC.

Si metta il seno massimo $=$ R.

I.

$$DE : EC = R : \mathit{cot.}\ ECD = R : \mathit{cot.}\ C,$$

$$EC : HI = \mathit{sen.}\ AC : R.$$

Dunque

$$DE : HI = \mathit{sen.}\ AC : \mathit{cot.}\ C.$$

Onde

$$\mathit{var.}\ AC : \mathit{var.}\ A = \mathit{sen.}\ AC : \mathit{cot.}\ C.$$

II.

$$DE : DC = \mathit{sen.}\ DCE : R = \mathit{sen.}\ C : R;$$

$$DC : FG = \mathit{sen.}\ BC : R.$$

Sicchè

$$DE : FG = \mathit{sen.}\ BC \times \mathit{sen.}\ C : R^2;$$

vale a dire

$$\mathit{var.}\ AC : \mathit{var.}\ B = \mathit{sen.}\ BC \times \mathit{sen.}\ C : R^2.$$

III.

III.

$$var.\ A : var.\ AC = cot.\ C : sen.\ AC,$$

$$var.\ AC : var.\ B = sen.\ BC \times sen.\ C : R^2.$$

Dunque

$$var.\ A : var.\ B = sen.\ BC \times sen.\ C \times cot.\ C : R^2 \times sen.\ AC.$$

Ma

$$sen.\ C \times cot.\ C = R \times cos.\ C.$$

Sicchè

$$var.\ A : var.\ B = sen.\ BC \times cos.\ C : R \times sen.\ AC.$$

IV.

Come nel caso 1. del probl. prec. si trova essere

$$var.\ sen.\ A : var.\ sen.\ C = sen.\ A : sen.\ C.$$

Ma pel § 128

$$var.\ sen.\ A = \frac{cos.\ A}{R} \times var.\ A,$$

$$var.\ sen.\ C = \frac{cos.\ C}{R} \times var.\ C.$$

Dun-

Dunque

$$cos.\ A \times var.\ A : cos.\ C \times var.\ C = sen.\ A : sen.\ C.$$

Onde

$$var.\ A : var.\ C = \frac{sen.\ A}{cos.\ A} : \frac{sen.\ C}{cos.\ C},$$

e conseguentemente

$$var.\ A : var.\ C = tan.\ A : tan.\ C.$$

V.

$$var.\ B : var.\ A = R \times sen.\ AC : sen.\ BC \times cos.\ C,$$

$$var.\ A : var.\ C = tan.\ A : tan.\ C.$$

Dunque

$$var. B : var. C = R \times sen.\ AC \times tan.\ A : sen. BC \times cos.\ C \times tan. C.$$

Ma

$$tan.\ A = \frac{R \times sen.\ A}{cos.\ A},$$

e

$$cos.\ C \times tan.\ C = R \times sen.\ C.$$

Sicchè

$$var.\ B : var.\ C = R \times sen.\ AC \times sen.\ A : sen.\ BC \times sen.\ C \times cos.\ A.$$

E' di più pel § 84

$$sen.\ BC \times sen.\ C = sen.\ AB \times sen.\ A.$$

Dunque

$$var.\ B : var.\ C = R \times sen.\ AC : sen.\ AB \times cos.\ A.$$

VI.

$$var.\ AC : var.\ A = sen.\ AC : cot.\ C,$$

$$var.\ A : var.\ C = tan.\ A : tan.\ C.$$

Dunque

$$var.\ AC : var.\ C = sen.\ AC \times tan.\ A : tan.\ C \times cot.\ C.$$

Ma

$$tan.\ C \times cot.\ C = R^2.$$

Sicchè

$$var.\ AC : var.\ C = sen.\ AC \times tan.\ A : R^2 = sen.\ AC \frac{R^2}{tan.\ A} = sen\ AC : cot.\ A.$$

Ch' è quanto bisognava determinare.

COROLLARIO I.

138. Quindi tutt' i cercati rapporti, ordinatamente disposti, sono

I.

1. *var.* AC : *var.* A == *ſen.* AC : *cot.* C

2. *var.* AC : *var.* B == *ſen.* BC × *ſen.* C : R^2

3. *var.* AC : *var.* C == *ſen.* AC : *cot.* A

4. *var.* A : *var.* B == *ſen.* BC × *coſ.* C : R × *ſen.* AC

5. *var.* A : *var.* C == *tan.* A : *tan.* C

6. *var.* C : *var.* B == *ſen.* AB × *coſ.* A : R × *ſen.* AC.

E quindi coll' ajuto di tali ſei proporzioni, qualora nel triangolo ABC rimangono coſtanti i lati AB, BC, data una picciola variazione di qualunque delle quattro rimanenti parti, ſi può ſempre determinare la variazione, che conſeguentemente ſuccede in ognuna delle altre tre, purchè ſieno già noti tutt' i lati, e tutti gli angoli dell' iſteſſo triangolo ABC.

COROLLARIO II.

139. Dalla proporzione *var.* AC : *var.* A == *ſen.* AC : *cot.* C ne derivano più altre.

I.

Eſſendo pel § 85

$$ſen.\ AC = \frac{ſen.\ B \times ſen.\ BC}{ſen.\ A};$$

ſarà

1. *var.* AC : *var.* A == *ſen.* B × *ſen.* BC : *ſen.* A × *cot.* C.

E quindi, ſe BC == 90°, ſarà

2. *var.* AC : *var.* A == R × *ſen.* B : *ſen.* A × *cot.* C.

II.

Essendo pel § 93

$$cot.\ C = \frac{sen.\ AC \times cot.\ AB \mp cos.\ A \times cos.\ AC}{sen.\ A},$$

sarà

$$var.\ AC : var.\ A = sen.\ A : cot.\ AB \mp cos.\ A \times \frac{cos.\ AC}{sen.\ AC},$$

ovvero

$$var.\ AC : var.\ A = 1 : \frac{cot.\ AB}{sen.\ A} \mp \frac{cos.\ A}{sen.\ A} \times \frac{cos.\ AC}{sen.\ AC},$$

e conseguentemente

$$3.\ var.\ AC : var.\ A = 1 : \frac{cot.\ AB}{sen.\ A} \mp \frac{cot.\ AC}{tan.\ A}.$$

III.

Essendo pure

$$cot.\ C = R \times \frac{cos.\ C}{sen.\ C};$$

sarà anche

$$4.\ var.\ AC : var.\ A = sen.\ AC \times sen.\ C : R \times cos.\ C.$$

E

E quindi essendo

$$sen.\ AC \times sen.\ C = sen.\ AB \times sen.\ B,$$

sarà pure

$$5.\ var.\ AC : var.\ A = sen.\ AB \times sen.\ B : R \times cos.\ C;$$

e per essere

$$cos.\ C = \frac{sen.\ A \times sen.\ B \times cos.\ AB \mp R \times cos.\ A \times cos.\ B}{R^2},$$

sarà ancora

$6.\ var.\ AC : var.\ A = R \times sen.\ AB \times sen.\ B : sen.\ A \times sen.\ B \times cos.\ AB \mp R \times cos.\ A \times cos.\ B = R \times sen.\ AB : sen.\ A \times cos.\ AB \mp cos.\ A \times cot.\ B.$

Ed essendo

$$var.\ AC : var.\ A = sen.\ AC \times sen.\ C : R \times cos.\ C,$$

e

$$cos.\ C = \frac{R^2 \times cos.\ AB - R \times cos.\ AC \times cos.\ BC}{sen.\ AC \times sen.\ BC}.$$

Se $AC = 90^\circ$, s'avrà

$$var.\ AC : var.\ A = sen.\ C : cos.\ C,$$

e

$$cos.\ C = R \times \frac{cos.\ AB}{sen.\ BC}.$$

On-

Onde sarà

$$var.\ AC : var.\ A == sen.\ C \times sen.\ BC : R \times cos.\ AB.$$

Ma

$$sen.\ C == \sqrt{R^2 - (cos.\ C)^2} == \sqrt{R^2 - R^2 \times \left(\frac{cos.\ AB}{sen.\ BC}\right)^2}$$
$$== \frac{R}{sen.\ BC} \sqrt{(sen.\ BC)^2 - (cos.\ AB)^2}.$$

Sicchè sarà nel supposto caso

$$7.\ var.\ AC : var.\ A == \sqrt{(sen.\ BC^2 - (cos.\ AB)^2} : cos.\ AB.$$

AVVERTIMENTO.

140. Si noti che dalla proporzione $var.\ AC : var.\ C == sen.\ AC : cot.\ A$ similmente se ne derivano le seguenti, cioè

$$1.\ var.\ AC : var.\ C == sen.\ B \times sen.\ AB : sen.\ C \times cot.\ A.$$

Se $AB == 90^\circ$,

$$2.\ var.\ AC : var.\ C == R \times sen.\ B : sen.\ C \times cot.\ A,$$

$$3.\ var.\ AC : var.\ C == 1 : \frac{cot.\ BC}{sen.\ C} \mp \frac{cot.\ AC}{tan.\ C},$$

$$4.\ var.\ AC : var.\ C == sen.\ AC \times sen.\ A : R \times cos.\ A,$$

$$5.\ var.\ AC : var.\ C == sen.\ BC \times sen.\ B : R \times cos.\ A.,$$

$$6.\ var.\ AC : var.\ C == R \times sen.\ BC : sen.\ C \times cos.\ BC \mp cos.\ C \times cot.\ B,$$

e

e se $AC == 90°$,

$$7.\ var. AC : var. C == \sqrt{(sen. AB)^2 - (cos. BC)^2} : cos. BC.$$

COROLLARIO III.

141. Dalla proporzione $var. AC : var. B == sen. C \times sen. BC : R^2$ ne derivano le seguenti.

I.

Essendo

$$sen. C \times sen. BC == sen. A \times sen. AB,$$

sarà

$$1.\ var. AC : var. B == sen. A \times sen. AB : R^2.$$

II.

Essendo nel caso di $AC == 90°$

$$sen. C == \frac{R}{sen. BC} \sqrt{(sen. BC)^2 - (cos. AB)^2},$$

sarà in tale caso

$$2.\ var. AC : var. B == \sqrt{(sen. BC)^2 - (cos. AB)^2} : R.$$

COROLLARIO IV.

142. Dalla proporzione $var. A : var. B == sen. BC \times cos. C : R \times sen. AC$ se ne derivano le seguenti.

I.

I.

Essendo pel § 85

$$sen.\ BC = \begin{cases} \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AC}{sen.\ B} \\ \dfrac{sen.\ A \times sen.\ AB}{sen.\ C}, \end{cases}$$

saranno

1. $var.\ A : var.\ B = sen.\ A \times cos.\ C : R \times sen.\ B,$

2. $var.\ A : var.\ B = sen.\ A \times sen.\ AB : sen.\ AC \times tan.\ C.$

E quindi, essendo

$$sen.\ A \times sen.\ AB = sen.\ C \times sen.\ BC,$$

sarà pure

3. $var.\ A : var.\ B = sen.\ C \times sen.\ BC : sen.\ AC \times tan.\ C.$

II.

Essendo in oltre

$$sen.\ AC = \frac{sen.\ B \times sen.\ AB}{sen.\ C},$$

sarà

$$var.\ A : var.\ B = sen.\ BC \times sen.\ C \times cos.\ C : R \times sen.\ B \times sen.\ AB.$$

Ma

Ma

$$sen.\ C \times cos.\ C = R \times \tfrac{1}{2}\ sen.\ 2\,C.$$

Dunque

$$4.\ var.A : var.B = sen.BC \times \tfrac{1}{2}\ sen.\ 2\,C : sen.B \times sen.\ AB.$$

III.

Essendo di più

$$cos.\ C = \frac{R^2 \times cos.AB - R \times cos.AC \times cos.BC}{sen.\ AC \times sen.\ BC},$$

sarà

$$5.\ var.A : var.B = R \times cos.AB - cos.AC \times cos.BC : (sen.AC)^2.$$

E quindi, se $AC = 90^\circ$, sarà

$$6.\ var.\ A : var.\ B = cos.\ AB : R.$$

IV.

Essendo finalmente

$$var.\ A : var.\ B = sen.\ A \times cos.\ C : R \times sen.\ B,$$

e

$$cos.\ C = \frac{sen.A \times sen.B \times cos.AB \mp R \times cos.A \times cos.B}{R^2};$$

sarà

7. $var. A : var. B = (sen. A)^2 \times cos. AB \mp R \times sen. A \times cos. A \times \frac{cos. B}{sen. B} : R^3 = (sen. A)^2 \times cos. AB \mp sen. A \times cos. A \times cot. B : R^3$.

E quindi, se $A = 90°$, sarà

8. $var. A : var. B = cos. AB : R$.

AVVERTIMENTO.

143. Si noti che dalla proporzione $var. C : var. B = sen. AB \times cos. A : R \times sen. AC$ similmente se ne derivano le seguenti; cioè

1. $var. C : var. B = sen. C \times cos. A : R \times sen. B$,
2. $var. C : var. B = sen. C \times sen. BC : sen. AC \times tan. A$,
3. $var. C : var. B = sen. A \times sen. AB : sen. AC \times tan. A$,
4. $var. C : var. B = sen. AB \times \frac{1}{2} sen. 2A : sen. B \times sen. BC$,
5. $var. C : var. B = R \times cos. BC - cos. AC \times cos. AB : (sen. AC)^2$,

e se $AC = 90°$,

6. $var. C : var. B = cos. BC : R$,
7. $var. C : var. B = (sen. C)^2 \times cos. BC \mp sen. C \times cos. C \times cot. B : R^3$,

e se $C = 90°$,

8. $var. C : var. B = cos. BC : R$.

CO-

COROLLARIO V.

144. Finalmente dalla proporzione *var.* A : *var.* C == *tan.* A : *tan.* C ne derivano le ſeguenti.

I.

Eſſendo

$$tan.\ A == \frac{R \times ſen.\ A}{coſ.\ A},$$

$$tan.\ C == \frac{R \times ſen.\ C}{coſ.\ C},$$

ſarà

1. $var.\ A : var.\ C == ſen.\ A \times coſ.\ C : ſen.\ C \times coſ.\ A.$

E quindi, eſſendo

$$ſen.\ A == \frac{ſen.\ C \times ſen.\ BC}{ſen.\ AB},$$

ſarà pure

2. $var.\ A : var.\ C == ſen.\ BC \times coſ.\ C : ſen.\ AB \times coſ.\ A.$

II.

Eſſendo in oltre

$$tan.\ A == \frac{R^2 \times ſen.\ B}{ſen.\ AB \times cot.\ BC \mp coſ.\ B \times coſ.\ AB},$$

X 2 *tan.*

$$tan. C = \frac{R^2 \times sen. B}{sen. BC \times cot. AB \mp cos. B \times cos. BC};$$

farà

3. $var. A : var. C = sen. BC \times cot. AB \mp cos. B \times cos. BC :$

$sen. AB \times cot. BC \mp cos. B \times cos. AB.$

E quindi, se $B = 90^\circ$, farà

4. $var. A : var. C = sen. BC \times cot. AB : sen. AB \times cot. BC$

$= sen. BC \times tan. BC : sen. AB \times tan. AB.$

PROBL. VI.

Fig. 16. 145. *Sieno nel triangolo sferico* A B C *costanti i due angoli in* B, *e* C. *Determinare, succeduta una picciolissima variazione in una delle quattro rimanenti parti, cioè o nell' angolo in* A, *o in ciascuno de' lati, i rapporti, che hanno a sì fatta variazione quelle, che conseguentemente succedono nelle altre tre.*

SOLUZIONE.

S' intenda descritto il triangolo L M N del modo già detto nel § 110. Essendo nel triangolo A B C costanti gli angoli in B, e C, costanti saranno nel triangolo L M N i lati M N, N L. Onde relativamente al triangolo L M N s' avranno le seguenti proporzioni coll' ordine, che sono state rigistrate nel § 138 relativamente al triangolo A B C, cioè

1. *var.* LM : *var.* M == *ſen.* LM : *cot.* L,

2. *var.* LM : *var.* N == *ſen.* LN × *ſen.*L : R^2,

3. *var.* LM : *var.* L == *ſen.* LM : *cot.* M,

4. *var.* M : *var.* N == *ſen.* LN × *coſ.* L : R × *ſen.* LM,

5. *var.* M : *var.* L == *tan.* M : *tan.* L,

9. *var.* L : *var.* N == *ſen.* MN × *coſ.* M : R × *ſen.* LM.

Ma di quanto variano nel triangolo LMN gli angoli in L, M, N, e'l lato LM, di tanto variano nel triangolo ABC riſpettivamente i lati CA, AB, BC, e l' angolo in A; e di più i ſeni, i coſeni, le tangenti, ec. de' lati, e degli angoli del triangolo LMN ſono gli ſteſſi de' ſeni, de' coſeni, delle tangenti, ec. de' corriſpondenti angoli, e de' corriſpondenti lati del triangolo ABC. Sicchè le ſei precedenti proporzioni ſomminiſtrano i ſei ſeguenti cercati rapporti; cioè

1. *var.* A : *var.* AB == *ſen.* A : *cot.* AC,

2. *var.* A : *var.* BC == *ſen.* C × *ſen.* AC : R^2,

3. *var.* A : *var.* AC == *ſen.* A : *cot.* AB,

4. *var.* AB : *var.* BC == *ſen.* C × *coſ.* AC : R × *ſen.* A,

5. *var.* AB : *var.* AC == *tan.* AB : *tan.* AC;

6. *var.* AC : *var.* BC == *ſen.* B × *coſ.* AB : R × *ſen.* A.

Ch' è quanto biſognava determinare.

COROLLARIO I.

146. Eſſendo *var.* A : *var.* AB == *ſen.* A : *cot.* AC, ed eſſendo di più

$$\text{sen. } A = \frac{\text{sen. } B \times \text{sen. } BC}{\text{sen. } AC},$$

$$\text{cot. } AC = R \times \frac{\text{cos. } AC}{\text{sen. } AC};$$

sarà

$$\text{var. } A : \text{var. } AB = \text{sen. } B \times \text{sen. } BC : R \times \text{cos. } AC.$$

Similmente, essendo *var.* A: *var.* AC = *sen.* A: *cot.* AB, si trova essere

$$\text{var. } A : \text{var. } AC = \text{sen. } C \times \text{sen. } BC : R \times \text{cos. } AB.$$

COROLLARIO II.

147. In oltre

$$\text{var. } A : \text{var. } BC = \text{sen. } C \times \text{sen. } AC : R^2.$$

Ma

$$\text{sen. } C \times \text{sen. } AC = \text{sen. } B \times \text{sen. } AB.$$

Dunque

$$\text{var. } A : \text{var. } BC = \text{sen. } B \times \text{sen. } AB : R^2.$$

E quindi, se $B = 90^\circ$, sarà

$$\text{var. } A : \text{var. } BC = \text{sen. } AB : R.$$

CO-

COROLLARIO III.

148. Dalla proporzione $var.\ AB : var.\ BC = sen.\ C \times cos.\ AC : R \times sen.\ A$ se ne derivano le seguenti.

I.

Se $C = 90^\circ$, sarà

1. $var.\ AB : var.\ BC = cos.\ AC : sen.\ A$.

E quindi, essendo

$$sen.\ A = \frac{sen.\ B \times sen.\ BC}{sen.\ AC},$$

sarà pure

2. $var.\ AB : var.\ BC = sen.\ AC \times cos.\ AC : sen.\ B \times sen.\ BC = R \times \frac{1}{2}\, sen.\ 2\,AC : sen.\ B \times sen.\ BC$.

II.

Essendo di più

$$sen.\ C = \frac{sen.\ A \times sen.\ AB}{sen.\ BC},$$

sarà

3. $var.\ AB : var.\ BC = sen.\ AB \times cos.\ AC : R \times sen.\ BC$.

AV-

AVVERTIMENTO I.

149. Si noti che dalla proporzione *var.* AC : *var.* BC == *sen.* B × *cos.* AB : R × *sen.* A similmente se ne derivano le seguenti; cioè

Se B == 90°,

1. *var.* AC : *var.* BC == *cos.* AB : *sen.* A,

e

2. *var.* AC : *var.* BC == R × $\frac{1}{2}$ *sen.* 2 AB : *sen.* C × *sen.* BC,

Se poi non è B == 90°,

3. *var.* AC : *var.* BC == *sen.* AC × *cos.* AB : R × *sen.* BC.

COROLLARIO IV.

150. Finalmente dalla proporzione *var.* AB : *var.* AC == *tan.* AB : *tan.* AC se ne derivano le seguenti.

I.

Se B == 90°, nel qual caso è pel § 71

R : *cos.* A == *tan.* AC : *tan.* AB,

sarà

1. *var.* AB : *var.* AC == *cos.* A : R.

II.

II.

Essendo in oltre pel § 94

$$tan.\ AC = \frac{R^2 \times sen.\ BC}{cot.\ B \times sen.\ C \pm cos.\ C \times cos.\ BC},$$

$$tan.\ AB = \frac{R^2 \times sen.\ BC}{cot.\ C \times sen.\ B \pm cos.\ B \times cos.\ BC};$$

sarà

2. $var.\ AB : var.\ AC = cot.\ B \times sen.\ C \pm cos.\ C \times cos.\ BC : cot.\ C \times sen.\ B \pm cos.\ B \times cos.\ BC.$

E quindi, se $BC = 90°$, sarà

3. $var.\ AB : var.\ AC = cot.\ B \times sen.\ C : cot.\ C \times sen.\ B = sen.\ C \times tan.\ C : sen.\ B \times tan.\ B.$

AVVERTIMENTO II.

151. Ecco determinati tutt'i cercati rapporti, ed eccone dedotte le principali conseguenze, che dedurre se ne possono. Gli usi intanto di sì fatte proporzioni si vedranno principalmente nell' Astronomia, nella quale, perchè occorre spesso, fatta la calcolazione d'un lato, o d'un angolo di qualche triangolo sferico in conseguenza de' dati necessarj, di dover calcolare di nuovo l' istesso lato, o angolo, variato alquanto a cagione d' una picciola variazione accaduta, o supposta in uno de' dati; per non ripetere un lungo, e faticoso calcolo trigonometrico, si cerca coll' ajuto d' una delle già stabilite proporzioni di determinare la variazione, che soffre il lato, o angolo cercato, in conseguenza della data variazione accaduta, o supposta in uno de' detti dati del triangolo. Poichè in tal modo si ha con facilità di quanto si de-

si deve accrescere, o diminuire il lato, o angolo già prima determinato, per avere il lato, o angolo cercato, e con facilità conseguentemente si determina l'istesso lato, o angolo.

AVVERTIMENTO III.

152. Finalmente si noti che le medesime stabilite proporzioni guidano gli Astronomi nella scelta de' lati, o angoli da misurare; acciò i piccioli errori, ne' quali si può cadere per la materialità degli strumenti, non arrechino ne' lati, o angoli da determinare col calcolo, se non errori quanto più riesce possibile piccioli, e da non tenerne conto. In fatti se nel triangolo sferico ABC si conoscono l' esatte grandezze del lato AB, e dell'angolo in B; e, con misu-
Fig.17. rare il lato BC, si vuole determinare AC. Supposto un picciolo errore nella misura di BC, s'avrà AC coll' ajuto del calcolo anche con qualche errore. Or considerando tale errore come una variazione accaduta nel lato AC in conseguenza d'una picciola variazione sofferta dal lato BC; sarà l'errore di BC all' errore di AC, come *var.* BC : *var.* AC. Ma nel supposto caso *var.* BC : *var.* AC == R : *cos.* C (§ 121). Sicchè, contrassegnando sì fatti errori di BC, e di AC con E, ed *e*, sarà

$$E : e == R : cos. C.$$

Onde

$$e == E \times \frac{cos.\ C}{R}.$$

E perciò l' errore di AC sarà tanto più picciolo, quanto più l'angolo in C s' accosterà al retto; anzi sarà nullo nel caso dell' angolo in C retto, perchè in tale caso diviene *cos.* C == o. Per la qual cosa nel supposto caso conviene misurare BC nella circostanza d' avere l'angolo in C o retto, o quanto più riesce possibile prossimo al retto. Similmente se nel triangolo sferico ABC si conoscono l' esatte mi-

miſure de' lati AB, BC; e, con miſurare il lato AC, ſi vuole determinare l'angolo in B. Suppoſto un picciolo errore nella miſura del lato AC, s'avrà l' angolo in B coll' ajuto del calcolo anche con qualche errore. Conſiderando pure tale errore come una variazione accaduta nell' angolo in B, in conſeguenza d' una picciola variazione ſofferta dal lato AC; ſarà l' errore di AC all' errore di B, come *var.* AC: *var.* B. Ma in tale altro caſo ſta *var.* AC : *var.* B == *ſen.* BC × *ſen.* C : R² (§ 138). Sicchè, contraſſegnando pure tali errori di AC, e di B con E, ed *e*, ſarà

$$E : e = \text{ſen. } BC \times \text{ſen. } C : R^2 .$$

Onde

$$e = E \times \frac{R^2}{\text{ſen. } BC \times \text{ſen. } C} .$$

E perciò, eſſendo in sì fatto caſo $\frac{R^2}{\text{ſen. } BC}$ grandezza invariabile, l' errore dell' angolo in B ſi farà tanto più picciolo, quanto più l' angolo in C s' accoſterà pure al retto; anzi ſi farà minimo nel caſo dell' angolo in C retto; perchè in tale caſo *ſen.* C ſi fa ſeno maſſimo. E quindi in queſt' altro ſuppoſto caſo conviene pure miſurare AC nella circoſtanza d' avere l' angolo in C o retto, o quanto più rieſce poſſibile proſſimo al retto.

I L F I N E.

INDICE

De' capi contenuti in questo Trattato.

Tav. I

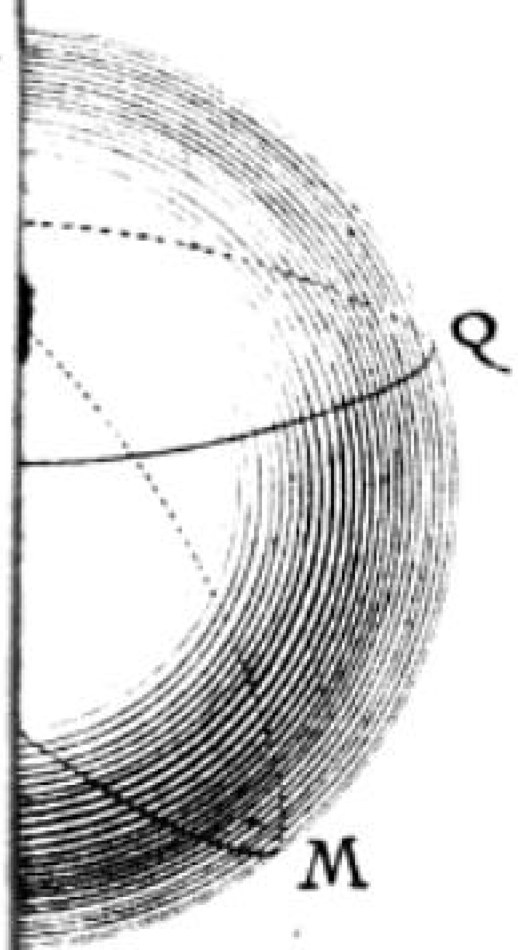
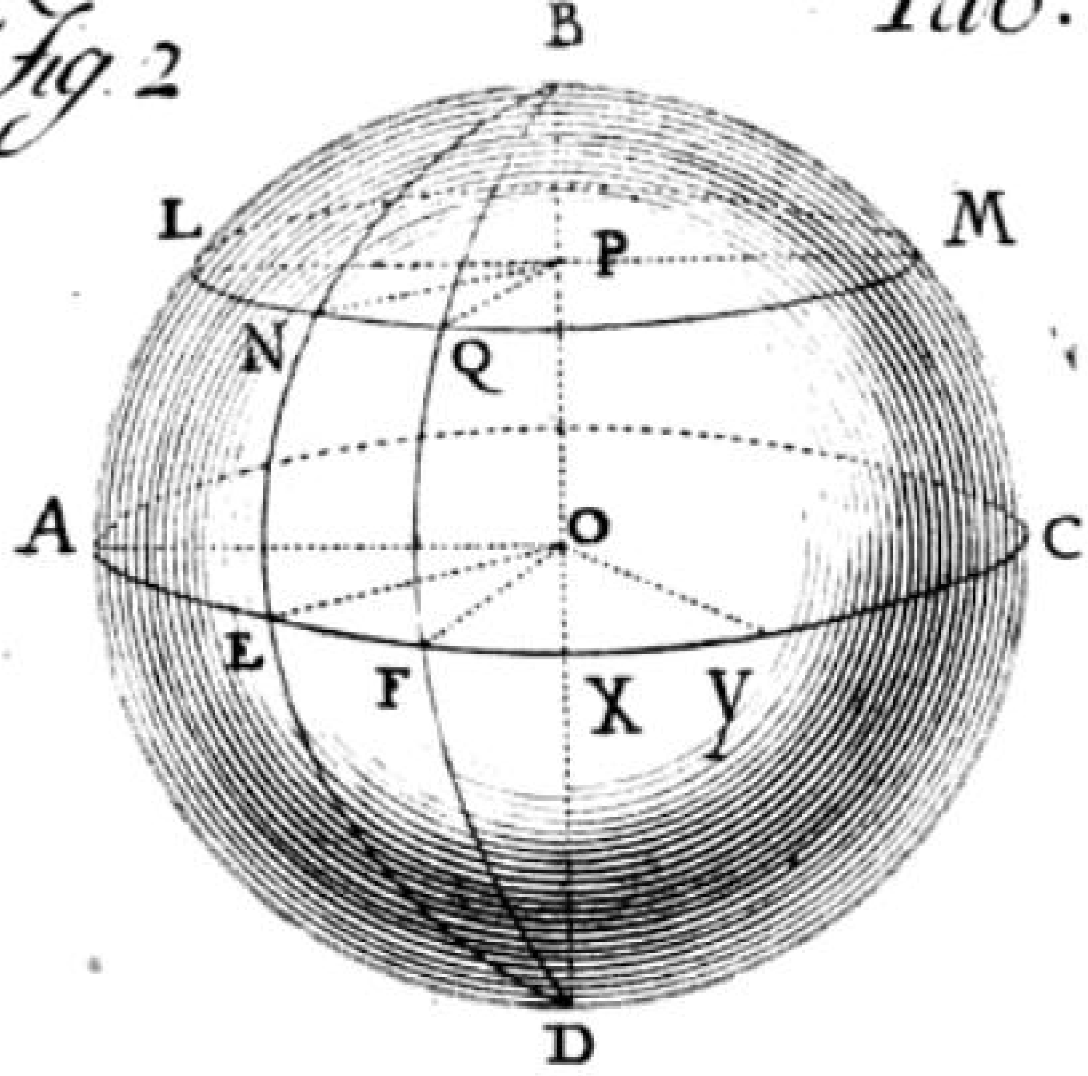


Fig. 2



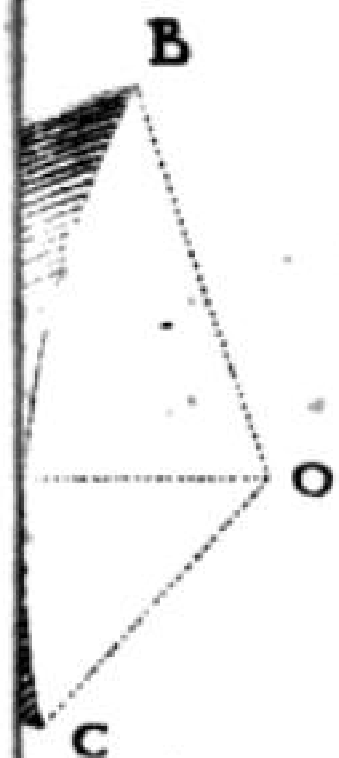
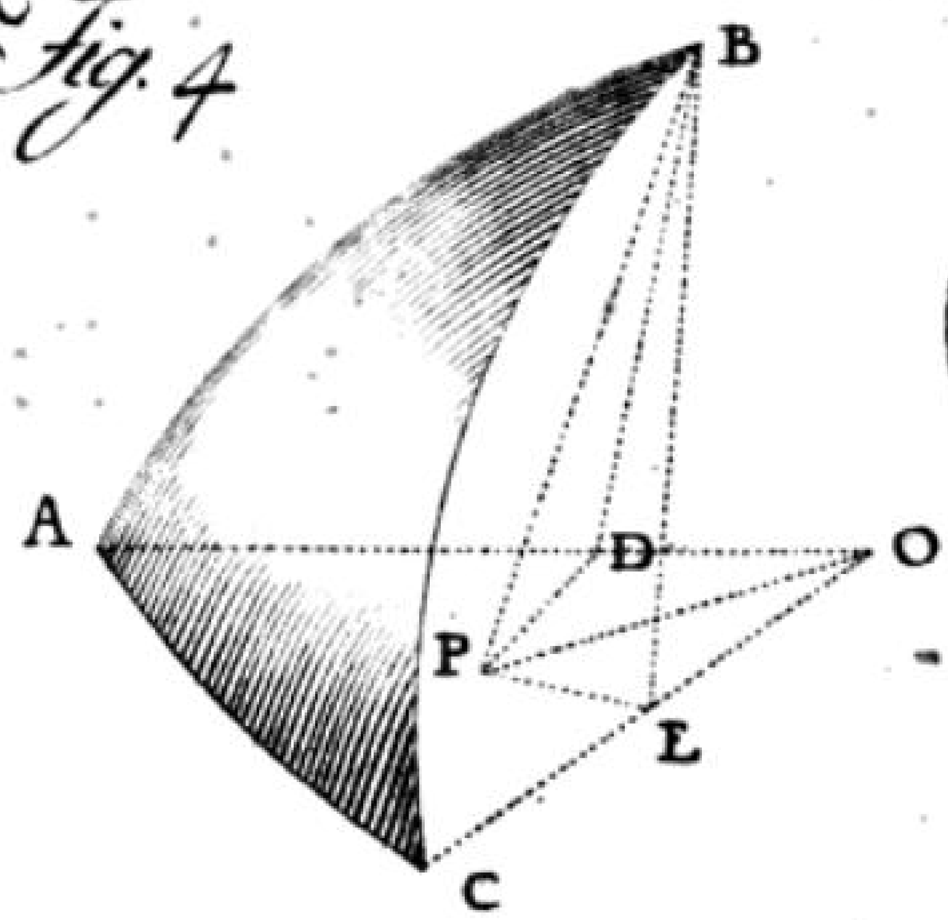


Fig. 4



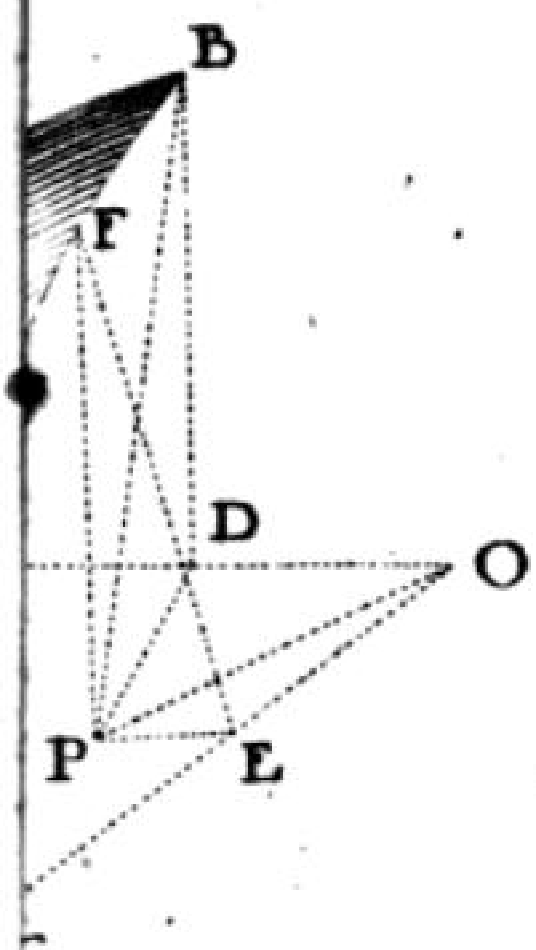


Fig. 6

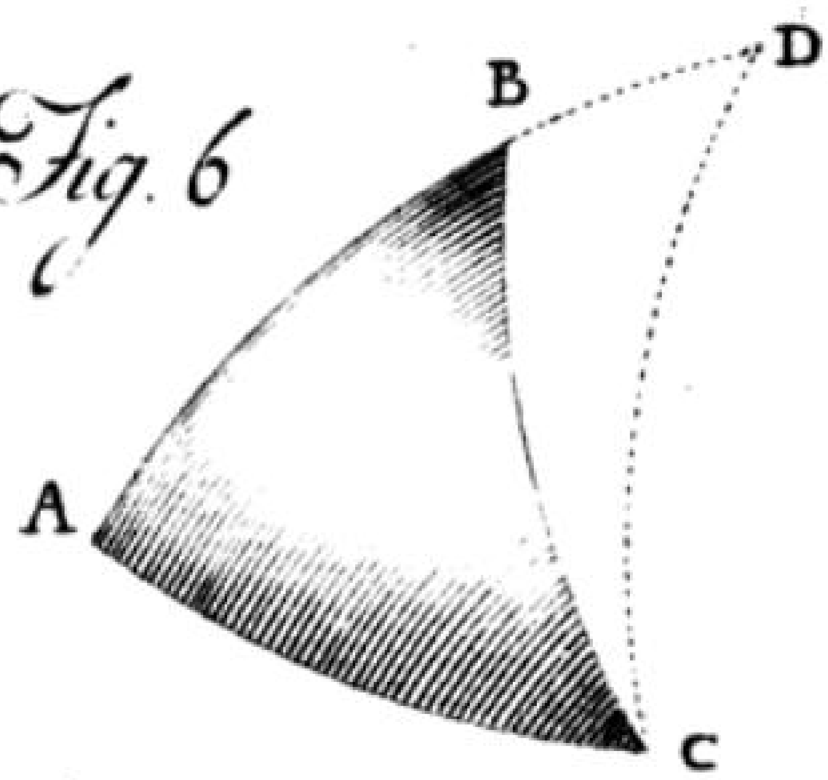


Fig. 8

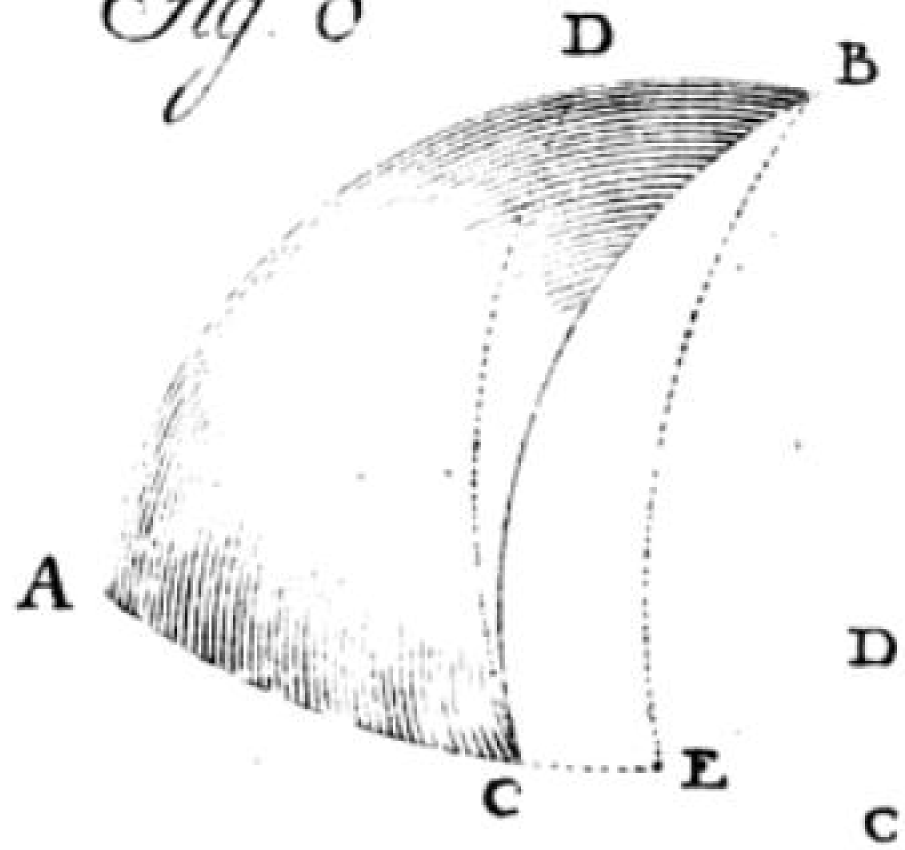
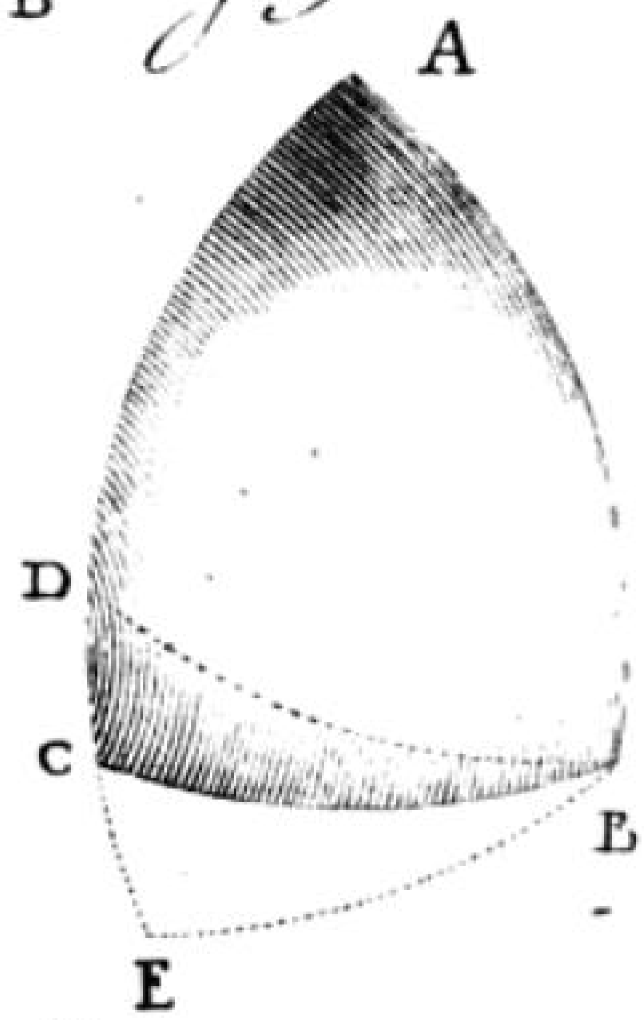


Fig. 9



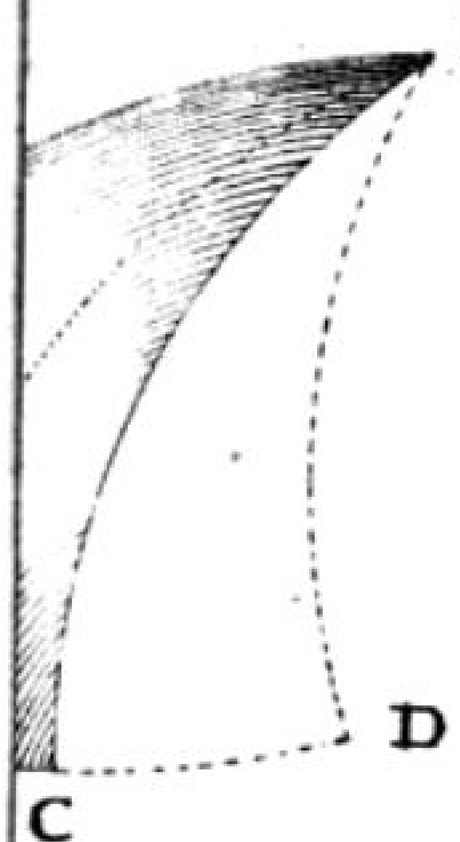
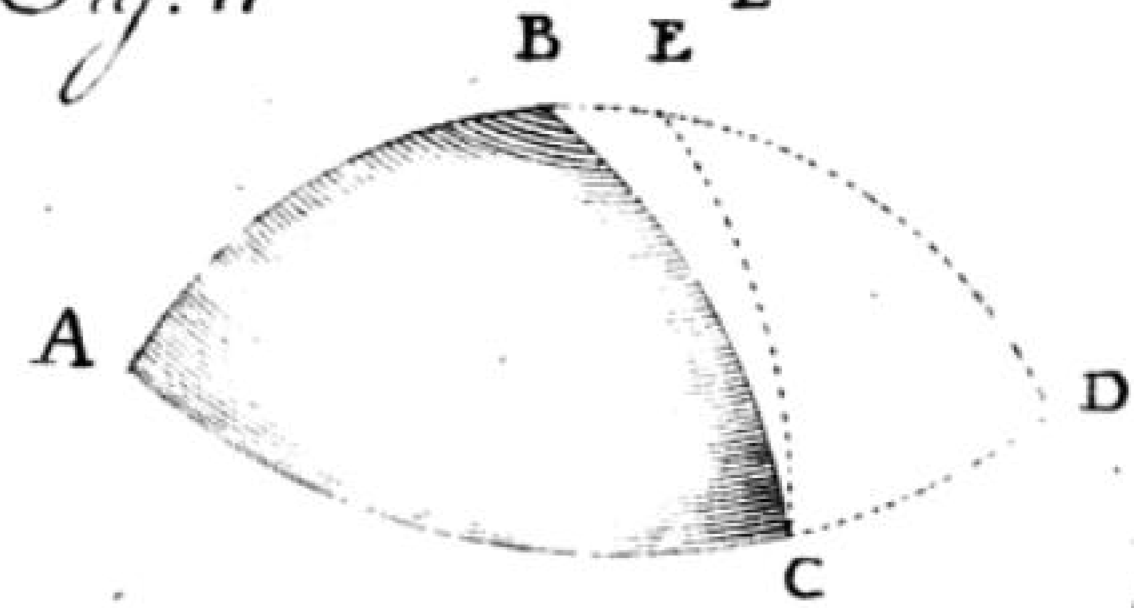


Fig. 11



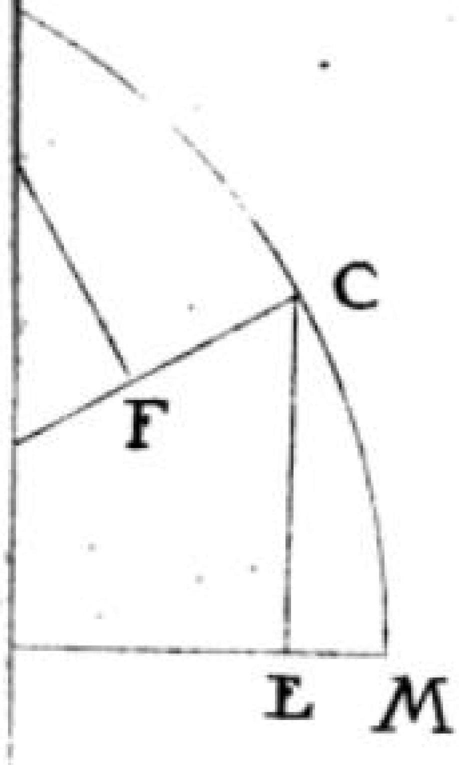
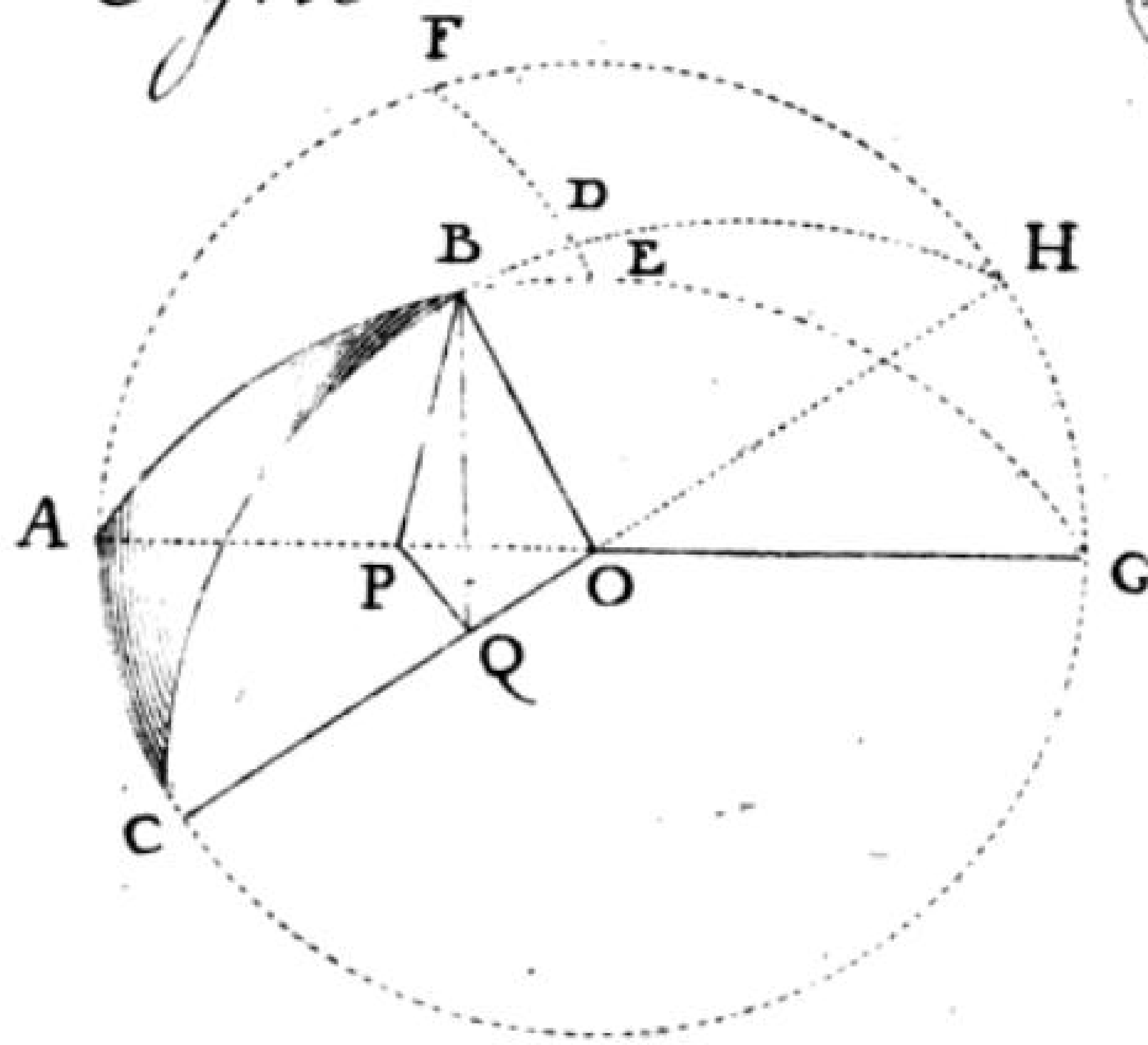


Fig. 13



Tav. III

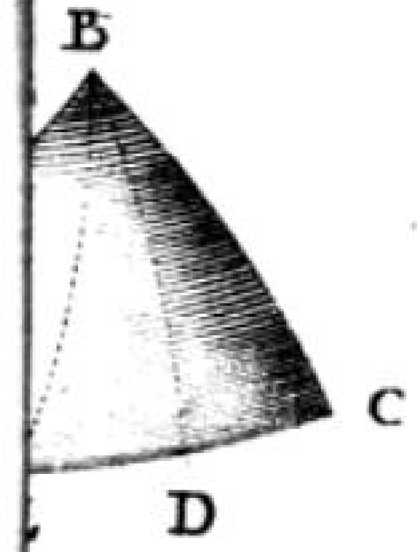
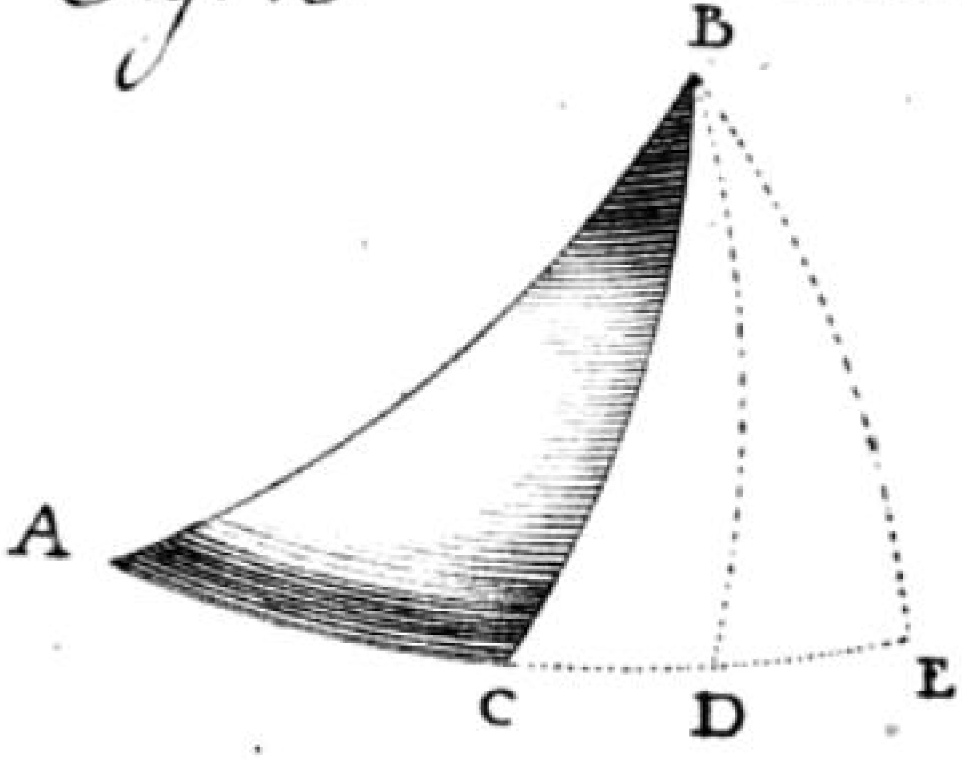


Fig. 15



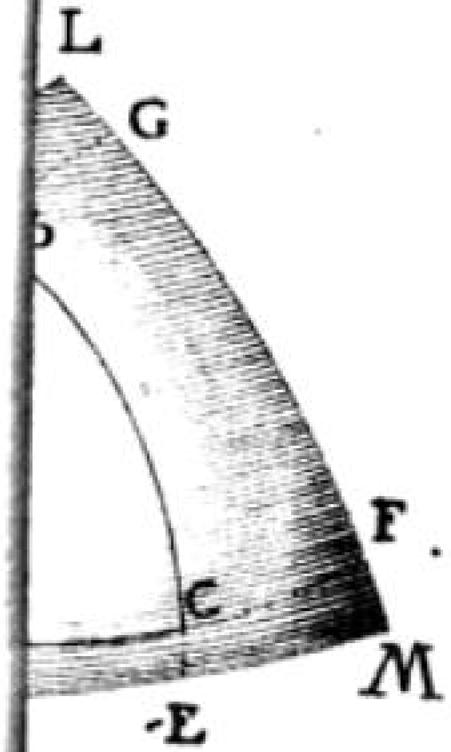


Fig. 17

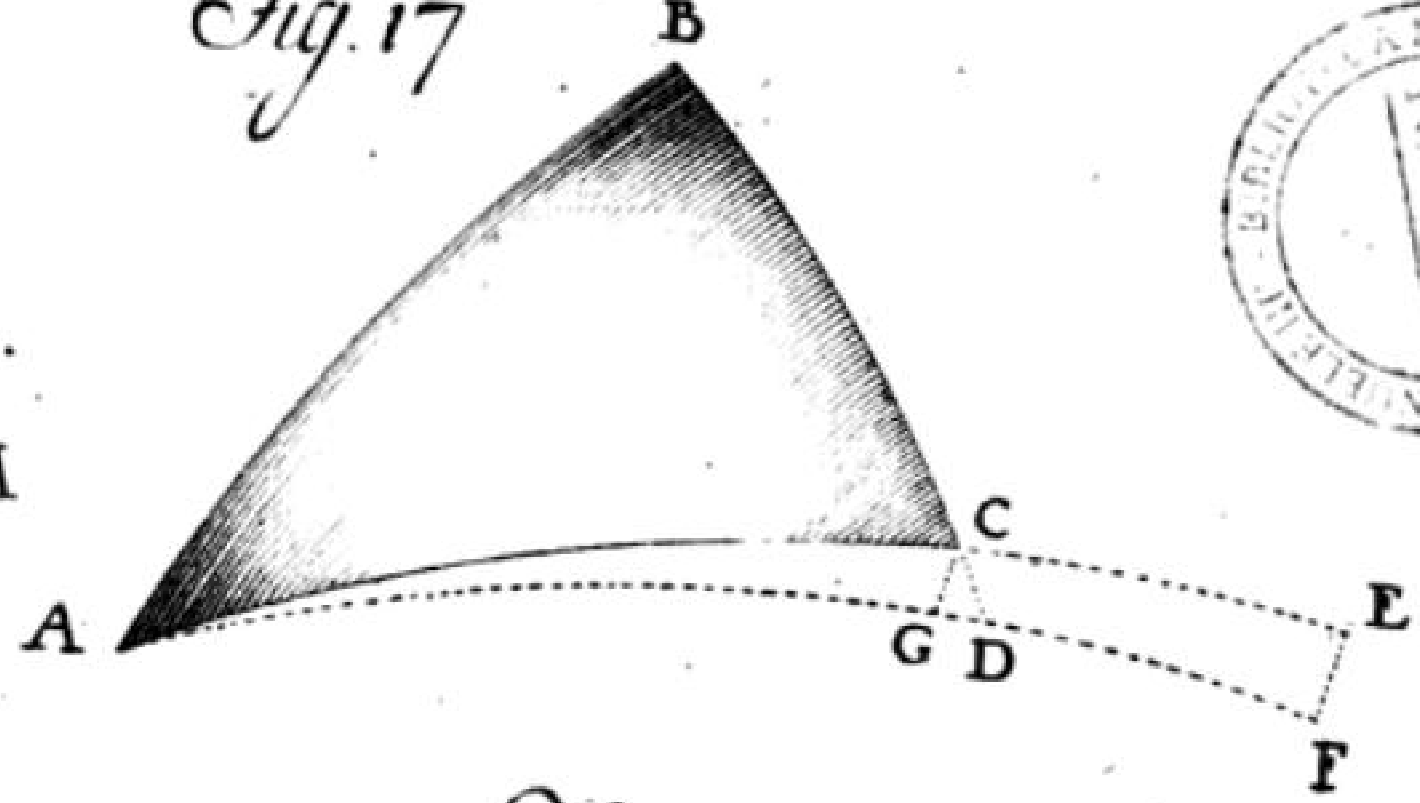
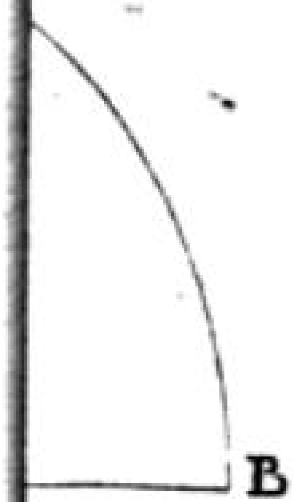
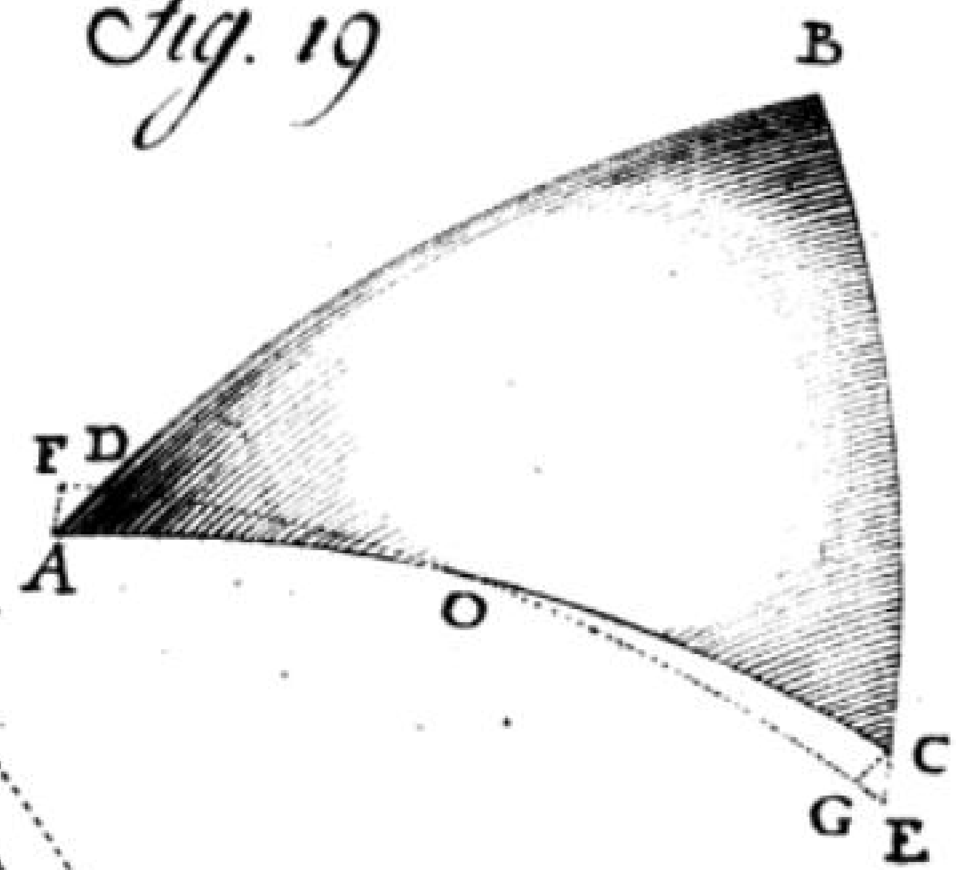


Fig. 19





20