COMPENDIO
D' ANALISI
DELLE QUANTITA' FINITE
DI GIROLAMO SALADINI

Canonico della Metropolitana, Professore d' Analisi
nell' Università, e Socio dell' Instituto
delle Scienze di Bologna, ec.

E Maestro della Regale Accademia Militare

DI S. M. SICILIANA

Seconda edizione attentamente corretta, ed accresciuta di alcune Note, e di un' Appendice

DI FILIPPO CASTELLANI

Primo Tenente, e Professore del Calcolo sublime
nell' Accademia medesima.

NAPOLI MDCCXC.

Presso Giuseppe Maria Porcelli Libraio, e Stampatore della Regale Accademia Militare.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR

D. GIOVANNI ACTON

CAVALIERE DELL' INSIGNE REAL ORDINE DI S. GENNARO, COMMENDATORE DELL' ORDINE MILITARE DI S. STEFANO, CONSIGLIERE DI STATO DI S. M., TENENTE GENERALE, SEGRETARIO DI STATO PE 'L DISPACCIO DEGLI AFFARI ESTERI, DELLA GUERRA, E MARINA, SEGRETARIO DI S. M. LA REGINA, DIRETTORE DELLA MARINA, E SOPRAINTENDENTE GENERALE DELLE REGIE POSTE, &c.

Molte ſono le ragioni, o Signore, per le quali l' Opera, che ho l' onore di presentare a V. E., a Voi più che ad altri da me offerir ſi dovea e conſacrare. Benchè queſta ſia riſtampa di un Originale, già tempo indietro dall' illuſtre Autore dedicato alla Maeſtà del noſtro Auguſtiſſimo Sovrano (che Dio ſempre feliciti), e del mio non vi ſiano, che le sole Note, seguite da un' Appendice; ciò non oſtante sì fatte mie fatiche, ancorchè di poco valore, doveano però comparir fregiate del voſtro glorioſiſſimo nome. Voi mi colmaſte di tanti beneficj nel preſcegliermi ad occupare un doppio impiego nella Regale Accademia fin dalla ſua riformazione: ed io, io, conservandone un eterna memoria, dovea darvi una testimonianza della mia più sensibile, e più sincera riconoscenza. Voi foste il Ristauratore della medesima: e vostro esser dovea un lavoro di una persona da Voi stesso ivi addetta; siccome vostro, per un particolar dritto acquistatone, è tutto ciò, che da ciascun individuo dell' Accademia stessa si produce. Voi in fine della Militare Accademia siete stato, e ne siete tuttavia il Padre, il Mecenate: e sotto de' vostri auspicii comparir dovea al pubblico un' Opera per la Gioventù militare destinata, ed al di lei uso diretta. Ecco adunque, che nel presentarvi queste mie debolezze, riconosco il mio Benefattore: do al medesimo ciò, che è suo: e nel tempo stesso procuro ad esse il loro Garante. Accettate intanto, o Signore, la mia misera offerta, e benignandola del vostro solito compatimento, ricevetela come una prova, che io intendo dare all' E. V. dell' ambizione somma, che ho di essere utile, e grato al Padrone, al cui servigio sono da più anni onorevolmente impiegato. Implorando sempre più il vostro potentissimo patrocinio, e dal Cielo la vostra felicità; col più profondo ossequio, mi do l'onore rispettosamente di dirmi

Di V. E.

Umiliss. Devotiss. ed Obbligatiss. Serv.
FILIPPO CASTELLANI.

AV-

AVVERTIMENTO

DELL' AUTORE DELLE NOTE.

LA ristampa di questo utilissimo, nè mai abbastanza lodato Compendio d' Analisi s' intraprese anni sono sotto la mia direzione, per commessione avutane dall' Eccell. Generale Sig. D. Francesco Pignatelli, allora Direttore della Regale Accademia Militare, ma poi, per le continue occupazioni del mio impiego, essendomi mancato il tempo per potere assistere all' esatta di lei esecuzione, restò la medesima sospesa quasi nel punto di terminarsi. E poichè coll' ordine della direzione suddetta ebbi anche quello di dover aggiugnere al Compendio stesso delle Note da poter servire di dimostrazione, o di spiega degli articoli i più difficili della scienza di cui tratta, onde giovar con esse a' Giovani, che devono studiarla; io, in esecuzione di un tal comando, stimai spargere molti numeri di citazione nell' Opera stessa, come nel corso della medesima osservasi, sull' idea di fargli in fine corrispondere altrettante Note, delle quali alcune doveano contenere delle dimostrazioni trascurate dall' Autore, altre delle spieghe de' passi oscuri e difficili, ed altre finalmente delle aggiunzioni di diverse Teorie, e Metodi, non meno che del non dispregevole incremento, che l' Algebra ha sortito dal dì della prima edizione del presente Compendio a questi giorni. In fatti nel riprendere pre-

presentemente la stampa avrei eseguito quanto proposto mi avea: ma avendo conosciuto, che l' Opera sarebbe riuscita eccedentemente voluminosa, e ripugnante al titolo che porta di Compendio; ed avendo di più riflettuto, che la maggior parte delle cognizioni in queste aggiunzioni contenute sarebbero state superflue a' Giovani militari, per uso de' quali si è questo Compendio ristampato; ho preso la risoluzione di non dare alle stampe, che le Note soltanto della prima, e seconda specie, cioè quelle di dimostrazione, o di spiega; e tralasciando la stampa delle ultime di addizione, eccettuatene tre del primo Libro, che ho stimato più necessarie, e che si troveranno in tre Articoli nell'Appendice; ho registrato solamente fra gli altri i loro numeri segnati con asterisco, come in fine si troveranno. Quale giovamento apporteranno tali Note a' Giovani principianti, potrà esperimentarsi col fatto, e potrà da' medesimi confessarsi. Io però mi lusingo, e ardisco dire di avere con esse ridotto a tale il presente Compendio Analitico, che senza bisogno della spiega, e viva voce del Maestro, potrà francamente studiarsi da chicchessia delle sole aritmetiche, e geometriche cognizioni fornito.

INDICE
DEI CAPI.

LIBRO PRIMO.

Dell' Algoritmo, e delle Equazioni di primo, e secondo grado.

LIBRO SECONDO

Delle Linee, ovvero dei Luoghi del primo, e secondo grado, e delle Equazioni determinate del grado terzo, e quarto.

LIBRO TERZO

Delle Equazioni determinate, che il quarto grado, e delle Linee, che il secondo sorpassano.

Non enim fecimus altos nimis, & obscuros in in his rebus Quæstionum sinus, sed primitias quasdam, & quasi libamenta . . . . dedimus.

A. Gell. Pref.

LIBRO PRIMO

Dell' Algoritmo, e delle Equazioni di primo, e secondo grado.

CAPO PRIMO.

Algoritmo delle quantità intere.

I. OGni quantità, qualor venga eſpreſſa con lettere alfabetiche, chiamaſi *quantità algebraica*: coſi due linee, due velocità, due numeri &c. ſe vengano eſpreſſi colle lettere a, b &c. ſi chiamano quantità algebraiche. (1) Altre di queſte ſon dette *ſemplici*, altre *compoſte*. La quantità ſemplice è quella, che vien eſpreſſa da una, o più lettere, ſenza frapporvi alcuno di queſti ſegni $+$, $-$, che or ora ſpiegheremo, come a, ab, aac &c. La compoſta poi è quella, che vien eſpreſſa con più lettere, ma tra loro dai predetti ſegni ſeparate, come $a + b$, $aa - ff + bb$ &c.: $a + b$ s' appella *binomio*, ovvero di due termini, $aa - ff + bb$ ſi chiama *trinomio*, ovvero di tre termini &c., e quella di più termini in genere ſi chiama *polinomio*.

II. La ſomma delle quantità ſemplici ſi fa colla ſeguente crocetta $+$; onde volendoſi ſommare la quantità a con la quantità b, ſi ſcriverà $a + b$, ovvero $b + a$, che è lo ſteſſo; la quale eſpreſſione ſignifica a più b, ovvero b più a, cioè la ſomma delle due quantità *b* ed *a*. Se le quantità fossero espresse con la medesima lettera, cioè, se fosse da sommarsi *a* con *a*, in vece di scrivere $a + a$, si scrive $2\,a$; il numero 2., affisso alla lettera *a*, si chiama *coefficiente*, il di cui vero officio è indicare, che $2\,a$ stà ad *a*, come esso coefficiente 2 all' unità: alla quantità, in cui non havvi alcun coefficiente, s' intende per coefficiente l' unità. Che se le quantità da sommarsi, espresse con la medesima lettera, abbiano coefficienti, si sommino questi come nella volgare Aritmetica, e la somma si premetta alla lettera comune, così la somma di $2\,a$ più $3\,a$ sarà $5\,a$.

III. La sottrazione delle quantità semplici si fa colla seguente lineola orizzontale —, la quale dee preporsi alla quantità sottraenda: così se si avrà da sottrarre *a* da *b*, si farà $b - a$. Se le quantità fossero espresse con la medesima lettera, basterebbe sottrarre un coefficiente dall' altro, e premettere il residuo alla lettera comune: così se sarà da sottrarsi $2\,a$ da $4\,a$, si farà $2\,a$. E quì bisogna notare, che se, dovendo sottrarre *a* da *b*, *a* è minore di *b*, la differenza tra *b* ed *a* sarà maggiore del zero, per lo che essa si chiama *positiva*; che se *a* è uguale a *b*, la differenza sarà nulla, cioè uguale al zero; e finalmente, che se *a* è maggiore di *b*, la differenza sarà minore del zero, per lo che essa viene chiamata *negativa*.

IV. Quantunque le quantità negative siano minori del zero, non è però da credere essere tali quantità impossibili, assorde, o immaginarie, che anzi sono da tenersi per vere, e reali, come lo sono le positive; Imperocchè siccome le positive denotano veri, e reali eccessi sopra il zero, così la natura delle negative è di denotare veri, e reali difetti dal zero; onde nelle espressioni seguenti $0 + b$, $0 - b$, la quantità *b* è reale ugual-

ugualmente, tutta la diverſità conſiſtendo, che nel primo caſo b denota eceſſo ſopra il zero, nel ſecondo denota difetto dal zero; cioè, che le due eſpreſſioni $o + b$, $o - b$ denotano doverſi prendere la quantità b in parti totalmente oppoſte, principiando da dove la quantità è zero: Così, ſe nel primo caſo b denotaſſe l'altezza di un monte ſopra il piano orizzontale, nel ſecondo caſo b denoterebbe la profondità d'una valle ſotto il medeſimo piano: ſe b nel primo caſo denotaſſe il viaggio fatto da Bologna verſo Roma, nel ſecondo caſo b denoterebbe il viaggio fatto da Bologna verſo Modena, parte totalmente oppoſta.

V. Da ciò che abbiamo detto ſi ricava in primo luogo, che la ſomma delle quantità negative ſi debba fare per lo ſegno — non per lo ſegno +, perchè altrimenti non ſi ſommerebbero già le quantità negative, ma da negative ſi farebbero poſitive; quindi la ſomma di $- b$, e $- a$ ſi ſcriverà $- b - a$, ovvero $- a - b$, che è lo ſteſſo. Se le quantità negative saranno eſpreſſe con la medeſima lettera, cioè ſe ſarà da ſommarſi $- a$ con $- a$, invece di ſcrivere $- a - a$, ſi ſcriverà $- 2\,a$; ed in vece di $- 3\,a - 5\,a$, ſi ſcriverà $- 8\,a$. Si ricava in ſecondo luogo, che la ſottrazione delle quantità negative ſi debba fare per lo ſegno + da permetterſi alla quantità ſottraenda, e non per lo ſegno —, perchè altrimenti non ſi farebbe ſottrazione, ma ſomma; e però ſe ſarà da ſottrarſi $- a$ da $- b$, ſi farà $- b + a$, ed in queſta maniera verrà determinata la differenza fra $- a$, e $- b$, quando in altra maniera verrebbe determinata la ſomma di $- a - b$. Se le quantità ſono eſpreſſe con la medeſima lettera, baſta ſottrarre un coefficiente dall'altro: cioè, dovendo ſottrarre $- 2\,a$ da $- 5\,a$, ſi fa $- 3\,a$. Quì ancora è da oſſervare, che ſe dovendo ſottrarre — a da — b, — a ſarà minore di — b, allora la differenza ſarà negativa, che ſe — a è eguale a — b, la differenza ſarà zero, e finalmente, che ſe — a è maggiore di — b, la differenza ſarà poſitiva: il che può ſchiarare non poco ciocchè abbiamo detto di ſopra delle quantità negative.

VI. Similmente, ſe ſi vorrà ſommare una quantità negativa con una poſitiva, non vi ſarà altro biſogno, che di ſcrivere una quantità dietro l'altra coi ſegni riſpettivi; così la ſomma di più a con — b ſarà $a - b$. E quì avvertaſi, che una quantità poſta ſola, o nel principio d'una fila ſenza ſegno alcuno s'intende ſempre col ſegno poſitivo. Se le quantità foſſero deſignate con la medeſima lettera, allora la ſomma paſſerebbe in ſottrazione; onde baſterebbe ſottrarre una quantità dall' altra, e alla differenza premettere il ſegno della quantità maggiore: così la ſomma di $2a - 5a$ ſarà $-3a$, e la ſomma di $5a - 2a$ ſarà $+3a$, e la ſomma di $2a - 2a$ ſarà zero. Se ſi vorrà ſottrarre una negativa da una poſitiva, ſi muterà il ſegno alla quantità ſottraenda negativa, e poi ſi ſcriverà una dietro l'altra; cioè, volendoſi ſottrarre — a da $+b$, ſi farà $b + a$, ed in fatti la differenza, che paſſa tra $+b$, e $-a$, è $b + a$; ſe ſi vorrà ſottrarre b da $-a$, ſi ſarà $-a - b$, e tale appunto è la differenza, che paſſa tra $-a$, e $+b$. Le quali coſe facilmente s'intenderanno, da chi abbia ben compreſo quanto ſi è detto al §. 4.

VII. La moltiplicazione delle quantità ſemplici ſi denota per la ſola congiunzione delle lettere; e però volendoſi moltiplicare a per b, ſi fa ab. Le quantità da moltiplicarſi ſi chiamano *fattori*, e ciò che naſce dalla moltiplicazione ſi chiama *prodotto*. Ma comecchè le quantità da moltiplicarſi poſſono eſſere tutte due poſi-

tive

tive, o tutte due negative, o una poſitiva, e l' altra negativa; quindi per lo ſegno da premetterſi al prodotto in tutti queſti caſi diamo la ſeguente regola: cioè, che quando le quantità da moltiplicarſi hanno il medeſimo ſegno, al prodotto ſi dee premettere il ſegno poſitivo; quando hanno diverſo ſegno, allora al prodotto ſi dee premettere il ſegno negativo: così, ſe ſi avrà da moltiplicare $+a$ per $+b$, ovvero $-a$ per $-b$, il prodotto ſarà $+ab$; ſe poi ſi avrà da moltiplicare $-a$ per $+b$, ovvero $+a$ per $-b$, il prodotto ſarà $-ab$: La ragione di ciò è, che il moltiplicatore non altro denota, che il numero delle volte per cui ſi dee prendere la quantità moltiplicanda; e però poſta la quantità moltiplicanda poſitiva, ſe il moltiplicatore è poſitivo, non havvi dubbio, che la quantità poſitiva preſa per lo numero di volte da eſſo moltiplicatore indicato ſia poſitiva, e che tanto ſia maggiore quanto è maggiore eſſo numero, e che tanto ſia minore, quanto eſſo numero è minore; onde ſe il numero ſarà zero, la quantità moltiplicata pure ſarà zero, e per conſeguenza ſe il numero ſarà negativo, cioè minore del zero, la quantità moltiplicata non potrà eſſere, che minore del zero, cioè negativa; dal che ſi fa chiaro, che il prodotto di una quantità poſitiva moltiplicata per una poſitiva dovrà eſſere poſitivo, moltiplicata per zero dovrà eſſere zero, e moltiplicata per una quantità negativa dovrà eſſere negativo; al contrario, ſe poſta la quantità da moltiplicarſi negativa, il moltiplicatore denoti un numero poſitivo, la quantità preſa per queſto numero ſarà negativa, e tanto ſarà maggiore, quanto è maggiore queſto numero, e tanto ſarà minore, quanto queſto numero è minore; onde eſſendo queſto numero eguale al zero, la quantità negativa moltiplicata diventa ancor eſſa zero, e per conſeguenza poſto il mol-

moltiplicatore negativo, cioè minore del zero, la quantità moltiplicata non può essere che maggiore del zero, cioè positiva; dal che si fa chiaro, che il prodotto d'una quantità negativa per una positiva dovrà essere negativo, per una quantità uguale a zero dovrà essere zero, e per una quantità negativa dovrà essere positivo. (2) Quindi nasce la regola generale per gli segni da mettersi innanzi ai prodotti: cioè, dee il segno essere positivo se i fattori hanno i medesimi segni, negativo se hanno segni differenti. Se le quantità da moltiplicarsi fossero più di due, prima si moltiplichino due, e il prodotto loro si moltiplichi per la terza, e così di mano in mano fino all' ultima: se dunque saranno da moltiplicarsi $+a$, $-b$, $+c$, si moltiplicherà $+a$ per $-b$, ed il prodotto $-ab$ si moltiplicherà per $+c$, facendo $-abc$. Se le quantità da moltiplicarsi avessero coefficienti, si moltiplichino questi come nella volgare Aritmetica, e il prodotto si prometta alle quantità congiunte con il segno ricavato dalla regola data: così, dovendosi moltiplicare $-3a$ per $+10b$, il prodotto sarà $-30ab$. Si noti inoltre, che il prodotto delle due quantità a, e b viene egualmente denotato dall' espressione ab, che dall' espressione ba; perchè si riduce allo stesso moltiplicare a per, b, che b per a, come si ricava ancora dall' Aritmetica volgare.

VIII. Quando le quantità da moltiplicarsi sono due uguali, e coi medesimi segni, per cagione di esempio, se si debba moltiplicare a per a, il prodotto aa si chiama *seconda potestà* di a, ovvero *quadrato* di a, l' a poi si chiama *prima potestà* di se stessa. Quando le predette quantità sono tre, il prodotto aaa si chiama terza potestà di a, ovvero cubo, se sono quattro, il prodotto $aaaa$ si chiama quarta potestà, e così

così successivamente. In vece però di scrivere $a\,a$, $a\,a\,a$, $a\,a\,a\,a$ si scrive a^2, a^3, a^4, i quali numeri 2, 3, 4, si chiamano *esponenti*, o *indici* delle potestà, perchè espongono una potestà di a; così in a^2 il 2 indica la seconda potestà di a, o sia a moltiplicata una volta per se stessa, in a^3 il 3 indica la terza potestà di a, o sia a moltiplicata due volte per se stessa &c. e generalmente a^n indica una qualunque potestà di a, la quale chiamasi n, o sia a moltiplicata per se stessa tante volte, quante unità sono nel numero indicato da n diminuito dell' unità; si rifletta dunque esservi gran differenza tra $2\,a$, e a^2, perchè il $2\,a$ significa il doppio di a, e a^2 significa la seconda potestà di a: così se a fosse uguale a 4, $2\,a$ sarebbe uguale a 8, e a^2 sarebbe uguale a 16.

IX. E' facile raccogliere, che, per moltiplicare le potestà d' una medesima quantità, si debbano sommare gli esponenti, e che questa somma sia l' esponente della nuova potestà nata dalla moltiplicazione di tali potestà; perchè se si avesse da moltiplicare $a\,a$ per $a\,a\,a$, il prodotto sarebbe $a\,a\,a\,a\,a$; in cui l' a sarebbe posta tante volte, quante è posta nei due fattori presi insieme: ma gli esponenti dei fattori denotano il numero delle volte, che a è posta nei due fattori stessi; onde la somma loro denota il numero delle volte che a è posta nel prodotto; cioè la somma degli esponenti dei fattori è l' esponente del prodotto: quindi per moltiplicare a^2 per a^3 si dee fare a^5. Dalle cose dette si ricava ancora la maniera d' innalzare una data quantità a qualunque potestà, altro per ciò fare non si dee, che prendere l' esponente della data quantità tante volte, quante unità sono nell' esponente della potestà, cioè, che moltiplicare l' esponennente della quantità per l' indice della poteſtà : così per innalzare b^2 alla poteſtà terza, ſi dee prendere l' eſponente 2 tre volte, eſſendo il tre l' indice della poteſtà terza, cioè, ſi dee moltiplicare l' eſponente due per l' indice tre, e ſcrivere b^6, che ſarà la terza poteſtà di b^2; la poteſtà ſeconda di a^3 ſarà a^6, la poteſtà terza ſarà a^9, e generalmente la poteſtà n di a^m ſarà $a^{m\,n}$; ſimilmente la poteſtà ſeconda di $a^2\,b^3$ ſarà $a^4\,b^6$, e la poteſtà p di $a^m\,b^n$ ſarà $a^{m\,p}\,b^{n\,p}$. Alle volte ſenza fare attualmente l' operazione, giova ſoltanto indicarla col tirare una linea ſopra la quantità, ed accanto alla linea collocando l' indice della poteſtà in queſta guiſa $\overline{a\,b}^{\,n}$ per indicare la poteſtà n di $a\,b$, cioè $a^n\,b^n$; ed $\overline{a^2\,b^3}^{\,m}$ per indicare la poteſtà m della quantità $a^2\,b^3$, cioè $a^{2\,m}\,b^{3\,m}$

X. Nella diviſione riſolvendoſi ciò, che è ſtato compoſto colla moltiplicazione, ne viene per conſeguenza, che dovendo dividere una quantità per un'altra, convenga dalla dividenda togliere il diviſore, onde quello che rimane ſarà ciò, che ſi domanda *quoto*; ed in fatti moltiplicando di nuovo queſto quoto per lo diviſore, ſi reſtituiſce il dividendo: così, poichè $a\,b$ è il prodotto di a in b, ne viene, che dividendoſi $a\,b$ per a, il quoto ſia b, e dividendo $a\,b\,c$ per $a\,b$, che abbiaſi c. La regola dei ſegni da premetterſi al quoto è la ſteſſa di quella data per la moltiplicazione; cioè, che i medeſimi ſegni portano ſegno poſitivo, ed i diverſi negativo: così ſe ſi dividerà $a\,b$ per $-a$, ovvero $-a\,b$ per a, il quoto ſarà $-b$; e ſe ſi dividerà $a\,b$ per a, ovvero $-a\,b$ per $-a$, il quoto ſarà b: avvertaſi che ſe ſi divida a per a, il quoto è l'unità, perchè que-

questi fattori rimoltiplicati restituiscono il prodotto coi suoi segni rispettivi.

XI. Se le quantità hanno coefficienti, si divide il coefficiente del dividendo per lo coefficiente del divisore, e'l quoto che risulta, si affigge al quoto delle quantità con la regola dei segni data: così, divisa $4\,a\,b$ per $-2\,a$, sarà il quoto $-2\,b$.

XII. Se la quantità dividenda non ha lettera alcuna comune col divisore, la divisione s' indica come le frazioni numeriche, cioè, si disegna con una linea orizzontale, sopra cui si pone il dividendo, e sotto, il divisore coi segni rispettivi: così, dividendo $3\,a\,b$ per $-c$, sarà il quoziente $\frac{3\,a\,b}{-c}$, uguale a $\frac{-3\,a\,b}{c}$, perchè il valore della frazione, cioè il quoto, è negativo nell'uno, e nell' altro caso, num. 7: così ancora il quoto di $-5\,a\,b$ diviso per $-3\,c\,d$, è $\frac{-5\,a\,b}{-3\,c\,d}$, eguale a $\frac{5\,a\,b}{3\,c\,d}$, essendo nell' uno, e nell' altro caso il quoto positivo. La quantità sopra la linea orizzontale si chiama *numeratore*, e quella sotto *denominatore*, come nelle frazioni aritmetiche. Se nel dividendo vi sono lettere simili a quelle del divisore, si tolgano, ed i residui si scrivano a guisa di frazioni, siccome abbiamo detto: così il quoto di $a\,b$ diviso per $x\,b$, sarà $\frac{a}{x}$: perchè il divisore moltiplicato per lo quoto, dee essere uguale al dividendo, che sempre s' intende moltiplicato per l' unità; adunque il divisore al dividendo, come l' unità al quoto: e nel caso nostro è $x\,b$ ad $a\,b$, come l' unità ad $\frac{a\,b}{x\,b}$; ma la ragione di $x\,b$ ad

$a\,b$ è la stessa della ragione di x ad a, come si sà dalle regole delle proporzioni; onde essendo similmente x ad a, come l' unità ad $\frac{a}{x}$, l' unità ha la stessa ragione alle due frazioni $\frac{a\,b}{x\,b}$, $\frac{a}{x}$; adunque queste due frazioni sono uguali.

XIII. La divisione poi delle potestà si fa colla sottrazione degli esponenti; cioè, se si abbia da dividere a^4 per a^2, il quoto è a^{4-2}, uguale ad a^2, perchè appunto la moltiplicazione delle potestà si fa per la somma degli esponenti. Se l' esponente del divisore è minore dell' esponente del dividendo, l' esponente del quoto sarà positivo; se uguale, sarà zero; se maggiore, negativo: così l' esponente del quoto di a^4 diviso per a^2 sarà 2, l' esponente del quoto di a^4 diviso per a^4 sarà zero, e l' esponente di a^4 diviso per a^6 sarà -2; e però nel primo caso il quoto sarà a^2, nel secondo sarà 1, nel terzo a^{-2}, le quali espressioni equivalgono alle seguenti, cioè, ad $a\,a$ nel primo caso, ad 1 nel secondo, e ad $\frac{1}{a\,a}$ nel terzo, perchè il quoto di a^4 diviso per a^2 è $\frac{a\,a\,a\,a}{a\,a}$, uguale ad a^2, il quoto di a^4 diviso per a^4 è uguale ad $\frac{a\,a\,a\,a}{a\,a\,a\,a}$, uguale ad 1, uguale ad a^0, e finalmente il quoto di a^4 diviso per a^6 è uguale ad $\frac{a\,a\,a\,a}{a\,a\,a\,a\,a\,a}$, uguale ad $\frac{1}{a\,a}$, uguale ad a^{-2}.

Queste potestà con l' esponente negativo si chiamano *potestà negative*; le quali in realtà non disegnano altro, che l' unità divisa per tal potestà; onde a^{-2},

a^{-3},

a^{-3}, a^{-4} sarà lo stesso che $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$.

XIV. Dall' Algoritmo delle quantità semplici nasce chiaramente l' Algoritmo delle quantità composte: per sommare dunque le quantità composte, non vi sarà altro bisogno, che di scriverle per fila una dietro l' altra coi segni rispettivi; per sottrarle poi, si dovranno mutare tutti i segni alla quantità sottraenda, e poi fare la somma. Si avverta però tanto nella somma, quanto nella sottrazione di ridurre ad una sola quantità semplice quelle espresse con le medesime lettere, siccome abbiamo insegnato al §. 2. 3. Siano da sommarsi le quantità composte $a+b-c$, $3a-d+c$, la somma sarà $4a+b-d$, e la somma delle quantità composte $6x+9y$, $10x-3y$ sarà $16x+6y$, e delle quantità $ab-2ac+z^2$, $-ab+2ac+z^2$ sarà $2z^2$. Se poi dalla quantità $4x+3b$ si dovrà sottrarre $a+y$, il residuo sarà $4x+3b-a-y$: se da $x+b$ si sottrarrà $-a-b$, il residuo sarà $x+a+2b$: se da $ab+c^2$ si sottragga $-ab+c^2$, il residuo sarà $2ab$.

XV. L' uso à insegnato agli Analisti di scrivere in linea verticale tutte le quantità sommande, e sottraende, le quali siano espresse colle stesse lettere: onde i termini delle quantità sommande A, B, C si disporranno nella seguente maniera per ottenere facilmente la somma D.

$$\begin{array}{lllll}
A.\ \ a^3 & -3a^2x & +4ax^2 & -2x^3 & \\
B.\ 2a^3 & -\ a^2x & -2ax^2 & +\ x^3 & \\
C.-a^3 & & +2ax^2 & +2x^3 & +b^3 \\
\hline
D.\ 2a^3 & -4a^2x & +4ax^2 & +\ x^3 & +b^3
\end{array}$$

Se da A si dovrà sottrarre B, facilmente si otterrà la differenza C.

$$\begin{array}{l} A.\ 3a^5 - 2a^2b^3 + 4a^4b + a^4y \\ B.\ \ a^5 - 3a^2b^3 + 3a^4b + b^4y \\ \hline C.\ 2a^5 + a^2b^3 + a^4b + a^4y - b^4y \end{array}$$

XVI. La moltiplicazione delle quantità composte si fa moltiplicando un fattore per ciascun membro dell' altro fattore, e sommando tutti questi parziali prodotti secondo le regole date. Eccone gli esempi: Sia da moltiplicarsi A per B: il prodotto sarà C.

$$\begin{array}{l} A.\ a + b - c \\ B.\ y \\ \hline C.\ ay + by - cy \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A.\ a + b - c \\ B.\ \quad\ y - a \\ \hline \quad ay + by - cy \\ \quad -a^2 - ba + ca \\ \hline C.\ ay + by - cy - a^2 - ba + ca \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A.\ 3abc + 2x^3 \\ B.\ -a^2 + 3x^2 \\ \hline -3a^3bc - 2x^3a^2 \\ +9x^2abc + 6x^5 \\ \hline C.\ -3a^3bc - 2x^3a^2 + 9x^2abc + 6x^5 \end{array}$$

XVII. Quando la moltiplicazione delle quantità composte non si vuole attualmente fare, ma solamente accennare, si tira una retta sopra ciascuno dei moltiplicatori, e fra essi si pone o il punto, ovvero questo segno $\times$ nella seguente maniera, $\overline{a+b}\,.\,\overline{c-d}$, ovvero $\overline{a+b} \times \overline{c-d}$, che significa $a+b$ moltiplicato per $c-d$. Quando si vogliono indicare le potestà della quantità composta, si tira sopra questa una retta, a cui si premette l'esl' eſponente, che dee indicare la poteſtà; e perciò $\overline{a+b}^2$ ſignifica la ſeconda poteſtà di $a+b$, cioè $a+b$ per $a+b$ moltiplicata: $\overline{a+b}^3$ ſignifica la terza poteſtà di $a+b$, cioè $a+b$ moltiplicata due volte per $a+b$: e generalmente $\overline{a+b}^n$ ſignifica la poteſtà n di $a+b$, cioè $a+b$ moltiplicata per $a+b$ tante volte, quante unità ſono nel numero $n-1$, come ſi raccoglie dal §. 8.

XVIII. Non ſembrami fuor di propoſito confermare con qualche eſempio, che i ſegni diverſi dei fattori portino ſegno negativo al prodotto, e che i ſegni negativi dei fattori, al prodotto portino ſegno poſitivo. Sia dunque da moltiplicarſi $2a-a$, uguale ad a, per $3a-2a$, uguale ad a: è chiaro che il prodotto ſarà a^2; dico, che queſto prodotto non ſi può ſalvare ſe non nella regola dei ſegni data. Si faccia la moltiplicazione, e ſi laſcino per ora da parte i ſegni dei prodotti, eccettuatone quello del primo termine, che è ſenza alcun contraſto poſitivo; avremo dunque, ſecondo le regole della moltiplicazione, $3a-2a$ moltiplicata per $2a-a$, uguale a $6a^2 \ast 4a^2 \ast 3a^2 \ast 2a^2$: il primo termine $6a^2$ è ſeſtuplo di a^2, onde acciocchè tutto il prodotto ſia uguale ad a^2, biſogna neceſſariamente, che fra gli altri tre termini ve ne ſiano de' negativi: ſe foſſero negativi tutti tre, il prodotto reſterebbe $-3a^2$ diverſo da a^2: ſe uno ſolo dei tre foſſe negativo, pure il prodotto non ſarebbe uguale ad a^2; ne tampoco ſi ſalverebbe ſe foſſe negativo l'ultimo con un altro, ma ſoltanto ſi ſalva, quando ſi ponghino negativi i due termini di mezzo, e poſitivo l' ultimo: ed in fatti $6a^2-4a^2-3a^2+2a^2$ è uguale ad a^2, come ſi richiede.

XIX.

XIX. Nella divisione delle quantità composte fa d' uopo distinguere due casi : o il divisore è ancor egli composto , o nò : se non è composto , si divide ciascun termine del dividendo per lo divisore ; per cagion d' esempio , il quoto di $ab + cb - db$ diviso per b, sarà $a + c - d$. Se il dividendo non à lettera comune col divisore , il quoto si indica a guisa di frazione , e però il quoto di $ab + cb - db$ diviso per x, sarà $\frac{ab + cb - db}{x}$. Se alcuni membri del dividendo avessero lettere simili a quelle del divisore , ed altri nò , allora la divisione si può indicare a guisa di frazione, ovvero si possono dividere i membri divisibili , ed indicare il rimanente del quoto a guisa di frazione : così , se si avesse da dividere $ab + bc - cd$ per b, il quoto o sarebbe $\frac{ab + bc - cd}{b}$, o $a + c - \frac{cd}{b}$, nel qual caso il quoto, parte sarebbe intiero, e parte fratto .

XX. Quando il divisore ancor egli è quantità composta , allora bisogna ordinare il dividendo , e il divisore relativamente ad una lettera , che sembrerà più a proposito ; cioè , si scriverà tanto nel divisore , quanto nel dividendo in primo luogo quel termine , in cui essa lettera è alzata alla massima potestà : in secondo luogo si scriverà quel termine, in cui essa lettera è alla potestà prossima , e così successivamente . La quantità composta $y^3 + xy^2 + x^2y + x^3$ è ordinata secondo la lettera y; per ordinarla poi secondo la lettera x, bisogna scrivere $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$. Preparati in questa maniera il dividendo , e il divisore , si divide il primo termine del dividendo per lo primo termine del divisore , ed il quoziente si scrive a parte : per questo

quo-

quoziente si moltiplica tutto il divisore, ed il prodotto si sottrae dal dividendo: fatta la sottrazione, e ordinati i termini di nuovo, si divide nella stessa maniera per lo primo termine del divisore il primo termine del residuo, ed il quoto si scrive presso l' altro col proprio segno; e ciò si replichi fino a tanto che dalla sottrazione nulla rimanga; la somma poi di tutti i quoti parziali sarà il quoto totale.

XXI. Sia da dividersi A per B: si ordini l' una e l' altra formula, ex.g., per la lettera a, come si vede in C, ed E: poi si divida il primo termine di C per lo primo termine di E, ed il quoziente a con il suo segno si ponga in D: poi per questo quoziente si moltiplichi E, ed il prodotto si sottragga da C; avremo il residuo M: di nuovo si divida il primo termine di M per lo primo termine di E, ed il quoto $-d$ si scriva in D con il suo segno: per questo quoto si moltiplichi E, ed il prodotto si sottragga da M; avremo zero per residuo; onde D è il quoto totale: ed in fatti moltiplicando D pet E si restituisce A. (3)

$$
\begin{array}{lllll}
A.\ ba - db - da + aa, & & & & B.\ b + a \\
C.\ aa + ba - da - db, & & & & E.\ a + b \\
-aa - ba & & & & D.\ a - d \\
\hline
M. & -da - db & & & \\
 & +da + db & & & \\
\hline
 & 0 \quad 0 & & &
\end{array}
$$

Dividendo $5x^4 - 14x^3a - 6x^2ab - 3x^2a^2 + 2xa^2b + a^2b^2$, Divisore $5x^2 + xa - ab$

Primo resto $-15x^3a - 5x^2ab - 3x^2a^2 + 2xa^2b + a^2b^2$. Quoto $x^2 - 3ax - ab$

Secondo resto $-5x^2ab - xa^2b + a^2b^2$

Terzo resto $0 \quad 0 \quad 0$

Di-

Dividendo $9x^2 - y^2 + ab$, Divisore $3x - y$
Primo residuo $+ 3xy - y^2 + ab$ Quoto $3x + y$
Secondo residuo ab
Non potendosi questo residuo in alcuna maniera dividere per $3x - y$, è segno, che la divisione non si può ottenere perfetta, onde il quoto sarà $3x + y$ con la frazione $\frac{ab}{3x - y}$. Alle volte il quoziente d' una frazione si disegna in questa maniera $\overline{9x^2 - y^2 + ab} : \overline{3x - y}$, ovvero $(9x^2 - y^2 + ab) : (3x - y)$.

CAPO II.

Algoritmo delle Frazioni.

I. NOn dovrà maravigliarsi alcuno se cominciamo l' Algoritmo delle frazioni dalla moltiplicazione, e divisione, per indi passare alla somma, e alla sottrazione; imperocchè siccome l' Algoritmo delle quantità intere fu cominciato dalla somma, e dalla sottrazione, per essere tali operazioni le più semplici, e le più vicine alle prime nozioni delle quantità intere, così delle frazioni essendo la moltiplicazione, e divisione operazioni più semplici, e più prossime alle nozioni loro fondamentali, dalle medesime si dee cominciare.

II. Prima d' ogn' altra cosa però avvertire conviene, che v' è una perfetta analogia tra la proporzione, e la frazione; imperocchè la proporzione altro non essendo, che il rapporto di continenza, che ha l' antecedente al conseguente, il qual rapporto si disegna dividendo l' antecedente per lo conseguente, il il valore della proporzione sarà ottimamente disegnato per lo valore d'una frazione, il numeratore di cui sia l'antecedente, e il denominatore il conseguente, i quali si sogliono chiamare *termini* della frazione; onde la ragione di a a b si disegnerà per $\frac{a}{b}$, in cui a sarà il numeratore, e b il denominatore; e comecchè due quantità moltiplicate, e divise per la stessa quantità non mutano proporzione, così la frazione non muterà valore, ancorchè si moltiplichi, e si divida il numeratore, e denominatore per la medesima quantità; e però $\frac{a}{b}$ sarà uguale ad $\frac{ac}{bc}$.

III. Similmente siccome nella proporzione quando l'antecedente è uguale al conseguente l'unità esprime questa ragione di continenza, e quando è maggiore, la ragione di continenza è espressa da un numero maggiore dell'unità, e quando è minore, da un minore; così nella frazione $\frac{a}{b}$, se il numeratore a è uguale al denominatore b, il valore d'essa frazione sarà uguale all'unità, se a è maggiore di b, il predetto valore sarà maggiore dell'unità, e se a è minore di b, sarà minore. Tutto ciò nasce dalla dottrina delle proporzioni, di cui supponiamo instruito chi si applica allo studio dell'Algebra. Si veda il cap. I. §. 10. 12.

IV. Ora per moltiplicare una frazione, ver. gr., $\frac{a}{b}$ per una quantità intiera c, basta moltiplicare il numeratore a per la quantità intiera c, perchè $\frac{a}{b}$ in c, non è che il prodotto di a in c, diviso per b (4); e però se la quantità moltiplicante la frazione fosse uguale al denominatore, si restituirebbe la quantità intiera,

 per-

perchè $\frac{a}{b}$ moltiplicato in b, è uguale ad $\frac{ab}{b}$, uguale ad a, per quello che si è detto di sopra.

V. Essendo poi la divisione una operazione totalmente opposta alla moltiplicazione, a dividere $\frac{a}{b}$ per c, bisognerà moltiplicare non già il numeratore a, ma il denominatore b per c, e fare $\frac{a}{bc}$, perchè col moltiplicare ancora a per c ottenendosi la frazione $\frac{a}{b}$ tramutata in $\frac{ac}{bc}$, si inferisce, che il moltiplicare il numeratore per una quantità, sia una operazione totalmente opposta al moltiplicare il denominatore per la medesima quantità; dunque trovandosi l'istessa opposizione ancora tra la moltiplicazione, e la divisione, ne avviene, che moltiplicare il denominatore di una frazione per una quantità, sia lo stesso che dividere la frazione per quella quantità. Se poi la quantità intiera c si divida per la frazione $\frac{a}{b}$, si avrà un'altra frazione, il cui numeratore sarà c, ed il denominatore sarà $\frac{a}{b}$; e moltiplicato tanto il numeratore c, quanto il denominatore $\frac{a}{b}$ per la quantita b, il numeratore diverrà cb, ed il denominatore a, onde la detta frazione si muterà nella equivalente $\frac{cb}{a}$; per dividere dunque una quantità intiera per una frazione, si ha questa regola generale: cioè, si tramuta nella frazione il numeratore in denominatore, e il denominatore in nu-

numeratore, e poi si moltiplica la frazione così rovesciata per la data quantità.

VI. Se si divida una frazione per un'altra, ver.gr. $\frac{a}{b}$ per $\frac{y}{x}$, si avrà una nuova frazione, il cui numeratore sarà $\frac{a}{b}$, ed il denominatore $\frac{y}{x}$; e moltiplicato il numeratore, e il denominatore di questa frazione per $b\,x$, il primo diverrà $a\,x$, il secondo $b\,y$, e la frazione $\frac{a\,x}{b\,y}$: vale a dire, la divisione di una frazione per un' altra si avrà, se si moltiplicherà il numeratore della dividenda per lo denominatore della dividente, e il denominatore della dividenda per lo numeratore della dividente.

VII. Comecchè tale operazione viene disfatta dal moltiplicare numeratore per numeratore, e denominatore, per denominatore, quindi moltiplicando numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore, si otterrà la moltiplicazione d'una frazione per l'altra; così, se vorrò moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{y}{x}$, dovrò fare $\frac{a\,y}{b\,x}$. Se poi voglio la frazione $\frac{a}{b}$ a seconda potestà, cioè moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{a}{b}$, devo alzare a seconda potestà il numeratore, e il denominatore, onde abbia $\frac{a^2}{b^2}$ potestà seconda di $\frac{a}{b}$; e generalmente la potestà m della frazione $\frac{a}{b}$, è $\frac{a^m}{b^m}$.

VIII. Ciocchè abbiamo detto fin qui, benchè sia stato illustrato con esempi di quantità semplici positive, vale ancora, come è chiaro, nelle quantità composte qualunque positive, o negative che siano; e però $\frac{a+b}{c-d}$ sarà uguale ad $\frac{ax+bx}{cx-dx}$, $\frac{yab-cab}{2xab}$ è uguale a $\frac{y-c}{2x}$, e $\frac{ab-ac}{-xb+xc}$ è uguale ad $\frac{a}{-x}$, uguale a $\frac{-a}{x}$. Similmente a moltiplicato per $\frac{a-x}{c+d}$, sarà $\frac{aa-xa}{c+d}$, ed $\frac{a-x}{c-d}$ diviso per a, sarà $\frac{a-x}{ca-ad}$, ed a diviso per $\frac{x+y}{z}$, sarà $\frac{az}{x+y}$: così $\frac{x+y}{a-z}$ moltiplicato in $\frac{x-y}{a+z}$, sarà $\frac{x^2-y^2}{a^2-z^2}$, ed $\frac{x+z}{c}$ diviso per $\frac{-d^2}{x+z}$, sarà

$\overline{\qquad\qquad}^{\,m}$

$\frac{x^2+2xz+z^2}{-cd^2}$; e finalmente $\frac{\overline{x^2+y^2}^{\,m}}{\overline{\qquad}}$ sarà la potestà m della frazione $\frac{x^2+y^2}{p+q} \cdot p+q$

IX. Avanti di passare alla somma, e alla sottrazione delle frazioni fra di loro, e con interi, bisogna in primo luogo dar la maniera di ridurre gl' interi, e le frazioni a frazioni, che abbiano il medesimo denominatore, dopo che, facilissime si renderanno le predette operazioni. Per ridurre un' intero allo stesso denominatore d' una frazione, si moltiplica l' intiero per lo denominatore della frazione, e al prodotto, tirata la solita lineola orizzontale, si sottoscrive lo stesso denominatore: così volendo ridurre a ad una frazione dello stesso denominatore di una data $\frac{x}{y}$, si fa $\frac{ay}{y}$. Due fra-

frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}$ facilmente ſi riducono alla ſteſſa denominazione: ſi moltiplichi il numeratore, ed il denominatore della prima per lo denominatore della ſeconda, ed il numeratore, e denominatore della ſeconda per lo denominatore della prima, e ſi otterranno $\frac{ay}{by}$, $\frac{bx}{by}$ dello ſteſſo denominatore, e uguali alle propoſte.

X. Se le frazioni da ridurſi al medeſimo denominatore foſſero più di due, ex.gr. $\frac{3a}{2b}$, $\frac{8a+5c}{a-c}$, $\frac{y}{x}$, prima ſi riduchino al medeſimo denominatore due, ve.gr. $\frac{3a}{2b}$, ed $\frac{y}{x}$, tramutandole in $\frac{3ax}{2bx}$, e $\frac{2by}{2bx}$, e poi ſi riduchino al medeſimo denominatore $\frac{2by}{2bx}$, ed $\frac{8a+5c}{a-c}$, tramutandole in $\frac{2bya-2byc}{2bxa-2bxc}$, e $\frac{16abx+10bxc}{2bxa-2bxc}$, al qual denominatore ſarà ridotta ancora la frazione $\frac{3ax}{2bx}$, ſe ſi moltiplichi il di lei numeratore, e denominatore per $a-c$, avendoſi $\frac{3a^2x-3axc}{2bax-2bxc}$. Da ciò ſi raccoglie, che ſi ridurranno più frazioni al medeſimo denominatore, ſe ſi prenderà per comune denominatore il prodotto di tutti i denominatori, e poi ſi moltiplicherà ciaſcuno numeratore per lo prodotto de' denominatori, eſcluſo il denominatore di quella frazione, di cui ſi moltiplica il numeratore. Siano da ridurſi al medeſimo denominatore le frazioni $\frac{c}{a+b}$, $\frac{y^2}{a-b}$, $\frac{x+z}{u}$: ſi prenda il prodotto dei denominatori a^2u-b^2u

per

per comune denominatore, e poi si moltiplichi c per $au - bu$, e si faccia la frazione $\frac{auc - buc}{a^2u - b^2u}$: indi si moltiplichi y^2 per $au + bu$, e si faccia l'altra frazione $\frac{auy^2 + buy^2}{a^2u - b^2u}$; finalmente si moltiplichi $x + z$ per $a^2 - b^2$, e facciasi la frazione $\frac{a^2x + a^2z - b^2x - b^2z}{a^2u - b^2u}$, e così le tre date frazioni saranno ridotte a tre altre dello stesso denominatore, ed equivalenti alle prime.

XI. Con più semplicità si ridurrebbero al medesimo denominatore le frazioni, se il denominatore di una fosse divisore del denominatore dell' altra, come succede in $\frac{a}{b}$, e $\frac{cx}{yb}$, in cui è b divisore di yb; perchè ritrovato il quoto y col dividere il denominatore yb per b, si moltiplicherà il numeratore, e denominatore della frazione $\frac{a}{b}$ per esso quoto y, cioè, si farà $\frac{ay}{by}$.

XII. Sapendosi ridurre le frazioni al medesimo denominatore, facil cosa è la somma, e sottrazione loro. Siano da sommarsi le frazioni $\frac{c}{b}$, $\frac{x}{a-b}$, $\frac{z+d}{u}$: si riducano in primo luogo le dette frazioni al comune denominatore, facendo $\frac{cau - cbu}{bau - b^2u}$, $\frac{bxu}{bau - b^2u}$, $\frac{zab + dab - zb^2 - db^2}{bau - b^2u}$, e poi si sommino i numeratori secondo l'Algoritmo delle quantità intiere, e a questa somma si sottoponga il comune denominatore, cioè si faccia.

$\frac{cau - cbu + bxu + zab + dab - zb^2 - db^2}{bau - b^2u}$, e questa sarà, come è chiaro, la somma delle proposte frazioni. Sia da sottrarsi la frazione $\frac{c}{b}$ da $\frac{x+z}{a+u}$: si riducano queste frazioni al medesimo denominatore, e perciò si faccia $\frac{ac+uc}{ba+bu}$, e $\frac{bx+bz}{ba+bu}$, e poi si sottragga il numeratore della prima dal numeratore della seconda, e alla differenza si sottoponga il comune denominatore: cioè, si faccia $\frac{-ac-uc+bx+bz}{ba+bu}$, e sarà fatta la sottrazione. Se si abbiano da fare somme, e sottrazioni con intieri, e coi fratti, basta considerare l' intero come fratto, tirando sotto l' intero una lineola orizzontale, e sottoscrivendo a questa l'unità nella seguente guisa $\frac{a}{1}$, $\frac{mn}{1}$ &c. perchè ciascun intero a &c. si può sempre considerare diviso per l' unità, senza che venga ad alterarsi il suo valore.

XIII. Avvi un' altra operazione intorno alle frazioni di non mediocre importanza, ed è di ridurre le frazioni alla più semplice espressione possibile; imperocchè accade alle volte, che il numeratore, ed il denominatore della frazione sian divisibili per la stessa quantità; dunque diviso per questa l' uno, e l' altro, sarà la frazione ridotta ad una dello stesso valore, ed espressa con termini più semplici: per cagion d' esempio, se si dividerà il numeratore, ed il denominatore della frazione $\frac{ab}{cb}$ per la quantità b, sarà la frazione $\frac{ab}{cb}$ tramutata in un' altra più semplice $\frac{a}{c}$, e quanto più

più sarà complesso tal divisore, tanto più semplici ancora saranno i termini della frazione equivalente; onde se il divisore sarà il massimo, la frazione allora sarà ridotta a termini minimi: così la frazione $\frac{abn + cbn}{xbn}$ perchè à divisibile per n il numeratore, ed il denominatore, si può ridurre alla frazione più semplice $\frac{ab + cb}{xb}$; ma inoltre osservo, che i termini di questa frazione sono divisibili per b; onde ancor questa si può ridurre alla più semplice $\frac{a + c}{x}$; la qual espressione sarebbe stata da me ritrovata, se dal principio avessi diviso i termini della data frazione $\frac{abn + cbn}{xbn}$ per lo massimo loro divisore bn, e non per n soltanto. Non si possono però sempre a prima occhiata scoprire i massimi divisori delle quantità, ancorchè realmente vi siano, conviene adunque ricorrere al seguente metodo.

$A.\ -x^3 + ax^2 - c^2x + ac^2$	$B.\ -x^2 + \overline{a - y}.\,x + ay$
$M.\ -x^3 + ax^2 - yx^2 + ayx$	$Q.\ -x^2 + ax$
$C.\ yx^2 + \overline{c^2 + ay}.\,-x + ac^2$	$P.\ -xy + ay$
$N.\ yx^2 - ayx + y^2x - ay^2$	$K.\ -xy + ay$
$D.\ \overline{c^2 + y^2}.\,-x + ac^2 + ay^2$	$0 \quad 0$

Quoti

$$x$$

$$-y$$

$$\frac{x}{c^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{c^2 + y^2}$$

XIV.

XIV. Sia dunque da cercarsi il comun divisore delle quantità A, B, e sieno queste quantità ordinate secondo una lettera, ver.gr. x; si divida il primo termine di A, in cui x è alzata a potestà superiore, per lo primo termine di B, in cui x è a potestà inferiore, ed il prodotto M del quoto x nel divisore B, sottratto dalla quantità A, dà di residuo C; e perchè in C la quantità x è alzata alla medesima massima potestà che nel divisore B, si seguiti a dividere il primo termine del residuo C per lo primo termine del divisore B, e similmente sottratto il prodotto N di questo ultimo quoto $-y$ nel divisore B, si avrà il residuo D; e comecchè nel residuo D la quantità x è a minor potestà che nel divisore B, però si inverta l' ordine; cioè, fatto il divisore B dividendo, ed il residuo D divisore, si seguiti secondo il solito la divisione, e sottratto Q prodotto solito da B, si avrà il residuo P: questa quantità P, avendo x alla medesima potestà di D, si divida per D, e sottratto il solito prodotto K da P, si avrà finalmente zero; onde P ultimo residuo è il comune divisore. Imperocchè se diviso P per D il residuo è zero, segno è che D pure è divisibile esattamente per P; perchè chiamato R il quoto nato dalla divisione di P per D, sarà P uguale a DR, e dividendo tanto P, quanto DR per R, sarà $\frac{P}{R}$ uguale a D, cioè $P \times \frac{1}{R}$ uguale a D; dunque D si può risolvere in due fattori, P, $\frac{1}{R}$; il che quì significa, che D sia esattamente divisibile per P. Onde il prodotto di D in $\frac{x}{c^2+y^2}$, uguale a Q, sarà ancor egli esattamente divisibile per P; perciò $Q+P$, cioè B, sarà divisibile per P: similmente sarà B moltiplicato per $-y$, cioè N, pure divisibile per P; ed essendo ancora D diviſibile per P, ſarà $N + D$, cioè C, diviſibile per P: ſimilmente B moltiplicato in x, cioè M, è diviſibile per P; onde $M + C$, cioè A, ſarà ancor egli diviſibile per P; e però P è il comun diviſore delle due quantità A, e B. Sarà poi il maſſimo, perchè un maggiore non dividerebbe perfettamente l'ultimo reſiduo, cioè il P, come richiede la natura dei comuni diviſori. (5)

$$\begin{array}{ll|l}
Q.\ \underline{ab^2 - b^2f + ax^2 - x^2f} & & \text{Quoti} \\
C.\ \underline{-cab + cfb + ax^2 - x^2f}, & P.\ ab - bf + ca - cf & b \\
D.\ \ ax^2 - x^2f + c^2a - c^2f & & -c
\end{array}$$

XV. Si cerchi il diviſore delle due quantità Q, P ordinate ſecondo la lettera b: ſi divida Q per P, e avremo il primo reſiduo C: queſto reſiduo diviſo pure per P, ſi ritroverà il ſecondo reſiduo D, il quale non è più diviſibile per P ordinato ſecondo la lettera b; ma non per queſto ſi dee conchiudere, che le predette quantità Q, P, non abbiano maſſimo comun diviſore; imperocchè ſe ſi ordineranno per la lettera a, o per la lettera f, ſi troverà il comun diviſore $a - f$; e la ragione è, che per ritrovare il maſſimo comun diviſore di due quantità, biſogna che eſſe quantità ſieno ordinate per una lettera del medeſimo comune diviſore, come ſi vede nell' eſempio addotto; e comecchè non ſi sà che lettera contenga il comun diviſore, però prima di decidere del maſſimo comun diviſore di due quantità, biſogna ordinarle per tutte le lettere: ſe poi fatta tal prova non ſi riuſcirà nell' intento, ſegno è, che tali quantità non hanno alcuno comun diviſore.

XVI. Con tutto che una quantità c non poſſa dividerſi per un' altra quantità $a + b$ eſattamente, e che

che per disegnare il quoto di questa divisione siamo obbligati a scrivere $\frac{c}{a+b}$; però si può benissimo intorno le predette quantità esercitare l' operazione solita della divisione. Diviso dunque c per a, avremo per quoto $\frac{c}{a}$: sottratto secondo il solito dalla quantità c il prodotto di questo quoto nel divisore $a + b$, uguale a $c + \frac{cb}{a}$, avremo per residuo $-\frac{cb}{a}$: questo residuo di nuovo si divida per a, e risulterà il quoto $-\frac{cb}{a^2}$: si moltiplichi questo quoto nel divisore $a + b$, e sarà il prodotto $-\frac{cb}{a} - \frac{cb^2}{a^2}$: questo prodotto si sottragga secondo il solito dalla quantità $-\frac{cb}{a}$, e sarà il nuovo residuo $+\frac{cb^2}{a^2}$: questo residuo ancora si divida per a, e avremo il quoto $\frac{cb^2}{a^3}$; e così continuando l' operazione, la divisione anderà all' infinito, ed il quoto totale, uguale al valore della frazione $\frac{c}{a + b}$, sarà una serie composta di infiniti termini, cioè sarà
$\frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4} + \frac{cb^4}{a^5}$ &c.

XVII. Se b fosse uguale ad a, allora la frazione diventerà $\frac{c}{2a}$, e la serie diventerà $\frac{c}{a} - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} + \frac{c}{a}$ &c., il cui valore, sommando termini di numero pari, è uguale a zero, sommando poi ter-

 mi-

mini di numero diſpari, è uguale a $\frac{c}{a}$; onde il valor della ſomma dei termini è ſempre ugualmente diſtante dal valor della frazione, ora per eceſſo, ora per difetto, perchè il valor della frazione $\frac{c}{2a}$ è maggiore del zero per la quantità $\frac{c}{2a}$, è minore poi di $\frac{c}{a}$ pure della quantità $\frac{c}{2a}$, e per queſto motivo la ſerie in tal caſo ſi dice *parallela*. Se b è maggiore di a, allora i termini della ſerie continuamente creſcono, perchè il termine ſuſſeguente è ſempre uguale all' antecedente moltiplicato per $\frac{b}{a}$, la quale quantità in queſta ſuppoſizione è maggiore dell'unità; dunque la ſomma dei termini, tanto pari, che diſpari, ſempre ſi ſcoſta dal vero valore della frazione, la prima per difetto, la ſeconda per eceſſo, e però tal ſerie è detta *divergente*. Se finalmente b è minore di a, allora per una ragion contraria alla addotta di ſopra, i termini della ſerie continuamente ſi diminuiranno; onde la ſomma dei termini della ſerie ſi accoſterà ſempre più al vero valore della frazione, e però ſi arriverà a tale accoſtamento, che ſi potranno ſenza ſenſibile errore diſprezzare tutti i ſuſſeguenti termini della ſerie, e prendere la ſomma di un certo determinato numero di termini per lo valore della frazione d' onde è nata tal ſerie: per queſto accoſtamento, tal ſerie viene detta *convergente*. Biſogna però avvertire, che la predetta ſomma, ſe ſarà d' un numero pari di termini, ſarà altresì minore del vero valore della frazione; ſe poi ſarà d' un numero diſpari di termini, ſupererà il vero valore della frazione. Si avverta in oltre, che quan-

quanto più b è minore d' a, tanto più si diminuiscono i termini della serie, e per conseguenza tanto più pochi termini vi vorranno per ricavare il prossimo valore della frazione.

XVIII. Se b fosse quantità negativa, tutti i termini della serie saranno positivi, come è chiaro dall' operazione, e la somma dei termini sarà sempre minore del valore della frazione.

XIX. Quantunque la frazione da noi ridotta in serie abbia per numeratore la quantità semplice c, e per denominatore il binomio $a + b$; con tutto ciò la predetta operazione si estende a qualunque frazione, perchè qualunque quantità composta si può considerare come semplice, e come un binomio: così $\frac{c + d - e}{a + b + x + z}$, denominando $c + d - e$ uguale ad n, ed $a + b + x$ uguale ad m, si tramuterà in $\frac{n}{m + z}$, intorno la quale frazione fatta la solita operazione, e finalmente in vece di n, ed m sostituiti i loro valori rispettivi, si avrà una somma equivalente alla proposta frazione. (6)

CAPO III.

Algoritmo dei radicali.

I. Cosa sieno le potestà delle quantità, è stato esposto al Cap. I. §. 8. Presentemente si dee notare con riflessione, che la quantità da cui nasce la potestà può essere positiva, o negativa: se positiva, tutte le sue potestà saranno quantità positive, come a^2, a^3, a^{-2}, a^{-3} &c., perchè ad ottenere tali potestà, si moltiplica sem-

ſempre poſitivo per poſitivo ; ſe poi la quantità d'onde naſce la poteſtà è negativa , allora biſogna diſtinguere le poteſtà d' indice , o di eſponente pari , da quelle d' indice diſpari : la poteſtà pari di quantità negativa è quantità poſitiva , perchè finalmente ſi moltiplica negativo , per negativo ; la poteſta diſpari è negativa , perchè l' ultima moltiplicazione è di poſitivo in negativo : così la poteſtà ſeconda di $-a$ è a^2, perchè naſce da $-a \times -a$, la poteſtà terza è $-a^3$, perchè naſce da $a^2 \times -a$, la quarta è a^4, perchè naſce da $-a^3 \times -a$. Da ciò raccoglieſi , che la poteſtà n pari d' una quantità $a+b$ poſitiva , poſſa ugualmente naſcere da $-a-b$ negativa , e che però l'eſpreſſioni $\overline{a+b}^2$, $\overline{-a-b}^2$ denotino la medeſima quantità poſitiva ; laonde ſarà impoſſibile ritrovar quantità poſitiva , o negativa , dalla cui moltiplicazione naſca una potenza pari , che ſia quantità negativa : così $-a^2$ non denoterà poteſtà di alcuna quantità , ma il prodotto di $-a$ in $+a$. Le poteſtà poi diſpari , ſe ſaranno quantità negative , naſceranno dalla moltiplicazione di quantità negativa ; ſe ſaranno quantità poſitive , naſceranno dalla moltiplicazione di quantità poſitive .

II. L'eſpreſſione $-a^n$ è equivoca , potendo ſignificare $-a$ alzata alla poteſtà n, ovvero la poteſtà n d' a preſa negativamente , le quali coſe ſono diverſiſſime ; per togliere adunque queſt' inconveniente , quando ſi ſaranno alzate quantità negative a qualche poteſtà , avanti la quantità negativa ſi metta una lunula , ed i ſegni , che appartengono alla poteſtà , ſi ponghino avanti quella : così , dovendo ſommare la poteſtà n di $-a$, ſi ſcriva $+(-a^n$, e ſe ſi dovrà ſottrarre, ſi ſcriva $-(-a^n$: ſimilmente $+\overline{(a-b}^2$ ſignifica doverſi ag-

aggiugnere il quadrato di $a - b$, $-(\overline{a-b}^2$ significa doversi sottrarre.

III. Nascendo le potestà dispari positive da quantità positive, e le negative da negative, succede, che per sottrarre da c^3 la potestà $\overline{-a-b}^3$, la quale è negativa, o $\overline{a+b}^3$, che è positiva, si possa scrivere $c^3 + \overline{a+b}^3$, o $c^3 \overline{-a-b}^3$; imperocchè siccome si muta da positiva in negativa, o da negativa in positiva la quantità d' onde nasce la potestà dispari, così da positivo in negativo, o da negativo in positivo si muta il valore della potestà. Ma di questo metodo non ci possiamo servire per sottrarre le potestà di numero pari, perchè quantunque si mutino i segni alla quantità d' onde nasce la potestà pari, la potestà è sempre quantità positiva; onde $c^2 + \overline{a+b}^2$, e $c^2 \overline{-a-b}^2$ denotano la medesima quantità; per poter poi operare sopra il valore delle potestà pari, si dee ricorrere alla lunula come nel §. precedente.

IV. Siccome ogni quantità si può alzare a qualunque potestà col moltiplicarla successivamente per se stessa, come abbiamo indicato nel Capo I. §. 8.; così ogni quantità potrà essere qualunque potestà, in riguardo però a diverse quantità: così a^6 sarà sesta potestà di a, sarà terza potestà di a^2, sarà seconda potestà di a^3; perchè a moltiplicata cinque volte per se stessa dà a^6, a^2 moltiplicata due volte per se stessa dà a^6, e a^3 moltiplicata una volta per se stessa pure dà a^6: questa quantità, in riguardo a cui un' altra si chiama potestà, viene detta *radice* di lei, la quale si dice *quadrata*, o *seconda*, se la potestà sarà quadrata, o seconda, come a^3 in riguardo ad a^6; si chiama *cuba*, ò *terza*, se ſe la poteſtà ſarà cuba, o terza, come a^2 riguardo a^6; e generalmente la radice ſi chiama n, ſe n ſarà l' indice della poteſtà.

V. cade ſubito ſotto l' occhio, che il ritrovare, o eſtrarre le radici date dalle quantità, ſia una operazione totalmente oppoſta all' alzare le quantità alle poteſtà; e comecchè le quantità ſi alzano alle poteſtà con moltiplicare gli eſponenti delle quantità per l' eſponente della poteſtà, cap. 1. §. 9.; per eſtrarre la radice data da una quantità, baſterà dividere l' eſponente di queſta per l' indice della radice: così, per alzare a alla ſeſta poteſtà, facendoſi $a^{1.6}$, cioè a^6; per eſtrarre da a^6 la ſeſta radice, ſi farà $a^{\frac{6}{6}}$, uguale ad a, per eſtrarre da a^6 la terza poteſtà, ſi farà $a^{\frac{6}{3}}$, cioè a^2, e per eſtrarre la ſeconda, ſi farà $a^{\frac{6}{2}}$, cioè a^3: ſimilmente per eſtrarre dalla frazione $\frac{a^2}{b^2}$ la radice ſeconda, ſi fa $\frac{a^{\frac{2}{2}}}{b^{\frac{2}{2}}}$, uguale ad $\frac{a}{b}$.

VI. In quanto poi ai ſegni da premetterſi alle radici, biſogna oſſervare, che poſta poſitiva la quantità da cui ſi vuole eſtrarre la radice, ſe la radice ſarà d' indice diſpari, ſarà poſitivo ancora il valore della radice; ſe poi la radice ſarà d' indice pari, il valor della radice ſarà doppio, cioè, ſarà poſitivo, e negativo, perchè moltiplicando coi ſegni aſſegnati le radici ſecondo il numero dell' indice, si reſtituiſce di nuovo la poteſtà coi proprj ſegni: così la radice ſeconda d' a^2 ſarà doppia, cioè $+a$, e $-a$, perchè tanto $+a$, quanto $-a$ moltiplicata in ſe ſteſſa dà a^2. Quindi per eſprimere amendue le radici in una volta, ſi adoſi adopra il ſegno $\pm$: così la radice ſeconda di aa ſarà $\pm a$, col che s' indica, che doppia è la radice, cioè negativa, e poſitiva. Poſto poi, che la quantità d' onde ſi vuole eſtrarre la radice ſia negativa, ſe la radice à l' indice diſpari, il ſuo valore ſarà negativo; ma ſe la radice è d' indice pari, allora il valor della ſteſſa non potrà eſſere poſitivo, nè negativo, perchè non ſi potrà ritrovare alcuna quantità poſitiva, o negativa, la quale moltiplicata in ſe ſteſſa ſecondo il numero dell' indice pari, reſtituiſca la poteſtà di valor negativo, ſiccome abbiamo viſto di ſopra; onde la radice in tal caſo ſi dice *impoſſibile*, o *immaginaria*: tal ſarebbe la radice quadrata di $-a^2$, la quale non può eſſere nè $-a$, nè $+a$, e perciò diceſi impoſſibile.

VII. Dalla maniera di cavar le radici delle quantità con la diviſione degli eſponenti delle quantità steſſe per l' indice delle radici, ſi raccoglie, che la radice abbia per eſponente il quoto nato dalla predetta diviſione: così la radice terza di $\overline{a+b}^{6}$ eſſendo $\overline{a+b}^{\frac{6}{3}}$, cioè $\overline{a+b}^{2}$, à per eſponente il 2, quoto nato dalla diviſione di 6 per 3. Speſſiſſime volte accade, che queſto quoto non ſia quantità intiera, come avviene ſe cerchiamo la radice ſeconda di $\overline{a+b}^{3}$, nel qual caſo tal radice non ſi può eſprimere, che nella maniera ſeguente $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$; quindi ſi intende coſa ſieno le poteſtà d' eſponente fratto, che ſi chiamano ancora *imperfette*, altro dunque eſſe non ſono che radici: così $a^{\frac{4}{3}}$ è la radice terza di a^4, e $\overline{b+c}^{\frac{m}{n}}$ è la radice n di $\overline{b+c}^{m}$, e $\dfrac{\overline{z^2+y^2}^{\frac{1}{n}}}{\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}}$ è la radice n di $\dfrac{z^2+y^2}{p+q}$.

VIII. Vi è un' altra maniera di esprimere le potestà imperfette col seguente segno $\surd\overline{}$, detto *radicale*, sotto di cui si tiene, per così dire, vincolata la quantità di che si vuol la radice, e sopra cui si scrive l' indice della radice: così la radice quadrata di $\overline{a+b}^3$ si denota ancora per $\sqrt[2]{\overline{a+b}^3}$, $\sqrt[3]{a^4}$ sarà lo stesso di $a^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[n]{\overline{b+c}^m}$ equivalerà a $\overline{b+c}^{\frac{m}{n}}$, e queste quantità così denotate si chiamano *radicali*. Avvertasi che al segno radicale senza indice si intende l' indice 2, onde nel primo esempio si poteva quest' indice tralasciare. Con questo segno si denotano ancora le radici immaginarie, e impossibili: così la radice 2 immagiuaria di $-a^2$ si denota per $\sqrt{-a^2}$, e la radice n numero pari della quantità negativa $-a^m$ si denota per $\sqrt[n]{-a^m}$. Se si vogliano esprimere le radici immaginarie colli esponenti fratti, bisogna usare artificio per scansare gli equivoci. Sia da estrarsi la radice quadrata da $-a^2$: se si scriva $-a^{\frac{2}{2}}$, rimarrà il dubbio se tal espressione disegni $-a$, ovvero la radice quadrata di $-a^2$; per togliere adunque qualsisia equivoco, ci serviamo di due lunule nella seguente guisa $\overline{(-\,(a^2}^{\frac{1}{2}}$ per disegnare la radice seconda di $-a^2$, e generalmente $\pm\,\overline{(-\,(a^m}^{\frac{1}{n}}$ per disegnare qualunque radice n pari della quantità negativa $-a^m$.

IX. Se una quantità si alzerà a potestà di esponennente fratto positivo, in cui il numeratore sia uguale al denominatore, essa quantità rimarrà la medesima: così $\overline{x+y}^{\frac{2}{2}}$, o $\overline{x+y}^{\frac{3}{3}}$, o $\overline{x+y}^{\frac{n}{n}}$ sarà uguale a $x+y$, perchè $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{n}{n}$ sono uguali all' unità, siccome abbiamo visto nell' algoritmo dei fratti; e comecchè $\overline{x+y}^{\frac{n}{n}}$ si può tramutare in $\sqrt[n]{\overline{x+y}^{n}}$, così una quantità si potrà convertire in radicale dato, senza mutar valore, se detta quantità, prima alzata alla potestà denotata dall' indice del radicale, si porrà sotto il radicale del dato indice. Inoltre sapendosi ridurre le frazioni al medesimo denominatore senza mutar valore, si potranno ridurre le potestà, che anno esponente fratto di diverso denominatore, a potestà, le quali abbiano esponenti fratti del medesimo denominatore: così $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{x+y}^{\frac{1}{2}}$ si ridurranno ad $\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$, ed $\overline{x+y}^{\frac{3}{6}}$; ma $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{x+y}^{\frac{1}{2}}$ equivagliono a $\sqrt[3]{\overline{a+b}^{2}}$, e $\sqrt[2]{x+y}$, ed $\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$, $\overline{x+y}^{\frac{3}{6}}$ equivagliono a $\sqrt[6]{\overline{a+b}^{4}}$, e $\sqrt[6]{\overline{x+y}^{3}}$; quindi si ricava la regola di ridurre i radicali di diverso indice a radicali d' un indice medesimo, cioè, il prodotto degli indici sarà d' indice comune, e la quantità sotto un radicale si alzerà alla potestà indicata dall' indice dell' altro radicale: così $\sqrt[m]{x^{u}}$, e $\sqrt[n]{y^{r}}$ si ridurranno al medesimo radicale facendo $\sqrt[mn]{x^{un}}$, e $\sqrt[mn]{y^{mr}}$. Se le potestà di esponente fratto, o i radicali fossero più di due, allora basta prima ri-

ridurne due, e poi gli altri successivamente, siccome si è operato nelle frazioni al Capo 2. §. 10.

X. Se poi l' indice di un radicale divida perfettamente l' indice dell' altro radicale, come sarebbe in $\sqrt[2]{\overline{a+b}^{\,3}}$, e $\sqrt[6]{\overline{a+y}^{\,7}}$, ne' quali l'indice 2 divide perfettamente l' indice 6, allora per lo quoto nato da tal divisione, cioè per 3, si moltiplichi l' indice 2, e la quantità $\overline{a+b}^{\,3}$ sotto il radicale dell' indice 2 si alzi alla potestà, che abbia per esponente il quoto 3, e sarà fatta la riduzione, cioè sarà $\sqrt[6]{\overline{a+b}^{\,9}}$: la ragione è, perchè quei radicali equivagliono ad $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$, $\overline{a+y}^{\frac{7}{6}}$, le quali, con la regola già data nei fratti di tal condizione, si riducono ad $\overline{a+b}^{\frac{9}{6}}$, $\overline{a+y}^{\frac{7}{6}}$.

XI. Per sommare le quantità radicali basta scriverle una dietro l' altra coi proprj segni, e per sottrarle si mutino i segni, che precedono il segno radicale, a quelle che si vogliono sottrarre, ricordandosi sempre di ridurre ad un termine i termini simili. eccone gli esempj.

Per la somma

$$\begin{array}{rl} & \sqrt[2]{ab}+c \\ -2\sqrt[2]{ab} & -\sqrt[3]{abc} \\ \hline c-\sqrt[2]{ab} & -\sqrt[3]{abc} \end{array}, \qquad \begin{array}{rl} 3\sqrt[2]{ab} & -\sqrt[3]{abc} \\ -4\sqrt[2]{ab} & +2\sqrt[3]{abc} \\ \hline -\sqrt[2]{ab} & +\sqrt[3]{abc}. \end{array}$$

$$\overline{a+b}^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{2}{3}}$$
$$\overline{a+b}^{\frac{1}{4}} - c^{\frac{2}{3}}$$
$$\overline{}$$
$$2 \cdot \overline{a+b}^{\frac{1}{4}}$$

Per la sottrazione

$$\sqrt[2]{xy} + c \qquad\qquad 4\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb}$$
$$\sqrt[3]{cx} + y \qquad\qquad 2\sqrt{ac} + 3\sqrt[3]{acb}$$
$$\overline{}\,,\ \overline{}$$
$$\sqrt[2]{xy} + c - \sqrt[3]{cx} - y \qquad 2\sqrt{ac} - 6\sqrt[3]{acb}$$

$$-\frac{1}{3}\,\overline{(x+y}^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}$$
$$-\,\overline{(x+y}^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\,z^{\frac{3}{2}}$$
$$\overline{}$$
$$\frac{2}{3}\,\overline{(x+y}^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}\,z^{\frac{3}{2}}$$

XII. Per moltiplicare le potestà d'esponente fratto si farà la congiunzione delle lettere secondo il solito: così $a^{\frac{1}{2}}$ in $b^{\frac{1}{2}}$ farà $a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$ in $a^{\frac{2}{3}}$ farà $a^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{2}{3}}$, ed $x^{\frac{1}{n}}$ in $y^{\frac{1}{n}}$ farà $x^{\frac{1}{n}}\,y^{\frac{1}{n}}$; ma comecchè dalla dottrina delle proporzioni si sà, che essendo 1 ad a, come b ad $a\,b$, è ancor 1 ad a^n, come b^n ad $\overline{ab}^n$; dunque $a^n.\,b^n$ prodotto dei medii, sarà uguale per la stessa dottrina ad $\overline{ab}^n$ prodotto degli estremi, e perciò

$a^{\frac{1}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ equivalerà ad $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}$ equivalerà ad $a^{\frac{3}{3}}$, uguale ad a, ed $x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$ equivalerà a $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$; ma $x^{\frac{1}{n}}$ è lo stesso che $\sqrt[n]{x}$, ed $y^{\frac{1}{n}}$ che $\sqrt[n]{y}$, ed $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$ che $\sqrt[n]{xy}$; quindi si raccoglie, che per moltiplicare i radicali del medesimo indice, basti moltiplicare le quantità esistenti sotto il segno radicale. Se i radicali avranno coefficienti, o quantità, che li sieno congiunte fuori del segno radicale, si moltiplicheranno ancora queste fra di loro: così il prodotto di $a\sqrt[n]{x}$ in $\sqrt[n]{y}$, sarà $a\sqrt[n]{xy}$, ed $a\sqrt[n]{y}$ in $b\sqrt[n]{x}$, sarà $ab\sqrt[n]{yx}$, $5\sqrt[2]{a}$ in $4\sqrt[2]{b}$, sarà $20\sqrt[2]{ab}$, come è chiaro dalla moltiplicazione delle potestà di esponente fratto. Si avverta però, che il prodotto di $\pm\sqrt{b}$ in $\pm\sqrt{b}$, è $\pm\sqrt{bb}$, cioè $\pm b$, perchè i segni dei radicali predetti sono doppi, come tante volte si è detto; il che richiede particolar attenzione quando si tratta di radicali. Se i radicali non anno il medesimo indice, si riducano a tali per le cose dette.

XIII. Essendo il prodotto di $\sqrt[n]{x}$ in $\sqrt[n]{x}$ uguale a $\sqrt[n]{x^2}$, e $\sqrt[n]{x^2}$ in $\sqrt[n]{x}$ essendo $\sqrt[n]{x^3}$ &c., si raccoglie, che per alzare $\sqrt[n]{x}$ a una data potestà m, bisognerà alzare alla potestà m la quantità x esistente sotto il segno radicale, con fare $\sqrt[n]{x^m}$, la quale espressione equivalendo ad $x^{\frac{m}{n}}$, però ad alzare $x^{\frac{1}{n}}$ alla potestà m, bisognerà moltiplicare l' esponente $\frac{1}{n}$ per m.

XIV. Se i radicali avessero fuori del segno quanti-tità, ancora queſte ſi alzeranno alla poteſtà m, come ſi raccoglie dalla moltiplicazione di tali radicali; onde $a\sqrt[n]{x}$ alzata alla poteſtà m, ſarà $a^m\sqrt[n]{x^m}$, e per conſeguenza $a\,x^{\frac{1}{n}}$ alzata alla poteſtà m, ſarà $a^m\;x^{\frac{m}{n}}$,

il che ſi indica ancora in queſta maniera $\overline{a\,x^{\frac{1}{n}}}^{\,m}$.

XV. Per alzare una quantità radicale a una poteſtà, che abbia per eſponente l'indice del radicale, baſterà togliere il vincolo radicale: così $\sqrt[n]{x}$ alzato alla poteſtà n, ſarà x, come è chiaro; biſogna però aver l'occhio ai ſegni poſti avanti il ſegno radicale quando ſi toglie tal ſegno: per sfuggire ogni errore ſi avverta, che il radicale, come qualunque altra quantità, è moltiplicata per l'unità con quel ſegno, che è poſto avanti al radicale, così $\sqrt{a+b}$ è $1\times\sqrt{a+b}$, e $-\sqrt{a+b}$ è $-1\times\sqrt{a+b}$; onde moltiplicare $\sqrt{a+b}$ in $-\sqrt{a+b}$, è lo ſteſſo che moltiplicare $1\times\sqrt{a+b}$ in $-1\times\sqrt{a+b}$, il cui prodotto è $-1\times\overline{a+b}$, cioè $-a-b$.

XVI. Dovendoſi colla diviſione disfare ciò, che ſi è compoſto colla moltiplicazione, perciò a dividere le quantità radicali del medeſimo indice, ſi dividono le quantità eſiſtenti ſotto il ſegno, e le quantità eſiſtenti fuori del ſegno fra di loro: così $a\,b\sqrt[n]{x\,y}$ diviſo per $-a\sqrt[n]{x}$, dà il quoto $-b\sqrt[n]{y}$, e $a^2\sqrt[n]{c\,d}$ diviſo per $a^2\sqrt[n]{f\,g}$, da per quoto $\sqrt[n]{\frac{c\,d}{f\,g}}$, e diviſo

$x\sqrt[n]{a}$ per $y\sqrt[n]{b}$, si à per quoto $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ed $x\sqrt[n]{a}$ diviso per $y\sqrt[n]{a}$, ne darà il quoto $\frac{x}{y}$: e per conseguenza ancora $ab . \overline{x\,y}^{\frac{x}{n}}$ diviso per $-a . x^{\frac{1}{n}}$, sarà $-b . y^{\frac{1}{n}}$. Se le quantità radicali non avessero il medesimo indice, si riducano a tali, ovvero si noti la divisione a guisa di frazione: così $a\sqrt[n]{b}$ diviso per $x\sqrt[m]{b}$, sarà $\frac{a\sqrt[n]{b}}{x\sqrt[m]{b}}$.

XVII. Comecchè $\sqrt[n]{x^n b + x^n c}$ equivale a $\sqrt[n]{b+c}$ moltiplicata in $\sqrt[n]{x^n}$, cioè moltiplicata in x, ovvero ad $x\sqrt[n]{b+c}$; si raccoglie, che se tutta la quantità esistente sotto il segno sarà moltiplicata per una potestà, che abbia per esponente l' indice della radice, si possa dividere tutto il prodotto esistente sotto il segno radicale per detta potestà, lasciare il quoto sotto il segno radicale, e porre fuori del segno la radice di detta potestà, senza che l'intera quantità radicale muti valore, come si è visto nell' addotto esempio; e viceversa, per porre una quantità esistente fuori del segno radicale sotto il segno radicale, bisogna alzare la quantità fuori del segno alla potestà dell' indice del segno, e per questa potestà moltiplicare la quantità sotto il segno: così $x\sqrt[n]{a+c}$ equivale a $\sqrt[n]{ax^n + cx^n}$.

XVIII. Per estrarre la radice dai radicali vi bisogna il contrario di ciò, che si è fatto per alzare i radicali alle potestà, cioè bisogna estrarre la radice dalla la quantità esistente sotto il segno radicale; onde la radice quadrata di $\sqrt[n]{a^4}$ sarà $\sqrt[n]{a^2}$, e la radice m di $\sqrt[n]{x^m}$ sarà $\sqrt[n]{x}$, e la radice terza di $\sqrt[2]{a}$ sarà $\sqrt[2]{a^{\frac{1}{3}}}$: in vece però di $\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}$ si scrive ancora $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$, che significa appunto radice terza di radice seconda di a, e questi si chiamano *radicali di radicali*, i quali si trattano come gli altri radicali.

XIX. Se le quantità radicali, dalle quali deesi estrarre la radice, fossero espresse cogli esponenti fratti, si dovrà dividere l'esponente per l'indice della radice: così la radice seconda di $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$ sarà $\overline{a+b}^{\frac{1}{6}}$, e radice m di $\overline{x-y}^{\frac{1}{n}}$ sarà $\overline{x-y}^{\frac{1}{nm}}$. Dalle cose fin qui dette si vede, che per moltiplicare, dividere, alzare a potestà, ed estrarre le radici da potestà di esponente fratto, si debba operare nella medesima maniera, che sopra le potestà di esponente intero; il che ha aggevolato moltissimo il calcolo dei radicali. Di questa invenzione siamo obbligati a Newton, e a Leibnitz.

XX. La moltiplicazione delle quantità composte radicali si fa col moltiplicare ciascun termine di un fattore per l'altro fattore, come nelle quantità intere: eccone gli esempj.

$$\begin{array}{ll}
\text{Fat-} & 3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 4d \\
\text{tori} & -3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} \\
\hline
 & -9ab - 6a\sqrt{bc} + 12d\sqrt{ab} \\
 & \qquad\quad + 6a\sqrt{bc} + 4ac - 8d\sqrt{ac} \\
\hline
\text{Prodotto} & -9ab + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}
\end{array}$$

Fat- $3\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}} + 2\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}} - 4d$

tori $-3\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}} + 2\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}}$

$$-9\times ab - 6a\times\overline{cb}^{\frac{1}{2}} + 12d\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$$

$$+6a\times\overline{cb}^{\frac{1}{2}} + 4ac - 8d\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}}$$

Prodotto $-9ab + 4ac + 12d\times\overline{ab}^{\frac{1}{2}} - 8d\times\overline{ac}^{\frac{1}{2}}$

XXI. La divisione dei radicali composti si fa con le stesse regole, che la divisione delle altre quantità composte.

Dividendo

$$-9ab + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$$

$$+9ab - 6a\sqrt{bc}$$

Res. I. $0 - 6a\sqrt{bc} + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$

$+6a\sqrt{bc} - 4ac$

Res. II. $0 \quad 0 + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$

$-12d\sqrt{ab} + 8d\sqrt{ac}$

$0 \quad 0$

Divisore	Quoto
$-3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$	$+3\sqrt{ab}$
	$+2\sqrt{ac}$
	$-4d$

XXII. Se la quantità esistente sotto il segno radicale sarà negativa, e l'esponente della radice sarà numero pari, abbiamo detto, che il valore di tale radice

dice sia impossibile, ed immaginario, come appunto sarebbe $\sqrt{-a^2}$; nientedimeno tali immaginarii si sommano, si sottraggono, si moltiplicano, e si dividono dagli Analisti nella stessa maniera, che gli altri radicali: così la somma di $\sqrt{-a^2}$, e $-3\sqrt{-a^2}$ sarà $-2\sqrt{-a^2}$, e $-\sqrt{-x^2}+\sqrt{-y^2}$ sarà la somma di $-\sqrt{-x^2}$ con $\sqrt{-y^2}$, e la somma di $b+\sqrt{-a^2}$ con $b-\sqrt{-a^2}$ è $2b$: così sottratto $\sqrt{-a^2}$ da $-3\sqrt{-a^2}$, il residuo è $-4\sqrt{-a^2}$, e sottratto $b+\sqrt{-x^2}$ da $c+\sqrt{-x^2}$, il residuo è $c-b$.

XXIII. Per moltiplicare $\sqrt{-b}$ in $\sqrt{-c}$ si dee operare come negli altri radicali; si avverta però che facilmente si può sbagliare nei segni da premettersi al segno radicale del prodotto; per togliere dunque ogni occasione di errare, i predetti fattori si sciolgano nella seguente maniera $\sqrt{-1}\times\sqrt{b}$ in $\sqrt{-1}\times\sqrt{c}$, e poi fatta la moltiplicazione secondo il solito, troveremo per prodotto $-1\times\sqrt{bc}$, cioè $-\sqrt{bc}$. Se non si avesse avuta l' indicata avvertenza, si sarebbe ottenuto il prodotto $\sqrt{bc}$, il quale si potrebbe agevolmente riguardare come positivo, mentre in realtà è negativo. La ragione di tutto questo è, che $\sqrt{-a}$, ver. gr., in $\sqrt{-a}$ dee dare $-a$, e non $+a$, perchè siccome $\sqrt{-a}$ nasce ponendo il segno radicale alla quantità $-a$, così $-a$ si restituirà levando il predetto segno radicale: ciò quando le quantità sotto il segno radicale sono identiche si vede manifestamente; onde non essendo identiche tali quantità, come nella molti-

 pli-

plicazione di $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-b}$, si ricorre all'esposto artificio. E' facile vedere non esservi mistero alcuno che due immaginarii moltiplicati insieme diano un reale, perchè nascendo l' immaginario coll' estrarre la radice seconda da -1, per cagion d' esempio, è necessario, che alzando a potestà seconda questo radicale immaginario, si restituisca la quantità reale -1, il che ben inteso svanisce ogni paradosso. Per dividere $\sqrt{-bc}$ per $\sqrt{-c}$, pure si faccia $\sqrt{-1} \times \sqrt{bc}$, diviso per $\sqrt{-1} \times \sqrt{c}$, e'l quoto sarà $1 \times \sqrt{b}$, cioè $\sqrt{b}$, perchè $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ è uguale all' unità; nè dee far maraviglia, che un'immaginario diviso per un immaginario dia un reale, perchè il rapporto di continenza fra due immaginarii può essere reale (7). E ciò basti intorno agli immaginarii, e i radicali: alcune altre operazioni particolari, che da alcuni si sogliono quì aggiungere, si troveranno con più profitto disperse in questo Compendio, dove il bisogno il richiegga.

XXIV. Prima di dar fine a questo nostro compendioso Algoritmo, stimiamo opportuno, anzi necessario d'insegnare la maniera con cui si estraggono soltanto le radici quadrate, e cube dalle quantità composte, riserbandoci in altro luogo di dare un metodo generale per l' estrazione di qualunque radice. Il metodo di estrarre la radice quadrata dalle quantità composte si deduce dal metodo di alzarle a quadrato. Si alzi dunque a quadrato il binomio $x + a$, ovvero $-x - a$, e sarà il prodotto, cioè il quadrato, in ambedue i casi $x^2 + 2ax + a^2$; dal che si ricava, che il quadrato di un binomio è uguale ai quadrati dei membri delle radici, più al doppio prodotto dei predetti membri. Potendosi inoltre qualunque quantità composta $b - c + d$ &c. considerare come binomio, il cui primo membro sia $b - c$

&c.

&c. fino alla penultima, e l'altro membro ſia l'ultima; quindi ſi ricava la regola univerſale per alzare a quadrato qualunque polimonio $b - c + d$ &c., cioè, prima ſi alzerà a quadrato il binomio $b - c$, che ſarà $b^2 - 2bc + c^2$, a cui ſi aggiungerà il quadrato del d, cioè d^2, ed a queſti ſi aggiungerà il prodotto $\overline{b - c}$ in $2d$, ed in tal guiſa continuando, $b^2 - 2bc + c^2 + 2db - 2dc + d^2$ &c. ſarà il quadrato del dato polinomio (8). Ciò premeſſo, ſia da eſtrarſi la radice quadrata dalla quantità $a^2 + 2ax + x^2$: ſi conſideri queſta come quadrato di qualche binomio, e ſi eſtragga in primo luogo la radice da a^2, la quale è $\pm a$, che ſi deve tenere come primo termine del binomio: ſi ſottragga il quadrato a^2 dalla propoſta quantità, ed il reſiduo $2ax + x^2$ dee uguagliare il quadrato dell' altro termine della radice più il prodotto di queſto in $2a$, come ſi è detto quì ſopra: per trovare tal termine ſi divida per $\pm 2a$ quel termine del reſiduo, che ſi può; nel preſente caſo il quoziente è $\pm x$, il quadrato di cui x^2, col prodotto di $\pm 2a \times \pm x$, ſottratto dal reſiduo $2ax + x^2$, niente laſciando, è ſegno, che il binomio $a + x$, ovvero $-a - x$ è la radice quadrata della quantità propoſta.

XXV. Sia da cavarſi la radice quadrata dalla quantità $b^2 - 2bc + c^2 + 2db - 2dc + d^2$: ſi ordini queſta quantità ſecondo una lettera, ver.gr. c, cioè ſi faccia $c^2 \begin{array}{l} -2bc \\ -2dc \end{array} + 2db + b^2 + d^2$: ſi cavi la radice quadrata dal primo termine c^2, la quale ſarà $\pm c$, e queſto ſarà un termine della radice quadrata totale: per $\pm 2c$ ſi divida il ſecondo termine della quantità ordinata, e ſi avrà per quoto $\mp b \mp d$, i quali ſaranno gli altri termini della radice ricercata; ed in fatti il quadrato di $b + d - c$, ovvero di $-b - d + c$ è la quantità propoſta.

XXVI.

XXVI. Se poi intorno alla quantità data, da cui si vuol estrarre la radice quadrata, non riuscisse bene tale operazione, come sarebbe se si volesse la radice quadrata di $x^2 + a^2$, ovvero la radice quadrata di $x^2 + 2ax + b^2$, delle quali mentre investighiamo le radici, nascono continuamente nuovi termini senza mai venire al residuo uguale a zero; allora segno è, che da tali quantità non si può estrarre attualmente la radice quadrata; onde per denotare la radice quadrata delle quantità $x^2 + a^2$, e $x^2 + 2ax + b^2$ bisognerà servirsi del segno radicale, e scrivere $\pm\sqrt{x^2 + a^2}$, e $\pm\sqrt{x^2 + 2ax + b^2}$. Si avverta, che il segno radicale quadrato ha sempre due valori, cioè positivo, e negativo.

XXVII. Similmente prima di estrarre la radice cuba dalle quantità composte bisogna notare, che il cubo del binomio $x + a$ è $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$, cioè, è uguale ai cubi $x^3 + a^3$ dei termini della radice, più al triplo del quadrato x^2 moltiplicato in a, più al triplo del quadrato a^2 moltiplicato in x. Qualsivoglia polinomio $x + a + b$ &c. potendosi considerare come un binomio, si ricava facilmente la regola generale di alzare qualunque polinomio a cubo, come appunto si è ricavata di sopra la regola generale di alzare qualunque polinomio a quadrato; onde il cubo di $x + 2a + b$ &c. sarà $x^3 + 6x^2a + 12a^2x + 8a^3 + \overline{x + 2a}^2 \times 3b + 3b^2 \times \overline{x + 2a} + b^3$. (9)

XXVIII. Abbiasi dunque da estrarre la radice cuba dalla quantità $x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3$, la quale sia ordinata per una lettera, ver. gr. x: si cavi la radice cuba dal primo termine x^3, la quale è x, e questa sarà un membro della radice cuba totale: per trovare gli altri membri si divida per lo triplo del quadrato xx, cioè

per

per $3x^2$ il secondo termine della quantità ordinata per x, ed il quoto a sarà l'altro termine della radice cuba totale; ed in fatti il cubo di $x + a$ è la quantità proposta.

XXIX. Sia da estrarsi la radice cuba dalla quantità

$$\begin{array}{l} x^3 + 6ax^2 + 12a^2x + 8a^3 + 12a^2b + 6b^2a + b^3, \\ \quad\ + 3bx^2 + 12abx \\ \qquad\qquad\quad + 3b^2x \end{array}$$

la quale sia ordinata per la lettera x: si cavi la radice cuba dal primo termine x^3, la quale è x: questa sarà il primo membro della radice cuba totale; per trovare gli altri termini della radice cuba si prenda il triplo del quadrato di x, cioè $3x^2$, e per questo si divida il secondo termine della quantità in cui è x^2, ed il quoto $2a + b$, unito alla radice ritrovata x, sarà la radice cuba totale di tutta la proposta quantità; ed in fatti $2a + b + x$ alzato a cubo restituisce la quantità proposta.

XXX. Quando intorno alla quantità proposta non si potesse fare tale operazione, come sarebbe se si volesse la radice cuba di $x^3 + a^3$, ovvero la radice cuba di $x^3 + 3x^2a + 3a^2x + b^3$, segno è, che da dette quantità non si può estrarre la radice cuba; onde per denotare la radice cuba di $x^3 + a^3$ si farà $\sqrt[3]{x^3 + a^3}$, e per denotare la radice cuba di $x^3 + 3x^2a + 3a^2x + b^3$ si farà $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2a + 3a^2x + b^3}$.

XXXI. Quantunque dalla quantità $x^2 + a^2$ non possa estrarsi la radice quadrata perfetta, però si può avere una radice quadrata tale, la quale differisca dal vero valore per una differenza minore di qualunque data; il che si otterrà, se continuando l'operazione dell'estrazione della radice quadrata, venga questa radice quadrata espressa da una serie di infiniti termini ni, la quale ſia convergente; perchè in tal caſo, quantunque non ſi poſſa avere la ſomma di tutta la ſerie infinita, però ſi può ſommare un numero di termini tale, che in riguardo alla ſomma di queſti termini, ſia diſprezzabile la ſomma degli altri termini fino all' infinito.

XXXII. Acciocchè queſto più bene ſi comprenda, ſia $x^2 + a^2$, da cui debba eſtrarſi la radice ſeconda. Fingo che queſta ſia un binomio, ed eſtraggo dal primo termine x^2 la radice $\pm x$, che conſidero come primo termine del binomio ricercato: ſottraggo il ſuo quadrato da $x^2 + a^2$, e dipoi per $2x$ divido il reſiduo, ed il quoto $\frac{a^2}{2x}$ ſarà l' altro termine del binomio, e della ſerie: ſottratto dal reſiduo a^2 il prodotto di queſto quoto in $2x$, e il ſuo quadrato, ſarà il reſiduo $\frac{-a^4}{4x^2}$, qual reſiduo fa, che il binomio $x \frac{+a^2}{2x}$ non ſia la perfetta radice della noſtra quantità. Fingiamo ora, che $\frac{a^2}{2x} + x$, il quadrato di cui è ſtato già ſottratto dalla quantità propoſta, ſia il primo termine della radice, e continuando l' operazione ſi cerchi il ſecondo. Divido adunque il reſiduo $\frac{-a^4}{4x^2}$ per $2x$, ed il quoto $\frac{-a^4}{8x^3}$ ſarà il terzo termine della ſerie: ſottraggo il ſuo prodotto nel doppio del primo termine del binomio, cioè in $2x + \frac{a^2}{x}$, ed aſſieme il ſuo quadrato, ed ottengo il reſiduo terzo $\frac{a^6}{8x^4} - \frac{a^8}{64x^6}$. In grazia di queſto reſiduo conſidero ora come primo termine del binonomio i tre termini della ſerie $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3}$, e di nuovo divido il primo termine del reſiduo per $2x$, ed il quoto $\frac{a^6}{16x^5}$ quarto termine della ſerie, moltiplicato nel doppio del primo termine del finto binomio, o ſia dei tre antecedenti termini della ſerie, col ſuo quadrato, ſe leviſi dal reſiduo ſi otterrà un nuovo reſiduo, il primo termine di cui diviſo per $2x$, darà il quinto termine della ſerie; e così operando ſenza limite ſi determineranno ſempre nuovi termini della ſerie $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c. Acciocchè queſta ſerie ſia convergente, il termine x^2 dee eſſere maggiore di a^2, e quanto maggiore ſarà l' eccesso, tanto la ſerie ſarà convergente. Sapendo ridurre in ſerie la radice quadrata d' un binomio, ſi sa ancora ridurre in ſerie la radice quadrata di qualunque polinomio, potendoſi queſto, ſiccome altre volte abbiamo detto, conſiderare come un binomio.

XXXIII. Nella ſteſſa guiſa, benchè non ſi poſſa eſtrarre perfettamente la radice cubica da $x^3 + a^3$, ſi può ciò non oſtante ottenerla proſſimamente, mediante una ſerie convergente, che naſce continuando l' operazione dell' eſtrazione della radice terza. Si eſtragga la radice cubica del primo termine, cioè x, e ſottratto il ſuo cubo, ſi divida il reſiduo a^3 per $3x^2$, cioè per lo triplo del quadrato del primo termine della ſerie; il quoto $\frac{a^3}{3x^2}$ ſarà il ſecondo termine: il prodotto ſuo in $3x^2$, aſſieme col triplo ſuo quadrato moltiplicato in x, e col ſuo cubo ſi ſottragga dal reſiduo a^3; fatta la ſottrazione ſi ottiene il ſecondo reſiduo $\frac{-a^6}{3x^3}$ $\frac{-a^9}{27x^6}$. Ora ſi dee fingere, che la quantità $x + \frac{a^3}{3x^2}$ ſia il primo termine del binomio della radice, il cubo di cui è ſtato già ſottratto dalla quantità $x^3 + a^3$; ſi tiri adunque avanti l' operazione, e per $3x^2$ ſi divida il primo termine del reſiduo, ed il quoto $\frac{-a^6}{9x^5}$ ſarà il terzo termine della ſerie: ſi moltiplichi queſto per lo triplo del quadrato del primo termine del finto binomio, cioè per $3 \cdot \left(x + \frac{a^3}{3x^2} \right)^2$, di poi ſi moltiplichi il triplo del ſuo quadrato per $x + \frac{a^3}{3x^2}$, ſi prenda il ſuo cubo, ed il tutto ſottratto dal ſecondo reſiduo, ſi otterrà il reſiduo terzo, il primo termine di cui, diviſo ſimilmente per $3x^2$, darà il quarto termine della ſerie: e così continuando l' operazione indefinitamente, naſcerà la ſerie infinita $x + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{-a^6}{9x^5}$ &c., la quale acciocchè ſia convergente, dee eſſere x^3 maggiore di a^3; e comecchè i polinomj ſi riducono a binomj, collo ſteſſo metodo ſi otterranno le radici cube di quelli (10). A ſuo luogo ſi darà un metodo generale per eſtrarre qualunque radice da qualunque quantità, con cui ſi otterranno ancora con maggior facilità le radici quadrate, e cube.

CA-

CAPO IV.

Riſoluzione dell' Equazioni del primo grado .

I. EQuazione non è, che il rapporto d'uguaglianza fra due quantità diverſamente denominate, che s'indica col ſegno $=$ detto di ugualità, che tra quelle poneſi, come $ax + bx = cc$, che denota la quantità $ax + bx$ uguale alla quantità cc; la quantità avanti il ſegno, come $ax + bx$, chiamaſi *primo membro dell' equazione*, quella dopo, come cc, chiamaſi *ſecondo membro*, ovvero *omogeneo di comparazione*. Le lettere prime dell' alfabeto ſogliono ordinariamente denotare le quantità cognite, le poſteriori le incognite: così $ax + bx = cc$ ſignifica, che il quadrato cognito cc è uguale al prodotto della quantità cognita $a + b$ in una incognita, che ſi chiama x.

II. Se la quantità $ax + bx$ non foſſe uguale a cc, ma maggiore, ſi indicherebbe così, $ax + bx > cc$, ſe minore, così, $ax + bx < cc$. La ſeguente eſpreſſione $a : b :: x : y$ ſignifica, che la ragione di a a b, è uguale alla ragione di x ad y. Le ragioni poi di a a b, e di x ad y ſi indicano con la interpoſizione di due punti, come ſi indica la diviſione, perchè, come ſi è viſto nell' Algoritmo dei fratti, la ragione di a a b, e di x ad y non differiſce da a diviſo per b, e da x diviſo per y. Se la ragione di a a b foſſe maggiore della ragione di x ad y, ſi ſcriverebbe $a : b \overset{..}{\underset{..}{>}} x : y$, e ſe minore, $a : b \overset{..}{\underset{..}{<}} x : y$. Se tre quantità a, x, y ſono in proporzione continua, ſi eſprimono così, $a :: x :: y$, e da alcuni $\overset{..}{\underset{..}{-}}$ $a : x : y$, che ſignifica, che a ſtà ad x, come x ad y. Nella ſteſſa maniera, che ſi eſprime la proporzionalità Geometrica, ſi eſprime ancora l' Aritmetica, e l' Armonica, ma si avvisa che di queste trattasi.

III. Dalla dottrina delle proporzioni Geometrica, Aritmetica, ed Armonica si ricava, che quando si abbiano tali proporzionalità, si abbiano ancora equazioni; perchè nella proporzionalità geometrica il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei termini intermedii, o al quadrato del termine intermedio se la proporzionalità è continua: così, se $a:b::x:y$, sarà $ay = bx$, e se $a::x::y$, sarà $ay = x^2$. Nella proporzionalità Aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma dei termini intermedii, o al doppio del termine intermedio se la proporzionalità è continua: così, se saranno aritmeticamente $a:b::x:y$, sarà $a+y = b+x$, e se sarà $a::x::y$, sarà $a+y = 2x$. La proporzione armonica riducesi alla geometrica; imperciocchè allora tre quantità diconsi in proporzione armonica, quando la prima all' ultima, sia come la differenza tra la prima, e la seconda, alla differenza tra la seconda, e la terza: così, se sia armonicamente $a::x::y$, sarà geometricamente $a:y::a-x:x-y$, o sia $a:y::x-a:y-x$, e perciò si avrà $ay - ax = yx - ya$.

IV. L' equazioni, che hanno una sola incognita si chiamano equazioni *determinate*: tale sarebbe $ax + bx = cc$; l' equazioni, che contengono più incognite si chiamano *indeterminate*, come $2xy + yc = 4bc + a^2$.

V. L' equazione determinata si dice del *primo grado*, *semplice*, e *lineare* quando l' incognita non passa la prima dimensione, come sarebbe $x + c = a$, $a^2x + b^3 = c^3$; si dice del *secondo grado*, *quadrata*, e *piana* quando l' incognita ascenda a due dimensioni, come $xx + bx = cc$; si dice del *terzo grado*, *cuba*, e *solida* quando l' incognita ascende a tre dimensioni,

co-

come $x^3 + x^2 p + x p^2 = c^3$; e generalmente ſi chiama del grado n, ſe il maſſimo eſponente dell' incognita ſia n.

VI. Il fine primario per cui all' equazioni ſi fa ricorſo è per ritrovare il valore della incognita ; poichè operando intorno ai membri della equazione, or queſti trasformando, or traſportando, ed in altra guiſa alterando, sì fattamente però, che l' egualità tra quelli non turbiſi, ſe potraſſi fare che da una parte del ſegno di uguaglianza vi reſti la ſola incognita, e dall' altra un membro, che ſole cognite contenga ; avremo ritrovato il valore della incognita, il che ſi dice *aver ſciolto l' equazione*; il valore poi della incognita così ritrovato ſi chiama *radice dell' equazione*, che ſarà ſecondo le circoſtanze or poſitivo, or negativo, ed or immaginario. Non è però sì facil coſa ſapere che operazioni a tal fine debbanſi fare, e la difficoltà, come vedremo, creſce a diſmiſura quando l' equazione a grado maggiore ſi innalza ; e ciò che è peggio, pochi ſono i caſi, in cui la ſi ſappia ſuperare.

VII. Qualunque operazione poi l' equazione non turba ſe ciò che ſi fa al primo membro, all' altro ancor ſi faccia : così avverrà ſe ad ambo i membri dell' equazione $a x + c x = b b$ ſi aggiunga, o ſottragga la quantità ff, cioè, ſe ſi faccia $ff + a x + c x = b b + ff$, ovvero $a x + c x - ff = b b - ff$: ſe ambo i membri $a x + c x$, e $b b$ ſi moltiplicheranno, o divideranno per la medeſima quantità f, cioè, ſe ſi farà $f a x + f c x = f b^2$, ovvero $\frac{a x + c x}{f} = \frac{b b}{f}$: ſe ambo i membri ancora ſi alzino alla medeſima poteſtà n, o ſe da queſti ſi eſtragga qualunque radice n, cioè, ſe ſi faccia $\overline{a x + c x}^{\,n} = b^{2n}$, ovvero $\overline{a x + c x}^{\,\frac{1}{n}} = b^{\frac{2}{n}}$: l' equazione non

non si altera pure nel caso, che si sostituisca in vece d' una quantità un' altra che le sia uguale; così, se sia $ax + cx = bb$, e $cx = \frac{n^2 x}{m}$, sostituito nella prima equazione in vece di cx il suo uguale $\frac{n^2 x}{m}$, resterà $ax + \frac{n^2 x}{m} = bb$, e se sia $x = a + b$, e $b = c + d$, sostituito nella prima equazione in vece di b la quantità $c + d$, sarà $x = a + c + d$, e questa è una operazione di cui gli Analisti fanno uso continuo.

VIII. Sì fatte operazioni generalmente parlando ci conducono a sciogliere l' equazioni. La difficoltà massima consiste nello sciegliere opportunamente l' operazione necessaria, cioè la quantità da aggiungersi, o da sottrarsi, la sostituzione da farsi &c. per l' intento. Quel che gli Analisti intorno a ciò insegnano, anderò con gradazione divisando.

IX. Cominciamo dalle equazioni del primo grado, vale a dire da quelle, in cui l' incognita non oltrepassa la prima dimensione. Per ritrovare il valore dell' incognita nelle equazioni di primo grado bisogna fare in maniera, che tutti i termini, che contengono l' incognita restino da una parte del segno d' uguaglianza, e gli altri dall' altra; il che facilmente si ottiene trasportando quei termini, che bisogna, dall' altra parte del segno di ugualità, mutandoli i segni rispettivi per questa non turbare, come non è malagevole a comprendere. Fatto ciò, se l' incognita sarà moltiplicata per qualche quantità, si divida per questa l' equazione, vale a dire ambo i suoi membri; se poi l' incognita è divisa per qualche quantità, per questa l' equazione si moltiplichi, che così resterà indubitatamente l' incognita sola da una parte del segno d' ugualità, e dall' altra

altra resteranno tutti i termini di quantità note; onde resterà nota ancora l' incognita: veniamo agli esempj.

X. Sia da sciogliersi l' equazione $x - b + c = a$. Per avere il valore della incognita bisogna togliere dal primo membro la quantità $- b + c$; ciò che facilmente si ottiene, se si sottrarrà dallo stesso membro la quantità $- b + c$; ma questa quantità non si può sottrarre dal primo membro, se non si sottragga ancora dal secondo, altrimenti sarebbe tolta l' eguaglianza; dunque per fare restare l' incognita x da una parte della nostra equazione senza alterare l' egualità, converrà sottrarre dall' uno, e dall' altro membro la quantità $- b + c$, cioè fare $x - b + c + b - c = a + b - c$, cioè, $x = a + b - c$, vale a dire, converrà trasportare la quantità $- b + c$ nell' altro membro sotto segno contrario.

XI. Sia l' equazione semplice $a x + b c = m x + n a$: si trasporti la quantità $m x$ nel primo membro, e la $b c$ nel secondo sotto segno contrario, cioè, si faccia $a x - m x$, o sia $\overline{a - m} \times x = n a - b c$, e così saranno tutti i termini, che contengono la x da una parte, e gli altri dall' altra: si dividano inoltre ambo i membri dell'equazione $\overline{a - m} \times x = n a - b c$ per la quantità $a - m$, che moltiplica l' incognita x, e sarà $\frac{\overline{a - m} . x}{a - m} = \frac{n a - b c}{a - m}$, cioè, sarà $x = \frac{n a - b c}{a - m}$. Sia da sciogliersi l' equazione semplice $\frac{x}{b} - \frac{d}{m} = \frac{a}{c}$: si faccia $\frac{x}{b} = \frac{a}{c} + \frac{d}{m}$, trasportando il termine $\frac{d}{m}$, poi si moltiplichino ambo i membri di questa equazione per la quantità b, che divide l' incognita x, e sarà $\frac{x b}{b}$, cioè x

=

$= \frac{ab}{c} + \frac{bd}{m}$.

XII. Sia da sciogliersi l' equazione semplice $\frac{ay}{c} - b = \frac{dy}{f} + \frac{mn}{g}$, in cui y è l' incognita. Si trasportino i termini secondo il solito, facendo $\frac{ay}{c} - \frac{dy}{f}$, o sia $\left(\frac{a}{c} - \frac{d}{f}\right) \times y = \frac{mn}{g} + b$: poi si dividano i membri di questa equazione per la quantità $\frac{a}{c} - \frac{d}{f}$, che moltiplica l' incognita y, e sarà $y = \left(\frac{mn}{g} + b\right) : \left(\frac{a}{c} - \frac{d}{f}\right)$

XIII. Sia da sciogliersi l' equazione $\frac{a}{x} - \frac{m}{n} = \frac{c}{b}$: si moltiplichi tutta l' equazione per x, e sarà $a - \frac{mx}{n} = \frac{cx}{b}$: si trasporti $- \frac{mx}{n}$ dall' altra parte, e sarà $a = \frac{cx}{b} + \frac{mx}{n}$, cioè $a = \overline{\frac{c}{b} + \frac{m}{n}} \cdot x$: divisa finalmente l' equazione per $\frac{c}{b} + \frac{m}{n}$, sarà $x = a : \overline{\frac{c}{b} + \frac{m}{n}}$, cioè $x = \frac{bna}{cn + bm}$ (11).

XIV. Questa è la maniera con cui si opera per ritrovare il valore dell' incognita in una equazione semplice, in cui non vi è che una incognita, chiamata per ciò *solitaria*; ma se l' equazione contenesse più d' una incognita, allora purchè si abbiano tante equazioni, quante sono l' incognite, col seguente metodo si potranno ridurre ad una equazione, che contenga una sola incognita.

XV.

XV. Il metodo consiste in figurarsi tutte le incognite delle equazioni proposte come cognite, eccettuatane una, di cui per le regole date si trova il valore, che sarà dato per le cognite, e l' altre incognite: questo valore ritrovato si sostituisca in luogo della sua incognita nell' altre equazioni, e sarà diminuito dell' unità il numero delle incognite, e delle equazioni; e così ripetuta l' operazione fino che sarà bisogno, si verrà finalmente ad una incognita, e ad una equazione.

XVI. Siano due equazioni $ax + by = a^2$, $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$: dico, che facilmente si potranno determinare i valori delle incognite x, ed y. Nella prima equazione si tratti y come cognita, e si trovi il valore di x per le regole date, cioè $x = \frac{a^2 - by}{a}$: poi si sostituisca nella seconda equazione in vece di x il suo valore ritrovato, cioè $\frac{a^2 - by}{a}$, e sarà $\frac{ay}{c} = b - \frac{f}{a} \cdot \frac{a^2 - by}{a} = b + \frac{-fa^2 + fby}{aa}$, equazione in cui vi è la sola incognita y alla prima dimensione, della quale si sa per le regole date determinare il valore, che è $y = \frac{bca^2 - fca^2}{a^3 - fbc}$, e così sarà nota l' y: questo valore d' y sostituito nella equazione $x = \frac{a^2 - by}{a}$ in vece d' y, si avrà $x = a \frac{-b^2ca + bfca}{a^3 - fbc}$, ovvero, ridotti i due termini alla stessa denominazione, e

 can-

cancellati quei, che diſtruggonſi, $x = \frac{a^4 - b^2 c a}{a^3 - f b c}$; ecco dunque determinati i valori di x, ed y. Siccome nella prima equazione trattando y come cognita ho ritrovato la x, così trattando la x come cognita avrei ritrovato l' y, ed il ſuo valore ſoſtituito nella ſeconda equazione in luogo di y, ſi ſarebbe ottenuta una equazione, in cui vi ſarebbe la ſola incognita x ad una dimenſione, e per conſeguenza ſolubile per le regole date; anzi ſiccome ho principiato l'operazione dalla prima equazione, potevo egualmente principiare dalla ſeconda, e fare le ſoſtituzioni nella prima, ciò che baſterà avere una volta avviſato.

XVII. Se l' equazioni foſſero tre, e tre le incognite, per mezzo d' una equazione ſi ritrovi il valore d' una incognita, dato per le cognite miſchiate con l' altre due incognite: queſto valore ſi ſoſtituiſca in vece della ſua incognita nell' altre due, e così avremo due equazioni, e due incognite, le quali già ſi ſanno determinare. Siano le tre equazioni $x + y = b + z$, $y + z = d$, $x + z = c$: per la prima equazione ſi ha $z = x + y - b$: ſi ſoſtituiſca in vece di z il ſuo valore nelle altre due equazioni, e ſi avrà $2y + x - b = d$, e $2x + y - b = c$.

XVIII. Se foſſero quattro equazioni, e quattro incognite, con lo ſteſſo artificio ſi riducono a tre equazioni, e tre incognite; onde ſi ſcopre l' univerſalità del metodo (12).

XIX. Stimiamo opportuno eſporre un altro metodo, il quale benchè a prima faccia non ſembri univerſale, pure in realtà è tale, e di molto uſo. Queſto ſi adopra in primo luogo con vantaggio in due equazioni di due incognite, delle quali le medeſime ſiano moltiplicate per la medeſima quantità, ed i termini identici con-

contenenti una incognita abbiano il medesimo segno, e i termini identici contenenti l' altra incognita segni differenti; quando ciò sia, con la somma di dette equazioni si determina un' incognita, e con la sottrazione si determina l' altra.

XX. L' equazioni $ax+by=c^2$, $ax-by=n^2$ hanno le predette condizioni, cioè i termini identici ax hanno il medesimo segno, e gli identici by hanno segno differente. Sommate queste due equazioni, sarà $2ax=c^2+n^2$, ed $x=\frac{c^2+n^2}{2a}$, cioè, sarà x cognita: sottratta poi la seconda dalla prima, sarà $2by=c^2-n^2$, ed $y=\frac{c^2-n^2}{2b}$, cioè, sarà l' y determinata. Da questo metodo a guisa di corollario raccolgasi, che quando sia nota la somma, e la differenza di due quantità, si rendono note le medesime quantità; la qual cosa particolarmente avvertiamo, perchè grandissimo è l' uso, che si fa d' un tal teorema.

XXI. Se l' incognite x, ed y non fossero moltiplicate per la medesima quantità in ambe l' equazioni, cioè, se i termini di dette equazioni non fossero identici; con tutto ciò si ridurranno tali, parlo dei termini di una sola incognita, se vicendevolmente una equazione si moliplicherà per la quantità moltiplicante la stessa incognita nell' altra equazione; e ciò potendosi fare, separatamente però, in riguardo a tutte due l' incognite; quindi con una somma, e una sottrazione si sapranno determinare l' x, e l' y ancora in questo caso. Siano dunque l' equazioni $ax+by=c^2$, $nx-my=n^2$, le quali non hanno identicità di termini: si moltiplichi la prima per m, e la seconda per b, ed avremo $max+mby=mc^2$, e $bnx-bmy=bn^2$

$= b n^2$, equazioni, che hanno i termini della incognita y identici; onde sommando queste equazioni, sarà $m a x + b n x = m c^2 + b n^2$, ed $x = \frac{m c^2 + b n^2}{m a + b n}$. In oltre si moltiplichi la prima equazione per n, e la seconda per a; sarà $n a x + n b y = n c^2$, ed $a n x - a m y = a n^2$, equazioni, che hanno i termini della incognita x identici; onde sottraendo la seconda dalla prima, sarà $n b y + a m y = n c^2 - a n^2$, ed $y = \frac{n c^2 - a n^2}{n b + a m}$.

XXII. Questo metodo si estende a qualunque numero d' incognite, e di altrettante equazioni, come colla pratica apprenderà, chi vorrà intorno a ciò esercitarsi. (13).

CAPO V.

Risoluzione dell' Equazioni del secondo grado.

I. L' Operazioni con cui abbiamo ottenuta la risoluzione dell' equazioni del primo grado non sono bastevoli a darci la risoluzione di quelle del secondo. Fa d' uopo adunque ricorrere ad altri metodi.

II. In seguito proporremo l' equazioni paragonate al zero, cioè, con tutti i termini da una parte del segno d' uguaglianza, in maniera che dall' altra rimanga il solo zero. Inoltre il termine, che contiene l' incognita alla massima potestà, non sarà moltiplicato, nè diviso per alcuna quantità, il che sempre si otterrà col dividere o moltiplicare tutta l' equazione per quella quantità, che moltiplicasse, o dividesse la massima potestà dell' incognita. Questa massima potestà

ſtà dell' incognita ſempre ſi coſtituiſce come primo termine dell' equazione ; tutti i termini , in cui l' incognita è alla poteſtà proſſimamente minore , coſtituiſcono il ſecondo termine di quella, e così ſucceſſivamente fino all' ultimo termine , che ſarà coſtituito dalla ſomma di tutti i termini noti ; il che ſi chiama ordinare l' equazione per la lettera, che eſprime l' incognita .

III. Conviene ancora diſtinguere l' equazioni *pure*, o ſiano *incomplete* , dalle *affette*, o ſiano *complete* : le prime contengono la ſola poteſtà ſeconda dell' incognita , come $a x^2 + b x^2 - a b = o$; l' altre , oltre la ſeconda poteſtà , contengono ancora la prima , come $x^2 + a x - b b = o$.

IV. Sia ora l' equazione pura ed incompleta $x^2 - a A = o$, in cui x^2 è il quadrato dell' incognita, a è una qualunque quantità poſitiva , A poi può eſſere poſitiva , o negativa ſecondo le circoſtanze . Se ſi traſporti il termine $- a A$ dall' altra parte del ſegno d' uguaglianza , facendo $x^2 = a A$, e ſe ſi eſtragga la radice quadrata da amendue i membri , onde ſia $x = \sqrt{a A}$, ſarà riſoluta l' equazione . Richiamando alla memoria ciò che ſi è detto nell' Algoritmo dei radicali al §. 6. cioè , che il valore del radicale quadratico ſia doppio, vale a dire poſitivo , e negativo ; ne inferiremo eſſere doppia ancora la radice della propoſta equazione , cioè, eſſere $x = + \sqrt{a A}$, $x = - \sqrt{a A}$, le quali ſono reali ſe A eſprima una quantità poſitiva come $b + c$, ſono poi immaginarie , ſe eſprima una quantità negativa come $- b - c$.

V. Ad operare con tutta eſattezza , mentre eſtraemmo la radice ſeconda dall' equazione , ſi doveva fare $\pm x = \pm \sqrt{a A}$, donde naſcono quattro combinaziozioni, $x = +\sqrt{aA}$, $-x = -\sqrt{aA}$, $x = -\sqrt{aA}$, $-x = +\sqrt{aA}$; ma comecchè le prime due non ſono diverſe, perchè l' una diventa l' altra colla mutazione dei ſegni, ſiccome accade ancora all' altre due; quindi due ſoltanto ſono propriamente le diverſe combinazioni, cioè, $x = +\sqrt{aA}$, $x = -\sqrt{aA}$, ovvero $x = \pm\sqrt{aA}$.

VI. Se i valori dell' incognita ſi traſportino dalla parte in cui ella eſiſte, naſcono due equazioni uguali a zero $x - \sqrt{aA} = o$, $x + \sqrt{aA} = o$, le quali ſi chiamano *fattori* dell' equazione propoſta del ſecondo grado, perchè appunto la reſtituiſcono fatta la moltiplicazione di loro; ed in fatti dalla moltiplicazione loro naſce il prodotto $x^2 + \sqrt{aA}.x - \sqrt{aA}.x - aA = o$, cioè $x^4 - aA = o$.

VII. Con queſto metodo ſi riducono l' equazioni di grado ſuperiore a grado inferiore, purchè ſiano pure, e coll' eſponente dell' incognita diviſibile per 2. Sia l' equazione di ſeſto grado $x^6 - a^5A = o$, ſarà $x^6 = a^5A$, ed eſtratta la radice ſeconda, ſarà $x^3 = \pm\sqrt{a^5A}$, equazione di terzo grado. Sia $x^4 - a^3A = o$, ſarà $x^4 = a^3A$, ed eſtratta la radice quadrata ſarà $x^2 = \pm\sqrt{a^3A}$, ed eſtratta di nuovo la radice quadrata, ſarà $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a^3A}}$, equazione di primo grado. Quattro ſono i valori dell' incognita x, cioè le radici della propoſta equazione, che naſcono dalle quattro combinazioni dei ſegni $+\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $+\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$; onde quattro ſaranno ancora i fattori di queſta equazione, cioè

cioè $x - \sqrt{+\sqrt{a^3 A}} = o$, $x - \sqrt{-\sqrt{a^3 A}} = o$, $x + \sqrt{+\sqrt{a^3 A}} = o$, $x + \sqrt{-\sqrt{a^3 A}} = o$, i quali moltiplicati insieme restituiscono l'equazione data $x^4 - a^3 A = o$. Or di queste radici, e di questi fattori due sono sempre immaginarii a motivo della quantità negativa $-\sqrt{a^3 A}$; sono poi tutti immaginarii quando A è quantità negativa, a supponendosi sempre positiva, il che si può fare salva l'universalità della formola, mai indurrà immaginarii.

VIII. Passiamo ora all'equazioni complete del secondo grado, le quali tutte si contengono in questa formula generale $x^2 + Ax + aB = o$, in cui A, e B denotano quantità positiva, o negativa secondo le circostanze. Ora essendo x^2 il quadrato d'x, ed Ax il doppio del prodotto $\frac{A}{2} \cdot x$, egli è cosa manifesta, che $x + \frac{A}{2}$ sarebbe la radice quadrata di $x^2 + Ax + aB$ se aB fosse il quadrato di $\frac{A}{2}$; ma ciò non essendo, si ponga $x + \frac{A}{2} = z$, onde sia $x^2 + Ax + \frac{AA}{4} = z^2$, ed $x^2 + Ax = z^2 - \frac{AA}{4}$: ma è $x^2 + Ax = -aB$, per l'equazione proposta; dunque sarà ancora $z^2 - \frac{AA}{4} = -aB$, e $z^2 - \frac{AA}{4} + aB = o$, la quale equazione essendo incompleta si sa già sciogliere; troveremo adunque $z = \pm\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$. Ritrovato il valore di z, si trova ancora il valore d'x, il quale è uguale a $z - \frac{A}{2}$, essendosi posto $x + \frac{A}{2} = z$; onde sarà rà $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, i quali valori della x potranno eſſere o tutti e due poſitivi, o negativi, o uno poſitivo, e l' altro negativo, ſecondo il valore di A, e B; ſaranno poi reali, ſe poſta poſitiva B, aB ſia minore di $\frac{AA}{4}$, immaginarj, ſe maggiore; alle quali coſe è neceſſario che i principianti attentamente riflettino (14).

IX. Il metodo però più comune di riſolvere le ſteſſe equazioni è il ſeguente. A ciaſcun membro dell' equazione $x^2 + Ax = -aB$ ſi aggiunga il quadrato della metà della quantità, che moltiplica l' x, o ſia del coefficiente d' x, il quale quadrato è $\frac{AA}{4}$, con che il primo membro dell' equazione diviene un quadrato perfetto, cioè $x^2 + Ax + \frac{AA}{4} = \frac{AA}{4} - aB$. Eſtratta adunque la radice quadrata, abbiamo $x + \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, ed $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, come ſopra.

X. Sia per eſempio da ſcioglierſi l' equazione completa del ſecondo grado $x^2 \begin{matrix} -nx \\ -cx \end{matrix} + n^2 = 0$: ſarà $x^2 \begin{matrix} -nx \\ -cx \end{matrix} = -n^2$, ed aggiunto il quadrato della metà del coefficiente $-n-c$, ſarà $x^2 \begin{matrix} -nx \\ -cx \end{matrix} + \frac{\overline{n+c}^2}{4} = -n^2 + \frac{\overline{n+c}^2}{4}$, ed eſtratta la radice quadrata, ſarà

$x-$

$x - \frac{n+c}{2} = \pm \sqrt{-n^2 + \overline{\frac{n+c}{4}}^2}$, ed $x = \frac{n+c}{2} \pm \sqrt{-n^2 + \overline{\frac{n+c}{4}}^2}$. (15)

XI. Ritornando alle radici dell' equazione generale $-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, $-\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, se queste si trasporteranno dalla parte dell' incognita, acciò si abbiano i fattori dell' equazione, cioè $x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB} = o$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB} = o$, e se di questi si farà il prodotto, facilmente ci accorgeremo, che la somma dei termini cogniti, cioè delle radici, sia uguale alla quantità A coefficiente del secondo termine dell' equazione, e che il prodotto loro aB uguagli l' ultimo termine della stessa. Conducendo questa proprietà ad una cognizione più perfetta della natura dell' equazioni, stimo giovevole fare intorno la stessa le seguenti riflessioni.

XII. Moltiplicati i fattori $x + a$, $x + b$ s'otterrà il prodotto $x^2 \begin{matrix} + bx \\ + ax \end{matrix} + ab$, che ordino in riguardo alla lettera x. Subito ci avvedremo, che il coefficiente del secondo termine di questo prodotto altro non sia, se non se la somma degli ultimi termini dei due fattori, e che l' ultimo termine ab altro non sia, se non se il prodotto degli stessi ultimi termini dei fattori; per la qual cosa se avremo due quantità, le quali sommate insieme dieno il coefficiente del secondo termine d' una formula ordinata per qualche lettera, la quale ſia nel primo termine elevata a ſeconda poteſtà, e libera da coefficiente; e ſe l'ultimo termine della formula altro non ſia, che il prodotto delle due propoſte quantità; immediatamente otterremo i due fattori della formula, aggiungendo alle due quantità la lettera per cui la formula è ſtata ordinata.

XIII. Se poi uno dei due fattori $x + a$, $x + b$ ſia uguale a zero, ovvero tutti e due, il che non può accadere ſe non nel caſo, che a ſia uguale a b, il prodotto ancora ſarà uguale a zero, perchè una quantità, ovvero il zero moltiplicato per zero dà zero; onde tal prodotto prenderà l'aſpetto d'equazione del ſecondo grado, cioè di $x^2 + \begin{matrix} a\,x \\ +\,b\,x \end{matrix} + a\,b = o$, in cui ſi verificano ancora le coſe fin qui dette. Adunque neceſſariamente acciò ſi abbia equazione, uno dei fattori almeno dee eſſere eguale a zero; non ſi può per altro determinare qual ſia, perchè ad ottenere l'equazione, è indifferente che il ſia più toſto l'uno, che l'altro; ſol tanto ſi può conchiudere con ſicurezza, che quando un fattore è uguale a zero, l'altro non poſſa eſſerlo, altrimenti la ſteſſa numero quantità x, per cagione di eſempio, ſarebbe uguale alle due quantità $-a$, $-b$, il che è aſſordo, eccettuato il caſo in cui a, e b ſieno uguali. Da ciò s'intenderà come la formula generale $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - a\,B}$ ſignifichi non già che contemporaneamente x ſia uguale a due valori diſuguali, il che ſarebbe aſſordo, ma ſoltanto che x debba ad uno dei due valori eſſere uguale acciò ſuſſiſta l'equazione $x^2 + A\,x + a\,B = o$. Se ſi domanda come ſi abbia poi da rilevare quale dei fattori in realtà ſia uguale a zero, riſpondiamo, che dalla natura dell'

dell' equazione mai ciò ſi potrà decidere, perchè, come ho detto, è per eſſa indifferente, che il ſia più toſto l' uno, che l' altro; ma ſe l' equazione ſi adopra per riſolvere qualche problema particolare, allora dalle circoſtanze del problema ſi può ottenere ciocchè ſi è domandato, come vedremo a ſuo luogo. Per ora ſol tanto ſi rifletta, che quella quantità, per cagion d' eſempio $-a$, ſarà una delle radici dell' equazione $x^2 + ax + ab = o$, la quale poſta in queſta in vece
$+ bx$
dell' incognita, fa ſparire tutti i termini; perchè ciò non può avvenire, ſe l' incognita x meno queſta quantità non ſia un fattore dell' equazione, e nel caſo preſente, ſe $x + a$ non ſia un fattore dell' equazione $x^2 + ax + ab = o$, perchè in queſta ſuppoſizione ap-
$+ bx$
punto ſuccede, che il prodotto ſvaniſca poſta $-a$ in vece d' x, eſſendo lo ſteſſo, che aver fatta la moltiplicazione per $-a + a$; ſe dunque $x + a$ dee eſſere neceſſariamente un fattore dell' equazione acciocchè queſta ſvaniſca poſtavi l' a in vece d' x, ne viene in conſeguenza, che $-a$ ſia un valore dell' x, cioè una radice dell' equazione. (16)

XIV. Queſti metodi, che ſervono all' equazioni di ſecondo grado, ſervono ancora a ſciogliere l' equazioni di grado ſuperiore, ovvero a ridurle a grado inferiore, purchè l' incognita ſi ritrovi ſol tanto in due termini, e ſia l' eſponente maſſimo di lei doppio del minimo. Abbiaſi $x^4 + aAx^2 + a^3B = o$ equazione di quarto grado, in cui vi ſono le accennate condizioni: ſi traſporti il termine noto dall' altra parte, e ſi aggiunga ad ambe le parti il quadrato della metà del coefficiente del ſecondo termine, e ſarà $x^4 + aAx^2$

$+ \frac{a^2 AA}{4} = - a^2 B + \frac{a^2 AA}{4}$, ed eſtratta la radice ſeconda ſarà $x^2 + \frac{aA}{2} = \pm \sqrt{-a^2 B + \frac{a^2 AA}{4}}$, ed $x^2 = -\frac{aA}{2} \pm a \sqrt{-aB + \frac{AA}{4}}$, e di nuovo eſtratta la radice ſeconda ſarà $x = \pm \sqrt{\frac{-aA}{2} \pm a\sqrt{-aB + \frac{AA}{4}}}$.

XV. Quì cade in acconcio moſtrare, come date due equazioni, ed una incognita, poſſa queſta farſi ſvanire ſenza eſtrazione di radice, benchè elevata a quadrato. Sieno due equazioni del ſecondo grado $yy + Ay + B = o$, $yy + Cy + D = o$: ſi ſottragga una equazione dall' altra, per eſempio la prima dalla ſeconda, onde ſia $\overline{C - A}\,.\,y + D - B = o$, ed $y + \frac{D-B}{C-A} = o$, e poſta $\frac{D-B}{C-A} = E$, ſia $y + E = o$: queſta ſi moltiplichi per y, e ſarà $yy + Ey = o$, la quale ſottratta dalla prima, naſce $\overline{A - E}\,.\,y + B = o$, ed $y + \frac{B}{A-E} = o$, e poſta $\frac{B}{A-E} = F$, avremo $y + F = o$; ſe queſta ſi ſottragga da $y + E = o$, avremo finalmente $E - F = o$, equazione in cui non havvi l' y.

XVI. Sieno le due equazioni $yy + 2xy + 2ax - aa + by + bx - bb = o$, $yy + 2xy - ay + by + bx - bb = o$, in cui vi ſono due incognite, e ſi voglia farne ſparire una, cioè, ſi voglia giungere ad una equazione, in cui vi ſia una ſola incognita, e ciò ſenza eſtrazione di radice. Si ſottragga dalla prima la ſeconda, onde ſia $2ax + ay - aa = o$, e fatta la diviſione per a, ſia $y + 2x - a = o$: ſi moltiplichi queſta

ſta equazione per y, ed avremo $yy + 2xy - ay = o$: queſta ſi ſottragga dalla ſeconda delle date equazioni, onde ſia $by + bx - bb = o$, cioè $y + x - b = o$, la quale ſottratta dall' equazione già trovata $y + 2x - a = o$, avremo finalmente $x - a + b = o$, in cui manca l'y, come ſi deſiderava. (17)

XVII. Egli è chiaro, che per ottener l'intento non ſi richiegga di dover ſottrarre la prima equazione dalla ſeconda più toſto, che queſta da quella, ne ancora di dover fare l' altre ſottrazioni più toſto da una, che dall' altra equazione; giova per altro ſcegliere più toſto una ſottrazione, che l' altra per giungere in una maniera più ſpedita, e più ſemplice all' equazion finale, della quale ſcelta non ſi può dare regola alcuna, dipendendo in tutto dall' eſercizio, e dall' induſtria.

XVIII. Queſto artificio non ſerve ſol tanto in riguardo all' equazioni del ſecondo grado, ma ancora in riguardo a quelle di grado ſuperiore, purchè l' incognita, che ſi vuole togliere di mezzo, ſia elevata in tutte l' equazioni alla ſteſſa maſſima poteſtà, il che ſi può ſempre ottenere, moltiplicando l' equazione, in cui l' incognita è a minor poteſtà, per l' incognita elevata a poteſtà, che ſia la differenza delle due poteſtà.

XIX. Se foſſero più di due equazioni, per eſempio tre, e tre incognite, prima faremo ſparire una incognita adoprando due equazioni, per eſempio la prima, e la ſeconda: dipoi faremo ſparire la ſteſſa incognita adoprando un altra combinazione, per eſempio la prima colla terza; e in queſta guiſa s' avranno due equazioni, in cui mancherà una delle tre incognite: col mezzo di queſte due facendo ſvanire un' altra incognita, ſi arriverà finalmente ad una equazione, ne, in cui si ritroverà una incognita. Quindi apparisce l' universalità del metodo proposto.

XX. Collo stesso metodo si espellono alle volte dall' equazioni le quantità radicali. Si denominino esse colle lettere x, y &c., e se si abbiano tante equazioni, quanti radicali differenti vi sono, con questo metodo si giungerà ad una equazione, in cui saravvi un solo radicale.

CAPO VI.

Risoluzione de' Problemi Aritmetici determinati, che non oltrepassano il secondo grado.

I. PRoblema altro non è, che una proposizione, in cui coll'ajuto di alcune quantità cognite, si vogliono sapere altre, che sono pur anco incognite: così per esempio, se dati due numeri quali che siansi, se ne dimandasse la somma, o la differenza, o il prodotto, si proporrebbe un problema, il quale allora si dice sciolto, quando si è scoperto il valore delle incognite.

II. I problemi sono di quattro sorti, cioè, *determinati*, *indeterminati*, *semideterminati*, e *piuchedeterminati*. (18)

III. Problema *determinato* è quello, in cui si possono ottenere tante equazioni, quante sono l' incognite. Eccone subito un esempio: trovare due numeri, la cui somma sia 6, la differenza 2. Si considerino questi due numeri come se fossero noti, e si esprimano con due dell' ultime lettere dell' Alfabeto, per esempio x, y: la prima condizione del problema ci darà l' equazione $x+y=6$, e la seconda $x-y=2$: sommando queste

ſte due equazioni avremo $2x = 8$, e perciò $x = \frac{8}{2} = 4$: ſottraendo la ſeconda dalla prima ſarà $2y = 6 - 2$, e perciò $y = \frac{4}{2} = 2$; dunque 4, e 2 ſaranno i numeri cercati, eſſendo $4 + 2 = 6$, $4 - 2 = 2$. In queſto problema, come ſi vede chiaramente, quante ſono l'incognite, tante ſono pure l'equazioni, e perciò ſi ripone nella claſſe de' problemi *determinati*.

IV. Che ſe il numero dell'equazioni foſſe minore del numero delle incognite, un tal problema apparterrebbe alla claſſe degli *indeterminati*. Per ottenere lo ſcioglimento di queſti conviene ad arbitrio determinare una, o più delle quantità incognite, per arrivare così ad una equazione, in cui unica ſia l'incognita. Voglio per eſempio due numeri la cui ſomma ſia eguale a 6: chiamati queſti due numeri x, y, per quanta induſtria ſi adoperi, mai altra equazione otterremo, che queſta $x + y = 6$. Si determini dunque il valore di x uguagliandolo ad un numero qualunque, per eſempio a 5, e ſarà $5 + y = 6$, e perciò $y = 6 - 5 = 1$, onde ſarà ſciolto il problema, il quale chiara coſa è poterſi ſciogliere in tante maniere, quanti ſono i numeri, che poſſono ſoſtituirſi ad x, che ſono infiniti. Che ſe i numeri richieſti ſi voleſſero poſitivi, ed interi, queſta condizione del problema ridurrebbe il numero delle ſoluzioni a cinque ſoltanto, ed un tal problema chiamerebbeſi *ſemideterminato*.

V. Quando poi le quantità incognite ſieno in minor numero dell'equazioni, il problema chiamaſi *piuchedeterminato*, e d'ordinario n'è impoſſibile lo ſcioglimento. Abbiamo veduto di ſopra, che due numeri, la cui ſomma ſia 6, e la differenza 2, ci portano a queſte

ſte due equazioni $x+y=6$, $x-y=2$; ora ſe per terza condizion del problema ſi voleſſe, che il loro prodotto foſſe 15, la terza equazione $xy=15$ ne renderebbe impoſſibile la ſoluzione, poichè eſſendo $x=4$, $y=2$, ſarà $xy=8$, e non già $=15$. Ma poniamo che la terza condizione del problema ſia appunto queſta, che ſia il prodotto $xy=8$: certo è che allora ne è poſſibile la ſoluzione, ma per un mero caſo, giacchè vi ſi pone una condizion ſuperflua, la quale diſcende neceſſariamente dalle due precedenti. Sì fatte condizioni ſuperflue ſi ravviſano facilmente dai termini identici, che ſi trovano in amendue i membri dell' equazione, come avviene nel caſo noſtro, poichè avendoſi queſte tre equazioni $x=4$, $y=2$, $xy=8$, ſoſtituendo i due valori di x, e d' y nella terza, abbiamo $8=8$. La ragione è chiara, perchè come da diverſe condizioni naſcono diverſe eſpreſſioni, così quando le condizioni ſono identiche, identiche ſaranno pure le eſpreſſioni, e ſe havvi diverſità, conſiſte tutta nell' apparenza.

VI. Quindi ſi diſtinguono i problemi dai teoremi; imperciocchè ſe dopo di avere eſpreſſe le condizioni tutte dell' apparente problema, ſi arriva ad una equazione identica, è indicio ſicuro, che tutte le quantità di quel genere di cui ſi tratta hanno naturalmente quella proprietà, che ci eravamo prefiſſi di ritrovare in alcune. Così ſe nella ſerie de' numeri naturali 1, 2, 3 ec. ſi cerchino quattro numeri ſucceſſivi, e tali, che la ſomma degli eſtremi ſia eguale alla ſomma dei medj; chiamando queſti numeri x, y, z, u, la natura della ſerie ci darà queſte tre equazioni $x+1=y$, $y+1=z$, $z+1=u$, e la condizione poi del problema queſt' altra $x+u=y+z$. In vigore delle due prime equazioni abbiamo $x+2=z$: da queſta, e dalla ter-

terza ſe ne forma queſt' altra $x+3=u$; ſoſtituendo dunque il valore di y, di z, e di u, l'equazione $x+u=y+z$ ſi riduce a queſta equazione identica $2x+3=2x+3$. Per lo che è manifeſto che la condizione appoſta era ſuperflua, eſſendo proprio di tutti i numeri di detta ſerie naturale, purchè ſieno ſucceſſivi, che la ſomma degli eſtremi ſia eguale alla ſomma de' medj; onde non era queſto un problema, ma ſibbene un teorema, *o propoſizione, che eſpone proprietà*.

VII. Alle volte queſte equazioni identiche ci fanno comparire determinati quei problemi, che in realtà non ſono. Si cerchino per eſempio quattro numeri x, y, z, u, tali, che la ſomma degli eſtremi ſia uguale alla ſomma dei medj, e queſta ſia uguale a 7, ed il prodotto inoltre dei due primi ſia uguale a 12. La prima condizione dà $x+u=y+z$, la ſeconda $y+z=7$, la prima con la ſeconda $x+u=7$, la terza $xy=12$; onde ſembra averſi tante equazioni, quante incognite, è perciò eſſere il problema determinato; ma ſe nella prima equazione in vece di $x+u$, $y+z$, ſoſtituiremo i valori loro dati per la ſeconda, e per la terza, urteremo nell' equazione identica $7=7$, la quale ci farà ſubito accorgere, eſſerci noi ſerviti d' una condizione ſuperflua, inetta a determinare il problema. Ed in realtà la terza equazione $x+u=7$ non è egli affatto inutile, includendoſi neceſſariamente nell' altre due $x+u=y+z$, $y+z=7$? Non potendoſi poi per quanta diligenza ſi uſi trovare altra equazione indipendente dalle accennate, il problema ſi dee annoverare fra gli indeterminati (19). Tutte le quali coſe ci ammoniſcono della diligenza con cui dobbiamo ricercare le condizioni indipendenti una dall' altra per ottenere l' equazioni utili alla determinazione del problema. Di ciò non eſſendovi regola generale, conviene ricorrere all' esercizio, ed alla riflessione, in grazia di che ci accingiamo allo scioglimento dei problemi.

VIII. Problema primo. Cajo interrogato che ora fosse, rispose, che le ore scorse dalla mezza notte, alle ore, che rimanevano fino al meriggio, erano come $2:3$: si vuol sapere qual ora fosse accennata da Cajo. Le ore scorse dalla mezza notte fino a quel punto si chiamino x; dunque quelle, che rimangono al meriggio sono $12 - x$: ma per la risposta di Cajo dee essere $2:3::x:12-x$, e perciò $3x = 24 - 2x$, o sia $5x = 24$; sarà dunque $x = \frac{24}{5}$, cioè ore 4:48. dopo la mezza notte.

IX. Problema secondo. Un Cane si dà ad inseguire una Lepre in distanza di passi numero $= a$, e la velocità del Cane è alla velocità della Lepre come $m:n$: si cerca dopo quanti passi il Cane giugnerà la Lepre. Chiamisi x lo spazio, che ha precorso la Lepre prima di essere presa dal Cane, da che il Cane incominciò ad inseguirla; dunque lo spazio scorso dal Cane allorchè la giunge sarà $a + x$: ed essendo gli spazj percorsi nello stesso tempo come le velocità, avremo la proporzione $a + x : x :: m : n$, e dividendo, $a : x :: m - n : n$; onde sarà $x = \frac{an}{m-n}$. Se suppongasi $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, sarà $x = \frac{200}{1} = 200$, ed $a + x = 300$.; dunque dopo passi 300. il Cane raggiungerà la Lepre. Si possono sostituire ad arbitrio altri numeri, purchè m sia sempre maggiore di n, poichè se li fosse eguale, o minore, il Cane sarebbe sempre o egualmente, o più lontano dalla Lepre.

X. Problema terzo. Sempronio volendo distribuire certi denari a certi poveri osserva, che se ne dà

tre

tre a ciascuno ne mancano otto], se ne dà due ne avanzano tre: si vuol sapere il numero de' poveri, e de' denari. Pongasi il numero de' poveri $= x$: giacchè dando a ciascuno d' essi tre denari ne mancano otto, sarà il numero de' denari $= 3x - 8$; e per la seconda condizione del problema avanzandone tre col darne due, sarà il numero de' medesimi $2x + 3$; è dunque $3x - 8 = 2x + 3$, o sia $x = 11$; or sostituendo ad x il suo valore in $3x - 8$, o in $2x + 3$, che esprimono il numero de denari, saranno questi $= 25$.

XI. Problema quarto. Rispose Tizio ad un, che domandavagli quanti anni avesse: se il numero de'miei anni si moltiplichi per 4, ed al prodotto si aggiunga 15, si ha un numero, che di tanto eccede il 150, quanto il numero 100 eccede il numero de' miei anni: si cerca il numero degli anni di Tizio. Questo numero pongasi $= x$: l' esposta condizione ci dà la proporzione Aritmetica $4x + 15 : 150 :: 100 : x$; dunque agguagliando la somma degli estremi, e de' medj, sarà $5x + 15 = 150 + 100 = 250$, e perciò $x = \frac{250 - 15}{5}$ $= 47$, che è il numero degli anni, che si voleva sapere.

XII. Problema quinto. Cajo per mantenimento della sua famiglia spende il primo anno scudi 380, il rimanente dell' entrata lo mette a traffico, ed il frutto, che ne trae è un quarto della somma messa a traffico; il secondo anno spesi i soliti 380 scudi pone il rimanente a guadagno, e ne ricava pure un quarto; nel terzo anno si accorge, che la sua entrata è cresciuta di un sesto: si vuol sapere quanta fosse nel primo anno l' entrata di Cajo. Pongasi l' entrata del primo anno $= x$, e gli ſcudi $380 = a$: ſarà il reſiduo del primo anno $x - a$, ed i frutti ricavati dal traffico $= \frac{x-a}{4}$; dunque l' entrata del ſecondo anno ſarà $= x + \frac{x-a}{4}$, ed il reſiduo $= x + \frac{x-a}{4} - a$, o ſia ridotti gl' interi alla ſteſſa frazione $\frac{5x-5a}{4}$, il cui provento nel ſecondo anno $= \frac{5x-5a}{16}$ ſarà sì, che l' entrata del terzo anno aſcenda ad $x + \frac{x-a}{4} + \frac{5x-5a}{16}$, la quale per l' eſpoſta condizion del problema ſarà $= x + \frac{x}{6}$; dunque ridotte le frazioni al comune denominatore ſarà $\frac{16x + 4x - 4a + 5x - 5a}{16}$, cioè $\frac{25x-9a}{16} = \frac{7x}{6}$, o ſia $38x = 54a$, ed $x = \frac{54a}{38} = \frac{27a}{19} = \frac{10260}{19} = 540$. Dunque l' entrata del primo anno era di ſcudi 540, del ſecondo anno $540 + \frac{160}{4} = 580$, e nel terzo anno $580 + \frac{200}{4} = 630$, il qual numero è appunto $540 + \frac{540}{6}$, l' entrata cioè del primo anno accreſciuta di un ſeſto.

XIII. Problema ſeſto. Si fa una cena, che importa 12 ſcudi: due de' commenſali non pagano; gli altri sborſano uno ſcudo di più di quello, che avrebbono dato, ſe la ſpeſa ſi foſſe egualmente ripartita in tutti i commenſali: ciò ſuppoſto, ſi vuol ſapere quanti ti essi sono. Pongasi il numero loro $= x$; sarà dunque il numero di quelli, che hanno contribuito $x - 2$, ed il valore della contribuzione per cadauno $\frac{12}{x-2}$: se tutti però avessero contribuito sarebbe $\frac{12}{x}$; dunque dovendo essere il primo valore maggiore d' uno scudo del secondo, sarà $\frac{12}{x-2} - \frac{12}{x} = 1$, o sia $\frac{12x - 12x + 24}{x^2 - 2x} = 1$, e però $x^2 - 2x = 24$, ed aggiunta l' unità all' uno, e all' altro membro, $x^2 - 2x + 1 = 25$; dunque $x - 1 = \pm 5$, ed $x = 6$, $x = -4$. La radice negativa non può aver luogo nel caso presente; dunque i commensali furono 6. Si vuol notare però, che la radice negativa ha tutte le condizioni analitiche della positiva essendo $\frac{12}{-4-2} - \frac{12}{-4} = 1$.

XIV. Se il problema fosse stato proposto in tal maniera, che amendue le radici fossero riuscite positive, vi sarebbe qualche cosa di indeterminato. Pongasi per esempio, che la cena costasse scudi 75, che uno dei commensali ne sborsasse 19, che il resto essendosi diviso egualmente fra gli altri, ciascuno desse uno scudo meno di quello, che avrebbe dato se tutta la spesa si fosse egualmente ripartita in tutti i commensali. Il numero di questi pongasi $= x$: se uno non avesse sborsato 19. scudi, la contribuzione di ciascuno sarebbe stata $= \frac{75}{x}$, ma nel caso presente sarà $= \frac{75-19}{x-1} = \frac{56}{x-1}$: or questa importa uno scudo di meno; dunque

que per eguagliarla alla prima conviene fare $\frac{56}{x-1}+1=\frac{75}{x}$, e tolte le frazioni, $56x+x^2-x=75x-75$, o ſia $x^2-20x=-75$; dunque aggiungendo 100 all' uno, e all' altro membro, $x^2-20x+100=25$, o ſia $x-10=\pm 5$, e prendendo la radice 5 poſitiva, $x=15$, prendendo la negativa, $x=5$. Dunque il problema non è affatto determinato, potendo eſſere il numero de' commenſali o 15, o 5; e a chi aveſſe fatto ſimil queſito, altro riſpondere non ſi potrebbe, che il numero dei commenſali ſarà o 5, ovvero 15, non vi eſſendo contraſſegno alcuno per ſcegliere più toſto l'un, che l'altro.

XV. Problema ſettimo. Una libra di oro è del valore $=a$, una libra di argento del valore $=b$: di queſti due metalli ſe ne vuol fare un compoſto, il valore di cui per ogni libra ſia $=c$; che porzione d'oro, e che porzione di argento ſi dee prendere? La porzione dell' oro pongaſi $=x$, la porzion dell' argento $=y$. La regola del tre c' inſegna, che ſe una libra d' oro è del valore $=a$, una porzione di oro x ſarà del valore $=ax$, eſſendo $1:a::x:ax$; ed eſſendo per la ſteſſa ragione $1:b::y:by$, la porzione dell' argento ſarà del valore $=by$: e poichè queſte due porzioni di oro, e di argento x, y hanno da fare una libra, ſarà $x+y=1$, ed eſſendo il valore di queſta libra $=c$, ſarà $ax+by=c$. Or moltiplicando la prima equazione per b, e poi ſottraendola dalla ſeconda, ſarà $ax-bx=c-b$; dunque $x=\frac{c-b}{a-b}$: moltiplicando poi la prima per a, e da quella ſottraendo la ſeconda, ſarà $ay-by=a-c$; che però $y=\frac{a-c}{a-b}$.

Dun-

Dunque sarà $x : y :: c - b : a - c$; onde dividendosi in questa ragione la libra si avrà la quantità d' oro, e di argento, che è necessaria per formare il detto composto. Per esempio sia $a = 21$, $b = 11$, $c = 15$, sarà $c - b = 4$, $a - c = 6$. Dividasi dunque la libra in parti, che abbiano la ragione $4 : 6$, o sia $2 : 3$: queste sono $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$; dunque $\frac{2}{5}$ di una libra d'oro, e $\frac{3}{5}$ di una libra di argento fanno una libra di un metallo composto del valore $= 15$.

XVI. Problema ottavo. Vi sono due botti, in cui il vino è mescolato coll' acqua: in una botte il vino è all' acqua come $a : b$, nell' altra come $c : f$; cercasi che quantità di liquore estrar si debba dalla prima botte, che quantità dalla seconda, per empirne una terza botte, in cui il vino sia all' acqua come $m : n$. L' acqua, ed il vino esprimansi colle lettere A, U; dunque il liquore contenuto nella prima botte sarà $aU + bA$, e nella seconda $cU + fA$: il liquore, che dee estrarsi dalla prima botte pongasi $= x$, quello che dee estrarsi dalla seconda $= y$; sarà dunque $axU + bxA + cyU + fyA = mU + nA$: ma nella terza botte dee essere $axU + cyU = mU$, e $bxA + fyA = nA$; dunque $ax + cy = m$, e $bx + fy = n$; che però $x = \frac{fm - cn}{af - cb}$, ed $y = \frac{an - mb}{af - cb}$. Se pongasi $a = 7$, $b = 3$, $c = 4$, $f = 6$, $m = n = 6$, si troverà essere $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}$. (20)

XVII. Questo metodo si può rendere generale nella maniera che segue. Se da più composti, in cui le quantità componenti A, B, C sono nella ragione indicata dalle formole seguenti $aA + bB + cC$, $eA + fB +$

gC,

gC, $hA + iB + kC$, si prendano le quantità x, y, z, cosicchè nel nuovo composto, A, B, C sieno nella ragione m, n, p,

avremo
$$\begin{matrix} axA + bxB + cxC \\ eyA + fyB + gyC \\ hzA + izB + kzC \end{matrix} = mA + nB + pC.$$

Quindi ne nascono tre equazioni colle quali si scioglie il problema, cioè, $axA + eyA + hzA = mA$, $bxB + fyB + izB = nB$, $cxC + gyC + kzC = pC$. Da queste tre equazioni si cava facilmente il valore delle tre incognite x, y, z; e con questo metodo si viene alla soluzione di qualunque problema di simil fatta, per grande che sia il numero delle quantità componenti un qualche misto.

CAPO VII.

Risoluzione dei Problemi semideterminati.

I. I Problemi semideterminati propriamente appartengono alla classe degl' indeterminati, non potendosi in questi avere tante equazioni, quante sono le incognite; nondimeno col mettervi alcune condizioni ricevono un determinato numero di soluzioni, e qualche volta ne anco questo. Diciamone alcuna cosa, perchè non giungano affatto nuovi agli studiosi dell'Algebra. Fra le condizioni, che vi si possono apporre, consideriamone soltanto di due spezie: la prima, che i numeri siano interi, e positivi; la seconda, che siano quadrati. Quanto alla prima, ridotte l' equazioni tutte ad una sola, in cui supponiamo due essere l' incognite, conviene in primo luogo determinare i limiti, che oltrepassati essendo, una, o più quantità diverrebbono ne-

negative; poi si assegnino successivamente diversi valori ad una delle due incognite, tali però, che l' altra incognita non debba essere una frazione; e così si avranno tutte le soluzioni possibili. Spieghiamo la cosa con alcuni esempj.

II. Problema primo. Si vogliono due numeri x, y tali, che sia $3x - 5y = 9$, e perciò $y = \frac{3x - 9}{5}$. Per evitare il numero negativo dovrà essere $3x > 9$, cioè $x > 3$, e per evitare le frazioni converrà che $3x - 9$ possa dividersi perfettamente per 5. Or quei soli numeri possono dividersi perfettamente per 5, che finiscono in zero, o in 5: ma $3x - 9$ non può terminare in zero se $3x$ non termina in 9, ne $3x - 9$ può terminare in 5 se $3x$ non termina in 4; dunque quei soli numeri ci danno il valore di x, che moltiplicati essendo per 3 finiscono in 9, ovvero in 4. Il minimo di tutti questi sarà l'8, dopo il 13, poi 18 &c.; e quindi si ricava il valore di $y = 3, 6, 9$ &c. come vedesi nella tavoletta. Notisi che i due valori di x, ed y formano due serie aritmetiche crescenti: la differenza della prima serie è 5, della seconda 3; dal che si vede, che potendo queste due serie andare in infinito, e tutti i numeri che crescono nelle dette differenze soddisfacendo al problema, questo ha infinite soluzioni.

$x = 8$	$y = 3$
13	6
18	9
23	12

III. Problema secondo. Si vogliono due numeri x, y tali, che sia $3x + 2y = 20$, ovvero $x = \frac{20 - 2y}{3}$. E' chiaro che essere dee $y < 10$, altrimenti x sarebbe un numero negativo; e perchè y non sia negativo, do-

dovrà essere $x < 7$: e poichè $\frac{20}{3}$ non è una pura frazione, così esporremo l' equazione, $x = 6 + \frac{2 - 2y}{3} = 6 + 2 . \frac{1 - y}{3}$. Volendosi che dalla frazione ne nasca un intero, e posto che sia $y < 10$, facilmente si scopre che y può avere questi tre soli valori 7, 4, 1, a cui corrispondono i valori $x = 2$, 4, 6, i primi in serie aritmetica decrescente, la cui differenza è 3, i secondi in una serie crescente, la cui differenza è 2, e sono i soli numeri, che sciolgono il problema. (21).

$y = 7$	$x = 2$
4	4
1	6

IV. Problema terzo. Le coturnici costano soldi 2, i tordi 1, i passeri $\frac{1}{2}$; non si hanno se non che 70 soldi, e si vorrebbero comprare 100 capi di questi augelli: si cerca quanti se ne debbano comprare di ogni specie. Pongasi il numero delle coturnici $= x$, de' tordi $= y$, de' passeri $= z$, e si avranno queste due equazioni $x + y + z = 100$, $2x + y + \frac{1}{2} z = 70$: dalla seconda moltiplicata per 2 si sottragga la prima, sarà $3x + y = 40$, d' onde si deduce, che dovrà essere $x < 14$, ed $y < 40$. Ciò supposto, si consideri la formola $y = 40 - 3x$: se pongasi $x = 13$, sarà $y = 1$, $z = 86$: se pongasi $x = 12$, sarà $y = 4$, $z = 84$, e così discorrendo, come

$x = 13$	$y = 1$	$z = 86$
12	4	84
11	7	82
10	10	80
9	13	78
8	16	76
7	19	74
6	22	72
5	25	70
4	28	68
3	31	66
2	34	64
1	37	62

come può osservarsi nella tavola annessa. Il problema dunque può sciogliersi in 13 maniere, nè più, nè meno, poichè uscendo fuori dei limiti prescritti, i numeri verranno ad essere negativi. Si osservi, che i valori delle tre incognite formano tre serie aritmetiche: la prima è decrescente colla differenza di 1, la seconda crescente colla differenza di 3, la terza decrescente colla differenza 2.

V. Problema quarto. Trenta, parte uomini, parte donne, e parte ragazzi pranzarono insieme; la spesa montò a 75 paoli, ma gli uomini ne pagarono 5, le donne 3, i ragazzi 2: si cerca qual fosse il numero degli uomini, delle donne, e de' ragazzi. Pongasi il numero degli uomini $= x$, quello delle donne $= y$, quello de' ragazzi $= z$. Sarà dunque $5x + 3y + 2z = 75$, $x + y + z = 30$: si moltiplichi la seconda equazione per 2, e si sottragga dalla prima, e sarà $3x + y = 15$; dunque $x < 5$, $y < 15$: si moltiplichi ora la seconda equazione per 3, e dal prodotto sottraggasi la prima; sarà $-2x + z = 15$, e perciò $z = 15 + 2x$: ma $2x < 10$; dunque $z < 25$. Ora essendo i limiti di x i più ristretti, si facciano queste due equazioni $y = 15 - 3x$, $z = 15 + 2x$. Si ponga $x = 4$, sarà $y = 3$, $z = 23$. Quattro sono le soluzioni che ammette il problema, che formano tre progressioni aritmetiche. (22).

$x = 4$	$y = 3$	$z = 23$
3	6	21
2	9	19
1	12	17

VI. Or diciamo alcuna cosa di que' problemi soltanto, ne quali si chiede per condizione che i numeri sieno quadrati, altro non permettendo il presente ristretto. Questi non escludono i numeri fratti, ma sibbene gl' irrazionali; onde tutta l' arte consiste in nominare per sì fatto modo le quantità incognite, che ſi tengan lontane le quantità ſorde.

VII. Problema quinto. Trovare due numeri, i cui quadrati ſommati inſieme diano un numero anch' eſſo quadrato. Ecco lo ſcioglimento con un metodo ſempliciſſimo. Se al quadrato $m^4 - 2\,m^2 n^2 + n^4$ aggiungaſi l' altro quadrato $4\,m^2 n^2$, ſarà la ſomma $m^4 + 2\,m^2 n^2 + n^4$, che è un numero quadrato; dunque i numeri cercati ſono $m^2 - n^2$, e $2\,m\,n$, i cui quadrati ſommati inſieme ſono $= \overline{m^2 + n^2}^2$. In fatti ponendoſi $m = 2$, $n = 1$, ſi avranno i due numeri quadrati $9 + 16 = 25$.

VIII. Colla ſteſſa arte ſcioglieſi queſt' altro problema. Trovare due numeri tali, che dal quadrato dell' uno ſottraendo il quadrato dell' altro, la differenza ſia un numero quadrato. Queſti ſaranno $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$, eſſendo la differenza de' loro quadrati $4\,m^2 n^2$, numero parimente quadrato, la cui radice è $2\,m\,n$. I numeri cercati poſſono eſſere ancora $m^2 + n^2$, $2\,m\,n$, che elevati eſſendo a quadrato, hanno per differenza $m^4 - 2\,m^2 n^2 + n^4$, la cui radice è $m^2 - n^2$.

IX. Problema ſeſto. Trovare tre numeri tali, che tanto la ſomma di tutti, quanto la ſomma di due di eſſi quali che ſianſi dia un numero quadrato. Sieno i tre numeri $4\,x$, $x^2 - 4\,x$, $2\,x + 1$; la ſomma di tutti ſarà $x^2 + 2\,x + 1$, la ſomma del primo, e del ſecondo x^2, e la ſomma del ſecondo, e del terzo $x^2 - 2\,x + 1$, che ſono tutti numeri quadrati. Dunque per ſciogliere il problema conviene dare ad x un tal valore, che $6\,x + 1$, che è la ſomma del primo, e del terzo, ſia un numero quadrato. Pongaſi $6\,x + 1 = m^2$; dunque $x = \frac{m^2 - 1}{6}$, e perciò i tre numeri ſono $\frac{2\,m^2 - 2}{3}$,

$m^4 -$

$\frac{m^4 - 26m^2 + 25}{36}$, $\frac{m^2 + 2}{3}$.

X. Problema ſettimo. Sempronio compra del vino di due ſorta; il vino di una vale 8 paoli la miſura, dell' altra vale 5, e la ſomma della ſpeſa è un numero quadrato, cui ſe aggiungaſi 60, ſi ha un altro quadrato, la cui radice dà il numero delle miſure dell' uno, e dell' altro vino comprato da Sempronio: ſi cerca quale ſia il numero delle miſure. Pongaſi queſto $= x$; dunque per la condizion del problema, $x^2 - 60$ ſarà il numero de' paoli co' quali ſi è fatto la compra di tutto il vino, e queſto numero, come ſi è detto, ha da eſſere quadrato. Per averlo tale convien definire i limiti di x. Se per comprare quella ſorta di vino che vale meno, cioè 5, Sempronio aveſſe sborſato il danaro $x^2 - 60$, il numero delle miſure ſarebbe $\frac{x^2 - 60}{5}$, il quale dee eſſere maggior di x, perchè collo ſteſſo danaro ſi ha maggior numero di miſure del vino che coſta meno, che del vino, porzione di cui coſti più; dunque $x^2 - 60 > 5x$. Per conſimile ragione ſarà $x^2 - 60 < 8x$; dunque abbiamo $x^2 - 5x > 60$, $x^2 - 8x < 60$, ed aggiungendo i quadrati della metà del coefficiente, ſarà $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 76$. Supponiamo ora per trovare le radici, che il primo quadrato ſia maggiore di $\frac{289}{4}$, ed il ſecondo quadrato ſia minore di 64, i quali quadrati perfetti ſono i più proſſimi ai numeri $\frac{265}{4}$, e 76, che non ſono quadrati, ed avremo $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ $>$

$> \frac{289}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 64$, ed eſtratte le radici, ſarà $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$, o ſia $x > \frac{22}{2} = 11$, $x < 12$. Trovati dunque i limiti di x, convien procurare che $x^2 - 60$ ſia un numero quadrato. Si ſupponga $x^2 - 60 = \overline{x - y}^2 = x^2 - 2xy + y^2$, ſarà $x = \frac{y^2 + 60}{2y}$: ma x dee eſſere maggiore di 11, e minore di 12; dunque il valore di $\frac{y^2 + 60}{2y}$ ſta fra l'11, e'l 12.

Per la prima di queſte condizioni $\overline{y - 11}^2 > 121 - 60 = 61$ (23): ſuppongaſi $\overline{y - 11}^2 > 64$, ſarà $y - 11 > 8$, ed $y > 19$. Eſſendo poi per la ſeconda condizione $\overline{y - 12}^2 < 144 - 60 = 84$, ſe ſuppongaſi $\overline{y - 12}^2 < 81$, ſarà $y - 12 < 9$, ed $y < 21$. Ora poichè y è maggiore di 19, e minore di 21, vediamo ſe ponendolo $= 20$ ſi ſciolga il problema. Dovrà dunque eſſere $x^2 - 60 = \overline{x - 20}^2 = x^2 - 40x + 400$, o ſia $x = \frac{460}{40} = 11\frac{1}{2}$. Convien dunque dire, che il numero delle miſure ſia $11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$, il cui quadrato è $\frac{529}{4}$, da cui in fatti ſottraendo $60 = \frac{240}{4}$, il reſiduo ſarà $\frac{289}{4}$, numero quadrato, la cui radice è $\frac{17}{2}$; dunque il numero de paoli è $\frac{289}{4} = 72\frac{1}{4}$.

XI. Reſta ora da trovare il numero delle miſure di ciaſcuna ſorte. Il numero di quelle che coſtan 5 ſia z, ſarà il loro valore $5z$; il numero delle altre ſarà neceſ-

ſa-

sariamente $11\frac{1}{2} - z$, ed il valore corrispondente $92 - 8z$, e perciò il prezzo di tutte insieme $92 - 3z$: ma questo esser dee $= 72\frac{1}{4}$; dunque $92 - 3z = 72\frac{1}{4}$, e però $3z = 19\frac{3}{4}$, e $z = 6\frac{7}{12}$, numero delle misure di cui ciascuna è del valore di 5. Se questo numero sottraggasi da $11\frac{1}{2}$, il residuo sarà $4\frac{11}{12}$, che è il numero delle altre. Di questi problemi, i quali come ognuno vede richiedono non piccola industria, oltre Diofanto, ed i Commentatori di lui Xilandro, Bachet, e Fermat, ne hanno con ingegno trattato Prestero, Ozanam, e Sonderson.

CAPO VIII.

Costruzione dei Problemi geometrici determinati del primo, e secondo grado.

I. Quando abbiasi in animo applicare l'operazioni algebraiche alla soluzione de' problemi geometrici, fa d'uopo esprimere le quantità di questi per le lettere dell' Alfabeto, indi far passaggio all'equazioni coll' ajuto delle condizioni del problema. Queste a tal fine si dovranno attentamente considerare, imperciocchè quantunque non sia cosa difficile qualche fiata ottenere l'equazioni che si desiderano, non di rado tutta volta accade, che a ciò si richiegga riflessione, ed artificio, come condurre parallele, alzare perpendicolari, formare angoli, delineare circoli,

coli; conviene ancora rivolgersi a' triangoli simili, agli angoli costanti, al celebre teorema pittagorico, cioè alla prop. 47 del lib. 1. di Euclide &c. Ne havvi regola generale che possa farci la scorta, onde tutte le speranze sono nell'esercizio, e nell'industria.

II. Se l'equazioni ritrovate non passano il grado secondo, si sanno già sciorre, cioè si sà determinare il valore dell'incognita espresso con sole quantità cognite; non per tanto trattandosi di problemi geometrici l'operazione è compita, bisogna inoltre esprimere con quantità geometriche il valore algebraico dell'incognita, il che non essendo senza difficoltà, perciò daremo alcune regole, che vengono sotto il nome di *costruzioni*, o *luoghi geometrici*, de' quali a questo capo appartengono sol quelli del primo, e secondo grado.

III. Come nelle equazioni di primo grado il valore analitico dell'incognita s'ottiene colla somma, colla sottrazione, moltiplicazione, e divisione, così il valor geometrico s'ottiene colla somma, e sottrazione delle linee, o al più col ritrovare la terza, o la quarta proporzionale. Sia $x = a - b + c$: dalla somma delle due rette $a + c$ sottratta b, il residuo sarà l'incognita x. Sia $x = \frac{ab}{c}$: colle operazioni geometriche volgari dopo le rette c, a, b si ritrovi la quarta proporzionale, e questa sarà la x; perchè dovendo essere il rettangolo di c in questa quarta proporzionale, uguale al rettangolo di a in b, sarà questa quarta proporzionale in $c = ab$, e perciò sarà essa $= \frac{ab}{c} = x$. Sia $x = \frac{cc - bb}{c + d}$; il numeratore di questa frazione si può risolvere in due fattori $c - b$, $c + b$, onde sia $x = \frac{\quad}{c + b}$.

$\frac{\overline{a+b}\,.\,\overline{c-b}}{c-d}$: ſi ritrovi la quarta proporzionale dopo le tre rette $c-d$, $c-b$, $c+b$, e queſta ſarà l'x. Sia $x=\frac{ab}{c}+\frac{bd}{n}$: ſi trovi la quarta proporzionale dopo le tre rette c, a, b, che chiamo f, dipoi ſi determini l' altra dopo le tre rette n, b, d, che chiamo g, e ſarà $x=f+g$, cioè uguale alla ſomma delle due rette $f+g$.

IV. Quando il numeratore della frazione non può riſolverſi in due fattori lineari, allora vi è biſogno di qualche artificio. Sia $x=\frac{ab+cd}{m+n}$: ſi prenda una retta d' uno dei due termini del numeratore, per eſempio a, e ſi trovi la quarta proporzionale dopo queſta, e le due rette c, d dell' altro termine, che chiamo f; ſarà $af=cd$, e quindi $x=\frac{ab+af}{m+n}$: dopo $m+n$, $b+f$, a, trovata la quarta proporzionale, avremo la x. Sia $x=\frac{fdcn}{abm}$; queſta frazione ſi può conſiderare come il prodotto delle due frazioni $\frac{fd}{a}\cdot\frac{cn}{b}$ diviſo per m: ſi trovino le due quarte proporzionali $\frac{fd}{a}$, $\frac{cn}{b}$, la prima delle quali chiamo p, l'altra q, e ſarà $x=\frac{pq}{m}$; trovata poi dopo le tre rette m, p, q la quarta proporzionale, ſarà queſta la x. Sia $x=\frac{aa+bb}{c}$; avremo $x=\frac{aa}{c}+\frac{bb}{c}$: ſi trovino le due terze continue proporzionali dopo c, a, e dopo c, b, la ſomma loro ſarà la x. Sia $x = \frac{abc - def}{gh + ki}$: ſi faccia $ef = am$, $gh = an$, $ki = ap$, acciocchè ſia l' equazione $x = \frac{abc - adm}{an + ap}$, cioè $x = \frac{bc - dm}{n + p}$: ſi ponga di nuovo $dm = bq$, acciocchè ſia $x = \frac{bc - bq}{n + p}$, e ſi troverà finalmente la x quarta proporzionale dopo le rette $n + p$, $c - q$, b. Le rette m, n, p, q ſi determinano col ritrovare le quarte proporzionali: così per eſempio ſarà $m = \frac{ef}{a}$ quarta proporzionale dopo le rette a, e, f, e lo ſteſſo ſi intende facilmente dell' altre.

V. Si oſſervi, che in tutti gli addotti eſempj le dimenſioni nei termini del numeratore ſono d' un grado ſuperiore alle dimenſioni del denominatore; ma ſempre ciò non ſi verifica, perchè avviene che alle volte nei termini del numeratore ſiavi ugual numero di lettere, alle volte minore, che nel denominatore, come ſarebbe in $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{nn}$, nel qual caſo a non ſmarrirſi è da ſapere, che ciò ſuccede quando tra le rette appartenenti al problema o ve n' è una arbitraria, che ſi conſidera come unità, o ve n' è una denominata coll' unità, onde quante dimenzioni mancano al biſogno, altrettante debbono eſſere rimeſſe dall' unità: così per trovare la retta $\frac{a}{b}$ ſi faccia $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b}$, per trovare la retta $\frac{b}{nn}$ ſi ponga $\frac{b}{nn} = \frac{b \cdot 1 \cdot 1}{nn}$, per la retta $\frac{p + nn}{qq + rr}$ ſi ſcriva $\frac{p \cdot 1 \cdot 1 + nn \cdot 1}{qq + rr}$, e per 1 s' intentende una retta arbitraria, ovvero quella denominata 1, come si rileverà dal problema, e poi si operi al solito: lo stesso milita se le dimensioni necessarie mancano nel denominatore. Con questi metodi senza dubbio verremo al possesso di tutti i valori geometrici corrispondenti ai valori analitici nelle equazioni del primo grado.

VI. Rivolgendoci ora alle equazioni del secondo grado, comecchè queste si sciolgono colla estrazione delle radici quadrate, contenendo perciò il valore dell' incognita quantità radicali del secondo grado, fa di mestiere insegnare come queste geometricamente si esprimano. Sia $x = \sqrt{ab}$: si alzi a quadrato, e sarà $xx = ab$; dunque sarà $a : x :: x : b$, e perciò x, o sia $\sqrt{ab}$ sarà media proporzionale fra a, e b; la quale si ritrovi coi soliti metodi geometrici.

VII. Sia $x = \sqrt{aa + bb}$ (*Fig.*1. *Tav.I.*). Si mettano ad angolo retto le due linee rette AB, BC, e sia $AB = a$, $BC = b$, e si conduca AC. Per la proposizione 47 del libro primo di Euclide sarà il quadrato $AC^2 = AB^2 + BC^2$, e quindi sarà $AC^2 = aa + bb$, e la $\sqrt{AC^2}$, cioè AC, uguale a $\sqrt{aa + bb}$; sarà dunque x uguale ad AC, cioè uguale all' ipotenusa del triangolo rettangolo, i cateti di cui sono le rette a, e b.

VIII. Sia $x = \sqrt{cc - aa}$. Si descriva il semicircolo ACB (*Fig.*2. *Tav.I.*) col diametro AB uguale alla retta c, e fatto centro in B, coll' intervallo BC uguale alla retta a si delinei un arco, che seghi il semicircolo in C, e si tiri la CA. Per la prop. 31 del lib. 3. di Euclide l'angolo ACB è retto; dunque per la 47 del lib. 1. sarà $AB^2 = AC^2 + BC^2$, cioè $AB^2 - BC^2$

$= AC^2$; dunque $cc - aa = AC^2$, ed in conseguenza $x = \sqrt{AC^2} = AC$. Altro adunque non è $\sqrt{cc-aa}$ se non se il lato del triangolo rettangolo, l' ipotenusa di cui è uguale a c, ed un cateto uguale ad a. Le tre formule fin quì costruite sono generali, ed a queste si riducono con picciola industria tutte le radici quadratiche.

IX. Sia $x = \sqrt{\frac{a^3}{b} + cd}$: questa si può ridurre alla prima formula nella maniera che segue. Si faccia $\frac{a^2}{b} = f$, col ritrovare la terza continua proporzionale dopo b, ed a, e colla sostituzione si otterrà $x = \sqrt{af + cd}$: si ponga $cd = fg$, determinando la retta g col trovare la quarta proporzionale dopo f, c, d, e fatta di nuovo la sostituzione, sarà $x = \sqrt{af + gf} = \sqrt{f . \overline{a + g}}$, e quindi x sarà media proporzionale tra le due rette f, ed $a + g$. Si rifletta, che si poteva costruire la formula dopo che si ottenne colla prima sostituzione $x = \sqrt{af + cd}$, col trovare due medie proporzionali tra a, f, e tra c, d, e con mettere quelle ad angolo retto; imperciocchè condotta l' ipotenusa, sarebbe questa uguale a $\sqrt{af + cd}$.

X. Sia $x = \sqrt{aa + bc}$; posta $bc = nn$, sarà $x = \sqrt{aa + nn}$. Sia $x = \sqrt{aa + bb - cc - nn}$: si faccia $aa + bb = ff$, $cc + nn = gg$, e sarà $x = \sqrt{ff - gg}$, la quale formula è la terza generale. Sia $x = \sqrt{aa + \sqrt{c^4 + b^4}}$: si faccia $bb = cf$, sarà $b^4 = ccff$, e $\sqrt{c^4 + b^4} = \sqrt{c^2 f^2 + c^4} = c\sqrt{ff + cc}$ per lo §. 17. del

del Cap. 3: di nuovo si faccia $\sqrt{ff+cc}=g$, sarà $\sqrt{b^4+c^4}=cg$; dunque $x=\sqrt{aa+cg}$, la quale si sà costruire.

XI. Avvertasi, che le dimensioni delle quantità esistenti sotto il segno radicale quadratico debbono essere due, perchè così estratte le radici si trova una quantità lineare uguale ad x; e se qualche termine fosse espresso con frazione, allora la dimensione del numeratore meno quella del denominatore dee essere similmente del secondo grado. Tal condizione non può mancare, purchè nel problema non siavi qualche retta arbitraria, o qualcuna denominata 1, nel qual caso si suppliscano le dimensioni necessarie, come si è fatto trattando della costruzione delle equazioni del primo grado.

XII. Quantunque le cose fin quì dette siano bastevoli alla costruzione geometrica di qualunque valore analitico o lineare, o radicale del grado secondo; ciò non ostante spesso si urta in costruzioni lunghe, e poco eleganti, le quali per altro si possono evitare col ben considerare le circostanze del problema, collo scegliere certe linee, certe posizioni di rette, certi angoli, che fanno più al proposito; al che il solo esercizio, e la sola industria può servire di guida.

XIII. A rendere manifesto quanto vaglia l' industria in queste materie, esponiamo un altro metodo di costruire l' equazioni del secondo grado, di cui n' è l' Autore il dottissimo Rabuelio. Si ha dalla Geometria, (*Fig.* 3. *Tav.* I.) che se la linea GH seghi i due circoli concentrici ABC, GHF, la porzione GA compresa tra i due perimetri da una parte, sia uguale alla porzione BH compresa tra i medesimi dall'altra. Ciò posto, per costruire l' equazione $zz-az=bc$, tira-

tirate a capriccio le due rette EF, GH, che si seghino nel punto A, e presa in una la $AB = a$, e nell' altra la $AF = b$, ed $FC = c$, per i tre punti A, B, C si delinei un circolo, il cui centro sia D: poi coll' intervallo DF si descriva un altro circolo concentrico al primo, il quale segherà AB nei punti G, H, ed AC in E: dico, che AH sarà la radice positiva, ed AG la negativa della proposta equazione. Imperocchè abbiamo $AE = FC = c$; dunque il rettangolo $EAF = bc$: inoltre chiamata $AH = z$, sarà $GA = BH = z - a$, ed il rettangolo $GAH = zz - az$; onde sarà $zz - az = bc$ per la 35 prop. di Euclide del lib. 3, che è appunto la proposta equazione: e se si chiami $AG = -z$, sarà $AH = a - z$, ed il rettangolo $GAH = zz - az = bc$, come sopra; adunque AH, ed AG sono le due radici z, e $-z$ della proposta equazione. Se si abbia da costruire $zz + az = bc$, la costruzione è la stessa con questa sola differenza, che AG è la radice positiva, AH la negativa.

XIV. Sia da costruirsi l'equazione $zz - az = -bc$ (*Fig.4.Tav.I.*). Condotte a qualunque angolo le rette AB, AC, nella prima si prenda $AB = a$, nella seconda $AF = b$, ed $FC = c$, e per i tre punti A, B, C si descriva un cerchio, il centro di cui sia D: coll' intervallo DF si delinei un altro cerchio, che segherà la retta AB nei punti G, H, e la retta AC in E: dico, che le due AH, ed AG sono le due radici positive della nostra equazione, il che si dimostra come sopra. La stessa costruzione serve per l' equazione $zz + az = -bc$, col divario, che le AH, ed AG saranno radici negative. In questa avviene che se $\frac{aa}{4} < bc$, il circolo descritto col raggio DF non seghi

la

la retta AB (24); il che indica eſſere immaginarie le radici della propoſta equazione, e per ciò eſſere impoſſibile la ſoluzione del problema.

CAPO IX.

Si ſciolgono alcuni Problemi geometrici determinati di primo, e di ſecondo grado.

I. PRoblema primo. Eſſendo data la retta AB (*Fig.5.Tav.1.*) diviſa in C comunque ſiaſi, conviene allungarla verſo E per tal modo, che il rettangolo AEB ſia eguale al quadrato CE. Pongaſi $AB = a$, $CB = b$, e l'incognita $BE = x$. Dovendo eſſere $AE.EB = CE^2$, ſarà $\overline{a+x}.x = \overline{b+x}^2$, cioè $ax + xx = b^2 + 2bx + x^2$, o ſia $ax - 2bx = bb$, onde $x = \frac{bb}{a-2b}$; è dunque $a - 2b : b :: b : x$, la quale analogia dimoſtra, che l'incognita $BE = x$ è la terza proporzionale ad $a - 2b$, e b. Quindi ne naſce queſta coſtruzione.

II. Si prenda $CD = b$, affinchè ſia $AD = a - 2b$: dai punti C, B ſi alzino due parallele CL, BH, la prima delle quali ſia $= AD$, l'altra $= CB$, ed i punti L, B ſi congiungano colla retta LB: a queſta ſi tiri una parallela HE, che concorra colla retta AB prodotta nel punto E; queſta determinerà l'incognita BE che ſi cercava. Poichè eſſendo ſimili i triangoli LCB, HBE, ſarà $CL = a - 2b : CB = b :: BH = b : BE = \frac{bb}{a-2b}$.

III. Si dimoſtra anche col metodo ſintetico. Per la coſtruzione è $AD = CL : DC = CB :: CB = BH : BE$;

BE; dunque componendo
$AC : CB :: CE : BE$, ed alternando
$AC : CE :: CB : BE$, e componendo
$AE : CE :: CE : BE$; dunque CE è media proporzionale fra AE, e BE; dunque $AE . BE = CE^2$, il che doveasi dimostrare.

IV. Quì si vogliono fare alcune osservazioni. Essendo $b < \frac{a}{2}$, il punto D sempre caderà tra A, e C, ed allora ha sempre luogo la nostra costruzione; ma se fosse $b = \frac{a}{2}$, il punto D caderà in A, e sarà $AD = o$, e perciò anche $CL = o$, ed il punto L caderà in C, e la retta LB giacerà su la retta CB; dunque HE parallela ad LB non si incontrerà mai colla retta AB. Finalmente essendo $b > \frac{a}{2}$, il punto D caderà oltre il punto A, e la linea AD, comecchè sotto il zero, sarà negativa, e perciò la CL dovrà dal punto C condursi nella parte opposta alla CL positiva, cioè sotto AB, dal che ne verrà, che HE parallela ad LB taglierà la linea AB nella parte opposta, cioè dalla parte del punto A.

V. Problema secondo. Dati due circoli, i cui centri sono A, B, (*Fig. 6. Tav. I.*) tirare una linea che gli tocchi amendue. Sia CD la tangente bramata, che si incontri colla linea AB nel punto E: si tirino ai punti del contatto le perpendicolari AC, BD, e pongasi $AB = a$, $AC = R$, $BD = r$, $BE = x$: essendo retti gli angoli C, D, i raggi AC, BD saranno paralleli; dunque sono simili i triangoli EAC, EBD, e sarà $R : r :: a + x : x$, e dividendo $R - r : r :: a : x$. Di quì si ha una facilissima costruzione. Si tirino comunque

que

que due raggi AL, BM, purchè ſieno paralleli, ed i punti L, M ſi congiungano colla retta LM, che continuata dalla parte M taglierà la retta AB in E, e queſto ſarà il punto d' onde la tangente tirata ad un circolo, ſarà tangente ancora dell' altro, e ſcioglierà il problema; poichè eſſendo ſimili i triangoli EAL, EBM, ſarà $LA : MB :: AE : BE$; dunque dividendo $LA - MB : MB :: AB : BE$, o ſia $R - r : r :: a : BE = x$.

VI. E' chiaro che dal punto E potrà tirarſi un' altra tangente Ed, che ſarà tangente dell' altro circolo nel punto c. E' chiaro ancora che queſta ſoluzione è buona per tutti i circoli, che hanno i diametri diſuguali, nel qual caſo la tangente comune concorre colla linea, che congiunge i due centri dalla parte del circolo minore: che ſe i circoli foſſero uguali, divenendo allora la tangente parallela alla linea AB, il punto E ſarà infinitamente diſtante; ma in queſta ipoteſi ſi rende più facile la ſoluzione; poichè allora il raggio perpendicolare alla linea AB in A, dove taglia la circonferenza, ivi determina il punto da cui ſi dee tirare la tangente comune.

VII. Sebbene dal punto E non poſſano tirarſi più di due tangenti, non ſi creda però che due ſoltanto ſieno le ſoluzioni del problema; perciocchè due altre tangenti poſſono tirarſi da un punto F poſto fra B, ed A: nel qual caſo ponendo $BF = x$, facilmente ſi vedrà eſſere $R : r :: a - x : x$, e componendo $R + r : r :: a : x$. Ora producendo il raggio MB in N, e congiungendo i due punti L, N colla linea LN, il punto F in cui queſta taglia AB ſarà quello, da cui tirando le tangenti ad un de circoli, ſaran tangenti ancor dell' altro, e le due nuove tangenti ſaranno Kh, kH. Dal che ſi vede, che queſto problema benchè ſi

N eſ-

esprima con una equazione di primo grado, pure si ritrova avere quattro diverse soluzioni: le due che dà il punto F sono immaginarie se i circoli si taglino; se poi un cerchio cada dentro l' altro sono immaginarie tutte quante.

VIII. Problema terzo. Dato il cerchio AEF, (*Fig.* 7. *Tav.I.*) e fuori di esso il punto B congiunto col centro dalla retta CB, a cui è perpendicolare BD, si cerca in questa un punto D tale, che tirando dal centro la linea CD, sia la $DE = DB$. Pongasi il raggio $CA = r$, $BA = a$, $DB = DE = x$; sarà $CB = r + a$, $CD = r + x$. Essendo retto l' angolo B, è $CD^2 = CB^2 + DB^2$, o sia $\overline{r+x}^2 = \overline{r+a}^2 + xx$, o sia $rr + 2rx + xx = rr + 2ra + aa + xx$, o sia $2rx = 2ra + aa$, donde si ha questa proporzione $2r : 2r + a :: a : x$.

IX. Questi termini analitici ci portano ad una elegante costruzione. Producendo il raggio AC fino al punto F della circonferenza, sarà $FA = 2r$, $FB = 2r + a$; alzando dunque sulla retta AB la perpendicolare $AG = AB = a$, e congiunti i punti F, G colla retta FG, questa linea prodotta che sia, taglierà la retta BD nel punto D, che si cercava. Poichè per la somiglianza de' triangoli sarà $FA = 2r : FB = 2r + a :: AG = a : BD = x$; dunque tirata la linea CD, sarà la DE, compresa fra il punto D ed il cerchio, uguale a DB.

X. Il Problema potrebbe proporsi più generalmente così. Stante le dette condizioni, trovare un punto D, a cui tirata la linea CD, sia $DB : DE :: a : n$. Allora ponendo $DB = x$, sarà $DE = \frac{nx}{a}$, e $CD = r + \frac{nx}{a}$;

e per-e perciò essendo retto l'angolo B, sarà $\overline{r+\frac{nx}{a}}^2 = \overline{r+a}^2 + x^2$, dalla quale equazione, usando de' soliti metodi, si trarrebbe il valore di x, che sarebbe $x = \pm$

$$\frac{(n^2a^4 + 2n^2a^3r - a^6 - 2a^5r + n^2a^2r^2)^{\frac{1}{2}} - nar}{n^2 - a^2}.$$

Si può quindi ricavare la costruzione, ma saria poco semplice, onde volendo aver riguardo alla eleganza, rivolgiamo l'animo ad un altro genere di analisi.

XI. Suppongasi che la linea CED (*Fig.* 8. *Tav.* I.) ci dia la soluzione del problema. Si tiri il raggio CO parallelo alla retta BD, a cui per lo punto E si tiri la perpendicolare FEG, e la parallela EH. Chiamisi $CB = FG = a$, il raggio $= r$, $FB = EH = x$, $EF = y$, onde sarà $EG = HC = a - y$: ed essendo $CH : EH :: CB : DB$, sarà $a - y : x :: a : DB = \frac{ax}{a-y}$; dunque $DF = \frac{ax}{a-y} - x = \frac{xy}{a-y}$: e per la somiglianza de' triangoli CEG, DEF, è $CG : CE :: DF : DE$; dunque $x : r :: \frac{xy}{a-y} : DE = \frac{ry}{a-y}$. Ora per la condizion del problema $DB : DE :: a : n$; dunque $\frac{ax}{a-y} : \frac{ry}{a-y} :: a : n$, o sia $ax : ry :: a : n$.

XII. In vigor di questa analogia si potrebbe fare sparire una delle due incognite, giacchè essendo $CE^2 = CH^2 + EH^2$, abbiamo quest' altra equazione $rr = \overline{a-y}^2 + xx$, ma questo metodo ci porterebbe ad una equazione di secondo grado, e la costruzione ne riuscirebbe alquanto intrigata; onde per averla più sempliplice battiamo un altra ſtrada. Eſſendo $FB = x : FE = y :: r : n$ (25), dal punto O tirata la linea OM parallela a CB, onde ſia $MB = r$, ſi prenda nella linea OM la parte $MN = n$, e ſi congiungano i due punti B, N colla linea BN: da quale che ſiaſi punto della retta BN ſi tiri una normale ad MB, come per eſempio QP, ſarà ſempre $PB : PQ :: r : n$; dunque il punto E ſarà neceſſariamente nella linea BN: ma queſto ſteſſo punto dee eſſere nella circonferenza del circolo; dunque ſarà dove ſi tagliano il circolo, e la linea BN; dunque ſe per lo punto E ſi tiri la linea CED, ſarà queſta la linea cercata.

XIII. Ma ſi vogliono diviſare alquanto le varie determinazioni. Dal punto B (*Fig.* 9. *Tav. I.*) ſi tiri la tangente BK, la quale producendoſi taglierà OM in L; ſarà $KB = \sqrt{aa - rr}$, il che è evidente tirato che ſiaſi il raggio CK. Di più i triangoli BKC, LMB ſono ſimili; dunque $KC : KB :: MB : ML$: ma $KC = MB$; dunque $ML = KB = \sqrt{aa - rr}$. Sicchè eſſendo $n = \sqrt{aa - rr}$, la linea BN paſſa ad eſſere la linea BL, e tocca il circolo, e ſi ha ſoltanto una ſoluzion del problema. Se $n < \sqrt{aa - rr}$, come per eſempio $M2N$, allora $B2N$ non incontrando mai il circolo, tutte le ſoluzioni ſaranno immaginarie. Se poi foſſe $n > \sqrt{aa - rr}$, ma $< a$, come MN, da BN ſi avranno due ſoluzioni, avendoſi N, ed E, due interſecazioni del circolo fra i punti O, ed A. Se pongaſi $n = a$, cioè $= OM$, correndo allora la proporzion d'uguaglianza, oltre il punto che abbiamo trovato nel problema ſciolto di ſopra, vi ſarà ancora il punto O, per cui tirata eſſendo la linea CO, va queſta all' infinito ſenza mai incontrarſi colla linea BM, e così le linee, le quali deo-

deono eſſere uguali divengono infinite. Se finalmente ſarà $n > a$, come $M\,3\,N$, tirando la linea $B\,3\,N$, queſta taglierà il circolo fra i punti A, O in $3\,E$, la qual interſecazione ci dà una ſoluzione ſomigliante alle prime; e la taglierà ancora nel punto I di là dai punti N, O, da cui tirata la linea $I\,C$, che paſſi pel centro, e s' incontri colla linea $M\,B$ in R, ſi dimoſtra, che ſarà $B\,R : R\,I :: B\,C : M\,3\,N :: a : n$ (26); e l' eſpreſſioni delle due rette $B\,R$, $R\,I$, che ſono $\frac{ax}{a-y}$, $\frac{ry}{a-y}$, per eſſere $y > a$, ſaranno negative.

XIV. Chi porrà mente a queſta analiſi, vedrà che eſſa è di un' ampliſſima eſtenſione; imperciocchè non è neceſſario che l' angolo $M\,B\,C$ ſia retto (*Fig.* 8.), ma baſta che le linee $M\,O$, $F\,G$, $P\,Q$ ſieno parallele a $B\,C$. Oſſervisi ancora l' arte onde mediante la interſecazione del circolo, e di una retta ſi perviene a queſta elegante coſtruzione. Sì fatti metodi ſono utiliſſimi allora quando nel problema vien dato un circolo.

XV. Noi abbiamo ſeguite queſte traccie particolarmente per manifeſtare gli artificii dell' analiſi, poichè a prima viſta non ſempre vien fatto di ſcorgere il metodo più ſemplice; del rimanente queſto problema così preſtamente ſi ſcioglie. Dal centro C (*Fig.* 10. *Tav. I.*) ſi tiri la linea $C\,O\,R$ parallela a $B\,D$: ſi tagli la linea $C\,R$ in modo, che ſia $C\,O : C\,R :: n : a$; e ſi congiungano i due punti B, R colla linea $B\,R$: per lo punto E, dove queſta taglia il circolo, tirata la linea $C\,E\,D$, queſta determinerà il punto D. Imperciocchè eſſendo ſimili i triangoli $C\,E\,R$, $D\,E\,B$, ſi avrà $D\,E : D\,B :: C\,E = C\,O : C\,R$, che è la ragione data.

XVI. Problema quarto. Date nella retta $A\,B$ (*Fig.* 11. *Tav. II.*) le due parti, $A\,C$ maggiore, $C\,B$ minore, ed eret-

eretti sopra di esse due triangoli equilateri, se ne congiungano i vertici colla retta EF, che prodotta essendo, si incontrerà colla linea AB, anch' essa prodotta, in D. Fatto centro in questo punto D, col raggio DC si descriva il circolo CN: si cerca nella circonferenza di lui un punto M, da cui tirate le linee MA, MB, sia $AC : CB :: MA : MB$. Prima si trovi il valore del raggio CD. Per la somiglianza de' triangoli DAE, DCF sarà $AE : CF$, o sia $AC : CB :: AD : CD$; dunque dividendo $AC - CB : CB :: AC : CD$, ed in termini analitici $a - b : b :: a : CD = \frac{ab}{a-b}$, chiamando $AC = a$, $CB = b$. Sia MP normale ad AB, e $CP = x$, $MP = y$; l'equazione al circolo espressa sarà dalla formola $\frac{2ab}{a-b} . x - xx = yy$ (27): ed essendo retto l'angolo P, sarà $AM = \sqrt{\overline{a+x}^2 + yy}$, e per la stessa ragione $MB = \sqrt{\overline{b-x}^2 + yy}$; dunque per la condizione del problema, che richiede $AC : CB :: MA : MB$, sarà $a : b :: \sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} : \sqrt{\overline{b-x}^2 + yy}$, o sia $a^2 : b^2 :: \overline{a+x}^2 + y^2 : \overline{b-x}^2 + y^2$; ed elevando al quadrato i due binomj, e sostituendo ad yy il suo valore espresso dall' equazione al circolo, sarà

$$a^2 : b^2 :: aa + 2ax + xx + \frac{2abx}{a-b} - xx : bb - 2bx + xx + \frac{2abx}{a-b} - xx ::$$

$$aa + \frac{2a^2x}{a-b} : bb + \frac{2b^2x}{a-b},$$

e permutando in prima, e poi dividendo $a^2 : \frac{2a^2x}{a-b} :: b^2 : \frac{2b^2x}{a-b}$, o sia $a-b$

$: x ::$

$:x:a - b:x$, nella qual proporzionalità essendo i termini identici, si scopre che questo è un teorema, non già un problema, onde dovunque prendasi il punto M, sarà sempre $AC : CB :: MA : MB$.

XVII. Problema quinto. Su la base BC (*Fig.* 12. *Tav.II.*) ergere un triangolo isoscele, il cui angolo al vertice sia la metà dell' angolo alla base. Questo problema, che fu già sciolto da Euclide, si propone quì per far vedere come si dee cercare l' uso, che hanno le radici dell' equazione. L' uno de' due angoli alla base del triangolo ABC si divida in due parti uguali dalla linea CD; così i tre angoli A, BCD, ACD saranno eguali, ed il triangolo ACB sarà simile al triangolo CDB, essendo comune l' angolo B, e l' angolo A eguale all' angolo DCB. Quindi ponendosi $AC = AB = x$, $BC = a$, sarà $x : a :: a : BD = \frac{aa}{x}$: ma $DA = CD = BC = a$; dunque $BA = \frac{aa}{x} + a = x$; dunque $xx - ax = aa$, la qual equazione risoluta ci darà $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$. A cagion de' segni $\pm$ è chiaro, che due sono le radici: l'una, e l'altra così geometricamente si determina. Dal punto B si tiri la linea $BE = \frac{a}{2}$ perpendicolare alla base: poi si congiunga il punto E col punto C tirando la linea $EC = \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$, a cui se si aggiunga $EF = \frac{a}{2}$, sarà $CF = \frac{a}{2} + \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$, e sottraendo $Ef = \frac{a}{2}$, sarà

Cf

$Cf = \frac{a}{2} - \sqrt{aa + \frac{aa}{4}}$, che sono le due radici dell' equazione, la prima positiva, la seconda negativa. Una sola però scioglie il problema, ed è la positiva CF, poichè costruito con questa il triangolo BAC, e tagliata $AD = a$, sarà $BD = \sqrt{aa + \frac{aa}{4}} - \frac{a}{2}$, che è appunto la terza proporzionale dopo AB, BC (28); dunque condotta CD, sarà il triangolo BCD simile al triangolo BAC; onde sarà $BC = DC = DA$, e però sarà l' angolo $ACB = ABC = BDC = A + DCA$, e l' angolo $A = DCA$; dunque l' angolo ACB è doppio dell' angolo A. Nel secondo caso, fatto colla Cf il triangolo BAC (*Fig.* 13. *Tav.II.*), se si prolunghi BA in D, onde sia $AD = a$, saranno, come si rileva dai valori analitici, BD, BC, BA in proporzion continua (29), onde i triangoli BAC, BCD saranno simili; dunque gli angoli B, D, ACB sono eguali: ma l' angolo DCA, o sia DAC è eguale a i due angoli B, ACB presi insieme, e l' angolo CAB è parimente eguale a i due angoli DCA, D presi insieme; dunque è l' angolo $CAB = B + D + ACB$, o sia, che viene a riuscir lo stesso, l' angolo CAB al vertice, è triplo dell' angolo alla base. Dunque insieme col proposto problema se ne è sciolto pure un altro.

XVIII. Per intendere la cagione, ond' è che delle due radici trovate l' una scioglie il primo problema, l' altra ne scioglie un altro assai diverso dal primo, basta osservare in che maniera siamo pervenuti all' equazione. Abbiamo fatto l' angolo $BCD = BAC$, d' onde si deduce l' uguaglianza delle linee BC, CD, DA, la qual costruzione se facciasi ancora in riguardo al secondo triangolo, si rileverà similmente essere le tre

tre rette BC, CD, DA uguali. Inferimmo inoltre essere $AB:BC::BC:BD$, analogia propria anche del secondo problema. Perciò essendo nel primo caso $BD = x - a$, nel secondo $= x + a$, l'equazione del primo problema sarà $xx - ax = aa$, l'equazione del secondo $xx + ax = aa$, che si cangia nella prima ponendo x negativa. Essendo dunque tutte queste cose comuni all'uno, e all'altro problema, non è da maravigliarsi che dalla stessa equazione si tragga la soluzion di amendue.

XIX. Ma perchè meglio conoscano gli studiosi dell'algebra ciò che importa la diversità delle radici, e perchè apprendano come per diverse strade si può arrivare alla soluzione dello stesso problema, voglio qui soggiungere un altro scioglimento, che serve ai due triangoli isosceli, cioè a quello, che ha l'angolo al vertice la metà dell'angolo alla base, ed a quello che l'ha triplo. (*Fig.* 14, 15. *Tav.* 2.) ABC sia il triangolo ricercato, la cui base BC sia $= a$, il lato $AB = x$. Si conducano le rette AM, AN in maniera, che gli angoli MAB, NAC eguaglino l'angolo BAC, e l'istesse linee si producano fino che incontrino la base BC in D, ed E prodotta quando sia bisogno. Nella prima figura essendo l'angolo $CBA = 2\,BAC = 2\,MAB$, sarà l'angolo $D = BAD$; onde il triangolo ABD è isoscele, come lo è ancora il triangolo ACE: nella seconda figura, essendo l'angolo $BAC = MAB$, e perciò $BAD = B + C$, cioè uguale a due quinti di due retti, e l'angolo B ad un quinto, sarà l'angolo BDA uguale a due quinti; onde il triangolo ABD è isoscele, come lo è il triangolo ACE; dunque sarà $BD = CE = x$, e $BE = a + x$ nella prima figura, ed $= a - x$ nella seconda. Di più i triangoli ABC, EAB sono simili, onde sarà $CB:BA$

:: $BA : BE$, ed analiticamente, nel primo triangolo sarà $a : x :: x : a + x$, ed $xx = ax + aa$; e nel secondo $a : x :: x : a - x$, ed $xx = aa - ax$, delle quali equazioni una nell' altra si converte presa x negativamente.

XX. L'uno, e l'altro triangolo ci danno la divisione della circonferenza in 5 parti uguali; imperciocchè se dentro qualunque circolo si inscriva un triangolo (*Fig.* 16. *Tav.* 2.) ABC isoscele, il cui angolo A sia la metà di ciascuno degli altri due B, C; l'arco BC sarà la quinta parte della circonferenza, e ciascun degli archi AB, AC due quinte. Per lo contrario, iscrivendosi nel circolo un triangolo isoscele ADE, il cui angolo A sia triplo di ciascuno degli angoli D, E; degli archi AD, AE sarà ciascuno la quinta parte della circonferenza, e l' arco $DBCE$ ne conterrà tre quinte parti.

XXI. Problema sesto. Dato fuori del triangolo ABC (*Fig.* 17., e 18. *Tav.* 2.) il punto P, tirare la PQX, che divida il triangolo in ragion data. Per lo punto P ai due lati AB, BC prodotti, fra cui esista il punto P, si tiri MPN parallela al lato AC. Sia $CX = x$, $PM = a$, $CM = b$. Essendo dato il triangolo ABC, e data la ragione, che ha al triangolo CQX, sarà questo pur determinato, che chiamo $= \frac{mm}{2}$; onde la perpendicolare dal punto Q sopra CX sarà $\frac{mm}{x}$, che ancora è $= \frac{CQ \cdot g}{b}$, chiamata g la perpendicolare dal punto M sopra CA; e perciò $\frac{mm}{x} = \frac{CQ \cdot g}{b}$, e $CQ = \frac{bmm}{gx}$: e posto $\frac{mm}{g} = 2c$, sarà $CQ = \frac{2bc}{x}$.

Inol-

Inoltre per la similitudine dei triangoli CQX, MQP, sarà $a \pm x : x :: b : \frac{2bc}{x} :: x : 2c$; la $a + x$ appartiene alla figura prima, $a - x$ alla seconda; dunque $xx \mp 2cx = 2ac$, da cui ne viene $x = \pm c \pm \sqrt{2ac + cc}$. L'ambiguità dei segni dà quattro valori della x; i due in cui esiste $+c$ sono per la figura prima, i due altri per la seconda. Essendo sempre c minore del radicale, questo preso negativamente renderà i due valori della x negativi, i quali non servono al problema, dovendosi prendere in parte opposta a CX, e perciò al triangolo ABC.

XXII. Quì può accadere un caso che merita molta riflessione, e che fa comprendere qual differenza mai siavi fra la soluzione dell' equazione, e quella del problema; poicchè può succedere, che il problema non venga sciolto da alcuna delle radici dell' equazione: e ciò accade quando sia la CX maggiore della CR, determinata tirando per P, B, la PBR, cioè quando sia il triangolo $QXC >$ di BRC. Imperciocchè cadendo per esempio X in $2X$, tirata la $P\,2X$, nasce il triangolo esterno $SB\,2Q$, nel qual caso sarà il triangolo $C\,2Q\,2X$ ad $ABC - C\,2Q\,2X$ in ragion data, il che è ciò, che veramente si domanda all' analisi, ed a che ella esattamente risponde; ma non sarà già diviso il triangolo ABC nella stessa ragione, il che propriamente all' analisi non si è richiesto, ne viene incluso nelle condizioni, che hanno servito all' equazione, e perciò l' analisi non è in obbligo di rispondere. Per schivare questo inconveniente altro non si dee fare, che invertere la ragione data, ed in seguito si dee operare come sopra. Se il triangolo BRC sia maggiore di QXC, e minore di BAR, il problema riceverà due soluzioni, perchè si possono fare due triangoli CQX, $ASzX$ uguali. Se il punto P cada dentro il triangolo, quasi nella stessa maniera il problema può essere sciolto. Da' problemi risoluti in questo capo possono i Giovani bastantemente accorgersi quanto debbano essere scrupolosi nel ritorno dall' Algebra alla Geometria.

CAPO X.

Principj del calcolo dei Seni, e Cosseni circolari, e dell' altre linee trigonometriche.

IL Signor Leonardo Eulero Algebrista di profondo sapere, come a tutti è noto, è stato il primo, che ha introdotto nell' Algebra il calcolo dei Seni, e dei Cosseni, con le altre linee trigonomettiche, adoperandolo con molta felicità nelle ricerche più sublimi, e più ardue. L' utilità di questo novello calcolo è stata subito conosciuta; onde i migliori Analisti di tutte le Nazioni l' hanno abbracciato. Siccome adunque si fa grand' uso di esso, così giudichiamo non solo opportuno, ma necessario esporne, e dimostrarne i principj nella maniera che segue.

I. Sia un circolo (*Fig.* 19. *Tav.* 2.) qualunque $ANBM$, in cui si seghino due diametri AB, MN perpendicolarmente nel centro C, da cui si tiri una retta CSQ, la quale faccia con CA qualunque angolo: dal punto S della intersecazione della retta CQ con il circolo si cali sopra CA la perpendicolare SF, e poi dai punti A, ed N si tirino al circolo le tangenti, le quali vadano a secare la retta CS prodotta nei punti P, e Q. Il raggio CA del circolo si chiama *seno tutto*, e l' esprimeremo

remo

remo per la lettera *r*: la retta *S F* si chiama *seno* dell' arco *A S*, ovvero dell'angolo *A C S*, essendo nei circoli gli angoli al centro proporzionali agli archi; quindi ciò che diremo degli archi, si intende detto ancora degli angoli al centro (quando i punti *F*, *S*, *P*, *Q*, si nominano senza numeri, si intende di parlare di tutti quei punti dove si trovano *F*, *S*, *P*, *Q*; quando poi vi si aggiunge il numero, si intende di parlare di quel punto particolare); questa retta poi *S F* l'esprimeremo per *S c*: la retta *C F* si chiama *cosseno*, e l'esprimeremo per *C c*: la retta *A P* si dice *tangente*, e l'esprimeremo per *T c*: la *N Q* *cotangente*, e l'esprimeremo per *C t c*: la retta *C P* *secante*, e *C Q* *cossecante*, delle quali la prima si esprime *S e c*, la seconda *C s c*. Tutte queste denominazioni delle predette rette si intendono tanto in riguardo all' arco *A S*, quanto all'angolo *A C S*. Gli archi di circolo si nomineranno con le lettere greche; onde *S c*. π significa il seno dell' arco π, *C t c*. φ significa la cotangente dell' arco ϕ. Intorno ai seni, e cosseni conviene notare in primo luogo, che quando il seno *S F* è zero, allora il cosseno *C F* sarà uguale al raggio *C A*, a cui sarà uguale ancora la secante *C P*, la tangente *A P* sarà zero, e la cotangente *N Q* sarà infinita, siccome lo sarà la cossecante *C Q*. Se poi il cosseno *C F* è uguale a zero; la tangente *A P*, e la secante *C P* diventano infinite; il seno poi *F S*, e la cossecante *C Q* diventano uguali al raggio *C N*. Onde quando il seno, o cosseno diventa zero, allora l' altre linee trigonometriche parte diventano zero, parte infinite, e parte uguali al raggio. Quando il seno è uguale al cosseno, allora la tangente ancora è uguale alla cotangente, e la secante alla cossecante, e l' angolo semiretto, e l' arco la metà del quadrante; tutte le quali cose sono per se stesse manifestissime.

II.

II. Esaminiamo adesso ciocchè avviene alle linee trigonometriche nelle varie grandezze degli archi circolari. Posto l'arco $A\,1\,S$ = zero, il seno $1\,F\,1\,S$ pure sarà zero, e il cosseno $C\,1\,F$ sarà positivo, ed uguale al raggio $C\,A$; posto l'arco $A\,1\,S$ minore del quadrante $A\,N$, il seno $1\,F\,1\,S$, e il cosseno $C\,1\,F$ sono ambo positivi; se l'arco $A\,1\,S$ sarà uguale al quadrante $A\,N$, il seno diventerà uguale al raggio $C\,N$, ed il cosseno sarà zero; quando l'arco $A\,2\,S$ diventa maggiore del quadrante, e minore della semicirconferenza, allora il seno $2\,F\,2\,S$ è positivo, ed il cosseno $C\,2\,F$ negativo; diventando l'arco uguale alla semiperiferia $A\,B$, il seno diventa zero, ed il cosseno negativo diventa uguale al raggio $C\,B$. Poniamo presentemente l'arco maggiore della semiperiferia, e minore di tre quarti di essa, come $A\,B\,3\,S$, allora tanto il seno $3\,F\,3\,S$, quanto il cosseno $C\,3\,F$ sarà negativo; quando l'arco è uguale a tre quarti della periferia, come $A\,N\,B\,M$, allora il seno negativo diventa uguale al raggio $C\,M$, ed il cosseno diventa zero; essendo l'arco maggiore di tre quarti della periferia, come $A\,M\,4\,S$, allora il seno $4\,S\,4\,F$ è negativo, ed il cosseno $C\,4\,F$ positivo; diventando finalmente l'arco uguale a tutta la periferia, il seno diventa zero, ed il cosseno positivo diventa uguale al raggio. Se prenderemo un arco uguale a tutta la periferia più l'arco $A\,S$, il seno sarà $F\,S$, ed il cosseno $C\,F$; se l'arco fosse uguale a tre, quattro, ed infinite intiere periferie del circolo più l'arco $A\,S$, lo stesso seno $F\,S$, e cosseno $C\,F$ servirebbero a tutti questi archi infiniti; il che si dee intendere ancora, come è chiaro, della tangente, e cotangente, secante, e cossecante dell'arco $A\,S$.

III. Se poi l'arco si prendesse negativo minore del quadrante, come $A\,4\,S$, questo avrebbe il seno $4\,S\,4\,F$ ne-

negativo, ed il coſſeno poſitivo; onde il ſeno negativo, ed il coſſeno poſitivo indica o un arco poſitivo maggiore di tre quadranti, o un arco negativo minore di un quadrante. Se l' arco negativo è maggiore del quadrante, ma minore della ſemiperiferia, come *A* 3 *S*, il ſeno, ed il coſſeno ſaranno negativi; onde ſeno, e coſſeno negativo ugualmente ſerve o a un arco poſitivo maggiore di due quadranti, e minore di tre, o a un negativo minore di due, ma maggiore di uno. Se l' arco negativo è maggiore di due quadranti, ma minore di tre, come è l'arco *A B* 2 *S*, allora il coſſeno *C* 2 *F* ſarà negativo, ed il ſeno 2 *F* 2 *S* ſarà poſitivo, appunto come quando l'arco *A* 2 *S* poſitivo è maggiore di un quadrante, e minore di due. Finalmente quando l' arco negativo è maggiore di tre quadranti, come *A B* 1 *S*, allora il ſeno 1 *F* 1 *S*, ed il coſſeno *C* 1 *F* ſaranno poſitivi, come appunto quando l'arco *A* 1 *S* poſitivo è minore del quadrante. Noi però in pratica quando avremo ſeno, e coſſeno poſitivo, o ſeno poſitivo, e coſſeno negativo prenderemo gl' archi poſitivi; quando poi avremo ſeno, e coſſeno negativo, o ſeno negativo, e coſſeno poſitivo prenderemo gli archi negativi: e la ragione è, che così verranno ſempre preſi archi minori della ſemiperiferia; onde paſſando dagli archi agli angoli, ſaranno ſempre indicati angoli minori di due retti, il che è neceſſario per ſervirſi dei ſeni nella dottrina dei triangoli.

IV. In riguardo poi alle tangenti, e alle cotangenti, ſe l'arco *A* 1 *S* è poſitivo minore del quadrante, la tangente *A* 1 *P*, e la cotangente *N* 1 *Q* ſono poſitive; ſe l' arco *A* 2 *S* è maggiore di un quadrante, ma minore di due, la tangente *A* 2 *P*, e la cotangente *N* 2 *Q* ſono ambe negative. Ciò forſe recherà maraviglia ai Principianti, la quale ſi diſſiperà ſe riflettano, che

che la tangente del arco dee essere sempre in 2 *P A* 1 *P*, la quale tocca il circolo nel punto *A*, donde l' arco ha principio; e che essa viene determinata dalla sezione *P* del raggio *C S* prodotto colla linea 1 *P* 2 *P*: ciò posto, comecchè è evidente, che il raggio *C* 2 *S* non possa incontrare la retta *A* 1 *P* dalla parte *A* 1 *P*, perciò l' incontrerà dalla parte opposta *A* 2 *P*, e per tale ragione sarà la tangente negativa. Si osservi, che prima di fare questo passaggio, la tangente diventa infinita quando appunto l' arco è uguale al quadrante *A N*. In riguardo poi alla cotangente, la quale sempre si dee ritrovare nella linea 1 *Q N* 2 *Q*, la cosa è chiarissima; sol tanto si noti, che il passaggio dal positivo al negativo si fa per lo zero, il che avviene quando l' arco è uguale al quadrante *A N*. Se l' arco *A* 3 *S* è maggiore di due quadranti, ma minore di tre, allora la tangente, e la cotangente tornano positive; se finalmente l' arco *A* 4 *S* è maggiore di tre quadranti, allora la tangente, e cotangente tornano negative. Se si prenderà l' arco *A* 4 *S* negativo minore del quadrante, si avrà tangente, e cotangente negativa; se l' arco negativo *A* 3 *S* sarà maggiore del quadrante, e minore di due, tangente, e cotangente saranno positive; l' arco *A* 2 *S* negativo maggiore di due quadranti, ma minore di tre, ha tangente, e cotangente negative; finalmente quando l' arco negativo *A* 1 *S* è maggiore di tre quadranti, saranno tangente, e cotangente positive. Onde tangente, e cotangente positiva indica un arco positivo minore del quadrante, o un arco positivo maggiore di due quadranti, e minore di tre, o un arco negativo maggiore del quadrante, e minore di due, o un arco negativo maggiore di tre quadranti. Tangente, e cotangente negativa indica o un arco positivo maggiore del quadrante, e minore di due, o un arco positivo maggiore di tre quadranti, o un arco nega-

ga-

gativo minore del quadrante, o un arco negativo maggiore di due quadranti, e minore di tre; onde ſi raccoglie, che tangente, e cotangente poſitiva, o tangente, e cotangente negativa poſſono ſempre indicare archi poſitivi minori della ſemicirconferenza, ovvero angoli minori di due retti; e che archi, i quali abbiano la tangente poſitiva, e la cotangente negativa, o al roveſcio, ſieno impoſſibili. Finalmente notar ſi dee, che il ſeno FS, la tangente AP, e la ſecante CP tanto ſervono all' arco AS, quanto all' arco BS complemento dell' arco AS alla ſemiperiferia ASB. Onde chiamato qualunque arco μ, e l' angolo retto, o il quadrante ω, ſarà $Sc.\overline{2\omega-\mu} = Sc\,\mu$, $Sc.\overline{-2\omega+\mu} = Sc\,\overline{-\mu} = -Sc\,\mu$, $Cc\,\overline{-\mu} = Cc\,\mu$, $Cc.\overline{2\omega-\mu} = Cc.\overline{-2\omega+\mu} = -Cc\,\mu$: conſimili equazioni ſi poſſono ritrovare per le altre linee trigonometriche.

V. Dalla ſimilitudine dei triangoli FCS, ACP ſi ricavano i ſeguenti Teoremi.

$CF : FS :: CA : AP$, cioè $Cc : Sc :: r : Tc$.
$CF : CS :: CA : CP$, cioè $Cc : r :: r : Sec$.
$FS : AP :: CS : CP$, cioè $Sc : Tc :: r : Sec$.

Dalla ſimilitudine dei triangoli ACP, NQC ſi ricava
$AP : AC :: NC : NQ$, cioè $Tc : r :: r : Ctc$.
$AC : CP :: NQ : QC$, cioè $r : Sec :: Ctc : Csc$.
$AP : PC :: NC : CQ$, cioè $Tc : Sec :: r : Csc$.

Dalla ſimilitudine dei triangoli FCS, NQC ſi ricava
$FS : FC :: CN : NQ$, cioè $Sc : Cc :: r : Ctc$.
$CF : CS :: QN : QC$, cioè $Cc : r :: Ctc : Csc$.
$FS : SC :: CN : CQ$, cioè $Sc : r :: r : Csc$.

VI. Si noti, che ogni qualvolta ſia dato il ſeno SF, ſarà dato ancora il coſſeno CF, e al roveſcio; perchè eſſendo fiſſato il raggio, ſarà $CS^2 = CF^2 + FS^2$, e perciò sarà $r^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{Sc}^2$. Adesso passiamo a queste proposizioni, le quali si deono stimare come il fondamento di questa dottrina.

VII. Proposizione I. Dati i seni PR, QF, (*Fig.* 20. *Tav.* 2.) ed i cosseni CR, CF degli archi PQ, QA, ritrovare il seno PL dell' arco PA uguale alla somma degli archi PQ, QA. Il seno PR si prolunghi fino che vada a segare il raggio CA in T: chiamato l' arco $PQ = \pi$, $QA = \varphi$; per la similitudine dei triangoli CRT, CQF, sarà $Cc\varphi : Sc\varphi :: Cc\pi : RT$; onde RT sarà $= \frac{Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi}$; e perciò sarà $PT = \frac{Sc\pi \times Cc\varphi + Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi}$. Ma per la similitudine dei triangoli TPL, FQC, $r : Cc\varphi ::$ $\frac{Sc\pi \times Cc\varphi + Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi} : Sc.\overline{\pi + \varphi}$. Dunque sarà $Sc.\overline{\pi + \varphi} = \frac{Sc\pi \times Cc\varphi + Sc\varphi \times Cc\pi}{r}$.

VIII. Se i due archi π, e φ fossero uguali, allora sarebbe $Sc.\overline{\pi + \varphi} = Sc\,2\pi = \frac{2\,Sc\pi \times Cc\pi}{r}$.

IX. Come si è trovato il seno della somma di due archi, si può trovare quello della somma di tre, quattro &c.; imperocchè dopo trovato il seno della somma di due archi, si trova il seno della somma di questi due archi con il terzo arco, e così successivamente; onde con facilità si può trovare il seno di un arco multiplo secondo qualunque numero.

X. Proposizione II. Dati i seni, e cosseni di due archi disuguali PA, QA, ritrovare il seno della differenza PQ. Chiamato l' arco $PA = \pi$, e $QA = \varphi$; per

per la similitudine dei triangoli QCF, OCL, sarà $Cc\varphi : Sc\varphi :: Cc\pi : LO$; onde sarà $LO = \frac{Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi}$, e PO sarà $= \frac{Sc\pi \times Cc\varphi - Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi}$. Ma per la similitudine dei triangoli RPO, QFC, $r : Cc\varphi :: \frac{Sc\pi \times Cc\varphi - Sc\varphi \times Cc\pi}{Cc\varphi} : Sc.\overline{\pi - \varphi}$. Dunque sarà $Sc.\overline{\pi - \varphi} = \frac{Sc\pi \times Cc\varphi - Sc\varphi \times Cc\pi}{r}$.

XI. Se si avesse da sommare un arco positivo con un negativo, o sottrarre da un positivo un negativo, la somma allora passerebbe in sottrazione, e la sottrazione in somma.

XII. Proposizione III. Dati i seni, e i cosseni di due archi π, φ, ritrovare il cosseno della somma dei due archi, cioè di $\pi + \varphi$. Per le cose dette, abbiamo $r^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{Sc}^2$; onde sarà $r^2 = \overline{Cc\pi}^2 + \overline{Sc\pi}^2$, ed $r^2 = \overline{Cc\varphi}^2 + \overline{Sc\varphi}^2$. Dunque moltiplicando queste due equazioni fra loro, sarà $r^4 = \overline{Cc\pi}^2.(\overline{Cc\varphi}^2 + \overline{Sc\varphi}^2) + \overline{Sc\pi}^2.(\overline{Cc\varphi}^2 + \overline{Sc\varphi}^2)$; e però facendo attualmente la moltiplicazione, ed aggiungendo, e sottraendo dal secondo membro dell'equazione la quantità $2\,Cc\pi.Cc\varphi.Sc\pi.Sc\varphi$, sarà $r^2 = \overline{Cc\pi.Cc\varphi}^2 - 2Cc\pi.Cc\varphi.Sc\pi.Sc\varphi + \overline{Sc\pi.Sc\varphi}^2 + \overline{Cc\pi.Sc\varphi}^2 + 2\,Cc\pi.Cc\varphi.Sc\pi.Sc\varphi + \overline{Cc\varphi.Sc\pi}^2$, tutto diviso per r^2; cioè sarà $r^2 = \frac{\overline{Cc\pi.Cc\varphi - Sc\pi.Sc\varphi}^2}{r^2} +$

$\frac{\overline{C c \pi . S c \varphi + C c \varphi . S c \pi}^2}{r^2}$. Ma questo ultimo è il quadrato del seno della somma dei due archi π, e φ, per la proposizione prima. Dunque il primo quadrato è il quadrato del cosseno della somma de' due archi π, e φ; e perciò sarà la radice $\frac{C c \pi . C c \varphi - S c \pi . S c \varphi}{r} = C c . \overline{\pi + \varphi}$.

XIII. Se fosse $\pi = \varphi$, allora sarebbe $C c\, 2 \varphi = \frac{\overline{C c \varphi}^2 - \overline{S c \varphi}^2}{r}$.

XIV. Proposizione IV. Dati i seni, e cosseni di due archi π, φ, ritrovare il cosseno della differenza $\pi - \varphi$. Operando come nella proposizione precedente, col solo divario, che si prenda positivo il prodotto $2 C c \pi . C c \varphi . S c \pi . S c \varphi$ dove si è preso negativo, e al rovescio; e che si faccia uso della seconda proposizione in vece della prima, si otterrà $C c . \overline{\pi - \varphi} = \frac{C c \pi . C c \varphi + S c \pi . S c \varphi}{r}$.

XV. Proposizione V. Date le tangenti di due archi π, φ, ritrovare la tangente della somma $\pi + \varphi$. Per i Teoremi abbiamo $\frac{T c}{r} = \frac{S c}{C c}$; onde sarà $\frac{T c . \overline{\pi + \varphi}}{r} = \frac{S c . \overline{\pi + \varphi}}{C c . \overline{\pi + \varphi}} = \frac{S c \pi . C c \varphi + S c \varphi . C c \pi}{C c \pi . C c \varphi - S c \pi . S c \varphi}$, per le proposizioni prima, e terza. Quindi sarà $T c . \overline{\pi + \varphi} : r :: S c \pi . C c \varphi + S c \varphi . C c \pi : C c \pi . C c \varphi - S c \pi . S c \varphi :: 1 + \frac{S c \varphi}{C c \varphi} . \frac{C c \pi}{S c \pi} : \frac{C c \pi}{S c \pi} - \frac{S c \varphi}{C c \varphi} :: 1 + \frac{T c \varphi}{r} . \frac{r}{T c \pi}$:

r

$\frac{r}{Tc\pi} - \frac{Tc\phi}{r}$, per i Teoremi; cioè $Tc.\overline{\pi+\phi} : r :: Tc\pi + Tc\phi : \frac{r^2 - Tc\pi.Tc\phi}{r}$; e però sarà $Tc.\overline{\pi+\phi} = \frac{r^2.\overline{Tc\pi + Tc\phi}}{r^2 - Tc\pi.Tc\phi}$.

XVI. Se i due archi fossero uguali, sarebbe $Tc\,2\pi = \frac{2Tc\pi.r^2}{r^2 - \overline{Tc\pi}^2}$.

XVII. Proposizione VI. Date le tangenti di due archi π, φ, ritrovare la tangente della differenza $\pi - \varphi$. Per i Teoremi è $\frac{Tc}{r} = \frac{Sc}{Cc}$; onde sarà $\frac{Tc.\overline{\pi-\phi}}{r} = \frac{Sc.\overline{\pi-\varphi}}{Cc.\overline{\pi-\varphi}} = \frac{Sc\pi.Cc\phi - Sc\phi.Cc\pi}{Cc\pi.Cc\varphi + Sc\pi.Sc\varphi}$, per la proposiz. 2., e 4.; cioè sarà $Tc.\overline{\pi-\varphi} : r :: Sc\pi.Cc\varphi - Sc\varphi.Cc\pi : Cc\pi.Cc\phi + Sc\pi.Sc\phi :: 1 - \frac{Sc\phi}{Cc\phi}.\frac{Cc\pi}{Sc\pi} : \frac{Cc\pi}{Sc\pi} + \frac{Sc\phi}{Cc\phi} :: 1 - \frac{Tc\phi}{r}.\frac{r}{Tc\pi} : \frac{r}{Tc\pi} + \frac{Tc\phi}{r} :: Tc\pi - Tc\phi : \frac{r^2 + Tc\pi.Tc\phi}{r}$. Dunque $Tc.\overline{\pi-\phi} = \frac{r^2.\overline{Tc\pi - Tc\varphi}}{r^2 + Tc\pi.Tc\varphi}$.

XVIII. Proposizione VII. Date le cotangenti di due archi π, e φ, ritrovare la cotangente della somma. Essendo per i Teoremi $\frac{Tc}{r} = \frac{r}{Ctc}$; avremo $Ctc.\overline{\pi+\phi}$

: r

$: r :: r : Tc.\overline{\pi + \phi} :: r : \frac{r^2.\overline{Tc\pi + Tc\phi}}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi}$, per la proposiz. 5, $:: r^2 - Tc\pi . Tc\phi : r \times \overline{Tc\pi + Tc\phi} :: r^2 - \frac{r^4}{Ctc\pi . Ctc\phi} : \frac{r^3}{Ctc\pi} + \frac{r^3}{Ctc\phi} ::$
$\frac{Ctc\pi . Ctc\phi - r^2}{Ctc\pi . Ctc\phi} : \frac{r}{Ctc\pi} + \frac{r}{Ctc\phi} :: Ctc\pi . Ctc\phi - r^2 : r \times \overline{Ctc\phi + Ctc\pi}$. Dunque $Ctc.\overline{\pi + \phi} = \frac{Ctc\pi . Ctc\phi - r^2}{Ctc\phi + Ctc\pi}$. (30).

XIX. Proposizione VIII. Date le cotangenti di due archi π, ϕ, ritrovare la cotangente della differenza. Per la cotangente della differenza sarà $Ctc.\overline{\pi - \phi} : r :: r : Tc.\overline{\pi - \phi} :: r : \frac{r^2.\overline{Tc\pi - Tc\phi}}{r^2 + Tc\pi . Tc\phi}$, per la proposiz. 6. $:: r^2 + Tc\pi . Tc\phi : r . \overline{Tc\pi - Tc\phi} :: r^2 + \frac{r^4}{Ctc\pi . Ctc\phi} : \frac{r^3}{Ctc\pi} - \frac{r^3}{Ctc\phi} :: Ctc\pi . Ctc\phi + r^2 : r . \overline{Ctc\phi - Ctc\pi}$. Dunque $Ctc.\overline{\pi - \phi} = \frac{Ctc\pi . Ctc\phi + r^2}{Ctc\phi - Ctc\pi}$.

XX. Proposizione IX. Date le tangenti, e le seganti di due archi π, ϕ, ritrovare la segante della somma. Per i Teoremi abbiamo $Cc : r :: r : Sec$; dunque $Cc.\overline{\pi + \phi} : r :: r : Sec.\overline{\pi + \phi}$; e perciò $Sec.\overline{\pi + \phi} = \frac{r^2}{Cc.\overline{\pi + \phi}} = \frac{r^3}{Cc\pi . Cc\phi - Sc\pi . Sc\phi}$, per la terza proposizione, $= r^3 : \left(\frac{r^4}{Sec\pi . Sec\phi} - \frac{r^2 . Tc\pi . Tc\phi}{Sec\pi . Sec\phi} \right)$, per i Teoremi, $= \frac{r . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi}$.

XXI. Proposizione X. Date le tangenti, e le seganti di due archi π, ϕ, ritrovare la segante della differenza $\pi - \phi$. Operando come nella proposizione precedente, ricorrendo per altro alla proposizione quarta in vece della terza, s'ottiene $Sec. \overline{\pi - \phi} = \frac{r . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 + Tc\pi . Tc\phi}$. Se dalle espressioni delle seganti della somma, o della differenza di due archi si volesse eliminare la tangente, ed introdurre il solo raggio, e le seganti date, basta avvertire, che è $Tc = \sqrt{\overline{Sec}^2 - r^2}$; onde fatte le sostituzioni necessarie, si otterrebbe l' intento.

XXII. Proposizione XI. Determinare la cossegante della somma di due archi π, ϕ, date le loro cosseganti, e cotangenti. Per i Teoremi abbiamo $\frac{Tc}{r} = \frac{Sec}{Csc}$; onde sarà $Csc. \overline{\pi + \phi} = \frac{r . Sec . \overline{\pi + \phi}}{Tc . \overline{\pi + \phi}} =$

$$\frac{r^2 . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi} : \frac{r^2 . \overline{Tc\pi + Tc\phi}}{r^2 - Tc\pi . Tc\phi} = \frac{Sec\pi . Sec\phi}{Tc\pi + Tc\phi},$$

essendo sostituite le espressioni della secante, e della tangente della somma di due archi: ma è $Sec = \frac{Tc . Csc}{r}$; dunque sarà $Csc . \overline{\pi + \phi} =$

$$\frac{Tc\pi . Csc\pi . Tc\phi . Csc\phi : r^2}{Tc\pi + Tc\phi}$$: or dippiù $Tc = \frac{r^2}{Ctc}$.

Dun-

Dunque sarà $Csc.\overline{\pi+\phi} = \frac{Csc\pi . Csc\phi}{Ctc\phi + Ctc\pi}$.

XXIII. Proposizione XII. Determinare la cossegante della differenza di due archi π, ϕ, per le loro cosseganti, e cotangenti. Per la cossegante della differenza di due archi avremo dai Teoremi $Csc.\overline{\pi-\phi}$

$= \frac{r . Sec.\overline{\pi-\phi}}{Tc.\overline{\pi-\phi}} = \frac{r^2 . Sec\pi . Sec\phi}{r^2 + Tc\pi . Tc\phi}$:

$\frac{\overline{r^2 . Tc\pi - Tc\phi}}{r^2 + Tc\pi . Tc\phi} = \frac{Sec\pi . Sec\phi}{Tc\pi - Tc\phi}$: ma è $Sec =$

$\frac{Tc . Csc}{r}$; dunque sarà $Csc.\overline{\pi-\phi} =$

$\frac{Tc\pi . Csc\pi . Tc\phi . Csc\phi : r^2}{Tc\pi - Tc\phi}$: ma è $Tc = \frac{r^2}{Ctc}$;

però sarà $Csc.\overline{\pi-\phi} = \frac{Csc\pi . Csc\phi}{Ctc\phi - Ctc\pi}$.

XXIV. Essendo $Ctc = \sqrt{\overline{Csc}^2 - r^2}$; quindi si potranno avere le cosseganti della somma, e della differenza di due archi per le sole cosseganti date.

XXV. Proposizione XIII. Il seno di un angolo stà al cosseno più il raggio, come la tangente della metà dell' angolo al raggio. Chiamato l'angolo ε, sarà, per i numeri ottavo, e decimoterzo, $Sc\varepsilon =$

$\frac{2 Sc\frac{\varepsilon}{2} . Cc\frac{\varepsilon}{2}}{r}$, e $Cc\varepsilon = \frac{\overline{Cc\frac{\varepsilon}{2}}^2 - \overline{Sc\frac{\varepsilon}{2}}^2}{r}$; dunque sarà $Sc\varepsilon : Cc\varepsilon + r :: 2 Sc\frac{\varepsilon}{2} \times Cc\frac{\varepsilon}{2} : \overline{Cc\frac{\varepsilon}{2}}^2 - \overline{Sc\frac{\varepsilon}{2}}^2$

$+ r^2$

$+ r^2$: ma è $r^2 - \overline{Sc\frac{\epsilon}{2}}^2 = \overline{Cc\frac{\epsilon}{2}}^2$; dunque sarà $Sc\epsilon : Cc\epsilon + r :: 2\,Sc\frac{\epsilon}{2} . Cc\frac{\epsilon}{2} : 2\overline{Cc\frac{\epsilon}{2}}^2 :: Sc\frac{\epsilon}{2} : Cc\frac{\epsilon}{2} :: Tc\frac{\epsilon}{2} : r$.

FINE DEL PRIMO LIBRO.

LIBRO SECONDO

Delle Linee, ovvero dei Luoghi del primo, e secondo grado, e delle Equazioni determinate del grado terzo, e quarto.

CAPO PRIMO.

Della linea del primo grado, delle varie specie di linee del grado secondo, e particolarmente della Parabola.

I. La linea dicesi di primo, o secondo grado, se con questa si costruisca una equazione di due incognite, e perciò indeterminata, che sia di primo, o di secondo grado. L'equazione poi indeterminata di primo grado mai ha termini, in cui l'incognite, si trovino insieme, ed eccedano la prima dimensione: quella di secondo mai ha termini, in cui l'incognite, anche insieme, oltrepassino la seconda dimensione; dovendo perciò, se sono insieme, essere ciascuna alla prima dimensione. La determinazione di una incognita in queste equazioni dipende dall'altra, a cui potendosi ad arbitrio dare valori infiniti, ancor la prima avrà valori infiniti: per tal motivo l'incognite qui si chiamano *indeterminate*, o *variabili*; e alla costruzione di tali equazioni non soddisfanno che linee, come vedremo. Una delle due indeterminate s'intende presa su d'una retta data di posizione, da un punto dato, e chia-

chiamasi *ascissa*; l' altra s' intende condotta per l' estremità dell' ascissa in modo, che faccia con essa sempre un angolo dato, e dicesi *ordinata*: amendue insieme chiamansi *coordinate*.

II. Vuole il buon ordine, che dicasi prima delle linee del primo grado, dalle quali subito ci spediremo. Sono esse comprese nell' equazione generale, o canonica $my + nx + p = o$, in cui y, x sono le due indeterminate, m, n, p sono determinate, e possono essere positive, o negative, o anche nulle. Serve quest' equazione solo alla linea retta, che trovasi così. Sia la indefinita AB (*Fig.* 1. *Tav.* 1.), in cui s' intendano prese dal punto A le ascisse $AP = x$, positive verso B, e negative dalla parte opposta. Sia APV l' angolo delle coordinate x, y, di maniera che le ordinate y positive cadano al di sopra della linea delle ascisse AB, le negative sieno il prolungamento delle positive al di sotto della medesima AB. Presa da A sulla linea delle ascisse una qualunque AB, per B si tiri dalla parte delle ordinate y negative, parallela alle ordinate medesime, una BQ talmente, che sia $AB : BQ :: m : n$, e conducasi per A, e Q la indefinita AQ. Similmente per A si conduca dalla parte delle ordinate y negative, parallela alle medesime, una $AO = \frac{p}{m}$, e per O tirisi una parallela ad AQ, la quale si prolunghi indefinitamente da una parte, e dall' altra in T, e in C. Sarà la retta TOC la linea dell' equazione $my + nx + p = o$. Infatti, presa qualsivoglia ascissa positiva $AP = x$, e nel dato angolo delle coordinate condotta la PV, e prolungata questa al di sotto di AB finchè incontri la retta TOC in M, onde sia l' ordinata negativa $PM = -y$, che incontri AQ in G; si avrà AB:

$BQ :: AP : PG$, cioè $m : n :: x : PG$; e perciò $PG = \frac{nx}{m}$. Si avrà ancora $GM = AO = \frac{p}{m}$. Dunque $PM = \frac{nx}{m} + \frac{p}{m} = -y$; donde risulta $nx + p = -my$, e finalmente $my + nx + p = o$, che è l' equazione proposta.

III. Se nell' equazione generale, essendo positivo il primo termine my, il secondo fosse negativo, la BQ nella costruzione si dovrebbe condurre dalla parte delle ordinate positive, cioè al di sopra di AB; e così pure se fosse negativo il terzo termine p, la AO si dovrebbe condurre dalla parte opposta, cioè al di sopra di AB, dalla parte delle ordinate positive. Se nell' equazione mancasse il terzo termine, cioè fosse $p = o$, la linea AO sarebbe nulla, e così OC cadrebbe su la AQ, e sarebbe AQ la linea dell' equazione. Se mancasse il secondo termine, cioè se fosse $n = o$, sarebbe nulla la BQ, e così la OC, linea dell' equazione, sarebbe parallela alla AB. Se mancasse il primo, cioè se fosse $m = o$, presa su la linea delle ascisse dal punto A la $AR = \frac{p}{n}$, dalla parte dell' x negative quando p, n sono affette dello stesso segno, e dalla parte delle x positive quando p, n sono affette di segno contrario, e condotta per R una retta parallela alle ordinate, sarebbe essa la linea dell' equazione. Imperocchè generalmente abbiamo $QB : BA :: OA : AR$, cioè $n : m :: \frac{p}{m} : AR$; onde $AR = \frac{p}{n}$: ma quando $m = o$, $AO = \frac{p}{m}$ è infinita, ed $AR = \frac{p}{n}$ punto non si al-ſi altera; dunque allora la linea dell' equazione, cioè la RO, condotta per lo punto R, trovato col prendere $AR = \frac{p}{n}$, diventa parallela alla AO, cioè alle ordinate.

IV. Vengo ora alle linee del ſecondo grado, che nell' equazione generale
$$\begin{array}{l} yy + lxy + mx^2 + q = 0 \\ \quad + ny + px \end{array}$$
ſono tutte compreſe, eccettuate quelle, che corriſpondono al caſo, in cui manchi il termine yy, non potendo queſto mai quì mancare, per non avere yy coefficiente, che poſſa fingerſi zero, del qual caſo ſi dirà poi. Rappreſenti ora CED (*Fig.* 2. *Tav.* 1.) una curva, qualunque ella ſiaſi, che ſi ſupponga ſoddisfare alla noſtra equazione. Sia $AB = x$, $BC = y$. E' facile il vedere dall' equazione, che due biſogna che ſieno i valori dell' ordinata y corriſpondenti alla ſteſſa aſciſſa x: ſi finga che BC, e BD ſieno i corriſpondenti alla aſciſſa BA. Facciaſi $y + \frac{lx + n}{2} = u$; onde ſarà
$$\begin{array}{l} yy + lxy \\ \quad + ny \end{array} = u^2 - \frac{l^2 x^2}{4} - \frac{lnx}{2} - \frac{n^2}{4}$$
: e fatta la ſoſtituzione nell' equazione canonica, diverrà eſſa
$$\begin{array}{l} u^2 - \frac{l^2}{4} x^2 - \frac{ln}{2} x - \frac{n^2}{4} = 0. \\ \quad + mx^2 + px + q \end{array}$$
A vedere qual mutazione riſulti nella figura per la converſione dell' equazione canonica in queſt' altra, in cui ſi è fatta ſparire la y, e ſi è introdotta l' u; pel punto A conducaſi parallela a CD la $AF = \frac{n}{2}$, e tiriſi per F la FG pa-

ral-

rallela ad AB. Sarà $FG = AB = x$, e $CG = y + \frac{n}{2}$. Presa ora da F su la FG qualunque FI, conducasi per I, parallela a CD, una IK tale, che sia $FI : IK :: 2 : l$; e per i punti F, K tirisi la FKH. Sarà $GH = \frac{lx}{2}$; e quindi $CH = y + \frac{n}{2} + \frac{lx}{2}$, cioè $CH = u$. Altro dunque non s'è fatto con quella sostituzione, che trasferire la linea retta, in cui terminano le ordinate della curva, che ora sono le u, da AB in FH.

V. Ma perchè le due indeterminate $CH = u$, $FG = x$, la relazion delle quali viene espressa dalla nuova equazione, non sono veramente coordinate, non terminando la u nella retta, in cui sono prese le x; perciò chiamata $FH = z$, ed espressa per $2 : k$ la ragione di FI ad FK, cioè di FG ad FH, o vogliam dire la ragione $x : z$, la qual ragione è data per la costruzione, sostituiscasi nell'equazione ritrovata, in vece di x, il suo valore $\frac{2z}{k}$, e diverrà essa

$$u^2 - \frac{l^2}{k^2} z^2 - \frac{ln}{k} z - \frac{n^2}{4} = o, \quad \text{la quale è manifesto non}$$
$$\qquad + \frac{4m}{k^2} z^2 + \frac{2p}{k} z + q$$

essere niente meno generale della prima, non essendo tra essa, e la prima altra differenza, se non che la prima riferisce i punti della curva alla linea delle ascisse AB, mediante le ordinate CB, e questa riferisce i punti della stessa curva alla nuova linea delle ascisse FH, mediante le nuove ordinate CH.

VI.

VI. Dall' equazione steſſa appariſce, che due ſono i valori di u, e questi fra di loro eguali, uno poſitivo, negativo l' altro. Queſto ne moſtra, che la linea DC, e così qualunque altra ad eſſa parallela iſcritta alla curva, reſti diviſa per metà dalla retta FH, che perciò *diametro* appellaſi, e *aſſe* ſe l' angolo FHC ſia retto: il punto L, in cui il diametro, o l' aſſe incontra la curva, diceſi *vertice*. Quindi è, che ſe pel vertice L conduraſſi una parallela a CD, ſarà ella *tangente*; poichè ſe incontraſſe la curva in qualche altro punto, non reſterebbe diviſa per metà dal diametro.

VII. Ora tre caſi ſono da diſtinguerſi nell' equazione canonica ultimamente trovata; perciocchè o ſarà $m = \frac{l^2}{4}$, o $m > \frac{l^2}{4}$, o $m < \frac{l^2}{4}$. Nel primo caſo il ſecondo termine è $= o$, nel ſecondo è poſitivo, e nel terzo negativo. Però facendo $-\frac{l^2}{k^2} + \frac{4m}{k^2} = a$ quando non ſia $= o$, e mutando z in x, u in y; i tre propoſti caſi verranno eſpreſſi dalle tre equazioni

$y^2 - bx - c \quad = o$

$y^2 + ax^2 - bx - c = o$

$y^2 - ax^2 - bx - c = o$, dove la ſpecie a dee ſempre conſiderarſi preſa poſitivamente; b poi ſta in luogo di $\frac{ln - 2p}{k}$, e c in luogo di $\frac{n^2}{4} - q$; e tanto b, quanto c può eſſere preſa poſitivamente, e negativamente, ed anche eſſere nulla.

VIII. Poſta x infinita nella prima di queſte tre formole, viene $y = \pm \sqrt{bx}$, i quali due valori ſono reali, ſempre che b, ed x ſieno amendue poſitive, o amendue negative; ſono immaginarj, quando b, x ſieno l' una poſitiva, e l'altra negativa. Dunque la curva va espressa dalla prima equazione avrà solamente due rami infiniti. Nella seconda equazione, posta x infinita, i valori di y sono $\pm\sqrt{-ax^2} = \pm x\sqrt{-a}$, i quali, o si consideri x come positiva, o come negativa, sono sempre immaginarj, poichè la specie a, come si è notato, dee sempre considerarsi presa positivamente. Dunque la curva espressa dalla seconda equazione non ha alcun ramo infinito. Finalmente nella terza equazione, posta x infinita, i valori di y sono $\pm\sqrt{ax^2}$, i quali sono reali, o si consideri x come positiva, o si consideri come negativa. Dunque la curva espressa dalla terza equazione ha quattro rami infiniti, due dalla parte delle x positive, e due dalla parte delle x negative. Sono queste pertanto tre specie diverse di curve del secondo grado, la prima delle quali porta curve dotate di soli due rami infiniti, e queste si chiamano *Parabole*: la seconda porta curve prive affatto di rami infiniti, e queste son dette *Ellissi*: la terza porta curve dotate di quattro rami infiniti, e queste diconsi *Iperbole*.

IX. Prima di venire all' esame di ciascuna specie a parte, osservisi, che nella prima forma dell' equazione canonica (num. 4.) $\begin{matrix} yy + lxy + mx^2 + q = o, \\ + ny + px \end{matrix}$ il trinomio $yy + lxy + mx^2$, formato dai termini, che contengono le indeterminate alla seconda dimensione, si risolve (1) nei due fattori $y + x.\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}$, $y + x.\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}$, i quali, supposto $m = \frac{l^2}{4}$, il che, come di sopra si è notato, porta alla parabola, diventano eguali; supposto $m > \frac{l^2}{4}$, il che si è veduto che porta all' elliſſe, diventano immaginarj; finalmente ſuppoſto $m < \frac{l^2}{4}$, il che porta all' iperbola, ſono reali, e diſeguali. Dunque propoſta un' equazione qualunque indeterminata del ſecondo grado, ſi conoſcerà ſubito a quale ſpecie di curve appartenga, ſe preſa la ſomma dei termini, che contengono le indeterminate alla ſeconda dimenſione, ſi riſolverà queſta ſomma in due fattori: poichè ſe i due fattori riuſciranno eguali, la curva ſarà una parabola; ſe riuſciranno immaginarj, ſarà la curva un' elliſſe; ſe riuſciranno reali, e diſeguali, la curva ſarà un' iperbola.

X. Prendo ora ad eſaminare partitamente le tre curve, e comincio dalla prima, l' equazione di cui è

$yy - bx - c = o$ (num. 7.), cioè $yy = bx + c = b \cdot \overline{x + \frac{c}{b}}$.

Pongo $x + \frac{c}{b} = z$, con che altro non fo, che traſportare il principio delle aſciſſe dal punto F in un altro della retta FH, diſtante da F dell'intervallo $\frac{c}{b}$. Sarà dunque l' equazione della parabola $yy = bz$, oppure $yy = bx$, mutando cioè z in x; ed $y = \pm \sqrt{bx}$. Sia AF (*Fig.* 3. *Tav.* 1.) la linea delle aſciſſe x, ed A il loro principio. Poſta $x = o$ nell' equazione, ſi fa anche $y = o$, e però la parabola paſſa pel punto A. E' chiaro, che nella ſteſſa equazione a qualſivoglia x corriſpondono due valori di y eguali fra di loro, uno poſitivo, e l' altro negativo; per la qual coſa a qualunque aſciſſa AF corriſpondono due ordinate eguali, FD, FE, una di quà, e l' altra di là dalla ſteſſa linea delle aſciſſe AF, la quale perciò è un *diametro*, oppur l' *aſſe* (num. 6.), ed A il ſuo *vertice*. E' chiaro ancora, che

che al crescere dell'ascissa x, cresce pure l'ordinata y, tal che fattasi x infinita, anche y è infinita. Dunque i due rami della parabola allontanandosi infinitamente dal vertice, s'allontanano infinitamente ancora dal diametro, o asse: e per riguardo all'asse è manifesto, che essendo le ordinate di esso a lui perpendicolari, i due rami parabolici verranno ad essere in tutto e per tutto egualmente disposti, l'uno da una parte, e l'altro dall'altra del medesimo, di modo che, posto l'uno sopra l'altro, perfettamente si combacierebbono. Presa x negativa, cioè da A non verso F, ma verso la parte opposta T, nell'equazione i valori di y diventano immaginarj; il che denota, che la curva dalla parte di T è immaginaria, cioè, che da quella parte non vi ha curva. Che se la linea determinata b, che fin'ora si è supposta positiva, si vorrà prendere negativa, onde l'equazione sia $yy = -bx$; è subito manifesto non poter essere i valori di y reali, se non si prenda negativa anche x, cioè da A verso T. Dunque allora la curva affatto manca dalla parte di F, e si estende tutta dalla parte di T. La linea indicata da b, che fa con qualsivoglia ascissa x un rettangolo eguale al quadrato della corrispondente ordinata y, si chiama *parametro* del diametro, o asse AF.

XI. Poniamo che sia AF l'asse, A il vertice, b il suo parametro; sarà dunque retto l'angolo AFD (num. 6.). Sia iscritta alla parabola una retta qualunque DN, che tagli l'asse AF in G sotto un dato angolo $DGF = \mu$. Chiamisi $AG = z$, $GD = u$. Posto r il raggio, sarà $r : Sc\mu :: u : y = \frac{u \, . \, Sc\mu}{r}$, ed $r : Cc\mu :: u : GF = \frac{u \, . \, Cc\mu}{r}$; onde $x = z - \frac{u \, . \, Cc\mu}{r}$.

 So-

Sostituiti questi valori di y, e di x nell' equazione $yy = bx$, si avrà $\frac{u^2 . \overline{Sc\mu}^2}{r^2} = bz - \frac{bu . Cc\mu}{r}$, che è l' equazione della parabola tra AG, e GD, supposte cioè iscritte alla curva infinite rette DN, tutte fra di loro parallele, e formanti con l' asse AF un angolo $= \mu$.

XII. Fatta in quest' equazione $z = AG = o$, si trovano i due valori di u, uno $u = GD = o$, l' altro $u = GN = - \frac{br . Cc\mu}{\overline{Sc\mu}^2}$; il che ne mostra, che passando DN in AH, il segmento GD svanisce, come infatti si vede che svanir dee, e l' altro GN diventa la retta stessa AH, e questa è $= \frac{br . Cc\mu}{\overline{Sc\mu}^2}$. Il segno $-$, di cui è venuto affetto questo valore di u, altro non denota, se non che la AH cada appunto dalla parte di GN, cioè dalla parte delle u negative.

XIII. Intendasi AH divisa per metà in K, e tirisi per K una retta parallela all' asse AF, che incontri DN in L; sarà dunque $AK = GL = \frac{br . Cc\mu}{2 . \overline{Sc\mu}^2}$. Facciasi $LD = u + \frac{br . Cc\mu}{2 . \overline{Sc\mu}^2} = y$, onde $\frac{u . Sc\mu}{r} + \frac{b . Cc\mu}{2 . Sc\mu} = \frac{y . Sc\mu}{r}$; e quadrando, $\frac{u^2 . \overline{Sc\mu}^2}{rr} +$

bu.

$\frac{bu.Cc\mu}{r} + \frac{b^2.\overline{Cc\mu}^2}{4.\overline{Sc\mu}^2} = \frac{yy.\overline{Sc\mu}^2}{rr}$. Ma (num. 11.) $\frac{u^2.\overline{Sc\mu}^2}{rr} + \frac{bu.Cc\mu}{r} = bz$. Dunque $bz + \frac{b^2.\overline{Cc\mu}^2}{4.\overline{Sc\mu}^2} = \frac{yy.\overline{Sc\mu}^2}{rr}$, cioè $\frac{br^2z}{\overline{Sc\mu}^2} + \frac{b^2r^2.\overline{Cc\mu}^2}{4.\overline{Sc\mu}^4} = yy.$ (2). Or questa ognun vede essere l' equazione della medesima parabola, trasferita solo la linea delle ascisse z da AG in KL, e posto il principio di esse in K. Ma in questa equazione y ha due valori eguali, uno positivo, l'altro negativo. Dunque qualunque delle DN è divisa in L dalla linea delle ascisse KL per metà. Dunque KL parallela all' asse AF è un diametro: il che valendo egualmente qualunque sia l'angolo μ, che fanno le ordinate LD con l'asse, cioè qualunque sia la distanza della KL dall' asse medesimo AF, ne segue, che nella parabola ogni retta parallela all' asse è diametro.

XIV. Sia I il vertice del diametro KL. Nel punto I (num. 6.) tanto LD, quanto LN diventa $=o$. Posta dunque nell' equazione $y=o$, il valore di z, che risulta, cioè $z = -\frac{b.\overline{Cc\mu}^2}{4.\overline{Sc\mu}^2}$, esprimerà KI, distanza del principio delle ascisse K dal vertice I; il qual valore è negativo, estendendosi la KI dal principio del-

delle ascisse K in direzzione opposta al punto L, verso cui s'estendono le ascisse positive. E' dunque $KI = \frac{b.\overline{Cc\mu}^2}{4.\overline{Sc\mu}^2}$. Però facendo $z + \frac{b.\overline{Cc\mu}^2}{4.\overline{Sc\mu}^2} = x$, e sostituendo il valore di z nell'equazione, si avrà una nuova equazione $\frac{br^2x}{\overline{Sc\mu}^2} = yy$, che rappresenterà la stessa parabola riferita allo stesso diametro KL, trasportato solamente il principio delle ascisse da K nel vertice I del diametro medesimo. E' manifesto (num. 10.), che $\frac{br^2}{\overline{Sc\mu}^2}$ sarà il parametro di questo diametro.

XV. Per lo punto I condotta IT parallela ad HA, che sarà tangente (num. 6.), si venga a tagliare FA prodotta in T. Supponiamo ora che l'angolo ISA non sia retto, ma un altro qualunque, che chiamo ϕ; sarà similmente il parametro del diametro $AF = \frac{br^2}{\overline{Sc\phi}^2}$, onde i parametri de' due diametri IK, AS sarebbero come $\frac{1}{\overline{Sc\mu}^2} : \frac{1}{\overline{Sc\phi}^2}$, cioè come $\frac{1}{\overline{IS}^2} : \frac{1}{\overline{IT}^2}$: ma IK, ed SA sono come $\overline{IT}^2 : \overline{IS}^2$ direttamente, e come i parametri $\frac{1}{\overline{IS}^2} : \frac{1}{\overline{IT}^2}$ reciprocamente (3); dunque IK, AS sono uguali, e perciò $AT = SA$. Per condurre adunque da un punto T la tangente, si tagli $AT = SA$, e si congiunga IT, che sarà la tangente.

XVI.

XVI. Per piccola rifleſſione che ſi faccia, ſi vedrà, che preſe le x nella tangente della parabola, e le y nel diametro, ſi abbia $by = xx$. Queſta equazione adunque apparterà ſempre alla parabola colle aſciſſe preſe nella tangente.

CAPO II.

Dell' Elliſſe.

I. Prendo l'equazione $yy + ax^2 - bx - c = o$, che nel cap. preced. num. 8. abbiam veduto appartenere all'elliſſe. Pongo $x - \frac{b}{2a} = z$, con che traſporto il principio delle aſciſſe dal punto F (*Fig.* 4. *Tav.* 1.) in un altro del diametro FH, diſtante da F dell' intervallo $\frac{b}{2a}$. Fatta la ſoſtituzione, riſulta l'equazione $yy = \frac{bb}{4a} + c - az^2$, oppure, convertendo z in x, $yy = \frac{bb}{4a} + c - ax^2$. Per maggior chiarezza ſoſtituiſco bb in luogo di $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}$, e $\frac{cc}{bb}$ in luogo di a (4); così l' equazione ridotta a forma più ſemplice ſarà $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{bb - xx}$, onde $y = \pm \frac{c}{b}\sqrt{bb - xx}$. Qui appariſce, che niuna mutazione ſuccede nel valore di y al cangiarſi delle aſciſſe x di poſitive in negative, o al contrario. Il che ne moſtra, che a diſtanze eguali preſe di quà, e di là dal principio delle aſciſſe, le ordinate ſono eguali. Ora perchè y, e quindi la curva non ſia immaginaria,

naria, bisogna che x non sia maggiore di b. Posto dunque in O il principio delle ascisse, e di quà e di là da esso tagliate sul diametro FH le due OL, OK, ciascuna $= b$; sarà OK il massimo valore di x positiva, ed OL il massimo valore di x negativa: e perchè nell' equazione, posta $x = b$, diventa $y = o$; perciò è chiaro, che la curva passa per i due punti K, L. Al diminuire della x, o positiva, o negativa, è evidente, che la quantità $bb - xx$, e perciò anche il valore di y, cresce; di maniera tale, che posta $x = o$, il valore di y diventa massimo. Ma posta $x = o$, è $y = \pm c$. Dunque condotta per O una parallela ad una qualunque DC, e prese in essa le OR, OS eguali ciascuna a c, passerà la curva per R, ed S, e saranno questi i due punti della curva più rimoti dal diametro FH. Da tutte queste cose apparisce, che l' ellisse ritorna in se stessa, ed è posta di quà e di là dalla retta KL in maniera, che passando per i punti K, L, a distanze eguali da essi le rette iscritte alla curva parallele a DC sono eguali, e la massima di esse è la SR, che passa per lo punto di mezzo O della stessa KL. La KL è essa propriamente il *diametro dell' ellisse*, e i due punti K, L, con cui termina nella curva, sono i suoi *vertici*. Il punto di mezzo O dicesi *centro dell' ellisse*.

II. Essendo $OK = OL = b$, $OH = x$, $HC = y$, sarà $KH = b + x$, $HL = b - x$; e però il rettangolo $KHL = bb - xx$, ed il quadrato $\overline{HC}^2 = yy$. Ora risolvendo in analogia l'equazione $yy = \frac{cc}{bb} . \overline{bb - xx}$, risulta $bb - xx : yy :: bb : cc$. Dunque nell' ellisse il rettangolo KHL dei segmenti del diametro ha al quadrato della corrispondente ordinata HC una ragione ne costante. Se questa ragion costante si esprimerà per quella del diametro $2b$ ad un' altra linea, che chiameremo p, dirassi la linea *p parametro del diametro* $KL = 2b$. Sarà pertanto $bb : cc :: 2b : p$; onde $p = \frac{2cc}{b}$. Però se nell' equazione $y = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{bb - xx}$ in luogo di cc porrassi il suo valore $\frac{bp}{2}$, s' avrà l' equazione $yy = \frac{p}{2b} \cdot \overline{bb - xx}$, che dicesi *equazione al parametro*.

III. Prendasi dalla parte opposta ad OH l' ascissa OG eguale alla stessa OH, e condotta l'ordinata GV, tirisi la retta CV. E' manifesto, che essendo le due ordinate HC, GV parallele ad OR, le due CV, HG resteranno divise da questa OR proporzionalmente in I, ed O, e per conseguenza sarà $IC = IV$: ma per le cose dette le due ordinate HC, GV sono anche eguali; dunque la CV sarà parallela al diametro KL. Le quali cose valendo sempre, qualunque sia l' ascissa OH, a cui si prende eguale dalla parte opposta la OG; ne segue, che la SR taglia per metà tutte le rette iscritte all' ellisse parallele al diametro KL. Dunque SR è un altro diametro, le cui ordinate sono parallele al primo diametro KL. Di più essendo $OI = HC = y$, $OR = OS = c$, sarà $SI = c + y$, $IR = c - y$, ed il rettangolo $SIR = cc - yy$. Già è $IC = OH = x$, e per l' equazione della curva abbiamo $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{bb - xx}$, donde si cava anche $xx = \frac{bb}{cc} \cdot \overline{cc - yy}$: e risolvendo in analogia, $cc - yy : xx :: cc : bb$. Dunque il rettangolo SIR dei segmenti del diametro SR

al quadrato dell' ordinata corrispondente IC è in una ragion costante. Compete pertanto al diametro SR la stessa proprietà, che all' altro KL. E' facile il vedere, che il parametro del diametro SR è $\frac{2bb}{c}$. I due diametri KL, SR, uno dei quali è parallelo alle ordinate dell' altro, si chiamano *conjugati*.

IV. Fingiamo che KL, SR sieno i due assi conjugati, cioè che l' angolo LOR sia retto. E' chiaro per le cose dette al num. 1., che la curva sarà tagliata dai due assi KL, SR in quattro quadranti in tutto eguali tra di loro, e simili. Per qualunque punto C dell' ellisse intendasi iscritta alla curva una retta CN, che tagli l' asse KL in E sotto un angolo dato μ, onde sia $LEC = \mu$. Fatta $OE = z$, $EC = u$; si avrà $r : Sc\mu :: u : y = \frac{u \cdot Sc\mu}{r}$: ed $r : Cc\mu :: u : EH = \frac{u \cdot Cc\mu}{r}$; onde $x = z + \frac{u \cdot Cc\mu}{r}$. Fatte le sostituzioni di questi valori di x, ed y nell' equazione all' asse $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{bb - xx}$; si avrà l' equazione

$$\frac{u^2 \cdot \overline{Sc\mu}^2}{rr} = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{bb - zz - \frac{2uz \cdot Cc\mu}{r} - \frac{u^2 \cdot \overline{Cc\mu}^2}{rr}},$$

che esprime la relazione tra le OE, e le EC. In questa equazione posta $z = b$, si ricava $u = o$, ed $u = -\frac{2bc^2 r \cdot Cc\mu}{b^2 \cdot \overline{Sc\mu}^2 + c^2 \cdot \overline{Cc\mu}^2}$. Dunque quando la OE diventa OL, la EC svanisce, come appunto si vede che svanir dee, e la EN passa in LM, e diventa =

$= \frac{2bc^2r.Cc\mu}{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}$, il qual valore è venuto affetto del ſegno — perchè la EN, e però anche la LM cade dalla parte delle u negative.

V. Intendaſi ora LM diviſa per metà in T, e ſi conduca per T, e pel centro O la TO, che incontri la CN in Z, e la curva da una parte in B, dall' altra in P. Pongaſi $OZ=x$, $ZC=y$, e l'angolo BOL chiamiſi $=\phi$, onde ſia $BTL=\mu+\phi$. Avremo $OT:OL::OZ:OE$, cioè $Sc\mu:Sc.\overline{\mu+\phi}::x:z=$ $\frac{x.Sc.\overline{\mu+\phi}}{Sc\mu}$. Avremo pure $OL:LT::OE:EZ$, cioè $b:\frac{bc^2r.Cc\mu}{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}::\frac{x.Sc.\overline{\mu+\phi}}{Sc\mu}:EZ$; onde $EZ=\frac{c^2rx.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\phi}}{Sc\mu.\overline{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}}$, e però EC $=u=y-\frac{c^2rx.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\phi}}{Sc\mu.\overline{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}}$. Soſtituiti queſti valori di z, u nell' equazione del num. preced., e ridotti i termini (5), ſi avrà $\frac{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}{b^2r^2}yy=$ $cc-\frac{c^2x^2.\overline{Sc.\overline{\mu+\phi}}^2}{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}$, cioè $yy=$

$$\frac{b^2c^2r^2.\overline{Sc.\mu+\phi}^2}{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2} \cdot \frac{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}{\overline{Sc.\mu+\phi}^2} - xx \quad (6),$$

equazione dell' elliſſe tra le OZ, ZC. Qui facilmente ſi vede, che y ha ſempre due valori fra di loro eguali, e che così tutte le rette iſcritte alla curva parallele a CN vengono diviſe per metà dalla PB, la quale perciò è un diametro. Ma ſi vede inoltre, che la forma dell' equazione è la ſteſſa affatto, che quella dell' equazione trovata al num. 1. Dunque al nuovo diametro PB convengono le ſteſſe proprietà generali, che abbiam veduto competere al diametro, o aſſe KL. E ſiccome ciò vale qualunque ſia l' angolo μ, che fanno le CN con l' aſſe KL, così è chiaro, che nell' elliſſe qualſivoglia retta condotta per lo centro O è diametro; e riſpetto ai punti della curva gode ſempre delle medeſime generali proprietà.

VI. Perchè nell' equazione ritrovata divenga $y=o$, è manifeſto, che vuol eſſere $x=\frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}}{\overline{Sc.\mu+\phi}}$; dunque queſto è il valore di ciaſcun ſemidiametro OB, OP. Poſta poi $x=o$, riſulta $y=\frac{bcr}{\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}}$; dunque queſto è il valore di ciaſcuno ſemidiametro conjugato OA, OQ. Quanto al parametro del diametro PB, è chiaro per le coſe dette al num. 2., che ſarà $=\frac{2.\overline{OA}^2}{OB}=\frac{2b^2c^2r^2.\overline{Sc.\mu+\phi}}{\overline{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}^{\frac{3}{2}}}$. Dei

due

due angoli poi μ, e ϕ è facile definir l' uno per l' altro. Imperocchè essendo $OL : LT$, cioè b :

$$\frac{bc^2r . Cc\mu}{b^2 . \overline{Sc\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc\mu}^2} :: Sc . \overline{\mu + \phi} : Sc\phi,$$ sarà

$$b^2 . \overline{Sc\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc\mu}^2 : c^2r . Cc\mu :: Sc . \overline{\mu + \phi} : Sc\phi .$$

Ma (Lib. I. Cap. X. num. 7.) $Sc . \overline{\mu+\phi} = \frac{Sc\mu . Cc\phi + Sc\phi . Cc\mu}{r}$. Dunque $b^2 . \overline{Sc\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc\mu}^2 : c^2r . Cc\mu :: Sc\mu . Cc\phi + Sc\phi . Cc\mu : r . Sc\phi$; cioè $b^2 . \overline{Sc\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc\mu}^2 : c^2r . Cc\mu :: Sc\mu + \frac{Sc\phi}{Cc\phi} . Cc\mu : r . \frac{Sc\phi}{Cc\phi}$; oppure (Lib. I. Cap. X. num. 5.) $b^2 . \overline{Sc\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc\mu}^2 : c^2r . Cc\mu :: Sc\mu + \frac{Cc\mu . Tc\phi}{r} : Tc\phi$; e però $b^2 . \overline{Sc\mu}^2 . Tc\phi + c^2 . \overline{Cc\mu}^2 . Tc\phi = c^2r . Cc\mu . Sc\mu + c^2 . \overline{Cc\mu}^2 . Tc\phi$, cioè $b^2 . Sc\mu . Tc\phi = c^2r . Cc\mu$, e $\frac{b^2 . Sc\mu . Tc\phi}{Cc\mu} = c^2r$; quindi $b^2 . Tc\mu . Tc\phi = c^2r^2$, e finalmente $Tc\mu = \frac{c^2r^2}{b^2 . Tc\phi}$.

VII. Suppongansi eguali i due assi conjugati LX, SR, onde sia $b = c$. L' analogia $b : \frac{bc^2r . Cc\mu}{b^2 . \overline{Sc\mu}^2 + c^2 . \overline{Ca\mu}^2} :: Sc . \overline{\mu + \phi} : Sc\phi$, diverrà $1 : \frac{r . Cc\mu}{\overline{Sc\mu}^2 + \overline{Cc\mu}^2} ::$

Sc.

$Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc\phi$, cioè (per essere $\overline{Sc\mu}^2 + \overline{Cc\mu}^2 = rr$) $r : Cc\mu :: Sc.\overline{\mu+\phi} : Sc\phi$; il che porta, che sia $EC : EH :: EO : EZ$, e però l'angolo OZE eguale ad EHC, cioè retto. Dunque gli altri due angoli OEZ, ZOE, cioè μ, ϕ, presi insieme eguali ad un retto; e conseguentemente $Sc.\overline{\mu+\phi} = r$. Inoltre il semidiametro $OB = \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}}$ diverrà $= \frac{br}{Sc.\overline{\mu+\phi}} = b$, cioè eguale a ciascun dei semiassi OL, OR. Dunque allora le ordinate a qualsivoglia diametro gli sono perpendicolari, e tutti i diametri sono fra di loro eguali; e per conseguenza l'ellisse diventa un circolo. Dunque il circolo è della famiglia delle ellissi, e si può riguardare come un'ellisse, in cui tutti i diametri sono assi, e sono eguali fra di loro.

VIII. Dovunque si trovi l'asse dell'ellisse $KSLR$, sia ora LK un diametro qualsivoglia, che faccia con l'asse un angolo $= \phi$, essendo μ l'angolo, che con l'asse medesimo fanno le sue ordinate. Preso un qualunque punto B della curva, suppongasi in esso condotta la tangente BX, che incontri il diametro LK in X; e sia BY l'ordinata dal medesimo punto al diametro stesso LK. Sarà $Sc.\ OYB = Sc.\overline{\mu+\phi}$ (7). Intendasi condotta da B per lo centro O la retta BOP, che (num. 5.) sarà un diametro anch'essa. Pongasi che sia π l'angolo, che questo nuovo diametro fa con l'asse, e λ quello, che con il medesimo asse fanno le sue ordinate. Sia per L ordinata al diametro BP la LT, a cui sarà parallela la tangente BX (Cap. I. num. 6.);

num.6.); e però sarà $OT:OB::OL:OX$. E' chiaro, che sarà ancora $Sc.OTL = Sc.\overline{\lambda+\pi}$. Abbia il diametro LK per suo conjugato SOR, e BP abbia QOA.

Sarà (num. 6.) $OL = \dfrac{\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2}}{Sc\,\overline{\mu+\phi}}$, OR $= \dfrac{bcr}{\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2}}$, ed $OB =$ $\dfrac{\sqrt{b^2.\overline{Sc\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc\lambda}^2}}{Sc.\overline{\lambda+\pi}}$, $OA = \dfrac{bcr}{\sqrt{b^2.\overline{Sc\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc\lambda}^2}}$,

dove b, c rappresentano i due semiassi conjugati. E' certo, che sarà $LT:BY$ nella composta di $LT:OL$, di $OL:OB$, di $OB:BY$, cioè nella composta di $Sc.LOB:Sc.OTL$, di $\dfrac{\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}}:$ $\dfrac{\sqrt{b^2.\overline{Sc\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc\lambda}^2}}{Sc.\overline{\lambda+\pi}}$, e di $Sc.OYB:Sc.LOB$.

Perciò sarà $LT:BY::$

$$\frac{Sc.OYB.\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\phi}}:$$

$$\frac{Sc.OTL.\sqrt{b^2.\overline{Sc\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc\lambda}^2}}{Sc.\overline{\lambda+\pi}};$$ cioè $LT:BY::$

$\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2}:\sqrt{b^2.\overline{Sc\lambda}^2 + c^2.\overline{Cc\lambda}^2}$, giac-

chè

chè $Sc.OYB = Sc.\overline{\mu+\rho}$, e $Sc.OTL = Sc.\overline{\lambda+\pi}$. Ma anche $OA:OR::\sqrt{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2} : \sqrt{b^2.\overline{Sc\lambda}^2+c^2.\overline{Cc\lambda}^2}$. Dunque $LT:BY::OA:OR$; e però anche $\overline{LT}^2:\overline{OA}^2::\overline{BY}^2:\overline{OR}^2$. Ma (num. 2.) $\overline{OB}^2-\overline{OT}^2:\overline{LT}^2::\overline{OB}^2:\overline{OA}^2$; e $\overline{OL}^2-\overline{OY}^2:\overline{BY}^2::\overline{OL}^2:\overline{OR}^2$; e alternando da per tutto, $\overline{OB}^2-\overline{OT}^2:\overline{OB}^2::\overline{LT}^2:\overline{OA}^2$; e $\overline{OL}^2-\overline{OY}^2:\overline{OL}^2::\overline{BY}^2:\overline{OR}^2$. Dunque $\overline{OB}^2-\overline{OT}^2:\overline{OB}^2::\overline{OL}^2-\overline{OY}^2:\overline{OL}^2$; onde $\overline{OB}^2.\overline{OL}^2-\overline{OT}^2.\overline{OL}^2=\overline{OB}^2.\overline{OL}^2-\overline{OB}^2.\overline{OY}^2$, e $OT.OL=OB.OY$; e quindi $OY:OL::OT:OB$. Dunque $OY:OL::OL:OX$. Pertanto ſe da qualunque punto B dell' elliſſe ſi condurrà al diametro LK l'ordinata BY, e ſi prenderà OX terza proporzionale dopo l' aſciſſa OY, e il ſemidiametro OL; tirata la BX, ſarà eſſa tangente dell' elliſſe nel punto B.

CAPO III.

Dell' Iperbola.

I. NEll' equazione all' iperbola (Cap. I. num. 8.) $yy-ax^2-bx-c=0$ pongo $x+\frac{b}{2a}=z$; traſportando così il principio delle aſciſſe dal punto F (*Fig.5.Tav.I.*) in un altro O del diametro FH, talchè FO

$FO = \frac{b}{2a}$. L' equazione diventa $yy - az^2 + \frac{b^2}{4a} - c = o$: e convertendo z in x, e sostituendo bb in luogo di $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$, e $\frac{cc}{bb}$ in luogo di a; $yy = \frac{cc}{bb}$. $\overline{xx - bb}$, onde $y = \pm \frac{c}{b} \sqrt{xx - bb}$. Quest' equazione resta affatto la stessa ancorchè si cangi la x di positiva in negativa; donde si conchiude, che a distanze eguali prese di quà e di là dal principio delle ascisse O, corrispondono ordinate eguali. Perchè poi non sia y immaginaria, non dee essere x minore di b. Dunque tagliate di quà e di là dal punto O sul diametro OH le due OK, OL, ciascuna $= b$, sarà OL il minimo valore di x positiva, e OK il minimo di x negativa. Or posta $x = b$, si ha $y = o$: al crescer poi della x, è manifesto che cresce ancora la quantità $xx - bb$, e però anche il valore di y, di modo che posta x infinita, anche y diventa infinita. Dunque la curva passa per i due punti K, L, ed ha quattro rami LC, LD, KV, K&, che allo scostarsi dal punto O, si scostano anche dal diametro OH, talmente che a distanza infinita da O sono anche infinitamente distanti da OH prolungata in infinito da ambe le parti. Se OH fosse l' asse, cioè se fosse retto l'angolo OHC, è chiaro che i quattro rami infiniti LC, LD, KV, K& sarebbero in tutto e per tutto eguali, e simili fra di loro. Le due curve DLC, & KV si chiamano *iperbole opposte*; e quantunque sieno disgiunte l' una dall' altra, pure costituiscono una curva sola, essendo amendue comprese sotto una sola equazione. La parte KL di diametro, che resta fuori della curva, è dessa, che propriamente *diametro dell' iperbola*

bola appellasi: K, L sono i suoi *vertici*; e 'l punto di mezzo O dicesi *centro* delle opposte iperbole.

II. Il rettangolo KHL dei due segmenti KH, LH del diametro prolungato sta al quadrato della corrispondente ordinata HC in una ragion costante, che è la ragione $bb:cc$; il che si dimostra nella stessa maniera, in cui si è dimostrata una simile proprietà nell'ellisse al num. 2. cap. precedente. Anche qui, se p indicherà la linea, a cui sta il diametro KL nella detta costante ragione $bb:cc$, sarà $p = \frac{2cc}{b}$, e la linea p dirassi *parametro del diametro* KL: e fatta nell' equazione $yy = \frac{cc}{bb} . \overline{xx - bb}$ la sostituzione di $\frac{bp}{2}$ in luogo di cc; la nuova equazione $yy = \frac{p}{2b} . \overline{xx - bb}$ chiamerassi *equazione al parametro*.

III. Sia condotta per lo centro O parallela alle ordinate HC una retta SOR indefinitamente prolungata da una parte e dall' altra: indi presa al contrario di OH un' ascissa OG eguale alla stessa OH, sia condotta l' ordinata GV, e tirisi la VC, che taglierà la OR in I. Si dimostrerà come al num. 3. del cap. preced., che CV sarà parallela al diametro KL, e resterà divisa per metà in I dalla OR; onde anche qui si dedurrà, che SOR taglia per metà tutte le CV, che possono iscriversi alle due iperbole opposte parallelamente al diametro KL. Sarà dunque la indefinita SOR un diametro anch' essa.

IV. Questo diametro SOR, essendo parallelo alle ordinate HC, GV, viene insieme ad esser parallelo alle tangenti condotte nei due vertici K, L, e però resta tutto tra queste due tangenti; onde è impospossibile che incontri mai la curva, che è tutta di quà e di là dalle tangenti stesse. Ciò però non ostante, per una certa analogia all' ellisse, sogliono prendere in esso da una parte e dall' altra del centro O le due OR, OS, ciascuna $= c$, cioè media proporzionale tra il semidiametro $OK = b$, ed il suo semiparametro $\frac{p}{2} = \frac{cc}{b}$, e chiamano la linea SR così stabilita *diametro secondo*, dando il nome di *diametro primo* all' altro KL. Il diametro primo KL, ed il secondo SR diconsi *conjugati* uno dell' altro; e ognun di loro ha, come nell' ellisse, le sue ordinate parallele all' altro.

V. Non compete nell' iperbola ai due diametri conjugati la medesima proprietà; nel che è diversa questa curva dall' ellisse. Rispetto al diametro primo KL abbiam veduto (num. 2.), che il rettangolo KHL, o vogliam dire la differenza tra il quadrato dell' ascissa OH ed il quadrato del semidiametro OL, ha al quadrato dell' ordinata HC una ragion costante: per lo diametro secondo SR è la somma del quadrato dell' ascissa OI e del quadrato del semidiametro OR, che ha una ragion costante al quadrato dell' ordinata IV. Infatti abbiamo $OR = c$, $OI = HC = y$, $IV = OG = OH = x$. Ma per l' equazione della curva è $yy = \frac{cc}{bb} . \overline{xx - bb}$ (num. 1.), cioè $b^2 y^2 = c^2 x^2 - c^2 b^2$, e quindi $b^2 y^2 + b^2 c^2 = c^2 x^2$: e risolvendola in analogia, $yy + cc : xx :: cc : bb$, cioè $\overline{OI}^2 + \overline{OR}^2 : \overline{IV}^2 :: c^2 . b^2$. Dunque tramutate le x in y, e le y in x, sarà $yy = \frac{bb}{cc} . \overline{xx + cc}$, equazione all' iperbole, prese le x nel secondo diametro. Qui pure la linea, a cui il diametro ſecondo OR ha la ragion coſtante della ſomma $\overline{OI}^2 + \overline{OR}^2$ al quadrato $\overline{IV}^2$, diceſi *parametro dello ſteſſo diametro ſecondo* OR. Sarà dunque queſto parametro $= \frac{2 . \overline{OK}^2}{OR} = \frac{2bb}{c}$.

VI. Poniamo che KL, SR ſieno i due aſſi conjugati, onde l' angolo LOR ſia retto. Per qualunque punto C d' una delle due oppoſte iperbole ſia iſcritta all' iperbola ſteſſa una CN, che tagli l' aſſe KL in E ſotto qualſivoglia angolo $OEC = \mu$: chiamiſi $OE = z$, $EC = u$; e fatte le ſteſſe coſe del num. 4. del Cap. preced., ſi avrà l' equazione tra le OE, e le EC, che ſarà

$$\frac{u^2 . \overline{Sc\mu}^2}{rr} = \frac{cc}{bb} . zz - \frac{2uz . Cc\mu}{r} + \frac{u^2 . \overline{Cc\mu}^2}{rr} - bb.$$

Qui poſta $z = b = OL$, dei due valori di u uno EC riſulta $= o$, e l' altro negativo EN diventa $LM = \frac{2bc^2 r . Cc\mu}{bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}$. Però diviſa queſta LM per metà in T, e condotta per T e per lo punto O una retta, che taglierà la CN in Z, e l' iperbola MLC in B; facendo $OZ = x$, $ZC = y$, e l' angolo $BOL = \varphi$, onde ſia $LTO = \mu - \varphi$: e ripetuto il calcolo del num. 5. del Cap. preced., ſi troverà l' equazione $yy =$

$$\frac{b^2 c^2 r^2 . \overline{Sc . \mu - \varphi}^2}{(bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2)^2} . xx - \left(\frac{bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}{\overline{Sc . \mu - \varphi}^2}\right),$$

eſprimente la relazione tra le OZ, ZC. In queſta equazione è chiaro, che y ha ſempre due valori fra di loro eguali, uno poſitivo, e l' altro negativo; onde de apparisce, che OT è un diametro. Posta poi $y = o$, è manifesto, che due valori risultano di x, eguali fra di loro, uno positivo, e l'altro negativo, cioè $x = \pm \frac{\sqrt{bb.\overline{Sc\mu}^2 - cc.\overline{Cc\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu - \phi}}$; il che ne mostra, che la OT taglia non solo l' iperbola MLC in B, ma anche l'opposta KV in P, di maniera che $OB = OP = \frac{\sqrt{bb.\overline{Sc\mu}^2 - cc.\overline{Cc\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu - \phi}}$. Inoltre si vede, che l' equazione al diametro BP, che si è quì trovata, è similissima all' equazione al diametro, o asse KL, ritrovata al num. 1. Dunque il nuovo diametro BP è dotato delle stesse proprietà generali, che competono al diametro, o asse KL. Finalmente dalla forma stessa dell' equazione si ricava, che $\frac{2bcr}{\sqrt{bb.\overline{Sc\mu}^2 - cc.\overline{Cc\mu}^2}}$ è il valore del diametro QA conjugato del BP (6). Il parametro poi di questo diametro BP sarà (num. 2.)

$$\frac{2.\overline{OA}^2}{OB} = \frac{2b^2c^2r^2.Sc.\overline{\mu - \phi}}{\left(bb.\overline{Sc\mu}^2 - cc.\overline{Cc\mu}^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

VII. Essendo $OL : LT$, cioè (num. 6.) $b : \frac{bc^2r.Cc\mu}{bb.\overline{Sc\mu}^2 - cc.\overline{Cc\mu}^2} :: Sc.\overline{\mu - \phi} : Sc\phi$, ed essendo (Lib. I. Cap. X. num. 10.) $Sc.\overline{\mu - \phi} = \frac{Sc\mu.Cc\phi - Sc\phi.Cc\mu}{r}$; si avrà $bb.\overline{Sc\mu}^2 - cc.$

$\overline{Cc\mu}^2 : c^2 r . Cc\mu :: Sc\mu . Cc\phi - Sc\phi . Cc\mu : r . Sc\phi$; e però $b^2 . Sc\phi . \overline{Sc\mu}^2 - c^2 . Sc\phi . \overline{Cc\mu}^2 = c^2 . Sc\mu . Cc\mu . Cc\phi - c^2 . Sc\phi . \overline{Cc\mu}^2$, cioè $bb . Sc\phi . Sc\mu = cc . Cc\mu . Cc\phi$, e $\frac{Sc\phi}{Cc\phi} . \frac{Sc\mu}{Cc\mu} = \frac{cc}{bb}$, oppure (Lib. I. Cap. X. num. 5.) $\frac{Tc\phi . Tc\mu}{rr} = \frac{cc}{bb}$; e quindi $Tc\mu = \frac{c^2 r^2}{b^2 . Tc\phi}$. Ed ecco definito l'angolo μ per il ϕ, appunto come nell'ellisse.

VIII. E' manifesto, che ogni qualvolta sia $c . Cc\mu > b . Sc\mu$, il semidiametro $OB = \frac{\sqrt{bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}}{Sc . \mu - \phi}$ (num. 6.) diventa immaginario, e però non incontra più la curva da nissuna parte. Affinchè dunque una retta condotta per lo centro O incontri la curva, e possa riguardarsi come un diametro primo, bisogna che non sia $c . Cc\mu > b . Sc\mu$, cioè $\frac{c}{b} > \frac{Sc\mu}{Cc\mu}$, o vogliam dire $\frac{cr}{b} > Tc\mu$: e poichè (num. 7.) $Tc\mu = \frac{c^2 r^2}{b^2 . Tc\phi}$; perciò bisogna che non sia $\frac{cr}{b} > \frac{c^2 r^2}{b^2 . Tc\phi}$, cioè $Tc\phi > \frac{cr}{b}$. Se fosse appunto $c . Cc\mu = b . Sc\mu$, si troverebbe anche $Tc\phi = \frac{cr}{b}$: ma $c . Cc\mu = b . Sc\mu$ è lo stesso che $Tc\mu = \frac{cr}{b}$; dunque sarebbe $\mu = \phi$, e però OB

$=$

$= \frac{\sqrt{bb.\,\overline{Sc\mu}^2 - cc.\,\overline{Cc\mu}^2}}{Sc.\,\overline{\mu-\varphi}}$ diverrebbe $\frac{o}{o}$;

della quale espressione si parlerà a suo luogo. Intanto per riconoscere che cosa significhi in questo caso, avvertasi, che essendo generalmente $OL : LT$, cioè $b : \frac{bc^2r.\,Cc\mu}{bb.\,\overline{Sc\mu}^2 - cc.\,\overline{Cc\mu}^2} :: Sc.\,\overline{\mu-\varphi} : Sc\varphi$, si avrà

$Sc.\,\overline{\mu-\varphi} = \frac{Sc\varphi.\,bb.\,\overline{Sc\mu}^2 - cc.\,\overline{Cc\mu}^2}{c^2r.\,Cc\mu}$; e però sostituito questo valore di $Sc.\,\overline{\mu-\varphi}$ nell' espressione di OB, si avrà generalmente $OB =$

$\frac{c^2r.\,Cc\mu}{Sc\varphi\,.\,\sqrt{bb.\,\overline{Sc\mu}^2 - cc.\,\overline{Cc\mu}^2}}$, dove posto $c.\,Cc\mu = b.\,Sc\mu$, diventa $= o$ il solo denominatore. Dunque nel nostro caso OB diventa infinita, cioè non incontra la curva se non all' infinito.

IX. Sia dunque KL (*Fig. 6. Tav.* 1.) l'asse primo $= 2b$, O il centro; e condotta per lo vertice L una perpendicolare all' asse KL, si prendan su di essa di quà e di là del punto L le due LH, LG, ciascuna eguale al semiasse secondo c. Condotta la OH, e prodottala indefinitamente, sarà $OL : LH$, cioè $b : c :: r : Tc.\,LOH$; e però $Tc.\,LOH = \frac{cr}{b}$. Sarà pertanto OH la retta, che non incontra la curva se non all' infinito: e tutte l' altre rette, che per O si condurranno dentro l' angolo LOH, facendo con l' asse KL un angolo minore di esso LOH, la cui tan-

gen-

gente perciò sarà minore di $\frac{cr}{b}$, incontreranno l' iperbola, e saranno tanti diametri primi. E siccome l' asse primo KL divide l' iperbola MLC in due rami perfettamente eguali; perciò condotta anche la OG, e prodottala indefinitamente, dovrà dirsi d' essa lo stesso, che s' è detto della OH: e dell' angolo LOG lo stesso, che s' è detto del suo eguale LOH. Anzi ognun vede, che tutto ciò, che vale dell' iperbola MLC rispetto all' angolo HOG, dee aver luogo egualmente nell' iperbola KV opposta rispetto all' angolo al vertice gOh. Dentro dunque l' angolo HOG, o il suo al vertice, sono compresi tutti i diametri primi dell' iperbola: ogni retta condotta fuori di quest' angolo non incontra mai la curva, e non può esser riguardata se non come diametro secondo. Le due rette OH, OG si chiamano *asintoti*, e l' angolo HOG, che insieme fanno, dicesi *angolo degli asintoti*. Le due iperbole opposte rimangono dunque interamente dentro l' angolo HOG, e il suo al vertice gOh. Secondo che quest' angolo è retto, o acuto, o ottuso, che è lo stesso che dire, secondo che il semiasse primo b è uguale al semiasse secondo c, o maggiore di esso, o minore, l' iperbola dicesi *equilatera*, o *acuta*, o *ottusa*.

X. Sia OB un semidiametro primo qualsivoglia, ZC una qualunque delle sue ordinate, che tagli l' asse in E: prolunghisi quest' ordinata di quà e di là finchè incontri la curva dall' altra parte in M, e gli asintoti in N, Q: sia al solito l' angolo $OEQ = \mu$, $EOZ = \varphi$, onde $OZQ = \mu - \varphi$: chiamisi λ l' angolo $EOQ = EON$ fatto dall' asse primo con ciascuno asintoto; sarà $ZOQ = \lambda + \varphi$, $ZON = \lambda - \varphi$, $ONZ = \mu - \lambda$; e finalmente OQZ, come supplemento

ai

ai due retti dei due $OEQ = \mu$, $EOQ = \lambda$ presi insieme, avrà lo stesso seno circolare, che la somma $\mu + \lambda$. Ciò posto, essendo $OZ : ZQ :: Sc.\overline{\mu + \lambda} : Sc.\overline{\lambda + \phi}$, e $OZ : ZN :: Sc.\overline{\mu - \lambda} : Sc.\overline{\lambda - \phi}$, sarà $ZQ : ZN :: \frac{Sc.\overline{\lambda + \phi}}{Sc.\overline{\mu + \lambda}} : \frac{Sc.\overline{\lambda - \phi}}{Sc.\overline{\mu - \lambda}}$; cioè (Lib. I. Cap. X. num. 7., e 10.) $ZQ : ZN ::$
$\frac{Sc\lambda . Cc\phi + Sc\phi . Cc\lambda}{Sc\mu . Cc\lambda + Sc\lambda . Cc\mu} : \frac{Sc\lambda . Cc\phi - Sc\phi . Cc\lambda}{Sc\mu . Cc\lambda - Sc\lambda . Cc\mu}$: dividendo i due numeratori per $Cc\lambda . Cc\phi$, e i due denominatori per $Cc\mu . Cc\lambda$; $ZQ : ZN ::$

$\frac{\frac{Sc\lambda}{Cc\lambda} + \frac{Sc\phi}{Cc\phi}}{\frac{Sc\mu}{Cc\mu} + \frac{Sc\lambda}{Cc\lambda}} : \frac{\frac{Sc\lambda}{Cc\lambda} - \frac{Sc\phi}{Cc\phi}}{\frac{Sc\mu}{Cc\mu} - \frac{Sc\lambda}{Cc\lambda}}$, o vogliam dire $ZQ : ZN ::$

$\frac{Tc\lambda + Tc\phi}{Tc\mu + Tc\lambda} : \frac{Tc\lambda - Tc\phi}{Tc\mu - Tc\lambda}$. Ma si è trovato (num. 7.)

$Tc\phi = \frac{c^2 r^2}{b^2 . Tc\mu}$, e (num. 9.) $Tc\lambda = \frac{cr}{b}$, per cui

$Tc\phi = \frac{\overline{Tc\lambda}^2}{Tc\mu}$. Dunque $ZQ : ZN ::$

$\frac{Tc\lambda + \frac{\overline{Tc\lambda}^2}{Tc\mu}}{Tc\mu + Tc\lambda} : \frac{Tc\lambda - \frac{\overline{Tc\lambda}^2}{Tc\mu}}{Tc\mu - Tc\lambda}$; e finalmente ZQ:

$ZN :: \frac{Tc\mu + Tc\lambda}{Tc\mu + Tc\lambda} : \frac{Tc\mu - Tc\lambda}{Tc\mu - Tc\lambda}$, cioè $ZQ : ZN ::$ $1 : 1$. Però sarà $ZQ = ZN$; ed essendo già $ZC = ZM$, sarà pure $CQ = MN$. Or ciò valendo qualunque sia il diametro OZ, ne segue, che iscritta qualsivoglia retta all'angolo degli asintoti, la quale tagli ancora l'iperbola, i due segmenti di questa retta fatti dalla curva e dall'asintoto, uno da una parte, e l'altro dall'altra, sono sempre fra di loro eguali.

XI. Segue ancora dalle cose dette, che condotta a qualsivoglia punto B dell'iperbola la tangente, che incontri gli asintoti in P, F, resterà la tangente PF divisa per metà nel punto di contatto B. Imperocchè intesa per lo centro O, e per lo punto B una retta OB, la quale sarà un diametro primo (num. 9.), questa dovrà tagliare per metà, come si è dimostrato al numero precedente, tutte le rette iscritte all'angolo degli asintoti parallele alle sue ordinate, e per conseguenza anche la tangente PF, che è pure parallela alle dette ordinate (Cap. I. num. 6.). Essendo pertanto $BP = BF$, se per B si condurrà all'asintoto OP una BS parallela all'altro asintoto OF, sarà ancora $SP = SO$. Da ciò si cava una maniera spedita di condurre la tangente a qualsivoglia punto B dell' iperbola posta tra i suoi asintoti; poichè condotta dal dato punto B ad un asintoto OP una BS parallela all' altro asintoto OF: indi presa da S su lo stesso asintoto OP, dalla parte opposta all'angolo degli asintoti O, una SP eguale alla SO: unito il punto P con il dato B mediante la PB, sarà PB la tangente cercata.

XII. Essendo $OZ : ZQ$, cioè $Sc . \overline{\mu + \lambda} : Sc . \lambda + \phi$ $:: OB : BF$, vale a dire $Sc\mu . Cc\lambda + Sc\lambda . Cc\mu :$

$S c \lambda . C c \phi + S c \phi . C c \lambda :: O B : B F$, e dividendo per $C c \lambda$ i termini della prima proporzione, $S c \mu + \frac{S c \lambda}{C c \lambda} . C c \mu : \frac{S c \lambda}{C c \lambda} . C c \phi + S c \phi :: O B : B F$: ed a causa di $\frac{S c \lambda}{C c \lambda} = \frac{T c \lambda}{r} = \frac{c}{b}$ (num. 9.), $b . S c \mu + c . C c \mu : c . C c \phi + b . S c \phi :: O B : B F$: ed essendosi trovato (num. 7.) $b^2 . S c \phi . S c \mu = c^2 . C c \mu . C c \phi$, per cui $b . S c \mu : c . C c \mu :: c . C c \phi : b . S c \phi$, e componendo, e poi alternando, $b . S c \mu + c . C c \mu : c . C c \phi + b . S c \phi :: c . C c \mu : b . S c \phi$; sarà $c . C c \mu : b . S c \phi :: O B : B F$. Ma $O B$ (num. 8.) $= \frac{c^2 r . C c \mu}{S c \phi . \sqrt{bb . \overline{S c \mu}^2 - cc . \overline{C c \mu}^2}}$.

Dunque $B F = \frac{b . S c \phi . O B}{c . C c \mu} =$

$\frac{b c r}{\sqrt{bb . \overline{S c \mu}^2 - cc . \overline{C c \mu}^2}}$. Ma questo è il valore del semidiametro secondo conjugato del primo $O B$ (num.6.). E' dunque la parte di tangente, compresa tra il contatto e ciascun' asintoto, eguale al semidiametro conjugato di quel diametro primo, che ha per vertice il punto di contatto.

XIII. Sia dunque $P B F$ (*Fig.7. Tav.2.*) la tangente a qualsivoglia punto B dell' iperbola, che incontri gli asintoti in P, F; e condotto un qualunque diametro $O L$, che tagli la tangente in T, per B sia parallela alle ordinate di questo diametro la $B C$, che tagli il diametro in E, la curva in C, gli asintoti in G, Z. Sarà $B E = E C$, e (num.10.) $B G = C Z$. Così pure, tirata per F parallela a GZ la FH, che tagli il diametro O L in V; ſarà $VF = VH$; onde eſſendo $PB : PF :: GB : HF$, e PF doppia di PB, per cui anche HF doppia di GB; ſarà VH non ſolo parallela, ma anche eguale a GB: per lo che condotta BV, ſarà BV parallela a GO, e così $GB : BE :: OV : VE$: ma abbiam anche VF, cioè VH, o vogliam dire $GB : BE :: VT : TE$; dunque $OV : VE :: VT : TE$. Pertanto chiamando $OE = x$, $OV = u$, onde $VE = x - u$; ſarà $u : x - u :: VT : TE$, e componendo, $x : x - u :: VE : TE$, cioè $:: x - u : TE$, e $TE = \frac{\overline{x-u}^2}{x}$; onde $TO = x - \frac{\overline{x-u}^2}{x} = \frac{2ux - uu}{x}$. Inteſa ora nel vertice L del diametro O L la tangente K L I, che ſarà parallela alle ordinate EC di queſto diametro, ed eguale al ſuo diametro conjugato (num. 12.); ſi chiami il ſemidiametro primo $OL = b$, il ſecondo $LI = c$, l' ordinata $EC = EB = y$. Sarà (num. 1.) $yy = \frac{cc}{bb} \cdot \overline{xx - bb}$, cioè $y = \pm \frac{c}{b}\sqrt{xx - bb}$. Or poicchè $OL : LI :: OV : VF$; ſi avrà $VF = VH = GB = \frac{cu}{b}$: ma $GB : BE :: OV : VE$; dunque $\frac{cu}{b} : \pm \frac{c}{b}\sqrt{xx - bb} :: u : x - u$; onde $x - u = \pm\sqrt{xx - bb}$: e quadrando, $xx - 2ux + uu = xx - bb$, cioè $2ux - uu = bb$. Ma ſi è trovata $TO = \frac{2ux - uu}{x}$. Dunque anche $TO = \frac{bb}{x} = \frac{\overline{OL}^2}{OE}$, cioè

OE

$OE : OL :: OL : OT$, che è la stessa proprietà, che al num. 8. del capo precedente si dimostrò competere anche alla tangente dell'ellisse.

XIV. Preso ora nell'iperbola qualsivoglia punto B, tirisi ad uno degli asintoti OZ la BS parallela all'altro asintoto OG, e chiamisi $OS = a$, $SB = b$: condotta per B una retta qualunque, che tagli l' iperbola in qualsivoglia altro punto C, ed incontri gli asintoti in G, Z; per C tirisi parallela a BS, e per conseguenza all'asintoto OG, la CR: facciasi $OR = x$, $RC = y$. Essendo $CZ = BG$ (num. 10.), sarà anche $RZ = OS = a$, e quindi ancora $SZ = OR = x$: ma $RZ : RC :: SZ : SB$, cioè $a : y :: x : b$; dunque $xy = ab$, equazione all' iperbola, semplicissima, e che niente meno esprime la natura della curva di quel che la esprima l'equazione trovata al num. 1. Sarà pertanto $y = \frac{ab}{x}$, dove apparisce, che al crescer dell' ascissa $x = OR$, cala l' ordinata $y = RC$, tal che fatta x infinita, diventa y infinitamente piccola, o nulla; il che appunto ne mostra, che la curva s' accosta sempre più all'asintoto, senza però mai raggiungerlo. Posta $x = o$, diventa y infinita, cioè diventa l' altro asintoto OG. Presa x negativa, l' equazione è $y = \frac{ab}{-x}$, cioè si fa negativa anche la y, ma la forma dell' equazione resta la stessissima. Ciò mostra, che prendendo le ascisse x nell'asintoto OZ prolungato oltre l'angolo O verso r, l' ordinata rc corrispondente a qualsivoglia ascissa Or cade rispetto all' asintoto stesso OZ dalla parte opposta a quella, da cui cadevan le ordinate RC corrispondenti alle ascisse positive OR; e che per conseguenza dentro l' angolo opposto per vertice al

GOZ

GOZ havvi un' altra curva eguale alla BLC, simile, e similmente posta, che è appunto l' iperbola opposta alla BLC. L' equazione $xy = ab$, in cui le ascisse x sono prese dall' angolo degli asintoti su l' uno di questi, e le ordinale y sono parallele all' altro, dicesi *equazione agli asintoti*: ed il piano costante ab, a cui è eguale il rettangolo di qualunque ascissa nella sua ordinata, chiamasi *potenza dell' iperbola*.

XV. E' questo il luogo di considerare il caso ommesso al num. 4. del Cap. I., quello cioè, in cui all' equazione generale del secondo grado manca il termine yy. Allora l' equazione è $\begin{array}{l} lxy + mx^2 + q = o, \\ \quad + ny + px \end{array}$ la quale fingiamo che rappresenti la curva DEC (*Fig.* 8. *Tav.* 2.), qualunque ella siasi. Corrispondendo in quest' equazione a qualsivoglia ascissa x un solo valore dell' ordinata y, è chiaro, che qualunque sia l' ascissa $AB = x$, l' ordinata $BC = y$ che le corrisponde, prolungata anche infinitamente, non incontra la curva in altro punto fuorchè in C. Pongasi $\frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - y = u$ (9), onde $y = \frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - u$; con che altro non si fa, che trasportare la linea, a cui terminano le ordinate della curva, da AB in FH. Imperocchè condotta per A parallela a BC la $AF = \frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l}$, e tirata per F parallela ad AB la FG, che incontri BC prodotta in G: indi presa sopra FG una qualunque FI, e fatta IK parallela a BC, tal che sia $FI : IK :: l : m$, e condotta FK, che taglierà BC in H; essendo $FI : IK :: FG : GH$, cioè l:

m::

$m::x:GH$, si avrà $GH=\frac{mx}{l}$; e però fatta $HC=u$, sarà appunto $y=BG-GH-HC=\frac{mn}{l^2}-\frac{p}{l}-\frac{mx}{l}-u$, e sarà u la nuova ordinata. Fatta la sostituzione del valore di y nell'equazione, risulta $\begin{matrix}-lxu\\-nu\end{matrix}+\frac{mn^2}{l^2}-\frac{np}{l}+q=0$, dove le due indeterminate u, x non sono veramente coordinate, non terminando le $HC=u$ nella linea AB, in cui sono prese le ascisse x. Dunque chiamando $FH=t$, ed espressa per $1:k$ la ragione di FI ad FK, cioè di FG ad FH, o di x a t, la qual ragione è data per la costruzione; pongasi in luogo di x nell'equazione trovata il suo valore $\frac{t}{k}$, ed avrassi $\begin{matrix}-\frac{ltu}{k}\\-nu\end{matrix}+\frac{mn^2}{l^2}-\frac{np}{l}+q=0$, ovvero, moltiplicando per $-\frac{k}{l}$ tutti i termini, $\begin{matrix}tu\\+\frac{knu}{l}\end{matrix}-\frac{kmn^2}{l^3}$ $+\frac{knp}{l^2}-\frac{kq}{l}=0$, la qual nuova equazione esprime la relazione tra le due coordinate $FH=t$, $HC=u$. In questa per maggior semplicità può porsi $t+\frac{kn}{l}=z$, il che altro non importa, che il passaggio del principio delle ascisse dal punto F in un altro L della medesima linea FH, facendo $FL=\frac{kn}{l}$; e si avrà $zu=\frac{kmn^2}{l^3}-\frac{knp}{l^2}+\frac{kq}{l}$, cioè il rettangolo delle due coor-

coordinate $z = LH$, $u = HC$ eguale ad una costante quantità, che è la proprietà dell' iperbola, prese le ascisse z dal centro sopra un asintoto, e le ordinate u parallele all' altro asintoto. Dunque la curva DEC, a cui appartiene l' equazione generale del secondo grado quando le manca il quadrato yy, è l' iperbola riferita agli asintoti: e la linea LH, trovata con la costruzione precedente, è uno degli asintoti: L è il centro, o il punto, in cui è costituito l' angolo degli asintoti stessi: l' altro asintoto LO è parallelo alle ordinate $BC = y$.

XVI. Dalle cose dette in questi tre Capi apparisce, che l' equazione indeterminata del secondo grado non può appartener mai ad altre curve, fuorchè alla parabola, all' ellisse, che comprende anche il circolo, e all' iperbola, che sono quelle curve, che vengono comunemente abbracciate sotto il nome di *Sezioni coniche*. Sono dunque queste le curve tutte del secondo grado, delle quali abbiam bastantemente esposte fin' ora le primarie proprietà.

CAPO IV.

Descrizione delle Linee del grado secondo.

I. GLi Antichi per descrivere le linee del secondo grado si servirono della Intersecazione di un piano con un cilindro, o di un piano con un cono. Della prima trattò il Filosofo Sereno; della seconda, benchè avanti Apollonio Pergeo fosse stato parlato, questi però la ridusse a tale, che sembra unicamente da lui doversi riconoscere ciò, che più d' interessante sappiamo delle coniche sezioni. Per brevità discorre reremo ſol di queſte, comecchè più celebri.

II. Se da un punto *B* (*Fig.9.10.Tav.2.*) poſto fuori del piano di un circolo *AC* ſi tiri una indefinita *AB*, che paſſi per la periferia del circolo in *A*, e poſto immobile il punto *B*, ſi faccia girare queſta retta intorno alla periferia del circolo *AC*; il ſolido compreſo dal circolo *AC*, e dalla ſuperficie generata dalla linea *AB*, diceſi *cono*, e la ſuperficie generata diceſi *ſuperficie conica*: il punto *B* diceſi *vertice*, il circolo *AC* diceſi *baſe*, la retta che congiunge il vertice *B* con il centro della baſe diceſi *aſſe*, e la retta tirata dal vertice normale al piano della baſe diceſi *altezza*, la quale ſe ſia ancor aſſe, il cono diceſi *retto*, ſe non, diceſi *ſcaleno*, o *obliquo*.

III. Non mi diffonderò nel dimoſtrare, che ſe il cono ſarà ſegato da un piano *ABC*, che paſſi per lo vertice *B*, le comuni ſezioni *BA*, *BC* del piano, e della ſuperficie conica ſieno linee rette; e che la linea *DNF*, ſegnata nella ſuperficie conica da un piano ſecante parallelo alla baſe, ſia un circolo: queſte ſono verità chiare per ſe ſteſſe. Sia ora ſegato il cono *ABC* da un piano qualunque *MNmn*, il quale non paſſi per lo vertice *B*, ne ſia parallelo alla baſe: ſi conduca nella baſe un diametro *AC*, che ſia perpendicolare alla comune ſezione del piano ſecante, e della baſe; e per *AC* ſi tiri un piano *ABCmr*, che paſſi per lo vertice *B*, ed *Mm* ſia la comun ſezione di queſto piano coll' altro, che non paſſa per lo vertice: dai punti *M*, *m* ſi tirino *MR*, *mr* parallele ad *AC*, e preſo un qualunque punto *N* nella linea *MN* ſegnata dal piano ſecante nella ſuperficie conica, ſi faccia paſſare per queſto punto un piano *DNF* parallelo alla baſe; la linea *DNF* ſarà un circolo, al diametro di cui *DF* ſarà perpendicolare *NX* comune ſezione del piano $M N$ con il circolo $D N F$. Ciò poſto, ſi chiami $M m = a$, $M X = x$, $X N = y$, $M R = b$, $m r = c$; avremo $a^2 : b c$ in ragion compoſta di $a : b$, e di $a : c$; cioè, per la ſimilitudine dei triangoli $m M R$, $m X F$, ed $m M r$, $D M X$, in ragion compoſta di $a \pm x : X F$, e della $x : D X$ ($a + x$ ſerve per la prima figura, in cui il piano ſecante taglia il cono $B m r$, che ſi genera di là dal punto B, ed $a - x$ ſerve per la ſeconda figura, in cui il piano ſecante taglia il ſolo cono $A B C$). Dunque ſarà $a^2 : b c :: a x \pm x^2 : X F . D X$. Ma è $X F . D X = \overline{X N}^2 = y^2$ per la natura del circolo. Dunque ſarà $a^2 : b c :: a x \pm x^2 : y^2$, e $\frac{b c}{a^2} . \overline{a x \pm x^2} = y^2$. Quando vi è il ſegno più, l' equazione è all' iperbola riferita ai diametri; quando vi è il ſegno meno, l' equazione è all' elliſſe: i diametri conjugati di queſte linee ſono a, e $\sqrt{b c}$: in amendue il principio dell' aſciſſe è nel vertice dell' aſſe; le quali coſe facilmente ſi deducono da' capi precedenti (10). Adunque quando il piano ſega tutti e due i coni, ſi genera l' iperbola; ſe un ſolo, ſi genera l' elliſſe.

IV. Quando $M m$ taglia i lati $B C$, $B A$ dalla medeſima parte del vertice B, ſe l' angolo $M m R$ foſſe uguale all' angolo $B M R$, o ſia $M D F$, la quale ſezione diceſi *ſucontraria*, ſarebbe $m r : M R :: m B : R B :: \overline{B M}^2 : \overline{B R}^2 :: \overline{M m}^2 : \overline{M R}^2$, a motivo dei triangoli ſimili $m B M$, $M B R$; dunque in tal caſo ſarà $m r . M R = \overline{M m}^2$, ovvero $c b = a^2$; e però l' equazione $\frac{b c}{a^2} . \overline{a x - x^2} = y^2$ ſi traſformerà in $a x - x^2 = y^2$, al circolo del diametro a, qualor l' angolo $M X N$ ſia retto.

V.

V. Se il punto m si allontanasse all' infinito, allora Mm verrebbe parallela a Bm, anzi queste due rette si eguaglierebbono, ed il rettangolo mX in XM diverrebbe uguale al rettangolo mM in MX, cioè sarebbe

$ax \pm x^2 = ax$; dunque l' equazione $\frac{bc}{a^2} . \overline{ax \pm x^2} = y^2$ si

tramuterebbe in $\frac{bc}{a} . x = y^2$, equazione alla parabola

riferita al diametro, il cui parametro è $\frac{bc}{a} = MR$.

$\frac{mr}{Mm}$; mr, ed Mm sono due rette infinite, le quali si toglieranno dall' espressione del parametro, se si noti, che in questo caso sarà $Mm : mr :: Bm : mr :: BR ; MR$; dunque il parametro della parabola delineata

sarà $\frac{\overline{MR}^2}{BR}$. Dunque per mezzo delle sezioni di un piano e di un cono si possono ottenere tutte le linee di secondo grado, le quali per tal motivo si denominano *Sezioni coniche*.

VI. Quantunque per mezzo delle coniche sezioni si possano ottenere tutte le linee del secondo grado; ciò non ostante i moderni Geometri hanno avvisato di descriverle, colla traccia di un punto, che fan muovere successivamente con alcune condizioni: noi qui sceglieremo ciocchè più si confà alla pratica. La retta DB (*Fig.* 11. *Tav.* 2.) rappresenti una riga immobile, sopra cui si ponga un' altra CE, così che questa non possa moversi che perpendicolarmente alla DB: inoltre sia alla DB perpendicolare una retta qualunque FR, in cui preso un qualunque punto F, si fermi in questo una estremità del filo FMC, il quale sia lun-

 go

go quanto si pone CE; l'altra sua estremità si fissi in C nella riga CE: questa si faccia passare per lo punto F, ed il filo fermato in F, ed in C si stenda per quanto si può sopra la riga CE. Eseguita tale preparazione si faccia movere la riga CE, la quale sia accompagnata continuamente dal filo FM per mezzo dello stile M; dico che la linea AM descritta dal punto M sarà una parabola, la quale avrà il vertice in A, che divide FR egualmente. Dal punto M in FR si cali la perpendicolare MP, la quale si ponga $= y$: la retta AP si chiami $= x$, $AF = AR = b$, per cui $PF = x - b$, e $PR = x + b$. Essendo $FMC = CE$, levata la comune CM, sarà $FM = ME = PR$; onde sarà $\overline{PR}^2 = \overline{FM}^2 = \overline{x - b}^2 + y^2$: ma è ancora $\overline{PR}^2 = b^2 + 2bx + x^2$; dunque avremo $xx - 2bx + bb + yy = bb + 2bx + xx$, o sia $yy = 4bx$, equazione alla parabola riferita all'asse, il cui vertice è il punto A medio della linea FR, ed il parametro è $4b$. Per descrivere adunque con questo metodo la parabola del detto parametro $= 4b$, non si dee far altro, che prendere $FR = 2b$, e nel rimanente operare come sopra.

VII. Il punto F, dove si è fissato il filo, chiamasi *fuoco*, o *umbilico* della parabola; e la retta DB, sovra cui cammina perpendicolarmente CE, chiamasi *direttrice*. Sarà dunque proprietà della parabola, che la distanza FM del fuoco da un punto di curva sia uguale alla distanza ME di questo punto di curva dalla direttrice.

VIII. Si fermino sopra di un piano l'estremità F, f (*Fig.*12.*Tav.*2.) di un filo, talmente però, che la distanza Ff sia minore della lunghezza del filo, e si faccia scorrere uno stile per tutta la lunghezza di lui,

a con-à condizione, che lo ſtile tenga ſempre teſo il filo; dico che la linea AMa deſcritta dal punto M, ſarà una elliſſe. Da un punto M qualunque della linea AMa ſi cali in Aa la normale MP, e alla medeſima Aa, diviſa egualmente in C, ſia normale BCb: ſi ponga $CA = a$, $CB = b$, $CF = c$, $CP = x$, $MP = y$; ſarà $PF = c - x$, $Pf = c + x$: e poſta la differenza di MF, $Mf = 2z$, ſarà $MF = a - z$, ed $Mf = a + z$. Per i triangoli rettangoli MPF, MPf, ſarà $\overline{MP}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{MF}^2$, ed $\overline{MP}^2 + \overline{Pf}^2 = \overline{Mf}^2$; cioè $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2 - 2az + z^2$, ed $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = a^2 + 2az + z^2$: e ſottraendo la prima equazione dalla ſeconda, ſarà $4cx = 4az$, cioè $z = \frac{cx}{a}$, il qual valore ſoſtituito nella prima equazione, darà $y^2 + c^2 + x^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$, e $\frac{a^2-c^2}{a^2} . x^2 = a^2 - c^2 - y^2$, o ſia $\frac{c^2-a^2}{a^2} . x^2 + a^2 - c^2 = y^2$: e poſto $a^2 - c^2 = bb$, ſarà $\frac{bb}{aa} . \overline{aa - xx} = yy$, equazione all'elliſſe riferita all'aſſe maggiore, col principio dell'aſciſſe nel centro, e cogli aſſi conjugati $2a$ maggiore, $2b$ minore. Quindi ſe ſi voglia la deſcrizione dell'elliſſe, che abbia dati gli aſſi conjugati, ſi dee prendere la diſtanza dei punti F, f uguale alla radice della differenza dei quadrati degli aſſi conjugati; e la lunghezza del filo uguale all'aſſe maggiore, ed operare come ſopra. I punti F, f ſi dicono *fuochi*, o *umbilici* dell'elliſſe.

IX. Se ſi faranno $CR = Cr = \frac{a^2}{c}$, e per R, ed r ſi condurranno RS, rs parallele a CB; le rette RS,

rs

$r\,s$ si chiamano *direttrici* dell'ellisse, la proprietà di cui è, che preso un qualunque punto M nella curva, se si tirerà $M\,S$ parallela a $C\,R$, ed $M\,F$, che congiunge il punto M con il fuoco F più vicino alla direttrice $R\,S$; sarà l'intercetta $M\,S$ fra il punto M e la direttrice prossima al fuoco F alla $M\,F$ in ragion costante di $a:c$. Imperciocchè essendo $C\,R = \frac{a^2}{c}$, sarà $P\,R = M\,S = \frac{a^2 - c\,x}{c}$: ma è $M\,F = \frac{a^2 - c\,x}{a}$, come facilmente dal calcolo (11) si può dedurre; dunque sarà $M\,S : M\,F :: \frac{a^2 - c\,x}{c} : \frac{a^2 - c\,x}{a} :: a : c$. Se sarà $\frac{a^2}{c}$ infinita, sarà $c = o$; onde l'ellisse passa in un circolo quando le direttrici sono infinitamente distanti. Se sarà $\frac{a^2}{c} = a$, sarà ancora $c = a$, ed in questo caso l'ellisse passerà nella retta $A\,a$ normale alle direttrici.

X. Sopra un piano si fissi l'estremità di una riga $f\,M$ (*Fig.* 13. *Tav.* 2.) talmente, che possa concepire intorno al punto f un moto circolare: ed in un altro punto F del medesimo piano si fissi l'estremità di un filo, il quale sia minore della riga $f\,X$ per una lungezza minore di $F\,f$; l'altra estremità del filo si leghi all' estremità X della riga: compiuta tale preparazione, se con uno stile M si terrà teso il filo lungo la riga $f\,X$ mentre questa si ruota; dico che la linea descritta dal punto M sarà un' iperbola. Dal punto M si cali in $F\,f$ la normale $M\,P$, e la distanza $F\,f$ si divida egualmente in C: da una parte e dall' altra di questo punto si prendano $A\,C$, $a\,C$ uguali alla metà della differenza del filo, e della riga. Si ponga $A\,a = 2\,a$, $F\,f = 2\,c$, $C\,P = x$, $M\,P = y$; sarà $P\,F = x - c$, e $P\,f = x + c$:

la

la somma di MF, Mf sia $= 2z$; sarà $MF = z - a$, ed $Mf = z + a$. Per i triangoli FMP, fMP rettangoli, sarà $\overline{MP}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{MF}^2$, ed $\overline{MP}^2 + \overline{Pf}^2 = \overline{Mf}^2$, cioè $y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = a^2 - 2az + z^2$, ed $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = a^2 + 2az + z^2$: e sottratta la prima equazione dalla seconda, sarà $4cx = 4az$, e $z = \frac{cx}{a}$: e sostituito il valore di z nella prima equazione, sarà $y^2 + c^2 + x^2 = a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}$, o sia $\frac{c^2 - a^2}{a^2} \cdot x^2 + a^2 - c^2 = y^2$: e fatto $c^2 - a^2 = bb$, sarà $\frac{bb}{aa} \cdot \overline{x^2 - a^2} = y^2$, equazione all' iperbola riferita all' asse Aa primario, col principio dell' ascisse nel centro C, e cogli assi conjugati $2a$, $2b$. Quindi se si volesse la descrizione di una iperbola, che abbia dati gli assi conjugati, si prenda la distanza dei due punti F, f uguale alla radice della somma dei quadrati degli assi conjugati; e la differenza del filo e della riga uguale all' asse primario, e si operi come sopra. I punti F, f si chiamano *fuochi*, o *umbilici* dell' iperbola.

XI. Se si farà $CR = cr = \frac{a^2}{c}$, e per R, r si tireranno due rette RS, rs parallele a PM; queste si dicono le *direttrici* dell' iperbola, la cui proprietà è, che se da un punto M della curva si tireranno due rette, una MF ad un fuoco F, l' altra MS parallela a PR; sarà l' intercetta fra il punto M e la direttrice RS alla intercetta fra il punto M ed il fuoco prossimo in F in ragion costante di $a : c$. Imperocchè sarà $MS = \frac{cx - a^2}{c}$, ed $MF = \frac{cx - a^2}{a}$, come facilmente si

può

può vedere dal calcolo; onde sarà $MS:MF::\frac{cx-a^2}{c}:\frac{cx-a^2}{a}::a:c$. Quando $CR=o$, sarà $\frac{a^2}{c}=o$, ovvero $a=o$; in tal caso le direttrici e l' iperbola si confondono con una indefinita tirata dal centro C normale ad Ff. Se poi vi fosse $CR=a$, sarebbe $\frac{a^2}{c}=a$, e $b=\sqrt{c^2-a^2}=o$; onde l' iperbole in tal caso si confonderebbero colla linea Aa infinita.

XII. A queste descrizioni coi fili, perchè soggetti a distrazione, i Geometri amano di preferire quelle con sole verghe rigide. Per l' iperbola non ne so alcuna, che sia semplice; fra le molti poi per l' ellissi scelgo la seguente. Si faccia muovere fra le rette ACa, BCb (*Fig.* 14. *Tav.* 2.) poste ad angolo retto la retta STM talmente, che i punti T, S sieno sempre nelle CA, Cb; qualunque punto M di questa descriverà un' elisse. Si meni MP parallela a CB, e sia $SM=a$, $TM=b$, $CP=x$, $PM=y$. Abbiamo $a:x::b:PT=\frac{bx}{a}$; dunque sarà $b^2=\frac{b^2x^2}{a^2}+yy$, o sia $yy=\frac{bb}{a^2}\cdot\overline{a^2-x^2}$, equazione all' ellisse, gli assi di cui sono $2a$, $2b$; onde sarà facile con questo metodo, dati gli assi, descrivere l' ellisse.

XIII. Per delineare la parabola darò l' idea del seguente istrumento. Si adatti la retta CD (*Fig.* 15. *Tav.* 2.) perpendicolare ad una data AB, così che possa muoversi parallela a se stessa: la retta poi MN sia parallela alla data AB, e nel dato punto A sia la norma KAL, che possa liberamente intorno esso girare. Ora si regoli il moto della norma in maniera, che il con-

cor-

corso delle linee AL, CD sempre sia nella linea MN; dico, che il concorso delle linee AK, CD descriverà la parabola AFI, la tangente di cui in A sarà AB. Imperciocchè, per l' angolo retto FAH, sarà $GH : AG :: AG : GF$; dunque $GH . GF = \overline{AG}^2$: si chiami la costante $GH = a$, $AG = x$, $GF = y$; avremo $ay = x^2$, equazione della parabola del parametro $= a$, le ascisse di cui sono nella tangente.

CAPO V.

De' Luoghi geometrici del secondo grado.

I. Luogo geometrico d'una equazione a due variabili è quella linea, fra le coordinate di cui vi è la relazione espressa da quest' equazione. Già abbiamo dimostrato nel Capo precedente, che le sezioni coniche comprendono tutte l' equazioni del secondo grado. Nel presente diamo le regole sicure per determinare la linea corrispondente ad una data equazione, e per assegnarne le coordinate. Omesso il metodo del Cregio, ornato dal Marchese dell' Hopital, e dell' Hermanno, perfezionato dal Conte Vincenzo Riccati, scegliamo quel del Wit, comecchè di più facile esecuzione. (12).

II. Per chiarezza distinguiamo l' equazioni indeterminate del secondo grado in due classi. La prima contiene quelle, che hanno o uno, ovvero i due quadrati delle variabili senza il rettangolo loro; e se hanno questo, sono prive affatto dei quadrati. La seconda racchiude quelle, che hanno e il rettangolo, e i quadrati. Rifacciamci dalla prima classe, e gli esempii sieno in luogo della teoria astratta.

 Esem-

Esempio I.

III. Sia $ax + ab = yy$, e sia dato l' angolo, che fra loro deono fare le coordinate. Poichè $ax + ab$ è $a \cdot \overline{x+b}$, si faccia $x + b = z$, dunque sostituendo sarà $az = yy$ parabola apolloniana. Alla indefinita AB come diametro, (*Fig.* 16. *Tav.* 3.) col parametro $= a$, si descriva la parabola apolloniana CAC, le di cui coordinate AB, BC comprendano il dato angolo: indi sia $AD = b$. Presa una qualunque $AB = z$, sarà $BC = y$: ma perchè abbiamo, per la sostituzione, $x = z - b$, sarà DB la x. L' origine adunque delle ascisse x sarà il punto D, prese verso M le positive, verso A le negative; e le corrispondenti ordinate positive, e negative saranno le y. Se l' equazione proposta fosse stata $ax - ab = yy$, si sarebbe fatta la sostituzione $x - b = z$, e però $x = z + b$. In questo caso presa nel diametro prodotto $AE = b$, e fatto il rimanente come sopra, il punto E sarebbe l' origine delle x. Se l' equazione fosse $ax \pm bb = yy$, non avrebbe maggior difficoltà, perchè così si dispone $a \cdot \left(x \pm \frac{bb}{a} \right) = yy$, e poi fatta $x \pm \frac{bb}{a} = z$, si opera come sopra. Il che basterà avere una volta avvisato.

Esempio II.

IV. L' equazione da costruirsi sia $xy + ax = aa - ay$: si metta $y + a = z$; sarà $y = z - a$: si faccia sparire dall' equazione l' y, acciocchè sia $zx = 2aa - az$, ovvero $zx + az = 2aa$: si metta ora $x + a = p$, e si avrà $pz = 2aa$, equazione dell' iperbola tra gli

gli asintoti. Le rette MM, NN (*Fig.* 17. *Tav.* 3.) formino l' angolo delle coordinate, che si suppone dato: si tagli $CA = a$, $AB = 2a$, e tra gli asintoti MM, NN si descriva l'iperbola, che passi per lo punto B; saran le $CF = p$, le $FG = z$: ma è $x = p - a$; dunque $AF = x$, e perciò il principio dell' ascisse sarà in A. Essendo inoltre $y = z - a$, si divida AB egualmente in D, e per D conducasi DH parallela a CA; saranno le $GH = z - a = y$: ma è $DH = AF$; saranno dunque le DH, ed HG le coordinate x, y. La costruzione ci insegna essere $y = a$ se $x = o$; se x è positiva minore di a, l' ordinate sono positive; se la x è $= a$, è $y = o$; se $x > a$, l' ordinate sono negative; e alla x infinita conviene l' y negativa $= a$; se le x sono negative minori dell' a, l'ordinate sono positive; alla x negativa $= a$ conviene l' ordinata infinita; alle x negative maggiori della a convengono le ordinate negative (13). Se l'equazione fosse $xy + ax = - aa + ay$, le sostituzioni $y + a = z$, $x - a = p$ darebbero l' iperbola $pz = - 2aa$. Laonde posta $CA = a$, si dee prendere $AE = 2a$ negativa, e le coordinate sarebbero DH, HL.

Esempio III.

V. Sia $xx + 2bx = yy - ay$. Aggiunto il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, cioè bb, sarà $xx + 2bx + bb = yy - ay + bb$: e fatta $x + b = z$, avrassi $zz = yy - ay + bb$, cioè $zz - bb = yy - ay$: ed aggiunto il quadrato della metà di a, sarà $zz - bb + \frac{aa}{4} = yy - ay + \frac{aa}{4}$; posta

Y 2 dun-

dunque $y - \frac{a}{2} = p$, farà $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$: e supposto bb maggiore di $\frac{aa}{4}$, facendo $bb - \frac{aa}{4} = mm$; farà $zz - mm = pp$, iperbola equilatera con i semidiametri $= m$, prendendo le ascisse dal centro. Nella indefinita BD (*Fig.* 18. *Tav.* 3.) si prenda $BG = 2m = 2\sqrt{bb - \frac{aa}{4}}$, e divisa egualmente in A, col centro A, col semidiametro trasverso $= AG$, eguale al conjugato, e con le coordinate nel dato angolo si descrivano le due opposte iperbole equilatere; presa una qualunque ascissa AD positiva, e negativa $= z$, le corrispondenti ordinate DH saranno le p positive, e negative: e perchè per la sostituzione si ha $x = z - b$, presa $AE = b$, sarà $ED = x$: ma essendo per l'altra sostituzione $y = p + \frac{a}{2}$; dal punto E condotta $EO = \frac{a}{2}$ parallela all' ordinata, che terminerà alla curva nel punto O, e per lo punto O la indefinita KK parallela al diametro BG; sarà $KH = p + \frac{1}{2}a = y$. Sarà adunque il punto O l' origine delle x sulla retta KK, alle quali prese positive corrispondono due ordinate y, una positiva, e l' altra negativa; e prese negative, ma non maggiori di EG, corrisponderanno due ordinate positive; prese negative, e maggiori di EG, ma minori di EB, le ordinate y saranno immaginarie; e prese negative maggiori di EB, minori di EI, fatta $BI = GE$, saranno due ordinate positive; e finalmente un' ordinata positiva, e negativa l' altra quan-

quando l'ascisse negative sieno maggiori di EI. (14)

VI. Il metodo del Wit riesce assai intrigato nel costruire l'equazioni della seconda classe, come si può vedere negli Autori, che lo seguono; perciò glie ne sostituiamo un altro. Si ordini primamente l'equazione per modo, che da una parte vi sia il termine yy positivo e libero d'ogni coefficiente insieme col termine della y, e dall'altra parte si collochino gli altri termini. Appresso aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente di y da una parte, e dall'altra; si compisca il quadrato, alla cui radice posta eguale una nuova indeterminata, che chiamo $= z$, è fatta la sostituzione, si presenterà una equazione colle due indeterminate z, x. Se ricercherò la curva delle indeterminate x, z, e poscia farò passaggio a ritrovare l'y, sarà impossibile, che si trovi la y terminare alla linea delle ascisse x. Come si esca da simile imbarazzo verremo instruiti dall'esempio, che siegue.

Esempio IV.

VII. Sia l'equazione $yy - 2ay + 2xy = aa + 4ax - xx$, la quale è disposta a dovere. Aggiungo $aa - 2ax + xx$ (*Fig.*19.*Tav.*3.) quadrato della metà del coefficiente di y, ed ho $\overline{y - a + x}^2 = 2aa + 2ax$: pongo $y - a + x = z$, e sarà $zz = 2aa + 2ax$. Introducendo l'indeterminata m, da determinarsi, senza turbare l'egualità, così dispongo l'equazione $zz = 2aa + \frac{2a}{m}mx = \frac{2a}{m} . \overline{ma + mx}$, la quale è alla parabola, il cui parametro $= \frac{2a}{m}$. Col parametro

AB

$AB = \frac{2a}{m}$ intendasi descritta la parabola AI; saranno le $AF = ma + mx$, ed $FI = z$. Dunque tagliata $AC = ma$, sarà $CF = mx$: si produca BA in D, finchè $AD = a$, e si meni al diametro la parallela DG, fino a cui s'intendano le FI prodotte. Sia inoltre CE parallela a DA; sarà $EG = mx$, $IG = z + a$, da cui per avere le y convien detrarre la x. S' intenda condotta EH in modo, che le troncate $GH = x$; sarà $HI = z + a - x = y$. Dunque affinchè le y terminino alle x, conviene che $EH = x$. Pertanto fa d'uopo determinar il valore della m, acciocchè essendo $GH = x$, sia pure $EH = x$, dato essendo l' angolo EHG delle coordinate. Si faccia il triangolo RST, di cui l'angolo S sia eguale al dato, e sia $RS = ST$, che porrò $= a$: chiamerò $RT = e$; sarà dunque $a : e :: x : mx :: 1 : m$, quindi $m = \frac{e}{a}$; e perciò il parametro $AB = \frac{2a}{m} = \frac{2aa}{e}$, $AC = ma = e$. Poichè l'angolo $EGH = T$, l'angolo BAF dee essere il complemento a due retti dell'angolo T. Adunque col diametro AF, e col parametro $AB = \frac{2aa}{e}$ fatto l' angolo BAF eguale al complemento dell' angolo T, descrivasi la parabola: si faccia $DA = a$, e si meni DG parallela al diametro, in cui si tagli $DE = e$. Finalmente si meni EH, che faccia con EG l'angolo $= R$; saranno le $EH = x$, $HI = y$. Se l'angolo delle coordinate x, y debba essere retto, si ritroverà $m = \sqrt{2}$.

Esem-

Eſempio V.

VIII. Sia propoſta l' equazione $\begin{aligned} yy &- 3xy \\ &+ ay \end{aligned} = \frac{3ax}{2}$ $- 2xx$, la quale è già preparata. Aggiungo il quadrato di $-\frac{3x}{2} + \frac{a}{2}$, ed avrò $\overline{y - \frac{3x}{2} + \frac{a}{2}}^2$
$$= \frac{9xx}{4} - \frac{3ax}{2} + \frac{aa}{4}$$
$- 2xx + \frac{3ax}{2}$: e ponendo $y - \frac{3x}{2} + \frac{a}{2} = z$, ed eſpurgata ancora l'equazione, ritroverò $zz = \frac{xx}{4} + \frac{aa}{4}$, ovvero $4zz = xx + aa$, la quale è all' iperbola. Se vorrò coſtruirla colle coordinate y, x, le y non termineranno alla linea delle x. Prendendo pertanto m come indeterminata, da determinarſi in progreſſo, coſtruirò il luogo delle coordinate mx, z. Però moltiplicando per m^2, ricaverò l' analogia $m^2x^2 + m^2a^2 : z^2 ::$ $m^2a^2 : \frac{a^2}{4}$. Col ſemidiametro ſecondo $CA = ma$, e col primo (*Fig.* 20. *Tav.* 3.) $CB = \frac{a}{2}$ ſuppongo deſcritta l'iperbola BI; ſaranno $CF = mx$, $FI = z$: ma $y = z - \frac{a}{2} +$ $\frac{3}{2}x$; meno adunque BK parallela a CA, e ſarà BK $= mx$, $KI = z - \frac{a}{2}$, a cui per avere le y conviene aggiungere $\frac{3}{2}x$. Intendo pertanto menata la BH in modo, che le $KH = \frac{3}{2}x$, e ſarà $HI = y$. Per fare che la $BH = x$, coſtruiſco coll' angolo S, che è l' angolo

lo delle coordinate, un triangolo per modo che $RS = a$, $ST = \frac{3a}{2}$, cioè sieno come 2 : 3, e chiamo $RT = e$; dunque $a : e :: x : mx :: 1 : m = \frac{e}{a}$. Onde coi semidiametri $CA = e$, $CB = \frac{a}{2}$, e coll' angolo $C = T$ descrivo l' iperbola, e meno la tangente BK parallela a CA. Finalmente meno BH, che faccia l' angolo $HBK = R$; sarà $BH = x$, $HI = y$. Se l' angolo S fosse retto, sarebbe $ee = aa + \frac{9aa}{4} = \frac{13aa}{4}$; dunque $e = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, e per conseguenza $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Esempio VI.

IX. Non altro rimane se non da mostrare il metodo in quelle equazioni, che prive sono del quadrato yy, le quali si ridurranno all' iperbola tra gli asintoti. Sia proposta l'equazione in modo, che il termine xy altro coefficiente non abbia, che l'unità, $xy - \frac{1}{2}xx = ax - ay + aa$. Pongo $y - \frac{1}{2}x = z$, o sia $y = z + \frac{1}{2}x$, ed avrò $xz = ax - az + aa$, ovvero $xz - \frac{ax}{2} = - az + aa$: pongo $z - \frac{a}{2} = u$, e trovo $xu = - au$

$-au-\frac{aa}{2}+aa$; dunque $xu+au=\frac{aa}{2}$. Se voleſſi la preſente equazione coſtruire colle aſciſſe $=x$, non otterrei le coordinate collocate a dovere. Però la coſtruirò colle aſciſſe $=mx$, e così diſporrò l' equazione $u.\overline{mx+ma}=\frac{ma^2}{2}$: faccio $mx+ma=t$, ed ho $ut=\frac{maa}{2}$, che è all' iperbola tra gli aſintoti. Preſe CF, CM (*Fig.*21.*Tav.*3.) per aſintoti, ſi tagli $CA=ma$, $AB=\frac{a}{2}$, e ſi deſcriva l' iperbola, che paſſi per lo punto B. Saranno le $CF=t$, $FI=u$: ma $mx=t-ma$; dunque AF ſaranno le mx. Inoltre è $z=u+\frac{a}{2}$; dunque preſa $AD=AB$, condotta la parallela DE, e prodotta come conviene, ſaranno $DG=mx$, $GI=z$: ma $z+\frac{x}{2}=y$; dunque conducendo la DH in modo, che ſia $GH=\frac{x}{2}$, ſarà $HI=y$. A far che ſieno le $DH=x$, conviene determinare m. Poichè $DH:HG$ dee eſſere come $2:1$, fo un triangolo RST coll'angolo S delle coordinate, fo $RS=a$, $ST=\frac{1}{2}a$, e chiamo $RT=e$; ſarà $m=\frac{e}{a}$; dunque $CA=ED=e$, è l' angolo $MCA=T$, e $GDH=R$. Negli aſintoti, che facciano l'angolo T, preſa $CA=e$, $AB=\frac{a}{2}$, e deſcritta l'iperbola, ſi tagli $CE=\frac{1}{2}a$, e conducaſi ED parallela a CA, e prodotta BA in D, si conduca DH, che faccia con DG l'angolo R; saranno $DH = x$, $HI = y$. La DH passerà pel centro C. (15).

CAPO VI.

Si sciolgono alcuni Problemi indeterminati di secondo grado.

I. Dopo che si è insegnato a costruire tutte le equazioni indeterminate di secondo grado colla descrizione delle sezioni coniche, egli è necessario recarne ad esempio la soluzione di qualche problema indeterminato di secondo grado.

II. Problema primo. Un circolo, il cui centro è C, (*Fig.* 22. *Tav.* 3.) abbia per tangente la retta AQ, colla quale s' incontri la secante CQ; e pongasi, che la retta QM perpendicolare alla tangente sia eguale all' intercetta RQ: ciò supposto, si cerca il luogo geometrico di tutti i punti M, che si determinano colla detta condizione. Dal punto M si cali la perpendicolare MP alla linea CA prodotta: chiamisi $MP = AQ = y$, $AP = QM = QR = x$, $CA = a$. Per la proprietà del circolo sarà $2a + x : y :: y : x$; dunque $2ax + xx = yy$, che è l' equazione dell' iperbola equilatera, il cui asse sia $= 2a$, e le ascisse abbiano l' origine nel vertice. Ora fatto centro in C, essendo il vertice in A, si descriva un' iperbola equilatera, i cui assi sieno eguali al diametro $A\,2A$ del circolo; questo sarà il luogo geometrico, che si cerca.

III. Si divida ora il circolo dai due diametri $A\,2A$, $B\,2B$ ad angoli retti. Se il punto R sia collocato nel primo quadrante AB, ponendosi $QM = QR$, si genera ra il ramo dell' iperbola AM. Se è posto nel secondo quadrante $B\,2\,A$, come per esempio $2\,R$, allora $C\,2\,R$ taglia la stessa tangente in $2\,Q$; e $2\,R\,2\,Q$ si dee considerare come negativa, perchè nel punto B la intercetta tra il cerchio e la tangente diventa infinita; onde sotto il punto B questa intercetta dee voltarsi in negativa (16). E perciò dovendo $2\,Q\,2\,M$ essere collocata nella parte opposta a QM, ne nasce il ramo dell' iperbola $2\,A\,2\,M$. Se $3\,R$ è nel terzo quadrante $2\,A\,2\,B$, la tangente vien tagliata un altra volta in Q, ma $3\,RQ$ si vuole prendere negativa, e ad essa si dee fare eguale $Q\,3\,M$, onde ne risulti il ramo $2\,A\,3\,M$. Finalmente essendo $4\,R$ nell'ultimo quadrante, si produrrà il ramo $A\,4\,M$. Per lo punto $2\,A$ si tiri la tangente $S\,2\,S$; la stessa iperbola sarebbe nata, se all' intercette $S\,3\,R$ si fossero fatte uguali $S\,2\,M$: la dimostrazione n' è facile. Poichè per costruzione $2\,R\,2\,Q = 2\,Q\,2\,M$: ma ponendo eguali gli archi $A\,4\,R$, $2\,A\,3\,R$, e $2\,R\,2\,Q = SR$; dunque $2\,Q\,2\,M = SR$; e quindi sottratte le due eguali $2\,QS$, $R\,3\,R$, perchè eguali al diametro del circolo, resterà $S\,2\,M = S\,3\,R$.

IV. Problema secondo. Dentro il dato angolo ABC (*Fig.* 23. *Tav.* 3.) essendo dato il punto E, trovare la curva MF, cosicchè tirata per E qualsivoglia linea $AMEC$, sia sempre $AM = CE$. Dai punti E, M si tirino le linee ED, MS parallele al lato CB: pongasi $BS = x$, $SM = y$, $ED = a$, $BD = b$. Dovendo essere, per la condizion del problema, $AM = EC$, sarà $AS = BD = b$; dunque $AD = BS = x$: ma $AS : SM :: AD : DE$, o sia $b : y :: x : a$; dunque $ab = xy$, la qual equazione esprime l' iperbola fra gli asintoti BA, BC. Fra questi dunque descritta l' iperbola, che passi per lo punto E, questa sarà la curva bramata. La medesima proprietà si trova nell' iperbola opposta; imperciocchè tirata la linea $E\,2\,C\,2\,A$, la qual tagli l' opposta iperbola nel punto $2\,M$, sarà sempre $E\,2\,C = 2\,A\,2\,M$.

V. Problema terzo. Dentro l'angolo ABC (*Fig.* 24. *Tav.*3.) dato il punto E, trovare la curva MF, cosicchè tirata la linea $AMEC$, sia sempre $AM : CE$ in una data ragione di $m : n$. Si faccia la stessa costruzione, che sopra si è fatta, e si ritengano le stesse denominazioni. Essendo $CE : AM : BD : AS$, sarà $n : m :: BD = b : AS = \frac{mb}{n}$; dunque $BA = \frac{mb}{n} + x$, e $AD = \frac{m-n}{n}.\ b + x$. Ora $AD : DE :: AS : SM$, o sia in termini analitici $\frac{m-n}{n}.\ b + x : a :: \frac{mb}{n} : y$. Dunque $y.\ \overline{\frac{m-n}{n}\cdot b + x} = \frac{amb}{n}$, che è l' iperbola, di cui si fa così la costruzione. Prendasi DH, che sia a DB come $m : n$, e per lo punto H si tiri HK parallela a BC: quindi fra gli asintoti HA, HK descrivasi l' iperbola, che passi per lo dato punto E, in cui tirata qualsivoglia linea $AMEC$, sarà sempre $AM : CE :: m : n$. Ciò facilmente si dimostra per la proprietà del problema antecedente. Imperciocchè prodotta la retta AC, che tagli l' asintoto in K, per il problema di sopra sarà $AM = EK$: ma $EK : EC :: DH : DB :: m : n$; dunque $AM : EC :: m : n$. Tutto ciò si applica anche all' iperbola opposta.

VI. Problema quarto. Dato l'angolo FBG, ed il punto A, (*Fig.*25. *Tav.*4.) e tirate infinite AF; ritrovare una curva, la cui corda AH sia eguale all' intercetta GF. Dal punto A si tiri la linea AD parallela

lela al lato BF, che s' incontri in D col lato BG, e dai punti H si tirino le linee HE parallele ad AD: pongasi $BE = x$, $HE = y$, $BD = a$, $AD = b$. Essendo $AH = GF$ per la condizion del problema, sarà ancora $DE = BG$; dunque $DG = BE = x$, ed $EG = 2x - a$: ma $DG : DA :: EG : EH$, o sia in termini analitici, $x : b :: 2x - a : y$; dunque $xy = 2bx - ab$, ovvero $ab = x . \overline{2b - y}$, la qual equazione ci da un' iperbola fra gli asintoti, e si costruisce così. Si allunghi la linea DA verso I finchè sia $AI = AD$, e per lo punto I si tiri la linea IK parallela DB, che tagli FB in K: fra gli asintoti KB, KI descrivasi un' iperbola, che passi per lo punto A; questa sarà la curva bramata. La linea AB toccherà l' iperbola nel punto A, perchè la linea $BK = DI$ è doppia di AI. Se la linea HF tagli il ramo AH, l' intercetta GF sarà contenuta dall' angolo FBG: se tagli il ramo AL, l' intercetta sarà posta nell' angolo al vertice KBd: se la retta si tiri all' iperbola opposta, l' intercetta sarà negli angoli adjacenti KBD, FBd.

VII. Problema quinto. Poste le condizioni dell' antecedente problema, trovare la curva AH, (*Fig.* 26. *Tav.* 4.) in cui la corda AH all' intercetta GF sia nella ragione data di $m : n$. Conservate tutte le denominazioni di sopra, è chiaro, che sarà $DE = a - x$: ma $AH : GF$, o sia $DE = a - x : GB :: m : n$; dunque

$GB = \frac{n . \overline{a - x}}{m}$; e perciò $GE = \frac{m + n}{m} . x - \frac{na}{m}$, e

$GD = \frac{m - n}{m} . a + \frac{nx}{m}$. Ora $GD : GE :: DA : EH$;

dunque $\frac{m - n}{m} . a + \frac{nx}{m} : \frac{m + n}{m} . x - \frac{na}{m} :: b : y$, o sia

$m - n$

$\frac{m-n}{n}.ay + xy = \frac{m+n}{n}.bx - ab$. Pongasi $\frac{m-n}{n}.a + x = z$, cosicchè $zy = \frac{m+n}{n}.bz - \frac{mm}{nn}.ab$, o sia $\frac{mm}{nn}.ab = \frac{m+n}{n}.bz - yz$: facciasi $\frac{m+n}{n}.b - y = u$, onde riesca $\frac{mm}{nn}.ab = zu$. Da questa analisi ne nasce la costruzione. Si allunghi la linea DB verso C, onde sia $DC:DB::m:n$: parimenti si allunghi DA verso I, onde $AI:AD::m:n$: per i punti C, I si tirino due linee parallele alle rette AD, DB, che si incontrino in K: fra gli asintoti KI, KC, si descriva un' iperbola, che passi per lo punto A, e si avrà la curva bramata. (17)

VIII. Problema sesto. Data l' indefinita EB, (*Fig.*27. *Tav.*4.) e fuori di essa il punto A, determinare la curva in cui sono i centri di tutti i circoli, che passano per A, e che tagliano in EB una corda uguale alla data. Uno di questi circoli sia AIH, il cui centro è C: si tiri la linea AB perpendicolare ad EB, e si compisca il rettangolo $CDBF$. Pongasi $BF = x$, $FC = y$, $AB = a$; dunque $AF = a - x$, DI la metà della corda data $= b$. E' chiaro che $CD^2 + DI^2 = CF^2 + FA^2$, onde ne deriva l' equazione $xx + bb = yy + aa - 2ax + xx$, la quale riducendosi, darà $2ax + bb - aa$ o sia $2a.(x + \frac{bb}{2a} - \frac{a}{2}) = yy$, equazione alla parabola. Quest'analisi ci somministra la costruzione. Si divida AB in due parti uguale in G: si tagli GL (*Fig.*28. *Tav.*4.) terza proporzionale dopo $2a$, b, e fatto vertice in L, essendo il parametro $= 2a$, de-

descrivasi una parabola ; questa sarà il luogo cercato . Tre casi si vogliono distinguere : o $GL = GB$, o sia $b = a$, ed allora il punto L cade in B, che sarà il vertice della parabola : oppure $G\,3\,L > GB$, o sia $b > a$, ed il vertice della parabola cade dopo i punti G, B : o finalmente $G\,2\,L < GB$, o sia $b < a$, ed il vertice della parabola cade in mezzo ai punti G, B. Se pongasi $b = o$, e per conseguenza se svanisca la linea $G\,2\,L$, allora il punto G sarebbe il vertice della parabola ; ed essendo tanto GB, quanto GA la quarta parte del parametro, è chiaro, che il punto A è il foco, e la linea BE la direttrice della parabola. I circoli poi, che hanno il centro nella curva parabolica, e che passano per lo punto A, quando non tagliano alcuna corda, toccheranno la data linea BE.

IX. Problema settimo. I lati eguali AC, AB dell' angolo A (*Fig.29.Tav.4.*) si aprino per modo, che il punto C rimanga sempre nello stesso loco, il punto B sempre scorra sulla retta CK, e la linea BD faccia colla linea AB un angolo retto ; si cerca qual curva sia per descrivere il punto D. Calate sulla linea CB le perpendicolari AN, DM, chiamisi $CA = AB = a$, $BD = b$, $CM = x$, $DM = y$; sarà $BM = \sqrt{bb - yy}$, e $CB = x - \sqrt{bb - yy}$, ed $NB = \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2}$. Poichè l' angolo ABD si suppone retto, i due angoli ABN, DBM saranno eguali ai due ABN, BAN, giacchè tutti e due insieme sono uguali ad un retto ; dunque sottratto l' angolo comune ABN, rimane $DBM = BAN$; e perciò il triangolo DBM sarà somigliante al triangolo BAN, e sarà per conseguenza $AB : BD :: BN : DM$: ed in termini analitici, $a : b ::$

$x -$

$\frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2} : y$: e duplicando gli antecedenti, $2a : b :: x - \sqrt{bb - yy} : y$; si ha pertanto l' equazione $2ay = bx - b\sqrt{bb - yy}$, o sia $b\sqrt{bb - yy} = bx - 2ay$: ed elevando al quadrato, $b^4 - b^2 y^2 = b^2 x^2 - 4abxy + 4a^2 y^2$.

X. In questa equazione considero x come ordinata, ed y come ascissa, che così più facilmente si ottiene la costruzione. Divido per b^2, onde sia $bb - yy = x^2 - \frac{4a}{b} . xy + \frac{4a^2}{bb} . y^2$: pongo $x - \frac{2a}{b} . y = u$, e si ha $bb - yy = uu$, che è l' equazione all' elisse. Seguendo il mio metodo, così dispongo la formola $m^2 b^2 - m^2 y^2 : uu :: m^2 b^2 : b^2$. Per tanto posti i diametri $CE = mb$, $CH = b$ (l' angolo dei diametri, ed il coefficiente m resterà determinato nel progresso), intendasi descritta l'elisse EH; sarà $CG = my$, $GD = u$: tirisi la linea CIF, talmente che sia $CI = y$, $IG = \frac{2a}{b} y$; dunque $ID = u + \frac{2a}{b} y = x$. Poichè l'angolo I dee essere retto, sarà $m^2 = \frac{4a^2}{b^2} + 1 = \frac{4a^2 + b^2}{b^2}$, ed $m = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{b}$: ma $CE = mb$; dunque $CE = \sqrt{4a^2 + b^2}$.

Ora $CE : CF :: m : 1$; dunque $CF = b$; parimenti dovendo essere $CF : FE :: b : 2a$, sarà $FE = 2a$. Pertanto stendansi i lati dell' angolo CAB in CK, onde sia $CK = 2a$; la retta BD passerà in $KE = b$: si congiunga CE, che sarà $= \sqrt{4aa + bb}$, si tagli $CH = b$, e coi diametri CE, CH descrivasi un' elisse; questa sarà la curva segnata dal punto D. (18).

XI.

XI. La costruzione, a cui son pervenuto, m' insegna fare questa analisi. Tagliata la linea $CK = 2a$, alzando la perpendicolare $KE = b$, e congiungendo i due punti C, E colla linea CE, la quale si ponga $= c$; si tiri la linea DO parallela a CE, e CO pongasi $= x$, $OD = y$. Ciò supposto, sarà $c : 2a :: y : OM = \frac{2ay}{c}$, e $CM = x + \frac{2ay}{c}$: parimente $c : b :: y : DM = \frac{by}{c}$; dunque $BM = \sqrt{bb - \frac{bbyy}{cc}} = \frac{b}{c}\sqrt{cc - yy}$, e $CB = x + \frac{2ay}{c} - \frac{b}{c}\sqrt{cc - yy}$. Perlochè l'analogia del n. 9. sarà $a : b :: \frac{x}{2} + \frac{ay}{c} - \frac{b}{2c}\sqrt{cc - yy} : \frac{by}{c}$; onde l' equaz. $ay = \frac{cx}{2} + ay - \frac{b}{2}\sqrt{cc - yy}$, o sia $b\sqrt{cc - yy} = cx$, cioè $b^2c^2 - b^2y^2 = c^2x^2$; e finalmente $\frac{c^2}{b^2} \cdot \overline{b^2 - x^2} = y^2$, che è l' equazione all'elisse, che à i semidiametri $CH = b$, $CE = c$.

CAPO VII.

Trasformazione delle Equazioni del terzo, e quarto grado.

I. IN grazia della costruzione dell'equazioni del terzo, e quarto grado, esponiamo quì alcune cose intorno alla trasformazione di esse. Trasformiamo in primo luogo un' equazione, quando la mutiamo in un' altra, le cui radici sieno maggiori, o minori delle radici della propoſta d' una quantità data; il che così ottienſi. Sia da trasformarſi l' equazione $x^3 + cx^2 - b^2x - b^2c = o$ in un' altra, le cui radici eccedano le radici della propoſta d' una quantità $= a$. Si faccia $x = y - a$, e ſi ſoſtituiſca nell' equazione data queſto valore della x; avremo

$$\begin{array}{rrcccl}
& x^3 = & y^3 - 3ay^2 & + 3aay & - & a^3 \\
& cx^2 = & + \; cy^2 & - 2cay & + & ca^2 \\
- & b^2x = & & - bby & + & b^2a \\
- & b^2c = & & & - & b^2c;
\end{array}$$

e perciò l' equazione data ſarà mutata nella ſeguente

$$\begin{array}{lllll}
y^3 & - 3a \,.\, y^2 & + 3aa.y & - a^3 & = o. \\
 & + c & - 2ca & + ca^2 & \\
 & & - bb & + b^2a & \\
 & & & - b^2c. &
\end{array}$$

Le radici dell'equazione propoſta ſono b, $-b$, $-c$; quelle della trasformata ſono $b + a$, $-b + a$, $-c + a$. Se le radici della trasformata doveſſero eſſere ſuperate dalle radici della trasformanda d'una quantità $= a$, allora biſognerebbe porre $x = y + a$, e fare le ſolite ſoſtituzioni.

II. Serve ſpecialmente queſta trasformazione a fare ſparire il ſecondo termine dell' equazione. Abbiaſi l' equazione $x^3 + ax^2 + abx + abc = o$ da trasformarſi in un' altra priva di ſecondo termine. Si ponga $x = y + m$ (m è una quantità da determinarſi); fatte le ſoſtituzioni, avraſſi

$$\left.\begin{array}{llllll}
x^3 & y^3 & + 3my^2 & + 3mmy & + m^3 \\
+ ax^2 & + & ay^2 & + 2may & + m^2a \\
+ abx = & & + & aby & + mab \\
+ abc & & & & + abc
\end{array}\right\} = o.$$

Acciocchè non ſiavi il ſecondo termine nella trasformata, conviene che ſia $3m + a = o$, cioè $m = -\frac{a}{3}$; dun-

dunque m è la terza parte del coefficiente, che è nel secondo termine della trasformanda, col segno contrario. Ed in realtà, posta $x = y - \frac{a}{3}$, si troverà

$$\begin{aligned} y^3 &- \frac{a^2 y}{3} + \frac{2a^3}{27} = o, \\ &+ aby - \frac{a^2 b}{3} \\ &\quad + abc \end{aligned}$$

in cui non havvi il secondo termine.

III. Chi volesse togliere dall' equazione il terzo termine, gli sarebbe necessario che ponesse $3m^2 + 2am + ab = o$, e che risolvesse questa equazione di secondo grado per determinare la m; ed essendo in questo caso doppio il valore della m, in due maniere si potrà fare sparire il terzo termine. Se mai i valori della m sieno immaginarii, si potrà senza dubbio giungere ad una equazione senza terzo termine, ma si introdurranno in essa quantità immaginarie. Se vogliasi annullare l'ultimo termine; per determinare la m si presenta da risolversi l' equazione del terzo grado $m^3 + am^2 + abm + abc$; e perciò non si potrà determinare il valore della m, se non si sappia risolvere l'equazione proposta.

IV. Quello che si è detto dell' equazioni del terzo grado, si applica facilmente a quelle del quarto. Sia pertanto l'equazione $x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd = o$. Per trasformar questa pongasi $x = y + m$, acciocchè fatte le sostituzioni, abbiasi

$$\begin{array}{lllllll} x^4 & & y^4 + 4my^3 + 6m^2y^2 & + & 4m^3y & + & m^4 \\ + ax^3 & & + \; ay^3 + 3amy^2 & + & 3am^2y & + & am^3 \\ + abx^2 = & & + \; aby^2 & + & 2abmy & + & abm^2 = o. \\ + abcx & & & + & abcy & + & abcm \\ + abcd & & & & & + & abcd \end{array}$$

Per fare ſparire il ſecondo termine ſi faccia $4m + a = o$; onde ſia $m = -\frac{a}{4}$, cioè uguale al coefficiente del ſecondo termine diviſo per 4 col ſegno mutato. Si toglierà il terzo termine col porre $6m^2 + 3am + ab = o$, dalla riſoluzione della quale naſcono due valori della m; ſe queſti riuſciranno immaginarii, il terzo termine ſparirà, ma l'equazione ſi riempirà di quantità immaginarie. Si annullerà il quarto termine riſolvendo l'equazione $4m^3 + 3am^2 + 2abm + abc = o$, la quale avendo almeno una radice reale, come nel Cap. 10. vedremo, ſi potrà ſenza timore d' introdurre nell' equazione quantità immaginarie ottenere l'intento. Non ſi può levare dall' equazione l' ultimo termine, ſenza ſaper riſolvere la ſteſſa equazione propoſta, come ocularmente ſi vede.

V. Si trasforma in ſecondo luogo l'equazione propoſta in altra, le cui radici ſieno alle radici della prima in ragion data. Ciò ſi ottiene facendo $x = \frac{my}{n}$ (19): ecco l' eſempio. Sia da trasformarſi l' equazione $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 = o$: in vece della x ſcrivaſi $\frac{my}{n}$, e ſi avrà $\frac{m^4y^4}{n^4} - \frac{m^3ay^3}{n^3} + \frac{m^2a^2y^2}{n^2} - \frac{ma^3y}{n} + a^4 = o$: e moltiplicando per $\frac{n^4}{m^4}$, ſi avrà $y^4 - \frac{nay^3}{m} + \frac{n^2a^2y^2}{m^2} - \frac{n^3a^3y}{m^3} + \frac{n^4a^4}{m^4} = o$.

VI. Ci ſerviamo ſpeſſo dell' anzidetta trasformazione ad eſpellere le quantità fratte dall' equazione. Ciò queſto eſempio dichiari. Abbiaſi l' equazione $x^3 + \frac{a^2}{b} \cdot x^2 + a^2x - a^3 = o$, che ſi voglia cangiare in al-

altra ſenza frazione. Fingaſi $x = \frac{y}{n}$: ſoſtituendo, e riducendo al ſolito, naſcerà $y^3 + \frac{n a^2 y^2}{b} + n^2 a^2 y - n^3 a^3 = o$, la quale, ſe ſia $n = b$, è libera da frazione. Adunque col porre $x = \frac{y}{b}$ ſi ottiene l' intento.

VII. Alle volte traſformaſi un'equazione in altra, le cui radici ſieno alle radici di quella in ragione reciproca; il che ſi eſeguiſce ponendo $x = \frac{1}{y}$ (20). Con queſta ſoſtituzione l' equazione $x^4 - 7x^2 + 3x - 10 = o$ ſi cangia in $y^4 - \frac{3y^3}{10} + \frac{7y^2}{10} - \frac{1}{10} = o$, che à la ricercata condizione, cioè $y : 1 :: 1 : x$. Se ſi foſſe fatto $x = \frac{10}{y}$, l' equazione traſformata ſarebbe libera da frazione. Non coſta molta pena il comprendere, che in queſta traſformazione il primo termine della traſformanda paſſi ad eſſere l' ultimo della traſformata, e che il ſecondo paſſi nel penultimo, e così di mano in mano; e perciò ſe la prima manchi del ſecondo termine, del penultimo ſarà priva la ſeconda; ſe quella del terzo, queſta dell' antipenultimo; e così ſucceſſivamente.

CA-

CAPO VIII.

Costruzione delle Equazioni del terzo, e quarto grado colla interfecazione delle fezioni coniche.

I. Sia l' equazione del terzo grado $x^3 + abx - af^2 = o$, in cui a, e b poffono effere quantità pofitive, e negative. Si finga $xx = ay$, e fatta la foftituzione nell' equazione propofta, farà $yx + bx - ff = o$. I valori della x in quefte due ultime equazioni fono determinati, comecchè fingonfi uguali a quelli dell'equazione propofta, che fono determinati, benchè ignoti; e perciò i valori della y pure lo faranno. Sono poi quefti uguali, effendo l' ifteffo y in amendue, ficcome è la fteffa x. Ciò non oftante per fervirfi dell' interfecazione delle curve, la x, e l' y fi fingono variabili; per lo chè quefte due ultime equazioni efprimono due fezioni coniche, la prima una parabola, la feconda un' iperbola tra gli afintoti.

II. Premeffe tali cognizioni, fi difcorra in quefta maniera. Egli è certo, che fra le infinite afciffe della parabola vi fieno ancora i valori della noftra x, e che lo fteffo avvenga nell' iperbola: è certo eziandio, che a quefti valori corrifpondano in amendue le curve l'y, o fiano le ordinate uguali. Adunque fe le linee, in cui fi prendono le x, in amendue le curve fi facciano combaciare in maniera, che il principio delle x fia comune, e le x, ed y pofitive cadano dalla fteffa parte; ancora le y uguali combacieranno perfettamente; onde le curve dove fono i valori determinati dell' x, e l' ordinate y uguali, avranno punti comuni d' interfecazione, o di contatto. Adunque a rovefcio, fe fi avranno punti di interfecazione, o di contatto; quefti apparterranno alle x che fi cercano. Una tal maniera di determinare

nare i valori della x si addimanda *costruzione delle equazioni colla intersecazione delle curve*.

III. Se ne veda subito l' esempio nella costruzione della proposta equazione colla parabola, ed iperbola sopraccennata. Prese le x in AP (*Fig.* 30. *Tav.* 4.) ed il principio loro in A, si delinei col parametro $= a$, e coll'angolo delle coordinate ad arbitrio, che per eleganza supponiamo retto, la parabola MAm, che sia toccata in A da AP; saranno AP le x, MP l' y dell' equazione $ay = xx$. Similmente fra gli asintoti IQ, FS, (*Fig.*31.*Tav.*4.) che contengano l'angolo ICS uguale all' angolo APM, si descriva l' iperbola, le cui coordinate NQ, CQ contengano il quadrato ff: si tagli $CQ = x$; sarà $QN = y + b$: finalmente segata $CD = b$, per D si conduca DE parallela all' asintoto CQ; saranno DE, EN le x, ed y dell'equazione $yx + bx = ff$.

IV. Acciocchè sieno congiunti a dovere questi due luoghi, le linee DE, AP, (*Fig.* 30.31.32. *Tav.*4.) ed i punti D, A debbono combaciare; il che ricade allo stesso, se presa $DC = b$ nel diametro della parabola prodotto, si conduca per lo punto C la CQ parallela alla tangente, e fra gli asintoti IQ, FS si descriva l' iperbola come sopra: ciò fatto, i punti d' intersecazione daranno le x, ed y comuni ad amendue le curve; adunque se il punto di sezione è la N, NE sarà l' y, e DE la x, cioè la radice della proposta equazione del terzo grado.

V. Se a, e b sono positive, la descrizione delle curve è appunto quella della fig. 32, da cui apparisce in un sol punto N segarsi le curve, e perciò una sola, e positiva essere la radice dell' equazione: lo stesso accade se sia $b = o$; ma se b fosse negativa, si dee prendere la CD dalla parte opposta, (*Fig.* 33. *Tav.*4.) nel qual caso s'avrebbe sempre il punto di sezione N,

ma

ma oltre questo, altri si potrebbero avere dalle sezioni dell' altro ramo dell' iperbola colla parabola; per determinare il quando, fa d'uopo determinare il caso del contatto, medio fra la sezione, e non sezione. Dico perciò toccarsi la parabola, e l' iperbola se sia il parametro della parabola $a = \frac{27 f^4}{4 b^3}$. Si divida $CD = b$ in R, così che DR sia la terza parte, e si meni l'ordinata nR alla parabola, che sarà $= \sqrt{\frac{27 f^4}{4 b^3} \cdot \frac{b}{3}} = \frac{f^2}{CR}$: ma $\frac{f^2}{CR}$ è l'ordinata dell'iperbola al punto R medesimo (num. 3.); dunque nR è l'ordinata d'amendue le curve, ed il punto n comune. Che sia poi il contatto, eccolo. Da questo tirisi nu, che tocchi la parabola; sarà $Du = DR$, per la proprietà di questa curva (Cap. 1. Lib. 2. num. 15.); e perciò $Ru = RC$: ma questa è proprietà della retta, che tocca l'iperbola in n (Cap. 3. Lib. 2. num. 11.); dunque tocca nu l' una e l' altra curva, il che non avviene se non si tocchino le curve in n. Quindi se b sia negativa, ed $a = \frac{27 f^4}{4 b^3}$, l' equazione $x^3 + abx - af^2 = o$, oltre la radice positiva DE, ne avrà altre due negative, ed uguali, corrispondenti al contatto n, il quale punto equivale a due di sezione infinitamente vicini: se sia $a > \frac{27 f^4}{4 b^3}$, la parabola, oltre il punto N, segherà il ramo superiore dell' iperbola in due punti, che daranno due radici negative disuguali: se sia $a < \frac{27 f^4}{4 b^3}$, N sarà l' unico punto di sezione; onde l' equazione avrà una sola radice positiva.

VI.

VI. Se sia a negativa, allora deesi descrivere la parabola dalla parte opposta, cioè verso F, perchè il parametro è negativo; onde posta b negativa, o uguale a zero, uno sarà il punto di sezione, che darà una radice negativa; se poi b è positiva, si determinerà come sopra quando sia uno, e quando tre i punti di sezione. Dal che ricavasi, primo, che l' equazione di terzo grado abbia sempre almeno una radice reale: secondo, che delle reali o n' abbia una, ovvero tre.

VII. Passo a costruire l'equazioni del quarto grado. Sia $x^4 + fgx^2 + f^2bx - f^3c = o$, in cui le quantità f, g, b, c possono essere positive, e negative, anzi f quantità arbitraria. A questa forma tutte l' equazioni del quarto grado potranno ridursi senza alterazione sustanziale (Cap. 7. num. 2.). Si faccia $xx = fy$, onde $x^4 = f^2y^2$: e sostituendo, nascerà $y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx - fc = o$, da cui sottratta $x^2 - fy = o$ moltiplicata per m, e posta $\frac{g}{f} = n$, s'otterrà $y^2 + \begin{matrix} nx^2 \\ -mx^2 \end{matrix} + bx + mfy - fc = o$, in cui vi sono due quantità arbitrarie m, n, delle quali questa dipende dall'arbitraria f. Secondo adunque il valore, che si assegnerà a queste arbitrarie, nasceranno differenti luoghi del secondo grado, due de' quali ad arbitrio scelti, e come deesi congiunti, ne daranno le radici della equazion proposta.

VIII. A maggior chiarezza l'ultima equazione dispongasi così, $yy + mfy + \frac{m^2f^2}{4} = \overline{m-n}.x^2 - bx + fc + \frac{m^2f^2}{4}$: e posta $y + \frac{mf}{2} = z$, sarà $z^2 = \overline{m-n}.x^2$

 $-bx$

$- bx + fc + \frac{m^2 f^2}{4}$. Se sia $m - n = o$, facilmente si vede appartenere l' equazione alla parabola. Negli altri casi mettasi $m - n = \pm r$ per avere $(zz - fc - \frac{m^2 f^2}{4}) : \pm r = xx - \frac{bx}{\pm r}$: e posto $x - \frac{b}{\pm 2r} = u$, e $- fc - \frac{m^2 f^2}{4} \pm \frac{b^2}{4r} = \pm a^2$; s' otterrà $\frac{z^2 \pm a^2}{\pm r} = u^2$. La combinazione dei segni dà quattro diverse equazioni $\frac{z^2 + a^2}{r} = u^2$, $\frac{z^2 - a^2}{r} = u^2$, $\frac{z^2 - a^2}{-r} = u^2$, $\frac{z^2 + a^2}{-r} = u^2$: la prima è all' iperbola colle u nel primo diametro, la seconda è alla stessa colle u nel secondo, la terza è all' elisse, la quarta all' elisse, ma immaginaria, è perciò inutile. In tutte il quadrato del diametro dell' u stà al quadrato del diametro, a cui sono parallele le z, come $1 : r$: se sia $r = 1$, l' iperbola è equilatera, e l' elisse passa in circolo, purchè sia retto l' angolo delle coordinate (21). Raccogliamo adunque, che l'equazione è all'iperbola se $r = m - n$ sia positiva, ossia $n - m$ negativa; all' elisse se $m - n$ negativa, ossia $n - m$ positiva; alla parabola se zero, come appunto s'è veduto nel Cap. 1. Lib. 2.

IX. S' abbia ora in animo di costruire la proposta equazione $x^4 + fgx^2 + f^2 bx - f^3 c = o$ colla parabola, e col cerchio. Mettiamoci avanti gl'occhi l'equazione generale indeterminata del num. 7. in cui si contengono tutte le sezioni coniche $y^2 + nx^2 + bx + mfy - fc = o$.

$$- mx^2$$

Ac-

Acciocchè nasca la parabola convien supporre $m = n = \frac{g}{f}$, la di cui equazione sarà $y^2 + bx + gy - fc = 0$. Acciocchè nasca il circolo convien che sia $m = n - 1 = \frac{g}{f} - 1$, la di cui equazione è $y^2 + x^2 + bx + gy - fy - fc = 0$.

X. L' equazione alla parabola così si disponga $y^2 + gy + \frac{gg}{4} = -bx + fc + \frac{gg}{4}$: e posto $y + \frac{g}{2} = z$, ed $fc + \frac{gg}{4} = bd$, nasce $zz = -bx + bd = bu$, fatta $-x + d = u$. Vertice A (*Fig.* 34. *Tav.* 4.), asse AD, parametro b descrivasi la parabola AM; sarà $AP = u$, $PM = z$: si tagli $AD = d$, e sarà $DP = d - u = x$: dal punto D alla DA sia normale $DB = \frac{g}{2}$, e per B si conduca l' indefinita BR parallela alla DA; sarà $RM = z - \frac{g}{2} = y$. Adunque BR, RM sono le coordinate x, y della nostra equazione, ed il punto B è il principio delle ascisse. L'equazione al cerchio così disposta $yy + \overline{g-f}\cdot y + \frac{\overline{g-f}^2}{4} + xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{\overline{g-f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc$, e fatto $y + \frac{g-f}{2} = z$, $x + \frac{b}{2} = u$; nasce $zz + uu = \frac{\overline{g-f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc$. Adunque (*Fig.* 35. *Tav.* 4)

 cen-

centro C, raggio $CA = \left(\frac{\overline{g-f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc\right)^{\frac{1}{2}}$ si descriva il circolo ANB, in cui sarà $CQ = u$, $QN = z$: si seghi $CH = \frac{b}{2}$, e sarà $HQ = u - \frac{b}{2} = x$: al raggio CA sia normale $HK = \frac{g-f}{2}$, e parallela KL; sarà $LN = z + \frac{f-g}{2} = y$; dunque KL, LN sono x, y della nostra equazione, col principio dell' ascisse in K. Per evitare il raggio immaginario bisogna prendere l' arbitraria f cosicchè la quantità sotto il segno sia positiva. Collocato il punto K in B, e la KL sopra BR, queste due curve saranno ottimamente congiunte; adunque dalle sezioni loro condotte le ordinate MQ, (*Fig.* 36. *Tav.* 4) si determineranno altrettante ascisse, che saranno le radici della proposta equazione del quarto grado. Per picciola riflessione che si faccia, ci accorgeremo, che il cerchio o sega la parabola in quattro punti, o in due, o in nessuno; dunque le radici reali nel caso o sono quattro, o due, o nessuno, valendo il contatto per due.

XI. Se si voglia costruire l' equazione del quarto grado con due ellissi, nell' equazione indeterminata $yy + nx^2 - mx^2 + bx + mfy - fc = 0$, fatta $n = 4$, o sia $f = \frac{1}{4}g$, si ponga prima $m = 1$, acciocchè risulti l'equazione $yy + 3xx + bx + fy - fc = 0$: dipoi $m = 2$, acciocchè risulti l' altra $yy + 2xx + bx + 2fy - fc = 0$, amendue, come è chiaro (num. 8.), all' ellisse. Se si vogliano due iperbole, fatta $n = 1$, ossia $f = g$, prima sia $m = 2$, onde s' abbia $yy - xx + bx + 2fy - fc = 0$: dipoi sia $m = 3$, percui s'abbia $yy - 2xx$

$+ bx$

$+ b x + 3 f y - f c = o$, equazioni a due iperbole (num. 3.). Abbiamo ſuppoſto per eleganza l' equazioni del terzo, e quarto grado ſenza ſecondo termine, il che ſi può ſempre ottenere ſalva l' univerſalità, ſiccome nel capo precedente s'è veduto; ancorchè per altro tal termine eſiſteſſe, il preſente metodo non ci abbandona, come ciaſcun da per se ſteſſo può farne la prova (22).

CAPO IX.

Alcune avvertenze per la Coſtruzione dell' Equazioni colla interſecazione delle Curve.

I. IL Signor Rol ha promoſſo con grand' ingegno alcune difficoltà contro l' interſecazione delle curve, per cui egli crede incerto il metodo del coſtruire con queſta l' equazioni determinate. Per comprendere ciò, ſia l'equazione determinata $x x - x . \overline{a + b} + a b = o$, la quale, come è chiaro, à le due radici reali $x = a$, $x = b$: ſi faccia $x x = a a - y y$, equazione al circolo del raggio a: e ſoſtituendo queſto valore di $x x$ nell' equazione, ſarà $a a - y y - x . \overline{a + b} + a b = o$, ovvero $\overline{a + b} . \overline{a - x} = y y$, equazione alla parabola del parametro $a + b$. Con queſta, e col circolo del raggio $= a$, ſi coſtruiſca la propoſta equazione nella ſeguente maniera. Col raggio $A C = a$ ſi delinei il circolo $D A D$ (*Fig.* 37. *Tav.* 5.), e col parametro $a + b$, al vertice A, ed aſſe $A C$ ſi delinei la parabola $D A D$. Il metodo di coſtruire l' equazioni con l' interſecazione delle curve eſige, che tante ſieno l' interſecazioni di queſte due curve, quante ſono le radici reali della equazione propoſta, cioè due. Dove tratteremo dei cir-

circoli osculatori delle curve dimostreremo, che se il raggio CA sia uguale alla metà del parametro, cioè se sia $a = \frac{a+b}{2}$, o che è lo stesso $a = b$; la parabola DAD sarà combaciàta dal circolo DAD nel vertice A, senza essere in alcuno altro punto segata; la quale dottrina quì supposta per certa, come in realtà la è (23), ci scopre, che se sarà $a > b$, il circolo del raggio a essendo maggiore dell' osculatore, oltre del punto A del contatto, che determina la CA uguale alla radice a, segherà la parabola in due altri punti D, D, i quali determineranno la CE uguale all'altra b. Quì avvertasi, che il punto del contatto equivalendo a due di sezione, quattro saranno i punti di sezione nel caso presente; il che indica, che CA, e CE si deono prendere due volte, e che la costruzione serve all' equazione di quarto grado ($xx - x . \overline{x+b} + ab^2$) $= o$, che ha due radici uguali a due altre, le quali sono eziandio le radici della proposta equazione. Se poi sarà $a < b$, il circolo del raggio a essendo minore dell' osculatore, non segherà la parabola; onde questa caderà tutta fuori del circolo, venendo solamente toccata dal medesimo nel punto A, il quale determinerà CA uguale alla sola radice a. La radice b dunque non viene determinata, e perciò le intersecazioni delle curve non danno alle volte tutte le radici reali delle equazioni.

II. La difficoltà cresce se si introduca un circolo, il raggio di cui sia minore ancora di a, come sarebbe $xx = \frac{aa}{4} - yy$; imperciocchè fatta la sostituzione nella equazione proposta, nasce la parabola dello stesso parametro $\overline{a+b} . (\frac{aa + 4ab}{4a + 4b} - x) = yy$. Volendo fare la costruzione, dall'asse della parabola FBF (*Fig.* 38. *Tav.* 5.) si tagli $CB = \frac{aa + 4ab}{4a + 4b}$, e col raggio $CA = \frac{a}{2}$ si descriva il circolo DAD. Essendo CB minore di $\frac{a+b}{2}$, il circolo descritto col raggio CB sarà minore dell' osculatore, e perciò non segherà la parabola; tanto meno dunque la parabola sarà tagliata dal circolo del raggio CA nella supposizione che sia $CB > CA$, cioè $b > \frac{a}{2}$. Adunque chi si assidasse a questa costruzione, conchiuderebbe falsamente, che la proposta equazione non abbia radici reali.

III. Essendo il metodo della intersecazione cotanto famoso nell'Algebra per la sua universalità ed utilità grande, ci dispiaceva di doverlo abbandonare come incerto e paralogistico, onde ci siamo ingegnati di scoprire la maniera di adoperarlo con sicurezza; il che finalmente abbiamo ottenuto mettendo in opera alcune avvertenze. Egli è cosa indubitata, che se due curve riferite alla stessa linea delle ascisse, e col medesimo principio di queste, abbiano delle ordinate corrispondenti alla stessa ascissa uguali, e reali; esse si intersecheranno dove le ordinate sono uguali, e reali. Adunque quando saremo sicuri di queste due condizioni, cioè dell'uguaglianza, e realtà delle ordinate corrispondenti alla stessa ascissa, saremo altresì certi, che le intersecazioni delle curve daranno le radici reali delle equazioni; saremo poi dubbiosi, se le ordinate uguali possano essere immaginarie (24). Esaminiamo ora se nella costruzione dei luoghi di primo grado vi abbia alcun pericolo. Sieno questi $Ax + By + C = 0$, $ax + bx$
$+ c$

$+ c = o$. Qui si osservi, che dato qualunque valore reale all' x, l' y in amendue le equazioni dee essere reale; dunque è impossibile, che ad una x reale corrispondano ordinate uguali immaginarie; e perciò se vi sono ordinate uguali, deono queste essere reali, e si dee avere la intersecazione. Dunque il metodo è sicuro. Si debbano costruire due luoghi, uno di primo, e l' altro di secondo grado, cioè $Q + Ay = o$, $p + qy + ay^2 = o$, ne'quali Q, q sieno date per costanti, e per la x a dimensione lineare, e p possa contenere ancora la seconda dimensione di x. Nella prima equazione posto qualunque valore della x reale, l'y sarà sempre reale; dunque non può accadere congiungendo questi due luoghi, che ad una x reale corrispondano due ordinate uguali, ed immaginarie; e perciò se avremo l'uguaglianza delle ordinate, avremo ancora la realtà, ed in conseguenza l' intersecazione. Questi due luoghi adunque si potranno costruire senza timore di errore.

IV. Lo stesso però non possiamo asserire dei due luoghi $P + Ay^2 = o$, $p + ay^2 = o$, in cui P, p possano contenere la x a prima, e seconda dimensione; perchè può in amendue avvenire, che posta la x reale, le y sieno immaginarie, dovendosi estrarre la radice quadrata per determinare il valore dell'y; onde è possibile il caso, in cui alla stessa x reale corrispondano due ordinate immaginarie. Adunque la congiunzione di questi due luoghi è soggetta a paralogismo.

V. Sieno due luoghi $P + Qy + Ay^2 = o$, $p + qy + ay^2 = o$. Dalla prima moltiplicata per a tolgo la seconda moltiplicata per A, ed ottengo $aP - Ap + \overline{aQ - Aq} \cdot y = o$. Fingiamo ora, che posto lo stesso valore della x reale nelle due prime equazioni, si ottengano due y uguali, ed immaginarie: ne verrebbe da da ciò, che ancora nella terza l' y ſarebbe immaginaria; il che è impoſſibile, perchè ſi trova $y = \frac{Ap - aP}{aQ - Aq}$, che è quantità reale. Poſſiamo per tanto adoperare francamente queſti due luoghi, poicchè non vi ſarà timore alcuno di non ottenere colla interſecazione loro le radici reali, qualora vi ſieno nell' equazione, che ſi coſtruiſce.

VI. Acciocchè per altro queſt'ultima conſeguenza ſia legittima, biſogna che la terza equazione non ſia diviſibile per un fattore R, che contenga la x; imperciocchè la noſtra equazione allora prenderebbe la forma ſeguente $RM + RNy = o$, ſuppoſto il quoto $\frac{aP - Ap}{R} = M$, ed $\frac{Aq - aQ}{R} = N$; il che, come è chiaro, non inferiſce neceſſariamente che ſia $y = -\frac{M}{N}$, potendoſi verificare la predetta equazione dall' eſſere ſol tanto $R = o$, ſenza che ſi verifichi $y = -\frac{M}{N}$. (25).

VII. Dalle coſe fin quì dette appariſce, che ſi poſſono uſare con tutta ſicurezza due luoghi di ſecondo grado per la coſtruzione delle equazioni determinate di terzo, e quarto, quando ſaranno tali, che colla ſomma, e ſottrazione delle equazioni loro, o in altra maniera, ſi poſſa ottenere una terza equazione dalle due prime dipendente, in cui l'y ſia a lineare dimenzione, nè ſiavi alcun fattore, che contenga la x; le quali avvertenze ſi ſono da noi avute nel capitolo precedente, come ſe ne potrà render certo chi ne voglia fare l' eſperimento. Queſti principj ſomminiſtrano ancora i lumi opportuni, per regolarci quando coſtruiſtruiremo l' equazioni determinate ſuperiori al quarto grado con linee ſuperiori alle ſezioni coniche.

CAPO X.

Della Riſoluzione analitica dell'Equazioni del terzo, e quarto grado.

I. Oltre il metodo di coſtruire l' equazioni determinate di terzo grado colle ſezioni coniche, introdotto da Renato Sluſio Canonico di Leide, e promoſſo da Renato Carteſio, havvi un altro, che inſegna riſolvere tali equazioni analiticamente, cioè ritrovare il valore dell' x dato per ſole quantità cognite. Il Carteſio attribuiſce ciò al Cardano; ma queſti lo attribuiſce a Scipion Ferreo Bologneſe. Ne' problemi aritmetici mai non potendo far uſo del primo metodo, conviene ſempre ricorrere al ſecondo.

II. Biſogna in primo luogo notare, che alle volte l' equazioni del terzo grado non ſono in realtà tali, eſſendo abbaſſabili, e riducibili a gradi inferiori con certi metodi, i quali quì da noi ſi tralaſciano, riſerbandoci di parlarne nella terza parte di queſto tomo, dove tratteremo delle equazioni di ogni grado: di queſte quì non diſcorriamo, e ſupponiamo l'equazioni del terzo grado in niuna maniera abbaſſarſi a gradi inferiori. Convien riflettere ancora a ciò, che abbiamo indicato dove ſi è parlato della riſoluzione delle equazioni di ſecondo grado, cioè, che quantità reali poſſono naſcere da' prodotti di quantità immaginarie, e per conſeguenza che fattori di quantità reali alle volte ſono immaginarj. Tali ſono appunto due delle radici terze dell' unità. Per dimoſtrar ciò, ſia $x^3 - 1 = 0$: una radice di queſta equazione ſarà 1, perchè poſto

posto 1 in vece di x, l' equazione diventa zero; ed in fatti dividendo l' equazione $x^3 - 1 = o$ per $x - 1 = o$, ne risulta $x^2 + x + 1 = o$; dunque uno dei divisori semplici di questa equazione sarà $x - 1 = o$, e per ciò una radice sarà l' unità. Per trovare l' altre radici si dee risolvere l' equazione di secondo grado $x^2 + x + 1 = o$, che ci dà $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, ed $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ ambe immaginarie. Dunque le radici cubiche dell' unità sono 1, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, una reale, e due immaginarie. Le radici quarte dell' unità ancora due sono reali, e due immaginarie, perchè l' equazione $x^4 - 1 = o$ è divisibile per $x - 1 = o$, ed $x + 1 = o$, riducendosi con tali divisioni ad $x^2 + 1 = o$, da cui si ricavano le altre due radici $x = +\sqrt{-1}$, ed $x = -\sqrt{-1}$; sicchè le quattro radici quadrato quadrate dell' unità sono $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, due reali, e due immaginarie. Ciò premesso, sia l' equazione del terzo grado I. $x^3 - 3ax - b = o$, in cui a, e b possano essere positive, e negative, ed ancor zero. A questa forma si possono ridurre tutte le equazioni del terzo grado, togliendole il secondo termine se l' abbiano, col metodo insegnato nel Cap. 7. num. 2., e liberando il termine della massima potestà dell' incognita dal coefficiente se siavi. Fingo la $x = m + n$, quantità che determino nella seguente maniera. S' alzi al cubo $x = m + n$, e sarà $x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = m^3 + 3mn \cdot \overline{n + m} + n^3$: in vece di $m + n$ sostituita la x, e trasportati tutti i termini da una parte, sarà II. $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = o$, la quale è divisi-

 bile

bile per $x - m - n = o$; dunque $x = m + n$ è una delle sue radici. Si paragoni ora ciascun termine della equazione proposta colla seconda, e si troverà $mn = a$, $m^3 + n^3 = b$; dunque $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$, ed $m^6 - bm^3 = -a^3$; e finalmente $m = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Nella stessa guisa si trova $n = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Nei valori di m, ed n si prendono i radicali secondi col segno contrario, perchè altrimenti tali valori riuscirebbero uguali; quindi sarebbe $mn = m^2 = a$, ed $m^3 + n^3 = 2m^3 = b$, da cui ricavasi $m^6 = a^3$, $m^6 = \frac{bb}{4}$, e perciò $a^3 = \frac{bb}{4}$; onde il metodo presente non sarebbe applicabile, che alle sole equazioni del terzo grado, in cui si verifica tal condizione. Questo inconveniente si scansa operando come si è fatto. (26).

III. Ciascuna radice terza à tre valori: per esprimerli, altro non si dee fare, se non se moltiplicare il valore ritrovato per le tre radici terze dell'unità, cioè 1, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; avremo adunque

Valori dell' m

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}} \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Va-

Valori dell' n

$$\underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}},$$

$$\underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},$$

$$\underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

IV. Nove sono le combinazioni possibili di questi valori: per rigettare le sei inutili, si deono sciegliere le tre, in cui i valori di m, ed n moltiplicati insieme danno $+a$: con questo criterio determineremo le tre seguenti radici dell' equazion proposta

$$x = \underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}}} + \underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}}},$$

$$x = \underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$x = \underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{2} - a^3}}}} \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \underset{1}{\sqrt[3]{\frac{b}{2} - \underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}}} \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

V. Affinchè si intenda ciò chiaramente, si dee avvertire, che le nove radici, che risultano dalle nove combinazioni dei valori di m, ed n, appartengono ad un' equazione di nono grado, la quale essendo risolu-

bi-

bile in tre di quelle del terzo, fra le quali havvi la nostra avvieneche tre delle predette nove combinazioni servano per le radici della nostra. Delle nove combinazioni si sono scelte le tre, in cui moltiplicando il valore di m per il valore di n, si ottiene il prodotto $= a$; perchè nell' equazione $x^3 - 3ax - b = o$, il termine $- 3ax$ corrisponde al termine $- 3mnx$ della formola generale; e perciò mn dee corrispondere ad a (27).

VI. Altra osservazione interessante dee farsi intorno ai tre valori ritrovati della x; cioè, che questi tre valori sono tutti reali quando sia $a^3 = \frac{bb}{4}$, ovvero $a^3 > \frac{bb}{4}$, cioè quando i valori m, n sono immaginarj: e che i due secondi sono immaginarj quando sia $a^3 < \frac{bb}{4}$, cioè quando i valori m, n sono reali; il che a prima vista sembra un paradosso. Varie dimostrazioni di ciò hanno date gli Analisti: noi ci contenteremo della seguente. Si ponga la quantità $\frac{b}{2} = p$, e $\frac{bb}{4} - a^3 = q$; sarà $m = \sqrt[3]{p + \sqrt{q}}$, che buttata in serie è $= p^{\frac{1}{3}} + \sqrt{q} - q + q\sqrt{q} - q^2$ &c., ed $n = \sqrt[3]{p - \sqrt{q}} = p^{\frac{1}{3}} - \sqrt{q} - q - q\sqrt{q} - q^2$ &c., come si ricava da quello, che abbiamo insegnato nel Lib. 1. Cap. 3. num. 33. Lascio i divisori dei termini della serie, perchè essendo gli stessi nei termini omologi di ambe le serie, non turbano la dimostrazione. Sommati i valori di m, ed n buttati in serie, si avrà per la somma $2p^{\frac{1}{3}} - 2q - 2q^2$ &c., e-

li-

lidendosi i termini $+\sqrt{q} - \sqrt{q}$, $+ q\sqrt{q} - q\sqrt{q}$; onde il primo valore di $x = m + n$, o la quantità q sia positiva, o negativa, sarà sempre reale. Il secondo valore di x è $= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . m \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . n$.

Moltiplicate ambe le serie per $-\frac{1}{2}$, e sommate; i soliti termini in cui sono le quantità radicali si elideranno: moltiplicata poi la prima serie $= m$ per $+ \frac{\sqrt{-3}}{2}$, e la seconda $= n$ per $\frac{-\sqrt{-3}}{2}$; i termini in cui non si ritrova la quantità radicale $\sqrt{q}$ si elideranno, e rimarranno quelli in cui essa si ritrova, i quali saranno immaginarj se $\sqrt{q}$ sia quantità reale; saranno poi reali se $\sqrt{q}$ sia quantità immaginaria; perchè moltiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-q}$, ne risulta $-\sqrt{3q}$ quantità reale, siccome abbiamo insegnato nel Lib. 1. Cap. 3. num. 53. Dunque il secondo valore di $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . m \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . n$ sarà immaginario quando $\sqrt{q}$ sia quantità reale, e sarà reale quando $\sqrt{q}$ sia quantità immaginaria. Lo stesso metodo si tenga per lo terzo valore della $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . m \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . n$. Gli Algebristi mai non avendo saputo liberare le radici dell' equazioni del terzo grado dagl' immaginarj, hanno à ciò dato il nome di *caso irreducibile*.

VII.

VII. Risolute l'equazioni del terzo grado, ci abbiamo aperta la strada per la risoluzione di quelle del quarto, la quale Lodovico Ferrari similmente Bolognese fu il primo a conoscere. Assumo la formola generale mancante del secondo termine, a cui tutte ridur si possono (Lib.2.Cap.7.num.2.), cioè $x^4 + abx^2 + a^2cx + a^3d = o$: le specie b, c, d possono essere e positive, e negative, ed anche $= o$; la a, che supplisce l' omogeneità de' termini, vuol sempre come positiva riguardarsi. Dispongo la formola nella seguente guisa $x^4 + a . \overline{b + m} . x^2 + \frac{a^2 \overline{b + m}^2}{4} = amx^2 - a^2cx - a^3d + \frac{a^2 . \overline{b + m}^2}{4}$ $= am . x^2 + \frac{ac}{m}x - \frac{a^2d}{m} + \frac{a . \overline{b + m}^2}{4m}$. La prima parte dell' equazione è un quadrato perfetto, da cui si può estrarre la radice: affinchè nella seconda parte la quantità, che la am moltiplica, sia un quadrato, fa d'uopo, che il quadrato di $\frac{ac}{2m}$ eguagli l'ultimo termine. Determiniamo il valore di m per modo, che tal condizione si verifichi. Pertanto dovrà essere $\frac{a^2c^2}{4m^2} = -\frac{a^2d}{m} + \frac{a . \overline{b + m}^2}{4m}$: e moltiplicando per $4m$, e dividendo per a, $\frac{ac^2}{m} = -4ad + \overline{b + m}^2$, ovvero

$$m^3 + 2bm^2 + bbm - ac^2 = o$$
$$ - 4adm$$

che è una equazione del terzo grado, che ha per lo meno una radice reale. Supponendo determinato il valore della m, s'estragtraggano le radici nell' equazione del quarto grado già preparata $x^2 + \frac{a.\overline{b+m}}{2} = \pm\sqrt{am}\,.\,\overline{x + \frac{ac}{2m}}$; dunque

$$x^2 \mp x\sqrt{am} \mp \frac{ac\sqrt{a}}{2\sqrt{m}} + \frac{a.\overline{b+m}}{2} = 0,$$

la qual formola involvente l' ambiguità de' segni abbraccia i due trinomj del secondo grado, ne' quali la proposta del quarto risolvesi.

VIII. Questo metodo mi mette innanzi una facile, ed elegante maniera di dimostrare, ch' ogni formola del quarto grado è risolubile in due trinomj reali, comunque le sue quattro radici fossero immaginarie. A questo fine io rifletto, che se la quantità m è positiva, amendue i trinomj trovati sono reali; ma se m fosse negativa, essi involvono le quantità immaginarie. I valori di m che si ricavano dalla risoluzione d' una equazione cubica sono tre: ad avere i due trinomj reali basta ch' uno di questi tre valori sia reale, e positivo: io dico che lo sarà necessariamente. Per provarlo ritorniamo all' equazione di terzo grado, da cui dipende il valore di m. Questa equazione ordinata, e posti tutti i termini da una parte, ha l' ultimo termine sempre affetto del segno —, perchè a supponesi positiva, e cc è positiva quantunque c fosse negativa: ma tutte l' equazioni cubiche, in cui l' ultimo termine sia negativo, hanno una radice reale positiva; dunque una almeno delle radici della nostra equazione è positiva, e però avremo in ogni caso un valore di m positivo. Che poi un' equazione cubica, in cui sia l'ultimo termine negativo, abbia una radice rea-

reale positiva, facilmente si comprenderà, se prese tre radici negative, da queste si formi una equazione di terzo grado; perchè in questa l'ultimo termine verrà necessariamente positivo.

IX. In un caso solo sembra che la formola de' nostri trinomj venga a mancare, cioè quando $m = o$, che accade quando $c = o$. In tale caso nell' ultimo termine viene a risultare la frazione $\frac{o}{o}$, di cui non sappiamo il valore: ma in questo caso la formola si risolve col metodo adoprato nelle equazioni quadratiche. Tuttavolta anche il presente metodo usato con artificio è utile, potendosi determinare il valore della frazione $\frac{c}{\sqrt{m}}$, il quale è finito. Si ripigli la formola del terzo grado $m^3 + 2bm^2 + bbm - ac^2 = o$. Egli è manife-
$$- 4adm$$
sto, che essendo $m = o$, i due primi termini rispetto al terzo sono nulli, e perciò resterà $\overline{bb - 4ad}.m = ac^2$; dunque $\frac{\sqrt{bb - 4ad}}{\sqrt{a}} = \frac{c}{\sqrt{m}}$, il qual valore posto nella formola darà $x^2 \mp \frac{a\sqrt{bb - 4ad}}{2} + \frac{ab}{2} = o$. Gli altri due valori di m, in supposizione di $c = o$, s' ottengono dalla risoluzione della formola $mm + 2bm + bb - 4ad = o$, e sono $m = - b + \sqrt{4ad}$, $m = - b - \sqrt{4ad}$, i quali posti ne' trinomj danno le due coppie $x^2 \mp x\sqrt{- ab + a\sqrt{4ad}} \mp a\sqrt{ad}$, $xx \mp x\sqrt{- ab - a\sqrt{4ad}} - a\sqrt{ad}$. Se d è

d è negativa, ovvero essendo positiva se è $< \frac{bb}{4a}$, i binomj $x^2 \mp a(bb - 4ad)^{\frac{1}{2}} : 2 + ab : 2$ sono reali; se poi sia $d > bb : 4a$, allora sono reali i trinomi della prima coppia; dunque una equazione del quarto grado è sempre divisibile in due del secondo reali.

X. Poichè s' è dimostrato, che tutte le formole del quarto grado risolvere si possono in due trinomj reali del secondo grado, egli è evidente, che tutte le radici immaginarie del quarto grado si potranno esprimere per l' immaginarie del secondo. Imperocchè le radici immaginarie del quarto grado si facciano $= x$, ed eguagliate queste semplici equazioni al zero, e moltiplicate insieme, risulterà una formola del quarto grado senza radicali, che si può risolvere in due trinomj reali, i quali risoluti daranno le radici di questa forma $p + q\sqrt{-1}$, essendo p, q due quantità reali.

XI. Do compimento a questo Capitolo col indicare qualche metodo per estrarre le radici quadrate, e cube dalle quantità irrazionali, che potrà servire di lume ancora per le radici superiori. Debbasi estrarre dal binomio $3 + \sqrt{8}$ la radice quadrata. Fingasi questa $= x + y$, e figurisi y essere un radicale; dunque dovrà essere $x^2 + 2xy + y^2 = 3 + \sqrt{8}$: pongasi $x^2 + y^2 = 3$, $2xy = \sqrt{8}$; sarà $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 9$, e $4x^2y^2 = 8$: e sottratta questa equazione dall' antecedente, avremo $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 1$: ed estraendo la radice quadrata, sarà $-x^2 + y^2 = 1$, ed $y^2 = x^2 + 1$: ma è $x^2 + y^2 = 3$, cioè $y^2 = 3 - x^2$; dunque $x^2 + 1 = 3 - x^2$, cioè $x = 1$, ed $y^2 = x^2 + 1 = 2$, ed $y = \sqrt{2}$. Dunque la radice quadrata di $3 + \sqrt{8}$ è $1 + \sqrt{2}$.

XII. Si debba estrarre la radice cuba da $20 + \sqrt{392}$

$\sqrt{392}$. Sia questa $= x + y$, ed y figurisi un radicale; sarà $x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3 = 20 + \sqrt{392}$: pongasi $x^3 + 3xy^2 = 20$, $y^3 + 3yx^2 = \sqrt{392}$: elevando a quadrato, $x^6 + 6x^4y^2 + 9x^2y^4 = 400$, $y^6 + 6y^4x^2 + 9y^2x^4 = 392$: e sottratta questa dall'antecedente, sarà $x^6 - 3y^2x^4 + 3x^2y^4 - y^6 = 8$: ed estratta la radice cubica, sarà $x^2 - y^2 = 2$, ed $x^2 - 2 = y^2$: ma abbiamo $x^3 + 3xy^2 = 20$; dunque sarà $x^3 + 3x^3 - 6x = 20$, cioè $x^3 - \frac{3x}{2} = 5$. Se questa equazione del terzo grado à radici razionali, troveremo la x quantità razionale: tale nel caso presente è il 2; dunque sarà $x = 2$, ed $x^2 = 4$, che sostituito nell'equazione $x^2 - 2 = y^2$ darà $y^2 = 2$, ed $y = \sqrt{2}$. Per tanto sarà $\overline{2 + \sqrt{2}}^3 = 20 + \sqrt{392}$, come in realtà fatto lo sperimento ritrovasi. Nel terzo Libro Capo 4. insegneremo la maniera di scoprire i fattori razionali di qualunque equazione.

XIII. Altro metodo per ottenere lo stesso fine è il seguente. Sia da estrarsi la radice seconda del radicale $3 + \sqrt{8}$. Si faccia $x = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, e si prendano tutti i valori di x: e comecchè ogni radicale quadratico ha due valori, positivo uno, negativo l'altro; quindi tutti i valori di x saranno questi, cioè $x = \sqrt{3 + \sqrt{8}}$, $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$, $x = -\sqrt{3 - \sqrt{8}}$, $x = -\sqrt{3 + \sqrt{8}}$: si eguaglino queste equazioni al zero, e si moltiplichino insieme, e nascerà l'equazione $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$. Si risolva questa in due fattori reali di secondo grado; il che si può ottenere così: sia un fattore reale di secondo grado $x^2 + mx + n$, e si divida per questo l'equaquazione x^4 &c. ; avremo per quoto $x^2 - mx - 6 - n + m^2$, e per residuo $6mx + 2nmx - m^3x + 6n + n^2 - nm^2 + 1$. Se questo residuo fosse zero, allora l' equazione del quarto sarebbe stata divisa in due fattori reali di secondo grado: per fare adunque che questo residuo sia zero si ponga $6mx + 2nmx - m^3x = 0$, e $6n + n^2 - nm^2 + 1 = 0$; avremo dalla prima di queste equazioni $6 + 2n - m^2 = 0$, e $6 + 2n = m^2$: e sostituito il valore di m^2 nella seconda, sarà $6n + n^2 - 6n - 2n^2 + 1 = 0$, cioè $n^2 = 1$, ed $n = 1$; e perciò $m^2 = 6 + 2n = 8$, onde $m = \sqrt{8}$. Adunque i due fattori di secondo grado $x^2 + mx + n$, $x^2 - mx - 6 - n + m^2$ si cangiano in $x^2 + x\sqrt{8} + 1$, $x^2 - x\sqrt{8} + 1$, nei quali è divisibile perfettamente l'equazione di quarto grado. Si risolvano questi fattori, onde sia $x = -\sqrt{2} \pm 1$, ed $x = \sqrt{2} \pm 1$, ed avremo i valori di x in radicali semplici soltanto, quando i proposti erano radicali di radicali.

XIV. Sia da estrarsi la radice cubica dal radicale $20 + \sqrt{392}$. Si faccia $x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$; si prendano tutti i valori di questo radicale, che sono sei, perchè tre ne ha il radicale cubico, a ciascuno dei quali appartengono due valori del radicale quadratico; onde in tutto sono sei: si eguaglino questi valori al zero: indi si faccia il loro prodotto, ed avremo $x^6 - 40x^3 + 8 = 0$: uno dei fattori reali di secondo grado di questa equazione è $x^2 - 4x + 2$, il quale risoluto da $x = 2 \pm \sqrt{2}$, come sopra num. 12.

CAPO XI.

Le formole, che sono state ritrovate nella risoluzione dell' Equazioni del terzo grado, si costruiscono coi seni, e cosseni circolari, ed iperbolici.

I. Siccome il Signor Eulero introdusse nell' Algebra i seni, e cosseni circolari, così il Conte Vicenzo Riccati introdusse gl' iperbolici. Ecco in questo Capo un saggio dell' uso loro. Sia C (*Fig.* 39. *Tav.* 5.) il centro dell' iperbola equilatera $AEFN$, CA sia il semiasse, CQ uno degli asintoti, che faccia con CA un angolo semiretto: dal vertice A si cali la perpendicolare AK sopra l' asintoto, e dopo CK e qualunque CG si formi una serie di rette CK, CG, CH, CP &c., che sieno in proporzione geometrica continua, e che chiameremo, secondo l' uso comune, *numeri*: dai punti G, H, P si alzino all' asintoto le normali GE, HF, PN. E' proprietà dell' iperbola da dimostrarsi a suo luogo, che gli spazj $AKGE$, $EGHF$, $FHPN$ &c. sieno uguali; e perciò gli spazj $AKGE$, $AKHF$, $AKPN$ &c. sono in continua proporzione aritmetica: e chiamato $AKGE = \mu$, alla retta CK primo termine della serie geometrica corrisponde lo spazio $= o$, al secondo CG corrisponde lo spazio μ, al terzo CH lo spazio 2μ, al quarto CP lo spazio 3μ &c.; ed universalmente al termine m corrisponde lo spazio $\overline{m-1}\,.\,\mu$. Se tra CK, CG si trovi una media proporzionale, lo spazio μ si dividerà in due parti uguali, per la stessa proprietà da dimostrarsi: se due medie, si dividerà in tre parti uguali: se tre, in quattro: e generalmente se il numero delle proporzionali continue tra CK, CG sarà m, il numemero delle parti uguali, in cui si dividerà μ, sarà $m + 1$. Dunque a rovescio, per dividere lo spazio μ in parti uguali del numero m, conviene ritrovare fra CK, CG il numero $m - 1$ di medie proporzionali; il che universalmente parlando, quantunque non si possa fare geometricamente, con varj strumenti mecanici per altro si ottiene. Questi spazj, che sono in serie aritmetica in riguardo alle rette della serie geometrica che dicemmo *numeri*, si chiamano *logaritmi*. Corrispondendo a quattro termini della serie geometrica che sieno in proporzionalità, quattro nella serie aritmetica, che pure sono in proporzionalità, come è chiaro dalla natura delle due serie; ne viene, che la somma di due logaritmi sia uguale al logaritmo della quarta proporzionale dopo CK, ed i numeri de' due logaritmi dati: così, essendo $CK : CG :: CH : CP$ geometricamente, sarà ancora $o : AKGE :: AKHF : AKPN$ aritmeticamente; adunque sarà ancora $AKPN = AKGE + AKHF$.

II. Il semiasse CA si chiama *seno tutto*, e si denomina r, la normale EB si chiama seno retto del logaritmo μ, la CB cosseno dello stesso, e si esprimono così $Sh\mu$, $Ch\mu$: il cosseno del logaritmo zero è $= r$, ed il seno è zero. Il seno EB si prolunghi fino in I ed in S, e dal punto S si cali la normale SR all' asintoto; sarà $BI = BC$, $BE = BS = BV$, per gli angoli semiretti; quindi $CV = EI$, da cui si deduce $CR = GE$, e perciò CG, CK, CR in proporzione continua, essendo CG, CK, GE in continua proporzione per la natura dell'iperbola. Dunque alla CR, numero minore di CK, e terza proporzionale dopo CG, CK, corrisponde il logaritmo $AKRS$ negativo $= -\mu$, essendo lo spazio $SRKA = AKGE$ per la

già

già nominata proprietà della iperbola ; il cosseno di cui è $CB = Ch\,\mu$, ed il seno è $SB = -Sh\,\mu$. Adunque sarà $Sh - \mu = -Sh\,\mu$, e $Ch - \mu = Ch\,\mu$.

III. Si chiami il logaritmo $AKHF = \pi$; sarà $CD = Ch\,\pi$, $FD = Sh\,\pi$: sia inoltre il logaritmo $AKPN = \mu + \pi$, $CM = Ch.\overline{\mu + \pi}$, $NM = Sh.\overline{\mu + \pi}$; e prolungate DF, MN in L, Q, è facile vedere, che EI, FL, NQ sono le differenze dei seni, e cosseni rispettivi ; sarà dunque $EI = Ch\,\mu - Sh\,\mu$, $FL = Ch\,\pi - Sh\,\pi$, $NQ = Ch.\overline{\mu + \pi} - Sh.\overline{\mu + \pi}$. Inoltre $CK = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $GI = \frac{Ch\,\mu - Sh\,\mu}{\sqrt{2}}$, $HL = \frac{Ch\,\pi - Sh\,\pi}{\sqrt{2}}$, $PQ = \frac{Ch.\overline{\mu + \pi} - Ch.\overline{\mu + \pi}}{\sqrt{2}}$; e finalmente $CI = \sqrt{2}.Ch\,\mu$, $CL = \sqrt{2}.Ch\,\pi$, $CQ = \sqrt{2}.Ch.\overline{\mu + \pi}$; dunque $CG = \sqrt{2}.Ch\,\mu - \left(\frac{Ch\,\mu - Sh\,\mu}{\sqrt{2}}\right) = \frac{Ch\,\mu + Sh\,\mu}{\sqrt{2}}$: similmente si trova $CH = \frac{Ch\,\pi + Sh\,\pi}{\sqrt{2}}$, $CP = \frac{Ch.\overline{\mu + \pi} + Sh.\overline{\mu + \pi}}{\sqrt{2}}$. Dovendo adunque essere $CK : CG :: CH : CP$ (num. 1.), fatta la sostituzione delle espressioni analitiche, e passando all'equazione, si trova subito il primo Teorema $Ch.\overline{\mu + \pi} + Sh.\overline{\mu + \pi} = (Ch\,\mu + Sh\,\mu).(Ch\,\pi + Sh\,\pi) : r$.

IV. Essendo per la natura dell'iperbola $\overline{Ch}^2 - \overline{Sh}^2 = rr$, sarà $Ch + Sh = \frac{r^2}{Ch - Sh}$: e sostituito $\frac{rr}{Ch - Sh}$ in vece di $Ch + Sh$ nel primo Teorema, na-

nascerà il secondo $Ch.\overline{\mu+\pi} - Sh.\overline{\mu+\pi} = (Ch\mu - Sh\mu).(Ch\pi - Sh\pi):r$. Se il logaritmo π si fosse preso negativo, valerebbero le stesse espressioni, col divario soltanto del segno nel $Sh\pi$.

V. Vagliono ancora per i seni, e cosseni circolari i due seguenti Teoremi analoghi ai già ritrovati, come ciascuno potrà chiarirsi col fare attualmente le moltiplicazioni indicate, e confrontando poi i prodotti colle formule del $Cc.\overline{\mu+\pi}$, e $Sc.\overline{\mu+\pi}$ ritrovate nel Capo 10. del Libro primo, num. 7, e 12: ecco i Teoremi

$$Cc.\overline{\mu+\pi} + \sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\pi} =$$
$$(Cc\mu + \sqrt{-1}.Sc\mu).(Cc\pi + \sqrt{-1}.Sc\pi):r,$$
$$Cc.\overline{\mu+\pi} - \sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\pi} =$$
$$(Cc\mu - \sqrt{-1}.Sc\mu).(Cc\pi - \sqrt{-1}.Sc\pi):r.$$

Se si tratti dell' arco $\mu - \pi$, si dee soltanto mutare il segno al $Sc\pi$.

VI. Supponiamo ora il logaritmo, o l' arco μ uguale a π; nasceranno queste quattro formule

1. $Ch2\mu + Sh2\mu = (Ch\mu + Sh\mu)^2 : r$,
2. $Ch2\mu - Sh2\mu = (Ch\mu - Sh\mu)^2 : r$,
3. $Cc2\mu + \sqrt{-1}.Sc2\mu = (Cc\mu + \sqrt{-1}.Sc\mu)^2 : r$,
4. $Cc2\mu - \sqrt{-1}.Sc2\mu = (Cc\mu - \sqrt{-1}.Sc\mu)^2 : r$:

e sommate, e sottratte le prime due, e indi divise per 2, s' avrà

$$Ch2\mu = \left((Ch\mu + Sh\mu)^2 + (Ch\mu - Sh\mu)^2\right) : 2r,$$
$$Sh2\mu = \left((Ch\mu + Sh\mu)^2 - (Ch\mu - Sh\mu)^2\right) : 2r.$$

Formole analoghe si trovano nella stessa maniera per il seno, e cosseno dell' arco doppio.

VII. Se prima di fare la somma, e la sottrazione delle predette prime due formole si estragga la radice seconda, e dopo la somma, e la sottrazione si faccia la divisione per 2, e la moltiplicazione per $r^{\frac{1}{2}}$, e si passi dippiù il secondo membro in primo; sarà

$$Ch\mu =$$
$$\left((Ch2\mu + Sh2\mu)^{\frac{1}{2}} + (Ch2\mu - Sh2\mu)^{\frac{1}{2}}\right) : 2r^{-\frac{1}{2}},$$
$$Sh\mu =$$
$$\left((Ch2\mu + Sh2\mu)^{\frac{1}{2}} - (Ch2\mu - Sh2\mu)^{\frac{1}{2}}\right) : 2r^{-\frac{1}{2}}$$

Collo stesso metodo si ritrovano i seni, e i cosseni della metà degli archi, che hanno espressioni analoghe a queste.

VIII. Due logaritmi μ, π si considerino come un logaritmo solo, a cui si debba aggiungere il logaritmo φ; si avrà per il primo Teorema

$$Ch.\overline{\mu + \pi + \varphi} + Sh.\overline{\mu + \pi + \varphi} =$$
$$(Ch.\overline{\mu + \pi} + Sh.\overline{\mu + \pi}).(Ch\varphi + Sh\varphi) : r:$$

e sostituto per $Ch.\overline{\mu + \pi} + Sh.\overline{\mu + \pi}$ il suo valore (num.3.); sarà $Ch.\overline{\mu + \pi + \varphi} + Sh.\overline{\mu + \pi + \varphi} =$
$(Ch\mu + Sh\mu)(Ch\pi + Sh\pi)(Ch\varphi + Sh\varphi) : rr:$
e posti i tre logaritmi uguali; sarà

$Ch3\mu + Sh3\mu = \dfrac{\overline{Ch\mu + Sh\mu}^{3}}{rr}$. Nella stessa guisa si ritrova $Ch3\mu - Sh3\mu = \dfrac{\overline{Ch\mu - Sh\mu}^{3}}{rr}$.

Fatta la somma, e la sottrazione di queste due formule le, e dividendo per 2; sarà finalmente

$$C h\, 3\mu = \left((C h \mu + S h \mu)^3 + (C h \mu - S h \mu)^3\right) : 2 r r,$$

$$S h\, 3\mu = \left((C h \mu + S h \mu)^3 - (C h \mu - S h \mu)^3\right) : 2 r r.$$ Formole analoghe si ritrovano collo stesso metodo per l'arco triplo.

IX. Se prima di fare la somma, e la sottrazione delle predette formule si estragga la radice terza, e dodo la somma, e la sottrazione si faccia la divisione per 2, e la moltiplicazione per $r^{\frac{2}{3}}$; sarà per il logaritmo suttriplo

$$C h \mu = \left((C h\, 3\mu + S h\, 3\mu r)^{\frac{1}{3}} + (C h\, 3\mu - S h\, 3\mu)^{\frac{1}{3}}\right) : 2r^{-\frac{2}{3}},$$

$$S h \mu = \left((C h\, 3\mu + S h\, 3\mu)^{\frac{1}{3}} - (C h\, 3\mu - S h\, 3\mu)^{\frac{1}{3}}\right) : 2r^{-\frac{2}{3}}$$

Formole analoghe si trovano collo stesso metodo per l'arco suttriplo.

X. La maniera, con cui abbiamo fin quì operato, ci insegna per induzione, che vagliono sempre le seguenti equazioni

$$C h n \mu = \left((C h \mu + S h \mu)^n + (C h \mu - S h \mu)^n\right) : 2 r^{n-1}$$

$$S h n \mu = \left((C h \mu + S h \mu)^n - (C h \mu - S h \mu)^n\right) : 2 r^{n-1}$$

$$C c n \mu = \left((C c \mu + \sqrt{-1}.S c \mu)^n + (C c \mu - \sqrt{-1}.S c \mu)^n\right) : 2 r^{n-1}$$

$$S c n \mu = \left((C c \mu + \sqrt{-1}.S c \mu)^n - (C c \mu - \sqrt{-1}.S c \mu)^n\right) : 2 r^{n-1}$$

posto n numero intiero, o fratto, il numeratore di cui sia l'unità. Adunque queste formule saranno atte a ritrovare un logaritmo, o un arco multiplo, o summultiplo di un altro. Le predette equazioni hanno ancora luogo quando n sia un fratto qualunque, anzi quando sia un numero irrazionale, come dimostriamo nelle nostre Instituzioni; onde possono esse servire a moltiplicare, e dividere il logaritmo, e l'arco in qualunque ragione. La brevità di questo Compendio non ci permette di fermarci più a lungo sù di ciò (28).

XI. Passiamo ora alla costruzione delle radici del terzo grado espresse con le formule cardaniche, facendo uso dei seni, e cosseni iperbolici, e circolari. Queste radici, siccome si rileva dal Capo precedente, hanno la forma, che segue

$$x = \overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}},$$

la quale equazione, per conservare l'eleganza nella costruzione, suppongo divisa per 2. Quattro ipotesi quì si deono fare, cioè o a, e b si suppongono amendue positive, o amendue negative, o a positiva, e b negativa, o finalmente b positiva, e a negativa: noi ci contenteremo di fare la costruzione nella prima ipotesi, potendosi da ciò facilmente dedurre la costruzione dell'altre. Due casi si danno in questa ipotesi: o è $\frac{bb}{4} > a^3$, e allora la formula cardanica non contiene immaginario alcuno: ovvero è $\frac{bb}{4} < a^3$, e allora la formula contiene il radicale quadratico immaginario. Nel primo caso si paragoni la formola cardanica colla formula del cosseno del logaritmo suttriplo.

$$Ch\frac{\mu}{3} = \left(\overline{Ch\mu + Sh\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Ch\mu - Sh\mu}^{\frac{1}{3}}\right) : 2r^{-\frac{2}{3}}$$

(num. 9.), alla quale ha una strettissima analogia; ed il confronto si faccia nella seguente maniera, fingendo $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Ch\mu + Sh\mu}{r^{-2}}$, e

$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Ch\mu - Sh\mu}{r^{-2}}$. Sommando, e sottraendo queste equazioni, nascerà $\frac{b}{2} = \frac{Ch\mu}{r^{-2}}$, e $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Sh\mu}{r^{-2}}$; dunque $\frac{\overline{Ch\mu}^2 - \overline{Sh\mu}^2}{r^{-4}} = \frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^3 = a^3$: ma è per la natura dell' iperbola $\overline{Ch\mu}^2 - \overline{Sh\mu}^2 = r^2$; dunque $r^6 = a^3$, ed $r = a^{\frac{1}{2}}$. Per tanto $\frac{x}{2}$ sarà $Ch\frac{\mu}{3}$, chiamato μ quel logaritmo, il cosseno di cui sia $\frac{b}{2a}$, ed il seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$. Da ciò ricavasi la seguente costruzione. Descritta l' iperbola equilatera, il cui (*Fig.* 39. *Tav.* 5.) semiasse AC sia $a^{\frac{1}{2}}$, si tagli $CM = \frac{b}{2a}$, e si alzi il seno MN: dai punti A, N si calino sull' asintoto le normali AK, NP, e si divida in tre parti uguali il logaritmo $AKPN$, trovando (num. 1.) fra CK, CP due medie proporzionali, la più picciola delle quali sia CG, a cui corrisponde il logaritmo $AKGE$ terza parte di $AKPN$: da G si conduca GE perpendicolare all' asintoto, e da E si cali il seno EB; questo determinerà il cosseno CB, a cui sarà uguale $\frac{x}{2}$.

XII. Nel caso poi, in cui sia $\frac{bb}{4} < a^3$, ed in conseguenza $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}$ immaginaria, si paragoni

la

la formula cardanica divisa per 2 coll' espr essione del cosseno circolare dell' arco suttriplo

$$Cc\frac{\mu}{3} = \left((Cc\mu + \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu)^{\frac{1}{3}} + \right.$$

$$\left. (Cc\mu - \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu)^{\frac{1}{3}} \right) : 2\,r^{-\frac{2}{3}},$$ fingen do

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\,.\,\sqrt[1]{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc\mu + \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu}{r^{-2}},$$ e

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}\,.\sqrt[1]{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc\mu - \sqrt{-1}\,.Sc\mu}{r^{-2}}.$$ Da ciò

si troverà $\frac{b}{2} = \frac{Cc\mu}{r^{-2}}$, e $\sqrt[1]{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc\mu}{r^{-2}}$, cioè

$a^3 - \frac{\overline{Cc\mu}^2}{r^{-4}} = \frac{\overline{Sc\mu}^2}{r^{-4}}$: ed essendo $\overline{Cc\mu}^2 + \overline{Sc\mu}^2 = r^2$,

sarà $r^6 = a^3$, ed $r = a^{\frac{1}{2}}$, $Cc\mu = \frac{b}{2a}$. Dunque sarà $\frac{x}{2} = Cc\frac{\mu}{3}$, purchè si prenda per seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$, e $\frac{b}{2a}$ per $Cc\mu$. Ciò somministra una facile costruzione della formula cardanica. (*Fig.* 40. *Tav.* 5.) Col raggio $CA = a^{\frac{1}{2}}$ si descriva il circolo AN, e si prenda $CM = \frac{b}{2a}$; sarà AN l' arco μ: questo si divida in tre parti uguali, la prima delle quali sia $AE = \frac{\mu}{3}$, e si cali il seno EB; CB cosseno sarà $\frac{x}{2}$.

XIII.

XIII. Il coſſeno CM non ſolamente appartiene all' arco AN, ma ancora alla periferia più l'arco AN: e poſto $AN\,2E$ terza parte di queſta ſomma, e calato il ſeno $2E\,2B$; ſarà $C\,2B$ pure uguale ad $\frac{x}{2}$. Similmente il coſſeno CM appartiene a due periferie più l' arco AN: e poſto $AN\,3E$ terza parte di queſta ſomma, ſi troverà $C\,3B$ uguale benanche ad $\frac{x}{2}$. La terza parte di tre periferie più AN torna nel punto E: di quattro nel punto $2E$: di cinque nel punto $3E$, e così in giro fino all' infinito. Dunque tre coſſeni ſoltanto ſi poſſono determinare uguali ad $\frac{x}{2}$. Queſte coſe verranno più chiaramente ſpiegate nel capo, che ſegue. Se nel fare il confronto nelle altre tre ipoteſi ſi urtaſſe nel ſeno tutto immaginario, ſi abbandoni la formula del coſſeno, e ſi prenda quella del ſeno (29).

CAPO XII.

Si riſolvono alcuni Problemi, che ſuperano il ſecondo grado.

I. PRoblema primo. Fra due quantità date a, b, trovare due medie proporzionali. Se la prima di queſte ſia x, ſarà la ſeconda $\frac{xx}{a}$: e comecchè $a : x : : \frac{xx}{a} : b$, s'avrà l'equazione $x^3 = a^2 b$. Per ſcioglierla in due indeterminanate del secondo grado, si ponga $xx = ay$; ne verrà ancora $xy = ab$, la prima alla parabola, la seconda all' iperbola, che così costruisco. AC, AQ (*Fig.* 41. *Tav.* 5.) si seghino ad angolo retto: sia $AC = a$, e con questo parametro all' asse AQ si delinei la parabola ATM. Sia inoltre $AB = b$, e chiuso il parallelogrammo $ACDB$, fra gli asintoti AQ, AC si descriva l' iperbola MD, che passi per lo punto D: queste due curve si segheranno soltanto in M, da cui condotte MP, MQ normali ad AC, AB; la retta $AP = MQ$ sarà la x prima delle medie proporzionali, ed $AQ = MP = y$ sarà la seconda $= \frac{x^2}{a}$.

II. Se si voglia costruire l' equazione con due parabole, si moltiplichi essa per x, acciocchè sia $x^4 = a^2bx$: e fatta $xx = ay$, ne verrà $yy = bx$. Descritta come sopra la parabola ATM, si descriva l' altra ASM col parametro $AB = b$ all' asse AP; la sezione M delle due parabole darà AP prima, ed AQ seconda delle medie proporzionali fra AC, AB. Per giugnere alle tre equazioni indeterminate, di cui abbiamo fatto uso, non v'era bisogno dell' equazione determinata $x^3 = a^2 b$; perchè chiamate le medie proporzionali x, y, abbiamo $a : x :: x : y :: y : b$; dunque $ay = xx$, $bx = yy$, $ab = xy$.

III. Se piaccia introdurre il circolo, si congiungano le due equazioni alla parabola in questo modo $yy - ay + xx - bx = 0$, per cui si otterrà

$$\overline{y - \frac{a}{2}}^2 + \overline{x - \frac{b}{2}}^2 = \frac{aa + bb}{4}$$, equazione al cerchio, che così costruisco. $CD = \frac{b}{2}$, $DE = \frac{a}{2}$ formi

mino un angolo retto in D (*Fig.*42.*Tav.*5.) : si congiunga CE, con cui si descriva il circolo EAB, e si conduca EP parallela al diametro AB; saranno le $EP = x$, $PM = y$ (30). Descritta adunque vertice E, e parametro b, all'EP la parabola; la sezione di questa, e del cerchio darà EP prima, MP seconda delle medie proporzionali tra a, e b. Segandosi le curve in un sol punto, unica sarà la soluzione reale del problema.

IV. Problema secondo. Dividere un arco in tre parti uguali. Sia l'arco dato $MPQN$ diviso in tre parti uguali nei punti P, Q (*Fig.*43.*Tav.*5.) in guisa che le corde MP, PQ, QN sieno uguali: dai punti P, Q si calino le normali PS, QT sulla corda MN, e le rette MN, ST si dividano in due parti uguali dallo stesso punto D: si chiami $DM = a$, $DS = x$, $SP = y$; sarà $ST = PQ = MP = 2x$. Quindi essendo $MP^2 = MS^2 + PS^2$, sarà analiticamente $4x^2 = a^2 - 2ax + xx + yy$, ovvero $xx + \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9} = \frac{4aa}{9} + \frac{yy}{3}$. Si ponga $x + \frac{a}{3} = z$, sicchè sia $zz - \frac{4aa}{9} : yy :: 1 : 3 :: \frac{4aa}{9} : \frac{4aa}{3}$, ed avremo l'equazione all'iperbola col semiasse primo $= \frac{2a}{3}$, e secondo $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, che così costruisco. Divido MN in tre parti uguali MR, RA, AN: centro A, col primo semiasse $AR = AN = \frac{2a}{3}$, e col secondo $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ descrivo l'iperbola, la di cui sezione col cerchio darà MP terza parte dell'arco MN; e dal punto P tirata PQ parallela

 ad

ad MN, il punto Q determinerà l' altre due terze parti PQ, QN.

V. L' iperbola sega il circolo non solamente nel punto P, ma in altri due punti $2P$, $3P$: vediamo che cosa significhino queste due sezioni. Il punto P sega, come si è veduto, l' arco dato MPN in tre parti uguali. Il punto $2P$ sega in tre parti eguali l' arco, che risulta da tutta la circonferenza più l' arco dato; perchè condotte $M2P$, $2P2Q$ parallela ad MN, e la $2QN$, saranno queste eguali, in vigore della costruzione (31); dunque gl' archi $MP2P$, $2P3P2Q$, $2QMN$ saranno uguali: ma la somma loro eguaglia l' intera circonferenza, e l' arco dato; dunque ciascuno sarà la terza parte di questa somma. Similmente il punto $3P$ serve a dividere in tre parti uguali due circonferenze insieme coll' arco dato; imperciocchè le tre corde $M3P$, $3P3Q$, $3QN$, la seconda delle quali è parallela ad MN, sono uguali fra loro; adunque gli archi maggiori della semicirconferenza $MN3P$, $3PM3Q$, $3QMN$ saranno eguali: ma questi presi insieme sono due circonferenze più l'arco dato MN; dunque ciascuno sarà la terza parte di questa somma. Per dividere tre circonferenze più l' arco dato serve il punto P, quattro circonferenze più l' arco dato il punto $2P$, cinque più l' arco dato il punto $3P$, e così in giro; dal che apparisce, che la nostra equazione, e costruzione divide in tre parti uguali archi infiniti, cioè tutti quelli, che hanno per termini i punti M, N, che sono infiniti; e perciò il problema sarebbe di grado infinito, ovvero *trascendente* ogni grado finito, se i punti P, $2P$, $3P$ &c. non tornassero gli stessi.

VI. Facilmente si comprende, che i punti P, $2P$,

3 P

$3P$ dividono la periferia in tre parti uguali; perchè chiamata la circonferenza $= c$, l'arco dato $= a$, sarà $MP2P = \frac{c+a}{3}$: ma è $MP = \frac{a}{3}$; dunque $P2P = \frac{c}{3}$. Similmente è $MN3P = \frac{2c+a}{3}$: ma $M2P = \frac{c+a}{3}$; dunque $2P3P = \frac{c}{3}$, ed in conseguenza sarà ancora $P3P = \frac{c}{3}$. Non soggiungiamo cosa alcuna del punto N, dove parimenti si segano il circolo, e l'iperbola; perchè se dal punto M ad N si tiri MN, a cui da N sia parallela NM, e da M tirisi di nuovo MN; avremo tre rette, che combaciano, e perciò uguali, ma inette a dividere l'arco come si desidera.

VII. Problema terzo. Sopra una data AB formare un triangolo isoscele ACB, (*Fig.* 44. *Tav.* 5.) che abbia l'angolo al vertice suttriplo dell'angolo alla base. Suppongasi diviso l'angolo B in tre parti uguali colle rette BD, BE. Per la similitudine dei triangoli ABE, ACB è $CA : AB :: AB : AE$. Adunque, chiamata $CA = CB = x$, $AB = BE = a$, sarà analiticamente $x : a :: a : AE = \frac{a^2}{x}$; quindi $CE = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$. Il triangolo DAB è isoscele; dunque $AD = AB = a$. Per la similitudine de' triangoli CBE, BDE, è $CE : CB :: BE : BD$, ovvero analiticamente $\frac{x^2 - a^2}{x} : x :: a : BD = \frac{ax^2}{x^2 - a^2}$: ma, per il triangolo CDB isoscele, $DC = BD = \frac{a^2 x^2}{x^2 - aa}$; dunque essendo AD

$+DC=AC$, farà $a+\frac{ax^2}{x^2-a^2}=x$, da cui nafce l' equazione del terzo grado $x^3-2ax^2-a^2x+a^3=o$.

VIII. Una fteffa parabola collocata in due maniere coftruifce l' equazione. Moltiplico quefta per x, onde fia $x^4-2ax^3-a^2x^2+a^3x=o$: pongo $x^2-ax=ay$, ed elevando a quadrato, $x^4-2ax^3+a^2x^2=a^2y^2$: e tolto da una parte $2a^2x^2$, e dall'altra $2a^2y+2a^3x$, che per l'equazione fuppofta fono uguali; nafcerà $x^4-2ax^3-a^2x^2=a^2y^2-2a^3y-2a^3x$: e fatta la foftituzione nella propofta già moltiplicata per x, e la divifione per aa; farà $yy-2ay-ax=o$. Sia (*Fig.*45. *Tav.*5.) $AB=a$ una linea data divifa in due parti uguali in F, da cui fi cali la normale $FG=\frac{a}{4}$: col vertice G, e col parametro $=a$ fi defcriva la parabola, che pafferà per i punti A, B, e le rette AL, LI faranno le coordinate x, y dell'equazione $xx-ax=ay$. Alla retta AB fi inalzi la normale $AH=AB=a$, e la parallela $HK=a$; il punto K caderà fuori della defcritta parabola: vertice K, affe KH, parametro $=a$ fi defcriva la fteffa parabola, che pafferà per lo punto A, e le rette AL, LI faranno le coordinate x, y dell' equazione $yy-2ay-ax=o$. Abbiamo tre punti di fezione I, $2I$, $3I$, e perciò tre radici, AL, $A2L$, $A3L$: la prima pofitiva maggior d' a: la feconda negativa, e alquanto minore di a: la terza pofitiva minore di a; tutte per altro fono maggiori di $\frac{a}{2}$. Della fezione del punto A non parlo, perchè dà la radice introdotta $x=o$. (32).

IX.

IX. Ricerchiamo ora diligentemente a che servano le tre radici reali. Dall' analisi si sà, che la prima maggior di a ci determina il triangolo ACB (*Fig.* 44. *Tav.* 5.), in cui l'angolo ACB stà all'angolo CAB :: 1 : 3. A scoprire il triangolo determinato dalla radice negativa alquanto minore di a, sia con questa radice costruito il triangolo isoscele ACB (*Fig.* 46. *Tav.* 5.), e si tiri BE, che incontri AC prodotta in E talmente, che sia $BE = AB$; sarà l'angolo $ACB = ABE$: poi si faccia l'angolo $EBD = BCE$, in maniera che la BD incontri in D la CA prolongata dalla parte di A; sarà $AD = AB$, il che così brevemente dimostro. Essendo i triangoli ABE, ACB simili, sarà $AE = \frac{aa}{x}$, ritenute le denominazioni $AB = a$, $BC = AC = x$; onde sarà $CE = \frac{aa - xx}{x}$: e per la similitudine dei triangoli CEB, BED, sarà $DB = \frac{ax^2}{aa - xx}$, che dovrà essere uguale ad $a + x$ in virtù dell' equazione del num. 7. da cui è stata determinata la x: (si noti, che in questo caso la x è negativa, e perciò nel secondo membro di questa equazione in vece di $a - x$, si dee scrivere $a + x$). Dunque per i medesimi triangoli simili CEB, BED, sarà $DE = \frac{aa + ax}{x}$, da cui sottratta $AE = \frac{aa}{x}$, resta $DA = a = AB$; quindi l'angolo $ADB = ABD$, e perciò l'angolo $CAB = 2D$. Inoltre all'angolo CAB essendo uguale l'angolo E, e all' altro D l'angolo CBE; sarà l'angolo ACB, perche eguale ad $E + CBE$, $= 3D$; e per conseguenza sarà l'angolo $ACB : CAB$ :: 3 : 2. Serve adunque la presente radice a co-

costruire un triangolo isoscele, in cui l'angolo al vertice stia all'angolo alla base come 3 : 2. Se si fosse proposto questo problema, si sarebbe ottenuta la stessa equazione.

X. Veniamo alla terza radice positiva, ma minore di a. Sopra AB (*Fig.*47. *Tav.*5.) formato il triangolo isoscele ACB, si conduca $BE = AB$, onde sia il triangolo ABE simile al triangolo ACB, e si tiri BD in maniera, che il triangolo BED sia simile al triangolo CEB; AD dovrà essere uguale ad AB, il che si dimostra come sopra. Ciò posto, l'angolo $ACB = ABE = ABC + CBE = CAB + BDE = 2\,CAB + ABD = 2\,CAB + ADB$; dunque sarà l'angolo $CBD = 2\,CAB$, ed $ADB = ABD = 3\,CAB$; e per conseguenza $ACB = 5\,CAB$. Questa radice adunque serve a costruire un triangolo isoscele, in cui l'angolo al vertice sia quintuplo dell'angolo alla base. Ciascuno di questi triangoli inscrivendosi in un cerchio, condurrà a dividere la periferia del medesimo in sette parti uguali, come si potrà comprendere per picciola riflessione che facciasi.

XI. Problema quarto. Data la parabola ADE, (*Fig.*48. *Tav.*5.) il di cui asse sia AG, il parametro $AI = a$, e la tangente nel vertice A sia AB, in cui abbiasi il punto B; tirare una linea BDE in maniera, che calate le ordinate DF, EG dai punti di sezione D, E della linea BE colla parabola, sia $FG = a$. Questo problema, quantunque non difficile a sciogliersi, si propone per indicare come ci dobbiamo regolare, quando nel problema si includono linee dipendenti da due punti di sezione; imperciocchè se si prenda per incognita una delle due AF, DF appartenenti al solo punto di sezione D, il problema ascenderà ad un grado doppio di quello che in realtà sia; per la qual cosa conviene prendere per incognita una quantità, che sia co-

comune ai due punti di sezione D, ed E. Tale è, prodotta BDE in H, l' angolo BHA, e le linee da questo dipendenti; la tangente dunque dell' angolo BHA sia l' incognita, che chiamo $= t$, e pongo il seno tutto $= a$, $AB = b$, $AF = x$, e perciò $DF = \sqrt{ax}$, per la proprietà della parabola.

XII. Abbiamo $t : a :: b : AH = \frac{ab}{t}$; dunque $HF = \frac{ab}{t} + x$: ma $a : t :: HF : DF$, cioè :: $\frac{ab}{t} + x : \sqrt{ax}$; sicchè $ab + tx = a\sqrt{ax}$: e quadrando, $a^2b^2 + 2abtx + t^2x^2 = a^3x$, cioè $x^2 + \frac{2abx}{t} - \frac{a^3x}{t^2} = -\frac{a^2b^2}{t^2}$. Per trovare i due valori della x così dispongo la formola $\overline{x + \frac{ab}{t} - \frac{a^3}{2t^2}}^2 = \frac{a^2b^2}{t^2} - \frac{a^4b}{t^3} + \frac{a^6}{4t^4} - \frac{a^2b^2}{t^2} = \frac{a^6}{4t^4} - \frac{a^4b}{t^3}$; dunque $x = \frac{a^3}{2t^2} - \frac{ab}{t} \pm \frac{a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4t^2} - \frac{a^2b}{t}}$. I due valori della x danno le due ascisse AF, AG; onde la differenza $\frac{2a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4t^2} - \frac{a^2b}{t}}$ darà l' intercetta FG, che esser dee $= a$; adunque abbiamo l' equazione $\frac{2a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4t^2} - \frac{a^2b}{t}} = a$, cioè $t^4 + 4a^2bt - a^4 = 0$.

XIII. Per costruire questa equazione faccio $tt = ax$, che è la parabola data se si prendano le x nell' asse, e le di lei ordinate si chiamino t. Fatta la sostituzione, nascerà $a^2x^2 + 4a^2bt - a^4 = 0$, ovvero $x^2 + 4bt$

$- aa$

LIBRO TERZO

Delle Equazioni determinate, che il quarto grado, e delle Linee, che il secondo sorpassano.

CAPO PRIMO.

Alcune Proprietà universali delle Equazioni.

I. CHe cosa sia *equazione* si è esposto nel Capo IV. del Libro I., dove si è ancor notato ciocchè appartiene alle equazioni determinate, che non superano il quarto grado; delle quali abbiamo veduto ottenersi compiuta, e generale soluzione: cosa, che và altrimenti nelle equazioni di grado superiore al quarto, giacchè nella risoluzione di queste manca la desiderata semplicità, ed ampiezza, benchè non siasi perdonato a fatica. Nel presente libro esporremo, per quanto la brevità che ci siamo proposti comporta, le cose che stimiamo più necessarie per la migliore istruzione dei Giovani. Incominciamo da alcune proprietà universali delle equazioni, che serviranno di fondamento alle teorie che saremo per dare.

II. Acciocchè si proceda con metodo, chiamo radice d' una equazione quella quantità, la quale collocata nell' equazione stessa in vece dell' incognita fa che tutti i suoi termini si distruggano: e per risoluzione dell' equazione non intendo altro, che ritrovare

vare questa radice: così la quantità a è una radice dell' equazione $x^3 + bx^2 + c^2 x - ac^2 = o$, per-
$\qquad\qquad - ax^2 - abx$
chè messa in vece di x da $a^3 + ba^2 + c^2 a - ac^2 = o$,
$\qquad\qquad - a^3 - ba^2$
cioè $o = o$.

III. Prendiamo ora l' equazione canonica $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + P = o$, e φ sia una delle sue radici, per cui la quantità $\varphi^m + A\varphi^{m-1} + B\varphi^{m-2} \ldots + P$, distruggendosi tutti i termini, sia $= o$. Se divideremo $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + P$ per $x - \varphi$, si giungerà ad un residuo mancante della lettera x, che chiamo R, e Q sia il quoto di detta divisione. Comecchè, per la natura della divisione, il divisore nel quoziente insieme col residuo dee dare il dividendo, sarà $(x - \varphi) . Q + R = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + P$: ma $x^m + Ax^{m-1}$ &c., nella supposizione di $x = \varphi$ diventa zero; dunque ancor diventerà zero $(x - \varphi) . Q + R$, e si avrà $(x - \varphi) . Q + R = o$, e perciò $R = o$. Adunque se φ sarà una radice dell' equazione $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + P = o$, $x - \varphi$ dividerà esattamente l' equazione medesima; e però avremo $(x - \varphi) . (x^{m-1} + A' x^{m-2} + B' x^{m-3} \ldots + P') = o$, nella quale $x^{m-1} + A' x^{m-2}$ &c. è il quoziente, che proviene dalla divisione di $x^m + Ax^{m-1} +$ &c. per $x - \varphi$ (avverto, che il segno apposto ai coefficienti A', B' &c. altro non fà, che distinguergli dai coefficienti A, B, &c., lo che basti una volta avere avvisato). Riflettasi ora, che $x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots + P = o$ diverrebbe zero se l' altro fattore $x^{m-1} + A' x^{m-2}$ &c. fosse zero. Sia λ una quantità, la quale posta in vece di x, faccia che tutti i termini del predetto fattore si distruggano: si proverà come sopra, che $x - \lambda$ è un divisore esatto della quantità $x^{m-1} + A' x^{m-2} + B' x^{m-3} \ldots\ldots + P'$, e per conseguenza l' equazion pro-

proposta non è punto diversa da quest' altra $(x-\varphi).(x-\lambda).(x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}\ldots+P'')=0$, ancor quì $x^{m-2}+A''x^{m-3}$ &c. rappresentando il quoziente, che nasce dalla divisione di $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}$ &c. per $x-\lambda$. Col medesimo raziocinio si potrà dimostrare, che sarà $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots P=(x-\varphi).(x-\lambda).(x-\pi).(x-\mu)$ &c., posto che φ, λ, π, μ &c. sieno i valori di x dell' equazione $x^m+Ax^{m-1}\ldots\ldots+P=0$.

IV. Fino ad ora si è supposto, che siavi sempre una quantità, la quale riduca a zero l' espressione $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+$ &c., e così pure le altre $x^{m-1}+A'x^{m-2}+B'x^{m-3}$ &c., $x^{m-2}+A''x^{m-3}+B''x^{m-4}$ &c. da quella dedotte mediante la divisione. Questa supposizione viene giustificata dalle soluzioni delle equazioni date nei libri precedenti, e si potrebbe giustificare ancora con tutta l' universalità mediante una solida dimostrazione, se non temessimo che mancasse il tempo ad altre cose, che debbono dirsi. Si avverta sol tanto, che non havvi bisogno che una tale quantità sia reale, potendo essere benissimo del genere delle immaginarie.

V. Dalle cose quì sopra dette ne inferiamo, che qualsivoglia equazione algebraica può sempre figurarsi come un prodotto di tanti fattori del primo grado, o reali, o immaginarii, quante sono le unità contenute nell' esponente del grado di essa: e siccome ogn' uno di questi fattori posto uguale a zero la fà verificare, così tante saranno le sue radici, quante saranno le unità del sopraddetto esponente. Se nascesse il dubbio che fossero più, potrà dileguarlo la seguente dimostrazione. Supponiamo adunque, che $(x-\varphi).(x-\lambda).(x-\pi)$ &c. sia eguale ad $x^r+Ax^{r-1}+Bx^{r-2}\ldots+P=0$, ed il numero dei fattori $x-\varphi$,

 $x-\lambda$,

$x - \lambda$, &c. sia $= r$. Fingasi ora che K posto in vece di x faccia sparire tutti i termini dell'equazione; sarà $(K - \phi).(K - \lambda).(K - \pi)$ &c. $= o$: ma ciò non può succedere se non sia uno di questi fattori eguale a zero; dunque sarà K eguale ad uno dei valori ϕ, λ, π, μ &c.; dunque è impossibile ritrovare un valore K diverso da ϕ, λ, π &c., che posto in vece di x faccia verificare l'equazione $(x - \phi.(x - \lambda).$ &c. $= o$, cioè che faccia verificare l'equazione $x^r + A x^{r-1} + B x^{r-2} \ldots + P = o$, la quale non differisce che nella forma dalla precedente. Il problema: date le radici, ritrovare l'equazione a cui appartengono; riceve dalle cose dette una facile soluzione. Le radici date sieno a, b, c, d, e: si formino i binomii $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, $x - e$, e si moltiplichino tutti insieme: e posto il prodotto eguale a zero, si avrà la ricercata equazione, la quale sarà $x^5 - (a + b + c + d + e).x^4 + (ab + ac + ad + ae + bc + bd + + be + cd + ce + de).x^3 - (abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde).x^2 + (abcd + abce + abde + acde + bcde).x - abcde = o$.

VI. Il primo termine adunque delle equazioni altro non è, che l'incognita elevata alla potestà dell' indice uguale al numero delle radici. Il secondo termine contiene l' incognita innalzata alla potestà prossimamente minore, ed ha per coefficiente la somma di tutti i secondi termini dei fattori, ovvero delle radici col segno contrario. Nel terzo termine la potestà della x si diminuisce ancor d' una unità, ed il suo coefficiente è la somma dei prodotti delle radici a due a due. La potestà dell' incognita nel quarto termine si diminuisce gradatamente, ed il coefficiente è la somma dei prodotti delle radici a tre a tre col segno contrario; e co-e così in seguito fino all' ultimo termine, che è il prodotto di tutte le radici prese col segno contrario. Queste proprietà son feconde, e danno gran lume.

VII. Ricaviamo primamente, che se dopo avere ordinata l' equazione per la x, manchi qualche termine, egli sia indicio certissimo, che o la somma delle radici, o degli ambi, o de' terni &c. sia $= o$; cioè se il secondo, la somma delle radici: se il terzo la somma degli ambi &c. Il Cartesio ne deduce ancora, che altrettante sono le radici positive, quante sono le mutazioni dei segni + in —, o — in +, e altrettante le negative, quante sono le successioni dei segni nei termini contigui: così nell' equazione $x^2 + 3x - 4 = o$, perchè havvi una successione dei segni, ed una mutazione, vi sarà una radice positiva, ed una negativa; ed in fatti abbiamo $x = -4$, $x = 1$. La regola va benissimo se tutte le radici sieno reali, ma è fallace se ve ne siano d'immaginarie: così nell' equazione $x^2 - 2x + 7 = o$, che ha radici immaginarie, secondo la regola vi saranno due radici positive: la moltiplico per $x + 3$, ed avrò $x^3 + x^2 + x + 21 = o$, in cui secondo la regola tutte le radici dovrebbero essere negative. Queste due cose non possono stare insieme (1).

VIII. Promovendo le considerazioni sopra l' equazione del num. 5., ne inferiamo una regola per innalzare qualunque binomio $x - a$ alla potestà m. Per tal fine supponiamo, che tutte le radici sieno uguali, per esempio $= a$, onde sieno tutti i fattori $x - a = o$, e il numero loro $= m$. E' facile ricavare, che il primo termine sia x^m: che il secondo sia x^{m-1} moltiplicato per $-ma$: che il terzo sia x^{m-2} moltiplicato per a^2 preso tante volte, quanti sono gl' ambi ab, ac, ad &c., cioè tutti gli ambi di m: che il quarto sia x^{m-3} moltiplicato per a^3 preso tante volte, quanti sono i ter-

terni abc, &c., cioè tutti i terni di m: e così successivamente.

IX. La questione è dunque ridotta a sapere quanti ambi, terni, quaterni &c. vengano fatti da un numero m di lettere. Imperocchè supponendo che questi numeri sieno trovati, e che si esprimano per A, B, C, D &c., avremo $x^m - max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} - Ba^3x^{m-3} + Ca^4x^{m-4} - Da^5x^{m-5} \ldots \pm a^m$, che sarà il valore cercato di $\overline{x-a}^m$. Il segno superiore dell'ultimo termine vale se m sia pari, l'inferiore se dispari.

X. Per trovare primieramente quanti ambi ab, ac, bc un numero m di lettere a, b, c &c. può dare combinandole in tutte le maniere possibili, osserviamo in primo luogo, che quando si saranno formati tutti questi ambi, le lettere scritte per componerli saranno il doppio de' medesimi osserviamo in seguito, che ciascuna lettera a, b, c &c. dee essere ripetuta il medesimo numero di volte, e che ciascuna essendo moltiplicata con tutte l'altre, non per se stessa, sarà ripetuta $m-1$ di volte; quindi il numero delle lettere da scrivere formando tutti questi prodotti dee essere $m \times \overline{m-1}$; dunque il numero di tutti i medesimi prodotti dee essere $\frac{m \times \overline{m-1}}{2}$, e questo è il valore di A.

XI. Quanto al coefficiente B del quarto termine, osserviamo, che fatti tutti i terni del numero m di lettere, sarà il numero di quelli la terza parte del numero delle lettere, che contengono: e che ciascuna di queste sarà ripetuta lo stesso numero di volte: è che finalmente questo numero è uguale al numero degli ambi dell' altre lettere; perchè a, per esempio, deesi unire cogli ambi bc, cd, bd, &c. per formare i teri terni: ma gli ambi del numero $m-1$ sono

$\frac{\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2}$ (num. 10); dunque $\frac{\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2}$ è il numero

delle volte, che ciascheduna delle lettere a, b, c &c. sarà ripetuta in tutti i prodotti di cui si tratta: e comecchè il numero di queste lettere è m; così

$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2}$ sarà per conseguenza il numero di

tutte le lettere scritte; dunque il numero cercato de' prodotti a tre lettere, abc, abd &c. sarà

$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}$, e questo è il valore di B, o del

coefficiente del quarto termine.

XII. Il coefficiente C del quinto termine, cioè a dire del numero dei prodotti di quattro lettere, che dee dare il numero m di lettere, si troverà

$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}$, dovendo tal numero es-

sere il quarto di tutte le lettere scritte in questi prodotti, e ciascuna di queste lettere dovendo essere ripetuta il medesimo numero di volte, cioè con tutti li prodotti di tre lettere, cha da il numero delle lettere $m-1$. (2).

XIII. Formando nella stessa maniera tutti gli altri coefficienti, l' andamento dei quali è patente, e sostituendo nelle formule in luogo di A, B, C, D, E, &c. i valori ritrovati, si avrà in fine $x^m - max^{m-1} +$

$m\times\frac{\overline{m-1}}{2}\,.\,a^2x^{m-2} - \frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}\,.\,a^3x^{m-3}$

+

$$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} \cdot a^4 x^{m-4}$$

$$- \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \cdot a^5 x^{m-5} \ldots \pm a^m$$

per la potestà m di $x - a$. Se il binomio fosse $x + a$, altro non si avrebbe da fare, che mutare i segni a quei termini, in cui a trovasi a potestà dispari (3).

XIV. Allorchè si vorrà adoperare la formola precedente per alzare un binomio qualunque a una potestà data, niente sarà più facile. Non si avrà che a sostituire nella formola di $\overline{x-a}^m$ in luogo di x il primo termine del binomio dato, in luogo di $-a$ il secondo, e in luogo di m l' esponente della potestà alla quale si vuol alzare il binomio proposto. Propongasi per esempio di alzare $3ec - 2bd$ alla quinta potestà: si farà $3ec = x$, $2bd = a$, $5 = m$, e si avrà subito

$$x^m = \overline{3ec}^5 = 243 e^5 c^5,$$

$$- m a x^{m-1} = -5 \times 2bd \times \overline{3ec}^4 = -810 b d e^4 c^4,$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} \cdot a^2 x^{m-2} = 10 \times 4 b^2 d^2 \times \overline{3ec}^3 =$$
$$1080 b^2 d^2 e^3 c^3,$$

$$- \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} \cdot a^3 x^{m-3} = -10 \times \overline{2bd}^3 \times \overline{3ec}^2 =$$
$$-720 b^3 d^3 e^2 c^2,$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} \cdot a^4 x^{m-4} =$$
$$5 \times \overline{2bd}^4 \times 3ec = 240 b^4 d^4 e c,$$

—

$$-\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}.\ a^5x^{m-5}=$$

$$-1\times\overline{2bd}^5\times\overline{3ec}^0=-32\,b^5d^5.$$

Avendo i termini ſeguenti per fattore $m-5=0$, ſaranno tutti $=0$; onde raccolti in una ſomma i precedenti, ſi otterrà la poteſtà ricercata.

XV. Volendo alzare a una poteſtà data una quantità compoſta di più di due termini, potrà farſi facilmente collo ſteſſo metodo. Se ſi tratti, per eſempio, di un trinomio: nominando x il primo termine del trinomio, e $-a$ la ſomma dei due altri; la difficoltà della elevazione del trinomio ſarà ridotta a quella del binomio, poichè ciaſcun termine $m\,a\,x^{m-1}$, $\frac{m\times\overline{m-1}}{2}$ a^2x^{m-2} &c. non avrà quantità da alzarſi più compoſte, che quelle dei binomj. E quando ſi avrà un polinomio più compoſto ancora, ſi ridurrà ſempre la difficoltà all' alzamento di un polinomio più ſemplice.

XVI. Comecchè $\sqrt[n]{\overline{x+a}^r}=\overline{x+a}^{\frac{r}{n}}$, ed $\frac{1}{\overline{x+a}^r}=\overline{x+a}^{-r}$, l' induzione ci inſegna, che la noſtra formola canonica ſerva ad eſtrarre le radici, ed a convertire le frazioni in ſerie: nel primo caſo in vece di m ſi metta $\frac{r}{n}$, e nel ſecondo $-r$, e ſi operi come ſopra. Oltre l' induzione, nelle noſtre Inſtituzioni rechiamo la dimoſtrazione del dotto Sig. Clerò, che non è componibile colla brevità del preſente Compendio (4). E queſta è la famoſa formola Neutoniana, con cui facilmente si ottengono le potestà, e si risolvono in serie le radici, e le frazioni.

XVII. Finisco il presente capitolo con esporre una proprietà interessante dei coefficienti d' una equazione, la quale consiste in questo, che col mezzo dei coefficienti d' una equazione si può esprimere in termini cogniti la somma di qualunque potestà delle radici, benchè queste sieno incognite: eccone la pratica. Sia l' equazione $x^m - A x^{m-1} + B x^{m-2} - C x^{m-3} + D x^{m-4} \ldots + P$, le cui radici sieno ϕ, λ, π, μ &c., la somma delle quali facciasi $= M\,1$: inoltre suppongasi $M\,2 = \phi^2 + \lambda^2 + \pi^2 + \mu^2$ &c., cioè eguale alla somma dei quadrati delle radici,
$M\,3 = \phi^3 + \lambda^3 + \pi^3 + \mu^3$ &c.; e generalmente
$M\,r = \phi^r + \lambda^r + \pi^r + \mu^r$ &c., cioè eguale alla somma della potestà r delle radici; io dico che vagliono le seguenti equazioni

$$M\,1 = A,$$
$$M\,2 = A M\,1 - 2B,$$
$$M\,3 = A M\,2 - B M\,1 + 3C,$$
$$M\,4 = A M\,3 - B M\,2 + C M\,1 - 4D,$$
$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$M\,r = A M.\overline{r-1} - B M.\overline{r-2} + C M.\overline{r-3} \ldots \pm r M$, dalle quali, come l' oculare inspezione dimostra, si hanno i valori $M\,1$, $M\,2$, $M\,3$ &c. dati per i soli coefficienti A, B, C &c.. Quando mancano i termini nella proposta equazione si suppongano i coefficienti eguali a zero. Benchè facile cosa sia comprendere la legge con cui si formano le predette equazioni, non è per altro egualmente facile giustificarle con dimostraziozione, la quale ſuol richiedere un calcolo aſſai proliſſo. Le medeſime però ſi proveranno ſpeditamente a ſuo luogo coll' ajuto del calcolo differenziale.

CAPO II.

Trasformazione delle Equazioni.

I. TRasformare una equazione, ſiccome abbiamo detto nel Libro 2. Cap. 7., altro non è, che ritrovare una ſeconda equazione mediante l' introduzione di una nuova incognita, le cui radici abbiano una certa relazione colle radici della propoſta. Quindi ſi vede, che per eſeguire una qualunque trasformazione, baſta eſprimere con una equazione tra l' incognita della propoſta, e quella della trasformata, la relazione, la quale ſi vuole che corra fra le radici di queſta e di quella, ed in appreſſo eliminare la prima incognita coi metodi dati nel Libro 1. Capo 4.

II. Principiamo dal trasformare una equazione in un'altra, in cui ſieno negative le radici, che nella propoſta ſono poſitive, ed al roveſcio. Prendaſi l' equazione generaliſſima $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3}$ &c. $= 0$, e facciaſi $x = -y$. Eſeguita la ſoſtituzione di queſto valor di x nella propoſta equazione, ci accorgeremo, che i termini in cui ſono le poteſtà pari della x reſteranno collo ſteſſo ſegno, e i termini delle poteſtà diſpari muteranno il ſegno; dal che ſi ricava l' operazione breviſſima di cambiare da poſitive in negative, e al roveſcio le radici di una equazione, col ſolo cangiare il ſegno ai termini delle porestà dispari : così se nell' equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = o$ si cangieranno i segni ai termini delle potestà dispari, onde sia $-x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, ossia $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = o$; avrà questa equazione le radici come si voleva. Ed in fatti le radici della proposta sono $3, 1, -2$, e le radici della trasformata sono $-3, -1, +2$.

III. Vogliasi in secondo luogo trasformare una data equazione in un' altra, la quale abbia le sue radici maggiori, o minori per una certa quantità delle radici della proposta. Sia x l' incognita dell' equazione proposta, y quella della trasformata, ed n la quantità, della quale si vogliano aumentate, o diminuite le radici della prima equazione. Volendosi y maggiore, o minore di x della quantità n, dovrà essere $y = x \pm n$ (il segno $+$ serve per l'accrescimento delle radici, ed il segno $-$ per la diminuzione). Essendo $y = x \pm n$, sarà $x = y \mp n$: e sostituito $y - n$ in luogo di x nel caso di accrescere le radici, ed $y + n$ nel caso della loro diminuzione, si otterrà la trasformazione bramata.

IV. Si voglia trasformata l' equazione $x^4 - 5x^2 + 4 = o$ in un'altra, le cui radici sieno eccedute dell' unità dalle radici della proposta. Dovrà dunque essere $x = y + 1$; onde avremo

$$\begin{array}{rcl} x^4 & = & y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\ -5x^2 & = & \qquad\quad -5y^2 - 10y - 5 \\ 4 & = & \qquad\qquad\qquad\quad + 4 : \end{array}$$

e sommando, sarà $y^4 + 4y^3 + y^2 - 6y = o$. Essendo le radici di questa equazione $o, 1, -2, -3$, e quelle della proposta $1, 2, -1, -2$, ognun vede, che queste superano quelle per l' unità, come si voleva. Si osservi ciò che accidentalmente è accaduto in questo esem-

esempio, cioè, che la trasformata è divisibile per y, e perciò abbassabile ad un grado minore della proposta; dal che si ricava, che questa trasformazione alle volte può servire per deprimere l'equazioni ad un grado inferiore. Se la trasformata debba avere le radici maggiori per l'unità delle radici dell'equazione in x, si ponga $x = y - 1$: e fatte le sostituzioni, si troverà $y^4 - 4y^3 + y^2 + 6y = o$, le cui radici $-1, o, 2, 3$ superano per l'unità le radici dell'equazione in x, che sono $-2, -1, 1, 2$. Che poi i predetti numeri sieno le radici delle rispettive equazioni, si può esperimentare col metterli nell'equazione stessa in luogo dell'incognita, osservando che tutti i termini si elidono.

V. Per ottenere con maggior speditezza le trasformazioni sopraccennate, si assuma l'equazione generale $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \&c. = o$, in cui si debba sostituire $n + y$ ad x, essendo n una quantità negativa quando si tratti di accrescere le radici, ed una quantità positiva quando queste si vogliano diminuire. Per la formola Newtoniana esposta nel Capo precedente num. 14. sarà

$$Ax^m = A.(n+y)^m = An^m + mAn^{m-1}y +$$

$$\frac{m.(m-1)}{2}.An^{m-2}y^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}.An^{m-3}y^3 +$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4}.An^{m-4}y^4 \; \&c.$$

$$Bx^{m-1} = B.(n+y)^{m-1} = Bn^{m-1} + (m-1).Bn^{m-2}y +$$

$$\frac{(m-1).(m-2)}{2}.Bn^{m-3}y^2 +$$

$$\frac{(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3}.Bn^{m-4}y^3 +$$

$$\frac{(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{2\cdot3\cdot4}.B\,n^{m-5}y^4\ \&c.$$

$$C\,x^{m-2} = C.(n+y)^{m-2} = C\,n^{m-2} + (m-2).C\,n^{m-3}y +$$
$$\frac{(m-2).(m-3)}{2}.C\,n^{m-4}y^2 +$$
$$\frac{(m-2).(m-3).(m-4)}{2\cdot3}.C\,n^{m-5}y^3 +$$
$$\frac{(m-2).(m-3).(m-4).(m-5)}{2\cdot3\cdot4}.C\,n^{m-6}y^4 + \&c.$$

$$D\,x^{m-3} = D.(n+y)^{m-3} = D\,n^{m-3} + (m-3).D\,n^{m-4}y +$$
$$\frac{(m-3).(m-4)}{2}.D\,n^{m-5}y^2 +$$
$$\frac{(m-3).(m-4).(m-5)}{2\cdot3}.D\,n^{m-6}y^3 +$$
$$\frac{(m-3).(m-4).(m-5).(m-6)}{2\cdot3\cdot4}.D\,n^{m-7}y^4 + \&c.$$

Dunque cominciando dal termine che non contiene l'y, cioè dall' ultimo dell' equazione, ed unendo quei, che hanno l'y alla ſteſſa poteſtà, ſarà

$$A\,n^m + B\,n^{m-1} + C\,n^{m-2} + D\,n^{m-3}\ \&c.$$

$$+\Big(m\,A\,n^{m-1} + (m-1).B\,n^{m-2} + (m-2).C\,n^{m-3} +$$
$$(m-3).D\,n^{m-4} + \&c.\Big).y$$

$$+\Big(\frac{m.(m-1)}{2}.A\,n^{m-2} + \frac{(m-1).(m-2)}{2}.B\,n^{m-3} +$$
$$\frac{(m-2).(m-3)}{2}.C\,n^{m-4} + \frac{(m-3).(m-4)}{2}.$$
$$D\,n^{m-4} + \&c.\Big).y^2$$

+

$$+\left(\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}.A\,n^{m-3}+\right.$$

$$\frac{(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3}.B\,n^{m-4}+$$

$$\frac{(m-2).(m-3).(m-4)}{2.3}.C\,n^{m-5}+$$

$$\left.\frac{(m-3).(m-4).(m-5)}{2.3}.D\,n^{m-6}+\&c.\right).y^3$$

$$+\left(\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3.4}.A\,n^{m-4}+\right.$$

$$\frac{(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{2.3.4}.B\,n^{m-5}+$$

$$\frac{(m-2).(m-3).(m-4).(m-5)}{2.3.4}.C\,n^{m-6}+$$

$$\left.\frac{(m-3).(m-4).(m-5).(m-6)}{2.3.4}.Dn^{m-7}+\&c.\right).y^4+\&c.=o.$$

VI. Raccogliamo le proprietà dei coefficienti dell equazione in y. In primo luogo si osserva, che l' ultimo termine dell' equazione in y non è altro, che l' equazione proposta, in cui sia stato sostituito n in vece di x. Secondo, che il coefficiente del penultimo termine dell' equazione in y si forma dal suo ultimo termine, moltiplicando ciascheduno membro di questo pel suo esponente, e dividendolo per n. Terzo, che il coefficiente dell' antipenultimo termine si deduce dal coefficiente del penultimo, moltiplicando ciascun termine di questo coefficiente per la metà del suo esponente, e dividendolo per n. Quarto, che il coefficiente del termine che precede l'antipenultimo si può ri-

ricavare dal coefficiente di questo, moltiplicando ciascun de' suoi membri per la terza parte del suo esponente, e dividendolo ancora per n; e così in appresso. Da tali proprietà dei coefficienti dell'equazione in y nasce un metodo generale, ed egualmente facile, per conseguire le trasformazioni di cui trattasi.

VII. Sia l' equazione $x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + D = o$ da trasformarsi in un'altra, le di cui radici y sieno minori per la quantità n di quelle della propolta. Comincio dal mutare x in n, ed ottengo D': moltiplico ciascun termine di D per lo suo esponente, lo divido per n, ed ottengo C': moltiplico ciascun termine di C' per la metà del suo esponente, lo divido per n, ed ho B': moltiplico ciascun termine di B' per il terzo del suo esponente, lo divido per n, e conseguisco A': moltiplico finalmente ciascun termine di A' per la quarta parte del suo esponente, lo divido per n, e ne nasce 1.

$$\begin{array}{lllll}
n^4 + & A n^3 + & B n^2 + C n + D & = D' \\
4 n^3 + 3 & A n^2 + 2 & B n + C & = C' \\
6 n^2 + 3 & A n + & B & = B' \\
4 n + & A & & = A' \\
1 & & & = 1.
\end{array}$$

Si moltiplichi adesso C' per y, B' per y^2, A' per y^3, 1 per y^4, ed otterremo l' equazione trasformata

$$\begin{array}{llllll}
y^4 + & A' y^3 + & B' y^2 + & C' y + & D' & = o, \text{ cioè} \\
y^4 + & 4 n . y^3 + & 6 aa . y^2 + & 4 n^3 . y + & n^4 & \\
+ & A & + 3 An & + 3 An^2 & + A n^3 & = o. \\
& & + B & + 2 Bn & + B n^2 & \\
& & & + C & + C n & \\
& & & & + D &
\end{array}$$

VIII.

VIII. La trasformazione anzidetta è quella stessa, di cui ci siamo serviti nel Capo 7. del Libro 2. per togliere il secondo termine da una qualunque equazione. Potrebbe anche adoperarsi per togliere il terzo termine: ma siccome nel coefficiente del terzo termine della trasformata, n ascende a due dimensioni; così per ottenere l' intento sarebbe necessario risolvere un equazione del secondo grado. Similmente per togliere il quarto termine sarebbe d' uopo risolvere un' equazione del terzo grado: una del quarto per togliere il quinto termine, e così via discorrendo; in maniera che l' eliminazione dell' ultimo termine non si potrebbe ottenere senza risolvere un' equazione affatto simile alla proposta; tutte le quali cose furono da noi notate nel Capo citato (5).

IX. Si trasforma in terzo luogo una equazione, quando si cangia in un' altra, le cui radici sieno a quelle della proposta in ragion data. Acciocchè si comprenda questa trasformazione, sia l' equazione generale $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3}$ &c. $= o$: si faccia $x : y :: p : q$, onde sia $x = \frac{py}{q}$: sostituendo questo valore di x nell' equazion generale, sarà

$$\frac{p^m y^m}{q^m} + \frac{A\overline{py}^{m-1}}{q^{m-1}} + \frac{B\overline{py}^{m-2}}{q^{m-2}} \text{ \&c. } = o$$

: e moltiplicando l' equazione per $\frac{q^m}{p^m}$, avremo

$$y^m + \frac{Aqy^{m-1}}{p} + \frac{Bq^2y^{m-2}}{p^2} + \frac{Cq^3y^{m-3}}{p^3} \text{ \&c. } = o,$$

il che si sarebbe ottenuto immediatamente, se si fosse cangiata nell' equazion proposta la x in y, e se si fosse in seguito moltiplicato ciascun termine di detta equazione per il termine corrispondente della progressione geometrica 1, $\frac{q}{p}$, $\frac{q^2}{p^2}$, $\frac{q^3}{p^3}$ &c., cioè il primo di quella pel primo di questa, il secondo pel secondo, &c. Egli è facile a comprendersi, che le radici dell' equazione in y, saranno a quelle dell' equazion in x nella data ragione di $q:p$.

X. La proposta equazione sia $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$, che ha per radici $x = 1$, $x = -2$, $x = -3$, e si voglia trasformare in un' altra, che abbia le radici doppie delle anzidette radici. Avremo la ragione di $q:p$ eguale alla ragione di $2:1$; quindi sarà $\frac{q}{p} = \frac{2}{1}$, e perciò operando come si è indicato nel numero precedente, si otterrà l' equazione trasformata $y^3 + 8y^2 + 4y - 48 = 0$, le cui radici 2, -4, -6 sono doppie, come ciascun vede, delle radici x. Se l'equazione in x fosse priva di qualche termine, si rimpiazzi col zero.

XI. La sopraccennata trasformazione ci apre la strada di liberare l'equazioni dai coefficienti fratti, senza che il primo termine venga a moltiplicarsi per alcuna quantità, che non sia l' unità; imperciocchè mettendosi sotto l' occhio l' equazione generalissima trasformata come nel num. 9., si osserverà, che il coefficiente del secondo termine è $\frac{Aq}{p}$, quello del terzo è $\frac{Bq^2}{p^2}$ &c.; se dunque sia $A = \frac{r}{s}$, $B = \frac{n}{t}$ &c., dovranno tali coefficienti essere $\frac{rq}{sp}$, $\frac{nq^2}{tp^2}$ &c. Per tanto se

fa-

faremo $p = 1$, $q = st$ &c., cioè eguale al prodotto di tutti i denominatori dei coefficienti; ſarà $\frac{Aq}{p} = rt$, $\frac{Bq^2}{p^2} = nts^2$ &c., cioè ſaranno tutti i coefficienti della traſformata liberi da frazione.

XII. Sia per eſempio l' equazione $x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{6} = 0$. Il prodotto dei denominatori $= q$ ſarà $3 \cdot 7 \cdot 6$: e perciò ſoſtituendo nell' equazione in y, che ſi avrà per lo num. 9., in vece di q queſto valore, ed in vece di p l' unità; otterremo $y^4 + 2 \cdot 7 \cdot 6\, y^3 + 3^3 \cdot 7^2 \cdot 6^3\, y + 3^4 \cdot 7^4 \cdot 6^3 = 0$, la quale è ſenza coefficienti fratti. Eſſendo il denominatore 6 diviſibile per 3, e 2 eſſendo il quoto; in cambio di fare $q = 3 \cdot 7 \cdot 6$, ſi può fare $q = 3 \cdot 7 \cdot 2$, che pure l'equazione in y verrebbe ſenza fratti: cioè ſarebbe

$$y^4 + 2 \cdot 7 \cdot 2\, y^3 + 3^3 \cdot 7^2 \cdot 2^3\, y + 3^3 \cdot 7^4 \cdot 2^3 = 0,$$

cioè $y^4 + 28\, y^3 + 10584\, y + 518616 = 0$.

XIII. Se ſi abbia in animo di traſformare un' equazione in un' altra, le cui radici ſieno reciproche di quelle della propoſta, non ſi avrà che a porre $x = \frac{1}{y}$, e ſoſtituire $\frac{1}{y}$ in vece di x: così, ſoſtituito $\frac{1}{y}$ in vece di x nell' equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, otterremo $\frac{1}{y^3} - \frac{2}{y^2} - \frac{5}{y} + 6 = 0$, cioè

$$y^3 - \frac{5}{6}y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{6} = 0,$$

le cui radici $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ſono reciproche delle radici della propoſta, che ſono $1, -2, 3$.

XIV. Con queſta traſformazione le radici maſſime di un' equazione ſi cambiano in minime, e al roveſcio; di modo che ſe ſupporremo, che le radici dell' equazione in x, diſpoſte ſecondo l'ordine della loro grandezza, ſieno φ, π, λ, μ; quelle dell' equazione in y, diſpoſte pure ſecondo l'ordine della loro grandezza, ſaranno $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\phi}$. E' egli ancora evidente, che colla medeſima traſformazione i primi termini della equazione in x divengano ultimi della traſformata, e per lo contrario gli ultimi, primi; onde ſe avremo un'equazione, la quale ſia mancante del penultimo termine, potremo facilmente conſeguirne un' altra, la quale manchi del ſecondo, col ſolo ſoſtituire $\frac{1}{y}$ in vece di x.

XV. Non poſſo aſtenermi dall' eſporre un' altra maniera utiliſſima di traſformare le equazioni, benchè mi convenga tralaſciarne la dimoſtrazione, la quale non è adattata alla brevità di queſti Elementi; può per altro vederſi appreſſo il Signor Della Grange nelle Memorie dell' Accademia di Berlino all' Anno 1767. Sia adunque l' equazione generaliſſima $x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots = 0$; ed $M1$, $M2$, $M3$ &c. fino ad $M\,\overline{m.m-1}$ diſegnino la ſomma delle poteſtà delle radici di detta equazione fino alla poteſtà $\overline{m.m-1}$, quali ſomme ſieno eſpreſſe per i coefficienti $-A$, B, $-C$ &c., ſiccome inſegnammo al num. 17. del Capo precedente. Indi colla ſeguente formola generale

$$Kn = mM2n - 2nM1.M\,\overline{2n-1} + \frac{2n.\overline{2n-1}}{2}M2.M\,\overline{2n-2} - \frac{2n.\overline{2n-1}.\overline{2n-2}}{2.3}M3.$$

M 2 n

$\overline{M\,2\,n - 3}$ &c. , in cui m è l' esponente dell' equazion proposta , n può essere qualunque numero intiero positivo , si trovino i valori $K\,1$, $K\,2$, $K\,3$ &c. sostituendo successivamente in luogo di n i numeri intieri 1 , 2 , 3 &c. fino al numero $\frac{m\,.\,\overline{m-1}}{2}$ inclusivamente. Si avverta di terminare la serie per ciascun valore di K quando si giunga al termine , in cui qualche valore di M ascenda alla seconda potestà , il quale inoltre si dee dividere per 2 : così per il valore $K\,2$ si troverà

$K\,2 = m\,M\,4 - 4\,M\,1\,M\,3 + \frac{4\,.\,3}{2}\,.\,\frac{(M\,2)^2}{2}$: per $K\,3$ sarà

$$K\,3 = m\,M\,6 - 6\,M\,1\,M\,5 + \frac{6\,.\,5}{2}\,M\,2\,M\,4 -$$

$$\frac{6\,.\,5\,.\,4}{2\,.\,3}\,.\,\frac{(M\,3)^2}{2},$$

i quali valori di K essendo dati per $M\,1$, $M\,2$, &c., saranno dati ancora per i coefficienti , A, B, C &c. Si faccia inoltre

$$a = K\,1,$$

$$b = \frac{a\,K\,1 - K\,2}{2},$$

$$c = \frac{b\,K\,1 - a\,K\,2 + K\,3}{3},$$

$$d = \frac{c\,K\,1 - b\,K\,2 + a\,K\,3 - K\,4}{4}$$

&c. &c. &c.

fin-

finchè ſieno eſauriti i valori di K, onde a, b, c, d &c. ſaranno in numero $\frac{m \cdot \overline{m-1}}{2}$, e ſaranno dati per A, B, C &c. Finalmente poſta $r = \frac{m \cdot \overline{m-1}}{2}$, ſi formi l' equazione $z^r - a z^{r-1} + b z^{r-2} - c z^{r-3} + d z^{r-4}$ &c. $= 0$. Queſta equazione è tale, che qualunque valore di z eguaglia il quadrato di una delle differenze fra due radici dell' equazion propoſta: così, ſe due radici dell' equazione in x ſieno φ, π; ſarà un valore di z, che chiamo z', $= \overline{\varphi - \pi}^2$, e perciò $\sqrt{z'} = \varphi - \pi$. (6).

CAPO III.

Eſponeſi un metodo di ſtabilire il vero grado dell' Equazion determinata, che naſce da un numero di Equazioni indeterminate eguale al numero delle incognite, che eſſe contengono; e ſi applica lo ſteſſo metodo per l' eſpulſione dei radicali dall' Equazioni.

I. NOn ci tratterremo a riferire tutte le varie maniere, le quali ſi ſogliono mettere in opera per tale oggetto, e ſaremo contenti di dar ſol tanto in ſuccinto il metodo aſſai ſemplice del Signor De Bezout, eſpoſto nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze per l' anno 1764. E comecchè queſto metodo generale per l' equazioni di qualunque grado ſi riduce finalmente ad eliminare l' incognite dall' equazioni del primo grado; perciò biſogna richiamare alla memoria quanto su di ciò ſi è detto nel Capo 4. del Libro 1.

Ai

Ai metodi ivi esposti piace quì aggiungere un altro, in cui si fa uso dei coefficienti indeterminati. Sieno primieramente le due equazioni $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$: si moltiplichi la prima equazione per n, la quale così moltiplicata si aggiunga alla seconda, ed avremo $(na + a').x + (nb + b').y = nc + c'$: e posto uguale a zero il coefficiente d' una di queste due incognite, si determinerà la n, per mezzo di cui si farà sparire dall' equazione una incognita. Facciasi per esempio $nb + b' = o$; sarà $n = \frac{-b'}{b}$, il qual valore sostituito nell' equazion precedente, nascerà l' equazione $\left(\frac{-b'a}{b} + a'\right).x = \frac{-b'c}{b} + c'$, in cui vi è una sola incognita. Se si avesse voluto eliminare piuttosto la x, conveniva porre $na + a' = o$, da cui si cavava $n = -\frac{a'}{a}$, e $\left(-\frac{a'b}{a} + b'\right).y = \frac{-a'c}{a} + c'$. Sieno tre equazioni, e tre incognite $ax + by + cz = d$, $a'x + b'y + c'z = d'$, $a''x + b''y + c''z = d''$: moltiplicata la prima per n, e la seconda per n', e sommate tutte tre insieme, si avrà $(an + a'n' + a'').x + (bn + b'n' + b'').y + (cn + c'n' + c'').z = dn + d'n + d''$: e fatta $an + a'n' + a'' = o$, $bn + b'n' + b'' = o$, si determineranno con queste due equazioni i valori di n, n', che sostituiti nell' equazione di sopra, faranno svanire i termini, in cui vi è la x e la y, e rimarrà il termine, in cui esiste la z. Fatto poi $an + a'n' + a'' = o$, $cn + c'n' + c'' = o$, si avrà un' equazione colla sola incognita y; siccome fatto $bn + b'n' + b = o$, $cn + c'n' + c' = o$, si avrà un' equazione colla sola incognita x. Se quattro fossero l' equazioni, e quattro le incognite, si moltiplicheranno tre equazioni per tre coefficienficienti indeterminati n, n', n''; e generalmente se il numero delle equazioni, e delle incognite fosse m, si moltiplicheranno $m-1$ equazioni per altrettanti coefficienti indeterminati, i quali determinati come sopra si è insegnato, si avranno tante equazioni determinate, quante incognite.

II. Sieno ora due equazioni indeterminate di qualunque grado, che contengano due incognite x, ed y, l'ultima delle quali in amendue l'equazioni abbia per esponente massimo la n: cioè sieno due equazioni

I. $A y^n + B y^{n-1} + C y^{n-2} + D y^{n-3}$ &c. $= o$,

II. $A' y^n + B' y^{n-1} + C' y^{n-2} + D' y^{n-3}$ &c. $= o$,

in cui i coefficienti A, B, C, D &c., A', B', C', D', &c. sieno composti di quantità cognite, e della incognita x. La seconda equazione moltiplicata per A, e sottratta dalla prima moltiplicata per A', darà una terza, in cui y sarà elevata alla potestà massima $n-1$: similmente la seconda equazione moltiplicata per $A y + B$, sottratta dalla prima moltiplicata per $A' y + B'$, darà una quarta equazione, in cui $n-1$ sarà l'esponente massimo dell'y: e moltiplicata la seconda equazione per $A y^2 + B y + C$, ed in seguito sottratta dalla prima moltiplicata per $A' y^2 + B' y + C'$, si otterrà un'equazione, in cui il grado massimo della y pure sarà $n-1$. Egli è chiaro, che continuando la medesima operazione finchè i moltiplicatori sieno del grado $n-1$, si ottenga, oltre le due proposte, un numero n di equazioni di questa forma $a y^{n-1} + b y^{n-2}$ &c. $=o$, in ciascuna delle quali saranno potenze diverse dell'y in numero di $n-1$. Ora se si figurino tutte queste potenze come altrettante incognite differenti del primo grado, si avrà un numero n di equazioni del primo grado, ed un numero $n-1$ di incognite; onde

coi

coi metodi indicati nel num. 1. si potrà ottenere una equazione determinata, in cui manchi l'y, e vi sia la sola incognita x.

III. Sia da eliminarsi l'incognita y dalle due equazioni, che seguono

$$\text{I.}\quad Ay^2 + By + C = 0.$$
$$\text{II.}\quad A'y^2 + B'y + C' = 0.$$
$$AA'y^2 + A'By + A'C = 0.$$
$$AA'y^2 + AB'y + AC' = 0.$$

$$\text{III.}\ (A'B - AB').y + A'C - AC' = 0.$$
$$AA'y^3 + (A'B + AB').y^2 + (A'C + BB').y + B'C = 0.$$
$$AA'y^3 + (A'B + AB').y^2 + (AC' + BB').y + BC' = 0.$$

$$\text{IV.}\ (A'C - AC').y + B'C - BC' = 0.$$

Dalla prima moltiplicata per A' sottratta la seconda moltiplicata per A, nasce la terza. Dalla prima moltiplicata per $A'y + B'$ sottratta la seconda moltiplicata per $Ay + B$, nasce la quarta. La terza, e la quarta, come ognun vede, sono del primo grado, quando le proposte erano del secondo. Dalla terza, e dalla quarta equazione ritrovati i valori di y, cioè

$y = \dfrac{A'C - AC'}{AB' - A'B}$, $y = \dfrac{BC' - B'C}{A'C - AC'}$, formo l'equazione $\dfrac{A'C - AC'}{AB' - A'B} = \dfrac{BC' - B'C}{A'C - AC'}$, ossia

$(A'C - AC')^2 = (AB' - A'B).(BC' - B'C)$, equazione in cui manca l'y.

IV. Abbiansi ora due equazioni di diverso grado rispettivamente all'incognita y da eliminarsi, e sia n il massimo esponente di detta incognita in una, e nell' altra ſia $n - u$: tali ſono

$$A y^{n} + B y^{n-1} + C y^{n-2} + D y^{n-3} \text{ \&c.} = o,$$
$$A' y^{n-u} + B' y^{n-u-1} + C' y^{n-u-2} + D' y^{n-u-3} \text{ \&c.} = o,$$

in cui A, B, C &c., A', B', C', &c. contengano l'altra incognita x, e quantità note. Si moltiplichi la prima equazione per A', e la ſeconda per $A y^{u}$, e fatta al ſolito la ſottrazione della ſeconda dalla prima, ne riſulterà una terza equazione, in cui la maſſima poteſtà di y ſarà $n - 1$. Si moltiplichi in ſeguito la prima equazione per $A' y + B'$, e la ſeconda per $A y^{u+1} + B y^{u}$, e ſottraendo queſto ſecondo prodotto dal primo, avremo una quarta equazione pure riſpetto ad y del grado $n - 1$. Fatto ciò, il valore di y^{n-u}, che ſi ricaverà dalla ſeconda delle equazioni date, ſi ſoſtituiſca nelle poteſtà di y maggiori di y^{n-u-1}, eſiſtenti nelle equazioni terza, e quarta; e con tal ſoſtituzione ſaranno ambedue queſte in riguardo al y ridotte al grado $n - u - 1$ (7); onde colle medeſime, per le coſe dette nei numeri precedenti, ſi potrà fare ſparire l' y.

V. Se abbianſi più di due equazioni, ed altrettante incognite; ſi faccia prima con due equazioni ſparire un' incognita, e con due altre facciaſi ſparire la ſeconda; e così di mano in mano facendo ſparire l'altre, ſi giungerà ad una equazione di una ſola incognita. L' Autore di queſto metodo dimoſtra nel luogo citato, che l' equazione finale non conterrà la x elevata a grado maggiore di quello, che convenga; il che non ſempre ſi ottiene cogli altri metodi.

VI. Nei caſi particolari ſpeſſo ſuccede di evitare con qualche induſtria i calcoli proliſſi, nei quali per lo più ci inviluppano i metodi generali, che abbiamo, per eliminare l'incognite. Sieno per eſempio tre equazioni $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = b$, $x z = y^2$. Faccio il quadrato dell' uno no e dell' altro membro della seconda equazione, cioè $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = b^2$: e ponendo y^2 in vece di xz, che gli è uguale per la terza equazione; sarà $x^2 + y^2 + z^2 + 2y.(x + y + z) = b^2$: ma per la prima equazione abbiamo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, e dalla seconda $x + y + z = b$; dunque sostituendo, sarà $a^2 + 2by = b^2$, da cui deducesi $y = \frac{b^2 - a^2}{2b}$, con che è poi facile ritrovare il valore delle altre incognite.

VII. Il metodo, di cui abbiamo fin quì parlato, è attissimo a liberare l' equazioni dai radicali. Ciascuno dei radicali contenuti nella data equazione esprimasi per z, y, u &c.; nasceranno tante equazioni quanti radicali, le quali avendo soli due termini, potranno sempre rendersi razionali elevandole a quella potestà, che conviene. Inoltre sostituendo nella proposta equazione, in luogo dei radicali, le incognite corrispondenti z, y, u &c., si otterrà un' altra equazione anch' essa razionale; adunque se il numero dei radicali sia r, si avrà un numero $r + 1$ di equazioni razionali, ed un numero r di incognite z, y, u &c., le quali eliminate col metodo di questo capo, si giungerà ad una equazione senza l' incognite z, y, u &c., e perciò senza radicali. Prendiamo ad esempio l' equazione $a = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$. Pongasi $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = z$: ed alzando al cubo, sarà $x = u^3$, $y = z^3$: e collocato nell' equazion proposta u, e z in vece dei loro uguali, sarà $a = u + z$. Abbiamo adunque tre equazioni razionali, cioè $x = u^3$, $y = z^3$, $a = u + z$, e due incognite, z, ed u da eliminarsi; il che eseguito, si otterrà una equazion razionale colle sole incognite x, y.

VIII. I radicali si possono ancora eliminare dall' equazione nella maniera, che sono per esporre in un esempio facile, ma che per altro è atto a far comprendere l' universalità del metodo. Si voglia liberare dai radicali l' equazione $x + \sqrt{a} + \sqrt{b} = o$. Si finga un'equazione coi coefficienti indeterminati, del grado, che risulta dalla moltiplicazione degl' indici dei radicali, la quale nel presente caso sarà di quarto grado, perchè gl' indici dei radicali sono 2, e 2, che moltiplicati insieme danno 4; onde l' equazione sia
$x^4 + \phi x^3 + \pi x^2 + \mu x + \lambda = o$: si faccia per brevità
$p = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, e si divida per $x + p$ l' equazione finta $x^4 + \phi x^3$ &c.; avremo per residuo
$p^4 - \phi p^3 + \pi p^2 - \mu p + \lambda$: si sostituisca in vece di p il suo valore, e sarà

$$\begin{aligned}
p^4 &= a^2 + b^2 + 6ab + 4 . \overline{a+b} . \sqrt{ab} \\
-\phi p^3 &= -\phi a\sqrt{a} - \phi b\sqrt{b} - 3\phi a\sqrt{b} - 3\phi b\sqrt{a} \\
+\pi p^2 &= +\pi a + \pi b + 2\pi\sqrt{ab} \\
-\mu p &= -\mu\sqrt{a} - \mu\sqrt{b} \\
+\lambda &= +\lambda .
\end{aligned}$$

Se questo residuo fosse zero, sarebbe $x + p$ un divisore perfetto della equazione $x^4 + \phi x^3$ &c.: inoltre se ϕ, π, μ, λ non contenessero radicali, l' equazione $x^4 + \phi x^3$ &c. sarebbe libera dai radicali, e perciò sarebbe l' equazione desiderata. Si finga adunque questo residuo uguale a zero, in maniera però, che sieno zero tutti i termini senza i radicali, e tutti i termini, che contengono lo stesso radicale; avremo per tanto le equazioni, che seguono, $a^2 + b^2 + 6ab + \pi a + \pi b + \lambda = o$, $-\phi a - \mu - 3\phi b = o$, $-\phi b - \mu - 3\phi a = o$,

4,

$4 . \overline{a+b} + 2\pi = o$; e perciò sarà $\pi = -2 . \overline{a+b}$, $\lambda = -a^2 - b^2 - 6ab + 2 . \overline{a+b}^2 = \overline{a-b}^2$; e ϕ, μ ritrovandosi uguali a zero (8), l'equazione finta di quarto grado si convertirà nella seguente

$x^4 - 2 . \overline{a+b} . x^2 + \overline{a-b}^2 = o$, la quale, come si vede, è libera dai radicali, ed ha per fattore

$x + \sqrt{a} + \sqrt{b} = o$. L'altro fattore, che è di terzo grado rispettivamente alla x, pure conterrà dei radicali, e si suole chiamare *reciproco* in riguardo al primo. La prerogativa di questi fattori è, che moltiplicati insieme diano un prodotto razionale.

IX. Il Signor Varing Matematico Inglese espelle i radicali dall'equazione in questo modo. Si voglia esente dai radicali l'equazione $x + \sqrt{a} + \sqrt{b} = o$. Si trovino tutti i valori di questa espressione, i quali, perchè ciascun radicale di secondo grado ha due valori, sono quattro, e sono i seguenti $x + \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $x + \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $x - \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $x - \sqrt{a} - \sqrt{b}$: si faccia il prodotto di tutti questi fattori, il quale darà una equazione priva di radicali. In fatti moltiplicando i due primi fra loro, sarà il prodotto $x^2 + 2x\sqrt{a} + a - b$, e gli altri due daranno per prodotto $x^2 - 2x\sqrt{a} + a - b$: e di nuovo fatta la moltiplicazione di questi due prodotti, avremo l'equazione di quarto grado $x^4 - 2 . \overline{a+b} . x^2 + \overline{a-b}^2 = o$, che è senza radicali.

X. Alle volte nei casi particolari si espellono i radicali con maggior facilità di quello, che permette l'esposto metodo. Sia l'equazione $\sqrt{x^3} + a\sqrt{x} =$ c^2

$\frac{c^2}{\sqrt{x}}$: si moltiplichi l'equazione per $\sqrt{x}$, e sarà libera dai radicali. Alle volte si ottiene l'intento lasciando da una parte del segno di eguaglianza un radicale, ed elevando l'equazione alla potestà indicata dall'indice del radicale stesso. Sia $a = \sqrt[3]{b x^2} + c$: si faccia $a - c = \sqrt[3]{b x^2}$, ed elevando a terza potestà, si otterrà l'equazione $\overline{a - c}^3 = b x^2$ libera dai radicali. Questo metodo, quando i radicali sieno più di uno, spesso riesce inutile: ma coll'opportuna sostituzione si arriva finalmente ad una equazione priva di radicali. Sia $a = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$: elevando a cubo, sarà $a^3 = x + y + 3\sqrt[3]{x^2 y} + 3\sqrt[3]{y^2 x} = x + y + 3\sqrt[3]{x y}\,.(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$: ma abbiamo $a = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$; dunque sostituendo, sarà $a^3 = x + y + 3a\sqrt[3]{x y}$, ed $(a^3 - x - y)^3 = 27 a^3 x y$, equazione razionale.

XI. Sia l'equazione $x - \sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} = 0$, che si voglia scevra di radicali; sarà $x = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$: e quadrando, e passando dippiù il doppio prodotto de' radicali nel primo membro, sarà
$x^2 - 2\sqrt[4]{a b} = \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{b^2}$, ed $x^4 - 4x^2\sqrt[4]{a b} + 4\sqrt[4]{a^2 b^2} = a + b + 2\sqrt[4]{a^2 b^2}$; o sia $x^4 - a - b + 2\sqrt[4]{a^2 b^2} = 4x^2\sqrt[4]{a b}$, ed $(x^4 - a - b)^2 + 4ab = 16x^4\sqrt[4]{a^2 b^2} - 4\sqrt[4]{a^2 b^2}\,.(x^4 - a - b) = 4\sqrt[4]{a^2 b^2}\,.(3x^4 + a + b)$; onde sarà finalmente $(x^8 - 2x^4\,.\,\overline{a+b} + a^2 + 6ab + b^2)^2 = 16ab\,.(3x^4 + a + b)^2$, equazione libera dai radicali.

CA-

CAPO IV.

Risoluzione delle Equazioni, che hanno fattori razionali di qualunque grado.

I. **F**Attore *razionale* di una equazione è quello, che non contiene quantità alcuna radicale: tal è $x+\pi$ relativamente all' equazione $x^2 + \begin{matrix}\varphi\\+\pi\end{matrix}.\,x + \phi\pi = o.$

I fattori razionali si dicono di quel grado, a cui in essi ascende l' incognita: così $x+\pi$ si dirà fattore razionale di primo grado della predetta equazione; ed $x^2 + \pi x + \varphi^2$ si dice fattore razionale del secondo grado dell' equazione $x^3 + \begin{matrix}\pi\\+\lambda\end{matrix}.\,x^2 + \begin{matrix}\pi\lambda\\+\varphi\varphi\end{matrix}.\,x + \lambda\varphi^2 = o,$ perchè la x nel primo fattore è alla prima dimensione, e nell' altro ascende alla seconda. Quando le equazioni dotate sieno di fattori razionali di qualunque grado, sarà sempre in nostro potere il ritrovarli col metodo, che or ora esporremo, dopo d' aver dimostrato, che l'equazione $x^p + A\,x^{p-1} + B\,x^{p-2} + C\,x^{p-3} + D\,x^{p-4}$ &c. $= o$, posti A, B, C, D &c. numeri intieri, non possa avere alcun valore della x eguale ad una frazione razionale. La dimostrazione di questa verità è semplicissima. Sia dunque, se è possibile, $x = \frac{m}{n}$, e sieno m, ed n numeri tra loro primi, cioè che non abbiano per comun divisore se non se l' unità: eseguita la sostituzione del valore di x nell' equazione, otterremo $\frac{m^p}{n^p} + \frac{A\,m^{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{B\,m^{p-2}}{n^{p-2}}$ &c. $= o$: e moltiplicando per n^{p-1}, sarà $\frac{m^p}{n} + A\,m^{p-1} + n\,B\,m^{p-2}$ &c. $= o$,

ed

ed $\frac{m^p}{n} = - A m^{p-1} - n B m^{p-2}$ &c. : ma il secondo membro di questa equazione è intiero ; dunque lo sarà eziandio $\frac{m^p}{n}$, il che è impossibile . Che sia così , si avverta, che essendo $\frac{m}{n}$ una frazione in numeri primi , $\frac{m^p}{n}$ non può essere intiero , se n non sia l' unità ; poichè essendo $\frac{m}{n}$ frazione in numeri primi , ed $\frac{m^p}{n} = \frac{m}{n} . m^{p-1}$ intiero, dovrà essere m^{p-1} multiplo di n , ovvero lo stesso n ; dunque $\frac{m^{p-1}}{n}$ sarà intiero : e per la stessa ragione sarà intiero $\frac{m^{p-2}}{n}$, $\frac{m^{p-3}}{n}$, $\frac{m^{p-4}}{n}$ &c. fino ad $\frac{m}{n}$; il che , essendo m, n numeri primi , non può accadere , se non nell' ipotesi di $n = 1$, ed in conseguenza di $x = m$. Resti dunque stabilito , che qualsivoglia equazione , il cui termine della massima potestà dell' incognita non abbia coefficiente diverso dall' unità , nè gli altri termini sieno intrigati da frazioni ; non possa essa avere valori della x razionali fratti .

II. Veniamo ora al metodo di rintracciare i divisori razionali delle equazioni , il quale da noi a cagion di brevità sarà applicato solamente alle equazioni numeriche , tanto più , che seguendo le stesse traccie , non è difficile farne uso nelle equazioni litterali . Sia pertanto l' equazione generalissima
$x^r + A x^{r-1} + B x^{r-2} + C x^{r-3} \ldots + P = 0$, e si voglia in primo luogo esaminare se essa contenga fattori razionali di primo grado . Io quì suppongo , che la proposta equazione sia libera da frazioni , potendosi ciò

si ciò sempre conseguire coi metodi indicati al Capo 2. di questo Libro. Da questa supposizione immediatamante ne deduco, che se la proposta equazione è dotata di fattori razionali, non saranno essi in alcuna maniera intrigati da frazioni; altrimenti qualche valore della x sarebbe una frazione, contro ciò, che si è dimostrato al numero precedente. Fingasi $x-\pi=o$ essere un fattore di quelli che cerchiamo, cioè razionale, e per questo si divida la proposta equazione x^r+Ax^{r-1} &c.... $+P=o$. Eseguita la divisione, si troverà $\pi^r+A\pi^{r-1}+B\pi^{r-2}$ $+C\pi^{r-3}\ldots+P$ essere il residuo, il quale converr- (Lib. 3. Cap. 1. num. 3.) che sia eguale a zero, perchè supponesi $x-\pi$ essere un fattore dell' equazione. Dunque avremo $\pi^r+A\pi^{r-1}+B\pi^{r-2}\ldots+P=o$, e $P=-\pi^r-A\pi^{r-1}+B\pi^{r-2}$ &c.: e chiamati M, N, Q, R, T, &c. i coefficienti dei termini dell'equazione $\pi^r+A\pi^{r-1}+B\pi^{r-2}+C\pi^{r-3}$ &c. incominciando dal termine, in cui π è alla prima dimensione; sarà $P=-M\pi-N\pi^2-Q\pi^3-R\pi^4-T\pi^5\ldots-\pi^r$; dal che si viene in cognizione, che sia P divisibile per π, e che perciò il valore razionale della x sia un divisore intiero dell' ultimo termine dell' equazione proposta. Dividasi l' ultima equazione per π, e pongasi $\frac{P}{\pi}=P'$; sarà $P'+M=-N\pi-Q\pi^2-R\pi^3-T\pi^4\ldots-\pi^{r-1}$, onde rilevasi, che $P'+M$ è divisibile per π. Chiamato $\frac{P'+M}{\pi}=M'$, con lo stesso raziocinio si dimostrerà $M'+N$ divisibile per π: ed essendo il quoto N', si troverà similmente $N'+Q$ divisibile per π; come ancora si troverà per π divisibile $Q'+R$, ed $R'+T$, chiamato $(N'+Q):\pi=Q'$, e $(Q'+R):\pi=R'$. Dunque P, $P'+M$, $M'+N$, $N'+Q$, $Q'+R$, $R'+T$,

&c. fino a che ſieno eſauriti tutti i coefficienti dei termini dell' equazione propoſta, devono eſſere per π diviſibili, poſto che π ſia un valore razionale della x. Se fra queſti coefficienti ſi annoveri ancora l' unità, cofficiente della maſſima poteſtà dell' incognita, ognun vede, che compita tutta l' operazione, ſarà il riſultato eguale a zero.

III. Dall' eſpoſta teoria ſi ricava una maniera aſſai ſpedita di ſcoprire i fattori razionali ſemplici di qualunque equazione, che ſuppongo libera da frazioni, e paragonata al zero. Si ritrovino tutti i diviſori intieri razionali del termine ultimo dell' equazione; ed eſeguite le diviſioni di eſſo termine per ciaſcun diviſore, ai quoti ſi aggiunga il coefficiente del penultimo termine: le ſomme, che riſultano, ſi dividano per i predetti riſpettivi diviſori; e ſe le diviſioni ſuccedano eſatte, ai quoti aggiungaſi il coefficiente dell' antipenultimo termine, e ſi ſeguitino a dividere le ſomme riſultanti ſempre per i predetti riſpettivi diviſori: e proſeguendo tale operazione fin che ſieno eſauriti tutti i coefficienti dei termini della propoſta equazione; ſe gli ultimi riſultati ſaranno zero, ſi conchiuderà, che i diviſori intieri razionali dell' ultimo termine dell' equazione ſono i valori della x; e che perciò ſottratti dalla x tali valori, cioè uno per volta, ſi avranno altrettanti fattori razionali ſemplici della data equazione. Se poi nel fare tale operazione s' incontri qualche ſomma non diviſibile pel ſuo diviſore riſpettivo, di queſto diviſore non ſi tenga alcun conto: e ſe tutti i diviſori incontreranno ſimile difficoltà, ſarà ciò indizio certo, che l' equazione non ha fattore alcuno ſemplice razionale. Avvertaſi per altro di operare nella maniera indicata non ſolo coi diviſori dell' ultimo termine preſi poſitivamente, ma ancor con li ſteſſi preſi nega-

negativamente, acciocchè la prova riesca eseguita sopra tutti i divisori razionali intieri dell' ultimo termine dell' equazione, senza lasciarne fuori alcuno.

IV. Si dilucidi cogli esempi l' esposta dottrina.

A	1,	2,	4,	5,	10,	20.
B	—20,	—10,	—5,	—4,	—2,	—1.
C	—16,	—6,	—1,	0,	2,	3.
D	—16,	—3,		0.		
E	9,	22,		25.		
F	9,	11,		5.		
G	4,	6,		0.		
H	4,	3,		0.		
I	—1,	—2,		—5.		
K	—1,	—1,		—1.		
L	0,	0,		0.		

Abbiasi da esaminare se sianvi fattori razionali di primo grado nell' equazione $x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20 = 0$. In linea orizzontale *A* scrivo ordinatamente tutti i divisori intieri razionali di 20, incominciando da 1; e nella linea orizzontale *B* scrivo i quoti, che nascono dal dividere l' ultimo termine dell' equazione -20 per ciascun divisore separatamente; ed avverto di scrivere i quoti sotto i rispettivi divisori in linea verticale: così sotto il divisore 5, che esiste nella linea *A*, metto il quoto -4 nella linea *B*, il quale nasce dividendo -20 per 5. Ai quoti *B* aggiungo il 4, coefficiente del penultimo termine dell' equazione, e noto le somme nella linea orizzontale *C*, ciascuna sotto il quoto da cui è nata col aggiunzione del 4; e perciò ciascuna somma verrà ad essere in linea verticale con un divisore della linea *A*:

così il zero sarà la somma della linea *C* corrispondente in linea verticale al divisor 5 della linea *A*; ed eseguita la divisione di ciascuna somma pel rispettivo divisore, segno i quoti che ritrovo numeri intieri nella linea *D*, ciascuno in linea verticale col divisore suo, e non curo i quoti fratti, i quali mi indicano, che i loro divisori non fanno al caso; avvertendo dippiù, che nella linea orizzontale *D*, sotto il divisore 5 si dee scriver zero, perchè $\frac{0}{5}$ è eguale a zero, il qual quoto deesi considerare come intiero, e non come fratto, avendo il zero qualunque numero per divisore. Aggiungo ora ai quoti della linea *D* il 25, cofficiente dell' antipenultimo termine dell' equazione, e coll' ordine solito colloco le somme nella linea *E*, le quali divise per i rispettivi divisori, danno i quoti, che sono nella linea *F*. A questi aggiunto — 5, coefficiente del terzo termine dell' equazione, risultano le somme, che sono nella linea *G*; e fatte le solite divisioni, avremo i quoti disposti a dovere nella linea *H*. Nella linea *I* vi sono questi quoti aggiuntovi — 5, coefficiente del secondo termine dell' equazione: in *K* vi sono queste somme divise pel divisore rispettivo: e finalmente in *L* vi sono i quoti della linea *K* accresciuti dell' unità, coefficiente del primo termine dell' equazione. E comecchè questi risultati sono zero, conchiudo, che i rispettivi divisori 1, 2, 5 sono altrettanti valori della x; e che per ciò $x - 1$, $x - 2$, $x - 5$ sono tre divisori semplici razionali dell' equazione proposta.

A	— 1,	— 2,	— 4,	— 5,	— 10,	— 20.
B	20,	10,	5,	4,	2,	1.
C	24,	14,	9,	8,	6,	5.
D	— 24,	— 7.				
E	1,	18.				
F	— 1,	— 9.				
G	— 6,	— 14.				
H	6,	7.				
I	1,	2.				
K	— 1,	— 1.				
L	0,	0.				

Dispongo inoltre nella linea orizzontale *A* i divisori intieri razionali del 20 presi negativamente; e sotto questi nella linea *B* colloco al solito i quoti nati dalla divisione dell' ultimo termine — 20 dell' equazione, ciascun sotto il suo divisore. A questi quoti aggiungo il 4, coefficiente del penultimo termine dell' equazione; e dispongo le somme col noto ordine nella linea *C*, le quali divise per i divisori sovrapposti, danno sol tanto due quoti intieri — 24, — 7, corrispondenti ai divisori — 1, — 2. I quoti — 24, — 7 collocati nella linea *D* si accrescano del 25, coefficiente dell'antipenultimo termine; e le somme 1, 18 sieno nella linea *E*, delle quali somme fatta la consueta divisione, avremo i quoti in *F*. Continuando l' operazione, che stimo superfluo tenervi dietro più minutamente, si arriverà finalmente agli ultimi risultati in *L* sottoposti ai divisori — 1, — 2, i quali risultati sono zero. Dunque — 1, — 2 sono valori negativi della x; e perciò $x + 1$, $x + 2$ sono fattori semplici razionali dell' equazione data. Questa equazione per tanto ha cin-

cinque fattori ſemplici razionali, cioè tre poſitivi, 1, 2, 5, e due negativi, -1, -2.

V. L' equazione $x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x - 36 = 0$ ſi debba ſottoporre all' eſame per indagare i fattori ſemplici razionali.

A	1,	2,	3,	4,	6,	9,	12,	18,	36.
B	-36,	-18,	-12,	-9,	-6,	-4,	-3,	-2,	-1.
C	-39,	-21,	-15,	-12,	-9,	-7,	-6,	-5,	-4.
D	-39,		-5,	-3.					
E	-48,		-14,	-12.					
F	-48,			-3.					
G	-49,			-4.					
H	-49,			-1.					
I	-48,			0.					

In *A* ſi ritrovano i diviſori dell' ultimo termine -36, ed in *B* i riſpettivi quoti, i quali accreſciuti del -3, ſono in *C*: in *D* abbiamo i quoti intieri delle predette ſomme diviſe per i diviſori ſovrappoſti, i quali quoti ſono -39, -5, -3, che ſi ritrovano in linea verticale coi ſuoi diviſori 1, 3, 4, eſiſtenti nella linea orizzontale *A*: in *E* vi ſono i quoti predetti accreſciuti del -9, ed in *F* i ſoliti quoti intieri: in *G* queſti quoti accreſciuti del -1, coefficiente del ſecondo termine dell' equazione, ed in *H* i quoti &c.: finalmente in *I* gli ultimi riſultati -48, 0: e comecchè il zero è ſottopoſto al diviſore 4 eſiſtente nella linea *A*; ſi inferiſca, che $x - 4$ è uno dei diviſori ricercati. Se ſi farà lo ſteſſo eſame coi diviſori del 36 preſi negativamente, troveremo un altro diviſore ſemplice razionale, cioè $x + 3$. Ed in fatti la diviſione della propoſta equazione per queſti fattori rieſce eſatta; anzi ſe ſi divividerà l'equazione per $x^2 - x - 12$, prodotto dei predetti divisori, nascerà per quoto $x^2 + 3 = o$, da cui si ricavano le altre due radici $x = + \sqrt{-3}$, $x = - \sqrt{-3}$, ambe immaginarie (9).

VI. Vengono ora in considerazione i fattori razionali di secondo grado, i quali, denotando m, ed n quantità razionali, deono avere la forma che siegue $x^2 + mx + n$. Per rintracciare se una data equazione abbia fattori di questa specie, si faccia attualmente la divisione della data equazione pel fattore $x^2 + mx + n$, in cui per ora m, ed n sono indeterminate; con che si giungerà ad un residuo, i di cui termini in parte conterranno la x a prima dimensione, ed in parte saranno privi affatto della x, cioè il residuo avrà questa forma $Mx + N$. Or comecchè questo residuo dee essere zero se $x^2 + mx + n$ abbia da essere divisore dell'equazione (Lib.3. Cap.1 .num. 3.) ; per far ciò verificare fingasi $Mx = o$, ed $N = o$: e coll' ajuto di queste due equazioni giunti ad una equazione determinata, nella quale siavi la sola m, o la sola n, come si stimerà più opportuno; si esamini se questa equazione abbia valori semplici razionali. Nella supposizione che se ne trovi alcuno, avremo un valore razionale della m, o della n, con cui passando a determinare il valore dell'altra indeterminata, e trovato anche questo razionale, se si farà la sostituzione di ambedue i medesimi valori, cioè di m ed n, nel trinomio $x^2 + mx + n$, conseguiremo un fattore razionale di secondo grado della nostra equazione. Se più saranno i valori razionali di m, ed n; più fattori di tal natura otterremo.

VII. Dividasi l' equazione $x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x - 36 = o$ per $x^2 + mx + n$; avremo il residuo $(2mn + n - 3 + 9m - m^2 - m^3).x + n^2 + 9n -$

$m^2 n$

$m^2 n - m n - 36$, il quale residuo posto eguale a zero, in maniera però, che la somma dei termini, che moltiplicano la x, e la somma di quelli, che non la moltiplicano, sia zero; nasceranno le due seguenti equazioni $2 m n + n - 3 + 9 m - m^2 - m^3 = 0$, ed $n^2 + 9 n - m^2 n = m n - 36 = 0$. Dalla combinazione di queste due equazioni in varie maniere, specialmente seguendo il metodo che si è insegnato nel Capo precedente, si può giungere ad una equazione data soltanto per m, o per n. Per altro si richiede qualche industria per schivare il calcolo alquanto prolisso, e nojoso: ecco la strada che io scelgo. Dalla prima delle due equazioni predette ricavo immediatamente $n = (m^3 + m^2 - 9 m + 3) : (2 m + 1)$, e dalla seconda $n^2 - n . (m^2 + m - 9) - 36 = 0$: pongo $m^2 + m - 9 = r$, e sostituendo ho $n = (r m + 3) : (2 m + 1)$, ed $n^2 - r n = 36$: da quest' ultima equazione ricavo $n = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36}$: e paragonati i due valori di n; sarà

$$(r m + 3) : (2 m + 1) = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36}\text{, cioè}$$

$$r m + 3 - r m - \frac{r}{2} = \overline{2 m + 1} \times \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36},$$

ossia $6 - r = \overline{4 m + 2} \times \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + 36}$: e quadrando,

$36 - 12 r + r^2 = 4 r^2 m^2 + 4 m r^2 + r^2 + 36 . 16 m^2 + 36 . 16 m + 144$, ovvero, togliendo i termini che si elidono, e dividendo per 4, $(r^2 + 144) . (m^2 + m) + 3 r + 27 = 0$: e ponendo in vece di r il suo valore dato per m; si avrà finalmente l'equazione di sesto grado

m^6

$m^6 + 3m^5 - 15m^4 - 35m^3 + 210m^2 + 228m = o$; da cui ſubito ricavo $m = o$, il qual valore collocato nell' equazione $n = \frac{rm + 3}{2m + 1}$, darà $n = 3$; onde il diviſore $x^2 + mx + n$, fatte le ſoſtituzioni dei valori di m, ed n, cioè o, 3, diverrà $x^2 + 3$, il quale ſarà un diviſore razionale di ſecondo grado dell' equazione propoſta. L' equazione determinata di ſeſto grado, in cui m è l' incognita, ha il fattore ſemplice razionale $m + 1 = o$, il che ſi ſcopre col metodo del numero terzo; ſarà dunque $m = -1$: queſto valore di m ſi ſoſtituiſca nell' equazione $n = \frac{rm + 3}{2m + 1}$, e ſarà $n = r - 3 = m^2 + m - 9 - 3 = -12$, ſoſtituendo ſempre -1 in vece di m; la propoſta equazione adunque avrà un altro fattore razionale di ſecondo grado, cioè $x^2 - x - 12 = o$. Ed in realtà per i diviſori quì aſſegnati è eſſa eſattamente diviſibile, anzi uno è il quoziente della diviſione eſeguita coll' altro.

VIII. Se dividaſi un' equazione per un fattore del terzo grado indeterminato, cioè per $x^3 + mx^2 + nx + r = o$, ſi verrà ad un reſiduo, che avrà queſta forma $Mx^2 + Nx + R = o$: ſi faccia verificare queſta equazione col porre $M = o$, $N = o$, $R = o$; e così ſi otterranno tante equazioni, quante ſono le indeterminate m, n, r, d' onde ſi potrà ſempre giungere ad una equazione d' una ſola indeterminata, per eſempio m: ſi eſamini ſe queſta abbia valori razionali, e ſe fatte le ſoſtituzioni per fiſſare l' altre indeterminate col valore razionale di eſſa, pur ſi ottengano valori razionali per ciaſcuna indeterminata; il che ſe avvenga, mettanſi i loro valori nel quadrinomio $x^3 + mx^2 + nx + r$, con che conſeguiremo i diviſori razionali del terzo grado delle equazioni, ogni qualvolta tali divisori sieno possibili. Non mi dilungo in discorrere dei divisori razionali del quarto, quinto, &c. grado: perchè si vede subito, che il metodo è generale, e che tutta la difficoltà consiste in saper maneggiare con destrezza il calcolo, acciocchè non stanchi la pazienza dell' Analista (10).

CAPO V.

Varii casi, in cui l' Equazioni si riducono a grado inferiore.

I. DAremo principio dall' equazioni, in cui vi sono radici uguali. Sia l' equazione generalissima $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + C x^{m-3}$ &c. $= 0$, e pongasi $y = x - \phi$, o sia $x = y + \phi$: sostituendo in vece di x questo valore nella proposta, si avrà, come si è dimostrato nel Capo secondo di questo Libro, num. 5. e 6.

$$\phi^m + A\phi^{m-1} + B\phi^{m-2} + C\phi^{m-3} \text{ \&c.} +$$
$$(m\phi^{m-1} + (m-1).A\phi^{m-2} + (m-2).B\phi^{m-3} \text{ \&c.}).y +$$
$$\left(\frac{m.(m-1)}{2}.\phi^{m-2} + \frac{(m-1).(m-2)}{2}.A\phi^{m-3} + \frac{(m-2).(m-3)}{2}.B\phi^{m-4} \text{ \&c.}\right).y^2 +$$
$$\left(\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}.\phi^{m-3} + \frac{(m-1).(m-2).(m-3)}{2.3}.A\phi^{m-4} + \frac{(m-2).(m-3).(m-4)}{2.3}.B\phi^{m-5} \text{ \&c.}\right).y^3 \text{ \&c.} \ldots + y^m = 0.$$

La

La propoſta equazione abbia due radici uguali, una delle quali ſia φ: ciaſcun vede, che nell' equazione trasformata, $y = x - \varphi$ dovrà neceſſariamente avere due valori uguali al zero: per verificarſi ciò, ſi eſige, che ſvaniſcano i due ultimi termini dell' equazione in y, dovendo eſſa eſſer diviſibile per y^2, per la proprietà de' fattori dell' equazioni: dunque ſarà $\varphi^m + A\,\varphi^{m-1} + B\,\varphi^{m-2} + C\,\varphi^{m-3}$ &c. $= o$, ed ancor $m\,\varphi^{m-1} + (m-1).A\,\varphi^{m-2} + (m-2).B\,\varphi^{m-3}$ &c. $= o$; e perciò φ dee far verificare la propoſta equazione $x^m + A\,x^{m-1}$ &c. $= o$, ſiccome ancor l'altra $m\,x^{m-1} + (m-1).A\,x^{m-2}$ &c. $= o$, la quale ſi ottiene moltiplicando ciaſcun termine della propoſta nel ſuo eſponente, indi dividendolo per x. E' facile a vederſi, che queſta ſeconda equazione abbia per valore della x la φ una volta meno di quello, che l' abbia l' equazione propoſta; perchè eſſa è il coefficiente del ſecondo termine dell' equazione in y, che chiamo N, principiando a contare dall' ultimo; e l' equazione propoſta è appunto l' ultimo termine, il quale chiamo M; onde nella ſuppoſizione di $y = o$, ſarà $M = N\,y$; e perciò ſe M ha due volte per diviſore y, N l'avrà una volta ſola.

II. Collo ſteſſo metodo ſi dimoſtra, che ſe la propoſta equazione $x^m + A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2}$ &c. $= o$ avrà un numero n di radici $= \varphi$, l' altra equazione $m\,x^{m-1} + (m-1).A\,x^{m-2}$ &c. avrà radici $= \varphi$ di numero $n-1$; onde $\overline{x-\varphi}^{\,n-1}$ ſarà un diviſore comune delle due equazioni. Ciocchè s' è detto di più radici eguali a φ, vale per più radici eguali a π, λ &c.; ſe adunque ſi troverà il maſſimo comune diviſore delle due equazioni M, N, queſto conterrà le radici eguali dell' equazion propoſta, ma innalzate ad una poteſtà minore di una unità. Sia P il predetto maſſimo comun diviſore, e ſi divida M per P, ed il

Mm 2 quo-

quoto si faccia $= M'$; conterrà M' le radici dell' equazion proposta, le quali però saranno tutte a semplice potestà : trovisi ora tra M', e P il massimo comun divisore, che chiamo P'; conterrà P' tutte le radici eguali, ma a semplice potestà : se per P' dividasi M', onde il quoziente sia M'' ; conterrà M'' le radici diseguali dell' equazion proposta ; le quali cose sono facilissime a comprendersi senza ulteriore spiegazione.

III. Sia ora un' equazione, la quale contenga radici eguali nella quantità, ma una sia positiva, e l' altra negativa, come sarebbe $x = a$, $x = -a$. Osservo in primo luogo, che in queste equazioni la x non potrà ritrovarsi a sole potestà dispari ; imperciocchè posto che tale equazione sia $x^t + A x^{t-2} + B x^{t-4} \ldots + K = o$, in cui t è numero dispari : e messa in primo luogo a in vece di x; sarà $a + A a^{t-2} + B a^{t-4} \ldots + K = o$: sostituita in seguito $-a$ per x, sarà $-a^t - A a^{t-2} - B a^{t-4} \ldots + K = o$: e sommate queste due equazioni, sarebbe $2 K = o$, il che è un assurdo. Se poi l' equazione abbia le sole potestà pari, allora è segno che tutte le sue radici sono tali, che una ne eguaglia un' altra presa col segno contrario (11): e l' equazioni di simil specie sempre si abbassano per lo meno ad un grado minore per la metà del grado loro, ponendo $x^2 = y$, e sostituendo ; onde se l' equazione in x non supera il grado ottavo, quella in y non supererà il quarto, e perciò i valori della x si potranno sempre in tal supposizione determinare. Finalmente l' equazione contenga potestà pari, e dispari della x : dividasi detta equazione in due parti, una delle quali, che chiamo M, sia la somma dei termini, in cui x è a potestà pari, più il termine noto ; e l' altra, che chiamo $N x$, sia la somma dei termini, in cui x è a potestà dispari : io dico

dico, che tanto M, quanto N andranno eguali al zero, se in vece di x ponganſi le radici, che ſi eguagliano nella quantità, ma hanno ſegno contrario. Imperciocchè M è inalterabile comunque in vece di x vi ſi ponga la radice, cioè col ſegno $+$, o col ſegno $-$; in Nx poi tutti i termini quantunque ſieno inalterabili nella quantità, paſſano però dal poſitivo al negativo, o al roveſcio, col ſoſtituire in vece di x la ſteſſa radice preſa prima col ſegno $+$, indi col ſegno $-$. Ciò poſto, ſia $M + Nx = o$ ponendo in vece di x $+ a$; e ſia ſimilmente $M - Nx = o$ ſoſtituendo $- a$ alla x: ſommando, e ſottraendo queſte due equazioni, ſi troverà $N = o$, $M = o$, come ſopra aſſerimmo. Da ciò ne ſegue, che il maſſimo comun diviſore di M e di N, che chiamo R, dovrà contenere le radici, che ſi eguagliano preſe col ſegno contrario; non potrà, per quello che ſi è detto, contenere la x a ſole poteſtà diſpari: anzi dovrà contenerla a ſole poteſtà pari, perchè in M, ed in N non ſonovi che poteſtà pari di x (12). Se adunque R non ſupera l' ottavo grado, ſi potranno ſempre determinare i valori della x, che appartengono all' equazion propoſta. Vogliaſi per cagion d' eſempio eſaminare ſe l' equazione ſeguente $x^6 + x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = o$ abbia radici, delle quali una ne eguagli un' altra preſa col ſegno contrario: eccone la pratica faciliſſima. Divido $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 4$ per $x^4 + 4x^2 + 4$, cioè M per N, e non curato il quoto, ottengo per reſiduo $x^2 + 2$: divido ora N, cioè $x^4 + 4x^2 + 4$ per $x^2 + 2$, ed ottengo per reſiduo zero; dunque $x^2 + 2$ è il maſſimo comun diviſore di M ed N, il quale dee contenere le radici ricercate, che ſono appunto $x = \sqrt{-2}$, $x = -\sqrt{-2}$ immaginarie.

IV.

IV. E generalmente φ, e λ ſieno due radici dell' equazione $x^m + A x^{m-1} \ldots + K = o$, e ſia λ data per φ, e quantità note: facciaſi X funzione di x, come λ è di φ (13), e pongaſi $X = y$, dalla quale equazione ſi determini x per y, e quantità note, e poi ſoſtituiſcaſi nell'equazion propoſta in vece di x il ſuo valore, onde abbiaſi l'equazion in y, cioè $y^n + A' y^{n-1} + B' y^{n-2} \ldots + K' = o$. Egli è certo, che paſſa fra φ ed una radice dell' equazione in y quella ſteſſa relazione, che paſſa fra x ed X, cioè fra φ e λ (14); e che perciò una radice dell' equazione in y ſarà eguale a λ. Quindi ſe nell'equazione in y ſi cangi y in x, le due equazioni $x^m + A x^{m-1}$ &c., $x^n + A' x^{n-1}$ &c. avranno un comun diviſore: ſi ritrovi il maſſimo comun diviſore di queſte due equazioni, da cui ſi ricaverà il valore di λ, e indi il valore di φ. Avvertaſi, che queſto metodo eſige, che l'equazione $X = y$ ſia riſolubile, acciocchè ſi poſſa determinare il valore di x per y.

Sappiaſi, per cagion di eſempio, che due radici dell' equazione $x^3 - x^2 - 14x + 24 = o$ moltiplicate inſieme eguagliano 6; ſarà adunque $\varphi\lambda = 6$, e $\lambda = \frac{6}{\varphi}$: e perciò $\frac{6}{x} = X = y$; dunque $x = \frac{6}{y}$: e ſoſtituendo nell'equazione propoſta $\frac{6}{y}$ in vece di x, ſarà $2y^3 - 7y^2 - 3y + 18 = o$: e cangiando y in x, otterremo $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = o$. Il maſſimo comun diviſore di queſta e della propoſta è $x^2 - 5x + 6$; da cui ſi ricava $x = 2$, $x = 3$, che ſaranno φ, e λ dell' equazione data.

V. Paſſiamo ora alle equazioni, che chiamanſi *convertibili*, altre delle quali ſono di grado diſpari, altre di grado pari. Quelle di grado diſpari ſono compreſe

in

in una delle ſeguenti due formole, in cui i coefficienti, e la quantità a poſſono eſſere di valor poſitivo, e negativo:

$$\text{I. } x^{2m+1} + Aax^{2m} + Ba^2x^{2m-1} + Ca^3x^{2m-2} \ldots\ldots\ldots$$
$$+ Pa^m x^{m+1} + Pa^{m+1}x^m \ldots\ldots\ldots + Ca^{2m-2}x^3$$
$$+ Ba^{2m-1}x^2 + Aa^{2m}x + a^{2m+1} = o.$$

$$\text{II. } x^{2m+1} + Aax^{2m} + Ba^2x^{2m-1} + Ca^3x^{2m-2} \ldots\ldots\ldots$$
$$+ Pa^m x^{m+1} - Pa^{m+1}x^m \ldots\ldots - Ca^{2m-2}x^3$$
$$- Ba^{2m-1}x^2 - Aa^{2m}x - a^{2m+1} = o;$$

quelle poi di grado pari ſono contenute in una del tre ſeguenti, in cui ſimilmente a, A, B, &c. poſſono eſſere comunque poſitive, e negative:

$$\text{I. } x^{2m} + Aax^{2m-1} + Ba^2x^{2m-2} + Ca^3x^{2m-3} \ldots\ldots$$
$$+ Pa^m x^m \ldots + Ca^{2m-3}x^3 + Ba^{2m-2}x^2 + Aa^{2m-1}x$$
$$+ a^{2m} = o.$$

$$\text{II. } x^{4m} + Aax^{4m-1} + Ba^2x^{4m-2} + Ca^3x^{4m-3} \ldots\ldots$$
$$+ Pa^{2m}x^{2m} \ldots - Ca^{4m-3}x^3 + Ba^{4m-2}x^2 - Aa^{4m-1}x$$
$$+ a^{4m} = o.$$

$$\text{III. } x^{4m+2} + Aax^{4m+1} + Ba^2x^{4m} + Ca^3x^{4m-1} \ldots\ldots$$
$$+ Pa^{2m+1}x^{2m+1} \ldots\ldots\ldots + Ca^{4m-1}x^3 - Ba^{4m}x^2$$
$$+ Aa^{4m+1}x - a^{4m+2} = o.$$

VI. Egli è evidente, che ſieno queſte formole generali per tal modo coſtituite, che mettendo nelle tre prime $\frac{a^2}{x}$ in luogo di x, e nelle due ultime $\frac{-a^2}{x}$ in luogo della ſteſſa x, l' equazione non ſoffra cangiamento, ma rimanga quale era prima; la qual coſa indica, che le radici delle equazioni convertibili ſono reciproche le une alle altre; il che ſi può confermare con queſto diſcorſo. Le radici della propoſta deono eſſere

essere reciproche a quelle della trasformata, pel num. 13. del Capo 2. di questo Libro: ma nel caso presente la trasformata è la stessa della proposta; adunque la proposta avrà le sue radici reciproche: e perciò chiamando ϕ una qualunque delle dette radici, vi dovrà essere fra le altre $\frac{a^2}{\phi}$. Quindi, dovendo essere dispari nell' equazioni di grado dispari il numero delle radici, ne segue, che tra esse ve ne sia una reciproca di se stessa; onde converrà che sia $\phi = \frac{a^2}{\phi}$, o sia $\phi^2 = a^2$; il che fa vedere, che tutte le equazioni convertibili di grado dispari avranno una radice uguale ad a, o $-a$; che però saranno esattamente divisibili per $x - a$, o per $x + a$. Pertanto se prenderemo la prima delle nostre formole generali di grado dispari, e se uniremo insieme i termini ugualmente lontani dal mezzo, cioè il primo coll' ultimo, il secondo col penultimo, e così discorrendo, onde sia

$$(x^{2m+1} + a^{2m+1}) + Axa.(x^{2m-1} + a^{2m-1})$$
$$+ Ba^2x^2.(x^{2m-3} + a^{2m-3}) \ldots Pa^m x^m.(x+a) = 0:$$

e collocata $-a$ nelle quantità chiuse tra parentesi in vece di x; l' equazione si ridurrà a zero. Lo stesso ancora succede se si operi nella medesima maniera intorno la seconda formola generale delle equazioni convertibili di grado dispari, ponendo per altro $+a$ in vece x. Per la qual cosa l' equazioni convertibili di grado dispari della prima formola saranno divisibili per $x + a$, e quelle della seconda per $x - a$.

VII. Si eseguiscano attualmente le divisioni, ed otterremo il quoziente della prima formola divisa per $x + a$, che avrà la forma seguente

x^{2m+1}

$$\frac{x^{2m+1}+a^{2m+1}}{x+a} = x^{2m} - a x^{2m-1} + a^2 x^{2m-2} \dots \dots$$

$$+ a^{2m-2} x^2 - a^{2m-1} x + a^{2m}$$

$$A a x \left(\frac{x^{2m-1}+a^{2m-1}}{x+a}\right) = A a x^{2m-1} - A a^2 x^{2m-2} \dots$$

$$- A a^{2m-2} x^2 + A a^{2m-1} x$$

$$B a^2 x^2 \left(\frac{x^{2m-3}+a^{2m-3}}{x+a}\right) = B a^2 x^{2m-2} \dots A a^{2m-2} x^2$$

&c. &c.

E raccogliendo insieme tutti questi quozienti parziali, ed ordinando la somma per x, e ponendola $= o$; avremo l'equazione di grado pari $x^{2m} + (A-1).\ a x^{2m-1} + (B - A + 1).\ a^2 x^{2m-2} \dots + (B - A + 1).\ a^{2m-2} x^2 + (A-1).\ a^{2m-1} x + a^{2m} = o$, che è una equazione convertibile. Dalla seconda formola generale divisa per $x - a$ nasce un' altra formola convertibile di grado pari, cioè $x^{2m} + (A+1).\ a x^{2m-1} + (B + A + 1).\ a^2 x^{2m-2}$ &c. $= o$.

VIII. Resta ora da vedere come l'equazioni convertibili di grado pari possano abbassarsi. Si prenda la prima delle tre formole generali dell'equazioni convertibili di grado pari, la quale divisa per x^m, darà $\left(x^m + \frac{a^{2m}}{x^m}\right) + A a.\left(x^{m-1} + \frac{a^{2m-2}}{x^{m-1}}\right) \dots + P a^m = o$, unendo insieme i quoti de' termini equidistanti da quel di mezzo; facciasi $x + \frac{a^2}{x} = y$, ed elevando al quadrato, al cubo &c., si otterrà $x^2 + 2a^2 + \frac{a^4}{x^2} = y^2$, $x^3 + \frac{a^6}{x^3} + 3a^2.\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = y^3$, &c.; e perciò abbiamo $x^2 + \frac{a^4}{x^2} =$

$y^2 - 2a^2$, $x^3 + \frac{a^6}{x^3} = y^3 - 3a^2y$, sostituendo y in vece di $x + \frac{a^2}{x}$. Così ancora $\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^4 = x^4 + 4a^2x^2 + 6a^4 + 4\frac{a^6}{x^2} + \frac{a^8}{x^4} = x^4 + \frac{a^8}{x^4} + 4a^2.\left(x^2 + \frac{a^4}{x^2}\right) + 6a^4 = y^4$: si sostituisca in vece di $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ il suo eguale $y^2 - 2a^2$, ed avremo $x^4 + \frac{a^8}{x^4} = y^4 - 4a^2y^2 + 2a^4$; e generalmente $x^r + \frac{a^{2r}}{x^r} = y^r - ra^2y^{r-2} + \frac{r.(r-3)}{2}.a^4y^{r-4} - \frac{r.(r-4).(r-5)}{2.3}.a^6y^{r-6} + \frac{r.(r-5).(r-6).(r-7)}{2.3.4}.a^8y^{r-8}$ &c., la qual serie deesi rompere subito che si giunge ad una potenza negativa di y. Si possono ancora ritrovare i valori di $x^r + \frac{a^{2r}}{x^r}$ dati per y ed a, adoperando la formola, con cui ritrovansi le somme delle potestà delle radici, da noi esposta al num. 17. del Capo 1. di questo Libro, facendo far figura di due radici ad x, ed $\frac{a^2}{x}$, e ponendo $y = x + \frac{a^2}{x}$ in luogo della loro somma $M1$, ed $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ in luogo di $M2$ &c., ed a^2 in luogo di B somma degli ambi, e zero in luogo di C, D, &c. somma dei terni, quaterni &c.; onde sarà

$M1 = y$
$M2 = yM1 - 2a^2 = y^2 - 2a^2$
$M3 = yM2 - a^2 M1 = y^3 - 3a^2 y$
$M4 = yM3 - a^2 M2 = y^4 - 4a^2 y^2 + 2a^4$
$M5 = yM4 - a^2 M3 = y^5 - 5a^2 y^3 + 5a^4 y$
&c. &c. &c.,

dal quale andamento non è difficile ritrovare la formola generale per $x^r + \frac{a^{2r}}{x^r}$. Si sostituiscano questi valori di $x + \frac{a^2}{x}$, $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ &c. nell' equazione di sopra trovata $\left(x^m + \frac{a^{2m}}{x^m}\right) + Aa.\left(x^{m-1} + \frac{a^{2m-2}}{x^{m-1}}\right)$ &c. $= o$, e si avrà una nuova equazione colla incognita y, che sarà del grado m, cioè di un grado minore per la metà del grado che ha la proposta. Se questa equazione in y sarà risolubile, sostituendo le sue radici nella supposta equazione $x + \frac{a^2}{x} = y$, ovvero $x^2 - yx + a^2 = o$, si avranno colla risoluzione di questa tutte le radici della proposta. Nella stessa maniera si operi per abbassare l' equazioni convertibili di grado pari contenute nell' altre due formole, col solo divario, che in vece di $x + \frac{a^2}{x} = y$, si dee fare $x - \frac{a^2}{x} = y$. Ognuno può di ciò facilmente convincersi da se medesimo, unendo insieme i termini equidistanti delle dette formole, e dividendo la prima per x^{2m}, e la seconda per x^{2m+1}. Sia l' equazione convertibile $x^4 + 3ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4 = o$. Si divida questa equazione per x^2, onde sia $x^2 + \frac{a^4}{x^2} + 3a \cdot \left(x + \frac{a^2}{x}\right) + 2a^2 = o$:

e ponendo $x + \frac{a^2}{x} = y$, e sostituendo, sarà $y^2 - 2a^2 + 3ay + 2a^2 = o$, cioè $y^2 + 3ay = o$; da cui ricavo $y = o$, $y = -3a$, e per ciò avremo $x + \frac{a^2}{x} = o$, $x + \frac{a^2}{x} = -3a$. Dalla prima di queste equazioni ricavo $x = \pm\sqrt{-aa}$ immaginaria, e dalla seconda ottengo $x^2 + 3ax = -a^2$, cioè $x = -\frac{3a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$.

IX. Vengono presentemente in considerazione i binomii $x^m \pm a^m = o$, i quali risoluti danno

$x = \sqrt[m]{\mp a^m}$, o sia $x = a\sqrt[m]{\mp 1}$; onde se troveremo tutte la radici *mesime* dell' unità tanto positiva, quanto negativa, potremo assegnare eziandio tutte le radici di qualsivoglia equazione, che non contenga più di due termini; e per ciò la soluzion completa di queste equazioni dipende dalla soluzione delle due $x^m + 1 = o$, $x^m - 1 = o$. Sia m un numero composto uguale a pq; sarà $x^{pq} + 1 = o$, $x^{pq} - 1 = o$; e se suppongasi $x^q = y$, sarà, fatta la sostituzione, $y^p \pm 1 = o$. Supponiamo ora che sieno noti i valori di y, cioè tutte le radici *pesime* dell' unità, una delle quali sia φ; sarà $x^q = \varphi$, e perciò $x = \sqrt[q]{\varphi}$; intanto se si moltiplichi $\sqrt[q]{\varphi}$ per tutte le radici *quesime* dell' unità, una delle quali sia π; sarà $x = \pi\sqrt[q]{\varphi}$ (15). Adunque dipendendo le radici *quesime* dell' unità dalla soluzione dell' equazione $z^q - 1 = o$, chi troverà le radici di $y^p \pm 1 = o$, $z^q - 1 = o$, avrà

avrà trovato ancora le radici di $x^{pq} \pm 1 = o$. E di quì ſi conoſce, che per avere la ſoluzione dell' equazione $x^m \pm 1 = o$, baſta trovare queſta ſoluzione nel caſo che m ſia un numero primo. Tutti i numeri primi ſono diſpari eccettuatone il 2: in queſto ſecondo caſo ſarà l' equazione $x^2 - 1 = o$, ed $x = 1$, $x = -1$; come ancora $x^2 + 1 = o$, ed $x = \sqrt{-1}$, $x = -\sqrt{-1}$: e nel primo caſo ſe l' equazione ſia $x^m + 1 = o$, poſto $-x$ in luogo di x, l' equazione ſi cangia in $x^m - 1 = o$. Reſta pertanto che vediamo come ſi poſſano ritrovare tutte le radici dell' equazione $x^m - 1 = o$, nella ſuppoſizione che m ſia un numero primo diſpari.

X. Il binomio $x^m - 1 = o$ è una equazion convertibile, in cui i coefficienti A, B &c. ſono zero: una delle ſue radici è $x = 1$; dunque ſarà diviſibile per $x - 1 = o$: ed eſeguita la diviſione, ſi avrà un' altra equazione convertibile $x^{m-1} + x^{m-2}$ &c. $+ x^2 + x + 1 = o$, per lo num. 5. Se ora faremo $x + \frac{1}{x} = y$, e mediante queſta equazione ſe elimineremo la x, avremo, come ſi è fatto vedere num. 8., una nuova equazione coll' incognita y, del grado $\frac{m-1}{2}$, la quale ſarà riſolubile, purchè il grado $\frac{m-1}{2}$ ſia minore del quinto grado, oſſia $m < 11$. Donde ſegue, che coll' eſpoſto metodo poſſiamo dare la ſoluzione completa delle equazioni $x^3 - 1 = o$, $x^5 - 1 = o$, $x^7 - 1 = o$; e quindi ancora di tutte le altre della forma $x^m \pm 1 = o$, purchè ſia $m = 3^\varphi \times 5^\pi \times 7^\mu$ (num. preced.); e perchè ſappiamo ancora riſolvere l' equazione $x^2 \pm 1 = o$, potremo eziandio riſolvere tutte quelle della medeſima forma, purchè l' eſpol'esponente sia un numero composto della seguente maniera, cioè $m = 2^{\lambda} \times 3^{\varphi} \times 5^{\pi} \times 7^{\mu}$, le lettere greche esprimendo numeri intieri e positivi, e potendo denotare ancora il zero. Si vogliano per esempio le cinque radici dell'equazione $x^5 - 1 = 0$. Una di queste è l'unità: e divisa poi l'equazione per $x - 1$, nascerà $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$: pongo $y = x + \frac{1}{x}$, ed avremo $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$: e dividendo la predetta nuova equazione per x^2, avremo $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0$; dunque sostituendo, $y^2 + y - 1 = 0$; donde si trae $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$: ma è $y = x + \frac{1}{x}$, e però $x^2 - xy + 1 = 0$; dunque $x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$: collocando successivamente in vece di y i suoi valori dianzi trovati, sarà $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{-10 - 2\sqrt{5}}{16}} =$

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} \cdot \sqrt{-1}, \text{ ed}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{-10 + 2\sqrt{5}}{16}} =$$

$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}} \cdot \sqrt{-1}$. Ecco dunque determinate le cinque radici quinte dell'unità. Le radici seste, e settime dell'unità dipendono dalla risoluziozione dell' equazione del terzo grado: le ottave, none, e decime non conducono ad equazioni più alte del quarto grado; le undecime poi richiedono la risoluzione dell' equazioni del quinto grado, che non si sà fin ora, generalmente parlando, eseguire. Quantunque non si abbia una generale risoluzione analitica del binomio $x^m + a^m = o$, sappiamo però esprimere tutte le sue radici mediante la divisione della periferia del Circolo in parti uguali, come faremo vedere nel Capo 10.

XI. Dalla soluzione completa delle equazioni di due soli termini, ossia de' binomii, dipende la soluzione completa di moltissime altre equazioni, le quali ne contengano un maggior numero: tali sono le seguenti

$$x^{2m} + A x^m + B = o,$$
$$x^{3m} + A x^{2m} + B x^m + C = o,$$
$$x^{4m} + A x^{3m} + B x^{2m} + C x^m + D = o.$$

Imperocchè posta $x^m = y$, e sostituendo, sarà

$$y^2 + A y + B = o,$$
$$y^3 + A y^2 + B y + C = o,$$
$$y^4 + A y^3 + B y^2 + C y + D = o,$$

le quali si sanno risolvere, e perciò si sanno determinare i valori di y; quindi chiamato qualunque di essi $= \varphi$, avremo $\varphi = y = x^m$, che è una equazione a due termini, da cui ricavasi $x + \pi \sqrt[m]{\varphi}$ (num. 9.), espressa per π una qualunque delle radici *mesime* dell' unità. Dunque si sanno trovare tutti i valori di x delle equazioni sopra esposte.

XII. Dalla compiuta risoluzione dei binomii dipende ancora la soluzione compiuta delle equazioni, che hanno

no la seguente forma $y^m - m a^2 y^{m-2} +$
$\frac{m.(m-3)}{2}.a^4 y^{m-4} - \frac{m.(m-4).(m-5)}{2.3}.a^6 y^{m-6} +$
$\frac{m.(m-5).(m-6).(m-7)}{2.3.4}.a^8 y^{m-8}$ &c. . . . $+ b^m = o$,
in cui a^2, e b^m possono essere quantità positive, e negative come si vuole. Si faccia $x + \frac{a^2}{x} = y$, e con questa equazione eliminata la y dalla proposta, ed introdotta la x, si avrà (num. 8.) $x^m + \frac{a^{2m}}{x^m} + b^m = o$, cioè $x^{2m} + a^{2m} + b^m x^m = o$, ed

$x = \pi \times (-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}})^{\frac{1}{m}}$, denotando π una qualunque delle radici *mesime* dell' unità: ma si è supposto $y = x + \frac{a^2}{x}$; dunque $y =$

$$\frac{\pi \times (-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}})^{\frac{1}{m}} + a^2}{\pi \times (-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}})^{\frac{1}{m}}}$$

: e moltiplicando il numeratore, e denominatore della frazione per

$(-\frac{b^m}{2} - \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}})^{\frac{1}{m}}$, ed inoltre il numeratore per

per π^m, il che si può fare salva l' uguaglianza, per essere $\pi^m = 1$; avremo finalmente

$$y = \pi \times \left(-\frac{b^m}{2} + \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}\right)^{\frac{1}{m}} +$$

$\pi^{m-1} \times \left(-\frac{b^m}{2} - \sqrt{\frac{b^{2m}}{4} - a^{2m}}\right)^{\frac{1}{m}}$. Avvertasi, che una parte del valore di y viene moltiplicata per π, e l'altra per π^{m-1}, perchè queste due porzioni moltiplicate insieme deono dare a^2, corrispondendo una ad x, e l' altra ad $\frac{a^2}{x}$, che moltiplicate insieme danno a^2. Per la stessa ragione il segno + valerà quando a^2 è positiva; ed il segno — quando a^2 sia negativa, ed m numero pari; imperciocchè in questo secondo caso, per essere $y = x - \frac{a^2}{x}$, il prodotto di queste due parti sarà $-a^2$, a cui dee essere uguale il prodotto delle due porzioni della radice y: e comecchè ciò non si può ottenere se non prendasi il segno negativo; perciò è chiara la ragione di quanto asserimmo. Questi valori della y, quantunque non si possano tutti esprimere algebraicamente, si possono ciò non ostante rappresentare tutti mediante i seni, e coseni circolari, ed iperbolici, come vedremo nel Capo 9. di questo Libro.

XIII. Il Signor Bezout in due Memorie inserite negli Atti dell' Accademia di Parigi per l' anno 1762 e 1765 dà un' idea di un metodo generale per tentare la risoluzione dell' equazioni d' ogni grado, che pongo sotto l' occhio nel seguente esempio. Vogliansi inveſtigare le radici dell' equazione del terzo grado $x^3 + px + q = o$. A queſto fine ſi formino l' equazioni $y^3 = 1$, $x = ay + by^2$: mediante queſte due equazioni ſi elimini la y, il che ſi potrà ottenere, ſe non altrimenti, coi metodi del Capo terzo di queſto Libro. Si moltiplichi pertanto la ſeconda per y, indi per y^2, e ſi ponga in vece di y^3 il ſuo valore $= 1$ dedotto dalla prima; avremo queſte altre due equazioni $xy = ay^2 + b$, $xy^2 = a + by$: ſe ora colle due equazioni $x = ay + by^2$, $xy = ay^2 + b$ ſi trovino i valori di y e di y^2 (16), e queſti ſi ſoſtituiſcano nell' altra $xy^2 = a + by$; ſi avrà $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = o$, equazione, la quale paragonata alla propoſta, ci ſomminiſtra $3ab = -p$, $a^3 + b^3 = -q$, da cui eliminando b, naſce $a^6 + qa^3 - \frac{p^3}{27} = o$., dalla quale equazione del ſeſto grado, che ſi riduce (Lib. 1. Cap. 5. num. 14.) ad una di due termini del terzo, ſi potranno facilmente ricavare i valori di a (Lib. 8. Cap. 5. num. 9.). Chiamiſi ϕ uno dei valori di a dedotto dalla predetta equazione, e μ il valore corriſpondente di b dedotto dall' equazione $3ab = -p$; ſi avrà $x = \phi y + \mu y^2$, nel quale valore di x ſoſtituendo ſucceſſivamente i tre valori dell' unità ricavati dall' equazione $y^3 - 1 = o$, ſi conſeguiranno le tre cercate radici dell' equazion propoſta. Da queſt' eſempio ſi può abbaſtanza comprendere come tal metodo ſi debba applicare all' equazioni dei gradi ſuperiori. Avvertaſi per altro, che l' equazioni, le quali ſervono a definire le indeterminate a, b, c &c. aſcendono generalmente ad un grado maggiore di quello della propoſta: e ſebbene credano alcuni, che la loro ſoluzione non racchiuda, ſe non ſe la difficoltà de' gradi inferiori a quello della propoſta medeſima; pure ciò non è ſtato per anco dimoſtrato con tutto il rigore, ne ſi è fatta cononoscere la maniera di conseguire il lor abbassamento: oltredicchè i calcoli riescono sommamente lunghi e complicati, da scoraggire qualunque paziente Analista. Si potranno per altro con questo metodo risolvere le equazioni superiori al quarto grado, se non generalmente, almeno in moltissimi casi particolari di qualche estensione, come si raccoglie dalle citate memorie del Signor Bezout.

XIV. Havvi ancora un altro metodo per tentare la soluzione dell' equazioni di qualunque grado mediante alcune equazioni, che si chiamano *sussidiarie*; si veda l' andamento di questo metodo nell' esempio, che segue. Sia proposta l' equazione del quarto grado

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + aaxx &- a^2bx - a^3b = 0. \\ - abxx & \end{aligned}$$

Si prendano due equazioni sussidiarie del secondo grado $xx + yx + u = 0$, $xx + sx + z = 0$, nelle quali le quantità y, u, s, z sono quantità indeterminate, da determinarsi nel progresso di questo calcolo: si moltiplichino l' equazioni sussidiarie, onde sia

$$\begin{aligned} x^4 + yx^3 + {} & ux^2 + usx + zu = 0: \\ + sx^3 + {} & syx^2 + zyx \\ + {} & zx^2 \end{aligned}$$

ciascun dei termini di quest' equazione si confronti col suo corrispondente dell' equazion proposta; e dal paragone dei secondi termini nascerà $s = a - y$; dal paragone degli ultimi avremo $z = -\frac{a^3b}{u}$; da quello de' quarti $zy + us = -a^2b$: finalmente si sostituiscano in questa i valori s, z, e si avrà l' equazione tra y, ed u, cioè $y = \frac{au^2 + a^2bu}{uu + a^3b}$. Dovendo essere $zu = -a^3b$, converrà che z, ed u sieno due divisori di $-a^3 b$; e di più deono essere di secondo grado, perchè l'equazioni sussidiarie sono di secondo grado. Tutti i divisori di secondo grado dell' ultimo termine sono $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$. Fingiamo $u = ab$; sarà $y = \frac{2ab}{a+b}$; adunque una delle equazioni sussidiarie sarà $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = o$: ma comecchè tentata la divisione dell' equazion proposta per questa sussidiaria non riesce; perciò questa equazione sussidiaria è inutile. Si prenda l' altro divisore $-ab$, a cui fatta eguale la u, si troverà $y = o$, e l' equazione sussidiaria sarà $xx - ab = o$: con questa divisa l' equazione proposta, avremo per quoto $xx + ax + aa = o$; dunque l' equazion data si risolve nelle due $xx - ab = o$, $xx + ax + aa = o$. Se avessimo preso $u = aa$, si sarebbe trovato $y = a$, e la formola sussidiaria sarebbe $xx + ax + aa = o$, per cui divisa la proposta equazione, nascerebbe il quoto $xx - ab = o$. Se poi tentati tutti i divisori la divisione non riesca, l' equazione, almeno con questo metodo, non sarà risolubile. Se si voglia schivare la divisione, si determinino i valori di y, s, z col mezzo di u, e si collochino nelle equazioni sussidiarie: se queste moltiplicate insieme daranno l'equazion proposta, avremo ottenuto l' intento; altrimenti si dovranno tentare altri divisori. Ma con maggior facilità si potrà fare quest'esame coll'ajuto dell'equazione $u + sy + z = aa - ab$, di cui non si è fatto uso alcuno, e che nasce dal paragone del terzo termine dell' equazion proposta col terzo dell' equazione nata dalle sussidiarie fra loro moltiplicate. Se i valori adunque di u, y, s, z, messi nella predetta equazione la renderanno identica, serviranno essi

essi alla desiderata risoluzione : al contrario, saranno inutili. La risoluzione dell' equazioni del quinto grado si può tentare con due sussidiarie, una del secondo, e l'altra del terzo: quella del sesto grado si può tentare con due del terzo, o con una del secondo, e l' altra del quarto; ma nei gradi superiori il calcolo riesce intrigatissimo, e spesso conviene risolvere delle equazioni di alto grado; e perciò l'utilità di questo metodo è dentro certi limiti ristretta.

XV. Il Signor Dottore Malfatti Professore di Matematica nell' Università di Ferrara in una dotta Dissertazione, che si contiene nel Tomo quarto degli Atti dell' Accademia di Siena, finge queste formole

$x + m\sqrt{f} = o$, $x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = o$, $x + m\sqrt[4]{f^3} + n\sqrt[4]{f^2} + p\sqrt[4]{f} = o$, e col metodo dei reciproci manfrediani libera le medesime dai radicali; il che si potrebbe ottenere ancora coi metodi insegnati nel Capo terzo, donde nasce $x^2 - m^2 f = o$, $x^3 - 3mnfx + m^3 f^2 + n^3 f = o$ &c. (le specie m, n, p, f in queste formole canoniche sono quantità indeterminate, che si determinano in progresso). Prende in seguito l' equazioni generali di secondo, terzo, e quarto grado, e le confronta colle canoniche corrispondenti, ugualiando termine a termine, e viene con ciò a determinare le specie m, n, p, rimanendo sempre arbitraria la f, che la suppone per maggior comodo eguale all' unità: e comecchè per determinare le sopradette specie gli occorre sciogliere equazioni inferiori alle proposte; quindi felicemente ci dà la risoluzione generale delle equazioni fino al quarto grado. Applicando poi questo metodo ai gradi superiori, si incontrano per determinare le specie m, n, p &c. equazioni superiori alla proposta, e spesso indeprimibili: ciò non ostan-

se,

te, quando queste equazioni sono reducibili a gradi inferiori, somministrano la risoluzione delle equazioni proposte. Con questo metodo il lodato Signor Dottore perviene alla risoluzione delle equazioni del quinto grado in casi di molta estensione. Il metodo da noi esposto nel Capo 4. di questo Libro per tentare la risoluzione dell'equazioni in fattori razionali di qualunque grado può servire, come ciascuno facilmente comprenderà, a tentare la risoluzione in fattori ancora irrazionali. Il Signor Waring nelle sue Miscellanee Analitiche credeva d'avere generalmente risolute l'equazioni di quinto, e sesto grado: ma quest' Uomo, benchè grande, fu deluso da un sottilissimo paralogismo. In una Copia del suo Libro, che mandò in dono alla nostra Accademia di Bologna, si trova di sua mano corretto questo errore. (17).

CAPO VI.

Delle Somme, e dei Termini generali delle Serie.

I. La *serie* altro non è, che una congerie di numeri, o di quantità, che si succedono con qualche legge: tale è 1, 2, 3, 4, 5 &c., ovvero 1, 2, 4, 8 &c., nella prima delle quali i numeri si succedono con proporzione aritmetica, e nella seconda con proporzione geometrica.

II. La lettera n in appresso disegna il numero dei termini della serie. *Il termine generale* d'una serie è una funzione di n (13), in cui posti successivamente i numeri naturali 1, 2, 3, 4 &c., nascono i termini della serie: per questa ragione $6n - 5$ è il termine ge-

ne-

nerale della ferie 1, 7, 13, 19, &c. *Somma generale* d' una ferie è una funzione di n, in cui posto in vece di n un numero intero, si ottiene la somma di tanti termini, quante unità sono in questo: per tale ragione $3n^2 - 2n$ è la somma generale della predetta serie.

III. Sia S la somma dei termini n, e la somma dei termini $n - 1$ sia s; sarà $S - s = t$, chiamato t il termine generale (16).

IV. Lo scopo principale, che quì ci prefiggiamo è di trovare la somma generale di una serie, dato il suo termine generale. Disperando di sciogliere questo problema direttamente, ed universalmente, ci proponiamo l' inverso incomparabilmente più facile a risolversi, cioè, trovare in termine generale di una serie, data la somma generale: con questo metodo determiniamo la relazione, che passa tra il termine, e la somma generale di più serie.

V. Dò principio dalla serie, la somma generale di cui ha questa semplicissima forma, cioè An. Essendo $S = An$, in vece di n scritto $n-1$, sarà $s = An - A$, ed $S - s = t = A$; dunque il termine generale della nostra serie è A, e perciò la serie sarà A, A, A, A &c.; dunque a rovescio, la serie, che ha per termine generale la costante A, avrà per somma generale An.

VI. Sia la serie della somma generale $S = An + Bn^2$: in vece di n vi si collochi $n - 1$, e sarà $s = An - A + Bn^2 - 2Bn + B$, ed $S - s = 2Bn + A - B = t$. Da questo termine generale si forma la seguente serie divisa in due

A, A, A, A, A, A &c.
B, $3B$, $5B$, $7B$, $9B$, $11B$ &c.

La superiore contiene termini uguali: l' inferiore è una

una serie di termini, che crescono secondo la progressione dei numeri dispari; e tutta è una progressione aritmetica colla differenza dei termini $= 2B$. A rovescio adunque, una serie, che ha per termine generale $A - B + 2nB$, avrà per somma generale $An + Bn^2$.

VII. La somma generale del primo termine dee essere uguale al termine stesso; adunque posta l' unità nella somma, e nel termine generale in vece di n, si otterranno due quantità uguali; onde sarà in questo caso $A - B + 2nB = An + Bn^2$, come in realtà lo è. Alle volte ciò non succede, e allora è segno, che alla somma generale si dee aggiungere, o togliere una quantità costante, che verrà determinata dalla differenza delle due predette formule, postavi in vece di n l' unità (19).

VIII. Si abbia ora una serie, le differenze di cui sieno costanti, per esempio 3, 7, 11, 15, 19 &c., che ha la differenza 4. Per ritrovare il termine generale si operi così: si prenda il termine generale $A - B + 2Bn$, in cui posto 1 in vece di n, sarà $A - B + 2B = A + B$: questo si ponga uguale a 3, primo termine della serie data, onde sia $A + B = 3$: di poi si ponga 2 in vece di n, e ciò che risulta si ponga eguale a 7, onde sia $A + 3B = 7$: da queste due equazioni si determinerà subito $A = 1$, $B = 2$; quindi il termine generale $A - B + 2Bn$ per la nostra serie diventa $4n - 1$, e la somma generale $n + 2n^2$.

IX. Collo stesso metodo il termine generale della serie, la cui somma generale sia $An + Bn^2 + Cn^3$, si ritrova $A - B + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2$, dal qual termine generale nasce la seguente serie, che divido in tre

A,

A, A, A, A, A &c.
B, $3B$, $5B$, $7B$, $9B$ &c.
C, $7C$, $19C$, $37C$, $61C$ &c.

La prima ha i termini uguali: la seconda ha i termini in progressione aritmetica: la terza è tale, che prese le differenze dei termini prossimi, e poi presa la differenza delle differenze, si trova questa costante, ed uguale a $6C$; la quale proprietà per necessità converrà ancora a tutta la serie risultante dalle tre.

X. Sia ora la serie 9, 13, 21, 33, 49 &c. colle differenze seconde costanti $= 4$. Si uguaglino i tre primi termini di questa col termine generale $A - B + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2$: postovi in vece di n successivamente 1, 2, 3, nasceranno tre equazioni, con cui si determinerà $A = 8 + \frac{1}{3}$, $B = o$, $C = \frac{2}{3}$; onde nel caso il termine generale sarà $9 - 2n + 2n^2$, e la somma $= \left(8 + \frac{1}{3}\right) . n + \frac{2}{3} n^3$.

XI. Per la serie della somma generale $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ si trova il termine generale $A - B + 2Bn + C - 3Cn + 3Cn^2 - D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3$. Questa serie ha le differenze terze costanti.

XII. Da questo andamento si inferisce la soluzione dei due seguenti problemi: 1°. Sia una serie le cui differenze m sieno costanti, per esempio le terze, ritrovare il termine generale. Si prenda la formula $A + Bn + Cn^2 + Dn^3$ &c., troncandola dove n è alzata a terza potestà, perchè si tratta delle differenze terze; dovendosi il troncamento fare dove l' esponente di n è uguale ad m: poi si scriva successivamente 1, 2, 3, 4 in vece di n, onde si abbiano i quattro primi

 ter-

termini della formula canonica, i quali si uguaglino ai quattro primi termini della serie data; nasceranno da ciò quattro equazioni, per cui si determineranno le quattro indeterminate A, B, C, D, il valore di cui sostituito nella formula, si otterrà il termine generale della proposta serie. 2°. Dato un termine generale d'una serie colle differenze m costanti, ritrovare la somma. Si assuma la solita formula $An + Bn^2 + Cn^3$ &c., che si tronchi dove l'esponente massimo di n supera dell'unità l'esponente massimo di n nel termine generale dato: indi nella formula in vece di n si scriva $n - 1$, e la formula che nasce si sottragga dalla prima: si uguagli poi ciascun termine della formula residua con ciascun termine del dato termine generale; nasceranno tante equazioni quante indeterminate A, B, C &c.: queste verranno per quelle determinate: e sostituiti i valori loro nella prima formula $An + Bn^2 + Cn^3$ &c., si otterrà la somma che si voleva (20).

XIII. Vengo presentemente a discorrere di quelle serie, che hanno la somma generale espressa per una frazione, il numeratore, e denominatore di cui sieno due funzioni razionali di n: e specialmente di quelle serie, in cui la massima potestà di n sia la stessa tanto nel numeratore, quanto nel denominatore; le quali prodotte all'infinito, hanno la somma uguale ad una quantità finita. Comincio dalla serie, che ha per somma generale $\frac{Ln}{A + Bn}$. In questa in vece di n scrivo $n - 1$, acciocchè si abbia il termine generale

$$\frac{Ln}{A + Bn} - \frac{L.\overline{n-1}}{A + B.\overline{n-1}} = \frac{AL}{(A + B.\overline{n-1}).(A + Bn)}.$$

Se dunque con questo termine generale si formi una serie

ſerie, ſarà la ſomma generale di queſta $\frac{Ln}{A+Bn}$, la quale, poſta n infinita, ſi convertirà in $\frac{Ln}{Bn}$ (21), cioè in $\frac{L}{B}$ quantità finita.

XIV. Sia la ſomma generale d' una ſerie $\frac{Ln + Mn^2}{(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$. Si ſcriva al ſolito $n-1$ in vece di n; naſcerà una nuova formola, la quale ſottratta dalla prima, ci darà il termine generale $\frac{AL - AM - BLn - BMn + 2AMn}{(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$. Una ſerie adunque, che avrà queſto termine generale, avrà ancora la ſomma generale propoſta.

XV. La ſomma generale di una ſerie ſia $\frac{Ln + Mn^2 + Nn^3}{(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$: ſi ſcoprirà col metodo ſolito il ſuo termine generale

$$\frac{\begin{array}{l} AL - 2BLn + 3ANn^2 \\ -AM + 2AMn - 3BNn^2 \\ +AN - BMn - BMn^2 \\ - 3ANn \\ + BNn \end{array}}{(A+B.\overline{n-3}).(A+B.\overline{n-2}).(A+B.\overline{n-1}).(A+Bn)}$$

La ſerie adunque, che ha queſto termine generale, avrà quella ſomma.

XVI. Da queſto andamento ſi raccoglie chiaramente quali ſieno le condizioni delle noſtre ſerie, acciocchè ricevano la ſomma generale, la quale ſia finita, benchè la ſerie ſia infinita. Dee in primo luogo il termine generale avere per denominatore un prodotto di fattori, ciascun dei quali esprima una serie aritmetica, cosicchè la penultima cominci dal secondo termine dell' ultima, l' antipenultima dal secondo termine della penultima, e così in seguito: in secondo luogo la massima potestà di n nel numeratore non dee superar il numero dei fattori diminuito del due. Quando sieno nel termine generale tali condizioni, ecco la pratica per ritrovare la somma generale. Si finga una formula, il numeratore di cui sia $L\,n + M\,n^2 + N\,n^3$ &c., ed in cui l' esponente massimo di n sia uguale al numero dei fattori del termine generale meno l' unità; il denominatore poi di questa formula sia lo stesso che il denominatore del termine generale, toltovi il primo fattore. Questa formula sarà la somma generale. Per determinare poi L, M, N &c., in questa somma generale in vece di n si scriva $n - 1$, e questa nuova formula si sottragga dalla prima; avremo il termine generale canonico, il quale uguagliato, cioè termine per termine, al dato termine generale, nasceranno tante equazioni, quante indeterminate sono, per cui queste verrano determinate: e sostituito il loro valore nella formula della somma, si otterrà la somma ricercata (22).

XVII. Le serie che abbiamo fino adesso considerate non hanno la n in alcuno esponente, ne della somma, ne del termine generale, le quali si chiamano *algebraiche*, a distinzione di quelle, in cui la n ottiene il luogo di esponente, che si chiamano *esponenziali*, o *geometriche*: di queste brevemente dò l'idea.

XVIII. Sia $A\,K^n$ somma generale di una serie esponenziale. Per determinare il termine generale si ponga al solito $n - 1$ in vece di n: e sottratta la nuova formola dalla prima, si otterrà per termine generale

$A\,K^n$

$AK^n - AK^{n-1} = \frac{A.\overline{K-1}}{K} . K^n$ (23). Fatta $n = 1$ tanto nella somma, quanto nel termine generale, trovo la somma $= AK$, ed il termine primo $= AK - A$ disuguali, quando dovrebbero essere uguali; il che indica, la vera somma della serie, che ha per termine generale il già ritrovato, non essere AK^n, ma essere $AK^n - A$ (num.7.). Ciascun vede, che il termine generale ritrovato somministra qualunque serie geometrica, cioè che ha i termini in progressione geometrica qualunque, e perciò qualunque serie geometrica riceverà somma generale. Se $K = 1$, tutti i termini della serie, e la loro somma è uguale a zero. Se $K > 1$, la serie, ed i termini sempre crescono, talmente che fatta n infinita, K^n diventa infinita. Se $K < 1$, la somma sempre decresce, talmente che fatta n infinita, K^n diviene infinitamente picciola; e perciò essa somma sarà uguale a $-A$: questa viene negativa, perchè in questo caso il termine generale è pure negativo; onde se questo si prenderà positivo, la somma sarà $= A$. Sia ora il termine generale d' una serie geometrica $\frac{1}{3}.2^n$. Fatto il confronto col termine generale canonico, sarà $2^n = K^n$, e $2 = K$; e perciò $\frac{A.\overline{K-1}}{K} = \frac{A}{2}$, il quale per il confronto dee essere $= \frac{1}{3}$; dunque $A = \frac{2}{3}$; onde la somma generale sarà $\frac{2}{3}.2^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\overline{2^n - 1}$. (24).

XIX. Collo stesso metodo si ritrova, che la serie della somma generale $\overline{A+Bn}.K^n - A$ ha per termine ne generale $\frac{(A.\overline{K-1}+B+Bn.\overline{K-1}).K^n}{K}$. Queste serie si chiamano *algebraico-esponenziali*, perchè il loro termine generale è una formola algebraica moltiplicata per una esponenziale.

XX. *Serie ricorrenti* si dicono quelle, in cui il termine seguente è determinato dagli antecedenti moltiplicati per costanti. Se per stabilire il termine seguente si richiegga un antecedente, la serie si dice *ricorrente del primo ordine*: se si richieggano due, si dice *ricorrente del secondo ordine*: se tre, *del terzo* &c.. Così la serie 1, 1, 3, 7, 17 &c. è ricorrente del secondo ordine; perchè presi i due primi termini ad arbitrio, ciascuno dei seguenti è uguale ai due antecedenti, moltiplicati il primo per 1, il secondo per 2. Queste serie ricorrenti sono algebraico esponenziali: e lo farò vedere con un esempio. Sia la serie ricorrente 6, 4, $2+\frac{2}{3}$, $1+\frac{7}{9}$, &c., la quale si forma se pongasi il primo termine uguale a 6, e si moltiplichi per $\frac{2}{3}$ l' antecedente per avere il termine seguente. Si potrà adunque così esprimere la serie $6.\left(\frac{2}{3}\right)^0$, $6.\frac{2}{3}$, $6.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$, $6.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}$; onde il termine generale sarà $6.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2^n}{3^{n-1}}$, formula algebraico esponenziale (25). Chi desidera penetrare più oltre in queste materie veda le nostre Instituzioni, o il Libro delle serie del Conte Vicenzo Riccati.

CA-

CAPO VII.

Delle Frazioni continue.

FIno dal tempo del Sig. Ugenio si è fatto uso delle frazioni continue per esprimere in termini assai semplici il valore prossimo delle frazioni date. Comecchè presentemente questa teoria è in molto credito, e serve mirabilmente alla pratica delle approssimazioni; quindi sembrami non potermi dispensare dall'esporne brevemente i principii.

I. Sia a una quantità qualunque maggiore dell' unità, ma non esprimibile per un intiero razionale. Rappresenti μ l'intiero razionale più grande contenuto in a; sarà $a-\mu$ minore dell'unità, e però $\frac{1}{a-\mu}$ maggiore dell'unità. E' manifesto, che $\frac{1}{a-\mu}$, benchè maggiore dell'unità, non sarà esprimibile per un intiero razionale, se non nel caso, che essendo a una frazione razionale, fosse $a-\mu$ una frazione, il cui numeratore $=1$ (26).

Posto dunque che $\frac{1}{a-\mu}$ non sia esprimibile per intiero razionale, suppongasi $\frac{1}{a-\mu}=a'$, e rappresenti μ' l'intiero razionale più grande contenuto in a'; sarà $a'-\mu'$ minore dell'unità, e quindi $\frac{1}{a'-\mu'}$ maggiore dell'unità. Quì pure è chiaro, che $\frac{1}{a'-\mu'}$ non sarà esprimibile per un intiero razionale, se non nel caso, che essendo a' una frazione razionale, fosse $a'-\mu'$

una

una frazione, che avesse per numeratore l'unità.

Ora posto che $\frac{1}{a' - \mu'}$ non sia esprimile per un intiero razionale, fingasi $\frac{1}{a' - \mu'} = a''$, e rappresenti μ'' l'intiero razionale più grande contenuto in a''; sarà $a'' - \mu''$ minore dell' unità, e conseguentemente $\frac{1}{a'' - \mu''}$ maggiore dell' unità: e posto al solito che $\frac{1}{a'' - \mu''}$ non sia esprimibile per un intiero razionale, facciasi $\frac{1}{a'' - \mu''} = a'''$, e chiamisi μ''' l' intiero razionale più grande contenuto in a'''; e avrassi $a''' - \mu'''$ minore dell' unità, e però $\frac{1}{a''' - \mu'''}$ maggiore dell' unità.

Proseguendo avanti lo stesso discorso, si avrà $\frac{1}{a''' - \mu'''} = a^{\text{iv}}$, $\frac{1}{a^{\text{iv}} - \mu^{\text{iv}}} = a^{\text{v}}$, $\frac{1}{a^{\text{v}} - \mu^{\text{v}}} = a^{\text{vi}}$, &c., $\frac{1}{a^{p} - \mu^{p}} = a^{p+1}$.

II. Se la quantità a sarà irrazionale, siccome μ è razionale, sarà $\frac{1}{a - \mu}$, cioè a' irrazionale; onde essendo μ' razionale, sarà irrazionale anche $\frac{1}{a' - \mu'}$, cioè a'': e così via discorrendo; di maniera che è chiaro non potersi mai giungere ad una delle quantità $\frac{1}{a^{p} - \mu^{p}}$ maggiori dell' unità, che sia razionale. Da

ciò

ciò apparisce, che l'operazione indicata nel numero precedente non avrà giammai fine, e potrà proseguirsi in infinito.

III. Ma se a sarà quantità razionale, nel qual caso dovrà essere una frazione, giacchè si suppone, che non sia esprimibile per un intiero razionale (num. 1.); allora l'operazione sarà terminata, perchè si arriverà ad una delle quantità $\frac{1}{a^p - \mu^p}$ maggiori dell' unità, che sarà un intiero razionale; onde essendo $\frac{1}{a^p - \mu^p} = a^{p+1}$, e dovendosi prendere l' intiero razionale più grande contenuto in a^{p+1}, bisognerà prendere lo stesso a^{p+1}, e restando zero, l' operazione sarà finita.

In fatti supponiamo $a = \frac{b}{c}$, essendo b, c numeri intieri razionali. Pongasi, che si possa cavare c da b volte μ, e avanzi K; sarà $b = \mu c + K$, onde $a = \mu + \frac{K}{c}$, dove $\frac{K}{c}$ sarà quantità razionale, ma minore dell' unità. Sarà dunque per lo contrario $\frac{c}{K}$ maggiore dell' unità: e posto che K possa cavarsi da c volte μ', e avanzi K', onde sia $\mu' K + K' = c$; sarà $\frac{c}{K} = \mu' + \frac{K'}{K}$, e $\frac{K'}{K}$ sarà minore dell' unità; e perciò $\frac{K}{K'}$ maggiore dell' unità: e posto che K' possa cavarsi da K volte μ'', e avanzi K'', si avrà $\mu'' K' + K'' = K$, e $\frac{K}{K'} = \mu'' + \frac{K''}{K'}$; e così via discorrendo.

Ora si vede, che questa altro non è, che l' operazione, che si suol fare per trovare il massimo comun divisore dei due numeri b, c; la qual operazione, quando b, c sieno numeri razionali, come qui si suppone, si sa, che sempre conduce ad un residuo $= o$. Dunque si arriverà finalmente ad un residuo $K^{p+1} = o$, oltre il quale l' operazione non potrà continuarsi. Si vede ancora, che μ altro non è che l' intiero più grande contenuto in $\frac{b}{c}$, cioè in a, e $\frac{K}{c}$ l' avanzo $a - \mu$; onde $\frac{c}{K} = \frac{1}{a - \mu}$ è quello, che al num. 1. fu chiamato a': e similmente si vede, che μ' è l' intiero più grande contenuto in $\frac{c}{K}$, cioè in a', e $\frac{K'}{K}$ l' avanzo $a' - \mu'$; onde $\frac{K}{K'} = \frac{1}{a' - \mu'}$: e così di mano in mano. Se dunque deesi arrivar finalmente ad un avanzo $K^{p+1} = o$, si avrà $\frac{K^{p+1}}{K^p} = a^{p+1} - \mu^{p+1} = o$, cioè $a^{p+1} = \mu^{p+1}$: ma μ^{p+1} è numero intiero; dunque anche a^{p+1}, e quindi la quantità $\frac{1}{a^p - \mu^p} = a^{p+1}$ sarà un numero intiero, il quale sarà certamente razionale, supponendosi razionale la quantità stessa a.

IV. Ripigliando ora le formole del num. 1. abbiamo $\frac{1}{a - \mu} = a'$, onde $a = \mu + \frac{1}{a'}$: ma abbiamo $\frac{1}{a' - \mu'} = a''$, per-

percui $a' = \mu' + \frac{1}{a''}$; dunque $a = \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{a''}}$. Così

proseguendo a sostituire in luogo delle quantità a^p i loro valori cavati dalla formola $\frac{1}{a^p - \mu^p} = a^{p+1}$, si troverà $a = \mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \cfrac{1}{\mu^{iv} + \cfrac{1}{\mu^{v} + \cfrac{1}{\mu^{vi} + \&c.}}}}}}$

Così la quantità a sarà risoluta in una frazion continua, la qual frazione continua andrà in infinito ogni qual volta la quantità a sia irrazionale (num. 2.); sarà poi terminata, quando a sia quantità razionale (num. 3.).

V. Dalle formole del num. 1. abbiamo $a = \mu + \frac{1}{a'}$, $a' = \mu' + \frac{1}{a''}$, $a'' = \mu'' + \frac{1}{a'''}$, e generalmente $a^p = \mu^p + \frac{1}{a^{p+1}}$. Dunque il valor prossimo di a è μ, il valor prossimo di a' è μ', quello di a'' è μ'', e in generale quello di a^p è μ^p. Per tanto il primo valor prossimo della quantità proposta a sarà μ; che se prendendo il valor esatto di a, cioè $\mu + \frac{1}{a'}$, in luogo di a si sostituirà il suo valor prossimo μ'; si avrà un valor pros-

proſſimo, cioè $\mu + \frac{1}{\mu'} = \frac{\mu\mu' + 1}{\mu'}$: ſimilmente ſe ponendo il valor eſatto di a', cioè $\mu' + \frac{1}{a''}$, in luogo di a'' ſi adoprerà il ſuo valor proſſimo μ''; ſi avrà un terzo valore, anche più proſſimo di a, cioè $\mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu''}} = \frac{\mu''.(\mu\mu' + 1) + \mu}{\mu'\mu'' + 1}$;

e procedendo avanti con lo ſteſſo ordine, ſi avrà la ſeguente ſerie di valori di a ſempre più proſſimi, cioè

$$\mu\text{, o ſia } \frac{\mu}{1}$$

$$\frac{\mu'\mu + 1}{\mu'},$$

$$\frac{\mu''.(\mu'\mu + 1) + \mu}{\mu''\mu' + 1},$$

$$\frac{\mu'''.(\mu''.\overline{\mu'\mu + 1} + \mu) + \mu'\mu + 1}{\mu'''.(\mu''\mu' + 1) + \mu'},$$

$$\frac{\mu^{iv}.(\mu'''.\overline{\mu''.\overline{\mu'\mu + 1} + \mu} + \mu'\mu + 1) + \mu''.(\mu'\mu + 1) + \mu}{\mu^{iv}.(\mu'''.\overline{\mu''\mu' + 1} + \mu') + \mu''\mu' + 1}$$

&c.

VI. Avvertaſi in primo luogo, che il denominatore μ' della ſeconda frazione, o ſia del ſecondo valor proſſimo, è più piccolo di quello che dovrebbe eſſere; dunque queſto ſecondo valore è più grande di a: il denominatore del terzo valore è più grande del dovere; dunque queſto valore è più piccolo di a: ſimilmente il quarto valore ſi ritroverà maggiore di a: il quin-

quinto minore: e generalmente i valori in sede dispari sono minori, e quelli in sede pari sono maggiori di a (27.). In secondo luogo si osservi l' ordine, con cui questi valori camminano dopo i due primi, e si vedrà, che generalmente il valore *pesimo* consiste in una frazione, di cui il numeratore si forma moltiplicando il numero μ^{p-1} per il numerator del valore precedente, cioè $\overline{p-1}$-*esimo*, e aggiungendo al prodotto il numeratore del valore antiprecedente, cioè $\overline{p-2}$-*esimo*; il denominatore poi si forma nella stessa maniera, cioè moltiplicando lo stesso numero μ^{p-1} per il denominatore del valor precedente, e aggiungendo al prodotto il denominatore del valor antiprecedente. Per la qual cosa, fatte le seguenti denominazioni

$$
\begin{array}{ll}
p = \mu & q = 1 \\
p' = \mu' p + 1 & q' = \mu' \\
p'' = \mu'' p' + p & q'' = \mu'' q' + q \\
p''' = \mu''' p'' + p' & q''' = \mu''' q'' + q' \\
p^{iv} = \mu^{iv} p''' + p'' & q^{iv} = \mu^{iv} q''' + q'' \\
p^{v} = \mu^{v} p^{iv} + p''' & q^{v} = \mu^{v} q^{iv} + q''' \\
\&c. & \&c.,
\end{array}
$$

i valori prossimi di a trovati al numero precedente verranno espressi per le frazioni della seguente serie

$$\frac{p}{q},\ \frac{p'}{q'},\ \frac{p''}{q''},\ \frac{p'''}{q'''},\ \frac{p^{iv}}{q^{iv}},\ \frac{p^{v}}{q^{v}},\ \frac{p^{vi}}{q^{vi}},\ \frac{p^{vii}}{q^{vii}},\ \frac{p^{viii}}{q^{viii}},\ \frac{p^{ix}}{q^{ix}}\ \&c.$$

VII. Quando a sia quantità razionale, siccome la frazione continua, in cui si risolve, è terminata (num. 3.), così si arriverà finalmente ad una frazione $\frac{p^{p}}{q^{p}}$ nella ritrovata serie, che sarà l' ultima, e precisamente eguale alla proposta quantità a: ma quando sia a quantità

tità irrazionale, la frazione ultima $\frac{p^{\varrho}}{q^{\varrho}}$ perfettamente eguale alla medesima quantità proposta a non s' incontrerà mai in quella serie; e sarà la serie stessa infinita, andando all' infinito la frazion continua, in cui la proposta quantità a si risolve (num. 4.).

VIII. Essendo intieri tutti i numeri μ', μ'', μ''', μ'''', &c., e positivi, è chiaro dall' inspezione sola dei valori di p, p', p'', p''', &c., e di q, q', q'', q''', &c. (num. 6.), che tanto i numeratori, quanto i denominatori delle frazioni ritrovate sono intieri, e vanno sempre più crescendo.

IX. Sottraggasi ora ciascuna frazione dalla sua seguente, e si avrà

$$\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{p'q - pq'}{q'q}$$

$$\frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \frac{p''q' - p'q''}{q'q''}$$

. . . .

$$\frac{p^{\varrho}}{q^{\varrho}} - \frac{p^{\varrho-1}}{q^{\varrho-1}} = \frac{p^{\varrho}q^{\varrho-1} - p^{\varrho-1}q^{\varrho}}{q^{\varrho-1}q^{\varrho}}$$

$$\frac{p^{\varrho+1}}{q^{\varrho+1}} - \frac{p^{\varrho}}{q^{\varrho}} = \frac{p^{\varrho+1}q^{\varrho} - p^{\varrho}q^{\varrho+1}}{q^{\varrho}q^{\varrho+1}} :$$

ma (num. 6.) $p^{\varrho+1} = \mu^{\varrho+1}p^{\varrho} + p^{\varrho-1}$, e $q^{\varrho+1} = \mu^{\varrho+1}q^{\varrho} + q^{\varrho-1}$; dunque sostituiti questi valori nel numeratore dell' ultima differenza, si avrà $\frac{p^{\varrho+1}}{q^{\varrho+1}} - \frac{p^{\varrho}}{q^{\varrho}} = \frac{p^{\varrho-1}q^{\varrho} - p^{\varrho}q^{\varrho-1}}{q^{\varrho}q^{\varrho+1}}$, dove il numeratore è quello stesso della differenza precedente con i soli segni mutati. Dunque ogni differenza ha lo stesso numeratore col solo divario del se-

ſegno, che procede alternativamente. Ma il numerator della prima differenza, ponendo in luogo di p, q, p', q' i loro valori (num. 6.), è $\mu' p + 1 - \mu' \mu$: e ponendo di nuovo in luogo di p il ſuo valore μ, è $\mu' \mu + 1 - \mu' \mu$. Dunque i numeratori delle differenze ſuddette ſono alternativamente 1, -1. Saranno pertanto eſſe differenze

$$\frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qq'}$$

$$\frac{p''}{q''} - \frac{p'}{q'} = \frac{-1}{q'q''}$$

$$\frac{p'''}{q'''} - \frac{p''}{q''} = \frac{1}{q''q'''}$$

$$\frac{p^{iv}}{q^{iv}} - \frac{p'''}{q'''} = \frac{-1}{q'''q^{iv}}$$

. . . .

$$\frac{p^p}{q^p} - \frac{p^{p-1}}{q^{p-1}} = \frac{\pm 1}{q^{p-1}q^p},$$ dove + ha luogo quando l'eſponente p appartiene ad una frazione, che nella ſerie del num. 6. ſia in ordine pari; ha poi luogo — quando p appartiene ad una frazione poſta nella detta ſerie in ordine diſpari.

X. Di qui molte conſeguenze ſi deducono, che pongono ſempre più in chiaro la natura delle frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ &c. E primieramente appariſce, che generalmente $p^{p+1} q^p - p^p q^{p+1} = \pm 1$, ſervendo il ſegno +, o il ſegno — ſecondo che l'eſponente p appartiene ad una frazione poſta nella ſerie in ordine pari, o diſpari; che è lo ſteſſo che dire, ſecondo che l'eſponente p rappreſenta un un numero dispari, o un numero pari.

XI. Similmente si deduce, che la prima frazione è minore della seconda, ma la seconda maggiore della terza: e generalmente ogni frazione posta nelle serie in ordine dispari è minore della sua seguente, poichè sottratta dalla sua seguente, lascia una differenza positiva (num. 10.); e ogni frazione posta in ordine pari è della sua seguente maggiore, poichè sottratta dalla sua seguente, lascia una differenza negativa.

XII. Si deduce ancora, che ciascuna delle frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, &c. è espressa in termini minimi: perchè se alcuna di loro, come $\frac{p^p}{q^p}$, avesse un comun divisore dei suoi termini p^p, q^p, talche fosse $\frac{p^p}{q^p} = \frac{hm}{hn}$; si avrebbe il binomio $p^{p+1} q^p - p^p q^{p+1} = p^{p+1} hn - hm q^{p+1}$, il quale sarebbe divisibile per il fattore intiero h, e però non sarebbe più eguale all' unità, contro quello, che si è dimostrato al numero 10.

XIII. Inoltre essendo i numeri q, q', q'', q''' &c., come si è notato al num. 8., tutti intieri, e crescenti, è manifesto, che la serie delle differenze $\frac{1}{qq'}$, $\frac{1}{q'q''}$, $\frac{1}{q''q'''}$, &c. (num. 9.) è decrescente. Ritrovandosi adunque, per ciò che si è notato al num. 6., il vero valore di a fra due frazioni contigue, ne verrà per legittima conseguenza, che la differenza del vero valore di una qualunque frazione, per esempio $\frac{p''}{q''}$, sia minore di

$\frac{1}{q''q'''}$ che è la differenza fra $\frac{p''}{q''}$, e la contigua $\frac{p'''}{q'''}$ (num. 9.); onde le frazioni della serie $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ sono convergenti verso il vero valore dell'ultima, cioè verso a, a cui quelle frazioni di mano in mano si accostano.

XIV. Prese due frazioni contigue, per esempio $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, e trovata la loro differenza $\frac{1}{qq'}$, dovendo essere l'errore della frazione $\frac{p}{q}$ dal vero valore minore di $\frac{1}{qq'}$, ed essendo q' maggiore di q (num. 8.); sarà l'anzidetta differenza a più forte ragione minore di $\frac{1}{qq}$.

XV. Esposte già le principali cose intorno la natura delle frazioni continue, resta che ne vediamo l'uso applicato ad un esempio. Sia proposta la frazione $\frac{1200}{737}$, che non si può esattamente esprimere in termini minori, e si cerchino le frazioni in termini minori, che s'accostano il più che sia possibile al valor della proposta. Facciasi l'operazione, che si suol fare per trovare il comun divisore dei due termini della frazione; sarà dunque

1200	1	737
463	1	274
189	1	85
19	1	9
1	2	
	4	
	2	
	9,	

dove i quozienti notati 1, 1, 1, 1, 2, 4, 2, 9 sono (num. 3.) i termini μ, μ', μ'', μ''', &c. della frazion continua $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9}}}}}}}$

in cui si risolve la frazion proposta. Ma venendo alla formazione delle frazioni che si cercano, scrivo i numeri ritrovati

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 9, \\ \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{13}{8} & \frac{57}{35} & \frac{127}{78} & \frac{1200}{737}, \end{array}$$

e secondo il metodo del num. 6., noto sotto il primo una frazione, che abbia per numeratore esso numero, e per denominatore l'unità: sotto il secondo noto una frazione, che abbia per numeratore il prodotto di esso

esso secondo numero per il numerarore della prima frazione, aggiunta a questo prodotto l'unità, e per denominatore lo stesso secondo numero: sotto poi gli altri noto altrettante frazioni, delle quali formo il numeratore moltiplicando il numero scritto di sopra per il numeratore della frazion precedente, e aggiungendo al prodotto il numeratore dell'antiprecedente; e ne formo il denominatore moltiplicando parimente il numero scritto di sopra per il denominatore della frazion precedente, e aggiungendo al prodotto il denominatore dell'antiprecedente. Così restano formate le frazioni $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, $\frac{p'''}{q'''}$ &c., delle quali l'ultima è la proposta stessa; e ciascuna poi delle altre s'accosta al valore della proposta più di qualunque altra frazione, che abbia il denominatore minore del denominatore della sua seguente; e la differenza del valore di ciascuna frazione dal valor della proposta è minore del valore di una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore il prodotto del denominatore di quella frazione nel denominatore della frazione seguente: così $\frac{13}{8}$ differisce dal valore della proposta per una quantità minore di $\frac{1}{280}$. Le quali cose tutte sono abbastanza chiare per la teoria esposta (98).

CAPO VIII.

Si ritrovano i valori proſſimi delle radici irrazionali di qualunque Equazione.

I. DAl Capo ſeſto num. 12. di queſto terzo Libro appariſce, che qualſivoglia equazion determinata, in cui m ſia l'eſponente della maſſima poteſtà della incognita x, può riguardarſi come il termine generale di una ſerie, le cui differenze m ſieno coſtanti, ſuppoſto che x indichi il numero del termine della ſerie.

II. Data dunque un'equazione del grado m, facilmente ſi potrà trovare la ſerie, di cui eſſa ſi può riguardare come termine generale, ſenza aver biſogno di ſoſtituire in luogo di x tutti i termini della ſerie naturale 1, 2, 3, 4 &c., baſtando a queſto effetto ſoſtituirne ſolamente $m + 1$ preſi uno appreſſo l'altro, anche negativi ſe ſi vuole; imperciocchè con queſto ſolo numero di ſoſtituzioni ſi poſſono trovare nella ſerie, sì delle prime, come delle ſeconde, terze, ed ulteriori differenze, tanti termini, quanti baſtano a continuar ciaſcuna di queſte ſerie all'infinito da una parte, e dall'altra; e quindi ſi potrà continuare anche la ſerie ſteſſa, che naſce immediatamente dall'equazione riguardata come il ſuo termine generale.

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$$

-1	0	1	2
6			
12	18		
4	16	34	
-3	1	17	51

Sia

Sia a cagion d' esempio l' equazione del terzo grado $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$. La serie, di cui essa si può riguardare come termine generale, avrà le terze differenze costanti. Sostituiscansi dunque in luogo di x successivamente quattro numeri presi uno appresso l' altro nella serie dei numeri naturali, come $-1, 0, 1, 2$, e i risultati delle quattro sostituzioni saranno i numeri $-3, 1, 17, 51$. Per continuar questa serie sottraggasi ciascun dei quattro termini ritrovati dal suo seguente, e si avranno tre termini della serie delle loro prime differenze, cioè $4, 16, 34$. Si sottragga parimenti ciascun di questi tre termini dal suo seguente, e così si avranno due termini della serie delle seconde differenze, cioè $12, 18$. Sottragasi finalmente il primo di questi due termini dal secondo, e resterà un termine della serie delle terze differenze, cioè 6. Dovendo adunque nel caso nostro le differenze terze esser costanti, e trovandosi queste espresse pel numero 6, è manifesto, che la serie delle seconde differenze, della qual serie abbiamo già due termini, $12, 18$, continuata da una parte e dall' altra, sarà $-30, -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36$, &c. Nota poi questa serie, potrà subito continuarsi la serie delle prime differenze, giacchè di essa abbiamo tre termini, $4, 16, 34$, tra i due primi de' quali è differenza il termine 12 della serie delle seconde differenze; sarà pertanto la serie delle prime differenze $88, 58, 34, 16, 4, -2, -2, 4, 16, 34, 58, 88, 124$, &c. Ora sapendosi che la serie cercata ha i termini $-3, 1, 17, 51$, e sapendosi inoltre che i termini $4, 16, 34$ della serie delle prime differenze sono le differenze di questi quattro termini; cogli altri termini della serie delle prime differenze si caveranno gli altri termini della serie cerca-

ta

ta, tanto da una parte, quanto dall' altra; e così la serie cercata sarà — 199, — 111, — 53, — 19, — 3, 1, — 1, — 3, 1, 17, 51, 109, 197, 321 &c., nella quale sapendosi, che i termini — 3, 1, 17, 51 corrispondono ai supposti $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$; sarà facile il vedere qualsivoglia altro termine a qual supposto corrisponda.

III. Mediante queste serie i valori reali dell' incognita di una equazione, che non contenga nissun fratto, si ritrovano quando sono razionali; e quando sono irrazionali, si scoprono i limiti fra i quali sono compresi. Imperciocchè i valori razionali dell' incognita di un' equazione, che non contenga nissun fratto, devono essere intieri (Lib. 3. Cap. 4. num. 1.), e di più posti nell' equazione in luogo di x devono dar zero (Lib. 3. Cap. 1. num. 2.): ma la serie 1, 2, 3, 4 &c. prodotta indefinitamente da una parte e dall' altra contiene tutti gli intieri possibili, e però ancor quelli, che possono essere valori d' un' equazion proposta: e la serie, di cui l' equazione è termine generale, contiene tutti i valori dell' equazione, che provengono dal supporre x successivamente eguale a tutti i termini di quella serie 1, 2, 3, 4 &c. prodotta indefinitamente da una parte e dall' altra; dunque conterrà ancora tutti quei zero, che risultano dal supporre x eguale a ciascun di quei numeri intieri razionali, che possono essere valori della x medesima. Pertanto proposta un' equazione, che non abbia fratti, e trovata la serie, che ha per termine generale l' equazion medesima; quanti sono i termini di questa serie eguali a zero, tanti saranno i valori razionali diversi dell' incognita nell' equazion proposta; e questi non saranno altro, che quei supposti di x, dai quali nascono quei termini eguali a zero; onde se la serie non

avrà

avrà nissun termine eguale a zero, sarà segno, che la x nell' equazion proposta non ha valore alcuno razionale.

IV. Quanto ai valori reali irrazionali bisogna premettere la seguente avvertenza. Egli è costante, che una quantità non passa dall' essere positiva all' esser negativa, o al contrario, senza passar per zero, o per l'infinito (16. Lib.2.). Adunque se due quantità reali e finite, a, b, sono tali, che poste successivamente in luogo di x nell'equazione, facciano assumere all' equazione stessa due valori, A, B, uno positivo, e l' altro negativo; è chiaro, che se si intenderà fatto il passaggio dalla quantità a alla quantità b ordinatamente per gradi minimi, e si concepiscano sostituite in luogo di x successivamente tutte le quantità intermedie tra a e b, anche il valor dell' equazione, come quello, che dipende dal valore che si dà alla x, passerà ordinatamente per tutti i gradi intermedii tra A e B; e però passerà ancora per zero, o per l' infinito, giacchè A e B si suppongono uno positivo, e l'altro negativo, dall' uno all' altro dei quali abbiam detto non farsi mai il passaggio senza capitar nel zero, o nell' infinito. Ma supponendosi l' equazione senza fratti, è evidente non poter il suo valore diventare infinito, quando non si supponga infinita la x medesima; e dall' altra parte tutti i valori intermedii tra a e b sono finiti, perchè queste due quantità si suppongono finite; dunque resta, che il passaggio da A a B venga fatto pel zero. Quindi si potrà generalmente conchiudere, che quando due quantità reali e finite sono tali, che sostituite successivamente in luogo di x fanno assumere all' equazione due valori, uno positivo, e l' altro negativo; vi sarà sicuramente una quantità reale intermedia tra quelle due, che sostituita per x, farà assumere all' equale ſeconde, delle terze &c. differenze, ſino alla differenza coſtante affetto coſtantemente dallo ſteſſo ſegno +, o —, non è più ſperabile poter da quella parte incontrare nella ſerie dell' equazione verun termine eguale a zero, o verun paſſaggio di termini da + a —, o da — a +: perchè trovandoſi in ciaſcuna delle dette ſerie il termine ſuſſeguente coll' aggiugnere al precedente il termine, che gli corriſponde nella ſerie delle differenze ſeguenti; quando tali termini ſieno affetti del medeſimo ſegno, è manifeſto, che ſeguiteranno a riſultare ſempre termini affetti pure dello ſteſſo ſegno. Per contraria ragione nel continuar la ſerie dalla parte verſo cui i ſuppoſti di x calano, ſiccome l'operazione ſi fa a roveſcio, cioè ſottraendo dal termine precedente a quello che ſi vuole il termine, che nella ſerie delle differenze ſeguenti corriſponde al termine ſteſſo che ſi vuole; così ſarà tolta la ſperanza di incontrare nella ſerie dell' equazione termini eguali a zero, o paſſaggi di termini da + a —, o da — a + ſubito che ſi giunga ad avere per un medeſimo ſuppoſto di x il termine corriſpondente nella ſerie ſteſſa dell' equazione, e nella ſerie delle prime, e in quella delle ſeconde &c. differenze, fino alla differenza coſtante affetto alternativamente dal ſegno +, e dal ſegno —. Incontrando pertanto il primo di queſti caratteri, ſarà inutile continuare ulteriormente la ſerie dalla parte verſo cui i ſuppoſti di x creſcono: e incontrando il ſecondo, ſarà inutile continuarla dall' altra parte (29). Per ſerie adunque dell' equazione intenderemo d' ora innanzi quella parte di eſſa, che reſta compreſa fra detti due limiti: così la ſerie dell' equazione $x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ propoſta al numero ſecondo, ſarà $-3, 1, -1, -3, 1$, i cui termini corriſpondono a queſti ſuppoſti di x, cioè $-4, -3, -2,$

 $-1,$

— 1, *o*; imperciocchè a questo ultimo supposto trovasi nella serie dell' equazione corrispondere il termine positivo 1: nella serie delle prime differenze il termine positivo 16: in quella delle seconde differenze il termine pur positivo 18: e nella serie delle terze ed ultime differenze il termine ancor positivo 6; onde se si continuasse ulteriormente la serie dell' equazione da questa parte, si troverebbero termini positivi sempre maggiori. Al primo supposto poi di *x*, cioè — 4, nella serie dell' equazione corrisponde il termine negativo — 3; nella serie delle prime differenze il termine positivo 4: in quella delle seconde il negativo — 6: e in quella delle terze ed ultime differenze il termine positivo 6; e perciò continuando la serie dell' equazione dalla parte sinistra, si troverebbero termini negativi sempre maggiori.

VII. Quando nella serie dell' equazione i termini eguali a zero, e i passaggi de' termini da + a —, e da — a + non sono insieme tanti, quante debbon essere le radici dell' equazione, cioè quante sono le unità dell' esponente della massima potestà dell' incognita, non deesi subito conchiudere, che le altre radici non indicate dalla serie sieno immaginarie; perchè potrebbe essere, che uno stesso termine eguale a zero indicasse più radici razionali eguali tra di loro, e anche indicasse radici irrazionali comprese tra il supposto del zero, ed i supposti dei termini contigui; siccome uno stesso passaggio da + a —, e da — a + può indicare più radici reali irrazionali, o eguali tra di loro, o comprese tra gli stessi due limiti, cioè tra due medesimi numeri della serie naturale dei supposti di *x*.

VIII. Anzi avvertasi, che quando la serie abbia qualche termine minimo, dopo il quale i termini continuino ad ad essere affetti dello stesso segno, potrà accadere, che l'equazione abbia una, o più coppie di radici irrazionali, comprese fra il supposto di x che dà il minimo, e i supposti contigui. Per intendere la ragion di ciò, si consideri, che un'equazione, la quale non avesse che una sola radice reale, per quello, che è stato detto al num. 4., dovrebbe avere nella sua serie un solo passaggio da + a —, o da — a +, e questo pel zero, supposto che la detta radice reale fusse razionale (num. 3.). Che se si supponessero nell'equazione due sole radici reali, e queste molto diseguali, dovrebbero nella serie dell' equazione aversi due soli passaggi da + a —, e da — a +, e questi pel zero ogni qual volta le due supposte radici fossero razionali. Ora due soli passaggi da + a —, e da — a + non possono intendersi senza intendere, che tutti i termini della serie intermedii ai due passaggi sieno affetti dallo stesso segno, e questo diverso dal segno di cui sono affetti tutti gli altri termini della serie medesima. Dunque concependo che le supposte due radici diseguali dell' equazione cominciassero ad avvicinarsi l' una all' altra, e chiaro, che l' intervallo tra le due mutazioni del segno si andrebbe di mano in mano sminuendo, fin tanto che divenendo le due radici eguali tra di loro, o distanti l'una dall' altra d' una quantità minore dell' unità, il detto intervallo svanirebbe, e resterebbero i termini della serie affetti tutti dello stesso segno, se non che in luogo dell' intervallo svanito rimarrebbe un termine minimo se le supposte due radici fossero irrazionali, o un solo zero se fossero razionali (30).

IX. Quando si resta in dubbio se un minimo, che s' incontri nella serie dell' equazione, indichi qualche valore reale dell' incognita, o no: come pure quando si resta in dubbio circa il numero dei valori indicati da una stessa mutazione di segno ; si sostituisca nell' equazione in luogo dell' incognita x il minore di que' due supposti di x, che sono i limiti tra i quali cade il dubbio, accresciuto d' una frazione, il cui numeratore sia l' unità, e 'l denominatore sia una nuova incognita. Fatto ciò, se l'equazione data per la nuova incognita avrà dei valori reali maggiori dell' unità ; quanti sono questi valori, tanti saranno i valori della x compresi tra quei due limiti, tra i quali cadeva il dubbio : e se la nuova equazione non avrà alcun valore reale maggiore dell' unità, il che non potrà succedere se non nel caso del minimo ; si potrà esser certo, che il minimo, su di cui cadeva il dubbio, non indica valore alcuno reale della x. Imperocchè se tra i due limiti, su dei quali restava il dubbio, sono veramente compresi valori reali della x, devono questi essere maggiori del limite minore, e minori del maggiore ; e peró devono venir espressi ciascuno dal limite minore accresciuto d' una frazione vera ; onde supposto, che questa frazione abbia per numeratore l' unità, dovrà avere per denominatore una quantità maggiore dell' unità. Dunque la nuova incognita, che rappresenta questo denominatore, dee avere tanti valori reali maggiori dell' unità, quanti sono i valori reali della x compresi tra i suddetti limiti.

X. Per riconoscere poi se l' equazione data per la nuova incognita abbia radici maggiori dell' unità, e quante ne abbia, tengasi il metodo dato di sopra, cercando cioè i limiti dei valori della nuova incognita per cui è data l' equazione. Trovati poi questi limiti, verranno a restringersi i limiti dei valori della x nell' equazione proposta da principio, e così si verranranno ad avere i medesimi valori più prossimi ai veri. Anzi ripigliando la stessa operazione, e ripetendola di mano in mano nelle equazioni, che con questo metodo s'anderanno ritrovando, si potrà giugnere per ciascun valore della x ad un' approssimazione tanto grande, quanto si possa desiderare.

XI. Eccone l'esempio. Sia l'equazione $x^4 - 16x^3 + 81x^2 - 150x + 90 = 0$, di cui la serie è $6, 2, 18, 18, -10, -54, -78, -22, 198$, i quali termini corrispondono ai seguenti supposti di x, cioè $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Essendo in questa serie due mutazioni di segno, corrispondenti ai supposti $4, 5$, e $8, 9$, saremo sicuri, che fra $4, 5$, e $8, 9$ vi saranno due radici reali irrazionali. Quantunque per altro due sole sieno le mutazioni di segno, non devo conchiudere precipitosamente, che le altre due radici della proposta equazione sieno immaginarie; imperciocchè fra i medesimi limiti $4, 5$, e $8, 9$ potrebbero esistere ancora le altre due: anzi osservando che la serie dell'equazione ha un minimo, corrispondente al supposto 2, potrà accadere, che fra 2 e 1, e fra 2 e 3 si ritrovassero le predette radici. Per scoprire se ciò in realtà avvenga, tengo il seguente metodo, che applico soltanto ad indagare se fra l'1 e 2 vi sia alcuna radice; potendosi da ciò abbastanza comprendere come operare si debba negli altri casi. Pongo x eguale al limite minore più $\frac{1}{y}$, cioè $x = 1 + \frac{1}{y}$: e fatta la sostituzione nella proposta equazione, trovo $6y^4 - 32y^3 + 39y^2 - 12y + 1 = 0$, di cui la serie è $2, -27, -26, 65$, corrispondente ai supposti $1, 2, 3, 4$, in cui vi sono due mutazioni di segno, corrispondenti ai supposti $1, 2$, e $3, 4$. Dunque fra questi limiti vi sono due

due valori di y, che in conseguenza saranno maggiori dell' unità; e perciò conchiudo, che fra 1 e 2 vi sono due valori della x. Che se non avessi ritrovato alcun valore della y maggiore dell' unità, avrebbe ciò indicato, che fra 1 e 2 non vi era alcun valore della x; onde bisognerebbe cercarli fra il 2 ed il 3: e se non si trovassero fra questi limiti, converrebbe far l' esperimento fra il 4 e il 5, e l'8 e il 9. Voglio ora approssimarmi al minore dei due valori della x compresi fra 1 e 2: pongo a quest' effetto $y = 3 + \frac{1}{z}$, cioè uguale al limite maggiore accresciuto della frazione $\frac{1}{z}$, giacchè essendo $x = 1 + \frac{1}{y}$, il massimo valore di y darà il minimo di x: e fatta la sostituzione nell' equazione data per y, ritrovo $62z^4 - 6z^3 - 75z^2 - 40z - 6 = 0$, da cui ricavo la serie -65, 558, 4059, corrispondente ai supposti 1, 2, 3; dunque fra 1 e 2 vi è un valore di z maggior dell' unità. Se vogliasi seguitare l' approssimazione, si ponga $z = 1 + \frac{1}{u}$: e fatta la sostituzione nell' equazione data per z, risulta $65u^4 - 40u^3 - 279u^2 - 279u^3 - 242u - 62 = 0$, la di cui serie, corrispondente ai supposti 1, 2, 3 &c. è -558, -942, 886, la quale, a cagione della mutazione del segno, indica, che fra il 2 ed il 3 vi sia un valore reale della u. Chi desiderasse continuare l' approssimazione, dovrebbe porre $u = 2 + \frac{1}{r}$, ed operare come sopra; con che troverebbe

$x =$

$$x = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \&c.}}}}}}};$$

e perciò i valori prossimi della x sono

$$\frac{1}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{14}{11},\ \frac{19}{15},\ \frac{52}{41},\ \frac{71}{56},\ \frac{194}{153}\ \&c.,$$

ciascun dei quali è in termini minimi, e differisce dal vero valore per una quantità minore di una frazione, la quale abbia per numeratore l' unità, e per denominatore il denominatore della stessa frazione moltiplicato per lo denominatore della frazione seguente, per lo num. 13. del Cap. 7. di questo Libro: così $\frac{19}{15}$ differirà dal valore vero di x per una quantità minore di $\frac{1}{615}$. Per facilitare la sostituzione del valor $1 + \frac{1}{y} = x$ nell' equazion proposta, si rifletta, che se nell' equazion generale $A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2}$ &c... $+ K = 0$ si ponga $p + \frac{1}{y}$ in vece di x, onde sia $A' y^m + B' y^{m-1} + C' y^{m-2}$ &c. $+ K' = 0$; sarà $A' = A p^m + B p^{m-1} + C p^{m-2}$ &c., $B' =$

$$B' = m\,A\,p^{m-1} + \overline{m-1}\,.\,B\,p^{m-2} + \overline{m-2}\,.\,C\,p^{m-3} \text{ \&c.},$$

$$C' = \frac{\overline{m\,.\,m-1}}{2}\,.\,A\,p^{m-2} + \frac{\overline{m-1\,.\,m-2}}{2}\,.\,B\,p^{m-3} \text{ \&c.},$$

come si ricava dal num. 5. del Capo 2. di questo Libro: lo stesso vale per le altre sostituzioni.

XII. Altro metodo per lo stesso oggetto del numero precedente è questo: si ponga $x = \frac{y}{10}$, e si faccia la sostituzione nell' equazione $x^4 - 16x^3 + 81x^2 - 150x + 90 = 0$, onde si ottenga $y^4 - 160y^3 + 8100y^2 - 150000y + 900000 = 0$: e comecchè, per le cose dette nel num. precedente, il minimo ritrovato nella serie dell' equazione data per x mi mette in dubbio se fra 1 e 2 vi sieno valori irrazionali della x; perciò ritrovo i termini fra 'l 10, ed il 20 della serie dell' equazione data per y, i quali sono 60000, 31781, 10656, $-$ 4059, $-$ 13024, $-$ 16875, $-$ 16224, $-$ 11659, $-$ 3744, 6981, 20000, in cui essendovi due mutazioni di segno, ne inferisco, che all' y competono due valori, uno fra il 12 e il 13, e l' altro fra il 18 e il 19; onde all' x converranno due valori compresi fra 1 e 2, il più picciolo dei quali sarà fra $\frac{12}{10}$ e $\frac{13}{10}$, ed il più grande fra $\frac{18}{10}$ e $\frac{19}{10}$. Se nell' equazione data per x si sostituisca $\frac{z}{10}$ in luogo di y, e della nuova equazione si troverà quella parte di serie, che corrisponde ai supposti di z da 120 fino a 130, come pure quella parte, che cor-

corrifponde ai fuppofti di z da 180 fino a 190; fi confineranno le radici, di cui fi parla, tra limiti anche più riftretti: e profeguendo collo fteffo metodo queft' operazione, per altro affai laboriofa, attefi i numeri fempre più alti, che fi hanno a maneggiare, ed applicandola a qualfivoglia radice dell' equazion propofta; fi arriverà ad avere ciafcuna radice confinata entro i limiti quanto fi vuole riftretti, e perciò approffimante al valor giufto quanto più piace.

XIII. Potrebbe accadere un cafo, che io per altro reputo rariffimo, cioè, che qualche radice dell' equazione data per x non venga indicata da alcuna mutazione di fegno, ne da alcun minimo nella ferie dell' equazione. Quefto cafo può avvenire quando vi fieno alcune radici dell' equazione, che differifcano per una picciolìffima quantità: allora farà opportuno ricorrere alla foftituzione $x = \frac{y}{10}$, ovvero $x = \frac{y}{100}$ &c., e trovare la ferie dell' equazione data per y; effendo quafi impoffibile, che in tal ferie non fi fcorga qualche fegno di tutte le radici, che appartengono all' equazione per y, da cui farà facile determinare i valori di x, che nello fteffo tempo fi ritroveranno affai proffimi ai veri.

XIV. Chi voleffe per altro operare con ficurezza, dovrebbe formare l' equazione $v^r + a v^{r-1} + b v^{r-2} + c v^{r-3}$ &c. $= o$, in cui le v efprimeffero i quadrati delle differenze, che paffano fra le radici della propofta, offia dell' equazione in x, come infegnammo al num. 15. del Capo 2. di quefto Libro: indi dovrebbe ritrovare il limite più grande pofitivo dei valori delle radici di quefta equazione, col metodo del num. 6. del prefente Capitolo, il quale limite fia g; effendo adunque g maggiogiore di qualunque v, sarà $\frac{1}{g}$ minore di qualunque v (31), e perciò $\frac{1}{\sqrt{g}}$ minore di una qualunque differenza delle radici dell' equazione in x: per tanto se in questa in vece della x si pongano successivamente i termini della serie aritmetica o, $\frac{1}{\sqrt{g}}$, $\frac{2}{\sqrt{g}}$, $\frac{3}{\sqrt{g}}$, &c., prolungata da una parte e dell' altra quanto fa bisogno, num. 6.; tutte le radici reali dell' equazione proposta saranno senza dubbio indicate dalle mutazioni dei segni, che si ritroveranno nella serie dell' equazione: e i termini della serie predetta, corrispondenti ai termini contigui della serie dell' equazione, nei quali cade la mutazione del segno, saranno i limiti dei valori della x. Se g non fosse un quadrato perfetto, per comodo del calcolo si può prendere in vece di g il quadrato perfetto più prossimo dei maggiori. Se $\frac{1}{\sqrt{g}}$ fosse maggiore dell' unità, allora alla serie o, $\frac{1}{\sqrt{g}}$, $\frac{2}{\sqrt{g}}$, &c. si può sostituire o, 1, 2, 3, &c., perchè in questo caso tutte le differenze delle radici sono maggiori dell' unità, e perciò più radici non possono aver per limiti due termini contigui della predetta serie o, 1, 2, 3, &c.; onde ogni radice reale conviene che cagioni mutazione di segno nella serie dell' equazione. Dalle cose dette in questo Capitolo si comprende facilmente, essere in nostro potere approssimarsi quanto si vuole ai veri valori delle radici reali di qualsivoglia equazione numerica. Il Sig. La Grange negli Atti dell' Accademia di Berlino per l' anno 1778 dà un metodo per trovare per approssimazione le radici dell' equazioni litterali coll' ajuto dei logaritmi.

CA-

CAPO IX.

Coi Seni, e Coseni circolari, ed iperbolici si costruiscono le radici dell' Equazione del num. 12. del Capo quinto.

I. L' Equazione del num. 12. del Capo quinto ha questa forma $x^p - p\,a\,x^{p-2} + \frac{p\,.\,(p-3)}{2}\,.\,a^2\,x^{p-4} - \frac{p\,.\,(p-4)\,.\,(p-5)}{2\,.\,3}\,.\,a^3\,x^{p-6}$ &c. . . . . $- b = o$, in cui a, e b possono essere positive, e negative come si vuole. Una delle sue radici ha quest' altra forma

$$x = \left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} \pm \left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

valendo il segno — quando sia a negativa, ed il numero p pari. Avvertasi, che si pone — b in vece di b^π, ed a in vece di a^2 in grazia di maggior semplicità: il p, come ognun vede, corrisponde all' m; ed in cambio di π, π^{m-1} si pone l' unità. A costruire queste radici bisogna confrontarle colle espressioni dei seni, e coseni dei logaritmi, e degli archi sottomoltiplici, esposte nel Libro 2. Capo 11. num. 10. E acciocchè si proceda con chiarezza, distingueremo quattro ipotesi: nella prima a e b sono positive: nella seconda a è positiva, b negativa: nella terza a negativa, b positiva: nella quarta a e b sono negative. A motivo di eleganza, cerco soltanto la metà di x.

II. Nella prima ipotesi abbiamo $\frac{x}{2} =$ $\frac{b}{2}$

$$\frac{\overline{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^{p}}}^{\,\frac{1}{p}}+\overline{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^{p}}}^{\,\frac{1}{p}}}{2}$$, in cui si distinguano due casi, cioè o è $\frac{bb}{4} > a^p$, ovvero non è maggiore: nel primo caso il confronto si dee fare col espressione del cosseno del logaritmo summultiplo, cioè con $Ch\frac{\mu}{p} = \frac{\overline{Ch\mu + Sh\mu}^{\,\frac{1}{p}} + \overline{Ch\mu - Sh\mu}^{\,\frac{1}{p}}}{2 \cdot r^{\frac{1}{p}-1}}$: nel secondo caso colla formola del cosseno dell' arco summultiplo

$$Cc\frac{\mu}{p} = \frac{\overline{Cc\mu + \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu}^{\,\frac{1}{p}} + \overline{Cc\mu - \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu}^{\,\frac{1}{p}}}{2 \cdot r^{\frac{1}{p}-1}}.$$

III. Dal primo confronto nasce $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Ch\mu + Sh\mu}{r^{1-p}}$, e $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Ch\mu - Sh\mu}{r^{1-p}}$; aggiunte queste due equazioni, e poi sottratta dalla prima la seconda, otterremo $\frac{b}{2} = \frac{Ch\mu}{r^{1-p}}$, e $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^p} = \frac{Sh\mu}{r^{1-p}}$: ma $\overline{Ch\mu}^2 - \overline{Sh\mu}^2 = rr$; adunque sostituitutti i valori, sarà $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^p = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, cioè $a^p = r^{2p}$, ed $a^{\frac{1}{2}} = r$. E' chiaro pertanto, che sia $\frac{x}{2} = Ch\frac{\mu}{p}$, posto che μ sia quel logaritmo, che abbia per cosseno $\frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, e per seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$.

IV. Descritta adunque l' iperbola equilatera col semiasse $AC = a^{\frac{1}{2}}$ (*Fig.* 1. *Tav.* 1.), si tagli $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$: si conduca il seno MN, e dai punti A, ed N nell' asintoto si calino le normali AK, NP: fra CK, CP si trovino tante medie proporzionali, quante unità sono in $p-1$, la prima delle quali sia CG: finalmente da G si tiri GE perpendicolare all' asintoto, ed il seno EB; questo determinerà il cosseno $CB = \frac{x}{2}$. Se p sia un numero dispari, la prima delle medie proporzionali tra CK, CP avrà un solo valore reale, e perciò una sola sarà la radice reale della nostra equazione: se p sarà un numero pari, la prima delle medie proporzionali avrà due valori reali, positivo l' uno, negativo l'altro, cioè CG, Cg (32); dunque ancora $Ch\frac{\mu}{p}$ avrà due valori eguali, cioè CB, Cb, il primo positivo, il secondo negativo; e quindi lo stesso avverrà ad $\frac{x}{2}$.

V.

V. Dal secondo paragone si avrà $\frac{b}{2} + \sqrt{-1}\,.$ $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc\mu + \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu}{r^{1-p}}$, e $\frac{b}{2}$ $- \sqrt{-1}\,.\,\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc\mu - \sqrt{-1}\,.\,Sc\mu}{r^{1-p}}$; onde si troverà $\frac{b}{2} = \frac{Cc\mu}{r^{1-p}}$, $\sqrt{a^p - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc\mu}{r^{1-p}}$: ma $\overline{Cc\mu}^2 + \overline{Sc\mu}^2 = rr$; dunque $\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, cioè $a^p = r^{2p}$, ovvero $a^{\frac{1}{2}} = r$. Per tanto sarà $\frac{x}{2} =$ $Cc\frac{\mu}{p}$, purchè sia il seno tutto uguale $a^{\frac{1}{2}}$, ed il $Cc\mu = \frac{b}{2\,.\,a^{\frac{p-1}{2}}}$. Per avere la costruzione si descriva il circolo, il di cui seno tutto, o sia il raggio, sia $CA = a^{\frac{1}{2}}$ (*Fig.* 2. *Tav.* 1.): si prenda $CM\ \frac{b}{2\,.\,a^{\frac{p-1}{2}}}$, e si conduca il seno MN; sarà l' arco $AN = \mu$. Si divida questo in tante parti, quante unità sono in p, la prima delle quali sia $AE = \frac{\mu}{p}$: si cali il seno EB; il cosseno CB sarà uguale ad $\frac{x}{2}$. L' arco AN, il di cui

cui coſſeno è CM, non è unico; imperciocchè chiamata la circonferenza del circolo $= c$, e l' arco $AN = \mu$; tutti gli archi $\mu, c + \mu, 2c + \mu, 3c + \mu$, &c., e ſimilmente gli archi $\mu, -c + \mu, -2c + \mu, -3c + \mu$, &c., i quali ſono infiniti di numero, hanno per coſſeno MC: queſti ſe ſi dividano in parti numero p, ſi troveranno nuovi archi $A2E, A3E$, &c., i di cui coſſeni $C2B, C3B$, &c. daranno nuovi valori della radice $\frac{x}{2}$. Ne ſi dee per altro credere, che i valori reali di $\frac{x}{2}$ ſieno infiniti, eſſendo tanti ſolamente, quante unità ſi trovano nel numero p; imperciocchè diviſo un numero p di archi, ſi troveranno ſoltanto punti numero p, ritornando i medeſimi punti per la diviſione degli altri archi, come ſi vidde accadere nel Capo 12. del Libro 2. per la ſezione dell' arco in tre parti uguali; adunque $\frac{x}{2}$ ha tanti valori reali, quante unità ſono in p. Nel caſo che foſſe $\frac{bb}{4} = a^p$, ſarebbe il

$C c \mu = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}$, e ſarebbe perciò $\mu = o$; onde gli archi da dividerſi ſarebbero o, $c + o$, $2c + o$, $3c + o$, &c., cioè c, $2c$, $3c$, &c.

VI. Nella ſeconda ipoteſi, in cui ſi ſuppone a poſitiva, e b negativa, mutato il ſegno alla lettera b, la radice riceve la ſeguente forma

$$\frac{x}{2} = \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

la quale ſi dee paragonare col coſſeno del logaritmo ſummultiplo ſe ſia $\frac{bb}{4} > a^p$; col coſſeno poi dell' arco ſummultiplo ſe $\frac{bb}{4}$ non ſia $> a^p$. Queſti paragoni ci danno i medeſimi valori della prima ipoteſi, con queſta diverſità ſol tanto, che il coſſeno μ ſi dee prendere negativo. Nel caſo dunque di $\frac{bb}{4} > a^p$, così ſi dovrà fare la coſtruzione. Deſcritta l' iperbola equilatera col ſeno tutto $CA = a^{\frac{1}{2}}$ (*Fig.* 3. *Tav.* 1.), ſi tagli $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$ la quale eſſendo negativa ſi dee prendere dalla parte dei coſſeni negativi: a queſta ſi alzi la normale MN dalla parte dei ſeni poſitivi, perchè il ſeno ſi è trovato poſitivo: da N nell' aſintoto CK ſi cali la normale NP, e tra CK, CP ſi trovino tante medie proporzionali, quante unità ſono nel numero $p - 1$, la prima delle quali ſia CG: GE ſia normale all' aſintoto, ed EB all' aſſe; il coſſeno CB negativo ſarà $= \frac{x}{2}$.

VII. Se ſia p numero diſpari, le medie proporzionali tra CK, CP da ritrovarſi ſaranno di numero pari: ma le medie proporzionali di numero pari fra una quantità poſitiva, ed un' altra negativa va sono possibili, e la prima di esse è sempre negativa (33); adunque se sia p numero dispari, CG sarà reale, e negativa; e quindi ancora $CB = \frac{x}{2}$ sarà reale, e negativa. Se poi sia p numero pari, le medie proporzionali da ritrovarsi saranno di numero dispari: ma le medie proporzionali di numero dispari fra una quantità positiva, e l' altra negativa, non tutte sono reali, ma la prima, terza, quinta, &c. sono immaginarie (34); dunque CG, dovendo essere la prima, sarà immaginaria; e per ciò sarà immaginaria ancora $CB = \frac{x}{2}$. Adunque nel primo caso della seconda ipotesi, se sia p dispari, avremo una radice reale negativa: se p sia pari, tutte le radici saranno immaginarie.

VIII. Nel secondo caso di questa ipotesi, nel quale abbiamo $\frac{bb}{4} < a^p$, ovvero $\frac{bb}{4} = a^p$, la costruzione ci da tutte le radici $\frac{x}{2}$ reali (*Fig.* 4. *Tav.* 1.). Descritto il circolo col raggio $a^{\frac{1}{2}}$, si tagli il cosseno negativo $CM = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, e si alzi il seno positivo MN: chiamato l' arco $AN = \mu$, si prendano gli archi μ, $c + \mu$, $2c + \mu$, $3c + \mu$, &c. tanti di numero, quante unità sono in p: e fatta la divisione di questi archi in parti uguali numero p, si determinino i punti E, $2E$, $3E$, &c.; mediante questi si determineranno le radici dell' equazione, cioè $\frac{x}{2} = CB$, $= C2B$, $= C3B$, &c. E' superfluo prendere archi in maggior numero, ritornando i medesimi

desimi punti di divisione . Se sia $\frac{bb}{4} = a^p$, sarà $\frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$ $= a^{\frac{1}{2}}$; e perciò gli archi da dividersi saranno c , $2c$, $3c$, ... pc .

IX. Nelle altre due ipotesi , in cui a è negativa , e b positiva , ovvero a negativa , e b ancora , il paragone si dee fare colle formole dei seni de' logaritmi , quando le radici non contengano quantità immaginarie ; con quelle poi dei seni circolari , se si introducano nelle radici le quantità immaginarie . Lascio all' industria dei Giovani la costruzione di queste radici , la quale non differisce dalle costruzioni da noi sopra esposte .

CAPO X.

Si risolvono tutti i Binomii , ed alcuni Trinomii in fattori reali del secondo grado col mezzo dei Cosseni circolari .

I. SE dal trinomio $z^{2p} - b z^p + a^p = o$ si elimini la z , e si introduca la x mediante l' equazione $z + \frac{a}{z} = x$, nascerà l' equazione di questa forma

$$x^p - p\, a\, x^{p-2} + \frac{p.(p-3)}{2} . a^2 x^{p-4}$$

$$- \frac{p.(p-4).(p-5)}{2 \cdot 3} . a^3 x^{p-6} \ldots\ldots - b = o,$$ per lo num. 12. del Cap. 5. di questo Lib. Se sia dunque ϕ un valore di x di questa equazione , sarà $x - \phi = o$; e perciò sarà

sarà $z+\frac{a}{z}-\phi=o$, ossia $zz-\phi z+a=o$. Adunque il trinomio proposto sarà divisibile pro lo trinomio $zz-\phi z+a=o$ reale di secondo grado (35).

II. Ora nel Capo precedente abbiamo veduto, che posta a positiva, e $\frac{bb}{4}$ non maggiore di a^p, il raggio del circolo $=a^{\frac{1}{2}}$, ed il cosseno dell'arco $\mu=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$; tutte le radici dell'equazione x^p-pax^{p-2} &c. sono reali, ed uguali a $2\,C\,c\,\frac{\mu}{p}$, $2\,C\,c\,\frac{c+\mu}{p}$, $2\,C\,c\,\frac{2c+\mu}{p}$, ... $2\,C\,c\,\frac{(p-1).c+\mu}{p}$; le quali chiamate per brevità ϕ, 2ϕ, 3ϕ....$p\phi$, sarà il trinomio proposto risolubile ne' fattori reali di secondo grado $zz-\phi z+a$, $zz-2\phi z+a$, ...$zz-p\phi z+a$; avvertendo, che i coefficienti 1, 2, ...p altro non fanno, che distinguere il ϕ, ed indicare il numero delle radici, ed in conseguenza dei fattori di secondo grado, che tutti saranno in numero p.

III. Fingiamo ora che il cosseno $\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$ sia uguale al seno tutto $a^{\frac{1}{2}}$, e che perciò l'arco μ sia uguale a zero; avremo $\frac{b}{2}=a^{\frac{p}{2}}$, ed il trinomio proposto si cangierà in $z^{2p}-2a^{\frac{p}{2}}z^p+a^p=o$; i trinomii

 poi

poi di secondo grado, ne' quali questo risolvesi, saranno $zz - 2zCc\frac{o}{p} + a$, $zz - 2zCc\frac{c}{p} + a$, $zz - 2zCc\frac{2c}{p} + a$, ... $zz - 2zCc\frac{(p-1)}{p}.c + a$. Si descriva il circolo col raggio $a^{\frac{1}{2}}$, e principiando dal punto 1 (*Fig.* 5. *Tav.* 1.) si divida tutta la circonferenza in parti $2p$ uguali; verrà la semicirconferenza divisa in parti p: e mettendo in tutti i punti di divisione i numeri coll' ordine, che rappresenta la figura; è chiaro, che i cosseni cercati corrisponderanno agli archi terminati dai numeri dispari; imperciocchè l' arco compreso tra 1 e 3 è uguale a $\frac{c}{p}$: quello tra 1 e 5 a $\frac{2c}{p}$, &c. (36).

IV. Ciascun arco minore della semicirconferenza ha un arco corrispondente maggiore della stessa, ai quali è comune lo stesso cosseno, come chiaramente si vede nella figura, in cui ogni cosseno CB appartiene a due archi. Se ne eccettui però l' arco zero, il cui cosseno è $a^{\frac{1}{2}}$, e quando sia p numero pari si dee eccettuare ancora la semicirconferenza, il cui cosseno è $-a^{\frac{1}{2}}$ (37). Dunque ciascun de' fattori reali, in cui si risolve il trinomio $z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^p + a^p$, è replicato due volte, fuorchè il trinomio $zz - 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, e quando p è pari, eccettuatone ancora il trinomio $zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, i quali non sono replicati. Avremo adunque questa equazione $z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^p + a^p = \left(zz - 2Cc\frac{c}{p} + a\right)^2 \times$

$(zz -$

$\left(zz - 2\,C\,c\,\frac{2c}{p} + a\right)^2$ &c. moltiplicati per

$(zz - 2\,a^{\frac{1}{2}}z + a) \times (zz + 2\,a^{\frac{1}{2}}z + a)$: ed estraendo la radice quadrata, sarà $z^p - a^{\frac{p}{2}} = \left(zz - 2\,C\,c\,\frac{c}{p} + a\right) \times$

$\left(zz - 2\,C\,c\,\frac{2c}{p} + a\right)$ &c. in $(z - a^{\frac{1}{2}}) \times (z + a^{\frac{1}{2}})$;

avvertendo di lasciare quest' ultimo fattore $z + a^{\frac{1}{2}}$ se p sia dispari.

V. Supponiamo adesso il cosseno $\mu = \frac{b}{2\,a^{\frac{p-1}{2}}} = -a^{\frac{1}{2}}$, cioè uguale al seno tutto preso negativamente; il trinomio diverrà $z^{2p} + 2\,a^{\frac{p}{2}}z^p + a^p = 0$, l' arco $\mu = \frac{C}{2}$, e i trinomii reali di secondo grado (num. 2.) saranno $zz - 2\,z\,C\,c\,\frac{c}{2p} + a$, $zz - 2\,z\,C\,c\,\frac{3c}{2p} + a$, $zz - 2\,z\,C\,c\,\frac{5c}{2p} + a$, ... $zz - 2\,z\,C\,c\,\frac{\overline{2p-1}\cdot c}{2p} + a$. Incominciando dal punto 1 si divida l' intera circonferenza (*Fig.* 6. *Tav.* 1.) in parti $2\,p$ uguali, e si segnino i punti di divisione coi numeri naturali 1, 2, 3, &c.; i cosseni cercati corrisponderanno agli archi segnati coi numeri pari 2, 4, 6, &c. Seguendo le stesse tracce dell' ipotesi antecedente si troverà $z^p + a^{\frac{p}{2}} = \left(zz - 2\,C\,c\,\frac{c}{2p} + a\right) \times$

$(zz -$

$(zz - 2Cc\frac{3c}{2p} + a) \times (zz - 2Cc\frac{5c}{2p} + a)$ &c., ai quali fattori si dee aggiugnere $z + a^{\frac{1}{2}}$ se p sia dispari; perchè in questo caso, essendo la semicirconferenza divisa in parti numero dispari, entrerà essa nella serie degli archi $\frac{c}{2p}$, $\frac{3c}{2p}$, $\frac{5c}{2p}$, ... &c.

VI. Dai num. 4. e 5. si conosce, che il binomio $z^p \pm a^p$ sia sempre risolubile in fattori reali di secondo grado: risoluti poi questi fattori, si avranno tutti i valori di z, i quali saranno reali, o immaginarii secondo le circostanze. Adunque se fingasi $a = 1$, onde il binomio sia $z^p \pm 1 = 0$; colla sezione della periferia del cerchio in parti uguali sapremo ritrovare tutti i valori di z, ed in conseguenza dell' unità tanto positiva, quanto negativa.

VII. Gli Analisti credono con qualche fondamento, che qualunque formola razionale si possa risolvere in fattori reali del secondo grado. Se ciò è vero, tutti gli immaginarii si riducono ad $A + B\sqrt{-1}$, perchè risoluti i predetti fattori, non possono dare altri immaginarii, che di questa forma.

CA-

CAPO XI.

Della Deſcrizione delle Curve per via di infiniti punti.

I. PArliamo quì brevemente della maniera, con cui data una equazione di una curva, ſi procuri di ottenerne la deſcrizione per via di infiniti punti; imperciocchè molte coſe, che queſta riguardano, ſtimiamo opportuno rimettere al Calcolo differenziale, per mezzo di cui con maggiore ſpeditezza eſſe ſi ottengono, che con qualunque altro metodo: come ſarebbe condurre le tangenti: ritrovare gli aſintoti non paralleli alle linee delle coordinate: determinare le maſſime, e le minime ordinate: i leſſi contrarii, e i regreſſi: il genere di curvatura, &c., in che il ſopraddetto Calcolo moſtra la ſua eccellenza.

II. Per far vedere adunque come le curve ſi deſcrivano, o per meglio dire ſi adombrino per via di infiniti punti, ſi proponga a coſtruire la curva dell'equazione $y = x.\frac{(x+a).(x-b)}{aa}$. Prendo qualunque retta CB (*Fig.7.Tav.1.*) per linea delle aſciſſe, ed il punto A per principio delle medeſime: pongo $x = o$, e trovo $y = o$; adunque conchiudo, che la curva paſſa pel punto A: pongo $x = b$, e ſimilmente ritrovo $y = o$; adunque preſa $AB = b$, la curva paſſerà per B: faccio finalmente $x = -a$, e ſimilmente trovo $y = o$; dunque tagliata $AC = a$ dalla parte delle x negative, la curva paſſerà anche per C. Suppoſta x infinita poſitiva, ſarà $y = \frac{x^3}{a^2}$, perchè gli altri termini ſvaniſcono riſpetti-

va-

vamente ad $\frac{x^3}{a^2}$, il quale essendo infinito, e positivo, sarà y infinita, e positiva: se poi prendasi x infinita, e negativa, si ritroverà y infinita, e negativa: se ad x si dia qualunque valore positivo, o negativo, sarà y sempre reale. Adunque la curva è continua, ed infinita da una parte e dall' altra. Da tutto ciò si raccoglie, che la curva avrà ad un dipresso l' andamento, che vedesi espresso nella 7. figura. Per aver poi l'andamento preciso conviene dare ad x un numero indefinito di valori, per esempio AM, $A\,2\,M$, &c., per determinare altrettanti valori di $y = NM$, $2\,N\,2\,M$, &c., le quali rette applicate con l' estremità M, $2\,M$, &c. ad angolo costante all' estremità delle ascisse, avranno quelle l' altra estremità N, $2\,N$ nella linea che si vuole descritta.

III. Dalla descrizione di questa curva si raccolga, che se y sarà eguale ad una funzione x razionale, ed intiera, cioè, che se la x non sia sotto segni radicali, nè del denominatore della funzione nel caso che abbia denominatore; la curva segherà la linea delle ascisse in tanti punti, quanti saranno i fattori semplici reali della funzione sopraddetta: e se la funzione non avesse alcun fattore semplice reale; la curva mai segherebbe la linea dell' ascisse, il che solo può accadere quando la funzione sia di grado pari, perchè quelle di grado dispari deono avere almeno un fattore semplice reale, dovendo i fattori semplici immaginarii essere di numero pari, altrimenti la funzione conterrebbe quantità immaginarie; e perciò la curva in tal caso segherà la linea delle ascisse almeno in un punto.

IV. Se y sia uguale ad una quantità costante divisa per una funzione razionale ed intiera di x, come sa-

sarebbe $y = \frac{a^3}{x-a \cdot x+b}$; mai potrà diventare zero; adunque mai la curva incontrerà la linea delle ascisse. Se sia $x = a$, sarà $y = \frac{a^3}{0}$, cioè y infinita: lo stesso avviene se sia $x = -b$; adunque alle ascisse eguali ad a, e $-b$ corrispondono due y infinite, cioè due asintoti; dal che si vede, che altrettanti sono gli asintoti paralleli alle ordinate, quanti fattori reali semplici sono nella funzione di x.

V. Se y finalmente sia eguale ad una funzione razionale di x divisa per altra funzione razionale, come sarebbe $y = \frac{x.(x+a).(x-b)}{(x-a).(x+b)}$; allora i fattori semplici reali del numeratore dinoteranno altrettanti punti, nei quali la curva incontra la linea delle ascisse; i fattori poi semplici reali del denominatore daranno altrettanti asintoti paralleli alle ordinate.

VI. Passiamo ora a supporre $y = \pm\sqrt{P}$, essendo P una funzione razionale intiera, o fratta della x. In questo caso la y avrà sempre due valori uguali, uno positivo, e l'altro negativo; adunque la linea delle ascisse sarà un diametro: anzi sarà l'asse, se l'angolo delle coordinate si supponga retto. Inoltre la curva non sarà sempre continua, perchè per qualche tratto della linea delle ascisse possono i valori dell'ascissa x far essere i corrispondenti valori di P negativi, e però le y immaginarie. Per i punti poi, in cui la curva sega la linea delle ascisse, e per gli asintoti paralleli alle ordinate vale la stessa regola di sopra quando P si supponeva libera da radicale. Sia per esempio

$y = \pm \sqrt{\frac{aa \cdot \overline{a - x}}{x}}$. Sia AB (*Fig.* 8. *Tav.* 1.) la linea delle ascisse, ed A il loro principio; e supposto l' angolo delle coordinate retto, sarà AB l' asse: posta $x = o$, diventa y infinita; dunque condotta per A la retta KH infinita, sarà questa un asintoto della curva: se poi si prenda $x = a$, y diventa zero; dunque tagliata AB eguale ad a, la curva passerà per B: se prendasi $x < a$, il valore di y sarà reale, il quale diminuirà al crescere della x: se sia $x > a$, y sarà immaginaria, siccome lo sarà presa x negativa. Adunque la curva corisponderà alla sola ascissa AB, ed avrà l' andamento, che osservasi nella figura; essendo dotata di un flesso contrario, come si potrà vedere coi metodi, che si daranno nel Calcolo differenziale.

Che se l' equazion proposta fosse $y = \pm \sqrt{\frac{aa \cdot (x - a)}{x}}$: segate $AB = AC = AD = a$ (*Fig.* 9. *Tav.* 1.), e condotta per C, e D le indefinite HE, LF, che sieno parallele alla linea dell' ascisse; sarà la curva da A in B immaginaria; e principiando da B andrà all' infinito per due rami BF, BE eguali, e simili, i quali avranno per asintoti le rette DF, CE. Dalla parte poi delle x negative la curva è dotata di due rami HG, LI, situati negli angoli HCG, LDI, i lati dei quali sono asintoti dei predetti rami: il tutto si deduce dando ad x diversi valori nell' equazione, come sopra.

VII. Sia ora $y = P \pm \sqrt{Q}$, in cui P, e Q sono funzioni razionali della x intiere, o fratte. Per descrivere questa curva si ponga $P = z$, e $\sqrt{Q} = u$, acciocchè sia $y = z \pm u$: indi si descrivano le curve corrispondenti alle equazioni $P = z$, $\sqrt{Q} = u$: e queste curve ve ſieno AE, CF (*Fig.* 10. *Tav.* 1.), nelle quali ſia $AB = CD = x$, $BE = z$, $DF = DG = u$: a ciaſcuna ordinata BE ſi aggiunga EH, e ſi tolga EK eguali a DF; ſaranno i punti H, e K nella curva che ſi vuole deſcritta. Prendo per eſempio la coſtruzione d' una equazione ſempliciſſima $y = \frac{ax}{b} \pm \sqrt{ab - xx}$. Pongo $\frac{ax}{b} = z$, la quale equazione appartiene alla linea retta, che così coſtruiſco. (*Fig.* 11. *Tav.* 2.) Si prenda $AB = b$, $BC = a$, e ſi conduca l' indefinita AC; queſta ſarà la retta. Pongo inoltre $u = \sqrt{ab - xx}$, d' onde naſce $uu = ab - xx$, equazione al circolo ſe l' angolo delle coordinate ſuppongaſi retto. Col raggio adunque $FG = \sqrt{ab}$ ſi deſcriva il circolo; ſaranno le $FH = x$, $HI = u = \sqrt{ab - xx}$: per la qual coſa ſegate le $AK = FH$, e condotte le ordinate KL, e preſe LM, LN eguali ad HI; i punti M, ed N ſaranno nella curva, la quale è un' elliſſe (*Lib.* 2. *Cap.* I. *num.* 9.)

VIII. Se y foſſe eguale a due radicali quadratici di ſecondo grado, come per eſempio $y = \pm \sqrt{2ax - xx} + \sqrt{ax - xx}$; ſi dovrebbe fare $z = \pm \sqrt{2ax - xx}$, ed $u = \sqrt{ax - xx}$: indi deſcrivere queſte due curve, e col mezzo di eſſe deſcrivere la propoſta, prendendo $y = z + u$. Lo ſteſſo vale ſe y ſia eguale a molti radicali quadratici: anzi a molti radicali di qualunque grado, purchè uno non ſia incluſo nell' altro, e non ſieno radicali di radicali.

IX. Quando poi y ſia eguale a quantità radicali, che contengano ſotto il vincolo radicale altri radicali; la difficoltà della coſtruzione della curva creſce. Si potrà però eſeguire col ſupporre molti valori della

 x,

x, per cui determinate molte y, si vedrà come la curva proceda. Eccone un esempio. Sia

$y = \pm \sqrt{aa + xx \pm \sqrt{a^4 - x^4}}$. Supposta

$x = o$, nasce $y = \pm a\sqrt{2}$, ed $y = o$:

$x = \pm a$, $y = \pm a\sqrt{2}$:

$x > \pm a$, y immaginaria:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{5 + \sqrt{15}}, \quad y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{5 - \sqrt{15}}:$$

e così in seguito.

X. Se l' equazione, che si vuol costruire, fosse tale, che ordinata per y, ovvero per x, non si potesse coi metodi noti risolvere; la curva si potrebbe sempre delineare risolvendone l' equazione per approssimazione.

CAPO XII.

Risoluzione, e Costruzione delle Equazioni colla intersecazione delle Curve.

I. IL criterio, che si diede al Cap. 9. del Libro 2., per certificarsi d' ottenere colla intersecazione delle sezioni coniche tutte le radici reali d' una equazione con quelle costruita, si estende alla intersecazione di tutte le curve. Ogni qualvolta adunque si abbiano due equazioni indeterminate a due variabili, x, y, per mezzo delle quali si possa ottenere una equazione, in cui l' y sia a lineare dimenzione soltanto, to, ed in cui non vi sieno fattori, che contengano la sola x; la costruzione sarà esente da paralogismo; altrimenti avverrà se una delle due condizioni mancasse: la dimostrazione di ciò essendo in tutto la stessa di quella del Capo citato, è superfluo che sia ripetuta. Quando per altro siasi certo, che in una curva, la quale contenga y^2, y^3, y^4, &c., a qualunque valore della x corrispondano tutte le y reali, il che alle volte non è difficile a raccogliersi dall'equazione stessa della curva; non occorre ricorrere all' esposto criterio; imperciocchè essendo tutte le ordinate reali, è impossibile l'eguaglianza di due ordinate immaginarie.

II. Una equazione determinata di qualunque grado si può in primo luogo costruire nella seguente maniera. Si metta l'ultimo termine dell'equazione $= y$, e si avrà il luogo alla linea retta: e fatta la sostituzione nell'equazione data, si avrà una equazione indeterminata del grado della proposta. Si costruiscano, e si congiungano come deesi questi due luoghi, e si otterranno senza fallo mediante le intersecazioni loro le x, che saranno altrettante radici reali della equazion proposta.

III. Sia per esempio da costruirsi $x^5 - 2a^2x^3 + a^4x - a^4b = 0$. Pongo $b = y$: e fatta la sostituzione, nascerà $y = \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{aa} + x$. Suppongo delineata questa curva del quinto grado, la quale ha l'andamento, che vedesi nella figura (*Fig.* 12. *Tav.* 2.): la retta CAF sia la linea delle ascisse, ed il punto A il principio: si ponga $AM = b$ parallela alle ordinate, e per M si tiri MN parallela alle ascisse, che segherà la curva in tanti punti, quante sono le radici reali della proposta equazione, le quali in conseguenza saranno le x corrispondenti a questi punti.

IV.

IV. Gli Algebristi vorrebbero, che nelle costruzioni si adoperassero le curve di grado più basso che sia possibile: così l'equazione del quinto grado proposta al num. 3., benchè si possa costruire con una curva del quinto, e con una linea retta; amerebbero, che si costruisse con una del secondo, ed una del terzo; il che si può ottenere ponendo $x^2 = ay$, e sostituendo nella equazione ay in vece di x^2, onde si abbia $y^2 x - 2ayx + a^2 x - a^2 b = 0$, equazione del terzo. Noi per altro siamo d'opinione, che non debbasi imporre questa legge; e che si lasci all'arbitrio di chi costruisce l'equazioni la scelta dei luoghi, onde si possa regolare dalla maggiore, o minore facilità di poterli ottenere, delineare &c. La intersecazione della linea retta colla linea del grado della equazione da costruirsi è ottima per ricavare tutte le determinazioni delle radici, come vedremo al Cap. 14.

V. Quello, che è nostro consiglio, spesso diviene necessità; poichè la regola, che si suol dare per ottenere i luoghi più semplici, spesso non si sà eseguire. La regola è la seguente. Se il grado dell'equazion da costruirsi è numero quadrato, si deono adoperare due curve, il grado di cui sia espresso dalla radice di quello. Se il numero non è quadrato, si tolga da questo il quadrato massimo: e poichè tre casi si possono dare, cioè o che il residuo sia uguale alla radice d'esso quadrato, o sia minore, o maggiore; nei due primi casi si scelgano due curve, delle quali il grado d'una sia la radice suddetta, e quello dell'altra la sopravvanzi dell'unità; e nell'ultimo si usino due curve, il grado delle quali ecceda la radice per l'unità.

VI. Sia per esempio l'equazione del sesto grado $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$, al qual grado riducesi una del quinto moltiplicandola per x.

Que-

Questa, secondo la regola, si dee costruire con una curva del secondo, ed una del terzo grado; imperciocchè non essendo 6 numero quadrato, sarà 4 il massimo quadrato prossimo al numero 6, la radice di cui è il 2; onde con una curva del secondo grado, ed una del terzo si dee eseguire la costruzione. A questo fine pongo $x^2 = y$: e sostituendo, nascerà l' altra curva del terzo grado $y^3 + a y^2 x + b y^2 + c y x + d y + e x + f = o$.

VII. Prendo una equazione del nono grado $x^9 + a x^8 + b x^7 + c x^6 + d x^5 + e x^4 + f x^3$ &c. $= o$, a cui si riducono quelle del settimo, ed ottavo moltiplicandole per $x x$, ed x. Questa, secondo la regola, si dee costruire con due curve del terzo grado; e ciò si ottiene ponendo $x^3 = y$, e sostituendo: e poichè il secondo termine $a x^8$ impedisce che nasca la curva del terzo grado; conviene perciò farlo prima sparire col metodo insegnato al Cap. 2. di questo Libro.

VIII. L' equazioni del decimo, ed undecimo grado si riducono al duodecimo moltiplicandole per x^2, e per x. Per la regola si deono introdurre alla costruzione di questa una curva del grado terzo, ed una del quarto. L' equazione sia $x^{12} + a x^{10} + b x^9$ &c. $= o$, che prendo senza secondo termine, il quale impedirebbe l' operazione. Si faccia $x^3 = y$: si sostituisca, e si avrà l' intento.

IX. L' equazione $x^{16} + a x^{14} + b x^{13} + c x^{12} + d x^{11}$ &c. $= o$, aderendo alla regola, costruir si dee con due curve del quarto grado. Pongasi $x^4 = y$: e fatta la sostituzione, si avrà $y^4 + a y^3 x^2$ &c. $= o$, equazione del quinto grado, e non del quarto come si desidera. Quando il grado dell' equazione è maggiore questi ostacoli si moltiplicano, ne havvi un metodo generale da superargli. Adunque conviene tutto rimettere all' esercizio, ed all' industria; ne conviene limitare la libertà di chi opera per ottenere le costruzioni delle equazioni. CA-

CAPO XIII.

Si risolvono alcuni Problemi indeterminati, che superano il secondo grado.

I. Problema primo. Si applichi nel punto A (*Fig.* 13. *Tav.* 2.) della retta AB la squadra NAM, che possa girare liberamente intorno al punto A: alla medesima retta sia perpendicolare la linea MPN, che possa muoversi parallela a se stessa: il punto di concorso delle linee AM, NM descriva la linea LM; si cerca che curva descriverà il punto N, in cui concorrono AN, MN. Chiamisi $AP = x$, $PM = z$, $PN = y$. Essendo l'angolo MAN retto, sarà $z : x :: x : y$; dunque $z = \frac{x^2}{y}$. Se in questa equazione sostituiscasi il valore di z dato per x dalla natura della curva LM, si avrà l'equazione della curva cercata.

Sia LM una linea retta, che non passi per lo punto A; la nostra curva sarà una sezione conica (38): anzi se LM sarà parallela ad AB, la curva generata sarà una parabola (Lib. 2. Cap. 4. num. 13.). Se LM sia una curva dell' equazione $a^{m-n} x^n = z^m$; l'equazione della curva generata sarà $a^{m-n} x^n = \frac{x^{2m}}{y^m}$, cioè $y^m = \frac{x^{2m-n}}{a^{m-n}}$. Sia LM la circonferenza di un circolo, che passi per lo punto A, e che abbia il centro C in AB: chiamato il diametro del circolo $= 2a$; sarà $z = \sqrt{2ax - xx}$ per la proprietà del cerchio; quindi $\sqrt{2ax - xx} = \frac{xx}{y}$; e perciò $2ay^2 - xy^2 = x^3$. Questa è quella curva, che si chiama *Cissoide di Diocle*, essendone stato questi l'inventore.

II.

II. Problema secondo. Alla norma ABE (*Fig.* 14. *Tav.* 2.) si applichi la riga AE mobile intorno al punto A: poi si collochi un' altra riga MX in maniera, che movendosi sia sempre normale alla retta AE: alla norma in A si attacchi l' estremità del filo AXM uguale ad AB; l' altra estremità del filo si leghi al punto M della riga MX. Ciò posto, si faccia il moto in modo, che il filo passi sempre pel punto del concorso X delle due rette AB, MX, distendendosi lungo le stesse rette AB, MX; si cerca la curva descritta dal punto M. Essendo il filo $AXM = AB$, tolto di comune AX, sarà $MX = XB$; dunque per gli angoli retti XME, XBE, sarà $ME = BE$. Alla retta AB si tiri la normale MP, e si chiami $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; sarà $PB = a - x$, ed $AM = \sqrt{xx + yy}$: ma abbiamo $AP : PM :: AB : BE$, cioè $x : y :: a : BE = \frac{ay}{x} = ME$: e di più $AP : PB :: AM : ME$, cioè $x : \overline{a - x} : \sqrt{xx + yy} : \frac{ay}{x}$; adunque $ay = \overline{a - x} . \sqrt{xx + yy}$, da cui, quadrando, e dividendo per lo coefficiente di y^2, ne viene $(a^2 x - 2ax^2 + x^3) : (2a - x) = y^2$, equazione del terzo grado. L' andamento della curva si può osservare nella figura: per altro ad avere il ramo $B\,2\,M$ conviene tagliare $E\,2\,M = ME$; e lo stesso si dee fare dall' altra parte della retta AB. Se si tagli $BD = AB$, e si conduca DQ normale ad AD, sarà DQ asintoto della curva. Queste verità dall' equazione della curva stessa facilmente si comprendono (39).

III. Problema terzo. Ritrovare l' equazione della curva descritta dal punto M (*Fig.* 15. *Tav.* 2.) posto nella circonferenza del circolo BM, che si rota sopra un altro AB eguale, ed immobile. Sul principio della rotazione il il punto M, che descrive la curva sia in A: si conduca il raggio CA, e producasi secondo il bisogno: e supposto esser giunto il circolo rotante nella posizione BM, sarà l'arco $BA = BM$: si congiungano i centri dei cerchi colla CK, che passerà per lo contatto B, e si conduca ancora il raggio KM, che prodotto concorra con CA in D. Essendo BA, BM archi uguali di circoli uguali, gli angoli BCA, BKM saranno uguali; adunque il triangolo CDK sarà isoscele, e $DC = DK$, per cui $DA = DM$, e quindi la linea AM parallela a CK. Inoltre condotta la BD, questa dividerà in due parti uguali tutte le parallele alla CK, e per conseguenza ancora AM in E, a cui sarà perpendicolare: conducasi finalmente MN perpendicolare a CD. Chiaminsi i raggi dei circoli $= r$, $CN = x$, $AN = x - r$, $MN = y$, $AM = \sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$, ed $AE = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$. Per i triangoli simili sarà $CB : AE :: CD : AD$; e perciò $CB : CB - AE :: CD : CA$: ed in termini analitici, $r : r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy} :: CD : r$; adunque $CD = rr : \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}\right)$. Essendo inoltre simili i triangoli AMN, ADE, ovvero CDB; sarà $CD : CB :: AM : AN$: ed in termini analitici, $rr : \left(r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}\right.$ ad $r :: \sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$ ad $x - r$, cioè $r : r -$

1

$\frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2+yy}::\sqrt{\overline{x-r}^2+yy}:x-r$; dunque $rx-rr=r\sqrt{\overline{x-r}^2+yy}+\frac{1}{2}(-xx+2rx-rr-yy)$, cioè $\frac{1}{2}(xx+yy-rr)=r\sqrt{\overline{x-r}^2+yy}$: ed alzando a quadrato, $\frac{1}{4}(xx+yy-rr)^2=r^2(x-r)^2+r^2y^2$, la quale ordinata opportunamente si muta nell' equazione seguente

$$\begin{array}{llll} y^4 + 2x^2y^2 + & x^4 & = 0. \\ -6r^2y^2 - & 6r^2x^2 & \\ & +8r^3x & \\ & -3r^4 & \end{array}$$

Questa curva si chiama *Epicicloide* semplicissima, chiamandosi in genere *Epicicloidi* tutte le curve, che nascono dalla rotazione d'un cerchio sopra l'altro.

IV. Problema quarto. Dato un punto A fuori d' una retta data VT (*Fig.* 16. *Tav.* 2.), da cui tirata AB normale alla data, e prodotta in D; si faccia muovere la linea ABD in maniera, che passi sempre per A, rimanendo continuamente il punto B in VT; si cerca la curva descritta dal punto D. Fingiamo essere giunta la retta AD alla posizione ARN, e sia $RN=BD$: dal punto N, che è in curva, si cali NM normale a BD. Chiamisi $AB=a$, $BD=RN=b$, $AM=x$, $NM=y$; sarà $AN=\sqrt{xx+yy}$, e $BM=x-a$: ma abbiamo $AN:AM::RN:BM$; dunque $\sqrt{xx+yy}:x::b:x-a$; ed elevando al quadrato, $xx+yy:xx::bb:xx-2ax+aa$: e dividendo, $yy:xx::bb-xx+2ax-aa:xx-2ax+aa$;

$+ aa$; dunque $\begin{array}{l} xxy^2 + x^4 = 0. \\ -2axy^2 - 2ax^3 \\ + aay^2 + aax^2 \\ \quad\quad - bbx^2 \end{array}$

L' equazione non solamente comprende la curva DN descritta dal punto D, ma ancora, tagliata $BE = BD$, la curva descritta dal punto E. Questa curva si chiama *Concoide di Nicomede*, per esserne stato esso l' inventore. Il punto A dicesi *polo* della concoide.

V. Problema quinto. La linea LAS perpendicolare alla BC (*Fig.* 17. *Tav.* 2.), mobile sopra questa con moto parallelo, e che passi per A, abbia annesso nell' estremità S il filo SBF eguale alla data BC, il quale ripiegato in B si stenda lungo BC: si faccia muovere in seguito la BC nell' angolo retto GAH in maniera, che i punti B, C sieno costantemente nei lati AG, AH; si cerca la curva descritta dal punto F. Si conducano da questo punto FN, FM normali ai lati dell' angolo retto, e chiamisi $AN = x$, $FN = y$, $BC = a$. Per l' eguaglianza delle rette SBF, e BC, sarà $SB = CF$: ma $CB : BA :: BA : BS$; dunque $CB : BA :: BA :: CF$: ma $CB : BA :: CF : FN$; dunque CB, BA, CF, FN sono in continua proporzione; e perciò $CB : FN :: CB^3, BA^3$; dunque $a : y :: a^3 : BA^3 = a^2 y$; onde $BA = a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$. Nella stessa maniera si dimostra $CA = a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$.

Quindi nasce l' equazione $a^2 = a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}}$, cioè $a^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$: ed alzandola alla terza potestà, $a^2 = y^2 + 3 y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} . \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right) + x^2$: posto $a^{\frac{2}{3}}$ in vece di $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$, e trasportati i termini, sarà $a^2 - x^2 - y^2 = \overline{3axy}^{\frac{2}{3}}$: ed

ed elevandola di nuovo alla terza potestà, e ordinandola per y, sarà
$$\begin{array}{l} y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 \\ - 3a^2y^4 + 21a^2x^2y^2 - 3a^2x^4 = 0, \\ \quad + 3a^4y^2 + 3a^4x^2 \\ \quad - a^6 \end{array}$$
la qual curva è di sesto grado. Acciocchè si generi la curva intiera, si dee fare il moto non solo nell' angolo GAH, ma ancora nei tre altri angoli KAH, KAI, IAG.

VI. Problema sesto. La retta LAN, che passa per A, sia costantemente ad angoli retti sopra BC, (*Fig.* 18. *Tav.* 2.) che si muova nell' angolo retto BAC; si cerca la curva descritta dal punto N. Si conduca NM normale ad AB, e si chiami $AM = x$, $NM = y$, $AN = \sqrt{xx + yy}$, e $BC = 2a$. Per la somiglianza dei triangoli sarà $AM : NM :: AN : BN$, cioè $x : y :: \sqrt{xx + yy} : NB = \frac{y}{x} . \sqrt{xx + yy}$, ed $NM : AM :: AN : NC$, cioè $y : x :: \sqrt{xx + yy} : NC = \frac{x}{y} . \sqrt{xx + yy}$. Adunque avremo l'equazione $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} . \sqrt{xx + yy} = 2a$, cioè, moltiplicando l' equazione per xy, e passando il primo fattore del primo membro sotto del segno radicale, $\sqrt{yy + xx}^3 = 2axy$; e perciò quadrando, elevando attualmente a cubo il primo membro, ed ordinando per y, si avrà
$$\begin{array}{l} y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 = 0. \\ \quad - 4a^2x^2y^2 \end{array}$$
Acciocchè si ottenga questa curva intiera, il moto si dee fare nei quattro angoli.

VII. Problema settimo. Tirate infinite corde AF (*Fig.* 19. *Tav.* 2.) dal punto A posto nella circonferenza del circolo, che ha per diametro AB, si seghino gli archi

archi AF in due parti uguali in D, e dai punti D si calino le DG normali al diametro AB, che seghino la corda in E; si cerca la curva, che passa per tutti i punti E. Condotto il raggio CD, che seghi le corde AF in due parti uguali, e ad angoli retti in H, si otterrà il triangolo AGE simile al triangolo AHC: ma questo è simile al triangolo DGC; dunque AGE simile a DGC, e perciò $AG : GE :: DG : CG$. Si chiami ora il raggio $CA = a$, $AG = x$, $GE = y$; sarà, per la natura del cerchio, $DG = \sqrt{2ax - xx}$; CG poi sarà $= a - x$. Abbiamo adunque $x : y :: \sqrt{2ax - xx} : a - x$, cioè, dividendo per $\sqrt{x}$ gli antecedenti, ed alternando, $\sqrt{x} : \sqrt{2a - x} :: y : a - x$; quindi $(a - x) . \sqrt{x} : \sqrt{2a - x} = y$: e quadrando $(a^2 x - 2ax^2 + x^3) : (2a - x) = y^2$. Questa curva è la stessa che quella del num. 2.

VIII. Problema ottavo. Poste le stesse cose del problema antecedente; dal punto D, (*Fig.* 20. *Tav.* 2.) che taglia in due parti uguali l' arco AF, si conduca DE parallela al diametro AB, che seghi la corda in E; si cerca il luogo di tutte le sezioni in E. Condotta dal centro la CD, che divida la corda AF in due parti uguali, e ad angoli retti in H, si conducano EG, DI normali al diametro. Il triangolo AEG è simile al triangolo ACH, e perciò simile a DCI; avremo pertanto $AE : AG :: DC : DI$: ma chiamata $AC = DC = a$, $AG = x$, $EG = DI = y$; sarà $AE = (xx + yy)^{\frac{1}{2}}$; dunque $(xx + yy)^{\frac{1}{2}} : x :: a : y$; e quindi $a^2 x^2 = x^2 y^2 + y^4$, cioè $x^2 = \frac{y^4}{a^2 - y^2}$.

IX. Problema nono. Sia AEB (*Fig.* 21. *Tav.* 3.) un quadrante d'un cerchio, e condotto dovunque il rag-

raggio CE, che determini l'arco BE, il cui ſeno ſia ED, ed il coſſeno CD; ſi tagli l' arco BF, che ſia a $BE :: 1 : m$, e nel raggio CF ſi ſeghi CG, che data ſia per CD, o ED, cioè per lo coſſeno, o ſeno dell' arco; ſi cerca la curva, che paſſa per tutti i punti G. Le GH, FK ſieno normali al raggio CB, e chiamiſi $CH = x$, $GH = y$, $CG = z = \sqrt{xx + yy}$: inoltre il raggio CB, o il ſeno tutto ſia uguale ad a, l' arco $BF = \mu$, $BE = m\mu$. Dalle formole dei coſſeni circolari (Lib. 2. Cap. 11. num. 10.) abbiamo $Cc\,m\mu = \frac{(Cc\mu + \sqrt{-1} . Sc\mu)^m + (Cc\mu - \sqrt{-1} . Sc\mu)^m}{2a^{m-1}}$: ma $z : a :: x : Cc\mu = \frac{ax}{z}$, e $z : a :: y : Sc\mu = \frac{ay}{z}$; dunque $Cc\,m\mu = \frac{a^m}{z^m} . \frac{(x + y\sqrt{-1})^m + (x - y\sqrt{-1})^m}{2a^{m-1}}$. Chiamato adunque $Cc\,m\mu = p$, che è dato per z ſecondo la ſuppoſizione; ſarà $\frac{pz^m}{a} = \frac{(x + y\sqrt{-1})^m + (x - y\sqrt{-1})^m}{2}$: perciò ſe ſuppongaſi eſſer m numero intiero, innalzati i binomii all' intiera poteſtà m (*Lib.* 3. *Cap.* 1. *num.* 13.), per la contrarietà de' ſegni appartenenti alle poteſtà diſpari dell' y ſvaniranno gl' immaginarii, e ſoſtituito in vece di p il valore di lui dato per z, ed in vece di queſta poſto $\sqrt{xx + yy}$, ſi otterrà l'equazione cercata.

X. Sia $m = 2$; ſarà $\frac{pz^2}{a} = xx - yy$. Supponiamo inoltre $p = \frac{zz}{a}$, onde $\frac{z^4}{a^2} = xx - yy$, cioè $z^2 = a\sqrt{xx - yy}$: e ſoſtituendo il valore di z, $xx + yy =$

$a\sqrt{xx}$

$a\sqrt{xx - yy}$, equazione di quarto grado. La curva, che soddisfa a questa equazione, si suol chiamare *Lemniscata*: essa ha quattro rami simili, ed eguali, chiusi dentro il circolo del raggio $= a$, che si segano ad angolo semiretto in C.

XI. Fin quì aderendo al Cartesio abbiamo insegnato la maniera di ritrovare le curve supponendo alcune proprietà date fra le coordinate x, y, e costanti; o supponendo proprietà, che a queste si possano ridurre. Ma se le proprietà fossero date per le sole y, ovvero x, che è lo stesso, non si potrebbero coi metodi insegnati ritrovare le curve soddisfacenti a dette proprietà: bisogna dunque rivolgersi al metodo seguente.

XII. Per intendere ciò, che si è esposto, più chiaramente, si supponga la curva CD (*Fig.* 22. *Tav.* 3.) riferita alla retta AB: le AB sieno le x, e le BM, $B2M$ le y. Se in questa curva si avesse la prerogativa, che la somma $BM + B2M$ fosse costante, per esempio $= a$, non saprebbesi col metodo di Cartesio ritrovar la curva soddisfacente a detta proprietà.

XIII. Quì però prima d' ogn' altra cosa bisogna avvertire, che la proprietà data per le BM, $B2M$, cioè per le y appartenenti alla medesima ascissa AB, dee esser tale, che sostituita una y per l' altra y, la proprietà non si alteri: come sarebbe appunto nel caso proposto, in cui presa BM per $B2M$, e $B2M$ per BM, la proprietà, cioè l' uguaglianza della loro somma ad a, non si altera; si altererebbe poi se la proprietà fosse, che la somma della metà BM con $B2M$ uguagliasse la costante; perchè presa BM per $B2M$, e viceversa, la somma non è la medesima: lo stesso si dica di altre proprietà. Le proprietà dunque delle curve date per le y devono essere della prima sorte, e non della seconda; la ragione è, che qualunque proprietà di una curva dee essere comune a tutti i punti ti di essa : così nell' equazione $a^2 - x^2 = y^2$ questa proprietà si verifica in riguardo a tutte le x possibili della curva, e a tutte le y, e per conseguenza relativamente a tutti i punti. Da quì ne nasce, che qualunque prerogativa discendente da questa equazione sia comune a tutti i punti della curva; e quindi ancora, che la prerogativa data per le y appartenenti ad una ascissa, se è prerogativa propria della curva discendente dalla sua equazione, sarà comune a tutti i punti. Acciocchè poi questo succeda, si dee poter fare il cangiamento della y senza alterazione della proprietà; altrimenti relativamente ad un punto, per esempio M, nell' ipotesi di $\frac{BM}{2} + B\,2\,M = a$ valerebbe una prerogativa, cioè, che la metà dell' ordinata BM, con $B\,2\,M$ appartenente alla medesima ascissa, sia uguale alla costante a; e relativamente all' altro punto $2\,M$ valerebbe l' altra prerogativa, cioè, che la $B\,2\,M$, sommata con la metà dell' altra corrispondente ordinata MB, sia uguale ad una costante $= a$.

XIV. Si dee notare ancora, che le proprietà delle seganti BM, $B\,2\,M$ non solo si possono esprimere per costanti, ma ancora per una variabile appartenente soltanto alle seganti BM, $B\,2\,M$, come sarebbe per l' ascissa AB.

XV. Posto adunque, che le seganti abbiano prerogative colle esposte condizioni, vengo al metodo di determinare le curve, che farò palese nell'esempio addotto di sopra, cioè, che la somma delle due BM, $B\,2\,M$ sia uguale ad a. Comecchè due sono le ordinate della medesima ascissa, si prenda l' equazione del secondo grado $y^2 - 2my + n = o$, nella quale m, ed n sono due indeterminate, che in seguito determineremo. Risoluta una tale equazione, si avrà $y = m + \sqrt{m^2 - n}$, ed $y = m - \sqrt{m^2 - n}$; dunque sarà, per la proprietà proposta, $m + \sqrt{m^2 - n} + m - \sqrt{m^2 - n} = 2m = a$, ed $m = \frac{a}{2}$: e sostituito il valore di m nell'equazione assunta, sarà $y^2 - ay + n = 0$: e sostituita per n una qualunque quantità, data per costanti e per funzioni di x; tutte le curve, che nasceranno, soddisfaranno al problema.

XVI. Sia $n = ax$; avremo $y^2 - ay + ax = 0$, ed $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - ax$: e fatto $y - \frac{a}{2} = z$, $z^2 = a \times \overline{\frac{a}{4} - x}$, equazione alla parabola, il cui parametro è uguale ad a. Sia dunque $MA2M$ (*Fig.* 23. *Tav.* 3.) la parabola nostra: e condotta dal vertice A la tangente $AC = \frac{a}{2}$, e per C la CB parallela al diametro del vertice A, e finalmente per lo punto B qualunque tirate le ordinate BM, $B2M$; sarà sempre la loro somma $= a$. Se l'ordinate si tirino dal punto S di intersecazione di CB con la curva, allora una ordinata diventa $= 0$, e l'altra $= a$: se il punto B si prenda sopra la sezione, le due ordinate sono positive: se il punto B si prenda sotto la sezione, una ordinata è positiva, e l'altra negativa; onde la somma passa in sottrazione. Il tutto si deduce dell'equazione.

XVII. Si ponga ora $n = x^2$ nell'equazione $y^2 - ay + n = 0$; sarà $y^2 - ay + x^2 = 0$: e fatto $y - \frac{a}{2}$ $= z$

$= z$ come prima, si avrà $z^2 = \frac{a^2}{4} - x^2$, equazione al circolo, il cui raggio è $= \frac{a}{2}$; dunque ancora il circolo, il cui raggio è $\frac{a}{2}$, soddisfa al problema. Da tali cose apparisce chiaramente, che se in vece di n si pongano altri valori, dati per funzioni di x e costanti; tutte le curve, che nasceranno, avranno la desiderata proprietà, cioè, che la somma delle ordinate corrispondenti alla medesima ascissa sia uguale ad a.

XVIII. Se l' y, ovvero l'ordinate appartenenti alla medesima ascissa fossero tre, e si cercasse la curva, che soddisfacesse ad una proprietà data per queste y; bisognerebbe assumere una equazione di terzo grado, per esempio $y^3 - 3my - n = o$, e trovare le radici di y col metodo cardanico: dopo di ciò, per mezzo della proprietà data, trovare il valore di una indeterminata m, o n, e questo sostituire in luogo della indeterminata nell' equazione assunta di terzo grado: e fissata l' altra indeterminata per costanti, e per qualunque funzione di x ad arbitrio; le curve espresse dalle equazioni indi nate scioglieranno il problema. Si cerchi per esempio una curva, che abbia tre ordinate appartenenti ad una ascissa, in cui il prodotto delle tre ordinate sia uguale ad a^3. Sarà $n = a^3$; onde l' equazione assunta si convertirà in $y^3 - 3my - a^3 = o$: fissato dunque il valore di m per costanti, e funzioni di x, si avranno le curve ricercate.

XIX. Avvertasi però, che l' equazione assunta $y^3 - 3my - n = o$, quantunque dia un numero di curve infinito soddisfacenti alla medesima prerogativa, con tutto ciò non le dà tutte, a motivo, che manca il secondo termine, e per conseguenza una indeterminata.

Per aver dunque una equazione universale, che abbracci tutte le possibili curve della prerogativa data, conviene prendere l' equazione $y^3 + 3Ay^2 + 3By + C = o$, che abbia il secondo termine, e poi seguitare l'operazione come sopra.

XX. Bisogna però notare, che la medesima proprietà si può verificare ancora in una curva, che abbia una sola ordinata, essendo l' altre due, appartenenti alla medesima ascissa, immaginarie; imperocchè quantunque le due radici sieno immaginarie, però combinate insieme possono dare una quantità reale, la quale poi combinata con l' y reale può ottimamente dare la prerogativa ricercata. Questa riflessione era superflua quando le y erano due, perchè in tal caso o ambedue i valori di y sono immaginarii, e perciò non vi è curva, oppure ambedue sono reali; ma quando l' y appartenenti alla medesima ascissa sono più di due, allora bisogna aver l' occhio a quanto si è quì sopra avvertito.

Il fin quì operato per ritrovare le curve soddisfacenti a prerogative reciproche, date per due, e tre y, o siano ordinate appartenenti alla medesima ascissa, ci insegna chiaramente cosa si debba fare quando l' ordinate sono quattro, cinque, sei, &c.

XXI. Fino adesso abbiamo supposto l' y, ovvero l' ordinate, per cui sono date le proprietà delle curve, essere fra di loro parallele; il che ci ha data la comodità di considerare le curve alla maniera cartesiana, cioè riferite ad una retta per mezzo delle ascisse x, ed ordinate y; ma alle volte l'ordinate y, per cui si danno le prerogative delle curve, concorrono in un punto: come sarebbero tutte le seganti di un circolo tirate ad esso da qualche punto fisso, se tali seganti si chiamino y; fra queste y dunque, concorrenti ti in un punto, si danno delle prerogative comuni a più curve; onde per compimento di questo Capo bisogna assegnare la maniera di determinarle.

XXII. Sia la curva $M B C 2 M$ (*Fig.* 24. *Tav.* 3.), ed un punto qualunque A, da cui si tiri una retta $A B C$ fissa di posizione, ed un'altra $A M 2 M$ segante la curva, per esempio in due punti M, $2 M$. La proprietà comune a più curve dee esser data per le due $A M$, $A 2 M$, ovvero y appartenenti al medesimo angolo $C A 2 M$, e per costanti; e se si vuole, per qualunque funzione dell'angolo, della tangente, seno, cosseno, &c.: essa proprietà inoltre dee esser tale, che non si possa alterare se in vece di $A M$ pongasi $A 2 M$, e a rovescio.

XXIII. Si debba dunque, per cagion d'esempio, trovare una curva, a cui da un punto qualunque A tirata una segante $A M 2 M$, che tagli la curva in due punti M, $2 M$, sia la somma delle due intercette $A M$, $A 2 M = a$.

Essendo due l'y, prendo l'equazione del secondo grado $y^2 - 2 m y + n = o$; sarà dunque, per la proprietà data, $2 m = a$, ed $m = \frac{a}{2}$ (num. 15.): e fatta nell'equazione la sostituzione di $\frac{a}{2}$ in vece di m, sarà $y^2 - a y + n = o$. Se dunque determinerò n per costanti e qualunque funzione dell'angolo $B A M$, sarà determinata la curva della proposta proprietà: e comecchè i valori di n così determinati possono essere infiniti, quindi infinite saranno le curve soddisfacenti alla prerogativa data. Suppongasi n uguale al seno dell'angolo $B A M$, che chiamo φ, moltiplicato per p sarà $n = S c \varphi . p$: e calata dal punto M in $A C$ la normale $M O$, e chia-

chiamata $MO = z$, sarà $r : S c \varphi : : r : \frac{n}{p} : : y : z$; dunque $n = \frac{prz}{y}$; onde l'equazione assunta sarà $y^3 - a y^2 + p r z = o$. Per passare dalla considerazione di questa curva riferita al punto A alla considerazione della detta curva secondo il metodo cartesiano: si chiami $AO = x$, e sarà $y = \sqrt{xx + zz}$; onde fatta nell' equazione la sostituzione del valore di y, sarà $\overline{x^2 + z^2}.$ $\sqrt{xx + zz} - a . xx + zz + p r z = o$.

XXIV. Si voglia in secondo luogo, che il prodotto delle due ordinate AM, $A\,2\,M$ sia uguale ad a^2; sarà $n = a^2$, e l' equazione assunta si convertirà in $y^2 - 2 m y + a^2 = o$, la quale esprimerà tutte le curve infinite, che hanno una tale prerogativa. La determinazione poi di queste curve dipende dal valore di m, che si deve fissare ad arbitrio per costanti, e funzioni dell' angolo BAM.

Sia m uguale al seno dell' angolo BAM: la normale MO chiamata come sopra z, si troverà come sopra $m = \frac{rz}{p}$; onde fatta nell' equazione assunta la sostituzione, sarà $y^2 - 2 r z + a^2 = o$. Per considerare la curva alla cartesiana, si chiami $AO = x$; sarà $y^2 = xx + zz$: e fatta la sostituzione nell' equazione in vece di y; sarà $xx + zz - 2 r z + a^2 = o$, cioè $zz - 2 r z + r^2 = r^2 - a^2 - x^2$: e fatta $z - r = u$, ed $r^2 - a^2 = c^2$; sarà $u^2 = c^2 - x^2$, equazione a qualunque circolo, essendo il valore di r, da cui dipende il valore di c, arbitrario; e però fra l' infinite curve della prerogativa proposta vi è ancora il circolo. Non è dunque il circolo solo, che abbia tale proprietà, come forse ſe alcuno crederà, ma ſono infinite curve, potendo eſſere infiniti i valori di m.

XXV. Se l'ordinate appartenenti al medeſimo angolo foſſero tre, ſi dovrebbe prendere un'equazione di terzo grado, cioè $y^3 + m y^2 + n y + p = o$, ed operare come ſopra: ſe l'y foſſero quattro, cinque, ſei, &c., convien aſſumere una equazione di quarto, quinto, ſeſto grado, &c.. Si avverta però di prenderle complete, vale a dire con tutti i termini, per ottenere una formola, che contenga tutte le curve poſſibili della data prerogativa.

XXVI. Da tutto ciò, che ſi è detto, facilmente ricavaſi, che quando l'ordinate, o parallele, o concorrenti in un punto, ſono due, una indeterminata dell'equazione aſſunta del ſecondo grado ſi fiſſa con la proprietà data, reſtando l'altra da fiſſarſi ad arbitrio: e che quando l'ordinate ſono tre, una indeterminata dell'equazione del terzo grado ſi fiſſa con la proprietà data, reſtando due arbitrarie: e così quando l'ordinate ſono quattro, cinque, &c., una indeterminata ſi fiſſa con la data proprietà, reſtando tre, e quattro, &c. arbitrarie. Dunque quando l'ordinate ſon due, potrò ottimamente ſupporre le due ordinate dotate di due prerogative, delle quali una non diſcenda dall'altra, e così fiſſare una curva ſoddisfacente a quelle due proprietà. Se l'ordinate ſono tre, potrò ſupporre le ordinate dotate di tre prerogative non identiche: lo ſteſſo diſcorſo ſi eſtenda a gradi più alti. Diamone per chiarezza qualche eſempio.

Si voglia una curva, che abbia due ordinate appartenenti alla medeſima aſciſſa, in cui la ſomma di quelle ſia $\frac{cx}{a}$, il prodotto ſia bx. Prendo la ſolita e-

qua-

quazione del secondo grado $y^2 - 2my + n = o$, per esser due l'y della stessa ascissa. La prima prerogativa darà $2m = \frac{cx}{a}$: per la seconda sarà $n = bx$; onde sostituendo, $y^2 - \frac{cxy}{a} + bx = o$: e $z^2 = \frac{c^2x^2}{4a^2} - bx$, posta $z = y - \frac{cx}{2a}$; cioè $\frac{4a^2z^2}{c^2} = x^2 - \frac{4a^2bx}{c^2}$: e $\frac{4a^2z^2}{c^2} + \frac{4a^4b^2}{c^4} = u^2$, messa $u = x - \frac{2a^2b}{c^2}$: e facendo $\frac{4a^4b^2}{c^4} = f^2$, e $\frac{4a^2}{c^2} = \frac{f^2}{g^2}$; sarà $\frac{f^2z^2}{g^2} = u^2 - f^2$, equazione all' iperbola riferita al primo diametro, o sia al diametro trasverso.

XXVII. Quando le prerogative, di cui si vogliono dotate le y, sono ripugnanti fra loro, non mancherà di indicarlo qualche patente assurdo, nel fissarsi le indeterminate.

CA-

CAPO XIV.

Si risolvono alcuni Problemi determinati di grado superiore al quarto.

I. PRoblema primo. Delle medie proporzionali tra a e b di numero m, trovare quella che si vuole, per esempio quella del numero n. Si chiami la prima delle medie proporzionali $= x$; saranno le continue proporzionali in questa serie $a, x, \frac{xx}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \ldots \frac{x^n}{a^{n-1}}, \ldots$ ed $\frac{x^m}{a^{m-1}}$ sarà la penultima; dunque sarà $b = \frac{x^{m+1}}{a^m}$. Quella delle medie proporzionali posta nella sede n, la quale è $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, si metta $= z$; onde sia $x^n = a^{n-1} z$: ma abbiamo $x^{m+1} = a^m b$, e perciò, elevando ambedue i membri alla potestà $\frac{n}{m+1}$, $x^n = a^{\frac{mn}{m+1}} \times b^{\frac{n}{m+1}}$; dunque $z = a^{\frac{m-n+1}{m+1}} \times b^{\frac{n}{m+1}}$, la qual formola dà la ricercata media proporzionale di numero n.

II. Per venire alla costruzione, così dispongasi la formola $z^{m+1} = a^{m-n+1} b^n$ con elevarla alla potestà $m+1$. Se fosse m numero dispari, ed $m+1$ pari; fatta $zz = ay$, ossia $z = a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, avremo, sostituendo, $a^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{m+1}{2}} = a^{m-n+1} b^n$, cioè $y^{\frac{m+1}{2}} = a^{\frac{m-2n+1}{2}} b^n$; da cui ricavata y, si determinerà ancor la z, che è media proporzionale fra a ed y. Se $\frac{m+1}{2}$ sia pari, collo stesso metodo si riduce la difficoltà a trovare la terza proporzionale dopo a ed y: e così di mano in mano, fino a tantochè si venga all' esponente dispari; adunque basta costruire la formola nel caso dell' esponente dispari $m + 1$. A questo fine si moltiplichi la formola per z, acciocchè sia $z^{m+2} = a^{m-n+1} b^n z$, e l' esponente $m + 2$ pari: si faccia $z^2 = a y$, acciocchè si abbia $y^{\frac{m+2}{2}} = a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z$, essendo $\frac{m+2}{2}$ intiero. All' asse AD (*Fig.* 25. *Tav.* 3.) si descriva la parabola ABM dell' equazione $y^{\frac{m+2}{2}} = a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z$ (40), e AD sieno le z: dipoi descrivasi la parabola Apolloniana dell' equazione $z^2 = a y$, che avrà le ascisse z nella tangente AD; queste parabole si segheranno nel punto B: da questo calisi l'ordinata BD; sarà $AD = z$ media proporzionale cercata; BD poi sarà $= y$ terza proporzionale dopo a e z.

III. Problema secondo. Dividere un arco di cerchio in parti uguali del dato numero. Se il numero dato non è primo, si risolva nei suoi fattori, per esempio m, n: poi si divida l' arco in parti uguali m, è ciascuna di queste in parti uguali del numero n: e così il problema sarà ridotto a grado inferiore; e perciò supporremo che il numero n delle parti uguali sia primo. Prendo la formola del cosseno dell' arco multiplo, la quale, chiamato il raggio $= r$, e l' arco dato $= \mu$, è la seguente (Lib. 2. Cap. 11. num. 10.) $C c \mu =$

$$\frac{\left(Cc\frac{\mu}{n} + \sqrt{-1}\,.\,Sc\frac{\mu}{n}\right)^n + \left(Cc\frac{\mu}{n} - \sqrt{-1}\,.\,Sc\frac{\mu}{n}\right)^n}{2\,r^{n-1}}.$$

Il cosseno μ pongasi $= a$, e $Cc\frac{\mu}{n} = x$, $Sc\frac{\mu}{n} = y$; sarà

ſarà $yy = rr - xx$, ed avremo queſta equazione $a = \frac{(x + y\sqrt{-1})^n + (x - y\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}}$. Alzati i due binomii alla poteſtà n, ſvaniranno tutti gl' immaginarii, e ſi troverà y innalzata a poteſtà pari; imperciocchè i termini, in cui la y ſi ritrova a poteſtà diſpari, ſono col ſegno contrario, e perciò ſi diſtruggono. Soſtituito adunque il valore di y^2, ne deriverà un' equazione data per x, che ſi potrà coſtruire con una curva dello ſteſſo grado ſegata dalla linea retta.

IV. Problema terzo. Sieno due punti B, C (*Fig.* 26. *Tav.* 3.) in una retta data di poſizione, ed un punto A fuori di eſſa; da queſto ſi voglia tirare una linea AMN in maniera, che ſegata MN uguale ad una data, e condotta in BC la normale NS; ſia il rettangolo BSC uguale al rettangolo della data in NS. Perchè dee MN uguagliare la data, ſarà il punto N nella concoide di Nicomede, che ha per polo il punto A, e l' intercetta fra la curva, e la BC della retta condotta dal polo eguaglia la data (Cap. preced. num. 4.). Deſcritta adunque la concoide nicomedea EN; il punto N ſarà in queſta curva. Per determinare l' altra curva, che dee ſegare la concoide, ſi divida BC in parti uguali in D, a cui ſia normale DF, ed a queſta ſia normale NT. Chiamiſi $CD = DB = a$, $MN = b$, $TD = NS = x$, $TN = DS = y$; ſarà $SC = a + y$, $BS = a - y$; adunque il rettangolo $BSC = aa - yy = bx$, cioè $b.\left(\frac{aa}{b} - x\right) = yy$, che è una parabola apolloniana. Per coſtruir queſta, ſi ſeghi DF terza proporzionale dopo b, a: col vertice F, e col parametro $= b$ ſi deſcriva la parabola; queſta paſſerà per i punti B, C (41), ed il punto di ſezione del-

della parabola colla concoide scioglierà il problema; il qual punto se non sarà unico, tante saranno le soluzioni del problema, quanti i punti in cui la concoide sarà segata dalla parabola.

X. Problema quarto. Si seghino le rette *A C*, *A D* (*Fig.* 27. *Tav.* 3.) ad angoli retti; si vuole determinare un punto *M* in una retta *P Q* data di posizione, in maniera, che congiunta la *A M*, l'intercetta *C M D* perpendicolare a questa sia eguale ad una data. Dovendo la *C D* essere eguale ad una data, e dovendo essere normale alla linea *A M*, che passa pel punto *A*, il punto *M* si ritroverà nella curva di sesto grado, che è stata da noi delineata nel Capo precedente num. 6. Adunque se descrivasi questa curva, segherà essa la retta *P Q* in *M*, che sarà il punto ricercato, come dalla natura della curva chiaramente si deduce. La nostra curva può segare la retta *P Q* o in sei punti, o in quattro, o in due, o in veruno; adunque il problema avrà alle volte sei soluzioni, alle volte quattro, alle volte due, e alle volte non avrà soluzione alcuna. La stessa costruzione avrà luogo ancorchè *P Q* non sia una retta, ma una curva qualunque, per cagion di esempio se fosse un circolo descritto col dato centro *R*, e col dato raggio *R M*; nel qual caso il problema si può proporre così: segandosi le rette *A C*, *A D* ad angoli retti, e dato il punto *R*; determinare il punto *M* in maniera, che *R M* eguagli la data, e l'intercetta *C D* normale ad *A M* sia eguale ad un'altra data. Questo problema può ricevere al più otto soluzioni.

VI. Problema quinto. Nel lato *A T* (*Fig.* 28. *Tav.* 3.) dell'angolo retto dato il punto *A*, e dato dovunque un punto *R*; si vuole condurre *A O* in maniera, che prolungata in *N* fino a tanto, che sia *O N*=*O T*,

la

la $R\,N$ ſia eguale ad una data. Dovendo $O\,N$ eguagliare $O\,T$, il punto N ſarà in una curva, di cui abbiamo parlato nel Capo precedente al num. 2. Adunque deſcrivaſi queſta curva: indi centro R, coll' intervallo dato ſi delinei il circolo, che ſegherà la curva nel punto N, e congiunta $A\,N$, queſta ſarà quella, che ſoddisfarà al problema. Se il circolo ſegherà la curva nel foglio $A\,2\,N\,T$, allora non deeſi produrre la linea $A\,2\,O$, ma la ſua parte $2\,N\,2\,O$ eguaglierà $2\,O\,T$ (42). Se il punto N ſi doveſſe ritrovare in qualunque altra linea retta, o curva differente dal circolo, la comune ſezione di quella colla curva $A\,T\,N$ darebbe la ſoluzione del problema.

VII. Problema ſeſto. Date due quantità a, b, e coſtituito a come il primo termine di una ſerie geometrica, della quale l'incognita x ſia il ſecondo; ſi domanda di determinare la x in maniera, che il termine della ſerie indicato dal numero n ſia eguale a $b - x$. Propongo queſto problema per eſporre un metodo di coſtruire con eleganza i problemi, che ſuperano il quarto grado, del qual metodo ſiamo obbligati al Signor Conte Giacomo Riccati.

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX
a,	x,	$\frac{xx}{a}$						
		y,	$\frac{xy}{a}$,	$\frac{yy}{a}$				
			$\frac{yy}{x}$					
			t,	$\frac{tx}{a}$,	$\frac{ty}{a}$			
				$\frac{ty}{x}$,	$\frac{tt}{x}$			
				$\frac{tt}{y}$				
				z,	$\frac{xz}{a}$,	$\frac{zy}{a}$,	$\frac{zt}{a}$,	$\frac{zz}{a}$
					$\frac{zy}{x}$,	$\frac{tz}{x}$,	$\frac{zz}{x}$	
					$\frac{zt}{y}$,	$\frac{zz}{y}$		
					$\frac{zz}{t}$.			

Essendo a la prima delle continue proporzionali, x la seconda; sarà $\frac{xx}{a}$ la terza. Se si ritenesse nel calcolo questa espressione, necessariamente l' espressione della la quarta proporzionale conterrebbe la terza poteſtà. Per evitar ciò, chiamo $\frac{xx}{a} = y$, e dopo a, x, y trovo la quarta proporzionale continua $= \frac{xy}{a}$, ovvero $= \frac{yy}{x}$: indi ritrovo la quinta $= \frac{yy}{a}$, le quali eſpreſſioni non ſuperano il ſecondo grado. Se ſi riteneſſero queſte eſpreſſioni, nel determinare l' altre continue proporzionali ſi urterebbe nelle terze, quarte, &c. poteſtà. Faccio adunque la quarta proporzionale $= t$, e determino la quinta, e la ſeſta, come vien notato nella tavola ſuperiore. Se pongaſi la quinta $= z$, ſi determinerà fino alla nona ſenza incontrare eſpreſſioni, che ſuperino il ſecondo grado.

VIII. Reſta a far vedere come tali eſpreſſioni ſi coſtruiſcano. Supponiamo il numero $n = 5$, cioè eſſere la quinta delle continue proporzionali $= b - x$. Si prenda la ſua eſpreſſione ſempliciſſima $= \frac{yy}{a}$; ſarà $yy = a \cdot (b - x)$, equazione alla parabola: la ſoſtituſtione inoltre ci dà $xx = ay$, la quale equazione è alla ſteſſa parabola. Naſce adunque la coſtruzione ſeguente. Si prenda $AB = a$, (*Fig.* 29. *Tav.* 3.) e ſi deſcriva col parametro a la parabola AD, che ſia toccata da AB: indi tagliata $AC = b$, col vertice C, e col aſſe CA deſcrivaſi la parabola CD dello ſteſſo parametro a; che ſegherà la prima in D: ſi ordini DE; ſarà l'aſciſſa $AE = x$ la ſeconda delle cinque continue proporzionali. Si voglia ora la ſeſta delle continue proporzionali $= b - x$; ſarà $\frac{tt}{x} = b - x$, e $tt =$

bx

$bx - xx$, la quale equazione è al circolo. Si delineì in primo luogo la parabola *A D* (*Fig.* 30. *Tav.* 3.) dell' equazione $xx = ay$, che dà la sostituzione; nella tangente *A C* saranno collocate le $AE = x$: normali a queste sieno le ordinate $DE = y$: indi si faccia $AB : AE :: DE : FE$, ovvero in termini analitici, $a : x :: y : t$, e per tutti i punti *F* passi la nuova curva *A F*: presa inoltre $AC = b$, sopra il diametro *A C* si descriva il circolo *A F C*; questo segherà la curva *A F* in un punto *F*, da cui calata *F E*, si determinerà *A E*, che sarà la seconda proporzionale ricercata.

FINE DEL TERZO ED ULTIMO LIBRO.

AGGIUNTA
DI NOTE

PER LA PIU' FACILE INTELLIGENZA DEGLI ARTICOLI PIU' DIFFICILI DI QUESTO COMPENDIO.

NOTE

DEL LIBRO PRIMO.

NOT. I.

Il Sig. Canonico Saladini, ornamento dell' Istituto delle Scienze di Bologna, seguendo lo stesso stile tenuto nell' Opera assai profonda delle Istituzioni Analitiche, da esso, e dal chiarissimo P. Vincenzo Riccati composte, e date alla luce in Bologna nell' anno 1765, trascura in questo Compendio la definizione della Scienza di cui tratta, rimettendola interamente alla viva voce di chi dovrà la medesima insegnare. Essendo intanto mio intendimento render tale questa sua Opera da poterla ognuno studiar da se solo, senza ajuto alcuno del Maestro; errore sarebbe, se da me ancora si tralasciasse.

1. La Scienza adunque, che in questo Compendio si espone, dicesi *Algebra;* ed ella altro non è, che *quella scienza, che dà le regole certe di calcolare generalmente tutte le quantità.*

2. Quindi è, che *le quantità poste a calcolo* son l' *oggetto* dell' Algebra. Per calcolare poi altro non s' intende, se non che praticare tutte quelle operazioni appunto, che si fanno nella volgare Aritmetica su de' numeri, di modo che non fa altro l' Algebra, che estendere universalmente ad ogni quantità quelle operazioni stesse, che l' Aritmetica applica ai soli numeri. Ed ecco perchè dal Newton fu l'Algebra chiamata *Aritmetica universale.*

3. Or poichè per calcolare le quantità bisogna esprimerle con caratteri: e per calcolarle generalmente debbono questi esser tali da poter ugualmente esprimere non che qualunque numero, ma qualunque linea, superficie, ec., e tutto ciò, che d' incremento, o di diminuzione è capace: essendo a ciò attissimi i caratteri, o sien cifre dell'alfabeto; di essi si servono gli Algebristi per esprimere le quantità da-

A 2 cal-

calcolare ; e perciò le quantità così espresse , *quantità algebraiche* (Cap. 1. num. 1. pag. 1.) si appellano.

4. Il fine poi , per cui si calcolano le quantità , si è quello di determinare il valore delle quantità incognite coll' ajuto di altre cognite date , e delle relazioni , che fra quelle , e queste si danno. Quindi è , che il *fine dell' algebra* è *di dare i mezzi , onde condurre a risoluzione qualunque problema , che su delle quantità può proporsi*.

5. Ma poichè l' Algebra per ottener questo fine si serve del metodo da' Logici chiamato *analitico* , ossia di *risoluzione* , e di questo si serve ancora nel dar le regole del calcolo , e nel dedurre le une dalle altre ; essendo la medesima una continuata analisi , *Analisi* ancora l' Algebra per eccellenza si chiama.

N O T. II.

LA stessa rego[illegible]he per i segni da premettersi ai prodotti si asseg[illegible] num. 7. del Cap. 1. pag. 6. , può confermarsi nel mod[illegible]uente.

Nella volgare Arit[illegible]etica il fattor moltiplicatore è quello , che determina il valor[illegible]ossia la quantità del prodotto ; poichè esso , se è intero , [illegible] quante volte debba ripetersi il moltiplicando per aversi [illegible]dotto ; e se è fratto , disegna dover essere il prodotto [illegible]ale parte del moltiplicando , quale è esso dell' unità ; di modo che , posto lo stesso moltiplicando , il prodotto sempre più crescerà al crescere del moltiplicatore , e sempre più si diminuirà minorandosi il moltiplicatore. Questi diversi aritmetici prodotti , che dal moltiplicatore vengono regolati , riguardano solamente le quantità positive , cioè maggiori del zero , giacchè di altre quantità non si ha idea nell' Aritmetica. Or siccome l' Algebra tratta e di quantità positive , e di quantità negative ; il moltiplicatore nelle algebraiche moltiplicazioni deve determinare non solamente la quantità del prodotto , ma anche se debba esser questa di eccesso , o di difetto dal zero : che è lo stesso che dire , che 'l moltiplicatore algebraico non solo deve rego-

regolare la quantità del prodotto, ma deve ancora stabilire il segno da premetterseli; imperocchè, se non fosse così, resterebbe il prodotto indeterminato, ed indifferente ad esser piuttosto positivo, che negativo: e questa indifferenza non da altro, che dal moltiplicatore deve toglierseli, al pari, che da questo se ne determina la quantità.

Posto ciò, se i fattori saranno ambidue positivi; in questa moltiplicazione denoterà il moltiplicatore, che il moltiplicando positivo, ripetuto, o diminuito quanto da esso moltiplicatore viene indicato, dovrà prendersi nello stesso suo stato positivo; e perciò il prodotto sarà positivo. Se ambidue i fattori saranno negativi, denoterà il moltiplicatore, che il moltiplicando negativo, ripetuto, o diminuito, come sopra, dovrà prendersi nella direzione o stato suo negativo, cioè negativo di negativo: ma il negativo del negativo è il positivo; dunque in questo secondo caso il prodotto sarà ancor positivo. Se il fattor moltiplicando poi sarà positivo, e 'l moltiplicatore negativo; questo denoterà similmente, che ripetuto o diminuito quello positivo quanto da questo viene determinato, dovrà prendersi poi nello stato suo negativo: e sarà però negativo il prodotto. Finalmente lo stesso prodotto negativo si avrà, se il moltiplicando sia negativo, e 'l moltiplicatore positivo, denotando questo, doversi, come sopra, replicare, o diminuire quello, che è negativo, e nel positivo stato in cui è, cioè nel negativo. Il prodotto adunque di fattori del medesimo segno sarà positivo, e quello di fattori di diversi, sarà negativo.

N O T. III.

1. PEr dimostrare la verità della regola, che nel num. 20. del Cap. 1. pag. 14., e 15. si assegna per la division composta, fa d'uopo avvertire, che in qualunque divisione il dividendo altro non è, che il prodotto del quoto ignoto, che si cerca, nel divisore noto: e questo è il principio su cui la detta regola è fondata. Se adunque suppongansi composti e 'l dividendo, e 'l divisore; il dividendo altro non sarà, che

che la somma di tutti i prodotti, che risultano dalla moltiplicazione dell' intero quoto in ciascun termine del divisore (Cap. 1. num. 16.). Quindi col dividere que' soli termini del dividendo, che dal prodotto nascono del quoto in uno qualsisia termine del divisore, per questo stesso e solo termine, si otterrà il quoto richiesto. Donde apparisce in primo luogo, doversi per un solo termine del divisore eseguire la divisione composta, come appunto dall' espressata regola si prescrive.

2. Tutta la difficoltà consiste nel conoscere nel dividendo i termini da doversi dividere per ottenere il quoto richiesto, dovendo esser que' soli, che risultano, come si è detto, dal prodotto del quoto intero in uno qualsivoglia termine del divisore: i quali perciò dovranno contenere una lettera almeno comune col divisore, per cui anche il dividendo dovrà averla tale col medesimo. Scelta adunque una delle lettere ad arbitrio, comune al dividendo ed al divisore: e scelto per divisore quel termine del divisore intero, che contiene la massima potestà di tal lettera; è chiaro, che fra que' soli termini del dividendo, ne' quali si conterranno tutte le potestà della suddetta lettera non minori della contenuta nel termine divisore, si troveranno i richiesti, cioè quelli risultanti dal prodotto dell' intero quoto nel medesimo termine divisore.

Quindi se si ordinerà il dividendo, e 'l divisore per la suddetta lettera, nel primo termine del dividendo si troverà il prodotto del primo del divisore nel primo del quoto ordinato, se la medesima lettera sarà anche a questo comune. Sicchè dividendo un tal primo termine del dividendo per lo primo del divisore, dovrà ottenersi il primo del quoto. Avuto questo, se il suo prodotto nell' intero divisore si sottrarrà dall' intero dividendo, altro non si verrà a fare, che ad eliminare, ossia togliere dal dividendo medesimo il termine già diviso, ed alcuni di quegli altri, che al prodotto del termine divisore nel richiesto quoto non appartengono. Similmente diviso il primo termine del residuo ordinato per lo stesso primo del divisore, si verrà ad avere il secondo del quoto, il quale moltiplicato nel divisore, e sottratto, come sopra, farà svanire nel dividendo l'altro termine già diviso, in-

insieme con altri, che al suddetto prodotto non competono. E ripetuta l'operazione stessa finchè si potrà, cioè fino a tanto, che nel residuo, a cui si perverrà, conterrassi della lettera, per la quale si sono i termini della divisione ordinati, la potestà non minore della contenuta nel termine divisore; coll'ultima sottrazione, che l'operazione richiede, svanirà il residuo, se la divisione sarà perfettamente eseguibile; e colla somma de' particolari quoti si verrà ad ottener finalmente il quoto richiesto. Ecco dunque, che per eseguire la divisione di due quantità composte bisogna prima ordinare ambidue i termini della divisione per una lettera ad essi comune, ed indi dividere i termini del dividendo per lo solo primo del divisore, come appunto si prescrive dalla regola, che per la division composta nel detto numero 20. si assegna.

3. Che se coll'ultima sottrazione non isvanisse il residuo, allora, poichè il quoto moltiplicato nel divisore deve restituire il dividendo, per aversi il quoto totale, alla somma de' particolari quoti si dovrà aggiugnere una frazione, che abbia per numeratore l'ultimo residuo, e 'l divisore intero per denominatore, come appunto vedesi eseguito nel secondo esempio, che nel num. 21. del nominato Cap. 1. si trova addotto.

4. Si rifletta intanto, che una quantità algebraica composta, se contenga la stessa potestà della medesima lettera in più termini ripetuta; ordinata per tal lettera, ciascun termine di essa verrà costituito da tutti quelli, che contengono la stessa potestà della lettera: così il primo sarà costituito da tutti quelli, che contengono la massima potestà della lettera: il secondo da tutti quelli contenenti la prossimamente minore, e così in seguito.

Quindi si avverta, che se nell'eseguire la regola della division composta, il primo termine del dividendo ordinato, o il primo di qualche residuo, non sarà semplice; potrà accadere, che non tutte le parti di esso sieno divisibili per lo primo del divisore, potendo esse esser prodotte dalla moltiplicazione del quoto per altro termine del divisore, diverso dal primo (num. 1.). In tal caso devesi dividere quella parte di esso primo termine del dividendo, o di uno de' resi-

residui, per lo primo del divisore, la quale si scorga evidentemente essere per questo perfettamente divisibile. Se il primo termine del divisore ordinato sarà ancor egli composto, gioverà scrivere in primo luogo, e per termine divisore quella sua parte, per cui si scorgerà poter dividere più termini del dividendo, allorchè la divisione proposta non sia perfettamente eseguibile; ma in quella eseguibile, potrà stabilirsi qualunque parte del medesimo per termine divisore, giacchè ciascun termine dell' intero divisore vi ha nel dividendo la stessa relazione e parte, che ogni altro del medesimo divisore, come dal num. 1. di questa Nota si deduce.

5. Finalmente, per questa stessa ragione ultimamente addotta, è chiaro, che se le quantità proposte a dividersi, ordinate per una lettera al dividendo, e al divisore comune, non riescano esattamente divisibili; non sarà più sperabile, che lo sieno ordinandole per altra.

NOT. IV.

La dimostrazione di ciò, che si dice nel num. 4. del Cap. 2. pag. 17., cioè, che il prodotto di $\frac{a}{b}$ in c sia uguale ad $\frac{ac}{b}$, e che perciò generalmente il prodotto di una frazione in una quantità intera, e vicendevolmente, si abbia con moltiplicare per l' intera il numeratore della frazione proposta; si può ripetere dalle proprietà delle geometriche proporzioni nel modo seguente.

Di qualunque valore sieno a, c, sempre si ha $1 : a :: c : ac$: e dividendo i conseguenti di ambedue le ragioni per una terza quantità b, si avrà $1 : \frac{a}{b} :: c : \frac{ac}{b}$. Quindi $\frac{a}{b}$. $c = 1 . \frac{ac}{b} = \frac{ac}{b}$.

Dello stesso modo si potrà ancor dimostrare la verità della regola, che si dà nel num. 7. del medesimo Cap., per la moltiplicazione d' una frazione per un altra, senza aver biso-

bisogno di stabilire prima nel num. 6. quella per la loro divisione.

N O T. V.

Il metodo di rintracciare il massimo comun divisore fra due quantità composte, che nel num. 14. del Cap. 2. pag. 25., e 26. si trova esposto, senza essere accompagnato da alcune avvertenze, che in seguito di questa Nota sarò per fare; allorchè le quantità sono molto composte, riesce in pratica di difficilissima esecuzione, da fare smarrir chicchessia, e spesse volte non conduce al proposto fine. Imperocchè i quoti fratti, a' quali per esso si perviene, introducendo continuatamente delle frazioni ne' residui da dividersi, oltre che intrigano di molto l' operazione; fan sovente accadere, che in vece di svanire successivamente i termini de' residui medesimi nel corso dell' operazione, si aumenti all' infinito il lor numero, e così rendono impossibile l' arrivo al residuo zero, che è lo scopo unico dell' operazione.

Tuttocciò potrebbe comprovarsi ad evidenza sull' esempio stesso, di cui il Sig. Canonico per esporre il metodo si serve nel detto num. 14., se non si usasse l' avvertenza di ridurre ad un solo i termini, che contengono l' x nel residuo D, come ivi vedesi fatto.

In oltre il volere, che l' ultimo residuo dividendo sia il massimo comun divisore, che si cerca, e non piuttosto che lo sia l' ultimo residuo divisore, quali residui mediante alcune avvertenze vengono in realtà a ridursi alla stessa quantità, come in seguito farò vedere, costringe l' Autore stesso a dover dimostrare, che se P sia divisibile per D, sarà anche D divisibile per P. Or poichè la dimostrazione addotta, sebbene sia giustissima qualor non si escludano i fattori fratti, non persuade pienamente i Giovani principianti, e li lascia alquanto malcontenti, come io ho più volte esperimentato in pratica; per scanzare una tal dimostrazione, mi prendo la libertà d' appartarmi da ciò, che dice il Sig. Canonico su questo punto, tanto più, che nella sostanza si riduce allo stesso.

A	h	B
M	k	Q
C	s	P
N	u	P
D		o

1. Ripetendo adunque generalmente il metodo: siano A, B le due proposte quantità, delle quali si cerchi il massimo comun divisore. Si ordinino per una lettera comune: e supposto, che nel primo termine di A si contenga una potestà della quantità, per tal lettera espressa, maggiore di quella, che nel primo di B si contiene, si divida quello per questo, e sia h il quoto, il di cui prodotto in B sia M, che sottratto da A dia C per residuo. In questo primo residuo, ordinato per la medesima lettera, vi sia per primo termine una potestà di tal lettera maggiore, o uguale a quella, che nel primo termine di B si ritrova, per cui si continui a dividere C per B, ed abbiasi k per quoto, N per prodotto di K in B, quale sottratto da C, dia il secondo residuo D. Nel primo termine di questo ordinato supponga-si trovarsi una potestà della detta lettera minore della contenuta nel primo di B; e perciò s' inverta l' ordine, e si divida il primo termine di B per lo primo di D, per cui si abbia s per quoto, Q per prodotto di s in D, che sottratto da B dia P per residuo. E finalmente diviso il primo termine del residuo P per lo primo di D abbiasi u per quoto, il di cui prodotto in D sia P stesso, che per ciò sottratto dal residuo P resti zero. Sarà D, ultimo residuo divisore, il massimo comun divisore delle due proposte quantità A, e B.

Sarà il comune, poichè essendo D divisore di se stesso, sarà ancor divisore del suo moltiplice sD, cioè di Q: ma è divisore esatto di P; dunque ancora di $Q+P$, cioè di B. Perciò sarà divisore di kB, cioè di N, e quindi di $N+D$, ossia di C. In oltre come divisore di B, lo sarà anche di hB, cioè di M: ma è divisore pure di C; dunque di $M+C$, ossia di A. Adunque D è divisore esatto delle due quantità A, B.

Per dimostrare poi che sia il massimo, bisogna premettere il seguente Lemma, che contiene una proprietà appartenente a' comuni divisori. Se due quantità disuguali A, e B sie-

B sieno divisibili ambedue esattamente per una terza P; divisa la maggiore per la minore, se si avrà residuo, sarà anch' esso divisibile esattamente per la stessa P. Imperocchè se Q sia il quoto della divisione della maggiore A per la minore B, ed R sia il residuo; sarà $QB+R=A$: ma A è divisibile per P; dunque anche $QB+R$. Or B, e quindi QB è divisibile per P; dunque il tutto ed una parte sono per P divisibili, e perciò anche la rimanente R.

Da ciò si deduce, che se si dividerà B per R, e si otterrà altro residuo, anch' esso sarà divisibile per la stessa P, e così succederà in tutti i residui, che successivamente si avranno.

Posto ciò, se non si voglia, che il residuo D sia il massimo divisore di A, e B, lo sia un altra quantità maggiore di D. Questa, per ciò che si è dimostrato, dividerà esattamente tutti i residui. Sicchè anche lo stesso D. Quindi una quantità maggiore dividerebbe esattamente una minore, il che è impossibile.

2. Dimostrata la verità della regola, che conduce alla determinazione del massimo comun divisore di due quantità; passo ora ad avvertire ciò, che devesi eseguire nel corso dell' operazione, per facilitarla, e schivare i quoti fratti, come nel principio di questa Nota ho promesso.

In primo luogo, proposte le due quantità, delle quali voglia determinarsi il massimo comun divisore, avanti di venire all' applicazione della regola già esposta, è da esaminarsi, se in ciascheduna di esse si scorga qualche fattore, ossia divisore, o semplice, o composto, il quale nè sia comune all' altra, nè con questa abbia altro divisore più semplice comune. Trovandosi in una delle suddette quantità, si divida questa per tal suo fattore, e abbandonando la medesima, si faccia uso del quoto, che si otterrà: e se ambedue avranno il fattore sopradetto, si faccia questo in ciascuna separatamente. Lo stesso attentamente si osservi, e si esegua ne' residui, che indi si avranno, prima di fare le successive divisioni; ed in tal modo si faciliterà di molto l' operazione, e si otterrà subito l' intento.

Che poi tale operazione non alteri il massimo comun divisore richiesto, è chiaro, poichè per alterarlo, dovrebbe il fattore, che si toglie, esser fattore ancora del detto comun divisore, o dovrebbe almeno contenere comune collo stesso, altro fattore più semplice. Quindi come è moltiplicatore di ambedue le quantità proposte il massimo comun divisore, che si cerca, così di amendue le medesime dovrebbe essere altresì moltiplicatore il fattore, che si toglie, o di questo l'altro fattor più semplice; il che ripugna all'ipotesi.

Applichiamo la regola al seguente esempio, in cui incontrandosi opportunamente il proposto caso, meglio si comprenderà ciò, che ho detto. Si cerchi il massimo comune divisore delle due quantità $2a^3 - 6ba^2 + 4b^2a$, ed $aa - ba - 2bb$, le quali sono già ordinate per a. La prima delle medesime è divisibile per $2a$, per cui non è divisibile la seconda: e siccome questa divisibile neppure è per 2, nè per a, che sono i fattori di $2a$; divisa quella, cioè la prima per $2a$, cerco il comun divisore massimo tra il quoto $aa - 3ba + 2bb$, ed $aa - ba - 2bb$. Che però divido la prima di queste per la seconda, ed ottengo 1 per quoto, e $-2ba + 4bb$ per residuo, il quale residuo dovrà, per la regola, servire in seguito da divisore. Or poichè questo è altresì divisibile per $2b$, quantità, che nè divide il nuovo dividendo $aa - ba - 2bb$, nè contiene fattore a questo comune; per $2b$ lo divido, e del quoto $-a + 2b$ mi servo per divisore: e comecchè la divisione riesce esatta, ne conchiudo, che $-a + 2b$ sia il massimo comun divisore delle due quantità proposte, come lo è realmente.

Questo stesso caso si scorge ancora nell' esempio addotto dal Signor Canonico nel detto num. 14, nel quale, se bene non si conoscano chiaramente sul principio i fattori non comuni, perchè composti, manifestandosi poi in seguito ne' residui D, e P, nel primo de' quali è $c^2 + y^2$, ed y nel secondo; si può venire subito alla determinazione del massimo comun divisore $a - x$, con dividere per essi separatamente le quantità, alle quali rispettivamente appartengono. E qui giova anche notare, che con tale operazione, tanto l' ultimo residuo divisore D, quando il dividendo P, vengono a ridursi ad una medesima quantità, che è il massimo comun divisore richiesto.

3. Un

5. Un altra avvertenza dee aversi, ed è la seguente, cioè, che se il primo termine della quantità A, di quella cioè, che per venire alla determinazione del massimo comun divisore deve cominciarsi a dividere, non possa dividersi per lo primo di B, a motivo di qualche particolar moltiplicatore, ossia coefficiente di questo termine divisore: come sarebbe, se il primo di A fosse x^3, e quello di B ax^2, per cui il quoto sarebbe $\frac{x}{a}$; in tal caso, per evitare questo quoto fratto, dovrà moltiplicarsi l' intera A per tal coefficiente a, e indi si potrà eseguire la divisione. Ciò però deve praticarsi quando a non sia fattore dell' intera B, poichè essendo tale, dovrà dividersi B per a, come si è nel num. precedente avvertito. La stessa avvertenza si abbia ne' successivi residui, a' quali colla divisione si perviene nel corso dell' operazione, senza ritegno alcuno; poichè se bene con tale moltiplicazione si alteri il divisore massimo della quantità che si moltiplica, non perciò si altera il comune alle due, per la stessa ragione nel num. precedente addotta.

N O T. VI. VII.

Si troveranno in fine nell'Appendice negli artic. 1., e 2.

N O T. VIII.

DAlla regola assegnata nel num. 24. del Cap. 3. dal verso 2. al 9. della pag. 45. di elevare a quadrato un polinomio qualunque, se ne deduce un' altra, per picciola riflession che si faccia, la quale è in pratica di più facile esecuzione. Questa è di formare prima i quadrati di tutti i termini del polinomio, e poi aggiugnere alla lor somma quella di tutti i prodotti, che risulteranno dalla moltiplicazione del doppio di ciascun termine in ognuno de' seguenti incominciando dal primo del polinomio medesimo. Questa

rego-

regola, più che l'altra, somministra la ragione, per cui, per estrarre le radici quadrate, si deve procedere nel modo, che in seguito del cit. num. trovasi additato.

N O T. IX.

ANche la regola di elevare a cubo un polinomio qualunque, che trovasi assegnata nel num. 27. del Cap. medesimo 3. pag. 46., accoppiata a quella di elevarlo a quadrato, accennata nella Nota precedente, ci guida a conoscerne un altra per formare i cubi medesimi con facilità maggiore. La medesima è di formare i cubi di tutti i termini del dato polinomio, e di aggiugnere indi alla loro somma quella di tutti i prodotti, che si avranno moltiplicando il triplo del quadrato di ciascun termine in ogni altro, insieme col sestuplo de' termini stessi moltiplicati a tre a tre. Questa regola farà comprendere meglio la ragione, per la quale, per estrarre le radici cube, deve operarsi nel modo indicato nel seguente num. 28.

N O T. X.

COntinuando le operazioni dell'estrazioni delle radici quadrate, e cube dai binomii, esposte ne' due ultimi num. del Cap. 3. pag. 48., 49., e 50., si osserverà, che i coefficienti de' denominatori de' termini delle due serie, che si otterranno, non procedono con tal ordine da poterne scoprire una legge costante, la quale possa guidarci a proseguire le serie stesse, senza aver bisogno di ripetere continuamente le operazioni medesime. Nel Cap. 1. del Lib. 3., che è il luogo accennato dall'Autore nella fine del detto Cap. 3., si troverà la formola generale, che serve per determinare tutti i termini all'infinito delle serie suddette, come di ogni altra, che coll' estrazione della radice di un indice qualunque da qualsivoglia binomio, o polinomio potrà ottenersi.

Av-

Avverto intanto, che sì fatte serie, per cagion de' coefficienti de' denominatori de' loro termini, che vanno successivamente crescendo, non mai potranno essere parallele, ma sempre o divergenti, o convergenti.

NOT. XI.

1. NEl num. 13. del Cap. 4. pag. 56. si propone a risolvere un' equazione del primo grado, nella quale l'incognita fa da denominatore d' uno de' suoi termini, senza contenersi in altro. Dello stesso modo si deve operare, se la medesima incognita fosse denominatore di più di un termine, ancorchè fosse per altra quantità moltiplicata.

Tali equazioni, perchè sieno del primo grado, contenendo uno, o più termini divisi per l' incognita, non potranno contenerne altri per la medesima moltiplicati; poichè colla moltiplicazione dell' equazione per la stessa incognita, secondo che il metodo richiede, risulterebbe del secondo grado l' equazione.

2. Oltre de' casi già esaminati dal Sig. Canonico, ne può accadere un altro, cioè, che l' incognita si trovi vincolata da qualche segno radicale, come appunto nella seguente. $a - 2\sqrt{ax} = b$. Questa, tutto che contenga radicale quadratico, pure è del primo grado. Per risolverla, si deve svincolare l' incognita dal radicale, il che si farà con passare in primo luogo il termine noto dal primo nel secondo membro, per cui si avrà $-2\sqrt{ax} = b - a$: indi elevando a quadrato il primo, e 'l secondo membro, si otterrà $4ax = \overline{b-a}^2$; e finalmente $x = \frac{\overline{b-a}^2}{4a}$.

Se l' incognita si trovasse ripetuta in più di un radicale; passati tutti i termini noti nel secondo membro, e quei, che contengono l' incognita nel primo; elevando anche a quadrato, si svincolerà l' incognita da tutti i radicali. Sia

$a+$

$a+2\sqrt{ax}=b+3\sqrt{cx}$; sarà $2\sqrt{ax}-3\sqrt{cx}=b-a$: e quadrando, $4ax-12\sqrt{acx^2}+9cx=\overline{b-a}^2$, ossia $4ax-12x\sqrt{ac}+9cx$, cioè $(4a-12\sqrt{ac}+9c).x=\overline{b-a}^2$. Quindi $x=\dfrac{\overline{b-a}^2}{4a-12\sqrt{ac}+9c}$

Dello stesso modo si proceda, se nell' equazione proposta a risolversi vi fossero tre, quattro, ec. radicali contenenti la stessa incognita.

Anche qui si avverta, che siffatte equazioni, affinchè sieno del primo grado, non possono contenere l' incognita in altro termine libera dal radicale: e dippiù la quantità esistente sotto del segno radicale, se non è semplice, deve esser divisibile per l' incognita; poichè in caso contrario, nello sprigionare l' incognita stessa dai radicali, quadrando, l'equazione oltrepasserebbe il primo grado.

3. Vi sarebbe un altro caso, che può accadere, cioè, che l' incognita in un equazione si trovi per esponente di qualche quantità nota, come, per esempio, $a^x=b$; ma conviene non farne parola, perchè per risolvere tali equazioni vi è bisogno della teoria de' logaritmi.

N O T. XII.

Oltre del metodo dato ne' num. 15., e seguenti, fino al 18. del Cap. 4. pag. 57., e 58. per determinare i valori delle incognite in tante equazioni date, quante incognite contengono, ve ne è un altro, forse di più facile esecuzione in pratica. Questo è di scegliere ad arbitrio una delle incognite, e trovarne indi il valore distintamente in ciascuna equazione: dal che avendosi tanti valori uguali della stessa incognita, espressi per quantità cognite, e per le incognite rimanenti, quante sono l' equazioni; col loro paragone potranno formarsi delle nuove equazioni, le quali conterranno un' incocognita di meno delle proposte, e saranno altresì di numero di un unità minore delle medesime; il che è appunto ciò, che col precedente metodo si ottiene. Ripetendo in seguito lo stesso successivamente sulle incognite rimanenti, si arriverà finalmente ad un' equazione solitaria.

N O T. XIII.

Il metodo esposto nel num. 19., e ne'seguenti del Cap. 4. pag. 58., 59., e 60. per determinare in due equazioni del primo grado di due incognite il valor di queste, che chiamasi metodo di *eliminazione*, ha luogo non solamente se fossero tre, quattro, ec. l'equazioni, ed altrettante l'incognite, ma ancora se nelle medesime vi mancasse pure la condizione ne' segni richiesta. Imperocchè mancando anche questa condizione nelle equazioni, che supponiamo esser due; ridotti i termini contenenti la stessa incognita, che si vuol fare svanire, da dissimili a simili; se essi avranno lo stesso segno, si farà uso della sottrazione, e se diversi, si praticherà la somma del primo membro col primo, e secondo col secondo delle date equazioni; dimodochè accaderà doversi alle volte praticare o sempre la somma, o sempre la sottrazione.

Che se l'equazioni fossero tre, e tre le incognite; si deve in primo luogo fare svanire una delle incognite contenute in due dell'equazioni date, per esempio nella prima, e nella seconda; e si otterrà un' equazione con due incognite: e facendo poi svanire la stessa incognita nella terza, ed in una delle prime due; si avranno due equazioni con due incognite. Se fossero quattro le equazioni, si ridurranno prima a tre, e poi a due: e così negli altri casi.

N O T. XIV.

Da quanto si dice nella fine del num. 8. del Cap. 5. pag. 64., si ricava la regola da conoscere, se di una proposta equa-

equazione del secondo grado le due radici sieno reali, o immaginarie, ed essendo reali, se sieno uguali, o disuguali, senza aver bisogno di determinarle prima per mezzo della risoluzione attuale dell' equazione. Imperocchè, per ciò conoscere, basterà ordinare la data equazione per la lettera, che esprime l' incognita; il che fatto, se l' ultimo termine sarà negativo, le radici saranno amendue reali: saranno poi immaginarie, se, essendo esso positivo, sia maggiore del quadrato della metà del coefficiente del secondo termine: che se a questo quadrato sia uguale, le radici saranno reali, ed uguali: e reali, e disuguali poi, se di esso sarà maggiore. Come poi possa conoscersi quando le medesime sieno ambedue positive, o negative, ovvero una positiva, e l' altra negativa: ed in questo caso quando l' una sia dell'altra maggiore, si vedrà in seguito nella Not. 16.

N. O. T. XV.

CONtenendosi nell' equazione generale del secondo grado ogni altra particolare dello stesso grado; la formola perciò delle due radici dell' equazione stessa generale, ricavata coi due metodi esposti ne' num. 8., e 9. del Cap. 5. pag. 63., e 64., ci offre una regola speditissima per sciogliere l'equazioni tutte del secondo grado, senza aver bisogno di ricorrere alla pratica de' sopradetti metodi. La medesima è di ordinare l' equazion proposta per la lettera, che esprime l' incognita, e prendere poi la somma della metà del coefficiente del secondo termine col segno cambiato, con dippiù la radice seconda col segno doppio del quadrato della stessa metà del coefficiente del secondo termine, insieme col termine ultimo, ossia noto dell' equazione col segno contrario. Una tal somma sarà il doppio valore richiesto dell' incognita della proposta equazione.

N O T. XVI.

PEr meglio comprendere ciò, che si dice nella fine del num. 13. del Cap. 5. pag. 67., cioè, che quella sarà una delle radici d' una proposta equazione del secondo grado, la quale posta in questa in vece dell' incognita fa distruggere tutti i termini; si suppongano noti i fattori della medesima equazione, e si discorra nel modo seguente.

Siano $x+a$, $x+b$ i fattori della data equazione, per cui $-a$, $-b$ saranno le di lei radici: e sia m la quantità, che posta invece dell' incognita nell' equazione stessa faccia distruggere tutti i suoi termini. Essendo l'equazione il prodotto di detti fattori, gl' istessi similissimi termini dovranno aversi, se in essa si sostituisca invece dell' incognita x una quantità qualunque m, che se si farà questo ne' fattori, e poi si moltiplicheranno. Ma, per supposizione, posta m in vece dell' x nell' equazione, i termini di questa si rendono tali, che si distruggono tutti, trasformandosi di mano in mano in simili, ed eliminandosi l' un coll' altro per la contrarietà de' segni, che ancor vi si introdnce. Dunque sostituendo ancora ne' suddetti fattori $x+a$, $x+b$ la stessa m in vece d' x, e cangiandoli in $m+a$, $m+b$; dal loro prodotto dovranno parimente aversi termini, che per esser simili, e di contrario segno possano distruggersi. Ma ciò non può avvenire, se i termini di uno di tali fattori non sieno i medesimi, e di segno contrario: e perciò se non sia $m=-a$, ovvero $m=-b$, cioè se non sia m uguale ad una delle radici della equazione proposta. Quella quantità adunque, che sostituita in vece dell'incognita in una equazione del secondo grado fa distruggere tutti i termini, che in essa si contengono, sarà una delle radici della medesima. Ed in realtà, se nell' equazione $\begin{array}{l} xx+ax+ab \\ \quad\;\; +bx \end{array}$ $=o$ in vece dell' x si porrà $-a$, che è una delle sue radici; la medesima si convertirà in $\begin{array}{l} aa-aa+ab=o, \\ \quad\;\; -ba \end{array}$ ossia $o=o$.

 Stimo

Stimo opportuno, nè fuor di proposito dedurre in questa Nota alcune immediate conseguenze da ciò, che è stato esposto sulle equazioni del secondo grado ne' numeri 11., 12., e 13. del Cap. 5. di sopra citato, a fine di fare acquistare alla gioventù una più perfetta idea della natura delle medesime.

1. Poichè ogni equazione del secondo grado non è che un prodotto uguale a zero di due fattori del primo grado della forma $x+a$, ne' quali i termini noti sono le sue radici coi segni cambiati; potrà in questi sempre risolversi per mezzo della divisione. Noto adunque un suo fattore, sarà noto l'altro, il quale sarà il quoto della divisione dell' equazione per lo fattore noto: e quindi nota una di lei radice, sarà altresì nota l' altra. All' opposto poi, quel binomio sarà uno de' fattori di un' equazione del secondo grado, che essendo della forma suddetta, divida esattamente l' equazione medesima: e quella quantità ne sarà la radice, che aggiunta col segno contrario all' incognita dell' equazione, sia di questa un divisore. Finalmente date due quantità; per trovare l' equazione, che abbia le medesime per radici, altro non avrassi a fare, che aggiugnerle divisamente coi segni cambiati ad una delle lettere, che esprimono l' incognite: moltiplicare insieme i due binomii, che si avranno: ed in fine paragonare al zero il loro prodotto.

2. Dall' esser poi di qualunque equazione ordinata del secondo grado il coefficiente del secondo termine uguale alla somma delle sue radici coi segni contrarii, e 'l termine noto uguale al loro prodotto; si deduca prima di ogni altro, che se in una delle dette equazioni manchi il secondo termine, segno è, che la somma delle radici è uguale a zero, e che perciò le radici sono uguali fra loro, ma una positiva, e negativa l' altra, come appunto si è trovato colla risoluzione delle equazioni incomplete. E se vi manchi l' ultimo, cioè il noto, segno è che una delle radici è uguale al zero; ed infatti uno de' suoi fattori sarà l' incognita stessa uguale a zero, per la quale è realmente divisibile; onde una tale equazione è propriamente del primo grado.

3. Si raccolga parimente, che nota una delle radici di una data equazione del secondo grado, si potrà per mezzo suo de-

determinare l'altra, senza ricorrere al fattore, come poc'anzi ho detto; e ciò si otterrà sottraendola dal coefficiente del secondo termine preso col segno contrario, oppure dividendo per essa l'ultimo termine dell'equazione proposta; poichè il residuo nel primo caso, ed il quoto nel secondo sarà l'altra radice richiesta.

4. In oltre, se un' equazione ordinata del secondo grado di radici reali abbia tutti i termini positivi, avrà ambedue le radici negative: se il solo secondo termine abbia negativo, avrà le due radici positive: se abbia il secondo, e 'l terzo termine negativo, avrà una radice positiva, e l'altra negativa, ma di questa è maggiore la positiva: che se finalmente il solo ultimo termine dell'equazione sia negativo, avrà benanche una radice positiva, e l'altra negativa, ma di quella sarà questa maggiore. Ciò non avrebbe bisogno di dimostrazione, ma per chiarezza maggiore ecco quella della prima parte, e collo stesso metodo potranno dimostrarsi le altre. Poichè l'ultimo termine della supposta equazione è positivo, ed è il prodotto delle due radici, saranno queste o amendue positive, o amendue negative: ma positive non possono essere, perchè la loro somma coi segni contrarii essendo negativa non può essere il coefficiente del secondo termine dell'equazione medesima, il quale è per supposizione positivo; dunque saranno ambedue negative.

Quindi si potrà con certezza asserire, che nelle equazioni del secondo grado di radici reali, ancorchè non sieno ordinate, tante saranno le radici positive, quante sono le variazioni de' segni $+$ in $-$, o $-$ in $+$ ne' loro termini: e tante le negative, quante in essi le successioni de' segni medesimi $+$ e $+$, o $-$ e $-$. Così l'equazione $x^2 \begin{matrix} - a x \\ - b x \end{matrix} + a b = 0$, ne' termini della quale vi sono due variazioni di segni, avendo il primo il $+$, il secondo il $-$, e 'l terzo il $+$, avrà due radici positive, secondo la regola data; il che è realmente vero, essendo esse $+a$, $+b$: e le medesime resteranno tali anche cambiando i segni a tutti i termini, ottenendo $-x^2 \begin{matrix} + a x \\ + b x \end{matrix} - a b = 0$, che è un equazione

non

non ordinata, che ha pure due variazioni di segni. Si è richiesta la condizione, che l'equazione sia di radici reali, perchè la regola data non ha luogo nelle equazioni di radici immaginarie; poichè essendo essa fondata in ciò, che un prodotto positivo può risultare o da due fattori positivi, o da due negativi: e che un negativo da un positivo per un negativo solamente; siccome questo è falso, nè può aver luogo ne' prodotti di fattori immaginarii, così falsa sarà ancora la regola nell'equazioni di radici immaginarie.

Do termine alla presente Nota con avvertire, che tutte le già esposte proprietà delle equazioni del secondo grado, che dalla natura delle medesime dedotte si sono, hanno luogo ugualmente nelle equazioni di gradi superiori, e si troveranno opportunamente ampliate nel terzo Libro, ove si tratterà di proposito delle equazioni di ogni grado.

N O T. XVII.

Affinchè il metodo di eliminare l' incognite dall' equazioni, applicato a due equazioni del secondo grado nel num. 16. del Cap. 5. pag. 68., e 69., non riesca lungo e tedioso nell'applicarlo all'equazioni da più termini composte, bisogna ordinar prima le medesime per la lettera, che esprime l' incognita che si vuole eliminare (num. 2. Cap. 5.); e poi sostituire, invece del coefficiente del secondo, del terzo, ec. termine di ciascuna equazione ordinata delle lettere A, B, ec., come vedesi fatto nel num. 15. del detto Cap., le quali lettere esprimeranno insieme quantità cognite all' altre incognite unite. Fatta indi l' operazione, che il metodo richiede, si avrà un equazione fra le sole quantità A, B, ec., in vece delle quali rimesse quelle da esse espresse; si avrà speditamente quella equazione, che ottener si volea.

NOT.

N O T. XVIII.

1. NEl num. 2. del Cap. 6. pag. 70. si distinguono i problemi in *determinati*, *indeterminati*, *semideterminati*, e *piucchedeterminati*: ma in realtà essi non sono che di due sorte, cioè *determinati*, ed *indeterminati*; imperocchè, come rilevasi dai seguenti num. 4., e 5. del medesimo Cap., i semideterminati altro non sono che indeterminati dotati di condizioni non esprimibili per equazioni: e i piucchedeterminatici ai determinati, o agl' indeterminati si riducono, quando in essi non si vada in traccia di quantità dotate di proprietà ripugnanti.

2. I problemi, poichè su delle quantità si propongono, sono o *aritmetici*, o *geometrici*. Problema aritmetico dicesi quello, in cui le quantità che si danno, e quelle che si cercano, sono quantità discrete, cioè numeri: se poi tali quantità sieno continue, cioè linee, superficie, o solidi; il problema si dirà geometrico.

3. In oltre siccome l' equazioni (Cap. 4. num. 5.), così anche i problemi dividonsi in *gradi*, dicendosi del *primo*, *secondo*, *terzo*, ec. *grado*.

Per ben comprendere questi diversi gradi de' problemi, si rifletta, che dandosi in ognuno d' essi, oltre delle quantità, le relazioni ancora, che passano fra le cognite, e le incognite; per venire alla soluzione de' medesimi, denominate le quantità cognite per le prime lettere dell' alfabeto, e le incognite per le ultime; devono tali relazioni esprimersi, e tradursi in linguaggio analitico, ossia algebraico: il che facendo, si verranno ad avere delle equazioni. Se una sarà l' equazione che si otterrà; il problema si dirà esser di quel grado, di cui è l' equazione ottenuta: e potrà esser perciò del primo, del secondo, ec. grado. Che se molte saranno l' equazioni; il grado del problema verrà determinato dal grado dell' *equazione finale*, la quale altro non è, che quella, che contiene il minor numero possibile delle incognite, che in tutte dette equazioni ritrovansi, e che dalle medesime me equazioni risulta coll' operazione prescritta dal metodo già esposto ne' num. 15., e seguenti del Cap. 5.

NOT. XIX.

DA quanto trovasi esposto ne' num. 5., 6., e 7. del Cap. 6. pag. 71., 72., e 73., si raccolga, che allorchè nella risoluzione d' un qualche problema, in cui si abbiano tante equazioni quante incognite, per venire all' equazion finale s' inciampi in qualche equazione identica; non è da giudicarsi subito, che 'l problema sia un teorema, ma devono prima attentamente esaminarsi le relazioni, e le condizioni date, e che si sono analiticamente espresse per mezzo dell' equazioni, per vedere se sieno fra loro indipendenti, e una non s' includa nell' altra. In tal caso anche fra l' equazioni, alle condizioni fedelmente corrispondenti, vi dovrà essere indipendenza: e perciò l' equazione identica non potrà essere che una proprietà a noi prima ignota, che per le condizioni date, alle quantità, di cui si tratta, appartiene; ed in tal caso l' apparente problema sarà un teorema. Ma se con detto esame si scorgerà d' esservi dipendenza fra le date condizioni, e che una s' includa in un' altra: ovvero, che da una stessa condizione, col di lei paragone, e combinazione colle altre già analiticamente espresse, si abbiano formate due, o più equazioni, se bene con diverse espressioni; sono da abolirsi, e trascurarsi quelle equazioni, che o alla ripetuta condizione corrispondono, o che la condizione stessa riesprimono; dopo di che il proposto problema passerà nella classe degl' indeterminati. Lo stesso praticando ne' problemi piucchedeterminati, che non includano condizioni ripugnanti; potranno essi passare in teoremi, o in problemi determinati, ed indeterminati, come chiaramente, per ciò, che si è detto, si comprende.

N O T. XX.

Il numero 16. del Cap. 6. pag. 79., in cui si risolve il problema 8., ha bisogno di spiega; ne può conoscersi l' esattezza del metodo, che dal Sig. Can. s' adopera nella risoluzione del medesimo, senza attendere a quanto in questa Nota sarò per dire. Ed in realtà, la prima difficoltà che s'incontra, è quella di comprendere, perchè $aV+bA$ sia il liquore contenuto nella prima botte, $cV+fA$ quello della seconda, ec. L'altra poi si è, che le due parti x, e y, col detto metodo determinate, dovrebbero insieme essere uguali all' unità, cioè ad una botte, che è la richiesta; cosa, che non si verifica nelle diverse supposizioni de' valori di a, b, c, ec. In fatti nella supposizione, che nella fine di detto numero 16. si trova, di $a=7$, $b=3$, ec.; si determina $x=\frac{2}{5}$ di una botte, ed $y=\frac{4}{5}$, per cui la loro somma supera di $\frac{1}{5}$ la botte. Quindi, per avere la botte richiesta, dovrebbonsi mescolare prima fra loro le due determinate porzioni in altro vaso maggiore, e poi potrebbesi empiere la botte medesima. Tutto si farà chiaro ripetendo il metodo dal principio con piccola mutazione nel modo seguente.

Sia adunque la ragione del vino all' acqua della prima botte come $a:b$: dell' altra come $c:f$: ed $m:n$ sia quella, in cui deve essere all' acqua il vino nella terza botte richiesta. Essendo $a:b$ la ragione, in cui sta il vino all' acqua nella prima botte, è evidente, che il solo vino occupa una parte di questa, espressa per $\frac{a}{a+b}$; e l' acqua sola la rimanente parte $\frac{b}{a+b}$; giacchè le parti della botte, occupate dal vino, e dall' acqua, devono essere nella ragione stessa di $a:b$, e devono insieme essere uguali all' unità, che è la botte te nel caso presente. Se dunque ci serviremo delle lettere iniziali V, A per denotare il vino, e l'acqua, cioè a dire le qualità, e non già le quantità de' fluidi nella botte mescolati; sarà $\frac{aV}{a+b}$ il puro vino contenuto nella detta prima botte, e $\frac{bA}{a+b}$ l'acqua, che nella medesima ritrovasi; ritenendo sempre per misura, ossia unità la botte. Per la stessa ragione $\frac{cV}{c+f}$ sarà il vino, ed $\frac{fA}{c+f}$ l'acqua, che nell'altra botte si contiene; e finalmente $\frac{mV}{m+n}$, ed $\frac{nA}{m+n}$ il vino, e l'acqua, che nella richiesta botte dovrà contenersi. Quindi, per maggior semplicità, posta $a+b=p$, $c+f=q$, ed $m+n=r$; il liquore contenuto nella prima botte sarà $\frac{aV}{p}+\frac{bA}{p}$: quello della seconda $\frac{cV}{q}+\frac{fA}{q}$: e quello della terza, che da queste due dovrà estrarsi, sarà $\frac{mV}{r}+\frac{nA}{r}$.

Sia x il liquore da doversi estrarre dalla prima botte; ed y quello da doversi cacciare dalla seconda, che è lo stesso che dire: siano x, ed y le parti delle date due botti, che bisogna vuotare per avere la terza richiesta col liquore, che se ne estrae. Poichè l'intera prima botte contiene il liquore $\frac{aV}{p}+\frac{bA}{p}$; la di lei parte x ne conterrà $\frac{axV}{p}+\frac{bxA}{p}$, quantità, che si determina per mezzo del quarto proporzionale in ordine all'unità, che è la botte, al liquore con-

contenuto nella botte medesima, ed alla di lei parte x. Dello stesso modo si determinerà, che y dovrà contenere $\frac{cyV}{q} + \frac{fyA}{q}$. Quindi $\frac{axV}{p} + \frac{bxA}{p} + \frac{cyV}{q} + \frac{fyA}{q} = \frac{mV}{r} + \frac{nA}{r}$. Ma questo vino, che nella terza botte contenere si dee, cioè $\frac{mV}{r}$, non è che quello estratto dalle prime due, e l'acqua parimente $\frac{nA}{r}$ è quella dalle medesime estratta. Dunque dovrà essere $\frac{axV}{p} + \frac{cyV}{q} = \frac{mV}{r}$, e $\frac{bxA}{p} + \frac{fyA}{q} = \frac{nA}{r}$; ossia $\frac{ax}{p} + \frac{cy}{q} = \frac{m}{r}$, e $\frac{bx}{p} + \frac{fy}{q} = \frac{n}{r}$: Si moltiplichino ambedue queste equazioni per pqr, e si avrà $aqrx + cpry = mpq$, e $bqrx + fpry = npq$; dalle quali, coi metodi dati, si otterrà $x = \frac{fmp - cnp}{afr - bcr}$, ed $y = \frac{anq - bmq}{afr - bcr}$: e sostituiti a p, q, ed r i proprii valori; si avrà finalmente $x = \frac{afm + bfm - acn - bcn}{afm + afn - bcm - bcn}$, ed $y = \frac{acn + afn - bcm - bfm}{afm + afn - bcm - bcn}$. Questi due valori di x, e di y sono tali, che sommati insieme sono uguali all'unità, che è la botte richiesta, come coll'attuale operazione potrà vedersi, ottenendosi una frazione, il di cui numeratore è lo stesso denominatore.

Facendo attenzione al metodo, di cui ci siamo serviti per venire alla soluzione di questo problema, si scorgerà, che aV, e bA, non meno che cV, ed fA non esprimono realmente

mente le quantità de' liquori contenuti nella prima, e seconda botte, ma solamente le ragioni, nelle quali sono separatamente in esse il vino, e l'acqua. Lo stesso s' intende di mV, ed nA per riguardo alla terza botte richiesta. Quindi non è meraviglia, che per mezzo di tali espressioni si determini, nel detto num. 16., $x = \frac{fm - cn}{af - cb}$, ed $y = \frac{an - mb}{af - cb}$, i quali valori non danno l' effettive quantità de' liquori da estraersi dalle date botti, ma solamente la loro ragione, la quale è quella di $fm - cn : an - mb$, che nella supposizione ivi fatta di $a = 7$, $b = 3$, ec., si convertirà nella ragione di $2 ; 4$, ossia di $1 : 2$, come in realtà deve essere. Il metodo adunque, adoperato nel modo esposto nel suddetto numero, conduce a determinare la ragione, in cui deve essere il liquore da estrarsi dalla prima botte, a quello da cacciarsi dalla seconda; ed applicato, secondo che in questa Nota scorgesi, ci guida alla determinazione effettiva del liquore medesimo. Avvertasi però, che nota la ragione delle suddette porzioni x, y, sarà facile il determinare la loro quantità effettiva riferita alla botte presa per unità; dovendo essere ciascuna di esse quella parte della botte, espressa dalla frazione, che ha per numeratore il termine corrispondente della ragione, e per denominatore la somma di ambidue i termini della medesima. In fatti nella detta supposizione di $x : y :: 2 : 4$, ossia $:: 1 : 2$; la porzione espressa da x sarà $\frac{1}{3}$ della prima botte, e quella espressa da y sarà $\frac{2}{3}$ della seconda.

N O T. XXI.

Dalla risoluzione de' due problemi semideterminati del primo grado, già data ne' num. 2., e 3. del Cap. 7. pag. 81., e 82., apparisce, che tutta la difficoltà nel risolvere consimili problemi consiste nel trovare i valori, che possono assegnarsi ad una delle due incognite, ossieno indeterminate, i quali sien

sien tali, che diano i corrispondenti dell' altra anche interi. Per togliere ogni difficoltà, che ne' casi particolari può incontrarsi, stimo opportuno esporre una regola, che a tale uopo suol darsi, la quale se bene alle volte richieda un lungo calcolo, è però generalissima, e di facile esecuzione.

Qualunque frazione, che per valore di una delle due incognite, per esempio x, può aversi nel risolvere uno de' problemi suddetti, si contiene nella seguente espressione $\frac{a+by}{c}$. E' chiaro, che se in questa frazione sia a divisibile per c; c, e tutti i multiplici di c darebbero i valori dell' y: e se b fosse divisibile per c, tutti i numeri positivi della serie naturale potrebbero essere valori dell' y, ma i corrispondenti valori dell' x si avrebbero in numeri interi nel solo caso, che anche a fosse per c divisibile; onde in questo solo caso risolvibile sarebbe il problema. La difficoltà adunque, che può incontrarsi nel determinare i valori dell'y, ha luogo quando nè a, nè b sia per c divisibile.

Che però ciò supposto, per trovare i valori da assegnare all' y, che sien tali, che rendano un intero la frazione $\frac{a+by}{c}$, si operi nel modo seguente. Si estraggano in primo luogo dalla frazione tutti gl' interi possibili, se la medesima non sia vera, ma spuria: e se i termini del numeratore della nuova, e vera frazione abbiano un comun divisore, il medesimo si separi dalla frazione stessa. Questa così disposta, che suol chiamarsi *frazione ridotta*, pongasi ugnale ad un numero indeterminato, per esempio m, e ciò fatto, trovisi il valore di y, che sarà espresso da un' altra frazione contenente la m: dalla medesima si estraggano gl' interi, e la seconda frazione vera, e ridotta, che si avrà, pongasi uguale ad n: si trovi in seguito il valore di m per n, ed estratti similmente gl' interi dalla frazione contenente la n, mettasi la terza vera, e ridotta uguale a p, e si determini il valore di n per p. Questa operazione si ripeta, finchè si arrivi ad un valore intero della penultima indeterminata introdotta espresso per l' ultima; il che ottenuto, qualunlunque numero intero positivo dall' unità in avanti, ed alle volte dal zero, sostituito all'ultima indeterminata, darà il valore della penultima intero, e per ciò anche intero quello dell'antepenultima fino alla prima m; e quindi intero quello dell'y; onde colla sostituzione de' numeri della serie naturale invece dell' ultima indeterminata, si avranno i richiesti dell' y, ed in seguito quelli dell' x.

Applichiamo la regola ad un esempio per renderla più chiara. Siano da determinarsi i valori, che assegnar si deono all' y, per rendere un numero intero la frazione $\frac{74+53y}{31}=x$. Essendo questa una frazione spuria, cavandone gl' interi, si avrà $\frac{74+53y}{31}=2+y+\frac{12+22y}{31}$: e poichè $12+22y$ è divisibile per 2, si separi dalla frazione anche questo fattore 2, e sarà $\frac{74+53y}{31}=2+y+2.\frac{(6+11y)}{31}$. Adunque la frazione ridotta, sarà $\frac{6+11y}{31}$.

Pongasi $\frac{6+11y}{31}=m$; onde $6+11y=31m$, ed $y=\frac{31m-6}{11}=2m+\frac{9m-6}{11}=2m+3.\frac{(3m-2)}{11}$: e fatta $\frac{3m-2}{11}=n$, si avrà $3m-2=11n$, e perciò $m=\frac{11n+2}{3}=3n+\frac{2n+2}{3}=3n+2.\frac{n+1}{3}$. Messa finalmente $\frac{n+1}{3}=p$, ossia $n+1=3p$, si avrà $n=3p-1$, numero intero. Quindi tornando indietro, poichè $\frac{11n+2}{3}=m$; sa-

rà

rà $\frac{11n+2}{3} = \frac{33p-11+2}{3} = \frac{33p-9}{3} = 11p-3 = m$; onde essendo $\frac{31m-6}{11} = y$, si avrà $\frac{31\cdot(11p-3)-6}{11}$ $= \frac{31\cdot 11p-99}{11} = 31p-9 = y$: e la proposta frazione $\frac{74+53y}{31} = \frac{74+53\cdot \overline{31p-9}}{31} = \frac{74+53\cdot 31p-477}{31}$ $= 53p-13 = x$; d' onde si vede, che qualunque numero della serie naturale sostituiscasi a p, si avranno sempre interi i valori dell' y, ed i corrispondenti dell' x.

Esaminando l' andamento dell' esposta regola, si scoprirà, che allora non potranno aversi valori interi dalla frazione $\frac{a+by}{c}$, supposto intero l' y, quando la frazione ridotta, che da questa si ottiene, è tale, che il denominatore, e 'l coefficiente dell' y non sono numeri primi fra loro, ma hanno un comun fattore. In fatti venga la medesima indicata da $\frac{a+fny}{pn}$, e suppongasi esprimere un numero intero qualunque m, onde sia $\frac{a+fny}{pn} = m$: moltiplicando per p, si avrà $\frac{a+fny}{n} = pm$, ossia $\frac{a}{n} + fy = pm$. Adunque essendo pm, ed fy interi, dovrebbe essere intero anche $\frac{a}{n}$. Ma è ciò impossibile, poichè, per essere $\frac{a+fny}{pn}$ una frazione ridotta, il fattore n, perchè divisore di fny, non può essere divisore ancora di a. Dunque è pure impossibile, che essen-

essendo y un numero intero, l'espressione, ossia la frazione ridotta $\frac{a+fny}{pn}$, e quindi $\frac{a+by}{c}$ sia pure un intero.

NOT. XXII.

Si troverà nell' artic. 3. dell' Appendice.

NOT. XXIII.

NEl num. 10. del Cap. 7. alla pag. 86., procedendo l' Autore alla risoluzione del problema 7. semideterminato, ed avendo ritrovato 11, e 12 per limiti del valore di $\frac{y^2+60}{2y}$, cioè a dire, che $\frac{y^2+60}{2y}$ sia maggiore di 11, e minore di 12; nel vers. 8 dice: *Per la prima di queste condizioni, sarà* $\overline{y-11}^{2} > 121-60 = 61$. Ciò si ha nel modo, che segue.

Essendo $\frac{y^2+60}{2y} > 11$, moltiplicando per $2y$ il primo, e 'l secondo membro di questo paragone di disuguaglianza, sarà $y^2+60 > 22y$; giacchè si comprende, che trattando tali paragoni a modo di equazioni, sempre il membro maggiore resterà maggiore, e minore il minore. Quindi $y^2 - 22y > -60$: ed aggiugnendo ad ambi i membri il quadrato della metà del coefficiente -22 del secondo termine, si avrà $y^2 - 22y + 121 > 121 - 60$, ossia $\overline{y-11}^{2} > 121 - 60 = 61$.

Della stessa maniera si dimostra essere $\overline{y-12}^{2} < 144 - 60$

$- 60 = 84$, espressione, che in seguito nella medesima pagina si trova.

N O T. XXIV.

NEl numero 14. del Cap. 8. pag. 94. in fine si legge: *In questa avviene, che se* $\frac{aa}{4} < bc$, *il circolo descritto col raggio* D F *non seghi la retta* A B (Fig. 4. Tav. 1.) . . . . . . Ciò si dimostra nel seguente modo.

Dal punto A al cerchio HEF (Fig. 1.) si tiri la tangente AN, che incontri la circonferenza dell' altro in I; sarà $FA \cdot AE$, o sia $bc = \overline{AN}^2$, per la geometria: ma nella supposizione di $\frac{aa}{4} < bc$, o sia di $bc > \frac{aa}{4}$, abbassata dal centro D sulla corda AB la perpendicolare DO, è $bc > \overline{AO}^2$, per essere, per la geometria medesima, $AO = \frac{a}{2}$; dunque $\overline{AN}^2 > \overline{AO}^2$, ossia $AN > AO$: e perciò $2AN > 2AO$, cioè $AI > AB$. Quindi AI più vicina al centro D, di quello, che l' è AB; e però AB, nella supposizione in cui siamo, casca al di sopra del punto N della retta AI. Ma il cerchio NEF, descritto col raggio DF, e col centro D, appena arriva con un sol punto N della sua periferia a toccare la retta AI. Il medesimo dunque, nell' ipotesi di $\frac{a^2}{4} < bc$, non potrà nè segare, nè toccare la AB.

NOT. XXV.

NEl num. 12. del Cap. 9. pag. 100. vers. 1. si legge: *Essendo* FB = x: FE = y :: r : n.

Ciò si ha dall' analogia trovata nel numero precedente; poichè essendo $ax : ry :: a : n$, si avrà $axn = rya$, ossia $xn = ry$; e quindi $x : y :: r : n$.

NOT. XXVI.

NElla fine del num. 13. del Cap. 9. pag. 101. vers. 8. si legge: *sarà* BR : RI :: BC : M3N :: a : n. (Fig. 9. Tav. I.)

Imperciocchè, per la somiglianza de' triangoli BRI, DCI, si ha $BR : RI :: DC : CI :: DC : CO :: DC : BM :: BC : M3N$, per la somiglianza de' triangoli BCD, $3NMB$; e quindi $:: a : n$.

NOT. XXVII.

NEl numero 16. del medesimo Cap. 9. pag. 102. vers. 14. si dice, che *l' equazione al circolo espressa sarà dalla formola* $\frac{2ab}{a-b} . x - xx = yy$.

L'equazione al circolo dicesi quella, che esprime la natura del circolo: e generalmente l'equazione ad una curva qualunque è quella, che esprime la di lei natura. Questa equazione altro non è, che l'espressione analitica della principale proprietà, che alla curva stessa compete, nè all' altre curve è comune. Per ben comprendere ciò: Siano nello stesso piano due indefinite linee AC, BC (Fig. 2.), la prima delle quali

quali sia retta, e ciascuna di esse di costante posizione. Intendasi preso su della AC un punto A, e da A sulla stessa AC si concepiscano prese successivamente infinite parti AM, $A\,2M$, ec., e da' punti M, $2M$, ec. tirate infinite rette MN, $2M\,2N$, ec. alla linea BC, che formino colle corrispondenti AM un angolo costante. Egli è facile a comprendersi, che la relazione, che ha ciascuna AM alla sua corrispondente MN, dipenderà dall' indole della linea BC: e vicendevolmente, concependo la linea BC come quella, nella quale ritrovansi gl' infiniti punti estremi delle MN; la natura, ed indole della medesima dipenderà dalla relazione, che passa fra le AM, e le corrispondenti MN. Or sebbene le AM, ed MN (le prime delle quali chiamansi *ascisse*, ed *ordinate* le seconde, ed amendue insieme *coordinate*, come nel principio del secondo Libro si dirà) variino successivamente di valore; ciò non ostante, per le proprietà, che per propria natura alla linea BC si appartengono, sarà sempre la lor relazione costante, e potrà esprimersi per mezzo di un' equazione indeterminata a due variabili, o sieno incognite, x, y, la prima delle quali esprima l' ascisse, e l' altra le ordinate. Questa equazione, che, come ben si comprende, esprime la natura ed indole della curva BC, è quella appunto, che dicesi equazione alla linea stessa BC.

Posto ciò, se nel cerchio CMN, già descritto, si prolungherà il raggio CD in N (Fig. 3.), essendo del circolo primaria proprietà, che abbassando da qualunque punto M su CN qualsivoglia normale MP, sia il rettangolo $CP \cdot PN = \overline{MP}^2$, come si ha dalla geometria; questa proprietà, pronunziata con termini analitici, darà la sua equazione. Quindi prendendo il punto C per quello, d'onde hanno origine le ascisse x, e chiamando qualunque $CP = x$, $MP = y$, e perciò $\overline{MP}^2 = y^2$; poichè il raggio $CD = \frac{ab}{a-b}$, per cui l' intero diametro $CN = \frac{2ab}{a-b}$; risulterà $PN = \frac{2ab}{a-b} -$

 x,

x, e perciò $CP.PN = x.\overline{\frac{2ab}{a-b} - x} = \frac{2ab}{a-b}.x - x^2$; onde l' equazione al circolo sarà $\frac{2ab}{a-b}.x - xx = y^2$

N O T. XXVIII.

NEl numero 17. del Cap. 9. istesso pag. 104. vers. 5. e seguente leggesi: *sarà* BD $= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, *che è appunto la terza proporzionale dopo* AB, BC (Fig. 12. Tav. 2.).

Imperciocchè la terza proporzionale in ordine ad AB, e BC, ossia in ordine a $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$, ed a, è

$$\frac{aa}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}}.$$

Or se si moltiplichi il numeratore, e 'l denominatore di questa per $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, che è la differenza de' termini del denominatore; si libererà questo dal radicale, e si cangerà la frazione in

$$\frac{a^2\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a^3}{2}}{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$$

NOT.

NOT. XXIX.

NEl numero stesso 17. del Cap. 9. nel vers. 13. e seguente della medesima pag. 104., si dice: *saranno, come si rileva dai valori analitici*, B D, B C, B A *in proporzion continua*. (Fig. 13. Tav. 2.).

In questo secondo caso, in cui su di BC si forma il triangolo isoscele BAC colla radice Cf; (Fig. 12. e 13. Tav. 2.) uguale ai lati AB, AC, si avverta, che se bene la medesima Cf siasi trovata eguale ad $\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$, che è una quantità negativa; nel formare detto triangolo si considera come positiva, cioè uguale a $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. Quindi il valore di BD è $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} + a =$ $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$: che però i valori analitici di BD, BC, e BA saranno rispettivamente i seguenti, cioè $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$, a, e $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$, i quali, come si è veduto nella Nota precedente, sono in continua proporzione.

Volendo poi ritenere l' espressione negativa di $Cf =$ $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2 + \frac{a^2}{4}}{1}}$; il triangolo si deve formare al disotto di BC, e la quantità $AD = a$, che si aggiugne a $BA =$ $\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2 + \frac{a^2}{4}}{1}}$ col prolungarla in D, si deve considerare anche come negativa, per lo che sarà $BD = \frac{a}{2}$ -

$\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} - a = -\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. Quindi BD, BC, e BA corrisponderanno ai seguenti tre valori, cioè $+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}-\frac{a}{2}$, a, ed $\frac{a}{2}-\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$, che anche sono in continua proporzione.

NOT. XXX.

LA formola della $Ctc.$ della somma di due archi, che nel num. 18. del Cap. 10. pag. 117., e 118. si determina coll' ajuto del Teorema 4. del num. 5., e della formola già trovata nella proposizione 5. del medesimo Cap. per la tangente della somma degli archi stessi: siccome ancora tutte le altre formole, che per le rimanenti linee trigonometriche nelle seguenti proposizioni si trovano; possono, e con maggior semplicità determinarsi, chiamando sempre in ajuto una delle formole de' seni, e coseni, nelle prime quattro proposizioni determinate, se si ha l'avvertenza di ricorrere per la determinazione medesima sempre ad uno de' teoremi, nel detto numero 5. registrati, che dà la proporzione tra 'l seno, e coseno, o uno d' essi, il raggio, e la linea, che si vuol determinare. Questi teoremi sono appunto il 1.°, 2.°, 7.°, e 'l 9°.

In fatti per determinare in sì fatto modo la formola, a cui è uguale $Ctc.\,\overline{\pi+\varphi}$, in vece di far uso del teorema 4.°, che include l'espressione della $Tc.\,\overline{\pi+\varphi}$, chiamando in ajuto il teorema 7.°, si avrà $\frac{Sc.\,\overline{\pi+\varphi}}{Cc.\,\overline{\pi+\varphi}} = \frac{r}{Ctc.\,\overline{\pi+\varphi}}$, nella quale equazione, per avere il valore di $Ctc.\,\overline{\pi+\varphi}$, non si dee far altro, che sostituire le formole

mole del seno, e cosseno della somma de' due archi π, e φ. Lo stesso ha luogo in tutte le altre proposizioni de' numeri seguenti. Avendo dunque l' accennata avvertenza, ritenendo a memoria le sole formole de' seni, e cosseni, già ritrovate nelle prime quattro proposizioni, potranno col mezzo loro con facilità maggiore determinarsi le formole tutte, che alle rimanenti linee trigonometriche sono rispettivamente uguali.

NOTE

NOTE

DEL LIBRO SECONDO.

NOT. I.

L'Autore del Compendio nel num. 9. del Cap. 1. pag. 129. dice, *il trinomio* $yy + lxy + mx^2$ *si risolve ne' due fattori* $y + x . \left(\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}\right)$, $y + x . \left(\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}\right)$. Ciò si fa nel modo seguente.

Suppongasi il trinomio eguale â zero, e si avrà $yy + lxy + mx^2 = o$, equazione del secondo grado ordinata per y: si trovino indi i valori dell'y con risolverla, ed avremo $y = \frac{-lx}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2x^2 - mx^2}{4}} = \frac{-lx}{2} \pm x\sqrt{\frac{l^2 - m}{4}} = x . \left(\frac{-l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}\right)$. Con questi si formino i fattori dell'equazione già sciolta, i quali sono appunto $y + x . \left(\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}\right)$, $y + x . \left(\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}\right)$ (Lib. I. Cap. 5. num. 11.); i medesimi, come è chiaro, saranno altresì fattori del trinomio proposto.

NOT. II.

Il calcolo, che si trova nel num. 13. del Cap. 1. pag. 132., e 133., per cui si viene all'equazione fra le z, e le y, altro non è, che la sostituzione in vece d'u del valor suo, dato

dato per y, cioè di $y - \frac{br \cdot Cc\mu}{2 \cdot \overline{Sc\mu}}$, nell'equazione fra le z, e le u del num. 11.; nè diversa equazione sarebbesi ottenuta colla sostituzione attuale.

N O T. III.

NEl num. 15. al vers. 8., è 9. Cap. 1. pag. 134. si legge: *ma* IK, *ed* SA *sono come* $\overline{IT}^2 : \overline{IS}^2$ *direttamente* (Fig. 3. Tav. 1.), *e come i parametri* $\frac{1}{\overline{IS}}$: $\frac{1}{\overline{IT}}$, *reciprocamente*.

Imperciocchè *IK*, ed *SA*, come ascisse, sono uguali ai quadrati delle rispettive ordinate, divisi per i parametri corrispondenti, per l'equazione alla parabola. Quindi sono nella ragion diretta de' detti quadrati, e nella reciproca de' parametri medesimi, per essere le frazioni nella ragion diretta de' numeratori, e nella reciproca de' denominatori.

N O T. IV.

NElla sostituzione, che nel num. 1. del Cap. 2. pag. 135. si fa nell'equazione $yy = \frac{bb}{4a} + c - ax^2$, ponendo bb in in vece di $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}$, che è il termine noto, diviso per a, e $\frac{cc}{bb}$ in luogo di a, coefficiente di $-x^2$; è chiaro, essere b, e c quantità diverse dalle prime. Si avverta però, che c dipende da b, essendo c quella retta, al quadrato della

F quale

quale ha quello di b la ragione stessa, che l'unità ha ad a, giacchè deve essere $1 : a :: b^2 : c^2$.

Non per altro poi si divide prima il termine noto dell'equazione medesima per a, e poi in vece del quoto si pone bb, che per convertire in $b^2 a$, colla sostituzione, il termine noto medesimo, introducendo in questo in si fatto modo il fattore a, che è la quantità stessa, che moltiplica il quadrato dell' ascissa preso negativamente, cioè $-x^2$; per quindi venire ad avere un equazione di forma più semplice, come in seguito nel medesimo num. 1. osservasi.

N. O. T. V.

Le operazioni, che necessitano per la sostituzione, accennata nel num. 5. del Cap. 2. pag. 139., de' valori di z, e di u nell' equazione del num. 4., e per la riduzione de' dilei termini, per potersi avere l' equazione tra x, ed y, che in fine della citata pag. si legge, essendo molte, e lunghe, con ragione dall' Autor del Compendio si tralasciano. Or poichè le medesime, come ho sperimentato in pratica, imbarazzano non poco la gioventù; stimo necessario esponere nella Nota presente quanto per la loro esecuzione si richiede.

Prima di venire alla sostituzione suddetta, per facilitarne l' operazione, si moltiplichi per $r^2 b^2$ l' equazione del num. 4., cioè $\frac{u^2 . \overline{S c\mu}^2}{r^2} = \frac{cc}{bb} \left(b^2 - z^2 - \frac{2uz . Cc\mu}{r} - \frac{u^2 . \overline{Cc\mu}^2}{r^2} \right)$, in cui dee farsi tal sostituzione, e si avrà

$b^2 u^2 . \overline{S c\mu}^2 = c^2 r^2 b^2 - c^2 r^2 z^2 - 2c^2 ruz . Cc\mu - c^2 u^2 . \overline{Cc\mu}^2$. In questa si sostituisca in primo luogo in vece di z il suo valore $\frac{x . \overline{Sc . \mu + \varphi}}{Sc\mu}$, trovato nel citato num. 5., ed

avrassi

avrassi $b^2u^2.\overline{Sc\mu}^2 = c^2r^2b^2 - \frac{c^2r^2x^2.\overline{Sc.\overline{\mu+\varphi}}^2}{\overline{Sc\mu}^2} - \frac{2c^2rux.Sc.\overline{\mu+\varphi}.Cc\mu}{Sc\mu} - c^2u^2.\overline{Cc\mu}^2$, ovvero $u^2.$

$(b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2) + u.\frac{2c^2rx.Sc.\overline{\mu+\varphi}.Cc\mu}{Sc\mu}$

$= c^2r^2b^2 - \frac{c^2r^2x^2.\overline{Sc\overline{\mu+\varphi}}^2}{\overline{Sc\mu}^2}$: e sostituito poi in questa il valor di u, che è $y - \frac{c^2rx.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\varphi}}{Sc\mu.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)}$, o sia

$\frac{y.Sc\mu.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2) - c^2rx.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\varphi}}{Sc\mu.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)}$;

si otterrà

$$\left(\frac{y.Sc\mu.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2) - c^2rx.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\varphi}}{\overline{Sc\mu}^2.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)^2}\right)^2.$$

$$(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)$$

$$+\frac{y.Sc\mu.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2) - c^2rx.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\varphi}}{Sc\mu.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)},$$

$\frac{2c^2rx.Sc.\overline{\mu+\varphi}.Cc\mu}{Sc\mu} = c^2r^2b^2 - \frac{c^2r^2x^2.\overline{Sc.\overline{\mu+\varphi}}^2}{\overline{Sc\mu}^2}$, cioè

$$\left(\frac{y.\,Sc\mu.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)-c^2rx.\,Cc\mu.Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}{\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)}\right)^2+$$

$$\left(2c^2rxy.\,Sc\mu.Cc\mu.Sc.\overline{\mu+\varphi}.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)-2c^4r^2x^2.\overline{Cc\mu}^2.\,\overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^2\right):\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)=c^2r^2b^2$$

$-\dfrac{c^2r^2x^2.\,\overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^2}{\overline{Sc\mu}^2}$: e moltiplicando tutta l' equazione per $\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)$, che è divisore dell' intero primo membro, e dippiù facendo attualmente il quadrato del primo termine dello stesso primo membro; si avrà $y^2.\,\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)^2-2c^2rxy:$ $Sc\mu.\,Cc\mu.\,Sc.\,\overline{\mu+\varphi}.\,(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)+c^4r^2x^2:$ $\overline{Cc\mu}^2.\,\overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^2+2c^2rxy.\,Sc\mu.\,Cc\mu.\,Sc.\,\overline{\mu+\varphi}.$ $(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)-2c^4r^2x^2.\,\overline{Cc\mu}^2.\,\overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^2=$ $c^2r^2b^2.\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)-c^2r^2x^2.\,\overline{Sc.\overline{\mu+\varphi}}^2:$ $(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)=c^2r^2b^2.\,\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+$ $c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)-c^2r^2x^2b^2.\,\overline{Sc\mu}^2.\,\overline{Sc\overline{\mu+\varphi}}^2-c^4r^2x^2.\,\overline{Cc\mu}^2.$ $\overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^2$, facendo attualmente la moltiplicazione dell' ultimo termine di questo membro. Quindi togliendo i termini, che si elidono, si ridurrà l' equazione ad $y^2.\,\overline{Sc\mu}^2.(b^2.\overline{Sc\mu}^2$ $+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)^2=c^2r^2b^2.\,\overline{Sc\mu}^2.\,(b^2.\,\overline{Sc\mu}^2+c^2.\,\overline{Cc\mu}^2)$

$= c^2r^2x^2b^2.\overline{Sc\mu}^2.\overline{Sc.\overline{\mu+\phi}}^2$: e dividendo il primo e 'l secondo membro della medesima per $r^2b^2.\overline{Sc\mu}^2.(b^2.\overline{Sc\mu}^2 + c^2.\overline{Cc\mu}^2)$, si avrà finalmente $y^2.\frac{(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)}{r^2b^2}$

$$= c^2 - \frac{c^2x^2.\overline{Sc.\overline{\mu+\phi}}^2}{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}.$$

NOT. VI.

DAll' equazione trovata nella Nota precedente si fa passaggio senza difficoltà alcuna a quella, che indi trovasi nello stesso num. 5. del medesimo Cap. 2. ne' vers. ultimo della pag. 139., e primo della seguente 140., la quale equazione non è che la stessa già nominata della Nota antecedente, posta sotto altra forma.

In fatti, se si divida l' equazione ultima della Nota precedente per lo coefficiente d'y^2, cioè per $\frac{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2}{r^2b^2}$, si avrà $y^2 = \frac{r^2b^2c^2}{b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2} - \frac{r^2b^2c^2x^2.\overline{Sc\overline{\mu+\phi}}^2}{(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)^2}$; e moltiplicando della prima frazione il numeratore, e 'l denominatore per $\overline{Sc\overline{\mu+\phi}}^2.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)$; avremo $y^2 = \frac{r^2b^2c^2.\overline{Sc.\overline{\mu+\phi}}^2.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)}{\overline{Sc.\overline{\mu+\phi}}^2.(b^2.\overline{Sc\mu}^2+c^2.\overline{Cc\mu}^2)^2} -$

r^2b^2

$$\frac{r^2 b^2 c^2 x^2 .\ \overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^{\,2}}{(b^2 .\overline{Sc\mu}^{\,2} + c^2 .\overline{Cc\mu}^{\,2})^2}\text{, o sia } y^2 = \frac{r^2 b^2 c^2 .\ \overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^{\,2}}{(b^2 .\overline{Sc\mu}^{\,2} + c^2 .\overline{Cc\mu}^{\,2})^2} .$$

$$\left(\frac{b^2 .\ \overline{Sc\mu}^{\,2} + c^2 .\ \overline{Cc\mu}^{\,2}}{\overline{Sc.\,\overline{\mu+\varphi}}^{\,2}} - xx\right);$$

N O T. VII.

NEl vers. 8. del num. 8. del Cap. 2. pag. 142. si legge: *sarà* Sc. OYB $=$ Sc. $\overline{\mu+\varphi}$ (Fig. 4. Tav. 1.).

Imperocchè dovunque caschi l' asse dell' ellisse *KSLR*, se intendasi condotto, sempre ei formerà coll' ordinata *BY*, e col diametro *LK* un triangolo, del quale gli angoli saranno O*YB*, o 'l suo compimento a due retti, e gli altri due μ, e φ. Quindi la somma di questi due μ, e φ, dovendo, per la geometria, essere il compimento a due retti di *OYB*, o del suo compimento; sarà sempre *Sc . OYB* $=$ *Sc.* $\overline{\mu+\varphi}$.

N O T. VIII.

NEl num. 6. del Cap. 3. pag. 149. vers. 12. e seguenti si dice: *Finalmente dalla forma stessa dell' equazione si ricava, che* $\dfrac{2bcr}{\sqrt{bb.\ \overline{Sc\mu}^{\,2} - cc.\ \overline{Cc\mu}^{\,2}}}$ *è il valore del diametro* Q A (Fig. 5. Tav. 1.) *conjugato del* B P.

Im-

Imperocchè essendo la trovata equazione similissima a quella al diametro, o asse KL del num. 1.; la quantità, che moltiplica la differenza de' quadrati dell' ascissa, e del semidiametro primo già determinato; cioè la quantità

$\dfrac{b^2c^2r^2 . \overline{S c . \overline{\mu+\varphi}}^2}{(bb . \overline{Sc.\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2)^2}$, dovrà essere eguale al quadrato del semidiametro secondo, diviso per lo quadrato del semidiametro primo (num. 1. e 4.). Che però essendo questo semidiametro primo $OB = \dfrac{\sqrt{bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}}{Sc . \overline{\mu-\varphi}}$,

e 'l dilui quadrato $= \dfrac{bb . \overline{Sc\mu} - cc . \overline{Cc\mu}^2}{\overline{Sc . \overline{\mu-\varphi}}^2}$, moltiplicando per questo la sopradetta quantità, dovrà il prodotto

$\dfrac{b^2c^2r^2}{bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}$ dare il valore del quadrato del semidiametro secondo OA. Quindi la sua radice seconda

$\dfrac{bcr}{\sqrt{bb\, \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}}$ sarà il valore del medesimo semidiametro: e 'l doppio della medesima; cioè

$\dfrac{2bcr}{\sqrt{bb . \overline{Sc\mu}^2 - cc . \overline{Cc\mu}^2}}$, sarà quello dell' intero QA conjugato del BP.

NOT.

NOT. IX.

NEl num. 15. del Cap. 3. pag. 158., volendo l' Autor del Compendio venire alla determinazione della curva, espressa dall' equazion generale del secondo grado, priva del quadrato dell' y, che è $\begin{matrix} lxy + mx^2 + q = o \\ + ny + px \end{matrix}$, ed intendendo farlo mediante la trasformazione di questa in altra più semplice; per ciò ottenere, pone $\frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - y = u$, come leggesi ne' vers. 11., e 12. del detto num., e poi in seguito nella detta equazione, in vece dell' y, sostituisce quel valore dato per u, e quantità cognite, che dall' equazione, ad arbitrio formata, viene ad avere; ed in tal modo, i tre termini dell' equazion generale contenenti l' x venendosi a ridurre ad uno contenente l' u, l' equazione stessa si trasformerà in più semplice.

Ponendo mente a questa sostituzione, si scorgerà, che la quantità, che si fa uguale alla nuova variabile u, che invece d' y s' introduce nell' equazion generale, altro non è, che la somma de' tre termini dell' equazione stessa contenenti l' x, divisi per lx, e presi negativamente, con dippiù $\frac{mn}{l^2}$. Or si comprende bene il motivo, che induce il Signor Canonico a sostituire la nuova variabile u in vece de' tre detti termini $-\frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - y$: ma quale sia quello, per cui a' medesimi aggiunga ancora il quarto $\frac{mn}{l^2}$, non vedesi chiaramente. La ragione ne è, che ponendo solamente $-\frac{p}{l} -$

mx

$\frac{mx}{l} - y = u$, per cui $y = -\frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - u$, quantunque colla sostituzione di questo valore in vece d' y nel primo termine lxy dell' equazione generale, i tre sopradetti termini dell' equazione stessa contenenti l' x, cioè $lxy + mx^2 + px$, si riducano ad uno, che è $-lxu$; nulladimeno, dovendo ripetere la sostituzione nell' altro termine ny dell' equazione; in questa, come coll' attuale operazione può ognuno convincersene, con tal seconda sostituzione vi s' introduce un altro termine contenente l' x, che è appunto $-\frac{nmx}{l}$; per cui non si ottiene il fine, per lo quale si è avuto ricorso alla sostituzione. Quindi è, che l' Autore avvertito di questo, al trinomio, che fa uguale alla nuova variabile u, aggiugne ancora $\frac{nm}{l^2}$; il che fa, che nella prima detta sostituzione nel termine lxy del valore d' y, cioè $\frac{mn}{l^2} - \frac{p}{l} - \frac{mx}{l} - u$, dovendo questo moltiplicare per lx; viene ad introdurre nell' equazione con segno positivo quel termine stesso $\frac{nmx}{l}$, che con segno negativo nell' altra suddetta sostituzione dello stesso valore in ny nell' equazione medesima in ogni caso introduce.

NOT. X.

Nella fine del num. 3. del Cap. 4. pag. 162. si dice, che $\frac{bc}{aa} \cdot \overline{ax + x^2} = yy$ sia l'equazione all' iperbola, e $\frac{bc}{aa} \cdot \overline{ax - x^2} = yy$ l'equazione all' ellisse, ambedue riferite agli assi conjugati a, e $\sqrt{bc}$, e col principio delle ascisse nel vertice dell' asse primario a. Per convincersene, si attenda a ciò, che sono per dire nella Nota presente.

L' iperbola riferita agli assi conjugati a, e $\sqrt{bc}$, nel primo de' quali a sieno prese l' ascisse, avendo il lor principio nel centro, per lo Cap. 3., viene espressa dall' equazione $\frac{bc}{aa} \overline{zz - \frac{aa}{4}} = yy$; denotando y l'ordinate, z l' ascisse, $\frac{bc}{aa}$ il quadrato del semiasse secondo, diviso per lo quadrato del semiasse primo, ed $\frac{aa}{4}$ questo quadrato del semiasse primo: e, per lo Cap. 2., $\frac{bc}{aa} \cdot \overline{\frac{aa}{4} - zz} = yy$ esprime l' ellisse riferita agli assi stessi, anche col principio delle ascisse nel centro. Or se nella prima di queste equazioni sostituiscasi in vece di z una nuova variabile x, accresciuta del semiasse primo $\frac{a}{2}$, cioè si sostituisca $x + \frac{a}{2}$, e nella la seconda si sostituisca a z la stessa x, diminuita di $\frac{a}{2}$, cioè $x - \frac{a}{2}$; l'equazione all'iperbola si convertirà in $\frac{bc}{aa} \cdot \overline{xx + ax + \frac{aa}{4} - \frac{aa}{4}} = \frac{bc}{aa} \cdot \overline{xx + ax} = yy$, e la seconda all'ellisse si cangerà in $\frac{bc}{aa} \cdot \overline{\frac{aa}{4} - xx + ax - \frac{aa}{4}} = \frac{bc}{aa} \cdot \overline{ax - xx} = yy$, ed in ambedue il principio delle ascisse sarà nel vertice dell'asse primario a, come appunto nel detto num. 3. del Cap. 4. si dice.

N O T. XI.

Nel num. 9. del Cap. 4. pag. 166. vers. 8. si dice essere $MF = \frac{a^2 - cx}{a}$ (Fig. 12. Tav. 2.).

Imperocchè, essendo rettangolo il triangolo MPF, sarà $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2 = y^2 + \overline{c-x}^2$, per lo num. 8. Ma, per questo stesso num., $y^2 = \frac{bb}{aa} \cdot \overline{a^2 - x^2}$, e di più $b^2 = a^2 - c^2$, per cui è $y^2 = \frac{a^2 - c^2}{aa} \cdot \overline{a^2 - x^2}$. Dunque $\overline{MF}^2 = \frac{a^2 - c^2}{aa} \cdot \overline{a^2 - x^2} + \overline{c-x}^2 =$

$$\frac{a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 + c^2x^2}{aa} + c^2 - 2cx + x^2 = (a^4 - a^2c^2 - a^2x^2 + c^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2) : a^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2}{aa}.$$ Quindi $MF = \frac{a^2 - cx}{a}$.

N O T. XII. *

N O T. XIII.

Quanto nel num. 4. del Cap. 5. dal vers. 11. fino al 18. della pag. 171. dal Sig. Canonico Saladini si dice dedursi dalla costruzione fatta dell' equazione $xy + ax = aa - ay$, senza difficoltà alcuna si comprenderà dando una semplice occhiata alla Fig. 17. della Tav. 3., che colla costruzione medesima si è delineata, se si abbia presente, che per essere $AD = CA$, e parallela a CM, il punto D, d' onde hanno origine l' ascisse, sarà nella retta, che dividerebbe in due parti uguali l' angolo C degli asintoti CM, CN; e perciò nell' asse dell'iperbola. Quindi essendo le DB, DH parallele rispettivamente agli asintoti medesimi; il concorso di queste coi rami dell' iperbola dovrà succedere a distanze uguali dal punto D; e perciò la linea delle ascisse DH incontrerà la curva a distanza eguale ad a, a cui è uguale $DB = DA = AC$.

Indipendentemente però dalla fatta costruzione, e dalla Fig., colla sola equazione proposta possono determinarsi i diversi valori delle coordinate nelle diverse supposizioni nel detto num. 4. fatte, sostituendo in essa successivamente, in vece di ciascuna variabile, zero, a, ed altre quantità, maggiori, o minori di a, positive, e negative, e determinando indi il valore dell' altra variabile. In fatti, posto nella suddetta equazione zero in vece d'x, si avrà $aa - ay = o$; d' onde $y = a$:

$y = a$: e così nelle altre supposizioni. Lo stesso ha luogo in tutte le altre equazioni, che in seguito si costruiranno.

N O T. XIV.

Nel num.5. del Cap. 5. dal vers.14. al 16. della pag.172. si legge: *dal punto* E *condotta* E O $= \frac{a}{2}$ *parallela all'ordinata, che terminerà alla curva nel punto* O (Fig. 18. Tav. 3.).

Ciò è vero, poichè se nell'equazione $zz - bb + \frac{aa}{4} = pp$ pongasi $z = AE = b$; sostituendo b a z; si avrà $bb - bb + \frac{aa}{4} = pp$, o sia $\frac{aa}{4} = pp$: ed estraendo la radice quadrata da ambi i membri, sarà $\frac{a}{2} = \pm p = \pm$ E O, cioè l'ordinate corrispondenti al punto E dell'ascissa AE saranno eguali appunto ad E O $= \frac{a}{2}$. Quanto altro poi si dice in seguito sino alla fine del detto num. 5., senza difficoltà alcuna si comprenderà dando una semplicissima occhiata alla Fig.

La costruzione già fatta nel medesimo num.5., dell'equazione $xx + 2bx = yy - ay$, suppone essere $bb > \frac{aa}{4}$. Che se fosse $bb < \frac{aa}{4}$, ovvero $bb = \frac{aa}{4}$; nel primo di questi casi, l'equazione tra z, e p sarebbe $zz + mm = pp$, che appartiene alla stessa iperbola equilatera del caso già esaminato, ma colle ascisse prese nel secondo diametro (num. 5. e 9.

e 9. Cap. 3.), per cui la costruzione è la stessa, col solo divario di dover prendere la $AE = b$ su del secondo diametro, e adattare opportunamente a questo, ciò, che in quella costruzione si è fatto su del primo diametro per venire alla determinazione delle coordinate: e nell'altro caso, poichè si

ha $b = \frac{a}{2}$, e $2b = a$; sostituendosi $2b$ in vece di a nell'

equazione suddetta $xx + 2bx = yy - ay$, questa si convertirà in $xx + 2bx = yy - 2by$: ed aggiugnendo bb ad ambi i suoi membri, sarà $xx + 2bx + bb = yy - 2by + bb$: ed estratta la radice quadrata, si avrà $x + b = y - b$, che è un' equazione del primo grado appartenente alla linea retta, che per lo Cap. 1. si sa costruire.

N O T. XV.

NElla fine del num. 9. Cap. 5. pag. 178. vers. 3. si legge: *la DH passerà pel centro C* (Fig. 21. Tav. 3.).

Dal punto D al centro si meni la DC. Poichè $CA = RT$, $AD = CE = TS$, e l'angolo $CAD = MCA = T$; sarà $ACD = R$, e quindi $= GDH$: ma per le parallele CF, EG, la somma de' due GDC, ACD è uguale a due retti; dunque GDC con GDH è anche uguale a due retti. Quindi DH, DC sono in diretto.

N O T. XVI.

NEl num. 3. del Cap. 6. dal vers. 1. al 7. della pag. 179. si dice, che se il punto, per lo quale passa la secante, si trovi nel secondo quadrante, e sia $2R$ (Fig. 22. Tav. 3.); allora l'intercetta $2R\,2Q$, fra esso punto, e la tangente, dee considerarsi come negativa; *perchè nel punto* B *l'intercetta tra il cerchio e la tangente diventa infinita; onde sotto il punto* B *questa intercetta dee voltarsi in negativa*.

Per

Per ben comprendere tuttociò, si rifletta, che la secante CR, dopo esser passata per B, dove per esser parallela alla tangente AQ viene a dare l' intercetta RQ infinita; comunque si produca dalla parte del punto della circonferenza, a cui è tirata, per esempio $2R$, non mai potrà incontrare la tangente medesima AQ; ma per incontrarla, dovrà prodursi dalla parte opposta verso il centro C del cerchio. Questo fa, che l'intercetta $2R\,2Q$, determinata con produrre il raggio del cerchio per direzione opposta a quella, per cui dee prolungarsi per aversi RQ; debba riguardarsi come quantità di opposto valore: e che però avendosi RQ come positiva, e come positive altresì tutte le altre intercette, che si generano con produrre i raggi verso la circonferenza; $2R\,2Q$, e tutte quelle, che si determineranno con produzioni de' raggi verso il centro, reputar si dovranno come negative. Qualora le variabili giacciono tutte, o possono determinarsi su di una stessa retta di data posizione col concorso di altre, o che sieno tirate ad angolo costante da punti diversi, o dallo stesso ad angolo variabile; nessuna difficoltà s' incontra nel distinguere le positive dalle negative nella loro determinazione, venendo le medesime sempre separate da un punto fisso, che è il loro principio. Ma trattandosi di variabili, che vengon determinate su di rette, che non essendo parallele, cangiano successivamente di posizione, e son perciò prive del detto punto, principio delle positive e negative, come sono appunto le intercette delle secanti, di cui in questo problema si tratta; le sole produzioni per direzioni opposte ai punti analoghi, per aversi le richieste intersezioni, sono norma per distinguer delle medesime le positive dalle negative, come si è già veduto.

Il primo problema adunque del Cap. 6. ci presenta un altro esempio, in cui le quantità variabili passano da positive in negative non già per zero, ma per l'infinito, come appunto si vide accadere alla tangente nel num. 4. del Cap. 10. del Lib. 1., qualora da quella dell' arco minor del quadrante del cerchio si fe passaggio all'altra dell' arco maggiore del quadrante; nell' atto stesso, che la cotangente corrispondente si osservò passare in negativa per zero. Questo passaggio per l' infinito delle quantità da positive in negative, e vicendedevolmente, non dee recar maraviglia, se si rifletterà, che ciò succede appunto nelle quantità, che si determinano dall' incontro di una retta fissa, concorrente ad angolo successivamente variabile colle infinite, che ad essa possono da un dato punto menarsi. Imperocchè siccome tali rette subito che giungono a formare un angolo infinitamente piccolo, e concorrono all'infinito, si fanno parallele, e cessando indi d'esser tali, passano immediatamente ad incontrarsi nell' opposta direzione; così le quantità, da tali opposti concorsi determinate, da infinite che sono in una direzione, per lo concorso infinitamente distante, passano immediatamente ad essere della direzione opposta, e perciò da positive passano per l' infinito in negative, e vicendevolmente.

N O T. XVII.

NElla fine del num. 7. del Cap. 6. pag. 182., dopo aver ottenuta il Sig. Canonico l' equazione, che scioglie il problema 5., determina la posizione delle rette KI, KC, (Fig. 26. Tav. 4.), e dice: *fra gli asintoti* KI, KC *si descriva un iperbola, che passi per lo punto* A, *e si avrà la curva bramata*.

Imperciocchè essendo, per la costruzione, $DC : DB :: m : n$, o sia $DC : a :: m : n$; sarà $DC = \frac{am}{n}$, e perciò anche $IK = \frac{am}{n}$: ed essendo dippiù $AI : AD :: m : n$, cioè $AI : b :: m : n$; si avrà altresì $AI = \frac{bm}{n}$. Quindi il rettangolo KIA, che è la potenza della descritta iperbola, sarà eguale ad $\frac{am}{n} . \frac{bm}{n} = \frac{mm}{nn} . ab = zu$.

NOT.

N O T. XVIII.

IL num. 10. del Cap. 6. pag. 184. ha bisogno di spiega per comprendersi quanto in esso si dice in ordine alla costruzione dell' equazione, che risolve il problema ultimo del detto Cap. 1.

In primo luogo ne' vers. 11. e 12. del detto num. 10. si legge: *tirisi la linea* CIF (Fig. 29. Tav. 4.), *talmente che sia* $CI = y$, $IG = \frac{2ay}{b}$; *dunque* $ID = u + \frac{2ay}{b} = x$.

Se dal punto C si tiri CIF parallela a DM, e si prolunghi DG finchè concorra con CIF in I; poichè CI è parallela a DM, e GD, come ordinata, è parallela al diametro CH, o sia IGD parallela a CM; sarà $CI = DM = y$, $IGD = CM = x$. Che però essendo $x = u + \frac{2ay}{b}$, ed $u = GD$; dovrà necessariamente essere $IG = \frac{2ay}{b}$. Quindi se dal punto C si elevi la perpendicolare CF indefinita, e si prolunghi l' ordinata DG in I; si avrà $CI = y$, $IG = \frac{2ay}{b}$, ed $ID = \frac{2ay}{b} + u = x$.

In seguito si trova: *Poichè l' angolo* I *dee esser retto; sarà* $m^2 = \frac{4a^2}{b^2} + 1$.

Perchè ID è parallela a CM, sarà retto l' angolo I: ed essen-

essendo così, sarà $\overline{CG}^2 = \overline{IG}^2 + \overline{CI}^2$, cioè $m^2y^2 = \frac{4a^2y^2}{b^2} + y^2$, o sia, dividendo per y^2, $m^2 = \frac{4a^2}{b^2} + 1$.

Nel seguente verso: *Ora* C E : C F :: m : 1; *dunque* C F = b.

Suppone l'Autore condotta dal punto E, vertice del diametro $CE = mb$, la EF parallela ad ID; dal che si avrà $CE : CF :: CG : CI :: my : y :: m : 1$; quindi $mb : CF :: m : 1$; e $CF = b$.

Finalmente leggesi: *parimenti dovendo essere* $CF : FE :: b : 2a$ . . .

Imperocchè $CF : FE :: CI : IG :: y : \frac{2ay}{b} :: b : 2a$.

NOT. XIX.

NEl num. 5. del Cap. 7. pag. 188. si dice, che per trasformare un'equazione in un'altra, le cui radici sieno a quelle della prima in ragion data, debbasi sostituire $\frac{my}{n}$ all'incognita x dell'equazione.

Il Signor Canonico suppone essere $n : m$ la ragione data delle radici della trasformata a quella della trasformanda. Posto adunque, che x, x', x'', &c. sieno le radici della proposta equazione, ed y, y', y'', &c. le corrispondenti della trasformata; sarà, per la sostituzione, $x = \frac{my}{n}$, $x' = \frac{my'}{n}$, $x'' = \frac{my''}{n}$, &c.: e perciò $nx = my$, $nx' = my'$, $nx'' = my''$, &c. Quindi $y : x :: n : m$, $y' : x' :: n : m$, $y'' : x'' :: n : m$, &c.

NOT.

NOT. XX.

NEl num. 7. del Cap. 7. pag. 189. dice l' Autor del Compendio, che per trasformare un' equazione in altra, le di cui radici sieno a quelle della prima in ragion reciproca, debbasi sostituire $\frac{1}{y}$ all' incognita x dell' equazione.

Che sia così, si dimostra col metodo della Nota precedente. Suppongansi essere x, x', x'', &c. le radici della data equazione, ed y', y', y'', &c. le corrispondenti della trasformata: essendo, per la sostituzione, $x = \frac{1}{y}$, $x' = \frac{1}{y'}$, $x'' = \frac{1}{y''}$, &c.; si avrà $x : x' :: \frac{1}{y} : \frac{1}{y'} :: y' : y$, $x : x'' :: \frac{1}{y} : \frac{1}{y''} :: y'' : y$, $x' : x'' :: \frac{1}{y'} : \frac{1}{y''} :: y'' : y'$, &c.

E' chiaro ottenersi l'intento, anche se si sostituisca all'x una quantità qualunque divisa per y: il che potrà giovare per non introdurre nell' equazione trasformata delle frazioni, come vedesi avvertito in seguito del detto num. 7.

NOT. XXI.

NEl num. 8. del Cap. 8. vers. 7., e seguenti della pag. 194 si dice, che $\frac{z^2 + a^2}{r} = u^2$, e $\frac{z^2 - a^2}{r} = u^2$ sieno due equazioni all' istessa iperbola, prese nella prima le ascisse nel primo diametro, e nel secondo nell' altra: e che $\frac{z^2 - a^2}{-r} = u^2$,

u^2, e $\frac{z^2+a^2}{--r}=u^2$ sieno due equazioni all'ellisse, ma inutile la seconda, perchè immaginaria. Il tutto si ripeterà dal Cap. 2., e 3., nel modo seguente.

Imperocchè essendo $\frac{z^2+a^2}{r}=u^2$, sarà $z^2+a^2=ru^2$, e $z^2=ru^2-a^2=r.\left(u^2-\frac{a^2}{r}\right)=\frac{r^2}{r}.\left(u^2-\frac{a^2}{r}\right)$, che è un' equazione della stessa forma, che quella del num. 1. del Cap. 3., esprimente l' iperbola colle ascisse prese nel primo diametro, la quale si disse essere $yy=\frac{cc}{bb}.\overline{xx-bb}$. Quindi poichè in questa bb esprime il quadrato del semidiametro primo, e $cc=\frac{cc}{bb}.bb$ quello del secondo; sarà $\frac{a^2}{r}$ il quadrato del semidiametro primo, ed $\frac{r^2}{r}.\frac{a^2}{r}=a^2$ quello del semidiametro secondo dell' iperbola espressa dall' equazione $\frac{z^2+a^2}{r}=u^2$.

Collo stesso metodo si ridurrà l' equazione $\frac{z^2-a^2}{r}=u^2$ a $z^2=\frac{r^2}{r}.\left(u^2+\frac{a^2}{r}\right)$, che è similissima alla seguente $yy=\frac{bb}{cc}.\overline{xx+cc}$, equazione, che nel num. 5. del detto Cap. 3. si disse esprimere l' istessa iperbola dell' equazione

zione del num. 1., già detta, ma colle ascisse prese nel secondo diametro. Nè altrimenti si ridurrà la terza equazione, cioè $\frac{z^2 - a^2}{-r} = u^2$ alla forma di quella del num. 1. del Cap. 2., che esprime l'ellisse.

In oltre essendo in tutte le curve, da dette equazioni espresse, il quadrato del semidiametro primo eguale ad $\frac{a^2}{r}$, e quello del secondo eguale ad a^2; si avrà anche il quadrato dell'intero diametro primo, a quello dell'intero secondo, come $\frac{a^2}{r} : a^2 :: a^2 : a^2 r$, o sia $:: 1 : r$: per lo che, essendo $r = 1$, l'iperbola sarà equilatera (num. 9. Cap. 3.), e l'ellisse passerà in circolo (num. 7. Cap. 2.), se l'angolo delle coordinate sarà retto, come appunto trovasi avvertito in seguito del detto num. 8.

N O T. XXII.

N O T. XXIII.

IL Sig. Can. Saladini rimette al calcolo sublime la dimostrazione della proprietà della parabola, di cui si serve nel num. 1. del Cap. 9. pag. 198., la quale è, che ogni parabola nel vertice viene osculata, o sia combaciata dal cerchio del raggio eguale alla metà del di lei parametro, senza essere in alcun altro punto segata: e lo fa, perchè ivi tratta di proposito degli osculi. Or poichè indipendentemente dal detto calcolo può addursene la dimostrazione, premessi alcuni principj; non sarà fuor di proposito farlo in questa Nota.

1. Prima di ogni altro conviene premettere, che una quan-

quantità dicesi avere ad altra una ragione minore di qualunque data, allora quando è infinitamente piccola riguardo alla quantità, alla quale si riferisce. Non è questo il luogo da poter dare una giusta, e perfetta idea di queste quantità infinitamente piccole, che *infinitesime* si appellano: basta qui solamente sapere, che le medesime non sono quantità determinate, ma son quantità, che per metodo s'introducono, e si suppongono diminuirsi successivamente senza limite alcuno, per la quale condizione in realtà altro non sono, che quantità minori di qualunque data: e che ogni quantità, che riferita ad altra, è minore di qualunque data, o sia infinitesima; nel calcolo in paragone della medesima svanisce, e dee riguardarsi qual zero.

2. Queste quantità infinitesime si distinguono in diversi ordini. Imperocchè se una quantità sia terza proporzionale in ordine a due altre, delle quali la seconda sia infinitesima rapporto alla prima; si comprende bene, che essa terza sarà infinitesima d'infinitesima riguardo alla prima: e che perciò, sebbene ambedue tali quantità infinitesime svaniscano ugualmente relativamente alla prima, ciò non ostante paragonate fra loro, essendo nella stessa ragione delle prime due, devono essere di una classe, o sia ordine diverso. Questo fa, che rapporto alla prima la media si chiami infinitesima del 1.° ordine: e la terza, cioè l' infinitesima d' infinitesima, infinitesima del 2.°. Le infinitesime d'infinitesime d'infinitesime diconsi del 3.° ordine, e così successivamente. Se adunque abbiasi $a : b :: b : c$, e b sia infinitesima del 1.° ordine relativamente ad a; c sarà del 2.°: per cui, essendo $a : c :: a^2 : b^2$, anche b^2 sarà del 2.° ordine rapporto ad a^2.

3. Data una competente idea delle quantità infinitesime, e de' loro diversi ordini, passo ora all'osculo. Si dice oscularsi due archi minimi AF, AQ di due curve, (Fig. 4.) qualora la differenza FQ delle due ordinate FP, QP, corrispondenti alle stessa ascissa AP, e quella di tutte le altre intermedie tra P, ed A abbia ad esse ordinate rispettive una ragione minor di qualunque data.

4. Ciò premesso, vengo a dimostrare, che la parabola FAF, delineata col parametro eguale a $2a$, verrà osculata nel

nel vertice A dal cerchio BAD, descritto col raggio $CA = a$. Dal punto F estremo dell' archetto minimo AF s' intenda calata l' ordinata FQP, che intersechi la circonferenza del cerchio in Q, dando di questo la corrispondente ordinata QP. Per la proprietà del cerchio, sarà $2CA.AP - \overline{AP}^2 = \overline{QP}^2$, o sia $2a.AP = \overline{QP}^2 + \overline{AP}^2$: e per la proprietà della parabola sarà $2a.AP = \overline{FP}^2$. Dunque $\overline{FP}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{AP}^2$: ed estratta da ambi i membri la radice quadrata, si avrà

$$FP = QP + \frac{\overline{AP}^2}{2QP} - \frac{\overline{AP}^4}{8\overline{QP}^3} + \frac{\overline{AP}^6}{16\overline{QP}^5} \text{ \&c.}$$ (num. 32. Cap. 3. Lib. 1.).

Or supponendo l' arco doppio di AQ, e quindi AQ essere una parte infinitesima della circonferenza; anche $2QP$, come corda ad esso arco corrispondente, sarà infinitesima relativamente al diametro del cerchio, per cui ancor la metà sua QP infinitesima sarà riguardo a BP, che del semidiametro BC è maggiore: ed essendo di più, per la natura del cerchio, AP terza proporzionale dopo BP, e QP, siccome QP è infinitesima riguardo a BP nella supposizione dell' arco AQ infinitesimo; così anche AP sarà infinitesima relativamente a QP, e per ciò riguardo a $2QP$. Da ciò ne segue, che nella detta supposizione dell' arco AQ infinitesimo, ciascun dei termini della serie, che costituisce il secondo membro dell' equazione dalla natura delle due curve dedotta; dal terzo in avanti, sia infinitesimo del 2.° ordine relativamente al suo precedente, e che perciò svaniscano tutti in confronto de' precedenti. Imperocchè il terzo termine $\frac{\overline{AP}^4}{8\overline{QP}^3}$ altro non è, che il prodotto del secondo $\frac{\overline{AP}^2}{2QP}$ nella frazione $\frac{\overline{AP}^2}{4\overline{QP}^2}$; dunque, chiamato $2T$ il secondo

ter-

termine, e $3T$ il terzo, sarà $3\,T = 2\,T \cdot \frac{\overline{AP}^2}{4\,\overline{QP}^2}$, o sia $3T \cdot 4\,\overline{QP}^2 = 2\,T \cdot \overline{AP}^2$; e quindi si avrà $4\,\overline{QP}^2 : \overline{AP}^2 :: 2T : 3\,T$, cioè $4\,\overline{QP}^2 : \overline{AP}^2$ come il secondo termine al terzo: ma essendo AP infinitesima riguardo a $2\,QP$, $\overline{AP}^2$ è infinitesima del 2.° ordine relativamente a $4\,\overline{QP}^2$, per ciò, che abbiamo premesso nel num. 2.; dunque il terzo termine sarà ancora infinitesimo del 2.° ordine rapporto al secondo. Dello stesso modo si dimostra infinitesimo del 2.° ordine ciascun altro seguente rapporto al suo precedente; che però del secondo membro svaniranno in confronto de' due primi tutti i termini rimanenti, e di questi due soli dovrà tenersi conto nella supposizione che sia AQ infinitesimo.

Quindi si avrà $FP = QP + \frac{\overline{AP}^2}{2\,QP}$; e perciò $FP - QP = \frac{\overline{AP}^2}{2\,QP}$, cioè $FQ = \frac{\overline{AP}^2}{2\,QP}$, e $2\,QP \cdot FQ = \overline{AP}^2$. Sicchè $FQ : AP :: AP : 2\,QP$. Ma abbiamo dimostrato essere AP infinitesima relativamente a $2\,QP$, ed a QP. Dunque anche FQ infinitesima riguardo ad AP; e quindi riguardo a QP ed FP sarà infinitesima del 2.° ordine (num. 2.). La differenza adunque delle ordinate del cerchio, e della parabola, appartenenti ai punti Q, ed F, ha alle ordinate stesse una ragione minore di qualunque data (num. 1.). Potendosi intanto questa dimostrazione adattare a tutte le altre ordinate appartenenti a tutti i punti intermedii dell' infinitesimo parabolico archetto AF, e del circolare AQ corrispondente; AF, ed AQ si osculeranno (num. 3.). Quindi la parabola FAF verrà osculata dal cerchio BDA nel suo vertice A; il che quì significa, che la parabola, e 'l cerchio de-

descritto col raggio eguale alla metà del parametro di quella, nel vertice per un minimo archetto si combaceranno.

N O T. XXIV.

PEr meglio comprendere quanto si avverte nel num. 3. del Cap. 9. pag. 199. per liberare da ogni paralogismo, e render sicura l'applicazione del metodo dell' intersecazione delle curve, si rifletta, che nella supposizione, che una e comune sia la linea delle ascisse, alla quale sieno riferite due curve, espresse da due diverse equazioni, ed uno stesso punto sia il di loro principio, come uno ancora sia l' angolo delle coordinate; se ad una stessa comune ascissa corrispondano due ordinate eguali, ed ambedue positive, o ambedue negative, ed una appartenente ad una curva, e l'altra all'altra: siccome ambedue tali ordinate terminano dalla parte dell' ascissa in un punto comune, quale è l' estremo dell'ascissa; così necessariamente dalla parte delle curve dovranno terminare in altro punto comune, dovendosi per la loro uguaglianzà perfettamente combaciare: ma da questa parte terminano nelle curve; dunque sarà questo punto ancora alle curve comune, e dovrà perciò in questo punto aversi necessariamente l' intersecazione. Questo, come è chiaro, ha luogo solamente qualora ambedue l' ordinate uguali sieno reali, e non immaginarie; poichè in questo caso non avendosi ordinate, neppure si avranno i loro estremi, e per conseguenza ne anche si avranno i due punti delle curve, che dovrebbero ridursi in uno; onde come immaginarie sono le ordinate, immaginaria sarà ancora la loro intersecazione.

N O T. XXV.

QUanto dicesi nel num. 6. del Cap. 9. pag. 201. si farà chiaro, se si rifletterà, che un prodotto di due, o più fattori può essere uguale a zero coll' essere un solo fattore

I uguale

uguale a zero: e che perciò la quantità $RM+RNy$, o sia il prodotto di $M+Ny$ in R, può essere uguale a zero, se sia R solamente uguale a zero; onde separandola da questo fattore uguale a zero colla divisione, resterà ignoto il valore del quoto $M+Ny$, e quindi quello dell' y. Anzi in tal caso potrà avvenire, che ad un valore reale della x corrisponda l'y immaginaria, e per conseguenza non si abbia l' intersecazione corrispondente; poichè in questa ipotesi del fattore $R=0$, determinando per mezzo del medesimo il valore della x, che suppongo essere reale: e sostituendo questo valore in una delle prime due equazioni; per determinare l'y, bisognerà sciogliere un' equazione del secondo grado, e per conseguenza coll' estrazione della radice seconda potranno aversi valori della y immaginarj.

N O T. XXVI.

SE non vogliasi entrare nella ragione, per cui nel num. 2. del Cap. 10. pag. 204. si dice doversi prendere i radicali secondi de' valori di m, e di n coi segni contrarii, si rifletta, che a tal diversità ne' segni de' secondi radicali de' valori di m, e di n ci mena l'operazione stessa, colla quale questi valori si determinano. Imperocchè ridotta l' equazione $m^6 - bm^3 = -a^3$ ad $m^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}$ (Lib. 1. Cap. 5. num. 14.), ed estratta la radice terza da ambi i membri, si avrà $m = \sqrt[3]{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Avendo intanto il secondo radicale il segno doppio, è in nostro arbitrio dare ad esso il segno positivo, o il negativo, dovendogliene uno dare, per avere il valore di m determinato. Se le dia adunque il positisitivo, e sarà $m = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb - a^3}{4}}}$. Questo valore si sostituisca indi in vece di m nell' equazione $m^3 + n^3 = b$, e si avrà $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb - a^3}{4}} + n^3 = b$, ed $n^3 = b - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb - a^3}{4}} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb - a^3}{4}}$: e quindi $n = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb - a^3}{4}}}$.

Se al secondo radicale del valore di m si fosse dato il segno negativo, si sarebbe avuto il valore di n col radicale secondo positivo. Sicchè i radicali secondi de' valori di m, ed n devono prendersi assolutamente coi segni contrarii.

NOT. XXVII. XXVIII. XXIX. * * *

NOT. XXX.

NEl num. 3. del Cap. 12. pag. 225. vers. 3. e 4. si legge: *saranno le* EP $=$ x, PM $=$ y (Fig. 42. Tav. 5.).

Imperocchè il cerchio *BAE*, descritto col raggio *CE* $= \sqrt{\frac{aa + bb}{4}}$, è tale, per l'equazione, che le ascisse prese dal centro sul diametro *AB* sono uguali ad $x - \frac{b}{2}$, e le corrispondenti ordinate sono uguali ad $y - \frac{a}{2}$. Che però

$CN = x - \frac{b}{2}$, $NM = y - \frac{a}{2}$. Quindi $x = CN + \frac{b}{2}$, ed

$y = NM + \frac{a}{2}$, o sia $x = CN + CD = DN = EP$, ed

$y = NM + DE = NM + NP = PM$.

N O T. XXXI.

NEl num. 5. del Cap. 12. pag. 226. il Sig. Canonico Saladini, per dimostrare che il punto $2P$ (Fig. 43. Tav. 5.) dà la trisezione in parti uguali dell' intera circonferenza più l'arco dato, dal vers. 7. al 9. del detto num. dice: *condotte* M 2 P, 2 P 2 Q *parallela ad* MN, *e la* 2 Q N; *saranno queste eguali, in vigore della costruzione*.

Ciò è vero, poichè la stessa costruzione, fatta per la soluzione del problema proposto, ha luogo ancora nel caso, che si voglia trisecare in parti uguali tutta la circonferenza più l'arco MN. Che sia così: suppongasi già fatto, ed essere l'arco $MN2P$ una delle dette terze parti: $2P2Q$ un altra, per cui, dovendo essere tali archi tutti e trè insieme uguali all' intera circonferenza più l'arco MN, dovrà essere $2QMN$ l'arco rimanente. Quindi essendo l'arco $2QMN = MN2P$, togliendo da ambidue la comune parte MN, resterà l'arco $2QM = N2P$: che però, condotte le corde $M2P$, $2Q2P$, $2QN$, sarà l'angolo $M2P2Q = 2PMN$, e perciò la $2P2Q$ parallela ad MN. Adunque anche in questo caso il secondo punto di divisione $2Q$ verrà determinato dalla retta $2P2Q$ condotta dal primo $2P$ parallela ad MN: e per mezzo del primo, e di esso così determinato, verranno ad aversi le tre corde $M2P$, $2P2Q$, $2QN$, che, come corrispondenti agli archi uguali, dovranno essere uguali.

Essendo intanto così, se si supporranno abbassate dai punti $2P$, $2Q$ le normali su la MN, come nel num. prececedente; queste dovranno cadere sulla medesima MN ad uguali distanze dal di lei punto medio D, per cui colle stesse denominazioni delle rette analoghe a quelle del problema proposto, verrà ad aversi la stessa equazione del citato num., dalla costruzione della quale verrà determinato il punto $2P$ richiesto.

N O T. XXXII.

Il num. 8. del Cap. 12. pag. 228. ha bisogno di essere in più passi spiegato, e rischiarato.

In primo luogo ne' versi 5., e 6. del detto num., dopo avere l' Autore dalla supposta equazione $x^2 - ax = ay$ ottenuta l' altra $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = a^2y^2$, dice: *è tolto da una parte* $2a^2x^2$, *e dall' altra* $2a^3y + 2a^3x$, *che per l' equazione supposta sono uguali; nascerà* &c.

Che tali quantità sieno uguali, è verissimo, poichè dalla detta supposta equazione si ha $x^2 = ay + ax$, e moltiplicando della medesima ambidue i membri per $2a^2$, si avrà $2a^2x^2 = 2a^3y + 2a^3x$.

In seguito dice, che la parabola, (Fig. 45. Tav. 5.) descritta col parametro eguale ad a, col vertice G, estremo della $FG = \frac{a}{4}$, e perpendicolare alla $AB = a$ nel punto medio F, dovrà passare per i punti A, e B: e che le rette AL, LI saranno le coordinate x, y dell' equazione $xx - ax = ay$.

Che la descritta parabola debba passare per i punti A, e B, si farà chiaro, se si rifletterà, che essendo GF la quarta parte del parametro $= a$ dell' asse GF, e G il vertice; il rettangolo dell' ascissa $GF = \frac{a}{4}$ nel parametro $= a$ sarà $= \frac{a^2}{4}$. Or dovendo essere questo rettangolo uguale al quadrato dell' ordinata corrispondente, sì positiva, che negativa, per la proprietà della parabola; dovrà necessariamente essere questo quadrato eguale anche ad $\frac{a^2}{4}$, e quindi le dette due

ordi-

ordinate eguali, appartenenti al punto F, dovranno essere $= \frac{a}{2}$: che però FA, ed FB saranno appunto queste ordinate, onde per conseguenza dovrà la parabola AGB passare per i punti A, e B. Ciò potea anche rilevarsi riflettendo, che essendo F il fuoco, e dovendo, per la natura della parabola, l'ordinate all'asse, condotte dal fuoco alla parabola, essere uguali alla metà del parametro, dovranno essere FA, ed $FB = \frac{a}{2}$, e quindi i punti A, e B nella parabola.

Per convincersi poi, che AL, LI sieno le coordinate x, y dell' equazione $xx - ax = ay$, bisogna trasformare questa equazione alla più semplice forma. Per ciò eseguire aggiungasi $\frac{a^2}{4}$ sì al primo, che al secondo membro della detta equazione, per aversi $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = ay + \frac{a^2}{4}$, o sia $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = a \cdot \overline{y + \frac{a}{4}}$: e posta $x - \frac{a}{2} = z$, ed $y + \frac{a}{4} = u$; si avrà, colla sostituzione, $z^2 = au$, equazione, che esprime la parabola del parametro $= a$, e colle ascisse z prese nella tangente nel vertice dell'asse. La parabola adunque AGB (Fig. 5.), già descritta, sarà quella espressa dall' equazione $z^2 = au$, nella quale le GN, prese nella tangente MN nel vertice G, sono le ascisse z, e le NI le ordinate u. Or poichè $x = z + \frac{a}{2}$; presa verso GM la parte $GR = FA = \frac{a}{2}$, sarà ciascuna $RN = x$: e perchè $y = u - \frac{a}{4}$; elevata la normale $RA = GF = \frac{a}{4}$ sulla MN, che terminerà nella parabola nel punto A estremo della AB; è chiaro, che dovrà essere A il principio delle ascisse x, AB la linea delle medesime, e saranno AL, LI le coordinate x, y dell' equazione suddetta $x^2 - ax = ay$.

Dice inoltre, che innalzando alla AB la normale AH $= A$

$= AB = a$, e la parallela $HK = a$, il punto K caderà fuori della descritta parabola.

Per assicurarsi di ciò, suppongasi essere P il punto, in cui viene intersecata la parabola AGB dalla HK, prodotta se bisogni: e nell'equazione di sopra $z^2 = au$, costruita colla parabola stessa AGB, suppongasi $u = MP = RH = \frac{a}{4} + a = \frac{5a}{4}$; e si avrà $z^2 = \frac{5a^2}{4}$, e $z = \pm \frac{a\sqrt{5}}{2}$; sicchè CM, o sia $SP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$: ma $SK = SH + HK = FA + HK = \frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2}$. Dunque essendo $\frac{3a}{2} > \frac{a\sqrt{5}}{2}$, sarà ancora $SK > SP$, e quindi il punto K caderà fuori della parabola AGB.

Dippiù dice, che descrivendo col vertice K, coll' asse KH, e col parametro stesso a la stessa parabola KA; questa passerà per lo punto A, e le rette AL, LI saranno le coordinate x, y dell' equazione $y^2 - 2ay - ax = o$.

Che detta parabola passi per lo punto A, è evidente, poichè avendo essa il parametro $= a = KH$; all' ascissa KH dovrà necessariamente corrispondere l' ordinata HA, che è anche $= a$, per la natura della parabola; e dovrà quindi la parabola medesima passare per A.

Si conoscerà poi, che le rette AL, LI sieno le coordinate x, y anche dell' equazione $y^2 - 2ay - ax = o$, se si trasformerà, come sopra, quest' equazione alla forma più semplice, che è $\overline{y-a}^2 = a \cdot \overline{x+a}$, o sia $u^2 = az$, ponendo u in vece di $y-a$, e z in vece di $x+a$: e facendo indi passaggio alla Fig., se si adatterà opportunamente alla medesima, quanto precedentemente si è detto relativamente all'equazione $xx - ax = ay$.

Finalmente dice l' Autore, che delle tre radici determinate dai punti delle intersecazioni, cioè AL, $A2L$, $A3L$, la la prima è positiva, e maggiore di a: la seconda negativa, ed alquanto minor di a: e la terza positiva, e minore di a: e che tutte e tre sono maggiori di $\frac{a}{2}$.

La prima parte non ammette dubbio alcuno, poichè si rileva dalla costruzione stessa, e dalla descrizione della Fig., d'onde resta chiara anche la seconda, per ciò che riguarda la prima radice AL. Cade solamente il dubbio su di $A2L$, ed $A3L$, se sieno cioè $> \frac{a}{2}$. Che $A2L$ sia $> \frac{a}{2}$, si dimostra nel modo seguente. Pongasi essere $A2L < \frac{a}{2}$; sarà $F2L < a$, e quindi $< a$ anche l' ordinata $2IQ$, abbassata dal punto dell' intersezione $2I$ nella parabola AGB sull' asse GQ, e perciò $\overline{2IQ}^2 < aa$: ma, per l' indole della parabola, $\overline{2IQ}^2 = a \cdot GQ$; dunque $a \cdot GQ < aa$, o sia $GQ < a$, il che ripugna, essendo della GQ la sola parte $SF = a$. Supponendo poi $A2L = \frac{a}{2}$, ne risulterebbe $GQ = a$. Resta dunque, che sia $A2L > \frac{a}{2}$. Similmente sia $A3L < \frac{a}{2}$, o sia $A3L < AF$, per cui il punto dell' intersezione $3I$ sia tra A, e G. In questa supposizione, nella parabola $2IK3I$ all' ascissa KS dovrà corrispondere un' ordinata maggiore di SG; e quindi $a \cdot KS > \overline{SG}^2$, cioè $a \cdot \overline{a + \frac{a}{2}} > \left(a + \frac{a}{4}\right)^2$, o sia $a^2 + \frac{a^2}{2} > a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{16}$, il che ripu-

ripugna. In fine supponendo $A\,3\,L = \frac{a}{2} = A\,F$, l' intersezione $3\,I$ seguirebbe nel punto C, e ne risulterebbe $a^2 + \frac{a^2}{2} = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{16}$. Adunque anche $A\,3\,L > \frac{a}{2}$.

N O T. XXXIII.

NEl num. ultimo del Cap. 12. ed ultimo costruisce l'Autore l' equazione, che scioglie l' ultimo problema del Cap. medesimo, e viene dal vers. 7. al 10. della pag. 232. a determinare (Fig. 48. Tav. 5.) le $B\,E$, $B\,2\,E$, che dice esser le linee ricercate.

Per convincersene, si prenda l' equazione al cerchio, in detto num. ottenuta, cioè $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (t + 2\,b)^2 = \frac{5\,a\,a}{4} + 4\,b\,b$, e si metta $x - \frac{a}{2} = z$, e $t + 2\,b = u$, d'onde, fatta la sostituzione, si avrà $z^2 + u^2 = \frac{5\,a\,a}{4} + 4\,b\,b$. Dal punto L (Fig. 6.), che è il centro del cerchio $M\,2\,M$ descritto, s'intenda condotto il raggio $L\,R$ parallelo ad $A\,G$, su del quale da qualunque punto M preso nella circonferenza del medesimo intendasi abbassata la perpendicolare, o sia l'ordinata $M\,P$. Or poichè un tal cerchio è stato descritto col raggio $= \sqrt{\frac{5\,a\,a}{4} + 4\,b\,b}$, è evidente essere il medesimo il luogo dell' equazione $z^2 + u^2 = \frac{5aa}{4} + 4bb$, ed essere le $LP = z$, e le $MP = u$: ma $z = x - \frac{a}{2}$, ed $u = t + 2b$; e perciò $x = z + \frac{a}{2}$, e $t = u - 2b$; dunque, se nel descritto cerchio alle $LP = z$ si aggiugnerà $KL = \frac{a}{2}$, si avranno le $KP = x$; e se dalle MP si toglierà $QP = AK = 2b$, si otterranno le $MQ = t$. Che però prendendo le ascisse KP nella AG parallela a KR, col loro principio in A, si avranno nel circolo $M 2 M$ le $AQ = x$, e le $MQ = t$, che saranno le coordinate dell' equazione suddetta $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (t + 2b)^2 = \frac{5aa}{4} + 4bb$. Ma anche queste sono le x, e le t della parabola $MA 2 M$, luogo dell' equazione $tt = ax$. Dunque i punti M, $2 M$, delle intersezioni di tali due curve, daranno i valori della t richiesti, i quali perciò saranno le ordinate MQ, $2 M 2 Q$, la prima positiva, e negativa l'altra.

Quindi è, che abbassando su di AB prodotta, dai punti M, $2 M$, le normali MN, $2 M 2 N$, si determineranno le due tangenti AN positiva $= MQ$, e $A 2 N$ negativa $= 2 M 2 Q$. Di queste la positiva AN è quella, che determina il punto H esistente fuori della data parabola, d'onde deve tirarsi per B la richiesta HBD; giacchè avendosi dal num. 12. in termini analitici $t : a :: b : AH$, si avrà in linee $AN : AI :: AB : AH$: e quindi la BH parallela ad IN. La tangente poi negativa $A 2 N$ determina l' altro punto $2 H$ esistente dentro della parabola, per lo quale tirando da B la retta $B 2 H 2 E$, ed abbassando dai punti $2 D$, $2 E$ l'ordinate $2 D 2 F$, $2 E 2 G$, sarà ancora $2 F 2 G = a$, e si avrà un' altra

altra soluzione del problema. Per comprendere ciò, si rifletta, che quando l' incontro della retta tirata da B coll' asse della parabola è dentro della parabola stessa, come in $2H$, si avrà ancora $t : a :: b : A2H$, essendo anche t la tangente dell' angolo $B2HA$, che fa la retta, che dee tirarsi da B alla parabola, col di lei asse, ed a il seno tutto. Che però, dovendosi avere $A2N = t : AI = a :: AB = b : A2H$, la $B2H$ sarà parallela ad $I2N$. Tirando adunque dai punti N, $2N$ al punto I le rette NI, $2NI$, e le parallele a queste BE, $B2E$ dal punto B, siccome dall'Autore si prescrive, saranno queste le ricercate.

NOTE

DEL LIBRO TERZO.

NOT. I. II. III. * * *

NOT. IV.

PEr non lasciar cosa in questo Compendio non dimostrata, e perchè non riesce facile ad ognuno di aver nelle mani le Istituzioni analitiche dall' Autore citate, ho stimato di dovere quì addurre la dimostrazione del Sig. Clairaut, accennata dal Sig. Canonico medesimo nel num. 16. del Cap. 1. pag. 241.

Dimostra adunque il Sig. Clairaut, che la formola esposta nel num. 13. del detto Cap. 1., di elevare $x+a$ alla potenza positiva m, abbia luogo, ancorchè m sia un esponente fratto: e che abbia pur luogo, ancorchè la medesima sia quantità negativa intera, o fratta.

1. Sia in primo luogo $m = \frac{r}{n}$. In questa supposizione il binomio si convertirà in $\overline{x+a}^{\frac{r}{n}}$, e dovrà, per la formola, essere vera l'equazione seguente, che chiamo A.

$$A \quad \overline{x+a}^{\frac{r}{n}} = x^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n} a x^{\frac{r}{n}-1} + \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot a^2 x^{\frac{r}{n}-2}}{2}$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot \overline{\frac{r}{n}-2} \cdot a^3 x^{\frac{r}{n}-3}}{2 \cdot 3} + \&c.$$

Si

Si divida di questa l'uno, e l'altro membro per $x^{\frac{r}{n}}$, e si avrà l'equazione B.

$$B \quad \frac{\overline{x+a}^{\frac{r}{n}}}{x^{\frac{r}{n}}}, \text{ o sia } \left(\frac{x+a}{x}\right)^{\frac{r}{n}}, \text{ovvero } \left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n}ax^{-1}$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot a^2x^{-2}}{2} + \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot \overline{\frac{r}{n}-2} \cdot a^3x^{-3}}{2 \cdot 3} + \&c.$$

In questa si sostituisca z in vece di $\frac{a}{x}$, o sia di ax^{-1}, e si otterrà l'equazione C.

$$C \quad \overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot z^2}{2} + \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot \overline{\frac{r}{n}-2} \cdot}{2 \cdot 3}$$

$$z^3 + \&c.$$

Nel secondo membro di questa, in vece di tutti i termini, che lo compongono, eccettuatone il primo eguale ad 1, sostituiscasi s, supponendo cioè $s = \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n} \cdot \overline{\frac{r}{n}-1} \cdot z^2}{2} + \&c.$,

e si avrà $\overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1+s$, che elevata alla potenza intera n, darà l'equazione D.

$$D \quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n}.$$

Dimostrando dunque vera l'equazione D, alla quale siamo pervenuti, resteranno anche vere l'equazioni precedenti, e quin-

quindi vera A. Per ciò dimostrare, mediante la formola generale del num. 13., si elevino effettivamente alle rispettive potenze r, ed n i membri dell'equazione D, e si avrà l'equazione E.

$$E \quad 1 + rz + \frac{r.\overline{r-1}}{2}.z^2 + \frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{2.3}.z^3 + \&c.$$

$$= 1 + ns + \frac{n.\overline{n-1}}{2}.s^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}.s^3 + \&c.$$

Or se nel secondo membro di questa, invece di s, e delle seguenti potenze s^2, s^3, &c., si sostituiranno i corrispondenti valori dati per z, che si avranno dall'equazione supposta $s = \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}.\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}.z^2 + \&c.$: e dopo di ciò, se nello stesso secondo membro si faranno le successive riduzioni de' termini contenenti la stessa potenza di z; si perverrà finalmente ad una equazione di membri identici; il che indica esser vera l'equazione D, e quindi vere le precedenti fino ad A.

Ho tralasciato di fare attualmente le sostituzioni, e riduzioni accennate, perchè esse richiedono un lungo calcolo, e possono eseguirsi facilmente da chicchessia.

2. Passo ora collo stesso metodo a dimostrar vera la formola nel secondo caso, qualora l'esponente del binomio sia una quantità negativa intera, o fratta. Sia questa quantità espressa da $-r$, dimodocchè il binomio sia $\overline{x+a}^{-r}$, per cui l'equazione da dimostrarsi vera sarà A

$$A \quad \overline{x+a}^{-r} = x^{-r} - rax^{-r-1} + \frac{r.\overline{r+1}}{2}.a^2x^{-r-2} -$$

$$\frac{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}}{2.3}.a^3x^{-r-3} + \&c.$$

Dividasi l' uno, e l' altro membro di questa per x^{-r}, e si avrà *B*

$$B \quad \frac{\overline{x+a}^{\,-r}}{x^{-r}} = \left(\frac{x+a}{x}\right)^{-r} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^{-r} = 1 - rax^{-1} + \frac{r.\overline{r+1}}{2}.a^2x^{-2} - \frac{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}}{2.3}.a^3x^{-3} + \&c.$$

Pongasi $\frac{a}{x}$, o sia $ax^{-1}=z$, e sostituiscasi z nell' equazione *B*, onde abbiasi *C*

$$C \quad \overline{1+z}^{\,-r} = \frac{1}{\overline{1+z}^{\,r}} = 1 - rz + \frac{r.\overline{r+1}}{2}.z^2 - \frac{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}}{2.3}z^3 + \&c.$$

Coll' ajuto della formola, ancorchè r sia un fratto, si converta in serie il denominatore $\overline{1+z}^{\,r}$ del primo membro di quest' equazione, e ne risulterà *D*

$$D \quad \frac{1}{1+rz+\frac{r.\overline{r-1}}{2}.z^2+\frac{r.\overline{r-1}.\overline{r-2}}{2.3}.z^3+\&c.} = 1 - rz + \frac{r.\overline{r+1}}{2}.z^2 - \frac{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}}{2.3}.z^3 + \&c.$$

Or questa equazione è tale, che moltiplicandola per lo denominatore del primo membro, e facendo successivamente la riduzione de' termini contenenti la z, z^2, z^3, &c. nel secondo membro medesimo, tutti i termini di questo, che contengono la z, per la contrarietà de' segni si distruggeranno, e restandovi la sola unità, si convertirà essa equazione in $1=1$. Essendo dunque vera l' equazione *D*, saranno no altresì vere le precedenti, e vera A. Quindi la formola avrà luogo anche nel caso, che l'esponente m sia negativo intero, o fratto.

Non voglio tralasciare di avvertire, che la formola ha luogo, ancorchè m sia un numero irrazionale, quantunque ne debba passar sotto silenzio la dimostrazione, la quale non può farsi senza del calcolo integrale.

NOT. V. VI. * *

NOT. VII.

PEr convincersi di quanto l'Autore dice nella fine del num. 4. del Cap. 3. pag. 258., cioè, che se il valore di y^{n-u}, che si ricava dalla seconda delle equazioni proposte, si sostituirà nelle potenze di y maggiori di y^{n-u-1}, esistenti nelle equazioni terza, e quarta, avute per le operazioni ivi enunciate, queste due equazioni in riguardo ad y risulteranno del grado $n-u-1$; si esegua attualmente su d'un esempio l'accennata sostituzione, nel modo, che segue.

Siano l'equazioni proposte

I. $ay^4+by^3+cy^2+dy+k=o$

II. $a'y^2+b'y+c'=o$;

di modo che sia $n=4$, $u=2$: e suppongasi su di esse aver eseguite le operazioni suddette dal metodo prescritte, e di avere dalle medesime ottenute quest'altre due, cioè

III. $Ay^3+By^2+Cy+D=o$

IV. $A'y^3+B'y^2+C'y+D'=o$.

In queste due le potenze di y maggiori di y^{n-u-1}, cioè maggiori di $y^{4-2-1}=y$, sono y^2, ed y^3. Per eseguire adun-

adunque in esse equazioni la dovuta sostituzione; prendasi la seconda equazione, cioè $a'y^2 + b'y + c' = o$, e dalla medesima si ricavi il valore di $y^2 = \frac{-b'y - c'}{a'}$: si moltiplichi indi questo per y, e si avrà $y^3 = \frac{-b'y^2 - c'y}{a'}$, o sia, sostituendo nel secondo membro di questa $\frac{-b'y - c'}{a'}$ invece di y^2, $y^3 = \frac{b'b'y - a'c'y + b'c'}{a'a'}$. Non contenendo adunque sì fatti valori di y^2 e di y^3 altra potenza, che la lineare di y; è chiaro, che fatte le opportune sostituzioni de' valori medesimi invece di y^2, e di y^3 nelle dette equazioni terza, e quarta, queste risulteranno del primo grado, che nel caso presente corrisponde a quello espresso da $n-u-1$.

Se l' equazioni fossero di gradi più alti, e comunque diversi, espressi da n, ed $n-u$; dopo aver ottenute collo stesso metodo le due equazioni del grado $n-1$, si prenderà dell' istesso modo il valore di y^{n-u}, che si ha dall'equazione del grado inferiore $A'y^{n-u} +$ &c., col quale, moltiplicando successivamente per y, e sostituendo secondo il bisogno il valore di y^{n-u}, si formeranno tutte le potenze di y, maggiori di y^{n-u-1} sino ad y^{n-1}, con i valori corrispondenti; quali ottenuti, e sostituiti alle rispettive potenze dell' y nelle equazioni suddette del grado $n-1$, si avranno finalmente le richieste equazioni del grado $n-u-1$, come dall'Autore, si dice.

NOT. VIII.

Nel Cap. 3. num. 8. pag. 261. vers. 2. e 3. si legge : *e φ, μ ritrovandosi uguali a zero*.

Ciò si ha dalle due equazioni precedenti $-\varphi a - \mu - 3\varphi b = o$, $-\varphi b - \mu - 3\varphi a = o$; imperciocchè, sottraendo dalla prima la seconda equazione, si avrà $2\varphi a - 2\varphi b = o$ o sia $\varphi . \overline{a-b} = o$: e dividendo per $a-b$, sarà $\varphi = o$. Sostituendo poi zero in vece di φ in una delle dette equazioni, risulterà anche $\mu = o$.

NOT. IX. X. * *

NOT. XI.

Quanto dal Sign. Canonico si dice dal verso 11. fino al 14. del num. 3. del Cap. 5. pag. 276. si comprenderà facilmente e senza difficoltà alcuna da chi avrà presente le proprietà de' coefficienti dell'equazioni, esposte nel num. 4. del Cap. 1. Imperocchè nella supposizione, che in un' equazione abbiansi le sole potenze pari dell'incognita, l'equazione medesima dovrà essere di grado pari; e perciò i termini mancanti nell'equazione medesima saranno quelli in sede pari, cioè il 2.°, 4.°, 6.°, &c. Quindi, per lo num. 4. citato, dovrà essere uguale a zero la somma di tutte le radici dell' equazione suddetta coi segni contrarj, le quali nella presente supposizione saranno di numero pari: quella di tutti i prodotti della medesima a tre a tre, anche coi segni contrarj: quella di tutti i prodotti loro a cinque a cinque, coi segni contrarj: e così via discorrendo. Or questo, come ognun vede, non può verificarsi, senzachè tutte le radici dell'equazione

zione non sieno tali, che una ne uguagli l'altra col segno contrario. In fatti, formando un' equazione da un numero pari di fattori della seguente forma $x-a$, $x+a$, $x-b$, $x+b$, $x-c$, $x+c$, ec., si avrà un' equazione, nella quale mancheranno tutti i termini contenenti le potenze dispari dell' incognita.

NOT. XII.

L'Autore del Compendio suppone in seguito dello stesso num. 3. del Cap. 5. pag. 276. 277. che abbiasi un'equazione, che contenga radici uguali, ma coi segni contrarj, espressa da $M+Nx=o$, nella quale sia M la somma di tutt' i termini contenenti l' x a potestà pari, più il termine noto; ed Nx sia la somma di quelli, ne' quali è l' x a potenza dispari; ed in tal supposizione dimostra, che sostituendo in detta equazione alla x o l'una, o l'altra delle radici eguali, e di segni contrarj; risulteranno M, ed N uguali a zero. Da ciò ne deduce, (vers. 14. a 20 pag. 277.) che trovando il massimo comun divisore di M ed N, che chiama R, dovrà questo contenere tutte le radici, già dette, uguali, e di segni contrarii; e che il medesimo non potrà contenere altre potenze della x, che le pari.

La prima parte resterà chiara, se si rifletterà, che se M, ed N vanno uguali a zero sostituendo nell' equazione $M+Nx=o$ in luogo della x o l'uno, o l'altro di quei suoi valori uguali, ma di contrario segno; conviene, che ciascuno di essi valori sia radice delle equazioni $M=o$, $N=o$ (num. 2. Cap. 1.): e perciò l' incognita x con ciascuno de' medesimi valori col segno cambiato dovrà esser fattore comune di amendue le quantità M, ed N (num. 5. Cap. 1.). Quindi il prodotto di tutti i detti fattori, che conterrà tutte le dette radici, delle quali ognuna ne uguaglia un altra col segno cambiato, sarà comune divisore di M ed N. Che però nel massimo comun divisore di M ed N dovrà conte-tenersi detto prodotto de' fattori, e perciò tutte le suddette radici.

Che poi nel medesimo massimo comun divisore non potranno contenersi, che le sole potenze pari della x, è evidente; perchè contenendo M, ed N sole potestà pari della x, nel trovare secondo le regole il massimo lor comune divisore, ciascun residuo, che si otterrà dalle successive divisioni, che il metodo richiede, (Cap. 2. num. 14. Lib. 1.) conserverà sempre le sole potenze pari della x; onde essendo l'ultimo residuo dividente il massimo comun divisore delle quantità stesse M ed N (Not. 5. Lib. 1.); questo non potrà contenere, che le sole potestà pari dell' incognita medesima x.

Avvertasi intanto, che il massimo comun divisore R di M ed N non potrà contenere, se non che i soli fattori dell' equazione $M + N x = o$, che risultano dalle di lei radici a due a due uguali, e di segno contrario: e perciò non potrà contenere, che queste sole radici; poichè se ne contenesse di quelli, che risultano dalle radici dell' equazione suddetta, che non si uguagliano con altre coi segni contrarii della stessa equazione; questi, per essere R di grado pari, dovrebbero essere benanche di numero pari, e dovrebbero essi essere ancora fattori di M, e di N; e quindi ciascuno secondo termine de' medesimi fattori, o sia ciascuna delle radici dell' equazione ridetta, che non si uguagliano con altre della medesima coi segni cambiati, dovrebbe essere radice oltre dell'equazione $N = o$, anche dell'altra $M = o$; il che è impossibile (Not. preced.).

Quindi si comprenderà il senso di ciò, che il Sig. Canonico in seguito dice; cioè, che se R non superi l' ottavo grado, si potranno sempre determinare i valori della x, che appartengono alla proposta equazione $M + N x = o$; intendendo l' Autore parlare di quei valori soltanto, che si uguagliano in quantità, ed hanno segno contrario.

NOT.

NOT. XIII.

NEl num. 4. del Cap. 5. pag. 278. vers. 3. e 4. leggesi: *Facciasi X funzione di x, come λ è di φ*. Questo si comprenderà immediatamente con definire il termine *funzione*.

Tutte quelle formole, o quantità in qualunque modo espresse, che talmente dipendono da altre quantità, che al variar di queste, variano anch' esse di valore, e per mezzo delle stesse si determinano, si dicono *funzioni* delle medesime. Così, se x denoti una quantità variabile; tutte le quantità, che comunque da x dipendono, e per x si determinano, funzioni di x si chiamano. Tali sono x^n+A,

$$\overline{x^n+A}^{\,m},\quad \frac{\overline{x^n+A}^{\,n}}{B},\quad \frac{\overline{x^n+A}^{\,m}}{\overline{x^r+B}^{\,p}},\quad \frac{B}{\overline{x^n+A}^{\,m}},$$ &c., e qualsivoglia altra espressione, che da x dipenda, e per x si determini; supponendo la sola x variabile.

Posto ciò, essendo λ funzione di φ, perchè data per φ, e quantità note, se sarà $\lambda = \frac{A}{\varphi}$, per farsi X funzione di x, come λ è di φ, dovrà farsi $X = \frac{A}{x}$.

NOT. XIV.

NEllo stesso num. 4. del Cap. 5. pag. 278., dopo d'essersi trasformata l' equazione in x in quella in y, si legge dal vers. 8. a 11.: *Egli è certo, che passa fra φ ed una radice dell' equazione in y quella stessa relazione, che passa fra*

fra x, ed X, cioè fra φ, e λ; e che perciò una radice dell'equazione in y sarà eguale a λ.

Ciò s' intenderà facilmente, se si avrà presente quanto è stato detto nel num. 1. del Cap. 2. di questo Lib., cioè, che le radici dell' equazione in x dovranno avere a quelle dell'equazione in y quella stessa relazione, che ha $x : X$. Che però a ciascuna delle radici dell' equazione in x dovrà corrispondere una radice nell' equazione in y colla relazione di $x : X$. Quindi alla radice φ dell' equazione in x dovrà corrispondere una radice nell' equazione in y colla relazione di $x : X$. Ma questa relazione di $x : X$ è quella di $\varphi : \lambda$. Dunque dovrà essere φ ad una radice dell' equazione in y, come $\varphi : \lambda$; e perciò questa radice dell' equazione in y dovrà essere uguale a λ.

N O T. XV.

NEl num. 9. dello stesso Cap. 5. pag. 284. il Sign. Canonico dopo essere pervenuto all'equazione $x = \sqrt[q]{\varphi}$, dice, che per avere i valori dell' x si dovrà moltiplicare $\sqrt[q]{\varphi}$ per tutti i valori *quesimi*, o sieno radici *quesime* dell' unità, tantovero, che supponendo essere π uno di tali valori; uno de' valori dell' x sarà $\pi\sqrt[q]{\varphi}$.

Per meglio comprendere ciò, supponghasi $\varphi = \lambda^q$, dimodochè abbiasi $x = \sqrt[q]{\lambda^q}$. Or poichè $\sqrt[q]{\lambda^q} = \sqrt[q]{\lambda^q} . \sqrt[q]{1} = \lambda\sqrt[q]{1}$, sarà anche $x = \lambda\sqrt[q]{1}$; e quindi sarà x uguale a λ, o sia alla radice *quesima* di φ moltiplicata per ciascuna radice *quesima* dell' unità. Che però se π suppongasi essere una

una di queste radici dell' unità, uno de' valori dell' x dell'equazione $x = \sqrt[q]{\varphi}$, sarà $\pi \sqrt[q]{\varphi}$.

Ciò, che si è detto relativamente all' equazione $x = \sqrt[q]{\varphi}$, nella supposizione, che φ sia una delle radici *peesime* dell' unità, deve dirsi anche relativamente all' equazioni $x = \sqrt[q]{\mu}$, $x = \sqrt[q]{\lambda}$, &c., supponendo essere μ, λ, &c. le altre radici *peesime* dell' unità. Moltiplicando adunque ciascuna delle radici *quesime* dell' unità per ciascuna delle radici delle dette equazioni, cioè per ciascuna delle radici peesime dell' unità stessa, si avranno tutte le radici dell' equazione $x^{pq} - 1 = 0$.

N O T. XVI.

PEr trovare i valori di y, e di y^2 per mezzo dell' equazioni $x = ay + by^2$, $xy = ay^2 + b$, come si richiede nel num. 13. del Cap. 5. pag. 290. vers. 9. e seguenti, per indi sostituirli nell' equazione $xy^2 = a + by$, si operi nel seguente modo.

Dalla seconda equazione si ha $y^2 = \frac{xy}{a} - \frac{b}{a}$: e sostituendo questo valore nella prima in vece di y^2, si avrà $x = ay + \frac{bxy}{a} - \frac{b^2}{a}$, o sia $ax = a^2 y + bxy - b^2$, d' onde si deduce $y = \frac{ax + b^2}{aa + bx}$. Sostituito poi questo valore all' y nel secondo membro dell'equazione $y^2 = \frac{xy}{a} - \frac{b}{a}$, ri-

risulterà $y^2 = \frac{ax^2 + b^2 x}{a^3 + abx} - \frac{b}{a} = \frac{x^2 - ab}{aa + bx}$.

Questi valori d'y, e d'y^2, già ottenuti, se si sostituiranno nell'equazione $xy^2 = a + by$, si avrà $\frac{x^3 - abx}{aa + bx}$

$= a + \frac{abx + b^3}{aa + bx} = \frac{a^3 + 2abx + b^3}{aa + bx}$, o sia l'equazione $x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0$.

Si è aggiunto questo calcolo, non già perchè sia di difficile esecuzione, ma soltanto per comodo di chi legge.

N O T. XVII.

N O T. XVIII.

NEl num. 3. del Cap. 6. pag. 295. si legge: *Sia* S *la somma de' termini* n, *e la somma de' termini* n-1 *sia* s; *sarà* S—s=t, *chiamato* t *il termine generale*.

Imperocchè $S-s$ altro non esprime, che il termine ultimo della serie composta da tanti termini, quante unità si contengono in n; e perciò $S-s$ è uguale al termine *nesimo*: ma il termine generale t è appunto il termine *nesimo* della serie, perchè è uguale al 3.°, al 4.°, al 5.°, &c. termine della serie, se l'n in esso termine t contenuta sia uguale a 3, 4, 5, &c. Dunque $S-s=t$.

Oltre di che essendo il termine ultimo, o sia *nesimo*, lo stesso che il termine generale t; si avrà $s+t=S$, e quindi $S-s=t$.

NOT.

NOT. XIX.

PEr meglio comprendere quanto il Sig. Canonico dice nel num. 7. del Cap. 6. pag. 296., si rifletta, che se abbiansi due funzioni di n, espresse da t ed S, e sappiasi, che t sia il termine generale di una serie, ed S ne sia la somma; egli è cosa indubitata (Not. preced.), che sostituendo in S $n-1$ in vece di n, per avere s, cioè la somma di tutti i termini meno l' ultimo, valerà l' equazione $t=S-s$. Ma se abbiansi le dette due funzioni di n, cioè t ed S, nè sappiasi altro, che ponendo in S, invece di n, $n-1$ ottengasi un altra funzione di n, che chiamo s, la quale sia tale, che dia $t=S-s$; non perciò può dedursi essere S la somma della serie, che ha t per termine generale, potendo benissimo differire S dalla vera detta somma per qualche costante quantità indipendente da n, di cui è funzione. Così, sebbene $\frac{6n-3}{2}$, e $\frac{3n^2-1}{2}$ sieno due funzioni di n tali, che posta nella seconda $n-1$ in vece di n, ed ottenuta $\frac{3.\overline{n-1}^2-1}{2}$, sia vera l'equazione $\frac{6n-3}{2}=\frac{3n^2-1}{2}$ $\frac{-3.\overline{n-1}^2+1}{2}$; non per questo la serie, che ha per termine generale $\frac{6n-3}{2}$, ha $\frac{3n^2-1}{2}$ per somma, essendo questa minore della verá per $\frac{1}{2}$.

Quindi s' intende, perchè succeda alle volte, che ponendo l' unità in vece di n nelle formole della somma, e del

 ter-

termine generale non si abbiano due quantità uguali. Di questo se ne trova un esempio nel num. 18. del medesimo Cap. 6.

Per conoscere intanto, quando S sia vera somma, e nel caso che differisca dalla vera per qualche costante quantità, come possa questa determinarsi, si proceda nel modo seguente, indicato nel detto num. 7. Pongasi $n = 1$ tanto in t, che in S; ed in questa supposizione, se risulterà $t = S$, S sarà la vera somma: se $t > S$, devesi ad S aggiugnere la loro differenza per aversi la vera somma: e devesi al contrario questa differenza togliere da S, se $t < S$. Così, nell'esempio poc'anzi addotto, fatto $n = 1$ in $t = \frac{6n - 3}{2}$, ed in $S = \frac{3n^2 - 1}{2}$, risulta $t = \frac{3}{2}$, ed $S = 1$. Dunque t eccede S per $\frac{1}{2}$; e perciò, per aversi la vera somma, si dovrà ad S aggiungere $\frac{1}{2}$; e quindi la vera somma sarà $\frac{3n^2 - 1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3n^2}{2}$.

N O T. XX.

N O T. XXI.

NElla fine del num. 13. dello stesso Cap. 6. ne' vers. 1. e 2. della pag. 299. si dice, che ponendo n infinita nella

nella frazione $\frac{Ln}{A + Bn}$, si farà questa $= \frac{L}{B}$.

Imperocchè in questa supposizione A relativamente alla quantità infinita Bn può riguardarsi come una quantità infinitesima relativamente ad una finita: che però rispetto alla medesima svanisce (Not. 23. Lib. 2. num. 1.); e perciò detta frazione si convertirà in $\frac{Ln}{Bn}$, che è eguale ad $\frac{L}{B}$.

NOT. XXII.

NOT. XXIII.

NEl num. 18. del medesimo Cap. 6. nel vers. 1. della pag. 301. si trova $AK^n - AK^{n-1} = \frac{A.\overline{K-1}}{K}.K^n$.

Imperciocchè $AK^n - AK^{n-1} = A.(K^n - K^{n-1})$: e moltiplicando, e dividendo per K il secondo fattore del secondo membro, si avrà $AK^n - AK^{n-1} = A.$ $\left(\frac{K^{n+1} - K^n}{K}\right) = \frac{A.\overline{K-1}}{K}.K^n$.

NOT. XXIV.

NOT. XXV.

Nel num. ult. del Cap. 6. pag. 302. il Sig. Canonico dà un' idea delle serie *ricorrenti*, e dice, che le medesime sono serie algebraico-esponenziali; il che intende far vedere coll' esempio della serie ricorrente 6, 4, $2 + \frac{2}{3}$, ec., della quale il termine generale è $\frac{2^n}{3^{n-2}}$, che dice essere formola algebraico-esponenziale.

Egli stesso però nelle sue Istituzioni analitiche, nel detto num. citate, dice col dottissimo Padre Riccati, che le serie ricorrenti sono o esponenziali, o sieno geometriche, o algebraico-esponenziali, o sieno algebraico-geometriche: e lo dimostra facendo vedere, che dette serie ricorrenti possono formarsi coll' addizione, o sottrazione di serie geometriche, o algebraico-geometriche; e che i termini generali di esse si compongono da formole esponenziali moltiplicate o per sole costanti, o per formole algebraiche, funzioni di n.

Ed in realtà la serie geometrica AK, AK^2, AK^3, ec., che ha per termine generale la formola esponenziale AK^n, è serie ricorrente del prim'ordine; giacchè ciascun termine vien determinato dall' antecedente moltiplicato per la costante K: e 'l termine generale AK^n non è che una formola esponenziale K^n moltiplicata per la costante A. Anzi il termine stes-

so

so generale $\frac{2^n}{3^{n-2}}$, che dà la detta serie 6, 4, ec. ricorrente del primo ordine, è formola esponenziale, e non è altro, che la formola esponenziale $\frac{2^n}{3^n}$ moltiplicata per lo numero costante 9.

Che poi delle serie ricorrenti ve ne possano essere anche algebraico-esponenziali, si può vedere dalla seguente, 0, 1, 4, 12, 32, 120, ec., la quale è ricorrente del 2.° ordine, giacchè posto zero, ed 1 per i primi due termini, ciascuno de' seguenti si determina dalla somma del primo de' due precedenti moltiplicato per -4, e del secondo moltiplicato per 4, ed ha per termine generale la formola algebraico-esponenziale $\overline{n-1}\cdot 2^{n-2}$.

N O T. XXVI.

NEI num. 1. del Cap. 7. pag. 303., nella supposizione, che a sia una frazione, e μ l'intero più grande contenuto in a, si legge: *che* $\frac{1}{a-\mu}$, *benchè maggiore dell'unità, non sarà esprimibile per un intero razionale, se non nel caso, che essendo* a *una frazione razionale, fosse* $a-\mu$ *una frazione, il cui numeratore* $=1$.

Per convincersi di una tal verità, si rifletta in primo luogo, che se a non è una frazione razionale, non potrà mai essere razionale $\frac{1}{a-\mu}$. Posto adunque essere a una frazione ra-

zio-

zionale, e dippiù essere $a-\mu=\frac{\pi}{\varphi}$, essendo $\varphi>\pi$, ed ambedue razionali; sarà la frazione $\frac{1}{a-\mu}=\frac{1}{\frac{\pi}{\varphi}}=\frac{\varphi}{\pi}$. Or ognun vede, che questa frazione non potrà essere un intero, se non sia $\pi=1$, ovvero un divisore esatto di φ. Nel primo caso sarà appunto $a-\mu=\frac{\pi}{\varphi}=\frac{1}{\varphi}$: e nel secondo, supposto essere λ il quoto, che si ha dividendo φ per π, per cui dovrà essere $\varphi=\lambda\pi$, si avrà ancora $a-\mu=\frac{\pi}{\varphi}=\frac{\pi}{\lambda\pi}=\frac{1}{\lambda}$.

NOT. XXVII.

Ciò, che si dice dal principio del num. 6. del Cap. 7. pag. 308. sino al vers. 2. della pag. 309., è chiaro per lo num. precedente.

Imperocchè, per ciò, che si è detto nel citato num., il denominatore vero del secondo valor prossimo è $\mu'+\frac{1}{a''}$, e non già μ' solamente: e 'l denominatore vero del terzo è $\mu'+\frac{1}{\mu''+\frac{1}{a'''}}$, e non già $\mu'+\frac{1}{\mu''}$, che è più grande di quello: e così degli altri.

N O T. XXVIII.

N O T. XXIX.

NEl num. 6. del Cap. 8. dal vers. 25. al 29. della pag. 321. si legge: *Incontrando pertanto il primo di questi caratteri*, (cioè lo stesso segno in tutti i termini delle serie tutte, corrispondenti allo stesso supposto di x) *sarà inutile continuare ulteriormente la serie dalla parte, verso cui i supposti di x crescono : ed incontrando il secondo*, (ciò è l' alternazione de' segni ne' termini delle serie successive, corrispondenti allo stesso supposto d' x) *sarà inutile continuarla dall' altra parte*.

La prima parte è chiara da se, perchè in quel caso, per aversi i termini della detta serie dell' equazione, si vengono sempre a sommare numeri o tutti positivi, o tutti negativi; e perciò non potranno aversi più variazioni di segni.

Per meglio comprendere poi la seconda parte, basterà metterci avanti gli occhi le serie appartenenti all' equazione proposta $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$, le quali sono le seguenti

Serie										
de' supposti	−6,	−5,	−4,	−3,	−2,	−1,	0,	1,	2,	3.
dell' equazione . .	−53,	−19,	−3,	1,	−1,	−3,	1,	17,	51,	109.
delle 1.e differenze	34,	16,	4,	−2,	−2,	4,	16,	34,	58,	88.
delle 2.e differenze	−18,	−12,	−6,	0,	6,	12,	18,	24,	30,	36.
delle 3.e differenze	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6.

In queste serie al supposto — 4 di x corrispondono i termini delle serie dell' equazione, e delle differenze consecutive dotati della richiesta proprietà dell' alternazione de' segni. Or, posta questa alternazione, assolutamente tutti i termini da destra verso sinistra, non solo delle serie delle differenze, ma anche quelli delle serie dell' equazione, dovranno avere lo stesso segno del rispettivo termine corrispon-

den-

dente al detto supposto -4. Nella serie delle differenze 3.^{e} costanti non cade alcun dubbio, giacchè tutti i termini di essa sono costanti, e costantemente positivi. Nella serie poi delle 2.^{e} differenze, il termine -6, che corrisponde al detto supposto -4, è negativo: ma esso si compone dal termine, che lo precede a sinistra, insieme con 6, termine costante della serie delle 3.^{e} differenze; dunque questo, che lo precede a sinistra, sarà negativo: e per la stessa ragione negativi saranno tutti i termini precedenti a sinistra nella serie delle 2.^{e} differenze. Similmente il termine 4, corrispondente al medesimo supposto -4 nella serie delle 1.^{e} differenze, è positivo: ma esso risulta dalla somma del termine, che lo precede a sinistra, insieme col termine, che a questo corrisponde nella serie delle 2.^{e} differenze, che si è dimostrato negativo; dunque il termine, che lo precede a sinistra, sarà anche positivo: e per la stessa ragione positivi saranno tutti gli altri termini precedenti. Essendo dunque positivi i termini tutti della serie delle 1.^{e} differenze fino al termine 4, corrispondente al supposto -4; collo stesso raziocinio si dimostreranno negativi tutti i termini della serie dell' equazione fino al termine -3, che corrisponde al medesimo supposto -4, a cui corrisponde l' alternazione suddetta de' segni. Or poichè lo stesso può dimostrarsi generalmente, ponendo $\pm a$ in vece del supposto -4, e $\mp b$, $\pm c$, $\mp d$, $\pm e$, &c. in vece de' termini -3, 4, -6, 6, al supposto corrispondenti; sarà dunque vero, che subito che s' incontrerà l' alternazione ne' segni de' termini delle serie allo stesso supposto corrispondenti, sarà inutile continuare la serie dell' equazione dalla parte, verso cui i supposti di x decrescono.

N O T. XXX.

NEl num. 8. del Cap. 8. dal vers. 19. in seguito della pag. 323. si legge: *Dunque concependo, che le supposte due radici diseguali dell' equazione cominciassero ad avvicinarsi l' una*

una all' altra, è chiaro, che l' intervallo tra le due mutazioni del segno si anderebbe di mano in mano sminuendo....

Per *l'avvicinamento delle radici* altro non dee intendersi, se non che la loro approssimazione all'uguaglianza, mediante la diminuzione successiva per gradi minimi della differenza delle medesime radici: e per l'*intervallo, che anderebbe a sminuirsi*, si dee intendere il numero de' termini della serie dell'equazione affetti dello stesso segno, compresi trai due passaggi, o siano mutazioni di segni, il quale numero nella detta supposizione dovrà sempreppiù farsi minore. Imperocchè siccome le due radici dell' equazione tendono ad uguagliarsi, e perciò a ridursi ad una stessa, così ancora i termini della serie, che sono i valori dell'equazione corrispondenti ai supposti più prossimi a dette radici, dovranno ancora tendere ad uguagliarsi, ed a ridursi ad uno; il che non può intendersi senza comprendere, che se ne diminuisca ancora successivamente il loro numero: dimodochè, quando le dette due radici saran giunte a differire fra loro per una quantità minor dell' unità, esso numero de' termini sarà ridotto ad uno, il quale sarà appunto quel termine, che dovrà corrispondere al supposto, che alle dette radici è più prossimo.

Questo termine poi dovrà essere un minimo della serie dell' equazione, come in seguito nel detto num. si dice, poichè, siccome, se le due radici si supponessero già fatte uguali fra loro, ed uguali insieme ad uno de' supposti dell'x, il termine, che al supposto corrisponderebbe nella serie dell' equazione, sarebbe zero; così ancora al supposto più prossimo alle due dette radici disuguali per una quantità minor dell' unità, non potendo corrispondere nella serie dell' equazione il termine $=0$, dovrà almeno corrispondergli il più prossimo al zero: e perciò il minimo della serie medesima. Di questo se ne troverà un esempio nel num. 11., che segue.

NOT. XXXI.

Nel num. 14. ed ult. del Cap. 8. dal vers. ult. della pag. 329. al primo della seguente si legge: *essendo adunque* g *maggiore di qualunque* v, *sarà* $\frac{1}{g}$ *minore di qualunque* v.

Ciò dee intendersi nella supposizione solamente, che sia g maggior dell' unità, ed u o non minor dell' unità, o se minore, d' un valore almeno equivalente a quello di una frazione, il di cui numeratore sia 1, e 'l denominatore $< g$; giacchè negli altri casi è falsa la proposizione.

Ed in realtà, quando è $g > 1$, sarà sempre $\frac{1}{g}$ una frazione vera, o sia una quantità minor dell' unità. Dunque quando u non sia minor dell' unità, o se minor dell' unità, sia uguale alla detta frazione, che suppongo essere espressa da $\frac{1}{g-m}$, sarà sempre $\frac{1}{g} < u$.

Nei casi poi, che sia $g = 1$, o $g < 1$, è falsa la suddetta proposizione. Imperocchè nel primo caso sarebbe $\frac{1}{g} = \frac{1}{1} = 1$; onde per verificarsi $\frac{1}{g} < u$, dovrebbe essere $1 < u$: ma poichè g è sempre maggior di u, deve u in questo caso esser minore dell' unità; dunque dovrebbe nello stesso tempo essere u maggiore, e minor dell' unità. Similmente nell' altro caso, essendo g minor dell' unità, sarà $\frac{1}{g}$ maggior dell' unità: e poichè sempre è $g > u$, dovrà es-

sere

sere in questa supposizione ancora u minor dell' unità. Dunque, per verificarsi $\frac{1}{g} < u$, una quantità maggior dell' unità dovrebbe essere minore di un' altra, che dell' unità è minore.

Quindi intendesi, che $\frac{1}{\sqrt{g}}$ non potrà mai essere maggiore dell' unità, e che perciò non potrà mai aver luogo ciò, che dicesi in seguito del detto num. ne' vers. 15. e seguenti della detta pag. 330.

N O T. XXXII.

NEl num. 4. del Cap. 9. pag. 333. si dice, che trovando tra CK, CP, che sono quantità positive, tante medie proporzionali, quante unità sono in $p - 1$, la prima di esse, se p sia un numero dispari, avrà un solo valore reale: e ne avrà due reali, positivo l' uno, e negativo l'altro, se p sarà un numero pari.

Ciò è lo stesso, che dire, che la prima delle medie proporzionali di numero pari fra due quantità positive ha un solo valore reale; e che ne ha due, positivo l' uno, e negativo l'altro, se il numero delle medie sia dispari.

Per convincersene, basterà dare un occhiata al num. 1. del Cap. 14. ed ultimo di questo Libro. In esso, indipendentemente da ciò, che fino allo stesso num. sarà per dirsi, si troverà risoluto il problema di ritrovare fra due quantità a, b la media *nesima* di quelle del numero m, sia pari, sia dispari: e la formola, a cui è questa media eguale, si troverà essere $a^{\frac{m-n+1}{m+1}} . b^{\frac{n}{m+1}}$.

Posto ciò, nella supposizione, in cui siamo, sarà $n = 1$, e la formola della prima delle medie di numero m tra a, e b, sarà $a^{\frac{m}{m+1}} \cdot b^{\frac{1}{m+1}} = \sqrt[m+1]{a^m b}$. Or questa radice, come ognun vede, ha un solo valore reale, se m sia numero pari, e ne ha due uguali, positivo l' uno, e negativo l' altro, se m sia dispari.

NOT. XXXIII.

NEl num. 7. del Cap. 9. dal vers. penult. della pag. 336. al 2. della pag. seguente si legge: *ma le medie proporzionali di numero pari fra una quantità positiva, ed un altra negativa sono possibili, e la prima di esse è sempre negativa.*

Ciò si dimostra per mezzo della stessa formola addotta nella Nota precedente; imperocchè supponendo esser b quantità negativa; tutte le medie *nesime* di numero m tra a, e $-b$ verranno espresse dalla formola $a^{\frac{m-n+1}{m+1}} \cdot (-b)^{\frac{n}{m+1}}$, o sia da $\sqrt[m+1]{a^{m-n+1} \cdot (-b)^n}$, la quale, posta m numero pari, è sempre reale: e fatta $n = 1$, la 1.ª media tra a, e $-b$, dovendo essere $= \sqrt[m+1]{-a^m b}$, sarà anche reale, e negativa.

NOT. XXXIV.

NEl num. stesso 7. del Cap. 9. vers. 5. e seguenti della pag. 337. si legge: *ma le medie proporzionali di numero dispari fra una quantità positiva, e l'altra negativa non tutte sono reali, ma la prima, terza, quinta, &c. sono immaginarie.*

Imperocchè la formola, a cui è uguale ciascuna delle

dette

dette medie, è la stessa, che quella addotta nella Nota precedente, cioè $\sqrt[m+1]{a^{m-n+1}\,.\,(-b)^{n}}$. Or quando m, o sia il numero delle medie è dispari, $m+1$ è pari; che però, quando $a^{m-n+1}\,.\,(-b)^{n}$ è quantità positiva, la radice sarà reale: e sarà immaginaria, quando è negativa. Adunque anche nel primo caso le medie saranno reali, ed immaginarie nel secondo. Ma quando n è un numero pari, la quantità $a^{m-n+1}\,.(-b)^{n}$ è positiva: ed è negativa, quando è dispari. Dunque le medie in sede pari sono reali, ed in sede dispari sono immaginarie; e perciò la prima, la terza, &c. sono immaginarie.

N O T. XXXV.

NEl num. 1. del Cap. 10. vers. 2. e 3. della pag. 339. si dice, che il trinomio $z^{2p} - b z^{p} + a^{p} = o$ sarà divisibile per $zz - \phi z + a = o$.

Per convincersene, si rifletta, che in virtù dell' eseguita trasformazione le radici dell' equazione in x altro non sono, che le radici dell' equazione in z, o siene del trinomio proposto, accresciute delle frazioni, che hanno a per numeratore, e per denominatore le corrispondenti medesime radici, o sieno valori di z. Questo fa, che la trasformazione sia tale, che a ciascuna radice dell' equazione in x corrispondere dovranno due radici dell' equazione in z; poichè essendo ciacuna $x = z + \frac{a}{z}$, o sia $zx = z^{2} + a$, ovvero $z^{2} - zx + a = o$: e dovendosi da questa equazione ricavare il valore di z corrispondente a ciascuna radice x, siccome doppio è il valore di z, che da questa equazione si deduce, doppia sarà anche la radice dell' equazione in z, o sia o sia del trinomio, corrispondente a qualunque delle radici dell' equazione in x: ed ecco perchè l' equazione in x risulta di un grado, che è la metà di quello del proposto trinomio.

Se sia adunque nota una delle radici dell' equazione in x, potranno farsi note anche le corrispondenti due del trinomio proposto. Che però, posto essere φ uno di questi valori di x, e sostituito in luogo di x nell' equazione $z^2 -- z\,x + a = o$, onde ottengasi $z^2 -- \varphi z + a = o$; le due radici di questa equazione saranno le due del trinomio corrispondenti a $\varphi = x$. Se intanto supporremo essere queste espresse da λ, e π; ciascuna delle due equazioni $z -- \lambda = o$, $z -- \pi = o$ dovrà essere un fattore, o sia divisore del trinomio proposto (num. 3. Cap. 1.), e quindi anche il loro prodotto esser dovrà del medesimo un divisore: ma il loro prodotto è appunto l' equazione $z^2 -- \varphi z + a = o$ (num. 5. Cap. cit.). Il proposto trinomio adunque divisibile sarà per $zz -- \varphi z + a = o$, come dall' Autor del Compendio si dice.

N O T. XXXVI.

Nella fine del num. 3. del Cap. 10. pag. 340. si legge: *è chiaro, che i cosseni cercati corrisponderanno agli archi terminati dai numeri dispari; imperciocchè l' arco compreso tra* 1 *e* 3 *è uguale a* $\frac{c}{p}$: *quello tra* 1 *e* 5 *a* $\frac{2c}{p}$, &c. (Fig. 5. Tav. 1.).

Il coseno dell' arco $\frac{o}{p} = o$, è evidente, che corrisponde al primo punto di divisione, in cui vi è 1, primo numero disparo, essendo esso uguale al seno tutto, o sia raggio po-

positivo $C\,1$. Essendo poi l'arco compreso tra 1 e 2 una parte di quelle di numero $2o$, nelle quali si è divisa l'intera circonferenza c, sarà uguale a $\frac{c}{2p}$; onde l'arco fra 1 e 3 doppio di quello fra 1 e 2, sarà uguale a $\frac{2c}{2p} = \frac{c}{p}$. Quindi l'arco fra 1 e 5, perchè doppio dell'arco fra 1 e 3, o sia di $\frac{c}{p}$, sarà uguale a $\frac{2c}{p}$: e l'arco tra 1 e 7, perchè triplo dell'arco tra 1 e 3, sarà uguale a $\frac{3c}{p}$; e così degli altri archi compresi tra 1 e gli altri numeri dispari.

N O T. XXXVII.

NEl num. 4. del Cap. 10. pag. 340. dal vers. 1. al 7. di esso num. si dice, che a ciascun arco minore della semicirconferenza, di quelli determinati sulla Fig. 5. della Tav. 1. nel num. precedente, corrisponde un altr' arco maggiore della medesima, ai quali è comune lo stesso cosseno, eccettuatone l'arco zero, che ha per cosseno $a^{\frac{1}{2}}$; e quando p sia numero pari, se ne dee eccettuare ancora la semicirconferenza, della quale il cosseno è $-a^{\frac{1}{2}}$.

Che a ciascun arco minore della semicirconferenza corrisponda un altro maggiore della medesima con un cosseno comune, è noto per lo num. 2. del Cap. 10. del Lib. 1. Che se ne debba eccettuare l'arco zero, cioè, che all'arco zero non corrisponda altro arco, che abbia lo stesso cosseno uguaugúale al seno tutto, che nel caso presente è uguale ad $a^{\frac{1}{2}}$, si ha pure dal num. 1. del cit. Cap. 10. del Lib. 1.

Che debba eccettuarsene poi anche la semicirconferenza dai sopradetti archi, determinati nel num. precedente, nel caso che p sia un numero pari, si comprenderà riflettendo, che allora quando p è numero pari, la semicirconferenza viene compresa tra due numeri dispari nella divisione della circonferenza in parti uguali di numero $2p$. In fatti nella Fig. 5. suddetta, essendosi divisa la circonferenza in parti $12 = 2p$, per cui $p = 6$ numero pari; la semicirconferenza, che viene ad esser divisa in parti p, cade fra 1 e 7. Or poichè fra 1 e gli altri numeri dispari della serie naturale sono compresi tutti gli archi appartenenti ai cosseni, che danno i valori dell' incognita, per lo num., e per la Not. precedente; nel caso che p sia pari, la semicirconferenza verrà anch' essa ad essere un arco, il di cui cosseno è un valore dell' incognita. Ma la semicirconferenza non ha con altro arco un cosseno comune, avendo sola lei per cosseno il seno tutto negativo, che nel caso presente è uguale a $-a^{\frac{1}{2}}$. Quando p adunque è numero pari, è da eccettuarsene dagli archi sopradetti anche la semicirconferenza.

N O T. XXXVIII.

NEl num. 1. del Cap. 13. pag. 352. vers. 13. e seguenti si dice, che se sia LM (Fig. 13. Tav. 2.) una linea retta, che non passi per lo punto A; la curva, dal punto del concorso N descritta, sarà una sezione conica.

Sia $2LM$ questa retta (Fig. 7.), che concorra con AB prolungata nel punto $2L$. Dal punto A si conduca AD normale ad AB, e perciò parallela a PM, che concorra in D con $2LM$. Si avrà $2LA : AD :: 2LP : PM$; onde chiamata $2LA = a$, $AD = b$, essendo $AP = x$, $PM = z$, si avrà

avrà in termini analitici $a : b :: a + x : z$, e quindi $z = \frac{ba + bx}{a}$. Che però sostituendo questo valore in vece di z nell'equazione $z = \frac{x^2}{y}$, trovata precedentemente nel detto num. 1, risulterà $\frac{ba + bx}{a} = \frac{x^2}{y}$, o sia $bay + bxy = ax^2$, che sarà l'equazione della curva descritta dal punto N. Or questa equazione, perchè indeterminata del secondo grado, non appartiene ad altra curva, che ad una sezione conica (num. 16. Cap. 3. Lib. 2.), e propriamente all'iperbola, come può dedursi dalla regola data nel Lib. 2. Cap. 1. num. 9.

Se il concorso della retta $2LM$ con AB seguisse sotto il punto A verso B, anche una simile equazione all'iperbola si otterrebbe.

Intanto poi si esclude il caso, che la LM passi per A, poichè in questo caso la LM sarebbe il lato AM della squadra NAM, e la linea, dal concorso N descritta, sarebbe l'altro lato AN.

Finalmente se LM fosse parallela ad AB, la nostra Fig. 13. in questo caso rappresenterebbe l'istrumento appunto per delineare la parabola, descritto nel num. 13. del Cap. 4. Lib. 2.; e per conseguenza la curva, che da N si descriverebbe, sarebbe la parabola, come in seguito del detto num. 1. si dice.

N O T. XXXIX.

Nella fine del num. 2. del Cap. 13. pag. 353., dopo di avere il Sig. Canonico trovata l'equazione, che scioglie il problema in esso num. proposto, dice, che per avere il ramo $B2M$ (Fig. 14. Tav. 2.) conviene tagliare $E2M = ME$, e che lo stesso debba farsi dall'altra parte: e dippiù, che se si tagli $BD = AB$, e si conduca DQ normale ad AD, sarà DQ asintoto della curva.

Per comprendere la prima parte, si rifletta, che quantunque l' istrumento rappresentato dalla Fig. non descriva altro, che una parte della curva AMB, insieme colla simile ed uguale posta dall'altra parte della retta AB; pur tuttavia, poichè l'ordinate y continuano ad esser reali nell' equazione suddetta oltre il punto B, e finchè l' ascissa x sia minore di $2a = 2AB$; deve la curva diramarsi oltre il punto B. Pertanto, essendo proprietà della curva, che dovunque debba essere $BE = ME$, cioè uguale alla parte della riga AE compresa tra 'l punto della curva, e l' incontro col lato BE della norma; i rami perciò della medesima oltre il punto B dovranno avere la proprietà medesima. Quindi è, che se nel tempo, in cui si fa girare la riga AE intorno al punto A nell'atto della descrizione di AMB, si prenda successivamente $E2M = ME = BE$, i successivi punti $2M$ tracceranno il ramo $B2M$: e replicandosi lo stesso dall' altra parte nel tempo della descrizione della simile parte AB della curva, si avrà l'altro ramo.

Volendo però descrivere tali rami anche coll' istrumento, si operi nel modo seguente. Si prenda un filo della lunghezza $= 2AB$, che passi per lo punto A, e possa per esso scorrere liberamente, e di questo un' estremità si fissi nel punto P di una riga PM, e l' altra in $2P$ di un' altra riga $2P2M$. Si adattino indi ambedue queste righe PM, e $2P2M$ normali ad AD nel punto B, per cui resti il filo disteso su di AB; e si situino in modo, che possano scorrere su di AD liberamente, mantenendosi sempre ad essa normali. Ciò disposto, facciasi scorrere la riga $2P2M$ da B verso D: questa trascinandosi seco il filo, farà scorrere altresì la riga PM da P verso A. Or se nel mentre si dà un tal moto alle righe $2P2M$, e PM, si faccia girare la riga $AE2M$ circa A, in modo che passi sempre pel punto M, in cui la riga PM sega la curva descritta AMP; con questo moto il punto $2M$ dell'intersezione delle righe, o sieno rette $AE2M$, $2P2M$, descriverà il ramo $B2M$ della curva. Imperocchè essendo il filo $PA2P$ uguale al doppio di AB, e 'l filo PAP, avvolto ad AP, uguale al doppio di AP; sarà $P2P$ uguale al doppio di PB; e perciò $B2P = PB$. Dunque $E2M$

$E2M = ME$, e quindi $E2M = BE$, che è la proprietà della curva richiesta.

Per convincersi poi della verità della seconda parte, basterà avvertire, che posta nell' equazione l'ascissa x maggiore di $AB = a$, l'ordinate y vanno successivamente crescendo al crescere della x: e subito che arriva ad essere $x = 2AB = 2a$, diventando zero il denominatore della frazione, a cui è uguale l' y^2, i due valori uguali della y si fanno infiniti. Ecco dunque perchè prolungata AB verso D, finchè $BD = AB$, e condotta DQ normale ad AD; sarà DQ asintoto della descritta curva.

N O T. XL.

NEl num. 2. del Cap. 14. ne' vers. 8., e 9. della pag. 370. si legge: *si descriva la parabola* ABM *dell' equazione* $y^{\frac{m+2}{2}} = a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z$.

Per ben comprendere ciò, è da sapersi, che le infinite curve, che vengono rappresentate dall' equazione $a^m x^n = y^{m+n}$, per gl' infiniti valori, che ad m ed n possono assegnarsi, diconsi tutte parabole. La somiglianza, che tale equazione ha a quella della parabola apolloniana, quale è tanta, che si converta nella medesima, se in essa sia $m = n = 1$; ha fatto sì, che a tutte le curve, da detta equazione espresse, abbiano i Geometri dato lo stesso nome, riconoscendole come della stessa famiglia, che chiamano in generale *famiglia delle parabole*. Le medesime poi si distinguono ne' diversi gradi disegnati da $m+n$, che è l' esponente della y: e per ciò la parabola ABM, che nella Fig. 25. Tav. 3. s'intende descritta coll' asse AD, è una parabola del grado espresso dal numero intero $\frac{m+2}{2}$.

Non mi estendo dippiù in questa Nota a parlare di tali curve, non essendo mio proposito il trattarle. Stimo più tosto avvertire, che la parabola apolloniana ABN dell'equazione $z^2 = ay$, che nella stessa Fig. citata vedesi descritta, come in seguito del num. 2. medesimo viene ordinato, dee intendersi descritta non già collo stesso asse AD della ABM, ma con asse tale, che abbia bensì lo stesso punto A per vertice, ma sia una retta ad esso AD normale, e sia per conseguenza parallelo alle ordinate BD della già descritta parabola. In tal modo l' asse della ABM farà nel tempo stesso da tangente nel vertice dell'asse dell' altra apolloniana: e perciò, dovendosi prendere in questa le ascisse z nella detta tangente (Lib. 2. Cap. 1. num. 16.), verranno a prendersi nell' asse della prima, e quindi nella stessa e comune linea dell' ascisse.

NOT. XLI.

Nella fine del num. 4. del Cap. 14. pag. 371. si dice, che per costruire l' equazione $b . \left(\frac{aa}{b} - x\right) = yy$, si dee prendere DF (Fig. 26. Tav. 3.) terza proporzionale dopo b ed a, ed indi col vertice F, e col parametro uguale a b descrivendo la parabola BFC, passerà questa per i punti B, e C; e i punti delle sezioni della medesima colla concoide daranno tante soluzioni del problema.

Che la parabola BFC descritta sia appunto quella della detta equazione, nella quale sono le ascisse $FT = \frac{aa}{b} - x$, e le ordinate $NT = y$, non può mettersi in dubbio (Lib. 2. Cap. 5. num. 3.).

Che passi per i punti B, C, si rileverà dalla stessa equazione. Imperocchè, se si supporrà in essa essere $x = o$, e quindi

quindi l'ascissa $= \frac{aa}{b}$, cioè $= FD$ terza proporzionale dopo b, ed a; risulterà $b \cdot \frac{aa}{b} = yy$, o sia $aa = yy$; e quindi $y = \pm a = \pm DB$. Dunque la parabola BFC ha l'ordinate al punto D uguali a DB, DC; e perciò passerà essa per B, e C.

Che poi i punti delle sezioni della parabola colla concoide diano le soluzioni del problema, è chiaro, perchè in quei soli punti le ordinate y si fanno comuni alla parabola ed alla concoide.

NOT. XLII.

NEl num.6. del Cap.14. vers. 7. e seguenti della pag. 373. si legge: *Se il circolo segherà la curva nel foglio* A 2 N T, (Fig. 28. Tav. 1.) *allora non deesi produrre la linea* A 2 O, *ma la sua parte* 2 N 2 O *eguaglierà* 2 O T.

Ciò si ha per la proprietà della stessa curva $A\,2\,N\,T\,N$ (Cap. 13. num. 2.).

FINE DELLE NOTE.

AP-

APPENDICE

ARTICOLO I.

ESsendo la Teoria delle serie di grandissimo uso nell' Algebra, stimo opportuna ed util cosa dare in questo Artic. un idea più distinta delle medesime, dilucidando meglio quanto dice l' Autore ne' quattro ultimi num. del Cap. 2. del Lib. 1.

I. S' intende per *serie* una congerie, o sia seguela di termini, che si succedono con qualche ordine, e proporzione: così 1, 2, 3, &c., ovvero a, a^2 a^3, &c. dicesi serie. Una serie dicesi *finita*, o *infinita*, secondochè il numero de' termini, che la costituiscono, sarà finito, o infinito: *aritmetica*, o *geometrica*, se la proporzione, colla quale succedono i suoi termini, sarà aritmetica, o geometrica. Nel Cap. 6. del Lib. 3. di questo Compendio, ove tratta l'Autore delle somme, e de' termini generali delle serie, si dà un'idea di altre serie, le quali risultano dai termini di due, o più serie aritmetiche, o geometriche; o aritmetiche, e geometriche insieme, in diversi modi combinati; ed anche moltiplicati per costanti.

II. Or poichè i termini di una serie possono essere o costantemente gl' istessi in tutta la serie, o possono successivamente crescere, ovvero decrescere; le serie perciò si dividono in *costanti*, *crescenti*, e *decrescenti*; chiamandosi *costanti* quelle della prima specie, *crescenti* quelle della seconda, e *decrescenti* quelle dell' ultima.

III. Il principal uso delle serie si fa per avere i valori prossimi delle quantità convertite in serie. Per ciò ben comprendere, è da riflettersi, che il vero valore di una quantità buttata in serie viene espresso dalla somma di tutti gl' infiniti termini della serie medesima. E perchè non tutte le serie infinite sono di loro natura sommabili; in quelle, che non lo sono, giova sempre prendere la somma di un numero ro finito de' loro termini, per avere un valore almen prossimo alle quantità da esse serie espresse. Or poichè questa somma non dà sempre un valor prossimo alla quantità espressa dalla serie, ma anzi alle volte differisce costantemente da essa per una medesima quantità, ed altre volte quanto maggiore è il numero de' termini raccolti in somma, tanto più la medesima dalla quantità buttata in serie si discosta; le serie perciò si distinguono ancora in tre specie, cioè in *parallele*, *divergenti*, e *convergenti*.

Quella serie, della quale la somma d'un numero qualunque finito di termini differisce sempre dal valore della quantità da essa serie espressa per la quantità stessa, appunto perchè il valore della detta somma si conserva sempre ugualmente distante dal vero, dicesi serie *parallela*. Si dice poi *divergente* quella serie, della quale quanti più termini si sommano, tanto più il valor della somma si discosta da quello della quantità, che l' intera serie esprime. Finalmente serie *convergente* dicesi quella, della quale quanti più termini si sommano, tanto più il valor della somma a quello della quantità suddetta si avvicina; d'onde si fa chiaro, che le sole serie convergenti saranno le utili.

IV. Le suddette serie si ottengono dalle quantità e per mezzo della divisione, e coll'estrazione delle radici. Colla divisione, allorchè la medesima non può esattamente eseguirsi, per cui il quoto si ha fratto, come si è veduto nel citato num. 16. del Cap. 2. del Lib. 1. Coll' estrazione delle radici, allorchè queste non possono esattamente dalle quantità proposte estrarsi, per non essere esse vere potenze, come trovasi esposto nella fine del Cap. 3. del medesimo Lib. 1.

Per risolvere una frazione in serie, convien supporre il numeratore esser quantità semplice, se non è tale, e binomio il denominatore, il che può sempre ottenersi, ed indi eseguire attualmente, secondo le regole, la divisione del numeratore per lo denominatore. Secondochè poi i termini del denominatore saranno uguali, o disuguali, ed i segni de' medesimi, supposto sempre positivo il numeratore, saranno diversi; secondo le diverse combinazioni, che potranno aver luogo, si otterranno tutte le serie possibili. Si è supposto sempre positivo il numeratore, perchè questa supposiziozione non altera l'universalità, potendosi di qualunque frazione cambiare i segni del numeratore e denominatore da negativi in positivi, e vicendevolmente, senza alterare il valore di essa, con moltiplicare l'uno e l'altro per -1.

Se i due termini del denominatore saranno uguali, la serie, che colla divisione si otterrà, sarà costante: e se disuguali, sarà crescente, se del secondo termine sarà minore il primo: decrescente, se maggiore.

Per provar ciò, si risolva in serie la frazione $\frac{c}{a+b}$, dalla quale, supposto indicare c una quantità positiva, a poi, e b essere o ambedue positive, o ambedue negative, o una positiva, e negativa l'altra: e tanto la prima, che le altre essere di qualunque valore; si avrà $\frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4}$ &c., la quale sarà generale, e potrà esprimere qualunque serie possibile proveniente dalla divisione. In questa posto $a = b$, ciascun termine diviene uguale al primo $\frac{c}{a}$, e e perciò la serie costante. Posto poi a e b disuguali, poichè ciascun termine dal secondo in seguito è uguale al precedente moltiplicato in $\frac{b}{a}$, e questa frazione è maggior dell'unità, quando $a < b$, e minore, quando $a > b$; siccome il precedente è moltiplicato nell'unità, andranno i termini della serie nel primo caso crescendo, e nel secondo decrescendo.

V. Prima di passar oltre, si osservi, che nel buttare la detta frazione $\frac{c}{a+a}$ in serie, il primo residuo, che si ottiene, è $-\frac{cb}{a}$, il secondo è $+\frac{cb^2}{a^2}$, il terzo $-\frac{cb^3}{a^3}$, &c.; dimodochè tutti tali residui formano un' altra serie, che è la seguente, cioè $-\frac{cb}{a}+\frac{cb^2}{a^2}-\frac{cb^3}{a^3}+\frac{cb^4}{a^4}$ &c. Or questa serie de' residui, come ognun vede, quando la serie del quoto è costante, è anche costante, riducendosi ciascun suo termine $= a$: e nell' altre serie è crescente, o decrescente, secondo che la detta serie del quoto è crescente, o decrescente.

VI. Dippiù nella serie medesima del quoto, e per conseguenza in ogni serie, che colla divisione può aversi, la somma di un numero qualunque di termini, insieme col residuo, che all' ultimo di essi spetta, diviso per lo denominatore $a+b$ uguaglia perfettamente la frazione $\frac{c}{a+b}$ ridotta in serie, come potrà vedersi coll' attuale operazione.

VII. Da queste due proprietà si deduce come legittima conseguenza, che delle serie, che si ottengono colla divisione, ogni serie costante è parallela, divergente ogni crescente, ed ogni decrescente convergente; e vicendevolmente: e che perciò, (num. 4.) quando i due termini del binomio denominatore della frazione da ridursi in serie sono uguali, la serie, che si otterrà colla divisione, sarà parallela: quando de' medesimi due termini il primo sarà minore del secondo, sarà divergente: e convergente finalmente, quando del secondo sarà maggiore il primo; e tanto più divergente, o convergente, quanto più sarà minore, o maggiore del secondo il primo.

Quindi è, che da una frazione qualunque, la serie convergente potrà sempre ottenersi, dividendo prima il suo denominatore in due parti, delle quali la prima sia della seconda maggiore, e poi eseguendo la divisione, come sopra: e tal serie tanto più si avrà convergente, quanto più la prima parte si farà della seconda maggiore.

VIII.

VIII. Nella serie $\frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} -$ &c., che dalla frazione $\frac{c}{a+b}$ si ottiene, posto, oltre di c, anche a, e b quantità positive, qualunque di tutte e tre le medesime sia il valore, saranno i termini in sede dispari positivi, ed in sede pari negativi. Posto poi a, e b, ambedue negative, la serie si convertirà in $-\frac{c}{a} + \frac{cb}{a^2} - \frac{cb^2}{a^3} +$ &c., cioè quelli in sede dispari saranno negativi, e positivi quelli in sede pari. Nella prima supposizione, e perciò nella prima serie, la somma di un numero pari qualunque di termini mancherà sempre dal vero valore della frazione $\frac{c}{a+b}$, e quella di un numero dispari eccederà il medesimo, o che la serie sia parallela, o che sia divergente, o convergente. Nell' altra poi avrà luogo tutto il contrario. La ragione di ciò si ripeta dai num. 5. e 6.

Che se si supporrà un solo termine del binomio denominatore $a+b$ esser negativo, la serie, che dalla frazione si otterrà, avrà tutti i termini positivi, o negativi, secondochè il primo termine a del binomio suddetto, per lo quale si fa la divisione, sarà positivo, o negativo: e nel caso, che sia positivo, la somma di qualsivoglia numero di termini della serie sempre mancherà dal valore della frazione, se la serie sarà parallela, o convergente; ed eccederà sempre il medesimo, se sarà divergente. Nel caso poi, che sia negativo, succederà tutto l'opposto nella serie convergente, e nella divergente; e lo stesso nella parallela. La ragione di ciò similmente si deduce dai due citati num.

ARTICOLO II.

QUantunque ciò, che dall' Autore si dice ne' num. 12., e 13. del Cap. 3. del Lib. 1. delle quantità immaginarie sia sufficientissimo a guidare chicchessia in qualunque calcolo, che involva immaginarii; pure, per ajuto della gioventù, stimo trattare in questo Artic. più diffusamente la medesima teoria.

I. Prima di ogni altro avverto, che non dee far maraviglia, che le quantità immaginarie, come quelle, che non sono niente, ne più, o meno del niente, tuttochè non esistenti in natura, ma solamente nell' immaginazione degli Algebristi, si mettano a calcolo al pari delle reali. Imperocchè le medesime hanno anche il loro uso in Algebra, e per calcolarle, basta avere una chiara idea, non men che giusta e completa della loro essenza. In fatti per conoscerne l' uso, che le medesime hanno nel calcolo, è da sapersi, che siccome il fine del calcolo è quello di determinare de' valori delle quantità incognite per mezzo delle altre cognite date; quando avvenga di determinarli uguali a quantità immaginarie, si viene in cognizione, che le quantità richieste, e dipendenti dalle date, non possano aver luogo in natura, e per conseguenza, che il problema sulle dette quantità proposto richieda un impossibile. Ecco adunque l' uso delle quantità immaginarie nel calcolo.

Per acquistar poi una perfetta idea delle medesime, basterà riflettere, che qualunque ne sia il loro valore, o che esistano, o non esistano; devono però in ogni modo esser tali, che elevandole alle potenze dello stesso indice delle rispettive loro radici, dovranno restituire quelle quantità reali negative, delle quali esse sono radici. Ben intesa questa idea delle quantità immaginarie, a ragione l' Autore dice, che svanisce ogni paradosso, che potrebbe nascere dal vedere, che dal prodotto di due immaginarii, cioè di due quantità non esistenti in natura, si possa avere una quantità reale, cioè, che esiste. Imperocchè la quantità reale non nasce già dalle

dalle quantità immaginarie, ma dall' operazione, che sulle medesime si fa: e siccome la quantità immaginaria non viene prodotta dalla quantità reale, ma dall' operazione non eseguibile, che sulla medesima si pretende fare, e che puramente si indica per mezzo del segno radicale; così al contrario la quantità reale non risulta già dalle immaginarie, ma dall' operazione, che sulle medesime s' intende fare, la quale essendo diametralmente opposta alla già indicata col segno radicale, dovrà disfare il già fatto, e rimettere la quantità immaginaria nel primo stato, cioè di quantità reale.

II. Concepitane sì fatta idea, si discorra nel modo seguente. Che che sieno tali quantità, ragion vuole, che si debbano sommare, e sottrarre colle regole stesse date per le quantità reali: vale a dire con iscrivere le une presso le altre coi segni, che hanno, se si tratterà di somma; e se poi di sottrazione, coi segni cambiati alle quantità sottraende; ricordandosi sempre di ridurre i termini simili, se ve ne saranno, alla più semplice espressione.

III. Tutta la difficoltà adunque nel calcolo delle quantità immaginarie consisterà nella moltiplicazione, e divisione. Per stabilire le regole di tali operazioni, le quali, come si vedrà, niente differiscono dalle date sulle quantità reali, premetto, che esprimendo per $\sqrt[n]{-a}$ qualunque possibile radice immaginaria; potrà la medesima sempre riguardarsi come il prodotto di $\sqrt[n]{-1}$ in $\sqrt[n]{a}$, e potrà sempre in questi due fattori risolversi. Ciò non avrebbe bisogno di dimostrazione, ma perchè questa è semplicissima, eccola. Per le proporzioni si ha $1 : -1 :: a : -a$: ed estraendo da tali quattro termini la radice intera, e pari n qualsisia, si avrà ancora $1 : \sqrt[n]{-1} :: \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{-a}$; e quindi $\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{-1} \times \sqrt[n]{a}$.

IV. Posto ciò, ognun vede, che l' impossibilità di ogni quantità immaginaria si potrà tutta addossare ad una radice di -1 dello stesso indice. Chi saprà adunque con certezza moltiplicare, e dividere tutte le radici immaginarie di -1, e saprà le medesime benanche moltiplicare, e dividere per altre

altre radici reali, ed al contrario; saprà ancora moltiplicare, e dividere tutte le quantità immaginarie.

A tal fine sia $\sqrt[n]{-1}$ qualunque radice immaginaria di -1. Sarà n o 2, o una delle potenze del 2, o un loro prodotto in un altro numero dispari; perchè ogni numero pari, diviso una, o più volte per 2, dà finalmente per ultimo quoto un numero dispari, dando l' unità se è il 2, o una qualsisia potestà del 2. Sicchè chiamato r un numero qualunque positivo pari, o dispari, ed m un numero positivo dispari; n, che disegna un numero pari, si potrà sempre sciogliere in due fattori 2^r, ed m: e $2^r m$ potrà indicare qualunque numero n pari positivo possibile; siccome $\sqrt[2^r m]{-1}$ qualsisia radice immaginaria di -1. L' esponente poi r del fattore 2^r viene determinato dal numero delle volte, che n è per 2 divisibile.

Inoltre $\sqrt[2^r m]{-1} = \sqrt[2^r]{\sqrt[m]{-1}}$: ma $\sqrt[m]{-1} = -1$; dunque sarà $\sqrt[2^r m]{-1} = \sqrt[2^r]{-1}$. Quindi qualunque radice n immaginaria di -1 o verrà espressa da $\sqrt[2^r]{-1}$, o a questa forma si potrà sempre ridurre. Vale a dire, che ogni radice immaginaria di -1 o avrà per indice una potenza del 2, o si potrà sempre ridurre a tale senza sconcerto del dilei qualsisia valore, col convertirla in radicale, il dicui indice sia quella massima potenza del 2, per la quale è divisibile l' indice della proposta radice. In fatti $\sqrt[12]{-1} = \sqrt[2^2 \cdot 3]{-1}$ $= \sqrt[2^2]{\sqrt[3]{-1}} = \sqrt[2^2]{-1}$. &c.

Sic-

Sicchè si potranno distinguere ne' radicali immaginarii diversi gradi d'immaginarietà: e questi verranno determinati dagli esponenti di quelle massime potenze del 2, che dividono esattamente gl' indici delle radici: nè ciascun radicale immaginario conterrà altro grado d' immaginarietà, che quello, che da sì fatto esponente verrà disegnato.

V. La moltiplicazione adunque, non meno, che la divisione delle radici immaginarie si è ridotta a quella delle radici immaginarie di -1, che hanno la forma seguente $\sqrt[2^r]{-1}$. Vediamo adunque come debba operarsi, per eseguire sì l' una, che l' altra.

Per procedere con ordine, suppongasi in primo luogo, che le radici da moltiplicarsi siano due, e dello stesso grado d' immaginarietà. Ambedue dunque verranno espresse da $\sqrt[2^r]{-1}$ (num. prec.), e 'l loro prodotto non sarà altro, che la seconda potenza di una. Or poichè $\sqrt[2^r]{-1}$ è la stessa, che $\sqrt{\sqrt[2^{r-1}]{-1}}$; togliendo il primo segno radicale a questa seconda espressione, si avrà $\sqrt[2^{r-1}]{-1}$, che sarà la seconda potenza di $\sqrt[2^r]{-1}$ richiesta. Ma 2^{r-1} è il quoto di 2^r diviso per 2, cioè per l' indice della potestà, che si cerca. Si potrà adunque assegnare la regola, che per elevare a seconda potenza una qualunque radice immaginaria di -1 ridotta al suo vero grado (num. prec.), non si ha da far altro, che dividere l' indice della radice per l' esponente 2 della potestà 2.ª richiesta, e sostituire questo quoto al detto indice, che è la regola stessa, che ha luogo nelle radici reali d' indice pari.

Che

Che se le radici $\sqrt[2^r]{-1}$, $\sqrt[2^r]{-1}$ non dovessero moltiplicarsi fra loro, ma dividersi; ognun vede essere il quoto l'unità, poichè qualunque quantità di qualsivoglia natura si sia, sempre si contiene in se stessa una volta. Quindi anche colla divisione degl'immaginarii si può avere una quantità reale; la qual cosa non dee stimarsi assurda, poichè il quoto di qualunque divisione non denota altro, che la continenza di una quantità nell'altra, la quale anche fra quantità immaginarie può essere reale.

VI. Prima di passare oltre, avverto, che chiamo riduzione di una delle già dette radici immaginarie di -1 allo stesso indice di un'altra di indice minore, se la converto in radicale di radicale, e do per indice al primo radicale, o sia all'esterno, quello dell'altra, cioè l'indice minore; ed al secondo, cioè all'interno, il quoto dell'indice maggiore per lo minore, o sia quella potenza del 2, che indica la differenza de'gradi delle proposte radici. Così chiamo $\sqrt[2^r]{-1}$ ridotta allo stesso indice di $\sqrt[2^{r-q}]{-1}$ (nella quale q indica un numero positivo pari, o dispari, ma minore di r), se la converto in $\sqrt[2^{r-q}]{\sqrt[2^q]{-1}}$.

VII. Posto ciò, vediamo ora qual sia il prodotto di due radici immaginarie di -1 di diverso grado d'immaginarietà. Queste vengano espresse da $\sqrt[2^r]{-1}$, e $\sqrt[2^{r-q}]{-1}$, nella seconda delle quali q indichi pure un numero positivo o pari, o dispari, ma minore di r. Or io dico, che se la radice dell'indice maggiore, cioè $\sqrt[2^r]{-1}$, si convertirà in $\sqrt[2^{r-q}]{\sqrt[2^q]{-1}}$, varrà le a dire in radicale dello stesso indice dell' altro fattore; si otterrà il prodotto richiesto con moltiplicare fra loro le quantità esistenti sotto de' segni radicali dello stesso indice, cioè -1, e $\sqrt[2^q]{-1}$, e col mettere indi il prodotto delle medesime $-\sqrt[2^q]{-1}$ sotto del radicale comune $\sqrt[2^{r-q}]{}$, appunto come se fossero reali; per cui il prodotto, che si cerca, sarà $\sqrt[2^{r-q}]{-\sqrt[2^q]{-1}}$. Imperocchè si ha $1 : -1 :: \sqrt[2^q]{-1} : -\sqrt[2^q]{-1}$: ed estratta la radice dell' indice 2^{r-q} da tutti i termini, si avrà $1 : \sqrt[2^{r-q}]{-1} :: \sqrt[2^{r-q}]{\sqrt[2^q]{-1}} : \sqrt[2^{r-q}]{-\sqrt[2^q]{-1}}$, o sia $:: \sqrt[2^r]{-1} : \sqrt[2^{r-q}]{-\sqrt[2^q]{-1}}$. Quindi $\sqrt[2^{r-q}]{-1} \cdot \sqrt[2^r]{-1} = \sqrt[2^{r-q}]{-\sqrt[2^q]{-1}}$.

Si potrà adunque stabilire la regola, che per moltiplicare le radici immaginarie di -1 di diverso grado d' immaginarietà, ma ridotte al vero, e per conseguenza di diverso indice, non si ha da far altro, che ridurle prima a radici dello stesso indice (num. prec.), e poi moltiplicare le sole quantità, che sotto de' segni stessi radicali trovansi, come se fossero reali.

Opponendosi alla moltiplicazione diametralmente la divisione, dovendo questa disfare ciò, che da quella si fa; essa nelle radici immaginarie $\sqrt[2^r]{-1}$, $\sqrt[2^{r-q}]{-1}$ di diverso grado, o sia indice, dovrà farsi in una maniera contraria a quella, secondo la quale si è detto farsi la moltiplicazione.

Sicchè ridotte le radici a quelle dello stesso indice (num. prec.), dovranno dividersi le quantità, che sotto de' medesimi segni radicali si troveranno, e si dovrà scrivere il quoto sotto del radicale comune.

Ben inteso adunque il modo, con cui le radici immaginarie di -1 di diverso indice, espresse da $\sqrt[2^r]{-1}$, $\sqrt[2^{r-q}]{-1}$, a quelle dello stesso indice si riducono; da ciò, che finora si è stabilito, si raccoglie, che tutte le radici immaginarie di -1, ridotte prima al loro vero grado (num. 4.) d' immaginarietà, si moltiplicano, e dividono colle regole stesse, colle quali si moltiplicano, e dividono le radici reali.

VIII. Finora abbiamo supposto, che le radici di -1 immaginarie da moltiplicarsi non siano più di due. Che se fossero tre, quattro, &c.; se ne moltiplicheranno prima due, e poi il loro prodotto per la terza, e questo per la quarta, &c.

Quindi supponendo un numero n di fattori uguali immaginarii di -1, si potrà avere qualunque potenza n di qualsivoglia radice immaginaria di -1.

IX. Passiamo ora alla moltiplicazione, e divisione di una radice immaginaria di -1 per una reale qualunque, ed al contrario. Siano $\sqrt[n]{-1}$, $\sqrt[q]{a}$ tali radici. Se $n = q$, il loro prodotto sarà $\sqrt[n]{-a}$ (num. 3.), qualunque sia la quantità a; la quale $\sqrt[n]{-a}$ sarà anche il quoto di $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{-1}$. Il quoto poi di $\sqrt[n]{-1} : \sqrt[n]{a}$ sarà $\sqrt[n]{\frac{-1}{a}}$. Vale a dire, che per moltiplicare, o dividere una radice immaginaria di -1 per una radice reale, o al contrario, dello stesso indice, si devono moltiplicare, o dividere le quantità esistenti sotto de' segni.

Ma

Ma se non è $n=q$; si riduca $\sqrt[n]{-1}$ al vero grado d'immaginarietà, se non la è (num.4.), affinchè abbiasi $\sqrt[2^r]{-1}$, e se $2^r=q$, si operi come sopra. Che se 2^r non ritrovasi uguale a q; s' innalzi la $\sqrt[q]{a}$ alla potenza 2^r, e se n' estragga nel tempo medesimo la radice dello stesso indice 2^r. Con tal operazione essa non cambiando valore, si trasformerà in $\sqrt[2^r]{\sqrt[q]{a^{2^r}}}$, la quale così preparata si moltiplichi, o divida come prima per $\sqrt[2^r]{-1}$, o vicendevolmente; d' onde si avrà per lo prodotto richiesto $\sqrt[2^r]{-\sqrt[q]{a^{2^r}}}$, e per quoto la stessa quantità, nel caso, che $\sqrt[2^r]{-1}$ sia il divisore: e $\sqrt[2^r]{\dfrac{-1}{\sqrt[q]{a^{2^r}}}}$, se la medesima sia il dividendo. Avvertasi, che se sia $q > 2^r$, e dippiù divisibile per 2^r, dimodo che sia $q=2^rp$; in tal caso $\sqrt[q]{a}$, senza trasformarla in $\sqrt[2^r]{\sqrt[q]{a^{2^r}}}$, si converta in $\sqrt[2^r]{\sqrt[p]{a}}$, e poi si moltiplichi, o divida per $\sqrt[2^r]{-1}$ come sopra.

Sia da moltiplicarsi $\sqrt[12]{-1}$ per $\sqrt[3]{a}$. Si riduca $\sqrt[12]{-1}$ al suo vero grado d' immaginarietà, e si avrà $\sqrt[4]{-1}$. Si elevi $\sqrt[3]{a}$ alla potenza 4.ª, e se ne estragga la 4.ª radice, per cui si cambierà essa in $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4}}$. Si moltiplichi -1 per $\sqrt[3]{a^4}$, ed il prodotto $-\sqrt[3]{a^4} = -a\sqrt[3]{a}$ si metta sotto della radice comune $\sqrt[4]{}$, e si avrà $\sqrt[4]{-a\sqrt[3]{a}}$ per lo prodotto, che si vuole di $\sqrt[12]{-1}$ per $\sqrt[3]{a}$. Dello stesso modo si proceda trattandosi di divisione, col solo divario di scrivere sotto del radicale comune $\sqrt[4]{}$ il quoto delle quantità -1, e $\sqrt[3]{a^4}$.

Quindi anche per moltiplicare, o dividere una radice immaginaria di -1 per una reale di diverso indice, o al contrario; ridotta l'immaginaria al suo vero grado d'immaginarietà, e la reale in radicale dello stesso indice dell' immamaginária ridotta, si dovranno moltiplicare, o dividere le quantità esistenti sotto de' medesimi segni, e scrivere il loro prodotto, o quoto sotto del segno radicale comune, come si fa nelle reali.

X. Che se occorresse moltiplicare $\sqrt[n]{-\sqrt[p]{-1}}$ per $\sqrt[q]{a}$, nella prima delle quali n, e p sono numeri pari; si converta $\sqrt[q]{a}$ in $\sqrt[npq]{a^{np}}$, o sia in $\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a^{np}}}}$, ed avendo presente ciò, che (num. preced.) si è detto, si potrà eseguire la moltiplicazione; fatta la quale, si avrà per prodotto de' due proposti fattori $\sqrt[n]{-\sqrt[p]{-\sqrt[q]{a^{np}}}}$. Non d'altro modo dovrà procedersi per trovare il prodotto della moltiplicazione di $\sqrt[n]{-\sqrt[p]{-\sqrt[s]{-1}}}$ per $\sqrt[q]{a}$, &c.

XI. Stabilite le regole per la moltiplicazione, e divisione di qualunque radice immaginaria di -1 per un'altra, sia anche immaginaria di -1, sia reale come si voglia, ed al contrario; niente sarà più facile, che moltiplicare, o dividere qualunque radice immaginaria per un'altra immaginaria qualsivoglia, o reale, e vicendevolmente.

Se ambedue saranno immaginarie, altro a fare non si avrà, che sciogliere ciascuna in due fattori radicali, de' quali uno sia reale, e l' altro immaginario di -1, come si è detto nel num. 3., e fatta la moltiplicazione, o divisione delle radici reali particolarmente, e delle immaginarie di -1 secondo le regole date, moltiplicare finalmente i prodotti, o quoti fra loro.

Che

Che se delle radici da moltiplicarsi, o dividersi una fosse immaginaria, e reale l' altra; in tale caso la radice immaginaria si sciolga ne' soliti due fattori, reale, ed immaginario di -1, e poi il particolar prodotto, o quoto delle radici reali si moltiplichi nella radice immaginaria di -1 ridotta al suo vero grado, anche nel caso, che la radice immaginaria non sia la quantità dividenda, ma sia la dividente.

Sia, per esempio, da moltiplicarsi $\sqrt[4]{-a}$ per $\sqrt[6]{-b}$. Si sciolgano esse ne' fattori $\sqrt[4]{-1}\,.\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{-1}\,.\sqrt[6]{b}$: si moltiplichi $\sqrt[4]{a}$ per $\sqrt[6]{b}$, e si avrà per prodotto $\sqrt[12]{a^3b^2}$.

Si riducano $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$ al loro vero grado (num. 4.); indi a radici dello stesso indice (num. 6.), e poi si moltiplichino (num. 7.). E poichè la prima è già ridotta al vero grado, si riduca la seconda, e si avrà $\sqrt{-1}$: e ridotta la prima, cioè $\sqrt[4]{-1}$ a radice dello stesso indice dell' altra, si otterrà $\sqrt{\sqrt{-1}}$, che moltiplicata per $\sqrt{-1}$ darà per prodotto $\sqrt{-\sqrt{-1}}$. Questo si moltiplichi (num. preced.) nel primo reale già determinato, cioè in $\sqrt[12]{a^3b^2}$ trasformato prima

ma

ma in $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a^3b^2}}} = \sqrt{\sqrt{a\sqrt[3]{b^2}}}$, e si avrà finalmente $\sqrt{-\sqrt{-a\sqrt[3]{b^2}}}$, che sarà il prodotto richiesto. Dello stesso modo dovrà operarsi trattandosi di divisione, colla differenza solamente, che invece di moltiplicare particolarmente i fattori immaginarli, ed i reali, dovranno essi dividersi.

Sia da moltiplicarsi $\sqrt[6]{-a}$ per $\sqrt[3]{b}$. Si sciolga $\sqrt[6]{-a}$ ne' fattori $\sqrt[6]{-1} \, . \, \sqrt[6]{a}$: si riduca $\sqrt[6]{-1}$ al suo vero grado, cioè a $\sqrt{-1}$, e per questa si moltiplichi il prodotto di $\sqrt[6]{a} \, . \, \sqrt[3]{b}$, cioè $\sqrt[6]{ab^2}$ espressa per $\sqrt{\sqrt[3]{ab^2}}$, e si otterrà pel prodotto richiesto $\sqrt{-\sqrt[3]{ab^2}}$.

Dovendo poi dividere $\sqrt[6]{-a}$ per $\sqrt[3]{b}$, si dee moltiplicare per $\sqrt{-1}$ il quoto di $\sqrt[6]{a}$ diviso per $\sqrt[6]{b^2}$, cioè $\sqrt[6]{\frac{a}{b^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}}$, e si avrà $\sqrt{-\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}}$, che sarà il quoto ricercato. Che se dovesse dividersi $\sqrt[3]{b}$ per $\sqrt[6]{-a}$, dovreb-

be

be moltiplicarsi $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}$ anche per $\sqrt{-1}$. Imperciocchè in questo caso il quoto delle radici reali, cioè $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}$, dovrebbe dividersi per $\sqrt{-1}$, e perciò (num. 9.) si avrebbe $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}{-1}}$: onde moltiplicando per -1 sì il numeratore, cioè la radice 3.ª di $\frac{b^2}{a}$, che il denominatore -1 della quantità esistente sotto del primo segno radicale, si avrà $\sqrt{-\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}}$ che sarà il quoto di $\sqrt[3]{b}:\sqrt[6]{-a}$.

Avvertasi, che se in questo secondo caso avvenisse, che le radici fossero dello stesso indice, o la reale potesse ridursi a radice dello stesso indice dell' immaginaria (Lib. 1. Cap. 3. num. 10.), come appunto si verifica nelle due radici $\sqrt[6]{-b}$, $\sqrt[3]{a}$ dell' esempio addotto; ridotta la reale a radice dello stesso indice dell' immaginaria, se non la è, potrebbesi venire immediatamente alla moltiplicazione, o divisione delle quantità esistenti sotto de' segni, senza risolvere prima l' immaginaria ne' due fattori; ma l' espressione, che si avrebbe, quantunque equivalente a quella, che colla già esposta regola generale si ottiene, gioverebbe però meno all' uso del calcolo. Che se poi nella supposizione stessa, in cui siamo, l' e l' esponente della radice immaginaria fosse di più una potenza del 2; in tal caso inutile, e superfluo sarebbe lo scioglimento suddetto ne' fattori, poichè sempre la stessa espressione si otterrebbe; onde si deve venire immediatamente alla moltiplicazione, o divisione delle quantità esistenti sotto de' segni.

Se le radici immaginarie da moltiplicarsi fossero più di due: sciolte esse ne' soliti fattori reali, ed immaginarii di — 1, si dovranno similmente fare i prodotti particolari delle radici reali, e delle immaginarie di — 1, ed indi moltiplicarli fra loro; e 'l prodotto, che si avrà, sarà il richiesto.

XII. Se supporremo tutti i fattori immaginarii essere uguali, il loro prodotto sarà una potenza di uno. Che però si eleverà a potenza una quantità immaginaria, se sciolta prima ne' suoi fattori, reale, ed immaginario di — 1, si eleveranno questi particolarmente alla potenza richiesta, e se ne farà indi il prodotto.

XIII. Per estrarre finalmente le radici dalle quantità immaginarie, altro non potrà farsi, che moltiplicare l' indice del radicale per l' esponente della radice, che estrarre si vuole. E ciò basti del calcolo delle quantità immaginarie.

ARTICOLO III.

I. Dalla facilità, colla quale si son messi in equazione i problemi semideterminati proposti, e risoluti ne' num. 2., 3., 4., 5. del Cap. 7. del Lib. I., crederanno forse i giovani principianti, che lo stesso succeda in ogni altro semideterminato della specie medesima. La cosa però non va così, poichè se ne danno di tal natura, ne' quali per venire alle corrispondenti equazioni s'incontra non piccola difficoltà, essendo costretti di esprimere per x, y, ec. non già i numeri, che propriamente si cercano, ma altri, che ad essi appartengono. In comprova di ciò, stimo proporne uno, dalla risoluzione del quale si vedrà quanto valga l' industria in sì fatti problemi. Il problema è il seguente.

Un Maggiore ha un numero di soldati tale, che se gli ordina a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque, a sei a sei, ne avanza sempre uno; se gli ordina poi a sette a sette, cioè in colonna a sette di fronte, non ne avanza veruno. Si domanda a che ascenda questo numero di soldati.

Per venire alla soluzione del medesimo, si rifletta, che, per le condizioni date, il numero, che si cerca, deve esser tale, che diminuito dell' unità deve essere divisibile per 2, 3, 4, 5, e 6. Or per essere divisibile per 2, deve essere un numero pari: e per essere divisibile anche per 3, bisogna che sia un numero pari divisibile per 3. Il primo numero pari, che può esser divisibile per 3, è 6, cioè quello appunto, che nasce dalla moltiplicazione de'due divisori semplici 2, e 3: l'altro è 12, il terzo 18, e così crescendo sempre colla stessa differenza 6, prodotto de' due divisori 2, e 3. Vale a dire, che solamente 6, ed ogni moltiplice suo può esser divisibile per 2, e per 3: ma 6, ed ogni suo moltiplice è divisibile per 6; sicchè quel numero, che è divisibile per 2, e per 3, sarà anche divisibile per 6. Dippiù il numero, che è divisibile per 4, è ancora divisibile per

2.

2. Potremo adunque conchiudere, che quel numero, che è divisibile per 3, 4, e 5, sarà divisibile ancora per 2; e per 6: e quindi accresciuto dell'unità, se si troverà divisibile esattamente per 7, sarà quel numero appunto, che ricerchiamo.

Il primo numero poi divisibile per 3, 4, e 5, che si presenta ai nostri occhi, è certamente quello, che nasce dalla moltiplicazione di essi divisori semplici 3, 4, e 5; e non altri, che questo, ed i suoi moltiplici godono tal proprietà: il che si dimostra dello stesso modo, come poc' anzi si è dimostrato su de' numeri divisibili per 2, e 3. Sicchè il primo numero, che può esser divisibile per 2, 3, 4, 5, e 6, sarà $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Quindi aggiunta ad esso l' unità, se sarà divisibile per 7 esattamente, sarà il medesimo il numero de' soldati richiesto. E poichè $60 + 1$, cioè 61 non è divisibile per 7, non sarà esso il numero, che soddisfa al problema; onde dovrà ricercarsi fra i moltiplici del 60.

Per ciò fare, pongasi il numero delle righe de' soldati ordinati a sette di fronte uguale ad x, ed y il numero, per cui moltiplicar debbasi 60 per aver quel moltiplice suo, che ricerchiamo. Avremo dunque del numero de' soldati una doppia espressione, cioè $7x$, e $60y + 1$: e perciò sarà $7x = 60y + 1$, o sia $x = \frac{60y + 1}{7}$. Non potendosi poi dalle condizioni del problema ottenere altra equazione, che questa, il medesimo sarà semideterminato.

Per assegnare intanto all' x, ed all' y i valori corrispondenti, pratico la regola data nella Nota 21. del Lib. 1. Affinchè x sia un numero intero, e positivo, bisogna che $\frac{60y + 1}{7}$, cioè $8y + \frac{4y + 1}{7}$ sia un intero. Questo sarà tale, se la frazione ridotta $\frac{4y + 1}{7}$ è un intero, e positivo. Pongasi

$\frac{4y+1}{7}=p$, e si avrà $4y+1=7p$, e quindi $y=\frac{7p-1}{4}=p+\frac{3p-1}{4}$. Si faccia $\frac{3p-1}{4}=q$, onde $3p-1=4q$, o sia $p=\frac{4q+1}{3}=q+\frac{q+1}{3}$. Si metta finalmente $\frac{q+1}{3}=m$, e si avrà $q=3m-1$, in cui qualunque valore positivo intero si dia ad m, sarà sempre q numero intero, e positivo. Si sostituisca intanto questo valore espresso per m in vece di q nell'equazione $p=\frac{4q+1}{3}$, e si avrà $p=\frac{12m-4+1}{3}=4m-1$: e posto questo in luogo di p nell' equazione $y=\frac{7p-1}{4}$, si otterrà finalmente $y=\frac{7.4m-7-1}{4}=7m-2$; onde $x=\frac{60y+1}{7}=\frac{60.7m-60.2+1}{7}=60m-17$. Quindi il numero de'soldati $7x$ verrà espresso da $420m-119$. Adunque

		Num. delle righe.	Num. de' soldati.
Se $m=1$,	$y=5$,	$x=43$,	$7x=301$.
2,	12,	103,	721.
3,	19,	163,	1141.
4,	26,	223,	1561.
ec.,	ec.,	ec.,	ec.

Sic-

Sicchè il numero de' soldati potrà essere uno de' termini di una serie crescente, il di cui primo termine è 301, e la differenza uguale a 420: e i numeri delle righe corrispondenti a 7 a 7 costituiscono un' altra serie anche crescente, della quale il primo termine è 43, e la differenza uguale a 60.

II. I problemi aritmetici semideterminati, ne' sopraccitati num. dal Signor Canonico proposti, sono stati tali, che ci han condotti o ad una sola equazione a due incognite, o ad una finale di tal natura, per mezzo della quale gli abbiamo risoluti. Oltre però de' medesimi, e di altri consimili, se ne danno di quelli, ne' quali l'equazione finale contiene tre, o più incognite: e 'l metodo, col quale si risolvono, è presso a poco lo stesso, che quello adoperato ne' detti num. 4., e 5. per la risoluzione de' problemi 3.°, e 4.°. Suppongasi, a cagion d'esempio, nel problema 4.° ed ultimo, che fra le 30 persone, che pranzando insieme spesero 75 paoli, oltre degli Uomini, Donne, e Ragazzi, vi fossero state benanche delle Ragazze: e che ogni Uomo ne avesse pagato 10, ogni Donna 5, ogni Ragazzo 2, ed ogni Ragazza $\frac{1}{2}$. Poste le stesse denominazioni, e chiamato di più il numero delle Ragazze u, si avrà $x+y+z+u=30$, $10x+5y+2z+\frac{1}{2}u=75$. Si sottragga la prima equazione dalla seconda moltiplicata per 2, e si avrà $19x+9y+3z=120$: e quindi $z=\frac{120-19x-9y}{3}=40-6x-\frac{x}{3}-3y$. Per evitare i fratti, pongasi $\frac{x}{3}=p$, o sia $x=3p$: e sostituendo, sarà $z=40-19p-3y$. Che però $19p+3y<40$; onde p non potrà essere uguale, che ad 1 solamente, escludendone zero, il quale farebbe divenir anche $x=0$. Adunque

$x=3$

$x = 3$

$z = 40 - 19 - 3y = 21 - 3y$

$u = 30 - x - y - z = 30 - 3 - y - 21 + 3y = 6 + 2y$.

Or poichè dall' equazione $z = 21 - 3y$ si ha $3y < 21$, o sia $y < 7$, sei soluzioni solamente ammetterà il problema, e sono le seguenti.

$x = 3$	3	3	3	3	3
$y = 1$	2	3	4	5	6
$z = 18$	15	12	9	6	3
$u = 8$	10	12	14	16	18

III. Quantunque l'Autore non tratti, che de' problemi aritmetici semideterminati del primo grado solamente, pure poichè l'analisi indeterminata sviluppa non poco l'umano talento, stimo cosa opportuna far vedere in questo Artic. come si risolvano quelli del secondo grado; tantoppiù, che nel Cap. 6. del medesimo Lib. 1. si è trattato della risoluzione de' determinati del 1.°, e del 2.° grado. Suppongo di aver ottenuta l'equazione finale, che dovrà essere del 2.° grado, e che la medesima contenga due sole incognite, o sieno indeterminate, e distinguo due casi: nel primo fingo, che di una incognita non vi sia, che la prima dimensione: e nell' altro poi, che di ambedue vi sieno le prime, e le seconde dimensioni. Tralasciando i metodi più generali, che in questi due casi si danno, e che si trovano rapportati nelle Memorie dell' Accademia di Berlino per gli anni 1767., e 1768., come più lunghi, e meno adattati alla gioventù; ne darò tali, che se bene sieno meno generali, sono però semplicissimi, e sufficienti a guidare chicchessia alla risoluzione delle equazioni, e de' problemi suddetti.

Esaminando il primo caso, mi propongo l' equazione $mxy + by + cx^2 + dx = a$, la quale può esprimere qualunque equazione numerica del 2.° grado priva del quadrato del-

dell'y. In questa, poichè i numeri y, x richiesti devono essere interi, le lettere a, b, c, d, m dinotano anche numeri interi; quale supposizione niente toglie di generale all'equazione, potendosi sempre liberare qualunque equazione da fratti colla moltiplicazione. Si separi l'y, e si avrà $y = \frac{-cx^2 - dx + a}{mx + b}$.

Se $m = 1$, di modo che sia $y = \frac{-cx^2 - dx + a}{x + b}$, si divida attualmente il numeratore della frazione per lo denominatore, affinchè abbiasi $y = -cx - d + bc + \frac{a + b^2c - bd}{x + b}$. Perchè dunque l'$y$ sia un intero, conviene, che $x + b$ sia un esatto divisore del numero noto $a + db - cb^2$: che però trovati tutti i divisori di questo numero, ciascuno di essi diminuito del b darà un valore dell'x.

Che se m sia maggiore dell'unità, si moltiplichi prima per m^2 l'uno, e l'altro membro della equazione $y = \frac{-cx^2 - dx + a}{mx + b}$, ed ottenuto $m^2 y = \frac{-m^2cx^2 - m^2dx + m^2a}{mx + b}$, si esegua poi la medesima divisione del numeratore per lo denominatore di questa frazione; e si avrà $m^2 y = -mcx - md + bc + \frac{m^2a - b^2c + mdb}{mx + b}$. Affinchè dunque $m^2 y$ sia un intero, bisogna, che $mx + b$ sia un esatto divisore del numero noto $m^2a - b^2c + mdb$. Che però, trovati tutti i divisori di questo numero, e supposto essere essi espressi da π, φ, ec., sarà $mx + b = \pi$, $mx + b = \varphi$, ec.; e quindi $x = \frac{\pi - b}{m}$, $x = \frac{\varphi - b}{m}$, ec. Or poichè x anche deve essere intero; quei soli divisori del numero suddetto daranno i valori dell'x della nostra equazione, che diminuiti del b sono divi-

divisibili per m esattamente; onde se sia π uno di questi, sarà $\frac{\pi - b}{m}$ un intero, che chiamo π', il quale sarà uno de' valori dell' x, che sostituito in sua vece nell' ultima equazione, darà il corrispondente valore dell' y: e così degli altri.

Si potrebbe però a questo metodo opporre, che quantunque con questa sostituzione il secondo membro dell'equazione suddetta risulti un intero, a cui è uguale $m^2 y$; non perciò il valore d' y, che dall' equazione stessa si ricaverà, sarà uguale ad un intero, dovendosi dividere il detto secondo membro per m^2 per aversi il corrispondente dell' y. Or io dico, che questo secondo membro deve essere assolutamente divisibile per m^2: e solamente può non esserlo nel caso, che m sia uguale a b, per cui sia un divisore del denominatore $mx + b$, oppure se contenga un fattore comune anche a b. Imperocchè per mezzo della moltiplicazione per m^2, che si fa dell' equazione $y = \frac{-cx^2 - dx + a}{mx + b}$, si viene ad introdurre nel primo, e nel secondo membro di essa il fattore m^2, convertendola in $m^2 y = \frac{-m^2 c^2 x^2 - m^2 dx + m^2 a}{mx + b}$. Or questo fattore m^2 appartenendo al solo numeratore del secondo membro, e non essendo comune al denominatore $mx + b$, o sia al divisore esatto π del numeratore, nè avendo altro divisore col medesimo comune; per mezzo della divisione del numeratore per lo denominatore non si toglierà dal secondo membro, nè si diminuirà, e resterà perciò fattore del quoto; onde fatta la divisione, il quoto, o sia il secondo membro dell' equazione suddetta potrà esprimersi per l' intero $m^2 q$; e quindi si avrà $m^2 y = m^2 q$, ed $y = q$ numero intero. Per la ragione opposta poi, quando m sia un divisore del denominatore, o che contenga un fattore comune anche a b, il secondo membro potrà restare, e non restare divisibile per m^2: ed in tal caso converrà

verrà prendere quei soli valori dell'x, a'quali corrispondono quelli dell'y interi, se pur ve ne saranno.

Quindi è, che se nell' equazione fosse $b = o$, per cui mancasse il termine by, e si avesse $y = \frac{-cx^2 - dx + a}{mx}$; in questo caso ancora, essendo m divisore del denominatore, fatta l' operazione suddetta, potrebbero aversi, o non aversi i valori dell'y interi. Dippiù l' esposto metodo, poichè richiede l' x nel denominatore, è evidente, che se mancasse il termine mxy, non sarebbe più atto a determinare i valori interi delle indeterminate x, y. Ora in tal caso, come ancora quando m è divisore del denominatore $mx + b$, o che contiene un fattore comune a b, conviene rivolgersi al valore dell' x, il quale verrà espresso da una formola radicale contenente l' y, della quale come possano assegnarsi i valori, si vedrà in seguito, quando esaminerò il caso secondo.

Per maggior chiarezza applicherò l' esposta teoria a due esempii: ma prima di venire ai medesimi avverto, che se nell' equazione $mxy + by + cx^2 + dx = a$ mancasse il termine cx^2; ridotta l' equazione ad $y = \frac{-dx + a}{mx + b}$, per eseguire la nota divisione non sarebbe necessario moltiplicarla per m^2, ma per m solamente: anzi neppure per m, se m fosse divisibile per d, ma basterebbe farla pel quoto del numero m diviso per d.

Venendo ora agli esempii: sia in primo luogo $xy + 3y - 2x^2 + 4x = 20$, per cui $y = \frac{2x^2 - 4x + 20}{x + 3}$: e dividendo attualmente il numeratore della frazione per lo denominatore, si avrà $y = 2x - 10 + \frac{50}{x+3}$. Acciocchè dunque y sia un intero, conviene, che $x + 3$ sia uno de' divisori di 50. Quindi x potrà essere uguale a ciascuno di essi diminuito di

3. Che però trovati i divisori di 50, si avranno i valori dell' x, e dell'y, come segue.

Divisori di 50	1	2	5	10	25	50
Valori di $x =$	-2	-1	2	7	22	47
Valori di $y =$	36	13	4	9	36	85

Da' quali esclusi i primi due dell' x, perchè negativi, coi corrispondenti dell'y, si avranno quattro soluzioni del problema semideterminato, a cui la proposta equazione si appartiene.

Abbiasi in secondo luogo $3xy - 2y - 2x^2 + 3x = 10$, o sia $\overline{3x-2}\cdot y = 2x^2 - 3x + 10$, ed $y = \frac{2x^2 - 3x + 10}{3x - 2}$.

Si moltiplichi l'equazione per 3^2, cioè per 9, e si avrà $9y = \frac{18x^2 - 27x + 90}{3x - 2} = 6x - 5 + \frac{80}{3x - 2}$. Si trovino i divisori di 80, fra i quali si scelgano quelli solamente, che accresciuti del 2 sono divisibili per 3: ed accresciuti effettivamente del 2, si dividano indi per 3, e si avranno i valori dell' x, e finalmente quelli dell'y, come nella tavoletta seguente si vede

Divisori di 80	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
$3x - 2 =$	1	4	10	16	40					
$3x =$	3	6	12	18	42					
Valori d'$x =$	1	2	4	6	14					
d'$y =$	9	3	3	4	9					

IV. Passo ora al secondo caso, a quello cioè, in cui suppongo nell'equazione, oltre del quadrato dell'x, anche quello dell'y. Comechè la risoluzione dell'equazioni di tal natura ci mena indispensabilmente ad estrazioni di radici quadrate: e queste possono essere irrazionali, ed essendo razionali, di raro possono dare numeri interi; perciò i problemi semideterminati, che conducono a tali equazioni, per lo più non escludono i numeri fratti dai valori delle indeterminate, ma solamente gl'irrazionali; per cui saranno essi risolubili, o irresolubili, secondo che le dette radici potranno rendersi razionali, o no. Di tal natura sono appunto i problemi, detti *di Diofanto*, de' quali il nostro Autore dà un'idea ne' num. 6., e seguenti del detto Cap. 7. del Lib. 1. Quindi è, che tutta la difficoltà nel caso presente consisterà nel determinare i valori razionali, che dalle radici medesime potranno aversi.

Qualunque espressione radicale, che nella risoluzione delle equazioni del secondo grado a due variabili potrà ottenersi, si conterrà nella seguente formola $\sqrt{ax^2+bx+c}$, supponendo, che i numeri espressi da a, b, e c possano essere di qualunque valore, dal quale assolutamente dipende la razionalità, o l'irrazionalità della proposta quantità radicale. Noi quì esamineremo i casi, ne' quali la medesima può esser razionale: e potendo esser tale, esporremo i metodi da tenersi per eseguirlo; tutta l'industria de' quali consisterà nel trovare l'espressione, a cui dee supporsi uguale l'indeterminata x, per ottenere gli opportuni valori, che sostituiti alla medesima nella quantità, che sotto del segno radicale ritrovasi, facciano risultare questa un perfetto quadrato.

Quantunque a quanto sarò per dire niente osti, che i numeri a, b, c sieno fratti; nulladimeno per semplicità maggiore li suppongo interi, il che può sempre ottenersi con ridurre i termini esistenti sotto del segno radicale a fratti dello stesso denominatore quadrato, il quale sia appunto quello del denominatore della frazione espressa da a, o b, o c, o quello del prodotto de' denominatori di quante frazioni vi saranno; giacchè essendo poi il denominatore comune anche un quadrato, potrà non tenersi conto del medesimo

S 2 nel

nel rendere razionale la formola, restituendocelo poi fatta l' operazione. In fatti se la radice da render razionale fosse $\sqrt{\frac{fx^2}{g} + bx + c}$, riducendo a fratti del denominatore g tutti i suoi termini, si convertirà essa in $\sqrt{\frac{gfx^2 + g^2bx + g^2c}{g^2}}$. Quindi trascurando il denominatore g^2, basterà rendere razionale $\sqrt{gfx^2 + g^2bx + g^2c}$, cioè quadrato il trinomio $gfx^2 + g^2bx + g^2c$, in cui non vi sono fratti, per rendere razionale la proposta radice $\sqrt{\frac{fx^2}{g} + bx + c}$; giacchè essendo $gfx^2 + g^2bx + g^2c$ un quadrato, anche un quadrato sarà, se si dividerà per g^2: e perciò $\frac{fx^2}{g} + bx + c$ un quadrato, e razionale la proposta radice.

1.° Posto ciò, nella formola $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ suppongasi in primo luogo $a = o$: il radicale convertirassi in $\sqrt{bx + c}$, il quale potrà essere razionale. Per averlo tale, mettasi uguale ad $\frac{m}{n}$, affinchè quadrando abbiasi $bx + c = \frac{m^2}{n^2}$; e quindi $x = \frac{m^2 - cn^2}{bn^2}$, potendo assegnare ad m, ed n due numeri qualisivogliano.

2.° Sia in secondo luogo $c = o$, per cui la radice da rendere razionale sia $\sqrt{ax^2 + bx}$. Pongasi questa uguale ad $\frac{mx}{n}$: quadrando si avrà $ax^2 + bx = \frac{m^2x^2}{n^2}$, equazione, che divi-

divisa per x, e moltiplicata per n^2, dà $a n^2 x + b n^2 = m^2 x$, d'onde si ha $x = \frac{b n^2}{m^2 - a n^2}$.

Questi due casi ci fanno avvertire, che allora si potrà rendere razionale una radice della forma $\sqrt{a x^2 + b x + c}$, quando potrà la medesima supporsi uguale a tal quantità, per cui si abbia un' equazione, che liberata da radicale, e semplicizzata, risulti del primo grado, che per isciogliersi non involva estrazione di radice. Ciò si otterrà ogni qualvolta si potrà supporre la quantità radicale uguale a tal quantità, che quadrando, si abbia un' equazione, nella quale si elidano o i termini noti, o quei, che contengono la potestà 2.ª della x, o almeno che sia tale, che sia divisibile per una quantità, che diminuisca di una unità la dimensione della x. Questa osservazione ci conduce ad esaminare i quattro diversi altri casi, che seguono.

3.° Suppongasi in terzo luogo, che nella radice $\sqrt{a x^2 + b x + c}$ vi siano tutti i termini, e c sia un quadrato, dimodochè venga la medesima espressa da $\sqrt{a x^2 + b x + f^2}$. Pongasi questa uguale ad $f + \frac{m x}{n}$, per cui quadrando si avrà $a x^2 + b x + f^2 = f^2 + \frac{2 f m x}{n} + \frac{m^2 x^2}{n^2}$: e togliendo f^2 da ambidue i membri, e indi dividendo per x, si avrà $a x + b = \frac{2 f m}{n} + \frac{m^2 x}{n^2}$, o sia $n^2 a x + n^2 b = 2 f m n + m^2 x$: e perciò $x = \frac{2 f m n - n^2 b}{n^2 a - m^2}$.

Sia

4.° Sia in quarto luogo a un quadrato, per cui la radice sia $\sqrt{f^2x^2+bx+c}$. Si faccia $\sqrt{f^2x^2+bx+c}=fx+\frac{m}{n}$: elevando a quadrato, si avrà $f^2x^2+bx+c=f^2x^2+\frac{2fmx}{n}+\frac{m^2}{n^2}$, o sia $bx+c=\frac{2fmx}{n}+\frac{m^2}{n^2}$; e moltiplicando per n^2, $n^2bx+n^2c=2fmnx+m^2$; onde $x=\frac{m^2-n^2c}{n^2b-2fmn}$.

Ognun vede, che in questi ultimi due casi il metodo pure ha luogo, ancorchè vi manchi il termine bx.

5.° Suppongasi per quinto caso, che il trinomio ax^2+bx+c sia risolubile in due fattori razionali, che contengano l'x: il che succede quando b^2-4ac è un quadrato perfetto; oppure quando è $=0$, per cui $b^2=4ac$, come può vedersi coll'attuale operazione. In fatti suppongasi essere uguale a zero il trinomio, cioè $ax^2+bx+c=0$, e si determini il valore dell' x: si avrà $x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Dunque $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, ed $x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ saranno i fattori di $x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}$ (Lib. 1. Cap. 5. num. 11. 12.). Sicchè moltiplicandone uno di essi per a, si avrà $ax+$

$b-$

$\dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$, ed $x + \dfrac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, i quali saranno i fattori del trinomio $ax^2 + bx + c$ richiesti. Or ognun vede, che questi saranno razionali, se $b^2 - 4ac$ è un quadrato perfetto, oppure se è $= o$.

In tale supposizione adunque, essendo i fattori dalla forma $fx + q$, come ne' già ritrovati si osserva, la radice seconda del nostro trinomio $ax^2 + bx + c$ potrà esprimersi per $\sqrt{\overline{fx+q} \cdot \overline{gx+p}}$. Pongasi la medesima uguale ad $\frac{m}{n} \cdot \overline{fx+q}$: quadrando, si avrà $\overline{fx+q} \cdot \overline{gx+p} = \frac{m^2}{n^2} \cdot \overline{fx+q}^2$: e dividendo per $fx+q$, si otterrà $gx + p = \frac{m^2}{n^2} \cdot \overline{fx+q}$, equazione del 1.° grado.

Invece di fare la suddetta radice $= \frac{m}{n} \cdot \overline{fx+q}$, poteasi supporre $= \frac{m}{n} \cdot \overline{gx+p}$, e procedere dello stesso modo.

6.° Il sesto ed ultimo caso finalmente ha luogo quando il trinomio $ax^2 + bx + c$, benchè non sia risolubile ne' due suddetti fattori, possa però dividersi in due parti tali, che una sia un quadrato, la di cui radice sia della forma medesima $fx + q$ già detta, e l'altra un prodotto di due consimili fattori. In tal caso la radice verrà espressa da $\sqrt{p^2 + gr}$. Si faccia $\sqrt{p^2 + gr} = p + \frac{mg}{n}$; e, quadrando, si avrà $p^2 + gr = p^2 + \frac{2pmg}{n} + \frac{m^2 g^2}{n^2}$, o sia

gr

$gr = \frac{2pmg}{n} + \frac{m^2g^2}{n^2}$: e dividendo per g, sarà $r = \frac{2pm}{n} + \frac{m^2 g}{n^2}$, equazione, che non può contenere, se non se la prima dimensione dell' x.

Per essermi molto dilungato, mi astengo di applicare gli esposti metodi agli esempj. Avverto piuttosto, che non è sempre facile il conoscere quando abbia luogo quest' ultimo caso, ed avendo luogo, come debbano determinarsi le parti, nelle quali deve il trinomio opportunamente risolversi per potere indi venire in cognizione de' valori dell' x. Il tutto dipende dall' industria, ed il solo esercizio potrà rendercene maestri. Ma se mai per altro principio sappiasi un numero n, che posto in vece dell' x faccia divenire un quadrato il nostro trinomio; mediante il medesimo potranno determinarsi gl' infiniti altri valori, che all' x possono sostituirsi, nel modo seguente. Suppongasi l' x del trinomio uguale al detto numero noto n accresciuto di un' indeterminata, cioè facciasi $x = n + y$, ed invece dell' x sostituiscasi nel trinomio questo finto valore: con tal sostituzione si avrà una quantità, che ordinata per y sarà un altro trinomio, del quale il termine noto sarà un numero quadrato, per cui coll' ajuto della regola data nel caso 3.° si potrà determinare l' espressione generale de' valori dell' y, e quindi quella de' valori della x. Che poi il termine noto del nuovo trinomio debba essere un numero quadrato, è chiaro, poichè egli altro non è, che il risultato dalla sostituzione nel primo trinomio del numero n invece dell' x, la quale per supposizione dee dare un quadrato. In fatti, poichè il trinomio $2x^2 + x + 3$ diviene uguale ad 81, che è un numero quadrato, sostituendo all' x il 6; se si sostituirà nel proposto medesimo trinomio, in vece dell' x, $6 + y$, si trasformerà esso in $2y^2 + \begin{array}{l}24y\\+y\end{array} + \begin{array}{l}2 \cdot 6^2\\+6\\+3\end{array}$, o sia in $2y^2 + 25y + 81$, in cui il termine noto altro non essendo, che il trinomio proposto col-

coll' x cangiato in 6, è appunto $= 81$. Quindi supposto $\sqrt{2y^2+25y+81} = 9 + \frac{my}{n}$ (cas. 3.°), quadrando, si avrà $2y^2+25y+81 = 81 + \frac{18my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$, o sia $2y + 25 = \frac{18m}{n} + \frac{m^2y}{n^2}$: e perciò $2n^2y - m^2y = 18mn - 25n^2$, ed $y = \frac{18mn - 25n^2}{2n^2 - m^2}$. Onde essendo $x = 6 + y$, sarà $x = 6 + \frac{18mn - 25n^2}{2n^2 - m^2} = \frac{18mn - 13n^2 - 6m^2}{2n^2 - m^2}$, potendo prendere per m, ed n due numeri qualisivogliano.

Ho detto nel principio di questo num. 4, che i problemi semideterminati del secondo grado, che per risolversi richiedono estrazione di radice quadrata, non escludono dai valori delle due indeterminate i fratti, ma solamente gl' irrazionali. Ma se mai si volessero de' medesimi le soluzioni in numeri interi solamente, per averle, potranno scegliersi fra i valori irrazionali i soli interi, se pur ve ne saranno. Vi sono però metodi per risolvere in numeri interi i medesimi, e quindi l' equazioni corrispondenti del secondo grado a due indeterminate, quando sono dotate di tali radici; come ancora per conoscere quando non possano risolversi in numeri interi, o neanche in valori razionali comunque: ma poichè non è mio proposito diffondermi tanto sull' analisi indeterminata, mi astengo dall' esponerli. Chi sarà curioso de' medesimi, e vorrà penetrare più oltre in tal materia, potrà consultare le sopraccitate Memorie dell' Accademia di Berlino.

FINE.

1,6

146 a

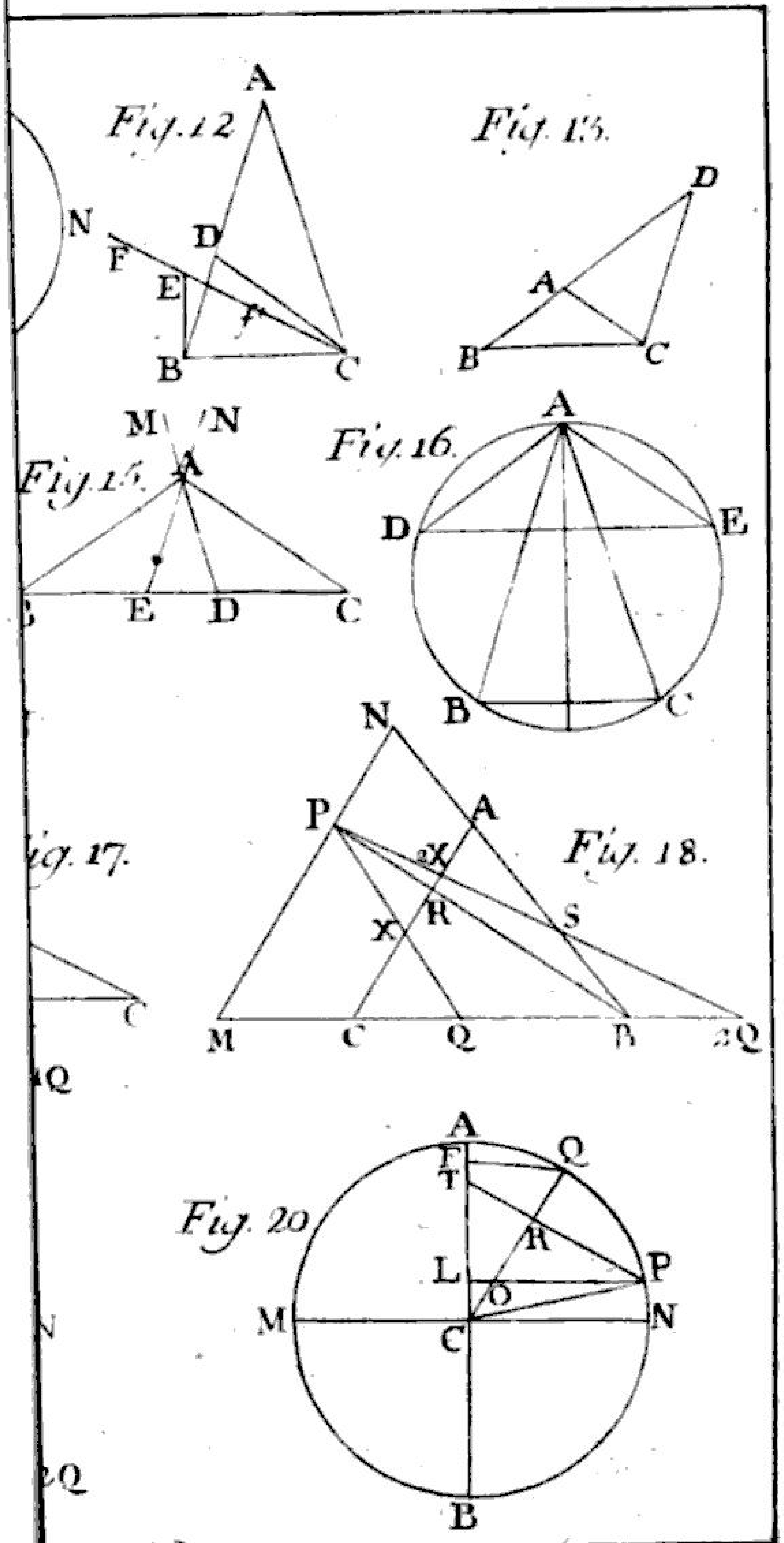


Fig. 12
A
N
F
D
E
f
B
C
Fig. 13
D
A
B
C
M
N
Fig. 15
A
B
E
D
C
Fig. 16
A
D
E
B
C
Fig. 17
C
Q
N
2Q
N
P
A
Fig. 18
2X
R
X
S
M
C
Q
B
2Q
Fig. 20
A
F
Q
T
R
L
P
O
M
C
N
B

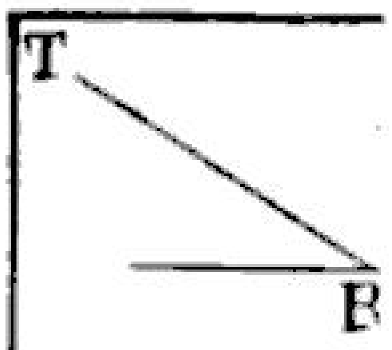


Fig. 3.

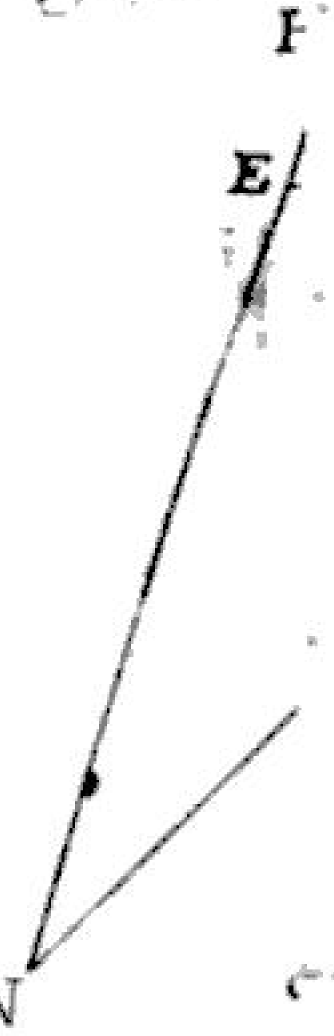
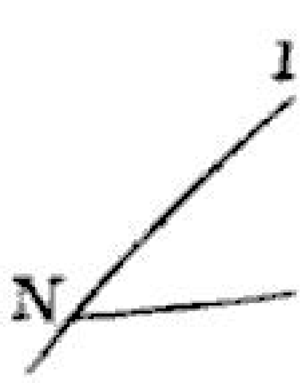


Fig. 5.



149

150

154